

Fascículo **12**

Cursos y  
seminarios de  
matemática

**Serie B**

***Gabriel Minian***  
***Kevin Piterman***

Notas de topología  
diferencial

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2017

# Cursos y Seminarios de Matemática – Serie B

## Fascículo 12

### Comité Editorial:

Carlos Cabrelli (Director)  
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires  
E-mail: [cabrelli@dm.uba.ar](mailto:cabrelli@dm.uba.ar)

Gabriela Jerónimo  
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires  
E-mail: [jeronimo@dm.uba.ar](mailto:jeronimo@dm.uba.ar)

Claudia Lederman  
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires  
E-mail: [clerderma@dm.uba.ar](mailto:clerderma@dm.uba.ar)

Leandro Vendramin  
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.  
E-mail: [lvendramin@dm.uba.ar](mailto:lvendramin@dm.uba.ar)

ISSN 1851-149X (Versión Electrónica)

ISSN 1851-1481 (Versión Impresa)

Derechos reservados

© 2017 Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,

Universidad de Buenos Aires.  
Departamento de Matemática  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires  
Ciudad Universitaria – Pabellón I  
(1428) Ciudad de Buenos Aires  
Argentina.

<http://www.dm.uba.ar>

e-mail. [secre@dm.uba.ar](mailto:secre@dm.uba.ar)

tel/fax: (+5411)5285-7400

# Notas de topología diferencial

Gabriel Minian y Kevin Piterman

---

## Introducción

La topología diferencial estudia las propiedades globales de las variedades diferenciables, a diferencia de la geometría, que estudia sus propiedades locales. En estas notas analizamos algunos de los temas fundamentales de la topología diferencial: el teorema de Sard, transversalidad, teoría de intersección, teoría de Morse, dualidad de Poincaré, teorema del índice de Poincaré-Hopf, introducción al cobordismo, el teorema del h-cobordismo y su aplicación a la conjetura de Poincaré en dimensiones altas, teorema de de Rham mediante cohomología de haces, y una introducción a la teoría de nudos y links.

Luego de un primer capítulo introductorio, donde repasamos algunos resultados de geometría diferencial y probamos la clasificación de variedades de dimensión 1, nos ocupamos del teorema de Sard. Este resultado afirma que el conjunto de valores críticos de una función diferenciable tiene medida cero (y por lo tanto los valores regulares de la función son densos). Para probar este teorema se utiliza un método que es estándar en topología diferencial: llevar el problema global a un problema local para poder estudiarlo de forma más sencilla. En este caso, el hecho de tener medida cero en una variedad es una propiedad local, ya que toda variedad tiene una base numerable de entornos y la unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero. Esto permite reducir este problema al estudio de funciones  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $U$  abierto de  $\mathbb{R}^m$ ). El teorema de Sard es utilizado luego en estas notas para probar otros resultados, como por ejemplo para ver que toda variedad diferenciable de dimensión  $n$  puede embeberse en  $\mathbb{R}^{2n+1}$  (el “Teorema débil de Whitney”). También es utilizado en transversalidad, para probar que toda función diferenciable puede aproximarse por funciones de Morse y para estudiar grados de funciones e índice de campos.

En el tercer capítulo analizamos los resultados más relevantes de la teoría de Morse. Una función diferenciable a valores reales es de Morse si sus puntos críticos son no degenerados (es decir, si su matriz Hessiana, en cualquier sistema de coordenadas, es no singular). Lo asombroso de la teoría de Morse es que permite estudiar la topología de la variedad por medio de cualquier función de Morse definida en ella, siguiendo las trayectorias del flujo gradiente (el campo gradiente de la función se define a partir de dotar a la variedad de una métrica riemanniana). El campo gradiente de una función de Morse aparece nuevamente en estas notas en el capítulo 5, al estudiar el Teorema del índice de Poincaré-Hopf. Este resultado, que fue probado por Poincaré para el caso de superficies y generalizado por Hopf para cualquier dimensión, afirma que el índice de un campo con ceros aislados definido en una variedad compacta es independiente del campo y este número coincide con la característica de Euler de la variedad. Este resultado profundo relaciona propiedades topológicas de

la variedad (la característica de Euler) con sus propiedades analíticas (índice de los campos vectoriales). La demostración que exhibimos aquí utiliza el gradiente de una función de Morse. Una demostración alternativa del resultado se consigue utilizando triangulaciones de la variedad. Damos un esbozo de esta demostración alternativa al final del capítulo.

En el capítulo 4 mostramos las ideas más relevantes de la dualidad de Poincaré. La demostración que presentamos aquí se basa principalmente en el teorema de Stokes y explora otra técnica que permite trasladar una propiedad local a una propiedad global, mediante las sucesiones de Mayer-Vietoris (para cohomología de de Rham y cohomología con soporte compacto). Una variedad de dimensión  $n$  localmente es difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . Para el caso de  $\mathbb{R}^n$  la dualidad de Poincaré se obtiene por cálculo directo. Por ejemplo, el hecho de que  $\mathbb{R}^n$  sea conexo indica que  $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$  ya que  $H^0$  calcula las funciones diferenciables a valores reales localmente constantes. El hecho de que  $\mathbb{R}^n$  no es compacto se traduce en que  $H_c^0(\mathbb{R}^n) = 0$ . En el caso de  $\mathbb{R}$ , se comprueba que  $H^1(\mathbb{R}) = 0$  tomando, para cada 1-forma  $w = f(x)dx$  la función  $h(x) = \int_0^x f(t)dt$ , que claramente cumple que  $dh = w$ . Una vez comprobado que la dualidad de Poincaré es válida para el caso de  $\mathbb{R}^n$ , la forma de probar el resultado para variedades orientables de dimensión  $n$  es tomando cubrimientos por abiertos “buenos”, es decir, que cumplan que la intersección de cualquier subfamilia finita sea vacía o difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . La existencia de tales cubrimientos se debe a que toda variedad admite una métrica riemanniana, y que en una métrica riemanniana se pueden encontrar abiertos geodésicamente convexos tan chicos como uno quiera.

En el capítulo 6 hacemos una aproximación a la teoría de cobordismo y damos una idea de la demostración del teorema del h-cobordismo de Steve Smale y su aplicación en la demostración de la conjetura de Poincaré para dimensiones altas. Presentamos en este capítulo algunas construcciones y herramientas fundamentales de la topología diferencial: cirugía y teoría de manijas, relacionando estas construcciones con los cobordismos elementales.

En el capítulo 7 probamos que todas las teorías de cohomología definidas en una variedad (bajo ciertas condiciones) coinciden. En particular probamos el teorema de de Rham que afirma que la cohomología de de Rham (definida mediante formas diferenciales) coincide con la cohomología singular de la variedad (vista como espacio topológico). Este es otro de los resultados profundos y fundamentales de la topología diferencial que relaciona propiedades topológicas con geométricas. Para probar estos resultados nos valemos de la teoría de haces, que permiten nuevamente, trasladar propiedades locales a globales.

Por último, en el capítulo 8, damos una introducción a la teoría de nudos y links. Estudiamos, entre otras cosas, el grupo de un nudo (es decir el grupo fundamental de su complemento en  $\mathbb{R}^3$  o  $S^3$ ), superficies de Seifert y la asféricidad del complemento del nudo.

Para la presentación de los diversos temas que tratamos aquí, tomamos como

---

referencia las exposiciones de los excelentes libros [BT82, GP74, Hir76, MT97, Mil63, Mil65, Mil65b, Ran03, Rol04, War83].

Estas notas están basadas (aunque con varias modificaciones y agregados), en el curso de Topología diferencial dictado por Gabriel Minian en el segundo cuatrimestre de 2015.

# Contenidos

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1	Preliminares . . . . .	7
1.2	Variedades de dimensión 1 . . . . .	8
<b>2</b>	<b>El teorema de Sard y transversalidad</b>	<b>13</b>
2.1	Teorema de Sard . . . . .	13
2.2	Primeras aplicaciones del teorema de Sard . . . . .	15
2.3	Transversalidad . . . . .	17
2.4	Intersección módulo 2 . . . . .	22
2.5	Introducción a la teoría de Lefschetz . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Teoría de Morse</b>	<b>29</b>
3.1	Resultados fundamentales de la teoría de Morse . . . . .	29
3.2	Desigualdades de Morse . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Dualidad de Poincaré</b>	<b>47</b>
4.1	Cohomología de de Rham . . . . .	47
4.2	Variedades de tipo finito y buenos cubrimientos . . . . .	49
4.3	La dualidad . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Grado de una función e índice de campos</b>	<b>53</b>
5.1	Grado de una función . . . . .	53
5.2	Función de Gauss y orientación en bordes . . . . .	60
5.3	Teorema de Poincaré-Hopf . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Cobordismo y h-cobordismo</b>	<b>69</b>
6.1	Cobordismo . . . . .	69
6.2	Teorema de h-cobordismo y aplicaciones . . . . .	79
<b>7</b>	<b>Haces y prehaces y el teorema de de Rham</b>	<b>83</b>

7.1	Definiciones básicas . . . . .	83
7.2	Sucesiones exactas de haces . . . . .	88
7.3	Teoría de cohomología de haces . . . . .	92
7.4	Cohomología de Čech . . . . .	104
7.5	Teorema de de Rham . . . . .	105
<b>8</b>	<b>Introducción a nudos y links</b>	<b>107</b>
8.1	Preliminares . . . . .	107
8.2	Nudos en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{S}^2$ . . . . .	109
8.3	Nudos clásicos . . . . .	110
8.4	El nudo trivial y asfericidad del complemento . . . . .	116
8.5	Superficies de Seifert, suma de nudos y nudos primos . . . . .	120
	<b>Bibliografía</b>	<b>131</b>

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Preliminares

En esta sección fijaremos algunas notaciones y recordaremos algunos resultados que utilizaremos o tendremos en mente a lo largo del curso. Algunos de estos resultados se pueden encontrar en un curso básico de geometría diferencial. Para más detalles referimos a [Boo76, War83].

En estas notas llamaremos variedades a las variedades diferenciables. Todas las cartas y funciones diferenciables que consideremos las asumimos de clase  $\mathcal{C}^\infty$  (por lo cual nuestras variedades son  $\mathcal{C}^\infty$ ), salvo explícita mención de lo contrario. Esta aclaración es importante, porque algunos de los resultados de estas notas no son verdaderos si las funciones en cuestión son solamente de clase  $\mathcal{C}^k$  para un cierto  $k$ . Si  $M$  es una variedad, denotaremos con letra minúscula  $m$  a su dimensión. Escribimos  $X \equiv Y$  para decir que los espacios topológicos  $X$  e  $Y$  son homeomorfos, o difeomorfos si se trata de variedades diferenciables. En cambio  $X \simeq Y$  significa que tienen el mismo tipo homotópico. Notaremos con  $\partial M$  al borde de una variedad  $M$ . Como es habitual, notaremos con  $\mathbb{S}^n$  a la  $n$ -esfera con estructura diferenciable estándar y con  $\mathbb{D}^n$  al  $n$ -disco. El intervalo real  $[0, 1]$  varias veces será denotado por  $I$ . Denotaremos con  $\mathfrak{X}(M)$  a los campos  $\mathcal{C}^\infty$  de  $M$ .

La siguiente observación nos pone en contexto respecto a las diferencias que existen entre variedades topológicas y diferenciables, y la cantidad de estructuras diferenciables distintas que pueden definirse en algunas variedades topológicas.

**Observación 1.1.1.** Existen variedades topológicas que no admiten estructura diferenciable. Se ha demostrado que necesariamente deben tener dimensión al menos 4. Por otro lado, es fácil armarse estructuras diferenciables distintas en una misma variedad topológica pero que resulten difeomorfas (por ejemplo, la de  $\mathbb{R}$  con la carta  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \phi(t) = t^3$ ).

También existen variedades topológicas que admiten varias estructuras diferenciables no difeomorfas entre sí. Por ejemplo, las esferas exóticas que exhibió

Milnor (ver [Mil56, Mil59, Mil59b]), que son esferas con una estructura diferenciable no difeomorfa a la habitual. En este contexto, la esfera de dimensión 7 admite exactamente 28 estructuras diferenciables no difeomorfas entre sí.

No nos ocuparemos de estas diferencias en estas notas. Acá trabajaremos con variedades diferenciables.

Recordemos algunos resultados sobre subvariedades y el teorema de los valores regulares. Las demostraciones de estos resultados pueden encontrarse en [Boo76].

Si  $M$  es una variedad y  $N \subset M$ , entonces  $N \subset M$  es subvariedad regular si y solo si la inclusión  $i : N \rightarrow M$  es un embedding. Además, ser subvariedad regular es una propiedad transitiva. Es decir, si  $M$  es una variedad y  $S \subset M$  es una subvariedad regular de  $M$  y  $N \subset S$  es una subvariedad regular de  $S$ , entonces  $N$  es una subvariedad regular de  $M$ .

**Proposición 1.1.2.** Si  $i : N \rightarrow M$  es una inmersión y  $p \in N$ , entonces existe una carta  $(U, \varphi)$  de  $N$  en  $p$  tal que  $i|_U$  es un embedding.

**Proposición 1.1.3.** Si  $f : N \rightarrow M$  es diferenciable de rango constante  $k$  y  $q \in f(N)$ , entonces  $f^{-1}(q) \subset N$  es una subvariedad regular de codimensión  $k$ .

**Definición 1.1.4.** Sea  $f : N \rightarrow M$  diferenciable. Un punto  $p \in N$  se dice punto crítico de  $f$  si el diferencial  $d_p f$  no es sobreyectivo. En caso contrario se dice punto regular. Un punto  $q \in M$  se dice valor crítico de  $f$  si existe  $p \in N$  punto crítico tal que  $f(p) = q$ . En caso contrario  $q$  se dice valor regular.

Notar que si  $f^{-1}(q) = \emptyset$  entonces  $q$  es valor regular de  $f$ .

**Teorema 1.1.5.** (Teorema de los valores regulares) Sea  $f : N \rightarrow M$  diferenciable. Si  $q \in f(N) \subset M$  es un valor regular de  $f$ , entonces  $f^{-1}(q) \subset N$  es una subvariedad regular de dimensión  $\dim N - \dim M$ .

**Ejercicio 1.1.6.** Sean  $N$  y  $M$  variedades diferenciables de la misma dimensión, con  $N$  compacta. Sea  $f : N \rightarrow M$  diferenciable y sea  $q \in f(N)$  un valor regular de  $f$ . Entonces  $f^{-1}(q) \subset N$  es una subvariedad regular de dimensión 0. En particular, es un conjunto discreto. Por otro lado,  $f^{-1}(q) \subset N$  es cerrado en un compacto, por lo que es compacto. Luego  $f^{-1}(q)$  es finito. Sea  $A = \{q \in M : \text{valor regular para } f\} \subset M$  con la topología subespacio. Consideremos la función  $g : A \rightarrow \mathbb{N}_0$  que a cada  $q \in A$  le asigna el cardinal de  $f^{-1}(q)$ , es decir,  $g(q) = \#f^{-1}(q)$ . Probar que  $g$  es localmente constante.

## 1.2 Variedades de dimensión 1

Es sabido que toda variedad diferenciable puede ser triangulada. Esto fue probado por S.S. Cairns en 1934. Unos años más tarde J.H.C. Whitehead probó una versión más fuerte de ese resultado (toda variedad diferenciable

puede ser triangulada por una variedad combinatoria). En el libro de Whitney [Whi57] se puede encontrar una demostración del resultado de Cairns. La idea es fácil de explicar: localmente las variedades son bolas y las bolas son claramente triangulables, la estructura diferenciable de la variedad se utiliza para poder pegar coherentemente las triangulaciones locales. Es importante remarcar que es necesario que la variedad sea diferenciable para poder triangularla. Recientemente Ciprian Manolescu probó que existen variedades topológicas que no admiten triangulación.

Para terminar este breve capítulo introductorio, veremos que las variedades de dimensión 1 se pueden triangular y utilizaremos esto para clasificarlas. En el caso de dimensión 2 (superficies) la demostración de la triangulación se torna más complicada. Este caso fue probado por Radó en 1925. Recomendamos al lector el libro de Lee [Lee11] para ver una idea de la demostración de Radó y cómo usar las triangulaciones para probar la clasificación de superficies. Veremos aquí el caso de dimensión 1, cuya demostración también puede seguirse en ese libro.

En lo que sigue, un grafo es un complejo simplicial de dimensión 1. Las aristas son los 1-símplices y los vértices son los 0-símplices.

**Teorema 1.2.1.** *Sea  $M$  una variedad de dimensión 1. Entonces  $M$  es triangulable (por un grafo).*

*Demostración.* Veamos primero que existe una sucesión numerable de grafos finitos  $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n \subset \dots$  contenidos en  $M$ , tales que:

1.  $M = \bigcup_n G_n$
2.  $G_n \subset G_{n+1}$  es un subgrafo
3. Para todo  $n$ , existe  $m > n$  tal que  $G_n \subset G_m^\circ$  (el interior de  $G_m$ ).

Sabemos que existe un cubrimiento numerable de  $M$  por bolas  $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  con  $B_i \equiv (0, 1)$  y  $\overline{B_i} \equiv [0, 1]$ . Además, este cubrimiento se puede tomar localmente finito.

Sea  $G_1 \equiv \overline{B_1}$ . Supongamos construidos hasta el grafo  $G_n$  tal que  $G_n = \overline{B_1} \cup \dots \cup \overline{B_n}$  y  $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n$  son subgrafos. Consideremos todos los vértices de  $G_n$  que están contenidos en  $\overline{B_{n+1}}$ . Estos puntos de intersección determinan un grafo  $S$  (con vértices esos puntos y las aristas de  $\overline{B_{n+1}}$ ). Sea  $e$  una arista de  $S$ . Supongamos que existe  $x \in e^\circ$  tal que  $x \in e'$ , con  $e'$  una arista de  $G_n$ . Veamos que  $e = e'$ . Como  $\partial e'$  son vértices de  $G_n$ ,  $e^\circ \cap \partial e' = \emptyset$ . Se tiene que  $e^\circ \cap e'^\circ \subset e^\circ$  es abierto (pues  $e'^\circ$  es abierto). También  $e^\circ \cap e'^\circ = e^\circ \cap e' \subset e^\circ$  es cerrado. Por conexión,  $e^\circ \cap e' = e^\circ$ . Luego  $e^\circ \subset e'$ , por lo que  $e \subset e' \in G_n$ . Ahora le sacamos a  $S$  las aristas  $e$  tales que  $e^\circ \cap G_n \neq \emptyset$ . A ese grafo lo denotamos  $\tilde{S}$ , y tomamos  $G_{n+1} = G_n \cup \tilde{S}$ . En particular,  $G_{n+1} = \overline{B_1} \cup \dots \cup$

$\overline{B_{n+1}}$ , y  $G_n \subset G_{n+1}$  es un subgrafo. Como  $M = \bigcup_n B_n$ , los  $G_n$  cubren  $M$ . La propiedad 3 se verifica por compacidad de los  $G_n$ .

Tomamos el complejo simplicial  $K = \bigcup_n G_n$ . Veamos que  $|K| \equiv M$ . Como conjunto son el mismo, basta ver que tienen la misma topología. Si  $A \subset M$  es cerrado, como los  $G_n$  son grafos finitos, son compactos y en particular cerrados, por lo que  $A \cap G_n \subset G_n$  es cerrado para todo  $n$ . Como  $K$  es el colímite de los  $G_n$ , concluimos que  $A$  es cerrado en  $K$ . Recíprocamente, supongamos que  $A \subset M$  es tal que  $A \cap G_n \subset G_n$  es abierto para todo  $n$  y veamos que  $A$  es abierto en  $M$ . Sea  $x \in A$ . Existe un entorno  $V$  de  $x$  que interseca a finitos  $\overline{B_n}$  (pues el cubrimiento es localmente finito). Sea  $n$  grande tal que  $V \cap \overline{B_m} = \emptyset$  si  $m \geq n$ . Sea  $n_1 = \min\{m : x \in G_m\}$  y sea  $n_2 = \min\{m : V \cap \overline{B_m} = \emptyset \text{ para todo } n \geq m\}$ . Como  $x \in V$ ,  $n_1 < n_2$ . Luego  $x \in G_n$  para todo  $n \geq n_1$  y  $x \notin \overline{B_n}$  para todo  $n \geq n_2$ . Para cada  $n_1 \leq n \leq n_2$ , existe un abierto  $U_n \subset G_n \cap A \cap V$  tal que  $x \in U_n$ . Sea  $U = \bigcup_{n=n_1}^{n_2} U_n$ . Entonces  $x \in U$  y  $U \subset A$ . Notar que  $U$  interseca a finitas bolas  $B_n$ , y que  $U \cap B_n$  es abierto para todo  $n$  (por la topología que tienen las bolas). A partir de esto es fácil ver que  $U$  es abierto en  $M$ .  $\square$

**Proposición 1.2.2.** Sea  $M$  una variedad sin borde de dimensión 1 y sea  $K$  una triangulación de  $M$ . Entonces todo vértice de  $K$  está en exactamente dos aristas de  $K$ .

*Demostración.* Sea  $v$  un vértice de  $K$ . Consideremos su star abierto  $\mathring{\text{St}}(v) = \{v\} \cup \bigcup_{v \in e} \mathring{e}$ , donde las  $e$  son aristas de  $K$ . Es fácil ver que  $\mathring{\text{St}}(v)$  es abierto de  $|K| \equiv M$ . Como  $M$  es variedad de dimensión 1 sin borde, existe un abierto  $U \equiv (0, 1)$  tal que  $v \in U \subset \mathring{\text{St}}(v)$ . Luego  $U - v$  tiene dos componente conexas. Por otro lado, como  $U \subset \mathring{\text{St}}(v)$  y  $U - v \subset \mathring{\text{St}}(v) - v = \bigsqcup_{v \in e} \mathring{e}$ , y esta tiene tantas componentes conexas como aristas, deducimos que tiene que haber exactamente dos aristas.  $\square$

**Teorema 1.2.3.** Sea  $M$  una variedad conexa de dimensión 1 sin borde. Entonces  $M = \mathbb{S}^1$  o  $M = \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Sea  $K$  una triangulación de  $M$ , donde  $K$  es un complejo simplicial de dimensión 1. Sea  $v_0 \in M$  un vértice. Por la proposición anterior,  $v_0$  está en exactamente dos aristas. Llamamos  $v_1$  y  $v_{-1}$  a los otros dos vértices de estas dos aristas. Notar que  $v_1 \neq v_{-1}$ . Por inducción, supongamos definidos  $v_n$  y  $v_{-n}$ . Sea  $v_{n+1}$  el vecino de  $v_n$  que no es  $v_{n-1}$ . Ídem con  $v_{-(n+1)}$ .

Sea  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [v_n, v_{n+1}] \subset |K|$ , donde  $[v_n, v_{n+1}]$  es la arista con vértices  $v_n$  y  $v_{n+1}$ . Este conjunto es cerrado y abierto (intersecar aristas para ver esto último), por lo que  $U = M$ . Luego todo vértice de  $M$  fue etiquetado.

Si  $v_i \neq v_j$  para todo  $i \neq j$ , entonces  $M = \mathbb{R}$ . En el caso que existan dos vértices iguales, tomamos  $r$  el mínimo natural tal que existe un  $i$  con  $v_i = v_{i+r}$ . Se

puede ver en ese caso que  $v_j = v_{j+r}$  para todo  $j$  y que  $K$  es una triangulación de  $\mathbb{S}^1$  con  $r$  vértices. Dejamos los detalles de prueba para el lector.

□

**Corolario 1.2.4.** Toda variedad conexa de dimensión 1 es difeomorfa a una de las siguientes:  $\mathbb{S}^1$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b]$ .



## Capítulo 2

# El teorema de Sard y transversalidad

### 2.1 Teorema de Sard

Comenzamos esta sección recordando la noción de conjuntos de medida cero en una variedad.

Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  se dice que tiene medida cero si para todo  $\varepsilon > 0$  existe una sucesión de cubos  $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$  tales que  $A \subset \bigcup_m I_m$  y  $\sum_m |I_m| < \varepsilon$ , donde  $|I|$  denota el volumen del cubo  $I$ . Notamos por  $|A|$  a la medida del conjunto  $A$  (si  $A$  es medible).

Si  $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable y  $A \subset U$  tiene medida nula, entonces  $|g(A)| = 0$ .

**Definición 2.1.1.** Sea  $M$  una variedad y sea  $A \subset M$  un subconjunto. Decimos que  $A$  tiene medida cero en  $M$  si para toda  $(U, \varphi)$  carta de  $M$ ,  $|\varphi(U \cap A)| = 0$ .

**Observación 2.1.2.** Notar que  $A \subset M$  tiene medida cero si y solo si para todo  $p \in A$  existe una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  en  $p$  tal que  $|\varphi(U \cap A)| = 0$ . Luego tener medida cero es una propiedad local (ver párrafos más abajo).

**Observación 2.1.3.** Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un  $n$ -cubo, entonces  $|A| > 0$ . En particular, si  $A \subset \mathbb{R}^n$  tiene interior no vacío, entonces  $A$  no puede ser de medida cero. Lo mismo sucede en una variedad  $M$ . Por lo tanto si  $A \subset M$  tiene medida cero, entonces el complemento  $A^c \subset M$  es denso.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el teorema de Sard.

**Teorema 2.1.4.** (*Sard*) Sea  $f : N \rightarrow M$  una función diferenciable. El conjunto de valores críticos de  $f$  tiene medida cero en  $M$ . Por lo tanto, los valores regulares de  $f$  son densos en  $M$ .

Como toda variedad puede cubrirse con una cantidad numerable de abiertos homeomorfos a  $\mathbb{R}^n$  y la mayoría de las propiedades que vemos predicen sobre entornos, muchas veces podremos, como en este caso, probar una propiedad global restringiéndonos a lo local. Concretamente en este caso, que un subconjunto de una variedad tenga medida cero se traduce en una propiedad local, ya que una unión numerable de conjuntos de medida cero es de medida cero. En consecuencia, basta probar el teorema de Sard de manera local. Este tipo de argumento será muy utilizado a lo largo de estas notas.

Por lo anterior, bastará probar entonces el siguiente resultado.

**Teorema 2.1.5.** (Sard) Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciable, con  $U$  abierto. Sea  $C \subset U$  el conjunto de puntos críticos. Entonces  $f(C) \subset \mathbb{R}^n$  tiene medida cero.

*Demostración.* Seguiremos básicamente la demostración de [Mil65].

Sea  $C$  el conjunto de puntos críticos de  $f$ . Es decir,  $C = \{x \in U : d_x f \text{ no es epimorfismo}\}$ . Notemos  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Sea  $C_k = \{x \in U : \frac{\partial f_i^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(x) = 0 \text{ para todo } i \text{ y todo } |\alpha| \leq k\}$ . Es decir,  $C_k$  es el conjunto de puntos de  $U$  tales que todas las derivadas de orden menor o igual a  $k$  de  $f$  son nulas. De esta manera tenemos una cadena de inclusiones  $C \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$ . Probaremos lo siguiente:

1.  $f(C - C_1)$  tiene medida cero.
2. Para todo  $i$ ,  $f(C_i - C_{i+1})$  tiene medida cero.
3.  $f(C_k)$  tiene medida cero para  $k$  suficientemente grande.

En cada caso haremos inducción en  $m$ . Notar que en todos los ítems, el caso  $m = 0$  es trivial. Luego podemos suponer que  $m \geq 1$ .

1. Basta ver que para todo  $x \in C - C_1$  existe un abierto  $V \subset U$  tal que  $x \in V$  y  $f(V \cap C)$  tiene medida cero (esto es porque  $U$  tiene base numerable y unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero). Como  $x \in C - C_1$ , existe una derivada parcial  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \neq 0$ . Por simplicidad supongamos que  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) \neq 0$ . Sea  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  la función  $h(y) = (f_1(y), y_2, \dots, y_m)$ . Así,  $d_x h$  es invertible y por lo tanto  $h$  es un difeomorfismo local en  $x$ . Luego existen abiertos  $V \subset U$  con  $x \in V$  y  $V' \subset \mathbb{R}^m$  con  $h(x) \in V'$  tales que  $h|_V : V \rightarrow V'$  es un difeomorfismo. Sea  $g = f \circ (h|_V)^{-1} : V' \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sea  $C'$  el conjunto de puntos críticos de  $g$ . Luego  $h(C \cap V) = C'$  pues  $h$  es difeomorfismo. Entonces  $f(C \cap V) = g(C')$ . Basta probar que  $g(C')$  tiene medida cero.

Notar que  $g(t, x_2, \dots, x_m) = (t, y_2, \dots, y_n)$ . Para cada  $t$  fijo, sea  $g^t : \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  la función  $g^t(x_2, \dots, x_m) = g(t, x_2, \dots, x_m)$  (el dominio se restringe a donde tenga sentido). De esta forma,

$$D_{(t,x)}g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & D_x g^t \end{pmatrix}$$

Luego un punto  $(x_2, \dots, x_m)$  es crítico de  $g^t$  si y solo si  $(t, x_2, \dots, x_m)$  es crítico para  $g$ . Por inducción, para cada  $t$  fijo, los valores críticos de  $g^t$  tienen medida cero. Luego por Fubini, los valores críticos de  $g$  tienen medida cero.

2. Veamos que  $f(C_i - C_{i+1})$  tiene medida cero para todo  $i \geq 1$ . Sea  $x \in C_i - C_{i+1}$ . Veamos que existe un abierto  $V \subset U$  tal que  $x \in V$  y  $f(V \cap C_i)$  tiene medida cero. Como  $x \in C_i - C_{i+1}$ , existe  $\frac{\partial f_r^{i+1}}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{i+1}}}(x) \neq 0$ . Sea  $w(y) = \frac{\partial f_r^{i+1}}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_i}}(y)$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $j_{i+1} = 1$ . Entonces  $w(x) = 0$  y  $\frac{\partial w}{\partial x_1}(x) \neq 0$ . Sea  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  la función  $h(y) = (w(y), y_2, \dots, y_m)$ . Entonces  $h$  es un difeomorfismo local en  $x$ , por lo que existen abiertos  $V \subset U$  con  $x \in V$  y  $V' \subset \mathbb{R}^m$  tales que  $h|_V : V \rightarrow V'$  es un difeomorfismo. Sea  $g = f \circ (h|_V)^{-1} : V' \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Observar que  $h(C_i \cap V) \subset 0 \times \mathbb{R}^{m-1}$ . Sea  $\tilde{g} = g|_{(0 \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V'} : (0 \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V' \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Por inducción, los valores críticos de  $\tilde{g}$  tienen medida cero. Además,  $f(C_i \cap V) = \tilde{g}h(C_i \cap V)$ , y como  $h$  es difeomorfismo,  $f(C_i \cap V)$  tiene medida cero (por inducción). Otra forma de verlo es notando que  $h(C_i \cap V) \subset 0 \times \mathbb{R}^{m-1}$  tiene medida cero y que  $\tilde{g}$  manda conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero por ser diferenciable.

3. Este paso consiste en utilizar Taylor y en elegir  $k > \frac{m}{n} - 1$ . Veamos que  $f(C_k)$  tiene medida cero. Sea  $J \subset U$  un cubo de lado  $\delta > 0$ . Podemos cubrir a  $U$  con numerables intervalos  $J$ 's de lado  $\delta > 0$ . Veamos que  $f(C_k \cap J)$  tiene medida cero. Sea  $x \in C_k \cap J$ . Si  $x+h \in J$ , por Taylor tenemos que  $f(x+h) = f(x) + R(x, h)$ , donde  $R(x, h)$  es el resto y las derivadas parciales de orden  $k$  no aparecen justamente porque  $x \in C_k$ . Además,  $\|R(x, h)\| \leq c\|h\|^{k+1}$ , donde la constante  $c$  depende de  $J$  y de  $f$ . Fijemos  $r$  y dividamos a  $J$  en  $r^m$  cubitos (de lados  $\delta/r$ ). Sea  $J_1$  el cubito donde está  $x$ . Si  $y \in J_1$  entonces  $y = x + h$  con  $\|h\| \leq \sqrt{m}\delta/r$ . Luego

$$\|R(x, h)\| \leq c\|h\|^{k+1} \leq c \left( \sqrt{m} \frac{\delta}{r} \right)^{k+1}$$

Así,  $f(J_1)$  cae en un cubo de lado  $2c \left( \sqrt{m} \frac{\delta}{r} \right)^{k+1}$ . Entonces  $f(C_k \cap J)$  cae en la unión de  $r^m$  cubos cuyo volumen total es

$$V \leq r^m \left( 2c \left( \sqrt{m} \frac{\delta}{r} \right)^{k+1} \right)^n = \left( 2c \left( \sqrt{m} \delta \right)^{k+1} \right)^n r^{m-n(k+1)}$$

Como  $k+1 > m/n$ , el volumen  $V$  tiende a 0 cuando  $r \rightarrow \infty$ . □

## 2.2 Primeras aplicaciones del teorema de Sard

Por la clasificación de variedades de dimensión 1 vista en el capítulo anterior, toda variedad conexa de dimensión 1 es difeomorfa a una a alguna de éstas:  $\mathbb{S}^1$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b]$ . En particular, si  $M$  tiene dimensión 1 y es compacta, entonces  $M$  es unión finita de  $\mathbb{S}^1$ 's y de intervalos  $[0, 1]$ 's. Más aún,  $\#\partial M$  es par.

**Ejercicio 2.2.1.** Sea  $N$  una variedad con borde y sea  $f : N \rightarrow M$  diferenciable. Sea  $q \in f(N)$  un valor regular de  $f$  que también es valor regular de  $f|_{\partial N} : \partial N \rightarrow M$ . Entonces  $f^{-1}(q) \subset N$  es una subvariedad regular de dimensión  $\dim N - \dim M$  y  $\partial f^{-1}(q) = \partial N \cap f^{-1}(q)$ .

**Proposición 2.2.2.** Sea  $M$  una variedad compacta con borde. Entonces no existe una retracción  $r : M \rightarrow \partial M$  diferenciable.

*Demostración.* Supongamos que sí existe  $r : M \rightarrow \partial M$  retracción diferenciable. Por Sard, existe  $q \in \partial M$  valor regular de  $r$ . Como  $r$  es sobre,  $q \in r(M)$ . Como  $r|_{\partial M} = 1_{\partial M}$ ,  $q$  también es valor regular de  $r|_{\partial M} = 1_{\partial M} : \partial M \rightarrow \partial M$ . Luego  $r^{-1}(q) \subset M$  es una subvariedad regular de dimensión 1 y  $\partial r^{-1}(q) = \partial M \cap r^{-1}(q) = \{q\}$ . Al ser  $M$  compacta,  $r^{-1}(q)$  es compacta, por lo que tiene una cantidad par de puntos en el borde, que es una contradicción.  $\square$

La demostración del siguiente resultado estándar puede encontrarse, por ejemplo, en el libro [Hir76].

**Teorema 2.2.3.** Sea  $M$  una variedad compacta de dimensión  $n$ . Entonces existe un embedding  $M \subset \mathbb{R}^q$  para  $q$  suficientemente grande.

Teniendo en cuenta que la variedad se puede embeber en algún  $\mathbb{R}^q$ , vamos a probar el resultado de Whitney que asegura que se puede tomar  $q = 2n + 1$ . Nos basamos en la demostración que aparece en [Hir76]. Este teorema se conoce como el teorema débil del embedding. El teorema fuerte asegura que en realidad se puede tomar  $q = 2n$ .

**Teorema 2.2.4.** Sea  $M$  una variedad compacta de dimensión  $n$ . Entonces  $M$  es subvariedad regular de  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

*Demostración.* Sabemos que  $M \subset \mathbb{R}^q$  para algún  $q$ . Si  $q \leq 2n + 1$  listo. Supongamos que  $q > 2n + 1$ . Veamos que podemos encontrar  $v \in \mathbb{R}^q - \mathbb{R}^{q-1}$  de norma 1 tal que  $p_v : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{q-1}$ , la proyección en la dirección de  $v$ , se restringe a una inmersión inyectiva  $p_v|_M : M \rightarrow \mathbb{R}^{q-1}$  (aquí vemos a  $\mathbb{R}^{q-1}$  como el subespacio de vectores cuya última coordenada es nula). Esto probará, usando que  $M$  es compacta, que  $M$  se puede embeber en  $\mathbb{R}^{q-1}$ . Repitiendo este argumento las veces necesarias, tendremos que  $M$  se puede embeber en  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Analicemos qué propiedades tiene que tener el vector  $v$  para que la proyección sea inmersión inyectiva.

Para que sea inyectiva: debe suceder que para todo  $x \neq y \in M$ ,  $\frac{x-y}{\|x-y\|} \neq v$ . Consideremos la función  $\delta : M \times M - \Delta \rightarrow \mathbb{S}^{q-1}$  dada por  $\delta(x, y) = \frac{x-y}{\|x-y\|}$ , donde  $\Delta = \{(x, x) : x \in M\}$  es la diagonal. Para elegir  $v$ , tenemos que ver que la imagen de  $\delta$  no es todo  $\mathbb{S}^{q-1}$ . Como  $\Delta \subset M \times M$  es cerrado (pues  $M$  es Hausdorff),  $M \times M - \Delta$  es una variedad de dimensión  $2n$ , mientras que  $\mathbb{S}^{q-1}$  tiene dimensión  $q - 1 > 2n$ . Luego el diferencial nunca puede ser epimorfismo, por lo que todos los puntos de  $\text{Im}(\delta)$  son críticos. Por Sard, este

conjunto tiene medida cero. Así, vemos que para todo abierto  $W \subset \mathbb{S}^{q-1}$ , existe  $w \in W - \text{Im}(\delta)$ . Más aún,  $\mathbb{S}^{q-1} - \text{Im}(\delta)$  es denso.

Para que sea inmersión: debe suceder que para todo  $x \in M$ , el diferencial  $d_x(p_v|_M) : T_xM \rightarrow T_{p_v(x)}\mathbb{R}^{q-1}$  sea inyectivo. Para ello debemos ver que si  $z \in T_xM$  y  $z \neq 0$ , entonces  $\frac{z}{\|z\|} \neq v$ . Para justificar esto, notemos primero que  $T_xM \subset T_x\mathbb{R}^q = \mathbb{R}^q$ , y por lo tanto tenemos una norma  $\|\cdot\|$  en  $T_xM$  heredada de  $\mathbb{R}^q$ . Esto vale para todo  $x \in M$ .

Sea  $T_1M = \{z \in TM : \|z\| = 1\}$  y sea  $g : TM \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $g(z) = \|z\|$ . Es fácil ver que 1 es valor regular de  $g$ . Luego  $T_1M = g^{-1}(1)$  es una subvariedad regular de dimensión  $2n - 1$ . Además es compacta pues  $T_1M \subset M \times \mathbb{S}^{q-1}$  (estamos pensando a  $T_pM \subset \mathbb{R}^q$  para todo  $p \in M$ ). Consideremos  $p_2 : T_1M \rightarrow \mathbb{S}^{q-1}$  la proyección. Como el dominio tiene dimensión  $2n - 1$  y el codominio tiene dimensión  $q - 1 > 2n - 1$ , por Sard,  $p_2(T_1M)^c \subset \mathbb{S}^{q-1}$  es denso. También es abierto pues  $T_1M$  es compacto y  $\mathbb{S}^{q-1}$  es Hausdorff. Sea  $W = p_2(T_1M)^c \cap (\mathbb{R}^q - \mathbb{R}^{q-1}) \cap \mathbb{S}^{q-1}$ . Entonces  $W$  es abierto en la esfera y no vacío. Sea  $v \in W$ . Como  $v \notin p_2(T_1M)$ , se tiene que  $v \neq \frac{z}{\|z\|}$  para todo  $z \in TM$  no nulo, y lo tomamos de tal forma que  $p_v|_M$  sea inyectivo (porque el otro conjunto de soluciones también era denso).

□

Veremos a lo largo de estas notas, que el teorema de Sard es utilizado en varias ocasiones y contextos (por ejemplo en teoría de Morse).

## 2.3 Transversalidad

Si  $f : M \rightarrow N$  es una función diferenciable y  $q \in N$  es un valor regular de  $f$ , entonces sabemos que  $f^{-1}(q) \subset M$  es una subvariedad regular. Lo que queremos analizar es el caso general: si tenemos una subvariedad regular  $A \subset N$ , ¿cuándo sucede que  $f^{-1}(A) \subset M$  es una subvariedad regular? Para ello, introducimos la noción de transversalidad. Esto generaliza a la noción de valor regular de una función diferenciable.

**Definición 2.3.1.** Sea  $f : M \rightarrow N$  diferenciable y sea  $A \subset N$  una subvariedad regular. Decimos que  $f$  es transversal a  $A$ , y notamos  $f \pitchfork A$ , si para todo  $x \in f^{-1}(A)$ , se tiene que  $\text{Im}(d_x f) + T_{f(x)}A = T_{f(x)}N$ .

**Observación 2.3.2.** Si  $A = \{q\} \subset N$  es un punto (subvariedad regular de dimensión 0), entonces  $f \pitchfork A$  si y solo si  $q$  es valor regular de  $f$ .

**Ejemplo 2.3.3.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la función  $f(x) = (x, x^2)$  y sea  $A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ . Entonces  $T_{(0,0)}A = A$  e  $\text{Im}(d_0 f) = A$ . Como la suma de estos espacios es  $A$ , que es distinto de  $\mathbb{R}^2$ , se tiene que  $f \not\pitchfork A$ .

**Ejemplo 2.3.4.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la función  $f(y) = (0, y)$  y sea  $A$  el eje  $x$ . Entonces  $f \pitchfork A$ .

**Definición 2.3.5.** Sean  $M, N \subset P$  subvariedades regular de una variedad  $P$ . Decimos que  $M$  es transversal a  $N$  en  $P$ , y notamos  $M \pitchfork N$ , si  $i_M \pitchfork N$ , donde  $i_M : M \rightarrow P$  es la inclusión. Es decir, para todo  $x \in M$  tal que  $x \in N$ , se tiene que  $\text{Im}(d_x i_M) + T_x N = T_x P$ . Como  $\text{Im}(d_x i_M) = T_x M$ , concluimos que  $M \pitchfork N$  en  $P$  si y solo si para todo  $x \in M \cap N$ ,  $T_x M + T_x N = T_x P$ . En particular,  $M \pitchfork N$  si y solo si  $N \pitchfork M$ .

**Ejemplo 2.3.6.** Sea  $P = \mathbb{R}^2$ ,  $M = \text{eje } x$  y  $N = \text{eje } y$ . Entonces  $M \pitchfork N$ . En cambio si  $P = \mathbb{R}^3$ , y  $M, N$  son los mismos, entonces  $M \not\pitchfork N$  (no alcanza la dimensión). Esto muestra que la noción de transversalidad depende de la variedad ambiente  $P$ .

**Observación 2.3.7.** Si  $M \pitchfork N$  en  $P$  y  $M \cap N \neq \emptyset$ , entonces  $\dim M + \dim N \geq \dim P$ .

**Ejemplo 2.3.8.** Dos curvas en  $\mathbb{R}^3$  son transversales si y solo si no se intersecan.

**Ejemplo 2.3.9.** Curvas en  $\mathbb{R}^2$ :



Figura 2.1: Dos curvas transversales en  $\mathbb{R}^2$



Figura 2.2: Dos curvas no transversales en  $\mathbb{R}^2$

**Ejemplo 2.3.10.** Curvas y superficies en  $\mathbb{R}^3$ :

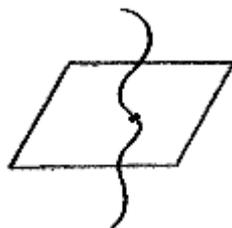


Figura 2.3: Una curva y una superficie transversales en  $\mathbb{R}^3$



Figura 2.4: Una curva y una superficie no transversales en  $\mathbb{R}^3$

**Ejemplo 2.3.11.** Superficies en  $\mathbb{R}^3$ :

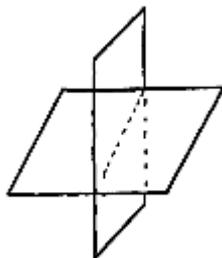


Figura 2.5: Dos superficies transversales en  $\mathbb{R}^3$



Figura 2.6: Dos superficies no transversales en  $\mathbb{R}^3$

El siguiente resultado generaliza el teorema de valores regulares (la preimagen de un valor regular es una subvariedad regular). Notar que para la demostración del mismo utilizamos el caso particular.

**Teorema 2.3.12.** *Sea  $f : M \rightarrow N$  diferenciable y sea  $A \subset N$  una subvariedad regular de  $N$  tal que  $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ . Si  $f \pitchfork A$  entonces  $f^{-1}(A) \subset M$  es una subvariedad regular de codimensión igual a la codimensión de  $A$  en  $N$ .*

*Demostración.* Recordar que  $M \subset P$  es una subvariedad regular si y solo si para todo  $x \in M$ , existe una carta  $(U, \varphi)$  tal que  $\varphi(x) = 0$ ,  $\varphi(U) = C$  es un cubo abierto centrado en 0 con  $\varphi(U \cap M) = \{z \in C : z_{m+1} = \dots = z_t = 0\}$ , donde  $m = \dim M$  y  $t = \dim P$ . Luego ser subvariedad regular es una cuestión local, y como  $A \subset N$  es subvariedad regular, basta probar el caso  $f : M \rightarrow V \times W$  con  $A = V \times 0$  y  $V \times W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q$  cubo, con  $m + q = t$ .

Sea  $\pi : V \times W \rightarrow W$  la proyección y sea  $g = \pi \circ f : M \rightarrow W$ . Notar que  $g^{-1}(0) = f^{-1}(A) \neq \emptyset$ , por lo que  $0 \in g(M)$ . Por otro lado, como  $f \pitchfork A$ , para todo  $x \in f^{-1}(A) = g^{-1}(0)$ , se tiene que  $\text{Im}(d_x f) + T_{f(x)} A = T_{f(x)} N = V \times W$ . Como  $T_{f(x)} A = V \times 0$ , debe ser que  $0 \times W \subset \text{Im}(d_x f)$ . Veamos si  $d_x g$  es

epimorfismo. Para ello, notemos que

$$d_x g : T_x M \xrightarrow{d_x f} \text{Im}(d_x f) \subset V \times W \xrightarrow{d_{f(x)} \pi} W$$

Como  $d_{f(x)} \pi = \pi$  (pues  $\pi$  es transformación lineal), concluimos que  $d_x g$  es epimorfismo si y solo si  $0 \times W \subset \text{Im}(d_x f)$ , si y solo si  $\text{Im}(d_x f) + T_{f(x)} A = T_{f(x)} N = V \times W$ .

Por lo tanto  $f^{-1}(A) = g^{-1}(a) \subset M$  es una subvariedad regular, ya que  $a$  es valor regular de  $g$ .  $\square$

**Corolario 2.3.13.** Sean  $M, N \subset P$  subvariedad regulares tales que  $M \cap N \neq \emptyset$  y  $M \pitchfork N \subset P$ . Entonces  $M \cap N$  es subvariedad regular tanto de  $M$  como de  $N$ , y en consecuencia también de  $P$ . Además,  $\text{codim}_P M \cap N = \text{codim}_P M + \text{codim}_P N$ .

Dejamos los siguientes dos resultados como ejercicios para el lector.

**Ejercicio 2.3.14.** Sea  $M$  una variedad con borde  $\partial M$ . Sean  $P$  una variedad sin borde y  $N \subset P$  una subvariedad regular sin borde. Si  $f : M \rightarrow P$  es diferenciable, transversal a  $N$  en  $P$  y  $\partial f : \partial M \rightarrow P$  también es transversal a  $N$  en  $P$ , entonces  $f^{-1}(N) \subset M$  es una subvariedad regular y  $\partial f^{-1}(N) = f^{-1}(N) \cap \partial M$ .

**Ejercicio 2.3.15.** Sea  $M$  una variedad compacta y sean  $P$  y  $N$  dos variedades sin borde tal que  $N \subset P$  es una subvariedad regular. Ser transversal a  $N$  es una propiedad estable en  $\mathcal{C}^\infty(M, P)$ . Esto es, si  $f : M \rightarrow P$  es diferenciable y transversal a  $N$  en  $P$ , y  $H : M \times I \rightarrow P$  es una homotopía  $\mathcal{C}^\infty$  con  $H_0 = f$ , entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $H_t \pitchfork N$  para todo  $0 \leq t < \varepsilon$ .

El siguiente resultado, que es otra aplicación del teorema de Sard, nos servirá para probar luego el teorema de homotopía para transversalidad.

**Teorema 2.3.16.** Sea  $M$  una variedad con borde  $\partial M$  y sean  $S$  y  $P$  dos variedades sin borde. Supongamos que  $N \subset P$  es una subvariedad regular sin borde y sea  $F : M \times S \rightarrow P$  diferenciable tal que  $F \pitchfork N$  y  $\partial F \pitchfork N$ . Entonces para casi todo  $s \in S$ , las funciones  $F_s : M \rightarrow P$  y  $\partial F_s : \partial M \rightarrow P$  son transversales a  $N$ .

*Demostración.* Sea  $w = F^{-1}(N) \subset M \times S$ . Como  $F \pitchfork N$ ,  $w \subset M \times S$  es una subvariedad regular con borde  $\partial w = w \cap (\partial M \times S)$ . Sea  $q : M \times S \rightarrow S$  la proyección a la segunda coordenada. Por el teorema de Sard, basta probar las siguientes dos afirmaciones:

1. Si  $s \in S$  es un valor regular de  $q|_w : w \rightarrow S$ , entonces  $F_s \pitchfork N$ .
2. Si  $s \in S$  es valor regular de  $q|_{\partial w} : \partial w \rightarrow S$ , entonces  $\partial F_s \pitchfork N$ .

Demostremos 1). El otro ítem es análogo. Sea  $s \in S$  un valor regular de  $q|_W : W \rightarrow S$  y veamos que  $F_s \pitchfork N$ . Sea  $x \in F_s^{-1}(N)$ . Entonces  $F_s(x) = F(x, s) \in N$ , y como  $F \pitchfork N$ ,

$$d_{(x,s)}F(T_{(x,s)}M \times S) + T_zN = T_zP$$

Sea  $a \in T_zP$ . Existe  $b \in T_{(x,s)}M \times S$  tal que  $d_{(x,s)}F(b) - a \in T_zN$ . Veamos que existe  $v \in T_xM$  tal que  $d_xF_s(v) - a \in T_zN$ . Es claro que  $dq : TM \times TS \rightarrow TS$  es la proyección a la segunda coordenada. Como podemos identificar  $T_{(x,s)}M \times S \simeq T_xM \times T_sS$ , existen  $w \in T_xM$  y  $e \in T_sS$  tales que  $b = (w, e)$ . Por otro lado, al ser  $s$  un valor regular de  $q|_W$ , existe  $(u, e') \in T_{(x,s)}W$  tal que  $d_{(x,s)}q|_W(u, e') = e$ . Luego  $e = e'$ . Sea  $v = w - u \in T_xM$ . Así,

$$d_xF_s(v) - a = d_{(x,s)}F((w, e) - (u, e)) - a = d_{(x,s)}F(w, e) - a + d_{(x,s)}F(u, e) \in T_zN$$

usando que  $d_{(x,s)}F(u, e) \in T_zN$ . □

Sea  $P$  una variedad sin borde. Para un  $k$  suficientemente grande,  $P \subset \mathbb{R}^k$  es una subvariedad regular. Más aún, existe un entorno tubular  $P \subset N \subset \mathbb{R}^k$ . Es decir existe un abierto

$$N = \{x \in \mathbb{R}^k : |x - y| < \varepsilon(y), y \in P, \varepsilon : P \rightarrow \mathbb{R}_{>0}\}$$

y un retracts por deformación fuerte  $r : N \rightarrow P$  diferenciable. En particular,  $r$  es una sumersión.

**Corolario 2.3.17.** Sea  $P$  una variedad sin borde y sea  $f : M \rightarrow P$  diferenciable. Entonces existe  $F : M \times S \rightarrow P$  diferenciable, donde  $S$  es la bola unitaria abierta de  $\mathbb{R}^k$  tal que  $F_0 = f$  y para todo  $x \in M$ ,  $F_x : S \rightarrow P$  es una sumersión. Luego  $F$  y  $\partial F$  son sumersiones.

*Demostración.* Sea  $P \subset N \subset \mathbb{R}^k$  un entorno tubular con retracción  $r : N \rightarrow P$ . Sea  $S \subset \mathbb{R}^k$  la bola unitaria abierta. Definimos  $F : M \times S \rightarrow P$  como

$$F(x, s) = r(f(x) + \varepsilon(f(x))s) \in P$$

Para cada  $x$  fijo, la aplicación  $s \mapsto f(x) + \varepsilon(f(x))s$  es sumersión, por lo que  $F_x$  es sumersión. □

**Teorema 2.3.18.** (*Teorema de homotopía para transversalidad*) Sea  $f : M \rightarrow P$  diferenciable, donde  $P$  es una variedad sin borde. Sea  $N \subset P$  una subvariedad regular sin borde. Entonces existe  $g : M \rightarrow P$  diferenciable tal que

- $g \pitchfork N$  y  $\partial g \pitchfork N$
- $f$  y  $g$  son homotópicas

*Demostración.* Por el corolario anterior, existe  $F : M \times S \rightarrow P$  diferenciable, donde  $S \subset \mathbb{R}^k$  es la bola unitaria abierta, tal que  $F_0 = f$  y tanto  $F$  como  $\partial F$  son sumersiones. Entonces  $F \pitchfork N$  y  $\partial F \pitchfork N$ . Por el teorema anterior, para casi todo  $s \in S$ ,  $F_s \pitchfork N$  y  $\partial F_s \pitchfork N$ . Sea  $g = F_s$  para algún  $s$  que verifique esto. Entonces  $g$  es homotópica a  $f$  vía  $H(x, t) = F(x, ts)$ .  $\square$

**Definición 2.3.19.** Sea  $f : M \rightarrow P$  diferenciable y sea  $N \subset P$  una subvariedad. Si  $C \subset M$  es un subespacio (topológico), decimos que  $f$  es transversal a  $N$  en  $C$ , y notamos  $f \pitchfork_C N$ , si para todo  $x \in C \cap f^{-1}(N)$ ,

$$d_x f(T_x M) + T_{f(x)} N = T_{f(x)} P$$

El siguiente resultado generaliza el teorema de homotopía para transversalidad.

**Teorema 2.3.20.** Sean  $M, P$  y  $N$  variedades tales que  $N \subset P$  es un subespacio cerrado que es además subvariedad regular, y ambas son sin borde. Sea  $f : M \rightarrow P$  una función diferenciable y sea  $C \subset M$  un subespacio cerrado. Supongamos que  $f \pitchfork_C N$  y  $\partial f \pitchfork_{C \cap \partial M} N$ . Entonces existe  $g : M \rightarrow P$  diferenciable y homotópica a  $f$  tal que  $g \pitchfork N$  y  $\partial g \pitchfork N$ . Además, existe un entorno  $U \subset M$  de  $C$  tal que  $g|_U = f|_U$ .

*Demostración.* Ejercicio.  $\square$

**Corolario 2.3.21.** Sean  $M, P$  y  $N$  como antes y sea  $f : M \rightarrow P$  diferenciable tal que  $\partial f \pitchfork N$ . Entonces existe  $g : M \rightarrow P$  diferenciable y homotópica a  $f$  tal que  $g \pitchfork N$  y  $\partial g = \partial f$ .

*Demostración.* Tomar  $C = \partial M$  en el teorema anterior.  $\square$

## 2.4 Intersección módulo 2

Dadas  $M, P$  y  $N$  variedades, diremos que son apropiadas para intersección si no tienen borde,  $M$  es compacta,  $\dim M + \dim N = \dim P$  y  $N \subset P$  es una subvariedad que es cerrada como subespacio de  $P$ . En lo que sigue supondremos siempre estas hipótesis salvo explícita aclaración de otra cosa. Seguimos en esta sección la exposición de [GP74].

**Observación 2.4.1.** Supongamos que  $M \subset P$  es una subvariedad transversal a  $N$ . Entonces  $M \cap N \subset M, N \subset P$  son subvariedades y  $\text{codim}_P M \cap N = \text{codim}_P M + \text{codim}_P N = \dim P$ . Luego  $\dim(M \cap N) = 0$ , y como  $M \cap N \subset M$  es compacto, la variedad  $M \cap N$  es un conjunto finito.

**Definición 2.4.2.** Sea  $f : M \rightarrow P$  diferenciable y transversal a  $N$ . Entonces  $f^{-1}(N) \subset M$  es una subvariedad de dimensión 0 y compacta, por lo que  $\#f^{-1}(N)$  es finito. Se define la intersección módulo 2 de  $f$  respecto a  $N$  como  $I_2(f, N) = \#f^{-1}(N) \bmod 2 \in \mathbb{Z}_2$ .

**Teorema 2.4.3.** Sean  $f, g : M \rightarrow P$  diferenciables, homotópicas y ambas transversales a  $N$ . Entonces  $I_2(f, N) = I_2(g, N)$ .

*Demostración.* Sea  $H : M \times I \rightarrow P$  una homotopía entre  $f$  y  $g$ . Entonces  $H|_{\partial(M \times I)} = f \amalg g$  es transversal a  $N$ . Por el teorema 2.3.18, existe  $H' : M \times I \rightarrow P$  tal que  $H' \pitchfork N$  y  $H'|_{\partial(M \times I)} = H|_{\partial(M \times I)}$ . En particular,  $H'$  es una homotopía entre  $f$  y  $g$ , y  $(H')^{-1}(N) \subset M \times I$  es una subvariedad regular de dimensión 1. Además,

$$\partial(H')^{-1}(N) = (H')^{-1}(N) \cap \partial(M \times I) = f^{-1}(N) \amalg g^{-1}(N)$$

y como  $(H')^{-1}(N)$  es una variedad compacta de dimensión 1, su borde tiene una cantidad par de elementos. Luego  $\#f^{-1}(N) = \#g^{-1}(N) \pmod{2}$ .  $\square$

**Definición 2.4.4.** Si  $f : M \rightarrow P$  es diferenciable, el índice de intersección módulo 2 de  $f$  respecto a  $N$  es  $I_2(f, N) = I_2(g, N)$  para alguna función diferenciable  $g : M \rightarrow P$  homotópica a  $f$  y transversal a  $N$ .

**Observación 2.4.5.** Supongamos que  $M, N \subset P$  son apropiados para intersección. Si  $M'$  es una variedad que se obtiene perturbando a  $M$  dentro de  $P$  tal que  $M' \pitchfork N$ , entonces  $I_2(M, N) = I_2(M', N)$ .

Si  $I_2(M, N) \neq 0$ , no vamos a poder deformar a  $M$  (o a  $N$ ) para disjuntarlas dentro de  $P$ .

**Ejemplo 2.4.6.** Si  $P = \mathbb{T}^2$  es el toro y  $M = \mathbb{S}^1 \times 1$  y  $N = 1 \times \mathbb{S}^1$ , entonces no podremos disjuntarlas bajo ninguna perturbación.

**Ejemplo 2.4.7.** Si  $M = N$ , entonces  $\dim M = \frac{1}{2} \dim P$ . Si  $I_2(M, M) = 1$ , entonces no podemos perturbar a  $M$  en  $P$  para disjuntarlo de su posición original. Por ejemplo, si  $P$  es la Banda de Möbius y  $M$  es la circunferencia del centro de la banda, entonces toda perturbación de  $M$  sigue intersectando a  $M$ . Es decir,  $I_2(M, M) = 1$ .

**Teorema 2.4.8.** Sea  $f : M \rightarrow P$  diferenciable y supongamos que  $M = \partial W$  es la frontera de una variedad compacta  $W$  de manera tal que  $f$  se extiende a una  $g : W \rightarrow P$  diferenciable. Entonces  $I_2(f, N) = 0$ .

*Demostración.* Podemos suponer que  $f, g \pitchfork N$ . Luego  $g^{-1}(N) \subset W$  es una subvariedad de dimensión 1 y  $\partial g^{-1}(N) = \partial W \cap g^{-1}(N) = M \cap g^{-1}(N) = f^{-1}(N)$ . Como  $g^{-1}(N) \subset W$  es una subvariedad compacta de dimensión 1, su borde tiene una cantidad par de puntos, por lo que  $I_2(f, N) = 0$ .  $\square$

Sean  $M, P$  y  $N$  apropiadas para intersección y orientables y  $f : M \rightarrow P$  una función diferenciable y transversal a  $N$ . Queremos darle una orientación a  $f^{-1}(N)$  que sea apropiada. La siguiente observación muestra cómo podemos hacerlo. Recordemos que si  $V$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y  $V_1, V_2$  son subespacios no triviales de  $V$  tales que  $V = V_1 \oplus V_2$ , dar una orientación en dos de estos espacios determina una orientación en el tercero.

**Observación 2.4.9.** Sean  $W$ ,  $P$  y  $N$  variedades orientadas, con  $N \subset P$  subvariedad regular. Sea  $f : W \rightarrow P$  diferenciable y transversal a  $N$ . Si  $\partial W \neq \emptyset$ , pedimos también que  $\partial f \pitchfork N$ . Sea  $S = f^{-1}(N) \subset W$ . Le damos a  $f^{-1}(N)$  la siguiente orientación. Como  $T_x S \subset T_x W$  es un subespacio y  $W$  tiene una métrica riemanniana, podemos considerar  $N_x S$  el complemento ortogonal de  $T_x S$  en  $T_x W$ . Luego  $N_x S \oplus T_x S = T_x W$ . Para darle una orientación a  $T_x S$  basta darle una orientación a  $N_x S$ . Como  $f$  es transversal a  $N$ ,  $d_x f(T_x W) + T_{f(x)} N = T_{f(x)} P$ . Luego

$$d_x f(N_x S) \oplus T_{f(x)} N = T_{f(x)} P$$

por una cuestión de dimensión y porque  $S = f^{-1}(N)$ . Como  $N$  y  $P$  ya están orientadas, esto determina una orientación en  $d_x f(N_x S) \simeq N_x S$ . Esto nos da una orientación en  $N_x S$  y por lo tanto en  $T_x S$ . Podemos repetir esto para todo  $x \in S$ . Se puede chequear que esta orientación varía de manera diferenciable ya que todo lo que tomamos varía de manera suave. Así hemos conseguido orientar a  $S$  de manera coherente.

**Ejercicio 2.4.10.** Sean  $W$ ,  $P$  y  $N$  variedades orientadas, con  $N \subset P$  subvariedad regular y sea  $f : W \rightarrow P$  diferenciable tal que  $f \pitchfork N$  y  $\partial f \pitchfork N$ . Entonces  $\partial f^{-1}(N)$  tiene dos orientaciones posibles:

1. Como borde de  $f^{-1}(N)$ , esta última con la orientación coherente de antes.
2.  $\partial(f^{-1}(N)) = (\partial f)^{-1}(N)$  le damos la orientación coherente.

Entonces  $\partial(f^{-1}(N)) = (-1)^{\text{codim } N} (\partial f)^{-1}(N)$ .

Supongamos que  $M$ ,  $P$  y  $N$  son variedades apropiadas para intersección y que  $f : M \rightarrow P$  es una función diferenciable transversal a  $N$ . Entonces  $f^{-1}(N) \subset M$  es una subvariedad compacta de dimensión 0, por lo que es un conjunto finito. En cada punto hereda una orientación,  $+1$  o  $-1$ . Esto es, como  $N_x S \oplus T_x S = T_x M$  y  $T_x S = 0$ , ponemos  $+1$  o  $-1$  dependiendo de que  $N_x S$  esté orientado como  $T_x S$  o no.

**Ejercicio 2.4.11.** Sea  $x \in f^{-1}(N) \subset M$ . Como  $\dim M + \dim N = \dim P$ , se tiene que

$$d_x f(T_x M) \oplus T_{f(x)} N = T_{f(x)} P$$

La orientación de  $T_x M$  determina una orientación en  $d_x f(T_x M)$ . En  $T_{f(x)} N$  consideramos la orientación de  $N$ . Luego la orientación de  $x$  es  $+1$  o  $-1$  dependiendo de si la orientación de  $d_x f(T_x M) \oplus T_{f(x)} N$  coincide con la de  $T_{f(x)} P$  o no. Esto se llama número de orientación de  $x$ , y se nota  $o(x) = +1$  o  $-1$ .

Como caso particular, si  $M, N \subset P$  son transversales en  $P$  y tomamos  $y \in M \cap N = i^{-1}(N)$ , con  $i : M \rightarrow P$  la inclusión, entonces  $o(y) = 1$  si  $T_y M \oplus T_y N = T_y P$  dan la misma orientación, y  $o(y) = -1$  en caso contrario.

**Ejemplo 2.4.12.** En la figura 2.7 se muestra cómo calcular los números de orientación de los puntos de intersección de dos curvas  $M$  y  $N$  en  $\mathbb{R}^2$  dependiendo de sus orientaciones.

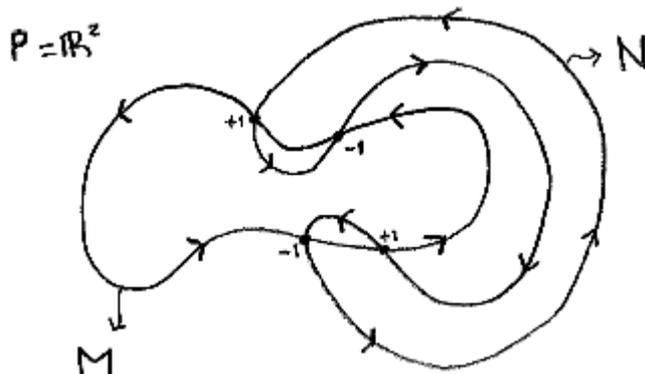


Figura 2.7: Números de orientación de los puntos de intersección de  $M$  con  $N$

**Definición 2.4.13.** Sean  $M$ ,  $P$  y  $N$  apropiados para intersección y orientables. Sea  $f : M \rightarrow P$  una función diferenciable y transversal a  $N$ . Se define el índice de intersección de  $f$  en  $N$ :

$$I(f, N) = \sum_{x \in f^{-1}(N)} o(x)$$

**Proposición 2.4.14.** Sean  $M$ ,  $P$  y  $N$  apropiados para intersección y orientables. Sea  $f : M \rightarrow P$  diferenciable y transversal a  $N$ . Si  $M = \partial W$ , con  $W$  una variedad compacta y orientable, y  $f$  se extiende a una  $F : W \rightarrow P$ , entonces  $I(f, N) = 0$ .

*Demostración.* Por el teorema 2.3.18, podemos suponer que  $F \pitchfork N$ . Luego  $F^{-1}(N) \subset W$  es una subvariedad compacta de dimensión 1, cuyo borde es  $\partial F^{-1}(N) = f^{-1}(N)$ . Como los puntos de los bordes se corresponden a extremos de intervalos compactos de la forma  $[0, 1]$ , la orientación en los bordes es la opuesta. Es decir,  $o(1) + o(0) = 0$ . Por lo tanto

$$\sum_{x \in f^{-1}(N)} o(x) = 0$$

□

**Corolario 2.4.15.** Sean  $M$ ,  $P$  y  $N$  apropiados para intersección y orientables. Si  $f, g : M \rightarrow P$  son dos funciones diferenciables, homotópicas y transversales a  $N$ , entonces  $I(f, N) = I(g, N)$ .

*Demostración.* Sea  $W = M \times I$  y sea  $H : W \rightarrow P$  una homotopía entre  $f$  y  $g$ . Podemos suponer que  $H$  es transversal a  $N$ . Notar que  $\partial H = H|_{\partial(M \times I)}$ :

$M \times 0 \amalg M \times 1 \rightarrow P$  y  $M \times 0$  tiene la orientación de  $M$ , mientras que  $M \times 1$  tiene la orientación opuesta. De la proposición anterior,

$$0 = I(\partial W, N) = I(f, N) - I(g, N)$$

□

**Definición 2.4.16.** Sean  $M$ ,  $P$  y  $N$  apropiados para intersección y orientables. Si  $f : M \rightarrow P$  es diferenciable, definimos el índice de intersección de  $f$  respecto a  $N$  como

$$I(f, N) = I(g, N)$$

donde  $g : M \rightarrow P$  es una función diferenciable transversal a  $N$  y homotópica a  $f$ .

**Observación 2.4.17.** Supongamos que  $M$  es una variedad compacta, que  $P$  es una variedad sin borde de la misma dimensión que  $M$ , y tomemos  $N = \{y\} \subset P$  una subvariedad de un punto. Entonces  $M$ ,  $P$  y  $N$  son apropiados para intersección. Sea  $f : M \rightarrow P$  transversal a  $N$ . Esto es que  $y$  sea valor regular de  $f$ . Luego  $I(f, \{y\}) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} o(x)$ , donde  $o(x) = 1$  o  $-1$  dependiendo de si  $d_x f$  preserva la orientación o no. Veremos en el capítulo 5 que  $I(f, \{y\}) = \deg(f)$ , el grado de la función  $f$ .

**Observación 2.4.18.** Si  $M$  y  $N$  son subvariedades de  $P$ , entonces

$$I(M, N) = (-1)^{\dim M \cdot \dim N} I(N, M)$$

Para ver esto, fijemos un punto  $y \in M \cap N$  y sean  $\{v_1, \dots, v_m\}$  y  $\{w_1, \dots, w_n\}$  bases orientadas de  $T_y M$  y  $T_y N$  respectivamente. Si consideramos la base  $\{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n\}$  de  $T_y P$ , notamos que su orientación respecto de la base  $\{w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_m\}$  difiere en  $(-1)^{mn}$ , ya que podemos ir moviendo los  $w_i$  en orden hacia adelante y cada vez que lo hacemos nos aparece un  $(-1)^n$ .

## 2.5 Introducción a la teoría de Lefschetz

Sea  $M$  una variedad compacta y orientada. Dada  $f : M \rightarrow M$  diferenciable, tiene sentido preguntarse si posee puntos fijos, y de ser así, cuántos son.

Vamos a considerar las siguientes subvariedades de  $M \times M$ :

$$\Delta_M = \{(x, x) \in M \times M : x \in M\}$$

$$\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \in M \times M : x \in M\}$$

Es claro que ambas son subvariedades de  $M \times M$  difeomorfas a  $M$ . Además, notar que  $\Delta_x \cap \text{Graf}(f)$  son exactamente los puntos fijos de  $f$ . La idea es analizar el número  $I(\Delta_x, \text{Graf}(f))$ , el cual notamos por  $L(f)$  y decimos que es el número de Lefschetz global de  $f$ .

**Teorema 2.5.1.** *Sea  $M$  una variedad compacta y orientada. Consideremos una función diferenciable  $f : M \rightarrow M$ . Si  $L(f) \neq 0$  entonces  $f$  tiene puntos fijos.*

*Demostración.* Si  $f$  no tuviese puntos fijos entonces  $\Delta_x \cap \text{Graf}(f) = \emptyset$ . Trivialmente se tiene que  $\Delta_x$  y  $\text{Graf}(f)$  son transversales, y así  $I(\Delta_x, \text{Graf}(f)) = 0$ . Luego  $L(f) = 0$ .  $\square$

En lo que sigue supondremos que  $M$  es una variedad compacta orientable.

**Definición 2.5.2.** Una función diferenciable  $f : M \rightarrow M$  se dice que es de Lefschetz si  $\Delta_M \pitchfork \text{Graf}(f)$ . En tal caso, se tiene que

$$L(f) = \sum_{x \text{ pto fijo}} o(x, x)$$

**Observación 2.5.3.** Si  $f$  y  $g$  son homotópicas, entonces sus gráficos son espacios homotópicamente equivalentes. En particular,

$$L(f) = I(\Delta_M, \text{Graf}(f)) = I(\Delta_M, \text{Graf}(g)) = L(g)$$

**Teorema 2.5.4.** *Toda función diferenciable de  $M$  en  $M$  es homotópica a una Lefschetz.*

*Demostración.* Sabemos que existe  $S$ , una bola unitaria abierta centrada en 0 en algún  $\mathbb{R}^k$ , y una función  $F : M \times S \rightarrow M$  diferenciable tal que  $F_0 = f$  y  $F_x : S \rightarrow M$  es una sumersión para todo  $x$  (ver corolario 2.3.17).

Sea  $G : M \times S \rightarrow M \times M$  la función  $G(x, s) = (x, F(x, s)) = (x, F_s(x))$ . Luego  $G$  es una sumersión. En particular,  $G$  es transversal a  $\Delta_M$ . Por el teorema 2.3.16, para casi todo  $s \in S$ , la función  $G_s : M \rightarrow M \times M$  es transversal a  $\Delta_M$ . Es decir, como  $G_s(x) = (x, F_s(x))$ , el gráfico de  $F_s$  es transversal a  $\Delta_M$  para casi todo  $s \in S$ . Esta condición es exactamente lo mismo que decir que  $F_s : M \rightarrow M$  es Lefschetz para casi todo  $s \in S$ . Finalmente como  $S$  es convexo y  $F_0 = f$ , deducimos que  $f$  es homotópica a cada  $F_s$ .  $\square$

**Observación 2.5.5.** Reinterpretemos la condición de ser Lefschetz para una función diferenciable  $f : M \rightarrow M$ . Por definición, esto es que su gráfico  $\text{Graf}(f)$  sea transversal a  $\Delta_M$ , lo cual equivale a decir que para todo  $x \in M$  punto fijo de  $f$ ,

$$T_{(x, f(x))} \text{Graf}(f) + T_{(x, x)} \Delta_M = T_{(x, x)}(M \times M)$$

Vía las identificaciones canónicas  $T_{(x, x)} \simeq T_x M \times T_x M$ ,  $T_{(x, f(x))} \text{Graf}(f) = \text{Graf}(d_x f)$  y  $T_{(x, x)} \Delta_M = \Delta_{T_x M}$ , por una cuestión de dimensión vemos que  $\text{Graf}(d_x f) + \Delta_{T_x M} = T_x M \times T_x M$  si y solo si  $\text{Graf}(d_x f) \cap \Delta_{T_x M} = 0$ . Esto equivale a decir que 1 no es autovalor de  $d_x f$ , o lo que es lo mismo, que  $d_x f - \text{id} : T_x M \rightarrow T_x M$  es un isomorfismo.

**Definición 2.5.6.** Sea  $f : M \rightarrow M$  diferenciable. Un punto fijo  $x \in M$  de  $f$  se llama punto fijo de Lefschetz si  $d_x f - \text{id}$  es un isomorfismo, o equivalente, si 1 no es autovalor de  $d_x f$ .

**Observación 2.5.7.** De lo anterior,  $f$  es Lefschetz si y solo si todos sus puntos fijos son Lefschetz.

**Definición 2.5.8.** Si  $x$  es un punto fijo de Lefschetz de  $f : M \rightarrow M$ , entonces  $L_x(f) = o(x, x)$  es el número de Lefschetz local en  $x$ .

**Proposición 2.5.9.** Si  $x$  es un punto fijo de Lefschetz de  $f$ , entonces  $L_x f = \text{Sg}(\det(d_x f - \text{id}))$ .

*Demostración.* Sea  $A = d_x f$ . Sea  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base que da la orientación de  $T_x M$ . Por definición,  $L_x(f)$  es la orientación que da en  $T_x M \times T_x M$  la base

$$\{(v_1, v_1) \dots, (v_n, v_n), (v_1, Av_1), \dots, (v_n, Av_n)\}$$

donde  $\{(v_1, v_1) \dots, (v_n, v_n)\}$  corresponden a los vectores que aporta  $\Delta_M$  y  $\{(v_1, Av_1), \dots, (v_n, Av_n)\}$  a los que aporta  $\text{Graf}(f)$ . Vía la operación que a cada  $(v_i, Av_i)$  le resto  $(v_i, v_i)$ , obtenemos la base

$$\{(v_1, v_1), \dots, (v_n, v_n), (0, (A - \text{id})(v_1)), \dots, (0, (A - \text{id})(v_n))\}$$

que posee la misma orientación que la anterior. Como los últimos  $n$  vectores poseen un cero en las primeras  $n$  coordenadas, concluimos que la orientación de esta base es

$$\text{Sg}(\beta) \cdot \text{Sg}((A - \text{id})\beta) = \text{Sg}((A - \text{id})\beta)$$

dado que  $\text{Sg}(\beta) = 1$ . □

**Observación 2.5.10.** Supongamos que  $M = \mathbb{R}^n$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Los puntos fijos de  $f$  son los ceros de  $f - \text{id}$ , visto como un campo vectorial, y los puntos fijos de Lefschetz de  $f$  se corresponden con los ceros no degenerados de  $f - \text{id}$  (ver capítulo 5). En esos puntos Lefschetz,

$$i(f - \text{id}, x) = \text{Sg}(\det(d_x(f - \text{id}))) = L_x(f).$$

Es decir, estudiar puntos fijos de Lefschetz en campos de  $\mathbb{R}^n$  es lo mismo que estudiar ceros no degenerados, y en estos se puede utilizar la teoría de índice y grado que veremos más adelante.

# Capítulo 3

## Teoría de Morse

### 3.1 Resultados fundamentales de la teoría de Morse

En esta sección seguiremos las presentaciones de [Hir76, Mil65b, Mil63].

Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$  y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Un punto  $p \in M$  es punto crítico de  $f$  si  $d_p f = 0$ . Mediante la identificación  $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$ , tenemos que  $p$  es punto crítico de  $f$  si y solo si  $X_p(f) = 0$  para todo  $X_p \in T_p M$ .

**Definición 3.1.1.** Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable y sea  $p \in M$  un punto crítico de  $f$ . Decimos que  $p$  es un punto crítico no degenerado si para alguna carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  en  $p$ , se tiene que la matriz de las derivadas segundas en esa carta  $\left( \frac{\partial^2 f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi(p)) \right)_{i,j}$  es invertible.

**Observación 3.1.2.** La definición anterior no depende de la carta  $(U, \varphi)$  elegida, ya que las matrices difieren en producto de matrices invertibles.

Veamos otra forma de justificarlo. Sea  $p \in M$  punto crítico de  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Definimos  $H_p f : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  como  $H_p f(X_p, Y_p) = X_p(Y(f))$ , donde  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  es un campo tal que  $Y(p) = Y_p$ . Veamos que  $H_p f$  está bien definida y es simétrica.

Sean  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  dos campos tales que  $X(p) = X_p$  e  $Y(p) = Y_p$ . Entonces

$$H_p f(X_p, Y_p) - H_p f(Y_p, X_p) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) = [X, Y]_p(f) = 0$$

pues  $[X, Y]_p \in T_p M$ . Por lo tanto  $H_p f$  es simétrica. Además vemos que está bien definida:  $H_p f(X_p, Y_p)$  no depende de  $X$  y  $H_p f(Y_p, X_p)$  no depende de  $Y$ , y como son iguales, entonces no dependen ni de  $X$  ni de  $Y$ . De esta manera, tenemos que  $H_p f : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma bilineal y simétrica, y  $p$  es no degenerado si y solo si  $H_p f$  es no degenerada.

**Observación 3.1.3.** Sea  $(U, \varphi)$  una carta de  $M$  en  $p$ . Supongamos que  $X_p = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p$  e  $Y_p = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \Big|_p$ . Sea  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  tal que  $Y|_U = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \Big|_p$ .

Entonces

$$H_p f(X_p, Y_p) = X_p(Y(f)) = \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p \left( \frac{\partial f}{\partial \varphi_j} \right) = \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi(p))$$

es la matriz de  $H_p f$  en la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p \right\}$ .

Como  $H_p f$  es una forma bilineal simétrica no degenerada, existe una base de  $T_p M$  tal que la matriz de  $H_p f$  en esa base es de la forma

$$\begin{pmatrix} -\text{id}_r & 0 \\ 0 & \text{id}_{n-r} \end{pmatrix}$$

Luego  $T_p M = V^+ \oplus V^-$ , donde estos espacios corresponden a los 1 y  $-1$  respectivamente.

**Definición 3.1.4.** El índice de  $f$  en un punto crítico  $p$  no degenerado es  $\text{ind}_f(p) = r$ , la cantidad de  $-1$  en la diagonal, es decir, la dimensión de  $V^-$ .

**Teorema 3.1.5.** Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Los puntos críticos no degenerados de  $f$  son aislados.

*Demostración.* Podemos suponer que  $M = U \subset \mathbb{R}^n$  es un abierto ya que tenemos que verificar una propiedad local. Consideramos entonces  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Sea  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  la función  $g(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$ . Luego  $p \in U$  es punto crítico de  $f$  si y solo si  $g(p) = 0$ . Además,  $D_p g = H_p f = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{i,j}$ . Luego  $p$  es un punto crítico no degenerado de  $f$  si y solo si  $H_p f$  es inversible si y solo si  $g$  es un difeomorfismo local en  $p$ . Por lo tanto  $p$  es un cero aislado de  $g$ .  $\square$

**Observación 3.1.6.** Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable y sea  $p \in U$  un punto crítico de  $f$ . Por Taylor, sabemos que cerca de  $p$  se tiene que

$$f(x) = f(p) + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)(x_i - p_i)(x_j - p_j) + R(x)$$

donde

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{R(x)}{|x - p|^2} = 0$$

El lema de Morse dice que cerca de un punto crítico no degenerado de una función diferenciable, existe un cambio de coordenadas apropiado para que la función se escriba en términos de esas coordenadas sin resto de Taylor.

**Lema 3.1.7.** (Lema de Morse) Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable y sea  $p \in M$  un punto crítico no degenerado de índice  $k$  para  $f$ . Entonces existe una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  en  $p$  tal que  $f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$ .

Para probar el Lema de Morse veamos un par de resultados previos y una observación.

**Observación 3.1.8.** Cuando  $\text{ind}_p(f) = 0$ , tenemos que  $f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(p) + x_1^2 + \dots + x_n^2$ , por lo que  $p$  es un mínimo local.

Si  $\text{ind}_p(f) = n$ , entonces  $f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_n^2$ , por lo que  $p$  es un máximo local.

Para  $0 < \text{ind}_p(f) < n$ , la función  $f \circ \varphi^{-1}$  decrece en  $\text{ind}_p(f)$  direcciones y crece en las otras, por lo que  $p$  es un punto silla.

**Lema 3.1.9.** Sea  $U = B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$  una bola y sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable con  $f(0) = 0$ . Sea  $A = H_0 f$  el Hessiano de  $f$  en 0 y sea  $S$  el subespacio de las matrices simétricas reales de  $n \times n$ . Entonces existe una función  $B : U \rightarrow S$  diferenciable tal que  $B(x) = (b_{i,j}(x))_{i,j}$  y  $f(x) = \sum_{i,j} b_{i,j}(x)x_i x_j$ .

*Demostración.* Basta notar que

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 Df(xt) \cdot x dt \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(xt) dt \right) x_j \\ &= \sum_{i,j} \left( \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(txs) dt \right) ds \right) x_i x_j \end{aligned}$$

□

**Lema 3.1.10.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -\text{id}_k & 0 \\ 0 & \text{id}_{n-k} \end{pmatrix}$$

Sea  $S$  como antes. Entonces existe  $N \subset S$  abierto tal que  $A \in N$  y una  $P : N \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$  diferenciable con  $P(A) = \text{id}$  y tal que para todo  $B \in N$ , se tiene que  $P(B)^t B P(B) = A$ .

*Demostración.* Procedemos por inducción en la dimensión de  $A$ . Supongamos que

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix}$$

con  $-1 = A_{1,1} < 0$ . Entonces existe  $\tilde{N} \subset S$  abierto tal que  $A \in \tilde{N}$  y para todo  $B \in \tilde{N}$ , el coeficiente  $B_{1,1}$  es negativo. Dado  $B \in \tilde{N}$ , consideramos la siguiente matriz

$$T(B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{-B_{1,1}}} & \frac{-B_{1,2}}{B_{1,1}} & \cdots & \frac{-B_{1,n}}{B_{1,1}} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$T(B)^t B T(B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix}$$

con  $\tilde{B}$  simétrica de  $(n-1) \times (n-1)$ . Sea  $N \subset \tilde{N}$  tal que para todo  $B \in N$ ,  $\tilde{B}$  queda cerca de  $\tilde{A}$ . Por inducción, existe  $\tilde{P}$  diferenciable tal que  $\tilde{P}(\tilde{B})^t \tilde{B} \tilde{P}(\tilde{B}) = \tilde{A}$ . Entonces tomamos

$$P(B) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{P}(\tilde{B}) \end{pmatrix}$$

Para más detalles ver [Hir76].

□

*Demostración.* (Lema de Morse)

Podemos suponer que  $M = B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$  es una bola de  $\mathbb{R}^n$ , que  $p = 0$  y que  $f : B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(0) = 0$ . Además, podemos suponer que  $A = H_0 f$  es una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} -\text{id}_k & 0 \\ 0 & \text{id}_{n-k} \end{pmatrix}$$

y que  $D_0 f = 0$ .

Por el lema 3.1.9, existe  $B : U \rightarrow S$  diferenciable tal que  $B(x) = (b_{i,j}(x))_{i,j}$  y  $f(x) = \sum_{i,j} b_{i,j}(x) x_i x_j$ . Notar que  $B(0) = A$ .

Por el lema 3.1.10, existe un abierto  $N \subset S$  tal que  $A \in N$  y existe una  $P : N \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$  tal que  $P(B)^t B P(B) = A$  para todo  $B \in N$ .

Sea  $q(x) = P(B(x)) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  y sea  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  la función  $\varphi(x) = q(x)^{-1} x$ . Entonces  $D_0 \varphi = \text{id}$  y así  $\varphi$  resulta un difeomorfismo local. En consecuencia, existe una carta  $(V, \psi)$  inversa local de  $\varphi$  en 0. Luego  $x = q(x) \varphi(x) = q(x) y$  si  $y = \varphi(x)$ , por lo que

$$f(x) = x^t B(x) x = y^t q(x)^t B(x) q(x) y = y^t A y = \sum_i a_{i,i} y_i^2$$

Es decir,  $f \circ \psi(y) = \sum_i \pm y_i^2$ .

□

**Definición 3.1.11.** Una función diferenciable  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es una función de Morse si todos sus puntos críticos son no degenerados.

**Observación 3.1.12.** En variedades compactas las funciones de Morse tienen finitos puntos críticos ya que son aislados.

**Observación 3.1.13.** Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse. Salvo cambio de coordenadas, ya sabemos cómo es  $f$  localmente en  $p \in M$ :

1. Si  $p$  es un punto regular de  $f$ , entonces  $d_p f$  es un epimorfismo, por lo que existe un entorno  $U$  alrededor de  $p$  tal que todos los puntos de  $U$  son regulares para  $f$ . Luego por el teorema del rango constante,  $f$  localmente es  $f(x_1, \dots, x_n) = x_1$  la proyección en la primera coordenada.
2. Si  $p$  es un punto crítico de  $f$  de índice  $k$ , entonces  $f(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$  cerca de  $p$ .

Veamos que las funciones de Morse son densas en el siguiente sentido: si  $M$  es una variedad de dimensión  $n$ , sabemos que  $M \subset \mathbb{R}^m$  para un  $m$  suficientemente grande. Dada  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable y un punto  $a \in \mathbb{R}^m$ , definimos  $f_a : M \rightarrow \mathbb{R}$  como la función  $f_a(x) = f(x) + \langle a, x \rangle$  (el producto interno usual en  $\mathbb{R}^m$ ). Notar que  $f_a$  es diferenciable.

**Teorema 3.1.14.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^m$  una subvariedad regular y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Entonces las funciones  $f_a$  son de Morse para casi todo  $a \in \mathbb{R}^m$ .

*Demostración.* La demostración consiste de dos pasos.

Paso 1: Supongamos que  $M = U \subset \mathbb{R}^m$  es un abierto de  $\mathbb{R}^m$ . Sea  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  la función

$$g(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Dado  $p \in U$ , tenemos que  $D_x(f_a) = g(x) + a$ . Luego  $p \in U$  es punto crítico de  $f_a$  si y solo si  $g(p) = -a$ . Además,  $H_p f_a = H_p f + D_p g$ . Luego  $p \in U$  es un punto crítico no degenerado de  $f_a$  si y solo si  $g(p) = -a$  y  $D_p g$  es inversible (es decir,  $-a$  es valor regular de  $g$ ). Por el teorema de Sard, para casi todo  $a \in \mathbb{R}^m$ ,  $-a$  es valor regular de  $g$ . Por lo tanto para casi todo  $a \in \mathbb{R}^m$ , la función  $f_a$  es de Morse.

Paso 2: Supongamos ahora que  $M \subset \mathbb{R}^m$  es una subvariedad regular de dimensión  $n$ . Entonces para todo  $p \in M$  existe una carta  $(U, \varphi)$  de  $\mathbb{R}^m$  en  $p$  tal que  $\varphi(U) = C_\varepsilon(0)$  es un cubo de radio  $\varepsilon$  y  $\varphi(U \cap M) = \{(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \in C_\varepsilon(0)\}$  es una feta del cubo. Llamemos  $U' = U \cap M$ .

Cubrimos a  $M$  con numerables de estas cartas. Para cada  $U$ , hacemos lo siguiente: para cada  $c = (c_{n+1}, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^{m-n}$  fijo, consideramos la función

$$f_{(0,c)} = f + c_{n+1}x_{n+1} + \dots + c_m x_m$$

Por el paso 1, como  $U'$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , para casi todo  $b \in \mathbb{R}^n$ , la función

$$f_{(b,c)} = f + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + c_{n+1} x_{n+1} + \dots + c_m x_m$$

es de Morse. Luego por Fubini,  $f_a = f_{(b,c)}$  es de Morse para casi todo  $a \in \mathbb{R}^m$  en el  $U'$ . Como unión numerable de medida cero tiene medida cero, y a  $M$  lo cubrimos con numerables de estos  $U'$ , concluimos que  $f_a$  es de Morse para casi todo  $a \in \mathbb{R}^m$ .  $\square$

Recordemos que una variedad cerrada es una variedad compacta sin borde. Si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable, para cada  $a \in \mathbb{R}$  consideramos el conjunto

$$M_a = \{x \in M : f(x) \leq a\}$$

Queremos estudiar cómo van cambiando los subconjuntos  $M_a$  a medida que variamos el  $a \in \mathbb{R}$ . Notar primero que, si  $a \in \mathbb{R}$  es un valor regular de  $f$ , entonces  $M_a \subset M$  es una subvariedad regular de  $M$  con borde  $\partial M_a = f^{-1}(a)$ .

**Observación 3.1.15.** Si  $a < \min f$ , entonces  $M_a = \emptyset$ , mientras que si  $a \geq \max f$  entonces  $M_a = M$ .

El siguiente es el ejemplo más típico de esta teoría (ver [Mil63]).

**Ejemplo 3.1.16.** Consideramos  $M = \mathbb{T}^2$  el toro y lo vemos apoyado sobre un plano  $A$  en  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  la distancia al plano  $A$ . Tenemos cuatro puntos críticos:  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , todos no degenerados.

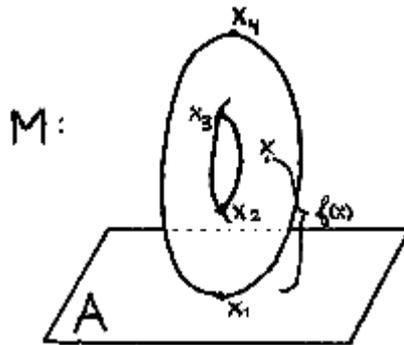


Figura 3.1: Función de Morse en el toro apoyado sobre un plano

- $x_1$  es mínimo de índice 0, pues en todas las direcciones la función crece.
- $x_2$  tiene índice 1, pues en algunas direcciones crece y en otras decrece.
- $x_3$  tiene índice 1 (ídem)
- $x_4$  tiene índice 2 pues la función decrece en todas las direcciones.

Analizamos  $M_a$ :

1.  $a < f(x_1) = 0$ , entonces  $M_a = \emptyset$ .

2.  $f(x_1) < a < f(x_2)$ , entonces  $M_a$  es de la forma



3.  $f(x_2) < a < f(x_3)$ , entonces  $M_a$  es de la forma



4.  $f(x_3) < a < f(x_4)$ , entonces  $M_a$  es de la forma



5.  $f(x_4) < a$ , entonces  $M_a = M$  es el toro:



Además, notamos que si  $f(x_i) < a, a' < f(x_{i+1})$ , entonces  $M_a$  y  $M_{a'}$  son difeomorfos.

A partir de ahora nuestro objetivo será demostrar los siguientes dos teoremas de Morse.

**Teorema 3.1.17.** (*Teorema 1 de la teoría de Morse*) Sea  $M$  una variedad cerrada y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Sean  $a < b \in \mathbb{R}$ . Si  $f^{-1}([a, b])$  no tiene puntos críticos, entonces  $M_a$  y  $M_b$  son difeomorfos. Además,  $M_a \subset M_b$  es un retracto por deformación fuerte.

**Teorema 3.1.18.** (*Teorema 2 de la teoría de Morse*) Sea  $M$  una variedad cerrada y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Sea  $p \in M$  un punto crítico no degenerado de índice  $k$  para  $f$ . Sea  $c = f(p) \in \mathbb{R}$ . Supongamos que  $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$  no tiene otro punto crítico además de  $p$ . Entonces  $M_{c+\varepsilon}$  es homotópicamente equivalente a  $M_{c-\varepsilon} \cup e^k$ , es decir, a  $M_{c-\varepsilon}$  con la adunción de una  $k$ -celda.

De estos teoremas se seguirá el siguiente corolario.

**Corolario 3.1.19.** Sea  $M$  una variedad cerrada y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse. Entonces  $M$  es homotópicamente equivalente a un CW complejo  $X$  que tiene una  $k$ -celda por cada punto crítico de índice  $k$ .

**Ejemplo 3.1.20.** En el ejemplo previo se ve claramente que al pasar por  $x_1$  adjuntamos una 0-celda. Al pasar por  $x_2$  adjuntamos una 1-celda. Al pasar por  $x_3$  le adjuntamos una 1-celda. Finalmente al pasar por  $x_4$  le adjuntamos una 2-celda.

Antes de probar estos teoremas necesitaremos algunos resultados y definiciones preliminares.

Recordemos que una métrica riemanniana en una variedad  $M$  es dar para cada punto  $p \in M$  un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  que es diferenciable respecto de  $p$ . Es decir, para toda carta  $(U, \varphi)$ , la función

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \mapsto \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle$$

es diferenciable.

Recordemos también que toda variedad diferenciable admite una métrica riemanniana (consultar cualquier libro de geometría diferencial, por ejemplo [Boo76]).

**Observación 3.1.21.** Si  $V$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , entonces existe un isomorfismo  $L : V \rightarrow V^*$  (donde  $V^*$  denota al espacio dual), definido por  $v \mapsto \langle v, - \rangle$ . Es decir, para toda  $f \in V^*$  existe un único vector  $v \in V$  tal que  $f(w) = \langle v, w \rangle$  para todo  $w \in V$ .

**Definición 3.1.22.** Sea  $M$  una variedad riemanniana, es decir, una variedad con una métrica riemanniana fija. Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Si  $p \in M$ , pensamos a  $d_p f : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  como el funcional lineal  $d_p f(X_p) = X_p(f)$ . Entonces  $d_p f \in (T_p M)^*$ , por lo que existe un único  $Y_p \in T_p M$  tal que  $d_p f(X_p) = \langle Y_p, X_p \rangle_p$  para todo  $X_p \in T_p M$ . Llamamos  $Y_p = \text{Grad}_p(f)$  al gradiente de  $f$  en  $p$ . Se verifica para todo  $X_p \in T_p M$

$$X_p(f) = \langle \text{Grad}_p(f), X_p \rangle_p$$

**Observación 3.1.23.** Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable.

1. Como  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es diferenciable, se tiene que  $\text{Grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$  es un campo diferenciable.
2. Si  $M = \mathbb{R}^n$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto interno usual, entonces  $\text{Grad}(f)$  es el gradiente usual.

3.  $p \in M$  es un punto crítico de  $f$  si y solo si  $d_p f = 0$ , si y solo si  $\text{Grad}_p(f) = 0$ .

**Definición 3.1.24.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Un grupo uniparamétrico de difeomorfismos de  $M$  es una función  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  diferenciable tal que

1. Para todo  $t \in \mathbb{R}$ , la función  $\varphi_t : M \rightarrow M$  dada por  $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$  es un difeomorfismo.
2. Para todos  $s, t \in \mathbb{R}$ , se verifica que  $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$ .

**Observación 3.1.25.** Si  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  es un grupo uniparamétrico entonces:

1.  $\varphi_0 = \text{id}$  y  $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \varphi_s$  para todos  $s, t \in \mathbb{R}$ .
2. Dado  $q \in M$ , definimos  $\varphi^q : \mathbb{R} \rightarrow M$  como la función  $\varphi^q(t) = \varphi(t, q)$ . Esta es una curva diferenciable tal que  $\varphi^q(0) = q$ .

**Definición 3.1.26.** Sea  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  una curva diferenciable. El vector velocidad de  $c$  en tiempo  $t = t_0$  es el vector  $\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t_0} \in T_{c(t_0)}M$  tal que

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t_0} (f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ c)(t_0 + h) - (f \circ c)(t_0)}{h} = (f \circ c)'(t_0)$$

**Definición 3.1.27.** Sea  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  un grupo uniparamétrico de difeomorfismos. Se define el generador infinitesimal de  $\varphi$  como el campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  tal que  $X_q = \left. \frac{d\varphi^q}{dt} \right|_0$ . Es decir, para toda  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  con  $q \in U$ , se tiene que

$$X_q(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ \varphi^q)(h) - (f \circ \varphi^q)(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ \varphi^q)(h) - f(q)}{h}$$

**Teorema 3.1.28.** Sea  $M$  una variedad y sea  $K \subset M$  un compacto. Sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo cuyo soporte está contenido en  $K$ . Es decir,  $X|_{K^c} = 0$ . Entonces existe un único grupo uniparamétrico  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  cuyo generador infinitesimal es el campo  $X$ .

*Demostración.* Remitimos al lector a las demostraciones en [Boo76, Mil63]. □

Podemos probar ahora el Teorema 1 de la teoría de Morse.

**Teorema 3.1.29.** Sea  $M$  una variedad sin borde y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  dos números reales tales que  $a < b$  y el conjunto  $f^{-1}([a, b])$  es un compacto que no contiene ningún punto crítico (en particular  $a$  y  $b$  son valores regulares y  $M_a, M_b \subset M$  son subvariedades regulares). Entonces vale lo siguiente:

1.  $M_a$  y  $M_b$  son variedades difeomorfas.

2.  $M_a \subset M_b$  es un retracto por deformación fuerte.

*Demostración.* Le damos a  $M$  una métrica riemanniana. A partir de esta métrica consideramos el campo gradiente  $\text{Grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$ . Si  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  es una curva diferenciable, entonces

$$\left\langle \frac{dc}{dt}, \text{Grad}(f) \right\rangle = \frac{dc}{dt}(f) = (f \circ c)' = \frac{d(f \circ c)}{dt} \quad (3.1)$$

Sea  $K = f^{-1}([a, b]) \subset M$ . Sea  $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable tal que

$$\rho|_K = \frac{1}{\|\text{Grad}(f)\|^2}$$

y tal que existe un compacto  $L \supset K$  que contiene al soporte de  $\rho$ . Esto se puede hacer porque  $K$  es compacto y  $\text{Grad}(f)$  es no nulo en  $K$  por hipótesis.

Sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$  el campo  $X_q = \rho(q) \text{Grad}_q(f)$ . Como  $X|_{L^c} = 0$ , existe un único grupo uniparamétrico  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  tal que  $X$  es el generador infinitesimal de  $\varphi$ . Entonces

$$X = \begin{cases} \frac{\text{Grad}(f)}{\|\text{Grad}(f)\|^2} & \text{en } K \\ 0 & \text{en } L^c \end{cases}$$

Por definición,  $X_q = \left. \frac{d\varphi^q}{dt} \right|_0$ . Para cada  $q \in M$ , consideramos la función  $\gamma_q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que es la composición  $\gamma_q = f \circ \varphi^q$ . Entonces  $\gamma'_q(t) = \frac{d(f \circ \varphi^q)}{dt}(t)$ . Si  $p = \varphi^q(t) \in K$ , entonces

$$\gamma'_q(t) = \left\langle \frac{d\varphi^q}{dt}(t), \text{Grad}_p(f) \right\rangle = \langle X_p, \text{Grad}_p(f) \rangle = \left\langle \frac{\text{Grad}_p(f)}{\|\text{Grad}_p(f)\|^2}, \text{Grad}_p(f) \right\rangle = 1$$

En particular, en un entorno del 0, vale que  $\gamma_q(t) = t + c$ , con  $c$  una constante. Como  $\gamma_q(0) = f(\varphi^q(0)) = f(q)$ , concluimos que  $\gamma_q(t) = t + f(q)$ .

Consideramos los difeomorfismos  $\varphi_{b-a} : M \rightarrow M$ . Afirmamos que  $(\varphi_{b-a})|_{f^{-1}(a)} : f^{-1}(a) \rightarrow f^{-1}(b)$  son difeomorfismos. En efecto,  $(\varphi_{b-a})(q) = \varphi^q(b-a)$  y  $f \circ \varphi^q(b-a) = \gamma_q(b-a) = b-a + f(q) = b$  si y solo si  $f(q) = a$ . Más aún,  $(\varphi_{b-a})|_{M_a} : M_a \rightarrow M_b$  es difeomorfismo.

Con esto, podemos probar que  $f^{-1}([a, b]) \cong f^{-1}(a) \times [a, b]$ . Para ello definimos  $F : f^{-1}(a) \times [a, b] \rightarrow f^{-1}([a, b])$  como  $F(x, t) = \varphi_{t-a}(x)$ . Esta  $F$  resulta un difeomorfismo.

Para ver que  $M_a \subset M_b$  es un retracto por deformación fuerte, basta definir una homotopía  $H : M_b \times I \rightarrow M_b$  relativa a  $M_a$  tal que  $H_0 = \text{id}$  y  $H_1(M_b) \subset M_a$ . Tomamos

$$H(q, t) = \begin{cases} q & \text{si } f(q) \leq a \\ \varphi_{t(a-f(q))}(q) & \text{si } a \leq f(q) \leq b \end{cases}$$

que verifica lo pedido.  $\square$

De la demostración del teorema se deduce el siguiente resultado, cuya demostración queda como ejercicio.

**Ejercicio 3.1.30.** Sea  $M$  una variedad compacta con borde y sea  $f : M \rightarrow [a, b]$  una función diferenciable sin puntos críticos en  $\overset{\circ}{M} = M - \partial M$  y  $f(\partial M) = \{a, b\}$ . Existe un difeomorfismo  $F : f^{-1}(a) \times [a, b] \rightarrow M$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(a) \times [a, b] & \xrightarrow{F} & M \\ & \searrow r_2 & \swarrow f \\ & & [a, b] \end{array}$$

En particular, para todo  $a \leq c \leq b$  se tiene que  $f^{-1}(c) \equiv f^{-1}(a)$ .

Ya estamos en condiciones de probar el siguiente resultado fundamental de Reeb, que dice que toda variedad cerrada que admite una función de Morse con exactamente dos puntos críticos es homeomorfa a la esfera (de la dimensión de la variedad).

**Teorema 3.1.31.** *Sea  $M$  una variedad cerrada de dimensión  $n$  tal que existe una función de morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  con exactamente dos puntos críticos. Entonces  $M$  es homeomorfa a la esfera  $\mathbb{S}^n$ .*

*Demostración.* Sean  $p_-$  y  $p_+$  los puntos de  $M$  donde  $f$  alcanza el mínimo y el máximo respectivamente. Son exactamente dos porque  $f$  tiene solo dos puntos críticos. Sean  $c_- = f(p_-)$  y  $c_+ = f(p_+)$ . Entonces  $f : M \rightarrow [c_-, c_+]$ .

Por el lema de Morse, existe una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  en  $p_-$  tal que  $f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = c_- + x_1^2 + \dots + x_n^2 = c_- + \|x\|^2$ . Tomando  $a > c_-$  suficientemente cerca, tenemos que  $f^{-1}([c_-, a])$  es difeomorfo vía  $\varphi$  al conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : c_- + \|x\|^2 \in [c_-, a]\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 \leq a - c_-\} =: D_-^n$$

el cual es un disco. Análogamente, existe una carta  $(V, \psi)$  de  $M$  en  $p_+$  tal que  $f \circ \psi^{-1}(x) = c_+ - \|x\|^2$ . Tomando  $a < b < c_+$  suficientemente cerca de  $c_+$ , vemos que  $f^{-1}([b, c_+])$  es difeomorfo vía  $\psi$  al conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : b \leq c_+ - \|x\|^2 \leq c_+\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 \leq c_+ - b\} =: D_+^n$$

que también es un disco.

De lo anterior,  $f^{-1}([a, b])$  es un cilindro difeomorfo a  $f^{-1}(a) \times [a, b]$ , y notar que  $f^{-1}(a) = \partial D_-^n = \mathbb{S}^{n-1}$  se corresponde al borde del disco  $D_-^n$ . De la misma manera  $f^{-1}(b) = \partial D_+^n$  se corresponde al borde del disco  $D_+^n$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} M &= f^{-1}([c_-, c_+]) = f^{-1}([c_-, a]) \cup f^{-1}([a, b]) \cup f^{-1}([b, c_+]) \\ &= D_-^n \cup_{\partial D_-^n} \mathbb{S}^{n-1} \times [a, b] \cup_{\partial D_+^n} D_+^n \equiv \mathbb{S}^n \end{aligned}$$

□

**Observación 3.1.32.** Notar que en el resultado anterior solo podemos afirmar que hay un homeomorfismo, porque estamos pegando difeomorfismos localmente y solo podemos asegurar que se preserva la continuidad en forma global. De hecho, la existencia de esferas exóticas nos revela que este pegado de difeomorfismos locales induce un homeomorfismo que no es necesariamente un difeomorfismo.

Probaremos ahora el Teorema 2 de la Teoría de Morse.

**Teorema 3.1.33.** *Sea  $M$  una variedad sin borde y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Supongamos que  $p \in M$  es un punto crítico no degenerado de  $f$  de índice  $k$ . Pongamos  $n = \dim M$  y  $c = f(p)$ . Si existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$  no contiene otro punto crítico de  $f$  salvo  $p$  y es compacto, entonces  $M_{c+\varepsilon}$  es homotópicamente equivalente a  $M_{c-\varepsilon} \cup e^k$ , es decir, a  $M_{c-\varepsilon}$  adjuntándole una celda de dimensión  $k$ .*

*Demostración.* Seguimos esencialmente la demostración de [Mil63]. Sea  $(U, \varphi)$  una carta de  $M$  tal que  $p \in U$ ,  $\varphi(p) = 0$  y  $f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$ .

En la demostración vamos a suponer que cada vez que tomemos un  $q \in U$ , entonces  $\varphi(q) = (x_1, \dots, x_n)$ .

Sea  $0 < \varepsilon' < \varepsilon$  tal que  $\{(x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 2\varepsilon'\} \subset \varphi(U)$ . Como en  $f^{-1}([c - \varepsilon, c - \varepsilon'])$  y en  $f^{-1}([c + \varepsilon', c + \varepsilon])$  no hay puntos críticos, por el teorema 3.1.29 tenemos retracts por deformación fuerte  $M_{c-\varepsilon} \subset M_{c-\varepsilon'}$  y  $M_{c+\varepsilon'} \subset M_{c+\varepsilon}$ . Luego podemos suponer que tomamos  $\varepsilon' = \varepsilon$ .

Sea  $e^k = \varphi^{-1}(\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_k^2 \leq \varepsilon, x_{k+1} = \dots = x_n = 0\})$ . Por la elección de  $\varepsilon$ , el conjunto  $e^k$  es difeomorfo al disco de dimensión  $k$  y  $e^k \subset U$ .

Veamos que  $M_{c-\varepsilon} \cap e^k = \dot{e}^k$  es el borde del disco.

- ▷) Sea  $q \in \dot{e}^k$ . Entonces  $f(q) = c - x_1^2 - \dots - x_k^2 = c - \varepsilon$ , con lo cual  $q \in M_{c-\varepsilon}$ .
- ◁) Sea  $q \in M_{c-\varepsilon} \cap e^k$ . Entonces  $f(q) = c - x_1^2 - \dots - x_k^2 \leq c - \varepsilon$ . Pero también es mayor o igual a  $c - \varepsilon$  por estar  $q$  en  $e^k$ . De esta manera debemos tener una igualdad y así  $x_1^2 + \dots + x_k^2 = \varepsilon$ . Es decir,  $q \in \dot{e}^k$ .

Por lo tanto  $M_{c-\varepsilon} \cup e^k$  es adjuntarle una  $k$ -celda a  $M_{c-\varepsilon}$ . Veamos que  $M_{c-\varepsilon} \cup e^k \subset M_{c+\varepsilon}$  es un retracto por deformación fuerte. Notar que la contención se deduce de que  $f(q) \leq c$  para todo  $q \in e^k$ .

Analicemos los conjuntos de nivel.

- $f(q) = c$  si y solo si  $c = c - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$  si y solo si  $x_1^2 + \dots + x_k^2 = x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$ . Es decir, es de la forma  $x^2 = y^2$ .
- $f(q) = c - \varepsilon$  entonces  $x^2 - y^2 = \varepsilon$

- $f(q) = c + \varepsilon$  entonces  $y^2 - x^2 = \varepsilon$

Se tiene entonces el siguiente gráfico de la Figura 3.2, donde las variables  $x_1, \dots, x_k$  están representadas en el eje  $x$  y las variables  $x_{k+1}, \dots, x_n$  en el  $y$ :

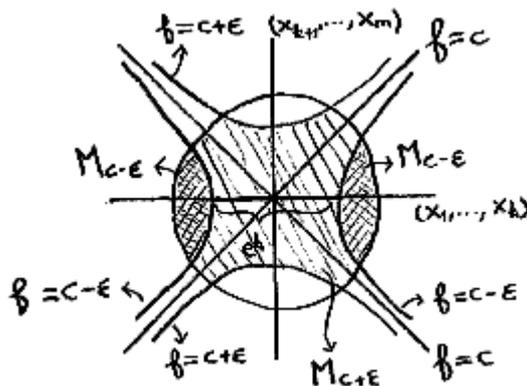


Figura 3.2: Esquema de lo que estamos haciendo

Queremos cambiar  $f$  para que la celda  $e^k$  se “engorde” y pase a ser un rectángulo.



Figura 3.3: Engrosamiento de la función

Veamos cómo cambiar a  $f$  por una  $F$ . Sea  $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^\infty$  tal que

1.  $\mu(0) > \varepsilon$
2.  $\mu(x) = 0$  para todo  $x \geq 2\varepsilon$
3.  $-1 < \mu'(x) \leq 0$

Definimos  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  de la siguiente manera.  $F = f$  fuera de  $U$ . En  $U$ , definimos  $F \circ \varphi^{-1} = f \circ \varphi^{-1} - \mu(x_1^2 + \dots + x_k^2 + 2x_{k+1}^2 + \dots + 2x_n^2)$ . Se pega bien porque la bola cerrada de radio  $\sqrt{2\varepsilon}$  centrada en el 0 está contenida en  $\varphi(U)$  y  $\mu$  se anula fuera de ella.

Sean  $\xi, \eta : \varphi(U) \rightarrow (0, +\infty)$  las funciones  $\xi(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_k^2$  y  $\eta(x_1, \dots, x_n) = x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$ . De esta manera,  $f = c - \xi + \eta$  y  $F = c - \xi + \eta - \mu(\xi + 2\eta)$  en  $U$ . Por lo tanto  $F \leq f$  y  $F = f$  fuera de  $U$ .

Consideremos las siguientes observaciones.

1.  $M_{c+\varepsilon}^F = M_{c+\varepsilon}^f$ :  
 $\supset$ ) Pues  $F \leq f$

- ⊂) Sea  $q \in M_{c+\varepsilon}^F$ . Si  $\xi(q) + 2\eta(q) > 2\varepsilon$  entonces  $\mu(q) = 0$  y  $F(q) = f(q)$ , y en este caso ya estaríamos. Si  $\xi(q) + 2\eta(q) \leq 2\varepsilon$ , entonces  $\frac{1}{2}\xi + \eta \leq \varepsilon$ . Luego

$$f(q) = c - \xi(q) + \eta(q) \leq c + \frac{1}{2}\xi(q) + \eta(q) \leq c + \varepsilon$$

2.  $F$  y  $f$  tienen los mismos puntos críticos en  $U$ . Componiendo  $F$  con  $\varphi^{-1}$  en  $U$ , calculamos su diferencial:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} \cdot d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} \cdot d\eta$$

Por otro lado,

$$d\xi = (2x_1, \dots, 2x_k, 0, \dots, 0), \quad d\eta = (0, \dots, 0, 2x_{k+1}, \dots, 2x_n)$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = 1 - \mu'(\xi + 2\eta) \geq 1$$

De esto deducimos que  $d_q F = 0$  si y solo si  $\varphi(q) = 0$ , si y solo si  $q = p$ .

3. Tenemos una inclusión  $F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \subset f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$  pues  $F \leq f$  y  $M_{c+\varepsilon}^F = M_{c+\varepsilon}^f$ . Así, resulta que  $F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$  es compacto. Por hipótesis,  $p$  es el único punto crítico en  $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$  y  $p \notin F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$  ya que  $F(p) = f(p) - \mu(0) < c - \varepsilon$ . Luego  $F$  no tiene valores críticos en  $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ .

Por el teorema 3.1.29 vemos que  $M_{c-\varepsilon}^F \subset M_{c+\varepsilon}^F$  es un retracto por deformación fuerte. Por otro lado, es claro que  $M_{c-\varepsilon}^f \subset M_{c-\varepsilon}^F$  ya que  $F \leq f$ .

Sea  $H = M_{c-\varepsilon}^F - M_{c-\varepsilon}^f$ . Veamos que  $e^k \subset H$ . Sea  $q \in e^k$ . Podemos escribir  $e^k = \{q : \xi(q) < \varepsilon, \eta(q) = 0\}$ .

- $F(q) < c - \varepsilon$  si y solo si  $c - \xi(q) + \eta(q) - \mu(\xi(q) + 2\eta(q)) < c - \varepsilon$ , si y solo si  $\varepsilon < \xi(q) + \mu(\xi(q))$ . Pongamos  $x = \xi(q)$ . Entonces  $0 \leq x < \varepsilon$ . Basta ver que  $0 < x + \mu(x) - \varepsilon$  para todo  $0 \leq x < \varepsilon$ . Para  $x = 0$  es claro por definición de  $\mu$ . Si derivamos, obtenemos  $0 < 1 + \mu'(x) \leq 1$  por la condición 3) de  $\mu$ . Esto nos dice que  $x + \mu(x) - \varepsilon$  es estrictamente creciente, y como para  $x = 0$  ya valía la desigualdad, entonces sigue valiendo para todo  $0 \leq x < \varepsilon$ .
- $f(q) = c - \xi(q) + \eta(q) = c - \xi(q) > c - \varepsilon$ .

Por lo tanto  $e^k \subset H$  y se tienen inclusiones

$$M_{c-\varepsilon}^f \cup e^k \subset M_{c-\varepsilon}^f \cup H = M_{c-\varepsilon}^F \subset M_{c+\varepsilon}^f$$

Sabemos que la última inclusión es un retracto por deformación fuerte. Basta ver entonces que  $M_{c-\varepsilon}^f \cup e^k \subset M_{c-\varepsilon}^f \cup H$  es un retracto por deformación fuerte.

Consideremos las regiones marcadas en la figura 3.4.

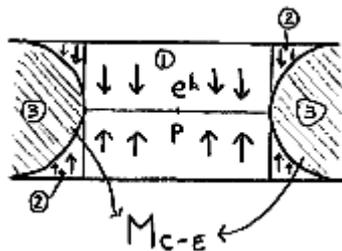


Figura 3.4: Las distintas regiones que tenemos

Definimos  $G : M_{c-\epsilon} \cup H \times I \rightarrow M_{c-\epsilon} \cup H$  de la siguiente manera.

- Para la región (1),  $\xi \leq \epsilon$ , y así definimos

$$G_t(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, tx_{k+1}, \dots, tx_n)$$

- Para la región (2),  $\epsilon \leq \xi \leq \eta + \epsilon$ , y definimos

$$G_t(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, S_t x_{k+1}, \dots, S_t x_n)$$

donde  $S_t = t + (1 - t)\sqrt{\frac{\xi - \epsilon}{\eta}}$ .

- Para la región (3),  $\xi \geq \eta + \epsilon$  (dentro de  $M_{c-\epsilon}$ ), y ponemos  $G_t = \text{id}$ .

Solo hay que chequear que esta  $G$  está bien definida y que funciona. Esto es solo una cuenta que dejamos al lector. □

**Ejemplo 3.1.34.** Consideremos un toro con dos agujeros (superficie cerrada orientable de género 2) con la función altura, como se indica en la figura 3.5.



Figura 3.5: Toro con dos agujeros a la misma altura

Esta tiene dos puntos críticos al mismo nivel. Podríamos modificar un poco la demostración anterior tomando cartas disjuntas para cada punto y llegar a la misma conclusión.

En general, modificando levemente la demostración anterior, para una cantidad finita de puntos críticos, se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.1.35.** Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable y sea  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $f^{-1}(c)$  contiene  $r$  puntos críticos no degenerados  $p_1, \dots, p_r$  de índices  $k_1, \dots, k_r$  respectivamente. Supongamos que existe un  $\varepsilon > 0$  de manera que  $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$  es compacto y no tiene otros puntos críticos salvo los  $p_i$ . Entonces  $M_{c+\varepsilon}$  es homotópicamente equivalente a  $M_{c-\varepsilon} \cup e_1^{k_1} \cup \dots \cup e_r^{k_r}$ .

Nuestro objetivo es deducir, de los teoremas anteriores, el corolario que enunciaremos previamente: dada una función de Morse sobre una variedad cerrada, la variedad es homotópicamente equivalente a un CW-complejo con tantas celdas como puntos críticos de la función.

Para poder probar el corolario necesitamos algunos resultados previos, que enunciaremos aquí. Las demostraciones de estos pueden encontrarse en casi cualquier libro de Topología Algebraica, por ejemplo el libro de Hatcher [Hat02].

1. Si  $X$  es un CW complejo y una función  $\varphi : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$  es celular, entonces el espacio que se obtiene al adjuntar la celda mediante esa función,  $X \cup e^n$ , es un CW complejo.
2. Sean  $X, Y$  dos CW-complejos con estructura fija, y sea  $f : X \rightarrow Y$  continua. Entonces existe  $g : X \rightarrow Y$  celular que es homotópica a  $f$ .
3. Sean  $\varphi, \psi : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$  dos funciones homotópicas. Entonces los espacios que se obtienen adjuntándole una celda mediante esas funciones son homotópicamente equivalentes:  $X \cup_\varphi e^n \simeq X \cup_\psi e^n$ .
4. Sea  $X$  un CW-complejo de cualquier dimensión. Entonces al adjuntar una  $n$ -celda  $X \cup e^n$  se obtiene un espacio que es homotópicamente equivalente a un CW-complejo  $Y$  que tiene la misma estructura celular que  $X \cup e^n$  pero con la celda  $e^n$  bien pegada (es decir, la celda se pega solamente sobre celdas de dimensiones menores a ella).
5. Si  $f : X \rightarrow Y$  es equivalencia homotópica, entonces  $X \cup_\varphi e^n \simeq Y \cup_{f \circ \varphi} e^n$ .

Con esto ya podemos demostrar el corolario. Para una demostración alternativa del mismo, consultar [Mil63].

**Corolario 3.1.36.** Sea  $M$  una variedad cerrada y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse. Entonces  $M$  es homotópicamente equivalente a un CW-complejo  $X$  que tiene una celda de dimensión  $k$  por cada punto crítico de  $f$  de índice  $k$ .

*Demostración.* Sea  $M$  una variedad cerrada y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse. Entonces  $f$  tiene finitos puntos críticos, por lo que existen finitos valores críticos  $c_1 < c_2 < \dots < c_r$ . Si  $c < c_1$  entonces  $M_c = \emptyset$ . Si  $c_1 < c < c_2$ , entonces  $M_c \simeq e_1^0 \cup \dots \cup e_s^0$  es unión disjunta de contráctiles, y por lo tanto homotópicamente equivalente a un CW-complejo de dimensión 0 con tantas 0-celdas como mínimos tenga la función.

Recursivamente, por el teorema anterior tenemos que  $M_{c_i+\varepsilon} \simeq M_{c_i-\varepsilon} \cup e^{k_1} \cup \dots \cup e^{k_t}$ , es decir, una celda de dimensión  $k_i$  por cada punto crítico de índice  $k_i$ . Por inducción,  $M_{c_i-\varepsilon} \simeq Y$ , donde  $Y$  es un CW-complejo que tiene tantas celdas como puntos críticos por los que ya pasamos. Por los resultados mencionados previamente,

$$M_{c+\varepsilon} \simeq Y \cup (e^{k'_1} \cup \dots \cup e^{k'_s} \cup e^{k_1} \cup \dots \cup e^{k_t}) \simeq Z$$

Con  $Z$  un CW-complejo. Notar que la última equivalencia se deduce del ítem 4, pues podríamos estar pegando mal las celdas, en el sentido de pegar celdas de dimensión más chicas luego de haber pegado celdas de dimensión más grande. Recursivamente, se obtiene el resultado.  $\square$

## 3.2 Desigualdades de Morse

Sea  $M$  una variedad cerrada y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse. Sea  $n = \dim M$ . Para cada  $0 \leq i \leq n$ , definimos el valor  $m_i$  como la cantidad de puntos críticos de índice  $i$  de  $f$ . Sean  $b_i$  los números de Betti de  $M$ , es decir,  $b_i = \text{rk } H_i(M)$ , los rangos de los grupos de homología singular de  $M$ . Por definición, la característica de Euler es  $\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i$ .

Por el corolario anterior, tenemos que  $M \simeq X$ , donde  $X$  es un CW-complejo que tiene una  $k$ -celda por cada punto crítico de  $f$  de índice  $k$ . Como  $\chi(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^i c_i$ , con  $c_i$  la cantidad de celdas de dimensión  $i$ , concluimos que

$$\chi(M) = \chi(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^i m_i$$

Por otro lado,  $b_i = \text{rk } H_i(M) = \text{rk } H_i(X) = \text{rk } H_i(C_*)$ , con  $C_*$  el complejo celular de  $X$ . Luego

$$b_i = \text{rk } H_i(C_*) = \text{rk } \text{Ker}(d_i) / \text{Im}(d_{i+1}) \leq \dim C_i = m_i$$

Obtenemos así las desigualdades débiles de Morse

**Teorema 3.2.1.** (*Desigualdades débiles de Morse*)

1.  $b_i \leq m_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$
2.  $\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i m_i$

Dejamos como ejercicio la demostración de las desigualdades fuertes de Morse. Para probarlo sugerimos utilizar las manipulaciones estándar de sumas y restas de rangos en sucesiones exactas de grupos abelianos finitamente generados.

**Ejercicio 3.2.2.** (*Desigualdades fuertes de Morse*) Para todo  $0 \leq i \leq n$ ,

$$m_i - m_{i-1} + m_{i-1} - \dots \pm m_0 \geq b_i - b_{i-1} + b_{i-2} - \dots \pm b_0$$



## Capítulo 4

# Dualidad de Poincaré

### 4.1 Cohomología de de Rham

Recordaremos en esta sección algunas nociones y resultados básicos sobre la cohomología de de Rham y la cohomología con soporte compacto.

Dada una variedad  $M$ , denotamos con  $\Omega^q(M)$  al  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de las  $q$ -formas diferenciales en  $M$  (recordar que las 0-formas son las funciones  $\mathcal{C}^\infty$  de  $M$  a  $\mathbb{R}$ ). Se tiene entonces un complejo de cocadenas

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^2(M) \rightarrow \dots$$

donde el diferencial  $d : \Omega^q(M) \rightarrow \Omega^{q+1}(M)$  es el diferencial exterior usual de formas. Este es el complejo de de Rham de  $M$  (que denotamos  $\Omega^*(M)$ ) y su cohomología, que denotamos  $H^*(M)$ , es la cohomología de de Rham de la variedad  $M$ . Cada  $H^q(M)$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y es claro que  $H^q(M) = 0$  para  $q > m$  (donde  $m$  es la dimensión de  $M$ ).

Notar que  $H^0(M)$  son las funciones a valores reales tales que  $df = 0$ , es decir, las funciones localmente constantes. Cuando la variedad es conexa se tiene entonces que  $H^0(M) = \mathbb{R}$ .

Para ver, por ejemplo, que  $H^1(\mathbb{R}) = 0$ , basta ver que toda 1-forma  $w = f(x)dx$  es exacta (es decir, existe una función  $h$  tal que  $w = dh$ ). Y para ver esto podemos tomar  $h(x) = \int_0^x f(t)dt$ . En general se tiene que  $H^q(\mathbb{R}^n) = 0$  para todo  $q \neq 0$ . Esto se deduce del siguiente lema de Poincaré.

**Proposición 4.1.1.** (Lema de Poincaré) Sea  $M$  variedad diferenciable. Se tiene un isomorfismo  $H^*(M) \simeq H^*(M \times \mathbb{R})$ . En particular, se tiene

$$H^q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & q = 0 \\ 0 & q \neq 0 \end{cases}$$

*Demostración.* Sea  $s : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$  la función  $s(x) = (x, 0)$  y sea  $p : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  la proyección  $p(x, t) = x$ . Entonces  $ps = 1_M$ , por lo cual los morfismos

inducidos en las homologías verifican que  $s^*p^* = 1$ . Restaría ver que  $p^*s^* = 1$ . Para esto, hay que ver que en realidad se tiene que  $p^*s^*$ , como morfismo en los complejos, es homotópico a la identidad. Buscamos  $K : \Omega^q(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{q-1}(M \times \mathbb{R})$  tal que  $\pm dK \pm Kd = p^*s^* - 1$ . Notar que si  $\mathcal{U} = \{U_r\}$  es un atlas para  $M$ , entonces  $\{U_r \times \mathbb{R}\}$  es un atlas de  $M \times \mathbb{R}$ . Por lo tanto, si  $\omega \in \Omega^q(M \times \mathbb{R})$ , entonces  $\omega$  es suma de formas de dos tipos:

- (I)  $f(x, t)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q} = f(x, t)p^*(\phi)$ , con  $\phi \in \Omega^q(M)$
- (II)  $f(x, t)dt \wedge p^*(\phi)$ , con  $\phi \in \Omega^{q-1}(M)$

Si  $\omega$  es de tipo (I), definimos  $K\omega = 0$ , y si  $\omega$  es de tipo (II), definimos  $K\omega = (\int f(x, s)ds)p^*(\phi)$ . Esta  $K$  verifica lo pedido.  $\square$

Como corolario de este lema se deduce que dos funciones homotópicas  $f, g : M \rightarrow N$  inducen el mismo morfismo a nivel de cohomología de de Rham. Dejamos los detalles de la demostración a cargo del lector.

Si  $\{U, V\}$  es un cubrimiento por abiertos de  $M$ , se tiene una sucesión exacta corta de complejos:

$$0 \rightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{\alpha} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{\beta} \Omega^*(U \cap V) \rightarrow 0$$

donde  $\alpha(w)$  es la restricción de la forma  $w$  a  $U$  y a  $V$  y  $\beta(w, v)$  es la resta de las restricciones de las formas a la intersección. Esta es la sucesión de Mayer-Vietoris para la cohomología de de Rham y es la herramienta que permite trasladar propiedades cohomológicas locales a propiedades globales.

Es sencillo de ver que esta sucesión es exacta, el único detalle importante a tener en cuenta es que para probar que  $\beta$  es epimorfismo se debe tomar una partición de la unidad  $\{r_U, r_V\}$  subordinada al cubrimiento y, dada una forma  $w$  en la intersección, considerar  $(-r_V.w, r_U.w)$ . Notar que  $r_V.w$  es una forma definida en  $U$  y, similarmente,  $r_U.w$  es una forma en  $V$ .

La sucesión exacta corta de Mayer-Vietoris induce, como es habitual y estándar, una sucesión exacta larga de cohomología:

$$\dots \rightarrow H^q(M) \rightarrow H^q(U) \oplus H^q(V) \rightarrow H^q(U \cap V) \rightarrow H^{q+1}(M) \rightarrow \dots$$

La cohomología de de Rham con soporte compacto se calcula a partir de las formas con soporte compacto. Denotamos con  $\Omega_c^q(M)$  a las  $q$ -formas con soporte compacto. Notemos que el diferencial exterior se restringe bien:  $d : \Omega_c^q(M) \rightarrow \Omega_c^{q+1}(M)$  y se tiene un complejo de  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales:

$$0 \rightarrow \Omega_c^0(M) \rightarrow \Omega_c^1(M) \rightarrow \Omega_c^2(M) \rightarrow \dots$$

que denotamos  $\Omega_c^*(M)$  y cuya cohomología es la cohomología de de Rham con soporte compacto de  $M$  y se denota  $H_c^*(M)$ .

Notar que, si  $M$  es una variedad compacta,  $H_c^q(M) = H^q(M)$ .

Es claro que  $H_c^0(\mathbb{R}^n) = 0$  porque se corresponde con las funciones constantes con soporte compacto. Vale que  $H_c^q(\mathbb{R}^n) = 0$  si  $q \neq n$  y  $H_c^n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ . Esto es el Lema de Poincaré para soporte compacto (puede verse una demostración de este resultado en el libro [BT82]).

Observemos entonces que:

$$H^q(\mathbb{R}^n) \simeq H_c^{n-q}(\mathbb{R}^n).$$

Este isomorfismo, que puede traducirse localmente en cualquier variedad de dimensión  $n$ , puede ser llevado a un isomorfismo a nivel global cuando la variedad es orientable. Esto es lo que se conoce como dualidad de Poincaré.

En el caso de cohomología con soporte compacto, se tiene también una sucesión de Mayer-Vietoris. En este caso es covariante, dado que la cohomología con soporte compacto es covariante respecto de la inclusión de abiertos. Concretamente: si  $U \subset M$  es un abierto y  $w$  es una  $q$ -forma con soporte compacto en  $U$ , podemos extender  $w$  a una  $q$ -forma con soporte compacto en  $M$ , que denotamos  $i_*(w)$  (donde  $i : U \rightarrow M$  es la inclusión), definiendo  $i_*(w)$  como cero fuera de  $U$ . Esto define un morfismo de complejos  $i_* : \Omega_c^*(U) \rightarrow \Omega_c^*(M)$ .

Dado un cubrimiento por abiertos  $\{U, V\}$ , se tiene una sucesión exacta de complejos:

$$0 \rightarrow \Omega_c^*(U \cap V) \xrightarrow{\gamma} \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \xrightarrow{\delta} \Omega_c^*(M) \rightarrow 0$$

donde  $\gamma(w) = (i_*^U(w), -i_*^V(w))$  y  $\delta(v, w) = j_*^U(v) + j_*^V(w)$  (denotamos con  $i^U, i^V, j^U, j^V$  a las inclusiones respectivas). Es sencillo ver que esta sucesión es exacta y se deja su comprobación como ejercicio para el lector. Esta sucesión exacta de complejos induce, como antes, una sucesión exacta larga en las cohomologías con soporte compacto.

## 4.2 Variedades de tipo finito y buenos cubrimientos

**Definición 4.2.1.** Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$  y sea  $\mathcal{U}$  un cubrimiento por abiertos de  $M$ . Decimos que  $\mathcal{U}$  es un buen cubrimiento si toda intersección finita  $U_{j_1} \cap \dots \cap U_{j_r}$  con  $U_{j_i} \in \mathcal{U}$  es vacía o difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 4.2.2.** *Toda variedad  $M$  admite un buen cubrimiento.*

*Demostración.* Le damos a  $M$  una métrica riemanniana y tomamos alrededor de cada punto un entorno geodésicamente convexo. Es claro que todo entorno geodésicamente convexo es difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  y, al igual que la métrica euclideana, la intersección de finitos convexos es convexo.  $\square$

**Definición 4.2.3.** Una variedad se dice de tipo finito si admite un buen cubrimiento finito.

Por el teorema anterior es claro que toda variedad compacta es de tipo finito. Por supuesto no vale la recíproca, por ejemplo  $\mathbb{R}^n$  es variedad de tipo finito y no es compacto.

**Proposición 4.2.4.** Si  $M$  es una variedad de tipo finito (en particular, si  $M$  es compacta) entonces  $H^q(M)$  y  $H_c^q(M)$  son  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales de dimensión finita para todo  $q$ .

*Demostración.* Se sigue por inducción en el cardinal  $r$  de un buen cubrimiento finito de  $M$ . Si  $r = 1$  entonces  $M$  es difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . En este caso el resultado se sigue por el cálculo directo de las cohomologías.

Para hacer el paso inductivo, dado un buen cubrimiento  $\{U_1, \dots, U_r\}$ , consideramos  $N = U_1 \cup \dots \cup U_{r-1}$  que es una variedad de dimensión  $n$  que admite buen cubrimiento de tamaño  $r - 1$ .

Si  $N \cap U_r = \emptyset$  se tiene que  $H^*(M) = H^*(N) \oplus H^*(U_r)$  y por inducción se tiene el resultado (lo mismo con las cohomologías con soporte compacto).

Si la intersección  $N \cap U_r$  no es vacía se tiene que  $\{U_1 \cap U_r, \dots, U_{r-1} \cap U_r\}$  es un buen cubrimiento de  $N \cap U_r$ . Ahora, por hipótesis inductiva y usando las sucesiones largas de Mayer-Vietoris, se tiene el resultado.  $\square$

### 4.3 La dualidad

Se pueden encontrar en la literatura varias demostraciones (y variaciones) de la dualidad de Poincaré. Por ejemplo, sabiendo que toda variedad diferenciable se puede triangular por una variedad poliedral (resultado de Whitehead que comentamos en el primer capítulo) y utilizando el teorema de de Rham (que veremos más adelante), que dice que la cohomología de de Rham coincide con la cohomología singular/simplicial de  $M$ , se puede demostrar esta dualidad utilizando celdas duales. Otra demostración alternativa de la dualidad se obtiene utilizando teoría de Morse (ver por ejemplo el libro [Mil65b]). Daremos aquí una idea de la demostración utilizando el teorema de Stokes, buenos cubrimientos y las sucesiones de Mayer-Vietoris para pasar de lo local (la dualidad vale para  $\mathbb{R}^n$ ) a lo global. Seguimos la demostración de [BT82] y remitimos a ese libro para ver los detalles que aquí no hacemos.

Sea entonces  $M$  una variedad orientable y sin borde, de dimensión  $n$ . Si  $w \in \Omega^q(M)$  y  $v \in \Omega_c^{n-q}(M)$ , entonces el producto wedge  $w \wedge v \in \Omega_c^n(M)$  (dado que el soporte cae dentro del soporte de  $v$ ). Más aún, si  $w$  y  $v$  son formas cerradas (es decir  $dw = dv = 0$ ), entonces  $w \wedge v$  también lo es, ya que  $d(w \wedge v) = dw \wedge v + (-1)^{|w|} w \wedge dv$ . Además, si alguna de las dos es exacta (es decir  $w = d\tilde{w}$  o  $v = d\tilde{v}$ ),  $w \wedge v$  también es exacta. Para ver esto, supongamos que  $w = d\tilde{w}$ , entonces  $d(\tilde{w} \wedge v) = d\tilde{w} \wedge v + (-1)^s \tilde{w} \wedge dv = w \wedge v + 0 = w \wedge v$ .

De lo anterior se deduce entonces que se tiene un producto bien definido

$$H^q(M) \times H_c^{n-q}(M) \rightarrow H_c^n(M)$$

Por otro lado, eligiendo una orientación en  $M$  se tiene una aplicación

$$I : H_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por  $I([w]) = \int_M w$ , donde  $[w]$  es la clase de  $w$  en la cohomología. Notar que  $I$  está bien definida ya que, por un lado,  $M$  está orientada y  $w$  tiene soporte compacto y además, porque si  $[w] = 0$  se tiene que  $\int_M w = 0$  por el teorema de Stokes (ya que  $M$  no tiene borde).

Componiendo el producto anterior con el morfismo  $I$  se obtiene una aplicación  $\mathbb{R}$ -bilineal

$$\varphi : H^q(M) \times H_c^{n-q}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por  $\varphi([w], [v]) = \int_M w \wedge v$ , que determina el morfismo de Poincaré:

$$D : H^q(M) \rightarrow (H_c^{n-q}(M))^*$$

donde  $(H_c^{n-q}(M))^*$  denota el espacio vectorial dual. Concretamente  $D([w])([v]) = \int_M w \wedge v$ .

La dualidad de Poincaré queda expresada así.

**Teorema 4.3.1.** *Sea  $M$  una variedad orientable y sin borde, de dimensión  $n$ . Entonces el morfismo  $D : H^q(M) \rightarrow (H_c^{n-q}(M))^*$  es un isomorfismo para todo  $q$ . En particular, si  $M$  es de tipo finito se tiene un isomorfismo  $H^q(M) \simeq H_c^{n-q}(M)$ . Más en particular, si  $M$  es compacta se tiene un isomorfismo  $H^q(M) \simeq H^{n-q}(M)$ .*

*Demostración.* Damos una idea de la demostración. Para el caso en que  $M$  sea de tipo finito, usamos inducción en el tamaño  $r$  de un buen cubrimiento. Si  $r = 1$  estamos en el caso de  $\mathbb{R}^n$  donde sabemos que la dualidad vale por cálculo directo. Para el paso inductivo, usamos por un lado la sucesión de Mayer-Vietoris para la cohomología y la sucesión dual de la Mayer-Vietoris para la cohomología con soporte compacto. El morfismo  $D$  en cada grado induce un morfismo entre ambas sucesiones exactas largas (salvo signo) y por hipótesis inductiva y el lema de los 5 se prueba el caso de tipo finito.

Para el caso general, se escribe a  $M$  como colímite de variedades de tipo finito y se ve que el isomorfismo de la dualidad en caso de tipo finito pasa bien al colímite.  $\square$

Terminamos este capítulo con un resultado cuya demostración se sigue de lo visto aquí y que dejamos como ejercicio al lector. Este resultado se utilizará en el capítulo siguiente.

**Teorema 4.3.2.** *Sea  $M$  una variedad conexa, orientada y sin borde de dimensión  $n$ . Entonces se tiene una sucesión exacta de espacios vectoriales*

$$\Omega_c^{n-1}M \xrightarrow{d} \Omega_c^n M \xrightarrow{\int_M} \mathbb{R} \rightarrow 0$$

*En particular si  $M$  es cerrada (i.e. compacta y sin borde), conexa y orientable entonces  $H^n(M) \simeq \mathbb{R}$  y el isomorfismo es integrar.*



## Capítulo 5

# Grado de una función e índice de campos

### 5.1 Grado de una función

Nuestro punto de partida es el resultado final del capítulo anterior: si  $M$  es una variedad conexa, orientada y sin borde de dimensión  $n$ . Entonces se tiene una sucesión exacta de espacios vectoriales

$$\Omega_c^{n-1}M \xrightarrow{d} \Omega_c^n M \xrightarrow{f_M} \mathbb{R} \rightarrow 0$$

En particular si  $M$  es cerrada, conexa y orientable entonces  $H^n(M) \simeq \mathbb{R}$  y el isomorfismo es integrar.

**Definición 5.1.1.** Sean  $N$  y  $M$  dos variedades cerradas, conexas y orientadas de dimensión  $n$ . Sea  $f : N \rightarrow M$  una función diferenciable. Tenemos un morfismo inducido en la cohomología  $f^* : H^n(M) \rightarrow H^n(N)$  definido por  $f^*([\omega]) = [f^*\omega]$ . Sea  $\tilde{f}$  la única función lineal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^n(M) & \xrightarrow{f^*} & H^n(N) \\ \simeq \downarrow f_M \cdot & & \simeq \downarrow f_N \cdot \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \end{array}$$

Como  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una transformación lineal, se tiene que  $\tilde{f}(t) = \alpha t$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$  un escalar fijo. Definimos el grado de  $f$  como  $\deg(f) = \alpha$ . Es decir, el grado de  $f$  es el único escalar  $\deg(f)$  tal que para todo  $\omega \in \Omega^n(M)$ ,

$$\int_N f^*\omega = \deg(f) \int_M \omega$$

**Definición 5.1.2.** Sean  $M$  y  $N$  como antes, aunque a  $N$  no le pedimos ahora que sea necesariamente conexa, y sea  $f : N \rightarrow M$  diferenciable. Sean  $N_1, \dots, N_k$  las componentes conexas de  $N$  y llamamos  $f_i = f|_{N_i}$ . Luego  $N_i$  cumple todo lo anterior y es conexa. Definimos  $\deg(f) = \sum_i \deg(f_i)$ .

**Observación 5.1.3.** Si  $\omega \in \Omega^n M$ , entonces

$$\int_N f^* \omega = \sum_i \int_{N_i} f_i^* \omega = \sum_i \deg(f_i) \int_M \omega = \deg(f) \int_M \omega$$

En adelante, siempre supondremos que  $M$  es una variedad cerrada, conexa y orientada de dimensión  $n$  y que  $N$  es lo mismo pero no necesariamente conexa, salvo explícita aclaración de lo contrario.

**Proposición 5.1.4.** Sean  $M$  y  $N$  como antes y sean  $f, g : N \rightarrow M$  funciones diferenciables homotópicas. Entonces  $\deg(f) = \deg(g)$ .

*Demostración.* Esto se deduce inmediatamente del hecho de que dos funciones diferenciables homotópicas inducen el mismo morfismo a nivel de cohomología de de Rham (lema de Poincaré).  $\square$

**Proposición 5.1.5.** Sean  $P$ ,  $M$  y  $N$  variedades como antes, pero con  $N$  no necesariamente conexa. Sean  $f : N \rightarrow M$  y  $g : M \rightarrow P$  dos funciones diferenciables. Entonces  $\deg(gf) = \deg(g) \deg(f)$ .

*Demostración.* Sea  $\omega \in \Omega^n P$ . Entonces

$$\int_N (gf)^* \omega = \deg(gf) \int_P \omega$$

y por otro lado,

$$\int_N (gf)^* \omega = \deg(f) \int_M f^* \omega = \deg(f) \deg(g) \int_P \omega$$

Por unicidad del escalar,  $\deg(gf) = \deg(g) \deg(f)$ .  $\square$

**Observación 5.1.6.** Sea  $f : N \rightarrow M$  un difeomorfismo y sea  $\omega \in \Omega^n M$ . Entonces  $\int_N f^* \omega = \pm \int_M \omega$ , donde el signo depende de si  $f$  preserva o no la orientación. Luego  $\deg(f) = \pm 1$ .

Veremos que el grado de una función es en realidad un entero y que se puede calcular como suma de los índices locales de los puntos de la preimagen de un valor regular cualquiera de la función (sabemos, por Sard, que los valores regulares son densos). Para ver esto, primero notemos lo siguiente. Supongamos que  $N$  y  $M$  son dos variedades de dimensión  $n$ , con  $N$  compacto y sea  $p \in M$  un valor regular de una función diferenciable  $f : N \rightarrow M$ . Entonces  $f^{-1}(p)$  es un conjunto finito (ya que es una variedad compacta de dimensión 0). Sea  $f^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_r\}$ . Para cada  $q_i$ , el diferencial  $d_{q_i} f$  es epimorfismo, y por dimensión es un isomorfismo. Luego por el teorema de la función inversa existen entornos  $W_i \subset N$  de  $q_i$  tales que  $f|_{W_i} : W_i \rightarrow f(W_i)$  es un difeomorfismo y  $f(W_i) \subset M$  es un abierto. Sea

$$U = \bigcap_i f(W_i) - f(N - \bigcup_i W_i)$$

y sea  $V_i = W_i \cap f^{-1}(U)$  para cada  $i$ . Se tiene entonces entornos  $V_i \subset N$  de cada  $q_i$ , y un entorno  $U \subset M$  de  $p$  tal que  $f^{-1}(U) = \bigsqcup_i V_i$  y  $f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$  es un difeomorfismo para todo  $i$ .

**Definición 5.1.7.** Sean  $M$  y  $N$  como antes. Tomemos una función diferenciable  $f : N \rightarrow M$  y un valor regular  $p \in M$ . Si  $q \in f^{-1}(p)$ , se define el índice de  $f$  en  $q$  como

$$I(p, q) = \begin{cases} 1 & \text{si } d_q f \text{ preserva la orientación} \\ -1 & \text{si no} \end{cases}$$

**Teorema 5.1.8.** Sean  $M$  y  $N$  como antes, sea  $f : N \rightarrow M$  diferenciable y  $p \in M$  un valor regular de  $f$ . Entonces el grado de  $f$  es la suma de los índices de los  $q \in f^{-1}(p)$ .

$$\deg(f) = \sum_{q \in f^{-1}(p)} I(p, q) \in \mathbb{Z}$$

En particular, el grado es entero y si  $f$  no es sobreyectiva entonces es 0.

*Demostración.* Sea  $p \in M$  un valor regular y supongamos que  $f^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_r\}$  es no vacío. Por lo visto anteriormente, existen entornos disjuntos  $V_i \subset N$  de los  $q_i$  y un entorno  $U \subset M$  de  $p$  de manera que  $f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$  es difeomorfismo y  $f^{-1}(U) = \bigsqcup_i V_i$ . Sea  $\omega$  una  $n$ -forma de  $M$  cuyo soporte esté contenido en  $U$  y tal que  $\int_M \omega = 1$ . Entonces

$$\text{Supp}(f^*\omega) \subset f^{-1}(U) = \bigsqcup_i V_i$$

por lo que podemos escribir  $f^*\omega = \sum_{i=1}^r \omega_i$ , donde las  $\omega_i$  son  $n$ -formas de  $N$  cuyo soporte está contenido en  $V_i$  respectivamente y  $\omega_i|_{V_i} = (f|_{V_i})^*(\omega|_U)$ .

Así,

$$\begin{aligned} \deg(f) &= \deg(f) \int_M \omega \\ &= \int_N f^*\omega = \sum_i \int_N \omega_i \\ &= \sum_i \int_{V_i} \omega_i|_{V_i} \\ &= \sum_i \int_{V_i} (f|_{V_i})^*(\omega|_U) \\ &= \sum_i \left( \int_U \omega|_U \right) I(p, q_i) \\ &= \sum_i I(p, q_i) \end{aligned}$$

Si  $f^{-1}(p) = \emptyset$ , consideramos  $U = M - f(N)$ , el cual es un abierto de  $M$  y  $p \in U$ . Tomamos  $\omega$  una  $n$ -forma de  $M$  con soporte contenido en  $U$  y que

integre 1. Luego  $f^*\omega = 0$  y

$$0 = \int_N f^*\omega = \deg(f) \int_M \omega = \deg(f)$$

□

**Proposición 5.1.9.** Sea  $X$  una variedad compacta y orientada de dimensión  $n + 1$ . Sea  $N = \partial X$  el borde de  $X$ , con la siguiente descomposición en componentes conexas  $N = \bigsqcup_i N_i$ . Sea  $M$  como antes (cerrada, orientada y conexas de dimensión  $n$ ) y sea  $F : X \rightarrow M$  una función diferenciable. Si  $f_i = F|_{N_i}$  entonces

$$\sum_i \deg(f_i) = 0$$

*Demostración.* Sea  $f = F|_N$ . Queremos ver que  $\deg(f) = 0$ . Sea  $\omega$  una  $n$ -forma de  $M$  que integra 1. Sea  $i : N \rightarrow X$  la inclusión. Luego  $f = F \circ i$  y

$$\begin{aligned} \deg(f) &= \deg(f) \int_M \omega \\ &= \int_N f^*\omega \\ &= \int_N (F \circ i)^*\omega \\ &= \int_N i^*(F^*\omega) \\ &= \int_X dF^*\omega && \text{(Stokes)} \\ &= \int_X F^*d\omega \\ &= 0 && (d\omega = 0) \end{aligned}$$

□

**Ejercicio 5.1.10.** Sea  $p \in \mathbb{C}[X]$  un polinomio no constante. Podemos pensar a  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  como una función de los complejos. Sea  $W \subset \mathbb{C}$  una región suave y compacta (es decir, es una subvariedad de dimensión 2 con borde) tal que  $p$  no tiene ceros en  $\partial W$ . Consideremos la función  $\frac{p}{\|p\|} : \partial W \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Entonces

$$\deg\left(\frac{p}{\|p\|}\right) = \#\text{raíces de } p \text{ en } W \text{ con multiplicidad}$$

Veamos ahora cómo se define el índice de un campo vectorial. Comenzamos estudiando el índice de campos en  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un abierto que contiene al 0. Sea  $F \in \mathfrak{X}(U)$  un campo tal que 0 es una singularidad aislada de  $F$ . Es decir,  $F(0) = 0$  y existe un entorno de 0 tal que la única singularidad de  $F$  en tal entorno es el 0. Veamos a  $F$  como un

campo clásico: vía la identificación canónica, pensamos a  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sea  $\rho > 0$  chico tal que  $0 \in D_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \rho\}$  y 0 es el único cero de  $F|_{D_\rho}$ . Definimos  $F_\rho : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  como

$$F_\rho(x) = \frac{F(\rho x)}{\|F(\rho x)\|}$$

Si tomamos otro  $\rho' > 0$  tal que  $F|_{D_{\rho'}}$  solo se nula en 0, entonces  $F_{\rho'} \simeq F_\rho$  vía la homotopía lineal.

**Definición 5.1.11.** El índice del campo  $F$  en 0 es el valor  $i(F, 0) = \deg(F_\rho)$ .

**Observación 5.1.12.** Intuitivamente, el índice  $i(F, 0)$  mide la cantidad de vueltas que da el campo alrededor de la singularidad.

**Ejemplo 5.1.13.** En  $\mathbb{R}^2$ , consideramos los siguientes campos, que tienen una singularidad aislada en  $(0, 0)$ . Para calcular el índice, analizamos los valores que toma el campo a lo largo de  $\mathbb{S}^1$  y vemos cuántas vueltas da cuando recorremos  $\mathbb{S}^1$ . Graficamos sus curvas integrales.

1.  $F(x, y) = (x^2 + y^2, 0)$ .

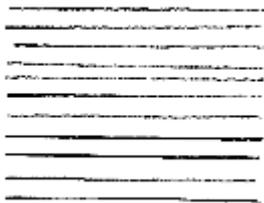


Figura 5.1:  $i(F, 0) = 0$

2.  $F(x, y) = (-y, x)$ .

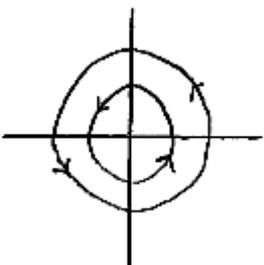


Figura 5.2:  $i(F, 0) = 1$

3.  $F(x, y) = (y, -x)$ . Las curvas integrales son como el anterior pero orientadas al revés, de todas formas el índice es el mismo.

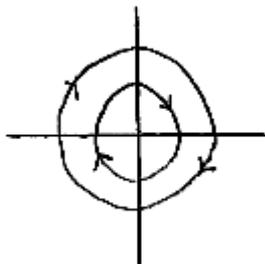


Figura 5.3:  $i(F, 0) = 1$

4.  $F(x, y) = (x, y)$ .

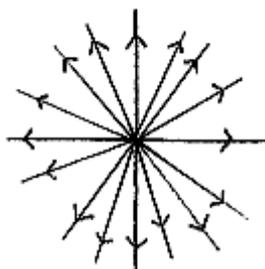


Figura 5.4:  $i(F, 0) = 1$

5.  $F(x, y) = (-x, -y)$ . Las trayectorias son como en el ejemplo anterior pero con las orientaciones al revés. El índice sigue siendo  $i(F, 0) = 1$ .

6.  $F(x, y) = (y, x)$ .

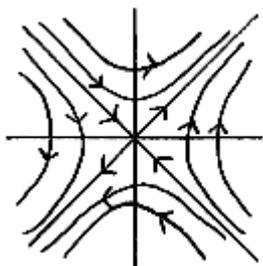
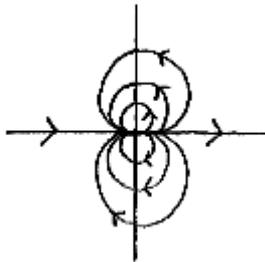


Figura 5.5:  $i(F, 0) = -1$

7.  $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ .


 Figura 5.6:  $i(F, 0) = 2$ 

**Ejercicio 5.1.14.** Si  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo diferenciable con  $F(0) = 0$  y  $F(x) \neq 0$  para  $x \neq 0$ , entonces podemos considerar la restricción  $F : \mathbb{R}^n - 0 \rightarrow \mathbb{R}^n - 0$  que induce un morfismo en la cohomología  $F^* : H^{n-1}(\mathbb{R}^n - 0) \rightarrow H^{n-1}(\mathbb{R}^n - 0)$ . Como  $H^{n-1}(\mathbb{R}^n - 0)$  es isomorfo a  $\mathbb{R}$  vía la retracción que tenemos a la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ ,  $F^*$  es multiplicar por  $i(F, 0)$ .

**Definición 5.1.15.** Sean  $M$  y  $N$  dos variedades y sea  $\varphi : N \rightarrow M$  un difeomorfismo. Si  $X$  es un campo de  $N$ , entonces  $\varphi_*X$  es el campo de  $M$  definido por  $(\varphi_*X)_p := d_q\varphi(X_q)$ , con  $q = \varphi^{-1}(p)$ .

Para definir el índice de un campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  alrededor de una singularidad aislada, utilizamos el siguiente resultado (cuya demostración puede verse en [MT97, Lemma 11.18]).

**Lema 5.1.16.** Sean  $U$  y  $V$  dos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  que contienen al 0 y sea  $\varphi : U \rightarrow V$  un difeomorfismo tal que  $\varphi(0) = 0$ . Sea  $F \in \mathfrak{X}(U)$  un campo con una singularidad aislada en el 0. Entonces  $i(F, 0) = i(\varphi_*F, 0)$ .

**Definición 5.1.17.** Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$  y sea  $X$  un campo de  $M$ . Si  $p \in M$  es una singularidad aislada de  $X$  y  $(U, \varphi)$  es una carta de  $M$  en  $p$  con  $\varphi(p) = 0$ , entonces definimos el índice de  $X$  en  $p$  como

$$i(X, p) := i(\varphi_*X, 0)$$

Del lema anterior se observa que esto no depende de la carta elegida y por lo tanto el índice está bien definido.

**Definición 5.1.18.** Sea  $M$  una variedad y sea  $X$  un campo de  $M$  cuyos ceros son aislados. Sea  $R \subset M$  un compacto. Definimos el índice de  $X$  en  $R$  como

$$i(X, R) = \sum_{p \in R: p \text{ es cero de } X} i(X, p)$$

Si  $M$  es compacta y tomamos  $R = M$ , notamos  $i(X) = i(X, M)$ . Este valor es el índice del campo.

**Teorema 5.1.19.** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un abierto y sea  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo definido en  $U$  cuyos ceros son aislados. Sea  $R \subset U$  un dominio compacto

con borde suave (es decir,  $R = \bar{V}$ , donde  $V$  es un abierto y  $\partial R$  es suave) tal que  $F(p) \neq 0$  para todo  $p \in \partial R$ . Sea  $f : \partial R \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  la función definida por  $f(x) = \frac{F(x)}{\|F(x)\|}$ . Entonces

$$i(F, R) = \deg(f)$$

*Demostración.* Sean  $\{p_1, \dots, p_k\}$  los ceros de  $F$  en  $R$ . Para cada  $p_i$  tomamos un disco  $D_i$  centrado en  $p_i$  tal que  $D_i \cap D_j = \emptyset$  si  $i \neq j$  y  $D_i \subset R^\circ$ . Entonces  $i(F, p_j) = \deg(f_j)$  donde  $f_j = \frac{F}{\|F\|} : \partial D_j \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ . Sea  $X = R - \bigcup_{j=1}^k D_j$ . Entonces  $\partial X = \partial R \cup_j \partial \tilde{D}_j$ , donde  $\partial \tilde{D}_j$  son los  $D_j$  pero con la orientación opuesta, ya que la orientación del borde de  $X$  tiene que ser coherente con la de  $X$ .

De la proposición 5.1.9, como  $\frac{F}{\|F\|} : X \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  extiende a  $\frac{F}{\|F\|} : \partial X \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ , se tiene que

$$0 = \deg(f) + \sum_j \deg(\tilde{f}_j) = \deg(f) + \sum_j -\deg(f_j)$$

y por lo tanto

$$\deg(f) = \sum_j \deg(f_j) = i(F, R)$$

□

Con esto llegamos al primer resultado en la dirección del teorema del índice:

**Corolario 5.1.20.** Si  $U$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $F$  es un campo definido en  $U$  cuyos ceros son aislados, entonces para todo  $R \subset U$  dominio compacto tal que  $F$  no se anula en la frontera de  $R$ , el índice de  $F$  en  $R$  solo depende de lo que vale  $F$  en  $\partial R$ .

## 5.2 Función de Gauss y orientación en bordes

Nuestro próximo paso para probar el teorema del índice es ver que si se tiene un campo definido en un dominio compacto con borde suave de  $\mathbb{R}^n$  tal que en el borde el campo “apunta para afuera”, entonces el índice del campo coincide con el grado de la función de Gauss. Antes de esto, es conveniente recordar cómo se orienta el borde de variedades.

Vamos a notar por  $H_n$  al conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$  y por  $\partial H_n$  al conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$ . Si  $M$  es una variedad con borde, su borde es el conjunto  $\partial M = \{p \in M : \varphi(p) \in \partial H_n \text{ para toda carta } (U, \varphi)\}$ .

Sea  $M$  una variedad con borde y sea  $p \in \partial M$ . Si  $(U, \varphi)$  es una carta de  $M$  en  $p$ , entonces tenemos una carta  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  de  $\partial M$  en  $p$  tal que  $\tilde{U} = U \cap \partial M$  y  $\tilde{\varphi} = \pi \circ \varphi$ , donde  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  es la proyección  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_2, \dots, x_n)$ . Supongamos que  $M$  es una variedad orientada. Tomemos un punto  $p$  en la frontera de  $M$  junto con dos cartas  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  que preserven la orientación

y contengan a  $p$ . Consideremos  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  y  $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$  las cartas inducidas en el borde. Se puede ver que

$$D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\psi_1 \circ \varphi^{-1})}{\partial x_1}(\varphi(p)) & * \\ 0 & D(\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1})(\tilde{\varphi}(p)) \end{pmatrix}$$

con

$$\frac{\partial(\psi_1 \circ \varphi^{-1})}{\partial x_1}(\varphi(p)) > 0$$

$$\frac{\partial(\psi_1 \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) = 0$$

Además, el determinante de este diferencial debe ser positivo pues las cartas preservan la orientación.

Si  $X_p \in T_p M$ , podemos escribir

$$X_p = \sum_j \alpha_j \frac{\partial}{\partial \varphi_j} = \sum_j \beta_j \frac{\partial}{\partial \psi_j}$$

Sabemos que

$$\beta_j = \sum_i \alpha_i \frac{\partial(\psi_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p))$$

En el caso  $j = 1$ , por la cuenta anterior deducimos que

$$\beta_1 = \alpha_1 \frac{\partial(\psi_1 \circ \varphi^{-1})}{\partial x_1}(\varphi(p)) = \alpha_1 \lambda$$

con  $\lambda = \frac{\partial(\psi_1 \circ \varphi^{-1})}{\partial x_1}(\varphi(p)) > 0$ . Luego  $\beta_1$  y  $\alpha_1$  tienen el mismo signo.

Supongamos ahora que  $X_p \in T_p M$  y que  $X_p \notin T_p(\partial M)$ . Es decir, la primera coordenada en cualquier base dada por una carta  $(U, \varphi)$  es no nula. De esta manera, si  $(U, \varphi)$  es una carta orientada, pueden suceder dos cosas:

1. Si la primera coordenada de  $X_p$  en la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right\}$  es positiva, decimos que  $X_p$  apunta para adentro.
2. Si la primera coordenada de  $X_p$  en la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right\}$  es negativa, decimos que  $X_p$  apunta para afuera.

Si  $M$  es una variedad orientada, en  $\partial M$  se da la siguiente orientación: para todo  $p \in \partial M$ , decimos que una base ordenada  $\{X_p^1, \dots, X_p^{n-1}\}$  de  $T_p(\partial M)$  es orientada si para todo  $X_p \in T_p M$  que apunta para afuera, la base ordenada  $\{X_p, X_p^1, \dots, X_p^{n-1}\}$  es base orientada de  $T_p M$ .

**Observación 5.2.1.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un dominio cerrado con borde suave  $\partial M$ . De esta manera,  $M$  queda orientada por  $\mathbb{R}^{n+1}$  y su borde  $\partial M$  también con la orientación anterior. Para todo  $p \in \partial M$ , podemos considerar un vector  $X_p \perp T_p \partial M$  que apunta para afuera y de norma 1. Esto define un campo diferenciable  $X$  a lo largo del borde  $\partial M$ . Lo podemos ver como una función  $G : \partial M \rightarrow \mathbb{S}^n$  vía tomar coordenadas a  $X$ . Esta se llama función de Gauss. Notar que depende de cómo está embebida  $M$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Corolario 5.2.2.** Sea  $R$  un dominio compacto con borde suave en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $U$  un abierto que contiene a  $R$  y sea  $F \in \mathfrak{X}(U)$  un campo tal que  $F(p)$  apunta para afuera para todo  $p \in \partial R$ . Entonces  $i(F, R) = \deg(G)$ , donde  $G : \partial R \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  es la función de Gauss.

*Demostración.* Por el teorema 5.1.19,  $i(F, R) = \deg(f)$ , donde  $f = \frac{F}{\|F\|} : \partial R \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ . Basta ver que  $f \simeq G$  son homotópicas. Esto sucede pues ambas apuntan para afuera y así la homotopía lineal funciona.

$$H(x, t) = \frac{f(x)t + G(x)(1-t)}{\|f(x)t + G(x)(1-t)\|}$$

□

**Definición 5.2.3.** Sea  $M$  una variedad y sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Supongamos que  $p \in M$  es una singularidad del campo  $X$  y que  $(U, \varphi)$  es una carta de  $M$  en  $p$  con  $\varphi(p) = 0$ . Podemos considerar el campo  $F = \varphi_* X \in \mathfrak{X}(\varphi(U))$  y pensarlo como una función  $F : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Decimos que  $p$  es una singularidad no degenerada si  $D_0F$ , el diferencial de  $F$  en 0, es inversible.

Claramente la definición anterior no depende de la carta que tomemos. Si  $p \in M$  es una singularidad no degenerada de  $X$ , entonces  $p$  es una singularidad aislada, ya que  $F$  resulta difeomorfismo local en 0.

El siguiente resultado puede encontrarse en [MT97].

**Lema 5.2.4.** Sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$  y sea  $p \in M$  una singularidad no degenerada. Entonces  $i(X, p) = \pm 1 = \text{Sg}(\det(D_0F))$ .

**Lema 5.2.5.** Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $0 \in \mathbb{R}^n$  es su única singularidad. Entonces existe un campo  $\tilde{F}$  en  $\mathbb{R}^n$  que tiene solo singularidades no degeneradas que caen en  $D_1$ , el disco de radio 1, y tal que  $F = \tilde{F}$  fuera de  $D_2$ , el disco de radio 2. Más aún,  $i(F) = i(F, 0) = i(\tilde{F}) = \sum_{p \text{ sing}} i(\tilde{F}, p)$ .

*Demostración.* Sea  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  una función diferenciable tal que  $\phi \equiv 1$  en  $D_1$  y  $\phi \equiv 0$  fuera de  $D_2$ . Vamos a definir  $\tilde{F}(x) = F(x) - \phi(x)w$ , para un cierto  $w \in \mathbb{R}^n$  fijo que queremos determinar. Sea  $c = \min_{1 \leq \|x\| \leq 2} \|F(x)\|$ . Por hipótesis,  $c > 0$ . Supongamos que elegimos  $w \in \mathbb{R}^n$  con  $\|w\| < c$ . De esta manera,

- Si  $1 \leq \|x\| \leq 2$ , entonces

$$\|\tilde{F}(x)\| \geq \|F(x)\| - \|w\| |\phi(x)| \geq c - \|w\| > 0$$

Luego  $\tilde{F}$  no se anula en  $1 \leq \|x\| \leq 2$ .

- Si  $\|x\| \geq 2$ , entonces  $\tilde{F}(x) = F(x)$ . Luego  $\tilde{F}$  no se anula en  $\|x\| \geq 2$ .

En consecuencia, el campo  $\tilde{F}$  tiene sus ceros en  $D_1$  y  $\tilde{F}|_{D_2^c} = F|_{D_2^c}$ .

En  $D_1$ , tenemos que  $\phi \equiv 1$ , y por lo tanto  $F = \tilde{F} - w$ . Luego  $\tilde{F}(x) = 0$  si y solo si  $F(x) = w$ . Esto nos dice que  $\tilde{F}^{-1}(0) = F^{-1}(w) \cap D_1$ . Además, dado  $p \in \tilde{F}^{-1}(0)$ , los diferenciales  $D_p\tilde{F} = D_pF$  coinciden. Tomemos  $w$  un valor regular de  $F$  con  $\|w\| < c$ . Luego  $D_p\tilde{F} = D_pF$  es inversible para todo  $p \in F^{-1}(w) \cap D_1$ , por lo que  $\tilde{F}$  tiene solo singularidades no degeneradas y están en  $D_1$ .

Veamos ahora la última afirmación. Como  $F = \tilde{F}$  en  $D_3$ ,

$$i(F, 0) = i(F) = i(F, D_3) = i(\tilde{F}, D_3) = i(\tilde{F})$$

donde usamos que el índice depende solo de los valores que toman las funciones en el borde.  $\square$

**Corolario 5.2.6.** Sea  $M$  una variedad compacta y sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$  con ceros aislados. Entonces existe un campo  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$  cuyos ceros son no degenerados y tal que  $i(\tilde{X}) = i(X)$ .

*Demostración.* Tomar cartas disjuntas para los ceros, aplicar el teorema anterior en cada carta y pegar todo.  $\square$

### 5.3 Teorema de Poincaré-Hopf

Nuestro objetivo es probar el teorema del índice de Poincaré-Hopf que afirma que el índice de todo campo con ceros aislados definido en una variedad cerrada  $M$  coincide con la característica de Euler de  $M$ . Podemos separar al enunciado del teorema en dos partes: por un lado el resultado afirma que el índice del campo no depende del campo sino solo de la variedad y, por otro lado, el teorema dice que ese número es la característica de Euler de  $M$ . Terminaremos de probar ahora la primera parte del enunciado (es decir, que el índice no depende del campo).

**Definición 5.3.1.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$  una subvariedad de codimensión  $k$ . Un entorno tubular de  $M$  consiste en un abierto  $V$  de  $\mathbb{R}^{n+k}$  que contiene a  $M$  y una retracción  $r : V \rightarrow M$  diferenciable tal que para todo  $p \in M$ , el conjunto  $r^{-1}(p) \subset V$  es una bola abierta en  $(T_p M)^\perp \subset T_p \mathbb{R}^{n+k}$  de cierto radio  $\varepsilon_p > 0$ . Además, pedimos que esta función  $\varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}$  sea diferenciable.

**Teorema 5.3.2.** Dada una subvariedad  $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$  de dimensión  $n$ , existe un entorno tubular  $V$  de  $M$ . Si  $M$  es compacto, el radio  $\varepsilon(p)$  puede tomarse constante  $\varepsilon > 0$ . Además vale:

1. Para todo  $x \in V$  se tiene que  $\|x - r(x)\| \leq \|x - y\|$  para todo  $y \in M$

2. Si  $\varepsilon' : M \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable y  $0 < \varepsilon'(p) < \varepsilon(p)$  para todo  $p$ , entonces el conjunto

$$S_\varepsilon = \{x \in V : \|x - r(x)\| = \varepsilon'(r(x))\} = \partial V_{\varepsilon'}$$

es una subvariedad de  $\mathbb{R}^{n+k}$  de codimensión 1.

*Demostración.* Ver [Hir76] o [MT97]. □

**Teorema 5.3.3.** Sea  $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$  una subvariedad cerrada de dimensión  $n$  y sean  $M \subset N_\varepsilon \subset N$  entornos tubulares, donde  $N_\varepsilon$  tiene radio constante  $\varepsilon > 0$  y  $\overline{N_\varepsilon}$  es un dominio compacto de borde suave. Sea  $G : \partial N_\varepsilon \rightarrow \mathbb{S}^{n+k-1}$  la función de Gauss. Si  $X$  es un campo de  $M$  con singularidades aisladas, entonces el índice de  $X$  es igual al grado de  $G$ . En particular, el índice no depende de  $X$ , solo de  $M$ .

*Demostración.* Por el corolario 5.2.6, podemos suponer que  $X$  tiene solo singularidades no degeneradas. Sea  $r : N \rightarrow M$  la retracción del entorno tubular  $N$ . Consideremos el campo  $F \in \mathfrak{X}(N)$  definido por

$$F(q) = X(r(q)) + q - r(q)$$

Notar que  $X(r(q)) \in T_{r(q)}M$  y que  $q - r(q) \in (T_{r(q)}M)^\perp$ . Luego  $F(q) = 0$  si y solo si  $q = r(q)$  y  $X(r(q)) = 0$ . Es decir, si  $q \in M$  y  $X_q = 0$ . Por lo tanto  $F^{-1}(0) = X^{-1}(0) \subset M$ .

Por definición de  $F$ , en  $\partial N_\varepsilon$ , el campo  $F$  apunta para afuera. Del corolario 5.2.2 concluimos que

$$i(F) = i(F, N_\varepsilon) = \deg(G)$$

donde  $G : \partial N_\varepsilon \rightarrow \mathbb{S}^{n+k-1}$  es la función de Gauss.

Ahora para concluir el teorema basta ver que  $i(X, p) = i(F, p)$  para todo  $p \in M$  cero de  $X$ . Si  $p \in M$  es un cero de  $X$ , en una coordenada local alrededor de  $p$ , tenemos que  $X = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  y  $f_i(p) = 0$  para todo  $i$ . Como  $p$  es una singularidad no degenerada de  $X$ , del lema 5.2.4 tenemos que

$$i(X, p) = \text{Sg} \left( \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) \right) \right) = \pm 1$$

Por otro lado,

$$D_p F = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) \right)_{i,j} & * \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}$$

donde la primera columna corresponde a  $T_p M$  y la segunda a  $(T_p M)^\perp$ . Por lo tanto  $p$  es una singularidad no degenerada de  $F$  y

$$i(F, p) = \text{Sg}(\det(D_p F)) = i(X, p)$$

□

Recordemos que si  $M$  es una variedad cerrada de dimensión  $n$ , los números de Betti de  $M$  son los rangos  $b_i = \text{rk } H_i(M, \mathbb{Z})$  de los grupos de homología singular de  $M$  (con coeficientes enteros). Por el teorema de de Rham (que veremos más adelante) y por el teorema de coeficientes universales, estos números coinciden con las dimensiones (como  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales) de la cohomología de de Rham de  $M$ ,

$$b_i = \dim_{\mathbb{R}} H_{dR}^i(M).$$

Por teoría de Morse, sabemos que existe un CW complejo  $X$  homotópicamente equivalente a  $M$  cuya estructura celular dada por una  $k$ -celda por cada punto crítico de índice  $k$  de una función de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  fija. En particular, cuando  $M$  es una variedad compacta, este complejo  $X$  tiene finitas celdas y por lo tanto sus números de Betti son finitos y se tiene

$$\sum_i (-1)^i b_i = \chi(M) = \chi(X) = \sum_i (-1)^i c_i$$

donde  $c_i$  es la cantidad de puntos críticos de índice  $i$  de  $f$ .

Enunciamos ahora el teorema formalmente.

**Teorema 5.3.4.** (*Poincaré-Hopf*) *Si  $M$  es una variedad cerrada y  $X$  es un campo de  $M$  con ceros aislados, entonces  $i(X) = \chi(M)$ .*

Sabemos que el índice no depende del campo, con lo cual basta conseguir un campo apropiado donde podamos calcular el índice.

Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse. Fijemos una métrica riemanniana para  $M$ . Entonces tenemos definido el campo gradiente de  $f$  que notamos por  $\text{Grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$ . Un punto  $p \in M$  es un cero de  $\text{Grad}(f)$  si y solo si  $d_p f = 0$ , si y solo si  $p$  es un punto crítico de  $f$ . Como  $f$  es de Morse, los puntos críticos son aislados. Luego  $\text{Grad}(f)$  tiene ceros aislados.

Para probar el teorema, basta ver que  $\chi(M) = i(\text{Grad}(f))$ . En concreto, alcanza probar que para todo  $p$  punto crítico de  $f$  de índice  $k$ , el índice de  $\text{Grad}(f)$  en  $p$  es  $(-1)^k$ .

**Observación 5.3.5.** Si  $X = \text{Grad}(f)$  y  $p$  es un punto regular de  $f$ , entonces  $d_p f(X_p) = \langle X_p, X_p \rangle > 0$ , ya que es no negativo y  $p$  no es crítico.

**Observación 5.3.6.** Sea  $U$  abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al cero y  $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la función  $g(x) = c - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$ . Entonces el campo

$$F = \nabla g = 2(-x_1, \dots, -x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathfrak{X}(U)$$

tiene una única singularidad en el 0, y

$$D_0 F = 2 \begin{pmatrix} -\text{id}_k & 0 \\ 0 & \text{id}_{n-k} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto 0 es una singularidad no degenerada de  $F$  y

$$i(F, 0) = \text{Sg}(\det(D_0 F)) = (-1)^k$$

**Teorema 5.3.7.** *Sea  $M$  una variedad cerrada con una métrica riemanniana fija y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse. Consideremos el campo  $X = \text{Grad}(f)$ . Si  $p_0 \in M$  es un punto crítico de  $f$  de índice  $k$ , entonces  $i(X, p_0) = (-1)^k$ .*

*Demostración.* Consideremos  $(U, \varphi)$  una carta de  $M$  en  $p_0$  tal que  $\varphi(p_0) = 0$  y  $f \circ \varphi^{-1}(x) = f(0) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$ . Tomemos el campo  $F = D(f \circ \varphi^{-1})$  que está dado por

$$F = D(f \circ \varphi^{-1}) = 2(-x_1, \dots, -x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

Luego  $i(F, 0) = (-1)^k$ . Ahora podemos tomar el campo  $\tilde{X} = \varphi_*^{-1}F \in \mathfrak{X}(U)$ . Entonces  $\tilde{X}$  tiene un único cero en  $U$  que es  $p_0$ . Si  $p \in U$  es un punto distinto de  $p_0$ , de la observación anterior tenemos que  $d_p f(X_p) > 0$  y

$$d_p f(\tilde{X}_p) = \tilde{X}_p(f) = \varphi_*^{-1}F_p(f) = F_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1}) = d_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1})(D(f \circ \varphi^{-1})) > 0$$

Entonces para todo  $t \in [0, 1]$  y para todo  $p \neq p_0$ ,

$$t\tilde{X}_p + (1-t)X_p \in T_p M \quad \text{y} \quad d_p f(t\tilde{X}_p + (1-t)X_p) > 0$$

En particular,  $t\tilde{X}_p + (1-t)X_p \neq 0$ . De esto podemos deducir que  $\varphi_*(t\tilde{X}_p + (1-t)X_p) \neq 0$  para todo  $p \neq p_0$  y para todo  $t \in [0, 1]$  ya que  $\varphi_*$  es un isomorfismo. Pero

$$\varphi_*(t\tilde{X}_p + (1-t)X_p) = tF_{\varphi(p)} + (1-t)\varphi_*X_{\varphi(p)}$$

Así, podemos definir una homotopía

$$H : \frac{F}{\|F\|} \simeq \frac{\varphi_*X}{\|\varphi_*X\|} : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$$

Por lo tanto

$$(-1)^k = i(F, 0) = \deg(F) = \deg(\varphi_*X) = i(X, p_0)$$

□

Hemos probado entonces que  $\chi(M) = i(\text{Grad}(f))$  y esto finaliza la demostración del teorema de Poincaré-Hopf. Veamos algunas aplicaciones inmediatas del teorema.

1. Si  $\chi(M) \neq 0$ , entonces todo campo  $X$  tiene singularidades. En particular, para las esferas  $\mathbb{S}^n$  de dimensión par, su característica de Euler es 2, por lo que no admiten campos nunca nulos (teorema de la bola peluda).
2. Las rotaciones de  $\mathbb{S}^2$  dejan dos puntos fijos. Una rotación en  $\mathbb{S}^2$  determina un campo  $X$  de la siguiente manera: si  $p \in \mathbb{S}^2$  y  $T : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  es la

rotación, podemos considerar el vector apoyado en el punto  $p$  que apunta hacia  $T(p)$  y lo proyectamos al plano tangente de  $p$ . Más precisamente,

$$X_p = (T(p) - p) - \langle (T(p) - p), p \rangle p$$

Los ceros de este campo son los puntos fijos de la rotación. Como  $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$  y los ceros en este caso tienen índice local 1 (porque el determinante de una rotación es positivo), se tiene que los puntos fijos son exactamente dos.

Para probar el teorema de Poincaré-Hopf, una vez que probamos que el índice de los campos con ceros aislados no dependía del campo sino solamente de la variedad, utilizamos funciones de Morse para probar la existencia de un campo cuyo índice coincidiera con  $\chi(M)$ . Para finalizar este capítulo, veamos la idea de una demostración alternativa de este resultado: probemos, usando triangulaciones en lugar de teoría de Morse, la existencia de un campo tal que  $i(X) = \chi(M)$ .

Sea  $K$  un complejo simplicial que da una triangulación de  $M$ . Definimos el campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  de la siguiente manera. Sus ceros son los baricentros de todos los símplexes de  $K$ . Las trayectorias del campo están dadas por recorrer de  $\hat{\sigma}$  a  $\hat{\tau}$  para todo  $\tau$  cara de  $\sigma$ , donde el  $\hat{\sigma}$  es el baricentro del símplex  $\sigma \in K$ . Se verifica que  $i(X, \hat{\sigma}) = (-1)^k$ . Veamos la idea de lo que sucede en dimensiones bajas:

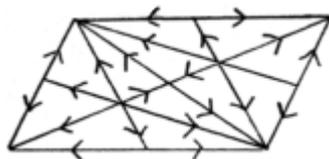


Figura 5.7: Trayectorias del campo

- Si  $v$  es un vértice de  $K$ , entonces  $\hat{v} = v$  y los flujos llegan todos a  $v$ . Luego  $i(X, \hat{v}) = 1 = (-1)^0$ .



Figura 5.8: Todas las trayectorias apuntan al vértice

- Si  $\sigma$  es un 1-símplex de  $K$ , entonces de su baricentro  $\hat{\sigma}$  llegan todos los flujos de los símplexes más grandes que lo contienen y solo salen dos flujos a sus vértices. Luego  $i(X, \hat{\sigma}) = -1 = (-1)^1$ .

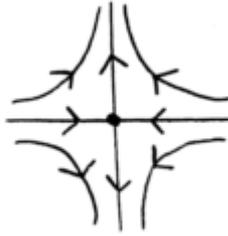


Figura 5.9: Algunas trayectorias apuntan hacia el baricentro y otras no

- Si  $\sigma$  es un 2-símplex de  $K$ , entonces de su baricentro  $\hat{\sigma}$  llegan todos los flujos de los símplexes más grandes que lo contienen y salen 6 flujos en las direcciones de los baricentros de sus caras propias. Luego  $i(X, \hat{\sigma}) = 1 = (-1)^2$ .

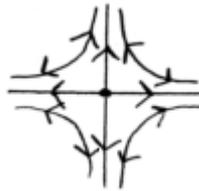


Figura 5.10: Las trayectorias salen del baricentro

De esta manera, si  $c_k$  es la cantidad de  $k$ -símplexes, se tiene:

$$i(X) = \sum_k (-1)^k c_k = \chi(K) = \chi(M)$$

## Capítulo 6

# Cobordismo y h-cobordismo

### 6.1 Cobordismo

**Definición 6.1.1.** Una tríada es una terna  $(W, V_0, V_1)$  con  $W$  una variedad compacta y  $V_0, V_1 \subset W$  subvariedades disjuntas tales que  $\partial W = V_0 \uplus V_1$ .

**Ejemplo 6.1.2.** En la figura 6.1 se muestra una tríada con  $W$  una superficie de género 1 con borde  $\partial W = V_0 \uplus V_1$ . Las variedades en cuestión, tanto  $W$  como las del borde de la tríada, no son necesariamente conexas.

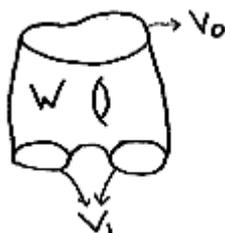


Figura 6.1: Tríada  $(W, V_0, V_1)$

El siguiente resultado nos dice que se pueden componer dos tríadas cuando uno de las variedades bordantes de una tríada es difeomorfa a una de las variedades bordantes de la otra.

**Teorema 6.1.3.** Sean  $(W, V_0, V_1)$  y  $(W', V'_1, V'_2)$  dos tríadas y sea  $h : V_1 \rightarrow V'_1$  un difeomorfismo. Consideremos el espacio de adjunción  $W \cup_h W'$ . Entonces existe una única estructura diferenciable en  $W \cup_h W'$  tal que las inclusiones  $W \hookrightarrow W \cup_h W'$  y  $W' \hookrightarrow W \cup_h W'$  son difeomorfismos con su imagen. En particular,  $(W \cup_h W', V_0, V'_2)$  es una tríada.

*Demostración.* Ver [Hir76] o [Mil65b]. □

**Definición 6.1.4.** Sean  $M_0$  y  $M_1$  dos variedades cerradas de dimensión  $n$ .

1. Un cobordismo de  $M_0$  a  $M_1$  es una 5-upla  $(W, V_0, V_1, h_0, h_1)$  tal que  $(W, V_0, V_1)$  es una tríada y  $h_i : M_i \rightarrow V_i$  son difeomorfismos.
2. Decimos que  $M_0$  y  $M_1$  son cobordantes si existe un cobordismo entre ellas.
3. Dos cobordismos entre  $M_0$  y  $M_1$ ,  $(W, V_0, V_1, h_0, h_1)$  y  $(W', V'_0, V'_1, h'_0, h'_1)$  son equivalentes si existen difeomorfismos  $\varphi : W \rightarrow W'$  tales que  $\varphi|_{V_i} : V_i \rightarrow V'_i$  es difeomorfismo y  $h'_i \varphi|_{V_i} = h_i$  para  $i = 0, 1$ .

**Observación 6.1.5.** Si  $C$  es una clase de cobordismo entre  $M_0$  y  $M_1$  y  $C'$  es una clase de cobordismo entre  $M_1$  y  $M_2$ , entonces  $CC'$  es una clase de cobordismo entre  $M_0$  y  $M_2$ .

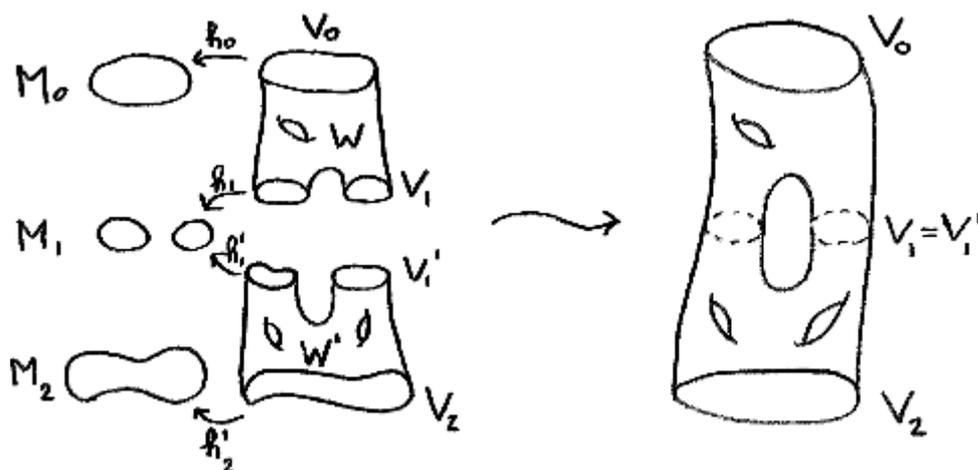


Figura 6.2: Suma de dos cobordismos

Consideramos  $h_1^{-1}h_1' : V_1 \rightarrow V_1'$  y pegamos a  $W$  con  $W'$  como en el teorema. Obtenemos así  $(W \cup W', V_0, V_2, h_0, h_2')$  un cobordismo entre  $M_0$  y  $M_2$ .

Esto dice que ser cobordantes es una relación transitiva. Es claro que también es simétrica. Para ver que es reflexiva, tomamos el cilindro del espacio. Es decir, si  $M$  es una variedad cerrada, entonces tomamos  $W = M \times I$ ,  $V_0 = M \times 0$  y  $V_1 = M \times 1$ .

Por lo tanto ser cobordantes es una relación de equivalencia en las variedades cerradas de dimensión  $n$ . Consideramos

$$\eta^n = \{[M] : M \text{ es variedad cerrada de dimensión } n\}$$

donde  $[M] = [M']$  si  $M, M'$  son cobordantes.

Notar que  $\eta^n$  es un conjunto, ya que la relación respeta difeomorfismos y todas las variedades de dimensión  $n$  las podemos ver, vía difeomorfismos, dentro de  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

Definimos una suma en  $\eta^n$ , inducida por la unión disjunta:

$$[M] + [M'] := [M \amalg M']$$

**Teorema 6.1.6.** *Con la suma así definida, resulta que  $(\eta^n, +)$  es un grupo abeliano.*

*Demostración.*

- Buena definición: supongamos que  $[M] = [\tilde{M}]$  y veamos que  $[M \amalg M'] = [\tilde{M} \amalg M']$ : tomamos  $W \amalg (M' \times I)$  como el espacio para hacer el cobordismo, donde  $W$  es la variedad que sirve de cobordismo entre  $M$  y  $\tilde{M}$ .
- Asociativa y conmutativa: porque la unión disjunta lo es.
- Elemento neutro:  $[V]$  donde  $V = \partial W$  es el borde de alguna variedad compacta  $W$  de dimensión  $n + 1$ . Se tiene que  $[M] + [V] = [M]$  pues podemos tomar  $(M \times I) \amalg W$ , con  $V = \partial W$ .
- Inverso:  $-[M] = [M]$  pues tomamos el cilindro de  $M$ :  $M \amalg M = \partial(M \times I)$ .

□

Se puede proceder de forma análoga para variedades orientables. En ese caso hay que tener cuidado con que las funciones respeten orientaciones, y el inverso  $-[M]$  es  $[M^-]$ , la variedad con la orientación opuesta.

**Ejemplo 6.1.7.** Calculemos  $\eta^0$  y  $\eta^1$ .

En el primer caso, tenemos que  $[*] \neq 0$  y que  $[\mathbb{S}^0] = 0$  (notar que una cantidad finita de puntos representa la clase del cero si y sólo si es una cantidad par, porque el borde de una variedad de dimensión 1 compacta tiene cantidad par de puntos). Entonces  $\eta^0 = \mathbb{Z}_2$ .

En cambio para  $\eta^1$ , tenemos que  $[\mathbb{S}^1] = 0$ . Más aún, vale que  $\eta^1 = 0$  ya que las variedades cerradas de dimensión 1 son unión finita de  $\mathbb{S}^1$  y tomando  $W$  una esfera  $\mathbb{S}^2$  con varias bolas abiertas removidas, se obtiene un cobordismo entre cualquier cantidad finita de  $\mathbb{S}^1$ .

La demostración del siguiente teorema profundo de Thom se puede encontrar por ejemplo en [\[Hir76\]](#).

**Teorema 6.1.8.** *(Thom) Sea  $G_{s,k}$  la variedad grassmaniana (es decir, subespacios de dimensión  $s$  de  $\mathbb{R}^k$ ) y sea  $E \rightarrow G_{s,k}$  el fibrado universal. Entonces  $\pi_{n+j}(E^*) = \eta^n$  para cierto  $j$ , donde  $E^*$  es la compactificación a un punto.*

Veamos ahora la relación entre cobordismo, teoría de Morse y cirugía.

**Definición 6.1.9.** Sea  $(W, V_0, V_1)$  una tríada. Una función de Morse en  $(W, V_0, V_1)$  es una  $f : W \rightarrow [a, b]$  diferenciable tal que

1.  $f^{-1}(a) = V_0$  y  $f^{-1}(b) = V_1$
2. Los puntos críticos de  $f$  caen en  $\overset{\circ}{W} = W - \partial W$  y son no degenerados.

**Teorema 6.1.10.** *Dada una tríada  $(W, V_0, V_1)$ , existe  $f : W \rightarrow [0, 1]$  función de Morse.*

*Demostración.* Queda como ejercicio para el lector. Recordar que ya hemos probado que toda función diferenciable puede aproximarse por una función de Morse. Para más detalles ver [Mil65b].  $\square$

El siguiente lema garantiza que toda función de Morse puede aproximarse por otra función de Morse que sea inyectiva en los puntos críticos. Esto nos va a permitir ordenar a los niveles críticos tomando un punto crítico en cada nivel.

**Lema 6.1.11.** *Sea  $(W, V_0, V_1)$  una tríada y sea  $f : W \rightarrow [0, 1]$  una función de Morse. Sean  $p_1, \dots, p_k$  puntos críticos de  $f$ . Entonces existe  $g : W \rightarrow [0, 1]$  de Morse que aproxima a  $f$  con los mismos puntos críticos y tal que  $g(p_i) \neq g(p_j)$  para todo  $i \neq j$ .*

*Demostración.* Para cada  $p_i$  realizamos el siguiente procedimiento (lo hacemos sólo para  $p_1$ ). Podemos sumarle  $\varepsilon > 0$  suficientemente chico a  $f$  cerca de  $p_1$  de manera que  $f(p_1) \neq f(p_j)$  si  $j \neq 1$ .

Sea  $\lambda : W \rightarrow [0, 1]$  diferenciable y sea  $p_1 \in U \subset \bar{U} \subset N \subset \bar{N} \subset W - \partial W$ , con  $\bar{N}$  compacto y  $U, N$  abiertos tales que  $\lambda \equiv 1$  en  $U$ ,  $\lambda \equiv 0$  fuera de  $N$  y  $p_j \notin \bar{N}$  para todo  $j \neq 1$ . Consideramos el compacto  $K = \overline{\lambda^{-1}((0, 1))} \subset \bar{N}$ .

Tomemos  $\varepsilon_1 > 0$  suficientemente chico de manera que la función  $f + \varepsilon_1 \lambda$  caiga en  $[0, 1]$  y tal que  $(f + \varepsilon_1 \lambda)(p_1) \neq (f + \varepsilon_1 \lambda)(p_j)$  para todo  $j \neq 1$ . Como  $p_i \notin K$  para todo  $i$ , concluimos que  $f$  no tiene puntos críticos en  $K$ .

Le damos a  $W$  una métrica riemanniana y calculamos  $\text{Grad}(f) \in \mathfrak{X}(W)$ . Como  $K$  es compacto y  $f$  no tiene puntos críticos en  $K$ , existe  $c > 0$  tal que  $\|\text{Grad}(f)\| \geq c$  en  $K$ . Además,  $\|\text{Grad}(f)\| \leq c'$  para cierto  $c' \in \mathbb{R}_{>0}$ .

Sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $\varepsilon < \min\{\varepsilon_1, c/c'\}$  y definamos  $f_1 = f + \varepsilon \lambda$ . Como  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ , se tiene que  $f_1(p_1) \neq f_1(p_j)$  para todo  $j \neq 1$ ,  $f_1(W) \subset [0, 1]$  y  $f_1(\overset{\circ}{W}) \subset (0, 1)$ .

Veamos que  $f_1$  tiene los mismos puntos críticos que  $f$ . En  $K$ ,

$$\|\text{Grad}(f + \varepsilon \lambda)\| \geq \|\text{Grad}(f)\| - \|\varepsilon \text{Grad}(\lambda)\| \geq c - \varepsilon c' > 0$$

Luego  $f_1 = f + \varepsilon \lambda$  no tiene puntos críticos en  $K$ . Fuera de  $K$ , tenemos que  $\lambda \equiv 0$  o bien  $\lambda \equiv 1$ , y así  $\text{Grad}(\lambda) = 0$ , de forma que

$$\text{Grad}(f) = \text{Grad}(f + \varepsilon \lambda)$$

fuera de  $K$ . Los puntos críticos  $p_l$  siguen siendo no degenerados pues

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j}(p_l) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_l)$$

$\square$

**Definición 6.1.12.** Sea  $(W, V_0, V_1)$  una tríada. Se define el número de Morse de  $(W, V_0, V_1)$  como

$$\mu(W, V_0, V_1) = \min_f \{ \# \text{puntos críticos de } f : W \rightarrow [0, 1] \text{ función de Morse} \}$$

Notar que está bien definido porque toda tríada admite una función de Morse.

**Observación 6.1.13.** Si  $\mu(W, V_0, V_1) = 0$ , entonces existe  $f : W \rightarrow [0, 1]$  función de Morse sin puntos críticos. Por lo tanto, del teorema 3.1.29, tenemos que  $W \equiv V_0 \times I$ .

**Definición 6.1.14.** En ese caso, a  $(W, V_0, V_1)$  se lo llama cobordismo trivial o producto.

**Observación 6.1.15.** Supongamos que  $\mu(W, V_0, V_1) > 0$  y sea  $f : W \rightarrow [0, 1]$  función de Morse que realiza el mínimo. Por el lema 6.1.11, podemos tomar a  $f$  de tal forma que  $f(p_i) \neq f(p_j)$  para todo  $p_i \neq p_j$  par de puntos críticos. Sea  $c_i = f(p_i)$  (valor crítico de  $f$ ) numerado de forma creciente:

$$0 < c_1 < c_2 < \dots < c_r < 1$$

con  $r = \mu(W, V_0, V_1)$ . Sea  $c_i < c'_i < c_{i+1}$  valor regular para  $f$  y consideramos las tríadas

$$f^{-1}[0, c'_1], f^{-1}[c'_1, c'_2], \dots, f^{-1}[c'_{r+1}, 1]$$

con borde  $f^{-1}(c'_i) \amalg f^{-1}(c'_{i+1})$  respectivamente. En cada una de estas tríadas la función tiene exactamente un punto crítico.

**Definición 6.1.16.** Una tríada  $(W, V_0, V_1)$  se llama cobordismo elemental si admite una  $f : W \rightarrow [0, 1]$  función de Morse con un único punto crítico.

Por lo tanto hemos probado lo siguiente:

**Proposición 6.1.17.** Toda tríada  $(W, V_0, V_1)$  con  $\mu(W, V_0, V_1) > 0$  se factoriza como composición de cobordismos elementales.

**Teorema 6.1.18.** Si  $(W, V_0, V_1)$  es un cobordismo elemental, entonces  $\mu(W, V_0, V_1) = 1$ . Además, el índice del punto crítico no depende de la función de Morse elegida.

*Demostración.* Basta probar que  $H_q(W, V_0) = \delta_{q,k} \mathbb{Z}$ , donde  $k$  es el índice del único punto crítico de una  $f : W \rightarrow [0, 1]$  de Morse. En este caso, como  $H_*(W, V_0) \neq 0$ , se tiene que  $\mu(W, V_0, V_1) \neq 0$  (y por lo tanto  $\mu(W, V_0, V_1) = 1$ ) y además  $H_k(W, V_0)$  es invariante de  $(W, V_0, V_1)$ , con lo cual el índice del punto crítico no depende de la  $f$  elegida.

Sea  $c = f(p)$ , donde  $p$  es el único punto crítico de la  $f$ . Como entre 0 y  $c - \varepsilon$  no hay puntos críticos, se tiene que  $W_{c-\varepsilon} \simeq V_0$ . Como después de  $c$  no hay puntos críticos, se tiene que  $W_{c+\varepsilon} \simeq W$ . Entonces

$$H_q(W, V_0) = H_q(W_{c+\varepsilon}, W_{c-\varepsilon}) = H_q(W_{c-\varepsilon} \cup e^k, W_{c-\varepsilon}) = \tilde{H}_q(W_{c-\varepsilon} \cup e^k / W_{c-\varepsilon}) = \tilde{H}_q(\mathbb{S}^k)$$

donde usamos el teorema 3.1.33 en la segunda igualdad y que  $(W_{c-\varepsilon} \cup e^k, W_{c-\varepsilon})$  es un “par bueno” (y por lo tanto la homología del par es la homología reducida del cociente).  $\square$

Por el teorema anterior, tiene sentido hablar del *índice de un cobordismo elemental*.

**Definición 6.1.19.** Si  $(W, V_0, V_1)$  es un cobordismo elemental, su índice es el índice del único punto crítico de una función de Morse  $f : W \rightarrow [0, 1]$  (con un único punto crítico).

**Ejercicio 6.1.20.** Sean  $(W, V_0, V_1)$  y  $(W', V'_1, V'_2)$  dos tríadas y sea  $h : V_1 \rightarrow V'_1$  un difeomorfismo. Consideremos la tríada  $(W \cup_h W', V_0, V'_2)$ . Entonces

$$\mu(W \cup_h W', V_0, V'_2) \leq \mu(W, V_0, V_1) + \mu(W', V'_1, V'_2)$$

**Observación 6.1.21.** Puede valer la desigualdad estricta:

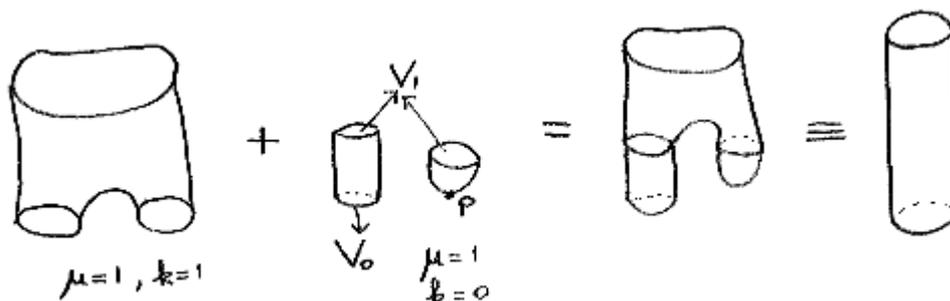


Figura 6.3: Desigualdad estricta en el número de Morse

Veamos ahora la definición de cirugía y la relación entre cobordismos elementales, cirugía y pegados de manijas.

**Definición 6.1.22.** Sea  $M$  una variedad de dimensión  $m$  y sea  $n \leq m$ . Supongamos que tenemos un embedding  $\varphi : \mathbb{S}^n \times \mathbb{D}^{m-n} \rightarrow M$ . Hacer una  $n$ -cirugía a  $M$  es cambiar a  $M$  por  $M'$  que se obtiene removiendo  $\varphi(\mathbb{S}^n \times \mathbb{D}^{m-n})$  y pegando en el  $\partial(\mathbb{S}^n \times \mathbb{D}^{m-n}) = \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^{m-n-1} = \partial(\mathbb{D}^{n+1} \times \mathbb{S}^{m-n-1})$  a  $\mathbb{D}^{n+1} \times \mathbb{S}^{m-n-1}$ . Es decir,

$$M' = \overline{M - \varphi(\mathbb{S}^n \times \mathbb{D}^{m-n})} \cup_{\varphi} \mathbb{D}^{n+1} \times \mathbb{S}^{m-n-1}$$

Esta  $M'$  es una variedad de dimensión  $n$ .

**Ejemplo 6.1.23.**

1.  $m = 1, n = 0, M = \mathbb{S}^1$ , y tomamos  $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{D}^1$  como en la figura.

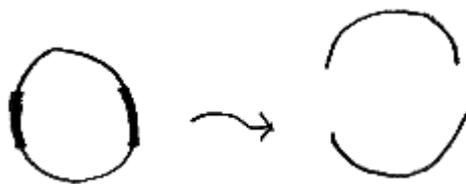


Figura 6.4: Le sacamos  $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{D}^1$  a  $\mathbb{S}^1$

Entonces  $M' = \overline{\mathbb{S}^1 - \varphi(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{D}^1)} \cup_{\varphi} \mathbb{D}^1 \times \mathbb{S}^0 = \mathbb{S}^1 \amalg \mathbb{S}^1$  o bien  $M' = \mathbb{S}^1$  dependiendo de la orientación de la  $\varphi$  que usamos para pegar.



Figura 6.5: Dos posibles cirugías dependiendo de la función de pegado

2.  $m = 2, n = 1$ . Tomamos  $M = \mathbb{S}^2$  y  $\varphi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2$  como muestra la figura. Entonces  $M' = \mathbb{S}^2 \amalg \mathbb{S}^2$ .

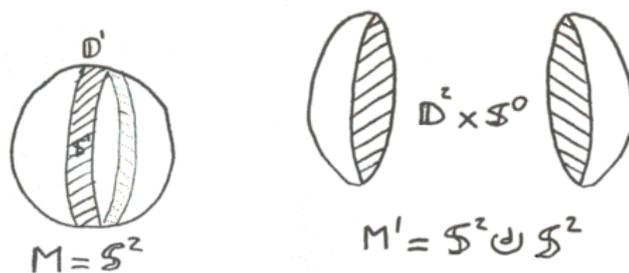


Figura 6.6: Cirugía a  $M = \mathbb{S}^2$

3. Para  $n = 0$  y  $M = \mathbb{S}^2$ , lo que se obtiene es un toro o una botella de Klein dependiendo de la orientación.

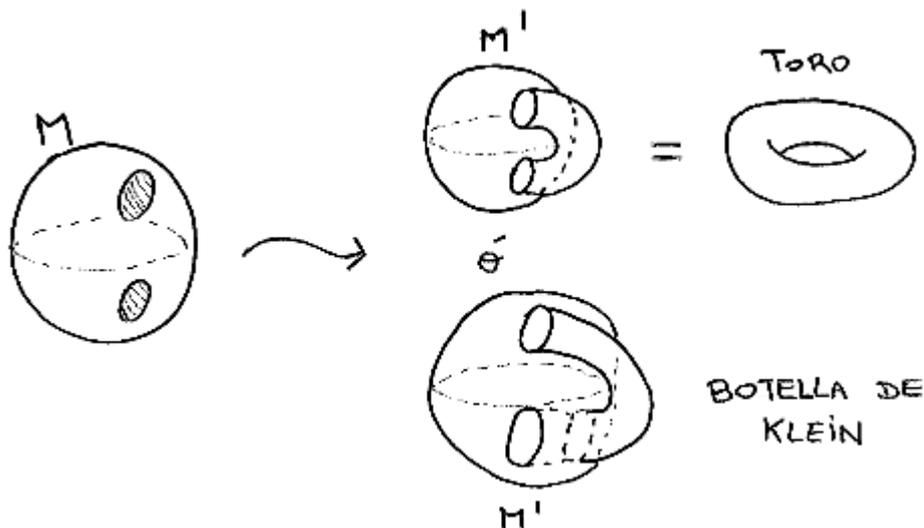


Figura 6.7: Removemos dos discos de la esfera  $\mathbb{S}^2$  y obtenemos un toro o una botella de Klein

4. Si  $m \leq n$  y  $M = \mathbb{S}^m$ , entonces  $\partial(\mathbb{S}^m \times \mathbb{D}^0) = \mathbb{D}^{n+1} \times \emptyset = \emptyset$ , por lo que  $M' = \emptyset$ .

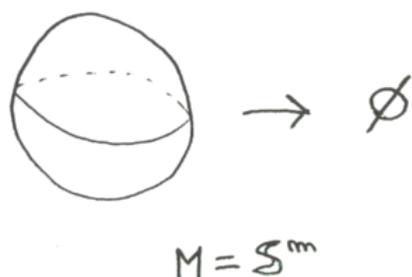


Figura 6.8: Removemos una  $m$ -esfera de una  $m$ -esfera y nos queda vacío

**Ejemplo 6.1.24.** Para  $n \leq m$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^m &= \partial(\mathbb{D}^{m+1}) = \partial(\mathbb{D}^{n+1} \times \mathbb{D}^{m-n}) \\ &= \partial\mathbb{D}^{n+1} \times \mathbb{D}^{m-n} \cup \mathbb{D}^{n+1} \times \partial\mathbb{D}^{m-n} \\ &= \mathbb{S}^n \times \mathbb{D}^{m-n} \cup \mathbb{D}^{n+1} \times \mathbb{S}^{m-n-1} \end{aligned}$$

De esta descomposición, tenemos que  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{D}^{m-n} \subset \mathbb{S}^m$  es un embedding. Así, haciéndole cirugía a  $\mathbb{S}^m$  con este embedding, obtenemos

$$M' = \mathbb{D}^{n+1} \times \mathbb{S}^{m-n-1} \cup_{\mathbb{S}^n \times \mathbb{D}^{m-n}} \mathbb{D}^{n+1} \times \mathbb{S}^{m-n-1} = \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^{m-n-1}$$

**Definición 6.1.25.** (Suma conexa) Sean  $K$  y  $L$  dos  $n$ -variedades disjuntas. Tomemos  $D_1^n \subset K$  y  $D_2^n \subset L$  dos discos. Sea  $M = K \amalg L$  y veamos a

$\mathbb{S}^0 \times \mathbb{D}^n = D_1^n \cup D_2^n \subset M$ . Hacemos 0-cirugía y obtenemos

$$M' = K \# L = \overline{M - \varphi(\mathbb{S}^0 \times \mathbb{D}^n)} \cup \mathbb{D}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$$

que es la suma conexas de  $K$  y  $L$ .

Veamos ahora la definición de pegar manijas. Sea  $W$  una  $(m + 1)$ -variedad con borde  $\partial W$ . Sea  $\varphi : \mathbb{S}^{i-1} \times \mathbb{D}^{m-i+1} \hookrightarrow \partial W$  un embedding. Consideramos  $\mathbb{D}^i \times \mathbb{D}^{m-i+1}$  cuyo borde es

$$\partial(\mathbb{D}^i \times \mathbb{D}^{m-i+1}) = \mathbb{S}^{i-1} \times \mathbb{D}^{m-i+1} \cup \mathbb{D}^i \times \mathbb{S}^{m-i}$$

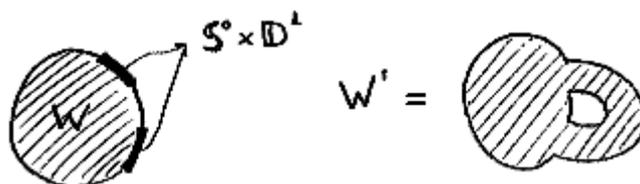
Sea  $W' = W \cup_{\varphi} \mathbb{D}^i \times \mathbb{D}^{m-i+1}$ . Notar que la imagen de  $\varphi$  cae en  $\partial W$ , por lo que  $W'$  es una variedad que se obtiene de pegarle a  $W$  el disco  $\mathbb{D}^i \times \mathbb{D}^{m-i+1}$  en una parte del borde. Luego  $W'$  es una  $(m + 1)$ -variedad y su borde es

$$\partial W' = \partial W - \varphi(\mathbb{S}^{i-1} \times \mathbb{D}^{m-i+1}) \cup \mathbb{D}^i \times \mathbb{S}^{m-i}$$

Notar que  $\partial W'$  se obtiene de  $\partial W$  haciendo  $(i - 1)$ -cirugía.

**Definición 6.1.26.** En la situación anterior, decimos que  $W'$  se obtiene de  $W$  adjuntándole una  $i$ -manija

**Ejemplo 6.1.27.** Consideremos  $W = \mathbb{D}^2$  el disco en  $\mathbb{R}^2$  y tomemos  $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{D}^1$  incluido en el borde. Como  $\mathbb{D}^1 \times \mathbb{D}^1$  es un rectángulo, adjuntarle una 1-manija a  $W$  la convierte en un anillo del plano.



(a)  $W = \mathbb{D}^2$ , removemos  $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{D}^1$

(b) Obtenemos  $W'$  un anillo

Sea  $V_0$  una variedad de dimensión  $m$  sin borde y supongamos que  $V_1$  es una variedad que se obtiene de  $V_0$  haciéndole una  $n$ -cirugía (y por lo tanto  $V_1$  no tiene borde). La traza de la cirugía que realizamos es una tríada  $(W, V_0, V_1)$ , donde  $W$  se obtiene de  $V_0 \times I$  adjuntándole una  $(n + 1)$ -manija vía

$$\varphi : \mathbb{S}^n \times \mathbb{D}^{m-n} \rightarrow V_0 \times 1 \subset \partial(V_0 \times I)$$

donde  $\varphi$  es el embedding de la cirugía. Entonces  $W$  es una  $(m + 1)$ -variedad y su borde es  $\partial W = V_0 \natural V_1$ . A esta tríada la llamamos la traza de la cirugía de  $V_0$  a  $V_1$ .

**Proposición 6.1.28.** Si una  $m$ -variedad  $V_1$  se obtiene de otra  $m$ -variedad  $V_0$  haciendo una  $n$ -cirugía, entonces el cobordismo traza  $(W, V_0, V_1)$  es elemental de índice  $n + 1$ .

*Demostración.* Ver [Mil65b]. □

**Proposición 6.1.29.** Sea  $(W, V_0, V_1)$  un cobordismo elemental de índice  $k$ . Entonces  $V_1$  se obtiene de  $V_0$  haciendo una  $(k - 1)$ -cirugía.

*Demostración.* Ver [Mil65b]. □

**Corolario 6.1.30.** (Descomposición por manijas) Si  $M$  es una variedad cerrada, existe una sucesión finita

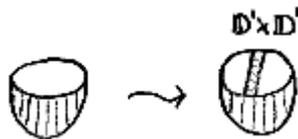
$$\emptyset \subset M^0 \subset M^1 \subset \dots \subset M^r = M$$

donde  $M^i$  es una variedad que se obtiene de  $M^{i-1}$  adjuntándole una  $j_i$ -manija.

**Ejemplo 6.1.31.** Empezando por el vacío, adjuntamos una 0-manija  $\mathbb{D}^0 \times \mathbb{D}^2$  y obtenemos



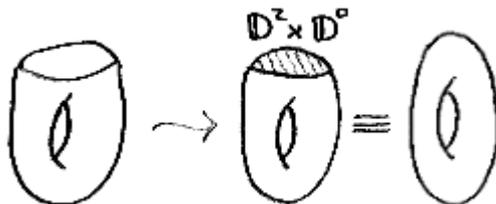
Si le adjuntamos una 1-manija se obtiene



Si le adjuntamos otra 1-manija obtenemos



Finalmente, adjuntándole una 2-manija obtenemos



## 6.2 Teorema de h-cobordismo y aplicaciones

El teorema del h-cobordismo fue probado por Smale a principios de la década del 60. La aplicación más importante de este resultado es la demostración de la Conjetura de Poincaré para dimensiones altas. En [Mil65b] Milnor muestra una demostración del teorema utilizando esencialmente teoría de Morse y algunos de los resultados que vimos en la sección anterior (la demostración de Smale es en base a adjunción de manijas). Comentaremos en esta sección las diferentes reformulaciones del teorema y veremos cómo puede ser aplicado para la caracterización de discos y esferas y para probar la conjetura de Poincaré. Para una demostración completa del teorema y sus consecuencias remitimos al lector al libro [Mil65b].

**Definición 6.2.1.** Un h-cobordismo es una tríada  $(W, V_0, V_1)$  tal que  $V_0, V_1 \subset W$  son retractos por deformación fuertes.

**Teorema 6.2.2.** (*Teorema del h-cobordismo*) Sea  $(W, V_0, V_1)$  una tríada tal que

1. Es un h-cobordismo
2.  $V_0$  es simplemente conexo
3.  $\dim W \geq 6$

Entonces  $(W, V_0, V_1)$  es un cobordismo trivial. Es decir,  $W \cong V_0 \times I$  mediante un difeomorfismo que deja fijo a  $V_0$ . En particular,  $V_0$  y  $V_1$  son difeomorfas.

Vamos a mostrar una reformulación del teorema. Para eso necesitaremos los siguientes resultados.

1. Dualidad de Poincaré para tríadas: El siguiente teorema puede verse en [Mil65b], y es una generalización de la dualidad de Poincaré clásica que vimos anteriormente.

Si  $(W, V_0, V_1)$  es una tríada tal que  $W$  es orientable de dimensión  $n$ , entonces para todo  $0 \leq k \leq n$ ,

$$H_k(W, V_0) = H^{n-k}(W, V_1)$$

donde los coeficientes son en  $\mathbb{Z}$  y  $V_0$  o  $V_1$  podrían ser vacíos.

Notar que si  $V_0 = V_1 = \emptyset$  entonces obtenemos la dualidad de Poincaré clásica.

2. Toda variedad simplemente conexa es orientable.
3. Toda variedad se puede triangular. En particular, toda variedad es un CW-complejo. Luego valen los teoremas clásicos de CW's.

4. Teorema de Whitehead: Si  $X$  e  $Y$  son dos CW-complejos simplemente conexos y  $f : X \rightarrow Y$  induce un isomorfismo  $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$  en los grupos de homología, entonces  $f$  es equivalencia homotópica. Para una demostración de este teorema clásico de topología algebraica ver [Hat02].
5. Si  $N \subset M$  es una subvariedad, entonces existe una triangulación de  $N$  tal que  $N \subset M$  es un subcomplejo. En particular, la inclusión  $i : N \hookrightarrow M$  es una cofibración.
6. Si  $i : N \hookrightarrow M$  es una cofibración y una equivalencia homotópica, entonces es un retracts por deformación fuerte.

Con estos resultados, podemos reformular el teorema de h-cobordismo.

**Teorema 6.2.3.** (*Teorema del h-cobordismo*) Sea  $(W, V_0, V_1)$  una tríada que verifica lo siguiente:

- 1'.  $H_*(W, V_0) = 0$
- 2'.  $V_0$  y  $V_1$  son simplemente conexas
3.  $\dim W \geq 6$

Entonces  $W \cong V_0 \times I$  y el difeomorfismo fija a  $V_0$ .

Veamos que ambas formulaciones son equivalentes:

- Veamos que 1 y 2 implican 1' y 2'. Como  $V_0 \subset W$  es un retracts por deformación fuerte, se sigue que  $H_*(W, V_0) = 0$ . Por otro lado,  $V_1$  es simplemente conexo porque es homotópicamente equivalente a  $V_0$  y este lo es por hipótesis.
- Veamos que 1' y 2' implican 1 y 2. La inclusión  $i : V_0 \hookrightarrow W$  induce isomorfismos en  $H_*$  por 1'. Por Whitehead,  $i$  es equivalencia homotópica. Además es cofibración, por lo que  $i$  es retracts por deformación fuerte.

Como  $W$  es simplemente conexo, es orientable. Luego se puede aplicar la dualidad de Poincaré y concluir que  $H^*(W, V_1) = 0$ . Por el teorema de coeficientes universales para cohomología,  $H_*(W, V_1) = 0$ . Entonces por el mismo razonamiento previo, deducimos que  $i : V_1 \hookrightarrow W$  es un retracts por deformación fuerte.

Veamos ahora cómo aplicar el teorema del h-cobordismo.

### Caracterización de los discos suaves $\mathbb{D}^n$ para $n \geq 6$

**Teorema 6.2.4.** *Sea  $W$  una variedad compacta simplemente conexa de dimensión  $n \geq 6$  tal que su frontera  $\partial W$  es simplemente conexa (y en particular no vacía). Son equivalentes:*

- 1)  $W$  es difeomorfa a  $\mathbb{D}^n$
- 2)  $W$  es homeomorfa a  $\mathbb{D}^n$
- 3)  $W$  es contráctil
- 4)  $W$  es acíclica

*Demostración.* Es claro que 1)  $\Rightarrow$  2)  $\Rightarrow$  3)  $\Rightarrow$  4). Veamos que 4) implica 1).

Sea  $D \subset \overset{\circ}{W}$  un  $n$ -disco embebido en  $W$ . Consideramos la tríada  $(W - \overset{\circ}{D}, \partial D, \partial W)$  y veamos que estamos en las hipótesis del teorema de h-cobordismo:

- $\partial D \equiv \mathbb{S}^{n-1}$  es simplemente conexo
- $\partial W$  es simplemente conexo por hipótesis
- $W - \overset{\circ}{D}$  es simplemente conexo por Van-Kampen: podemos descomponer a  $W$  de la siguiente manera:

$$W = (W - \overset{\circ}{D}) \bigcup_{\partial D} D$$

y por lo tanto

$$1 = \pi_1(W) = \pi_1(W - \overset{\circ}{D}) \underset{\pi_1(\partial D)}{*} \pi_1(D) = \pi_1(W - \overset{\circ}{D}) \underset{1}{*} 1 = \pi_1(W - \overset{\circ}{D})$$

- Por escisión,

$$H_*(W - \overset{\circ}{D}, \partial D) = H_*(W, D) = 0$$

donde  $H_*(W, D) = 0$  pues  $W$  y  $D$  son acíclicos.

Como estamos en las hipótesis del teorema, deducimos que  $W - \overset{\circ}{D} \equiv \partial D \times I$ . Además, como  $W = (W - \overset{\circ}{D}) \bigcup_{\partial D} D$  y el pegado es vía una inclusión, deducimos que  $W$  es un disco (es como ponerle una tapa a un cilindro).  $\square$

### Conjetura de Poincaré para $n \geq 6$

**Definición 6.2.5.** Una  $n$ -esfera twistada es una variedad  $M = D_1 \bigcup_h D_2$  donde  $D_1$  y  $D_2$  son  $n$ -discos y  $h : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$  es un difeomorfismo.

**Lema 6.2.6.** Una  $n$ -esfera twistada es homeomorfa a  $\mathbb{S}^n$  (no necesariamente difeomorfa).

*Demostración.* Sea  $M = D_1 \cup_h D_2$  una  $n$ -esfera twistada. Sea  $g_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{S}^n$  el embedding en el hemisferio sur. Sea  $g : D_1 \cup_h D_2 \rightarrow \mathbb{S}^n$  la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si } x \in D_1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) g_1(h^{-1}(v)) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) (0, \dots, 0, 1) & \text{si } x \in D_2 \text{ y } x = tv \\ & \text{con } 0 \leq t \leq 1, v \in \partial D_2 \end{cases}$$

Dejamos como ejercicio comprobar que  $g$  está bien definida y que es un homeomorfismo.  $\square$

**Teorema 6.2.7** (Conjetura de Poincaré para  $n \geq 6$ ). *Sea  $M$  una variedad cerrada de dimensión  $n \geq 6$  simplemente conexa y con la homología de  $\mathbb{S}^n$ . Entonces  $M$  es homeomorfa a  $\mathbb{S}^n$ .*

*Demostración.* Por el lema anterior, basta ver que  $M$  es una  $n$ -esfera twistada. Sea  $D \subset M$  un  $n$ -disco embebido en  $M$ . Veamos que  $M - \overset{\circ}{D}$  es difeomorfo a  $\mathbb{D}^n$ . Veamos que está en las hipótesis del teorema de caracterización de los discos y que es acíclico.

- Se tiene la descomposición  $M = (M - \overset{\circ}{D}) \cup_{\partial D} D$ . Por Van-Kampen,  $M - \overset{\circ}{D}$  es simplemente conexa.
- La frontera es  $\partial(M - \overset{\circ}{D}) = \partial D \cong \mathbb{S}^{n-1}$ , y resulta simplemente conexa.
- Calculemos  $H_*(M - \overset{\circ}{D})$ . Como  $M - \overset{\circ}{D}$  es simplemente conexa, es orientable, y así podemos usar la dualidad de Poincaré

$$H_k(M - \overset{\circ}{D}) = H^{n-k}(M - D, \partial D) = H^{n-k}(M, D) = \tilde{H}^{n-k}(M) = \delta_{k,0} \mathbb{Z}$$

donde la segunda igualdad es por escisión y la tercera porque  $D$  es acíclico. Luego  $H_*(M - \overset{\circ}{D}) = 0$ .

Por el teorema de caracterización de los discos,  $M - \overset{\circ}{D} \cong D_1$ . Luego  $M = D_1 \cup_h D_2$ , donde  $D_2 = D$  y  $h$  es el difeomorfismo que va de  $\partial(M - \overset{\circ}{D})$  a  $\partial D_1$ . Luego  $M$  es una  $n$ -esfera twistada.  $\square$

## Capítulo 7

# Haces y prehaces y el teorema de de Rham

### 7.1 Definiciones básicas

En este capítulo nos basamos en la exposición de [War83] (ver también [God97]). En lo que sigue supondremos que  $M$  es una variedad, pero muchos de los resultados que enunciamos siguen valiendo para cualquier espacio topológico Hausdorff y paracompacto. Recordemos que esto último es que todo cubrimiento por abiertos admite un refinamiento localmente finito, y que esto es equivalente a la existencia de particiones de la unidad localmente finitas. En general  $A$  denotará a un anillo conmutativo con unidad. Más adelante le pediremos que sea DIP.

**Definición 7.1.1.** Un prehaz de  $A$ -módulos sobre  $M$  es un funtor contravariante que va de la categoría de los abiertos de  $M$  con las inclusiones, que notaremos  $\mathcal{O}(M)$ , a la categoría de  $A$ -módulos (a izquierda). Es decir,

1. Para todo  $U \subset M$  abierto, tenemos un  $A$ -módulo  $S(U)$ .
2. Para todo  $U \subset V \subset M$  abiertos, tenemos morfismos de  $A$ -módulos  $\rho_{UV} : S(V) \rightarrow S(U)$  que verifican
  - (a)  $\rho_{UU} = 1_{S(U)}$
  - (b)  $\rho_{UW} = \rho_{UV} \circ \rho_{VW}$  para todo  $U \subset V \subset W$  abiertos.

Notación:  $S = \{S(U), \rho_{UV}\}$ . A los morfismos  $\rho_{UV}$  los llamaremos restricciones y en general vamos a notar  $\rho_{UV}(f) = f|_U$  aunque  $\rho_{UV}$  no sea una restricción específicamente.

**Ejemplo 7.1.2.** Para  $M$  variedad y  $A = \mathbb{R}$ , tenemos que  $S(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$  con  $\rho_{UV}$  las restricciones, es un prehaz. En general, para  $q \geq 0$  fijo podemos tomar  $S(U) = \Omega^q(U)$  el  $\mathbb{R}$ -módulo de las  $q$ -formas diferenciables sobre  $U$  con  $\rho_{UV}$  las restricciones.

**Ejemplo 7.1.3.** Para  $A$  un anillo cualquiera, podemos definir  $S(U) = A$  para todo  $U$  y  $\rho_{UV} = 1_A$ .

**Ejemplo 7.1.4.** Como en el ejemplo anterior pero las restricciones las definimos por  $\rho_{UV} = 1_A$  si  $U = V$  y  $0$  en otro caso.

**Definición 7.1.5.** Sean  $S$  y  $S'$  prehaces de  $A$ -módulos sobre  $M$ . Un morfismo  $\varphi : S \rightarrow S'$  de prehaces es una familia  $\varphi_U : S(U) \rightarrow S'(U)$  de morfismos de  $A$ -módulos tales que  $\varphi_U(f|_U) = \varphi_V(f)|_U$  para toda  $f \in S(V)$  y  $U \subset V$  abiertos. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} S(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & S'(V) \\ \downarrow \rho_{UV} & & \downarrow \rho'_{UV} \\ S(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & S'(U) \end{array}$$

Decimos que  $\varphi$  es un isomorfismo si admite una inversa. Equivalente:  $\varphi_U$  es un isomorfismo de  $A$ -módulos para todo  $U$ .

**Definición 7.1.6.** Un prehaz de  $A$ -módulos  $S$  sobre  $M$  se dice completo si para todo abierto  $U \subset M$  y para todo cubrimiento por abiertos  $\{U_i : i \in I\}$  de  $U$  se verifican:

1. Si  $f_i \in S(U_i)$  para todo  $i$  y  $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$  para todo  $i, j$ , entonces existe  $f \in S(U)$  tal que  $f|_{U_i} = f_i$  para todo  $i$ .
2. Si  $f, g \in S(U)$  son tales que  $f|_{U_i} = g|_{U_i}$  para todo  $i$ , entonces  $f = g$ .

**Observación 7.1.7.** Un prehaz completo es lo que muchos autores llaman un haz.

**Ejemplo 7.1.8.**

1.  $S(U) = C^\infty(U)$  es completo.
2.  $S(U) = \Omega^q(U)$  es completo para todo  $q$ .
3.  $S(U) = A$  con  $\rho_{UV} = 1_A$  para todo  $U, V$ , es completo.
4.  $S(U) = A$  con  $\rho_{UV} = 0$  si  $U \neq V$  no es completo: tomemos dos abiertos  $U, V$  distintos de  $M$  tales que  $M = U \cup V$ , entonces  $1|_U = 0 = 0|_U$  y  $1|_V = 0 = 0|_V$ , pero  $1 \neq 0 \in A$ .

**Definición 7.1.9.** Un haz de  $A$ -módulos  $S$  sobre  $M$  es una función continua  $p : S \rightarrow M$  ( $S$  se llama espacio étale) tal que:

1.  $p$  es un homeomorfismolocal.
2. Los stalks  $S_m = p^{-1}(m)$ , con  $m \in M$ , tienen estructura de  $A$ -módulo.

3. Las estructuras algebraicas y topológicas son compatibles: si  $S \times_M S = \{(s, t) \in S \times S : p(s) = p(t)\}$  (subespacio del producto), entonces la suma  $+$  :  $S \times_M S \rightarrow S$  definida por  $+(s, t) = s + t$  y el producto por escalares  $\mu_A : S \rightarrow S$  definido por  $\mu_a(s) = a \cdot s$  con  $a \in A$ , son funciones continuas.

Notar que la resta es una función continua. Observar también que en particular,  $p$  es sobreyectiva por definición.

**Ejemplo 7.1.10.** Sean  $M$  y  $A$  cualesquiera y sea  $T$  un  $A$ -módulo. Podemos ver a  $T$  como un espacio topológico con la topología discreta. Sea  $S = M \times T$  con la topología producto y sea  $p : S \rightarrow M$  la proyección. Entonces  $S$  es un haz (trivial) con stalk  $T$ .

**Ejemplo 7.1.11.** Haz (de gérmenes) de funciones diferenciables.

Sea  $M$  una variedad y sea  $A = \mathbb{R}$ . Si  $m \in M$ , consideramos  $\mathcal{C}_m^\infty$  el conjunto de gérmenes de funciones  $\mathcal{C}^\infty$  en  $m$ . Es decir,  $\mathcal{C}_m^\infty = \{[f] : f \in \mathcal{C}^\infty(U) \text{ con } m \in U\}$ , donde, si  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$  y  $g \in \mathcal{C}^\infty(V)$  con  $m \in U \cap V$ , decimos que  $[f] = [g]$  si existe un entorno  $W \subset U \cap V$  de  $m$  tal que  $f|_W = g|_W$ .

Sea  $S = \coprod_{m \in M} \mathcal{C}_m^\infty$  (como conjunto) y sea  $p : S \rightarrow M$  la proyección, es decir,  $p([f]_m) = m$ . Le damos a  $S$  la topología generada por la siguiente base: para cada  $U \subset M$  abierto y para cada  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ , sea  $B(U, f) = \{[f]_m : m \in U\}$ . Sea  $\beta = \{B(U, f) : U \subset M \text{ abierto, } f \in \mathcal{C}^\infty(U)\}$ .

Notar que  $p|_{B(U, f)} : B(U, f) \rightarrow U$  es un homeomorfismo para todo  $U$  y toda  $f$ .

Notar que  $\mathcal{C}_m^\infty = \lim_{\rightarrow m \in U} \mathcal{C}^\infty(U)$ .

**Definición 7.1.12.** Sean  $p : S \rightarrow M$  y  $p' : S' \rightarrow M$  dos haces de  $A$ -módulos sobre  $M$ . Un morfismo de haces  $\varphi : S \rightarrow S'$  es una función continua  $\varphi : S \rightarrow S'$  tal que  $p'\varphi = p$  y  $\varphi_m = \varphi|_{S_m} : S_m \rightarrow S'_m$  es un morfismo de  $A$ -módulos para todo  $m \in M$ .

Probaremos que los haces son esencialmente prehaces completos.

Sea  $p : S \rightarrow M$  un haz y sea  $U \subset M$  un abierto. Una sección (local) de  $S$  en  $U$  es una función  $f : U \rightarrow S$  continua tal que  $pf = 1_U$ . Sea  $\Gamma(S, U)$  el conjunto de las secciones de  $S$  en  $U$ . Este conjunto tiene estructura de  $A$ -módulo:

1. Si  $f, g \in \Gamma(S, U)$ , definimos  $(f+g)(m) = f(m) + g(m) \in S_m$  para  $m \in U$ .
2. Si  $a \in A$  y  $f \in \Gamma(S, U)$ , definimos  $(a \cdot f)(m) = af(m) \in S_m$  para  $m \in U$ .

Si  $U = M$ , una  $f : M \rightarrow S$  tal que  $pf = 1_M$  se llama sección global, y notamos  $\Gamma(S) = \Gamma(M, S)$  al  $A$ -módulo de las secciones globales.

**Observación 7.1.13.** Notar que si  $f \in \Gamma(S, U)$  entonces  $f$  es abierta. Esto es porque ser abierta es una propiedad local,  $p$  localmente es un homeomorfismo y  $pf = 1_U$ .

Sean  $f, g \in \Gamma(S, U)$  tales que  $f(m) = g(m)$  para algún  $m \in U$ . Veamos que existe un abierto  $V \subset U$  tal que  $m \in V$  y  $f|_V = g|_V$ . Como  $f(m) = g(m) \in S_m$ , existe un abierto  $W \subset S$  tal que  $f(m) = g(m) \in W$  y existe un abierto  $W' \subset M$  tal que  $m \in W'$  y  $p|_W : W \rightarrow W'$  es un homeo. Además podemos suponer que  $W' \subset U$  (si no, lo achicamos). Luego  $f(W')$  y  $g(W')$  son abiertos no disjuntos. Sea  $\tilde{W} = W \cap f(W') \cap g(W')$ . Entonces  $\tilde{W}$  es un abierto de  $S$  y  $f(m) = g(m) \in \tilde{W}$ . Sea  $V = p(\tilde{W})$ . Entonces  $V$  es abierto,  $m \in V$  y  $f|_V = p^{-1}pf|_V = p^{-1}pg|_V = g|_V$ .

Supongamos que  $p : S \rightarrow M$  es un haz de  $A$ -módulos. Definimos el prehaz  $\alpha(S)$  de secciones locales de la siguiente manera:

- $\alpha(S)(U) = \Gamma(S, U)$
- Si  $U \subset V$  son abiertos, entonces  $\rho_{UV} : \Gamma(S)(V) \rightarrow \Gamma(S, U)$  es la restricción  $f \mapsto f|_U$ .

Por el lema del pegado de espacios topológicos,  $\alpha(S)$  resulta un prehaz completo.

Ahora supongamos que  $S = \{S(U), \rho_{UV}\}_{U \subset V}$  es un prehaz de  $A$ -módulos sobre  $M$ . Construimos  $\beta(S)$  un haz sobre  $M$ . Para cada  $m \in M$ , definimos  $S_m = \lim_{\rightarrow m \in U} S(U)$ . Entonces  $S_m$  es un  $A$ -módulo. Sea  $E = \coprod_{m \in M} S_m$  con la topología dada por la base  $B(U, f) = \{[f]_m : m \in U\}$ . Sea  $p : E \rightarrow M$  la proyección  $p([f]) = m$  si  $[f] \in S_m$ . Notar que  $p|_{B(U, f)} : B(U, f) \rightarrow U$  es un homeomorfismo, por lo que  $p$  es un homeomorfismo local.

**Observación 7.1.14.** Sea  $\varphi : S \rightarrow S'$  un morfismo de haces. Se tiene  $\alpha(\varphi) : \alpha(S) \rightarrow \alpha(S')$  con  $\alpha(\varphi)(U) : \alpha(S)(U) \rightarrow \alpha(S')(U)$  el morfismo  $f \mapsto \varphi \circ f$ . Luego  $\alpha(\varphi)$  es un morfismo de prehaces.

**Observación 7.1.15.** Sean  $S, S'$  dos prehaces sobre  $M$  y sea  $\psi : S \rightarrow S'$  un morfismo de prehaces. Definimos  $\beta(\psi) : \beta(S) \rightarrow \beta(S')$  como

$$\beta(\psi)_m : S_m = \lim_{\rightarrow m \in U} S(U) \longrightarrow \lim_{\rightarrow m \in U} S'(U)$$

el morfismo inducido en los colímites.

Se puede verificar que  $\beta(\psi)$  es un morfismo entre los haces  $\beta(S)$  y  $\beta(S')$ .

**Proposición 7.1.16.** Sea  $p : S \rightarrow M$  un haz. Entonces  $\beta(\alpha(S))$  es isomorfo a  $S$ .

*Demostración.* Definimos  $\varepsilon : \beta(\alpha(S)) \rightarrow S$  de la siguiente manera: si  $\xi \in \beta(\alpha(S))_m = \lim_{\rightarrow m \in U} \Gamma(S, U)$ , entonces  $\xi = [f]$  para alguna  $f \in \Gamma(S, U)$ . Sea  $\varepsilon(\xi) = f(m) \in S$ . No depende de la  $f$  elegida puesto que a  $\xi$  lo tomamos en el colímite.

Queda como ejercicio para el lector probar que  $\varepsilon$  es un isomorfismo de haces. □

**Observación 7.1.17.** Si  $S$  es un prehaz cualquiera sobre  $M$ ,  $\alpha(\beta(S))$  no es necesariamente isomorfo como prehaz a  $S$ , ya que  $\alpha(\beta(S))$  es un prehaz completo mientras que  $S$  no es necesariamente completo.

**Ejemplo 7.1.18.**  $S(U) = A$  para todo  $U$  con  $\rho_{UV} = 0$  si  $U \neq V$ , entonces  $\alpha(\beta(S)) \neq S$ . Más aún,  $\alpha(\beta(S))(U) = 0 \neq A$ .

**Proposición 7.1.19.** Sea  $S$  un prehaz completo. Entonces  $\alpha(\beta(S)) = S$ .

*Demostración.* Definamos un morfismo  $\delta : S \rightarrow \alpha(\beta(S))$ . Para cada  $U$ , tenemos que  $\delta_U : S(U) \rightarrow \alpha(\beta(S))(U) = \Gamma(\beta(S), U)$ . Sea  $f \in S(U)$ . Definimos  $\delta_U(f)(m) = [f]_m \in \lim_{\rightarrow m \in V} S(V)$  para todo  $m \in U$ .

- $\delta$  es monomorfismo: sea  $f \in S(U)$  tal que  $[f]_m = 0_m = [0]_m$  para todo  $m \in U$ . Debemos ver que  $f = 0 \in S(U)$ . Por observación previa, como  $[f] = 0_m$ , existe  $U_m \subset U$  abierto tal que  $m \in U_m$  y  $f|_{U_m} = 0|_{U_m}$ . Como  $U = \bigcup_{m \in U} U_m$  y  $f|_{U_m} = 0|_{U_m}$  para todo  $m \in U$ , por unicidad de la completitud, tenemos que  $f = 0$ .
- $\delta$  es epimorfismo: sea  $g \in \Gamma(\beta(S), U)$  una sección. Veamos que existe  $f \in S(U)$  tal que  $\delta_U(f) = g$ . Es decir, para cada  $m \in U$ , queremos que  $\delta_U(f)(m) = [f]_m = g(m)$ . Para cada  $m \in U$ ,  $g(m) \in \beta(S)_m = \lim_{\rightarrow m \in V} S(V)$ . Luego  $g(m) = [f_m]$  con  $f_m \in S(V_m)$ , donde  $V_m \subset U$  es un abierto que contiene a  $m$ .

Para cada  $m$  tenemos  $V_m$  y  $f_m \in S(V_m)$ . Además,  $f_m|_{V_m \cap V_n} = f_n|_{V_m \cap V_n}$ . Luego existe  $f \in S(U)$  tal que  $f|_{V_m} = f_m$  para todo  $m$ . Por construcción,  $\delta_U(f) = g$ .

□

Vamos a definir ahora el producto tensorial de haces y prehaces. Notaremos, para simplificar,  $\otimes = \otimes_A$  (el producto tensorial sobre  $A$ ).

**Definición 7.1.20.** Sean  $S$  y  $S'$  dos prehaces de  $A$ -módulos sobre  $M$ . Definimos el prehaz  $S \otimes S'$  de  $A$ -módulos sobre  $M$  como  $(S \otimes S')(U) = S(U) \otimes S'(U)$  y  $\rho_{UV}^{S \otimes S'} = \rho_{UV}^S \otimes \rho_{UV}^{S'}$ .

Si  $\varphi : S \rightarrow T$  y  $\varphi' : S' \rightarrow T'$  son dos morfismos de prehaces, tenemos  $\varphi \otimes \varphi' : S \otimes S' \rightarrow T \otimes T'$  un morfismo de prehaces definido por  $(\varphi \otimes \varphi')_U = \varphi_U \otimes \varphi'_U$ .

**Definición 7.1.21.** Sean  $p : S \rightarrow M$  y  $p' : S' \rightarrow M$  dos haces sobre  $M$ . Definimos el producto tensorial de  $S$  por  $S'$  como el haz  $S \otimes S' = \beta(\alpha(S) \otimes \alpha(S'))$ . Es decir, tomamos los prehaces asociados, tensorizamos y luego tomamos el haz asociado al producto tensorial.

**Ejercicio 7.1.22.**  $(S \otimes S')_m = S_m \otimes S'_m$ .

**Observación 7.1.23.** Sea  $\mathcal{A}$  el haz constante  $A$  (es decir, se corresponde con la proyección  $p : M \times A \rightarrow M$ ). Entonces  $S \otimes A = S$  para todo haz  $S$ . Esto es porque si  $f \in \Gamma(\mathcal{A}, U)$ , entonces  $1_U = p \circ f = \pi_1 \circ f = f_1$ , por lo que  $f(u) = (u, f_2(u))$ . Como  $A$  tiene la topología discreta y  $f_2 : U \rightarrow A$  es continua, entonces debe ser constante. Luego  $\alpha(\mathcal{A})(U) = \Gamma(\mathcal{A}, U) = A$  y las restricciones son los morfismos identidad. Así,  $\alpha(\mathcal{A})$  resulta el prehaz trivial, por lo que  $S \otimes \alpha(\mathcal{A}) = S$  para todo prehaz  $S$ .

Notar que, en general, dado un haz  $p : S \rightarrow M$ , no necesariamente se cumple que  $S$  sea Hausdorff.

**Ejemplo 7.1.24.** Sea  $M = \mathbb{R}$  y sea  $S$  el haz de funciones continuas sobre  $\mathbb{R}$ . Es decir,

$$S_x = \mathcal{C}_x^0 = \lim_{\rightarrow x \in U} C^0(U)$$

Sean  $f \equiv 0$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Entonces  $[f]_0 \neq [g]_0$ . Sin embargo no podemos separar a estos puntos en  $S$ , ya que si  $[f]_0 \in B(U, h)$ , donde  $h \in C^0(U)$  entonces  $[f]_0 = [h]_0$ , por lo que existe un abierto  $W \subset U$  tal que  $0 \in W$  y  $f|_W = h|_W$ . Supongamos que  $[g]_0 \in B(V, i)$ . Luego tenemos un abierto  $W' \subset V$  tal que  $0 \in W'$  y  $g|_{W'} = i|_{W'}$ . Sea  $A = W \cap W' \cap (-\infty, 0)$ . Es claro que este abierto  $A$  es no vacío, por lo que podemos tomar un elemento  $x$  de  $A$ . Como  $h|_A = f|_A = 0 = g|_A = i|_A$ , concluimos que  $[h]_x = [i]_x$  y en particular  $B(U, h) \cap B(V, i) \neq \emptyset$ .

## 7.2 Sucesiones exactas de haces

**Definición 7.2.1.** Sea  $p : S \rightarrow M$  un haz de  $A$ -módulos sobre  $M$ . Un subhaz es un subespacio abierto  $R \subset S$  tal que para todo  $m \in M$ ,  $R_m \subset S_m$  es un  $A$ -submódulo.

**Observación 7.2.2.** Si  $R \subset S$  es un subhaz, entonces  $p|_R : R \rightarrow M$  es un haz de  $A$ -módulos sobre  $M$ .

**Definición 7.2.3.** Si  $p : S \rightarrow M$  es un haz, la sección cero es la sección global  $f : M \rightarrow S$  tal que  $f(m) = 0_m \in S_m$  para todo  $m \in M$ . Es decir,  $f \in \Gamma(S)$  es el cero de este  $A$ -módulo. Llamamos sección cero “0” a la imagen de esta  $f$ .

Notar que la sección nula  $f$  es abierta, y que por lo tanto su imagen “0” es un abierto de  $S$ .

**Definición 7.2.4.** Sea  $\varphi : T \rightarrow S$  un morfismo de haces. Se define el núcleo de  $\varphi$  como el conjunto  $\text{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\text{“0”})$ .

$\text{Ker}(\varphi) \subset T$  es un subhaz: es abierto y en cada fibra es un submódulo.

**Definición 7.2.5.** La imagen de un morfismo de haces  $\varphi : T \rightarrow S$  es el conjunto  $\text{Im}(\varphi) = \varphi(T) \subset S$  con la topología subespacio.

**Ejercicio 7.2.6.** La imagen de un morfismo de haces es un subhaz del codominio.

**Definición 7.2.7.** Sea  $S$  un haz sobre  $M$  y sea  $R \subset S$  un subhaz. Definimos el haz cociente  $S/R$  de la siguiente manera. Para cada  $m \in M$ ,  $(S/R)_m = S_m/R_m$ , por lo que  $S/R = \bigcup_{m \in M} S_m/R_m$ . Tenemos una proyección  $q : S \rightarrow S/R$  tal que  $q(x_m) = \overline{x_m} \in S_m/R_m$ . Le damos a  $S/R$  la topología cociente respecto de esta aplicación.

**Observación 7.2.8.** Notar que  $p : S \rightarrow M$  induce una  $\bar{p} : S/R \rightarrow M$  tal que  $\bar{p}(\overline{x_m}) = m$  si  $p(x_m) = m$ .

**Ejercicio 7.2.9.**  $\bar{p} : S/R \rightarrow M$  es un haz.

**Definición 7.2.10.** Una sucesión exacta de haces de  $A$ -módulos sobre  $M$  es una sucesión

$$\dots \rightarrow S_n \xrightarrow{\varphi_n} S_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} S_{n+2} \rightarrow \dots$$

de haces sobre  $M$ , con  $\varphi_n$  morfismo de haces tal que  $\text{Im}(\varphi_n) = \text{Ker}(\varphi_{n+1})$  para todo  $n$ .

**Observación 7.2.11.** La sucesión

$$\dots \rightarrow S_n \xrightarrow{\varphi_n} S_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} S_{n+2} \rightarrow \dots$$

es exacta si y solo si para todo  $m \in M$

$$\dots \rightarrow (S_n)_m \rightarrow (S_{n+1})_m \rightarrow (S_{n+2})_m \rightarrow \dots$$

es una sucesión exacta de  $A$ -módulos.

Sea  $\varphi : S \rightarrow T$  un morfismo de haces de  $A$ -módulos sobre  $M$ . Tenemos un morfismo de  $A$ -módulos  $\varphi_* : \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(T)$  dado por  $\varphi_*(f) = \varphi \circ f$ .

**Ejercicio 7.2.12.** Sea  $0 \rightarrow S \xrightarrow{\varphi} S' \xrightarrow{\varphi'} S'' \rightarrow 0$  una sucesión exacta corta de haces de  $A$ -módulos sobre  $M$ . Entonces

$$0 \rightarrow \Gamma(S) \xrightarrow{\varphi_*} \Gamma(S') \xrightarrow{\varphi'_*} \Gamma(S'')$$

es una sucesión exacta de  $A$ -módulos.

Notar que en general un epimorfismo de haces  $\varphi : S \rightarrow T$  no induce un epimorfismo  $\varphi_* : \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(T)$  a nivel de  $A$ -módulos.

**Ejemplo 7.2.13.** Sea  $M$  cualquiera y sea  $S = \mathcal{A} = M \times A$  el haz trivial. Sean  $x$  e  $y$  dos puntos distintos de  $M$ . Definimos  $T_m = 0$  si  $m \neq x, y$  y  $T_x = A = T_y$ . Le damos a  $T = \bigcup_m T_m$  la única topología posible para que sea un haz.

Sea  $\varphi : S \rightarrow T$  el morfismo definido en los stalks como  $\varphi_m : S_m \rightarrow T_m$  la función  $\varphi_m = 0$  si  $m \neq x, y$  y  $\varphi_m = 1_A$  si  $m = x$  o  $y$ . Entonces  $\varphi$  es un epimorfismo. Sin embargo,  $\Gamma(S) = A$ ,  $\Gamma(T) = A \otimes A$  y el morfismo inducido  $\varphi_* : \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(T)$  se corresponde con el morfismo  $A \rightarrow A \otimes A$  que mapea  $a$  en  $(a, a)$ , el cual no es epimorfismo.

Como  $p : S \rightarrow M$  y  $p' : T \rightarrow M$  son homeomorfismos locales, un epimorfismo entre estos haces siempre induce un epimorfismo localmente.

**Definición 7.2.14.** Sea  $\varphi : S \rightarrow S$  un endomorfismo de haces sobre  $M$ . Se define el soporte de  $\varphi$ , que notamos por  $\text{Supp}(\varphi)$ , como la clausura del subconjunto de puntos  $x \in M$  tales que  $\varphi_x : S_x \rightarrow S_x$  no es el morfismo nulo.

**Definición 7.2.15.** Sea  $p : S \rightarrow M$  un haz de  $A$ -módulos sobre  $M$ . Sea  $(U_i)_{i \in I}$  un cubrimiento por abiertos localmente finito de  $M$ . Una partición de la unidad de  $S$  subordinada al cubrimiento  $(U_i)_{i \in I}$  es una familia de endomorfismos  $\varphi_i : S \rightarrow S$  tales que:

1.  $\text{Supp}(\varphi_i) \subset U_i$  para todo  $i \in I$ .
2.  $\sum_{i \in I} \varphi_i = 1_S$

**Definición 7.2.16.** Un haz  $p : S \rightarrow M$  se dice fino si todo cubrimiento por abiertos localmente finito de  $M$  admite una partición de la unidad subordinada a él.

**Ejemplo 7.2.17.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y sea  $S$  el haz de gérmenes funciones diferenciables en  $M$ . Veamos que  $S$  es fino.

Sea  $(U_i)_{i \in I}$  un cubrimiento por abiertos localmente finito de  $M$ . Sea  $(\psi_i)_i$  una partición de la unidad en  $M$  subordinada al cubrimiento  $(U_i)_i$ . Es decir,  $\psi_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable,  $\text{Supp}(\psi_i) \subset U_i$  para todo  $i$  y  $\sum_i \psi_i = 1$ .

Para cada abierto  $U \subset M$ , se tiene una función  $\tilde{\varphi}_i : \mathcal{C}^\infty(U) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$  dada por  $f \mapsto \psi_i|_U \cdot f$ . Entonces  $\text{Supp}(\tilde{\varphi}_i) \subset U_i$  para todo  $i$  y  $\sum_i \tilde{\varphi}_i = 1_{\mathcal{C}^\infty(U)}$ . Sea  $\varphi_i = \beta(\tilde{\varphi}_i)$  la hacificación. Esta familia de funciones verifica lo pedido.

**Teorema 7.2.18.** Sea  $\varphi : S \rightarrow T$  un epimorfismo de haces de  $A$ -módulos sobre  $M$  tal que  $\text{Ker}(\varphi)$  es un haz fino. Entonces  $\varphi_* : \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(T)$  es un epimorfismo de  $A$ -módulos. Equivalentemente, si  $0 \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow 0$  es una SEC de haces y  $R$  es fino, entonces  $0 \rightarrow \Gamma(R) \rightarrow \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(T) \rightarrow 0$  es una SEC de  $A$ -módulos.

*Demostración.* Sea  $\varphi : S \rightarrow T$  un epimorfismo y sea  $f \in \Gamma(T)$ . Es decir,  $f : M \rightarrow S$  es una función continua tal que  $p'f = 1_M$ , donde  $p : S \rightarrow M$  y  $p' : T \rightarrow M$  son los haces. Veamos que existe  $g \in \Gamma(S)$  tal que  $\varphi \circ g = f$ .

Como  $p$  y  $p'$  son homeomorfismos locales,  $p'f = 1_m$  y  $p'\varphi = p$ , existe un cubrimiento por abiertos  $(U_i)_i$  de  $M$  y secciones locales  $g_i \in \Gamma(S, U_i)$  tales que  $\varphi \circ g_i = f|_{U_i}$  para todo  $i$ .

Como  $M$  es paracompacto, podemos suponer que este cubrimiento es localmente finito.

Dados  $i, j \in I$ , el problema que tenemos es que  $g_i|_{U_i \cap U_j} \neq g_j|_{U_i \cap U_j}$  en general, por lo que no podemos simplemente pegarlas a todas.

Para cada  $i, j \in I$ , definimos  $g_{i,j} : U_i \cap U_j \rightarrow S$  como  $g_{i,j} = g_i|_{U_i \cap U_j} - g_j|_{U_i \cap U_j}$ . Entonces  $g_{i,j} \in \Gamma(S, U_i \cap U_j)$ . Para  $i, j, k \in I$ , se tiene que  $g_{i,j} + g_{j,k} = g_{i,k}$  en  $U_i \cap U_j \cap U_k$ . También notar que

$$\varphi \circ g_{i,j} = \varphi \circ g_i|_{U_i \cap U_j} - \varphi \circ g_j|_{U_i \cap U_j} = f|_{U_i \cap U_j} - f|_{U_i \cap U_j} = 0$$

Luego  $g_{i,j} \in \Gamma(\text{Ker}(\varphi), U_i \cap U_j)$  (son secciones de  $\text{Ker}(\varphi)$ ). Como  $\text{Ker}(\varphi)$  es fino, existe  $\{l_i\}_{i \in I}$  partición de la unidad subordinado a  $(U_i)_i$ , con  $l_i : \text{Ker}(\varphi) \rightarrow \text{Ker}(\varphi)$ ,  $\text{Supp}(l_i) \subset U_i$  para todo  $i$ , y  $\sum_i l_i = 1$ .

Sea  $i \in I$  fijo. Para cada  $j$  consideramos  $l_j \circ g_{i,j}$ . Como  $g_{i,j} \in \Gamma(\text{Ker}(\varphi), U_i \cap U_j)$ , se sigue que  $l_j \circ g_{i,j} \in \Gamma(\text{Ker}(\varphi), U_i \cap U_j)$ . Extendemos  $l_k \circ g_{i,j}$  a todo  $U_i$  definiéndolo como 0 en  $U_i - U_j$ . De esta manera,  $l_j \circ g_{i,j} \in \Gamma(\text{Ker}(\varphi), U_i)$ . Definimos  $g'_i = \sum_j l_j \circ g_{i,j} \in \Gamma(\text{Ker}(\varphi), U_i)$ . Sean  $i, j \in I$ . En  $U_i \cap U_j$  tenemos

$$g'_i - g'_j = \sum_k l_k \circ g_{i,k} - \sum_k l_k \circ g_{j,k} = \sum_k l_k \circ (g_{i,k} - g_{j,k}) = \sum_k l_k \circ g_{i,j} = g_{i,j}$$

Por definición de  $g_{i,j}$ , concluimos que

$$g'_i - g'_j = g_i - g_j$$

Es decir, en  $U_i \cap U_j$  vale que

$$g_i - g'_i = g_j - g'_j$$

Con esto podemos definir  $g \in \Gamma(S)$  como  $g|_{U_i} = g_i - g'_i$ . De lo anterior concluimos que  $g$  está bien definida, se pega bien y

$$(\varphi \circ g)|_{U_i} = \varphi \circ (g_i - g'_i) = \varphi \circ g_i - \varphi \circ g'_i = \varphi \circ g_i = f|_{U_i}$$

Por lo tanto  $\varphi \circ g = f$ . □

En adelante,  $A$  es un DIP. Recordar que un  $A$ -módulo  $M$  no tiene torsión si y solo si es playo. Además, vale lo siguiente: si  $0 \rightarrow N \rightarrow N' \rightarrow N'' \rightarrow 0$  es una SEC y  $N''$  es playo, entonces para todo  $M$

$$0 \rightarrow M \otimes N \rightarrow M \otimes N' \rightarrow M \otimes N'' \rightarrow 0$$

es exacta.

**Observación 7.2.19.** Sean  $S, T$  haces sobre  $M$ . Si  $S$  o  $T$  es fino, entonces  $S \otimes T$  es fino. Si  $(\varphi_i)_i$  es una partición de la unidad en  $S$  subordinada a  $(U_i)_i$ , tomamos  $\varphi_i \otimes \text{id}_T$ , que resulta una partición de la unidad subordinada a  $(U_i)_i$ .

**Definición 7.2.20.** Un haz  $S$  sobre  $M$  se dice sin torsión si para todo  $m \in M$ ,  $S_m$  es sin torsión.

De todo lo anterior, se deduce el siguiente resultado (recordar que  $A$  es un DIP):

**Proposición 7.2.21.** Sea  $0 \rightarrow S' \rightarrow S \rightarrow S'' \rightarrow 0$  una SEC de haces de  $A$ -módulos sobre  $M$ . Sea  $T$  un haz sobre  $M$ .

1. Si  $T$  o  $S''$  es sin torsión, entonces

$$0 \rightarrow S' \otimes T \rightarrow S \otimes T \rightarrow S'' \otimes T \rightarrow 0$$

es una SEC de haces.

2. Si además  $T$  o  $S'$  es fino,

$$0 \rightarrow \Gamma(S' \otimes T) \rightarrow \Gamma(S \otimes T) \rightarrow \Gamma(S'' \otimes T) \rightarrow 0$$

es una SEC de  $A$ -módulos.

### 7.3 Teoría de cohomología de haces

**Definición 7.3.1.** Sea  $S$  un haz sobre  $M$ . Una resolución de  $S$  es una sucesión exacta de haces sobre  $M$ :

$$0 \rightarrow S \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow C^2 \rightarrow \dots$$

La resolución se dice fina (resp. sin torsión) si los  $C^i$  son finos (resp. sin torsión).

**Definición 7.3.2.** Sea  $\mathcal{A} = M \times A$  el haz constante  $A$  (notar que  $\mathcal{A} = \beta(\tilde{\mathcal{A}})$  con  $\tilde{\mathcal{A}}$  el prehaz  $\tilde{\mathcal{A}}(U) = A$  y  $\rho_{UV} = \text{id}_A$  para todo  $U \subset V$ ). Supongamos que tenemos una resolución finita y sin torsión de  $A$ .

$$0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots$$

Sea  $S$  un haz sobre  $M$ . Consideramos la sucesión:

$$0 \rightarrow C^0 \otimes S \rightarrow C^1 \otimes S \rightarrow C^2 \otimes S \rightarrow \dots$$

que resulta un “complejo de haces”. Tomamos las secciones globales y obtenemos un complejo de cocadenas de  $A$ -módulos:

$$0 \rightarrow \Gamma(C^0 \otimes S) \rightarrow \Gamma(C^1 \otimes S) \rightarrow \Gamma(C^2 \otimes S) \rightarrow \dots$$

Definimos la cohomología de  $M$  con coeficientes en  $S$  como los  $A$ -módulos

$$H^q(M, S) := H^q(\Gamma(C^* \otimes S)), \quad \forall q \geq 0$$

Un morfismo de haces sobre  $M$ ,  $\varphi : S \rightarrow S'$  induce un morfismo en los complejos  $\varphi_* : \Gamma(C^* \otimes S) \rightarrow \Gamma(C^* \otimes S')$  y por lo tanto un morfismo a nivel cohomología  $\varphi_* : H^q(M, S) \rightarrow H^q(M, S')$  para todo  $q \geq 0$ .

**Observación 7.3.3.** Supongamos que tenemos una SEC de haces

$$0 \rightarrow S' \rightarrow S \rightarrow S'' \rightarrow 0$$

Entonces para todo  $i$  tenemos una SEC de  $A$ -módulos

$$0 \rightarrow \Gamma(C^i \otimes S') \rightarrow \Gamma(C^i \otimes S) \rightarrow \Gamma(C^i \otimes S'') \rightarrow 0$$

pues los  $C^i$  son finos y sin torsión. Esto nos da una SEC de complejos

$$0 \rightarrow \Gamma(C^* \otimes S') \rightarrow \Gamma(C^* \otimes S) \rightarrow \Gamma(C^* \otimes S'') \rightarrow 0$$

Entonces se tiene una sucesión exacta larga en las homología

$$\dots \rightarrow H^q(M, S') \rightarrow H^q(M, S) \rightarrow H^q(M, S'') \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(M, S') \rightarrow \dots$$

donde  $\partial$  es el morfismo de conexión para todo  $q \geq 0$ .

**Definición 7.3.4.** Una teoría de cohomología  $\mathcal{H}$  sobre  $M$  con coeficientes en haces de  $A$ -módulos consiste de:

- $A$ -módulos  $\mathcal{H}^q(M, S)$  para todo  $q \geq 0$  y para todo  $S$  haz de  $A$ -módulos sobre  $M$ .
- Para cada morfismo de haces  $\varphi : S \rightarrow S'$ , se tienen morfismos de  $A$ -módulos inducidos  $\varphi_* : \mathcal{H}^q(M, S) \rightarrow \mathcal{H}^q(M, S')$  para todo  $q \geq 0$ .
- Para toda SEC de haces  $0 \rightarrow S' \rightarrow S \rightarrow S'' \rightarrow 0$ , se tiene un morfismo de  $A$ -módulos

$$\partial : \mathcal{H}^q(M, S'') \rightarrow \mathcal{H}^{q+1}(M, S')$$

que llamamos morfismo de conexión, para todo  $q \geq 0$ , tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$\dots \mathcal{H}^q(M, S') \rightarrow \mathcal{H}^q(M, S) \rightarrow \mathcal{H}^q(M, S'') \xrightarrow{\partial} \mathcal{H}^{q+1}(M, S') \rightarrow \dots$$

Además, pedimos que:

- a) Exista un isomorfismo natural  $\mathcal{H}^0(M, S) \cong \Gamma(S)$  para todo  $S$ . Es decir, para todo  $\varphi : S \rightarrow S'$ , tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^0(M, S) & \xrightarrow{\cong} & \Gamma(S) \\ \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* \\ \mathcal{H}^0(M, S') & \xrightarrow{\cong} & \Gamma(S') \end{array}$$

- b) Si  $S$  es fino,  $\mathcal{H}^q(M, S) = 0$  para todo  $q \geq 1$ .
- c) La asignación que a cada morfismo de haces  $\varphi : S \rightarrow S'$  le asigna los morfismos  $\varphi_* : \mathcal{H}^q(M, S) \rightarrow \mathcal{H}^q(M, S')$ , es funtorial.
- d) La sucesión exacta larga del morfismo de conexión es natural.

**Ejemplo 7.3.5.** Sea  $0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots$  una resolución fina y sin torsión de  $\mathcal{A}$ . Entonces  $H^q(M, S) := H^q(\Gamma(C^* \otimes S))$  define una teoría de cohomología con coeficientes en haces. Para ver esto, solo restaría chequear los ítems a) y b). Concretamente, queremos ver que:

- a)  $H^0(M, S) = \Gamma(S)$  es natural
- b)  $H^q(M, S) = 0$  para todo  $q \geq 1$  si  $S$  es fino

Tenemos  $0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots$  una resolución fina de  $\mathcal{A}$ . Sea  $K^q = \text{Ker}(C^q \rightarrow C^{q+1})$  para todo  $q \geq 0$ . Luego tenemos una SEC

$$0 \rightarrow K^q \rightarrow C^q \rightarrow K^{q+1} \rightarrow 0$$

para todo  $q \geq 0$ . Como  $K^q \subset C^q$  es un submódulo y  $C^q$  no tiene torsión, concluimos que  $K^q$  es sin torsión para todo  $q \geq 0$ . Tenemos entonces una SEC de haces

$$0 \rightarrow K^q \otimes S \rightarrow C^q \otimes S \rightarrow K^{q+1} \otimes S \rightarrow 0$$

Notar que  $K^q \otimes S = \text{Ker}(C^q \otimes S \rightarrow C^{q+1} \otimes S)$ . Aplicamos el funtor  $\Gamma$ :

$$0 \rightarrow \Gamma(K^q \otimes S) \rightarrow \Gamma(C^q \otimes S) \rightarrow \Gamma(K^{q+1} \otimes S)$$

esta sucesión es exacta, aunque no sabemos si la última flecha es epimorfismo pues  $K^q \otimes S$  podría no ser fino. Entonces  $\Gamma(K^q \otimes S) = \text{Ker}(\Gamma(C^q \otimes S) \rightarrow \Gamma(C^{q+1} \otimes S))$ . Esto nos dice que

$$H^q(M, S) = H^q(\Gamma(C^* \otimes S)) = \frac{\Gamma(K^q \otimes S)}{\text{Im}(\Gamma(C^{q-1} \otimes S) \rightarrow \Gamma(C^q \otimes S))}$$

Para  $q = 0$ , tenemos que

$$H^0(M, S) = \Gamma(K^0 \otimes S) = \Gamma(\mathcal{A} \otimes S) \cong \Gamma(S)$$

y este isomorfismo es natural. Esto prueba el inciso a).

Cuando  $S$  es fino, nos queda una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \Gamma(K^q \otimes S) \rightarrow \Gamma(C^q \otimes S) \rightarrow \Gamma(K^{q+1} \otimes S) \rightarrow 0$$

y de esta manera, tenemos que

$$H^q(M, S) = \frac{\Gamma(K^q \otimes S)}{\text{Im}(\Gamma(C^{q-1} \otimes S) \rightarrow \Gamma(C^q \otimes S))} = \frac{\Gamma(K^q \otimes S)}{\Gamma(K^q \otimes S)} = 0$$

**Definición 7.3.6.** Sean  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}'$  dos teorías de cohomología sobre  $M$  con coeficientes en haces de  $A$ -módulos. Un morfismo  $\eta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  consiste de una familia de morfismos de  $A$ -módulos  $\eta_S^q : \mathcal{H}^q(M, S) \rightarrow \mathcal{H}'^q(M, S)$  para todo  $q \geq 0$  y para todo haz  $S$  sobre  $M$ , tales que

1.  $\eta_S^0$  ya está determinado, pues debe conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^0(M, S) & \xrightarrow{\cong} & \Gamma(S) \\ \downarrow \eta_S^0 & & \parallel \\ \mathcal{H}'^0(M, S) & \xrightarrow{\cong} & \Gamma(S) \end{array}$$

2. Para todo morfismo de haces  $\varphi : S \rightarrow T$ , tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q(M, S) & \xrightarrow{\varphi_*} & \mathcal{H}^q(M, T) \\ \downarrow \eta_S^q & & \downarrow \eta_T^q \\ \mathcal{H}'^q(M, S) & \xrightarrow{\varphi_*} & \mathcal{H}'^q(M, T) \end{array}$$

para todo  $q \geq 0$ .

3. Para toda  $0 \rightarrow S' \rightarrow S \rightarrow S'' \rightarrow 0$  SEC de haces, tenemos una diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q(M, S'') & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{H}^{q+1}(M, S') \\ \downarrow \eta_{S''}^q & & \downarrow \eta_{S'}^{q+1} \\ \mathcal{H}'^q(M, S'') & \xrightarrow{\partial'} & \mathcal{H}'^{q+1}(M, S') \end{array}$$

para todo  $q \geq 0$ .

**Definición 7.3.7.** Un isomorfismo  $\eta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  es un morfismo tal que  $\eta_S^q$  es isomorfismo para todo  $q \geq 0$  y para todo  $S$ .

Sea  $S$  un haz sobre  $M$ . Sea  $\Gamma_d$  el prehaz de secciones discontinuas. Es decir, si  $p : S \rightarrow M$  es un haz, definimos

$$\Gamma_d(U) = \{f \in \text{Fun}(U, S) : pf = 1_U\}$$

De forma análoga a como hicimos con las secciones continuas, el conjunto  $\Gamma_d(U)$  resulta un  $A$ -módulo para todo  $U$  abierto de  $M$ . Las restricciones son las restricciones de conjuntos.

Sea  $S_0 = \beta(\Gamma_d)$  la hacificación. Veamos que  $S_0$  es fino. Sea  $(U_i)_{i \in I}$  un cubrimiento localmente finito por abiertos de  $M$ . Sea  $(V_i)_i$  un refinamiento tal que  $\bar{V}_i \subset U_i$  para todo  $i$ . Esto se puede hacer pues  $M$  es paracompacto y  $T_2$ .

Para cada  $x \in M$ , elegimos un  $i_x \in I$  tal que  $x \in V_{i_x}$ . Definimos  $\varphi_i : M \rightarrow A$  (no necesariamente continua) como

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_x \\ 0 & \text{si } i \neq i_x \end{cases}$$

Es claro que  $\text{Supp}(\varphi_i) \subset U_i$  y que  $\sum_i \varphi_i = 1$ .

Sean  $\tilde{l}_i : \Gamma_d(U) \rightarrow \Gamma_d(U)$  los morfismos de prehaces definidos por

$$\tilde{l}_i(f)(x) = \varphi_i(x)f(x)$$

Entonces  $\sum_i \tilde{l}_i = \text{id}$  y  $\text{Supp}(\tilde{l}_i) \subset U_i$  para todo  $i$ . Sean  $l_i = \beta(\tilde{l}_i) : S_0 \rightarrow S_0$  para todo  $i$ . De esta manera,  $\sum_i l_i = \text{id}$  y  $\text{Supp}(l_i) \subset U_i$  para todo  $i$ . Esto concluye la demostración de que  $S_0$  es fino.

Ahora veamos que existe un monomorfismo de haces  $0 \rightarrow S \rightarrow S_0$ . Sabemos que  $S = \beta(\alpha(S))$ , es decir,  $S$  es la hacificación del prehaz de secciones continuas. Si  $g \in S_m$ , entonces existe  $f \in \Gamma(S, U)$  con  $U$  un abierto de  $M$  y  $m \in U$  tal que  $g = [f]_m$ . Luego a esta  $g$  le hacemos corresponder  $[f]_m$ . Notar que si  $f \in \Gamma(S, U)$ , entonces  $f \in \Gamma_d(S, U)$ . Esto nos da un monomorfismo bien definido de  $S$  a  $S_0$ .

En definitiva, dado un haz  $S$  se tiene una SEC de haces

$$0 \rightarrow S \rightarrow S_0 \rightarrow S_0/S = \bar{S} \rightarrow 0$$

donde  $S_0$  es fino.

**Teorema 7.3.8.** *Sean  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}'$  dos teorías de cohomología sobre  $M$  con coeficientes en haces de  $A$ -módulos. Entonces existe un único morfismo  $\eta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ .*

*Demostración.* Dado  $S$  un haz sobre  $M$ , consideramos la SEC de haces

$$0 \rightarrow S \rightarrow S_0 \rightarrow \bar{S} \rightarrow 0$$

con  $S_0$  fino. Si existiera un tal  $\eta$ , debería cumplir:

a) El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^0(M, S) & \xrightarrow{\simeq} & \Gamma(S) \\ \downarrow \eta_S^0 & & \parallel \\ \mathcal{H}'^0(M, S) & \xrightarrow{\simeq} & \Gamma(S) \end{array}$$

Esto nos dice que  $\eta_S^0$  existe y es único para todo  $S$ .

Una vez que tenemos  $\eta_S^0$  para todo  $S$ , consideremos la sucesión exacta larga:

$$\begin{array}{ccccccc} \Gamma(S_0) & \longrightarrow & \Gamma(\bar{S}) & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{H}^1(M, S) & \longrightarrow & \mathcal{H}^1(M, S_0) = 0 \\ \downarrow \eta^0 & & \downarrow \eta^0 & & \downarrow \exists! & & \\ \Gamma(S_0) & \longrightarrow & \Gamma(\bar{S}) & \xrightarrow{\partial'} & \mathcal{H}'^1(M, S) & \longrightarrow & \mathcal{H}'^1(M, S_0) = 0 \end{array}$$

Luego el  $\eta_S^1$  existe y es único pues son epimorfismos y el diagrama debe conmutar. Este mismo razonamiento podemos repetirlo para  $q \geq 1$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 = \mathcal{H}^q(M, S_0) & \longrightarrow & \mathcal{H}^q(M, \bar{S}) & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{H}^{q+1}(M, S) & \longrightarrow & \mathcal{H}^{q+1}(M, S_0) = 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \eta_{\bar{S}}^q & & \downarrow \exists! & & \\
 0 = \mathcal{H}'^q(M, S_0) & \longrightarrow & \mathcal{H}'^q(M, \bar{S}) & \xrightarrow{\partial'} & \mathcal{H}'^{q+1}(M, S) & \longrightarrow & \mathcal{H}'^{q+1}(M, S_0) = 0
 \end{array}$$

Por lo tanto existe un único  $\eta_S^{q+1}$ . Esto prueba la unicidad.

Falta ver que este  $\eta$  verifica las naturalidades. Pero esto es seguir las flechas y hacer los diagramas correctos. Para una demostración completa ver [War83].  $\square$

**Corolario 7.3.9.** Si  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}'$  son dos teorías de cohomología sobre  $M$  con coeficientes en haces de  $A$ -módulos, entonces existe un único isomorfismo  $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}'$ .

**Ejercicio 7.3.10.** Sea  $S$  un haz sobre  $M$  y sea  $0 \rightarrow S \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots$  una resolución fina de  $S$ . Podemos considerar el complejo

$$0 \rightarrow \Gamma(C^0) \rightarrow \Gamma(C^1) \rightarrow \Gamma(C^2) \rightarrow \dots$$

que notamos por  $\Gamma(C^*)$ . Entonces  $H^q(M, S) \cong H^q(\Gamma(C^*))$ .

El objetivo es ahora definir, en término de haces, varias cohomologías conocidas. Por el teorema 7.3.8, todas las cohomologías resultarán isomorfas. En particular obtenemos el resultado de de Rham (que la cohomología de de Rham de una variedad es isomorfa a la cohomología singular con coeficientes en  $\mathbb{R}$ ).

Varias de las construcciones se pueden pensar para espacios topológicos Hausdorff y paracompactos, pero en general tendremos en mente a las variedades. Recordemos que trabajamos con coeficientes en un DIP.

Comencemos recordando la cohomología de Alexander-Spanier.

**Definición 7.3.11.** Sea  $G$  un  $A$ -módulo. Para  $p \geq 0$ , consideramos el conjunto  $C^p(M, G)$  de todas las funciones  $f : M^{p+1} \rightarrow G$ . Este es un  $A$ -módulo con la estructura heredada de  $G$ . El diferencial  $d : C^p(M, G) \rightarrow C^{p+1}(M, G)$  está dado por

$$df(x_0, \dots, x_{p+1}) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i f(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{p+1})$$

De esta manera,  $(C^*(M, G), d)$  resulta un complejo de cocadenas.

Ahora consideremos para cada  $p \geq 0$  el submódulo  $C_0^p(M, G)$  de  $C^p(M, G)$  que consiste de las  $f \in C^p(M, G)$  tales que para todo  $m \in M$ ,  $[f]_m = 0$  (es decir,  $f$  es localmente cero), donde  $[f]_m$  es la clase de  $f$  en  $\varinjlim_{m \in U} C^p(U, G)$ , con los  $U \subset M$  abiertos. O sea,  $f \in C_0^p(M, G)$  si y solo si para todo  $m \in M$  existe

un entorno  $U \subset M$  de  $m$  tal que  $f|_{U^{p+1}} = 0$ . Es claro que  $C_0^p(M, G)$  es un submódulo de  $C^p(M, G)$  y que el diferencial se restringe bien. Consideramos el complejo

$$\overline{C}^p(M, G) = \frac{C^p(M, G)}{C_0^p(M, G)}$$

con el diferencial  $d$  anterior pasado al cociente. Se define la cohomología de Alexander-Spanier de  $M$  con coeficientes en  $G$  como

$$H_{A-S}^q(M, G) = H^q(\overline{C}^*(M, G))$$

Definamos  $H_{A-S}^q(M, G)$  en término de haces.

Dado  $G$  un  $A$ -módulo, consideramos  $\mathcal{G}$  el haz constante  $G$ . Es decir,  $p : M \times G \rightarrow M$  donde  $G$  tiene la topología discreta. Construimos una resolución fina y sin torsión de  $\mathcal{A}$  de la siguiente manera. Definimos para cada  $p$  un prehaz de  $A$ -módulos  $A^p(M, G) = \{A^p(U) = C^p(U, G), \rho_{UV}(f) = f|_{U^{p+1}}\}$ . Para  $p \geq 1$ , resulta que  $A^p(M, G)$  no es completo porque falla la unicidad. Concretamente, si  $U = \bigcup_i U_i$  y  $f_i \in A^p(U_i)$  para todo  $i$  son tales que  $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$  para todo  $i, j$ , entonces existe  $f \in A^p(U)$  tal que  $f|_{U_i} = f_i$  para todo  $i$ , pero no es única, ya que puedo definir la  $f$  en  $U^{p+1} - \bigcup_i U_i^{p+1}$  como quiera. Para cada  $p \geq 1$ , definimos  $\mathcal{A}^p(M, G) = \beta(A^p(M, G))$  la hacificación de  $A^p$ . De manera análoga a como hicimos antes, tenemos morfismos de prehaces  $d : A^p \rightarrow A^{p+1}$ . Estos inducen un morfismo  $d : \mathcal{A}^p(M, G) \rightarrow \mathcal{A}^{p+1}(M, G)$ . Además es fácil ver que  $d^2 = 0$ .

Así, cuando  $G = A$  tenemos una sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^0(M, A) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1(M, G) \xrightarrow{d} \dots$$

**Proposición 7.3.12.** La sucesión anterior es una resolución fina y sin torsión de  $A$ .

*Demostración.* Dividimos la demostración en tres pasos.

1)  $\mathcal{A}^p(M, A)$  es sin torsión: si  $a[f] = 0$  y  $a \neq 0$ , entonces  $(a.f)(x_0, \dots, x_p) = 0$  para todo  $(x_0, \dots, x_p) \in U^{p+1}$ . Como  $A$  es un dominio íntegro, concluimos que  $f|_{U^{p+1}} = 0$ , por lo que  $[f] = 0$ .

2)  $\mathcal{A}^p(M, A)$  son finos: sea  $(U_i)_i$  un cubrimiento localmente finito de  $M$ . Sean  $\varphi_i : M \rightarrow A$  una familia tal que  $\varphi_i(x) = 1$  si  $i = i_x$  y 0 si no, donde para cada  $x \in M$  fijamos un  $i_x$  tal que  $x \in U_{i_x}$ . Entonces  $\sum_i \varphi_i = 1$  y  $\text{Supp}(\varphi_i) \subset U_i$  para todo  $i$ . Definimos  $\tilde{l}_i : A^p(U) \rightarrow A^p(U)$  como  $\tilde{l}_i(f)(x_0, \dots, x_p) = \varphi_i(x_0)f(x_0, \dots, x_p)$ . Entonces los  $\tilde{l}_i$  son endomorfismos,  $\text{Supp}(\tilde{l}_i) \subset U_i$  para todo  $i$  y  $\sum_i \tilde{l}_i = 1$ . Luego los  $\tilde{l}_i$  inducen morfismos  $l_i : \mathcal{A}^p(M, A) \rightarrow \mathcal{A}^p(M, A)$  los cuales son una partición de la unidad subordinada a  $(U_i)_i$ .

3) Es una resolución: tenemos que ver que es exacto. Como  $d^2 = 0$ , resta ver que  $\text{Ker}(d) \subset \text{Im}(d)$ . Para ello, basta con verlo a nivel de prehaz: si

$f \in A^p(U, A)$  es tal que  $df = 0$  queremos ver que existe  $g \in A^{p-1}(U, A)$  tal que  $dg = f$ . Fijemos un  $x \in U$  y definamos  $g : U^p \rightarrow A$  como  $g(x_0, \dots, x_{p-1}) = f(x, x_0, \dots, x_{p-1})$ , que cumple lo pedido.  $\square$

**Observación 7.3.13.**  $H^q(M, S) = H^q(\Gamma(\mathcal{A}^*(M, A) \otimes S))$

Sea  $\mathcal{G}$  el haz constante  $G$ . Consideremos la sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}^0(M, G) \rightarrow \mathcal{A}^1(M, G) \rightarrow \dots$$

Esto es una resolución fina sobre el haz  $\mathcal{G}$ . Entonces  $H^q(M, \mathcal{G}) = H^q(\Gamma(\mathcal{A}^*(M, G)))$ .

Veamos que  $H_{A-S}^q(M, G) = H^q(M, \mathcal{G})$ .

**Lema 7.3.14.** Sea  $S = \{S(U), \rho_{UV}\}$  un prehaz de  $A$ -módulos sobre  $M$  que cumple existencia del pegado. Sea  $\mathcal{S}$  el haz asociado. Consideremos  $S_0(M) \subset S(M)$  el submódulo de las  $f \in S(M)$  tales que  $[f]_m = 0$  para todo  $m \in M$ . Entonces se tiene una SEC de  $A$ -módulos

$$0 \rightarrow S_0(M) \rightarrow S(M) \xrightarrow{\gamma} \Gamma(\mathcal{S}) \rightarrow 0$$

donde  $\gamma(f)(m) = [f]_m$ .

*Demostración.* Es claro que  $\text{Ker}(\gamma) = S_0(M)$ . Luego solo hay que ver que  $\gamma$  es epimorfismo. Sea  $t \in \Gamma(\mathcal{S})$ . Por definición,  $t : M \rightarrow \mathcal{S}$  es una función continua tal que  $t(m) \in \lim_{\rightarrow m \in U} S(U)$ . Luego  $t(m) = [f_m]$ , donde  $f_m \in S(U_m)$  para algún entorno  $U_m$  de  $m$ . De esta manera, existe un cubrimiento por abiertos  $(U_i)_i$  localmente finito de  $M$  con  $f_i \in S(U_i)$  y tal que  $\gamma(f_i) = t|_{U_i}$  para todo  $i$ . Tomemos  $(V_i)_i$  un refinamiento de  $(U_i)_i$  tal que  $\overline{V_i} \subset U_i$  para todo  $i$ . Para cada  $m \in M$ , sea  $I_m = \{i \in I : m \in U_i\}$ . Luego  $I_m$  es finito para todo  $m$ . Consideremos un abierto  $W_m$  alrededor de  $m$  tal que:

1.  $W_m \cap \overline{V_j} = \emptyset$  para todo  $j \notin I_m$ .
2.  $W_m \subset \bigcup_{i \in I_m} U_i$
3.  $f_i|_{W_m} = f_j|_{W_m}$  para todo  $i, j \in I_m$  (esto se puede porque  $\gamma(f_i) = t|_{U_i}$ )

Llamamos  $f_m = f_i|_{W_m} \in S(W_m)$  para todo  $m \in M$ . Sean  $m, n \in M$ . Veamos que  $f_m|_{W_m \cap W_n} = f_n|_{W_m \cap W_n}$ . Si  $p \in W_m \cap W_n$ , entonces  $I_p \subset I_m \cap I_n$ . Luego si  $i \in I_p$ , tenemos que

$$f_m|_{W_m \cap W_n} = f_i|_{W_m \cap W_n} = f_n|_{W_m \cap W_n}$$

Por lo tanto las  $(f_m)_m$  se pegan bien, y como  $M = \bigcup_m W_m$ , con  $f_m \in S(W_m)$ , existe  $f \in S(M)$  tal que  $f|_{W_m} = f_m$  para todo  $m$ . Esta  $f$  cumple que  $\gamma(f) = t$ .  $\square$

**Corolario 7.3.15.**  $H_{A-S}^q(M, G) = H^q(M, \mathcal{G})$

*Demostración.*  $H_{A-S}^q(M, G) = H^q(\overline{C}^*(M, G))$  y  $H^q(M, \mathcal{G}) = H^q(\Gamma(\mathcal{A}^*(M, G)))$ . Como  $A^p(G)$  cumple con las hipótesis del lema, tenemos una SEC

$$0 \rightarrow C_0^p(M, G) = A_0^p(M, G) \rightarrow A^p(M, G) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}^*(M, G)) \rightarrow 0$$

O sea,  $\Gamma(\mathcal{A}^*(M, G)) = \overline{C}^*(M, G)$  son complejos isomorfos.  $\square$

Pasamos ahora a definir la cohomología de de Rham en término de haces. Sea  $M$  una variedad diferenciable. Dado  $q \geq 0$ , para cada abierto  $U$  consideramos  $\Omega^q(U)$ , las  $q$ -formas diferenciales en  $U$ . Esto define un prehaz de  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales sobre  $M$ ,  $\Omega^q = \{\Omega^q(U), \rho_{UV}\}_{U \subset V \subset M}$ , donde  $\rho_{UV}$  son las restricciones de las formas.

Notar que  $\Omega^q$  es un prehaz completo para todo  $q \geq 0$  por el pegado de formas.

El diferencial  $d : \Omega^q \rightarrow \Omega^{q+1}$  resulta un morfismo de prehaces.

Sea  $\hat{\Omega}^q$  la hacificación de  $\Omega^q$ . Para  $m \in M$ , se tienen los stalks

$$\hat{\Omega}_m^q = \lim_{\rightarrow m \in U} \Omega^q(U)$$

Sea  $\hat{\mathbb{R}}$  el haz constante  $\mathbb{R}$ . Se tiene una sucesión de haces de  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales sobre  $M$ :

$$0 \rightarrow \hat{\mathbb{R}} \rightarrow \hat{\Omega}^0 \rightarrow \hat{\Omega}^1 \rightarrow \hat{\Omega}^2 \rightarrow \dots$$

Recordar que la primera flecha es la que manda un elemento  $a$  al germen de la función constante  $a$ .

**Proposición 7.3.16.** La sucesión anterior es una resolución fina y sin torsión de  $\hat{\mathbb{R}}$ .

*Demostración.* Es claro que son sin torsión dado que son  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales. Para ver que es fina, tomemos un cubrimiento por abiertos  $(U_i)_i$  localmente finito de  $M$ . Entonces existe una partición de la unidad  $(\varphi_i)_i$  de funciones  $\mathcal{C}^\infty$  sobre  $M$ . Cada  $\varphi_i$  induce para todo  $q$  un endomorfismo  $\tilde{l}_i : \Omega^q(U) \rightarrow \Omega^q(U)$  dado por  $\tilde{l}_i(\omega) = \varphi_i \omega$ . Entonces  $\sum_i \tilde{l}_i = 1$  y  $\text{Supp}(\tilde{l}_i) \subset U_i$  para todo  $i$ . Estas inducen una familia  $\{l_i\}_i$  que es una partición de la unidad en  $\hat{\Omega}^q$ .

Finalmente veamos que es una resolución. Para ello debemos ver que para todo  $m \in M$ , tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \hat{\mathbb{R}}_m \rightarrow \hat{\Omega}_m^0 \rightarrow \hat{\Omega}_m^1 \rightarrow \dots$$

Esta sucesión es en realidad la siguiente sucesión:

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \lim_{\rightarrow m \in U} \Omega^0(U) \rightarrow \lim_{\rightarrow m \in U} \Omega^1(U) \rightarrow \dots$$

Como las bolas son cofinales, podemos restringir los colímites a las bolas. Por el lema de Poincaré, que vimos en el Capítulo 4, si  $U$  es una bola, entonces

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \Omega^0(U) \rightarrow \Omega^1(U) \rightarrow \dots$$

es exacta. Al pasar al colímite, queda exacto.  $\square$

**Corolario 7.3.17.**  $H^q(M, \hat{\mathbb{R}}) = H^q(\Gamma(\hat{\Omega}^*))$ .

**Proposición 7.3.18.**  $H^q(M, \hat{\mathbb{R}}) = H_{dR}^q(M)$  (la cohomología de de Rham de  $M$ ).

*Demostración.* Como los  $\Omega^q$  son prehaces completos, hay un isomorfismo natural  $\Omega^q \cong \Gamma(\hat{\Omega}^q)$ . Luego  $\Omega^q(M) \cong \Gamma(\hat{\Omega}^q)$  para todo  $q \geq 0$ . Además la  $d$  sigue siendo la misma.  $\square$

Hasta el momento, por unicidad de teoría de cohomología sobre  $M$  con coeficientes en haces de  $A$ -módulos, para  $A = \mathbb{R}$ ,  $M$  variedad y  $S = \hat{\mathbb{R}}$ , tenemos que

$$H_{A-S}^*(M, \hat{\mathbb{R}}) = H_{dR}^*(M)$$

Ahora nos concentramos en la cohomología singular y singular  $\mathcal{C}^\infty$ .

Sea  $M$  una variedad. Denotamos  $S_q(M)$  al  $\mathbb{Z}$ -módulo libre con base las funciones continuas  $\sigma : \Delta^q \rightarrow M$ , donde  $\Delta^q$  es el  $q$ -simplex estándar. Sea  $\delta : S_q(M) \rightarrow S_{q-1}(M)$  el morfismo que en cada elemento de la base está definido por

$$\delta(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q]}$$

Es decir, la suma alternada de la restricción de  $\sigma$  a las distintas caras del simplex. Es claro que  $\delta^2 = 0$ . La homología singular de  $M$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  es la homología de este complejo

$$H_q^\Delta(M) := H_q(S_*(M))$$

Análogamente, tomando los  $\sigma : \Delta^q \rightarrow M$  diferenciables en vez de continuos, definimos el complejo singular  $\mathcal{C}^\infty$  de  $M$ , que notamos por  $S_q^\infty(M)$  y la homología singular  $\mathcal{C}^\infty$  de  $M$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  es

$$H_q^{\Delta^\infty}(M) = H_q(S_q^\infty(M))$$

Recordemos que una  $\sigma : \Delta^q \rightarrow M$  es diferenciable si puede extenderse a un abierto de manera que resulte diferenciable.

Sea  $A$  un DIP. Sea  $S^q(M, A) = \text{Hom}(S_q(M), A)$  y sea  $d : S^q(M, A) \rightarrow S^{q+1}(M, A)$  el morfismo  $d(f) = f \circ \delta$ . Se define la cohomología singular de  $M$  con coeficientes en  $A$  como

$$H_\Delta^q(M, A) = H^q(S^*(M, A))$$

Análogamente, tenemos la cohomología singular  $\mathcal{C}^\infty$

$$H_{\Delta^\infty}^q(M, A) = H^q(S_\infty^*(M, A))$$

Veamos a expresarlo en término de haces. Para cada  $q \geq 0$ , definimos el prehaz

$$S^q = \{S^q(U, A), \rho_{UV}\}_{U \subset V \subset M}$$

donde  $\rho_{UV}$  es la inducida por la inclusión  $i : U \rightarrow V$ . Este es un pre haz de  $A$ -módulos. La  $d : S^q \rightarrow S^{q+1}$  es un morfismo de pre haces. Análogamente lo hacemos para  $S_\infty^q$ .

**Ejercicio 7.3.19.**  $S^0$  es un pre haz completo, y  $S^q$  para  $q \geq 1$  admite pegado pero no es único.

Sea  $\hat{S}^q$  la hacificación de  $S^q$  para todo  $q \geq 0$ .

**Proposición 7.3.20.** Se tiene una resolución fina y sin torsión

$$0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \hat{S}^0 \rightarrow \hat{S}^1 \rightarrow \hat{S}^2 \rightarrow \dots$$

*Demostración.* Como  $A$  es un DIP, en particular es un dominio íntegro, por lo que los  $\hat{S}^q$  son sin torsión.

Veamos que son finos. Sea  $(U_i)_i$  un cubrimiento por abiertos localmente finito de  $M$ . Fijemos para cada  $x \in M$ , un  $i_x \in I$  tal que  $x \in U_{i_x}$ . Sean  $\varphi_i : M \rightarrow A$  las funciones definidas por

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 & i = i_x \\ 0 & i \neq i_x \end{cases}$$

Entonces  $\text{Supp}(\varphi_i) \subset U_i$  y  $\sum_i \varphi_i = 1$ . Con estas definimos los endomorfismos  $\tilde{l}_i : S^q(U, A) \rightarrow S^q(U, A)$  dados por  $\tilde{l}_i(f)(\sigma) = \varphi_i(\sigma(v_0))f(\sigma)$  (el  $v_0$  está fijo). Entonces  $\sum_i \tilde{l}_i = 1$  y  $\text{Supp}(\tilde{l}_i) \subset U_i$  para todo  $i$ . Estas inducen  $(l_i)$  particiones de la unidad en  $\hat{S}^q$  para todo  $q \geq 0$  subordinadas al cubrimiento  $(U_i)_i$ . Es el mismo procedimiento que utilizamos en demostraciones anteriores.

Finalmente veamos que es una resolución. Para todo  $m \in M$ , veamos que la sucesión

$$0 \rightarrow A \rightarrow \hat{S}_m^0 \rightarrow \hat{S}_m^1 \rightarrow \dots$$

es exacta. Recordar que

$$\hat{S}_m^q = \lim_{\rightarrow m \in U} S^q(U, A)$$

Análogamente a lo que hicimos antes, para trabajar con colímites en una variedad, nos podemos restringir a las bolas porque son cofinales. Para  $U$  bola, la sucesión

$$0 \rightarrow A \rightarrow S^0(U, A) \rightarrow S^1(U, A) \rightarrow \dots$$

es exacta ya que  $U$  es contráctil y

$$H_\Delta^q(\text{contráctil}) = \begin{cases} A & q = 0 \\ 0 & q \neq 0 \end{cases}$$

Sin embargo, sabemos que esto vale en el caso de las continuas, pero ¿por qué vale en el caso  $\mathcal{C}^\infty$ ? Una forma de justificar esto es recurriendo a la aproximación  $\mathcal{C}^\infty$  de funciones continuas, lo cual permite demostrar que

$$H_{\Delta^\infty}^q(\text{contráctil}) = H_{\Delta^\infty}^q(*) = \begin{cases} A & q = 0 \\ 0 & q \neq 0 \end{cases}$$

Entonces para cada  $m \in M$ , la sucesión es exacta. □

**Corolario 7.3.21.**  $H^q(M, \mathcal{A}) = H^q(\Gamma(\hat{S}^*(M, A))) = H^q(\Gamma(\hat{S}_\infty^*(M, A)))$

**Proposición 7.3.22.**  $H_\Delta^*(M, A) = H^*(M, \mathcal{A}) = H_{\Delta^\infty}^*(M, A)$

*Demostración.* Veamos que  $H^q(S^*(M, A)) = H^q(\Gamma(\hat{S}^*(M, A)))$ . Lo mismo se puede hacer para  $S_\infty$ .

Como los prehaces  $S^q$  poseen pegado no único, se tiene una SEC (por el lema 7.3.14)

$$0 \rightarrow S_0^q(M) \rightarrow S^q(M, A) \xrightarrow{\gamma} \Gamma(\hat{S}^q) \rightarrow 0$$

donde  $S_0^q(M) = \{f \in S^q(M, A) : \text{localmente cero}\}$ . Para ver que  $H^q(S^*(M, A)) = H^q(\gamma(\hat{S}^q))$  basta ver que  $H^q(S_0^*(M, A)) = 0$  para todo  $q \geq 0$ .

Dado  $\mathcal{U}$  un cubrimiento por abiertos de  $M$ , consideramos el subcomplejo  $S_*^\mathcal{U}(M) \subset S_*(M)$  de los  $\sigma : \Delta^q \rightarrow M$  tales que  $\sigma(\Delta^q) \subset U$  para algún  $U \in \mathcal{U}$ . Por un teorema clásico de homología de topología algebraica [Hat02], la inclusión  $i : S_*^\mathcal{U}(M) \rightarrow S_*(M)$  es una equivalencia homotópica, por lo que  $H_*^\Delta(M) = H_*(S_*^\mathcal{U}(M))$ . Así,  $i^* : H_\Delta^*(M, A) \rightarrow H^*(\text{Hom}(S_*^\mathcal{U}(M), A))$  es un isomorfismo.

Sea  $S_\mathcal{U}^*(M, A) = \text{Hom}(S_*^\mathcal{U}(M), A)$ . Llamemos  $K_\mathcal{U} = \text{Ker}(i^*)$ , donde  $i^* : S^*(M, A) \rightarrow S_\mathcal{U}^*(M, A)$ . Entonces tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_\mathcal{U} \rightarrow S^*(M, A) \xrightarrow{i^*} S_\mathcal{U}^*(M, A) \rightarrow 0$$

por lo que  $H^*(K_\mathcal{U}) = 0$  para todo  $q \geq 0$ .

Veamos que  $H^q(S_0(M)) = 0$  para todo  $q \geq 0$ . Sea  $f \in S_0^q(M, A)$  tal que  $df = 0$ . Debemos ver que existe  $g \in S_0^{q-1}(M, A)$  tal que  $f = dg$ . Sea  $\mathcal{U}$  un cubrimiento por abiertos de  $M$  tal que  $f \in K_\mathcal{U}$ , ya que  $i^*(f) = 0$  en  $S_\mathcal{U}^*(M, A)$ . Como  $H^*(K_\mathcal{U}) = 0$ , existe  $g \in K_\mathcal{U}^{q-1}$  tal que  $dg = f$ . Además,  $K_\mathcal{U}^{q-1} \subset S_0^{q-1}(M, A)$ .

Análogamente se puede hacer todo para el caso  $\mathcal{C}^\infty$  utilizando aproximaciones. □

**Corolario 7.3.23.** Sea  $M$  una variedad,  $A = \mathbb{R}$ . Entonces

$$H_{dR}^*(M) = H_\Delta^*(M, \mathbb{R}) = H_{\Delta^\infty}^*(M, \mathbb{R}) = H_{A-S}^*(M, \mathbb{R})$$

La primera igualdad de este corolario se conoce como Teorema de de Rham. En la última sección de este capítulo vamos a explicitar el isomorfismo de de Rham.

## 7.4 Cohomología de Čech

**Definición 7.4.1.** Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $\mathcal{U}$  un cubrimiento por abiertos de  $X$ . El nervio de  $\mathcal{U}$  es el complejo simplicial  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$  cuyos vértices son los abiertos de  $\mathcal{U}$  y los símplexes son los subconjuntos finitos de  $\mathcal{U}$  cuya intersección es no vacía.

Supongamos que  $\mathcal{U}$  es un cubrimiento de un espacio topológico  $X$ . Sea  $\mathcal{V}$  un refinamiento de  $\mathcal{U}$  y sea  $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  una función tal que  $V \subset g(V)$  para todo  $V \in \mathcal{V}$ . Claramente  $g$  es un morfismo simplicial. Además, si  $g' : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  es otra función tal que  $V \subset g'(V)$  para todo  $V \in \mathcal{V}$ , entonces  $g$  y  $g'$  son contiguas, por lo que en particular son homotópicas, y por lo tanto,  $g_* = g'_*$  y  $g^* = g'^*$  como morfismos inducidos en las homologías y cohomologías de estos complejos. Llamamos  $i^* = g^* = g'^*$  a este morfismo, el cual está bien definido.

**Definición 7.4.2.** La cohomología de Čech de un espacio  $X$  es

$$\check{H}^q(X) = \lim_{\rightarrow \mathcal{U}} H^q(\mathcal{N}(\mathcal{U}))$$

donde los  $\mathcal{U}$  recorren todos los cubrimientos por abiertos de  $X$  y los morfismos son las  $i^*$  definidas antes.

Si  $A$  es un DIP y  $\mathcal{U}$  es un cubrimiento de  $X$ , definimos

$$H^q(\mathcal{U}, A) = H^q(\text{Hom}(C_*(\mathcal{N}(\mathcal{U})), A))$$

La cohomología de Čech de  $M$  con coeficientes en  $A$  es

$$\check{H}^q(M, A) = \lim_{\rightarrow \mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, A)$$

En lo que sigue,  $A$  es un DIP y  $M$  es un espacio paracompacto y  $T_2$ . Vamos a definir la cohomología de Čech con coeficientes en haces.

Sea  $S$  un haz de  $A$ -módulos sobre  $M$  y sea  $\mathcal{U}$  un cubrimiento por abiertos de  $M$ . Para  $q \geq 0$ , sea  $C^q(\mathcal{U}, S)$  el conjunto de las funciones  $f : \{q\text{-símplexes de } \mathcal{N}(\mathcal{U})\} \rightarrow \bigoplus_{V \subset M \text{ ab}} \Gamma(S, V)$  tales que si  $\sigma = \{V_0, \dots, V_q\}$  es un  $q$ -símplex de  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ , entonces  $f(\sigma) \in \Gamma(S, \tilde{\sigma})$ , donde  $\tilde{\sigma} = \bigcap_{i=0}^q V_i$ . Los  $C^q(\mathcal{U}, S)$  son  $A$ -módulos y el diferencial  $d : C^q(\mathcal{U}, S) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{U}, S)$  está dado por

$$(df)(\sigma) = \sum_i (-1)^i f(\sigma^{(i)})|_{\tilde{\sigma}}$$

donde  $\sigma^{(i)}$  es la cara  $i$ -ésima de  $\sigma$ .

Definimos  $H^q(\mathcal{U}, S) = H^q(C(\mathcal{U}, S))$ .

**Observación 7.4.3.** Si  $S = \mathcal{A}$  es el haz constante  $A$  y  $\mathcal{U}$  es un cubrimiento bueno en el sentido de que los  $\tilde{\sigma}$  son conexos para todo símplex  $\sigma \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$ , entonces  $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{A}) = C^q(\mathcal{U}, A)$ .

Si  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  es un refinamiento, por una cuenta análoga al caso de Čech clásico, tenemos una única  $i^* : H^q(\mathcal{U}, S) \rightarrow H^q(\mathcal{V}, S)$ . Se define la cohomología de Čech de  $M$  con coeficientes en el haz  $S$  como

$$H^q(M, S) = \lim_{\rightarrow \mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, S)$$

Por la observación anterior, y como los cubrimientos buenos son cofinales, se tiene que

$$\check{H}^q(M, A) = H^q(M, \mathcal{A})$$

En [War83] puede encontrarse la demostración de este resultado:

**Teorema 7.4.4.** *La construcción de  $\{H^q(M, S) : q, S\}$  determina una teoría de cohomología sobre  $M$  con coeficientes en haces.*

Y por todo lo anterior se deduce que  $H^*(M, A) = \check{H}^*(M, A)$ .

## 7.5 Teorema de de Rham

Si bien ya demostramos que la cohomología de de Rham coincide con la cohomología singular, ahora vamos a explicitar dicho isomorfismo.

Antes de ello, vamos a recordar la noción de integración sobre símlices.

Podemos pensar a  $\Delta^q$  como un subespacio de  $\mathbb{R}^q$ . Recordemos que una función  $\sigma : \Delta^q \rightarrow M$  es  $\mathcal{C}^\infty$  si existe un abierto  $U \subset \mathbb{R}^q$  que contiene a  $\Delta^q$  y una extensión diferenciable  $\tilde{\sigma} : U \rightarrow M$  de  $\sigma$ .

Recordemos también que  $S_q^\infty(M)$  es el  $\mathbb{Z}$ -módulo libre cuya base son los  $\sigma : \Delta^q \rightarrow M$  diferenciables. El morfismo de borde este complejo es

$$\delta(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma^{(i)}$$

Tenemos también  $S_\infty^q(M, \mathbb{R}) = \text{Hom}(S_q^\infty(M), \mathbb{R})$  con el diferencial  $d(f) = f \circ \sigma$ . La cohomología singular  $\mathcal{C}^\infty$  de  $M$  con coeficientes en  $\mathbb{R}$  es

$$H_{\Delta^\infty}^q(M, \mathbb{R}) = H^q(S_\infty^*(M, \mathbb{R}))$$

**Definición 7.5.1.** Sea  $\omega$  una  $q$ -forma diferenciable de una variedad  $M$  y sea  $\sigma : \Delta^q \rightarrow M$  diferenciable. Definimos la integral de  $\omega$  sobre el símplex  $\sigma$  como

$$\int_\sigma \omega := \int_{\Delta^q} \sigma^*(\omega)$$

Si  $c = \sum a_j \sigma_j \in S_q^\infty(M)$  es una cadena, podemos extender esta definición linealmente y definir la integral de  $\omega$  sobre la cadena  $c$  como

$$\int_c \omega = \sum_j a_j \int_{\sigma_j} \omega = \sum_j a_j \int_{\Delta^q} \sigma_j^*(\omega)$$

Notar que por el teorema de Stokes, tenemos que  $\int_c d\omega = \int_{\delta c} \omega$ .

Tenemos una aplicación  $\gamma_q : \Omega^q(M) \rightarrow S_\infty^q(M, \mathbb{R})$  definida por

$$\gamma_q(\omega)(\sigma) = \int_\sigma \omega$$

Por el teorema de Stokes,  $\gamma$  resulta un morfismo de complejos

$$\gamma(d\omega)(c) = \int_c d\omega = \int_{\delta c} \omega = \gamma(\omega)(\delta c) = d(\gamma(\omega))(c)$$

Por lo tanto, tenemos un morfismo inducido en las cohomologías  $\gamma : H_{dR}^*(M) \rightarrow H_{\Delta_\infty}^q(M, \mathbb{R})$ .

**Teorema 7.5.2.** (de Rham) *El morfismo  $\gamma$  es un isomorfismo a nivel de las cohomologías.*

*Demostración.* Claramente  $\gamma$  induce un morfismo de haces para cada  $q \geq 0$ , donde los prehaces que consideramos acá son

$$\Omega^q = \{\Omega^q(U), \rho_{UV}\}$$

y

$$S_\infty^q = \{S_\infty^q(U, \mathbb{R}), \rho_{UV}\}.$$

Hacifcando tenemos un diagrama inducido:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \hat{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \hat{\Omega}^0 & \longrightarrow & \hat{\Omega}^1 & \longrightarrow & \hat{\Omega}^2 & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & & \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{S}^0 & \longrightarrow & \mathcal{S}^1 & \longrightarrow & \mathcal{S}^2 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Como  $\Omega^*$  es completo, tenemos un isomorfismo canónico  $\Omega^*(M) \rightarrow \Gamma(\hat{\Omega}^*)$ . Además, se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^*(M) & \xrightarrow{\cong} & \Gamma(\hat{\Omega}^*) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \gamma & & \downarrow \Gamma(\gamma) & & \\ 0 & \rightarrow & (S_\infty^*(M, \mathbb{R}))_0 & \longrightarrow & S_\infty^*(M, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{S}^*) \longrightarrow 0 \end{array}$$

La flecha  $S_\infty^*(M, \mathbb{R}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{S}^*)$  es un isomorfismo a nivel de homología pues  $(S_\infty^*(M, \mathbb{R}))_0$  tiene cohomología cero al ser casi completo. También  $\Gamma(\gamma)$  induce morfismos en las cohomologías, y como hay un único isomorfismo entre ellas, deducimos que  $\Gamma(\gamma)$  induce un isomorfismo a nivel de cohomologías. Por lo tanto,  $\gamma : \Omega^*(M) \rightarrow S_\infty^*(M, \mathbb{R})$  induce isomorfismo en las cohomologías.  $\square$

El isomorfismo con  $H_\Delta^q(M, \mathbb{R})$  se consigue utilizando aproximaciones  $\mathcal{C}^\infty$ .

# Capítulo 8

## Introducción a nudos y links

### 8.1 Preliminares

Terminaremos estas notas con una introducción a la teoría de nudos. Comenzaremos estudiando nudos y links en espacios topológicos generales. Luego nos concentraremos en nudos en  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{S}^3$ . Para este capítulo seguimos en parte las exposiciones de [Lic97, Rol04].

**Definición 8.1.1.** Un nudo en un espacio topológico  $X$  es un subespacio homeomorfo a  $\mathbb{S}^n$ . Un link en  $X$  es un subespacio homeomorfo a una unión disjunta de esferas  $\mathbb{S}^{n_1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{S}^{n_r}$ .

Hay distintas variantes en las definiciones de nudos, según el contexto en el que se trabaje:

1. A veces se pide que el espacio ambiente  $X$  sea una variedad y que el nudo o link sea una subvariedad regular de  $X$ .
2. En lugar de considerar el subespacio (como subconjunto del espacio ambiente), a veces se piensa al nudo como un embedding  $i : \mathbb{S}^n \rightarrow X$ .
3. Se requiere muchas veces que el nudo (o el embedding) sea PL (es decir, lineal a trozos). Esto es que exista una triangulación de  $X$  de manera tal que el nudo es un subcomplejo.
4. En algunos casos se pide que  $X$  sea una variedad orientada y  $K \subset X$  una subvariedad regular orientada.

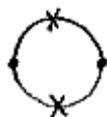
En principio, pensemos a los nudos como subespacios de un espacio  $X$  homeomorfos a una esfera.

**Definición 8.1.2.** Dos nudos  $K$  y  $K'$  en  $X$  son equivalentes, y se nota  $K \sim K'$  si existe un homeomorfismo  $h : X \rightarrow X$  tal que  $h(K) = K'$ . Dos links  $L_1 = K_1 \cup \dots \cup K_r$  y  $L_2 = K'_1 \cup \dots \cup K'_r$  son equivalentes, y se nota  $L_1 \sim L_2$ , si existe un homeomorfismo  $h : X \rightarrow X$  tal que  $h(K_i) = K'_i$  para todo  $i$ .

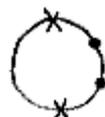
**Observación 8.1.3.** Dependiendo el contexto, en la definición anterior se puede pedir que la  $h$  sea diferenciable, PL, que preserve la orientación, etc. Si vemos a los nudos como embeddings  $K, K' : \mathbb{S}^n \rightarrow X$ , se puede requerir que  $h \circ K = K'$ .

**Ejemplo 8.1.4.**

1.  $X = \mathbb{S}^1$ . Consideramos los siguientes dos links de tipo  $\mathbb{S}^0 \cup \mathbb{S}^0$  en  $\mathbb{S}^1$ :



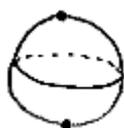
(a)  $L_1$



(b)  $L_2$

Por conexión, los links  $L_1$  y  $L_2$  no son equivalentes.

2.  $X = \mathbb{S}^2$ , consideramos los siguientes dos links del tipo  $\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^0$ :



(a)  $L_1$



(b)  $L_2$

Por un argumento de conexión análogo al anterior,  $L_1$  y  $L_2$  no son equivalentes.

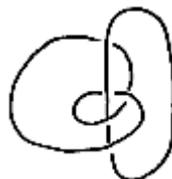
3.  $X = \mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{S}^3$ . Consideramos los siguientes tres links del tipo  $\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1$ :



(a)  $L_1$



(b)  $L_2$



(c)  $L_3$

Los links  $L_1$  y  $L_2$  no son equivalentes. Para ver esto, sean  $K_1$  y  $K_2$  los dos  $\mathbb{S}^1$  de  $L_1$  y  $K'_1$  y  $K'_2$  los dos  $\mathbb{S}^1$  de  $L_2$ , y supongamos que  $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  es un homeomorfismo tal que  $h(K_i) = K'_i$ . Entonces  $h : \mathbb{S}^3 - K_1 \rightarrow \mathbb{S}^3 - K'_1$  es un homeomorfismo que lleva a  $K_2$  en  $K'_2$ . Sin embargo, la inclusión

de  $K_2$  en  $\mathbb{S}^3 - K_1$  no es nullhomotópica, mientras que la inclusión de  $K'_2$  en  $\mathbb{S}^3 - K'_1$  sí es nullhomotópica. La misma cuenta muestra que  $L_2$  y  $L_3$  no son links equivalentes.

Para ver que  $L_1$  y  $L_3$  no son equivalentes, miramos el complemento en  $\mathbb{S}^3$  del nudo dibujado a la derecha en ambos casos. Entonces el nudo de la izquierda da una vuelta a este agujero en el caso de  $L_1$  mientras que en el caso de  $L_3$  da dos vueltas. En  $L_1$  la situación es análoga si miramos el complemento del nudo de la izquierda.

4. Caso general: Sea  $X = \mathbb{S}^{p+q+1}$  y sean  $L_1$  y  $L_2$  links del tipo  $\mathbb{S}^p \cup \mathbb{S}^q$ , con  $p, q \geq 0$ , definidos por:

$$L_1 = \begin{cases} K_1 = \{x \in \mathbb{R}^{p+1} : \|x\| = 1\} \times 0 \\ K_2 = (0 \times \mathbb{R}^q) \cup \{\infty\} \end{cases}$$

$$L_2 = \begin{cases} K'_1 = \text{esfera en } \mathbb{R}^{p+1} \text{ que no encierre al } 0 \\ K'_2 = K_2 \end{cases}$$

Veamos que  $L_1$  y  $L_2$  no son equivalentes. Sea  $h : \mathbb{S}^{p+q+1} \rightarrow \mathbb{S}^{p+q+1}$  un homeomorfismo tal que  $h(K_i) = K'_i$ . Entonces  $h : \mathbb{S}^{p+q+1} - K_2 \rightarrow \mathbb{S}^{p+q+1} - K'_2$  y  $h(K_1) = K'_1$ . Pero la inclusión  $K_1 \subset \mathbb{S}^{p+q+1} - K_2$  no es nullhomotópica, mientras que  $K'_1 \subset \mathbb{S}^{p+q+1} - K'_2$  sí lo es. Notar que

$$\mathbb{S}^{p+q+1} - K_2 = \mathbb{S}^{p+q+1} - \mathbb{S}^q = (\mathbb{R}^{p+1} - 0) \times \mathbb{R}^q$$

Sea  $r : (\mathbb{R}^{p+1} - 0) \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{S}^p = K_1$  la función  $r(x, y) = \left( \frac{x}{\|x\|}, 0 \right)$ . Si  $i_{K_1}$ , la inclusión de  $K_1$  en  $\mathbb{S}^{p+q+1} - K_2$  es nullhomotópica, entonces existe una homotopía  $H : \mathbb{S}^p \times I \rightarrow \mathbb{S}^{p+q+1} - \mathbb{S}^q$  tal que  $H_0 = i_{K_1}$  y  $H_1$  es constante. Luego  $rH : \mathbb{S}^p \times I \rightarrow \mathbb{S}^p$  es una homotopía entre la identidad y una constante. Esto es absurdo pues la esfera  $\mathbb{S}^p$  no es contráctil.

**Ejercicio 8.1.5.** Sea  $p \geq r \geq q$  tal que  $\pi_r(\mathbb{S}^q) \neq 0$ . Entonces en  $\mathbb{S}^{p+q+1}$  existen dos links no equivalentes del tipo  $\mathbb{S}^p \cup \mathbb{S}^r$ . Sugerencia: recordar que  $\mathbb{S}^p * \mathbb{S}^q = \mathbb{S}^{p+q+1}$ .

## 8.2 Nudos en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{S}^2$

Repasemos algunos teoremas clásicos sobre subconjuntos en el plano.

**Teorema 8.2.1.** (*Curva de Jordan*) Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  una curva simple cerrada. Entonces  $\mathbb{R}^2 - C$  tiene dos componentes conexas: una acotada que notamos por  $U$ , y una no acotada que notamos por  $V$ , tales que  $C = \partial U = \partial V$ . Lo mismo sucede con  $C \subset \mathbb{S}^2$ . En este caso  $V$  es la componente que contiene al infinito.

**Teorema 8.2.2.** (Schönflies) Si  $C \subset \mathbb{R}^2$  es una curva cerrada simple, entonces  $\bar{U}$  es homeomorfo a  $\mathbb{D}^2$ . Si  $C \subset \mathbb{S}^2$ , entonces  $\bar{U}$  y  $\bar{V}$  son homeomorfos a  $\mathbb{D}^2$ .

El teorema de Schönflies no vale sólo con la hipótesis de continuidad en dimensiones mayores. Veremos después una versión generalizada.

**Lema 8.2.3.** (Alexander) Sean  $A$  y  $B$  dos espacios homeomorfos a  $\mathbb{D}^n$  tales que existe un homeomorfismo  $h : \partial A \rightarrow \partial B$ . Entonces  $h$  se extiende a un homeomorfismo  $H : A \rightarrow B$ .

*Demostración.* Si  $x \in A$ , entonces lo podemos escribir como  $x = tv$ , donde  $0 \leq t \leq 1$  y  $v \in \partial A$ . Definimos  $H(x) = H(tv) = th(v)$ .  $\square$

**Corolario 8.2.4.** Si  $K_1$  y  $K_2$  son dos nudos de tipo  $\mathbb{S}^1$  en  $X = \mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{S}^2$ , entonces son equivalentes.

*Demostración.* Lo probamos en  $\mathbb{S}^2$ . Por el teorema de la curva de Jordan, existen  $U_i$  y  $V_i$  componentes de  $\mathbb{S}^2 - K_i$  tales que  $K_i = \partial U_i = \partial V_i$ . Además,  $\bar{U}_i$  y  $\bar{V}_i$  son homeomorfos a  $\mathbb{D}^2$ .

Sea  $h : K_1 \rightarrow K_2$  un homeomorfismo cualquiera. Entonces podemos extenderlo a  $H_U : \bar{U}_1 \rightarrow \bar{U}_2$  y a  $H_V : \bar{V}_1 \rightarrow \bar{V}_2$  por el teorema anterior. Podemos pegar ambos homeomorfismos y obtenemos un homeomorfismo  $H : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  que extiende a  $h$ .  $\square$

**Ejercicio 8.2.5.** Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos curvas simples cerradas en  $\mathbb{R}^2$  tales que  $C_1$  cae adentro de  $C_2$ . Esto es,  $C_1 \subset U_2$ , donde  $U_2$  es la componente acotada que determina  $C_2$ . La región encerrada entre las dos curvas,  $\bar{V}_1 \cap \bar{U}_2$  es homeomorfa a  $\mathbb{S}^1 \times I$ . Lo mismo se puede hacer en la esfera  $\mathbb{S}^2$ . Sugerencia: usar Schönflies.

**Ejercicio 8.2.6.**

1. Si  $L_1$  y  $L_2$  son dos links en  $\mathbb{S}^2$  del tipo  $\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1$ , entonces son equivalentes.
2. En  $\mathbb{R}^2$  hay exactamente dos clases de equivalencias de links del tipo  $\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1$ .

## 8.3 Nudos clásicos

Trabajamos ahora con los nudos más “usuales”: nudos de tipo  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{S}^3$ . Restringimos nuestro estudio a los nudos y links PL (lineales a trozos), como es habitual. Observemos que si  $K_1$  y  $K_2$  son dos nudos equivalentes en  $\mathbb{R}^3$  (o  $\mathbb{S}^3$ ), entonces los complementos  $\mathbb{R}^3 - K_1$  y  $\mathbb{R}^3 - K_2$  son homeomorfos. Por mucho tiempo se desconocía si valía la recíproca. Recién en 1989, Gordon y

Luecke demostraron que si los complementos de dos nudos son homeomorfos, entonces los nudos son equivalentes.

La homología del complemento de un link en  $\mathbb{R}^3$  (o  $\mathbb{S}^3$ ) no es un buen invariante para distinguir o clasificar nudos y links, ya que  $H_*(\mathbb{S}^3 - L)$  no depende del embedding de  $L$ , solo del tipo (ídem con  $X = \mathbb{R}^3$ ). Para ver esto necesitamos usar la dualidad de Alexander.

**Teorema 8.3.1.** (*Dualidad de Alexander*) Si  $T \subset \mathbb{S}^n$  es un subespacio compacto, localmente contráctil y propio, entonces

$$\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - T) \simeq \tilde{H}^{n-q+1}(T)$$

En particular, si  $X = \mathbb{S}^3$  y  $L$  es un link, entonces  $H_*(X - L)$  no distingue de cómo sea el embedding de  $L$  en  $X$ . Para  $X = \mathbb{R}^n$  también se puede ver, usando escisión a partir del caso de la esfera, que la homología del complemento no depende del embedding, solo del tipo del link. Por ejemplo, para cualquier nudo  $K \subset \mathbb{S}^3$ , se tiene que  $H_1(\mathbb{S}^3 - K) = \mathbb{Z}$  y  $H_q(\mathbb{S}^3 - K) = 0$  para  $q > 1$ .

A diferencia de la homología, el grupo fundamental del complemento del nudo es un buen invariante:

**Definición 8.3.2.** Si  $K$  es un nudo del tipo de  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{R}^3$ , el grupo del nudo  $K$  es el grupo fundamental de su complemento  $\mathbb{R}^3 - K$ .

Cabe preguntarse qué relación hay entre  $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$  y  $\pi_1(\mathbb{S}^3 - K)$ . La siguiente proposición deja en claro la respuesta a esta pregunta.

**Proposición 8.3.3.** Sea  $n \geq 3$  y sea  $B \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto acotado tal que  $\mathbb{R}^n - B$  es arcoconexo. Entonces la inclusión  $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{S}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  induce un isomorfismo

$$i_* : \pi_1(\mathbb{R}^n - B) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^n - B)$$

En particular,  $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K) = \pi_1(\mathbb{S}^3 - K)$  si  $K \subset \mathbb{R}^3$  es un nudo.

*Demostración.* Sea  $U \subset \mathbb{S}^n$  un entorno del infinito homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  y disjunto de  $B$ . Observemos que  $U \cap \mathbb{R}^n = U - \infty \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ . Se tiene

$$\mathbb{S}^n - B = (\mathbb{R}^n - B) \bigcup_{U \cap \mathbb{R}^n} U.$$

Como  $U$  y  $U \cap \mathbb{R}^n$  son simplemente conexos, por el teorema de Van-Kampen concluimos que  $i_* : \pi_1(\mathbb{R}^n - B) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^n - B)$  es un isomorfismo.  $\square$

Estudiaremos ahora la presentación de Wirtinger del grupo de un nudo. Vamos a mostrar cómo conseguir una presentación del grupo del nudo a partir de los cruces. Lo vamos a describir en un caso particular y luego haremos la demostración en caso general.

**Ejemplo 8.3.4.** Sea  $K$  el trébol (que es el nudo en  $\mathbb{R}^3$  de la figura 8.4).



Figura 8.4: El trébol

Si le damos una orientación a este nudo, es decir, una forma de recorrerlo, los cruces determinan 3 arcos orientados. Estos arcos son determinados tomando una proyección del nudo sobre un plano, manteniendo la información sobre qué parte del nudo cruza por arriba o por abajo. Cada cruce involucra tres arcos: termina  $\alpha_i$  y empieza  $\alpha_{i+1}$ , y un  $\alpha_k$  que cruza por arriba. En la figura 8.5 se muestran los 3 arcos que quedan determinados por los cruces.



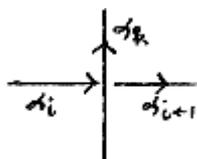
Figura 8.5: El trébol orientado y etiquetado

Vamos a construir una presentación del grupo del nudo

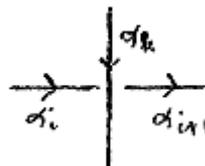
$$P' = \langle x_1, x_2, x_3 | r_1, r_2, r_3 \rangle$$

a partir de estos datos. Por cada  $\alpha_i$  ponemos un generador  $x_i$ , y por cada cruce, una relación  $r_j$ .

Para determinar las relaciones, consideramos los siguientes dos tipos de cruces:



(a) Cruce de tipo 1



(b) Cruce de tipo 2

Para los cruces de tipo 1, consideramos la relación  $x_k x_i = x_{i+1} x_k$ . Para los cruces de tipo 2, consideramos la relación  $x_i x_k = x_k x_{i+1}$ . Así, en este caso, la presentación nos queda

$$P' = \langle x_1, x_2, x_3 | x_1 x_2 = x_3 x_1, x_3 x_1 = x_2 x_3, x_2 x_3 = x_1 x_2 \rangle$$

Notemos que hay una relación que está de más: cualquiera de las tres relaciones se puede deducir de las otras dos. Sacamos entonces una relación y consideramos la presentación

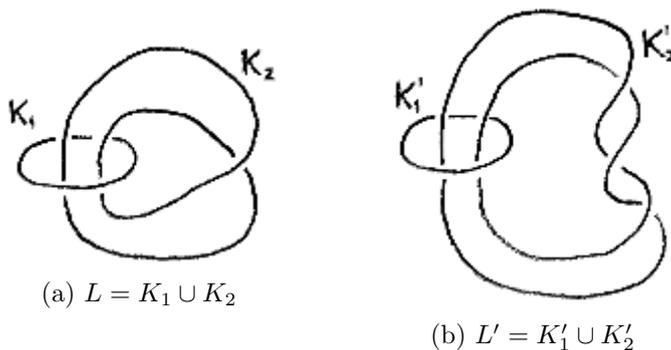
$$P = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_3x_1 = x_2x_3, x_2x_3 = x_1x_2 \rangle$$

Se puede probar que  $P$  es equivalente a la presentación  $\langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$ . Notar que el grupo representado por esta presentación no es abeliano (esto se puede deducir del hecho de que este grupo tiene a  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$  como cociente).

Es fácil ver que el nudo trivial tiene presentación  $P = \langle x \mid \ \ \rangle = \mathbb{Z}$ . De esto concluimos que el trébol no es equivalente al trivial.

**Observación 8.3.5.** Como ya comentamos, el complemento de un nudo en  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{S}^3$  determina al nudo. Es decir, si existe un homeomorfismo que respeta orientación  $\mathbb{S}^3 - K \rightarrow \mathbb{S}^3 - K'$ , entonces  $K \sim K'$ . Este resultado es falso para links en general.

Por ejemplo, los siguientes links  $L_1$  y  $L_2$  están formados por dos nudos triviales y por un nudo trivial y el trébol respectivamente.



Estos links no son equivalentes puesto que no existe un homeomorfismo de  $\mathbb{S}^3$  que mande el nudo trivial al trébol.

En [Rol04] se muestra que existe un homeomorfismo  $\varphi : \mathbb{S}^3 - T \rightarrow \mathbb{S}^3 - T$  tal que  $\varphi(K_2) = K'_2$ .

La misma fórmula de Wirtinger que utilizamos para calcular el grupo de un nudo, vale para links (en  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{S}^3$ ).

Por ejemplo, si  $L$  es el link trivial con  $n$  componentes, entonces  $P = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid \ \ \rangle$ . Es decir le corresponde el grupo libre en  $n$  generadores.

En cambio, si tomamos  $L$  el link de la figura 8.8, entonces  $P = \langle x_1, x_2 \mid x_1x_2 = x_2x_1, x_2x_1 = x_1x_2 \rangle$ . Este representa a  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .



Figura 8.8: Link  $L$

En particular este link no es equivalente al link trivial de dos componentes (no entrelazadas) pues en ese caso el grupo asociado es el libre en dos generadores. A continuación vemos con más detalle cómo obtener un diagrama de un nudo:

1. Sea  $K$  un nudo (o link) en  $\mathbb{R}^3$  y sea  $P \subset \mathbb{R}^3$  un plano. Consideremos  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow P$  la proyección. Decimos que  $P$  es regular para  $K$  si cuando restringimos la proyección  $p|_K : K \rightarrow P$  se tiene que  $\#(p|_K)^{-1}(x) \leq 2$ , y si  $\#(p|_K)^{-1}(x) = 2$  entonces ninguno de los dos puntos es un vértice de  $K$  (recordar que se consideran nudos lineales a trozos).
2. Si  $P$  es regular para  $K$ , se tiene un diagrama de la siguiente forma: la imagen de la proyección al plano  $P$  junto con la información sobre si los cruces son por arriba o por abajo, es decir, qué punto está más cerca del plano.
3. Perturbando el  $K$  a uno equivalente y/o cambiando el plano  $P$ , se puede conseguir un plano  $P$  regular a  $K$ .
4. Se puede suponer que  $P = \{z = 0\}$ .
5. Aplastando (sin cambiar el tipo homotópico del complemento) podemos suponer que  $K$  cae casi por completo en el plano  $P = \{z = 0\}$  salvo en los cruces que caen en el plano  $\{z = -\varepsilon\}$  para  $\varepsilon > 0$  fijo.

Para cada cruce de  $K$ , tenemos  $\beta_i$  tramo que interseca a  $\{z = -\varepsilon\}$ . Tomemos al  $(0, 0, 1)$  como punto base para calcular el  $\pi_1$  del complemento. Consideramos  $\alpha_i$  al camino que va de  $\beta_{i-1}$  a  $\beta_i$ . De esta manera, en  $\beta_i$  termina el camino  $\alpha_i$  y empieza el camino  $\alpha_{i+1}$ . Para cada  $i$ , tomamos un lazo  $x_i$  en  $(0, 0, 1)$  que envuelva al  $\alpha_i$ .

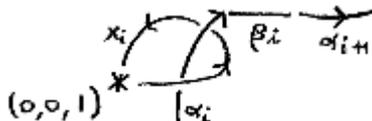
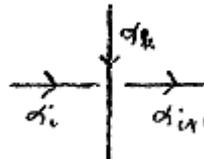


Figura 8.9: Envolvemos con un lazo  $x_i$  en  $(0, 0, 1)$  a cada  $\alpha_i$

Ahora en cada cruce, consideramos la palabra  $r_i$  que es  $x_{i+1}x_k = x_kx_i$  si el cruce es de tipo 1 o bien  $x_ix_k = x_kx_{i+1}$  si es de tipo 2.



(a) Cruce de tipo 1 con relación  $x_k x_i = x_{i+1} x_k$



(b) Cruce de tipo 2 con relación  $x_i x_k = x_k x_{i+1}$

**Teorema 8.3.6.** *Con las notaciones de antes,  $\pi_1(\mathbb{S}^3 - K) = \pi_1(\mathbb{R}^3 - K) = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_n \rangle$ . Más aún, cualquier  $r_i$  que saquemos nos da una presentación del mismo grupo.*

*Demostración.* Podemos suponer que  $K$  cae casi completamente en el plano  $\{z = 0\} = P$  salvo en los cruces que van por abajo y los trozos de segmentos que pasan por el plano  $\{z = -\varepsilon\}$ , como indica la figura a continuación.

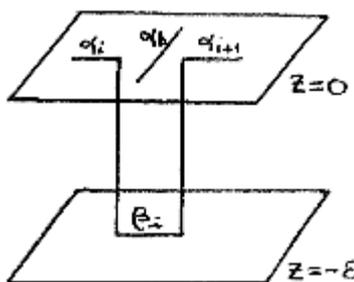


Figura 8.11: Esquema de cómo descomponemos al nudo  $K$  entre los planos  $z = 0$  y  $z = -\varepsilon$

Consideremos los siguientes subespacios de  $\mathbb{R}^3 - K$ :

- (a)  $A = \{z \geq -\varepsilon\} - K$ .
- (b) Por cada cruce  $1 \leq i \leq n$ , consideramos el cubo

$$C_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i] \times [a_i, -\varepsilon]$$

suficientemente chico para que no se intersequen y que la tapa de arriba contenga a  $\beta_i$ . Tomemos un lazo  $y_i$  en  $(0, 0, 1)$  que va a la tapa de  $C_i$ , bordea al  $\beta_i$  y vuelve a  $(0, 0, 1)$ . Sea  $B_i = (C_i - \beta_i) \cup y_i$

- (c) Sea  $D$  lo que está por debajo de  $A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n$ .

Notar que  $\mathbb{R}^3 - K = A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n \cup D$ . Ahora usemos Van-Kampen para calcular el  $\pi_1$  del complemento. Sea  $p = (0, 0, 1)$ .

- $\pi_1(A, p)$  = grupo libre en  $x_1, \dots, x_n$ .
- Cada  $B_i = (C_i - \beta_i) \cup y_i$  es simplemente conexo.

- $\pi_1(B_i \cap A, p) = \langle y_i \rangle = \mathbb{Z}$
- El lazo  $y_i$  dentro de  $\pi_1(A, p)$  es homotópico al lazo  $x_i^{-1}x_kx_{i+1}x_k$  o al otro dependiendo de la orientación.
- $D$  y  $D \cap (A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n)$  son simplemente conexos

Por lo tanto  $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K) = \langle x_1, \dots, x_n | i_*(y_1), \dots, i_*(y_n) \rangle$ , donde  $i_*$  denota a la inclusión de los  $B_i \cap A$  en  $A$ . Esto prueba que  $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K) = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_n \rangle$ .

Veamos ahora que podemos sacar a  $r_n$ . Lo vemos en  $\mathbb{S}^3 - K$ . Tomamos  $A' = A \cup \{\infty\}$  y  $D' = B_n \cup D \cup \{\infty\}$ . Se tiene que  $A' \cup B_1 \cup \dots \cup B_{n-1} \cup D' = \mathbb{S}^3 - K$ . Notar que  $\pi_1(A') = \pi_1(A)$  y que  $D'$  y  $D' \cap (A' \cup B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})$  son simplemente conexos. Por lo tanto

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 - K) = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_{n-1} \rangle.$$

□

Notar que en la demostración no utilizamos nunca que el nudo tiene solamente una componente, con lo cual la misma cuenta funciona para links en general.

## 8.4 El nudo trivial y asfericidad del complemento

**Definición 8.4.1.** Sea  $K \subset \mathbb{S}^m$  un nudo (con  $K \equiv \mathbb{S}^n$ ,  $n < m$ ). Decimos que  $K$  es el nudo trivial (o unknot) si es equivalente al nudo dado por el embedding en el ecuador

$$\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{m-n-1} \subset \mathbb{S}^m.$$

Recordemos que el teorema clásico de Schönflies afirma que si  $K \subset \mathbb{S}^2$  es un nudo de tipo  $\mathbb{S}^1$ , cada una de las componentes de  $\mathbb{S}^2 - K$  es un disco  $\mathbb{D}^2$  con borde  $K$ . Como ya comentamos, el resultado análogo es falso para dimensión  $m \geq 3$ , salvo que pidamos más hipótesis a la esfera  $K \subset \mathbb{S}^m$ .

**Definición 8.4.2.** Sea  $M$  una variedad de dimensión  $m$ . Un subespacio  $X \subset M$  se dice que es bicollared si existe una función subespacio  $i : X \times [-1, 1] \rightarrow M$  tal que  $i(x, 0) = x$  para todo  $x \in X$ .

**Teorema 8.4.3** (Schönflies generalizado). *Si  $m \geq 2$  y  $K \equiv \mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{S}^m$  es un nudo bicollared, entonces separa a  $\mathbb{S}^m$  en dos discos  $\mathbb{D}^m$ .*

**Definición 8.4.4.** Una bola plana de dimensión  $k$  en una variedad de dimensión  $m$  (con  $k < m$ ) es un subespacio  $i : \mathbb{D}^k \rightarrow M$  que se extiende a  $\bar{i} : U \rightarrow M$  subespacio, con  $\mathbb{D}^k \subset U \subset \mathbb{R}^m$  las inclusiones canónicas y  $U \subset \mathbb{R}^m$  abierto.

**Teorema 8.4.5.** *Un nudo  $K \subset \mathbb{S}^m$  (del tipo de  $\mathbb{S}^k$ ) es equivalente al nudo trivial  $\mathbb{S}^k \subset \mathbb{S}^m$  (es decir al embedding en el ecuador) si y solo si  $K = \partial B$  con  $B$  una  $(k + 1)$ -bola plana.*

*Demostración.* Es claro que si  $K$  es equivalente al nudo trivial, entonces es borde de una bola plana.

Recíprocamente, supongamos que  $K = \partial B$  con  $B = i(\mathbb{D}^{k+1})$ . Sea  $i : U \rightarrow \mathbb{S}^m$  la extensión del disco plano (figura 8.12).

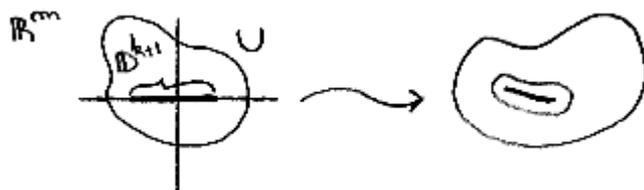


Figura 8.12: Extendemos a un entorno del disco  $\mathbb{D}^{k+1}$

Sea  $B' \subset \mathbb{R}^m$  un subespacio difeomorfo a una bola de dimensión  $m$  tal que  $\mathbb{D}^{k+1} \subset B'$  y  $B' \cup \partial B' \times [-\varepsilon, \varepsilon] \subset U$ . Es decir, tomamos una “bola” que contenga al disco y que si la engordamos un poco quede contenida en  $U$ . Consideremos  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$  el embedding canónico. Entonces  $g(B')$  es una bola con borde  $\mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbb{S}^m$  y manda  $\partial \mathbb{D}^{k+1}$  al nudo trivial  $\mathbb{S}^k \subset \mathbb{S}^m$  (ver figura 8.13).

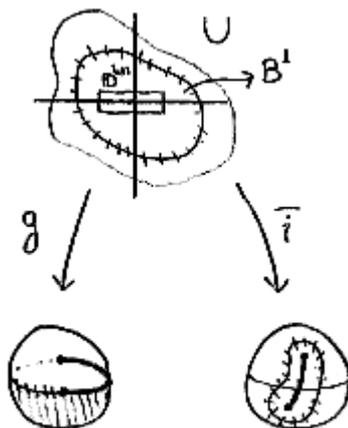


Figura 8.13: Esquema del bicollared y lo que hacen  $g$  e  $\bar{i}$

Extendemos  $\bar{i}g^{-1} : g(B) \rightarrow i(B)$  a toda la esfera usando Schönflies. Esto determina un homeomorfismo  $h : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^m$  tal que  $h(\mathbb{S}^k) = K$ .  $\square$

En el caso PL, no es necesario pedirle que la bola sea “plana”. Se tiene que, para  $n = 3$  una PL 2-esfera en  $\mathbb{S}^3$  la separa en 2 discos. Por lo tanto un nudo PL  $K \subset \mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{S}^3$  es trivial si y solo si  $K = \partial D$ , con  $D$  un 2-disco PL.

En 1957 Papakyriakopoulos probó los siguientes dos resultados sobre variedades de dimensión 3:

**Teorema 8.4.6.** (*The loop theorem*) Sea  $M$  una variedad de dimensión 3 con borde  $\partial M$  tal que  $i_* : \pi_1(\partial M) \rightarrow \pi_1(M)$  no es monomorfismo. Entonces existe un embedding PL  $j : D^2 \rightarrow M$  tal que  $j(\partial D^2) \subset \partial M$  y  $j$  restringida al borde del disco  $j : \partial D^2 \rightarrow \partial M$  no es nullhomotópica.

**Teorema 8.4.7.** (*The sphere theorem*) Sea  $M$  variedad de dimensión 3 orientable tal que existe una función  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$  que no es nullhomotópica (es decir, tal que  $\pi_2(M) \neq 0$ ). Entonces existe un embedding  $i : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$  que no es nullhomotópico.

Veremos cómo de estos dos resultados de Papakyriakopoulos se deducen dos resultados fundamentales de la teoría de nudos: que un nudo es trivial si y sólo si su grupo es  $\mathbb{Z}$  y que los complementos de los nudos en la esfera son asféricos (es decir los grupos de homotopía de orden superior son todos triviales).

Definimos primero el exterior de un nudo en la esfera  $\mathbb{S}^3$ .

**Definición 8.4.8.** Sea  $K \subset \mathbb{S}^3$  un nudo (PL o  $C^\infty$ ). Sea  $N$  un entorno tubular de  $K$  en  $\mathbb{S}^3$ . Consideremos  $\mathbb{S}^3 - N$ , que es una 3-variedad orientable, compacta con borde  $\partial N$  que es un toro. Llamamos a  $\mathbb{S}^3 - N$  el exterior de  $K$ .

Notar que la inclusión  $\mathbb{S}^3 - N \hookrightarrow \mathbb{S}^3 - K$  del exterior en el complemento del nudo, es una equivalencia homotópica.

Denotemos con  $X$  al exterior de  $K$ . Por la dualidad de Alexander,

$$\tilde{H}_q(X) = \tilde{H}_q(\mathbb{S}^3 - N) = \tilde{H}_q(\mathbb{S}^3 - K) = \tilde{H}^{3-q-1}(K).$$

En particular,  $\tilde{H}_0(X) = 0$  (i.e.  $X$  es arcoconexo),  $\tilde{H}_1(X) = \mathbb{Z}$  y  $\tilde{H}_2(X) = 0$ .

Si  $i : \partial X \rightarrow X$  es la inclusión, consideremos el morfismo inducido en la homología  $i_* : H_1(\partial X) \rightarrow H_1(X)$ . Como  $\partial X$  es un toro, podemos considerar el lazo correspondiente a la longitud y el lazo correspondiente al meridiano.

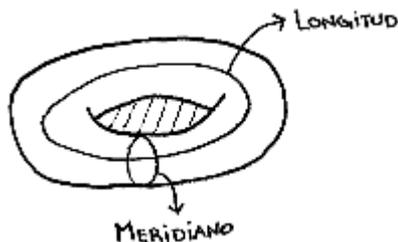


Figura 8.14: La longitud y el meridiano del borde de  $X$

Sabemos que  $H_1(\partial X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  está generado por estos dos lazos. Notar que  $i_*(\text{longitud}) = 0$  y  $i_*(\text{meridiano}) \neq 0$ . Luego la inclusión del meridiano es el generador de  $H_1(X)$ .

**Teorema 8.4.9.** *Sea  $K \subset \mathbb{S}^3$  un nudo PL y sea  $X = \mathbb{S}^3 - N$  el exterior del nudo. Si  $K$  no es el nudo trivial, entonces  $i_* : \pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(X)$  es monomorfismo.*

*Demostración.* Supongamos que  $i_*$  no es monomorfismo. Por el loop theorem, existe  $j : \mathbb{D}^2 \rightarrow X$  embedding PL tal que  $j(\partial\mathbb{D}^2) \subset \partial X$  y  $j|_{\partial\mathbb{D}^2} : \partial\mathbb{D}^2 \rightarrow \partial X$  no es nullhomotópica. En particular,  $j(\partial\mathbb{D}^2) \subset \partial X$  es una curva simple cerrada que no es nullhomotópica, y que en  $X$  es el borde de un disco  $j(\partial\mathbb{D}^2) = \partial j(\mathbb{D}^2)$  (disco PL). Podemos identificar  $\pi_1(\partial X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = H_1(\partial X)$  de manera canónica, y recordemos que la longitud y el meridiano son los generadores de estos grupos. Como  $j(\partial\mathbb{D}^2)$  es cero en  $H_1(X)$ , debe estar generado por la longitud, es decir,  $\partial\mathbb{D}^2$  es un múltiplo de la longitud. Al ser una curva cerrada simple, tiene que ser la longitud o  $-$ longitud (recorrida al revés). Pero la longitud de  $\partial X$  es el borde de un disco PL en  $X$ , y como la longitud es paralela al nudo  $K$ , extendemos el disco a un disco PL cuyo borde es  $K$ . Luego  $K$  es trivial.  $\square$

**Corolario 8.4.10.** *Sea  $K \subset \mathbb{S}^3$  un nudo PL. Entonces  $K$  es trivial si y solo si  $\pi_1(\mathbb{S}^3 - K) = \mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Solo tenemos que probar la recíproca. Sea  $X$  el exterior de  $K$ . Como  $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$ , no puede existir un monomorfismo  $\pi_1(\partial X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(X) = \mathbb{Z}$ . Por el teorema anterior,  $K$  es trivial.  $\square$

Notar, además, que del teorema se desprende que si  $K$  no es trivial, entonces  $\pi_1(\mathbb{S}^3 - K)$  contiene un subgrupo isomorfo a  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

Veremos que los exteriores de nudos son 3-variedades esféricas, es decir, con  $\pi_n X = 0$  para todo  $n \geq 2$ . El estudio de variedades esféricas es de gran relevancia para la clasificación de variedades de dimensión 3.

**Teorema 8.4.11.** *Sea  $K$  un nudo PL en  $\mathbb{S}^3$  y sea  $X$  el exterior. Entonces  $\pi_2(X) = 0$ .*

*Demostración.* Sabemos que  $X \simeq \mathbb{S}^3 - K$ . Supongamos que  $\pi_2(\mathbb{S}^3 - K) \neq 0$ . Por el sphere theorem, existe un embedding lineal a trozos  $j : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 - K$  que no es null homotópico. Consideremos el embedding  $i : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 - K \hookrightarrow \mathbb{S}^3$  (que resulta PL). Por el teorema de Schönflies,  $\mathbb{S}^2$  separa a  $\mathbb{S}^3$  en dos discos. Notar que  $i(\mathbb{S}^2)$  no toca a  $K$ , y como  $K$  es conexo,  $K$  cae por completo en alguno de los dos discos que determina  $i(\mathbb{S}^2)$  en  $\mathbb{S}^3$ . Usando el disco que no tiene a  $K$ , se tiene que  $i \simeq *$  en  $\mathbb{S}^3 - K$ . Esto es absurdo por hipótesis.  $\square$

Ahora ya podemos probar que los complementos de nudos son esféricos.

**Teorema 8.4.12.** *El exterior de un nudo es esférico.*

*Demostración.* Sea  $X$  el exterior de un nudo en  $\mathbb{S}^3$ . Sea  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  el revestimiento universal de  $X$ . Entonces  $\tilde{X}$  es una 3-variedad (con borde) no compacta (porque el grupo fundamental de  $X$  es infinito) y por lo tanto  $H_3(\tilde{X}) = 0$ . Además,  $H_r(\tilde{X}) = 0$  para todo  $r \geq 4$  por dimensión. Así, tenemos que  $\pi_1(\tilde{X}) = 0$  (por ser revestimiento universal),  $\pi_2(\tilde{X}) = \pi_2(X) = 0$  por el teorema anterior y  $H_r(\tilde{X}) = 0$  para todo  $r \geq 3$ . Por los teoremas clásicos de Hurewicz y Whitehead de Topología algebraica, se tiene que  $\tilde{X}$  es contráctil. Luego  $X$  es asférico.  $\square$

## 8.5 Superficies de Seifert, suma de nudos y nudos primos

Comencemos recordando la clasificación de las superficies compactas y orientables.

Toda superficie compacta orientable y sin borde es difeomorfa a una  $M(g)$  donde  $g \geq 0$  es el género de la superficie.

En la figura 8.15 podemos ver algunos casos básicos de las superficies  $M(g)$ .

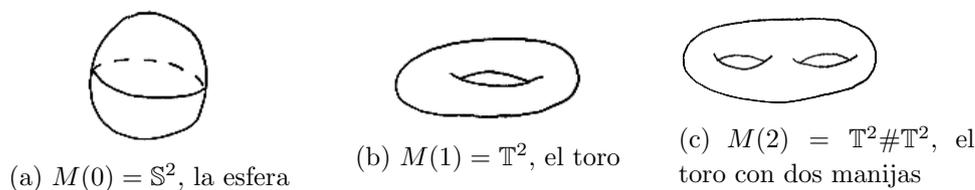


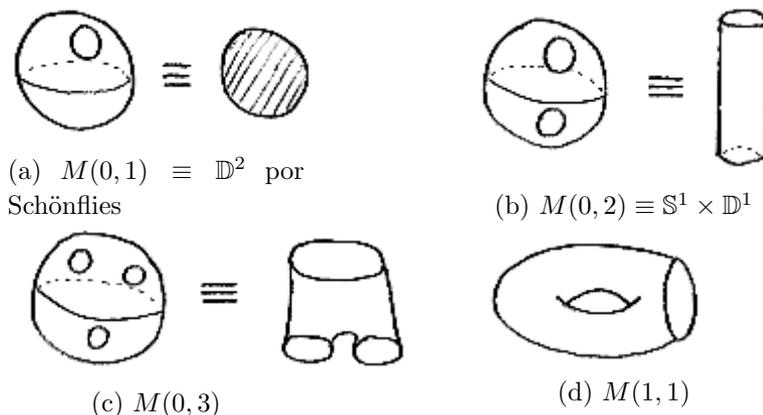
Figura 8.15: Superficies cerradas orientables

En general  $M(g) = \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$  es una suma conexa de  $g$  toros.

Por Van-Kampen,  $\pi_1(M(g)) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g | [a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_g, b_g] \rangle$ . Por lo tanto  $H_1(M(g)) = \pi_1(M(g))_{Ab} = \mathbb{Z}^{2g}$ . Además,  $H_2(M(g)) = \mathbb{Z}$  y  $H_0(M(g)) = \mathbb{Z}$ . En particular,  $\chi(M(g)) = 2 - 2g$ .

Las superficies compactas orientables con borde son las  $M(g, h)$ , con  $g$  el género y  $h$  la cantidad de componentes del borde ( $h \geq 1$ ), que son discos abiertos que se remueven de  $M(g)$ . Es decir,  $M(g, h) = M(g) - \bigsqcup_h \mathring{\mathbb{D}}^2$ .

Algunos ejemplos se muestran en las siguientes figuras.



En general se tiene que  $M(g, h) \simeq \bigvee_{2g+h-1} \mathbb{S}^1$ . En particular,  $\pi_1(M(g, h))$  es el grupo libre en  $2g + h - 1$  generadores y  $\chi(M(g, h)) = 2 - 2g - h$ .

**Definición 8.5.1.** Sea  $L \subset \mathbb{S}^3$  un link del tipo  $\mathbb{S}^1 \cup \dots \cup \mathbb{S}^1$ . Una superficie de Seifert para  $L$  es una superficie compacta y orientable  $S \subset \mathbb{S}^3$  cuyo borde es  $\partial S = L$ .

Vamos a probar que todo link en  $\mathbb{S}^3$  admite una superficie de Seifert. A partir de ese resultado podremos hablar del género de un nudo y trabajar con factorización de nudos como suma de nudos primos.

Para construir una superficie de Seifert para un nudo o link, utilizaremos el “algoritmo de Seifert”. Para entenderlo, veamos previamente algunas observaciones.

1. Supongamos que tenemos dos discos en un mismo plano de  $\mathbb{R}^3$  pero con orientaciones opuestas como la figura 8.17.



Figura 8.17: Dos discos con orientaciones opuestas

Si los pegamos, removiendo una parte de cada borde y agregando una banda, pueden quedar bien pegados o no, en el sentido de que el resultado de ese pegado esté bien orientado o no. Por ejemplo en la figura 8.18 no quedan bien pegados (no podemos darle una orientación coherente). En cambio si twisteamos la bandita como en la figura 8.19, queda coherentemente orientado.



Figura 8.18: Dos discos con orientaciones opuestas “mal” pegados



Figura 8.19: Dos discos con orientaciones opuestas “bien” pegados

2. Supongamos que tenemos dos discos concéntricos uno en un plano de  $\mathbb{R}^3$  por arriba del otro y ambos orientados con la misma orientación como indica la figura 8.20



Figura 8.20: Dos discos concéntricos con la misma orientación

Al pegar una banda, similarmente al caso anterior, puede pegarse “mal” o twistear la banda para que quede coherentemente orientado, como indican las figuras 8.21 y 8.22.



Figura 8.21: “Mal” pegados

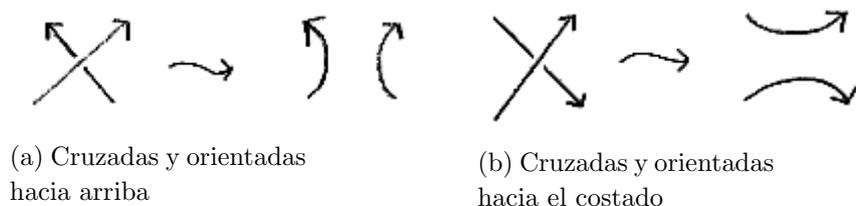


Figura 8.22: “Bien” pegados

Ahora podemos probar el teorema.

**Teorema 8.5.2.** *Para todo link en  $S^3$  existe una superficie de Seifert.*

*Demostración.* Sea  $L \subset S^3$  un link. Consideremos el diagrama de  $L$  proyectándolo a un plano y démosle una orientación. Resolvemos cada cruce del diagrama, cambiamos las curvas de la siguiente manera:



Así, se obtiene un nuevo diagrama que es una unión disjunta de bordes de discos  $D_i$ . Al resolver los cruces pueden darse dos situaciones:

1. Discos disjuntos con orientaciones opuestas:



Figura 8.24: caso disjuntos

En ese caso rellenamos los discos y pegamos banda twistada como observamos previamente.

2. Tenemos uno dentro de otro:



Figura 8.25: caso 2

En este caso los separamos en distintos planos, los rellenamos y unimos con banda twistada.



Figura 8.26

Donde había cruces (que los eliminamos), pegamos bandas twisteadas como en la observación. Así, obtenemos una superficie orientada  $S$  cuyo borde es  $L$ . □

**Ejemplo 8.5.3.** En este ejemplo vemos cómo aplicar el teorema anterior a un nudo particular.

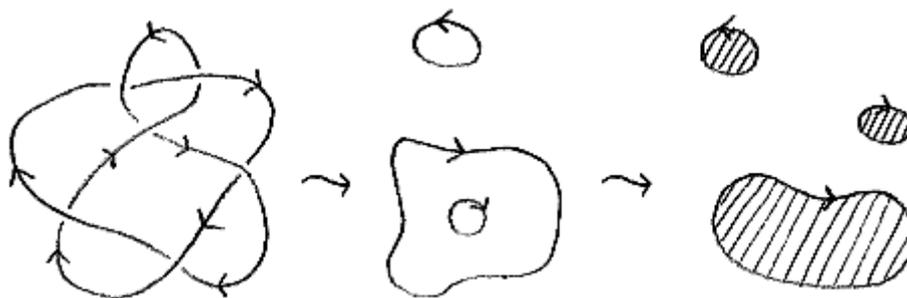


Figura 8.27: Separamos los distintos cruces como indica el teorema

Finalmente en la figura 8.28 puede ver cómo queda la superficie de Seifert correspondiente al nudo original.

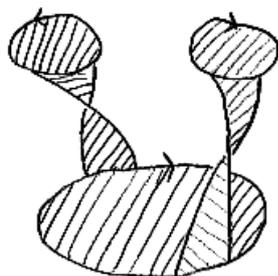


Figura 8.28: Superficie de Seifert obtenida

**Ejemplo 8.5.4.** Calculamos la superficie de Seifert del nudo de la figura 8.29.



Figura 8.29: Separamos los cruces

Finalmente obtenemos la superficie que se muestra en la figura 8.30.

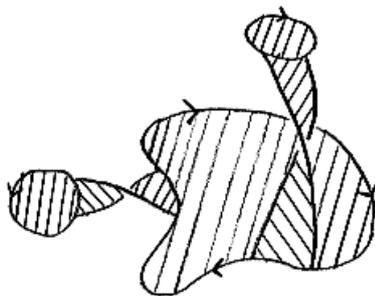


Figura 8.30: Superficie de Seifert que se obtiene

A partir del resultado anterior, podemos definir el género de un nudo o link. Observemos primero que un nudo (o link) puede ser borde de varias (infinitas) superficies de Seifert (de distinto género). El nudo trivial puede ser borde, por ejemplo, de una  $M(0, 1)$  y de una  $M(1, 1)$ .

**Definición 8.5.5.** Sea  $K \subset \mathbb{S}^3$  un nudo PL. El género de  $K$  es

$$g(K) := \min\{\text{género de } S, \text{ superficie de Seifert para } K\}$$

**Observación 8.5.6.**  $K$  es el nudo trivial si y solo si  $g(K) = 0$ . Por un lado, notemos que  $K$  puede ser borde de una esfera con un disco removido. Esto prueba que  $g(K) = 0$ . Recíprocamente, por el teorema de Shönflies, si  $K$  es borde de una esfera con un agujero entonces  $K = \partial D^2$  y por lo tanto es trivial.

**Observación 8.5.7.** Toda superficie de Seifert de un nudo es una  $M(g, 1)$  ya que tiene una única componente en el borde, es orientable y compacta. Como  $\chi(S) = 1 - 2g$ , se tiene que  $g = \frac{1 - \chi(S)}{2}$ .

Dados dos nudos  $K_1$  y  $K_2$ , se define la suma conexa  $K_1 \# K_2$  como el nudo que se obtiene como indica la figura 8.31,

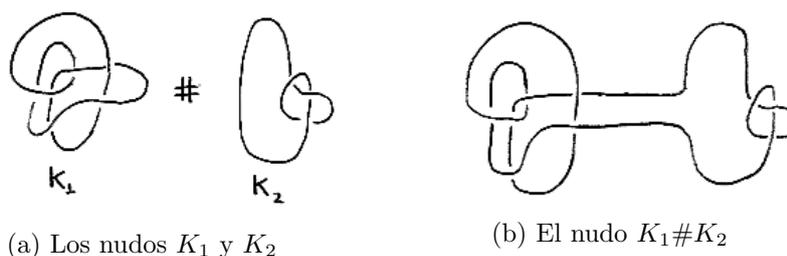


Figura 8.31: Suma conexa de los nudos  $K_1$  y  $K_2$

Notemos que la suma conexa de nudos es un caso particular de la suma conexa de variedades que definimos en el capítulo 6.

**Definición 8.5.8.** Un nudo  $K$  se dice primo si no es el nudo trivial y cada vez que  $K = K_1 \# K_2$ , se tiene que  $K_1$  o  $K_2$  es trivial.

Veamos que la función género es aditiva. Como corolario de este resultado veremos que existen infinitos tipos de nudos y que todo nudo se puede factorizar como suma de nudos primos.

**Teorema 8.5.9.** Sean  $K_1, K_2$  dos nudos disjuntos, entonces  $g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2)$ .

*Demostración.* Probemos primero que  $g(K_1 \# K_2) \leq g(K_1) + g(K_2)$ . Sean  $F_i$  superficies de Seifert minimales para  $K_i$ , es decir,  $g(F_i) = g(K_i)$  para  $i = 1, 2$ . Veamos primero que  $F_1 \cup F_2$  no separa a  $\mathbb{S}^3$ . Por dualidad de Alexander se tiene que

$$\tilde{H}_0(\mathbb{S}^3 - (F_1 \cup F_2)) = \tilde{H}^2(F_1 \cup F_2) = H_2(F_1) \oplus H_2(F_2) = H^2(\bigvee \mathbb{S}^1) \oplus H^2(\bigvee \mathbb{S}^1) = 0$$

Luego  $\mathbb{S}^3 - (F_1 \cup F_2)$  es arcoconexo.

Sean  $x_i \in K_i$  de manera que no estén en un cruce. Sea  $\beta$  un camino de  $x_1$  a  $x_2$  en  $\mathbb{S}^3 - (F_1 \cup F_2)$ . Ensanchamos  $\beta$  a una banda que pegamos derecha o twistada en los nudos según la orientación de las superficies  $F_i$ . Así obtenemos una superficie de Seifert para  $K_1 \# K_2$  como muestra la figura 8.32. Esto demuestra que

$$g(K_1 \# K_2) \leq g(K_1) + g(K_2)$$

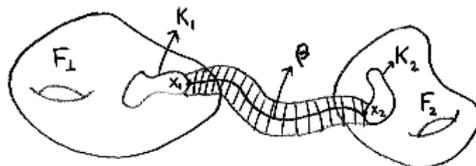


Figura 8.32: Superficie de Seifert obtenida para la suma de los nudos

Veamos la otra desigualdad. Sea  $F$  una superficie de Seifert minimal para  $K_1 \# K_2$ . Es decir,  $g(F) = g(K_1 \# K_2)$ . Tratemos de separar a  $F$  en dos superficies de Seifert  $F_1$  y  $F_2$  para  $K_1$  y  $K_2$  respectivamente y tal que  $g(F_i) = g(K_i)$ .

Sea  $S$  una esfera en  $\mathbb{S}^3$  que interseca transversalmente a  $K_1 \# K_2$  en dos puntos que separan a  $K_1$  de  $K_2$ . En particular,  $S \cap F$  es una 1-variedad compacta con borde  $\{x_1, x_2\}$  dado que  $S \pitchfork F$ . En la figura 8.33 puede verse lo que estamos queriendo hacer.

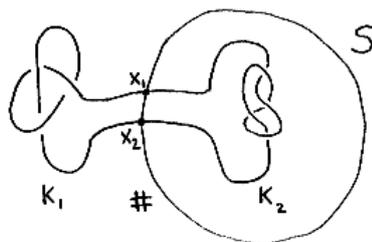


Figura 8.33: Esfera  $S$  separando la suma conexas  $K_1 \# K_2$

La intersección  $S \cap F$  consta de un arco  $\beta$  con  $\partial\beta = \{x_1, x_2\}$  y algunos círculos.

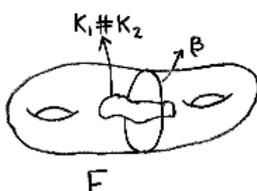


Figura 8.34: Arco  $\beta$  contenido en  $S \cap F$

Si  $S \cap F$  es conexa, entonces sería exactamente el arco  $\beta$ , y por lo tanto tomamos  $F_1$  y  $F_2$  como los dos trozos en los que queda partida  $F$  por  $\beta$ , como muestra la figura 8.35. Se puede ver que  $g(F_1) + g(F_2) = g(F)$ .

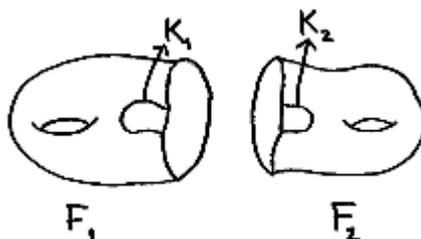


Figura 8.35: Caso conexo,  $\beta$  divide a  $F$  en dos

Si  $S \cap F$  contiene además otros círculos, la idea es ir reemplazando a  $F$  por  $\tilde{F}$  de manera que siga siendo superficie de Seifert minimal para  $K_1 \# K_2$  pero que  $S \cap \tilde{F}$  tenga menos círculos que  $S \cap F$ . Inductivamente llegaríamos a una  $\tilde{F}$  con  $S \cap \tilde{F} = \beta$ , que es el caso anterior.

Supongamos entonces que  $S \cap F = \beta \cup C_1 \cup \dots \cup C_r$ , donde  $C_i$  son círculos de la intersección. Tomemos  $C \in \{C_1, \dots, C_r\}$  un círculo que sea lo más interno posible respecto de  $S - F$ . La figura 8.36 esquematiza una posible situación.

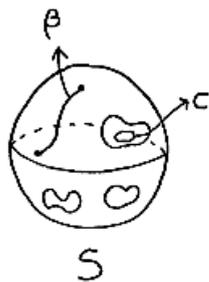


Figura 8.36: Posibles círculos de  $S \cap F$  vistos en  $S$

Es decir,  $C = \partial D$ , donde  $D$  es un disco en  $S$  tal que  $D^\circ \cap F = \emptyset$ . Tenemos que analizar tres casos como muestra la figura 8.37.

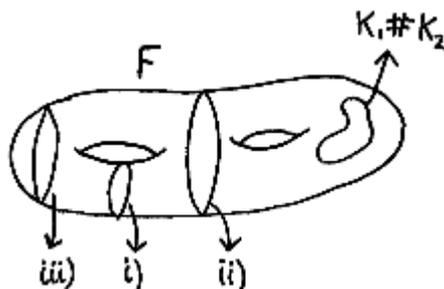


Figura 8.37: Posibles círculos de  $S \cap F$  vistos en  $S$

En el caso  $i)$ , podemos tomar un anillo  $S^1 \times D^1$  que engrosa a  $C$  y cambiarlo por  $D^2 \times S^0$ .

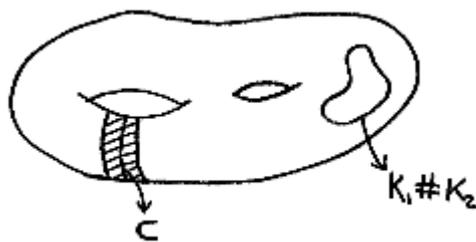


Figura 8.38: Caso  $i)$

Es decir, le hacemos cirugía en un entorno de  $C$ . En consecuencia, obtenemos una superficie de Seifert  $\tilde{F}$  de  $K_1 \# K_2$  que tiene un agujero menos que  $F$ , o sea que  $g(\tilde{F}) < g(F)$ . Esto es absurdo dada la minimalidad de  $F$ . Ver figura 8.39.

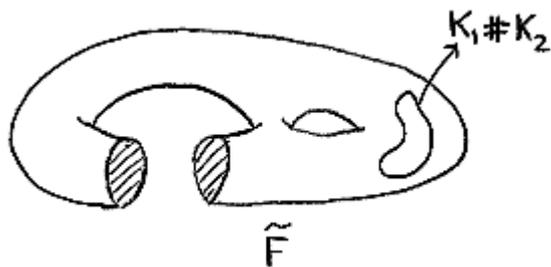


Figura 8.39: Cirugía a  $F$  en el caso i)

En el caso ii) también podemos hacer cirugía en un entorno de la curva  $C$  y separar nuevamente a  $F$  en dos superficies, donde una de ellas, que llamamos  $\tilde{F}$ , es superficie de Seifert de  $K_1 \# K_2$  con un agujero menos que  $F$ , por lo que  $g(\tilde{F}) < g(F)$  y estamos nuevamente frente a un absurdo.

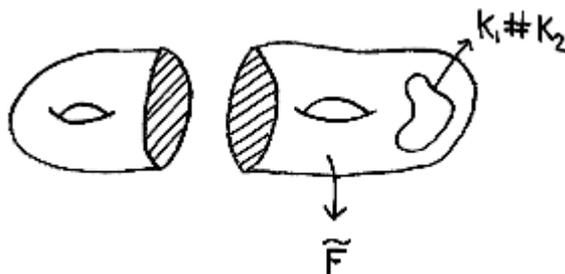


Figura 8.40: Cirugía a  $F$  en el caso ii)

Finalmente nos queda el caso iii). Ver figura 8.41.

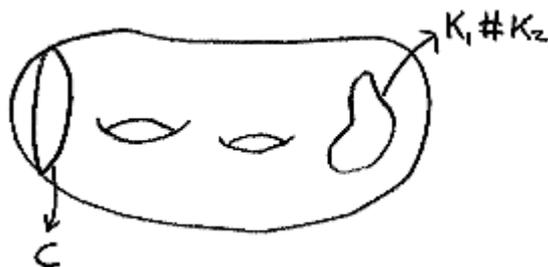


Figura 8.41: Caso iii)

De la misma manera que en los anteriores, podemos hacerle cirugía y separar entonces a  $F$  en dos superficies como muestra la figura 8.42.

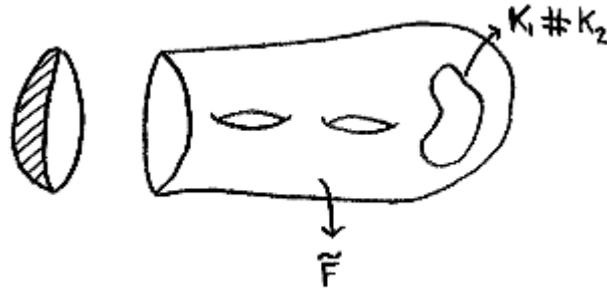


Figura 8.42: Cirugía a  $F$  en el caso iii)

La superficie  $\tilde{F}$  que indica la figura 8.42 resulta una superficie de Seifert para  $K_1 \# K_2$  con  $g(\tilde{F}) = g(F)$  y  $S \cap \tilde{F}$  tiene un círculo menos. Esto concluye la demostración.  $\square$

A partir de este teorema obtenemos varios resultados importantes sobre nudos.

**Corolario 8.5.10.** Si  $K_1 \# K_2$  es trivial, entonces ambos nudos son triviales.

*Demostración.* Como  $g(K_1) + g(K_2) = g(K_1 \# K_2) = 0$ , entonces  $g(K_i) = 0$ , con lo cual  $K_i$  trivial.  $\square$

De este corolario se deduce que si  $K$  no es el nudo trivial,  $K^{\#n}$  (la suma conexas de  $K$  consigo mismo  $n$  veces) no es equivalente a  $K^{\#m}$  si  $m \neq n$ . Por lo tanto existen infinitos tipos de nudos.

Para finalizar, enunciamos dos corolarios cuyas demostraciones (sencillas) quedan a cargo del lector.

**Corolario 8.5.11.** Si  $g(K) = 1$  entonces  $K$  es primo.

**Corolario 8.5.12.** Todo nudo se puede factorizar como suma conexas de nudos primos.

# Referencias

- [Boo76] W. Boothby. An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry. Academic Press (1976), New York.
- [BT82] R. Bott, L. Tu. Differential forms in algebraic topology. Springer-Verlag New York Inc, 1982.
- [God97] R. Godement. Topologie algebrique et theorie des faisceaux. Editions Hermann, 1997.
- [GP74] V. Guillemin, A. Pollack. Differential Topology. MIT Prentice-Hall. 1974.
- [Hat02] A. Hatcher. Algebraic topology. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, xii+544.
- [Hir76] M. Hirsch. Differential topology. Springer. 1976.
- [Lee11] J.M. Lee. Introduction to topological manifolds. GTM. Springer 2011.
- [Lic97] W. B. R. Lickorish. An Introduction to Knot Theory. Springer. 1997.
- [MT97] I. Madsen, J. Tornehave. From Calculus to Cohomology: De Rham Cohomology and Characteristic Classes. Cambridge University Press. 1997.
- [Mil56] J. Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. Annals of Mathematics, 64 (2) (1956), 399–405.
- [Mil59] J. Milnor. Sommes de variétés différentiables et structures différentiables des sphères. Bulletin de la Société Mathématique de France, 87 (1959), 439–444.
- [Mil59b] J. Milnor. Differentiable structures on spheres. American Journal of Mathematics, 81 (4) (1959), 962–972.
- [Mil63] J. Milnor. Morse Theory. Princeton University Press. 1963.
- [Mil65] J. Milnor. Topology from the differentiable viewpoint. University Press of Virginia. 1965.

- [Mil65b] J. Milnor. Lectures on the h-cobordism theorem. Princeton University Press. 1965.
- [Ran03] A. Ranicki. Algebraic and Geometric surgery. Clarendon Press (January 16, 2003)
- [Rol04] D. Rolfsen. Knots and Links. American Mathematical Society (January 22, 2004)
- [War83] F. Warner. Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Springer. 1983.
- [Whi57] H. Whitney. Geometric integration theory. Princeton University Press. 1957.