ISSN 1853-709X

Fascículo 9

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

Guido Weiss

Análisis armónico en varias variables – Teoría de los espacios HP

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 9

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

[redacted]CULO **9** cursos y seminarios de matemática

Guido Weiss

ANALISIS ARMONICO EN VARIAS VARIABLES. TEORIA DE LOS ESPACIOS HP

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES — DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

1960

PREFACIO

En este curso solamente trataremos un aspecto de la teoría del análisis harmónico de varias variables . La idea esencial que seguiremos consiste en generalizar a n - dimensiones la bien conocida conexión existente en dos dimensiones entre la teoría de las funciones analíticas y la de la transformada de Fourier .

Los conocimientos que presupondremos del lector se reducen al material generalmente presentado en un curso de funciones analíticas y otro sobre la integral de Lebesgue . Sin embargo, alguna familiaridad con la teoría de series y transformadas de Fourier sería útil para la comprensión general del curso.

El primer capítulo de este fascículo ha sido redactado en base a parte del material de un curso dictado por el profesor E. M. Stein en la Universidad de Chicago, y en verdad nos sería muy difícil indicar cualquier parte que, de alguna manera u otra, no haya sido influenciada por él, razón por la cual el autor se complace en expresarle su reconocimiento.

Asimismo, el autor agradece a los profesores Cora Ratto de Sadosky y Mischa Cotlar y a los señores J. C. Merlo y E. Oklander por su ayuda en distintos aspectos, ya sea puramente matemáticos, o de caracter idiomático.

I.- LA TRANSFORMACION DE FOURIER

§1.- DEFINICIONES Y EL TEOREMA DE RIEMANN - LEBESGUE .

E_n denotará el espacio real de Euclides . $X, Y, Z, \ldots$ denotarán puntos de E_n y escribiremos $X = (x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$, etc. Pondremos $|X|^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$ y $dX = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$. El producto escalar de X por Y se define mediante la expresión:

$$X . Y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

En particular, $|X|^2 = X . X$.

$L^p = L^p(E_n)$, para $1 \leq p \leq \infty$, es el espacio de todas las funciones medibles (reales) definidas en E_n tal que:

$$||f||_p = \left(\int_{E_n} |f|^p\, dx\right)^{1/p} < \infty \quad .$$

Los espacios L^p más importantes son los que corresponden a $p = 1$ y $p = 2$. C_0^∞ designará el espacio de las funciones que son infinitamente diferenciables con soporte compacto. Es fácil mostrar que C_0^∞ es denso en L^p para $1 \leq p < \infty$.

Definición :
Si $f(X)$ está en L^1 su transformada de Fourier es la función:

$$T(f) = \hat{f}(Y) = \int_{E_n} e^{iX.Y} f(X)\, dX \quad .$$

Son básicas en la teoría de la transformación de Fourier las dos propiedades siguientes:

a) La correspondencia $f \to T(f)$ es lineal ;
b) $\hat{f}(Y)$ es uniformemente contínua .

Demostración :
a) es evidente. Demostraremos b) :
Pongamos $H = (h_1 , h_2, \ldots , h_n)$, entonces:

$$\hat{f}(Y+H) - \hat{f}(Y) = \int_{E_n} (e^{iX.H} - 1)\, e^{iX.Y} f(X)dX = \int_{|X| \leq R} + \int_{|X| > R}$$

(Observemos que es inmediato que la función $\hat{f}(Y)$ es continua: porque el factor : $(e^{iX.H} - 1)$ tiende a cero, para H tendiendo a cero, luego, usando el teorema de Lebesgue sobre la convergencia mayorada, resulta que:

$$\int_{E_n} (e^{iX.H} - 1)\, e^{iX.Y} f(X)\, dX \to 0 \quad , \quad \text{para} \quad H \to 0 \quad)$$

Tomemos un R suficientemente grande como para que $\int_{|X|>R} < \varepsilon$. Fijado así el valor de R elegimos $|H|$ tan pequeña como para que $(e^{iX.H} - 1)$ sea tan pequeña como deseamos cuando $|X| \leq R$. Entonces $|\hat{f}(Y+H) - \hat{f}(Y)|$ es menor que ε'. Como esta elección es independiente de Y , $\hat{f}$ es uniformemente continua.

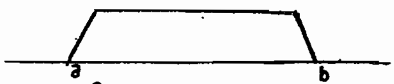
E j e m p l o s :

(1) Sea $n = 1$, $f(x) = \chi_{(a,b)}(x)$ = la función característica del intervalo finito (a,b) . Entonces :

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \chi_{(a,b)}(x)\, dx = \int_a^b e^{ixy}\, dx = \frac{e^{iby} - e^{iay}}{iy}$$

O b s e r v a c i ó n : En este caso $\hat{f}(y)$ no es integrable, pero $|\hat{f}(y)|^p$, para $p > 1$, es integrable

(2) Si f es una función trapezoidal (es decir, cuya gráfica tiene la siguiente forma:



) , entonces, un cálculo fácil prueba que $F(y) = O(1/y^2)$ para $y \to \infty$.

(3) Ahora vamos a considerar el caso de n dimensiones. Calcularemos la transformada de Fourier de $\chi_I(X) = \chi_{(a_1,b_1)}(x_1)\chi_{(a_2,b_2)}(x_2) \dots \chi_{(a_n,b_n)}(x_n)$. Podemos hacer esto usando el ejemplo (1) y el siguiente hecho facilmente demostrable:

<u>Si es</u> $f(X) = f_1(x_1)\, f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$, <u>donde</u> $f_i \in L^1(E_1)$, $i = 1,2,..n$ <u>entonces, designando con</u> T_n <u>la transformada de Fourier en</u> n <u>dimensiones, resulta:</u>

$$T_n(f) = \hat{f}(Y) = \hat{f}_1(y_1)\, \hat{f}_2(y_2) \dots \hat{f}_n(y_n)$$

donde $\hat{f}_i(y_i) = T_1(f_i)$, $i = 1,2, \dots n$ (este hecho es una consecuencia del teorema de Fubini) .

Luego, vemos que $\hat{f}(Y) = T(\chi_I) \to 0$ cuando $|Y| \to \infty$.

T e o r e m a (1.1) (Riemann - Lebesgue) :

<u>Si</u> $f \in L^1(E_n)$ <u>entonces</u> $\hat{f}(Y) \to 0$ <u>cuando</u> $|Y| \to \infty$.

D e m o s t r a c i ó n :

El teorema es cierto para funciones escalera (eso es, combinaciones lineales finitas de funciones χ_I) - en virtud del último ejemplo.

Ahora, dado $\varepsilon > 0$, y $f \in L^1(E_n)$, hay una función escalera f_ε tal que $||f - f_\varepsilon||_1 < \varepsilon$. Entonces,

$$|\hat{f}(Y)| = \left|\int_{E_n} e^{iX.Y} f(X)\, dX\right| \leq \left|\int_{E_n} e^{iX.Y} (f(X) - f_\varepsilon(X))\, dX\right| + \left|\int_{E_n} e^{iX.Y} f_\varepsilon(X)\, dX\right| \leq$$

$$\leq \int_{E_n} 1 \, . \, |f(X) - f_\varepsilon(X)|\, dX + |\hat{f}_\varepsilon(Y)| < \varepsilon + |\hat{f}_\varepsilon(Y)| \, ,$$

donde $\hat{f}_\varepsilon$ es la transformada de Fourier de f_ε . Puesto que el teorema es cierto para las funciones escalera, para $|Y|$ bastante grande, $|\hat{f}_\varepsilon(Y)| < \varepsilon$. Luego $|\hat{f}(Y)| < 2\varepsilon$ para Y suficientemente grande.

§2.- C O N V O L U C I O N :

D e f i n i c i ó n :

Si f y g están en $L^1(E_n)$, la c o n v o l u c i ó n de f y g, $f * g = h$, es la función:

$$h(X) = \int_{E_n} f(X - Y)\, g(Y)\, dY \, .$$

Al menos formalmente, sigue de un cambio de variables que $f * g = g * f$.

El lema siguiente muestra que la operación de convolución es bien definida en $L^1(E_n)$ y, tambien, se puede usarlo para justificar su conmutatividad:

L e m a (2.1) :

<u>Si</u> f <u>y</u> g <u>están en</u> $L^1(E_n)$ <u>entonces, para casi todos los</u> X , <u>la integral</u>

$$h(X) = \int_{E_n} f(X - Y)\, g(Y)\, dY$$

<u>converge absolutamente. Además,</u> $h \in L^1(E_n)$ <u>y verifica la desigualdad:</u>

$$||h||_1 \leq ||f||_1 \, . \, ||g||_1$$

D e m o s t r a c i ó n :

Recordemos que si f y g son medibles en E_n entonces $f(X - Y)$, como función en $E_n \times E_n$, es una función medible, y; también lo es $g(Y)$. Esto justificará el uso que haremos a continuación del teorema de Fubini .

Tenemos: $$|h(X)| \leqslant \int_{E_n} |f(X-Y)| \,.\, |g(Y)| \, dY \quad .$$

Luego:
$$\int_{E_n} |h(X)| \, dX \leq \int_{E_n} \left\{ \int_{E_n} |f(X-Y)| \,.\, |g(Y)| \, dY \right\} dX =$$

$$= \int_{E_n} |g(Y)| \left\{ \int_{E_n} |f(X-Y)| \, dX \right\} dY = ||f||_1 . ||g||_1 \quad .$$

T e o r e m a (2.2) :

Sean f y g de $L^1(E_n)$, $\hat{f} = T(f)$ y $\hat{g} = T(g)$ sus transformadas de Fourier . También, sean $h = f * g$, y $\hat{h} = T(h)$ la transformada de Fourier de h. Entonces:

$$\hat{h}(Y) = \hat{f}(Y) \,.\, \hat{g}(Y) \quad .$$

D e m o s t r a c i ó n :

Tenemos,

$$\hat{h}(Y) = \int_{E_n} e^{iX.Y} \left\{ \int_{E_n} f(X-Z) \, g(Z) \, dZ \right\} dX =$$

$$= \int_{E_n} e^{i(X-Z).Y} \, e^{iZ.Y} \left\{ \int_{E_n} f(X-Z) \, g(Z) \, dZ \right\} dX =$$

$$= \int_{E_n} e^{iZ.Y} g(Z) \left\{ \int_{E_n} e^{i(X-Z).Y} f(X-Z) \, dX \right\} dZ = \hat{f}\,(y) \,.\, \hat{g}\,(y) \quad .$$

L e m a (2.3)

Supongamos que $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, y que $k \in L^1(E_n)$. Entonces, la integral:

$$h(X) = \int_{E_n} f(X-Y) \, k(Y) \, dY$$

converge absolutamente para casi todo X . Además, $h \in L^p(E_n)$ y verifica:

$$||h||_p \leqslant ||f||_p \, ||k||_1 \quad .$$

D e m o s t r a c i ó n :

Podemos suponer que $||k||_1 = 1$. Sea q el número conjugado de p ; esto es, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces:

$$|h(X)| \leq \int_{E_n} |f(X-Y)| \, . \, |k(Y)| \, dY = \int_{E_n} |f(X-Y)| \, . \, |k(Y)|^{1/p} \, |k(Y)|^{1/q} \, dY \leq$$

$$\leq \left(\int_{E_n} |f(X-Y)|^p \, |k(Y)| \, dY \right)^{1/p} ,$$

usando la desigualdad de Hölder y el hecho de que $||k||_1 = 1$. Luego:

$$|h(X)|^p \leq \int_{E_n} |f(X-Y)|^p \, |k(Y)| \, dY$$

Integrando en X e invirtiendo el orden la integración obtenemos:

$$\left(\int_{E_n} |h(X)|^p \, dX \right)^{1/p} \leq ||f||_p . ||k|| .$$

O b s e r v a c i o n e s :

(1) Sea τ_H , $H = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, un operador que transforma la función $f(X)$ en la función $f(X+H)$. Este operador se llama el o p e r a d o r d e t r a s l a c i ó n (por H), o, simplemente, traslación por H . Si $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, y $k \in L^1$, sea K la transformación definida por la convolución:

$$(*) \qquad K(f) = f * k .$$

Es fácil mostrar que $\tau_H K = K \tau_H$ para cada H ; esto es, K y τ_H conmutan para cada $H \in E_n$. En un sentido general - y con ciertas hipótesis suplementarias que no detallaremos aquí - la recíproca es también cierta: si K es un operador en L^p que conmuta con todas las traslaciones, entonces K es un operador de "convolución" .

(2) Sea $||K||_p$ la norma del operador K , definido por la convolución (*) , y que opera en $L^p(E_n)$. El lema (2.3) dice, en particular, que

$$||K||_p \leq ||k||_1$$

Una pregunta natural, entonces, es la siguiente: ¿Cuál es la norma de K , $||K||_p$, en términos de k ? Si $p = 1$, es fácil mostrar que $||K||_1 = ||k||_1$ (para mostrar esta igualdad nos basta mostrar que para cada $\varepsilon > 0$, hay una función f_ε , con $||f_\varepsilon||_1 = 1$, tal que $||K(f_\varepsilon)||_1 + \varepsilon \geq ||k||_1$ - esto se puede hacer facilmente eligiendo como función f_ε una aproximación de la función δ). Una respuesta satisfactoria, en el caso general, no es conocida.

§3.- P R O P I E D A D E S D E I N V A R I A N C I A Y S I M E T R I A D E L A T R A N S F O R M A D A D E F O U R I E R .

Salvo advertencia en contrario supondremos que $f \in L^1(E_n)$.

Los hechos básicos siguientes se verifican con un simple cambio de variables :

(3.1) Si $\hat{f} = T(f)$ entonces $e^{-i\, Y.H}\, \hat{f}(Y) = T(f(X+H))$.

Tenemos, también, el resultado dual:

(3.1') Si $\hat{f} = T(f)$ entonces $\hat{f}(Y+H) = T(e^{i\, X.H}\, f(X))$

T e o r e m a (3.2) :

Supongamos que $f \in L^1(E_n)$ y, también, que $x_k\, f(X) \in L^1(E_n)$, donde x_k es la k - ima coordenada de X . Entonces, $\hat{f}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \hat{f}(Y) = T(f)$ es diferenciable en y_k y

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial y_k} = T(i x_k\, f(X)) \quad .$$

D e m o s t r a c i ó n :

Por (3.1') tenemos:

$$\frac{\hat{f}(y_1, \ldots, y_k+h_k, \ldots, y_n) - \hat{f}(y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n)}{h_k} =$$

$$= T\left(\left(\frac{e^{i x_k h_k} - 1}{h_k} \right) f(X) \right) = \int_{E_n} e^{i\, X.Y} \left(\frac{e^{i x_k h_k} - 1}{h_k} \right) f(X)\, dX \quad .$$

El teorema resulta de una aplicación del teorema de Lebesgue sobre la convergencia mayorada .

D e f i n i c i ó n :

Una función f de $L^1(E_n)$ tiene una d e r i v a d a p a r c i a l r e s p e c t o d e x_k (= k - ima coordenada de X) e n e l s e n t i d o d e l a n o r m a d e $L^1(E_n)$ si hay una función $g \in L^1(E_n)$ tal que:

$$\left|\left| \frac{f(x_1, \ldots, x_k+h_k, \ldots, x_n) - f(X)}{h_k} - g(X) \right|\right|_1 \to 0$$

cuando $h_k \to 0$.

T e o r e m a (3.3) :

Supongamos que $f(X) \in L^1(E_n)$ tiene una derivada parcial g respecto de x_k en el sentido de la norma de $L^1(E_n)$. Si $\hat{f}(Y) = T(f)$ y $\hat{g}(Y) = T(g)$, entonces:

$$\hat{g}(Y) = -i\, y_k\, \hat{f}(Y) \quad .$$

D e m o s t r a c i ó n :

Usando (3.1) obtenemos, poniendo $H = (0, \ldots, h_k, \ldots, 0)$,

$$\left|\left(\frac{e^{-i\,Y.H}-1}{h_k}\right)\hat{f}(Y) - \hat{g}(Y)\right| = \left| T\left\{\frac{f(X+H)-f(X)}{h_k} - g(X)\right\}\right| \leq$$

$$\leq \left\|\frac{f(X+H)-f(Y)}{h_k} - g(x)\right\|_1 \rightarrow 0$$

cuando $h_k \rightarrow 0$. Ahora el Teorema se deduce facilmente.

Necesitaremos el lema siguiente para obtener algunos resultados que nos darán un mejor conocimiento del concepto de la derivada en el sentido de la norma de L^1 (ver más abajo, teorema (3.5)). Además, como se verá mas adelante, este lema es un resultado básico para las funciones de L^p , $1 \leq p \leq \infty$.

L e m a (3.4) :

<u>Si</u> $f(x) \in L^p(E_n)$, $1 \leq p < \infty$, y $H = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, <u>entonces:</u>

$$\|f(X+H) - f(X)\|_p \rightarrow 0 \qquad \text{cuando} \quad |H| \rightarrow 0 \; .$$

D e m o s t r a c i ó n :

Es claro que $\int_{E_n} |g(X+H) - g(X)|^p \, dX \rightarrow 0$ cuando $|H| \rightarrow 0$ si g es contínua y nula fuera de un conjunto compacto. Luego, si escribimos $f = f_1 + f_2$, donde f_1 es contínua y nula fuera de un conjunto compacto y $\|f_2\|_p < \varepsilon/3$, tenemos:

$$\|f(X+H) - f(X)\|_p \leq \|f_1(X+H) - f_1(X)\|_p + \|f_2(X+H)\|_p + \|f_2(X)\|_p \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \; .$$

si $|H|$ es suficientemente pequeño.

En caso que la dimensión n es 1 decimos que $f(x) \in L^1(-\infty, \infty)$ verifica la c o n d i c i ó n C si f es absolutamente contínua localmente (esto es, en cada intervalo finito coincide con una función absolutamente contínua) y $f'(x) \in L^1(-\infty, \infty)$ ó f coincide con una función similar p.p. Este conjunto es el mismo que el conjunto de las funciones $f \in L^1$ que coinciden p.p. con funciones absolutamente contínuas con derivadas en L^1 .

T e o r e m a (3.5) :

<u>El conjunto de las funciones que verifican la condición</u> C <u>coincide con el de las funciones que tienen una derivada en el sentido de la norma de</u> $L^1(E_n)$.

D e m o s t r a c i ó n :

Es claro que si las dos derivadas existen son iguales p.p.

Mostraremos que, si f verifica la condición C , entonces tiene una derivada en el sentido de la norma de $L^1(E_n)$. Tenemos:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) = \frac{1}{h}\left(\int_0^h f'(x+t)\,dt\right) - f'(x) =$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h \left(f'(x+t) - f'(x)\right) dt = \Delta_h(x)$$

Tenemos que mostrar, entonces, que $\int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_h(x)|\,dx \to 0$ cuando $h \to 0$. Usando el lema (3.4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_h(x)|\,dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{h}\left\{\int_0^h |f'(x+t) - f'(x)|\,dt\right\} dx =$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x+t) - f'(x)|\,dx\right\} dt \to 0 \quad \text{cuando} \quad h \to 0 .$$

Ahora demostraremos la implicación inversa.

Puesto que existe una función $g \in L^1(-\infty, \infty)$ tal que:

$$\left|\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)\right|\right|_1 \to 0 \quad \text{cuando} \quad h \to 0 ,$$

tenemos:

$$\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,dx \to \int_a^b g(x)\,dx .$$

Pero, para casi todas las a :

$$\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,dx = \frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,dx \to f(b) - f(a),$$

para casi todas las b , cuando $h \to 0$. Entonces, para casi todas las a:

$$\int_a^b g(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

para casi todas las b . Esto prueba que f es igual p.p. a una función absolutamente contínua para cada intervalo finito y la derivada de esta función es igual a $g(x)$ p.p.

O b s e r v a c i o n e s : Los teoremas y los ejemplos anteriores ilustran el siguiente principio eurístico: Si $f(X)$ es "pequeña" cerca de ∞ entonces $\hat{f}(Y)$ es "lisa". Recíprocamente, si $f(X)$ es "lisa" entonces $\hat{f}(Y)$ es "pequeña" cerca de ∞ . Otros ejemplos que ilustran este principio son los siguientes:

a) las funciones $\dfrac{1}{1+x^2}$ y $e^{-|x|}$ son, salvo una constante multiplicativa, transformadas de Fourier de ellas mismas;

b) e^{-x^2} es la transformada de Fourier de si misma (también en este caso, salvo una constante multiplicativa - ver teorema (5.3)

Sea L una transformación lineal (homogénea y aditiva) de E_n sobre E_n. Sea (a_{ij}) la matriz de L respecto de la base $(1,0,\ldots,0)$, ..., $(0,\ldots,0,1)$. Visto que L es "sobre", $\det(a_{ij}) \neq 0$. Usaremos la siguiente notación: $Z = L(X)$ y $z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, $i = 1,\ldots,n$; $\det(L) = \det(a_{ij})$.

Ahora, supongamos que $f(X) \in L^1(E_n)$, $\hat{f}(Y) = T(f)$. Sea $g(X) = f(L(X))$. Entonces $g \in L^1(E_n)$, luego, $\hat{g}(Y) = T(g)$ está bien definida. Una pregunta natural es ¿cómo está relacionada $\hat{g}(Y)$ con $\hat{f}(Y)$? Esta pregunta tiene una respuesta completa: Sea L^* la transpuesta (= adjunta) de L. Entonces, se llama c o n - t r a g r e d i e n t e de L a la transformación

$$\tilde{L} = (L^*)^{-1}$$

Tenemos así:

T e o r e m a (3.6) :

$$\hat{g}(Y) = |\det(L)|^{-1}\,\hat{f}(\tilde{L}\,Y)$$

(un caso especialmente importante es aquél en que L es una transformación ortogonal. Entonces $\det(L) = \det(a_{ij}) = 1$ y $\tilde{L} = L$)

D e m o s t r a c i ó n :

Tenemos:

$$\hat{g}(Y) = \int_{E_n} e^{iX.Y} g(x)\,dX = \int_{E_n} e^{iX.Y} f(LX)\,dx = |\det(L)|^{-1}\int_{E_n} e^{iL^{-1}(Z).Y} f(Z)\,dZ =$$

$$= |\det(L)|^{-1}\int_{E_n} e^{iZ.(L^{-1})^* Y} f(X)\,dZ \quad .$$

Puesto que $(L^*)^{-1} = (L^{-1})^*$ el teorema está probado.

Ahora desarrollaremos unas consecuencias importantes de este teorema:

C o r o l a r i o (3.7)

<u>Supongamos que</u> $L : X \to \alpha X$, $\alpha \neq 0$, α = <u>numero</u> <u>real</u>. <u>Si</u> $\hat{f}(Y) = T(f)$, <u>entonces</u>:

$$T(f(\alpha X)) = |\alpha|^{-n}\,\hat{f}(y/\alpha) \quad .$$

<u>En particular</u> , $$T(f(-X)) = \hat{f}(-Y)$$

C o r o l a r i o (3.8) :

<u>Si L es una transformación lineal ortogonal entonces</u> $T(f(LX)) = \hat{f}(LY)$. <u>Esto es, trasformaciones lineales ortogonales conmutan con la transformación de Fourier.</u>

D e f i n i c i ó n :

Una función f definida en E_n se llama f u n c i ó n r a d i a l si existe una función $f_o(r)$, definida para $0 \leqslant r < \infty$ tal que:

$$f(X) = f_o(|X|) .$$

C o r o l a r i o (3.9) :

<u>La transformada de Fourier de una función radial es una función radial.</u>

D e m o s t r a c i ó n :

Esta es una consecuencia inmediata del corolario anterior, observando que una función es radial si y sólo si es invariante respecto de todas las transformaciones ortogonales.

E j e m p l o :

Si $n = 1$ entonces $f(x)$ es radial si y sólo si es una función par. Ahora, supongamos que $f(x)$ es una función arbitraria de $L^1(-\infty,\infty)$. Escribimos

$$f(x) = f_e(x) + f_o(x)$$

donde $f_e(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ es la parte par de $f(x)$ y $f_o(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ es la parte impar de $f(x)$

Entonces: $\hat{f}(y) = T(f) = T(f_e) + T(f_o) = \hat{f}_e(y) + \hat{f}_o(y)$

Pero, $\hat{f}_e(y)$, por el corolario (3.9) es par, mientrar $\hat{f}_o(y)$ es impar (en general, la transformada de Fourier de una función impar es una función impar - esta es una consécuencia inmediata del caso particular del corolario (3.7) .

Despues, cuando probemos que T es un operador biunívoco de L^2 sobre L^2 , habremos mostrado que L^2 se descompone en dos conjuntos, cada uno de los cuales es invariante con respecto a T .

§4.- F U N C I O N E S D E B E S S E L .

Consideremos, para cada r fijado, la función $e^{irsen\theta}$. Entonces, la serie de Fourier

$$e^{ir\,sen\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r)\, e^{in\theta}$$

es convergente. Los coeficientes:

$$\mathcal{J}_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir\,\text{sen}\theta}\, e^{-in\theta}\, d\theta ,$$

que son funciones de r, se llaman funciones de Bessel de orden entero.

Supongamos que la dimensión n es 2. Introducimos coordenadas polares:

$$X = (x_1, x_2) = (r, \theta), \quad \text{donde} \quad x_1 = r\cos\theta \quad y \quad x_2 = r\,\text{sen}\theta$$

$$Y = (y_1, y_2) = (\rho, \phi), \quad \text{donde} \quad y_1 = \rho\cos\phi \quad y \quad y_2 = \rho\,\text{sen}\phi$$

Fijemos un entero n y escribamos

$$f(X) = f(x_1,x_2) = f_n(r)\, e^{in\theta}.$$

(observamos que para que f sea medible es necesario y suficiente que f_n sea medible). Puesto que $dX = dx_1\, dx_2 = r\, dr\, d\theta$ tenemos:

$$\int_{E_2} |f(x_1,x_2)|\, dx_1\, dx_2 = 2\pi \int_0^{\infty} |f_n(r)|\, r\, dr .$$

Teorema (4.1) :

Supongamos que $f(X) = f_n(r)\, e^{in\theta}$ está en $L^1(E_2)$ y que $\hat{f}(Y) = T(f)$ es su transformada de Fourier. Entonces:

$$\hat{f}(Y) = \tilde{f}_n(\rho)\, e^{in\phi}$$

donde:

$$\tilde{f}_n(\rho) = 2\pi\, (i)^{-n} \int_0^{\infty} \mathcal{J}_{-n}(r\rho)\, f_n(r)\, r\, dr .$$

(la última integral se llama la transformada de Fourier - Bessel de f_n)

Demostración :

Primero observamos que no es difícil mostrar que $\hat{f}(Y)$ tiene la forma $\tilde{f}_n(\rho)\, e^{in\phi}$ donde $\tilde{f}_n(\rho)$ es justamente una función de ρ. Porque, si L es una rotación en un ángulo ψ, vemos por el corolario (3.8) que la transformada de Fourier de $f_n(r)\, e^{in\theta}\, e^{in\psi}$ es $\hat{f}(\rho, \phi+\psi)$. Por otra parte, tiene que ser, también, $e^{in\psi}\hat{f}(\rho,\phi)$ porque T es lineal. Entonces, si $\phi = 0$ y ψ es arbitrario, tenemos:

$$\hat{f}(\rho, \psi) = \hat{f}(\rho, 0)\, e^{in\psi}$$

La fórmula del teorema se deduce entonces así :

$$\hat{f}(Y) = \int_{E_2} e^{iX.Y} f(X)\, dX = \int_0^\infty f_n(r)\, r \left\{ \int_0^{2\pi} e^{ir\rho\cos(\theta-\emptyset)}\, e^{in\theta}\, d\theta \right\} dr$$

Pero:
$$\int_0^{2\pi} e^{ir\rho\cos(\theta-\emptyset)}\, e^{in\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} e^{ir\rho\cos\psi}\, e^{(in\psi+in\emptyset)}\, d\psi =$$

$$= e^{in\emptyset} \int_0^{2\pi} e^{ir\rho\cos\psi}\, e^{in\psi}\, d\psi = e^{in\emptyset} \int_0^{2\pi} e^{ir\rho\,\mathrm{sen}\,\theta}\, e^{-in\pi/2}\, e^{in\theta}\, d\theta =$$

$$= (i)^{-n}\, e^{in\emptyset}\, J_{-n}(r\rho).2\pi \quad .$$

Con este teorema se puede obtener una fórmula general para la transformada de Fourier de una función de dos variables. Bosquejemos el método formalmente sin preocuparnos de la convergencia de las series que aparecerán. Primero, desarrollamos $f(X) = f(r,\theta)$ en una serie de Fourier para cada $r \geq 0$ fijado

$$(*) \qquad f(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r)\, e^{in\theta}$$

Entonces,

$$T(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_n(\rho)\, e^{in\emptyset}$$

donde $\tilde{f}_n$ está dado por la expresión del teorema (4.1) . La transformada de Fourier entonces, preserva la descomposición en suma directa de f en $(*)$.

§5.- FORMULA DE INVERSIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

Planteamos el problema siguiente: ¿ Si $f(X) \in L^1(E_n)$ y $\hat{f}(Y) = \int_{E_n} e^{iX.Y} f(X)dX$ es su transformada de Fourier , cómo se vuelve a obtener $f(X)$ de $\hat{f}(Y)$? Si tratamos de establecer una analogía con las series de Fourier , nos vemos conducidos hacia la relación:

$$(*) \qquad f(X) \sim \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \hat{f}(Y)\, e^{-iY.X}\, dY \quad .$$

Por lo común, sin embargo, $\hat{f}(Y)$ no está en $L^1(E_n)$ (ver el primer ejemplo de §1) Entonces $(*)$ no tiene siempre un significado en el sentido ordinario de la integral de Lebesgue. Luego, consideraremos ciertos métodos de sumabilidad que darán un sentido preciso a $(*)$. Empezamos introduciendo la s u m a b i l i d a d A b e l .

Supongamos que $a(t)$, $t \geq 0$, es una función medible y localmente integrable - luego, $\int_0^\infty a(t)\, dt$ no existe necesariamente.

Definición :

Las sumas parciales de $\int_0^\infty a(t)\,dt$ son las integrales:

$$s_\rho = \int_0^\rho a(t)\,dt \quad .$$

Entonces, decimos que la integral convege al límite ℓ si: $\lim_{\rho\to\infty} s_\rho = \ell$.

La motivación que obtenemos a partir del caso de las series de Fourier se puede bosquejar de este modo:

Si:	$a(t)$	se reemplaza por	a_n
	$\int_0^\infty \lvert a(t)\rvert dt < \infty$	" " "	$\sum_{n=0}^{\infty} \lvert a_n\rvert < \infty$
	$s_\rho = \int_0^\rho a(t)dt$	" " "	$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$

entonces, es natural hacer corresponder

$$A_\delta = \int_0^\infty a(t)\, e^{-t\delta}\, dt \quad , \quad \delta > 0 \quad a \quad a_r = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \quad , \quad 0 < r < 1$$

(la integral A_δ tiene el significado $\lim_{N\to\infty} \int_0^N$)

A_δ y a_δ se llaman las medias Abel . Vemos que:

$e^{-\delta}$	corresponde a	r
$\lim_{\delta\to 0} A_\delta$	" " "	$\lim_{r\to 1} a_r$

Definición :

Si $\lim_{\delta\to 0} A_\delta = \lim_{\delta\to 0} \int_0^\infty a(t)\, e^{-t\delta}\, dt$ existe, decimos que $\int_0^\infty a(t)\,dt$ es sumable en el sentido de Abel (ó simplemente, sumable Abel) a $\lim_{\delta\to 0} A_\delta$.

Teorema (5.1)

Supongamos que $a(t)$ es integrable localmente y que

$$\lim_{\rho\to\infty} s_\rho = \lim_{\rho\to\infty} \int_0^\rho a(t)\,dt = \ell$$

existe.

Entonces:

$$\lim_{\delta\to 0} A_\delta = \lim_{\delta\to 0} \int_0^\infty e^{-t\delta}\, a(t)\,dt = \ell$$

D e m o s t r a c i ó n :

Primero mostraremos que:

$$\int_0^\infty e^{-t\delta} a(t)\, dt \quad (= \lim_{N\to\infty}\int_0^\infty) \quad = \quad \delta\int_0^\infty e^{-\delta t} s_t\, dt \quad (= \delta \lim_{N\to\infty} \int_0^N)$$

En efecto:

$$\int_0^N e^{-t\delta} a(t)\, dt = e^{-t\delta} s_t \Big|_0^N + \delta\int_0^N e^{-\delta t} s_t\, dt \longrightarrow \delta\int_0^\infty e^{-\delta t} s_t\, dt$$

cuando $N \to \infty$.

Observamos que esto prueba que $\int_0^\infty e^{-t\delta} a(t)\, dt$, en el sentido antedicho, existe.

Ahora tenemos que mostrar que $\delta\int_0^\infty e^{-\delta t} s_t\, dt \to \ell$ cuando $\delta \to 0$. Puesto que:

$$\delta\int_0 e^{-\delta t}\, dt = 1 ,$$

esto es equivalente al hecho:

$$\delta\int_0^\infty e^{- t} (s_t - \ell)\, dt \to 0 \quad \text{cuando} \quad \delta \to 0 .$$

Pero:

$$\delta\int_0^\infty e^{-\delta t} (s_t - \ell)\, dt = \delta\int_0^N e^{-\delta t}(s_t - \ell)\, dt + \delta\int_N^\infty e^{-\delta t} (s_t - \ell)\, dt$$

Ahora elegimos N tal que $|s_t - \ell| < \varepsilon$ para $t \geq N$.

Entonces:

$$\left| \delta\int_N^\infty e^{-\delta t} (s_t - \ell)\, dt\right| \leq \varepsilon\, \delta\int_0^\infty e^{-\delta t}\, dt = \varepsilon .$$

Con este N fijo, escogemos δ tan pequeña que

$$\left| \delta\int_0^N e^{-\delta t} (s_t - \ell)\, dt\right| < \varepsilon .$$

De este modo, $\left| \delta\int_0^\infty e^{-\delta t} (s_t - \ell)\, dt\right| < 2\varepsilon$ para δ bastante pequeña.

Otro método de sumabilidad para integrales es el obtenido construyendo las m e - d i a s G a u s s :

$$G_\delta = \int_0^\infty e^{-t^2\delta} a(t)\, dt .$$

Si $\lim_{\delta\to 0} G_\delta$ existe, decimos que $\int_0^\infty a(t)\, dt$ es s u m a b l e e n e l s e n t i d o d e G a u s s (ó simplemente, s u m a b l e G a u s s) a ese límite.

(Las medias Abel están asociadas con la ecuación de Laplace - como veremos más tarde cuando introduzcamos la integral de Poisson - mientras que las medias Gauss están asociadas con la ecuación del calor).

El teorema (5.1) puede enunciarse con la notación sugerente: $s_\rho \subset A_\delta$ (esto es sumación ordinaria implica sumabilidad en el sentido de Abel). El hecho correspondiente para sumabilidad en el sentido de Gauss, a saber $s_\rho \subset G_\delta$, es verdadero también. Un hecho más profundo, sin embargo, es el siguiente: $G_\delta \subset A_\delta$. Pero tenemos que hacer una reserva: tenemos que suponer que no sólo G_δ existe, sino tambien, que A_δ existe (porque la existencia de G_δ, o aún de $\lim_{\delta\to 0} G_\delta$, no implica la existencia de A_δ). Entonces, el enunciado preciso es el siguiente:

<u>Si</u> $a(t)$ <u>es tal que</u> A_δ y G_δ <u>existen con</u> $\lim_{\delta\to 0} G_\delta = \ell$, <u>entonces</u> $\lim_{\delta\to 0} A_\delta$ <u>existe y es igual a</u> ℓ.

El teorema siguiente es una herramienta importante usada para obtener fórmulas de transformadas de Fourier :

T e o r e m a (5.2) (Fórmula de multiplicación) :

<u>Si</u> f <u>y</u> g <u>están en</u> $L^1(E_n)$ <u>entonces</u> :

$$\int_{E_n} \hat{f}(Y)\, g(Y)\, dY = \int_{E_n} f(Y)\, \hat{g}(Y)\, dY$$

D e m o s t r a c i ó n :

Aplicando el teorema de Fubini :

$$\int_{E_n} \hat{f}(Y)\, g(Y)\, dY = \int_{E_n} \left\{ \int_{E_n} e^{iX.Y} f(X)\, dX \right\} g(Y)\, dY =$$

$$= \int_{E_n} f(X) \left\{ \int_{E_n} e^{iY.X} g(Y)\, dY \right\} dX = \int_{E_n} f(X)\, \hat{g}(X)\, dX .$$

Extenderemos a n dimensiones las siguientes fórmulas para una dimensión:

T e o r e m a (5.3) :

a) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\, e^{ixy}\, dx = \frac{2}{1+y^2}$$

b) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, e^{ixy}\, dx = \sqrt{\pi}\; e^{-y^2/4}$$

D e m o s t r a c i ó n :

a) es obvio. Mostraremos sólo b) .

Hacemos la substitución $y = 2u$ y, multiplicando ambos miembros por e^{u^2}, el problema se reduce a mostrar que se cumple:

$$\int_C e^{-z^2}\,dz = \sqrt{\pi}$$

donde $z = x - iu$ y C es la recta $\{x - iu : -\infty \leq x < \infty\}$. Usando el teorema de Cauchy sobre las integrales de funciones analíticas obtenemos fácilmente que:

$$\int_C e^{-z^2}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \quad .$$

T e o r e m a (5.4) :

a) $$\int_{E_n} e^{-|X|^2} e^{iX.Y}\,dX = (\pi)^{n/2}\, e^{-|Y|^2/4}$$

b) Si $\delta > 0$

$$\int_{E_n} e^{-\delta|X|^2} e^{iX.Y}\,dX = (\pi)^{n/2}\,\delta^{-n/2}\, e^{-|Y|^2/4\delta}$$

D e m o s t r a c i ó n :

Primero observamos que b) sigue inmediatamente de a) (con un cambio de variables o usando el corolario (3.7)). Por esa razón mostraremos sólo a) :

$$\int_{E_n} e^{-|X|^2} e^{iX.Y}\,dX = \int_{E_n} e^{-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}\, e^{ix_1y_1 + \dots + ix_ny_n}\, dx_1\dots dx_n =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \sqrt{\pi}\, e^{-y_k^2/4} = (\pi)^{n/2}\, e^{-|Y|^2/4} \quad \text{(usando b) de (5.3))} \quad .$$

T e o r e m a (5.5) :

a) $$\int_{E_n} e^{-|X|} e^{iX.Y}\,dY = \frac{c_n}{(1 + |Y|^2)^{(n+1)/2}}$$

donde $c_n = 2^n\,(\pi)^{(n-1)/2}\,\Gamma(\frac{n+1}{2})$;

b) Si $\delta > 0$ entonces

$$\int_{E_n} e^{-\delta|X|} e^{iX.Y}\,dX = c_n\,\frac{\delta}{(\delta^2 + |Y|^2)^{(n+1)/2}}$$

D e m o s t r a c i ó n :

Nuevamente, b) sigue inmediatamente de a) .

Para mostrar a) usaremos el resultado :

$$(*) \qquad e^{-\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, e^{-\alpha^2/4u}\,du \quad , \quad \alpha > 0 \quad ,$$

que se puede obtener de este modo:

Primero, afirmamos que:

$$(1) \quad e^{-\alpha} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\,dx \quad , \quad \alpha > 0 \quad , \text{ y } \quad (2) \quad \frac{1}{1+x^2} = \int_0^\infty e^{-(1+x^2)u}\,du \quad .$$

La segunda igualdad es obvia, mientras que la primera sigue de una aplicación del cálculo de residuos (usando la función $e^{i\alpha z}/(1+z^2)$) .

Entonces:

$$e^{-\alpha} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha x \left\{\int_0^\infty e^{-u}\, e^{-x^2u}\,du\right\} dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}\left\{\int_0^\infty (\cos\alpha x)\, e^{-x^2u}\,dx\right\} du = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{i\alpha x}\, e^{-x^2u}\,dx\right\} du =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{u}}\, e^{-\alpha^2/4u}\,du \quad \text{(usando b) de (5.4))} \quad .$$

De esta manera ($*$) está establecida.

Ahora obtendremos a) : Usando ($*$) tenemos :

$$\int_{E_n} e^{-|X|}\, e^{iX.Y}\,dX = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{E_n} e^{iX.Y}\left\{\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, e^{-|X|^2/4u}\,du\right\} dX \quad .$$

Integramos primero con respecto a X , y usando la parte b) de (5.4) (con $\delta = 1/4u$) , vemos que la última expresión se reduce a

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,(\pi)^{n/2}\,(4\,u)^{n/2}\, e^{-u|Y|^2}\,du = (\pi)^{(n-1)/2}\, 2^n \int_0^\infty u^{(n-1)/2}\, e^{-(1+|Y|^2)u}\,du \; .$$

Cambiando variables esto es igual a :

$$\left\{(\pi)^{(n-1)/2}\, 2^n \int_0^\infty u^{(n-1)/2}\, e^{-u}\,du\right\} \frac{1}{(1+|Y|^2)^{(n+1)/2}} =$$

$$= (\pi)^{(n-1)/2}\, 2^n\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{1}{(1+|Y|^2)^{(n+1)/2}}$$

O b s e r v a c i ó n : Pongamos $K_1(\alpha) = e^{-\alpha}$ y $K_2(\alpha) = e^{-\alpha^2}$. Si existiesen constantes c_n , λ_n , $n=1,2,\ldots,N$ tales que

$$(**) \qquad K_1(\alpha) = \sum_{n=1}^N c_n\, K_2(\alpha\,\lambda_n) .$$

resultaría que sumabilidad Gauss implica sumabilidad Abel . La igualdad ($*$) afirma que la igualdad ($**$) es "casi" cierta.

La función:

$$P(\delta,t) = \frac{c_n}{(2\pi)^n} \frac{\delta}{(\delta^2 + t^2)^{(n+1)/2}} \quad , \quad 0 < \delta, t < \infty \quad ,$$

se llama **n ú c l e o d e P o i s s o n** .

T e o r e m a (5.6) :

<u>Si</u> $f \in L^1(E_n)$ <u>entonces</u> :

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \hat{f}(Y)\, e^{-iY.X}\, e^{-\delta|Y|}\, dY = \int_{E_n} f(X-U)\, P(\delta,|U|)\, dU$$

D e m o s t r a c i ó n :

Por el teorema (5.2) tenemos:

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \hat{f}(Y)\, g(Y)\, dY = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} f(U)\, \hat{g}(U)\, dU$$

donde $g(Y)$ es la función integrable $e^{-iY.X}\, e^{-\delta|Y|}$.

Por otra parte, sigue del teorema (5.5) que :

$$g(U) = c_n \frac{\delta}{(\delta^2 + |U-X|^2)^{(n+1)/2}}$$

El teorema ahora sigue de la conmutatividad de la operación de convolución.

T e o r e m a (5.7) :

<u>Si</u> $f \in L^p(E_n)$, $1 \leq p < \infty$, <u>y</u>

$$\left[A_\delta(f) \right](X) = \int_{E_n} f(X-U)\, P(\delta,|U|)\, dU$$

<u>entonces</u>

$$\left[A_\delta(f) \right](X) \rightarrow f(X) \quad ,$$

<u>en el sentido de la norma de</u> $L^p(E_n)$, <u>cuando</u> $\delta \rightarrow 0$.

D e m o s t r a c i ó n :

El hecho básico tocante a $P(\delta,|U|)$ que usaremos es que esta función es una "aproximación de la identidad" cuando $\delta \rightarrow 0$. Aquí, esto significa que $P(\delta,|U|)$ tiene las tres propiedades siguientes:

(i) $P(\delta,|U|) \geq 0$

(ii) $\int_{E_n} P(\delta,|U|)\, dU = \int_{E_n} P(1,|U|)\, dU = 1$

(iii) Si $\eta > 0$, $\int_{|U|>\eta} P(\delta,|U|)\, dU \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow 0$.

(i) y (iii) son obvias. Para obtener (ii) ponemos $U = r\,U'$, donde $r = |U|$, dU' es el elemento de área de la superficie, Σ, de la esfera de radio 1 (en E_n). Entonces, $dU = r^{n-1}\,dr\,dU'$ y tenemos:

$$\int_{E_n} P(\delta, |U|)\,dU = \frac{c_n}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \frac{\delta}{(\delta^2 + |U|^2)^{(n+1)/2}}\,dU =$$

$$= \frac{c_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_\Sigma \frac{\delta}{(\delta^2 + r^2)^{(n+1)/2}}\, r^{n-1}\,dr\,dU' = \frac{|\Sigma|\,c_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \frac{\delta r^{n-1}}{(\delta^2 + r^2)^{(n+1)/2}}\,dr$$

$$= \frac{|\Sigma|\,c_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1 + x^2)^{(n+1)/2}}\,dx = \int_{E_n} P(1, |U|)\,dU \quad .$$

Nos basta mostrar, por tanto, que

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1 + x^2)^{(n+1)/2}}\,dx = \frac{(2\pi)^n}{|\Sigma|\,c_n} \quad ,$$

donde $|\Sigma|$ es la medida de Σ. Pero, esto es bien conocido y lo presuponemos.

Por (ii) tenemos:

$$\{A_\delta(f)\}(X) - f(X) = \int_{E_n} f(X - U)\, P(\delta, |U|)\,dU - 1.f(X) =$$

$$= \int_{E_n} \{f(X - U) - f(X)\}\, P(\delta, |U|)\,dU = \int_{|U| \leq \eta} + \int_{|U| > \eta} = I_1 + I_2 \quad .$$

Entonces, si η es pequeña, usando (3.4) y la desigualdad de Minkowski para integrales obtenemos :

$$\left(\int_{E_n} |I_1(X)|^p\,dX \right)^{1/p} \leq \int_{|U| \leq \eta} \left\{ \int_{E_n} |f(X - U) - f(X)|^p\,dX \right\}^{1/p} P(\delta, |U|)\,dU \leq$$

$$\leq \int_{|U| \leq \eta} \varepsilon\, P(\delta, |U|)\,dU \leq \varepsilon \int_{E_n} P(\delta, |U|)\,dU = \varepsilon \quad .$$

(la última igualdad sigue también de (ii)).

Usando (iii) y la desigualdad de Minkowski ordinaria y para integrales:

$$\left(\int_{E_n} |I_2(X)|^p\,dX \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\int_{E_n} \left| \int_{|U| > \eta} f(X - U)\, P(\delta, |U|)\,dU \right|^p dX \right)^{1/p} + \left(\int_{E_n} \left| \int_{|U| > \eta} f(X)\, P(\delta, |U|)\,dU \right|^p dX \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \int_{|U|>\eta} P(\delta,|U|) \left(\int_{E_n} |f(X-U)|^p \, dX \right)^{1/p} dU + \left(\int_{|U|>\eta} P(\delta,|U|)\, dU \right) \left(\int_{E_n} |f(X)|^p dX \right)^{1/p} =$$

$$= 2\, ||f||_p \int_{|U|>\eta} P(\delta,|U|)\, dU \to 0 \quad , \text{ cuando } \quad \delta \to 0 \quad .$$

Observamos que una de las consecuencias del lema (2.3) y de (ii) es la des-igualdad $||A(f)||_p \leq ||f||_p$.

C o r o l a r i o (5.8) (unicidad de la transformada de Fourier) :

<u>Si</u> $f \in L^1(E_n)$ <u>tiene una transformada de Fourier</u> $\hat{f}(Y)=0$ <u>para cada</u> Y,<u>luego</u>:$\hat{f}(X)=0$ <u>p.p.</u>

Este corolario es una consecuencia inmediata de los teoremas (5.6) y (5.7). Visto que no hemos definido la transformada de Fourier para una función general de $L^p(E_n)$,$p>1$, podemos enunciar este corolario sólo para las funciones de $L^1(E)$. Veremos más tarde que se puede hacer la necesaria extensión de la transformación de Fourier y que, entonces, el corolario (5,8) es cierto para las clases $L^p(E_n)$, $1 < p < \infty$, también.

Si $f \in L^1(E_n)$ sea $X_o \in E_n$ un punto tal que $\frac{1}{c\, t^n} \int_{|Y|\leq t} f(X_o - Y)\, dY \to f(X_o)$ cuando $t \to 0$, donde c es el volumen de la esfera(en E_n) de radio 1 (así que ct^n es el volumen de la esfera de radio t). Si f es contínua en X_o , entonces X_o es uno de estos puntos. Esta condición se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{1}{c\, t^n} \int_{|Y|\leq t} \left[f(X_o - Y) - f(X_o) \right] dY = \Delta_{X_o}(t) \to 0 \quad , \text{ cuando } \quad t \to 0 \quad .$$

Un teorema básico de la teoría de la integral (que lo supondremos), es:

T e o r e m a (5.9)

$\Delta_{X_o}(t) \to 0$ <u>cuando</u> $t \to 0$ <u>para casi todos los puntos</u> X_o .

Hemos mostrado que la fórmula de la inversión de la transformada de Fourier ,

$$(+) \qquad f(X) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \hat{f}(Y)\, e^{-iY.X}\, dY \quad ,$$

es válida en el sentido siguiente:

Las "medias Abel" de la integral en la igualdad (+) ,

$$\left[A_\delta(f) \right] (X) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \hat{f}(Y)\, e^{-iY.X}\, e^{-\delta|Y|}\, dY \quad ,$$

convergen a $f(X)$ en el sentido de la norma de $L^1(E_n)$, cuando $\delta \to 0$, para cada $f(X) \in L^1(E_n)$. Ahora, usando (5.9) , mostraremos que la igualdad (+) es válida, en este sentido, para casi todos los puntos de E_n . Mas precisamente, tenemos:

T e o r e m a (5.10) :

<u>Si</u> f $L^1(E_n)$, <u>entonces</u>

a) $\{A_\delta(f)\}(X_0) \to f(X_0)$ cuando $\delta \to 0$, para cada punto $X_0 \in E_n$ tal que $\Delta_{X_0}(t) \to 0$ cuando $t \to 0$; entonces (por el teorema (5.9))

b) $\{A_\delta(f)\}(X_0) \to f(X_0)$ para casi todos $X_0 \in E_n$

D e m o s t r a c i ó n :

Evidentemente, tenemos que mostrar sólo a). Además de las propiedades (i), (ii), (iii) (ver la demostración del teorema (5.7)) él núcleo de Poisson verifica:

(iv) $P'_t(\delta,t) \leq 0$ (por tanto, $P(\delta,t)$ es decreciente con respecto de t, para $t \geq 0$);

(v) $\int_0^\infty t^n\, |P'_t(\delta,t)|\, dt = \frac{n}{c} < \infty$, donde c es el volúmen de la esfera de radio 1 (en E_n).

La propiedad (iv) es obvia. Para mostrar (v) ponemos $t = |X|$, $X = tX'$, luego, usando (ii), obtenemos:

$$1 = \int_{E_n} P(\delta,|X|)\, dX = \int_\Sigma \left(\int_0^\infty P(\delta,t)\, t^{n-1}\, dt\right) dX'$$

(estamos usando la misma notación de la demostración de (5.7)). Entonces:

$$\int_0^\infty P(\delta,t)\, t^{n-1}\, dt = \frac{1}{c}.$$

Integrando por partes,

$$\int_0^\infty P(\delta,t)\, t^{n-1}\, dt = \frac{t^n}{n} P(\delta,t)\Big|_0^\infty - \frac{1}{n}\int_0^\infty t^n\, P'_t(\delta,t)\, dt.$$

Esto muestra que:

$$\int_0^\infty t^n\, |P'_t(\delta,t)|\, dt = \frac{n}{c}.$$

Ahora, el teorema se prueba así:

$$\{A_\delta(f)\}(X_0) - f(X_0) = \int_{E_n} \{f(X_0 - U) - f(X_0)\}\, P(\delta,|U|)\, dU = \int_{|U|\leq\eta} + \int_{|U|>\eta}.$$

Pero, poniendo $r = |U|$ y $U' = \frac{1}{r} U$,

$$\int_{|U|\leq\eta} = \int_\Sigma \left\{ \int_{0\leq r\leq\eta} \{f(X_0 - U) - f(X_0)\}\, P(\delta,r)\, r^{n-1}\, dr \right\} dU' = \int_{0\leq r\leq\eta} g_{X_0}(r) P(\delta,r) r^{n-1} dr,$$

donde:

$$g_{X_0}(r) = \int_\Sigma \{f(X_0 - rU') - f(X_0)\}\, dU'.$$

Ahora, integramos por partes, diferenciando $P(\delta, r)$ e integrando $r^{n-1} g_{X_0}(r)$ (Notamos que

$$\int_0^t g_{X_0}(r)\, r^{n-1}\, dr = \int_0^t r^{n-1} \left\{ \int_{\Sigma} \left[f(X_0 - rU') - f(X_0) \right] dU' \right\} dr =$$

$$= \int_{0 \leq r \leq t} \left[f(X_0 - U) - f(X_0) \right] dU = ct^n \Delta_{X_0}(t) \quad).$$ Luego,

$$\int_{|U| \leq \eta} \left[f(X_0 - U) - f(X_0) \right] P(\delta, |U|)\, dU =$$

$$= c\, t^n \Delta_{X_0}(t)\, P(\delta, t) \Big|_0^{\eta} - \int_0^{\eta} c\, t^n \Delta_{X_0}(t)\, P_t'(\delta, t)\, dt \quad .$$

Entonces, si η es bastante pequeña (así que $|\Delta_{X_0}(t)| < \varepsilon$ para $t \leq \eta$), tenemos que esta diferencia es menor que (en valor absoluto)

$$\varepsilon\, c \int_0^{\eta} t^n\, |P_t'(\delta, t)|\, dt + \varepsilon\, c\, \eta^n P(\delta, \eta) =$$

$$= \varepsilon \left\{ n + c\, \eta^n P(\delta, \eta) \right\} \leq \varepsilon' \left\{ n + c \right\} \quad , \text{ si } \quad \delta \leq \eta \frac{(2\pi)^n}{c_n} \quad .$$

Ahora estimamos

$$\left| \int_{|U| > \eta} \left[f(X_0 - U) - f(X_0) \right] P(\delta, |U|)\, dU \right| \leq$$

$$\leq \int_{|U| > \eta} |f(X_0 - U)|\, P(\delta, |U|)\, dU + \int_{|U| > \eta} |f(X_0)|\, P(\delta, |U|)\, dU \leq$$

$$\leq P(\delta, \eta)\, ||f||_1 + |f(X_0)| \int_{|U| > \eta} P(\delta, |U|)\, dU \quad .$$

Pero, si $\varepsilon > 0$,

$$\int_{|U| > \eta} P(\delta, |U|)\, dU < \varepsilon$$ si δ (= δ_{ε}) es bastante pequeña (ver propiedad (iii)) y también, $P(\delta, \eta) \leq \delta \dfrac{c_n}{(2\pi)^n \eta^{(n+1)}} < \varepsilon$ si δ es bastante pequeña.

Resumiendo estas desigualdades:

$$\left| \left[A_{\delta}(f) \right] (X_0) - f(X_0) \right| \leq \varepsilon \left\{ n + c + |f(X_0)| + ||f||_1 \right\}$$ si δ es bastante pequeña. El teorema, por consiguiente, está demostrado.

C o r o l a r i o (5.11)

<u>Si para</u> $f \in L^1(E_n)$, <u>también</u> $\hat{f} \in L^1(E_n)$, <u>entonces</u>:

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \hat{f}(Y)\, e^{-iX.Y}\, dY = f(X)$$

<u>para casi todos los</u> X .

D e m o s t r a c i ó n :

Por teorema (5.6) :

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \hat{f}(Y)\, e^{-iY.X}\, e^{-\delta|Y|}\, dY = \int_{E_n} f(X-U)\, P(\delta,|U|)\, dU \quad .$$

El corolario sigue ahora del último teorema y del teorema de Lebesgue sbore la convergencia mayorada.

Observamos que, puesto que la transformada de Fourier de una función en $L^1(E_n)$ es contínua, la f del (5.11) tiene que ser igual a una función contínua p.p. (evidentemente, el uso de $e^{-iX.Y}$ en lugar de $e^{iX.Y}$ no cambia el resultado b) de la primera sección). Para funciones contínuas de $L^1(E_n)$ la igualdad del corolario (5.11) es cierta para todos los X .

C o r o l a r i o (5.12) :

<u>Supongamos que</u> $f \in L^1(E_n)$, $\hat{f}(Y) \geq 0$ <u>para todos los</u> Y , <u>y que</u> f <u>es contínua en</u> 0 . <u>Entonces</u>, $\hat{f} \in L^1(E_n)$ <u>y, por el corolario anterior, para casi todos los</u> X :

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \hat{f}(Y)\, e^{-iY.X}\, dY = f(X) \quad .$$

<u>En particular</u>

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \hat{f}(Y)\, dY = f(0) \quad .$$

D e m o s t r a c i ó n :

Por el teorema (5.10) :

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \hat{f}(Y)\, e^{-iY.X}\, e^{-\delta|Y|}\, dY \rightarrow f(X)$$

cuando $\delta \to 0$, para cada punto X de continuidad de f . En particular, para $X=0$ es:

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \hat{f}(Y)\, e^{-\delta|Y|}\, dY \longrightarrow f(0)$$

cuando $\delta \to 0$. Visto que las funciones $\hat{f}(Y)\, e^{-\delta|Y|}$ decrecen cuando $\delta \to 0$, para cada Y , $\hat{f}(Y) = \lim_{\delta \to 0} \hat{f}(Y)\, e^{-\delta|Y|} \in L^1(E_n)$. Obtenemos la fórmula básica;

$$\left\{ A_\delta(f) \right\}(X) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \hat{f}(Y)\, e^{-iY.X}\, e^{-\delta|Y|}\, dY =$$

$$= \int_{E_n} f(X-U)\, P(\delta,|U|)\, dU \quad .$$

La fórmula análoga para sumabilidad Gauss es la siguiente:

$$\left[G_\delta(f) \right](X) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \hat{f}(Y)\, e^{-iY.X}\, e^{-\delta|Y|^2}\, dY = \int_{E_n} f(X-U)\, W(\delta, |U|)\, dU ,$$

donde

$$W(\delta, t) = 2^{-n}\, \pi^{-n/2}\, \delta^{-n/2}\, e^{-t^2/4\delta} \qquad \text{(ver teorema (5.4))}$$

es el núcleo de Gauss - Weierstrass .

Los resultados principales, que hemos demostrado para sumabilidad Abel , tienen sus análogos para sumabilidad Gauss .

Corolário (5.13) :

$$\text{a)} \quad \int_{E_n} e^{iX.Y}\, P(\delta, |Y|)\, dY = e^{-\delta|X|}$$

$$\text{b)} \quad \int_{E_n} e^{iX.Y}\, W(\delta, |Y|)\, dY = e^{-\delta|X|^2}$$

Demostración :

a) sigue de un cambio de variables $(Y \rightarrow -Y)$ (5.5) y (5.11) . b) sigue del mismo cambio de variables, (5.4) y (5.11) .

Corolario (5.14) :

Si $\delta_1 , \delta_2 > 0$ entonces:

$$\text{a)} \quad P(\delta_1, |X|) * P(\delta_2, |X|) = P(\delta_1 + \delta_2, |X|) ;$$

$$\text{b)} \quad W(\delta_1, |X|) * W(\delta_2, |X|) = W(\delta_1 + \delta_2, |X|) .$$

Demostración :

a) (y también b)) sigue inmediantamente, después de tomar la transformada de Fourier de ambos miembros, si se usa (2.2) y las fórmulas que hemos desarrollado.

Corolario (5.15) :

Pongamos $A_\delta(f) = A_\delta$, $G_\delta(f) = G_\delta$ para $f \in L^1(E_n)$. Luego:

$$A_{\delta_1} \circ A_{\delta_2} = A_{\delta_1+\delta_2} \quad \text{y} \quad G_{\delta_1} \circ G_{\delta_2} = G_{\delta_1+\delta_2} ,$$

donde "o" denota la operación de composición .

Demostración :

Tenemos $A_{\delta_2}(f) = P(\delta_2, |X|) * f(X)$. Por consiguiente,

$$A_{\delta_1} \circ A_{\delta_2}(f) = P(\delta_1, |X|) * \left\{ P(\delta_2, |X|) * f(X) \right\} .$$

El corolario ahora sigue de la asociatividad de la operación de convolución y de (5.14). La misma demostración sirve para los G_δ .

El corolario (5.15) afirma que la familia de operadores $\{A_\delta\}$ (y también la familia $\{G_\delta\}$) forma un semigrupo. Observamos (después de la demostración del teorema (5.7)) que $||A_\delta(f)||_p \leq ||f||_p$, para $p \geq 1$; además A_δ tiende al operador de identidad, I , cuando $\delta \to 0$, en el sentido que, para $f \in L^1(E_n)$, $A_\delta(f) \to f$ en la norma de L^1 . Estos hechos son ciertos para los operadores G_δ.

Afirmamos que las medias Abel están asociadas con la ecuación de Laplace y las medias Gauss con la ecuación del calor. Estas conexiones ocurren de la manera siguiente. Pongamos $t = \delta$ y consideramos la función $u(t,X) = [A_t(f)](X)$, $X \in E_n$, $t > 0$, de las $n+1$ variables $(t,x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$. Mostraremos que $u(t,X)$ es una función harmónica; eso es, verifica la ecuación de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0 \quad .$$

Igualmente, poniendo $v(t,X) = \{G_t(f)\}(X)$, se puede mostrar que $v(t,X)$ verifica la ecuación del calor:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2} \quad .$$

§6.- LA TEORIA DE L^2 Y EL TEOREMA DE PLANCHEREL .

Supondremos conocidas las nociones y el resultado contenidos en el lema siguiente:

L e m a (6.1) :

Sea $\mathcal{B}$ un espacio de Banach y $\mathcal{L}$ un subespacio lineal denso. Supongamos que $A : \mathcal{L} \to \mathcal{B}$ es una transformación lineal que verifica $||A(f)|| \leq a||f||$ para todas las $f \in \mathcal{L}$ (donde a es un número real). Entonces, A tiene una extensión lineal y acotada única, definida sobre todo $\mathcal{B}$, y esta extensión (que designamos con A, también) verifica $||A(f)|| \leq a||f||$ para todas las $f \in \mathcal{B}$.

D e f i n i c i ó n :

Si f , $g \in L^2(E_n)$ el producto escalar de f por g es el número:

$$(f,g) = \int_{E_n} f(X)\,\overline{g(X)}\,dX \quad .$$

Con este producto escalar, $L^2(E_n)$ es un espacio de Hilbert .

D e f i n i c i ó n :

Una transformación lineal acotada $U : L^2 \to L^2$ se llama u n i t a r i a si

a) $||Uf||_2 = ||f||_2$ para todas las $f \in L^2(E_n)$;

b) U es "sobre" .

Si U verifica sólo a) se llama i s o m é t r i c a .

Supondremos que el hecho siguiente es conocido: Si U es unitaria, entonces U^{-1} existe y $U^{-1} = U^*$ (la adjunta de U). U^* es tambien unitaria .

L e m a (6.2) :

Supongamos que $f \in L^p(E_n)$ y $g \in L^q(E_n)$, donde $1 \leqslant p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Entonces, si:

$$h(Y) = \int_{E_n} f(Y - X)\, g(X)\, dX \quad ,$$

a) $\sup_Y |h(Y)| \leqslant ||f||_p \, ||g||_q$;

b) $h(Y)$ es uniformemente continua .

D e m o s t r a c i ó n :

La parte a) sigue de la desigualdad de Hölder . Ahora demostraremos b) ;

Pongamos $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$. Luego:

$$|h(Y+\Delta)-h(Y)| = \left| \int_{E_n} \left\{ f(Y+\Delta-X)-f(Y-X) \right\} g(X)dX \right| \leqslant ||f(U+\Delta) - f(U)||_p . ||g||_q \quad 0$$

cuando $|\Delta| \to 0$ (por lema (3.4)) .

Pongamos $S = L^1(E_n) \cap L^2(E_n)$. Entonces S es un subespacio denso en $L^1(E_n)$ o en $L^2(E_n)$.

L e m a (6.3) :

Si $f \in S$ entonces $\hat{f} \in L^2(E_n)$ y

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} |\hat{f}(Y)|^2 \, dY = \int_{E_n} |f(X)|^2 \, dX \quad .$$

D e m o s t r a c i ó n :

Pongamos:
$$h(X) = \int_{E_n} \overline{f(-X + U)}\, f(U)\, d(U) = \overline{f(-U)} * f(U)$$

y observamos que:
$$T(\overline{f(-U)}) = \int_{E_n} e^{iY.U}\, \overline{f(-u)}\, dU = \int_{E_n} e^{-iY.U}\, \overline{f(U)}\, dU = \overline{\hat{f}(Y)}$$

$h \in L^1(E_n)$, puesto que es la convolución de dos funciones de $L^1(E_n)$ (ver lema (2.1)). También, h es contínua, puesto que es la convolución de dos funciones de $L^2(E_n)$ (ver lema (6.2)). Por el teorema (2.2)

$$\hat{h}(Y) = \hat{f}(Y)\, \overline{\hat{f}(Y)} = |\hat{f}(Y)|^2 \geqslant 0$$

Entonces, podemos aplicar el corolario (5.12) y obtenemos el hecho que $\hat{h}(Y)$ es integrable y que

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \hat{h}(Y)\, dY = h(0)$$

Pero, $h(0) = \int_{E_n} |f(X)|^2 \, dX$ y $\int_{E_n} \hat{h}(Y) \, dY = \int_{E_n} |\hat{f}(Y)|^2 \, dY$

y el teorema está demostrado.

D e f i n i c i ó n :

Si $f \in S$ $(= L^1(E_n) \cap L^2(E_n))$ defninimos :

$$\mathfrak{J}(f) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} T(f) \quad .$$

El último lema, entonces, afirma que $||\mathfrak{J}(f)||_2 = ||f||_2$ para todas las $f \in S$. Por lema (6.1) , el operador $\mathfrak{J}$ tiene una extensión única (la cual será también designada por $\mathfrak{J}$), definida para todas las funciones de $L^2(E_n)$, tal que

$$||\mathfrak{J} f||_2 \leqslant ||f||_2$$

para cada $f \in L^2(E_n)$. En efecto, tenemos:

L e m a (6.4) :

$||\mathfrak{J}(f)||_2 = ||f||_2$ <u>para todas</u> $f \in L^2(E_n)$.

D e m o s t r a c i ó n :

Si $f \in L^2(E_n)$, existe una sucesión, $\{f_n\}$, en S tal que $||f_n - f||_2 \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces, $||Tf_n||_2 \to ||Tf||_2$. Pero $||Tf_n|| = ||f_n||_2 \to$ $\to ||f||_2$.

Entonces, $\mathfrak{J}$ es una isometría. Si podemos mostrar que $\mathfrak{J}$ es "sobre" $L^2(E_n)$ habremos probado que es una transformación unitaria. Este hecho depende del lema siguiente:

L e m a (6.5)

<u>Si</u> f <u>y</u> g <u>están en</u> $L^2(E_n)$, <u>entonces</u>

$$\int_{E_n} f \, \mathfrak{J}(g) = \int_{E_n} \mathfrak{J}(f) \cdot g$$

D e m o s t r a c i ó n :

Si f y g están en S esta igualdad es un caso especial del teorema (5.2) El caso general sigue ahora fácilmente por una aproximación con funciones de S .

L e m a (6.6)

$\mathfrak{J}$ <u>es</u> <u>"sobre"</u> $L^2(E_n)$.

D e m o s t r a c i ó n :

Sea $\mathcal{R}$ el rango de $\mathfrak{J}$. Entonces, $\mathcal{R}$ es un subespacio lineal de $L^2(E_n)$. Puesto que $\mathfrak{J}$ es una isometría, $\mathcal{R}$ es cerrado. Si $\mathcal{R} \neq L^2(E_n)$ existe $g \in L^2(E_n)$, $g \neq 0$ tal que $\int_{E_n} \mathfrak{J}(f) g = 0$ para cada $f \in L^2(E_n)$. Entonces, usando (6.5)

$$0 = \int_{E_n} \mathfrak{J}(f) \, g = \int_{E_n} f \, \mathfrak{J}(g) \quad \text{para cada} \quad f \in L^2(E_n) \quad .$$

Por consiguiente, $\mathfrak{J}(g) = 0$. Pero esto contradice el hecho que $\mathfrak{J}$ es una isometría .

Hemos demostrado, por eso, que $\mathfrak{J}$ es una transformación unitaria. Entonces, $\mathfrak{J}^{-1} = \mathfrak{J}^*$. El lema siguiente da una forma explícita de la transformación $\mathfrak{J}^*$:

L e m a (6.7) :

$$\left(\mathfrak{J}^{-1} f\right)(X) = \left(\mathfrak{J}^* f\right)(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{E_n} e^{-iX.Y} f(Y)\, dY$$

<u>para</u> <u>cada</u> $f \in S$.

D e m o s t r a c i ó n :

Pongamos:

$$\left(\tilde{\mathfrak{J}} f\right)(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{E_n} e^{-iX.Y} f(Y)\, dY$$

para cada $f \in S$.

Entonces:

$$(*) \qquad \left(\tilde{\mathfrak{J}} f\right)(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \overline{\int_{E_n} e^{iX.Y}\, \overline{f(Y)}\, dY} = \overline{\left(\tilde{\mathfrak{J}} \bar{f}\right)(X)}$$

Puesto que S es denso en $L^2(E_n)$, nos basta mostrar que para cada $g \in S$

$$(g\, ,\, \mathfrak{J}^* f) = (g\, ,\, \tilde{\mathfrak{J}} f) \quad .$$

Usando el lema (6.5) y (*) vemos que:

$$(g\, ,\, \tilde{\mathfrak{J}} f) = \int_{E_n} f(X) \left(\mathfrak{J}\bar{f}\right)(X)\, dX = \int_{E_n} \left(\mathfrak{J} g\right)(X)\, \bar{f}(X)\, dX = (\mathfrak{J} g\, ,\, f) = (g, \mathfrak{J}^* f)$$

Estos resultados se pueden reunir en el teorema siguiente:

T e o r e m a (6.8) (Plancherel) :

<u>Si</u> $f \in L^2(E_n)$ <u>pongamos</u> <u>para</u> <u>cada</u> <u>entero</u> <u>positivo</u> k

$$h_k(Y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|X| \leq k} e^{iX.T} f(X)\, dX \quad ,$$

<u>entonces</u>

(1) $h_k(Y)$ <u>converge</u> <u>en</u> <u>la</u> <u>norma</u> <u>de</u> $L^2(E_n)$ <u>a</u> <u>una</u> <u>función</u> $h(Y)$ <u>cuando</u> $k \to \infty$. <u>Si</u> <u>designamos</u> <u>por</u> $\mathfrak{J}$ <u>esta</u> <u>transformación</u>,

$$\left(\mathfrak{J} f\right)(Y) = h(Y) \quad ,$$

$\mathfrak{J}$ <u>es</u> <u>una</u> <u>transformación</u> <u>unitaria</u> ;

(2) <u>Si</u>

$$f^{(k)}(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|Y| \leq k} e^{-iX.Y} h(Y)\, dY$$

<u>entonces</u> $f^{(k)}(X) \to f(X)$ <u>en la norma de</u> $L^2(E_n)$.

D e m o s t r a c i ó n :

Pongamos:

$$f_k(X) = \begin{cases} f(X) & \text{si } |X| \leq k \\ 0 & \text{si } |X| > k \end{cases}$$

Luego, $f_k(X) \in S$ para cada k y $||f_k - f||_2 \to 0$ cuando $k \to \infty$. Los lemas (6.4) y (6.6) prueban la primera parte de este teorema.

Si ponemos $h_k(Y) = \begin{cases} h(Y) & \text{si } |Y| \leq k \\ 0 & \text{si } |Y| > k \end{cases}$ usando el lema (6.7) vemos que

$$f^{(k)}(Y) = [\mathfrak{J}^{-1}(h_k)](Y)$$

Puesto que $h_k \to h$ en $L^2(E_n)$ y $\mathfrak{J}^{-1}$ es una transformación acotada,

$$f^{(k)} \to \lim_{k\to\infty} \mathfrak{J}^{-1}(h_k) = \mathfrak{J}^{-1}(h) = f$$

en la norma de $L^2(E_n)$.

A d v e r t e n c i a : En el enunciado del teorema de Plancherel se pueden usar otras sucesiones de conjuntos de medida finita que se dilatan a E_n .

C o r o l a r i o (6.9) :

<u>Si, para</u> $f \in L^2(E_n)$, $\mathfrak{J}(f) = 0$ <u>p.p., entonces</u> $f = 0$ <u>p.p.</u>

D e m o s t r a c i ó n :

El corolario sigue inmediatamente de la segunda parte del teorema anterior.

C o r o l a r i o (6.10) :

<u>Si</u> $h(Y) = [\mathfrak{J}(f)](Y)$, <u>donde</u> $f \in L^2(E_n)$, <u>entonces, en el sentido de la norma de</u> $L^2(E_n)$,

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{E_n} e^{-iX.Y} h(Y)\, e^{-\delta|Y|}\, dY = f(X)$$

D e m o s t r a c i ó n :

Por el teorema (5.5)

$$\mathfrak{J}\left(\frac{e^{-iX.Y}\, e^{-\delta|Y|}}{(2\pi)^{n/2}} \right) = P(\delta, |X-U|)$$

para cada X . Por consiguiente, usando (6.5) ,

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{E_n} e^{-iX.Y} h(Y)\, e^{-\delta|Y|}\, dY = \int_{E_n} f(U)\, P(\delta, |X-U|)\, dU \quad .$$

Ahora el teorema sigue de la conmutatividad de la operación de convolución y del teorema (5.7) .

C o r o l a r i o (6.11) :

Bajo las mismas hipótesis del corolario anterior

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{E_n} e^{-iX.Y}\, h(Y)\, e^{-\delta |Y|}\, dY = f(X) \quad \underline{\text{p.p.}}$$

D e m o s t r a c i ó n :

La misma demostración del corolario (6.10) sirve para este corolario; sólo debemos usar (5.10) en vez de (5.7) .[1]

C o r o l a r i o (6.12) :

Si $k \in L^1(E_n)$, $g \in L^2(E_n)$ y $h = k * g$, entonces

$$\mathfrak{J}(h) = T(k) \,.\, \mathfrak{J}(g) \quad \underline{\text{p.p.}}$$

D e m o s t r a c i ó n :

Cuando $g \in L^1 \cap L^2$ ya tenemos este resultado (ver teorema (2.2)). Si $g \in L^2$ sea $\{g_n\}$ una sucesión de funciones en $L^1(E_n) \cap L^2(E_n)$ tal que $||g_n - g||_2 \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por consiguiente, si ponemos $h_n = k * g_n$,

$$||\mathfrak{J}(h) - \mathfrak{J}(h_n)||_2 = ||h - h_n||_2 \leq ||g - g_n||_2\, ||k||_1 \longrightarrow 0$$

(por (2.3) y el hecho que $\mathfrak{J}$ es isométrico). Ahora tomamos una subsucesión

$$\left\{ \mathfrak{J}(h_{n_k}) \right\} \quad \text{tal que} \quad \mathfrak{J}(h_{n_k}) \to \mathfrak{J}(h) \quad \text{cuando} \quad k \to \infty \;.$$

Puesto que $||\mathfrak{J}(g) - \mathfrak{J}(g_{n_k})||_2 = ||g - g_{n_k}||_2 \to 0$ cuando $k \to \infty$ podemos extraer una subsucesión

$$\left\{ g_{n_{k_\ell}} \right\} \quad \text{tal que} \quad \lim_{\ell \to \infty} \mathfrak{J}(g_{n_{k_\ell}}) = \mathfrak{J}(g) \quad \text{p.p.}$$

Entonces:

$$\mathfrak{J}(h) = \lim_{\ell \to \infty} \mathfrak{J}(h_{n_{k_\ell}}) = \lim_{\ell \to \infty} T(k) \,.\, \mathfrak{J}(g_{n_{k_\ell}}) = T(k)\, \mathfrak{J}(g) \quad \text{p.p.}$$

Si designamos por K el operador definido por $K(g) = k * g$, donde $k \in L^1(E_n)$, vemos (Por (6.12)) que $K : L^2 \to L^2$ y

$$\sup_{||g||_2 = 1} ||Kg||_2 = \sup_{||g||_2 = 1} ||\mathfrak{J}(Kg)||_2 = \sup_{||g||_2 = 1} ||\hat{k}.\mathfrak{J} g||_2 = ||\hat{k}||_\infty$$

---

(1) El teorema (5.10) trata solamente de funciones de L^1 . No es difícil extenderlo al caso L^p , $1 < p < \infty$.

(puesto que $\mathcal{J}$ aplica la esfera unitaria de L^2 sobre la esfera unitaria). Esto es, la norma del operador K , $||K||_2$, se puede expresar en términos de k (ver el final de §2) :

$$||K||_2 = ||\hat{k}||_\infty .$$

II.- PROPIEDADES BASICAS DE FUNCIONES HARMONICAS Y GENERALIZACIONES DE LA TRANSFORMADA DE HILBERT .

§1.- DEFINICIONES Y PROPIEDADES ELEMENTALES .

Salvo la advertencia en contrario supondremos que la dimensión $n \geq 2$.

Definición :

Sea $\mathcal{R} \subset E_n$ una región (esto es, un conjunto abierto y conexo). Una función $u(X)$, definida en $\mathcal{R}$ y de clase C^2 , se llama **harmónica** si :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

para cada punto de $\mathcal{R}$.

Ejemplos :

(1) Sea $A \in E_n$ y $u(t,X) = e^{iX.A}\, e^{-t|A|}$, donde t es una variable real. Es fácil comprobar que u es una función harmónica de las $n+1$ variables $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

(2). Si $Y \in E_n$ pongamos $r = r(X) = |X - Y|$. Son funciones harmónicas en la región $\{X \,;\, X \neq Y\}$ las funciones $\log r$, si la dimensión $n = 2$, y $1/(r^{n-2})$ cuando $n \geq 3$.

(3) Combinaciones lineales finitas de funciones harmónicas son funciones harmónicas. Si $u(X)$ es harmónica y $A \in E_n$, entonces $v(X) = u(X + A)$ es harmónica.

(4) Cada derivada parcial de una función harmónica es una función harmónica. -1-. Luego, poniendo $r = (|X|^2 + t^2)^{\frac{1}{2}}$, vemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \log r = \frac{t}{(x^2 + t^2)} \quad \text{es harmónica cuando} \quad X \in E_1 \quad \text{y}$$

-1- En la definición de una función harmónica supusimos solamente que u tenía derivadas del segundo orden. Para que este ejemplo tenga sentido, sin embargo, u tiene que poseer, al menos, derivadas del tercer orden. Pero, como veremos mas tarde, una función harmónica está en la clase C^{∞} . (ver teorema (1.4))

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{r^{n-1}} = (1-n)\frac{t}{(|X|^2+t^2)^{(n+1)/2}}$$ es harmónica cuando $X \in E_n$, $n \geqslant 2$.

Entonces $P(t,|X|)$ es una función harmónica de las $n+1$ variables $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cuando $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, 0, \ldots, 0)$. Tomando las otras derivadas parciales obtenemos las funciones harmónicas

$$Q_k(t\,,\,|X|) = \frac{c_n}{(2\pi)^n}\;\frac{x_k}{(|X|^2+t^2)^{(n+1)/2}} \quad , \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Estas funciones se llaman los n ú c l e o s c o n j u g a d o s d e P o i s s o n.

Supondremos conocido el teorema clàsico siguiente:

T e o r e m a (1.1) (teorema de Green) :
Sea $\mathcal{R}$ una región de E_n con una frontera, $\mathcal{B}$, suficientemente lisa[-2-]. Si u y v son funciones de la clase C^2 en $\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$, entonces

$$\int_{\mathcal{B}} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = \int_{\mathcal{R}} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\, dX \quad ,$$

donde $\frac{\partial}{\partial n}$ designa derivación en la dirección de la normal a $\mathcal{B}$ dirigida hacia afuera y ds es elemento de área de $\mathcal{B}$.

C o r o l a r i o (1.2)
Si u es harmónica en una región ligeramente mas grande que $\mathcal{R}$ entonces

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0$$

D e f i n i c i ó n :
El valor medio de la función u tomado sobre la superficie de la esfera de radio t y centro X_0 será designado por

$$\mathfrak{M}_t(u) = \mathfrak{M}_{t,X_0}(u) \quad . \text{ Esto es,} \quad \mathfrak{M}_t(u) = \int_{\Sigma} u(X_0 + tY)\, d\sigma_Y \quad ,$$

donde Σ es la superficie de la esfera unitaria de E_n, $Y \in \Sigma$ y $d\sigma_Y$ es el elemento de área normalizado de Σ : $\int_{\Sigma} d\sigma_Y = 1$.

T e o r e m a (1.3) (Teorema del Valor Medio de las Funciones Harmónicas) :

-2- Casi todas nuestras aplicaciones del teorema de Green serán en casos en los cuales $\mathcal{R}$ es limitado por esferas. Por esta razón no hacemos ninguna tentativa de formular este teorema en una manera general.

<u>Sea</u> u <u>una función harmónica en una región</u> $\mathcal{R}$. <u>Si</u> $X_0 \in \mathcal{R}$ <u>entonces</u>

$$\mathfrak{M}_{t,X_0}(u) = u(X_0)$$

<u>cuando la esfera</u> $\{X : |X - X_0| \leq t\}$ <u>está contenida en</u> $\mathcal{R}$.

D e m o s t r a c i ó n :

Sea $\mathcal{B}$ la frontera limitada por las superficies, Σ_t y Σ_ε , de las dos esferas $\{X : |X - X_0| \leq t\}$ y $\{X : |X - X_0| \leq \varepsilon\}$, $0 < \varepsilon < t$. Aplicamos el teorema de Green a las funciones $u(X)$ y $1/(r^{n-2})$ ($r(X) = |X - X_0|$) en la región $\{X : \varepsilon < |X - X_0| < t\}$. Obtenemos:

$$0 = \int_{\mathcal{B}} \left(u \, . \, \frac{\partial(1/r^{n-2})}{\partial n} - \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = \int_{\Sigma_t} + \int_{\Sigma_\varepsilon} .$$

Pero, usando (1.2)

$$\int_{\Sigma_t} \left(u. \frac{\partial(1/r^{n-2})}{\partial n} - \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = \int_{\Sigma_t} u.(2-n) \frac{1}{r^{n-1}} ds - \frac{1}{t^{n-2}} \int_{\Sigma_t} \frac{\partial u}{\partial n} ds =$$

$$= (2-n) \int_{\Sigma_t} \frac{u}{r^{(n-1)}} ds$$; y, del mismo modo $\int_{\Sigma_\varepsilon} = (n-2) \int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{u}{r^{(n-1)}} ds$ (el signo es diferente puesto que la dirección de la normal es la opuesta a la del caso anterior).

Entonces:

$$\frac{1}{t^{n-1}} \int_{\Sigma_t} u \, ds = \int_{\Sigma_t} \frac{u}{r^{n-1}} ds = \int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{u}{r^{n-1}} ds = \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{\Sigma_\varepsilon} u \, ds$$

Pero

$$\frac{1}{|\Sigma| t^{n-1}} \int_{\Sigma_t} u \, ds = \mathfrak{M}_{t,X_0}(u)$$, donde $|\Sigma|$ es la área de Σ , y es obvio que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|\Sigma| \varepsilon^{n-1}} \int_{\Sigma_\varepsilon} u \, ds = u(X_0)$$. Esto demuestra que $\mathfrak{M}_{t,X_0}(u) = u(X_0)$.

T e o r e m a (1.4) :

<u>Si</u> u <u>es harmónica en la región</u> $\mathcal{R}$ <u>entonces</u> $u \in C^\infty(\mathcal{R})$.

D e m o s t r a c i ó n :

Si $Y \in \mathcal{R}$ tomamos una esfera, con superficie S , tal que Y está en su interior (Y no es necesariamente el centro) y tal que esta esfera está en el interior de $\mathcal{R}$ (esto se puede hacer porque $\mathcal{R}$ es abierta). Ahora tomamos una esfera, con superficie Σ_ε, con centro Y y radio ε tan pequeño que esta esfera está en el interior de la primera esfera. Procediendo como en la última demostración obtenemos

$$\frac{1}{(2-n)|\Sigma|}\int_S \left(u\frac{\partial(1/r^{n-2})}{\partial n} - \frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds =$$

$$= \frac{1}{(2-n)|\Sigma|}\int_{\Sigma_\varepsilon} \left(u\frac{\partial(1/r^{n-2})}{\partial n} - \frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = u(Y)$$

donde $r = r(X, Y) = |X - Y|$, y $\frac{\partial}{\partial n}$ designa derivación con respecto de la variable X (en S y en Σ_ε) en la dirección de las normales a estas superficies dirigidas hacia afuera de ambas esferas.

Puesto que la variable Y en la integral

$$\int_S \left(u\frac{\partial(1/r^{n-2})}{\partial n} - \frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds$$

aparece solamente en los factores $\frac{\partial(1/r^{n-2})}{\partial n}$ y $\frac{1}{r^{n-2}}$, sigue facilmente que se puede diferenciar bajo el signo de la integral y que $u(Y) \in C^\infty(\mathcal{R})$.[3]

Un razonamiento más detallado demuestra que u es una función analítica (en el sentido que u es igual a su serie de Taylor en un entorno de cada punto de $\mathcal{R}$).

T e o r e m a (1.5) (Principio de Máximo de las Funciones Harmónicas)

<u>Si u es una función harmónica en la región $\mathcal{R}$, u no puede alcanzar un valor máximo en el interior de $\mathcal{R}$ a menos que u sea constante. De modo equivalente: si</u>

$$A = \sup_{X\in\mathcal{R}} u(X) < \infty \quad \text{entonces} \quad u(X) < A \quad \text{para cada} \quad X \in \mathcal{R}$$

<u>cuando u no es una función constante.</u>

D e m o s t r a c i ó n :

Supongamos lo contrario: existe $X_0 \in \mathcal{R}$ tal que $u(X_0) = A$. Si tomamos una esfera, con superficie S, centro X_0 y radio t, que está en el interior de $\mathcal{R}$, tenemos

$$A = u(X_0) = \mathcal{M}_{t,X_0}(u) = \int_S u(X_0 + tY)\, d\sigma_Y ,$$

-3- El caso de dos dimensiones es excepcional: en vez de la función $1/r^{n-2}$ tenemos que usar la función $\log r$ (ver los ejemplos (2) y (4)). Esta dificultad aparecerá muchas veces y cuando la encontremos en el futuro, el lector tendrá que hacer la substitución de $1/r^{n-2}$ por $\log r$

por (1.3) . Puesto que u es continua en S y $u \leq A$ en $\mathcal{R}$, u debe ser igual a A en S. Esto es, $u(X) = A$ para todos los X tal que $|X - X_0| = t$. Pero la única condición sobre t es que la esfera $\{X : |X-X_0| \leq t\}$ está en el interior de $\mathcal{R}$. Por consiguiente $u(X) = A$ en un entorno de X_0.

Entonces, vemos que el subconjunto $\{X \in \mathcal{R} \; ; \; u(X) = A\}$ es abierto en $\mathcal{R}$. Pero, por la continuidad de u en $\mathcal{R}$, este conjunto es también cerrado. Puesto que $\mathcal{R}$ es una región (en particular: un conjunto conexo), $\mathcal{R} = \{X \in \mathcal{R} \; ; \; u(X)=A\}$.

Los dos corolarios siguientes no necesitan demostración:

C o r o l a r i o (1.6) :

Sea $\mathcal{R} \subset E_n$ un conjunto abierto cuya clausura, $\bar{\mathcal{R}}$, es compacta. Supongamos que u es harmónica en $\mathcal{R}$ y continua en $\bar{\mathcal{R}}$. Entonces, u alcanza su valor máximo en $\bar{\mathcal{R}} - \mathcal{R}$.

C o r o l a r i o (1.7)

Bajo las mismas hipótesis del corolario (1.6), si $u(X) \leq A$ para $X \in \bar{\mathcal{R}} - \mathcal{R}$, entonces $u(X) < A$ para $X \in \mathcal{R}$ cuando u no es una función constante.

C o r o l a r i o (1.8) (Principio de Mínimo de las Funciones Harmónicas) :

Si u es una función harmónica no constante en la región abierta $\mathcal{R}$ y $B = \inf\limits_{X \in \mathcal{R}} u(X) > -\infty$, entonces $u(X) > B$ para cada $X \in \mathcal{R}$.

D e m o s t r a c i ó n :

$-u$ es también harmónica. Luego, se puede aplicar el teorema (1.5) a la función $-u$ y, multiplicando por -1, obtenemos la conclusión de este corolario.

Ahora sigue inmediatamente:

C o r o l a r i o (1.9) :

Bajo las mismas hipótesis del corolario (1.6), si $|u(X)| \leq A$ para $X \in \bar{\mathcal{R}} - \mathcal{R}$ entonces $|u(X)| < A$ para $X \in \mathcal{R}$ a menos que u no sea una función constante.

El lema siguiente será usado para establecer el inverso del teorema del valor medio de las funciones harmónicas.

L e m a (1.10) :

Si $u \in C^2(\mathcal{R})$, donde $\mathcal{R}$ es una región de E_n, entonces $f(t) = \mathcal{M}_{t,X_0}(u)$, como función de t, verifica

$$f''(0) = \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{M}_{t,X_0}(u) \Big]_{t=0} = \alpha_n \left[\Delta u \right] (X_0)$$

<u>para cada</u> $X_o \in \mathcal{R}$, <u>donde</u> $\alpha_n > 0$ <u>depende sólo de la dimensión</u> n .

D e m o s t r a c i ó n :

Si $v = v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función de n variables designaremos con v_k la derivada con respecto de la k - ésima variable y $v_{kj} = (v_k)_j$. Entonces

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}_{t,X_o}(u) = \frac{d}{dt}\left\{ \int_{|Y|=1} u(x_1^o + ty_1, x_2^o + ty_2, \ldots, x_n^o + ty_n)\, d\sigma_Y \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{|Y|=1} u_i(X_o + tY)\, y_i\, d\sigma_Y ,$$

donde $X_o = (x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o)$ y $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Luego,

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{M}_{t,X_o}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{|Y|=1} u_{ij}(X_o + tY)\, y_i y_j\, d\sigma_Y$$

(la condición $u \in C^2$ garantiza que podemos diferenciar bajo el signo integral).

Entonces,

$$f''(0) = \lim_{t\to 0} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{|Y|=1} u_{ij}(X_o + tY)\, y_i y_j\, d\sigma_Y = \sum_{ij=1}^{n} u_{ij}(X_o) \int_{|Y|=1} y_i y_j\, d\sigma_Y$$

Pero, por razones de simetría

$$\int_{|Y|=1} y_i y_j\, d\sigma_Y = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

mientras que

$$\int_{|Y|=1} y_i^2\, d\sigma_Y = \alpha_n ,$$

donde α_n es un número que no depende de i , $1 \leq i \leq n$.

Entonces,

$$f''(0) = \alpha_n \sum_{i=1}^{n} u_{ii}(X_o) = \alpha_n(\Delta u)(X_o) .$$

T e o r e m a (1.11) :

<u>Supongamos que</u> u <u>es continua en una región</u> $\mathcal{R}$ <u>y que, para cada</u> $X_o \in \mathcal{R}$, $u(X_o) = \mathcal{M}_{t,X_o}(u)$, <u>cuando la esfera</u> $\{X : |X - X_o| \leq t\}$ <u>está en el interior de</u> $\mathcal{R}$. <u>Entonces,</u> u <u>es una función harmónica</u>.

D e m o s t r a c i ó n :

Si $u \in C^2(\mathcal{R})$ el teorema sigue inmediatamente del lema anterior. Reduciremos el caso general a este caso.

Para hacer esto aplicaremos un "procedimiento regularizador" . Más precisamente, construyamos una función $\Phi(X) = \Phi(|X|)$ que depende sólo de $|X|$, $X \in E_n$, y que verifica:

a) $\Phi(X) = 0$ si $|X| \geq 1$;

b) $$\int_0^1 r^{n-1}\Phi(r)\, dr = 1 \; ;$$

c) $\Phi \in C^\infty(E_n)$.

Para cada $\varepsilon > 0$ ponemos $\Phi_\varepsilon(X) = \varepsilon^{-n}\Phi(\frac{1}{\varepsilon} X)$. Luego,

$$\int_{E_n} \Phi_\varepsilon(X)\, dX = \int_{E_n} \Phi(X)\, dX = 1 \; .$$

Puesto que este teorema es un teorema local podemos suponer que $\mathcal{R}$ es un conjunto limitado y, si extendemos u fuera de $\mathcal{R}$ poniendo $u(X) = 0$, para $X \in E_n - \mathcal{R}$, obtenemos una función acotada. Definimos $u_\varepsilon = u * \Phi_\varepsilon$. Entonces, $u_\varepsilon \in C^\infty$. Si $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño para que $\{X : |X - X_1| \leq \varepsilon\} \subset \mathcal{R}$, tenemos, usando b) ,

$$u_\varepsilon(X_1) = \int_{E_n} u(Y)\, \Phi_\varepsilon(X_1 - Y)\, dY = \int_{|X_1 - Y| \leq \varepsilon} u(Y)\, \Phi_\varepsilon(X_1 - Y)\, dY =$$

$$= \int_{|U| \leq \varepsilon} u(X_1 - U)\, \Phi_\varepsilon(U)\, dU \; .$$

Ahora ponemos $U = rU'$, donde $|U| = r$, y usando el hecho b) y el hecho que $\Phi(U) = \Phi(r)$, vemos que la última integral es igual a

$$\int_0^\varepsilon r^{n-1}\, \Phi_\varepsilon(r) \left\{ \int_{|U'|=1} u(X_1 - rU')\, dU' \right\} dr = \int_0^\varepsilon r^{n-1} \Phi_\varepsilon(r)\, \mathcal{M}_{r,X_1}(u)\, dr =$$

$$= u(X_1) \int_0^\varepsilon r^{n-1}\, \Phi_\varepsilon(r)\, dr = u(X_1) \; .$$

Eso es, $u(X_1) = u_\varepsilon(X_1)$ para cada $X_1 \in \mathcal{R}$ que esté a una distancia mayor que ε de $E_n - \mathcal{R}$. Puesto que $\varepsilon > 0$ es tan pequeño como deseamos y $\mathcal{R}$ es un conjunto abierto, hemos probado que $u \in C^\infty(\mathcal{R})$ y hemos hecho la reducción prometida.

Observamos que esta es otra demostración del teorema (1.4) .

C o r o l a r i o (1.12) :

<u>Si $\{u_n\}$ es una sucesión de funciones harmónicas en la región $\mathcal{R}$ tal que $u_n(X)$ converge uniformemente a una función $u(X)$ en cada subconjunto compacto de $\mathcal{R}$, entonces la función $u(X)$ es harmónica</u>

D e m o s t r a c i ó n :

Es obvio que nos basta mostrar: si $X_o \in \mathcal{R}$ y t es un radio bastante pequeño, entonces

$$u(X_o) = \mathcal{M}_{t,X_o}(u)$$

Pero, para cada n,

$$u_n(X_o) = \mathcal{M}_{t,X_o}(u_n)$$

Puesto que $u_n(X) \to u(X)$ uniformemente para X en la superficie $\{X : |X - X_o| = t\}$, $\mathcal{M}_{t,X_o}(u_n) \to \mathcal{M}_{t,X_o}(u)$ cuando $n \to \infty$. Pero, supusimos que $u_n(X_o) \to u(X_o)$; entonces,

$$u(X_o) = \lim_{n\to\infty} u_n(X_o) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{M}_{t,X_o}(u_n) = \mathcal{M}_{t,X_o}(u) \quad .$$

Un problema clásico referente a las funciones harmónicas es el célebre problema de Dirichlet . Una formulación de este problema es la siguiente: Sea $\mathcal{R}$ una región con clausura $\bar{\mathcal{R}}$ compacta y $f(X)$ una función continua definida en $\bar{\mathcal{R}} - \mathcal{R}$. ¿Existe una función u tal que

(i) $u(X)$ es harmónica en $\mathcal{R}$;

(ii) $u(X)$ es continua en $\bar{\mathcal{R}}$;

(iii) $u(X) = f(X)$ para $X \in \bar{\mathcal{R}} - \mathcal{R}$?

¿Si una función u existe, es ella la única?

Observamos que la respuesta de la última pregunta es "si", y esto se ve inmediatamente del corolario (1.9) . Estaremos interesados en un caso de este problema donde $\bar{\mathcal{R}}$ no es un conjunto compacto; esto es, cuando $\mathcal{R}$ es un "semiespacio" de E_{n+1} . Para ser más precisos tenemos que introducir algunas notaciones nuevas: Sea, como antes, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un punto de E_n ; luego, designaremos con $(t , X) = (t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un punto general de E_{n+1} . Entonces, el s e m i e s p a c i o E^+_{n+1} es el conjunto

$$\{(t , X) \in E_{n+1} ; t > 0\} \quad .$$

Haremos una identificación natural si designamos con E_n a la frontera, $\{(t , X) \in E_{n+1} ; t=0\}$, de E^+_{n+1} . Luego el problema que nos interesará es el siguiente: ¿Si $f(X)$ es una función continua en E_n , existe una función, $u(t ,X)$, harmónica en E^+_{n+1} y continua en $\bar{E}^+_{n+1}$ tal que $u(0 , X) = f(X)$ para cada $X \in E_n$? El simple ejemplo $u(t , X) = t$ demuestra que, sin hacer algunas restricciones, el problema no tiene solución única. Restricciones apropiadas son las siguientes :

T e o r e m a (1.13) :

Sea $f(X)$ una función continua en E_n que se anula en ∞ (esto es, $f(X)\to 0$ cuando $|X|\to\infty$). Entonces, existe una única función $u(t, X)$, definida en $\overline{E^+_{n+1}} = E^+_{n+1} \cup E_n$ tal que

(a) $u(t, X)$ es harmónica en E^+_{n+1} ;

(b) $u(t, X)$ es continua en $E^+_{n+1} \cup E_n = \overline{E^+_{n+1}}$

y se anula en ∞ (esto es, $u(t, X)\to 0$ cuando $|X|^2 + t^2 \to \infty$) ;

(c) $u(0, X) = f(X)$.

Además,

$$u(t, X) = \int_{E_n} f(U)\, P(t, |X-U|)\, dU$$

donde $p(t, |Y|) = \dfrac{c_n}{(2\pi)^n} \dfrac{t}{(t^2 + |Y|^2)^{(n+1)/2}}$ es el núcleo de Poisson .

D e m o s t r a c i ó n :

El hecho que sólo una función u, con estas propiedades pueda existir sigue del principio de máximo. En efecto, si existiese otra función harmónica, u_1, con estas propiedades, entonces se podría demostrar fácilmente que $|u - u_1|$ debe alcanzar un valor máximo en el interior de E^+_{n+1}. Esto es, $u - u_1$, es una función constante. Puesto que $u(0, X) - u_1(0, X) = f(X) - f(X) = 0$, $u - u_1 \equiv 0$.

Ahora, tenemos que mostrar que la función

$$u(t, X) = \int_{E_n} P(t, |X-U|)\, f(U)\, dU$$

satisface las propiedades (a) , (b) , (c) .

Usando una prueba elemental vemos que se puede derivar u bajo el signo de la integral; luego, el hecho que $P(t, |X-U|)$ es una función harmónica (ver ejemplos (4) y la segunda parte de (3)) implica que $u(t, X)$ es harmónica también. Esto demuestra (a) .

Si $X_0 \in E_n$, entonces

$$|u(t, X) - f(X_0)| \leq |u(t, X) - f(X)| + |f(X) - f(X_0)| \quad .$$

Luego, para establecer la parte (c) y la continuidad de u nos basta mostrar que, dado un $\varepsilon > 0$, $|u(t, X) - f(X)|$ si (t, X) es bastante cercano de X_0 (porque, entonces, el término $|f(X) - f(X_0)|$ será pequeño por la continuidad de f) . Un análisis cuidadoso de la demostración de (5.10) del primer capítulo nos da la desigualdad

$$|u(t\,,X) - f(X)| \leq$$

$$\leq c\,\eta^n \Delta_X(\eta)\, P(t,\eta) + c\int_0^{\eta} s^n \Delta_X(s)\, |P_s'(t,s)|\, ds + 2\,||f||_\infty \int_{|U|>\eta} p(t,|U|)\, dU$$

Puesto que f es uniformemente contínua (esto sigue facilmente) $\Delta_X(s)$ es pe queña cuando s es pequeña, uniformemente en X. Entonces eligiendo primero η, y, despues, t, como hicimos en la demostración de (5.10), obtenemos la continuidad de u en $\overline{E^+_{n+1}}$ y, tambièn, (c).

Nos resta mostrar que $u(t\,,X) \longrightarrow 0$ cuando $|X|^2 + t^2 \to 0$. Primero, mostraremos que, si $\varepsilon > 0$, existe $t_o > 0$ tal que $|u(t\,,X)| < \varepsilon$ para todos los X cuando $t \geq t_o$. Sea $a > 0$ tal que $|f((U)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $|U| > a$. Enton ces,

$$\left|\int_{E_n} f(U)\, P(t,\, |X-U|)\, dU\right| = \int_{|U|\leq a} |f(U)\, P(t\,,|X-U|)|\, dU + \int_{|U|>a} |f(U)P(t,|X-U)|\, dU$$

$$\leq \frac{c_n}{(2\pi)^n}\,\frac{1}{t^n}\int_{|U|\leq a} |f(U)|\, dU + \frac{\varepsilon}{2}\int_{E_n} P(t\,,|X-U|)\, dU < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad ,$$

si $t \geq t_o$, donde $t_o^n = \dfrac{2c_n}{\varepsilon}\,\dfrac{1}{(2\pi)^n}\displaystyle\int_{|U|\leq a} |f(U)|\, dU$.

Ahora mostraremos que si $t < t_o$, existe $k > 0$ tal que $|u(t,X)| < \varepsilon$ cuando $|X| > k$. Esto concluirá la demostración dèl teorema. Tenemos

$$|u(t\,,X)| \leq \left|\int_{|X-U|\leq\eta} f(U)\, P(t\,,|X-U|)\, dU\right| + \left|\int_{|X-U|>\eta} f(U)\, P(t\,,|X-U|)\, dU\right| \leq$$

$$\leq \max_{|X-U|\leq\eta} |f(U)| \,.\, 1 + \frac{t_o\, c_n\, ||f||_\infty}{(2\pi)^n}\int_{|V|>\eta} \frac{dV}{|V|^{n+1}} \quad .$$

Tomamos η tan grande como para que el último término sea menor que $\frac{\varepsilon}{2}$; en tonces, tomamos $|X|$ tan grande como para que $|f(U)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para U en la esfera $|X-U| \leq \eta$ (esto se puede hacer puesto que f se anula en ∞).

Se puede considerar este teorema como el sustituto, para $p = \infty$, del teorema si guiente:

T e o r e m a (1.14) :

Sea $f(X) \in L^p$, $1 \leq p < \infty$. Entonces, existe una única funcion $u(t\,,X)$, definida en E^+_{n+1} tal que

(a) $u(t\,,X)$ es harmónica en $\overline{E^+_{n+1}}$;

(b) $\left(\int_{E_n} |u(t, X)|^p \, dX\right)^{1/p} \leq A < \infty$ <u>para todos los</u> $t > 0$;

(c) $\left(\int_{E_n} |u(t, X) - f(X)|^p \, dX\right)^{1/p} \to 0$ <u>cuando</u> $t \to 0$.

Además,

$$(*) \qquad u(t, X) = \int_{E_n} f(U) \, P(t, |X-U|) \, dU \; .$$

D e m o s t r a c i ó n :

Es fácil verificar que la integral de Poisson $(*)$ define una función continua en E^+_{n+1} . Luego, por (1.11) , la parte (a) quedará probada si mostramos que, para $(t, X) \in E^+_{n+1}$,

$$u(t,X) = u(t,x_1,x_2,\ldots,x_n) = \int_{s^2+y_1^2+\ldots+y_n^2=1} u(t+rs,x_1+ry_1,\ldots,x_n+ry_n) \, d\sigma_{(s,y_1,\ldots,y_n)}$$

donde $0 \leq r < t$ (esto es, la esfera con centro (t,X) y radio r tiene que estar en E^+_{n+1}) y $d\sigma_{(s,y_1,\ldots,y_n)} = d\sigma_{(s,Y)}$ es el elemento de área de la superficie de la esfera unitaria en E_{n+1} . Pero, usando el teorema de Fubini y el hecho que $P(t, \cdot|X-U|)$ es harmónico :

$$\int_{s^2+y_1^2+\ldots+y_n^2=1} u(t+rs,x_1+ry_1,\ldots x_n+ry_n) \, d\sigma_{(s,y_1,\ldots,y_n)} = \int_{E_n} f(U) \left\{ \int_{s^2+y_1^2+\ldots+y_n^2=1} P(t+rs, |X-U+rY|) \, d\sigma_{(s,Y)} \right\} dU =$$

$$= \int_{E_n} f(U) \, P(t,|X-U|) \, dU = u(t, X) \; .$$

Para mostrar (b) , nos basta probar que si $g \in L^q(E_n)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y $\|g\|_q = 1$, entonces, existe un número $A < \infty$ tal que

$$\int_{E_n} |u(t, X) \, g(X)| \, dX \leq A \; .$$

Tenemos, usando la desigualdad de Hölder y la propiedad (ii) del núcleo de Poisson (ver (5.7) del primer capítulo) :

$$\int_{E_n} |u(t, X) \, g(X)| \, dX \leq \int_{E_n} |g(X)| \left\{ \int_{E_n} |f(X-U)| \, P(t, |U|) \, dU \right\} dX =$$

$$= \int_{E_n} P(t,|U|) \left\{ \int_{E_n} |g(X)| \, |f(X-U)| \, dX \right\} dU \leq$$

$$\leq \int_{E_n} P(t,|U|) \, \|g\|_q \cdot \|f\|_p \, dU = 1 \cdot \|f\|_p \int_{E_n} P(t,|U|) \, dU = \|f\|_p \; .$$

La parte (c) de este toerema es el teorema (5.7) del capítulo anterior.

Observemos que hemos probado que podemos usar $A = ||f||_p$ en la parte (b) del teorema (1.14) . Puesto que $\int |u(t,X)|^p \, dX \to ||f||_p^p$ (esto sigue de (c)), $A = ||f||_p$ es la mejor constante que se puede usar en la desigualdad

$$\left(\int_{E_n} |u(t,X)|^p \, dX\right)^{1/p} \leq A \quad .$$

§2.- FUNCIONES HARMONICAS CONJUGADAS Y TRANSFORMADA DE HILBERT .

Consideraremos primero el caso de dos dimensiones. Sea $F(z) = F(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función analítica en una región $\mathcal{R}$. Supondremos que los hechos siguientes son conocidos:

(2.1) Las funciones u y v son harmónicas y verifican las ecuaciones de Cauchy - Riemann ,

$$u_x = v_y$$

$$u_y = - v_x \quad ,$$

en la región $\mathcal{R}$. Inversamente, si u y v verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann en la región $\mathcal{R}$ entonces $F = u + iv$ es analítica en $\mathcal{R}$.

La primera de estas ecuaciones es la condición que garantiza la existencia de una función, $h(x,y)$, en cada subregión de $\mathcal{R}$ que es simplemente conexa, y tal que : $\nabla h = (h_x , h_y) = (v,u)$. La segunda ecuación, evidentemente, implica que h es harmónica. Inversamente, es obvio que, si (v,u) es el gradiente de una función harmónica, en cada subregión de $\mathcal{R}$ que es simplemente conexa, entonces u y v verifican las ecuaciones de Cauchy - Riemann . Esto es:

(2.2) $$F(z) = F(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

es una función analítica en una región, $\mathcal{R}$, simplemente conexa si y sólo si existe una función harmónica $h(x,y)$, definida en $\mathcal{R}$, tal que $\nabla h = (v.u)$.

Si u es una función harmónica en una región $\mathcal{R}$, entonces una función v definida en $\mathcal{R}$ y tal que $F = u + iv$ es analítica, se llama una función conjugada de u. Cuando $\mathcal{R}$ es simplemente conexa se puede siempre construir una función conjugada de una función harmónica u definida en $\mathcal{R}$. Puesto que una función analítica con valores puramente imaginarios debe ser constante, dos funciones conjugadas de u difieren a lo sumo en una constante.

Cuando $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, hemos construido una función harmónica, $u(x.y)$, en E_2^+, tal que $\lim_{y\to 0+} u(x,y) = f(x)$ en la norma de L^p, y este resultado es tambien cierto cuando $p=\infty$ si f es continua y se anula en el ∞ (ver los teoremas (1.13) y (1.14)). Luego, consideraremos el problema de hallar las funcio - nes conjugadas de estas $u(x,y)$. Al menos formalmente, la solución de este problema es muy fácil si tenemos en cuenta el cuarto ejemplo que hemos dado al principio de la primera sección de este capítulo. Tenemos, prescindiendo del problema de la existencia de integrales,

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, P(y,|x-u|)\, du = \frac{c_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, \frac{y}{y^2+(x-u)^2}\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\log\sqrt{y^2+(x-u)^2}\; du\right\} .$$

Entonces, por (2.2), una función conjugada de $u(x,y)$ debería ser

$$v(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\log\sqrt{y^2+(x-u)^2}\; du\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\frac{(x-u)}{y^2+(x-u)^2}\, du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, Q(y,x-u)\, du .$$

En efecto, la integral

$$(2.3) \qquad v(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\frac{(x-u)}{y^2+(x-u)^2}\, du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, Q(y,x-u)\, du$$

está bien definida cuando $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, y, por ejemplo, el argumento que hemos dado en la demostración del teorema (1.14) demuestra que $v(x,y)$ es una fun - ción harmónica en E_2^+. Además, se puede probar que las derivadas de v, como las de u, se pueden tomar bajo el signo de la integral y, entonces, las funciones u y v verifican las ecuaciones de Cauchy - Riemann y la función

$$F(Z) = F(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left\{\frac{y+i(x-u)}{y^2+(x-u)^2}\right\} du = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)}{u-z}\, du$$

es analítica en el semiplano E_2^+ :

Supongamos que f tiene valores reales. Sabemos que la parte real de $F(Z)$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, P(y,|x-u|)\,du$, converge, en la norma de L^p, $1 \leq p \leq \infty$, y p.p., a la función f cuando $y \to 0$. Luego, es natural preguntar ¿Qué sucede con la parte imaginaria de F cuando $y \to 0$? Formalmente,

$$\lim_{y\to 0} v(x,y) = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\frac{x-u}{y^2+(x-u)^2}\, du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)}{x-u}\, du .$$

Pero la última integral no existe aún para una función f tan inocente como la función característica del intervalo $(0,1)$. Entonces, tenemos que darle un significa do diferente del de la integral de Lebesgue. Mostraremos, que si definimos

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)}{x-u}\,du$$

como el valor principal de Cauchy ,

$$(2.4)\qquad \tilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\pi}\int_{|x-u|\geq\varepsilon}\frac{f(u)}{x-u}\,du ,$$

entonces $\tilde{f}(x)$ existirá p.p. asi como en la norma de L^p , $1<p<\infty$, y , también, $\lim_{y\to 0+} v(x,y) = \tilde{f}(x)$ en estos sentidos. Luego, la función $\tilde{f}(x)$ se llamará la t r a n s f o r m a d a d e H i l b e r t de la función f .

Primero, observamos que la integral

$$\tilde{f}_\varepsilon(x) = \int_{|x-u|\geq\varepsilon}\frac{f(u)}{x-u}\,du = \int_{|u|\geq\varepsilon}\frac{f(x-u)}{u}\,du$$

está bien definida para cada $\varepsilon>0$ cuando $f\in L^p$, $1\leq p<\infty$. El lema siguiente demuestra que, al menos en el sentido de la norma de L^p , la existencia del límite en (2.4) es equivalente a la existencia del límite $\lim_{y\to 0+} v(x,y)$:

L e m a (2.5) :

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\,\frac{u}{u^2+\varepsilon^2}\,du - \frac{1}{\pi}\int_{|u|\geq\varepsilon}\frac{f(x-u)}{u}\,du\right\} = 0$$

<u>en la norma de</u> L^p , <u>cuando</u> $f\in L^p$, $1\leq p<\infty$.

D e m o s t r a c i ó n :

Fijamos un número $R>0$ y observamos que

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,\frac{u}{u^2+\varepsilon^2}\,du = 0 = \int_{R\geq|u|\geq\varepsilon}\frac{f(x)}{u}\,du .$$

Entonces,

$$\int_{-R}^{R} f(x-u)\,\frac{u}{u^2+\varepsilon^2}\,du - \int_{R\geq|u|\geq\varepsilon}\frac{f(x-u)}{u}\,du =$$

$$= \int_{-R}^{R}\frac{\{f(x-u)-f(x)\}\,u}{u^2+\varepsilon^2}\,du - \int_{R\geq|u|\geq\varepsilon}\frac{f(x-u)-f(x)}{u}\,du =$$

$$= \int_{|u|<\varepsilon}\frac{[f(x-u)-f(x)]\,u}{u^2+\varepsilon^2}\,du + \int_{R\geq|u|\geq\varepsilon}\left\{\frac{u}{u^2+\varepsilon^2}-\frac{1}{u}\right\}\left\{f(x-u)-f(x)\right\}du$$

Usando la desigualdad de Minkowski y el lema (3.4) del capítulo I, tenemos

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{|u|<\varepsilon}\frac{[f(x-u)-f(x)]\,u}{u^2+\varepsilon^2}\,du\right|^p dx\right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \int_{|u|<\varepsilon} \frac{u\,||f(x-u)-f(x)||_p}{u^2+\varepsilon^2}\,du \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{|u|<\varepsilon} ||f(x-u)-f(x)||_p\,du \longrightarrow 0$$

cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$ (independientemente de R). Tenemos también

$$\left|\int_{R\geq|u|\geq\varepsilon}\left\{\frac{u}{u^2+\varepsilon^2}-\frac{1}{u}\right\}\left\{f(x-u)-f(x)\right\}du\right| \leq \varepsilon^2\int_{R\geq|u|\geq\varepsilon}\frac{|f(x-u)-f(x)|}{u^3}\,du =$$

$$= \varepsilon^2\left\{\int_{\eta\geq|u|\geq\varepsilon} + \int_{R\geq|u|>\eta}\right\}.$$

Entonces:

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{R\geq|u|\geq\varepsilon}\left\{\frac{u}{u^2+\varepsilon^2}-\frac{1}{u}\right\}\left\{f(x-u)-f(x)\right\}du\right|^p dx\right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \varepsilon^2\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{\eta\geq|u|\geq\varepsilon}\frac{\{f(x-u)-f(x)\}}{u^3}\,du\right|^p dx\right\}^{1/p} + \varepsilon^2\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{R\geq|u|\geq\eta}\frac{\{f(x-u)-f(x)\}}{u^3}du\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \varepsilon^2\int_{\eta\geq|u|\geq\varepsilon}\frac{||f(x-u)-f(x)||_p}{|u|^3}\,du + 2\,||f||_p\,\varepsilon^2\int_{|u|\geq\eta}\frac{du}{|u|^3}$$

Usando (3.4) del capítulo anterior, vemos que podemos elejir una η (independientemente de R) para hacer el primer término de esta suma tan pequeño como lo deseamos. Con esta η , entonces el segundo término sepuede hacer tambien tan pequeño como lo deseamos (independientemente de R), elijiendo ε bastante pequeña. Puesto que estas estimaciones son independientes de R , hemos demostrado el lema.

Teorema (2.6) :

Si $f \in L^2$ y $\tilde{f}_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\int_{|t|\geq\varepsilon}\frac{f(x-t)}{t}\,dt$ entonces el límite $\tilde{f}(x)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\tilde{f}_\varepsilon(x)$ existe en la norma de L^2 . El operador que hace corresponder $\tilde{f}$ a la función f es unitario. Además $\tilde{\tilde{f}} = -f$.

Primera demostración :

Pongamos

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,P(y,|x-u|)\,du$$

y

$$v(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\,Q(y,u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\,\frac{u}{u^2+y^2}\,du \quad .$$

Por el lema (2.5) nos basta mostrar que existe una función $\tilde{f}$ tal que

(*) $$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}|v(x,\varepsilon)-\tilde{f}(x)|^2\,dx = 0$$

Si

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \chi_{(a_k, b_k)}$$

es una función escalera, un calculo fácil demuestra que

$$v(x,y) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} c_k \log \sqrt{\frac{(x-a_k)^2 + y^2}{(x-b_k)^2 + y^2}}$$

Puesto que $\log |1 + \frac{d}{x}| = O(\frac{1}{x})$ cuando $x \to \infty$ y la singularidad $\log |x|$, en $x = 0$, es muy mansa, obtenemos $(*)$, para f escalera, donde

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} c_k \log \left| \frac{x-a_k}{x-b_k} \right| .$$

Ahora, mostraremos que la transformada de Hilbert es una isometría en el subespacio denso de funciones escaleras. Puesto que

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} | u(x,\varepsilon) - f(x) |^2 \, dx = 0$$

(ver el teorema (5.7) del primer capítulo), nos basta, en virtud de $(*)$, mostrar

$$(**) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} [v(x,y)]^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} [u(x,y)]^2 \, dx$$

para cada $y > 0$. Usando las ecuaciones de Cauchy - Riemann e integrando por partes (teniendo en mente que $u(x,y) \to 0$ y $v(x,y) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$) tenemos:

$$\frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{\infty} [v(x,y)]^2 \, dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} v_y(x,y) \, v(x,y) \, dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x,y) \, v(x,y) \, dx =$$

$$= -2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) \, v_x(x,y) \, dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) \, u_y(x,y) \, dx = \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{\infty} [u(x,y)]^2 \, dx .$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} [v(x,y)]^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} [u(x,y)]^2 \, dx + \text{una constante} .$$

Pero ambos miembros de $(**)$ tienden a 0 cuando y tiende a ∞ ; entonces, la constante aditiva tiene que ser 0 y $(**)$ está probado. Observamos que esta demostración es válida para todas las funciones $f \in L^2(-\infty, \infty)$, puesto que $u(x,y) \to 0$ y $v(x,y) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$, para $f \in L^2$.

Ahora, si g es una función general de L^2, sea $\{g^{(n)}\}$ una sucesión de funciones escaleras tal que $\lim_{n \to \infty} \| g^{(n)} - g \|_2 = 0$ y $\tilde{g}$ el límite, en L^2, de

la sucesión $\{\tilde{g}^{(n)}\}$ (que existe puesto que $\|\tilde{g}^{(n)} - \tilde{g}^{(m)}\|_2 = \|g^{(n)} - g^{(m)}\|_2$).
Aplicando (**) a las funciones $f^{(n)} = g - g^{(n)}$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\, v_n(x,y)\,]^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} [\, u_n(x,y)\,]^2\,dx ,$$

donde

$$v_n(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(u)\,Q(y,x-u)\,du \qquad y \qquad u_n(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(u)\,P(y,|x-u|)\,du .$$

Entonces,

$$(+) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [\, g(u) - g^{(n)}(u)\,]\,Q(y,x-u)\,du \right\}^2 dx = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [\, u_n(x,y)\,]^2\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$\leq \|g^{(n)} - g\|_2$ (ver la observación hecha despues de la demostración del teorema (5.7) del capítulo I) .

Dado $\delta > 0$, sea n tan grande que $\|g^{(n)} - g\|_2 = \|\tilde{g}^{(n)} - \tilde{g}\|_2 < \frac{\delta}{3}$.
Con esta n fijada, sea y tan pequeña que

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^{(n)}(u)\,Q(y,x-u)\,du - \tilde{g}^{(n)}(x) \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{\delta}{3}$$

Entonces, usando (+)

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,Q(y,x-u)\,du - \tilde{g}(x) \right\|_2 \leq$$

$$\leq \left\| \int_{-\infty}^{\infty} [\, g(u) - g^{(n)}(u)\,]\,Q(y,x-u)\,du \right\|_2 + \left\| \int_{-\infty}^{\infty} g^{(n)}(u)\,Q(y,x-u)\,du - \tilde{g}^{(n)}(x) \right\|_2 +$$

$$+ \|\tilde{g}^{(n)} - \tilde{g}\|_2 < \|g^{(n)} - g\|_2 + \left\| \int_{-\infty}^{\infty} g^{(n)}(u)\,Q(y,x-u)\,du - \tilde{g}^{(n)}(x) \right\|_2 + \|\tilde{g}^{(n)} - \tilde{g}\|_2$$

$$< \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta .$$

Ahora mostraremos que $\tilde{\tilde{f}} = -f$. Esto probará, también, que la transformada de Hilbert es "sobre" y, por consiguiente, unitaria. Basta mostrar esto cuando $f(x) = u(x,y_0)$, $y_0 > 0$, donde u es la intergral de Poisson de una funcíon g de $L^2(-\infty,\infty)$ (porque hemos visto que esta clase de funciones es densa en L^2). Sea $v(x,y)$ la integral conjugada de Poisson , $v(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,Q(y,x-u)\,du$, de g . Luego, $\tilde{f}(x) = \lim_{y\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,Q(y,x-u)\,du$ (en el sentido de la norma de L^2). Pero $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,Q(y,x-u)\,du$ es la única función conjugada de

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,P(y,x-u)\,du = u(x,y+y_0)$$

(ver (5.15) del capítulo I) que se anula cuando $y \to \infty$. Además, $v(x,y+y_0)$ es una función conjugada de $u(x,y+y_0)$ que se anula cuando $y \to \infty$. Entonces,

$$v(x,y+y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, Q(y,x-u)\, du$$

y $\tilde{f}(x) = v(x,y_0)$. Puesto que $v(x,y+y_0)$ es harmónica en una región que contiene a $\overline{E_2^+}$ y un calculo fácil demuestra que $v(x,y+y_0) \to 0$. cuando $x^2 + y^2 \to \infty$ obtenemos, también,(ver (1.13)

$$v(x,y+y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(u,y_0)\, P(y,|x-u|)\, du$$

Ahora, tenemos

$$\tilde{\tilde{f}}(x) = \lim_{y\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} v(u,y_0)\, Q(y,x-u)\, du$$

y $\int_{-\infty}^{\infty} v(u,y_0)\, Q(y,x-u)\, du$ es la única función conjugada de $v(x,y+y_0)$ que se anula cuando $y \to \infty$. Pero $-u(x,y+y_0)$ es una función conjugada de $v(x,y+y_0)$ que se anula cuando $y \to \infty$ (porque, si $u+iv$ es analítica entonces $v-iu$ es analítica), Esto demuestra que

$$\tilde{\tilde{f}}(x) = \lim_{y\to 0} -u(x,y+y_0) = -u(x,y_0) = f(x)$$

S e g u n d a d e m o s t r a c i ó n :

Pongamos

$$k_\varepsilon^\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{para } 0 < \varepsilon \leq |x| \leq \eta < \infty \\ 0 & \text{en los demás puntos.} \end{cases}$$

Mostraremos que los límites obtenidos haciendo primero $\eta \to \infty$ y, después $\varepsilon \to 0$ de

$$H_\varepsilon^\eta f = \frac{1}{\pi} k_\varepsilon^\eta * f = \frac{1}{\pi} \int_{\eta \geq |t| \geq \varepsilon} \frac{f(x-t)}{t}\, dt$$

existen en el sentido de la norma de L^2 . Para esto tomaremos transformadas de Fourier :

$$\chi_\varepsilon^\eta(y) = \frac{1}{\pi} \int_{\eta \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{e^{ixy}}{x}\, dx \quad .$$

Las funciones $\chi_\varepsilon^\eta(y)$ verifican:

(1) $|\chi_\varepsilon^\eta(y)| \leq A$ independientemente de y, ε , η ;

(2) $\lim\limits_{\substack{\eta \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \chi_\varepsilon^\eta(y) = i \text{ signo } y$.

Esto se ve de la manera siguiente: si $y > 0$

$$\chi_\varepsilon^\eta(y) = \frac{2i}{\pi}\int_\varepsilon^\eta \frac{\operatorname{sen} xy}{x}\,dx = \frac{2i}{\pi}\int_{\varepsilon y}^{\eta y}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

$$\chi_\varepsilon^\eta(y) = -\chi_\varepsilon^\eta(|y|) \quad \text{si} \quad y < 0$$

Puesto que $\int_a^b \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ es acotada uniformemente (independientemente de a y b) la primera propiedad de $\chi_\varepsilon^\eta(y)$ está probada. Ahora, usando el resultado

$$\lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to 0}} \int_a^b \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2},$$

obtenemos la segunda propiedad.

Entonces (por (6.12) del primer capítulo)

$$\mathfrak{J}(H_\varepsilon^\eta f)(y) = \chi_\varepsilon^\eta(y)\,\mathfrak{J}(f)(y)$$

Por consiguiente,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\lim_{\eta\to\infty} \mathfrak{J}(H_\varepsilon^\eta f)(y)\right\} = (i \text{ signo } y)\,\mathfrak{J}(f)(y)$$

existe en la norma de L^2 . El teorema ahora sigue del teorema de Plancherel

Observamos que hemos probado el importante resultado:

C o r o l a r i o (2.7) :

<u>Si</u> $f \in L^2(-\infty,\infty)$ <u>y</u> $\tilde{f}$ <u>es la transformada de Hilbert de</u> f <u>entonces</u>

$$\mathfrak{J}(\tilde{f})(y) = (i \text{ signo } y)\,\mathfrak{J}(f)(y).$$

C o r o l a r i o (2.8) :

<u>Si</u> $f \in L^2(-\infty,\infty)$ <u>entonces</u>

$$\lim_{y\to 0+} v(x,y) = \lim_{y\to 0+} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{u^2+y^2}\, f(x-u)\,du = \tilde{f}(x)$$

<u>Para casi todos los</u> $x \in (-\infty,\infty)$.

D e m o s t r a c i ó n :

Si mostramos que

(a) $$v(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{u^2+y^2}\,\tilde{f}(x-u)\,du$$

entonces el resultado (2.8) es un corolario del teorema (5.10) del primer capítulo[-1-]

-1- De nuevo, tenemos que modificar la demostración de este teorema para incluir el caso $p > 1$. Esto se puede hacer facilmente.

Pero el hecho que $\tilde{\tilde{f}} = -f$ significa que

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{u^2+y^2} \tilde{f}(x-u)\, du = -f(x) \quad \text{(en la norma de } L^2) \quad .$$

Entonces la función harmónica $\frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{u^2+y^2} \tilde{f}(x-u)\, du$ verifica todas las propiedades de la integral de Poisson de $f(x)$ enunciadas en el teorema (1.14) (la segunda propiedad sigue de (* *) en la demostración de (2.6), usando $\tilde{f}$ en vez de f). Esto es

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{u^2+y^2} \tilde{f}(x-u)\, du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{u^2+y^2} f(x-u)\, du \quad .$$

Pero sabemos que

$$v(x,y) - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{u^2+y^2} f(x-u)\, du =$$

$$= -i \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{y}{u^2+y^2} + i \frac{u}{u^2+y^2} \right\} f(x-u)\, du \right)$$

y, también,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{y}{u^2+y^2} + i \frac{u}{u^2+y^2} \right\} \tilde{f}(x-u)\, du$$

son funciones analíticas.

Puesto que las partes reales de estas funciones son iguales y ambas partes imaginarias tienden a cero cuando y tiende a ∞ éstas dos funciones son iguales y obtenemos (a) .

C o r o l a r i o (2.9) :

Si $f \in L^2(-\infty,\infty)$ entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|u|\geq\varepsilon} \frac{f(x-u)}{u}\, du = \tilde{f}(x)$$

para casi todos los $x \in (-\infty,\infty)$.

D e m o s t r a c i ó n :

Por el último corolario, nos basta mostrar que

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{u^2+\varepsilon^2} f(x-u)\, du - \int_{|u|\geq\varepsilon} \frac{f(x-u)}{u}\, du \right\} = 0$$

para casi todos los $x \in (-\infty,\infty)$.

Mostraremos que este límite es 0 cuando x es un punto del conjunto de Lebesgue de f : esto es, x es un punto tal que

$$\frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} |f(x \pm u) - f(x)|\, du = \frac{\phi^{\pm}(\delta)}{\delta} = \frac{\phi_x^{\pm}(\delta)}{\delta} \longrightarrow 0$$

cuando $\delta \to 0$. Supondremos conocido el hecho que casi todos los x están en el conjunto de Lebesgue de una función en L^p , $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Siguiendo la primera parte de la demostración del lema (2.5) tenemos:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{u^2+\varepsilon^2} f(x-u)\,du - \int_{|u|\geqslant\varepsilon} \frac{f(x-u)}{u}\,du \right| =$$

$$= \left| \int_{|u|\leqslant\varepsilon} \left[f(x-u) - f(x) \right] \frac{u}{u^2+\varepsilon^2}\,du + \int_{|u|\geqslant\varepsilon} f(x-u) \left(\frac{u}{u^2+\varepsilon^2} - \frac{1}{u} \right) du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_{|u|\leqslant\varepsilon} | f(x-u) - f(x) |\,du +$$

$$+ \int_{|u|\geqslant\eta} |f(x-u)| \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+\varepsilon^2} \right) du + \varepsilon^2 \int_{\eta>|u|\geqslant\varepsilon} \frac{|f(x-u) - f(x)|}{|u|(u^2+\varepsilon^2)}\,du$$

donde η es un número, independiente de ε , que eligiremos para estimar el último término. Pero, primero observamos que el primer término tiende a cero con ε si x está en el conjunto de Lebesgue . También el segundo término tiende a cero con ε puesto que la familia de funciones integrables

$$| f(x-u) | \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+\varepsilon^2} \right)$$

decrece a cero. Entonces, nos basta mostrar que podemos elegir η , independientemente de ε , tal que el último término es pequeño. Tenemos

$$\varepsilon^2 \int_{\eta>|u|\geqslant\varepsilon} \frac{|f(x-u) - f(x)|}{|u|(u^2+\varepsilon^2)}\,du \leqslant \varepsilon \left(\int_{\varepsilon}^{\eta} + \int_{-\eta}^{-\varepsilon} \right) \frac{|f(x-u) - f(x)|}{u^2}\,du$$

Integrando por partes, obtenemos

$$\varepsilon \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{|f(x-u) - f(x)|}{u^2}\,du = \left(\frac{\varepsilon\, \phi(\eta)}{\eta^2} - \frac{\phi(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) + 2\varepsilon \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{\phi(u)}{u} \cdot \frac{1}{u^2}\,du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\phi(\eta)}{\eta} + 2\varepsilon \left\{ \max_{|u|\leqslant\eta} \frac{\phi(u)}{u} \right\} \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{du}{u^2} \leqslant 3 \left(\max_{|u|\leqslant\eta} \frac{\phi(u)}{u} \right)$$

Entonces, con una estimación similar para $\varepsilon \int_{-\eta}^{-\varepsilon}$, se ve que el último término es tan pequeño como deseamos, para η pequeña, cuando x está en el conjunto de Lebesgue de f .

Es importante observar que hemos probado el siguiente resultado (que es análogo al lema (2.5)) :

L e m a (2.10) :

Si $f \in L^p(-\infty,\infty)$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\pi}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{u^2+\varepsilon^2}\, f(x-u)\, du - \int_{|u|\geq\varepsilon} \frac{f(x-u)}{u}\, du \right\} = 0$$

para casi todos los $x \in (-\infty,\infty)$.

Hasta ahora hemos estudiado la transformada de Hilbert principalmente como una transformación en $L^2(E_1)$. Es nuestra intención extender este estudio a los otros espacios L^p y, también, al caso de n dimensiones. Pero, primero tenemos que desarrollar unos teoremas generales sobre transformadas en espacios L^p y, también, algunos resultados generales de la teoría de funciones harmónicas.

§3.- INTERPOLACION DE OPERADORES EN LOS ESPACIOS L^p .

Los teoremas siguientes pertenecen a la teoría general de los espacios con medida. Más específicamente sean $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ y $(N, \mathfrak{N}, \nu)$ dos espacios de puntos M y N con σ - anillos de subconjuntos medibles $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ y medidas μ y ν . Supondremos que estos espacios sean σ - finitos (o, más generalmente, espacios en los cuales el teorema de Radon - Nikodym es válido). Nos interesarán operadores A definidos en un espacio lineal, $\mathcal{S}$, de funciones medibles definidas en M y tal que, cuando $f \in \mathcal{S}$, Af es una función medible definida en N . Si $\mathcal{S}$ contiene a $L^p(M)$, $1 \leq p \leq \infty$, y existe una constante, a , tal que, para cada $f \in L^p(M)$,

$$(3.1) \qquad ||Af||_q = \left(\int_N |Af|^q\, d\nu \right)^{1/q} \leq a \left(\int_M |f|^p\, d\mu \right)^{1/p} = a\, ||f||_p$$

donde $1 \leq q \leq \infty$, diremos que A es de tipo (p,q) . La menor constante, a , que verifica (3.1) se llama la norma del operador A (restringido a $L^p(M)$) y la designaremos con $||A||_{p,q}$. Si A es un operador lineal la condición (3.1) es equivalente a la continuidad de A como función definida en $L^p(M)$ y con valores en $L^q(N)$.

Si el espacio lineal $\mathcal{S}$ contiene a dos espacios $L^{p_1}(M)$ y $L^{p_2}(M)$ (supongamos $p_1 < p_2$) entonces contiene a todos los espacios $L^p(M)$, para $p_1 \leq p \leq p_2$. Esto se ve facilmente: si $f \in L^p(M)$ entonces $f = f_1 + f_2$ donde

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq 1 \\ 0 & \text{en los demás puntos} \end{cases}$$

y $f_1 = f - f_2$. Por consiguiente,

$$\int |f_1|^{p_1}\, d\mu \leq \int |f_1|^p\, d\mu \leq \int |f|^p\, d\mu < \infty$$

$$\int |f_2|^{p_2}\, d\mu \leq \int |f_2|^p\, d\mu \leq \int |f|^p d\mu < \infty$$

Luego, si A es de tipos (p_o,q_o) y (p_1,q_1) y si $A(g+h)$ está bien definida cuando lo estan Ag y Ah entonces Af está bien definida para $f \in L^p(M)$, cuando p está entre p_o y p_1. Un teorema célebre de M. Riesz nos da mucna más información:

T e o r e m a (3.2) :

Si A es una transformada lineal de tipos (p_o,q_o) y (p_1,q_1) entonces A es de tipo (p,q) donde $p = p_t$ y $q = q_t$, $0 \leq t \leq 1$, verifican

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_o} + \frac{t}{p_1} \qquad\qquad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_o} + \frac{t}{q_1} \quad .$$

Además,

(3.3) $$||A||_{p,q} \leq (||A||_{p_o,q_o})^{1-t} (||A||_{p_1,q_1})^t \quad .$$

La última parte de este teorema, la desigualdad (3.3), es cierta si usamos espacios de funciones con valores complejos. Existen ejemplos que muestran, en el caso de funciones con valores reales, que (3.3) es válida sólo cuando

(3.4) $$p_i \leq q_i \quad (i = 0,1)$$

Es un hecho interesante que en casi todas las aplicaciones de este teorema las desigualdades (3.4) están verificadas.

No daremos una demostración de este teorema puesto que necesitaremos unos teoremas más generales (pero, como veremos, con estimaciones menos precisas que la desigualdad (3.3)). Sin embargo, haremos dos aplicaciones fáciles que ilustrarán el uso que se hace de este género de teorema.. Llamaremos tales aplicaciones i n t e r p o l a - c i ó n d e o p e r a d o r e s (o, más simplemente, i n t e r p o l a c i ó n).

T e o r e m a (3.5) :

Si $f \in L^p(E_n)$, $k \in L^r(E_n)$ y $h = f * k$, entonces $h \in L^q(E_n)$, donde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$ y

$$||h||_q \leq ||f||_p \, ||k||_r$$

D e m o s t r a c i ó n :

Sea A el operador de convolución

$$h(X) = [Ak](X) = \int_{E_n} f(X-Y)\, k(Y)\, dY ,$$

donde $f \in L^p(E_n)$. Si $k \in L^{r_o}(E_n)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{r_o} = 1$, entonces la desigual dad de Hölder muestra que

$$||h||_\infty \leq ||f||_p \, ||k||_{r_o} .$$

Esto es, A es de tipo (r_o, ∞) y $||A||_{r_o,\infty} \leq ||f||_p$.

En la segunda sección del primer capítulo (lema (2.3)) hemos mostrado que A es de tipo $(1,p)$ y $||A||_{1,p} \leq ||f||_p$:

$$||h||_p \leq ||f||_p \, ||k||_1 .$$

Entonces, por (3.3)

$$||h||_q \leq ||f||_p^{1-t} \, ||f||_p^{t} \, ||k||_r = ||f||_p \, ||k||_r ,$$

donde

$$\frac{1}{q} = \frac{1-t}{\infty} + \frac{t}{p} = \frac{t}{p}$$

y

$$\frac{1}{r} = \frac{1-t}{r_o} + \frac{t}{1} .$$

Pero,

$$\frac{1}{q} = \frac{t}{p} = t\left(1 - \frac{1}{r_o}\right) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} - 1 .$$

T e o r e m a (3.6) :

<u>La transformada de Fourier es de tipo</u> (p,q) <u>donde</u> $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leq p \leq 2$. <u>Más precisamente</u>,

$$||\hat{f}(Y)||_q \leq (2\pi)^{n/q} \, ||f||_p .$$

D e m o s t r a c i ó n :

Sigue inmediatamente de la definición de la transformada de Fourier que

$$||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_1 .$$

Esto es, la transformada es de tipo $(1,\infty)$.

Además, el teorema de Plancherel dice, en particular, que

$$||\hat{f}(Y)||_2 \leqslant (2\pi)^{n/2}\, ||f||_2 \quad .$$

Entonces, por el teorema (3.2)

$$||\hat{f}(Y)||_q \leqslant (2\pi)^{tn/2}\, ||f||_p \quad ,$$

donde

$$\frac{1}{q} = \frac{t}{2} \quad y \quad \frac{1}{p} = 1 - \frac{t}{2}$$

y el teorema está probado.

La noción de tipo (p,q) es la más sencilla para medir el "tamaño" de una transformada lineal. Pero se encuentran operadores importantes que no son de tipo (p,q). Muchos de estos operadores verifican una desigualdad más débil que (3.1). Vamos a hacer algunas observaciones para motivar la introducción de esta nueva propiedad.

Empezamos con la definición de la *función de distribución de una función medible* h definida en N : si $\alpha > 0$ pongamos

$$\xi_\alpha = \left\{ s \in N : |h(s)| > \alpha \right\} \quad .$$

La función $\lambda(\alpha) = \nu(\xi_\alpha)$, para $\alpha > 0$, se llamará la función de distribución de h. Es obvio que λ es una función no creciente.

Un hecho que se puede probar facilmente es el siguiente: para $q \geqslant 1$ tenemos

$$(3.7) \qquad ||h||_q^q = \int_N |h|^q \, d\nu = q \int_0^\infty \alpha^{q-1} \lambda(\alpha)\, d\alpha \quad .$$

Entonces, vemos que, para medir el "tamaño" de h, como función de $L^q(N)$, nos basta saber como disminuye su función de distribución λ. Pero, lo que sucede en muchos casos es que un operador A tiene valores $h = Af$ tales que, para f en $L^p(M)$, no se puede decir más que h está justo a la orilla de $L^q(N)$, pero no está en este espacio. Mas precisamente, $\lambda(\alpha) = 0\left(\frac{1}{\alpha^q}\right)$. Vamos a dar un ejemplo muy importante de un operador de este tipo: la *función maximal de Hardy - Littlewood*.

Sea f una función medible definida en E_n y pongamos

$$f^*(X) = \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{r^n} \int_{\Sigma_r(X)} |f(U)|\, dU \quad ,$$

donde $\Sigma_r(X)$ es la esfera de radio r y centro X. Luego, $f^*(X)$ se llama la función maximal de f. Es muy fácil ver que f^* no es de tipo $(1,1)$ (por ejemplo $f^*(x) \notin L^1(E_1)$ si f es la función característica del intervalo $[0,1]$). Pero, f^* verifica la importante desigualdad :

(3.8) $$\lambda(\alpha) \leq \frac{c_n}{\alpha} \|f\|_1 \quad , \quad \alpha > 0 \quad ,$$

donde λ es la función de distribución de $f^*(X)$ y c_n es una constante que depende sólo de la dimensión n. Para mostrar este hecho necesitaremos un lema de "tipo Vitali" :

L e m a (3.9) :

Sea $\mathcal{R} \subset E_n$ un subconjunto de medida finita y supongamos que para cada punto $X \in \mathcal{R}$ está dada una esfera $\Sigma(X)$ con centro X. Entonces existe un número finito de estas esferas disjuntas dos a dos y tales que la suma de sus volúmenes es mayor que $a_n|\mathcal{R}|$, donde a_n es una constante positiva que depende sólo de la dimensión n, y $|\mathcal{R}|$ es la medida de $\mathcal{R}$.

D e m o s t r a c i ó n :

Observamos que si los radios de estas esferas no tienen un extremo superior finito entonces el lema es obvio. Si tienen un tal extremo sea b el supremo de estos radios. Ahora definimos una sucesión de subconjuntos de $\mathcal{R}$ inductivamente: primero, pongamos

$$\mathcal{R}_1 = \left\{ X \in \mathcal{R} \ : \ \frac{b}{2} < \text{radio de } \Sigma(X) \leq b \right\} ,$$
$$\mathcal{R}_2 = \left\{ X \in \mathcal{R} \ : \ \frac{b}{4} < \text{radio de } \Sigma(X) \leq \frac{b}{2} \right\} ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathcal{R}_\nu = \left\{ X \in \mathcal{R} \ : \ \frac{b}{2^\nu} < \text{radio de } \Sigma(X) \leq \frac{b}{2^{\nu-1}} \right\} ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Luego, pongamos $\mathcal{R}'_1 = \mathcal{R}_1$,

$$\mathcal{R}'_2 = \left\{ X \in \mathcal{R}_2 \ : \ |X-Y| > 5\,b \quad \text{si} \quad Y \in \mathcal{R}'_1 \right\}$$
$$\mathcal{R}'_3 = \left\{ X \in \mathcal{R}_3 \ : \ |X-Y_1| > 5\,b \quad \text{si} \quad Y_1 \in \mathcal{R}'_1 \ , \ |X-Y_2| > \frac{5\,b}{2} \quad \text{si} \quad Y_2 \in \mathcal{R}'_2 \right\}$$
$$\mathcal{R}'_4 = \left\{ X \in \mathcal{R}_4 \ : \ |X-Y_1| > 5b \quad \text{si} \quad Y_1 \in \mathcal{R}'_1 \ , \ \ldots , \ |X-Y_3| > \frac{5\,b}{2^2} \quad \text{si} \quad Y_3 \in \mathcal{R}'_3 \right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathcal{R}'_\nu = \left\{ X \in \mathcal{R}_\nu \ : \ |X-Y_1| > 5b \quad \text{si} \quad Y_1 \in \mathcal{R}'_1 , \ldots , \ |X-Y_{\nu-1}| > \frac{5\,b}{2^{\nu-2}} \quad \text{si} \quad Y_{\nu-1} \in \mathcal{R}'_{\nu-1} \right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Pongamos sobre $\mathcal{R}_1$ una red de cubos de lado $5\,b$ y, si un cubo de esta red contiene un punto de $\mathcal{R}_1$, elegimos uno de estos puntos, X_m. Entonces la suma de los volúmenes de las esferas $\Sigma(X_m)$ será mayor que una fracción fijada de la suma de los volumenes de los cubos correspondientes y, a fortiori, mayor que una fracción fijada de la suma de los volumenes de estos cubos y de los cubos contiguos. Ninguna de estas esferas puede ser rampante con una esfera cuyo centro no está en un cubo contiguo ; entonces cada una de estas esferas puede ser rampante, a lo sumo, con un número finito fijado de esferas. Entonces, si enumeramos estas esferas en cualquier orden, y desechamos por turno cada esfera que es rampante con una esfera que no está ya desechada, obtendremos ultimamente un conjunto finito de esferas que son no rampantes y cuyo volumen total será mayor que un múltiplo fijado, a_n', del volumen total de todos los cubos que contienen puntos de $\mathcal{R}_1$ y de los cubos contiguos. Estos cubos contienen cada punto de $\mathcal{R}_1$ y cada punto de $\mathcal{R}_\nu$ que no está en $\mathcal{R}_\nu'$ en virtud de su proximidad a $\mathcal{R}_1$.

Ahora cubrimos $\mathcal{R}_2'$ con una red de magnitud lineal igual a la mitad de la de la red anterior y procedemos en la misma manera. Obtendremos un número finito de esferas con centros que son puntos de $\mathcal{R}_2'$ que son no rampantes con ninguna esfera del conjunto de esferas ya obtenido, que son no rampantes entre ellas, y de volumen total mayor que a_n' multiplicado por el volumen total de todos los cubos que contienen puntos de $\mathcal{R}_2'$ y de los cubos contiguos. Estos cubos y los cubos obtenidos anteriormente contienen a todos los puntos de $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ y, también, cada punto de $\mathcal{R}_\nu$, $\nu > 2$, que no está en $\mathcal{R}_\nu'$ en virtud de su proximidad a $\mathcal{R}_1$ o $\mathcal{R}_2'$.

Continuando de esta manera obtendremos un conjunto numerable de esferas $\Sigma(X)$ de volumen total mayor que $a_n'|\mathcal{R}|$ y tal que son disjuntas dos a dos. Ahora podemos extraer un número finito de estas esferas de volumen total mayor que $a_n|\mathcal{R}|$, si $a_n < a_n'$, y el lema está demostrado.

Ahora podemos mostrar la desigualdad (3.8). Primero observamos que el conjunto ξ_α, $\alpha > 0$, de todos los X tal que $f^*(X) > \alpha$ es el mismo que el de todos los X tales que existe una esfera $\Sigma_r(X)$ con radio r y centro X tal que

$$\frac{1}{r^n} \int_{\Sigma_r(X)} |f(U)|\, dU > \alpha \quad . \tag{3.10}$$

Entonces, por el lema (3.9) existen un número finito de estas esferas, $\Sigma_{r_1}(X_1), \ldots, \Sigma_{r_m}(X_m)$, que son disjuntas dos a dos y tales que la suma de sus volumenes es mayor que $a_n|\xi_\alpha|$. Esto es, si c es el volumen de la esfera unitaria de E_n,

$$c\,(r_1^n + r_2^n + \ldots + r_m^n) > a_n\,|\xi_\alpha| \quad .$$

Por consiguiente, usando (3.10) vemos que

$$|\mathcal{F}_\alpha| < \frac{c}{a_n} \sum_{j=1}^{m} r_j^n \leq \left(\frac{c}{a_n}\right) \frac{1}{\alpha} \left\{ \int_{\Sigma_{r_1}(X_1)} |f(U)|\, dU + \dots + \int_{\Sigma_{r_m}(X_m)} |f(U)|\, dU \right\} .$$

Puesto que las esferas $\Sigma_{r_j}(X_j)$ son disjuntas dos a dos la última integral es menor que $\int_{E_n} |f(U)|\, dU$ y obtenemos (3.8) con $c_n = \frac{c}{a_n}$.

En general diremos que una transformación A es de t i p o d é b i l (p,q) si $L^p(M) \subset \mathcal{S}$ y si existe una constante, a , llamada la n o r m a d é b i l de A independiente de $f \in L^p(M)$ tal que, para $1 \leq q < \infty$,

$$(+) \qquad \lambda(\alpha) \leq \left[\frac{a}{\alpha} \|f\|_p \right]^q , \qquad \alpha > 0 ,$$

donde λ es la función de distribución de $h = Af$. Si $q = \infty$ tipo débil y tipo son la misma cosa, por definición.

Observamos que la transformada $f \to f^*$ no es lineal. Pero obedece la condición: $(f+g)^* \leq f^* + g^*$. En general, diremos que una transformada A , definida en $\mathcal{S}$, es s u b l i n e a l si $A(f+g)$ es bien definida cuando Af y Ag lo son y

$$|A(f+g)| \leq |Af| + |Ag| ,$$

Un teorema que generaliza la primera parte del teorema (3.2) es el siguiente teorema de Marcinkkiewicz :

T e o r e m a (3.11) :

Si A es una transformación sublineal de tipos débiles (p_0,q_0) y (p_1,q_1) con normas débiles a_0 y a_1 , donde $p_i \leq q_i$ $(i=0,1)$ $q_0 < q_1$, entonces A es del tipo (p,q) donde $p = p_t$, $q = q_t$, $0 < t < 1$, verifican

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \qquad ; \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

D e m o s t r a c i ó n :

Probaremos este teorema en el caso $p_0 = q_0$ y $p_1 = q_1$. El caso general es sólo tecnicamente más difícil y la idea principal de la demostración está contenida en el caso que consideramos.

Primero, supongamos que $q_1 = p_1 < \infty$. Pongamos $h = Af$, donde $f \in L^p(M)$, y $\lambda(\alpha) = \nu\{x \in N;\ |h(x)| > \alpha\}$. Entonces, tenemos que mostrar (ver (3.7)) que existe una constante, c , independiente de $f \in L^p(M)$, tal que

$$(*) \qquad \|h\|_p^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda(\alpha)\, d\alpha \leq \left(c \|f\|_p \right)^p .$$

Para cada $\alpha > 0$ pongamos

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \leqslant \alpha \\ 0 & \text{si} \quad |f(x)| > \alpha \end{cases} ,$$

y

$$f^\alpha(x) = f(x) - f_\alpha(x) .$$

Luego, designaremos con h_α y h^α las funciones Af_α y Af^α, y pongamos $\lambda_\alpha(\beta) = \nu\{x \in N;\ |h_\alpha(x)| > \beta\}$ y $\lambda^\alpha(\beta) = \nu\{x \in N;\ |h^\alpha(x)| > \beta\}$

Tenemos $|h| \leqslant |h_\alpha| + |h^\alpha|$ puesto que A es una transformación sublineal. Entonces

$$(**) \qquad \lambda(\beta) \leqslant \lambda_\alpha\left(\frac{\beta}{2}\right) + \lambda^\alpha\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Usando el hecho que A es de tipos débiles (p_0,p_0) y (p_1,p_1), el teorema de Fubini y $(**)$ tenemos

$$\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda(\alpha)\,d\alpha \leqslant \int_0^\infty \alpha^{p-1}\left\{\lambda_\alpha\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \lambda^\alpha\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\} d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \alpha^{p-1}\left\{\frac{2\,a_1}{\alpha}\,||f_\alpha||_{p_1}\right\}^{p_1} d\alpha + \int_0^\infty \alpha^{p-1}\left\{\frac{2\,a_0}{\alpha}\,||f^\alpha||_{p_0}\right\}^{p_0} d\alpha =$$

$$= (2\,a_1)^{p_1}\int_0^\infty \alpha^{p-p_1-1}\left\{\int_M |f_\alpha|^{p_1} d\mu\right\} d\alpha + (2\,a_0)^{p_0}\int_0^\infty \alpha^{p-p_0-1}\left\{\int_M |f^\alpha|^{p_0} d\mu\right\} d\alpha =$$

$$= (2\,a_1)^{p_1}\int_0^\infty \alpha^{p-p_1-1}\left\{\int_{|f|\leqslant\alpha} |f|^{p_1}\, d\mu\right\} d\alpha + (2\,a_0)^{p_0}\int_0^\infty \alpha^{p-p_0-1}\left\{\int_{|f|>\alpha} |f|^{p_0} d\mu\right\} d\alpha =$$

$$= (2\,a_1)^{p_1}\int_M |f|^{p_1}\left\{\int_{|f|}^\infty \alpha^{p-p_1-1}\, d\alpha\right\} d\mu + (2\,a_0)^{p_0}\int_M |f|^{p_0}\left\{\int_0^{|f|} \alpha^{p-p_0-1}\, d\alpha\right\} d\mu =$$

$$= \frac{(2a_1)^{p_1}}{p_1 - p}\int_M |f|^{p_1}\,|f|^{p-p_1}\, d\mu + \frac{(2a_0)^{p_0}}{p - p_0}\int_M |f|^{p_0}\,|f|^{p-p_0}\, d\mu =$$

$$= \left\{\frac{(2a_1)^{p_1}}{p_1 - p} + \frac{(2a_0)^{p_0}}{p - p_0}\right\} ||f||_p^p$$

y esto prueba la desigualdad $(*)$ con $c^p = p\left\{\frac{(2a_1)^{p_1}}{p_1 - p} + \frac{(2a_0)^{p_0}}{p - p_0}\right\}$.

Nos falta la demostración en el caso $p_1 = \infty$. Podemos siempre suponer que $a_1 = 1$ (si no, se puede considerar el operador $\frac{1}{a_1}A$ en vez de A). Entonces,

tenemos $||h_\beta||_\infty \leq 1.||f_\beta||_\infty \leq \beta$.y , por consiguiente, $\lambda_\beta(\beta) =$
$= \nu\{x;\ |h_\beta(x)| > \beta\} = 0$. La demostración ahora es más fácil que la del caso anterior:

$$\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda(\alpha)\,d\alpha = 2^p\int_0^\infty \beta^{p-1}\lambda(2\beta)\,d\beta \leq$$

$$\leq 2^p\int_0^\infty \beta^{p-1}\lambda_\beta(\beta)\,d\beta + 2^p\int_0^\infty \beta^{p-1}\lambda^\beta(\beta)\,d\beta = 0 + 2^p\int_0^\infty \beta^{p-1}\lambda^\beta(\beta)\,d\beta$$

y estimando esta última integral como en el caso anterior obtenemos la demostración completa del teorema cuando $p_0 = q_0$ y $p_1 = q_1$.

C o r o l a r i o (3.12) :

Si f^* es la función maximal de $f \in L^p(E_n)$ $1 < p \leq \infty$, entonces

$$||f^*||_p \leq m_p\,||f||_p \quad ,$$

donde m_p depende sólo de p y de la dimensión n ,(y no depende de $f \in L^p(E_n)$)

D e m o s t r a c i ó n :

Hemos ya observado que la transformación $f \to f^*$ es sublineal y es de tipo debil (1,1) (ver desigualdad (3.8)). Por el último teorema, nos basta mostrar que esta transformación es de tipo (∞,∞) . Pero sigue inmediatamente de la definición de f^* que

$$||f^*||_\infty \leq c\,||f||_\infty \quad ,$$

donde c es el volumen de la esfera unitaria de E_n . Entonces, el corolario está probado.

Muchas veces, para verificar que un operador es de tipo débil, es más fácil verificar la desigualdad (+) cuando f es una función característica de un conjunto de medida finita que en el caso general. Ahora mostraremos que, por lo menos cuando A es una transformación lineal,[-1-] existe una generalización del teorema (3.11) para la cual las hipótesis del tipo débil pueden ser reemplazadas por estimaciones más fáciles que contienen sólo transformadas de funciones características. Para introducir este teorema necesitamos algunas definiciones.

Diremos que A es de t i p o r e s t r i n g i d o (p,q) si $\mathscr{D}$ contiene a todas las funciones características , χ_E , de subconjuntos $E \subset M$ de medida finita y si existe una constante $a > 0$ (que no depende de E) tal que

-1- No se sabe si la generalización que haremos es válida para operadores sublineales.

(3.13) $$||A\chi_E||_q \leq a\,||\chi_E||_p \quad .$$

Supongamos que A es lineal. Si $p = 1$ es fácil demostrar que A tiene una única extensión lineal acotada sobre $L^1(M)$. Pero, cuando $p > 1$ existen ejemplos que muestran que t i p o r e s t r i n g i d o (p,q) es ciertamente más débil que la condición tipo (p,q) .

La noción análoga a tipo débil, para funciones características, es la siguiente : diremos que A es de t i p o d é b i l r e s t r i n g i d o (p,q) si, en vez de la desigualdad (3.13) , tenemos

$$\lambda(\alpha) \leq \left(\frac{a}{\alpha}\,||\chi_E||_p\right)^q \quad , \quad 1 \leq p \leq \infty \quad , \quad 1 \leq q < \infty \quad ,$$

donde λ es la función de distribución de $A\chi_E$.

Ahora podemos enunciar el teorema general:

T e o r e m a (3.14) :

<u>Si</u> A <u>es una transformación lineal de tipos débiles restingidos</u> (p_0,q_0) <u>y</u> (p_1,q_1) , <u>donde</u> $p_i \leq q_i$ $(i=0,1)$ $p_0 \neq p_1$ <u>y</u> $q_0 \neq q_1$, <u>entonces</u> A <u>tiene una única extensión acotada en</u> $L^p(M)$ <u>de tipo</u> (p,q) <u>donde</u> $p = p_t$, $q = q_t$, $0 < t < 1$, <u>verifican</u>

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \qquad \underline{y} \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

La demostración de este teorema seguirá de dos lemas ((3.15) y (3.17)) y se puede bosquejar en una manera simple: Primero mostraremos que A es de tipos restringidos (s_0,t_0) y (s_1,t_1) para todos los (s_0,t_0) , (s_1,t_1) "entre" (p_0,q_0) y (p_1,q_1) . Luego, mostraremos que si A es de tipo restringido (p,q) entonces existe una "adjunta" de A : A^* , y A^* es de tipo débil (q',p') ; donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}$. Entonces se puede aplicar el teorema (3.11) al operador A^*, que es de tipos débiles (t_0',s_0') y (t_0',s_0') . Teorema (3.14) seguirá del hecho que la norma del operador A^* es igual a la norma de A .

L e m a (3.15) :

<u>Si</u> A <u>es una transformación lineal de tipos débiles restringidos</u> (p_0,q_0) <u>y</u> (p_1,q_1) , $q_0 \neq q_1$, <u>entonces</u> A <u>es de tipo restringido</u> (p_t,q_t) <u>para</u> $0<t<1$.

D e m o s t r a c i ó n :

Pongamos $p = p_t$ y $q = q_t$. Podemos suponer que $q_0 < q_1$. Pongamos $h = A\chi_E$, donde χ_E es la función característica del conjunto de medida finita

$E \subset M$. Entonces, si λ es la función de distribución de h y $c > 0$, tenemos

$$\int_N |h|^q \, d\nu = q \int_0^\infty \alpha^{q-1} \lambda(\alpha)\, d\alpha = q \int_0^c \alpha^{q-1} \lambda(\alpha)\, d\alpha + q \int_c^\infty \alpha^{q-1} \lambda(\alpha)\, d\alpha \leq$$

$$\leq q \int_0^c \alpha^{q-1} \left\{ \frac{a_0}{\alpha} \left[\mu(E)\right]^{1/p_0} \right\}^{q_0} d\alpha + q \int_c^\infty \alpha^{q-1} \left\{ \frac{a_1}{\alpha} \left[\mu(E)\right]^{1/p_1} \right\}^{q_1} d\alpha =$$

$$= \left[q \frac{a_0^{q_0}}{(q-q_0)} \right] \left[\mu(E)\right]^{q_0/p_0} c^{q-q_0} + \left[q \frac{a_1^{q_1}}{(q_1-q)} \right] \left[\mu(E)\right]^{q_1/p_1} c^{q-q_1}$$

Si $c = \left[\mu(E)\right]^s$, donde

$$s = \frac{1}{q-q_0} \left(\frac{q}{p} - \frac{q_0}{p_0} \right) = \frac{1}{q-q_1} \left(\frac{q}{p} - \frac{q_1}{p_1} \right) ,$$

tenemos

$$\left[\mu(E)\right]^{q_0/p_0} c^{q-q_0} = \left[\mu(E)\right]^{q/p} = \left[\mu(E)\right]^{q_1/p_1} c^{q-q_1} .$$

Entonces, hemos mostrado que

$$\int_N |h|^q \, d\nu \leq a^q \left[\mu(E)\right]^{q/p} = \left(a \, \|\chi_E\|_p \right)^q ,$$

donde

$$a = \left\{ q \frac{a_0^{q_0}}{q - q_0} + q \frac{a_1^{q_1}}{q_1 - q} \right\}^{1/q}$$

y el lema está demostrado.

Ahora supongamos que A es lineal y de tipo restringido (p,q) y pongamos

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 , \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$$

Definimos la siguiente función ξ , de subconjuntos E (de M) que son de medida finita:

$$\xi(E) = \int_N (A\, \chi_E)\, g \, d\nu ,$$

donde $g \in L^{q'}(N)$

Sigue inmediatamente de (3.13) que ξ es numerablemente aditiva y absolutamente contínua respecto de μ . Entonces, por el teorema de Radon - Nikodym , existe (p.p.) una única función h , definida en M , tal que

$$\xi(E) = \int_E h\, d\mu \ .$$

Definimos la a d j u n t a d e A , A^* , poniendo $A^* g = h$. Es obvio que A^* es lineal y está definida para todas las funciones $g \in L^{q'}(N)$. Si f es una combinación lineal finita de funciones características de subconjuntos de M con medidas finitas entonces

$$(3.16) \qquad \int_N (Af)\, g\, d\nu = \int_M f(A^* g)\, d\mu \ .$$

Así vemos que, por lo menos formalmente, A^* se comporta como la adjunta de A . Pero, por lo común, A^* no es una transformación acotada, esto es, de tipo (q',p'). El lema siguiente dice que obedece la desigualdad más débil (3.10) :

L e m a (3.17) :

<u>Si</u> A <u>es una transformación lineal de tipo restringido</u> (p,q) , $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, <u>entonces</u> A^* <u>es de tipo débil</u> (q',p') .

D e m o s t r a c i ó n :

Pongamos $h = A^* g$ para $g \in L^{q'}(N)$, $E^+_\alpha = \{ x \in M;\ h(x) > \alpha > 0 \}$ y $E^-_\alpha = \{ x \in M;\ h(x) < -\alpha < 0 \}$. Entonces la función de distribución, λ , de h es igual a la suma $\lambda^+ + \lambda^-$, donde $\lambda^+(\alpha) = \mu(E^+_\alpha)$ y $\lambda^-(\alpha) = \mu(E^-_\alpha)$ (puesto que $E^+_\alpha \cap E^-_\alpha = 0$) . Sea $\chi_{E^+_\alpha}$ la función característica de E^+_α . <u>En</u>tonces usando (3.16) con $f = \chi_{E^+_\alpha}$, la desigualdad (3.13) y la desigualdad de Hölder tenemos

$$\alpha \lambda^+(\alpha) = \alpha \int_{E^+_\alpha} d\mu \leq \int_{E^+_\alpha} h\, d\mu = \int_M \chi_{E^+_\alpha} (A^* g)\, d\mu = \int_N (A \chi_{E^+_\alpha})\, g\, d\nu \leq$$

$$\leq \| A \chi_{E^+_\alpha} \|_q \cdot \|g\|_{q'} \leq a\, \| \chi_{E^+_\alpha} \|_p \cdot \|g\|_{q'} = a \left(\mu(E^+_\alpha) \right)^{1/p} \|g\|_{q'} =$$

$$= a \left(\lambda^+(\alpha) \right)^{1/p} \|g\|_{q'} \ .$$

Dividiendo por $\alpha \left(\lambda^+(\alpha) \right)^{1/p}$ y usando la igualdad $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$ obtenemos

$$\left(\lambda^+(\alpha) \right)^{1/p'} \leq \frac{a}{\alpha} \|g\|_{q'}$$

Esto es, $\lambda^+(\alpha) \leq \left[\frac{a}{\alpha} \|g\|_{q'} \right]^{p'}$. Un argumento análogo para $\lambda^-(\alpha)$ demuestra

$$\lambda^-(\alpha) \leq \left(\frac{a}{\alpha} \|g\|_{q'} \right)^{p'} \ .$$

Entonces,

$$\lambda(\alpha) = \lambda^{+}(\alpha) + \lambda^{-}(\alpha) \leq \left(\frac{2^{1/p'}a}{\alpha}\,||g||_{q'}\right)^{p'}$$

y el lema está probado.

D e m o s t r a c i ó n d e l t e o r e m a (3.14) :

En general, si $1 \leq a \leq \infty$ designamos con a' el número que verifica $\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = 1$.

Por el lema (3.15) A es de tipos restringidos (p_t, q_t) , para todos los t tal que $0 < t < 1$. Entonces, por el lema (3.17) A^* es de tipos débiles (q_t', p_t') .

Las condiciones $p_o \neq p_1$, $1 \leq p_k \leq q_k$ $(k = 0,1)$ implican $p_o' \neq p_1'$, $1 \leq q_k' \leq p_k'$ $(k = 0,1)$. Luego, si $0 < t_o < s < t_1 < 1$ entonces $p'_{t_o} \neq p'_{t_1}$, $1 < q'_{t_k} \leq p'_{t_k}$ $(k = 0,1)$. Por consiguiente podemos aplicar el teorema (3.11) con A y (p_k, q_k) reemplazados por A^* y (q'_{t_k}, p'_{t_k}) , $k = 0,1$, y obtenemos que A^* es de tipo (q_s', p_s') . Entonces, $(A^*)^* : L^{p_s}(M) \to L^{q_s}(N)$ es de tipo (p_s, q_s) -1- . Pero la igualdad (3.16) implica que $(A^*)^* f = Af$ para todas las f que son combinaciones lineales finitas de funciones características de subconjuntos de M con medidas finitas. El teorema ahora sigue del lema (6.1) del capítulo I .

Aplicaremos este teorema a la transformada de Hilbert . Para hacer esta aplicación usaremos el resultado siguiente:

T e o r e m a (3.18) :

Si $E \subset (-\infty, \infty)$ es un conjunto de medida finita, χ_E su función característica y $\lambda(\alpha)$ la función de distribución de la transformada de Hilbert $\tilde{\chi}_E$ entonces

$$\lambda(\alpha) = \frac{2\,|E|}{\operatorname{sen} h(\pi\alpha)} \tag{3.19}$$

para $\alpha > 0$.

D e m o s t r a c i ó n :

Si la igualdad (3.19) es cierta para conjuntos E que son uniones finitas de

---

-1- Si $B : L^a \to L^b$, $1 \leq a$, $b < \infty$, es acotada entonces la adjunta, B^*, está definida en la manera siguiente: si $g \in L^{b'}$, B^*g es la función tal que $\int f(B^*g) = \int (Bf)g$ para cada $f \in L^a$. El teorema de representación de funcionales lineales de F. Riesz implica que B^*g existe y está en $L^{a'}$. Además

$$||B^*g||_{a'} = \sup_{||f||_a=1} \left|\int f(B^*g)\right| = \sup_{||f||_a=1} \left|\int (Bf)g\right| \leq ||B||_{a,b}\,||g||_{b'} .$$

Entonces. $||B^*||_{a,b} \leq ||B||_{a,b}$. Es fácil mostrar que la igualdad es cierta en esta desigualdad.

intervalos disjuntos dos a dos entonces la igualdad (3.19) es cierta para todos los conjuntos de medida finita. Esto se ve facilmente usando, por ejemplo, el teorema (2.6).

Luego, supongamos que $E = (a_1,b_1) \cup (a_2,b_2) \cup \dots \cup (a_n,b_n)$ donde $a_1 < b_1 < < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n$. Hemos visto (ver la demostración del teorema (2.6)) que en este caso

$$\tilde{\chi}_E(x) = \frac{1}{\pi} \log \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{x - a_k}{x - b_k} \right| .$$

Entonces, $\lambda(\alpha)$ es la medida del conjunto de los x tal que

$$\frac{1}{\pi} \log \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{x - a_k}{x - b_k} \right| > \alpha$$

$$\frac{1}{\pi} \log \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{x - a_k}{x - b_k} \right| < -\alpha .$$

Estas dos desigualdades son equivalentes a

(i) $$\prod_{k=1}^{n} \left| \frac{x - a_k}{x - b_k} \right| > e^{\pi\alpha}$$

y

(ii) $$\prod_{k=1}^{n} \left| \frac{x - a_k}{x - b_k} \right| < e^{-\pi\alpha}$$

Se ve inmediatamente que la desigualdad (i) es cierta en un intervalo abierto (s_k,t_k) tal que (*) $a_k < s_k < b_k < t_k < a_{k+1}$, $k=1, 2,\dots, n-1$, (ó $a_n < s_n < b_n < t_n$) y tenemos, por las desigualdades (*),

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{s_j - a_k}{s_j - b_k} = -e^{\pi\alpha} , \quad j = 1, 2, \dots, n ,$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{t_j - a_k}{t_j - b_k} = e^{\pi\alpha} , \quad j = 1, 2, \dots, n .$$

Esto es, los números s_k son las n raíces del polinomio de orden n

$$\prod_{k=1}^{n} (x - a_k) + e^{\pi\alpha} \prod_{k=1}^{n} (x - b_k) ,$$

y los números t_k son las n raíces del polinomio

$$\prod_{k=1}^{n} (x - a_k) - e^{\pi\alpha} \prod_{k=1}^{n} (x - b_k) .$$

Pero, la medida del conjunto de los x que verifican (i) es

$$\sum_{k=1}^{n} (t_k - s_k) = \sum_{k=1}^{n} t_k - \sum_{k=1}^{n} s_k =$$

= (la suma de las raices del segundo polinomio) - (la suma de las raices del primer polinomio) .

Pero la suma de las raices de un polinomio primitivo es igual, a menos del coeficiente del segundo término cuando el polinomio está ordenado según las potencias decrecientes, a :

$$-\sum_{k=1}^{n} t_k = \frac{-(a_1 + \ldots + a_n) + e^{\pi\alpha}(b_1 + \ldots + b_n)}{1 - e^{\pi\alpha}}$$

$$-\sum_{k=1}^{n} s_k = \frac{-(a_1 + \ldots + a_n) - e^{\pi\alpha}(b_1 + \ldots + b_n)}{1 + e^{\pi\alpha}}$$

y tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} t_k - \sum_{k=1}^{n} s_k = \frac{(1+e^{\pi\alpha})\left\{\sum a_k - e^{\pi\alpha}\sum b_k\right\} - (1-e^{\pi\alpha})\left\{\sum a_k + e^{\pi\alpha}\sum b_k\right\}}{1 - e^{2\pi\alpha}} =$$

$$= \frac{2\, e^{\pi\alpha}\sum a_k - 2\, e^{\pi\alpha}\sum b_k}{1 - e^{2\pi\alpha}} = \frac{2}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} \sum (b_k - a_k) = \frac{|E|}{\operatorname{sen} h(\pi\alpha)}$$

Un cálculo similar nos da el resultado que la medida del conjunto de todos los x que satisfacen la desigualdad (ii) es, también, $|E|/\operatorname{sen} h(\pi\alpha)$. Puesto que los conjuntos de x definidos por las desigualdades (i) y (ii) son disjuntos obtenemos

$$\lambda(\alpha) = \frac{|E|}{\operatorname{sen} h\,(\pi\alpha)} + \frac{|E|}{\operatorname{sen}\,(\pi\alpha)} = \frac{2\,|E|}{\operatorname{sen} h\,(\pi\alpha)} .$$

C o r o l a r i o (3.20) :

<u>Si</u> $E \subset (-\infty,\infty)$ <u>es un conjunto de medida finita con función característica</u> χ_E <u>y</u> $\tilde{\chi}_E$ <u>es la transformada de Hilbert de</u> χ_E <u>entonces</u>

(3.21) $$\|\tilde{\chi}_E\|_p = \left\{2\, p \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{p-1}}{\operatorname{sen} h\,(\pi\alpha)}\, d\alpha\right\}^{1/p} \|\chi_E\|_p ,$$

$1 < p < \infty$. <u>En particular, la transformada de Hilbert es de tipo restringido</u> (p,p), <u>para</u> $1 < p < \infty$.

D e m o s t r a c i ó n :

Usando la notación del último teorema tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\chi}_E(x)|^p\, dx = p\int_0^{\infty} \alpha^{p-1}\lambda(\alpha)\, d\alpha = p\int_0^{\infty} \alpha^{p-1} \frac{2\,|E|}{\operatorname{sen} h\,(\pi\alpha)}\, d\alpha =$$

$$= \left\{ 2\,p \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{p-1}}{\operatorname{sen\,h}(\pi\alpha)}\, d\alpha \right\} ||\chi_E||_p^p \quad .$$

C o r o l a r i o (3.22) :

La transformada de Hilbert es de tipo débil restringido (1,1) .

D e m o s t r a c i ó n :

El corolario sigue inmediatamente de la igualdad (3.19) .

C o r o l a r i o (3.23) :

La transformada de Hilbert, como transformación definida para funciones simples, tiene una única extensión lineal acotada en $L^p(-\infty,\infty)$, $1 < p < \infty$.

D e m o s t r a c i ó n :

El corolario es una consecuencia del corolario (3.20) y el teorema (3.14) .

Ahora podemos enunciar el siguiente teorema de M. Riesz :

T e o r e m a (3.24) :

Si $f \in L^p(-\infty,\infty)$ $1 < p < \infty$ entonces su transformada de Hilbert

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\pi} \int_{|u| \geq \varepsilon} \frac{f(x-u)}{u}\, du = \tilde{f}(x)$$

existe en el sentido de la norma de L^p y, también, p.p. Además, existe una constante a_p , que no depende de $f \in L^p$, tal que

$$||\tilde{f}||_p \leq a_p\, ||f||_p \quad .$$

D e m o s t r a c i ó n :

Por los lemas (2.5) y (2.10) nos basta mostrar que, si $f \in L^p(-\infty,\infty)$, entonces

$$\lim_{y \to 0+} v(x,y) = \lim_{y \to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\, Q(y,u)\, du$$

existe en el sentido de la norma de L^p y para casi todos los x . Por el teorema (2.6) , este resultado es cierto para $p = 2$. Si $f \in L^p$ sea $\{g_n\}$ una sucesión de funciones simples tal que $\lim_{n\to\infty} ||f - g_n||_p = 0$. Por el corolario (3.21) , la sucesión $\{\tilde{g}_n\}$ converge en la norma de L^p (puesto que $\{g_n\}$ es una sucesión de Cauchy) . Designamos con $\tilde{f}$ este límite de la sucesión $\{\tilde{g}_n\}$. Entonces, tenemos que mostrar que

(i) $\displaystyle || \tilde{f}(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\, \frac{u}{u^2 + y^2}\, du\, ||_p \longrightarrow 0$, para $y \longrightarrow 0+$

y

(ii) $$\tilde{f}(x) = \lim_{y\to 0+} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\,\frac{u}{u^2+y^2}\,du \quad \text{p.p.}$$

Puesto que $\tilde{f} \in L^p$, $1 < p < \infty$, tenemos

$$\tilde{f}(x) = \lim_{y\to 0+} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x-u)\,\frac{y}{u^2+y^2}\,du$$

en ambos sentidos (i) y (ii) .

Entonces, nos basta mostrar que, para $(x,y) \in E_2^+$, tenemos

(iii) $$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x-u)\,\frac{y}{u^2+y^2}\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\,\frac{u}{u^2+y^2}\,du$$

Pero, para cada n ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_n(x-u)\,\frac{y}{u^2+y^2}\,du = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x-u)\,\frac{u}{u^2+y^2}\,du$$

(ver la última parte de la demostración del teorema (2.6) , donde esta igualdad fué probada para cada $g \in L^2(-\infty,\infty)$) .

Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ tenemos

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x-u)\,\frac{y}{u^2+y^2}\,du - \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_n(x-u)\,\frac{y}{u^2+y^2}\,du \right| \leq$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(x-u) - \tilde{g}_n(x-u)|^p\,du \right)^{1/p} y\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(u^2+y^2)^q} \right)^{1/q} =$$

$$= y\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(u^2+y^2)^q} \right)^{1/q} ||\tilde{f} - \tilde{g}_n||_p \longrightarrow 0$$

cuando $n \to \infty$.

Similarmente

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\,\frac{u}{u^2+y^2}\,du - \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x-u)\,\frac{u}{u^2+y^2}\,du \right| \leq$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u|^q}{(u^2+y^2)^q}\,du \right)^{1/q} ||f - g_n||_p \longrightarrow 0$$

cuando $n \to \infty$. Entonces, la igualdad (iii) está verificada.

La existencia de la constante a_p sigue del corolario (3.21)

O b s e r v a c i o n e s :

(1) La mejor constante a_p en el teorema (3.24) no es conocida, pero vemos,

por el corolario (3.20) , que

$$a_p \geq \left\{ 2\, p \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{\,p-1}}{\operatorname{sen h}\,(\pi\alpha)}\, d\alpha \right\}^{1/p} .$$

(2) El corolario (3.22) es un resultado incompleto porque, con otro método, se puede mostrar que la transformada de Hilbert está bién definida para $f \in L^1(-\infty,\infty)$ y es de tipo débil (1,1) .

§4.- GENERALIZACIONES A N-DIMENSIONES DE LA TRANSFORMADA DE HILBERT .

Existen muchas generalizaciones a m - dimensiones de la transformada de Hilbert. Empezamos con las más obvias extensiones de las ideas presentadas en el principio de la segunda sección de este capítulo. Allí hemos visto que, al menos en un entorno de un punto, se puede considerar una función analítica como un gradiente de una función harmónica. Por eso, es natural considerar gradientes, $(\nabla h)(X) = (\partial h/\partial x_1,\ldots, \partial h_m/\partial x_m)$ de funciones harmónicas, $h(X)$, como generalizaciones de funciones analíticas de m variables. Esta generalización no es perfecta en muchos sentidos. Por ejemplo el hecho que una función analítica de una función analítica sea una función analítica, ya no es verdadero cuando $m \geq 3$. Pero, como veremos más tarde, se pueden extender muchos resultados básicos de la teoría de funciones analíticas al caso de gradientes de funciones harmónicas de m variables.

Si $h(X)$ es harmónica pongamos $\nabla h = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$. Cuando $m = 2$ hemos visto que (w_1,w_2) es el gradiente de una función harmónica (en una región simplemente conexa) sí y sólo sí w_1 y w_2 son soluciones de las ecuaciones de Cauchy - Riemann . La primera de estas ecuaciones (ver (2.1)) implica la existencia de h mientras la segunda implica que h es harmónica. Esto nos da la motivación para la siguiente generalización de estas ecuaciones: Puesto que $(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ es el gradiente de la función harmónica h tenemos las ecuaciones

$$(4.1) \qquad \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i} , \quad i,j = 1, 2, \ldots, m .$$

Puesto que h es harmónica, tenemos

$$(4.2) \qquad \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial w_m}{\partial x_m} = 0$$

Inversamente, es bien conocido que en una región simplemente conexa -1- la primera ecuación

-1- Esto es, que se puede deformar continuamente a un punto cada camino cerrado, sin salir de la región.

implica la existencia de una función h tal que $\nabla h = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ mientras la ecuación (4.2) implica que h es harmónica. Tomaremos estas ecuaciones como la primera generalización de las ecuaciones de Cauchy - Riemann y las llamaremos las ecuaciones de Cauchy - Riemann generalizadas. Una solución $(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ de estas ecuaciones se llamará sistema de funciones conjugadas (o un sistema de M. Riesz). Si $W = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ podemos expresar estas ecuaciones en la manera siguiente:

$$\text{Rot } W = 0 \tag{4.1'}$$

$$\text{Div } W = 0 \tag{4.2'}$$

Con esta definición de un sistema de funciones conjugadas pasamos a la generalización más obvia de la transformada de Hilbert. Si $f(X) \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p < \infty$, hemos visto que la función

$$u(t,X) = \int_{E_n} f(U)\, P(t, |X-U|\, dU$$

es la única función harmónica tal que $\lim_{t \to 0+} u(t,X) = f(X)$, en la norma de L^p, y tal que

$$\int_{E_n} |u(t,X)|^p \, dX \leqslant A^p < \infty$$

para todos los $t > 0$ (ver (1.14)). Tomando como motivación las consideraciones de la segunda sección de este capítulo, es natural preguntar si $u(t, X)$ es una parte de un sistema de funciones conjugadas en E^+_{n+1}. Como en el caso anterior, cuando $n = 1$, la contestación de esta pregunta, cuando $n > 1$ es fácil si tenemos en cuenta el cuarto ejemplo de §1. Tenemos, prescindiendo del problema de la existencia de las integrales

$$u(t,X) = \int_{E_n} f(U)\, P(t, |X-U|)\, dU = \frac{c_n}{(2\pi)^n} \int_{E_n} f(U) \frac{t}{(t^2 + |X-U|^2)^{(n+1)/2}}\, dU =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{(1-n)} \frac{c_n}{(2\pi)^n} \int_{E_n} f(U) \frac{dU}{(t^2 + |X-U|^2)^{(n-1)/2}} \right\} .$$

Entonces, por la discusión anterior, las funciones que forman un sistema de M.Riesz junto con $U(t,X)$, deberían ser

$$v_k(t,X) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{1}{(1-n)} \frac{c_n}{(2\pi)^n} \int_{E_n} f(U) \frac{dU}{(t^2 + |X-U|^2)^{(n-1)/2}} \right\} =$$

$$= \frac{c_n}{(2\pi)^n} \int_{E_n} f(U) \frac{x_k - u_k}{(t^2 + |X-U|^2)^{(n+1)/2}} dU = \int_{E_n} f(U)\, Q_k(t,X-U)\, dU \quad ,$$

$k=1,2,\dots,n$.

En efecto, las integrales conjugadas de Poisson

$$(4.3) \qquad v_k(t,X) = \int_{E_n} f(U)\, Q_k(t,X-U)\, dU \quad , \quad k=1,2,\dots,n$$

están bien definidas cuando $f \in L^p(E_n)$, $1 \leq p < \infty$, y, usando el teorema(1.14) como en la demostración del teorema (1.14) , vemos que las funciones v_k son harmónicas en E^+_{n+1} . Además, tomando las derivadas de u , v_1 , ... , v_n bajo el signo integral, vemos que estas funciones son soluciones de las ecuaciones

$$(4.4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v_j}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \\[2ex] \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad , \quad i,j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$(4.5) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n} = 0$$

Esto es, las $n+1$ funciones $u, v_1, \dots, v_n$ verifican las ecuaciones (4.1) y (4.2) , con $m = n+1$ [1], y, por consiguiente, forman un sistema de funciones conjugadas. Es conveniente expresar este sistema con notación vectorial: Pongamos

$$V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$Q(t,X) = (Q_1(t,X), \dots, Q_n(t,X)) = \frac{c_n\,(x_1, x_2, \dots, x_n)}{(2\pi)^n (t^2 + |X|^2)^{(n+1)/2}}$$

Luego, las ecuaciones (4.3) son equivalentes a la ecuación

$$(4.3') \quad V(t,X) = \frac{c_n}{(2\pi)^n} \int_{E_n} f(U) \frac{X - U}{(t^2 + |X-U|^2)^{(n+1)/2}} dU = \int_{E_n} f(U)\, Q(t,X-U)\, dU$$

que se reduce a (2.3) si $n = 1$ (con t reemplazada por y) .

Sabemos (ver teoremas (5.7) y (5.10) del primer capítulo) que $\lim_{t\to 0+} u(t,X) = f(X)$ p.p. y en la norma de L^p , $1 \leq p < \infty$. Entonces, así como en el caso

---

-1- El lector no se confundirá por el cambio de notación. En el caso presente tenemos una función distinguida, u , puesto que empezamos la construcción del sistema de M. Riesz con la función $f \in L^p(E_n)$ que la definió.

anterior, cuando $n = 1$, es natural preguntar ¿Qué sucede con $V(t,X)$ cuando $t \to 0$? Formalmente, por (4.3')

$$(4.6) \qquad \lim_{t\to 0} V(t,X) = \frac{c_n}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \frac{f(U)\,(X-U)}{|X-U|^{n+1}}\, dU \ .$$

Otra vez, tenemos la dificultad que esta integral no existe, como integral de Lebesgue, para las funciones de las clases que consideramos. Pero, mostraremos que, si la definimos como el valor principal de Cauchy,

$$(4.7) \qquad (\tilde{f}_1(X), \ldots, \tilde{f}_n(X)) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{c_n}{(2\pi)^n} \int_{|X-U|\geq\varepsilon} \frac{f(U)\,(X-U)}{|X-U|^{n+1}}\, dU$$

Entonces las funciones $\tilde{f}_1(X), \ldots, \tilde{f}_n(X)$ existirán p.p. así como en la norma de L^p, $1 < p < \infty$, y, también

$$\lim_{t\to 0+} V(t,X) = (\tilde{f}_1(X), \ldots, \tilde{f}_n(X))$$

en estos sentidos. Las funciones $\tilde{f}_1(X), \ldots, \tilde{f}_n(X)$ se llamarán las n transformadas de M. Riesz de la función f.

Como en el caso de una dimensión, las integrales

$$\tilde{f}_{k,\varepsilon}(X) = \frac{c_n}{(2\pi)^n} \int_{|X-U|\geq\varepsilon} \frac{f(U)\,(x_k-u_k)}{|X-U|^{n+1}}\, dU \ , \quad k = 1, 2, \ldots, n \ ,$$

están bien definidas para cada $\varepsilon > 0$ cuando $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$. El lema siguiente, que generaliza los lemas (2.5) y (2.10), demuestra que la existencia de los límites en (4.6) es equivalente a la de los límites en (4.7).

Lema (4.8):

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \left\{ \int_{E_n} f(U) \frac{X-U}{(\varepsilon^2 + |X-U|^2)^{(n+1)/2}}\, dU - \int_{|X-U|\geq\varepsilon} f(U) \frac{X-U}{|X-U|^{(n+1)/2}}\, dU \right\} = 0$$

p.p. <u>y, también, en la norma de</u> L^p, <u>si</u> $f \in L^p(E_n)$ <u>para</u> $1 \leq p < \infty$.

Demostración:

La prueba que este límite es 0 p.p. (ó en L^p) es completamente análoga a la del lema (2.10) (ó (2.5)). Como en el caso de una dimensión, el conjunto de Lebesgue de f es el conjunto de todos los $X \in E_n$ tales que

$$\frac{1}{\delta^n} \int_{|U|<\delta} |f(X-U) - f(X)|\, dU = \frac{\phi(\delta)}{\delta^n} \longrightarrow 0$$

cuando $\delta \to 0$, y casi todos los $X \in E_n$ están en el conjunto de Lebesgue de f. Entonces, para la primera conclusión del lema nos basta mostrar que el límite es 0 para cada X en el conjunto de Lebesgue de f .

Tenemos (ver la demostración del corolario (2.9)) :

$$\left| \int_{E_n} f(X-U) \frac{U}{(|U|^2 + \varepsilon^2)^{(n+1)/2}} dU - \int_{|U|\geq\varepsilon} f(X-U) \frac{U}{|U|^{n+1}} dU \right| =$$

$$= \left| \int_{|U|<\varepsilon} \{ f(X-U)-f(X) \} \frac{U}{(|U|^2+\varepsilon^2)^{(n+1)/2}} dU + \right.$$

$$\left. + \int_{|U|\geq\varepsilon} f(X-U) \left(\frac{U}{(|U|^2 + \varepsilon^2)^{(n+1)/2}} - \frac{U}{|U|^{n+1}} \right) dU \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{|U|<\varepsilon} | f(X-U)-f(X) | \, dU + \int_{|U|\geq\eta} | f(X-U) | . |U| \left(\frac{1}{|U|^{n+1}} - \frac{1}{(|U|^2 + \varepsilon^2)^{(n+1)/2}} \right) dU +$$

$$+ \varepsilon^2 \left(\frac{n+1}{2} \right) \left\{ \int_{\eta>|U|\geq\varepsilon} | f(X-U)-f(X) | \frac{|U|(|U|^2 + \theta\varepsilon^2)^{(n-1)/2}}{|U|^{n+1}(|U|^2 + \varepsilon^2)^{(n+1)/2}} dU \right\} ,$$

donde $0 < \theta < 1$ (usando el teorema del valor medio) .

Puesto que X pertenece al conjunto de Lebesgue de f , el primer término tiende a cero con ε . Para $\eta > 0$ un número fijado, el segundo término tiende también a cero con ε (puesto que las funciones

$$| f(X-U) | . |U| \left(\frac{1}{|U|^{n+1}} - \frac{1}{(|U|^2 + \varepsilon^2)^{(n+1)/2}} \right)$$

decrecen a 0 con ε). Entonces nos basta mostrar que podemos elejir η , independientemente de ε ,de manera que el último término sea pequeño. Pongamos $|U|=r$, $U = rU'$ y designemos con Σ la esfera unitaria de E_n . El último termino es mayorado por

$$\frac{n+1}{2} \varepsilon^2 \int_{\eta>|U|\geq\varepsilon} \frac{| f(X-U) - f(X) |}{|U|^{n+2}} dU =$$

$$= \frac{n+1}{2} \varepsilon^2 \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{1}{r^{n+2}} \left\{ \int_{\Sigma} | f(X-rU') - f(X) | \, r^{n-1} dU' \right\} dr .$$

Integrando por partes, teniendo presente que

$$\int_0^r \left\{ \int_{\Sigma} |f(X-sU')-f(X)| \, s^{n-1} dU' \right\} ds = \phi(r) ,$$

el último término es igual a

$$\frac{n+1}{2}\,\varepsilon^2\left\{\frac{\phi(\eta)}{\eta^{n+2}}-\frac{\phi(\varepsilon)}{\varepsilon^{n+2}}+(n+2)\int_{\varepsilon}^{\eta}\frac{\phi(r)}{r^n}\,\frac{1}{r^3}\,dr\right\}\leq$$

$$\leq\frac{n+1}{2}\,\varepsilon^2\left\{\frac{1}{\eta^2}\,\frac{\phi(\eta)}{\eta^n}+(n+2)\left(\sup_{r\leq\eta}\frac{\phi(r)}{r^n}\right)\frac{1}{2\,\varepsilon^2}\right\}\leq\frac{(n+1)(n+4)}{4}\left(\sup_{r\leq\eta}\frac{\phi(r)}{r^n}\right)$$

Entonces, puesto que X está en el conjunto de Lebesgue de f, el último término es tan pequeño como deseamos para η bastante pequeña.

Vimos que esta demostración es una generalización casi inmediata de la del lema (2.10). La demostración que este límite es cero en la norma de L^p es una generalización aún más inmediata del caso $n = 1$ (ver el lema (2.5)) y por esta razón no tiene ningun sentido darla aquí.

Desarrollaremos ahora la teoría de las transformadas de M. Riesz como operadores en el espacio $L^2(E_n)$.

L e m a (4.9) :

Para cada $t > 0$, la transformada de Fourier del núcleo conjugado de Poisson, como función de X,

$$Q_k(t,X) = \frac{c_n}{(2\pi)^n}\,\frac{x_k}{(|X|^2+t^2)^{(n+1)/2}}\,,\qquad k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

es la función

$$i\,\frac{y_k}{|Y|}\,e^{-t|Y|}\,.$$

D e m o s t r a c i ó n :

Observamos que $Q_k(t,X) = \frac{x_k}{t}\,P(t,|X|)$. Luego, el teorema sería una consecuencia inmediata del teorema (3.2) del capítulo I si $x_k\,P(t,|X|)$ fuera una función de $L^1(E_n)$. Pero, esta función está en $L^2(E_n)$ y, en la norma de $L^2(E_n)$, tenemos, para cada $t > 0$,

$$\lim_{h_k\to 0}\;-\frac{i}{t}\left(\frac{e^{i\,x_k h_k}-1}{h_k}\right)P(t,|X|) = \frac{x_k}{t}\,P(t,|X|) = Q_k(t,X)$$

y

$$\lim_{h_k\to 0}\;-\frac{i}{t}\;\frac{e^{-t(y_1^2+\ldots+(y_k+h_k)^2+\ldots+y_n^2)^{\frac{1}{2}}}-e^{-t(y_1^2+\ldots+y_n^2)^{\frac{1}{2}}}}{h_k} = i\,\frac{y_k}{|Y|}\,e^{-t|Y|}\,.$$

Puesto que

$$-\frac{i}{t}\int_{E_n} e^{i\,X.Y}\left(\frac{e^{i\,x_k h_k}-1}{h_k}\right) P(t,|X|)\,dX = -\frac{i}{t}\,\frac{e^{-t(y_1^2+\dots+(y_k+h_k)^2+\dots+y_n^2)^{\frac{1}{2}}}-e^{-t|Y|}}{h_k}$$

el teorema de Plancherel implica que, en la norma de $L^2(E_n)$,

$$\int_{E_n} e^{iX.Y}\,Q_k(t,X)\,dX = \lim_{\rho\to\infty}\int_{|X|\leq\rho} e^{iX.Y}\,Q_k(t,X)\,dX = i\,\frac{y_k}{|Y|}\,e^{-t|Y|}$$

C o r o l a r i o (4.10) :

<u>Si</u> $f\in L^2(E_n)$ <u>las transformadas de M. Riesz existen en el sentido de la norma de</u> $L^2(E_n)$. <u>Más precisamente, existen funciones</u> $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_n$ <u>tales que</u>

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} ||\tilde{f}_{k,\varepsilon}-\tilde{f}_k||_2 = 0 \quad , \quad k=1,2,\dots,n \quad .$$

D e m o s t r a c i ó n :

Por el lema (4.8) nos basta mostrar que las integrales conjugadas de Poisson

$$v_k(\varepsilon,X) = \int_{E_n} f(U)\,Q_k(\varepsilon,X-U)\,dU$$

tienen límites $\tilde{f}_k(X)$ en la norma de $L^2(E_n)$, cuando $\varepsilon\to 0+$. Tomando transformadas de Fourier de estas integrales obtenemos, por lema (4.9) ,

$$\hat{v}_k(\varepsilon,Y) = i\,\frac{y_k}{|Y|}\,e^{-\varepsilon|Y|}\,\hat{f}(Y) \quad .$$

El teorema sigue ahora del teorema de Plancherel .

Esta demostración nos da, también, la siguiente extensión del corolario (2.7) :

C o r o l a r i o (4.11) :

<u>Si</u> $f\in L^2(E_n)$ <u>y</u> $\tilde{f}_k$ <u>es su k-ésima transformada de M. Riesz entonces</u>

$$\hat{\tilde{f}}_k(Y) = i\,\frac{y_k}{|Y|}\,\hat{f}(Y) \quad .$$

Designamos con R_k la **k-ésima** transformada de M. Riesz . Luego, por el último corolario,

$$\mathfrak{J}R_k^2(f) = i\,\frac{y_k}{|Y|}\,\mathfrak{J}R_k(f) = -\frac{y_k^2}{|Y|^2}\,\mathfrak{J}(f) \quad .$$

Entonces, para cada $f\in L^2(E_n)$, obtenemos

$$\mathfrak{J}\sum_{k=1}^{n} R_k^2(f) = -\mathfrak{J}(f)$$

Aplicando $\mathfrak{J}^{-1} = \mathfrak{J}^{*}$ a ambos miembros de esta igualdad obtenemos :

C o r o l a r i o (4.12) :

$\sum_{k=1}^{n} R_k^2 = -I$, <u>donde</u> I <u>es la transformación identidad:</u> $I(f) = f$ <u>para cada</u> $f \in L^2(E_n)$.

Examinamos las integrales conjugadas de Poisson

$$v_k(t,X) = \int_{E_n} f(U)\, Q_k(t,X-U)\, dU \ , \qquad k = 1, 2, \ldots, n \ .$$

Hemos visto que son funciones harmónicas. Además, (ver la demostración del corolario (4.10)), usando el teorema de Plancherel , tenemos para cada $t > 0$,

$$\left(\int_{E_n} |v_k(t,X)|^2 dX\right)^{\frac{1}{2}} = (2\pi)^{-n/2} \|\hat{v}_k(t,Y)\|_2 = (2\pi)^{-n/2} \left\| i \frac{y_k}{|Y|} e^{-t|Y|} \hat{f} \right\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-n/2} \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2 \ .$$

Estos hechos, junto con el hecho de que (ver (4.8) y (4.10))

$$\lim_{t \to 0+} \left(\int_{E_n} |v_k(t,X) - \tilde{f}_k(X)|^2 \, dX \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \ .$$

son exactamente las condiciones del teorema (1.14) para que las $v_k(t,X)$ sean las integrales de Poisson de las $\tilde{f}_k$. Pero, ya sabemos que estas últimas integrales convergen p.p. a $\tilde{f}_k(X)$, cuando $t \to 0+$. Entonces, por el lema (4.8) , obtenemos:

C o r o l a r i o (4.13) :

<u>Si</u> $f \in L^2(E_n)$ <u>entonces</u>

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \tilde{f}_{k,\varepsilon}(X) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left\{ \frac{c_n}{(2\pi)^n} \int_{|X-U| \geqslant \varepsilon} f(U) \frac{x_k - u_k}{|X-U|^{n+1}} \, dU \right\} = \tilde{f}_k(X)$$

<u>para casi todos los</u> $X \in E_n$.

Ahora pasamos al caso general: $f \in L^p$, $1 < p < \infty$. Mostraremos que se puede reducir la teoría de las transformadas de Riesz en n-dimensiones a la de la transformada de Hilbert . Reunamos unos hechos de esta última teoría que nos serán útiles:

Si $h \in L^p(E_1)$, $1 < p < \infty$, hemos visto que (ver la demostración del teorema (3.24)) , para cada $y > 0$,

$$v(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(x-u)\,\frac{u}{u^2+y^2}\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{h}(x-u)\,\frac{y}{u^2+y^2}\,du .$$

Esto es, $v(x,y)$ es la integral de Poisson de la transformada de Hilbert de h. Pero hemos observado (ver el final de la primera sección de este capítulo) que

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{h}(x-u)\,P(y,u)\,du\right|^p dx\right)^{1/p} \leq \|\tilde{h}\|_p .$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ fijada, la transformación $h(x) \rightarrow v(x,\varepsilon)$ es una transformación acotada en L^p, $1 < p < \infty$, porque $\|\tilde{h}\|_p \leq a_p\|h\|_p$ (por teorema (3.24)). Además, las normas de estas transformaciones son mayoradas por a_p que es una constante que no depende de $\varepsilon > 0$.

Otro operador que consideramos en el desarrollo de la teoría de la transformada de Hilbert era la transformación que hacía corresponder a $h \in L^p(E_1)$ la función

$$g^{(\varepsilon)}(x) = v(x,\varepsilon) - \frac{1}{\pi}\int_{|u|\geq\varepsilon}\frac{h(x-u)}{u}\,du , \quad \varepsilon > 0 .$$

Otra vez, es fácil demostrar que cada miembro de esta familia de operadores es un operador acotado y que las normas son mayoradas por una constante, independientemente de $\varepsilon>0$: Primero observamos que

$$\pi\,|g^{(\varepsilon)}(x)| = \left|\int_{|u|\leq\varepsilon} h(x-u)\,\frac{u}{u^2+\varepsilon^2}\,du + \int_{|u|>\varepsilon} h(x-u)\left(\frac{u}{\varepsilon^2+u^2}-\frac{1}{u}\right)du\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{|u|\leq\varepsilon}|h(x-u)|\,du + \varepsilon^2\int_{|u|\geq\varepsilon}\frac{|h(x-u)|}{|u|^3}\,du \leq h^*(x) + \varepsilon^2\int_{|u|\geq\varepsilon}\frac{|h(x-u)|}{|u|^3}\,du$$

Entonces, por el corolario (3.12) y el lema (2.3) del primer capítulo:

$$\pi\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g^{(\varepsilon)}(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \|h^*\|_p + \|h\|_p\,\varepsilon^2\int_{|u|\geq\varepsilon}\frac{du}{|u|^3} \leq (m_p+1)\,\|h\|_p$$

Puesto que

$$\tilde{h}_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\int_{|u|\geq\varepsilon}\frac{h(x-u)}{u}\,du = v(x,\varepsilon) - g^{(\varepsilon)}(x) ,$$

existe una constante $b_p > 0$, independiente de $\varepsilon > 0$, tal que

(4.14) $$\|\tilde{h}_\varepsilon\|_p \leq b_p\|h\|_p .$$

El lema siguiente nos da la generalización a n-dimensiones de esta desigualdad:

L e m a (4.15) :

Si $f \in L^p(E_n)$, $1 < p < \infty$, y

$$\tilde{f}_{k,\varepsilon}(X) = \frac{c_n}{(2\pi)^n} \int_{|U|\geq\varepsilon} f(X-U) \frac{u_k}{|U|^{n+1}} dU ,$$

$k = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$\|\tilde{f}_{k,\varepsilon}\|_p \leq a_p \|f\|_p , \tag{4.16}$$

donde a_p no depende de $f \in L^p(E_n)$ ni de $\varepsilon > 0$.

D e m o s t r a c i ó n :

Puesto que $f \to \tilde{f}_{k,\varepsilon}$ es una transformación bién definida es obvio que nos basta probar la desigualdad (4.16) para un subespació de $L^p(E_n)$ denso. Para evitar dificultades fastidiosas que se encuentran cuando una función está definida sólo p.p. supondremos que f es contínua y se anula fuera de un conjunto compacto. Esto implica, en particular, que si se restringe f a una recta del espacio E_n , entonces esta restricción pertenece al espacio L^p de esta recta.

Pongamos $r = |U|$, $\frac{1}{r} U = U' = (u_1', \ldots, u_k', \ldots, u_n')$ y designemos con Σ la superficie de la esfera unitaria de E_n . Usando esta notación y el hecho que la función $\Omega(U) = u_k/|U|^{n+1}$ es impar (esto es, $\Omega(-U) = -\Omega(U)$), tenemos

$$\frac{2(2\pi)^n}{c_n} \tilde{f}_{k,\varepsilon}(X) = 2 \int_{|U|\geq\varepsilon} \frac{f(X-U)}{|U|^{n+1}} u_k \, dU = \int_{|U|\geq\varepsilon} \frac{f(X-U) - f(X+U)}{|U|^{n+1}} u_k \, dU =$$

$$= \int_{\Sigma} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(X-rU') - f(X+rU')}{r^{n+1}} u_k \, r^{n-1} dr \right\} dU' =$$

$$= \int_{\Sigma} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(X-rU') - f(X+rU')}{r} \frac{u_k}{r} dr \right\} dU' =$$

$$= \int_{\Sigma} u_k' \left\{ \int_{|r|\geq\varepsilon} \frac{f(X-rU')}{r} dr \right\} dU'$$

Entonces, usando la desigualdad de Minkowski para integrales, obtenemos

$$\frac{2(2\pi)^n}{c_n} \|\tilde{f}_{k,\varepsilon}\|_p \leq \int_{\Sigma} |u_k'| \left\{ \int_{E_n} \left| \int_{|r|\geq\varepsilon} \frac{f(X-rU')}{r} dr \right|^p dX \right\}^{1/p} dU' \leq$$

$$\leq |\Sigma| \left\{ \int_{E_n} \left| \int_{|r|\geq\varepsilon} \frac{f(X-rU')}{r} dr \right|^p dX \right\}^{1/p} ,$$

donde $|\Sigma|$ es el área de Σ .

Pongamos $z = X.U'$, $X = Y + zU'$ y $h(z) = h_Y(z) = f(Y + zU')$. Entonces, el último término es igual a

$$|\Sigma| \left\{ \int_{E_n} |\tilde{h}_\varepsilon(z)|^p dX \right\}^{1/p} = |\Sigma| \left\{ \int \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{h}_\varepsilon(z)|^p dz \right) dY \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq |\Sigma| \left\{ \int \left(b_p^p \int_{-\infty}^{\infty} |h(z)|^p \, dz \right) dY \right\}^{1/p} \quad \text{(por (4.14))}$$

$$= |\Sigma| \, b_p \left\{ \int \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(Y + zU')|^p \, dz \right) dY \right\}^{1/p} = b_p \, |\Sigma| \, ||f||_p \quad .$$

Reuniendo todas estas desigualdades, obtenemos:

$$||\tilde{f}_{k,\varepsilon}|| \leq \frac{b_p |\Sigma| \, c_n}{2(2\pi)^n} ||f||_p \quad ,$$

y el lema está demostrado.

C o r o l a r i o (4.17) :

Si $f \in L^p(E_n)$, $1 < p < \infty$, y

$$v_k(\varepsilon, X) = \frac{c_n}{(2\pi)^n} \int_{E_n} f(X-U) \frac{u_k}{(\varepsilon^2 + |U|^2)^{(n+1)/2}} \, dU$$

es su k-esima integral conjugada de Poisson , entonces

$$\left(\int_{E_n} |v_k(\varepsilon, X)|^p \, dX \right)^{1/p} \leq c_p ||f||_p$$

donde c_p no depende de $f \in L^p(E_n)$ ni de $\varepsilon > 0$.

D e m o s t r a c i ó n :

Pongamos

$$g_k^{(\varepsilon)}(X) = v_k(\varepsilon, X) - \tilde{f}_{k,\varepsilon}(X) \quad .$$

Por el último lema nos basta mostrar que existe una constante, d , que no depende de $\varepsilon > 0$ ni de $f \in L^p(E_n)$ tal que $||g_k^{(\varepsilon)}||_p \leq d \, ||f||_p$.

Tenemos (como en el caso de una dimensión)

$$\left| \frac{(2\pi)^n}{c_n} g_k^{(\varepsilon)}(X) \right| \leq \left| \int_{|U|<\varepsilon} f(X-U) \frac{u_k}{(\varepsilon^2 + |U|^2)^{(n+1)/2}} \, dU \right| +$$

$$+ \left| \int_{|U|\geq\varepsilon} f(X-U) \left(\frac{u_k}{(\varepsilon^2 + |U|^2)^{(n+1)/2}} - \frac{u_k}{|U|^{n+1}} \right) dU \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{|U|<\varepsilon} | f(X-U) | \, dU + \varepsilon^2 \, \frac{n+1}{2} \int_{|U|\geq\varepsilon} \frac{|f(X-U)|}{|U|^{n+2}} \, dU \leq$$

$$\leq f^*(X) + \frac{n+1}{2} \varepsilon^2 \int_{|U|\geq\varepsilon} \frac{|f(X-U)|}{|U|^{n+2}} \, dU \; .$$

Entonces, por el lema (2.3) del capítulo I y el corolario (3.12) ,

$$\frac{(2\pi)^n}{c_n} ||g_k^{(\varepsilon)}||_p \leq ||f^*||_p + \frac{n+1}{2} \left(\varepsilon^2 \int_{|U|\geq\varepsilon} \frac{dU}{|U|^{n+2}} \right) ||f||_p \leq$$

$$\leq \left(m_p + \frac{n+1}{2} \frac{|\Sigma|}{2}\right) ||f||_p \; ,$$

donde $|\Sigma|$ es el área de la esfera unitaria de E_n . Esto demuestra la desigualdad $||g_k^{(\varepsilon)}||_p \leq d \, ||f||_p$ con

$$d = \frac{c_n}{(2\pi)^n} \left(m_p + \frac{n+1}{2} \frac{|\Sigma|}{2}\right) \; .$$

El teorema principal en la teoría de las transformadas de M. Riesz es el siguiente:

T e o r e m a 4.18 :

Si $f \in L^p(E_n)$, $1 < p < \infty$, entonces, para cada $k = 1, 2, 3, \ldots, n$,

$$\tilde{f}_k(X) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{c_n}{(2\pi)^n} \int_{|U|\geq\varepsilon} \frac{f(X-U) \, u_k}{|U|^{n+1}} \, dU$$

existe p.p. en L^p Además, existe una constante a_p , que no depende de $f \in L^p(E_n)$, tal que

(4.19) $$||\tilde{f}_k||_p \leq a_p \, ||f||_p$$

D e m o s t r a c i ó n :

Primero observamos que, si hemos probado la primera parte del teorema, la última parte (desigualdad (4.19)) sigue de la desigualdad (4.16) y el lema de Fatou . Entonces, por el lema (4,8) , nos basta mostrar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} v_k(\varepsilon, X) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{c_n}{(2\pi)^n} \int_{E_n} f(X-U) \frac{u_k}{(\varepsilon^2 + |U|^2)^{(n+1)/2}} \, dU$$

existe p.p. y en L^p . Como siempre, reduciremos este problema a hechos ya conocidos acerca de las integrales de Poisson de funciones en L^p , $1 < p < \infty$.

Primero, si $f \in L^2 \cap L^1$ sabemos que $\tilde{f}_k(X) = \lim_{\varepsilon \to 0+} v_k(\varepsilon, X)$ existe p.p. (ver el corolario (4.13) y el lema (4.8)) y, por el lema (4.15) y el lema de Fatou ,

$$||\tilde{f}_k||_p \leq a_p \, ||f||_p \quad .$$

Entonces la transformación $f \to \tilde{f}_k$, como transformación de, digamos, funciones simples, tiene una única extensión acotada sobre todo $L^p(E_n)$. Ahora, si f es una función general de $L^p(E_n)$, designando con $\tilde{f}_k$ el valor de esta extensión aplicada a f , mostraremos que para cada $\varepsilon > 0$

$$(4.20) \qquad v_k(\varepsilon, X) = \frac{c_n}{(2\pi)^n} \int_{E_n} \tilde{f}_k(X-U) \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2+|U|^2)^{(n+1)/2}} \, dU = \int_{E_n} \tilde{f}_k(X-U) P(\varepsilon, |U|) dU \, .$$

Luego, por los teoremas (5.7) y (5.10) y el lema (6.1) del primer capítulo, esto demostrará el teorema.

Sea $\{g^m\}$ una sucesión de funciones simples tal que $\lim_{m \to \infty} ||g^m - f||_p = 0$. Hemos ya observado, antes del corolario (4.13) , que

$$v_k^m(\varepsilon, X) = \int_{E_n} g^m(X-U) \, Q_k(\varepsilon, U) \, dU = \int_{E_n} \tilde{g}_k^m(X-U) \, P(\varepsilon, |U|) \, dU \quad .$$

Pero por la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ tenemos

$$| \, v_k(\varepsilon, X) - v_k^m(\varepsilon, X) \, | = | \int_{E_n} \left\{ g^m(X-U) - f(X-U) \right\} Q_k(\varepsilon, U) \, dU \leq$$

$$\leq ||g^m - f||_p \left(\int_{E_n} |Q_k(\varepsilon, U)|^q \, dU \right)^{1/q} \longrightarrow 0$$

cuando $m \to \infty$.

Además, por el mismo argumento,

$$| \int_{E_n} \tilde{f}_k(X-U) \, P(\varepsilon, |U|) \, dU - v_k^m(\varepsilon, X) \, | = | \int \left(\tilde{f}_k(X-U) - \tilde{g}_k^m(X-U) \right) P(\varepsilon, |U|) \, dU \, | \leq$$

$$\leq ||\tilde{f}_k - \tilde{g}_k^m||_p \left(\int_{E_n} |P(\varepsilon, |U|)|^q \, dU \right)^{1/q} \leq a_p \, ||f - g^m||_p \left(\int_{E_n} |P(\varepsilon, |U|)|^q \, dU \right)^{1/q} \longrightarrow 0$$

cuando $m \to \infty$.

Esto demuestra la igualdad (4.20) y el teorema está probado .

Observaciones :

(1) En el caso de una dimensión hemos visto que la transformada de Hilbert, como operador en $L^2(E_1)$, es una transformación unitaria y su inversa no es nada más que su opuesta (ver el teorema (2.6)). Se puede considerar el resultado (4.12) como la generalización a n dimensiones de este hecho: Si designamos con R el operador que hace corresponder a $f \in L^2(E_n)$ la función vectorial $Rf = (R_1 f, R_2 f, \ldots, R_n f)$ entonces $R^2 = -I$; en particular, si tenemos las n transformadas de M. Riesz de f, $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$, ..., $\tilde{f}_n$, podemos hallar f, por que $f = -R_1\tilde{f}_1 - R_2\tilde{f}_2 - \ldots - R_n\tilde{f}_n$. Sin embargo, R no es "sobre" el espacio de todas las funciones vectoriales $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, donde las funciones g_k, $k=1,2,\ldots,n$, están en $L^2(E_n)$.

(2) En la demostración de la desigualdad (4.16) hemos probado un hecho más general: Pongamos

$$\frac{c_n}{(2\pi)^n}\,\frac{u_k}{|U|^{n+1}} = \frac{\Omega(U/|U|)}{|U|^n},$$

donde $\Omega(U/|U|) = \dfrac{c_n}{(2\pi)^n}\,\dfrac{u_k}{|U|}$, y $\tilde{f}_\varepsilon(X) = \check{f}_{k,\varepsilon}(X) = \displaystyle\int_{|U|\geq\varepsilon} f(X-U)\,\frac{\Omega(U/|U|)}{|U|^n}\,dU$.

Entonces, las únicas propiedades de la función Ω que hemos usado para demostrar la desigualdad

$$||\tilde{f}_\varepsilon||_p \leq a_p\,||f|| \quad , \quad 1 < p < \infty ,$$

son las siguientes:

a) $\Omega\left(\dfrac{-U}{|U|}\right) = -\Omega\left(\dfrac{U}{|U|}\right)$;

b) $\displaystyle\int_\Sigma |\Omega(U')|\,dU' < \infty$, donde $U' = U/|U|$ y Σ es la superficie de la esfera unitaria en E_n.

(3) En dos dimensiones, se pueden representar las dos transformadas de M. Riesz, R_1 y R_2, en una forma muy simple. Consideremoslas como transformaciones en $L^2(E_2)$ y pongamos $R = R_1 + iR_2$. El resultado (4.11) implica que el operador $\mathfrak{J} R \mathfrak{J}^{-1}$ es el operador multiplicación por la función

$$i\,\frac{y_1 + iy_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}}} = i\,e^{i\theta} ,$$

donde $r = (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}}$ y $\cos\theta = y_1/r$, $\operatorname{sen}\theta = y_2/r$. Entonces R es un operador unitario. R se llama la transformada compleja de M. Riesz. Si $f = f_1 + if_2 \in L^2(E_n)$, donde f_1 y f_2 son funciones de valores reales, R tiene la forma de una matriz de dos por dos:

$$Rf = \begin{pmatrix} R_1 & -R_2 \\ R_2 & R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} .$$

§5.- CONVERGENCIA NO TANGENCIAL Y UN TEOREMA GENERAL SOBRE LA CONVERGENCIA DE FUNCIONES HARMONICAS EN E^+_{n+1} .

Hemos demostrado que las integrales de Poisson , $\int_{E_n} f(X-U)\, P(t,|U|)\, dU$, y , también, las integrales conjugadas de Poisson , $\int_{E_n} f(X-U)\, Q_k(t,U)\, dU$, $k=1,\ldots,n$, de una función $f \in L^p(E_n)$, $1 < p < \infty$, convergen a un límite p.p. cuando $t \to 0+$. Ahora mostraremos que estos límites pueden ser obtenidos de una manera más general. Antes de dar la definición necesaria para hablar de esta definición observemos que la existencia de los límites de las integrales conjugadas de Poisson es un corolario de la existencia del límite de la integral de Poisson (ver las demostraciones de los teoremas (3.24) y (4.18)). Entonces nos basta considerar en este asunto integrales de Poisson .

Si $\alpha > 0$ sea $\Gamma_\alpha(X)$ la region cónica de E^+_{n+1} , con vértice $X \in E_n$, definida por

$$\Gamma_\alpha(X) = \left\{ (t,Z) \in E^+_{n+1} \;;\; |X-Z| < \alpha\, t \right\} .$$

Definición : Si $u(t,X)$ es una función definida en E^+_{n+1} diremos que $u(t,X)$ tiene un **límite no tangencial** en $X \in E_n$ si , para cada $\alpha > 0$, existe un número ℓ ,independiente de α , tal que $\lim u(t,Z) = \ell$ cuando (t,Z) tiende a X sin salir de la región $\Gamma_\alpha(X)$.

Ahora podemos enunciar el teorema general:

Teorema 5.1 :

Si $f \in L^p(E_n)$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces la integral de Poisson

$$u(t,X) = \int_{E_n} f(U)\, P(t,|X-U|)\, dU$$

tiene el límite no tangencial $f(X)$ para casi todos los puntos X de E_n .

Demostración :

Elejimos una región $\Gamma_\alpha(X)$ y observamos que

$$\frac{t}{(|Z-U|^2 + t^2)^{(n+1)/2}} \leq d\, \frac{t}{(|X-U|^2 + t^2)^{(n+1)/2}} \tag{5.2}$$

si $|Z-X| < \alpha\, t$, donde $d^{2/(n+1)} = \max\left\{1 + 2\alpha^2 , 2\right\}$.

Mostraremos que, si X es un punto del conjunto de Lebesgue de f, esto es

$$\lim_{r\to 0+} \frac{\emptyset(r)}{r^n} = \lim_{r\to 0+} \frac{1}{r^n} \int_{|U|\leq r} | f(X-U) - f(X) | \, dU = 0 ,$$

entonces $u(t,Z) \to f(X)$ cuando $(t,Z) \to X$ sin salir de $\Gamma_\alpha(X)$. Puesto que casi todos los puntos de E_n están en el conjunto de Lebesgue de f, esto demostrará el teorema.

Usando la propiedad (ii) del núcleo de Poisson (ver (5.7) del primer capítulo) y la desigualdad (5.2), tenemos

$$| u(t,Z) - f(X) | = \left| \int_{E_n} f(U) \, P(t,|Z-U|) \, dU - f(X) \right| =$$

$$= \left| \int_{E_n} \left\{ f(U) - f(X) \right\} P(t,|Z-U|) \, dU \right| \leq d \int_{E_n} | f(U) - f(X) | \, P(t,|X-U|) \, dU =$$

$$= d \int_{E_n} | f(X-U) - f(X) | \, P(t,|U|) \, dU = d \left\{ \int_{|U|\leq\eta} + \int_{|U|>\eta} \right\}$$

Si $\mathcal{E}$ es un número positivo, sea η tan pequeña tal que $\sup_{0\leq r\leq\eta} \frac{\emptyset(r)}{r^n} < \mathcal{E}$.
Con esta η mostraremos que

$$\int_{|U|\leq\eta} + \int_{|U|>\eta} \leq a\mathcal{E}$$

si t es bastante pequeña, donde a es una constante que no depende de $\mathcal{E}$.

Usando las coordenadas polares, $r = |U|$ y $rU' = U$, pongamos

$$g_X(r) = \int_{\Sigma} | f(X - rU') - f(X) | \, dU'$$

y observamos que

$$\int_0^r g_X(s) \, s^{n-1} \, ds = \int_0^r s^{n-1} \left\{ \int_{\Sigma} | f(X - sU') - f(X) | \, dU' \right\} ds =$$

$$= \int_{|U|\leq r} | f(X-U) - f(X) | \, dU = \emptyset(r) .$$

Entonces, integrando por partes y usando la propiedad (v) del núcleo de Poisson (ver la demostración del teorema (5.10) del primer capítulo), obtenemos

$$\int_{|U|\leq\eta} = \int_0^\eta \left\{ \int_{\Sigma} | f(X-rU') - f(X) | \, dU' \right\} r^{n-1} \, P(t,r) \, dr =$$

$$= \int_0^{\eta} g_X(r)\, r^{n-1} P(t,r)\, dr = \emptyset(r)\, P(t,r) \Big]_0^{\eta} - \int_0^{\eta} \emptyset(r)\, P'_r(t,r)\, dr \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\emptyset(\eta)}{\eta^n} \frac{c_n}{(2\pi)^n} \frac{\eta^n\, t}{(\eta^2 + t^2)^{(n+1)/2}} + \int_0^{\eta} \frac{\emptyset(r)}{r^n} r^n \,|\, P'_r(t,r) \,|\, dr \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0 \leqslant r \leqslant \eta} \frac{\emptyset(r)}{r^n} \left\{ \frac{c_n\, \eta^n\, t}{(2\pi)^n (\eta^2 + t^2)^{(n+1)/2}} + \int_0^{\infty} r^n \,|\, P'_r(t,r) \,|\, dr \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{E} \left\{ 1 + \frac{n}{c} \right\} , \text{ si } \quad t \leqslant \eta \frac{(2\pi)^n}{c_n} .$$

También tenemos,

$$\int_{|U|>\eta} |\, f(X-U) - f(X) \,|\, P(t,|U|)\, dU \leqslant$$

$$\leqslant t \frac{c_n}{(2\pi)^n} \int_{|U|>\eta} \frac{|\, f(X-U) \,|}{|U|^{n+1}}\, dU + |\, f(X) \,| \int_{|U|>\eta} P(t,|U|)\, dU < \mathcal{E}$$

si t es bastante pequeña (ver propiedad (iii) en la demostración del teorema (5.7) del primer capítulo) .

Puesto que $t \to 0+$ cuando $(t,Z) \to X$, el teorema está demostrado.

C o r o l a r i o 5.3 :

<u>Si</u> $f \in L^p(E_n)$, $1 < p < \infty$, <u>entonces la función</u>

$$v_k(t,X) = \int_{E_n} f(X-U)\, Q_k(t,U)\, dU$$

<u>converge no tangencialmente a la transformada de Riesz</u> $\tilde{f}_k(X)$ <u>para casi todos los</u> $X \in E_n$.

D e m o s t r a c i ó n :

Como hemos ya observado en la discusión anterior al teorema (5.1) , $v_k(t,X)$ es la integral de Poisson de $\tilde{f}_k$. Puesto que $\tilde{f}_k \in L^p$ (ver el teorema (4.18)), este corolario sigue inmediatamente del último teorema.

Nuestra intención es demostrar un teorema muy general sobre la convergencia no tangencial de funciones harmónicas definidas en E^+_{n+1} . Para enunciar este teorema necesitamos la definición siguiente:

D e f i n i c i ó n : Si $U(t,X)$ es una función definida en E^+_{n+1} dire -

mos que ella es acotada no tangencialmente en X si, para cada $\alpha > 0$, $u(t,Z)$ es acotada en la región $\Gamma_\alpha(X) \cap \{(t,Z) \in E^+_{n+1} \ ; \ t \leq c\}$, donde $c < \infty$ es una constante positiva.(1)

Es obvio que, si una función tiene un límite no tangencial en X, entonces esta función es acotada no tangencialmente en X. Muchas veces es más simple demostrar que una función verifica esta última condición en vez de la condición anterior. El teorema siguiente nos da una ilustración de este hecho:

T e o r e m a 5.4 :

<u>Si</u> $u(t,X)$ <u>es la integral de Poisson de una función</u> $f \in L^p(E_n)$, $1 \leq p \leq \infty$, <u>entonces, para cada</u> $\alpha > 0$,

$$|U(t,Z)| \leq b\, f^*(X)$$

<u>cuando</u> $(t,Z) \in \Gamma_\alpha(X)$, <u>donde</u> b <u>depende sólo de</u> α <u>y de</u> n.

D e m o s t r a c i ó n :

Considerando las partes positivas y negativas de f vemos que podemos reducir la prueba al caso $f \geq 0$ y, entonces, $u(t,X) \geq 0$. La desigualdad (5.2) implica que

$$u(t,Z) \leq d\, u(t,X)$$

para $(t,Z) \in \Gamma_\alpha(X)$.

Por consiguiente basta demostrar que

$$(*) \qquad u(t,X) \leq c\, f^*(X) ,$$

donde c depende sólo de n. Tenemos

$$\frac{(2\pi)^n}{c_n} u(t,X) = t \int_{E_n} \frac{f(X-U)}{(\|U\|^2 + t^2)^{(n+1)/2}}\, dU = t \int_{|U|\leq t} \frac{f(X-U)}{(\|U\|^2 + t^2)^{(n+1)/2}}\, dU +$$

$$+ t \int_{|U|>t} \frac{f(X-U)}{(\|U\|^2+t^2)^{(n+1)/2}}\, dU \leq$$

$$\leq \frac{1}{t^n} \int_{|U|\leq t} f(X-U)\, dU + t \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}t \geq \|U\| > 2^k t} \frac{f(X-U)}{|U|^{n+1}}\, dU \leq$$

$$\leq f^*(X) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k(n+1)} t^n} \int_{2^{k+1}t \geq \|U\|} f(X-U)\, dU \leq$$

$$\leq f^*(X) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^k} \left\{ \frac{1}{(2^{k+1}t)^n} \int_{2^{k+1}t \geq |U\|} f(X-U)\, dU \right\} \leq$$

(1) Esto es, la región limitada por $\Gamma_\alpha(X)$ y un hiperespacio $t = c$. Puesto que las funciones $u(t,X)$ que consideraremos serán harmónicas, si $u(t,X)$ verificará esta definición para un valor $c > 0$, entonces la verificará para todos los valores de $c > 0$.

$$\leq f^*(X) + 2^n f^*(X) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = (1 + 2^{n+1}) f^*(X) \quad .$$

Esto demuestra la desigualdad $(*)$ con $c = \dfrac{c_n(1+2^{n+1})}{(2\pi)^n}$.

Puesto que $f^*(X) < \infty$ para casi todos los X esto demuestra directamente que una integral de Poisson de una función de $L^p(E_n)$, $1 \leq p \leq \infty$, es acotada no tangencialmente en X para casi todos los $X \in E_n$. Encontraremos otras situaciones donde será relativamente simple demostrar que una función harmónica en E^+_{n+1} es acotada no tangencialmente en puntos de un subconjunto de E_n . El teorema general siguiente nos dice que esta información nos bastará para obtener límites no tangenciales p.p.

T e o r e m a (5.5) :

Si $u(t,X)$ es una función harmónica definida en E^+_{n+1} que es acotada no tangencialmente en todos los puntos de un subconjunto $S \subset E_n$ de medida positiva, entonces $u(t,X)$ tiene límites no tangenciales en casi todos los puntos de S .

D e m o s t r a c i ó n :

Para facilitar la comprensión daremos la demostración en el caso $n = 2$. La extensión al caso general no tiene ninguna dificultad. Supongamos que $u(x,y,z) = u(P)$ es una función harmónica en la región $E^+_3 = \{(x,y,z) \in E_3 \; ; \; z > 0\}$ y que $u(P)$ es acotada no tangencialmente en cada punto Q de un subconjunto $E \subset E_2 = \{(x,y,z) \; ; \; z = 0\}$ de medida finita. Considerando sólo conos $\Gamma_\alpha(Q)$ con α igual a un número racional se ve que E es la unión numerable de subconjuntos, F , tales que $|u(P)| \leq m$ para todos los $P \in \left\{\bigcup_{Q\in F} \Gamma_\alpha(Q)\right\} \cap \{P = (x,y,z) \; ; \; 0 < z < 2\} = \mathfrak{A}$. Esto es, u es uniformemente acotada en la región, $\mathfrak{A}$, formada por la unión de conos idénticos, con vértices que son los puntos de F , y limitados por el plano $z = 2$. Entonces nos basta mostrar que $u(P)$ tiende a un límite cuando $P \to Q$, sin salir de $\mathfrak{A}$ para casi todos los puntos Q de F . Dividiendo por m vemos que podemos suponer que $m = 1$. También, podemos suponer que F está contenido en un cuadrado de lado 1 (porque nos basta demostrar el teorema para cada subconjunto $F \cap \{j \leq x \leq j+1 \; , \; k \leq y \leq k+1\}$, $j,k = 0,\pm1,\pm2,\ldots)$. Pongamos

$$\mathcal{D} = \left\{\bigcup_{Q\in F} \Gamma_\alpha(Q)\right\} \cap \{P = (x,y,z) \; ; \; 0 < z < 1\} \; ;$$

$$\mathcal{B} = \text{la frontera de } \mathcal{D} \, ,$$

$$\mathcal{D}_n = \text{la trasladada de } \mathfrak{A} \text{ por } -\tfrac{1}{n} \text{ en la dirección del eje } z,$$

$$\mathcal{G}_n = \mathcal{D}_n \cap E_2$$

$u_n(x,y,z) = u(x,y,z+\frac{1}{n})$, χ_n = la función característica de $\mathcal{G}_n$, $\varphi_n(x,y,z)$ = la integral de Poisson de la función $\chi_n(x,y)\, u_n(x,y,0)$ y $\Psi_n(x,y,z) = u_n(x,y,z) - \varphi_n(x,y,z)$. Observamos que $|\varphi_n| \leq 1$ (ver las propiedades (i) y (ii) del núcleo de Poisson en pagina 20).

La sucesión de funciones $f_n(s,t) = \chi_n(s,t)\, u_n(s,t,0)$ es uniformemente acotada en la norma de $L^2(E_2)$ (en efecto un cálculo fácil demuestra que $||f_n||_2 \leq$ $\leq ||\chi_1||_2 \leq 1 + 2\alpha$) . Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge en el sentido débil a una función $f \in L^2(E_2)$. En particular

$$\varphi_{n_k}(x,y,z) = \int_{E_2} f_{n_k}(s,t)\, P(z,[(x-s)^2 + (y-t)^2]^{\frac{1}{2}})ds\, dt \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \int_{E_2} f(s,t)\, P(z,[(x-s)^2 + (y-t)^2]^{\frac{1}{2}})\, ds\, dt = \varphi(x,y,z)$$

para cada $(x,y,z) \in E_3^+$. Además es obvio que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x,y,z) = u(x,y,z)$. Entonces, $\lim\limits_{k\to\infty} \Psi_{n_k}(x,y,z) = u(x,y,x) - \varphi(x,y,z) = \Psi(x,y,z)$ existe para cada $(x,y,z) \in E_3^+$. Pero la función φ es la integral de Poisson de una función en L^2 y, por el teorema (5.1) , tiene límites no tangenciales para casi todos los puntos de E_2 . Puesto que $u(x,y,z) = \varphi(x,y,z) + \Psi(x,y,z)$ nos basta demostrar que para casi todos los $Q \in F$, $\lim \Psi(P) = 0$ cuando P tiende a Q sin salir de $\mathcal{D}$.

Primero, observamos que las funciones Ψ_n verifican

(1) $|\Psi_n(P)| \leq 2$ para $P \in \mathcal{D}$ (Porque $|\Psi_n| \leq |\varphi_n| + |u_n| \leq 1 + 1$ en $\mathcal{D}$) ;

(2) $\Psi_n(P) \to 0$ cuando $P \to Q \in F$ sin salir de $\mathcal{D}$ (en efecto, por la demostración del teorema (5.1) , se ve que este hecho es cierto para los puntos interiores de $\mathcal{G}_n$).

Ahora supongamos que hemos construído una función harmónica ω que verifica las propiedades siguientes

(a) $\omega(x,y,z) \geq 0$ para $z > 0$;

(b) $\omega(x,y,z) \geq 2$ para $(x,y,z) \in \mathcal{B} - F$;

(c) $\omega(P) \to 0$ cuando $P \to Q$ sin salir de $\mathcal{D}$ para casi todos los $Q \in F$.

Entonces $\omega(P) \pm \Psi_n(P) \geq 0$ para $P \in \mathcal{B} - F$ y

$$\liminf_{\substack{P\to Q\in F\\ P\in\mathcal{D}}} \{\omega(P) \pm \Psi_n(P) = \liminf_{\substack{P\to Q\in F\\ P\in\mathcal{D}}} \omega(P) \geq 0 .$$

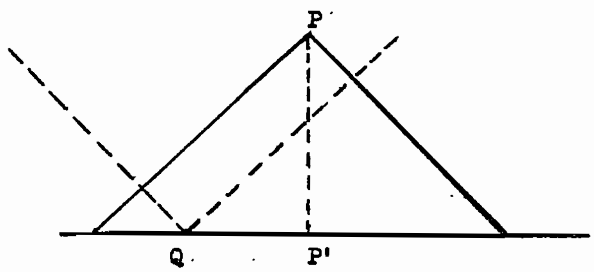
Por consiguiente, usando el principio de máximo vemos que $\omega(P) \pm \Psi_n(P) \geq 0$ para $P \in \mathcal{D}$. Entonces, $\omega(P) \pm \Psi(P) \geq 0$ o, equivalentemente, $|\Psi(P)| \leq \omega(P)$ para $P \in \mathcal{D}$. Puesto que $\omega(P) \to 0$ cuando $P \to Q$ sin salir de $\mathcal{D}$, para casi todos los $Q \in F$, lo mismo tiene que ser cierto para $\Psi(P)$.

Entonces, la única cosa que nos falta para completar la demostración es la construcción de la función ω . Designamos con $\chi(s,t)$ la función característica de $E_2 - F$ y ponemos, para $z > 0$,

$$\omega(x,y,z) = 2z + c \int_{E_2} \frac{z}{\left[z^2 + (x-s)^2 + (y-t)^2 \right]^{3/2}} \chi(s,t)\, ds\, dt ,$$

donde $c = \dfrac{\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\pi(\sqrt{\alpha^2+1} - 1)}$.

Es obvio que $\omega \geq 0$ en E_3^+ . La propiedad (c) es una consecuencia inmediata del teorema (5.1) . Luego, tenemos que demostrar la propiedad (b) . Primero observamos que, si $(x,y,z) \in \mathcal{B} - F$ con $z = 1$ entonces $\omega(x,y,z) \geq 2z = 1$. Ahora supongamos que $P = (x,y,z) \in \mathcal{B}$ y $0 < z < 1$. Consideremos el cono con vértice P , congruente con los conos $\Gamma_\alpha(Q)$, pero dirigido en la dirección opuesta (ver el dibujo). Es fácil demostrar que, si S es el interior del círculo formado por la intersección de este cono con el plano E_2, entonces $S \cap \check{F} = \emptyset$. Si esto no fuera el caso, existiría un punto $Q \in S \cap F$ y es obvio que P está en el interior de $\Gamma_\alpha(Q) \subset \mathcal{D}$ (ver el dibujo); pero esto es imposible, puesto que $P \in \mathcal{B}$. Entonces



$$\omega(P) \geq 2z + c \int_S \frac{z}{\left[z^2 + (x-s)^2 + (y-t)^2 \right]^{3/2}}\, ds\, dt =$$

$$= 2z + c\, 2\pi z \int_0^{\alpha z} \frac{r\, dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = 2z + 2\pi c \frac{(\alpha^2+1)^{\frac{1}{2}} - 1}{(\alpha^2+1)^{\frac{1}{2}}} \geq 2$$

y el teorema está demostrado.

Ahora terminaremos este capítulo con otros resultados básicos de la teoría de las funciones harmónicas. El lema siguiente nos será necesario para la demostración del lema (5.9) :

L e m a (5.6) :

<u>Si</u> $u(t,X)$ <u>es una función harmónica, definida en la región</u> E_{n+1}^+ , <u>tal que</u>

$$\int_{E_n} |u(t,X)|^p\, dX \leq c^p < \infty ,$$

donde $1 \leqslant p < \infty$ y c es independiente de $t > 0$, entonces

(5,7) $$| u(t,X) |^p \leqslant a \frac{c^p}{t^n} \quad ,$$

donde a depende sólo de la dimensión n. Además, si $0 < \mathcal{E} \leqslant t \leqslant \frac{1}{\mathcal{E}}$ entonces $u(t,X) \longrightarrow 0$ uniformemente en t cuando $|X| \longrightarrow \infty$.

D e m o s t r a c i ó n :

Usando el teorema del valor medio de las funciones harmónicas, tenemos

$$\int_{(t-s)^2+|X-U|^2<t^2} u(s,U)\, ds\, dU = \int_{s^2+|U|^2<t^2} u(t+s,X+U)\, ds\, dU =$$

$$= \int_0^t \left\{ \int_{\Sigma} u(t+rs',X+rU')\, ds'\, dU' \right\} r^n\, dr = \int_0^t |\Sigma|\, u(t,X)\, r^n\, dr =$$

$$= \frac{|\Sigma|\; t^{n+1}}{n+1}\, u(t,X) = \omega\, t^{n+1}\, u(t,X) \quad ,$$

donde Σ es la superficie de la esfera unitaria en E_{n+1}, $r = \sqrt{s^2 + |U|^2}$, $(s',U') = \frac{1}{r}(s,U)$, $|\Sigma|$ el área de Σ y $\omega = \frac{|\Sigma|}{n+1}$ el volúmen de la esfera unitaria.

Entonces, usando la desigualdad de Jensen, obtenemos

(5.8) $$| u(t,X) |^p \leqslant \left\{ \frac{1}{\omega t^{n+1}} \int_{(t-s)^2+|X-U|^2<t^2} | u(s,U) |\, ds\, dU \right\}^p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\omega\, t^{n+1}} \int_{(t-s)^2+|X-U|^2<t^2} | u(s,U) |^p\, ds\, dU \quad .$$

Pero, la última integral es menor que

$$\frac{1}{\omega t^{n+1}} \int_{0<s<2t} | u(s,U) |^p\, ds\, dU = \frac{1}{\omega\, t^{n+1}} \int_0^{2t} \left\{ \int_{E_n} | u(s,U) |^p\, dU \right\} ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c^p}{\omega\, t^{n+1}} \int_0^{2t} ds = \frac{2}{\omega}\, \frac{c^p}{t^n} \quad .$$

Esto es, $|u(t,X)| \leqslant \left(\frac{2}{\omega} \right)^{1/p} c t^{-n/p}$ y la desigualdad (5.7) está demostrada con $a = \frac{2}{\omega}$.

Para demostrar la última parte del lema observamos que si

$$I_k = \left\{ (t,X) \in E_{n+1} \quad ; \quad k-1 \leqslant |X| < k \quad , \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\mathcal{E}} + \mathcal{E} \right\} \quad ,$$

$k = 1, 2, 3, \ldots,$ entonces

$$(\ast) \qquad \lim_{k\to\infty} \int_{I_k} |\, u(t,X) \,|^p \, dX \, dt = 0 \quad .$$

Esto es obvio puesto que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} |\, u(t,X) \,|^p \, dX \, dt = \int_0^{\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}} \left\{ \int_{E_n} |\, u(t,X) \,|^p \, dX \right\} dt \leqslant \frac{c^p(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon} < \infty \quad .$$

Si las coordenadas (t,X) verifican $\varepsilon \leqslant t \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$ entonces existe un k tal que $(t,X) \in I_k$. Por consiguiente, la esfera con centro (t,X) y radio ε es un subconjunto de $I_{k-1} \cup I_k \cup I_{k+1}$ (donde I_0 es el conjunto vacío). Entonces, con un argumento similar al usado para obtener la desigualdad (5.8) obtenemos

$$|\, u(t,X) \,|^p \leqslant \frac{1}{\omega \varepsilon^{n+1}} \int_{|U|^2+s^2<\varepsilon^2} |\, u(t+s,X+U) \,|^p \, dU \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\omega \varepsilon^{n+1}} \sum_{j=k-1}^{k+1} \int_{I_j} |\, u(s,U) \,|^p \, dU \, ds \longrightarrow 0$$

cuando $k \longrightarrow \infty$, por $(\ast)$. Pero, si $|X| \longrightarrow \infty$, entonces $k \longrightarrow \infty$ y esto demuestra el lema.

L e m a (5.9) :

<u>Si</u> $u(t,X)$ <u>es una función harmónica definida en</u> E^{+}_{n+1} <u>tal que</u>

$$(5.10) \qquad \int_{E_n} |\, u(t,X) \,|^p \, dX \leqslant c^p$$

<u>para todos los</u> $t > 0$, <u>donde</u> $1 \leqslant p < \infty$, <u>entonces</u>

a) <u>cuando</u> $p > 1$, $u(t,X)$ <u>es la integral de Poisson de una función</u> $f \in L^p(E_n)$ <u>tal que</u> $\|f\|_p \leqslant c$;

b) <u>cuando</u> $p = 1$ <u>existe una medida</u>, μ, (<u>no necesariamente no-negativa</u>) <u>de tipo Lebesgue - Stieltjes tal que</u>

$$\int_{E_n} |d\mu| \leqslant c \qquad \text{y} \qquad u(t,X) = \int_{E_n} P(t,|X-U|) \, d\mu(U) \quad .$$

D e m o s t r a c i ó n :

Primero, consideraremos el caso $p > 1$. Supondremos conocido el hecho que si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones en $L^p(E_n)$ tal que $\|f_k\|_p \leqslant c$, donde c no depende de k, entonces existe una subsucesión $\{f_{k_j}\}$ y una función $f \in L^p$ tales que

$$\lim_{j\to\infty} \int_{E_n} f_{k_j} \, g = \int_{E_n} f \, g$$

para cada $g \in L^{p'}(E_n)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Este hecho y la desigualdad (5.10) implican que existen, una sucesión $\{t_k\}$, con $t_k \to 0$, y una función $f \in L^p(E_n)$ tales que, para cada $g \in L^{p'}(E_n)$,

$$\int_{E_n} u(t_k,U)\, g(U)\, dU \to \int_{E_n} f(U)\, g(U)\, dU$$

cuando $k \to \infty$. En particular, si $g(U) = P(t,|X-U|)$, donde $(t,X) \in E^+_{n+1}$, obtenemos

$$w_k(t,X) = \int_{E_n} u(t_k,U)\, P(t,|X-U|)\, dU \longrightarrow \int_{E_n} f(U)\, P(t,|X-U|)\, dU = v(t,X) .$$

Por el teorema (1.14) , las funciones w_k y v son harmónicas en E^+_{n+1} . Mostraremos que $w_k(t,X) = u(t+t_k,X)$ y esto implicará que $u(t,X) = v(t,X)$, probando la parte a) del lema. Para hacer esto primero mostraremos que $w_k(t,X) \to u(t_k,X)$ uniformemente en X cuando $t \to 0$. Usando la propiedad (ii) del núcleo de Poisson (ver página 20) , tenemos

$$w_k(t,X) - u(t_k,X) = \int_{E_n} \{ u(t_k,U) - u(t_k,X) \}\, P(t,|X-U|)\, dU =$$

$$= \left(\int_{|X-U|<r} + \int_{|X-U|\geq r} \right) \{ u(t_k,U) - u(t_k,X) \}\, P(t,|X-U|)\, dU = I_1 + I_2 .$$

Una consecuencia de la última parte del lema (5.6) es que $u(t_k,X)$ es uniformemente contínua en E_n , para cada $t_k > 0$. Entonces, si r es pequeña, de modo que $|u(t_k,U) - u(t_k,X)| < \delta$ cuando $|X-U| < r$,

$$|I_1| \leq \int_{|X-U|<r} \delta . P(t,|X-U|)\, dU = \delta \int_{E_n} P(t,|X-U|)\, dU = \delta .$$

Ahora, usando la desigualdad (5.7) , tenemos, con esta r ,

$$|I_2| \leq \int_{|X-U|\geq r} \{ |u(t_k,U)| + |u(t_k,X)| \}\, P(t,|X-U|)\, dU \leq$$

$$\leq 2\, \frac{a^{1/p} c}{t_k^{n/p}} \int_{|X-U|\geq r} P(t,|X-U|)\, dU = 2\, \frac{a^{1/p} c}{t_k^{n/p}} \int_{|U|\geq r} P(t,|U|)\, dU .$$

Pero, por la propiedad (iii) del núcleo de Poisson (ver página 20) esta última integral tiende a 0 cuando $t \to 0+$. Luego, hemos demostrado que $w_k(t,X) \to u(t_k,X)$, uniformemente en X , cuando $t \to 0+$. Esto es, para $\varepsilon > 0$ bastante pequeña $|w_k(\varepsilon,X) - u(t_k,X)|$ es pequeña.

Tenemos, por la desigualdad de Minkowski para integrales

$$\left(\int_{E_n} |w_k(t,X)|^p \, dX\right)^{1/p} \leq \int_{E_n} \left\{ \int_{E_n} |u(t_k,X-U)|^p \, dX \right\}^{1/p} P(t,|X-U|) \, du \leq$$

$$\leq c \cdot 1 = c \quad .$$

Entonces, ambas $u(t+t_k,X)$ y $w_k(t,X)$ verifican las hipótesis del lema (5.6). Por consiguiente, por (5.7) , si t es bastante grande, digamos $t = t_o$, $|w_k(t_o,X) - u(t_o+t_k,X)|$ es pequeño. Además, por la última parte del lema (5.6) , cuando $\mathcal{E} \leq t \leq t_o$, $|w_k(t,X) - u(t+t_k,X)|$ es pequeño para $|X|$ bastante grande, digamos $|X| = r$.

Recapitulando, hemos mostrado que en la frontera de la región $\mathcal{D} = \{(t,X) : |X| \leq r, \mathcal{E} \leq t \leq t_o\}$ la función harmónica $w_k(t,X) - u(t+t_k,X)$ tiene un valor absoluto pequeño. Por el principio de máximo de las funciones harmónicas $|w_k(t,X)-u(t+t_k,X)|$ tiene que ser igualmente pequeño para todos los puntos de $\mathcal{D}$. Agrandando $\mathcal{D}$ obtenemos que $w_k(t,X) = u(t+t_k,X)$ y, como hemos ya observado, esto demuestra la parte a) del lema (el hecho que $||f||_p \leq c$ sigue de la observación que hemos hecho al principio de la página 46).

Para demostrar la parte b) consideramos la familia de medidas regulares $\{\mu_t\}$ (no necesariamente no negativas), donde para cada $S \subset E_n$, S medible,

$$\mu_t(S) = \int_S u(t,X) \, dX \quad .$$

La desigualdad (5.10) nos dice que las medidas totales de los miembros de esta familia son acotadas uniformemente. Entonces, como en el caso anterior, existe una sucesión $\{t_k\}$, con $t_k \to 0$, y una medida finita regular μ , tales que

$$\int_{E_n} g(U) \, d\mu_{t_k}(U) \to \int_{E_n} g(U) \, d\mu(U)$$

cuando $k \to \infty$, para cada función continua g que se anula en ∞ . Poniendo $g = P(t,|X-U|)$ y con métodos casi iguales a los del caso anterior obtenemos b) .

L e m a (5.11) :

<u>Si $\{u_n\}$ es una sucesión de funciones harmónicas en una región acotada $\mathcal{R} \subset E_n$ tal que las funciones u_n son uniformemente acotadas en la clausura $\mathcal{S}$ de una subregión $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ entonces existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ que converge uniformemente a una función harmónica en la región $\mathcal{S}$.</u>

D e m o s t r a c i ó n :

Si mostramos que las funciones u_n son equicontinuas en $\mathcal{S}$ entonces este lema es una consecuencia del teorema de Ascoli y el corolario (1.12) . Pero, para demostrar que las funciones u_n son equicontinuas nos basta demostrar que estas funciones tienen primeras derivadas uniformemente acotadas en $\bar{\mathcal{S}}$. Esto sigue de la fórmula

(5.12) $$v(Y) = a^{n-2} \int_{\Sigma} v(X_o + aS) \frac{a^2 - |Y - X_o|^2}{|(Y - X_o) - aS|^n} \, d\sigma_S ,$$

donde v es una función harmónica en una región que contiene a la esfera cerrada con centro X_o y radio a , Y es un punto en el interior de esta esfera, Σ es la superficie de la esfera unitaria de E_n y $d\sigma_S$ es el elemento de área normalizado de Σ . Por consiguiente

$$\frac{\partial v}{\partial y_i}(X_o) = -\frac{n}{a} \int_{\Sigma} v(X_o + aS)\, s_i \, d\sigma_S , \quad i = 1,2,\dots,n ,$$

que demuestra que los valores absolutos de las derivadas de v son mayorados por $\frac{n}{a} \sup_{|X_o - Z| = a} |v(Z)|$.

Nos falta ahora una demostración de la fórmula (5.12) . Si ponemos $u(Z) = v(X_o + aZ)$, para $|Z| \leq 1$, esta igualdad es equivalente a la igualdad

(5.12') $$u(X) = (1 - |X|^2) \int_{\Sigma} \frac{u(S)}{|X-S|^n} \, d\sigma_S .$$

Un cálculo directo demuestra que

$$\frac{1 - |X|^2}{|X-S|^n} = P(X,S) ,$$

como función de X , $|X| < 1$, es harmónica para cada $S \in \Sigma$. Entonces, por el teorema del valor medio (teorema (1.3))

$$1 = P(0,S) = (1 - r^2) \int_{\Sigma} \frac{d\sigma_{X'}}{|rX' - S|^n} ,$$

donde $r = |X|$ y $X = rX'$. Pero, $|rX' - S| = |rS - X'|$ y, intercambiando X' con S , obtenemos

a) $\int_{\Sigma} P(X,S)\, d\sigma_S = 1$ si $|X| < 1$.

Ademas es obvio que

b) $P(X,S) \geq 0$ si $|X| < 1$;

c) Para cada $\eta > 0$ $\int_{\Omega_\eta} P(X,S)\, d\sigma_S \to 0$ cuando $|X| \to 1$, donde $\Omega_\eta = \{ S \in \Sigma \, ; \, |S - X'| > \eta > 0 \}$

Ahora es fácil demostrar (5.12') . Primero, puesto que $P(X,S)$ es harmónica en X la función

$$w(X) = \int_{\Sigma} u(S)\, P(X,S)\, d\sigma_S$$

es harmónica en el interior de la esfera unitaria. Por el principio de máximo nos basta mostrar que $\lim_{r\to 1} |u(rX') - w(rX')| = 0$, uniformemente en $X' \in \Sigma$. Tenemos, por la propiedad a)

$$w(X) - u(X) = \int_{\Sigma} \left[u(X') - u(X) \right] P(X,S)\, d\sigma_S = \int_{\Omega_\eta} + \int_{\Sigma - \Omega_\eta} .$$

Puesto que u es harmónica en la esfera unitaria cerrada, u es uniformemente continua en esta región compacta. Entonces, si $\varepsilon > 0$, existen una $\delta > 0$ y una $\eta > 0$ tales que si $|X| \geq 1 - \delta$ y $|S-X'| \leq \eta$ sigue que $|u(S)-u(X)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Esto es, con esta η , tenemos, usando la propiedad a) ,

$$\left| \int_{\Sigma-\Omega_\eta} \left[u(S) - u(X) \right] P(X,S)\, d\sigma_S \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Sigma} P(X,S)\, d\sigma_S = \frac{\varepsilon}{2} , \quad \text{si } |X| \geq 1 - \delta .$$

Además, por las propiedades b) y c) ,

$$\left| \int_{\Omega_\eta} \left[u(S) - u(X) \right] P(X,S)\, d\sigma_S \right| \leq 2 \max_{|Z|\leq 1} |u(Z)| \int_{\Omega_\eta} P(X,S)\, d\sigma_S \longrightarrow 0$$

si $|X| \longrightarrow 1$. Así que, para $|X|$ bastante cercano a 1 ,

$$\left| \int_{\Omega_\eta} \left[u(S) - u(X) \right] P(X,S)\, d\sigma_S \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

Esto demuestra que $|w(X) - u(X)| < \varepsilon$ si $1 - |X|$ es bastante pequeño y el lema está demostrado.

O b s e r v a c i ó n : la función

$$\frac{1}{|\Sigma|} \frac{1 - |X|^2}{|X - S|^n} , \quad |X| < |S| = 1 ,$$

se llama e l n ú c l e o d e P o i s s o n d e l a e s f e r a u n i t a r i a d e E_n . Si ponemos $|X| = r$, $X = rX'$ y γ = ángulo entre X' y S se puede expresar esta función de la manera siguiente

$$\frac{1}{|\Sigma|} \frac{1 - r^2}{(1 - 2r \cos\gamma + r^2)^{n/2}}$$

que, en el caso $n = 2$, es el bién conocido núcleo de Poisson del círculo unitario de E_2 . Las tres propiedades a) , b) y c) corresponden a las propiedades i) , ii) y iii) , de la página 20 , del núcleo de Poisson , $P(t,|X|)$, del espacio E_n . Si $f(S)$ es una función continua en Σ entonces, con métodos análogos a los que hemos usado, se puede demostrar que

$$u(X) = u(rX') = \int_{\Sigma} f(S) \frac{1 - r^2}{(1 - 2r\cos\gamma + r^2)^{n/2}} \, d\sigma_S$$

es la solución del problema de Dirichlet (ver página 42) cuando $\mathcal{R}$ es la esfera unitaria de E_n .

III.- LA TEORIA DE LOS ESPACIOS H_p

§1.- LOS ESPACIOS H_p CLASICOS .

En el análisis harmónico clásico, esto es, en la teoría de las series de Fourier o la de las integrales de Fourier , los métodos complejos juegan un papel muy importante. Empecemos a bosquejar algunos aspectos de estos métodos. Primero, trataremos la teoría de las series de Fourier y, después, pasaremos a la de las integrales de Fourier .

Supongamos que $f(\theta) \in L^p(0,2\pi)$, $1 \leq p < \infty$, es una función con valores reales, y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ es su serie de Fourier ; esto es

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad .$$

Uno de los problemas principales de la teoría de las series de Fourier es el siguiente: ¿En qué sentido representa la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ a la función $f(\theta)$? Hay muchas soluciones de este problema y una de las mas importantes es el teorema que afirma que la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ es sumable Abel a la función $f(\theta)$ para casi todos los puntos $\theta \in [0,2\pi]$. Esto es,

$$(1.1) \qquad \lim_{\substack{r \to 1 \\ 0 \leq r < 1}} u(re^{i\theta}) = \lim_{\substack{r \to 1 \\ 0 \leq r < 1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} c_n e^{in\theta} = f(\theta)$$

p.p. y en la norma de $L^p(0,2\pi)$.

Es bien conocido que la función $u(re^{i\theta})$ es la integral de Poisson

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \phi) + r^2}\, d\phi$$

de la función f . Por consiguiente, $u(re^{i\theta})$ es harmónica en el interior del disco unitario, $0 \leq r < 1$, y verifica

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\, u(re^{i\theta})\, |^p\, d\theta \leq ||f||_p^p \quad ,$$

para cada r , $0 \leq r < 1$ (estas propiedades de u siguen fácilmente de las propiedades a) , b) y c) del núcleo de Poisson que hemos probado en el caso de la demostración del lema (5.11) y de otras estimaciones similares a las que hemos hecho en la pagina 23 donde demostrábamos un resultado análogo a la igualdad (1.1)).

El hecho de que $u(re^{i\theta})$ es harmónica también sigue inmediatamente de la observación de que $u(re^{i\theta})$ es la parte real de una función analítica. Más precisamente, tenemos, para $n \geq 0$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{-i(-n)\theta}\, d\theta} = \overline{c_{-n}} \quad .$$

Entonces, si $c_n = a_n + i\, b_n$,

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (c_n\, e^{in\theta} + \overline{c_n}\, e^{-in\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n\, 2\mathcal{R}\{c_n\, e^{in\theta}\} = \mathcal{R}\Big\{\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n (re^{i\theta})^n\Big\} \; .$$

Esto es, $u(re^{i\theta})$ es la parte real de la función analítica $F(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z = re^{i\theta}$ (es obvio que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}$ converge absolutamente si $r < 1$ porque $|c_n| \leq ||f||_1$) .

Si $\infty > p > 1$ es bien conocido que la parte imaginaria, $v(re^{i\theta})$, de $F(z)$ también es la integral de Poisson de una función $\tilde{f}(\theta) \in L^p(0,2\pi)$. Por consiguiente $\lim_{r\to 1} v(re^{i\theta}) = \tilde{f}(\theta)$ p.p. y en $L^p(0,2\pi)$. Si $p = 1$ el límite $\tilde{f}(\theta)$ existe p.p. también, pero existen ejemplos en los cuales $\tilde{f} \notin L^1(0,2\pi)$.

Resumiendo, hemos visto que, si $f \in L^p(0,2\pi)$, $1 \leq p < \infty$, es una función con valores reales, existe una función analítica $F(z) = F(re^{i\theta}) = u(re^{i\theta}) + iv(re^{i\theta})$, $0 \leq r < 1$, (F es única si imponemos la condición $v(0) = 0$) tal que su parte real converge a $f(\theta)$ p.p. y en $L^p(0,2\pi)$, cuando $r \to 1$, y está en $L^p(0,2\pi)$ uniformemente (respecto de r) ; esto es

$$\int_0^{2\pi} |\, u(re^{i\theta})\, |^p\, d\theta \leq A < \infty \quad , \tag{1.2}$$

para $0 \leq r < 1$. Además, si $1 < p < \infty$ la parte imaginaria también converge, p.p. y en $L^p(0,2\pi)$, a una función $\tilde{f}(\theta)$ y está en $L^p(0,2\pi)$ uniformemente (respecto de r) . Por consiguiente, en este caso,

$$\int_0^{2\pi} |\, F(re^{i\theta})\, |^p\, d\theta \leq B < \infty \quad , \tag{1.3}$$

para $0 \leq r < 1$, y

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0\leq r<1}} F(re^{i\theta}) = F(e^{i\theta}) = f(\theta) + i\,\tilde{f}(\theta) \tag{1.4}$$

existe p.p. y en $L^p(0,2\pi)$.

Luego, es natural preguntar si en algún sentido podemos resolver un problema inverso. Por ejemplo, en vista de los hechos que hemos descripto cuando $1 < p < \infty$ sería natural hacer la conjetura siguiente:

Si $u(re^{i\theta})$ es una función harmónica para $0 \leq r < 1$ que obedece a la condición (1.2), cuando $1 < p < \infty$, entonces la función analítica $F(re^{i\theta}) = u(re^{i\theta}) + i\,v(re^{i\theta})$, $0 \leq r < 1$ verifica las condiciones (1.4) (F existe puesto que el disco unitario es simplemente conexo - ver las observaciones en la página 46 - y es única si imponemos la condición $v(0) = 0$).

Es bien conocido que esta conjetura es cierta. Pero, como hemos ya observado (cuando indicamos que existe $f \in L^1(0,2\pi)$ tal que $\tilde{f} \notin L^1(0,2\pi)$, este resultado no se puede extender al caso $p = 1$. Sin embargo, si en vez de empezar con la función harmónica $u(re^{i\theta})$, empezamos con la función analítica $F(re^{i\theta})$, obtenemos una extensión de este resultado que incluye el caso $p = 1$. Más precisamente, tenemos el teorema siguiente:

T e o r e m a (1.5) :

Si $F(re^{i\theta})$ es una función analítica para $0 \leq r < 1$ que obedece a la condición (1.3), cuando $1 \leq p < \infty$, entonces los límites (1.4) existen p.p. y en $L^p(0,2\pi)$.

Este teorema es sólo un caso especial de un resultado más general. Para descubrirlo necesitaremos las definiciones siguientes:

El e s p a c i o H^p, $p > 0$, es el espacio de funciones analíticas, $F(z) = F(re^{i\theta})$, definidas en el disco unitario, $|z| = r < 1$, tales que

$$\mu_p(r;F) = \mu_p(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^p\, d\theta \leq m < \infty$$

para $0 \leq r < 1$, donde m es una constante que depende de F (y no de r).

El e s p a c i o N (o e s p a c i o d e N e v a n l i n n a) es el espacio de funciones analíticas, $F(z) = F(re^{i\theta})$, definidas en el disco unitario, $|z| = r < 1$, tales que

$$\mu_0(r;F) = \mu_0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |F(re^{i\theta})|\, d\theta \leq m < \infty$$

para $0 \leq r < 1$, donde la constante m depende de F (pero no de r)[(1)].

(1) $\log^+ x$ significa la "parte positiva" de la función $\log x$. Esto es,

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x & \text{si } 1 \leq x \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Es claro que $N \supset H^p$ para cada $p > 0$ - porque $\log^+ x \leq \frac{x^p}{p}$ cuando $x > 0$. Además sigue facilmente de la desigualdad de Jensen que $H^p \supset H^q$ si $0 < p \leq q$. Los dos teoremas siguientes, que generalizan el resultado (1.5) , son los principales de la teoría de estos espacios :

T e o r e m a (1.6) :

Si $F \in N$ entonces los límites $F(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} F(re^{i\theta})$ existen p.p.

T e o r e m a (1.7) :

Si $F \in H^p$, para $p > 0$, entonces:

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} | F(re^{i\theta}) - F(e^{i\theta}) | \, d\theta = 0 \quad (2)$$

Como veremos, estos dos teoremas son consecuencias de la descomposición siguiente para funciones de la clase N :

T e o r e m a (1.8) :

Si $F \in N$ y $F \not\equiv 0$ entonces $F = BG$ donde

(i) $B(z)$ y $G(z)$ son funciones analíticas en el disco unitario $|z| < 1$;

(ii) $B(z) = 0$ si y sólo si $F(z) = 0$ y las multiplicidades de los ceros de B son iguales a las de F ;

(iii) $|B(z)| \leq 1$ para $|z| < 1$;

(iv) $\lim_{r \to 1} B(re^{i\theta}) = B(e^{i\theta})$ existe p.p. con $|B(e^{i\theta})| = 1$;

(v) existe una medida regular finita μ tal que

$$G(re^{i\theta}) = e^{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{1-r^2+i2r \operatorname{sen}(\theta-\phi)}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2} \right] d\mu(\phi)} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\phi}+re^{i\theta}}{e^{i\phi}-re^{i\theta}} d\mu(\phi)}$$

Además, si $F \in H^p$, $0 < p$, con $\mu_p(r;F) \leq m$ entonces $G \in H^p$ con $\mu_p(r;G) \leq m$.

D e m o s t r a c i ó n :

Puesto que $F \not\equiv 0$ existe una sucesión $\{r_n\}$, donde $\frac{1}{2} \leq r_n < 1$ y $\lim_{n \to \infty} r_n = 1$, tal que $F(z)$ no es cero para $|z| = r_n$. Pongamos $F_n(z) = F(r_n z)$ y

$$G_n(re^{i\theta}) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\phi} + re^{i\theta}}{e^{i\phi} - re^{i\theta}} \log |F_n(e^{i\phi})| \, d\phi \right\} =$$

(2) Puesto que, como hemos ya observado, $H^p \subset N$ la función $F(e^{i\theta})$ existe por el último teorema.

$$= \exp\left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2)} \log |F_n(e^{i\phi})|\, d\phi + \right.$$

$$\left. + \ i\,\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r \operatorname{sen}(\theta-\phi)}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2} \log |F_n(e^{i\phi})|\, d\phi \right\} =$$

$$= \exp\left\{ \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\phi) \log |F_n(e^{i\phi})|\, d\phi + i \int_0^{2\pi} Q(r,\theta-\phi) \log |F_n(e^{i\phi})|\, d\phi \right\} .$$

Es un hecho elemental que $\lim\limits_{r\to 1} G_n(re^{i\theta}) = G_n(e^{i\theta})$ existe y, además,

(a) $$|G_n(e^{i\theta})| = |F_n(e^{i\theta})| .$$

Observamos que $G_n(z)$ no se anula nunca porque es una exponencial. Entonces, la función $B_n(z) = F_n(z) / G_n(z)$ es analítica en $|z| < 1$. Por el principio de máximo y la igualdad (a) resulta:

(b) $$|B_n(z)| \leq 1 \quad \text{si} \quad |z| < 1 \quad \text{y} \quad |B_n(e^{i\theta})| \equiv 1 .$$

Puesto que $\log |G_n(z)| = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\phi) \log |F_n(e^{i\phi})|\, d\phi$ es harmónica tenemos, por el teorema del valor medio,

(c) $$\log |G_n(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |G_n(re^{i\phi})|\, d\phi \quad , \quad 0 \leq r \leq 1 .$$

Supongamos que 0 es un cero de F de orden k , $0 \leq k < \infty$; esto es $F(z) = z^k F_o(z)$ con $F_o(0) \neq 0$. Puesto que G_n no es nunca cero y $F_n = B_n G_n$, la función B_n también tiene un cero de orden k en el origen. Usando (b) vemos que $|B_n(z) / (r_n z)^k| \leq 1/r_n^k$, porque $|B_n(z)| \leq 1$ y $B_n(z)/z^k$ es analítica. Pero, $B_n(z)\, G_n(z) = F_n(z) = (r_n z)^k F_o(r_n z)$ o, equivalentemente $F_o(r_n z) = G_n(z) \left(\frac{B_n(z)}{(r_n z)^k} \right)$; entonces, $|F_o(0)| \leq |G_n(0)| / r_n^k$. Usando esta desigualdad, la igualdad (c) y las igualdades

$$\log |G_n(z)| = \log^+ |G_n(z)| - \log^- |G_n(z)|$$

$$|\log |G_n(z)|| = \log^+ |G_n(z)| + \log^- |G_n(z)| ,$$

obtenemos, para $0 \leq r \leq 1$,

$$\log r_n^k |F_o(0)| \leq \log |G_n(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |G_n(re^{i\phi})|\, d\phi =$$

$$= 2\,\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |G_n(re^{i\phi})|\, d\phi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |G_n(re^{i\phi})||\, d\phi \leq$$

$$\leqslant \quad 2\,m - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log|G_n(re^{i\phi})||\, d\phi \quad .$$

Esto demuestra:

(d) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log|G_n(re^{i\phi})||\, d\phi \leqslant 2\,m - \log|F_o(0)| + \log\frac{1}{(r_n)^k} \leqslant$$

$$\leqslant 2\,m - \log|F_o(0)| + \log 2^k \quad , \text{ para } \quad 0 \leqslant r \leqslant 1 \;^{(3)}.$$

El miembro derecho no depende de n ; esto implica que la sucesión $\{f_n(\phi)\} = \{\log|G_n(e^{i\phi})|\}$ es uniformemente acotada en $L^1(0,2\pi)$. Entonces, existe una medida regular μ y una subsucesión, que, después de renumerarla podemos suponer que es $\{f_n(\phi)\}$, tales que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f_n(\phi)\, g(\phi)\, d\phi = \int_0^{2\pi} g(\phi)\, d\mu(\phi) \quad ,$$

para cada g continua.

Tomando, en particular, $g(\phi) = \frac{1}{\pi}\{P(r,\theta-\phi) + i\,Q(r,\theta-\phi)\}$, y teniendo en cuenta que $f_n(\phi) = \log|G_n(e^{i\phi})| = \log|F_n(e^{i\phi})|$, obtenemos, para cada $z = re^{i\theta}$ del disco unitario $|z| < 1$,

$$\log G_n(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{P(r,\theta-\phi) + i\,Q(r,\theta-\phi)\}\log|F_n(e^{i\phi})|\, d\phi \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{P(r,\theta-\phi) + i\,Q(r,\theta-\phi)\}\, d\mu(\phi) \quad , \quad \text{cuando} \quad n\to\infty \quad .$$

Pongamos

(e) $$G(re^{i\theta}) = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[P(r,\theta-\phi) + i\,Q(r,\theta-\phi)\right] d\mu(\phi)\right\} \quad .$$

Entonces, $\lim_{n\to\infty} G_n(re^{i\theta}) = G(re^{i\theta})$. Observemos que G es analítica y no tiene ceros (puesto que es una exponencial) .

La sucesión $\{B_n\}$ es uniformemente acotada por 1 (ver (b)) ; entonces, por el lema (5.11) del último capítulo, existe una función $B(z)$ y una subsucesión tal que, volviéndola a llamar B_n , $\lim_{n\to\infty} B_n(z) = B(z)$ uniformemente en cada círiculo $|z| \leq \rho < 1$.

---

(3) Este es el único lugar donde usamos la hipótesis artifical que $r_n \geqslant \frac{1}{2}$ - como vemos cualquier número mayor que cero podría servir en vez de $\frac{1}{2}$.

Puesto que $F_n(z) \to F(z)$ cuando $n \to \infty$ obtenemos

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(z) = \lim_{n\to\infty} B_n(z)\, G_n(z) = B(z)\, G(z) ,$$

donde $G(z)$ no tiene ceros y $|B(z)| \leq 1$ en $|z| < 1$ (porque $|B_n(z)| \leq 1$ cuando $|z| < 1$). Además, por (e) , G verifica la propiedad (v) .

Por el teorema clásico de Fatou , $\lim_{r\to 1} B(re^{i\theta}) = B(e^{i\theta})$ existe p.p. Tenemos que demostrar que $|B(e^{i\theta})| = 1$ p.p.

Puesto que $F_n(z) = B_n(z)\, G_n(z)$ y $F_n(z) = F(r_n z) = B(r_n z)\, G(r_n z)$, tenemos

$$B(r_n e^{i\theta}) = \frac{B_n(e^{i\theta})\, G_n(e^{i\theta})}{G(r_n e^{i\theta})} \quad \text{y, por consiguiente,}$$

(f) $$|B(r_n e^{i\theta})| = \frac{|G_n(e^{i\theta})|}{|G(r_n e^{i\theta})|} .$$

Llamando $H(z) = \dfrac{G_n(z)}{G(r_n z)}$, puesto que H es analítica, tenemos

$$H(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(re^{i\theta})\, d\theta , \quad 0 \leq r \leq 1 .$$

Entonces

(g) $$|H(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |H(re^{i\theta})|\, d\theta ,$$

por lo cual (usando (f))

$$\left| \frac{G_n(0)}{G(0)} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{G_n(e^{i\theta})}{G(r_n e^{i\theta})} \right| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |B(r_n e^{i\theta})|\, d\theta .$$

Haciendo $n \to \infty$, tenemos $B(r_n e^{i\theta}) \to B(e^{i\theta})$ $\int_0^{2\pi} |B(r_n e^{i\theta})|\, d\theta \to \int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})|\, d\theta$ (porque la convergencia es mayorada por 1) y

$$\left| \frac{G_n(0)}{G(0)} \right| \to 1 . \quad \text{Entonces} \quad 1 \leq \int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})|\, d\theta .$$

Pero $|B(e^{i\theta})| \leq 1$ p.p. puesto que $|B(re^{i\theta})| \leq 1$ para $r < 1$. Entonces $\int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})|\, d\theta = 1$ y esto no podría ser si $|B(e^{i\theta})| < 1$ para θ en un conjunto de medida positiva. Esto demuestra que $|B(e^{i\theta})| = 1$ p.p.

Nos falta la demostración de la última parte del teorema (1.7) . Usando la desigualdad de Jensen y el hecho $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \phi) + r^2}\, d\phi = 1$ (ver la demos tración del lema (5.11)) tenemos, para $0 \leq r < 1$,

$$|G_n(re^{i\theta})|^p = \exp\left\{p \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2} \log |F_n(e^{i\phi})| \, d\phi\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2} \log |F_n(e^{i\phi})|^p \, d\phi\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2} |F_n(e^{i\phi})|^p \, d\phi \ .$$

Entonces, usando el teorema de Fubini

$$\int_0^{2\pi} |G_n(re^{i\theta})|^p \, d\theta \leq \int_0^{2\pi} |F_n(e^{i\phi})|^p \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2} \, d\theta\right\} d\phi =$$

$$\int_0^{2\pi} |F(r_n e^{i\phi})|^p \cdot 1 \, d\phi = \mu_p(r_n;F) \leq m \ .$$

Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(z) = G(z)$ la última parte del teorema ahora sigue del lema de Fatou .

D e m o s t r a c i ó n d e l o s t e o r e m a s (1.6) y (1.7) :

Supondremos conocidos los hechos siguientes: Si μ es una medida regular finita del intervalo $[0,2\pi]$ entonces la integral de Poisson

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2} \, d\mu(\phi)$$

y la integral conjugada de Poisson

$$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r \operatorname{sen}(\theta-\phi)}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2} \, d\mu(\phi)$$

tiene límites para casi todos los θ cuando $r \to 1$.

Estos resultados, junto con la descomposición $F = BG$ y las partes (iv) y (v) nos dan la demostración del teorema (1.6) [(4)] .

Para demostrar el teorema (1.7) supondremos que el ya es conocido cuando $p \geq 1$ (ver las observaciones hechas al principio de esta sección). Si $F \in N$, entonces , por el teorema (1.8) , $F = BG = (B-1)G + G$. Pero, $|B(z)| \leq 1$ para $|z| < 1$ y $|B(e^{i\theta})| = 1$ p.p. ; esto implica que $|B(z)| < 1$ para $|z| < 1$ ó $B(z)$ es una constante de valor absoluto 1 (en este último caso, F no tiene ceros).

(4) Los límites no tangenciales existen. Pero, para estas observaciones preliminares, nos limitamos al caso más simple de los límites radiales.

Ahora, si $F \in H^p$, usando la última parte del teorema (1.8) y la desigualdad $|[1-B(z)]\,G(z)| \leq [1+|B(z)|]\,|G(z)| \leq 2\,|G(z)|$, obtenemos

$$\mu_p(r;(1-B)G) \leq 2\mu_p(r;G) \leq 2\,m \quad .$$

Hemos probado el resultado siguiente:

<u>Si</u> $F \in H^p$, $p > 0$, $F \not\equiv 0$ <u>y</u> $\mu_p(r;F) \leq m$ <u>para</u> $0 \leq r < 1$, <u>o</u> F <u>no tiene ceros o existen dos funciones</u>, G_1 y G_2, <u>analíticas para</u> $|z| < 1$ <u>y sin ceros tales que</u> $F = G_1 + G_2$ <u>y</u> $\mu_p(r;G_k) \leq 2\,m$ <u>para</u> $k = 1,2$.

Este resultado nos dice que basta demostrar el teorema 1.7 para un $F \in H^p$ sin ceros. Luego, si F no tiene ceros, podemos considerar la raíz cuadrada $G(z) = \sqrt{F(z)}$. Vemos que $\mu_{2p}(r;G) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|G(re^{i\theta})|^{2p}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(re^{i\theta})|^p\,d\theta = \mu_p(r;F) \leq m$. Esto es, $G \in H^{2p}$. Ahora mostraremos que, si $2p > 1$, entonces

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}|F(re^{i\theta}) - F(e^{i\theta})|^p\,d\theta = 0 \quad ,$$

con $F(e^{i\theta}) = [G(e^{i\theta})]^2$. Tenemos

$$\int_0^{2\pi}|F(re^{i\theta}) - F(e^{i\theta})|^p\,d\theta = \int_0^{2\pi}|G^2(re^{i\theta}) - G^2(e^{i\theta})|^p\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left|\,[G(re^{i\theta}) - G(e^{i\theta})]\,[G(re^{i\theta}) + G(e^{i\theta})]\,\right|^p d\theta \leq$$

$$\leq \left\{\int_0^{2\pi}|G(re^{i\theta}) - G(e^{i\theta})|^{2p}\,d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^{2\pi}|G(re^{i\theta}) + G(e^{i\theta})|^{2p}\,d\theta\right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left\{\int_0^{2\pi}|G(re^{i\theta}) - G(e^{i\theta})|^{2p}\,d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{||G(re^{i\theta})||_{2p} + ||G(e^{i\theta})||_{2p}\right\}^p \leq$$

$$\leq \left\{\int_0^{2\pi}|G(re^{i\theta}) - G(e^{i\theta})|^{2p}\,d\theta\right\}^{\frac{1}{2}} 2^{p+1}\pi\,m \longrightarrow 0$$

cuando $r \to 1$, por el caso del teorema (1.7) que suponemos. Esto demuestra (1.7) cuando $p > \frac{1}{2}$. Con esto, el mismo método demuestra el teorema cuando $p > 1/4$. Siguiendo de esta manera se puede demostrarlo para cada $p > 0$.

Estos son los hechos básicos de la teoría de los espacios H^p del círculo. Ahora pasaremos a los métodos complejos que corresponden a la teoría de las transformadas de Fourier . Todas las observaciones introductorias que nemos hecho al principio de esta sección son válidas para esta otra faceta del análisis harmónico también (en efecto, los dos capítulos anteriores tienen todas las demostraciones de estas observaciones). Entonces, consideraremos los espacios $H^p = H^p(E_2^+)$ del semiplano E_2^+ que tienen la definición siguiente: diremos que una función analítica $F(z) = F(x + iy)$ está en $H^p(E_2^+)$, $p > 0$, si existe una constante $m < \infty$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} | F(x + iy) |^p \, dx \leq m < \infty$$

para cada $y > 0$.

El resultado principal de la teoría de estos espacios es el siguiente

T e o r e m a (1.9) :

Si $F \in H^p$, $p > 0$, entonces $\lim_{y \to 0^+} F(x+iy) = F(x)$ existe p.p. y $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy) - F(x)|^p \, dx \to 0$ cuando $y \to 0^+$

Extenderemos este resultado (y otros que pertenecen a la teoría de los espacios $H^p(E_2^+)$) a n dimensiones. Pero, antes de empezar esta generalización vamos a hacer unas observaciones. Primero, se puede deducir el teorema (1.9) de los dos teoremas ((1.6) y (1.7)) principales de la teoría de los espacios H^p del círculo. Esta deducción usa el hecho que existe un map conforme entre el disco unitario y el semiplano E_2^+ . Más precisamente, las transformaciones (la segunda es la inversa de la primera)

$$x + i y = z = i \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \qquad \text{y} \qquad \rho e^{i\theta} = \zeta = \frac{z - i}{z + i}$$

nos dan una correspondencia conforme entre el semiplano $E_2^+ = \{ z = x + iy \ ; \ y > 0 \}$ y el disco unitario $\{ \zeta = \rho e^{i\theta} \ ; \ |\zeta| = \rho < 1 \}$. Se puede demostrar que $F(z) \in H^p(E_2^+)$ si y sólo si $f(\zeta) = 2^{1/p} (1 - \zeta)^{-2/p} F(z)$ está en el espacio H^p del círculo. Usando este hecho (que no lo demostraremos) y los teoremas (1.6) y (1.7) se puede obtener el teorema (1.9) . Vemos que esta correspondencia entre los dos espacios depende de p . Esto es natural porque no es verdad que estos dos espacios son conformemente equivalentes; esto quiere decir que el espacio $\mathfrak{h}^p$ de todas las funciones $F(z) = f(\frac{z - i}{z + i}) = f(\rho e^{i\theta})$, donde f está en H^p (del círculo), no es igual a $H^p(E_2^+)$. Sin embargo, tenemos $\mathfrak{h}^p \supset H^p(E_2^+)$ para cada $p > 0$.(5)(ver pág. siguiente)

Hasta ahora no hemos definido, para el semiplano, el espacio que corresponde al es pacio de Nevanlinna. Sería natural definirlo como el conjunto $N(E_2^+)$ de todas las funciones analíticas $F(z) = F(x + iy)$ que verifican

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log^+ |F(x + i\, y)|\, dx \leq m < \infty$$

para cada $y > 0$ (donde m no depende de y). Luego, el teorema que corres - ponde al teorema (1.8) debería decir que los límites $\lim_{y \to 0^+} F(x + iy) = F(x)$ existen p.p. cuando $F \in N(E_2^+)$. Pero sigue inmediatamente del hecho que los ángulos entre caminos son preservados bajo un map conforme y el teorema (1.6) que el espa - cio más grande $\mathcal{N} = \left\{ F(z) = f\left(\frac{z - i}{z + i}\right) \;;\; f(\rho\, e^{i\theta}) \in N \right\}$ tiene esta propiedad. En un cierto sentido (que no haremos preciso aquí), el espacio de Nevanlinna (del círcu lo) es el espacio vectorial más grande tal que si $f(re^{i\theta}) \in N$ entonces $\lim_{r \to 1} f(re^{i\theta})$ existe p.p. Entonces, vemos que $\mathcal{N}$, y no $N(E_2^+)$, es el espacio de Nevanlinna "correcto" si estamos sólo interesados en la existencia de límites de la frontera, y no de como se comportan estos límites de la frontera.

Ahora vamos a hacer una observación de género diverso. En vez de la propiedad del valor medio,

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta \quad ,$$

para una función $u(re^{i\theta})$ definida en el disco unitario, $0 \leq r < 1$, era básica en la demostración del teorema (1.8) la desigualdad

$$u(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta$$

(ver, por ejemplo, la desigualdad (g) de esta demostración). Mostraremos que funciones que verifican este tipo de desigualdad, funciones s u b a r m ó n i c a s , serán herramientas básicas para el desarrollo de la teoría de los espacios H^p de n dimensiones. En la próxima sección desarrollaremos las propiedades principales de las funciones subharmónicas que usaremos. Con la ayuda de estas propiedades podremos establecer los resultados principales (en particular, la generalización del teorema (1.9))

---

(5) Cuando $p > 1$, el espacio $H^p(E_2^+)$ "correcto" , si (como suponemos) se origina dela sumabilidad Abel de transformadas de Fourier , tiene que ser el espacio que corresponde a valores de la frontera que son funciones de $L^p(-\infty, \infty)$. Mientras los espacios $L^p(0,2\pi)$ y los espacios H^p del círculo son ordenados (ver la ob - servación antes del teorema (1.6)), esto no es verdad para los espacios $L^p(-\infty,\infty)$. y solamente por esta razón, vemos que los espacios $H^p(E_2^+)$ tienen que ser diversos de los espacios $\mathfrak{H}^p$ (que corresponden a los del círculo) .

de la teoría de los espacios H^p de las regiones E^+_{n+1} .

§2.- FUNCIONES SUBHARMONICAS Y UN TEOREMA SOBRE LA SUBHARMONICIDAD DE POTENCIAS DEL VALOR ABSOLUTO DE UN SISTEMA DE FUNCIONES CONJUGADAS .

Diremos que una función con valores reales $0-\infty$, $s(X)$, definida en una región $\mathcal{R} \subset E_n$, es subharmónica si verifica

(a) $$\overline{\lim_{\substack{X\to X_0\\ X\neq X_0}}}\ s(X) = s(X_0) ,$$

para cada $X_0 \in \mathcal{R}$;

(b) $$s(X_0) \leq \mathcal{M}_{t,X_0}(s) = \int_{\Sigma} s(X_0+tY)\, d\sigma_Y$$

para cada $X_0 \in \mathcal{R}$ y $t > 0$ tal que $\{X \in E_n : |X-X_0| \leq t\} \subset \mathcal{R}$ (estamos usando la notación de la página 36) .

Excluiremos el caso $s(X) \equiv -\infty$, pero $s(X)$ puede ser igual a $-\infty$ para algunos puntos de $\mathcal{R}$.

Observemos que una consecuencia inmediata de la propiedad (b) es el hecho que las funciones subharmónicas verifican el principio de máximo. La demostración de este hecho es la misma que sirve para las funciones harmónicas (ver el teorema (1.5) del segundo capítulo.).

Lema (2.1) :

Si $s(X)$ es una función que verifica la condición (a) en una región $\mathcal{R}$ y $\mathcal{C} \subset \mathcal{R}$ es un subconjunto compacto entonces $s(X)$ es acotada superiormente en $\mathcal{C}$ y alcanza su supremo en $\mathcal{C}$. Además, existe una sucesión decreciente $\{s_k(X)\}$ de funciones continuas en $\mathcal{C}$ tal que $\lim_{k\to\infty} s_k(X) = s(X)$ para cada $X \in \mathcal{C}$.

Demostración :

Se demuestra el hecho que $s(X)$ es acotada superiormente en $\mathcal{C}$ de la misma manera que en el caso de una función continua. Si no alcanzara su supremo, b , en $\mathcal{C}$ observamos que la función $s^*(X) = \dfrac{1}{b - s(X)}$ también verificaría la condición (a) en $\mathcal{C}$. Puesto que $s^*(X)$ no es acotada superiormente esto es imposible.

Para demostrar la última parte del lema pongamos, para cada $X \in E_n$ y k entero,

$$(*) \qquad s_k(X) = \sup_{Y \in \mathscr{C}} \left\{ s(Y) - k\,|X - Y| \right\} .$$

$s_k(X)$ es finito y, por la primera parte del lema, existe un punto $Y_o \in \mathscr{C}$ (que depende de X) tal que

$$s_k(X) = s(Y_o) - k\,|X - Y_o| .$$

Si X_1 es otro punto, entonces

$$s_k(X_1) \geqslant s(Y_o) - k\,|X_1 - Y_o| \geqslant s(Y_o) - k\left\{ |X_1 - X| + |X - Y_o| \right\} = s_k(X) - k\,|X_1 - X| .$$

Entonces, $s_k(X_1) \geqslant s_k(X) - \varepsilon$ si $|X_1 - X| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{k}$. Puesto que se puede permutar X y X_1 , vemos que $s_k(X)$ es continua (en todo el espaçio E_n). Es obvio que $s_k(X) \geqslant s_{k+1}(X)$ y (poniendo $X = Y$ en $(*)$) $s_k(X) \geqslant s(X)$ para $X \in \mathscr{C}$. Nos falta mostrar que $\lim_{k \to \infty} s_k(X) = s(X)$ para $X \in \mathscr{C}$. Primero, supongamos $s(X) > -\infty$. Si $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que

$$s(X') \leqslant s(X) + \varepsilon \quad ; \quad s(X') - k\,|X' - X| \leqslant s(X) + \varepsilon ,$$

si $X' \in \mathscr{C}$ y $|X' - X| < \delta$. Puesto que s es acotada superiormente, existe b tal que

$$s(X') - k\,|X' - X| \leqslant b - k\delta$$

si $|X' - X| \geqslant \delta$. El miembro derecho de esta última desigualdad es mayorado por $s(X) + \varepsilon$ si k es bastante grande. Entonces, para tal k ,

$$s(X') - k\,|X' - X| \leqslant s(X) + \varepsilon$$

para todos los $X' \in \mathscr{C}$. Esto es, $s_k(X) \leqslant s(X) + \varepsilon$. Esto demuestra que $s_k(X) \to s(X)$ cuando $k \to \infty$. El caso $s(X) = -\infty$ es similar .

Supongamos que s es una función definida en una región $\mathscr{R} \subset E_n$. Diremos que una fucnión u es una m a y o r a n t e h a r m ó n i c a d e l a f u n c i ó n s e n l a f r o n t e r a d e $\mathscr{R}$ si u es harmónica en $\mathscr{R}$, continua en la clausura $\bar{\mathscr{R}}$ y

$$u(Y) \geqslant \overline{\lim_{\substack{X \to Y \\ X \in \mathscr{R}}}}\, s(X)$$

para todos los puntos $Y \in \bar{\mathscr{R}} - \mathscr{R}$.

El teorema siguiente justifica el uso de la palabra "subharmónica" .

T e o r e m a (2.2) :

Supongamos que $s(X)$ es subharmónica en una región acotada $\mathcal{R} \subset E_n$ y que u es una mayorante harmónica de s en la frontera de $\mathcal{R}$. Entonces $s(X) \leq u(X)$ para todos los $X \in \mathcal{R}$.

Inversamente, una función $s(X)$ que verifica la condición (a) en una región $\mathcal{R}$ es subharmónica en esta región si tiene la propiedad siguiente: Cuando $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}$ es una subregión acotada y $u(X)$ una mayorante harmónica de $s(X)$ en la frontera de $\mathcal{R}_1$, entonces $s(X) \leq u(X)$ para todos los $X \in \mathcal{R}_1$.

D e m o s t r a c i ó n :

Supongamos que la primera parte del teorema es falsa. Pongamos

$$d(X) = \overline{\lim_{Y \to X}} \left\{ s(Y) \right\} - u(X) \quad ,$$

para $Y \in \mathcal{R}$ y $X \in \bar{\mathcal{R}}$. Esto es, para $X \in \mathcal{R}$, $d(X) = s(X) - u(X)$ y existe un $X \in \mathcal{R}$ tal que $d(X) > 0$. Es obvio que la función $d(X)$ verifica la condición (a) en $\bar{\mathcal{R}}$. Entonces, por el lema (2.1) , d alcanza su supremo, $M > 0$, en un punto de $\bar{\mathcal{R}}$. Es fácil ver que el conjunto $\mathcal{E} = \left\{ X \in \bar{\mathcal{R}} ; d(X) = M \right\}$ de tales puntos es cerrado. Sea X_o un punto de la frontera de $\mathcal{E}$. Puesto que $d(X) \leq 0 < M$ para $X \in \bar{\mathcal{R}} - \mathcal{R}$, y $d(X_o) = M$, X_o está en el interior de $\mathcal{R}$. Entonces existe una esfera, $S_t(X_o)$, con centro X_o y radio $t > 0$ bastante pequeño tal que $S_t(X_o) \subset \mathcal{R}$. De otro lado, puesto que X_o está en la frontera de $\mathcal{E}$ se puede elegir la esfera $S_t(X_o)$ de tal manera que su superficie, $\Sigma_t(X_o)$, contiene un punto X_1 del complemento de $\mathcal{E}$. Por consiguiente $m = d(X_1) < M$. Pero, esto implica, por la condición (a) , que $d(X) < m + \delta < M$ para todos los puntos de un entorno de X_1 . Entonces

$$\mathfrak{M}_{t,X_o}(d) < M = d(X_o) \quad .$$

Usando el hecho que u es harmónica y, por consiguiente, $\mathfrak{M}_{t,X_o}(u) = u(X_o)$ obtenemos

$$\mathfrak{M}_{t,X_o}(s) - \mathfrak{M}_{t,X_o}(u) = \mathfrak{M}_{t,X_o}(d) < d(X_o) = s(X_o) - u(X_o) = s(X_o) - \mathfrak{M}_{t,X_o}(u) \quad .$$

Esto es,

Pero, puesto que s es subharmónica, esto no puede ser y la primera parte del teorema está probada.

Vamos a considerar el inverso. Si $X_0 \in \mathcal{R}$ sea $S_t(X_0)$ una esfera abierta con radio $t > 0$ y centro X_0 tal que $\overline{S_t(X_0)} \subset \mathcal{R}$. En la superficie $\Sigma_t(X_0) = \Sigma_t$ de esta esfera la función $s(X)$ es el límite de una sucesión decreciente $\{s_k(X)\}$ de funciones continuas en Σ_t (ver el lema (2.1)). Sea u_k la función continua en $\overline{S_t(X_0)}$ que coincide con $s_k(X)$ en Σ_t y es harmónica en $S_t(X_0)$ (1). Esta función es una mayorante harmónica de s en Σ_t. Entonces, por hipótesis, $s(X_0) \leq u_k(X_0)$. Usando la propiedad del valor medio para la función harmónica u_k, esta desigualdad es equivalente a la desigualdad (ver la notación de la página 36)

$$(*) \qquad s(X_0) \leq \mathcal{M}_{t,X_0}(u_k) = \int_{\Sigma} s_k(X_0 + tY)\, d\sigma_Y \ .$$

Puesto que $\{s_k\}$ es decreciente $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\Sigma} s_k = \int_{\Sigma} \lim\limits_{k\to\infty} s_k = \int_{\Sigma} s$. Entonces, tomando este límite y usando $(*)$ obtenemos

$$s(X_0) \leq \mathcal{M}_{t,X_0}(s) \ .$$

Esto demuestra el teorema.

Vale la pena observar que en la demostración de la primera parte del teorema (2.2) no hemos usado la fuerza entera de la condición (b). Todo lo que necesitábamos era la condición

(b') Si $X_0 \in \mathcal{R}$, existe $t_0 > 0$ (que puede depender de X_0) tal que

$$s(X_0) \leq \mathcal{M}_{t,X_0}(s)$$

para $t \leq t_0$.

Esta observación, junto con la última parte del teorema (2.2), nos da el corolario siguiente:

---

(1) Como hemos ya indicado antes, se puede resolver este caso del problema de Dirichlet con la integral de Poisson de s_k (la fórmula del núcleo de Poisson de la esfera fué dada en la última sección del capítulo II).

C o r o l a r i o (2.3) :

Si s es una función definida en una región $\mathcal{R}$ que verifica las condiciones (a) y (b') entonces s es subharmónica.

El teorema siguiente nos da un método muy sencillo para averiguar si una función es subharmónica:

T e o r e m a (2.4) :

Si s está en la clase $C^2(\mathcal{R})$ y $\Delta s(X) \geq 0$ para cada $X \in \mathcal{R}$ entonces s es subharmónica.

D e m o s t r a c i ó n :

Si s es un miembro de la clase $C^2(\mathcal{R})$ entonces se verifica la condición menos fuerte (a) . La condición (b) sigue del teorema de Green (ver teorema (1.1) del segundo capítulo) de la manera siguiente:

Si $X_0 \in \mathcal{R}$ pongamos $\rho(t) = \mathcal{M}_{t,X_0}(s) = \int_{\Sigma} s(X_0+tY)\, d\sigma_Y$ para todos los $t > 0$ tales que $\{X : |X-X_0| < t\} \subset \mathcal{R}$. Por el teorema de Green :

$$\rho'(t) = \int_{\Sigma} \frac{\partial s}{\partial n}(X_0 + tY)\, d\sigma_Y = \frac{1}{|\Sigma_t|} \iint_{|X-X_0| \leq t} (\Delta s)(S)\, dX \geq 0 \quad ,$$

donde $|\Sigma_t|$ es el área de la superfice de la esfera de radio t y centro X_0 . Esto es, $\rho(t)$ es una función no decreciente. Entonces

$$s(X_0) = \rho(0) \leq \rho(t) = \mathcal{M}_{t,X_0}(s) \quad ,$$

que demuestra el teorema.

E j e m p l o s d e f u n c i o n e s s u b h a r m ó n i c a s :

(1) Es obvio que una función harmónica es subharmónica. Además, sigue inmediatamente de la definición que $|u|$ es subharmónica si u es harmónica.

(2) Si $F = u + iv$ es analítica en una región $\mathcal{R} \subset E_2$ entonces $s = \log |F|$ es subharmónica. Esto se ve de la manera siguiente: Primero, la propiedad (a) es obvia. Entonces, por el corolario (2.3) , nos basta demostrar que s verifica la condición (b') en $\mathcal{R}$. El conjunto $\{X \in \mathcal{R} : F(X) \neq 0\} = \mathcal{S}$ es una región y un cálculo fácil demuestra que $\Delta s(X) = 0$ para $X \in \mathcal{S}$. Entonces, por el teorema (2.4) , s verifica la condición (b') para cada punto de $\mathcal{S}$. Pero, si $X \in \mathcal{R} - \mathcal{S}$, $s(X) = -\infty$ y la condición (b') es cierta para tal X también.

(3) Usando la desigualdad de Jensen obtenemos el hecho que si s es subharmónica en $\mathcal{R}$ y Φ es una función convexa no decreciente entonces $\Phi \circ s(X) = \Phi(s(X))$ es subharmónica. En particular, $[s(X)]^p$ es subharmónica para $p \geq 1$. Usando las funciones convexas $\Phi_0(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$ y $\Phi_p(y) = e^{py}$ para $p > 0$ obtenemos, por el segundo ejemplo, que $\log^+|F|$ y $|F|^p$, $p > 0$, son subharmónicas cuando F es analítica en una región $\mathcal{R} \subset E_2$.

(4) Si $s_1, s_2, \ldots, s_k$ son subarmónicas en $\mathcal{R}$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \ldots, \alpha_k$ son números reales no negativos entonces $\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_k s_k$ es subharmónica. Si s_1 y s_2 son subarmónicas entonces $s(X) = \max\{s_1(X), s_2(X)\}$ es subharmónica.

La última observación de la primera sección puede ser reformulada de la manera siguiente: una de las propiedades de funciones analíticas que era esencial para nuestro desarrollo de la teoría de los espacios H^p del círculo es el hecho que $\log|F|$ es subharmónica cuando F es analítica. Es natural preguntar cuál es la extensión de este resultado para nuestra generalización de funciones analíticas: los sistemas de funciones conjugadas.

Vamos a consiserar un ejemplo muy sencillo. Tenemos el sistema de M. Riesz que es el gradiente de la función $\frac{r^{2-n}}{(2-n)}$, cuando $n \geq 3$, (donde $r = |X| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ (2)). Esto es, tomemos

$$F(X) = \left(\frac{x_1}{r^n}, \frac{x_2}{r^n}, \ldots, \frac{x_n}{r^n} \right) .$$

Puesto que r^{2-n} es harmónica (ver el segundo ejemplo en la pàgina 35) F es un sistema de funciones conjugadas (ver las páginas 73 y 74) y esta bien definido cuando $X \neq 0 = (o, o, \ldots, o)$. Es fácil ver que $\log|F|$ no es subharmónica, pero se puede preguntar si $|F|^p$ es subharmónica para algunos valores de $p > 0$ (en dos dimensiones esto es un resultado más débil del hecho que $\log|F|$ es subharmónica – ver el tercer ejemplo de funciones subharmónicas). Usando el teorema (2.4) y la igualdad $\Delta(|F|^p) = (1-n)\, p\, [(n-2) + (1-n)p]\, r^{p(1-n)-2}$ vemos que $|F|^p$ es subharmónica para $p \geq \frac{n-2}{n-1}$ (3). Es fácil ver que, para $p > 0$, este es el mejor resultado posible. Resulta que este es sólo un caso especial del teorema gene -

---

(2) Ya hemos visto, en varios casos, que la función harmónica r^{2-n}, cuando $n \geq 3$, juega el papel de la función $\log r$ que es tan básica en dos dimensiones. Por consiguiente, es natural examinar r^{2-n} para obtener claves de lo que pasa con funciones harmónicas en n dimensiones.

(3) Esto sigue del hecho que $\Delta(|F|^p) < 0$ si $0 < p < \frac{n-2}{n-1}$ y, por la misma demostración que hemos dado para el teorema (2.4), esta desigualdad implica la desigualdad inversa en la condición (b).

ral siguiente:

T e o r e m a (2.5) :

Si $F(X)$ es un sistema de funciones conjugadas en la región $\mathcal{R} \subset E_n$, entonces $|F(X)|^p$ es subharmónica para

$$p \geqslant \frac{n-2}{n-1}.$$

D e m o s t r a c i ó n :

Puesto que $|F(X)|^p$ es continua la condición (a) es cierta. Por el corolario (2.3) nos basta mostrar que esta función verifica la condición (b') para cada punto X de $\mathcal{R}$. Puesto que $|F(X)|^p \geqslant 0$ la condición (b') es cierta para un punto X tal que $F(X) = 0$. Entonces, podemos suponer que, en la región $\mathcal{R}$, la función $|F(X)|^p$ no es nunca cero. Por el teorema (2.4) , basta demostrar que $\Delta(|F(X)|^p) \geqslant 0$ en $\mathcal{R}$. Empecemos por calcular este Laplaciano.

Si $G(X) = G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (g_1(X), g_2(X), \ldots, g_n(X))$ es una función en $\mathcal{C}^1(\mathcal{R})$, $G_k(X)$ designará la derivada respecto de la variable x_k : $\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_k}, \frac{\partial g_2}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial g_n}{\partial x_k}\right)(X)$. Con esta notación, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(G.F) = G_k . F + G . F_k .$$

Entonces,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}|F|^p = \frac{\partial}{\partial x_k}(F.F)^{\frac{1}{2}p} = p\,|F|^{p-2}(F_k.F)$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}|F|^p = p(p-2)\,|F|^{p-4}(F_k.F)^2 + p\,|F|^{p-2}\left\{|F_k|^2 + (F.F_{kk})\right\}$$

Sumando sobre k y usando el hecho que los componentes de F son harmónicos, obtenemos

$$\Delta(|F|^p) = p(p-2)\,|F|^{p-4}\sum_{k=1}^{n}(F_k.F)^2 + p\,|F|^{p-2}\sum_{k=1}^{n}|F_k|^2 . \tag{2.6}$$

Vemos que la desigualdad $\Delta(|F|^p) \geqslant 0$ es obvia para $p \geqslant 2$. Entonces podremos suponer que $p < 2$ (en efecto, puesto que una función convexa de una función subharmónica es subharmónica nos basta considerar el caso $p = \frac{n-2}{n-1}$). Por la igualdad (2.6) , $\Delta(|F|^p) \geqslant 0$ es equivalente a la desigualdad

$$(2.7) \qquad \sum_{k=1}^{n} (F_k \cdot F)^2 \leq \frac{1}{2-p} |F|^2 \sum_{k=1}^{n} |F_k|^2 \quad .$$

Como hemos ya observado nos basta probar esta desigualdad cuando $p = \frac{n-2}{n-1}$. Pero es interesante observar que, cuando $p = 1$, la desigualdad (2.7) sigue inmediatamente de la desigualdad de Schwarz : $(F_k \cdot F)^2 \leq |F_k|^2 \, |F|^2$.

Hasta ahora no hemos usado el hecho que los componentes de $F = (w_1 , w_2 , \ldots w_n)$ verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas (4.1) y (4.2) del segundo capítulo. Para usarlas daremos la siguiente interpretación de la desigualdad (2.7): Sea $\mathcal{M}$ la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \frac{\partial w_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial w_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial w_1}{\partial x_2} & \frac{\partial w_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial w_n}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial w_1}{\partial x_n} & \frac{\partial w_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial w_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Entonces, la desigualdad (2.7) tiene la forma (poniendo $p = \frac{n-2}{n-1}$)

$$(2.7') \qquad |\mathcal{M}F|^2 \leq \left\{ \frac{n-1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right\} |F|^2 \quad .$$

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas son equivalentes a las propiedades siguientes de la matriz $\mathcal{M}$: traza $(\mathcal{M}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$ y $\mathcal{M}$ es simétrica.

Por consiguiente, vemos que el teorema es un corolario del lema siguiente:

L e m a (2.8) :
Supongamos que $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica con traza cero. Sea $||\mathcal{M}||$ la norma de $\mathcal{M}$ y $|||\mathcal{M}||| = (\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$ la norma de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{M}$ (4). Entonces (5)

(4) $||\mathcal{M}|| = \sup |\mathcal{M}V|$ donde el supremo está tomado sobre todos los vectores $V = (v_1 , v_2 , \ldots , v_n)$ tales que $|v_1|^2 + |v_2|^2 + \ldots + |v_n|^2 \leq 1$.

(5) La desigualdad $||\mathcal{M}||^2 \leq |||\mathcal{M}|||^2$ es cierta para todas las matrices $\mathcal{M}$.

$$||\mathcal{M}||^2 \leqslant \frac{n-1}{n} \; |||\mathcal{M}|||^2 \quad .$$

D e m o s t r a c i ó n :

La simetría de $\mathcal{M}$, traza($\mathcal{M}$) , $||\mathcal{M}||$ y $|||\mathcal{M}|||$ son invariantes bajo cambios de coordenadas [6]. Entonces, podemos suponer que $\mathcal{M}$ es diagonal:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} ,$$

donde $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$. Tenemos $||\mathcal{M}||^2 = \max\left\{\lambda_1^2 , \lambda_2^2 , \dots , \lambda_n^2\right\}$ y $|||\mathcal{M}|||^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$. Nos basta mostrar la desigualdad $\lambda_k^2 \leq \frac{n-1}{n} (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2)$ para cada $k = 1,2,\dots,n$. Pero, puesto que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ esta desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$(\ast) \qquad (\sum_{i\neq k} \lambda_i)^2 \leqslant \frac{n-1}{n} (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2) \quad .$$

Pero, por la desigualdad de Schwarz , $| \sum_{i\neq k} \lambda_i | = | \sum_{i\neq k} 1.\lambda_i | \leqslant (n-1)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i\neq k} \lambda_i^2)^{\frac{1}{2}}$.
Entonces

$$\lambda_k^2 = (\sum_{i\neq k} \lambda_i)^2 \leqslant (n-1) \sum_{i\neq k} \lambda_i^2 = (n-1)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - (n-1)\lambda_k^2 \quad .$$

Sumando $(n-1)\lambda_k^2$ a ambos miembros, después, dividiendo por n , obtenemos $(\ast)$ y el lema está demostrado.

§3.- L A T E O R I A D E L O S E S P A C I O S H^p D E L S E M I - E S P A C I O E_{n+1}^+ .

En esta sección extenderemos a n dimensiones la teoría de los espacios H^p del semiplano E_2^+ . En particular, daremos una demostración del teorema (1.9) en su forma general (ver el teorema (3.1) más adelante).

Empezamos con la definición de los espacios que consideraremos. Sea $F(t,X) = (u(t,X) , V(t,X)) = (u(t,X) , v_1(t,X) , \dots , v_n(t,X))$, $(t,X) \in E_{n+1}^+$, un sistema de funciones conjugadas. Esto es, las funciones $u , v_1 , v_2 , \dots , v_n$ verifican las ecuaciones (4.4) y (4.5) de la página 75 . Diremos que $F(t,X) \in H^p$ =

(6) La norma Hilbert-Schmidt cuadrada, $|||\mathcal{M}|||^2$, es nada mas que la traza de la matriz $\mathcal{M}\mathcal{M}^*$ ($\mathcal{M}^*$ es la adjunta de $\mathcal{M}$). Si U es una matriz ortogonal, entonces $|||\mathcal{M}|||^2 = \mathrm{tr}(\mathcal{M}\mathcal{M}^*) = \mathrm{tr}(U\mathcal{M}\mathcal{M}^*U^{-1}) = \mathrm{tr}(U\mathcal{M}U^{-1}U\mathcal{M}^*U^{-1}) = |||U\mathcal{M}U^{-1}|||^2$.

$= H^p(E^+_{n+1})$, $p > 0$, si

$$\mu_p(t;F) = \mu_p(t) = \int_{E_n} |F(t,X)|^p \, dX \leq m < \infty \quad ,$$

donde m no depende de $t > 0$ (pero puede depender de F).

Si existe una función (de valores vectoriales) $G(X) = (w_o(X), w_1(X), \ldots, w_n(X))$ tal que

$$||F(t,X) - G(X)||_p = \left(\int_{E_n} |F(t,X) - G(X)|^p \, dX \right)^{1/p} \longrightarrow 0 \quad ,$$

cuando $t \rightarrow 0+$, diremos que $G(X)$ es el límite en la norma de $F(t,X)$, cuando $t \rightarrow 0+$ (1). Del mismo modo diremos que $G(X)$ es el límite no tangencial (p.p.) de $F(t,X)$ si $u(t,Z) \rightarrow w_o(X)$ y $v_k(t,Z) \rightarrow w_k(X)$, $k = 1,2,\ldots,n$, cuando $(t,Z) \rightarrow X$ no tangencialmente para casi todos los $X \in E_n$. En cualquiera de los dos casos pondremos

$$F(0,X) = G(X) \quad , \quad u(0,X) = w_o(X) \quad , \quad v_k(0,X) = w_k(X) \quad , \quad k=1,2,\ldots,n.$$

Ahora podemos enunciar el teorema principal de la teoría de los espacios H^p :

Teorema (3.1) :

Si $f(t,X)$ está en H^p , $p \geq \frac{n-1}{n}$, entonces el límite no tangencial $F(0,X)$ existe p.p. Además, si $p > \frac{n-1}{n}$ $F(0,X)$ es también el límite en la norma de $F(t,X)$, cuando $t \rightarrow 0$.

Descompondremos la demostración de este teorema en los lemas siguientes:

Lema (3.2) :

Si $s(t,X) \geq 0$ es una función subharmónica continua, definida en E^+_{n+1} , tal que

$$\int_{E_n} [\, s(t,X) \,]^q \, dX \leq c^q < \infty \quad ,$$

donde $1 \leq q < \infty$ y c no depende de $t > 0$, entonces existe una función harmónica, $m(t,X)$, definida en E^+_{n+1} , tal que $m(t,X) \geq s(t,X)$. Además,

(a) si $q > 1$, $m(t,X)$ es la integral de Poisson de una función

---

(1) Si $p < 1$ $||f||_p = (\int |f|^p)^{1/p}$ no es una norma, puesto que la desigualdad de Minkowski no es cierta, pero usaremos el término "norma" a pesar de este hecho. Sin embargo si se pone $d(f,g) = \int |f-g|^p$ la función d es una métrica.

$f \in L^q(E_n)$ <u>tal que</u> $\|f\|_q \leq c$;

(b) <u>si</u> $q = 1$, $m(t,X)$ <u>es la integral de Poisson - Stieltjes de una medida regular finita de</u> E_n .

D e m o s t r a c i ó n :

Primero observamos que la función s verifica todas las condiciones de la función del lema (5.6) del capítulo II salvo la harmonicidad. Pero en la demostración de este lema usamos sólo la desigualdad (b) de la definición de las funciones subharmónicas y no toda la fuerza de la propiedad del valor medio de las funciones harmónicas. Entonces, $s(t,X)$ verifica las dos propiedades dela conclusión del lema (5.6) (ver página 93).

Para cada $\mathcal{E} > 0$ definamos

$$m_{\mathcal{E}}(t,X) = \int_{E_n} s(\mathcal{E},X-Z)\, P(t,|Z|)\, dZ = \int_{E_n} s(\mathcal{E},Z)\, P(t,|X-Z|)\, dZ .$$

Como hemos observado después de la demostración del teorema (1.14) (ver página 46), tenemos

$$(*) \qquad \int_{E_n} [\, m_{\mathcal{E}}(t,X)\,]^q\, dx \leq c^q .$$

Exactamente como en la demostración de lema (5.9) (ver página 96) podemos mostrar que

$$(**) \qquad |\, m_{\mathcal{E}}(t,X) - s(\mathcal{E},X)\, | \to 0$$

uniformemente en X cuando $t \to 0+$.

Ahora mostraremos que $m_{\mathcal{E}}(t,X) \geq s(t+\mathcal{E},X)$ en E^+_{n+1} . Primero, observamos que $s(t+\mathcal{E},X)$ es uniformemente continua en las variables (t,X) puesto que es contínua por hipótesis y se anula en infinito (porque, como hemos ya observado, s verifica las dos propiedades de la conclusión del lema (5.6) del capítulo II). Con esto y la propiedad $(**)$ podemos concluir que para t bastante pequeña, digamos t_o ; la diferencia $s(t_o+\mathcal{E},X) - m_{\mathcal{E}}(t_o,X)$ es pequeña. Por otra parte, por la desigualdad (5.7) (con s en vez de u), para t bastante grande, digamos t_1 , $s(t_1+\mathcal{E},X)$ es pequeña. Finalmente, por la última parte del lema (5.6) , en la región $\{(t,X) \in E^+_{n+1} \; ; \; t_o \leq t \leq t_1\}$, $s(t+\mathcal{E},X)$ es pequeña para $|X|$ bastante grande, digamos $|X| \geq r$. Entonces, puesto que $m_{\mathcal{E}}(t_o,X)$ es no negativa, en la frontera de la región $\mathcal{R} = \{(t,X) : t_o \leq t \leq t_1 \; , \; |X| \leq r\}$, la función $s(t+\mathcal{E},X) - m_{\mathcal{E}}(t,X)$ es mayorada por un número positivo pequeño. Luego, vemos por el principio de máximo para las funciones subharmónicas, que $s(t+\varepsilon,X) - m_{\varepsilon}(t,X)$ (que es subharmónica puesto que es la suma de funciones subharmónicas) es mayorada por este número positivo pequeño en toda la región $\mathcal{R}$. Agrandando $\mathcal{R}$ obtenemos $s(t+\varepsilon,X) - m_{\varepsilon}(t,X) \leq 0$ para $t > 0$. Esto es

$$(+) \qquad s(t+\varepsilon,X) \leq m_{\varepsilon}(t,X)$$

para $t > 0$.

Supongamos $q > 1$. Puesto que la familia de funciones $\{s(X,\varepsilon)\}$ es acotada uniformemente en la norma de $L^q(E_n)$ existen una función $f \in L^q(E_n)$ y una sucesión $\{\varepsilon_k\}$, con $\varepsilon_k \to 0+$, tales que $s(X,\varepsilon_k) \to f(X)$ debilmente (2). En particular, si $m(t,X)$ es la integral de Poisson de f , tenemos para cada $(t,X) \in E^+_{n+1}$

$$m_{\varepsilon_k}(t,X) = \int_{E_n} s(\varepsilon_k,Z)\, P(t,|X-Z|)\, dZ \longrightarrow \int_{E_n} f(Z)\, P(t,|X-Z|)\, dZ = m(t,X)$$

cuando $k \to \infty$.

Pero, por (+) , tenemos

$$s(t+\varepsilon_k,X) \leq m_{\varepsilon_k}(t,X) \quad .$$

Entonces, puesto que el miembro izquierdo de esta desigualdad tiende a $s(t,X)$ y el miembro derecho tiende a $m(t,X)$, obtenemos

$$s(t,X) \leq m(t,X)$$

Además, puesto que $\lim_{k\to\infty} m_{\varepsilon_k}(t,X) = m(t,X)$, el lema de Fatou y la desigualdad (*) demuestran que

$$\int_{E_n} [\, m(t,X)\,]^q\, dX \leq c^q$$

y, por consiguiente (ver el lema (5.9) del último capítulo) $||f||_q \leq c$. Esto completa la demostración de la parte (a) del lema.

La parte (b) sigue de un argumento similar. El único cambio que necesitamos hacer resulta del hecho que, cuando $q = 1$, no podemos extraer una sucesión $\{s(X,\varepsilon_k)\}$, con $\varepsilon_k \to 0+$, que converja débilmente a una función en $L^1(E_n)$. Pero existe una medida regular finita μ , y una sucesión $\{s(X,\varepsilon_k)\}$ que conver

---

(2) Esta parte de la demostración es casi igual a la parte correspondiente de la demostración del lema (5.9) del segundo capítulo.

ge débilmente a $d\mu$, cuando $k \to \infty$ (y, entonces, $\varepsilon_k \to 0+$). Por consiguiente, obtenemos una integral de Poisson - Stieltjes que mayora a $s(t,X)$.

Lema (3.3) :

Supongamos que $s(t,X)$ verifica las mismas condiciones del lema anterior. Sea $\alpha > 0$ y pongamos, para cada $X \in E_n$,

$$s^*_\alpha(X) = \sup_{(t,Z) \in \Gamma_\alpha(X)} s(t,Z) \quad .$$

(a) Si $q > 1$ existe una función $g(X) \in L^q(E_n)$ tal que $s^*_\alpha(X) \leq g(X)$ p.p. . Además $||g||_q \leq a\, c$ donde a depende sólo de α , q y la dimensión n .

(b) Si $q = 1$ $s^*_\alpha(X) < \infty$ p.p. .

Demostración :

(a) Por el lema (3.2) , existe $f \in L^q(E_n)$ tal que $m(t,X) = \int_{E_n} f(U)\, P(t,|X-U|)\, dU \geq s(t,X)$ paratodos los $(t,X) \in E^+_{n+1}$. Por el teorema (5,4) del último capítulo, $s^*_\alpha(X) \leq b\, f^*(X)$, donde b depende sólo de α y de n . La primera parte del lema ahora sigue del corolario (3.12) del segundo capítulo.

(b) La demostración de este caso es similar a la del caso anterior. La única diferencia es debida al hecho que $m(t,X)$ es una integral de Poisson - Stieltjes y no necesariamente una integral de Poisson de una función $f \in L^1(E_n)$.

Pongamos

$$\mu^*(X) = \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{r^n} \int_{\Sigma_r(X)} |d\mu(U)| \quad ,$$

donde μ es una medida regular finita de E_n y $\Sigma_r(X)$ es la esfera de radio r y centro X . No es difícil demostrar que $\mu^*(X) < \infty$ p.p. : si $\mathcal{E}_\alpha = \{X \in E_n ;\ \mu^*(X) > \alpha > 0\} = \{X \in E_n ;\ \exists\ r > 0 \ni \frac{1}{r^n} \int_{\Sigma_r(X)} |d\mu(U)| > \alpha > 0\}$ entonces, por el lema (3.9) del segundo capítulo (ver la demostración que $f \to f^*$ es de tipo débil (1.1) en las páginas 61 y 62), existe un número finito de esferas $\Sigma_{r_1}(X_1)$, ... , $\Sigma_{r_m}(X_m)$ disjuntas dos a dos y tales que la suma de sus volúmenes es mayor que $a_n|\mathcal{E}_\alpha|$. Esto es, si c es el volumen de la esfera unitaria de E_n

$$a_n|\mathcal{E}_\alpha| < c\,(r_1^n + r_2^n + \dots + r_m^n) \leq \frac{c}{\alpha} \sum_{k=1}^{m} \int_{\Sigma_{r_k}(X_k)} |d\mu(U)| \leq \frac{c}{\alpha} \int_{E_n} |d\mu(U)| \quad (3)$$

(3) ver página siguiente.

Entonces $|\mathcal{E}_\alpha| \to 0$ cuando $\alpha \to \infty$ y esto demuestra que $\mu^*(X) < \infty$ p.p. .

Si μ es la medida que nos da la función $m(t,X)$ de la última parte del lema (3.2) se puede demostrar la desigualdad

$$s_\alpha^*(X) \leq b\,\mu^*(X) \quad \text{p.p.}$$

con un argumento análogo a lo que hemos usado para la desigualdad $s_\alpha^*(X) \leq b\, f^*(X)$, cuando $q > 1$. Basta observar que la demostración del teorema (5.4) (ver página 90) depende sólo de la desigualdad (5.2) (ver página 87) que trata sólo del núcleo de Poisson . Esto demuestra el lema (3.3) .

D e m o s t r a c i ó n d e l t e o r e m a (3.1) :

La función $s(t,X) = |F(t,X)|^{(n-1)/n}$ es subharmónica, por el teorema (2.5) . Pongamos $q = \frac{n}{n-1}\,p$. Vemos que, puesto que $p \geq \frac{n-1}{n}$, tenemos $q \geq 1$. Además, para cada $t > 0$,

$$\int_{E_n} [\, s(t,X)\,]^q \, dX = \int_{E_n} |F(t,X)|^{q(n-1)/n}\, dX = \int_{E_n} |F(t,X)|^p \, dX = \mu_p(t,F) \leq m < \infty.$$

Esto es, $s(t,X)$ verifica las condiciones de los lemas (3.2) y (3.3) . Por el último de estos lemas vemos que cada componente de $F(t,X) = (u(t,X), v_1(t,X), \dots, v_n(t,X))$ es acotado no tangencialmente. Entonces, por el teorema (5.5) los límites no tangenciales $u(0,X)$, $v_1(0,X)$, ... , $v_n(0,X)$ existen p.p. . Si $p > \frac{n-1}{n}$ entonces $q > 1$. Usando parte (a) del lema (3.3) vemos que las convegencias (p.p.)

$$\lim_{t\to 0+} |u(t,X) - u(0,X)|^p = 0 \ , \quad \lim_{t\to 0+} |v_k(t,X) - v_k(0,X)|^p = 0 \ , \quad k = 1,2,\dots,n$$

son mayoradas por $2^{q+1}\, |g(X)|^q$.[4] Usando el teorema de Lebesgue sobre la convergencia mayorada obtenemos el hecho que

$$\lim_{t\to 0+} \int_{E_n} |F(t,X) - F(0,X)|^p \, dX = 0$$

y el teorema está demostrado.

---

(3) Aquí, como en el caso de la función f^* (ver página 61), suponemos a priori que $|\mathcal{E}_\alpha| < \infty$ (si no, no se puede aplicar el lema (3.9)). Que $|\mathcal{E}_\alpha| < \infty$ se ve con nuestra demostración tomando $\mathcal{E}_\alpha \cap \Sigma_r(0)$ en vez de $\mathcal{E}_\alpha$ y observando que en realidad hemos demostrado $|\mathcal{E}_\alpha| = \lim_{r\to\infty} |\mathcal{E}_\alpha \cap \Sigma_r(0)| \leq \frac{c}{\alpha} \int_{E_n} |d\mu(U)| < \infty$.

(4) Porque cada uno de estos términos es menor que $|F(t,X) - F(0,X)|^p \leq$
$\leq 2^p\,(|F(t,X)|^p + |F(0,X)|^p) \leq 2^q(|F(t,X)|^{((n-1)/n)q} + |F(0,X)|^{((n-1)/n)q}) \leq$
$\leq 2^{q+1}\,[g(X)]^q$.

Los teoremas siguientes son generalizaciones de resultados bien conocidos de la teoría clásica de los espacios H^p .

T e o r e m a (3.4) :

<u>Si</u> $p \geq \frac{n-1}{n}$ <u>y</u> $F \in H^p(E^+_{n+1})$ <u>entonces la función</u>

$$\Psi(t) = \{\mu_p(t;F)\}^{(n-1)/np}$$

<u>es convexa, no creciente. Además, si</u> $p > \frac{n-1}{n}$ <u>entonces</u> $\lim_{t\to\infty} \Psi(t) = 0$.

D e m o s t r a c i ó n :

Usando la notación de la última demostración, tenemos

$$\Psi(t) = \left\{ \int_{E_n} [\, s(t,X) \,]^q \, dX \right\}^{1/q} .$$

Puesto que $F \in H^p$, $\mu_p(t;F)$ es acotada y, por consiguiente, también lo es $\Psi(t)$. Entonces, si Ψ es convexa, Ψ tiene que ser no creciente.

Para $(t,X) \in E^+_{n+1}$ pongamos $\emptyset(t,X) = \Psi(t)$. Mostraremos que $\emptyset$ verifica la parte (b) de la definición de funciones subharmónicas y esto implicará que Ψ es convexa. En efecto, lo demostraremos por el absurdo. Supongamos que $\Psi(t)$ no sea convexa. Entonces existe una función lineal $\ell(t)$, y dos puntos $0 < t_o < t_1$, de manera que $\Psi(t_o) - \ell(t_o) = \Psi(t_1) - \ell(t_1) = 0$, y existe t' tal que $t_o < t' < t_1$ tal que $\Psi(t') - \ell(t') > 0$. Podemos suponer que t' sea un máximo de la función $\Psi(t) - \ell(t)$ en el intervalo $[t_o, t_1]$. Pongamos $h(t,X) = \ell(t)$; h será harmónica en E^+_{n+1} . Entonces, $\emptyset(t,X) - h(t,X)$ tiene un máximo en (t',X) lo cual contradice el hecho de que $\emptyset + (-h)$, siendo la suma de funciónes que verifican la desigualdad (b) , verifica la desigualdad (b) .

Ahora mostraremos que $\emptyset(t,X)$ verifica la condición (b) . Fijamos un punto $P_o = (t_o, X_o) \in E^+_{n+1}$. Sea $0 < r < t_o$, Σ la superficie de la esfera unitaria en E_{n+1} y $|\Sigma|$ su medida. Tenemos

$$\Psi(t_o) = \emptyset(t_o,X_o) = \emptyset(P_o) = \left\{ \int_{E_n} [\, s(t_o, X_o+X) \,]^q \, dX \right\}^{1/q} = \int_{E_n} s(t_o,X_o+X) g(X) dX,$$

donde $g(X) \geq 0$ y $||g||_{q'} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Usando el hecho que s es subharmónica obtenemos;

$$\varnothing(P_o) = \int_{E_n} g(X)\, s(t_o,X_o+X)\, dX \leq \int_{E_n} g(X) \left\{ \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} s(t_o+rt',X_o+X+rY')dt'dY' \right\} dX =$$

$$= \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} \left\{ \int_{E_n} g(X)\, s(t_o+rt',X_o+X+rY')\, dX \right\} dt'\, dY' \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} \left\{ \int_{E_n} \left[s(t_o+rt',X_o+X+rY') \right]^q dX \right\}^{1/q} dt'\, dY' =$$

$$= \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} \varnothing(t_o+rt',X_o+rY')\, dt'\, dY' = \mathcal{M}_{r,P_o}(\varnothing)$$

Esto prueba que $\varnothing$ verifica la desigualdad (b) .

Ahora mostraremos que $\Psi(t) \to 0$ si $t \to \infty$, cuando $p > \frac{n-1}{n}$ (y, por consiguiente, $q = p\frac{n}{n-1} > 1$). Sea $\varepsilon > 0$. En la demostración del lema (3.2) vimos que

$$s(t+\varepsilon,X) \leq m_\varepsilon(t,X) \quad ,$$

donde $m_\varepsilon(t,X)$ es la integral de Poisson de la función $f(X) = s(\varepsilon,X) \in L^q(E_n)$. Esto implica que $m_\varepsilon(t,X) \to 0$ cuando $t \to \infty$; en efecto

$$m_\varepsilon(t,X) \leq c_n\, t \left\{ \int_{E_n} \frac{dU}{(t^2+|U|^2)^{(n+1)q'/2}} \right\}^{1/q'} ||f||_q =$$

$$= \frac{c_n c t}{t^{(n+1)}} \left\{ \int_{E_n} \frac{dU}{(1+(\frac{|U|}{t})^2)^{(n+1)q'/2}} \right\}^{1/q'} = \frac{c_n c}{t^{n/q}} \left\{ \int_{E_n} \frac{dV}{(1+|V|^2)^{(n+1)q'/2}} \right\}^{\frac{1}{q'}} \to 0$$

cuando $t \to \infty$.

Pero, por el teorema (5.4) (ver página 90), $m_\varepsilon(t,X) \leq$ const. $f^*(X)$ p.p. y $f^*(X) \in L^q(E_n)$ (ver el corolario (3.12) del último capítulo). Esto es, la convergencia $s(t,X) \to 0$, cuando $t \to \infty$, es mayorada por $f^*(X)$. Usando el teorema de Lebesgue obtenemos $\Psi(t) \to 0$ si $t \to \infty$.

Una consecuencia de este teorema es que podemos definir la "norma" de una función en H^p , $p \geq \frac{n-1}{n}$, de una manera muy sencilla. Más precisamente, pongamos

$$||F||_p = \sup_{0<t<\infty} \left\{ \mu_p(t,F) \right\}^{1/p} .$$

por el teorema (3.4) , tenemos

$$||F||_p \;=\; \lim_{t\to 0+} \left\{ \int_{E_n} |F(t,X)|^p \, dX \right\}^{1/p} .$$

Si $p > \frac{n-1}{n}$ sabemos que hay convergencia en norma

$$\lim_{t\to 0+} ||F(t,X) - F(0,X)||_p = 0$$

(por el teorema (3.3)) . Estos hechos demuestran que, si $p > \frac{n-1}{n}$,

$$||F||_p = ||F(0,X)||_p ,$$

donde el miembro derecho es la norma de $F(0,X)$ como función de $L^p(E_n)$.

T e o r e m a (3.5) :

<u>Sea</u> $p_1 > \frac{n-1}{n}$, $p_2 \geq \frac{n-1}{n}$, $F \in H^{p_1}$ <u>y</u> $|F(0,X)| \in L^{p_2}(E_n)$. <u>Entonces</u> $F \in H^{p_2}$.

D e m o s t r a c i ó n :

Por el lema (3.2) , sabemos que la función $|F(t,X)|^{(n-1)/n}$ tiene una mayorante harmónica en $m(t,X)$ tal que

$$\lim_{t\to 0+} m(t,X) = m(0,X)$$

existe p.p. y en la norma de $L^{q_1}(E_n)$, donde $q_1 = \frac{n}{n-1}\, p_1$ y

$$||m(0,X)||_{q_1} \leq ||F(0,X)||_{p_1}^{(n-1)/n} .$$

Pero $|F(0,X)|^{(n-1)/n} \leq m(0,X)$ p.p. , puesto que $|F(t,X)|^{(n-1)/n} \leq m(t,X)$ para todos los $t > 0$ y los límites, para $t \to 0+$, existen p.p. . Entonces.

(✱) $$m(0,X) = |F(0,X)|^{(n-1)/n} \quad \text{p.p.} .$$

Puesto que $|F(0,X)| \in L^{p_2}(E_n)$ la igualdad (✱) implica que $m(0,X) \in L^{q_2}(E_n)$, con $q_2 = \frac{n}{n-1}\, p_2$.

Pero (por el lema (3.12) y el teorema (1.14) del último capítulo)

$$m(t,X) = \int_{E_n} m(0,U)\, P(t,|X-U|)\, dU$$

y, entonces,

$$\left\{ \int_{E_n} |m(t,X)|^{q_2} \, dX \right\}^{1/q_2} \leq ||m(0,X)||_{q_2}$$

para cada $t > 0$.

Por consiguiente

$$\int_{E_n} |F(t,X)|^{p_2}\, dX = \int_{E_n} |F(t,X)|^{((n-1)/n)q_2}\, dX \leq \int_{E_n} [\, m(t,X)\,]^{q_2}\, dX \leq \|m(0,X)\|_{q_2}^{q_2} < \infty$$

lo cual significa que $F \in H^{p_2}(E^+_{n+1})$ y el teorema está probado.

O b s e r v a c i ó n :

La igualdad (✱) muestra que $m(t,X)$ es la menor mayorante harmónica de

$$s(t,X) = |F(t,X)|^{(n-1)/n}$$

en E^+_{n+1} tal que

$$\int_{E_n} [\, m(t,X)\,]^{(n/(n-1))p}\, dX \leq \|F(0,X)\|_p^p \quad .$$

N O T A S

Reuniremos aquí todas las observaciones atinentes al curso, ya sean erratas, aclaraciones o notas bibliográficas.

C A P I T U L O I

a) Un tratamiento más detallado de la transformada de Fourier puede verse en [2]

b) La demostración de lo afirmado en la observación 1, página 7, puede verse en [6], parte 4, cap. XXI, §1, teorema 21.23', pag. 568-9.

c) En la primera parte de la demostración de la pag. 10 debe reemplazarse $f(x)$ por $f^*(x)$, donde $f^*(x)$ es la función absolutamente continua localmente igual a $f(x)$ p.p. La demostración no cambia esencialmente.

d) La relación entre la sumabilidad Abel y Gauss enunciada en la pag. 17 está probada en [2], cap. I, §14, pag. 37.

e) El teorema (5.10), enunciado para $f \in L^1$, puede ser facílmente generalizado para $f \in L^p$, $p \geq 1$. Basta cambiar la estimación de

$$\int_{|U|>\eta} |f(X_0-U)| \; P(\delta, |U|) \, dU$$

utilizando la desigualdad de Hölder y tener en cuenta que $\int_{|U|>\eta} [P(\delta,|U|)]^q dU \longrightarrow 0$ cuando $\delta \to 0$ para cualquier $q > 1$.

f) La demostración del lema (6.1) puede verse, por ejemplo, en [2], pag. 92.

g) Con referencia a la observación (2) de la pag. 7, vimos que $||K||_2 = ||\hat{k}||_\infty$ (pag. 33). Probaremos que si $k \geq 0$, $||\hat{k}||_\infty = ||k||_1$. Sabemos que $||k||_1 \geq ||\hat{k}||_\infty$. Por otra parte, del corolario (5.12) resulta, invirtiendo f y $\hat{f}$, que si $k \geq 0$, es $||k||_1 = \hat{k}(0) \leq ||\hat{k}||_\infty$; por lo tanto $||k||_1 = ||\hat{k}||_\infty$.

Hemos probado que si $k \geq 0$, $||K||_2 = ||k||_1$; además, sabemos que $||K||_1 = ||k||_1$. Es fácil probar que si $k \geq 0$, $||K||_p = ||k||_1$ para $1 \leq p$.

C A P I T U L O I I

a) por el momento no existen referencias generales para la teoría de las funciones harmónicas en n variables. Para $n = 3$, ver, por ejemplo, [8].

b) En el teorema (1.14), página 44, se ha omitido demostrar la unicidad. Esta está probada en el lema (5.9) . Obsérvese que en este lema no se ha utilizado nada posterior al teorema (1.14) .

c) La parte b) del teorema (1.14) es conclusión inmediata del lema (2.3) , página 6 .

d) El desarrollo de la transformada de Hilbert en el §2 tiene algunas novedades. Otros métodos pueden verse en [15] y en [18] capítulo XVI .

e) Los teoremas de interpolación de M. Riesz (3.5) y de Marxinkiewicz (3.11) pueden verse en [18] (vol II, paginas 93-100 y páginas 111-119)

f) El lema (3.9) se debe a Wiener [16] .

g) El teorema (3.14) está demostrado en [13] . En este trabajo hay ejemplos que demuestran que tipo restringido es más débil que tipo (p,q) .

h) El teorema (3.18) puede verse en [13] . Allí se prueba que el teorema se reduce al caso $E = \bigcup_1^n E_k$, E_k intervalos disjuntos.

i) En relacion al corolario (3.20) es interesante observar que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{\operatorname{sen} h\,(\pi x)}\, dx = \pi^{-p}\,(1-2^{-p})\,\Gamma(p)\,\zeta(p) \quad . \quad \text{Ver [1]} \quad .$$

j) La teoría de L^2 de las transformadas de M. Riesz puede verse en [7]

k) Para teoremas generales sobre la acotación de operadores del tipo

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{|U| \geq \varepsilon} f(X-U)\, \frac{\Omega(U/|U|)}{|U|^n}\, dU$$

ver [4] , donde hay condiciones más generales que las dadas en la segunda observación (página 86) al final de la cuarta sección.

l) El teorema (5.4) es conocido (ver [12]) .

m) Teorema (5.5) es un caso particular de un teorema de A. P. Calderón (ver [3]) .

n) En la última parte de la demostración del lema (5.9) se usó el hecho de que el espacio dual de las funciones continuas en E^n que se anulan en ∞ es el espacio de las medidas regulares finitas en E^n (ver [17]) .

CAPITULO III

a) Para la teoría de los espacios H^p del círculo ver [18] , capítulo VII La demostración dada en el texto parece ser nueva.

b) En relación con la observación que precede al teorema (1.5) , un resultado más fuerte que muestra las limitaciones que presenta el uso de funciones harmónicas, puede verse en [5] donde se prueba que: si $p < 1$ existe una función harmónica tal que

$$\sup_{0\leq r<1} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^p \leq M < \infty$$

y, sin embargo, el límite $\lim_{\substack{r\to 1\\ 0\leq r<1}} u(re^{i\theta})$ n o existe p.p.

c) La teoría de las clases H^p del semiplano fué estudiada extensamente por W. Kryloff [9] quien se basa en el uso de la representación conforme. El método que indicamos en la página 110 para pasar del círculo al semiplano puede verse en [18], capítulo XVI, página 299.

d) Para un estudio más amplio de las funciones subharmónicas ver [11]. En el texto, nosotros hemos seguido las ideas de Littlewood [10] quien se ocupó del caso de dos dimensiones, y cuya extensión a más dimensiones no ofrece dificultades.

e) Los teoremas del §3 fueron probado originariamente en [14]. Si $p > 1$ es fácil construir una función en H^p: basta tomar una $f \in L^p$; su transformada de Poisson conjunta con las integrales conjugadas de Poisson constituyen un sistema de M. Riesz en H^p. En cambio, no se conocen ejemplos de funciones en H^p, $\frac{n-1}{n} \leq p \leq 1$. Además, interesa estudiar el comportamiento de funciones en $H^{(n-1)/n}$ y en H^p con $0 < p \leq \frac{n-1}{n}$ para ver si nuestros resultados son los mejores posibles.

R E F E R E N C I A S

[1] BATEMAN, H. Bateman manuscript proyect. California Institute of Technology, Vol. I, pag. 323, fórmula 2.

[2] BOCHNER S. y CHANDRASEKHARAN K. Fourier transforms (Annals of Math. Studies; Princeton, 1949).

[3] CALDERON A. P. On the behaviour of harmonic functions on the boundary. Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), 47-54.

[4] CALDERON A. P. y ZYGMUND A. On the existence of certain singular integrals. Acta Mathematica, N° 88 (1952) pag. 85-139.

[5] HARDY G. H. y LITTLEWOOD J. E. Some properties of conjugate functions. Journ. für Mathematik, Vol. 167, (1932), pág. 405-23.

[6] HILLE E. y PHILLIPS R.S. Functional analysis and semi-groups. Am. Math. Soc. (1957)

[7] HORVATH J. Sur les functions conjuguées a plusiers variables. Kon. Med. Acad. van Wet, 16 (1953), 17-29.

[8] KELLOG O.D. Foundations of Potential Theory. Fred. Ungar Co., New York (1929).

[9] KRYLOFF W. On functions analytic in the half plane (Ruso). Math. Sbornic T.6. (48) (1939), 55-138.

[10] LITTLEWOOD J.E. Lectures on the theory of functions. Oxford (1944) pag.1-243.

[11] RADO T. Subharmonic functions. Berlin, J. Springer (1937).

[12] RAUCH H.E. Harmonic and analytic functions of several variables and the maximal theorem of Hardy and Littlewood. Can. J. Math, 8 (1956) pag. 171-183.

[13] STEIN E.M. and WEISS G. An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its applications. J. of Math. and Mech., Vol. 8, N°2 (1959), 263-284.

[14] STEIN E. M. and WEISS G. On the theory of harmonic functions of several vari - ables I. The theory of H^p spaces. Acta Mat. Vol 103 (1960) 25-62.

[15] TITCHMARSH E.C. Introduction to the theory of Fourier integrals. Oxford (1948).

[16] WIENER N. The ergodic Theorem. Duke Math. J., 5 (1939), pag. 1-18.

[17] ZAANEN A. C. An introduction to the theory of integration. Interscience Publ., New York (1958), pag. 196.

[18] ZYGMUND A. Trigonometric series. Cambridge University Press (1959).

F E d e E R R A T A S

Página	Linea	Dice	Debe decir
6	12	$\hat{f}(y)\hat{g}(y)$	$\hat{f}(Y)\hat{g}(Y)$
7	6	$\|\|f\|\|_p\ \|\|k\|\|$	$\|\|f\|\|_\rho\|\|k\|\|_1$
9	1*	$L_1(E_n)$	$L_1(E_1)$
10	4	$L_1(E_n)$	$L_1(E_1)$
11	2	de ellas mismas	una de otra
11	5*	f(x)	f(z)
15	13	a_δ	α_r
16	11	$\int_0$	$\int_0^\infty$
22	6	$\hat{f}(X) = 0$	$f(X) = 0$
23	3*	$f(X_o - U)$	$f(X_o - rU')$
30	11	$\overline{[\tilde{\mathcal{J}}\ \overline{f}\,](X)}$	$\overline{[\mathcal{J}\ \overline{f}\,](X)}$
30	15	$\int f(X)\ [\mathcal{J}\ \overline{f}\,](X)\ dX$	$\int g(X)\ [\mathcal{J}\ \overline{f}\,](X)\ dX$
36	6	$Q_k(t,\|X\|)$	$Q_k(t,X)$
44	teorema (1.14)	$\overline{E^+_{n+1}}$	E^+_{n+1}
52	14	$\overset{\approx}{f}(x) = \ldots = f(x)$	$\overset{\approx}{f}(x) = \ldots = -f(x)$
76	7*	$\int_{\|X-U\|\geq\varepsilon} f(U)\ \frac{X-U}{\|X-U\|^{(n+1)/2}}\ dU$	$\int_{\|X-U\|\geq\varepsilon} f(U)\ \frac{X-U}{\|X-U\|^{n+1}}\ dU$
82	1, 2, 4*	$\int_{\|r\|\geq\varepsilon}$	$\int_{r\geq\varepsilon}$
83	8	$\|\|f_{k,\varepsilon}\|\|$	$\|\|f_{k,\varepsilon}\|\|_p$
90	11	$\|U(t,Z)\|$	$\|u(t,Z)\|$
104	9	$\int_0^{2\pi} \|F(re^{i\theta})-F(e^{i\theta})\|\ d\theta$	$\int_0^{2\pi} \|F(re^{i\theta}) - F(e^{i\theta})\|^p\ d\theta$
107	2*	teorema (1.7)	teorema (1.8)

* indica que las lineas deben contarse a partir del final de la página.

I N D I C E