

Fascículo 42

Cursos y seminarios de  
matemática

**Serie A**

*A. P. Tonks*

# Álgebra homotópica

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

## Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

### Fascículo 42

#### Comité Editorial:

Carlos Cabrelli (Director)  
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.  
E-mail: [cabrelli@dm.uba.ar](mailto:cabrelli@dm.uba.ar)

Gabriela Jerónimo  
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.  
E-mail: [jeronimo@dm.uba.ar](mailto:jeronimo@dm.uba.ar)

Claudia Lederman  
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.  
E-mail: [clerderma@dm.uba.ar](mailto:clerderma@dm.uba.ar)

#### Auxiliar editorial:

Leandro Vendramin  
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.  
E-mail: [lvendramin@dm.uba.ar](mailto:lvendramin@dm.uba.ar)

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)  
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Derechos reservados  
© 2011 Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,  
Universidad de Buenos Aires.

Departamento de Matemática  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires  
Ciudad Universitaria – Pabellón I  
(1428) Ciudad de Buenos Aires  
Argentina.  
<http://www.dm.uba.ar>  
e-mail. [secre@dm.uba.ar](mailto:secre@dm.uba.ar)  
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

**DEPARTAMENTO DE MATEMATICA**  
**Cursos y Seminarios**

**Fascículo 42**

*Algebra Homotópica*

**Andrew P. Tonks**

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**  
**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

---

Ciudad Universitaria - Pabellón I  
1428 Buenos Aires, ARGENTINA

Handwritten text at the top left of the page.

Handwritten text in the upper middle section of the page.

Handwritten text in the upper right section of the page.

Handwritten text in the middle left section of the page.

Handwritten text in the middle right section of the page.

Handwritten text in the lower middle section of the page.

Handwritten text at the bottom of the page.

# Algebra Homotópica

Andrew P. Tonks

16 de noviembre de 1999



Estas son las notas de un curso dictado en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, entre los meses de mayo a agosto de 1999. El autor agradece la financiación de los subsidios DGESC PB97-0202 y del subsidio PICT97 2258, título: Algebra y Geometria

El autor agradece los numerosos comentarios de la audiencia que ayudaron a mejorar la presentación de estas notas

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that this is essential for ensuring transparency and accountability in the organization's operations.

2. The second part of the document outlines the various methods and tools used to collect and analyze data. It highlights the need for consistent data collection procedures and the use of advanced analytical techniques to derive meaningful insights from the data.

3. The third part of the document focuses on the role of technology in data management and analysis. It discusses how modern software solutions can streamline data collection, storage, and processing, thereby improving efficiency and accuracy.

4. The fourth part of the document addresses the challenges associated with data management, such as data quality, security, and privacy. It provides strategies to mitigate these risks and ensure that the data remains reliable and secure throughout its lifecycle.

5. The fifth part of the document concludes by summarizing the key findings and recommendations. It stresses the importance of a data-driven approach in decision-making and the need for continuous monitoring and improvement of data management practices.



## Índice General

<b>1</b>	<b>Resumen de homotopía clásica</b>	<b>6</b>
1.1	Caminos y homotopía . . . . .	6
1.1.1	Caminos . . . . .	6
1.1.2	Composición . . . . .	6
1.1.3	Homotopía . . . . .	7
1.1.4	Propiedades . . . . .	7
1.2	El grupo fundamental . . . . .	8
1.2.1	Definición y ejemplos . . . . .	8
1.2.2	El teorema de van Kampen . . . . .	9
1.2.3	Grupos de homotopía superiores . . . . .	11
1.3	Un teorema de Whitehead . . . . .	12
1.3.1	Homotopía y homotopía débil . . . . .	12
1.3.2	CW complejos . . . . .	13
1.4	Construcciones básicas . . . . .	14
1.4.1	Cilindros . . . . .	14
1.4.2	Dualidad: espacios de caminos . . . . .	17
1.5	Propiedades de elevación . . . . .	17
1.5.1	Elevación de homotopías . . . . .	17
1.5.2	Abstracción . . . . .	19
1.5.3	Fibraciones y cofibraciones de Serre . . . . .	21
1.6	Relación con álgebra homológica clásica . . . . .	22
1.6.1	Definiciones . . . . .	22
1.6.2	Puntos, caminos y lazos . . . . .	23
1.6.3	Homotopía y equivalencia débil . . . . .	24
1.6.4	Proyectivos, cofibraciones y fibraciones . . . . .	24
1.7	Homotopía simplicial . . . . .	26
1.7.1	Definiciones . . . . .	26
1.7.2	Teoría simplicial abstracta . . . . .	28
1.7.3	Homotopía elemental de conjuntos simpliciales . . . . .	32
1.7.4	Conjuntos simpliciales fibrantes/de Kan . . . . .	33
1.7.5	Fibraciones y cofibraciones . . . . .	36
1.7.6	Equivalencias débiles . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Categorías de modelos</b>	<b>38</b>
2.1	Definiciones y propiedades . . . . .	38
2.1.1	Consecuencias elementales . . . . .	39
2.1.2	Cilindros . . . . .	41
2.1.3	Homotopías . . . . .	41

2.1.4	Composición de homotopías y morfismos . . . . .	43
2.1.5	Camino y homotopía . . . . .	44
2.1.6	Una homotopía es una homotopía es una homotopía. . . . .	45
2.1.7	Equivalencia homotópica . . . . .	46
2.2	Álgebra homotópica en una categoría de modelos . . . . .	48
2.2.1	Reemplazo (co) fibrante . . . . .	48
2.2.2	Abstracción: Extensiones de Kan . . . . .	51
2.2.3	Ejemplos de extensiones de Kan . . . . .	53
2.2.4	Funtores derivados . . . . .	53
2.2.5	Adjuntos y equivalencias de categorías de homotopía . . . . .	55
2.3	Ejemplos de categorías de modelos . . . . .	56
2.3.1	Categorías de modelos simpliciales . . . . .	57
2.4	“Otras” teorías de homotopía . . . . .	60
2.4.1	Teorías más débiles . . . . .	60
2.4.2	Teorías más “geométricas” . . . . .	61
2.4.3	Teorías simpliciales . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Álgebra homotópica de diagramas</b> . . . . .	<b>67</b>
3.1	(Co)límites homotópicos . . . . .	67
3.1.1	Definiciones . . . . .	67
3.1.2	Formulación en una categoría de modelos . . . . .	68
3.1.3	Observaciones . . . . .	69
3.2	Construcción explícita de (co)límites homotópicos . . . . .	70
3.2.1	Construcción en $\mathbf{Cat}$ . . . . .	71
3.2.2	Construcción simplicial . . . . .	71
3.3	Ejemplos . . . . .	73
3.3.1	Pushout homotópico . . . . .	73
3.3.2	El telescopio . . . . .	73
3.3.3	Diagramas triviales y constantes . . . . .	74
3.3.4	La construcción de Borel . . . . .	75
3.4	Diagramas conmutativos hasta homotopía . . . . .	75
3.4.1	Diagramas homotópicamente coherentes . . . . .	76
3.4.2	Transformaciones naturales coherentes . . . . .	77
3.5	Formulación simplicial . . . . .	78
3.5.1	Colímites y reemplazos cofibrantes . . . . .	79
3.5.2	Transformaciones y la categoría $\mathbf{Coh}(D, \mathcal{C})$ . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Modelos algebraicos para la homotopía</b> . . . . .	<b>80</b>
4.1	Modelos para $n$ -tipos . . . . .	81
4.1.1	$n = 0$ . . . . .	81

4.1.2	$n = 1$ . . . . .	82
4.2	$n = 2$ : módulos cruzados . . . . .	82
4.2.1	Ejemplos . . . . .	82
4.2.2	El módulo cruzado fundamental . . . . .	83
4.2.3	Cat <sup>1</sup> -grupos . . . . .	84
4.2.4	Un teorema tipo van Kampen . . . . .	86
4.3	Generalización para todo $n$ . . . . .	86
4.3.1	$n$ -cubos de espacios . . . . .	88
4.3.2	El cat <sup><math>n</math></sup> -grupo fundamental . . . . .	88
4.3.3	Clasificación de $n$ -tipos . . . . .	89
4.3.4	Un teorema tipo 'van Kampen' . . . . .	90

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that this is crucial for ensuring transparency and accountability in the organization's operations.

2. The second part of the document outlines the various methods and tools used to collect and analyze data. It highlights the need for consistent data collection procedures and the use of advanced analytical techniques to derive meaningful insights from the data.

3. The third part of the document focuses on the implementation of data-driven decision-making processes. It provides a detailed overview of the steps involved in identifying key performance indicators (KPIs) and using data to inform strategic decisions.

4. The fourth part of the document discusses the challenges and risks associated with data management and analysis. It offers practical advice on how to mitigate these risks and ensure the security and integrity of the data.

5. The fifth part of the document concludes with a summary of the key findings and recommendations. It stresses the importance of ongoing monitoring and evaluation to ensure that the data-driven approach remains effective and relevant over time.

# 1 Resumen de homotopía clásica

## 1.1 Caminos y homotopía

Las ideas más fundamentales de la homotopía clásica son los caminos y sus deformaciones.

### 1.1.1 Caminos

**Definición:** Un camino en un espacio topológico  $X$  es una aplicación continua  $\gamma : I \rightarrow X$ , donde  $I$  es el intervalo  $[0, 1]$ .

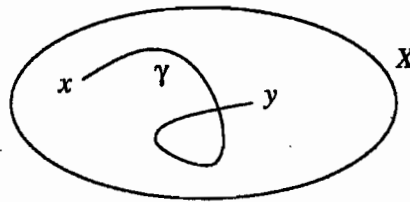


Figura 1: Un camino en  $X$ .

Tenemos un espacio de caminos en  $X$ ,

$$PX = \text{map}(I, X) = X^I = \{\gamma : I \rightarrow X\}$$

con la topología compacta-abierto.

### 1.1.2 Composición

Dados dos caminos,  $\gamma$  que empieza en un punto  $x$  y termina en un punto  $y$ , y  $\gamma'$  que empieza en el punto  $y$  y termina en un punto  $z$ , tenemos una noción obvia del camino compuesto  $\gamma \circ \gamma'$  entre  $x$  y  $z$ , definido formalmente por

$$I \xrightarrow{c} I \vee I \xrightarrow{\gamma \vee \gamma'} X$$

donde la aplicación  $c$  es la subdivisión del intervalo en dos copias del mismo:

$$c(t) = \begin{cases} 2t & \text{en la primera copia} \quad (\text{si } t \leq \frac{1}{2}) \\ 2t - 1 & \text{en la segunda copia} \quad (\text{si } t \geq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

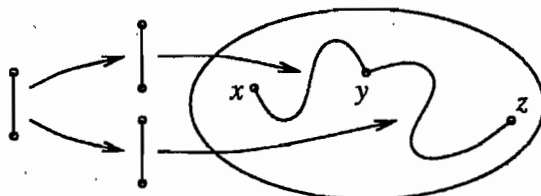


Figura 2: Composición de  $\gamma : x \rightsquigarrow y$  y  $\gamma' : y \rightsquigarrow z$ .

### 1.1.3 Homotopía

El intervalo nos da también la noción de deformación o homotopía de caminos.

**Definición:** Dos caminos  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  entre dos puntos  $x$  e  $y$  son **homótopos**,  $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ , si existe una homotopía  $H : I \rightarrow PX$  (es decir,  $H \in PPX$ ) tal que

- $H(0) = \gamma_0$  y  $H(1) = \gamma_1$
- $H(t)$  es un camino entre  $x$  e  $y$  para cada  $0 \leq t \leq 1$

Alternativamente se puede pensar en  $H$  como una aplicación  $I^2 \rightarrow X$  que restringida a dos caras da  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  y en las otras da los caminos constantes en  $x$  y en  $y$ .

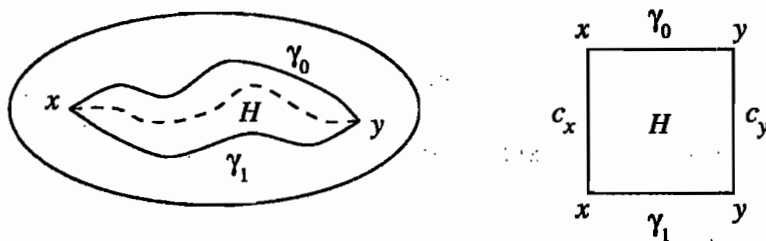


Figura 3: Representaciones de una homotopía  $H : \gamma_0 \simeq \gamma_1$ .

### 1.1.4 Propiedades

Los caminos son **reversibles**:

si  $\gamma : x \rightsquigarrow y$  tenemos  $\gamma^{-1} : y \rightsquigarrow x$  definido por  $\gamma^{-1} : I \xrightarrow{r} I \xrightarrow{\gamma} X$  donde  $r(t) = 1 - t$ .

Las composiciones  $\gamma \circ \gamma^{-1}$  y  $\gamma^{-1} \circ \gamma$  son homótopas a los caminos constantes a  $x$  y a  $y$  respectivamente; una homotopía  $H : c_x \simeq \gamma \circ \gamma^{-1}$  viene dada por  $I \times I \xrightarrow{I \times f} I \times I \xrightarrow{m} I \xrightarrow{\gamma} X$  donde  $f$  es la aplicación que “dobla” el intervalo,  $f : I \xrightarrow{c} I \vee I \xrightarrow{IVr} I$ , y  $m(s, t) = \min(s, t)$  para  $0 \leq s, t \leq 1$ .

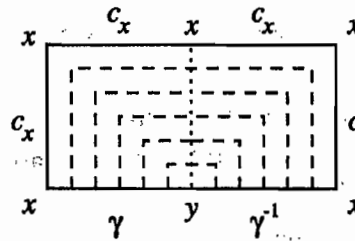


Figura 4: Una homotopía  $H: c_x \simeq \gamma \circ \gamma^{-1}$ .

Similarmente, la composición es (homotópicamente) asociativa:  $(\gamma \circ \gamma') \circ \gamma'' \simeq \gamma \circ (\gamma' \circ \gamma'')$ ,

y los caminos constantes son elementos (homotópicamente) neutros:  $\gamma \circ c_x \simeq \gamma \simeq c_x \circ \gamma$ .

Homotopías se pueden componer en dos sentidos, ya que son caminos en un espacio de caminos. Así se pueden demostrar:

1. Homotopía es una relación de equivalencia en  $PX$
2. Homotopía es compatible con composición de caminos

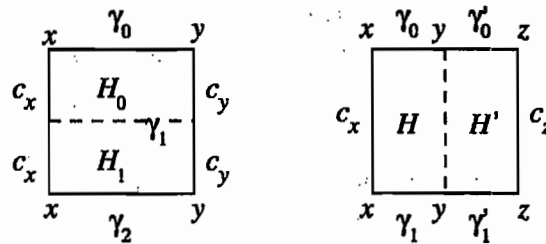


Figura 5: Transitividad de homotopía y compatibilidad con composición.

## 1.2 El grupo fundamental

### 1.2.1 Definición y ejemplos

Sea  $X$  un espacio con un punto base  $x \in X$ .

**Definición:** El grupo fundamental  $\pi_1(X, x)$  es el conjunto de clases de homotopía  $[\gamma]$  de caminos  $\gamma$  de  $x$  a  $x$  en  $X$  (es decir, lazos), con la multiplicación inducida por composición de caminos.

*Ejemplos:*

$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ ; el número de vueltas que un camino  $\gamma$  da por la circunferencia determina su clase  $[\gamma]$ ,

$\pi_1(\mathbb{R}^n) \cong \pi_1(\mathbb{S}^m) \cong 0$  para  $n \geq 0, m \geq 2$ ; cualquier camino es homótopo al constante,

$\pi_1(S^1 \vee_* S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ , el producto libre [o coproducto]. Tenemos lazos canónicos  $\gamma, \gamma'$  asociados a las dos circunferencias; cada uno genera una copia de  $\mathbb{Z}$ , y no conmutan:  $\gamma \circ \gamma' \neq \gamma' \circ \gamma$ ,

$\pi_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ; pensando en el toro como un cuadrado con las caras opuestas identificadas, vemos dos lazos canónicos  $\gamma, \gamma'$  pero ahora hay una homotopía evidente  $\gamma \circ \gamma' \simeq \gamma' \circ \gamma$ .

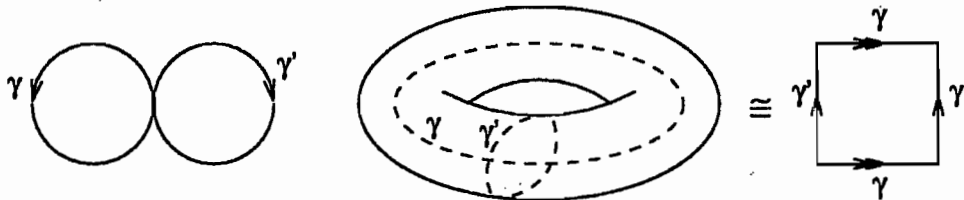


Figura 6: Lazos canónicos en  $S^1 \vee S^1$  y en el toro  $S^1 \times S^1$ .

### 1.2.2 El teorema de van Kampen

Bajo ciertas condiciones, el grupo fundamental de una amalgamación de espacios se puede calcular de los grupos fundamentales de las partes.

**Teorema:** Sean  $U, V$  subespacios abiertos de  $X = U \cup V$  con intersección  $Y = U \cap V$  arco-conexa y con punto base  $x \in Y$ . Entonces  $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(U, x) *_{\pi_1(Y, x)} \pi_1(V, x)$ , el producto libre de los grupos fundamentales de  $U$  y  $V$  con la identificación de las dos copias de él de  $Y$ . En lenguaje categórico, el primer diagrama es un pushout de espacios y el segundo un pushout de grupos:

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \longrightarrow & U \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 V & \longrightarrow & X
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \pi_1(Y, x) & \longrightarrow & \pi_1(U, x) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_1(V, x) & \longrightarrow & \pi_1(X, x)
 \end{array}$$

¿Qué pasa si  $Y$  no es arco-conexo? No sabemos dónde tomar el punto base; cambiamos de álgebra...

**Definición:** Un **grupoide** es una categoría con todos los morfismos invertibles.

[o "... es un grupo con más de un elemento neutro y una multiplicación sólo parcialmente definida."]

**Definición:** Dado un conjunto de puntos  $X_0 \subseteq X$ , el **grupoide fundamental**  $\pi_1(X, X_0)$  es el conjunto de clases de homotopía  $[\gamma]$  de caminos  $\gamma$  en  $X$  entre puntos de  $X_0$ , con la multiplicación (parcial) inducida por composición de caminos.



*Ejemplo:*

$$\pi_1(I, \{0, 1\}) = \{ 0 \xrightarrow{c_0} 0, 1 \xrightarrow{c_1} 1, 0 \xrightarrow{\gamma_1} 1, 1 \xrightarrow{\gamma_1^{-1}} 0 \}$$

Tenemos una teorema de van Kampen igualmente para grupoides:

**Teorema:** Si  $Y_0 \subseteq Y$  tal que  $\pi_0 Y_0 \rightarrow \pi_0 Y$  (es decir,  $Y_0$  tiene por lo menos un punto en cada componente arco-conexo de  $Y$ ) y

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & X \end{array}$$

es un pushout de espacios<sup>1</sup>, entonces el diagrama siguiente es un pushout de grupoides:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y, Y_0) & \longrightarrow & \pi_1(U, U_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(V, V_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, X_0) \end{array}$$

*Ejemplo:*<sup>2</sup> Un cálculo de  $\pi_1 S^1$ . Si tomamos  $Y_0 = Y = \{0, 1\} \hookrightarrow U = V = I$ , entonces  $U \amalg_Y V \cong S^1$  y  $\pi_1(S^1, \{0, 1\})$  se obtiene por el siguiente pushout en la categoría de grupoides

$$\begin{array}{ccc} \{ 0 \xrightarrow{c_0} 0, 1 \xrightarrow{c_1} 1 \} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 0 \xrightarrow{c_0} 0, 1 \xrightarrow{c_1} 1, \\ 0 \xrightarrow{\gamma_1} 1, 1 \xrightarrow{\gamma_1^{-1}} 0 \end{array} \right\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \xrightarrow{c_0} 0, 1 \xrightarrow{c_1} 1, \\ 0 \xrightarrow{\gamma_2} 1, 1 \xrightarrow{\gamma_2^{-1}} 0 \end{array} \right\} & \longrightarrow & \pi_1(S^1, \{0, 1\}) \end{array}$$

Si ponemos  $g_0 = \gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}$  y  $g_1 = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$  obtenemos

$$\pi_1(S^1, \{0, 1\}) \cong \{ 0 \xrightarrow{g_0^n} 0, 1 \xrightarrow{g_1^n} 1, 0 \xrightarrow{g_0^n \circ \gamma_1} 1, 1 \xrightarrow{\gamma_1^{-1} \circ g_0^n} 0; n \in \mathbb{Z} \}$$

y vemos que el *grupo* fundamental (en el punto 0, por ejemplo) es  $\mathbb{Z}$ .

<sup>1</sup>Nota técnica: supongamos  $Y \subset U$  es una cofibración cerrada de Hurewicz,  $Y_0 = U_0 \cap Y$ , y que el pushout es un pushout en la categoría de *pares* de espacios  $(X, X_0)$ .

<sup>2</sup>Ejercicios: (i) Repetir este cálculo usando el pushout de  $\{0, 1\} \hookrightarrow I$  y  $\{0, 1\} \rightarrow *$ . (ii) Investigar el *contraejemplo* siguiente: si  $Y_0 = Y = 0 \cup \{1/n, n \in \mathbb{N}\} \hookrightarrow U = V = I$ , y  $X = U \amalg_Y V$ , calcular  $\pi(U, Y_0) *_{\pi(Y, Y_0)} \pi(V, Y_0)$ ,  $\pi(X, Y_0)$  y  $\pi(X, 0)$ .

### 1.2.3 Grupos de homotopía superiores

Aquí  $X$  tiene punto base,  $*$ . Los grupos  $\pi_n(X)$ ,  $n \geq 2$ , se pueden definir como las clases de homotopía de aplicaciones  $S^n \rightarrow X$  con la multiplicación inducida por una subdivisión de la esfera

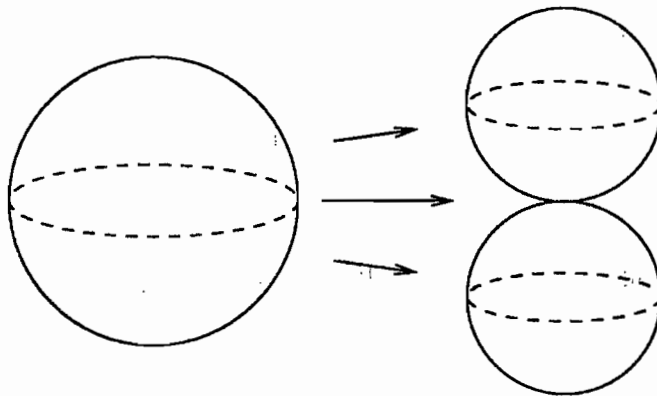


Figura 7: La subdivisión de la esfera  $S^2$ .

Alternativamente, consideramos aplicaciones  $I^n \rightarrow X$  que son triviales en el borde:

$$\pi_n X = \{ I^n \xrightarrow{\gamma} X \text{ con } \gamma(\partial I^n) = \{*\} \} / \simeq$$

donde la relación de homotopía viene dada por  $\gamma_0 \simeq \gamma_1$  si existe  $H : I^{n+1} \rightarrow X$  con  $\gamma$  y  $\gamma'$  en dos caras y trivial en todas las otras (Figura 8).

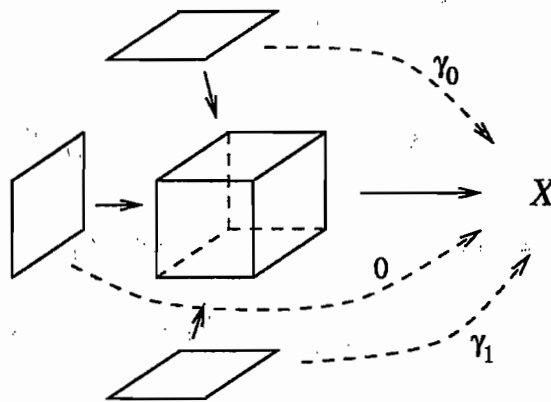


Figura 8: Una homotopía  $H : I^3 \rightarrow X$  entre  $\gamma_0, \gamma_1 : I^2 \rightarrow X$ .

Como las aplicaciones  $I^n \xrightarrow{\gamma} X$  se pueden componer en  $n$  sentidos distintos, parece como si  $\pi_n X$  tuviera más de una multiplicación<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Las multiplicaciones son *compatibles*, ya que las operaciones de subdivisión en las  $n$  direc-

**Lema:** Si un conjunto tiene dos multiplicaciones compatibles, entonces son iguales, y además abelianas.

La demostración algebraica es:  $a \circ_2 b = (a \circ_1 e) \circ_2 (e \circ_1 b) = (a \circ_2 e) \circ_1 (e \circ_2 b) = a \circ_1 b$  y además  $a \circ_2 b = (e \circ_1 a) \circ_2 (b \circ_1 e) = (e \circ_2 b) \circ_1 (a \circ_2 e) = b \circ_1 a$ ; pero es más fácil pensar en la demostración en  $\pi_2(X, *)$ : si  $\gamma, \gamma' : I^2 \rightarrow X$  tenemos

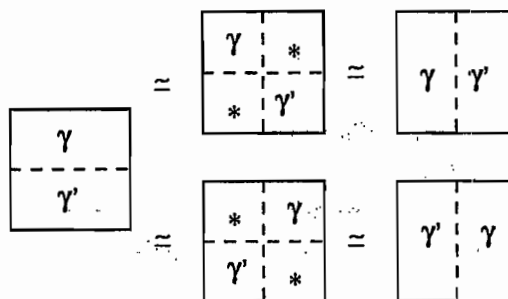


Figura 9: La demostración homotópica.

Es decir,  $\pi_n X$  es un grupo abeliano<sup>4</sup> para  $n \geq 2$ .

### 1.3 Un teorema de Whitehead

#### 1.3.1 Homotopía y homotopía débil

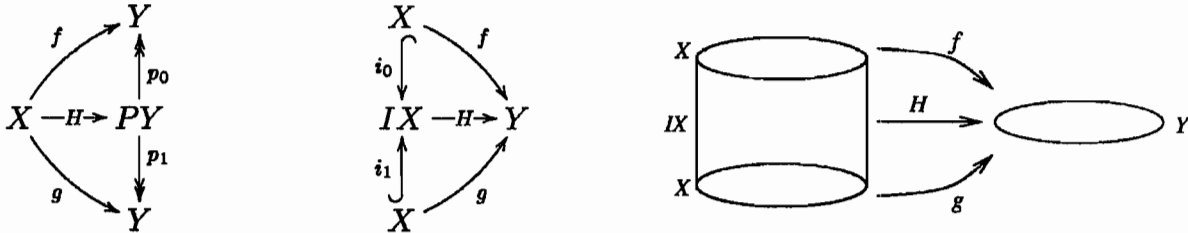
Hay tres maneras equivalentes<sup>5</sup> de definir homotopía entre aplicaciones  $f, g : X \rightarrow Y$ :

1. Usando caminos en  $Y$ , decimos  $f \simeq g \Leftrightarrow \exists H : X \rightarrow PY$  tal que  $p_0 H = f$  y  $p_1 H = g$ ,
2. Usando el cilindro en  $X$ , decimos  $f \simeq g \Leftrightarrow \exists H : I \times X \rightarrow Y$  tal que  $H i_0 = f$  y  $H i_1 = g$ ,
3. Usando el espacio  $Y^X = \text{map}(X, Y)$  de aplicaciones de  $X$  en  $Y$ , decimos  $f \simeq g \Leftrightarrow \exists H : I \rightarrow Y^X$  tal que  $H(0) = f$  y  $H(1) = g$ .

ciones conmutan. Así podemos hablar de la subdivisión de  $I^2$ ,  $\square \rightarrow \boxplus$ , sin especificar si es la composición  $\square \rightarrow \boxplus \rightarrow \boxplus$  o la otra.

<sup>4</sup>No obstante, no piensen (como los referees cuando rechazaron la definición de  $\pi_n$  de Čech para el ICM Zürich 1932) que  $\pi_n X \cong H_n(X; \mathbb{Z})$ . ¿Qué son  $H_2$  y  $\pi_2$  para el plano proyectivo real? ¿y para el toro?

<sup>5</sup>Si  $X, Y$  no son muy patológicos. Para (3), supongamos que  $X$  es Hausdorff.



Si  $f \simeq g$ , los homomorfismos de grupos  $f_*, g_* : \pi_n X \rightarrow \pi_n Y$  dados por  $[\gamma] \mapsto [f\gamma], [g\gamma]$  son iguales.

Dos espacios son **homotópicamente equivalentes**,  $X \simeq Y$ , si  $\exists f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  con  $gf \simeq id_X$  y  $fg \simeq id_Y$ . Es automáticamente una relación de equivalencia.

Dos espacios son **débilmente equivalentes**,  $X \sim Y$ , si  $\exists f : X \rightarrow Y$  con  $f : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, fx)$  un isomorfismo para cada  $n \geq 0$  y cada  $x \in X$ . Si  $X, Y$  son homotópicamente equivalentes, entonces son débilmente equivalentes.

1.3.2 CW complejos

Si trabajamos con equivalencia débil (que es lo que se ve por el álgebra) en vez de equivalencia homotópica, ¿cuánta información perdemos? ¿Qué queda?

**Definición:** Un **CW-complejo relativo** es un par  $Y \subseteq X$  con una filtración

$$Y \cong X_{-1} \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n \subseteq \dots \subseteq \bigcup X_n \cong X$$

tal que cada  $X_n$  se puede obtener de  $X_{n-1}$  añadiendo celdas de dimensión  $n$ . Es decir,  $X_n = X_{n-1} \amalg_{\partial D} D$  donde  $D = \bigcup D^n$  es una unión de  $n$ -discos cerrados y  $\partial D = \bigcup S^{n-1}$  es el borde. Categóricamente, tenemos una sucesión de pushouts

$$\begin{array}{ccc} \bigcup S^{n-1} & \longrightarrow & \bigcup D^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{n-1} & \longrightarrow & X_n \end{array}$$

y  $X \cong \text{colim } X_n$ .

$X$  es un **CW-complejo** si  $\emptyset \subseteq X$  es un CW-complejo relativo.

**Teorema:** (i) Todo espacio es débilmente equivalente a un CW-complejo.

(ii) *El teorema de Whitehead.* Si  $f : X \rightarrow Y$  es una equivalencia débil entre CW-complejos, entonces  $f$  es una equivalencia homotópica.

## 1.4 Construcciones básicas

### 1.4.1 Cilindros

1. El **cilindro**  $IX = I \times X$  tiene la siguiente estructura:

- las inclusiones  $i_0, i_1 : X \rightarrow IX$ ,  $i_\alpha : x \mapsto (\alpha, x)$  para  $\alpha = 0, 1$ ,
- la proyección  $p : IX \rightarrow X$ ,  $(t, x) \mapsto x$ ; las composiciones  $pi_\alpha$  son la identidad en  $X$ ,
- la aplicación  $m : IIX \rightarrow IX$ ,  $(s, t, x) \mapsto (\min(s, t), x)$ ; ésta da una homotopía entre  $i_0p$  y la identidad en  $IX$ , por tanto  $X$  es un retracto de deformación de  $IX$ .

Cambiar  $X$  por  $IX$  no cambia nada en homotopía, pero nos deja más espacio para trabajar. En particular, la aplicación natural  $X \cup X \rightarrow X$  es equivalente a una inclusión<sup>6</sup>

$$X \cup X \hookrightarrow IX \xrightarrow{\cong} X$$

2. El **cilindro**  $I_f X$  de una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  se obtiene pegando la base de  $IX$  al espacio  $Y$  según  $f$ . En el lenguaje de las categorías es un **pushout**

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_0} & IX \\ f \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & I_f X = IX \amalg_X Y \end{array}$$

El espacio  $Y$  es un retracto de deformación de  $I_f X$ ; hasta homotopía  $f : X \rightarrow Y$  se puede reemplazar por una inclusión

$$X \xrightarrow{i_1} I_f X \simeq Y$$

3. El **cono**  $CX$  es un caso particular con  $Y = *$ . Así tenemos  $CX = IX \amalg_X *$  el pushout de  $i_0 : X \hookrightarrow IX$  y  $X \rightarrow *$ , y vemos que cualquier espacio  $X$  se incluye en un espacio contráctil:

$$X \xrightarrow{i_1} CX \simeq *.$$

*Ejemplo:* Tenemos  $CS^{n-1} \cong D^n$  y la inclusión  $S^{n-1} \hookrightarrow CS^{n-1}$  es la misma que  $\partial D^n \hookrightarrow D^n$  que usamos para construir los CW-complejos.

<sup>6</sup>Además, si  $X$  es un CW-complejo, se puede dar  $X \cup X \hookrightarrow IX$  la estructura de un CW-complejo relativo

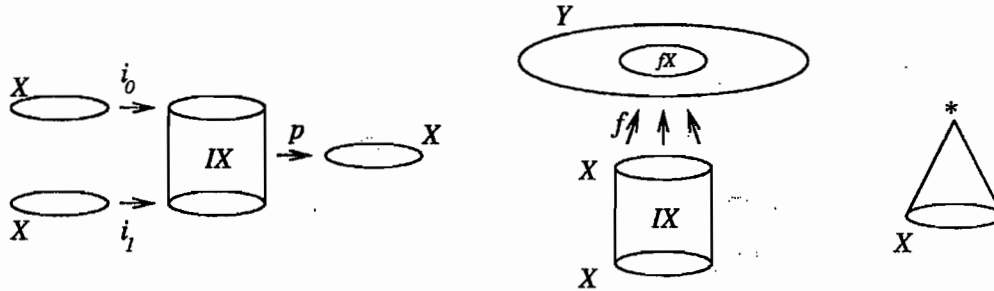


Figura 10: El cilindro de un espacio, de una aplicación, y el cono.

4. El **cilindro doble**  $I_{f,g}X$  de 2 aplicaciones  $f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Z$  se obtiene de manera similar, pegando la base de  $IX$  a  $Y$  según  $f$  y la tapa a  $Z$  según  $g$ ; formalmente es el pushout de  $(i_0, i_1) : X \cup X \hookrightarrow IX$  y  $f \cup g : X \cup X \rightarrow Y \cup Z$ . El diagrama siguiente no es un pushout, ni conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 g \downarrow & & \downarrow \\
 Z & \longrightarrow & I_{f,g}X = Y \amalg_X IX \amalg_X Z
 \end{array}$$

Conmuta hasta homotopía, y sirve como una versión homotópica del pushout habitual, con una proyección  $I_{f,g}X \twoheadrightarrow Y \amalg_X Z$ .

El pushout habitual que no se comporta bien respecto a homotopía porque no depende sólo de las clases de homotopía de  $f$  y  $g$ . Por ejemplo,

$$\begin{array}{ccc}
 \{0, 1\} & \xrightarrow{f} & I \\
 g \downarrow & & \downarrow \\
 I & \longrightarrow & S^1
 \end{array}$$

es el pushout para  $f = g : \{0, 1\} \subseteq I$ , pero si cambiamos  $f, g$  por las aplicaciones homótopas  $f', g' : 0, 1 \mapsto 0$  el pushout ahora da el espacio contráctil  $I \vee I \not\cong S^1$ . En cambio el cilindro doble<sup>7</sup> queda bien definida en homotopía: en este ejemplo,  $I_{f,g} \simeq I_{f',g'} \simeq I_{f',g} \simeq S^1$ .

5. El **cono**<sup>8</sup>  $C_f X$  de una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  se obtiene pegando la base del cono  $CX$  a  $Y$  según  $f$ . Es un caso especial del cilindro doble, tomando  $Z = *$ .

Sirve como una versión homotópica del espacio cociente  $Y/fX$ .

<sup>7</sup>o "pushout homotópico"

<sup>8</sup>o "cofibración homotópica"

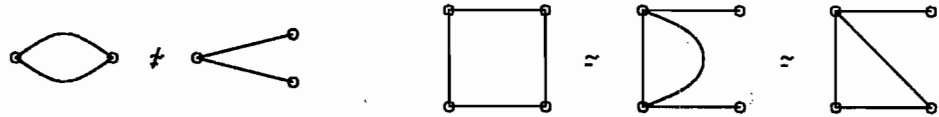


Figura 11: Los pushouts de  $f, g$  y de  $f', g'$ , y los cilindros dobles  $I_{f,g}, I_{f',g'}, I_{f',g}$ .

6. Si tomamos  $Y = Z = *$  en la construcción del cilindro doble, obtenemos la **suspensión**  $\Sigma X$  del espacio  $X$ .

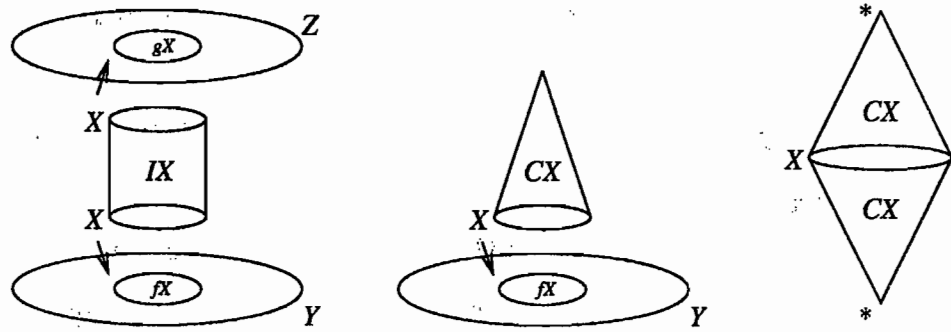


Figura 12: El cilindro doble, el cono de una aplicación, y la suspensión.

*Ejemplos:*  $\Sigma\{0, 1\} \cong S^1$  y en general  $\Sigma^m S^n \cong S^{m+n}$ .

La suspensión tiene una subdivisión que generaliza la de  $S^n$ ; así las clases de homotopía de aplicaciones  $\Sigma X \rightarrow Z$  siempre forman un grupo.

Similarmente el cono de una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  se subdivide en una copia del mismo cono y la suspensión de  $X$ , y por tanto el grupo  $\{f : \Sigma X \rightarrow Z\} / \simeq$  actúa sobre las clases de aplicaciones  $C_f X \rightarrow Z$ .

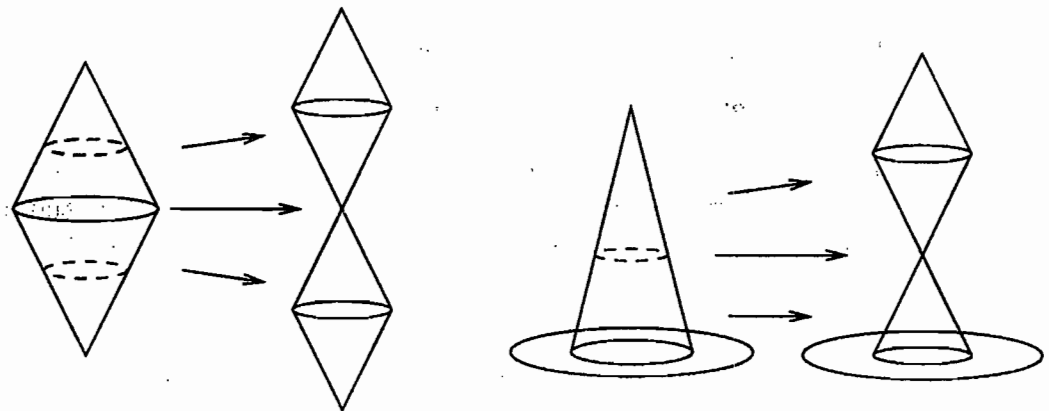


Figura 13: Las subdivisiones  $\Sigma X \rightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$  y  $C_f \rightarrow \Sigma X \vee C_f X$ .

### 1.4.2 Dualidad: espacios de caminos

El siguiente es un *meta-teorema* para álgebra homotópica:

PARA TODO RESULTADO HAY UN RESULTADO DUAL.

Tenemos duales para las construcciones de la última sección. Por ejemplo:

1) El espacio de caminos  $PY$  es el dual del cilindro. Hay una inclusión  $i : Y \hookrightarrow PY$ ,  $i(y) = c_y$  (el camino constante) y proyecciones canónicas  $p_\alpha : PY \rightarrow Y$ ,  $p_\alpha(\gamma) = \gamma(\alpha)$  que dan  $Y$  como un retracto de deformación de  $PY$ .

4) La “fibra homotópica”  $F_f$  de  $f : X \rightarrow Y$  es

$$F_f Y = X \times_Y PY \times_Y * = \{(x, \gamma) \in X \times PY; \gamma(0) = f(x), \gamma(1) = *\}$$

para un punto base  $* \in Y$ .

5) El espacio la lazos  $\Omega Y$  es el dual de la suspensión:

$$\Omega Y = * \times_Y PY \times_Y * = \{\gamma : I \rightarrow Y; \gamma(0) = \gamma(1) = *\}$$

para un punto base  $* \in Y$ . El espacio de lazos  $\Omega Y$  tiene un “multiplicación” (componer lazos) y “actúa” sobre la fibra homotópica  $F \rightarrow X \rightarrow Y$ .

De la misma manera que hay una correspondencia entre aplicaciones  $IX \rightarrow Y$  y  $X \rightarrow PY$ , hay una correspondencia<sup>9</sup> entre aplicaciones  $\Sigma X \rightarrow Y$  y  $X \rightarrow \Omega Y$ . En particular,

$$\{S^{m+n} \rightarrow Y\} \cong \{\Sigma^n S^m \rightarrow Y\} \cong \{S^m \rightarrow \Omega^n Y\}$$

y tomando clases de homotopía obtenemos:  $\pi_{m+n} Y \cong \pi_m \Omega^n Y$ .

## 1.5 Propiedades de elevación

### 1.5.1 Elevación de homotopías

Si componemos una homotopía  $H : f \simeq f' : A \rightarrow X$  con una aplicación  $p : X \rightarrow Y$  obtenemos una homotopía  $pH : pf \simeq pf' : A \rightarrow Y$ . Para algunas aplicaciones  $p$  es posible hacer el proceso inverso: factorizar homotopías  $K : g \simeq g' : A \rightarrow Y$  por  $p : X \rightarrow Y$ .

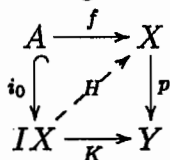
$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \Downarrow K \\ \xrightarrow{g'} \end{array} Y \quad \rightsquigarrow \quad A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow H \\ \xrightarrow{f'} \end{array} X \xrightarrow{p} Y$$

<sup>9</sup> Nota técnica: Se debe considerar espacios y aplicaciones *punteados* aquí, o tomar el *espacio de lazos libres*, la unión de los  $\Omega Y$  para todos los puntos  $* \in Y$

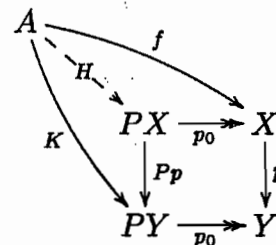


**Definición:** Una aplicación  $p : X \rightarrow Y$  tiene la **Propiedad de Recubrimiento de Homotopías** respecto a un espacio  $A$  si para toda aplicación  $f : A \rightarrow X$  y toda homotopía  $K : g \simeq g' : A \rightarrow Y$  con  $g = pf$ , hay una aplicación  $f'$  y una homotopía  $H : f \simeq f'$  con  $K = pH$ .

Es decir, para todo diagrama:



o equivalentemente:



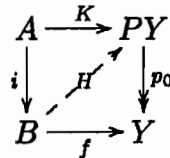
existe una aplicación  $H : IA \rightarrow X$  (o  $H : A \rightarrow PX$ ) tal que los triángulos conmutan.

Dualmente, se puede intentar factorizar homotopías  $K : g \simeq g' : A \rightarrow Y$  por  $i : A \rightarrow B$ .

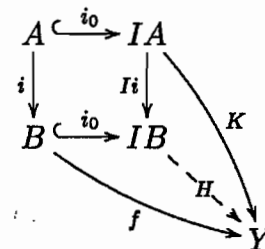


**Definición:** Una aplicación  $i : A \rightarrow B$  tiene la **Propiedad de Extensión de Homotopías** respecto a un espacio  $Y$  si para toda aplicación  $f : B \rightarrow Y$  y toda homotopía  $K : g \simeq g' : A \rightarrow Y$  con  $g = fi$ , hay una aplicación  $f'$  y una homotopía  $H : f \simeq f'$  con  $K = Hi$ ,

o: para todo diagrama:



o equivalentemente:<sup>10</sup>



existe  $H : B \rightarrow PY$  (o  $H : IB \rightarrow Y$ ) tal que los triángulos conmutan.

*Ejemplos:*

Una **fibración de Hurewicz** es una aplicación que tiene la PRH respecto a todo espacio  $A$ .

Una **cofibración de Hurewicz** es una aplicación que tiene la PEH respecto a todo espacio  $Y$ .

Una **fibración de Serre** es una aplicación que tiene la PRH respecto a todo CW-complejo  $A$ .

<sup>10</sup>el segundo diagrama es 'casi' un pushout: dice que la aplicación  $(f, K) : I_i A \rightarrow Y$  factoriza por la aplicación natural  $I_i A \rightarrow IB$ .

Veremos que las fibraciones y cofibraciones de Hurewicz están esencialmente relacionadas con la equivalencia *homotópica*, mientras las fibraciones de Serre tienen que ver con la equivalencia *débil*. Aún no hemos dicho qué será una “cofibración de Serre”.

### 1.5.2 Abstracción

En vez de trabajar con espacios topológicos, trabajamos en una categoría  $\mathcal{C}$  cualquiera. Mirando los diagramas de elevación anteriores, hacemos la siguiente

**Definición:** Un morfismo  $p : X \rightarrow Y$  tiene la **Propiedad de Recubrimiento**<sup>11</sup> respecto a otro morfismo  $i : A \rightarrow B$  si a todo cuadrado conmutativo en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow e & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

se puede añadir una elevación  $e : B \rightarrow X$  tal que los triángulos conmutan. Equivalentemente se dice que  $i$  tiene la **Propiedad de Extensión**<sup>12</sup> respecto a  $p$ .

**Teorema:** La clase de morfismos con la Propiedad de Recubrimiento (o de Extensión), respecto a un morfismo dado, está cerrada bajo

- isomorfismo
- retracción
- composición
- pullback (respectivamente pushout).

**Definición:** Un morfismo  $f' : X' \rightarrow Y'$  es **retracto** de un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  si existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{j_X} & X & \xrightarrow{r_X} & X' \\ f' \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y' & \xrightarrow{j_Y} & Y & \xrightarrow{r_Y} & Y' \end{array}$$

con  $r_X j_X$  la identidad en  $X'$ , y  $r_Y j_Y$  la identidad en  $Y'$

<sup>11</sup>o de elevación a la derecha, en inglés *Right Lifting Property*

<sup>12</sup>o de elevación a la izquierda, en inglés *Left Lifting Property*

**Lema:** Si un morfismo  $p$  tiene la PR respecto a un morfismo  $i$  entonces cualquier retracts de  $p$  la tiene respecto a cualquier retracts de  $i$ .

**Lema Dual:** Si un morfismo  $i$  tiene la PE respecto a un morfismo  $p$  entonces cualquier retracts de  $i$  la tiene respecto a cualquier retracts de  $p$ .

*Demostración:* Supongamos que  $i', p'$  son retracts de  $i, p$ , y queremos una elevación  $e' : B' \rightarrow X'$  en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{f} & X' \\ i' \downarrow & & \downarrow p' \\ B' & \xrightarrow{g} & Y' \end{array}$$

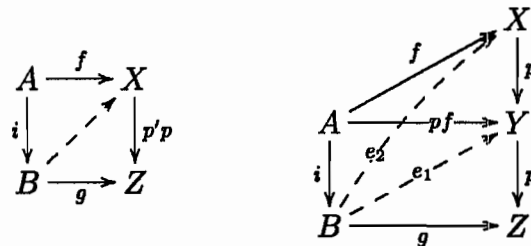
Si  $i$  tiene la PE respecto a  $p$  (o dualmente) tenemos una elevación  $e : B \rightarrow X$  en el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} A' & \xrightarrow{j_A} & A & \xrightarrow{r_A} & A' & \xrightarrow{f} & X' & \xrightarrow{j_X} & X & \xrightarrow{r_X} & X' \\ i' \downarrow & & i \downarrow & & & & & & p \downarrow & & \downarrow p' \\ B' & \xrightarrow{j_B} & B & \xrightarrow{r_B} & B' & \xrightarrow{f} & Y' & \xrightarrow{j_Y} & Y & \xrightarrow{r_Y} & Y' \end{array}$$

por tanto podemos tomar  $e' = r_X e j_B$ .

**Lema:** Si dos morfismos  $p : X \rightarrow Y$  y  $p' : Y \rightarrow Z$  tienen la PR respecto a un morfismo  $i$ , entonces la composición  $p'p : X \rightarrow Z$  también la tiene<sup>13</sup>.

*Demostración:* Para encontrar una elevación en el primer diagrama, consideramos el segundo:



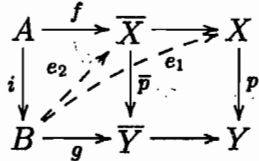
Obtenemos  $e_1$  por la propiedad de recubrimiento de  $p'$ , luego elevamos ésta a  $e_2$  usando la de  $p$ .

**Lema:** Si un morfismo  $p$  tiene la PR respecto a un morfismo  $i$ , entonces cualquier pullback  $\bar{p}$  de  $p$  también la tiene<sup>14</sup>.

<sup>13</sup>y dualmente.

<sup>14</sup>y dualmente.

*Demostración:* En el diagrama siguiente tenemos  $e_1$  por la propiedad de recubrimiento de  $p$ , luego el morfismo  $e_2$  viene inducido por  $(e_1, g)$  por la propiedad universal del pullback.



En particular,  $\bar{p}e_2 = g$ . La igualdad  $e_2i = f$  también viene de la propiedad universal, ya que las composiciones con  $\bar{p}$  y con  $\bar{q}$  son iguales.

### 1.5.3 Fibraciones y cofibraciones de Serre

Ahora volvemos a la categoría de espacios topológicos. Primero damos otra caracterización de las fibraciones que no utiliza el concepto de CW-complejo.

- Proposición:** (I)  $p : X \rightarrow Y$  es una fibración de Serre  
 $\Leftrightarrow$  (II)  $p$  tiene la PR respecto a  $i_0 : A \rightarrow IA$  para todo CW-complejo  $A$   
 $\Leftrightarrow$  (III)  $p$  tiene la PR respecto a  $i_0 : D^n \rightarrow ID^n$  para todo  $n \geq 0$   
 $\Leftrightarrow$  (IV)  $p$  tiene la PR respecto a  $\{0\} \times I^n \subseteq I^{n+1}$  para todo  $n \geq 0$

*Demostración:* (I $\Leftrightarrow$ II) es por definición, (II $\Leftrightarrow$ III) es [Hu, teorema 3.1], y (III $\Leftrightarrow$ IV) es porque  $D^n \cong I^n$ .

**Definición:** Un espacio  $Y$  es **fibrante** si  $Y \rightarrow *$  es una fibración de Serre. Esta definición realmente no es necesaria en el contexto de espacios topológicos ya que:

**Ejercicio:** Todo espacio es fibrante.

Hemos dicho que las fibraciones y cofibraciones de Serre tienen que ver con la relación de equivalencia débil. Se tiene:

- Proposición:** (I)  $p : X \rightarrow Y$  es a la vez una fibración de Serre y una equivalencia débil  
 $\Leftrightarrow$  (II)  $p$  tiene la PR respecto a  $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$  para todo  $n \geq 0$   
 $\Leftrightarrow$  (III)  $p$  tiene la PR respecto a todo CW-complejo relativo  $A \hookrightarrow B$   
 $\Leftrightarrow$  (IV)  $p$  tiene la PR respecto a todo "CW-complejo relativo generalizado"

$$\begin{array}{l}
 A \cong A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \cdots A_{n-1} \rightarrow A_n \rightarrow \cdots \rightarrow \\
 \text{colim } A_n \cong B \\
 \text{donde cada } A_{n-1} \rightarrow A_n \text{ es un CW-complejo relativo}
 \end{array}$$

$\Leftrightarrow$  (v)  $p$  tiene la PR respecto a todo retracts de CW-complejo relativo generalizado

*Demostración:* [Spanier, página 376] y usando los resultados de clausura de la última sección.

**Definición:** Una aplicación  $i : A \rightarrow B$  es una **cofibración de Serre** si tiene la PE respecto a toda aplicación que sea a la vez una fibración de Serre y una equivalencia débil.

Esta definición es pura formalidad, y la siguiente también.

**Definición:** Un espacio  $X$  es **cofibrante** si  $\emptyset \rightarrow X$  es una cofibración de Serre.

Para dar una caracterización más elemental de las cofibraciones de Serre, tenemos:

**Teorema:** Una aplicación  $i : A \rightarrow B$  es una cofibración de Serre  $\Leftrightarrow$  es retracts de un CW-complejo generalizado.

Dualmente, hay una caracterización más formal de las fibraciones de Serre:

**Teorema:** Una aplicación  $p : X \rightarrow Y$  es una fibración de Serre  $\Leftrightarrow$  tiene la PR respecto a toda aplicación que sea a la vez una cofibración de Serre y una equivalencia débil.

*Demostraciones:* Las implicaciones ( $\Leftarrow$ ) vienen de las proposiciones; las implicaciones ( $\Rightarrow$ ) las veremos más tarde, espero.

Así que *los espacios cofibrantes son retracts de espacios formados por "adición libre de celdas"*.

## 1.6 Relación con álgebra homológica clásica

En la sección anterior hemos visto mucha topología y homotopía. En ésta vamos a fingir que no sabemos qué es álgebra homológica y la inventaremos como álgebra homotópica en la categoría de complejos de cadenas.

### 1.6.1 Definiciones

Sea  $A$  un anillo (conmutativo), con unidad 1.

Sea  $\mathcal{M}_A$  la categoría de  $A$ -módulos y sus homomorfismos, y  $\mathcal{C}_A$  la categoría de complejos de cadenas de  $A$ -módulos con los morfismos de cadenas habituales:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & M_{k+1} & \xrightarrow{\partial_k} & M_k & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\partial_0} & M_0, & \partial_k \partial_{k+1} = 0 \\ & & f_{k+1} \downarrow & & \downarrow f_k & & & & f_1 \downarrow & & \downarrow f_0 & \\ \cdots & \longrightarrow & N_{k+1} & \xrightarrow{\partial'_k} & N_k & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{\partial'_0} & N_0, & \partial'_k \partial'_{k+1} = 0 \end{array}$$

El **producto tensorial**  $M \otimes N$  de dos complejos de cadenas se define en cada grado por

$$(M \otimes N)_k = \bigoplus_{i+j=k} M_i \otimes_A N_j$$

con  $\partial_{\otimes}(m \otimes n) = \partial m \otimes n + (-1)^{|m|} m \otimes \partial' n$ .

El **vacío**  $\emptyset$  es el complejo de cadenas  $(\dots \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0)$ .

El **punto**  $*$  es el complejo de cadenas  $(\dots \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow A)$ .

El **intervalo**  $I$  es el complejo de cadenas  $(\dots \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow A \rightarrow A \oplus A)$  con  $\partial_0(a) = (a, -a)$ . Hay morfismos canónicos  $i_0, i_1 : * \rightrightarrows I$  y  $p : I \rightarrow *$ .

### 1.6.2 Puntos, caminos y lazos

Sea  $M \in \mathcal{C}_A$  un complejo de cadenas de  $A$ -módulos.

Un **punto** de  $M$  es un morfismo  $p : * \rightarrow M$ , o un elemento  $p \in M_0$ .

Un **camino**  $\gamma : p \rightsquigarrow p'$  en  $M$  es un morfismo  $\gamma : I \rightarrow M$  con  $\gamma i_0 = p$  y  $\gamma i_1 = p'$ .

Considerando el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus A \\ & & \gamma_2 \downarrow & & \gamma_1 \downarrow & & \downarrow \gamma_0 \\ \dots & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{\partial_1} & M_1 & \xrightarrow{\partial_0} & M_0 \end{array}$$

un camino  $\gamma : p \rightsquigarrow p'$  corresponde a un triple  $(m, p, p')$  donde  $m = \gamma_1(1) \in M_1$  tal que  $\partial_0 m = p - p'$ .

Así: el "módulo de componentes arco-conexos" es

$$\pi_0(M) \cong \frac{\text{puntos}}{\text{caminos}} \cong M_0 / \partial_0 M_1 \cong H_0 M.$$

Un **lazo** en un punto  $p$  corresponde a  $(m, p, p)$  donde  $m \in M_1$  tal que  $\partial_0 m = 0$ .

Dos caminos  $\gamma_0, \gamma_1$  son **homótopos** si existe  $H : I \otimes I \rightarrow M$  con  $H(I \otimes i_\alpha) = \gamma_\alpha$  y  $H(i_\alpha \otimes I)$  triviales, para  $\alpha = 0, 1$ . Más explícitamente, una homotopía  $\gamma = (m, p, p') \simeq (m', p, p') = \gamma'$  corresponde a un elemento  $n = H_2(1) \in M_2$  tal que  $\partial_1 n = m - m'$ :

$$\begin{array}{c} (\dots \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow A \rightarrow A \oplus A \oplus A \oplus A \rightarrow A \oplus A \oplus A \oplus A) \longrightarrow M \\ \begin{array}{ccc} p & \xrightarrow{m} & p' \\ 0 & \left| \begin{array}{c} n \\ \end{array} \right| & 0 \\ p & \xrightarrow{m'} & p' \end{array} \end{array}$$

Así: el “módulo fundamental” de  $M$  (en un punto base  $p$ ) es

$$\pi_1(M, p) \cong \frac{\text{lazos}}{\text{homotopías}} \cong \ker \partial_0 / \partial_1 M_2 \cong H_1 M.$$

Como no depende del punto base, tomamos  $p = 0$ .

### 1.6.3 Homotopía y equivalencia débil

Se puede obtener  $\pi_k(M, 0)$  considerando  $\gamma : I^{\otimes k} \rightarrow M$  triviales en el borde, con la definición análoga de homotopías  $H : \gamma_0 \simeq \gamma_1$ . Comparar figura 8 de la sección anterior.

Alternativamente, definimos la  $k$ -esfera y el  $(k+1)$ -disco con la inclusión  $i : S^k \rightarrow D^{k+1}$  por

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & \downarrow & & i_{k+1} \downarrow & & = \downarrow i_k & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{=} & A & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

$$\text{entonces } \pi_k(M, 0) \cong \frac{\text{Hom}(S^k, M)}{i^* \text{Hom}(D^{k+1}, M)} \cong \frac{\ker \partial_{k-1}}{\partial_k M_{k+1}} \cong H_k M$$

**Definición:** Para  $M \in \mathcal{C}_A$ , el **cilindro**  $IM$  es el complejo de cadenas  $I \otimes M$ . Explícitamente,  $(IM)_{k+1} \cong M_k \oplus M_{k+1} \oplus M_{k+1}$  con  $\partial_k(m, p, p') = (-\partial_{k-1}m, \partial_k p + m, \partial_k p' - m)$ .

**Homotopía:**  $f \simeq g : M \rightarrow N$  si existe  $H : IM \rightarrow N$  tal que  $H(0, m, 0) = f(m)$ ,  $H(0, 0, m) = g(m)$ .

Explícitamente, tenemos aplicaciones  $h_k : M_k \rightarrow N_{k+1}$  dadas por  $m \mapsto H(m, 0, 0)$ , y la condición  $\partial' H(m, 0, 0) = H \partial(m, 0, 0)$  dice simplemente  $\partial'_k h_k = -h_{k-1} \partial_{k-1} + f_k - g_k$ .

Ahora podemos definir **homotopía**  $M \simeq N$  si existen  $M \rightleftarrows N$  con las composiciones homótopas a las identidades, y **homotopía débil**  $M \sim N$  si existe  $f : M \rightarrow N$  con  $f_* : H_k M \cong H_k N$ ,  $k \geq 0$ .

Tenemos  $f \simeq g \Rightarrow f_* = g_*$  en homología, y por tanto  $M \simeq N \Rightarrow M \sim N$ .

El converso no es cierto: consideramos por ejemplo  $f : (0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{-2} \mathbb{Z} \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0)$ .

### 1.6.4 Proyectivos, cofibraciones y fibraciones

Hemos visto que los espacios buenos respecto a equivalencia débil son (retractos de) CW-complejos, formados por adición libre de celdas. Hay una noción clásica para  $A$ -módulos que es muy parecida.

**Definición:** Un  $A$ -módulo  $P$  es **proyectivo** si es retracto (es decir, sumando directo) de un  $A$ -módulo libre. Alternativamente, es un  $A$ -módulo tal que la aplicación  $0 \rightarrow P$  tiene la propiedad de extensión respecto a todo homomorfismo suryectivo  $p : X \twoheadrightarrow Y$ :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{0} & X \\ \downarrow 0 & \nearrow & \downarrow p \\ P & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Para complejos de cadenas de  $A$ -módulos, tomamos esta definición en cada grado; no ponemos *ninguna restricción* sobre los morfismos  $\partial$ .

**Definición:** Un complejo de cadenas de  $A$ -módulos  $M$  es **cofibrante** si  $M_k$  es proyectivo para todo  $k \geq 0$ .

Hay un teorema "de Whitehead" para la categoría  $\mathcal{C}_A$ :

**Teorema:** i) Cada complejo de cadenas es débilmente equivalente a uno que sea cofibrante.

ii) Si  $f : M \rightarrow N$  es una equivalencia débil y  $M, N$  son cofibrantes, entonces son homotópicamente equivalentes.

Generalizando la definición de objetos cofibrantes, tenemos

**Definición:** Un morfismo  $i : M \rightarrow N$  en  $\mathcal{C}_A$  es una **cofibración** si para todo  $k \geq 0$  el homomorfismo  $i_k : M_k \rightarrow N_k$  es inyectivo y el cociente  $M_k/i_k N_k$  es proyectivo<sup>15</sup>.

Formalmente podemos decir también:

**Definición:** Un morfismo  $p : M \rightarrow N$  en  $\mathcal{C}_A$  es una **fibración** si tiene la propiedad de recubrimiento respecto a todo morfismo que sea a la vez una cofibración y una equivalencia débil.

Como en el caso de espacios topológicos, la definición de objeto fibrante es trivial:

**Ejercicio:** El morfismo  $M \rightarrow *$  es siempre una fibración.

Es decir: *todo complejo de cadenas es fibrante*.

Como ejercicios en álgebra homológica se obtienen las siguientes caracterizaciones alternativas de fibraciones y cofibraciones en  $\mathcal{C}_A$ :

**Proposición:**  $p : M \rightarrow N$  es una fibración  $\Leftrightarrow p$  tiene la PR respecto a  $0 \rightarrow D^k$  para  $k \geq 1 \Leftrightarrow p_k : M_k \rightarrow N_k$  es *suryectivo* para  $k \geq 1$ .

Ojo: no hay ninguna condición sobre una fibración en grado cero.

<sup>15</sup>Es decir, una aplicación  $i : M \rightarrow N$  es una cofibración si hay una sucesión exacta corta  $0 \rightarrow M \xrightarrow{i} N \rightarrow P \rightarrow 0$  con  $P$  proyectivo en cada grado.



**Proposición:**  $p : M \rightarrow N$  es a la vez una fibración y una equivalencia débil  $\Leftrightarrow p$  tiene la PR respecto a  $S^{k-1} \rightarrow D^k$  para  $k \geq 0$ .

**Proposición:**  $i : M \rightarrow N$  es una cofibración  $\Leftrightarrow p$  tiene la PE respecto a todo morfismo que es a la vez una fibración y una equivalencia débil.

## 1.7 Homotopía simplicial

### 1.7.1 Definiciones

Un conjunto simplicial es un funtor *contravariante*

$$K : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$$

de la categoría  $\Delta$  de los ordinales finitos en la categoría de conjuntos. Un conjunto simplicial es esencialmente un objeto combinatorio. La categoría  $\Delta$  tiene como objetos los conjuntos ordenados  $\{0, \dots, n\}$  y morfismos las aplicaciones que preservan el orden

$$\begin{aligned} \text{ob}(\Delta) &= \{ \underline{n} = \{0 < 1 < \dots < n\}, n \geq 0 \} \\ \text{mor}(\Delta) &= \{ \underline{m} = \{0 < 1 < \dots < m\} \xrightarrow{f} \underline{n} = \{0 < 1 < \dots < n\}, i \leq j \Rightarrow fi \leq fj \} \end{aligned}$$

De hecho, la categoría  $\Delta$  tiene una descripción elemental en términos de generadores y relaciones. Todo morfismo de  $\Delta$  se puede obtener como una composición de morfismos de dos tipos especiales:

- tipo “inyección”: para  $0 \leq i \leq n$  consideramos la aplicación  $\partial_i : \underline{n-1} \rightarrow \underline{n}$  que *salta*  $i \in \underline{n}$

Ejemplo: para  $n = 4, k = 2$  tenemos  $\partial_2 : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$  con  $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 4$ .

- tipo “suryección”: para  $0 \leq i \leq n$  consideramos la aplicación  $\sigma_i : \underline{n+1} \rightarrow \underline{n}$  que *repite*  $i \in \underline{n}$

Ejemplo: para  $n = 3, k = 2$  tenemos  $\sigma_2 : \{0, 1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$  con  $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 3$ .

Por tanto, en vez de un funtor  $K : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  podemos pensar en conjuntos  $K(\underline{n})$  para cada  $n$ , y aplicaciones  $K(\partial_i), K(\sigma_i)$  para cada  $0 \leq i \leq n$ . Así tenemos una definición equivalente

Un **conjunto simplicial** es una familia de conjuntos  $K_n$ ,  $n \geq 0$  y aplicaciones  $d_i : K_n \rightarrow K_{n-1}$  y  $s_i : K_n \rightarrow K_{n+1}$  para  $0 \leq i \leq n$  tal que

$$\begin{aligned} d_i d_j &= d_{j-1} d_i && \text{para } i < j \\ d_i s_j &= \begin{cases} s_{j-1} d_i & \text{para } i < j \\ \text{id} & \text{para } i = j, j+1 \\ s_j d_{i-1} & \text{para } i > j+1 \end{cases} \\ s_i s_j &= s_{j+1} s_i && \text{para } i \leq j \end{aligned}$$

Las operaciones simpliciales  $d_i$ ,  $s_i$  se llaman **caras** y **degeneraciones** respectivamente. Como  $K$  es contravariante, van en la dirección opuesta que  $\partial_i, \sigma_i$ , y las relaciones simpliciales son duales a la que se verifican en  $\Delta$ .

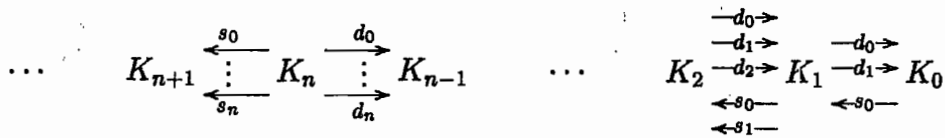


Figura 14: Un conjunto simplicial  $K$ .

*Ejemplo:* Consideramos la familia de  $n$ -símplices topológicos

$$\Delta^n = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i e_i \ ; \ t_i \geq 0, \sum t_i = 1 \right\}$$

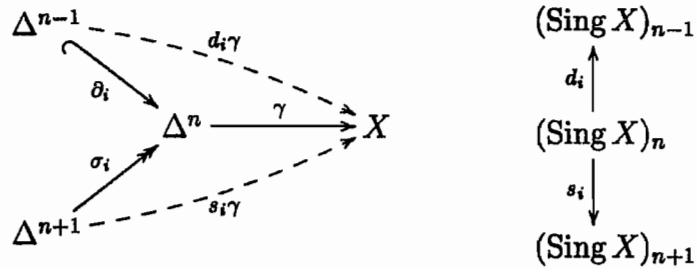
en  $\mathbb{R}^{n+1}$  (o en  $\mathbb{R}^n$  si tomamos  $e_0 = 0$  y  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, n$ ). Cada morfismo  $f : \underline{m} \rightarrow \underline{n}$  de  $\Delta$  da una aplicación entre los vértices de los  $m$ - y  $n$ -símplices, que extiende linealmente a una aplicación

$$\begin{aligned} \Delta^m &\xrightarrow{f} \Delta^n \\ \sum t_i e_i &\mapsto \sum t_i e_{f_i} \end{aligned}$$

Entonces definimos el **complejo singular**  $\text{Sing } X$  de un espacio topológico  $X$  como el conjunto simplicial de todas las aplicaciones continuas de un símplice  $\Delta^n$  en el espacio  $X$ :

$$(\text{Sing } X)_n = \{ \gamma : \Delta^n \rightarrow X \}$$

con las operaciones simpliciales  $d_i\gamma$  (las caras) y  $s_i\gamma$  (las degeneraciones) definidas por composición con  $\partial_i, \sigma_i$  respectivamente.



Para  $n = 3$ , por ejemplo, podemos dibujar un 3-símplice  $\gamma \in (\text{Sing } X)_3$  y ver sus 4 caras  $d_i\gamma$  para  $i = 0, \dots, 3$ . Notamos que  $d_i\gamma$  es la cara opuesta al vértice  $i$ .

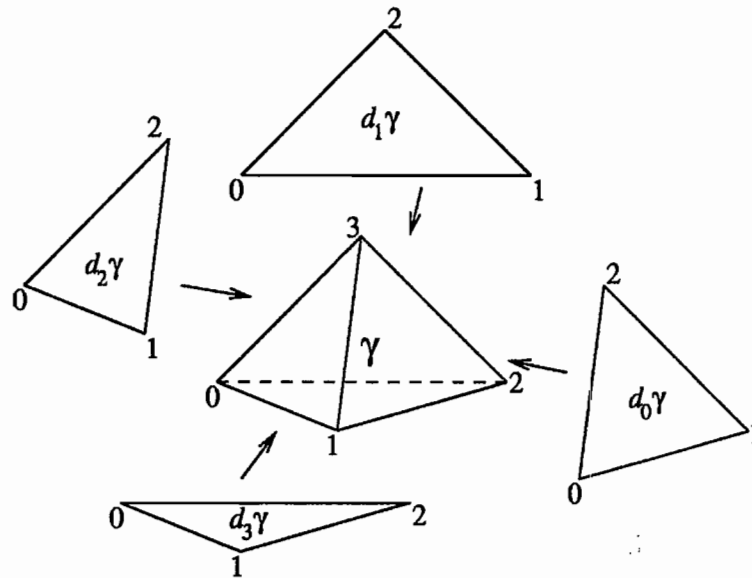


Figura 15: Las cuatro caras de un 3-símplice  $\gamma : \Delta^3 \rightarrow X$  en  $\text{Sing } X$ .

Similarmente podemos representar gráficamente las dos degeneraciones  $s_0\gamma, s_1\gamma \in (\text{Sing } X)_2$  de un camino  $\gamma \in (\text{Sing } X)_1$ .

**1.7.2 Teoría simplicial abstracta**

Para  $n \geq 0$  sea  $\Delta[n]$  el conjunto simplicial libremente generado por un elemento en grado  $n$ . Así, si el generador es  $x$ , tenemos elementos generados en todos los grados:

$$\dots \quad s_j s_i x \quad s_i x \quad x \quad d_i x \quad d_j d_i x \quad \dots$$

etcétera

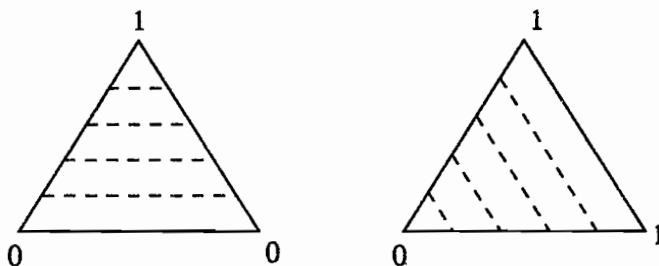


Figura 16: Las 2 degeneraciones  $s_0\gamma$  y  $s_1\gamma$  de un camino  $\gamma : \Delta^1 \rightarrow X$ .

Formalmente, el conjunto simplicial  $\Delta[n]$  es **representable**: como funtor  $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  tenemos  $\Delta[n] = \Delta(-, \underline{n})$ . En grado  $m$ ,

$$\Delta[n]_m = \Delta(\underline{m}, \underline{n}) = \{ f : \underline{m} \rightarrow \underline{n} \text{ en } \Delta \}$$

con las caras y degeneraciones inducidas por precomposición de  $\partial_i, \sigma_i$ .

Además, hay aplicaciones simpliciales<sup>16</sup>  $\Delta[n-1] \hookrightarrow \Delta[n]$  y  $\Delta[n+1] \twoheadrightarrow \Delta[n]$  inducidas por post-composición de  $\partial_i, \sigma_i$ .

**Hecho fundamental:** Todo conjunto simplicial es un colímite de representables:

$$K \cong \operatorname{colim}_{\alpha} \Delta[n_{\alpha}]$$

Esto no es difícil ver: en vez de “colímite” pensamos “cociente de unión” y escribimos

$$K = \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{x \in K_n} \Delta[n] / \sim,$$

donde la relación  $\sim$  identifica caras comunes y toma cociente por degeneraciones<sup>17</sup>. Esencialmente, podemos decir que todo conjunto simplicial viene dado por *generadores* (sus elementos) y *relaciones* (dadas por las operaciones  $d_i, s_i$ ).

Esto nos permite relacionar conjuntos simpliciales con otras categorías.

**Proposición 1:** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con colímites y  $F'$  un funtor de  $\Delta$  en  $\mathcal{C}$ . [Decimos que  $F'$  da “modelos para los símplices” en  $\mathcal{C}$ .] Entonces existe un único funtor  $F : \mathbf{SimpSet} \rightarrow \mathcal{C}$  que

- preserva colímites:

$$F(\operatorname{colim}_{\alpha} K_{\alpha}) \cong \operatorname{colim}_{\alpha} F(K_{\alpha}).$$

<sup>16</sup> Así se obtiene una inclusión de categorías  $\Delta \hookrightarrow \mathbf{SimpSet}$ , el funtor de Yoneda.

<sup>17</sup> Más generalmente, para cualquier categoría (chica)  $\mathcal{D}$ , todo funtor  $\mathcal{D}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  es colímite de funtores representables  $\mathcal{D}(-, d) : \mathcal{D}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ . Igualmente hay un funtor de Yoneda  $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}}$ ,  $d \mapsto \mathcal{D}(-, d)$ .

- extiende  $F'$ :

$$F(\Delta[n]) = F'(\underline{n})$$

*Demostración:* Como cada conjunto simplicial  $K$  se expresa como colímite de representables, tenemos

$$FK \cong F(\operatorname{colim}_{\alpha} \Delta[n_{\alpha}]) \cong \operatorname{colim}_{\alpha} F(\Delta[n_{\alpha}]) \cong \operatorname{colim}_{\alpha} F'(n_{\alpha})$$

y tomamos  $FK = \operatorname{colim}_{\alpha} F'(n_{\alpha})$  como la *definición* de  $F$ .

La proposición tiene una segunda<sup>18</sup> parte:

**Proposición 2:** Sea  $\mathcal{C}$ ,  $F'$ ,  $F$  como antes. Entonces existe un único functor  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{SimpSet}$  adjunto a la derecha<sup>19</sup> de  $F$ .

Ser **funtores adjuntos**<sup>20</sup> quiere decir que hay una correspondencia biyectiva natural entre las aplicaciones simpliciales  $f : K \rightarrow GX$  y los morfismos  $f' : FK \rightarrow X$  en  $\mathcal{C}$ , para todo conjunto simplicial  $K$  y todo objeto  $X$  de  $\mathcal{C}$ . La naturalidad quiere decir que si a  $f$  le corresponde  $f'$  entonces a  $f\phi : K' \rightarrow K \rightarrow GX$  le corresponde  $f'F\phi : FK' \rightarrow FK \rightarrow X$ , y dualmente.

Además, el functor  $G$  preserva límites automáticamente.

*Demostración:* Para  $X \in \mathcal{C}$  definimos  $GX = \mathcal{C}(F'(-), X) : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ . Es decir,

$$(GX)_n = \{ \text{morfismos } F'(\underline{n}) \rightarrow X \text{ en } \mathcal{C} \}$$

con caras y degeneraciones dadas por precomposición de  $F'\partial_i$  y  $F'\sigma_i$ .

Entonces hay biyecciones obvias

$$\{\Delta[n] \rightarrow GX\} \cong (GX)_n \cong \{F(\Delta[n]) \rightarrow X\},$$

por definición; como  $F$  preserva colímites se obtiene  $\{K \rightarrow GX\} \cong \{FK \rightarrow X\}$  para cualquier  $K$ .

*Ejemplos:*

i)  $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ , y  $F' : \Delta \rightarrow \mathbf{Top}$  el functor  $\underline{n} \mapsto \Delta^n$ , el  $n$ -símplice topológico. Entonces las proposiciones nos dan los funtores adjuntos de **realización geométrica**  $F' : \mathbf{SimpSet} \rightarrow \mathbf{Top}$  y **complejo singular**  $G : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{SimpSet}$  que vimos la semana pasada. Tradicionalmente,  $FK$  se escribe  $|K|$ , y  $GX$  se escribe  $\text{Sing } X$ .

<sup>18</sup> Aunque en otras exposiciones la segunda parte viene primero.

<sup>19</sup> Alternativamente  $F$  es el adjunto a la izquierda de  $G$ .

<sup>20</sup> Hemos visto ejemplos de funtores adjuntos para espacios topológicos en la primera sección: el cilindro  $I$  y el espacio de caminos  $P$  son endofuntores adjuntos. Así, homotopías  $IX \rightarrow Y$  corresponden biyectivamente con homotopías  $X \rightarrow PY$ . Similarmente, la suspensión es adjunto a la izquierda del espacio de lazos.

ii) Sea  $\mathcal{C} = \mathbf{Cat}$  la categoría de categorías<sup>21</sup>. Para definir  $F' : \Delta \rightarrow \mathbf{Cat}$  pensamos en  $\underline{n} \in \Delta$  como la categoría con objetos  $0, 1, \dots, n$ , con un único morfismo  $i \rightarrow j$  si (y solamente si)  $i \leq j$ , y con la composición obvia:

$$i \rightarrow j \rightarrow k = i \rightarrow k$$

(si  $i \leq j$  y  $j \leq k$  entonces  $i \leq k$ ). Así funtores  $\underline{m} \rightarrow \underline{n}$  son simplemente los morfismos de  $\Delta$  (si  $i \leq j$  entonces  $f(i \rightarrow j) = (fi \rightarrow fj)$  dice que  $fi \leq fj$ .)

Ahora por las proposiciones tenemos funtores adjuntos  $F : \mathbf{SimpSet} \rightarrow \mathbf{Cat}$ , llamado **categorización**, y  $G : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{SimpSet}$ , llamado **nervio**.

Explícitamente,  $FK$  (o  $c(K)$ ) es la categoría con objetos  $x \in K_0$ , morfismos  $x \rightarrow y$  generados por  $a \in K_1$  con  $d_1 a = x$  y  $d_0 a = y$ , y las relaciones

$$\begin{aligned} s_0 x &= \text{id}_x \\ d_0 z d_2 z &= d_1 z \end{aligned}$$

para  $x \in K_0, z \in K_2$ . Podemos representar los generadores y relaciones de  $c(K)$  por los diagramas siguientes (con  $x \in K_0, a \in K_1, z \in K_2$ ):

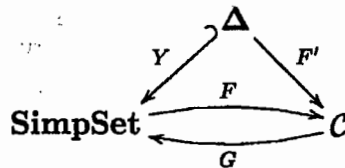
$$d_1 a \xrightarrow{a} d_0 a ; \quad x \xrightarrow[\text{id}]{s_0 x} x , \quad \begin{array}{ccc} & d_0 d_1 z & \\ d_1 z \nearrow & & \nwarrow d_0 z \\ d_1 d_2 z & \xrightarrow{d_2 z} & d_0 d_2 z \end{array}$$

El nervio  $GX$  (o  $\text{Ner}(X)$ ) de una categoría  $X$  es el conjunto simplicial con  $n$ -símplices las cadenas de  $n$  morfismos en  $X$ :

$$\text{Ner}(X)_n = \{ \text{funtores } \underline{n} \rightarrow X \} = \{ x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} x_n \}$$

donde  $\text{Ner}(X)_0$  es  $\text{Ob}(X)$ . La operación  $s_i$  es insertar una identidad  $x_i \xrightarrow{\text{id}} x_i$  en la cadena, y la operación  $d_i$  es componer  $f_i$  y  $f_{i+1}$  (o olvidar  $f_i$  si  $i = 0$  ó  $n$ ).

En general, tener un par de funtores adjuntos



nos será útil porque se comportan bien respecto a las propiedades de elevación. Por ejemplo:

<sup>21</sup>chicas.

**Lema:** Sea  $i : L \rightarrow K$  una aplicación simplicial y  $p : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ .

Entonces  $p$  tiene la propiedad de recubrimiento respecto a  $F_i$  en  $\mathcal{C}$

$\Leftrightarrow G_p$  tiene la propiedad de recubrimiento respecto a  $i$  en **SimpSet**.

*Demostración:* Hay una correspondencia biyectiva entre los diagramas

$$\begin{array}{ccc} FL & \longrightarrow & X \\ Fi \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ FK & \longrightarrow & Y \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & GX \\ i \downarrow & \nearrow & \downarrow G_p \\ K & \longrightarrow & GY \end{array}$$

### 1.7.3 Homotopía elemental de conjuntos simpliciales

Podemos intentar copiar las definiciones de las secciones anteriores; luego veremos qué es lo que no funciona.

Tenemos los objetos canónicos:

- el conjunto simplicial vacío,  $\emptyset$ ,
- el punto  $*$  =  $\Delta[0]$ ,
- el intervalo  $I = \Delta[1]$ , con las aplicaciones  $\Delta[0] \rightrightarrows \Delta[1] \rightarrow \Delta[0]$  dadas por  $\partial_1, \partial_0, \sigma_0$ .
- más generalmente el  $n$ -símplice  $\Delta[n]$  sirve como modelo para el disco cerrado  $D^n$ .
- su borde  $\dot{\Delta}[n] = \bigcup_{i=0}^n \partial_i \Delta[n-1] \subset \Delta[n]$  y el cociente  $\Delta[n]/\dot{\Delta}[n]$  sirven como modelos de la esfera y la esfera con punto base; el segundo es quizás más manejable ya que tiene menos símplices no degenerados.

Además, tenemos un producto  $K \times L$  de conjuntos simpliciales,

$$(K \times L)_n = K_n \times L_n \quad \text{con} \quad d_i(a, b) = (d_i a, d_i b), \quad s_i(a, b) = (s_i a, s_i b),$$

y el "hom simplicial"  $K^L$ ,

$$(K^L)_n = \{ f : \Delta[n] \times L \rightarrow K \} \quad \text{con} \quad d_i(f) = f(\partial_i \times \text{id}_L), \quad s_i(f) = f(\sigma_i \times \text{id}_L).$$

En particular el intervalo  $I = \Delta[1]$  nos da un cilindro  $I \times K$  y un "espacio" de caminos  $K^I$ , y podemos copiar la definición anterior de homotopía:

**Definición:** Dos aplicaciones simpliciales  $f, g : L \rightarrow K$  son **homótopas** si existe  $h : \Delta[1] \times L \rightarrow K$  tal que  $h(\partial_1 \times \text{id}_L) = f$  y  $h(\partial_0 \times \text{id}_L) = g$  [alternativamente: si existe  $h : L \rightarrow K^{\Delta[1]}$  o  $h : \Delta[1] \rightarrow K^L$  tal que  $h\partial_1 = f$  y  $h\partial_0 = g$ ].

Pero no es tan fácil como parezca. La relación de homotopía que acabamos de definir *no es una relación de equivalencia* en general.

Miramos los detalles de lo que falta para que homotopía sea un relación de equivalencia:

1. *reflexividad:* OK, aquí no hay ningún problema ya que tenemos homotopías constantes  $h : f \simeq f$  dadas por la degeneración  $\Delta[1] \xrightarrow{\sigma_0} \Delta[0] \xrightarrow{f} K^L$ .
2. *simetría:* Dado  $h : \Delta[1] \rightarrow K^L$  con  $h\partial_1 = f$  y  $h\partial_0 = g$ , queremos  $k : \Delta[1] \rightarrow K^L$  con  $k\partial_1 = g$  y  $k\partial_0 = f$ . Si el intervalo fuera “reversible” estaría todo formal, pero no lo es. No hay ninguna aplicación simplicial  $\Delta[1] \rightarrow \Delta[1]$  que envía  $\partial_1$  a  $\partial_0$  y  $\partial_0$  a  $\partial_1$ . Así que no podemos esperar obtener la simetría sólo por propiedades del intervalo.
3. *transitividad:* Dados  $h, h' : \Delta[1] \rightarrow K^L$  y con  $h\partial_0 = h'\partial_1$ , queremos  $k : \Delta[1] \rightarrow K^L$  con  $k\partial_1 = h\partial_1$  y  $k\partial_0 = h'\partial_0$ . Pero no hay ninguna aplicación simplicial  $\Delta[1] \rightarrow \Delta[1] \vee \Delta[1]$  que envía  $\partial_1$  a  $\partial_1$  en la primera copia y  $\partial_0$  a  $\partial_0$  en la segunda.

En otras palabras: no existe la *subdivisión* del intervalo  $\Delta[1] \rightarrow \Delta[1] \vee \Delta[1]$  — para conjuntos simpliciales nos falta la noción de *composición* de caminos.

La solución [Kan 1956] es encontrar las homotopías  $k$  usando no la buena estructura del intervalo (porque no la tiene), sino buenas propiedades de  $K$ , y por tanto de  $K^L$ . Veremos que hay una solución para  $K$  *fibrante*.

En general, queremos poder escribir  $[A, Y]$  para las clases de homotopía de morfismos  $f : A \rightarrow Y$ . Lo que veremos de [Quillen 1967] es que

SÓLO TIENE SENTIDO CONSIDERAR  $[A, Y]$  SI  $A$  ES COFIBRANTE Y  $Y$  ES FIBRANTE.

En **Top** y en  $\mathcal{C}_A$  no había ningún problema:  $I^n$  y  $S^n$  son cofibrantes, y todo objeto  $Y$  es fibrante, por tanto  $[I^n, Y]$  y  $[S^n, Y]$  siempre tienen sentido. Veremos que en **SimpSet** la aplicación  $Y \rightarrow *$  *no* es siempre una fibración.

#### 1.7.4 Conjuntos simpliciales fibrantes/de Kan

**Definición:** El cuerno  $\Lambda^k[n] \subset \Delta[n]$ , para  $0 \leq k \leq n$ , es el subconjunto simplicial



generado por todas las caras salvo la  $k$ -ésima:

$$\Lambda^k[n] = \bigcup_{i \neq k} \partial_i \Delta[n-1] \subset \Delta[n]$$

*Ejemplos:* Podemos representar  $\Delta[2]$  y los cuernos  $\Lambda^0[2]$ ,  $\Lambda^1[2]$  y  $\Lambda^2[2]$  así:

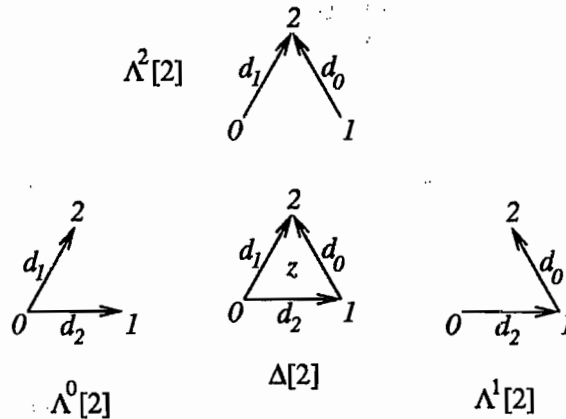


Figura 17: Los símlices no degenerados del representable  $\Delta[2]$  y sus tres cuernos.

**Definición:** Un conjunto simplicial  $K$  es **fibrante**<sup>22</sup> si todo cuerno en  $K$  se puede extender a un símplex.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^k[n] & \xrightarrow{\forall} & K \\ \downarrow & \nearrow \exists & \downarrow \\ \Delta[n] & \longrightarrow & * \end{array}$$

En el lenguaje de la semana pasada:  $K$  es fibrante si  $K \rightarrow *$  tiene la propiedad de recubrimiento respecto a  $\Lambda^k[n] \subset \Delta[n]$  para todo  $0 \leq k \leq n$ .

La idea de esta definición es que, si  $K$  es fibrante, entonces hasta homotopía existen composición y inversos en  $K$ . Informalmente, la propiedad de recubrimiento respecto a  $\Lambda^1[2] \hookrightarrow \Delta[2]$  dice que si tenemos caminos  $a : x \rightarrow y$  y  $c : y \rightarrow z$  en  $K_1$  entonces existe<sup>23</sup> un camino compuesto  $b : x \rightarrow z$  y además una homotopía en  $K_2$  entre  $b$  y  $a \vee c$ . Usando los cuernos  $\Lambda^0[2]$  y  $\Lambda^2[2]$  similarmente obtenemos “inversos” para caminos; considerar por ejemplo  $b = s_0 x$  en el primero de los siguientes diagramas:

<sup>22</sup>O de Kan

<sup>23</sup>No es único — pero utilizando la propiedad de extensión respecto a  $\Lambda^k[3] \hookrightarrow \Delta[3]$  no es difícil ver que la composición es única hasta homotopía.

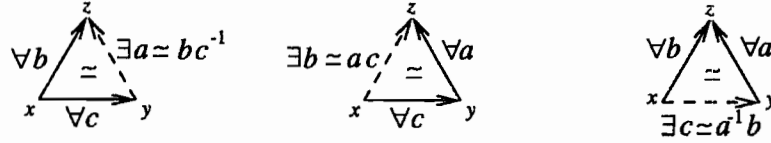


Figura 18: La condición de extensión da composición y inversos.

**Proposición:** Si  $K$  y  $L$  son conjuntos simpliciales y  $K$  es fibrante entonces todo  $\Lambda^k[n] \times L \rightarrow K$  extiende a  $\Delta[n] \times L \rightarrow K$ . Por lo tanto, el “espacio de aplicaciones”  $K^L$  también es fibrante.

Así tenemos composición y inversos (hasta homotopía) de caminos en  $K^L$ :

**Corolario:** Si  $K$  es fibrante, entonces  $\simeq$  es una relación de equivalencia en  $\{f : L \rightarrow K\}$

Ahora podemos definir los grupos de homotopía  $\pi_n(K, *)$  para  $K$  fibrante y  $*$   $\in K_0$  un punto base. Consideramos aplicaciones

$$\Delta[n] \rightarrow K, \quad \dot{\Delta}[n] \mapsto \text{degeneraciones de } *$$

o sea,

$$S^n = \Delta[n] / \dot{\Delta}[n] \rightarrow K,$$

con las homotopías

$$\frac{\Delta[1] \times \Delta[n]}{\Delta[1] \times \dot{\Delta}[n]} \rightarrow K$$

Explícitamente, tenemos

**Proposición:** Las aplicaciones  $\gamma : S^n \rightarrow K$  corresponden precisamente a elementos

$$\gamma \in K_n \text{ tal que } d_i \gamma = s_0^{n-1} * \text{ para todo } 0 \leq i \leq n.$$

Si  $K$  es fibrante, dos de estas aplicaciones son homótopas,  $\gamma \simeq \gamma'$ , si y sólo si existe  $h \in K_{n+1}$  tal que  $d_j h = \gamma'$ ,  $d_{j+1} h = \gamma$  para algún  $j$ , con todas las otras caras degeneradas.

Sea  $\pi_n(K, *)$  el cociente  $\{S^n \rightarrow K\} / \simeq$ .

**Proposición:** Sea  $K$  un conjunto simplicial fibrante<sup>24</sup>. Entonces  $\pi_n(K, *)$  es un grupo para  $n \geq 1$  con la composición definida por

$$[\gamma] \circ [\gamma'] = [d_1 z]$$

<sup>24</sup>O: “Sea  $K$  de Kan”

para  $\gamma, \gamma' \in K_n$  y algún  $z \in K_{n+1}$  con  $d_0 z = \gamma$  y  $d_2 z = \gamma'$  dado por la extensión siguiente:

$$\begin{array}{ccc} & \Lambda^1[n+1] & \xrightarrow{(\gamma, \gamma', *, \dots, *)} K \\ & \downarrow & \nearrow z \\ \Delta[n] & \xrightarrow{\partial_1} \Delta[n+1] & \end{array}$$

$\pi_n(K, *)$  es un grupo abeliano para  $n \geq 2$ .

### 1.7.5 Fibraciones y cofibraciones

No es difícil ver cómo se generaliza la definición de un conjunto simplicial fibrante:

**Definición:** Una aplicación simplicial  $K \rightarrow L$  es una **fibración de Kan** si tiene la propiedad de recubrimiento respecto a  $\Lambda^k[n] \subset \Delta[n]$  para todo  $0 \leq k \leq n$ ,

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^k[n] & \longrightarrow & K \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta[n] & \longrightarrow & L \end{array}$$

La realización geométrica de  $\Lambda^k[n] \subset \Delta[n]$  en **Top** es homeomorfa a  $\{0\} \times I^{n-1} \subset I^n$ . Entonces, como el complejo singular es adjunto de la realización geométrica, y adjuntos se comportan bien con las propiedades de extensión, tenemos

**Proposición:** Una aplicación  $p : X \rightarrow Y$  en **Top** es una fibración de Serre si y sólo si  $\text{Sing}(p) : \text{Sing } X \rightarrow \text{Sing } Y$  es una fibración de Kan.

Como todo espacio  $X$  es fibrante, tenemos

**Corolario:** El complejo singular simplicial  $\text{Sing } X$  es de Kan para todo espacio  $X$ .

Para espacios topológicos y complejos de cadenas dijimos que ‘cofibraciones’ eran las aplicaciones que se obtienen por (retractos de) adición libre de celdas, o composición de pushouts de  $S^{n-1} \subset D^n$ . Para conjuntos simpliciales, esto simplifica mucho:

**Definición:** Una aplicación simplicial  $f : L \rightarrow K$  es una **cofibración** si es inyectiva.

En particular, *todo conjunto simplicial  $K$  es cofibrante*, que no es verdad ni para todo espacio topológico ni para todo complejo de cadenas. La realización  $|K|$  de un conjunto simplicial es siempre un espacio cofibrante; más generalmente:

**Proposición:** Si  $i : L \rightarrow K$  es una aplicación simplicial, entonces la realización geométrica  $|i| : |L| \rightarrow |K|$  es una cofibración en **Top** si y sólo si  $i$  es una cofibración (es decir, inyectiva).

### 1.7.6 Equivalencias débiles

Es más difícil definir la noción de equivalencia débil, ya que las aplicaciones  $\pi_n L \rightarrow \pi_n K$  no están definidas en general. En los casos donde la relación de homotopía sí que es de equivalencia tenemos una correspondencia muy buena entre clases de homotopía de aplicaciones simpliciales y topológicas:

**Proposición:** Sean  $K$  un conjunto simplicial de Kan y  $X$  un CW-complejo en **Top**. Entonces hay biyecciones de clases de homotopía

$$\begin{aligned} [L, K] &\cong [|L|, |K|] \\ [X, Y] &\cong [\text{Sing } X, \text{Sing } Y] \end{aligned}$$

En general, tenemos

**Definición/Teorema:** Una aplicación simplicial  $f : L \rightarrow K$  es una **equivalencia débil**

$\Leftrightarrow$  para todo  $E$  de Kan, composición con  $f$  induce una biyección<sup>25</sup>

$$f^* : [K, E] \cong [L, E]$$

$\Leftrightarrow$  la realización geométrica  $|f| : |L| \rightarrow |K|$  es una equivalencia débil<sup>26</sup> en **Top**.

$\Leftrightarrow$  La aplicación simplicial<sup>27</sup>  $\text{Ex}^\infty(i) : \text{Ex}^\infty L \rightarrow \text{Ex}^\infty K$  es una equivalencia homotópica en **SimpSet**.

<sup>25</sup>Esta 'definición' de equivalencia débil simplemente usa *cohomotopía* (clases de mapas en los conjuntos fibrantes) en vez de la homotopía habitual (clases de mapas de las esferas).

<sup>26</sup>Equivalentemente: una equivalencia homotópica (por el teorema de Whitehead ya que  $|L|, |K|$  son CW-complejos).

<sup>27</sup>Aquí el funtor  $\text{Ex}^\infty : \mathbf{SimpSet} \rightarrow \mathbf{SimpSet}$  de Kan manda todo conjunto simplicial a un conjunto simplicial fibrante. Es una 'localización': adjunto a la izquierda de la inclusión de los conjuntos simpliciales de Kan en la categoría **SimpSet**.

## 2 Categorías de modelos

### 2.1 Definiciones y propiedades

Veremos ahora la axiomatización de Quillen [1967, 1969].

**Definición:** Una categoría (cerrada) de modelos es una categoría  $\mathcal{C}$  con tres clases especiales de morfismos:

- $\text{Fib} = \{ \text{las fibraciones} \}$ ,
- $\text{Cof} = \{ \text{las cofibraciones} \}$ ,
- $\text{ED} = \{ \text{las equivalencias débiles} \}$ .

Tradicionalmente los morfismos en la intersección  $\text{Fib} \cap \text{ED}$  se llaman **fibraciones acíclicas** o **fibraciones triviales**, y similarmente para  $\text{Cof} \cap \text{ED}$ .

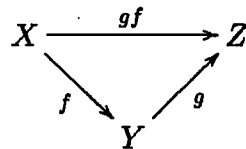
Los axiomas siguientes han de verificarse:

M0 Las clases  $\text{Fib}$ ,  $\text{Cof}$ ,  $\text{ED}$  están cerradas bajo composición y contienen los isomorfismos.

M1  $\mathcal{C}$  tiene límites finitos y colímites finitos.

En particular,  $\mathcal{C}$  tiene pullbacks, pushouts, un objeto inicial  $\emptyset$  y un objeto terminal  $*$ .

M2 Sean  $f, g$  morfismos en  $\mathcal{C}$  tal que la composición  $gf$  está definida y es una equivalencia débil. Entonces  $f$  es una equivalencia débil si y sólo si  $g$  lo es.



Con (M0), esto dice que si dos de los tres morfismos  $f$ ,  $g$ ,  $gf$  son equivalencias débiles entonces el otro también.

M3 Las clases  $\text{Fib}$ ,  $\text{Cof}$ ,  $\text{ED}$  están cerradas bajo retracción.

M4 (i) Las cofibraciones tienen la propiedad de extensión respecto a las fibraciones acíclicas.

(ii) Las fibraciones tienen la propiedad de recubrimiento respecto a las cofibraciones acíclicas.

Es decir, si tenemos un cuadrado conmutativo en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \text{Cof } \downarrow i & \nearrow e & \downarrow p \text{ Fib} \\ B & \longrightarrow & Y \end{array} \quad (p \text{ ó } i \in \text{ED})$$

con  $i \in \text{Cof}$  y  $p \in \text{Fib}$ , y además uno de los dos es una equivalencia débil, entonces hay una elevación  $e : B \rightarrow X$  en  $\mathcal{C}$ .

M5 Todo morfismo  $f$  de puede factorizar,  $f = pi$ , de dos maneras:

- (i) como una cofibración  $i$  seguida por y una fibración acíclica  $p$
- (ii) como una cofibración acíclica  $i$  seguida por y una fibración  $p$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \text{Cof} \searrow i & & \nearrow p \text{ Fib} \\ & Q & \end{array} \quad (p \text{ ó } i \in \text{ED})$$

## Observaciones

- Los axiomas son **simétricas**: para cada axioma está también el axioma “dual” que se obtiene intercambiando Fib con Cof y cambiando la dirección de los morfismos<sup>28</sup>. Así tenemos un meta-teorema formal:

Para cada consecuencia de los axiomas hay un resultado dual.

- No se piden ni cilindros ni homotopías como estructura básica.
- Las elevaciones y factorizaciones de M4 y M5 no tienen que ser ni únicas, ni functoriales.

### 2.1.1 Consecuencias elementales

Los axiomas que hemos presentado no son los primeros del “Lecture Notes” de Quillen, sino una simplificación que introdujo él un poco más tarde. En su primera versión faltaba M3, el de clausura bajo retracción. En cambio M4 era más fuerte y había un axioma de clausura bajo pushout y pullback; ahora estos se pueden ver como consecuencias.

**Teorema:** Dos de las clases Fib, Cof, ED,  $\text{Fib} \cap \text{ED}$ ,  $\text{Cof} \cap \text{ED}$  son suficientes para determinar todas. En particular,

<sup>28</sup> Así un pushout deviene un pullback, etcétera.

1.  $p \in \text{Fib}$   $\Leftrightarrow$   $p$  tiene la propiedad de recubrimiento respecto a toda cofibración acíclica.
2.  $i \in \text{Cof}$   $\Leftrightarrow$   $i$  tiene la propiedad de extensión respecto a toda fibración acíclica.
3.  $p \in \text{Fib} \cap \text{ED}$   $\Leftrightarrow$   $p$  tiene la propiedad de recubrimiento respecto a toda cofibración.
4.  $i \in \text{Cof} \cap \text{ED}$   $\Leftrightarrow$   $i$  tiene la propiedad de extensión respecto a toda fibración.
5.  $f \in \text{ED}$   $\Leftrightarrow$   $f$  factoriza como una cofibración acíclica seguida por una fibración acíclica.

*Demostración:* (1) y (2) son duales; (3) y (4) son duales; por tanto sólo hace falta demostrar por ejemplo (2), (4) y (5). Además,  $(2 \Rightarrow)$  es M4(i) y  $(4 \Rightarrow)$  es M4(ii).  $(2 \Leftarrow)$  Supongamos que  $i' : A' \rightarrow B'$  tiene la propiedad de extensión respecto a todo  $p \in \text{Fib} \cap \text{ED}$ . Queremos  $i' \in \text{Cof}$ . Por M5(i) podemos factorizar  $i'$  como una cofibración  $i$  seguida por una fibración acíclica  $p$ , como en el primero de los siguientes diagramas.

$$\begin{array}{ccc}
 A' & \xrightarrow{i'} & B' \\
 \text{Cof} \ni i & \searrow & \nearrow p \in \text{Fib} \cap \text{ED} \\
 & B &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 A' & \xrightarrow{i} & B & & \\
 i' \downarrow & \nearrow e & \downarrow p & & \\
 B' & \xrightarrow{\text{id}} & B' & &
 \end{array}$$

El segundo diagrama es simplemente otra manera de escribir el primero, y nos da una elevación  $e : B' \rightarrow B$  por la propiedad de extensión de  $i'$  respecto a  $p$ . Este diagrama se vuelve a escribir como el diagrama siguiente.

$$\begin{array}{ccccc}
 A' & \xrightarrow{\text{id}} & A' & \xrightarrow{\text{id}} & A' \\
 i' \downarrow & & i \downarrow & & \downarrow i' \\
 B' & \xrightarrow{e} & B & \xrightarrow{p} & B'
 \end{array}$$

Por tanto  $i'$  es un retracto de la cofibración  $i$ , y por M3 tenemos  $i' \in \text{Cof}$ .

$(4 \Leftarrow)$  Similar, usando M5(ii) en vez de M5(i).

$(5 \Leftarrow)$  Por M0, clausura de las equivalencias débiles bajo composición.

$(5 \Rightarrow)$  Por M5(i) tenemos  $f = pi$  con  $p \in \text{ED} \cap \text{Fib}$ ,  $i \in \text{Cof}$ , y  $i \in \text{ED} \cap \text{Cof}$  por M2. De este teorema y los resultados de clausura para las propiedades de elevación que demostramos hace un par de semanas, tenemos

**Corolario:** Las clases de cofibraciones y de cofibraciones acíclicas están cerradas bajo pushout. Las clases de fibraciones y de fibraciones acíclicas están cerradas bajo pullback.

### 2.1.2 Cilindros

Cilindros ahora no son construcciones básicas, sino consecuencias de la estructura de una categoría de modelos.

**Definición:** Un cilindro en un objeto  $A \in \mathcal{C}$  es un objeto  $B$  y una factorización<sup>29</sup>

$$\begin{array}{ccc} A \cup A & & \\ \text{Cof} \downarrow i_B & \searrow & \\ B & \xrightarrow[p_B]{ED} & A \end{array}$$

por  $B$  del morfismo canónico  $A \cup A \rightarrow A$ , tal que  $i_B \in \text{Cof}$  y  $p_B \in \text{ED}$ .

Escribimos  $i_0, i_1 : A \rightarrow B$  para las composiciones  $A \rightrightarrows A \cup A \xrightarrow{i_B} B$ .

#### Observaciones:

- i) La composición de  $i_0$  (o  $i_1$ ) con la equivalencia débil  $p_B$  es la identidad en  $A$ . Por lo tanto sabemos por M2 que  $i_0, i_1$  son siempre equivalencias débiles.
- ii) Si además  $A$  es *cofibrante* entonces los morfismos  $A \hookrightarrow A \cup A$  son cofibraciones (son los pushouts de  $\emptyset \rightarrow A$ ) y tomando la composición con la cofibración  $i_B$  tenemos que  $i_0$  y  $i_1$  son cofibraciones (acíclicas).
- iii) Por M5(i) todo objeto  $A$  tiene un cilindro.

### 2.1.3 Homotopías

Dos morfismos  $f, g : A \rightrightarrows X$  son **homótopos**  $f \simeq g$  respecto a un cilindro, si existe un cilindro  $B$  en  $A$  tal que  $(f, g) : A \cup A \rightarrow X$  factorice por  $i_B : A \cup A \rightarrow B$ :

$$\begin{array}{ccc} A \cup A & & \\ i_B \downarrow & \searrow (f,g) & \\ B & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

Es decir,  $f, g$  son homótopos si, para algún cilindro, hay una **homotopía**  $h : B \rightarrow X$  con  $hi_0 = f$  y  $hi_1 = g$ .

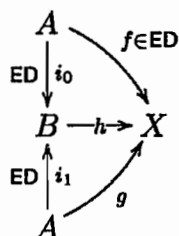
Homotopías preservan las equivalencias débiles:

<sup>29</sup>Ojo: el cilindro no es sólo el objeto  $B$  sino la estructura  $(B, i_B, p_B)$ .



**Lema:** Si  $f, g$  son homótopos respecto a algún cilindro, entonces  $f \in \text{ED} \Leftrightarrow g \in \text{ED}$ .

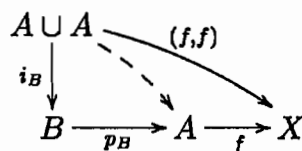
*Demostración:* Como  $i_0, i_1 \in \text{ED}$  y  $hi_0 = f, hi_1 = g$ , tenemos  $f \in \text{ED} \xrightarrow{M_2} h \in \text{ED} \xrightarrow{M_0} g \in \text{ED}$ .



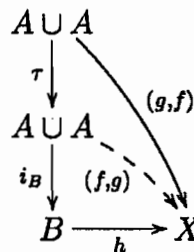
Observamos que, para obtener una homotopía  $f \simeq g$ , es suficiente tener  $h : B \rightarrow X$  para *algún* cilindro. Hay mucha elección — el cilindro en un objeto no es único, ni mucho menos. El teorema siguiente es esencialmente una consecuencia de esto.

**Teorema:** Si  $A$  es cofibrante, entonces la relación de homotopía respecto a un cilindro es una relación de equivalencia.

*Demostración:* Reflexividad es fácil, usando una homotopía ‘constante’: si tenemos  $f : A \rightarrow X$  y un cilindro  $(B, i_B, p_B)$  para  $A$  entonces  $h = fp_B : B \rightarrow A \rightarrow X$  es una homotopía  $f \simeq f$ .



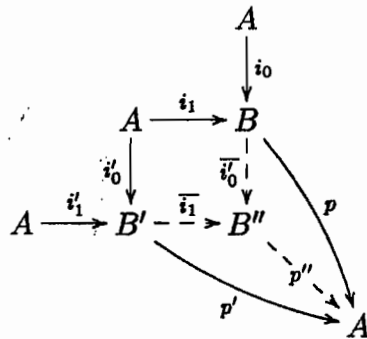
Para simetría, usamos ‘reversibilidad’ de cilindros: si  $B = (B, i_B, p_B)$ , entonces  $B' = (B, i_B\tau, p_B)$  también es un cilindro<sup>30</sup> donde  $\tau : A \cup A \rightarrow A \cup A$  es el isomorfismo (y por tanto una cofibración) que intercambia las copias. Si tenemos  $f \simeq g$  dado por una homotopía  $h : B \rightarrow X$  respecto al cilindro  $B$ , entonces la misma  $h$  es una homotopía  $g \simeq f$  respecto al cilindro  $B'$ .



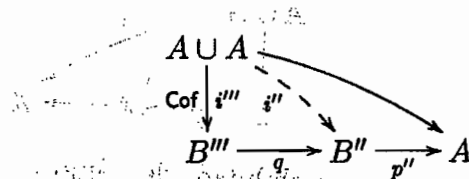
Para transitividad, tenemos que ‘componer’ cilindros. Sea  $f \simeq f'$  dado por un cilindro  $B$  y una homotopía  $h : B \rightarrow X$ , y  $f' \simeq f''$  dado por otro cilindro  $B'$  y una

<sup>30</sup>Son cilindros diferentes, aunque el objeto  $B$  es el mismo.

homotopía  $h' : B' \rightarrow X$ . Consideramos el pushout  $B''$  de  $i_1 : A \rightarrow B$  y  $i'_0 : A \rightarrow B'$  y el morfismo inducido  $p''$ :



Usando, por fin, la suposición que  $A$  es cofibrante sabemos que  $i_1$  es una cofibración acíclica, por tanto su pushout  $\bar{i}_1$  también lo es, y  $p''$  es una equivalencia débil por M2. Pero no podemos decir que tenemos un cilindro  $(B'', i'', p'')$  porque no sabemos si  $i'' = (\bar{i}_0 i_0, \bar{i}_1 i'_1) : A \cup A \rightarrow B''$  es una cofibración. No obstante, podemos factorizar  $i'' = q i''' : A \cup A \rightarrow B''' \rightarrow B'' \rightarrow B''$  una cofibración seguida por una fibración acíclica, y ahora  $(B''', i''', p'' q)$  sí que es un cilindro.



Finalmente, las homotopías  $h, h'$  inducen  $h'' : B'' \rightarrow X$ , y  $h'' q : B''' \rightarrow X$  es una homotopía  $f \simeq f''$ .

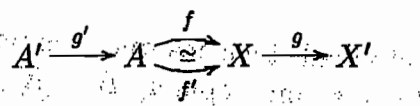
**Definición:** Para  $A \in \mathcal{C}$  cofibrante, escribimos

$$[A, X] = \mathcal{C}(A, X) / \simeq,$$

las clases de homotopía respecto a un cilindro de morfismos  $A \rightarrow X$  en  $\mathcal{C}$ .

### 2.1.4 Composición de homotopías y morfismos

Consideramos la situación siguiente:



Nos gustaría que homotopía respecto a un cilindro fuera compatible con composición. La mitad del resultado es fácil.

**Lema:** Si  $f, f' : A \rightarrow X$  son homótopos respecto a un cilindro  $B$ , por una homotopía  $h : B \rightarrow X$ , entonces  $gf, gf' : A \rightarrow X'$  son homótopos respecto a  $B$  por la homotopía  $gh : B \rightarrow X \rightarrow X'$ , para cualquier  $g : X \rightarrow X'$ .

La otra mitad es más complicada; hace falta que  $X$  sea fibrante:

**Lema:** Si  $f, f' : A \rightarrow X$  son homótopos respecto a un cilindro y  $X$  es un objeto fibrante, entonces  $f'g', fg' : A' \rightarrow X$  también son homótopos respecto a un cilindro, para cualquier  $g' : A' \rightarrow A$ .

En cambio, si en vez de usar una noción de homotopía respecto a cilindros, usamos un noción dual de homotopía respecto a espacios de caminos, es el primer lema que es difícil y el segundo que es fácil...

### 2.1.5 Caminos y homotopía

Un objeto de caminos en un objeto  $X \in \mathcal{C}$  es objeto  $Y$  y una factorización

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{ED}} & Y \\ & \searrow^{i_Y} & \downarrow p_Y \text{ Fib} \\ & & X \times X \end{array}$$

por  $Y$  del morfismo 'diagonal'  $(\text{id}, \text{id}) : X \rightarrow X \times X$ , tal que  $i_Y \in \text{ED}$  y  $p_Y \in \text{Fib}$ .

Por M5(ii) todo objeto  $X$  tiene un objeto de caminos.

Escribimos  $p_0, p_1 : Y \rightarrow X$  para las composiciones  $Y \xrightarrow{p_Y} X \times X \rightrightarrows X$ . Entonces:

- i)  $p_0, p_1$  son siempre equivalencias débiles.
- ii) Si  $X$  es fibrante entonces  $p_0$  y  $p_1$  son fibrationes acíclicas.

Dos morfismos  $f, g : A \rightrightarrows X$  son **homótopos**  $f \simeq g$  respecto a un objeto de caminos si existe un objeto de caminos  $Y$  en  $X$  y una **homotopía**  $h : A \rightarrow Y$  con  $p_0h = f$  y  $p_1h = g$ .

**Lema:** Si  $f, g$  son homótopos respecto a algún objeto de caminos, entonces  $f \in \text{ED} \Leftrightarrow g \in \text{ED}$ .

**Teorema:** Si  $X$  es fibrante, entonces la relación de homotopía respecto a un objeto de caminos es una relación de equivalencia.

Para  $X \in \mathcal{C}$  fibrante, escribimos  $[A, X] = \mathcal{C}(A, X) / \simeq$ , las clases de homotopía respecto a objetos de caminos.

**Lema:** Si  $f, f' : A \rightarrow X$  son homótopos respecto a un objeto de caminos  $Y$ , por una homotopía  $h : A \rightarrow Y$ , y  $g' : A' \rightarrow A$  es cualquier morfismo, entonces  $fg', f'g' :$

$A' \rightarrow X$  son homótopos respecto al objeto de caminos  $Y$  por la homotopía  $hg' : A' \rightarrow A \rightarrow Y$ .

[Más difícil] Si  $A$  es cofibrante y  $g : X \rightarrow X'$  es cualquier morfismo, entonces  $gf, gf' : A \rightarrow X'$  también son homótopos respecto a un objeto de caminos.

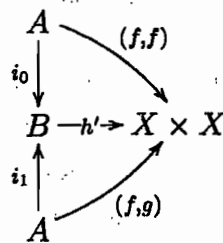
### 2.1.6 Una homotopía es una homotopía es una homotopía...

El teorema siguiente nos dice que en ciertas circunstancias es lo mismo considerar homotopía respecto a cilindros o respecto a objetos de caminos, y que tampoco importa la elección del cilindro (o objeto de caminos).

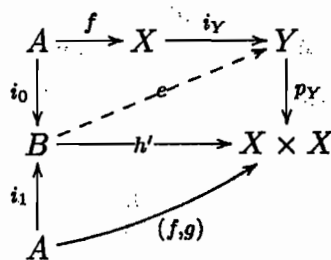
**Teorema:** Sean  $A$  cofibrante,  $X$  fibrante, y  $f, g : A \rightarrow X$ . Entonces

- (i)  $f, g$  son homótopos respecto a algún cilindro en  $A$
- $\Leftrightarrow$  (ii)  $f, g$  son homótopos respecto a algún objeto de caminos en  $X$
- $\Leftrightarrow$  (iii)  $f, g$  son homótopos respecto a todos los cilindros en  $A$
- $\Leftrightarrow$  (iv)  $f, g$  son homótopos respecto a todos los objetos de caminos en  $X$ .

*Demostración:* En la cadena  $(i) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$  la segunda implicación y la última son triviales, y la primera y tercera son duales. Para demostrar  $(i) \Rightarrow (iv)$ , supongamos que tenemos  $f, g$  homótopos respecto a un cilindro  $(B, i_B, p_B)$  en  $A$ , por una homotopía  $h : B \rightarrow X$  con  $hi_0 = f, hi_1 = g$ . Entonces los morfismos  $(f, f), (f, g) : A \rightarrow X \times X$  también son homótopos respecto a  $B$ , por la homotopía  $h' = (fp_B, h) : B \rightarrow X \times X$  dada por la homotopía constante en el primer factor y  $h$  en el segundo.



Ahora sea  $(Y, i_Y, p_Y)$  cualquier objeto de caminos en  $X$ . Entonces el morfismo  $(f, f)$  factoriza  $(f, f) = p_Y i_Y f : A \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow X \times X$  y volvemos a escribir el diagrama anterior en la forma



Tenemos  $i_0 \in \text{Cof} \cap \text{ED}$  porque  $A$  es *cofibrante*,  $p_Y \in \text{Fib}$  por definición de un objeto de caminos, y por M5(ii) existe una elevación  $e : B \rightarrow Y$ . En particular  $p_Y e i_1 = (f, g)$ , es decir, el morfismo  $k = e i_1 : A \rightarrow Y$  es una homotopía  $f \simeq g$  respecto al objeto de caminos  $(Y, i_Y, p_Y)$ .

### 2.1.7 Equivalencia homotópica

**Definición:** Dos objetos  $X, Y$  son **homotópicamente equivalentes**,  $X \simeq Y$ , si existen morfismos  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $gf \simeq \text{id}_X$  y  $fg \simeq \text{id}_Y$  [para algunos cilindros o espacios de caminos en  $X, Y$ ].

Esta relación no será de equivalencia ni comportarse bien con la composición si no suponemos que los objetos  $X, Y$  son fibrantes y cofibrantes. En este caso, podemos demostrar una suerte de teorema de Whitehead. Primero hacemos unos casos especiales:

**Lema:** (a) Una fibración acíclica  $r : A \rightarrow X$  con  $X$  cofibrante es un retracto de deformación.

(a') Una cofibración acíclica  $i : X \rightarrow A$  con  $X$  fibrante es un retracto de deformación.

(b) Cualquier retracto de deformación es una equivalencia débil.

*Demostración:* (a) Por M4(i) hay un morfismo  $i : X \rightarrow A$  con  $ri = \text{id}_X$ :

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & A \\ \text{Cof} \downarrow & \nearrow i & \downarrow r \text{ Fib} \cap \text{ED} \\ X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \end{array}$$

Queremos también  $ir \simeq \text{id}_A$ . Para cualquier cilindro  $(B, i_B, p_B)$  en  $A$ , el diagrama siguiente conmuta ya que  $r(ir, \text{id}_A) = (rir, r) = (r, r) = r(\text{id}_A, \text{id}_A)$ , y tenemos una elevación  $h : B \rightarrow A$ :

$$\begin{array}{ccc} A \cup A & \xrightarrow{(ir, \text{id})} & A \\ i_B \downarrow & \nearrow h & \downarrow r \\ B & \xrightarrow{p_B} & A \xrightarrow{r} X \end{array}$$

Es decir,  $h$  es una homotopía  $ir \simeq \text{id}_A$  respecto al cilindro  $Y$ .

(b) Sean  $i : X \rightarrow A$ ,  $r : A \rightarrow X$ , con  $ir \simeq \text{id}_A$ ,  $ri = \text{id}_X$ . Entonces  $ir$  es una equivalencia débil, ya que  $\text{id}_A$  lo es. Pero el morfismo  $r$  es un retracto de  $ir$ , como se ve en el diagrama, por tanto  $r$  es una equivalencia débil (por M3) y  $i$  también

(por M2).

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\text{id}} & A & \xrightarrow{\text{id}} & A \\
 r \downarrow & & ir \downarrow & & r \downarrow \\
 X & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{r} & X
 \end{array}$$

Ahora podemos demostrar un teorema de Whitehead para cualquier categoría de modelos.

**Teorema:** Sean  $X, A$  fibrantes y cofibrantes. Entonces son débilmente equivalentes si y sólo si son homotópicamente equivalentes.

*Demostración:*  $\Rightarrow$ ) Hemos visto que cualquier equivalencia débil  $f : X \rightarrow A$  se puede factorizar  $f = pi : X \rightarrow Q \rightarrow A$  donde  $i : X \rightarrow Q$  es una cofibración acíclica y  $p : Q \rightarrow A$  es una fibración acíclica. Como  $A$  es fibrante y  $X$  cofibrante,  $Q$  también es fibrante y cofibrante. Por el lema (a) y su dual (a') vemos que el morfismo  $p$ , y dualmente  $i$ , son equivalencias homotópicas; de hecho  $X, A$  son retratos de deformación de  $Q$ . Como todo es fibrante y cofibrante existe una equivalencia homotópica  $X \simeq A$ .

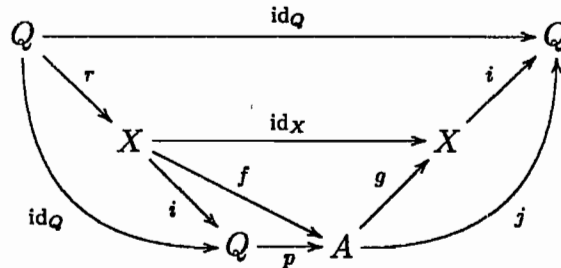
$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $f : X \rightarrow A, g : A \rightarrow X$  dan una equivalencia homotópica  $X \simeq A$ , y factorizamos  $f$  como una cofibración acíclica  $i : X \rightarrow Q$  seguida por una fibración  $p : Q \rightarrow A$ . Como  $A$  es fibrante y  $X$  cofibrante, observamos que  $Q$  también es fibrante y cofibrante. Queremos demostrar que  $p$  es también acíclica. De hecho, veremos que es un retrato de deformación y el resultado sigue por el lema (b).

Sea  $h : B \rightarrow A$  una homotopía  $fg \simeq \text{id}_A$  respecto a un cilindro  $B$ . Como  $A$  es cofibrante,  $i_0 : A \rightarrow B$  es una cofibración acíclica y tiene la propiedad de extensión respecto a  $p$ ; por tanto existe una elevación de  $h$  a una homotopía  $k : B \rightarrow Q$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{g} & X & \xrightarrow{i} & Q \\
 i_0 \downarrow & & & \nearrow k & \downarrow p \\
 B & \xrightarrow{h} & A & & \\
 i_1 \uparrow & & \nearrow \text{id}_A & & \\
 A & & & & 
 \end{array}$$

Tenemos  $k : gi \simeq j$  con  $j = ki_1$ , y  $pj = \text{id}_A$ . Para demostrar  $jp \simeq \text{id}_Q$  consideramos tres homotopías:  $gi \simeq j, gf \simeq \text{id}_X$ , y  $ir \simeq \text{id}_Q$  donde  $r : Q \rightarrow X$  es la retracción de  $i$  dada por el lema (a'). Como todos los objetos son fibrantes y cofibrantes, estas homotopías se pegan según el siguiente diagrama 'homotópicamente conmutativo'

para dar una homotopía entre  $jp$  y  $id_Q$ .



## 2.2 Álgebra homotópica en una categoría de modelos

Asociada a una categoría de modelos hay muchas estructuras análogas a nociones clásicas del álgebra homológica. Intentaremos compilar una forma (aproximada) de **diccionario**:

ÁLGEBRA HOMOLÓGICA	ÁLGEBRA HOMOTÓPICA
complejo de cadenas	objeto (simplicial)
... de módulos proyectivos	objeto cofibrante
isomorfismo en homología	equivalencia débil (ED)
homotopía de cadenas	homotopía respecto a un cilindro ... o a un objeto de caminos
resolución proyectiva	reemplazo cofibrante
categoría derivada	categoría de homotopía
funtor exacto	funtor que preserva EDs
funtor derivado (total)	funtor derivado (total)
funtor exacto a la izquierda	un adjunto a la izquierda y/o que preserva cofibraciones (acíclicas)
funtor exacto a la derecha	un adjunto a la derecha y/o que preserva fibraciones (acíclicas)
$\lim^1, \lim^1, \lim^n, \lim^n$ $\leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \rightarrow$	holim, hocolim
...	...

### 2.2.1 Reemplazo (co)fibrante

El teorema que todo objeto es débilmente equivalente a un objeto fibrante o cofibrante ahora está incluido en el axioma (M5). Dado cualquier objeto  $X$  en una categoría de modelos  $\mathcal{C}$  el axioma M5(i) dice que podemos elegir una factorización de  $\emptyset \rightarrow X$ :

$$\emptyset \xrightarrow{\text{Cof}} QX \xrightarrow[\text{ED}]{\text{Fib}} X$$

Así tenemos  $QX$  cofibrante y débilmente equivalente a  $X$ . Si  $X$  ya es cofibrante, tomamos  $QX = X$ .

Dualmente, por M5(ii) podemos reemplazar  $X \in \mathcal{C}$  por un objeto fibrante  $RX$ :

$$X \xrightarrow[\text{ED}]{\text{Cof}} RX \xrightarrow{\text{Fib}} *$$

Este **reemplazo fibrante** o **cofibrante** de objetos se puede hacer *funtorialmente*:

Sea  $\pi\mathcal{C}_c$  la categoría con objetos los objetos cofibrantes de  $\mathcal{C}$ , y morfismos  $X \rightarrow Y$  dado por clases de equivalencia de morfismos en  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\pi\mathcal{C}_c) &= \{ A \text{ cofibrante en } \mathcal{C} \} \\ \pi\mathcal{C}_c(A, Y) &= \mathcal{C}(A, Y) / \cong \end{aligned}$$

donde  $\cong$  es la *clausura transitiva* de la relación de homotopía respecto a *objetos de caminos*.

**Proposición:** Una elección de reemplazos cofibrantes de objetos define un funtor

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\xrightarrow{Q} \pi\mathcal{C}_c \\ A &\mapsto QA \\ A \xrightarrow{f} A' &\mapsto \text{la clase } [\bar{f}] \end{aligned}$$

donde  $\bar{f} : QA \rightarrow QA'$  es un morfismo tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} QA & \xrightarrow{\bar{f}} & QA' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & A' \end{array}$$

*Demostración:* Se define  $\bar{f}$  por una elección de elevación en el diagrama siguiente.

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{\quad} & QA' \\ \text{Cof} \downarrow & \nearrow \bar{f} & \downarrow \text{Fib} \cap \text{ED} \\ QA & \xrightarrow{\quad} & X \xrightarrow{f} A' \end{array}$$

Ahora se comprueba que la definición de  $\pi\mathcal{C}_c$  es la que hace falta para que  $f \rightarrow [\bar{f}]$  sea bien definida y funtorial:



Dualmente se puede definir  $\pi\mathcal{C}_f$  y un functor  $\mathcal{C} \rightarrow \pi\mathcal{C}_f$ . Aún mejor:

Sea  $\pi\mathcal{C}_{cf}$  la categoría con objetos los objetos de  $\mathcal{C}$  que son fibrantes y cofibrantes, y morfismos  $X \rightarrow Y$  dados por clases de homotopía<sup>31</sup> de morfismos  $X \rightarrow Y$  en  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned}\text{Ob}(\pi\mathcal{C}_{cf}) &= \{ A \text{ fibrante y cofibrante en } \mathcal{C} \} \\ \pi\mathcal{C}_{cf}(X, Y) &= [X, Y]\end{aligned}$$

**Proposición:** El functor “reemplazo fibrante” induce un functor  $R' : \pi\mathcal{C}_c \rightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$  y en particular la composición con el reemplazo cofibrante define un functor  $\mathcal{C} \rightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{Q} & \pi\mathcal{C}_c \\ & \searrow & \downarrow R' \\ & & \pi\mathcal{C}_{cf} \end{array}$$

Este functor nos permite dar la siguiente definición.

**Definición:** La categoría de homotopía  $\text{Ho}\mathcal{C}$  asociada a una categoría de modelos  $\mathcal{C}$  es la categoría con objetos los objetos de  $\mathcal{C}$  y morfismos  $X \rightarrow Y$  las clases de homotopía de morfismos entre los reemplazos fibrante-cofibrantes de  $X$  e  $Y$ .

$$\begin{aligned}\text{Ob}(\text{Ho}\mathcal{C}) &= \{ A \text{ en } \mathcal{C} \} \\ \text{Ho}\mathcal{C}(X, Y) &= [R'QX, R'QY]\end{aligned}$$

Además, hay un functor  $T : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$  dado por  $TX = X$  y  $T(X \xrightarrow{f} Y) = R'QX \xrightarrow{R'Q(f)} R'QY$ .

**Observación:** Esencialmente por el teorema de Whitehead de la sección anterior, tenemos

$$f \in \mathcal{C} \text{ es una equivalencia débil} \Leftrightarrow T(f) \text{ es un isomorfismo en } \text{Ho}\mathcal{C}$$

**Teorema:** La categoría de homotopía  $\text{Ho}\mathcal{C}$  es la localización<sup>32</sup> de  $\mathcal{C}$  obtenida invirtiendo las equivalencias débiles:

<sup>31</sup>Aquí podemos decir ‘respecto a cualquier cilindro o objeto de caminos’.

<sup>32</sup>O ‘categoría de fracciones’, comparar Gabriel-Zisman.

- todo functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  con  $F(f)$  un isomorfismo en  $\mathcal{D}$  para cada equivalencia débil  $f$  en  $\mathcal{C}$  factoriza por  $T$ , de manera única hasta isomorfismo natural.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\
 \searrow T & & \nearrow \exists! \\
 & \text{Ho } \mathcal{C} &
 \end{array}
 , \quad F(\text{ED}) \subseteq \text{isomorfismos}$$

Se puede considerar la situación cuando  $\mathcal{D}$  también es una categoría de modelos.

**Corolario:** Si  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  son categorías de modelos y  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un functor que preserva equivalencias débiles, entonces hay un único functor  $\text{Ho } F$  inducido entre las asociadas categorías de homotopía:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Ho } \mathcal{C} & \xrightarrow{\exists! \text{ Ho } F} & \text{Ho } \mathcal{D}
 \end{array}
 , \quad F(\text{ED}) \subseteq \text{ED}$$

En general, ¿qué pasa si  $F$  no manda equivalencias débiles a isomorfismos? ¿Aún podría inducir un functor  $\overline{F}$  en homotopía? El diagrama siguiente no puede conmutar porque  $T$  sí que manda ED a isomorfismos,

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\
 \searrow T & & \nearrow \overline{F} \\
 & \text{Ho } \mathcal{C} &
 \end{array}$$

No obstante, es posible que conmute “hasta homotopía”...

### 2.2.2 Abstracción: Extensiones de Kan

Consideramos categorías  $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$  y un functor  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ . Composición con  $G$  define un functor entre las categorías de funtores y transformaciones naturales,

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Fun}(\mathcal{E}, \mathcal{D}) & \xrightarrow{G^*} & \text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \\
 H & \longmapsto & H \circ G
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\
 \searrow G & & \nearrow H \\
 & \mathcal{E} &
 \end{array}$$

**Idea:** Si no se puede esperar que  $G^*$  tenga inverso, quizás un adjunto sí:

Para un<sup>33</sup> funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  queremos un funtor  $\text{Lan}_G F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$  con una biyección

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{transformaciones naturales} \\ \text{Lan}_G F \rightarrow H \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{c} \text{transformaciones naturales} \\ F \rightarrow H \circ G \end{array} \right\},$$

natural para todo  $H : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ .

**Definición:** Un funtor  $\text{Lan}_G F$  con esta propiedad es una **extensión de Kan (a la izquierda)** de  $F$  respecto a  $G$ .

Para  $\text{Lan}_G F$  una extensión de Kan, no es verdad que  $F = \text{Lan}_G F \circ G$ , pero hay una transformación natural

$$a : F \rightarrow \text{Lan}_G F \circ G,$$

que corresponde a la identidad  $\text{Lan}_G F \rightarrow \text{Lan}_G F$  tomando  $H = \text{Lan}_G F$  en la definición, y cualquier otra transformación natural  $a' : F \rightarrow H \circ G$  para  $H : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$  factoriza por  $a$  de manera única, es decir,  $\exists! b : \text{Lan}_G F \rightarrow H$ ,  $a' = bG \circ a$ ,

Así  $\text{Lan}_G F$  es “la mejor” factorización hasta transformación natural. Pero hay otra, dual, que también es “la mejor”:

**Definición:** Un funtor  $\text{Ran}_G F$  con una biyección

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{transformaciones naturales} \\ H \rightarrow \text{Ran}_G F \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{c} \text{transformaciones naturales} \\ H \circ G \rightarrow F \end{array} \right\},$$

natural para todo  $H : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ , es una **extensión de Kan (a la derecha)** de  $F$  respecto a  $G$ .

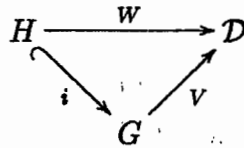
También está definida por su propiedad universal:

Hay una transformación canónica  $a : \text{Ran}_G F \circ G \rightarrow F$  tal que cualquier otra transformación natural  $a' : H \circ G \rightarrow F$  factoriza de manera única por  $a$ .

<sup>33</sup>De hecho, no buscamos un adjunto de verdad — para un adjunto se pediría “para todo” aquí.

### 2.2.3 Ejemplos de extensiones de Kan

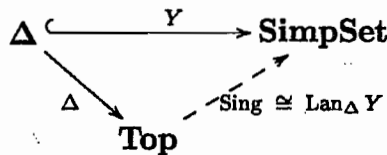
1. Para el functor  $G : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$  tomamos  $i : H \hookrightarrow G$ , la inclusión de un subgrupo en un grupo. Recordamos que un grupo es simplemente una categoría con un objeto y todo morfismo invertible. Sea  $\mathcal{D}$  la categoría de espacios vectoriales o de grupos abeliano, por ejemplo.



Un functor  $G \rightarrow \mathcal{D}$  es una *representación*  $V$  de  $G$ , y la composición con  $i$  es la restricción  $W = \text{res}_H^G V$ . Hay una extensión de Kan a la izquierda de cualquier representación  $W : H \rightarrow \mathcal{D}$ , de hecho  $\text{Lan}_i W$  es la representación inducida  $\text{ind}_H^G W$ , ya que sabemos

$$\{ G\text{-mapas } \text{ind}_H^G W \rightarrow V \} \cong \{ H\text{-mapas } W \rightarrow \text{res}_H^G V \}$$

2. Tomamos  $\mathcal{C}$  la categoría simplicial,  $\mathcal{D}$  la categoría de conjuntos simpliciales, y  $\mathcal{E}$  la categoría de espacios topológicos, por ejemplo. Consideramos la situación siguiente:



*Ejercicio:* Existe la extensión de Kan a la izquierda del functor de Yoneda respecto a  $\Delta$ ; viene dada por el complejo singular.

### 2.2.4 Funtores derivados

Volvemos a categorías de modelos, y aplicamos la teoría de extensiones de Kan respecto a  $\mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$  a funtores  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  que no necesariamente mandan equivalencias débiles a isomorfismos. Desafortunadamente hay un conflicto de notación entre los categoristas y los algebristas homológicos.

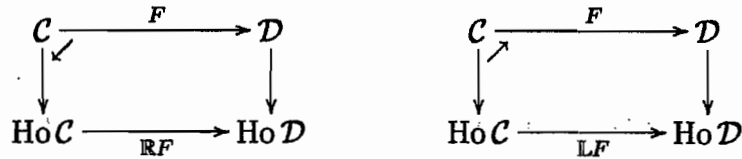
**Definición:** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos. La extensión de Kan a la izquierda (derecha) de un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  respecto a la localización  $T : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{C}$  se llama el **functor derivado a la derecha** (respectivamente izquierda) de  $F$ .

$$RF = \text{Lan}_T F$$

$$LF = \text{Ran}_T F$$



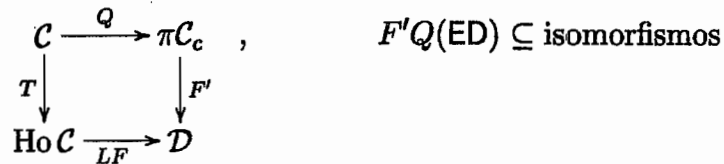
Si las dos categorías  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  son categorías de modelos, los funtores derivados de  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{T} \text{Ho } \mathcal{D}$  se llaman los **funtores derivados totales**.



Si existen, son únicos<sup>34</sup>.

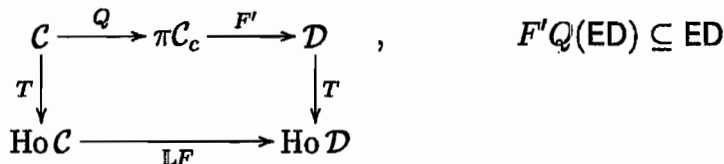
**Teorema:** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos y  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $F(A \xrightarrow{f} X)$  es un isomorfismo para toda cofibración acíclica  $f$  entre objetos cofibrantes. Entonces  $F$  tiene un funtor derivado a la izquierda, con  $LF(X) = FX$  para  $X$  cofibrante.

*Demostración:* (Idea) Aplicar el “reemplazo cofibrante”  $Q$  antes de aplicar  $F$ . La condición sobre  $F$  es suficiente (¡ejercicio!) para que manda toda equivalencia débil entre objetos cofibrantes a un isomorfismo, y que  $F$  induce un funtor  $F' : \pi\mathcal{C}_c \rightarrow \mathcal{D}$ . Por tanto la composición  $F'Q$  induce un funtor en homotopía.



Hay que comprobar también que la transformación natural  $LF \circ T = F'Q \rightarrow F$ , dada por las fibraciones acíclicas  $QX \xrightarrow{\sim} X$ , es universal.

**Corolario:** Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un funtor entre categorías de modelos tal que  $F(A \xrightarrow{f} X)$  es una equivalencia débil para toda cofibración acíclica  $f$  entre objetos cofibrantes. Entonces  $F$  tiene un funtor derivado total a la izquierda.



Tenemos también el teorema y corolario dual: ‘preservación’ de fibraciones acíclicas entre objetos fibrantes es suficiente para garantizar la existencia de funtores derivados a la derecha.

<sup>34</sup>Hasta isomorfismo natural.

**2.2.5 Adjuntos y equivalencias de categorías de homotopía**

Ahora supongamos que  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  son categorías de modelos y que

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{D} \\ & G & \end{array}$$

son funtores con  $F$  el adjunto a la izquierda de  $G$ . Supongamos también que

- 1)  $F$  manda cofibraciones en  $\mathcal{C}$  a cofibraciones<sup>35</sup> en  $\mathcal{D}$ , y
- 2)  $G$  manda fibraciones en  $\mathcal{D}$  a fibraciones<sup>36</sup> en  $\mathcal{C}$ .

Entonces:

- 1')  $G$  manda fibraciones acíclicas en  $\mathcal{D}$  a fibraciones acíclicas en  $\mathcal{C}$ , y
- 2')  $F$  manda cofibraciones acíclicas en  $\mathcal{C}$  a cofibraciones acíclicas en  $\mathcal{D}$ .

[*Demostración:* (1) dice que para todo  $i \in \text{Cof}$  en  $\mathcal{C}$  y todo  $p \in \text{Fib} \cap \text{ED}$  en  $\mathcal{D}$ , existe una elevación en el primero de los siguientes diagramas; (1') dice lo mismo para el segundo diagrama.

$$\begin{array}{ccc} FA & \longrightarrow & X \\ F(i) \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ FB & \longrightarrow & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & GX \\ i \downarrow & \nearrow & \downarrow G(p) \\ B & \longrightarrow & GY \end{array}$$

Pero como  $F$  y  $G$  son adjuntos las existencias de las dos elevaciones son equivalentes, así que (1)  $\Leftrightarrow$  (1'). Similarmente, (2)  $\Leftrightarrow$  (2').]

Pero si  $F, G$  verifican (1') y (2') sabemos que existen los funtores derivados totales

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{L}F & \\ \text{Ho } \mathcal{C} & \xrightarrow{\quad} & \text{Ho } \mathcal{D} \\ & \mathbb{R}G & \end{array}$$

**Proposición:** Sean  $F, G$  funtores adjuntos que verifican las propiedades (1) y (2). Entonces los funtores derivados totales  $\mathbb{L}F, \mathbb{R}G$  también son adjuntos.

La demostración es una cuestión de que comprobar que, si existe una homotopía entre morfismos  $f, g : FA \rightarrow X$ , entonces se puede construir un homotopía entre los morfismos correspondientes  $A \rightarrow GX$ , y dualmente.

<sup>35</sup>Y por tanto manda objetos cofibrantes a objetos cofibrantes — como  $F$  es adjunto a la izquierda, respecta colímites automáticamente; en particular manda el morfismo  $\emptyset \rightarrow A$  en  $\mathcal{C}$  al morfismo  $\emptyset \rightarrow FA$  en  $\mathcal{D}$ .

<sup>36</sup>Y por tanto manda objetos fibrantes a objetos fibrantes.

El gran resultado de esta sección es el siguiente.

**Teorema:** Sean  $F, G$  funtores adjuntos entre categorías de modelos  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  que verifican las condiciones (1), (2) como antes, y además la condición:

3) Para todo  $A$  cofibrante en  $\mathcal{C}$  y  $X$  fibrante en  $\mathcal{D}$ , un morfismo  $f : FA \rightarrow X$  es una equivalencia débil en  $\mathcal{D}$  si y solamente si el morfismo correspondiente  $f' : A \rightarrow GX$  es una equivalencia débil en  $\mathcal{C}$ .

Entonces los funtores derivados  $\mathbb{L}F, \mathbb{R}G$  dan una equivalencia de categorías de homotopía,

$$\text{Ho } \mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbb{L}F} \\ \cong \\ \xleftarrow{\mathbb{R}G} \end{array} \text{Ho } \mathcal{D}.$$

*Demostración:* (*Idea*) Queremos ver, por ejemplo,  $(\mathbb{L}F)(\mathbb{R}G)X \cong X$  en  $\text{Ho } \mathcal{D}$  para cada  $X$ . En  $\mathcal{D}$ , esto significa una equivalencia débil  $FQGRX \xrightarrow{\sim} X$  donde  $R$  y  $Q$  son los reemplazos fibrantes y cofibrantes. Tenemos una equivalencia débil  $QGRX \xrightarrow{\sim} GRX$  por definición de  $Q$ , y por la condición (3) tenemos  $FQGRX \xrightarrow{\sim} RX$  al otro lado de la adjunción. Además tenemos  $X \xrightarrow{\sim} RX$  por definición de  $R$ .

### 2.3 Ejemplos de categorías de modelos

El teorema siguiente no es nada sorprendente. Su demostración usa un método para definir factorizaciones que no vamos a investigar en este seminario, denominado *el argumento de los objetos pequeños*.

**Teorema:** Las categorías de espacios topológicos, conjuntos simpliciales y complejos de cadenas de  $A$ -módulos tienen estructuras de categorías de modelos con las clases Cof, Fib, ED definidas según la tabla siguiente.

	Fib	Cof	ED
<b>Top</b>	de Serre		$\pi_*$ -iso
<b>SimpSet</b>	de Kan	inyectivos	
$\mathcal{C}_A$	suyectivos en grado $\geq 1$		$H_*$ -iso

Como hemos visto, sólo hace falta definir dos de las clases en cada ejemplo; los vacíos en la tabla están determinados por las otras clases en la misma fila, y ya vimos algunas caracterizaciones de ellas en las secciones anteriores.

Los ejemplos **Top** y **SimpSet** se relacionan por el teorema siguiente.

**Teorema:** Hay una equivalencia de categorías entre las categorías de homotopía de **Top** y **SimpSet** definida por los funtores derivados de la realización geométrica

y el complejo singular.

$$\text{Ho SimpSet} \begin{array}{c} \xrightarrow{L|-|} \\ \cong \\ \xleftarrow{\mathbb{R} \text{ Sing}} \end{array} \text{Ho Top} .$$

Esta equivalencia de categorías ya se conocía antes del trabajo de Quillen. Para ver uno de los ejemplos que le empujó a desarrollar toda la teoría de las categorías de modelos, consideramos las categorías de conjuntos simpliciales *n*-reducidos,  $\text{SimpSet}_n$ , que tiene objetos los conjuntos simpliciales  $K$  con  $K_{n-1} = \dots = K_0 = \{*\}$ . Habitualmente se consideran equivalentes  $\text{Ho SimpSet}_1$  y la categoría de homotopía de espacios topológicos conexos, y similarmente  $\text{Ho SimpSet}_2$  para espacios topológicos simplemente conexos<sup>37</sup>. Así el teorema siguiente [Quillen 1969] da una equivalencia muy explícita entre homotopía racional de espacios simplemente conexos y álgebra homológica en la categoría  $\text{DGL}_1$ , de álgebras de Lie diferencial-graduadas<sup>38</sup>  $L$  sobre  $\mathbb{Q}$  con  $L_0 = 0$ .

**Teorema:** Hay una equivalencia de categorías de homotopía

$$\text{Ho SimpSet}_2 \cong \text{Ho DGL}_1$$

Aquí las cofibraciones en  $\text{SimpSet}_2$  son las habituales (las inyecciones) pero las equivalencias débiles no: son los morfismos que inducen isomorfismos en *homología racional*. En  $\text{DGL}_1$  las fibraciones son las que son suryecciones en grados  $\geq 2$  y las equivalencias débiles son las que inducen isomorfismos en homología.

Sullivan, más o menos a la vez pero con técnicas completamente distintas, demostró un teorema dual<sup>39</sup> con álgebras asociativas en lugar de álgebras de Lie.

### 2.3.1 Categorías de modelos simpliciales

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría ‘algebraica’<sup>40</sup>, como por ejemplo las categorías de grupos, anillos, módulos sobre un anillo, etcétera. Un particular tendremos un funtor olvidar  $U$  a la categoría de conjuntos, con un adjunto a la izquierda dado por el funtor libre  $F$ :

$$\text{Set} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{U} \end{array} \mathcal{C}$$

<sup>37</sup> Aunque formalmente la categoría de espacios simplemente conexos no puede tener la estructura de una categoría de modelos como en general no tiene ni límites ni colímites. Por ejemplo, un pushout de espacios simplemente conexos no es siempre simplemente conexo.

<sup>38</sup> ¿Esto cómo se dice en español?

<sup>39</sup> Las *operadas* que definen álgebras de Lie y álgebras asociativas son duales.

<sup>40</sup> Digamos: una categoría con los objetos definidos por ‘álgebra universal’. En particular, tenemos nociones de generadores y relaciones de objetos de  $\mathcal{C}$ .



De la misma manera que antes hablamos de *conjuntos* simpliciales, siendo funtores  $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  o familias de conjuntos  $K_n$  y aplicaciones  $d_i, s_i$  entre ellos, tenemos también

**Definición:** Un objeto simplicial  $K$  en  $\mathcal{C}$  es un funtor contravariante de  $\Delta$  en  $\mathcal{C}$

$$K : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C},$$

o equivalentemente una familia de objetos  $K_n$  en  $\mathcal{C}$ ,  $n \geq 0$ , y morfismos  $d_i : K_n \rightarrow K_{n-1}$ ,  $s_i : K_n \rightarrow K_{n+1}$  en  $\mathcal{C}$  para  $0 \leq i \leq n$ , tal que se verifiquen las relaciones simpliciales en  $\mathcal{C}$ .

Escribimos  $s\mathcal{C}$  para la categoría de objetos simpliciales en  $\mathcal{C}$  (y transformaciones naturales entre ellos).

**Teorema:** La categoría  $s\mathcal{C}$  tiene una estructura de categoría de modelos con

- $f$  es una fibración en  $s\mathcal{C} \iff U(f)$  es una fibración en **SimpSet**,
- $f$  es una equivalencia débil en  $s\mathcal{C} \iff U(f)$  es una equivalencia débil en **SimpSet**.

Hay una caracterización elemental de la clase de cofibraciones determinada por estos datos:

**Proposición:** Un morfismo  $i : A \rightarrow B$  en  $s\mathcal{C}$  es una cofibración si y sólo si

1. es una inyección, es decir, para cada  $n \geq 0$ ,  $U(i)_n : UA_n \rightarrow UB_n$  es inyectiva como aplicación de conjuntos,
2. para cada  $n \geq 0$ , hay un isomorfismo natural

$$A_n * FX_n \cong B_n;$$

los  $X_n$  se consideran como conjuntos de generados libres de dimensión  $n$ , y tienen que ser estables respecto a las degeneraciones<sup>41</sup>, es decir,  $s_i x \in X_{n+1}$  para todo  $x \in X_n$  y  $0 \leq i \leq n$ .

Si  $\mathcal{C}$  es una categoría abeliana<sup>42</sup>, la estructura de categoría de modelos dada por el teorema está relacionada con la de los complejos de cadenas. Explícitamente, consideramos  $\mathcal{M}_A$  una categoría de  $A$ -módulos, y recordamos el siguiente resultado clásico:

<sup>41</sup>No hay ninguna condición de estabilidad respecto a las caras. Eso suena razonable dado que en la definición de cofibración de complejos de cadenas tampoco había ninguna condición sobre las  $\partial$ .

<sup>42</sup>Y chica.

**Teorema [Dold–Kan]:** El funtor **complejo de Moore**<sup>43</sup> que manda un  $A$ -módulo simplicial  $K$  al complejo de cadenas  $NK$  con

$$(NK)_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(K_n \xrightarrow{d_i} K_{n-1}), \quad \partial = d_n|_{(NK)_n}$$

define una *equivalencia de categorías*:

$$N : s\mathcal{M}_A \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}_A.$$

Ahora tenemos:

**Proposición:** La equivalencia de Dold–Kan preserva las estructuras de categorías de modelos: un morfismo  $f$  de  $A$ -módulos simpliciales es una equivalencia débil, una fibración o una cofibración si y sólo si  $N(f)$  lo es en  $\mathcal{C}_A$ .

En el caso que  $\mathcal{C}$  no es una categoría abeliana, si bien no tenemos una noción de complejo de cadenas en  $\mathcal{C}$ , aún podemos considerar álgebra homotópica en  $s\mathcal{C}$ . Así tenemos una suerte de álgebra homológica no abeliana.

*Ejemplo:* La noción de tomar una resolución proyectiva de un  $A$ -módulo  $M \in \mathcal{M}_A$  corresponde a tomar un reemplazo cofibrante del complejo de cadenas  $\iota(M) \in \mathcal{C}_A$ , donde el funtor  $\iota : \mathcal{M}_A \rightarrow \mathcal{C}_A$  es simplemente

$$\iota : M \mapsto (\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow M).$$

Más generalmente, sea  $\mathcal{C}$  una categoría para la cual tenemos una estructura de categoría de modelos en  $s\mathcal{C}$  aunque quizás no tenemos una noción de complejos de cadenas. Entonces lo que juega el papel de la resolución proyectiva de  $X \in \mathcal{C}$  es el reemplazo cofibrante en  $s\mathcal{C}$  del objeto simplicial  $c_X : \Delta^{op} \rightarrow \mathcal{C}$ , dado por el funtor *constante* en  $X$ ,

$$c_X \equiv \left( \dots \quad X \begin{array}{c} \xleftarrow{=} \\ \vdots \\ \xleftarrow{=} \end{array} X \begin{array}{c} \xrightarrow{=} \\ \vdots \\ \xrightarrow{=} \end{array} X \quad \dots \quad X \begin{array}{c} \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{=} \end{array} X \begin{array}{c} \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{=} \end{array} X \right)$$

Otra aplicación fue una definición de la **cohomología de André–Quillen**. En el *Lecture Notes*, Quillen había dado una definición bastante general de cohomología para objetos de una categoría de modelos, y un par de años después lo usó para investigar la cohomología de anillos conmutativos, vía la estructura canónica de categoría de modelos para los anillos conmutativos simpliciales.

<sup>43</sup>Observamos en particular que el complejo de Moore  $NK$  es un subcomplejo de  $(K, \partial = \sum \pm d_i)$ ; de hecho es un retracto de deformación.

## 2.4 “Otras” teorías de homotopía

Después de Quillen, algunos autores han sugerido axiomatizaciones alternativas. Hay definiciones de teorías de homotopía por:

H.-J. Baues, K. Brown, M. Grandis, A. Heller, K. Kamps

entre otros. Las críticas más comunes de la teoría de categorías de modelos de Quillen son:

- A veces es *demasiado fuerte* pedir, por ejemplo, que existen todos los límites, colímites, factorizaciones y propiedades de elevación.
- Se *pierde la intuición geométrica*: hay que saber las equivalencias débiles y (co)fibraciones antes de empezar. ¿De dónde vienen?

Miramos algunas de las definiciones alternativas.

### 2.4.1 Teorías más débiles

Hay dos autores que han desarrollado teorías que piden básicamente la mitad de lo que pide Quillen.

- K. BROWN en 1973, en el artículo *Abstract homotopy theory...*, Trans.A.M.S. 186,
- H.-J. BAUES en 1989, en el libro *Algebraic Homotopy*, Cambridge University Press.

Según Baues, por ejemplo, tenemos

**Definición:** Una categoría de cofibraciones es  $(\mathcal{C}, \text{Cof}, \text{ED})$  donde Cof, ED son clases de morfismos de la categoría  $\mathcal{C}$  tales que

C0 Las clases Cof y ED están cerradas bajo composición y contienen los isomorfismos.

*‘dos tercios’ del axioma correspondiente M0 de Quillen*

C1 Si  $f : A \rightarrow X$ ,  $i : A \rightarrow B$  son morfismos de  $\mathcal{C}$  con  $i \in \text{Cof}$ , entonces existe el pushout siguiente

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ \text{Cof} & & \downarrow \bar{f} \\ f \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\bar{f}} & X \cup_A B \end{array}$$

Además  $\bar{i} \in \text{Cof}$ , y si  $f \in \text{ED}$  entonces  $\bar{f}$  también.

*no pide la existencia de ningún límite ni de todo colímite, pero incluye propiedades de clausura*

C2 Si  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  con  $gf \in \text{ED}$  entonces  $f \in \text{ED} \Leftrightarrow g \in \text{ED}$

*igual que el axioma correspondiente M2 de Quillen*

C3 Todo morfismo  $A \rightarrow C$  de  $\mathcal{C}$  factoriza como  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  con  $f \in \text{Cof}$  y  $g \in \text{ED}$

*comparar el axioma de factorización M5(i) de Quillen*

C4 Para todo objeto  $A$  en  $\mathcal{C}$  existe un objeto  $RA$  y un morfismo  $i : A \rightarrow RA$  tales que

- $i \in \text{Cof} \cap \text{ED}$ , es decir,  $i$  es una cofibración acíclica.
- $RA$  es “fibrante”: toda cofibración acíclica  $j : RA \rightarrow B$  tiene una retracción  $r$ ,  $rj = \text{id}$

$$\begin{array}{ccc}
 RA & \xrightarrow{\text{id}} & RA \\
 \text{Cof} \cap \text{ED} \ni j \downarrow & & \nearrow r \\
 & & B
 \end{array}$$

*Es decir, todo objeto tiene un “reemplazo fibrante”. Comparar los axiomas de elevación y factorización M4 y M5 de Quillen.*

### 2.4.2 Teorías más “geométricas”

Hay diferentes teorías, por K. Kamps, por M. Grandis, y por el mismo Baues por ejemplo, basadas en la idea del “cilindro” como construcción básica.

Si  $\mathcal{C}$  una categoría, entonces un **cilindro** es un funtor  $I : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $X \mapsto IX$ . Por ejemplo, si  $\mathcal{C}$  es la categoría de CW-complejos<sup>44</sup>, el cilindro obvio es  $X \mapsto [0, 1] \times X$ .

Habitualmente se considera un cilindro con una **estructura** asociada, que viene dada formalmente por diferentes transformaciones naturales entre sus iteraciones

<sup>44</sup>Si  $\mathcal{C} = \text{SimpSet}$ , o mejor la subcategoría de conjuntos simpliciales *de Kan*, entonces el cilindro sería  $I(K) = \Delta[1] \times K$ , o  $\text{Ex}^\infty(\Delta[1] \times K)$ . Para complejos de cadenas se usaría el producto tensorial,  $I \otimes C$ , como vimos antes.

$I^n = I \circ \dots \circ I$ , con unos axiomas intuitivos. Como ya vimos en la introducción, es natural considerar:

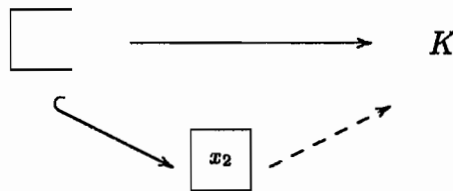
$$\begin{aligned} \text{id}_C &\xrightarrow[i_1]{i_0} I \quad (\text{también } I^{n-1} \xrightarrow[i_1^{(r)}]{i_0^{(r)}} I^n) \\ I &\xrightarrow{p} \text{id}_C \quad \text{tal que } pi_0 = pi_1 = \text{id} \\ I^2 &\xrightarrow{m} I \quad \text{tal que } m(Ii_0) = m(i_0I) = i_0p \\ &\quad \text{y } m(Ii_1) = m(i_1I) = \text{id}_I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{en CW: } i_\alpha(x) &= (\alpha, x), \quad \alpha \in \{0, 1\} \\ p(t, x) &= x, \quad t \in [0, 1] \\ m(s, t, x) &= (\min(s, t), x), \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Aquí tenemos un ejemplo natural de un **conjunto cúbico**: para  $X, Y \in \mathcal{C}$  consideramos todas las aplicaciones en  $Y$  de las iteraciones del cilindro en  $X$ ,

$$C_\square(X, Y) = \{ \text{aplicaciones } I^n X \rightarrow Y \},$$

con las “caras” y “degeneraciones” inducidas por composición con las aplicaciones  $I^{n-1}X \rightarrow I^nX$  e  $I^{n+1}X \rightarrow I^nX$  generadas por  $i_0$  e  $i_1$  y por  $p$  y  $m$ . De hecho se puede considerar la homotopía de conjuntos cúbicos abstractos de la misma manera que conjuntos simpliciales; en este contexto “ $K$  fibrante” significa poder “llenar cajas” en  $K$ :



Copiando la teoría simplicial, se puede obtener

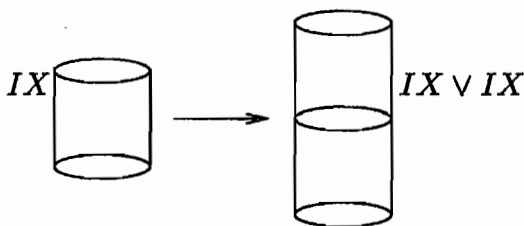
**Teorema:**  $\text{Ho CubSet} \cong \text{Ho CW}$

Volviendo a la estructura del cilindro, también se pueden considerar reversibilidad y composición de cilindros, y la simetría del cilindro iterado. Formalmente se pueden pedir transformaciones naturales

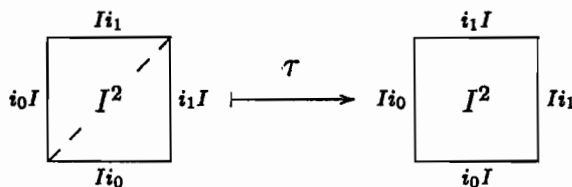
- $r : I \rightarrow I$  tal que  $r^2 = \text{id}$ ,  $ri_0 = i_1$ , y  $pr = p$ ,
- $c : I \rightarrow I \vee I$  donde  $I \vee I$  viene definido por el pushout

$$\begin{array}{ccc} \text{id} & \xrightarrow{i_0} & I \\ i_1 \downarrow & & \downarrow \\ I & \longrightarrow & I \vee I. \end{array}$$

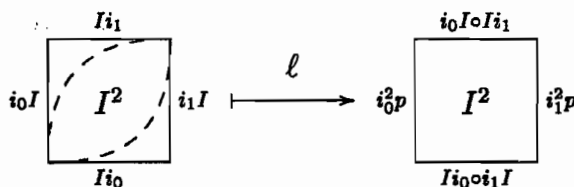
de forma gráfica:



- $\tau : I^2 \rightarrow I^2$  que intercambia las dos coordenadas



Grandis pide, además, el colapso lenticular  $\ell : I^2 \rightarrow I^2$



Baues relaciona explícitamente el cilindro con las cofibraciones. En particular, para  $i : A \rightarrow B$  una cofibración en  $\mathcal{C}$ , le interesa el **cilindro relativo**  $A \rightarrow I_A B$  formado por el pushout

$$\begin{array}{ccc} IA & \xrightarrow{Ii} & IB \\ p \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & I_A B. \end{array}$$

**Definición:** [Baues] Una  $I$ -categoría es  $(\mathcal{C}, \text{Cof}, I, \emptyset)$  donde  $\mathcal{C}$  es una categoría con objeto inicial  $\emptyset$ ,  $\text{Cof}$  es una clase de cofibraciones e  $I : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  es un funtor cilindro con la estructura  $i_0, i_1 : \text{id} \rightarrow I$ ,  $p : I \rightarrow \text{id}$ ,  $t : I^2 \rightarrow I^2$ , tal que se verifiquen los axiomas siguientes:

- I0  $\text{Cof}$  está cerrada bajo composición y contiene los isomorfismos y los morfismos canónicos  $\emptyset \rightarrow A$  [es decir: todo objeto es cofibrante]

- I1 Si  $f: A \rightarrow X$ ,  $i: A \rightarrow B$  son morfismos de  $\mathcal{C}$  con  $i$  una cofibración, entonces existe el pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ f \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ X & \xrightarrow{\bar{i}} & X \cup_A B \end{array}$$

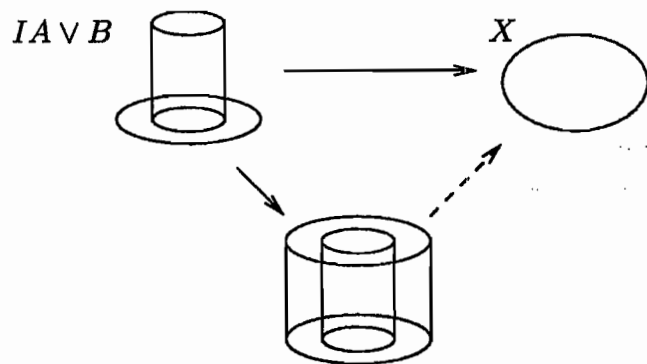
y el morfismo  $\bar{i}$  también es una cofibración [*comparar C1*]

- I2  $I(\emptyset) = \emptyset$ ,  $I(\text{pushout}) = \text{pushout}$ <sup>45</sup>

- I3 Las cofibraciones tienen la propiedad de extensión de homotopías

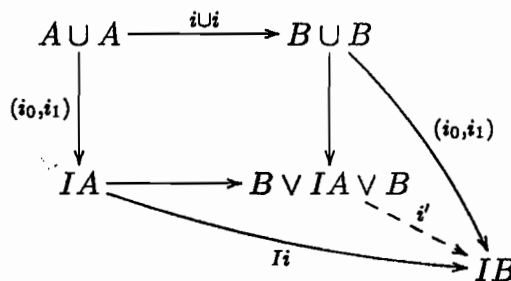
$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & B & & \\ \downarrow i_0 & & \downarrow i_0 & \searrow f & \\ IA & \xrightarrow{Ii} & IB & \xrightarrow{\exists} & X \\ & \searrow h & & & \end{array}$$

Graficamente esto se representa por:

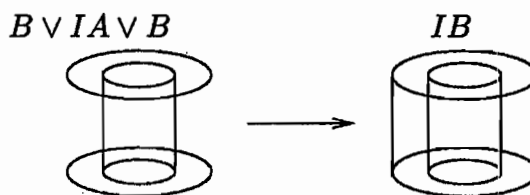


<sup>45</sup>Y  $I(\text{Cof}) \subseteq \text{Cof}$ ?

I4 Para toda cofibración  $i : A \rightarrow B$  en  $\mathcal{C}$ , el morfismo  $i' : B \vee IA \vee B \rightarrow IB$  también es una cofibración, donde  $i'$  es el morfismo canónico definido por el pushout<sup>46</sup> siguiente.



graficamente:



Las  $I$ -categorías se pueden pensar como ejemplos geométricos de categorías de cofibraciones.

**Proposición:** Sea  $(\mathcal{C}, \text{Cof}, I)$  una  $I$ -categoría, y sea  $\text{ED}$  la clase de morfismos definida por las equivalencias homotópicas respecto al cilindro  $I$ ,

$$\text{ED} = \{ f : A \rightarrow B \mid \exists g : B \rightarrow A, h : IA \rightarrow A, k : IB \rightarrow B, h : gf \simeq \text{id}_A, k : fg \simeq \text{id}_B \}.$$

Entonces  $(\mathcal{C}, \text{Cof}, \text{ED})$  es una categoría de cofibraciones.

Para más detalles, ejemplos y cálculos, véase el libro [Baues 1989], y también [Baues 1991].

### 2.4.3 Teorías simpliciales

Otra manera de formalizar la teoría de homotopía es usar categorías enriquecidas para aplicar la teoría simplicial en situaciones más generales.

Sea  $\mathcal{E}$  una categoría con productos cartesianos, o más generalmente con una noción de producto tensorial. Entonces una categoría  $\mathcal{C}$  es **enriquecida** sobre  $\mathcal{E}$  si

<sup>46</sup>Este pushout existe en  $\mathcal{C}$  por II, ya que  $A \cup A \rightarrow B \cup B$  es una cofibración — factoriza como  $A \cup A \rightarrow A \cup B \rightarrow B \cup B$  y estos morfismos se pueden escribir como los pushouts de  $A \rightarrow A \cup A$ ,  $A \rightarrow A \cup B$  y la cofibración  $i : A \rightarrow B$ .



- para  $X, Y \in \text{Ob}\mathcal{C}$  la colección de morfismos  $\mathcal{C}(X, Y)$  tiene la estructura de un objeto de  $\mathcal{E}$ ,
- la composición en  $\mathcal{C}$  respecta la estructura, es decir, las aplicaciones

$$\mathcal{C}(X, Y) \otimes \mathcal{C}(Y, Z) \xrightarrow{\circ} \mathcal{C}(X, Z)$$

son morfismos en  $\mathcal{E}$ .

*Ejemplos:*

1. Una **categoría aditiva**  $\mathcal{C}$  es una categoría enriquecida sobre la categoría de grupos abelianos, con  $\otimes = \otimes_{\mathbb{Z}}$ . Así cada  $\mathcal{C}(X, Y)$  es un grupo abeliano y composición es una aplicación bilineal.
2. Si  $\mathcal{C}$  es una categoría con un cilindro  $I$  y estructura  $i_0, i_1, p, m$  entonces  $\mathcal{C}$  se puede enriquecer sobre la categoría de conjuntos cúbicos. El conjunto cúbico de morfismos de  $X$  en  $Y$  es  $\mathcal{C}_{\square}(X, Y) = \{I^n X \rightarrow Y\}_{n \geq 0}$ , y la composición

$$\left( I^m Y \xrightarrow{g} Z \right) \circ \left( I^n X \xrightarrow{f} Y \right) = \left( I^{n+m} X \xrightarrow{g \circ I^m f} Z \right)$$

respecta las operaciones cúbicas.

3. La categoría de categorías pequeñas está enriquecida sobre sí misma<sup>47</sup>: para  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  categorías, sea  $\text{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  la categoría de funtores  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  y transformaciones naturales entre ellos.

La situación más importante para nosotros en esta sección es la siguiente:

**Definición:** Una categoría **simplicialmente enriquecida**<sup>48</sup> es una categoría enriquecida sobre la categoría de conjuntos simpliciales. Un funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  entre categorías simplicialmente enriquecidas es un **funtor simplicial** si las aplicaciones  $\mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(FX, FY)$  son aplicaciones simpliciales.

*Ejemplos:* Las categorías **Cat**, **Top** y **SimpSet** misma son categorías simplicialmente enriquecidas.

- El conjunto simplicial  $\text{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  es el nervio de la categoría de funtores y natural transformaciones que acabamos de considerar.

<sup>47</sup> **Cat** es una 2-categoría.

<sup>48</sup> Decir simplemente 'una categoría simplicial' puede ser ambiguo.

- El conjunto simplicial  $\mathbf{Top}(X, Y)$  es el complejo simplicial singular del espacio de aplicaciones  $Y^X$ . En particular,

$$\mathbf{Top}(X, Y)_n = \{ \Delta^n \rightarrow Y^X \} = \{ \Delta^n \times X \rightarrow Y \}$$

- Similarmente para  $K, L$  conjuntos simpliciales tenemos un conjunto simplicial  $\mathbf{SimpSet}(K, L)$  con

$$\mathbf{SimpSet}(K, L)_n = \{ \Delta[n] \rightarrow L^K \} = \{ \Delta[n] \times K \rightarrow L \}$$

La utilidad de esta noción es que podemos usar la homotopía ‘clásica’ de conjuntos simpliciales para definir homotopía en cualquier categoría simplicialmente enriquecida. Decimos, por ejemplo, que dos ‘0-morfismos’ son homótopos,  $f \simeq g : X \rightarrow Y$  en  $\mathcal{C}$ , si existe un 1-morfismo  $h \in \mathcal{C}(X, Y)_1$  con  $d_1 h = f$ ,  $d_0 h = g \in \mathcal{C}(X, Y)_0$ . Podemos definir la categoría de homotopía de  $\mathcal{C}$  tomando componentes conexos de los conjuntos simpliciales de morfismos:

$$\mathbf{Ho} \mathcal{C}(X, Y) = \pi_0 \mathcal{C}(X, Y).$$

Este ejemplo ilustra muy bien cuánta información estamos perdiendo cuando pasamos a la categoría de homotopía. Por esta razón algunos autores trabajan con categorías simplicialmente enriquecidas *en vez* de la categoría de homotopía. Este lenguaje funciona mejor<sup>49</sup> cuando la categoría  $\mathcal{C}$  es **localmente de Kan**, es decir, cuando cada conjunto simplicial  $\mathcal{C}(X, Y)$  es fibrante. Esto es cierto para  $\mathbf{Top}$  pero no para  $\mathbf{Cat}$ .

**Definición:** Un tensor en una categoría simplicialmente enriquecida es un functor (simplicial)  $\otimes : \mathbf{SimpSet} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $(K, A) \mapsto K \otimes A$ , tal que para cada conjunto simplicial  $K$  y objetos  $A, B \in \mathcal{C}$  hay una biyección natural

$$\mathcal{C}(K \otimes A, B) \cong \mathbf{SimpSet}(K, \mathcal{C}(A, B))$$

En particular, se puede pensar en la construcción  $\Delta[1] \otimes A$  como en cilindro en la categoría  $\mathcal{C}$ . Véanse artículos de Cordier, Kamps y Porter para más aplicaciones y detalles.

*Ejemplo:* Para  $\mathcal{C} = \mathbf{CW}$  la categoría de CW-complejos, tenemos un buen tensor definido por el producto con la realización geométrica

$$K \otimes X = |K| \times X$$

<sup>49</sup>¡Por razones que ya les serán obvias!

### 3 Álgebra homotópica de diagramas

#### 3.1 (Co)límites homotópicos

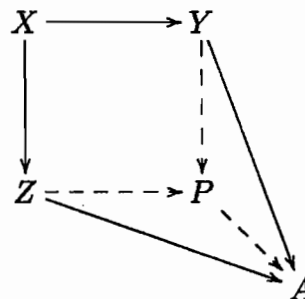
Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con una noción de equivalencia débil o equivalencia homotópica. Hemos visto en la primera sesión que, aunque  $\mathcal{C}$  tenga límites y colímites, en general *no* se comportan bien en homotopía. En general, diagramas homotópicamente equivalentes no tienen (co)límites equivalentes

$$\text{Ejemplo: } \begin{array}{ccc} \text{cofibra} \left( \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{c} & \bullet \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \end{array} \right) & \cong \text{pushout} \left( \begin{array}{ccc} \bullet & \xleftarrow{c} & \bullet \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \end{array} \right) & \cong \bigcirc \\ \text{cofibra} \left( \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \end{array} \right) & \cong \text{pushout} \left( \begin{array}{ccc} \bullet & \xleftarrow{\quad} & \bullet \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \end{array} \right) & \cong \bullet \end{array}$$

Con la experiencia de las secciones anteriores, pensamos: “aunque el functor pushout *no* manda diagramas equivalentes a objetos equivalentes, quizás tendrá un functor *derivado* que tenga sentido en homotopía”. Conjeturamos que (co)límites tendrán sentido después de reemplazar el diagrama por uno (co)fibrante, de la misma manera que Quillen define los funtores derivados  $LF = FQ$ . Estas construcciones nuevas se llamarán (co)límites homotópicos; son análogas de  $\lim_{\rightarrow}^n$  y  $\lim_{\leftarrow}^n$  en álgebra homológica.

##### 3.1.1 Definiciones

Para ser más precisos, necesitaremos definiciones de la noción de equivalencia de diagramas y del reemplazo (co)fibrante. Recordamos primero qué es un (co)límite. En el caso del pushout, la propiedad universal habitualmente se expresa por el diagrama



Es decir, hay una correspondencia canónica entre morfismos  $f : P \rightarrow A$ , del pushout en cualquier objeto  $A$ , y morfismos  $(f_X, f_Y, f_Z)$  en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longleftarrow & X & \longrightarrow & Z \\ f_Y \downarrow & & f_X \downarrow & & \downarrow f_Z \\ A & \xleftarrow{\text{id}} & A & \xrightarrow{\text{id}} & A \end{array}$$

Escribiendo  $D$  para la categoría<sup>50</sup>  $\heartsuit \leftarrow \clubsuit \rightarrow \diamond$ , y  $F : D \rightarrow \mathcal{C}$  para el diagrama  $(Z \leftarrow X \rightarrow Y)$ , y  $c_A$  para el diagrama 'constante'  $A \xleftarrow{\text{id}} A \xrightarrow{\text{id}} A$ , podemos expresar lo anterior como una biyección natural

$$\{\text{morfismos en } \mathcal{C} \text{ de pushout}(F) \text{ en } A\} \cong \{\text{transformaciones naturales } F \rightarrow c_A\}$$

En general, tenemos las siguientes definiciones formales:

Sea  $D$  una categoría. Entonces un **diagrama** en  $\mathcal{C}$  de la forma  $D$  es un functor  $F : D \rightarrow \mathcal{C}$ . Escribimos  $\text{Diag}(D, \mathcal{C})$  o  $\mathcal{C}^D$  para la categoría de diagramas y transformaciones naturales entre ellos. El **diagrama constante** define un functor  $c : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^D$ ,  $A \mapsto c_A$ . El **colímite (límite)**, si existe, de diagramas de la forma  $D$  es un functor adjunto a la izquierda (respectivamente, a la derecha) de éste.

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\text{colim}} & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{c} & \mathcal{C}^D \\ & \xrightarrow{\text{lim}} & \end{array}$$

### 3.1.2 Formulación en una categoría de modelos

Si  $\mathcal{C}$  es una categoría de modelos<sup>51</sup>, digamos que dos diagramas  $F, F' : D \rightarrow \mathcal{C}$  son **equivalentes** si existe una transformación natural  $a : F \rightarrow F'$  con  $a_d : Fd \rightarrow F'd$  una equivalencia para cada objeto  $d$  en  $D$ . Con una condición técnica sobre el tamaño de  $D$ , se puede dar una definición similar de (co)fibraciones entre diagramas.

**Teorema:** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de modelos de Quillen y  $D$  una categoría de *dimensión finita*<sup>52</sup>. Entonces  $\mathcal{C}^D$  también tiene una estructura de una categoría de modelos con

- $\text{ED} = \{ a : F \rightarrow F' \mid \forall d \in D, a_d : Fd \rightarrow F'd \in \text{ED en } \mathcal{C} \}$
- $\text{Fib} = \{ a : F \rightarrow F' \mid \forall d \in D, a_d : Fd \rightarrow F'd \in \text{Fib en } \mathcal{C} \}$

y  $\text{Cof}$  la clase definida por la propiedad de extensión respecto a  $\text{Fib} \cap \text{ED}$ .

<sup>50</sup>Muy chical

<sup>51</sup>O cualquier categoría con una noción de equivalencias débiles o homotópicas

<sup>52</sup>Es decir, existe una cota superior para la longitud  $n$  de una cadena de morfismos  $d_0 \xrightarrow{i_1} d_1 \rightarrow \dots \rightarrow d_{n-1} \xrightarrow{i_n} d_n$  en  $D$  con todo  $i_k \neq \text{id}$ . En otras palabras,  $\dim |\text{Ner } D| < \infty$ .

## 3.1.3 Observaciones

1. En la categoría de modelos  $\mathcal{C}^D$  definida por el teorema, el reemplazo *fibrante*  $RF$  de un diagrama  $F$  viene dado simplemente por un reemplazo fibrante natural de cada objeto en el diagrama. El reemplazo *cofibrante*  $QF$  es más complicado; no tenemos ninguna descripción elemental de las cofibraciones de diagramas.
2. El teorema nos indica inmediatamente cómo tomar el colímite homotópico de un diagrama. El funtor ‘diagrama constante’  $c$  manda fibraciones y equivalencias débiles en  $\mathcal{C}$  a fibraciones y equivalencias débiles en  $\mathcal{C}^D$ , por definición. De la misma manera que hace unas semanas, tenemos funtores adjuntos  $c$  y  $\text{colim}$  tales que  $c(\text{Fib} \cap \text{ED}) \subseteq \text{ED}$  y  $\text{colim}(\text{Cof} \cap \text{ED}) \subseteq \text{ED}$ <sup>53</sup>, y por tanto: *existen los funtores derivados totales, y aún son adjuntos.*

$$\text{Ho } \mathcal{C} \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{L colim}} \\ \xrightarrow{\text{R } c} \end{array} \text{Ho}(\mathcal{C}^D), \quad \begin{array}{l} \text{hocolim } F \cong \text{L colim } F \\ \cong \text{colim}(QF) \end{array}$$

Observamos que  $\text{Ho}(\mathcal{C}^D) \not\cong (\text{Ho } \mathcal{C})^D$  y por tanto este diagrama no dice que colímites homotópicos son colímites en la categoría de homotopía. De hecho  $\text{Ho } \mathcal{C}$  *no tiene* colímites, para  $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ , por ejemplo.

3. Para definir el límite homotópico  $\text{holim}$  no podemos usar la categoría de modelos del teorema, ya que  $\text{lim}$  es el adjunto de  $c$  al ‘otro lado’. Hay un teorema dual que nos sirve:  $\mathcal{C}^D$  tiene otra estructura de categoría de modelos en la cual:

- $\text{ED}$  y  $\text{Cof}$  se definen para cada objeto del diagrama, y
- $\text{Fib}$  viene definida automáticamente por éstas.

Ahora  $c$  manda *cofibraciones acíclicas* a equivalencias débiles y<sup>54</sup>  $\text{lim}$ , su adjunto a la derecha, manda *fibraciones acíclicas* a equivalencias débiles. Aplicando el mismo argumento que antes, existen el funtor derivado total  $\text{L}c$  y su adjunto  $\text{Rlim}$ , y ahora se usan los reemplazos *fibrantes*<sup>55</sup> de diagramas para los límites homotópicos.

$$\text{Ho } \mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{L}c} \\ \xleftarrow{\text{Rlim}} \end{array} \text{Ho}(\mathcal{C}^D), \quad \begin{array}{l} \text{holim } F \cong \text{Rlim } F \\ \cong \text{lim}(RF) \end{array}$$

<sup>53</sup>Por las propiedades mágicas de adjuntos sabemos esto ¡sin saber qué son las cofibraciones acíclicas!

<sup>54</sup>Por el ya habitual *general nonsense* de adjunciones. . .

<sup>55</sup>Los que ahora *no* tienen definición elemental.

### 3.2 Construcción explícita de (co)límites homotópicos

La existencia de estructuras de modelos de Quillen para  $\mathcal{C}^D$  es un teorema bastante fuerte — pero para definir (co)límites homotópicos nos interesa más tener una buena noción de reemplazos (co)fibrantes. Dado un mapa  $f : A \rightarrow B$ , por ejemplo, la cofibra homotópica de  $f$  es el pushout homotópico del diagrama  $(* \leftarrow A \xrightarrow{f} B)$ , y para calcularla hace falta primero cambiar el diagrama en un diagrama cofibrante:

$$\begin{array}{ccccc} CA & \longleftarrow & A & \longrightarrow & I_f A = IA \cup_A B \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ * & \longleftarrow & A & \longrightarrow & B \end{array}$$

Entonces el pushout homotópico es el pushout habitual del nuevo diagrama,  $(CA \leftarrow A \rightarrow I_f A)$ ; en este caso obtenemos  $CA \cup_A I_f A \simeq C_f A$  el cono en la aplicación  $f$ .

Buscamos una máquina para hacer este tipo de construcción en general. Es decir, queremos una manera explícita y funtorial de asignarle a cada diagrama  $F : D \rightarrow \mathcal{C}$  un diagrama cofibrante (o fibrante) y así podemos calcular fácilmente colímites (respectivamente, límites) homotópicos.

#### 3.2.1 Construcción en $\mathbf{Cat}$

En algunas situaciones específicas ya hay definiciones conocidas de colímites homotópicos. Para  $\mathcal{C} = \mathbf{Cat}$ , la categoría de categorías pequeñas, Thomason puso una estructura de categorías de modelos en  $\mathcal{C}$  pero además definió colímites homotópicos explícitamente por

$$\mathrm{hocolim} \left( D \xrightarrow{F} \mathbf{Cat} \right) = F \rtimes D.$$

Aquí  $F \rtimes D$  es una construcción de Grothendieck (y también de Ehresmann) en el funtor  $F$ . La categoría  $F \rtimes D$  es una suerte de producto semidirecto<sup>56</sup> y la imagen de  $F$ : tiene objetos los pares  $(d \in \mathrm{Ob}(D), x \in \mathrm{Ob}(Fd))$ , y morfismos  $(d, x) \rightarrow (d', x')$  dados por pares de morfismos  $(d \xrightarrow{i} d', F(i)(x) \xrightarrow{f} x')$  en  $D \times F(d')$ . La composición es similarmente ‘torcida’: viene definida por  $(i', f') \circ (i, f) = (i' \circ i, f' \circ F(i')(f))$ .

<sup>56</sup>Si  $D$  es un grupo, es decir, sólo tiene un objeto  $*$  y todos los morfismos son invertibles, y el funtor  $F : D \rightarrow \mathbf{Cat}$  manda  $*$  a otro grupo  $G$ , entonces tenemos simplemente una acción del grupo  $D$  en el grupo  $G$  y  $\mathrm{hocolim}(F) = F \rtimes D$  es precisamente el producto semidirecto  $G \rtimes D$ .

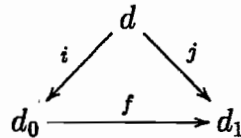
**3.2.2 Construcción simplicial**

En 1972 Bousfield y Kan definieron una noción explícita de colímite homotópico en la categoría de conjuntos simpliciales, y en 1973 Vogt introdujo una noción de hocolim en **Top**. No daremos los detalles porque ambas definiciones se pueden ver como casos particulares de una construcción general que veremos ahora.

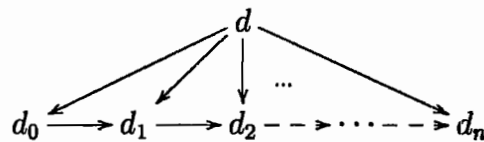
**Definición:** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría *simplicialmente enriquecida* con un *tensor*. Entonces el **colímite homotópico** de un diagrama en  $\mathcal{C}$  viene definido por el *coend*<sup>57</sup>

$$\text{hocolim} \left( D \xrightarrow{F} \mathcal{C} \right) = \int^d \text{Ner}(d/D) \otimes F(d)$$

La notación  $d/D$ , para  $d \in \text{Ob}(D)$ , significa la categoría con objetos los morfismos  $d \xrightarrow{i} d_0$  en  $D$ , con morfismos  $f : i \rightarrow j$  dado por triángulos conmutativos en  $\mathcal{C}$  de la forma:



Así el nervio  $\text{Ner}(d/D)$  tiene  $n$ -símplices dados por diagramas



El *coend* de la colección de objetos  $\text{Ner}(d/D) \otimes F(d)$  se puede expresar como la ‘unión’ de ellos con identificaciones cuando  $d$  cambia. Para cada morfismo  $i : d \rightarrow d'$  en  $D$  tenemos morfismos inducidos  $i^* : \text{Ner}(d'/D) \rightarrow \text{Ner}(d/D)$ ,  $i_* : F(d) \rightarrow F(d')$ , y el *coend* se puede expresar por ‘generadores y relaciones’:

$$\int^d \text{Ner}(d/D) \otimes F(d) = \coprod_d \text{Ner}(d/D) \otimes F(d) \Big/ (i^*a \otimes x \sim a \otimes i_*x)$$

o más formalmente por un ‘coigualizador’:

$$\coprod_{i:d \rightarrow d'} \text{Ner}(d'/D) \otimes F(d) \begin{array}{c} \xrightarrow{i^* \otimes \text{id}} \\ \xrightarrow{\text{id} \otimes i_*} \end{array} \coprod_d \text{Ner}(d/D) \otimes F(d) \dashrightarrow \int^d \text{Ner}(d/D) \otimes F(d)$$

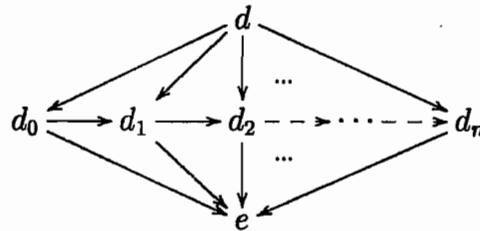
<sup>57</sup> ¿Cofin?

Se puede escribir una fórmula general similar para el reemplazo cofibrante<sup>58</sup>:

**Definición:** Sea  $F : D \rightarrow \mathcal{C}$  un funtor en una categoría  $\mathcal{C}$  simplicialmente enriquecida con un tensor. Entonces el **reemplazo cofibrante** del diagrama  $F$  es el funtor  $QF : D \rightarrow \mathcal{C}$  definido por

$$(QF)(e) = \int^d \text{Ner}(d/D/e) \otimes F(d) \tag{1}$$

Aquí  $\text{Ner}(d/D/e)$  es el nervio de la categoría con objetos los pares de morfismos  $d \rightarrow d_0 \rightarrow e$  con  $d_0$  cualquier objeto de  $D$ , y con morfismos dados por los morfismos  $d_0 \rightarrow d_1$  en  $D$  tales que los rombos obvios conmutan; los  $n$ -símplices en este nervio vienen dados por diagramas conmutativos de la forma



*Ejercicio:* Comprobar que  $\text{hocolim}(F) = \text{colim}(QF)$  con estas definiciones.

### 3.3 Ejemplos

#### 3.3.1 Pushout homotópico

Sean  $D$  la categoría  $d_2 \leftarrow d_0 \rightarrow d_1$  y  $F : D \rightarrow \mathbf{CW}$  el diagrama  $(Z \xleftarrow{g} X \xrightarrow{f} Y)$ . Vamos a calcular el reemplazo cofibrante dado por la fórmula  $e \mapsto \int^d \text{Ner}(d/D/e) \otimes F(d)$ .

$e = d_0$ : El nervio  $\text{Ner}(d/D/d_0)$  es vacío si  $d \neq d_0$ , y  $\text{Ner}(d_0/D/d_0)$  es simplemente un punto. Por tanto tenemos

$$d_0 \mapsto \int^d \text{Ner}(d/D/d_0) \otimes F(d) \cong \text{Ner}(d_0/D/d_0) \otimes F(d_0) \cong F(d_0) \cong X.$$

$e = d_1$ : El nervio  $\text{Ner}(d/D/d_1)$  es vacío para  $d = d_2$  y es el punto  $\Delta[0]$  para  $d = d_1$ .

<sup>58</sup>Se puede dualizar todo para definir reemplazos fibrantes y límites homotópicos si  $\mathcal{C}$  tiene un *cotensor*.



En cambio,  $\text{Ner}(d_0/D/d_1)$  es el intervalo  $\Delta[1]$ . Por tanto

$$d_1 \mapsto \int^d \text{Ner}(d/D/d_1) \otimes F(d) \cong (\Delta[1] \otimes F(d_0) \cup \Delta[0] \otimes F(d_1) \cup \emptyset \otimes F(d_2))$$

Es decir,  $d_1$  se manda a la amalgamación  $[0, 1] \times X \cup_X Y \cong I_f X$ .

$e = d_2$ : Similar: se manda a la amalgamación  $[0, 1] \times X \cup_X Z \cong I_g X$ .

Así que el reemplazo cofibrante dado por el coend es precisamente  $I_g X \leftarrow X \hookrightarrow I_f X$ , y por tanto el pushout homotópico se puede identificar con el cilindro doble<sup>59</sup> de  $(f, g)$ .

### 3.3.2 El telescopio

Consideramos el colímite homotópico de una torre de inclusiones

$$\text{hocolim} \left( X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \xrightarrow{f_3} X_3 \hookrightarrow \dots \right).$$

Más formalmente, consideramos un funtor  $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{CW}$ ,  $F(n) = X_n$ . Queremos calcular el reemplazo cofibrante  $QF : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{CW}$  y entonces  $\text{hocolim}(F)$  será  $\text{colim}(QF)$ . Es obvio en esta situación que  $\text{Ner}(m/\mathbb{N}/n) \cong \Delta[n - m]$  para  $n \geq m$  y vacío para  $n < m$ . Los primeros términos son

$$(QF)_0 = X_0, \quad (QF)_1 = \Delta^1 \times X_0 \cup X_1 / \simeq, \quad (QF)_2 = \Delta^2 \times X_0 \cup \Delta^1 \times X_1 \cup X_2 / \simeq$$

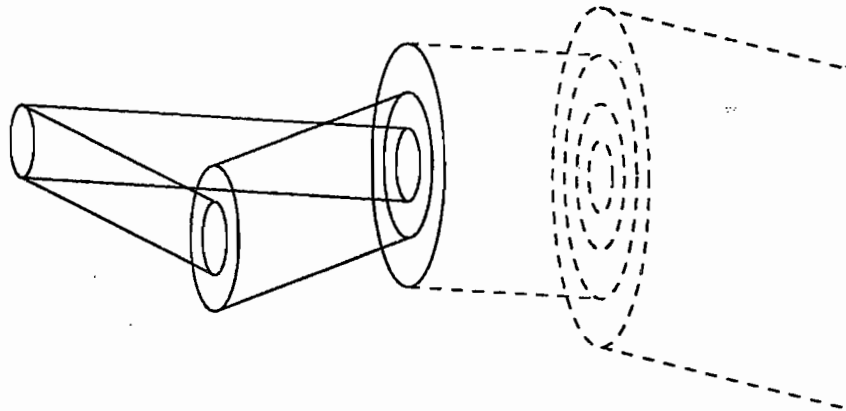


Figura 19: Los 'primeros términos' del telescopio.

<sup>59</sup> Como vimos hace un par de meses.

Tenemos por ejemplo  $(QF)_1 = I_{f_1}0$ , que se incluye como una ‘cara’ de  $(QF)_2 = \Delta^2 \times X_0 \amalg_{IX_0} I_{f_2}X_1$ .

El término general es

$$(QF)_n = \bigcup_{m=0}^n \Delta^{n-m} \times X_m .$$

Hay inclusiones naturales entre estos espacios, y su unión es el colímite homotópico.

### 3.3.3 Diagramas triviales y constantes

En el ejemplo anterior si tenemos  $X_n = *$  para todo  $n$  entonces el telescopio es simplemente el colímite de los simplices  $\Delta^n$ . En general podemos considerar el diagrama trivial  $D \rightarrow \mathbf{CW}$ ,  $d \mapsto *$ , para cualquier  $D$ . Aunque el funtor sea trivial, hay también información en la ‘forma’  $D$  del diagrama, y tenemos

$$\text{hocolim} \left( D \xrightarrow{c_*} \mathbf{CW} \right) \cong |\text{Ner}(D)|$$

Un ejemplo clásico de esta construcción trivial es el espacio clasificador de un grupo discreto  $G$ . Si  $G$  se considera como una categoría con sólo un objeto y todo morfismo invertible, entonces aplicando la construcción anterior obtenemos

$$\text{hocolim} \left( G \xrightarrow{c_*} \mathbf{CW} \right) \cong |\text{Ner}(G)| \cong BG$$

$BG$  es un CW-complejo (de dimensión infinita) con  $\pi_1 BG \cong G$  con todos los grupos de homotopía superiores triviales; es decir, es un  $K(G, 1)$ .

### 3.3.4 La construcción de Borel

Más generalmente, sean  $G$  un grupo discreto y  $F : G \rightarrow \mathbf{CW}$  cualquier funtor, y escribimos  $X$  para el CW-complejo  $F(*)$  donde  $*$  es el objeto de la ‘categoría’  $G$ . De hecho, la functorialidad dice precisamente que  $G$  actúa en  $X$ , o sea, que  $X$  es un  $G$ -CW-complejo. El colímite homotópico del funtor  $F$  se puede identificar con la construcción de Borel:

$$\text{hocolim} \left( G \xrightarrow{F} \mathbf{CW} \right) \cong EG \times_G X$$

## 3.4 Diagramas conmutativos hasta homotopía

Vimos en las primeras clases que el diagrama dado por el cilindro doble

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{I_{f,g}} & I_{f,g}X \end{array}$$

no conmuta, pero es homotópicamente conmutativo — en este caso hay una homotopía obvia  $IX \rightarrow I_{f,g}X$  entre las dos composiciones. Tampoco sería tan extraño suponer que se podría extender nuestra construcción explícita del funtor  $\text{hocolim } \mathcal{C}^D \rightarrow \mathcal{C}$  a diagramas conmutativos sólo hasta homotopía.

Dos situaciones en que esta idea tiene aplicación son las siguientes.

1. *H-espacios*. Son espacios  $X$  con una multiplicación  $m : X^2 \rightarrow X$  continua y homotópicamente asociativa.

$$\begin{array}{ccc} X^3 & \xrightarrow{1 \times m} & X^2 \\ m \times 1 \downarrow & \simeq & \downarrow m \\ X^2 & \xrightarrow{m} & X \end{array}$$

2. *Cohomología de Čech*. Sea  $X$  un espacio compacto y consideramos la categoría  $D$  de recubrimientos de  $X$  y sus refinamientos. Es decir, consideramos la categoría  $D$  con objetos los **recubrimientos** de  $X$ ,

$$\alpha = \{ U_i \text{ abiertos en } X, \text{ con } \bigcup U_i = X \},$$

y con un morfismo  $\alpha \rightarrow \beta$  si (y solamente si)  $\beta$  refine  $\alpha$ ,

$$\forall V \in \beta, \exists U \in \alpha \text{ con } V \subseteq U.$$

Ahora para cada objeto  $\alpha$  de esta categoría  $D$  tenemos un conjunto simplicial  $N_X(\alpha)$  definido<sup>60</sup> en cada dimensión por

$$N_X(\alpha)_n = \{ (U_0, U_1, U_2, \dots, U_n) \mid U_j \text{ abierto para toda } j, \text{ y } \bigcap U_j \neq \emptyset \}$$

con las caras y degeneraciones definidas quitando o repitiendo algún  $U_j$ . ¿Cómo se define  $N_X$  en los morfismos  $\alpha \rightarrow \beta$ ? Si  $\beta$  refina  $\alpha$ , se puede mandar

$$(V_1, \dots, V_n) \mapsto (U_1, \dots, U_n),$$

donde  $V_j \in \beta$  y  $U_j \in \alpha$  tales que  $V_j \subseteq U_j$  para cada  $j$ .

El problema con esta definición es que hemos *elegido* un  $U_j$  para cada  $V_j$ . No hay ninguna garantía que esto se puede hacer funtorialmente, para que

<sup>60</sup>El conjunto simplicial  $N_X(\alpha)$  se llama a veces el **nervio** del recubrimiento aunque no es el nervio en el sentido que usamos antes.

$N_X(\beta \rightarrow \alpha) \circ N_X(\gamma \rightarrow \beta) = N_X(\gamma \rightarrow \alpha)$  si  $\gamma$  refina  $\beta$  que refina  $\alpha$ , por ejemplo.

No obstante, siempre hay una *homotopía*  $N_X(\beta \rightarrow \alpha) \circ N_X(\gamma \rightarrow \beta) \simeq N_X(\gamma \rightarrow \alpha)$  en estas circunstancias. En dimensión cero, por ejemplo, si los dos funtores mandan  $(W) \in N_X(\gamma)_0$  a  $U, U'$  respectivamente en  $N_X(\alpha)_0$ , entonces tenemos<sup>61</sup> una homotopía  $(U, U') \in N_X(\alpha)_1$  entre ellos.

### 3.4.1 Diagramas homotópicamente coherentes

Para capturar la definición de un diagrama homotópicamente conmutativo, no sólo consideramos los objetos y morfismos en el diagrama con homotopías entre las diferentes composiciones, sino también con *homotopías superiores* entre las diferentes composiciones de éstas, etcétera. Vamos a ver cómo parece:

Para que  $F : D \rightarrow \mathcal{C}$  sea un diagrama homotópicamente conmutativo queremos

- Para cada objeto  $d \in D$ , un objeto  $Fd \in \mathcal{C}$ , y para cada morfismo  $(a : d \rightarrow d') \in D$ , un morfismo  $(Fa : Fd \rightarrow Fd') \in \mathcal{C}$ , como para un functor habitual.
- Para morfismos  $d_0 \xrightarrow{a} d_1 \xrightarrow{b} d_2$  en  $D$ , tenemos una homotopía  $F(b)F(a) \simeq F(ba)$ , dada por ejemplo por  $IFd_0 \rightarrow Fd_2$  si  $\mathcal{C}$  es una categoría con cilindro.
- Para morfismos  $d_0 \xrightarrow{a} d_1 \xrightarrow{b} d_2 \xrightarrow{c} d_3$  en  $D$ , tenemos homotopías

$$\begin{array}{ccc}
 F(c)F(b)F(a) & \xrightarrow{\simeq} & F(cb)F(a) & (2) \\
 \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq & \\
 F(c)F(ba) & \xrightarrow{\simeq} & F(cba) & 
 \end{array}$$

y queremos que las dos homotopías  $F(c)F(b)F(a) \simeq F(cba)$  sean homótopas, por una homotopía doble  $I^2Fd_0 \rightarrow Fd_3$  en  $\mathcal{C}$ .

- En general, dada una cadena de morfismos  $d_0 \xrightarrow{a_1} d_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} d_n$  en  $D$ , queremos homotopías superiores  $F(a_1, \dots, a_n) : I^{n-1}Fd_0 \rightarrow Fd_n$  en  $\mathcal{C}$ , con bordes las composiciones de las homotopías de niveles anteriores:

$$\begin{array}{ccc}
 I^{n-2}Fd_0 & \xrightarrow{F(a_1, \dots, a_r)} & I^{n-r-1}Fd_r \\
 \downarrow i_0^{(r)} & & \downarrow F(a_{r+1}, \dots, a_n) \\
 I^{n-1}Fd_0 & \xrightarrow{F(a_1, \dots, a_n)} & Fd_n
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 I^{n-2}Fd_0 & & \\
 \downarrow i_1^{(r)} & \searrow F(a_1, \dots, a_{r+1}a_r, \dots, a_n) & \\
 I^{n-1}Fd_0 & \xrightarrow{F(a_1, \dots, a_n)} & Fd_n
 \end{array}$$

<sup>61</sup>Ya que  $U \cap U' \supseteq W \neq \emptyset$ .

Ésta es esencialmente la definición de un diagrama *homotópicamente conmutativo* de Vogt y Boardman–Vogt (1973).

### 3.4.2 Transformaciones naturales coherentes

Si no esperamos que los diagramas  $F : D \rightarrow C$  sean estrictamente conmutativos, tampoco necesitamos que las transformaciones  $\alpha : F \rightarrow F'$  sean estrictamente naturales, sino sólo hasta homotopías (y homotopías superiores entre ellas, por supuesto).

$$\begin{array}{ccc} Fd & \xrightarrow{Fa} & Fd' \\ \alpha_d \downarrow & \simeq & \downarrow \alpha_{d'} \\ F'd & \xrightarrow{F'a} & F'd' \end{array}$$

*Ejemplo:* Consideramos dos diagramas  $F, F'$  en **Top** dados por  $(X \xrightarrow{f} Y)$  y  $(X' \xrightarrow{f'} Y')$ . Entonces para una transformación ‘homotópicamente natural’ entre ellas,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \alpha \downarrow & \simeq & \downarrow \alpha' \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

tomamos el cilindro en  $X$  y pedimos una homotopía  $h : IX \rightarrow Y'$  entre  $\alpha'f$  y  $f'\alpha$ . Equivalentemente, tomamos el cilindro de la aplicación  $f$  y pedimos una aplicación  $k : I_f X \rightarrow Y'$  tal que el diagrama siguiente *commute*

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & I_f X \\ \alpha \downarrow & & \downarrow k \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

Observamos que esto es precisamente una transformación *natural*  $QF \rightarrow F'$  donde  $QF$  es el reemplazo cofibrante del diagrama  $F$  que en este caso es  $(X \hookrightarrow I_f X)$ . Parece razonable conjeturar que la cosa funciona así en general; para definir transformaciones entre diagramas homotópicamente conmutativos sólo nos hace falta extender la noción de reemplazo cofibrante a éstos.

## 3.5 Formulación simplicial

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría simplicialmente enriquecida; hemos visto que entonces tenemos una noción de homotopía en  $\mathcal{C}$  de la misma manera que en **SimpSet**.

Si  $D$  es una categoría cualquiera, la noción de diagrama homotópicamente conmutativo  $D \rightarrow \mathcal{C}$  se expresa en términos de funtores simpliciales  $SD \rightarrow \mathcal{C}$  donde  $SD$  es una suerte de resolución simplicial de  $D$ . La definición formal es la siguiente:

**Definición:**  $SD$  es la categoría simplicial definida por la comónada ‘libre/olvidar’ entre  $\mathbf{Cat}$  y la categoría de grafos. Es decir,  $SD$  es la categoría simplicialmente enriquecida con

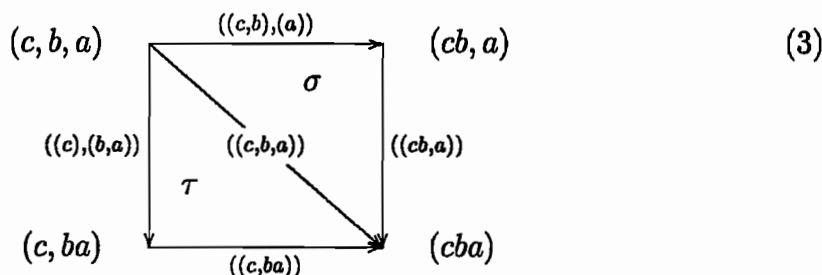
$$SD(d, d')_n = \overbrace{\text{cadenas de } \dots \text{ cadenas de morfismos de } d \text{ a } d' \text{ en } D}^{n+1 \text{ veces}}$$

y caras definidas por composición (o concatenación) de una cadena (de cadenas) de morfismos.

*Ejemplo:* Si  $D = (d_0 \xrightarrow{a} d_1 \xrightarrow{b} d_2 \xrightarrow{c} d_3)$  entonces  $SD(d_0, d_3)$  es el conjunto simplicial con dos 2-símplices no degenerados,

$$\begin{aligned} \sigma &= ((c, b), (a)) \\ \tau &= ((c), (b, a)) \end{aligned}$$

que tienen las caras y vértices siguientes:



Observamos que tomando  $\pi_0$  del conjunto simplicial  $SD(d, e)$  da exactamente el conjunto  $D(d, e)$ ; es decir,

$$\pi_0 SD \cong D.$$

**Proposición/definición:** Un diagrama homotópicamente coherente  $D \rightarrow \mathcal{C}$  en una categoría simplicialmente enriquecida  $\mathcal{C}$  es precisamente un functor simplicial  $SD \rightarrow \mathcal{C}$ .

Aplicando un functor simplicial  $F$  al diagrama (3), por ejemplo, obtenemos el diagrama homotópicamente conmutativo (2).

### 3.5.1 Colímites y reemplazos cofibrantes

Supongamos que  $\mathcal{C}$  es una categoría simplicialmente enriquecida con un tensor  $K \otimes C$ . Se puede extender la construcción del reemplazo cofibrante a funtores simpliciales  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , y en particular a diagramas homotópicamente conmutativos  $F : SD \rightarrow \mathcal{C}$ .

Primero, se generaliza la fórmula (1):

**Definición:** El reemplazo cofibrante de un functor simplicial  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  es el functor  $QF : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  definido por el coend simplicial

$$(QF)(e) = \int^d X(d, e) \otimes F(d)$$

Aquí  $X(d, e)$  es el caso enriquecido del conjunto simplicial  $\text{Ner}(d/D/e)$  que usamos antes,

$$X(d, e)_n = \bigcup_{d_0, \dots, d_n} \mathcal{D}(d, d_0)_n \times \mathcal{D}(d_0, d_1)_n \times \dots \times \mathcal{D}(d_n, e)_n.$$

Las aplicaciones canónicas  $\coprod X(d, e) \otimes Fd \rightarrow Fe$  inducen una equivalencia débil  $QF \xrightarrow{\simeq} F$  entre  $F$  y su reemplazo cofibrante.

**Definición:** El colímite homotópico de un functor simplicial  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  es el colímite de su reemplazo cofibrante.

$$\text{hocolim} \left( \mathcal{D} \xrightarrow{F} \mathcal{C} \right) = \text{colim} \left( \mathcal{D} \xrightarrow{QF} \mathcal{C} \right) = \int^d X(d) \otimes F(d).$$

donde  $X(d)$  es el conjunto simplicial con

$$X(d)_n = \bigcup_{d_0, \dots, d_n} \mathcal{D}(d, d_0)_n \times \mathcal{D}(d_0, d_1)_n \times \dots \times \mathcal{D}(d_{n-1}, d_n)_n.$$

### 3.5.2 Transformaciones y la categoría $\text{Coh}(D, \mathcal{C})$

**Proposición/definición:** Una transformación coherente  $\alpha : F \rightarrow F'$  entre funtores simpliciales<sup>62</sup>  $F, F' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  es precisamente una transformación natural  $\alpha : QF \rightarrow F'$  del reemplazo cofibrante de  $F$ .

En particular tenemos una manera de entender la categoría de homotopía de la categoría de diagramas  $\text{Ho}(\mathcal{C}^D)$ .

<sup>62</sup>O en particular entre diagramas homotópicamente coherentes  $F, F' : SD \rightarrow \mathcal{C}$ .

**Definición** Sea  $D$  una categoría chica y  $\mathcal{C}$  una categoría simplicialmente enriquecida<sup>63</sup>. Entonces la **categoría de diagramas coherentes**  $\text{Coh}(D, \mathcal{C})$  es la categoría con objetos los diagramas homotópicamente coherentes de  $D$  en  $\mathcal{C}$  y morfismos las clases de homotopía de transformaciones coherentes.

El teorema siguiente fue demostrado en [Vogt 1973] para diagramas de espacios topológicos, y en general en [Cordier–Porter 1983]

**Teorema:** Hay una equivalencia de categorías

$$\text{Coh}(D, \mathcal{C}) \cong \text{Ho}(\mathcal{C}^D).$$

## 4 Modelos algebraicos para la homotopía

Clasificación hasta homotopía de espacios y aplicaciones entre ellos por invariantes algebraicos es un problema difícil<sup>64</sup>. En esta sección consideramos algunos sub-problemas más fáciles, pero aún con la intención de poder hacer todo algún día. Veremos muchas estructuras nuevas algebraicas, generalizaciones de grupos, íntimamente relacionados con la homotopía de espacios.

### 4.1 Modelos para $n$ -tipos

Como primera aproximación, podemos considerar espacios con sólo un número finito de grupos de homotopía no triviales. Esto será la situación, por ejemplo, para los CW-complejos de dimensión finita, pero también para  $X = BG = |\text{Ner } G|$ , el espacio clasificador de un grupo, que tiene dimensión infinita pero  $\pi_i X = 0$  para  $i \geq 2$ . Más generalmente podemos considerar *todos* los espacios, pero hasta una relación de equivalencia mucho más débil que equivalencia homotópica:

**Definición:** Una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es una  $n$ -**equivalencia**,  $X \sim_n Y$  si  $\pi_i(f) : \pi_i X \rightarrow \pi_i Y$  es un isomorfismo para todo  $0 \leq i \leq n$  (y todo punto base).

Las clases de equivalencia de espacios respecto a la relación (generada por)  $\sim_n$  se llaman  $n$ -**tipos**.

Escribimos  $\text{Ho}_n$  para la categoría de homotopía de espacios respecto a las  $n$ -equivalencias.

Nuestro problema es encontrar buenos modelos algebraicos para  $\text{Ho}_n$  para cada  $n$ . Para  $n = 0, 1$  ya sabemos la solución:

<sup>63</sup>Y localmente de Kan.

<sup>64</sup>Según un resultado de Peter Freyd, es *imposible*.



#### 4.1.1 $n = 0$

Este caso es fácil: los 0-tipos están clasificados por el número de componentes conexos. El funtor  $\pi_0$  induce una equivalencia de categorías entre  $\mathbf{Ho}_0$  y la categoría de conjuntos,

$$\mathbf{Ho}_0 \cong \mathbf{Set}$$

La equivalencia inversa es considerar un conjunto como un espacio discreto.

#### 4.1.2 $n = 1$

Los 1-tipos están clasificados por el grupo fundamental, o mejor dicho el grupoide fundamental para espacios no necesariamente arco-conexos. Hay una equivalencia de categorías

$$\mathbf{Ho}_1 \cong \mathbf{Grpd}$$

donde la inversa viene definida por el espacio clasificador,  $G \mapsto BG = |\mathbf{Ner}(G)|$ .

### 4.2 $n = 2$ : módulos cruzados

**Definición:** Un **módulo cruzado** es un par de grupos  $M, P$  con una acción de  $P$  en  $M$  que escribimos  $(m, p) \mapsto m^p$  y un homomorfismo

$$\partial : M \rightarrow P$$

tales que

$$\text{CM1 } \partial(m^p) = p^{-1} \partial m m \text{ para todo } m \in M, p \in P,$$

$$\text{CM2 } m^{\partial m'} = m'^{-1} m m' \text{ para todo } m, m' \in M.$$

#### 4.2.1 Ejemplos

1. Si  $\partial = 0$  entonces  $M$  es abeliano, por CM2. Es decir,  $M$  es un  $P$ -módulo en el sentido clásico.
2. Si  $M$  es un subgrupo normal de un grupo  $P$ , entonces la inclusión  $M \rightarrow P$  es un módulo cruzado con la acción de  $P$  en  $M$  dada por conjugación.
3. Sea  $M$  un grupo y  $\text{Aut}(M)$  su grupo de automorfismos. Entonces  $M \xrightarrow{\partial} \text{Aut}(M)$  es un módulo cruzado donde  $\partial(m) \in \text{Aut}(M)$  es conjugación por  $m$ .

### 4.2.2 El módulo cruzado fundamental

Sea  $A \xrightarrow{f} X$  una aplicación entre espacios conexos con punto base, y consideramos la factorización  $A \xrightarrow{\cong} \bar{A} \xrightarrow{\bar{f}} X$  donde  $\bar{f}$  es una fibración. Sea  $F_f = \bar{f}^{-1}(*) \subseteq \bar{A}$  la fibra homotópica.

*Ejercicio:*  $\pi_1 A \cong \pi_1 \bar{A}$  actúa sobre  $\pi_1 F_f$  y  $\pi_1 F_f \rightarrow \pi_1 A$  es un módulo cruzado.

El interés para la clasificación de  $n$ -tipos viene si suponemos que:

$$F_f \text{ es arco-conexo y } \pi_2 A \text{ es trivial.}$$

Entonces tenemos la sucesión exacta

$$\pi_2 A = 1 \longrightarrow \pi_2 X \longrightarrow \pi_1 F_f \xrightarrow{\partial} \pi_1 A \longrightarrow \pi_1 X \longrightarrow 1 = \pi_0 F_f$$

En particular,  $\ker \partial \cong \pi_2 X$  y  $\operatorname{coker} \partial \cong \pi_1 X$ . Así el módulo cruzado fundamental contiene toda la información sobre el 2-tipo de  $X$ .

Si  $A \xrightarrow{f} X$  es la inclusión del 1-esqueleto de un CW-complejo, entonces<sup>65</sup>  $\pi_1 F_f \cong \pi_2(X, A)$ .

**Definición:** [J.H.C. Whitehead]  $\partial : \pi_2(X, A) \rightarrow \pi_1 A$  es el **módulo cruzado fundamental** del par  $(X, A)$ .

Decimos que un morfismo  $(M \rightarrow P) \rightarrow (M' \rightarrow P')$  de módulos cruzados es una **equivalencia** si induce isomorfismos entre los núcleos y los conúcleos.

$$\begin{array}{ccccccc} \ker \partial & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\partial} & P & \longrightarrow & \operatorname{coker} \partial \\ \cong \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong \\ \ker \partial' & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\partial'} & P' & \longrightarrow & \operatorname{coker} \partial' \end{array}$$

**Teorema:** [Mac Lane-Whitehead, 1950]<sup>66</sup> Hay una equivalencia de categorías

$$\mathbf{Ho}_2 \cong \mathbf{CM} / \sim$$

entre 2-tipos de homotopía y clases de equivalencia de módulos cruzados.

Se puede generalizar esto a dimensiones superiores, pero los axiomas para un “ $n$ -módulo cruzado” son bastante complicados. Consideramos primero una álgebra diferente — pero equivalente.

<sup>65</sup>Recordamos que la fibra homotópica  $F_f \simeq \{ \gamma \in PX \mid \gamma_0 = *, \gamma_1 \in A \}$  en esta situación.

<sup>66</sup>Aquí tenemos que considerar sólo espacios arco-conexos, o alternativamente hacemos la traducción obvia de la teoría en el lenguaje de *módulos cruzados de grupoides*.

### 4.2.3 $\text{Cat}^1$ -grupos

Sea  $G$  un grupo enriquecido en  $\text{Cat}$ . Es decir,  $G = G(e, e)$  es a la vez un grupo y una categoría. Recordamos que un conjunto con dos estructuras de grupos era simplemente un grupo abeliano; aquí también hay un poco de simplificación posible.

Sea  $H \subseteq G$  el subgrupo de las identidades<sup>67</sup> de la categoría, y  $\partial^0, \partial^1 : G \rightarrow H$  los homomorfismos que dicen donde empiezan y terminan los morfismos. Así cada  $a \in G$  se considera como una flecha  $\partial^0 a \xrightarrow{a} \partial^1 a$  respecto a la estructura de la categoría.

**Lema:**

1. La composición en la categoría está determinada por la estructura del grupo y por  $\partial^0, \partial^1$ ,
2. La categoría es automáticamente un grupoide,
3. Elementos de  $\ker \partial^0$  y de  $\ker \partial^1$  conmutan en el grupo,

$$[\ker \partial^0, \ker \partial^1] = 1.$$

*Demostración:* Consideramos la composición  $g \xrightarrow{a} h \xrightarrow{b} k$  en la categoría. Usando la compatibilidad de las estructuras, la composición se puede expresar

$$\begin{array}{c} \text{Diagrama 1: } \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \\ \text{Diagrama 2: } \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & h^{-1} & h \\ \hline h & h^{-1} & b \\ \hline \end{array} \\ \text{Diagrama 3: } \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline h^{-1} \\ \hline b \\ \hline \end{array} \end{array}$$

donde la multiplicación en el grupo se representa por composición horizontal y la composición en la categoría por composición vertical. Traduciéndolo en notación más habitual, tenemos

$$b \circ a = (bh^{-1}h) \circ (hh^{-1}a) = (b \circ h)(h^{-1} \circ h^{-1})(h \circ b) = bh^{-1}a$$

Así tenemos (1). Para (2), construimos los inversos: tenemos  $(ga^{-1}h) \circ a$  igual a (la identidad en  $g$ , y al revés para el inverso al otro lado. Para (3), modificamos un poco el diagrama anterior y obtenemos  $bh^{-1}a = b \circ a = ah^{-1}b$ , por tanto si  $\partial^1 a = \partial^0 b = h$  es trivial entonces  $ba = ab$ .

**Definición:** Un  $\text{Cat}^1$ -grupo es un grupo  $G$  con un subgrupo  $H$  y endomorfismos  $\partial^0, \partial^1 : G \rightarrow G$  tales que

<sup>67</sup>O 'los objetos'.

CG1  $\text{im}(\partial^\alpha) = H$  y  $\partial^\alpha|_H = \text{id}$  (en particular son idempotentes),

CG2  $[\ker \partial^0, \ker \partial^1] = 1$ .

**Proposición:** Hay equivalencias de categorías:

$$\begin{aligned} \{ \text{Cat}^1\text{-grupos} \} &\cong \{ \text{Grupos enriquecidos en } \mathbf{Cat} \} \\ &\cong \{ \text{Grupos enriquecidos en } \mathbf{Grpd} \}. \end{aligned}$$

*Ejercicios:*

1. Si  $\partial^0, \partial^1 : G \rightrightarrows G$  es un  $\text{cat}^1$ -grupo, entonces  $\ker \partial^0 \xrightarrow{\partial^1} \text{im} \partial^0$ , con  $a^{\partial^0 b} = b^{-1} a b$ , es un módulo cruzado.
2. Si  $\partial : M \rightarrow P$  es un módulo cruzado entonces  $\partial^0(m, p) = (e, p)$ ,  $\partial^1(m, p) = (e, \partial(m)p)$  define una estructura de  $\text{cat}^1$ -grupo en  $M \rtimes P$ .

**Proposición:** Hay una equivalencia de categorías

$$\{ \text{Cat}^1\text{-grupos} \} \cong \{ \text{módulos cruzados} \}.$$

*Ejemplo:* Consideramos un grupo  $G$  y una versión enriquecida de su grupo de automorfismos: sea  $\text{Iso}(G)$  la categoría con objetos  $\theta \in \text{Aut}(G)$  y morfismos las transformaciones naturales entre ellos. Entonces tenemos un  $\text{cat}^1$ -grupo  $\partial^0, \partial^1 : \text{Iso}(G) \rightrightarrows \text{Iso}(G)$  y el módulo cruzado correspondiente es  $G \rightarrow \text{Aut}(G), g \mapsto c_g$  que consideramos antes<sup>68</sup>.

Si  $f : A \rightarrow X$  una aplicación entre espacios conexos con punto base, la reemplazamos por la fibración  $\bar{f} : \bar{A} \rightarrow X$  y consideramos el **espacio simplicial**

$$S(f) := \left( \cdots \rightrightarrows \bar{A} \times_X \bar{A} \times_X \bar{A} \rightrightarrows \bar{A} \times_X \bar{A} \rightrightarrows \bar{A} \right).$$

Aplicando  $\pi_1$  a cada espacio, obtenemos un **grupo simplicial**

$$\pi_1 S(f) = \left( \cdots \rightrightarrows \pi_1(\bar{A} \times_X \bar{A} \times_X \bar{A}) \rightrightarrows \pi_1(\bar{A} \times_X \bar{A}) \rightrightarrows \pi_1 \bar{A} \right).$$

**Proposición:** Los términos de grados  $\leq 1$  de  $\pi_1 S(f)$  forman un  $\text{cat}^1$ -grupo  $\Pi(f)$

$$\Pi(f) = (\pi_1(\bar{A} \times_X \bar{A}), \partial^0, \partial^1).$$

Similarmente, el complejo de Moore  $N\pi_1 S(f)$  contiene el módulo cruzado asociado:

$$N\pi_1 S(f) = (\cdots \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow \pi_1 F_f \rightarrow \pi_1 \bar{A}).$$

**Proposición:** Hay equivalencias de categorías:

$$\begin{aligned} \{ \text{módulos cruzados} \} &\cong \{ \text{grupos simpliciales } G \text{ con } (NG)_n \text{ trivial para } n \geq 2 \} \\ &\cong \{ \text{grupos simpliciales } G \text{ con } G_{\geq 2} \text{ generados por degeneraciones} \}. \end{aligned}$$

<sup>68</sup>Como  $G$  tiene sólo un objeto, una transformación natural  $\eta : \theta \rightarrow \phi$  es simplemente un elemento  $g \in G$  tal que  $\phi = c_g \circ \theta$  (naturalidad).

#### 4.2.4 Un teorema tipo van Kampen

Ahora tenemos una categoría algebraica<sup>69</sup> para clasificar 2-tipos, vía el invariante

$$X \mapsto (|\text{Sing}(X)|_1 \xrightarrow{f} X) \mapsto \Pi(f).$$

Además, el funtor  $\Pi : \text{mapas} \rightarrow \text{Cat}^1\text{-grupos}$  satisface un teorema tipo 'van Kampen' de la misma manera que el grupo fundamental<sup>70</sup>.

Sea  $f : A \rightarrow X$  y supongamos  $X = X^{(1)} \cup X^{(2)}$  abiertos, con  $X^{(3)} = X^{(1)} \cap X^{(2)}$ . El recubrimiento de  $X$  se extiende a un recubrimiento de  $f$  — si ponemos  $A^{(i)} = f^{-1}(X^{(i)})$ ,  $f^{(i)} = f|_{A^{(i)}}$  para  $i = 1, 2, 3$ , tenemos un diagrama de diagramas

$$\begin{array}{ccc} (A^{(3)} \xrightarrow{f^{(3)}} X^{(3)}) & \longrightarrow & (A^{(1)} \xrightarrow{f^{(1)}} X^{(1)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (A^{(2)} \xrightarrow{f^{(2)}} X^{(2)}) & \longrightarrow & (A \xrightarrow{f} X) \end{array}$$

**Teorema:**<sup>71</sup> Si  $A^{(i)}, X^{(i)}$  y las cofibras homotópicas  $F_{f^{(i)}}$  son arco-conexos para  $i = 1, 2, 3$  entonces

1.  $A, X$  y  $F_f$  son arco-conexos
2.  $\Pi(f)$  se puede calcular como el pushout de los  $\text{cat}^1$ -grupos

$$\begin{array}{ccc} \Pi(f^{(3)}) & \longrightarrow & \Pi(f^{(1)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(f^{(2)}) & \longrightarrow & \Pi(f) \cong (G^{(1)} *_{G^{(3)}} G^{(2)}) / [\ker \partial^0, \ker \partial^1], \partial^0, \partial^1 \end{array}$$

### 4.3 Generalización para todo $n$

Lo que hemos dicho para  $n = 2$  generaliza para cualquier  $n$ :

- las categorías
- la clasificación de  $n$ -tipos

<sup>69</sup>O seis equivalentes.

<sup>70</sup>Así se puede calcular 'fácilmente'.

<sup>71</sup>En la versión para módulos cruzados, este teorema es de [Brown-Higgins, Proc. LMS 1978].

- el teorema tipo ‘van Kampen’

**Definición:** Un  $\text{Cat}^n$ -grupo es un grupo  $G$  con subgrupos  $H_1, \dots, H_n$  y endomorfismos  $\partial_i^0, \partial_i^1 : G \rightarrow G$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tales que

$$\text{C}^n\text{G1} \quad \text{im}(\partial_i^\alpha) = H_i, \quad \partial_i^\alpha|_{H_i} = \text{id} \text{ y } \partial_i^\alpha \partial_j^\beta = \partial_j^\beta \partial_i^\alpha \text{ si } i \neq j, \text{ para todo } 0 \leq i \leq n, \\ \alpha, \beta \in \{0, 1\}$$

$$\text{C}^n\text{G2} \quad [\ker \partial_i^0, \ker \partial_i^1] = 1, \text{ para todo } 0 \leq i \leq n,$$

Como en el caso  $n = 1$ , el grupo  $G$  tiene además  $n$  estructuras de grupoides  $b \circ_i a := bh^{-1}a$  (si  $\partial_i^1 a = \partial_i^0 b = h$ ).

La generalización de un módulo cruzado es un poco más complicada de escribir.

**Definición:** [Ellis–Steiner, JPAA 1987] Un  $n$ -cubo cruzado es una familia de  $2^n$  grupos

$$M_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}, \quad \alpha_i \in \{0, 1\}, \quad \text{o} \quad M_A, \quad A \subseteq \{1, \dots, n\},$$

con

- ‘bordes’  $\partial_i : M_A \rightarrow M_{A-\{i\}}$
- ‘corchetes’  $[ , ] : M_A \times M_B \rightarrow M_{A \cup B}$

que satisfacen unas 11 condiciones de compatibilidad...

Alternativamente<sup>72</sup> un  $n$ -cubo cruzado se puede definir inductivamente: un  $(n+1)$ -cubo cruzado es un módulo cruzado en la categoría de  $n$ -cubos cruzados. La definición para  $n = 2$  reduce a la siguiente.

**Definición:** [Guin–Walery–Loday] Un **cuadrado cruzado** es un diagrama de grupos

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \longrightarrow & P \end{array}$$

con acciones de  $P$  en  $N, M$  y de  $P, M, N$  en  $L$ , y un homomorfismo  $[ , ] : M \times N \rightarrow L$ , y 6 axiomas de compatibilidad (véase [22, pág.193]).

El resultado siguiente nos permite elegir entre trabajar con los  $\text{cat}^n$ -grupos, que son más fáciles de definir y calcular, o con los  $n$ -cubos cruzados, que nos darán directamente invariantes topológicos más ‘clásicos’ (en términos de los grupos de homotopía relativos). ¡Su demostración no es fácil!

**Proposición:** [Ellis–Steiner] Hay una equivalencia de categorías

$$\{ \text{Cat}^n\text{-grupos} \} \cong \{ n\text{-cubos cruzados} \}.$$

<sup>72</sup>Como en la tesis original de Graham Ellis.

### 4.3.1 $n$ -cubos de espacios

En vez de sólo una aplicación  $f : A \rightarrow X$ , ahora consideramos un ' $n$ -cubo' de espacios con punto base  $o$ , más formalmente, un funtor  $\mathbf{X} : \{0 \rightarrow 1\}^n \rightarrow \mathbf{Top}^*$ .

En vez de la fibrición  $\bar{f} : \bar{A} \rightarrow X$ , consideramos un *reemplazo fibrante*  $\bar{\mathbf{X}}$  del diagrama  $\mathbf{X}$ .

**Observación:** Si un  $n$ -cubo de espacios  $\mathbf{X}$  es fibrante entonces todas las aplicaciones  $X_\alpha \rightarrow X_\beta$  son fibriciones, pero el recíproco *no es cierto*. Una caracterización de diagramas fibrantes es que para todo índice  $A$  la aplicación canónica

$$\bar{f}_A : X_A \longrightarrow \lim_{B>A} X_B$$

sea una fibrición.

La condición sobre la conectividad de  $X$  y  $F_f$  que vimos para  $n = 1$  se generaliza a los  $n$ -cubos de la manera siguiente.

**Definición:** Un  $n$ -cubo de espacios  $\mathbf{X}$  se llama **conexo** si en el reemplazo fibrante  $\bar{\mathbf{X}}$  todas las aplicaciones canónicas  $\bar{f}_A : \bar{X}_A \longrightarrow \lim_{B>A} \bar{X}_B$  tienen fibra conexa.

### 4.3.2 El $\text{cat}^n$ -grupo fundamental

Se define un  $\text{cat}^n$ -grupo  $\Pi(\mathbf{X})$  a partir de un  $n$ -cubo de espacios  $\mathbf{X}$  imitando la construcción  $\pi_1 S(f)$  que vimos para  $n = 1$ , pero en  $n$  'direcciones' a la vez.

La construcción se puede expresar esquemáticamente de la manera siguiente.

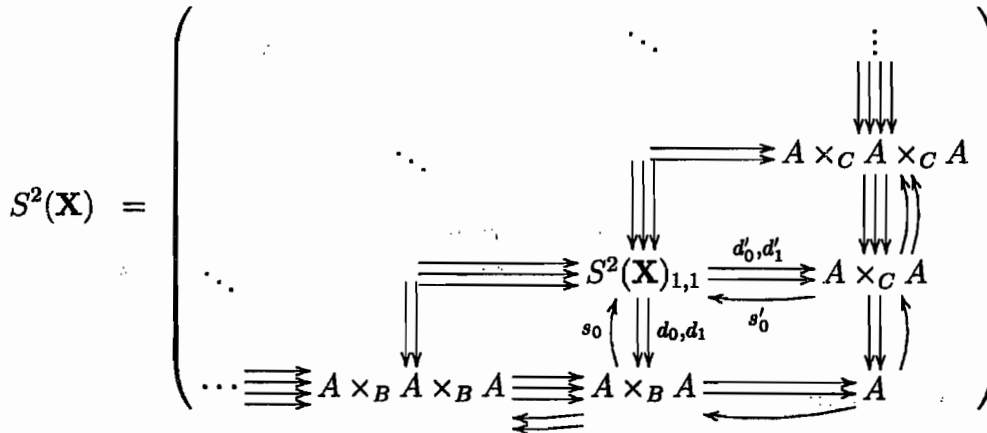
$$\begin{array}{ccc} n\text{-cubo } \mathbf{X} & \rightsquigarrow & n\text{-cubo fibrante } \bar{\mathbf{X}} \xrightarrow{S^n} \\ \xrightarrow{S^n} \text{espacio } n\text{-simplicial} & \xrightarrow{\pi_1} & \text{grupo } n\text{-simplicial} \rightsquigarrow \Pi(\mathbf{X}) \end{array}$$

Después de tomar el reemplazo fibrante del diagrama se aplica la construcción de un espacio simplicial  $S(\ )$  en todas las  $n$  direcciones del cubo, para obtener un espacio  $n$ -simplicial. Aplicando  $\pi_1$  a cada espacio de éste, se obtiene un grupo  $n$ -simplicial. De la misma manera que antes obtuvimos un  $\text{cat}^1$ -grupo de los grados 1 y 0 de un grupo simplicial, ahora obtenemos un  $\text{cat}^n$ -grupo en la 'esquina' del grupo  $n$ -simplicial. Por la equivalencia de categorías tenemos también un  $n$ -cubo cruzado asociado.

Veamos como parece para  $n = 2$ . Supongamos que el reemplazo fibrante de  $\mathbf{X}$  viene dado por el cuadrado

$$\bar{\mathbf{X}} = \left( \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array} \right)$$

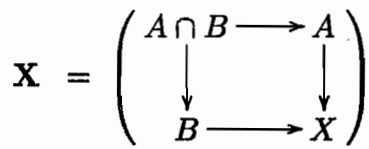
entonces el espacio bisimplicial tiene la forma siguiente



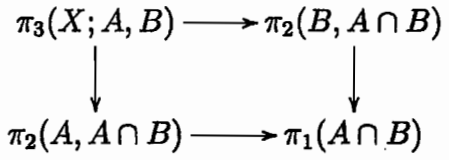
donde  $S^2(\mathbf{X})_{1,1} \cong (A \times_B A) \times_{C \times_D C} (A \times_B A) \cong (A \times_C A) \times_{B \times_D B} (A \times_C A)$ . Aplicando el functor 'grupo fundamental' a este diagrama, obtenemos una estructura de un  $\text{cat}^2$ -grupo en  $\pi_1 S^2(\mathbf{X})_{1,1}$ .

**4.3.3 Clasificación de  $n$ -tipos**

En el caso del diagrama



se puede identificar el cuadrado cruzado correspondiente en términos de grupos de homotopía relativos:



El corchete  $[ , ] : \pi_2 \times \pi_2 \rightarrow \pi_3$  en este objeto de puede expresar como un producto de Whitehead. Si  $\mathbf{X}$  es conexo y  $A, B, A \cap B$  tienen  $\pi_i$  trivial para  $i \geq 2$ , el cuadrado cruzado determina el 3-tipo de  $X$ . En general,  $n$ -cubos cruzados y  $\text{cat}^n$ -grupos son modelos para  $(n + 1)$ -tipos.

**Teorema:** [Loday 1982] Hay funtores adjuntos

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Espacios} \\ \text{conexos} \end{array} \right\} \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longrightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} n\text{-cubos fibrantes} \\ \text{y conexos en Top} \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\Pi} \\ \xleftarrow{B} \end{array} \{ \text{cat}^n\text{-grupos} \}$$



que dan una equivalencia de categorías

$$\mathbf{Ho}_{n+1} \cong \{ \text{cat}^n\text{-grupos} \} / \simeq$$

La definición de la ‘resolución’ de un espacio conexo  $X$  como un  $n$ -cubo fibrante y conexo que se usa en este teorema viene de [Steiner, 1987]; hay un error en el artículo de Loday. Steiner define una resolución funtorial  $X \rightarrow \mathbf{X}$  con  $\mathbf{X}_{1,\dots,1}$  (el espacio en la esquina final) igual a  $X$ , tal que todos los demás espacios en el cubo sean  $K(-, 1)s^{73}$ . Su definición es esencialmente una iteración del proceso que vimos para  $n = 1$ :

$$X \mapsto (A = |\text{Sing}(X)|_1 \xrightarrow{f} X) \mapsto (\bar{A} \xrightarrow{\bar{f}} X).$$

#### 4.3.4 Un teorema tipo ‘van Kampen’

El funtor de  $n$ -cubos de espacios a  $\text{cat}^n$ -grupos satisface un teorema de van Kampen de la misma manera que el grupo fundamental o el  $\text{cat}^1$ -grupo fundamental que vimos antes. Sea  $\mathbf{X}$  un  $n$ -cubo de espacios y supongamos  $X_{1,\dots,1} = X^{(1)} \cup X^{(2)}$  abiertos, con  $X^{(3)} = X^{(1)} \cap X^{(2)}$ . El recubrimiento de  $X_{1,\dots,1}$  se extiende a un recubrimiento de  $\mathbf{X}$  tomando anti-imágenes y restricciones, y tenemos un diagrama de diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}^{(3)} & \longrightarrow & \mathbf{X}^{(1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{X}^{(2)} & \longrightarrow & \mathbf{X} \end{array}$$

**Teorema:** [Brown–Loday, 1987] Si los  $n$ -cubos  $\mathbf{X}^{(i)}$  son conexos para  $i = 1, 2, 3$  entonces  $\mathbf{X}$  es conexo y  $\Pi(\mathbf{X})$  se obtiene como el pushout de los  $\text{cat}^n$ -grupos  $\Pi(\mathbf{X}^{(i)})$

$$\begin{array}{ccc} \Pi(\mathbf{X}^{(3)}) & \longrightarrow & \Pi(\mathbf{X}^{(1)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(\mathbf{X}^{(2)}) & \longrightarrow & \Pi(\mathbf{X}). \end{array}$$

<sup>73</sup>Es decir, tienen  $\pi_i$  trivial para  $i \geq 2$ .

## Referencias

- [1] H.-J. BAUES. *Algebraic Homotopy*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 15 (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [2] H.-J. BAUES. *Combinatorial Homotopy and 4-dimensional complexes*. De Gruyter Expositions in Mathematics 2 (De Gruyter, Berlin, 1991).
- [3] J. M. BOARDMAN y R. M. VOGT. *Homotopy Invariant Algebraic Structures on Topological Spaces*. Springer Lecture Notes in Mathematics 347 (Springer Verlag, Berlin, 1973).
- [4] D. BOURN y J.-M. CORDIER. A general formulation of homotopy limits. *Journal of Pure and Applied Algebra* 29 (1983), 129–141.
- [5] A. K. BOUSFIELD y D. M. KAN. *Homotopy Limits, Completions and Localizations*. Springer Lecture Notes in Mathematics 304 (Springer Verlag, Berlin, 1972).
- [6] K. S. BROWN. Abstract homotopy theory and generalised sheaf cohomology. *Transactions of the American Mathematical Society* 186 (1973), 419–458.
- [7] R. BROWN. Groupoids and Van Kampen's theorem. *Proceedings of the London Mathematical Society* (3) 17 (1967), 385–401.
- [8] R. BROWN. Coproducts of crossed  $P$ -modules: application to second homotopy groups and the homology of groups. *Topology* 23 (1984), 337–345.
- [9] R. BROWN y N. D. GILBERT. Algebraic models for 3-types and automorphism structures for crossed modules. *Proceedings of the London Mathematical Society* 59 (1989), pp. 51–73.
- [10] R. BROWN y P. J. HIGGINS. On the connection between the second relative homotopy groups of some related spaces. *Proceedings of the London Mathematical Society* (3) 36 (1978), 193–212.
- [11] R. BROWN y J.-L. LODAY. Van Kampen theorems for diagrams of spaces. *Topology* 26 (1987), 331–335.
- [12] M. P. CARRASCO y A. M. CEGARRA. Group-theoretic algebraic models for homotopy types. *Journal of Pure and Applied Algebra* 75 (1991), 195–235.
- [13] J.-M. CORDIER. Sur la notion de diagramme homotopiquement cohérent. *Proc. 3ème Colloque sur les Catégories (Amiens), Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques* 23 (1982), 93–112.
- [14] J.-M. CORDIER. Sur les limites homotopiques de diagrammes homotopiquement cohérents. *Comp. Math.* 62 (1987), 367–388.
- [15] J.-M. CORDIER y T. PORTER. Vogt's theorem on categories of homotopy coherent diagrams. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 100 (1986), 65–90.

- [16] J.-M. CORDIER y T. PORTER. Fibrant diagrams, rectifications and a construction of Loday. *Journal of Pure and Applied Algebra* **67** (1990), 111–124.
- [17] E. B. CURTIS. Simplicial homotopy theory. *Advances in Mathematics* **6** (1971), 107–209.
- [18] W. G. DWYER y J. SPALIŃSKI. Homotopy theories and model categories, en *Handbook of Algebraic Topology* (North-Holland, Amsterdam, 1995), 73–126.
- [19] D. A. EDWARDS y H. M. HASTINGS. *Čech and Steenrod Homotopy Theories with Applications to Geometric Topology*. Springer Lecture Notes in Mathematics **542** (Springer Verlag, Berlin, 1976).
- [20] G. ELLIS y R. STEINER. Higher dimensional crossed modules and the homotopy groups of  $(n + 1)$ -ads. *Journal of Pure and Applied Algebra* **46** (1987), 117–136.
- [21] P. GABRIEL y M. ZISMAN. *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*. *Ergebn. Math.* **35** (Springer Verlag, Berlin, 1967).
- [22] D. GUIN-WALÉRY y J.-L. LODAY. Obstruction à l'excision en  $K$ -théorie algébrique, en *Algebraic K-theory, Evanston 1980*, (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1980), *Springer Lecture Notes in Mathematics* **854** (Springer, Berlin, 1981) 179–216.
- [23] A. HELLER. Homotopy in functor categories. *Transactions of the American Mathematical Society* **272** (1982), 185–202.
- [24] A. HELLER. *Homotopy Theories*. *Memoirs AMS* (71) **383** (American Mathematical Society, Providence R.I., 1988).
- [25] SZE TSEN HU. *Homotopy Theory*. *Pure and Applied Mathematics* **8** (Academic Press, 1959).
- [26] K. H. KAMPS. Über einige formale eigenschaften von faserungen und h-faserungen. *Manusc. Math.* **3** (1970), 237–255.
- [27] K. H. KAMPS. Kan-Bedingungen und abstrakte Homotopitheorie. *Math. Zeit.* **124** (1972), 215–236.
- [28] D. M. KAN. Abstract homotopy I. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **41** (1955), 1092–1096.
- [29] D. M. KAN. On c.s.s. complexes. *American Journal of Mathematics* **79** (1957), 449–476.
- [30] D. M. KAN. A combinatorial definition of homotopy groups. *Annals of Mathematics* **61** (1958), 288–312.
- [31] J.-L. LODAY. Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups. *Journal of Pure and Applied Algebra* **24** (1982), 179–202.
- [32] S. MAC LANE y J. H. C. WHITEHEAD. On the 3-type of a complex. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **36** (1950), 41–48.

- [33] T. PORTER. *Abstract Homotopy Theory — the interaction of category theory and homotopy theory*. Lectures at the Corso estivo Categorie e Topologia Bressanone, Settembre 1991, University of Wales Bangor preprint **92.04**.
- [34] D. G. QUILLEN. *Homotopical Algebra*. Springer Lecture Notes in Mathematics **43** (Springer Verlag, Berlin, 1967).
- [35] D. G. QUILLEN. Rational homotopy theory. *Annals of Mathematics* **90** (1969), 205–295.
- [36] D. G. QUILLEN. On the (co)homology of commutative rings. *Proc. Symp. Pure Math.* **17** (1970), 65–87.
- [37] E. SPANIER. *Algebraic Topology*. (McGraw-Hill, New York, 1966).
- [38] R. STEINER. Resolutions of spaces by cubes of fibrations. *Journal of the London Mathematical Society (2)* **34** (1986), 169–176.
- [39] R. M. THOMASON. Homotopy colimits in the category of small categories. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **85** (1979), 91–109.
- [40] R. M. THOMASON. Cat as a closed model category. *Cahiers Top. Géom. Diff.* **21** (1980), 305–324.
- [41] J.-L. VERDIER. Catégories dérivées, état 0, en *SGA4 $\frac{1}{2}$* . Springer Lecture Notes in Mathematics **569** (Springer, Berlin, 1977).
- [42] R. M. VOGT. Homotopy limits and colimits. *Math. Zeit.* **134** (1973), 11–52.
- [43] J. H. C. WHITEHEAD. Combinatorial homotopy I y II. *Bulletin of the American Mathematical Society* **55** (1949), 213–245 y 453–496.