ISSN 1853-709X

Fascículo 6

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

Jean Pierre Kahane

Algebras de convolución de sucesiones, funciones y medidas sumables

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 6

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

FASCICULO 6

cursos
y seminarios
de matemática

Jean Pierre Kahane

ALGEBRAS DE CONVOLUCION DE SUCESIONES, FUNCIONES Y MEDIDAS SUMABLES

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES — DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
1961

INTRODUCCION

En este seminario se tratarán algunas álgebras de funciones importantes para el análisis armónico; en particular:

- el álgebra $A(T)$ de las funciones suma de series trigonométricas absolutamente convergentes.
- el álgebra $A(Z)$ de los coeficientes de Fourier de funciones sumables sobre el círculo.
- el álgebra $B(Z)$ de los coeficientes de Fourier - Stieltjes de las medidas acotadas sobre el círculo.

Respecto a $A(T)$, los estudios fundamentales se remontan a Wiener ([A]). Dos problemas importantes, propuestos por P. Levy en [1], permanecieron largo tiempo sin solución.

P r i m e r p r o b l e m a . Es evidente que las trasladadas de una $f \in A(T)$ pertenecen a $A(T)$. ¿Existirán otras permutaciones $t \to \varphi(t)$ distintas de las traslaciones, tales que para toda $f \in A(T)$ se cumpla $f(\varphi) \in A(T)$?

S e g u n d o p r o b l e m a . Se demuestra ([A], [1]) que toda función analítica de una $f \in A(T)$ pertenece a $A(T)$. ¿Existirán funciones ϕ no analíticas tales que para toda $f \in A(T)$ se cumpla $\phi(f) \in A(T)$?

El primer problema fué resuelto por Beurling y Helson ([2]); el segundo por Katznelson ([5]). Colaboradores diversos ([6], [7], [8], [10]) resolvieron problemas análogos en las álgebras $A(Z)$, $B(Z)$, en álgebras similares definidas sobre otros grupos abelianos localmente compactos y en ciertas sub-álgebras o álgebras cocientes.

Otro problema fué resuelto aún más recientemente por Malliavin ([11]). Se trata de la estructura de los ideales de $A(T)$: ¿Todo ideal cerrado de $A(T)$ será intersección de los ideales maximales que lo contienen? La respuesta es negativa.

- - -

Se supondrán conocidos los elementos de la teoría de los espacios de Banach (normas de operadores lineales, Hahn - Banach, compacidad débil en el dual, gráfico cerrado), y las propiedades más clásicas de las series de Fourier (Teorema de Féjèr); llegado el caso, nos referiremos a [B] ò [C].

- - -

Las referencias para los diferentes capítulos son las siguientes:

capítulo:	I y II	-	[C]	y	[A]
"	III	-	[2]		
"	IV	-	[4]		
"	V	-	[5]		
"	VI	-	[6]	y	[8]
"	VII	-	[7]		
"	VIII	-	[12]		

- - -

I.- ALGEBRAS DE BANACH

§1.- ALGEBRAS DE BANACH.

Daré hoy generalidades sobre álgebras de Banach (B - álgebras); esencialmente voy a recordar los elementos de la teoría de Gelfand, que él llamó teoría de "anillos normados".

Una B - álgebra es un espacio de Banach - vectorial normado y completo que además es un álgebra; es decir, está munida no sólo de las operaciones vectoriales - suma y multiplicación por escalares - sino también de un producto interno que satisface las leyes usuales de distributividad con respecto a la suma y de asociatividad.

Si A es un álgebra de Banach, (a, b, c) en A

$$a(b + c) = ab + ac \quad y \quad (b + c)a = ba + ca$$
$$a(bc) = (ab)c = abc \quad y \quad (\ell a)b = a(\ell b) = \ell(ab)$$

para todo ℓ escalar.
(Tomaremos un cuerpo de escalares que salvo indicación en contra serán los números complejos C) y que está relacionado con la norma por la desigualdad de Gelfand :

$$||ab|| \leq ||a|| \, ||b|| \qquad (a,b) \text{ en } A .$$

Nos ocuparemos generalmente de álgebras conmutativas (ab = ba , (a,b) en A) y con unidad e (ea = a , (a) en A) aunque gran parte de la teoría se aplica sin esas restricciones.

§2.- EJEMPLOS.

Daré ahora dos ejemplos naturales. El primero es el álgebra C(K) de las funciones continuas de un espacio compacto K . La suma y producto se efectuan punto a punto y la norma es la usual del supremo o máximo:

$$||f|| = \sup \left\{ |f(t)| \; , \; t \text{ en } K \right\}$$

El segundo ejemplo (típico del caso no conmutativo) es el de los operadores lineales con tínuos de un espacio de Banach E : $B(E)$. Se sabe que es un espacio de Banach con la suma punto a punto y la norma usual:

$$||T|| = \sup \left\{ ||Tx|| \quad ; \quad ||x|| \leq 1 \right\}$$

y el producto de composición: $(ST)x = S(Tx)$; (x) en E.

$$(||(ST)x|| = ||S(Tx)|| = ||S|| \, ||Tx|| = ||S|| \, ||T|| \, ||x|| ,$$

o sea

$$||ST|| = ||S|| \, ||T||) .$$

En ambos ejemplos se cumple pues la desigualdad de Gelfand .

(N o t a : si un espacio de Banach A tiene también un producto interno que lo hace un álgebra con unidad e y ese producto interno es contínuo, puede siempre introducirse una nueva norma, equivalente a la anterior, en la cual se cumple la desigualdad de Gelfand , y en la que $||e|| = 1$. Basta definir:

$$|||a||| = \sup \left\{ ||ax|| \quad ; \quad ||x|| = 1 \right\}$$

Es decir, considerar a los elementos del álgebra como operadores lineales a : $x \longrightarrow ax$. Puesto que $||ax|| \leq K \, ||a|| \, ||x||$, la nueva norma cumple $||a|| \leq |||a||| \leq K \, ||a||$.)

§3.- CARACTERES Y ESPECTRO DEL ALGEBRA

Se llama c a r á c t e r de una B – álgebra A a todo homomorfismo de A sobre los números complejos; H es un carácter significa

$$H(mx + ny) = mH(x) + nH(y) \quad ; \quad H(xy) = H(x) \, H(y) \quad ; \quad H \neq 0$$

Un carácter es en particular una funcional lineal. Veamos que es contínua – es decir, pertenece al espacio dual o conjugado A' de A – y que su norma es uno.

Para ello supongamos que hay un x en A tal que $||x|| < 1$ y $|H(x)| = 1$. La série $x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ cumple la condición de Cauchy , por ser $||x^n|| \leq \leq ||x||^n$ y por ser completo el espacio define un elemento $y = \sum_1^\infty x^n$, que por la continuidad del producto satisface $xy + x - y = 0$. Aplicando H : $H(x) \, H(y) + H(x) - H(y) = 0$, lo cual da $1 = 0$ si $|H(x)| = 1$. Tampoco puede ser $|H(x)| > 1$, pues se reduce al caso anterior tomando en vez de x , $\dfrac{x}{H(x)}$.

Por lo tanto $|H(x)| < 1$ y $||H|| = \sup \left\{ |H(x)| \; ; \; ||x|| < 1 \right\} \leq 1$.

Si además hay unidad e y $H(ex) = H(e) \, H(x) = H(x)$ entonces $H(e) = 1$ con

$||e|| = 1$. En resumen $||H|| = 1$.

Así pues, el conjunto de todos los caracteres del álgebra A es una parte de la esfera unitaria de A' , que se llamará el espectro de A ; $Sp(A) =$ carac.de A. Todo limite débil de caracteres (es decir, convergencia puntual en A) es un carácter, pues $Ha(xy) = Ha(x)\, Ha(y)$ y $Ha(x) \to H(x)$; $Ha(y) \to H(y)$ implica $H(xy) = H(x)\, H(y)$ y $Ha(e) = 1$ implica $H(e) = 1$, etc.

Por lo tanto el espectro de A es una parte cerrada de la esfera unitaria de A' en la topología débil, y como dicha esfera es debilmente compacta, resulta $Sp(A)$ debilmente compacto.

(N o t a : si no hay unidad, puede ser $\lim Ha = 0$. En tal caso $S_p(A) \cup \{0\}$ es debilmente compacto y por lo tanto $Sp(A)$ es debilmente localmente compacto.)

§4.- TRASFORMACION DE FOURIER - GELFAND .

Al espacio compacto $Sp(A)$ podemos asociarle, según el ejemplo primero, el álgebra de Banach $C(S_p(A))$ de sus funciones complejas contínuas.

Vamos a definir ahora un homomorfismo de A en $C(Sp(A))$.

A cada x de A hacemos corresponder la función $\hat{x}$ de dominio $Sp(A)$ mediante $\hat{x}(H) = H(x)$, H en $Sp(A)$.

Como cada H es un homomorfismo, la correspondencia T : $A \to C(Sp(A))$ $Tx = \hat{x}$ es un homomorfismo:

$$T(x + y)\,(H) = H(x + y) = H(x) + H(y) = \hat{x}(H) + \hat{y}(H)$$

o sea $T(x + y) = T(x) + T(y)$ y del mismo modo $T(ax) = aT(x)$ y $T(xy) = T(x)T(y)$. T es también contínua, y más aún, decrece normas, pues como $||H|| = 1$, es $|\hat{x}(H)| = |H(x)| \leq ||x||$.

T puede llamarse la t r a n s f o r m a d a d e F o u r i e r - G e l f a n d .

La imágen de A en $C(Sp(A))$, $T(A) = \hat{A}$ es pues una subalgebra separadora, pues evidentemente si $H_1 \neq H_2$ hay un x tal que $\hat{x}(H_1) \neq \hat{x}(H_2)$ y por lo tanto hay un y en A tal que $\hat{y}(H_1) = 0$, $\hat{y}(H_2) = 1$. Es sabido que en un espacio compacto K toda familia separadora de funciones complejas contínuas generan como topología débil la misma topología inicial de K . Por lo tanto la topología de

Sp(A) puede definirse tambien como la mas débil que hace continuas a las $\hat{x}$, $\forall x$ en A .

§5.- ESPECTRO DE UN ELEMENTO.

Se llama espectro de un elemento x de una B - álgebra A con unidad (no confundir con espectro de A) al conjunto de todos los números complejos z tales que $x - z.e$ no tiene inverso en A .

(Así en el ejemplo C(K) el espectro de una función es su rango, y en el ejemplo B(E) es la definición usual de espectro de un operador).

Si el álgebra no es conmutativa podrá hablarse de inverso a izquierda o a derecha, y dar definiciones correspondientes de espectro, pero no nos ocuparemos de eso.

Estudiaremos entonces los elementos inversibles de A . e es inversible: $e^{-1} = e$. Todo elemento que esté bastante cerca de e es inversible, pues si:

$$||a|| < 1 \quad , \quad e + a + a^2 + \dots \text{ converge y } (e - a)(\sum_0^{\infty} a^n) = e$$

o sea existe $(e - a)^{-1} = \sum_0^{\infty} a^n$, y si $a \to 0$ entonces $(e - a)^{-1} \to e$.

Asimismo se puede ver que si x es inversible, todos los elementos que están bastante cerca de x lo serán también, es decir, los elementos inversibles forman un conjunto abierto; en efecto, si a es pequeña, será:

$$(x - a)^{-1} = x^{-1}(e - x^{-1}a)^{-1} \quad ,$$

y el segundo factor de la derecha existe si $||x^{-1}a|| < 1$.

Además, si $a \to 0$, entonces $(x-a)^{-1} \to x^{-1}$, es decir, la inversión es una operación continua.

Aplicando esto a $x - ke$ se ve que si $(x-ke)^{-1}$ existe, y $|k_1 - k|$ es pequeño, también existe $(x - k_1e)^{-1}$ de modo que el complemento del espectro de x es abierto. Y si $|k| > ||x||$, existe $(x-ke)^{-1} = 1/k(x/k - e)^{-1}$, de modo que el espectro de x está contenido en el círculo de radio $||x||$.

En resumen, el espectro de un elemento es un subconjunto compacto del plano complejo.

Además, para $k \to \infty$, es $(x - ke)^{-1} = 1/k(x/k - e)^{-1} \to 0$.

Indicaremos con Sp(x) el espectro de x .

§6.- TEOREMA DE GELFAND - MAZUR.

Vamos a demostrar ahora que los elementos de una B - álgebra tienen sus espectros no vacíos, lo cual es el resultado menos trivial de esta teoría.

Hemos visto que si $\|x^{-1}a\| < 1$ (para x inversible) , $x - a$ es inversible y

$$(x - a)^{-1} = x^{-1}(e - x^{-1}a)^{-1} = x^{-1}\sum_0^\infty A_n a^n$$

En particular, si $x - k_o e$ es inversible y ponemos $a = (k - k_o)$ e con $|k-k_o|$ pequeño, será inversible $x - ke$ con

$$(x - ke)^{-1} = \sum_0^\infty A_n (k - k_o)^n .$$

Estas series de potencias a coeficientes en A permiten desarrollar una teoría de funciones analíticas de variable compleja y rango en un espacio de Banach . Para no hacer uso de esa teoría, sea x' un elemento cualquiera del dual A' de A , y representando por $\langle x', a\rangle$ el valor de x' en el a de A se tiene

$$\langle x', (x - ke)^{-1}\rangle = \sum_0^\infty \langle x', A_n\rangle (k - k_o)^n = F(k)$$

por la linealidad y continuidad de x' , y esta $F(k)$ es una función analítica usual en un entorno de k_o . (Nota: se puede calcular directamente la derivada de $F(k) = \langle x', (x-ke)^{-1}\rangle$ por la continuidad de la inversión, y dá $dF(k)/dk = \langle x', (x - ke)^{-2}\rangle$). $F(k)$ es pues holomorfa para k fuera de $S_p(x)$ y tiende a cero para $k \to \infty$. Si fuera vacío $Sp(x)$, el teorema de Liouville implica que $F(k) \equiv 0$, y como esto vale para cualquier x' en A' , el teorema de Hahn - Banach implica que $(x - ke)^{-1} = 0$ para cada k , lo que es absurdo, pues cero no es el inverso de ningún elemento.

<u>Sp(x) = rango de su transformada de Fourier - Gelfand</u> .

Para demostrar esto hay que estudiar los ideales maximales del álgebra. Sea h un caracter, h en $Sp(A)$, y M su núcleo $M = \{x \in A/h(x) = 0\}$. M es un ideal propio (es decir, diferente de A) maximal (bilátero aún en el caso no conmutativo, pero nos limitaremos a álgebras conmutativas con unidad) y cerrado.

Que es un ideal propio cerrado es consecuencia de que h es un homomorfismo no nulo continuo; $M = h^{-1}(0)$; que es maximal resulta de que el rango de h es C , cuyos únicos ideales son $\{0\}$ y C , y si hay en A un ideal $N \supset M$ es $h(N)$ un ideal de C .

Veamos recíprocamente que todo ideal maximal es núcleo de un carácter. En primer lugar, si I es un ideal propio cualquiera, la distancia de la unidad e a I es

1 . En efecto, sabemos que si $||e - a|| < 1$, $e - (e-a) = a$ es invertible, y por lo tanto $a \notin I$. Por otra parte $0 \in I$, y $||0 - e|| = 1$.

Por lo tanto la clausura de un ideal propio es un ideal propio mayor y de allí todo ideal máximal es cerrado.

Sea pues I un ideal maximal; por ser un subespacio cerrado de A , será A/I un espacio de Banach con la norma: $||a+I|| = \inf \{ ||a+i|| / i \in I \}$. Es también un álgebra de Banach pues $||(a+I)(b+I)|| = ||ab+I|| = \inf_{i \in I} ||ab+i|| \leq$ $\leq \inf_{ij \in I} ||ab + ib + aj + ij|| \leq \inf_{i \in I} ||a+i|| \inf_{j \in I} ||b+j|| = ||a+I|| \, ||b+I||$ (hasta ahora no se usó que I es maximal) .

En A/I no hay ideales salvo $\{0\}$ y A/I , pues si hubieraotro su imagen inversa en A estaría propiamente comprendida entre I y A , absurdo si I es maximal. Además A/I tiene unidad $e + I$.

Pero un álgebra S con unidad y sin otros ideales que 0 y A/I , es un cuerpo, pues si algún elemento $a \neq 0$ no es inversible, entonces aS es un ideal diferente de 0 y S .

Aplicando el teorema de Gelfand - Mazur , si S es una B-álgebra , para cada a de S existe por lo menos un k tal que $a - ke$ no es inversible. Si S es además un cuerpo, eso significa que $a - ke = 0$, el número k es único y evidentemente la correspondencia $g : a \to k$ es un isomorfismo entre S y C .

Un álgebra de Banach que es un cuerpo es isomorfa al cuerpo de los números complejos.

En el caso general, llamando p al homomorfismo de A sobre A/I , tenemos en resumen que si I es maximal A/I es un cuerpo y $h = g_o p$ es un carácter de A cuyo núcleo es I .

El espectro del álgebra puede definirse también como el conjunto de todos los ideales maximales (a partir de lo anterior).

Sea ahora $\hat{x} = Tx$ la transformación de Fourier - Gelfand de $x \in A$. $\hat{x}(h)=0$ para algún carácter h si y sólo si 0 está en $Sp(x)$

En efecto, si $h(x) = 0$, x no es inversible por estar en el ideal propio $h^{-1}(0)$. Recíprocamente, si x no es inversible, xA es un ideal propio, y si M es un ideal maximal que contiene a xA , y h es el carácter que le corresponde , entonces $\hat{x}(h) = 0$. M existe por Zorn , ya que evidentemente es inductivo superiormente el conjunto de los ideales propios que contienen a xA .

Aplicando esto a $x - ke$, resulta no ser inversible si y sólo si para un carácter h se cumple: $h(x - ke) = 0$, o sea $\hat{x}(h) = k$.

Hemos demostrado así que $Sp(x)$ coincide con el rango de $\hat{x}$.

Al mismo tiempo obtenemos que $\hat{x}$ es idénticamente nula si y sólo si x está en todos los ideales maximales de A. La transformación de Fourier - Gelfand será pues un monomorfismo (biunívoca, o fiel) si y sólo si la intersección de todos los ideales maximales de A (llamada el r a d i c a l de A) se reduce a 0. En tal caso, A se dice s e m i s i m p l e.

§7.- TEOREMA DE WIENER - LEVY.

Como fácil corolario de lo anterior obtenemos una importante propiedad de la transformada de Fourier - Gelfand. Supongamos que x es tal que $\hat{x}$ no se anula en ningún punto de $Sp(A)$. Hemos visto que entonces (y sólo entonces) x es inversible y evidentemente $(\widehat{x^{-1}}) = (\hat{x})^{-1}$ de modo que:

El álgebra de funciones $\hat{A} = T(A)$ contiene la inversa de toda función de A que no se anula.

Veremos que eso es la traducción abstracta de un teorema de Wiener (Si una serie de Fourier absolutamente sumable no se anula, la función inversa es representable por una serie de Fourier absolutamente sumable), que es la forma primera de los teoremas tauberianos de Wiener

Esta propiedad de $\hat{A}$ de ser cerrado para la inversión cuando ésta tiene sentido, puede generalizarse mucho.

Para ello recordemos que la integral de Riemann de una función $x(k)$ de variable compleja y rango en un espacio de Banach, a lo largo de una curva simple cerrada D se define por límite de sumas como en el caso de funciones numéricas, y si $x(k)$ es contínua existe por argumentos análogos. Además si x' es una funcional lineal contínua se cumple evidentemente $\langle x', \int_D x(k)\, dk \rangle = \int_D \langle x', x(k) \rangle\, dk$. Sea ahora x un elemento del álgebra de Banach conmutativa y con unidad A, y sea $F(k)$ una función compleja analítica en un entorno de $Sp(x)$. Si D es una curva simple cerrada contenida en ese entorno y que contiene en su interior a $Sp(x)$ sin cortarlo, entonces $x - ke$ es inversible para k en D y existe la integral de Riemann

$$\frac{1}{2\pi i} \int_D F(k)\,(x - ke)^{-1}\, dk = y \quad , \quad y \in A .$$

Para todo carácter $h \in Sp(A)$ valdrá entonces

$$\hat{y}(h) = \frac{1}{2\pi i} \int_D F(k)(\hat{x}(h)-k)^{-1}\, dk = F(\hat{x}(h))$$

por la fórmula integral de Cauchy , y en resumen:

$\hat{A}$ es cerrado para funciones analíticas, en el sentido que, si $\hat{x} \in \hat{A}$ y $F(k)$ es analítica en un entorno del rango de $\hat{x}$, entonces $F(\hat{x}) \in \hat{A}$.

Este es el teorema de Wiener – Lévy (que para $F(k) = 1/k$ dá el caso particular anterior), que permite el cálculo simbólico en $\hat{A}$ con funciones analíticas.

§8.- ESTRUCTURAS EQUIVALENTES DE ALGEBRAS DE BANACH SEMI-SIMPLES.

Consideremos dos álgebras de Banach A_1 y A_2 , algebraicamente isomorficas, cada una semi - simple. Podemos identificar $\hat{A}_1$ y $\hat{A}_2$. Vamos a probar que las aplicaciones $A_1 \xrightarrow{(I)} A_2$ y $A_2 \xrightarrow{(I^{-1})} A_1$ que definen el isomorfismo son continuas; es decir, A_1 y A_2 tienen estructuras equivalentes.

Basta emplear el teorema del gráfico cerrado. Supongamos, para cada t que.

$$x_1(t) \xrightarrow{(I)} x_2(t)$$

y que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tienen igual imágen de Fourier - Gelfand

$$\hat{x}_1(t) = \hat{x}_2(t)$$

Además supongamos que $x_1(t)$ tiende a x_1 en A_1 , y $x_2(t)$ tiende a y_2 en A_2 , cuando $t \to t_0$. Entonces $\hat{x}_1(t)$ tiende uniformemente a $\hat{x}_1$, y $\hat{x}_2(t)$ a $\hat{y}_2$. Así pues $\hat{x}_1 = \hat{y}_2$, y por semi simplicidad resulta $x_1 \xrightarrow{(I)} y_2$.

II.- ALGEBRAS ESPECIALES

Comenzaré dando los ejemplos de álgebras de Banach con que vamos a trabajar.

§1.- EL ALGEBRA ℓ^1 .

El álgebra ℓ^1 , está formada por las sucesiones de números complejos $a = \{a_n\ ,\ -\infty < n < \infty\}$; sumables: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$, con la norma $||a|| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$ que como es bien sabido hace de ℓ^1 un espacio de Banach , con la suma y el producto escalar definidos término a término.

Si definimos la convolución de dos sucesiones, $a = \{a_n\}$ y $b = \{b_n\}$, como la sucesión $c = \{c_n\}$ tal que $c_n = \sum_{m+p=n} a_m b_p$, y escribimos $c = a*b$, esta convolución es un producto que hace de ℓ^1 una B - álgebra conmutativa con unidad.

Que se cumplen las propiedades algebraicas es evidente. La unidad es $e = \{e_n\} = \{\delta_{n,o}\}$, con $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$. Se tiene $||e|| = 1$.

La desigualdad de Gelfand vale pues:

$$\sum_n |c_n| \leqslant \sum_n \sum_{m+p=n} |a_m|\ |b_p| = \sum_m \sum_p |a_m|\ |b_p| \quad , \text{ o sea } ||a*b|| \leqslant ||a|| . ||b|| .$$

Ahora buscaremos el espectro $Sp(\ell^1)$, es decir los ideales maximales. Para e llo observemos que esta álgebra tiene un generador, es decir un elemento u tal que los polinomios en u y u^{-1} (si éste existe) son densos en ℓ^1 , o sea que la mínima subálgebra cerrada de ℓ^1 que contiene a u y e (y a u^{-1} si existe) es ℓ^1 .

En efecto, tomemos $u = \{u_n\} = \{\delta_{n,1}\}$. Es inmediato que $u^{-1} = \{\delta_{n,-1}\}$ y en general $u^p = \{\delta_{n,p}\}$, para todo p entero, con $u^o = e$, y además $||u^p|| = 1$. Entonces todo elemento $a = \{a_n\} \in \ell^1$ puede expresarse $a = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n u^n$.

Sea ahora h un carácter y calculemos su valor en u y u^{-1} .

$$|h(u)| \leqslant ||h||\ ||u|| = 1 \quad ; \quad |h(u^{-1})| \leqslant ||h||\ ||u^{-1}|| = 1 \quad ; \quad h(u^{-1}) = (h(u))^{-1} \quad ,$$

de donde $|h(u)| = 1$ o sea $h(u) = e^{it}$; con $0 \leqslant t < 2\pi$.

Para un elemento cualquiera del álgebra $a = \{a_n\}$ será :

$$h(a) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n h(u^n) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

Recíprocamente, para cada t real la función

$$a \longrightarrow \hat{a}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

es un carácter, y es inmediato que los caracteres están en correspondencia biunívoca con los números reales módulo 2π : $R/2\pi Z$, o sea con la circunferencia T de radio 1. Ponemos pues $Sp(\ell^1) = T$.

La transformada $\hat{a}$ de Fourier - Gelfand de un elemento a de ℓ^1 es pues su transformada de Fourier usual, que sabemos es contínua cuando T tiene la topología usual. Por lo tanto la topología usual es más fina que la topología canónica de T como espectro de ℓ^1 (ver clase I), y por compacidad ambas coinciden.(1)

Llamaremos $A(T)$ al álgebra de las funciones transformadas de ℓ^1, es decir de las funciones suma de series trigonométricas absolutamente convergente. Los idéales maximales de ℓ^1 están en correspondencia biunívoca con los de $A(T)$, y estos están formados, cada uno, por las funciones que se anulan en un punto fijo. El teorema de Wiener - Lévy dice que toda función analítica de una función de $A(T)$ está en $A(T)$, es decir, es también la suma de una serie trigonométrica absolutamente convergente.

§2.- EL ALGEBRA ℓ^1_ω.

Una extensión de este ejemplo debida a Beurling, es la de las sucesiones sumables con respecto a cierto peso.

Aquí un peso ω es una sucesión $\{\omega_n\}$ de números positivos, y el álgebra ℓ^1_ω está formada por aquellas sucesiones tales que sea finito el número:

$$||a||_\omega = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| \omega_n$$

Esta es evidentemente una norma, con tal que los ω_n sean estrictamente positivos, y el mismo razonamiento que para ℓ^1 muestra que es completa.

Sea como antes $u^p = \{\delta_{n,p}\}$; $u^p \in \ell^1_\omega$ y $||u^p||_\omega = \omega_p$. Entonces: $\omega_{p+q} = ||u^{p+q}|| \leq ||u^p|| \; ||u^q|| = \omega_p \omega_q$ si es que se cumple la desigualdad de Gelfand, para el producto de convolución.

(1) Como además se sabe que $\hat{a}(t) \equiv 0$ sí y sólo si $a = 0$ $(0 \in \ell^1)$, el homomorfismo $a \longrightarrow \hat{a}$ es biunívoco, y ℓ^1 es semi simple.

Veamos que la condición $\omega_{p+q} \leq \omega_p \, \omega_q$ es también suficiente para que se cumpla la desigualdad de Gelfand :

$$||a*b||_\omega = \sum_n \Big| \sum_{m+p=n} a_m b_p \Big| \, \omega_n \leq \sum_m \sum_p |a_m \omega_m| \, |b_p \omega_p| = ||a||_\omega \, ||b||_\omega$$

Con lo cual se demuestra que en este caso la convolución de dos elementos de ℓ^1_ω está en ℓ^1_ω y en resumen ésta es un álgebra de Banach .

ℓ^1_ω tiene unidad $e = \{\delta_{n,0}\}$ ($||e|| = 1$ cuando $\omega_0 = 1$) y tiene un generador: $u = \{\delta_{n,1}\}$.

Sea h un carácter del álgebra. Para todo p , $|h(u^p)| = |h(u)|^p \leq \leq ||u^p|| = \omega_p$. Para todo $p > 0$ $|h(u)| \leq \omega_p^{1/p}$, y por lo tanto $|h(u)| \leq \leq \inf\limits_{p>0} \omega_p^{1/p} = r$. Para todo $p < 0$, $|h(u)| \geq \omega_p^{1/p}$, y por lo tanto $|h(u)| \geq \sup\limits_{p<0} \omega_p^{1/p} = s$.

Puesto que $\omega_{2p}^{1/2p} \leq \omega_p^{1/p}$, vale también $r = \liminf\limits_{p\to\infty} \omega_p^{1/p}$, $s = \limsup\limits_{p\to-\infty} \omega_p^{1/p}$. Ya sabemos que $s \leq r$; en efecto, ℓ^1_ω no es un cuerpo, pues tiene por lo menos un carácter. Eso se puede también averiguar elementalmente: para cada $p > 0$ y $q > 0$,

$$1 \leq \omega_0 = \omega_{-pq+qp} \leq (\omega_{-q})^p (\omega_p)^q \quad \text{pues} \quad \omega_p^{1/p} \leq \omega_{-q}^{-1/q} \quad ,\text{y} \quad r \geq s.$$

En general, pues, el espectro de u está en el anillo complejo $s \leq |h(u)| \leq r$, que cuando $r = s$ degenera en una circunferencia.

Recíprocamente, si z es un número complejo tal que $s \leq |z| \leq r$, y ponemos $z(a) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$, siendo $a \in \ell^1_\omega$, queda definido un carácter. Entonces $T(\ell^1_\omega)$ son las sumas de series de Laurent absolutamente convergente, con peso ω , en el anillo $s \leq |z| \leq r$.

La misma teoría vale si $\omega_{-n} = \infty$ para $n = 1 , 2 , \ldots$. Entonces $T(\ell^1_\omega)$ son las sumas de Taylor absolutamente convergentes (con peso ω) en el círculo $|z| \leq r$.

§ 3.- LAS ALGEBRAS $L^1(R)$.

Otro ejemplo es el espacio de Banach $L^1(R)$ de las funciones complejas de variable real $f(t)$ tales que $||f|| = \int_R |f(t)| \, dt < \infty$ (o mejor dicho de las clases de tales funciones obtenidas identificando las que difieren en un conjunto de medida nula).

El teorema de Fubini implica que la convolución de dos funciones de $L^1(R)$ definido por $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g(u-t)\, du$, pertenece también a $L^1(R)$, y como

$$||f*g|| = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g(t-u) \right| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\, du \int_{-\infty}^{\infty} |g(t-u)|\, dt = ||f||.||g||.$$

El producto de convolutión convierte a L^1 en un álgebra de Banach conmutativa, aunque sin unidad porque no hay ninguna función $\delta(u)$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, \delta(u-t) du = f(t)$ para toda f de L^1 (si se admitieran medidas, podría usarse como unidad la δ de Dirac).

En estos casos se introduce formalmente una unidad, considerando el espacio de Banach producto $L^1(R) \times C$ (C = escalares) con la norma $||(f,k)|| = ||f|| + |k|$ y el producto $(f,k)(g,j) = (f*g + kg + jf\ ,\ kj)$.

Esto se abrevia llamando δ al par $(o,1)$, y entonces todo par (f,k) se escribe $f + k\delta$, con lo que se cumplen las leyes formales del producto, definiendo $\delta * f = f$.

Es también fácil ver que el espectro de $L^1(R) \times C$ es la recta real R compactificada con un punto: $R \cup \{\infty\}$.

El carácter correspondiente a cada t de R es para $g = f + k\delta$; $\hat{g}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{iut}\, du + k$, y a ∞ corresponde $\hat{g}(\infty) = k$.

Recíprocamente, considerémos un carácter χ . Puesto que $f \rightarrow \hat{f}(\chi)$ es una forma lineal contínua sobre $L^1(R)$, $\hat{f}(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, \alpha_\chi(u)\, du$, $\alpha_\chi \in L^\infty$. Ahora $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$ se puede escribir $\hat{f}(\chi)\, \hat{g}(\chi) = \iint f(u)\, g(v)\, \alpha_\chi(u+v)\, du\, dv$, $(f,g \in L^1(R))$ y por lo tanto $\alpha_\chi(u)\, \alpha_\chi(v) = \alpha_\chi(u+v)$. Integrando respecto a u , vemos que α_χ es una contínua, y es elemental mostrar que $\alpha_\chi(u)$ es cero, o un exponencial imaginario e^{iut} . Por otra parte, $\hat{\delta}(\chi) = 1$. Si $g = f + k\delta$ $(f \in L^1(R))$, se tiene $\hat{g}(\chi) = k$ ó $\hat{g}(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} f(u)\, du + k$. Es decir, no hay otros caracteres que los que ya describimos.

Así pues a cada f de $L^1(R)$ corresponde su transformada usual de Fourier , completada agregándole el valor cero en infinito, con lo cual no deja de ser contínua (por el lema de Riemann - Lebesgue) .

§4.- LAS ALGEBRAS M(R) .

Otro ejemplo es el espacio de Banach $M(R)$ de las medidas complejas de Radón de la recta, acotadas, es decir, las funciones $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$ donde las μ son monótonas no decrecientes acotadas y $\mu_k(-\infty) = 0$.

La norma es $||\mu|| = \sum_1^4 \mu_k(\infty)$. (N o t a : una medida de Radón acotada es una funcional lineal contínua del espacio de Banach - norma del supremo - de las funciones contínuas que tienden a cero en infinito. La norma dada coincide con la norma dual, a menos de un factor).

El producto es la convolución: $(\mu * \tau)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t-u)\, d\mu(u)$. (Para detalles ver A . Weil: l'integration dans les groupes topologiques).

Hay unidad: la medida de Dirac δ , o escalón unitario en el orígen.

Para cada t real obtenemos un carácter $t(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\, d\mu(u)$, pero ahora no se agotan así todos los carácteres.

El álgebra del §3 es una subálgebra de M(R) .

§5.- PROPIEDADES LOCALES DE LAS FUNCIONES DE CLASE A .

Llamaremos en lo sucesivo:

A(T) al álgebra de las sumas de series de Fourier absolutamente convergente, o sea $A(T) = T(\ell^1)$.

A(R) al álgebra, sin unidad, de las transformadas de Fourier de las funciones absolutamente sumables $A(R) = T(L^1(R))$.

$A'(R) = T(L^1(R) \times C) = A(R) + \{ctes\}$.

B(R) al álgebra de las transformadas de Fourier - Stieltjes de las medidas de Radón acotadas.

Diremos que una función pertenece localmente a una de estas álgebras en un punto t cuando coincide con una función de ese álgebra en un entorno de t .

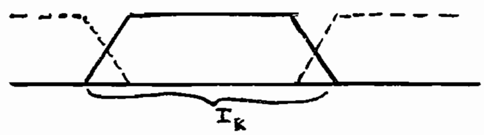
Demostraremos ahora un teorema de Wiener que dice:

Si una función f pertenece localmente a A(T) en cada punto t de T , pertenece a A(T) .

Por supuesto f es contínua y periódica, y la pertenencia local se expresa diciendo que para cada x de T hay un intervalo I_x tal que
$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(x)\, e^{int}$ para cada t en I_x .

Cubramos T con un número finito de esos I_x : $I_1, I_2, \dots, I_m$ por compacidad.

Para cada $k = 1, 2, \ldots, m$ sea d_k una función contínua lineal por intervalos, de soporte contenido en I_k ; d_k :



y tales que $\sum_{k=1}^{m} d_k = 1$ sobre T (es decir una partición de la unidad subordinada a los I_k formada por funciones de esa clase, lo que siempre puede conseguirse).

Cada d_k tiene una serie de Fourier absolutamente convergente, pues es la primitiva de una función simple, o escalera con número finito de escalones, y como es sabido que estos tienen coeficientes de Fourier del orden de $1/n$, los coeficientes de d_k serán del orden de $1/n^2$. Por lo tanto $d_k \in A(T)$.

Como $f(t)\, d_k(t) = (\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(k)\, e^{int})\, d_k(t)$ para todo t de T , y la serie escrita está en $A(T)$ por hipótesis, resulta $f.d_k \in A(T)$ y por lo tanto $f^{\circ} = f(\sum_{k=1}^{\infty} d_k) \in A(T)$.

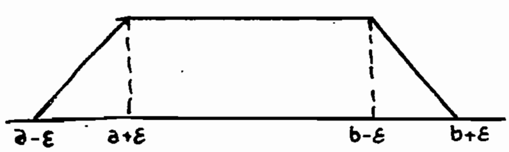
La propiedad de pertenecer localmente a $A(T)$ traduce un cierto modo de continuidad de las funciones, ligada con propiedades interesantes para los analistas clásicos, como el módulo de continuidad, variación, convexidad, etc... .

Veamos ahora que la pertenencia local a cualquiera de las álgebras $A(T)$, $A(R)$ ó $B(R)$ implica la pertenencia local a las otras.

a) $B(R) \Longrightarrow A(R)$ localmente.

Supongamos que f pertenece localmente a $B(R)$ en un punto, es decir, hay un intervalo T tal que para t en T es $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\, d\mu(u)$ para cierta medida acotada μ de Radón.

Sea otra vez d_I una función contínua lineal por intervalos de soporte contenido en I y que vale 1 en un subintervalo no vacío J de I :



Si tomamos $(b,a)/2$ y ε tales que $[a-\varepsilon, b+\varepsilon] \subset I$ y $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \supset J$, podemos construir una función así mediante $d_I = (1/2\varepsilon)\, \varphi_{ab} * \varphi_{\varepsilon}$, donde φ_{ab} es la función característica del intervalo $[a,b]$, y φ_{ε} la de $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Es entonces fácil calcular la transformada de Fourier de d_I :

$$D_I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d_I(t)\, e^{iut}\, dt = \frac{i}{\pi u^2}\,(e^{-ibu} - e^{-iau})\ \text{sen}\ u$$

Puesto que D_I decrece como $1/t^2$, la convolución $\int_{-\infty}^{\infty} D_I(t-u)\, d\mu(u)$ es una función de $L^1(R)$, y entonces, para $t \in J$:

$$f(t) = f(t)\, d_I(t) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\, d\mu(u)\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} D_I(u)\, e^{iut}\, du\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\,(D_I * d\mu)$$

y por lo tanto pertenece localmente a $A(R)$.

b) $A(R) \Longrightarrow A(T)$ localmente.

Supongamos que f pertenece localmente a $A(R)$ en un punto, y sea como antes d_I una "delta truncada" respectiva. Cuando $-\frac{1}{2} \leq v \leq \frac{1}{2}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |D_I(u + iv)|\, du = ||e^{vt}\, d_I(t)||_{A(R)}$$

es uniformemente acotado (tenemos arriba el valor de $D_I(w)$)

Pongamos

$$g(w) = \frac{1}{2\pi}\int_I f(t)\, d_I(t)\, e^{-iwt}\, dt$$

Esto tiene sentido también para w complejo, y $g(w)$ es una función entera. Además

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(u + iv)|\, du = ||e^{vt}\, d_I(t)\, f(t)||_{A(R)}$$

es uniformemente acotada cuando $-\frac{1}{2} \leq v \leq \frac{1}{2}$. Sabiendo (por subarmonicidad de $|g(w)|$) que

$$|g(n)| \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |g(n + u + iv)|\, du\, dv \quad , \quad \text{tenemos}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |g(n)| \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} |g(u + iv)|\, du\, dv < \infty$$

Pero los $g(n)$ son los coeficientes de Fourier de $f.d_I$, y por lo tanto en el intervalo J : $f(t) = f(t)\, d_I(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} g(n)\, e^{int} \in A(T)$.

c) $A(T) \Longrightarrow B(R)$ localmente.

Trivial, pues un desarrollo en serie de Fourier absolutamente convergente es un caso particular de una transformación de Fourier - Stieltjes .

§6.- LA ALGEBRAS $L^1(T)$ Y $M(T)$.

En §3 y §4 consideramos, en vez de funciones o medidas sobre la recta R , funciones sumables o medidas sobre el círculo T . Obtenemos las álgebras $L^1(T)$ y $M(T)$. Consideramos las $f + k\delta$, $f \in L^1(T)$, $k \in C$, δ : medida de Dirac , obtenemos un álgebra con unidad.

Los caracteres de $L^L(T)$ son

$$f \longrightarrow \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int f(t)\, e^{-int}\, dt$$

Denominaremos $A(Z)$ al álgebra de las sucesiones $\hat{f} = \left\{\hat{f}(n)\right\}$, y $A'(Z)$ al álgebra con unidad cuyos elementos son las $\hat{f} + k$, $\hat{f} \in A(Z)$ y $k \in C$.

Ciertos caracteres de $M(T)$ son dados por los coeficientes de Fourier - Stieltjes

$$d\mu \longrightarrow \hat{\mu}(n) = \int e^{-int}\, d\mu(t)$$

Llamaremos $B(Z)$ al álgebra de las sucesiones de cocientes de Fourier - Stieltjes de las medidas $\in M(T)$. Veremos que hay otros caracteres, es decir que Z no es el espectro de $B(Z)$.

III.- CAMBIOS DE VARIABLES EN A(T) .

§1.- PROBLEMA C.V.P. (Cambios de variables permitidos) EN A(T) . GENERALIDADES Y CONDICIONES SUFICIENTES.

Afrontaremos el primer problema de los tres que trataremos en este seminario. A (=A(T)) como siempre será el álgebra de las funciones que son suma de una serie de Fourier absolutamente convergente.

El problema es encontrar las funciones

$$\varphi : T \to T$$

tales que si $f \in A$, también $f(\varphi) \in A$. Llamaremos C.V.P. a esa clase de funciones.

Daremos condiciones suficientes para las $\varphi \in$ C.V.P. .

Lema 1 :
Si $\varphi : T \to T$, $e^{in\varphi} \in A$ *para todo* n *y* $\|e^{in\varphi}\| = O(1)$, *entonces* $\varphi \in$ C.V.P. .

En efecto, si $f \in A$ es :

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

y

$$f(\varphi(t)) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi(t)}$$

Si $h_N(t) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{in\varphi(t)}$ es $h_N \in A$ por hipótesis y

$$\|h_M - h_N\| = \Big\|\sum_{N<|n|\leq M} c_n e^{in\varphi}\Big\| \leq \sup_n \|e^{in\varphi}\| \sum_{N<|n|\leq M} |c_n| \to 0$$

Entonces $\{h_N\}$ es de Cauchy y $\lim h_N \in A$, pero $\lim h_n = f(\varphi)$.

La recíproca también es cierta.

Sea $\varphi \in$ C.V.P. y consideremos la aplicación $\pi : f \to f(\varphi)$. π es lineal del espacio de Banach A en sí mismo (más, es un endomorfismo de A , y se le pueden aplicar los teoremas conocidos, p. ej. Loomis, p. 76).

Lema 2 :

Si $\varphi \in$ C.V.P. , entonces π es contínua y $\|e^{in\varphi}\| = O(1)$ $(n \to \infty)$.

Esto resulta de una variante del teorema de Gráfico Cerrado. Sean E y F dos espacios de Banach y T una aplicación lineal de E en F. Si T es contínua en dos topologías vectoriales Hausdorff más débiles, también lo es en la de las normas.

Indiquemos con $\not\to$ la convergencia fuerte y con $\not\not\to$ la débil. Si $x_n \not\to x$ y $Tx_n \not\to y$, entonces $x \not\not\to x$ y $Tx_n \not\not\to y$, lo que por continuidad implica $Tx_n \not\not\to Tx$ y esto que $y = Tx$ por ser las topologías débiles separadas. De esto se deduce

$$\left.\begin{array}{l} x_n \not\to x \\ Tx_n \not\to y \end{array}\right\} \quad Tx = y$$

que es decir que el gráfico de T es cerrado en la topología producto de las normas, y entonces T es contínua en las topologías fuertes.

Ahora, cuál será la topología más débil a asignar a A, tal que sea evidente que π es contínua?

Como $\varphi(T) \subset T$ es $\|f\|_\infty \geq \|f(\varphi)\|_\infty$, así que π achica normas en la topología ordinaria de las funciones contínuas, que es más débil que la de la clase A, puesto que

$$|f(t)| = \left|\sum c_n e^{int}\right| \leq \sum |c_n| = \|f\|$$

con lo que $\|f\|_\infty \leq \|f\|$.

Por consiguiente, aplicando el teorema de Gráfico Cerrado, π es contínua.

Entonces si $\varphi \in$ C.V.P., es $e^{in\varphi} \in A$ y como $\|e^{int}\| = 1$ y π es contínua (acotada), $\|e^{in\varphi}\| = O(1)$, que es la recíproca del Lema 1.

§2.- PROPIEDADES ESTRUCTURALES. CONCLUSION.

Si I es un intervalo cualquiera de longitud $< 2\pi$, la función $y = x$ en este intervalo, puede ser extendida a una de la clase A (p. ej. puede ser extendida a una función lineal a trozos).

Del hecho que $f(\varphi) \in A$ se sigue que, sobre todo intervalo tal que en él φ toma valores en el intervalo I considerado, $\varphi \in A$ es decir $\varphi \in A$ localmente (todo punto tiene un entorno en el cual φ coincide con alguna función de A).

Por otra parte como $e^{i\varphi(t+2\pi)}$ debe ser igual a $e^{i\varphi(t)}$, resulta que $\varphi(t+2\pi) = \varphi(t) + \nu t$ con ν entero.

Asi que

$$\varphi_1(t) = \varphi(t) - \nu t$$

es periódica y pertenece localmente a A (pues $\varphi(t)$ y νt pertenecen localmente).

Entonces φ es igual a la suma de una parte lineal a coeficiente entero y de una función de A.

Como $||\exp(in\varphi)|| = ||\exp(in\varphi_1)||$, porque la sucesión de coeficientes de Fourier de una es la de la otra trasladada, la búsqueda de las φ se reduce a las φ_1, y el problema consiste en estudiar las $\varphi \in A$ tales que

$$||\exp(in\varphi)|| = O(1) \tag{1}$$

Si φ es una tal función, $\varphi(t - t_o)$ también lo es, porque si

$$\exp(in\varphi(t)) = \sum_j c_{j,n}\, e^{ijt}$$

$$\exp(in\varphi(t-t_o)) = \sum_j c'_{j,n}\, e^{ijt}$$

resulta $c'_{j,n} = c_{j,n}\, e^{-ijt_o}$, así que

$$|c'_{j,n}| = |c_{j,n}|$$

y por lo tanto

$$||\exp(in\varphi(t))|| = ||\exp(in\varphi(t-t_o))||$$

También vale el siguiente

L e m a 1 :
<u>Si</u> φ_1 , $\varphi_2 \in$ C.V.P. , $A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 \in$ C.V.P. <u>con</u> A_1 , A_2 <u>enteros</u>.

En efecto,

$$||\exp(in(A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2))|| \leqslant ||\exp(inA_1\varphi_1)||.||\exp(inA_2\varphi_2)|| \leqslant$$

$$\leqslant ||\exp(in\varphi_1)||^{A_1}\, ||\exp(in\varphi_2)||^{A_2} = O(1) \quad \text{por hipótesis ,}$$

así que para $A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2$ vale (1) .

Para estudiar las propiedades locales de las $\varphi \in$ C.V.P. nos será útil el siguiente

L e m a 2 :

Si $\{f_j\}$ es una sucesión de funciones de A con normas uniformemente acotadas por C , y $\lim f_j = f$ (puntual), entonces f es equivalente a una función de A con norma menor o igual que C .

D e m o s t r a c i ó n :

Si $f_j = \sum c_{n,j}\, e^{int}$, como $||f_j||_\infty \leq ||f_j|| \leq C$ y las constantes son integrables sobre T , resulta que

$$c_{n,j} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_T f_j(t) \quad e^{-int}\, dt \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_T f(t)\, e^{-int}\, dt = c_n$$

por el Teorema de Lebesgue .

Si ahora consideramos las sumas finitas de coeficientes

$$\sum_{-N}^{N} |c_n|$$

es $\sum_{-N}^{N} |c_n| = \lim_j \sum_{-N}^{N} |c_{n,j}|$ de manera que

$$\sum_{-N}^{N} |c_n| \leq C$$

para todo N con lo que $\sum |c_n| \leq C$ y f es igual p.p. a una función de A. (Aquí se usa el hecho que una función está definida p.p. por su serie de Fourier) .

Esto permite demostrar que:

L e m a 3 :

Si una función de C.V.P. se anula en un conjunto E de medida positiva, se anula en todo T .

D e m o s t r a c i ó n :

Si el conjunto E' tiene medida nula, por continuidad de φ , es $\varphi \equiv 0$. Supongamos que med (E') $\neq 0$, y consideremos las funciones

$$f_j = \left(\frac{1 + e^{i\varphi}}{2} \right)^j$$

En E , como $\varphi(t) = 0$, es $f_j = 1$, y en E' , $\varphi(t) \neq 0$ implica que $f_j \rightarrow 0$. Pero entonces $f(t) = \lim f_j(t)$ es la función característica de E .

Además las normas de las f_j están uniformemente acotadas:

$$||f_j|| = ||2^{-j} \sum_k \binom{j}{k} e^{ik}|| \leq 2^{-j} \sum_k \binom{j}{k} ||e^{ik\varphi}|| \leq \sup_k ||e^{ik\varphi}|| < \infty$$

Aplicando el resultado anterior, f debe ser igual a una función de A en ca si todo punto. Pero entonces f no puede ser la función característica de un conjunto de medida positiva con complemento de medida también positiva, ya que todas las funciones de A son contínuas. Resulta el lema 3 .

Finalmente demostraremos que φ debe ser necesariamente una constante.

Para ello debemos utilizar el dual de A . Valgan sobre él las siguientes observaciones.

Se sabe que el dual de ℓ^1 es ℓ^∞ , con el producto escalar dado por :

$$c = \{c_n\} \in \ell^1$$

$$\gamma = \{\gamma_n\} \in \ell^\infty$$

$$\langle c,\gamma \rangle = \sum_n c_n \gamma_{-n}$$

Si μ es una medida sobre T , llamaremos Serie de Fourier de μ a :

$$\mu \sim \sum \gamma_n e^{int}$$

con

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_T e^{-int} d\mu(t)$$

Es evidente que $\{\gamma_n\} = \gamma$ es acotada, porque $|\gamma_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_T |d\mu(t)|$.

Si $f \in A$, es

$$\langle f,\mu \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_T f\, d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_T (\sum c_n e^{int})\, d\mu = \sum c_n \frac{1}{2\pi}\int_T e^{int}\, d\mu = \sum c_n \gamma_{-n}$$

así que coincide con el otro producto escalar.

Como A es un sub-espacio de C (= espacio de contínuas) con una topología más fina, el dual de A contiene al de C y la norma en él es más chica que la norma en el dual de C .

Es fácil demostrar que la norma de una medida μ en A' (= dual de A) es la norma ℓ^∞ de la sucesión de sus coeficientes de Fourier .

Pueden considerarse también como elementos del dual de A a las distribuciones θ cuyos coeficientes de Fourier ($\gamma_n = \langle e^{-int},\theta \rangle$) forman una sucesión de ℓ^∞. Una tal distribución se llamará una Seudo-Medida , y para ellas se definirá:

$$\langle f,\theta \rangle = \sum c_n \gamma_{-n}$$

para cada $f \in A$ (no necesariamente indefinidamente derivable!). Cuando $f \in \mathcal{E}_p$

(= periódicas indefinidamente derivables) este producto escalar coincide con el producto escalar en el sentido de distribuciones[1].

En efecto, si $f \in \mathscr{E}_p$, es

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_T f(t)\, e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_T f'(t)\, \frac{e^{-int}}{in}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_T f^{(p)}(t)\, \frac{e^{-int}}{(in)^p}\, dt$$

asi que $|c_n| = O\left(\frac{1}{|n|^p}\right)$ para todo p , de manera que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |n^p\, c_n| < \infty$$

para todo p , y entonces

$$\sum_{-N}^{N} c_n\, (in)^p\, e^{int} \longrightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\, (in)^p\, e^{int}$$

de donde se deduce que

$$\sum_{-N}^{N} c_n\, e^{int} \longrightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\, e^{int}$$

en la topología de $\mathscr{E}_p$, lo que permite

$$\langle f,\theta\rangle = \langle \sum c_n\, e^{int},\theta\rangle = \sum c_n \langle e^{int},\theta\rangle = \sum c_n\, \gamma_{-n}$$

Finalmente demostraremos que si φ pertenece a A y es un C.V.P. es necesariamente una constante.

Llamemos

$$||\mu||_m = \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|$$

$$||\mu||_{ps} = \sup_m \left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{im\lambda_\nu} \right| = ||\mu||'$$

(= norma de μ como seudo-medida), donde $\mu = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \delta_{\lambda_\nu}$, a_ν real, λ_ν real.

D e f i n i c i ó n :

Una familia finita de n números reales $\{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^{n}$ será Racionalmente Independiente sí y sólo si

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \lambda_\nu = 0 \Longrightarrow A_\nu = 0 \quad \forall \nu (A_\nu = \text{enteros}) \quad .$$

Sea $\{a_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ la familia de los coeficientes de una serie de Fourier unifor-

(1) Que $\mathscr{E}_p \subset A$ resulta de que toda función absolutamente contínua, periódica, con derivada en $L^2(T)$, tiene serie de Fourier absolutamente convergente, aunque aquí también aparece este resultado, ya que $\sum |n^p\, c_n| < \infty$.

memente convergente, pero no absolutamente convergente, por ejemplo $\sum_{1}^{\infty} \frac{e^{in \log n}}{n} e^{int}$ (Zygmund 1 p. 197) .

Para esta $\{a_\nu\}$ llamemos

$$e_n = \inf \frac{||\mu||_{ps}}{||\mu||_m}$$

donde $\mu = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \delta_{\lambda_\nu}$, con $\{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^{n}$ pertenecientes a la familia de las progresiones aritméticas de n términos

$$\lambda_\nu = \theta + \alpha\nu \quad , \quad \nu = 1,2,\ldots,n \qquad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad , \quad -\pi \leq \alpha \leq \pi \ .$$

$$e'_n = \inf \frac{||\mu||_{ps}}{||\mu||_m}$$ $\{\lambda_\nu\}$ perteneciendo a la familia de los conjuntos de n números racionalmente independientes con π .

L e m a 4 :

$$e_n \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty \quad \text{uniformemente en} \quad \alpha \quad y \quad \theta \ .$$

D e m o s t r a c i ó n :

Por la misma definición de los a_ν , es

$$\frac{\sup_x |\sum_{1}^{n} a_\nu e^{i\nu x}|}{\sum_{1}^{n} |a_\nu|} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Si $\lambda_\nu = \theta + \alpha\nu$

$$a_\nu e^{im\lambda_\nu} = a_\nu e^{im\theta} e^{i\nu(m\alpha)} \quad , \text{ por lo que}$$

$$||\mu||_{ps} = \sup_m |\sum_{1}^{n} a_\nu e^{im\lambda_\nu}| = \sup_m |\sum_{1}^{n} a_\nu e^{i\nu m\alpha}| \leq \sup_x |\sum_{1}^{n} a_\nu e^{inx}| =$$

$$= o(\sum_{1}^{n} |a_\nu|) = o(||\mu||_m) \ .$$

L e m a 5 :

$$e'_n = 1$$

D e m o s t r a c i ó n :

Será por el teorema de Kronecker , que dice :

Si la familia $\{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^{n}$ es racionalmente independiente con π , para todo $\varepsilon > 0$ y toda familia $\{\alpha_\nu\}_{\nu=1}^{n}$ arbitraria, existen, N natural y una familia de enteros $\{p_\nu\}_{\nu=1}^{n}$ tales que para todo ν es

$$|\lambda_\nu N - \alpha_\nu - 2\pi p_\nu| < \varepsilon$$

Por continuidad y periodicidad de $e^{i\omega}$, esto implica que para toda familia $\{\alpha_\nu\}$ existe N tal que para todo ν :

(1) $$|e^{i\lambda_\nu N} - e^{i\alpha_\nu}| < \varepsilon \; .$$

Si $\{a_\nu\}_{\nu=1}^{n}$ es una familia cualquiera, escribamos $a_\nu = |a_\nu|\, e^{-i\alpha}$ y entonces por (1) , existe N tal que para todo ν .

$$\left| a_\nu e^{i\lambda_\nu N} - |a_\nu| \right| = |a_\nu| . |e^{i\lambda_\nu N} - e^{i\alpha_\nu}| \leq |a_\nu| . \varepsilon$$

y entonces

$$\left|\,\left|\sum_1^n a_\nu e^{i\lambda_\nu N}\right| - \sum_1^n |a_\nu|\right| \leq \left|\sum_1^n a_\nu e^{i\lambda_\nu N} - \sum_1^n |a_\nu|\right| = \left|\sum_1^n (a_\nu e^{i\lambda_\nu N} - |a_\nu|)\right| \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_1^n |a_\nu|$$

de manera que

$$||\mu||_{ps} = \sup_N \left|\sum_1^n a \; e^{i\lambda_\nu N}\right| = \sum_1^n |a_\nu| = ||\mu||_m$$

Si π_φ es la aplicación de A en A :

$$\pi_\varphi : f \longrightarrow f(\varphi)$$

π_φ^* , su traspuesta, verifica $\pi_\varphi^*(\delta_\lambda) = \delta_{\varphi(\lambda)}$ para todo λ .

Ahora de la continuidad de π_φ (lema 2), sigue la de su traspuesta, vale decir que existe C (>0) tal, que para todo $x' \in A'$ es

$$||\pi_\varphi^*(x')||' \leq C\, ||x'||'$$

en particular

$$C.||\mu||_{ps} = C\, \left|\left|\sum_1^n a_\nu \delta_{\lambda_\nu}\right|\right|_{ps} \geqslant \left|\left| \sum_1^n a_\nu \delta_{\varphi(\lambda_\nu)}\right|\right|_{ps} = ||\sigma||_{ps}$$

(aquí es evidentemente $\sigma = \pi_\varphi^*(\mu)$) .

En las condiciones del lema 4, existe n_o tal que $e_n < \frac{1}{C}$ para $n \geqslant n_o$.
Entonces

$$||\sigma||_{ps} \leq C\, ||\mu||_{ps} \leq C.e_{n_o} ||\mu||_m < ||\mu||_m = ||\sigma||_m$$

es decir

$$||\sigma||_{ps} < ||\sigma||_m$$

para n_o , que no es otra cosa que la negación de la tesis del lema 5. Se obtiene así el siguiente resultado importante:

Existe n tal que para todo par de reales (θ,α) la imágen por φ de todo $\{\lambda_\nu\} = \{\theta + \alpha\nu\}_{\nu=1}^{n}$ es racionalmente dependiente con π ; lo que se traduce por: existen $\{A_\nu\}_{\nu=1}^{n}$ enteros no todos nulos, tales que

$$(2) \qquad A_o\pi + A_1\varphi(\theta+a) + A_2\varphi(\theta+2\alpha) + \dots + A_n\varphi(\theta+n\alpha) = 0$$

donde a priori $A_\nu = A_\nu(\theta,\alpha)$.

Si $\mathcal{F}$ es la familia (numerable) de los conjuntos de $n+1$ enteros no todos nulos, llamemos, para cada $A \in \mathcal{F}$, $A = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$

$$Q(A) = \{(\theta,\alpha) \ / \ \text{se verifica (2) para } A\}$$

Evidentemente si K es el cuadrado de lado 2π ,

$$K = \bigcup Q(A)$$

y como $\operatorname{med}(K) > 0$, existe un $A \in \mathcal{F}$ tal que $\operatorname{med}(Q(A)) > 0$ ($Q(A)$ es medible por ser cerrado). Fijamos A . Sea $J_\alpha = \{\theta \mid (\theta,\alpha) \in A\}$.

Por la definición de medida, existe un conjunto I de medida positiva tal que $\forall \alpha \in I \quad \operatorname{med}(J_\alpha) > 0$.

Ahora, para un α fijo perteneciente a I , llamemos

$$\Psi_\alpha(\theta) = A_o\pi + A_1\varphi(\theta+\alpha) + \dots + A_n\varphi(\theta+n\alpha)$$

Por lema 1, $\Psi_\alpha \in C.V.P.$ y $\Psi_\alpha(\theta) = 0$ en J_α con $\operatorname{med}(J_\alpha) > 0$. Entonces por el lema 3 $\Psi_\alpha \equiv 0$.

Así que $\Psi_\alpha \equiv 0$ para $\alpha \in I$.

Si $\{\gamma_j\}$ son los coeficientes de Fourier de φ y $\{\omega_j^\alpha\}$ los de Ψ_α, que es identicamente nula: $\Psi_\alpha(\theta) = 0 \quad \forall\theta$ resulta, para $j \neq 0$

$$\omega_j^\alpha = (A_1 e^{ij\alpha} + A_2 e^{2ij\alpha} + \dots + A_n e^{nij\alpha})\gamma_j = 0$$

pues

$$\omega_j^\alpha = \int_T (\sum A_\nu\varphi(\theta+\alpha\nu) + A_o\pi)\, e^{-ij\theta}\, d\theta = \sum A_n e^{ij\nu\alpha}\int_T \varphi(u)\, e^{-iju}\, du +$$

$$+ A_o\pi\int_T e^{ij\theta}\, d\theta = \gamma_j(\sum A_\nu e^{\nu ij\alpha})$$

Supongamos que exista $j \neq 0$ tal que $\gamma_j \neq 0$.

Entonces

$$A_1\, e^{ij\alpha} + A_2\, e^{2ij\alpha} + \dots + A_n\, e^{nij\alpha} = 0$$

para todo $\alpha \in I$.

Tomando n valores α_ν, $\nu = 1,\dots,n$ pertenecientes a I y distintos , resulta:

$$\begin{matrix} A_1\, e^{ij\alpha_1} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + A_n\, e^{nij\alpha_1} = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ A_1\, e^{ij\alpha_n} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + A_n\, e^{nij\alpha_n} = 0 \end{matrix}$$

y como

$$\begin{vmatrix} e^{ij\alpha_1} & \dots\dots\dots\dots & e^{ijn\alpha_1} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{ij\alpha_n} & \dots\dots\dots\dots & e^{ijn\alpha_n} \end{vmatrix} = e^{ij\sum\alpha_\nu} \sum_{\xi>\eta} (e^{ij\alpha_\xi} - e^{ij\alpha_\eta}) \neq 0$$

resultaría $A_\nu = 0$, $\nu = 1,\dots,n$ y por lo tanto $A_0 = 0$, contra la hipótesis.

Consecuentemente, $\gamma_j = 0$ para todo $j \neq 0$ por lo que φ es constante.

IV.- FUNCIONES QUE OPERAN EN $A_r(T)$

§1.- MAYORACION DE $\|e^{inf}\|$ Y APLICACION.

Anteriormente tratamos el problema de los cambios de variable permitidos en el álgebra A ; ahora atacaremos el problema de las funciones que operan en esta álgebra. Recordemos que $A\{\omega_n\}$ es la clase de las funciones f tales que $f(t) \sim \sum c_n e^{int}$ con $\sum |c_n| \omega_n < \infty$. Es fácil ver que si $\omega_n = 1 + |n|^p$, entonces las funciones de A son p veces derivables y la derivada de orden p pertenece a A . Si $\omega_n = e^{\varepsilon|n|}$ las funciones de $A\{\omega_n\}$ son las funciones analíticas sobre el círculo unidad que pueden ser extendidas a un anillo con radios $e^{-\varepsilon}$, e^{ε} y tales que sobre los círculos extremos la función extendida pertenece a A . En lo que sigue, $\{\omega_n\}$ es una sucesión de números ≥ 1 $(n=\ldots,-1,0,1,\ldots)$. Necesitamos el siguiente

Lema 1 :

Si dada $f \in A$ se cumple que $\|e^{inf}\| = O(\omega_n)$ $(n \longrightarrow \pm\infty)$, entonces toda $\phi \in A\{\omega_n\}$ opera sobre f , en el sentido de que $\phi(f) \in A$ y, recíprocamente, si para cada $\phi \in A\{\omega_n\}$ se cumple que $\phi(f) \in A$ para una $f \in A$, entonces $\|e^{inf}\| = O(\omega_n)$.

Demostración :

Ver §1 del capítulo anterior; el caso general se trata del mismo modo que el caso $\omega_n \equiv 1$

Por lo visto, será interesante estudiar el orden de crecimiento de $\|e^{inf}\|$ para las funciones $f \in A$. Hace unos dieciocho meses se planteó el siguiente problema: ver si $\|e^{inf}\| = O(n^2)$ para toda f de A a valores reales. Si esto fuese cierto, todas las funciones de la clase $A\{n^2\}$ operarían sobre A ; pero el problema fué resuelto negativamente. El primer intento fué, naturalmente, obtener mayoraciones para $\|e^{inf}\|$; daremos aquí algunos resultados sobre ese tema debidos a Marcinkievicz . (En lo que sigue, A_r será el conjunto de todas las funciones de A a valores reales).

Sea f una función absolutamente continua, periódica, tal que $f' \in L^2$. Entonces $f \sim \sum c_n e^{int}$, $f' \sim \sum in\, c_n e^{int}$ con $\sum n^2 |c_n|^2 < \infty$ por pertenecer f' a L^2 . Entonces

$$\sum_{1}^{\infty} |c_n| \leq \left(\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{1}^{\infty} n^2 \, |c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

empleando la desigualdad de Schwarz , y lo mismo ocurre con $\sum_{-\infty}^{-1}$. Entonces $f \in A$ y $||f|| \leq |C_o| + K\left(\frac{1}{2\pi} \int |f'|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Si f es absolutamente contínua y $f' \in L^2$, entonces

$$||e^{inf}|| \leq 1 + n \left(\frac{1}{2\pi} \int |f'|^2\right)^{\frac{1}{2}} = O(n)$$

ya que el primer coeficiente de la serie de Fourier de e^{inf} que es su valor medio en $[0,2\pi]$ es inferior en módulo a 1 y $(e^{inf})' = inf' e^{inf}$.

Tomemos ahora una función $f \in A_{\gamma}$. La escribiremos de la manera siguiente:

$$f(t) = \sum_{1}^{\infty} r_k \cos(n_k t + \varphi_k)$$

donde los r_k son las amplitudes, n_k las frecuencias y φ_k las fases. Es

(1) $$e^{inf} = \prod e^{inr_k \cos(n_k t + \varphi_k)}$$

$$||e^{inf}|| \leq \prod ||e^{inr_k \cos(n_{kt} + \varphi_k)}||$$

y además, siendo las normas invariantes por traslación y multiplicación de t por un número entero,

$$||e^{inr_k \cos(n_k t + \varphi t)}|| = ||e^{inr_k \cos t}||$$

Usando esta última igualdad vamos a mayorar las normas que figuran en el producto (1) . Empleando la desigualdad

$$||f|| \leq |C_o| + K \left(\frac{1}{2\pi} \int (f')^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

se tiene

$$||e^{i\rho \cos t}|| \leq 1 + K\rho$$

usando que

$$(e^{i\rho \cos t})' = i\rho \,\mathrm{sen}\, t \; e^{i\rho \cos t} \quad .$$

es

$$||e^{inr_k \cos t}|| \leq 1 + Kr_k n$$

y en consecuencia

$$||e^{inf}|| \leq \prod ||e^{inr_k \cos(n_k t + \varphi k)}|| \leq \prod_k (1 + Kr_k n) \quad .$$

Definiremos ahora una sucesión ω_n así :

$$\omega_n = \prod_k (1 + Kr_k n)$$

para $n \geqslant 0$; $\omega_{-n} = \omega_n$.

Entonces (lema 1) cada función de la clase $A\{\omega_n\}$ opera sobre f . Investigaremos el orden de crecimiento de ω_r . Es, en general menor que el de $e^{\varepsilon|n|}$, pues siempre es

$$1 + Kr_k n < e^{Kr_k n}$$

luego

$$\omega_n < \prod_{|k| \leq \mu} (1 + Kr_k n) \; e^{(K \sum_{|k|>\mu} r_k) n}$$

donde $K \sum_{|k|>\mu} r_k$ puede ser tan pequeño como se desea, luego es cierto que $\omega_n = O(e^{\varepsilon|n|})$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Esto significa que una función f analítica sobre el círculo unidad, o más exactamente una función de variable real, periódica y analítica opera sobre cualquier función de la clase A_r , lo que ya sabíamos.

(Notemos que si f es una función analítica sobre la recta y 2π - periódica

$$f(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

se obtiene fácilmente

$$|a_n| \leq K e^{-\varepsilon|n|}$$

para algún $\varepsilon > 0$, luego toda función analítica pertenece a alguna clase $A\{e^{\varepsilon|n|}\}$; ver el curso elemental sobre la teoría constructiva de las funciones). Resumimos:

T e o r e m a 1 :

<u>Para cada función</u> $f \in A_r$, $f \sim \sum r_k \cos(n_k t + \varphi_k)$ <u>existe una clase de funciones indefinidamente derivables,</u> $A\{\omega_n\}$ $(\omega_n = \prod(1 + Kr_k n))$ <u>que opera sobre</u> f <u>y que contiene otras funciones que las analíticas</u>.

Sería entonces interesante hallar una sucesión ω_n que no dependa de la función f , pues de tal modo encontraríamos una clase $A\{\omega_n\}$ que opera sobre A_r. Naturalmente podemos poner $\omega_n = e^{\varepsilon|n|}$, pero así obtenemos nuevamente las funciones analíticas. Podemos plantear el siguiente problema: ¿será posible elegir una sucesión ω_n tal que $e^{\varepsilon|n|} \neq O(\omega_n)$ para cualquier ε , es decir que $\lim_{n\to\infty} \frac{\log \omega_n}{n} = 0$ y tal que para toda $f \in A_r$ sea $\|e^{inf}\| = O(\omega_n)$? Veremos luego que la respuesta es negativa, es decir que para toda sucesión ω_n que no crezca más rápidamente que una exponencial existe una función f , $f \in A_r$, tal que $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\|e^{inf}\|}{\omega_n} = \infty$, o sea que para cada sucesión ω_n tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \omega_n}{n} = 0$$

es falso que la clase $A\{\omega_n\}$ opera sobre A_r .

2.- MINORACION DE $\|e^{inf}\|$ Y APLICACION

Vamos a demostrar ahora algunos lemas.

Sean f , $g \in A$, λ entero. Consideremos la función $f(t)g(\lambda t)$. Evidentemente es $\|f(t)g(\lambda t)\| \leq \|f\|\,\|g\|$. Ahora demostraremos que para cada $f \in A$ es posible elegir λ de tal manera que $\|f(t)g(\lambda t)\|$ sea tan próximo como deseamos a $\|f\|\,\|g\|$. Mas precisamente

Lema 2 :

Límite $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \|f(t)g(\lambda t)\| = \|f\|\,\|g\|$ uniformemente para todas las g de norma acotada por un número fijo (f es fija).

Demostración :

Es posible escribir – dado $\varepsilon > 0$ –

$$f(t) = P_n(t) + R_n(t)$$

donde P_n es un polinomio trigonométrico de grado n y $\|R_n\| < \varepsilon$. Entonces es

$$(2) \quad \|f(t)g(\lambda t)\| \geq \|P_n(t)g(\lambda t)\| - \|R_n(t)g(\lambda t)\| \geq \|P_n(t)g(\lambda t)\| - \varepsilon\|g\|$$

Consideremos el producto $P_n(t)g(\lambda t)$. Los coeficientes de P_n son no nulos sólo entre $-n$ y n , y los de $g(\lambda t)$ son nulos excepto en 0 , $\pm\lambda$, $\pm 2\lambda$

$-\lambda$ $\quad -n \quad 0 \quad n \quad$ λ $\quad 2\lambda$

Tomemos ahora $\lambda \geq 2n + 2$ y consideremos los coeficientes de Fourier del producto $P_n(t)g(\lambda t)$. Si los coeficientes de P_n son p_j , los de $g(\lambda t)$ b_j , el coeficiente de orden m del producto será

$$c_m = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_{m-j}\, b_j$$

Si m es tal que para algún j entero

$$j\lambda - n \leq m \leq j\lambda + n \quad \text{es} \quad c_m = p_{m-j\lambda} \cdot b_{j\lambda}$$

$-\lambda-n \quad -\lambda \quad +\lambda+n \quad -n \quad 0 \quad n \quad \lambda-n \quad \lambda \quad \lambda+n \quad 2\lambda-n \quad 2\lambda$

y en caso contrario $c_m = 0$. En consecuencia

$$\|P_n(t)g(\lambda t)\| = \sum |p_i b_{\lambda j}| = (\sum |p_i|)(\sum |b_{\lambda j}|) = \|P_n(t)\|\,\|g(\lambda t)\|$$

y volviendo a la desigualdad (2)

$$\|f(t)g(\lambda t)\| \geq \|P_n\|\,\|g\| - \varepsilon\|g\| \geq (\|P_n\| - \varepsilon)\,\|g\|$$

pero

$$||P_n|| \geq ||f|| - \varepsilon \quad ,$$

luego

$$||f(t)g(\lambda)|| \geq (||f|| - 2\varepsilon)\ ||g||$$

que es lo que queríamos demostrar.

Pasaremos ahora a acotar $||e^{if}||$ cuando $||f|| \leq r$, $f \in A_r$.

Lema 3 :

$$\sup_{||f|| \leq r, f \in A_r} ||e^{if}|| = e^r$$

Demostración :

Consideremos las funciones f de A_r tales que $||f|| \leq r$. Es fácil ver que $||e^{if}|| \leq e^r$, ya que

$$e^{if} = 1 + if + \frac{(if)^2}{2} + \ldots$$

$$||e^{if}|| \leq 1 + ||f|| + \frac{||f||^2}{2} + \ldots = e^{||f||} \leq e^r$$

entonces el supremo de $||e^{if}||$ para las f de A_r con $||f|| \leq r$ es menor o igual que e^r . Para obtener una desigualdad de sentido contrario tomemos una $\varphi \in A_r$ con $||\varphi|| \leq 1$ y consideremos funciones $f(t)$ de la forma siguiente:

$$f(t) = \frac{r}{N}\left[\varphi(\lambda_1 t) + \varphi(\lambda_2 t) + \ldots + \varphi(\lambda_N t)\right]$$

cuya norma es, evidentemente, inferior o igual a r . Es $e^{if} = \prod_{j=1}^{N} e^{i\frac{r}{N}\varphi(\lambda_j t)}$.

Elegido λ_1 siempre es posible elegir λ_2 de manera que $||e^{i\frac{r}{N}\varphi(\lambda_1 t)} e^{i\frac{r}{N}\varphi(\lambda_2 t)}||$ sea tan cercano como se quiera a $||e^{i\frac{r}{N}\varphi(\lambda_1 t)}||\ ||e^{i\frac{r}{N}\varphi(\lambda_2 t)}||$ (a causa del lema anterior) Eligiendo $\lambda_3, \ldots, \lambda_n$ de manera similar se puede conseguir que $||\prod_{j=1}^{N} e^{i\frac{r}{N}\varphi(\lambda_j t)}||$ esté tan próximo como se desee a $\prod_{j=1}^{N} ||e^{i\frac{r}{N}\varphi(\lambda_j t)}||$. Pero todas las $e^{i\frac{r}{N}\varphi(\lambda_j t)}$ tienen la misma norma, pues son todas el resultado de multiplicar la variable de la misma función $e^{i\frac{r}{N}\varphi(t)}$ por un número entero λ_j . Entonces

$$\prod_{j=1}^{N} ||e^{i\frac{r}{N}\varphi(\lambda_j t)}|| = ||e^{i\frac{r}{N}\varphi(t)}||^N$$

Sea ahora $h(t)$ una función de A tal que el término constante de su serie de Fourier sea nulo, o sea tal que su valor medio en el intervalo $[0,2\pi]$ sea nulo. A causa de eso es

$$||1 + h|| = 1 + ||h||$$

Por ser

$$e^{ih} = 1 + ih + \frac{(ih)^2}{2!} + \dots$$

es

$$||e^{ih}|| \geq 1 + ||h|| - ||\frac{(ih)^2}{2!} + \dots||$$

y por ser

$$e^{||f||} = 1 + ||f|| + \frac{||f||^2}{2!} + \dots$$

es

$$e^{||f||} - 1 - ||f|| \geq ||\frac{(if)^2}{2!} + \dots ||$$

en consecuencia

$$||e^{ih}|| \geq 1 + ||h|| - (e^{||h||} - 1 - ||h||)$$

Vamos ahora a emplear esta última desigualdad para calcular $||e^{ih}||$ para la función $h(t) = \frac{r}{N}\cos t$, que cumple la condición de tener valor medio nulo en $[0,2\pi]$.

$$||e^{i\frac{r}{N}\cos t}|| \geq 1 + \frac{r}{N} - (e^{\frac{r}{N}} - 1 - \frac{r}{N}) \geq 1 + \frac{r}{N} - \frac{r^2}{N^2}$$

para un N suficientemente grande, pues para N mayor que un cierto N_0 es

$$e^{\frac{r}{N}} - 1 - \frac{r}{N} \leq \frac{r^2}{N^2}$$

Entonces, volviendo a la función f anterior

$$||e^{if}|| \geq (1 + \frac{r}{N} - \frac{r^2}{N^2})^N - \varepsilon$$

para ε arbitrariamente pequeño, y como

$$\lim_{N\to\infty} (1 + \frac{r}{N} - \frac{r^2}{N^2})^N = e^r$$

el lema 3 està probado.

Ahora vamos a demostrar el resultado prometido.

T e o r e m a 2 :

Dada una sucesión ω_n tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log \omega_n}{n} = 0$ es posible elegir una $f \in A_r$ tal que $||e^{inf}|| \neq O(\omega_n)$, o sea tal que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{||e^{inf}||}{\omega_n} = \infty$.

Tomemos una sucesión $\overline{\omega}_n$ tal que $\dfrac{\overline{\omega}_n}{\omega_n} \uparrow \infty$ y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log \overline{\omega}_n}{n} = 0$ (esto puede hacerse). Construiremos una función f de A_r y una sucesión n_ν tal que $||e^{in_\nu f}|| \geq \overline{\omega}_n$. Para esto tomemos una f de la forma $f(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(\lambda_\nu t)$ con $||f_\nu|| \leq 2^{-\nu}$. Para cada ν será n_0 tal que se cumpla $8\,\overline{\omega}_{n_\nu} \leq$

$\leq e^{n_\nu 2^{-\nu}}$, y se ve que existe un tal n_ν ya que la desigualdad anterior es equivalente a $\frac{\log \overline{\omega}_{n_\nu}}{n_\nu} \leq 2^{-\nu} - \frac{\log 8}{n_\nu}$ y es $\lim_{n\to\infty} \frac{\log \overline{\omega}_n}{n} = 0$.

De las f_ν con $||f_\nu|| \leq 2^{-\nu}$ elegiremos una tal que se cumpla

$$||e^{in_\nu f_\nu}|| \geq \tfrac{1}{2} e^{n_\nu 2^{-\nu}}$$

(esto es posible a causa del lema 3). Vamos ahora a elegir de manera conveniente los λ_ν . Si es $S_\nu(t) = \sum_{j=1}^{\nu} f_j(\lambda_j t)$ es evidentemente

$$e^{in_\nu S_\nu(t)} = e^{in_\nu S_{\nu-1}(t)} \; e^{in f_\nu(\lambda_\nu t)}$$

y suponiendo elegidos los $\lambda_\nu , \dots , \lambda_{\nu-1}$ elegiremos λ_ν tal que

$$||e^{in_\nu S_\nu(t)}|| \geq \tfrac{1}{2} ||e^{in_\nu f_\nu(\lambda_\nu t)}||$$

elección posible por ser $||e^{in_\nu S_{\nu-1}(t)}|| \geq 1$ y por el lema 2 . Todavía impondremos a los $\lambda_\nu , \lambda_{\nu+1} , \dots , \lambda_{\nu+i}$ otra condición: deberán ser múltiplos de un número entero $\mu_{\nu-1}$ tal que (siendo $R_\nu(t) = \sum_{j=\nu+1}^{\infty} f_j(\lambda_j t)$)

$$||e^{in_\nu f(t)}|| = ||e^{in_\nu S_\nu(t)} \; e^{in_\nu R_\nu(t)}|| \geq \tfrac{1}{2} ||e^{in_\nu S_\nu(t)}||$$

lo que también es posible por ser $||e^{in_\nu R_\nu}||$ 1 (ya sabemos, por el lema 2 , que para una f dada $\lim_{\lambda\to\infty} ||f(t)g(\lambda t)|| = ||f|| \, ||g||$ es uniforme para todas las g de norma acotada, es decir que dado ε existe λ tal que $||f(t)g(\lambda t)|| >$ $> (||f|| - \varepsilon) \, ||g||$ para todas las g).

Combinando las desigualdades se obtiene

$$||e^{in_\nu f}|| \geq \frac{1}{8} e^{n_\nu 2^{-\nu}} \geq \overline{\omega}_n$$

que es lo que queríamos demostrar.

Por el lema 1 conseguimos el siguiente

C o r o l a r i o :

Si $A\{\omega_n\}$ contiene otras funciones que las analíticas, existe una $\phi \in A\{\omega_n\}$ y una $f \in A$ a valores reales, tales que $\phi(f) \notin A$.

En el capítulo que sigue, vamos a mejorar este resultado.

Acabamos el capítulo presente con un resultado sobre las funciones que operan uniformemente sobre las funciones $f - s$ $(f \in A \; , \; -\pi \leq s \leq \pi)$.

T e o r e m a 3 :

Sea $G(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{int}$, y $f \in A$ a valores reales. Supongamos $G(f-s) \in A$ y $\|G(f-s)\|$ uniformemente acotado $(-\pi \leq s \leq \pi)$. Entonces

$$\gamma_n = O(\|e^{inf}\|^{-1}) \qquad (n \longrightarrow \pm \infty) \quad .$$

Mediante el teorema 1 , tenemos el

C o r o l a r i o :

Si $A\{\omega_n\}$ contiene otras funciones que las analíticas, existe una $f \in A$ a valores reales tal que, cualquiera sea $G \in A\{\omega_n\}$, las normas $\|G(f-s)\|$ $(-\pi \leq s \leq \pi)$ no son uniformemente acotadas.

D e m o s t r a c i ó n d e l t e o r e m a 2 :

Como paso previo a la demostración de este resultado vamos a enunciar un hecho muy sencillo: si $\varphi(t,x)$ es una función de dos variables reales tal que para todo $x \in I$ (I intervalo) $\varphi(t,x) \in A$ como función de t , tal que $\|\varphi(t,x)\| \leq B$ con B independiente de x y tal que $\varphi(t,x)$ sea sumable en x sobre el intervalo I para cualquier t fijo, y si es $\Psi(t) = \int_I \varphi(t,x)\, dx$, $\Psi(t) \in A$ y $\|\Psi\| \leq |I|\, B$. La demostración es inmediata calculando los coeficientes de Fourier de $\Psi(t)$.

Ahora, basta escribir

$$\gamma_n e^{inf(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(f(t) - s)\, e^{ins}\, ds$$

y tenemos

$$|\gamma_n|\, \|e^{inf}\| \leq \sup_s \|G(f-s)\|$$

lo que demuestra el teorema.

V.- FUNCIONES QUE OPERAN EN $A_r(T)$ (continuación).

§1.- EL RESULTADO PRINCIPAL.

Vamos a demostrar ahora un importante resultado sobre las funciones que operan en A. Empezamos por una consecuencia fácil del teorema 2 y del lema 3 del capítulo anterior.

Lema 1 :

Sea $G(t)$ una función de variable real periódica (período 2π) y supongamos que para cada f de A_r tal que $||f|| \leq 2\pi$ es $||G(f)|| \leq B$ (con B independiente de f), Entonces G es analítica.

Otra manera de enunciar este resultado es la siguiente: consideremos el operador $(G) : A_r \longrightarrow A$ definido así: $(G)(f) = G(f)$. Si el operador es acotado en la esfera de centro 0 y radio 2π de A_r , G es una función analítica.

Demostraremos el lema 1 . G tiene una serie de Fourier $\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{int}$. Aplicando el teorema 2 , cap. 4 , se obtiene

$$||\gamma_n e^{inf(t)}|| \leq B$$

para cualquier $f \in A_r$ con $||f|| \leq \pi$, luego

$$|\gamma_n| \sup_{\{f \in A_r \ , \ ||f|| \leq \pi\}} ||e^{inf}|| \leq B$$

Pero, por el lema 3 del capítulo anterior es

$$\sup_{f \in A_r \ , \ ||f|| \leq \pi} ||e^{inf}|| = e^{n\pi} \qquad (n > 0)$$

sea

$$\sup_{f \in A_r \ , \ ||f|| \leq \pi} ||e^{inf}|| = e^{|n|\pi} \qquad (n > 0 \ \text{ ó } \ n < 0)$$

o sea

$$|\gamma_n| \leq B\, e^{-|n|\pi}$$

con lo que queda demostrado el lema.

Teorema 1 .

Consideremos una función ϕ . Ahora enunciamos el resultado principal para una función ϕ de variable real definida sobre un intervalo abierto I que opere en (1) A (es decir tal que toda función f de A_r a valores en I sea transformada por ϕ en $\phi(f)$ perteneciente a A). Bajo tales condiciones la función ϕ es analítica.

La idea de la demostración consiste en probar que ϕ es analítica en cada punto. Como no se pierde generalidad al suponer que $0 \in I$ y $\phi(0) = 0$, el problema se reduce a demostrar que es analítica en el origen, para lo cual basta mostrar que el operador (ϕ) (definido como en el lema anterior) es acotado en un entorno del cero de A_r. (Para convencerse de que el operador (ϕ) está definido en todos los entornos suficientemente pequeños de cero en A basta ver que si $||f||$ es conveniente - mente pequeño los valores de f caen en I).

La razón por la cual basta demostrar que (ϕ) es acotado en un entorno del orígen de A_r es esta; supongamos que lo esté en la esfera de centro 0 y radio h de A_r . Pongamos

$$G(t) = \phi(a \text{ sen } t) \qquad \text{con} \qquad a\, e^{2\pi} \leq h \ .$$

Si $||f|| \leq 2\pi$ entonces $||a \text{ sen } f|| \leq a\, e^{2\pi} \leq h$, luego el operador (G) está acotado en un entorno del orígen de radio 2π . Aplicando el lema 1 (G es periódica) se obtiene que G es analítica, y en consecuencia ϕ es analítica en el orígen.

El problema de mostrar que (ϕ) es un operador acotado en un entorno de cero en A será atacado aquí de dos maneras. La primera demostración está basada en el teorema de Baire y está en la tesis de Katznelson y en el trabajo de Helson, Katznelson, Kahane y Rudin. La segunda demostración, mas elemental, se puede extender a otros casos (ver el capítulo siguiente).

§2.- PRIMERA DEMOSTRACION

La idea de aplicar aquí el teorema de Baire es unaidea natural, como se verá ahora. Comenzaremos por mostrar que el operador (ϕ) es un operador de la primera clase de

(1) Decimos: " ϕ opera sobre f " sii $\phi(f) \in A$. Digamos: " ϕ opera sobre A , resp. A_r , etc..." sii, $\phi(f)$ cualquiera sea $f \in A$ resp. A_r etc..., $\phi(f)$ tiene sentido y $\phi(f) \in A$. Digamos: " ϕ opera en A , resp. A_r , ... " sii, cualquiera sea $f \in A$ tal que $\phi(f)$ tiene sentido, $\phi(f) \in A$. Si ϕ es una función de variable real, " ϕ opera en A " $\Longleftrightarrow$ " ϕ opera en A_r " .

Baire en A_r , es decir que es límite en todo punto (elemento de A_r) de una sucesión de operadores continuos. Por hipótesis ϕ opera sobre A , es decir que, dada una función $f \in A_r$ a valores en I es

$$\phi(f(t)) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(f)\, e^{int} \qquad \text{con} \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n(f)| < \infty$$

donde los coeficientes de la serie de Fourier de $\phi(f)$ dependen de f de la siguiente manera:

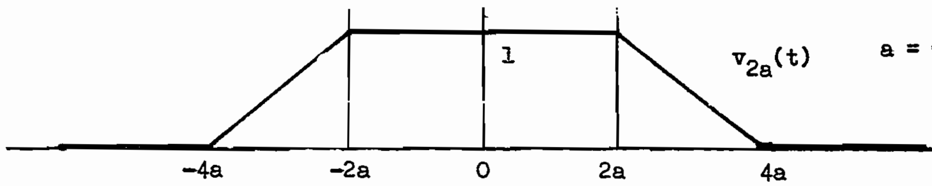
$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(f(t))\, e^{-int}\, dt$$

No es difícil ver que $a_n(f)$ es una función continua de f con $f \in A_r$. Si la sucesión $\{f_n\}$ tiende a f en la norma de A_r , entonces $f_n \longrightarrow f$ uniformemente. Además ϕ es continua, pues opera localmente sobre la función $f(t) = t$ que pertenece localmente a A_r . Entonces, si $f_n \longrightarrow f$ en A_r , $a_k(f_n) \longrightarrow$ $\longrightarrow a_k(f)$. También es inmediato que la aplicación $f \longrightarrow a_k(f)\, e^{ikt}$ es una aplicación continua de A en A . Luego la aplicación $f \longrightarrow \sum_{-N}^{N} a_n(f)\, e^{int}$ es también una aplicación continua de A_r en A ; y como $\phi(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(f)\, e^{int}$ es el límite en A de $\sum_{-N}^{N} a_n(f)\, e^{int}$, (ϕ) es un límite puntual de una sucesión de operadores continuos de A_r en A , o sea que pertenece a la primera clase de Baire . Entonces, en cualquier entorno de un punto arbitrario hay un punto donde el operador es continuo, y a fortiori, dentro de un entorno de cualquier punto hay un entorno donde el operador es acotado. Por hipótesis (ϕ) está definido en un entorno del origen de A_r ; entonces, aplicando las consideraciones anteriores existe en ese entorno un abierto Ω donde el operador está acotado.

Vamos a considerar ahora una subálgebra de A_r que llamaremos A'_r , y es el ideal de todas las funciones f tales que $f(t_0) = 0$ (t_0 punto fijo). Se puede repetir para A'_r lo que acabamos de considerar en A_r , es decir que (ϕ) es un operador definido en un entorno del cero de A'_r y que es acotado en un abierto Ω contenido en ese entorno. Tomemos en Ω una función f_0 . Ω es un entorno de f_0 , y en él (ϕ) está acotado. Se puede hallar en cualquier entorno de f_0 una función f_1 que sea nula en un intervalo $[t_0, t_1]$ que llamaremos J $(t_0 < t_1)$ (vamos a probar más tarde este resultado), y es evidente que (ϕ) está acotado en un entorno de f_1 . Llamaremos $A_r(J)$ a la clase de las funciones de A_r con soporte en J (evidentemente también constituyen un ideal de A_r). Ahora demostraremos que (ϕ) está acotado en un entorno del cero de $A_r(J)$. Sabemos que (ϕ) está acotado en una esfera de radio ε alrededor de f_1 en A_r ; tomemos $\varphi \in A_r(J)$ con $||\varphi|| \leq \varepsilon$. Es $(\phi)(\varphi) = \phi(f_1+\varphi) - \phi(f_1)$ por ser los soportes de φ y f_1 disjuntos y por ser $\phi(0) = 0$. $f_1+\varphi$ está en la esfera de centro f_1 y radio ε, luego $||\phi(f_1+\varphi)|| \leq B$ para toda φ con $||\varphi|| \leq \mathcal{E}$ y por supuesto $||\phi(f_1)|| \leq B$; luego $||\phi(\varphi)||$ está uniformemente acotada en la esfera de radio $\mathcal{E}$ alrededor del orígen de $A_r(J)$.

Ahora hay que pasar de funciones con soporte en J a funciones con soporte sobre el círculo unidad. La idea esla siguiente: tomar una función $\varphi \in A_r$, $||\varphi|| \leq \mathcal{E}$ y escribirla como suma de funciones con soportes en trasladados de J , lo que es posible multiplicando φ por una partición de la unidad conveniente. Consideremos la función $V_{2a}(t)$ definida así:

$8a < |J|$



$a = \dfrac{2\pi}{3N}$

No es difícil ver que $||V_{2a}|| \leq 3$. Tomemos ahora la función $V_a(t)$ y sus trasladadas $V_a(t-3ja)$. Es evidente que $1 \equiv V_a(t) + V_a(t-3a) + \ldots V_a(t-3(N-1)a)$ o sea que las $V_a(t-3ja)$ constituyen una partición de la unidad.

Entonces es

$$\phi(\varphi(t)) = \sum_j V_a(t-3ja)\, \phi(\varphi(t)) \quad .$$

Consideremos un término cualquiera de esa suma, $V_a(t-3ja)\, \phi(\varphi(t))$. Este término tiene su soporte en el intervalo de centro $3ja$ y amplitud $4a$. Es fácil ver entonces que no cambiará si sustituímos $\varphi(t)$ por cualquier otra función que coincida con ella en el soporte de $V_a(t-3ja)$. Definamos

$$\varphi_j(t) = V_{2a}(t-3ja)\, \varphi(t) \quad .$$

Es fácil ver que $\varphi_j(t) \equiv \varphi(t)$ en $[3ja-2a\ ,\ 3ja+2a]$. En consecuencia

$$\phi(\varphi(t)) = \sum_j V_a(t-3ja)\, \phi(\varphi_j(t)) \quad .$$

Por haber tomado $8a < |J|$ el soporte de $\varphi_j(t)$ está dentro de un trasladado de J ; y tomando $\mathcal{E}' = \mathcal{E}/3$ es

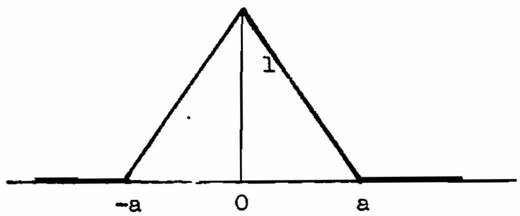
$$||\varphi_J|| \leq ||V_{2a}||\ ||\varphi|| \leq \mathcal{E} \quad .$$

o sea

$$||\phi(\varphi_J)|| \leq B \quad , \quad y \quad ||\phi(\varphi(t))|| \leq \sum_J 3B = 3NB$$

lo que demuestra el teorema.

Vamos a dar ahora la demostración de que en cualquier entorno de f_o se puede hallar una función f_1 que sea nula en un intervalo $[t_o,t_1]$. Supongamos $t_o = 0$, y sea $\Delta_a(t)$ la función



que tiene como serie de Fourier absolutamente convergente $\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}$ con $\gamma_n = \frac{4 \operatorname{sen}^2 (n/2)a}{n^2 a}$. Para cada p fijo $\sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_{n-p} - \gamma_n| \longrightarrow 0$ cuando $a \to 0$. Es decir $\lim_{a\to 0} ||(1-e^{ipt})\Delta_a|| = 0$. Así, si es $f(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (1-e^{ipt})c_p$ con $\sum|c_p| < \infty$ $(f \in A$ y $f(0) = 0)$ es $\lim_{a\to 0} ||f_N \Delta_a(t)|| = 0$ con $f_N(t) = \sum_{p=-N}^{N}(1-e^{ipt})c_p$, y la desigualdad $||(f-f_N)\Delta_a|| \leq ||f-f_N||\ ||\Delta_a|| = ||f-f_N||$ prueba que $\lim_{a\to 0} ||f\Delta_a|| = 0$. Entonces $\lim_{a\to 0} ||f\ V_a|| = \lim_{a\to 0} ||f(2\Delta_{2a} - \Delta_a)|| = 0$, y $f(1 - V_a)$ tiende a f en A .

§3.- SEGUNDA DEMOSTRACION.

Vamos a dar ahora la otra demostración del Teorema donde también usaremos las propiedades de funciones del tipo de las V_a . También supongamos $\phi(0) = 0$. Supongamos que el teorema es falso, es decir que el operador (ϕ) no está acotado en ningún entorno del orígen. Podemos entonces elegir una sucesión $\{f_j\} \in A_r$ tal que $||f_j|| \leq \varepsilon 2^{-j}$ y tal que $||\phi(f_j)|| \uparrow \infty$ $(j=0,1,\ldots)$. Consideremos una sucesión $a_o , a_1 , \ldots , a_j , \ldots$ tal que cada a_j es un punto aislado de la sucesión:

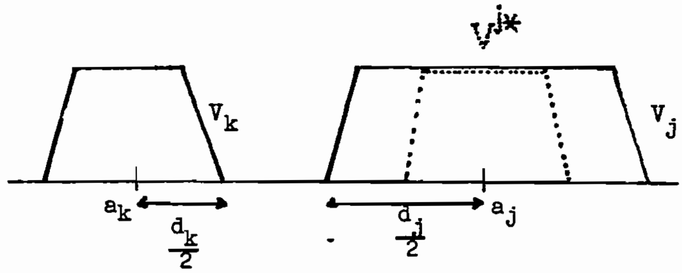
$$d_j = \inf_{k\neq j} |a_k - a_j| > 0 \quad .$$

Consideremos las funciones definidas así:

$$V^j(t) = V_{d_j/4}(t-a_j)$$

$$V^{j*}(t) = V_{d_j/8}(t-a_j)$$

$$V^{j**}(t) = V_{d_j/16}(t-a_j)$$



Evidentemente tanto los soportes de las V^j como los de las V^j y V^{j**} son disjuntos, y es $||V^j|| \leq 3$, $||V^{j*}|| \leq 3$, $||V^{j**}|| \leq 3$.

Consideremos la función $F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} V^{j*}(t)\ f_j(\lambda_j t)$. Las normas de los V^{j*}

cumplen $||V^{j*}|| \leq 3$, luego $F(t)$ es una función de la clase A y $||F|| < 6\mathcal{E}$.
Por ser los soportes de las V^{j*} disjuntos es

$$\phi(F(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi(V^{j*}(t)\ f_j(\lambda_j t))$$

luego $\phi(F) \in A$ si $\mathcal{E}$ es bastante pequeño. Las $V^{j*}(t)\ f_j(\lambda_j t)$ tienen soporte contenido en el soporte de las V^{j*} y por ser $\phi(0) = 0$ las $\phi(V^{j*}(t) f_j(\lambda_j t))$ también. En consecuencia es

$$V^i(t)\ \phi(V^{j*}(t)\ f(\lambda_j t)) = \begin{cases} \phi(V^{j*}(t)\ f(\lambda_j t)) & \text{si} \quad i = j \\ 0 \quad \text{si} \quad i \neq j & \end{cases}$$

luego $\phi(V^{j*}(t)\ f(\lambda_j t)) = V^j\ \phi(F(t))$ entonces estos términos tienen su norma uniformemente acotada. Consideremos ahora las funciones V_a^{j**} (es decir funciones con soporte en los intervalos donde las V_a^{j*} valen 1). También las normas $||V_a^{j**}(t)\ \phi(V_a^{j*}(t)\ f_j(\lambda_j t))||$ están uniformemente acotadas, y es

$$V_a^{j**}(t)\ \phi(V_a^{j*}(t)\ f_j(\lambda_j t)) = V_a^{j**}(t)\ \phi(f_j(\lambda_j t))$$

Empleando ahora el lema 2 del capítulo anterior podemos elegir los λ_j tales que

$$||V_a^{j**}(t)\ \phi(f_j(\lambda_j t))|| \geq \tfrac{1}{2}\ ||\phi(f_j(\lambda_j t))||$$

Pero las $||\phi(f_j(\lambda_j t))|| \uparrow \infty$, y eso es absurdo, lo que demuestra el teorema.

En el capítulo siguiente veremos generalizaciones del teorema, considerando funciones ϕ que operan en ciertas álgebras cocientes de A por ideales cerrados. Asi mismo serán las demostraciones de esas generalizaciones nuevas pruebas - un poco más difíciles - del teorema de hoy.

VI.- FUNCIONES QUE OPERAN EN $A_r(Z)$ Y $A_r(E)$.

En la clase anterior hemos demostrado que, si ϕ es una función definida en un intervalo I de la recta tal que, para toda f de A_r a valores en I , $\phi(f) \in A_r$, ϕ es analítica en el intervalo I .

Daremos hoy el teorema análogo para el caso del álgebra $A_r(Z)$ y también una nueva demostración y una generalización del teorema anterior.

§1.- CALCULO DE $\sup ||e^{if}||$ PARA $||f|| \leq r$, $f \in B_r(Z)$ resp $A_r(Z)$.

Recordemos las siguientes definiciones: $B(Z)$ es el álgebra de las sucesiones $\{f(n)\}$ de coeficientes de Fourier - Stieltjes de medidas sumables en $[0,2\pi]$ con el producto

$$(\{f(n)\}.\{g(n)\})_p = \int_0^{2\pi} e^{-ipt}\, d(\mu * \sigma)(t) \quad \text{donde} \quad g(n) = \int_0^{2\pi} e^{-int}\, d\sigma(t)$$

$$f(n) = \int_0^{2\pi} e^{-int}\, d\mu(t) \quad ; \quad (\mu * \sigma)(t) = \int_0^{2\pi} \mu(t-s)\, d\sigma(s)$$

y la norma

$$||\{f(n)\}|| = \int_0^{2\pi} |d\mu| .$$

$A(Z)$ es la subálgebra de $B(Z)$ formada por las sucesiones de coeficientes de Fourier de funciones de $L^1(0,2\pi)$ y $A_r(Z)$ (resp. $B_r(Z)$) es la subálgerbra real de $A(Z)$ resp. $B(Z)$ formada por las sucesiones $\{f(n)\}$ con $f(n)$ real. En $A(Z)$, o en $A_r(Z)$ el producto y la norma son

$$(\{f(n)\}.\{g(n)\})_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ipt}\, (F*G)\, dt$$

con

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int}\, F(t)\, dt \quad , \quad g(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} G(t)\, dt$$

$$(F*G)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t-s)\, G(s)\, ds \quad , \quad ||\{f(n)\}|| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(t)|\, dt.$$

En lo sucesivo indicaremos $\{f(n)\}$ con f simplemente.

Tampoco es difícil ver que $B(Z)$ es un álgebra de Banach con unidad δ_o (medida de Dirac en el punto cero), y que $A(Z)$ es un álgebra de Banach sin unidad que es un ideal en $B(Z)$

Es cómodo considerar el álgebra $A_r(Z)$ munida con una unidad, es decir considerar el álgebra $A_r'(Z)$ definida así:

$$A_r'(Z) = \{f + k \quad , \quad f \in A_r(Z) \quad , \quad k \quad \text{constante}\}$$

con las definiciones de suma y producto conocidas y la definición de norma siguiente:

$$||f + k|| = ||f|| + |k|$$

$f + k$ puede considerarse como un elemento de $B(Z)$.

El problema de caracterizar las funciones que operan en $A_r(Z)$ puede ser atacado casi de la misma manera empleada para los problemas anteriores. Comenzaremos por evaluar

(1) $$\sup ||e^{if}||_{B(Z)} \quad \text{para} \quad ||f|| \leq r \quad , \quad f \in A_r(Z)$$

(2) $$\sup ||e^{if}||_{B(Z)} \quad \text{para} \quad ||f|| \leq r \quad , \quad f \in B_r(Z)$$

Demostraremos:

L e m a 1 :

El segundo supremo es igual a e^r

Consideremos medidas μ , ν atómicas, es decir que son suma de masas puntuales en los puntos m_i , n_j

$$\mu = \sum a_i \delta_{m_i} \quad ; \quad \nu = \sum b_i \; n_j$$

donde δ_{m_i} , δ_{n_j} son medidas de Dirac en los puntos correspondientes. Aplicando la definición de convolución se ve inmediatamente que

$$\mu * \nu = \sum a_i \; b_i \; \delta_{m_i+n_j}$$

y si los puntos m_i+n_j son todos distintos se tendrá

$$||\mu * \nu|| = \sum |a_i b_i| = (\sum |a_i|)(\sum |b_i|) = ||\mu|| \; ||\nu|| \quad .$$

Ahora vamos a tomar como f la sucesión de coeficientes de Fourier - Stieltjes de una medida μ tal que

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_N$$

donde

$$\mu_i = \frac{r}{2N} (\delta_{\varepsilon_i} + \delta_{-\varepsilon_i})$$

Tenemos

$$f(n) = \frac{r}{N} (\cos \varepsilon_1 n + \ldots \cos \varepsilon_N n)$$

de tal manera que $f \in B_r(Z)$.

Será conveniente considerar e^{if} como transformada de Fourier - Stieltjes de la medida

$$e^{*i\mu} = \sum_0^{\infty} \frac{\overbrace{i\mu * i\mu * \ldots * i\mu}^{n \text{ veces}}}{n!} = \sum_0^{\infty} \frac{(i\mu)^{*n}}{n!} .$$

Es

$$e^{*i\mu} = e^{*i\mu_1} * e^{*i\mu_2} * \ldots * e^{*i\mu_N}$$

y ahora vamos a ver, que mediante condiciones muy simples es posible afirmar que

$$||e^{*i\mu}|| = ||e^{*i\mu_1}|| \; ||e^{*i\mu_2}|| \ldots ||e^{*i\mu_N}||$$

Las condiciones serán del tipo de las que nos permiten asegurar que la norma del producto de ciertas medidas atómicas es igual al producto de las normas.

La medida $e^{*i\mu_i}$ es una medida atómica que tiene masas en los puntos múltiplos de ε_i y sólo en ellos. En efecto, μ_i tiene masas en los puntos ε_i y $-\varepsilon_i$, μ_i^{*2} las tiene en los puntos $-2\varepsilon_i$, $-\varepsilon_i$, ε_i , $2\varepsilon_i$, y así siguiendo; sumando y pasando al límite se obtiene lo que deseamos. (Las convoluciones sucesivas de medidas del tipo de las μ_i son conocidas en Teoría de Probabilidades, pues no son sino distribuciones de Bernouilli iteradas).

$e^{*i\mu_1}$ tiene masas en los puntos múltiplos de ε_1 , $e^{*i\mu_2}$ en los puntos múltiplos de ε_2 , ... De acuerdo a lo visto anteriormente se podrá escribir

$$||e^{*i\mu}|| = ||e^{*i\mu_1}|| \ldots ||e^{*i\mu_N}||$$

cuando no sea posible escribir de dos maneras diferentes una suma del tipo

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varepsilon_i \quad (\lambda_i \text{ enteros}) \quad (\text{mod. } 2\pi)$$

es decir cuando los puntos $\varepsilon_1 , \ldots , \varepsilon_N$, π sean racionalmente independientes.

Es evidente que

$$||e^{*i\mu_1}|| = ||e^{*i\mu_2}|| = \ldots = ||e^{*i\mu_N}||$$

luego

$$||e^{*i\mu}|| = ||e^{*i\mu_1}||^N$$

Vamos ahora a minorar $||e^{*i\mu_1}||$. Es

$$e^{*i\mu_1} = \delta_0 + i\mu_1 + \nu \qquad \text{con} \qquad ||\nu|| \leq e^{r/N} - 1 - r/N$$

es decir que $||e^{*i\mu_1}|| = 1 + \frac{r}{N} + \varepsilon$ con

$$\varepsilon < e^{r/N} - 1 - \frac{r}{N} < \left(\frac{r}{N}\right)^2$$

cuando $\frac{r}{N}$ es suficientemente pequeño. Entonces

$$||e^{*i\mu}|| > \left(1 + \frac{r}{N} - \frac{r^2}{N^2}\right)^N$$

y como

$$\lim \left(1 + \frac{r}{N} - \frac{r^2}{N^2}\right)^N = e^r$$

y por otra parte

$$||e^{*i\mu}|| \leq e^r$$

queda demostrado que

$$\sup_{||f|| \leq r \ , \ f \in B_r(Z)} ||e^{if}|| = e^r$$

Vamos a demostrar el mismo resultado para $A_r(Z)$, lo que será el

L e m a 2 :

$$\sup_{||f|| \leq r \ , \ f \in A_r(Z)} ||e^{if}|| = e^r \ .$$

La idea es regularizar la medida atómica μ mediante - por ejemplo - una convolución con el núcleo de Fejer K_n . La convolución

$$K_n * \mu$$

es una función de $L_1(0,2\pi)$. Por ser $||K_n|| = 1$ es

$$||K_n * \mu|| \leq ||\mu|| \ .$$

Para llegar a nuestro resultado bastará demostrar

$$\lim_{n \to \infty} ||e^{*i(K_n * \mu)}|| = ||e^{*i\mu}|| \ . \tag{3}$$

En efecto, bastará tomar $f = K_n * \mu$ con n suficientemente grande para que $||e^{if}||$ está tan próximo como se quiera a e^r .

A su vez (3) quedará demostrado si se demuestra algo análogo para las sumas parciales de la serie que define $e^{*i(K_n * \mu)}$ o sea que bastará demostrar que para un polinomio de convolución $\overset{*}{P}$ se tiene

$$\lim_{n \to \infty} ||\overset{*}{P}(K_n * \mu)|| = ||\overset{*}{P}(\mu)|| \, .$$

Ya sabemos que $\lim_{n\to\infty} ||K_n * \mu|| = ||\mu||$ (consecuencia clásica del teorema de Helly[1]); del mismo modo, $\lim_{n \to \infty} ||(K_n * \mu)^{*p}|| = \lim_{n \to \infty} ||K_n^{*p} * \mu^{*p}|| = ||\mu^{*p}||$, lo que acaba la demostración.

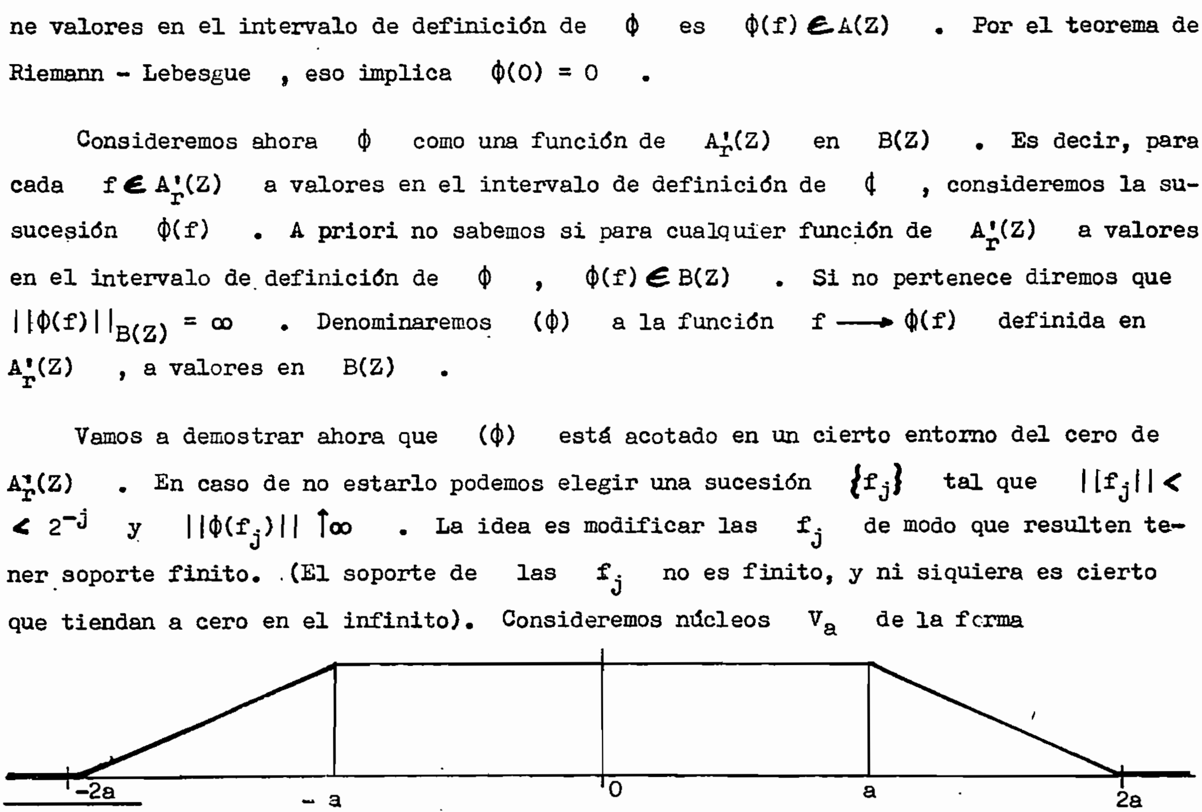
§2.- FUNCIONES QUE OPERAN EN $A_r(Z)$.

Pasaremos ahora al problema central. Sea ϕ una función de variable real, con valores complejos, definida en un entorno de cero.

Supongamos que ϕ opera en $A_r(Z)$, o sea que para cada $f \in A_r(Z)$ que tiene valores en el intervalo de definición de ϕ es $\phi(f) \in A(Z)$. Por el teorema de Riemann - Lebesgue , eso implica $\phi(0) = 0$.

Consideremos ahora ϕ como una función de $A_r'(Z)$ en $B(Z)$. Es decir, para cada $f \in A_r'(Z)$ a valores en el intervalo de definición de ϕ , consideremos la susucesión $\phi(f)$. A priori no sabemos si para cualquier función de $A_r'(Z)$ a valores en el intervalo de definición de ϕ , $\phi(f) \in B(Z)$. Si no pertenece diremos que $||\phi(f)||_{B(Z)} = \infty$. Denominaremos (ϕ) a la función $f \longrightarrow \phi(f)$ definida en $A_r'(Z)$, a valores en $B(Z)$.

Vamos a demostrar ahora que (ϕ) está acotado en un cierto entorno del cero de $A_r'(Z)$. En caso de no estarlo podemos elegir una sucesión $\{f_j\}$ tal que $||f_j|| < 2^{-j}$ y $||\phi(f_j)|| \uparrow \infty$. La idea es modificar las f_j de modo que resulten tener soporte finito. (El soporte de las f_j no es finito, y ni siquiera es cierto que tiendan a cero en el infinito). Consideremos núcleos V_a de la forma



(1) Recordemos que el teorema de Helly no es nada mas que la demostración de la compacidad débil de las esferas cerradas en el espacio $B(Z)$. En el caso que estudiamos , tenemos $||K_n * \mu|| \leq ||\mu||$, y $K_n * \mu$ es debilmente convergente a μ ; así pues $||\mu|| \leq \liminf_{n \to \infty} ||K_n * \mu||$.

No es difícil ver que $||V_a|| \leq 3$. Ahora, consideremos $V_a f$ en $B(Z)$. Cuando $a \longrightarrow \infty$, $V_a f$ tiende debilmente a f . Por el teorema de Helly , tenemos

$$\liminf_{a \to \infty} ||V_a f|| \geq ||f|| \quad .$$

Elijamos ahora una sucesión a_j de modo que se verifique

$$||V_{a_j} \phi(f_j)|| \geq \tfrac{1}{2} \, ||\phi(f_j)|| \uparrow \infty$$

y como

$$||V_{a_j} \phi(f_j)|| = ||V_{a_j} \phi(V_{2a_j} f_j)|| \leq 3 \, ||\phi(V_{2a_j} f_j)||$$

debe ser

$$3 \, ||\phi(V_{2a_j} f_j)|| \uparrow \infty \quad .$$

Por otra parte

$$||V_{2a_j} f_j|| \leq 3 \, ||f_j|| \leq 3.2^{-j}$$

y como $V_{2a_j} f_j$ tiene soporte finito, hemos conseguido reemplazar la sucesión original por una cuyos términos tienen soporte finito. Eso será el

L e m a 3 :

Si en todo entorno del cero de $A_r'(Z)$ la función (ϕ) no está acotada, es de - cir si, cualquiera sea $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{\substack{f \in A_r'(Z) \\ ||f|| \leq \varepsilon}} ||\phi(f)||_{B'(Z)} = \infty$$

existe una sucesión $h_j = V_{2a_j} f_j$ tal que

1°) $h_j \in A_r'(Z)$ y tiene soporte finito, y $||h_j|| \leq 3.2^{-j}$

2°) $||\phi(h_j)||_{B(Z)} \longrightarrow \infty \quad (j \longrightarrow \infty)$.

Tomemos ahora una sucesión de traslaciones T_j sobre los enteros, y denominaremos φ_j la trasladada de $h_j = V_{2a_j} f_j$, y V_j a la trasladada de V_{4a_j} por T_j . Elegimos las T_j de tal manera que los soportes de las V_j sean disjuntos (fig. 2).

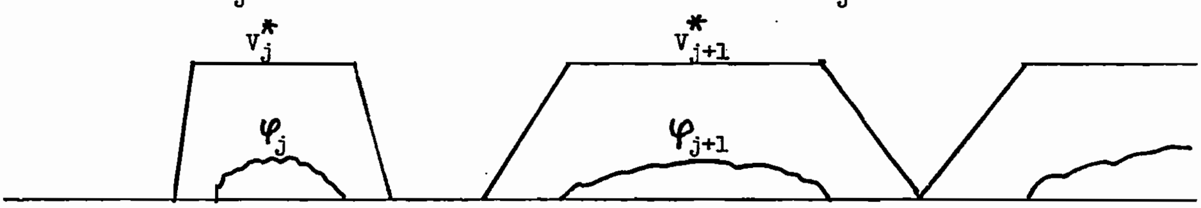


fig. 2

Es $\varphi_j \in A_r(Z)$ (pues es la transformada de Fourier de un polinomio trigonométrico) y $||\varphi_j|| = ||h_j||$. Además es $|\varphi(n)| \leq ||\varphi||$.

Tomando entonces j_0 de modo que $\sum_{j\geq j_0} ||\varphi_j|| \leq \varepsilon$, definiremos $f = \sum_{j\geq j_0}' \varphi_j$. Es $f(n) = \sum_{j\geq j_0}' \varphi_j(n) \leq \sum ||\varphi_j|| \leq \varepsilon$ lo que emplica que f es a valores en I .

Tomando ahora los núcleos V_j^* tendremos $V_j^*\phi(f) = \phi(\varphi_j)$ de donde $||V_j^*\phi(f)|| = ||\phi(\varphi_j)|| \uparrow \infty$; pero

$$||V_j^*\phi(f)|| = 3\ ||\phi(f)||$$

y por lo tanto $||\phi(f)|| = \infty$ lo que implica que ϕ no opera de A_r en A_r contra la hipótesis. Por lo tanto (ϕ) es acotada en la bola $B(0,\varepsilon)$ de $A_r'(Z)$. Luego

L e m a 4 :

Si ϕ opera en $A_r(Z)$ entonces (ϕ) está acotada en un entorno del orígen de $A_r'(Z)$.

Tomemos ahora una ϕ que opere sobre $A_r(Z)$. Vamos a demostrar que es analítica en el orígen.

Pongamos $\Psi(x) = \phi$ (a sen x) donde a sea tal que a $e^{3\pi} < \varepsilon$. Entonces si $f \in A_r'(Z)$ con $||f|| \leq 3\pi$ es $||a \text{ sen } f|| \leq ||a\ e^{if}|| \leq a\ e^{3\pi} < \varepsilon \Rightarrow ||\Psi(f)||_B \leq K$.

Como Ψ es de período 2π se puede escribir

$$\Psi \sim \sum \gamma_n\ e^{inf} \qquad \text{donde} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(f+x)\ e^{-inx}\, dx = \gamma_n\ e^{inf}$$

$$||\Psi(f+x)\ e^{-int}|| \leq ||\Psi(f+x)||\ ||e^{-int}|| = ||\Psi(f+x)|| .$$

De manera que si justificamos que

$$||\Psi(f+x)||_B \leq K \Longrightarrow ||\gamma_n\ e^{inf}|| \leq K' \tag{4}$$

tendremos

$$|\gamma_n| \leq K' / \sup \left\{ ||e^{inf}|| : ||f|| \leq \pi \right\} \leq K'\ e^{-|n|\pi}$$

lo que implica que Ψ es analítica y a fortiori:

T e o r e m a 1 :

<u>Si</u> ϕ <u>es una función de variable real, definida en un entorno de</u> 0 , <u>que opera sobre las sucesiones de</u> $A_r(Z)$ <u>a valores en él (es decir</u> $f \in A_r(Z) \Longrightarrow \phi(f) \in A(Z)$ <u>cada vez</u> $\phi(f)$ <u>tiene sentido),</u> ϕ <u>es analítica en el orígen.</u>

Vamos a demostrar (4) . Consideremos en general una sucesión $\ell = \ell(n)$ de la forma

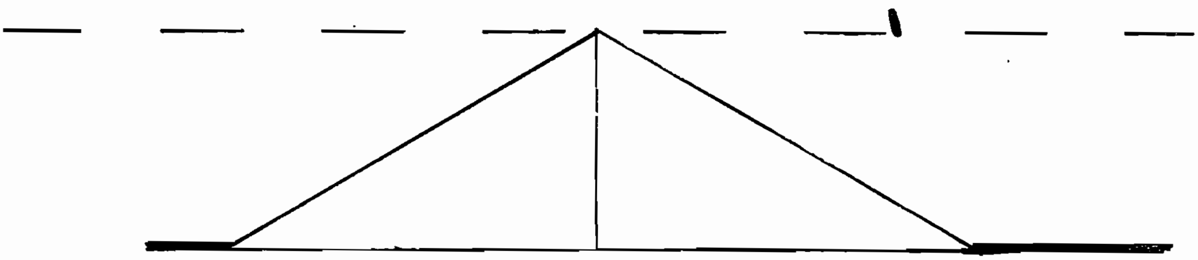
$$\ell(n) = \int_0^1 g(n,x)\,dx$$

donde

1º) para todo x $\{g(n,x)\} \in B(Z)$ y $\|\{g(n,x)\}\| \leq K$

2º) para todo n , $g(n,x)$ es contínua.

Utilizamos los núcleos Δ_m de la forma $\Delta_m(n) = \sup\left(1 - \frac{|n|}{m}, 0\right)$



$$\ell(n)\,\Delta_m(n) = \int_0^1 \Delta_m(n)\, g(n,x)\,dx \quad .$$

Ahora $\ell\Delta_m$ y $g\Delta_m$ tienen soporte finito, y

$$\|\ell\Delta_m\|_{B(Z)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\sum_n \ell(n)\Delta_m(n)\, e^{int}\right| dt \leq$$

$$\leq \int_0^1 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\sum_n g(n,x)\Delta_m(n)\, e^{int}\right| dt\, dx = \int_0^1 \|\{g(n,x)\Delta_m(n)\}\|_{B(Z)}\,dx \leq K \, .$$

Por el teorema de Helly vale también $\|\ell\| \leq K$, lo que demuestra (4) .

§3.- FUNCIONES DE VARIABLE REAL QUE OPERAN EN A_E resp $A(E)$, $E \subset Z$.

Es posible conseguir resultados más fuertes que el teorema 1 empleando el mismo método.

Consideremos un conjunto de enteros $E \subset Z$ con la propiedad siguiente:

(A) : cualquiera sea el entero $n > 0$, existen en E n términos en progresión aritmética, sea

$$E_n = \{\alpha + \lambda, \alpha + 2\lambda, \ldots, \alpha + n\lambda\} \subset E \quad .$$

En lo que sigue, vamos a suponer (lo podemos) $E_n \cap E_m = \phi$ si $n \neq m$.

Vamos a dar dos definiciones.

A_E será el ideal de $A(Z)$, que constituyen las f con soporte en E.

$A(E)$ es el álgebra cociente $A(Z)/A_{Z-E}$ ($Z-E$: complementario de E). Los elementos de $A(E)$ se pueden definir como sucesiones (funciones) definidas en E, y que tienen una continuación sobre Z que pertenece a $A(Z)$. Así se puede escribir $A_E \subset A(E)$.

Regresemos al lema 3. Vamos a demostrar, en vez del lema 4, el siguiente:

L e m a 5 :

Si ϕ opera en A_E en el sentido siguiente

$$\begin{cases} f & \text{real a valores en el intervalo de definición de } \phi \\ f \in A_E & \end{cases}$$

implica

$$\phi(f) \in A(E)$$

entonces (ϕ) está acotada en un entorno del origen de $A_r'(Z)$.

D e m o s t r a c i ó n :

Supongamos (ϕ) como en el lema 3. El soporte de h_j (lema 3) está contenido en $[-4a_j , 4a_j]$. Consideramos

$$E_{16a_j+1} = \underbrace{\{\beta_j - 8a_j\lambda_j , \dots , \beta_j + 8a_j\lambda_j\}}_{16a_j+1 \text{ términos}} \subset E$$

y definimos φ_j y $V_j^* \in A(Z)$ por

$$\sum_n \varphi_j(n)\, e^{int} = e^{i\beta_j t} \sum_m h_j(m)\, e^{im\lambda_j t}$$

$$\sum_n V_j^*(n)\, e^{int} = e^{i\beta_j t} \sum_m V_{4a_j}(m)\, e^{im\lambda_j t}$$

de tal manera que φ_j y V_j^* tienen soporte en E_{16a_j+1}

$$\varphi_j V_j^* = \varphi_j$$

$$||\varphi_j|| = ||h_j|| \quad \text{y} \quad ||V_j^*|| = ||V_{4a_j}|| .$$

Ahora pongamos

$$f = \sum_{j \geq j_0} \varphi_j$$

de tal manera que f tiene valores en el intervalo de definición de ϕ. Tenemos $f \in A_E$. Por otra parte, si existe $g \in A(Z)$ igual a $\phi(f)$ sobre E, tendríamos

$$V_j^* g = V_j^* \phi(\varphi_j) = \phi(\varphi_j)$$

el primer miembro siendo acotado en $B(Z)$, y el segundo (lema 3) no siendo acotado. Así pues, no existe tal g, es decir $\phi(f) \notin A(E)$, lo que prueba el lema 5.

De la misma manera que se deduce del lema 4 el teorema 1, se deduce del lema 5 la siguiente generalización:

T e o r e m a 2 :

Sea ϕ una función de variable real, definida en un entorno de 0, y que opera en A_E en el sentido siguiente:

$$f \in A_E \Longrightarrow \phi(f) \in A(E)$$

cada vez $\phi(f)$ tiene sentido. Supongamos que E satisface la condición (A). Entonces es analítica en el origen.

Unas observaciones.

1.- En el teorema 2, el resultado vale a fortiori si suponemos

$$f \in A(E) \Longrightarrow \phi(f) \in A(E)$$

cada vez $\phi(f)$ tiene sentido (por $A_E \subset A(E)$).

2.- Supusimos que E satisface la condición (A). No sabemos cuál exactamente es la condición sobre E para que valga el resultado. Hay una condición, es decir, el resultado no vale cualquiera sea E. Por ejemplo, si E es una sucesión lacunar:

$$E = \{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\} \quad \frac{n_{k+1}}{n_k} > q > 1$$

es clásico (Zygmund, Trigonometric Series) que

$$f \in A_E \Longleftrightarrow \sum_{n \in E} |f(n)|^2 < \infty$$

$$f \in A(E) \Longleftrightarrow \lim_{\substack{n \in E \\ n \to \infty}} f(n) = 0$$

así pues, basta $\phi(x) = O(x)$ $(x \longrightarrow 0)$ para que

$$f \in A(E) \Longrightarrow \phi(f) \in A(E) .$$

Sería interesante, en el caso general, estudiar la vinculación entre E y las funciones ϕ que operan en A_E resp. $A(E)$.

°

§4.- FUNCIONES QUE OPERAN EN $A_r(E)$, $E \subset R$.

Ahora no es difícil dar una generalización del teorema del capítulo 6 , sobre las funciones que operan en $A(T)$.

Necesitamos en primer lugar definir $A(E)$ cuando E es un conjunto cerrado sobre la recta R , o el círculo T . Será lo mismo que en el caso Z .

D e f i n i c i ó n :

Sea E un conjunto cerrado sobre R , T ó Z y f una función definida sobre E con valores complejos. Digamos $f \in A(E,R)$ resp $A(E,T)$ resp $A(E,Z)$ si y solamente si f se puede continuar sobre R resp. T resp. Z en una función que pertece a $A(R)$ resp. $A(T)$ resp. $A(Z)$. Las álgebras $A(E,R)$ y $A(E,T)$ como la $A(E,Z)$ que ya consideramos, tienen estructuras de álgebras cocientes. Esas álgebras tienen una vinculación muy fuerte.

L e m a 6 :

1°) Sea $E \subset Z \subset R$; entonces $A(E,R)$ y $A(E,Z)$ tienen mismos elementos y estructuras equivalentes.

2°) Sea $E \subset]0,2\pi[\subset R$; identificamos T y $[0,2\pi[$; entonces $A(E,R)$ y $A(E.T)$ tienen mismos elementos y estructuras equivalentes.

D e m o s t r a c i ó n :

Por un teorema general (capítulo 1, §8) basta mostrar que tienen los mismos elementos. Eso es muy fácil:

1°) $f \in A(E;Z) \iff \exists\, \varphi \in L^1(-\pi,\pi)$ tal que $\forall n \in E \quad f(n) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, e^{-int} dt$

$f \in A(E;R) \iff \exists\, \psi \in L^1(-\infty,\infty)$ tal que $\forall n \in E \quad f(n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, e^{-int}\, dt$

$A(E;Z) \subset A(E;R)$ poniendo $\psi = \begin{cases} \varphi \text{ en } & (-\pi,\pi) \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$

$A(E;R) \subset A(E;Z)$ poniendo $\varphi(t) = \displaystyle\sum_j \psi(t - 2j\pi)$

2°) Por el estudio del capítulo 2 , §5 .

Por el lema 6 denominaremos $A(E)$ a una álgebra equivalente a $A(E;R)$ (con los mismos elementos); no hay contradicción con la definición anterior cuando $E \subset Z$.

Ahora tenemos un análogo del teorema 2 .

T e o r e m a   3 :

1^o) Supongamos que E no sea acotado y satisfaga la condición aritmética (A) . Sea ϕ una función de variable real definida en un entorno de cero, tal que $f \in A(E) \Longrightarrow \phi(f) \in A(E)$ cada vez $\phi(f)$ tiene sentido. Entonces $\phi(0) = 0$ y ϕ es analítica en el orígen.

2^o) Supongamos E compacto y que E satisfaga la condición (A) . Sea ϕ una función definida sobre un intervalo real I abierto, tal que $f \in A(E) \Longrightarrow \phi(f) \in A(E)$ cada vez que $\phi(f)$ tiene sentido. Entonces ϕ es analítica sobre I .

D e m o s t r a c i ó n :

En ambos casos, E contiene una infinidad de progresiones

$$E_{16a_j+1} = \underbrace{\{\beta_j - 8a_j\lambda_j \, , \, \dots \, \beta_j + 8a_j\lambda_j\}}_{16a_j+1 \text{ términos}}$$

tales que los segmentos $[\beta_j - 8a_j\lambda_j \, , \, \beta_j + 8a_j\lambda_j]$ sean disjuntos (dado uno de cada otro). En el caso 2^o) , podemos suponer $0 \in I$ y $\phi(0) = 0$. Ahora vamos a demostrar que (ϕ) está acotada en un entorno del orígen de $A_\Gamma^!(Z)$.

Si no, definimos φ_j como en la demostración del lema 5 ; es decir

$$\varphi_j(\beta_j + \lambda_j m) = h_j(m) \quad \text{si} \quad m \quad \text{entero}, \quad |m| \leq 4a_j$$

$$\varphi_j(x) = 0 \quad \text{en caso contrario.}$$

Así $\varphi_j \in A(E)$. Consideramos las funciones

$$\tilde{\varphi}_j(t) = \sum_m \varphi_j(\beta_j + \lambda_j m)\, \Delta_{\lambda_j}(t - \beta_j - \lambda_j m)$$

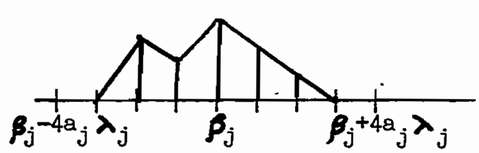
donde

$$\Delta_{\lambda_j}(t) = \sup\left(0 \, , \, 1 - \frac{|t|}{\lambda_j}\right) = \Delta\left(\frac{t}{\lambda_j}\right) \quad .$$

$$h_j(t) = \sum_m h_j(m)\, \Delta(t-m)$$

Se verifica facilmente

$$||\tilde{\varphi}_j||_{A(R)} = ||h_j||_{A(R)} \leq 2\, ||h_j||_{A(R)} \leq 6 \, . \, 2^{-j}$$



fig(caso $a_j = 1$)

Pongamos $f = \sum_{j \geq j_0} \varphi_j$ (j_0 tal que f tiene valores en el intervalo de definición de ϕ) y $\tilde{f}(t) = \sum_{j \geq j_0} \tilde{\varphi}_j(t)$. Puesto que $\tilde{f} \in A(R)$, $f \in A(E)$. Por otra parte, supongamos que exista $g \in A(R)$ igual a $\phi(f)$ sobre E , consideramos

$$V_{2a_j}(t)\, g\left(\frac{t-\beta_j}{\lambda_j}\right)$$

Esa función debería tener una norma en $A(R)$ uniformemente acotada; así pues la sucesión

$$\left\{ V_{2a_j}(n)\, g\left(\frac{n-\beta_j}{\lambda_j}\right)\right\}_{n \in Z}$$

debería ser (lema 6) uniformemente acotada en $A(Z)$; ahora

$$V_{2a_j}(n)\, g\left(\frac{n-\beta_j}{\lambda_j}\right) = \phi(h_j(n))$$

y por el lema 3 tenemos la contradicción.

Así se ha demostrado que (ϕ) está acotada en un entorno del orígen de $A_r'(Z)$, y la demostración del teorema 3 se acaba como la demostración del teorema 1 .

La observación 2 que sigue al teorema 2 vale también aquí. Sería interesante estudiar la vinculación entre las propiedades estructurales de E y las funciones que operan en $A(E)$. Existen ciertos E infinitos, que pueden ser no numerables, - "conjuntos de Helson" - tales que $f \in A(E) \Rightarrow f$ continua sobre E ; en esos casos operan todas las ϕ contínuas (ver por ejemplo las notas [3]). Por otra parte, si E satisface la condición (A) , ϕ debe ser analítica. No conocemos otros casos.

VII.- FUNCIONES QUE OPERAN EN $B_r(Z)$ Y $B_r(T)$

§1.- CARACTERIZACION DE LAS FUNCIONES QUE OPERAN SOBRE $B(Z)$.

Generalidades :

Con $B(Z)$ se indica el álgebra de los coeficientes de Fourier - Stieltjes (coef. F-S) de las medidas sobre el círculo T . Una sucesión $\{f(n)\}$ de números complejos pertenecen a $B(Z)$ si existe una medida μ tal que

$$f(n) = \hat{\mu}(n) = \int_0^{2\pi} e^{-int}\, d\mu(t) \quad .$$

Si $f \in B$, la norma $||f||_B$ de f se define como la norma $||\mu||_M$ de su correspondiente medida:

$$||f||_B = ||\mu||_M = \int_0^{2\pi} |d\mu| \quad .$$

Como siempre, una función compleja con dominio real ϕ opera sobre $B(Z)$ si $f \in B_r$ implica $\phi \circ f \in B$, donde B_r es la subclase de los coeficientes reales; es decir, si existe una ν tal que

$$\hat{\nu}(n) = \phi\,(f(n)) \quad , \quad \forall n \quad .$$

El teorema principal de esta sección (teorema 1) afirma que las funciones que operan sobre B_r son las enteras en el plano complejo.

Se demostrarán unos lemas previos; el lema 2 tiene importancia de por sí.

Lema 1 :

Existen dos números $\lambda = \lambda(M)$ y $\ell = \ell(M)$ tales que para todo polinomio trigonométrico p de grado M existe un intervalo de longitud 2ℓ donde $Re(p(t)\, e^{i\lambda t}) > \frac{1}{3}\, ||p||_\infty$.

Se demostrará que basta elegir

$$\lambda > 3\, M\, (2\pi + \frac{1}{4}) \quad , \quad \ell \text{ tal que } 2\lambda\ell + \tfrac{1}{4} < \frac{\pi}{3} \quad .$$

Existe un t_0 donde $p(t_0) = ||p||_\infty$. En t_0

$$\Delta_p = |p(t) - p(t_0)| \leq ||p'||_\infty\, |\Delta t| \leq M\, ||p||_\infty\, \Delta t \quad ,$$

pues por el teorema de S. Bernstein (ver p. ej. el curso sobre la Teoría constructiva)

$$||p'||_\infty \leq M \, ||p||_\infty \quad .$$

Resulta entonces $|\Delta p| < \frac{1}{3} ||p||_\infty$, si $|\Delta t| < \frac{1}{3M}$.

Fijado el intervalo $I = \left[t_0 - \frac{1}{6M} , t_0 + \frac{1}{6M} \right]$, en él se verifica

(1) $$|p| > \frac{2}{3} ||p||_\infty \quad ,$$

por lo que acabamos de decir.

Si ahora se escribe

$$p = |p| \, e^{i\alpha}$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{|p'|}{|p|} + i\alpha'$$

resulta en I

$$|\alpha'| \leq \left| \frac{p'}{p} \right| \leq \frac{M||p||_\infty}{\frac{2}{3}||p||_\infty} = \frac{3M}{2} \quad .$$

Por ello, cuando $\Delta t = |t - t_0| \leq \frac{1}{6M}$, resulta

(2) $$|\alpha(t) - \alpha(t_0)| \leq ||\alpha'||_\infty \, |\Delta t| \leq \frac{3}{2} M \frac{1}{6M} = \frac{1}{4} \quad .$$

Sea ahora λ entero, tal que $\lambda/3M > 2\pi + 1/4$; en el intervalo I se cumple $\Delta(\lambda t) > 2\pi + 1/4$ lo que implica $\Delta \arg (p.e^{i\lambda t}) > 2\pi$. Llamemos $q(t) = p(t)\, e^{i\lambda t}$; por la última relación existe un t_1 en el interior de I donde q es real y mayor que cero, cumpliéndose

$$q(t_1) > \frac{2}{3} \, ||p||_\infty \qquad \text{por (1)} \quad .$$

Si $J = I \cap [t_1 - \ell , t_1 + \ell]$, evidentemente

$$\Delta \arg q < 2\lambda\ell + \tfrac{1}{2} \quad , \qquad \text{por (2)} \quad .$$

Sea finalmente $\ell = \ell(M)$, cumpliendo $2\lambda\ell + \frac{1}{2} < \pi/3$; en el intervalo J se tendrá

$$\operatorname{Re} [q(t)] > q(t_1) \cos \pi/3 > \frac{1}{3} ||p||_\infty \quad ; \quad \text{cdq.}$$

O b s e r v a c i ó n :

No necesitamos el teorema de S. Bernstein , sino cualquier desigualdad del tipo $||p'||_\infty \leq K(M) \, ||p||_\infty$; tal desigualdad, con $K(M) = M(M+1)$ es muy elemental.

L e m a 2 :

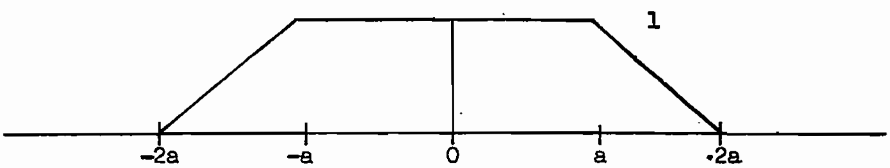
Si ϕ opera sobre $B(Z)$, es acotada sobre toda bola de $B_r(Z)$.

Supongamos primero $\phi(0) = 0$.

Hay que demostrar que, si $||f|| \leq k$, entonces $||\phi \circ f|| \leq M = M(k) < \infty$. De lo contrario, existe un $k > 0$ y una sucesión $\{f_j\} \in B_r$ tal que

$$||f_j|| \leq k \qquad y \qquad ||\phi \circ f_j|| \uparrow_j \infty \ .$$

De la misma manera que en el capítulo 6 , se reemplazarán las funciones de la sucesión $\{f_j\}$ por otras con la misma propiedad, pero con soportes finitos. Para ello, sea V_a el núcleo de la Vallée Poussin con dominio entero:



V_a pertenece al álgebra (multiplicativa) $B(Z)$ pues su soporte es finito. Valen para él las siguientes propiedades [1] :

$$\begin{cases} (1) \quad ||V_a|| \leq 3 \ , \quad \forall a \\ (2) \quad \underline{\lim}_{a \to \infty} ||V_a f|| \geq ||f|| \ . \end{cases}$$

Por (2) para todo j existe un a_j tal que

$$||V_{a_j} \phi(f_j)|| \geq \tfrac{1}{2} ||\phi(f)|| \uparrow_j \infty \ .$$

se verifica además $V_{a_j}\phi(f_j) = V_{a_j}\phi(V_{2a_j}f_j)$, así que

$$3\,||\phi(V_{2a_j}f_j)|| \geq ||V_{a_j}\phi(V_{2a_j}f_j)|| = ||V_{a_j}\phi(f_j)|| \uparrow_j \infty$$

Si se llama $h_j = V_{2a_j}f_j$, la sucesión h_j verifica

(3) $$||h_j|| \leq 3k \qquad y \qquad ||\phi(h_j)|| \uparrow_j \infty$$

y sus funciones son de soportes finitos; p. ej., sop $h_j \subset [-n_j, n_j]$.

La demostración continúa según esta idea: modificar los soportes de las h_j respetando (3) , y de tal manera que tenga sentido el problema de interpolación consistente en hallar una $\varphi \in B(Z)$, cuyas restricciones a los soportes dados coincidan con las funciones h_j . Esto será un absurdo.

(1) Ver el capítulo 6 .

Para cada j se considera el conjunto de los enteros $S_j = \{n\nu_j + \mu_j \ ; \ |n| \leq 2n_j\}$; los (ν_j, μ_j) son enteros a elegir convenientemente. Se define luego la "trasladada y dilatada" φ_j de h_j :

$$\varphi_j(p) = \begin{cases} h_j(n) & \text{si} \quad p = n\nu_j + \mu_j \in S_j \\ 0 & \text{si} \quad p \notin S_j \end{cases}$$

Esta trasformación $h_j \xrightarrow{\tau_j} \varphi_j$, en el espacio delas trasformadas de F-S de las medidas asociadas, equivale a

$$\hat{\tau}_j : \hat{h}_j(t) = \sum_{n=-n_j}^{n_j} h_j(n)\, e^{int} \longrightarrow \hat{\varphi}_j(t) = \sum_{n=-n_j}^{n_j} h_j(n)\, e^{i(n\nu_j+\mu_j)t}$$

Además, no altera normas; en efecto, como la medida asociada a φ_j es $\frac{1}{2\pi}\hat{\varphi}_j\, dt$, entonces

$$(4) \qquad ||\varphi_j||_B = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\hat{\varphi}_j(t)|dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sum_n h_j(n)\, e^{in\nu_j t}|\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi\nu_j}\int_0^{2\pi\nu_j} |\sum h_j(n)\, e^{inu}|du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sum h_j(n)\, e^{inu}|\, du = ||h_j||_B \ .$$

Si se construyen los S_j disjuntos y se encuentra una $\varphi \in B$ tal que sus restricciones $\varphi/S_j = \varphi_j$ se habrá llegado a un absurdo. Pues, sea $\tilde{V}_j = V_{n_j}$ el núcleo de la Vallée Poussin del entero n_j ; sea $V_j^* = \tau_j V_j$, donde τ_j es la trasformación ya definida. El soporte de V_j^* es S_j , y se cumplen las relaciones

$$\begin{cases} V_j^*\, \phi(\varphi) = \phi(\varphi_j) \\ 3\, ||\phi(\varphi)|| \geq ||V_j^*\, \phi(\varphi)|| = ||\phi(\varphi_j)|| = ||\phi(h_j)|| \uparrow_j \infty \ . \end{cases}$$

La última de ellas implica $||\phi(\varphi)|| = \infty$, que es absurdo pues $\phi(\varphi) \in B(Z)$. Para encontrar una tal φ se elegirán convenientemente los pares (ν_j, μ_j) .

Considérense las familias $Q = \{Q_j \ ; \ j \geq 0\}$, tales que

$$Q_j \in B(Z)$$

$$\text{soporte } Q_j \subset S_j$$

$$\sum_j ||\hat{Q}_j||_\infty < \infty \quad , \text{ donde } \quad \hat{Q}_j(t) = \sum_{n \in S_j} Q_j(n)\, e^{int} \ .$$

Sea $\{X, |||\cdot|||\}$ el espacio de las funciones $\hat{Q}(t) = \sum_{j \geq 0} \hat{Q}_j(t)$, con la norma $|||\hat{Q}||| = \sum_{j\geq 0} ||\hat{Q}_j||_\infty$. Las funciones de X , límites uniformes de funciones continuas, son continuas; además $|||\hat{Q}||| \geq ||\hat{Q}||_\infty$. Asi mismo, gracias a

(3) y (4) , la nueva forma lineal η definida sobre X por

$$\eta : \hat{Q} \longrightarrow \sum_j \int_0^{2\pi} \hat{Q}_j(t)\ \hat{\varphi}_j(t).$$

es continua (pues $|\sum \int \hat{Q}_j\ \hat{\varphi}_j\ dt| \leq 3\ k.|||\hat{Q}|||)$.

Se supone, lo que se probará luego, que pueden elegirse los pares (ν_j, μ_j) de manera que las normas $||\ \ ||_\infty$ y $|||\ \ |||$ sean equivalentes sobre X . Entonces la forma η , lineal y continua sobre $[X, |||\ \ |||]$, lo es también sobre $[X, ||\ \ ||_\infty]$ y puede extenderse a una forma lineal y continua sobre $[\mathcal{C}(T), ||\ \ ||_\infty]$, o sea, a una medida μ .

Por construcción, para toda $\hat{Q} \in X$ se cumple

$$\int_0^{2\pi} \hat{Q}\ d\mu = \sum_j \int_0^{2\pi} \hat{Q}_j(t)\ \hat{\varphi}_j(t).dt \quad ;$$

en particular, si $m \in S_j$, resulta $e^{-imt} = \hat{Q}(t) \in X$ y

$$\hat{\mu}(m) = \int_0^{2\pi} e^{-imt}\ d\mu = \int_0^{2\pi} e^{-imt}\ \hat{\varphi}_j(t)\ dt = \varphi_j(m) \quad .$$

Es decir, la función $\varphi \in B(Z)$ tal que $\varphi(n) = \hat{\mu}(n)$ coincide, en S_j , con la φ_j .

Resta tan sólo conseguir la equivalencia de las normas. Bastará, p. ej., probar que, mediante elección adecuada de los (ν_j, μ_j) . se cumple para las $\hat{Q} \in X$

$$||\hat{Q}||_\infty = ||\sum_{j\geq 0} \hat{Q}_j||_\infty > \frac{1}{3} \sum_j ||\hat{Q}_j||_\infty = \frac{1}{3}\ |||\hat{Q}|||$$

Sea entonces la sucesión $\{\hat{Q}_j^+\}$ de polinomios trigonométricos de grado n_j :

$$\hat{Q}_j^+(t) = \sum_{n=-n_j}^{n_j} a_j(n)\ e^{int} \quad ;$$

para cada j existe un $\lambda_j = \lambda(n_j)$ y un $\delta_j = \delta(n_j)$ (lema 1) tales que

$$\text{Re}\ [e^{i\lambda_j t}\ \hat{Q}_j^+(t)] > \frac{1}{3}\ ||\hat{Q}_j^+||_\infty$$

es un intervalo I_j de longitud δ_j .

Los pares (ν_j, μ_j) , que determinan los soportes $S_j = \{n\ \nu_j + \mu_n\ ;\ |n| \leq 2n_j\}$, se eligirán cumpliendo las siguientes condiciones, claramente compatibles:

$$\begin{cases} \mu_j = \lambda_j \nu_j \\ \nu_{j+1} \geq \dfrac{2\pi}{\delta_j} \nu_j \\ \mu_j + 2\nu_j n_j < \mu_{j+1} - 2\nu_{j+1} n_{j+1} \quad ; \text{ (segmentos-soportes disjuntos)}. \\ \text{(y, p. ej., } \nu_1 = 1 \quad , \quad \mu_1 = 0 \quad). \end{cases}$$

Entonces la función $\hat{Q}_j(t) = \sum_{n=-n_j}^{n_j} a_j(n)\, e^{i(n\nu_j + \mu_j)t}$, "trasladada y dilatada" de $\hat{Q}_j^+$, cumple

$$\mathrm{Re}\,[\hat{Q}_j(t)] = \mathrm{Re}\,[e^{i\mu_j t}\, \hat{Q}_j^+(\nu_j t)] = \mathrm{Re}\,[e^{i\lambda_j x}\, \hat{Q}_j^+(x)] \geq \frac{1}{3} \|\hat{Q}_j^+\|_\infty = \frac{1}{3} \|\hat{Q}_j^+\|_{\infty'} ,$$

si t pertenece a un intervalo I_j/ν_j cualquiera (hay ν_j tales intervalos, de longitud δ_j/ν_j).

Sea ahora la suma finita

$$\hat{Q}(t) = \sum_{j=1}^{n} \hat{Q}_j(t) \quad ;$$

como la variación $\Delta(\nu_2 t) = \nu_2 \dfrac{\delta_1}{\nu_1} > 2\pi$ si $t \in I_1/\nu_1$, existe un intervalo $I_2/\nu_2 \subset I_1/\nu_1$ tal que si $t \in I_2/\nu_2$ resulta

$$\mathrm{Re}\,[\hat{Q}_j(t)] > \frac{1}{3} \|\hat{Q}_j\| \quad , \quad \text{si} \quad j = 1, 2 \quad .$$

Por lo mismo existen n intervalos $I_n/\nu_n \subset I_{n-1}/\nu_{n-1} \subset \dots \subset I_1/\nu_1$, de manera que si $t \in I_n/\nu_n$ se puede afirmar

$$\mathrm{Re}\,[\hat{Q}_j(t)] > \frac{1}{3} \|\hat{Q}_j\|_\infty \quad , \text{ si } \quad j = 1, 2, \dots, n \quad .$$

De aqui se deduce

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} \hat{Q}_j(t) \Big\|_\infty > \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{n} \|\hat{Q}_j\|_\infty \quad ,$$

y en el límite

$$\Big\| \sum_{j=1}^{\infty} \hat{Q}_j(t) \Big\|_\infty \geq \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{\infty} \|\hat{Q}_j\|_\infty \quad ,$$

como era requerido. Esto completa la demostración del lema, faltando tan sólo eliminar la hipótesis $\phi(0) = 0$. Eso es fácil, si se considera que la medida de Dirac tiene sus coef. de F-S todos iguales a 1 , y que las funciones que operan forman un álgebra (multiplicativa).

P r o p o s i c i ó n :

Sea f una función definida sobre la recta real, 2π periódica y continua. Si sus coef. de F. a_n cumplen la condición $|a_n| = o(e^{-B|n|})$, $B > 0$, f

es prolongable analíticamente en la franja del plano complejo $|y| < B$, donde $z = x + iy$.

Sea $f(t) = \varphi(z)$, con $z = e^{it}$. Entonces $\varphi(z) = f(-i \log z)$. Por las hipótesis sobre los a_n,

$$f(t) = \sum_n a_n e^{int} \quad , \quad \text{equivalente a}$$

$$\varphi(z) = \sum a_n z^n \quad , \quad |z| = 1 \quad .$$

Pero por la mayoración de los a_n, $\sum a_n z^n$ también converge para

$$(5) \qquad e^{-B} < |z| < e^{B} \quad ,$$

por lo que $\varphi(z)$ puede prolongarse al anillo definido por (5), y $f(t)$ a la franja $|y| < B$, puesto que $(z = |z|\, e^{i\alpha})$:

$$-i \log z = -i\,(\log |z| + i\alpha) = \alpha - i \log |z| \quad ,$$

donde $-B < \log |z| < B$.

T e o r e m a 1 :

Si ϕ es una función de variable real que opera sobre $B_r(Z)$, ϕ puede ser prolongada en una función entera en el plano complejo.

Por las mismas razones del final de lema 2, podemos suponer $\phi(0) = 0$. Por lo pronto, ϕ es continua en el origen; esto resulta de una aplicación del teorema de Riesz por el que, si $d\mu$ es una medida tal que $d\mu \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int}$ $(c_{-|n|}=0)$, entonces $d\mu = f.dx$, donde $f \in L^1$. Pues, sea $c_n \longrightarrow 0$, tal que $\sum_0^{\infty} |c_n| < \infty$, y $\phi(c_n) > \varepsilon$. La sucesión $\{c_n\}$ pertenece a $B(Z)$ y, como ϕ opera, existe una medida $d\nu$ tal que $d\nu \sim \sum_0^{\infty} \phi(c_n) e^{int}$; por Riesz $d\nu = f.dx$, que es absurdo, pues por Riemann-Lebesgue $\phi(c_n) \longrightarrow 0$. Como las constantes operan, esto implica la continuidad de ϕ en todo punto.

Sea ahora Ψ tal que $\Psi(x) = \phi(R \operatorname{sen} x)$ R real ≥ 0; Ψ es continua y opera, pues el seno es una función entera. Sidemostramos que los coef. de F. de Ψ decrecen en el infinito como exponenciales, por la Proposición 1 Ψ es prolongable en una franja $-1 < y < +1$ del plano complejo, y ϕ en la franja $-R < y < R$; como R es arbitrario, ϕ es prolongable analíticamente en todo el plano complejo.

Por el lema 2. $\Psi(f+t)$ es uniformemente acotado en $B(Z)$ cuando $||f||_{B_r(Z)} \leq 1$ y $-\pi \leq t \leq \pi$, sea

$$||\Psi(f+t)||_{B(Z)} < A$$

Sea entonces $\Psi(t) \sim \sum_n \gamma_n e^{int}$ (por ser Ψ una función continua). Finalmente se tiene

$$(6) \qquad \gamma_n e^{inf} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi(f+t)\, e^{-int}\, dt$$

$$(7) \qquad \| \gamma_n e^{inf} \|_{B(Z)} \leq \sup_{|t|\leq\pi} \| \Psi(f+t) \|$$

$$(8) \qquad |\gamma_n| \sup_{f\in B_r(Z),\, \|f\|\leq 1} \| e^{inf} \| \leq A$$

y por el lema 1 del capítulo 6 ,

$$|\gamma_n| \leq A\, e^{-n}$$

lo que queríamos demostrar.

(6) tiene sentido cuando $f = f(j)$ (número complejo). Hay que mostrar (6) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$(7) . Para eso, consideramos

$$\sum_{j=-N}^{N} \left(1 - \frac{|j|}{N}\right) \gamma_n\, e^{inf(j)}\, e^{int} = \sigma_N(s) \quad .$$

Puesto que (Helly)

$$\| \gamma_n e^{inf} \|_{B(Z)} \leq \varliminf_{N\to\infty} \| \sigma_N \|_1$$

basta mostrar

$$(9) \qquad \| \sigma_N \|_1 \leq \sup_{|t|\leq\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |d\mu_t|$$

donde

$$d\mu_t(s) \sim \sum_j \Psi(f(j)+t)\, e^{ijs}$$

Denominando $\sigma_N(d\mu_t;s)$ a la suma de Féjer de orden N de $d\mu_t$ se tiene por (6) (donde $f = f(j)$)

$$\sigma_N(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_N(d\mu_t;s)\, e^{-int}\, dt$$

Así pues,

$$\| \sigma_N \|_1 \leq \sup_{|t|\leq\pi} \| \sigma_N(d\mu_t) \|_1$$

y de $\| \sigma_N(d\mu_t) \|_1 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |d\mu_t|$ resulta (9) .

Eso completa la demostración del teorema.

Un corolario del teorema 1 es lo que decíamos en el capítulo 2 , 6 : Z no es el espectro de B(Z) . Sino, por el teorema de Wiener - Lévy , cada función analítica de variable real operaría sobre $B_r(Z)$.

VIII.- S I N T E S I S E S P E C T R A L E N ℓ^{∞} .

§1.- GENERALIDADES, CASOS DE $L^{\infty}(T,Z)$.

Empezaremos dando algunas propiedadesgenerales del análisis y la síntesis espectral para estudiar después el caso $L^{\infty}(T,Z,R,)$.

Sea G un grupo y $\mathcal{E}$ cualquier espacio vectorial topológico de funciones definidas sobre G a valores complejos.

Llamamos f_t a la trasladada de $f \in \mathcal{E}$ por t , t en el grupo.

Con esta definición es posible hablar de sub-espacios de $\mathcal{E}$ invariantes por traslaciones:

$$f \in H \Longrightarrow f_t \in H \qquad \forall t \in G \quad .$$

(Si G no es abeliano pueden tomarse trasladadas a izquierda, por ejemplo).

Los problemas del a n á l i s i s y la s i n t e s i s e s p e c t r a l constituyen un estudio de los subespacios de $\mathcal{E}$ cerrados e invariantes por traslaciones.

Llamaremos s u b - e s p a c i o s s i m p l e s a los cerrados e invariantes, que contienen un solo sub-espacio del mismo tipo, de dimensión 1 .

Es claro que todo sub-espacio invariante y cerrado, de $\dim = 1$ es simple .

(Mediante polinomios de variable real es posible dar ejemplos de sub-espacios simples de cualquier dimensión finita).

En estas condiciones, el p r o b l e m a d e l a n á l i s i s será el siguiente:

1.- Dado F sub-espacio cerrado e invariante, hallar los sub-espacios simples contenidos en F .

A ese conjunto lo llamaremos e s p e c t r o de F :

$$S_p F = \{H \subset F \ , \ H \ \text{simple}\}$$

Y el problema de la s í n t e s i s será :

2.- Cuándo F está engendrado por su espectro?

Si para una $f \in \mathcal{C}$ se define

$$S_p\, f = S_p\, \mathcal{T}(f)$$

donde $\mathcal{T}(f)$ es el sub-espacio cerrado invariante engendrado por las trasladadas de f, el problema de la síntesis se reduce al siguiente enunciado:

3.- Pertenece f al sub-espacio de $\mathcal{C}$, generado por $S_p\, f$, (para cada f)?

Vamos a ver qué quiere decir en el caso en que $G = T$ y $\mathcal{C} = C(T)$.

Se sabe que las e^{int} engendran sub-espacios cerrados de dimensión 1, invariantes.

No es difícil ver que son los únicos, ya que si una función f está en un sub-espacio de dimensión 1, invariante, vale:

$$f(t - a) = K(a)\, f(t)$$

y las únicas funciones continuas sobre el círculo que satisfacen una ecuación de ese tipo son las exponenciales o sus múltiplos.

Si

$$f \sim \sum c_n\, e^{int} \in C(T)$$

sea $\mathcal{T}(f)$ el sub-espacio cerrado invariante engendrado por las trasladadas de f: $\{f_t / t \in T\}$.

Como, si $g \in C(T)$,

$$f * g = \text{lim. uniforme} \sum_i f(t - x_i)\, g(x_i)\, \Delta x_i$$

resulta que $f * g \in \mathcal{T}(f)$ $\forall g \in C(T)$ y en particular

$$c_n\, e^{int} \; (= f * e^{int}) \in \mathcal{T}(f) \quad ,$$

de donde $e^{int} \in \mathcal{T}(f)$ cuando $c_n \neq 0$.

Pero por el Teorema de Féjer, f pertenece al sub-espacio invariante cerrado generado por las e^{int} de $\mathcal{T}(f)$, lo que equivale a una respuesta afirmativa al problema de la s í n t e s i s.

Con esto también está resuelto el problema del a n á l i s i s :

$$S_p\, H = \{\mathcal{T}(e^{int}) / c_n \neq 0 \quad \text{para alguna} \quad f \in H\}$$

En el caso general, mediante el empleo de duales puede darse aún otra formulación de (2) y (3) .

Si $\mathcal{E}'$ es el dual de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{T}^{\perp}(f)$ es el sub-espacio de $\mathcal{E}'$ ortogonal a $\mathcal{T}(f)$, es:

$$\text{Sp } f = \left\{ \text{Sup-esp. simples } \perp \mathcal{T}^{\perp}(f) \right\}$$

(Recuérdese que si H es un sub-espacio cerrado, $H^{\perp\perp} = H$) . Y (3) puede escribirse como:

(4) ¿Es $f \perp (\text{sp } f)^{\perp}$?

(Entendiendo por $(\text{Sp } f)^{\perp} = \left(\bigcup_{H \in S_p f} H)^{\perp} \right)^{-}$.

Si en $\mathcal{E}$ hay dos topologías comparables (débil y fuerte, como en un L^p) resolver estos problemas para una de ellas puede dar una solución para la otra.

En efecto, vale el siguiente cuadro, fácil de verificar:

	$\mathcal{T}(f)$	$\bigcup_{H \in S_p f} H$	sub-esp gen$(S_p f)$
débil	$>$	$>$	$>$
fuerte	$<$	$<$	$<$

y entonces si vale la síntesis para la topología fuerte también vale para la débil. Esto asegura que si hay que buscar contra-ejemplos será más difícil en la topología débil que en la fuerte.

Bajo la forma (4) atacaremos el problema en $L^{\infty}(T)$.

Se ve facilmente que los sub-espacios de dim = 1 , invariantes, son los generados por las e^{int} . Se puede ver también facilmente que son los únicos sub-espacios simples de $L^{\infty}(T)$ . .

Con esto es evidente q u e n o h a y s í n t e s i s para $L^{\infty}(T)$ con la topología fuerte, porque las combinaciones lineales de las e^{int} serán siempre funciones continuas y por lo tanto también sus límites uniformes , de manera que basta tomar una $f \in L^{\infty}(T)$ discontinua para que (3) admita "N O" como respuesta.

Sin embargo podría haber síntesis para $L^{\infty}(T)$ con la topología débil $w^{*} = \sigma(L^{\infty}(T), L^{1}(T))$. Téngase presente que para la topología w^{*} , L^{1} es el dual en L^{∞} .

Si $f \in L^{\infty}$ y $\varphi \in L^{1}$, sea

$$\langle f, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_T f(-t)\ \varphi(t)\ dt = (f * \varphi)\ (0) \quad .$$

Para cada $f \in L^{\infty}(T)$, el ortogonal $\mathcal{T}(f)$ es la familia de funciones $\varphi \in L^1(T)$ tales que, para todo t,

$$\langle f_t\ , \varphi \rangle = 0$$

o sea:

(A) $$\varphi \in \mathcal{T}^{\perp}(f) \iff f * \varphi = 0$$

Si es

$$f \sim \sum c_n\ e^{int}$$
$$\varphi \sim \sum \gamma_n\ e^{int}$$

la implicación (A) puede escribirse

(B) $$\varphi \in \mathcal{T}^{\perp}(f) \iff c_n \gamma_n = 0 \quad \text{para todo } n$$

así que $\mathcal{T}^{\perp}(f)$ es la familia de las φ tales que $\gamma_n = 0$ cada vez que $c_n \neq 0$.

Conocido esto, el problema de hallar las e^{int} ortogonales a $\mathcal{T}^{\perp}(f)$ se expresa (mediante (A)) por

$$e^{int} \perp \mathcal{T}^{\perp}(f) \iff \forall \varphi \in \mathcal{T}^{\perp}(f) \quad , \quad \gamma_n = 0$$

y eso pasa si y sólo si $c_n \neq 0$:

$$e^{int} \perp \mathcal{T}^{\perp}(f) \iff c_n \neq 0 \quad .$$

Como por la definición es

$$(S_p\ f)^{\perp} = \left\{ \varphi \in L^1(T) / c_n \neq 0 \implies \varphi * e^{int} = 0 \right\}$$

y

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim \langle \sigma_n, \varphi \rangle = 0 \qquad (\sigma_n = \text{suma Féjer})$$

resulta

$$f \perp (Sp\ f)^{\perp}$$

Esta es una respuesta afirmativa para (4) , de manera que h a y s í n t e s i s.

§2.- CASO $L^{\infty}(Z)$.

Ahora vamos a considerar el caso más importante, es decir, $L^{\infty}(Z) = \ell^{\infty}$.

Veremos que la síntesis no vale con la topología débil, y por lo tanto tampoco con la fuerte.

Si H es un sub-espacio de l^{∞} invariante por traslaciones y de $\dim = 1$, debe ser

$$c = \{c_n\} \in H \Rightarrow \{c_{n+1}\} = \lambda c$$

o sea
$$c_n = \lambda^n c_o$$

es decir

$$\{c_n\} = c_o \{\lambda^n\}$$

de manera que debe ser $c_n = c_o (e^{it})^n$, o lo que es lo mismo. todo sub-espacio cerrado, invariante y de $\dim = 1$ debe ser de la forma:

$$\lambda \{e^{int}\} \qquad \lambda \in C \quad .$$

A tal sub-espacio lo llamaremos simplemente $\overline{t}$ y $h(t)$ a la sucesión $\{e^{int}\}$.

Vamos a estudiar cuales sucesiones $h(t)$ pertenecen a $\mathcal{T}(c)$ para una $c = \{c_n\} \in \ell^{\infty}$ dada.

Para ello conviene introducir la seudo-medida θ cuya serie de Fourier sea

$$\theta \sim \sum c_n e^{int}$$

Nuevamente, interesa recordar que para la topología débil, ℓ^1 es el dual de ℓ^{∞} .

Si $\gamma = \{\gamma_n\} \in \ell^1$ será γ ortogonal a $\mathcal{T}(c)$ sí y sólo si

$$\text{(C)} \qquad \gamma * c = 0 \quad .$$

En este caso, llamando $f(t)$ a $\sum \gamma_n e^{int}$, se tendrá

$$\langle f , \theta \rangle = \sum c_n \gamma_{-n} = 0$$

y por (C) ,

$$\langle f e^{ipt} , \theta \rangle = \sum c_{n+p} \gamma_{-n} = 0$$

lo que por linealidad da

$$\langle f P , \theta \rangle = 0$$

para todo polinomio trigonométrico P , y como

$$\langle \lim_{A} f_n , \theta \rangle = \lim \langle f_n , \theta \rangle$$

es $\langle fg , \theta \rangle = 0$ para toda $g \in A(T)$, así que el ideal $I(f)$ engendrado por f cumple

$$I(f) \perp \theta$$

es decir

(D) $$\gamma * c = 0 \Longleftrightarrow I(f) \perp \theta$$

de donde (por (A)) :

$$\theta \perp \mathcal{T}(c) \Longleftrightarrow I(f) \perp \theta$$

y como

$$\langle \gamma , h(t) \rangle = f(t)$$

resulta

$$h(t) \in \mathcal{T}(c) \Longleftrightarrow (I(f) \perp \theta \Longrightarrow f(t) = 0)$$

pero como vale

$$(I(f) \perp \theta \Longrightarrow f(t) = 0) \Longrightarrow t \in \operatorname{Sop} \theta$$

(facilmente demostrable mediante "identidades locales"), resulta

$$\bar{t} \in \operatorname{Sp} c \Longleftrightarrow t \in \operatorname{Sop} \theta$$

De esto se deduce que

$$\gamma \perp \operatorname{Sp} c \Longleftrightarrow f = 0 \quad \text{en} \quad \operatorname{Sop} \theta$$

de manera que h a b r á s í n t e s i s (c pertenecerá al ortogonal del ortogonal de su espectro) si y solamente sí:

(E) $$f \in A \ , \ f = 0 \ \text{en} \ \operatorname{Sop} \theta \Longrightarrow \langle f , \theta \rangle = 0$$

Para mostrar que n o h a y s í n t e s i s será suficiente exhibir $f \in A$ y θ tales que $f = 0$ en $\operatorname{Sop} \theta$ con $\langle f , \theta \rangle \neq 0$.

La condición (E) puede darse también mediante

(F) Para todo E cerrado en T , toda seudo - medida con soporte dentro de E es nula en toda función nula sobre E .

Paul Malliavin ha demostrado que esto es falso [11] .

Nosotros daremos una demóstración en el §4 .

§3.- UN TEOREMA DE EXISTENCIA.

Consideremos la clase de funciones

$$f(t) = \sum P_k (X_k \cos kt + X_k' \operatorname{sen} kt)$$

donde X_k , X_k' son variables aleatorias normales (0,1) independientes y $P_k \geq 0$, $\sum P_k < \infty$.

L e m a 1 :

$f \in A$ casi seguramente (con probabilidad 1).

D e m o s t r a c i ó n :

Hay que demostrar que

$$\begin{cases} \sum P_k \ |X_k| < \infty \\ \sum P_k \ |X_k'| < \infty \end{cases}$$

casi seguramente.

Eso es consecuencia de

$$(1) \qquad \begin{cases} e^{\sum P_k |X_k|} < \infty \\ e^{\sum P_k |X_k'|} < \infty \end{cases}$$

casi seguramente.

Pero, denominando $E(Y)$ al valor medio (esperanza matemática) de una variable aleatoria Y

$$E(e^{P_k|X_k|}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{P_k X - \frac{X^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{\frac{P_k^2}{2}} \int_{P_k}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \leq e^{\frac{P_k^2}{2}} = 1$$

y por la independencia de las X_k

$$E(e^{\sum P_k |X|_k}) = \prod E(e^{P_k|X_k|}) .$$

y el producto infinito es convergente por la fórmula anterior, ya que $\prod(1 + a_k)$ e convergente junto con $\sum a_k$, y por hipótesis $\sum P_k < \infty$.

Pero si

$$(2) \qquad \begin{cases} E(e^{\sum P_k|X_k|}) < \infty \\ E(e^{\sum P_k|X_k'|}) < \infty \end{cases}$$

entonces se cumple lo pedido en el lema, porque $E(\xi) < \infty$ implica $|\xi| < \infty$ casi seguramente, así que (2) implica (1) .

Según este lema,

$$e^{iuf(t)} \sim \sum p_n(u)\, e^{int}$$

pertenece a A casi seguramente, para cada u, y $p_o(u)$ es una variable aleatoria para todo u cuyo valor medio es:

$$E(p_o(u)) = E\left[\frac{1}{2\pi}\int_T e^{iuf(t)}\,dt\right] = \frac{1}{2\pi}\int_T E(e^{iuf(t)})\,dt$$

$$E(e^{iuf(t)}) = \prod E(e^{iu P_k X_k \cos kt})\, E(e^{iu P_k X_k' \operatorname{sen} kt}) = e^{-\frac{1}{2}u^2\sum P_k^2}$$

Así que $E(p_o(u)) = e^{-\frac{1}{2}u^2\sum P_k^2}$, y, si se integra en u:

(I)
$$E\left(\int_{-\infty}^{\infty} p_o(u)\,du\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{\sum P_k^2}} \neq 0$$

Si $h \in A(T)$ y $h \sim \sum c_n e^{int}$, es $h * h \sim \sum c_n^2 e^{int}$ y por Parseval:

$$\|h * h\|_2^2 = \sum |c_n|^4$$

de manera que

$$B(u) = \|e^{iuf} * e^{iuf}\|_2^2 = \sum |p_n(u)|^4$$

Pero por definición es:

$$(e^{iuf} * e^{iuf})(t) = \frac{1}{2\pi}\int_T e^{iuf(t-s)+iuf(s)}\,ds$$

y

$$|(e^{iuf} * e^{iuf})(t)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{T^2} e^{iu(f(t-s)+f(s)-f(t-s')-f(s'))}\,ds\,ds'$$

así que finalmente resulta

$$B(u) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{T^3} e^{iu[f(t-s)+f(s)-f(t-s')-f(s')]}\,ds\,ds'\,dt \quad .$$

Ahora como:

$$E\left(e^{iu P_k X_k [\cos k(t-s) + \cos ks - \cos k(t-s') - \cos ks']}\right) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}u^2 P_k^2 [\cos k(t-s) + \cos ks - \cos k(t-s') - \cos ks']^2}$$

y lo mismo con senos en lugar de cosenos, resulta

$$E(B(u)) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{T^3} E(\cdot) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{T^3} e^{-\frac{1}{2}u^2\sum P_k^2(A_k^2+B_k^2)}\,dt\,ds\,ds'$$

donde

$$\begin{Bmatrix} A_k \\ B_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \\ \operatorname{sen} \end{Bmatrix} k(t-s) + \begin{Bmatrix} \cos \\ \operatorname{sen} \end{Bmatrix} ks - \begin{Bmatrix} \cos \\ \operatorname{sen} \end{Bmatrix} k(t-s') - \begin{Bmatrix} \cos \\ \operatorname{sen} \end{Bmatrix} ks'$$

Si ahora se hace el cambio de variables

$$\begin{cases} x = s - s' \\ y = t - s - s' \\ z = t \end{cases}$$

resulta

$$A_k^2 + B_k^2 = 16 \operatorname{sen}^2 \frac{k\,x}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{k\,y}{2}$$

asi que es

$$E\,(B(u)) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{T^3} e^{-8u^2 \sum P_k^2 \operatorname{sen}^2 \frac{kx}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{ky}{2}}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{T^2} e^{-8u^2 \sum P_k^2 \operatorname{sen}^2 \frac{kx}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{ky}{2}}\, dx\, dy \quad .$$

La fórmula siguiente es válida por la des. de Hölder :

$$\text{(II)} \qquad \int_1^\infty |u\, p_n(u)|\, du \leq \left(\int_1^\infty u^k\, |p_n(u)|^4\right)^{1/4} \left(\int_1^\infty u^{-\alpha}\right)^{3/4}$$

con $\alpha = \frac{k-4}{3}$, así que la última integral será convergente para $k > 7$. D
resulta que

$$\sup_n \int_1^\infty |u\, p_n(u)|\, du < \infty$$

si

$$\int_1^\infty \left(\sum |p_n(u)|^4\right) u^k\, du < \infty \quad , \quad \text{es decir, cuando}$$

$$H = \int_1^\infty u^k\, B(u)\, du < \infty \quad .$$

Veamos que eligiendo convenientemente los P_k , esto puede conseguirse para un $k > 7$, casi seguramente.

Para eso calculemos

$$E\,(H) = \int_1^\infty u^k\, E(B(u))\, du = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{u=1}^{u=\infty} \iint_{T^2} u^k\, e^{-u^2 C(x,y)}\, dx\, dy\, du$$

con $C(x,y) = 8 \sum P_m^2 \operatorname{sen}^2 \frac{mx}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{my}{2}$.

Si se integra la última integral en $u\sqrt{C}$, resulta

$$E(H) \leqslant \frac{1}{(2\pi)^2} \; K \iint_{T^2} C^{-\frac{k+1}{2}}(x,y)\, dx\, dy$$

donde $\quad K = \displaystyle\int_1^{\infty} t^k\, e^{-t^2}\, dt \quad .$

Mostraremos que, con una elección conveniente para cada $k > 7$ de los P_m, esta última integral puede hacerse siempre convergente.

Sea

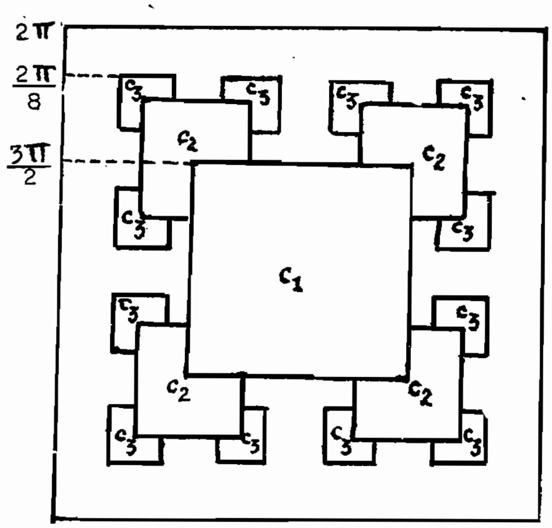
$$P_m = \begin{cases} 2^{-j\alpha} & \text{si} \quad m = 2^j \\ 0 & \text{si} \quad m \neq 2^j \end{cases}$$

donde α es un número positivo a determinar, y definamos

$$C_0 = \emptyset$$

$$C_j = \left\{ (x,y) \in T^2 / \left|\operatorname{sen} \frac{2^{j-1} x}{2}\right| > \frac{\sqrt{2}}{2} \;, \; \left|\operatorname{sen} \frac{2^{j-1} y}{2}\right| > \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} - C_{j-1}$$

Se comprueba que es



y que vale : $\quad \text{med}\, C_j = \pi^2 \left(\frac{3}{4} \right)^j \qquad (j \geqslant 1) \quad .$

Ahora bien, en C_1 vale

$$C(x,y) > 2\,(P_1)^2$$

y en general, en C_j ,

$$C(x,y) > 2\,(P_{2^{j-1}})^2$$

de manera que, en C_j

$$C^{-\frac{k+1}{2}}(x,y) < \left[2 \, (P_{2^{j-1}})^2 \right]^{-\frac{k+1}{2}}$$

asi que

$$\iint_{T^2} C^{-\frac{k+1}{2}}(x,y)\, dx\, dy \leq \pi^2 \, 2^{-(k+1)(\alpha+\frac{1}{2})} \sum_j \left(\frac{3}{4}\, 2^{\alpha(k+1)}\right)^j$$

que será convergente para

$$\alpha < \frac{-\log\left(\frac{3}{4}\right)}{(k+1)\log 2}$$

Para esos valores de P_k entonces vale

$$E(H) < \infty$$

es decir $|H| < \infty$ casi seguramente, y, por lo tanto, según (II)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u\, p_n(u)|\, du < L$$

para todo n, casi seguramente.

En resumen

1.- Las funciones f casi seguramente pertencen a A.

2.- Para ellas $\int_{-\infty}^{\infty} p_o(u)\, du$ tiene valor medio $\neq 0$.

3.- $\int_{-\infty}^{\infty} |u\, p_n(u)|\, du < L$ para todo n, casi seguramente de manera que debe existir a l g u n a función en A con $\int_{-\infty}^{\infty} p_o(u)\, du \neq 0$ y tal que $\sup_n \int_{-\infty}^{\infty} |u\, p_n(u)|\, du < \infty$.

§4.- CONCLUSION, TEOREMA DE MALLIAVIN.

Según se vió en el parágrafo anterior, existe una $f \in A_r(T)$ tal que, si $e^{iuf(t)} \sim \sum p_n(u)\, e^{int}$, se cumple las siguientes condiciones :

$$\text{I} \qquad \sup_n \int_{-\infty}^{\infty} |u\, p_n(u)|\, du < L$$

$$\text{II} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} p_o(u)\, du \neq 0$$

Con ella resolveremos el problema de la síntesis espectral en ℓ^∞ con la topología $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ (v. §2).

En efecto, sea

$$h_{\varepsilon}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\, e^{-\varepsilon u^2}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\; e^{\frac{-x^2}{4\varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0)$$

Para x complejo, la expresión integral de $h\,(x)$ es analítica:

$$h^{(p)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (iu)^p\, e^{iux}\, e^{-\varepsilon u^2}\, du$$

de manera que por Wiener - Lévy , opera sobre el álgebra A :

$$h^{(p)}\,(A) \subset A \quad .$$

Como $e^{iuf(t)} \sim \sum p_n(u)\, e^{int}$, se verifica

$$h^{p}_{\varepsilon}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon u^2}\, e^{iuf(t)}\, (iu)^p\, du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon u^2}\, (iu)^p \,\Big(\sum_n p_n(u)\, e^{int}\Big)\, du =$$

$$= \sum_n \Big(\int_{-\infty}^{\infty} (iu)^p\, e^{-u^2}\, p_n(u)\, du \Big)\, e^{int}$$

de manera que por I , $h'(f(t))$ tiene sus coeficientes de Fourier acotados y por lo tanto es una seudo-medida para cada ε .Además las normas de $h'(f(t))$ están uniformemente acotadas respecto de ε y por lo tanto forman un conjunto relativamente debilmente compacto.

Si se toma una sucesión $\varepsilon'_j \longrightarrow 0$, por compacidad, $\{h'_{\varepsilon_j}\}$ tiende debilmente hacia alguna seudo-medida $\delta'(f)$ para alguna sub-sucesión $\varepsilon_j \longrightarrow 0$.

Según esto, los coeficientes de Fourier de $\delta'(f)$ serán:

$$\delta'(f) \sim \sum_n \Big(\int_{-\infty}^{\infty} (iu)\, p_n(u)\, du\Big)\, e^{int}$$

Sea ahora $g \in A$ con $\operatorname{Sop} g \cap f^{-1}(0) = \emptyset$. De aquí resulta que $0 < k \leq$ $\leq |f| \leq K$ en sop g .

Para $t \in \operatorname{Sop} g$ se tiene

$$h'_{\varepsilon}(f(t)) = \left| \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\; e^{-\frac{f^2(t)}{4\varepsilon}} \right| . \left| -\frac{f(t)}{2\,\varepsilon} \right| \leq \frac{K\sqrt{\pi}}{2}\; \varepsilon^{-3/2}\; \varepsilon^{-\frac{k^2}{4\varepsilon}}$$

asi que $h'_{\varepsilon}(f(t))$ converge uniformemente a 0 en el soporte de g , y entonces

$$\int_T h'_{\varepsilon}\,(f(t))\, g(t)\, dt \longrightarrow 0$$

o lo que es lo mismo

$$\text{si} \quad \operatorname{Sop} g \cap f^{-1}(0) = \emptyset \quad , \quad \langle \delta'(f) , g \rangle = 0 \quad .$$

Esto quiere decir que el soporte de $\delta'(f)$ es un subconjunto de $f^{-1}(0)$.

Además resulta

$$\langle f , \delta'(f) \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int f(t) h'_{\varepsilon} (f(t))\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint (if(t))\, e^{iuf(t)}\, u\, e^{-\varepsilon u^2}\, dt\, du =$$

(integrando por partes)

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} - \iint e^{iuf(t)}\, e^{-\varepsilon u^2} \left[1 - 2\varepsilon u^2 \right] du\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} - \iint e^{iuf(t)}\, e^{-\varepsilon u^2}\, du\, dt =$$

$$= - \iint e^{iuf(t)}\, du\, dt = - 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} p_0(u)\, du \neq 0$$

así que $\langle f , \delta'(f) \rangle \neq 0$ como se quería demostrar.

REFERENCIAS

[A] N. Wiener : The Fourier Integral and certains of its applications - 1953

[B] A. Zygmund : Trigonometric Series, Cambridge 1959

[C] L. Loomis : An introduction to abstract harmonic analysis - 1953

[1] P. Lévy : Sur la convergence absolue des séries de Fourier (Compositio Math. 1 , 1954, p. 1 - 14)

[2] A. Burling H. Helson : Fourier - Stieltjes transforms with bounded powers (Math. Scand. 1, 1953, p. 120 - 126)

[3] J. P. Kahane R. Salem : Sur les ensembles ne portant pas de pseudomesures - Sur les ensembles de Carleson et de Helson (Comptes Rendus 243 (1956) pp. 1185 - 1187 et 1706 - 1708)

[4] J. P. Kahane : Sur un théorème de Wiener - Lévy (Comptes - Rendus 246 , 1958, p. 1949 - 1951)

[5] Y. Katznelson : Sur les fonctions opérant sur l'algébre des séries de Fourier absolument convergentes (Comptes Rendus 247, 1958, p. 404 - 406)

[6] H. Helson et J. P. Kahane : Sur les fonctions opérant dans les algèbres de transformées de Fourier de suites ou de fonctions sommables (Comptes Rendus 247 (1958) p. 626 - 628)

[7] J. P. Kahane W. Rudin : Caractérisation des fonctions qui opèrent sur les coefficients de Fourier - Stieltjes (Comptes Rendus 247 (1958) p. 773 - 775)

[8] J. P. Kahane Y. Katznelson : Sur la réciproque du théorème de Wiener - Lévy (Comptes Rendus 248, p. 1279 - 1281)

[9] Y. Katznelson : Sur le calcul symbolique dans quelques algèbres de Banach , Thèse, Annales Sc. de l'E.N.S. 76 (1959) p. 83 - 123

[10] H. Helson : The functions which operate on Fourier transforms, Acta Mathe
J. P. Kahane matica 102 (1959) p. 135 - 157.
Y. Katznelson
W. Rudin

[11] P. Malliavin : Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale (Comptes Rendus 248, p. 1756 - 1759 et 2155 - 2157.

[12] J. P. Kahane : Sur un théorème de Paul Malliavin (Comptes Rendus 248, p. 2943 - 2944)

I N D I C E

I N D I C E A L F A B E T I C O

Las notas de este seminario fueron tomadas por Hector Fattorini, Miguel Herrera, Horacio Porta y Nestor Rivière, que además corrigieron las pruebas y se ocuparon de la edición. El profesor Jean - Pierre Kahane agradece la colaboración por ellos prestada.

Impreso en los talleres del Departamento de Biblioteca y Publicaciones de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

CURSOS Y SEMINARIOS DE MATEMATICA

Fascículo	1.	Matemática y física cuántica	Laurent Schwartz
Fascículo	2.	Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert	Mischa Cotlar
Fascículo	3.	Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbólicas. Seminario dirigido por	Alberto P. Calderón
Fascículo	4.	Propiedades en el contorno de funciones analíticas	Alberto González Domínguez
Fascículo	5.	Teoría constructiva de funciones	Jean Pierre Kahane
Fascículo	6.	Algebras de convolución de sucesiones, funciones y medidas sumables	Jean Pierre Kahane
Fascículo	7.	Nociones elementales sobre núcleos singulares y sus aplicaciones	Juan Carlos Merlo
Fascículo	8.	Introducción al estudio del problema de Dirichlet	Esteban Vági
Fascículo	9.	Análisis armónico en varias variables. Teoría de los espacios HP	Guido Weiss
Fascículo	10.	Probabilidades y estadística	Roque Carranza

PEDIDOS:

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Biblioteca y Publicaciones
Perú 272 - Casilla de Correo 1766
Buenos Aires - Argentina