

Fascículo **5**

Cursos y seminarios de
matemática

Serie A

Jean Pierre Kahane

Teoría constructiva de
funciones.

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 5

Comité Editorial:

Carlos Cabrelli (Director)
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.
E-mail: cabrelli@dm.uba.ar

Gabriela Jerónimo
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.
E-mail: jeronimo@dm.uba.ar

Claudia Lederman
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.
E-mail: clerderma@dm.uba.ar

Auxiliar editorial:

Leandro Vendramin
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.
E-mail: lvendramin@dm.uba.ar

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Derechos reservados
© 2011 Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires.

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
<http://www.dm.uba.ar>
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

FASCICULO

5

cursos
 y seminarios
 de matemática

ESTE LIBRO NO SE
PRESTA A DOMICILIO

BIBLIOTECA
MATEMÁTICA
FÍSICA
METEOROLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
EXACTAS Y NATURALES

413 61

FCE y N BIBLIOTECA

Jean Pierre Kahane

TEORIA CONSTRUCTIVA
DE FUNCIONES



ESTE LIBRO NO SE
PRESTA A DOMICILIO

44473

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

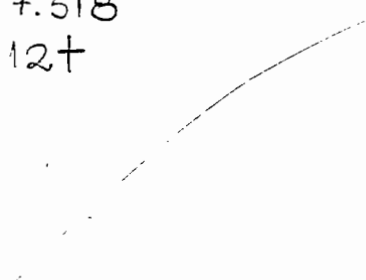
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES — DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

1961

44473

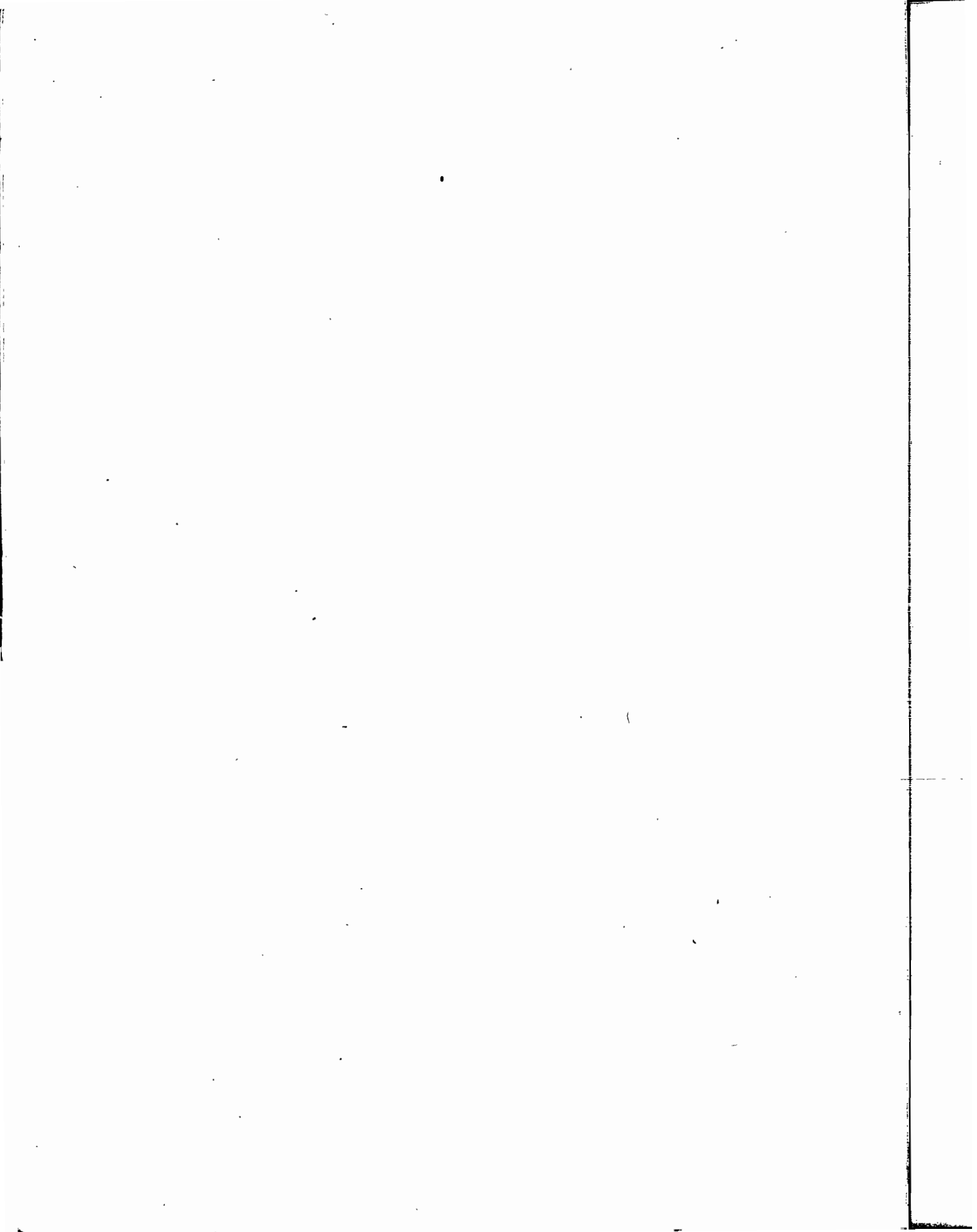
517.518

K12+



Este curso fué dictado en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires en el año 1959 por el Profesor Jean Pierre Kahane.

Las notas fueron tomadas por las licenciadas Cecilia Berdichevsky, Graciela Oliver y Lucrecia Iglesias y el Ingeniero Victor Rein. Las dos primeras se ocuparon asimismo de la corrección y preparación de la edición. El autor agradece la colaboración por ellos prestada.



I.- A PROXIMACION POR FUNCIONES ESCALERA

Un problema fundamental en la teoría que nos ocupa, puede ser sintetizado en la forma siguiente:

Consideremos el conjunto \mathcal{F}_E de funciones definidas en algún espacio E , que en lo que sigue supondremos, por simplicidad, que se trata de un intervalo cerrado $[a, b]$ de la recta real.

De ese conjunto \mathcal{F}_E consideremos en particular un subconjunto Φ contenido en \mathcal{F}_E ; toda función perteneciente a Φ será llamada función aproximante, por razones que en seguida veremos.

Sea ahora f , una función cualquiera de \mathcal{F}_E ; el problema consiste en aproximar la mediante funciones de Φ , es decir, encontrar una función $\varphi \in \Phi$ que difiera "poco" de la función dada f . Claro está que es necesario precisar qué significa que φ difiera "poco" de f , y para ello es necesario definir alguna función tal que a cada par de elementos de \mathcal{F}_E le haga corresponder un número real, ≥ 0 que deberá ser interpretado como distancia entre tales elementos.

Si designamos con d a tal función, podremos ahora definir en forma precisa qué se entiende por la mejor aproximación de la función f ; será el número:

$$E(f) = \inf_{\varphi \in \Phi} d(f, \varphi)$$

o en otras palabras, la distancia de la función f al conjunto Φ .

Como vemos, para poder encarar el problema, son previas la elección del conjunto Φ de funciones aproximantes, y la definición de distancia d a adoptarse.

En este capítulo eligiremos como conjunto Φ al conjunto de funciones escalera o a un subconjunto de las mismas. Como distancia, en cambio, propondremos diversas funciones, cuya conveniencia de adopción dependerá de cada problema particular.

Recordemos en primer lugar qué se llama función característica $\Omega_C(x)$ del conjunto $C \subset E$ (E es el espacio de definición). a la función que esta definida mediante:

$$\Omega_{\mathcal{C}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{C} \\ 0 & \text{si } x \in E - \mathcal{C} \end{cases}$$

Definición (I.1)

Se llama función escalera, a toda combinación lineal finita de funciones características de intervalos. Se trata de intervalos abiertos o no abiertos; un punto debe ser considerado como un intervalo. Si designamos con $C_k(x)$ a la función característica del intervalo I_k , es decir, $C_k(x) = 1$, si $x \in I_k$, y $C_k(x) = 0$, si $x \notin I_k$, entonces, toda función escalera, es de la forma:

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n y_k C_k(x)$$

donde n , es un número natural, y y_k son números reales.

En la teoría de la aproximación, se presentan diversos problemas, según sea la naturaleza de la función que se quiere aproximar. Así, tenemos:

A.- APROXIMACION DE FUNCIONES CONTINUAS EN UN INTERVALO CERRADO $[a, b]$:

Como una función f , continua en un intervalo cerrado es uniformemente continua en él, es natural pensar que una aproximación adecuada de la f , es la aproximación uniforme mediante las funciones escaleras.

Para eso definamos la norma ∞ de la manera usual:

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

es inmediato comprobar que efectivamente se trata de una norma en el espacio de las funciones esencialmente acotadas, y entonces adoptaremos la siguiente :

Definición (I.2) :

Se dice que $E_n(f)$, es la mejor aproximación de la función f por las φ_n , cuando:

$$E_n(f) = \inf_{\{\varphi_n\}} \|f - \varphi_n\|_{\infty}$$

Analizaremos dos casos, según que los n puntos de subdivisión estén o no prefijados.

1º.- Puntos de subdivisión impuestos :

Diremos que los puntos de subdivisión son impuestos, cuando está prefijada una partición

de $[a, b]$ en n subintervalos, de manera que toda función característica aproximante $\varphi_n(x)$ debe tomar valor constante en cada subintervalo.

a) En este caso, existe una función φ_n que realiza la mejor aproximación. En efecto: $\|f - \varphi_n\|_\infty$ es una función continua de las variables y_1, \dots, y_n ; además, $\|f - \varphi_n\|_\infty \rightarrow \infty$ cuando cualquiera de las variables $\rightarrow \infty$. Por lo tanto, se cumplen las condiciones del teorema de Weierstrass, y es alcanzable el mínimo de la $\|f - \varphi_n\|_\infty$ que es $E_n(f)$.

Observación: En las hipótesis del teorema de Weierstrass, se requiere que la función sea continua en un dominio cerrado y acotado. En este caso, las y_i no son necesariamente acotadas, pero como la $\|f - \varphi_n\|_\infty \rightarrow \infty$ cuando cualquiera de las variables $\rightarrow \infty$, esto nos asegura que el mínimo sobre un compacto cualquiera está fuera de un entorno del infinito.

b) Vamos a construir una función de mejor aproximación y estudiar su unicidad: tomemos $n = 1$; no hay en este caso puntos de subdivisión y la función escalera es una constante. Sea y , el valor de esa constante, y M y m , el máximo y el mínimo de $f(x)$ en $[a, b]$.

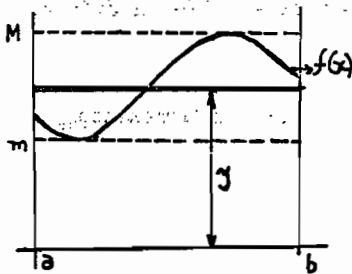


fig. I.1

Tenemos que:

$$\|f - \varphi_1\|_\infty = \max. \{|M - y|, |m - y|\}$$

El mínimo se alcanza para:

$$y = \frac{m + M}{2} \text{ y resulta:}$$

$$E_1(f) = \frac{M - m}{2}$$

Se ve entonces, que para $n = 1$, la función de mejor aproximación es única.

c) Para n cualquiera, se comienza por construir para cada intervalo

$$y_i = \frac{M_i + m_i}{2}$$

donde M_i y m_i , son respectivamente el máximo y el mínimo de $f(x)$ en el i ésimo intervalo.

Tomando el $\sup_{\{i\}} \{(M_i - m_i)/2\}$, se tendrá el valor de $E_n(f)$.

En general, habrá intervalos donde

$$\frac{M_j - m_j}{2} \leq E_n(f)$$

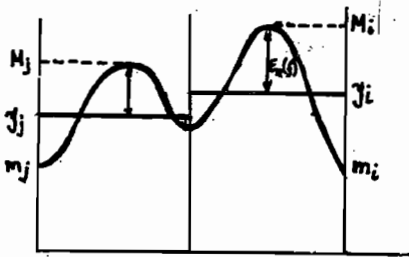


fig. I.2

y en tal caso, es posible variar y_j de modo que $|f(x) - y_j|$ siga siendo menor que $E_n(f)$, y obtener así distintas funciones φ_n que realicen la mejor aproximación.

Se concluye entonces, que para n cualquiera no hay en general unicidad de la función de mejor aproximación.

d) Vamos a ocuparnos ahora del módulo de continuidad, que es un concepto vinculado al de continuidad uniforme y que nos será útil en lo que sigue:

Definición I.3 :

Se da el nombre de módulo de continuidad de una función continua, al valor:

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|x-x'| \leq \delta} |f(x) - f(x')|$$

donde x y x' son puntos cualesquiera del intervalo de definición de la función y δ es un número positivo.

Con respecto al módulo de continuidad, es fácil ver que, una función es uniformemente continua, sí y sólo sí:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f(\delta) = 0$$

Además, de la desigualdad triangular:

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(x)| + |f(x'') - f(x)|$$

resulta, tomando supremos :

$$\omega_f(\delta + \delta') \leq \omega_f(\delta) + \omega_f(\delta')$$

Existen funciones, cuyo módulo de continuidad está acotado por una función positiva dada (por lo menos hay constantes); y las agruparemos según el siguiente criterio:

Definición I.4 :

Dada la función creciente $\omega(\delta) \geq 0$, definida para $\delta \geq 0$, se llamará $C_\omega(\delta)$ a la clase de todas las funciones continuas, cuyo módulo de continuidad verifica la desigualdad:

$$\omega_f(\delta) \leq \omega(\delta)$$

Vamos a ver ahora, que existe una relación muy simple entre la clase de funciones

$C_\omega(\delta)$ y la velocidad de aproximación de las mismas por funciones escaleras, donde entendemos por velocidad de aproximación al orden de decrecimiento de $E_n(f)$, con respecto a n .

En efecto, dados $E_n(f)$ y $\omega(\delta)$, es posible acotar uno en función del otro, cuando los subintervalos de subdivisión son iguales.

Así, conocido $\omega(\delta)$, resulta:

$$(1) \quad E_n(f) = \sup_j \frac{M_j - m_j}{2} \leq \frac{1}{2} \omega_f \left(\frac{b-a}{n} \right) \leq \frac{1}{2} \omega \left(\frac{b-a}{n} \right). \text{ Luego, } 2 E_n(f) \leq \omega \left(\frac{b-a}{n} \right)$$

Recíprocamente, conocida la mejor aproximación $E_n(f)$, veamos qué puede decirse del módulo de continuidad ω_f . Para eso, acotemos el valor absoluto de la diferencia de los valores de la función en puntos cuya distancia es menor que: $\delta = \frac{b-a}{n}$; esos puntos pueden estar: o en un mismo subintervalo de subdivisión, o a lo sumo en dos subintervalos consecutivos.

En el primer caso es:

$$|f(x) - f(x')| \leq 2 E_n(f) \quad \text{con} \quad |x - x'| \leq \delta$$

En el segundo caso, tenemos: (figura I.3)

$$|f(x_{j+1}) - y_j| \leq E_n(f)$$

$$|f(x_{j+1}) - y_{j+1}| \leq E_n(f)$$

Por lo tanto:

$$|y_j - y_{j+1}| \leq 2 E_n(f)$$

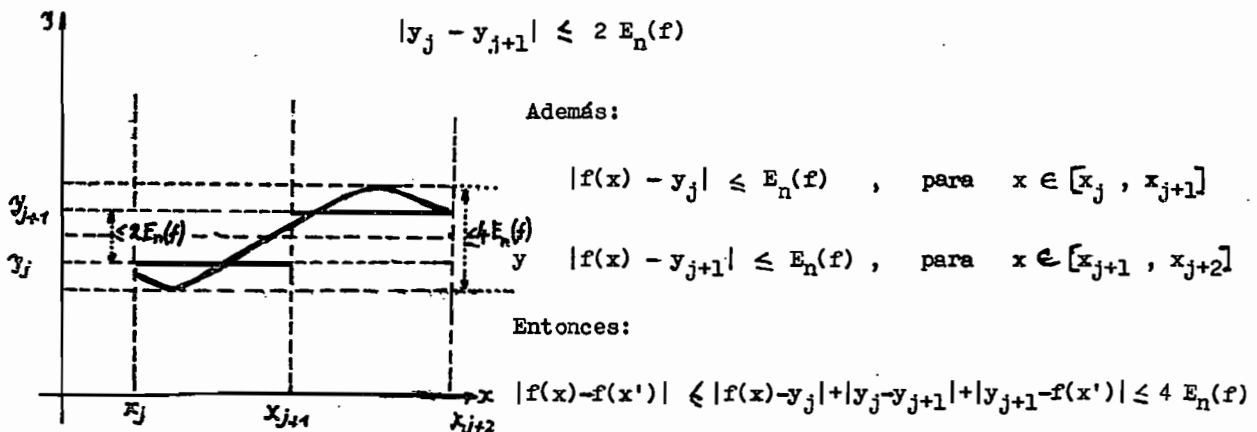


fig. I.3

(2)

Siempre que:

$$|x - x'| \leq \delta = \frac{b-a}{n}$$

En consecuencia:

$$\omega(\delta) \leq 4 E_n(f)$$

Esta acotación no puede mejorarse, como se ve en la fig. I.3 . En particular, tenemos:

T e o r e m a I.1 :

Para que $f \in \text{Lip. } \alpha$ con $0 < \alpha \leq 1$, es condición necesaria y suficiente que
 $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

D e m o s t r a c i ó n :

$$f \in \text{Lip. } \alpha \rightarrow \omega_f(\delta) \leq k \delta^\alpha$$

Luego:

$$E_n(f) \leq \frac{1}{2} \omega_f\left(\frac{b-a}{n}\right) \leq k' \cdot \frac{1}{n^\alpha}, \text{ es decir: } E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

Recíprocamente:

Si $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, es decir, si: $E_n(f) \leq \frac{k}{n^\alpha}$, tenemos: $\omega_f(\delta) \leq 4 E_n(f) \leq \frac{k'}{n^\alpha}$

O b s e r v a c i ó n : la restricción $\alpha \leq 1$ es natural, pues si fuese $\alpha > 1$, entonces:

$$\omega(\delta) \leq k \delta^\alpha = k \delta \cdot \delta^{\alpha-1}, \text{ o sea: } \frac{\omega(\delta)}{\delta} \leq c \cdot \delta^{\alpha-1}$$

Pero como $\alpha - 1 > 0$, la expresión anterior tiende a 0, para $\delta \rightarrow 0$ lo cual implica que la derivada de la función, que es el $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(\delta)}{\delta}$ es nula en todo punto. En consecuencia, f es una constante

2°.- No se imponen los puntos de subdivisión :

a) En este caso no prefijamos una partición, sino que tratamos de hallar la mejor aproximación variando las posibles particiones y las funciones características definidas en ellas. En este caso, el conjunto de funciones aproximantes es más extenso, y es de esperar que la aproximación mejore.

Veremos que en este caso existe una función escalera φ que realiza la mejor aproximación, es decir:

$$E_n(f) = \inf. \|f - \varphi_n\|_\infty = \|f - \varphi\|$$

En efecto, $\|f - \varphi_n\|_\infty$ es una función continua de $(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$ y como en el caso anterior, el teorema de Weierstrass nos asegura la existencia del extremo inferior, es decir, de $E_n(f)$

b) Esta función de mejor aproximación, no es en general única, como se ve en un ejemplo sencillo.

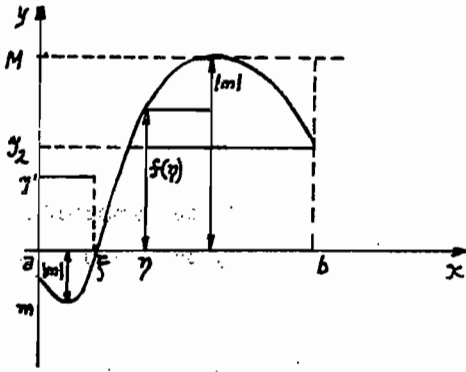


fig. I.4

Sea $f(x)$ la función cuyo gráfico está representado en la fig. I.4, M y m son el máximo y el mínimo de $f(x)$ en $[a, b]$. Sea, además $|m| < |M|$. Tomemos:

$$y_1 = \frac{M+m}{2} \quad ; \quad y_2 = M/2$$

η el punto que verifica: $f(\eta) + |m| = |M|$

ξ el punto tal que: $f(\xi) = 0$

Entonces se ve fácilmente que, todas las funciones:

$$\varphi_1 = \begin{cases} (M+m)/2 & , \text{ para } a \leq x \leq h \\ M/2 & , \text{ para } h \leq x \leq b \end{cases}$$

donde h es un punto cualquiera del intervalo $[\xi, \eta]$, son funciones que dan la mejor aproximación.

c) Existe un caso, en que puede asegurarse la unicidad. Es el caso de las funciones monótonas.

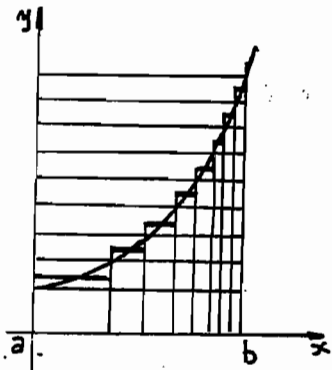


fig. I.5

En efecto, consideremos para fijar ideas una función monótona creciente. La oscilación en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ es $f(x_{j+1}) - f(x_j)$. La mejor aproximación en cada intervalo, es pues:

$$\frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{2}$$

Además se sabe que:

$$(3) \quad \sum_j \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{2} = \frac{f(b) - f(a)}{2}$$

Para un n prefijado, el problema consiste pues, en determinar los puntos de subdivisión, de modo que el $\max_j \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{2}$ sea mínimo.

Se ve que esto se logra, cuando los sumandos del primer miembro de (3) son todos iguales. (fig. I.5). Hemos dividido el intervalo $f(b) - f(a)$ en n partes iguales y tomamos la partición sobre el eje x que ella induce

La oscilación en cada intervalo, será pues: $\frac{f(b) - f(a)}{2n}$, y resultará:

$$(4) \quad E_n(f) = \frac{f(b) - f(a)}{2n}$$

La función de mejor aproximación, es entonces, única.

Conviene hacer notar que no existe relación entre $E_n(f)$ y el módulo de continuidad de la función, puesto que por la (4), $E_n(f)$ sólo depende de $f(b)$ y de $f(a)$, si n está prefijado.

ñ) Se pueden generalizar estos resultados al caso de funciones de variación acotada.

T e o r e m a I.2 :

Es condición necesaria y suficiente para que $f(x)$ sea de variación acotada en (a,b) que $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

D e m o s t r a c i ó n :

Si $V_f(a,b)$ es la variación de $f(x)$ en el intervalo (a,b) , tenemos:

$$\sum_{i=1}^n \frac{|f(x_{i+1}) - f(x_i)|}{2} \leq \frac{1}{2} V_f(a,b),$$

cualquiera sea la subdivisión de (a,b) en n intervalos.

Para elegir los intervalos de subdivisión, impondremos la condición:

$$V_f(x_j, x_{j+1}) = \frac{1}{n} V_f(a,b)$$

y tomaremos: $y_j = \frac{M_j + m_j}{2}$

Entonces:

$$\max_{x \in [x_j, x_{j+1}]} |f(x) - \varphi_n(x)| = \frac{M_j - m_j}{2} \leq \frac{1}{2} V_f(x_j, x_{j+1}) = \frac{\frac{1}{n} V_f(a,b)}{2}$$

y

$$E_n(f) = \sup_j \frac{M_j - m_j}{2} \leq \frac{\frac{1}{2} V_f(a,b)}{n} \therefore E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

quedando así demostrado que:

$$V_f(a,b) < \infty \longrightarrow E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Recíprocamente: Si suponemos $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, tenemos que:

Dada una sucesión $\{\varphi_n\}$ de funciones aproximantes:

$$V_{\varphi_n}(a,b) = \sum_{j=1}^{n-1} |y_{j+1} - y_j| \leq (n-1) 2 E_n(f) = O(1)$$

Pero, se demuestra que, si una sucesión de funciones converge puntualmente una función f la variación de f es menor que el límite inferior de la variación de las funciones aproximantes (probarlo):

$$V_f(a,b) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} V_{\varphi_n}(a,b)$$

Como $V_{\varphi_n}(a,b) = O(1)$, resulta: $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow V_f(a,b) < \infty$ l.q.q.d.

Observación: Se ve que $V_f(a,b) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} V_{\varphi_n}(a,b) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (2n E_n(f)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (2n E_n(f)) \leq V_f(a,b)$. Es decir que: $V_f(a,b) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n E_n(f))$.

e) Pasaremos ahora a estudiar la clase $V^\Psi(a,b)$, llamada de variación acotada generalizada respecto de Ψ .

Definición I.5:

Dada una función Ψ continua y estrictamente creciente en (a,b) , tal que $\Psi(0)=0$ y $\Psi(u+r) \leq \Psi(u) + \Psi(r)$, se dice que $f \in V^\Psi(a,b)$, si y sólo si las sumas $\sum_{i=1}^n \Psi(|f(x_{i+1}) - f(x_i)|)$ están acotadas para toda elección de n , y toda elección de los puntos x_i de subdivisión del intervalo (a,b) .

Definición I.6:

Se llamará variación generalizada $V_f^\Psi(a,b)$ de $f \in V^\Psi(a,b)$ al

$$\sup. \sum_1^n \Psi(|f(x_{i+1}) - f(x_i)|)$$

donde el supremo se entiende sobre todas las posibles particiones del intervalo (a,b)

Teorema I.3:

Para que $f \in V^\Psi(a,b)$, es condición necesaria y suficiente que: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \Psi[2 E_n(f)] < \infty$, o también $\lim_{n \rightarrow \infty} n \Psi[2 E_n(f)] < \infty$. Además los límites superior e inferior son iguales a $V_f^\Psi(a,b)$.

Demostración:

Sea $f \in V^\Psi(a,b)$. Se toman los puntos de subdivisión x_i , de modo que: $V_f^\Psi(x_i, x_{i+1}) = \frac{1}{n} V_f^\Psi(a,b)$. Se elige $y_i = \frac{M_i + m_i}{2}$

Entonces:

$$\Psi(M_j - m_j) \leq V_f^\Psi(x_j, x_{j+1}), \text{ cualquiera sea } j.$$

Como Ψ es creciente:

$$M_j - m_j \leq \Psi^{-1} [V_f^\Psi(x_i, x_{i+1})], \text{ para todo } j.$$

Pero,

$$E_n(f) = \sup_j \frac{M_j - m_j}{2}$$

Luego

$$E_n(f) \leq \frac{1}{2} \Psi^{-1} [V_f^\Psi(x_i, x_{i+1})] = \frac{1}{2} \Psi^{-1} [V_f^\Psi \left(\frac{a,b}{n} \right)]$$

De donde:

$$n \cdot \Psi [2 E_n(f)] \leq V_f^\Psi(a,b)$$

En conclusión:

$$V_f^\Psi(a,b) < \infty \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \Psi [2 E_n(f)] < \infty.$$

Recíprocamente:

Se puede demostrar que si una sucesión $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente a una función f , se verifica:

$$V_f^\Psi(a,b) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} V_{\varphi_n}^\Psi(a,b)$$

Para la demostración de esta última desigualdad, se usa la propiedad de subaditividad

de la Ψ

Pero

$$V_{\varphi_n}^\Psi(a,b) = \sum_1^{n-1} \Psi(|y_{i+1} - y_i|) \leq (n-1) \Psi [2 E_n(f)]$$

y como

$$\Psi(0) = 0$$

Entonces:

$$V_f^\Psi(a,b) < \liminf_{n \rightarrow \infty} n \Psi [2 E_n(f)]$$

Es decir:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n \Psi [2 E_n(f)] \rightarrow \infty \Rightarrow V_f^\Psi(a,b) < \infty.$$

$$\text{Además } V_f^\Psi(a,b) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} n \Psi [2 E_n(f)] \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \Psi [2 E_n(f)] \leq V_f^\Psi(a,b).$$

Observación: Si suprimimos la condición de subaditividad de $\Psi(x)$, se puede ver que, si bien:

$$(5) \quad f \in V_f^\Psi \Rightarrow E_n(f) = 0 \left[\Psi^{-1} \left(\frac{b-a}{n} \right) \right], \text{ no vale la recíproca.}$$

Es decir, si no es subaditiva, no se obtiene una caracterización de la clase V_f^Ψ por la expresión (5).

$\Psi(x) = x^\alpha$, con $\alpha > 1$, es un ejemplo de función creciente que no es subaditiva.

B.- APROXIMACION DE FUNCIONES DE CUADRADO INTEGRABLE SOBRE EL INTERVALO $[a, b]$

En este caso, aproximaremos la función en norma L^2 , es decir, definiremos como mejor aproximación a:

$$E_n(f) = \inf_{\{\varphi_n\}} \left[\int_I |f - \varphi_n|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

donde la norma L^2 está definida mediante:

$$\|f\|_2 = \left\{ \int_I |f - \varphi_n|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

en la cual I es el intervalo $[a, b]$

Para hallar la función de mejor aproximación, se presentan como antes dos casos:

1°.- Los puntos de subdivisión están prefijados :

En tal caso, si la integral es mínima en cada subintervalo, lo es también en el intervalo $[a, b]$; entonces, basta con tomar en cuenta lo que ocurre en un intervalo único I . La función de mejor aproximación para un intervalo único, será una constante; llamémosla por ejemplo y .

a) La función de mejor aproximación existe y es única.

En efecto: la $\int_I |f - y|^2 dx$, es función continua de y , y es tal que $\rightarrow \infty$ cuando $y \rightarrow \infty$; el teorema de Weirstrass, permite afirmar la existencia de un valor de y que hace mínima la integral. Condición necesaria de la existencia de un mínimo es:

$$\frac{d}{dy} \int_I |f - y|^2 dx = 0$$

Es decir:

$$- 2 \int_I (f - y) dx = 0$$

o sea

$$y = \frac{\int_I f(x) dx}{\int_I dx}$$

Entonces, la función $\varphi_1 = y$, queda unívocamente determinada por el valor medio de $f(x)$ en I .

b) Observación : En el caso de subdivisión dicotómica y conocido el valor de y en $[a, b]$ y el valor de y_1 en (a, c) con c punto medio de

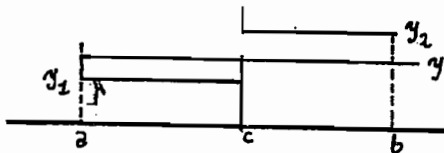


fig. I.6

(a, b) , es muy sencillo el cálculo de y_2 en (c, b) , teniendo en cuenta que y es el promedio de y_1 e y_2

2º.- Los puntos de subdivisión no están prefijados :

a) La función de mejor aproximación, si existe, no es única.

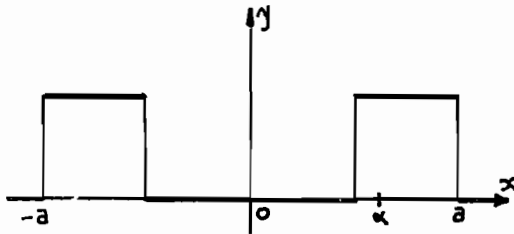


fig. I.7

Ejemplo: Sea $n = 2$ y sea la función cuyo gráfico está representado en la fig. I - 7 la que se quiere aproximar.

Si existe α , tal que se puede construir y_1 en $(-a, \alpha)$ e y_2 en (α, a) , como valores de la φ_2 de mejor aproximación, entonces el valor

$-\alpha$ permite construir y_1 en $(-a, -\alpha)$, e y_2 en $(-\alpha, a)$, también de mejor aproximación.

b) la función de mejor aproximación existe:

Tenemos que:

$$\int_a^b |f - \varphi_n|^2 dx = \int_a^{x_1} |f - y_1|^2 + \int_{x_1}^{x_2} |f - y_2|^2 + \dots + \int_{x_{n-1}}^b |f - y_n|^2$$

es función continua de $(x_1, x_2, \dots, x_n ; y_1, y_2, \dots, y_n)$; x_1, x_2, \dots, x_n pertenecen a un compacto y para $y_j \rightarrow \infty$, la integral $\rightarrow \infty$.

El teorema de Weierstrass , permite asegurar la existencia de un mínimo.

c) Es posible determinar dos tipos de condiciones que satisfacen la función de mejor aproximación. En efecto: es condición necesaria para la existencia de mínimo, que cualquiera sea x_1 y cualquiera sea y_1 :

$$1.- \frac{\partial}{\partial x_1} \int_a^b |f - \varphi_n|^2 dx = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_1} (f - y_1)^2 dx + \int_{x_1}^{x_{i+1}} (f - y_{i+1})^2 dx \right] = 0$$

$$2.- \frac{\partial}{\partial y_1} \int_a^b |f - \varphi_n|^2 dx = \frac{\partial}{\partial y_1} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_1} (f - y_1)^2 dx \right] = 0$$

De 1.- resulta:

$$(f(x_1) - y_1)^2 - (f(x_1) - y_{i+1})^2 = 0$$

O sea: $|f(x_1) - y_1| = |f(x_1) - y_{i+1}|$

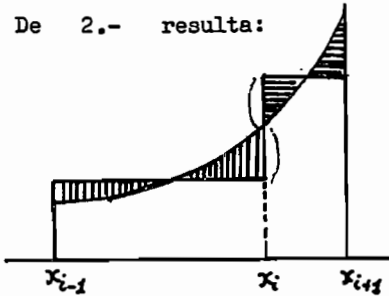
Es decir:

$$y_i = y_{i+1}$$

o bien:

$$f(x_i) = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

De 2.- resulta:



$$y_i = \frac{\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx} = \text{valor medio de } f(x) \text{ en } (x_{i-1}, x_i)$$

Gráficamente las condiciones halladas se expresan mediante la igualdad de los segmentos marcados, y la igualdad de las áreas rayadas en el mismo sentido.

fig. I.8

C.- APROXIMACION DE FUNCIONES INTEGRABLES EN [a, b].

En este caso, se trata de la aproximación en norma L^1 es decir, se tomará como definición de mejor aproximación, a la expresión:

$$E_n(f) = \inf_{\{\varphi_n\}} \int_I |f - \varphi_n| dx$$

donde la norma -1 , está definida mediante:

$$\|f\|_1 = \int_I |f| dx$$

Tenemos como siempre:

1º.- Los puntos de subdivisión están dados :

Como en casos anteriores, el problema se reduce a la consideración de un sólo intervalo de subdivisión I . En tal caso:

a) la función de mejor aproximación existe, pero en general no es única. Por ejemplo, sea la función representada en la figura I.9 que por ser $n = 1$, se quiere aproximar por una función constante y .

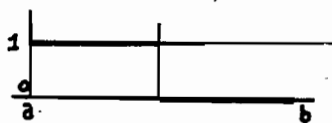


fig. I.9

Se ve que, la $\int_I |f - y| dx$, es la misma para todo valor de y comprendido entre 0 y 1.

b) Teorema I.4 :

Si la función f es continua, la función de mejor aproximación es única.

Demostración :

Supongamos que $y_1 \neq y_2$, son dos funciones de mejor aproximación (para $n = 1$), y sea $y_1 > y_2$, por ejemplo.

Consideremos la expresión:

$$\int_I \left| f(x) - \frac{y_1 + y_2}{2} \right| dx = \frac{1}{2} \int_I |f(x) - y_1 + f(x) - y_2| dx \leq \frac{1}{2} \left\{ \int_I |f - y_1| + \int_I |f - y_2| \right\}$$

donde el último miembro, representa el valor mínimo de $\int_I |f - y|$

Si valiera el signo $<$, la expresión

$$(6) \quad \int_I \left| f(x) - \frac{y_1 + y_2}{2} \right| dx < \frac{1}{2} \left\{ \int_I |f - y_1| + \int_I |f - y_2| \right\}$$

indicaría que $(y_1 + y_2)/2$, es una función que da a la integral $\int_I |f(x) - y|$, un valor menor que el mínimo, lo cual es absurdo; luego en (6), vale el signo $=$

Esto es:

$$\frac{1}{2} \int_I |f - y_1 + f - y_2| dx = \frac{1}{2} \left\{ \int_I |f - y_1| dx + \int_I |f - y_2| dx \right\}$$

Por ser todas las integrales positivas:

$$|f - y_1 + f - y_2| = |f - y_1| + |f - y_2|$$

y en consecuencia, $(f - y_1)$ y $(f - y_2)$ deben tener el mismo signo, cualquiera sea x ; o lo que es lo mismo, f no puede estar comprendida entre y_1 e y_2 para ningún x .

Supongamos que $f(x)$ sea mayor que y_1 en todo punto $x \in (a, b)$. En tal caso, se puede tomar ϵ de modo que:

$$\int_I |f - y_1 - \epsilon| < \int_I |f - y_1|$$

Pero como $\int_I |f - y_1|$, es un mínimo de $\int_I |f - y|$, esto es absurdo. Entonces, $f(x)$ toma el valor y_1 , al menos en un punto. Análogamente, se demuestra que $f(x)$ toma el valor y_2 , al menos en un punto; pero como $f(x)$ es continua en (a, b) , debe tomar el valor intermedio $(y_1 + y_2)/2$. Hemos así llegado a una contradicción, que prueba que nuestro supuesto inicial $y_1 \neq y_2$ es falso, y que la función de mejor aproximación es única.

c) En el caso en que $f(x)$ sea continua y monótona, es fácil ver que la función y

de mejor aproximación es el valor de $f(x)$ para $x = (b - a)/2$

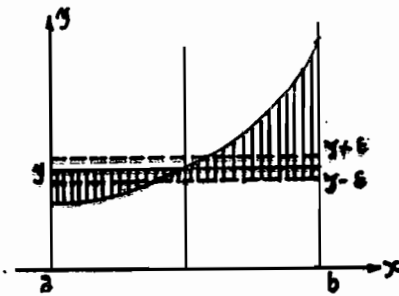


fig. I.10

Basta comparar el área rayada con las que obtendrían tomando $y + \epsilon$ ó $y - \epsilon$, cualquiera sea ϵ .

Se ve fácilmente que:

$$\int_I |f - y| < \int_I |f - y \pm \epsilon|$$

2º.- Los puntos de subdivisión no están prefijados :

a) La función de mejor aproximación existe:

$$\int_I |f - \varphi_n| dx = \int_a^{x_1} |f - y_1| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f - y_2| dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^b |f - y_n| dx$$

es una función continua de $(x_1, x_2, \dots, x_n ; y_1, y_2, \dots, y_n)$, y por el mismo razonamiento que en los casos anteriores, se puede afirmar la existencia de la función de mejor aproximación.

b) Es posible determinar dos tipos de condiciones, que caracterizan a la función de mejor aproximación para f continua. Son consecuencia de las condiciones necesarias para la existencia de mínimo. Cualquiera sea x_1 y cualquiera sea y_1 , debe ser:

$$1.- \frac{\partial}{\partial x_1} \int_a^b |f - \varphi_n| dx = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_1} |f - y_i| dx + \int_{x_1}^{x_{i+1}} |f - y_{i+1}| dx \right] = 0$$

$$2.- \frac{\partial}{\partial y_1} \int_a^b |f - \varphi_n| dx = \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{x_{i-1}}^{x_1} |f - y_i| dx = 0$$

De 1.º resulta:

$$|f(x_1) - y_i| - |f(x_1) - y_{i+1}| = 0$$

es decir:

$$y_i = y_{i+1}$$

o bien:

$$f(x_1) = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

Si llamamos:

$A = \text{med. } \{x\}$, tales que $f(x) \geq y_1$

y $B = \text{med. } \{x\}$, tales que $f(x) < y_1$

y además definimos:

$$\varphi^+ = \begin{cases} f(x) - y_1 & , \text{ para } x \in A \\ 0 & " \quad x \in B \end{cases}$$

$$\varphi^- = \begin{cases} -(f(x) - y_1) & , \text{ para } x \in B \\ 0 & , " \quad x \in A \end{cases}$$

donde A y B son conjuntos medibles, pues $f(x)$ es integrable y en consecuencia medible. Se puede escribir:

$$|f - y_1| = \varphi^+ + \varphi^-$$

Entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{x_{i-1}}^{x_1} |f - y_1| dx = \frac{\partial}{\partial y_1} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_1} \varphi^+ dx \right] + \frac{\partial}{\partial y_1} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_1} \varphi^- dx \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left[\int_A (f(x) - y_1) dx \right] - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\int_B (f(x) - y_1) dx \right] = 0$$

Como $f(x)$ no depende de y_1 , debe ser:

$$\frac{\partial}{\partial y_1} (-y_1) \int_A dx - \frac{\partial (x_1)}{\partial y_1} \int_B dx = 0$$

o bien:

medida $A =$ medida B .

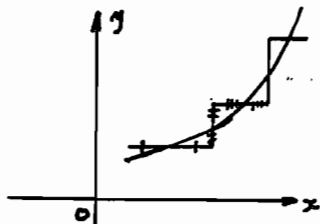


fig. I.11

Es decir: $\text{med } \{x \mid f(x) \geq y_1\} = \text{med } \{x \mid f(x) < y_1\}$.

En el caso particular de una función *m o n ó t o n a* se puede afirmar que la función corta la escalera en los puntos medios de cada escalón y en los puntos medios de la alzada de cada escalón (fig. I.11)

II.- INTERPOLACION POR FUNCIONES POLIGONALES

Elegimos ahora como conjunto Φ de funciones aproximante, a las poligonales en lugar de las funciones escaleras.

Definición 2.1 :

Dada una función $f(x)$ en el intervalo (a,b) y n - puntos de subdivisión equidistantes del mismo, se dice que $\varphi_n(x)$ es una función poligonal que interpola a $f(x)$ cuando $\varphi_n(x)$ es lineal en cada intervalo y toma en los extremos del mismo el valor de la función.

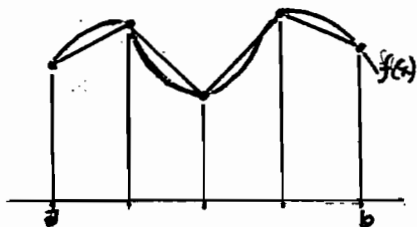


fig. 2.1

En virtud de la continuidad uniforme de una función continua en un intervalo cerrado es posible afirmar que

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \rightarrow 0$$

en norma C cuando $n \rightarrow \infty$

A.- RELACION ENTRE LAS PROPIEDADES DE LA DERIVADAS DE $f(x)$ Y LA VELOCIDAD DE INTERPOLACION POR FUNCIONES POLIGONALES .

1º.- Sea $f(x)$ una función absolutamente continua con derivada $f' \in L^2$. Entonces: la derivada de la función poligonal φ_n es una función escalera cuyo valor y_1 en el intervalo (x_1, x_{1+1}) es el valor medio de $f'(x)$ en dicho intervalo. En efecto:

$$\frac{\int_{x_1}^{x_{1+1}} f'(x) dx}{x_{1+1} - x_1} = \frac{f(x_{1+1}) - f(x_1)}{x_{1+1} - x_1} = y_1$$

En consecuencia, de acuerdo a lo establecido para funciones en L^2 , φ_n resulta ser la función de mejor aproximación de $f'(x)$.

2º.- Sea $f(x)$ una función absolutamente continua con derivada $f' \in C$, y tal que su módulo de continuidad verifica: $\omega_{\varphi}(\delta) < \omega(\delta)$ con $\omega(\delta)$ creciente.

Entonces, por la acotación de $E_n(f)$ en la aproximación de funciones continuas por fun

ciones escalera:

$$| \varphi'_n(x) - f'_n(x) | \leq \frac{1}{2} \omega\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

y en consecuencia:

$$\int_I | \varphi'_n(x) - f'_n(x) | dx \leq \frac{b-a}{n} \cdot \frac{1}{2} \omega\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

para todo intervalo I de longitud $(b-a)/n$

Sea x un punto del intervalo (x_1, x_{1+1}) . Como $\varphi_n(x_1) = f(x_1)$, será:

$$\varphi_n(x) - f(x) = \int_{x_1}^x [\varphi'_n(x) - f'_n(x)] dx$$

Entonces:

$$| \varphi_n - f | \leq \int_{x_1}^x | \varphi'_n - f'_n | \leq \frac{b-a}{n} \cdot \frac{1}{2} \omega\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Esto es, para todo x , vale la siguiente desigualdad referente a la velocidad de aproximación de f por φ_n :

$$| \varphi_n - f | \leq \frac{b-a}{2n} \omega\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

3^o.- Sea una función $f(x)$ absolutamente continua cuya derivada $f' \in \text{Lip. 1}$

Entonces, por definición de condición de Lip. 1:

$$(2.1) \quad | f'(x) - f'(x') | \leq M | x - x' |$$

y, en consecuencia, si f'' existe:

$$(2.2) \quad | f'' | \leq M$$

Pero no es cierto, en general, que f'' exista. Recíprocamente la existencia de f''

y 2.2 implican 2.1, porque: $f'(x) - f'(x') = (x-x') f''(x'')$, $x < x'' < x'$.

Se tratará de acotar $| \varphi_n - f |$ en el intervalo (a,b) . Para ello, comencaremos con el caso:

$$\left. \begin{array}{l} n = 1 \\ f(a) = f(b) = 0 \end{array} \right\} \therefore \varphi_n \equiv 0$$



fig. 2.2

y luego se verá que su generalización es sencilla. En este caso particular:

$$(2.3) \quad \int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a) = 0$$

En la fig. 2.2 se ha representado la función f'

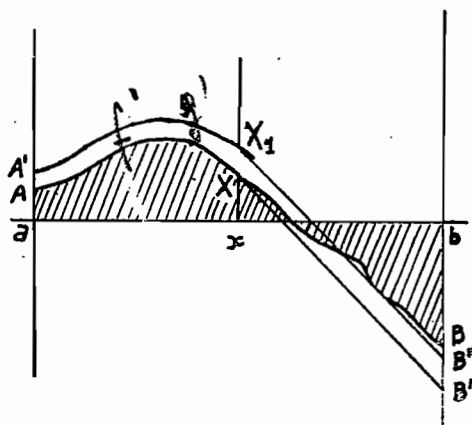


fig. 2.3

Por la fórmula (2.3) , las áreas marcadas son iguales. Sea $x \in (a,b)$ un punto cualquiera. Para $t > x$, reemplazamos la función $f'(x)$ por la función lineal:

$$f'(x) - M(t - x) \quad . \quad (\text{curva } A X B')$$

Luego sumamos una constante positiva o nula de modo que la nueva función tenga también nulo su valor medio en el intervalo (a,b)

Sea g' la función obtenida (curva $A_1 X_1 B_1$).

Se verifica entonces:

$$\int_a^x g'(t) dt \geq \int_a^x f'(t) dt$$

Para mayorar $\int_a^x f'(t) dt$ es posible reducirse al caso de funciones lineales para $t > x$ y de pendiente $-M$. Lo mismo, para mayorar $-\int_x^b f'(t) dt$ es posible reducirse al caso de funciones que son lineales para $t < x$ y de pendiente $-M$

En consecuencia, el máximo de $\int_a^x = -\int_x^b f'(t) dt$, para todas las funciones f' que satisfacen (2.1) y (2.3) , se obtiene para la función lineal y de pendiente $-M$, que satisface (2.1) ; esto es, la función $-M(t - \frac{a+b}{2})$. En tal caso (integrando):

$$(2.4) \quad \left. \begin{aligned} f(x) &\leq \frac{M}{2} (b-x)(x-a) \\ -f(x) &\leq \frac{M}{2} (b-x)(x-a) \end{aligned} \right\} \therefore \boxed{|f(x)| \leq \frac{M}{2} (b-x)(x-a)}$$

y también:

La fórmula (2.4) muestra que $f(x)$ está comprendida entre dos arcos de parábola que se anulan en $x = a$ y $x = b$ y cuya gráfica (fig. 2.4) es la llamada "curva de seguridad".



fig. 2.4

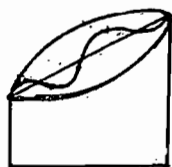


fig. 2.5

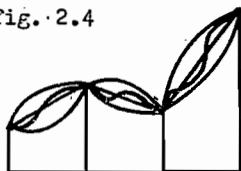


fig. 2.6

En el caso general: $f(a) \neq f(b) \neq 0$ se obtiene la acotación:

$$|f(x) - \Psi_n(x)| \leq \frac{M}{2} (b-x)(x-a)$$

representado en la fig. 2.5

Para una subdivisión del intervalo en n partes, se obtiene una curva de seguridad para cada sub-

En

f'

intervalo con una acotación análoga a la anterior. (fig. 2.6).

Según lo dicho, la existencia de f'' y la condición de que $f' \in \text{Lip. I}$ implican: $|f''| < M$. Como la recíproca es cierta, la (2.2) resulta ser una hipótesis más restrictiva que la (2.1). Con ella, hubiéramos llegado a la misma acotación anterior haciendo uso de la fórmula de Taylor. En efecto:

en el caso:

$$\begin{cases} n = 1 \\ f(a) = f(b) = 0 \end{cases}$$

$$0 = f(a) = f(x) + (a-x) f'(x) + \frac{(a-x)^2}{2} f''(\xi) \quad a \leq \xi \leq x$$

$$0 = f(b) = f(x) + (b-x) f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2} f''(\xi') \quad x \leq \xi' \leq b$$

de donde:

$$\frac{f(x)}{(a-x)} - \frac{f(x)}{(b-x)} = -\frac{(a-x)}{2} f''(\xi) + \frac{(b-x)}{2} f''(\xi')$$

Pero:

$$\frac{f(x)}{a-x} - \frac{f(x)}{b-x} = f(x) \frac{b-a}{(a-x)(b-x)}$$

y por la hipótesis $|f''| \leq M$:

$$\begin{aligned} \left| -\frac{a-x}{2} f''(\xi) + \frac{b-x}{2} f''(\xi') \right| &\leq \frac{1}{2} \left\{ |a-x| |f''(\xi)| + |b-x| |f''(\xi')| \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} M (|a-x| + |b-x|) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} M (b-a) \end{aligned}$$

En definitiva:

$$\left| f(x) \frac{b-a}{(a-x)(b-x)} \right| \leq \frac{1}{2} M (b-a)$$

o sea, como en el tratamiento anterior:

$$\boxed{|f(x)| \leq \frac{1}{2} M |(a-x)(b-x)|}$$

lo cual caracteriza la curva de seguridad.

A partir de la curva de seguridad, es posible hacer las acotaciones siguientes:

a) para $\begin{cases} n = 1 \\ f(a) = f(b) = 0 \end{cases}$, y tomando el máximo de $g(x) = \frac{1}{2} M (x-a)(b-x)$

$$|f(x)| \leq \frac{M}{8} (b-a)^2$$

b) para n arbitrario y puntos de subdivisión equidistantes y $f(x)$ sin la

condición $f(a) = f(b) = 0$.

$$| f(x) - \varphi_n(x) | \leq \frac{M}{8n^2} (b-a)^2$$

pues la longitud de cada subintervalo es $\left(\frac{b-a}{n}\right)$

c) para $\begin{cases} n=1 \\ f(b) = f(a) = 0 \end{cases}$, y haciendo uso de los resultados anteriores, se

puede acotar el valor de:

$$\int_a^b | f(x) | dx$$

pues éste no supera el valor del área limitada por la parábola y el segmento \overline{ab} de la figura (2.7)



fig. 2.7

$$\begin{aligned} \int_a^b | f(x) | dx &\leq \int_a^b \frac{M}{2} (x-a)(b-x) dx \leq \\ &\leq \frac{M}{12} (b-a)^3 \end{aligned}$$

d) para las condiciones del b) y con el mismo razonamiento, resulta:

en cada subintervalo:

$$\int_{x_1}^{x_{1+1}} | f(x) - \varphi_n(x) | dx \leq \frac{M}{12n^3} (b-a)^3$$

en el intervalo (a,b) :

$$\int_a^b | f(x) - \varphi_n(x) | dx \leq \frac{M}{12n^2} (b-a)^3$$

B.- CONSTRUCCION DE FUNCIONES POR INTERPOLACIONES SUCCESIVAS .

A continuación, se construirá una sucesión de funciones: $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ que son poligonales y están definidas en el intervalo (a,b) haciendo uso de puntos de subdivisión dicotómicos. Luego se analizarán las propiedades de la función $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, en relación a las propiedades de las funciones que sirven para definirla.

$f_1(x)$:

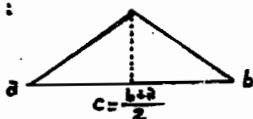


fig. 2.8

$n=1$; $f_1(x) = \Delta_1(x)$ donde: $\Delta_1(x)$ es una función poligonal lineal entre a y $c = \frac{b+a}{2}$ y entre c y b que verifica: $\Delta_1(a) = \Delta_1(b) = 0$; Δ_1 está definido por $\Delta_1(c)$.

$f_2(x)$:

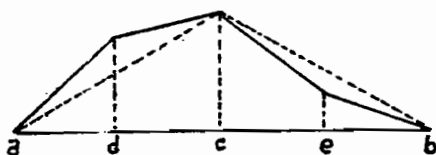


fig. 2.9

$\Delta_n(x)$ es una poligonal de 2^n lados, lineal entre:

$$\frac{j}{2^n} a + (1 - \frac{j}{2^n}) b \quad \text{y} \quad \frac{j+1}{2^n} a + (1 - \frac{j+1}{2^n}) b$$

$j = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$ y que tiene valor cero en los puntos $\frac{j}{2^{n-1}} a + (1 - \frac{j}{2^{n-1}}) b$ para

$j = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-1}$.

Finalmente:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sum_0^{\infty} \Delta_n(x) .$$

a) Condición suficiente para que $f(x)$ sea continua .

"Si la serie de los supremos de las funciones $|\Delta_n(x)|$ en valor absoluto es convergente, $f(x)$ es continua" .

En efecto: $\sum_0^{\infty} \sup_x |\Delta_n(x)| < \infty \Rightarrow \sum_0^{\infty} \Delta_n(x)$ es uniformemente convergente y en consecuencia,

$$f(x) = \sum_0^{\infty} \Delta_n(x) , \quad \text{es continua.}$$

b) Condición necesaria para que $f(x)$ sea derivable .

"si $f(x)$ es derivable en un punto x , $\sum_0^{\infty} \Delta'_n(x)$ es convergente"

Previamente demostraremos el lema:

"Si $f(x)$ es derivable en un punto x existe:

$$\lim_{\substack{x'_1 \rightarrow x \\ x''_1 \rightarrow x}} \frac{f(x'_1) - f(x''_1)}{x'_1 - x''_1}$$

cualesquiera sean las sucesiones $\{x'_1\}$ convergentes a x por la izquierda, y x''_1 convergentes a x por la derecha.

En efecto, la expresión:

$$\frac{f(x'_1) - f(x_1)}{x'_1 - x_1} = \frac{f(x'_1) - f(x) + f(x) - f(x_1)}{x'_1 - x + x - x_1} \quad \text{es del tipo}$$

$$\frac{A+B}{a+b} \quad (\text{con } A > 0, \quad B > 0, \quad a > 0, \quad b > 0).$$

Luego, se cumple $\frac{A}{a} < \frac{A+B}{a+b} < \frac{B}{b}$, o sea

$$\frac{f(x'_1) - f(x)}{x'_1 - x} < \frac{f(x'_1) - f(x_1)}{x'_1 - x_1} < \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

pero, siendo $f(x)$ derivable en x :

$$f'(x) = \lim_{x'_1 \rightarrow x} \frac{f(x'_1) - f(x)}{x'_1 - x} = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad (\text{números derivados})$$

y en consecuencia:

$$f'(x) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x \\ x'_1 \rightarrow x}} \frac{f(x'_1) - f(x_1)}{x'_1 - x_1} \quad (\text{cuya existencia se quería demostrar}).$$

Observación: la última igualdad vale también si $x_1 = x_{i+1} = \dots = x$ o si $x'_1 = x'_{i+1} = \dots = x$.

Haciendo uso de esta propiedad, demostraremos una condición necesaria para que $f(x) = \sum_0^{\infty} \Delta_n(x)$ sea derivable: la convergencia de $\sum_0^{\infty} \Delta'_n(x+0)$ y $\sum_0^{\infty} \Delta'_n(x-0)$. En efecto, tomemos ahora $x_1 = \frac{j}{2^i} a + (1 - \frac{j}{2^i}) b$ y $x'_1 = \frac{j+1}{2^i} a + (1 - \frac{j+1}{2^i}) b$, $x_1 \leq x \leq x'_1$:

$$f'(x) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x \\ x'_1 \rightarrow x}} \frac{f(x'_1) - f(x_1)}{x'_1 - x_1} = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f_1(x'_1) - f_1(x_1)}{x'_1 - x_1}$$

donde

$$\frac{f_1(x_{i+1}) - f_1(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

es el cociente incremental de una función lineal en el intervalo (x_i, x_{i+1}) y en tal caso, es constante e igual a

$$f'_n(x+0) \quad \text{ó} \quad f'_n(x-0)$$

O sea

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x \pm 0) = \sum_0^{\infty} \Delta'_n(x \pm 0)$$

pues

$$f'_n(x \pm 0) = \Delta'_1(x \pm 0) + \dots + \Delta'_n(x \pm 0)$$

y en consecuencia: si existe $f'(x)$, la serie $\sum_0^{\infty} \Delta'_n(x \pm 0)$ es convergente.

c) Ejemplos de funciones continuas y no derivables en un intervalo :

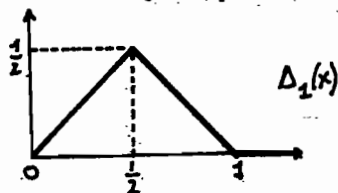
Bastará construir $f(x)$ como en los casos precedentes y de modo que:

$$1^\circ) \sum_0^{\infty} \sup_x |\Delta_n(x)| < \infty, \text{ para todo } x \text{ del intervalo}$$

$$2^\circ) \sum_0^{\infty} |\Delta'_n(x)| \text{ no converja en ningún punto } x \text{ del intervalo.}$$

Por las condiciones demostradas en a) y b), será $f(x)$ continua y no derivable en todo punto del intervalo.

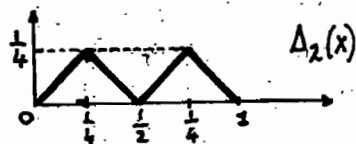
Primer ejemplo:



$$n = 1$$

$$\Delta_1(0) = \Delta_1(1) = 0$$

$$\Delta_1(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$



$$n = 2$$

$$\Delta_2(0) = \Delta_2(\frac{1}{2}) = \Delta_2(1) = 0$$

$$\Delta_2(1/4) = \Delta_2(3/4) = 1/4$$

En general, pongámos $\Delta_n(x+1) = \Delta_n(x)$, para todo n : $\Delta_n(x) = \frac{1}{2^n} \Delta(2^n x)$ y $f_n(x) = \sum_{j=1}^n \Delta_j(x)$. En este caso resulta:

$$1^\circ) \sup_x |\Delta_n(x)| = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \sum_0^{\infty} \sup_x |\Delta_n(x)| \text{ es convergente } \therefore f \text{ es continua.}$$

2º) $\Delta'_n(x \neq 0) = \pm 1$ en todo punto que está definida y $\therefore \sum_0^{\infty} \Delta'_n(x \neq 0)$ no es convergente en ningún punto.

Segundo ejemplo :

Dada una sucesión de números enteros : $\{n_j\}$, se construye $\Delta_1(x)$ de la misma manera que en el ejemplo primero, pero se toma:

$$f_n(x) = \sum_j \frac{1}{2^{n_j}} \Delta(2^{n_j} x)$$

Es evidente que se obtienen los mismos resultados.

Tercer ejemplo :

Se construye $\Delta_n(x)$ de modo que $|\Delta_n(x)|$ sean las funciones del primer ejemplo, esto es, se admite que en algún subintervalo $\Delta_n(x)$ sea negativa. Como de todos modos : $\Delta'_n(x) = \pm 1$ en todo x donde existe Δ'_n , y $\sup_x |\Delta'_n(x)| = \frac{1}{2^n}$, se verifican las mismas condiciones que en el ejemplo primero.

d) Mayoración del módulo de continuidad .

Sea: $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sum_0^{\infty} \Delta_n(x)$, definida en (a, b) .

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= |f_n(x) + \sum_{n+1}^{\infty} \Delta_j(x) - [f_n(x') + \sum_{n+1}^{\infty} \Delta_j(x')]| \\ &\leq |f_n(x) - f_n(x')| + \sum_{n+1}^{\infty} |\Delta_j(x) - \Delta_j(x')| \end{aligned}$$

pero:

$$|\Delta_j(x) - \Delta_j(x')| \leq 2 \cdot \sup_x |\Delta_j(x)|$$

$$\therefore |f(x) - f(x')| \leq |f_n(x) - f_n(x')| + 2 \sum_{n+1}^{\infty} \sup_x |\Delta_j(x)|$$

Aplicando el teorema del valor medio y llamando $p_n = \sup_x |\Delta'_n(x)|$, resulta:

$$|f(x) - f(x')| \leq |x - x'| (p_1 + p_2 + \dots + p_n) + 2 \sum_{n+1}^{\infty} \sup_x |\Delta_j(x)|$$

y como: $\sup_x |\Delta_j(x)| = \frac{p_j}{2^j}$, vale la acotación:

$$\omega_f(\delta) \leq \delta (p_1 + p_2 + \dots + p_n) + 2 \sum_{n+1}^{\infty} \frac{p_j}{2^j}$$

En particular, para el primer y tercer ejemplos dados en c) : $p_n = 1$, y en con secuencia:

$$\omega_f(\delta) \leq n\delta + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Tomando n de modo que: $\frac{1}{2^{n+1}} \leq \delta \leq \frac{1}{2^n}$; esto es: $n \leq \frac{\ln(1/\delta)}{\ln 2}$

se obtiene:

$$\omega_f(\delta) \leq n\delta + \frac{1}{2^{n-1}} \leq n\delta + 4\delta, \text{ (pues } \frac{1}{2^{n+1}} \leq \delta \text{)}$$

En definitiva, para estos casos particulares:

$$\omega_f(\delta) = o\left(\delta \ln \frac{1}{\delta}\right)$$

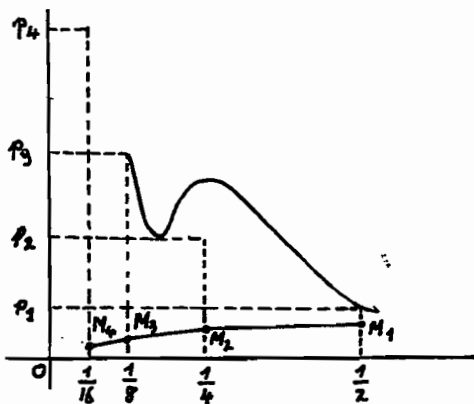
Haciendo uso de las acotaciones del módulo de continuidad y del segundo ejemplo dado en c) , se demostrara el siguiente

T e o r e m a :

"Cualquiera sea la función $\omega(\delta) > 0$ para $\delta > 0$, que verifique $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(\delta)}{\delta} = \infty$ existe una función $f(x)$ no derivable que satisface: $\omega_f(\delta) < \omega(\delta)$ "

Se comienza por construir una función $\omega^*(\delta)$ positiva, que minora a $\omega(\delta)$ y es tal que $(\omega^*(\delta))/\delta$ crece monótonamente hacia infinito cuando δ tiende a 0 .

Para ello se procede del siguiente modo:



Sea: $p_m = \inf_{\{\delta < 2^{-m}\}} \frac{\omega(\delta)}{\delta}$

y M_m el punto de coordenadas $\begin{cases} x = \frac{1}{2^{m+1}} \\ y = \frac{p_m}{2^{m+1}} \end{cases}$

Entonces, la poligonal: $M_1, M_2, \dots, M_m, \dots$ es el gráfico de la función $\omega^*(\delta)$ buscada. Es sencillo comprobar que verifica las condiciones pedidas. En efecto:

1°) $\omega^*(\delta) > 0$

2°) la pendiente de la recta OM_m es $\frac{1}{2^{m+1}} p_m$ y ella crece monótonamente hacia infinito cuando $m \rightarrow \infty$. Así pues, se ve geoméricamente que, si M es el punto $(\delta, \omega^*(\delta))$, la pendiente de OM crece monótonamente hacia infinito cuando $\delta \rightarrow 0$

3°) por haber tomado $p_m = \inf_{\{\delta < 2^{-m}\}} \frac{\omega(\delta)}{\delta}$ y $M_m(\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{p_m}{2^{m+1}})$ se cumplen, para $\frac{1}{2^{m+1}} \leq \delta \leq \frac{1}{2^m}$, las desigualdades

$$\omega^*(\delta) \leq \omega^*\left(\frac{1}{2^m}\right) = \frac{p_m}{2^{m+1}} \leq \frac{1}{2^{m+1}} \frac{\omega(\delta)}{\delta} \leq \omega(\delta)$$

Así pues, $\omega^*(\delta)$ minora a $\omega(\delta)$.

A continuación se construirá una función $f(x)$ del tipo considerado en el segundo ejemplo de c) : $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-n_j} \Delta(2^{n_j} x)$, eligiendo una sucesión n_j que permita asegurar para el módulo de continuidad de f , la desigualdad:

4°)

$$\omega_f(\delta) \leq \omega^*(\delta)$$

Cualquiera sea $\{n_j\}$, y cualquiera sea j :

$$\omega_f(\delta) < j\delta + 2(2^{-n_{j+1}} + 2^{-n_{j+2}} + \dots) < j\delta + 4 \cdot 2^{-n_{j+1}}$$

Para

$$\frac{1}{2^{n_{j+1}}} \leq \delta < \frac{1}{2^{n_j}}$$

resultaría:

$$\omega_f(\delta) < \delta(j+4)$$

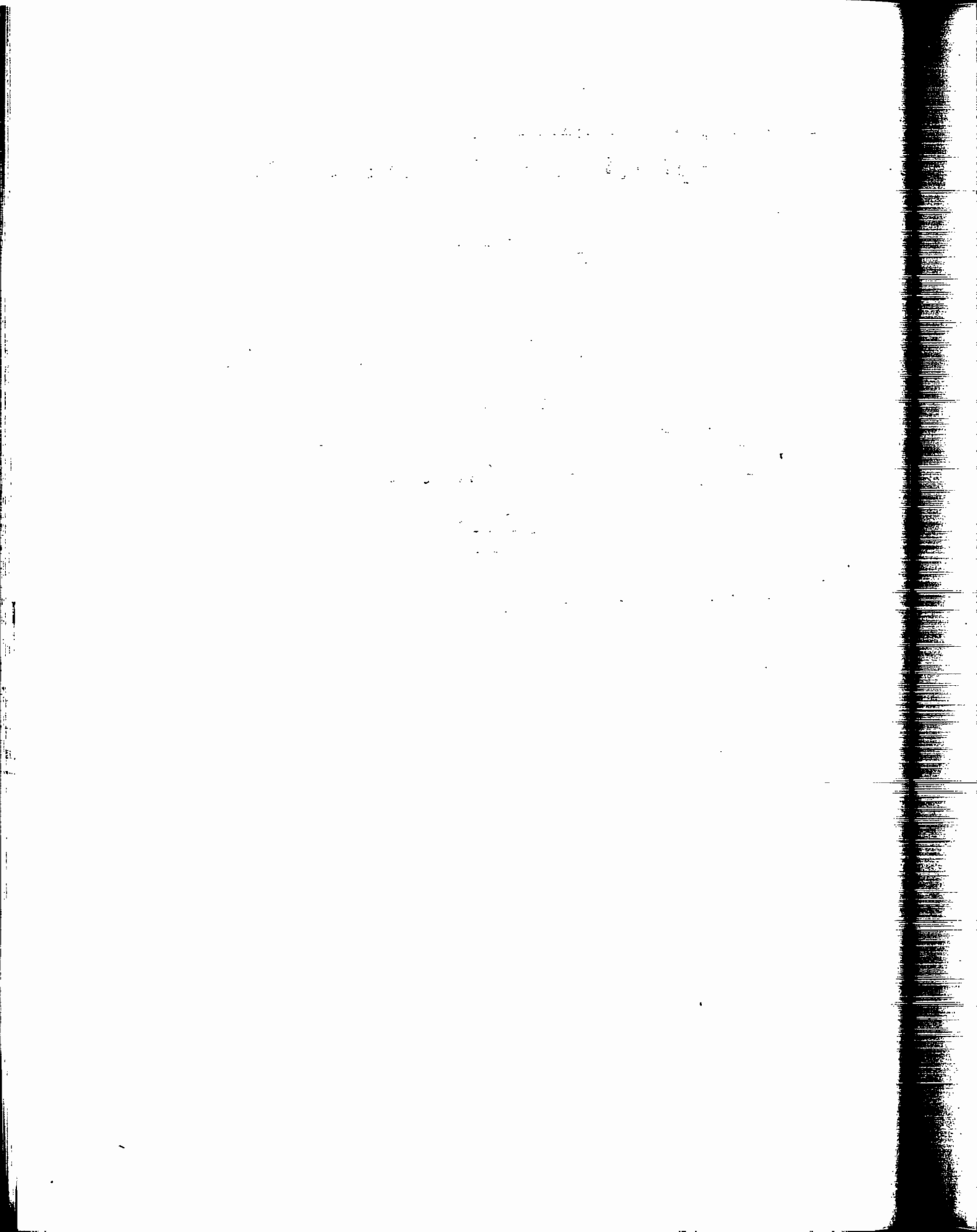
además, si de $1/(2^{n_{j+1}}) \leq \delta \leq 1/(2^{n_j})$ se pudiera obtener $j+4 < (\omega^*(\delta))/\delta$, resultaría:

$$\omega_f(\delta) < \omega^*(\delta)$$

Como $(\omega^*(\delta))/\delta$ crece monótonamente a infinito cuando δ tiende a 0, es posible determinar n_j tal que $j+4 < (\omega^*(\delta))/\delta$ haciendo

$$j+4 < \frac{\omega^*\left(\frac{1}{2^{n_j}}\right)}{\frac{1}{2^{n_j}}}$$

y así se construye la sucesión creciente $\{n_j\}$



III.- POLINOMIOS TRIGONOMETRICOS

En los capítulos anteriores, las funciones escalera y las funciones poligonales, permitían obtener en los mejores casos, aproximaciones del orden $O\left(\frac{1}{n}\right)$ y $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, respectivamente. En lo que sigue, tendremos ocasión de comprobar que se obtienen resultados más favorables, usando polinomios trigonométricos. Veremos, por ejemplo, que en el caso de funciones indefinidamente diferenciables, el error es del orden $O\left(\frac{1}{n^p}\right)$, cualquiera sea p , y si la función es analítica, es $O(e^{-\epsilon|n|})$.

A.- DEFINICIONES Y OPERACIONES

Definición 3.1 :

Un polinomio trigonométrico, es una función de la forma:

$$(3.1) \quad T(t) = \sum_{n=-N}^N C_n e^{int}$$

donde los C_n son números complejos.

Definición 3.2 :

Grado de un polinomio trigonométrico, es el menor de los números N con los cuales es posible representarlo.

Una forma equivalente de escribir (3.1) es:

$$(3.2) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

$$\text{con: } \begin{cases} a_n = C_n + C_{-n} \\ b_n = i(C_n - C_{-n}) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases}$$

Para polinomios reales, resulta:

$$1.- \quad T(t) = \bar{T}(t) = \sum_{-N}^N \overline{C_n} e^{-int} = \sum_{-N}^N C_n e^{int}, \quad \text{con lo cual: } \overline{C_n} = C_{-n}$$

2.- Como consecuencia inmediata de 1.- los coeficientes a_n y b_n , de la forma (3.2), resultan números reales.

3.- Un polinomio trigonométrico real, se puede representar como:

$$(3.3) \quad T(t) = \sum_0^N r_n \cos(nt + \varphi_n)$$

donde r_n se llama la amplitud, y φ_n es el ángulo de fase. Vale en este caso:

$$\begin{cases} a_n = r_n \cos \varphi_n \\ -b_n = r_n \sin \varphi_n \end{cases}$$

Si en (3.3) ponemos: $z = e^{it}$ y $c_n = r_n e^{i\varphi_n}$, resulta:

$$(3.4) \quad T(t) = R \sum_0^N c_n z^n \quad (R, \text{ indica "parte real"})$$

Definición 3.3 :

Se llama función conjugada de (4) a:

$$I \sum_1^N c_n z^n \quad (I, \text{ indica "parte imaginaria"})$$

de (3.3) es :

$$\sum_1^N r_n \sin(nt + \varphi_n)$$

y de (3.2) :

$$\sum_1^N (-b_n \cos nt + a_n \sin nt)$$

Operaciones :

Los polinomios trigonométricos constituyen un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales o complejos.

En efecto: Si $P = \sum c_n e^{int}$, $Q = \sum d_n e^{int}$, y, λ y μ son escalares. Se verifica:

$$\lambda P + \mu Q = \sum (\lambda c_n + \mu d_n) e^{int},$$

que es un polinomio trigonométrico.

Producto :

$$(3.5) \quad P \cdot Q = \sum_q \sum_p c_p e^{ipt} d_q e^{iqt} = \sum \gamma_n e^{int}$$

con: $\gamma_n = \sum_{p+q=n} c_p d_q$

Definición 3.4 :

Se llama convolución de las sucesiones $\{c_n\}$ y $\{d_n\}$ a la sucesión $\{\gamma_n\}$ dada por la expresión (3.5), y se escribe:

$$\{\gamma_n\} = \{c_n\} * \{d_n\}$$

La operación de convolución, tiene las propiedades ordinarias de la multiplicación (asociatividad, conmutatividad, distributividad con respecto a la suma). Las sucesiones de coeficientes constituyen entonces un álgebra conmutativa.

Derivación :

$$P' = \sum in c_n e^{int}$$

Los coeficientes de la derivada, son $d_n = inc_n$.

Integración :

$$P^{-1} = \sum' \frac{c_n}{in} e^{int} + c_0 t + d_0$$

donde \sum es la suma de todos los términos, salvo el de orden cero.

Esta expresión no es necesariamente un polinomio trigonométrico.

B.- FORMULAS DE FOURIER Y PARSEVAL - CONVOLUCION.

Teniendo en cuenta que e^{int} ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), es un sistema ortogonal de funciones en $(0, 2\pi)$, resulta:

$$(3.6) \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t) e^{-int} dt.$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t) dt$$

Las (3.6) son las fórmulas de los coeficientes de Fourier. De la definición de P.Q, de (3.5) y de (3.6), resulta:

$$(3.7) \quad \gamma_0 = \sum c_n d_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P.Q. dt$$

Si tomamos el polinomio:

$$\overline{Q}(t) = \sum \overline{d}_n e^{-int} = \sum \overline{d}_{-n} e^{int},$$

aplicando (3.7), se tiene:

$$(3.8) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P.Q = \sum c_n \overline{d}_n$$

que es la primera fórmula de Parseval

Haciendo $Q = P$:

$$(3.8) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P|^2 = \sum |c_n|^2$$

que es la segunda fórmula de Parseval .

Haciendo una traslación de la variable t , resulta:

$$(3.9) \quad P(t - a) = \sum c_n e^{-ina} e^{int}$$

esto es, los coeficientes quedan multiplicados por la exponencial e^{-ina} .

Por otra parte, multiplicando el polinomio por una exponencial $e^{i\nu t}$, se trasladan los coeficientes:

$$P(t) e^{i\nu t} = \sum c_n e^{i(n+\nu)t} = \sum c_{n-\nu} e^{int} .$$

Todo lo anterior, nos permite encontrar una expresión sencilla para el polinomio:

$$\sum c_n d_n e^{int} .$$

Por la fórmula de Parseval :

$$\sum c_n d_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(s) Q(-s) ds$$

La relación (3.9) dá:

$$Q(t - s) = \sum d_{-n} e^{-int} e^{ins}$$

y de ambos resultados, se tiene:

$$(3.10) \quad \sum c_n d_n e^{int} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x) Q(t-s) ds = P*Q(t).$$

Definición 3.5 :

Se llama convolución de P y Q , a la operación $P*Q$ dada por (3.10)

Esta operación sobre polinomios, da un álgebra conmutativa, como es sencillo comprobar.

C.- NUCLEOS USUALES .

Núcleo de Dirichlet :

Consideremos un polinomio trigonométrico cuyos coeficientes c_n valgan 1 , para: $-N \leq n \leq N$.

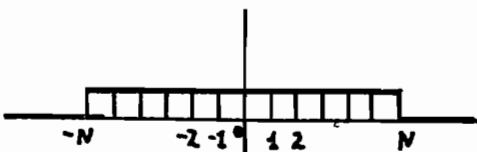


fig. 3.1

La fig. 3.1 representa el gráfico de los coeficientes.

Entonces, se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{-N}^N e^{int} &= \frac{e^{-iNt} - e^{i(N+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{-i(t/2)}}{e^{-i(t/2)}} \cdot \frac{e^{-iNt} - e^{i(N+1)t}}{1 - e^{it}} = \\ &= \frac{e^{-i(N+\frac{1}{2})t} - e^{i(N+\frac{1}{2})t}}{e^{-i(t/2)} - e^{i(t/2)}} = \frac{\text{sen}(N+\frac{1}{2})t}{\text{sen}(t/2)} = 2 D_N(t) \end{aligned}$$

La expresión: $D_N(t) = \frac{\text{sen}(N+\frac{1}{2})t}{2 \text{sen}(t/2)}$ se llama núcleo de Dirichlet .

Si P es un polinomio trigonométrico de grado N , y $n \gg N$, resulta:

$$P * 2 D_n = P$$

Se dice entonces, que el núcleo de Dirichlet es una identidad aproximativa para la convolución, y en general tenemos la:

Definición 3.6 :

Cada término de una sucesión $\{T_n\}$ de polinomios trigonométricos, es una identidad aproximativa, si para todo polinomio trigonométrico P , $T_n * P$ tiende a P ; es decir, si para cada j , el coeficiente de Fourier de orden j de T_n , tiende a 1.

Núcleo de Dirichlet modificado :

Es la expresión:

$$D_N^* = D_N + D_{N-1} = \frac{\text{sen}(N+\frac{1}{2})t + \text{sen}(N-\frac{1}{2})t}{2 \text{sen}(t/2)} = \frac{\text{sen} Nt}{\text{tg}(t/2)}$$

Es también una identidad aproximativa. Sus coeficientes están representados en la fig. 3.2.

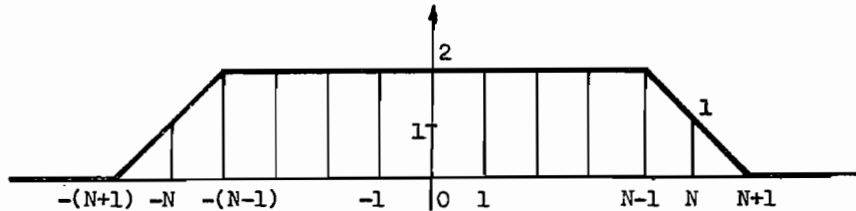


fig. 3.2

Núcleo de Fejer :

se obtiene tomando la media aritmética de los núcleos de Dirichlet :

$$2 K_N = \frac{2}{N} (D_0 + D_1 + \dots + D_{N-1}) = \frac{1}{N} \left(\frac{\text{sen}(N/2)t}{\text{sen}(t/2)} \right)^2$$

Una propiedad muy importante del núcleo de Fejer es que es siempre positivo.

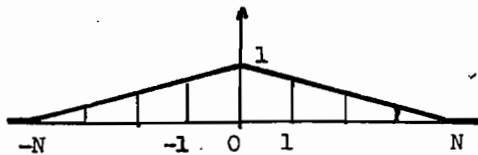


fig. 3.3

Además, se puede calcular en norma L^1 :

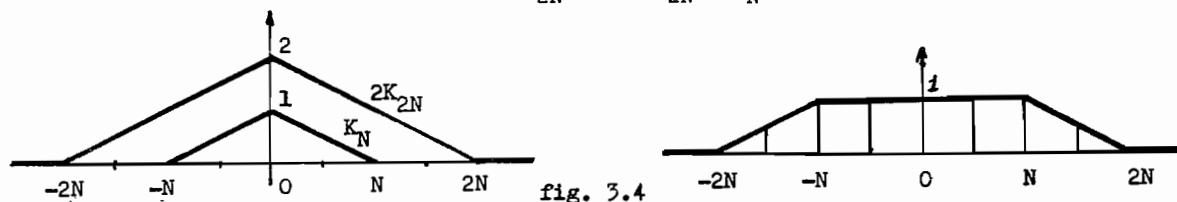
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |2K_N(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2K_N(t) dt = 1$$

de modo que el núcleo resulta de norma acotada para todo n . Esta propiedad no vale para el núcleo de Dirichlet. El núcleo de Fejer es una identidad aproximativa pero no tiene la propiedad que para todo polinomio trigonométrico P , $P * 2 K_n = P$ cuando n es bastante grande.

Núcleo de de la Valleè Poussin :

Interesa encontrar un núcleo, que satisface esa propiedad y al mismo tiempo tenga su norma acotada. Esto se logra con el núcleo de de la Valleè Poussin, a partir de núcleos de Fejer, tomando:

$$(3.11) \quad 2 V_{2N} = 2 K_{2N} - K_N$$



La figura anterior muestra que, entre $-N$ y N el diagrama de coeficientes para $2 V_{2N}$ es igual al de $2 D_N$ y por lo tanto, para un polinomio de grado N , obtenemos:

$$P * 2 V_{2N} = P$$

Además, por (3.11), tenemos:

$$|2 V_{2N}| \leq |2 K_{2N}| + |K_N|$$

$$y \quad ||2 V_{2N}|| \leq ||2 K_{2N}|| + ||K_N|| = 2 + 1 = 3$$

es decir, la norma de $2 V_{2N}$ es acotada

Por último, vamos a considerar los núcleos que verifican:

$$P * S_N \rightarrow i \tilde{P}$$

donde \tilde{P} es el polinomio conjugado de P .

Ya vimos que si $P = \sum_{-N}^N c_n e^{int}$ es un polinomio trigonométrico, real, se verifica que $c_n = \overline{c_{-n}}$, y que por esta razón P se puede también escribir:

$$P = c_0 + 2 R \sum_{n=1}^N c_n e^{int}$$

y el polinomio trigonométrico \tilde{P} , conjugado de P :

$$\tilde{P} = 2 I \sum_{n=1}^N c_n e^{int}$$

teniendo en cuenta que:

$$c_n e^{int} - c_{-n} e^{-int} = 2i I c_n e^{int}$$

resulta:

$$i P \approx \sum_{n=-N}^N (\text{signo } n) c_n e^{int}$$

Núcleo de Dirichlet conjugado y su modifica-
do :

Vamos a calcular $2 \tilde{D}_N$:

$$\begin{aligned} 2 \tilde{D}_N &= I \cdot 2 \sum_1^N e^{int} = I \cdot 2 \frac{e^{it} - e^{i(N+1)t}}{1 - e^{it}} = I \cdot 2 \frac{e^{i(t/2)} - e^{i(N+1/2)t}}{e^{-i(t/2)} - e^{i(t/2)}} = \\ &= I i \frac{e^{i(t/2)} - e^{i(N+1/2)t}}{\text{sen}(t/2)} = \frac{\cos(t/2) - \cos(N+1/2)t}{\text{sen}(t/2)} = \frac{\cos(t/2)(1 - \cos Nt) + \text{sen}(t/2)\text{sen}Nt}{\text{sen}(t/2)} \end{aligned}$$

y por último:

$$\boxed{2 \tilde{D}_N = \frac{1 - \cos Nt}{\text{tg}(t/2)} + \text{sen} Nt}$$

Cálculo del núcleo conjugado de Dirichlet 'mo-
dificado : $2 \tilde{D}_N^* = \tilde{D}_N + \tilde{D}_{N-1}$

$$\begin{aligned} 2 \tilde{D}_N &= I \cdot 2 \sum_1^N e^{int} & ; & & \tilde{D}_N &= I \sum_1^N e^{int} \\ 2 \tilde{D}_{N-1} &= I \cdot 2 \sum_1^{N-1} e^{int} & ; & & \tilde{D}_{N-1} &= I \sum_1^{N-1} e^{int} \end{aligned}$$

$$2 \tilde{D}_N^* = \tilde{D}_N + \tilde{D}_{N-1} = I \sum_1^N e^{int} + I \sum_1^{N-1} e^{int} = 2 I \sum_1^N e^{int} - \text{sen} Nt = 2 \tilde{D}_N - \text{sen} Nt$$

Luego, por (3.12) queda:

$$\boxed{2 \tilde{D}_N^* = \frac{1 - \cos Nt}{\text{tg}(t/2)}}$$

D.- CEROS DE LOS POLINOMIOS TRIGONOMETRICOS .

Sea $P(t) = \sum_{-N}^N c_n e^{int}$, un polinomio trigonométrico de grado N . Si hacemos $e^{it} = z$, queda:

$$Q(z) = \sum_{-N}^N c_n z^n, \quad \text{con } |z| = 1$$

Se trata de ver, cuales son los ceros del polinomio sobre la circunferencia unidad, es

decir, los valores de t que lo anulan. Tomando $z^N Q(z)$, se ve que el polinomio que se obtiene es de grado $\leq 2N$, es decir, tiene a lo sumo $2N$ ceros, que provienen de $Q(z)$, pues z^N no se anula.

Resulta así que, todo polinomio trigonométrico de grado N , admite a lo sumo $2N$ raíces distintas, módulo 2π .

Eso significa que, si un polinomio trigonométrico de grado $\leq N$ admite $2N+1$ ceros distintos módulo 2π , es idénticamente nulo.

Este resultado y el que se desprende del teorema que sigue, se aplican con frecuencia a problemas de interpolación.

T e o r e m a 3.1 :

Existe y es único, el polinomio trigonométrico de grado $\leq N$, que en $2N+1$ puntos distintos módulo 2π , toma valores prefijados $P(t_j) = p_j$ con $j = 1, 2, \dots, 2N+1$.

D e m o s t r a c i ó n :

Sea

$$P = \sum_{-N}^N c_n e^{int}$$

Para cada j se tendrá:

$$(3.13) \quad P(t_j) = \sum_{-N}^N c_n e^{int_j} = p_j \quad (j = 1, 2, \dots, 2N+1)$$

o sea, un sistema de $2N+1$ ecuaciones, con las $2N+1$ incógnitas $c_{-N}, c_{-N+1}, \dots, c_0, c_1, \dots, c_N$.

Como el sistema homogéneo admite sólo la solución trivial de acuerdo a lo dicho anteriormente acerca de los ceros de un polinomio trigonométrico, resulta que el sistema (3.13) es de Crámer, y admite solución única.

Como aplicación de lo anterior tenemos el:

T e o r e m a 3.2 : (de Bernstein) :

Si $P(t)$ es un polinomio trigonométrico de grado N , se verifica:

$$\sup_t |P'(t)| \leq N \sup_t |P(t)|, \text{ o sea: } \|P'(t)\|_{\infty} \leq N \|P(t)\|_{\infty}$$

D e m o s t r a c i ó n :

En primer lugar, sea $P(t)$ un polinomio real. En el caso particular en que $P(t) = \sin(Nt + \varphi)$, se ve de inmediato que $\|P'(t)\|_{\infty} = N \|P(t)\|_{\infty}$.

Supongamos ahora que existe un polinomio $P(t)$ que no cumple la tesis, es decir, que verifica:

$$1^\circ) \quad \|P(t)\|_{\infty} < 1 \qquad 2^\circ) \quad \|P'(t)\|_{\infty} > N$$

Tomemos el polinomio: $Q(t) = P(t) - \text{sen}(Nt + \varphi)$, que es igual a $P(t)$, en todo punto de la forma $t_j = \frac{j\pi - \varphi}{N}$. En los puntos $t_j = \frac{(j + \frac{1}{2})\pi - \varphi}{N}$, el $\text{sen}(Nt + \varphi)$, vale $+1$ ó -1 , según sea j par o impar.

Sea t_j tal que $\text{sen}(Nt + \varphi)$ valga 1 . Por la hipótesis 1^o), resulta que en t_j , $Q(t)$ es negativo, y en t_{j+1} , $Q(t)$ es positivo

Luego, entre t_j y t_{j+1} hay un cero de $Q(t)$ y en el intervalo $(0, 2\pi)$ hay $2N$ ceros de $Q(t)$.

En virtud de la hipótesis 2^o), hay por lo menos un punto s , para el cual se verifica:

$$|P'(s)| > N$$

Como φ es arbitrario, es posible elegirlo de modo que:

- a) $\text{sen}(Ns + \varphi) = P(s)$
- b) el signo de la pendiente de $\text{sen}(Nt + \varphi)$ en el punto s sea el mismo que que el signo de la pendiente de $P(t)$ en s .

Entonces resulta: de a) que:

$$(3.15) \quad Q(s) = P(s) - \text{sen}(Ns + \varphi) = 0$$

y de b), dos casos posibles:

1.- $P'(s) < 0$. Entonces:

$$(3.16) \quad [\text{sen}(Nt + \varphi)]'_{(s)} = N \cdot \text{cos}(Nt + \varphi)_{(s)} = N \cdot \text{cos}(Ns + \varphi) < 0$$

y la función $Q(t)$ es decreciente en s .

Por ser la pendiente de $\text{sen}(Nt + \varphi)$ negativa en s , a izquierda de s hay un punto del tipo t_j en el que $\text{sen}(Nt_j + \varphi)$ vale 1 , y a su derecha, en el punto t_{j+1} , $\text{sen}(Nt_{j+1} + \varphi)$, vale -1 .

Según lo analizado antes:

$$(3.17) \quad Q(t_j) < 0 \quad \text{y} \quad Q(t_{j+1}) > 0$$

De (3.15), (3.16), y (3.17) se desprende que existen: un cero entre $Q(t_j)$ y $Q(s)$, y otro cero entre $Q(s)$ y $Q(t_{j+1})$.

Resultan así en el intervalo (t_j, t_{j+1}) , tres ceros. Es decir, en el intervalo $(0, 2\pi)$, $Q(t)$ tiene $2N + 2$ ceros, lo que significa que es idénticamente nulo.

Entonces: $P(t) \equiv \text{sen}(Nt + \varphi)$; esto último, contradice las dos hipótesis hechas sobre $P(t)$, lo que indica que éstas son falsas y se cumple la tesis.

2.- $P'(s) < 0$.

Conduce con un razonamiento análogo al mismo resultado.

Luego, debe ser $\|P'(t)\|_{\infty} \leq N \|P(t)\|_{\infty}$, para el caso $P(t)$ real.

Sea ahora $P(t)$ un polinomio complejo. En virtud de que: $[R(P)]' = R[P']$, se puede escribir:

$$\|R(P')\|_{\infty} \leq N \|R(P)\|_{\infty} \leq N \|P\|_{\infty} .$$

Si en lugar de P , tomamos $P e^{i\alpha}$, se tiene:

$$\|R(P' e^{i\alpha})\|_{\infty} \leq N \|P e^{i\alpha}\|_{\infty} \leq N \|P\|_{\infty} .$$

Se puede elegir α , de modo que: $R(P' e^{i\alpha}) = P' e^{i\alpha}$.

Entonces:

$$\|R(P' e^{i\alpha})\|_{\infty} = \|P'\|_{\infty} \quad \text{y} \quad \|P'\|_{\infty} \leq N \|P\|_{\infty} .$$

E.- POLINOMIOS TRIGONOMETRICOS POSITIVOS .

Propiedades :

Si $P(t)$ es estrictamente positivo, es real y sin ceros sobre la recta. Además,

$$\|P\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int |P| = \frac{1}{2\pi} \int P ,$$

es decir, la norma L^1 de P es al mismo tiempo el valor medio de P y su primer coeficiente de Fourier .

Teorema 3.3 :

Para todo polinomio estrictamente positivo, es posible hallar $P_1 > P_2$, de modo que $P = P_1^2 + P_2^2$ donde P_1 y P_2 son polinomios trigonométricos reales.

Demostración :

a $P(t) = \sum_{-N}^N c_n e^{int}$, le asociamos la expresión:

$$p(z) = \sum_{-N}^N c_n z^n ; \quad \text{luego:} \quad P(t) = p(e^{it})$$

$z^N p(z)$ es un polinomio trigonométrico de grado $2N$. Luego, hay $2N$ raíces que no pueden estar sobre el círculo pues no hay raíces de t sobre la recta. Además, como $P(t)$ es real, si tomamos su expresión conjugada, se verifica: $\overline{P(\bar{t})} = P(t)$. Para todo z , tal que $|z| = 1$, tenemos: $p(z) = \overline{p(1/\bar{z})}$.

Estas dos últimas expresiones, son holomorfas salvo para $z = 0$ y $z = \infty$. Son además iguales sobre el círculo; luego, son idénticas. .

En consecuencia, si hay una raíz para $z = z_j$, hay también una raíz en $z = 1/\bar{z}_j$, ($j = 1, 2, \dots, N$). Entonces, se puede escribir:

$$z^N p(z) = k \prod_1^N (z - z_j) \prod_1^N (z - \frac{1}{\bar{z}_j})$$

o bien:

$$p(z) = k \prod_1^N (z - z_j) \prod_1^N (\frac{1}{z}) \prod_1^N (\frac{1}{z} - \bar{z}_j) = c \prod_1^N (z - z_j) \prod_1^N (\frac{1}{z} - \bar{z}_j)$$

Llamemos: $q(z) = \sqrt{c} \prod_1^N (z - z_j)$ y $q(\frac{1}{z}) = \sqrt{c} \prod_1^N (\frac{1}{z} - \bar{z}_j)$. Así tenemos: $q(z) =$
 $= q(t) = \frac{1}{\sqrt{c}} [P_1(t) + iP_2(t)]$ y $q(\frac{1}{z}) = \overline{q(t)} = \frac{1}{\sqrt{c}} [P_1(t) - iP_2(t)]$

y:

$$P = P_1^2 + P_2^2$$

P_1 y P_2 , son polinomios de grado $\leq N$. Si N es par, se puede obtener un resultado mejor. Si $N = 2\psi$; se puede escribir:

$$p(z) = c [z^{-\psi} \prod_1^N (z - z_j)] [z^{\psi} \prod_1^N (\frac{1}{z} - \bar{z}_j)]$$

El primer paréntesis, es un polinomio de la forma: $\sum_{-\psi}^{\psi} d_m z^m$. Se puede elegir entonces P_1 y P_2 , de grado inferior a ψ .

F.- CARACTERIZACION DE UNA CLASE DE POLINOMIOS POSITIVOS.

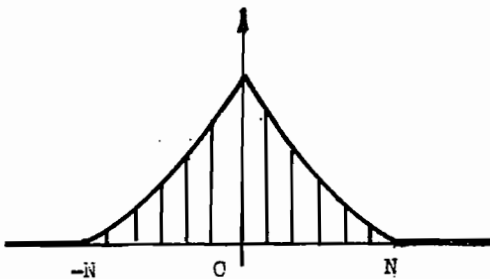


fig. 3.5

Consideremos un polinomio trigonométrico tal que la gráfica de la sucesión de sus coeficientes sea una curva simétrica respecto del eje vertical, convexa a la derecha de ese eje, y completada con dos semi-rectas. (fig. 3.5)

Si la gráfica dada, representa a la función ψ , entonces: $c_n = \psi(n)$ y $c_N = 0$.

Se puede suponer que ψ es lineal entre dos enteros consecutivos.

Teorema 3.4 : El polinomio $P(t) = \sum_{-N}^N c_n e^{int}$, con $c_n = \psi(n)$, (fig. 3.5) es positivo.

Demostración :

Se prueba por inducción sobre N .

En efecto, es cierto para $N = 1$, pues en este caso P es una constante positiva. Supongamos que sea cierto para polinomios trigonométricos de grado $\leq N - 1$.

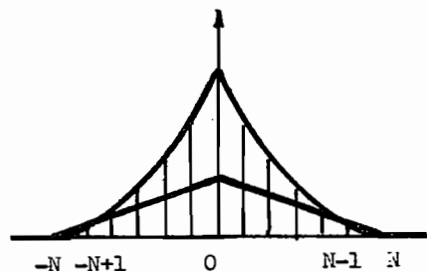


fig. 3.6

Es fácil ver que:

$$\varphi(t) = k(t) + \Psi(t) \quad (\text{fig. 3.6})$$

con $k(t) = 0$ fuera de $(-N, N)$, lineal entre $(-N, 0)$ y $(0, N)$ e igual a $\Psi(t)$ entre $(-N, -N+1)$ y $(N-1, N)$ pues supusimos que Ψ era lineal entre dos enteros consecutivos. $\Psi(t)$, es la función diferencia entre φ y k ; es una

función par, y es convexa por ser diferencia entre una par y una convexa; además vale cero fuera de $(-N+1; N-1)$. Entonces se puede escribir:

$$P(t) = \alpha k_N(t) + Q(t),$$

donde $k_N(t)$ es el núcleo de Fejer y αk_N es un múltiplo del mismo, con $\alpha = k(0)$. $Q(t)$ es un polinomio de la misma forma que $P(t)$, pero de grado $\leq N - 1$.

Como $Q(t)$ es un polinomio positivo por hipótesis inductiva, y $\alpha k_N(t)$ lo es por ser el núcleo de Fejer, multiplicado por una constante positiva, resulta:

$$P(t) \geq 0$$

G.- POLINOMIOS TRIGONOMETRÍCOS SOBRE PUNTOS EQUIDISTANTES SOBRE EL CÍRCULO .

Dada el álgebra multiplicativa de los polinomios trigonométricos sobre el círculo, se considerarán las funciones que resultan de hacer la restricción del dominio de dichos polinomios, al conjunto E de puntos de la forma:

$$t_j = \alpha + \frac{2\pi}{N} j, \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, N.$$

Se observa que el polinomio $e^{iNt} - e^{iN\alpha}$, se anula sobre el conjunto E y nunca fuera de él. Así pues consideremos el algebra cociente del algebra dada por el ideal $(e^{iNt} - e^{iN\alpha})$.

Siempre es posible reducir un polinomio, de modo que sus coeficientes sean nulos fuera de un intervalo dado $\nu+1, \nu+N$, y escribirlo $\sum_{\nu+1}^{\nu+N} c_n e^{int}$, teniendo en cuenta que se puede reemplazar e^{iNt} por $e^{iN\alpha}$ cuando sea necesario.

Analogías con las fórmulas de Fourier, Parseval y convolución.

a) Recordemos que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} dt = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Aquí, en lugar de integración sobre el círculo, vamos a tomar la integración sobre E ; se ve de inmediato, que resulta una integral de Stieltjes, respecto de una función a "puerto salto". En efecto; para una función f cualquiera pongamos:

$$\int_E f(t) d\omega_E(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(\alpha + \frac{2\pi j}{N})$$

En particular, si $f(t) = e^{int}$, queda:

$$I = \int_E e^{int} d\omega_E(t) = \frac{e^{in\alpha}}{N} \sum_{j=1}^N (e^{in(2\pi/N)})^j$$

Entonces:

$$\begin{cases} \text{si } n = 0, \text{ mód. } N, & I = e^{in\alpha} \\ \text{si } n \neq 0, \text{ mód. } N, & I = 0 \end{cases}$$

En consecuencia si tenemos un polinomio: $P(t) = \sum_{n=\nu+1}^{\nu+N} c_n e^{int}$, se verifica:

$$c_n e^{in\alpha} = \int_E P(t) e^{-int} d\omega_E(t) \quad \text{con } \nu+1 \leq n \leq \nu+N$$

b) Consideremos dos polinomios:

$$P(t) = \sum_{n=\nu+1}^{\nu+N} c_n e^{int} \quad Q(t) = \sum_{n=\nu+1}^{\nu+N} d_n e^{int}$$

El producto $P(t) \cdot Q(-t)$ será de la forma $\sum r_n e^{int}$, con $r_n = \sum_{q-p=n} c_q d_p$.

Es fácil ver, que $q - p$, o sea n , está entre $1-N$ y $N-1$, es decir:

$$r_n = 0, \text{ si } \begin{cases} n > N-1 \\ n < 1-N \end{cases}$$

Luego:

$$\int_E P(t) Q(-t) d\omega_E(t) = \sum_{n=1-N}^{N-1} \frac{r_n e^{in\alpha}}{N} \sum_{j=1}^N (e^{in(2\pi/N)})^j$$

Como

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (e^{in(2\pi/N)})^j = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \text{ mód. } N \\ 0, & \text{si } n \neq 0, \text{ mód. } N \end{cases}$$

resulta:

$$\int_E P(t) \cdot Q(t) d\omega_E(t) = \gamma_0 = \sum_{j+1}^{j+N} c_n d_n$$

c) Fórmula de convolución: (de Lagrange).

Sea:

$$Q^*(t) = Q(s+t) = \sum_{j+1}^{j+N} d_n e^{ins} e^{int}$$

Entonces:

$$Q^*(-t) = Q(s-t) = \sum_{j+1}^{j+N} d_{-n} e^{-ins} e^{int}$$

$$\int_E P(t) Q^*(-t) d\omega_E(t) = \sum_{j+1}^{j+N} c_n d_n e^{ins}$$

o sea

$$\int_E P(t) Q(s-t) d\omega_E(t) = \sum_{j+1}^{j+N} c_n d_n e^{ins} = P * Q(s)$$

d) Aplicación :

Se puede dar una nueva demostración del teorema de Bernstein aplicando la convolución:

En primer lugar tomemos:

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\mu} c_n e^{int}$$

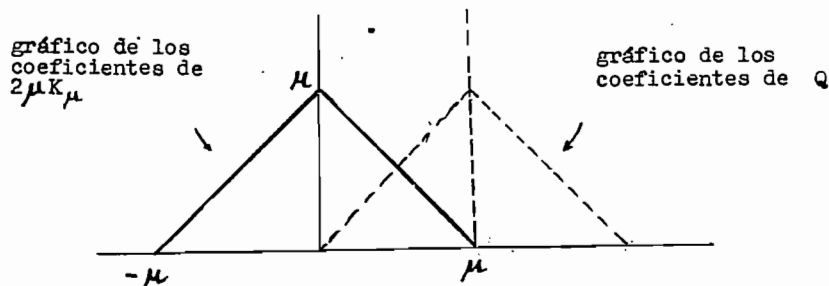
que es un polinomio trigonométrico, cuyos coeficientes tienen como soporte los enteros de 0 a μ . Calculando su derivada se obtiene:

$$(3.18) \quad -i P'(t) = P * Q(t) ,$$

donde los coeficientes de $Q(t)$ de $n=0$ a μ , son iguales a n .

Vamos a ver ahora que si $Q(t) = 2\mu K_{\mu} e^{i\mu t}$, se verifica (3.18) (ver gráfico)

En efecto:



Ahora: $\|P'(t)\|_{\infty} = \|P*Q\|_{\infty} \leq \|P\|_{\infty} \|Q\|_1$. Pero $\|Q\|_1 = \mu \|2K_{\mu}\| = \mu$.

Se obtiene entonces: $\|P'(t)\|_{\infty} \leq \|P(t)\|_{\infty}$.

Pero esto no es todavía la demostración del teorema de Bernstein , ya que $P(t)$ tiene sus coeficientes desde 0 a μ y no de $-\mu$ a μ . Para completar la demostración hacemos uso de la convolución de Lagrange .

Por la segunda parte de la demostración del teorema de Bernstein , sabemos que nos bastará probar que: $\|RP'\|_{\infty} \leq \|RP\|_{\infty}$, pues basta considerar polinomios reales (RP parte real de P).

Si $Q(t)$ fuese un polinomio real, sería inmediato; Pero $Q(t)$ no es real a causa del factor $e^{i\mu t}$. Pero si tomamos valores de t equidistantes sobre el círculo y de la forma: $t = \alpha + (j\pi/\mu)$, entonces $e^{i\mu t}$ tendría argumento constante, y además:

$$\text{argumento de } Q(t) = \mu\alpha \pmod{\pi}$$

Si llamamos E al conjunto de los puntos considerados, se ve que $Q(t) e^{-i\mu\alpha}$ es un núcleo real sobre ese conjunto.

Recordemos que: $P*Q e^{-i\mu\alpha}(s) = \int_E P(s-t) Q(t) e^{-i\mu\alpha} d\omega_E(t)$. Entonces:

$$R(P*Q e^{-i\mu\alpha}) = P_1*Q e^{-i\mu\alpha}$$

Como:

$$\int_E |Q(t)| d\omega_E(t) = \mu \int_E 2K_{\mu} d\omega_E(t) = \mu$$

Queda:

$$\|R(P*Q e^{-i\mu\alpha})\|_{\infty} \leq \mu \|RP\|_{\infty}$$

Si elegimos α tal que:

$$\|P*Q\|_{\infty} = \|R(P*Q e^{-i\mu\alpha})\|_{\infty}$$

teniendo en cuenta que $\|P*Q\|_{\infty} = \|P'\|_{\infty}$, queda:

$$\|P'\|_{\infty} \leq \mu \|RP\|_{\infty}$$

Observaciones :

1.- La última desigualdad es más fuerte que las que teníamos anteriormente.

2.- Se puede aplicar la demostración a la desigualdad siguiente:

Sea $\{\lambda_n\}$ ($n=0,1,\dots$) una sucesión creciente convexa con $\lambda_0 = 0$ y :

$$P(t) = \sum_0^{\mu} c_n e^{int}$$

entonces:

$$\sup_t \left| \sum_0^\mu c_n \lambda_n e^{int} \right| \leq \lambda \|PR\|_\infty$$

Bastará tomar:

$$Q(t) e^{-i\mu t} = \sum_{\mu}^{\mu} \lambda_{\mu} - |n| e^{int}$$

que es un polinomio positivo (ver parte F) .

IV.- SERIES DE FOURIER

SUMAS DE FEJER

A.- Definiciones y generalidades

Definición 4.1 :

A la función $f \in L^1$ y de período 2π , se le asocia una sucesión de números:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{-int} dt$$

que se llaman coeficientes de Fourier de f .

Si f es un polinomio trigonométrico, todos los coeficientes de Fourier , salvo un número finito, resultan nulos, como es inmediato comprobar.

Definición 4.2 :

Si f es una función cualquiera, la expresión $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, es una serie formal, que se llama la serie de Fourier de la función f , donde las c_n son por definición sus coeficientes de Fourier.

La serie de Fourier de una función f , es una expresión que en general no es convergente, y si lo es, no converge necesariamente a $f(x)$.

Para estudiar esa convergencia, se estudia el comportamiento de las sumas parciales:

$$S_n(t, f) = \sum_{-N}^N c_n e^{int} ,$$

Otra forma de representar la serie de Fourier, es la siguiente:

$$S(f, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} A_n(t)$$

donde $a_0 = 2c_0$; y $A_n(t) = c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int} = a_n \sin nt + b_n \cos nt$

En particular, si $A_n(t)$ es real: $A_n(t) = r_n(\cos nt + \varphi_n)$.

Cuando a_n y b_n son números reales, se demostrará que $f(x)$ es una función a valores reales p.p.

Si $f(x)$ es real, se ve de inmediato que a_n y b_n son reales. Vamos a dar

ahora, una definición más general para la convolución, a partir de la cual se obtendrá una nueva expresión para las sumas S_n .

Definición 4.3 :

Dadas $f \in L^1$ y $g \in L^1$, se llama convolución de f con g a :

$$H(t) = f * g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) g(t-s) ds$$

Esta operación es lineal y conmutativa.

Como:

$$c_n e^{int} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{in(t-s)} ds = f(t) * e^{int},$$

es fácil ver que:

$$S_n = f(t) * 2 D_n(t)$$

Definición 4.4 :

Se llaman sumas de Fejer, a las sumas Césaro de las S_n , es decir:

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n}$$

Como

$$2 K_n = \frac{2}{n} (D_0 + D_1 + \dots + D_{n-1}),$$

resulta:

$$\sigma_n = f * 2 K_n$$

B.- Teoremas sobre la convergencia de las sumas Fejer. Convergencia puntual.

Teorema 4.1 :

Sea $f \in L^1$ y acotada. Supongamos que en un punto x dado:

$$(4.1.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} = f(x)$$

Entonces se verifica:

$$(4.1.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sigma_n(x) - f(x) \} = 0$$

Supongamos que la convergencia 4.1.1, es uniforme respecto de x cuando $x \in E$. Entonces, la convergencia 4.1.2, es también uniforme respecto de x cuando $x \in E$.

Demostración :

Primera Parte: según se ha visto:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) f(x-t) dt$$

Además, como la norma L^1 de $2K_n$, es 1, tenemos:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) f(x) dt$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) [f(x-t) - f(x)] dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} K_n(t) [f(x-t) + f(x+t) - 2f(x)] dt. \end{aligned}$$

Si llamamos $\Psi(t) = f(x-t) + f(x+t) - 2f(x)$, queda:

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} K_n(t) \Psi(t) dt = I$$

Dividiendo el intervalo de integración:

$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi} K_n(t) \Psi(t) dt$$

Llamando A_1 al $\sup_{0 \leq t \leq \varepsilon} |\Psi(t)|$, se puede acotar la primera integral de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} K_n(t) \Psi(t) dt \right| &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\varepsilon} |K_n(t) \Psi(t)| dt \leq \frac{2}{\pi} A_1 \int_0^{\varepsilon} K_n(t) dt \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} A_1 \int_0^{\pi} K_n(t) dt = A_1 \end{aligned}$$

Llamando A_2 al $\sup_{\varepsilon \leq t \leq \pi} |\Psi(t)|$, se acota la segunda integral:

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} K_n(t) \Psi(t) dt \right| \leq A_2 \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} K_n(t) dt$$

pero,

$$K_n(t) = \frac{\sin^2(nt/2)}{2n \sin^2(t/2)} \leq \frac{\pi^2}{2nt^2}$$

pues:

$$0 \leq \frac{t}{2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\sin(t/2)}{t/2} \geq \frac{1}{\pi/2} \Rightarrow \sin(t/2) \geq \frac{\pi}{t}$$

Entonces:

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} K_n(t) \Psi(t) dt \right| \leq A_2 \frac{\pi}{n} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{dt}{t^2} \leq A_2 \frac{\pi^2}{n\varepsilon^2}$$

Como:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2} = f'(x) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \Psi(t) = 0$$

y dado $h > 0$, arbitrario, se puede encontrar $\varepsilon > 0$, tal que: $A_1 < \frac{h}{2}$.

Fijado $\epsilon(h)$, existe $n_0(\epsilon)$ tal que: para todo $n > n_0(\epsilon)$:

$$\frac{\pi^2}{n\epsilon^2} \cdot A_2 < \frac{h}{2}$$

Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n - f(x)| = 0$$

Segunda parte: Si la convergencia 4.1.1 es uniforme respecto de x para $x \in E$, entonces dado h , ϵ es independiente de $x \in E$ y también lo es $n_0(\epsilon)$, por lo cual σ_n tiende uniformemente a f sobre el conjunto E .

C o r o l a r i o s :

1°.- Si f es continua sobre el círculo, E es el círculo, y este enunciado corresponde al segundo teorema de Weierstrass.

2°.- Si f es continua y sus coeficientes de Fourier son todos nulos, entonces las sumas de Fejer son nulas, y como éstas tienden a f , es $f \equiv 0$.

3°.- La serie de Fourier, caracteriza a la función continua. En efecto: dada la función, quedan unívocamente determinados los coeficientes, y recíprocamente, dos funciones continuas distintas, no pueden tener los mismos coeficientes de Fourier, pues sus sumas de Fejer, serían las mismas.

4°.- Si f es una función que cumple las hipótesis del teorema y su serie de Fourier converge en punto x , entonces converge a f , pues la existencia del límite de las S_n , implica que existe el límite de las $\sigma_n(x)$ (que son sus sumas de Césaró) y además:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x)$$

5°.- Si una función es continua, en ningún punto se verifica: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, pues en tal caso sería $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$. Es decir, cuando la serie de Fourier de una función continua no converge, ella es oscilante.

C o n v e r g e n c i a e n L^p .

Para tratar el problema de la convergencia de sumas de Fejer en espacios L^p , es necesario hacer uso de un teorema de Young:

T e o r e m a 4.2 (de Young) :

Si $f \in L^p$ con $1 \leq p < \infty$, y $g \in L^1$, se verifica:

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

D e m o s t r a c i ó n :

Dada $h \in L^p$, se demuestra que:

$$\sup_{\|k\|_p \leq 1} \left| \int h \cdot k \right| = \|h\|_p, \text{ donde } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

En efecto: por la desigualdad de Hölder : $\forall h \in L^p$ y $\forall k \in L^{p'}$, tenemos:

$$\left| \int h \cdot k \right| \leq \int |hk| \leq \|h\|_p \cdot \|k\|_{p'}$$

Para los k tales que $\|k\|_{p'} \leq 1$:

$$(4.1) \quad \left| \int h k \right| \leq \|h\|_p$$

Además, si $k = \frac{h^{p-1}}{\|h\|_p^{p-1}}$, se cumple:

$$(4.2) \quad \left| \int h k \right| = \|h\|_p, \text{ con } \|k\|_{p'} = 1$$

De (4.1) y (4.2) se obtiene:

$$\sup_{\|k\|_{p'} \leq 1} \left| \int h k \right| = \|h\|_p$$

Aplicando este resultado:

$$\|h\|_p = \|f * g\|_p = \sup_{\|k\|_{p'} \leq 1} \left| \int [f * g] \cdot k \right|$$

Además existe un k , con $\|k\|_{p'} = 1$, tal que:

$$\|f * g\|_p = \frac{1}{2\pi} \left| \iint f(t-s) g(s) k(t) ds dt \right|$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p &\leq \frac{1}{2\pi} \int |g(s)| ds \left| \sup_{\|k\|_{p'} \leq 1} \int f(t-s) k(t) dt \right| \leq \\ &\leq \|f\|_p \|k(t)\|_{p'} \|g\|_1 \end{aligned}$$

Luego:

$$\boxed{\therefore \|f * g\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_1}$$

Pasaremos ahora a estudiar la convergencia en L^p de las sumas de Fejer .

Teorema 4.3 :

Si $f \in L^p$, con $1 \leq p < \infty$, entonces: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n - f\|_p = 0$

Demostración :

Si $f \in L^p$, existe una función g continua, tal que: dado $\epsilon > 0$ y arbitrario: $\|f - g\|_p \leq \epsilon$.

Llamando $\sigma_n(g)$, a las sumas de Fejer correspondientes a g :

$$\| \sigma_n - f \|_p = \| \sigma_n(g) - g + \sigma_n(f-g) - (f-g) \|_p$$

Aplicando la desigualdad de Minkowsky :

$$\| \sigma_n - f \|_p \leq \| \sigma_n(g) - g \|_p + \| \sigma_n(f-g) \|_p + \| f-g \|_p$$

Pero:

$$\| \sigma_n(f-g) \|_p = \| (f-g) * 2 K_n \| \leq \| f-g \|_p \| 2 K_n \|_1 = \| f-g \|_p \leq \alpha ,$$

y $\| \sigma_n(g) - g \|_p < \alpha$, para n suficientemente grande pues g es continua y $\sigma_n(g) \rightarrow g$ para $n \rightarrow \infty$. Por último:

$$\| \sigma_n - f \|_p \leq 3\alpha , \text{ con } \alpha \text{ arbitrario .}$$

Convergencia cuando $f \in L^1$:

Teorema 4.4 :

Si $f \in L^1$, las sumas de Fejer , convergen a f en casi todo punto.

Demostración :

Recordemos que : $2 K_n(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{\text{sen}(n/2)t}{\text{sen}(t/2)} \right)^2$ admite la acotación $K_n(t) < \frac{c^2}{nt^2}$ con c constante.

Si se define la función:

$$h_n(t) = \begin{cases} n , & \text{para } t \leq \frac{c}{n} \\ \frac{c^2}{nt^2} , & \text{para } t > \frac{c}{n} \end{cases}$$

resulta $K_n(t) > h_n(t)$.

$$\text{Vimos que: } | \sigma_n(x) - f(x) | = \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi K_n(t) \Psi(t) dt \right|$$

$$\text{donde: } \Psi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

Entonces:

$$(4.3) \quad | \sigma_n(x) - f(x) | \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi h_n(t) | \Psi(t) | dt = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^\epsilon h_n(t) | \Psi(t) | dt + \int_\epsilon^\pi h_n(t) | \Psi(t) | dt \right]$$

Vamos a mayorar la primera integral:

Si integramos por partes y llamamos $\phi(x)$ a la $\int_0^x | \Psi(t) | dt$, queda:

$$\int_0^\epsilon h_n(t) | \Psi(t) | dt = h_n(\epsilon) \phi(\epsilon) - \int_0^\epsilon h_n'(t) \phi(t) dt .$$

$$\text{Sea: } \omega(h) = \sup_{t \leq h} \frac{\phi(t)}{t}$$

Entonces:

$$\int_0^{\epsilon} h_n(t) |\varphi(t)| dt \leq H_n(\epsilon) \phi(\epsilon) + \int_0^{\epsilon} [-h_n'(t)] \omega(\epsilon) t dt$$

Volviendo a integrar por partes:

$$\int_0^{\epsilon} h_n(t) |\varphi(t)| dt \leq h_n(\epsilon) \phi(\epsilon) - h_n(\epsilon) \cdot \epsilon \cdot \omega(\epsilon) + \omega(\epsilon) \int_0^{\epsilon} h_n(t) dt$$

Pero, $h_n(t) \leq \frac{c}{t}$

Luego:

$$\int_0^{\epsilon} h_n(t) |\varphi(t)| dt \leq \frac{c}{\epsilon} \phi(\epsilon) + \omega(\epsilon) \int_0^{\infty} h_n(t) dt$$

$\int_0^{\infty} h_n(t) dt$, acota uniformemente a $\int_0^{\epsilon} h_n(t) dt$, y vale $2c$.

$$\int_0^{\epsilon} h_n(t) |\varphi(t)| dt \leq c \frac{\phi(\epsilon)}{\epsilon} + \omega(\epsilon) \cdot 2c$$

Pero: $\frac{\phi(\epsilon)}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon} |\varphi(t)| dt = \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon} |f(x+t) - f(x-t) - 2f(x)| dt$

Entonces:

$$\frac{\phi(\epsilon)}{\epsilon} \leq \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon} |f(x+t) - f(x)| dt + \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon} |f(x-t) - f(x)| dt$$

Pero, si $f(x) \in L^1$ vale para casi todos los puntos x : $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon} |f(x+t) - f(x)| dt = 0$

(Ver Natanson: Funciones reales, cap. IX). Ahora fijamos un punto x que cumpla lo anterior:

En consecuencia: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(\epsilon)}{\epsilon} = 0$, y $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega(\epsilon) = 0$,

y como la acotación es uniforme respecto de n , fijado h , es posible elegir ϵ , tal que:

$$(4.4)^* \quad \left| \int_0^{\epsilon} h_n(t) |\varphi(t)| dt \right| < \frac{h}{2}$$

Ya elegido ϵ , resulta:

$$\int_{\epsilon}^{\pi} h_n(t) |\varphi(t)| dt \leq h_n(\epsilon) \int_0^{\pi} |\varphi(t)| dt$$

pues para todo $t \geq \epsilon$, es $h_n(t) \leq h_n(\epsilon)$.

Como $\int_0^{\pi} |\varphi(t)| dt$, es independiente de ϵ y de n , y como $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\epsilon) = 0$ se podrá elegir $n_0(\epsilon)$, de modo que para $n > n_0$, sea:

$$(4.5) \quad \left| \int_{\epsilon}^{\pi} h_n(t) |\varphi(t)| dt \right| \leq \frac{h}{2}$$

De (4.3), (4.4) y (4.5), resulta: para todo h prefijado, se puede elegir n_0 de modo que, para todo $n > n_0(\epsilon)$, sea:

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < h,$$

C.- Propiedades de las sumas de Fejer que determinan propiedades de otras sumas.

Teorema 4.5:

Dada una familia de núcleos, $Q_r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(r) [2K_n(t)]$ con las condiciones:

- 1.- $\forall r$, y $\forall n$, $\lambda_n(r) \geq 0$
- 2.- $\forall r$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(r) = 1$
- 3.- $\exists r_0$, tal que $\forall n$, $\lim_{r \rightarrow r_0} \lambda_n(r) = 0$

y siendo σ_n las sumas de Fejer de f , se verifica que si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = f$, entonces: $\lim_{r \rightarrow r_0} f * Q_r(t) = f$.

Demostración:

En primer lugar sea $f = 0$.

Como $\sigma_n = f * 2K_n$, y por la linealidad de la convolución:

$$f * Q_r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(r) \sigma_n$$

se puede escribir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sigma_n = \sum_{n=1}^N \lambda_n \sigma_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n \sigma_n.$$

Vamos a mayorar el segundo sumando:

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n \sigma_n \right| \leq \sup_{n \geq N} |\sigma_n(t)| \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n(r) = \sup_{n \geq N} |\sigma_n(t)|, \text{ pues } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(r) = 1.$$

Pero, $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n(t)| = 0$ por hipótesis; entonces, dado ϵ , existe $N(\epsilon)$ tal que, $\forall n > N(\epsilon)$, se verifica: $|\sigma_n(t)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Sea $N = N(\epsilon)$, de manera que:

$$(4.6) \quad \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n \sigma_n \right| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Ahora, fijado N , vamos a mayorar la primer parte de la suma:

$$\left| \sum_{n=1}^N \lambda_n \sigma_n \right| \leq \sup_{n \leq N} \lambda_n(r) \sum_{n=1}^N |\sigma_n(t)|,$$

donde $\sum_{n=1}^N |\sigma_n(t)|$, es un valor constante respecto de r .

Pero $\lim_{r \rightarrow r_0} \lambda_n(r) = 0$ (para todo n). Entonces, dado ϵ , existe δ , tal que $\forall r$, con $|r - r_0| \leq \delta$ se tiene:

$$|\lambda_n(r)| < \frac{\epsilon}{2 \sum_1^N |\sigma_n(t)|}$$

y en consecuencia:

$$(4.7) \quad \left| \sum_1^N \lambda_n \sigma_n \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

De (4.6) y (4.7) resulta:

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \left(\sum_1^{\infty} \lambda_n \sigma_n \right) = 0 \quad \text{que es lo que se quería demostrar.}$$

Sea ahora $t \neq 0$. Basta considerar $f - t$ en lugar de f .

Sumas de Poisson :

Sea $P_r(t) = 1 + 2 \sum_1^{\infty} r_n \cos nt$, donde r_1, r_2, \dots, r_n es una sucesión convexa y cada r_n es una función de r que tiende a 1 cuando $r \rightarrow 1$.

Vamos a demostrar que se verifican las condiciones del teorema anterior y que:

$$P_r(t) = \sum_1^{\infty} \lambda_n(r) [2 K_n]$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \lambda_n [2 K_n(t)] &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) e^{ij t} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j + \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j \left(1 - \frac{1}{j}\right) e^{-it} + \\ &+ \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j \left(1 - \frac{1}{j}\right) e^{it} + \sum_{j=3}^{\infty} \lambda_j \left(1 - \frac{2}{j}\right) e^{-i2t} + \sum_{j=3}^{\infty} \lambda_j \left(1 - \frac{2}{j}\right) e^{i2t} + \dots \end{aligned}$$

o sea :

$$\sum_1^{\infty} \lambda_n [2 K_n(t)] = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j \left(1 - \frac{n}{j}\right) e^{-itn} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j \left(1 - \frac{n}{j}\right) e^{int}$$

Pero sí:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j &= 1 \\ \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j \left(1 - \frac{n}{j}\right) &= r_n \end{aligned} \right. ,$$

queda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [2 K_n] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} r_n e^{-int} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos nt = P_r(t)$$

Además:

$$r_{n-1} - r_n = \sum_{j=n}^{\infty} \lambda_j \left(1 - \frac{n-1}{j}\right) - \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j \left(1 - \frac{n}{j}\right) = \lambda_n \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j \cdot \frac{1}{j}$$

$$r_n - r_{n+1} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j \left(1 - \frac{n}{j}\right) - \sum_{j=n+2}^{\infty} \lambda_j \left(1 - \frac{n+1}{j}\right) = \lambda_{n+1} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) + \sum_{j=n+2}^{\infty} \lambda_j \cdot \frac{1}{j}$$

Restando:

$$(r_{n-1} - r_n) - (r_n - r_{n+1}) = r_{n-1} - 2r_n + r_{n+1} = \frac{\lambda_n}{n}$$

Luego:

$$\lambda_n = (r_{n+1} + r_{n-1} - 2r_n) n$$

Se verifica entonces:

- 1.- $\forall r$ y $\forall n$, $\lambda_n \geq 0$, por la convexidad de las r_n
- 2.- $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(r) = r_0 = 1$
- 3.- $\forall n$, $\lim_{r \rightarrow 1} \lambda_n(r) = 0$

En particular, si la sucesión $\{r_n\}$ es $\{r^n\}$, tenemos las sumas de Poisson, donde:

$$r^{n+1} + r^{n-1} - 2r^n \geq 0, \text{ pues } r^2 + 1 - 2r \geq 0$$

Se puede afirmar entonces, que si: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \ell$, entonces $\lim_{r \rightarrow r_0} f(t) * C_r(t) = \ell$ donde $C_r(t)$, son las sumas de Poisson.

Sumas de de la Vallée Poussin.

Como $V_{2n} = 2k_{2n} - k_n$, también se verifica que:

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \ell, \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} f * V_{2n} = \ell.$$

V.- SERIES DE FOURIER

COEFICIENTES DE FOURIER

1º.- PROBLEMAS ACERCA DE LA VINCULACION DE UNA FUNCION CON SUS COEFICIENTES DE FOURIER.

A.- Funciones de cuadrado sumable .

Sea $f \in L^2$

Dado P_N , polinomio trigonométrico cualquiera de grado $n \leq N$, se puede escribir:

$$\frac{1}{2\pi} \int |f - P_N|^2 = \frac{1}{2\pi} \int (f - S_N + S_N - P_N) (\overline{f - S_N + S_N - P_N})$$

y como

$$\frac{1}{2\pi} \int (f - S_N) e^{-int} = 0 \quad , \quad \text{si } |n| \leq N$$

resulta:

$$\frac{1}{2\pi} \int (f - S_N) (\overline{S_N - P_N}) dt = \frac{1}{2\pi} \int (f - S_N)(S_N - P_N) dt = 0$$

de donde

$$(5.1) \quad \frac{1}{2\pi} \int |f - P_N|^2 = \frac{1}{2\pi} \int |f - S_N|^2 + \frac{1}{2\pi} \int |S_N - P_N|^2$$

Consecuencias:

a) La mejor aproximación es alcanzada, si y sólo si $S_N = P_N$, pues:

$$(5.2) \quad E_n(f) = \inf_{\{P_N\}} \|f - P_N\|_2 = \|f - S_N\|_2$$

b) Si tomamos $P_N = 0$, como: $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - 0\|_2 = 0$ para $f \in L^2$ por un teorema anterior, entonces:

$$(5.3) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} E_n(f) = 0$$

c) Si tomamos $P_N = 0$, resulta:

$$(5.4) \quad \frac{1}{2\pi} \int |f|^2 = \frac{1}{2\pi} \int |f - S_N|^2 + \frac{1}{2\pi} \int |S_N|^2 = [E_n(f)]^2 + \sum_{-N}^N |c_n|^2$$

d)

Teorema 5.1 : (de Riesz - Fisher) :

$$f \in L^2 \iff \{c_n\} \in \ell^2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi} \int |f|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Demostración :

Por (5.4) , se puede afirmar que: si $f \in L^2$:

$$\frac{1}{2\pi} \int |f|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ [E_n(f)]^2 + \sum_{-N}^N |c_n|^2 \right\}$$

pero, por (5,3):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [E_n(f)]^2 = 0$$

y queda:

$$\frac{1}{2\pi} \int |f|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

En consecuencia:

(5.7)

$$f \in L^2 \Rightarrow \{c_n\} \in \ell^2$$

Recíprocamente:

Si $\{c_n\} \in \ell^2$, las sumas $\sum_{-N}^N c_n e^{int}$ constituyen una sucesión de Cauchy en L^2 , de manera que, por ser L^2 un espacio completo, convergen a una función $g \in L^2$, cuyos coeficientes de Fourier son los c_n .

Entonces:

(5.8)

$$\{c_n\} \in \ell^2 \Rightarrow \exists g \in L^2 \text{ tal que } g \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

e) Ya vimos que, si P y \bar{Q} son dos polinomios trigonométricos de grado N , se verifica:

(5.9)

$$\frac{1}{2\pi} \int P \bar{Q} = \sum_{-N}^N c_n \bar{d}_n$$

Vamos a generalizar este resultado para el caso en que f y g sean funciones de cuadrado sumable. Es decir, si $f \in L^2$ y $g \in L^2$, se verifica:

$$\frac{1}{2\pi} \int f \bar{g} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \bar{d}_n, \text{ donde } \begin{cases} f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \\ g \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{int} \end{cases}$$

En efecto, sean S_N y T_N , las sumas parciales de orden N de las series de Fourier de f y g .

Por (5.9), se verifica:

$$\frac{1}{2\pi} \int S_N \bar{T}_N = \sum_{-N}^N c_n \bar{d}_n$$

$$\begin{aligned} \left| \int f \bar{g} - \int S_N \bar{T}_N \right| &\leq \int |f - S_N| |\bar{g}| + \int |\bar{g} - \bar{T}_N| |S_N| \leq \\ &\leq \left(\int |f - S_N|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |\bar{g}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int |\bar{g} - \bar{T}_N|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |S_N|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Por lo visto anteriormente:

$$\left. \begin{aligned} &\|f - S_N\|_2 \\ \text{y} &\|\bar{g} - \bar{T}_N\|_2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Además:

$$\|\bar{g}\|_2 < \infty \text{ por ser } g \in L^2$$

$$\|S_N\|_2 < \|f\|_2 < \infty \text{ por ser } f \in L^2$$

Entonces:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int f \bar{g} - \int S_N \bar{T}_N \right| = 0$$

Queda:

$$\int f \bar{g} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{S_N} \bar{T}_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N c_n \bar{d}_n = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \bar{d}_n$$

Observación : Si $f \in L^2$ y $g \in L^2$, aplicando nuevamente la desigualdad de Schwarz, se comprueba de inmediato que $f \bar{g} \in L^1$. Aplicando la misma desigualdad a $\sum c_n \bar{d}_n$ resulta $\{c_n \bar{d}_n\} \in \ell^1$

B.- $f \in L^1$: Funciones sumables .

Los coeficientes de Fourier están uniformemente acotados y vale el siguiente teorema:

Teorema 5.2 : (de Riemman - Lebesgue)

Si $f \in L^1$ y $f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, se verifica que $c_n \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración :

Por ser las funciones escaleras densas en L^1 , existe una función escalera g , tal que:

$$(5.10) \quad \frac{1}{2\pi} \int |f - g| < \epsilon$$

Pongamos:

$$c_n(f) = c_n(g) + c_n(f - g)$$

Pero, $g \in L^2$ por ser una función escalera; entonces:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n(g)|^2 < \infty$$

es decir, el término general $c_n(g) \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$ y para $n > n_0(\epsilon)$, se tendrá que:

$$(5.11) \quad |c_n(g)| < \epsilon$$

Teniendo en cuenta (5.10), se tiene:

$$(5.12) \quad |c_n(f - g)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f - g) e^{-int} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f - g| < \epsilon$$

y por (5.11) y (5.12) :

$$|c_n(f)| \leq |c_n(g)| + |c_n(f - g)| < 2\epsilon, \text{ para } n > n_0(\epsilon)$$

C.- $f \in C$: Funciones continuas :

Como

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt,$$

haciendo un cambio de variable, resulta:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(t + \frac{\pi}{n}\right) e^{-in\left(t + \frac{\pi}{n}\right)} dt$$

Pero:

$$e^{-int} = -e^{-in\left(t + \frac{\pi}{n}\right)}$$

Entonces

$$C_n = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(t + \frac{\pi}{n}\right) e^{-int} dt$$

Haciendo el promedio queda:

$$C_n = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right] e^{-int} dt$$

Si $\omega_f(\delta) \leq \omega(\delta)$, resulta la acotación:

$$|C_n| \leq \frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n}$$

D.- $f \in C^\infty$: Funciones indefinidamente diferenciables .

Teorema 5.3 :

$f \in C^\infty$, si y sólo si se verifica: $C_n = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$.

Demostración :

Como:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, \text{ con } n \neq 0$$

Integrando por partes, sucesivas veces se tiene:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(t) e^{-int}}{in} dt \\ C_n &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f''(t) e^{-int}}{(in)^2} dt \\ &\vdots \\ C_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f^{(p)}(t) e^{-int}}{(in)^p} dt \end{aligned}$$

Sea $\forall t$, $|f^{(p)}(t)| < M_p$.

Entonces:

$$|C_n| \leq \frac{M_p}{n^p}$$

Es decir, para todo p entero, se cumple:

$$C_n = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

(condición de decrecimiento rápido)

Recíprocamente:

Sea $C_n = O(1/n^p)$, para todo p entero; entonces: para $p = 2$:

$$C_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

y en consecuencia $\sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{int}$ es uniformemente convergente y $f(t)$ resulta continua.

Derivando término a término:

$$f'(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} i n C_n e^{int}$$

Como también es $C_n = O(1/n^3)$, también converge $f'(t)$, y en general, por ser

$$C_n = O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right), \text{ es: } f^{(p)}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} (i n)^p C_n e^{int} \text{ uniformemente convergente.}$$

Queda así demostrado que $f \in C^\infty$.

Clase M_p :

Dentro de las funciones $\in C^\infty$, se considerarán las $f \in C(M_p)$.

Definición 5.1:

Se dice que $f \in C(M_p)$, si y sólo si existe k tal que, para todo $p \geq 0$, $\sup |f^{(p)}(t)| \leq k^p M_p$.

Sea $f \in C(M_p)$, entonces: $|C_n| \leq \frac{k^p M_p}{|n|^p}$

Definiendo la función:

$$T(x) = \sup_{p > 0} \frac{x^p}{M_p}$$

resulta la acotación:

$$|C_n| \leq \frac{1}{T\left(\frac{|n|}{k}\right)}$$

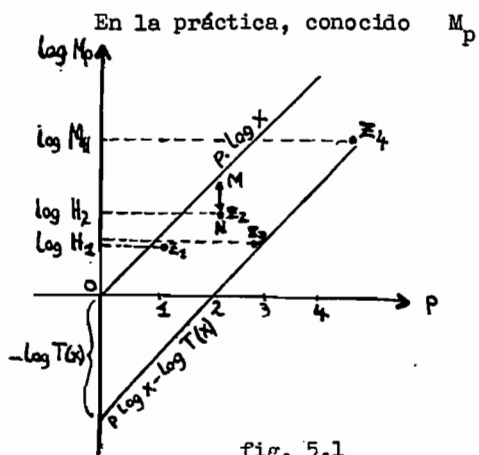


fig. 5.1

$$\log T(x) = \sup_{p > 0} (p \log x - \log M_p)$$

Pongamos la condición:

$$(5.15) \quad \frac{\log M_p}{p} \rightarrow \infty$$

$$\log T(x) \geq p \log x - \log M_p$$

$$\therefore \log M_p \geq p \log x - \log T(x)$$

Los puntos z_j , tienen coordenadas $(p, \log M_p)$. Cada segmento \overline{MN} , representa un sólo valor de $p \log x - \log T(x)$. Por la condición (5.13) se ve que es posible alcanzar el sup. de esos valores, y la recta correspondiente:

$$y = p \log x - \log T(x)$$

es la más alta de las rectas con pendiente $\log x$, que son mayoradas por la sucesión $\{\log M_p\}$. La ordenada al origen de esa recta, nos da el valor de $-\log T(x)$.

Ejemplo: Sea $M_n = n!$. Vamos a ver que $f \in C(n!)$, si y sólo si $\exists k$ tal que: $C_n = O(e^{-|n|/k})$. En efecto:

$$T(x) = \sup_{\{n\}} \frac{x^n}{n!}$$

Observemos que, dado x :

para $\frac{x}{n} \geq 1$, la función $\frac{x^n}{n!}$ es creciente

y para $\frac{x}{n} \leq 1$, la función $\frac{x^n}{n!}$ es decreciente.

El supremo se alcanza entonces para $n = [x]$ (parte entera de x).

Luego:

$$T(x) = \frac{x^{[x]}}{[x]!} = \frac{x^{\nu}}{\nu!} \quad \text{con } \nu = [x]$$

Aplicando la fórmula de Stirling:

$$\frac{x^{\nu}}{\nu!} = \frac{(\nu+h)^{\nu}}{\sqrt{2\pi\nu} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu}}$$

y como $1 \leq \left(\frac{\nu+h}{\nu}\right)^{\nu} \leq e$, resulta $\left(\frac{\nu+h}{\nu}\right)^{\nu} = O(1)$

$$T(x) = \left(\frac{\nu+h}{\nu}\right)^{\nu} \cdot \frac{e^{\nu}}{\sqrt{2\pi\nu}}$$

Es fácil ver que:

$$\frac{1}{2e\sqrt{2\pi}} \leq \left| \frac{T(x)\sqrt{x}}{e^x} \right| \leq \frac{2e}{\sqrt{2\pi}}$$

Así pues

$$|C_n| \leq \frac{1}{T(|n|/k_1)} \leq 2 e^{\sqrt{\pi} \sqrt{|n|/k_1}} e^{-|n|/k_1}$$

y resulta para todo $k > k_1$:

$$C_n = O(e^{-|n|/k})$$

Recíprocamente: Si $C_n = O(e^{-|n|/k})$, tenemos:

$$|f^{(p)}(t)| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} |n^p C_n| \leq 2 C' \sum_1^{\infty} n^p e^{-(n/k)}$$

pero $\frac{n^p}{e^{n/k}} \leq \frac{n^p}{\frac{1}{p!} \left(\frac{n}{k}\right)^p}$, entonces resulta:

$$|f^{(p-2)}(t)| \leq 2 C' \sum_1^{\infty} n^{p-2} e^{-(n/k)} = 2 C' \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} n^p e^{-(n/k)} \leq 2 C' k^{p \cdot p'} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

y en definitiva:

$$|f^{(p-2)}(t)| \leq C'' k^{p-2} (p-2)!$$

lo que significa que $f \in C(M_p)$ con $M_p = p'$.

E.- $f \in \mathcal{H}$. Funciones analíticas :

Consideremos las funciones de período 2π sobre el eje real y hagamos:

$$f(t) = \Psi(z), \quad \text{con } z = e^{it}$$

Tenemos así, las correspondientes funciones sobre el círculo unidad.

Teniendo en cuenta que $f(t) = f(-i \log z) = \Psi(z)$, se puede decir que $f \in \mathcal{H}$ significa que, cada punto z de la circunferencia unidad, es centro de un círculo en el cual $\Psi(z)$ es función analítica de z .

Teorema 5.4 :

$f \in \mathcal{H}$, si y sólo si $\exists \beta > 0$, tal que: $C_n = O(e^{-\beta|n|})$

Demostración :

Si $f \in \mathcal{H}$, por lo dicho antes, tenemos un cubrimiento de la circunferencia unidad.

por abiertos, en los cuales $\varphi(z)$ es analítica. Por un teorema conocido, y teniendo en cuenta que la circunferencia es un compacto, se puede extraer un subcubrimiento finito.

Sea ε , la distancia mínima de la circunferencia al complementario de la unión de los círculos del subcubrimiento; entonces, el anillo $1-\varepsilon < |z| < 1+\varepsilon$, está íntegramente contenido en los discos del subcubrimiento y $\varphi(z)$ es holomorfa en ese anillo.

Ahora, $z = e^{it}$, luego $\frac{dz}{z} = i dt$.

Los coeficientes de Fourier de la f , escritos en función de φ , serán:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(z) z^{-n} \frac{dz}{z}$$

Como φ es holomorfa en el anillo antes indicado, se puede tomar $\alpha > 0$, tal que $0 < \alpha < \varepsilon$, y calcular los C_n integrando sobre una circunferencia $C_{\pm\alpha}$ con $|z| = 1 \pm \alpha$

Será:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\pm\alpha}} \varphi(z) \frac{dz}{z^{n+1}}$$

Si $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\pm\alpha}} |\varphi(z) \frac{dz}{z}| = K$, tendremos: $|C_n| \leq K(1 \pm \alpha)^{-n}$

Para que la mayoración sea mínima, tomamos: $1 + \alpha$, para $n > 0$, y $1 - \alpha$, para $n < 0$

Se puede escribir: $1 + \alpha = e^\beta$; entonces será $1 - \alpha < e^{-\beta}$.

Es decir: $|C_n| < K e^{-\beta|n|}$, $\forall n$.

En conclusión: cuando $f \in \mathcal{H}$, existe $\beta > 0$, tal que:

$$(5.14) \quad C_n = o(e^{-\beta|n|})$$

Recíprocamente: si suponemos que $C_n = o(e^{-\beta|n|})$, se ve que: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int}$ es absolutamente convergente, lo cual implica que es uniformemente convergente a una función $f(t)$ continua.

En consecuencia: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int}$, donde C_n son los coeficientes de Fourier de f .

Entonces: $\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$, con $z = e^{it}$. Esta serie converge para $|z| = 1$, pero por la mayoración (5.14) también lo será para $e^{-\beta} < |z| < e^\beta$.

$\varphi(z)$, es ahora analítica en un anillo, lo que implica que f es analítica en una

franja.

F.- $f \in V$. Funciones de variación acotada

Teorema 5.5' :

Si $f \in V$, se verifica $C_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

Demostración :

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{-int} dt ;$$

integrando por partes se tiene:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{-int}}{in} d[f(t)]$$

Pero $\int |d[f(t)]| < \infty$, pues es la variación de la función. Luego:

$$|C_n| \leq \frac{V(f)}{2\pi|n|} \quad \text{y} \quad C_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ms Pero, esa propiedad, no caracteriza a las funciones de variación acotada. Por ejemplo :
 $\sum_0^{\infty} (\cos nx)/n$, es la serie de Fourier de una $f \in L^2$, y se puede demostrar, que no es acotada en un entorno del origen.

2º.- FUNCIONES DE LA CLASE A .

Definición 5.2 :

A es la clase de funciones cuya serie de Fourier es absolutamente convergente.

$$f \in A \iff \{C_n\} \in l^1 \iff \sum_{-\infty}^{\infty} |C_n| < \infty .$$

Propiedades:

a) La clase A es un álgebra de Banach .

En efecto:

1) es un espacio vectorial normado, con norma: $\|f\|_A = \sum_{-\infty}^{\infty} |C_k|$.

Si f y $g \in A$, tenemos: $\|\mu f + \lambda g\|_A \leq |\mu| \|f\|_A + |\lambda| \|g\|_A$,

λ y μ complejos.

2) es un espacio completo:

Si tenemos una sucesión $\{f_j\}$, se verifica:

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} \|f_j - f_k\|_A = 0 \implies \text{que } \exists f \in A , \text{ tal que } \|f_j - f\|_A \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

Es decir, toda sucesión de Cauchy converge.

3) es un álgebra normada: Si $f \in A$
y $g \in A$ } $\Rightarrow f \cdot g \in A$

Además: $\|f \cdot g\|_A \leq \|f\|_A \|g\|_A$

En efecto: Si $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ y $g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{int}$

$$f \cdot g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{int}, \text{ con } b_n = c_n * d_n$$

$$b_n = c_n * d_n = \sum_{p+q=n} c_p d_q$$

$$\begin{aligned} \|f \cdot g\|_A &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{p+q=n} c_p d_q \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p+q=n} |c_p| |d_q| = \sum_{p=-\infty}^{\infty} |c_p| \sum_{q=-\infty}^{\infty} |d_q| = \\ &= \|f\|_A \cdot \|g\|_A \end{aligned}$$

El orden de las sumas se puede intercambiar, pues $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{int}$, es una serie doble absolutamente convergente.

b) La clase A goza de una propiedad local :

Definición 5.3 :

Dada una clase C de funciones, el hecho de pertenecer a la clase constituye una propiedad local, si dada una función f cualquiera, se afirma que f pertenece a la clase dada, siempre que en un entorno de cada punto, f sea igual a una función de C .

Teorema 5.6 :

Para las funciones f definidas sobre el círculo, pertenecer a la clase A es una propiedad local.

Demostración :

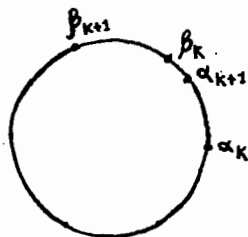


fig. 5.2

Nuestra hipótesis es que f es igual a una función de la clase A en un entorno de cada punto del círculo, o lo que es lo mismo, sobre cada intervalo abierto. y queremos demostrar que $f \in A$.

Los entornos o intervalos abiertos mencionados, constituyen un cubrimiento del círculo, del cual puede extraerse un subcubrimiento finito por intervalos abier

tos (α_k, β_k) , parcialmente superpuestos; es decir, el orden de los puntos $\alpha_k, \beta_k, \alpha_{k+1}, \beta_{k+1}$, etc. es el representado en la fig. 5.2 y $\alpha_0 = \alpha_N$.

Luego, es posible determinar un $\epsilon > 0$, tal que:

$$|\beta_k - \alpha_{k+1}| > \epsilon, \quad \forall k.$$

Vamos a ver ahora, que la clase A de funciones, admite partición de la unidad; es decir que dado el cubrimiento por intervalos, con superposición parcial, se verifica: $1 = \sum_{k=1}^N \Delta_k$ donde Δ_k es una función con soporte en $[\alpha_k, \beta_k]$; su gráfica está representada en la figura 5.3 y además, $\Delta_k \in A$.

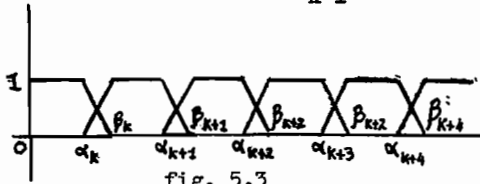


fig. 5.3

En efecto: integrando por partes se comprueba que:

$$(5.15) \quad C_n(\Delta_k) = \frac{1}{i n} C_n(\Delta_k')$$

La Δ_k' , es una función escalera, cuyos coeficientes de Fourier son $O(\frac{1}{n})$; entonces:

$$C_n(\Delta_k) = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \text{por (5.15)}$$

Quiere decir que, $\sum_0^{\infty} C_n(\Delta_k)$ converge absolutamente y $\Delta_k \in A$. Volviendo a la demostración del teorema, empleamos ahora la hipótesis de que sobre cada α_k, β_k , $f = f_k$ donde $f_k \in A$.

Entonces:
$$\Delta_k \cdot f = \Delta_k \cdot f_k$$

Pero,

$$\Delta_k \cdot f_k \in A \quad \text{y} \quad \sum_0^{\infty} \Delta_k \cdot f_k \in A.$$

Como:

$$\sum_0^{\infty} \Delta_k \cdot f = \sum_0^{\infty} \Delta_k \cdot f_k,$$

se deduce que:

$$\sum_0^{\infty} \Delta_k \cdot f \in A \quad \text{y} \quad \sum_0^{\infty} \Delta_k = 1.$$

En conclusión:

$$f = \sum_0^{\infty} \Delta_k \cdot f_k, \quad \text{y} \quad f \in A.$$

c) Condiciones suficientes para que $f \in A$.

1) Teorema 5.7 :

Dada $f(x)$, tal que:

- a) $f(x)$ es absolutamente continua ($f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$)
 b) $f'(x) \in L^2$,

se verifica que $f \in A$.

Demostración:

Si:

$$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

entonces:

$$f' \sim \sum_{-\infty}^{\infty} i n c_n e^{int}$$

Como $f' \in L^2$, y vale Parseval, tenemos:

$$\frac{1}{2\pi} \int |f'|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |n c_n|^2 < \infty.$$

Aplicando la desigualdad de Schwartz:

$$\sum_1^{\infty} |c_n| = \sum_1^{\infty} \left| \frac{1}{n} n c_n \right| \leq \left[\sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot \sum_1^{\infty} |n c_n|^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

y haciendo un razonamiento análogo para $\sum_{-\infty}^{-1} c_n$, queda:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| \leq C \|f'\|_2 + |c_0| < \infty, \text{ y resulta que: } f \in A.$$

Corolario:

En las condiciones del teorema anterior: $\|f\|_A \leq \|f\|_0 + C \|f'\|_2$.

2) Teorema 5.8:

Dada $f \in \text{Lip. } \alpha$, con $\alpha > \frac{1}{2}$, entonces $f \in A$.

Demostración:

Sea $f(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, y sea $\omega_f(\delta)$, el módulo de continuidad de f .

$$f(t+h) - f(t-h) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (e^{inh} - e^{-inh}) e^{int}$$

Aplicando Parseval:

$$\frac{1}{2\pi} \int |f(t+h) - f(t-h)|^2 dt = 4 \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \sin^2 nh$$

con:

$$\frac{1}{2\pi} \int |f(t+h) - f(t-h)|^2 dt \leq \omega^2(2h)$$

Ahora, vinculando n con h de modo que $\frac{\pi}{3} < nh < \frac{2\pi}{3}$, será $\sin^2 nh > \frac{3}{4}$, y

$$3 \sum_{\frac{\pi}{3h} < |n| < \frac{2\pi}{3h}} |c_n|^2 \leq \omega^2(2h).$$

En esta última desigualdad, la suma está restringida a los n tales que $N \leq |n| \leq 2N$ con $N = (\pi/3h)$.

Reemplazando h por $\pi/3N$, queda:

$$3 \sum_{N \leq |n| \leq 2N} |C_n|^2 \leq \omega^2 \left(\frac{2\pi}{3N} \right)$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz :

$$\sum_{N \leq |n| \leq 2N} |C_n| \leq (\sum 1)^{\frac{1}{2}} (\sum |C_n|^2)^{\frac{1}{2}} < [2N \frac{1}{3} \omega^2 \left(\frac{2\pi}{3N} \right)]^{\frac{1}{2}} < N^{\frac{1}{2}} \omega \left(\frac{2\pi}{3N} \right)$$

Reordenando las sumas, se puede escribir:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} C_n = C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{2^{i-1} < |n| < 2^i} C_n$$

Luego:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |C_n| \leq C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{2^{i-1} < |n| < 2^i} |C_n| \leq C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i/2} \omega \left(\frac{2\pi}{3 \cdot 2^i} \right) \leq C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i/2} \omega \left(\frac{\pi}{2^i} \right)$$

y siendo por hipótesis $f \in \text{Lip. } \alpha$ con $\alpha > \frac{1}{2}$, es decir: $\omega(\delta) < k \delta^\alpha$, se tiene:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |C_n| \leq C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i(\frac{1}{2}-\alpha)} < \infty, \text{ y } f \in A.$$

d) Teorema 5.9 : (De Wiener - Levy)

Sea ϕ una función holomorfa en un abierto Ω del plano; sea $f \in A$ con valores en una curva $k \subset \Omega$; entonces: $\phi(f(t)) \in A$.

Demostración : (de Calderón)

Para demostrar el teorema, vamos a probar previamente el siguiente:

Lema :

Si $g(t) = \int_{\alpha}^{\beta} g(\theta, t) d\theta$, donde $g(t, \theta)$ es continua respecto de t y de θ y vale $\forall \theta : \|g(t, \theta)\|_A < B$, con B independiente de θ , entonces:

$$\|g(t)\|_A < B(\beta - \alpha), \text{ es decir } g(t) \in A.$$

En efecto: los coeficientes de Fourier de $g(t)$ son: $C_n(g) = \int_{\alpha}^{\beta} C_n(g(t, \theta)) d\theta$,

$$\sum_{-N}^N |C_n(g)| = \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{-N}^N |C_n(g(t))| d\theta < (\beta - \alpha) B$$

Entonces,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |C_n(g)| < \infty.$$

Volviendo al teorema: por ser f de la clase A :

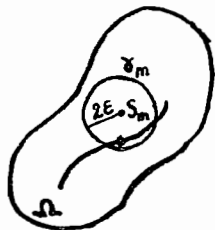


Fig. 5.4

$$f(t) = S_n(t) + R_n(t) \quad , \quad \text{donde}$$

$$|R_n(t)| < \sum_{|j|>n} |c_j| < \epsilon \quad .$$

Sea $\gamma_n(t)$ una circunferencia con centro S_n y radio 2ϵ ; $f(t)$ resultará interior a ella .

Aplicando la fórmula de Cauchy :

$$\phi [f(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_n(t)} \frac{\phi(z)}{z - f(t)} dz \quad .$$

Sustituyendo z por $S_n + 2\epsilon e^{i\theta}$; $dz = 2\epsilon i e^{i\theta} d\theta$, entonces:

$$\phi [f(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\phi(S_n(t) + 2\epsilon e^{i\theta})}{S_n(t) + 2\epsilon e^{i\theta} - f(t)} \cdot 2\epsilon i e^{i\theta} d\theta$$

Sea:

$$g(t, \theta) = \frac{\phi(S_n(t) + 2\epsilon e^{i\theta})}{S_n(t) + 2\epsilon e^{i\theta} - f(t)} \quad .$$

Demostremos que $\|g(t, \theta)\|_A$ está acotado.

En efecto:

1) Mayoración del inverso del denominador:

$$\|K(t, \theta)\|_A = \left\| \frac{1}{2\epsilon e^{i\theta} - R_n(t)} \right\|_A = \left\| \frac{1}{2\epsilon} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{R_n(t) e^{-i\theta}}{2\epsilon} \right)^j \right\|_A \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\epsilon} \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \frac{R_n(t)}{2\epsilon} \right\|_A^j \quad .$$

Pero: $|R_n(t)| < \sum_{|j|>n} |c_j| < \epsilon$. Entonces:

$$\|R_n(t)\|_A < \epsilon \quad ; \quad \left\| \frac{R_n(t)}{2\epsilon} \right\|_A < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \left\| \frac{R_n(t)}{2\epsilon} \right\|_A^j < \frac{1}{2^j}$$

En definitiva:

$$\|K(t, \theta)\| = \left\| \frac{1}{2\epsilon e^{i\theta} - R_n(t)} \right\| < \frac{1}{2\epsilon} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{\epsilon} \quad .$$

2) Mayoración del numerador:

Sea $h(t, \theta) = \phi(S_n(t) + 2\epsilon e^{i\theta})$; entonces h es analítica.

$$\sup_t |h(t, \theta)| < B \quad , \quad \text{y también} \quad \sup_t |h'(t, \theta)| < B \quad .$$

pues:

$$h'(\theta, t) = S'_n(t) \phi'(S_n(t) + 2\epsilon e^{i\theta})$$

Aplicando el resultado del teorema 5.8 :

$$\|h\|_A < \|h\|_\infty + C \|h'\|_2 < C$$

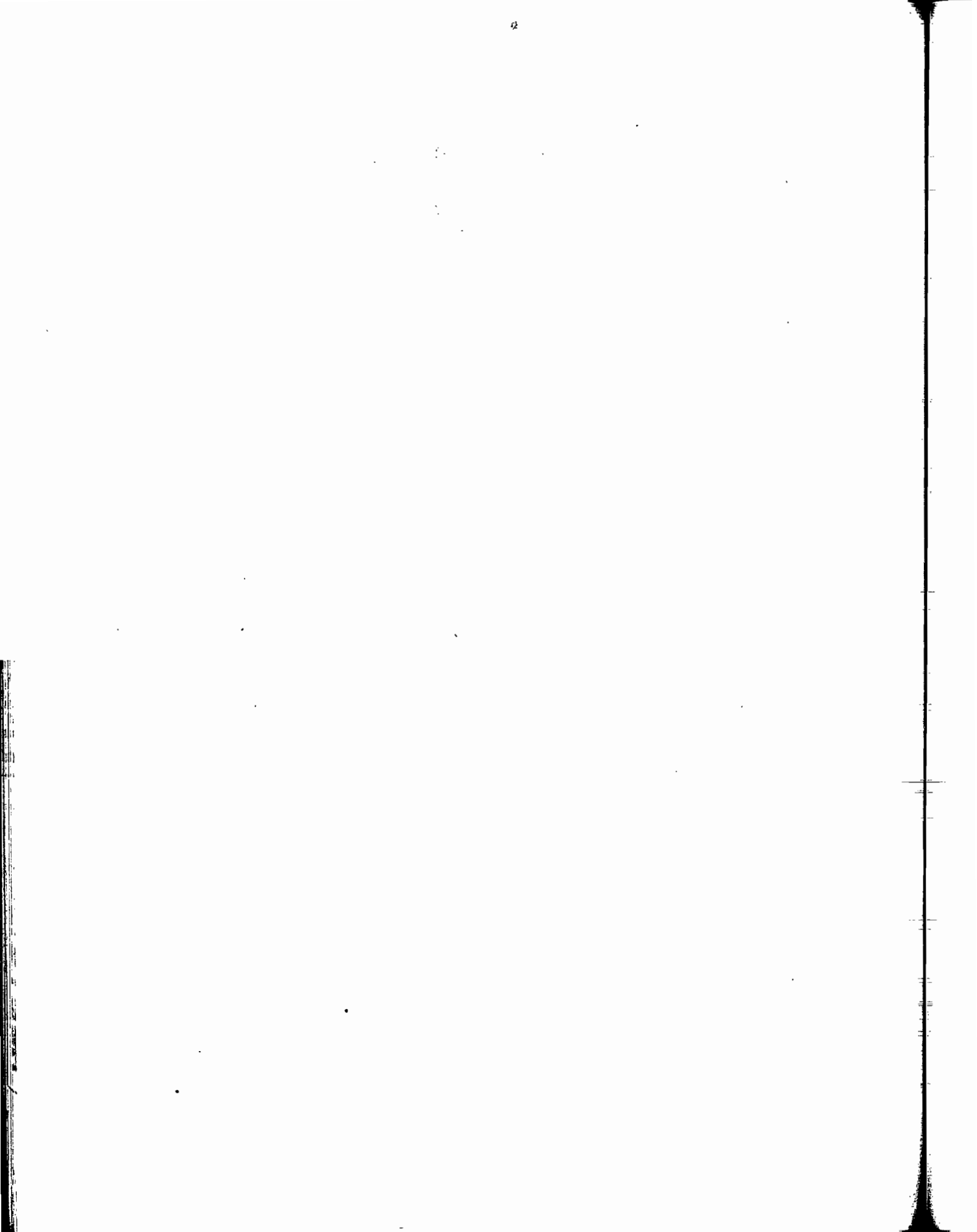
y finalmente:

$$g(t, \theta) = h(t, \theta) \cdot k(t, \theta) \text{ es tal que:}$$

$$\|g(t, \theta)\|_A < B C$$

y aplicando el lema:

$$\phi [f(t)] \in A$$



VI.- SERIES DE FOURIER -
SUMAS PARCIALES DE LAS SERIES DE FOURIER -
CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA

a) Condiciones suficientes para la convergencia :

Teorema 6.1 :

Si $f \in V$ y es normalizada, es decir, $f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, se verifica:
 $S_n(x) \rightarrow f(x)$, en cada punto.

Demostración :

Vamos a definir los núcleos generalizados de de la Vallée - Poussin .

Recordemos que: $V_{2N} = 2K_{2n} - K_n$. Los núcleos generalizados son:

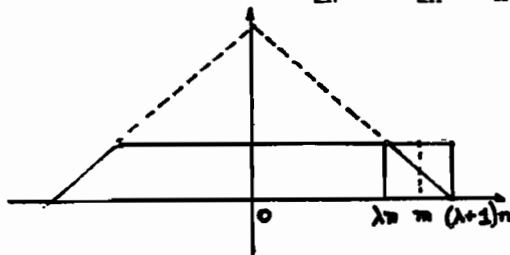


fig. 6.1

$$V_{(\lambda+1)n}^{[\lambda]} = (\lambda+1) K_{(\lambda+1)n} - \lambda K_{\lambda n}, \text{ con } \lambda$$

entero.

Como $f * 2K_n = \sigma_n$

Entonces:

$$\Psi_{(\lambda+1)n}^{[\lambda]} = f * 2 V_{(\lambda+1)n}^{[\lambda]} = (\lambda+1) \sigma_{(\lambda+1)n} - \lambda \cdot \sigma_{\lambda n}$$

donde $\Psi_{(\lambda+1)n}^{[\lambda]}$, son las sumas de de la Vallée Poussin generalizadas. Por el teorema de Féjér, $\sigma_n \rightarrow f$ en todo punto. Luego: $\Psi_{(\lambda+1)n}^{[\lambda]} \rightarrow f$ en todo punto.

Tomemos $\lambda n \leq m < (\lambda+1)n$

Teniendo en cuenta que $S_m = f * 2 D_m$, vamos a demostrar que $S_m - \Psi_{(\lambda+1)n}^{[\lambda]}$ es tan pequeña como se quiere. En efecto: como sabemos que $f \in V \Rightarrow |c_m| < \frac{k}{|m|}$, resulta $|S_m - \Psi_{(\lambda+1)n}^{[\lambda]}| < 2n \cdot \sup |\text{coeficientes de Fourier de } (S_m - \Psi_{(\lambda+1)n}^{[\lambda]})| <$

$$< 2n \cdot \frac{k}{\lambda n} = \frac{2K}{\lambda}$$

K es independiente de n y de t . Así pues:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |S_m - f| \leq \frac{2K}{\lambda}$$

en todo punto.

Como λ es arbitrariamente grande, tenemos: $\sigma_n \rightarrow f(x)$. Luego, si $\varphi_{(\lambda+1)n} = f \# V_{(\lambda+1)n}^{[\lambda]}$, es convergente o uniformemente convergente, lo mismo pasa con S_n .

Observación: la condición $f \in V$ interviene en la demostración sólo para ver que $C_n = O\left(\frac{1}{|n|}\right)$. En general, si $C_n = O\left(\frac{1}{|n|}\right)$, todo teorema válido para sumas de Féjer, implica por lo visto anteriormente, un teorema válido para sumas de de la Vallée-Poussin, y esto último, a su vez, significa un teorema válido para sumas de Fourier.

A continuación, vamos a definir el concepto de convergencia uniforme en un punto, que nos será útil más adelante:

Definición 6.1:

Dado un punto x y una sucesión $f_n \rightarrow f$, se dice que f_n tiende uniformemente a f en el punto x , si y sólo si, para todo ϵ , existe δ y existe n_0 , tales que:

$$\forall n > n_0 \text{ y } |t - x| \leq \delta, \text{ se cumple: } |f_n(t) - f(t)| \leq \epsilon.$$

Observación: La convergencia uniforme en un punto, implica convergencia en ese punto; además, si las f_n son funciones continuas, la f es una función continua en ese punto.

Teorema 6.2:

Dada una función acotada, sus sumas de Fejer son uniformemente convergentes en todo punto de continuidad.

Demostración:

Sea:

$$I = \sigma_n(t) - f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi_t(s) K_n(s) ds$$

donde:

$$\varphi_t(s) = [f(t+s) + f(t-s) - 2f(t)]$$

Separando la integral queda:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^\alpha + \int_\alpha^\pi \right] \varphi_t(s) K_n(s) ds$$

Vamos a mayorar la primera integral:

$$\left| \int_0^\alpha \varphi_t(s) K_n(s) ds \right| < \sup_{s < \alpha} |\varphi_t(s)| < \sup_{|s| < \alpha} |f(t+s) - f(t)|$$

Si $|t - x| \leq \delta$, entonces $|t + s - x| \leq \delta + \alpha$, para $|s| < \alpha$

Como:

$$|f(t + s) - f(t)| \leq |f(t + s) - f(x)| + |f(x) - f(t)| \leq 2 \omega_x(\delta + \alpha)$$

donde ω_x es el módulo de continuidad de f en el punto x ; si f es continua en el punto x , se verifica: $2 \omega_x(\delta + \alpha) \rightarrow 0$, cuando $\delta + \alpha \rightarrow 0$. Entonces, se pueden encontrar un δ y un α , tales que: $2 \omega_x(\delta + \alpha) < \frac{\epsilon}{2}$. Queda así fijado α .

Además, sabemos por un teorema anterior que:

$$\left| \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_t(s) K_n(s) ds \right| \leq \frac{K}{\alpha |n|}, \text{ donde } \alpha \text{ está fijado.}$$

Elegimos ahora n , tal que: $\frac{K}{\alpha |n|} < \frac{\epsilon}{2}$, y queda: $|I| = |\sigma_n(t) - f(t)| < \epsilon$ para $x - \delta \leq t \leq x + \delta$.

Si además, $C_n = O\left(\frac{1}{|n|}\right)$, lo que ocurre cuando $f \in V$, por ejemplo, se puede pasar de σ_n a S_n , y resulta que, en todo punto de continuidad de una función de variación acotada, la S_n converge uniformemente a f en el punto x .

b) Estudio directo de las S_n

Teorema 6.3 :

Si

$$\frac{\varphi_t(s)}{\operatorname{tg} \frac{s}{2}} \in L^1 \text{ y } f \in L^1, \quad S_n(f) \rightarrow S(f) \text{ en el punto } t.$$

Demostración :

Como $S_n = f * 2 D_n$, resulta mediante un cálculo sencillo:

$$S_n(t) - f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_t(s) D_n(s) ds.$$

Consideremos ahora, S_n^* en lugar de S_n , donde: $2 S_n^* = S_n + S_{n-1}$

Entonces:

$$S_n^*(t) - f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_t(s) D_n^*(s) ds.$$

Si hacemos la diferencia: $S_n - S_n^* = \frac{1}{2} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$.

Si $f \in L^1$, $S_n - S_n^* \xrightarrow[n \rightarrow 0]{} 0$ por el lema de Riemann - Lebesgue.

Es suficiente entonces, estudiar la convergencia de S_n^* .

$$S_n^* - f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_t(s) D_n^*(s) ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_t(s) \frac{\operatorname{sen} \frac{ns}{2}}{\operatorname{tg} \frac{s}{2}} ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\varphi_t(s)}{\operatorname{tg} \frac{s}{2}} \operatorname{sen} \frac{ns}{2} ds$$

Si llamamos $g = \frac{\psi_t(s)}{\operatorname{tg} \frac{s}{2}}$, resulta:

Si $g \in L^1$, $S_n^* - f(t)$ es el coeficiente de Fourier de g , que por Riemann Lebesgue, debe tender a 0, cuando $n \rightarrow \infty$.

O sea: $S_n^* - f(t) \rightarrow 0$
 $n \rightarrow \infty$

Luego, si $g \in L^1$, todo lo anterior implica la convergencia de $S(f)$ en el punto t .

Teorema 6.4 :

Si $f \in \operatorname{Lip} \alpha$, con $\alpha > 0$, se verifica $S_n(f) \rightarrow S(f)$ en el punto t

$$|f(t+s) - f(s)| < K s^\alpha$$

y también:

$$|\psi_t(s)| < K' s^\alpha$$

Pero, es fácil ver que $\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{s}{2}} - \frac{1}{s}$ está acotado.

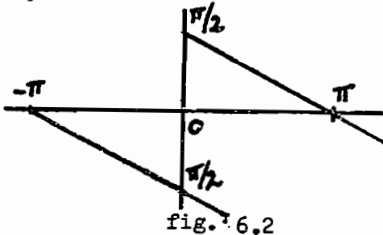
Entonces: si $\frac{\psi_t(s)}{s} \in L^1 \iff \frac{\psi_t(s)}{2 \operatorname{tg} \frac{s}{2}} \in L^1$ en $(0, 2\pi)$

Como $f \in \operatorname{Lip} \alpha$, con $\alpha > 0$, implica: $|\frac{\psi_t(s)}{s}| < K' s^{\alpha-1}$

se puede decir que $\frac{\psi_t(s)}{s} \in L^1$ y por lo tanto $\frac{\psi_t(s)}{2 \operatorname{tg} \frac{s}{2}} \in L^1$. Se cumple así la condición para que $S(f)$ sea convergente en el punto t .

Fenómeno de Gibbs :

Supongamos tener una función con puntos de discontinuidad. Se observa que en los intervalos de continuidad, las sumas parciales de Fourier convergen uniformemente, mientras que en los puntos de discontinuidad, los gráficos de las sumas parciales de Fourier están fuera de un entorno del gráfico de la función. Antes de definir lo que se entiende por fenómeno de Gibbs, será útil proceder al estudio detallado de la función $\psi(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$, que usaremos más adelante:



$\psi(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ es una función impar que da una serie en senos, con coeficientes de Fourier :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(x) \operatorname{sen} nx \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\Psi(x) \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} \Psi'(x) dx .$$

Luego: $b_n = \frac{1}{n}$. Es decir:

$$\Psi(x) \sim 2 \sum_1^{\infty} \frac{\text{sen } nx}{n}$$

Sea:

$$\frac{x}{2} + 2 \sum_1^N \frac{\text{sen } nt}{n} = \frac{x}{2} + \int_0^x 2 \sum_1^N \cos nt \, dt = \int_0^x 2 D_N(t) \, dt = \int_0^x D_N^* \, dt + O(x)$$

pues $\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$ es acotado sobre $(-\pi, \pi)$

Pero además $\int_0^x D_N^*(t) \, dt = \int_0^x \frac{\text{sen } Nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \, dt = \int_0^x \frac{\text{sen } Nt}{t} \, dt + O(x)$ por la misma razón .

Entonces:

$$\frac{x}{2} + 2 \sum_1^N \frac{\text{sen } nx}{n} = \int_0^x \frac{\text{sen } Nt}{t} \, dt + O(x)$$

y:

$$S_N = 2 \sum_1^N \frac{\text{sen } nx}{n} = \int_0^x \frac{\text{sen } Nt}{t} \, dt + O(x)$$

Aquí, $O(x) \rightarrow 0$, con $x \rightarrow 0$, independientemente de n , y haciendo un simple cambio de variable, tenemos:

$$\int_0^x \frac{\text{sen } Nt}{t} \, dt = \int_0^{Nx} \frac{\text{sen } t}{t} \, dt$$

Esta integral, está uniformemente acotada respecto de N y de x , es decir, las sumas parciales de Ψ están acotadas uniformemente respecto de N y de x .

Si llamamos

$$G(Nx) = \int_0^{Nx} \frac{\text{sen } t}{t} \, dt \quad , \text{ se puede decir ahora que:}$$

$$\Psi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} G(Nx) + O(x)$$

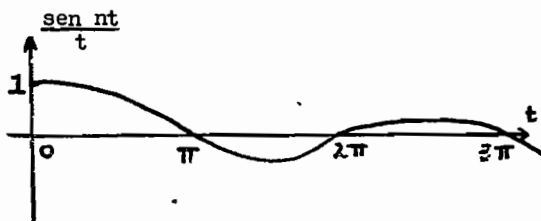


fig. 6.3

El gráfico de $(\text{sen } nt)/t$, es el de la fig. 6.3

La superficie de cada onda, es por razones obvias superior a la de la siguiente.

El gráfico de $G(t)$ está representado en la fig.

6.4

La diferencia entre 2 extremos consecutivos, es

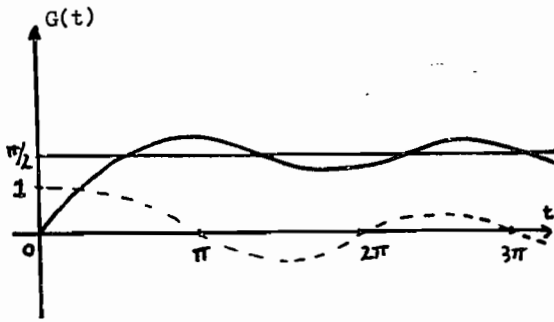


fig. 6.4

decreciente. Luego, los máximos en los puntos múltiplos impares de π , van decreciendo, y los mínimos en los múltiplos pares, son crecientes.

Con respecto a G tenemos que:

- 1.- $G \rightarrow \frac{\pi}{2}$, cuando $t \rightarrow \infty$
- 2.- $G(\pi) > \frac{\pi}{2}$.

Entonces, es fácil ver que: $S_N\left(\frac{\pi}{N}\right) = G\left(\frac{\pi}{N}\right) + O\left(\frac{1}{N}\right)$.

Luego, cualquiera sea $\delta > 0$, el $\sup_{0 < t < \delta}$ de los $S_N(t)$ tiende a $G(\pi) > \frac{\pi}{2}$ y el $\sup_{0 < t < \delta} F(t) = \frac{\pi}{2}$, así pues, el $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) > \lim_{t \rightarrow 0} F(t)$ y S_n no converge uniformemente a F en el punto 0.

Fenómeno de Gibbs para $f \in V$: Si f es una función de variación acotada, hay un conjunto numerable de puntos de discontinuidad, y los demás son continuos.

Si tenemos un punto de discontinuidad, con límite a derecha e izquierda $[f(x+0)]$ y $[f(x-0)]$, tomamos el intervalo vertical $I = [f(x+0), f(x-0)]$ y lo sumamos a la función, para que su gráfico sea continuo. Obtenemos así el gráfico completado de la función.

Decimos que hay fenómeno de Gibbs, cuando hay puntos de acumulación de los gráficos de las sumas parciales fuera del gráfico completado de la función.

Entonces, si f es de variación acotada, en los puntos x , tales que $f(x-0) = f(x+0)$ no hay fenómeno de Gibbs, pues habíamos visto que, en todo punto de continuidad de las funciones de variación acotada, hay convergencia uniforme de las S_N . Por lo tanto, los gráficos de las S_N , estarán dentro de un entorno del punto de continuidad.

Teorema 6.5 :

Si $f \in V$ y $f(x-0) \neq f(x+0) \iff \exists$ fenómeno de Gibbs en x .

Demostración :

Mediante una traslación de la función y un cambio, transformamos $f(t)$ en $a \cdot f(t - x_0) + b$.

Es siempre posible suponer que el salto es $\left[\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, en el origen. Entonces, consideremos $f \in V$, tal que:

$$\begin{cases} f(0+0) = \frac{\pi}{2} \\ f(0-0) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Luego, se puede escribir $f = \psi + g$, donde:

$$\psi = \frac{1}{2}(\pi - x) \quad \text{y} \quad g = \begin{cases} \in V \\ \in C \end{cases} \quad \text{en el origen, es decir } g(0+0) = g(0-0) = 0$$

Consideremos las sumas parciales de Fourier de f : $S_n(f) = S_n(\psi) + S_n(g)$

Cuando $n \rightarrow \infty$ y $t \rightarrow 0$, entonces:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ t \rightarrow 0}} S_n[f(t)] = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ t \rightarrow 0}} S_n[\psi(t)] + \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ t \rightarrow 0}} S_n[g(t)]$$

pues al ser g continua en el origen, hay convergencia uniforme en el punto 0 . Entonces:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ t \rightarrow 0}} S_n[f(t)] = G(\pi) > \frac{\pi}{2}$$

Igualmente se ve:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ t \rightarrow 0}} S_n[f(t)] = -G(\pi) < -\frac{\pi}{2}$$

Luego, hay puntos de acumulación de las sumas parciales S_N fuera del gráfico de la $f(t)$; es decir,] fenómeno de Gibbs .

Divergencia en un punto de la serie de Fourier de una función continua .

Método de Féjer :

La demostración se basa en el hecho de que $|\sum_1^N \frac{\text{sen } nx}{n}|$ es uniformemente acotada.

Sea:

$$F_N = \sum_1^N \frac{\text{sen } nx}{n} \quad \text{y} \quad f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} r_j e^{i\lambda_j t} F_j(t) ,$$

donde se impone la condición:

$$\sum_1^{\infty} |r_j| < \infty ,$$

y en este caso, resulta $f(t)$ continua.

Para calcular las sumas de Fourier de :

$$i f(t) = i \sum_{j=1}^{\infty} r_j e^{i\lambda_j t} F_j(t)$$

comenzamos por calcular los coeficientes de Fourier de $i F_j(t)$, y estos resultan:

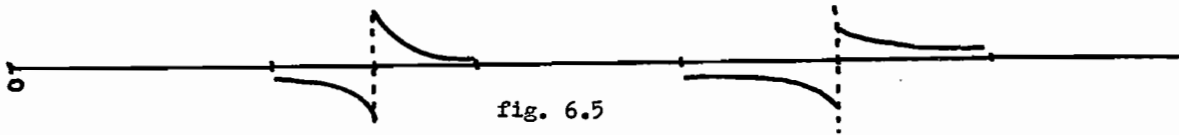


fig. 6.5

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2n}, & \text{para } -j \leq n \leq j \\ c_n = 0, & \text{para } n > j \text{ ó } n < -j \end{cases}$$

Multiplicar $i F_j(t)$ por $e^{i\lambda_j t}$ significa trasladar sus coeficientes en λ_j . Esto es, el rango de los nuevos coeficientes es $[\lambda_j - j, \lambda_j + j]$. Entonces, es posible elegir la sucesión $\{\lambda_j\}$ de modo que estos rangos sean disjuntos para todo j .

Entonces:

$$S_{\lambda_j+j}(\text{i.f.}) - S_{\lambda_j}(\text{i.f.}) = r_j \sum_{n=\lambda_j+1}^{\lambda_j+j} \frac{1}{2(n-\lambda_j)} e^{int} = r_j \sum_{n=1}^j \frac{1}{2n} e^{i(\lambda_j+n)t}$$

Pero, para $t = 0$, queda:

$$S_{\lambda_j+j}(\text{i.f.}, 0) - S_{\lambda_j}(\text{i.f.}, 0) = r_j \sum_{n=1}^j \frac{1}{2n} > \frac{r_j}{3} \ln j$$

Luego, para que $S(f)$ sea divergente en el origen, es necesario que: $\overline{\lim} r_j \cdot \ln j > 0$ y esto es posible, tomando la sucesión $\{r_j\}$, tal que:

$$r_j = \frac{1}{j^2}, \text{ si } j = e^{j^2}; \text{ y } r_j = 0, \text{ si } j \neq e^{j^2}$$

de modo que, en definitiva se verifica:

a) $\sum_1^{\infty} |r_j| < \infty$, lo cual implica $f(t)$ continua.

b) $\overline{\lim} r_j \cdot \ln j > 0$, lo cual implica que $S(f)$ es divergente en el origen.

Construcción de una función de L^1 , cuya serie de Fourier es divergente en cada punto.

Para lo que sigue es útil ver el siguiente:

L e m a :

Sea t_1, t_2, \dots, t_p un conjunto finito de números reales tales que ninguna combinación lineal no trivial de ellos, con coeficientes $0, \pm 1, \pm 2$, sea múltiplo de 2π ; es decir: $|\text{sen}(\pm \sum_1^p A_j t_j)| > \varepsilon > 0$, para todo sistema de coeficientes $\{A_j\}$ ($A_j =$

$0, \pm 1, \pm 2$) y $\sum |A_j| > 0$; entonces, existe un $N = N(\nu, \epsilon)$ tal que, cualesquiera sean los coeficientes reales $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\nu$, se verifica:

$$(6.1) \quad \sup_{\substack{0 \leq n \leq N \\ n, \text{ entero}}} \sum_1^\nu \delta_j \cdot \text{sen } nt_j > \frac{1}{4} \sum_1^\nu |\delta_j|$$

Demostración :

Consideremos el producto $R(n) = \prod_1^\nu (1 + \epsilon_j \cdot \text{sen } nt_j)$ con $\epsilon_j = \frac{\delta_j}{|\delta_j|}$, si $\delta_j \neq 0$ y $\epsilon_j = 0$, si $\delta_j = 0$.

$$\text{Además, sea: } S(n) = \sum_1^\nu \delta_j \cdot \text{sen } nt_j.$$

Como $R(n) \geq 0$, vale, cualquiera sea N , la fórmula

$$(6.2) \quad \frac{1}{N} \sum_1^N S(n) R(n) \leq \sup_{0 \leq n \leq N} S(n) \frac{1}{N} \sum_1^N R(n)$$

Pero, $S(n) R(n) = \sum_{j=1}^\nu C_j(n) |\delta_j|$, donde: $C_j(n) = R(n) \epsilon_j \text{sen } nt_j = \frac{1}{2} +$ una combinación lineal de exponenciales con coeficientes inferiores a 1 en módulo y con exponentes: $n(\sum_1^j A_j t_j)$, ($A_j = 0, \pm 1, \pm 2$).

Para cada una de esas exponenciales, vale:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_1^N e^{in(\sum_1^j A_j t_j)} \right| < \frac{1}{N |\text{sen } \frac{1}{2} \sum_1^j A_j t_j|} < \frac{1}{N \epsilon}$$

El número de exponenciales es inferior al número de permutaciones con repetición de 5 elementos $(0, \pm 1, \pm 2)$, tomados de ν en ν , es decir 5^ν , y de eso resulta:

$$\frac{1}{N} \sum_1^N C_j(n) > \frac{1}{2} - \frac{5^\nu}{N \epsilon}$$

Si tomamos $N > \frac{6 \cdot 5^\nu}{\epsilon}$, se verifica:

$$\frac{1}{N} \sum_1^N S(n) R(n) = \sum_{j=1}^\nu \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N C_j(n) \right) |\delta_j| > \frac{1}{3} \sum_1^\nu |\delta_j|$$

Por un argumento del mismo tipo, reemplazando $S(n)$ por 1, vale:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N R(n) < 1 + \frac{5^\nu}{N \epsilon} < \frac{7}{6} < \frac{4}{3}$$

Entonces, de (6.2) resulta:

$$\frac{1}{3} \sum_1^{\nu} |\gamma_j| \leq \sup_{0 \leq n \leq N} S(n) \frac{4}{3}$$

con lo cual queda demostrado el lema.

Construcción de los polinomios P_ν :

Vamos a proceder ahora a buscar una sucesión de polinomios $\{P_\nu\}$ con ciertas propiedades fijadas y de los cuales depende la función $f \in L^1$, que será divergente en cada punto. Las propiedades son las siguientes:

a) $\|P_\nu\| \leq 1$

b) \exists una sucesión $\{\omega_\nu\}$, tal que $\lim \omega_\nu = \infty$ y en todo punto t :

$$\sup_n |S_n(P_\nu(t))| > \omega_\nu$$

Para eso, tomamos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\nu$ que satisfacen las hipótesis del lema, y además tales que:

$$\left| \theta_j - \frac{2\pi j}{\nu} \right| < \frac{\pi}{\nu}$$

Consideremos la serie:

$$(6.3) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} e^{-in\theta_j} e^{int}$$

Esta serie, puede ser considerada la serie de Fourier, o de Fourier - Stieltjes, de una suma de ν masas puntuales iguales a $\frac{1}{\nu}$ puestas en los puntos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\nu$.

Consideremos las sumas parciales de orden n de (6.3), que resultan:

$$\frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} D_n(t - \theta_j)$$

Como:

$$\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{(t-\theta_j)}{2}} - \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{(t-\theta_j)}{2}} < 1,$$

se puede escribir, con un error inferior a 1 :

$$S(n,t) = \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\operatorname{sen} n(t-\theta_j)}{2 \operatorname{tg} \frac{t-\theta_j}{2}}$$

Esta expresión, es de la forma: $\sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j \operatorname{sen} n t_j$, con: $t_j = t - \theta_j$ y:

$$\gamma_j = \frac{1}{2 \nu \operatorname{tg} \frac{t-\theta_j}{2}}$$

Vamos a minorar la $\sum_1^{\nu} |\gamma_j|$ independientemente de t .

Supongamos en primer lugar que:

$$-\frac{3\pi}{\nu} < t < -\frac{\pi}{\nu}$$

Entonces:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{t-\theta_j}{2} \right) > \operatorname{tg} \frac{j\pi}{\nu}, \quad \text{si} \quad \frac{(j+2)\pi}{\nu} < \frac{\pi}{2}$$

Además:

$$\operatorname{tg} \frac{j\pi}{\nu} > \frac{4}{\pi} \cdot j \frac{\pi}{\nu} = \frac{4j}{\nu}, \quad \text{si} \quad j\pi < \frac{\pi}{\nu} < \frac{\pi}{4}$$

Resulta:

$$\sum_{j=1}^{[\nu/4]} |\gamma_j| > \frac{1}{2\nu} \sum_{j=1}^{[\nu/4]} \frac{\nu}{4j} > \frac{1}{10} \log j$$

y

$$\sum_{j=1}^{\nu} |\gamma_j| > \frac{1}{10} \log j$$

El caso general se reduce al caso

$$-\frac{3\pi}{\nu} < t < -\frac{\pi}{\nu}$$

por una traslación $\frac{2k\pi}{\nu}$.

Para aplicar el lema, es necesario que t no sea solución de ninguna ecuación:

$$\operatorname{sen} \left[\frac{1}{2} \sum_1^{\nu} A_j (t - \theta_j) \right] = 0 \quad (A_j = 0, \pm 1, \pm 2; \quad \sum |A_j| \neq 0)$$

es decir, que $t \notin E$, donde E es el conjunto finito (mód. 2π) de los puntos donde vale al menos una de esas igualdades.

Llamemos E_{ε} , a la unión de los intervalos (cada uno centrado en un punto del conjun

to E), donde vale al menos una de las desigualdades:

$$\left| \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} A_j (t - \theta_j) \right] \right| \leq \varepsilon \quad (A_j = 0, \pm 1, \pm 2; \sum |A_j| \neq 0)$$

Del lema, resulta pues que a cada ε , corresponde un $N = N(\nu, \varepsilon)$ tal que:

$$\sup_{0 \leq n \leq N} S(n, t) > \frac{1}{40} \log \nu, \quad \text{si } t \notin E_\varepsilon$$

Como $S(n, t)$, ya vimos que difiere de $\frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} D_n(t - \theta_j)$ en menos de 1, tenemos:

$$\sup_{0 \leq n \leq N} \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} D_n(t - \theta_j) > \frac{1}{40} \log \nu - 1, \quad \text{si } t \notin E_\varepsilon$$

Ahora, si en lugar de tomar la serie (6.3), tomamos una suma de Féjer de orden p bastante grande, es decir:

$$Q(t) = \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} K_p(t - \theta_j)$$

las sumas parciales $S_n(Q, t)$ ($n \leq N$), van a estar tan próximas como lo deseamos (en norma L^p), a las sumas parciales de (6.3), es decir, de $\frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} D_n(t - \theta_j)$ ($n \leq N$).

En efecto:

$$S_n(Q(t)) = \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} S_n[K_p(t - \theta_j)],$$

Como:

$$S_n(K_p) = \frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{p}) \cos t + \dots + (1 - \frac{n}{p}) \cos nt$$

y

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \dots + \cos nt$$

Se ve entonces, que para p bastante grande, $S_n(K_p)$ y D_n , difieren poco.

En particular, cuando se fija ε y N , se puede tomar Q , de manera que, si $t \notin E_\varepsilon$, se verifique:

$$(6.4) \quad \sup_n S_n(Q, t) \gg \sup_{0 \leq n \leq N} S_n(Q, t) > \frac{1}{40} \log \nu - 2 = \overline{\omega}_\nu$$

Vamos a usar $\frac{1}{40} \log \nu - 2$, como definición de $\overline{\omega}_\nu$.

Se ve también, que $\|Q\|_1 \leq 1$.

Nuestro fin, es construir una sucesión $\{P_\nu\}$ de polinomios, que cumplan:

$$a) \|P_\nu\|_1 \leq 1$$

$$b) \sup_n S_n(P_\nu) > \omega_\nu, \text{ con } \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\nu = \infty$$

Luego, nos falta quitar la restricción " $t \notin E_\varepsilon$ " en (6.4). Para eso, tomemos una serie (6.3)', trasladada de la (6.3), además de esta última; es decir, en (6.3)' en lugar de tomar θ_j , se toma $\theta_j + \alpha$. En lugar de E y E_ε , tenemos para (6.3)' los conjuntos trasladados por α , E' y E'_ε . Antes de elegir ε , elegimos α de modo que E' , sea disjunto de E ; luego, se toma ε bastante pequeño, para que E_ε y E'_ε también sean disjuntos.

Entonces, tendremos dos polinomios, Q y Q' , tales que:

$$\sup_n S_n(Q, t) > \overline{\omega_\nu}, \text{ cuando } t \notin E_\varepsilon$$

$$\text{y } \sup_n S_n(Q', t) > \overline{\omega_\nu}, \text{ cuando } t \notin E'_\varepsilon$$

Sea $\mu > \text{grado de } Q + \text{grado de } Q'$, y sea $P = \frac{1}{2}(Q + e^{i\mu t} Q')$.

Entonces vale por lo menos una de las igualdades siguientes:

$$\sup_{n \leq \text{grad } Q} S_n(P, t) = \frac{1}{2} \sup_n S_n(Q, t) > \frac{1}{2} \overline{\omega_\nu}$$

$$\sup_{n \leq \text{grad } Q'} |S_{\mu+m}(P, t) - S_{\mu-m}(P, t)| = \sup_m | \frac{1}{2} S_m(Q', t) | > \frac{1}{2} \overline{\omega_\nu}$$

En todos los casos:

$$\sup_n |S_n(P, t)| > \frac{1}{4} \overline{\omega_\nu}$$

Basta tomar $\omega_\nu = \frac{1}{4} \overline{\omega_\nu}$, y $P = P_\nu$, y tendremos construídos los polinomios P_ν , con las propiedades pedidas.

Construcción de la función :

Una vez obtenida la sucesión $\{P_\nu\}$, para construir la función $f \in L^1$ y que sea divergente en todo punto, bastará:

$$1^0) \text{ Elegir una subsucesión de los } \omega_\nu, \text{ tal que } \sum_1^\infty \frac{1}{\omega_\nu} < \infty.$$

2⁰) Elegir una sucesión de números enteros $\{\lambda_\nu\}$, tal que los intervalos $[\lambda_\nu - p_\nu, \lambda_\nu + p_\nu]$, ($p_\nu = \text{grado de } P_\nu$), sean disjuntos.

$$3^0) \text{ Considerar: } f = \sum_1^\infty \frac{1}{\omega_\nu} e^{i\lambda_\nu t} P_\nu(t)$$

La suma del segundo miembro es convergente en L^1 , a causa de 1°) y de que construimos los P de modo que $\|P_\nu\|_1 \leq 1$.

Las sumas parciales $S_n(f)$, están vinculadas con las $S_n(P)$, por 2°).

En efecto, si $m \leq p_\nu$, se verifica:

$$S_{\lambda_\nu+m}(f) - S_{\lambda_\nu-m}(f) = \frac{1}{\omega_\nu} e^{i\lambda_\nu t} S_m(P)$$

Entonces, teniendo en cuenta que $\sup_n |S_n(P_\nu)| > \omega_\nu$, tendremos para cada t y para cada ν :

$$\sup_{m \in P_\nu} |S_{\lambda_\nu+m}(f, t) - S_{\lambda_\nu-m}(f, t)| > 1$$

lo que implica que la sucesión $S_n(f, t)$ es divergente en cada punto t .

VII.- APROXIMACION DE FUNCIONES POR POLI -
NOMIOS TRIGONOMETRICOS .

Introducción :

A.- VINCULACION ENTRE $E_n(f)$ Y LAS SUMAS DE FOURIER , FEJER Y LA VALLEE - POUSSIN :

1°.- Sumas de Fourier : Si :

$$f \sim \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j e^{ijt}$$

siempre se puede escribir:

$$(7.1) \quad \|f - S_n\|_{\infty} \leq \sum_{|j| > n} |c_j|$$

El segundo miembro de la desigualdad (7.1) , puede no ser finito; en tal caso, la desigualdad es trivial, y no presenta interés; nos remitiremos entonces, al estudio de los casos en que esa suma es finita.

$$a) \quad f \in A \Rightarrow \|f - S_n\|_{\infty} \leq \sum_{|j| > n} |c_j| < \infty$$

$$b) \quad f \in C^{\infty}$$

Teorema 7.1 :

$f \in C^{\infty}$, si y sólo si $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$, $\forall k$ entero.

Demostración :

ya vimos que: $f \in C^{\infty} \Rightarrow c_j = O\left(\frac{1}{n^k}\right) \forall k$ entero. Luego, si vale $\forall k$ entero, es : $c_j = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$.

Entonces:

$$E_n(f) \leq \|S_n - f\|_{\infty} \leq \sum_{|j| > n} |c_j| = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

O sea:

$$E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

Recíprocamente: Si $\forall k$ entero, $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$, tenemos:

$$C_{\pm(n+1)}(f) = C_{\pm(n+1)}(f - S_n)$$

Pero:

$$|C_{\pm(n+1)}| \leq \sup |f - S_n| = \|f - S_n\|_{\infty} = E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

Pero:

$$\forall k, C_{\pm(n+1)} = O\left(\frac{1}{n^k}\right) \Rightarrow f \in C^{\infty}.$$

c) $f \in \mathcal{H}$.

Teorema 7.2 :

$f \in \mathcal{H}$, si y sólo si $\exists \varepsilon > 0$, tal que $E_n(f) = O(e^{-\varepsilon n})$

Demostración :

Ya fué demostrado antes que:

$$f \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \text{ tal que } C_j = O(e^{-\varepsilon |j|})$$

Pero:

$$C_j = O(e^{-\varepsilon |j|}) \Rightarrow E_n(f) = O(e^{-\varepsilon n})$$

Recíprocamente:

$$E_n(f) = O(e^{-\varepsilon n}) \Rightarrow C_{\pm(n+1)} = O(e^{-\varepsilon n}) \Rightarrow f \in \mathcal{H}.$$

d) Para $f \in L^2$, ya vimos que la mejor aproximación se consigue tomando sumas de Fourier.

2°.- Sumas de Fejér.

a) Si $f \in C$, la expresión $\|f - S_n\|_{\infty}$, que nos da la mejor aproximación de f por sumas de Fourier, puede tender a ∞ cuando $n \rightarrow \infty$; en cambio, sabemos que $\|f - \sigma_n\|_{\infty} \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty$. Es decir, cuando sólo se sabe que la función es continua, las sumas de Fejér son más seguras que las sumas de Fourier; no dan sin embargo la mejor aproximación en todos los casos.

En efecto, consideremos j , de modo que el coeficiente de Fourier $C_j(f) \neq 0$. Llamando $C_j(f - \sigma_n)$ al coeficiente de Fourier de orden j de $(f - \sigma_n)$, se tendrá:

$$C_j(f - \sigma_n) = C_j - C_j \cdot \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) = C_j \cdot \frac{|j|}{n}$$

Luego:

$$\|f - \sigma_n\| > |c_j(f - \sigma_n)| \geq \frac{|j \cdot c_j|}{n}$$

Es decir, en el caso de funciones continuas, la aproximación por sumas de Féjer no puede ser mejor que $\frac{1}{n}$, mientras que la aproximación por sumas de Fourier puede ser $O\left(\frac{1}{n^k}\right)$, en el caso, por ejemplo de $f \in C^\infty$.

Observación: Sea $U_n = \sum_{j=-n}^n \alpha_{j,n} e^{ijx}$.

Entonces, la aproximación de f por polinomios $f * U_n$, no puede ser mejor que $|j c_j| (1 - \alpha_{j,n})$, lo que se verifica con un cálculo análogo al realizado en el caso de sumas de Féjer.

3º.- Sumas de la Vallée - Poussin.

En el caso de aproximación por sumas de de la Vallée - Poussin de orden $2n$; se obtiene un resultado del orden de $E_n(f)$, es decir, del orden de la mejor aproximación.

En efecto, observemos que:

$$\varphi_{2n}(T_n) = T_n * 2V_{2n} = T_n$$

donde T_n es el polinomio de mejor aproximación de f .

Entonces:

$$\varphi_{2n}(f - T_n) = \varphi_{2n}(f) - T_n$$

Las sumas de de la Vallée - Poussin, tienen norma C , que no puede ser superior a 3 veces la norma de la función. Es decir:

$$\|2V_{2n} * g\|_\infty \leq 3 \|g\|_\infty, \text{ pues } \|2V_{2n}\|_1 \leq 3$$

Luego:

$$\|\varphi_{2n}(f) - T_n\|_\infty \leq 3 \|f - T_n\|_\infty = 3 E_n(f)$$

Pero:

$$\|\varphi_{2n}(f) - f\|_\infty \leq \|\varphi_{2n}(f) - T_n\|_\infty + \|T_n - f\|_\infty \leq 4 E_n(f)$$

E.- ESTUDIO DE $E_n(f)$ PARA $f \in \text{Lip.}\alpha$.

Sea el polinomio trigonométrico $Q(x, n)$ definido del siguiente modo:

$$Q(x, n) = K_n \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \left(\frac{\sin nt}{t}\right)^4 dt$$

con

$$\frac{1}{k_n} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\text{sen } nt}{t} \right)^4 dt = n^3 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\text{sen } u}{u} \right)^4 du$$

$Q(x,n)$, es efectivamente un polinomio trigonométrico, pues:

1°) Q es una función periódica de período 2π : $Q(x+2\pi, n) = Q(x, n)$

2°) Calculemos el coeficiente de Fourier de $Q(x, n)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q(x, n) e^{-ipx} dx &= \frac{K_n}{2\pi} \iint f(x-t) \cdot e^{-ip(x-t)} e^{ipt} \left(\frac{\text{sen } nt}{t} \right)^4 dt d(x-t) = \\ &= K_n \cdot C_p(f) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipt} \left(\frac{\text{sen } nt}{t} \right)^4 dt \end{aligned}$$

donde $C_p(f)$ es, como siempre, el coeficiente de Fourier de f .

$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipt} \left(\frac{\text{sen } nt}{t} \right)^4 dt$, se integra en el campo complejo, sobre el reciento de la figura 7.1 ..

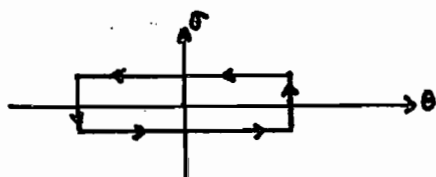


fig. 7.1

Si $t = \theta + i\sigma$, se ve facilmente que:

$$(7.2) \quad |\text{sen } nt| < e^{n|\sigma|}$$

$$\text{y } |e^{ipt}| = e^{-p\sigma}$$

El cálculo de I , teniendo en cuenta la acotación (7.2), nos permite afirmar que $Q(x, n)$ es un polinomio trigonométrico de grado $\leq n$, pues la integral se anula para $p > 4n$ ó $p < -4n$.

Teorema 7.3: (de Jackson)

$$f \in \text{Lip. } \alpha, \Rightarrow E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

Demostración:

Vamos a ver la aproximación de f por $Q(x, n)$

$$f(x) - Q(x, n) = K_n \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - f(x-t)] \left(\frac{\text{sen } nt}{t} \right)^4 dt$$

Como: $f \in \text{Lip. } \alpha$, $|f(x) - f(x-t)| < K |t|^\alpha$.

Entonces:

$$|f(x) - Q(x, n)| \leq K_n \int_{-\infty}^{\infty} K |t|^\alpha \left(\frac{\text{sen } nt}{t} \right)^4 dt$$

pero:

$$|f(x) - Q(x, n)| \leq K_n \int_{-\infty}^{\infty} K' |nt|^\alpha \left(\frac{\text{sen } nt}{nt} \right)^4 d(nt) n^{3-\alpha}$$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} K |nt|^{\alpha} \left(\frac{\text{sen } nt}{nt} \right)^4 d(nt) = C \text{ (constante) , queda:}$$

$$\|f - Q(x,n)\| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

Es decir:

$$E_{4n}(f) \leq \|f - Q\| = O\left(\frac{1}{4n^{\alpha}}\right) , \text{ ó sea } E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

Recíprocamente, tenemos:

T e o r e m a 7.4 : (de Bernstein)

Si $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ con $0 < \alpha < 1$, se verifica que $f \in \text{Lip. } \alpha$.

D e m o s t r a c i ó n :

Sea T_n un polinomio de mejor aproximación de f de orden $4n$. Se puede escribir:

$f = T_1 + \sum_{i=0}^{\infty} T_{2^{i+1}} - T_{2^i}$, pues: $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) \Rightarrow \|f - T_n\| \rightarrow 0$, y además T_{2^i} , es una subsucesión de los T_n .

Para demostrar que f tiene una condición de Lipschitz, supondremos primero $T_1=0$ pues si $f \in \text{Lip. } \alpha$, el sumarle T_1 no varía esa condición.

Si llamamos $g_i = T_{2^{i+1}} - T_{2^i}$, tenemos:

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} [g_i(x+h) - g_i(x)] = \left[\sum_{i=0}^n + \sum_{i=n+1}^{\infty} \right] [g_i(x+h) - g_i(x)]$$

Tratemos de acotar la segunda suma:

$$(7.3) \quad \|g_i\| \leq \|T_{2^{i+1}} - f\| + \|f - T_{2^i}\| = E_{2^{i+1}} + E_{2^i} \leq \frac{C}{2^{i\alpha}}$$

teniendo en cuenta la hipótesis sobre α . Entonces:

$$\left| \sum_{i=n+1}^{\infty} (g_i(x+h) - g_i(x)) \right| \leq 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \|g_i\| \leq C \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i\alpha}} \leq C_1 \frac{1}{2^{n\alpha}}$$

La primera suma da:

$$\left| \sum_{i=0}^n [g_i(x+h) - g_i(x)] \right| \leq h \sum_{i=0}^n 2^{i+1} \|g_i\| ,$$

pues aplicando el teorema de Bernstein (capítulo III) , resulta:

$$\left| g_i(x+h) - g_i(x) \right| = h g_i'(y) \leq h \|g_i'\| \leq h 2^{i+1} \|g_i\|$$

Aplicando la acotación (7.3) :

$$\left| \sum_{i=0}^n [g_i(x+h) - g_i(x)] \right| \leq 2 h C \sum_{i=0}^n 2^{i(1-\alpha)}$$

Aquí se presentan dos casos:

1) $\alpha < 1$: (caso del teorema)

La última expresión resulta:

$$2 h C \sum_{i=0}^n 2^{i(1-\alpha)} < C_2 h 2^{n(1-\alpha)}$$

y

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C_2 h 2^{n(1-\alpha)} + C_1 2^{-n\alpha} \leq C_3 (h 2^{n(1-\alpha)} + 2^{-n\alpha})$$

Sea $h \sim 2^{-n}$. Entonces:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C_4 2^{-n\alpha} \leq C_5 h^\alpha .$$

En este caso, $f \in \text{Lip. } \alpha$.

2) $\alpha = 1$:

$$\left| \sum_{i=0}^n g_i(x+h) - g_i(x) \right| \leq 2 h C n$$

y

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C_6 (h n + 2^{-n})$$

Sea $h \sim 2^{-n}$: será:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C_6 (h \lg \frac{1}{h}) = O(h \log \frac{1}{h})$$

y esto último no es una condición de Lip.

En resumen:

$$f \in \text{Lip.1} \Rightarrow E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \omega_f(\delta) = O\left(\delta \log \frac{1}{\delta}\right)$$

- Caracterización de las funciones de la clase Z .

Definición 7.2 :

Se dice que f es una función de la clase Z , si y sólo si, $\psi_x(t) = o(t)$ cuando $t \rightarrow 0$, uniformemente respecto de x con $\psi_x(t) = \frac{1}{t} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|$

Teorema 7.5 :

$f \in Z$, si y sólo si $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$

Demostración :

Si $f \in Z$, el cálculo hecho en el caso de una $f \in \text{Lip.1}$, nos muestra de inmediato que $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Recíprocamente:

Definiendo $g_1(x)$, de igual modo que en el teorema 7.4 :

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) = \left(\sum_{i=0}^n + \sum_{i=n+1}^{\infty} \right) [g_1(x+h) + g_1(x-h) - 2g_1(x)]$$

Como $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, se verifica: (ver teorema 7.4) :

$$|g_1(x+h) + g_1(x-h) - 2g_1(x)| \leq 4 \|g_1\| < \frac{C}{2^i}$$

y

$$\left| \sum_{i=n+1}^{\infty} [g_1(x+h) + g_1(x-h) - 2g_1(x)] \right| \leq \frac{C'}{2^n}$$

Por otra parte, aplicando dos veces el teorema del valor medio se tiene:

$$|g_1(x+h) + g_1(x-h) - 2g_1(x)| \leq 2h^2 \|g_1''\|$$

Aplicando el teorema de Bernstein dos veces:

$$|g_1(x+h) + g_1(x-h) - 2g_1(x)| < 2^{i+2} h^2 \|g_1''\| < 2^{2i+3} h^2 \|g_1\| < C'' h^2 2^i, \quad y$$

$$\left| \sum_{i=0}^n [g_1(x+h) + g_1(x-h) - 2g_1(x)] \right| \leq C'' h^2 \sum_{i=0}^n 2^i < C''' h^2 2^{n+1}$$

Entonces:

$$|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| \leq \frac{C'}{2^n} + C''' h^2 2^n$$

Si $f \sim 2^{-n}$, queda:

$$|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| < Ch,$$

lo que significa que $f \in Z$.

C.- PROPIEDADES DE LOS POLINOMIOS DE MEJOR APROXIMACION.

Teorema 7.6 :

Consideremos un polinomio real U_n , de grado $\leq n$. Supongamos que $|U_n - f|$, alcanza su valor supremo M , en $2n+2$ puntos ordenados: $t_1 < t_2 \dots < t_{2n+2} < t_1 + 2\pi$ además $(U_n - f)(t_j)$, vale M si j es par y $-M$ si j es impar; entonces, se verifica: $E_n(f) = M$.

$U_n - f$ Demostración :

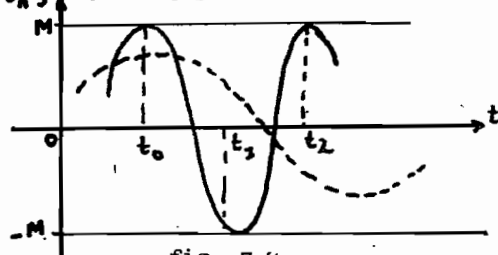


fig. 7.2

Supongamos que la tesis no se cumple y que sea $E_n(f) < M$ y T_n , un polinomio de mejor aproximación que U_n .

Entonces, entre t_0 y t_1 , hay por lo menos un punto para el que se verifica:

$$U_n - f = T_n - f$$

Como esta igualdad se cumple por lo menos en $2n + 2$ puntos, será $U_n = T_n$ en $2n + 2$ puntos.

Por una propiedad estudiada de los polinomios trigonométricos de grado $\leq n$, será $U_n = T_n$ en todos los puntos.

Pero esto último contradice la hipótesis de que $T_n < U_m$. Luego, se cumple:

$$E_n(f) = M.$$

A p l i c a c i o n e s :

1) Sea $f = P_{n+1}$, polinomio de grado $\leq n+1$.

Un polinomio T_n de mejor aproximación de P_{n+1} será:

$$T_n = S_n(P_{n+1}) ; \quad f - T_n = r_{n+1} \cos |(n+1)t + \varphi_n|$$

Como un coseno de orden $n+1$, alcanza sus extremos en $2n + 2$ puntos, alternadamente máximos y mínimos, será T_n del tipo U_n , y $E_n(f) = r_{n+1}$.

2) Sea $f(t) = \sum_1^{\infty} q^k \cos (2n+1)^k t$, con $n \geq 1$ y $q < 1$.

Vamos a estudiar los polinomios de mejor aproximación de orden $(2m + 1)^{\ell}$,

Entonces:

$$U_{\ell} = \sum_1^{\ell} q^k \cos (2m + 1)^k t ,$$

es un polinomio de mejor aproximación.

En efecto:

$$f - U_{\ell} = \sum_{\ell+1}^{\infty} q^k \cos (2m + 1)^k t ,$$

alcanza su supremo para $t = 0$ y para t_j tales que $\cos (2m + 1)^k t_j = 1$, con $k \geq \ell+1$.

En los puntos $t_j = \frac{2\pi j}{(2m+1)^{\ell+1}}$, el coseno vale 1, y para $t_j = \frac{2\pi j + \pi}{(2m+1)^{\ell+1}}$, el coseno vale -1.

En total, son $2(2m+1)^{\ell+1}$ puntos alternadamente máximos y mínimos y esto asegura que el polinomio considerado es de mejor aproximación.

T e o r e m a 7.7 : (de Tchebicheff)

Sea T_n un polinomio de mejor aproximación. Entonces existen $2n + 2$ puntos orde

nados $t_1 < t_2 \dots < t_{2n+2} < t_1 + 2\pi$ tales que:

$$(T_n - f)(t_{rj+1}) = E_n(f)$$

$$(T_n - f)(t_{rj}) = -E_n(f)$$

L e m a :

El polinomio trigonométrico real que se define:

$$Q(t) = \prod_{j=1}^{2\nu} \operatorname{sen} \frac{t - s_j}{2} \quad \text{con} \quad s_1 < s_2 < \dots < s_{2\nu} < s_1 + 2\pi,$$

tiene las siguientes propiedades:

1.- Se anula en los puntos $s_1, s_2, \dots, s_{2\nu} \pmod{2\pi}$ y nunca fuera de ellos.

2.- Toma en dos intervalos sucesivos, signos opuestos. Por ejemplo:

$$s_1 < t < s_2 \Rightarrow Q(t) < 0$$

$$s_2 < t < s_3 \Rightarrow Q(t) > 0$$

3.- Dado un polinomio P_n tal que:

a) $n \gg \nu$.

b) $\|P_n - f\|_{\infty} < M$.

c) en los intervalos $(s_1, s_2), (s_3, s_4), \dots, P_n - f < M$
y en los intervalos $(s_2, s_3), (s_4, s_5), \dots, P_n - f > -M$

entonces: $P_n + \alpha Q(t)$ (con α suficientemente pequeño) es un polinomio de mejor aproximación para $f(t)$ que P_n .

D e m o s t r a c i ó n :

1.- y 2.- son inmediatas. Se demostrará 3.- :

En efecto: las condiciones expresadas en c) , consisten en un número finito de desigualdades; luego, es posible afirmar:

$$\text{en los intervalos } (s_1, s_2), (s_3, s_4) \dots P_n - f < M - \epsilon$$

$$\text{y en los intervalos } (s_2, s_3), (s_4, s_5) \dots P_n - f > -M + \epsilon$$

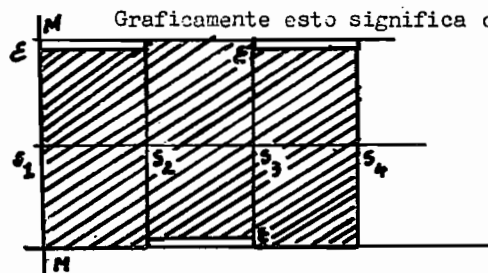


fig. 7.3

Graficamente esto significa que $P_n - f$ está totalmente comprendido en las regiones del tipo de la figura 7.3 .

Si se toma $\alpha < 0$ y tal que $\|\alpha Q(t)\|_{\infty} < \epsilon$.

se obtendrán las desigualdades:

$$a) \quad s_1 < t < s_2 \Rightarrow Q(t) < 0 \Rightarrow -M + \epsilon < P_n + \alpha Q(t) - f < M$$

y lo mismo para los intervalos abiertos: $(s_3, s_4) \dots$

$$b) \quad s_2 < t < s_3 \Rightarrow Q(t) > 0 \Rightarrow -M < P_n + \alpha Q(t) - f < -M - \epsilon$$

y lo mismo para los intervalos abiertos $(s_4, s_5) \dots$ etc.

c) como $Q(t)$ se anula en los puntos $s_1, s_2, \dots, s_{2\lambda}$, $P_n + \alpha Q(t) - f$ no puede valer $-M$ ó M en ellos. Por a), b), y c) resulta:

$$\forall t, \quad |P_n + \alpha Q(t) - f| < M$$

y también $\sup_t |P_n + \alpha Q(t) - f| < M$, con lo que queda demostrada la propiedad 3.-.

Demostración del teorema de Tchebicheff.

Sea T_n , un polinomio de mejor aproximación de $f(t)$; entonces:

$$(7.4) \quad |T_n - f| \text{ alcanza al menos en un punto el valor } -E_n(f)$$

$$(7.5) \quad \text{y } |T_n - f| \text{ alcanza al menos en un punto el valor } +E_n(f)$$

Tomemos un punto t que verifica (7.4); luego, el primer punto que se encuentre a la derecha de t y que verifique (7.5); sea éste t_2 ; repitamos la operación en el mismo sentido sobre todo el intervalo.

Demostraremos que no es posible tener 2λ puntos t_i con $\forall i < n$.

Supongamos que fuera así. Tomemos s_1 a izquierda de t_1 , s_2 a izquierda de t_2 y así sucesivamente y tan próximos a ellos como sea necesario para que:

$$\text{en los intervalos } (s_1, s_2), (s_3, s_4) \dots \quad |T_n - f| < E_n(f)$$

$$\text{y en los intervalos } (s_2, s_3), (s_4, s_5) \dots \quad |T_n - f| > -E_n(f)$$

De este modo T_n verifica las hipótesis del lema anterior. Entonces: $T_n + \alpha Q(t)$ (con α suficientemente pequeño) es un polinomio de mejor aproximación que T_n para $f(t)$. Pero esto no es posible, y en consecuencia el supuesto inicial es falso.

Teorema 7.8 : (de unicidad)

El polinomio T_n de mejor aproximación es único.

Demostración :

Supongamos que S_n y T_n son dos polinomios de mejor aproximación de $f(t)$. En tal caso:

$$\|f(t) - T_n\|_{\infty} = \|f - S_n\|_{\infty} = E_n(f)$$

Tomemos el polinomio $U_n = \frac{T_n + S_n}{2}$ y resultará :

$$\|f(t) - \frac{T_n + S_n}{2}\|_{\infty} \leq \frac{1}{2} \|f - T_n\|_{\infty} + \frac{1}{2} \|f - S_n\|_{\infty} = E_n(f)$$

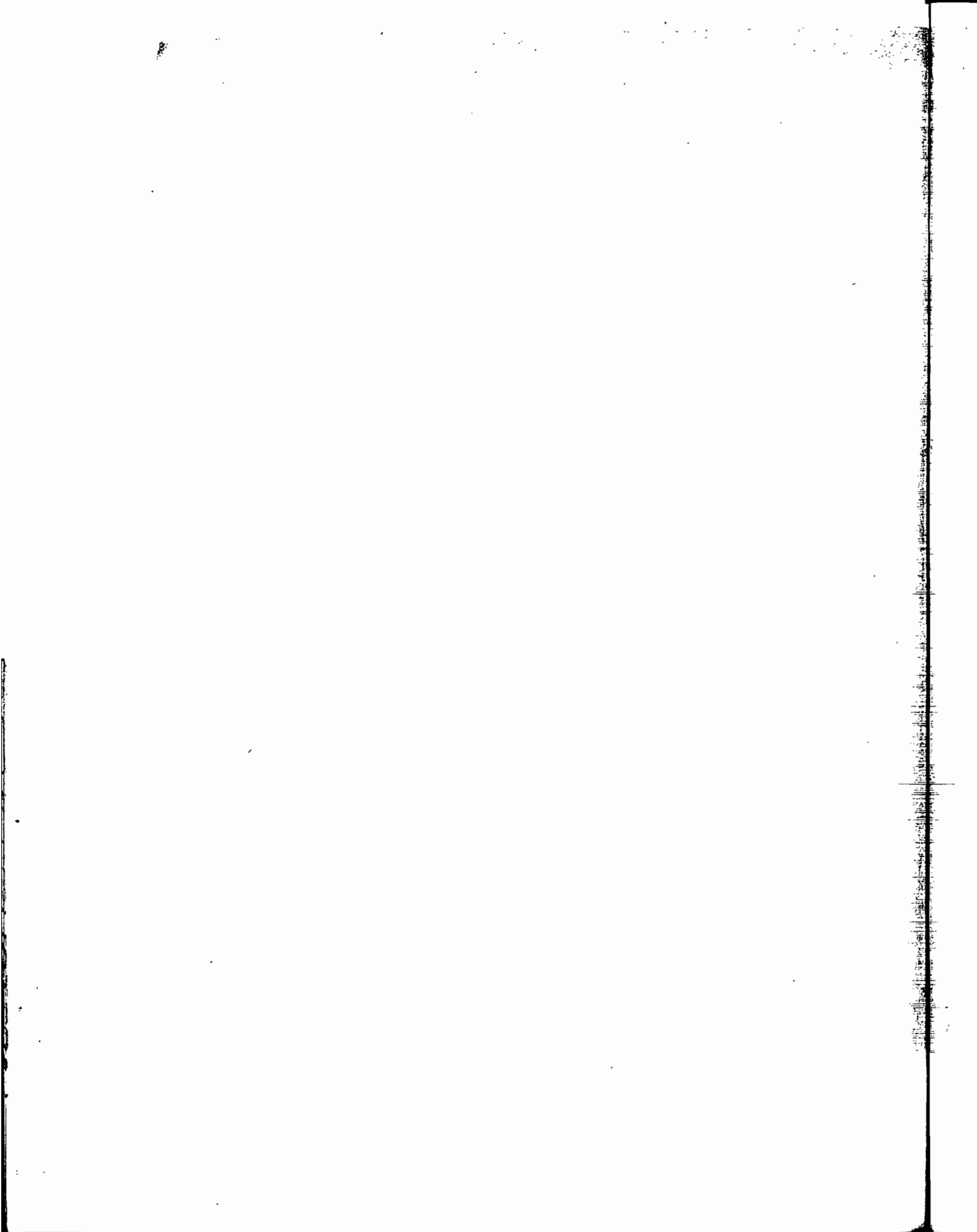
Luego, U_n también es un polinomio de mejor aproximación. Por el teorema de Tchebicheff, existen $t_1 < t_2 < \dots < t_{2n+2}$ puntos en los que se verifica:

$$(U_n - f)(t_{r_{j+1}}) = E_n(f)$$

$$(U_n - f)(t_{r_j}) = -E_n(f)$$

Pero en los puntos t_k , debe ser $T_n = S_n = (T_n + S_n)/2$, pues si no lo fuera, alguno de los polinomios (T_n ó S_n) realizaría una aproximación peor que $E_n(f)$, lo cual no es posible.

Como T_n y S_n resultan así iguales en $2n + 2$ puntos, será $T_n \equiv S_n$



VIII.- TRANSFORMADA DE FOURIER Y FUNCIONES ENTERAS DE TIPO EXPONENCIAL .

A.- GENERALIDADES SOBRE TRANSFORMADA DE FOURIER .

Si $f \in L^1$, $(-\infty, \infty)$, su transformada de Fourier es la expresión:

$$\mathcal{F}(f) = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixu} dx$$

que tiene sentido y es una función continua.

Propiedades :

1) $f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(u)$, es una transformación lineal

2) $f(x\lambda) \rightarrow \frac{1}{|\lambda|} F\left(\frac{u}{\lambda}\right)$, con λ constante.

3) $\overline{f(x)} \rightarrow \overline{F(-u)}$

4) $f(x-x_0) \rightarrow F(u) e^{ix_0 u}$

$f(x) e^{i\mu x} \rightarrow F(u+\mu)$

5) $f * g \rightarrow F \cdot G$, f y $g \in L^1$

En efecto:

$$\mathcal{F}[f * g] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) e^{i(x-y)u} e^{iyu} dy dx$$

Aplicando el teorema de Fubini :

$$\mathcal{F}[f * g] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{i(x-y)u} dx \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{iyu} dy = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g) = F(u) \cdot G(u)$$

En el caso particular en que f tenga soporte compacto, es decir, sea cero fuera de un intervalo $(-a, a)$, se puede definir F no sólo para valores reales de u , sino también para valores complejos. Así, si $w = u + iv$, tenemos:

$$F(w) = \int_{-a}^a f(x) e^{iw x} dx$$

Esta expresión, define una función entera. En efecto: $|e^{iwx}| = e^{-xv} < e^{-a|v|}$. Entonces: $|F(w)| < e^{a|v|} \int_{-a}^a |f|$.

B.- FUNCIONES ENTERAS DE TIPO EXPONENCIAL .

Definición 8.1 :

$F(w)$ es una función entera de tipo exponencial si $\exists k > 0$ y $a > 0$, tales que $|F(w)| < k e^{a|w|}$.

Ejemplos :

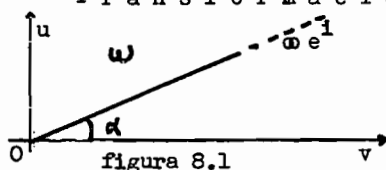
1) $e^{w\lambda}$ donde λ es un número complejo, es una función entera de tipo exponencial.

2) Todas sus combinaciones lineales finitas, es decir, expresiones de la forma $\sum a_{\lambda} e^{w\lambda}$, también lo son.

3) Los polinomios trigonométricos en w , son funciones de este tipo.

En adelante supondremos que F es entera de tipo exponencial.

Transformación de Borel - Laplace .



Tomemos la semi-recta representada en la fig. 8.1 sobre el plano w y sea

$$\varphi_{\alpha}(z) = \int_0^{\infty} w e^{i\alpha} F(w) e^{-iwz} dw$$

Teorema 6.1 :

$\varphi_{\alpha}(z)$ existe y es holomorfa en un semiplano que depende de α .

Demostración :

La integral tendrá sentido si el integrando decrece más rápidamente que una exponencial, es decir, para los z tales que:

$$|F(w) e^{-iwz}| < e^{-\epsilon|w|}$$

Si llamamos a:

$$w = r e^{i\alpha} \quad z = x + iy$$

tenemos:

$$\log |e^{-iwz}| = -R(iwz) = -r R [i(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)(x + iy)] = r(x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha)$$

Vamos a mayorar $F(w)$ sobre la semirrecta: Para eso, definimos la función:

$$h(\alpha) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |F(r e^{i\alpha})|}{r}$$

Entonces:

$$|F(r e^{i\alpha})| < k (\epsilon_1) e^{[h(\alpha) + \epsilon_1] r}$$

$$y \quad \log |F(w) e^{-iwz}| < r [h(\alpha) + \epsilon_1 + x \operatorname{sen} \alpha + y \operatorname{cos} \alpha] + \log k(\epsilon_1)$$

Pero, siempre que $x \operatorname{sen} \alpha + y \operatorname{cos} \alpha < -h(\alpha)$, todavía es posible encontrar ϵ_1 y ϵ tales que:

$$(8.1) \quad x \operatorname{sen} \alpha + y \operatorname{cos} \alpha < -h(\alpha) - \epsilon_1 - \epsilon.$$

En tal caso:

$$\log |F(w) e^{-iwz}| < -\epsilon r + \log k(\epsilon_1)$$

Luego:

$$|F(w) e^{-iwz}| < k(\epsilon) e^{-\epsilon r}$$

En consecuencia, $\psi_\alpha(z)$ existe en el semiplano que cumple la desigualdad (8.1), al que llamaremos semiplano P_α .

Demostraremos ahora, que, $\psi_\alpha(z)$ es desarrollable en serie de potencias en un dominio contenido en P_α .

$$\text{En efecto: si } F(w) = \sum_0^\infty a_n w^n, \text{ entonces: } \psi_\alpha(z) = \int_0^\infty e^{i\alpha} \sum_0^\infty a_n w^n e^{-wz} dw.$$

Si el integrando es absolutamente convergente, se podrá integrar término a término.

Pero

$$|a_n| \leq \frac{1}{R^n} \cdot \sup_{|w|=R} |F(w)| < \frac{k e^{bR}}{R^n}$$

Resulta:

$$\sum_0^\infty |a_n| r^n < k e^{bR} \sum_0^\infty \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

Dado $b_1 > b$, elegimos $R = \frac{1}{b} r$; así pues $\sum_0^\infty |a_n| r^n < k_1 e^{b_1 r}$

Dado $b_2 > b_1$, tomamos z tal que $|e^{-iwz}| < e^{-b_2 r}$, sea $x \operatorname{sen} \alpha + y \operatorname{cos} \alpha < -b_2$

Integrando ahora término a término:

$$\int_0^\infty e^{i\alpha} \sum_0^\infty a_n w^n e^{-iwz} dw = \sum_0^\infty \int_0^\infty e^{i\alpha} a_n w^n e^{-iwz} dw$$

$$\int_0^\infty e^{i\alpha} w^n e^{-iwz} dw = n \int_0^\infty e^{i\alpha} \frac{w^{n-1} e^{-iwz}}{iz} dw = \frac{n!}{(iz)^n} \int_0^\infty e^{i\alpha} e^{iwz} dw = \frac{n!}{(iz)^{n+1}}$$

Es decir, cuando z satisface $x \operatorname{sen} \alpha + i \cos \alpha < -b_2$, se verifica:

$$\varphi_{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{(iz)^{n+1}}$$

Si la serie es convergente para z tal que $|z| = r$, es también convergente para los valores de z tales que $|z| > r$.

Como consecuencia de todo lo anterior, $\varphi_{\alpha}(z)$ es holomorfa en un dominio contenido en P_{α} .

Variando α , quedan definidos nuevos semiplanos P_{α} , y las nuevas funciones $\varphi_{\alpha}(z)$ serán analíticas, por el mismo razonamiento, en dominios contenidos en los semiplanos respectivos. En las regiones de superposición de más de un dominio, las $\varphi_{\alpha}(z)$ respectivas, coinciden. Entonces, por continuación analítica, se considera el conjunto de los valores de las $\varphi_{\alpha}(z)$ en los dominios mencionados, como una sólo función $\varphi(z)$, holomorfa en la unión de los semiplanos P_{α} , fuera de un conjunto convexo.

Supongamos ahora que $h(0) = h(\pi) = 0$. Si F está acotada, P_0 es el semiplano inferior excluyendo el eje real y P_{π} el semiplano superior, también excluyendo el eje real.

El conjunto convexo quedará determinado, si conocemos $-h(\frac{\pi}{2})$ y $h(-\frac{\pi}{2})$. Sean estos: $-h(\frac{\pi}{2}) = a$; $h(-\frac{\pi}{2}) = b$. En este caso, φ será holomorfa fuera del segmento (a, b) .

Fórmula de reciprocidad:

Sea Γ un contorno que rodea al conjunto convexo k fuera del cual $\varphi(z)$ es holomorfa.

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \varphi(z) e^{iwz} dz = \int_{\Gamma} \sum_0^{\infty} \frac{a_n n!}{(iz)^{n+1}} e^{iwz} dz$$

Si cambiamos el contorno de integración Γ , por un círculo γ de radio mayor que el radio de convergencia de

$$\sum_0^{\infty} \frac{a_n n!}{(iz)^{n+1}}$$

I no alterará, siempre que además γ esté alrededor de k . Entonces:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \sum_0^{\infty} \frac{a_n n!}{(iz)^{n+1}} e^{iwz} dz = \frac{1}{2\pi} \sum_0^{\infty} a_n n! \int_{\gamma} \frac{e^{iwz}}{(iz)^{n+1}} dz = \sum_0^{\infty} a_n w^n = F(w)$$

Aplicación de la transformación de Borel-Laplace:

Sea $F(w)$ una función entera de tipo exponencial y perteneciente a L^1 sobre la rec.

ta.

Si $\alpha = 0$, φ_0 está definida en P_0 . $\varphi_0(z) = \int_0^{\infty} F(u) e^{-iuz} du$ y esta integral tiene sentido para $\Im z < 0$.

Como $F(u) \in L^1(-\infty, \infty)$, es integrable sobre la semirecta $(0, \infty)$; entonces $\varphi_0(z)$ está definida para z real y $\varphi_0(z)$ tiene sentido para $\Im z \leq 0$. Se ve además que $\varphi_0(z)$ está definida en $P(\frac{\pi}{2})$ y $P(-\frac{\pi}{2})$.

Tomemos $\alpha = \pi$:

$$\varphi_{\pi}(z) = \int_0^{-\infty} F(u) e^{-iuz} du$$

Por idénticos razonamientos, $\varphi_{\pi}(z)$ está definida para $\Im z \geq 0$. Se verifica también que $\varphi_0 = \varphi_{\pi}$ fuera del segmento (a, b) . Sea:

$$\Psi(x) = \varphi_0(x) - \varphi_{\pi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-iux} du$$

$\Psi(x)$ es una función continua fuera del intervalo (a, b) y tiene precisamente su soporte sobre (a, b)

Vamos a calcular F , aplicando la fórmula de reciprocidad:

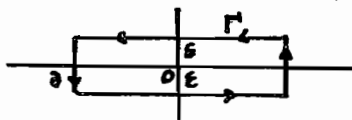


fig. 8.2

$F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \varphi(z) e^{iwz} dz$, donde Γ es un contorno rectangular, como el de la fig. 8.2.

La integral sobre los lados verticales tiende a cero con ε ; como en el semiplano superior $\varphi(z) = \varphi_{\pi}(z)$ y en el semiplano inferior: $\varphi(z) = \varphi_0(z)$, queda:

$$F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \varphi_0(x - i\varepsilon) - \varphi_{\pi}(x + i\varepsilon) e^{iwx} dx + o(1),$$

teniendo en cuenta que fuera de (a, b) , $\varphi_0 = \varphi_{\pi}$ y la integral es nula. Finalmente:

$$F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \Psi(x) e^{iwx} dx$$

En resumen, tenemos el siguiente:

Teorema (8.2) de Fourier - Paley - Wiener:

Si F es entera de tipo exponencial, perteneciente a $L^1(-\infty, \infty)$ y $a = -h(\frac{\pi}{2})$, y $b = h(-\frac{\pi}{2})$, con la definición dada para $h(\alpha)$, se puede definir una función:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-iux} du,$$

de soporte en (a,b) y vale la fórmula de reciprocidad:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixw} dx$$

F es la transformada de Fourier de f

f es la antitransformada de F .

(a,b) es el menor intervalo fuera del cual la función f se anula.

C.- APLICACIONES DEL TEOREMA DE FOURIER - PALEY
- WEINER .

1º.- Extensión de la transformada de Fourier a funciones $L^2(a,b)$ y $L^2(-\infty, \infty)$.

Si $f \in L^1$ y $g \in L^1$ sobre la recta y $F = \mathcal{F}(f)$ y $G = \mathcal{F}(g)$, se verifica:

$$F \cdot G = \mathcal{F}(f * g)$$

Entonces:

$$(f * g)(0) = \frac{1}{2\pi} \int F(u) G(u) du$$

Pero

$$(f * g)(0) = \int f(x) g(-x) dx$$

Luego:

$$\int f(x) g(-x) dx = \frac{1}{2\pi} \int F(u) G(u) du$$

Como:

$$\mathcal{F} \overline{g(x)} = \overline{G(-u)}$$

Se verifica

$$\int f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int F(u) \overline{G(u)} du$$

En particular:

$$(8.2) \quad \int |f|^2 = \frac{1}{2\pi} \int |F|^2$$

Esto último permite extender la teoría de transformadas de Fourier al caso en que $f \in L^2(a,b)$.

En efecto, si $f \in L^2(a,b)$, existe una sucesión de funciones $\{f_n\} \in L^1(a,b)$, tales que $f_n \xrightarrow{L^2} f$ y tal que $f_n = \mathcal{F}(F_n)$, donde las F_n son funciones enteras de tipo exponencial pertenecientes a $L^1(-\infty, \infty)$.

Como $f_n \xrightarrow{L^2} f$, $F_n \xrightarrow{L^2(-\infty, \infty)} F$.

En efecto, aplicando (8.2) :

$$\int |f_n - f_m|^2 = \frac{1}{2\pi} \int |F_n - F_m|^2$$

Como

$$\int |f_n - f_m|^2 \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0,$$

por la completitud de L_2 :

$$\int |F_n - F_m|^2 \longrightarrow 0 \Rightarrow F_n \xrightarrow{L_2(-\infty, \infty)} F$$

Tenemos así una correspondencia biunívoda entre $f \in L^2(a, b)$ y las funciones enteras de tipo exponencial pertenecientes a $L^2(-\infty, \infty)$, donde $a \leq h(\frac{\pi}{2})$ y $b \geq h(-\frac{\pi}{2})$.

En particular, para $h(\pm \frac{\pi}{2}) \leq a$, tendremos la correspondencia entre $f \in L_2(-a, a)$ y $f \in L_2(-\infty, \infty)$.

Ahora no habrá dificultades en extender la teoría al caso $f \in L^2(-\infty, \infty)$.

Si $f \in L^2(-\infty, \infty)$, definimos la sucesión $f_a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{para } x \in (-a, a) \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$.

$f_a(x) \in L_2(-a, a)$, y por lo visto más arriba, está definida su transformada de Fourier $F_a = \mathcal{F}(f_a)$. $\{f_a\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(-\infty, \infty)$, por ser las f_a aproximantes en L^2 de la f .

Luego, $\{F_a\}$ por (8.2) también lo será y por lo tanto:

$$F_a \xrightarrow{L_2(-\infty, \infty)} F$$

v en definitiva:

$$F(u) = \lim_{L_2(-\infty, \infty)} \int_{-a}^a f(x) e^{-ixu} dx = \mathcal{F}(f).$$

2º.- Construcción de funciones indefinidamente derivables.

Sea μ_j una sucesión positiva sumable, es decir $\sum_1^{\infty} \mu_j < \infty$. Consideremos la función

$$F(w) = \frac{\text{sen}^2 w}{w^2} \cdot \prod_1^{\infty} \frac{\text{sen } \mu_j w}{\mu_j w}.$$

Es fácil ver que el producto infinito converge uniformemente sobre todo compacto del plano complejo; F es entonces una función entera. Como:

$$\frac{\text{sen } w}{w} = 1 + \frac{w^2}{3!} + \dots + \frac{w^{2n}}{(2n+1)!} + \dots$$

se tiene

$$\left| \frac{\operatorname{sen} w}{w} \right| < e^{|w|}, \quad \left| \frac{\operatorname{sen} \mu_j w}{\mu_j w} \right| < e^{\mu_j |w|}$$

Entonces:

$$|F(w)| < e^{|w|(2 + \sum_1^{\infty} \mu_j)}$$

y F es así de tipo exponencial.

Sobre la recta real,

$$\left| \frac{\operatorname{sen} u}{u} \right| < \begin{cases} 1 \\ 1/|u| \end{cases}.$$

Luego, para todo j :

$$|F(u)| \leq \frac{\operatorname{sen}^2 u}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j |u|^j} \frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2}$$

Se puede aplicar el teorema de Fourier - Paley - Wiener a $F(w)$, y también a $w^j F(w)$ para todo j .

Sean f y f_j las antitransformadas de $F(w)$ y $e^j F(w)$; ellas están ligadas por la relación $f_j = (-i)^j f^{(j)}$.

Teniendo en cuenta la fórmula:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-iux} du$$

se tiene

$$\|f^{(j)}\|_{\infty} < \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 u}{u^2} du = \frac{k}{\mu_1 \dots \mu_j}$$

Por otra parte, f se anula fuera del segmento $[-2 - \sum_j^{\infty} \mu_j, 2 + \sum_j^{\infty} \mu_j]$

Teorema 8.3 :

Dada una sucesión $\{M_j\}$ positiva tal que $\sum_1^{\infty} \frac{M_j}{M_{j+1}} < \infty$, se puede (salvo para $\mu_j = \frac{M_j}{M_{j+1}}$) construir una función f a soporte com- $^{j+1}$ -pacto, tal que para todo j sea:

$$\|f^{(j)}\|_{\infty} < M_j$$

Se sabe que eso es imposible si $M_j = j!$ pues las desigualdades sobre las derivadas, implican en este caso la analiticidad.

I N D I C E

IV

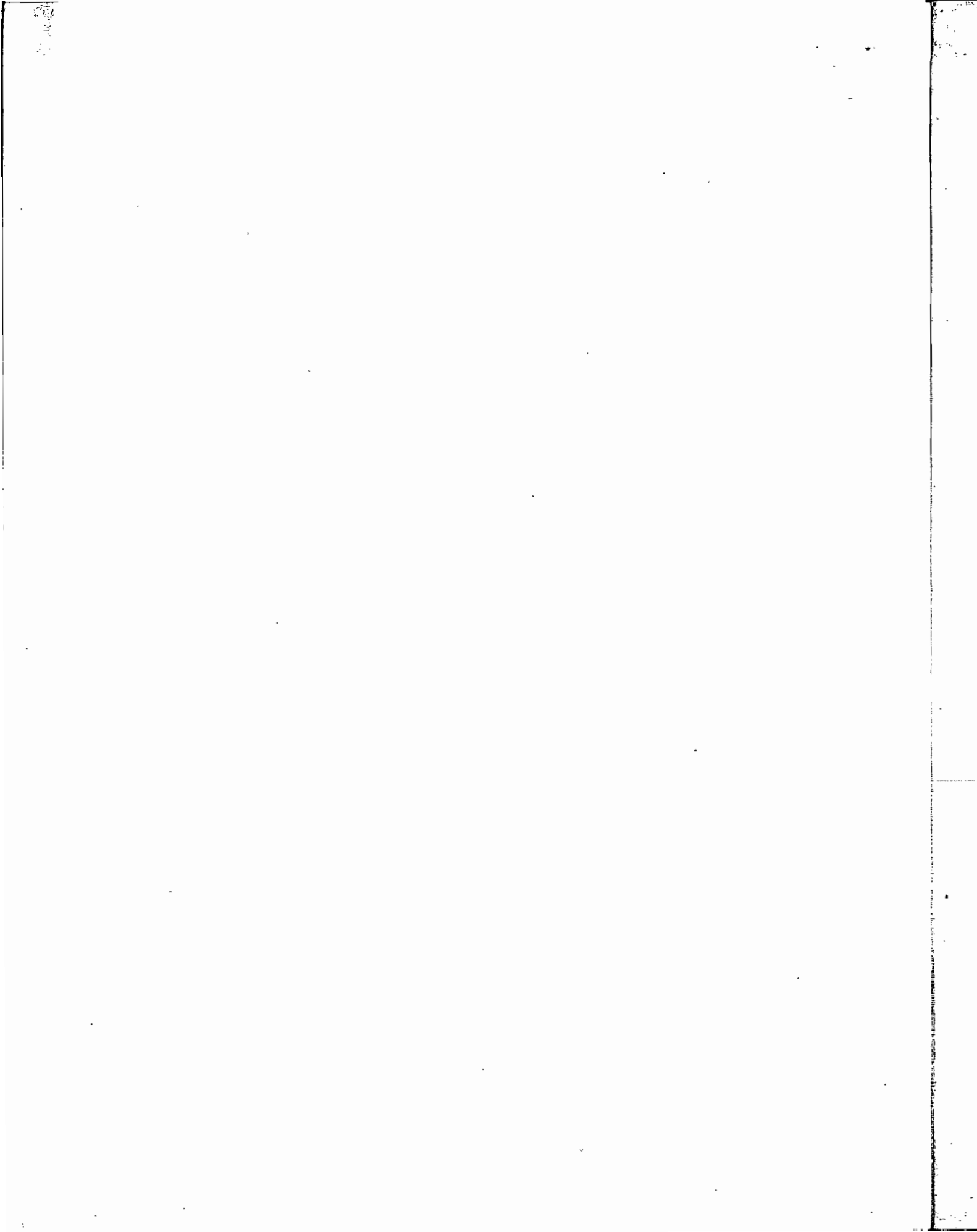
I.-	A P R O X I M A C I O N P O R F U N C I O N E S E S C A L E R A	pag. 5
	A.- A P R O X I M A C I O N D E F U N C I O N E S C O N T I N U A S E N U N I N T E R V A L O C E R R A D O [a, b] "	6
	1°.- P u n t o s d e s u b d i v i s i ó n i m p u e s t o s "	6
	2°.- N o s e i m p o n e n p u n t o s d e s u b d i v i s i ó n "	10
	B.- A P R O X I M A C I O N D E F U N C I O N E S D E C U A D R A D O I N T E G R A B L E S O B R E E L I N T E R V A L O	
	[a, b] "	15
	1°.- L o s p u n t o s d e s u b d i v i s i ó n e s t á n p r e f i j a d o s "	15
	2°.- L o s p u n t o s d e s u b d i v i s i ó n n o e s t á n p r e f i j a d o s "	16
	C.- A P R O X I M A C I O N D E F U N C I O N E S I N T E G R A B L E S E N [a, b] "	17
	1°.- L o s p u n t o s d e s u b d i v i s i ó n e s t á n d a d o s "	17
	2°.- L o s p u n t o s d e s u b d i v i s i ó n n o e s t á n p r e f i j a d o s "	19
II.-	I N T E R P O L A C I O N P O R F U N C I O N E S P O L I G O N A -	
	L E S "	21
	A.- R E L A C I O N E N T R E L A S P R O P I E D A D E S D E L A S D E R I V A D A S D E f(x) Y L A V E -	
	L O C I D A D D E I N T E R P O L A C I O N P O R F U N C I O N E S P O L I G O N A L E S "	21
	B.- C O N S T R U C C I O N D E F U N C I O N E S P O R I N T E R P O L A C I O N E S S U C E S I V A S "	25
	a) C o n d i c i ó n s u f i c i e n t e p a r a q u e f(x) s e a c o n t i n u a "	26
	b) C o n d i c i ó n n e c e s a r i a p a r a q u e f(x) s e a d e r i v a b l e "	26
	c) E j e m p l o s d e f u n c i o n e s c o n t i n u a s y n o d e r i v a b l e s e n u n i n t e r v a l o . "	28
III.-	P O L I N O M I O S T R I G O N O M E T R I C O S "	33
	A.- D E F I N I C I O N E S Y O P E R A C I O N E S "	33
	B.- F O R M U L A S D E F O U R I E R Y P A R S E V A L . - C O N V O L U C I O N "	35
	C.- N U C L E O S U S U A L E S "	36
	N ú c l e o d e D i r i c h l e t "	36
	N ú c l e o d e D i r i c h l e t m o d i f i c a d o "	37
	N ú c l e o d e F e j e r "	37
	N ú c l e o d e D e L a V a l l e é P o u s s i n "	38
	N ú c l e o d e D i r i c h l e t c o n j u g a d o y s u m o d i f i c a d o "	39
D.-	C E R O S D E L O S P O L I N O M I O S T R I G O N O M E T R I C O S "	39

V.

VI.

E.-	POLINOMIOS TRIGONOMETRICOS POSITIVOS	pag. 42
F.-	CARACTERIZACION DE UNA CLASE DE POLINOMIOS POSITIVOS	" 43
G.-	POLINOMIOS TRIGONOMETRICOS SOBRE PUNTOS EQUIDISTANTES SOBRE EL CIRCULO	" 44
IV.-	SERIES DE FOURIER - SUMAS DE FEJER	" 49
A.-	DEFINICIONES Y GENERALIDADES	" 49
B.-	TEOREMAS SOBRE LA CONVERGENCIA DE LAS SUMAS DE FEJER. CONVERGEN- CIA PUNTUAL	" 50
	Convergencia en L^p	" 53
	Convergencia cuando $f \in L^1$	" 54
C.-	PROPIEDADES DE LAS SUMAS DE FEJER QUE DETERMINAN PROPIEDADES DE OTRAS SUMAS	" 56
	Sumas de Poisson	" 57
	Sumas de De La Vallée Poussin	" 58
V.-	SERIES DE FOURIER - COEFICIENTES DE FOURIER	" 59
1°.-	PROBLEMAS ACERCA DE LA VINCULACION DE UNA FUNCION CON SUS COEFI- CIENTES DE FOURIER	" 59
A.-	Funciones de cuadrado sumable	" 59
B.-	$f \in L^1$ - Funciones sumables	" 61
C.-	$f \in C$ - Funciones continuas	" 61
D.-	$f \in C^\infty$ - Funciones indefinidamente diferenciables	" 62
E.-	$f \in \mathcal{H}$ - Funciones analíticas	" 65
F.-	$f \in V$ - Funciones de variación acotada	" 67
2°.-	FUNCIONES DE LA CLASE A	" 67
VI.-	SERIES DE FOURIER - SUMAS PARCIALES DE LAS SERIES DE FOURIER - CONVERGEN- CIA Y DIVERGENCIA	" 75
a)	CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA CONVERGENCIA	" 75
b)	ESTUDIO DIRECTO DE LAS S_n	" 77
	Fenómeno de Gibbs	" 78
	Divergencia en un punto de la serie de Fourier de una función continua. Método de Fejer	" 81
	Construcción de una función de L^1 cuya serie de Fourier es di- vergente en cada punto	" 82

VII.-	A PROXIMACION DE FUNCIONES POR POLI-		
	NOMIOS TRIGONOMETRICOS	pág.	89
A.-	VINCULACION ENTRE $E_n(f)$ Y LAS SUMAS DE FOURIER, FEJER Y LA		
	VALLEE - POUSSIN	"	89
	1°.- Sumas de Fourier	"	89
	2°.- Sumas de Fejer	"	90
	3°.- Sumas de De La Valleé - Poussin	"	91
B.-	ESTUDIO DE $E_n(f)$ PARA $f \in Lip_\alpha$	"	91
	Caracterización de las funciones de clase Z	"	94
C.-	PROPIEDADES DE LOS POLINOMIOS DE MEJOR APROXIMACION	"	95
VIII.-	TRANSFORMADA DE FOURIER Y FUNCIONES		
	ENTERAS DE TIPO EXPONENCIAL	"	101
A.-	GENERALIDADES SOBRE TRANSFORMADAS DE FOURIER	"	101
B.-	FUNCIONES ENTERAS DE TIPO EXPONENCIAL	"	102
	Transformación de Borel - Laplace	"	102
	Fórmula de reciprocidad	"	104
	Aplicación de la transformación de Borel - Laplace	"	104
	Teorema de Fourier - Paley - Wiener	"	105
C.-	APLICACIONES DEL TEOREMA DE FOURIER - PALEY - WIENER	"	106
	1°) Extensión de la transformada de Fourier a funciones $L^2(a,b)$		
	y $L^2(-\infty, \infty)$	"	106
	2°) Construcción de funciones indefinidamente derivables	"	107



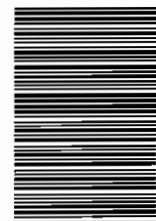
*Impreso en los talleres del Departamento
de Biblioteca y Publicaciones de la Fa-
cultad de Ciencias Exactas y Naturales.*

CURSOS Y SEMINARIOS DE MATEMATICA

- | | | |
|---------------|--|----------------------------|
| Fascículo 1. | Matemática y física cuántica | Laurent Schwartz |
| Fascículo 2. | Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert | Mischa Cotlar |
| Fascículo 3. | Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbólicas. Seminario dirigido por | Alberto P. Calderón |
| Fascículo 4. | Propiedades en el contorno de funciones analíticas | Alberto González Domínguez |
| Fascículo 5. | Teoría constructiva de funciones | Jean Pierre Kahane |
| Fascículo 6. | Algebras de convolución de sucesiones, funciones y medidas sumables | Jean Pierre Kahane |
| Fascículo 7. | Nociones elementales sobre núcleos singulares y sus aplicaciones | Juan Carlos Merlo |
| Fascículo 8. | Introducción al estudio del problema de Dirichlet | Esteban Vági |
| Fascículo 9. | Análisis armónico en varias variables. Teoría de los espacios HP | Guido Weiss |
| Fascículo 10. | Probabilidades y estadística | Roque Carranza |

PEDIDOS:

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Biblioteca y Publicaciones
Perú 272 - Casilla de Correo 1766
Buenos Aires - Argentina



44473E1