

Fascículo 7

Cursos y seminarios de  
matemática

**Serie A**

*Juan Carlos Merlo*

Nociones elementales sobre  
núcleos singulares y sus  
aplicaciones

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

## Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

### Fascículo 7

#### Comité Editorial:

Carlos Cabrelli (Director)  
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.  
E-mail: [cabrelli@dm.uba.ar](mailto:cabrelli@dm.uba.ar)

Gabriela Jerónimo  
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.  
E-mail: [jeronimo@dm.uba.ar](mailto:jeronimo@dm.uba.ar)

Claudia Lederman  
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.  
E-mail: [clerderma@dm.uba.ar](mailto:clerderma@dm.uba.ar)

#### Auxiliar editorial:

Leandro Vendramin  
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.  
E-mail: [lvendramin@dm.uba.ar](mailto:lvendramin@dm.uba.ar)

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)  
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Derechos reservados  
© 2011 Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,  
Universidad de Buenos Aires.

Departamento de Matemática  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires  
Ciudad Universitaria – Pabellón I  
(1428) Ciudad de Buenos Aires  
Argentina.  
<http://www.dm.uba.ar>  
e-mail. [secre@dm.uba.ar](mailto:secre@dm.uba.ar)  
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

~~Juan Carlos Merlo 1960~~

FASCICULO

7

**cursos  
y seminarios  
de matemática**

DISTRIBUIDO POR EL  
INSTITUTO DE...

*Juan Carlos Merlo*

**NOCIONES ELEMENTALES  
SOBRE NUCLEOS SINGULARES  
Y SUS APLICACIONES**

29591

N-1

Gj-2

**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES - DEPARTAMENTO DE MATEMATICA**

1960

29591



514.114

C749

114

2.9

<b>PATRIMONIO</b>
<b>CENSADO</b> 1932
CC. 25
Nº 124 W 307

Juan Carlos Merlo

NOCIONES ELEMENTALES SOBRE NUCLEOS  
SINGULARES, Y SUS APLICACIONES.

ADVERTENCIA

El objeto del presente fascículo es dar una idea del tema, en un nivel elemental. Para su lectura, es conveniente poseer las nociones elementales sobre la integral de Lebesgue, a pesar de lo cual no consideramos que este requisito sea imprescindible. De todos modos, en el § 0 resumimos los conceptos básicos sobre ese tema, que más adelante utilizamos.

La bibliografía sobre núcleos singulares está más bien dispersa -esta fué la causa principal que nos indujo a escribir estos apuntes-, y para la redacción nos hemos basado en los cursos dictados en la F.C.E.y N. por el profesor Dr. Alberto González Domínguez.

Una guía inapreciable en la redacción ha sido la del profesor Dr. Mischa Cotlar.

A ambos expresamos nuestro sincero agradecimiento.



THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS DEPARTMENT

REPORT OF THE PHYSICS DEPARTMENT

FOR THE YEAR 1960-1961

CHICAGO, ILLINOIS

1961

PHYSICS DEPARTMENT

CHICAGO, ILLINOIS

1961

PHYSICS DEPARTMENT

CHICAGO, ILLINOIS

1961

PHYSICS DEPARTMENT

CHICAGO, ILLINOIS

PHYSICS DEPARTMENT

## § 0. NOCIONES PREVIAS

Para el lector que no posea aún las nociones elementales de la teoría de la integral, pueden ser útiles las consideraciones siguientes.

Se dice que la función  $f(x)$  pertenece a la clase o al espacio  $L^p$  del conjunto  $E$  de la recta, o más sucintamente:  $f \in L^p(E)$ , si se cumple:

$$\int_E |f(t)|^p dt < \infty.$$

La integral está tomada en el sentido de Lebesgue, pero para una idea aproximada puede suponerse que se trata de una integral de Riemann.

En particular,  $E$  puede ser toda la recta.

El número  $p$  es cualquier número real no negativo, pero los casos de interés se presentan solamente cuando  $p \geq 1$ . En adelante, siempre supondremos esto.

Se llama norma- $p$  de la función  $f$  definida en  $E$  al número real no negativo

$$\|f\|_p = \left\{ \int_E |f(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Entonces  $f \in L^p(E)$  si y sólo si  $\|f\|_p < \infty$ .

Se llama supremo esencial de la función  $f$ , al ~~mínimo~~ número que no es superado por los valores de  $f(t)$ , para  $t \in E$ , excepto a lo sumo en un conjunto de medida nula (1).

(1): Quien no posea aún la noción de medida, puede suponer que el supremo esencial es simplemente el supremo.

Si tal número es finito -por ejemplo, si  $f$  es acotada- se dice que  $f \in L^\infty$ , y se define la norma- $\infty$  mediante:

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in E} |f(t)|,$$

donde sup indica el supremo esencial.

Se dice que los números  $p$  y  $p^*$  (ambos  $\geq 1$ ) son conjugados, cuando están ligados por la relación

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1;$$

en particular, si  $p=1$  es  $p^*=\infty$ , y si  $p=\infty$  es  $p^*=1$ . El único número conjugado de sí mismo es el 2:  $p=2 \Rightarrow p^*=2$ .

Si  $p$  y  $p^*$  son conjugados, se dirá también que los espacios  $L^p(E)$  y  $L^{p^*}(E)$  son conjugados.

Se llama producto escalar de dos funciones  $f$  y  $g$  al número complejo

$$(f, g) = \int_E f(t) \bar{g}(t) dt,$$

y se cumple la desigualdad de Hölder:

$$|(f, g)| \leq \|f\|_p \|g\|_{p^*},$$

que en el caso  $p=p^*=2$ , se reduce a la conocida desigualdad de Schwarz. Entonces, si  $f \in L^p$  y  $g \in L^{p^*}$ , existe el producto escalar de ambas; con esto queremos significar que es finito. En particular, existe el producto escalar

de dos funciones cualesquiera de  $L^2$ , y éste es el único  $L^p$  que posee esta propiedad, lo cual hace que tenga una estructura más rica<sup>(1)</sup>.

También es importante la desigualdad de Minkovski que, empero, no utilizaremos: Si  $f \in L^p$  y  $g \in L^p$ , entonces  $f + g \in L^p$  y se cumple:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Se llama distancia-p -o simplemente, distancia- entre dos funciones  $f$  y  $g$  de  $L^p$  al número real no negativo:

$$d_p [f, g] = \|f - g\|_p = \left\{ \int_E |f(t) - g(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (2)$$

Se dice que la sucesión  $\{f_n\}$  tiende a  $f$  en norma-p cuando su distancia tiende a cero. En símbolos:

$$f_n \xrightarrow{(p)} f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0 \quad (3)$$

Una sucesión  $\{f_n\}$  se llama fundamental o de Cauchy cuando :

$$d_p [f_{n_1}, f_{n_2}] \rightarrow 0$$

para  $n_1$  y  $n_2 \rightarrow \infty$ .

(<sup>1</sup>): Pues por tal razón es un espacio de Hilbert. Cf.: 5.1, nota al pie.

(<sup>2</sup>): No ofrece dificultad mostrar que efectivamente  $d_p$  es una distancia en el sentido general del término (siempre que  $p \geq 1$ ). Basta identificar entre sí a funciones que difieren en un conjunto de medida nula.

(<sup>3</sup>): Obsérvese que la convergencia en norma- $\infty$  es la convergencia uniforme.

Si  $\{f_n\}$  converge hacia  $f$ , es decir, si  $d_p(f_n, f) \rightarrow 0$ , es fácil comprobar que  $\{f_n\}$  es fundamental, usando la desigualdad de Minkovski.

Un espacio en el cual está definida una distancia se llama completo, cuando vale la recíproca, es decir, cuando toda sucesión fundamental tiene límite. Un importante teorema, debido a F. Riesz, afirma que todos los  $L^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) son completos, es decir: Si  $\|f_{n_1} - f_{n_2}\|_p \rightarrow 0$  para  $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ , entonces existe una función  $f \in L^p$  tal que  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$ .

Se dice que la sucesión  $\{f_n\}$  converge débilmente hacia  $f \in L^p$ , cuando para toda  $g \in L^{p^*}$  se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, g) = (f, g).$$

Puesto que por la desigualdad de Hölder es

$$|(f_n - f, g)| \leq \|f_n - f\|_p \|g\|_{p^*},$$

resulta que la convergencia en norma -llamada a veces convergencia fuerte -implica la convergencia débil. No es cierta la afirmación recíproca; más adelante daremos ejemplos de esto.

Se dice que un conjunto de funciones  $D = \{g\} \subset L^p$  es denso en  $L^p$  cuando para toda  $f \in L^p$  existe una sucesión  $g_n \in D$  tal que  $g_n \xrightarrow{(p)} f$ . En otras palabras: para cualquier  $f \in L^p$  y cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe una  $g \in D$  tal que

$$d_p(f, g) = \|f - g\|_p < \varepsilon.$$

Se llama función característica  $\Omega_c(t)$  del conjunto  $C \subset E$ , a la que está definida mediante:

$$\Omega_c(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \in C, \\ 0 & \text{" } t \notin C. \end{cases}$$

Se llama función escalera a toda combinación lineal finita de funciones características de intervalos. Si  $\Omega_{I_k}(t)$  es la función característica del intervalo  $I_k \subset E$ , toda función escalera es de la forma

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\ell} c_k \Omega_{I_k}(t),$$

con  $c_k = \text{constantes}$ , y  $\ell < \infty$ .

Se llama función elemental a toda combinación lineal finita de funciones características de conjuntos medibles cualesquiera. Por consiguiente, las escaleras forman un subconjunto de éstas.

Serán importantes para lo que sigue las dos proposiciones siguientes:

a) el conjunto de las funciones escaleras es denso en todo  $L^p$  con  $1 \leq p < \infty$ , y no es denso en  $L^\infty$ ;

b) el conjunto de las funciones elementales es denso en todo  $L^p$  con  $1 \leq p \leq \infty$  (incluyendo pues el  $L^\infty$ ).

Se llama producto de convolución, o simplemente convolución de las funciones  $f$  y  $g$  a la función  $h = f * g$  definida por:

$$h(x) = f * g(x) = \int_E f(x-t) g(t) dt,$$

y vale la siguiente desigualdad de Young (que no utilizaremos): si  $f \in L^p$  ( $p \geq 1$ ) y  $g \in L^1$ , entonces  $h = f * g \in L^p$  y se cumple:

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1 .$$

Es fácil comprobar que se cumplen las propiedades conmutativa y asociativa:  $f * g = g * f$  ;  $f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3$  .

Salvo en algún pasaje aislado, bastarán estas nociones para entender lo que sigue. Lo que hemos dicho en esta sección puede ser bien estudiado, con las demostraciones correspondientes, en cualquier libro sobre funciones reales, o en particular, en los apuntes de M. Gotlar de funciones reales, editados por la F.C.E. y N. (1958).

## § 1. GENERALIDADES

Una expresión del tipo

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x,t) f(t) dt,$$

donde  $k(x,t)$  es una función fija, llamada núcleo, define una correspondencia tal que a cada función  $f$  le hace corresponder otra función  $g$ , siempre que exista la integral. Esta correspondencia define un operador  $K$ , llamado operador o transformada integral, y la fórmula anterior se puede escribir simbólicamente

$$g = Kf$$

Cada núcleo  $k(x,t)$  define un operador  $K$ , es decir:  $K = K(k)$ . El conjunto de las funciones  $f$  a las cuales se puede aplicar el operador —es decir, para las cuales existe la integral—, se llama dominio  $D$  del operador, y el conjunto de las funciones  $g$  representables de tal manera —es decir, que existe alguna  $f$  tal que  $g = Kf$ — se llama rango  $R$  del operador.

Toda función de una variable  $k(t)$  define un núcleo; basta tomar como tal a  $k(t-x)$ , obteniéndose, como caso particular de la anterior, la fórmula :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t-x) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} k(u) f(x+u) du$$

Notemos que lo dicho hasta ahora incluye el caso en que se defina el operador integral en un conjunto cualquiera  $E$  de la recta :  $\int_E$ ; basta tomar  $k(t) = 0$  para  $t \notin E$ .

Utilizando la notación

$${}^S h(t) = h(-t),$$

la última fórmula se escribe simplemente

$$g = Kf = {}^S k * f.$$

Interesará en lo que sigue considerar no un único núcleo  $k(t)$ , sino una sucesión  $k_n(t)$  ( $n=1,2,\dots$ ) de núcleos. Entonces, para cada  $f$  y cada  $n$  existirá una función  $g$ , que simbolizaremos ahora  $f_n$ , dada por:

$$f_n(x) = K_n f(x) = {}^S k_n * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_n(t-x) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} k_n(u) f(x+u) du$$

En realidad, no es necesario suponer que  $n$  recorra los números naturales; podría por ejemplo variar en forma continua, y en lugar de hacer  $n \rightarrow \infty$ , podríamos considerar  $n \rightarrow N$ , donde  $N$  es un número real cualquiera. Usaremos sin embargo la convención primitiva, por comodidad, pero es trivial comprobar que las demostraciones a efectuarse conservan su validez aún sin ella.

Antes de seguir adelante conviene hacer la siguiente observación: hemos visto que cada núcleo  $k(t)$  define un operador  $K$ ; en cambio no es cierta la recíproca. En efecto: sea por ejemplo  $I$  el operador identidad —definido por  $If = f$ , para toda  $f$ —. Existirá alguna función  $k(t) = \delta(t)$  que genere al operador identidad? Esto querría decir que para toda  $f$  se cumple

$$f(x) = \delta * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-x) f(t) dt,$$

es decir,  $\delta$  sería una unidad para el producto de convolución.

Es fácil mostrar que tal función no puede existir. En efecto: el valor de  $f$  en el punto  $x$  no depende de los valores en otros puntos; por consiguiente debe cumplirse  $\delta(t-x) \equiv 0$  para  $t \neq x$  pues de lo contrario, modificando  $f$  en  $t \neq x$  resultaría modificado el valor  $f(x)$ , como se ve en la expresión integral. Entonces será  $\delta(t) \neq 0$  a lo sumo en el único punto  $t \equiv 0$ , y por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-x) f(t) dt = 0 \neq f(x)$$

Durante muchos años se ha utilizado a la supuesta función  $\delta(t)$ , llamada delta de Dirac, definiéndola como  $\equiv 0$  para  $t \neq 0$ , y para  $t = 0$  tan grande como para que  $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt = 1$  para todo  $\epsilon > 0$ . Es obvio señalar la contradicción que existe en tal definición; sólo diremos que un tratamiento correcto obliga considerar a  $\delta$  no como función sino como distribución<sup>(1)</sup>. Es decir, la unidad de convolución es una distribución, no una función.

La teoría de núcleos singulares consiste esencialmente en dar -sin hacer uso de las distribuciones- alguna representación integral del operador identidad  $I$ . Como, según ya vimos, no es posible hacerle corresponder una función a ese operador, enfrentaremos el problema de esta manera: trataremos de encontrar una sucesión de núcleos  $K_n(t)$  tales que los operadores respectivos  $K_n$  tiendan al operador identidad  $I$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = I,$$

(1): Cf.: L. Schwartz: Théorie des distributions, Hermann, Paris, 1957, tomo I, Cap. I.

en el sentido siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(t-x) f(t) dt = f(x)$$

Por las consideraciones anteriores, ya podemos afirmar que si esto es posible, no se podrá pasar al límite bajo el signo de integral, puesto que resultaría la función contradictoria

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n(t-x) = \delta(t-x), \text{ ó } \lim_{n \rightarrow \infty} k_n(t) = \delta(t)$$

Pero esto ayuda a darse cuenta qué aspecto deberán tener las funciones  $k_n(t)$ : deberán tender a cero para  $t \neq 0$ , y a  $\infty$  para  $t = 0$ , es decir deberán confundirse con el eje  $t$  salvo en un entorno del origen que tienda a dicho punto, donde presentarán un pico punteagudo. Por supuesto, esto es muy vago y aún inexacto (4), pero luego lo expresaremos con mayor precisión.

==== 0 ====

(4): Cf.: 3.12

## § 2 . TEOREMAS FUNDAMENTALES

### § 2.1 Sobre la convergencia débil.

Con los preliminares de la sección anterior, ya podemos entrar al estudio de la teoría.

En primer lugar demostraremos un resultado básico que generaliza el lema de Riemann - Lebesgue para series de Fourier.

Lema 1. Sea  $k_n(t)$  una sucesión de funciones definidas en un intervalo finito o infinito  $[a, b]$ , tales que para todo  $[a_1, b_1] \subset [a, b]$  se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_1}^{b_1} k_n(t) dt = 0 ,$$

supóngase que para algún  $p$  tal que  $1 < p \leq \infty$ , la norma  $p$  esté uniformemente acotada:

$$\|k_n\|_p = \left\{ \int_a^b |k(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} < M < \infty .$$

Entonces, si  $f \in L^{p^*}$ , se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b k_n(t) f(t) dt = 0 .$$

Para demostrarlo, notemos en primer lugar que si  $f = g$  es una función escalera, la tesis se verifica, como es inmediato comprobarlo.

Sea ahora  $f$  cualquier función de  $L^{p^*}$ . Como  $p^* \neq \infty$ , las escaleras son densas en este espacio; entonces, para cada  $\varepsilon > 0$  existirá una  $g$  tal que

$$\| f - g \|_{p^*} < \varepsilon .$$

En consecuencia, en virtud de la desigualdad de Hölder se verifica :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b k_n(t) f(t) dt \right| &= \left| \int_a^b k_n(t) [f(t) - g(t)] dt + \int_a^b k(t) g(t) dt \right| \leq \\ &\leq \| k_n \|_p \| f - g \|_{p^*} + \left| \int_a^b k_n(t) g(t) dt \right| \leq M \varepsilon + \left| \int_a^b k(t) g(t) dt \right| \end{aligned}$$

Haciendo  $n \rightarrow \infty$ , como el lema ya está demostrado para escaleras, obtenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^b k_n(t) f(t) dt \right| \leq M \varepsilon ,$$

y como  $\varepsilon$  es arbitrario, resulta la tesis, c.q.d. .

Como ejemplo de aplicación de este lema, sea  $k_n(t) = \text{sen } nt$ , en cualquier intervalo —finito o infinito—  $[a, b]$  .

Tenemos :

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} \text{sen } nt \, dt &= -\frac{1}{n} (\cos n b_1 - \cos n a_1) \rightarrow 0 ; \\ \| \text{sen } nt \|_{\infty} &= \sup_{t \in [a, b]} | \text{sen } nt | = 1 \quad (\text{independ. de } n) . \end{aligned}$$

Se verifican las hipótesis del lema 1 para  $p = \infty$ . Entonces, para  $f \in L^1$  se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \text{sen } nt \, dt = 0 ,$$

y esto es precisamente lo que afirma el lema de Riemann-Lebesgue, fundamental en la teoría de series de Fourier —con  $[a, b] = [-\pi, \pi]$ — y transformadas

de Fourier — con  $[a, b] = [-\infty, \infty]$  — .

Vale la pena hacer notar que el razonamiento empleado en la demostración del lema 1 pierde validez en el caso  $p \neq 1$ , pues entonces  $p = \infty$ , y las escaleras no son densas en  $L^\infty$ . Daremos a continuación dos ejemplos que prueban que efectivamente la tesis del lema no se cumple para  $p \neq 1$ .

a) Sea  $[a, b] = [-\infty, \infty]$ , y

$$k_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t \in [n, n+1], \\ 0 & \text{" } t \notin [n, n+1]. \end{cases}$$

Se cumple:  $\int_{a_1}^{b_1} k_n(t) dt = 0$  para  $n > b_1 > a_1$ , y

$$\|k_n\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |k_n(t)| dt = 1.$$

Por lo tanto se satisfacen las hipótesis del lema. Sin embargo, la tesis no se cumple, pues si elegimos  $f(t) \equiv 1$  en  $L^\infty$ , resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_n(t) f(t) dt = 1.$$

b) Sea  $[a, b] = [0, 1]$ , y

$$k_n(t) = \begin{cases} 2^{2n} & \text{en } 0 < t < 2^{-2n-1}, \\ -2^{2n} & \text{" } 2^{-2n-1} < t < 2^{-2n}, \\ 0 & \text{" } 2^{-2n} < t < 1. \end{cases}$$

Entonces, para todo  $[a_1, b_1] \subset [0, 1]$  (incluso si  $a_1 = 0$ ) se cumple

$$\int_{a_1}^b k_n(t) dt = 0$$

para  $n$  suficientemente grande. Además  $\|k_n\|_2 = 1$  para todo  $n$ .

Se cumplen pues las hipótesis del lema. Sea ahora  $f \in L^\infty$  definida así :

$$f(t) = (-1)^k \quad \text{en} \quad 2^{-k-1} < t < 2^{-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Evidentemente:  $\|f\|_\infty = 1$ .

Ahora bien: se cumple —dejamos a cargo del lector el cálculo— :

$$\int_0^1 k_n(t) f(t) dt = \frac{2}{3},$$

y por consiguiente la integral no tiende a cero.

Observemos que en los dos ejemplos hemos elegido funciones  $f$  no aproximables — en  $L^\infty$  — por escaleras. Esto debía ser necesariamente así, pues de lo contrario sería válido el razonamiento del lema 1 y entonces

$\int_a^b k_n(t) f(t) dt \rightarrow 0$ . En otras palabras: el lema 1 se mantiene —con la misma demostración— para el subconjunto de funciones de  $L$  aproximables uniformemente por escaleras.

Por lo que hemos visto, si queremos que la tesis del lema 1 se mantenga para  $p = 1$  y toda función de  $L^\infty$ , será necesario imponer condiciones más restrictivas a la sucesión  $k_n$ . El lema siguiente da la respuesta a esta cuestión:

Lema 1a. Sea  $k(t)$  una sucesión de funciones definidas en un intervalo

finito  $[a, b]$ , tales que:

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_1}^{b_1} k_n(t) dt = 0$ , para todo  $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ :  
b) existe un número  $M$  tal que, para todo  $n$ :  $\|k_n\|_1 < M$ ;  
c) las integrales indefinidas de  $k_n(t)$  son equicontinuas <sup>(1)</sup>.

Entonces, para toda  $f \in L^\infty$ , se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b k_n(t) f(t) dt = 0.$$

Si el intervalo  $[a, b]$  es infinito, la misma conclusión se mantiene si además se cumple:

- d) la integral  $\int_{a_1}^{b_1} |k_n(t)| dt$  es uniformemente convergente en  $n$ , para  $a_1 \rightarrow -\infty$ ,  $b_1 \rightarrow \infty$ .

Observemos que las hipótesis a) y b) son las mismas que las del lema 1 (para  $p=1$ ). Si el intervalo es finito aparece la hipótesis adicional c) <sup>(2)</sup>; si es infinito aparecen c) y d).

Antes de pasar a la demostración, veremos por qué no había convergencia a cero de  $\int k_n f dt$  en los ejemplos anteriores. En el primero se debe

<sup>(1)</sup> : Es decir: dado  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta = \delta(\epsilon)$  independiente de  $n$  tal que para todo conjunto  $R \subset [a, b]$  de medida menor que  $\delta$ :  $m(R) < \delta$ , se cumple:  $\left| \int k_n(t) dt \right| < \epsilon$ .

<sup>(2)</sup> : Puede demostrarse que c) implica b).

a que el intervalo es infinito y no se cumple la hipótesis d); en el segundo falla en cambio la hipótesis c). (demuestre el lector estas afirmaciones).

Así como en el lema 1 usamos del hecho que las escaleras son densas en  $L^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ), para demostrar el lema 1 a usaremos el hecho que las elementales son densas en  $L^\infty$ .

Consideremos en primer lugar el caso:  $[a, b]$  = intervalo finito.

Comenzaremos por probar la tesis para funciones características de conjuntos abiertos de  $[a, b]$ . Sea  $G$  un conjunto tal, y  $\Omega_G(t)$  su función característica. Como todo abierto es una unión numerable de intervalos  $I_k$  disjuntos, será:

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = \bigcup_{k=1}^H I_k + R_H,$$

donde  $R_H = \bigcup_{k=H+1}^{\infty} I_k$ .

Puesto que  $[a, b]$  es finito, dado un  $\delta > 0$  arbitrario, existe un  $H$  tal que :

$$m(R_H) < \delta.$$

En consecuencia, en virtud de la equicontinuidad, dado un  $\epsilon > 0$ , para  $H$  suficientemente grande se cumple:

$$\left| \int_{R_H} k_n(t) dt \right| < \epsilon,$$

y por consiguiente:

$$\left| \int_a^b k_n(t) \Omega_G(t) dt \right| \leq \left| \sum_{n=1}^M \int_{I_n} k_n(t) dt \right| + \epsilon .$$

Como  $\int_{I_n} k_n(t) dt \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$  por hipótesis, y siendo  $\epsilon$  arbitrario resulta probada la tesis en el caso particular considerado.

Probaremos ahora que la tesis se mantiene para la función característica  $\Omega_F(t)$  de cualquier conjunto medible  $F \subset [a, b]$ . En efecto: sea  $G$  un abierto que contiene a  $F$ .

Entonces:

$$\int_a^b k_n(t) \Omega_F(t) dt = \int_F k_n(t) dt = \int_G k_n(t) dt - \int_{G-F} k_n(t) dt.$$

Como todo  $F$  es aproximable en medida por tales  $G$ , prefijado un  $\delta > 0$ , existirá un  $G$  tal que  $m(G-F) < \delta$ . Entonces, prefijado un  $\epsilon > 0$ , en virtud de la equicontinuidad se podrá conseguir que

$$\left| \int_{G-F} k_n(t) dt \right| < \epsilon$$

para todo  $n$ . Haciendo  $n \rightarrow \infty$ , como ya demostramos el lema para  $\Omega_G(t)$  y por ser  $\epsilon$  arbitrario, resulta la tesis.

Ahora bien: toda función elemental  $g(t)$  es combinación lineal finita de las  $\Omega_F(t)$ ; entonces es obvio que también se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b k_n(t) g(t) dt = 0.$$

Sea ahora  $f \in L^\infty$  cualquiera. Como las elementales son densas en  $L^\infty$  podemos razonar ahora como lo hicimos en el lema 1 -usando elementales en lugar de escaleras- y obtenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b k_n(t) f(t) dt = 0.$$

Resta ahora probar la misma igualdad en el caso que el intervalo  $[a, b]$  sea infinito. Sea por ejemplo  $[a, b] = [-\infty, \infty]$ . Observemos antes que el razonamiento anterior no es aplicable, por cuanto no podemos afirmar —en general— que  $m(R_H) < \delta$ , para ningún  $H$ .

En cambio, para toda  $f \in L^\infty$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} k_n(t) f(t) dt \right| &\leq \left| \left\{ \int_{-\infty}^{-A} + \int_A^{\infty} \right\} k_n(t) f(t) dt \right| + \left| \int_{-A}^A k_n(t) f(t) dt \right| \leq \\ &\leq \|f\|_\infty \left\{ \int_{-\infty}^{-A} + \int_A^{\infty} \right\} |k_n(t)| dt + \left| \int_{-A}^A k_n(t) f(t) dt \right| \end{aligned}$$

El último término tiende a cero puesto que la tesis ya ha sido probada para intervalos finitos. Además, por la hipótesis d) de convergencia uniforme de las integrales, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $A$  suficientemente grande tal que

$$\left\{ \int_{-\infty}^{-A} + \int_A^{\infty} \right\} |k_n(t)| dt < \varepsilon$$

para todo  $n$ , y como  $\varepsilon$  es arbitrario, haciendo  $n \rightarrow \infty$  resulta la tesis, c.q.d. .

En la práctica resulta a veces incómodo probar las hipótesis de este lema, por lo cual es útil consignar este resultado más débil:

Corolario. Si  $k_n(t)$  es una sucesión de funciones definidas en el intervalo finito o infinito  $[a, b]$  y tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|k_n\|_1 = 0,$$

entonces se cumple, para toda  $f \in L^\infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b k_n(t) f(t) dt = 0.$$

Es éste un caso particular del lema 1a, y dejamos a cargo del lector la verificación de que  $\|k_n\|_1 \rightarrow 0$  implica las hipótesis a), b), c), d). Daremos en cambio una demostración directa, que es completamente trivial. Basta notar que

$$\left| \int_a^b k_n(t) f(t) dt \right| \leq \|k_n\|_1 \|f\|_\infty,$$

Por la desigualdad de Hölder, c.q.d. .

Una afirmación semejante a la de este corolario podría hacerse para  $p > 1$ , pero no tiene interés, pues debilita el lema 1 sin facilitar lo más mínimo su aplicación.

Diremos ahora algunas palabras que tal vez permitan aclarar —parcialmente— la causa de la diferencia que aparece entre los casos  $p > 1$  y  $p = 1$ . Veremos el porqué aparece la hipótesis de la equicontinuidad de  $\int_a^t k_n(t) dt$  en  $p = 1$  y no en  $p > 1$ . La respuesta está dada por la siguiente:

Proposición. Si la sucesión  $k_n(t)$  verifica  $\|k_n\|_p < M$ , con  $M$  independiente de  $n$ , para algún  $p$  tal que  $1 < p \leq \infty$ , entonces las integrales indefinidas de  $k_n(t)$  son equicontinuas.

En efecto: para todo conjunto  $E \subset [a, b]$  se cumple (Hölder) :

$$\left| \int_E k_n(t) dt \right| = \left| \int_E k_n(t) \cdot 1 dt \right| \leq \left\{ \int_E |k_n(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \{m(E)\}^{\frac{1}{p^*}} \leq \|k_n\|_p \{m(E)\}^{\frac{1}{p^*}} \leq M \{m(E)\}^{\frac{1}{p^*}}.$$

Como  $p^* < \infty$ , dado  $\varepsilon > 0$  arbitrario, existe un  $\delta$  tal que para todo  $E$  con  $m(E) < \delta$  se cumple:

$$M \{m(E)\}^{\frac{1}{p^*}} < \varepsilon,$$

y por lo tanto, independientemente de  $n$ :

$$\left| \int_E k_n(t) dt \right| < \varepsilon, \quad \text{c.q.d.}$$

Vemos ahora porqué no fue necesario imponer la hipótesis adicional de la equicontinuidad en el caso  $p > 1$ : sencillamente se debe a que esta propiedad se cumple automáticamente, como acabamos de ver, en virtud de la acotación de  $\|k_n\|_p$ . En cambio, si  $p = 1$ , de  $\|k_n\|_1 < M$  no se deduce la equicontinuidad -cf., por ej., el ejemplo anterior b)- y es necesario imponerla explícitamente.

Para terminar con esta sección hagamos notar que los lemas que hemos demostrado no hacen otra cosa que dar condiciones suficientes para la convergencia débil (cf. § 0) de la sucesión  $\{k_n\}$  hacia la función cero. Valdría afirmaciones análogas para la convergencia débil  $k_n \rightarrow k$ , con  $k(b)$  cualquiera; basta considerar la sucesión  $\{k_n - k\}$ , pero no nos interesa este caso.

este caso.

Para probar que la convergencia débil no implica la convergencia en norma, basta elegir  $k_n(t) = \sin nt$ . (lema de Riemann-Lebesgue).

**§ 2.2** Núcleos singulares cuasi positivos.

Pasaremos ahora a definir el concepto fundamental de la teoría que nos ocupa :

Definición 1 . Se llama núcleo singular <sup>(1)</sup> a una sucesión de funciones  $k_n(t)$  definidas en  $(-\infty, \infty)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b k_n(t) dt = 1$$

para todo  $(a, b) \ni 0$  <sup>(2)</sup>

Como consecuencia inmediata resulta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b k_n(t) dt = 0$$

para todo  $[a, b] \ni 0$ .

Es fácil darse cuenta que tal definición corresponde a la noción intuitiva que dimos en § 1.

Designaremos además con  $\alpha$  y  $\beta$  a las expresiones —si existen— :

<sup>(1)</sup>: Consignamos en 3 los ejemplos de núcleos singulares.

<sup>(2)</sup>: Designamos con  $(a, b)$  al intervalo abierto, y con  $[a, b]$  al cerrado. Es importante ahora distinguir uno de otro.

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^0 k_n(t) dt, \quad \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} k_n(t) dt.$$

Evidentemente,  $\alpha + \beta = 1$ , y no es necesario tomar como límite inferior de integración para  $\alpha$  a  $-\infty$ , sino basta poner cualquier número negativo; análogamente para  $\beta$ .

Para obtener resultados interesantes es menester imponer condiciones restrictivas a los núcleos singulares; para eso damos la siguiente:

Definición 2. Un núcleo singular  $k_n(t)$  se llama positivo si  $k_n(t) \geq 0$  para  $n$  suficientemente grande y todo  $t$ .

En realidad es ésta una condición bastante restrictiva, y no es necesaria en las aplicaciones; basta que el núcleo sea cuasi positivo, en el sentido siguiente:

Definición 3. Un núcleo singular  $k_n(t)$  se llama cuasi positivo si existen dos números positivos  $\delta$  y  $A$  tales que, para todo  $n$  suficientemente grande se cumple:

$$\int_{-\delta}^{\delta} |k_n(t)| dt < A.$$

En otras palabras: un núcleo singular es cuasi positivo cuando en algún entorno del origen la integral de su valor absoluto está uniformemente acotada. El nombre de cuasi positivo proviene del hecho que si el núcleo es positivo, entonces la condición de cuasi positividad se cumple

automáticamente, por definición de núcleo singular. Es decir, todo núcleo positivo, ~~es~~ cuasi positivo. No vale en cambio la afirmación recíproca (cf. § 3.11).

El primer resultado importante de la teoría es el siguiente.

Teorema 1. Sea  $k_n(t)$  un núcleo singular cuasi positivo, y sea  $M$  un número positivo tal que para algún  $p$  ( $1 < p \leq \infty$ ) y todo  $n$  se cumple:

$$\int_a^b |k_n(t)|^p dt < M$$

para todo  $[a, b]$  exterior al origen. Entonces, para toda  $f \in L^{p^*}$  se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(t-x) f(t) dt = \alpha f(x-0) + \beta f(x+0),$$

en todo punto  $x$  donde el segundo miembro exista, y la convergencia es uniforme en todo intervalo cerrado de continuidad de  $f$ . Si  $p=1$ , la misma conclusión se mantiene si además de las condiciones impuestas, en todo conjunto exterior al origen, las integrales indefinidas del núcleo son equicontinuas y convergen uniformemente en el infinito.

Conviene hacer notar que si  $f$  es continua en el punto  $x$ , entonces  $\alpha f(x-0) + \beta f(x+0) = f(x)$ , y la tesis se cumple aunque no existan separadamente  $\alpha$  y  $\beta$ .

Respecto al caso  $p=1$ , en los ejemplos usuales de la práctica conviene verificar que en todo intervalo exterior al origen se cumple  $\int_a^b |k_n(t)| dt \rightarrow 0$

lo cual, según el corolario del lema 1 a, implica las otras condiciones.

La idea de la demostración del teorema consiste en aislar el punto crítico  $t=0$  del núcleo y acotar separadamente las distintas integrales, como veremos a continuación.

Llamando, como en §1 :

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_n(t-x)f(t)dt,$$

hay que demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \alpha f(x-0) + \beta f(x+0).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} & \left| f_n(x) - \alpha f(x-0) - \beta f(x+0) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} k_n(u)f(x+u)du - \alpha f(x-0) - \beta f(x+0) \right| \leq \\ & \leq \left| \left\{ \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right\} k_n(u)f(x+u)du \right| + \left| \int_{-\delta}^0 k_n(u) [f(x+u) - f(x-0)] du \right| + \\ & + \left| \int_0^{\delta} k_n(u) [f(x+u) - f(x+0)] du \right| + |f(x-0)| \left| \alpha - \int_{-\delta}^0 k_n(u)du \right| + \\ & + |f(x+0)| \left| \beta - \int_0^{\delta} k_n(u)du \right|. \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que los últimos dos sumandos tienden a cero  $n \rightarrow \infty$ , y uniformemente si  $f$  es continua en un intervalo cerrado, pues allí será acotada la  $f$ . Designaremos con  $\eta$  la suma de esos dos términos.

Eligiendo  $\delta$  suficientemente pequeño podemos conseguir que dado un  $\varepsilon$  arbitrario se cumpla:

$$|f(x+u) - f(x-o)| < \epsilon \quad \text{para} \quad 0 < -u < \delta, \text{ y}$$

$$|f(x+u) - f(x+o)| < \epsilon \quad \text{para} \quad 0 < u < \delta,$$

en virtud de la existencia de  $f(x-o)$  y  $f(x+o)$ . Además, si  $f$  es continua en un intervalo cerrado, sera  $\delta$  independiente de  $x$ , por la continuidad uniforme.

Entonces:

$$\begin{aligned} & |f_n(x) - \alpha f(x-o) - \beta f(x+o)| \leq \\ & \leq \left| \left\{ \int_{-\infty}^{-\delta} \int_{\delta}^{\infty} \right\} k_n(u) f(x+u) du \right| + \epsilon \int_{-\delta}^{\delta} |k_n(u)| du + \eta. \end{aligned}$$

Haciendo  $n \rightarrow \infty$ , en virtud del lema 1-o lema 1a en el caso  $p=1$ - y de la hipótesis de cuasi positividad, resulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - \alpha f(x-o) - \beta f(x+o)| \leq \epsilon A,$$

y como  $\epsilon$  es arbitrario, obtenemos la tesis, c.q.d.

Un caso frecuente en las aplicaciones de presenta cuando  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ; entonces la convergencia se efectúa hacia la semisuma  $\frac{1}{2} [f(x-o) + f(x+o)]$ .

§ 2.3

Núcleos singulares débilmente cuasi positivos.

Pasaremos ahora a considerar el caso en que  $k_n(t)$  no es cuasi positivo,

tal como ocurre en algunos ejemplos importantes en las aplicaciones (por ej., el núcleo de Dirichlet, cf. § 3.6, que se aplica en la teoría de series de Fourier, cf § 5.2). Como supondremos hipótesis más débiles para  $k_n(t)$ , será necesario imponer hipótesis más fuertes a  $f(x)$  para que se siga cumpliendo  $f_n(x) \rightarrow \alpha f(x-0) + \beta f(x+0)$ .

La hipótesis que sustituye a la de casi positividad será la de casi positividad débil, que definimos así:

Definición 4 . Un núcleo singular  $k_n(t)$  se llama débilmente casi positivo si existen dos números positivos  $\delta$  y  $A$  tales que para cualquier  $u_n$  y  $v_n$  que satisfagan  $|u_n| < \delta, |v_n| < \delta$  —, y todo  $n$ , se verifica:

$$\left| \int_{u_n}^{v_n} k_n(t) dt \right| < A .$$

Evidentemente, todo núcleo singular casi positivo es débilmente casi positivo, porque:

$$\left| \int_{u_n}^{v_n} k_n(t) dt \right| \leq \int_{u_n}^{v_n} |k_n(t)| dt \leq \int_{-\delta}^{\delta} |k_n(t)| dt .$$

Es esencial en la definición permitir que  $u_n$  y  $v_n$  puedan variar con  $n$ ; de lo contrario la definición sería superflua, pues la acotación uniforme se cumpliría automáticamente, por definición de núcleo singular.

El núcleo de Dirichlet es un ejemplo de núcleo singular débilmente casi positivo que no es casi positivo. Ejemplo de núcleo singular que ~~no sea débilmente~~ casi positivo, también lo daremos luego ( 3.10 ) .

El teorema que demostraremos es una generalización del criterio de Jordan de convergencia de series de Fourier. Observemos que, tal como lo anunciamos, las hipótesis sobre  $f$  son más fuerte que en el teorema 1.

Teorema 2. Sea  $k_n(t)$  un núcleo singular débilmente cuasi positivo, y sea  $M$  un número positivo tal que para algún  $p$  ( $1 < p \leq \infty$ ) y todo  $n$  se cumple:

$$\int_a^b |k_n(t)|^p dt < M,$$

para todo  $[a, b]$  exterior al origen. Entonces, para toda  $f \in L^{p^*}$  se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(t-x) f(t) dt = \alpha f(x-0) + \beta f(x+0),$$

siempre que  $\alpha$  y  $\beta$  existan, en todo punto  $x$  en un entorno del cual  $f(x)$  sea de variación acotada, y la convergencia es uniforme en todo intervalo cerrado de continuidad de  $f$ . Si  $p=1$ , la misma conclusión se mantiene si además de las condiciones impuestas, en todo conjunto exterior al origen las integrales indefinidas del núcleo son equicontinuas y convergen uniformemente en el infinito.

De igual manera que en el teorema 1, en los puntos de continuidad de  $f$  no es necesario que existan  $\alpha$  y  $\beta$ .

También vale la misma observación en lo que respecta al caso  $p=1$ .

Al igual que en el teorema 1, se llega a que hay que demostrar que tiende a cero la expresión:

$$\left| \left\{ \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right\} k_n(u) f(x+u) du \right| +$$

$$+ \left| \int_{-\delta}^0 k_n(u) [f(x+u) - f(x+0)] du \right| + \left| \int_0^{\delta} k_n(u) [f(x+u) - f(x+0)] du \right| .$$

La primera integral se acota exactamente igual que antes, aplicando el lema 1 ó 1a según el caso. Era de esperarse, pues el estado de cosas cambia sólo en el origen, al suponer la cuasi positividad débil en lugar de la cuasi positividad.

Resta demostrar pues que

$$\left| \int_{-\delta}^0 k_n(u) [f(x+u) - f(x+0)] du \right| + \left| \int_0^{\delta} k_n(u) [f(x+u) - f(x+0)] du \right|$$

tiende a cero para  $n \rightarrow \infty$ . El razonamiento a seguir es el mismo para las dos integrales, de manera que nos ocuparemos sólo de una de ellas, por ej., de la segunda.

Para  $\delta$  suficientemente pequeño, la expresión

$$f(x+u) - f(x+0)$$

será, como función de  $u$ , de variación acotada, y por lo tanto se puede escribir como diferencia de dos funciones no decrecientes en  $u$ :

$$f(x+u) - f(x+0) = \varphi_1(u) - \varphi_2(u) .$$

En realidad, las  $\varphi_i$  dependen también de  $x$ , pero fijado este punto, sólo dependerán de  $u$ . Como el primer miembro tiende a cero para  $u \rightarrow 0$ , se pueden elegir las  $\varphi_i$  de manera que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \varphi_1(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \varphi_2(u) = 0.$$

Entonces, aplicando el segundo teorema del valor medio <sup>(1)</sup>:

$$\int_0^{\delta} k_n(u) [\varphi_1(u) - \varphi_2(u)] du = \varphi_1(\xi) \int_{u_n}^{\delta} k_n(u) du - \varphi_2(\eta) \int_{\nu_n}^{\delta} k_n(u) du,$$

con  $0 \leq u_n \leq \delta$  y  $0 \leq \nu_n \leq \delta$ .

Y como para  $\delta \rightarrow 0$  es  $\varphi_1 \rightarrow 0$ ,  $\varphi_2 \rightarrow 0$ , y las integrales están uniformemente acotadas por la hipótesis de la cuasi positividad débil, resulta que la expresión se puede hacer arbitrariamente pequeña para  $\delta$  suficientemente pequeño.

Además,  $\delta$  es independiente de  $x$  en todo intervalo cerrado de continuidad de  $f$ , por la acotación. Existe pues convergencia uniforme.

Con esto resulta la tesis, c.q.d. .

Como podemos observar, el punto esencial está en que no se pueden pasar barras dentro del signo de integral, puesto que  $k_n(t)$  no es cuasi positivo, y nada sabemos sobre el comportamiento de

$$\int_{-\delta}^{\delta} |k_n(t)| dt.$$

Entonces es menester acotar usando el segundo teorema del valor medio, y para ello debemos suponer que  $f$  es de variación acotada.

o

<sup>(1)</sup>: Cf., por ej: Carathéodory: Vorlesungen über Reellen Funktionen, Cap X, § 538, o Saks: Theory of the integral, Cap III, § 14.

Los teoremas demostrados hasta aquí se pueden considerar como grosos, en el sentido de que sólo permiten la representación de una función por un núcleo en algunos puntos particulares, a saber, los de continuidad o de discontinuidad de primer especie.

Pero si una función pertenece, por ej., a algún  $L^p$ , es sabido que en general sus puntos no presentan las propiedades de continuidad mencionadas, y es importante pues dar una representación para un conjunto más amplio de puntos.

El objeto del próximo teorema es ver que, bajo ciertas condiciones, la igualdad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

se cumple p.p. . Para demostrar esto, es previo el siguiente :

Lema 2. Sea  $k_n(t)$  un núcleo singular que cumple las siguientes condiciones:

- a) para cada  $n$ ,  $k_n(t)$  es una función absolutamente continua ;
- b)  $k_n(t)$  converge uniformemente a cero, cuando  $n \rightarrow \infty$ , en todo intervalo  $[a, b]$  exterior al origen ;
- c)  $\int_a^b |t k_n(t)| dt < M$ , para algún  $\delta > 0$  y todo  $n$  (acotación uniforme).

Entonces, si  $F(t)$  es de variación acotada, se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(-x) dF(t) = F'(x)$$

en casi todo punto x, o más exactamente, en todo x donde exista F'(x) f(x).

Se tiene, integrando por partes (1) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_n(t-x) dF(t) = k_n(t-x) F(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \frac{\partial}{\partial t} k_n(t-x) dt,$$

de donde resulta, por b) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(t-x) dF(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} - \int_{-\infty}^{\infty} F(x+u) k'_n(u) du.$$

Ahora bien :

$$- \int_{-\infty}^{\infty} F(x+u) k'_n(u) du = \left\{ - \int_{-\infty}^{-\delta} - \int_{-\delta}^{\delta} - \int_{\delta}^{\infty} \right\} F(x+u) k'_n(u) du = I_1 + I_2 + I_3,$$

Teniendo en cuenta que podemos escribir  $F(t) = F_1(t) - F_2(t)$ , con  $F_1$  y  $F_2$  no decrecientes y de variación acotada, resulta, aplicando el segundo teorema del valor medio ( $i = 1, 2$ ) :

$$\int_{-\infty}^{-\delta} F_i(x+u) k'_n(u) du = F_i(-\delta+u) \int_{u_n}^{-\delta} k'_n(u) du = F_i(-\delta+u) [k_n(-\delta) - k_n(u_n)]$$

Como  $u_n < -\delta$  y  $k_n(t) \rightarrow 0$  uniformemente en  $t < -\delta$ , resulta  $I_1 \rightarrow 0$ . Análogamente se ve que  $I_3 \rightarrow 0$ , y entonces :

(1): Cf: Natanson: Theory of functions of a real variable, Cap VIII, § 6

y Cap IX, § 6; o Saks, op.cit., Cap III, § 14.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(t-x) dF(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} - \int_{-\delta}^{\delta} F(x+u) k'_n(u) du .$$

Puesto que por hipótesis  $F'(x) = f(x)$  existe, por definición de derivada podemos escribir:

$$F(x+u) = F(x) + u f(x) + u \rho(x,u) ,$$

con  $\rho \rightarrow 0$  para  $u \rightarrow 0$ .

Entonces, reemplazando:

$$\begin{aligned} & - \int_{-\delta}^{\delta} F(x+u) k'_n(u) du = \\ & = -F(x) \int_{-\delta}^{\delta} k'_n(u) du - f(x) \int_{-\delta}^{\delta} u k'_n(u) du - \int_{-\delta}^{\delta} \rho(x,u) u k'_n(u) du . \end{aligned}$$

Pero, para  $\delta$  suficientemente pequeño:

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} \rho(x,u) u k'_n(u) du \right| \leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} |u k'_n(u)| du < \varepsilon M ,$$

y además, para  $n \rightarrow \infty$ :

$$\int_{-\delta}^{\delta} k'_n(u) du = k_n(\delta) - k_n(-\delta) \rightarrow 0 ;$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} u k'_n(u) du = u k_n(u) \Big|_{-\delta}^{\delta} - \int_{-\delta}^{\delta} k_n(u) du \rightarrow -1 .$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} k_n(t-x) dF(t) - f(x) \right| < \varepsilon M ,$$

y como  $\varepsilon$  es arbitrario, obtenemos la tesis, c.q.d. .

Ahora es inmediata la demostración del

Teorema 3 Si  $k_n(t)$  es un núcleo singular que cumple las hipótesis del lema 2, entonces, para  $f \in L^1$ , se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(t-x) f(t) dt = f(x)$$

en casi todo punto x.

En efecto: como  $\int_0^t f(u) du$  es de variación acotada, en virtud del lema 2 se cumple:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(t-x) f(t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(t-x) d \int_0^t f(u) du = \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^x f(u) du. \end{aligned}$$

Pero  $\frac{d}{dx} \int_0^x f(u) du = f(x)$  p.p., por el teorema de Lebesgue, y obtenemos la tesis, c.q.d.

### § 3. EJEMPLOS (1)

#### § 3.1 Barrow.

El núcleo singular de Barrow está definido por :

$$k_n(t) = \begin{cases} n & \text{para } 0 < t < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{" } t < 0 \text{ ó } t > \frac{1}{n}, \end{cases}$$

de manera que la representación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\frac{1}{n}} f(x+u) du = f(x)$$

no es más que el teorema fundamental del cálculo integral.

Es positivo y cumple el teorema 1 con cualquier  $p (1 \leq p < \infty)$ ,  $\gamma \alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ . Además a pesar de que no cumple las hipótesis del teor. 3 (por no ser absolutamente continuo), se mantiene la tesis, que no es más que el teor. de Lebesgue de derivación de la integral indefinida.

— o —

#### § 3.2 Weierstrass.

$$k_n(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-\frac{nt^2}{4}}$$

Se tiene:

$$\int_a^b k_n(t) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_a^b e^{-\frac{nt^2}{4}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{n}a}{2}}^{\frac{\sqrt{n}b}{2}} e^{-u^2} du \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } sga \neq sgb, \\ 0 & \text{si } sga = sgb. \end{cases}$$

(1): Recomendamos del lector demostrar detalladamente las afirmaciones que hagamos en este § 3.

Es positivo, satisface el teor. 1 con cualquier  $p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) y  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ , y el teorema 3.

— o —

**§ 3.3** Poisson del semiplano superior

$$k_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+n^2 t^2}$$

$$\int_a^b k_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{na}^{nb} \frac{du}{1+u^2} \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } sga \neq sgb, \\ 0 & \text{si } sga = sgb. \end{cases}$$

Es positivo, satisface las hipótesis del teor. 1 con cualquier  $p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) y  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ , y satisface las hipótesis del teorema 3.

— o —

**§ 3.4** Poisson del círculo.

$$k_r(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos t + r^2} & \text{para } |t| < \pi, \\ 0 & \text{para } |t| > \pi. \end{cases}$$

Es éste un ejemplo donde en lugar del parámetro discreto  $n$  se toma uno continuo  $r$  y se hace  $r \rightarrow R - 0$ .

Consideremos la igualdad, con  $z = \frac{r}{R} e^{it}$ :

$$\frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + z + z^2 + \dots \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{1+z}{1-z}$$

El núcleo  $k_r(t)$  es la parte real del segundo miembro, y por lo tanto :

$$k_r(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^h \cos ht, \quad |t| < \pi.$$

Entonces, puesto que hay convergencia uniforme para  $r < R$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_r(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt + \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^h \int_0^{2\pi} \cos ht dt = 1 \rightarrow 1.$$

Por otra parte, para  $[a, b] \neq 0$  :

$$\left| \int_a^b k_r(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos a + r^2} \int_a^b dt \rightarrow 0 \quad \text{pues } \cos a \neq 1.$$

Es positivo, verifica las hipótesis del teorema 1 con cualquier  $p$  ( $1 < p < \infty$ ) y  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ .

El teorema 3 con este núcleo particular es el clásico teorema de Fatou. Aunque no es absolutamente continuo (en  $t = \pi$  y  $t = -\pi$ ) esto no ofrece dificultad en la demostración.

— 0 —

§ 3.5

Stieltjes

$$k_n(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{n}{\pi}} (1 - t^2)^{n-1/2} & \text{para } |t| < 1, \\ 0 & \text{para } |t| > 1. \end{cases}$$

Se demuestra que  $\int_{-\infty}^{\infty} k_n(t) dt \rightarrow 1$  haciendo la sustitución  $t = \cos u$  y usando la fórmula de Stirling; el cálculo es un poco engorroso, pero no tiene dificultades conceptuales. Luego, para probar que  $\int_a^b k_n(t) dt \rightarrow 0$ ,  $[a, b] \not\supset 0$ , se demuestra que  $k_n(t)$  converge uniformemente a cero en todo intervalo exterior al origen, y entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b k_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} k_n(t) dt = 0.$$

Es positivo, verifica las hipótesis del teorema 1 con cualquier  $p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) y  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ , y verifica las hipótesis del teorema 3.

— 0 —

**§ 3.6** Dirichlet.

$$k_n(t) = \frac{\text{sen } nt}{\pi t}$$

$$\int_a^b k_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\text{sen } nt}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\text{sen } u}{u} du \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{para } sga \neq sgb, \\ 0 & \text{para } sga = sgb. \end{cases}$$

No es cuasi positivo, y por lo tanto no verifica las hipótesis del teorema 1. Tampoco verifica las hipótesis del teorema 3. Esta es la causa de las dificultades para la convergencia puntual de series de Fourier (cf. § 5.2).

En cambio es débilmente cuasi positivo, y verifica las hipótesis del teorema 2 con  $p = \infty$  y  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ , que no es más que el criterio de Jor-

dan de convergencia de series de Fourier.

----- 0 -----

**§ 3.7** Fejer.

$$k_n(t) = \frac{\text{sen}^2 nt}{\pi nt^2}$$

Un procedimiento indirecto pero rápido para demostrar que es un núcleo singular, es el siguiente. De :

$$\mathcal{F} \left[ \frac{\text{sen } nt}{\pi t} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \frac{\text{sen } nt}{\pi t} dt = \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} & \text{para } |x| < n, \\ 0 & \text{para } |x| > n, \end{cases}$$

por la igualdad de Parseval resulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^2 nt}{\pi^2 t^2} dt = \frac{1}{2\pi} 2n.$$

La demostración se completa probando que converge uniformemente a cero en todo intervalo exterior al origen.

Es positivo, verifica las hipótesis del teorema 1 con cualquier  $p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) y  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ , y verifica las hipótesis del teorema 3.

----- 0 -----

**§ 3.8** Núcleos tipo Fejer o Bochner.

Sea  $h(t)$  una función tal que  $\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = N < \infty$ ; entonces:

$$k_n(t) = \frac{1}{N} h(nt)$$

es un núcleo singular. En efecto:

$$\int_a^b k_n(t) dt = \frac{1}{N} \int_{na}^{nb} h(u) du \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } sga \neq sgb, \\ 0 & \text{si } sga = sgb. \end{cases}$$

Todo núcleo de este tipo es débilmente cuasi positivo.

Si además  $h \in L^1$  será cuasi positivo<sup>(1)</sup>, puesto que:

$$\int_{-\delta}^{\delta} |k_n(t)| dt = \frac{n}{|N|} \int_{-\delta}^{\delta} |h(nt)| dt = \frac{1}{|N|} \int_{-n\delta}^{n\delta} |h(u)| du \leq \frac{\|h\|_1}{|N|}$$

Varios de los núcleos anteriores son de tipo Fejer: § 3.1, § 3.3, § 3.6, § 3.7. Y las  $h(t)$  correspondientes son de  $L^1$ , excepto para el § 3.6.

Además, con  $h(t) = e^{-t^2} \in L^1$ , resulta un núcleo equivalente al § 3.2.

— 0 —

**§ 3.9** Núcleo singular para el cual no existen  $\alpha$  y  $\beta$ .

$$k_n(t) = \begin{cases} n & \text{para } t \in (0,1) \text{ y } n \text{ impar,} \\ 0 & \text{" } t \in (0,1) \text{ " " " ,} \\ n & \text{" } t \in (-1,0) \text{ " " par,} \\ 0 & \text{" } t \in (-1,0) \text{ " " " .} \end{cases}$$

(1): Para otras condiciones, cf.: Achieser: Vorlesungen über Approximations theorie (Akad. Verlag, Berlin, 1953), Cap III, § 62. (Hay traducc. al inglés.)

En este caso particular es positivo, y se verifican las hipótesis del teorema 1 con cualquier  $p$  ( $1 < p < \infty$ ). Pero la convergencia  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  sólo tendrá lugar en los puntos de continuidad de  $f$ .



**§3.10** Núcleo singular que no es débilmente cuasi positivo.

$$k_n(t) = \begin{cases} -n^2 & \text{para } |t| < \frac{1}{n} , \\ n^2 + \frac{n}{2} & \text{" } \frac{1}{n} < |t| < \frac{2}{n} , \\ 0 & \text{" } |t| > \frac{2}{n} . \end{cases}$$

Se cumple:

$$\int_{-\delta}^{\delta} k_n(t) dt = 1 \quad \text{para } n > \frac{2}{\delta} ,$$

y por lo tanto es un núcleo singular. Pero no es ni siquiera débilmente cuasi positivo, pues :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} k_n(t) dt = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} (n^2 + \frac{n}{2}) dt = n + \frac{1}{2} \rightarrow \infty .$$



**§3.11** Núcleo singular cuasi positivo que no es positivo.

$$k_n(t) = \frac{C}{n} \frac{\text{sen}^2 nt}{t^2} \cos nt , \quad \text{con } C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^2 u}{u} \cos u \, du < \infty .$$

Este núcleo es muy parecido al § 3.7 de Fejer, pero el factor  $\cos nt$  hace que no sea positivo. Y como

$$|k_n(t)| \leq \frac{C}{n} \frac{\sin^2 nt}{t^2},$$

resulta ser cuasi positivo. Verifica las hipótesis del teorema 1 y del teorema 3. Además es de tipo Fejer.

— o —

**§ 3.12** Núcleo singular positivo con  $k_n(0) \rightarrow \infty$ .

Este ejemplo sirve para mostrar que no es de ningún modo necesaria la condición  $k_n(0) \rightarrow \infty$ .

Sea

$$k_n(t) = 2 \sqrt{\frac{n^3}{\pi}} t^2 e^{-nt^2}$$

Se cumple  $k_n(0) = 0$  para todo  $n$ , y es un núcleo positivo.

Para demostrar que es un núcleo singular hay que tener en cuenta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

lo cual se demuestra, por ejemplo, calculando

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha u^2} du \quad \text{y luego derivando respecto de } \alpha.$$

— o —

## § 4. APLICACIONES DIVERSAS

### § 4.1 Teorema de aproximación de Weierstrass

El enunciado del teorema (para polinomios) es el siguiente:

Dada una función continua cualquiera  $f(t)$  definida en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , y prefijado un  $\varepsilon > 0$  arbitrario, existe un polinomio  $P(t)$  tal que  $|P(t) - f(t)| < \varepsilon$  para todo  $t \in [a, b]$ .

Equivalentemente, se podría decir que existe una sucesión  $P_n(t)$  de polinomios que converge uniformemente hacia  $f(t)$ , o más suscintamente:

los polinomios son densos en las funciones continuas en un intervalo cerrado, con la topología de la convergencia uniforme.

La teoría de núcleos singulares permite dar una sencilla demostración de este teorema, mediante la utilización del núcleo de Stieltjes (§ 3.5).

Supongamos, sin restringir la generalidad, que el intervalo considerado sea el  $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ , y consideremos la expresión, con  $f$  continua:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} k_n(u) f(x+u) du = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-1}^1 (1-u^2)^n f(x+u) du = \\ &= \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{x-1}^{x+1} [1 - (t-x)^2]^n f(t) dt. \end{aligned}$$

En virtud del teorema 1 :  $f_n \rightarrow f$  uniformemente. Sea ahora  $|x| < \frac{1}{4}$

Si definimos :

$$f_n^*(x) = \sqrt{\frac{\pi}{n}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [1 - (t-x)^2]^n f(t) dt,$$

también ocurrirá  $f_n^* \rightarrow f$  uniformemente en  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , puesto que el punto crítico del núcleo no se sale del dominio.

Pero por la forma especial del núcleo de Stieltjes,  $f_n^*(x)$  es un polinomio, y el teorema queda demostrado.

Otro teorema análogo, también de Weirstrass, expresa que los polinomios trigonométricos

$$T(x) = \sum_{h=0}^n (A_h \cos hx + B_h \operatorname{sen} hx) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

también son densos (en la misma topología de la convergencia uniforme) en las funciones continuas definidas en  $[-\pi, \pi]$ . No daremos ahora la demostración, puesto que resultará como corolario en la teoría de series de Fourier (§ 5.3)

----- 0 -----

#### § 4.2

#### Ecuaciones en derivadas parciales

Aquí daremos simplemente una idea del método de aplicación, sin pretender ser rigurosos, ni tampoco encarar el problema en forma muy general.

Supongamos que

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$$

es una ecuación lineal de segundo orden ( $p = u_x$ ,  $q = u_y$ ,  $r = u_{xx}$ ,  $s = u_{xy}$ ,

$t = u_{yy}$ ) . Recordemos que tal ecuación es lineal cuando  $F$  es una combinación lineal de  $u, p, q, r, s, t$  con coeficientes que a lo sumo dependen de las variables independientes  $x$  e  $y$  :

$$F \equiv a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + c u + d = 0.$$

Se desea resolver el problema de Dirichlet, es decir: encontrar una solución  $u = u(x, y)$  de la ecuación que tome valores arbitrariamente prefijados en una curva cerrada  $\Gamma = \{x(t), y(t)\}$  del plano  $x, y$  (condición de contorno) , o sea

$$u(x(t), y(t)) = f(t)$$

con  $f(t)$  prefijada y continua a trozos.

Supongamos que se hizo un cambio de coordenadas, de manera que, volviendo a llamar  $x, y$  a las nuevas variables, la curva  $\Gamma$  se reduzca al eje  $x$  , es decir  $\Gamma \equiv \{y = 0\}$  , y sea

$$u(x, 0) = f(x)$$

la condición de contorno (en realidad, es otra función ; no la misma  $f$  de antes, sino la que resulta de cambiar variables) .

Supongamos además que de alguna manera hemos encontrado un núcleo singular  $k_n(x)$  tal que  $k_1(x) = K(x, y)$  sea solución de la ecuación  $F = 0$ .

Entonces se puede afirmar que el problema de Dirichlet está resuelto mediante la función:

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi - x, y) f(\xi) d\xi .$$

En efecto: como por hipótesis  $F$  es lineal,  $K(x-\xi, y)$  será solución para todo  $\xi$  y también lo será la integral, pues por la linealidad:

$$F(u) = F \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi - x, y) f(\xi) d\xi \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(K) f(\xi) d\xi = 0 .$$

Además  $u(x,y)$  cumple la condición de contorno, puesto que por ser  $k_n$  un núcleo singular, vale:

$$\lim_{y \rightarrow 0} u(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi - x, y) f(\xi) d\xi = \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi - x) f(\xi) d\xi = f(x) .$$

Daremos algunos ejemplos concretos.

En primer lugar, sea  $F = 0$  la ecuación del calor en una dimensión, con datos de contorno en el eje  $x$  :

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y = 0 , \\ u(x,0) = f(x) . \end{cases}$$

La solución  $u(x,y)$  expresará la temperatura del punto de abscisa  $x$  de una barra conductora indefinida, en el instante  $y$  . Entonces, el dato  $f(x)$  representará la temperatura inicial en cada punto  $x$  .

Por sustitución directa es sencillo comprobar que

$$K(x,y) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

es solución de la ecuación.

Ahora bien : haciendo  $n = \frac{1}{y}$  , obtenemos el núcleo de Weirstrass (83.2) , de manera que la solución del problema, en virtud de lo dicho más arriba, será :

$$u(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{4y}} f(\xi) d\xi .$$

O vemos también, dicho sea de paso, que esta fórmula contradice a la teoría de la relatividad, pues supone una velocidad infinita de interacción, lo cual asegura que la ecuación del calor no es enteramente correcta. En efecto : supongamos que la excitación inicial esté concentrada en un pequeño entorno del origen :  $f(x) = 0$  si  $|x| > x_0$  . La solución obtenida afirma que en un instante arbitrariamente breve:  $y \sim 0$  , y en cualquier punto arbitrariamente lejano :  $|x| \gg x_0$  , se obtiene  $u(x,y) \neq 0$  , a pesar de que  $f(x) = u(x,0) = 0$  . Esto quiere decir que la velocidad de propagación es mayor que  $\frac{x-x_0}{y}$  para cualesquiera  $x$  e  $y$  ; en otras palabras, la velocidad es infinita.

La razón matemática de este hecho es que la ecuación de propagación del calor es parabólica; una ecuación de propagación físicamente admisible debería ser de tipo hiperbólico, tal como ocurre, por ejemplo, con las ecuaciones de ondas, equivalente a las de Maxwell.

Otro ejemplo que permite aplicar el método anteriormente descrito es el de la ecuación de Laplace con datos en un contorno circular  $\Gamma = \{x^2 + y^2 = R^2\}$  :

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u(\Gamma) = f(\theta), \end{cases}$$

siendo  $\theta$  el parámetro angular de la circunferencia. Se llaman funciones armónicas a las soluciones de la ecuación de Laplace.

Ahora bien: el núcleo de Poisson del círculo (§ 3.4) es armónico por ser la parte real de la función analítica  $\frac{1}{2\pi} \frac{1+z}{1-z}$ , y por consiguiente la solución buscada será :

$$u(x,y) = u_1(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} f(\varphi) d\varphi.$$

Análogamente, si se diera el dato inicial sobre el eje  $x$ , y se busca una función armónica en el semiplano superior, se usaría el núcleo de Poisson del semiplano superior (§ 3.3).

Para una curva cerrada cualquiera  $\Gamma$ , el procedimiento es hacer una transformación conforme en el círculo  $|z| \leq R$ , de manera que  $\Gamma$  se transforme en  $|z| = R$ , aplicar allí la solución ya obtenida  $u(x,y)$  y luego volver a transformarla, por representación conforme, al recinto primitivo.



Usaremos la misma notación que antes:

$$f_n(x) = \int k_n * f(x),$$

y supondremos que  $f_n \rightarrow f$  p.p. .

Una de las propiedades que tiene la representación de una función  $f$  por un núcleo singular es que, si el núcleo es bastante "bueno", las funciones aproximantes  $f_n$  pueden ser "más buenas" que la misma  $f$ . Esto corresponde a un principio de regularización, que en grandes rasgos puede sintetizarse diciendo que el producto de convolución es tan bueno como el mejor de los dos factores.

Por supuesto, todo esto es muy vago. Para ilustrarlo con un ejemplo supongamos que  $f \in L^1$  y  $k_n$  satisface las hipótesis del teorema 1 con  $p = \infty$ , es absolutamente continuo y con derivada uniformemente continua. Entonces existe  $(f_n)' = \frac{df_n}{dx}$  y vale

$$(f_n)'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} k_n(t-x) f(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} k_n'(u) f(x+u) du,$$

pues se puede derivar bajo el signo. Esto es así aunque  $f$  no sea derivable; entonces se aproxima a la  $f$  mediante funciones "mejores" que ella misma.

Si  $f$  fuere absolutamente continua y  $f' \in L^1$ , también podemos construir las aproximantes de la derivada:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_n = (f')_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_n(t-x) f'(t) dt$$

y es fácil comprobar que

$$(f'_n)_n(x) = (k_n)'(x),$$

es decir, las aproximantes de la derivada de  $f$  son iguales a la derivada de las aproximantes de  $f$ . En efecto, basta integrar por partes y tener en cuenta que la parte integrada es nula :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(t-x) f'(t) dt &= k_n(b-x) f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} k_n(t-x) f(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} k(t-x) f(t) dt. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que  $f \in L^1$ , pero que nada sabemos sobre la existencia de su derivada. No podemos entonces formar las aproximantes de la derivada, pero sí las derivadas de las aproximantes:

$$(f_n)' = k_n' * f.$$

Si ocurre que para  $n \rightarrow \infty$  existe p.p. el límite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n)' = g,$$

se dice que  $g$  es la derivada generalizada de  $f$ . (<sup>1</sup>)

---

(<sup>1</sup>) : Otras definiciones equivalentes de derivada generalizada, así como sus principales propiedades y el motivo de su interés, puede verse en : M. Cotlar : Seminario sobre integrales singulares, 1959, F.O.E. y N .

Así por ejemplo, la función de Dirichlet  $D(x) = 0$  para  $x$  irracional y  $= 1$  para  $x$  racional, tiene derivada generalizada y vale cero (es inmediato: compruébese).

Para que la definición dada sea correcta, es necesario probar que no depende del núcleo particular  $k_n$  utilizado, y que si  $f$  es absolutamente continua, entonces tiene derivada generalizada  $g$  y se cumple  $f' = g$ , p.p. No entraremos aquí a considerar tales cuestiones, remitiéndonos al trabajo de M. Cotlar citado.

El concepto de derivada generalizada se debe a Sobolev, y fué precursor de la teoría de distribuciones de L. Schwartz.

— 0 —

## § 5. DESARROLLO EN SERIE DE FUNCIONES ORTOGONALES

### § 5.1 Planteamiento del problema

Probablemente sea el que pasamos a considerar el campo de aplicación más importante de la teoría de núcleos singulares, y por consiguiente lo examinaremos un poco más detenidamente. De todas maneras, trataremos de restringirnos, en lo posible, a aquél aspecto de la teoría del desarrollo en serie en el cual se apliquen los núcleos, evitando el tratamiento de otras cuestiones.

En particular, daremos los resultados más importantes — y elementales — sobre series de Fourier, que es el ejemplo más importante de series de funciones ortogonales.

Sea pues  $E$  un conjunto de la recta real — en particular, la recta misma, o un intervalo — que llamaremos el espacio de definición, y sobre el cual están definidas funciones a valores reales o complejos.

Nos restringiremos al espacio  $L^2 \equiv L^2(E)$ , es decir, al conjunto de funciones  $f$  tales que

$$\|f\|_2^2 = \int_E |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Más generalmente, podríamos suponer definida en  $E$  una medida de Radon-Stieltjes  $\mu$  y considerar el espacio  $L^2_\mu(E)$  de funciones  $f$  tales

que :

$${}^{(4)}\|f\|_2^2 = \int_E |f(t)|^2 d\mu(t) < \infty .$$

Por simplicidad, usaremos la medida de Lebesgue  $d\mu(x) = dx$ , pero los resultados principales que veremos conservan su validez -compruébelo el lector- aún sin modificar la demostración.

Si  $f$  y  $g \in L^2$ , hemos visto ya (§ 0) que se verifica

$$\left| \int f(t) \bar{g}(t) dt \right| \leq \|f\| \|g\| , \quad (1)$$

que no es más que la desigualdad de Hölder para  $p = p^* = 2$ , es decir, la desigualdad de Schwarz.

Entonces, para todo par  $f, g \in L^2$ , se define el producto escalar de  $f$  por  $g$  mediante la fórmula :

$$(f, g) = \int f(t) \bar{g}(t) dt ,$$

y es inmediato comprobar que posee las siguientes propiedades ( $\alpha_i, \beta_i =$  números complejos) :

- a)  $(g, f) = \overline{(f, g)}$  ;
- b)  $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 (f_1, g) + \alpha_2 (f_2, g)$  ;
- c)  $(f, f) = \|f\|^2 \geq 0$
- d)  $(f, f) = 0 \implies f = 0$  p.p. .

De a) y b) se deduce que

$$(f, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \beta_1 (f, g_1) + \beta_2 (f, g_2).$$

Como ya hemos dicho, la distancia  $-2$  está definida por

$$d[f, g] = \|f - g\| = (f - g, f - g)^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Dos funciones se llaman ortogonales -o perpendiculares- cuando su producto escalar es nulo:

$$(f, g) = \int f(t) \bar{g}(t) dt = 0.$$

Diremos que una sucesión de funciones  $\{\varphi_n(x)\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) forma un sistema ortogonal cuando son todas ortogonales entre sí:

$$(\varphi_i, \varphi_j) = 0 \quad \text{para todo } i \neq j.$$

Si además están normalizadas, es decir, si para todo  $i$  se cumple  $(\varphi_i, \varphi_i) = \|\varphi_i\|^2 = 1$ , el sistema se llama ortonormal. En tal caso:

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij},$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker ( $= 1$  si  $i = j$ , e  $\neq 0$  si  $i \neq j$ )

Observemos la semejanza entre el espacio  $L^2$  y el espacio euclídeo

---

(<sup>1</sup>): Todo espacio vectorial entre cuyos elementos  $f, g, \dots$  (no necesariamente funciones) está definido un producto escalar como un número complejo con las propiedades a), b), c), d) y tal que como espacio métrico con la distancia así definida sea completo (cf. § 0), se llama espacio de Hilbert. En particular, el  $L^2$  es el único  $L^p$  que es espacio de Hilbert.

de tres dimensiones ordinario. A las funciones  $f$  le corresponden los vectores  $\vec{u}$ , al producto escalar  $(f, g)$  el producto escalar  $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ , a la norma  $\|f\|$  el módulo  $|\vec{u}| = (\vec{u} \cdot \vec{u})^{1/2}$ , al sistema ortonormal  $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$  los vectores unitarios  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

Nuestro objetivo es llevar la analogía más allá: puesto que cada vector  $\vec{u}$  es representable por sus componentes.

$$u_1 = \vec{u} \cdot \vec{i}, \quad u_2 = \vec{u} \cdot \vec{j}, \quad u_3 = \vec{u} \cdot \vec{k},$$

en la forma

$$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k},$$

será posible representar una función  $f \in L^2$  por sus "componentes"

$$c_h = (f, \varphi_h) = \int f(t) \varphi_h(t) dt,$$

mediante la fórmula

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h \varphi_h(x) \quad ?$$

Observemos ante todo que si el desarrollo es cierto:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h \varphi_h(x),$$

y si es lícita la integración término a término, se deduce inmediatamente, multiplicando por  $\overline{\varphi_h(x)}$ , integrando y teniendo en cuenta las relaciones de ortogonalidad, que las "componentes"  $c_h$  están dadas efectivamente por

$$c_h = (f, \varphi_h).$$

Los  $c_n$  así definidos se llaman coeficientes de Fourier de la función  $f$  respecto al sistema ortonormal  $\{\varphi_n\}$ .

Plantearemos ahora el problema en forma más concreta.

Sea  $f \in L^2$ . Dado el sistema  $\{\varphi_n\}$ , se calculan los coeficientes de Fourier  $c_n = (f, \varphi_n)$  y se construye la serie de Fourier de  $f$ :

$$\mathcal{G}[f](x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

Llamando:

$$s_n(x) = \sum_{h=0}^n c_h \varphi_h(x) = \sum_{h=0}^n (f, \varphi_h) \varphi_h(x)$$

a las sumas parciales de la serie: bajo qué condiciones podremos afirmar que  $s_n(x)$  converge a  $f(x)$ , es decir, cuando será  $f$  igual a su serie de Fourier:

$$f(x) = \mathcal{G}[f](x) \quad ?$$

Comencemos haciendo notar que es necesario definir qué quiere decir que  $s_n$  tiende a  $f$ . Así, se podría hablar, por ejemplo, de convergencia punto a punto, convergencia uniforme, convergencia en norma ( $\|s_n - f\| \rightarrow 0$ ), etc., y la respuesta puede variar en cada caso.

Y ahora sí entraremos en la cuestión: consideraremos cada convergencia en particular, y con el auxilio de la teoría de núcleos singulares

trataremos de establecer cuándo se verifica

$$s_n(x) \rightarrow f(x),$$

es decir, cuándo podemos escribir :

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h \varphi_h(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (f, \varphi_h) \varphi_h(x).$$

— o —

**§ 5.2** Convergencia puntual .

Sea pues  $f \in L^2$  ,  $\bar{S} [f] (x) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h \varphi_h(x)$  su serie de Fourier, y

$c_h = (f, \varphi_h)$  sus coeficientes de Fourier.

Llamando  $s_n(x) = \sum_{h=0}^n c_h \varphi_h(x)$ , se trata de averiguar cuándo ocurre  $s_n(x) \rightarrow f(x)$  en cada punto  $x$ .

Se tiene:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{h=0}^n c_h \varphi_h(x) = \sum_{h=0}^n (f, \varphi_h) \varphi_h(x) = \sum_{h=0}^n \varphi_h(x) \int f(t) \bar{\varphi}_h(t) dt = \\ &= \int f(t) \left\{ \sum_{h=0}^n \varphi_h(x) \bar{\varphi}_h(t) \right\} dt . \end{aligned}$$

Entonces, la convergencia puntual  $s_n(x) \rightarrow f(x)$  estará asegurada cuando

$$k_n(t, x) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} q_h(x) \bar{q}_h(t)$$

Sea un núcleo singular que satisfaga a las hipótesis de alguno de los teoremas de 2.

Aunque no es necesariamente  $k_n(t, x) = k_n(t-x)$ , esto no tiene importancia esencial;  $k_n$  será núcleo singular si

$$\int_a^b k_n(t, x) dt \rightarrow 1$$

para todo  $(a, b) \ni X$ . Los conceptos de cuasi positividad, etc., se definen análogamente, y no vale la pena repetirlos.

En el caso particular de las series de Fourier, el espacio de definición es el intervalo  $(-\pi, \pi)$ , y el desarrollo es

$$G[f](x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} c_h e^{ihx}$$

El índice de sumación varía de  $-\infty$  a  $+\infty$ ; entonces la suma parcial se toma  $S_n = \sum_{h=-n}^n$ .

Las funciones  $e^{ihx}$  ( $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) son ortogonales -compruébase- pero no están normalizadas; el sistema normalizado correspondiente está dado por :

$$\varphi_h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ihx}$$

Entonces:

$$k_n(t, x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-n}^n e^{ih(x-t)} = \frac{1}{2\pi} e^{-in(x-t)} \frac{e^{i(2n+1)(x-t)} - 1}{e^{i(x-t)} - 1}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})(x-t)} - e^{-i(n+\frac{1}{2})(x-t)}}{e^{\frac{i}{2}(x-t)} - e^{-\frac{i}{2}(x-t)}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})(t-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(t-x)}$$

Esta expresión es esencialmente equivalente al núcleo de Dirichlet (§ 3.6), y así se llama también en este caso. Esto se debe a que, para  $u$  pequeño es  $2 \operatorname{sen} \frac{u}{2} \sim u$ ; además  $2 \operatorname{sen} \frac{u}{2}$  sólo se anula en  $u \neq 0$ , pues el recinto de integración ya no es  $(-\infty, \infty)$  sino  $(-\pi, \pi)$ , lo cual tampoco modifica esencialmente la cuestión. Compruebe el lector todas estas afirmaciones.

En definitiva, la serie de Fourier converge puntualmente en las condiciones del teorema 2. (Criterio de Jordan). Otros criterios de convergencia no los consideraremos aquí. (1).

El hecho de que el núcleo de Dirichlet no sea casi positivo, sino tan sólo débilmente casi positivo, y no satisfaga las hipótesis de los teoremas 1 y 3, es causa de dificultades en la convergencia, y plantea muchos problemas, algunos de los cuales aún no están resueltos (2).

— o —

(1): Cf., por ej.: Zygmund: Trigonometrical series, Cap. I.

(2): Cf., por ej.: Zygmund; op cit, especialmente Cap. VIII

§ 5.3

Convergencia Cesáreo.

Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  una serie numérica o funcional, y

$$S_n = \sum_{h=0}^n u_h$$

sus sumas parciales.

Se dice que  $S_n$  converge Cesáreo (C,1) hacia  $S$ , cuando la sucesión de promedios aritméticos

$$\sigma_n^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} S_h$$

converge puntualmente a  $S$ .

Se demuestra fácilmente que si  $S_n$  converge en sentido ordinario, entonces también converge Cesáreo (C,1), y hacia la misma suma (compruébel el lector). En cambio, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  no converge en sentido ordinario, y en cambio sí converge Cesáreo (C,1) hacia  $-\frac{1}{2}$  (hágase). Por lo tanto la convergencia Cesáreo generaliza la noción de convergencia.

En nuestro caso:

$$S_h(x) = \sum_{k=0}^h c_k \varphi_k(x),$$

y entonces :

$$\sigma_n^{(1)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} S_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^h c_k \varphi_k(x) = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} (n-h) c_h \varphi_h(x).$$

Reemplazando  $C_h$  por su valor:

$$C_n^{(1)}(x) = \int f(t) \left\{ \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} (n-h) \varphi_h(x) \bar{\varphi}_h(t) \right\} dt.$$

Entonces, la convergencia  $(C,1)$  está asegurada si

$$k_n(t,x) = \sum_{h=0}^n (1-\frac{h}{n}) \varphi_h(x) \bar{\varphi}_h(t) = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} k_n^{(1)}(x,t)$$

es un núcleo singular que satisface alguno de los teoremas del §2. Designamos  $k_n^{(1)}$  al núcleo correspondiente a la convergencia puntual.

En particular, para series de Fourier:

$$\begin{aligned} k_n(t,x) &= \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} \frac{\operatorname{sen}(h+\frac{1}{2})(t-x)}{2\pi \operatorname{sen} \frac{1}{2}(t-x)} = \\ &= \frac{1}{4i\pi n \operatorname{sen} \frac{t-x}{2}} \sum_{h=0}^{n-1} \left\{ e^{i(h+\frac{1}{2})(t-x)} - e^{-i(h+\frac{1}{2})(t-x)} \right\} = \\ &= \frac{1}{4i\pi n \operatorname{sen} \frac{t-x}{2}} \left\{ e^{i\frac{t-x}{2}} \frac{e^{in(t-x)} - 1}{e^{i(t-x)} - 1} + e^{-i\frac{t-x}{2}} \frac{e^{-in(t-x)} - 1}{1 - e^{-i(t-x)}} \right\} = \\ &= \frac{1}{-8\pi n \operatorname{sen}^2 \frac{t-x}{2}} \left\{ e^{in(t-x)} - 2 + e^{-in(t-x)} \right\} = \\ &= \frac{1}{-8\pi n \operatorname{sen}^2 \frac{t-x}{2}} \left\{ e^{i\frac{n}{2}(t-x)} - e^{-i\frac{n}{2}(t-x)} \right\}^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi n} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2} (t-x)}{\operatorname{sen}^2 \frac{t-x}{2}}$$

Por las mismas razones que dimos para  $k_h^{(e)}$ , este núcleo es equivalente al de Fejer. Es fácil comprobar que es positivo y satisface las hipótesis de los teoremas 1 y 3. En consecuencia, la serie de Fourier converge Cesáro (C,1) en casi todo punto. No existen ahora dificultades en la convergencia, como acontecía en cambio con el núcleo de Dirichlet para convergencia puntual. Esto se debe a que el núcleo de Fejer es "más potente" que el de Dirichlet.

En general, se define la convergencia Cesáro (C, $\ell$ ), para todo  $\ell$  natural, mediante la fórmula de recurrencia

$$\sigma_n^{(\ell)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} \sigma_h^{(\ell-1)}(x)$$

y se dice que  $S_n(x)$  converge Cesáro (C, $\ell$ ) hacia  $f(x)$  cuando  $\sigma_n^{(\ell)} \rightarrow f(x)$  puntualmente <sup>(1)</sup>.

Un cálculo un poco más engorroso lleva a concluir que la convergencia Cesáro (C, $\ell$ ) está asegurada si

$$k_n^{(\ell)}(t,x) = \sum_{h=0}^{n-1} \left(1 - \frac{h}{n}\right)^\ell \varphi_h(x) \bar{\varphi}_h(t)$$

es un núcleo singular que satisface alguno de los teoremas de § 2.

Puesto que, según se puede demostrar (hágalo el lector), la convergencia (C, $\ell_1$ ) implica la convergencia (C, $\ell_2$ ) hacia la misma suma, siempre que  $\ell_2 > \ell_1$ , concluimos que para series de Fourier no hay ninguna

<sup>(1)</sup>: En Zygmund, op.ct., Cap III, se define la convergencia Cesáro (C, $\ell$ ) en forma un tanto distinta a la que damos aquí. A la definición que nosotros dimos, en cambio, la llama convergencia Hölder (H, $\ell$ ). De todas maneras, se puede demostrar que los dos métodos son equivalentes.

**Dificultad:** existe convergencia  $(C, \ell)$  para todo  $\ell > 1$ , en casi todo punto.

----- o -----

**§ 5.4** Convergencia Abel

Si  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  es una serie numérica o funcional, se dice que converge Abel hacia la suma  $S$  cuando para todo  $r < 1$  existe convergencia puntual:

$$S_r = \sum_{n=0}^{\infty} r^n u_n,$$

y además existe el límite

$$\lim_{r \rightarrow 1^+} S_r = S.$$

Si la serie va de  $-\infty$  a  $+\infty$ , hay que tomar:

$$S_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} u_n.$$

Puede demostrarse que la convergencia Abel es "más potente" que cualquiera de las  $(C, \ell)$ : Si  $\sum u_n$  converge  $(C, \ell)$ , para algún  $\ell$ , entonces converge Abel hacia la misma suma (1).

En el caso que nos interesa, si llamamos  $A_r$  a las aproximantes de  $f$ , se tiene:

$$\begin{aligned} A_r(x) &= \sum_{h=0}^{\infty} r^h C_h \varphi_h(x) = \sum_{h=0}^{\infty} r^h (f, \varphi_h) \varphi_h(x) = \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} r^h \varphi_h(x) \int f(t) \bar{\varphi}_h(t) dt. \end{aligned}$$

(1) : Cf.: Zygmund, op.cit., Cap.

Invirtiendo suma con integral (justifíquese), resulta:

$$A_r(x) = \int f(t) \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} r^h \varphi_h(x) \bar{\varphi}_h(t) \right\} dt.$$

Por lo tanto habrá convergencia  $A_r \rightarrow f$  si para  $r \rightarrow 1 - 0$  es

$$k_r(t, x) = \sum_{h=0}^{\infty} r^h \varphi_h(x) \bar{\varphi}_h(t)$$

un núcleo singular que satisfaga a algún teorema del § 2.

En el caso de series de Fourier, lo dicho más arriba ya nos asegura la convergencia Abel p.p.; daremos sin embargo una demostración directa.

Llamando  $x-t = \theta$  y  $re^{i\theta} = z$ , tenemos:

$$\begin{aligned} k_r(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} r^{|h|} e^{ih(x-t)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=0}^{\infty} z^h + \frac{1}{2\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \bar{z}^h = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{1-z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{1 - z - \bar{z} + |z|^2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t-x) + r^2} \end{aligned}$$

Obtenemos pues el núcleo de Poisson del círculo unidad (§ 3.4,  $R=1$ ) y como éste satisface a las hipótesis del teorema 3, concluimos que existe convergencia Abel p.p.

§5.5

Convergencia en norma

Como ya vimos (§ 0),  $S_n$  converge en norma hacia  $f$  si  $\|f - S_n\| \rightarrow 0$ .

En el caso de desarrollo en un sistema ortogonal:

$$S_n(x) = \sum_{h=0}^n (f, \varphi_h) \varphi_h(x),$$

y se tiene:

$$\|f - S_n\|^2 = (f - S_n, f - S_n) = (f, f) + (S_n, S_n) - (f, S_n) - (S_n, f)$$

$$\|f\|^2 + \|S_n\|^2 - (f, S_n) - \overline{(f, S_n)}.$$

Pero, por las propiedades del producto escalar:

$$(f, S_n) = \left( f, \sum_{h=0}^n (f, \varphi_h) \varphi_h \right) = \sum_{h=0}^n \left( f, (f, \varphi_h) \varphi_h \right)$$

$$= \sum_{h=0}^n \overline{(f, \varphi_h)} (f, \varphi_h) = \sum_{h=0}^n |(f, \varphi_h)|^2;$$

$$\|S_n\|^2 = \left( \sum_{h=0}^n (f, \varphi_h) \varphi_h, \sum_{k=0}^n (f, \varphi_k) \varphi_k \right) =$$

$$= \sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n (f, \varphi_h) \varphi_h, (f, \varphi_k) \varphi_k = \sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n (f, \varphi_h) \overline{(f, \varphi_k)} (\varphi_h, \varphi_k)$$

$$= \sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n (f, \varphi_h) \overline{(f, \varphi_k)} \delta_{hk} = \sum_{h=0}^n |(f, \varphi_h)|^2.$$

Entonces:

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{h=0}^n |(f, \varphi_h)|^2.$$

Como el primer miembro es no negativo, se cumple:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{h=0}^n |(f, \varphi_h)|^2,$$

y puesto que la desigualdad vale para todo  $n$ , obtenemos la importante desigualdad de Bessel:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{h=0}^{\infty} |(f, \varphi_h)|^2 = \sum_{h=0}^{\infty} |c_h|^2,$$

válida para cualquier sistema ortonormal: la norma de una función es mayor o igual que la suma de los cuadrados de las componentes.

Si hubiera convergencia en norma, debería cumplirse, por definición:

$$\|f - S_n\| \rightarrow 0,$$

y en consecuencia la desigualdad de Bessel se transforma en la igualdad de Parseval:

$$\|f\|^2 = \sum_{h=0}^{\infty} |(f, \varphi_h)|^2.$$

(Obsérvese la analogía con el teorema de Pitágoras, si  $h=1,2,3,\dots$ ,  $f$  es un vector, y  $\varphi_h$  los versores unitarios).

Se dice que un sistema ortonormal  $\{\varphi_h\}$  es cerrado, cuando para toda  $f \in L^2$  se verifica la igualdad de Parseval, y como esta última equivale a la convergencia en norma, resulta que existe convergencia en norma para toda  $f \in L^2$  si y sólo si  $\{\varphi_h\}$  es cerrado. A la fórmula de Parseval se la suele llamar a veces relación de cerradéz <sup>(1)</sup>.

Daremos ahora otro concepto que, según demostraremos, es equivalente

(1) : En alemán: Abgeschlossenheitsrelation.

al de cerradez.

Un sistema ortonormal  $\{\varphi_h(x)\}$  se llama completo cuando no existe ninguna función ortogonal a todas las  $\varphi_h(x)$  (salvo, naturalmente, la función nula p.p.). En otras palabras,  $\{\varphi_h\}$  es completo cuando  $f \in L^2$  y  $(f, \varphi_h) = 0$  para todo  $h$ , implica que  $f = 0$  p.p.

Demostremos a continuación la equivalencia de los dos conceptos

a) Cerradez  $\Rightarrow$  Completidad.

En efecto, por la igualdad de Parseval resulta que si  $(f, \varphi_h) = 0$  para todo  $h$ , entonces  $\|f\| = 0$  y por lo tanto  $f = 0$  p.p.

b) Completidad  $\Rightarrow$  Cerradez.

Sea  $f \in L^2$ ; las sumas parciales correspondientes son

$$S_n(x) = \sum_{h=0}^n (f, \varphi_h) \varphi_h(x).$$

En virtud de la desigualdad de Bessel:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{h=0}^n |(f, \varphi_h)|^2 = \|S_n\|^2,$$

resulta que  $\|S_n - S_m\|^2 = \sum_{h=m+1}^n |(f, \varphi_h)|^2$  se puede hacer arbitrariamente pequeño para  $n$  y  $m$  grandes. Entonces la sucesión  $S_n$  es fundamental en la métrica de la norma, y como  $L^2$  es completo, existirá una función  $g \in L^2$  tal que  $S_n$  converge en norma hacia ella, es decir:

$$\|g\|^2 = \sum_{h=0}^{\infty} |(f, \varphi_h)|^2.$$

El teorema quedará demostrado probando que  $f(x) = g(x)$  p.p. .

Se tiene:

$$(f, \varphi_n) \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n, \varphi_n)$$

puesto que  $|(g-S_n, \varphi_n)| \leq \|g-S_n\|$  (desig. de Schwarz) y  $\|g-S_n\| \rightarrow 0$ .

Pero para  $n$  grande es  $(S_n, \varphi_n) = (f, \varphi_n)$ , por definición de  $S_n$ .

Entonces  $(g-f, \varphi_n) = 0$  para todo  $n$ . Y como el sistema es completo se cumple:  $g(x) = f(x)$ , p.p. e.q.d..

Con esto hemos demostrado pues que: Es condición necesaria y suficiente para que  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (f, \varphi_k) \varphi_k(x)$  converja en norma hacia  $f(x)$ , para toda  $f \in L^2$ , que el sistema  $\{\varphi_n\}$  sea completo. (1)

Hemos introducido la noción de completitud porque en ocasiones es más cómoda para usar que la de cerradez, cuando se estudia la convergencia en norma. Sin embargo, en el criterio que damos a continuación, que usa núcleos singulares, no la tendremos en cuenta.

Demostremos que: Para que exista convergencia en norma de la sucesión  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (f, \varphi_k) \varphi_k(x)$  hacia  $f(x)$ , para toda  $f \in L^2$ , es condición suficiente que  $k_n(t, x) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(t)}$  sea un núcleo singular (2)

Notemos que este enunciado muestra la convergencia en norma es la que tiene lugar con mayor facilidad, pues no le impone a  $k_n(t, x)$  ninguna

(1): La demostración es válida para cualquier espacio de Hilbert-es fácil verlo, - y ha sido copiada casi textualmente de Achieser-Glassmann: Theorie der Linearen Operatoren im Hilbert Raum, Cap. 1, § 9.

(2): La demostración que daremos, mucho más sencilla que la original, fué sugerida por el profesor J. P. Kahane.

condición adicional de cuasi positividad o cuasi positividad débil, y además se cumple para todas las funciones de  $L^2$ . (Pero si  $f \notin L^2$  no hay converg. en norma, y puede haberla de otro tipo)

Por lo expuesto más arriba, basta demostrar que el sistema es cerrado, es decir, que la igualdad de Parseval se verifica para toda  $f \in L^2$ . Pero, por un teorema de Steklov, es suficiente probar que se cumple en un conjunto denso en  $L^2$  para que el sistema sea cerrado (1).

Elegiremos como conjunto denso en  $L^2$  al de las funciones escaleras. En primer lugar es inmediato comprobar que si  $k_n(t, x)$  es un núcleo singular, y  $g(x)$  una función escalera, entonces las sumas parciales convergen puntualmente p.p. hacia  $g(x)$ . En efecto, llamando  $\Omega_i(t)$  la función característica del intervalo  $I_i$ :

$$\begin{aligned}
 s_n(x) &= \sum_{h=0}^n (g, \varphi_h) \varphi_h(x) = \int k_n(t, x) g(t) dt = \sum_{i=1}^l \lambda_i \int k_n(t, x) \Omega_i(t) dt = \\
 &= \sum_{i=1}^l \lambda_i \int_{I_i} k_n(t, x) dt \rightarrow \sum_{i=1}^l \lambda_i \Omega_i(x) = g(x), \text{ p.p.}
 \end{aligned}$$

puesto que  $\int_{I_i} k_n(t, x) dt \rightarrow \Omega_i(x)$ , por definición de núcleo singular, salvo a lo sumo en los extremos del intervalo  $I_i$ .

Aplicando el teorema de Fatou(2) a la sucesión  $\{|s_n(x)|^2\}$ , obtenemo

$$\|g\|^2 \leq \sup_n \|s_n\|^2.$$

Pero:

$$\sup_n \|s_n\|^2 = \sup_n \sum_{h=0}^n |(g, \varphi_h)|^2 = \sum_{h=0}^{\infty} |(g, \varphi_h)|^2.$$

(1): Cf: Natanson: Theorie der Funktionen einer Reellen Veränderlichen, Cap 3, para la demostración del teor. de Steklov. (Hay trad. al inglés).

(2) pág 69.

Entonces:

$$\|g\|^2 \leq \sum_{h=0}^{\infty} |(g, \varphi_h)|^2,$$

como el signo < está excluido por la desigualdad de Bessel, resulta la tesis, c.q.d. .

Otra forma equivalente de enunciar este teorema sería: Si  $\{\varphi_n(x)\}$  es un sistema ortonormal, y para todo  $(a,b) \ni x$  se cumple  $\int_a^b \left\{ \sum_{h=0}^n \varphi_h(x) \overline{\varphi_h(t)} \right\} dt \rightarrow 1$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $\{\varphi_n(x)\}$  es completo. En realidad, la hipótesis puede debilitarse aún más, pero no nos ocuparemos de eso.

En particular, como el núcleo de Dirichlet es efectivamente un núcleo singular, resulta que para series de Fourier existe convergencia en norma, y vale la igualdad de Parseval, para toda  $f \in L^2$ .

---

(2) : Cuyo enunciado es: "Si una sucesión de funciones medibles y no negativas converge p.p. hacia  $f(x)$  en un conjunto  $E$ , entonces se cumple:  $\int f(x)dx \leq \sup \int f_n(x)dx$ ." La demostración puede verse en Natanson, op.cit., Cap VI, § 1.

## 6. FENOMENO DE GIBBS

La línea de razonamiento que seguiremos aquí es una generalización directa de la forma como Zygmund (1) estudia la cuestión, en el caso particular del núcleo de Dirichlet.

Sea  $k(t)$  un núcleo singular débilmente cuasi positivo, y supongamos que existan los valores  $\alpha$  y  $\beta$  definidos en § 2.2. Entonces, para cada  $x > 0$  se cumple

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-x}^0 k_n(t) dt ; \quad \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x k_n(t) dt ; \quad \alpha + \beta = 1$$

Sea ahora  $\{X_n\}$  cualquier sucesión de términos positivos que tienda monóticamente a cero, y supongamos que para cada sucesión de este tipo existan los límites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-X_n}^0 k_n(t) dt ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{X_n} k_n(t) dt.$$

Ya no podemos afirmar que los valores límites sean  $\alpha$  y  $\beta$ , pues ahora varían los límites de integración. Definamos entonces los números, obtenidos variando la sucesión  $X_n \rightarrow 0$ ,  $X_n > 0$  de todas las maneras posibles:

$$\alpha^+ = \sup_{\{X_n\} \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-X_n}^0 k_n(t) dt ; \quad \beta^+ = \sup_{\{X_n\} \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{X_n} k_n(t) dt$$

Como la sucesión  $X_n$  puede tender hacia 0 tan lentamente como se cumple:

1) : Op cit, cap VIII, § 5

y en consecuencia:

$$\alpha < \alpha^+, \quad \beta < \beta^+, \quad \alpha + \beta < \alpha^+ + \beta^+ \leq 1.$$

En particular, si el núcleo  $k_n(t)$  es positivo, como para cada  $X_n$

se cumple:

$$\int_{-X_n}^0 < \int_{-\infty}^0, \quad \int_0^{X_n} < \int_0^{\infty},$$

resulta que

$$\alpha^+ = \alpha, \quad \beta^+ = \beta$$

Si el núcleo es de Bochner (§ 3.8), el cálculo es más sencillo, pues

$$\begin{aligned} \alpha^+ &= \sup_{\{X_n\} \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_{-X_n}^0 h(nt) dt = \sup_{\{X_n\} \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_{-nX_n}^0 h(u) du \\ &= \sup_{x < 0} \frac{1}{N} \int_0^x h(u) du, \end{aligned}$$

y análogamente resulta:

$$\beta^+ = \sup_{x > 0} \frac{1}{N} \int_0^x h(u) du$$

Por ejemplo, para el núcleo de Dirichlet:

$$\alpha^+ = \beta^+ = \sup_{x > 0} \int_0^x \frac{\sin u}{\pi u} du = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\pi u} du \approx 0,545$$

y como  $\alpha = \beta = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{\pi u} du = \frac{1}{2}$ , esto muestra que efectivamente existen núcleos tales que  $\alpha^+ > \alpha$ ,  $\beta^+ > \beta$ .

Prosigamos ahora con nuestro razonamiento. Si  $Y(t)$  es la función de Heaveside ( $= 0$  para  $t < 0$ ,  $= 1$  para  $t > 0$ ), su aproximante será

$$Y_n(x) = \int_0^{\infty} k_n(t-x) dt = \int_{-x}^{\infty} k_n(t) dt.$$

Nuestro objeto es estudiar cómo se comporta la aproximante en un en-

torno del punto  $t=0$  de discontinuidad. Claro está que en virtud del teorema 2, para cada  $x$  fijo se cumple

$$Y_n(x) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{para } x > 0, \\ \beta & \text{" } x = 0, \\ 0 & \text{" } x < 0. \end{cases}$$

Sin embargo, por lo visto recientemente:

$$\sup_{\{x_n\} \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(x_n) = \alpha^+ + \beta = 1 + (\alpha^+ - \alpha).$$

Es decir, la onda aproximante se "escapa" fuera del segmento del salto de la función. Si al miembro derecho de la última relación lo llamamos  $Y^+(+0)$ , podemos escribir:

$$Y^+(+0) = Y(+0) + (\alpha^+ - \alpha) \geq Y(+0)$$

Este hecho es el que se denomina fenómeno de Gibbs, que nos proponemos ahora estudiar para cualquier función  $f(t)$ .

Antes que nada notemos que si  $f(t)$  es continua en un entorno del punto  $t=x$ , no se presenta allí el fenómeno de Gibbs. En efecto, si suponemos que se satisfacen las hipótesis de los teoremas 1 ó 2, hay convergencia uniforme en un entorno de  $x$ , y por lo tanto, si  $x_n \rightarrow x$ , se cumple

$$f_n(x_n) \rightarrow f(x).$$

Supongamos ahora que  $f(t)$  tenga una discontinuidad de primera especie en  $t=x$ , con salto positivo

$$\Gamma = f'(x) = f(x + 0) - f(x - 0) > 0$$

y sea continua en un entorno reducido de  $x$ .

La función

$$\Lambda(t) = Y(t-x) - \frac{1}{Q} f(t)$$

será continua en  $t = x$ , y en un entorno de él. Entonces, si llamamos, para toda  $f$ :

$$f^+(x+0) = \sup_{\{x_n\} \rightarrow x+0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n),$$

se tiene:

$$\Lambda^+(t+0) = \Lambda(t+0),$$

y en consecuencia:

$$1 + (\alpha^+ - \alpha) - \frac{1}{Q} f^+(x+0) = 1 - \frac{1}{Q} f(x+0),$$

de donde resulta:

$$f^+(x+0) = f(x+0) + \Gamma(\alpha^+ - \alpha)$$

Es decir, si  $\alpha^+ > \alpha$ , hay fenómeno de Gibbs.

Si fuese en cambio  $\Gamma < 0$ , y definimos:

$$f^-(x+0) = \inf_{\{x_n\} \rightarrow x+0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n),$$

y tenemos en cuenta que  $\sup \Gamma f = \Gamma \inf f$ , resulta también

$$f^-(x+0) = f(x+0) + \Gamma(\alpha^+ - \alpha)$$

Por eso, para simplificar la notación, escribamos

$$f^*(x) = \begin{cases} f^+ & \text{si } \sigma > 0, \\ f^- & \text{" } \sigma < 0. \end{cases}$$

y entonces, para cualquier salto:

$$f^*(x+0) = f(x+0) + \sigma (\alpha^+ - \alpha).$$

Es decir, en todos los casos, la aproximante se escapa fuera del segmento del salto de  $f(t)$ .

Se puede razonar en la misma forma para el semientorno a la izquierda, usando por ejemplo la función  $\gamma(-t)$ , y se llega a un resultado análogo:

$$f^*(x-0) = f(x-0) + \sigma (\beta^+ - \beta).$$

donde:

$$f^*(x-0) = \begin{cases} f^-(x-0) = \inf_{\{x_n\} \rightarrow x-0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) & \text{para } \sigma > 0, \\ f^+(x-0) = \sup_{\{x_n\} \rightarrow x-0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) & \text{para } \sigma < 0. \end{cases}$$

Como ya señalamos, para el núcleo de Dirichlet es  $\alpha^+ = \beta^+ > \alpha = \beta = \frac{1}{2}$ , y por consiguiente en la convergencia puntual de series de Fourier existe fenómeno de Gibbs <sup>(1)</sup>. En realidad, el núcleo que aparece es  $k_n(t) = \frac{\sin n t}{2 \pi \sin \frac{t}{2}}$ , pero conduce a los mismos resultados.

En cambio, en las convergencias Cesáro (C,1) y Abel de series de Fourier no se presenta el fenómeno, pues los núcleos correspondientes son positivos y entonces, como ya dijimos:  $\alpha^+ = \alpha$  y  $\beta^+ = \beta$ .

Otra cosa que podemos señalar es que para núcleos singulares débil-

(<sup>1</sup>): En Carslaw: Introduction to the theory of Fourier series and integrals, Cap II, puede apreciarse numerosas representaciones gráficas de la aproximación.

$$\sigma = f(x) = f(x+0) - f(x-0) > 0$$

y sea continua en un entorno reducido de  $x$ .

La función

$$\Lambda(t) = Y(t-x) - \frac{1}{\sigma} f(t)$$

será continua en  $t = x$ , y en un entorno de él. Entonces, si llamamos, para toda  $f$ :

$$f^+(x+0) = \sup_{\{x_n\} \rightarrow x+0} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n),$$

se tiene:

$$\Lambda^+(t+0) = \Lambda(t+0),$$

y en consecuencia:

$$1 + (\alpha^+ - \alpha) - \frac{1}{\sigma} f^+(x+0) = 1 - \frac{1}{\sigma} f(x+0),$$

de donde resulta:

$$f^+(x+0) = f(x+0) + \sigma(\alpha^+ - \alpha)$$

Es decir, si  $\alpha^+ > \alpha$ , hay fenómeno de Gibbs.

Si fuese en cambio  $\sigma < 0$ , y definimos:

$$f^-(x+0) = \inf_{\{x_n\} \rightarrow x+0} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n),$$

y tenemos en cuenta que  $\sup \sigma f = \sigma \inf f$ , resulta también

$$f^-(x+0) = f(x+0) + \sigma(\alpha^+ - \alpha)$$

Por eso, para simplificar la notación, escribamos

$$f^* = \begin{cases} f^+ & \text{si } \sigma > 0, \\ f^- & \text{" } \sigma < 0. \end{cases}$$

y entonces, para cualquier salto:

$$f^*(x+0) = f(x+0) + \sigma (\alpha^+ - \alpha).$$

Es decir, en todos los casos, la aproximante se escapa fuera del segmento del salto de  $f(t)$ .

Se puede razonar en la misma forma para el semientorno a la izquierda, usando por ejemplo la función  $Y(-t)$ , y se llega a un resultado análogo:

logo:

$$f^*(x-0) = f(x-0) + \sigma (\beta^+ - \beta).$$

donde:

$$f^*(x-0) = \begin{cases} f^-(x-0) = \inf_{\{x_n\} \rightarrow x-0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) & \text{para } \sigma > 0, \\ f^+(x-0) = \sup_{\{x_n\} \rightarrow x-0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) & \text{para } \sigma < 0. \end{cases}$$

Como ya señalamos, para el núcleo de Dirichlet es  $\alpha^+ = \beta^+ > \alpha = \beta = \frac{1}{2}$ , y por consiguiente en la convergencia puntual de series de Fourier existe fenómeno de Gibbs <sup>(1)</sup>. En realidad, el núcleo que aparece es  $k_n(t) = \frac{\sin n t}{2 \pi \sin \frac{t}{2}}$ , pero conduce a los mismos resultados.

En cambio, en las convergencias Cesáro (C,1) y Abel de series de Fourier no se presenta el fenómeno, pues los núcleos correspondientes son positivos y entonces, como ya dijimos:  $\alpha^+ = \alpha$  y  $\beta^+ = \beta$ .

Otra cosa que podemos señalar es que para núcleos singulares débil-

(<sup>1</sup>): En Carslaw: Introduction to the theory of Fourier series and integrals, Cap IX, puede apreciarse numerosas representaciones gráficas de la aproximación.

mente cuasi positivos que no sean cuasi positivos, siempre habrá fenómeno de Gibbs. Para los positivos no se producirá nunca, como ya dijimos. Y respecto a los cuasi positivos que no sean positivos, nada se puede afirmar en general.

— 0 —

## EJERCICIOS

- 1.- Hacer detalladamente las demostraciones de que los ejemplos indicados en § 3 son núcleos singulares, determinar sus características, y estudiar el fenómeno de Gibbs en cada caso.

----- o -----

- 2.- Si  $k_n$  y  $f$  verifican algunas de las hipótesis de los teoremas del § 2, entonces se cumple, salvo a lo sumo en  $x=a$  y  $x=b$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b k_n(t-x) f(t) dt = [\alpha f(x-0) + \beta f(x+0)] \Omega_{a,b}(x),$$

donde  $\Omega_{a,b}(x)$  es la función característica del intervalo  $a,b$ . ¿Qué sucede en  $a$  y  $b$  si  $f$  es continua? ¿Y si tiene una discontinuidad de primera especie?

----- o -----

- 3.- Si  $k_n(t)$  es un núcleo singular, determinar bajo qué condiciones  $-tk'_n(t)$  también lo es.

----- o -----

- 4.- Si  $k_n(t)$  es un núcleo singular por lo menos débilmente casi positivo, entonces su transformada de Fourier

$$(\mathcal{F} k_n)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} k_n(t) dt$$

converge puntualmente a la función  $g(x) \S 1$ .

Puede extenderse esta propiedad a cualquier núcleo singular?

Calcular también  $\mathcal{F}k_n$  en algunos casos particulares, y comparar sus propiedades de continuidad y derivabilidad, y la forma de tender a  $g(x)$  según el tipo de núcleo  $k_n$ .

5.- Sea  $h(t) \in L^\infty(-\infty, \infty)$ , y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n h(t) dt = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{-n}^0 h(t) dt = 1$ .  
Entonces, para toda  $f \in L^1$  se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(nt) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

En particular, con  $h(t) = 1 + \text{sen } t$ , se obtiene el lema de Riemann-Lebesgue.

6.- Sea  $h_n(t)$  una sucesión que cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l h_n(t) dt = 1,$$

para todo  $l \neq 0$  fijo. Entonces, llamando  $\sigma_f(x)$  al salto de  $f(t)$  en  $t = x$ , se verifica imponiendo a  $h_n$  y  $f$  condiciones análogas a las de los teoremas del § 2- :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n(x) f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(t-x) f(t) dt = \sigma_f(x).$$

En particular, si ese límite existe para todo  $x$ , debe ser nulo salvo a lo sumo en un conjunto numerable.

En lo que respecta al fenómeno que Gibbs, viene expresado por las fórmulas

$$\sigma^*(x+0) = (1 - \alpha^+) \sigma ; \quad \sigma^*(x-0) = (1 - \beta^+) \sigma .$$

utilizando notaciones análogas -pero no idénticas- a las del § 6.

Como ejemplo particular puede tomarse:

$$h_n(t) = 2n t e^{-nt^2}.$$

— o —

7.- Dado el sistema ortogonal  $\{\varphi_n(x)\}$ , se llama función de Lebesgue del sistema a :

$$L_n(x) = \int_E \left| \sum_{h=0}^n \varphi_h(x) \overline{\varphi_h(t)} \right| dt.$$

La acotación uniforme de  $L_n(x)$  equivale a la cuasi positividad del núcleo singular del sistema.

Calcular  $L_n(x)$  en casos particulares (por ej, cf. Ej. N<sup>o</sup> 8) y en especial para  $\varphi_h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ihx}$  ( $h = 0, \pm 1, \pm 2$ ) (Fourier), para el cual  $L_n(x)$  no está uniformemente acotada.

Se demuestra (Hardy-Rogosinski: Fourier series, § 4.13, o Zygmund, op. cit., Cap VIII, § 3, este último para el caso particular de Fourier que si para algún  $x$  se cumple  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} L_n(x) = +\infty$ , entonces existe una función continua cuya serie de Fourier  $\sum_{h=0}^{\infty} c_h \varphi_h(x)$  diverge en ese punto.

— o —

8.- En los ejemplos que damos a continuación de sistemas ortogonales, estudiar su completitud, normalizarlos, hallar los núcleos correspondientes y determinar sus propiedades, y estudiar el fenómeno de Gibbs. (Para algunos de ellos, cf.: Courant - Hlibert: Methoden der Mathematische Physik, Tomo 1, Cap II, §§ 8 y 9; hay traducción al inglés;

y Kaczmarz-Steinhaus: Theorie der Orthogonalreihen) .

a) Rademacher.

$$\varphi_h(x) = \text{sg} \text{ sen } (2^h \pi x), \quad h = 0, 1, 2, \dots$$

$E = (0, 1)$ . Resulta incompleto.

b) Subsistema de Fourier.

$$\varphi_h(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ sen } h x, \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

$E = (-\pi, \pi)$ . Resulta incompleto.

Ver a qué tiende  $f_n(x)$  y tratar de interpretar el resultado, usando el ejemplo siguiente d). Además, si fuera  $E = (0, \pi)$ , el sistema resultaría completo.

Para coseno en lugar de seno —y  $h = 0, 1, 2, \dots$ — valen las mismas afirmaciones.

c) Fourier (forma trigonométrica)

$$\varphi_h(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ sen } h x, \quad h = 1, 2, 3, \dots; \quad \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \quad \varphi_h(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ cos } h x, \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

$E = (-\pi, \pi)$ . Resulta completo.

d) Chebichev.

$$\varphi_0(x) = 1; \quad \varphi_h(x) = \frac{1}{2^{h-1}} \text{ cos}(h \text{ arc } \text{ cos } x), \quad h = 1, 2, 3, \dots$$

$E = (-1, 1)$ . Medida (cf. § 5.1):  $du(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$ .

e) Legendre.

$$\varphi_h(x) = \frac{d^h}{dx^h} (x^2 - 1)^h, \quad h = 0, 1, 2, \dots$$

$E = (-1, 1)$ . Resulta completo.

f) Hermite

$$\varphi_h(x) = (-1)^h e^{x^2} \frac{d^h}{dx^h} e^{-x^2}, \quad h = 0, 1, 2, \dots$$

$E = (-\infty, \infty)$ . Medida:  $du(x) = e^{-x^2} dx$ . Resulta completo.

g) Laguerre.

$$\varphi_h(x) = e^x \frac{d^h}{dx^h} (x^h e^{-x}), \quad h = 0, 1, 2, \dots$$

$E = (0, \infty)$ . Medida:  $du(x) = e^{-x} dx$ . Resulta completo.

h) Haar. (cf.: Math. Annalen, 69 Band, 1910).

$$\varphi_{h,k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < x < (2k-2)2^{-h}, \\ 2^{\frac{h-1}{2}} & \text{" } (2k-2)2^{-h} < x < (2k-1)2^{-h}, \\ -2^{\frac{h-1}{2}} & \text{" } (2k-1)2^{-h} < x < 2k \cdot 2^{-h}, \\ 0 & \text{" } 2k \cdot 2^{-h} < x < 1 \end{cases}$$

$h = 0, 1, 2, \dots$ ;  $k = 1, 2, \dots, 2^{h-1}$ ;  $E = (0, 1)$ . Resulta completo.

i) Bessel (Cf.: Bowman: Introd. to Bessel functions, §§ 17 a 19 y 97 a 100)

Sea  $J_n(x)$ ,  $n > -1$ , la función de Bessel de orden  $n$ , y  $\alpha_{ni}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  sus raíces positivas. Entónces:

$$\varphi_h(x) = J_n(\alpha_{nh} x), \quad h = 1, 2, 3, \dots; n \text{ fijo.}$$

$E = (0, 1)$ . Medida:  $du(x) = x dx$ .

j) Sucesiones

$$\varphi_h(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x = h \\ 0 & \text{" } x \neq h, \quad h = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$E = \{0, \infty\}$ . Medida discreta de masa  $p_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Resulta completo si y sólo si  $p_n \neq 0$  para todo  $n$ .

Mostrar que puede haber convergencia puntual, y no en norma.

— 0 —

9.- Sea  $E = (-\infty, \infty)$  la recta real, con medida concentrada  $p(x)$  en cada  $x$ . Entonces  $f \in L_{\mu}^2$  si y sólo si  $f(x) = 0$  salvo a lo sumo en un conjunto numerable  $x_i$ , y  $\sum |f(x_i)|^2 p(x_i) < \infty$ . Un sistema ortonormal (no numerable) es:

$$\varphi_{\alpha}(x) = \begin{cases} [p(x)]^{-\frac{1}{2}} & \text{si } x = \alpha \\ 0 & \text{si } x \neq \alpha, \alpha \text{ real.} \end{cases}$$

Entonces

$$k(t, x) = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x) \varphi_{\alpha}(t) = \frac{1}{p(\alpha)} \delta(t-x)$$

donde se suma sobre todos los  $\alpha$  reales, y  $\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$

La función  $k(t, x)$  es el valor límite del núcleo singular correspondiente, y se puede pasar al límite bajo el signo de integral:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, x) f(t) du(t).$$

Esta igualdad se cumple para cualquier  $f$  definida en la recta real, aunque no pertenezca a  $L_{\mu}^2$ .

Los coef. de Fourier de  $f$  son  $C_h = [p(h)]^{\frac{1}{2}} f(h)$ . El sistema es completo si y sólo si  $p(x) \neq 0$  para todo  $x$ .

— 0 —

## BIBLIOGRAFIA

Consignamos solamente alguna bibliografía sobre núcleos singulares no así sobre funciones ortogonales, tema que hemos tratado muy parcialmente.

- 1.- Natanson: Theorie der Funktionen einer Reellen Veränderlichen, Akademie-Verlag, Berlín, 1954, Cap X Este capítulo ha sido traducido al castellano por el CEFMYN.
- 2.- Lebesgue: Sur les intégrales singulières, Annales de Toulouse, 1, 1909, pág 25-117.
- 3.- Hobson: The theory of functions of a real variable, Cambridge, 2 ed, 1926, Tomo II, Cap VII.
- 4.- Hahn: Über die Darstellung gegebener Funktionen dierch Singuläre Integrale, Sitzungsberichte der Math.- Naturwiss. Klasse der Akad. de Wiss. zu Wien, Band 93, 1916.

INDICE

	pág.
Advertencia	
§ 0. <u>Nociones previas</u>	1
§ 1. <u>Generalidades</u>	7
§ 2. <u>Teoremas fundamentales</u>	11
1. Sobre la convergencia débil	11
2. Núcleos singulares cuasi positivos	21
3. Núcleos singulares débilmente cuasi positivos	25
4. Convergencia en casi todo punto	30
§ 3. <u>Ejemplos</u>	34
1. Barrow	34
2. Weierstrass	34
3. Poisson del semiplano superior	35
4. Poisson del círculo	35
5. Stieltjes	36
6. Dirichlet	37
7. Fejer	38
8. Núcleos tipo Fejer o Bochner	38
9. Núcleo sing. para el cual no existen $\alpha$ y $\beta$ .	39
10. Núcleo sing. que no es débil. cuasi positivo	40
11. Núcleo sing. cuasi positivo que no es positivo	40
12. Núcleo singular cuasi posit. con $k_n(\rho)$ que $\rightarrow \infty$ .	41
§ 4. <u>Aplicaciones diversas</u>	42
1. Teorema de aproximación de Weierstrass	42
2. Ecuaciones en derivadas parciales	43
3. Derivadas generalizadas	48
§ 5. <u>Desarrollo en serie de funciones ortogonales</u>	51
1. Planteamiento del problema	51
2. Convergencia puntual	56
3. Convergencia Cesáreo	59
4. Convergencia Abel	62
5. Convergencia en norma	64

§6. Fenómeno de Gibbs

70

Ejercicios

76

Bibliografía

82

Índice

83-84