ISSN 1851-149X

Fascículo 2

Cursos y seminarios de matemática

Serie B

Noemí Wolanski

Introducción a los problemas de frontera libre

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2007

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie B

Fascículo 2

Comité Editorial:

Carlos Cabrelli (Director). *Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires*. E-mail: cabrelli@dm.uba.ar

Claudia Lederman. *Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.* E-mail: clederma@dm.uba.ar

Gabriel Minian. *Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.* E-mail: gminian@dm.uba.ar

ISSN 1851-149X

Derechos reservados
© 2007 Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria- Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

Noemí Wolanski

Introducción a los problemas de frontera libre

Buenos Aires, 2007

Prefacio

Estas notas nacieron a partir del curso optativo “Problemas de frontera libre” dictado en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires en el 1er. cuatrimestre del año 2006.

El curso estuvo dirigido a alumnos avanzados de la Licenciatura y alumnos del Doctorado en Matemática, con buenos conocimientos de Teoría de la Medida y un conocimiento básico de Ecuaciones Diferenciales Parciales, especialmente el laplaciano y la ecuación del calor.

Se trata de un curso introductorio a este tipo de problemas, por lo que se comienza con una descripción de algunos ejemplos concretos de problemas que pueden ser planteados matemáticamente como problemas de frontera libre. Esto se realiza en la Introducción. Este capítulo introductorio se puede utilizar también para el dictado de un minicurso de unas 3 o 4 horas sobre este tema. (Se sugiere agregar al minicurso el Teorema de existencia y unicidad de solución a una inecuación variacional del Apéndice 1). Si se agregan los parágrafos 2.1, 2.2 y 2.3 del Capítulo 2 se obtiene material para un buen minicurso de unas 6 horas. En este capítulo seguimos en gran medida parte del libro [5].

A continuación se desarrollan en mayor profundidad dos problemas clásicos: El Problema del Obstáculo (Capítulo 2) y El Problema de los Jets (Capítulo 3). En ambos capítulos se prueba existencia de solución y se prueba la regularidad de la misma. En el Capítulo 2 se estudia, además el Problema del Dique Poroso que está relacionado con el del Obstáculo como se ve en la Introducción.

Con respecto a la frontera libre, se prueba la regularidad en un sentido débil –el sentido de la medida– que es un primer paso hacia la demostración de la regularidad $C^{1,\alpha}$ de la misma. Para el Problema del Obstáculo seguimos las notas de un curso dictado por el Profesor Luis Caffarelli (ver [2]). Para el Problema de los Jets utilizamos el libro [3]. En estas fuentes se puede encontrar desarrollado en su totalidad el estudio de la regularidad de la frontera libre.

Quisiera agradecer a los alumnos del curso Juan Lucas Bali, Carolina Capatto, Leandro del Pezzo, Fernando López García, Carolina Mosquera y Mariana Prieto por su ayuda en la redacción y tipeado de estas notas.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Muchos problemas de la física, físico-química, ingeniería, biología, economía, etc, vienen planteados por medio de ecuaciones diferenciales, o más generalmente, sistemas de ecuaciones diferenciales. Lo más común es que la / las funciones incógnita dependan de varias variables (una o más variables espaciales y eventualmente el tiempo, por ejemplo). Se trata, por lo tanto, de ecuaciones en derivadas parciales. Estas ecuaciones deben satisfacerse para todo x en un cierto recinto Ω de $\mathbb{R}^n$ (o para todo (x,t) en $\Omega \times (0,T)$).

Por ejemplo, si la posición de equilibrio de una menbrana elástica puede describirse como el gráfico de una función $u(x,y)$ con $(x,y) \in \Omega$, se puede ver que u debe satisfacer

$$\triangle u = f \qquad \text{en } \Omega,$$

donde f es la fuerza (transversal) aplicada a la membrana.

Claramente, la posición que adopte la membrana depende de como se sujete en el borde. Por lo tanto, el problema estará bien planteado sólo si se agrega además una “condición de contorno”, por ejemplo,

$$u = g \qquad \text{en } \partial\Omega.$$

En muchos problemas, sin embargo, el dominio Ω donde debe satisfacerse la ecuación es desconocido a priori, y su determinación es parte del problema. Este dominio puede, efectivamente, determinarse porque el problema agrega un dato de contorno extra en este borde. De modo que se elegimos Ω arbitrariamente, lo más probable será que habría incompatibilidades entre los datos. Veremos enseguida ejemplos.

En muchos problemas, el dominio es conocido pero no hay una única ecuación que se satisface en todo Ω sino que hay una superficie Γ (frontera libre) que divide a Ω en dos partes (podría ser más) Ω_1 y Ω_2 y una ecuación para cada parte del dominio (podría ser la misma); y sobre Γ deben satisfacerse condiciones de transmición que relacionan a los valores de u a cada lado de Γ. En problemas de evolución, Γ depende del tiempo y la denotaremos Γ_t.

En esta primera parte de las notas vamos a describir brevemente algunos problemas que pueden describirse matemáticamente como Problemas de frontera libre y, en algunos casos, haremos una primera aproximación a los mismos.

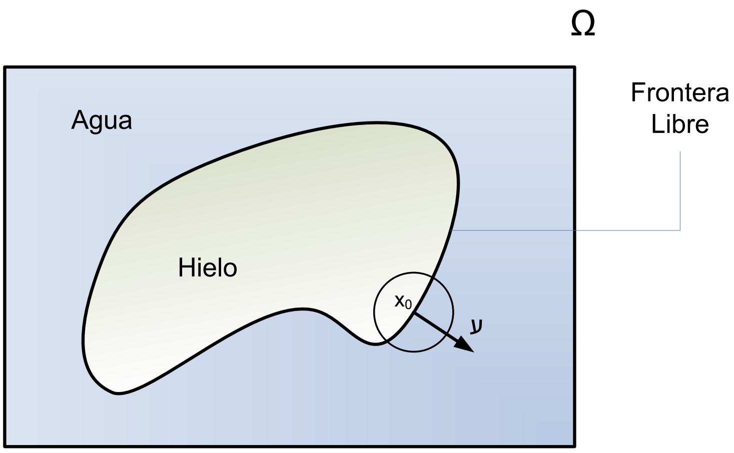
1.1. Problema de Stefan

Este es uno de los ejemplo más conocidos dentro de los problemas de frontera libre el cual modela como se funde una barra de hielo, por ejemplo.

Sea $u(x,t)$ la función que mide la temperatura del agua en el tiempo t en el lugar x de un recinto Ω. Como 0 es la temperatura de fusión del hielo, la región $\{u > 0\}$ representa la porción de Ω ocupada por agua y $\{u \leq 0\}^\circ$ la ocupada por el hielo. Por ser éste un problema de evolución, nuestro dominio es de la forma $\Omega \times (0,T)$. Así, u debe satisfacer la ecuación del calor

$$u_t = \Delta u \qquad \text{en } \{u > 0\} \cup \{u \leq 0\}^\circ.$$

En cada instante t, el recinto está divido en dos partes (hielo-agua) por una superficie Γ_t. Por lo tanto, también queda dividido nuestro dominio por $\Gamma := \bigcup_{t>0} \Gamma_t$. Vamos a llamar a esta superficie la frontera libre. Sobre Γ se tiene $u = 0$.



Por otro lado, el problema de fusión del hielo da una condición extra sobre la superficie de cambio de fase. En efecto, se sabe que para que el agua pase del estado sólido al líquido se le debe entregar una cantidad de energía (calor), generando así un salto del flujo de calor en el momento de la fusión (sobre la frontera libre). Esta energía produce en desplazamiento de la frontera libre con dirección al hielo con una velocidad proporcional al salto del flujo de calor. Resultando así que

$$-L\dot{s}(x) = (\nabla u^+(x) - \nabla u^-(x)).\nu(x), \qquad x \in \Gamma_t,$$

donde $\nu(x)$ es la normal exterior (la que apunta en dirección al agua), L es el calor latente de fusión del hielo (constante en la proporción), $\dot{s}$ es la velocidad de avance del hielo sobre el agua y $\nabla u^+(x)$ y $\nabla u^-(x)$ son el flujo de temperatura en el agua y en el hielo respectivamente.

Esta condición se conoce como la "condición de frontera libre".

Veamos como podemos escribir la velocidad de avance $\dot{s}$ en función de la frontera libre. Supongamos que la superficie de cambio de fase está descripta como la curva de nivel cero de una función regular $\phi \in C^1(\Omega \times (0,T))$,

$$\Gamma = \{(x,t)/\ \phi(x,t) = 0\}.$$

Supongamos que $\{\phi > 0\}$ describe el agua. Entonces, si x está en Γ_t,

$$\nu(x) = \frac{\nabla\phi(x,t)}{|\nabla\phi(x,t)|},$$

donde ∇ es tomado sobre la variable espacial.

Sea $x_0 \in \Gamma_t$, entonces si $\Omega(t)$ tiene borde suave, existe para un $\mu > 0$ una función suave $\sigma : B'_\mu \to \Gamma_t \subset \mathbb{R}^N$ con $\sigma(0) = x_0$ y $\{\sigma_{y_1}(0), \cdots, \sigma_{y_N}(0)\}$ generadores del plano tangente a Γ_t en x_0, tal que si ν es la normal exterior a Γ_t en x_0, la función $F : B'_\mu \times (-\mu,\mu) \to \mathbb{R}^N$ definida por

$$F(y',s) := \sigma(y') + s\nu$$

es suave y con Jacobiano no nulo en $(0,0)$. Además, $F(0,0) = x_0$ con lo cual, por el Teorema de la función inversa, cualquier punto x en un entorno de x_0 puede escribirse de forma única como $x = \bar{x} + s\nu$ con $\bar{x} \in \Gamma_t$. Además F satisface que si δ es suficientemente chico, $x \in B_\delta(x_0) \cap \Omega(t)$ si y sólo si $x = F(y',s)$ con $s < 0$ y $x \in B_\delta(x_0) \setminus \overline{\Omega(t)}$ si y sólo si $x = F(y',s)$ con $s > 0$.

Sea $x(t_0 + t)$ en Γ_{t_0+t} convergiendo a x_0 a medida que el incremento t tiende a cero. Entonces,

$$x(t_0 + t) = \bar{x}(t_0 + t) + s(t_0 + t)\nu,$$

y en consecuencia,

$$\dot{x}(t_0) = \lim_{t\to 0} \frac{x(t_0+t) - x_0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\bar{x}(t_0+t) - \bar{x}_0}{t} + \Big(\lim_{t\to 0} \frac{s(t_0+t) - s(t_0)}{t}\Big)\nu = \dot{\bar{x}}(t_0) + \dot{s}(t_0)\nu$$

Con lo cual,

$$\dot{x}(t_0) \cdot \nu = \dot{\bar{x}}(t_0) \cdot \nu + \dot{s}(t_0)|\nu|^2 = \dot{s}(t_0).$$

Por otro lado, utilizando que $\phi(x(t),t) = 0$ y derivando se puede observar que

$$0 = \nabla\phi(x_0,t_0) \cdot \dot{x}(t_0) \ + \ \phi_t(x_0,t_0) \ = \ |\nabla\phi(x_0,t_0)|\, \dot{s}(t_0) \ + \ \phi_t(x_0,t_0).$$

Así,

$$-\dot{s}(t_0) = \frac{\phi_t(x_0,t_0)}{|\nabla\phi(x_0,t_0)|}.$$

De este modo, el problema queda planteado de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{en } \{u > 0\} \cup \{u \leq 0\}^\circ \\ u = g & \text{en } (\Omega_\times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times (0,T)) \\ L\phi_t = (\nabla u^+ - \nabla u^-)\nabla\phi & \text{en } \Gamma, \end{cases}$$

donde g describe la temperatura inicial y como se mantiene la temperatura en el borde del recinto a medida que transcurre el tiempo.

El caso en que el hielo está a temperatura constante cero (que esto pueda ser así o no, depende de la temperatura inicial y de cómo se mantenga la temperatura en $\partial\Omega$ a lo largo del tiempo) es llamado el "Problema de Stefan a una fase" y el caso general que acabamos de describir "a dos fases".

En el caso del problema de Stefan a una fase podemos tomar como ϕ a una extensión suave de $u|_{\{u>0\}}$ a todo $\Omega \times (0,T)$. Resultanto la siguiente reducción,

$$\begin{cases} u = g & \text{en } \Omega \times \{0\} \cup (\partial\Omega \times (0,T) \\ u_t = \Delta u & \text{en } \{u > 0\} \\ Lu_t = |\nabla u|^2 & \text{en } \Gamma. \end{cases}$$

para una función u no negativa en $\Omega \times (0,T)$.

1.2. Problema del Obstáculo

Se busca determinar la posición que adopta una membrana perfectamente elástica, la cual puede ser descripta como el gráfico de una función $u(x)$ en un dominio Ω, condicionada en la frontera por una función $g(x)$, con x en $\partial\Omega$, y sujeta a la acción de una fuerza tranversal $f(x)$, con x en Ω. Esta posición es aquella que minimiza la enegía potencial. Veamos entonces cómo podemos describir esto.

Además de la relacionada con la fuerza transversal, hay otra componente de la energía potencial de la membrana que es el trabajo que costó estirarla. Como consideramos una membrana perfectamente elástica este trabajo es proporcional a la diferencia de área entre la superficie estirada y aquella sin deformar. La constante de proporcionalidad es la tensión superficial que tomaremos igual a 1. De modo que la energía potencial de la membrana es

$$E = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2} - 1 \; dx \; + \; \int_\Omega f(x)u(x) \; dx.$$

Ahora, si suponemos que $|\nabla u(x)|$ es chico y dado que $\sqrt{1+s} = 1 + \frac{1}{2}s + ...$, una buena aproximación es

$$\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2} \sim 1 + \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2.$$

Así, reemplazando en la energía potencial obtenemos

$$E = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \; dx \;\; + \;\; \int_\Omega f(x)u(x) \; dx.$$

Para que todo esto tenga sentido tenemos que poder hablar de ∇u pero no es necesario que u sea C^1 para que E esté definida. Con lo cual, vamos buscar un minimizante de la energía potencial en el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ y luego analizar su regularidad.

Ahora, si la membrana debe estar sobre un obstáculo definido como el gráfico de una función $\phi \in C^2(\Omega)$, el problema se reduce a minimizar el funcional

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega fv,$$

con v en $\mathcal{K} := \{v \in H^1(\Omega) \;\; | \;\; v - g \in H_0^1(\Omega), \; v \geq \phi \; en \; \Omega\}$. Llamaremos a estas funciones "admisibles". Supondremos que $g > \phi$ en $\partial\Omega$ para que $\mathcal{K}$ sea no vacío.

A continuación, vamos a hacer dos reduciones equivalentes del problema de minimización que utilizaremos posteriormente para garantizar la existencia de solución.

Para la primer reducción, supongamos que existe un minimizante u para el funcional antes mencionado. Entonces, dada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ no negativa y $\varepsilon > 0$, la función $v := u + \varepsilon\varphi$ es admisible y, en consecuencia, satisface

$$J(u) \leq J(u + \varepsilon\varphi).$$

Así,

$$\begin{aligned} 0 &\leq J(u+\varepsilon\varphi) - J(u) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u + \varepsilon\nabla\varphi|^2 + \int_\Omega f(u+\varepsilon\varphi) - \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega fu \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 + \varepsilon\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi + \varepsilon\int_\Omega f\varphi. \end{aligned}$$

Con lo cual, si dividimos por ε y hacemos tender éste a 0^+ obtenemos que

$$0 \leq \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi + \int_\Omega f\varphi,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ no negativa. Decimos entonces que una solución al problema del obstáculo satisface que

$$\Delta u \leq f, \qquad \text{en sentido débil en } \Omega. \tag{1.2.1}$$

Notar que si pudieramos tomar valores de ε negativos que garanticen que la función $u+\varepsilon\varphi$ esté sobre el obstáculo obtendríamos, haciendo el mismo razonamiento, que $\triangle u = f$ en Ω. Si bien no podemos garantizar esto sobre todo Ω sí lo vamos a poder hacer sobre un dominio más chico.

Para que tenga sentido lo que deseamos hacer a continuación, vamos a necesitar que el minimizante sea semicontinuo inferiormente (ie. el conjunto $\{u > c\}$ abierto para toda constante c), así, el conjunto $\{x \in \Omega/\ u > \phi\}$ resulta abierto.

Ahora, sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ con soporte en el dominio $\{u > \phi\}$ y sea $M := \|\varphi\|_\infty$. Dado que el soporte de φ es compacto, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathrm{sop}(\varphi) \subseteq \{u - \phi > \delta\}.$$

Así, si $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{M}$, resulta que $u - \varepsilon\varphi$ está sobre el obstáculo, entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq J(u-\varepsilon\varphi) - J(u) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u - \varepsilon\nabla\varphi|^2 + \int_\Omega f(u-\varepsilon\varphi) - \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega fu \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 - \varepsilon\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi - \varepsilon\int_\Omega f\varphi. \end{aligned}$$

Dividiendo por ε y haciendo tender este a 0^+ obtenemos

$$\Delta u \geq f, \qquad \text{en sentido débil en } \{u > \phi\}. \tag{1.2.2}$$

Con lo cual, un planteo en un sentido débil del “problema del obstáculo” es el siguiente:

$$\begin{cases} \Delta u \leq f & \text{en sentido débil en } \Omega, \\ \Delta u = f & \text{en } \{u > \phi\}, \\ u \geq \phi & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{1.2.3}$$

con $u - g$ en $H_0^1(\Omega)$.

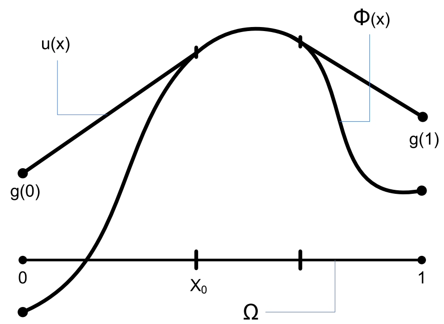
Supongamos que tenemos una solución del problema planteado anteriormente en el caso unidimensional con $f = 0$ y analicemos su regularidad y qué comportamiento esperamos que tenga en la frontera libre.

El minimizante u resulta lineal en $\{u > \phi\}$ y coincide con ϕ en el resto de Ω, la cual es una función C^2. Así, si dejamos la demostración de la continuidad para más tarde (propiedad que debemos suponer si queremos que esto tenga sentido), sólo tenemos que ver que u se pega suavemente con ϕ en $\partial\{u > \phi\}$ para concluir que $u \in C^1(\Omega)$.

Sea x_0 en $\partial\{u > \phi\}$. Supongamos que $u > \phi$ a la izquierda de x_0.

Así, suficientemente cerca de x_0, podemos suponer que

$$u'(x) = \begin{cases} u'(x_0^-) & \text{si } x < x_0 \\ \phi'(x) & \text{si } x > x_0. \end{cases}$$



Supongamos que u no se pega suavemente a ϕ en x_0. Entonces, dado que $u'(x_0^-) \leq \phi'(x_0)$ por ser $u \geq \phi$ y $u(x_0) = \phi(x_0)$, se tiene $L := \phi'(x_0) - u'(x_0^-) > 0$ y, en un entorno de x_0,

$$u'(x) = u'(x_0^-) + L\chi_{(x \geq x_0)}(x) + \psi(x),$$

donde

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ \phi'(x) - \phi'(x_0) & \text{si } x \geq x_0. \end{cases}$$

Así, dado que $u'' \leq 0$ en sentido débil y ψ es continua, si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ con soporte en $B_\delta(x_0)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ y $\varphi(x_0) = 1$, resulta que

$$0 \geq -\int u'\varphi' = -L\int_{x_0}^{x_0+\delta} \varphi' - \int \psi\varphi' = L\varphi(x_0) - \int \psi\varphi' \underset{\delta \to 0^+}{\longrightarrow} L > 0,$$

lo que es un absurdo.

Por lo tanto, u se pega suavemente a ϕ en la frontera libre y $u \in C^1(\Omega)$.

Es más, dado que $u'' = \psi'$, se ve que $u \in C^{1,1}(\Omega)$. Por otro lado, ésta es la máxima regularidad que vamos a poder garantizar, dado que para tener segunda derivada continua es necesario que la función obstáculo tenga segunda derivada cero en la frontera libre, condición que no podemos garantizar, (es más, vamos a pedir que $\phi'' < 0$ en Ω).

Así, es razonable esperar que la condición de frontera libre en el caso N dimensional sea:

$$u = \phi \quad \text{y} \quad \nabla u = \nabla\phi \qquad \text{en } \partial\{u > \phi\}.$$

Hagamos ahora la segunda y última reducción del problema.

Pensemos el funcional J como la suma de una forma bilineal simétrica y una lineal,

$$J(v) = \frac{1}{2}\, a(v,v) - l(v),$$

donde $a(w,v) := \int_\Omega \nabla w \nabla v$ y $l(v) := -\int_\Omega fv$.

Así, dado que $\mathcal{K}$ es un conjunto convexo, si u es un minimizante del funcional tenemos

$$J(u) \leq J((1-\varepsilon)u + \varepsilon w),$$

para todo $\varepsilon \in (0,1)$ y $w \in \mathcal{K}$.

De aquí que,

$$\begin{aligned} 0 &\leq J((1-\varepsilon)u+\varepsilon w) - J(u) = J(u+\varepsilon(w-u)) - J(u) \\ &= \frac{1}{2}a(u+\varepsilon(w-u), u+\varepsilon(w-u)) - l(u+\varepsilon(w-u)) - \frac{1}{2}a(u,u) + l(u) \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2}a(w-u,w-u) + \varepsilon a(u,(w-u)) - \varepsilon l(w-u). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si dividimos por ε y hacemos tender a este a 0^+ obtenemos que el minimizante $u \in \mathcal{K}$ debe satisfacer la siguiente inecuación variacional

$$0 \leq a(u, w-u) - l(w-u), \tag{1.2.4}$$

para todo $w \in \mathcal{K}$. Esta inecuación variacional resulta equivalente al primer planteo que hicimos del problema.

1.3. Problema del Dique Poroso

El problema que estudiaremos a continuación es, en principio, muy distinto de los vistos anteriormente. Aunque, mediante un adecuado planteo, vamos a poder reducirlo al “problema del obstáculo”.

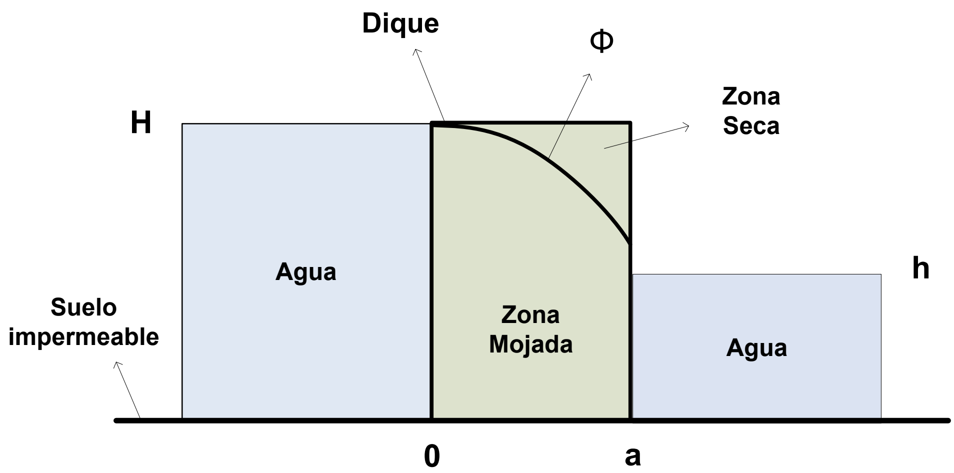
El problema consiste en determinar la posición de equilibrio que va a adoptar la zona mojada de un dique poroso. Por las dimensiones del dique sólo nos interesa analizar una sección transversal de éste, como se puede ver en la siguiente figura.

Supongamos que el dique tiene un espesor a y una altura H y que la zona mojada en la posición de equilibrio puede describirse de la siguiente forma,

$$D := \{(x,y)/\ 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq \phi(x)\}.$$

Así, queda definida sobre el Dique $R := (0,a) \times (0,H)$ la función que mide la altura piezométrica del fluido de la siguiente forma:

$$u(x,y) = y + p(x,y),$$



donde p es la presión (la acción de la gravedad ha sido normalizada a 1).

Por otro lado, se sabe que la ecuación que describe el flujo estacionario de un líquido es

$$div\ q = 0.$$

Y, por la ley de Darcy para el flujo en un medio poroso, la velocidad q satisface

$$q = -K\nabla u.$$

Por lo tanto obtenemos que la altura piezométrica (o presión hidrostática) debe satisfacer

$$\Delta u = 0 \qquad \text{en } D.$$

Analicemos ahora las condiciones de borde que se deben verificar.

Supongamos que el piso de los reservorios es impermeable, con lo cual, la componente vertical de la velocidad q del fluido es cero en $y = 0$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{en } y = 0.$$

Por otro lado, como la presión hidrostática en los reservorios satisface que

$$p(x, y) + y = constante,$$

y la presión en aquellos puntos en los que se está en contacto con el aire es 0 resulta que

$$\begin{array}{ll} p(x,y) + y = H & \text{con } (x,y) \text{ en el reservorio de la izquierda} \\ p(x,y) + y = h & \text{con } (x,y) \text{ en el reservorio de la derecha.} \end{array}$$

Con lo cual, por la continuidad de la presión,

$$\begin{array}{ll} u(0,y) = H & \text{en } 0 < y < H \\ u(a,y) = h & \text{en } 0 < y < h. \end{array}$$

Usando nuevamente que la presión atmoférica es 0, obtenemos que

$$u(a,y) = y \qquad \text{con } h < y < H.$$

Observemos que si $y = \phi(x)$ es la posición de equilibrio que va a adoptar el borde de la zona mojada la velocidad del fluido será tangente a esta curva. Por lo tanto la derivada de u en la dirección normal será cero. Así obtenemos las condiciones de frontera libre

$$\begin{cases} u(x,\phi(x)) = \phi(x) & \text{con } 0 < x < a \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(x,\phi(x)) = 0 & \text{con } 0 < x < a. \end{cases}$$

De este modo, podemos decir de la altura piezométrica lo siguiente:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } D, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 & \text{con } 0 < x < a, \\ u(x,\phi(x)) = \phi(x) & \text{con } 0 < x < a, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(x,\phi(x)) = 0 & \text{con } 0 < x < a, \\ u(0,y) = H & \text{con } 0 < y < H, \\ u(a,y) = h & \text{con } 0 < y < h, \\ u(a,y) = y & \text{con } h < y < H. \end{cases}$$

A continuación vamos a hacer un cambio de la función incógnita para reducir este problema a otro donde no aparezca la frontera libre en forma explícita en la formulación, sino que aparezca, por ejemplo, como el borde del conjunto de positividad de una solución débil. Esta reducción, que conduce a una inecuación variacional, fue propuesta por Baiocchi en los 70. Para ésto, vamos a suponer que u es suficientemente regular.

Así, definimos en $R = (0,a) \times (0,H)$ la función:

$$w(x,y) := \begin{cases} \int_y^{\phi(x)} u(x,t) - t \; dt & \text{en } y < \phi(x) \\ 0 & \text{en } \phi(x) < y < H, \end{cases}$$

Recordemos que $u(x,y) - y = p(x,y)$ es la presión.

Veamos qué condiciones debe satisfacer una función w construida de esta manera utilizando lo que sabemos de la altura piezométrica u. Para esto, analicemos el comportamiento de la presión:

$$\begin{cases} \Delta p = 0 & \text{en } D \text{ (por ser resta de dos funciones armonicas)}, \\ \frac{\partial p}{\partial y}(x,0) = -1 & \text{con } 0 < x < a, \\ p(x,\phi(x)) = 0 & \text{con } 0 < x < a, \\ p(0,y) = H - y \geq 0 & \text{con } 0 < y < H, \\ p(a,y) = h - y \geq 0 & \text{con } 0 < y < h, \\ p(a,y) = 0 & \text{con } h < y < H \end{cases}$$

Observar que de la primera condición se desprende que p es lineal en $y = 0$ y, dado que $p(0,0) = H$ y $p(a,0) = h$, p resulta positiva en $y = 0$. De este modo, por el Principio del Máximo, p resulta positiva en D. Así, D coincide con el conjunto de positividad de w, como estábamos buscando.

Estudiando el comportamiento de las derivadas de w notamos que:

$$w_y(x,y) = \begin{cases} y - u(x,y) & \text{en } D \\ 0 & \text{en } \phi(x) < y < H, \end{cases}$$

y, dado que $p(x,\phi(x)) = 0$,

$$w_x(x,y) = \phi'(x)\big(u(x,\phi(x)) - \phi(x)\big) + \int_y^{\phi(x)} u_x(x,t)\ dt \ = \ \int_y^{\phi(x)} u_x(x,t)\ dt.$$

Así, utilizando que u es armónica en D y tiene derivada normal cero sobre la frontera libre, si (x,y) está en D,

$$\begin{aligned} w_{xx}(x,y) &= \phi'(x)u_x\big(x,\phi(x)\big) + \int_y^{\phi(x)} u_{xx}(x,t)\,dt \\ &= \phi'(x)u_x\big(x,\phi(x)\big) - \int_y^{\phi(x)} u_{yy}(x,t)\,dt \\ &= \phi'(x)u_x\big(x,\phi(x)\big) + u_y(x,y) - u_y\big(x,\phi(x)\big) \\ &= (\phi'(x),-1)\cdot\nabla u\big(x,\phi(x)\big) + u_y(x,y) = u_y(x,y). \end{aligned}$$

Con lo cual, sobre el conjunto de positividad de w, tenemos que

$$\Delta w := w_{xx} \ + \ w_{yy} \ = \ u_y \ - \ u_y \ + \ 1 = 1.$$

Observar que podemos recuperar u a partir de w de la siguiente forma:

$$u(x,y) = y - w_y(x,y).$$

Por otro lado, es fácil deducir condiciones de contorno sobre w. Analicemos el caso $y = 0$, el lado más complicado de la frontera de R. Dado que

$$w_{xx}(x,0) = u_y(x,0) = 0,$$

podemos afirmar que w es lineal en $y = 0$. Así, como $w(0,0) = \frac{H^2}{2}$ y $w(a,0) = \frac{h^2}{2}$, resulta que

$$w(x,0) = \frac{H^2}{2} + \frac{x}{a}\Big(\frac{h^2}{2} - \frac{H^2}{2}\Big).$$

Con este tipo de razonamientos podemos determinar las condiciones de contorno de w.

Por otro lado, queremos que $w \in C^1$ para que u resulte continua. Como $\Delta w = 0 \leq 1$ en $\{w = 0\}^\circ$, $\Delta w = 1$ en $\{w > 0\}$, si $w \in C^1$ resulta que $\Delta w \leq 1$ en sentido débil en R. De este modo, w debe ser solución del siguiente problema,

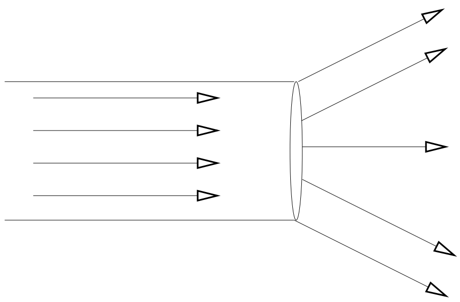
$$\begin{cases} \Delta w \leq 1 & \text{en sentido débil en } R \\ \Delta w = 1 & \text{en } \{w > 0\} \\ w \geq 0 & \text{en } R, \end{cases}$$

con $w - g$ en $H_0^1(R)$, donde g es una función de $H^1(R)$ que se comporta en el borde como debería hacerlo w. De esta forma se reduce el "problema del dique poroso" al "problema del obstáculo".

1.4. Problema de Jets

A continuación daremos la idea del Problema de Jets en dimensión dos.

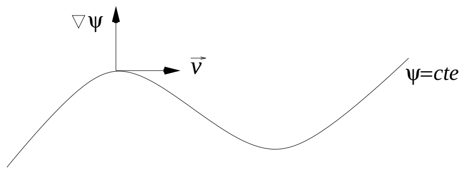
Observamos un fluído que sale de una manguera o caño con velocidad $\overrightarrow{v}$, el cual es irrotacional (i.e., existe $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{v} = \nabla\varphi$) e incomprensible (i.e., $\operatorname{div}\overrightarrow{v} = 0$).



Entonces $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es tal que $\overrightarrow{v} = \nabla\varphi$ y $\Delta\varphi = \operatorname{div}\overrightarrow{v} = 0$. Sea $\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la conjugada armónica de φ, i.e., $\varphi + i\psi$ es holomorfa. Por las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \varphi_x = \ \ \psi_y \\ \varphi_y = -\psi_x \end{cases}$$

tenemos que $\Delta\psi = 0$ y $\overrightarrow{v} = \nabla\varphi = (\psi_y, -\psi_x)$ es perpendicular a $\nabla\psi$. O sea que la velocidad del fluido es perpendicular a $\nabla\psi$. Luego las curvas de nivel de ψ son las líneas de flujo.



La función ψ se denomina la función de corriente.

Si suponemos que tenemos simetría radial, la frontera libre es $\psi = c$ para alguna constante c y además tomando $\bar{\psi} = \psi - c$ podemos suponer que $\psi = 0$ en la frontera libre, o sea que,

$$\text{La frontera libre es : } \partial\{\psi > 0\},$$

$$\Delta\psi = 0 \text{ en } \{\psi > 0\}.$$

La **Ley de Bernoulli** nos dice que

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{v}|^2 + P = \text{cte} \quad \text{ en el fluido}$$

donde P es la presión, que se toma de manera tal que en el aire es cero.

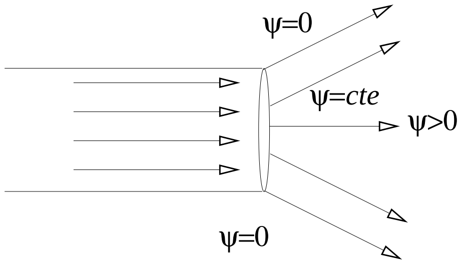
En nuestro problema $P = 0$ en la frontera libre, puesto que el fluido se encuentra en contacto con el aire, entonces la Ley de Bernoulli nos dice que $|\overrightarrow{v}|$ es constante en la frontera libre. Luego por las condiciones de Cauchy-Riemann, tenemos que

$$|\nabla\psi| = c \quad \text{en} \quad \partial\{\psi > 0\}.$$

Así arribamos al siguiente problema de frontera libre

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{en } \{\psi > 0\} \\ \psi = 0 & \text{en } \partial\{\psi > 0\} \\ |\nabla\psi| = c & \text{en } \partial\{\psi > 0\}. \end{cases}$$

Observar que la condición $|\nabla\psi| = c$ en $\partial\{\psi > 0\}$ nos dice que no podemos esperar que ψ sea $C^1(\Omega)$ ya que $\nabla\psi = 0$ en $\{\psi = 0\}^\circ$. Por lo tanto esperamos una solución a lo sumo Lipschitz.



Para encontrar una solución de este problema minimizaremos el funcional

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega \chi_{\{v>0\}}(x)\,\mathrm{d}x$$

donde λ es tal que $c = \sqrt{2\lambda}$.

Más adelante retomaremos este problema. Ahora veamos cómo puede aparecer un problema de frontera libre como éste a partir de un problema de propagación de llamas (caso en que la velocidad del fluido es cero).

1.5. Problema de Combustión

En este caso tenemos un reactante con fracción de masa Y. Suponiendo conocida la velocidad de la mezcla, y en ciertas situaciones particulares, como en el caso de ondas de deflagración, las ecuaciones de conservación de masa y energía se desacoplan y obtenemos el siguiente sistema (ver [1]),

$$T_t - K\Delta T + V\cdot\nabla T = \; Yf(T) \tag{1.5.5}$$

$$Y_t - D\Delta Y + V\cdot\nabla Y = -Yf(T), \tag{1.5.6}$$

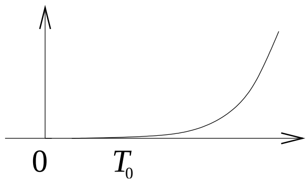
donde K es la difusón térmica, D es la difusión de masa y V la velocidad de la mezcla. Observar que $-Yf(T)$ nos da la cantidad de masa que se pierde y $Yf(T)$ resulta la cantidad de calor liberado en la combustión. Además $f(T)$ está dada por una ley empírica, es una función de la forma

donde T_0 es una cierta temperatura debajo de la cual no hay reacción química.

Estudiaremos el caso particular en el que $K = D$ y $V = 0$. Vía un cambio de variables podemos asumir que $K = D = 1$.

Sea $w = Y + T$, sumando (1.5.5) y (1.5.6) tenenemos

$$w_t - \Delta w = 0.$$



Observar que $w = w(x,t)$ es conocida a partir de los datos.

Tomemos $u = Y$ entonces $T = w - u$ y (1.5.6) se convierte en

$$u_t - \Delta u = -uf(w(x,t) - u).$$

Si $w(x,t) = 1$ tenemos

$$u_t - \Delta u = -uf(1-u).$$

Definimos $\beta(s) = sf(1-s)$ para $s > 0$ y la extendemos como 0 a los negativos. β resulta una función como en la figura 1.1

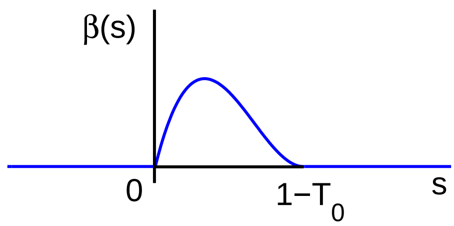


Figura 1.1: La función β

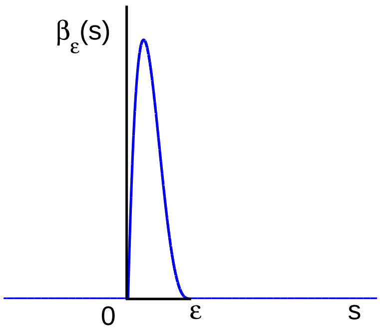
Tenemos que

$$u_t - \Delta u = -\beta(u).$$

Notar que estamos eligiendo T_0 lo suficientemente chico para que $\theta_0 = 1 - T_0 > 0$, y que si $u > \theta_0$ entonces $u_t - \Delta u = 0$ y por lo tanto sólo tengo difusión del calor, en esta zona no hay combustión. Observar que la zona de reacción tiene volumen.

En la función de reacción f interviene una variable llamada energía de activación. Cuando la energía de activación es muy grande hay un parámetro en la función f muy chico que llamamos ε. El valor de la temperatura de activación θ_0 se vuelve muy chica (la normalizamos a ε), y la zona de reacción se vuelve una banda $\{0 < u < \varepsilon\}$. Si normalizamos la velocidad de reacción de modo que la reacción no desaparezca al hacer tender ε a cero, esperamos un problema de frontera libre en el límite.

Esto lo podemos modelar de la siguiente manera: Sea $\beta_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sop}(\beta_\varepsilon) \subset [0, \varepsilon]$ y $\int_{\mathbb{R}} \beta_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s = M$, o sea una función de la forma



Consideremos el problema

$$u_t^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon = -\beta_\varepsilon(u^\varepsilon). \tag{1.5.7}$$

Nos interesa $u = \lim u^\varepsilon$ $(\varepsilon \to 0)$.

Un caso particular de este problema es el caso estacionario. En este caso u^ε no depende de t y por lo tanto (1.5.7) se convierte en

$$\Delta u^\varepsilon = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon).$$

El próximo lema nos muestra cómo obtener u^ε minimizando un funcional.

Lema 1.5.1. *Sean B_ε una primitiva de β_ε y u un minimizante de*

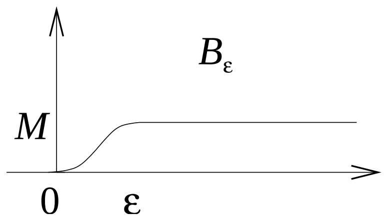
$$J_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega B_\varepsilon(v)\,\mathrm{d}x \tag{1.5.8}$$

en $\{v \in H^1(\Omega) : v = g \text{ en } \partial\Omega\}$. Entonces u es una solución débil de

$$\begin{cases} \Delta u^\varepsilon = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon) & \text{en} \quad \Omega \\ u^\varepsilon = g & \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Demostración. Para la demostración, ver la Proposición A1.1.1 en el Apéndice 1. $\square$

Dado que $B_\varepsilon(s)$ es una primitiva de β_ε, i.e., $B_\varepsilon(s) = \int_0^s \beta_\varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, resulta una función de la forma



Por lo tanto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} B_\varepsilon(s) = M\chi_{\mathbb{R}_{>0}}(s),$$

con lo que arribamos al siguiente límite formal para u fija,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} J_\varepsilon(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + M\int_\Omega \chi_{u>0}(x)\,\mathrm{d}x =: J_0(u).$$

Más adelante veremos que si $\{u^\varepsilon\}$ son minimizantes de J_ε existirán una subsucesión $\{u_{\varepsilon_j}\}$ y una funcion $u_0 \in H^1(\Omega)$ tal que $u_{\varepsilon_j} \to u_0$ cuando $j\to\infty$ y u_0 resulta un minimizante local de J_0. Además mostraremos que cualquier minimizante de J_0 es solución débil de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en} \quad \{u>0\} \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\{u>0\} \\ |\nabla u| = \sqrt{2M} & \text{en} \quad \partial\{u>0\}. \end{cases}$$

1.6. Ecuación de Medios Porosos

En lo que sigue estudiaremos el flujo de un gas en un medio poroso. Sean u la densidad del gas, $\overrightarrow{v}$ a la velocidad del fluido y P la presión. Las siguientes leyes nos dan relaciones entre u, $\overrightarrow{v}$ y P,

Ley de Darcy:

$$\overrightarrow{v} = -K\nabla P.$$

Ley de Estado:

$$P = P_0 u^\gamma$$

donde $P_0 > 0$ y $\gamma > 0$ son constantes que dependen del gas.

Ley de Conservación de Masa:

$$u_t + \operatorname{div}(u\overrightarrow{v}) = 0.$$

La Ley de Darcy combinada con la Ley de Estado nos dice que

$$u\overrightarrow{v} = -KP_0 u \nabla u^{\gamma}$$

entonces

$$u\overrightarrow{v} = -KP_0 \gamma u^{\gamma} \nabla u = -KP_0 \frac{\gamma}{\gamma+1} \nabla u^{\gamma+1}.$$

Tomando $m = \gamma + 1 > 1$ tenemos

$$u\overrightarrow{v} = -KP_0 \frac{m-1}{m} \nabla u^m.$$

Luego

$$\operatorname{div}(u\overrightarrow{v}) = -KP_0 \frac{m-1}{m} \Delta u^m$$

y por la Ley de Conservación de Masa,

$$u_t - KP_0 \frac{m-1}{m} \Delta u^m = 0.$$

Vía un cambio de variables llegamos a la ecuación de medios porosos

$$u_t = \Delta u^m. \tag{1.6.9}$$

Notar que si el problema es estacionario (i.e., no depende del tiempo) la solución es trivial. Por lo tanto consideraremos el problema no estacionario. Vamos a pensar a (1.6.9) como sigue

$$u_t = \operatorname{div}(a(x,t)\nabla u) \tag{1.6.10}$$

donde $a(x,t) = mu^{m-1}$ es la difusividad.

Resultados clásicos de regularidad de las soluciones de este tipo de ecuaciones y un método recursivo (a mayor regularidad de a, mayor regularidad de u y viceversa dan que $u \in C^{\infty}(\{u > 0\})$ (ver [7] y [9]) .

Observemos que en este problema, como u es la densidad del gas, se tiene $u \geq 0$; pero, como $m > 1$, el coeficiente de difusividad $a(x,t)$ tiende a 0 cuando nos acercamos a $\partial\{u > 0\}$.

Cuando $m = 1$ se tiene que $u(x,t) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ si $t > 0$. Cuando $m > 1$ esto cambia: **Si $u(\cdot, 0)$ se anula fuera de un compacto, lo mismo sucede para $u(\cdot, t)$ para todo $t > 0$**. Es decir, hay velocidad finita de propagación; mientras que en la ecuación del calor la velocidad de propagación es infinita.

De este modo, en el problema de difusión de un gas en un medio poroso se presenta una frontera libre $\partial\{u > 0\}$ que no era parte del problema inicial. Aparece por la degeneración de la ecuación. Veremos que efectivamente ésto sucede y que la solución u no es lo suficientemente regular a través de la frontera libre como para que la ecuación (1.6.9) se satisfaga a través de ella (al menos no en sentido clásico). Deberemos por lo tanto trabajar con “soluciones débiles”.

Definición: u es solución débil de la ecuación de medios porosos con dato inicial $u_0(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ si $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N \times [0,T))$, $u^m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N \times [0,T))$ y para toda función φ suficientemente regular con soporte compacto en el espacio y tal que, para algún $\delta > 0$, $\varphi(\cdot, t) = 0$ para $t > T - \delta$ se tiene,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left[u\varphi_t + u^m \Delta\varphi \right] dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)\, dx = 0.$$

Cuando hablemos de solución clásica del (1.6.9) vamos a pensar en una solución clásica de un problema de frontera libre. En este caso será:

1. $u \in C(\mathbb{R}^N \times [0,T])$
2. $\partial\{u > 0\}$ es una superficie C^1
3. $u \in C^\infty(\{u > 0\})$, $u^{m-1} \in C^1(\overline{\{u > 0\}})$

que es lo máximo que puedo esperar ya que u no resultará ni siquiera C^1 a través de la frontera libre.

Estudiaremos ahora la velocidad con la que avanza la frontera libre. Esta es la condición de frontera libre que no está dada en forma explícita en este problema.

Por la Ley de Estado, la relación entre la presión y la densidad es

$$P = \frac{m}{m-1} u^{m-1} \quad \text{(se encuentra normalizada).}$$

Entonces,

$$\nabla P = m u^{m-2} \nabla u \quad \text{y} \quad P_t = m u^{m-2} u_t$$

por (1.6.9)

$$\begin{aligned} P_t &= m u^{m-2} \Delta(u^m) \\ &= m u^{m-2} \mathrm{div}(m u^{m-1} \nabla u) \\ &= m u^{m-2} \mathrm{div}(u \nabla P) \\ &= m u^{m-2} \nabla u \nabla P + m u^{m-1} \Delta P. \end{aligned}$$

Así llegamos a la ecuación de la presión

$$P_t = (m-1) P \Delta P + |\nabla P|^2. \tag{1.6.11}$$

Además $\{P > 0\} = \{u > 0\}$ y por lo tanto $\partial\{P > 0\} = \partial\{u > 0\}$. Entonces, formalmente, en $\partial\{P > 0\}$, por ser $P = 0$, (1.6.11) queda de la siguiente forma

$$P_t = |\nabla P|^2 \quad \text{en} \quad \partial\{P > 0\}. \tag{1.6.12}$$

Como ya vimos, la normal exterior a la frontera libre está dada por

$$\bar{\nu} = -\frac{\nabla P}{|\nabla P|},$$

y la velocidad de avance de la frontera libre en la dirección de la normal exterior es

$$\dot{s} = \frac{P_t}{|\nabla P|},$$

usando (1.6.12) tenemos que la forma en que avanza la frontera libre es

$$\dot{s} = |\nabla P|$$

que es compatible con la Ley de Darcy.

Un resultado esencial es la comparación de soluciones débiles si se comparan sus datos iniciales. En efecto,

Proposición 1.6.1. *Sean u y v soluciones débiles de la ecuación de medios porosos con $u(x,0) = u_0(x) \leq v_0(x) = v(x,0)$. Entonces, $u(x,t) \leq v(x,t)$.*

En particular, como las constantes son soluciones débiles se tiene que si $u_0 \geq \varepsilon > 0$ entonces, $u(x,t) \geq \varepsilon$ en $\mathbb{R}^N \times (0,T)$.

Cuando $u_0 \geq \varepsilon > 0$ se tiene que u es solución de la ecuación de medios porosos si y sólo si es solución de

$$u_t = \Delta\varphi_\varepsilon(u)$$

donde $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ con

$$\varphi_\varepsilon(s) = \begin{cases} s^m & \text{si } s \geq \varepsilon, \\ \text{estrictamente creciente y mayor o igual que } \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } 0 \leq s \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Por lo tanto, la existencia de solución en este caso se debe a resultados clásicos.

En el caso general, se reemplaza u_0 por $u_0 + \varepsilon$ y, si llamamos u_ε a la solución con este dato inicial, se tiene que la sucesión $\{u_\varepsilon\}$ es monótona y acotada (como consecuencia del resultado de comparación) y por lo tanto existe

$$u(x,t) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x,t).$$

Por la monotonía de la convergencia se puede pasar al límite en la formulación débil del problema y así se tiene que u es solución de medios porosos con dato inicial u_0.

La unicidad de solución débil se obtiene del resultado de comparación.

Por otro lado, la velocidad finita de propagación también se prueba a partir del resultado de comparación. Es decir, se tiene,

Proposición 1.6.2. *Sea u una solución débil de la ecuación de medios porosos con $u(x,0) = u_0(x) \in L^\infty$ de soporte compacto. Entonces, $u(\cdot,t)$ tiene soporte compacto para todo $t > 0$.*

El resultado se demuestra poniendo por encima de u una solución explícita que se anula fuera de un compacto para todo $t > 0$.

Se tiene una familia a un parámetro de soluciones explícitas **las soluciones de Barenblatt** que se utilizan para probar muchas propiedades de las soluciones y que dan el comportamiento asintótico con $t \to \infty$ de todas las soluciones de soporte compacto.

Las soluciones de Barenblatt se definen así:

Para cada constante $C > 0$ llamamos

$$U_C(x,t) = t^{-\lambda}\Big[C - k\frac{|x|^2}{t^{2\mu}}\Big]_+^{\frac{1}{m-1}}$$

donde $[s]_+ = max\{s,0\}$, $\lambda = \frac{N}{N(m-1)+2}$, $\mu = \frac{\lambda}{N}$, $k = \frac{\lambda(m-1)}{2mN}$.

Entonces, U_C es solución clásica de la ecuación de medios porosos para $t > 0$ (el dato inicial es $M\delta$ para una constante M relacionada con C).

Observar que no sólo $U_C \notin C^1(\mathbb{R}^N \times (0,T))$ sino que $|\nabla U_C| \to \infty$ cuando nos aproximamos a la frontera libre $\partial\{U_C > 0\}$. Por otro lado, $\nabla U_C^{m-1} \in C^1(\overline{\{U_C > 0\}})$, y se cumple que la velocidad a la que avanza la frontera libre en la dirección normal (la dirección radial en este caso) es $\frac{m}{m-1}|\nabla U_C^{m-1}|$.

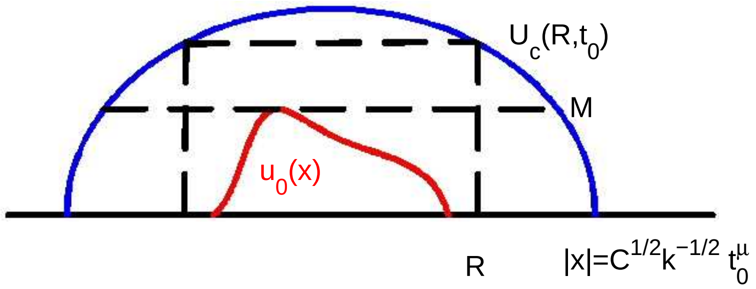
Demostración de la Proposición 1.6.2: Sea $u_0 \in L^\infty$ de soporte compacto. Sea $M \geq \|u_0\|_\infty$ y $R > 0$ tal que $u_0(x) = 0$ si $|x| > R$.

Existen $C > 0$ y $t_0 > 0$ tales que

$$u_0(x) \leq t_0^{-\lambda}\Big[C - k\frac{|x|^2}{t_0^{2\mu}}\Big]_+^{\frac{1}{m-1}} \quad \big(= U_C(x,t_0)\big)$$

En efecto, esto es así si

$$\sqrt{\frac{C}{k}}t_0^\mu > R \qquad \text{y} \qquad t_0^{-\lambda}\Big[C - k\frac{R^2}{t_0^{2\mu}}\Big]^{\frac{1}{m-1}} > M.$$



Entonces,

$$u(x,t) \leq U_C(x,t+t_0) = 0 \quad \text{si } |x| > \sqrt{\frac{C}{k}}(t+t_0)^{\mu}.$$

La proposición está demostrada. □

Para un estudio detallado de la ecuación de medios porosos ver [9].

Capítulo 2

Problema del Obstáculo

2.1. Introducción y normalización al caso de obstáculo $\phi = 0$

En este capítulo estudiaremos el Problema del Obstáculo. Como vimos en la Introducción, el mismo se puede plantear como una inecuación variacional a saber: Hallar $u \in \mathcal{K}$ tal que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \nabla u \nabla (v-u) \geq \int_\Omega f(v-u) \quad \text{para toda } v \in \mathcal{K},$$

donde $\mathcal{K} = \{v \in g + H_0^1(\Omega) \,/\, v \geq \phi \text{ en } \Omega\}$.

Podemos por lo tanto aplicar el resultado de existencia y unicidad de solución para inecuaciones variacionales (Teorema A1.1.1) y obtener la existencia y unicidad de solución para el Problema del Obstáculo (ver el Corolario A1.1.1 en el Apéndice 1).

Como vimos en la Introducción, para saber que la ecuación $\Delta u = f$ se satisface en $\Omega \cap \{u > \phi\}$ basta ver que u es semicontinua inferiormente. Para probar esta última afirmación podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $f = 0$. En efecto, sea $v(x) = c_N \int_\Omega \frac{f(y)}{|x-y|^{N-2}}\,dy$ y sea $\bar{u} = u - v$. Entonces, $\bar{u}$ es solución del problema del obstáculo con g reemplazada por $g - v$, ϕ por $\phi - v$ y f por 0. Como $v \in C(\mathbb{R}^N)$ basta probar que $\bar{u}$ es semicontinua inferiormente para que u lo sea.

La semicontinuidad se deduce del hecho de que $\bar{u}$ es superarmónica (ver la Proposición A2.2.2 en el Apéndice 2). De aquí que $\Delta u = f$ en $\Omega \cap \{u > \phi\}$.

Si bien deduciremos después, no sólo la continuidad de u sino el hecho de que es C^1, probaremos a continuación un teorema que puede ser de interés en otras aplicaciones del cual se deduce esta continuidad. Por otro lado, observemos que la continuidad de u se obtiene aquí bajo las siguientes hipótesis débiles: $f \in L^\infty(\Omega)$ y $\phi \in C(\Omega)$.

Teorema 2.1.1. *Sea u superarmónica continua cuando se la restringe a $sop(\Delta u)$. Entonces u es continua.*

Demostración. Primero veamos qué se entiende por $\mathrm{sop}(\Delta u)$.

Dado un abierto A decimos que $\Delta u\big|_A = 0$ si para toda $\varphi \in C_0^\infty(A)$ se tiene que $\int u\Delta\varphi = 0$.

El $sop\,(\Delta u)$ es el complemento del abierto más grande en el que se anula Δu.

Para probar el teorema, razonemos por el absurdo. Supongamos que existe

$$x_k \to x_0 \quad \text{tal que} \quad u(x_k) \not\to u(x_0).$$

1. Se tiene que $x_0 \in sop\,(\Delta u)$ ya que si no es así, $\Delta u = 0$ en un entorno de x_0 y u sería continua en ese entorno. En particular, $|u(x_0)| < \infty$. Sea $b = u(x_0)$. Podemos suponer que $b = 0$ ya que de no ser así cambiamos u por $u - b$.

2. Tomando una subsucesión, podemos suponer que, para todo k, $x_k \notin sop\,(\Delta u)$ ya que u es continua en $sop\,(\Delta u)$.

Sea $a = \liminf_{k\to\infty} u(x_k)$. Tomando una subsucesión podemos asumir que $a = \lim_{k\to\infty} u(x_k)$.

Por la semicontinuidad inferior de u debe ser $a > u(x_0) = 0$.

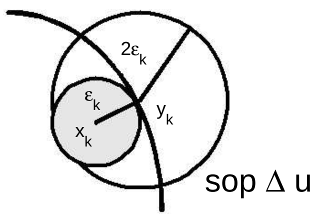
Consideremos ahora $y_k \in sop\,(\Delta u)$ tal que $\varepsilon_k := \mathrm{dist}\,(x_k, sop\,(\Delta u)) = |x_k - y_k|$. Como $x_0 \in \mathrm{sop}(\Delta u)$, tenemos que $\mathrm{dist}\,(x_k, sop\,(\Delta u)) \le |x_k - x_0| \to 0$, y como

$$|y_k - x_k| \to 0 \quad \text{y} \quad |x_k - x_0| \to 0 \quad \text{se tiene} \quad |y_k - x_0| \to 0.$$

Entonces,

$$u(y_k) \to u(x_0) = 0.$$

Veamos que ésto conduce a una contradicción. En efecto, consideremos las bolas $B_{\varepsilon_k}(x_k)$ y $B_{2\varepsilon_k}(y_k)$.



Por la definición de ε_k, observamos que $\Delta u = 0$ en $B_{\varepsilon_k}(x_k)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} u(y_k) &\geq \fint_{B_{2\varepsilon_k}(y_k)} u \\ &= \frac{1}{2^N} \fint_{B_{\varepsilon_k}(x_k)} u + \frac{1}{|B_{2\varepsilon_k}(0)|} \int_{B_{2\varepsilon_k}(y_k) \setminus B_{\varepsilon_k}(x_k)} u \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Como $\Delta u = 0$ en $B_{\varepsilon_k}(x_k)$, $I_1 = \frac{u(x_k)}{2^N}$.
Dado $\delta > 0$, sea ε tal que

$$u(x) > u(x_0) - \delta = -\delta \quad \text{en} \quad B_\varepsilon(x_0).$$

Sea k_0 tal que si $k \geq k_0$, $B_{2\varepsilon_k}(y_k) \subset B_\varepsilon(x_0)$. Entonces

$$I_2 \geq -\delta \frac{|B_{2\varepsilon_k}(y_k) \setminus B_{\varepsilon_k}(x_k)|}{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \geq -2^N \delta.$$

Juntando ambas desigualdades,

$$\begin{aligned} u(y_k) &\geq I_1 + I_2 \\ &> \frac{u(x_k)}{2^N} - 2^N \delta \to \frac{a}{2^N} - 2^N \delta. \end{aligned}$$

Como $a > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\frac{a}{2^N} - 2^N \delta > 0$; pero, por otro lado, teníamos que $u(y_k) \to 0$, lo que es un absurdo. $\square$

Como corolario tenemos,

Corolario 2.1.1. *La solución del Problema del Obstáculo con ϕ continua es continua.*

Con el objeto de probar la regularidad óptima de la solución y estudiar su frontera libre, haremos algunas suposiciones sobre los datos f y ϕ. A saber, $f \in C(\Omega)$, $\phi \in C^2(\Omega)$ y $\Delta \phi < f$ en Ω.

Sea $w = u - \phi$. Entonces,

$$\begin{aligned} &\Delta w \leq f - \Delta \phi && \text{en } \mathcal{D}'(\Omega), \\ &\Delta w = f - \Delta \phi && \text{en } \Omega \cap \{w > 0\}, \\ &w \geq 0 && \text{en } \Omega. \end{aligned}$$

Observar que $f - \Delta \phi > 0$ en Ω. Como el estudio de la regularidad de w y de la frontera libre $\Omega \cap \partial \{w > 0\}$ es de carácter local (es decir, basta probarlas en un entorno de cada punto) y la función $f - \Delta\phi$ es continua, vamos a suponer por simplicidad que el segundo miembro es la función idénticamente 1.

De esta manera la situación normalizada con la que trabajaremos es la siguiente: $w \in H^1(\Omega)$ y

$$\begin{cases} \Delta w = 1 & \text{en } \{w > 0\} \\ \Delta w \leq 1 & \text{en } \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases}$$

donde por estar w en $H^1(\Omega)$ se tiene que $\Delta w \leq 1$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ si

$$-\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi \, dx \leq \int_\Omega \varphi \, dx$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$.

Llamaremos a este problema *El Problema del Obstáculo Normalizado*. Se tiene el siguiente resultado,

Lema 2.1.1. *Si w es una solución débil del problema del obstáculo normalizado entonces*

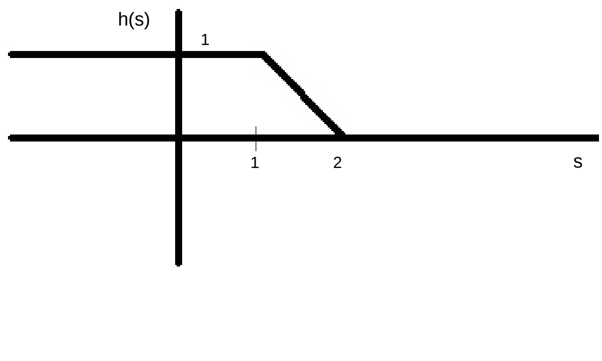
$$\Delta w \geq \chi_{\{w>0\}} \geq 0$$

en el sentido de $H^1(\Omega)$, i.e.,

$$-\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi \, dx \geq \int_\Omega \varphi \chi_{\{w>0\}} \, dx$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$.

Demostración. Sean $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(s) = \text{máx}\{\text{mín}(2-s, 1), 0\}$. Definimos para todo $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k : \Omega \to \mathbb{R}$ como



Entonces $\varphi_k \in H^1(\Omega)$ y

$$\begin{aligned} &\varphi_k \geq 0 \\ &\varphi_k = 0 \quad \text{si } w < \frac{1}{k} \\ &\varphi_k = \varphi \quad \text{si } w > \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Como w es solución débil del problema del obstáculo y $\operatorname{sop}\varphi_k \subset \{w > 0\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi_k\, dx &= -\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi_k\, dx \\ &= -\int_\Omega \nabla w \nabla(\varphi\{1 - h(kw)\})\, dx \\ &= -\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi\{1 - h(kw)\}\, dx + k\int_\Omega \varphi|\nabla w|^2 h'(kw)\, dx \end{aligned}$$

Como $\varphi|\nabla w|^2 \geq 0$ y $h'(kw) \leq 0$ resulta que

$$\int_\Omega \varphi_k\, dx \leq -\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi\{1 - h(kw)\}\, dx \tag{2.1.1}$$

Además de la definición de h tenemos que $0 \leq 1 - h(kw) \leq 1$ y $1 - h(kw) \to \chi_{\{w>0\}}$ cuando $k \to \infty$. Por lo tanto, $0 \leq \varphi_k \leq \varphi$ y $\varphi_k \to \varphi\chi_{\{w>0\}}$ cuando $k \to \infty$. Entonces, por el Teorema de Convergencia Mayorada,

$$\int_\Omega \varphi_k\, dx \to \int_\Omega \varphi\, \chi_{\{w>0\}}\, dx.$$

Por otro lado, como $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$-\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi\{1 - h(kw)\}\, dx \to -\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi\, dx$$

cuando $k \to \infty$. Entonces, pasando al límite, cuando $k \to \infty$ en (2.1.1),

$$-\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi\, dx \geq \int_\Omega \varphi \chi_{\{w>0\}}\, dx.$$

Por lo tanto, como la elección de φ fue arbitraria, $\Delta w \geq \chi_{\{w>0\}} \geq 0$. Con lo cual queda demostrado el lema. $\square$

2.2. Propiedades de la solución del Problema del obstáculo

Con el objeto de probar la regularidad de w probaremos que satisface una ecuación a través de la frontera libre. Sabemos que $\Delta w \geq 0$ en $D'(\Omega)$. Existirá entonces una medida de Radon en Ω, μ, tal que $\Delta w = \mu$ (ver Apéndice 3). Además, a partir del hecho de que $0 \leq \Delta w = \mu \leq 1$ se tiene que $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \varphi \geq 0$,

$$0 \leq \int_\Omega \varphi \, d\mu = -\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi \, dx \leq \int_\Omega \varphi \, dx.$$

Entonces,

Proposición 2.2.1. *La medida μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.*

Aplicando el Teorema de Radon-Nikodym tenemos que la medida μ está dada por una función L^1_{loc}. Es decir, $\exists f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $d\mu = f(x)dx$. (Esta f no tiene relación con la del planteo original).

Entonces, $\Delta w = f$ en $D'(\Omega)$, y si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \varphi \geq 0$,

$$0 \leq \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \ \leq \int_\Omega \varphi(x)dx.$$

Si consideramos $\varphi(x) = \varphi_\epsilon(x - x_0),\ x_0 \in \Omega$, sucesión de núcleos regularizantes, y tomamos límite con ϵ tendiendo a cero, obtenemos que, en casi todo punto, $0 \leq f(x) \leq 1$.

Como f es acotada, está en L^2, y como tenemos $\Delta w = f$, se deduce que w está en $H^2_{loc}(\Omega)$.

Más aún, si $f \in L^p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$, entonces $w \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ (ver [6]). En nuestro caso $f \in L^\infty(\Omega)$. Por lo tanto $w \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ para todo $1 < p < \infty$, pero sus derivadas segundas podrían no estar localmente acotadas.

Definición 2.2.1. *Decimos que $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ si $\exists C > 0$ tal que $||f||_\infty \leq\ C$ y $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha\ \forall x, y \in \Omega$.*

Definimos una norma en este espacio:

$$||f||_{C^\alpha(\overline{\Omega})} = ||f||_\infty + sup_{x,y\in\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Al segundo sumando lo llamamos $[f]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}$ y resultará ser una seminorma.

Análogamente, decimos que $f \in C^\alpha(\Omega)$ si $f \in C^\alpha(\overline{\Omega'})$ para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Proposición 2.2.2. *Para $p > N$, hay una inclusión continua de $W^{1,p}(\Omega)$ en $C^{\alpha}(\Omega)$ si $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$.*

Volviendo a nuestro problema, tenemos que $w \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ $\forall 1 < p < \infty$. Entonces, si $0 < \alpha < 1$, existirá un p mayor que N (la dimensión) tal que $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$. El gradiente de w estará en $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, luego por el resultado anterior podemos afirmar que $\nabla w \in C^{\alpha}(\Omega)$ $\forall\ 0 < \alpha < 1$.

Por lo tanto, vamos a tener en este caso que $w \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ $\forall\ 0 < \alpha < 1$.

Más adelante vamos a ver que las soluciones tienen derivadas Lipschitz, o sea que $w \in C^{1,1}$, cosa que no se tiene hasta el momento.

Ahora vamos a volver al caso particular del Problema del Dique Poroso.

2.3. Estudio de la frontera libre para el problema del dique poroso

La idea será probar que la frontera libre resulta ser el gráfico de una función. O sea, que $\exists \phi$ tal que $\partial\{w > 0\} = \{(x, \phi(x)), 0 \leq x \leq a\}$, con ϕ estrictamente decreciente y continua.

Notacin 2.3.1. *Llamaremos $R = (0, a) \times (0, H)$ y $\Omega = \{w > 0\}$.*

Sabemos que $w \in C^1(R)$, en particular $w \in C^1(R \cap \overline{\{w > 0\}})$.

Lema 2.3.1. *$w_x \leq\ 0$, $w_y \leq\ 0$ en Ω.*

Demostración. Tenemos que $\Delta w = 1$ en Ω en el sentido de $H^1(\Omega)$. Entonces $\Delta(w - \frac{1}{2N}|x|^2) = 0$ en sentido débil. Esto implica que $w - \frac{1}{2N}|x|^2 \in C^{\infty}(\Omega)$, luego $w \in C^{\infty}(\Omega)$.

Podemos entonces obtener, derivando la ecuación y permutando derivadas, que tanto w_x como w_y son armónicas en sentido clásico.

Sea $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ donde w_x (resp. w_y) alcanza un máximo. Se tiene entonces que $\frac{\partial w_x}{\partial \eta_e}$ (resp. $\frac{\partial w_y}{\partial \eta_e}$) ≥ 0.

Pero si la función es armónica, por el Lema de Hopf (ver [6]), no podrá alcanzar un máximo con derivada normal 0 en un punto regular (donde admite una bola tangente interior). Luego, en realidad lo que tendremos es que $\frac{\partial w_x}{\partial \eta_e} > 0$.

Probaremos a continuación que en todo punto de $\partial\Omega$ o bien $w_x \leq 0$ o bien $\frac{\partial w_x}{\partial \eta_e} \leq 0$. Pero en este último punto también sabemos que no se puede alcanzar un máximo. Luego, el máximo de w_x será necesariamente en la región donde w_x es ≤ 0, implicando que $w_x \leq 0$.

Un razonamiento similar se aplicará para probar que $w_y \leq 0$. Empezamos primero con w_x.

Estudiemos la región $\{y = 0\}$. Ahí, disponemos una fórmula explícita de w, a partir de la cual deducimos que $w_x = -\frac{H^2}{2a} + \frac{h^2}{2a} \leq 0$.

En la región $\{x = 0\}$, $\{0 < y < H\}$ tenemos que $\Delta w = 1$, de donde deducimos que $w_{xx} = 1 - w_{yy}$. Por la forma de la frontera (recta vertical) vemos entonces que derivar con respecto a la normal exterior es equivalente a derivar con respecto a x pero invirtiendo el signo. Luego, $\frac{\partial w_x}{\partial \eta_e} = -w_{xx}$.

Pero además, $w = \frac{(H-y)^2}{2}$ en $x = 0$, con lo que obtenemos que $w_{yy} = 1$. Entonces, $\frac{\partial w_x}{\partial \eta_e} = -w_{xx} = w_{yy} - 1 = 0$.

En $\{x = a\}$, $\{0 < y < h\}$ se procede análogamente para inferir que $\frac{\partial w_x}{\partial \eta_e} = 0$.

En $\{x = a\}$, $\{h \leq y \leq H\}$, w alcanza un mínimo puesto que viene de una región donde es ≥ 0 hasta 0. Por lo tanto $w_x \leq 0$.

En $\{y = H\}$ sabemos que w es idénticamente nula. Entonces, $w_x(x, H) = 0$.

Procedemos ahora a probar lo mismo pero con w_y. Primero, en $\{y = 0\}$, $\{0 < x < a\}$ se usa que $1 - w_{xx} = w_{yy} = -\frac{\partial w_y}{\partial \eta_e}$, pero $w_{xx} = 0$ pues w es lineal en dicho borde. Entonces obtenemos que $-1 = \frac{\partial w_y}{\partial \eta_e}$, luego $\frac{\partial w_y}{\partial \eta_e} < 0$.

En el borde $\{y = H\}$, $\{0 < x < a\}$, tenemos que w es constantemente cero. Como $w \geq 0$ su derivada parcial con respecto a y es menor o igual que 0. Como $w = 0$ en $\{x = a\}$, $\{h < y < H\}$, también se tiene que $w_y = 0$ ahí.

Para el borde $\{x = 0\}$, $\{0 \leq y \leq H\}$ disponemos de una fórmula explícita que es $w = (H - y)^2/2$. Luego, si derivamos con respecto a y obtenemos $w_y = -(H - y) \leq 0$, incluyendo esto también la esquina superior. El mismo procedimiento también se puede aplicar para el borde $\{x = a\}$, $\{0 \leq y \leq h\}$ puesto que ahí también disponemos de una fórmula explícita para w. $\square$

Proposición 2.3.1. *La frontera libre es el gráfico de una función de x.*

Demostración. Se usará que $w_y \leq 0$. Sea $0 < x < a$. Miramos ahora a w, con ese valor de x fijo. En algún momento w se hará 0, eventualmente en el techo. Si en algún momento alcanza el 0, como $w_y \leq 0$ y $w \geq 0$, necesariamente deberá seguir valiendo 0. Ese valor en donde se alcanza el cero "por primera vez" es único y definimos entonces $\phi(x)$ como el primer valor y en donde $w(x, y)$ se hace 0. $\square$

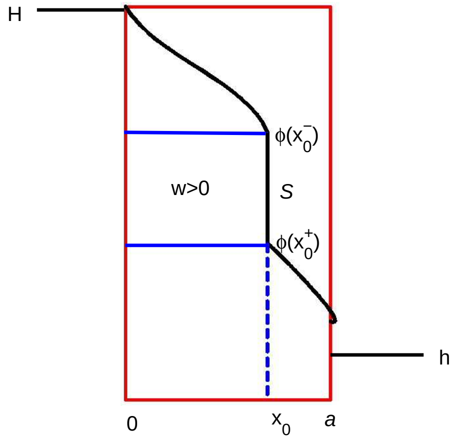
Proposición 2.3.2. *ϕ es decreciente en x.*

Demostración. Se usará que $w_x \leq 0$. Fijemos $x_1 < x_2$ dos valores para x. w será positiva debajo de $\phi(x_2)$, pues por definición $\phi(x_2)$ es el primer valor en y donde w se anula con $x = x_2$ fijo. Pero como $w_x \leq 0$, será también positivo para valores de x menores que x_2 si $y < \phi(x_2)$. Pero entonces, para todo y menor que $\phi(x_2)$ resultará que también $w(x_1, y)$ es positiva. Luego necesariamente $\phi(x_1) \geq \phi(x_2)$. Tenemos así lo afirmado. $\square$

La idea será ahora probar que la función ϕ es continua. Se usará el resultado de continuación analítica para funciones armónicas en dominios conexos (ver el Apéndice 2).

Proposición 2.3.3. *ϕ es continua.*

Demostración. Si fuese discontinua en $x_0 \in (0, a)$, tendríamos que $\phi(x_0^+) < \phi(x_0^-)$.



Tendríamos un rectángulo $C = (0, x_0) \times (\phi(x_0^+), \phi(x_0^-))$ contenido en $\{w > 0\}$. Llamamos S al segmento vertical derecho del rectángulo C. En el rectángulo C se tiene $\Delta w = 1$. Si llamamos

$$\tilde{w} = w - \frac{1}{2}(x - x_0)^2,$$

se tiene que $\tilde{w}$ es armónica en C. Además, se tiene que $\tilde{w}$ vale 0 en S. Pero además, por continuidad de w_x se tiene $\tilde{w}_x = 0$ en S. O sea que la derivada normal de $\tilde{w}$ en S es 0. Por continuación analítica (ver Apéndice 2) concluimos que $\tilde{w} = 0$ en C. Esto implica que $w = \frac{1}{2}(x - x_0)^2$ en C. Pero entonces, en el borde izquierdo de este rectángulo valdrá que $w = \frac{1}{2}x_0^2 = cte$. Absurdo pues sabemos que $w(0, y) = \frac{(H-y)^2}{2}$.

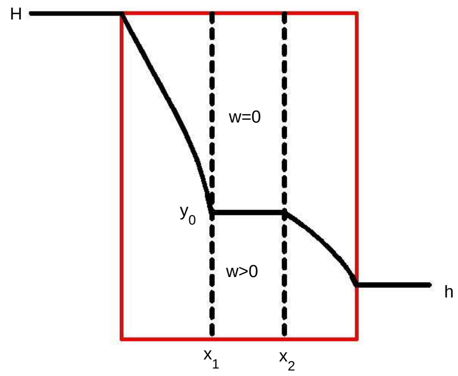
Entonces, ϕ es una función continua. $\square$

Probaremos ahora que ϕ es estrictamente decreciente.

Lema 2.3.2. *Sean $0 < x_1 < x_2 < a$ con $\phi(x_1) < H$. Entonces, $\phi(x_1) > \phi(x_2)$.*

Demostración. Razonemos por el absurdo. Supongamos que no, entonces se tendría que $\phi(x) \equiv y_0$ para $x_1 \leq x \leq x_2$. Dado que $\phi(x_1) < H$ resulta $y_0 < H$ y además $\Delta w = 1$ en $\{w > 0\}$. Entonces,

$$\Delta\Big(w - \frac{1}{2}(y - y_0)^2\Big) = 0 \quad \text{en} \quad C = (x_1, x_2) \times (0, y_0).$$



Si llamamos $\bar{w}(y) = w - \frac{1}{2}(y - y_0)^2$, resulta

$$\begin{aligned} \Delta\bar{w} &= 0 \quad \text{en } C \\ \bar{w}\big|_{y=y_0} &= 0 \quad \text{en } x_1 < x < x_2 \\ \bar{w}_y\big|_{y=y_0} &= 0 \quad \text{en } x_1 < x < x_2. \end{aligned}$$

Luego, por continuación analítica, $\bar{w} \equiv 0$ en C. Así,

$$w(x,0) = \bar{w}(x,0) + \frac{1}{2}y_0^2 = \frac{1}{2}y_0^2 \quad \text{en } x_1 < x < x_2.$$

Pero teníamos que

$$w(x,0) = \frac{H^2}{2} + \frac{x}{a}\left(\frac{h^2}{2} - \frac{H^2}{2}\right).$$

Esto lleva a un absurdo. Por lo tanto se tiene que $\phi(x_1) > \phi(x_2)$ que era lo que queríamos demostrar. □

Sólo nos queda probar,

Lema 2.3.3. *Sea $x > 0$ entonces $\phi(x) < H$.*

Demostración. Supongamos que existe un $x_0 > 0$ tal que $\phi(x_0) = H$. Entonces, como ϕ es monótona decreciente y además $\phi(x) \leq H$, tenemos que $\phi(x) = H$ para $0 \leq x \leq x_0$. Si llamamos $C = (0, x_0) \times (0, H)$ tenemos que $w > 0$ y $\Delta w = 1$ en C.

Sea ahora $\bar{w}(x,y) = w(x,y) - \frac{1}{2}(y - H)^2$. Resulta que $\Delta\bar{w} = 0$ en C. Además,

$$\bar{w}(x, H) = 0 \quad \text{en } 0 < x < x_0.$$

Si vemos que $w_y(x,H) = 0$ para $0 < x < x_0$, tendremos $\bar{w} \equiv 0$ en C. Por otro lado, tenemos

$$w(x,0) = \bar{w}(x,0) + \frac{1}{2}H^2 = \frac{1}{2}H^2 \quad \text{en } 0 < x < x_0.$$

Ésto es un absurdo pues $w(x, 0)$ es una función lineal no constante.

Entonces, basta ver que $w_y(x, H) = 0$ para $0 < x < x_0$. Para ello tomemos la función que a cada valor de x le asigna el valor $w_y(x, H)$. Ésta resulta monótona creciente. En efecto, sean $x_1 < x_2$, entonces

$$\begin{aligned} w_y(x_1, H) - w_y(x_2, H) &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\Big\{w(x_1, H) - w(x_1, H - \varepsilon) - w(x_2, H) + w(x_2, H - \varepsilon)\Big\} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\Big\{w(x_2, H - \varepsilon) - w(x_1, H - \varepsilon)\Big\} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

pues $w_x \leq 0$. Como,

$$\begin{aligned} w_y(0, H) &= -(H - y)\big|_{y=H} = 0 \\ w_y(a, H) &= 0 \end{aligned}$$

tenemos que $w_y(x, H) = 0$ para $0 < x < a$, lo que nos da el resultado buscado. □

Observación 2.3.1 (Conclusión)**.** *Se tiene que la frontera libre para el problema del dique poroso es el gráfico de una función continua y estrictamente decreciente de la variable x para $0 \leq x \leq a$.*

2.4. Problema del obstáculo. Regularidad óptima de la solución y dimensión de Hausdorff de la frontera libre

Volvemos al problema del obstáculo normalizado. Probaremos ahora el crecimiento cuadrático de w.

Lema 2.4.1. *Existe $C_N \geq 0$ tal que si $w \in C(\overline{B_{2r}(x_0)})$, $\Delta w \leq 1$, $w \geq 0$ en $B_{2r}(x_0)$, $\Delta w = 1$ en $B_{2r}(x_0) \cap \{w > 0\}$ y $w(x_0) = 0$ entonces*

$$\sup_{B_r(x_0)} w \leq C_N r^2$$

Demostración. Sea $v(x) = w(x) - \frac{|x-x_0|^2}{2N} + \frac{2r^2}{N}$. Entonces,

$$v(x) \geq w(x) \geq 0 \text{ en } B_{2r}(x_0),$$

$$\Delta v = \Delta w - 1 = 0 \text{ en } B_{2r}(x_0) \cap \{w > 0\}.$$

Claramente, para probar el lema, basta ver que $\sup_{Br(x_0)} v \leq C_N r^2$.

Sea $v_1 \in C^2(B_{2r}(x_0)) \cap C(\overline{B_{2r}(x_0)})$ la solución de:

$$\begin{cases} \Delta v_1 = 0 & \text{en } B_{2r}(x_0), \\ v_1 = v & \text{en } \partial B_{2r}(x_0). \end{cases}$$

Por el principio del mínimo, como $v_1|_{\partial B_{2r}(x_0)} = v \geq 0$, se tiene $v_1 \geq 0$. Aplicando la desigualdad de Harnack se deduce,

$$v_1(x) \leq 2^N v_1(x_0) \text{ en } B_r(x_0).$$

1. Si $v_1 = v$ entonces, usando que $v(x_0) = \frac{2r^2}{N}$, tenemos

$$v(x) = v_1(x) \leq \frac{2^{N+1}r^2}{N} \text{ en } B_r(x_0)$$

2. Si $v_1 \neq v$, sea $v_2 = v - v_1$. Teniendo en cuenta que $\Delta v_1 = 0$ en $B_{2r}(x_0)$ se tiene

$$\begin{cases} \Delta v_2 = \Delta v - \Delta v_1 = \Delta v & \text{en } B_{2r}(x_0), \\ v_2 = 0 & \text{en } \partial B_{2r}(x_0). \end{cases}$$

Como $\Delta v = \Delta w - 1 \leq 0$, se tiene que v_2 es súper armónica. Como v_2 no es idénticamente nula, alcanza un máximo positivo en $\bar{x} \in B_{2r}(x_0)$.

Si $\bar{x} \notin \text{sop}\,(\Delta v_2) = \text{sop}\,(\Delta v)$, por el principio fuerte del máximo se tiene que v_2 es constante igual a $\max_{B_{2r}(x_0)} v_2$ en la componente conexa de $\{\Delta v = 0\}$ que contiene a $\bar{x}$. Sea y_0 en el borde de esta componente. Entonces v_2 alcanza su máximo en y_0 e $y_0 \in \text{sop}\,(\Delta v)$. Observemos que $y_0 \in B_{2r}(x_0)$ ya que $v_2 = 0$ en $\partial B_{2r}(x_0)$.

Si $\bar{x} \in \text{sop}\,(\Delta v)$ tomo $y_0 = \bar{x}$. (Ver figura 2.1)

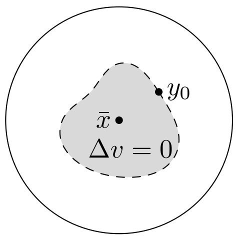


Figura 2.1: Componente conexa de $\{\Delta v = 0\}$

Como $\Delta v = \Delta w - 1 = 0$ en $\{w > 0\}$ resulta que $\text{sop}\,(\Delta v) \subset \{w = 0\}$. Es decir, el máximo se alcanza en un punto donde $\{w = 0\}$:

$$w(y_0) = 0 \text{ y } v_2(y_0) \geq v_2(x), \forall x \in B_{2r}(x_0)$$

Tenemos $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \geq 0$ y $v_2 \geq 0$. De aquí se deduce que $0 \leq v_1 \leq v$ y $0 \leq v_2 \leq v$. Entonces,

$$v_2(x) \leq v_2(y_0) \leq v(y_0) = w(y_0) - \frac{|y_0 - x_0|^2}{2N} + \frac{2r^2}{N} \leq \frac{2r^2}{N}, \forall x \in B_{2r}(x_0).$$

Luego, $\forall x \in B_r(x_0)$ vale que:

$$v(x) = v_1(x) + v_2(x) \leq \frac{2^{N+1}}{N} r^2 + \frac{2}{N} r^2 = C_N r^2.$$

Finalmente, como $w(x) \leq v(x)$, tenemos que $\sup\limits_{B_r(x_0)} w \leq C_N r^2$. □

Proposición 2.4.1. *Sea* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *y sea* $w \geq 0$ $w \in C(\overline{\Omega})$ *con* $\Delta w \leq 1$ *en* Ω, $\Delta w = 1$ *en* $\Omega \cap \{w > 0\}$. *Entonces existe* $C = C(N, \Omega, \Omega', ||w||_{L^\infty(\Omega)})$ *tal que:*

$$|D^2 w| \leq C \quad a.e. \ \ \Omega'.$$

Demostración. Como $\nabla w = 0$ en $\{w = 0\}$ resulta que $D^2 w = 0$ a. e.–$\{w = 0\}$.

Por lo tanto, basta probar la cota en puntos x_0 con $w(x_0) > 0$.

Caso I: $\operatorname{dist}(x_0, \partial\{w > 0\}) \leq \frac{1}{5} \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$

Sea $\bar{x} \in \partial\{w > 0\}$ tal que $\operatorname{dist}(x_0, \bar{x}) = \operatorname{dist}(x_0, \partial\{w > 0\}) = \delta$.

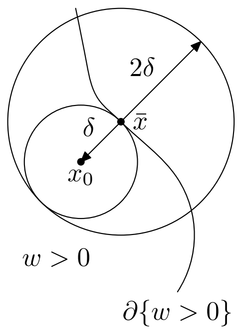


Figura 2.2: Caso I

Entonces $B_\delta(x_0) \subset \{w > 0\}$ y por lo tanto, $\Delta w = 1$ allí. (Ver figura 2.2)

Como $w(\bar{x}) = 0$ y $B_{4\delta}(\bar{x}) \subset B_{5\delta}(x_0) \subset \Omega$, estoy en las condiciones del Lema 2.4.1. Por lo tanto,

$$w \leq C_N (2\delta)^2 = C_N 4\delta^2 \quad \text{ en } B_{2\delta}(\bar{x}).$$

Por las estimaciones de las derivadas (tomando $f \equiv 1$, ver la Proposición A2.1.5 del Apéndice 2), tenemos,

$$|D^2 w(x_0)| \leq \frac{C}{\delta^2}(||w||_{L^\infty(B_\delta(x_0))} + \delta^2) \leq \frac{C}{\delta^2}(4C_N\delta^2 + \delta^2) = C_N.$$

Caso II: Caso general. Sea $r_0 = \text{dist}\,(\Omega', \partial\Omega)$.

En $\{x \in \Omega' \mid \text{dist}\,(x, \partial\{w > 0\}) \leq r_0/5\}$ vale que $|D^2 w| \leq C_0$ ya que $\frac{r_0}{5} \leq \frac{1}{5}\text{dist}\,(x, \partial\Omega)$, $\forall x \in \Omega'$.

Sea $x_0 \in \Omega'$, tal que $\text{dist}\,(x_0, \partial\,\{w > 0\}) \geq r_0/5$. Entonces, $B_{r_0/5}(x_0) \subset \{w > 0\}$, y por lo tanto $\Delta w = 1$ en $B_{r_0/5}(x_0)$.

Por las estimaciones de derivadas con $f \equiv 1$,

$$|D^2 w(x_0)| \leq \frac{C}{(r_0/5)^2}\left\{||w||_{L^\infty(B_{r_0/5})} + \left(\frac{r_0}{5}\right)^2 ||f||_\infty\right\} \leq C(1 + ||w||_{L^\infty(\Omega)})$$

donde $C = C(N, r_0)$. $\square$

Observación 2.4.1. *En el caso I, vimos que* $\exists\ C = C(N)$ *tal que si* $dist(x, \partial\{w > 0\}) <$ $1/5\, dist(x, \partial\Omega)$ *vale que* $|D^2 w(x)| < C$*, es decir, la constante es universal (no depende de* $||w||_\infty$*)*

Observación 2.4.2. *No se puede esperar más regularidad. Es decir, no se puede tener derivadas segundas continuas, pues* $\Delta w = 1$ *en* $\{w > 0\}$ *y* $\Delta w = 0$ *en* $\{w = 0\}$

Por lo tanto, hemos probado la regularidad óptima de w. Pasaremos a estudiar la regularidad de la frontera libre. Lo que probaremos es que la medida de Hausdorff $N-1$ dimensional de la frontera libre es localmente finita.

Haremos un cambio de escala para llevar el problema del estudio de la regularidad de la frontera libre en un entorno de un punto $x_0 \in \partial\{w > 0\}$ a una situación universal. En efecto, supongamos que tenemos,

$$\begin{array}{ll}
w \in C(\overline{B_r(x_0)}), & \\
w \geq 0 \text{ y } \Delta w \leq 1 & \text{en } B_r(x_0), \\
\Delta w = 1 & \text{en } B_r(x_0) \cap \{w > 0\}, \\
x_0 \in \partial\{w > 0\}. &
\end{array}$$

Busco el cambio adecuado para tener, para una constante universal C,

$$\begin{array}{ll}
W \in C(\overline{B}_1), & \\
W \geq 0 \text{ y } \Delta W \leq 1 & \text{en } B_1, \\
\Delta W = 1 & \text{en } B_1 \cap \{W > 0\}, \\
0 \in \partial\{W > 0\}, & \\
W, \nabla W, |D^2 W| \leq C. &
\end{array}$$

Para tal fin, sea $W(x) = \frac{R^2}{r^2}w(x_0 + \frac{r}{R}x)$ definida en $|x| < R$. Entonces, $D^2W(x) = D^2w(x_0 + \frac{r}{R}x)$. Además,

$$\begin{aligned} &W \in C(\overline{B}_R), \\ &W \geq 0 \text{ y } \Delta W \leq 1 \quad \text{en } B_R, \\ &\Delta W = 1 \qquad\qquad\quad \text{en } B_R \cap \{W > 0\}. \end{aligned}$$

Veamos que $0 \in \partial\{W > 0\}$. En efecto, $W(0) = \frac{R^2}{r^2}w(x_0) = 0$. Sea $\{y_k\} \subset \{w > 0\}$ tal que $y_k \to x_0$ y sea x_k tal que $y_k = x_0 + \frac{r}{R}x_k$, es decir, $x_k = (y_k - x_0)\frac{R}{r}$.

Entonces, $x_k \to 0$ y

$$W(x_k) = \frac{R^2}{r^2}w\Big(x_0 + \frac{r}{R}(y_k - x_0)\frac{R}{r}\Big) = w(y_k) > 0.$$

Por el Lema 2.4.1, $W \leq C_0R^2$ en $B_{R/2}$. Por la Proposición 2.4.1, $|D^2W| \leq C(N,R)$ en $B_{R/4}$.

Si $x \in B_{R/8}$ y $\delta = \operatorname{dist}(x, \partial\{W > 0\})$, se tiene que $\delta \leq R/8$. Por lo tanto, $|D^2W| \leq C(N,R)$ en $B_\delta(x)$. Con el fin de acotar $|\nabla W(x)|$, sea $\bar{x} \in \partial\{W > 0\}$ con $|x - \bar{x}| = \operatorname{dist}(x, \partial\{W > 0\})$.

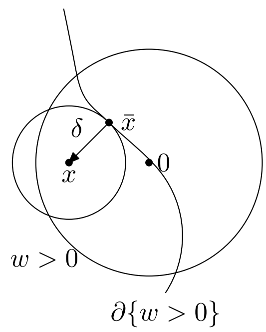


Figura 2.3: Reescale del problema

Haciendo el desarrollo de Taylor tenemos,

$$W_{x_i}(x) = W_{x_i}(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{N} W_{x_ix_j}(\xi)(x_j - \bar{x}_j)$$

con ξ en el segmento de extremos x y $\bar{x}$. Por lo tanto,

$$|W_{x_i}(x)| \leq C_0|x - \bar{x}| \leq C_0\frac{R}{8}.$$

Todos los resultados, se obtuvieron para la bola de radio $R/8$. Luego, elegimos $R = 8$ en el reescale y tenemos,

$$\begin{aligned}
&W \in C(\overline{B}_1),\\
&\Delta W \leq 1,\ W \geq 0 \text{ en } B_1,\\
&W, |\nabla W|, |D^2 W| \text{ acotadas universalmente en } B_1,\\
&0 \in \partial\{W > 0\},\\
&\Delta W = 1 \text{ en } B_1 \cap \{W > 0\}.
\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

De ahora en más supondremos que w **satisface** (2.4.1).

Lema 2.4.2. *Existe una constante C universal, tal que $|\nabla w| \leq C w^{1/2}$ en $B_{1/2}$.*

Demostración. Solo hay que probarlo en $x_0 \in \{w > 0\} \cap B_{1/2}$.

Sea $h = w(x_0) > 0$. Veamos que existe C_1 constante universal tal que $w > 0$ en $B_{(C_1 h)^{1/2}}(x_0)$.

En efecto, supongamos que existe $\bar{x} \in B_{(C_1 h)^{1/2}}(x_0)$ con $w(\bar{x}) = 0$. Entonces, $B_{(C_1 h)^{1/2}}(x_0) \cap \partial\{w > 0\} \neq \emptyset$. Sea $y_0 \in B_{(C_1 h)^{1/2}}(x_0) \cap \partial\{w > 0\}$ tal que $|x_0 - y_0| = \operatorname{dist}(x_0, \partial\{w > 0\}) := \delta$.

Entonces, $w > 0$ en $B_\delta(x_0)$. En particular, $w \in C^\infty(B_\delta(x_0))$. Como $\nabla w(y_0) = 0$, haciendo el desarrollo de Taylor alrededor de y_0 tenemos,

$$h = w(x_0) = \Sigma_{i,j} \frac{w_{x_i x_j}(\xi)}{2}(x_0 - y_0)_i (x_0 - y_0)_j \leq C_0 |x_0 - y_0|^2 \leq C_0 C_1 h.$$

Entonces, si $C_1 < C_0^{-1}$, llego a un absurdo. Luego, si elijo $C_1 < C_0^{-1}$ se tiene que $\Delta w = 1$ en $B_{(C_1 h)^{1/2}}(x_0)$. Entonces, por las estimaciones de las derivadas en $B_{\frac{(C_1 h)^{1/2}}{2}}(x_0)$ (ver la Proposición A2.1.5) tenemos,

$$|\nabla w(x_0)| \leq C \frac{2}{(C_1 h)^{1/2}} \left[\sup_{B_{C_h}(x_0)} w + \frac{C_1 h}{4} \right]$$

donde $C_h = 2^{-1}(C_1 h)^{1/2}$.

Por la desigualdad de Harnack (ver Apéndice 2) sabemos que:

$$\sup_{B_{C_h}(x_0)} w \leq C\Big[w(x_0) + \frac{C_1 h}{4} \Big] = Ch.$$

Luego,

$$|\nabla w(x_0)| \leq \frac{2C}{(C_1 h)^{1/2}} [Ch + Ch] = Ch^{1/2} = C w(x_0)^{1/2}.$$

$\square$

Veamos ahora la no degeneración de w.

Proposición 2.4.2. *Existe $C_N > 0$ tal que si $x_0 \in B_1 \cap \overline{\{w > 0\}}$ entonces*

$$\sup_{B_r(x_0)} w \geq C_N r^2, \quad \forall r \text{ tal que } B_r(x_0) \subset B_1.$$

Demostración.

Caso I: $x_0 \in \{w > 0\}$

Sea $v(x) = w(x) - \frac{|x-x_0|^2}{2N}$, entonces

$$\begin{aligned} &\Delta v = 0 \quad \text{ en } B_r(x_0) \cap \{w > 0\}, \\ &v(x_0) = w(x_0) > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe $y_0 \in \partial(B_r(x_0) \cap \{w > 0\})$ tal que $v(y_0) > 0$.

Por otro lado, $y_0 \notin \partial\{w > 0\}$ pues allí vale $v(y) = -\frac{|y-x_0|^2}{2N} \leq 0$. Como $y_0 \in \partial B_r(x_0)$ se tiene,

$$w(y_0) = v(y_0) + \frac{|y_0 - x_0|^2}{2N} > \frac{|y_0 - x_0|^2}{2N} = \frac{r^2}{2N},$$

y tenemos que

$$\sup_{B_r(x_0)} w \geq w(y_0) > \frac{r^2}{2N}.$$

Caso II: Sea $x_0 \in \partial\{w > 0\}$.

Sea $x_n \to x_0, x_n \in \{w > 0\}$, entonces:

$$\sup_{B_r(x_n)} w \geq \frac{r^2}{2N}$$

Luego, haciendo $n \to \infty$ concluimos que

$$\sup_{B_r(x_0)} w \geq \frac{r^2}{2N}.$$

□

Empezaremos ahora a estudiar propiedades de la frontera libre en el sentido de la teoría geométrica de la medida.

Lema 2.4.3. *Sea $S_h = \{0 < w < h^2\}$. Entonces $|S_h \cap B_r| \leq Chr^{N-1}$.*

Demostración. Primero lo hacemos para $r = 1$.

Para $|e| = 1$ sea $w_e = D_e w$ la derivada direccional de w en la dirección de e.

Paso I. Veamos que dado c_1 existe C tal que

$$\int_{\{0<w_e<c_1h\}\cap B_1} |\nabla w_e|^2 \leq Ch.$$

En efecto, sea $\overline{w}_e = \text{mín}\big((w_e - \varepsilon)^+, c_1 h\big)$. Entonces, $\overline{\{\overline{w}_e > 0\}} \subset \{w > 0\}$. Entonces, se tiene que $\Delta w_e = 0$ en $\{\overline{w}_e > 0\}$ y por lo tanto,

$$\int_{B_1} \nabla \overline{w}_e \nabla w_e = -\int_{B_1} \overline{w}_e \Delta w_e + \int_{\partial B_1} \overline{w}_e \frac{\partial w_e}{\partial \eta} dS \leq C_0\, c_1\, h\, \omega_{N-1} = Ch.$$

De modo que,

$$\int_{\{\varepsilon<w_e<c_1h\}\cap B_1} |\nabla w_e|^2 = \int_{B_1} \nabla \overline{w}_e \nabla w_e \leq Ch.$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$ se tiene el resultado buscado en este paso.

Paso II. (aún con $r = 1$) Se tiene,

$$|S_h \cap B_1| = \int_{S_h\cap B_1} \Delta w = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_h\cap B_1} w_{e_ie_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{S_h\cap B_1} (w_{e_ie_i})^2\right]^{1/2} |S_h \cap B_1|^{1/2}.$$

De donde,

$$|S_h \cap B_1|^{1/2} \leq \sum_{i=1}^{n} \left[\int\limits_{S_h\cap B_1} (w_{e_ie_i})^2\right]^{1/2}.$$

Además, usando que $|w_{e_ie_i}| \leq |\nabla w_{e_i}|$ y que, por el Lema 2.4.2, $S_h \subset \big\{|\nabla w| < C_0 h\big\}$ –lo que implica que $S_h \subset \{0 \leq w_{e_i} < C_0 h\} \cup \{0 \leq w_{-e_i} < C_0 h\}$– y dado que $|\nabla w_e| = 0$ *a.e.* $\{w_e = 0\}$ $\forall$ $|e| = 1$, se tiene,

$$\int\limits_{S_h\cap B_1} w_{e_ie_i}^2 \leq \int\limits_{S_h\cap B_1} |\nabla w_{e_i}|^2 \leq \int\limits_{\{o<w_{e_i}<C_0h\}\cap B_1} |\nabla w_{e_i}|^2 + \int\limits_{\{0<w_{-e_i}<C_0h\}\cap B_1} |\nabla w_{-e_i}|^2 \leq 2Ch.$$

Por lo tanto, $|S_h \cap B_1|^{1/2} \leq N(2Ch)^{1/2}$, lo que implica que

$$|S_h \cap B_1| \leq Ch.$$

Ahora veamos que esta desigualdad escala bien.

Sea $0 < r < 1$, reemplacemos w por $w_r(y) = \frac{1}{r^2} w(ry)$. Entonces w_r satisface (2.4.1) y por lo tanto,

$$|\{0 < w_r < h^2\} \cap B_1| \leq \tilde{C}h.$$

Queremos acotar $\left|\{0 < w < h^2\} \cap B_r\right|$. Sea $x \in \{0 < w < h^2\} \cap B_r$. Entonces, $x = ry$ con $y \in B_1$, $0 < w_r(y) < (\frac{h}{r})^2$. Por lo tanto,

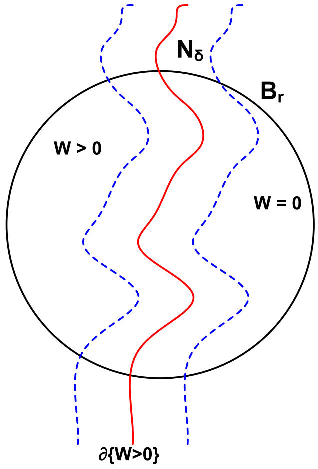
$$|\{0 < w < h^2\} \cap B_r| = r^N \left|\{0 < w_r < (\frac{h}{r})^2\} \cap B_1\right| \leq r^N \tilde{C}\frac{h}{r} = \tilde{C} h r^{N-1}.$$

El lema ha sido demostrado. □

Corolario 2.4.1. *Sea* $\mathcal{N}_\delta = \{x \in B_1 : \mathrm{dist}\,(x, \partial\{w > 0\}) < \delta\}$. *Entonces,*

1. $|\mathcal{N}_\delta \cap B_r| \leq C\delta r^{N-1}$.
2. $\mathcal{H}^{N-1}(B_r \cap \partial\{w > 0\}) \leq C r^{N-1}$.

Demostración. Queremos acotar $|\mathcal{N}_\delta \cap B_r|$, para lo cual vamos a acotar primero la medida de la región que se interseca con $\{w > 0\}$.



Definamos $\mathcal{N}_\delta^+ = \mathcal{N}_\delta \cap \{w > 0\}$ y veamos que $\mathcal{N}_\delta^+ \subset \{0 < w < (C\delta)^2\}$ para una constante $C > 0$ universal.

Sea $x \in \mathcal{N}_\delta^+$ entonces, existe x_0 en $\partial\{w > 0\}$ tal que $|x - x_0| < \delta$. Como w satisface (2.4.1) se tiene que

$$\sup_{B_\delta(x_0)} w \leq C_0 \delta^2.$$

En particular, $w(x) \leq C_0\delta^2 = (\sqrt{C_0}\,\delta)^2$. Así, tenemos que para todo x en $\mathcal{N}_\delta^+$ se cumple que

$$0 < w(x) \leq (C\delta)^2$$

con $C = \sqrt{C_0}$. Luego, por el Lema 2.4.3, resulta que

$$|\mathcal{N}_\delta^+ \cap B_r| \le |\{0 < w \le (C\delta)^2\} \cap B_r| \le C\delta r^{N-1}.$$

Entonces, si nosotros pudiéramos ver que $|\mathcal{N}_\delta \cap B_r|$ es comparable con $|\mathcal{N}_\delta^+ \cap B_r|$, es decir, que $\exists\, C > 0$ tal que $|\mathcal{N}_\delta \cap B_r| \le C|\mathcal{N}_\delta^+ \cap B_r|$ tendríamos probado lo que queremos. Observemos que en realidad basta ver que $|\mathcal{N}_\delta \cap B_{r-2\delta}|$ es comparable con $|\mathcal{N}_\delta^+ \cap B_r|$ ya que

$$|\mathcal{N}_\delta \cap B_r| = |\mathcal{N}_\delta \cap B_{r-2\delta}| + |\mathcal{N}_\delta \cap (B_r \setminus B_{r-2\delta})| \le |\mathcal{N}_\delta \cap B_{r-2\delta}| + |B_r \setminus B_{r-2\delta}|$$

y, como $|B_r \setminus B_{r-2\delta}| \le C\delta r^{N-1}$, obtendríamos la desigualdad deseada.

Ahora,

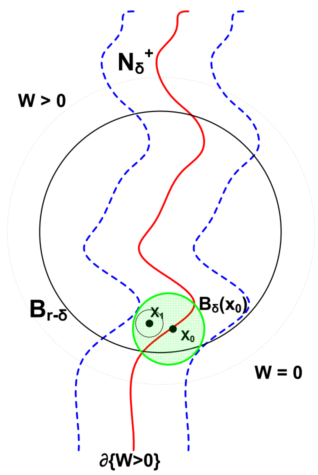
$$\mathcal{N}_\delta \cap B_{r-2\delta} \subset \bigcup_{x \in \partial\{w>0\} \cap B_{r-\delta}} B_\delta(x).$$

Observemos que todas las bolas $B_\delta(x)$ del segundo miembro están contenidas en B_r.

Veamos que $|B_\delta(x)|$ con $x \in \partial\{w > 0\} \cap B_{r-\delta}$ es comparable con $|B_\delta(x) \cap \{w > 0\}|$. Es decir, veamos que existe $\mu > 0$ tal que para todo $x_0 \in B_{r-\delta} \cap \partial\{w > 0\}$ se tiene que

$$|B_\delta(x_0)| \le \mu |B_\delta(x_0) \cap \{w > 0\}|.$$

Para ver ésto vamos a probar que existe $\eta_0 > 0$ independiente de x_0 y r y existe $x_1 \in B_\delta(x_0)$ con $|B_{\eta_0}(x_1)|$ comparable con $|B_\delta(x_0)|$, tal que $B_{\eta_0}(x_1) \subset B_\delta(x_0) \cap \{w > 0\}$.



Recordemos que si x_0 está en $B_1 \cap \overline{\{w > 0\}}$, entonces

$$\sup_{B_\rho(x_0)} w \ge C_N \rho^2$$

para todo $\rho > 0$ tal que $B_\rho(x_0) \subseteq B_1$ (Proposición 2.4.2). Entonces, tomando en particular $\rho = \frac{\delta}{4}$, existe $x_1 \in B_{\frac{\delta}{4}}(x_0)$ tal que $w(x_1) \geq \frac{1}{16} C_N \delta^2 > 0$.

Ahora, veamos que $|\nabla w(x)| \leq \widetilde{C}\delta$ para todo $x \in B_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ con $x_0 \in \partial\{w > 0\} \cap B_{r-\delta}$.

En efecto, basta probar la acotación en $\{w > 0\} \cap B_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ ya que $\nabla w(x) = 0$ para todo $x \in \{w = 0\}$. Sean $x \in \{w > 0\} \cap B_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ y $d = \operatorname{dist}(x, \partial\{w > 0\})$. Notemos que $d \leq \frac{\delta}{2}$ y, como $B_d(x) \subseteq \{w > 0\}$, $\Delta w = 1$ en $B_d(x)$. Por las estimaciones de las derivadas (ver Apéndice 2), tenemos la siguiente acotación

$$|\nabla w(x)| \leq \frac{C}{d}\Big(\sup_{B_d(x)} w + d^2\Big).$$

Sea $\bar{x}$ en $\partial\{w > 0\}$ tal que $|x - \bar{x}| = d$. Entonces, tenemos que

$$\sup_{B_d(x)} w \leq \sup_{B_{2d}(\bar{x})} w \leq C_N (2d)^2.$$

Luego, resulta que

$$|\nabla w(x)| \leq \frac{C}{d}(C_N\, 4d^2 + d^2) = Cd \leq \widetilde{C}\delta.$$

Ahora, encontremos $0 < \eta < 1/4$ (la segunda desigualdad es para asegurar que $B_{\eta\delta}(x_1) \subset B_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$) tal que $B_{\eta\delta}(x_1) \subset \{w > 0\} \cap B_\delta(x_0)$. Con tal fin, tomemos $x \in B_{\eta\delta}(x_1)$. Entonces,

$$w(x) \geq w(x_1) - \widetilde{C}\delta|x - x_1|.$$

Como $w(x_1) \geq \frac{1}{16} C_N \delta^2$ y $|x - x_1| \leq \eta\delta$, tenemos que

$$w(x) \geq \frac{1}{16} C_N \delta^2 - \widetilde{C}\delta\eta\delta = \delta^2\Big(\frac{1}{16} C_N - \widetilde{C}\eta\Big) > 0$$

si $\eta < \frac{C_N}{16\widetilde{C}}$. Tomemos entonces $\eta < \min\big\{\frac{C_N}{16\widetilde{C}}, \frac{1}{4}\big\}$. Así, resulta que

$$|B_\delta(x_0) \cap \{w > 0\}| \geq |B_{\eta\delta}(x_1)| = \eta^N |B_\delta(x_0)|.$$

Luego, tomando $\mu = \eta^{-N}$ tenemos lo que queríamos.

Finalmente, estamos en condiciones de probar que existe $C > 0$ tal que

$$|\mathcal{N}_\delta \cap B_{r-2\delta}| \leq C\, |\mathcal{N}_\delta^+ \cap B_r|.$$

Como vimos antes,

$$\mathcal{N}_\delta \cap B_{r-2\delta} \subseteq \bigcup_{x \in \partial\{w>0\} \cap B_{r-\delta}} B_\delta(x).$$

Tomemos un subcubrimiento $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ donde las bolas B_j se intersequen a lo sumo $n_0 = n_0(N)$ veces. Así, tenemos que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_{B_j} \leq n_0 \chi_{\cup B_j} \quad \text{y} \quad \sum_{\mathrm{j}\in\mathbb{N}} \chi_{\mathrm{B_j}\cap\{\mathrm{w}>0\}} \leq \mathrm{n_0}\chi_{\cup\mathrm{B_j}\cap\{\mathrm{w}>0\}}$$

con lo cual obtenemos que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |B_j \cap \{w>0\}| \leq n_0 \Big| \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j \cap \{w>0\} \Big|,$$

y podemos concluir que,

$$|\mathcal{N}_\delta \cap B_{r-2\delta}| \leq \Big| \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j \Big| \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} |B_j| \leq \mu \sum_{j\in\mathbb{N}} |B_j \cap \{w>0\}| \leq$$

$$\leq \mu n_0 \Big| \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j \cap \{w>0\} \Big| \leq \mu\, n_0 |\mathcal{N}_\delta^+ \cap B_r| = C |\mathcal{N}_\delta^+ \cap B_r|.$$

Ahora probemos 2.

Recordemos que dado $A \subseteq \mathbb{R}^N$ y $\delta > 0$,

$$\mathcal{H}_{2\delta}^{N-1}(A) := \text{ínf} \Big\{ \gamma(N-1) \sum_{j\in\mathbb{N}} \big(\frac{diam\ C_j}{2} \big)^{N-1} : \ A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j \text{ y } diam\, C_j \leq 2\delta \Big\}.$$

Ahora, consideremos $B_{r-\bar{\delta}} \cap \partial\{w>0\}$ y acotemos $\mathcal{H}_{2\delta}^{N-1}(B_{r-\bar{\delta}} \cap \partial\{w>0\})$ con $0 < \delta < \bar{\delta}$. Tomemos $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un cubrimiento de $B_{r-\bar{\delta}} \cap \partial\{w>0\}$ como antes con bolas de radio δ. Entonces,

$$\mathcal{H}_{2\delta}^{N-1}(B_{r-\bar{\delta}} \cap \partial\{w>0\}) \leq \gamma(N-1) \sum_{j\in\mathbb{N}} \big(\frac{diam\ B_j}{2} \big)^{N-1} =$$

$$= \frac{\gamma(N-1)}{\delta\gamma(N)} \sum_{j\in\mathbb{N}} |B_j| \leq \frac{\gamma(N-1)}{\delta\gamma(N)} n_0 |N_\delta \cap B_r| \leq \frac{\gamma(N-1)}{\gamma(N)} n_0\ C r^{N-1}.$$

Es decir,

$$\mathcal{H}_{2\delta}^{N-1}(B_{r-\bar{\delta}} \cap \partial\{w>0\}) \leq \ C\ r^{N-1}.$$

Haciendo $\delta \to 0^+$ resulta que,

$$\mathcal{H}^{N-1}(B_{r-\bar{\delta}} \cap \partial\{w>0\}) \leq C r^{N-1}.$$

Ahora, haciendo $\bar{\delta} \to 0^+$,

$$B_{r-\bar{\delta}} \cap \partial\{w>0\} \nearrow B_r \cap \partial\{w>0\}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{H}^{N-1}(B_r \cap \partial\{w>0\}) \leq C r^{N-1}.$$

□

Capítulo 3

Problema de los jets

3.1. Preliminares

Como vimos en la introducción del problema de los jets, queremos minimizar el funcional J definido por

$$J(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx + M\, |\{v > 0\}|$$

en $K = \{v \in H^1(\Omega) \mid v - g \in H_0^1(\Omega)\}$, donde Ω es un dominio acotado con borde suave y $g \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

La existencia de solución se prueba facilmente por el método directo del cálculo de variaciones. Tenemos

Teorema 3.1.1. *Existe $u \in K$ que minimiza $J(v)$ en K.*

Demostración. Como J está acotado inferiormente en K existe $u_n \in K$ tales que $J(u_n) \to \ell := \text{ínf}_{v \in K} J(v)$. Se tiene,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \, dx \leq 2J(u_n) \leq C.$$

Por otro lado,

$$\int_{\Omega} |u_n - g|^2 \, dx \leq C_{\Omega} \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla g|^2 \, dx \leq C\Big(1 + \int_{\Omega} |\nabla g|^2 \, dx\Big) \leq C.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\Omega} |u_n|^2 \, dx \leq C.$$

Existe entonces una subsucesión que seguiremos llamando u_n y una función $u \in g + H_0^1(\Omega)$ tales que

$$\begin{aligned} &u_n \to u \quad \text{en } L^2(\Omega), \\ &u_n \to u \quad a.\ e. \text{ en } \Omega, \\ &\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \quad \text{débilmente en } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \le \liminf \int_\Omega |\nabla u_n|^2\, dx, \\ &|\{u > 0\}| \le \liminf |\{u_n > 0\}|. \end{aligned}$$

De aquí deducimos que $J(u) \le \liminf J(u_n) = \ell$. Es decir, u es un minimizante de J en K. $\square$

Nos interesa estudiar el comportamiento de un minimizante en los puntos de la frontera libre. Utilizaremos ciertos rescales que, como veremos a continuación, preservan el problema.

Proposición 3.1.1. *Si u es un minimizante de J en K y $x_0 \in \partial\{u > 0\} \cap \Omega$, entonces $u_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} u(x_0 + \lambda x)$ con $\lambda > 0$ minimiza*

$$J_1(v) = \frac{1}{2} \int_{B_1} |\nabla v(x)|^2\, dx + M\, |\{v > 0\} \cap B_1|$$

entre las funciones $v \in H^1(B_1)$ tal que $v = u_\lambda$ en ∂B_1.

Demostración. Sea v en $H^1(B_1)$ tal que $v = u_\lambda$ en ∂B_1. Definamos la siguiente función $\bar{v}$ en Ω:

$$\bar{v}(y) = \begin{cases} \lambda\, v(\frac{y - x_0}{\lambda}) & \text{si } y \in B_\lambda(x_0) \\ u(y) & \text{si } y \in \Omega \setminus B_\lambda(x_0) \end{cases}$$

Notemos que $\bar{v}$ es continua en $\partial B_\lambda(x_0)$ ya que si y está en $\partial B_\lambda(x_0)$, entonces $\frac{y - x_0}{\lambda}$ está en ∂B_1 y como $v = u_\lambda$ en ∂B_1, tenemos que $\lambda v(\frac{y - x_0}{\lambda}) = \lambda u_\lambda(\frac{y - x_0}{\lambda}) = u(y)$.

Luego, $\bar{v} - u \in H_0^1(\Omega)$, por lo que $\bar{v}$ resulta admisible. Entonces, como u es un minimizante y $\bar{v}(y) = u(y)$ en $\Omega \setminus B_\lambda(x_0)$ resulta que,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{B_\lambda(x_0)} |\nabla u(y)|^2\, dy + M \int_{B_\lambda(x_0)} \chi_{\{u > 0\}}(y)\, dy \\ &\qquad \le \frac{1}{2} \int_{B_\lambda(x_0)} |\nabla \bar{v}(y)|^2\, dy + M \int_{B_\lambda(x_0)} \chi_{\{\bar{v} > 0\}}(y)\, dy. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
J_1(u_\lambda) &= \frac{1}{2}\int_{B_1} |\nabla u_\lambda(x)|^2\,dx + M\int_{B_1} \chi_{\{u_\lambda>0\}}(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{B_1} |\nabla u(x_0+\lambda x)|^2\,dx + M\int_{B_1} \chi_{\{u>0\}}(x_0+\lambda x)\,dx \\
&= \lambda^{-N}\Big\{\frac{1}{2}\int_{B_\lambda(x_0)} |\nabla u(y)|^2\,dy + M\int_{B_\lambda(x_0)} \chi_{\{u>0\}}(y)\,dy\Big\}.
\end{aligned}$$

Así, nos queda que

$$\begin{aligned}
J_1(u_\lambda)\,\lambda^N &\leq \frac{1}{2}\int_{B_\lambda(x_0)} |\nabla \bar{v}(y)|^2\,dy + M\int_{B_\lambda(x_0)} \chi_{\{\bar{v}>0\}}(y)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{B_\lambda(x_0)} |\nabla v\big(\frac{y-x_0}{\lambda}\big)|^2\,dy + M\int_{B_\lambda(x_0)} \chi_{\{v>0\}}\big(\frac{y-x_0}{\lambda}\big)\,dy \\
&= \frac{\lambda^N}{2}\int_{B_1} |\nabla v(x)|^2\,dx + M\,\lambda^N\int_{B_1} \chi_{\{v>0\}}(x)\,dx = \lambda^N\ J_1(v).
\end{aligned}$$

Luego, $J_1(u_\lambda)\ \leq\ J_1(v)$. □

Veamos qué condiciones debe satisfacer u en la frontera libre:

Sea x_0 en $\partial\{u>0\}$ y supongamos que $\partial\{u>0\}$ es diferenciable en x_0. Más aún, supongamos que localmente es el gráfico de una función en las últimas $N-1$ variables y que la normal a la frontera libre en x_0 es e_1. Es decir, si pensamos a los puntos de $\mathbb{R}^N$ como $x=(x_1,x')$ con x' en $\mathbb{R}^{N-1}$, entonces

$$\{u>0\}\cap B_{\lambda_0}(x_0) = \{x\in\mathbb{R}^n : (x-x_0)_1 > f(x'-x'_0)\}\cap B_{\lambda_0}(x_0)$$

donde $\lambda_0>0$ y $f: U\subseteq\mathbb{R}^{N-1}\to\mathbb{R}$ con f diferenciable en 0 y $\nabla_{x'}f(0)=0$, $f(0)=0$.

Ahora, sea $\lambda<\lambda_0$ y x en B_1, entonces

$$u_\lambda(x)>0 \Leftrightarrow x_0+\lambda x\in\{u>0\} \Leftrightarrow \lambda x_1 > f(\lambda x') \Leftrightarrow x_1 > \frac{f(\lambda x')}{\lambda}.$$

Por otro lado en B'_1,

$$\frac{f(\lambda x')}{\lambda} = \frac{o(\lambda|x'|)}{\lambda} \underset{\lambda\longrightarrow 0^+}{\rightrightarrows} 0.$$

Entonces, dado $\delta > 0$ existe $\eta_0 > 0$ tal que si x está en B_1 con $x_1 > \delta$ y $\lambda < \eta_0$ se tiene que $u_\lambda(x) > 0$. En particular, si x está en B_1 con $x_1 > 0$, existe $\eta_0 > 0$ tal que $u_\lambda(x) > 0$ si $\lambda < \eta_0$.

Con un razonamiento análogo se puede ver que si $x \in B_1$ con $x_1 < -\delta$ y $\lambda < \eta_0$ entonces $u_\lambda(x) = 0$.

Por otro lado, si u es diferenciable en $\overline{\{u > 0\}}$, tenemos para $x \in \{u > 0\}$,

$$u(x) = u(x_0) + \langle \nabla u(x_0), x - x_0 \rangle + o(|x - x_0|) = \langle \nabla u(x_0), y - x_0 \rangle + o(|y - x_0|).$$

Supongamos que $\nabla u^+(x_0) = \alpha \nu_0$ con $|\nu_0| = 1$ y $\alpha = |\nabla u(x_0)| \neq 0$. Entonces, $u(x) = \alpha \langle \nu_0, x - x_0 \rangle + o(|x - x_0|)$ y

$$u_\lambda(x) = \alpha \langle \nu_0, x \rangle + \frac{o(|\lambda x|)}{\lambda}.$$

Como el segundo término converge uniformemente a 0 en B_1, resulta que

$$u_\lambda(x) \underset{\lambda \to 0^+}{\rightrightarrows} \alpha \langle \nu_0, x \rangle.$$

Así, por lo visto anteriormente, dado x en B_1 con $x_1 > 0$ resulta que

$$0 < u_\lambda(x) \underset{\lambda \to 0^+}{\rightrightarrows} \alpha \langle \nu_0, x \rangle.$$

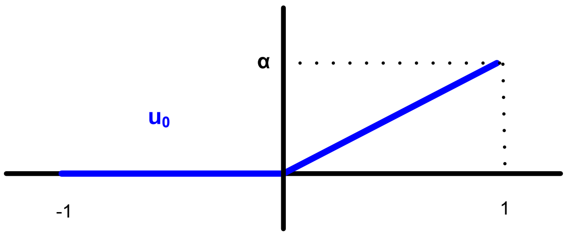
Entonces, $\langle \nu_0, x \rangle \geq 0$ para todo x en B_1 con $x_1 > 0$. Por lo tanto, podemos concluir que $\nu_0 = e_1$.

Por otro lado, tenemos que si $x_1 < 0$, $u_\lambda(x) = 0$ para λ suficientemente chico. Por lo tanto,

$$u_\lambda(x) \to \alpha x_1^+.$$

Veamos en el caso unidimensional que $\alpha = \sqrt{2M}$:

Sea $u_0(x) = \alpha x^+$ en $[-1, 1]$ y supongamos que u_0 es un minimizante local de J_1.



$$J_1(u_0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |u_0'(x)|^2 \, dx + M |\{u_0 > 0\} \cap [-1, 1]|.$$

Notemos que $|u_0'(x)| = \alpha\chi_{\{x>0\}}$ entonces,

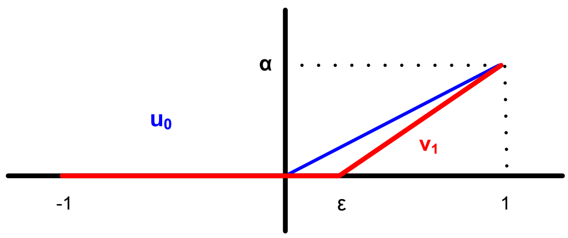
$$J_1(u_0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \alpha^2\chi_{\{x>0\}}\,dx + M|\{u_0 > 0\} \cap [-1,1]| = \frac{1}{2}\int_0^1 \alpha^2\,dx + M|\,[0,1]| = \frac{\alpha^2}{2} + M.$$

Como u_0 es un minimizante de J_1, tenemos que $J_1(u_0) \leq J_1(v)$ para todo v en $H^1([-1,1])$ con $v = u_0$ en $\partial[-1,1]$, es decir, con $v(-1) = 0$ y $v(1) = \alpha$.

Consideremos la siguiente función admisible

$$v_1(x) = \frac{\alpha}{1-\varepsilon}(x-\varepsilon)^+$$

con $0 < \varepsilon < 1$.



$$J_1(v_1) = \frac{1}{2}\int_\varepsilon^1 \left(\frac{\alpha}{1-\varepsilon}\right)^2 dx\,+\,M|\,[\varepsilon,1]| = \frac{\alpha^2}{2\,(1-\varepsilon)^2}\,(1-\varepsilon)+M(1-\varepsilon) = \frac{\alpha^2}{2(1-\varepsilon)}+M(1-\varepsilon).$$

Entonces,

$$\frac{\alpha^2}{2} + M \leq \frac{\alpha^2}{2(1-\varepsilon)} + M(1-\varepsilon)$$

para todo $0 < \varepsilon < 1$, con lo cual

$$M \leq \frac{\alpha^2}{2(1-\varepsilon)}$$

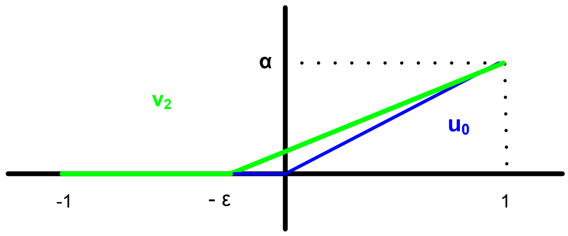
para todo $0 < \varepsilon < 1$. Haciendo $\varepsilon \to 0^+$, resulta que $\sqrt{2M} \leq \alpha$.

Para ver la otra desigualdad basta considerar la siguiente función admisible v_2

$$v_2(x) = \frac{\alpha}{1+\varepsilon}\,(x+\varepsilon)^+$$

con $0 < \varepsilon < 1$ y hacer un razonamiento análogo

Veamos qué ecuación debe satisfacer u, minimizante de J en K. Para eso, supongamos que u es continua en Ω.



Proposición 3.1.2. *Supongamos que u es un minimizante continuo. Entonces, $\Delta u = 0$ en $\{u > 0\}$*

Demostración. Sea x_0 en $\{u > 0\}$. Como u es continua, existe $\lambda > 0$ tal que $u(x) > \frac{u(x_0)}{2} > 0$ si $x \in B_\lambda(x_0)$. Sea $\varphi \in C_0^\infty(B_\lambda(x_0))$ y $v(x) = u(x) + \varepsilon\varphi(x)$ definida en Ω.

Ahora, $\{u > 0\} = \{v > 0\}$ si $\varepsilon \ < \varepsilon_0$ para algún $\varepsilon_0 > 0$ ya que $v = u$ en $\Omega \setminus \overline{B_\lambda(x_0)}$ y en $B_\lambda(x_0)$ tenemos que

$$v(x) > \frac{u(x_0)}{2} + \varepsilon\varphi(x) \geq \frac{u(x_0)}{2} - \varepsilon\|\varphi\|_\infty.$$

Entonces, tomando $\varepsilon_0 = \frac{u(x_0)}{2\|\varphi\|_\infty}$, v resulta positiva en $B_\lambda(x_0)$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ al igual que u.

Ahora, como v es admisible y u es un minimizante de J en K, tenemos que $J(u) \leq J(v)$ y como $\{u > 0\} = \{v > 0\}$, resulta que:

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \int_\Omega |\nabla v|^2 = \int_\Omega |\nabla u + \varepsilon\nabla\varphi|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 + 2\varepsilon \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi.$$

Entonces,

$$0 \leq \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 + 2\varepsilon \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi$$

y dividiendo por $\varepsilon > 0$ y haciendo $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ concluimos que,

$$0 \leq \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi.$$

Considerando $v(x) = u(x) - \varepsilon\varphi(x)$ y haciendo un razonamiento análogo, obtenemos la otra desigualdad

$$\int_\Omega \nabla u \ \nabla\varphi \leq 0.$$

Luego,

$$\int_\Omega \nabla u \ \nabla\varphi = 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(B_\lambda(x_0)).$$

Entonces, podemos afirmar que $\Delta u = 0$ en $B_\lambda(x_0)$. Por lo tanto, $\Delta u = 0$ en $\{u > 0\}$. $\square$

Si definimos $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ M & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

una solución al problema de los Jets debe minimizar el funcional

$$J(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx \; + \int_\Omega H(u(x)) \, dx$$

sobre las funciones de $g + H_0^1(\Omega)$ con $g \in H^1(\Omega)$.

A continuación miraremos un funcional de la forma de J pero con H suave.

Teorema 3.1.1. *Si $G \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado, entonces, el funcional*

$$\widetilde{J}(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx \; + \int_\Omega G(v(x)) \, dx,$$

alcanza un mínimo en $g + H_0^1(\Omega)$.

Observación 3.1.1. *Para poder garantizar unicidad del mínimo es necesario algún tipo de monotonía de la G.*

Demostración. La demostración se hace de manera análoga a la del Teorema 3.1.1. □

Veamos algunas propiedades que satisfacen los minimizantes de estos funcionales.

Teorema 3.1.2. *Sea u minimizante del funcional*

$$\widetilde{J}(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \; dx \; + \int_\Omega G(v(x)) \; dx,$$

sobre el conjunto de funciones admisibles $g + H_0^1(\Omega)$ para $g \in H^1(\Omega)$, donde $G \in C^1(\mathbb{R})$ con derivada acotada. Entonces, u es solución de la ecuación diferencial

$$\Delta u = G'(u) \qquad \text{en } \Omega,$$

en sentido débil.

Demostración. Sean $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ una función de prueba y $\varepsilon > 0$, entonces, $v := u + \varepsilon\varphi$ resulta admisible.

Con lo cual,

$$\begin{aligned}
0 &\le \widetilde{J}(u+\varepsilon\varphi) - \widetilde{J}(u) \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u + \varepsilon\nabla\varphi|^2\,dx + \int_\Omega G(u+\varepsilon\varphi)\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega G(u)\,dx \\
&= \frac{\varepsilon^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx + \varepsilon\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\,dx + \int_\Omega \Big[G(u+\varepsilon\varphi) - G(u)\Big]\,dx \\
&= \frac{\varepsilon^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx + \varepsilon\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\,dx + \varepsilon\int_\Omega \varphi\int_0^1 G'(u+t\varepsilon\varphi)\,dt\,dx.
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Dado que G tiene derivada continua y acotada se tiene,

$$\int_0^1 G'(u(x)+t\varepsilon\varphi(x))\,dt \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^1 G'(u(x))\,dt = G'(u(x)).$$

Por otro lado, como

$$|\varphi(x)|\Big|\int_0^1 G'(u(x)+t\varepsilon\varphi(x))\,dt\Big| \le C|\varphi(x)| \in L^1(\Omega),$$

resulta que,

$$\int_\Omega \varphi(x)\int_0^1 G'(u(x)+t\varepsilon\varphi(x))\,dt\,dx \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \int_\Omega G'(u(x))\varphi(x)\,dx.$$

Así, si dividimos por ε la última desigualdad de (3.1.1) y hacemos tender ε a cero, obtenemos:

$$\begin{aligned}
0 \le \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[\frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2\,dx \;+\; \int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx \\
+ \int_\Omega \varphi(x)\int_0^1 G'(u(x)+t\varepsilon\varphi(x))\,dt\,dx\Big] = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx \;+\; \int_\Omega G'(u(x))\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Haciendo el mismo razonamiento con $\varepsilon < 0$ obtenemos la desigualdad opuesta y en consecuencia

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx \;+\; \int_\Omega G'(u(x))\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

como habíamos afirmado.

□

Observación 3.1.2. *Si u es un minimizante de $\widetilde{J}$ como en el Teorema anterior y $G'' \in L^\infty(\mathbb{R})$, entonces $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, para todo $0 < \alpha < 1$.*

La observación anterior se debe a que toda solución débil del problema $\Delta u = f$, con f acotada, está en $C^{1,\alpha}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ para todo $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$. Entonces, dado que $G'(u)$ es Lipschitz, u_{x_i} es solución débil del problema

$$\Delta u_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} G'(u),$$

entonces, $u_{x_i} \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. Así, $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Vamos a definir a continuación una serie de funciones suaves que aproximan a H con el objetivo de estudiar el comportamiento en el límite de los funcionales que definen y su relación con J.

3.2. El problema regularizado

Sea $\mathcal{B}$ una función en $C^{1,1}(\mathbb{R})$ y creciente tal que

$$\mathcal{B}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0 \\ M & \text{si } s > 1. \end{cases}$$

Dado $\varepsilon > 0$, definimos las funciones $\mathcal{B}_\varepsilon(s) := \mathcal{B}(\frac{s}{\varepsilon})$, las que están en $C^{1,1}(\mathbb{R})$, son crecientes y

$$\mathcal{B}_\varepsilon(s) \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} H(s).$$

Notaremos β_ε (resp. β) a la derivada primera de $\mathcal{B}_\varepsilon$ (resp. $\mathcal{B}$).

Sea J_ε el funcional definido en $g + H_0^1(\Omega)$, con $g \in H^1(\Omega)$, como

$$J_\varepsilon(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx \; + \; \int_\Omega \mathcal{B}_\varepsilon(v(x)) \, dx.$$

Nos referiremos con u^ε a un minimizante de J_ε en $g + H_0^1(\Omega)$ con $g \in H^1(\Omega)$ el cual, recordemos, está en $C^{2,\alpha}(\Omega)$ y satisface que

$$\Delta u^\varepsilon = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon).$$

Veamos a continuación cómo podemos estudiar en forma local las propiedades de los minimizantes de estos funcionales y veamos algunos rescales invariantes para esta familia de funcionales.

Definición 3.2.1. *Decimos que una función $u \in H^1(\Omega)$ es un minimizante local en Ω del funcional J_ε si para todo subdominio $\Omega' \subseteq \Omega$ y toda $v \in u + H_0^1(\Omega')$ resulta que*

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega'} |\nabla u(x)|^2\,dx \;+\; \int_{\Omega'} \mathcal{B}_\varepsilon(u(x))\,dx \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega'} |\nabla v(x)|^2\,dx \;+\; \int_{\Omega'} \mathcal{B}_\varepsilon(v(x))\,dx.$$

Observación 3.2.1. *Claramente, un minimizante de J_ε en $g + H_0^1(\Omega)$ es un minimizante local de J_ε.*

Proposición 3.2.1. *Sea u^ε un minimizante local de J_ε en Ω y $B_\lambda(x_0) \subset \Omega$, con $\lambda > 0$.*
Entonces, $u_\lambda(x) := \frac{1}{\lambda}u^\varepsilon(x_0 + \lambda x)$ es un minimizante local de $J_{\frac{\varepsilon}{\lambda}}$ en B_1.

Demostración. Para $x \in B_\lambda(x_0)$ se tiene $u^\varepsilon(x) = \lambda u_\lambda(\frac{x-x_0}{\lambda})$. Si $v \in u_\lambda + H_0^1(B_1)$, se tiene que $\bar{v}(x) = \lambda v\big(\frac{x-x_0}{\lambda}\big)$ satisface

$$(\bar{v} - u)(x) = \lambda(v - u_\lambda)\Big(\frac{x - x_0}{\lambda}\Big) \in H_0^1(B_\lambda(x_0)).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
J_{\frac{\varepsilon}{\lambda}}(v) &= \frac{1}{2}\int_{B_1} |\nabla v(x)|^2\,dx + \int_{B_1} \mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{\lambda}}(v(x))\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{B_1} |\nabla \bar{v}|^2(x_0 + \lambda x)\,dx + \int_{B_1} \mathcal{B}_\varepsilon(\bar{v}(x_0 + \lambda x))\,dx \\
&= \lambda^{-N}\Big[\frac{1}{2}\int_{B_\lambda(x_0)} |\nabla \bar{v}(y)|^2\,dy + \int_{B_\lambda(x_0)} \mathcal{B}_\varepsilon(\bar{v}(y))\,dy\Big] \\
&\geq \lambda^{-N}\Big[\frac{1}{2}\int_{B_\lambda(x_0)} |\nabla u(y)|^2\,dy + \int_{B_\lambda(x_0)} \mathcal{B}_\varepsilon(u(y))\,dy\Big] \\
&= \frac{1}{2}\int_{B_1} |\nabla u|^2(x_0 + \lambda x)\,dx + \int_{B_1} \mathcal{B}_\varepsilon(u(x_0 + \lambda x))\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{B_1} |\nabla u_\lambda(x)|^2\,dx + \int_{B_1} \mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{\lambda}}(u_\lambda(x))\,dx = J_{\frac{\varepsilon}{\lambda}}(u_\lambda).
\end{aligned}$$

Concluyendo que $J_{\frac{\varepsilon}{\lambda}}(u_\lambda) \leq J_{\frac{\varepsilon}{\lambda}}(v)$, para toda $v \in u_\lambda + H_0^1(B_1)$. □

Veamos que podemos garantizar la positividad y controlar la norma infinito de los minimizantes de los funcionales J_ε en términos de g.

Proposición 3.2.2. *Sea u^ε un minimizante de J_ε en $g + H_0^1(\Omega)$.*

1. *Si* $g \geq 0$*, entonces,* $u^\varepsilon \geq 0$*.*

2. *Si* $g \in L^\infty(\Omega)$*, entonces,* $u^\varepsilon \leq \|g\|_\infty$*.*

Demostración. Por comodidad, a lo largo de la demostración, vamos a notar u_ε al minimizante u^ε.

1. Es suficiente demostrar que $u_\varepsilon^-(x) := -\min\{u_\varepsilon(x), 0\} \equiv 0$.
Dado que $g \geq 0$ y $u_\varepsilon = g$ en $\partial\Omega$, la función $u_\varepsilon^+(x) := \max\{u_\varepsilon(x), 0\}$ es admisible. Así,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x)|^2\, dx \ + \int_\Omega \mathcal{B}_\varepsilon(u_\varepsilon(x))\, dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon^+(x)|^2\, dx \ + \int_\Omega \mathcal{B}_\varepsilon(u_\varepsilon^+(x))\, dx.$$

Ahora, como $\mathcal{B}_\varepsilon(s) = 0$ si $s < 0$, resulta que $\mathcal{B}_\varepsilon(u) = \mathcal{B}_\varepsilon(u_\varepsilon^+)$. Y, dado que en casi todo punto $|\nabla u_\varepsilon|^2 = |\nabla u_\varepsilon^+|^2 \ + \ |\nabla u_\varepsilon^-|^2$, podemos concluir que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon^-(x)|^2\, dx \leq 0.$$

Entonces, u_ε^- es constante, y, como $u_\varepsilon^- \in H_0^1(\Omega)$, resulta que $u_\varepsilon^- \equiv 0$.

2. Dado que $v(x) := \min\{u_\varepsilon(x), \|g\|_\infty\} \in H^1(\Omega)$ es admisible podemos concluir que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x)|^2\, dx + \int_\Omega \mathcal{B}_\varepsilon(u_\varepsilon(x))\, dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\, dx + \int_\Omega \mathcal{B}_\varepsilon(v(x))\, dx \\
= \ &\frac{1}{2}\int_{\{u_\varepsilon \leq \|g\|_\infty\}} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2\, dx + \int_{\{u_\varepsilon \leq \|g\|_\infty\}} \mathcal{B}_\varepsilon(u_\varepsilon(x))\, dx + \int_{\{u_\varepsilon > \|g\|_\infty\}} \mathcal{B}_\varepsilon(\|g\|_\infty)\, dx.
\end{aligned}$$

Así,

$$\frac{1}{2}\int_{\{u_\varepsilon > \|g\|_\infty\}} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2\, dx \leq \int_{\{u_\varepsilon > \|g\|_\infty\}} \Big[\mathcal{B}_\varepsilon(\|g\|_\infty) - \mathcal{B}_\varepsilon(u_\varepsilon(x))\Big]\, dx \leq 0.$$

Entonces,

$$0 = \int_{\{u_\varepsilon > \|g\|_\infty\}} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2\, dx = \int_\Omega |\nabla (u_\varepsilon(x) - \|g\|_\infty)^+|^2\, dx,$$

con lo cual, dado que $(u_\varepsilon - \|g\|_\infty)^+ \in H_0^1(\Omega)$, podemos asegurar que $(u_\varepsilon - \|g\|_\infty)^+ \equiv 0$. Entonces, $u_\varepsilon \leq \|g\|_\infty$ en Ω. □

A continuación hallaremos cotas del gradiente de los minimizantes de los funcionales J_ε. Necesitaremos un par de lemas.

Lema 3.2.1. *Sea $u \in C^2(B_1)$ no negativa tal que $|\Delta u| \leq C_0$ en B_1 y $u(0) \leq 2$. Entonces, existe $C = C(N, C_0)$ tal que $|\nabla u| \leq C$ en $B_{\frac{1}{4}}$.*

Demostración. Por la Desigualdad de Harnack, existe una constante universal $C_1(N)$ tal que

$$\sup_{B_{1/2}} u \leq C_1(u(0) + C_0) \leq C_1(2 + C_0).$$

Por otro lado, por estimaciones de las derivadas, existe una constante $C_2(N)$ tal que, para todo $x \in B_{\frac{1}{4}}$, se satisface

$$|\nabla u(x)| \leq C_2 \big[\|u\|_{L^1(B_{1/2}(x))} + C_0\big] \leq C_2 \big[|B_{1/4}| \sup_{B_{1/2}} u + C_0\big].$$

Así,

$$|\nabla u(x)| \leq C(N, C_0),$$

para todo $x \in B_{1/4}$. □

Lema 3.2.2. *Sea $D \subset B_r$, con $r > 0$, un dominio tal que $0 \in \partial D$.*

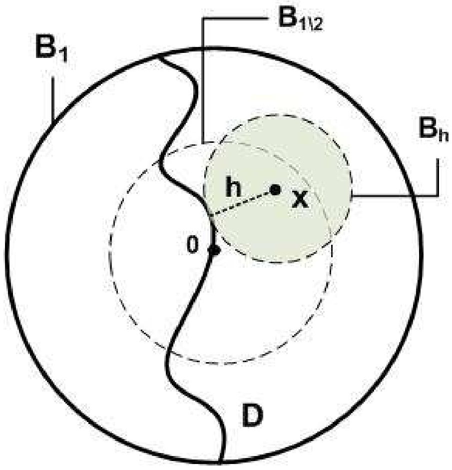
Sea $0 \leq v \in C^1(B_r)$ tal que $\Delta v = 0$ en D. Supongamos, además, que $v = 0$ y $|\nabla v| \leq L$ en $B_r \cap \partial D$. Entonces, existe una constante $C = C(N)$ tal que

1. $v(x) \leq C\, L\, dist(x, B_r \cap \partial D)$ si $x \in B_{r/2} \cap D$.

2. $\|\nabla v\|_{L^\infty(B_{r/4} \cap D)} \leq C\, L$

Demostración. Trabajaremos primero el caso $r = 1$ y luego de éste, el caso general.

Sean $x \in B_{\frac{1}{2}} \cap D$ y $h := dist(x, B_1 \cap \partial D)$, entonces, dado que $h \leq |x| < \frac{1}{2}$, es fácil ver que $B_h(x) \subset\subset B_1$.



Mediante un rescale conveniente definimos en B_1

$$w(y) := \frac{1}{h} v(x + hy).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} w &\geq 0 && \text{en } B_1 \\ \Delta w &= 0 && \text{en } B_1. \end{aligned}$$

Si $\bar{x} \in B_1 \cap \partial D$ es el que realiza la distancia de x a ∂D, resulta que

$$v(\bar{x}) = 0 \qquad \text{y} \qquad |\nabla v(\bar{x})| \leq L.$$

Así, si $\bar{y} \in \partial B_1$ es aquel tal que $\bar{x} = x + h\bar{y}$, podemos asegurar que

$$w(\bar{y}) = 0 \qquad \text{y} \qquad |\nabla w(\bar{y})| = |\nabla v(\bar{x})| \leq L.$$

Por otro lado, por la desigualdad de Harnack, existe una constante $C_1(N)$, tal que

$$w(y) \geq C_1(N) w(0) = \frac{C_1(N)}{h} v(x)$$

para todo $y \in B_{\frac{1}{2}}$. Por lo tanto,

$$\lambda := \frac{1}{C_1} \operatorname{ínf}\{w(y) \ / \ y \in \partial B_{\frac{1}{2}}\} \geq \frac{1}{h} v(x). \tag{3.2.1}$$

En el caso $N > 2$ (de forma similar se trabaja los caso $N = 1$ y $N = 2$) y con la intensión de compararla con w, definimos la función

$$z(y) := \frac{C_1 \lambda}{2^{N-2} - 1} \left(|y|^{2-N} - 1 \right)$$

la que satisface

$$\begin{aligned} \Delta z = 0 \qquad & \text{en} \quad B_1 \backslash \overline{B}_{\frac{1}{2}} \\ z = 0 \qquad & \text{en} \quad \partial B_1 \\ z = C_1 \lambda \qquad & \text{en} \quad \partial B_{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Así, por el Principio de comparación, $z \leq w$ en $B_1 \backslash \overline{B}_{\frac{1}{2}}$. Por lo tanto, ya que $z(\bar{y}) = w(\bar{y})$, podemos afirmar que

$$|\nabla z(\bar{y})| \leq |\nabla w(\bar{y})| \leq L.$$

Ahora, evaluando el gradiente de z en $\bar{y}$ obtenemos que

$$\lambda \leq \Big(\frac{2^{N-2} - 1}{C_1(N-2)}\Big) L,$$

entonces, por (3.2.1),

$$v(x) \leq h\lambda \leq h\Big(\frac{2^{N-2} - 1}{C_1(N-2)}\Big) L = h\, C(N) L,$$

concluyendo la demostración de *1.* en el caso $r = 1$.

Probemos *2.* en el caso $r = 1$. Sea $x_0 \in B_{1/4} \cap D$. Entonces, si $h := \text{dist}\,(x_0, \partial D)$ se tiene que $h \leq 1/4$. Por lo tanto, $B_h(x_0) \subset B_{1/2}$ y si $x \in B_h(x_0)$ se tiene que $d(x, B_1 \cap \partial D) \leq 2h$.

Por el punto *1.* para $x \in B_{1/2}$ se tiene

$$v(x) \leq C\, L\, d(x, B_1 \cap \partial D).$$

De aquí que,

$$\sup_{B_h(x_0)} v(x) \leq 2\, C\, L\, h.$$

Utilizando las estimaciones de las derivadas de funciones armónicas, existe una constante C_2 tal que,

$$|\nabla v(x_0)| \leq \frac{C_2}{h} \sup_{B_h(x_0)} v \leq C_2\, 2\, C\, L,$$

finalizando de este modo la demostración para el caso $r = 1$.

Ahora, para el caso general, sea $\bar{v} := \frac{1}{r} v(rx)$ en B_1 y $\bar{D} := \frac{1}{r} D \subseteq B_1$. Se tiene que $\bar{v}$ y $\bar{D}$ satisfacen las condiciones del caso unitario. Entonces, si $y \in B_{\frac{r}{2}} \cap D$ y $x \in B_{1/2} \cap \bar{D}$ es tal que $y = rx$ se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} v(y) = \frac{1}{r} v(rx) = \bar{v}(x) \quad & \leq \quad C\, L\, dist(x, B_1 \cap \partial \bar{D}) \\ & = \quad C\, L\, r^{-1} \text{dist}\,(y, B_r \cap \partial D), \end{aligned}$$

quedando demostrado *1.* en el caso general.

Para la segunda afirmación,

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(B_{r/4}\cap D)} = \sup_{B_{1/4}\cap \bar{D}} |\nabla v(rx)| = \sup_{B_{1/4}\cap \bar{D}} |\nabla \bar{v}(x)| = \|\nabla \bar{v}\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{4}}\cap \bar{D})} \leq C\, L.$$

$\square$

Lema 3.2.3. *Sea $u^\varepsilon \in C^2(B_1)$ una solución no negativa de $\Delta u = \beta_\varepsilon(u)$ en B_1. Existe $C = C(N, \|\beta\|_\infty)$ tal que si $\varepsilon < \frac{1}{4}$ y $0 \in \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}$ entonces*

$$\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{8}})} \leq C.$$

Demostración. Dado que

$$\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{8}})} \leq \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{8}}\cap\{u^\varepsilon\leq 2\varepsilon\})} \;+\; \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{8}}\cap\{u^\varepsilon>\varepsilon\})} = (1) + (2),$$

es suficiente acotar (1) y (2).

Veamos la acotación de (1). Sea $x_0 \in B_{\frac{3}{4}} \cap \{u^\varepsilon \leq 2\varepsilon\}$ y $w(y) := \frac{1}{\varepsilon}u^\varepsilon(x_0 + \varepsilon y)$ con y en B_1. Entonces,

$$w \geq 0 \qquad \text{y} \qquad w(0) = \frac{1}{\varepsilon}u^\varepsilon(x_0) \leq 2.$$

Por otro lado, como $\varepsilon < \frac{1}{4}$, entonces, $B_\varepsilon(x_0) \subset B_1$, con lo cual,

$$\Delta w(y) = \varepsilon \Delta u^\varepsilon(x_0 + \varepsilon y) = \varepsilon \beta_\varepsilon(u^\varepsilon(x_0 + \varepsilon y)) = \beta(w(y)) \qquad \text{en } B_1.$$

Así, por el Lema 3.2.1, existe $C_1(N, \|\beta\|_\infty)$ tal que

$$|\nabla w| \leq C_1 \qquad \text{en } B_{\frac{1}{4}}.$$

En particular,

$$|\nabla u^\varepsilon(x_0)| = |\nabla w(0)| \leq C_1.$$

Entonces, utilizando que la constante no depende de x_0,

$$(1) \leq \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^\infty(B_{3/4}\cap\{u^\varepsilon\leq 2\varepsilon\})} \leq C_1(N, \|\beta\|_\infty).$$

Veamos como adaptar la situación para, utilizando el Lema 3.2.2, acotar (2). De la última desigualdad se desprende que

$$|\nabla u^\varepsilon| \leq C_1 \qquad \text{en } B_{\frac{3}{4}} \cap \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}.$$

Así, si definimos $v := u^\varepsilon - \varepsilon$ en $B_{\frac{3}{4}}$ y $D := \{u^\varepsilon > \varepsilon\}$, obtenemos

$$\begin{cases} \Delta v = \Delta u^\varepsilon = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon) = 0 & \text{en } D \\ v \geq 0 & \text{en } D \\ v = 0 & \text{en } B_{\frac{3}{4}} \cap \partial D \\ |\nabla v| = |\nabla u^\varepsilon| \leq C_1 & \text{en } B_{\frac{3}{4}} \cap \partial D \\ 0 \in \partial D. \end{cases}$$

Por lo tanto, por el Lema 3.2.2, existe una constante $C_2 = C_2(N, C_1)$ tal que

$$(2) \leq \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^\infty(B_{3/16} \cap \{u^\varepsilon > \varepsilon\})} = \|\nabla v\|_{L^\infty(B_{3/16} \cap D)} \leq C_2,$$

quedando de este modo demostrado el lema. □

Teorema 3.2.1. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado y $\Omega' \subset\subset \Omega$. Si*

$$\begin{cases} u^\varepsilon \geq 0 & \textit{en} \quad \Omega \\ \Delta u^\varepsilon = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon) & \textit{en} \quad \Omega \\ \|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c. \end{cases}$$

Existe $L = L(N, \|\beta\|_\infty, c, \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega))$ tal que

$$\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')} \leq L.$$

Demostración. Sea $r_0 = \frac{1}{6}\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Si $x_0 \in \Omega'$ se tiene que $B_{6r_0}(x_0) \subset \Omega$.

Caso I. $\varepsilon \geq r_0$. En este caso, por las estimaciones de las derivadas,

$$|\nabla u^\varepsilon(x_0)| \leq \frac{C_N}{r_0}\big(\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\beta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\big).$$

Como

$$\|\beta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\varepsilon}\|\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{r_0}\|\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

se tiene la acotación buscada.

Caso II. $\varepsilon < r_0$.

Si $u^\varepsilon > \varepsilon$ en $B_{r_0/2}(x_0)$ se tiene que $\Delta u^\varepsilon = 0$ ahí, y por lo tanto,

$$|\nabla u^\varepsilon(x_0)| \leq \frac{2}{r_0} C_N \sup_{B_{r_0/2}(x_0)} u^\varepsilon \leq \frac{2}{r_0} C_N \|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Supongamos, entonces que existe $x \in B_{r_0/2}(x_0)$ con $u^\varepsilon(x) \leq \varepsilon$. Se tiene una de dos:

1. $u^\varepsilon \leq \varepsilon$ en $B_{r_0/2}(x_0)$.

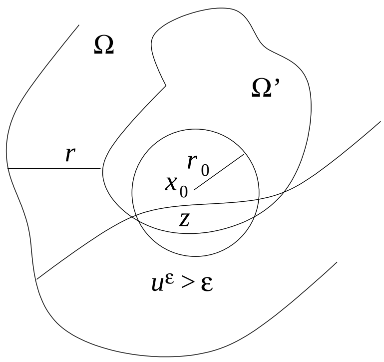
2. Existe $z \in B_{r_0/2}(x_0) \cap \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}$.

<u>Caso 1.</u> En este caso aplicamos directamente el Lema 3.2.1 a $w(y) := \frac{1}{\varepsilon}u^\varepsilon(x_0 + \varepsilon y)$ en $B_{r_0/2}$. En efecto,

$$\begin{aligned} &w \geq 0, \\ &|\Delta w| = |\beta(w)| \leq \|\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad \text{en } B_{r_0/2}, \\ &w(0) \leq 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|\nabla w(y)| \leq L(N, \|\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R})})$ en $B_{r_0/8}$. De modo que, en particular, $|\nabla u^\varepsilon(x_0)| \leq L$.

<u>Caso 2.</u> Sea $v(y) = \frac{1}{5r_0}u^\varepsilon(z + 5r_0 y)$ con $y \in B_1$. Observar que como $|x_0 - z| < r_0$ se tiene que $B_{5r_0}(z) \subset \Omega$.



Sea $\delta = \frac{\varepsilon}{5r_0}$. Entonces $\delta < 1/5$ y se tiene

$$\begin{aligned} &\Delta v = \beta_\delta(v) \quad \text{en } B_1, \\ &0 \in \partial\{v > \delta\}. \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 3.2.3 se tiene que $\|\nabla v\|_{L^\infty(B_{1/8})} \leq L$ con $L = L(N, \|\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R})})$. En particular, si $y_0 = \frac{x_0 - z}{5r_0}$, se tiene que $|y_0| \leq \frac{r_0/2}{5r_0} = \frac{1}{10} < \frac{1}{8}$ y por lo tanto,

$$|\nabla u^\varepsilon(x_0)| = |\nabla v(y_0)| \leq L.$$

$\square$

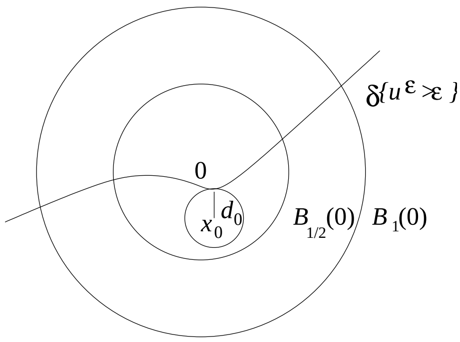
Observación 3.2.1. *Si* $dist(x_0, \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}) < \frac{1}{12} dist(x_0, \partial\Omega)$ *estamos en el Caso 2, es decir existe* $\bar{x} \in B_{r_0/2}(x_0) \cap \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}$. *Por lo tanto, se tiene que* $|\nabla u^\varepsilon(x_0)| \leq L$ *con* $L = L(N, \|\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R})})$.

Nuestro próximo objetivo es ver que tenemos un crecimiento lineal desde la frontera libre (en el problema del obstáculo teníamos un crecimiento cuadrático). Para tener este resultado debemos volver al caso en que u^ε son minimizantes.

Teorema 3.2.1. *Para todo $c_1 \geq 1$ existe C_1 tal que si $u^\varepsilon \geq 0$ es un minimizante local de J_ε en $B_1(0)$ con $\varepsilon < \frac{1}{4}$ y si $x_0 \in B_{\frac{1}{2}}(0) \cap \{u^\varepsilon \geq c_1\varepsilon\}$ y $\operatorname{dist}(x_0, \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}) < \frac{1}{2}$ se sigue que*

$$u^\varepsilon(x_0) \geq C_1 \, dist\, (x_0, \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}).$$

Demostración. Sea $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\})$,



Rescalemos y llamemos w a la función,

$$w(y) = \frac{1}{d_0} u^\varepsilon(x_0 + d_0 y) \quad \text{para} \quad y \in B_1(0).$$

Entonces,

$$\begin{cases} w \geq 0 & \text{en} \quad B_1(0) \\ \Delta w = 0 & \text{en} \quad B_1(0). \end{cases}$$

Sea $a = w(0) = \frac{u^\varepsilon(x_0)}{d_0}$. Queremos ver que existe $C_1 > 0$ tal que $a \geq C_1$.

Como $u^\varepsilon \geq 0$ es un minimizante local de J_ε en $B_1(0)$ resulta que w es minimizante local de $J_{\frac{\varepsilon}{d_0}}$. En particular, si $v \in w + H_0^1(B_1(0))$ se tiene que

$$\frac{1}{2}\int_{B_1(0)} |\nabla w|^2 \, dx + \int_{B_1(0)} \mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{d_0}}(w) \, dx \leq \frac{1}{2}\int_{B_1(0)} |\nabla v|^2 \, dx + \int_{B_1(0)} \mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{d_0}}(v) \, dx. \qquad (3.2.2)$$

Dado que w es armónica no negativa en $B_1(0)$, todos los valores en $B_{\frac{1}{2}}(0)$ son equivalentes. O sea, por la desigualdad de Harnack, existen $\underline{C}$, $\overline{C} > 0$ tales que

$$\underline{C}a \leq w \leq \overline{C}a \quad \text{en} \quad B_{\frac{1}{2}}(0).$$

Vamos a construir una función test $v \in w + H_0^1(B_1(0))$ que nos va a permitir llegar a la existencia de C_1. Sea $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\begin{array}{rcl} \psi & \equiv & 0 \quad \text{en} \quad B_{\frac{1}{4}}(0) \\ \psi & \equiv & 1 \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{1}{2}}(0). \end{array}$$

Definimos v como sigue

$$v(x) = \begin{cases} w(x) & \text{en} \quad B_1(0) \setminus \overline{B_{\frac{1}{2}}(0)} \\ \text{mín}\{w(x), \overline{C}a\psi(x)\} & \text{en} \quad B_{\frac{1}{2}}(0). \end{cases}$$

Recordemos que el mínimo de funciones de $H^1(\Omega)$ está en $H^1(\Omega)$. Luego, $v \in H^1(B_1(0))$ si $w(x) = \text{mín}\{w(x), \overline{C}a\psi(x)\}$ para todo $x \in \partial B_{\frac{1}{2}}(0)$. Y esto vale ya que

$$\psi \equiv 1 \quad \text{en} \quad \partial B_{\frac{1}{2}}(0) \quad \text{y} \quad w \leq \overline{C}a \quad \text{en} \quad \partial B_{\frac{1}{2}}(0).$$

Por lo tanto, $v \in H^1(B_1(0))$. Además $v - w \in H_0^1(B_1(0))$, i.e., $v \in w + H_0^1(B_1(0))$. Entonces v satisface (3.2.2). Más aún, de la definición de v, se tiene para $\Psi = B_{\frac{1}{2}}(0) \cap \{w > \overline{C}a\psi\}$,

$$\frac{1}{2}\int_\Psi |\nabla w|^2\, dx + \int_\Psi \mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{d_0}}(w)\, dx \leq \frac{1}{2}\int_\Psi |\nabla v|^2\, dx + \int_\Psi \mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{d_0}}(v)\, dx.$$

Entonces,

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_\Psi \left\{\mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{d_0}}(w) - \mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{d_0}}(\overline{C}a\psi)\right\} dx & \leq & \displaystyle\frac{1}{2}\int_\Psi \left\{|\overline{C}a\nabla\psi|^2 - |\nabla w|^2\right\} dx \\ & \leq & \displaystyle\frac{(\overline{C}a)^2}{2}\int_\Psi |\nabla\psi|^2\, dx \end{array}$$

Como $\mathcal{B}$ es monótona creciente resulta que

$$0 \leq \mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{d_0}}(w) - \mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{d_0}}(\overline{C}a\psi) \quad \text{en} \quad \Psi,$$

además $\psi \equiv 0$ en $B_{\frac{1}{4}}(0)$ y $w > 0$ en $B_1(0)$. Entonces,

$$\begin{array}{rcl} \overline{C}a\psi & < & w \quad \text{en} \quad B_{\frac{1}{4}}(0) \\ \mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{d_0}}(\overline{C}a\psi) & = & 0 \quad \text{en} \quad B_{\frac{1}{4}}(0). \end{array}$$

Ésto nos dice que $B_{\frac{1}{4}}(0) \subset \Psi$ y

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{B_{\frac{1}{4}}(0)} \mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{d_0}}(w)\, dx & = & \displaystyle\int_{B_{\frac{1}{4}}(0)} \left\{\mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{d_0}}(w) - \mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{d_0}}(\overline{C}a\psi)\right\} dx \\ & \leq & \displaystyle\int_\Psi \left\{\mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{d_0}}(w) - \mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{d_0}}(\overline{C}a\psi)\right\} dx \\ & \leq & \displaystyle\frac{(\overline{C}a)^2}{2}\int_\Psi |\nabla\psi|^2\, dx. \end{array}$$

Usando que $w \geq \underline{C}a$ en $B_{\frac{1}{2}}(0)$ y nuevamente la monotonía de $\mathcal{B}$ resulta que

$$\mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{d_0}}(w) \geq \mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{d_0}}(\underline{C}a) = \mathcal{B}\Big(\frac{\underline{C}ad_0}{\varepsilon}\Big) \quad \text{en } B_{1/4}.$$

Recordemos que $ad_0 = u^\varepsilon(x_0) \geq c_1\varepsilon$. Entonces, usando la monotonía de $\mathcal{B}$ tenemos que,

$$\mathcal{B}\Big(\frac{\underline{C}ad_0}{\varepsilon}\Big) \geq \mathcal{B}(\underline{C}c_1) > 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{(\overline{C}a)^2}{2}\int_\Psi |\nabla\psi|^2\,dx &\geq \int_{B_{\frac{1}{4}}(0)} \mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{d_0}}(w)\,dx \\ &\geq \mathcal{B}(\underline{C}c_1)|B_{\frac{1}{4}}(0)|. \end{aligned}$$

Luego tenemos que $a \geq C_1 > 0$, que era lo que queríamos ver. □

Lo que nos gustaría tener es la no degeneración. Recordemos que en el problema del obstáculo pudimos probar que

$$\sup_{B_r(x_0)} u \geq C_N r^2 \quad \text{si} \quad x_0 \in \partial\{u > 0\}.$$

Ésto nos permitió probar la densidad positiva del conjunto de positividad, i.e.,

$$\frac{|B_r(x_0) \cap \{u > 0\}|}{|B_r(x_0)|} \geq c > 0$$

que resultó importante para estimar la medida y dimensión de Hausdorff de la frontera.

Buscamos un resultado similar para el problema que estamos estudiando. En este caso, como el crecimiento es lineal esperamos para $u = \lim u^\varepsilon$,

$$\sup_{B_r(x_0)} u \geq C_0 r \quad \text{si} \quad x_0 \in \partial\{u > 0\}.$$

En ese sentido tenemos para u^ε el siguiente resultado.

Teorema 3.2.2. *Dados $c_1 > 1$ y C_1, $L > 0$, existe $c_0 > 0$ tal que si $\varepsilon < 1/4$ y $0 \leq u^\varepsilon \in C(B_1)$ satisface*

1. $\Delta u^\varepsilon = 0$ *en* $\{u^\varepsilon > \varepsilon\}$,
2. $\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^\infty(B_{1/2})} \leq L$,

3. $u^\varepsilon(x) \geq C_1 dist(x, \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\})$ *si* $x \in B_{1/2} \cap \{u^\varepsilon \geq c_1\varepsilon\}$ *y* $dist(x, \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}) < \frac{1}{2}$,

se tiene para todo $x_0 \in B_{1/4} \cap \{u^\varepsilon \geq c_1\varepsilon\}$ *tal que* $dist(x_0, \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}) < \frac{1}{4}$,

$$\sup_{B_r(x_0)} u^\varepsilon \geq c_0 r \quad si \quad 0 < r < 1/4.$$

Observación 3.2.2. *Notar que si* $0 \in \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}$ *se tiene que* $dist(x_0, \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}) < \frac{1}{4}$ *si* $x_0 \in B_{1/4}$.

Demostración del Teorema 3.2.2. Sean $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\})$ y $r \in (0, \frac{1}{4})$. Dado que $d_0 < 1/4$, por la hipótesis 3. se tiene que

$$u^\varepsilon(x_0) \geq C_1 d_0.$$

Si $d_0 \geq \frac{r}{8}$,

$$u^\varepsilon(x_0) \geq \frac{C_1}{8} r.$$

Supongamos, entonces, que $d_0 < \frac{r}{8}$.

Haremos un proceso inductivo que conducirá a un $\bar{x} \in B_r(x_0)$ tal que $u^\varepsilon(\bar{x}) \geq c_0 r$.

Observemos que $B_r(x_0) \subset B_{\frac{1}{2}}(0)$, entonces si

$$x \in B_r(x_0) \cap \{u^\varepsilon \geq c_1\varepsilon\} \quad \text{y} \quad \operatorname{dist}(x, \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}) < \frac{1}{2},$$

por la hipótesis 3. sabemos que

$$u^\varepsilon(x) \geq C_1 \operatorname{dist}(x, \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}).$$

Sea $y_0 \in \partial B_{d_0}(x_0) \cap \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}$. Dado que $d_0 < \frac{r}{8} < \frac{1}{32}$, tenemos que $B_{2d_0}(y_0) \subset B_{1/2}(0)$. Como u^ε es continua, $u^\varepsilon(y_0) = \varepsilon$.

Dado $\alpha \in (0,1)$ a fijar, se tiene en $B_{\alpha d_0}(y_0)$,

$$u^\varepsilon(x) \leq u^\varepsilon(y_0) + L\alpha d_0 = \varepsilon + L\alpha d_0$$

donde L es una cota uniforme de la constante de Lipschitz de u^ε en $B_{1/2}(0)$ dada en la hipótesis 2.

Por hipótesis $u^\varepsilon(x_0) \geq c_1\varepsilon$ y $u^\varepsilon(x_0) \geq C_1 d_0$. Entonces,

$$u^\varepsilon(x) \leq \Big(\frac{1}{c_1} + \frac{L\alpha}{C_1}\Big) u^\varepsilon(x_0) \quad \text{en} \quad B_{\alpha d_0}(y_0).$$

O sea,

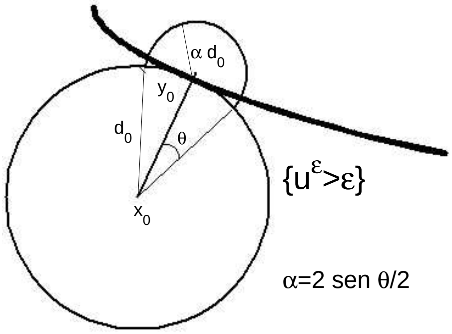
$$u^\varepsilon(x) \leq \frac{1+\gamma}{c_1} u^\varepsilon(x_0) \quad \text{en} \quad B_{\alpha d_0}(y_0)$$

donde $\gamma = \frac{Lc_1}{C_1}\alpha$.

Elegimos α de manera que $\frac{1+\gamma}{c_1} < 1$. Debido a que $\Delta u^\varepsilon = 0$ en $B_{d_0}(x_0)$,

$$u^\varepsilon(x_0) = \fint_{\partial B_{d_0}(x_0)} u^\varepsilon \, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Podemos escribir $\partial B_{d_0}(x_0) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ con interiores disjuntos, con $\Gamma_1 \subset B_{\alpha d_0}(y_0)$ y $\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_1) = \lambda \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_{d_0})$ con $0 < \lambda < 1$ dependiendo sólo de N y α (ver figura).



Observemos que

$$u^\varepsilon(x) \leq \frac{1+\gamma}{c_1} u^\varepsilon(x_0) \quad \text{en} \quad \Gamma_1$$

y además existe $x_1 \in \Gamma_2$ tal que

$$u^\varepsilon(x) \leq \sup_{\partial B_{d_0}(x_0)} u^\varepsilon = u^\varepsilon(x_1) \quad \text{en} \quad \Gamma_2.$$

Como

$$u^\varepsilon(x_0) = \fint_{\partial B_{d_0}(x_0)} u^\varepsilon \, d\mathcal{H}^{N-1} = \frac{\int_{\Gamma_1} u^\varepsilon \, d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\Gamma_2} u^\varepsilon \, d\mathcal{H}^{N-1}}{\mathcal{H}^{N-1}(\partial B_{d_0}(x_0))}$$

resulta que

$$u^\varepsilon(x_0) \leq \frac{1+\gamma}{c_1} u^\varepsilon(x_0) \frac{\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_1)}{\mathcal{H}^{N-1}(\partial B_{d_0}(x_0))} + u^\varepsilon(x_1) \frac{\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_2)}{\mathcal{H}^{N-1}(\partial B_{d_0}(x_0))}. \tag{3.2.3}$$

Como,

$$\frac{\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_1)}{\mathcal{H}^{N-1}(\partial B_{d_0}(x_0))} = \lambda$$

y

$$\frac{\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_2)}{\mathcal{H}^{N-1}(\partial B_{d_0}(x_0))} = 1 - \lambda,$$

reemplazando en (3.2.3) tenemos que

$$u^\varepsilon(x_0) \leq \frac{1+\gamma}{c_1}\lambda u^\varepsilon(x_0) + (1-\lambda)u^\varepsilon(x_1)$$

y por lo tanto

$$(1+\delta_0)u^\varepsilon(x_0) \leq u^\varepsilon(x_1),$$

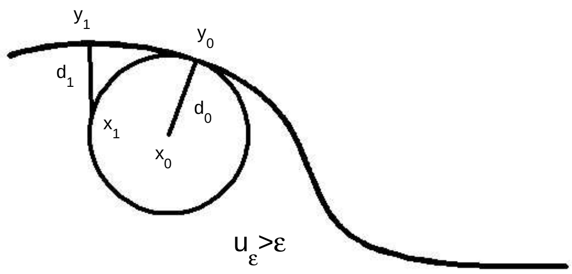
donde $1+\delta_0 = \dfrac{1-\frac{1+\gamma}{c_1}\lambda}{1-\lambda} > 1$.

En definitiva vimos que existe $x_1 \in \partial B_{d_0}(x_0)$ tal que

$$u^\varepsilon(x_1) \geq (1+\delta_0)u^\varepsilon(x_0).$$

con $\delta_0 > 0$ dependiendo sólo de L, c_1, C_1 y N.

Repetimos el procedimiento para x_1. Observemos que $u^\varepsilon(x_1) > u^\varepsilon(x_0) \geq c_1\varepsilon$. Sea $d_1 = \operatorname{dist}(x_1, \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\})$ y sea $y_1 \in \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}$ que realiza esta distancia.



Dado que $y_0 \in \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}$ resulta que

$$d_1 \leq |x_1 - y_0| \leq |x_1 - x_0| + |x_0 - y_0| = 2d_0, .$$

Como estamos en el caso en que $d_0 < \frac{r}{8}$, tenemos que $2d_0 < \frac{r}{4}$ y por lo tanto $d_1 < \frac{r}{4}$. Además dado $x \in B_{d_1}(x_1)$,

$$|x - x_0| \leq |x - x_1| + |x_1 - x_0| \leq d_1 + d_0 < \frac{r}{4} + \frac{r}{8} < r,$$

O sea que $B_{d_1}(x_1) \subset B_r(x_0) \subset B_{1/2}(0)$. Procedemos como antes y encontramos $x_2 \in \partial B_{d_1}(x_1)$ tal que

$$u^\varepsilon(x_2) \geq (1+\delta_0)u^\varepsilon(x_1).$$

Entonces,

$$u^\varepsilon(x_2) \geq (1+\delta_0)^2 u^\varepsilon(x_0).$$

Si se tiene que
$$d_1 + d_0 = |x_2 - x_1| + |x_1 - x_0| < \frac{r}{8}$$
se deduce que
$$d_2 = \operatorname{dist}(x_2, \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}) \leq |x_2 - y_1| \leq |x_2 - x_1| + |x_1 - y_1| = 2d_1 < \frac{r}{4}.$$

Por lo tanto, si $x \in \overline{B_{d_2}(x_2)}$
$$|x - x_0| \leq |x - x_2| + |x_2 - x_1| + |x_1 - x_0| < d_2 + \frac{r}{8} < r.$$

Luego, $B_{d_2}(x_2) \subset\subset B_r(x_0)$. Por lo tanto, existe $x_3 \in \partial B_{d_2}(x_2)$ tal que
$$u^\varepsilon(x_3) \geq (1+\delta)u^\varepsilon(x_2)$$
y entonces
$$u^\varepsilon(x_3) \geq (1+\delta)^3 u^\varepsilon(x_0).$$

De esta manera obtenemos $x_1, \ldots, x_k$ tales que
$$u^\varepsilon(x_{i+1}) \geq (1+\delta_0)u^\varepsilon(x_i) \geq (1+\delta_0)^{i+1}u^\varepsilon(x_0) \quad \text{para todo } 0 \leq i \leq k-1.$$

Si $\sum_{i=0}^{k-1} |x_{i+1} - x_i| < \frac{r}{8}$, podemos seguir con el proceso y encontrar un x_{k+1} ya que
$$d_{k-1} = \operatorname{dist}(x_{k-1}, \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}) = |x_k - x_{k-1}| < \frac{r}{8}$$
y por lo tanto,
$$d_k \leq |x_k - y_{k-1}| \leq |x_k - x_{k-1}| + |x_{k-1} - y_{k-1}| = 2d_{k-1} < \frac{r}{4}.$$

Luego, si $x \in \overline{B_{d_k}(x_k)}$,
$$|x - x_0| \leq |x - x_k| + \sum_{i=0}^{k-1} |x_{i+1} - x_i| < d_k + \frac{r}{8} < \frac{r}{4} + \frac{r}{8} < r$$
y por lo tanto $B_{d_k}(x_k) \subset\subset B_r(x_0)$.

Supongamos que el proceso se repite infinitas veces, i.e., existe $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que
$$u^\varepsilon(x_k) \geq (1+\delta_0)u^\varepsilon(x_{k-1}) \geq (1+\delta_0)^k u^\varepsilon(x_0).$$

Dado que $(1+\delta_0) > 1$ y $u^\varepsilon(x_0) \geq c_1\varepsilon$ resulta que
$$(1+\delta_0)^k u^\varepsilon(x_0) \to \infty \quad \text{cuando} \quad k \to \infty$$

y por lo tanto

$$u^\varepsilon(x_k) \to \infty \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Por otro lado, como u^ε es Lipschitz, con constante L en $B_{1/2}(0)$, tenemos que

$$u^\varepsilon(x_k) \leq L|x_k - y_{k-1}| + u^\varepsilon(y_{k-1}) < 2Ld_{k-1} + \varepsilon < L\frac{r}{4} + 1.$$

O sea que $\{u^\varepsilon(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, con lo cual arribamos a una contradicción, la que provino de suponer que el proceso se podía repetir infinitamente. Luego el proceso sólo se puede repetir una cantidad finita de veces. Por lo tanto, existe k_0 tal que

$$\sum_{i=0}^{k_0-1} |x_{i+1} - x_i| < \frac{r}{8} \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{k_0} |x_{i+1} - x_i| \geq \frac{r}{8}.$$

Además, para todo $i = 0, \ldots, k_0$,

$$|x_{i+1} - x_i| = d_i = \operatorname{dist}(x_i, \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{C_1} u^\varepsilon(x_i).$$

Luego,

$$\frac{r}{8} \leq \sum_{i=0}^{k_0} |x_{i+1} - x_i| \leq \frac{1}{C_1} \sum_{i=0}^{k_0} u^\varepsilon(x_i).$$

Por otro lado tenemos que para todo $i = 0, \ldots, k_0 - 1$,

$$u^\varepsilon(x_{i+1}) \geq (1 + \delta_0) u^\varepsilon(x_i).$$

Entonces, para todo $i = 0, \ldots, k_0 - 1$,

$$u^\varepsilon(x_i) \leq \frac{1}{(1+\delta_0)^{k_0 - i}} u^\varepsilon(x_{k_0}).$$

Concluimos que

$$\frac{r}{8} \leq \frac{1}{C_1} \sum_{i=0}^{k_0} u^\varepsilon(x_i) \leq \frac{u^\varepsilon(x_{k_0})}{C_1} \sum_{i=0}^{k_0} \frac{1}{(1+\delta_0)^{k_0 - i}} \leq \frac{1+\delta_0}{\delta_0} \frac{u^\varepsilon(x_{k_0})}{C_1}.$$

De modo que

$$u^\varepsilon(x_{k_0}) \geq \frac{C_1 \delta_0}{8(1+\delta_0)} r.$$

Como $x_{k_0} \in B_r(x_0)$ resulta, tomando $c_0 = \min\left\{\frac{C_1}{8}, \frac{C_1\delta_0}{8(1+\delta_0)}\right\}$, que

$$\sup_{B_r(x_0)} u^\varepsilon \geq c_0 r$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Se tiene el siguiente corolario inmediato de los Teoremas 3.2.1 y 3.2.2.

Corolario 3.2.1. *Dados $c_1 > 1$ y $C_0 > 0$ existe $c_0 > 0$ tal que si $\varepsilon < 1/4$, u^ε es un minimizante local no negativo de J_ε en $B_1(0)$ con $\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(B_1)} \leq C_0$, $x_0 \in B_{\frac{1}{4}}(0) \cap \{u^\varepsilon \geq c_1\varepsilon\}$ y* $\mathrm{dist}\,(x_0, \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}) < \frac{1}{4}$ *se tiene*

$$\sup_{B_r(x_0)} u^\varepsilon \geq c_0 r \quad \textit{si } r \in (0, 1/4).$$

Con esto tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.2.2. *Sea $\Omega' \subset\subset \Omega$. Para toda constante $c_1 > 1$ existen c_0 y $r_0 > 0$ tales que si u^ε es un minimizante local no negativo de J_ε en Ω, $x_0 \in \Omega' \cap \{u^\varepsilon \geq c_1\varepsilon\}$ y* $\mathrm{dist}\,(x_0, \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}) < r_0$, *se tiene para $\varepsilon < \frac{1}{8} dist(\Omega', \partial\Omega)$,*

$$\sup_{B_r(x_0)} u^\varepsilon \geq c_0 r \quad \textit{si } r \in (0, r_0).$$

Demostración. Propongamos $r_0 = \frac{1}{8}\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ y tomemos $\rho_0 = \frac{1}{2}\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Sean $x_0 \in \Omega' \cap \{u^\varepsilon \geq c_1\varepsilon\}$ y $\bar{x} \in \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}$ tal que $|x_0 - \bar{x}| = \mathrm{dist}(x_0, \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}) < r_0$. Observemos que $B_{\rho_0}(\bar{x}) \subset B_{2\rho_0}(x_0) \subset \Omega$ y consideremos

$$w(y) = \frac{1}{\rho_0} u^\varepsilon(\bar{x} + \rho_0 y) \quad \text{para } y \in B_1(0).$$

Sabemos que w es minimizante local de $J_{\frac{\varepsilon}{\rho_0}}$ en $B_1(0)$ y $w \geq 0$. Sea y_0 tal que $x_0 = \bar{x} + \rho_0 y_0$, i.e., $y_0 = \frac{x_0 - \bar{x}}{\rho_0}$. Como $|x_0 - \bar{x}| < r_0 = \frac{\rho_0}{4}$, resulta que $|y_0| < \frac{1}{4}$. Además $w(y_0) = \frac{1}{\rho_0} u^\varepsilon(x_0)$, entonces $y_0 \in B_{\frac{1}{4}}(0) \cap \{w \geq c_1 \frac{\varepsilon}{\rho_0}\}$. Luego, como $\frac{\varepsilon}{\rho_0} < 1/4$, podemos aplicar el Corolario 3.2.1 y deducir que existe $c_0 > 0$ tal que

$$\sup_{B_\rho(y_0)} w \geq c_0 \rho \quad \text{si } \rho \in (0, 1/4).$$

Para terminar la demostración veamos que si $x = \bar{x} + \rho_0 y$ entonces, $x \in B_r(x_0)$ sí y sólo sí $y \in B_{\frac{r}{\rho_0}}(y_0)$. Para ésto basta observar que

$$|y - y_0| = \left| \frac{x - \bar{x}}{\rho_0} - \frac{x_0 - \bar{x}}{\rho_0} \right| = \frac{|x - x_0|}{\rho_0}.$$

Entonces si $r \in (0, r_0)$ resulta que $\frac{r}{\rho_0} < \frac{1}{4}$ y por lo tanto,

$$\sup_{B_r(x_0)} u^\varepsilon = \rho_0 \sup_{B_{\frac{r}{\rho_0}}(y_0)} w \geq \rho_0\, c_0 \frac{r}{\rho_0} = c_0 r.$$

Que era lo que queríamos demostrar. $\square$

De aquí se deduce que la proporción de los conjuntos $\{u^\varepsilon > \lambda\}$ en bolas $B_\rho(x_0)$ centradas en puntos $x_0 \in \partial\{u^\varepsilon > \lambda\}$ está acotada inferiormente en forma independiente de ε si $\lambda \geq c_1\varepsilon$ con $c_1 > 1$ y $\rho \geq c_2\lambda$ para una constante $c_2 > 0$ independiente de ε. De aquí se va a deducir la densidad positiva uniforme de $\{u > 0\}$ en puntos de la frontera libre para $u = \lim u^\varepsilon$.

Corolario 3.2.3. *Dados $C_0 > 0$, $c_1 > 1$ existen constantes c_2, $c_3 > 0$ tales que si $\varepsilon < 1/4$, u^ε es un minimizante local no negativo de J_ε en B_1 con $\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(B_1)} \leq C_0$, y si $x_0 \in B_{1/4} \cap \partial\{u^\varepsilon > \lambda\}$ con $\lambda \geq c_1\varepsilon$ y dist$(x_0, \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}) < 1/4$ entonces,*

$$\big|B_\rho(x_0) \cap \{u^\varepsilon > \lambda\}\big| \geq c_3 \big|B_\rho(x_0)\big| \quad si \quad c_2\lambda \leq \rho \leq \frac{1}{4}.$$

Demostración. Por el Corolario 3.2.1 existe $y \in \overline{B_{\rho/4}(x_0)}$ tal que $u^\varepsilon(y) = \sup_{B_{\rho/4}(x_0)} u^\varepsilon \geq c_0\rho$.

Sea $0 < \kappa < 1/4$. Si $x \in B_{\kappa\rho}(y)$ se tiene $|x - x_0| \leq \kappa\rho + \rho/4 \leq \rho/2$. Por lo tanto, $B_{\kappa\rho}(y) \subset B_{1/2}$ y si llamamos L a una cota de $|\nabla u^\varepsilon|$ en $B_{1/2}$, se tiene

$$u^\varepsilon(x) \geq u^\varepsilon(y) - L\kappa\rho \geq (c_0 - L\kappa)\rho \qquad \text{si } x \in B_{\kappa\rho}(y).$$

Tomemos, entonces, $0 < \kappa < 1/4$ tal que $c_0 - L\kappa > 0$. Si ahora $c_2 > 0$ es tal que $c_2(c_0 - L\kappa) > 1$ se tiene, para $\rho \geq c_2\lambda$,

$$u^\varepsilon(x) \geq c_2(c_0 - L\kappa)\lambda > \lambda \qquad \text{en } B_{\kappa\rho}(y).$$

Entonces, $B_{\kappa\rho}(y) \subset \{u^\varepsilon > \lambda\} \cap B_\rho(x_0)$. De aquí que

$$\big|B_\rho(x_0) \cap \{u^\varepsilon > \lambda\}\big| \geq \kappa^N\,|B_\rho|,$$

y se tiene el resultado con $c_3 = \kappa^N$. □

Notemos con $\Omega_\lambda = \{u^\varepsilon > \lambda\}$. El objetivo ahora es probar que para $\delta \geq c_2\lambda$ se tiene que $\big|\mathcal{N}_\delta(\partial\Omega_\lambda) \cap B_R\big| \leq c_3\delta R^{N-1}$. Esta estimación permitirá acotar la medida de Hausdorff de la frontera libre de $u = \lim u^\varepsilon$.

Teorema 3.2.3. *Dados $c_1 > 1$, $C_0 > 0$ existen c_2, $c_3 > 0$ tales que si u^ε es un minimizante local no negativo de J_ε en B_1 con $\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(B_1)} \leq C_0$, $\lambda \geq c_1\varepsilon$ y $c_2\lambda \leq \delta \leq 1/8$ entonces, para $R < 1/4$ se tiene*

$$\big|\mathcal{N}_\delta(\partial\Omega_\lambda) \cap B_R\big| \leq c_3\delta R^{N-1}.$$

La demostración se basará en dos lemas. Observemos, primero que debido a la acotación Lipschitz uniforme de las u^ε y la acotación de λ en términos de δ se tiene $\mathcal{N}^+(\partial\Omega_\lambda) \subset \{\lambda < u^\varepsilon < C\delta\}$ para una constante universal C. En efecto, si $x \in \mathcal{N}_\delta(\partial\Omega_\lambda)$, existe $y \in \partial\Omega_\lambda$ tal que $|x - y| < \delta$. Entonces,

$$u^\varepsilon(x) \leq \lambda + L\delta < (c_2^{-1} + L)\delta.$$

Comenzaremos con el siguiente lema

Lema 3.2.4. *En las condiciones del Teorema 3.2.3, para $C_1 > 0$ se tiene que existe $c > 0$ tal que*

$$\int_{\{\lambda<u^\varepsilon<C_1\delta\}\cap B_R} |\nabla u^\varepsilon|^2\,dx \le c\delta R^{N-1}.$$

Demostración. Sea $w = \min\{(u^\varepsilon-\lambda)^+\,,\,C_1\delta-\lambda\}$. Entonces $w \in H^1(B_R)$ y

$$\begin{aligned}\int_{\{\lambda<u^\varepsilon<C_1\delta\}\cap B_R} |\nabla u^\varepsilon|^2\,dx &= \int_{B_R}\nabla u^\varepsilon\,\nabla w = -\int_{B_R} w\,\Delta u^\varepsilon + \int_{\partial B_R} w\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\eta}\,d\mathcal{H}^{N-1}\\ &= \int_{\partial B_R} w\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\eta}\,d\mathcal{H}^{N-1} \le c(N)LC_1\delta R^{N-1}.\end{aligned}$$

Aquí hemos usado que $\lambda > \varepsilon$ con lo cual $\Delta u^\varepsilon = 0$ en el soporte de w y que $w \le C_1\delta$. $\square$

El teorema estará demostrado cuando hayamos relacionado la medida del delta entorno de $\partial\Omega_\lambda$ con la integral que acabamos de estimar. Tenemos

Lema 3.2.5. *Dado $c_1 > 1$ existen $C_1, C_2, c_2 > 0$ tales que si $\lambda \ge c_1\varepsilon$ y $c_2\lambda \le \delta < 1/8$ se tiene para $R < 1/4$,*

$$\left|\mathcal{N}_\delta(\partial\Omega_\lambda)\cap B_{R-2\delta}\right| \le C_2\int_{\{\lambda<u^\varepsilon<C_1\delta\}\cap B_R}|\nabla u^\varepsilon|^2\,dx.$$

Demostración. Cubrimos $\mathcal{N}_\delta(\partial\Omega_\lambda)\cap B_{R-2\delta}$ con bolas $B_j = B_\delta(x_j)$ con centros $x_j \in \partial\Omega_\lambda \cap B_{R-\delta}$ que se superponen a lo sumo de a n_0 (con $n_0 = n_0(N)$).

Afirmo: En cada una de estas bolas hay subbolas B_j^1 y B_j^2 con radios $r_j = C\delta$ con C independiente de j tales que si $u = (u^\varepsilon-\lambda)^+$ se tiene

$$u \ge \frac{c_0}{8}\delta \quad \text{en } B_j^1, \qquad u \le \frac{c_0}{16}\delta \quad \text{en } B_j^2$$

donde c_0 es la constante de la no degeneración para bolas centradas en $\{u^\varepsilon > \varepsilon\}\cap B_{1/4}$ con radios a lo sumo $1/8$. En efecto, tomo $B_j^2 = B_{r_j}(x_j)$ con $r_j = \dfrac{c_0}{16L}\delta$ donde $L \ge \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^\infty(B_{1/2})}$.

Observemos que $u(x_j) = 0$. Por lo tanto, si $x \in B_j^2$ se tiene $u(x) \le Lr_j = \dfrac{c_0}{16}\delta$.

Sea ahora $y_j \in \overline{B_{\delta/4}(x_j)}$ tal que $u^\varepsilon(y_j) \ge c_0\frac{\delta}{4}$. Sea $B_j^1 = B_{r_j}(y_j)$. Entonces, si $x \in B_j^1$ se tiene,

$$u^\varepsilon(x) \ge u^\varepsilon(y_j) - Lr_j \ge c_0\frac{\delta}{4} - Lr_j.$$

Por lo tanto,

$$u(x) = \big(u^\varepsilon(x)-\lambda\big)^+ \ge c_0\frac{\delta}{4} - Lr_j - \lambda > \Big(\frac{c_0}{4}-\frac{c_0}{16}-c_2^{-1}\Big)\delta \ge \frac{c_0}{8} \quad \text{si } c_2^{-1} \le \frac{c_0}{16}.$$

Sea $m_j = \fint_{B_j} u$. Afirmo que existe $c > 0$ universal tal que en una de las dos bolas B_j^1 o B_j^2 se debe tener $|u(x) - m_j| \geq c\delta$ para todo x. En efecto, si no fuera así existirían $x_1 \in B_j^1$ y $x_2 \in B_j^2$ tales que $|u(x_1) - m_j| < c\delta$ y $|u(x_2) - m_j| < c\delta$. Entonces,

$$\frac{c_0}{8}\delta - \frac{c_0}{16}\delta \leq u(x_1) - u(x_2) < 2c\delta$$

lo que es un absurdo si $c \leq \frac{c_0}{32}$.

De aquí que en una de las dos bolas se debe tener $|u(x) - m_j| \geq \frac{c_0}{32}\delta$ para todo x. Sea κ tal que $|B_j^1| = |B_j^2| = \kappa|B_j|$. Entonces, por la desigualdad de Poincaré (existe $C > 0$ tal que $\int_{B_r} u = 0$ implica que $\int_{B_r} u^2 \leq Cr^2 \int_{B_r} |\nabla u|^2$) se tiene,

$$\kappa\Big(\frac{c_0}{32}\Big)^2\delta^2 \leq \fint_{B_j} |u - m_j|^2\,dx \leq C\delta^2 \fint_{B_j} |\nabla u|^2\,dx.$$

Con lo que concluimos que existe $c > 0$ tal que para todo j se tiene $\int_{B_j} |\nabla u|^2\,dx \geq c|B_j|$. De aquí que como $\mathcal{N}_\delta(\partial\Omega_\lambda) \cap B_{R-\delta} \subset \bigcup B_j$,

$$\begin{aligned}\big|\mathcal{N}_\delta(\partial\Omega_\lambda) \cap B_{R-\delta}\big| &\leq \sum |B_j| \leq \frac{1}{c}\sum \int_{B_j} |\nabla u|^2\,dx \\ &\leq \frac{n_0}{c}\int_{\bigcup B_j} |\nabla u|^2\,dx = \frac{n_0}{c}\int_{\bigcup B_j \cap \{u^\varepsilon > \lambda\}} |\nabla u^\varepsilon|^2\,dx \leq \int_{\{\lambda < u^\varepsilon < C_1\delta\} \cap B_R} |\nabla u^\varepsilon|^2\,dx.\end{aligned}$$

Aquí hemos usado que $\sum \chi_{B_j} \leq n_0\chi_{\cup B_j}$, que $u^\varepsilon(x) < \lambda + L\delta < (c_2^{-1} + L)\delta = C_1\delta$ para $x \in B_j$ y que $\cup B_j \subset B_R$. $\square$

Demostración del Teorema 3.2.3. Aplicando los dos lemas tenemos

$$\begin{aligned}\big|\mathcal{N}_\delta(\Omega_\lambda) \cap B_R\big| &\leq \big|B_R \setminus B_{R-2\delta}\big| + \big|\mathcal{N}_\delta(\Omega_\lambda) \cap B_{R-2\delta}\big| \\ &\leq C_N\delta R^{N-1} + C_0\int_{\{\lambda < u^\varepsilon < C_1\delta\} \cap B_R} |\nabla u^\varepsilon|^2\,dx \leq (C + C_0\,c)\,\delta R^{N-1}.\end{aligned}$$

$\square$

3.3. Regularidad de la frontera libre en sentido de la medida

En la sección anterior hemos probado varias estimaciones independientes de ε para las soluciones de P_ε y sus conjuntos de nivel. Esto nos permitirá pasar al límite bajo subsucesiones y probar que cada función límite u es armónica en el conjunto de positividad y globalmente Lipschitz.

De este modo, el gran trabajo que resta será probar la regularidad de la frontera libre $\Omega\cap\partial\{u>0\}$. Si supiéramos que ésta es una superficie $C^{1,\alpha}$, resultados clásicos de regularidad de soluciones del Problema de Dirichlet darían que la función límite es C^1 hasta la frontera libre.

En este curso no llegaremos a probar este resultado. Pero haremos la primera parte del camino que consiste en probar la regularidad en un sentido débil, en el sentido de la medida.

Por otro lado, probaremos que cada función límite es solución débil (distribucional) del problema de frontera libre:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega\cap\{u>0\},\\ u=0, \quad |\nabla u| = \sqrt{2M} & \text{en } \Omega\cap\partial\{u>0\}. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

De este modo, una vez probado que la frontera libre es $C^{1,\alpha}$, tendríamos que u es solución clásica del problema de frontera libre (3.3.1).

Los resultados de regularidad de u y su frontera libre son de carácter local. Es decir, basta probarlos en un entorno de cada punto de la frontera libre. Como el problema P_ε es invariante bajo rescales del tipo $u^\varepsilon_\lambda(x)=\frac{1}{\lambda}u^\varepsilon(x_0+\lambda x)$, en el sentido de que $u^\varepsilon_\lambda(x)$ es solución de $P_{\varepsilon/\lambda}$ en B_1 si u^ε es solución de P_ε en $B_\lambda(x_0)$, vamos a suponer que estamos en la bola unitaria.

Proposición 3.3.1. *Sea $\{u^{\varepsilon_{j_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $\varepsilon_{j_n}\to 0$ soluciones de $P_{\varepsilon_{j_n}}$ en B_1 tales que $u^{\varepsilon_{j_n}} \rightrightarrows u_0$ en B_1. Entonces,*

(a) $\{u_0>0\}\cap B_{1/4}$ es límite en distancia de Hausdorff de $\{u^{\varepsilon_{j_n}}>c_1\varepsilon_{j_n}\}\cap B_{1/4}$ con $c_1>1$. Es decir, para $\delta>0$ suficientemente chico existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq n_0$,

$$B_{\frac14}\cap\{u^{\varepsilon_{j_n}}>c_1\varepsilon_{j_n}\}\subset\mathcal{N}_\delta(\{u_0>0\}) \quad y \quad B_{\frac14}\cap\{u_0>0\}\subset\mathcal{N}_\delta(\{u^{\varepsilon_{j_n}}>c_1\varepsilon_{j_n}\}).$$

(b) u_0 es localmente Lipschitz en B_1, armónica en $\{u_0>0\}$ y uniformemente no degenerada en $B_{\frac18}\cap\partial\{u_0>0\}$. Ésto último quiere decir que existen c_0 y ρ_0 constantes positivas tales que si $x_0\in B_{\frac18}\cap\partial\{u_0>0\}$,

$$\sup_{B_\rho(x_0)} u_0 \geq c_0\rho \quad si \quad 0<\rho<\rho_0.$$

(c) Existe $C>0$ tal que si δ es chico y $R<\frac18$,

$$|\mathcal{N}_\delta(\partial\{u_0>0\})\cap B_R|\leq C\delta R^{N-1} \quad y \quad \mathcal{H}^{N-1}(\partial\{u_0>0\}\cap B_R)\leq CR^{N-1}.$$

Demostración. Notaremos

$$u_n=u^{\varepsilon_{jn}} \qquad \varepsilon_n=\varepsilon_{jn} \qquad \Omega_n=\{u_n>c_1\varepsilon_n\} \qquad \Omega_0=\{u_0>0\}.$$

Probemos (a).

Veamos que para todo $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$,

$$B_{\frac{1}{4}} \cap \Omega_0 \subset \mathcal{N}_\delta(\Omega_n) \qquad \text{y} \tag{3.3.2}$$

$$B_{\frac{1}{4}} \cap \Omega_n \subset \mathcal{N}_\delta(\Omega_0). \tag{3.3.3}$$

Para demostrar (3.3.2) razonemos por el absurdo. Si suponemos que no, existirá una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que notaremos $\{x_n\} \subset \Omega_0 \cap B_{1/4}$ tal que $x_n \notin \mathcal{N}_\delta(\Omega_n)$. Entonces

$$B_\delta(x_n) \subset \{u_n \leq c_1\varepsilon_n\}.$$

Como $x_n \in B_{\frac{1}{4}}$, podemos suponer que $x_n \to x_0$.

Ahora, si $x \in B_\delta(x_0)$, como $x_n \to x_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_\delta(x_n)$ si $n \geq n_0$. Como $B_\delta(x_n) \subset \{u_n \leq c_1\varepsilon_n\}$, resulta $u_n(x) \leq c_1\varepsilon_n$ si $n \geq n_0$ y, usando que $\varepsilon_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y que $u_n \rightrightarrows u_0$, pasando al límite tenemos que $u_0(x) = 0$. Así,

$$u_0 \equiv 0 \quad \text{en} \quad B_\delta(x_0).$$

Por otro lado, como $x_n \to x_0$ y $x_n \in \Omega_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$x_0 \in \overline{\Omega_0} = \overline{\{u_0 > 0\}}$$

pero $u_0 \equiv 0$ en $B_\delta(x_0)$, lo que nos lleva a un absurdo. Luego,

$$B_{\frac{1}{4}} \cap \Omega_0 \subset \mathcal{N}_\delta(\Omega_n).$$

Veamos ahora (3.3.3).

Si suponemos que no vale existirá una sucesión $\{x_n\} \subset \Omega_n \cap B_{1/4}$ tal que $x_n \notin \mathcal{N}_\delta(\Omega_0)$, es decir,

$$u_0(x) \equiv 0 \quad \text{en} \quad B_\delta(x_n) \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como antes, podemos suponer que $x_n \to x_0$. Entonces para n suficientemente grande tenemos que $B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \subset B_\delta(x_n)$, de lo que resulta

$$u_0 \equiv 0 \quad \text{en} \quad B_{\frac{\delta}{2}}(x_0).$$

Por otro lado, usando que $x_n \in \Omega_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, consideramos $y_n \in \overline{B_{\frac{\delta}{4}}(x_n)}$ tal que

$$u_n(y_n) \geq c_0\frac{\delta}{4} \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Podemos suponer que $y_n \to y_0$ con $u_0(y_0) \geq c_0\frac{\delta}{4} > 0$ pero $y_0 \in \overline{B_{\frac{\delta}{4}}(x_0)} \subset B_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ y $u_0 \equiv 0$ en $B_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$, lo que nos lleva a un absurdo.
Luego,

$$B_{\frac{1}{4}} \cap \Omega_n \subset \mathcal{N}_\delta(\Omega_0).$$

Ahora probemos (b).

Como $u_n \rightrightarrows u_0$ sobre compactos, se sigue que si $K \subset\subset \{u_0 > 0\}$, se tiene que $K \subset \{u_n > \varepsilon_n\}$ si n es suficientemente grande. Por lo tanto, $\Delta u_n = 0$ y $|\nabla u_n| \le L$ en K. De aquí que $\Delta u_0 = 0$ y $|\nabla u_0| \le L$ en K.

Veamos que u_0 es uniformemente no degenerada. En efecto, sea $x_0 \in B_{1/8} \cap \partial\{u_0 > 0\}$. Sean $\delta < 1/8$ e $y_0 \in B_{1/8} \cap \{u_0 > 0\}$ con $|x_0 - y_0| < \delta$. Por el punto (a) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \ge n_0$, $y_0 \in \mathcal{N}_\delta(\Omega_n)$ y por lo tanto existe $y_n \in \Omega_n$ con $|y_0 - y_n| < \delta$. Como $|y_0| < 1/8$ y $\delta < 1/8$, se sigue que $y_n \in B_{1/4}$ y, aplicando el Corolario 3.2.1 tenemos que

$$\sup_{B_\rho(y_n)} u_n \ge c_0\rho \quad \text{si} \quad 0 < \rho < \rho_0.$$

De aquí que, si $0 < \rho < \rho_0$, existe $x_n \in \overline{B_\rho(y_n)}$ con $u_n(x_n) \ge c_0\rho$. Podemos suponer, tomando una subsucesión, que $x_n \to \bar{x}$ con $u_0(\bar{x}) \ge c_0\rho$.

Ahora bien,

$$|x_0 - \bar{x}| \le 2\delta + \rho + |x_n - \bar{x}|.$$

Por lo tanto, $|x_0 - \bar{x}| \le 2\delta + \rho$ y, como δ es arbitrario se sigue que $\bar{x} \in \overline{B_\rho(x_0)}$. Concluimos que

$$\sup_{B_\rho(x_0)} u_0 \ge c_0\rho.$$

Para terminar, veamos (c).

Queremos ver que

$$|\mathcal{N}_\delta(\partial\Omega_0) \cap B_R| \le C\delta R^{N-1} \quad \text{si} \quad \delta < 1/8 \quad \text{y} \quad R < 1/8.$$

Para ésto antes veamos que existe un $n_0 = n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que $\partial\Omega_0 \cap B_{1/8} \subset \mathcal{N}_{2\delta}(\partial\Omega_n)$ si $n \ge n_0$. En efecto, sea $x \in \partial\Omega_0 \cap B_{1/8}$ y sea $y \in B_\delta(x) \cap \Omega_0$. Usando (a) sabemos que $B_{1/4} \cap \Omega_0 \subset \mathcal{N}_\delta(\Omega_n)$. Si $y_n \in \Omega_n$ es tal que $|y_n - y| < \delta$, tenemos que

$$|y_n - x| \le |y_n - y| + |y - x| < \delta + \delta = 2\delta.$$

Como $x \in \partial\Omega_0 \cap B_{1/8}$, tomamos $z \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}_0$ tal que $|x - z| < \delta$. Tenemos, entonces, que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \ge n_2, z \notin \Omega_n$. En efecto, existe $\delta_1 > 0$ tal que $u_0 \equiv 0$ en $B_{\delta_1}(z)$. Usando la parte (2) del ítem (a), si suponemos que $z \in \Omega_n$, tenemos que $z \in \mathcal{N}_{\delta_1}(\Omega_0)$ si $n \ge n_1$, lo que nos lleva a un absurdo.

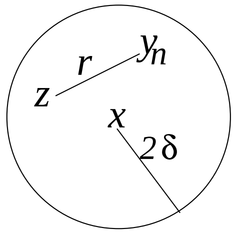
Entonces tenemos que existe un $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \ge n_2, z \notin \Omega_n$.

En el segmento de extremos y_n y z hay un punto que llamaremos $r \in \partial\Omega_n \cap B_{2\delta}(x)$. Por lo tanto, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$B_{1/8} \cap \partial\Omega_0 \subset \mathcal{N}_{2\delta}(\partial\Omega_n) \quad \text{si} \quad n \ge n_0.$$

Luego,

$$|\mathcal{N}_\delta(\partial\Omega_0) \cap B_R| \le |\mathcal{N}_{3\delta}(\partial\Omega_n) \cap B_R| \quad \text{si} \quad n \ge n_0 \quad \text{y } R < \frac{1}{8}.$$



Por el Teorema 3.2.3 resulta que

$$|\mathcal{N}_{3\delta}(\partial\Omega_n) \cap B_R| \leq 3\delta C R^{N-1},$$

de lo que tenemos que

$$|\mathcal{N}_{\delta}(\partial\Omega_0) \cap B_R| \leq C\delta R^{N-1} \quad \text{si} \quad \delta < \frac{1}{8} \quad \text{y} \quad R < \frac{1}{8}.$$

Falta ver que

$$|\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega_0 \cap B_R)| \leq C R^{N-1} \quad \text{si} \quad R < \frac{1}{8}.$$

Sea $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un cubrimiento de $\partial\Omega_0 \cap B_R$ con bolas de radio δ centradas en $\partial\Omega_0 \cap B_R$ tal que se intersecan a lo sumo de a $n_0(\mathbb{N})$. Es decir,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{B_j} \leq n_0.$$

Como

$$\mathcal{H}^{N-1}_{2\delta}(\partial\Omega_0 \cap B_R) = \text{ínf}\left\{\gamma(N-1)\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\frac{\text{diam}(C_j)}{2}\Big)^{N-1} : (\partial\Omega_0 \cap B_R) \subset \bigcup C_j,\ \text{diam}(C_j) \leq 2\delta\right\},$$

resulta que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{N-1}_{2\delta}(\partial\Omega_0 \cap B_R) &\leq \gamma(N-1)\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\frac{\text{diam}(B_j)}{2}\Big)^{N-1} \\
&\leq \frac{\gamma(N-1)}{\delta}\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\frac{\text{diam}(B_j)}{2}\Big)^{N} \\
&= \frac{\gamma(N-1)}{\delta\gamma(N)}\sum_{j=1}^{\infty}|B_j| \\
&\leq \frac{\gamma(N-1)}{\delta\gamma(N)} n_0\, |\mathcal{N}_{\delta}(\partial\Omega_0) \cap B_{R+\delta}|.
\end{aligned}$$

Como $|\mathcal{N}_\delta(\partial\Omega_0)\cap B_{R+\delta}|\leq C\delta(R+\delta)^{N-1}$, llegamos a que

$$\mathcal{H}^{N-1}_{2\delta}(\partial\Omega_0\cap B_R)\leq \frac{\gamma(N-1)}{\gamma(N)}n_0C(R+\delta)^{N-1}.$$

Haciendo δ tender a cero,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega_0\cap B_R) &\leq \lim_{\delta\to 0}\frac{\gamma(N-1)}{\gamma(N)}n_0C(R+\delta)^{N-1}\\ &= \frac{\gamma(N-1)}{\gamma(N)}n_0CR^{N-1}\\ &= CR^{N-1},\end{aligned}$$

que era lo que nos restaba probar. □

Proposición 3.3.2. u_0 *es minimizante local en* $B_{1/8}$ *de*

$$J(v)=\frac{1}{2}\int|\nabla v|^2\,dx+M\int\chi_{\{v>0\}}\,dx.$$

Demostración. Para x_0 fijo notaremos

$$J_{r,n}(v)=\frac{1}{2}\int_{B_r(x_0)}|\nabla v|^2+\int_{B_r(x_0)}\mathcal{B}_n(v)\quad\text{donde}\quad\mathcal{B}_n=\mathcal{B}_{\varepsilon_n}$$

y

$$J_{r,0}(v)=\frac{1}{2}\int_{B_r(x_0)}|\nabla v|^2+M\int_{B_r(x_0)}\chi_{\{v>0\}}.$$

Sean $x_o\in B_{1/8}$ y $r>0$ tales que $B_r(x_0)\subset\subset B_{1/8}$, y sea $v\in u_0+H^1_0(B_r(x_0))$.
Para conseguir una función admisible para el problema n, consideremos $h>0$ tal que $B_{r+h}(x_0)\subset B_{1/8}$; y extendamos v a $B_{r+h}(x_0)$ de la siguiente forma:

$$v_{h,n}(x)=\begin{cases}v(x) & \text{si}\quad x\in B_r(x_0)\\ u_0(x)+(\frac{|x-x_0|-r}{h})(u_n(x)-u_0(x)) & \text{si}\quad x\in B_{r+h}(x_0)\setminus B_r(x_0).\end{cases}$$

Así tenemos que $v_{h,n}\in u_n+H^1_0(B_{r+h}(x_0))$.

Entonces,

$$J_{r+h,n}(v_{h,n})\geq J_{r+h,n}(u_n)\geq J_{r,n}(u_n).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}J_{r+h,n}(v_{h,n}) &= J_{r,0}(v)+\int_{B_r(x_0)}\left[\mathcal{B}_n(v)-M\chi_{\{v>0\}}\right]\\ &+\frac{1}{2}\int_{B_{r+h}(x_0)\setminus B_r(x_0)}\Big|\nabla u_0+\frac{|x-x_0|-r}{h}(\nabla u_n-\nabla u_0)+\Big(\frac{x-x_0}{h|x-x_0|}(u_n(x)-u_0(x)\Big)\Big|^2\\ &+\int_{B_{r+h}(x_0)\setminus B_r(x_0)}\mathcal{B}_n(v_{h,n})=J_{r,0}(v)+I+II+III.\end{aligned}$$

Notemos con $B_{r+h} \setminus B_r$ a $B_{r+h}(x_0) \setminus B_r(x_0)$.

Con el fin de estimar I, observemos que

$$\left[\mathcal{B}_n(v) - M\chi_{\{v>0\}}\right] \to 0 \quad \text{a.e. } B_R.$$

En efecto, si $v(x) > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $v(x) \geq \varepsilon_n$ si $n \geq n_0$. Así, $\mathcal{B}_n(v(x)) = M$ si $n \geq n_0$; y si $v(x) = 0$, $\mathcal{B}_n(v(x)) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Además, como

$$|\mathcal{B}_n(v) - M\chi_{\{v>0\}}| \leq 2M,$$

tenemos que $I \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Por otro lado,

$$|II| \leq \int_{B_{r+h} \setminus B_r} \left|\nabla u_0 + \frac{|x-x_0|-r}{h}(\nabla u_n - \nabla u_0)\right|^2 + \frac{1}{h^2}\int_{B_{r+h}\setminus B_r} |u_n(x) - u_0(x)|^2.$$

Usando que $\{\nabla u_n\}$ está acotada uniformemente, tenemos que

$$\left|\nabla u_0 + \frac{|x-x_0|-r}{h}(\nabla u_n - \nabla u_0)\right|^2 \leq L.$$

Así, para el primer sumando tenemos que

$$\int_{B_{r+h}\setminus B_r} \left|\nabla u_0 + \frac{|x-x_0-r|}{h}(\nabla u_n - \nabla u_0)\right|^2 \leq L|B_{r+h} \setminus B_r| \leq chr^{N-1}.$$

Como $u_n \rightrightarrows u_0$ sobre compactos se tiene,

$$|II| \leq chr^{N-1} + \frac{1}{h^2}\int_{B_{r+h}\setminus B_r} |u_n - u_0|^2 \to chr^{N-1} \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

Finalmente,

$$|III| \leq M|B_{r+h} \setminus B_r| \leq chr^{N-1}.$$

Entonces,

$$\limsup_{n\to\infty} J_{r+h,n}(v_{h,n}) \leq J_{r,0}(v) + chr^{N-1}.$$

Por otro lado habíamos observado que

$$J_{r+h,n}(v_{h,n}) \geq J_{r+h,n}(u_n) \geq J_{r,n}(u_n).$$

Veamos que $\liminf_{n\to\infty} J_{r,n}(u_n) \geq J_{r,0}(u_0)$. En efecto,

$$J_{r,n}(u_n) = \frac{1}{2}\int_{B_r(x_0)} |\nabla u_n|^2 + \int_{B_r(x_0)} \mathcal{B}_n(u_n).$$

Como sabemos que $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u_0$ en $L^2(B_1)$, usando el Lema de Fatou, tenemos que

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla u_0|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{B_r(x_0)} |\nabla u_n|^2.$$

Faltaría ver que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_r(x_0)} \mathcal{B}_n(u_n) \geq M \int_{B_r(x_0)} \chi_{\{u_0>0\}} = M \int_{B_r(x_0)} \chi_{\Omega_0}.$$

Observemos que

$$\int_{B_r(x_0)} \mathcal{B}_n(u_n) \geq \int_{(B_r(x_0)\cap\Omega_0)\setminus\mathcal{N}_\delta(\partial\Omega_0)} \mathcal{B}_n(u_n).$$

Por otro lado, por la no degeneración de u_0 se tiene que existe una constante $C > 0$ tal que

$$u_0 \geq C\delta > 0 \quad \text{en} \quad (B_r(x_0) \cap \Omega_0) \setminus \mathcal{N}_\delta(\partial\Omega_0)$$

y como $u_n \rightrightarrows u_0$, existe un $n_0 = n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que

$$u_n \geq \varepsilon_n \quad \text{en} \quad (B_r(x_0) \cap \Omega_0) \setminus \mathcal{N}_\delta(\partial\Omega_0) \quad \text{si} \quad n \geq n_0.$$

Entonces,

$$\mathcal{B}_n(u_n) = M \quad \text{en} \quad (B_r(x_0) \cap \Omega_0) \setminus \mathcal{N}_\delta(\partial\Omega_0).$$

Así,

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(x_0)} \mathcal{B}_n(u_n) &\geq \int_{(B_r(x_0)\cap\Omega_0)\setminus\mathcal{N}_\delta(\partial\Omega_0)} \mathcal{B}_n(u_n) \\
&= M|(B_r(x_0) \cap \Omega_0) \setminus \mathcal{N}_\delta(\partial\Omega_0)| \\
&= M|B_r(x_0) \cap \Omega_0| - M|B_r(x_0) \cap \mathcal{N}_\delta^+(\partial\Omega_0)|.
\end{aligned}$$

Usando que

$$|B_r(x_0) \cap \mathcal{N}_\delta^+(\partial\Omega_0)| \leq |B_r(x_0) \cap \mathcal{N}_\delta(\partial\Omega_0)| \leq c\delta r^{N-1}$$

tenemos que,

$$\int_{B_r(x_0)} \mathcal{B}_n(u_n) \geq M \int_{B_r(x_0)} \chi_{\Omega_0} - c\delta r^{N-1}.$$

Entonces,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_r(x_0)} \mathcal{B}_n(u_n) \geq M \int_{B_r(x_0)} \chi_{\Omega_0} - c\delta r^{N-1}.$$

Como δ es arbitrario, resulta

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_r(x_0)} \mathcal{B}_n(u_n) \geq M \int_{B_r(x_0)} \chi_{\Omega_0}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} J_{r,0}(u_0) &\leq \liminf_{n\to\infty} J_{r,n}(u_n) \leq \limsup_{n\to\infty} J_{r,n}(u_n) \leq \limsup_{n\to\infty} J_{r+h,n}(v_{h,n}) \\ &\leq J_{r,0}(v) + chr^{N-1}. \end{aligned}$$

Si tomamos límite cuando $h \to 0$, obtenemos que

$$J_{r,0}(u_0) \leq J_{r,0}(v),$$

que era lo que queríamos demostrar.

Luego, u_0 es minimizante local de

$$J(v) = \frac{1}{2}\int |\nabla v|^2\, dx + M\int \chi_{\{v>0\}}\, dx \quad \text{en } B_{1/8}.$$

□

Antes de proseguir con el estudio de la regularidad de la frontera libre veamos algunas formas equivalentes de decir que una función no degenera uniformemente.

Proposición 3.3.3. *Sea $u \in Lip_{loc}(\Omega), u \geq 0$ y $\Delta u \geq 0$ en sentido débil en Ω. Sea $\Omega' \subset\subset \Omega$. Si $x_0 \in \Omega' \cap \partial\big\{u > 0\big\}$ y $B_{r_0}(x_0) \subset\subset \Omega$, son equivalentes:*

1. *Existen C_0, $r_0 > 0$ tales que* $\sup_{B_r(x_0)} u \geq C_0 r, \quad 0 < r \leq r_0.$
2. *Existen C_0, $r_0 > 0$ tales que* $\sup_{\partial B_r(x_0)} u \geq C_0 r, \quad 0 < r \leq r_0.$
3. *Existen C_0, $r_0 > 0$ tales que* $⨍_{B_r(x_0)} u \geq C_0 r, \quad 0 < r \leq r_0.$
4. *Existen C_0, $r_0 > 0$ tales que* $⨍_{\partial B_r(x_0)} u \geq C_0 r, \quad 0 < r \leq r_0.$

C_0 y r_0 no son necesariamente los mismos en cada ocurrencia.

Demostración. (1) ⇒ (2)

Como $\Delta u \geq 0$ en sentido débil en Ω, u satisface el principio del máximo. Por lo tanto,

$$\sup_{\partial B_r(x_0)} u = \sup_{B_r(x_0)} u \geq C_0 r, \quad 0 < r \leq r_0.$$

(2) ⇒ (3)

Sabemos que

$$\sup_{\partial B_r(x_0)} u \geq C_0 r, \quad 0 < r \leq r_0.$$

Supongamos que no vale (3), entonces existe una sucesión $r_n \to 0$ tal que

$$\fint_{B_{r_n}(x_0)} u \leq \frac{1}{n} r_n.$$

Consideremos

$$u_n(x) = \frac{1}{r_n} u(x_0 + r_n x), \quad \text{para} \quad x \in B_1.$$

En la desigualdad $\fint_{B_{r_n}(x_0)} u \leq \frac{1}{n} r_n$, dividamos por r_n. Entonces,

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{|B_{r_n}|} \int_{B_{r_n}(x_0)} \frac{u(x)}{r_n}.$$

Cambiando variables tenemos,

$$\frac{1}{|B_{r_n}|} \int_{B_{r_n}(x_0)} \frac{u(x)}{r_n}\, dx = \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} u_n(y)\, dy \leq \frac{1}{n}.$$

Como $\{u_n\}$ y $\{|\nabla u_n|\}$ están acotadas en $|| \; ||_{L^\infty(B_1)}$, podemos suponer (tomando una subsucesión) que existe $u_\infty \in Lip(B_1)$ tal que $u_n \rightrightarrows u_\infty$ en B_1. Entonces,

$$\fint_{B_1} u_n \to \fint_{B_1} u_\infty$$

con lo cual

$$\fint_{B_1} u_\infty = 0$$

y como

$$u_\infty \geq 0$$

se tiene

$$u_\infty \equiv 0 \quad \text{en} \quad B_1.$$

Por (2) teníamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in \partial B_{r_n}(x_0)$ tal que $u(x_n) \geq C_0 r_n$.

Consideremos

$$\bar{x}_n = \frac{x_n - x_0}{r_n} \in \partial B_1.$$

Entonces

$$u_n(\bar{x}_n) = \frac{1}{r_n} u\Big(x_0 + r_n \frac{x_n - x_0}{r_n}\Big) = \frac{1}{r_n} u(x_n) \geq C_0.$$

Para una subsucesión resulta $\bar{x}_n \to \bar{x}$ con $u_\infty(\bar{x}) \geq C_0 > 0$, lo que nos lleva a un absurdo.

Luego, existen $C_1 > 0$, $r_1 > 0$ tales que

$$\fint_{B_r(x_0)} u \geq C_1 r, \quad 0 < r \leq r_1.$$

(3) $\Rightarrow$ (4)

Sabemos que $\fint_{B_r(x_0)} u \geq C_0 r$ si $0 < r \leq r_0$. Supongamos que no vale (4), entonces existe una sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$r_n \to 0 \quad \text{y} \quad \fint_{\partial B_{r_n}(x_0)} u \leq \frac{1}{n} r_n.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$u_n(x) = \frac{1}{r_n} u(x_0 + r_n x) \quad \text{para} \quad x \in B_1.$$

Entonces tenemos que

$$\fint_{\partial B_{r_n}(x_0)} u(x) \leq \frac{1}{n} r_n,$$

y dividiendo a ambos lados por $0 < r_n$,

$$\fint_{\partial B_{r_n}(x_0)} \frac{u(x)}{r_n} \leq \frac{1}{n}.$$

Haciendo un cambio de variables, tenemos

$$\frac{1}{\mathcal{H}^{N-1}(\partial B_{r_n})} \int_{\partial B_{r_n}(x_0)} \frac{u(x)}{r_n} = \fint_{\partial B_1} u_n(y)$$

y tomando límite, resulta

$$\frac{1}{n} \geq \fint_{\partial B_1} u_n(y) \to \fint_{\partial B_1} u_\infty(x).$$

Como $u_\infty \geq 0$ en B_1 y $u_\infty \in C(\overline{B_1})$ se tiene,

$$u_\infty \equiv 0 \quad \text{en} \quad \partial B_1.$$

Pero $\Delta u_\infty \geq 0$ en sentido débil en B_1 entonces, por el Principio del máximo,

$$u_\infty \equiv 0 \quad \text{en} \quad B_1.$$

Usando (3),

$$\fint_{B_{r_n}(x_0)} u(x)\, dx \geq C_0 r_n \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces,

$$C_0 \leq \fint_{B_1} u_n(y)\, dy \to \fint_{B_1} u_\infty(x)\, dx,$$

de lo que tenemos que

$$0 < C_0 \leq \fint_{B_1} u_\infty(x)\, dx \quad \text{y} \quad u_\infty \equiv 0 \quad \text{en} \quad B_1,$$

lo que es un absurdo.

(4) $\Rightarrow$ (1)

Supongamos que no vale (1); entonces existe una sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$r_n \to 0 \quad \text{y} \quad \sup_{B_{r_n}(x_0)} u \leq \frac{1}{n} r_n.$$

Consideremos, como antes, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(x) = \frac{1}{r_n} u(x_0 + r_n x) \quad \text{para} \quad x \in B_1.$$

Ya habíamos visto que $\{u_n\}_{n\geq 1}$ era una familia equiacotada y equicontinua y por lo tanto existía $u_\infty \in C(\overline{B_1})$ tal que

$$u_n \rightrightarrows u_\infty \quad \text{en} \quad \overline{B_1}.$$

Como $u_n \geq 0$ en B_1 y $\Delta u_n \geq 0$ en sentido débil en B_1 resulta que $u_\infty \geq 0$ en B_1 y $\Delta u_\infty \geq 0$ en sentido débil en B_1.

Tenemos que

$$\sup_{B_{r_n}(x_0)} u \leq \frac{1}{n} r_n,$$

con lo cual,

$$\sup_{B_1} u_n \leq \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto,

$$\sup_{B_1} u_\infty \leq 0.$$

Como $u_\infty \geq 0$ en B_1 tenemos que $u_\infty \equiv 0$ en B_1. Más aún, dado que $u_\infty \in C(\overline{B_1})$, resulta que

$$u_\infty \equiv 0 \quad \text{en} \quad \overline{B_1}$$

lo que implica que

$$\fint_{\partial B_1} u_\infty = 0.$$

Usando (4) tenemos que

$$\fint_{\partial B_{r_n}(x_0)} u \geq C_0 r_n;$$

y, mediante un cambio de variables,

$$C_0 \leq \fint_{\partial B_1} u_n \to \fint_{\partial B_1} u_\infty.$$

Así,

$$\fint_{\partial B_1} u_\infty \geq C_0 > 0 \qquad \text{pero} \qquad u_\infty \equiv 0 \quad \text{en} \quad \overline{B_1},$$

lo que nos lleva a un absurdo. □

Probemos ahora que tanto $\{u_0 > 0\}$ como $\{u_0 = 0\}$ tienen densidad positiva en todo punto de $\partial\{u_0 > 0\}$. A saber,

Proposición 3.3.4. *Dado $R < 1/8$, existen $r_0 > 0$ y $0 < C < 1$ tales que si $x_0 \in B_R \cap \partial\{u_0 > 0\}$ y $0 < r < r_0$, entonces*

$$C \leq \frac{|B_r(x_0) \cap \{u_0 > 0\}|}{|B_R|} \leq 1 - C.$$

Demostración. La primera desigualdad sale de la no degeneración. En efecto, sea ρ_0 la constante de la Proposición 3.3.1 (b). Sea $0 < r \leq \rho_0$. Entonces,

$$\sup_{B_{r/2}} u_0 \geq c_0 r.$$

Sean $y_0 \in \overline{B_{\frac{r}{2}}(x_0)}$ con $u_0(y_0) \geq c_0 r$ y sea $x \in B_{\kappa r}(y_0)$. Entonces,

$$u_0(x) \geq u_0(y_0) - L\kappa r \geq c_0 r - L\kappa r > 0 \quad \text{si} \quad \kappa < \frac{c_0}{L}.$$

Entonces,

$$|B_r(x_0) \cap \big\{u_0 > 0\big\}| \geq |B_{\kappa r}(y_0)| = \kappa^N |B_r|,$$

es decir,

$$\frac{|B_r(x_0) \cap \big\{u_0 > 0\big\}|}{|B_r|} \geq \kappa^N.$$

Para la otra desigualdad, usaremos que u_0 minimiza un funcional de energía. Para esto, sea v la solución de

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{en} \quad B_r(x_0) \\ v = u_0 & \text{en} \quad \partial B_r(x_0). \end{cases}$$

Afirmamos que $v > 0$ en $B_r(x_0)$. En efecto, o bien se tiene eso, o bien $v \equiv 0$ en $B_r(x_0)$. Como u_0 no es idénticamente nula en $B_r(x_0)$ y es subarmónica y por lo tanto no idénticamente nula en $\partial B_r(x_0)$ deducimos que

$$v > 0 \quad \text{en} \quad B_r(x_0).$$

Por otro lado, sabemos que $J_{r,0}(v) \geq J_{r,0}(u_0)$. Pero,

$$J_{r,0}(v) = \frac{1}{2}\int_{B_r(x_0)} |\nabla v|^2 + M\int_{B_r(x_0)} \chi_{\{v>0\}} = \frac{1}{2}\int_{B_r(x_0)} |\nabla v|^2 + M|B_r(x_0)|$$

y

$$J_{r,0}(u_0) = \frac{1}{2}\int_{B_r(x_0)} |\nabla u_0|^2 + M\int_{B_r(x_0)} \chi_{\{u_0>0\}} = \frac{1}{2}\int_{B_r(x_0)} |\nabla u_0|^2 + M|B_r(x_0)\cap\Omega_0|.$$

Entonces,

$$\frac{1}{2}\int_{B_r(x_0)} |\nabla v|^2 + M|B_r| \geq \frac{1}{2}\int_{B_r(x_0)} |\nabla u_0|^2 + M|B_r(x_0)\cap\Omega_0|.$$

Es decir,

$$M(|B_r| - |B_r(x_0)\cap\Omega_0|) \geq \frac{1}{2}\int_{B_r(x_0)} [|\nabla u_0|^2 - |\nabla v|^2].$$

Como $(|B_r| - |B_r(x_0)\cap\Omega_0|) = |B_r\cap\{u_0=0\}|$, dividiendo por $|B_r|$ en ambos miembros, resulta:

$$M\frac{|B_r\cap\{u_0=0\}|}{|B_r(x_0)|} \geq \frac{1}{2}⨍_{B_r(x_0)} [|\nabla u_0|^2 - |\nabla v|^2].$$

Tenemos que

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla(u_0-v)|^2 = \int_{B_r(x_0)} |\nabla u_0|^2 + \int_{B_r(x_0)} |\nabla v|^2 - 2\int_{B_r(x_0)} \nabla u_0\nabla v.$$

Pero

$$\int_{B_r(x_0)} \nabla u_0\nabla v = \int_{B_r(x_0)} |\nabla v|^2$$

pues, como $\Delta v = 0$ en $B_r(x_0)$,

$$0 = \int_{B_r(x_0)} \nabla v\nabla\varphi \quad \text{para toda} \quad \varphi\in H_0^1(B_r(x_0)).$$

Tomando $\varphi = u_0 - v$, resulta

$$0 = \int_{B_r(x_0)} \nabla v\nabla(u_0-v) = \int_{B_r(x_0)} \nabla v\nabla u_0 - \int_{B_r(x_0)} |\nabla v|^2.$$

Entonces,

$$\frac{1}{2}⨍_{B_r(x_0)} [|\nabla u_0|^2 - |\nabla v|^2] = \frac{1}{2}⨍_{B_r(x_0)} |\nabla(u_0-v)|^2.$$

De lo que resulta que

$$M\frac{|B_r\cap\{u_0=0\}|}{|B_r|} \geq \frac{1}{2}⨍_{B_r(x_0)} |\nabla(u_0-v)|^2 \geq \frac{C}{r^2}⨍_{B_r(x_0)} (u_0-v)^2,$$

usando en la última acotación la Desigualdad de Poincaré.

Veamos ahora que $v - u_0 \geq C_0 r$ en $B_{\kappa r}(x_0)$ con κ y C_0 independientes de r y x_0.

En efecto, como $u_0(x_0) = 0$ se tiene que $u_0 \leq L\kappa r$ en $B_{\kappa r}(x_0)$.

Por otro lado, como $\Delta v = 0$ en $B_r(x_0)$ y $v = u_0$ en $\partial B_r(x_0)$, y u_0 es uniformemente no degenerada,

$$v(x_0) = \fint_{\partial B_r(x_0)} u_0 \geq C_0 r.$$

Además,

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(x_0))} \leq C \sup_{B_r(x_0)} v = C \sup_{\partial B_r(x_0)} v = C \sup_{\partial B_r(x_0)} u_0 \leq K,$$

donde K es una constante que existe debido a que u_0 es acotada.

Entonces, para $x \in B_{\kappa r}(x_0), 0 < \kappa < \frac{1}{2}$,

$$v(x) \geq v(x_0) - K\kappa r \geq C_0 r - K\kappa r.$$

Así,

$$(v - u_0)(x) \geq C_0 r - K\kappa r - L\kappa r \geq \frac{C_0 r}{2} \quad \text{si} \quad \kappa \leq \kappa_0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} M\frac{|B_r \cap \{u_0 = 0\}|}{|B_r|} &\geq \frac{C}{r^2|B_r|}\int_{B_{\kappa r}(x_0)} |v - u_0|^2 \geq C\Big(\frac{C_0}{2}\Big)^2 \frac{|B_{\kappa r}(x_0)|}{|B_r|} \\ &= C\Big(\frac{C_0}{2}\Big)^2 \kappa^N. \end{aligned}$$

Entonces resulta que

$$\frac{|B_r(x_0) \cap \{u_0 > 0\}|}{|B_r|} \leq 1 - \frac{C}{M}\Big(\frac{C_0}{2}\Big)^2 \kappa^N.$$

$\square$

Supongamos por un momento que $u_0 \in C^1$ a través de $\partial\{u_0 > 0\}$. Entonces si $x_0 \in \partial\{u_0 > 0\}$ se tiene para un $|\nu| = 1$ que $\nabla u_0(x_0) = |\nabla u_0(x_0)|\nu$.

Haciendo el desarrollo de Taylor de u_0 alrededor de x_0, como $u_0(x_0) = 0$, tenemos:

$$u_0(x) = \langle \nabla u_0(x_0), x - x_0 \rangle + o(|x - x_0|).$$

Por lo tanto,

$$u_0(x) = |\nabla u_0(x_0)| < x - x_0, \nu > +o(|x - x_0|).$$

En nuestro caso, no se tendrá esta regularidad, pero este desarrollo se puede hacer si $\partial\{u_0 > 0\} \in C^1$ y $u_0 \in C^1(\overline{\{u_0 > 0\}})$. En efecto, extendemos u_0 a un entorno de $\partial\{u_0 > 0\}$ como función C^1, hacemos el desarrollo de Taylor y deducimos que

$$u_0(x) = |\nabla u_0(x_0)| < x - x_0, \nu >^+ + o(|x - x_0|)$$

pues del lado "exterior", $u_0 \equiv 0$.

Por otro lado, si $x_0 \in \partial\{u_0 > 0\}$ y existe $\alpha > 0$ tal que

$$u_0(x) = \alpha < x - x_0, \nu >^+ + o(|x - x_0|),$$

se tiene que $\alpha = |\nabla u_0(x_0)|$. De modo que este desarrollo asintótico es una forma débil de decir que $|\nabla u_0(x_0)| = \alpha$ en estos puntos donde hay una normal ν a $\partial\{u_0 > 0\}$ en algún sentido razonable. Comenzamos entonces con la siguiente definición,

Definición 3.3.1. *Sea Ω un conjunto de perímetro finito y $x_0 \in \partial\Omega$. Decimos que $x_0 \in \partial^*\Omega$ (la frontera en medida) si verifica:*

$$\limsup_{r\to 0} \frac{|B_r(x_0) \cap \Omega|}{|B_r|} > 0 \quad y \quad \limsup_{r\to 0} \frac{|B_r(x_0) \cap \Omega^c|}{|B_r|} > 0$$

Para $\mathcal{H}^{N-1}$-a. e. $x_0 \in \partial^*\Omega, \exists$ la normal interior ν, con $|\nu| = 1$ en el sentido de la medida, determinada por la siguiente condición:

$$\lim_{r\to 0} \frac{|B_r(x_0) \cap \Omega \cap \{\langle x - x_0, \nu\rangle < 0\}|}{|B_r|} = 0,$$

y

$$\lim_{r\to 0} \frac{|B_r(x_0) \cap \Omega^c \cap \{\langle x - x_0, \nu\rangle > 0\}|}{|B_r|} = 0.$$

A este subconjunto de la frontera en medida se lo denomina frontera reducida y se lo denota $\partial_*\{u > 0\}$ o $\partial_{red}\{u > 0\}$. Se tiene

$$\mathcal{H}^{N-1}(\partial^*\Omega \setminus \partial_*\Omega) = 0.$$

Como probamos que $\partial\{u_0 > 0\} = \partial^*\{u_0 > 0\}$, se tiene

$$\mathcal{H}^{N-1}(\partial\{u_0 > 0\} \setminus \partial_* \{u_0 > 0\}) = 0.$$

Se tiene el siguiente resultado *Teorema de la divergencia* (ver [4]): Si Ω_0 es un conjunto de perímetro finito y $\overrightarrow{F} \in C^1(\overline{\Omega_0})$,

$$\int_{\Omega_0} \operatorname{div} \overrightarrow{F}\, dx = \int_{\partial_*\Omega_0} \overrightarrow{F}.\nu \, d\mathcal{H}^{N-1}$$

A continuación daremos una posible formulación débil del problema de frontera libre. A saber,

Definición 3.3.2. *Decimos que u_0 es solución débil de*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & en\ \Omega \cap \{u > 0\}, \\ u = 0, \quad |\nabla u| = \sqrt{2M} & en\ \Omega \cap \partial\{u > 0\}, \end{cases} \tag{3.3.4}$$

si

$$-\int \nabla u_0 \nabla \varphi = \int_{\partial_{red}\{u_0>0\}} \sqrt{2M}\, \varphi \, d\mathcal{H}^{N-1}, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Para ver que ésta es una buena definición supongamos que

$$\partial\{u_0 > 0\} \in C^1, \quad u_0 \in C^1(\overline{\{u_0 > 0\}}), \quad u_0 \text{ es solución clásica de (3.3.4)}$$

y sea $\varphi \in C_0^\infty(B)$. Entonces,

$$0 = \int_{\{u_0>0\}\cap\Omega} \varphi \Delta u_0 = -\int_{\{u_0>0\}\cap\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla u_0 + \int_{\partial(\{u_0>0\}\cap\Omega)} \varphi \frac{\partial u_0}{\partial \nu_e}\, d\mathcal{H}^{N-1} =$$
$$= -\int_{\{u_0>0\}\cap\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla u_0 - \int_{\partial\{u_0>0\}\cap B} \sqrt{2M}\, \varphi \, d\mathcal{H}^{N-1}$$

donde ν_e es la normal exterior.

Ahora bien, ¿cómo podemos obtener esta formulación integral para u_0?

Consideremos $\int \nabla u_0 \nabla\varphi$ como una aplicación lineal sobre $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Es decir,

$$\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \xrightarrow{T} -\int \nabla u_0 \cdot \nabla \varphi.$$

Entonces $T = \Delta u_0$ es la distribución definida por

$$\langle \Delta u_0, \varphi \rangle = \int u_0 \Delta \varphi = -\int \nabla u_0 \nabla \varphi$$

La distribución está bien definida, por ser u_0 localmente integrable. La última igualdad vale pues $u_0 \in H^1$.

Para deducir la formulación integral, veamos que Δu_0 define una medida de Radón (es decir, una medida boreliana localmente finita). En efecto, $u_0 = \lim u^\varepsilon$, donde u^ε es solución de $\Delta u^\varepsilon = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon) \geq 0$. Luego, $\langle \Delta u_0, \varphi \rangle \geq 0$ si $\varphi \geq 0$ por ser límite de distribuciones no negativas. Por el Corolario A3.4.1 existe una medida de Radón no negativa Λ tal que $\Delta u_0 = \Lambda$

Por definición,

$$\int \varphi \, d\Lambda = -\int \nabla u_0 \nabla \varphi$$

Como en $\{u_0 > 0\}$ se tiene que $\Delta u_0 = 0$, si $\varphi \in C_0^\infty(\{u_0 > 0\})$ resulta que la última integral es nula. De la misma manera, en $\{u_0 = 0\}^\circ, \nabla u_0 = 0$, de donde se deduce que si $\varphi \in C_0^\infty(\{u_0 = 0\}^\circ)$, la última integral también es nula. Por lo tanto, $\operatorname{sop} \Lambda \subset \partial\{u_0 > 0\}$.

Para probar la formulación integral, bastaría ver que $\Lambda = \Delta u_0$ y $\sqrt{2M}\,\mathcal{H}^{N-1}\lfloor\partial\{u_0 > 0\}$ son la misma medida.

Ambas tienen soporte en el mismo conjunto. La idea es ver que Λ es absolutamente continua respecto de $\mathcal{H}^{N-1}\lfloor\partial\{u_0 > 0\}$, y por lo tanto, por el teorema de Radón-Nikodym, existe $q(x)$ boreliana tal que $\Lambda = q(x)\mathcal{H}^{N-1}\lfloor\partial\{u_0 > 0\}$. Demostrando que $q(x) \equiv \sqrt{2M}$ tenemos el resultado buscado.

El primer resultado en este sentido es la siguiente proposición.

Proposición 3.3.5. *Existen $c, C > 0$, $r_0 > 0$ tal que si $x_0 \in \partial\{u_0 > 0\}$ se tiene*

$$cr^{N-1} \leq \int_{B_r(x_0)} d\Lambda \leq Cr^{N-1}, \quad 0 < r < r_0$$

Demostración. Sea $\varphi \in C_0^\infty(B_{2r}(x_0))$, $\varphi \geq 0, \varphi \equiv 1$ en $B_r(x_0)$, $|\nabla\varphi| \leq \frac{c}{r}$, entonces

$$\int_{B_r(x_0)} d\Lambda \leq \int_{B_{2r}(x_0)} \varphi\, d\Lambda = -\int_{B_{2r}(x_0)} \nabla u_0 \cdot \nabla\varphi \leq L\frac{c}{r}c_N(2r)^N = L\,c\,c_N 2^N r^{N-1} = Cr^{N-1}$$

Para la otra desigualdad, sea $G(x, y)$ la función de Green de $-\Delta$ en B_1, es decir, si u es solución de:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } B_1 \\ u = 0 & \text{en } \partial B_1 \end{cases}$$

entonces u tiene la siguiente representación:

$$u(x) = \int_{B_1} f(y)G(x, y)\, dy.$$

Sea $G_{x_0,r}(x, y)$ la función de Green de $-\Delta$ en $B_r(x_0)$. Entonces se verifica:

$$G_{x_0,r}(x, y) = \frac{1}{r^{N-2}}G\Big(\frac{x - x_0}{r}, \frac{y - x_0}{r}\Big)$$

En efecto, sea u solución de:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } B_r(x_0) \\ u = 0 & \text{en } \partial B_r(x_0) \end{cases}$$

Defino $\bar{u}(x) = u(x_0 + rx)$, para $x \in B_1$. Luego,

$$-\Delta\bar{u}(x) = -r^2\Delta u(x_0 + rx) = r^2 f(x_0 + rx) \text{ en } B_1$$

$$\bar{u}(x) = 0 \text{ en } \partial B_1$$

Entonces, $\bar{u}$ se representa:

$$\bar{u}(x) = \int_{B_1} r^2 f(x_0 + rx) G(x, y) d\, y$$

Haciendo el cambio de variables $z = x_0 + ry$, $dz = r^N dy$, se tiene,

$$\bar{u}(x) = u(x_0 + rx) = \int_{B_r(x_0)} f(z) G\Big(x, \frac{z - x_0}{r}\Big) \frac{d\, z}{r^{N-2}}$$

Reemplazando $x_0 + rx$ por x y z por y tenemos:

$$u(x) = \int_{B_r(x_0)} f(y) G\Big(\frac{x - x_0}{r}, \frac{y - x_0}{r}\Big) \frac{dy}{r^{N-2}}. \tag{3.3.5}$$

Es decir, $G_{x_0,r}(x, y) = \frac{1}{r^{N-2}} G\big(\frac{x-x_0}{r}, \frac{y-x_0}{r}\big)$ como queríamos ver.

Esta fórmula sigue siendo válidad si en lugar de $f(y)\, dy$ tenemos una medida de Radon $d\mu$.

Recordemos que G es una función simétrica y que $0 \leq G(x, y) \leq \frac{C}{|x-y|^{N-2}}$.

Sea w la solución de:

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{en } B_r(x_0) \\ \quad w = u_0 & \text{en } \partial B_r(x_0) \end{cases}$$

y consideremos la función $w - u_0$, que verifica:

$$-\Delta(w - u_0) = -\Delta w + \Delta u_0 = \Delta u_0 = \Lambda \text{ en } B_r(x_0)$$

$$w - u_0 = 0 \text{ en } \partial B_r(x_0)$$

Entonces si $y \in B_r(x_0)$,

$$w(y) - u_0(y) = \int_{B_r(x_0)} G_{x_0,r}(x, y)\, d\Lambda_x$$

$G_{x_0,r}(x, y)$ es no acotada para $x = y$. Si $u_0 > 0$ en $B_t(y) \subset B_r(x_0)$ (donde t es proporcional a r), ahí Λ es 0 y la integral se calcula sobre $B_r(x_0) \setminus B_t(y)$.

Por la no degeneración de u_0, puedo elegir $y \in \overline{B_{hr}(x_0)}$ con $0 < h < 1$, tal que:

$$u_0(y) \geq c_0 hr$$

En $B_{\kappa hr}(y)$,

$$u_0(x) \geq u_0(y) - L\kappa hr \geq c_0 hr - L\kappa hr = hr(c_0 - L\kappa)$$

donde L es la constante de Lipschitz de u_0. Luego, $u_0(x) > 0$ si tomamos $\kappa < c_0/L$.

Como $\Lambda = 0$ en $\{u_0 > 0\} \supset B_{\kappa hr}(y)$ tenemos:

$$w(y) - u_0(y) = \int_{B_r(x_0)\setminus B_{\kappa hr}(y)} G_{x_0,r}(x,y)\, d\Lambda_x$$

Teniendo en cuenta que $G_{x_0,r}(x,y) = \frac{1}{r^{N-2}} G(\frac{x-x_0}{r}, \frac{y-x_0}{r})$ y la estimación

$$|\frac{x-x_0}{r} - \frac{y-x_0}{r}| = \frac{|x-y|}{r} \geq \frac{\kappa hr}{r} = \kappa h$$

se tiene que en $B_r(x_0) \setminus B_{\kappa hr}(y)$, $G_{x_0,r}(x,y) \leq \frac{C(h)}{r^{N-2}}$.

Luego,

$$w(y) - u_0(y) \leq \frac{C(h)}{r^{N-2}} \int_{B_r(x_0)} d\Lambda \tag{3.3.6}$$

Por otro lado, como $\Delta w = 0 \leq \Delta u_0$ en $B_r(x_0)$ y $w = u_0$ en $\partial B_r(x_0)$, por el principio de comparación resulta que $w \geq u_0$, y se tiene:

$$w(x_0) = \fint_{B_{r/2}(x_0)} w \geq \fint_{B_{r/2}(x_0)} u_0 \geq c_0 \frac{r}{2}$$

donde la última desigualdad, vale por la no degeneración de u_0.

Por Harnack, si $0 < h < 1/2$,

$$w(y) \geq c_N w(x_0) \geq cr.$$

Además se tiene

$$u_0(y) \leq L|y - x_0| \leq Lhr.$$

Por lo tanto,

$$w(y) - u_0(y) \geq cr - Lhr = (c - Lh)r \geq \frac{c}{2} r, \quad \text{si elijo } h < \frac{c}{2L}. \tag{3.3.7}$$

De (3.3.6) y (3.3.7) tenemos,

$$\frac{cr}{2} \leq w(y) - u_0(y) \leq \frac{C(h)}{r^{N-2}} \int_{B_r(x_0)} d\Lambda$$

y por lo tanto

$$\int_{B_r(x_0)} d\Lambda \geq C r^{N-1}.$$

$\square$

Corolario 3.3.1. *Λ es absolutamente continua con respecto a $\mathcal{H}^{N-1}\lfloor\partial\{u_0>0\}$ y existe $q(x)$ boreliana definida en $\partial\{u_0>0\}$ y $c, C>0$ tales que $c \le q(x) \le C$ y*

$$\Lambda = q(x)\mathcal{H}^{N-1}\lfloor\partial\{u_0>0\}.$$

Demostración. Sea $\Gamma \subset \partial\{u_0>0\}$ con $\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma)=0$. Queremos ver que $\Lambda(\Gamma)=0$.

Como $\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma)=0$, dado $\varepsilon>0, \exists\,\delta$ y un cubrimiento $\{C_j\}$ de Γ con $diam\, C_j \le \delta$ y $\sum\left(\frac{diam\, C_j}{2}\right)^{N-1} < \varepsilon$.

Sea $x_j \in C_j \cap \Gamma$ y $\delta_j = diam\, C_j \Rightarrow C_j \subset B_{\delta_j}(x_j)$.

Entonces,

$$\int_\Gamma d\Lambda \le \sum \int_{C_j} d\Lambda \le \sum \int_{B_{\delta_j}(x_j)} d\Lambda \le c \sum \delta_j^{N-1} \le c2^{N-1}\varepsilon.$$

Como ε es arbitrario se tiene que $\Lambda(\Gamma)=0$.

Por lo tanto, Λ es absolutamente continua con respecto a $\mathcal{H}^{N-1}\lfloor\partial\{u_0>0\}$. Por el teorema de Radon-Nikodym, existe $q(x)$ tal que $\Lambda = q(x)\mathcal{H}^{N-1}\lfloor\partial\{u_0>0\}$.

Veamos ahora que $0<c\le q(x_0)\le C<\infty$ para $\mathcal{H}^{N-1} - a.e.\ x_0 \in \partial\{u>0\}$. En efecto, para $\mathcal{H}^{N-1} - ae\ x_0 \in \partial\{u>0\}$ tenemos:

$$q(x_0) = \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x_0)\cap\partial\{u_0>0\}} q(x)d\mathcal{H}^{N-1} = \lim_{r\to 0} \frac{\displaystyle\int_{B_r(x_0)\cap\partial\{u_0>0\}} q(x)d\mathcal{H}^{N-1}}{\mathcal{H}^{N-1}(B_r(x_0)\cap\partial\{u_0>0\})} =$$

$$= \frac{\displaystyle\int_{B_r(x_0)} d\Lambda}{r^{N-1}} \frac{r^{N-1}}{\mathcal{H}^{N-1}(B_r(x_0)\cap\partial\{u_0>0\})}$$

Ambos factores de la última igualdad, ya fueron acotados por arriba y por abajo por constantes positivas. Por lo tanto, se tienen las cotas superior e inferior de $q(x)$. □

En este punto tenemos que para toda $\varphi \in C_0^\infty(B_{1/8})$,

$$-\int_{\{u_0>0\}} \nabla u_0 \nabla\varphi = \int_{\partial_{red}\{u_0>0\}} q(x)\varphi(x)\, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Con el fin de probar que $q(x)=\sqrt{2M}$ para $\mathcal{H}^{N-1}$– a.e. $x_0 \in \partial\{u_0>0\}$ probaremos el siguiente desarrollo asintótico.

Proposición 3.3.6. *Si $x_0 \in \partial_{red}\{u_0 > 0\}$, entonces*

$$u_0(x) = \sqrt{2M}\langle x - x_0, \nu(x_0)\rangle^+ + o(|x - x_0|)$$

donde $\nu(x_0)$ es la normal unitaria interior a $\{u_0 > 0\}$ en x_0, en el sentido de la medida.

Idea de la demostración.
Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\nu(x_0) = e_1$ y $x_0 = 0$.

Por lo tanto, queremos probar que $u_0(x) = \alpha x_1^+ + o(|x|)$, con $\alpha = \sqrt{2M}$.

Sea $x = \lambda y$, con $|y| \leq R$ y $\lambda \to 0$, y sea $u_\lambda(y) = \frac{1}{\lambda}u_0(\lambda y)$.
Si u_0 satisface el desarrollo anterior, tenemos que:

$$u_\lambda(y) = \frac{1}{\lambda}\alpha\lambda y_1^+ + o(\lambda|y|) = \alpha y_1^+ + \frac{1}{\lambda}o(\lambda|y|)$$

Entonces $u_\lambda \to \alpha y_1^+$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}^N$, pues, $\frac{1}{\lambda}o(\lambda|y|) = \frac{o(\lambda|y|)}{\lambda|y|}|y|$ converge a 0, uniformemente sobre compactos, y viceversa. En efecto, considerando la igualdad, ($x = \lambda y$ con $\lambda = |x|$ y $|y| = 1$)

$$\frac{u(x) - \alpha x_1^+}{|x|} = \frac{\lambda u_\lambda(y) - \alpha\lambda y_1^+}{\lambda|y|} = \frac{u_\lambda(y) - \alpha y_1^+}{|y|} = u_\lambda(y) - \alpha y_1^+.$$

Como se tiene que $u_\lambda \to \alpha y_1^+$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}^N$, entonces $u(x) = \alpha x_1^+ + o(|x|)$.

Para poder probar entonces el desarrollo asintótico deberemos estudiar la familia $\{u_\lambda\}$ con más detenimiento.

3.4. Blow ups

Lema 3.4.1. *Sea $x_j \in \partial\{u_0 > 0\}$, $x_j \to x_0$, $\lambda_j \to 0$, y $u_j(x) = \frac{1}{\lambda_j}u_0(x_j + \lambda_j x)$. Entonces:*

1. *$u_j \in C(\overline{R_j}), |\nabla u_j| \leq L$ en R_j y $\Delta u_j = 0$ en $R_j \cap \{u_j > 0\}$ donde R_j es tal que $\forall K \subset\subset \mathbb{R}^N, \exists j_0$ tal que $j \geq j_0 \Rightarrow K \subset\subset R_j$.*

2. *$0 \in \partial\{u_j > 0\}$.*

3. *Existe una constante $c_0 > 0$ tal que $\forall K \subset\subset \mathbb{R}^N, \rho_0 > 0, \exists j_0$ tal que si $j \geq j_0, 0 < \rho < \rho_0$ y $\bar{x} \in \overline{\{u_j > 0\}} \cap K$, entonces*

$$\sup_{B_\rho(\bar{x})} u_j \geq c_0\rho$$

Demostración.

1. Sea r_0 tal que $B_{r_0}(x_j) \subset\subset B_{1/8}$. Sea $y \in R_j = B_{r_0/\lambda_j}$, entonces $x_j + \lambda_j y \in B_{r_0}(x_j)$. Como u_0 es continua en $\overline{B_{r_0}(x_j)}$, resulta que $u_j \in C(\overline{R_j})$.

   Por otro lado,
   $$|\nabla u_j(y)| = |\nabla u_0(x_j + \lambda_j y)| \leq L.$$

   Finalmente, como para $y \in R_j$ se tiene $\Delta u_j(y) = \lambda_j \Delta u(x_j + \lambda_j y)$ e $y \in \{u_j > 0\}$ si y sólo si $x_j + \lambda_j y \in \{u_0 > 0\}$, se tiene que $\Delta u_j(y) = 0$ para $y \in R_j \cap \{u_j > 0\}$.

2. $y \in \{u_j > 0\} \Leftrightarrow x_j + \lambda_j y \in \{u_0 > 0\}$. Por lo tanto, $0 \in \partial\{u_j > 0\}$ pues $x_j \in \partial\{u_0 > 0\}$

3. Sea $K \subset\subset \mathbb{R}^N$ y j_0 tal que $R_j \supset K$ si $j \geq j_0$. Dado $\bar{y} \in \{u_j > 0\} \cap K$ consideramos $\bar{x}_j = x_j + \lambda_j \bar{y}$. Entonces,
   $$u_0(\bar{x}_j) = u_0(x_j + \lambda_j \bar{y}) = \lambda_j u_j(\bar{y}) > 0$$

   Sea j_1 tal que $dist(\bar{x}_j, \partial\{u_0 > 0\}) < 1/8$ para $j \geq j_1$. Entonces,
   $$\sup_{B_r(\bar{x}_j)} u_0 \geq c_0 r, \text{ si } r \leq r_0$$

   Luego si $0 < \rho \leq \rho_0$,
   $$\sup_{B_\rho(\bar{y})} u_j = \sup_{y \in B_\rho(\bar{y})} \frac{u_0(x_j + \lambda_j y)}{\lambda_j} = \sup_{B_{\lambda_j \rho}(\bar{x}_j)} \frac{u_0(x)}{\lambda_j} \geq \frac{c_0 \lambda_j \rho}{\lambda_j} = c_0 \rho,$$

   donde la última desigualdad vale $\forall j \geq j_2$ tal que $\lambda_j \rho_0 \leq r_0$ si $j \geq j_2$.

□

Lema 3.4.2. *Sea $\{u_j\}$ una familia con las propiedades (1), (2) y (3) del lema anterior. Entonces, existe una subsucesión $\{u_{j_n}\}$ y una función $u_\infty \in C(\mathbb{R}^N)$ con $|\nabla u_\infty| \leq L$ en $\mathbb{R}^N$ tal que:*

1. $u_{j_n} \to u_\infty$, *uniformemente sobre compactos.*
2. $\partial\{u_{j_n} > 0\} \to \partial\{u_\infty > 0\}$ *y* $\{u_{j_n} > 0\} \to \{u_\infty > 0\}$ *localmente en distancia de Hausdorff.*
3. u_∞ *es localmente uniformemente no degenerada sobre* $\partial\{u_\infty > 0\}$
4. $\chi_{\{u_{j_n} > 0\}} \to \chi_{\{u_\infty > 0\}}$ *a. e.*
5. $\nabla u_{j_n} \to \nabla u_\infty$ *a. e.*

Demostración.

1. Sea K un compacto de $\mathbb{R}^N$. Por la propiedad (1) del Lema 3.4.1, $\exists j_0$ tal que $\forall j \geq j_0$, $K \subset\subset R_j$ y tenemos:

$$u_j \in C(K)$$

$$|\nabla u_j| \leq L \text{ en } K$$

Desarrollando u_j alrededor de 0, y usando que $|\nabla u_j| \leq L$ tenemos:

$$|u_j(x)| \leq L|x| \quad \forall x \in K.$$

Luego, por Arzela-Ascoli, existe una subsucesión $\{u_{j_k}\}_k$ que converge uniformemente en K. Por un método diagonal standard (tomando sucesivamente $K = B_n$ se tiene una función $u_\infty \in C(\mathbb{R}^N)$ con $|\nabla u_\infty| \leq L$ en $\mathbb{R}^N$ tal que $u_{j_n} \to u_\infty$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}^N$.

2. Sea $K \subset\subset \mathbb{R}^N$. Veamos que $\forall \delta > 0, \exists n_0$ tal que si $n \geq n_0$ vale:

$$i)\ K \cap \partial\{u_{j_n} > 0\} \subset \mathcal{N}_\delta(\partial\{u_\infty > 0\})$$

$$ii)\ K \cap \partial\{u_\infty > 0\} \subset \mathcal{N}_\delta(\partial\{u_{j_n} > 0\})$$

Probemos $i)$.

Si no valiera $i)$, existiría una subsucesión que seguiremos llamando $j_n \to \infty$, y puntos $x_{j_n} \in K \cap \partial\{u_{j_n} > 0\}$ tales que:

$$\text{o bien } B_\delta(x_{j_n}) \subset \{u_\infty > 0\}, \quad \text{o bien } B_\delta(x_{j_n}) \subset \{u_\infty = 0\}.$$

Tomando subsucesiones, podemos suponer que sólo ocurre una de las dos opciones $\forall n$.

Supongamos que $B_\delta(x_{j_n}) \subset \{u_\infty > 0\}, \forall n$. Podemos suponer que $x_{j_n} \to \bar{x}$ con $B_\delta(\bar{x}) \subset \{u_\infty > 0\}$. Como $u_{j_n} \rightrightarrows u_\infty$ en K, resulta que $u_{j_n}(x_{j_n}) \to u_\infty(\bar{x})$. Pero $u_{j_n}(x_{j_n}) = 0$ lo que implica que $u_\infty(\bar{x}) = 0$, lo que es una contradicción.

Supongamos ahora que $B_\delta(x_{j_n}) \subset \{u_\infty = 0\}, \forall n$. Como antes, podemos suponer que $x_{j_n} \to \bar{x}$ con $B_\delta(\bar{x}) \subset \{u_\infty = 0\}$. Sea $y_{j_n} \in B_{\delta/2}(x_{j_n})$ tal que $u_{j_n}(y_{j_n}) \geq c_0\delta/2$. Podemos suponer que $y_{j_n} \to \bar{y} \in B_\delta(\bar{x})$. Pero entonces, $c_0\delta/2 \leq u_{j_n}(y_{j_n}) \to u_\infty(\bar{y}) = 0$, lo que es una contradicción.

Para probar $ii)$ volvemos a razonar por el absurdo. Si $ii)$ no fuera cierto existiría una subsucesión que sigo llamando j_n y puntos $x_{j_n} \in K \cap \partial\{u_\infty > 0\}$ tales que

$$\text{o bien } B_\delta(x_{j_n}) \subset \{u_{j_n} > 0\}, \quad \text{o bien } B_\delta(x_{j_n}) \subset \{u_{j_n} = 0\}.$$

Como antes, podemos suponer que $x_{j_n} \to \bar{x} \in \partial\{u_\infty > 0\}$, y que una de las dos opciones es válida para todo n.

Si $B_\delta(x_{j_n}) \subset \{u_{j_n} > 0\}$ para todo n, se tiene que $\Delta u_{j_n} = 0$ en $B_\delta(x_{j_n})$ $\forall n$. Como $u_{j_n} \rightrightarrows u_\infty$, se tiene que $\Delta u_\infty = 0$ en $B_{\delta/2}(\bar{x})$. Por lo tanto, $u_\infty \equiv 0$ o $u_\infty > 0$ en $B_{\delta/2}(\bar{x})$ lo que contradice el hecho de que $\bar{x} \in \partial\{u_\infty > 0\}$.

Supongamos, por el contrario, que $B_\delta(x_{j_n}) \subset \{u_{j_n} = 0\}$ $\forall n$. Entonces $u_{j_n}(x) = 0$ en $B_\delta(x_{j_n})$. Como $x_{j_n} \in K \cap \partial\{u_\infty > 0\}$, podemos suponer que $x_{j_n} \to \bar{x} \in \partial\{u_\infty > 0\}$. Como $u_{j_n} \rightrightarrows u_\infty$ en K, se sigue que $u_\infty \equiv 0$ en $B_\delta(\bar{x})$, lo que contradice el hecho de que $\bar{x} \in \partial\{u_\infty > 0\}$.

La demostración de la convergencia de los conjuntos de positividad se realiza en forma análoga.

3. Queremos ver que u_∞ es localmente uniformemente no degenerada, es decir, que dado $K \subset\subset \mathbb{R}^N$ existen $C_0 > 0$ y $r_0 > 0$ tal que si x_0 está en $K \cap \partial\{u_\infty > 0\}$ se cumple que,

$$\sup_{B_r(x_0)} u_\infty \geq C_0 r \qquad \forall\, 0 < r \leq r_0.$$

Sean $K \subset\subset \mathbb{R}^N$ y x_0 en $K \cap \partial\{u_\infty > 0\}$. Como vimos en 2., $\partial\{u_{j_n} > 0\} \to \partial\{u_\infty > 0\}$ localmente en distancia de Hausdorff. Entonces, existe una sucesión $\{x_{j_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ con x_{j_n} en $\partial\{u_{j_n} > 0\}$ y $x_{j_n} \to x_0$.

Por hipótesis, sabemos que dado $\rho_0 > 0$ existen $C_0' > 0$ y $n_0 = n_0(K, \rho_0)$ tal que si $n \geq n_0$ y $\bar{x} \in K \cap \partial\{u_{j_n} > 0\}$ tenemos que,

$$\sup_{B_\rho(\bar{x})} u_{j_n} \geq C_0' \rho \qquad \forall\, 0 < \rho \leq \rho_0.$$

Ahora, como x_{j_n} está en $K \cap \partial\{u_{j_n} > 0\}$ tenemos que si $n \geq n_0$,

$$\sup_{B_\rho(x_{j_n})} u_{j_n} \geq C_0'\, \rho \qquad \forall\, 0 < \rho \leq \rho_0.$$

Sea ρ con $0 < \rho \leq \rho_0$. Como u_{j_n} es continua en K, existe y_{j_n} en $\overline{B_\rho(x_{j_n})}$ con $u_{j_n}(y_{j_n}) \geq C_0'\, \rho$. Podemos suponer, vía subsucesión, que $y_{j_n} \to y_0$. Por lo tanto, como $\{u_{j_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u_∞ uniformemente sobre compactos tenemos que,

$$u_\infty(y_0) \geq C_0'\, \rho.$$

Luego, como y_0 está en $\overline{B_\rho(x_0)}$, tomando $C_0 = C_0'$ y $r_0 = \rho_0$ tenemos que,

$$\sup_{B_\rho(x_0)} u_\infty \geq C_0\, r \qquad \forall\, 0 < r \leq r_0.$$

4. Primero veamos que $|\partial\{u_\infty > 0\}| = 0$, lo que implica que basta demostrar la convergencia de $\chi_{\{u_{j_n}>0\}}$ a $\chi_{\{u_\infty>0\}}$ en casi todo punto de $\{u_\infty > 0\} \cup \{u_\infty = 0\}^\circ$.

Como $\chi_{\{u_\infty>0\}}$ es localmente integrable, por el teorema de diferenciación de Lebesgue, sabemos que para casi todo $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ se tiene,

$$\frac{1}{|B_r(\bar{x})|} \int_{B_r(\bar{x})} \chi_{\{u_\infty>0\}}(x)dx \underset{r\to 0^+}{\longrightarrow} \chi_{\{u_\infty>0\}}(\bar{x}).$$

Sea $\bar{x}$ en $\partial\{u_\infty > 0\}$ y supongamos que $\bar{x}$ es uno de los puntos donde se tiene esta convergencia, es decir

$$\frac{1}{|B_r(\bar{x})|}\int_{B_r(\bar{x})} \chi_{\{u_\infty>0\}}(x)dx \underset{r\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Por otro lado,

$$\frac{1}{|B_r(\bar{x})|}\int_{B_r(\bar{x})} \chi_{\{u_\infty>0\}}(x)dx = \frac{|B_r(\bar{x})\cap\{u_\infty>0\}|}{|B_r(\bar{x})|}.$$

Ahora bien, razonando como en la demostración de la Proposición 3.3.4, la no degeneración de u_∞ y el hecho de que sea uniformemente Lipschitz implican que existen $C>0$ y $r_0>0$ tales que si $0<r\leq r_0$,

$$C|B_r(\bar{x})| \leq |B_r(\bar{x})\cap\{u_\infty>0\}|.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{|B_r(\bar{x})|}\int_{B_r(\bar{x})} \chi_{\{u_\infty>0\}}(x)dx \geq\ C>0,$$

lo que es una contradicción. Luego, $|\partial\{u_\infty>0\}|=0$.

Pasemos a probar ahora la convergencia de las características en casi todo punto de $\{u_\infty > 0\}$.

Sea x en $\{u_\infty>0\}$. Por la continuidad de u_∞, existe $\delta>0$ y $C>0$ tal que $u_\infty\geq C$ en $B_\delta(x)$. Entonces, como u_{j_n} converge uniformemente a u_∞ en K, podemos concluir que $u_{j_n}\geq \frac{C}{2}$ en $B_\delta(x)$ si $n\geq n_0$. Es decir, existe $\delta>0$ para el cual se cumple que,

$$B_\delta(x)\subseteq\{u_\infty>0\} \text{ y } B_\delta(x)\subseteq\{u_{j_n}>0\} \text{ si } n\geq n_0.$$

Así, tenemos que,

$$\chi_{\{u_{j_n}>0\}}(x)=1 \text{ si } n\geq n_0 \text{ y } \chi_{\{u_\infty>0\}}(x)=1.$$

Luego,

$$\chi_{\{u_{j_n}>0\}}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_{\{u_\infty>0\}}(x).$$

Probemos ahora la convergencia en casi todo punto de $\{u_\infty=0\}^\circ$.

Sea $x\in\{u_\infty=0\}^\circ$ y $\delta>0$ tal que $B_{2\delta}(x)\subseteq\{u_\infty=0\}$. Veamos que $B_\delta(x)\subseteq\{u_{j_n}=0\}$ si $n\geq n_0$. En efecto, sabemos que,

$$K\cap\{u_{j_n}>0\}\subseteq\mathcal{N}_\delta(\{u_\infty>0\}) \text{ si } n\geq n_0.$$

Entonces,

$$K\cap\mathcal{N}_\delta(\{u_{j_n}>0\})\subseteq\mathcal{N}_{2\delta}(\{u_\infty>0\}) \text{ si } n\geq n_0.$$

Supongamos que $B_\delta(x) \nsubseteq \{u_{j_n} = 0\}$ para algún $n \geq n_0$. Entonces, como existe y en $B_\delta(x)$ tal que $u_{j_n}(y) > 0$, tenemos que x está en $\mathcal{N}_\delta(\{u_{j_n} > 0\})$ y, por lo tanto, en $\mathcal{N}_{2\delta}(\{u_\infty > 0\})$.

Luego, podemos concluir que,

$$B_{2\delta}(x) \cap \{u_\infty > 0\} \neq \emptyset,$$

lo que es una contradicción.

Así, como $B_\delta(x) \subseteq \{u_{j_n} = 0\}$ si $n \geq n_0$, tenemos que,

$$\chi_{\{u_{j_n} > 0\}}(x) = 0 \text{ si } n \geq n_0 \text{ y } \chi_{\{u_\infty > 0\}}(x) = 0.$$

Luego,

$$\chi_{\{u_{j_n} > 0\}}(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \chi_{\{u_\infty > 0\}}(x).$$

5. Como $|\partial\{u_\infty > 0\}| = 0$, basta probar la convergencia de ∇u_{j_n} a ∇u_∞ en $\{u_\infty > 0\}$ y en $\{u_\infty = 0\}^\circ$.

Sea entonces x en $\{u_\infty = 0\}^\circ$ y $\delta > 0$ tal que $B_{2\delta}(x) \subseteq \{u_\infty = 0\}$. Claramente, $\nabla u_\infty(x) = 0$.

Por otro lado, como vimos en 4., existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u_{j_n} = 0$ en $B_\delta(x)$ para todo $n \geq n_0$. Entonces, $\nabla u_{j_n}(x) = 0$ para todo $n \geq n_0$.

Luego, tenemos que,

$$\nabla u_{j_n}(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \nabla u_\infty(x).$$

Sea ahora x en $\{u_\infty > 0\}$, como vimos en 4., existen $\delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_\delta(x) \subseteq \{u_{j_n} > 0\}$ si $n \geq n_0$; y además, $B_\delta(x) \subseteq \{u_\infty > 0\}$. Como $u_{j_n} - u_\infty$ es armónica en $B_\delta(x)$, por las estimaciones de derivadas tenemos que,

$$|\nabla u_{j_n}(x) - \nabla u_\infty(x)| = |\nabla(u_{j_n} - u_\infty)(x)| \leq \frac{C_N}{\delta} \parallel u_{j_n} - u_\infty \parallel_{L^\infty(B_\delta(x))} .$$

Ahora, como $\parallel u_{j_n} - u_\infty \parallel_{L^\infty(B_\delta(x))} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ concluimos que,

$$\nabla u_{j_n}(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \nabla u_\infty(x).$$

□

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente teorema.

Teorema 3.4.1. *Sean $x_0 \in \partial\{u_0 > 0\}$, $u_j(x) = \frac{1}{\lambda_j} u_0(x_0 + \lambda_j\ x)$ con $\lambda_j \to 0$ tales que $u_j \to u_\infty$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}^N$. Entonces,*

1. *u_∞ es un minimizante local de J en $\mathbb{R}^N$.*

2. Si, además, $x_0 \in \partial_{red}\{u_0 > 0\}$, se tiene que $u_\infty(x) = \alpha\langle x, \nu(x_0)\rangle^+$ donde $\nu(x_0)$ es la normal unitaria interior a $\partial\{u_0 > 0\}$ en x_0 en el sentido de la medida.

Demostración.

1. Sea $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^N$ con borde Lipschitz y $v \in u_\infty + H_0^1(\Omega)$. Queremos ver que $J_\Omega(u_\infty) \leq J_\Omega(v)$.

Consideremos $\Omega_h = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > h\}$ y ψ_h en $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\psi_h = 0$ en Ω_{2h}, $\psi_h = 1$ en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_h$ y $0 \leq \psi_h \leq 1$.

Sea $v_j = v + \psi_h(u_j - u_\infty)$. Claramente, $v_j \in u_j + H_0^1(\Omega)$. Entonces, como u_j es minimizante tenemos que,

$$J_\Omega(u_j) \leq J_\Omega(v_j).$$

Ahora,

$$J_\Omega(u_j) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_j|^2 dx + M\int_\Omega \chi_{\{u_j>0\}}\ dx.$$

Como $\nabla u_j \to \nabla u_\infty$ a.e. en $\mathbb{R}^n$ y $|\nabla u_j| \leq L$ para todo $j \geq 1$, tenemos que

$$\int_\Omega |\nabla u_j|^2 dx \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega |\nabla u_\infty|^2 dx.$$

Además, como $\chi_{\{u_j>0\}} \to \chi_{\{u_\infty>0\}}$ en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, resulta que

$$\int_\Omega \chi_{\{u_j>0\}}\ dx \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \chi_{\{u_\infty>0\}}\ dx.$$

Luego, tenemos que $J_\Omega(u_j) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} J_\Omega(u_\infty)$.

Por otro lado,

$$J_\Omega(v_j) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v + \psi_h(\nabla u_j - \nabla u_\infty) + \nabla\psi_h(u_j - u_\infty)|^2 dx + M\int_\Omega \chi_{\{v_j>0\}}.$$

Además,

$$|\nabla v + \psi_h(\nabla u_j - \nabla u_\infty) + \nabla\psi_h(u_j - u_\infty)|^2 \to |\nabla v|^2 \quad a.e.\ \mathbb{R}^N.$$

Luego, como $|\nabla v_j| \leq C$ para todo j, tenemos que

$$\int_\Omega |\nabla v + \psi_h(\nabla u_j - \nabla u_\infty) + \nabla\psi_h(u_j - u_\infty)|^2 dx \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx.$$

Además,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \chi_{\{v_j>0\}}\, dx &= \int_{\Omega_{2h}} \chi_{\{v_j>0\}}\, dx \; + \int_{\Omega\setminus\Omega_{2h}} \chi_{\{v_j>0\}}\, dx \\ &= \int_{\Omega_{2h}} \chi_{\{v>0\}}\, dx \; + \int_{\Omega\setminus\Omega_{2h}} \chi_{\{v_j>0\}}\, dx \\ &\le \int_{\Omega} \chi_{\{v>0\}}\, dx \; + |\Omega \setminus \Omega_{2h}|.\end{aligned}$$

Ahora, como Ω tiene borde Lipschitz, se tiene que $|\Omega \setminus \Omega_{2h}| \le Ah$. Así, resulta que

$$\int_{\Omega} \chi_{\{v_j>0\}}\, dx \le \int_{\Omega} \chi_{\{v>0\}}\, dx \; + Ah.$$

Luego,

$$J_{\Omega}(u_\infty) \le \limsup_{j\to+\infty} J_{\Omega}(v_j) \le J_{\Omega}(v) + \; Ah$$

y, haciendo $h \to 0^+$, concluimos que

$$J_{\Omega}(u_\infty) \le J_{\Omega}(v).$$

2. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x_0 = 0$ y $\nu(x_0) = e_1$. Vía una subsucesión, podemos suponer también que $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ satisface 1. – 5. del Lema 3.4.2.

Veamos que $u_\infty = 0$ en $\{x_1 < 0\}$. Supongamos que no, entonces existe $\bar{x}$ en $\{x_1 < 0\}$ tal que $u_\infty(\bar{x}) > 0$. Por continuidad de u_∞ y por la convergencia uniforme de $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(\bar{x}) \subseteq \{x_1 < 0\} \cap \{u_j > 0\}$ para todo $j \ge j_0$. Así, tomando R de manera que $B_\delta(\bar{x}) \subseteq B_R$, tenemos que si $j \ge j_0$,

$$|B_\delta(\bar{x})| \le |B_R \cap \{u_j > 0\} \cap \{x_1 < 0\}|. \tag{3.4.1}$$

Por otro lado, sabemos que, como e_1 es la normal interior a $\{u_0 > 0\}$ en el sentido de la medida, para todo $R > 0$ tenemos que,

$$\frac{|B_{R\lambda_j} \cap \{u_0 > 0\} \cap \{x_1 < 0\}|}{|B_{R\lambda_j}|} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ahora,

$$\begin{aligned}|B_R \cap \{u_j > 0\} \cap \{x_1 < 0\}| &= \int_{B_R\cap\{x_1<0\}} \chi_{\{u_j>0\}}(x)\, dx \\ &= \int_{B_R\cap\{x_1<0\}} \chi_{\{u_0>0\}}(\lambda_j x)\, dx \\ &= \lambda_j^{-N} \int_{B_{\lambda_j R}\cap\{y_1<0\}} \chi_{\{u_0>0\}}(y)\, dy \\ &= \lambda_j^{-N} |B_{\lambda_j R} \cap \{y_1 < 0\} \cap \{u_0 > 0\}|.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{|B_R \cap \{u_j > 0\} \cap \{x_1 < 0\}|}{|B_R|} &= \lambda_j^{-N} \frac{|B_{\lambda_j R} \cap \{x_1 < 0\} \cap \{u_0 > 0\}|}{|B_R|} \\ &= \frac{|B_{\lambda_j R} \cap \{x_1 < 0\} \cap \{u_0 > 0\}|}{|B_{\lambda_j R}|}.\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\frac{|B_R \cap \{u_j > 0\} \cap \{x_1 < 0\}|}{|B_R|} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

lo que contradice (3.4.1).

Veamos ahora que $u_\infty > 0$ en $\{x_1 > 0\}$. Por el absurdo, supongamos que existe $\bar{x}$ en $\{x_1 > 0\}$ tal que $u_\infty(\bar{x}) = 0$. Podemos suponer que $\bar{x}$ está en $\{u_\infty = 0\}^\circ$. En efecto, si $\bar{x} \in \partial\{u_\infty > 0\}$, como u_∞ es minimizante local, existe $C > 0$ tal que,

$$\frac{|\{u_\infty = 0\} \cap B_r(\bar{x})|}{|B_r(\bar{x})|} \geq C \qquad \forall r > 0.$$

Tomemos r suficientemente chico de manera que $B_r(\bar{x}) \subseteq \{x_1 > 0\}$. Como $|\partial\{u_\infty > 0\}| = 0$, existe $\bar{y} \in \{u_\infty = 0\}^\circ \cap B_r(\bar{x})$.

Lo que vimos es que si $\bar{x}$ está en $\partial\{u_\infty > 0\}$, existe $\bar{y}$ en $\{u_\infty = 0\}^\circ \cap \{x_1 > 0\}$.

Entonces, supongamos que $\bar{x}$ está en $\{u_\infty = 0\}^\circ$. Como vimos en la demostración del Lema 3.4.2 item 4., existen $\delta > 0$ y $j_0 \in \mathbb{N}$ tales que $B_\delta(\bar{x}) \subseteq \{u_j = 0\}$ para todo $j \geq j_0$. Tomando δ chico tenemos que $B_\delta(\bar{x}) \subset \{x_1 < 0\}$. Entonces, si $j \geq j_0$ tenemos que,

$$|B_\delta(\bar{x})| \leq |B_R \cap \{u_j = 0\} \cap \{x_1 > 0\}|. \tag{3.4.2}$$

Por otro lado, como sabemos que para todo $R > 0$ tenemos que,

$$\frac{|B_{R\lambda_j} \cap \{u_0 = 0\} \cap \{x_1 > 0\}|}{|B_{R\lambda_j}|} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

y,

$$\frac{|B_R \cap \{u_j = 0\} \cap \{x_1 > 0\}|}{|B_R|} = \frac{|B_{\lambda_j R} \cap \{u_0 = 0\} \cap \{x_1 > 0\}|}{|B_{\lambda_j R}|},$$

deducimos que,

$$|B_R \cap \{u_j = 0\} \cap \{x_1 > 0\}| \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

lo que contradice (3.4.2).

Entonces, $u_\infty > 0$ en $\{x_1 > 0\}$ y $u_\infty = 0$ en $\{x_1 < 0\}$. Ahora, como $|\nabla u_\infty| \leq L$ y $u_\infty = 0$ en $\{x_1 = 0\}$ resulta que,

$$u_\infty(x) \leq Lx_1 \text{ en } \{x_1 > 0\}.$$

Extendamos u_∞ en forma impar. Sea

$$\bar{u}_\infty(x) = \begin{cases} u_\infty(x) & \text{si } x_1 \geq 0 \\ -u_\infty(-x_1, x') & \text{si } x_1 < 0. \end{cases}$$

Como $\Delta u_\infty = 0$ en $\{x_1 > 0\}$ se tiene que $\Delta \bar{u}_\infty = 0$ y $|\bar{u}_\infty(x)| \leq L|x_1|$ en $\mathbb{R}^N$. Entonces, por el Teorema de Liouville, $\bar{u}_\infty(x) = \alpha\langle x, \nu\rangle + \beta$ para ciertas constantes α, $\beta \in \mathbb{R}$ y $\nu \in \mathbb{R}^N$ con $|\nu| = 1$. Por otro lado, como $\bar{u}_\infty = 0$ en $\{x_1 = 0\}$, es inmediato ver que $\beta = 0$. Como $\bar{u}_\infty \not\equiv 0$, se tiene $\alpha > 0$. Tomando $x = (0, \nu')$ donde $\nu' \in \mathbb{R}^{N-1}$ es tal que $\nu = (\nu_1, \nu')$ se ve que $\nu' = 0$ y por lo tanto $\nu = e_1$. Así tenemos que $\bar{u}_\infty(x) = \alpha x_1$. Luego,

$$u_\infty(x) = \alpha x_1^+$$

□

3.5. La condición de frontera libre

Veamos que $\alpha = \sqrt{2M}$:

Definamos $v(x) := u_\infty(\tau(x))$ con $\tau(x) = (x_1 - \varepsilon\ \varphi(x),\ x')$ para x en B_1. Aquí, φ en $C_0^\infty(B_1)$ con $\varphi \geq 0$ y $\varphi > 0$ en un entorno del origen. Queremos calcular

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_{B_1} |\nabla v|^2 dx + M \int_{B_1} \chi_{\{v>0\}} dx.$$

Como $\{v > 0\} = \tau^{-1}(B_1^+)$, mediante el cambio de variables $y = \tau(x)$ con $|J\tau(x)| = 1 - \varepsilon\ \varphi_{x_1}(x)$, tenemos que

$$\int_{B_1} \chi_{\{v>0\}}(x)\ dx = \int_{B_1^+} |J\tau^{-1}(y)|\ dy = \int_{B_1^+} \big(1 - \varepsilon\ \varphi_{x_1}(\tau^{-1}(y))\big)^{-1} dy.$$

Como $(1 - \varepsilon\varphi_{x_1}(\tau^{-1}(y)))^{-1} = 1 + \varepsilon\varphi_{x_1}(\tau^{-1}(y)) + O(\varepsilon^2)$, nos queda que

$$\int_{B_1} \chi_{\{v>0\}}(x)\ dx = |B_1^+| + \varepsilon \int_{B_1^+} \varphi_{x_1}(\tau^{-1}(y))\ dy + O(\varepsilon^2).$$

Por otro lado,

$$v_{x_1}(x) = u_{\infty_{x_1}}(\tau(x))(1\ -\ \varepsilon\ \varphi_{x_1}(x)) \quad \text{y} \quad \nabla_{x'} v(x) = \nabla_{x'} u_\infty(\tau(x))\ -\ \varepsilon\ u_{\infty_{x_1}}(\tau(x))\nabla_{x'}\varphi(x).$$

Como $\nabla_{x'} u_\infty(\tau(x)) = 0$ y $u_{\infty x_1}(\tau(x)) = \alpha\ \chi_{\{y_1>0\}}(\tau(x))$, resulta que

$$\begin{aligned} |\nabla v|^2 &= \alpha^2 \chi_{\{y_1>0\}}(\tau(x))\big((1\ -\ \varepsilon\ \varphi_{x_1}(x))^2 + \varepsilon^2 |\nabla_{x'}\varphi(x)|^2\big) \\ &= \alpha^2 \chi_{\{y_1>0\}}(\tau(x))\big(1 - 2\ \varepsilon\varphi_{x_1}(x) + \varepsilon^2 |\nabla\varphi(x)|^2\big) \\ &= \alpha^2 \chi_{\{y_1>0\}}(\tau(x))\big(1 - 2\varepsilon\varphi_{x_1}(x)\big) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{B_1} |\nabla v(x)|^2\,dx &= \alpha^2 \int_{B_1} \chi_{\{y_1>0\}}(\tau(x))\big(1-2\varepsilon\varphi_{x_1}(x)\big) + O(\varepsilon^2)\,dx\\ &= \alpha^2 \int_{B_1} \chi_{\{y_1>0\}}(\tau(x))\big(1-2\varepsilon\varphi_{x_1}(x)\big)\,dx + O(\varepsilon^2)\\ &= \alpha^2 \int_{B_1^+} \big(1-2\varepsilon\varphi_{x_1}(\tau^{-1}(y))\big)\big(1-\varepsilon\varphi_{x_1}(\tau^{-1}(y))\big)^{-1}\,dy + O(\varepsilon^2)\\ &= \alpha^2 \int_{B_1^+} \big(1-2\varepsilon\varphi_{x_1}(\tau^{-1}(y))\big)\big(1+\varepsilon\varphi_{x_1}(\tau^{-1}(y))\big)\,dy + O(\varepsilon^2)\\ &= \alpha^2 \int_{B_1^+} \big(1-\varepsilon\varphi_{x_1}(\tau^{-1}(y))\big)\,dy + O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Así, nos queda que

$$J(v) = \big(\frac{\alpha^2}{2}+M\big)|B_1^+| + \varepsilon\big(M-\frac{\alpha^2}{2}\big)\int_{B_1^+}\varphi_{x_1}(\tau^{-1}(y))dy + O(\varepsilon^2).$$

Por otro lado,

$$J(u_\infty) = \frac{1}{2}\int_{B_1}\alpha^2\chi_{\{x_1>0\}}(x)\,dx + M\int_{B_1}\chi_{\{u_\infty>0\}}(x)\,dx = \big(\frac{\alpha^2}{2}+M\big)|B_1^+|.$$

Luego, como $v = u_\infty$ en ∂B_1 y u_∞ es minimizante local, tenemos que

$$0 \le J(v) - J(u_\infty) = \varepsilon\big(M-\frac{\alpha^2}{2}\big)\int_{B_1^+}\varphi_{x_1}(\tau^{-1}(y))dy + O(\varepsilon^2).$$

Entonces,

$$\big(M-\frac{\alpha^2}{2}\big)\int_{B_1^+}\varphi_{x_1}(\tau^{-1}(y))\,dy + O(\varepsilon) \ge 0.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\int_{B_1^+}\varphi_{x_1}(\tau^{-1}(y))\,dy &= \int_{\tau^{-1}(B_1^+)}\varphi_{x_1}(x)\big(1-\varepsilon\varphi_{x_1}(x)\big)\,dx = \int_{\tau^{-1}(B_1^+)}\varphi_{x_1}(x)dx + O(\varepsilon)\\ &= \int_{\{x_1>0\}}\varphi_{x_1}(x)dx - \int_{\{0<x_1<\varepsilon\varphi(x)\}}\varphi_{x_1}(x)\,dx + O(\varepsilon)\\ &= \int_{\{x_1>0\}}\varphi_{x_1}(x)\,dx + O(\varepsilon) = -\int_{B_1'}\varphi(0,x')\,dx' + O(\varepsilon).\end{aligned}$$

Haciendo ε tender a 0 tenemos,

$$\big(\frac{\alpha^2}{2}-M\big)\int_{B_1'}\varphi(0,x')dx' \ge 0.$$

Reemplanzado φ por $-\varphi$ en la perturbación tenemos que,

$$(\frac{\alpha^2}{2} - M) \int_{B_1'} \varphi(0, x')dx' \leq 0.$$

Luego,

$$(\frac{\alpha^2}{2} - M) \int_{B_1'} \varphi(0, x')dx' = 0,$$

y, como $\varphi \geq 0$ y $\varphi > 0$ en un entorno del origen, concluimos que

$$\frac{\alpha^2}{2} = M.$$

□

Finalmente, probamos que u_0 es solución del problema de frontera libre en el sentido de las distribuciones. Esto se deduce inmediatamente del siguiente teorema.

Teorema 3.5.1. *Sea $x_0 \in \partial_{red}\{u_0 > 0\}$ un punto de Lebesgue para $q(x)$ con la siguiente propiedad:*

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{H}^{N-1}(\partial\{u_0 > 0\} \cap B_r(x_0))}{\mathcal{H}^{N-1}(B_r')} = 1 \tag{3.5.1}$$

donde B_r' es la bola de radio r en R^{N-1}. Entonces $q(x_0) = \sqrt{2M}$.

Observación 3.5.1. *La condición* (3.5.1) *es válida en $\mathcal{H}^{N-1}-$a.e. en $\partial_{red}\{u_0 > 0\}$* (*ver [4]*).

Demostración del Teorema 3.5.1. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x_0 = 0$ y $\nu(x_0) = e_1$.

Recordemos la caracterización que tenemos sobre el Laplaciano de u_0 en sentido débil. Dada φ en $C_0^\infty(B_1)$

$$-\int_{B_1} \nabla u_0 \nabla \varphi \, dx \ = \ \int_{B_1 \cap \partial\{u_0>0\}} q(x)\varphi(x) \, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Notar en la igualdad anterior que es indistinto integrar sobre B_1 o cualquier otra bola que contenga al soporte de φ.

Veamos mediante el cambio de variable $y = \frac{x}{\lambda_j}$ qué información obtenemos del Laplaciano de u_{λ_j}.

Dada $\psi \in C_0^\infty(B_R)$ definiendo

$$\varphi(x) := \lambda_j \psi(\frac{x}{\lambda_j})$$

obtenemos para valores de λ_j suficientemente chicos,

$$
\begin{aligned}
-\int_{B_R} \nabla u_{\lambda_j}(y)\nabla\psi(y)\,dy &= -\int_{B_R} \nabla u_0(\lambda_j y)\nabla\psi(y)\,dy \\
&= -\lambda_j^{-N}\int_{B_{\lambda_j R}} \nabla u_0(x)\nabla\psi(\frac{x}{\lambda_j})\,dx \\
&= \lambda_j^{1-N}\int_{B_{\lambda_j R}\cap\partial\{u_0>0\}} q(x)\psi(\frac{x}{\lambda_j})\,d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_{B_R\cap\partial\{u_{\lambda_j}>0\}} q(\lambda_j y)\psi(y)\,d\mathcal{H}^{N-1}.
\end{aligned}
\tag{3.5.2}
$$

Ahora, dado que

$$\nabla u_{\lambda_j} \longrightarrow \sqrt{2M}\chi_{\{x_1>0\}}e_1,$$

pasando al límite y posteriormente integrando por partes tenemos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} -\int_{B_R} \nabla u_{\lambda_j}\nabla\psi\,dy &= -\sqrt{2M}\int_{B_R^+}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\,dy \\
&= \sqrt{2M}\int_{B'_R}\psi(0,y')\,dy'.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{2M}\int_{B'_R}\psi(0,y')\,dy' = \lim_{j\to\infty}\int_{B_R\cap\partial\{u_{\lambda_j}>0\}} q(\lambda_j y)\psi(y)\,d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{3.5.3}$$

Por otro lado,

$$\int_{B_R\cap\partial\{u_{\lambda_j}>0\}} q(\lambda_j y)\psi(y)\,d\mathcal{H}^{N-1} = q(0)\int_{B_R\cap\partial\{u_{\lambda_j}>0\}}\psi(y)\,d\mathcal{H}^{N-1} + A_j \tag{3.5.4}$$

donde

$$|A_j| \le C\frac{\mathcal{H}^{N-1}\big(B_{R\lambda_j}\cap\partial\{u_0>0\}\big)}{\mathcal{H}^{N-1}(B'_{R\lambda_j})}\,⨍_{B_{R\lambda_j}\cap\partial\{u_0>0\}}|q(x)-q(0)|\,d\mathcal{H}^{N-1} < \delta_0 \tag{3.5.5}$$

si $j\ge j_0(\delta_0)$.

Tomemos ahora $\psi(y)=\psi_s(y)$ con $\psi_s(0,y)=\eta_s(y')$ en $B_R\cap\{|y_1|\le\delta\}$ para un $\delta>0$ si s es suficientemente chico. Por la convergencia de $B_R\cap\partial\{u_j>0\}$ a $B_R\cap\{y_1=0\}$ en distancia de Hausdorff, se tiene que $\psi_s(y)=\eta_s(y')$ en $B_R\cap\partial\{u_j>0\}$ para s es suficientemente chico.

De aquí, usando (A1.1.3), (3.5.4), (3.5.5) se tiene para $j\ge j_0$,

$$
\begin{aligned}
&\big|\sqrt{2M}-q(0)\big|\int_{B'_R}\eta_s(y')\,dy' \\
&\qquad\le q(0)\limsup_{j\to\infty}\Big|\int_{B'_R}\eta_s(y')\,dy' - \int_{B_R\cap\partial\{u_{\lambda_j}>0\}}\eta_s(y')\,d\mathcal{H}^{N-1}\Big|
\end{aligned}
$$

Por otro lado, si $\eta_s(y')=1$ en B'_{R-s}, $0\le\eta_s\le 1$,

$$\begin{aligned}\Big|\int_{B'_R}\eta_s(y')\,dy'-\int_{B_R\cap\partial\{u_{\lambda_j}>0\}}\eta_s(y')\,d\mathcal{H}^{N-1}\Big|\\ &\le\Big|\int_{B'_R}\eta_s(y')\,dy'-|B'_R|\Big|+\Big||B'_R|-\mathcal{H}^{N-1}(B_R\cap\partial\{u_{\lambda_j}>0\})\Big|\\ &+\Big|\int_{B_R\cap\partial\{u_{\lambda_j}>0\}}\eta_s(y')\,d\mathcal{H}^{N-1}-\mathcal{H}^{N-1}(B_R\cap\partial\{u_{\lambda_j}>0\})\Big|\\ &=i)+ii)+iii).\end{aligned}$$

Ahora,

$$i)\le|B'_R\setminus B'_{R-s}|\le CR^{N-1}s.$$

y

$$ii)=|B'_R|\Big|1-\frac{\mathcal{H}^{N-1}(B_R\cap\partial\{u_{\lambda_j}>0\})}{|B'_R|}\Big|=|B'_R|\Big|1-\frac{\mathcal{H}^{N-1}(B_{\lambda_jR}\cap\partial\{u_0>0\})}{|B'_{\lambda_jR}|}\Big|<\delta$$

si $j\ge j_0$ independiente de s.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}iii)&\le\mathcal{H}^{N-1}\big((B_R\setminus B_{R-s})\cap\partial\{u_{\lambda_j}>0\}\big)\\ &=|B'_R|\frac{\mathcal{H}^{N-1}(B_{\lambda_jR}\cap\partial\{u_0>0\})}{|B'_{\lambda_jR}|}-|B'_{R-s}|\frac{\mathcal{H}^{N-1}(B_{\lambda_j(R-s)}\cap\partial\{u_0>0\})}{|B'_{\lambda_j(R-s)}|}.\end{aligned}$$

De modo que,

$$iii)\le|B'_R\setminus B'_{R-s}|+2\delta\le CR^{N-2}s+2\delta$$

si $j\ge j_0$ independiente de s.

De aquí que,

$$\limsup_{j\to\infty}\Big|\int_{B'_R}\eta_s(y')\,dy'-\int_{B_R\cap\partial\{u_{\lambda_j}>0\}}\eta_s(y')\,d\mathcal{H}^{N-1}\Big|\le C_R\,s$$

y resulta,

$$\big|\sqrt{2M}-q(0)\big|\int_{B'_R}\eta_s(y')\,dy'\le C_R\,s.$$

Haciendo ahora s tender a 0 tenemos,

$$\big|\sqrt{2M}-q(0)\big||B'_R|=0.$$

De donde,

$$q(0)=\sqrt{2M}.$$

□

Hemos probado,

Corolario 3.5.6. *u_0 es solución del problema de frontera libre en el sentido de las distribuciones. Es decir, para toda $\varphi \in C_0^\infty(B_1)$ se tiene*

$$-\int \nabla u_0 \nabla \varphi \, dx = \sqrt{2M} \int_{\partial_{red}\{u_0>0\}} \varphi(x) \, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Apéndice 1. Problemas Variacionales

Presentamos aquí algunos problemas variacionales relacionados con los problemas de frontera libre estudiados en estas notas. No pretendemos un tratamiento exhaustivo ni con las condiciones más generales posibles.

Teorema A1.1.1. *Sean H un espacio de Hilbert, $K \subset H$, convexo, cerrado y no vacío y $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y coerciva, i.e, existen $C > 0$ y $\alpha > 0$ tal que*

1. $|a(u, v)| \leq C\|u\|_H\|v\|_H$ *para todo* $(u, v) \in H \times H$
2. $|a(u, v)| \geq \alpha\|u\|_H^2$ *para todo* $u \in H$.

Entonces dado $L \in H'$ existe un único $u \in K$ tal que

$$a(u, v - u) \geq L(v - u) \tag{A1.1.1}$$

para todo $v \in K$. Además existe $c > 0$ tal que $\|u\|_H \leq c\ \|L\|_{H'}$.

Si $a(u, v)$ es simétrica, u es un minimizante de

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - L(u)$$

en K si y sólo si u es solución de la inecuación variacional (A1.1.1).

Demostración. Primero supongamos que $a(u, v) = \langle u, v\rangle$ = el producto interno en H.

Como $L \in H'$, por el Teorema de Riesz existe $h \in H$ tal que $L(v) = \langle h, v\rangle$ para toda $v \in H$. Entonces, en este caso, buscamos $u \in K$ tal que

$$\langle u, v - u\rangle \ \geq \ \langle h, v - u\rangle \quad \text{para toda } v \in K$$

lo que es equivalente a

$$\langle h - u, v - u\rangle \ \leq 0 \quad \text{para toda } v \in K.$$

Veamos que para $u \in K$,

$$\|h-u\|_H \leq \|h-v\|_H \quad \text{para toda } v \in K \quad \Leftrightarrow \quad \langle h-u, v-u\rangle \leq 0 \quad \text{para toda } v \in K.$$

Es decir, la u buscada es la proyección de h sobre el convexo K. En efecto, si

$$\|h-u\|_H \leq \|h-v\|_H \quad \text{para toda } v \in K$$

se tiene,

$$\begin{aligned}\|h-v\|_H^2 &= \|h-u-(v-u)\|_H^2 \\ &= \|h-u\|_H^2 + \|v-u\|_H^2 - 2\langle h-u, v-u\rangle \\ &\leq \|h-v\|_H^2 + \|v-u\|_H^2 - 2\langle h-u, v-u\rangle\end{aligned}$$

para todo $v \in K$ y por lo tanto,

$$0 \leq \|v-u\|_H^2 - 2\langle h-u, v-u\rangle \quad \text{para toda } v \in K.$$

Sea $w \in K$ y $v = u + \delta(w-u)$ con $0 \leq \delta \leq 1$. Por ser K convexo se tiene $v \in K$. Entonces,

$$0 \leq \|v-u\|_H^2 - 2\langle h-u, v-u\rangle = \delta^2\|w-u\|_H^2 - 2\delta\langle h-u, w-u\rangle$$

y por lo tanto,

$$0 \leq \delta\|w-u\|_H^2 - 2\langle h-u, w-u\rangle.$$

Haciendo tender a δ a 0 obtenemos

$$\langle h-u, w-u\rangle \ \leq 0,$$

y esto vale para todo $w \in K$.

Veamos ahora el recíproco. Supondremos que

$$\langle h-u, v-u\rangle \ \leq 0 \quad \text{para toda } v \in K.$$

Dado $v \in K$

$$\|h-v\|_H^2 = \|h-u\|_H^2 + \|v-u\|_H^2 - 2\langle h-u, v-u\rangle.$$

Como

$$\|v-u\|_H^2 - 2\langle h-u, v-u\rangle \ \geq 0$$

resulta que

$$\|h-v\|_H^2 \geq \|h-u\|_H^2.$$

Para terminar la demostración de la existencia en el caso en que $a(u,v) = \langle u, v\rangle$ basta demostrar el siguiente lema

Lema A1.1.1. *Sean H un Hilbert, $K \subset H$ convexo, cerrado y no vacío. Dado $h \in H$ existe $u \in K$ tal que*

$$\|h - u\|_H \leq \|h - v\|_H$$

para todo $v \in K$.

Demostración. Sea $\lambda = \text{ínf}_{v \in K} \|h - v\|_H$ entonces existe $\{v_n\} \subset K$ tal que

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \|h - v_n\|_H.$$

Veamos que $\{v_n\}$ es convergente, para eso, vemos que es una sucesión de Cauchy. Usaremos la Ley del Paralelogramo, es decir

$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = \frac{1}{2}\{\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2\}.$$

Tomando $a = h - v_n$ y $b = h - v_m$ resulta que

$$\begin{aligned} \|h - v_n\|_H^2 + \|h - v_m\|_H^2 &= \frac{1}{2}\big\|2h - (v_n + v_m)\big\|_H^2 + \frac{1}{2}\|v_n - v_m\|_H^2 \\ &= 2\left\|h - \frac{v_n + v_m}{2}\right\|_H^2 + \frac{1}{2}\|v_n - v_m\|_H^2. \end{aligned}$$

Como K es convexo, $\frac{v_n + v_m}{2} \in K$, resulta que

$$\|h - v_n\|_H^2 + \|h - v_m\|_H^2 \geq 2\lambda^2 + \frac{1}{2}\|v_n - v_m\|_H^2.$$

Dado que

$$\|h - v_n\|_H^2 + \|h - v_m\|_H^2 \to 2\lambda^2 \quad \text{cuando} \quad n, m \to \infty$$

tenemos que

$$\|v_n - v_m\|_H \to 0 \quad \text{cuando} \quad n, m \to \infty$$

y por lo tanto $\{v_n\}$ es de Cauchy.

Entonces, como K es cerrado existe $u \in K$ tal que $v_n \to u$ cuando $n \to \infty$. Luego $\lambda = \|h - u\|_H$ y por lo tanto

$$\|h - u\|_H \leq \|h - v\|_H \quad \text{para todo } v \in H.$$

□

Continuación de la demostración del Teorema A1.1.1

Hemos probado la existencia. Veamos ahora la unicidad. La demostración se hará para el caso general. Es decir, no usaremos ni siquiera la simetría de a.

Sean u_1 y u_2 soluciones correspondientes a L_1 y L_2 respectivamente. Entonces,

$$a(u_1, u_2 - u_1) \geq L_1(u_2 - u_1) \tag{A1.1.2}$$
$$a(u_2, u_1 - u_2) \geq L_2(u_1 - u_2) \tag{A1.1.3}$$

La desigualdad (A1.1.3) equivale a

$$a(u_2, u_2 - u_1) \leq L_2(u_2 - u_1) \tag{A1.1.4}$$

Restando (A1.1.4) de (A1.1.2) y multiplicando por -1 tenemos,

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq (L_1 - L_2)(u_1 - u_2)$$

Como a es coerciva con constante α,

$$\alpha \|u_1 - u_2\|_H^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq \|L_1 - L_2\|_{H'} \|u_1 - u_2\|_H$$

De aquí que

$$\|u_1 - u_2\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|L_1 - L_2\|_{H'} \tag{A1.1.5}$$

En particular, si $L_1 = L_2$ se sigue que $u_1 = u_2$. Además, si $L_2 = 0$ se tiene $u_2 = 0$. Por lo tanto,

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_{H'}$$

Con esto terminamos la demostración del Teorema A1.1.1 en el caso en que $a(u, v)$ es el producto interno de H.

Si $a(u, v)$ es simétrica, define un producto interno en H que es equivalente al usual (por continuidad y coercividad). De modo que H con el producto escalar $a(u, v)$ resulta un espacio de Hilbert y $L : H \to \mathbb{R}$ resulta continua para la norma dada por ese producto escalar. Aplicando el caso anterior, resulta que existe una única $u \in K$ tal que

$$a(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in K.$$

Además, u resulta ser la proyección sobre K de h donde $h \in H$ está determinado por

$$L(v) = a(h, v) \quad \forall v \in K.$$

Entonces tenemos,

$$a(h - u, h - u) \leq a(h - v, h - v) \quad \forall v \in K.$$

De aquí,

$$-2a(h, u) + a(u, u) \leq -2a(h, v) + a(v, v) \quad \forall v \in K.$$

Recordando la definición de h tenemos

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - L(u) \leq \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) = J(v) \quad \forall v \in K.$$

Es decir, u es un minimizante de J en K.

Fácilmente se ve la recíproca. Es decir, si $u \in K$ minimiza J en K se sigue que u es la solución de la inequación variacional (A1.1.1).

Sólo nos queda estudiar el caso en el que $a(u,v)$ no es simétrica. Con ese fin definimos

$$a_t(u,v) = s(u,v) + t\sigma(v,v) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

donde

$$s(u,v) = \frac{a(u,v) + a(v,u)}{2} \quad \text{y} \quad \sigma(u,v) = \frac{a(u,v) - a(v,u)}{2}$$

son la parte simétrica y antisimétrica de $a(u,v)$ respectivamente.

Observar que $a_0(u,v) = s(u,v)$ y $a_1(u,v) = a(u,v)$.

Luego, basta ver que existe $\delta > 0$ tal que si existe una única solución para todo $L \in H'$ cuando $t = \tau$ entonces existe una única solución para todo $L \in H'$ cuando $t \in [\tau, \tau + \delta]$.

En efectro, dado $L \in H'$ y $t \geq \tau$ resulta que

$$a_t(u, v-u) \geq L(v-u) \quad \forall v \in K \quad \Leftrightarrow \quad a_\tau(u, v-u) \geq L(v-u) - (t-\tau)\sigma(u, v-u) \quad \forall v \in K.$$

Para $w \in K$ definimos $L_w : H \to \mathbb{R}$ como

$$L_w(v) = L(v) - (t-\tau)\sigma(w,v).$$

Observar que $L_w \in H'$ para todo $w \in K$. Entonces para todo $w \in K$ existe un único $u \in K$ tal que

$$a_\tau(u, v-u) \geq L_w(v-u) = L(v-u) - (t-\tau)\sigma(w, v-u) \quad \forall v \in K.$$

De esta manera tengo definida una función de $A : K \to K$, $Aw = u$.

Entonces, lo que buscamos es un punto fijo de A. Como K es completo basta ver que A es una contracción si t está suficientemente cerca de τ.

Como $a_\tau(u,v)$ es coerciva con constante α se tiene de (A1.1.5),

$$\|Aw_1 - Aw_2\|_H = \|u_1 - u_2\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|L_{w_1} - L_{w_2}\|_{H'}.$$

Estimemos $\|L_{w_1} - L_{w_2}\|_{H'}$. Para $v \in K$

$$|(L_{w_1} - L_{w_2})(v)| = |t-\tau||\sigma(w_1 - w_2, v)| \leq C|t-\tau|\|w_1 - w_2\|_H\|v\|_H,$$

donde C es la constante de continuidad de $a(u,v)$. Entonces,

$$\|L_{w_1} - L_{w_2}\|_{H'} \leq C|t-\tau|\|w_1 - w_2\|_H,$$

de donde,

$$\|Aw_1 - Aw_2\|_H \leq \frac{C}{\alpha}|t-\tau|\|w_1 - w_2\|_H.$$

Tomando $|t-\tau| \leq \delta = \frac{\alpha}{2C}$ resulta que

$$\|Aw_1 - Aw_2\|_H \leq \frac{1}{2}\|w_1 - w_2\|_H.$$

Luego A es contractiva y por lo tanto tiene un único punto fijo, como queríamos ver.

De esta manera queda demostrado el Teorema A1.1.1. □

Como coralario tenemos la existencia de solución para el Problema del Obstáculo.

Corolario A1.1.1. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, $g \in H^1(\Omega)$ y $\phi \in L^2(\Omega)$. Dada $f \in L^2(\Omega)$ existe una única $u \in K = \{v \in H^1(\Omega) : v - g \in H_0^1(\Omega)$ y $v \geq \phi$ en $\Omega\}$ tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla(v-u)\,dx \geq \int_\Omega f(v-u)\,dx \quad \forall v \in K. \tag{A1.1.6}$$

Además, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\big\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)}\big\}.$$

Demostración. Definimos $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx$$

y $L : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$L(u) = \int_\Omega fu\,dx.$$

Observar que $L \in (H_0^1(\Omega))' = H^{-1}(\Omega)$ y que $a(u,v)$ es una forma bilineal simétrica y coerciva en $H_0^1(\Omega)$ (por la desigualdad de Poincaré). Entonces vamos a plantear nuestro problema en $H_0^1(\Omega)$ y usar el Teorema A1.1.1.

Supongamos que u es solución de (A1.1.6). Tomemos $\bar{u} = u - g$ y definamos $\overline{K} = K - g \subset H_0^1(\Omega)$. Dado $\bar{v} \in \overline{K}$ existe $v \in K$ tal que $\bar{v} = v - g$. Así,

$$\begin{aligned} a(\bar{u}, \bar{v} - \bar{u}) &= a(u-g, v-u) \\ &= a(u, v-u) - a(g, v-u) \\ &\geq L(v-u) - a(g, v-u) \\ &= L(\bar{v} - \bar{u}) - a(g, \bar{v} - \bar{u}). \end{aligned}$$

Luego, si definimos $L_g(\bar{v}) = L(\bar{v}) - a(g, \bar{v})$, resulta que $L_g \in H^{-1}(\Omega)$ y $\bar{u}$ es solución de

$$a(\bar{u}, \bar{v} - \bar{u}) \geq L_g(\bar{v} - \bar{u}) \quad \forall \bar{v} \in \overline{K}. \tag{A1.1.7}$$

Veamos que si $\bar{u}$ es solución de (A1.1.7) entonces $u = \bar{u} + g$ es solución de (A1.1.6). En efecto, dado $v \in K$ sea $\bar{v} = v - g \in \overline{K}$. Entonces,

$$a(\bar{u}, \bar{v} - \bar{u}) \geq L_g(\bar{v} - \bar{u})$$

lo que es equivalente a

$$a(u, v - u) \geq L(v - u)$$

y como v es arbitrario, u es solución de (A1.1.6).

Entonces probamos que encontrar una solución de (A1.1.6) es equivalente a encontrar una solución de (A1.1.7).

Usando el Teorema A1.1.1 resulta que existe una única solución del problema (A1.1.7).

Como

$$\|\bar{u}\|_{H^1} \leq C\|L_g\|_{H^{-1}}, \qquad \|L_g\|_{H^{-1}} \leq \|L\|_{H^{-1}} + \bar{C}\|g\|_{H^1}$$

donde $\bar{C}$ es la constante de la continuidad de $a(u, v)$, se sigue que

$$\|u\|_{H^1} \leq \|\bar{u}\|_{H^1} + \|g\|_{H^1} \leq C\big\{\|L\|_{H^{-1}} + \|g\|_{H^1}\big\}.$$

Con lo cual queda demostrado el Corolario. □

Finalmente probaremos una proposición sobre problemas de minimización asociados a ecuaciones no lineales. Hay resultados mucho más generales, pero aquí sólo trataremos el caso que nos interesa en estas notas.

Proposición A1.1.1. *Sea $B \in C^1(\mathbb{R})$ tal que existen constantes $C_1, C_2 \geq 0$ tales que $\beta = B'$ satisface*

$$|\beta(s)| \leq C_1 + C_2|s|^2 \qquad \textit{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Sea u un minimizante del funcional,

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx + \int_\Omega B(v)\,dx \tag{A1.1.8}$$

en $\{v \in H^1(\Omega) : v = g \text{ en } \partial\Omega\}$. Entonces, u es una solución débil de

$$\begin{cases} \Delta u = \beta(u) & en \quad \Omega \\ u = g & en \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{A1.1.9}$$

Demostración. Como u es un minimizante de $J(\cdot)$ tenemos que $u \in H^1(\Omega)$ y $u = g$ en $\partial\Omega$, entonces dada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ si definimos $v = u + \varepsilon\varphi$ con $\varepsilon > 0$ resulta que $v \in H^1(\Omega)$, $v = g$ en $\partial\Omega$ y además

$$J(u) \leq J(v) = J(u + \varepsilon\varphi).$$

Entonces,

$$\liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{J(u + \varepsilon\varphi) - J(u)}{\varepsilon} \geq 0.$$

Se tiene,

$$\begin{aligned}\liminf_{\varepsilon \to 0^+} &\frac{J(u + \varepsilon\varphi) - J(u)}{\varepsilon} \\ &= \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \Big[\frac{1}{2\varepsilon} \int_\Omega \Big\{|\nabla u + \varepsilon\nabla\varphi|^2 - |\nabla u|^2\Big\}\, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \Big\{B(u + \varepsilon\varphi) - B(u)\Big\}\, dx\Big].\end{aligned}$$

Por un lado, fácilmente se ve que,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Omega \Big\{|\nabla u + \varepsilon\nabla\varphi|^2 - |\nabla u|^2\Big\}\, dx = \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi\, dx.$$

Entonces, sólo falta calcular

$$\liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \Big\{B(u + \varepsilon\varphi) - B(u)\Big\}\, dx.$$

Como $B \in C^1(\mathbb{R})$,

$$\frac{B(u + \varepsilon\varphi) - B(u)}{\varepsilon} = \varphi \int_0^1 \beta(u + t\varepsilon\varphi)\, dt.$$

Por lo tanto,

$$\Big|\frac{B(u + \varepsilon\varphi) - B(u)}{\varepsilon}\Big| \leq \|\varphi\|_\infty \int_0^1 \big(C_1 + C_2|u + t\varepsilon\varphi|^2\big)\, dt \leq K_1 + K_2|u|^2 \in L^1(\Omega),$$

y

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{B(u + \varepsilon\varphi) - B(u)}{\varepsilon} = \beta(u)\varphi.$$

Luego, usando el Teorema de Convergencia Mayorada resulta que,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \Big\{B(u + \varepsilon\varphi) - B(u)\Big\}\, dx = \int_\Omega \beta(u)\varphi\, dx.$$

Por lo tanto,

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{J(u + \varepsilon\varphi) - J(u)}{\varepsilon} = \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi\, dx + \int_\Omega \beta(u)\varphi\, dx.$$

Si reemplazamos φ por $-\varphi$ tenemos,

$$0 \geq \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega \beta(u)\varphi \, dx.$$

Concluimos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega \beta(u)\varphi \, dx = 0$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, o lo que es lo mismo, u es solción débil de (A1.1.9). $\square$

Apéndice 2. Funciones superarmónicas

En este apéndice presentamos resultados para soluciones de $\Delta u = f$ con $f \in L^\infty$ y para funciones superarmónicas.

A2.1. Estimaciones para soluciones de $\Delta u = f$

Recordemos el siguiente resultado.

Proposición A2.1.1 (Desigualdad de Harnack)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto conexo. Entonces si $u \geq 0$ y $\Delta u = 0$ en Ω, dado $\Omega' \subset\subset \Omega$ existe una constante c que depende de Ω' tal que*

$$u(x) \leq cu(y)$$

para todo $x, y \in \Omega'$. En el caso particular en que $\Omega = B_{2r}(x_0)$ se tiene,

$$u(x) \leq 2^N u(x_0)$$

para todo $x \in B_r(x_0)$.

Como corolario se obtiene,

Proposición A2.1.2. *Si $f \in L^\infty(B_2(0))$, $\Delta u = f$ en $B_2(0)$ y $u \geq 0$, se tiene*

$$u(x) \leq C_N\{u(0) + \|f\|_{L^\infty(B_2(0))}\}$$

para todo $x \in B_1(0)$, donde C_N es una constante que depende sólo de la dimensión.

Y, si $f \in L^\infty(B_{2r}(x_0))$, $\Delta u = f$ en $B_{2r}(x_0)$ y $u \geq 0$ se tiene

$$u(x) \leq C_N\{u(x_0) + r^2\|f\|_{L^\infty(B_{4r}(x_0))}\} \quad \text{para } x \in B_r(x_0). \tag{A2.1.1}$$

Demostración. Sean

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in B_2(0) \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_2(0)} \end{cases}$$

y

$$v(x) = -\int_{\mathbb{R}^N} \bar{f}(y) \frac{C_N}{|x-y|^{N-2}}\, dy \quad \Big(= -\int_{B_2(0)} f(y) \frac{C_N}{|x-y|^{N-2}}\, dy \Big).$$

Entonces,

$$\Delta v = \bar{f} \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N,$$

por lo cual tenemos que

$$\Delta v = f \quad \text{en} \quad B_2(0).$$

Usando el hecho de que $f \in L^\infty(B_2(0))$ resulta para $x \in B_2(0)$,

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq \|f\|_{L^\infty(B_2(0))} C_N \int_{B_2(x)} \frac{1}{|y|^{N-2}}\, dy \\ &= \|f\|_{L^\infty(B_2(0))} C_N \int_{B_4(0)} \frac{1}{|y|^{N-2}}\, dy \\ &= \overline{C}_N \|f\|_{L^\infty(B_2(0))}. \end{aligned}$$

Consideremos ahora $w = u - v$. Entonces

$$\Delta w = \Delta u - \Delta v = f - f = 0 \quad \text{en} \quad B_2(0).$$

Además, usando que $u \geq 0$ y que $|v| \leq C_N \|f\|_{L^\infty(B_2(0))}$ en $B_2(0)$ resulta,

$$w \geq -v \geq -C_N \|f\|_{L^\infty(B_2(0))} = -K \quad \text{en } B_2(0)$$

donde K es una constante. Así tenemos que,

$$\Delta(w + K) = 0 \quad \text{en} \quad B_2(0) \quad \text{y} \quad w + K \geq 0 \quad \text{en} \quad B_2(0).$$

Aplicando la Desigualdad de Harnack a $w + K$ en $B_2(0)$ tenemos,

$$w(x) + K \leq 2^N \{w(0) + K\} \quad \text{en } B_1(0).$$

O sea,

$$w(x) \leq 2^N w(0) + (2^N - 1)K \quad \text{en } B_1(0).$$

Luego si $x \in B_1(0)$,

$$\begin{aligned} u(x) &= w(x) + v(x) \\ &\leq 2^N w(0) + (2^N - 1)K + C_N \|f\|_{L^\infty(B_2(0))} \\ &= 2^N w(0) + 2^N K \\ &= 2^N u(0) - 2^N v(0) + 2^N K. \end{aligned}$$

Usando que $|v(0)| \leq K$ tenemos que

$$u(x) \leq 2^N u(0) + 2^{N+1} K \leq C_N \{u(0) + \|f\|_{L^\infty(B_2(0))}\}$$

para todo $x \in B_1(0)$.

Ahora, si $u \geq 0$ y $\Delta u = f$ en $B_{2r}(x_0)$ considerando la función $\bar{u}(x) = u(x_0 + rx)$ para $x \in B_2(0)$, tenemos

$$\Delta \bar{u}(x) = r^2 \Delta u(x_0 + rx) = r^2 f(x_0 + rx) \qquad \text{en } B_2(0).$$

Como $f \in L^\infty(B_{2r}(x_0))$, resulta que

$$\Delta \bar{u}(x) = \bar{f}(x) \in L^\infty(B_2(0)).$$

Como $u \geq 0$ en $B_{2r}(x_0)$, para $x \in B_2(0)$ tenemos que $\bar{u}(x) \geq 0$. Entonces, usando lo probado anteriormente, existe una constante C_N tal que

$$\bar{u}(x) \leq C_N \{\bar{u}(0) + \|\bar{f}\|_{L^\infty(B_2(0))}\}$$

para todo $x \in B_1(0)$.

Si $x \in B_r(x_0)$, podemos escribir $x = x_0 + ry$ para algún $y \in B_1(0)$. Entonces,

$$\begin{aligned} u(x) &= \bar{u}(y) \\ &\leq C_N \{\bar{u}(0) + \|\bar{f}\|_{L^\infty(B_2(0))}\} \\ &= C_N \{u(x_0) + r^2 \|f\|_{L^\infty(B_{2r}(x_0))}\}. \end{aligned}$$

□

Recordemos el siguiente resultado sobre acotación de derivadas de funciones armónicas:

Proposición A2.1.3. *Para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $C_k > 0$ tal que para toda u armónica en $B_1(0)$ (i.e., $\Delta u = 0$ en $B_1(0)$),*

$$|D^\alpha u(0)| \leq C_k \|u\|_{L^1(B_1(0))}$$

para todo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ con $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N = k$.

De aquí se deduce,

Proposición A2.1.4. *Para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $C_k > 0$ tal que si $f \in C^{k-1}(\overline{B_1(0)})$ y u es tal que $\Delta u = f$ en $B_1(0)$, entonces*

$$|D^\alpha u(0)| \leq C_k \big(\|u\|_{L^1(B_1(0))} + \|f\|_{C^{k-1}(\overline{B_1(0)})}\big).$$

para todo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ con $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N = k$.

Demostración. Sea $\bar{f} \in C^{k-1}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\bar{f} = f$ en $B_1(0)$, $\bar{f} = 0$ fuera de $B_2(0)$ y

$$\|\bar{f}\|_{C^{k-1}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{C^{k-1}(\overline{B_1(0)})}.$$

Consideremos

$$v(x) = \big(\bar{f} * \phi_N\big)(x) = -\int_{B_2(0)} \bar{f}(y)\frac{C_N}{|x-y|^{N-2}}\,dy.$$

Como $\Delta v = \bar{f}$ en $B_2(0)$ tenemos que,

$$\Delta v = f \quad \text{en } B_1(0).$$

Escribiendo $\alpha = \beta + e_i$ para $|\alpha| = k$, tenemos que

$$D^\alpha v = D^\beta \bar{f} * \frac{\partial \phi_N}{\partial x_i} \quad \text{y} \quad \left|\frac{\partial \phi_N}{\partial x_i}\right| \leq \frac{C}{|x-y|^{N-1}}$$

de donde resulta que

$$|D^\alpha v(x)| = \left|\left(D^\beta \bar{f} * \frac{\partial \phi_N}{\partial x_i}\right)(x)\right| \leq C_N\|D^\beta \bar{f}\|_{L^\infty(B_2(0))}.$$

Consideremos ahora $w = u - v$. Entonces, $\Delta w = 0$ en $B_1(0)$. Por la Proposición A2.1.3, sabemos que existe una constante $C_k > 0$ tal que si $|\alpha| = k$,

$$|D^\alpha w(0)| \leq C_k\|w\|_{L^1(B_1(0))}.$$

Como $D^\alpha u = D^\alpha w + D^\alpha v$ se tiene

$$\begin{aligned}|D^\alpha u(0)| &\leq |D^\alpha w(0)| + |D^\alpha v(0)| \leq C_k\|w\|_{L^1(B_1(0))} + C\|f\|_{C^{k-1}(\overline{B_1(0)})}\\ &\leq C_k\|u\|_{L^1(B_1(0))} + C_k\|v\|_{L^1(B_1(0))} + C\|f\|_{C^{k-1}(\overline{B_1(0)})}.\end{aligned}$$

Finalmente, como $\|v\|_{L^1(B_1(0))} \leq C\|f\|_{L^\infty(B_1(0))}$ se tiene,

$$|D^\alpha u(0)| \leq C_k\{\|u\|_{L^1(B_1(0))} + \|f\|_{C^{k-1}(\overline{B_1(0)})}\}.$$

$\square$

Como corolario obtenemos,

Proposición A2.1.5. *Para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $C_k > 0$ tal que si $f \in C^{k-1}(\overline{B_r(x_0)})$ y u satisface $\Delta u = f$ en $B_r(x_0)$, entonces*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^k}\left\{\frac{\|u\|_{L^1(B_r(x_0))}}{r^N} + r^2\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{|\beta|=j} r^j\|D^\beta f\|_{L^\infty(B_r(x_0))}\right\}$$

Demostración. Consideremos, para $x \in B_1(0)$ la función $\bar{u}(x) = u(x_0 + rx)$. Entonces

$$\Delta \bar{u}(x) = r^2 \Delta u(x_0 + rx) = r^2 f(x_0 + rx).$$

Si llamamos $\bar{f}(x) = r^2 f(x_0 + rx)$ se tiene que $\bar{f} \in C^{k-1}(\overline{B_1(0)})$. Usando la proposición anterior, tenemos que, para todo α con $|\alpha| = k$,

$$|D^\alpha \bar{u}(0)| \le C_k (\|\bar{u}\|_{L^1(B_1(0))} + \|\bar{f}\|_{C^{k-1}(\overline{B_1(0)})}).$$

Se tiene $D^\alpha \bar{u}(0) = r^k D^\alpha u(x_0)$ y

$$\|\bar{u}\|_{L^1(B_1(0))} = \int_{|x|<1} |u(x_0 + rx)|\, dx = r^{-N} \int_{B_r(x_0)} |u(y)|\, dy = \frac{\|u\|_{L^1(B_r(x_0))}}{r^N}.$$

Como para $|\beta| = j$ se tiene $D^\beta \bar{f}(x) = r^2 r^j D^\beta f(x_0 + rx)$ resulta que,

$$\|\bar{f}\|_{C^{k-1}(\overline{B_1(0)})} \le r^2 \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{|\beta|=j} r^j \|D^\beta f\|_{L^\infty(B_r(x_0))}.$$

Luego,

$$|D^\alpha u(x_0)| \le \frac{C_k}{r^k} \left\{ \frac{\|u\|_{L^1(B_r(x_0)}}{r^N} + r^2 \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{|\beta|=j} r^j \|D^\beta f\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \right\}.$$

□

A2.2. Funciones superarmónicas

Definición A2.2.1. *Decimos que* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *es* **superarmónica** *si para toda* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *y* $\varphi \ge 0$, *se tiene*

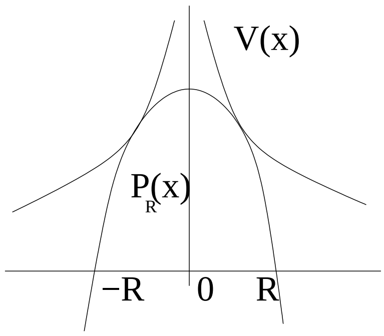
$$\int_\Omega u \Delta \varphi \le 0.$$

Proposición A2.2.1. *Sea u superarmónica y sea* $\phi_r(x) = ⨍_{B_r(x)} u(y)\, dy$. *Entonces para cada* $x \in \Omega$, $\phi_r(x)$ *es una función decreciente de* r.

Demostración. Sean $0 < R < S$,

$$V(x) = \frac{1}{|x|^{N-2}} \quad \text{y} \quad P_R(x) = -a_R |x|^2 + b_R,$$

Se tiene que $V(x)$ es armónica fuera del origen y $P_R(x)$ es un paraboloide.



Elegimos los coeficientes a_R y b_R de modo tal que

$$\begin{cases} V(R) = P_R(R) \\ V'(R) = P_R'(R), \end{cases}$$

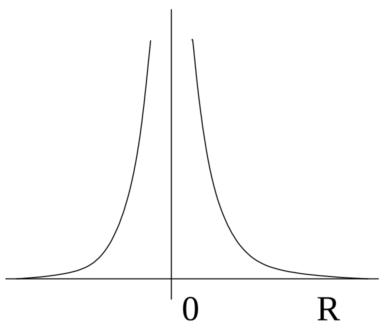
es decir,

$$\begin{cases} \frac{1}{R^{N-2}} = -a_R R^2 + b_R \\ \frac{-(N-2)}{R^{N-1}} = -2a_R R. \end{cases}$$

Entonces resultan $a_R = \frac{N-2}{2R^N}$ y $b_R = \frac{1}{R^{N-2}} + R^2 a_R = \frac{N}{2R^{N-2}}$.
Considerando

$$V_R(x) = \begin{cases} V(x) - P_R(x) & \text{si} \quad |x| < R \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq R \end{cases}$$

tenemos que $V_R \in C^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.



Sea ahora $\varphi = V_S - V_R \in C_0^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$\begin{aligned}
&\varphi = P_R - P_S > 0 \quad \text{en} \quad B_R(0)\\
&\varphi = V_S = V - P_S > 0 \quad \text{en} \quad B_S(0) \setminus B_R(0)\\
&\varphi = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N \setminus B_S(0)
\end{aligned}$$

lo que implica que $\varphi \geq 0$ en $\mathbb{R}^N$ y $\varphi \in C_0^{1,1}(\mathbb{R}^N)$.

Dado que u es superarmónica,

$$0 \geq \int u\Delta\varphi.$$

Pero, como

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &= (\Delta P_R - \Delta P_S)\,\chi_{B_R} - \Delta P_S\,\chi_{B_S \setminus B_R}\\
&= \Delta P_R\,\chi_{B_R} - \Delta P_S\,\chi_{B_S}\\
&= -2Na_R\,\chi_{B_R} + 2Na_S\,\chi_{B_S}\\
&= \frac{-(N-2)N}{R^N}\,\chi_{B_R} + \frac{N(N-2)}{S^N}\,\chi_{B_S},
\end{aligned}$$

se tiene,

$$0 \geq \int u\Delta\varphi = N(N-2)|B_1|\left\{ ⨍_{B_S} u - ⨍_{B_R} u \right\}.$$

Por lo que,

$$⨍_{B_S} u \leq ⨍_{B_R} u,$$

de lo que resulta $\phi_S \leq \phi_R$. De modo que $\phi_r(x)$ es una función decreciente de r. $\square$

Como $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, para casi todo $x \in \Omega$ se tiene

$$\phi_r(x) = ⨍_{B_r(x)} u(y)\,dy \to u(x) \quad \text{cuando } r \to 0.$$

Por otro lado, como $\phi_r(x)$ crece cuando r decrece, existe $\lim_{r\to 0} \phi_r(x)$ para todo $x \in \Omega$ (pudiendo ser infinito en un subconjunto de medida nula).

De modo que podemos suponer que u está definido *para todo* x, tomando como valor de $u(x)$ a

$$u(x) = \lim_{r\to 0} ⨍_{B_r(x)} u(y)\,dy = \lim_{r\to 0} \phi_r(x).$$

Se tiene,

Proposición A2.2.2. *Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es superarmónica se tiene que $\{u > \lambda\}$ es abierto para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demostración. El resultado es consecuencia del hecho de que u es límite de una sucesión creciente de funciones continuas. En efecto, sea $x_0 \in \{u > \lambda\}$. Si $u(x_0) = +\infty$, entonces como $\lim_{r\to 0} \phi_r(x_0) = u(x_0)$, se tiene para $\delta > 0$,

$$\phi_r(x_0) - \delta > \lambda \quad \text{si} \quad 0 < r \le r_0.$$

Ahora bien, como ϕ_{r_0} es continua,

$$u(x) \ge \phi_{r_0}(x) \ge \phi_{r_0}(x_0) - \delta > \lambda \quad \text{si} \quad |x - x_0| < \varepsilon.$$

Si $u(x_0) < +\infty$, como $\phi_r(x_0) \to u(x_0)$ cuando $r \to 0$, dado $\delta > 0$, existe r_0 tal que si $0 < r \le r_0$

$$u(x_0) - \frac{\delta}{2} < \phi_r(x_0).$$

Finalmente, sea $\delta > 0$ tal que $u(x_0) - \delta > \lambda$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$\phi_{r_0}(x) > \phi_{r_0}(x_0) - \frac{\delta}{2} \quad \text{si} \quad |x - x_0| < \varepsilon.$$

Entonces, si $|x - x_0| < \varepsilon$,

$$u(x) > \phi_{r_0}(x) > \phi_{r_0}(x_0) - \frac{\delta}{2} > u(x_0) - \delta > \lambda.$$

Por lo tanto, $\{u > \lambda\}$ es abierto. $\square$

A2.3. Continuación Analítica

Proposición A2.3.1. *Sea u armónica en Ω abierto conexo. Sea Γ una porción C^1 del borde tal que para alguna bola B centrada en Γ se tenga que $B \cap \partial\Omega \subset \Gamma$ y en algún sistema de coordenadas $B \cap \partial\Omega$ sea el gráfico de una función f de las variables $(x_1, \cdots, x_{N-1})$ y $B \cap \Omega$ sean los puntos con $x_N > f(x_1, \cdots, x_{N-1})$. Supongamos que $u \in C^1(\Omega \cap \Gamma)$ y tanto u como $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ valen 0 en Γ. Entonces, $u = 0$ en todo Ω.*

Demostración. Tomamos la bola B del enunciado. Una parte de esa bola estará dentro del dominio Ω y otra parte no. Definimos una extensión $\bar{u}$ en dicha bola. Fuera del dominio, vale 0 y dentro del dominio coincide con el valor de u. Puesto que u y su derivada normal se anulan en el borde, esta extensión seguirá siendo C^1, pero no neesariamente C^2.

Tenemos entonces que $\bar{u} \in C^1(B)$ y $\Delta\bar{u} = 0$ en $B \cap \Omega$. Probaremos que $\bar{u}$ es armónica en sentido débil en B. Sea $\varphi \in C_0^\infty(B)$. Entonces,

$$\int_B \nabla\bar{u}\nabla\varphi = \int_{B\cap\Omega} \nabla\bar{u}\nabla\varphi$$

puesto que fuera de Ω $\bar{u}$ vale 0. Pero dentro de Ω $\bar{u}$ coincide con u. Luego, integrando por partes,

$$\int_B \nabla\bar{u}\nabla\varphi = \int_{B\cap\Omega} \nabla u\nabla\varphi \ = -\int_{B\cap\Omega} \Delta u \ \varphi \ + \int_{\partial(B\cap\Omega)} \varphi\nabla u\cdot\eta = \int_{\partial(B\cap\Omega)} \varphi\nabla u\cdot\eta,$$

ya que u es armónica en Ω.

Por otro lado, $\partial(B\cap\Omega) = \big(\Omega\cap\partial B\big)\cup\big(B\cap\partial\Omega\big)$. Como $\nabla u\cdot\eta = 0$ en $B\cap\partial\Omega$ y $\varphi = 0$ en $\Omega\cap\partial B$ se tiene

$$\int_B \nabla\bar{u}\nabla\varphi = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que $\bar{u}$ es armónica en sentido débil, luego será armónica en sentido clásico. Como vale 0 en la parte de la bola fuera de Ω, por ser analítica se deduce que $\bar{u}$ vale cero en toda la bola. Pero entonces, eso implica a su vez que u vale cero en la porción de la bola contenida en Ω. Nuevamente, por analiticidad inferimos que u es idénticamente cero en todo Ω. $\square$

Como corolario, tenemos que dos funciones con el mismo laplaciano en una región, el mismo dato y la misma derivada en una porción del borde son iguales. A diferencia del resultado clásico de unicidad, esto no requiere que se tenga una coincidencia completa en todo el borde pero por contrapartida requiere además igualdad de derivadas.

Apéndice 3. Distribuciones

En este apéndice enunciaremos unos pocos resultados sobre distribuciones que usamos en distintos puntos en estas notas.

A3.1. Definiciones

Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. A partir de u se define un funcional $T_u : C_0^\infty(\Omega) \longmapsto \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$\langle T_u, \varphi\rangle := \int_\Omega u\,\varphi.$$

Así definido obtenemos un funcional lineal. Como sólo se tiene integrabilidad local, no será cierto en general que $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ entonces

$$\int_\Omega u\,\varphi_n \to \int_\Omega u\,\varphi.$$

Ahora bien, si todas las funciones φ_n tienen soporte contenido en un compacto K, entonces se tiene,

$$\int_\Omega u\,\varphi_n = \int_K u\,\varphi_n \to \int_K u\,\varphi = \int_\Omega u\,\varphi.$$

En el compacto K la función u es integrable y entonces es válido el paso al límite. Esto motiva la siguiente definición:

Definición A3.1.1. *Diremos que $\varphi_n \to \varphi$ en $C_0^\infty(\Omega)$ si $\exists\ K \subset \Omega$ compacto tal que $sop(\varphi_n) \subset K$ $\forall n$ y $D^\alpha\varphi_n \rightrightarrows D^\alpha\varphi$ $\forall \alpha \in N_0^N$.*

Es posible, aunque no lo trataremos aquí, definir una topología en $C_0^\infty(\Omega)$ en donde se obtenga esta noción de convergencia.

Con esta nueva definición de convergencia podemos aplicar el paso al límite antes comentado y tenemos así que T_u es continua. O sea, T_u es un funcional lineal y continuo en $C_0^\infty(\Omega)$. Por lo tanto, está en $(C_0^\infty(\Omega))'$.

Notacin A3.1.1. $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$*. Luego,* $\mathcal{D}'(\Omega) = (C_0^\infty(\Omega))'$.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ es llamado el Espacio de Distribuciones en Ω.

Para funciones de $C_0^k(\Omega)$ tenemos,

Definición A3.1.2. *Diremos que* $\varphi_n \to \varphi$ *en* $C_0^k(\Omega)$ *si* $\exists\, K \subset \Omega$ *compacto tal que* $sop(\varphi_n) \subset K$ $\forall n$ *y* $D^\alpha\varphi_n \rightrightarrows D^\alpha\varphi$ $\forall \alpha \in N_0^N, |\alpha| \leq k$.

Como antes, es posible definir una topología en $C_0^k(\Omega)$ que induzca esta noción de convergencia.

A3.2. Extensión a $C_0(\Omega)$

En realidad T_u está definida y es continua en $C_0(\Omega)$. Por lo tanto $T_u \in \big(C_0(\Omega)\big)'$.

Diremos que una distribución T es de orden k si para cada compacto $K \subset\subset \Omega$ existe una constante C_K tal que si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ y $sop(\varphi) \subset K$ se tiene

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Si T es una distribución de orden k se puede extender a $C_0^k(\Omega)$ por densidad y resulta en $\big(C_0^k(\Omega)\big)'$.

A3.3. Caracterización de $\big(C_0(\Omega)\big)'$

Ya sabemos que si $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ entonces $T_u \in (C_0(\Omega))'$. Sin embargo, dentro de este conjunto es posible encontrar más elementos. De hecho, se pueden definir operadores T_μ donde ahora μ es una medida boreliana y localmente finita (medida de Radon). A saber,

$$\langle T_\mu, \varphi\rangle := \int_\Omega \varphi\, d\mu.$$

En caso de tener $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$, se puede pensar que $d\mu = u(x)\,dx$, con dx representando la medida de Lebesgue. Esta nueva medida μ resultará Boreliana y localmente finita.

Además, T_μ y T_u definirán el mismo funcional, en base a cómo se definieron.

El siguiente resultado afirma que en $(C_0(\Omega))'$ no hay más cosas que las medidas de Radon (que eventualmente pueden provenir de funciones localmente integrables).

Teorema A3.3.1 (Teorema de Riesz, ver [4])**.** $(C_0(\Omega))'$ *es el conjunto de las medidas de Radon en* Ω.

A3.4. Otras definiciones

Definición A3.4.1 (Derivada Distribucional)**.** *Dada $T \in D'(\Omega)$ y $\alpha \in N_0^N$, se define $D^\alpha T \in D'(\Omega)$ de la siguiente forma, para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle.$$

De esta forma, si $T = T_u$ con $u \in C^k(\Omega)$ se tiene para $|\alpha| \leq k$,

$$D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}.$$

Definición A3.4.2. *Dadas $T_1,\ T_2 \in D'$, decimos que $T_1 \geq T_2$ si $\forall \varphi \in C_0^\infty$, $\varphi \geq 0$, se tiene que $\langle T_1, \varphi \rangle \geq \langle T_2 . \varphi \rangle$.*

Proposición A3.4.1. *Si $T \in D'$, $T \geq 0$, entonces T es de orden 0.*

Demostración. Queremos ver que $\forall K \subset \Omega$ compacto, $\exists\, C_K > 0$ tal que si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $sop\, \varphi \subseteq K$, entonces $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K ||\varphi||_{L^\infty(\Omega)}$.

Sea $\psi \in C_0^\infty(\Omega), \psi \equiv 1$ en K, $0 \leq \psi \leq 1$. Entonces, tenemos que $|\varphi| \leq \psi ||\varphi||_{L^\infty(\Omega)}$, lo que implica que $\psi ||\varphi||_{L^\infty(\Omega)} - \varphi \geq 0$ y que $\psi ||\varphi||_{L^\infty(\Omega)} + \varphi \geq 0$.

Como $T \geq 0$,

$$\langle T, \psi ||\varphi||_{L^\infty(\Omega)} - \varphi \rangle \ \geq 0 \ \text{ y } \ \langle T, \psi ||\varphi||_{L^\infty(\Omega)} + \varphi \rangle \ \geq 0.$$

Usando la linealidad de T obtenemos que

$$\langle T, \psi \rangle ||\varphi||_{L^\infty(\Omega)} \mp \langle T, \varphi \rangle \geq 0.$$

Llamamos C_K a $\langle T, \psi \rangle$ y así obtenemos

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K ||\varphi||_{L^\infty(\Omega)}.$$

□

Corolario A3.4.1. *Si $T \in D', T \geq 0, \exists\, \mu$ medida de Radon tal que $\forall \varphi \in C_0^\infty, \langle T, \varphi \rangle = \int \varphi \, d\mu$.*

Demostración. Como $T \geq 0$, por el resultado anterior deducimos que T es de orden 0. Luego, T se puede extender a $\big(C_0(\Omega)\big)'$, y usando el Teorema de Riesz sabemos que este conjunto se identifica con el conjunto de medidas de Radon en $\Omega\cdot$ □

En realidad, el 0 no es un valor distinguido. Basta con tener una cota a un lado y se deducirá el mismo resultado.

Observación A3.4.1. *Si $T \geq -C$ (o sea, $T + C \geq 0$) (resp. $T \leq C$ (o sea, $C - T \geq 0$) entonces T es una medida de Radon. En efecto, $T = (T + C) - C$ (resp. $T = C - (C - T)$) es diferencia de dos medidas de Radon y por lo tanto también T es una medida de Radon.*

Para más información sobre la teoría de distribuciones se puede consultar el libro [8].

Bibliografía

[1] J. D. Buckmaster, *An introduction to combustion theory*, in “The mathematics of combustion”, J. D. Buckmaster ed., SIAM, 1985.

[2] L. A. Caffarelli, The obstacle problem revisited, Journal of Fourier Analysis and Applications **vol. 4 (4–5)**, 1998, 383–402.

[3] L. A. Caffarelli y S. Salsa, “A Geometric Approach to Free Boundary Problems”, Graduate Studies in Mathematics Vol. 68, Amer. Math. Soc., 2005.

[4] L. C. Evans y R. F. Gariepy, “Measure Theory and Fine Properties of Functions”, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1992.

[5] A.Friedman, “Variational principles and free-boundary problems”, John Wiley and sons, New York, 1982

[6] D. Gilbarg y N. S. Trudinger, “Elliptic Partial Differential Equations of Second Order”, 2da. edición, Springer, 1983.

[7] G. M. Lieberman, “Second Order Parabolic Differential Equations”, World Scientific, 1996.

[8] L. Schwartz, “Théorie des distributions” (French). Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, No. IX-X. Nouvelle édition, entiérement corrigée, refondue et augmentée. Hermann, Paris 1966.

[9] J. L. Vázquez, “The Porous Medium Equation. Mathematical Theory”. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007.