ISSN 1851-149X

Fascículo 14

Cursos y seminarios de matemática

Serie B

Marco Farinati

Tópicos de álgebra homológica

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2021

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie B

Fascículo 14

ISSN 1851-149X (Versión Electrónica)
ISSN 1851-1481 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

Marco A. Farinati

Tópicos de Álgebra Homológica

Buenos Aires, Mayo 2021

Prefacio

Las presentes notas corresponden a la cursada virtual de la materia *Tópicos de Álgebra homológica* del Dpto. de Matemática FCEyN UBA, del 1er cuatrimestre de 2020. Durante la cursada se generaron presentaciones (beamers), videos, y ejercicios, que han sido recopilados y reformateados en este escrito. Según los intereses de los alumnos, algunos temas (tanto teóricos como listas de ejercicios) fueron desarrollados más ampliamente, sin que necesariamente se pensara que *todos* los ejercicios fueran destinados a *todos* los alumnos. Algunas de las secciones -principalmente ejercicios- se corresponden con partes prácticas que los alumnos debían entregar como parte de sus proyectos de aprobación final de la materia. Esto redundó en un abundante material de ejercitación, que es poco común de encontrar en la literatura del álgebra homológica. A su vez, si bien las guías de ejercicios se corresponden y expanden los temas teóricos desarrollados, los "ejercicios adicionales" que surgían según los intereses, muchas veces utilizaban resultados integradores, y por esto mismo, intercalarlos en la parte teórica "correspondiente", no siempre resultaba lo mas adecuado. Por otra parte, la lista de ejercicios en sí misma tiene una gran coherencia de temas. Por esta razón este escrito está organizado en dos partes: Teoría y Ejercicios.

Parte I: Teoría.

En esta parte, prácticamente todas las demostraciones son clásicas, con presentaciones tomadas y adaptadas de diversos lugares, muchas veces *aggiornadas* a un lenguaje más moderno y con un punto de vista siempre orientado al cálculo en ejemplos. El curso tuvo una introducción al lenguaje categórico orientado a las aplicaciones homológicas: el primer capítulo tiene rápidamente primeras versiones del Lema de la serpiente, nociones de límite y colímite, así como funtores adjuntos. Sobre esta parte categórica y los resultados elementales de módulos sobre un anillo nos hemos apoyado mayoritariamente en [FSS]. El capítulo 2 contiene los lemas fundamentales sobre resoluciones, y el capítulo 3 y 4 son la base troncal: la definición de los funtores Tor y Ext. En esta parte hemos seguido fundamentalmente el libro de Weibel [W]. A partir de ahí, se intentó mostrar las herramientas del álgebra homológica en diversos contextos: Capítulo 5: teoría de la dimensión, siguiendo mayoritariamente a [W] pero dando al final la desigualdad de dimensión global que proviene de ver a un anillo como bimódulo. Esta presentación no tiene una referencia precisa, sigue las ideas de la geometría no conmutativa. El capítulo 6, sobre (co)homología de álgebras asociativas, se presenta la (co)homología de Hochschild, tomando como referencia tanto la presentación de [W] como la de Loday [L]. El capítulo 7 de (co)homología de grupos y el 8 de (co)homología de álgebras de Lie siguen la presentación de [W]. Luego, capítulo 9, se le dió un nuevo énfasis al álgebra introduciendo el lenguaje super, siempre como motivación las construcciones del álgebra homológica; la presentación es propia. En el capítulo 10 se estudian las resoluciones y las álgebras de Koszul, como familia importante de ejemplos en donde se pueden realizar cálculos concretos. La presentación tiene algunos elementos tomados de Loday-Vallette [LV]. Finalmente se hace una introducción a las categorías derivadas y axiomática de las categorías trianguladas. En esta última parte la presentación siguió un poco a Gelfand-Manin [GM] y a Barr [B]; los resultados básicos de categorías trianguladas siguen la presentación de Yekutieli [Y], y la caracterización de categoría derivada como subcategoría de la de homotopía es una presentación propia de las ideas desarrolladas por Keller [K].

Parte II: Ejercicios.

El orden de los temas va en paralelo con la teoría. El capítulo 12 es ejercitación sobre el lenguaje categórico, el funtor producto tensorial, módulos proyectivos, inyectivos y sucesiones exactas. El capítulo 13 sobre objetos diferenciales graduados expande especialmente la teoría con propiedades del cono de un morfismo. El Capítulo 14 es fundamental como base de la materia. Se completan demostraciones sobre complejos dobles y se repasa más en detalle los lemas de levantamiento cuando se tienen homotopías, dando a los lemas de levantamiento un aire más constructivo. Este capítulo contiene también los primeros cálculos sobre Tor y Ext en los anillos o álgebras mas elementales. El capítulo 15 sobre dimensión en realidad es un capítulo sobre resoluciones. El capítulo 16 sobre cohomología de grupo finaliza con la aplicación al cálculo de manera iterativa de las clases de isomorfismo de grupos de orden p^n, para $n = 3, 4, \cdots$. El capítulo 16 sobre cohomología de Hochschild contiene varios temas adicionales a la teórica: la relación entre cohomología de grupo y cohomología de Hochschild del álgebra de grupo, la noción de suavidad en terminos cohomológicos, la noción de separabilidad en el caso no conmutativo, y el teorema de dualidad de Van den Bergh (enunciado en el caso particular que luego tomó el nombre de Calabi-Yau). La mayor parte de estos temas fueron generados para que los alumnos preparen sus proyectos finales. El capítulo 18 es una aplicación corta de la técnica del graduado asociado a un complejo, que había sido utilizado en la teórica para el complejo de Chevalley-Eilenberg de un álgebra de Lie, y que aquí se lo aplica para una resolución pequeña del álgebra de Weyl de operadores diferenciales algebraicos. El capítulo 19, sobre cohomología de Lie, mayoritariamente es un capítulo de apoyo a los preliminares de representaciones de álgebras de Lie para la demostración de los lemas de Whitehead y el teorema de Weyl de completa reducibilidad en el caso de álgebras de Lie semisimples en característica cero. El capítulo 20 es sobre aplicaciones del lenguaje super, especialmente usado para descubrir estructuras de (super)álgebra de Lie en complejos naturales previamente vistos. El capítulo 21 sobre álgebras de Koszul agrega, a la parte teórica de resoluciones dada en la teoría, el criterio de la serie de Hilbert, y las operaciones de Manin para álgebras cuadráticas. El capítulo siguiente sobre construcción bar y cobar completa una parte de la teoría sobre la resolución standard, mostrando que el complejo normalizado es efectivamente una resolución, y está enfocado en su relación con el complejo de Koszul, para el caso de álgebras de Koszul. Finalmente el capítulo sobre ejercicios de categorías derivadas culmina con dos casos favorables para calcular el funtor derivado de una composición de funtores, en el lenguaje de categorías derivadas. Un grupo de alumnos estaba interesado en las sucesiones espectrales, tema que no se dió en absoluto, pero estos ejercicios fueron puestos para comprender la naturaleza del problema de cálculo del funtor derivado de una composición.

Agradezco finalmente a los alumnos que cursaron la materia en esta modalidad virtual por su buena predisposición y gran interés en los temas, lo que resultó muy estimulante a la hora de preparar y dar las clases, preparar los proyectos de final, y dar forma a este escrito.

Marco Farinati,

Profesor Asociado Departamento de Matemática FCEyN UBA,

Investigador Independiente Conicet IMAS.

Buenos Aires - Junio 2021

Índice general

Parte I

Teoría

Capítulo 1

Introducción categórica y funtores en A-Mod

Los cálculos en álgebra homológica proveen de invariantes "naturales" en diversas situaciones. La noción de naturalidad se formaliza matemáticamente en el lenguaje categórico. Por otra parte, este lenguaje es tan ampliamente utilizado en el área que sería hoy realmente imposible estudiar álgebra homológica sin un manejo básico del mismo. Por estas razones, comenzamos repasando e introduciendo las nociones de categorías, funtores, transformaciones naturales, y distintas nociones categóricas, con énfasis puesto en las que más utilizaremos en el curso.

Atención: Este capítulo sobre categorías no debería ser tomado como una primer lectura en el tema, sino como una presentación minimal con enfoque a los usos que le darmenos en el álgebra homológica. Si bien incluiremos las definiciones básicas, asumiremos que el lector ya ha tenido, por lo menos una vez en la vida, algún contacto previo con la noción de categoría.

1.1. Categorías, Funtores, transformaciones naturales

Una categoría $\mathcal{C}$ consiste de los siguientes datos:

Objetos: Una clase, denotada $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Flechas: $\forall X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, un conjunto, denotado $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$
(a veces denotado $[X,Y]$, $[X,Y]_{\mathcal{C}}$, $\mathcal{C}(X,Y)$, $Mor[X,Y]$).

satisfaciendo:

C1: (técnico) Si $X, X', Y, Y' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$
si $X \neq X'$, o $Y \neq Y' \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',Y') = \emptyset$.

C2: $\forall X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, una función (”composición”)

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ (f,g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

que es asociativa (en el sentido obvio), y

C3: $\forall X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $\exists$“$\mathrm{Id}''_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$, neutro para la composición.

Primeros ejemplos de categorías

1. El ejemplo más clásico, la categoría de conjuntos, usualmente denotada Sets:

   Objetos = conjuntos, Flechas = funciones. Observar que los objetos no forman en sí un conjunto (ya que no existe el “conjunto de todos los conjuntos”), sino que forman una clase: la clase de todos los conjuntos.

2. En el otro extremo, si la clase de los objetos es un conjunto, y más aún, hay un solo objeto: $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}) = \{a\}$, entonces, dar una estructura de categoría sobre esta clase de objetos es lo mismo que el dato de un monoide asociativo con 1, pues el único dato que hay que dar es:

   $$M := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,a)$$

   y los axiomas son justamente de asociatividad del monoide y de la existencia de unidad.

3. Otros ejemplos clásicos son Top (espacios topológicos y funciones continuas), Var^{∞} (variedades diferenciales y funciones suaves), kVect (espacios vectoriales sobre un cuerpo fijo k y transformaciones lineales), A-mod (módulos a izquierda sobre un anillo fijo A y morfismos A-lineales), Gr (grupos y morfismos de grupos), An (anillos y morfismos de anillos), Sets_0 (conjuntos con un punto base y funciones que preservan punto base), Top_0, ...

4. Si $(I, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, se puede asociar una categoría, que seguiremos denotando $(I, \leq)$, donde los objetos son los elementos de I, y dados $i, j \in I$, se declara

   $$\mathrm{Hom}_{(I,\leq)}(i,j) = \begin{cases} \{(i,j)\} \subseteq I \times I & \text{si } i \leq j \\ \emptyset & \text{otro caso} \end{cases}$$

   Cuando el Hom no es vacío, la composición está dada por:

   $$(j,k) \circ (i,j) := (i,k)$$

   Notar que si $i \leq j$ y $j \leq k$ entoces $i \leq k$, por lo que esta definición tiene sentido. La asociatividad es clara, y la existencia de identidades está asegurada por la reflexividad. Notar también que la composición en esta categoría está definida de la misma manera que la composición de relaciones.

Observación 1.1. La noción de categoría generaliza entonces la de "conjuntos con un cierto tipo de estructura, y funciones que preservan la estructura", como en los ejemplos 1 y 3, o la noción de monoide, como en 2, y la de conjunto parcialmente ordenado, como en 4. Con las categorías tenemos un lenguaje en común, que permite realizar construcciones generales basados en la intuición de cada ejemplo, pero que tienen sentido en cualquier categoría. Las definiciones de límite y colímite categórico, por ejemplo, siguen la intuición de la definición de infimo y supremo en un conjunto parcialmente ordenado.

Dejamos como ejercicio al lector recolectar la mayor cantidad de ejemplos de categoría que pueda, y a medida que avance el curso (o la lectura) ir agregando los ejemplos nuevos, que con seguridad surgirán.

Funtores

Los funtores son "morfismos entre categorías":

Definición 1.2. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son dos categorías, dar un funtor $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ es dar,

- para cada objeto $X\in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, un objeto $F(X)\in\mathrm{Obj}(\mathcal{D})$, y
- para cada par de objetos $X,Y\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ una aplicación

  $$F:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$$

  $$f\mapsto F(f)$$

  que preserve identidades y composiciónes.

La aplicación primera de los funtores es la de proveer de invariantes, pues los funtores mandan isos en isos. Es decir, $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, es un funtor, $X,Y\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y si FX NO es isomorfo a FY en $\mathcal{D}$, entonces X NO puede ser isomorfo a Y en $\mathcal{C}$, pues es cierto el siguiente

Lema 1.3. *$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ un funtor, si $X\cong Y$ en $\mathcal{C}$ entonces $FX\cong FY$ en $\mathcal{D}$.*

.

Demostración. $X\cong Y$ significa que existen $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ y $g\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,X)$ tales que $f\circ g=\mathrm{Id}_Y$ y $g\circ f=\mathrm{Id}_X$. Como F preserva composición e identidad, tenemos que

$$F(f)\circ F(g)=F(f\circ g)=F(\mathrm{Id}_Y)=\mathrm{Id}_{FY}$$

y análogamente $F(g)\circ F(f)=\mathrm{Id}_{FX}$, luego, $F(f)$ y $F(g)$ son isomorfismos mutuamente inversos entre FX y FY.

□

Ejemplo 1.4. Dados espacios topológicos X e Y y una función continua $f : X \to Y$, sabemos que f manda componentes conexas en componentes conexas, por lo tanto, dado un espacio topológico X, considerar el conjunto de sus componentes conexas nos provee de un funtor "componentes conexas":Top $\to$ Sets. En la categoría de conjuntos, ser categóricamente isomorfo es lo mismo que tener el mismo cardinal. Concluimos un invariante topológico sencillo, pero muy útil, que nos dice que dos espacios topológicos con distinta cantidad de componentes conexas no pueden ser homeomorfos.

Ejemplo 1.5. Un ejemplo también de la topología: el grupo fundamental π_1 :$\mathrm{Top}_0 \to$Gr es un funtor definido en la categoría de espacios topológicos con un punto de base en la categoría de grupos. Incluso, este funtor, se factoriza por la categoría $\mathrm{Top}_0/\sim =$ "Top_0 a menos de homotopía.

Ejemplo 1.6. Dado un monoide (con unidad), considerar el subconjunto de sus unidades también resulta funtorial con respecto a los morfismos de monoide que preservan unidad, pues mandan unidades en unidades.

Observación 1.7. Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor y $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ es un monoide con la composición.

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FXF, X)$$

es un morfismo de monoides.

Si $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ denota las unidades del monoide $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ (o sea, los isomorfismos de X en X), entonces F induce (por restricción) un morfismo de grupos

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{D}}(FX)$$

Dejamos como ejercicio para el lector producir una lista de funtores a partir de las "construcciones naturales" conocidas entre objetos de diferente tipo. Observar que la composición de funtores también es un funtor, asi que se puede observar en la lista recién hecha, si hay algún candidato a componer con otro, o si, alguno de los ejemplos, se puede ver como una composición.

Ejemplo 1.8. Dado un anillo A, las unidades de A se define utilizando sólo la multiplicación:

$$U(A) = \{a \in A : \exists a'/aa' = a'a = 1_A\}$$

Este funtor $U(-)$ es en realidad una composición de un "funtor olvido" $O : An \to Mon$ que al anillo $(A, +, \cdot)$ le asigna el monoide $(A, \cdot)$, y el funtor unidades de un monoide, que a un monoide le asigna su grupo de unidades.

Ejemplo 1.9. Si $\mathcal{C}$ es una categoría y X_0 es un objeto fijo, se puede considerar $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0, -)$ como una fórmula en donde la variable es un objeto, y que también se aplica a morfismos, vía

$$X \xrightarrow{f} Y \ \rightsquigarrow f_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0, Y)$$
$$\phi \mapsto f \circ \phi$$

De esta manera, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0, -) : \mathcal{C} \to$Sets es un funtor de $\mathcal{C}$ en conjuntos. Un funtor de este tipo se llamará un funtor representado por X_0.

Comparación de funtores: trasformaciones naturales

Si $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ son dos funtores, una **transformación natural** entre ellos es dar, para cada objeto X, un morfismo

$$\eta_X : FX \to GX$$

compatible con las flechas de la categoría. Es decir, tal que para toda $f : X \to Y$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"] & GX \arrow[d, "G(f)"] \\ FY \arrow[r, "\eta_Y"] & GY \end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.10. Para cada espacio vectorial V, la transformación lineal canónica $i_V : V \to V^{**}$ es, en realidad, una transformación natural entre el funtor identidad y el funtor doble dual.

$$V \ni v \mapsto ev_v\big(\phi \mapsto \phi(v)\big) \in V^{**}$$

Ejemplo 1.11. Hom: Si A es un anillo, los isomorfismos

$$M \cong \mathrm{Hom}_A(A, M)$$

$$m \mapsto \phi_m\Big(a \mapsto am\Big)$$

$$\mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$$

$$\phi \mapsto \phi(1)$$

dan transformaciones naturales, que son isomorfismos, entre los funtores Id y $\mathrm{Hom}_A(A, -)$.

Ejemplo 1.12. Si A es una k-álgebra (e.g. $A = k[x]/x^2$, o $A = k[G]$,...) entonces

$$\mathrm{Hom}_A(N, M) \subseteq \mathrm{Hom}_k(N, M)$$

es una "inclusión" natural de funtores. Es decir, para cada N fijo, se tiene una trasformación natural, que en cada objeto es una inclusión

$$i : \mathrm{Hom}_A(N, -) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_k(N, -)$$

Observación 1.13. Si k es un A-módulo,

$$\mathrm{Hom}_A(k, M) \subseteq \mathrm{Hom}_k(k, M) \cong M$$

La filosofía es que con Hom se puede "modelar" funtores que son subobjetos. Por ejemplo, si G es un grupo que actúa linealmente en un espacio vectorial V, entonces V es un $k[G]$ módulo y

$$\big\{v \in V : g(v) = v \ \forall g \in G\big\} =: V^G \cong \mathrm{Hom}_{k[G]}(k, V)$$

donde se toma la estructura trivial en k ($g \cdot \lambda = \lambda$, $\lambda \in k$, $g \in G$). Se tiene el siguiente diagrama "natural en V":

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_k(k, V) \\ V^G \arrow[u, hook] \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{k[G]}(k, V) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.14. $\mathbb{Z}$ es el grupo libre en 1 elemento, esto dice

$$\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z}, G) \cong G$$

$$\phi \mapsto \phi(1)$$

Dado G, si definimos el subconjunto $G_{(2)} = \{g \in G : g^2 = 1\}$, se puede modelar via

$$\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z}_2, G) \cong G_{(2)}$$

$$\phi \mapsto \phi(1)$$

lo que muestra en forma de argumento general la naturaleza funtorial de este subconjunto asociado a G

Ejemplo 1.15.

$$\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, G) \subseteq G \times G$$

$$\phi \mapsto (\phi(1,0), \phi(0,1))$$

$\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, G) \cong$ "pares de elementos que conmutan"$\subseteq G \times G$.

Similarmente, podemos ver que los siguientes subconjuntos asociados a un grupo G también es una asignación funtorial:

Ejemplo 1.16.

$$\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3, G) \cong \{(a,b) \in G \times G : a^2 = 1, b^3 = 1, ab = ba\}$$

Ejemplo 1.17. $\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3, G) \cong \{(a,b) : a, b \in G, a^2 = 1, b^3 = 1\}$

Pregunta general:

En la categoría de A-módulos, si $F : A\text{-mod} \to \mathcal{C}$, y

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

(por ejemplo, si $Y = A^n$, esto da una presentación de Z por n generadores, y las relaciones "X") ¿hay relación entre $F(X)$, $F(Y)$ y $F(Z)$? Qué se puede decir si $F = \mathrm{Hom}_A(M_0, -)$?

1.2. Supremos, ínfimos, (co)límites categóricos

Como prometido, motivados por la definición de supremo e ínfimo en un poset, introduciremos una noción categórica general y de una utilidad y ubicuidad increíble.

Sea P un poset, $I \subseteq P$. Recordamos la definición de cota superior y de de supremo: $sup(I)$ (en P):

- $c \in P$ es cota superior I si $i \leq c, \forall i \in I$.
- s_0 es un **supremo** para I si es “la mejor cota superior”, i.e.
  - s_0 es cota superior de I, y
  - para toda cota superior c, tenemos que $s_0 \leq c$.
    (en particular toda cota superior es comparable a s_0.
    O sea, no es lo mismo supremo que maximal)

Observación 1.18. si existe, el supremo es único.

Demostración. Si s_0 e s_1 son supremos, entonces $s_0 \leq s_1$ (pues s_0 es cota y s_1 es supremo). Pero también $s_1 \leq s_0$ (pues s_1 cota y s_0 es supremo). Luego $s_0 = s_1$ porque $\leq$ es de orden. $\square$

Colímite categórico: sistemas directos

$\mathcal{C}$ una categoría, $(I, \leq)$ un poset, y tomamos “un diagrama” en $\mathcal{C}$ indexado por I. Es decir, damos los siguientes datos:

- $X_i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ para cada $i \in I$.
- para cada $i \leq j$ una flecha $\iota_{ij} : X_i \to X_j$ compatible con el orden:
  - $\iota_{ii} = \mathrm{Id}_{X_i}$
  - Si $i \leq j \leq k$, luego $i \leq k$. Pedimos $\iota_{ik} = \iota_{jk}\iota_{ij}$

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\iota_{ij}"] \arrow[rr, bend right, "\iota_{ik}"'] & X_j \arrow[r, "\iota_{jk}"] & X_k \end{tikzcd}$$

  i.e. hemos etiquetado el diagrama de Hasse de I, con objetos en los vértices y morfismos en las flechas, de manera compatible con el orden.

A este dato $(\{X_i\}_{i \in I}, \{\iota_{ij}\}_{i \leq j})$ lo llamamos un **sistema directo**.

El poset $(I, \leq)$ podría tener supremo (resp. ínfimo) o no. Nos preguntamos si en la categoría $\mathcal{C}$, el diagrama decorado admite un objeto que funcione como supremo (resp. ínfimo).

Ejemplos

1. $I = \{a, b\}$, donde a y b no son comparables. Un diagrama indexado por I es simplemente dos objetos

   $I : \bullet \qquad \bullet \qquad\qquad$ diagrama: $X \qquad Y$

2. $I = \{1 < 2\}$. En este caso, un diagrama son dos objetos unidos por una flecha:

   $I :\ 1 \to 2, \qquad\qquad$ diagrama: $X \xrightarrow{f} Y$

3. $I = \{a \geq b \leq c\}$. Un diagrama son dos flechas con mismo dominio:

$$I :\ \begin{tikzcd} b \arrow[r] \arrow[d] & a \\ c & \end{tikzcd} \qquad\qquad \text{diagrama: } \begin{tikzcd} X_b \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X_a \\ X_c & \end{tikzcd}$$

Dado $\{X_i \overset{\iota_{ij}}{\to} X_j\}_{i \leq j}$ un diagrama en $\mathcal{C}$ indexado por un poset I, **un colímite** (o límite directo) en $\mathcal{C}$ de ese diagrama, denotado $\lim\limits_{\to I} X_i$ (o $\lim\limits_{\to I}{}^{\mathcal{C}} X_i$) es un objeto en $\mathcal{C}$ que es un "supremo" del diagrama (o sistema directo), i.e.

Definición 1.19. Un objeto X junto a morfismos $\iota_i : X_i \to X$ $\forall i \in I$ tal que $\forall i \leq j$, el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "\iota_{ij}"'] & X \\ X_j \arrow[ur, "\iota_j"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{(es cota superior)}$$

y, si $\{f_i : X_i \to Y\}_i$ es otra familia de flechas como antes, entonces X es "mejor"

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "\iota_{ij}"'] \arrow[rr, bend left, "f_i"] & X \arrow[r, dotted, "\exists! f"] & Y \\ X_j \arrow[ur, "\iota_j"'] \arrow[urr, bend right, "f_j"'] & & \end{tikzcd} \qquad \text{(la mejor cota)}$$

Observación 1.20. Si $(I, \leq)$ tiene máximo m_0, entonces X_{m_0} es el colímite del diagrama. La gracia es cuando no hay máximo en I.

Límite categórico: producto directo

En el ejemplo $I = \{a, b\}$, donde a y b no son comparables,

$$\begin{tikzcd}
\bullet a & & \bullet a \arrow[dr] & \\
& \rightsquigarrow & & \bullet s_0 \\
\bullet b & & \bullet b \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Un diagrama en la categoría es simplemente dos objetos: $\begin{matrix}\bullet_a X \\ \\ \bullet_b Y\end{matrix}$ y su colímite es (Z, ι_a, ι_b) que verifica la propiedad ilustrada por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\iota_a"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \forall Z', f, g \\
& Z \arrow[r, dotted, "\exists!"] & Z' \\
Y \arrow[ur, "\iota_b"] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

$Z := X \coprod Y$ se llama un **coproducto** categórico de X e Y.

Ejemplo 1.21. Si el poset es $1 \to 2$, un diagrama en ese poset es un morfismo $f : X \to Y$, el colímite es simplemente Y, pues es 2 es máximo. Las flechas son $f : X \to Y$ e $\mathrm{Id}_Y : Y \to Y$. En general, el colímite será más interesante en caso que el poset no tenga máximo.

Ejemplo 1.22. Consideremos el poset de lineas llenas, que al "agregarle" un supremos resulta en el cuadrado: $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d, dotted] \\ \bullet \arrow[r, dotted] & \circ \end{tikzcd}$

Dado $\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$ el **cuadrado (co)cartesiano** o push-out es un objeto $X \coprod_Z Y$ que recibe morfismos de X y de Y tal que el cuadrado es conmutativo, y universal con respecto a esa propiedad. En diagramas:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "a"] & \\
Y \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "b"'] & X \coprod_Z Y \arrow[dr, dotted, "\exists!"] & \\
& & W
\end{tikzcd}$$

Es decir, definir un morfismo que salga del push-out equivale a dar morfismos desde X y desde Y que "coincidan" en Z.

Ejemplos de coproductos

- En grupos abelianos, o módulos, el coproducto $\coprod$ es la suma directa $\oplus$.
- En Sets, el coproducto es la unión disjunta.
- Notar que fijado A un anillo, el funtor $L : Sets \to A - mod$ dado por

  $$L(X) = A^{(X)}$$

  (que a X le asigna el A-módulo libre en X)
  manda coproducto (en Sets) en coproducto (en A-mod)

* En Grupos (no necesariamente abelianos) el coproducto es el producto libre.
* en anillos **conmutativos** el coproducto es el producto tensorial sobre $\mathbb{Z}$

1.3. Lema de la Serpiente: introducción a los métodos con sucesiones exactas

Antes de continuar con las definiciones generales, veremos algunos ejemplos de funtores y su comportamiento con las sucesiones exactas para tener una idea de hacia dónde desarrollaremos la teoría. Consideremos

$$0 \to S \xrightarrow{i} T \xrightarrow{p} M \to 0$$

una s.e.c. de $k[x]$-módulos. Por comodidad supondremos que i es una inclusión y p la proyección al cociente (o sea, $S \subseteq T$ y $M = T/S$). Se definen

$$M^x = \{m : x \cdot m = 0\}$$

$$M_x = \frac{M}{x \cdot M}$$

(y similarmente para S y T). Construiremos un morfismo

$$\boxed{\delta : M^x \to S_x}$$

a partir de una s.e.c.

$$0 \to S \to T \to M \to 0$$

Este morfismo es, en realidad, una transformación natural

$$\delta : (-)^x_{ult} \to (-)^{1ero}_x$$

donde los funtores $(-)_x^{1ero}$ y $(-)_{ult}^x$ son funtores definidos en la categoría de "las sucesiones exactas cortas":

$$\Big(0 \to S \to T \to M \to 0\Big)_x^{1ero} = S_x \qquad \Big(0 \to S \to T \to M \to 0\Big)_{ult}^x = M^x$$

La construcción es la siguiente: Si $m \in M^x \subseteq M = T/S$, entonces m es la clase de alguien:

$$m = \bar{t}$$

con $t \in T$. Luego, también

$$x \cdot t \in T$$

Pero

$$M = T/S \ni \overline{x \cdot t} = x \cdot \bar{t} = x \cdot m = 0$$

pues $m \in M^x$. Es decir, $x \cdot t \in S$.

La clase de $x \cdot t$ es cero módulo $x \cdot T$, pero no necesariamente es cero módulo $x \cdot S$. Se define

$$\delta : M^x \to S_x$$
$$m = \bar{t} \mapsto x \cdot t \text{ Mod } x \cdot S$$

Ejercicio: (2) de la práctica 1

δ esta bien definido (i.e. si $m{=}\bar{t}{=}\bar{t}' \in M{=}T/S \Rightarrow x \cdot t \equiv x \cdot t'$ MOD $x \cdot S$), δ es k-lineal, y

$$0 \to S^x \to T^x \to M^x \xrightarrow{\delta} S_x \to T_x \to M_x \to 0$$

es una sucesión exacta.

Algunas conclusiones / observaciones

- $(-)^x : k[x]\text{-mod} \to k\text{-mod}$ es un funtor, que preserva monomorfismos pero no epimorfismos (encuentre un ejemplo con $S_x \neq 0$ y $\delta \neq 0$, e.g. si $T_x = 0$,(por qué?)).
- $(-)_x : k[x]\text{-mod} \to k\text{-mod}$ es un funtor, que preserva epimofismos pero no monomorfismos (encuentre un ejemplo donde $M^x \neq 0$ y $\delta \neq 0$, e.g. si $T^x = 0$).
- Sugerencia: escriba la s.exacta para $T = k^2$ o k^3 donde x es una matriz de un solo bloque de Jordan.
- $(-)^x \cong \mathrm{Hom}_{k[x]}(k, -)$ donde la acción de x en k es cero.
- Todo funtor del tipo $\mathrm{Hom}_{k[x]},(M, -)$ preserva monomorfismos, asi que $(-)_x$ no es de este tipo (o sea, $(-)_x$ no es representable, como funtor de la categoría de $k[x]$-módulos).

1.4. Propiedades universales, Hom y $\otimes$

Aprovechando el lenguaje categórico, observemos el siguiente ejemplo de categoría: **las s.e.c.'s** en $\mathcal{C}$ y morfismos de s.e.c. Es decir, fijamos una categoría $\mathcal{C}$ (por ejemplo A-módulos, para un anillo A fijo), y consideramos una nueva categoría, cuyos objetos son las sucesiones exactas cortas de $\mathcal{C}$. Es decir, diagramas (exactos) de la forma

$$(S) \quad = \qquad 0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

En otras palabras, los objetos son pares de morfismos componibles

$$\text{Obj}: \qquad (X, Y, Z, f: X \to Y, g: Y \to Z)$$

tal que $\text{Ker} f = X$, $Imf = \text{Ker} g$, f mono, g epi. Un morfismo entre sucesiones exactas es, por definición, una terna de morfismos que forman cuadrados conmutativos:

$$\text{Hom}: \qquad \begin{tikzcd} (S) \arrow[d, "\phi_{abc}"'] \\ (S') \end{tikzcd} \quad \leftrightarrow \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\text{Hom}_{sec}(S_1, S_2) = \{(a, b, c) : bf = f'a, cg = g'b\} \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X') \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y') \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z')$$

Observación 1.23. Toda s.e.c. es isomorfa (en la categoría de s.e.c.) a una inclusión de un submódulo $K \subseteq Y$ seguida de la proyección al cociente $Y \twoheadrightarrow Y/K$. En efecto, si observamos el siguiente diagrama, comenzando desde la línea de abajo con una sucesión exacta dada:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Imf \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] & Y/\text{Ker} g \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[u, "\cong"', "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] & Y/\text{Ker} g \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "\overline{g}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

todas las flechas verticales son isomorfismos y todos los cuadrados son conmutativos. La línea superior es, en efecto, una inclusión seguida del cociente.

Propiedad universal del cociente

La observación anterior tiene una consecuencia directa sobre el comportamiento del funtor Hom con respecto a las sucesiones exactas. Comenzamos repasando la conocida propiedad universal del cociente:

Sea $S \subseteq M$ un submódulo y $\pi : M \to M/S$ la proyección al cociente, entonces π se anula en S, y $\forall f : M \to W \ / \ S \subseteq \mathrm{Ker} f$, $\exists!$ factorización de f a través de M/S. En diagramas:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ M/S \arrow[ur, dashed, "\exists! \overline{f}"'] & \end{tikzcd} \qquad f = \overline{f} \circ \pi = \pi^*(f)$$

Es decir, los morfismos $\overline{f} : M/S \to W$ están en biyección con los morfismo $f : M \to W$ que verifican $f|_S = 0$.

Notar que $i : S \to M$,

$$f|_S = f \circ i = i^*(f)$$

y por lo tanto $f|_S = 0 \Leftrightarrow f \in \mathrm{Ker} i^*$. O sea, para todo W, el siguiente es un diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(i^*) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_A(M,W) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_A(S,W) \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M/S,W) \arrow[r, "\pi^*"] & \mathrm{Hom}_A(M,W) \arrow[r, "i^*"] & \mathrm{Hom}_A(S,W) \end{tikzcd}$$

Como toda sucesión exacta corta es isomorfa (como sucesión exacta corta) a una inclusión de un submódulo seguida del cociente por el mismo, podemos concluir rápidamente que una sucesión exacta corta

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

induce, para cualquier W, una sucesión exacta a izquierda:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(Z,W) \to \mathrm{Hom}_A(Y,W) \to \mathrm{Hom}_A(X,W)$$

Dejamos como ejercicio al lector, recolectar ejemplos que conozca de propiedades universales, y describirlos en forma categórica. (Durante la cursada que dió origen a estas notas, este tipo de tareas fué realizado comunitariamente.) Usualmente las construcciones universales vienen fuertemente ligadas a funtores y (veremos luego) a adjunciones.

1.5. Ley exponencial como primer ejemplo de adjunción

Tomaremos aquí una fórmula elemental numérica muy conocida, y exploraremos su analogía categórica a través de distintos contextos para llegar a una de las fórmulas de adjunción mas importantes y paradigmática en álgebra. Recordamos la ley exponencial de números:

$$(a^b)^c = a^{(b \times c)}$$

y su interpretación en conjuntos

$$(Z^Y)^X = Z^{(X \times Y)}$$

que, en otra notación escribimos como

$$\begin{array}{rcl} Func(X\times Y,Z) & \leftrightarrow & Func(X,Func(Y,Z)) \\ f=f(x,y) & \leftrightarrow & \widehat{f}\Big(x\mapsto f_x=f(x,-):Y\to Z\Big) \end{array}$$

Es decir, toda función de dos variables, al fijar una de ella, nos da una función de la otra. O bien,

$$\mathrm{Hom}_{Sets}(X\times Y,Z)\leftrightarrow \mathrm{Hom}_{Sets}(X,\mathrm{Hom}_{Sets}(Y,Z))$$

Ley exponencial en grupos abelianos

Sean ahora X,Y,Z grupos abelianos y definimos

$$\mathrm{Bil}(X\times Y,Z)=\Big\{f:X\times Y\to Z: \quad f(x+x',y)=f(x,y)+f(x',y), \quad f(x,y+y')=f(x,y)+f(x,y')\Big\}$$

Es decir, una función bilineal es una función tal que, al fijar una variable, tenemos una función lineal con respecto a la otra. Concluimos una biyección (lineal!)

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Bil}(X\times Y,Z) & \leftrightarrow & \mathrm{Hom}_{Ab}(X,\mathrm{Hom}_{Ab}(Y,Z)) \\ f & \leftrightarrow & \widehat{f}\Big(x\mapsto f(x,-)\Big) \end{array}$$

En la biyección anterior, el término de la derecha claramente involucra Hom's en la categoría de grupos abelianos, mientras que a la izquierda no. Sin embargo, las funciones bilineales son, en particular, funciones, y podemos tratar de "modelar" ese subconjunto de funciones con algun Hom. Lo más adecuado es, cuando se trata de subconjuntos de $\mathrm{Hom}(W,-)$, buscar un cociente de W/S de W. De esta manera (propiedad universal del cociente) el funtor $\mathrm{Hom}(W/S,-)$ se identifica con un subconjunto de $\mathrm{Hom}(W,-)$. Esto lo implementamos en la siguiente definición de producto tensorial de grupos abelianos:

Definición 1.24. $X\otimes_{\mathbb{Z}}Y:=\mathbb{Z}^{(X\times Y)}/S$ donde

$$S=\Big\langle (x+x',y)-(x,y)-(x',y);\ (x,y+y')-(x,y)-(x,y')\Big\rangle$$

Denotamos $x\otimes y=\overline{(x,y)}$ a la clase de (x,y), llamamos a estos elementos "tensores elementales" y observamos que en $X\otimes_{\mathbb{Z}}Y$ todo elemento es una suma finita de tensores elementales. Si Z es otro grupo abeliano, tenemos la siguiente cadena de biyecciones:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(X\otimes Y,Z) & \leftrightarrow & \{f\in\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^{(X\times Y)}:f|_S=0\} \\ & \leftrightarrow & \left\{f\in Func(X\times Y,Z): \begin{array}{l} f(x+x',y)-f(x,y)-f(x',y)=0 \\ f(x,y+y')-f(x,y)-f(x,y')=0 \end{array}\right\} \\ & \leftrightarrow & \mathrm{Bil}(X\times Y,Z) \end{array}$$

De esta manera concluimos que, fijados dos grupos abelianos X e Y, el funtor

$$\mathrm{Bil}(X \times Y, -) : \mathcal{A}b \to Sets$$

es representable, y se representa por el producto tensorial de X con Y.

Propiedad universal del producto tensorial

El producto tensorial se puede definir, o caracterizar, a partir de la siguiente propiedad universal:

La aplicación $X \times Y \to X \otimes Y$ $(x, y) \mapsto x \otimes y$ es bilineal, y si $b : X \times Y \to Z$ es bilineal

$$\Rightarrow \qquad \begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "b"] \arrow[d] & Z \\ X \otimes Y \arrow[ur, dashed, "{\exists ! \overline{b},\ \textbf{lineal}}"'] & \end{tikzcd}$$

entonces existe una única aplicación de grupos abelianos $\overline{b} : X \otimes Y \to Z$ tal que el diagrama anterior es conmutativo.

La propiedad universal escrita en términos de Hom, junto a la Ley exponencial nos dice entonces que tenemos las siguientes biyecciones:

$$\mathrm{Hom}_{Ab}(X \otimes Y, Z) \leftrightarrow \mathrm{Bil}(X \times Y, Z) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab}(X, \mathrm{Hom}_{Ab}(Y, Z))$$

Si fijamos Y_0 y definimos

$$F(Z) := \mathrm{Hom}_{Ab}(Y_0, Z)$$

visto como funtor de Ab en Ab y

$$G(X) = X \otimes Y_0$$

entonces tenemos una biyección natural (en X y en Z)

$$\mathrm{Hom}_{Ab}(G(X), Z) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab}(X, F(Z))$$

Un par de funtores $F : \mathcal{C} \to D$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ que admitan una biyección natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(D), C) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, F(C))$$

se llamarán **funtores adjuntos**. Diremos que G es el adjunto a izquierda de F y F el adjunto a derecha de G. Funtores que admiten un adjunto tienen propiedades muy especiales (con respecto a límites y colímites). El ejemplo del producto tensorial es el prototipo de adjunción en categorías abelianas. El producto tensorial de grupos abelianos se generaliza fácilmente a módulos sobre un anillo, obteniendo muy interesantes aplicaciones.

Producto tensorial sobre un anillo

Si A es un anillo, X_A es un A-módulo a derecha e ${}_AY$ es un A-módulo a izquierda, su producto tensorial sobre A, denotado $X \otimes_A Y$ se lo define como

$$\begin{aligned} X \otimes_A Y := \mathbb{Z}^{(X\times Y)}/\Big((x+x',y)-(x,y)-(x',y),\\ (x,y+y')-(x,y)-(x,y'),\\ (xa,y)-(x,ay)\Big)\\ = X\otimes_{\mathbb{Z}} Y/\Big(xa\otimes y - x\otimes ay : x\in X,\ y\in Y,\ a\in A\Big)\end{aligned}$$

Propiedad universal de $X \otimes_A Y$

Como es de esperar, el producto tensorial sobre un anillo se lo puede caracterizar por una propiedad universal. Definimos las funciones bilineales A-balanceadas como

$$\mathrm{Bil}_A(X\times Y, M) := \{f : X\times Y \to M \textit{ bilineal } / \ f(xa,y) = f(x,ay)\}$$

La aplicación $X\times Y \to A\otimes_A Y$ $\Big((x,y)\mapsto x\otimes_A y\Big)$ es bilineal y A-balanceada y universal con esa propiedad:

$\forall b : X\times Y \to M$ bilineal A-balanceada $\exists!$ morfismo de grupos abelianos $\overline{b} : X\otimes_A Y \to M$ tal que

$$\overline{b}(x\otimes_A y) = b(x,y)$$

$$\begin{tikzcd} (x,y) \arrow[d, mapsto] & X\times Y \arrow[r, "b"] \arrow[d] & M \\ x\otimes y & X\otimes_A Y \arrow[ur, dotted, "\exists!\overline{b}"'] & \end{tikzcd}$$

Adjunción

Como antes, la propiedad universal escrita en términos de Homs queda:

$$\mathrm{Bil}_A(X\times Y, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X\otimes_A Y, M)$$

y si usamos la ley exponencial

$$\cong \mathrm{Hom}_{-A}(X_A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_AY, M))$$

$$\text{y también} \quad \cong \mathrm{Hom}_{A-}({}_AY, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_A, M))$$

Donde Hom_{A-} y Hom_{-A} denotan respecctivamente morfismos A-lineales a izquierda y a derecha.

Como consecuencia, si $G(Y) = X \otimes_A Y$, $G : {}_A\text{-mod} \to \mathbb{Z}\text{-mod}$, entonces se tiene una biyección, natural en Y y en M

$$\boxed{\boxed{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(Y), M) \cong \mathrm{Hom}_A(Y, F(M))}}$$

donde $F(M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_A, M) \in {}_A\text{-mod}$. De hecho, esta biyección también es un isomorfismo de grupos abelianos.

Consecuencias de la adjunción

La importancia de saber que un funtor admite un adjunto es que estos tienen propiedades generales con respecto a los (co)ímites. En nuestro caso, mostraremos que el funtor $X \otimes_A -$ es co-continuo, es decir, preserva colímites. En efecto, si tenemos un sistema directo

$$\left\{ Y_i, \overset{i \leq j}{\to} \right\}_{(I, \leq)}$$

en particular por cada $i \in I$ tenemos una flecha $Y_i \to \lim\limits_{\to I} Y_i$. Tensorizando tenemos flechas naturales

$$X \otimes_A Y_i \longrightarrow X \otimes_A \left(\lim_{\to I} Y_i \right)$$

A su vez también tenemos un sistema directo

$$\left\{ X \otimes_A Y_i, \overset{1 \otimes (i \leq j)}{\longrightarrow} \right\}_{(I, \leq)}$$

La propiedad universal del límite de éste último sistema determina la flecha

$$\boxed{\lim_{\to I} (X \otimes_A Y_i) \to X \otimes_A \left(\lim_{\to I} Y_i \right)}$$

y por tener $X \otimes_A -$ adjunto a derecha, afirmamos que es un isomorfismo. En particular $X \otimes_A (\oplus_i Y_i) \cong \oplus_i (X \otimes_A Y_i)$

Demostración. Llamamos $G(-) = X \otimes_A -$. Para cualquier grupo abeliano W, tenemos la siguiente cadena de biyecciones, naturales en W:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(G(\lim\limits_{\to I} Y_i), W \Big) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(\lim\limits_{\to I} Y_i, FW \Big) \arrow[d, "\cong"] \\
& \lim\limits_{\leftarrow I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Y_i, FW) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(\lim\limits_{\to I} G(Y_i), W \Big) \arrow[r, "\cong"] & \lim\limits_{\leftarrow I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(GY_i, W)
\end{tikzcd}$$

La demostración concluye con el siguiente Lema, que es una versión de Yoneda, que dejamos como ejercicio de categorías: $\square$

Lema 1.25 (Yoneda)**.** *En una categoría $\mathcal{C}$, dos objetos U y V son isomorfos $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,W) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V,W)$ $\forall W$ (y natural en W).*

O sea, U y V son isomorfos $\Leftrightarrow$ los funtores $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,-)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V,-)$ son isomorfos como funtores. *Sugerencia: utilizar los casos $W = U$ y $W = V$ para obtenerlas flechas $U \to V$ y $V \to U$ candidatos a isomorfismos, más la naturalidad.*

Segunda consecuencia: exactitud a derecha

Si $Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} T \longrightarrow 0$ es una s.e.c. en A-mod, entonces

$$X \otimes_A Y \xrightarrow{\mathrm{Id}_X \otimes f} X \otimes_A Z \xrightarrow{\mathrm{Id}_X \otimes g} X \otimes_A T \longrightarrow 0$$

es una s.e.c. de grupos abelianos. Esto es una consecuencia del siguiente lema

Lema 1.26. *Sea R un anillo (e.g. $R = A, \mathbb{Z}, A^{op}, ...$), $f : S \to M$, $g : M \to N$ morfismos de R-módulos, entonces*

$$S \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

es una s.e.c. de R-mod $\Leftrightarrow$ para todo R-módulo W

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,W) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M,W) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(S,W)$$

es una s.e.c. de grupos abelianos.

Dejamos como ejercicio la demostración de este lema (ver por ejemplo [FSS]).

Observación 1.27. La demostración es válida en cualquier categoría abeliana.

Continuamos con la demostración de la exactitud a derecha de $X \otimes_A -$.

Sea $Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} T \longrightarrow 0$ una s.e.c. A-mod y llamamos $G(-) = X \otimes_A -$. Queremos ver que

$$G(Y) \xrightarrow{Gf} G(Z) \xrightarrow{Gg} G(T) \longrightarrow 0$$

sea exacta. Para esto, tomamos W un grupo abeliano arbitrario. Por el lema anterior, basta ver que

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(T),W) \xrightarrow{(Gg)^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(Z),W) \xrightarrow{(Gf)^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(Y),W)$$

es exacta. Consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(T),W) \arrow[r, "(Gg)^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(Z),W) \arrow[r, "(Gf)^*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(Y),W) \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(T,F(W)) \arrow[r, "g^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z,F(W)) \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Y,F(W))
\end{tikzcd}$$

Como $Y \to Z \to T \to 0$ es exacta, aplicando $\mathrm{Hom}_A(-, F(W))$ obtenemos que la fila de abajo es exacta. La naturalidad implica que los cuadrados son conmutativos.

Aplicación general

Así como teníamos "el funtor Hom $\rightsquigarrow$ funtores subobjeto", pues si $N \cong A^{(X)}/S$, (X= conjunto de generadores, S= submódulo de relaciones),

$$\mathrm{Hom}_A(A^{(X)}/S, M) \cong \{f\colon X \to M : f(S) \equiv 0\} \subseteq M^X$$

el "producto tensorial" nos provee de "funtores cocientes". Por ejemplo: A un k-álgebra aumentada con un morfismo de álgebras $\epsilon : A \to k$, entonces k es A-módulo (por ejemplo a derecha) via

$$1 \cdot a = \epsilon(a)$$

supongamos A es k-libre (e.g. si k es un cuerpo). Entonces, para cualquier A-moódulo a izqueirda M tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
M^{(\dim_k A)} \arrow[r] & M \arrow[r] & M/\langle am - \epsilon(a)m\rangle \arrow[r] & 0 \\
k \otimes_k A \otimes_k M \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & k \otimes_k M \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & k \otimes_A M \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & 0
\end{tikzcd}$$

$$1 \otimes a \otimes m \longmapsto \epsilon(a) \otimes m - 1 \otimes am$$

por lo tanto $k \otimes_A M \cong \frac{M}{\mathrm{Ker}(\epsilon)\cdot M}$, nos da un cociente (funtorial) de M.

Ejemplo 1.28. $A = k[x]$, $\epsilon : k[x] \to k$ dado por $\epsilon(p(x)) = p(0)$, entonces k es un $k[x]$-módulo vía ϵ y si M es un $k[x]$-módulo se tiene el siguiente isomorfismo natural de funtores:

$$M_x := \frac{M}{x \cdot M} \cong k \otimes_{k[x]} M$$

Ejemplo 1.29. G un grupo, $A = k[G]$, $\epsilon : k[G] \to k$ dado por $\epsilon(g) = 1$ para todo g en G; k es un $k[G]$-módulo vía ϵ y si M es un $k[G]$-módulo entonces

$$M_G := \frac{M}{\langle m - gm : g \in G, m \in M\rangle} \cong k \otimes_{k[G]} M$$

Capítulo 2

Objetos diferenciales graduados

El álgebra homológica se desarrolló para estudiar sistemáticamente y tratar de responder las preguntas relevantes en diversas situaciones en donde dos operaciones consecutivas se trivializan. Inicialmente uno observa que el borde de un objeto sólido en el espacio (con condiciones favorables de suavidad) es una superficie, y que el borde de una superficie consiste en una (o varias disjuntas) curva(s). Pero el borde de un objeto sólido es siempre una superficie sin borde, y también observamos que las curvas que son borde de una superficie, son ellas mismas curvas cerradas. Si tenemos una superficie con borde, claramente no puede ser el borde de un objeto tridimensional, pero si la superficie no tiene borde, la pregunta relevante es si ella misma no será el borde de un cuerpo sólido. De la misma manera, una curva que no es cerrada mal puede ser el borde de una superficie, pero si una curva es cerrada, existirá una superficie cuyo borde sea esa curva? La homología singular es la herramienta clásica que ataca este problema.

Esta misma filosofía también nos recuerda el conocido "teorema de los campos conservativos", donde sabemos que, bajo condicion de C^2, el rotor de todo gradiente es cero, por lo tanto, si un campo vectorial no tiene rotor cero, no puede ser gradiente de nadie. Pero, la pregunta relevante es: si un campo tiene rotor cero, será el gradiente de alguien? Para tratar sistemáticamente este tipo de problemas/preguntas es que se origina la noción de objeto diferencial graduado, noción absolutamente central en el curso, con la que trabajaremos permanentemente. Muchos de los nombres de las construcciones vienen de la topología (borde, cono, cadena, cono, cilindro, contráctil,...), pero cabe destacar que las aplicaciones del álgebra homológica van mucho mas allá de las consideraciones topológicas que dieron origen a su nacimiento. En este curso, veremos mayoritariamente aplicaciones dentro del álgebra misma, esencialmente como herramienta de cálculo eficaz de invariantes.

Módulos diferenciales graduados

Definimos los A-módulo diferenciales graduados. Una estructura diferencial graduada (d.g.) en $M \in A$-Mod es el dato de una descomposición

$$(M, d),\ M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n,$$

junto con una aplicación A-lineal $d : M \to M$ que verifica

- $d^2 = 0$,
- $d(M_n) \subseteq M_{n-1}$ (complejo de cadenas)

Si $d(M_n) \subseteq M_{n+1}$ se llama complejo de cocadenas. Notar que ante un cambio notacional

$$\widetilde{M_n} := M_{-n}$$

se puede pasar de complejos de cadenas a complejos de cocadenas. Los objetos diferenciales graduados los dibujaremos diagramáticamente como:

$$\cdots \to M_{n+1} \stackrel{d}{\to} M_n \stackrel{d}{\to} M_{n-1} \stackrel{d}{\to} \cdots$$

Ejemplo del Análisis en $\mathbb{R}^3$

Sea U un abierto de $\mathbb{R}^3$,

$$0 \to C^\infty(U) \xrightarrow{grad} (C^\infty(U))^3 \xrightarrow{rot} (C^\infty(U))^3 \xrightarrow{div} C^\infty(U) \to 0$$

Sabemos que Ker($grad$)= funciones localmente constantes = $\mathbb{R}^{\#\text{comp. conexas}}$

También sabemos que $rot(grad(f)) = 0$ y que $div(rot(F)) = 0$. A su vez, (teorema de campos conservativos), si U es simplemente conexo, entonces dado un campo F, existe ϕ tal que $F = grad\phi \iff rotF = 0$, es decir, Ker($rot$) $= Im(grad)$.

En geometría diferencial vemos que la cohomología de ese complejo es exactamente la cohomología de De Rham de U: $H_{dr}(U)$, y el teorema de De Rham dice que esto coincide con la cohomología singular de U a coeficientes en $\mathbb{R}$.

Ejemplo algebraico

Sea G un grupo, $N \in \mathbb{N}$, $g \in G$ tal que $g^N = 1$, M un G-módulo. Por ejemplo $M = E|k$ una extensión de cuerpos y $G = Gal(E|k)$. Denotamos $\mathrm{tr}_g := 1 + g + g^2 + \cdots + g^{N-1}$, entonces

$$\mathrm{tr}_g(1-g) = (1-g)\mathrm{tr}_g = (1 + g + g^2 + \cdots + g^{N-1})(1-g) = 1 - g^N = 0$$

Es decir,

$$\cdots \to M \stackrel{1-g}{\longrightarrow} M \stackrel{tr_g}{\longrightarrow} M \stackrel{1-g}{\longrightarrow} M \stackrel{tr_g}{\longrightarrow} M \stackrel{1-g}{\longrightarrow} M \to 0$$

es un complejo. En general, la imagen de cada morfismo está incluído en el núcleo del siguiente, aunque no tiene porqué valer la igualdad (por ejemplo si $g = \mathrm{Id}$, difícilmente suceda). Uno de los teoremas de Hilbert sobre extensiones de cuerpos, sin embargo, habla de una situación en donde se puede afirmar la igualdad entre núcleo e imagen.

Más ejemplos

1. Si B es un anillo y $A = B/(x)$, con x central, entonces

$$0 \to B \stackrel{x.}{\longrightarrow} B \stackrel{\pi}{\to} B/(x) \to 0$$

es un complejo de B-módulos. Afirmar que es una sucesión exacta equivale a decir que x no es divisor de cero.

2. $A = B/(x, y)$, x, y centrales,

$$0 \to B \longrightarrow B \oplus B \longrightarrow B \stackrel{\pi}{\longrightarrow} B/(x, y) \to 0$$

$$b \mapsto (yb, -xb),$$

$$(b, c) \mapsto xb + yc$$

es también un complejo, llamado el complejo de Koszul asociado a la sucesión de elementos (x, y). La exactitud de este complejo equivale (por definición) a la regularidad de la sucesión $\{x, y\}$.

Nombres

Observamos que

$$d^2 = 0 \;\Leftrightarrow Im(d) \subseteq \mathrm{Ker}d$$

La pregunta natural es cuándo se da la igualdad.

Definición 2.1. Un complejo se dice **exacto** si $Im(d) = \mathrm{Ker}(d)$. Se dice exacto en el lugar n

$$\cdots \to M_{n+1} \stackrel{d}{\to} M_n \stackrel{d}{\to} M_{n-1} \stackrel{d}{\to} \cdots$$

si $\mathrm{Ker}(d : M_n \to M_{n-1}) = d(M_{n+1})$

Llamamos:

Z_n=n-ciclos=$\mathrm{Ker}(d : M_n \to M_{n-1}) \subseteq M_n$

B_n=n-bordes=$d(M_{n+1}) \subseteq Z_n \subseteq M_n$

Llamaremos Homología de M en lugar n, y denotaremos $H_n(M,d)$ a

$$H_n(M,d) := \frac{Z_n}{B_n}$$

M es exacto en lugar $n \Leftrightarrow H_n(M) = 0$.

2.1. La categoría $\mathrm{Chain}(A)$

Si (M, d_M) y (N, d_N) son complejos, un **morfismos de complejos** es una $f : M \to N$ A-lineal tal que

$$f(M_n) \subseteq N_n \ \forall n \in \mathbb{Z}$$
$$f \circ d_M = d_N \circ f$$

Notar que Z_n, B_n y H_n son funtores.

Observación 2.2. Los Límites y colímites: se calculan grado a grado (en particular suma directa y producto). Idem Ker, Coker. También un morfismo es epi (resp. mono, iso) si y sólo si lo es lugar a lugar.

Observación 2.3. A-mod esta incluida en $\mathrm{Chain}(A)$, viendo a un A-móduo M como complejo concentrado en lugar cero. Pero también $\mathrm{Mor}(A\text{-Mod})$ está incluida en $\mathrm{Chain}(A)$ vía

$$(f : M \to N) \rightsquigarrow (\cdots \to 0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0 \to \cdots)$$

como complejo que ocupan los lugares -1 y 0 (por ejemplo). Veremos luego que este complejo no es otra cosa que el cono de f visto como morfismo de complejos.

Ejemplo 2.4. $A[0] = A$ "concentrado en grado cero". Atención al siguiente cálculo de Hom: Afirmamos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(A[0], M) \cong Z_0(M) \subseteq M_0$$
$$f \mapsto f(1)$$

En efecto, visualizamos un morfismo de complejos vía el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
{} \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "d"] & M_0 \arrow[r, "d"] & M_{-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Por la conmutatividad del cuadrado de la derecha vemos que necesariamente $f(1) \in \mathrm{Ker}(d : M_0 \to M_{-1})$. Pero a su vez, si $m_0 \in M_0$ es tal que $d(m_0) = 0$, entonces $f : A \to M$ dado por $f(a) = am_0$ es un morfismo de complejos con $f(1) = m_0$. Por lo tanto concluimos

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(A[0], -) \cong Z_0(-)$$

En particular, no es un funtor exacto. Esto nos dice que el complejo $A[0]$ no es un objeto proyectivo en la categoría de complejos.

Ejemplo 2.5. Consideramos ahora Id_A como complejo, más precisamente definimos el complejo $\mathbf{P}$ por $\mathbf{P}_0 = A$, $\mathbf{P}_1 = A$, $d = \mathrm{Id}_A$ (y todos los demás cero). Calculamos $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(\mathbf{P}, -)$:

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{P}, d) & & \cdots 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\mathrm{Id}_A"] \arrow[d, "f_0"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
(M, d) & \cdots \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "d"] & M_0 \arrow[r, "d"] & M_{-1} \arrow[r] & M_{-2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Concluimos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(\mathbf{P}, M) &\cong M_0 \\
(f_0, f_1) &\mapsto f_0(1)
\end{aligned}
$$

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(\mathbf{P}, -)$ es exacto! $\therefore$ $\mathbf{P}$ es proyectivo en $\mathrm{Chain}(A)$.

2.2. Lema de la serpiente

El lema de la serpiente es el más importante en el ámbito de los complejos y las sucesiones exactas. Es a partir de este lema que se pueden definir "morfismos de conección" para lograr sucesiones exactas largas a partir de sucesiones exactas cortas de complejos. La sucesión exacta de Mayer-Vietoris en topología (o en cohomología de De Rahm) son encarnaciones de estos resultados. El lema dice lo siguiente: dado un diagrama conmutativo como el que sigue

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' &
\end{tikzcd}
$$

con sus filas exactas, entonces se puede definir un morfismo $\delta : \mathrm{Ker}(c) \to CoKer(a)$ siguiendo el camino zigzagueante punteado

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}(a) \arrow[r, "f|"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(b) \arrow[r, "g|"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(c) \arrow[d] \arrow[d, dotted, bend left, "z=g(y)"] & \\
 & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "c"] \arrow[dl, dotted, "y"', "b(y)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] \arrow[d, dotted, bend right, "\overline{x'}"'] & Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] \arrow[l, dotted, bend left, "f'(x')=b(y)"] & Z' \arrow[d] & \\
 & Coker(a) \arrow[r, "\overline{f'}"] & Coker(b) \arrow[r, "\overline{g'}"] & Coker(c) &
\end{tikzcd}
$$

y

y resulta que la sucesión

$$
\mathrm{Ker}(a) \xrightarrow{f|} \mathrm{Ker}(b) \xrightarrow{g|} \mathrm{Ker}(c) \xrightarrow{\delta} \mathrm{CoKer}(a) \xrightarrow{\overline{f'}} \mathrm{CoKer}(b) \xrightarrow{\overline{g'}} \mathrm{CoKer}(c)
$$

es exacta. El nombre de serpiente viene del camino en zigzag que se utiliza para la definición de δ. Este morfismo δ es la “madre” de todas las sucesiones exactas largas.

Demostración. Indicamos la construcción de δ. Se recomienda fuertemente hacer los ejercicios respectivos indicados en la práctica y hacer las cuentas por sí mismo.

Como sugiere el dibujo, dado $z \in \mathrm{Ker}(c)$, lo vemos como elemento de Z, al ser g epi, existe $y \in Y : g(y) = z$, aplicamos b y obtenemos $b(Y) \in Y'$, pero por la conmutatividad del cuadrado de la derecha y por ser $z \in \mathrm{Ker}(c)$ resulta $b(y) \in \mathrm{Ker}(g') = Im(f)$, luego $b(y) = f(x')$ para cierto x'. Finalizamos definiendo $\delta(z) := \overline{x}' \in X'/Im(a)$. El resto de la demostración es un chequeo de la buena definición de δ y de las exactitudes en cada lugar de la sucesión de los núcleos y conúcleos. □

Lema de la serpiente y sucesión exacta larga en homología

El lema de la serpiente nos provee del resultado general más importante sobre complejos y sucesiones exactas, que es el siguiente:

Teorema 2.6. *Si* $0 \to X_\bullet \to Y_\bullet \to Z_\bullet \to 0$ *es s.e.c. de complejos*

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X_{n+1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_X"] & Y_{n+1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_Y"] & Z_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_X"] & Y_n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_Y"] & Z_n \arrow[r] \arrow[d, "d_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_X"] & Y_{n-1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_Y"] & Z_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_Z"] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

Entonces queda inducida una s.e. larga en los grupos de homología

$$\cdots \to H_{n+1}(Z) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(X) \xrightarrow{f_n} H_n(Y) \xrightarrow{g_n} H_n(Z) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(X) \to \cdots$$

Demostración. Del diagrama con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X_{n+1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_X"] & Y_{n+1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_Y"] & Z_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_X"] & Y_n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_Y"] & Z_n \arrow[r] \arrow[d, "d_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_X"] & Y_{n-1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_Y"] & Z_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_Z"] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

se sigue el siguiente diagrama (con filas exactas):

$$\begin{tikzcd}
 & \frac{X_n}{d(X_{n+1})} \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{d}_X"] & \frac{Y_n}{d(Y_{n+1})} \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{d}_Y"] & \frac{Z_n}{d(Z_{n+1})} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d}_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & d(X_n) \arrow[r, "f|"] \arrow[d, "\subseteq"] & d(Y_n) \arrow[r, "g|"] \arrow[d, "\subseteq"] & d(Z_n) \arrow[d, "\subseteq"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(d^X_{n-1}) \arrow[r, "f|"] & \mathrm{Ker}(d^Y_{n-1}) \arrow[r, "g|"] & \mathrm{Ker}(d^Z_{n-1}) &
\end{tikzcd}$$

Le aplicamos el Lema de la serpiente al diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \frac{X_n}{d(X_{n+1})} \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{d}_X"] & \frac{Y_n}{d(Y_{n+1})} \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{d}_Y"] & \frac{Z_n}{d(Z_{n+1})} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d}_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}(X) \arrow[r, "f|"] & Z_{n-1}(Y) \arrow[r, "g|"] & Z_{n-1}(Z) &
\end{tikzcd}$$

y obtenemos el morfismo de conexión δ_n que "pega" las sucesiones de homología en grado n con las de grado $n-1$

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(X) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & H_n(Y) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & H_n(Z) \arrow[d] & \\
 & \frac{X_n}{d(X_{n+1})} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\overline{d}_X"] & \frac{Y_n}{d(Y_{n+1})} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\overline{d}_Y"] & \frac{Z_n}{d(X_{n+1})} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d}_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}(X) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Z_{n-1}(Y) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Z_{n-1}(X) \arrow[d] & \\
 & H_{n-1}(X) \arrow[r, "f"] & H_{n-1}(Y) \arrow[r, "g"] & H_{n-1}(Z) &
\end{tikzcd}$$

□

Aplicación general

Sea $(Y_\bullet, d)$ un complejo, queremos calcular $H_\bullet(Y)$. Supongamos que conocemos un **subcomplejo** $X \subseteq Y$. O sea, $\forall n$ damos un A-submódulo $X_n \subseteq Y_n$ tal que $d(X) \subseteq X$ (es decir, X un subcomplejo de Y). Queda definido el complejo cociente $(Y/X)_n = Y_n/X_n$, $d_{Y/X} = \overline{d}$ y la s.e.c de complejos

$$0 \to X \to Y \to Y/X \to 0$$

$H_n(X)$ no siempre es submódulo de $H_n(Y)$, $H_n(Y/X)$ no siempre es cociente de $H_n(Y)$ por $H_n(X)$. Lo que sí sucede siempre es que hay una sucesión exacta larga

$$\cdots \to H_{n+1}(Y/X) \to H_n(X) \to H_n(Y) \to H_n(Y/X) \to H_{n-1}(X) \to \cdots$$

2.3. Operaciones con complejos

A partir de construcciones con A-módulos se pueden hacer las análogas con complejos. Por ejemplo, dado un morfismo de complejos $f : (M_\bullet, d) \to (N_\bullet, d)$ tenemos los nuevos complejos $\mathrm{Ker}(f)$ y $\mathrm{CoKer}(f)$:

$$(\mathrm{Ker}(f))_n = \mathrm{Ker}(f : M_n \to N_n), \; d_{\mathrm{Ker}} = d|$$

$$(\mathrm{Ker}(f))_n = N_n/f(M_n), \; d_{\mathrm{CoKer}} = \overline{d}$$

También tenemos las operaciones de Suma directa / Producto directo, límites y colímites. Todas estas operaciones, de alguna manera provienen de operaciones en A-módulos, realizadas “lugar a lugar”. Una operación propiamente de complejos es la siguiente: dados

$$(M_\bullet, d) \in \mathrm{Chain}({}_A Mod_B), \; (N_\bullet, d) \in \mathrm{Chain}({}_B Mod_C)$$

se define el complejo producto tensorial $M \otimes_A N \in \mathrm{Chain}({}_A Mod_C)$ como el objeto graduado

$$(M \otimes_A N)_n = \bigoplus_{p+q=n} M_p \otimes_A N_q$$

y con diferencial

$$d(m \otimes n) := d(m) \otimes n + (-1)^{|n|} m \otimes d(n)$$

Más tarde veremos la relación entre la homología del producto tensorial y el producto tensorial de las homologías (fórmula de Künneth).

Otras operaciones propiamente del ámbito de los complejos son las siguientes:

Suspensión y desuspensión

Dado un complejo M, se define $M[1]$, o también denotado ΣM como "el mismo" complejo pero trasladada su graduación en 1, se denomina la suspensión. De manera análoga se define $\Sigma^{-1}M = M[-1]$ como el complejo trasladado en -1. Es muy conveniente adoptar la convención de un cambio de signo en el diferencial)

$$M[1]_n = M_{n+1},\ d_{M[1]} = -d_M$$

$$M[-1]_n = M_{n-1},\ d_{M[-1]} = -d_M$$

$$M: \qquad \cdots \to M_{n+1} \to M_n \to M_{n-1} \to \cdots \qquad \cdots \to M_1 \to M_0 \to \cdots$$

$$M[-1]: \qquad \cdots \to M_n \to M_{n-1} \to M_{n-2} \to \cdots \qquad \cdots \to M_0 \to M_{-1} \to \cdots$$

Ejemplo 2.7. Si $M \in {}_A Mod$ es un complejo concentrado
en grado cero $\Rightarrow$ $M[1]$ está concentrado en grado -1

Observación 2.8. Σ es un funtor inversible. Está definido $M[n]$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, y claramente vale

$$H_\bullet(M)[n] = H_\bullet(M[n])$$

El cono de un morfismo

Si $f : M \to N$, definimos

$$\Big(Co(f)\Big)_n := N_n \oplus M)[-1]_n = N_n \oplus M_{n+1}$$

$$\partial(n,m) := (dn + f(m), -d(m))$$

Verifica $\partial^2 = 0$, pues

$$\partial^2(n,m) = \partial\big(dn + f(m), -d(m)\big)$$

$$= \big(d(dn + f(m)) + f(-dm), -d(-d(m))\big)$$

$$= (d^2 n + (df - fd)(m), d^2 m) = (0,0)$$

dado que $d^2 = 0$ en M y N, y f es morfismo de complejos, por lo tanto conmuta con el diferencial. Además, claramente hay una s.e.c. de complejos

$$\boxed{0 \to N \to Co(f) \to M[-1] \to 0}$$

Triángulos:

La sucesión exacta anterior se puede continuar indefinidamente a la derecha y a la izquierda, no de manera exacta, ni siquiera como complejo, pero luego veremos que al tomar homología dará lugar a una sucesión exacta larga. Esta construcción se la denomina "triángulo", por su similitud a la 3-periodicidad (salvo suspensión). Se agrega a la s.e.c. el morfismo f inicial

$$M \xrightarrow{f} N \longrightarrow Co(f) \longrightarrow M[-1]$$

y aplicando Σ, o Σ^{-1} tenemos

$$\cdots \to Co(f)[1] \to M \xrightarrow{f} N \to Co(f) \to M[-1] \xrightarrow{-f} N[-1] \to Co(f)[-1] \to \cdots$$

Sucesión exacta larga del cono

Veremos que el morfismo de conexión de la s.e.larga inducida por la s.e.c. del cono asociado a $f : M \to N$

$$Co(f) = N \oplus_f M[-1]$$

$$Co(f)_n = N_n \oplus M_{n-1}$$

$$\partial(x, m) = (dx + fm, -dm)$$

$$0 \to N \to Co(f) \to \Sigma M \to 0$$

es justamente f. Para eso recordamos el uso del Lema de la serpiente :

$0 \to X \to Y \to Z \to 0 \rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd}
\rightsquigarrow & H_n(X) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & H_n(Y) \arrow[r, "p"] \arrow[d] & H_n(Z) \arrow[d] \arrow[d, dotted, bend left] & \\
& \frac{X_n}{d(X_{n+1})} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\overline{d}_X"] & \frac{Y_n}{d(Y_{n+1})} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\overline{d}_Y"] & \frac{Z_n}{d(X_{n+1})} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d}_Z"] \arrow[dl, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}(X) \arrow[r, "i"] \arrow[d] \arrow[d, dotted, bend right] & Z_{n-1}(Y) \arrow[r, "p"] \arrow[d] \arrow[l, dotted, bend left] & Z_{n-1}(X) \arrow[d] & \\
& H_{n-1}(X) \arrow[r, "i"] & H_{n-1}(Y) \arrow[r, "p"] & H_{n-1}(Z) &
\end{tikzcd}$$

En el caso de la s.e.c. del cono tenemos

$$
\begin{tikzcd}
\rightsquigarrow & H_n(N) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(Co(f)) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(M) \arrow[d] \arrow[d, dotted, bend left, "\overline{m}"] & \\
& \frac{N_n}{d(N_{n+1})} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{N_n \oplus M_{n-1}}{d(Co(f)_{n+1})} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{M_{n-1}}{d(N_{n+1})} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "(0,m)"', "(f(m),0)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}(N) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[d, dotted, bend right, "\overline{f(m)}"'] & Z_{n-1}(Co(f)) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[l, dotted, bend left, "f(m)"] & Z_{n-2}(M) \arrow[d] & \\
& H_{n-1}(N) \arrow[r] & H_{n-1}(Co(f)) \arrow[r] & H_{n-2}(M) &
\end{tikzcd}
$$

Concluimos entonces del diagrama que $\delta(\overline{m}) = \overline{f(m)}$.

Una relación importante que se deduce de esto es:

Lema 2.9. *$f : M \to N$ es q-iso $\iff$ $H_\bullet(Co(f)) = 0$*

Demostración. consideramos la s.e.c. $0 \to N \to Co(f) \to \Sigma M \to 0 \rightsquigarrow$ que induce la s.e.l

$$H_{n+1}(N) \to H_{n+1}(Co(f)) \to H_{n+1}(\Sigma M) \overset{[f]}{\to} H_n(N) \to H_n(Co(f))$$

y concluimos. $\square$

q-isos y homotopías

Definimos la relación de equivalencia de homotopía entre morfismos de complejos por

Definición 2.10. Si $f, g : M \to N$ son dos morfismos de complejos, decimos que son homotópicos, y denotamos $f \sim g \iff \exists h : M \to N$ A-lineal tal que $f - g = dh + hd$.

Notar que la h de la definición anterior no puede ser morfismo de complejos, de hecho no puede ser homogénea de grado cero, debe ser homogénea de grado opuesto al grado del diferencial. La aplicación inmediata es que si $f \sim g : M \to N$ entonces f y g inducen *el mismo* morfismo entre las homologías:

Demostración. Sea $m \in M$ tal que $dm = 0$ y h A-lineal tal que $f - g = dh + hd$, entonces

$$f(m) - g(m) = d(hm) + h(dm) = d(hm) + 0$$

por lo tanto

$$[f(m)] = [g(m)] \ MOD \ Im(d)$$

es decir,

$$[f] = [g] : H_\bullet(M) \to H_\bullet(N)$$

□

Definición 2.11. Decimos que dos complejos M y N son equivalentes homotópicos si existen morfismos de complejos $\phi : M \to N$ y $\psi : N \to M$ tales que

$$\phi \circ \psi \sim \mathrm{Id}_N, \ \psi \circ \phi \sim \mathrm{Id}_M$$

Observamos que equivalencia homotópica implica quasi-isomorfismo, pero las nociones no son equivalentes, como podemos ver rápidamente en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.12. Tomamos los complejos P y M:

$$P : \ \cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \ \to 0 \to \ldots$$

$$M : \ \cdots \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z}_2 \to 0 \to \ldots$$

tienen misma homología (no nula), pero $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(\mathbb{Z})}(M, P) = 0$! por lo tanto no pueden ser equivalentes homotópicos. Sin embargo, existe un morfismo en el otro sentido $P \to M$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "2"] \arrow[d, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \ldots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

que induce un isomorfismo en homología, y por lo tanto, son quasi-isomorfos.

Si sólo queremos calcular homología, nos interesan complejos a menos de q-is, que es más débil que a menos de homotopía.

Nombres

Si para $(M_\bullet, d)$ existe una homotopía h entre 0 y la dentidd, es decir tal que $hd+dh = \mathrm{Id}_M$, entonces la identidad es igual a cero en homología, en particular $H_\bullet(M) = 0$ En caso de existencia de una tal homotopía entre 0 e Id_M diremos que M es *contráctil* (con homotopía de contracción h). Si sólo sabemos que $H_\bullet(M) = 0$, diremos que M es *acíclico*.

Ejemplos:

Para un complejo de longitud dos:

$0 \to X \to Y \to 0$ contráctil o acíclico es lo mismo.

Sin embargo, para un complejo de longitud 3:

$0 \to X \to Y \to Z \to 0$

ser acíclico = exactitud, mientras que contráctil = la s.e.c se parte.

2.4. Complejos contráctiles y funtores aditivos

Consideremos una s.e.c.

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

una s.e.c. en A-Mod, y $F : A\text{-Mod} \to \mathbb{Z}\text{-Mod}$. una pregunta natural es si

$$0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$$

es una s.e.c.

Supongamos F aditivo, es decir, $F(f + f') = F(f) + F(f')$, luego $F(0) = 0$,

$$\Rightarrow \qquad 0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$$

es un complejo. Cuanto vale su homología?

Si $(M_\bullet, d)$ es *contráctil*, con homotopía h y F es aditivo, entonces $(F(M)_\bullet, F(d))$ es contráctil con homotopía $F(h)$, pues

$$d_{FM}F(h) + F(h)d_{FM} = F(d_M)F(h) + F(h)F(d_M)$$

$$= F(d_M h) + F(hd_M) = F(d_M h + hd_M) = F(\mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_{FM}$$

Luego,

$$\boxed{\text{todo funtor aditivo manda complejos contráctiles en complejos contráctiles.}}$$

En particular, sucesiones exactas que se parten en sucesiones exactas. El problema de preservar la exactitud aparece al calcular F en las sucesines exactas que no se parten. Para estudiar el comportamiento con respecto a la exactitud se define el funtor derivado.

2.5. Funtores derivados: Estrategia

Como las sucesiones exactas de módulos proyectivos siempre se parten, y ahí los funtores (aditivos) siempre preservan exactitud, una estrategia es reemplazar $M \in {}_AMod$ por un complejo mejor comportado, lo que se denomina una *resolución proyectiva*:

$$M \rightsquigarrow (\cdots P_{n+1} \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0)$$

Es decir, un complejo exacto con P_n proyectivo$\forall n \geq 0$.

Tenemos entonces un morfismo de complejos, que es un q-is

$$\begin{array}{ll} (P_\bullet, d) & \begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] & P_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & & & & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \end{array}$$

Podemos pensar que $P_\bullet$ es un reemplazo quasi-isomorfo de M en $\mathrm{Chain}(A)$. Si aplicamos F en $P_\bullet$ (en vez de en M) en principio obtenemos un complejo. Se define

$$L_nF(M) := H_n(F(P_\bullet))$$

Esta definición, en apariencia, parece depender de la resolución proyectiva elegida. Cabe preguntarse, hay funtorialidad? Es decir, si $f : M \to N$, podemos definir un morfismo de resoluciones asociado a f?

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, dotted, "?"] & P_n \arrow[r] \arrow[d, dotted, "?"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "?"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "?"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] & Q_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Buena definición (1): hay algún tipo de unicidad del levantado de f? Ya que la definición del funtor derivado es a través de la homología, si no hay unicidad estricta, pero sí hay unicidad amenos de homotopía, sería suficiente.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"] \arrow[dl, dotted] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dl, dotted] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] \arrow[dl, dotted] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] \arrow[dl, dotted] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] & Q_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Buena definición (2): Hay unicidad de resolución?, unicidad a menos de homotopía? si tenemos dos resoluciones, serán equivalentes homotópicas? Si supiéramos que el levantado de un morfismo f es único a menos de homotopía, al considerar dos posibles resoluciones, levantando la identidad de M tendríamos morfismos de comparación entre los complejos

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n+1}"] & Q_n \arrow[r] \arrow[d, "g_n"] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1"] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d, "g_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] & P_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y si los componemos

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n+1}f_{n+1}"'] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "g_nf_n"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "g_0f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] & P_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

tendríamos un morfismos que levanta la identidad. Pero claramente la identidad de $P_\bullet$ también levanta la identidad, luego, sabiendo que el levantado es único a menos de homotopía podríamos concluir

$$gf \sim \mathrm{Id}_{P_\bullet}$$

y con argumento similar también $fg \sim \mathrm{Id}_{Q_\bullet}$.

Estos lemas de unicidad a menos de homotopía son ciertos, los mostraremos más adelante. Nos permiten concluir que $P_\bullet = P(M)$ está bien definido a menos de equivalencia homotópica (i.e. a menos de iso en $\mathcal{H}(A)$), y fijadas resoluciones $P_\bullet$ y $Q_\bullet$ de M y N, está bien definido

$$f : M \to N \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P_\bullet, Q_\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(P, Q)/\sim$$

Proposición 2.13. *Si F es exacto a derecha, entonces*

$$LF_0(M) = H_0(F(P_\bullet)) \cong F(M)$$

Es decir, cuando tengamos una teoría que nos relacione todos los F_n entre sí, en caso que F sea exacto a derecha sabremos que hay una tira de funtores $\{L_nF\}_{n>0}$ nuevos, relacionados directamente con el funtor original F.

Demostración. Por definición, $L_n(F)$ se calcula a partir de la homología de F aplicada a una resolución de M:

$$L_nF(M) = H_n\Big(\cdots FP_{n+1} \to FP_n \to \cdots \to FP_1 \to FP_0 \to 0\Big)$$

a partir de una resolución

$$\cdots \to P_{n+1} \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

tenemos en particular que

$$P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

es exacta a derecha. Usando que F es exacto a derecha, tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$(*) \qquad FP_1 \xrightarrow{F(d_1)} FP_0 \xrightarrow{F(d_0)} FM \longrightarrow 0$$

Concluimos $FM \cong \mathrm{CoKer}\Big(\ FP_1 \xrightarrow{F(d_1)} FP_0\ \Big) =$

$$H_0\Big(\cdots FP_{n+1} \to FP_n \to \cdots \to FP_1 \to FP_0 \to 0\Big) = L_0F(M)$$

□

El ejemplo más importante que veremos de funtor derivado a izquierda es:

Definición 2.14. $\boxed{\mathrm{Tor}_n^A(M, N) = L_n(M \otimes_A -)(N) = H_n(M \otimes_A P_\bullet)}$

2.6. Lemas de levantamiento

En esta sección probaremos los lemas de levantamiento, que, como vimos anteriormente, nos permiten probar la buena definición de los funtores derivados.

Lema 2.15. *Sea $f : M \to N$ y consideremos un diagrama con*

$$\begin{tikzcd}
P_i \text{ proyectivos} & \cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d, dotted, "?"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "?"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "?"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\text{exacto} & \cdots \arrow[r] & Q_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces $\exists \ \{f_n : P_n \to Q_n\}_{n\geq 0}$ que completan el diagrama con todos los cuadrados conmutativos.

Demostración. El caso f_1 lo indicamos esquemáticamente:

$$\begin{tikzcd}
f_0 : & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, dashed, "f_1:=\widetilde{f\circ d_0}"'] \arrow[dr, dotted, "f\circ d_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
& Q_1 \arrow[r, "\partial_1"'] & Q_0 \arrow[r, "\partial_0"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

su existencia se debe que ∂_0 es epi y a que P_0 es proyectivo. Además, como el cuadrado queda conmutativo, vemos que $\partial_0 \circ f_1 \circ d_1 = f \circ d_0 \circ d_1 = 0$, luego, la imagen de $f_1 \circ d_1$ está contenida en el núcleo de ∂_0, y como el complejo $Q_\bullet$ se lo suponía exacto, coincide con la imagen de ∂_1. Podemos co-restringir a la imagen de ∂_1 y continuar inductivamente. Concretamente:

Inductivamente suponemos definido hasta f_n con los cuadrados conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[d, "\cdots"', "\cdots"] \\
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+2}"'] & Q_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & Q_n \arrow[r, "\partial_n"'] & Q_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

por la conmutatividad del último cuadrado, con el argumento anterior podemos restringir a la imagen de ∂_{n-1} y tener un diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[rr, "d_{n+1}"] \arrow[dr, "f_n\circ d_{n+1}"] \arrow[dd, "f_{n+1}=\widetilde{f_n\circ d}_{n+1}"'] & & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dd, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[dd, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[dd, "\cdots"', "\cdots"] \\
& & Im(\partial_{n+1}) \arrow[dr, hook] & & & \\
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+2}"'] & Q_{n+1} \arrow[rr, "\partial_{n+1}"'] \arrow[ur] & & Q_n \arrow[r, "\partial_n"'] & Q_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

□

Lema 2.16. *Unicidad del levantado a menos de homotopía:* $\{f_n\}_{n\geq 0}$ *levanta al 0* $\Rightarrow f \sim 0$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[dl, dotted] \arrow[d, "f_{n+1}"] & P_n \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "h_n"'] \arrow[d, "f_n"] & \cdots \arrow[r] \arrow[dl, dotted] & P_1 \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "h_1"'] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "h_0"'] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "0"'] \arrow[d, "0"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] & Q_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Demostración. caso 0

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[dl, dotted, "h_0?"'] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[dl, "h_{-1}=0"'] \arrow[d, "0"] & 0 \\
Q_1 \arrow[r, "\partial_1"'] & Q_0 \arrow[r, "\partial_0"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Queremos ver $dh + hd = f$. En el caso de f_0, si tomamos $h_{-1} = 0$, buscamos h_0 tal que $\partial_1 h_0 + 0 d_0 = f_0$, es decir, que

$$\partial_1 h_0 = f_0$$

Notamos que el cuadrado de la derecha conmuta, luego $Im(f_0) \subseteq \mathrm{Ker}(\partial_0) = Im(\partial_1)$, asi que si corestringimos f_0 y ∂_1 a la imagen de ∂_1, la existencia de h_0 se debe a la proyectividad de P_0.

Paso inductivo:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[dl, dotted, "h_{n+1}?"'] \arrow[d, "f_{n+1}"] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
Q_{n+2} \arrow[r, "\partial_{n+2}"'] & Q_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & Q_n \arrow[r, "\partial_n"'] & Q_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Asumimos válida la fórmula $f_n = \partial_{n+1} h_n + h_{n-1} d_n$, buscamos h_{n+1} tal que

$$f_{n+1} = \partial_{n+2}(h_{n+1}?) + h_n d_{n+1}$$

Esto es equivalente a

$$\underbrace{f_{n+1} - h_n d_{n+1}}_{g} = \partial_{n+2}(h_{n+1}?)$$

Notamos que $g : P_{n+1} \to Q_{n+1}$ verifica $Im(g) \subseteq Im(\partial_{n+1}) = \mathrm{Ker}(\partial_{n+1})$ pues

$$\partial_{n+1} g = \partial_{n+1}(f_{n+1} - h_n d_{n+1})$$

$$= \partial_{n+1} f_{n+1} - \partial_{n+1} h_n d_{n+1}$$

por conmutar el último cuadrado queda

$$= f_n d_{n+1} - \partial_{n+1} h_n d_{n+1}$$

y sacando factor común

$$= (f_n - \partial_{n+1} h_n) d_{n+1}$$

Pero por hipótesis inductiva $f_n = \partial_{n+1} h_n + h_{n-1} d_n$, luego,

$$(f_n - \partial_{n+1} h_n) d_{n+1} = (\partial_{n+1} h_n + h_{n-1} d_n - \partial_{n+1} h_n) d_{n+1}$$

$$= h_{n-1} d_n d_{n+1} = h_{n-1} 0 = 0$$

y concluimos la existencia de h_{n+1} por la proyectividad de P_{n+1}. □

Corolario 2.17. *Unicidad de resolución a menos de equivalencia homotópica*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n+1}"] & Q_n \arrow[r] \arrow[d, "g_n"] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1"] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d, "g_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] & P_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, swap, "g_{n+1}f_{n+1}"] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "g_n f_n"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1 f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "g_0 f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] & P_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow gf \sim \mathrm{Id}_{P_\bullet}$.

Corolario 2.18. *Si un complejo $P_\bullet$ es exacto, tiene todas sus componentes P_n proyectivas, y $P_n = 0$ para $n << 0$, entonces es contráctil.*

Demostración. Consideramos

$$\cdots \to P_n \to \cdots \to P_{n_0} \to 0 \to 0 \to \cdots$$

un complejo con esas propiedades. A menos de suspensión, podemos asumir $n_0 = 0$. Observamos que este complejo es una resolución proyectiva del módulo $M = 0$. Utilizando la unicidad del levantado, vemos que tanto el morfismo 0 como $\mathrm{Id}_{P_\bullet}$ levantan a $0 = \mathrm{Id}_0$, luego $\mathrm{Id}_{P_\bullet} \sim 0$. □

Volviendo a los funtores derivados, concluimos que $P_\bullet = P(M)$ bien definido a menos de equivalencia homotópica (i.e. a menos de iso en $\mathcal{H}(A)$), y fijadas resoluciones $P_\bullet$ y $Q_\bullet$ de M y N, está bien definido

$$f : M \to N \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P_\bullet, Q_\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(P, Q)/\sim$$

Es decir, tomar una resolución da un funtor, definido a menos de iso único

$$A - Mod \to \mathcal{H}(A)$$

$$M \mapsto P(M)$$

$$f \mapsto \{f_n\}_{n \geq 0}$$

Recordamos que si N_A y ${}_AM$ son A-módulos a derecha y a izquierda respectivamente, entonces

$$\mathrm{Tor}_n^A(N, M) = H_n(N \otimes_A P_\bullet)$$

donde $P_\bullet \to M \to 0$ es una resolución de M como A-módulo.

Como $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ es exacta $\Rightarrow N \otimes_A P_1 \to N \otimes_A P_0 \to N \otimes_A M \to 0$ también $\Rightarrow \mathrm{Tor}_0^A(N, M) = H_0(N \underset{A}{\otimes} P_\bullet) =$

$$= H_0(\cdots \to N \underset{A}{\otimes} P_2 \to N \underset{A}{\otimes} P_1 \to N \underset{A}{\otimes} P_0 \to 0) \cong N \underset{A}{\otimes} M$$

Pero $\mathrm{Tor}_n^A(N, M)$ con $n > 0$ son funtores "nuevos". El siguiente es un ejemplo que muestra que, efectivamente, estos funtores nuevos no son cero en general:

Ejemplo 2.19. $A = k[x, y]$, $M = N = k$ con $p(x, y) \cdot 1 = p(0, 0)$. Para calcular $\mathrm{Tor}_n^A(k, k)$:

$$P_\bullet \to k \to 0 : \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow A \oplus A \longrightarrow A \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

$$p \longmapsto (yp, -xp) \qquad p \longmapsto p(0)$$

$$(f, g) \longmapsto xf + yg$$

$k \otimes_A P_\bullet$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & k \underset{A}{\otimes} A & \longrightarrow & k \underset{A}{\otimes} A \oplus k \underset{A}{\otimes} A & \longrightarrow & k \underset{A}{\otimes} A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ 0 & \longrightarrow & k & \longrightarrow & k \oplus k & \longrightarrow & k & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\therefore \mathrm{Tor}_1^A(k, k) = k \oplus k, \qquad \mathrm{Tor}_2^A(k, k) = k.$$

Veremos luego las siguientes propiedades:

• $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ s.e.c. de A-mod $\Rightarrow \forall N_A$ existe una sucesión exacta larga de la forma:

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^A(N, X) \to \mathrm{Tor}_1^A(N, Y) \to \mathrm{Tor}_1^A(N, Z) \to N \underset{A}{\otimes} X \to N \underset{A}{\otimes} Y \to N \underset{A}{\otimes} Z \to 0$$

• Tor deriva $\underset{A}{\otimes}$ en las dos variables, es decir, se puede calcular resolviendo cualquiera de las dos variables (o las dos juntas):

$$\mathrm{Tor}_n^A(N, M) = H_n(N \underset{A}{\otimes} P(M)) \cong H_n(P(N) \underset{A}{\otimes} M) \cong H_n(P(N) \underset{A}{\otimes} P(M))$$

• Veremos también que es posible definir resoluciones funtoriales ($P(-) : A$-Mod$\to$ Chain(A)). Lo bueno de esto es que se puede demostrar de manera directa la funtorialidad de los $L_n F$. El problema es que en general, las resoluciones funtoriales suelen ser muy grandes e inmanejables desde el punto de vista de cálculos concretos, y justamente la independencia de la resolución es una de las herramientas del álgebra homológica que hace a la eficacia de sus cálculos, por lo que la demostración de esta independencia de elección de resolución no sólo es importante a la hora de las buenas definiciones, sino que hacen a la esencia misma de las técnicas de cálculo.

Capítulo 3

El funtor $\otimes$ y su derivado: Tor

En este capítulo nos dedicaremos de lleno al producto tensorial. Comenzaremos recordando la noción de playitud para luego dar una caracterización en términos de Tor_1. Para ésto utilizaremos fuertemente las herramientas de funtores derivados y de límites. Mostraremos a través de un ejemplo prototípico cómo el funtor Tor calcula, en el caso geométrico, la torsión, lo que explica su nombre. Después de un poco de teoría general, mostraremos la llamada *fórmula de Künneth*, que relaciona la homología del producto tensorial de dos complejos con el producto tensorial de sus homologías. Finalmente discutiremos el problema de exactitud, visto desde el punto de vista de las sucesiones exactas cortas, o de los complejos en general, para llegar a uno de los axiomas clave de categorías abelianas, que si bien no las trataremos en este curso, dejaremos el terreno preparado para quien quiera adentrarse en él.

Definición 3.1. M_A un A-módulo a derecha se dice **playo** si $M \underset{A}{\otimes} -$ preserva monomorfismos.

Observación 3.2. M playo $\iff$ $M \underset{A}{\otimes} -$ preserva s.e.c. ($\iff$ $M \underset{A}{\otimes} -$ preserva exactitud)

Proposición 3.3. *Son equivalentes*

1. M_A *es playo*
2. $\mathrm{Tor}_n^A(M, -) \equiv 0\ \forall n \geq 1$
3. $\mathrm{Tor}_1^A(M, -) \equiv 0$

Demostración. Claramente 2 $\Rightarrow$ 3). Para 1 $\Rightarrow$ 2), como $M \otimes_A -$ es exacto, dado ${}_AN$, si encontramos $P_\bullet \to N$ resolución, al tensorizar

$$\cdots \to M \otimes_A P_2 \to M \otimes_A P_1 \to M \otimes_A P_0 \to 0$$

obtenemos un complejo que es exacto es exacto donde $P_\bullet$ lo es, luego $\mathrm{Tor}_n(M, N) = 0\ \forall n \geq 1$ (y en particular para $n = 1$).

$3 \Rightarrow 1$) Si $f : N \to N'$ es mono, $\Rightarrow 0 \to N \overset{f}{\to} N' \to Coker(f) \to 0$ es una s.e.c. y utilizando la s.e. larga

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^A(M, Coker(f)) \to M \underset{A}{\otimes} N \overset{f\otimes \mathrm{Id}}{\longrightarrow} M \underset{A}{\otimes} N' \to M \underset{A}{\otimes} Coker(f) \to 0$$

y concluimos que $f \otimes \mathrm{Id}$ es mono porque $\mathrm{Tor}_1 = 0$. □

Observación 3.4. Sea $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ s.e.c. $\Rightarrow \forall N$ tenemos una s.e. larga

$$Tor_2^A(M'', N) \to \mathrm{Tor}_1^A(M', N) \to \mathrm{Tor}_1^A(M, N) \to \mathrm{Tor}_1^A(M'', N) \to M \underset{A}{\otimes} N$$

Concluimos que la playitud tiene el siguiente comportamiento:

- M'', M playos $\Rightarrow M'$ también,
- M', M'' playos $\Rightarrow M$ también, sin embargo,
- si M', M son playos, no está claro que M'' lo sea necesariamente. (Dejamos como ejercicio encontrar un contraejemplo.)

Observamos también que $\exists$ playos no proyectivos, e.g. $\mathbb{Q}$ no es $\mathbb{Z}$-proyectivo, pues no es libre!

Límites filtrantes

Vimos anteriormente que los funtores adjuntos tienen buen comportamiento con los (co)límites, sin embargo, la propiedad de un funtor de preservar límite, o colímite, no necesariamente se hereda a su funtor derivado. En el caso de Tor, por otra parte, sí es posible asegurar un buen comportamiento con respecto a una clase de colímites, que son los llamados filtrantes. Comenzamos entonces recordando la noción de filtrante para posets:

Definición 3.5. Un poset $(I, \leq)$ se dice filtrante $\Leftrightarrow \forall i, j \in I\ \exists k : i, j \leq k$.

A un sistema dirigido lo llamaremos filtrante si su poset es filtrante. En este capítulo, el ejemplo que más nos interesará de límite filtrante es el siguiente:

Ejemplo 3.6. Todo $M \in A$-Mod es límite filtrante de sus submódulos finitamente generados.

Lema 3.7. *(Ejercicio adicional guiado para el hogar) En un límite* **filtrante** *de A-módulos sucede lo siguiente:*

1. *Los elementos del límite "vienen" de algún término, es decir, si* $\omega \in \varinjlim_{I} M^i \Rightarrow \exists i_0 : \omega \in Im(M^{i_0} \to \varinjlim_{I} M^i)$.

2. *Si un elemento de un término del sistema va a parar a cero, entonces iba a parar a cero en algún momento antes del límite. Más precisamente, si* $m \in M^{i_0}$*,* $m \mapsto 0 \in \underset{\to I}{\text{lím}} M^i \Rightarrow \exists j \geq i_0 : m \mapsto 0 \in M^j$*.*

$$\begin{tikzcd}
m \arrow[rrrr, mapsto, bend left] \arrow[dr, mapsto] & M_0^i \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "\iota_{i\leq j}"'] & & \underset{\to I}{\text{lím}} M^i & 0 \\
& 0 & M^j \arrow[ur, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

Observación 3.8. si (M^i, d^i) es un sistema directo de complejos, tomando homología tenemos otro sistema directo y flechas

$$\begin{tikzcd}
M^j \arrow[r] \arrow[d, "j\leq k"'] & \underset{\to}{\text{lím}} M^i & \rightsquigarrow & H_n(M^j) \arrow[r] \arrow[d, "j\leq k"'] & H_n(\underset{\to}{\text{lím}} M^i) \\
M_k \arrow[ur] & & & H_n(M_k) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

por lo tanto hay una flecha natural entre el límite de las homologías y la homología del límite $\underset{\to}{\text{lím}} H_n(M^i) \to H_n(\underset{\to}{\text{lím}} M^i)$.

Proposición 3.9. *si* $(I, \leq)$ *es filtrante entonces el morfismo anterior es un iso*

$$\underset{\to}{\text{lím}} H_n(M^i) \cong H_n\big(\underset{\to}{\text{lím}} M^i\big)$$

Demostración. Si $\omega \in \underset{\to}{\text{lím}} M^i$ entonces ω viene de un $m \in M^i$ (y por lo tanto $d\omega$ viene de dm). Si además $0 = d\omega \Rightarrow d(m) = 0$ en algun M^j con $j \geq i$.

$\Rightarrow \underset{\to}{\text{lím}} Z(M^i) \to Z\Big(\underset{\to}{\text{lím}} M^i\Big)$ es epi. Supongamos

$$M^j \ni \iota_{i\leq j}(m) \mapsto \omega$$

Si $\omega = d(\omega')$ en el límite, entonces existirá un $k \geq j$ tal que tanto ω como ω' vienen de M^k y la igualdad $\omega = d(\omega')$ es cierta en M^k. Por lo tanto $\underset{\to}{\text{lím}} H(M^i) \to H\Big(\underset{\to}{\text{lím}} M^i\Big)$ es epi. Mostraremos que tambieén es mono:

Si $\underset{\to}{\text{lím}} H(M^i) \ni [\eta] \mapsto 0 \in H\Big(\underset{\to}{\text{lím}} M^i\Big)$

$[\eta]$ viene de un $[m] \in H(M^i)$, y $[m] \mapsto 0$ en $H\Big(\underset{\to}{\text{lím}} M^i\Big)$; entonces $[m]$ va a parar a alguien que es $d(\mu)$, pero μ viene de un m' en M^j.

Existe algún $k \geq i, j$ / m y m' están en M^k, y $m - dm'$ va a parar a cero en $\underset{\to}{\text{lím}} M^i$. Entonces, en algún M^ℓ van a parar a cero, luego

$$[m] = 0 \in H(M^\ell)$$

Concluimos que $\underset{\to}{\text{lím}} H(M^i) \to H\Big(\underset{\to}{\text{lím}} M^i\Big)$ es inyectiva. $\square$

Corolario 3.10. Tor *conmuta con límites filtrantes*

Demostración. Si $(I,\leq)$ es filtrante y $(\{M^i\}_{i\in I},\{\iota_{i\leq j}\})$ es un sistema directo de A-módulos indexado por $(I,\leq)$, para calcular $\mathrm{Tor}_n^A\Big(\lim_{\to I} M_i, N\Big)$ resolvemos N

$$Q_\bullet \to N \to 0$$

Entonces

$$\mathrm{Tor}_n^A\Big(\lim_{\to I} M_i, N\Big) = H_n\Big((\lim_{\to I} M_i)\otimes_A Q_\bullet\Big)$$

como $-\otimes_A Q$ conmuta con limites directos arbitrarios

$$(\lim_{\to I} M_i)\otimes_A Q_\bullet \cong \lim_{\to I}(M_i\otimes_A Q_\bullet)$$

y por lo tanto

$$\mathrm{Tor}_n^A\Big(\lim_{\to I} M_i, N\Big) \cong H_n\Big(\lim_{\to I}(M_i\otimes_A Q_\bullet)\Big) \cong \lim_{\to I} H_n(M_i\otimes_A Q_\bullet) = \lim_{\to I}\mathrm{Tor}_n^A(M_i\otimes_A, N)$$

□

Con esta herramienta podemos probar la caracterización de playitud recorriendo ideales de A. Recordamos M playo $\iff \mathrm{Tor}_1^A(M,N)=0$ para todo N, ahora probaremos:

Corolario 3.11. *M playo $\iff \mathrm{Tor}_1^A(M,A/I)=0\ \forall I\subset A$ ideal a izquierda.*

Demostración. $\Leftarrow$): Cambiando A/I por otro módulo isomorfo, asumimos $\mathrm{Tor}_1^A(M,N)=0$ para todo N cíclico.

Sea N finitamente generado, $N=\langle x_1,\dots,x_k\rangle$. Se tiene una s.e.c.

$$0\to\langle x_1\rangle\to N\to N/\langle x_1\rangle\to 0$$

Notar

$$N/\langle x_1\rangle = \langle \overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_k\rangle = \langle \overline{x}_2,\dots,\overline{x}_k\rangle$$

se puede generar con $k-1$ elementos. Como $N=\langle x_1\rangle\cong A/I$, tenemos que

$\mathrm{Tor}_1^A(M,\langle x_1\rangle)=0$ por hipótesis

$\mathrm{Tor}_1^A(M,N/\langle x_1\rangle)=0$ por hipótesis inductiva

$\Rightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M,N)=0$ por la s.e.larga

$$\cdots\to\mathrm{Tor}_1^A(M,\langle x_1\rangle)\to\mathrm{Tor}_1^A(M,N)\to\mathrm{Tor}_1^A(M,N/\langle x_1\rangle)\to\cdots$$

Concluimos $\mathrm{Tor}_1^A(M,N)=0\ \forall N$ finitamente generado.

Ahora si N es arbitrario $\Rightarrow N=\lim_{\to} N'$ con $N'\subseteq N$ finitamente generado, es es un límite filtrante, luego

$$\mathrm{Tor}_1^A(M,N)=\mathrm{Tor}_1^A(M,\lim_{\to} N')=\lim_{\to}\mathrm{Tor}_1^A(M,N')=\lim_{\to} 0 = 0$$

□

Tor y torsión

Explicaremos ahora la notación "Tor".

Ejemplo 3.12. Si $x \in A$ es sin torsión a izquierda ($ax = 0 \Rightarrow a = 0$), $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/Ax)$ se puede calcular como sigue:

Resolvemos $N = A/Ax$ via $0 \to A \stackrel{\cdot x}{\to} A \to N \to 0$, luego

$$\mathrm{Tor}_\bullet^A(M,N) = H_\bullet\Big(M \otimes_A (0 \to A \stackrel{\cdot x}{\to} A \to 0)\Big)$$

$$\cong H_\bullet\Big(0 \to M \stackrel{\cdot x}{\to} M \to 0\Big)$$

$\Rightarrow \mathrm{Tor}_1(M, A/Ax) = M^x = \{m : mx = 0\}$= la x-torsión de M. Si M es playo y A íntegro $\Rightarrow$ M no puede tener torsión.

Corolario 3.13. *Si A es dip, entonces M playo $\iff$ M no tiene torsión.*

3.1. Complejos dobles y Tor derivando la otra variable

Introducimos la herramienta de los complejos dobles, interesante en sí misma y con numerosas aplicaciones. En este capítulo, la aplicaremos para ver que da lo mismo calcular $\mathrm{Tor}_A(M,N)$ resolviendo a M, o a N (o a ambos a la vez). Un argumento similar veremos luego al caclular funtores derivados de Hom.

Definición 3.14. Un **complejo doble** de A-módulos $M = (M_{\bullet\bullet}, d_h, d_v)$ es un objeto bigraduado con dos diferenciales que anticonmutan. Más precisamente, es el dato de una descomposición:

$$M = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} M_{p,q}$$

con diferenciales "horizontales y verticales" d_h y d_v:

$$d_h : M_{p,q} \to M_{p,q-1},\ d_v^2 = 0$$

$$d_v : M_{p,q} \to M_{p-1,q},\ d_h^2 = 0$$

$$d_v d_h + d_h d_v = 0$$

Gráficamente lo representamos como

$$
\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
{} & M_{2,-1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{2,0} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{2,1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{2,2} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & {} \arrow[l, "d_h"'] \\
{} & M_{1,-1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{1,0} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{1,1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{1,2} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & {} \arrow[l, "d_h"'] \\
{} & M_{0,-1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{0,0} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{0,1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{0,2} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & {} \arrow[l, "d_h"'] \\
{} & M_{-1,-1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d] & M_{-1,0} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d] & M_{-1,1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d] & M_{-1,2} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d] & {} \arrow[l] \\
 & {} & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}
$$

Los complejos dobles forman una categoría de manera natural (agregar a la lista de ejemplos de categorías!) definiendo como morfismos los morfismos bigraduados que conmutan con d_v y d_h.

Observación 3.15. El núcleo y conúcleo de un morfismo bigraduado resultan naturalmente bigraduados. El núcleo y conúcleo de un morfismo de complejos dobles son también complejos dobles.

Definición 3.16. (Complejo total asociado: la diagonal) Dado un complejo doble, se define el complejo **total** como

$$Tot(M_{\bullet\bullet})_n := \bigoplus_{p+q=n} M_{p,q}$$

con diferencial:

$$d_{Tot}(m_{p,q}) = d_v m + d_h m \in Tot(M)_{p+q-1}$$

Gráficamente:

$$
\begin{tikzcd}
Tot_1 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
{} & M_{2,-1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{2,0} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{2,1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{2,2} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & {} \arrow[l, "d_h"'] \\
-1 & M_{1,-1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{1,0} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{1,1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{1,2} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & {} \arrow[l, "d_h"'] \\
{} & M_{0,-1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{0,0} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{0,1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{0,2} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & {} \arrow[l, "d_h"'] \\
{} & M_{-1,-1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d] & M_{-1,0} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d] & M_{-1,1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d] & M_{-1,2} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d] & {} \arrow[l, "d_h"'] \\
 & {} & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}
$$

Definición 3.17. Decimos que $0 \to M_{\bullet\bullet} \xrightarrow{f} N_{\bullet\bullet} \xrightarrow{g} R_{\bullet\bullet} \to 0$ es una s.e.c. de complejos dobles si f y g son morfismos de complejos dobles y para todo p, q

$$0 \to M_{p,q} \xrightarrow{f} N_{p,q} \xrightarrow{g} R_{p,q} \to 0$$

es una s.e.c. de A-módulos.

Ejercicio: un s.e.c. de complejos dobles determina una s.e.c. de complejos usuales

$$0 \to Tot(M_{\bullet\bullet}) \xrightarrow{f} Tot(N_{\bullet\bullet}) \xrightarrow{g} Tot(R_{\bullet\bullet}) \to 0$$

Como consecuencia inmediata tenemos:

Corolario 3.18. *Una s.e.c. de complejos dobles* $0 \to M_{\bullet\bullet} \to^f N_{\bullet\bullet} \to^g R_{\bullet\bullet} \to 0$ *induce una s.e.larga en la homología de sus totales.*

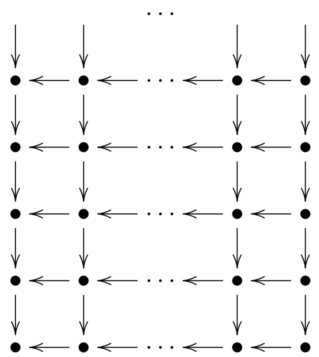
Una clase importante de complejos dobles son los que están soportados en algún cuadrante. Por ejemplo, si un complejo tiene componentes eventualmente no nulas en posición:

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
M_{2,0} \arrow[d, "d_v"] & M_{2,1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{2,2} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & {} \arrow[l, "d_h"'] \\
M_{1,0} \arrow[d, "d_v"] & M_{1,1} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & M_{1,2} \arrow[l, "d_h"'] \arrow[d, "d_v"] & {} \arrow[l, "d_h"'] \\
M_{0,0} & M_{0,1} \arrow[l, "d_h"'] & M_{0,2} \arrow[l, "d_h"'] & {} \arrow[l, "d_h"']
\end{tikzcd}
$$

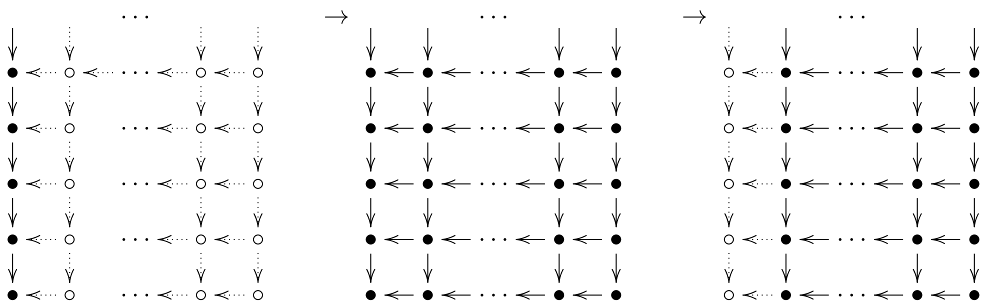
se denomina un **complejo doble en el primer cuadrante**. El resultado más importante sobre complejos dobles que utilizaremos es el siguiente:

Lema 3.19. *Si* $M_{\bullet\bullet}$ *está en el primer cuadrante y sus columnas son exactas* $\Rightarrow Tot(M_{\bullet\bullet})$ *es exacto.*

Demostración. Haremos una demostración gráfica. Supongamos primero que el complejo tiene una cantidad finita de columnas:



en caso de haber una sola columna, el resultado es obvio. Si no, podemos considerar una s.e.c. de complejos dobles que representamos esquemáticamente de la siguiente forma:



donde vemos que la primera columna es un subcomplejo, y que el complejo cociente se identifica al complejo al que se le ha borrado la primera columna y eliminado los diferenciales que figuran punteados en el diagrama.

Recursivamente, el complejo de la derecha es exacto pues sigue teniendo sus columnas exactas y tiene una cantidad menor de columnas que el del medio. El resultado se sigue entonces de la s.e.larga.

Si ahora un complejo del primer cuadrante tiene una cantidad arbitraria de columnas no nulas, observamos que al calcular $H_n(Tot(C_{\bullet\bullet})$ sólo intervienen las primeras n+1 columnas en el cálculo por lo que podemos considerar que el cálculo de H_n lo realizamos en el subcomplejo de las primeras n+1 columnas, y éste es acíclico porque tiene una cantidad finita de columnas.
$\square$

Observación 3.20. Un resultado análogo es válido intercambiando, en las hipótesis, filas por columnas.

Aplicación: Tor derivando la otra variable

Sean

$$\cdots \to Q_2 \to Q_1 \to Q_0 \stackrel{\epsilon}{\to} {}_AN \to 0$$

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \stackrel{\eta}{\to} M_A \to 0$$

dos resoluciones y consideramos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\arrow[d] & & \arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] & \\
N \otimes_A P_3 \arrow[d] & & Q_0 \otimes_A P_3 \arrow[d] & Q_1 \otimes_A P_3 \arrow[l] \arrow[d] & Q_2 \otimes_A P_3 \arrow[l] \arrow[d] & \arrow[l] \\
N \otimes_A P_2 \arrow[d] & & Q_0 \otimes_A P_2 \arrow[d] & Q_1 \otimes_A P_2 \arrow[l] \arrow[d] & Q_2 \otimes_A P_2 \arrow[l] \arrow[d] & \arrow[l] \\
N \otimes_A P_1 \arrow[d] & & Q_0 \otimes_A P_1 \arrow[d] & Q_1 \otimes_A P_1 \arrow[l] \arrow[d] & Q_2 \otimes_A P_1 \arrow[l] \arrow[d] & \arrow[l] \\
N \otimes_A P_0 & & Q_0 \otimes_A P_0 & Q_1 \otimes_A P_0 \arrow[l] & Q_2 \otimes_A P_0 \arrow[l] & \arrow[l] \\
& & & & & \\
& & Q_0 \otimes_A M & Q_1 \otimes_A M \arrow[l] & Q_2 \otimes_A M \arrow[l] & \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Si consideramos el complejo doble junto con la columna de la izquierda + el agregado del diferencial dado por la flecha ϵ, sus filas son exactas (porque se tensoriza con proyectivos, que son playos), por lo tanto el total es acíclico. Pero, a menos de suspensión, ese total coincide con el cono de la aplicación inducida por ϵ. Esto dice que el morfismo $\epsilon \otimes \mathrm{Id}_{P_\bullet}$ es un quasi-isomorfismo. De manera análoga, el cono del morfismo $\mathrm{Id}_{Q_\bullet} \otimes \eta$ nos da el complejo doble "completado" con la fila de abajo con M, que tiene columnas acíclicas (pues vienen de tensorizar con los Q que son proyectivos, luego playos), por lo tanto (total de) el complejo doble también es quasi-isomorfo al complejo dado por la fila de abajo. Concluimos que la homología de la columna de la izquierda es isomorfa a l homología de la fila de bajo. Es decir,

$$H_\bullet(N \otimes_A P_\bullet) \cong H_\bullet(tot(Q_\bullet \otimes_A P_\bullet)) \cong H_\bullet(Q_\bullet \otimes_A M)$$

3.2. La fórmula de Künneth

Relacionaremos, para dos complejos (X_A, d), $({}_AY, d)$ en situación favorable, la homología del producto tensorial con el producto tensorial de sus homologías.

Comenzamos observando que si
$dx = 0$, $dy = 0$ entonces $d(x \otimes y) = 0$.
$dx = 0$, $y = dy' \Rightarrow x \otimes y = x \otimes dy' = \pm d(x \otimes y')$
$x = dx'$, $dy = 0 \Rightarrow x \otimes y = dx' \otimes y = d(x \otimes y')$
Con esto podemos concluir que está bien definida

$$H_pX \times H_qY \to H_{p+q}(X \otimes_A Y)$$

y es claramente bilineal y balanceada, por lo tanto, para cada n existe una flecha natural

$$\bigoplus_{p+q=n} H_pX \underset{A}{\otimes} H_qY \to H_n(X \underset{A}{\otimes} Y)$$

Puede ser un iso en general? Claramente no, si no, no tendría sentido el funtor derivado del producto tensorial, pues si $X_\bullet = P_\bullet(M)$ fuera una resolución de un módulo M, $X_\bullet$ es exacto salvo en 0, y si $Y = N$ (un módulo visto como complejo concentrado en grado cero), también es exacto salvo en 0, pero $X \otimes_A Y = P(M) \otimes_A N$ calcula $\mathrm{Tor}_n^A(M,N)$!

Puede, sin embargo, ser iso en alguna situación especial? pues la fórmula de Künneth nos da una familia de situaciones de interés donde esto sucede:

Teorema 3.21. *(Fórmula de Künneth) Supongamos $\forall n$ $B(X)_n$ es proyectivo y $Z(X)_n$ es playo. Entonces el morfismo natural anterior está en una s.e.c.*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_pX \underset{A}{\otimes} H_qY \longrightarrow H_n\Big(X \underset{A}{\otimes} Y\Big) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^A(H_pX, H_qY) \longrightarrow 0$$

Las hipótesis del teorema pueden parecer, a primera vista, bastante restrictivas y difíciles de chequear, por eso, antes de demostrar este teorema, veremos algunos ejemplos motivadores muy interesantes en donde el teorema se aplica fácilmente.

Ejemplo 3.22. $A = k$ un cuerpo $\Rightarrow$ el morfismo natural es un iso.

Ejemplo 3.23. $A = \mathbb{Z}$ (o un dip) y X_n libre $\forall n$ (e.g. $X=$ el grupo abeliano libre en un conjunto simplicial) $\Rightarrow B_n(X)$ y $Z_n(X)$ son automáticamente libres! (sobre un dip, submódulo de un libre es libre) $\Rightarrow$ vale la fórmula de Künneth.

Ejemplo 3.24. Es sabido (Eilenberg-Zilber) que el complejo singular del producto cartesiano de dos espacios topológicos es homotópicamente equivalente al producto tensorial de los complejos singulares de cada uno. Más aún existen morfismos F y G que verifican

$$C_\bullet^{sing}(X \times Y) \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} C_\bullet^{sing}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} C_\bullet^{sing}(Y)$$

con

$$FG = \mathrm{Id}, \qquad GF \sim \mathrm{Id}$$

Por lo tanto, la fórmula de Künneth, en el caso $A = \mathbb{Z}$, se puede utilizar para calcular la homología singular del producto cartesiano de espacios topológicos en términos de la homología singular de cada factor.

Ejemplo 3.25. Sea k un anillo conmutativo, y consideramos la s.e.c. (que vemos como complejo)

$$0 \to k[x] \stackrel{x}{\to} k[x] \stackrel{ev_0}{\to} k \to 0$$

Los submódulos de ciclos y bordes son o bien cero, o bien libres. Llamando $X = (0 \to k[x]e_1 \stackrel{d}{\to} k[x] \to 0)$ ($k[x]$ en grados 0 y 1, $d(e_1) = x$), entonces

$$H_1(X) = 0, \; H_0(X) = k$$

y en X también los ciclos y bordes son o bien 0 o bien k-libres, por lo tanto se puede tensorizar con X y usar la fórmula de Künneth. Pero más aún, como $H_\bullet(X)$ es o bien cero o bien k-libre, el término de Tor_1 es cero, y la fórmula de Künneth da, para cualquier complejo de k-módulos Y, un isomorfismo!

$$\bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes_k H_q(Y) \cong H_n(X \otimes_k Y)$$

Si tomamos $Y = (0 \to k[y]e_2 \stackrel{y}{\to} k[y] \to 0)$ entonces

$$X \otimes Y \cong 0 \to k[x,y]e_1e_2 \to k[x,y]e_1 \oplus k[x,y]e_2 \to k[x,y] \to 0$$

$$d(e_1e_2) = xe_1 - ye_2, \; d(e_1) = x, \; d(e_2) = y$$

Resulta un complejo exacto en grados positivos en con homología k en grado cero, luego, este complejo nos da una resolución $k[x,y]$-libre de k.

Observación 3.26. Un argumento inductivo provee de una resolución de k como $k[x_1, \dots, x_n]$-módulo que estudiaremos más tarde, llamada la resolución de Koszul.

Ejemplo 3.27. Sean A y B dos k-álgebras y supongamos k cuerpo. Consideremos M_A, ${}_AN$ M'_B, ${}_BN'$. Denotando $\otimes = \otimes_k$, tenemos

- $M \otimes M'$ es un $A \otimes B$-módulo a derecha,
- $N \otimes N'$ es un $A \otimes B$-módulo a izquierda, y
- $\mathrm{Tor}_\bullet^{A\otimes B}(M \otimes M', N \otimes N') = \mathrm{Tor}_\bullet^A(M,N) \otimes \mathrm{Tor}_\bullet^B(M',N')$.

Demostración. Ejercicio 1) $P_\bullet \to M$, $P'_\bullet \to M'$ dos resoluciones, entonces $P \otimes P'$ resuelve a $M \otimes M'$ (usamos Künneth),

Ejercicio 2)

$$(P \otimes P') \underset{A\otimes B}{\otimes} (N \otimes N') \cong (P \underset{A}{\otimes} N) \otimes (P' \underset{B}{\otimes} N')$$

$$(p \otimes p') \underset{A\otimes B}{\otimes} (n \otimes n') \leftrightarrow (p \underset{A}{\otimes} n) \otimes (p' \underset{B}{\otimes} n')$$

Ejercicio 3)

$$H_\bullet\Big((P \underset{A}{\otimes} N) \otimes (P' \underset{B}{\otimes} N')\Big) \cong H_\bullet(P \underset{A}{\otimes} N) \otimes H_\bullet(P' \underset{B}{\otimes} N')$$

□

Demostración de la fórmula de Künneth

Recordamos el enunciado:

Teorema 3.28. *(Fórmula de Künneth) Supongamos $\forall n$ $B(X)_n$ es proyectivo y $Z(X)_n$ es playo. Entonces, el morfismo natural entre la homología del producto tensorial y el producto tensorial de las homologías forma parte de una sucesión exacta corta:*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_pX \underset{A}{\otimes} H_qY \longrightarrow H_n(X \underset{A}{\otimes} Y) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^A(H_pX, H_qY) \longrightarrow 0$$

Demostración. Sea X un complejo, $H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X)$

$$0 \longrightarrow (Z(X), 0) \xrightarrow{i} (X, d) \xrightarrow{d} B(X)[-1] \longrightarrow 0$$

es s.e.c. de complejos y $\forall p$

$$0 \longrightarrow Z_p(X) \xrightarrow{i} X_p \xrightarrow{d} B_{p-1}(X) \longrightarrow 0$$

es s.e.c. de A-módulos (a derecha).

Como supusimos $B_n(X)$ proyectivo $\forall n \Rightarrow$ (lugar a lugar) se parte. Si $Y_\bullet$ es un complejo (de A-mod a izquierda) $\Rightarrow \forall q$

$$0 \longrightarrow Z_p(X) \otimes Y \xrightarrow{i\otimes \mathrm{Id}_Y} X_p \otimes Y \xrightarrow{d_X\otimes \mathrm{Id}_Y} B_{p-1}(X) \otimes Y \longrightarrow 0$$

es exacta y también

$$0 \longrightarrow (Z(X) \otimes Y)_n \xrightarrow{i} (X \otimes Y)_n \xrightarrow{d_X\otimes \mathrm{Id}_Y} (B(X) \otimes Y)_{n-1} \longrightarrow 0$$

Como el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (Z(X) \otimes Y)_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pm\mathrm{Id}\otimes d_Y = "', "d"] & (X \otimes Y)_n \arrow[r, "d_X\otimes \mathrm{Id}_Y"] \arrow[d, "d"'] & (B(X) \otimes Y)_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d="', "\pm\mathrm{Id}\otimes d_Y"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (Z(X) \otimes Y)_{n-1} \arrow[r, "i"] & (X \otimes Y)_{n-1} \arrow[r, "d_X\otimes \mathrm{Id}_Y"] & (B(X) \otimes Y)_{n-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Concluimos una s.e.c. de complejos

$$0 \longrightarrow Z(X) \otimes Y \xrightarrow{i} X \otimes Y \xrightarrow{d_X\otimes \mathrm{Id}_Y} B(X) \otimes Y[-1] \longrightarrow 0$$

Esta s.e.c. de complejos induce una s.e. larga en homología:

$$\cdots \to H_{n+1}(Z(X)\otimes Y) \to H_{n+1}(X\otimes Y) \to H_{n+1}(B(X)\otimes Y[-1]) \to$$
$$\to H_n(Z(X)\otimes Y) \to H_n(X\otimes Y) \to H_n(B(X)\otimes Y[-1]) \to \cdots$$

$$\cdots \to H_{n+1}(Z(X)\otimes Y) \to H_{n+1}(X\otimes Y) \to H_{n+1}(B(X)[-1]\otimes Y) \to$$
$$\to H_n(Z(X)\otimes Y) \to H_n(X\otimes Y) \to H_n(B(X)[-1]\otimes Y) \to$$

Observamos: para $W = Z$ ó B

$$H_n(W\otimes Y) = \bigoplus_p H_{n-p}(W_p\otimes Y)$$

y si Z es playo (B era proyectivo, luego playo también), para $W = Z$ ó B

$$H_n(W\otimes Y) = \bigoplus_p W_p\otimes H_{n-p}(Y) = (W\otimes H(Y))_n$$

También es claro que $H_{n+1}(B(X)\otimes Y[-1]) = H_n(B(X)\otimes Y)$. Por lo tanto la sucesión exacta

$$\cdots \to H_{n+1}(Z(X)\otimes Y) \to H_{n+1}(X\otimes Y) \to H_{n+1}(B(X)\otimes Y[-1]) \to$$
$$\to H_n(Z(X)\otimes Y) \to H_n(X\otimes Y) \to H_n(B(X)[-1]\otimes Y) \to$$

es de la forma

$$\cdots \to \bigoplus_p B_p\otimes H_{n-p}(Y) \to$$
$$\to \bigoplus_p Z_p\otimes H_{n-p}(Y) \to H_n(X\otimes Y) \to \bigoplus_p B_p\otimes H_{n-1-p}(Y) \to$$
$$\to \bigoplus_p Z_p\otimes H_{n-1-p}(Y) \to \cdots$$

Como tensorizar es exacto a derecha, el conúcleo de

$$\bigoplus_p B_p\otimes H_{n-p}(Y) \to \bigoplus_p Z_p\otimes H_{n-p}(Y)$$

es $\bigoplus_p H_p(X)\otimes H_{n-p}(Y)$ por lo tanto, la sucesión

$$\bigoplus_p B_p\otimes H_{n\text{-}p}(Y)\to\bigoplus_p Z_p\otimes H_{n\text{-}p}(Y)\to H_n(X\otimes Y)\to\bigoplus_p B_p\otimes H_{n\text{-}1\text{-}p}(Y)\to\bigoplus_p Z_p\otimes H_{n\text{-}1\text{-}p}(Y)$$

nos da

$$0\to\bigoplus_p H_p(X)\otimes H_{n\text{-}p}(Y)\to H_n(X\otimes Y)\to\bigoplus_p B_p\otimes H_{n\text{-}1\text{-}p}(Y)\to\bigoplus_p Z_p\otimes H_{n\text{-}1\text{-}p}(Y)$$

A su vez, la imagen de la segunda flecha, es el núcleo de

$$\bigoplus_p B_p \otimes H_{n\text{-}1\text{-}p}(Y) \to \bigoplus_p Z_p \otimes H_{n\text{-}1\text{-}p}(Y)$$

Para calcular este núcleo, consideremos la s.e.c.

$$0 \to B_p \to Z_p \to H_p(X) \to 0$$

que, al tensorizar con $H_q(Y)$ da la s.e. larga

$$\mathrm{Tor}_1(Z_p(X), H_q(Y)) \to \mathrm{Tor}_1(H_p(X), H_q(Y)) \to B_p \otimes H_q(Y) \to Z_p \otimes H_q(Y) \to H_p(X) \otimes H_q(Y) \to 0$$

pero como habíamos supuesto Z_p playo,

$$\mathrm{Tor}_1(H_p(X), H_q(Y)) = \mathrm{Ker}(B_p \otimes H_q(Y) \to Z_p \otimes H_q(Y))$$

luego

$$\bigoplus_p \mathrm{Tor}_1(H_p(X), H_{n\text{-}p}(Y)) = \mathrm{Ker}\Big(\bigoplus_p B_p \otimes H_{n\text{-}p}(Y) \to \bigoplus_p Z_p \otimes H_{n\text{-}p}(Y)\Big)$$

$\Rightarrow$

$$0 \to \bigoplus_p H_p(X) \otimes H_{n\text{-}p}(Y) \to H_n(X \otimes Y) \to \bigoplus_p \mathrm{Tor}_1(H_p(X), H_{n\text{-}1\text{-}p}(Y)) \to 0$$

es una s.e.c. También la podemos re-escribir como

$$0 \to (HX \otimes HY)_n \to H_n(X \otimes Y) \to \bigoplus_p \mathrm{Tor}_1(H_pX, H_{n\text{-}1\text{-}p}Y) \to 0$$

$\square$

Casos particulares:

Si $A = k$ es un cuerpo, entonces

$$H_\bullet(X) \otimes H_\bullet(Y) \cong H_\bullet(X \otimes Y)$$

En general, si A es arbitrario y si (BX proy, ZX playo y) o bien $H(X)$, o bien $H(Y)$ playo $\Rightarrow$

$$H_\bullet(X) \underset{A}{\otimes} H_\bullet(Y) \cong H_\bullet(X \underset{A}{\otimes} Y)$$

Un caso de interés topológico: cuando se calcula el complejo singular de un espacio topológico V, $S_\bullet(V, A)$=A-módulo libre en los símplices en V,

$$H_\bullet^{sing}(V, A) := H_\bullet(S_\bullet(V, A))$$

Es claro que

$$S_\bullet(V,A) = S_\bullet(V,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} A$$

y $X = S_\bullet(V,\mathbb{Z})$, $B(X)$ y $Z(X)$ son $\mathbb{Z}$-libres. $Y = A$, $H_\bullet(Y) = H_0(Y) = A$.

Llamemos $H_nV := H_n^{sing}(V,\mathbb{Z})$, entocnes existe s.e.c.

$$0 \to H_nV \otimes_{\mathbb{Z}} A \to H_n^{sing}(V,A) \to Tor_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}V,A) \to 0$$

x.ej. si $H_n(V)$ tiene p-torsión $\Rightarrow H_{n+1}^{sing}(V,\mathbb{Z}_p) \neq 0$.

3.3. Aplicación: resolución de Koszul para polinomios

Desarrollaremos el ejemplo 3.25. En esta sección $A = k[x_1,\dots,x_n]$, $M = k$ (via evaluación en cero), es claro que

$$\operatorname{Ker}(ev_0 : A \to k) = \langle x_1,\dots,x_n\rangle = \sum_{i=1}^n Ax_i$$

por lo tanto la siguiente es una sucesión exacta a derecha:

$$?\cdots \to \bigoplus_{i=1}^n Ae_i \to A \to k \to 0$$

$$e_i \mapsto x_i$$

Vamos a continuarla hacia la izquierda. Para cada $k \geq 0$ tomamos $(K_0 = A)$ K_k^n el A-módulo libre de rango $\binom{n}{k}$, con base los símbolos $e_{i_1}\cdots e_{i_k}$ donde $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, y el diferencial dado por

$$d : K_k^n := \bigoplus_{i_1<\cdots<i_k} Ae_{i_1}\cdots e_{i_k} \longrightarrow K_{k-1}^n$$

$$e_{i_1}\cdots e_{i_k} \mapsto x_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} - x_{i_2}e_{i_1}e_{i_3}\cdots e_{i_k} + \cdots$$

$$= \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} x_{i_j} e_{i_1}\cdots\widehat{e_{i_j}}\cdots e_{i_k}$$

Proposición 3.29. *(Resolución de Koszul) El complejo anterior da una resolución de k como A-módulo.*

Demostración. Notamos primero que el objeto recién definido termina de la siguiente forma:

$$\cdots \to \bigoplus_{i=1}^n k[x_1,\dots,x_n]e_i \to k[x_1,\dots,x_n] \to 0$$

y claramente

$$d\Big(\bigoplus_{i=1}^{n} k[x_1,\dots,x_n]e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i A = \langle x_1,\cdots x_n\rangle = \mathrm{Ker}(ev : A \to k)$$

por lo tanto el conúcleo de la última flecha es k. Para ver que es un complejo (i.e. $d^2 = 0$) y que en grados superiores es exacto, usamos la fórmula de Künneth para

$$X = 0 \to k[x]e_0 \stackrel{x_0}{\to} k[x_0] \to 0$$

que es un complejo con homología cero en grados positivos y $H_0 = k$, e

$$Y = K^n_\bullet$$

Mostraremos que $X_\bullet \otimes Y_\bullet \cong K^{n+1}_\bullet$ y así concluiremos la proposición por inducción usando la fórmula de Künneth, siendo el caso $n = 1$ el complejo X donde el enunciado es obvio.

Calculemos el producto tensorial de los complejos:

$$(X \otimes Y)_k = \bigoplus_{p+q=k} X_p \otimes K^n_q = X_0 \otimes K^n_k \bigoplus X_1 \otimes K^n_{k-1}$$

$$= k[x_0] \otimes \Big(\bigoplus_{i_1<\cdots<i_k} k[x_1,\dots,x_n]e_{i_1}\cdots e_{i_k}\Big) \bigoplus k[x_0]e_0 \otimes \Big(\bigoplus_{i_1<\cdots<i_{k-1}} k[x_1,\dots,x_n]e_{i_1}\cdots e_{i_{k-1}}\Big)$$

$$\cong \Big(\bigoplus_{i_1<\cdots<i_k} k[x_0,x_1,\dots,x_n]e_0 \otimes e_{i_1}\cdots e_{i_k}\Big) \bigoplus \Big(\bigoplus_{i_1<\cdots<i_{k-1}} k[x_0,x_1,\dots,x_n]e_{i_1}\cdots e_{i_{k-1}}\Big)$$

que claramente es isomorfo a K^{n+1}_k simplemente renombrando las variables desde 0 a n, y con la correspondencia

$$e_0 \otimes e_{i_1}\cdots e_{i_{k-1}} \leftrightarrow e_0 e_{i_1}\cdots e_{i_{k-1}}$$

Dejamos como ejercicio chequear que los diferenciales se corresponden, con todos sus signos incluidos. Concluimos que K^{n+1} es un complejo ($d^2 = 0$).

Como $X_\bullet$ tiene ciclos y bordes k-módulos libres, podemos usar la fórmula de Künneth

$$0 \to (HX \otimes HY)_\ell \to H_\ell(X \otimes Y) \to \oplus_p \mathrm{Tor}_1(H_pX, H_{\ell-1-p}Y) \to 0$$

Pero como $H_\ell(X) = 0$ si $\ell \neq 0$ y $H_0(X) = k$, el lado izquierdo de la s.e.c. es simplemente $k \otimes H_\ell(Y)$, mientras que el lado derecho, cuando $p \neq 0$

$$\mathrm{Tor}_1(H_pX, H_{\ell-1-p}Y) = \mathrm{Tor}_1(0, H_{\ell-1-p}Y) = 0$$

y cuando $p = 0$ también pues

$$\mathrm{Tor}_1(H_0X, H_{\ell-1}Y) = \mathrm{Tor}_1(k, H_{\ell-1}Y) = 0$$

pues k es k-libre, luego playo. Concluimos

$$H_\ell(K^{n+1}_\bullet) \cong H_\ell(X_\bullet \otimes K^n_\bullet) \cong k \otimes H_\ell(K^n_\bullet)$$

y por hipótesis inductiva $H_\ell(K^n_\bullet) = 0$ para $\ell > 0$, y k para $\ell = 1$. □

3.4. Exactitud en s.e.c. vs exactitud general

Analizaremos en esta sección una sutileza con respecto a la exactitud de funtores, más precisamente, veremos en detalle la siguiente proposición, que implícitamente la hemos utilizado.

Proposición 3.30. *Sea F : A-Mod→ $\mathbb{Z}$-Mod que manda s.e.c. en s.e.c., entonces preserva exactitud en general en cualquier complejo.*

Demostración. Sea $Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Z$ tal que $Im(f) = Ker(g)$. Consideramos

$$FY \xrightarrow{Ff} FX \xrightarrow{Fg} FZ$$

queremos ver que $Im(Ff) = \mathrm{Ker}(Fg)$. Observamos que como F es aditivo y $F(0) = 0$, ya sabemos $Im(Ff) \subseteq \mathrm{Ker}(Fg)$.

Primero, vamos a reducir al caso g epi: Llamamos g^c (g co-retringda) a la "misma" g pero vista de Y en su imagen,

$$g^c : Y \to g(Y)$$

y llamemos $i : g(Y) \to Z$ a la inclusión.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, two heads, "g^c"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & Im(g) \arrow[r, hook, "i"] & FZ \end{tikzcd}$$

Como F preserva monos y epis, siguen los monos y epis:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "F(f)"] & FY \arrow[r, two heads, "F(g^c)"] \arrow[rr, bend right, "F(g)"'] & F(Im(g)) \arrow[r, hook, "F(i)"] & FZ \end{tikzcd}$$

y además $F(g) = F(i) \circ F(g^c)$. Como el diagrama conmuta y y $F(i)$ es mono

$$F(g)(u) = 0 \iff F(i)\Big(F(g^c)(u)\Big) = 0 \iff F(g^c)(u) = 0$$

Luego, $\mathrm{Ker}(F(g)) = \mathrm{Ker}(F(g^c)$.

Ahora volvemos a

$$FY \xrightarrow{Ff} FX \xrightarrow{Fg} FZ$$

y queremos ver si $Im(F(f)) = \mathrm{Ker}(F(g))$, pero esto es lo mismo que preguntarse si

$$Im(F(f)) = \mathrm{Ker}(F(g^c))$$

o equivalentemente, haber asumido desde el principio (cambiando eventualmente g por g^c) que g era epi.

Empecemos nuevamente entonces desde una sucesión exacta

$$Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

tal que $Im(f) = Ker(g)$ y consideremos el complejo

$$FY \xrightarrow{Ff} FX \xrightarrow{Fg} FZ \longrightarrow 0$$

Factorizando a $f = i \circ f^c$ donde $f^c : X \to f(X)$ y ahora $i : f(X) \to Y$ es la inclusión de $Im(f)$ en Y, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, two heads] & & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[dd, equal] & F(Z) \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
& F(Im(f)) = F(\mathrm{Ker}(g)) \arrow[ur, hook, "F(i)"] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(F(g)) \arrow[r] & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] & F(Z) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $g \circ i = 0$ entonces $F(i) \circ F(g) = F(i \circ g) = 0$, es decir, $F(i)(F(\mathrm{Ker}(g))$ cae dentro del núcleo de $F(g)$, y tenemos una factorización de $F(i)$:

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, two heads] & & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[dd, equal] & F(Z) \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
& F(Im(f)) = F(\mathrm{Ker}(g)) \arrow[ur, hook, "F(i)"] \arrow[d, dashed] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(F(g)) \arrow[r] & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] & F(Z) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La flecha punteada claramente es mono, pero más aún, como $0 \to \mathrm{Ker}(g) \to^i Y \to^g Z \to 0$ es un s.e.c. y F preserva s.e.c., tenemos un morfismo de s.e.c. y (por el lema de los 5)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(\mathrm{Ker}(g)) \arrow[r, "F(i)"] \arrow[d, dashed] & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[d, equal] & F(Z) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(F(g)) \arrow[r, "\subseteq"] & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] & F(Z) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

podemos concluir que la flecha punteada es un iso "$\cong$". Ahora que sabemos que es un iso, mirando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, two heads, "F(f^c)"'] & & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[dd, equal] & F(Z) \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
& F(Im(f)) = F(\mathrm{Ker}(g)) \arrow[ur, hook, "F(i)"'] \arrow[d, dashed, "\cong"] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(F(g)) \arrow[r] & F(Y) \arrow[r, "F(g)"] & F(Z) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

podemos ver que $Im(F(f)) = \mathrm{Ker}(F(g))$: si $F(g)(u) = 0$,

$$\cong^{-1}(u) \in F(Ker(f)) = F(Im(f)) = Im(F(f^c))$$

la última igualdad es porque F preserva epis. Entonces

$$\cong^{-1}(u) = F(f^c)(v)$$

para algún $v \in FX$. $\Rightarrow$

$$u = \cong(\cong^{-1}(u)) = \cong(F(f^c)(v)) = F(i)(F(f^c)(v)) = F(f)(v)$$

o sea, $u \in Im(F(f))$. $\square$

Núcleo e imagen categóricos

En una categoría donde $\mathrm{Hom}(M, N)$ es un grupo abeliano (y la composición es bilineal), existe siempre el morfismo cero. A su vez, se puede definir un objeto cero como un objeto que sea simultáneamente objeto inicial y final. En el caso que exista, claramente es único (a menos de isomorfismo único) y lo denotamos por 0. Si X, Y son dos objetos, por ser 0 inicial y final se tiene definida de forma única una flecha $X \to 0 \to Y$, a esta flecha la llamamos flecha cero. Definimos núcleo y conúcleo para categorías con objeto cero:

Núcleo: Dado $f : M \to N$, un núcleo para f es un par (K, i) donde K es un objeto, $i : K \to M$, $f \circ i = 0$ y es universal en el sentido: $\forall g : X \to M$ tal que $f \circ g = 0$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "f\circ i=0"] & M \arrow[r, "f"] & N \\
& X \arrow[u, "g"] \arrow[ul, dotted, "\exists!\widetilde{g}"] \arrow[ur, bend right, "f\circ g=0"'] &
\end{tikzcd}$$

Conúcleo: conúcleo en $\mathcal{C}$ = núcleo en $\mathcal{C}^{op}$.

Ejemplo 3.31. si $f : M \to N$ es un morfismo en A-Mod,

$$\mathrm{Ker}(f) = \Big(\{m \in M : f(m) = 0\}, \subseteq\Big)$$

$$\mathrm{CoKer}(f) = \Big(N/Im(f), \pi : N \to N/Im(f)\Big)$$

Notación: Ker(f)= el objeto, $ker(f)$=la flecha. La factorización

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "f^c"'] & & N \arrow[r, "\pi"] & N/Im(f) \\ & Im(f) \arrow[ur, hook, "i"'] & & \end{tikzcd}$$

nos dice $Im(f) = \mathrm{Ker}(coker(f)) \hookrightarrow N$

Definición 3.32. En una categoría se define $\boxed{Im(f) = \mathrm{Ker}(coker(f))}$.

Notar que no tiene sentido en una categoría arbitraria hablar de subobjeto "$X \subseteq Y$", pero si se puede hablar de un par (X, i) donde $i : X \to Y$.

3.5. El teorema de isomorfismo

En una categoría con núcleo y conúcleo, y en la que toda flecha $f : X \to Y$ tiene una factorización de un epi (en su "imagen") seguida de un mono (la "inclusión" de la imagen en el codominio), se puede considerar el siguiente diagrama, y en la categoría de A-módulos la flecha horizontal de abajo es un isomorfismo:

$$\begin{tikzcd} Ker(f) \arrow[r, hook] & M \arrow[rr, "f"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, two heads, "f^c"] & & N \arrow[r, "\pi"] & N/Im(f) \\ & M/\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, hook, two heads, "\sim", "\overline{f^c}"'] & Im(f) \arrow[ur, hook, "i"] & & \end{tikzcd}$$

$$\boxed{Im(f) := \mathrm{Ker}(coker(f)) = \mathrm{Ker}\Big(N \overset{coker(f)}{\twoheadrightarrow} Coker(f)\Big) \hookrightarrow N}$$

Observación 3.33. "al revés", $Coker(ker(f)) = M/\mathrm{Ker}(f)$, y por el 1er teo de isomorfismo sabemos que $\cong Im(f)$

Este isomorfismo: $\mathrm{Ker}(coker(f)) \cong Coker(ker(f))$ vale en A-mod, también en Chain(A). Es uno de los axiomas de "categoría abeliana".

Observación 3.34. La homología de un complejo se define como "$\mathrm{Ker}(d)/Im(d)$", claramente es una concatenación de definiciones de núcleo y conúcleo (ver la definición de imagen!). Por lo tanto, tenemos el siguiente corolario, que lo enunciamos en A-módulos, pero que ahora sabemos qué hipótesis categóricas necesitaríamos para generalizarlo.

Corolario 3.35. *Si $F : A$-Mod$\to \mathbb{Z}$-Mod preserva s.e.c. entonces F preserva núcleos, conúcleos, imágenes, conúcleos de núcleos por imágenes, y por lo tanto*

$$H_n(F(X_\bullet)) \cong F\Big(H_n(X_\bullet)\Big)$$

Para todo $X_\bullet \in \mathrm{Chain}(A)$.

Ejemplo 3.36. M_A playo, entonces

$$H_n(M \otimes_A Y_\bullet) \cong M \otimes_A H_n(Y_\bullet)$$

para todo complejo de A-módulos $Y_\bullet$

Capítulo 4

El funtor Ext

Para $M, N \in A$-Mod, definimos el funtor Ext derivando al funtor Hom. Este funtor, precisamente, va a controlar el defecto de exactitud de Hom. Tiene tiene la peculiaridad que es contravariante en la primer variable, y en la segunda variable es exacto a izquierda, y no a derecha. En todo caso, definimos

$$\mathrm{Ext}^n_A(M,N) := H^n(\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N), d^*)$$

donde $P_\bullet \to M$ es una resolución proyectiva de M.

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d} \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d} P_1 \xrightarrow{d} P_0 \xrightarrow{d} M \longrightarrow 0$$

$\rightsquigarrow \mathrm{Ext}^n_A(M,N) =$

$$= H^n\Big(\ 0 \to \mathrm{Hom}_A(P_0,N) \xrightarrow{d^*} \mathrm{Hom}_A(P_1,N) \xrightarrow{d^*} \mathrm{Hom}_A(P_2,N) \xrightarrow{d^*} \cdots\ \Big)$$

es la (co)homología de un complejo de CO-cadenas. Está bien definido a menos de isomorfismo (único).

4.1. Primeras propiedades

Así como $\mathrm{Tor}^A_0(M,N) \cong M \otimes_A N$, tenemos para el Ext:

Proposición 4.1. $\mathrm{Ext}^0_A(M,N) \cong \mathrm{Hom}_A(M,N)$

Demostración. $\mathrm{Ext}^0_A(M,N) = \mathrm{Ker}\Big(\ \mathrm{Hom}_A(P_0,N) \xrightarrow{d^*} \mathrm{Hom}_A(P_1,N)\ \Big)$, pero $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ transforma s.e. a derecha en s.e.a izq., luego "$X \to Y \to Z \to 0 \Rightarrow 0 \to \mathrm{Hom}_A(Z,N) \to \mathrm{Hom}_A(Y,N) \to \mathrm{Hom}_A(X,N)$"

En particular,

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(P_0,N) \xrightarrow{d^*} \mathrm{Hom}_A(P_1,N)$$

es exacta, por lo que $\mathrm{Ext}^0(M,N) = \mathrm{Ker}(d^*) \cong \mathrm{Hom}_A(M,N)$. □

También vale que manda sucesiones exactas cortas en sucesiones exactas largas:

Proposición 4.2. *Si $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ es una s.e.c. de A-módulos, entonces se tiene una s.e.larga*

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_3,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_2,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_1,N) &\longrightarrow \\
\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M_3,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M_2,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M_1,N) &\longrightarrow \\
\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(M_3,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(M_2,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(M_1,N) &\longrightarrow \cdots
\end{aligned}$$

Demostración. Al igual que en el cálculo de Tor, si tomamos resoluciones de M_1 y M_3 y para M_2 tomamos la suma directa (en cada grado) de estas resoluciones y obtenemos una sucesión exacta de los complejos. Concluimos por la sucesión exacta larga en cohomología. □

Proposición 4.3. *$N = I$ es inyectivo $\iff$ $\mathrm{Ext}^n_A(M,I) = 0$ $\forall n > 0$*
$M = P$ es proyectivo $\Rightarrow$ $\mathrm{Ext}^n_A(P,N) = 0$ $\forall n > 0$.

Demostración. Si I es inyectivo entonces $\mathrm{Hom}_A(-,I)$ es exacto, luego, al aplicarlo una resolución de M, mantiene la exactitud y $\mathrm{Ext}^n_A(M,I) = 0$ para $n > 0$. Recíprocamente, si $\mathrm{Ext}^n_A(M,I) = 0$ para $n > 0$ para cualquier M, la s.e.larga nos dice que $\mathrm{Hom}_A(-,I)$ es exacto.

Si P es proyectivo, entonces

$$0 \to P \xrightarrow{\mathrm{Id}} P$$

es una resolución proyectiva de P. Si usamos ésta resolución, es claro que $\mathrm{Ext}^n_A(P,N) = 0$ par $n > 0$ y para cualquier N. Para la otra implicación sería conveniente tener la s.e.larga en la otra variable, que veremos enseguida. □

4.2. Ext y sucesiones exactas

Ahora fijamos M y consideramos $0 \to N_1 \to N_2 \to N_1 \to 0$ es una s.e.c. de A-módulos, tenemos una sucesión aplicando Hom en la otra variable:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N_1) \to \mathrm{Hom}_A(M,N_2) \to \mathrm{Hom}_A(M,N_1)$$

Teorema 4.4. *La sucesión anterior se extiende a una s.e. larga de la forma*

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,N_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,N_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,N_3) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M,N_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M,N_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M,N_3) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(M,N_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(M,N_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(M,N_3) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Demostración. resolvemos M

$$\cdots \to P_n \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

Tomamos el complejo $P_\bullet$

$$\cdots \to P_n \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to 0$$

Aplicamos $\mathrm{Hom}_A(-,N_i)$, $i = 1,2,3$ y obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_0,N_1) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \mathrm{Hom}_A(P_1,N_1) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \mathrm{Hom}_A(P_2,N_1) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_0,N_2) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"] & \mathrm{Hom}_A(P_1,N_2) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"] & \mathrm{Hom}_A(P_2,N_2) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_0,N_3) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_1,N_3) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_2,N_3) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Pero como P_i es proyectivo $\forall i$, podemos extender con ceros las columnas y éstas son exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_0,N_1) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \mathrm{Hom}_A(P_1,N_1) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \mathrm{Hom}_A(P_2,N_1) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_0,N_2) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"] & \mathrm{Hom}_A(P_1,N_2) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"] & \mathrm{Hom}_A(P_2,N_2) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_0,N_3) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(P_1,N_3) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(P_2,N_3) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$$\therefore\ 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_\bullet,N_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(P_\bullet,N_2) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(P_\bullet,N_3) \longrightarrow 0$$

es una s.e.c. de complejos, luego, se tiene una s.e.larga en (co)homología □

Fijemos ahora una sucesión exacta corta $\forall(0 \to X \to Y \to Z \to 0)$ y consideremos módulos P e I que los usaremos en cada una de las variables, tenemos dos opciones para s.e.largas:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P,X) \to \mathrm{Hom}_A(P,Y) \to \mathrm{Hom}_A(P,Z) \to \mathrm{Ext}^1_A(P,X) \to \cdots$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(Z,I) \to \mathrm{Hom}_A(Y,I) \to \mathrm{Hom}_A(X,I) \to \mathrm{Ext}^1_A(Z,I) \to \cdots$$

Concluimos ahora fácilmente que

P proyectivo $\iff \mathrm{Ext}^1_A(P,N) = 0\ \forall N$

I inyectivo $\iff \mathrm{Ext}^1_A(M,I) = 0\ \forall M$

Para el caso de inyectivos, recordamos el siguiente criterio, que traduciremos luego en términos de Ext:

Teorema 4.5 (criterio de Baer). *$J \subset A$ ideal, I inyectivo $\iff$*

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\forall f"'] & A \arrow[dl, dotted, "\exists! \widetilde{f}"] \\ I & \end{tikzcd}$$

Corolario 4.6. *I inyectivo $\iff \mathrm{Ext}^1_A(A/J, I) = 0\ \forall$ ideal $J \subset A$*

Este criterio es particularmente útil cuando tenemos una parametrización cómoda de todos los ideales de A, por ejemplo si A es un dip.

4.3. Ext **derivando la 2da variable:**

De manera similar al $\mathrm{Tor}^A_\bullet(M,N)$, que lo podemos calcular usando una resolución proyectiva de M, o de N (o de ambos simultáneamente), en el caso del Ext la situación es análoga, aunque diferente porque Ext es contravariante en la primer variable, y exacto a izquierda en la segunda variable (y no a derecha como el producto tensorial), por eso, en la segunda variable, la buena definicón o construcción es dual a la del producto tensorial, es decir, con resoluciones inyectivas en vez de proyectivas.

Dados M, N, tomamos

$$0 \to N \to I_0 \to I_{-1} \to I_{-2} \to I_{-3} \to \cdots$$

una resolución inyectiva.

Notación: $0 \to N \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to I^3 \to \cdots$

Se define $I_\bullet := \Big(0 \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to I^3 \to \cdots\Big)$

Con esa indexación es un complejo de CO-cadenas.

$$\widetilde{\mathrm{Ext}}^{\bullet}_A(M,N) := H^n(\mathrm{Hom}_A(M, I^\bullet))$$

Teorema 4.7. $\widetilde{\mathrm{Ext}}^{\bullet}_A(M,N) \cong \mathrm{Ext}^\bullet(M,N)$

Demostración. Consideramos una resolución proyectiva $P_\bullet \to M$ y el complejo **doble**

$$C_{ij} := \mathrm{Hom}_A(P_i, I^j)$$

con diferenciales los que vienen de $P_\bullet$ y los que vienen de $I^\bullet$ (con signos)

A partir de

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\eta} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \xrightarrow{d^2} \cdots$$

y

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} P_2 \xrightarrow{\partial_1} P_1 \xrightarrow{\partial_0} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

se tiene

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\mathrm{Hom}_A(P_2,N) \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[u, "\partial_2^*"] & \mathrm{Hom}_A(P_2,I^0) \arrow[r, "d_0"] \arrow[u, "-\partial_2^*"] & \mathrm{Hom}_A(P_2,I^1) \arrow[r, "d_1"] \arrow[u, "\partial_2^*"] & \mathrm{Hom}_A(P_2,I^2) \arrow[r, "d_2"] \arrow[u, "-\partial_2^*"] & \cdots \\
\mathrm{Hom}_A(P_1,N) \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[u, "\partial_1^*"] & \mathrm{Hom}_A(P_1,I^0) \arrow[r, "d_0"] \arrow[u, "-\partial_1^*"] & \mathrm{Hom}_A(P_1,I^1) \arrow[r, "d_1"] \arrow[u, "\partial_1^*"] & \mathrm{Hom}_A(P_1,I^2) \arrow[r, "d_2"] \arrow[u, "-\partial_1^*"] & \cdots \\
\mathrm{Hom}_A(P_0,N) \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[u, "\partial_0^*"] & \mathrm{Hom}_A(P_0,I^0) \arrow[r, "d_0"] \arrow[u, "-\partial_0^*"] & \mathrm{Hom}_A(P_0,I^1) \arrow[r, "d_1"] \arrow[u, "\partial_0^*"] & \mathrm{Hom}_A(P_0,I^2) \arrow[r, "d_2"] \arrow[u, "-\partial_0^*"] & \cdots \\
\mathrm{Hom}_A(M,N) \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[u, "\epsilon^*"] & \mathrm{Hom}_A(M,I^0) \arrow[r, "d_0"] \arrow[u, "-\epsilon^*"] & \mathrm{Hom}_A(M,I^1) \arrow[r, "d_1"] \arrow[u, "\epsilon^*"] & \mathrm{Hom}_A(M,I^2) \arrow[r, "d_2"] \arrow[u, "-\epsilon^*"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

El morfismo η se puede pensar como morfismo del complejo doble dado por la primera columna en el complejo doble con $\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, I^\bullet)$, y análogamente ϵ define un morfismo de complejos dobles de la fila de abajo en el mismo complejo doble, obteniendo así flechas

$$\mathrm{Ext}^\bullet_A(M,N) \to \widetilde{\widetilde{\mathrm{Ext}^\bullet}}_A(M,N) \leftarrow \widetilde{\mathrm{Ext}^\bullet}_A(M,N)$$

donde $\widetilde{\widetilde{\mathrm{Ext}^\bullet}}_A(M,N) = H_\bullet(Tot(\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, I^\bullet)))$. Como, al incluir la primera columna con η como primer diferencial (resp. la primera fila y ϵ) las filas (resp. columnas) son acíclicas, el morfismo inducido por η (reps. ϵ) es un quasi-isomorfismo. Concluimos entonces $\mathrm{Ext}^\bullet_A(M,N) \cong \widetilde{\mathrm{Ext}^\bullet}_A(M,N)$.

□

4.4. Ext y extensiones

Daremos la interpretación clásica de los grupos Ext, que explican la notación. Tomemos $[f] \in \mathrm{Ext}^1(M, N)$, esto significa que hemos tomado una resolución proyectiva de M:

$$\cdots \xrightarrow{d_1} P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

y $f \in \mathrm{Hom}_A(P_1, N)$ es tal que $d^* f = 0$, o sea, $f \circ d_1 = 0$, o bien $f|_{Imd_1} \equiv 0$. Esto dice que se puede armar un diagrama

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "d_1"] & P_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] & M \arrow[r] & 0 \\
& N & & &
\end{tikzcd}$$

que se puede completar como

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
N \arrow[r, "j"] & N \oplus_{P_1} P_0 & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
N \arrow[r, "j"] & N \oplus_{P_1} P_0 & &
\end{tikzcd}$$

donde $N \oplus_{P_1} P_0 = (N \oplus P_0)/\langle (f(p), 0) - (0, d(p)) : p \in P_1 \rangle$ es el push-out

Afirmación: j es mono:

$$j(n) = \overline{(n,0)} = 0 \iff \exists p : (n,0) = (fp, -dp)$$
$$\Rightarrow dp = 0, \ \Rightarrow p = d_1(p_2)$$
$$\Rightarrow n = f(p) = f(d_1(p_2)) = 0$$

(pues $d_1^* f = 0$)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j"] & N \oplus_{P_1} P_0 & &
\end{tikzcd}$$

o bien, ya que $f|_{Im(d_1)} \equiv 0$, tenemos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1/\mathrm{Ker}(d) \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\overline{f}"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j"] & N \oplus_{P_1} P_0 & &
\end{tikzcd}$$

Además, f tiene un conúcleo, por lo que podemos comparar dos s.e.c.:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1/\mathrm{Ker}(d)f \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\overline{f}"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j"] & N \oplus_{P_1} P_0 \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Afirmación: $M \cong C$. De hecho, en cualquier diagrama del tipo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "j"] & p.out \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

siempre tendremos $C \cong M$.

Demostración. Empezamos definiendo una flecha del push-out en M via:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[d] \arrow[dr, bend left, "p"] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "j"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & p.out \arrow[r, dotted] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\overline{(0,y)} \mapsto p(y) \;\Rightarrow\; \text{epi}$$

Además, para ver el núcleo,

$$\begin{aligned}
\overline{(z,y)} &\mapsto p(y) = 0 \Rightarrow y = i(x) \\
\Rightarrow \overline{(z,y)} &= \overline{(z,i(x))} = \overline{(z-\phi(x),0)} \\
&= j(z-\phi(x))
\end{aligned}$$

Concluimos que el núcleo de la flecha punteada es igual a $Im(j)$ y que la flecha

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "d_1"] & P_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] & M \arrow[r] & 0 \\
 & N & & &
\end{tikzcd}$$

determina un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1/\mathrm{Ker}(d)f \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\overline{f}"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j"] & E_f \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

Esto muestra que a cada $[f] \in \mathrm{Ext}^1_A(M,N)$ le podemos asignar una sucesión exacta corta que empieza en N y termina en M, es decir, una Extensión entre N y M.

Supongamos ahora que tenemos una s.e.c. de la forma

$$0 \to N \to E \to M \to 0$$

y la comparamos con una resolución de M:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_1"] & P_1 \arrow[r, "d_0"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

El lema de levantamiento implica que lo podemos rellenar

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_1"] & P_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y así obtener $f : P_1 \to N$ tal que $d_1^* f = 0$. Ademas el levantado es único a menos de homotopía,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_1"] & P_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, shift right, "g_0"'] \arrow[d, shift left, "f_0"] \arrow[dl, dotted, "h"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es decir, si g es otro levantado de Id_M,

$$\exists h : P_0 \to N \text{ tal que } f - g = hd_0 + 0 = d_0^*(h)$$

$$\Rightarrow f - g \in d^*\Big(\mathrm{Hom}(P_0, N)\Big) \Rightarrow [f] = [g] \in \mathrm{Ext}^1_A(M,N)$$

De esta manera, podemos ver que a todo elemento de Ext^1 le podemos asignar una s.e.c. y recíprocamente a toda s.e.c. le corresponde un elemento de Ext^1. Para ver en qué sentido estas construcciones son recíprocas, damos la siguiente definición:

Definición 4.8. (Relación de equivalencia entre extensiones.) Dadas dos extensiones,

$$\mathcal{E}_1 = (\ 0 \longrightarrow N \xrightarrow{a_1} E_1 \xrightarrow{b_1} M \longrightarrow 0\ )$$

$$\mathcal{E}_2 = (\ 0 \longrightarrow N \xrightarrow{a_1} E_1 \xrightarrow{b_1} M \longrightarrow 0\ )$$

decimos que $\mathcal{E}_1 \sim \mathcal{E}_2 \iff \exists \phi : E_1 \to E_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r, "b_1"] \arrow[d, "\phi"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "a_2"] & E_2 \arrow[r, "b_2"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La construcción que hemos hecho permite demostrar el siguiente teorema, que le da nombre al funtor "Ext":

Teorema 4.9. $\exists$ *biyección entre* $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)$ *y clases de equivalencia de extensiones* $\mathcal{E}$ *de la forma* $0 \to N \to E \to M \to 0$.

De manera similar, enunciamos sin demostración la generalización a grados superiores:

Teorema 4.10. $\exists$ *biyección entre* $\mathrm{Ext}^n_A(M,N)$ *y clases de equivalencia de extensiones* $\mathcal{E}$ *de la forma* $0 \to N \to E_n \to \cdots \to E_2 \to E_1 \to M \to 0$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f"'] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La demostración la omitimos, sólo indicamos que se basa en ideas similares, construyendo, a partir de una f, push-outs sucesivos para conseguir una sucesión exacta del largo necesario hasta finalizar con M en el extremo derecho.

Capítulo 5

Dimensión homológica

5.1. Dimensión proyectiva, inyectiva y global

En el momento de realizar resoluciones proyectivas, vemos que las construcciones generales (e.g. a un M cubrirlo con un proyectivo de la forma $A^{(M))} \to M$) pueden ser útiles desde el punto de vista teórico, pero que en la práctica pueden dar objetos muy grandes, y pueden continuar indefinidamente. Sin embargo, muchas veces sucede que se pueden encontrar resoluciones proyectivas "pequeñas". Comenzamos con las siguientes definiciones:

Definiciones:
$pdim(M)$= min n / $\exists\ 0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$
$idim(M)$= min n / $\exists\ 0 \to M \to I_0 \to \cdots \to I_{n-1} \to I_n \to 0$
(podrían ser $+\infty$)

Teorema 5.1. *(dimensión global) los siguientes números (eventualmente $+\infty$) son iguales*

1. $sup\{pdim(M) : M \in A - Mod\}$
2. $sup\{idim(M) : M \in A - Mod\}$
3. $sup\{pdim(A/J) : J \subset A\}$
4. $sup\{n : \mathrm{Ext}^n_A(M, N) \neq 0,\ M, N \in A - Mod\}$

Llamaremos $gldim(A)$ al número calculado con cualquiera de los items anteriores.

Lema 5.2. *Son equivalentes*

1. $pdim(M) \leq d$
2. $\mathrm{Ext}^n_A(M, N) = 0\ \forall n > d\ \forall N$

3. $\mathrm{Ext}_A^{d+1}(M,N)=0\ \forall N$

4. $0\to K_d\to P_{d-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0$ *con los* P_i *proy* $\Rightarrow K_d$ *es proyectivo.*

Demostración. $4\to 1\to 2\to 3$ son claras.

$3\to 4$: *Afirmación:* $\forall N$, $\mathrm{Ext}_A^1(K_d,N)\cong \mathrm{Ext}_A^{d+1}(M,N)$.

Esto se demuestra simplemente considerando el epimorfismo $P_0\to M$, llamemos M' al núcleo de P_0, por la exactitud de la sucesión en 4 tenemos una s.e.c.

$$0\to K_d\to P_{d-1}\to\cdots\to P_1\to M'\to 0$$

y vemos que si M admite una resolución de largo d, entonces M' admite una resolución de largo menor e inductivamente podemos suponer que el resultado es válido para M'. Pero de la s.e.c

$$0\to M'\to P_0\to M\to 0$$

tenemos la s.e.larga

$$\to \mathrm{Ext}_A^n(M,N)\to \mathrm{Ext}_A^n(P_0,N)\to \mathrm{Ext}_A^n(M',N)\to \mathrm{Ext}_A^{n+1}(M,N)\to \mathrm{Ext}_A^{n+1}(P_0,N)\to\cdots$$

y como P_0 es proyectivo $\mathrm{Ext}_A^\ell(P_0-)=0$ para $\ell>0$, lo que nos dice $\mathrm{Ext}_A^n(M',N)\cong \mathrm{Ext}_A^{n+1}(M,N)$, y así concluimos la afirmación por inducción en d. □

Notar que en item 2, si agregamos $\forall M$ tenemos una condición simétrica en las dos variables. Dualmente al lema anterior podemos mostrar:

Lema 5.3. ** Son equivalentes*

1. *idim*$(N)\le d$

2. $\mathrm{Ext}_A^n(M,N)=0\ \forall n>d\ \forall M$

3. $\mathrm{Ext}_A^{d+1}(M,N)=0\ \forall M$

4. $0\to N\to I^0\to\dots I^{d-1}\to C^d\to 0$ *con los* I^i *iny* $\Rightarrow C^d$ *es inyectivo.*

Demostración. Ejercicio! □

Observación 5.4. Para $3\to 4$: $\forall M$, $\mathrm{Ext}_A^1(M,C^d)\cong \mathrm{Ext}_A^{d+1}(M,N)$. Podemos, luego, cambiar "$\forall M$" por "$\forall$ ideal $J\subset A$".

Dimensiones bajas

- *gldim*$(A)=0\iff$ todo A-módulo es proyectivo $\iff$ todo A-módulo es inyectivo $\iff$ A-Mod es semisimple $\iff A\cong M_{n_1}(D_1)\times\cdots M_{n_k}(D_k)$ con D_i anillos de división $\iff$ todo lo mismo cambiando izquierda por derecha.

- $gldim(A) = 1 \iff$ todo submódulo de un proyectivo es proyectivo (y $\exists$ algún no proyectivo) $\iff$ todo cociente de un inyectivo es inyectivo (y $\exists$ algún no inyectivo).

  Por ejemplo, si A es un dip que no es un cuerpo, $gldim(A) = 1$. Un ejemplo no conmutativo se consigue tomando Q un quiver con por lo menos una flecha y k un cuerpo, entonces $gldim(kQ)$. Veremos esto como consecuencia de la desigualdad $gldim(A) \leq pdim_{A^e}(A)$ (si A es una k-álgebra sobre un cuerpo) y de una resolución corta de kQ como kQ-bimódulo. En particular, si $0 \neq V$ es un k-espacio vectorial, $gldim(TV) = 1$.

El principal teorema sobre dimensión que mostraremos es el siguiente:

Teorema 5.5. $gldim(A[x_1, \ldots, x_n]) = gldim(A) + n$

Basta ver $gldim(A[x]) = gldim(A) + 1$. Notemos que un $A[x]$-módulo proyectivo es A-proyectivo.

Si $gldim(A) = \infty$ es claro. Supongamos $gldim(A) = d$ y sea M tal que $pdim_A M = d$, lo vemos como $A[x]$-mod con X actuando por cero) y lo resolvemos como $A[x]$-módulo,

$$\cdots \to P_d \to P_{d-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

los P_i son $A[x]$-proy $\Rightarrow$ la resolución no podr'ia terminarse antes por lo que $pdim_{A[x]} M \geq d$. Además, como son A-proyectivos y $pdim_A M = d$, el complejo

$$0 \to K_d \to P_{d-1} \to \cdots P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

es exacto (K_d es el núcleo) y K_d es un $A[x]$-módulo que es A-proyectivo. Demostremos el siguiente lema:

Lema 5.6. *K un $A[x]$-módulo que es A-proyectivo, entonces $pdim_{A[x]} K \leq 1$.*

Consideramos

$$0 \to A[x] \otimes_A K \longrightarrow A[x] \otimes_A K \longrightarrow K \to 0$$

con diferenciales

$$ax^n \otimes k \mapsto ax^n \otimes k - ax^{n-1} \otimes x \cdot k$$

$$ax^n \otimes k \mapsto ax^n \cdot k$$

Afirmación: es una s. exacta. La afirmación concluye el lema, y el lema muestra $pdim_{A[x]} M \leq d + 1$ via

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A[x] \underset{A}{\otimes} K_d \arrow[r] & A[x] \underset{A}{\otimes} K_d \arrow[rr, dotted] \arrow[dr] & & P_{d-1} \arrow[r] & \cdots P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & & K_d \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

La afirmación la dejamos como ejercicio. Como demostración alternativa, mostraremos el siguiente lema que generaliza este resultado:

Lema 5.7. *Sea $x \in B$ central y no divisor de cero en B. Si $0 \neq M$ es un $B/(x)$-módulo con $pdim_B(M) < \infty$ entonces*

$$\boxed{pdim_B(M) = pdim_{B/(x)}(M) + 1}$$

Observación 5.8. Si tomamos $x \in B = A[x]$ y M un A-móduo que lo vemos como $A[x]$-módulo con $x \cdot m = 0$, entonces la estructura de A-módulo de M la podemos ver como de $A = B/(x)$-módulo, y así vemos que este lema generaliza el anterior.

Demostración. **Inducción, caso 0.** Si $M = B/(x)$, no puede ser B-proyectivo porque tiene x-torsión, y la resolución $0 \to B \xrightarrow{x} B \to B/(x) \to 0$ muestra

$$pdim_B(M) = 1 = 0 + 1$$

Si M es $B/(x)$-libre el argumento es similar, notando que $pdim_B(M^{(I)} = pdim_B(M)$, y finalmente si $0 \neq M$ es $B/(x)$-proyectivo , es sumando directo de un libre, y notamos que -en general- si M es un s.d. de L, entonces $pdim_B M \leq pdim_B L$, que es 1 si L es libre. Pero además $pdim_B M \neq 0$ pues M no puede se B proyectivo, porque tiene x-torsión.

Paso inductivo: Si M no es $B/(x)$ proy, $pdim_{B/(x)} M = d > 0$, tomamos una s.e.c. de $B/(x)$-mod

$$0 \to K \to P \to M \to 0$$

Afirmación: $pdim_{B/(x)} K = d - 1$, pues $\forall X \in B/(x)$-Mod y $\forall n \geq 1$ se tiene la s.e.larga

$$\mathrm{Ext}^n_{B/(x)}(P, X) \to \mathrm{Ext}^n_{B/(x)}(K, X) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_{B/(x)}(M, X) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_{B/(x)}(P, X)$$

(luego $\mathrm{Ext}^n_{B/(x)}(K, X) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_{B/(x)}(M, X)$) e inductivamente tenemos la fórmula para K:

$$pdim_B(K) = pdim_{B/(x)}(K) + 1$$

Además $pdim_B(P) = 1$, luego, $\forall n \geq 2$ y $\forall N \in B$-Mod

$$\mathrm{Ext}^n_B(P, N) \to \mathrm{Ext}^n_B(K, N) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_B(M, N) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_B(P, N)$$

concluimos que si $n \geq 2$, entonces $\boxed{\mathrm{Ext}^n_B(K, N) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_B(M, N)}$

Vemos que para $n = d$ hay un N donde $\mathrm{Ext}^{d+1}_B(M, N) \neq 0$, y para $n > d$, $\mathrm{Ext}^{n+1}_B(M, N) = 0 \forall N$. O sea, $pdim_B(K) = pdim_B(M) - 1$ (además de la misma fórmula con $pdim_{B/(x)}$).

Si $d = 1$ (K resulta $B/(x)$-proy) entonces la s.e.l del Ext nos da

$$\mathrm{Ext}^1_B(K, N) \to \mathrm{Ext}^2_B(M, N) \to 0$$

y

$$\mathrm{Ext}^n_B(K, N) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_B(M, N) \ \forall n \geq 2$$

Concluimos $pdim_B(M) \leq 2 = 1 + 1$. Queremos ver que no puede ser $pdim_B(M) = 1$.

Suponemos por el absurdo que $pdim_{B/(x)}M = 1$ y $pdim_B(M) = 1$ (en vez de 2) y tomamos una s.e.c. en B-mod (no en $B/(x)$-mod)

$$0 \to R \to F \to M \to 0$$

con $F \in B$-mod proyectivo. Si $pdim_B(M) = 1 \Rightarrow$ es B proyectivo. Como $B/(x) \otimes_B -$ manda B-proyectivos en $B/(x)$-proyectivos, tenemos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Tor}_1^B(B/(x),M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Tor}_1^B(B/(x),M) \arrow[r] & B/(x)\underset{B}{\otimes}R \arrow[r] & B/(x)\underset{B}{\otimes}F \arrow[r] & B/(x)\underset{B}{\otimes}M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Si fuera $pdim_{B/(x)}(M) = 1$ entonces $\operatorname{Tor}_1^B(B/(x), M)$ sería $B/(x)$-proyectivo, pero

$$\operatorname{Tor}_1^B(B/(x), M) \cong M^x = \{m \in M : xm = 0\} = M$$

NO es $B/(x)$ proyectivo.

Ahora simplemente usamos que

$$pdim_{B/(x)}K = pdim_{B/(x)}M - 1$$

$$pdim_B K = pdim_B M - 1$$

y que la fórmula vale para K:

$$pdim_B K = pdim_{B/(x)}K + 1$$

luego, sumando 1 en ambos miembros y concluimos.

$$\boxed{pdim_B M = pdim_{B/(x)}M + 1}$$

□

Un teorema conocido que no mostraremos relaciona la dimensión global con la dimensión geométrica $\dim(A)$ (la longitud maxima de cadenas de ideales primos) y simultáneamente caracteriza los anillos regulares:

Teorema 5.9. *A anillo conmutativo local , A es regular $\iff$ $gldim(A) < \infty$. En ese caso, $gldim(A) = dim(A)$.*

Un teorema que nos da otra fórmula sobre dimensiones, relacionado con el teorema anterior es el siguiente:

Teorema 5.10. *Sea $f : A \to B$ morfismo de anillos. $M \in B$-mod, luego también $M \in A$-mod via f. Entonces*

$$pdim_A(M) \leq pdim_B(M) + pdim_A({}_fB)$$

Demostración. Asumimos $pdim_B(M) \leq d < \infty$, $pdim_A({}_fB) < d' < \infty$.

Notemos que si $M = P$ es B-proyectivo, es un sumando directo de $B^{(I)}$, luego

$$pdim_A({}_fP) \leq pdim_A({}_fB^{(I)}) = pdim_A({}_fB)$$

En el caso no proyectivo general, resolvemos M como B-módulo:

$$0 \longrightarrow P_d \xrightarrow{\partial_d} P_{d-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

a cada P_i (y a M) los vemos como A-módulos vía f,

$$0 \longrightarrow {}_fP_d \xrightarrow{\partial_d} {}_fP_{d-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow {}_fP_1 \xrightarrow{\partial_1} {}_fP_0 \xrightarrow{\epsilon} {}_fM \longrightarrow 0$$

y los resolvemos como A-módulos **funtorialmente**, truncando con el núcleo en grado d (por ejemplo, a partir de a construcción asociada al epimorfismo funtorial $A^{(X)} \to X$).

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \cdots & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & P_{d,d'} \arrow[r] \arrow[d] & P_{d-1,d'} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & P_{1,d'} \arrow[r] \arrow[d] & P_{0,d'} \arrow[d] & & \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \ddots & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \\
 & P_{d,1} \arrow[r] \arrow[d] & P_{d-1,1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & P_{1,1} \arrow[r] \arrow[d] & P_{0,1} \arrow[d] & & \\
 & P_{d,0} \arrow[r] \arrow[d] & P_{d-1,0} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & P_{1,0} \arrow[r] \arrow[d] & P_{0,0} \arrow[d, "\eta"] & & \\
0 \arrow[r] & {}_fP_d \arrow[r, "\partial_d"] & {}_fP_{d-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & {}_fP_1 \arrow[r, "\partial_1"] & {}_fP_0 \arrow[r, "\epsilon"] & {}_fM \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Afirmación: $Tot(P_{i,j}) \xrightarrow{\epsilon\circ\eta} M$ es un q-iso. La afirmación se debe a que el complejo doble

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \cdots & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
P_{d,d'} \arrow[r] \arrow[d] & P_{d-1,d'} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & P_{1,d'} \arrow[r] \arrow[d] & P_{0,d'} \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \ddots & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
P_{d,1} \arrow[r] \arrow[d] & P_{d-1,1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & P_{1,1} \arrow[r] \arrow[d] & P_{0,1} \arrow[d] \\
P_{d,0} \arrow[r] \arrow[d] & P_{d-1,0} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & P_{1,0} \arrow[r] \arrow[d] & P_{0,0} \arrow[d, "\eta"] \\
{}_fP_d \arrow[r, "\partial_d"] & {}_fP_{d-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & {}_fP_1 \arrow[r, "\partial_1"] & {}_fP_0
\end{tikzcd}$$

a menos de suspensión, se identifica con el cono del morfismo del complejo vertical abajo de todo, visto como morfismo de complejos $P_{\bullet,\bullet} \to P_\bullet$ (con conveniente cambio de signos alternados). Como las columnas son exactas, este complejo total es acíclico, y como el cono es acíclico, el morfismo es quasi-isomorfismo. A su vez, el complejo

$$0 \longrightarrow {}_fP_d \xrightarrow{\partial_d} {}_fP_{d-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow {}_fP_1 \xrightarrow{\partial_1} {}_fP_0 \xrightarrow{\epsilon} {}_fM \longrightarrow 0$$

se identifica (a menos de suspensión) con el cono del morfismo de complejos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}_fP_d \arrow[r, "\partial_d"] \arrow[d] & {}_fP_{d-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & {}_fP_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d] & {}_fP_0 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

que es acíclico, luego ϵ es un q-iso. Concluimos que $\epsilon \circ \eta$ coincide con la composición de dos q-isos, luego es un q-iso. □

Otra fórmula clásica de dimensión es la siguiente:

Teorema 5.11. *$x \in A$ central no divisor de cero, $M \in A$-Mod sin x-torsión ($xm = 0 \Rightarrow m = 0$) entonces*

$$pdim_{A/(x)}(M/xM) \leq pdim_A M$$

Demostración. si $pdim_A M = \infty$ es claro. argumentamos por inducción en $d = pdim_A M$. Si P es A-proyectivo $\Rightarrow P/xP$ es $A/(x)$-proyectivo (ejercicio!).

Si M no es proyectivo, sea

$$0 \to K \to P \to M \to 0$$

una s.e.c. de A-mod con P un A-mod proyectivo, sabemos que $pdim_A(K) = pdim_A(M) - 1$, y por hipótesis inductiva $pdim_{A/(x)}(K/xK) \leq pdim_A(K)$.

Si tensorizamos con $A/(x) \otimes_A -$ obtenemos la s.e.l. de Tor:

$$\mathrm{Tor}_1^A(A/xA, M) \longrightarrow A/(x) \underset{A}{\otimes} K \longrightarrow A/(x) \underset{A}{\otimes} P \longrightarrow A/(x) \underset{A}{\otimes} M \longrightarrow 0$$

pero

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_1^A(A/xA,M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & A/(x)\underset{A}{\otimes}K \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & A/(x)\underset{A}{\otimes}P \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & A/(x)\underset{A}{\otimes}M \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
M^x \arrow[r] & K/xK \arrow[r] & P/xP \arrow[r] & M/xM \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $M^x = \{m \in M : x \cdot m = 0\}$, luego

$$0 \longrightarrow K/xK \longrightarrow P/xP \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0$$

es una s.e.c. con P/xP un módulo $A/(x)$-proyectivo. Concluimos

$$pdim_{A/(x)}(K/xK) = pdim_{A/(xA)}(M/xM) - 1$$

y

$$pdim_{A/(x)}(M/xM) = pdim_{A/(x)}(K/xK) + 1 \leq pdim_A K + 1 = pdim_A M$$

□

Corolario 5.12. *Sea $M \in A$-Mod, denotemos $M[x] := A[x] \otimes_A M$, entonces*

$$pdim_{A[x]} M[x] = pdim_A M$$

Demostración. $A = A[x]/(x)$ y $M[x]/xM[x] = M \Rightarrow pdim_A M \leq pdim_{A[x]} M[x]$. Como $A[x]$ es playo sobre A (es libre), si $P_\bullet \to M$ es una resol A-proyectiva entonces

$$A[x] \otimes_A P_\bullet \to M[x]$$

es una resolución $A[x]$-proyectiva de $M[x]$, luego $pdim_{A[x]} M[x] \leq pdim_A M$. □

5.2. k-Álgebras, bimódulos k-simétricos y dimensión global

Comencemos con k anillo conmutativo, A una k-álgebra. Describiremos la categoría de A-bimódulos k-simétricos. Para las aplicaciones a la fórmula de dimensión usaremos la descripción en el caso k un cuerpo (o anillo conmutativo semisimple).

Definición 5.13. Un A-bimódulo M se dice k simétrico si $\lambda m = m\lambda \ \forall \lambda \in k$.

Notar que la definición de k-álgebra incluye que A es k-simétrico.

Ejemplo 5.14. $\mathcal{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ contiene a $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i$. Notar $ij = k = -ji$, luego no es $\mathbb{C}$-simétrico, pues $zj = j\bar{z}$. $\mathcal{H}$ no es $\mathbb{C}$-álgebra. Pero sí es $\mathbb{R}$-álgebra.

Teorema/construcción. Como siempre cuando el contexto es claro, si no aclaramos subíndice, $\otimes$ significa $\otimes_k$. Sea $A^e := A \otimes A^{op}$. La categoría de A-bimódulos k simétricos es isomorfa a la categoría de A^e-mod a izquierda, y también a derecha, via

$$(a \otimes a') \cdot m = ama' = m \cdot (a' \otimes a)$$

Atención: Si M es bimódulo k-simétrico, entonces no es necesariamente un A^e-bimódulo. Es módulo a izquierda, o a derecha, pero no simultáneamente ambos.

5.3. $gldim(A)$ y A como bimódulo k-simétrico

Mostraremos la siguiente fórmula de dimensión:

Teorema 5.15. *k cuerpo y A una k-álgebra entonces* $\boxed{gldim(A) \leq pdim_{A^e}(A)}$

Observación 5.16. Si L es A^e libre, $L \cong (A^e)^{(I)}$ entonces L visto como bimódulo es

$$L \cong A \otimes V \otimes A$$

con $V = k^{(I)}$. En particular, para cualquier $M \in {}_AMod$

$$L \otimes_A M \cong (A \otimes V \otimes A) \otimes_A M \cong A \otimes V \otimes (A \otimes_A M) \cong A \otimes V \otimes M$$
$$\cong A \otimes (V \otimes M)$$

es A-libre, en particular A-proyectivo. Concluimos entonces que si P es A^e-proyectivo entonces $P \otimes_A M$ es proyectivo en A-Mod.

Como corolario, podemos demostrar la fórmula del teorema:

Si $pdim_{A^e}A = d$ entonces existe una resolución

$$0 \to P_d \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

resolución de A por A^e-proyectivos. En particular son A-proyectivos a derecha, entonces el complejo admite una homotopía A-lineal a derecha y en consecuencia $\forall M \in {}_AMod$

$$0 \to P_d \otimes_A M \to \cdots \to P_1 \otimes_A M \to P_0 \otimes_A M \to A \otimes_A M \to 0$$

tiene una homotopía k-lineal, en particular, es una sucesión exacta. Pero como $A \otimes_A M \cong M$, cada $P_i \otimes_A M$ es A-proyectivo, entonces la anterior es una resolución (funtorial en M) A-proyectiva de M, y como el M es arbitrario concluimos $gldim(A) = sup_M pdim_A(M) \leq d = pdim_{A^e}A$

Ejemplos:

1) k es un cuerpo, V k esp. vect, $A = TV$ (el álgebra tensorial), $A = kQ$ (el álgebra de caminos de un quiver), son álgebras de dimensón global 1.

$$0 \to TV \otimes V \otimes TV \to TV \otimes TV \to TV \to 0$$
$$1 \otimes v \otimes 1 \mapsto v \otimes 1 - 1 \otimes v$$

Observación:

$$\sum_i a_i \otimes b_i \mapsto \sum_i a_i b_i = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_i a_i \otimes b_i = \sum_i a_i \otimes b_i - \sum_i a_i b_i \otimes 1 = \sum_i a_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1)$$

Además

$$1 \otimes bc - bc \otimes 1 = (1 \otimes b - b \otimes 1)c + b(1 \otimes c - c \otimes 1)$$

veamos que $d : TV \otimes V \otimes TV \to TV \otimes TV$

$$1 \otimes v \otimes 1 \mapsto v \otimes 1 - 1 \otimes v$$

es inyectiva. Sea $x_1, \ldots, x_n$ una base de V. Definimos $h : TV \otimes TV \to TV \otimes V \otimes TV$ como la única TV-lineal a izquierda que verifica

$$h(1 \otimes 1) = 0$$

$$\begin{aligned} h(1 \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k}) &:= 1 \otimes x_{i_1} \otimes x_{i_2} \cdots x_{i_k} + x_{i_1} \otimes x_{i_2} \otimes x_{i_3} \cdots x_{i_k} + \cdots \\ &= \sum_{j=i}^{k} x_{i_1} \cdots x_{i_{j-1}} \otimes x_{i_j} \otimes x_{i_{j+1}} \cdots x_{i_k} \end{aligned}$$

donde por convención $x_{i_0} = 1 = x_{i_{k+1}}$

Notar que

$$h(1 \otimes x x_{i_1} \cdots x_{i_k}) = 1 \otimes x \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k} + x h(1 \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k})$$

$$h(1 \otimes x x_{i_1} \cdots x_{i_k}) = 1 \otimes x \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k} + x h(1 \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k})$$

Consecuencia:

$$\begin{aligned} hd(1 \otimes x_i \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k}) &= h(x_i \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k}) - h(1 \otimes x_i x_{i_1} \cdots x_{i_k}) \\ &= x_i h(1 \otimes x_{i_2} \cdots x_{i_k}) - h(1 \otimes x_i x_{i_1} \cdots x_{i_k}) \\ &= x_i h(1 \otimes x_{i_2} \cdots x_{i_k}) - 1 \otimes x_i \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k} - x_i h(1 \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k}) \\ &= -1 \otimes x_i \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_k} \end{aligned}$$

$\therefore hd = -\mathrm{Id}$ en una base (como TV-mod a izq).

Ejemplo / Ejercicio: Sea $Q = (Q_0, Q_1)$ un quiver, k un cuerpo, $A = kQ$, llamemos $V := kQ_1$ (que es un kQ_0-bimódulo no simétrico). Entonces, la sucesión

$$0 \to A \underset{kQ_0}{\otimes} V \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \to 0$$

con la “misma” fórmula de antes, es una sucesión exacta. Además $A \underset{kQ_0}{\otimes} V \underset{kQ_0}{\otimes} A$ es un sumando directo de $A \otimes V \otimes A$ (como A-bimódulo), idem $A \underset{kQ_0}{\otimes} A$ de $A \otimes A$, por lo tanto se tiene una resolución proyectiva de largo 1. Concluimos que $gldim(kQ) = 1$. Notar que si Q no tiene ciclos orientados entonces kQ es una k-álgebra de dimensión finita.

Ejemplo / Ejercicio: (un poco más largo) Q quiver, $I = \langle Q_1 \rangle$, $A = kQ/(I)^2$. (notar que $(I)^2$= ideal generado por caminos de longitud 2) entonces A admite una resolución de la forma

$$\cdots \to A \underset{kQ_0}{\otimes} kQ_3 \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} kQ_2 \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} kQ_1 \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} A \xrightarrow{m} A \to 0$$

donde el diferencial está dado por

$$A \underset{kQ_0}{\otimes} PQ_n \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} PQ_{n-1} \underset{kQ_0}{\otimes} A$$

$$1 \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_n \otimes 1 \mapsto \alpha_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_n \otimes 1 + (-1)^n 1 \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \otimes \alpha_n$$

Ver que $d^2 = 0$ es un ejercicio muy sencillo. Dejamos la demostración de la exactitud como ejercicio, con la sugerencia de realizarlo después de ver la sección de resoluciones de Koszul.

Si Q no tiene ciclos orientados entonces $gldim(A)$=la longitud del camino más largo posible en Q. Para el quiver

$$1 \to 2 \to \cdots \to n$$

el álgebra kQ/I^2 tiene dimensión global n.

Atención: La desigualdad $gldim(A) \leq pdim_{A^e}(A)$ puede ser estricta. Adelantamos el siguiente resultado, cuya demostración veremos luego:

$$\boxed{A \text{ conmutativo} \Rightarrow \mathrm{Ext}^1_{A^e}(A, A) \cong \mathrm{Der}_k(A)}$$

Asumiendo válida la fórmula del Ext anterior, podemos construir fácilmente ejemplos en dode la desigualdad es estricta de la siguiente forma:

Sea k un cuerpo y $A = k(x)$=el cuerpo de fracciones de $k[x]$. Como A es cuerpo, $gldim(A) = 0$, pero

$$\mathrm{Der}_k(k(x), k(x)) \neq 0$$

pues se puede chequear fácilmente que la conocida fórmula de análisis

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

define un derivación en $A = k(x)$, luego $0 \neq \mathrm{Ext}^1_{A^e}(A, A)$ y por lo tanto $pdim_{A^e}(A) \geq 1$. y

$$gldim(A) = 0 < 1 \leq pdim_{A^e}(A)$$

El otro ejemplo paradigmático de derivación no nula, en cuerpos para característica positiva, es el siguiente:

Ejemplo 5.17. (Derivación por inseparabilidad) k cuerpo $ch(k) = p > 0$, $a \in \overline{k} \setminus k$ tal que $a^p = \lambda \in k$. Entonces $K = k(a)$ es una extensión finita (no separable). Una base de K sobre k está dada por $1, x, x^2, \cdots x^{p-1}$ y la derivación "Euleriana" determinada en la base como k-espacio vectorial por

$$x^i \mapsto ix^i$$

es efectivamente una derivación k-lineal, luego $\mathrm{Der}_k(K) \neq 0$.

5.4. Ext^1 en bimódulos y derivaciones

Además de producir el contraejemplo anterior, mostraremos la fórmula del siguiente teorema, que es interesante en sí misma por la relación que nos muestra entre la geometría y el álgebra homológica:

Teorema 5.18. *A conmutativo* $\Rightarrow \mathrm{Ext}^1_{A^e}(A, A) \cong \mathrm{Der}_k(A)$.

En realidad mostraremos una versión mucho más general:

Teorema 5.19. *Sea A un anillo arbitrario (no necesariamente conmutativo) entonces*

$$\mathrm{Ext}^1_{A-bimod}(A, A) \cong \mathrm{Der}(A)/\mathrm{InnDer}(A)$$

donde $\mathrm{InnDer}(A)$ *son las derivaciones de la forma* $a \mapsto [a, a_0]$. *Si además A es una k-álgebra con k un anillo conmutativo y el* Ext^1 *se calcula en la categoría de A-bimódulos k-simétricos entonces*

$$\mathrm{Ext}^1_{A^e}(A, A) \cong \mathrm{Der}_k(A)/\mathrm{InnDer}(A)$$

Demostración. Utilizamos la caracterización del Ext como extensiones. Sea

$$0 \to A \to E \to A \to 0$$

una s.e.c. de A-bimod (k-simétricos), entonces es -en particular- una s.e.c. de A-mod, luego

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\cong"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_1"] & A \oplus A \arrow[r, "p_2"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

como A-mod a izquierda. Si $e = (x, y) \in A \oplus A \cong E$ entonces

$$a(x, y) = (ax, ay)$$

porque el iso es de A-mod a izq. También

$$(x, 0)a = (xa, 0)$$

porque $i : A \to E$ es morfismo de bimódulos, pero

$$(0, y)a = (??, ya)$$

pues $p : E \to A$ que es de bimódulos y el splitting es A-lineal sólo a izq. O sea, $0 \oplus A$ no sabemos si es sub-bimódulo. Denotemos

$$(0,1)a = (D(a), a)$$

donde $D(a) := p_1((0,1)a)$. Esta D determina la estructura pues

$$(x,y)a = (x,0)a + (0,y)a = (xa,0) + y(0,1)a$$
$$= (xa,0) + y(D(a),a) = (xa + yD(a), a)$$

Afirmamos que $\boxed{D \in \mathrm{Der}_k(A)}$. En efecto,

$$(0,1)ab = (D(ab), ab)$$

pero también

$$((0,1)a)b = (D(a),a)b = (D(a)b + aD(b), ab)$$
$$(0,1)(a+a') = (0,1)a + (0,1)a' \Rightarrow D(a+a') = D(a) + D(a')$$

E es k-simétrico $\Rightarrow$ (si $\lambda \in k$) $(0,1)\lambda = \lambda(0,1) \Rightarrow$

$$(D(\lambda), \lambda) = (0, \lambda) \Rightarrow D(\lambda) = 0$$

Sea $A \oplus_D A = A \oplus A$ como A-mod a izq y

$$(x,y)a = (xa + yD(a), ya)$$

y supongamos ϕ un iso de A-bimódulos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] & A \oplus_D A \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_1"] & A \oplus_{\widetilde{D}} A \arrow[r, "p_2"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Entonces $\phi(x,0) = (x,0)$, $\phi(0,y) = (??, y)$. Sea $u \in A$ tal que $\phi(0,1) = (u,1)$. Luego

$$\phi(x,y) = (x,0) + \phi(0,y) = (x,0) + y\phi(0,1) = (x + yu, y)$$

$$\boxed{\phi(x,y) = (x + yu, y)}$$

$$\phi((0,1)a) = \phi(D(a),a) = (D(a) + au, a)$$
$$\phi((0,1))a = (u,1)a = (ua + \widetilde{D}(a), a)$$
$$\Rightarrow D(a) = \widetilde{D}(a) + ua - au$$

Concluimos $\mathrm{Ext}^1_{A^e}(A,A) \cong \mathrm{Der}_k(A)/Innder(A)$. □

En particular si A es conmutativo, $\mathrm{Ext}^1_{A^e}(A,A) \cong \mathrm{Der}_k(A)$.

Capítulo 6

Cohomología de Hochschild, resolución standard

Como vimos anteriormente, dada una k-álgebra A, su dimensión como A-bimódulo k-simétrico está muy relacionda con la dimensión global de A, que en el caso conmutativo, tiene significado geométrico, pues coincide con la dimensión geométrica en el caso regular. De espíritu similar, la homología y cohomología de Hochschild es un invariante homológico de una k-álgebra A vista como A-bimódulo k-simétrico. En el caso conmutativo tendrá interpretación en términos de formas diferenciales y campos para el grado (co)homológico 1, y el famoso teorema de Hoshchild - Kostant - Rosenberg extiende esto a grados superiores en el caso regular. Para la situación general de una k-álgebra no necesariamente conmutativa, la homología y cohomología de Hochschild provee de construcciones alternativas de objetos geométricos clásicos como formas y multivectores, considerandose así un elemento indispensable en la "geometría no conmutativa".

El punto inicial es, dada A una k-álgebra, entonces $M = A$ juega un rol importante en la categoría de A-bimódulos simétricos. Se define la homología y cohomología de Hochschild con coeficientes en un A-bimódulo k-simétrico M como

$$H^\bullet(A, M) = \mathrm{Ext}^\bullet_{A^e}(A, M)$$

$$H_\bullet(A, M) = \mathrm{Tor}_\bullet^{A^e}(A, M)$$

En el caso particular $M = A$ se suele denotar $HH_\bullet(AA)$ y $HH^\bullet(A) = H^\bullet(A, A)$.

Para calcular $H^\bullet(A, M)$ o $H_\bullet(A, M)$ hay una resolución de A como A-bimódulo que permite definir un complejo canónico para calcular ambas teorías de homología, se denomina la *resolución standard*. Como objeto graduado, la resolución de A tiene la forma

$$\cdots \to A^{\otimes n+1} \to \cdots \to A^{\otimes 3} \to A^{\otimes 2} \to A \to 0$$

donde en $A^{\otimes n+1} = A \otimes A^{\otimes n-1} \otimes A$ (si $n - 1 \geq 0$) se considera la estructura de A-bimódulo dada por el primer y último factor tensorial, es decir,

$$a \cdot (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes \otimes a_n) \cdot a' = aa_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes \otimes a_n a'$$

Notemos que ante la equivalencia de categorías A-bimod k simétricos $\leftrightarrow A^e$-mod, un bimódulo de la forma $A \otimes V \otimes A$ le corresponde $A^e \otimes V$. Por lo tanto, si V es k-proyectivo (por ejemplo el caso s A es proyectiva como k-álgebra y $V = A^{\otimes n-1}$, entonces $A \otimes V \otimes A$ es un objeto proyectivo en la categoría de A^e-módulos.

Definimos entonces

$$B_n(A) := A^{\otimes n+1}$$

con diferencial

$$b'(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n$$

Por ejemplo, en grados bajos:

$$b'(a \otimes b \otimes c \otimes d) = ab \otimes c \otimes d - a \otimes bc \otimes d + a \otimes b \otimes cd$$

$$b'(a \otimes b \otimes c) = ab \otimes c - a \otimes bc$$

$$b'(a \otimes b) = ab = m(a \otimes b)$$

Para ver que $b'^2 = 0$, podemos observar que b' es una suma alternada de operaciones, y que este diferencial entra dentro del esquema de los diferenciales asociados a objetos simpliciales. Recordamos el siguiente hecho:

Hecho: $d_i^n : C_n \to C_{n-1}$, $i = 0, \ldots, n-1$ son morfismo entre ciertos módulos C_n, verificando

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i \ \forall i < j$$

o mejor dicho

$$d_i^{n-1} d_j^n = d_{j-1}^{n-1} d_i^n \ \forall i < j$$

Entonces

$$\partial_n := \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i d_i^n$$

verifica $\partial^2 = 0$.

En nuestro caso

$$C_n = B_n(A) := A^{\otimes n+1}$$

$$d_i(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n$$

Además, $s(a_0 \otimes \cdots n_n) = 1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_n$ verifica

$$d_0 s = \mathrm{Id}$$

$$sd_i^n = d_{i+1}^{n+1}s$$

luego (ejercicio!) $sb' + b's = \mathrm{Id}$.

Concluimos que el complejo anterior es exacto

$$\cdots \to A^{\otimes n+1} \to \cdots \to A^{\otimes 3} \to A^{\otimes 2} \to A \to 0$$

y por lo tanto provee de una resolución de A como A^e-módulo.

Observación 6.1. Esta resolución también permite contar con resoluciones funtoriales en A-Mod. Si $X \in {}_A\mathrm{Mod}$:

$$\cdots \to A^{\otimes n} \otimes X \to \cdots \to A^{\otimes 2} \otimes X \to A \otimes X \to X \to 0$$

con diferencial

$$b'(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes x$$

es isomorfa a $B_n(A) \otimes_A X$, que es una resolución porque la homotopía s, si bien no es A-lineal a izquierda, es A-lineal a derecha, por lo que $s \otimes_A \mathrm{Id}_X$ da una homotopía k-lineal probando la exactitud. Si asumimos k cuerpo (o que tanto A como X sean k-proyectivos), las componentes son A-proyectivas.

Observación 6.2. Como $B_\bullet(A)$ resulte a A como A-bimódulo k-simétrico, se puede utilizar esta resolución para para calcular $\mathrm{Tor}_\bullet^{A^e}(A, M)$ y $\mathrm{Ext}_{A^e}^\bullet(A, M)$, para M un A-bimódulo k-simétrico. Haremos esto último.

Recordamos

$$\mathrm{Hom}_{A-bimod}(A \otimes V \otimes A, M) \cong \mathrm{Hom}_{k-bim}(V, M)$$

Luego

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(A^{n+1}, M) = \mathrm{Hom}_{A^e}(A \otimes A^{\otimes n-1} \otimes A, M)$$
$$\cong \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n-1}, M) =: C^n(A, M) \rightsquigarrow$$
$$0 \to \mathrm{Hom}(k, M) \to \mathrm{Hom}(A, M) \to \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2}, M) \to \mathrm{Hom}(A^{\otimes 3}, M) \to \cdots$$

Notar $M \cong \mathrm{Hom}_k(k, M)$, $m \mapsto \widehat{m}$ $(1 \mapsto m)$). El diferencial en grados bajos es

$$\partial(\widehat{m})(a) = am - ma$$

$$\partial(D)(a \otimes b) = aD(b) - D(ab) + D(a)b$$
$$\partial(f)(a \otimes b \otimes c) = af(b \otimes c) - f(ab \otimes c) + f(a \otimes bc) - f(a \otimes b)c$$

$\therefore$

$$H^0(A, M) = M^A$$

y re-encontramos

$$H^1(A, M) = \mathrm{Ext}^1_{A^e}(A, M) = \frac{\mathrm{Der}_k(A, M)}{Innder(A, M)}$$

Nos preguntamos por una interpretación de $H^2(A, M) = \mathrm{Ext}^2(A, M)$, es lo que haremos en la siguente sección.

6.1. H^2 y deformaciones

Una introducción al "espacio tangente a las álgebras"

Por comodidad supongamos que el cuerpo k es $\mathbb{R}$, y fijemos un espacio vectorial A con $\dim_k A = n$ y una aplicación lineal $m : A \otimes A \to A$,

$$m \in \mathrm{Hom}_k(A \otimes A, A) \cong (k^2 \otimes k^n)^* \otimes k^n \cong k^{n^3}$$

Si $\{x_i, \ldots, x_n\}$ es base,

$$m(x_i \otimes x_j) = x_i x_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k$$

$$\therefore m = \sum_{i,j} c_{ik}^k x^i \otimes x^j \otimes x_k \in (k^n)^* \otimes (k^n)^* \otimes k^n$$

m asociativa $\iff$ los c_{ij}^k verifican ciertas ecuaciones (cuadráticas).

A menos de isomorfismo lineal (i.e. encontrar una base) podemos suponer $A = k^n$. Concluimos que hay una correspondencia entre

"las álgebras de dimensión $n \leftrightarrow$ un subconjunto de k^{n^3} que satisface unas ecuaciones"

Si $k = \mathbb{R}$, y

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n^3} : \gamma(0) = m \ \text{ y } \gamma(t) = m_t \text{ es una multiplicación asociativa en } \mathbb{R}^n$$

entonces $\gamma'(0)$=un vector tangente a "las estructuras de álgebra en $\mathbb{R}^n$ en el punto $A = (\mathbb{R}^n, m)$". Se define el espacio tangente a las álgebras de dimensión n en el punto m a todos los posibles $\gamma'(0)$ con γ como antes,

Observación 6.3. si $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n^3}$ verificando

- $\widetilde{\gamma}(0) = \gamma(0) = m$,
- $\widetilde{\gamma}'(0) = \gamma'(0)$,

entonces $\widetilde{\gamma}(t) = \widetilde{m}_t$ no es necesariamente asociativa, pero el desarrollo de Taylor de orden 1 alrededor de 0 de m y de $\widetilde{m}$ coinciden, y $\gamma'(0) = \widetilde{\gamma}'(0)$. Concluimos que da lo mismo considerar

$$\widetilde{\gamma}(t) = m_t := m + tf \text{ donde } f : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

y m_t verifica asociatividad a menos de $O(t^2)$

Notación:

$$a \cdot_t b = m_t(a \otimes b) = (m + tf)(a \otimes b) = ab + tf(a \otimes b)$$

La condición a considerar es

$$(a \cdot_t b) \cdot_t c = a \cdot_t (b \cdot_t c) + O(t^2)$$

$$(a \cdot_t b) \cdot_t c = (ab + tf(a \otimes b)) \cdot_t c$$
$$= (ab)c + tf(ab \otimes c) + t\Big(f(a \otimes b)c + tf(f(a \otimes b) \otimes c)\Big)$$
$$= (ab)c + t\Big(f(ab \otimes c) + f(a \otimes b)c\Big) + O(t^2)$$
$$a \cdot_t (b \cdot_t c) = a \cdot_t (bc + tf(b \otimes c))$$
$$= a(bc) + tf(a \otimes bc) + t\Big(af(b \otimes c) + tf(a \otimes f(b \otimes c))\Big)$$
$$= a(bc) + t\Big(f(a \otimes bc) + af(b \otimes c)\Big) + O(t^2)$$

Concluimos m_t asociativa Mod $t^2 \iff f : A \otimes A \to A$ verifica

$$f(ab \otimes c) + f(a \otimes b)c = f(a \otimes bc) + af(b \otimes c)$$

es decir, $\iff$

$$\partial(f)(a \otimes b \otimes c) = af(b \otimes c) - f(ab \otimes c) + f(a \otimes bc) - f(a \otimes b)c = 0$$

¿Qué estamos haciendo?

Desde el punto de vista de la cuenta algebraica que estamos realizando, si A una k-álgebra entonces $A \otimes_k k[t]/(t^2)$ es una $k[t]$-álgebra, que como grupo abeliano es

$$A[t]/t^2 = A \otimes_k k[t]/(t^2) = A[t]/(t^2) = A \oplus At$$

$$(a + tb)(c + td) = ac + t(ad + bc)$$

pero, cuáles son las estructuras de $k[t]/(t^2)$-álgebra (o sea t central y $t^2 = 0$) en $A \oplus At$ que coinciden con A módulo t?

O sea,

$$(a + tb) * (c + td) = ac + t(\cdots)$$

Definimos $f : A \otimes_k A \to A$ vía

$$a * c = ac + tf(a \otimes b)$$

Esta f determina $*$, pues

$$\begin{aligned}
(a + tb) * (c + td) &= a * c + t(a * d + b * c) + t^2(\cdots) \\
&= a * c + t(a * d + b * c) \\
&= ac + tf(a \otimes c) + t(ad + t(..) + bc + t(..)) \\
&= ac + t\Big(f(a \otimes c) + ad + bc\Big) + t^2(..) \\
&= ac + t\Big(f(a \otimes c) + ad + bc\Big)
\end{aligned}$$

Ejercicio / Proposición: son equivalentes

- $* = *_f$ es asociativa

- $f(ab \otimes c) + f(a \otimes b)c = f(a \otimes bc) + af(b \otimes c)\ \forall a, b, c \in A$
- $\partial(f) = 0$ donde ∂ es el borde de Hochschild.

Consideramos la siguiente generalización: Sea A una k-álgebra y supongamos

$$p : B \to A$$

un **epimorfismo** de k-álgebras con $M := \mathrm{Ker}p$ de cuadrado cero ($mm' = 0 \forall m, m' \in \mathrm{Ker}p$)

Observación 6.4. $M^2 = 0 \Rightarrow bm = (b + m')m$ y $mb = m(b + m')$. Luego M es un B-bimódulo que es un $B/M = A$-bimódulo.

Supondremos que o bien k es cuerpo, o bien la sucesión

$$0 \to M \to B \to A \to 0$$

se parte como sucesión de k-módulos. Tomamos s un splitting y gracias a eso tenemos un diagrama como sigue:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, equal, "\cong"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[l, bend right, dotted, "s"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_1"] & M \oplus A \arrow[r, "p_2"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En $M \oplus A$ la inclusión de M es como ideal de cuadrado cero, la proyección en A es de k-álgebras. Luego

$$(m, 0) * (m', 0) = 0$$

$$(0, a) * (0, a') = (??, aa')$$

y M es B-sub-bimódulo:

$$(m, 0) * (m', a) = (..., 0)$$

$$(m', a) * (m, 0) = (..., 0)$$

Más aún, sabemos que M es A-bimódulo vía

$$am = s(a) * m,$$

$$ma = m * s(a)$$

Luego

$$(m, 0) * (m', a) = (m, 0) * (m', 0) + (m, 0) * (0, a) = 0 + (ma, 0)$$

y similarmente

$$(m', a) * (m, 0) = (am, 0)$$

De qué depende $*$? si definimos $f : A \otimes A \to M$ vía

$$(0, a) * (0, a') = (f(a \otimes a'), aa')$$

entonces $*$ queda en términos de f:

$$(m, a) * (m', a') = (ma' + am' + f(a \otimes a'), aa')$$

Ejercicio / Proposición: Sea $f : A \otimes A \to M$, son equivalentes

- $* = *_f$ es un producto asociativo en$B = M \oplus A$,
- $f(ab \otimes c) + f(a \otimes b)c = f(a \otimes bc) + af(b \otimes c)$ $\forall a, b, c \in A$
- $\partial(f) = 0$ donde ∂ es el borde de Hochschild en $C^2(A, M)$.

Teorema 6.5. *Sean $f_1, f_2 : A \otimes A \to M$. Entonces $\exists$ un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & (M \oplus A, *_{f_1}) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & (M \oplus A, *_{f_2}) \arrow[r, "p"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

si y sólo si existe $D : A \to M$ k-lineal tal que $f_1 - f_2 = \partial(D)$. En consecuencia, existe una biyección

$$H^2(A, M) \leftrightarrow \text{ clases de } (0 \to M \to B \to A \to 0)$$

que se parten como k-módulos donde B es k-álgebra, $B \to A$ es epi de k-álgebras, y M es un ideal de cuadrado cero.

Demostración. si el diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & (M \oplus A, *_{f_1}) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\phi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & (M \oplus A, *_{f_2}) \arrow[r, "p"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

entonces $\phi(m, 0) = (m, 0)$ y $\phi(0, a) = (??, a)$. Definimos $D : A \to M$ vía

$$\phi(0, a) = (D(a), a)$$

D es claramente k-lineal. ϕ es multiplicativa si y sólo si (ejercicio ver que es suficiente)

$$\phi((0, a) *_1 (0, a')) = \phi(0, a) *_2 \phi(0, a')$$

$$\phi((0, a) *_1 (0, a')) = \phi(0, a) *_2 \phi(0, a')?$$

$$\phi((0, a) *_1 (0, a')) = \phi(f_1(a \otimes a'), aa') = (f_1(a \otimes a') + D(aa'), aa')$$

$$\phi(0, a) *_2 \phi(0, a') = (D(a), a) *_2 (D(a'), a')$$

$$= (D(a)a' + aD(a') + f_2(a \otimes a'), aa')$$

ambas expresiones son iguales $\iff$

$$f_1(a \otimes a') + D(aa') = D(a)a' + aD(a') + f_2(a \otimes a')$$

$\iff$ $f_1 - f_2 = \partial(D)$. $\square$

Capítulo 7

Cohomología de grupo

7.1. Resolución bar, cohomología de grupos y extensiones de núcleo abeliano

Desarrollaremos en este capítulo otra de las teorías de cohomología clásicas: la cohomología de grupo. A través de la interpretación de H^2 veremos la aplicación al problema de extensiones de grupos.

Recordamos, dar un $\mathbb{Z}[G]$-módulo es lo mismo que dar un grupo abeliano + una acción aditiva de G, es decir, que valgan las fórmulas:

- $1 \cdot m = m$,
- $(gh) \cdot m = g \cdot (h \cdot m)$,
- $g \cdot (m + m') = g \cdot m + g \cdot m'$.

Similarmente, $k[G]$-módulos = k-módulos con una acción k-lineal de G:

$$g \cdot (\lambda m) = \lambda(g \cdot m)$$

Sea B_n=$k[G]$-módulo libre con base G^n, denotamos

$$[g_1|\cdots|g_n] = e_{(g_1,\ldots,g_n)}$$

Notamos $B_n \cong k[G]^{\otimes n+1} = k[G] \otimes k[G]^{\otimes n}$. Para $n = 0$, B_n=$k[G]$-módulo libre de rango 1, con base $[\,]$. Se define $\partial : B_n \to B_{n-1}$ via

$$\partial[g_1|\cdots|g_n] = g_1[g_2|\cdots|g_n] - [g_1g_2|g_3|\cdots|g_n]$$

$$+[g_1|g_2g_3|\cdots] - \cdots + (-1)^{n-1}[g1|\cdots|g_{n-1}g_n] + (-1)^n[g1|\cdots|g_{n-1}]$$

$$= g_1[g_2|\cdots|g_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[g_1\cdots|g_ig_{i+1}|\cdots|g_n]$$
$$+(-1)^{n+1}[g_1|\cdots|g_{n-1}]$$

Por ejemplo, en grados bajos, para $x, y, z \in G$

$$\partial[x|y|z] = x[y|z] - [xy|z] + [x|yz] - [x|y]$$
$$\partial[x|y] = x[y] - [xy] + [x]$$
$$\partial[x] = x[\ ] - [\ ] = (x-1)[\ ]$$

Notar $B_0/\partial(B_1) = k[G]/\langle (g-1) : g \in G\rangle \cong k$ con acción trivial, pues

$$k[G] \xrightarrow{\epsilon} k$$
$$g \mapsto 1$$
$$\sum_{g\in G}\lambda_g g \mapsto \sum_{g\in G}\lambda_g$$

Si $\sum_{g\in G}\lambda g \in \mathrm{Ker}(\epsilon) \Rightarrow$

$$\sum_{g\in G}\lambda_g g = \sum_{g\in G}\lambda_g g - \sum_{g\in G}\lambda_g = \sum_{g\in G}\lambda_g(g-1)$$

Para el caso $k = \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(B_n, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G]\otimes\mathbb{Z}[G^{\times n}], \mathbb{Z})$$
$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G^{\times n}], \mathbb{Z}) \cong Func(G^{\times n}, \mathbb{Z})$$

y el diferencial es, si $f : G^{\times n} \to \mathbb{Z}$,

$$\partial(f)(g_1, \dots, g_{n+1}) = f(g_2, \dots, g_{n+1}) +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(g_1, \cdots, g_ig_{i+1}, \cdots, g_{n+1}) + (-1)^{(n+1)}f(g_1, \cdots, g_n)$$

Nota: este es el complejo que da el modelo simplicial para calcular $H^n(K_1(G))$ y $H_n(K_1(G))$, donde $K_1(G)$ es un espacio topológico determinado de manera única a menos de equivalencia homotópica que es conexo, su π_1 es G y todos los π_n superiores son triviales.

Observación 7.1. B_n es $k[G]$-libre con base G^n y si $s : B_n \to B_{n+1}$

$$s(g[g_1|\cdots|g_n]) := [g|g_1|\cdots|g_n]$$

$\Rightarrow s\partial + \partial s = \mathrm{Id}$. Luego

$$H_\bullet(G) := H_\bullet(K_1(G)) = \mathrm{Tor}_\bullet^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$$
$$H^\bullet(G) := H^\bullet(K_1(G)) = \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$$

y se puede usar cualquier resolución de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}[G]$-módulo, y no solo la resolución bar.

Ejemplo 7.2. $G = C_n = \langle t : t^n \rangle = 1$. $\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[t]/(t^n - 1)$.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[G]/(t-1)$$

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donde $N = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}$, es una resolución.

Demostración. Es claro que es proyectiva porque es libre (de rango 1), vemos que es exacta. Vemos que es exacta. Escribamos un elemento de $\mathbb{Z}[G]$ como

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i$$

con $a_i \in \mathbb{Z}$. Si

$$0 = (1-t)\sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i - \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^{i+1} = \sum_{i\in\mathbb{Z}_n} (a_i - a_{i-1})t^i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_0 t^i = N a_0$$

es decir, $\mathrm{Ker}(1-t) = \Im(N)$. Para la otra igualdad, notemos primero

$$Nt = N$$

luego, si un elemento está en el núcleo de N, tenemos

$$0 = N\sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i N \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} a_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i + \sum_{i=1}^{n-1} a_i t^i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t^i - 1) \in Im(1-t)$$

$$\therefore \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

□

Corolario 7.3. *Si $G = C_n$, $H^0(G) = \mathbb{Z} = H_0(C_n)$, y después es 2-periódica.*

Más explícitamente, si usamos l aresolución

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Los complejos de homología y cohomología quedan

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z} \arrow[r, "N"] \arrow[d, equal, "\cong"] & \mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z} \arrow[r, "1-t"] \arrow[d, equal, "\cong"] & \mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "n"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],\mathbb{Z}) \arrow[r, "1-t"] \arrow[d, equal, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],\mathbb{Z}) \arrow[r, "N"] \arrow[d, equal, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],\mathbb{Z}) \arrow[r, "1-t"] \arrow[d, equal, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],\mathbb{Z}) \arrow[r, "N"] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "n"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "n"] & {}
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ para grados positivos

$$H^{2k+1}(G) = 0 = H_{2k}(G)$$

$$H^{2k}(G) = \mathbb{Z}_n = H_{2k+1}(G)$$

Ejercicio: Si tensorizamos con $-\otimes_{k[G]} k$ el complejo

$$\cdots \to k[G]^{\otimes n+1} \to \cdots \to k[G]^{\otimes 3} \to k[G]^{\otimes 2} \to k[G] \to 0$$

con diferencial b', obtenemos el complejo bar.

Homología y cohomología a coeficientes

Si M es un G-módulo, se define

$$H_\bullet(G, M) = \mathrm{Tor}_\bullet^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$$

$$H^\bullet(G, M) = \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$$

Coro / Ejercicio: $M \in k[G]$-Mod $\Rightarrow \mathrm{Ext}^\bullet_{k[G]}(k, M)$ se calcula con

$$\mathrm{Hom}_{k[G]}(B_n, M) \cong \mathrm{Hom}_{Sets}(G^n, M)$$

y diferencial

$$(df)(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot f(x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i+1} f(x_1, \cdots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_n) + (-1)^{n+1} f(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

$$H^1(G, M) \cong \frac{\{f : G \to M : x \cdot f(y) - f(xy) + f(x) = 0\}}{Inn(D, M)}$$

$$= \frac{\{f : G \to M : f(xy) = x \cdot f(y) - f(x)\}}{Inn(D, M)}$$

$Inn(G, M) = \{D : G \to M : \exists m \in M/D(g) = g \cdot m - m\}$

2-cociclos: $f : G \times G \to M$ /

$$xf(y, x) - f(xy, z) + f(x, yz) - f(x, y) = 0$$

Interpretación de $H^2(G, M)$

Consideremos

$$0 \to M \to E \to G \to 1$$

una extensión de grupos con M abeliano, G arbitrario, y E arbitrario.

Por ejemplo

$$0 \to \mathbb{Z}_p \to \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\} \to \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$$

$$b \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (a, b)$$

Es decir, $M \triangleleft E$, $E/M \cong G$. Tanto G como M son abelianos, pero E no es abeliano! (salvo $p = 2$). Vemos entonces que claramente M y G no determinan en general a E. ¿qué datos lo determinan?

Tomamos $e : G \to E$ una sección conjuntista, $g \mapsto e_g \in E$, luego, como conjuntos (Lagrange) hay una biyección asociada

$$E \leftrightarrow M \times G$$

Todo elemento $w \in E$ admite una escritura única

$$w = me_g$$

$M \triangleleft E \Rightarrow eMe^{-1} \subseteq M \forall e \in E$, luego M tiene una acción de E. Pero M es abeliano, entonces M actúa trivialmente sobre sí mismo por conjugación y en consecuencia M tiene una acción de $G = E/M$. Es decir,

$$g \cdot m := e_g m e_g^{-1}$$

está bien definida. (Por eso necesitamos M abeliano, si M no es abeliano, la teoría es mucho más difícil.)

Ejercicio: La acción de G en M es trivial si y sólo si M es central en E.

La multiplicación en E se describe como

$$ww' = me_g m' e_{g'} = me_g m' e_g^{-1} e_g e_{g'}$$
$$= mg(m') e_g e_{g'}$$

Notar que $\pi : E \to G$ es de grupos $\Rightarrow$

$$E \ni e_g e_{g'} \mapsto gg' \in G \ \Rightarrow e_g e_{g'} = f(g, g') e_{gg'}$$

para alguna $f : G \times G \to M$. Luego

$$(mg)(mg') = mg(m') e_g e_{g'}$$
$$= mg(m')(e_g e_{g'} e_{gg'}^{-1}) e_{gg'}$$
$$= mg(m') f(g, g') e_{gg'}$$

Cambio notacional: cambiamos el conjunto E por $M \times G$, en M usamos notación aditiva

$$me_g \leftrightarrow (m, g)$$

Como M es subgrupo, se tiene:

$$(m, 1)(m', 1) = (m + m', 1)$$

La acción de G en M es por conjugación en E y está bien definida, por lo tanto:

$$(1, g)(m, 1)(1, g)^{-1} = (g(m), 1)$$

y en general, el producto está dado por

$$\boxed{(m, g)(n, h) = (m + g(n) + f(g, h), gh)}$$

Concluimos E esta determinado por

- la acción de G en M
- una cierta $f : G \times G \to M$

El siguiente Lema, cuya demostración dejamos como ejercicio, indica el camino a seguir para mostrar la correspondencia $H^2 \leftrightarrow$ extensiones, de manera análoga a como hemos hecho para el caso de álgebras:

Lema 7.4. *1. Dada $0 \to M \to E \to G \to 0$ y una sección conjuntista $G \to E$ que da la biyección $E \leftrightarrow M \times G$, por la asociatividad de f, tenemos que*

$$xf(y, z) + f(x, yz) = f(xy, z) + f(x, y)$$

2. *Dada M un $\mathbb{Z}[G]$-módulo y $f : G \times G \to M$ un 2-cociclo, la multiplicación en $E := M \times G$ dada por*
$$(m,x)(n,y) = (m + x \cdot n + f(x,y), xy)$$
es una ley de grupo y se tiene una extensión
$$0 \to M \to E \to G \to 1$$

3. $0 \to M \to E \to G \to 1$ *una extensión con M abeliano, s una sección $G \to E$, f el cociclo*
$$(0,x)(0,y) = (f(x,y), xy)$$
o bien
$$f(x,y) = s(x)s(y)s((xy)^{-1})$$
Si $\widetilde{s}$ es otra sección $\Rightarrow$ el 2-cociclo $\widetilde{f}$ es cohomólogo a f.

4. *Si $0 \to M \to E \to G \to 1$ y $0 \to M \to E' \to G \to 1$ son dos extensiones de G por M, entonces existe un diagrama conmutativo*
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & E' \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$
si y sólo si los 2-cociclos respectivos f y f' son cohomólogos.

Concluimos:

Teorema 7.5. *Existe una biyección entre $H^2(G,M)$ y clases de equivalencia de extensiones de grupos de la forma*
$$0 \to M \to E \to G \to 1$$
La correspondencia es:

- *Si M es un G-módulo y $[f] \in H^2(G,M)$, la extensión es*
$$E = M \times G, \ (m,g) * (m',g') = (m + g(m) + f(g,g'), gg')$$

- *Si $0 \to M \to E \to G \to 1$ es una extensión con M grupo abeliano, entonces la acción de G en M está dada por*
$$g(m) = s(g)ms(g)^{-1}$$
donde $s : G \to E$ es una sección conjuntista de $E \to G$. La acción no depende de la s elegida. El 2-cociclo f es
$$f(g,g') = s(g)s(g')s(gg')^{-1}$$
Su clase $[f]$ en H^2 no depende de s.

Ejercicio: E un grupo con $|E| = p^n$ y n primo, muestre que E sucede en una extensión de la forma

$$0 \to M \to E \to G \to 1$$

donde $|M| = p^k$ con $0 < k < n$ es subgrupo invariante *central* (equivalentemente abeliano, con acción trivial de G) y $|G|^{p^{n-k}}$.

Aplicación: Se puede hacer un cálculo iterativo de grupos de orden p^n

Atención: Hay más de 10 millones de (clases de isomorfismo de) grupos de orden $512 = 2^9$ (hay 10.494.213 (GAP)).

Si $|E| = p^3$ y $M \cong \mathbb{Z}_p$, $|G| = |E/M| = p^2$.

- Si $G = C_{p^2}$ es cíclico, tenemos una resolución pequeña, el cálculo de $H^2(C_n, \mathbb{Z}_p)$ es fácil, pero además podemos chequear que el grupo E es necesariamente abeliano, tenemos entonces $E = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2}$ para un cociclo trivial y $E = \mathbb{Z}_{p^3}$ para un cociclo no trivial.
- si $G = C_p \times C_p \Rightarrow$ podemos usar Künneth para calcular

$$H^2(C_p \times C_p, \mathbb{Z}_p) = \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[C_p \times C_p]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) = \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[C_p] \otimes \mathbb{Z}[C_p]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p)$$

$$\cong (H^2(C_p, \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{Z}) \oplus (H^1(C_p, \mathbb{Z}_p) \otimes H^1(C_p, \mathbb{Z}_p)) \oplus (\mathbb{Z}_p \otimes H^2(C_p, \mathbb{Z}_p))$$

  Se tiene que $H^2(G, \mathbb{Z}_p)$ es un $\mathbb{Z}_p$ espacio vectorial de dimensión 3. Distintos cociclos dan lugar a distintas clases de equivalencia de extensiones, pero dentro de ellas, muchos grupos que aparecen en als extensiones son isomorfos entre sí (aunque no sean equivalentes sus extensiones -por ejemplo los múltiplos no nulos de una extensión dada). Se puede encontrar con este método una lista (con repeticiones pero exhaustiva) de todos los grupos no abelianos de orden p^3, que son 2:

  - Si $p = 2$ se tiene D_4 y $\mathcal{H} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$
  - Si $p > 2$, el grupo de Heisenberg $Heis(p)$ y el grupo afín de $\mathbb{Z}_{p^2}$ $Aff(\mathbb{Z}_{p^2})$:

$$Heis(\mathbb{Z}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

$$Aff(\mathbb{Z}_{p^2}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} :\in GL_2(Z_{p^2}),\ a = 1 + kp : k \in \{0, 1, \cdots, p-1\} \right\}$$

Capítulo 8

(Co)homología de Lie

Estudiaremos en esta sección la (co)homología de álgebras de Lie. Dentro de sus enormes aplicaciones, podemos considerar una primera motivación el cálculo de la cohomología (singular) de un grupo de Lie compacto conexo, que, mas allá de calcularlo con el complejo singular o el complejo de De Rham, puede ser calculado con "métodos infinitesimales", es decir, con el complejo asociado a su álgebra de Lie tangente, que, en particular, es un complejo de dimensión total finita.

Como aplicación concreta de los métodos homológicos desarrollados, veremos una demostración con herramientas homológicas (guiada en la sección de ejercicios) del teorema de completa reducibilidad de Weyl en característica cero, que dice que si un álgebra de Lie es semisimple (equivalentemente su forma de Killing es no degenerada), entonces toda representación de dimensión finita es suma directa de subrepresentaciones simples.

Álgebras de Lie

Recordamos la noción de álgebra de Lie:

Definición 8.1. k anillo conmutativo. Una k-álgebra de Lie es un k-módulo $\mathfrak{g}$ junto con una operación k-bilineal $[-,-]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ que es

- antisimétrica: $[x,y]=-[y,x]$
  (en característica 2 se pide $[x,x]=0$)
- y verifica Jacobi:
$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$$

Observación 8.2. Jacobi equivale a

$$[x,\ [y,z]]=[[x,y],\ z]+[y\ ,[x,z]]$$

si $ad_x = [x, -]$,

$$ad_x([y,z]) = [ad_x(y), z] + [y, ad_x(z)]$$

es decir, ad_x es una derivación de la operación $[-,-]$.

Ejemplos

1. Si A es k-álgebra (asociativa) entonces

$$[a,b] = ab - ba$$

   es una estructura de Lie en A.

2. $(A, *)$ una k-álgebra "general" (o sea, bilineal y nada más) entonces $\mathrm{End}_k(A)$ es k-álgebra asociativa, y por lo tanto de Lie y $\mathrm{Der}(A) \subset \mathrm{End}_k(A)$ es subálgebra de Lie (pero no subálgebra asociativa en general), donde

$$\mathrm{Der}(A) = \{D : A \to A : D(a * b) = D(a) * b + a * D(b)\}$$

3. M variedad, $\mathfrak{X}(M) = \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))$

4. G grupo de Lie $\Rightarrow Lie(G) = T_1G \cong X(G)^G \subset \mathfrak{X}(G)$ es un álgebra de Lie de dimensión finita (igual a la dimensión de G como variedad).

Ejemplos Matriciales

Las siguientes son todas álgebras de Lie que son subálgebras de matrices, correspondientes a espacios tangentes a grupos de Lie que son sugbrupos de $GL(n,k)$:

- $\mathfrak{sl}(n,k) = \{M \in M_n(k) : tr(M) = 0\} = T_1SL(n,k)$
- $\mathfrak{so}(n,k) = \{M \in M_n(k) : MM^t + M^tM = 0\} = T_1SO(n,k)$
- $\mathfrak{u}(n) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) : MM^* + M^*M = 0\} = T_1U(n)$
- $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = T_1SU(n)$

Teorema 8.3 (Chevalley - Eilenberg '48). *Si G un grupo de Lie conexo y compacto entonces*

$$H^\bullet_{DR}(G) = H^\bullet(\Omega^\bullet(G), d_{dR}) = H^\bullet(\Omega^\bullet(G)^G, d_{dR})$$

En particular, el cálculo depende sólo de $\mathfrak{g} = Lie(G) = T_1G$

$$(\Omega^\bullet(G)^G, d_{dR}) = (\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}^*), \partial_{CE})$$

que es un complejo de dimensión finita!

$$\Lambda^n \mathfrak{g}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda^n \mathfrak{g}, \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}\partial(f)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n+1}) &= \\ &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \widehat{x_i} \wedge \cdots \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_{n+1})\end{aligned}$$

Veremos que el complejo anterior calcula un Ext sobre un álgebra asociativa naturalmente asociada a un álgebra de Lie

8.1. El álgebra envolvente universal

Si $\mathfrak{g}$ es de Lie, se define el **álgebra universal envolvente**

$$U(\mathfrak{g}) := T\mathfrak{g}/(x \otimes y - y \otimes x - [x, y] : x, y \in \mathfrak{g})$$

es una k-álgebra asociativa y tiene la propiedad universal:

$$\boxed{\mathrm{Hom}_{k-alg}(U(\mathfrak{g}), A) = \mathrm{Hom}_{Lie}(\mathfrak{g}, Lie(A))}$$

donde, si A es asociativa, $Lie(A) := (A, [,] = conmutador)$.

Resultará

$$H^\bullet(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}^*), \partial_{CE}) = \mathrm{Ext}^\bullet_{U\mathfrak{g}}(k, k)$$

Teorema 8.4. *(PBW: Poincaré-Birkhoff-Witt) Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie que sea libre como k-módulo, con base $\{x_i : i \in I\}$ donde $(I, <)$ es un conjunto* totalmente *ordenado. Entonces los monomios*

$$\{x_{i_1}^{n_{i1}} \cdots x_{i_k}^{n_{ik}} : k \in \mathbb{N}_0, i_1 < i_2 < \cdots < i_k, n_{i_j} \in \mathbb{N}\}$$

forman una base de $U(\mathfrak{g})$.

Observación 8.5. si k es cuerpo, $\mathfrak{g}$ es libre. $U(\mathfrak{g}) = T\mathfrak{g}/(J)$ por lo tanto $U(\mathfrak{g})$ es **filtrada**. Como en $U(\mathfrak{g})$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} - \overline{y} \cdot \overline{x} = \overline{x \otimes y - y \otimes x} = \overline{[x, y]}$$

entonces $gr(U(\mathfrak{g}))$ es conmutativa. PBW dice que

$$gr(U(\mathfrak{g})) \cong k[\{x_i\}_{i \in I}]$$

$\mathfrak{g}$-módulos:

Cada álgebra de Lie tienen naturalmente asociada una categoría de representaciones.

Definición 8.6. Un k-módulo M junto con una aplicación bilineal

$$\mathfrak{g} \times M \to M$$

$$(x, m) \mapsto x \cdot m$$

se dice un $\mathfrak{g}$-módulo si

$$x \cdot (y \cdot m) - y \cdot (x \cdot m) = [x, y] \cdot m$$

Observación 8.7. $\mathfrak{g}$-módulos $\equiv U(\mathfrak{g})$-módulos pues

$$\mathrm{Hom}_{Lie}(\mathfrak{g}, \mathrm{End}_k(M)) = \mathrm{Hom}_{k-alg}(U\mathfrak{g}, \mathrm{End}_k(M))$$

De esta manera, el álgebra envolvente nos permite estudiar la categoría de representaciones de un álgebra de Lie co herramientas tradicionales de módulos sobre k-álgebras (asociativas).

Ejemplos:

1. $M = U(\mathfrak{g})$, es un módulo de dimensión infinita.
2. $M = \mathfrak{g}$ con $x \cdot y := [x, y]$, es un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita. Se denota $\mathfrak{g}^{ad}$.

$$\begin{aligned} x \cdot (y \cdot z) - y \cdot (x \cdot z) &= \\ &= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = [[x, y], z] \\ &= [x, y] \cdot z \end{aligned}$$

3. $M = k$ con $x \cdot \lambda = 0$ es un g-módulo, se denomina el $\mathfrak{g}$-módulo trivial

Teorema 8.8. *si $\mathfrak{g}$ es k-libre, entonces la siguiente es una resolución $U(\mathfrak{g})$-libre de k:*

$$\cdots \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \longrightarrow \cdots \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0$$

con diferencial

$$u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u x_i \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_n$$

y $\epsilon : U(\mathfrak{g}) \to k$ está determinado por $x \mapsto 0$ $\forall x \in \mathfrak{g}$.

En grados bajos:

$$\begin{aligned} d(u \otimes x \wedge y \wedge z) &= ux \otimes y \wedge z - uy \otimes x \wedge z + uz \otimes x \wedge y \\ &\quad - u \otimes [x, y] \wedge z + u \otimes [x, z] \wedge y - u \otimes [y, z] \wedge x \end{aligned}$$

$$d(u \otimes x \wedge y) = ux \otimes y - uy \otimes x - u \otimes [x, y]$$

$$d(u \otimes x) = ux$$

Demostración. (sketch) Observamos el complejo

$$\cdots \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \longrightarrow \cdots \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0$$

$$u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u x_i \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_n$$

y chequeamos que

- d está bien definido, i.e. la fórmula es totalmente antisimétrica en $x_1, \ldots, x_n$ (ejercicio)
- $d^2 = 0$ (ejercicio, más largo que el caso simplicial)
- El complejo es filtrado y su graduado asociado es exacto, pues es el complejo de Koszul!

Veremos a continuación que si un complejo tiene una filtración exhaustiva y que empieza en un lugar, y su graduado asociado es exacto, entonces es exacto. Si $\mathfrak{g}$ es k-proyectiva, $\Lambda^k \mathfrak{g}$ también es k-proyectivo y por lo tanto cada término del complejo es $U(\mathfrak{g})$-proyectivo, y asumiendo el resultado sobre filtraciones, concluimos. □

Veamos el resultado sobre complejos filtrados. Comenzamos con las definiciones:

Definición 8.9. $(C_\bullet, d) \in \mathrm{Chain}(A)$ se dice **filtrado** si $\forall n$ se tiene dada una sucesión de submódulos $F_p(C_n)$ con

$$0 \subseteq \cdots \subseteq F_p(C_n) \subseteq F_{p+1}(C_n) \subseteq \cdots \subseteq C_n$$

y $d(F_p(C_n)) \subseteq F_p(C_{n-1})$ $\forall n, p$. Usaremos las siguientes calificaciones:

- La filtración es **exhaustiva** si $\bigcup_p F_p(C_n) = C_n$.
- La filtración es **Hausodorf** si $\bigcap_p F_p(C_n) = 0$.
- La filtración **empieza** en un momento si $\forall n$ $\exists p_0 = p_0(n) : F_{p_0}(C_n) = 0$.

Definimos $gr(C_n) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} gr(C_n)_p := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \dfrac{F_p(C_n)}{F_{p-1}(C_n)}$ con diferencial $\overline{d}$

$$\overline{d}(c \ MOD \ F_{p-1}(C_n)) := d(c) \ MOD \ F_{p-1}(C_{n-1})$$

Teorema 8.10. *Si en $C_\bullet$ se tiene una filtración exhaustiva y que empieza y $(gr(C), \overline{d})$ es exacto, entonces (C, d) es exacto.*

Demostración. Sea $x \in C_n$ tal que $d(x) = 0$. Como es exhaustiva, existe $p : x \in F_p(C_n)$. Consideramos $\overline{x} \in gr(C_n)_p$

$$d(\overline{x}) = \overline{dx} = 0 \Rightarrow \exists \overline{y}_p \in gr(C_{n+1})_p : \overline{x} = d\overline{y}_p = \overline{dy_p}$$

$$\Rightarrow x = dy_p + z_{p-1} \qquad (z_{p-1} \in F_{p-1}(C_n))$$

Claramente $0 = dx = d(dy_p + z_{p-1}) = dz_{p-1}$.

Recursivamente podemos suponer que $z_{p-1} = d(alguien)$, pues $z_{p-1} \in F_{p-1}$ y la recursión termina porque la filtración empieza en algún momento. □

$$\cdots \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \longrightarrow \cdots \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0$$

$$u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u x_i \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_n$$

$\rightsquigarrow$

$$\cdots \longrightarrow S(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g} \longrightarrow S(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow S(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0$$

$$u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u x_i \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n$$

8.2. Cohomología en grados bajos

Para el cálculo de $H_1(\mathfrak{g}, k)$, tomamos el complejo de Chevalley-Eilenberg:

$$\cdots \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \longrightarrow \cdots \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \longrightarrow 0$$

$$u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} u x_i \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_n$$

Al tensorizar por $k \otimes_{U(\mathfrak{g})} -$ obtenemos

$$\cdots \longrightarrow \Lambda^3 \mathfrak{g} \longrightarrow \Lambda^2 \mathfrak{g} \xrightarrow{[-,-]} \mathfrak{g} \xrightarrow{0} k \longrightarrow 0$$

$\therefore H_1(\mathfrak{g}, k) = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. (Recordar/ejercicio: $H_1(G, \mathbb{Z}) = G/[G, G]$)

Con los mismos métodos dejamos como ejercicio verificar las siguientes fórmulas:

$$H^1(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M)/\mathrm{InnDer}(\mathfrak{g}, M)$$

donde

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M) = \{D : \mathfrak{g} \to M : D([x, y]) = x \cdot D(y) - y \cdot D(x)\}$$

$$\mathrm{InnDer}(\mathfrak{g}, M) = \{D : \exists m_0 / D(x) = x \cdot m_0\}$$

En particular $H^1(\mathfrak{g}, k) = \{D : \mathfrak{g} \to k : D([x, y]) = 0\}$.

Si $f : \Lambda^2\mathfrak{g} \to M$ es 2-cociclo $\leftrightarrow$ $f : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to M$ antisimétrica y

$$x \cdot f(y, z) - y \cdot f(x, z) + z \cdot f(x, y)$$
$$- f([x, y], z) + f([x, z], y) - f([y, z], x) = 0$$

8.3. H^2 y extensiones de álgebras de Lie

Sea $f : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to M$ bilineal donde M es un $\mathfrak{g}$-módulo. En $M \oplus \mathfrak{g}$. escribimos m en vez de $(m, 0)$ y x en vez de $(0, x)$. Se puede definir una operación asociada f y al corchete de $\mathfrak{g}$ de la siguiente manera ($m, m' \in M$, $x, y \in \mathfrak{g}$):

$$[m, m']_f = 0$$

$$[x, m]_f = x \cdot m = -[m, x]_f \qquad \in M$$

$$[x, y]_f = f(x, y) + [x, y] \qquad \in M \oplus \mathfrak{g}$$

De manera similar a la correspondencia de H^2 de grupos y extensiones con núcleo abeliano, dejamos como ejercicio la demostración de la siguiente proposición:

Proposición 8.11.

- $[-, -]_f$ *antisimétrica* $\Longleftrightarrow$ f *es antisimétrica*
- $[-, -]_f$ *verifica Jacobi* $\Longleftrightarrow$ f *es un-cociclo.*
- *en caso que* $[-, -]_f$ *verifica lo anterior (i.e. es un corchete de Lie)* M *resulta un ideal abeliano de* $\mathfrak{e} := (M \oplus \mathfrak{g}, [-, -]_f)$*, la estructura de* $\mathfrak{g}$*-módulo se recupera por* $x \cdot m = [(0, x), (m, 0)]_f$*, y* $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{e}/M$*.*
- *Toda sucesión exacta de la forma*

$$0 \to M \to \mathfrak{e} \to \mathfrak{g} \to 0$$

donde $\mathfrak{e} \to \mathfrak{g}$ *es morfismo de álgebras de Lie y* M *es un ideal abeliano de* $\mathfrak{e}$*, sucede de esta forma.*

8.4. Álgebras de Lie simples y semisimples

El objetivo es demostrar un resultado fundamental sobre las representaciones de álgebras de Lie semisimples, que tiene varias demostraciones, pero la demostración utilizando herramientas de álgebra homológica es particularmente simple y general. Para ésto necesitamos ciertos pre-requisitos sobre álgebras de Lie y sus representaciones.

Definición 8.12. un **ideal** de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un subespacio $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ tal que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *simple* si no tiene ideales salvo 0 y $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}$ no es abeliana (excluyendo de esta manera el caso trivial cuando $\dim_k \mathfrak{g} = 1$)

Observación 8.13. $\mathfrak{g}$ simple $\Rightarrow$ $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. No hay simples en dimensión 2, pues $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = Im(\Lambda^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{g})$.

Ejemplo / Ejercicio: $ch(k) \neq 2 \Rightarrow \mathfrak{sl}(2, k)$ es simple. Recordamos los corchetes, y la conveniencia de utilizar como base las siguientes matrices:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} c & -2a \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 2a & b \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ -2c & 0 \end{pmatrix}$$

Definición: Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *semisimple* si es isomorfa a un producto directo (con corchete coordenada a coordenada) de álgebras de Lie simples.

La forma de Killing

Si V es un $\mathfrak{g}$-módulo, denotamos

$$x|_V := x \cdot - : V \to V$$

Si $\dim V < \infty$, se define la forma bilineal en $\mathfrak{g}$ asociada a V a través de

$$b_V(x, y) = tr_V(x|_V \circ y|_V)$$

Por las propiedades de la traza se puede ver fácilmente que

$$b_V(x, y) = b_V(y, x)$$

$$b_V([x, y], z) = b_V(x, [y, z])$$

Si $V = \mathfrak{g}^{ad}$ se llama *forma de Killing* $\kappa(-,-)$.

Ejemplo 8.14. Calculamos la forma de Killing para $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$: tomamos como base

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

valen las fórmulas

$$[x,y] = \ h$$

$$[h,x] = 2x$$

$$[h,y] = -2y$$

Con estas constantes de estructura, podemos calcular la matriz de la forma bilineal, por ejemplo

$$b(x,x) = tr(\mathrm{ad}_x^2) = tr\Big(h \mapsto -2x \mapsto 0, x \mapsto 0 \mapsto 0, y \mapsto h \mapsto -2x\Big) = 0$$

$$b(x,y) = tr(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}y) = tr\Big(h \mapsto [x,[y,h]] = 2h,\ x \mapsto [x,[y,x]] = 2x,\ y \mapsto [x,[y,y]] = 0\Big) = 2$$

etc. Dejamos como ejercicio calcular la matriz de la forma b en esta base. Podemos concluir que la forma de Killing es no degenerada, pero no definida.

Ejemplo 8.15. $\mathfrak{su}(2) = (\mathbb{R}^3, \times)$ base e_1, e_2, e_3, con corchete

$$[e_i, e_{i+1}] = e_{i+2} \qquad (Mod 3)$$

Dejamos como ejercicio ver que su forma de Killing es definida negativa, en particular es no degenerada, pero también esto muestra que $su(2) \ncong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ (sin embargo, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$).

El Criterio de Cartan:

Mencionamos sin demostración el siguiente criterio de Cartan para $\mathfrak{g}$ de dimensión finita sobre un cuerpo de característica cero

i) $\mathfrak{g}$ es semisimple $\iff$ $\kappa_{\mathfrak{g}}$ no-degenerada.

ii) Si $\mathfrak{g}$ en una subálgebra de Lie $M_n(k)$, entonces $\beta(x,y) := tr(xy)$ (la traza usual de matrices) también es no degenerada.

(ver Humphreys, Knapp, Bourbaki,...)

Veremos que si $\mathfrak{g}$ es **simple** y $\mathfrak{g} \subset M_n(k)$

$$\Rightarrow \beta = \lambda\kappa \qquad (0 \neq \lambda \in k)$$

8.5. El Casimir

El ingrediente fundamental en los cálculos cohomológicos es la acción de un elemento en particular llamado **el Casimir**, asociado a toda $\mathfrak{g}$ semisimple.

Definición 8.16. Si $\mathfrak{g}$ es ss, $x_1, \ldots, x_n$ una base, y sean $x^1, \ldots, x^n$ en $\mathfrak{g}$ tales que

$$\kappa(x_i, x^j) = \delta_i^j$$

se define el **Casimir**

$$\Omega := \sum_{i=1}^{n} x_i x^i \in U(\mathfrak{g})$$

Dejamos como ejercicio ver que Ω es independiente de la base elegida. En particular, $\Omega := \sum_{i=1}^{n} x_i x^i = \sum_{i=1}^{n} x^i x_i$.

A veces se considera $\Omega \in S^2(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$.

Vale $x \in \mathfrak{g}$ y $[x_i, x] = \sum_j c_{ij} x_j \Rightarrow$

$$[x, x^j] = \sum_i c_{ij} x^i$$

Pues si $[x, x^j] = \sum_i a_{ij} x^i$, calculamos

$$a_{ij} = \kappa(x_i, [x, x^j]) = \kappa([x_i, x], x^j)$$

luego

$$\Omega \in Z(U\mathfrak{g})$$

$\therefore \forall$ $\mathfrak{g}$-módulo M, la multiplicación por Ω es $U(\mathfrak{g})$-lineal.

Lema 8.17. *(Schur) Sea S un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita y simple (i.e. los únicos $\mathfrak{g}$-submódulos son 0 y S). Si k es algebraicamente cerrado, entonces $\exists c_S \in k$ tal que*

$$\Omega|_S = c_S \mathrm{Id}_S$$

Notar que esto implica que $c_S \dim_k(S) = tr(\Omega|_S)$.

Demostración. Si S es de dimensión finita, como $\Omega|_S : S \to S$ es una transformación lineal y k es algebraicamente cerrado, tiene al menos un autovalor λ y como Ω es central en $U(\mathfrak{g})$,

$$\{v \in S : \Omega \cdot v = \lambda v\} \subset S$$

es un $\mathfrak{g}$-submódulo, que es no nulo, y por simplicidad necesariamente coincide con S. □

Mostraremos que S simple, entonces $S = k$ el módulo trivial es el **único** en donde $c_S = 0$.

8.6. Estructura monoidal de las representaciones

La cateoría de $\mathfrak{g}$-módulos (de manera análoga a la de representaciones de un grupo) tiene operaciones adicionales que producen nuevas representaciones a partir de otras. Si M y N son dos $\mathfrak{g}$-módulos, entonces

- $M \otimes N$ es naturalmente un $\mathfrak{g}$-módulo con la acción
$$x \cdot (m \otimes n) = xm \otimes n + m \otimes xn$$
y la trasposición $M \otimes N \cong N \otimes M$ es $\mathfrak{g}$-lineal.
- $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ es un $\mathfrak{g}$-módulo via
$$(x \cdot f)(m) := xf(m) - f(xm)$$
En particular M^* es $\mathfrak{g}$-módulo con $(x \cdot \phi)(m) = -\phi(xm)$.
- El morfismo natural
$$M^* \otimes N \to \mathrm{Hom}_k(M, N)$$
es de $\mathfrak{g}$-módulos.
- $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, N) = \mathrm{Hom}_k(M, N)^{\mathfrak{g}}$
- M de dimensión finita $\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, N) \cong (M^* \otimes N)^{\mathfrak{g}}$
- La descomposición en tensores simétricos y antisimétricos $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} = S^2\mathfrak{g} \oplus \Lambda^2\mathfrak{g}$ es también como $\mathfrak{g}$-módulos. Si $\mathfrak{g}$ es semisimple, entonce el "casimir"
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x^i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$
es simétrico e invariante, i.e. un elemento de $S^2(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.
- $((M \otimes N)^*)^{\mathfrak{g}}$=formas bilineales invariantes, donde b es invariante $\iff b([x, y], z) = b(x, [y, z])$

Algunos subespacios de invariantes en el caso $\mathfrak{g}$ simple y $k = \overline{k}$

Realizamos algunos cálculos con representaciones e invariantes en el caso de $\mathfrak{g}$ simple:

- $M = \mathfrak{g}^{ad}$ es una representación simple entonces (Lema de Schur)
$$\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 1$$

- $\mathfrak{g}^{ad} \cong \mathfrak{g}^*$, pues la forma de Killing provee de un morfismo no nulo

$$\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*, \quad (x \mapsto \kappa(x,-))$$

y como

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}) \cong (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \cong (\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$$

todos tienen dimensión 1, por lo tanto $(S^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ tiene dimensión 1 y está generado por el Casimir (y colateralmente también se sigue que $(\Lambda^2\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = 0$, aunque no lo utilicemos ahora).

Ahora si $\mathfrak{g}$ es simple y M simple no trivial,

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(M) = M_m(k) \Rightarrow \mathfrak{g} \subset M_m(k)$$

produce una inmersión de $\mathfrak{g}$ como subálgebra de matrices. Recordando la parte correspondiente del criterio de Cartan tenemos

1. $\beta(x,y) = tr(x|_M \circ y|_M)$ es no degenerada entonces (Cartan) $\beta = \lambda\kappa$ para algún $0 \neq \lambda \in k$. Si $x_1, \dots, x_n$ una base de $\mathfrak{g}$ $\{y^1, \dots, y^n\}$ en $\mathfrak{g}$ satisfacen

$$\lambda\kappa(x_i, y^j) = \beta(x_i, y^j) = \delta_i^j \ \Rightarrow \ \widetilde{\Omega} = \sum_{i=1}^n x_i y^i = \frac{1}{\lambda}\Omega$$

2. Sabemos que $\widetilde{\Omega}|_M = c\mathrm{Id}_M$ (Schur), luego

$$\sum_{i=1}^n x_i|_M \circ y^i|_M = c\mathrm{Id}_M \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^n tr(x_i|_M \circ y^i|_M) = c \dim M$$

$$\Rightarrow c\dim M = \sum_{i=1}^n \beta(x_i, y^i) = \dim \mathfrak{g}$$

Concluimos $\widetilde{\Omega} = \frac{\dim \mathfrak{g}}{\dim M}\mathrm{Id} \neq 0 \Rightarrow \Omega|_M = c_M\mathrm{Id}$, $c_M \neq 0$. Es decir, $\Omega|_S$ es cero si S es la representación trivial, y $\Omega|_S$ es un múltiplo no nulo de la identidad si S es simple no trivial.

Con este resultado podemos demostrar los siguientes resultados fundamentales:

8.7. Lemas de Whitehead y Teorema de Weyl

Primer Lema de Whitehead

Lema 8.18. *Sea A un anillo, $\omega \in Z(A)$ un elemento central, M y N dos A-módulos, denotamos $\omega|_M$ y $\omega|_N$ la multiplicación por ω en M y N respectivamente:*

$$\omega|_M : M \to M$$

$$m \mapsto \omega \cdot m$$

Entonces

$$\omega|_{M*} = \omega|_N^* : \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M,N)$$

Como corolario, reemplazando M por una resolución, y calculando homología, tenemos

Corolario 8.19. *Mismas hipótesis y notaciones que el lema anterior, entonces*

$$\omega|_{M*} = \omega|_N^* : \mathrm{Ext}^n_A(M,N) \to \mathrm{Ext}^n_A(M,N)$$

Como corolario de esto y de las propiedades del Casimir se tiene:

Teorema 8.20. *M simple $M \neq k \Rightarrow H^\bullet(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Ext}^\bullet_{U\mathfrak{g}}(k,M) = 0$*

Demostración. El casimir actúa por un escalar no trivial en M, y por un escalar nulo en k, luego, en $\mathrm{Ext}^\bullet_{U\mathfrak{g}}(k,M)$, la acción del casimir es simultáneamente cero y un iso. □

Observación 8.21. $\mathfrak{g}$ simple $\Rightarrow \mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \Rightarrow H^1(\mathfrak{g},k) = 0$.

El teorema anterior junto al cálculo de $H^1(\mathfrak{g},k)$ nos lleva al primer Lema de Whitehead:

Teorema 8.22. *(Primer Lema de Whitehead) $H^1(\mathfrak{g},M) = 0$ para todo M de dimensión finita.*

Demostración. Si $M = k$ es la observación, si M es simple no trivial, es el teorema anterior. Si M tiene dimensión finita y no es simple, entonces admite un submódulo simple S y se tiene una sucesión exacta corta

$$0 \to S \to M \to M/S \to 0$$

Por un argumento inductivo en la dimensión, tenemos que $H^1(\mathfrak{g}, M/S) = 0$ y $H^1(\mathfrak{g}, S) = 0$ por se rS simple, luego $H?^1(\mathfrak{g},M) = 0$ se sigue de la sucesión exacta larga asociada a la sucesión exacta corta anterior. □

Tenemos todos los ingredientes para mostrar uno de los resultados más importantes de la teoría de representación de las álgebras de Lie semisimples:

El Teorema de Weyl

Teorema 8.23. *(Weyl) $\mathfrak{g}$ semisimple, $ch(k) = 0$, entonces todo $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión de dimensión finita es completamente reducible.*

En otras palabras, todo submódulo de un módulo de dimensión finita se complementa, o bien la cat. de $\mathfrak{g}$-módulos *de dimensión finita* es semisimple.

Demostración. Asumimos primero $\mathfrak{g}$ simple y $k = \overline{k}$. Vemos primero que

$$\mathrm{Ext}^1_{U\mathfrak{g}}(X,Y) \cong \mathrm{Ext}^1(k, \mathrm{Hom}_k(X,Y)) = H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_k(X,Y))$$

Si $\dim M < \infty$ $M_0 \subseteq M$ entonces

$$0 \to M_0 \to M \to M/M_0 \to 0$$

da un elemento de $\mathrm{Ext}^1_{U\mathfrak{g}}(M_0, M/M_0) = 0$. Esto dice que lal sucesión anterior se parte, luego M_0 se complementa en M. □

Observación 8.24. Si $\mathfrak{g}$ no es semisimple, $\mathfrak{g} = g_1 \times \cdots \mathfrak{g}_r$, entonces $U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g}_1) \otimes \cdots \otimes U(\mathfrak{g}_r)$, el resultado sobre $H^1(\mathfrak{g}, -)$ (primer Lema de Whitehead) se sigue de la fórmula de Kunneth, y la demostración del teorema de Weyl sigue intacta. Si $k \neq \overline{k}$, entonces consideramos $\overline{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \otimes_k \overline{k}$ como $\overline{k}$-álgebra de Lie. Por e criterio de Cartan, $\overline{\mathfrak{g}}$ es semisimple como $\overline{k}$-álgebra. Tenemos que $U(\overline{\mathfrak{g}}) \cong U(\mathfrak{g}) \otimes \overline{k}$,

$$H^1(\mathfrak{g}, M) \otimes_k \overline{k} \cong = H^1(\mathfrak{g}, M \otimes \overline{k})$$

luego, es válido el Lema de Whitehead para $\mathfrak{g}$ y por lo tanto en teorema de Weyl.

Segundo Lema de Whitehead

Teorema 8.25. *(Segundo Lema de Whitehead) $H^2(\mathfrak{g}, M) = 0$ si M tiene dimensión finita.*

Demostración. Por un argumento de inducción en la dimensión y la sucesión exacta en la cohomología basta ver que $H^2(\mathfrak{g}, S) = 0$ si S es simple, cosa que ya sabemos para $S \neq k$. Si $S = k$, interpretamos $H^2(\mathfrak{g}, k)$ como extensiones y consideremos una extensión e álgebras de Lie con núcleo abeliano isomorfo a k:

$$0 \to k \to \mathfrak{e} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$$

π morfismo de álgebras y $k = \mathrm{Ker}(\pi)$.

Si $e \in \mathfrak{e}$ y $x \in \mathfrak{g}$, sea $\widetilde{x} \in \mathfrak{e}$ tal que $\pi(\widetilde{x}) = x$. Definimos

$$x \cdot e := [\widetilde{x}, e]$$

$\Rightarrow$ está bien definido $\Rightarrow$ $\mathfrak{e} \in \mathfrak{g} - mod$ y π es $\mathfrak{g}$-lineal.

Por el teorema de Weyl, admite sección $\mathfrak{g}$-lineal $s : \mathfrak{g}^{ad} \to \mathfrak{e}$

$$s([x,y]) = s(x \cdot_{ad} y) = x \cdot s(y) = [s(x), s(y)]$$

$\Rightarrow$ s es morfismo de álgebras $\Rightarrow H^2(\mathfrak{g}, k) = 0 \Rightarrow H^2(\mathfrak{g}, M) = 0$ si $\dim M < \infty$. □

Capítulo 9

Lenguaje super

Dedicaremos este capítulo al llamado *lenguaje super*, que resulta muy cómodo para las construcciones del álgebra homológica. En general, la palabra super se puede referir cuando intervienen signos que suelen depender de la paridad en una $\mathbb{Z}$-graduación, por lo que las definiciones o nombres pueden hacerse tanto en el caso $\mathbb{Z}$-graduado como en el $\mathbb{Z}_2$-graduado. Tomaremos en principio la situación de una $\mathbb{Z}_2$-graduación.

Definición 9.1. Un super k-espacio vectorial (o super k-módulo si k es anillo conmutativo) es un k-módulo M junto con una descomposición en suma directa

$$M_0 \oplus M_1$$

Los elementos de M_0 se dirán homomgéneos de grado par, los de M_1 se llamarán homogéneos de grado impar. No todo elemento en $M_0 \oplus M_1$ tiene asociado un grado, ya que no todo element es homogéneo, pero si es cierto que todo elemento de $M_0 \oplus M_1$ es *una suma* de elementos homogéneos. Muchas veces se darán las definiciones sobre elementos homogéneos, siendo las definiciones de carater lineal, se sobre-entenderá que se extienden por linealidad para elementos que sean sumas de homogéneos.

Ejemplo 9.2. Si M es $\mathbb{Z}$-graduado, $M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M^n$, esto induce una $\mathbb{Z}_2$-graduación

$$M_0 := \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M^{2n}, \qquad M_1 := \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M^{2n+1}$$

La mayoría de los ejemplos de interés son $\mathbb{Z}$-graduados.

9.1. Estructura monoidal: signos de Koszul

Si $f : (M_0 \oplus M_1) \to (N_0 \oplus N_1)$ es k-lineal, diremos que respeta la descomposición, o que respeta la paridad, o la $\mathbb{Z}_2$-graduación si

$$f(M_i) \subseteq N_i$$

Los super módulos, o módulos $\mathbb{Z}_2$-graduados, forman una categoría.

Si $M = M_0 \oplus M_1$ y $N = N_0 \oplus N_1$ son dos super-módulos, entonces el producto tensorial también

$$M \otimes N = M_0 \otimes N_0 \oplus M_0 \otimes N_1 \oplus M_1 \otimes N_0 \oplus M_1 \otimes N_1 =$$

$$= \underbrace{(M_0 \otimes N_0 \oplus M_1 \otimes N_1)}_{(M \otimes N)_0} \bigoplus \underbrace{(M_0 \otimes N_1 \oplus M_1 \otimes N_0)}_{(M \otimes N)_1}$$

Sin embargo, y aquí es donde aparece de manera esencial la $\mathbb{Z}_2$-graduación, si $M = M_0 \oplus M_1$ y $N = N_0 \oplus N_1$ son dos super-módulos, entonces hay **dos isomorfismos naturales**

$$M \otimes N \cong M \otimes N$$

uno el flip usual

$$m \otimes n \mapsto n \otimes m$$

y el otro: **flip con signo**

$$\boxed{m \otimes n \mapsto (-1)^{|m||n|} n \otimes m}$$

donde $|m|$ = grado o paridad de m (resp. $|n|$).

Observación 9.3. si $|m|$ y $|n|$ están en $\mathbb{Z}$ y no en $\mathbb{Z}_2$, en la fórmula anterior sólo importa la paridad de la graduación.

9.2. Álgebras super conmutativas

Una super-k-álg. asociativa es lo mismo que una k-álgebra $\mathbb{Z}_2$ graduada, es decir, $A = A_0 \oplus A_1$ y el producto verifica

$$A_i \cdot A_j \subset A_{i+j} \ (i, j, i+1 \text{ módulo } 2)$$

Ejercicio: Si A tiene unidad 1_A, ésta necesariamente pertenece a A_0.

Una super álgebra A se dice **super-conmutativa** (o conmutativa en el sentido graduado) si

$$ab = (-1)^{|a||b|} ba$$

para todo par de elementos homogéneos a y b de A.

Ejemplo 9.4. $A = \Lambda V$= el álgebra exterior es super-conmutativa, con la graduación $|v| = 1$ $\forall v \in V$.

Ejemplo 9.5. $A = k[x]$ con $|x| = 1$ es graduada con $|x| = 1$, pero no es super-conmutativa. Si tomamos $|x| = 2$ entonces $k[x]$ es **otra álgebra graduada**, y ésta, sí es super conmutativa.

Ejemplo 9.6. Si A y B son dos superálgebras, entonces en $A \otimes B$ hay **otro** producto, además del usual, dado por

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') := (-1)^{|a'||b|} aa' \otimes bb'$$

Denotamos esta estructura de álgebra como $A \widehat{\otimes} B$.

Notar que

- $\widehat{\otimes}$ es el coproducto en la categoría de k-álgebras super conmutativas.
- si $A = A_0$ (i.e. $A_1 = 0$) entonces $A \widehat{\otimes} B = A \otimes B$.

Ejercicio: Si $V = V_0 \oplus V_1$ entonces definimos $\mathbb{S}(V) := S(V_0) \otimes \Lambda(V_1)$, es superconmutativa, y si A es super-conmutativa entonces

$$\mathrm{Hom}_{super-k-alg}(S(V_0) \otimes \Lambda(V_1), A) \cong \mathrm{Hom}_{super-k-mod}(V_0 \oplus V_1, A)$$

Es decir, $\mathbb{S}(V) = S(V_0) \otimes \Lambda(V_1)$ es super-conmutativa libre.

Observación 9.7. $\left.\begin{array}{c} V = V_0 \oplus V_1 \\ W = W_0 \oplus W_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{S}(V \oplus W) = \mathbb{S}(V) \widehat{\otimes}\, \mathbb{S}(W).$

9.3. Super álgebras de Lie

Un super módulo $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ se dice una super-álgebra de Lie si se tiene un corchete $[-,-] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que verifica

- es homogéneo de grado cero:
$$[g_i, g_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}$$
- es super anti-simétrico: $\forall x, y \in \mathfrak{g}$ homogéneos
$$[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x]$$
- y satisface super-Jacobi: $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ homogéneos,
$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{|x||y|}[y, [x, z]]$$

Observación 9.8. $\mathfrak{g}_0$ es super-subálgebra de Lie y álgebra de Lie en el sentido usual. $\mathfrak{g}_1$ NO es Lie usual, podría pasar $[x, x] \neq 0$!

Ejemplos

Sea $V = V_0 \oplus V_1$ un supermódulo entonces

$$\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V_0 \oplus V_1, V_0 \oplus V_1)$$

$$= \underbrace{\mathrm{End}(V_0) \oplus \mathrm{End}(V_1)}_{\mathrm{End}(V)_0} \bigoplus \underbrace{\mathrm{Hom}(V_0, V_1) \oplus \mathrm{Hom}(V_1, V_0)}_{\mathrm{End}(V)_1}$$

es una super-álgebra (o sea es un álgebra $\mathbb{Z}_2$ graduada) y si f y g son homogéneos definimos el super-conmutador

$$[f, g]_s := f \circ g - (-1)^{|f||g|} g \circ f$$

$(\mathrm{End}(V), [-, -]_s)$ es superálgebra de Lie.

9.4. Super-derivaciones

Sea $A = A_0 \oplus A_1$ una superálgebra (asociativa o no). Las super derivaciones

$$\mathrm{Der}_s(A) \subseteq \mathrm{End}(A)$$

se definen por $\mathrm{Der}_s(A) = \mathrm{Der}_s(A)_0 \oplus \mathrm{Der}_s(A)_1$ con

$$\mathrm{Der}_s(A)_n = \{D \in \mathrm{End}(A)_n : D(ab) = D(a)b + (-1)^{n|a|} aD(b)\}$$

Ejercicio: $\mathrm{Der}_s(A)$ es sub-superálgebra de Lie de $\mathrm{End}(A)$:

- $D \in \mathrm{Der}_s(A)_0$, $E \in \mathrm{Der}_s(A)_i$ con $i = 0, 1$, $\Rightarrow DE - ED \in \mathrm{Der}_s(A)_i$.
- $D, E \in \mathrm{Der}_s(A)_1 \Rightarrow DE + ED \in \mathrm{Der}_s(A)_0$.
  (o sea, derivación en el sentido usual)

Además, si D es impar, entonces el segundo item dice que $[D, D] = 2D^2$ es una derivación usual, pero también se puede mostrar directamente que D^2 es una derivación par, sin necesidad de invertir 2.

Demostración. mostraremos sólo parte de D^2. Sean a y b homogéneos,

$$D^2(ab) = D(D(ab)) = D(D(a)b) + D((-1)^{|D||a|} aD(b))$$

y como $|D|$ es impar

$$= D(D(a)b) + (-1)^{|a|} D(aD(b))$$

$$= D^2(a)b + (-1)^{|Da|} D(a)D(b) + (-1)^{|a|}\Big(D(a)D(b) + (-1)^{|a|} aD^2(b)\Big)$$

Como $|D(a)| = |D| + |a|$ y $|D|$ es impar, los términos con $D(a)D(b)$ se cancelan, y $((-1)^{|a|})^2 = 1$, por lo tanto

$$= D^2(a)b + aD^2(b)$$

como queríamos ver. □

9.5. Superálgebras de Lie y complejos

Sea $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$ una superálgebra de Lie y $m \in \mathfrak{g}_1$ tal que

$$[m, m] = 0$$

Entonces $\partial_m = [m, -]$ verifica

- $\partial_m(\mathfrak{g}_n) \subseteq \mathfrak{g}_{n+1}$
- $\partial_m([x, y]) = [\partial_m(x), y] + (-1)^{|x|}[x, \partial_m(y)]$
- $\frac{1}{2} \in k \Rightarrow \partial_m^2 = 0$
- $[m, \mathfrak{g}] = \partial_m(\mathfrak{g}) \triangleleft Z_m$, $Z_m/\partial_m(\mathfrak{g})$ es super-Lie.

Demostración. El primer item es claro pues

$$\partial_m(\mathfrak{g}_n) = [m, \mathfrak{g}_n] \subseteq [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_n]$$

El segundo es exactamente la igualdad de Jacobi para m, x, y.

El tercer item se sigue de Jacobi:

$$\partial_m^2(x) = [m, [m, x]] = [[m, m], x] + (-1)^{|m||m|}[m, [m, x]]$$

Pero como $[m, m] = 0$ y $|m| = 1$ se tiene

$$[m, [m, x]] = -[m, [m, x]]$$

por lo tanto

$$0 = 2[m, [m, x]] = 2\partial_m^2(x)$$

Finalmente, si $x \in Z_m$, es decir, $[m, x] = 0$, e $y \in [m, \mathfrak{g}]$, es decir, $y = [m, z]$ para algún z, entonces

$$\begin{aligned}[y, x] &= [[m, z], x] = [[m, z], x] + 0 \\ &= [[m, z], x] + (-1)^{|z|}[z, [m, x]] = [m, [z, x]] \in [m, \mathfrak{g}]\end{aligned}$$

□

9.6. Coálgebras y coderivaciones

La noción de coálgebra es dual a la de álgebra, o mejor dicho pre-dual, ya que el dual de todo coálgebra es un álgebra, mientras que el dual de un álgebra es coálgebra sólo si cierta hipótesis de finitud es válida sobre el álgebra, o si el dual se hace en cierta forma restringida (como dual graduado, y en cada grado hay dimensión finita). La ventaja de trabajar con coálgebras es que muchas veces ciertas hipótesis de finitud que parecen necesarias con álgebras, desaparecen en el caso de coálgebras y las construcciones resultan más naturales. Por esa razón es conveniente pagar el precio de la falta de intuición co-algebraica y, cuando resulte necesario, trabajar con coálgebras.

Definición 9.9. Una **coalgebra** sobre k es $(C, \Delta : C \to C \otimes C)$ que admite $\epsilon : C \to k$ verificando

- coasociatividad:
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{Id}"] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

- counitariedad
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & C \otimes C \arrow[d, "\epsilon\otimes\mathrm{Id}"] \\ C \arrow[r, "\cong"] & k \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & C \otimes C \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\epsilon"] \\ C \arrow[r, "\cong"] & C \otimes k \end{tikzcd}$$

(son diagramas conmutativos)

Ejemplos

- $\dim_k A < \infty \Rightarrow C = A^*$ es coálgebra con $\Delta = m^*$ y $\epsilon = \mu^*$ donde $\mu : k \to A$ es la inclusión de k en A.

- Si $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ y $\dim_k A_n < \infty \forall n \Rightarrow$ el dual graduado
$$C = A' := \bigoplus_{n\geq 0} A_n^*$$
es coálgebra, graduada:
$$\Delta(C_n) \subseteq \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes C_q$$
(ojo $n \in \mathbb{N}_0$, si $n \in \mathbb{Z}$ no está garantizado)

- Si C es coálgebra, entonces C^* siempre es un álgebra.

  Filosofía: C^* es álgebra $\Rightarrow$ es probable que C sea coálgebra

- G grupo finito, $k[G]$ es álgebra, pero también coálgebra definiendo
$$\Delta\Big(\sum_{g\in G} \lambda_g g\Big) = \sum_{g\in G} \lambda_g g \otimes g$$
(y Δ es morfismo de álgebra)

- Dualmente, si G es un grupo *finito*, el álgebra k^G también es coálgebra definiendo

$$k^{G\times G} \cong (k^G \otimes k^G) \ni \Delta(f)(g,h) = f(g,h)$$

por ejemplo,

$$\Delta\delta_x = \sum_{g\in G} \delta_g \otimes \delta_{g^{-1}x}$$

- $A = O(M_n(k)) = k[x_{ij} : 1, j = 1\ldots,n]$ una coálgebra via $\Delta : A \to A\otimes A =$ el ! morfismo de álgebras t.q.

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_k x_{ik} \otimes x_{kj}$$

- Si G es un subgrupo (o submonoide) de $M_n(k)$ definido por ecuaciones $f_1, \cdots f_k$ (por ejemplo $SL_n(k) = \{\det = 1\}$)

  $\Rightarrow O(G) = O(M_n(k))/(f_1,\ldots,f_k)$ (asumiendo radical) es coálgebra con

$$O(M_n(k)) \to O(G)$$

  un epi de coálgebras.

  Filosofía II: X conjunto, $O(X)$ es álgebra, si en X hay un producto asociativo $\Rightarrow$ en $O(X)$ hay un coproducto

9.7. La coálgebra co-libre T^cV

V k-esp vectorial y

$$C = k \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus V^{\otimes n} \oplus \cdots$$

Un elemento de $V^{\otimes n}$ lo escribimos como sumas de elementos de la forma $v_1 \cdots v_n$. Definimos la *deconcatenación* como

$$\Delta(v_1\cdots v_n) = 1\otimes v_1\cdots v_n + v_1 \otimes v_2 \cdots v_n + \cdots$$

$$\cdots + v_1\cdots v_{n-1}\otimes v_n + v_1\cdots v_n \otimes 1$$

$$= \sum_{i=0}^{n} v_1\cdots v_i \otimes v_{i+1}\cdots v_n \qquad \text{(por convención } v_0 = 1 = v_{n+1}\text{)}$$

Es coálgebra con $\epsilon(V^{\otimes n}) = 0$ $\forall n \geq 1$. Si $\dim_k V < \infty \Rightarrow T^cV \cong$ dual graduado de TV^*.

9.8. Co-derivaciones

Si C es una coálgebra, se define *coderivación* como un morfismo k-lineal $D : C \to C$ que verifica

$$(D \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes D)\Delta = \Delta D$$

o equivalentemente, que $D^* : C^* \to C^*$ es una derivación.

Hecho: $Coder(C) \subset \mathrm{End}_k(C)$ es subálgebra de Lie.

Super Co-derivaciones

Si $C = \oplus_n C_n$ es una coálgebra graduada y $D : C \to C$ t.q. $D(C_n) \subseteq C_{n+p} \forall n$ se dice super coderivación si D^* es una super-derivación (de grado $-p$) de C' (el dual graduado de C), o equivalentemente

$$(D \otimes \mathrm{Id} + \pm\mathrm{Id} \otimes D)\Delta = \Delta D$$

donde $\pm\mathrm{Id}(c) := (-1)^{|c|}c$ para todo homogéneo c.

Hecho super: $Coder_s(C) := \bigoplus_p Coder_p(C)$

es super-álgebra de Lie (subálgebra de $\mathrm{End}(C)$)

9.9. Super Co-derivaciones y el complejo de Hochschild

Sea V un k-espacio vectorial, T^cV = coálgebra graduada con $|V| = 1$.

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V) \cong \bigoplus_n Coder_{-n+1}(T^cV, T^cV)$$

Hecho dual: Consideramos TW como álgebra graduada,

$$\mathrm{Der}_p(TW, TW) \cong \mathrm{Hom}_k(W, W^{\otimes p+1})$$

Si $\dim V < \infty$, tomamos $W = V^*$, pero el iso es cierto aún en dimensión arbitraria.

Ejemplo 9.10. $f : V^{\otimes 2} \to V$. Consideramos $f : T^cV \to V$ con $m(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = 0$ si $n \neq 2$ (escribimos $a_i \in V$).

$$\begin{array}{rcll}
D_f(a\otimes b) &=& f(a\otimes b) \ \in V & \\
D_f(a\otimes b\otimes c) &=& f(a\otimes b)\otimes c - a\otimes f(b\otimes c) \ \in V^{\otimes 2} & \\
D_f(a\otimes b\otimes c\otimes d) &=& f(a\otimes b)\otimes c\otimes d - a\otimes f(b\otimes c)\otimes d + a\otimes b\otimes f(c\otimes d) & \in V^{\otimes 3} \\
D_f(a\otimes b\otimes c\otimes d\otimes e) &=& f(a\otimes b)\otimes c\otimes d\otimes e - a\otimes f(b\otimes c)\otimes d\otimes e & \\
&& +a\otimes b\otimes f(c\otimes d)\otimes e - a\otimes b\otimes c\otimes f(d\otimes e) & \in V^{\otimes 4}
\end{array}$$

Esta extensión de $f : V^{\otimes 2} \to V$ primero viéndola como una aplicación $TV \to V$ (extendiendo por cero en los demás sumandos) y luego extendiendo como $D_f : TV \to TV$ verifica

$$\boxed{(D_f \otimes \mathrm{Id} + \pm \mathrm{Id} \otimes D_f)\Delta = \Delta D_f}$$

y $\boxed{p_V \circ D_f = f}$. Está unívocamente determinada por esas condiciones

Ejemplo 9.11. Si $TV = A$ es un álgebra y $f = m : A \otimes A \to A$ es la multiplicación entonces

$$D_m = b'$$

Corolario 9.12. *Son equivalentes*

- $m : A^{\otimes 2} \to A$ *es un producto asociativo en* A.
- $D_m^2 = 0$.

Demostración. D_m^2 es coderivación de T^cV, de grado -2, se corresponde con $D : V^{\otimes 3} \to V$

$$D = D_m^2|_{V^{\otimes 3}} = \Big(a \otimes b \otimes c \mapsto ab \otimes c - a \otimes bc \mapsto (ab)c - a(bc)\Big)$$

Además, si $f : V^{\otimes n} \to V$, consideramos D_f y D_m,

$$[D_f, D_m] \in Coder(T^cV)_{-n} \cong \mathrm{Hom}(V^{\otimes n+1}, V)$$

$$[D_f, D_m](a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = f(D_m(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}))$$
$$-(-1)^{|D_f|} m(D_f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}))$$
$$= f(b'(a_1 \otimes \cdots a_{n+1}))$$
$$-(-1)^{n-1} m\Big(f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes a_{n+1}) + (-1)^{n-1} a_1 \otimes f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1})\Big)$$
$$= f(b'(a_1 \otimes \cdots a_{n+1}))$$
$$+(-1)^n f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) a_{n+1}) - a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1})\Big)$$
$$= -\partial(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1})$$

$$\boxed{\boxed{\therefore [D_f, D_m] = D_{-\partial f}}}$$

$\square$

Corolario 9.13. $A = (V, m)$ *una* k*-álgebra asociativa entonces* $C^bullet(A) = \bigoplus_n \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A) \cong \bigoplus Coder{-n+1}$ *es una super-álgebra de Lie, y su diferencial, a menos de signo coincide con* $[m, -]$. *En particular* $H^\bullet(A, A)[-1]$ *es super-álgebra de Lie.*

Es decir, se tienen operaciones

$$[HH^p, HH^q] \subseteq HH^{p+q-2}$$

y verifica super Jacobi con respecto al grado $p-1$ si un elemento esta en HH^p.

Para el caso $HH^1(A) = \mathrm{Der}(A)/\mathrm{InnDer}(A)$ es una subálgebra de Lie (usual), $\mathrm{Der}(A)$ actúa en toda la cohomología, como era de esperar "derivando" la acción del grupo de automorfismos, pero esta manera nos da gratis e resultado de que $\mathrm{InnDer}(A)$ actúa trivialmente en cohomología.

Además, el corchete da operaciones adicionales, por ejemplo $[HH^2, HH^2] \subseteq HH^3$, etc.

9.10. Supercoderivaciones y el complejo de Chevalley-Eilenberg

Sea V un k-espacio vectorial (de dimensión arbitraria), $\Lambda^c V$= los tensores completamente antisimétricos. Afirmamos que $\Lambda^c V$ es una subcoálgebra de $T^c V$, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\Delta(+xyz) &= +1 \otimes xyz + x \otimes yz + xy \otimes z + xyz \otimes 1 \\
\Delta(-xzy) &= -1 \otimes xzy - x \otimes zy - xz \otimes y - xzy \otimes 1 \\
\Delta(-yxz) &= -1 \otimes yxz - y \otimes xz - yx \otimes z - yxz \otimes 1 \\
\Delta(+yzx) &= +1 \otimes yzx + y \otimes zx + yz \otimes x + yzx \otimes 1 \\
\Delta(+zxy) &= +1 \otimes zxy + z \otimes xy + zx \otimes y + zxy \otimes 1 \\
\Delta(-zyx) &= -1 \otimes zyx - z \otimes yx - zy \otimes x - zyx \otimes 1
\end{aligned}$$

y podemos chequear que si sumamos todas estas ecuaciones tenemos que la deconcatenación de un elemento en Λ^{c3} nos da un elemento en $\Lambda^c \otimes \Lambda^c$. Dejamos el caso general como ejercicio.

Al igual que en el caso de $T^c V$, podemos mostrar que hay una biyección

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^c V, V) \cong Coder(\Lambda^c V)$$

en particular, el complejo de Chevalley a coeficientes en $\mathfrak{g}$ es de la forma

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^c \mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \cong Coder(\Lambda^c \mathfrak{g})$$

y su diferencial se puede definir como la única $d \in Coder_{-1}(\Lambda^c V)$ tal que $d|_{\Lambda^2\mathfrak{g}} = [-,-] : \Lambda^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. También es posible mostrar que $d^2 = 0 \iff [-,-]$ verifica Jacobi.

Notar que automáticamente obtenemos que$(\Lambda\mathfrak{g}^*, d^*)$ es una d.g. algebra

Capítulo 10

Álgebras de Koszul

10.1. Álgebras cuadráticas y el candidato a resolución

Las álgebras de Koszul forma una clase muy interesante de álgebras para las cuales se cuenta con una resolución pequeña que permite hacer cuentas de manera muy efectiva. El ejemplo paradigmático es el álgebra simétrica, o anillo de polinomios, pero hay muchísimas álgebras -tanto conmutativas como no conmutativas- que admiten resoluciones pequeñas y que se pueden calcular, en cierto sentido, de manera análoga al caso del anillo de polinomios. En el caso del anillo de polinomios, en la resolución del módulo trivial está fuertemente involucrada el álgebra exterior. Esto será también una situación general: para la familia de álgebras de Koszul, éstas siempre vienen de a pares, una en dualidad con la otra.

Comenzamos con la noción de álgebra cuadrática: Una k-álgebra presentada por generadores de un espacio vectorial V módulo relaciones, donde

$$A = TV/(R), \qquad R \subseteq V^{\otimes 2}$$

diremos que A es un álgebra con relaciones cuadráticas.

Primeros ejemplos:

- $k[x, y] = T(k \oplus ky)/(x \otimes y - y \otimes x)$
- $\Lambda(x, y) = T(kx \oplus ky)/(x \otimes x, x \otimes y + y \otimes x, y \otimes y)$
- $A = TV$ $(R = 0)$;
- $A = k \oplus V$ con $V \cdot V = 0$ $(R = V^{\otimes 2})$
- si $q \in k^{\times}$, $k_q[x, y] = k\langle x, y | xy = qyx\rangle$, se llama el *plano cuántico* de parámetro q, $R = k(x \otimes y - qy \otimes x)$.

Si $A = TV/(R)$ con $R \subseteq V^{\otimes 2}$ es un álgebra cuadrática, entonces es graduada y conexa,

$$A = k \oplus V \oplus \frac{V^{\otimes 2}}{R} \oplus \frac{V^{\otimes 3}}{V \otimes R + R \otimes V} \oplus \cdots$$

Se tiene la aumentación $\epsilon : A \to k$ inducida por

$$TV \to k$$

$$v \mapsto 0$$

k es A-módulo, queremos encontrar una resolución lo más pequeña posible de k como A-módulo. Empezamos por $\epsilon : A \to k \to 0$, como $\mathrm{Ker}\epsilon = \langle V \rangle$, podemos continuar con

$$A \otimes V \to A \to k \to 0$$

$$a \otimes v \mapsto av$$

cómo continuamos? Como $R \subseteq V^{\otimes 2}$, consideramos el mapa

$$A \otimes V^{\otimes 2} \to A \otimes V$$

$$a \otimes v \otimes w \mapsto av \otimes w$$

Si hacemos la composición

$$A \otimes V^{\otimes 2} \to A \otimes V \to A$$

$$a \otimes v \otimes w \mapsto av \otimes w \mapsto avw$$

no necesariamente da cero, pero si lo restringimos a $A \otimes R$ sí, pues

$$A \otimes R \longrightarrow A \otimes V \longrightarrow A$$

$$a \otimes (\sum_i v_i \otimes w_i) \mapsto \sum_i av_i \otimes w_i \mapsto a(\sum_i v_i w_i) = 0$$

pues $\sum_i v_i \otimes w_i \in R$ y por lo tanto

$$0 = \sum_i v_i w_i \in TV/(R)$$

Por ahora tenemos un complejo

$$A \otimes R \to A \otimes V \to A \to k \to 0$$

Tomamos $A = TV$, $R = 0$, el complejo construido da simplemente

$$0 \to TV \otimes V \to TV \to k \to 0$$

es una resolución!

Si $A = k[x,y] = T(kx \oplus ky)/(x \otimes y - y \otimes x)$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes R \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \otimes V \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & k \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
A\otimes(x\otimes y - y\otimes x) \arrow[r] & A\otimes x \oplus A\otimes y \arrow[r] & A \arrow[r] & k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$a\otimes(x\otimes y - y\otimes x) \longmapsto ax\otimes y - ay\otimes x \qquad\qquad a \longmapsto \epsilon(a)$$

$$a\otimes x + b\otimes y \longmapsto ax + by$$

Si $A = k \oplus V$ con $V \cdot V = 0$, o sea $R = V^{\otimes 2}$,

$$\begin{tikzcd}
A \otimes R \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \otimes V \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & k \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
(k \oplus V) \otimes V^{\otimes 2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & (k \oplus V) \otimes V \arrow[r] \arrow[d, equal] & (k \oplus V) \arrow[r] \arrow[d, equal] & k \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
k \otimes V^{\otimes 2} \arrow[ddr, "\cong"] & k \otimes V \arrow[ddr, "\cong"] & k \arrow[ddr, "\cong"] & & \\
\oplus & \oplus & \oplus & & \\
V \otimes V^{\otimes 2} & V \otimes V & V & k &
\end{tikzcd}$$

es exacto! Â¿cómo continuar?

$$? \to A \otimes R \to A \otimes V \to A \to k \to 0$$

Podemos definir

$$R_3 := (R \otimes V) \cap (V \otimes R) \subseteq V^{\otimes 3}$$

y entonces la restricción a $A \otimes R_3$ nos da un morfismo en el objeto deseado:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes R_3 \arrow[r, dashed] \arrow[d, hook] & A \otimes R \arrow[d, hook] \\
A \otimes V^{\otimes 3} \arrow[r] & A \otimes V^{\otimes 2}
\end{tikzcd}$$

$$a \otimes u \otimes v \otimes w \longmapsto au \otimes v \otimes w$$

En el ejemplo $k[x,y] = TV/(x \otimes y - y \otimes x)$, $R_3 = 0$, así que tenemos el candidato a resolución

$$0 \to A \otimes R \to A \otimes V \to A \to 0$$

En tres variables,

$$k[x,y,z] = T(kx \oplus ky \oplus kz)/(x\otimes y\text{-}y\otimes x,\ x\otimes z\text{-}z\otimes x,\ y\otimes z\text{-}z\otimes y),$$

$$R_3 = kVol_3, \qquad Vol_3 = \sum_{\sigma\in S_3}(-1)^\sigma x_{\sigma 1}\otimes x_{\sigma 2}\otimes x_{\sigma 3}$$

y tenemos la resolución de Koszul de $k[x,y,z]$, llamando $x\wedge y = x\otimes y - y\otimes x$, etc

$$A\otimes Vol_3 \to A\otimes(kx\wedge y\oplus k\otimes y\wedge z\oplus k\otimes z\wedge x)\to A\otimes V\to A\to k\to 0$$

Motivados por esta construcción, definimos:

$$R_0 = k, \quad R_1 = V, \quad R_2 = R\subseteq V^{\otimes 2}$$

y para $n\geq 2$:

$$\boxed{R_n := \bigcap_{i+j+2=n} V^{\otimes i}\otimes R\otimes V^{\otimes j}} \subseteq V^{\otimes n}$$

y $d : A\otimes R_n \to A\otimes R_{n-1}$ definido restricción de $A\otimes V^{\otimes n}\to A\otimes V^{\otimes n-1}$:

$$\begin{tikzcd} A\otimes R_n \arrow[r, dashed, "d"] \arrow[d, hook] & A\otimes R_{n-1} \arrow[d, hook] \\ A\otimes V^{\otimes n} \arrow[r] & A\otimes V^{\otimes n-1} \end{tikzcd}$$

$$a\otimes v_1\otimes\cdots\otimes v_n \longmapsto av_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_n$$

Definición 10.1. Para $A = TV/(R)$ con $R\subseteq V^{\otimes 2}$, el complejo

$$\cdots\to A\otimes R_n\to\cdots\to A\otimes R_3\to A\otimes R\to A\otimes V\to A\to k\to 0$$

se denomina el **complejo de Koszul** de A.

Diremos que A es (cuadrática) Koszul si su complejo de Koszul es exacto.

Observación 10.2. Cada proyectivo de la resolución en el lugar n (es libre) es *graduado y generado en grado* n, pues es $A\otimes R_n$. Estas condición es otra posible definición (que resulta equivalente) de Koszulidad.

Ejemplos:

1. $k[x_1,\dots,x_n]$, $k\oplus V$ y TV.
2. El plano cuántico: si $q\in k^\times$, $A = k_q[x,y] = k\{x,y\}/(xy-qyx)$ es Koszul, la resolución tiene largo 2:

$$0\to A\otimes(x\otimes y - qy\otimes x)\longrightarrow A\otimes x\oplus A\otimes y\longrightarrow A\to k\to 0$$

$$a\otimes(x\otimes y - qy\otimes x)\mapsto ax\otimes y - qay\otimes x$$

3. Uno menos trivial es $A = k\langle a, b, c, d\rangle$ con relaciones

$$ab = qba,\ ac = qca,\ ad - da = (q - q^{-1})bc,$$

$$bc = cb,\ bd = qdb,\ cd = qdc$$

4. $A = k\{x, y\}/(x^2, yx)$ NO es Koszul.
   (Es Noetheriana de un lado pero no del otro!)

Observación 10.3. A Koszul $\Rightarrow \mathrm{Tor}_n^A(k, k) = R_n$, $\mathrm{Ext}_A^n(k, k) = (R_n)^*$ (en particular tienen la misma dimensión).

Sabemos que $\mathrm{Ext}_A^\bullet(k, k)$ es un álgebra, es $k \oplus V \oplus R \oplus R_3 \oplus \cdots$ una coálgebra? Se puede comprobar que efectivamente

$$R_\bullet := \bigoplus_{n\geq 0} R_n \subseteq T^c V$$

es sub-coálgebra con la deconcatenación. Más fácil, veremos el álgebra dual-Koszul $A^!$ asociada a A

10.2. El dual de Koszul

$A = TV/R$ con $R \subseteq V^{\otimes 2}$ es graduada

$$A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n = k \oplus V \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n \oplus \cdots$$

donde $A_2 = V^{\otimes 2}/R$ y para $n > 2$,

$$A_n = \frac{V^{\otimes n}}{\sum\limits_{i+j=n-2} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j}}$$

El morfismo natural

$$V^* \otimes V^* \to (V \otimes V)^*$$

$$\phi \otimes \psi \mapsto \Big(v \otimes v' \mapsto \phi(v)\psi(v')\Big)$$

siempre inyectivo, es iso si $\dim_k V < \infty$. Si **asumimos** $\dim_k V < \infty$ e identificamos $V^* \otimes V^* \cong (V \otimes V)^*$. De la s.e.c.

$$0 \to R \to V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}/R \to 0$$

tenemos

$$0 \to \left(V^{\otimes 2}/R\right)^* \to (V^*)^{\otimes 2} \to R^* \to 0$$

Identificamos $(V^{\otimes 2}/R)^* \cong R^0 \subset (V^*)^{\otimes 2}$.

Definición 10.4. Si $A = TV/(R)$ se define el **dual Koszul** de A como

$$\boxed{A^! := T(V^*)/(R^0)}$$

Observación 10.5. $A^!$ es cuadrática

Observación 10.6. $\dim V < \infty \Rightarrow (A^!)^! \cong A$ (via $V^{**} \cong V$)

Ejemplo 10.7.

A	$A^!$
$S(V)$	$\Lambda(V^*)$
TV	$k \oplus V^*$
$k\langle x, y \mid xy = qyx\rangle$	$k\langle X, Y \mid X^2 = 0 = Y^2, XY = -q^{-1}YX\rangle$

Observación 10.8. justo en estos ejemplos $\dim A^! < \infty$, eso significará $gldimA < \infty$

Proposición 10.9. $\dim_k V < \infty \Rightarrow A^!$ *es el dual graduado de* $R_\bullet$ *y viceversa:*

$$A^! = \bigoplus_{n\geq 0} R_n^*, \qquad \bigoplus_{n\geq 0} R_n \cong \bigoplus_{n\geq 0} (A_n^!)^* =: A^{¡}$$

Demostración: Primero observamos

$$A^! = k \oplus V^* \oplus A_2^! \oplus \cdots \oplus A_n^! \oplus \cdots$$

donde

$$A_2^! = (V^*)^{\otimes 2}/R^0 \cong R^* \boxed{\Rightarrow A_2^{!\,*} \cong R^{**} \cong R}$$

$$\text{y para } n > 2: \qquad A_n^! = \frac{(V^*)^{\otimes n}}{\sum_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i} \otimes R^0 \otimes (V^*)^{\otimes j}}$$

$$A^! = k \oplus V^* \oplus R^* \oplus \cdots \oplus \frac{(V^*)^{\otimes n}}{\sum_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i} \otimes R^0 \otimes (V^*)^{\otimes j}} \oplus \cdots$$

Veamos unas fórmulas de álgebra lineal para mostrar

$$\left(\frac{(V^*)^{\otimes n}}{\sum_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i} \otimes R^0 \otimes (V^*)^{\otimes j}}\right)^* \cong \bigcap_{i+j=n-2} V^{**\otimes i} \otimes R^{**} \otimes V^{**\otimes j}$$

Supondremos ahora todos los espacios vectoriales de dimensión finita.

$$S, T \subseteq V \Rightarrow 0 \to (S+T) \xrightarrow{i} V \to \frac{V}{S+T} \to 0$$

$$\Rightarrow 0 \to \left(\frac{V}{S+T}\right)^* \to V^* \xrightarrow{i^*} (S+T)^* \to 0$$

Pero $i^* = |_{S+T} \Rightarrow \mathrm{Ker}(i^*) = (S+T)^0 = S^0 \cap T^0$ y tenemos

$$0 \to S^0 \cap T^0 \to V^* \xrightarrow{i^*} (S+T)^* \to 0$$

Ahora veamos fórmulas similares pero junto con $\otimes$.

Sean $S \subset V$, W y W' dos espacios vectoriales,

$$0 \to S \to V \to V/S \to 0$$

$$0 \to S^0 \to V^* \to S^* \to 0$$

$+$ exactitud $\otimes$

$$0 \longrightarrow W \otimes S \otimes W' \longrightarrow W \otimes V \otimes W' \longrightarrow W \otimes V/S \otimes W' \longrightarrow 0$$

luego

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (W \otimes V/S \otimes W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & (W \otimes V \otimes W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & (W \otimes S \otimes W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & W^* \otimes (V/S)^* \otimes (W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & W^* \otimes V^* \otimes (W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & W \otimes S^* \otimes (W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & W^* \otimes S^0 \otimes (W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & W^* \otimes V^* \otimes (W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & W \otimes S^* \otimes (W')^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & W^* \otimes S^0 \otimes (W')^* \arrow[r] & W^* \otimes V^* \otimes (W')^* \arrow[r] & \dfrac{W^* \otimes V^* \otimes (W')^*}{W^* \otimes S^0 \otimes (W')^*} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y si volvemos a dualizar

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \left(\dfrac{W^* \otimes V^* \otimes (W')^*}{W^* \otimes S^0 \otimes (W')^*}\right)^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & (W^* \otimes V^* \otimes (W')^*)^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & \left(W^* \otimes S^0 \otimes (W')^*\right)^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \left(W^* \otimes S^0 \otimes (W')^*\right)^0 \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & W^{**} \otimes V^{**} \otimes (W')^{**} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & \left(W^* \otimes S^0 \otimes (W')^*\right)^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \left(W^* \otimes S^0 \otimes (W')^*\right)^0 \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & W^{**} \otimes V^{**} \otimes (W')^{**} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & W^{**} \otimes (S^0)^* \otimes (W')^{**} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \left(W^* \otimes S^0 \otimes (W')^*\right)^0 \arrow[r] & W \otimes V \otimes W' \arrow[r] & W \otimes (V/S) \otimes W' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Concluimos

$$\boxed{\left(W^* \otimes S^0 \otimes (W')^*\right)^0 \cong W \otimes S \otimes W'}$$

Aplicación a $A^!$

$A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$,

$$0 \to \sum_{i+j=n-2} V^{\otimes i}\otimes R\otimes V^{\otimes j} \to V^{\otimes n} \to A_n \to 0$$

$A^! = \bigoplus_{n\geq 0} A^!_n$,

$$0 \to \sum_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i}\otimes R^0\otimes (V^*)^{\otimes j} \to (V^*)^{\otimes n} \to A^!_n \to 0$$

Dualizando,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (A^!_n)^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & \big((V^*)^{\otimes n}\big)^* \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & \Big(\sum_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i}\otimes R^0\otimes (V^*)^{\otimes j}\Big)^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigcap_{i+j=n-2} \big((V^*)^{\otimes i}\otimes R^0\otimes (V^*)^{\otimes j}\big)^0 \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & V^{\otimes n} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & \Big(\sum_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i}\otimes R^0\otimes (V^*)^{\otimes j}\Big)^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigcap_{i+j=n-2} V^{\otimes i}\otimes R\otimes V^{\otimes j} \arrow[r] & V^{\otimes n} \arrow[r] & \Big(\sum_{i+j=n-2} (V^*)^{\otimes i}\otimes R^0\otimes (V^*)^{\otimes j}\Big)^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Reencontramos entonces

$$A^{!\,*}_n \cong R_n = \bigcap_{i+j+2=n} V^{\otimes i}\otimes R\otimes V^{\otimes j} \subseteq V^{\otimes n}$$

Corolario 10.10. $A^! = \bigoplus_n A^!_n$ *es cociente de* $TV \Rightarrow$ *su dual graduado*

$$\Rightarrow A^{¡} := \bigoplus_n (A^!_n)^* = \bigoplus_n R_n \subseteq T^cV$$

es sub co-álgebra de T^cV *con la deconcatenación.*

10.3. Koszulidad y la resolución standard

Recordamos la resolución de A como A-bimódulo k-simétrico:

$$\cdots A\otimes A^{\otimes n}\otimes A \xrightarrow{b'} \cdots \to A\otimes A\otimes A \xrightarrow{b'} A\otimes A \xrightarrow{m} A \to 0$$

El objeto que aparece en la complejo de Koszul es

$$A^{¡}_n = R_n = \bigcap_i V^{\otimes i}\otimes R\otimes V^{n-i-2} \subseteq V^{\otimes n} \subseteq A^{\otimes n}$$

lo que nos induce un morfismo de A-bimódulos

$$A \otimes A^{¡}_n \otimes A \hookrightarrow A \otimes V^{\otimes n} \otimes A \hookrightarrow A \otimes A^{\otimes n} \otimes A$$

Nos preguntamos qué diferencial poner (si es que se puede) en en $A \otimes A^{¡}_\bullet \otimes A$ para tener un morfismo de complejos.

$$\begin{tikzcd}
\cdots & A \otimes A^{¡}_n \otimes A \arrow[rr, dashed, "?"] \arrow[d, equal] & & A \otimes A^{¡}_{n-1} \otimes A \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots & A \otimes \big(\bigcap\limits_{i+j=n-2} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{j}\big) \otimes A \arrow[d, hook] & & A \otimes \big(\bigcap\limits_{i+j=n-3} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{j}\big) \otimes A \arrow[d, hook] & \cdots \\
\cdots & A \otimes V^{\otimes n} \otimes A \arrow[d, hook] & & A \otimes V^{\otimes n-1} \otimes A \arrow[d, hook] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A \otimes A^{\otimes n} \otimes A \arrow[rr, "b'", "=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i b_i"'] & & A \otimes A^{\otimes n-1} \otimes A \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Notar que

$$\forall 0 < i < n: \ b_i|_{A \otimes R_n \otimes A} = b_i|_{A \otimes V^{\otimes i-1} \otimes R \otimes V^{\otimes j} \otimes A} \equiv 0!$$

$\therefore$ el diferencial está inducido por

$$A \otimes V^{\otimes n} \otimes A \stackrel{d=b'|}{\longrightarrow} A \otimes V^{\otimes n-1} \otimes A$$

$$\begin{aligned} a \otimes v_1 \otimes \cdots v_n \otimes b \mapsto\ & a v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots v_n \otimes b \\ & +(-1)^n a \otimes v_1 \otimes \cdots v_{n-1} \otimes v_n b \end{aligned}$$

Observamos que el sumando de la izquierda es exactamente el diferencial familiar de Koszul, el de la derecha es el análogo, pero con signo alternado. En grados bajos:

$$\cdots \longrightarrow A \otimes R \otimes A \longrightarrow A \otimes V \otimes A \longrightarrow A \otimes A \xrightarrow{m} A$$

$$\sum a \otimes r \otimes r' \otimes b \longmapsto \sum ar \otimes r' \otimes b + \sum a \otimes r \otimes r'b$$

$$a \otimes v \otimes b \longmapsto av \otimes b - a \otimes vb$$

Teorema 10.11. *Son equivalentes:*

1. *El complejo* $K_{bi}(A) = A \otimes A^{¡}_\bullet \otimes A$ *es acíclico,*

$$\cdots \longrightarrow A \otimes R_3 \otimes A \longrightarrow A \otimes R \otimes A \longrightarrow A \otimes V \otimes A \longrightarrow A \otimes A \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

2. *El complejo de Koszul a izq.* $K_\ell(A) = A \otimes A^{¡}_{\bullet}$ *es acíclico,*

$$\cdots \longrightarrow A \otimes R_3 \longrightarrow A \otimes R \longrightarrow A \otimes V \longrightarrow A \xrightarrow{\epsilon} k$$

3. *El complejo del otro lado* $K_r(A) = A^{¡}_{\bullet} \otimes A$ *es acíclico.*

$$\cdots \longrightarrow R_3 \otimes A \longrightarrow R \otimes A \longrightarrow V \otimes A \longrightarrow A \xrightarrow{\epsilon} k$$

4. *La inclusión* $A \otimes A^{¡}_{\bullet} \otimes A \to C_\bullet(A, A)$ *es un q-iso.*

Corolario 10.12. *A Koszul* $\Rightarrow \forall M \in$ *A-Mod, M admite la resolución (funtorial)*

$$K_{bi}(A) \otimes_A M \cong A \otimes R_\bullet \otimes M$$

y gldimA $\leq$ *el máximo grado* $n/\ A^!_n \neq 0$.

Pero $\mathrm{Ext}^n_A(k, k) = A^!_n$, por lo tanto también concluimos

Corolario 10.13. $\dim V < \infty$*, A Koszul*

$$\Rightarrow gldim(A) < \infty \iff \dim_k A^! < \infty$$

En ese caso, gldim(A)= el máximo grado tal que n tal que $A^!_n \neq 0$.

A su vez, utilizando las equivalencias con el complejo $K_{bi}(A)$ también claramente obtenemos

Corolario 10.14. *A Koszul a izq* $\iff$ *A Koszul a derecha*

10.4. Koszulidad de A vs de $A^!$

Nos situamos en la condición $A = TV/(R)$, $\dim V < \infty$. El complejo de Koszul de A a izquierda es

$$K_\ell(A) = (A \otimes A^{¡}_{\bullet}, d_A)$$

En grado homológico n tiene $A \otimes A^{¡}_n$ y en grado interno $n+m$: $A_m \otimes A^{¡}_n$. El complejo de $A^!$ a derecha es

$$K_r(A^!) = (A^*_\bullet \otimes A^!, d_{A^!})$$

en grado homológico m es $A^*_m \otimes A^!$ y en grado interno $m+n$ tiene $A^*_m \otimes A^!_n$

Observamos $A^*_m \otimes A^! = (A_m \otimes A^{¡}_n)^*$ y $d_{A^!} = (d_A)^*$

Corolario 10.15. *A es Koszul* $\iff$ $A^!$ *lo es.*

Ejemplo 10.16. ΛV, $k_q[x, y]^! = k\langle x, y : x^2 = 0 = y^2, xy = -q^{-1}yx\rangle$, son Koszul.

10.5. Construcciones bar y cobar

Definiremos un funtor B (bar) de la categoría de álgebras aumentadas $\epsilon : A \to k$ en coálgebras d.g. Fijamos $\epsilon : A \to k$ un morfismo de álgebras (aumentación)

$$A = k1 \oplus \mathrm{Ker}\epsilon = k1 \oplus \overline{A}$$

$\overline{A} = A/k1 \cong \mathrm{Ker}\epsilon$.

$B(A)$ **como coálgebra:** $B(A) := T^c\overline{A}$ la coálgebra tensorial en $\overline{A}$ con la deconcatenación como comultiplicación

$$\Delta(a_1|\cdots|a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_1|\cdots|a_i \otimes a_{i+1}|\cdots|a_n \in T^c\overline{A} \otimes T^c\overline{A}$$

esta notación es el origen del nombre "bar".

$$\Delta(a_1|\cdots|a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_1|\cdots|a_i \otimes a_{i+1}|\cdots|a_n \in \bigoplus_{i+j=n} (T^c\overline{A})_i \otimes (T^c\overline{A})_j$$

convención: $a_0 = 1 = a_{n+1}$. Es una coálgebra **graduada**.

Ejemplo 10.17. si $a|b|c \in \overline{A}^{\otimes 3} \subset T^c\overline{A}$,

$$\Delta a|b|c = 1 \otimes a|b|c + a \otimes b|c + a|b \otimes c + a|b|c \otimes 1$$

Hecho: Si consideramos la graduación $deg\overline{A} = 1$, entonces

$$b'(a_1|\cdots|a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_1|\cdots|a_i a_{i+1}|\cdots|a_n, \qquad b'(a) = 0$$

es una super co-derivación.

(Notar $a_i, a_{i+1} \in \mathrm{Ker}\epsilon \Rightarrow a_i a_{i+1} \in \mathrm{Ker}\epsilon \Rightarrow b'$ bien definida.

Ejemplo si $a|b|c \in \overline{A}^{\otimes 3} \subset T^c\overline{A}$,

$$(b' \otimes 1 \pm 1 \otimes b')\Delta(a|b|c)$$

$$= (b' \otimes 1 \pm 1 \otimes b')\Big(1 \otimes a|b|c + a \otimes b|c + a|b \otimes c + a|b|c \otimes 1\Big)$$
$$= b'(1) \otimes a|b|c + b'(a) \otimes b|c + b'(a|b) \otimes c + b'(a|b|c) \otimes 1$$
$$+1 \otimes b'(a|b|c) - a \otimes b'(b|c) + a|b \otimes b'(c) - a|b|c \otimes b'(1)$$

$$= +ab \otimes c + ab|c \otimes 1 - a|bc \otimes 1$$

$$+1 \otimes ab|c - 1 \otimes a|bc - a \otimes bc$$

$$\Delta(b'(a|b|c)) = \Delta(ab|c) - \Delta(a|bc)$$
$$= ab|c \otimes 1 + ab \otimes c + 1 \otimes ab|c - a|bc \otimes 1 - a \otimes bc - 1 \otimes a|bc$$

Hecho: $H_\bullet(T^c\overline{A}, b') = \mathrm{Tor}_\bullet^A(k,k)$, luego $\mathrm{Tor}_\bullet^A(k,k)$ es naturalmente una coálgebra.

Demostración. Para una k-álgebra general (no necesariamente aumentada) tenemos

$$Deg(A)_n := \langle a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1} \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n} A \otimes A^{i-1} \otimes k1 \otimes A^{n-i} \otimes A \subseteq A \otimes A^{\otimes n} \otimes A = C_n(A)$$

es un subcomplejo (de todas las degeneraciones), y el cociente

$$\overline{C}_n(A) := C_n(A)/Deg_n(A) \cong A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes A$$

donde $\overline{A} = A/k1$ como k-módulo, es un complejo con la misma homología (hay un ejercicio guiado para este caso particular, aunque es un resultado general de objetos simpliciales). Lo usamos como resolución de A como A^e-módulo.

$$\cdots \to A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes A \to \cdots \to A \otimes \overline{A} \otimes A \to A \otimes A \to A \to 0$$

En el caso A aumentada tomamos $\equiv$Kerϵ. Tensorizando por $- \otimes_A k$ tenemos

$$\cdots \to A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes k \to \cdots \to A \otimes \overline{A} \otimes k \to A \otimes k \to k \to 0$$

$$d(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1$$
$$+ a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes \epsilon(a_n)$$

o bien

$$\cdots \to A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \to \cdots \to A \otimes \overline{A} \to A \nrightarrow k \to 0$$

Es una resolución de k. Al calcular $k \otimes_A -$ queda

$$\cdots \to k \otimes \overline{A}^{\otimes n} \to \cdots \to k \otimes \overline{A} \to k \to 0$$

que es isomorfa a $(T^c\overline{A}, b')$. Si $A = TV/(R)$ es cuadrática Koszul, entonces la inclusión

$$\begin{tikzcd} R_\bullet \arrow[r, equal] \arrow[rrr, bend left] & A^{¡} \arrow[r, hook] & T^cV \arrow[r, hook] & (T^c\overline{A}, b') = B(A) \end{tikzcd}$$

es un quasi-isomorfismo, donde a $R_\bullet$ se la considera una coálgebra d.g. con $d = 0$. $\square$

Proposición 10.18. *$A^{¡} \hookrightarrow B(A)$ es un q-iso si y solo si A es Koszul.*

Demostración. Si A es Koszul $\Rightarrow$ ok. Recíprocamente, si $A^{¡} \hookrightarrow B(A)$ es un q-iso queremos ver que

$$(A \otimes A^{¡}_{\bullet}, d_K) \to (A \otimes \overline{A}^{\otimes \bullet}, b')$$

es un q-iso. Equivale a ver que el cono es acíclico. Recordamos $Co = (A \otimes A^{¡}_{\bullet+1} \oplus A \otimes \overline{A}^{\bullet}, d)$. Si filtramos por grado en $A^{¡}_{\bullet}$ y grado en $\overline{A}^{\otimes \bullet}$ entonces

$$gr(d_K) = 0 = \mathrm{Id}_A \otimes 0; \; gr(b') = \mathrm{Id}_A \otimes b'$$

es un q-iso, luego su cono es acíclico. $\therefore$ el cono original es filtrado con graduado asociado exacto, luego exacto. En consecuencia el morfismo original era un q-iso. $\square$

Construcción cobar

Dualmente, si C es coálgebra co-aumentada, i.e. está dado $k \to C$ morfismo de coálgebras, es decir, C tiene un elemento e tal que $\Delta e = e \otimes e$. Fijamos una coálgebra coaumentada y su coaumentación. Recordamos que el axioma de counidad dice

$$(\epsilon \otimes \mathrm{Id})\Delta(c) = 1 \otimes c$$

luego $\epsilon(e) = 1$. Descomponemos C como suma directa de espacios vectoriales

$$C \;=\; \overline{C} \;\oplus\; ke$$

$$c \mapsto (c - \epsilon(c)e) + \epsilon(c)e$$

donde $\overline{C} = \mathrm{Ker}\epsilon$. Se define

$$\Omega(C) := T\overline{C}$$

el **álgebra** tensorial en $\overline{C}$, es una k-álgebra graduada con $\deg \overline{C} = 1$.

Recordar que (C, Δ_C) es una coálgebra. Se define $d_\Delta : \overline{C} \to \overline{C} \otimes \overline{C}$ de la siguiente forma: si

$$\Delta c = \sum_i c'_i \otimes c''_i \qquad \in C \otimes C$$

entonces se define

$$d_\Delta c = \sum_i (c'_i - \epsilon(c'_i)e) \otimes (c''_i - \epsilon(c''_i)e \qquad \in \overline{C} \otimes \overline{C}$$

Ejercicio: $d_\Delta c = \Delta c - (e \otimes c + c \otimes e)$.

Se define un diferencial de grado $+1$ como la única super-derivación

$$\begin{tikzcd}
\overline{C} \arrow[r, "d_\Delta"] \arrow[d] & \overline{C}^{\otimes 2} \subset T\overline{C} \\
T\overline{C} \arrow[ur, dashed, "d"] &
\end{tikzcd}$$

$$d(\omega \otimes \eta) = d(\omega) \otimes \eta + (-1)^{deg\omega} \omega \otimes d(\eta)$$

$$\boxed{\Omega(C) := (T\overline{C}, d_\Delta)}$$

Finalizamos recolectando, sin demostración, algunas propiedades análogas a la construcción cobar.

Proposición 10.19. *1.* $d_\Delta^2 = 0 \iff \Delta$ *es coasociativa.*

2. si $A = TV/(R)$ *y* $C = R_\bullet = A^{¡} \subseteq T^c V = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$.

C es coaumentada con $e = 1$*,*

$$\overline{C} = V \oplus R \oplus \cdots \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow V \ \rightsquigarrow\ T\overline{C} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow TV$$

se tiene $\Omega(A^{¡}) \to A$ *via la composición*

$$\begin{tikzcd} \Omega(C) \arrow[r, equal] \arrow[rrrr, bend left, two heads] & T\overline{C} \arrow[r, two heads] & TV \arrow[r, two heads] & TV/(R) \arrow[r, equal] & A \end{tikzcd}$$

3. *A es Koszul* $\iff$ $(\Omega(A^{¡}), d) \to (A_\bullet, 0)$ *es un q-iso.*

Capítulo 11

Categorías derivadas y trianguladas

Dados un morfismo de coplejos $f : M \to N$, vimos la construcción de su cono, y que el mismo aparece en una sucesión exacta corta entre M y N (a menos de suspensón), pero que además se continúa indefinidamente hacia la izquierda y hacia la derecha, "pegándola" con el morfismo f, que justamente coincide en homología con el morfismo de conexión δ de la sucessión exacta larga asociada a la sucesión exacta corta. Esta construcción se puede axiomatizar y es lo que da lugar a las categorías trianguladas, que son categorías con un funtor de traslación o suspensión, y una noción de "cono" de un morfismo, satisfaciendo ciertas propiedades motivadas por las del cono de un morfismo de complejos. Los ejemplos más importantes de categorías trianguladas son las llamadas categorías derivadas, que son esencialmente categorías de complejos, en donde los quasi-isomorfismos se fuerzan a que sean isomorfismos categóricos. Si bien daremos la construcción a partir de la categoría de complejos de A-módulos para un anillo A, similares construcciones se pueden hacer para complejos de una categoría abeliana arbitraria, como puede ser la categoría de haces coherentes sobre un esquema. Por esta razón, el contenido de ese capítulo puede también ser considerado introductorio a los métodos homológicos en geometría algebraica. Las categorías derivadas son el dominio natural de los funtores homológicos.

11.1. Categorías derivadas y categoría de homotopía

Denotamos como siempre Chain(A)= la categoría de complejos de A-módulos, comenzaremos definiendo a categoría derivada a partir de una propiedad universal:

Definición 11.1. A anillo, $D(A)$ es la categoría que satisface

- hay un funtor canónico $Q : \mathrm{Chain}(A) \to D(A)$ que verifica $Q(f)$ es un isomorfismo para todo q-iso f.

- Si $F : \mathrm{Chain}(A) \to \mathcal{C}$ es un funtor tal que $F(f)$ es un iso para todo q-iso f, entonces existe una única factorización

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Chain}(A) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{C} \\ D(A) \arrow[ur, "\exists! \widehat{F}"'] & \end{tikzcd}$$

Claramente si existe una tal $D(A)$, es única a menos de isomorfismo (único) de categorías.

Ejemplo 11.2.

$$H_\bullet : \mathrm{Chain}(A) \to \prod_{n\in\mathbb{Z}} A - Mod$$

$$M \mapsto \{H_n(M)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

está definido en $D(A)$

Si A es semisimple, entonces $H_\bullet(M)$ es q-iso a M, y el funtor de homologí induce un isomorfismo $H_\bullet : D(A) \cong \prod_{n\in\mathbb{Z}} A - Mod$; en particular $D(A)$ resulta en este caso una categoría abeliana. Pero en geneal $D(A)$ no es una categoría abeliana, sino solamente aditiva. Mencionamos sin demostración el siguiente:

Hecho: $D(A)$ es abeliana $\iff$ A es semisimple.

Factorización por homotopía y el Mapping cylinder

Mostraremos que un funtor $Q : \mathrm{Chain}(A) \to D(A)$ necesariamente se factoriza por la categoría de homotopía:

Lema 11.3. *Sea $Q : \mathrm{Chain}(A) \to D(A)$ el funtor canónico, si $f \sim_h g \Rightarrow Q(f) = Q(g)$.*

Para esto veremos el cilindro de una flecha. Si $f : X \to Y$ se define

$$cyl(f) = X \oplus X[-1] \oplus Y$$

con diferencial

$$d(x, x', y) = (dx + x', -dx', dy - fx')$$

y para un objeto, se define $cyl(X) = cyl(\mathrm{Id}_X)$.

Notemos que tanto $i_1 : X \to cyl(X)$, $x \mapsto (x, 0, 0)$ como $i_2 : X \to cyl(X)$, $x \mapsto (0, 0, x)$ son morfismos de complejos. Por otra parte, ninguna de las proyecciones $(x, x', x'') \mapsto x$ ni $(x, x', x'') \mapsto x''$ conmuta con el diferencial. Sin embargo

$$p : cyl(X) \to X$$

$$(x, x', x'') \mapsto x + x''$$

si es un morfismo de complejos. Además, claramente

$$p \circ i_1 = \mathrm{Id}_X = p \circ i_2$$

Veamos que tanto $i_1 \circ p$ como $i_2 \circ p$ son homotópicas a la identidad de $cyl(X)$.

Demostración.

$$(i_1 \circ p)(x, x', x'') = i_1(x + x'') = (x + x'', 0, 0)$$

$$(i_1 \circ p - \mathrm{Id})(x, x', x'') = (x + x'', 0, 0) - (x, x', x'') = (x'', -x', -x'')$$

Definimos $h(x, x', x'') = (0, x'', 0)$, entonces

$$(dh + hd)(x, x', x'') = d(0, x'', 0) + h(dx + x', -dx', dx'' - x')$$

$$= (x'', -dx'', -x'') + (0, dx'' - x', 0) = (x'', -x', -x'')$$

Para $i_2 \circ p$ es análogo, lo dejamos como ejercicio. □

Si $\phi : cyl(X) \to Y$ es un morfismo de complejos, entonces $f, g : X \to Y$

$$f := \phi \circ i_1, \quad g := \phi \circ i_2$$

son dos morfismos de complejos, y podemos describir

$$\phi(x, x', x'') = \phi(x, 0, 0) + \phi(0, x', 0) + \phi(0, 0, x'')$$

$$= f(x) + \phi(0, x', 0) + g(x'')$$

Denotemos $h(x') = \phi(0, x', 0)$

Lema 11.4. *ϕ es morfismo de complejos $\iff$ $f \sim_h g$.*

Demostración.

$$\phi d(x, x', x'') = d\phi(x, x', x'') \iff$$

$$\iff \phi(dx + x', -dx', dx'' - x') = d(f(x) + h(x') + g(x''))$$

$$\iff f(dx) + f(x') - hd(x') + gd(x'') - g(x') = df(x) + dh(x') + dg(x'')$$

y como f y g son morfismos de complejos, $fd = df$, $gd = dg$, luego lo anterior equivale a

$$\iff f(x') - hd(x') - g(x') = dh(x')$$

$$\iff f - g = hd + dh$$

□

Ahora tenemos si $f \sim g : X \to Y$, consideramos $Q(f), Q(g) : Q(X) \to Q(Y)$. Fabricamos $\phi : cyl(X) \to Y$

$$\phi(x, x', x'') = f(x) + h(x') + g(x'')$$

$$f = \phi \circ i_1, \quad g = \phi \circ i_2$$

Notamos que i_1 e i_2 son equivalencias homotópicas, ambas con **la misma** inversa homotópica p, luego en $D(A)$ valen las igualdades

$$\begin{aligned}
Q(i_1) &= Q(i_2)Q(i_2)^{-1}Q(i_1)^{-1} \\
&= Q(i_2)Q(p)^{-1}Q(i_1)^{-1} \\
&= Q(i_2)Q(i_1)^{-1}Q(i_1)^{-1} = Q(i_2) \\
\Rightarrow \ Q(f) &= Q(\phi \circ i_1) = Q(\phi)Q(i_1) \\
&= Q(\phi)Q(i_2) = Q(\phi \circ i_2) = Q(g)
\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{tikzcd}
\mathrm{Chain}(A) \arrow[rr, "Q"] \arrow[dr, "\pi"'] & & D(A) \\
& \mathcal{H}(A) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

11.2. Estructura triangulada

La categoría triangulada, al igual que la de homotopía, deja de ser abeliana en general, pero hay ciertas operaciones con los complejos que se mantienen. Comenzamos por la traslación o suspensión:

El funtor de Traslación está bien definido en $D(A)$:

$$M \mapsto M[1]$$

claramente preserva q-iso, luego, existe la factorización del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Chain}(A) \arrow[rrrr, bend left, "Q\circ[1]"] \arrow[ddr, "Q"] & M \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & M[1] \arrow[r, mapsto] & Q(M[1]) & D(A) \\
& & Q(M) \arrow[ur, dashed, mapsto] & & \\
& D(A) \arrow[uurrr, dashed, "[1]"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Mapping cone

Llamaremos **triángulo** en $\mathcal{H}(A)$ a una terna

$$(X, Y, Z, u : X \to Y, v : Y \to Z, w : Z \to X[-1])$$

que sea isomorfa a un cono: a toda terna t.q.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal, "a"', "\cong"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal, "b"', "\cong"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, equal, "c"', "\cong"] & X[-1] \arrow[d, equal, "a[-1]"', "\cong"] \\
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & Co(f) \arrow[r] & M[-1]
\end{tikzcd}$$

los cuadrados conmutan a menos de homotopía y a, b, c son equivalencias homotópicas.

Recordamos $Co(f) = N \oplus M[-1]$ con diferencial

$$\partial(n, m) = (dn + f(m), -dm)$$

$M \xrightarrow{f} N \to Co(f) \to M[-1]$ lo llamaremos *distinguido*. Los **triángulos en** $D(A)$ se definen como la menor clase de uplas cerrada por isomorfismo que contienen a los triángulos distinguidos.

Observación 11.5. En la factorización $\widetilde{Q} : \mathrm{Chain}(A) \to D(A)$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Chain}(A) \arrow[rr, "Q"] \arrow[dr, "\pi"'] & & D(A) \\
& \mathcal{H}(A) \arrow[ur, "\widetilde{Q}"'] &
\end{tikzcd}$$

el funtor $\mathcal{H}(A) \to D(A)$ manda triángulos en triángulos.

11.3. Propiedades de los triángulos

Recolectamos propiedades de los triángulos en $\mathcal{H}(A)$ que darán lugar luego a la axiomatización de categoría triangulada.

T1: $X \xrightarrow{\mathrm{Id}} X \to 0 \to X[-1]$ es un triángulo en $\mathcal{H}(A)$ y $D(A)$

Demostración. Notamos que $Co(\mathrm{Id})$ siempre es contráctil. □

T2: Si $(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[-1])$ es un triángulo, sus trasladados

$$(Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[-1] \xrightarrow{-u} Y[-1])$$

y

$$(Z[1] \xrightarrow{-w} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z)$$

también lo son.

Demostración. Suponemos $(X \to Y \to Z \to X[-1]) = (M \xrightarrow{f} N \to Co(f) \to M[-1])$, consideramos

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r] \arrow[d, equal] & Co(f) \arrow[r] \arrow[d, equal] & M[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & N[-1] \arrow[d, equal] \\
N \arrow[r, "i"] & N \oplus M[-1] \arrow[r] & M[-1] \arrow[r, "-f"] & N[-1]
\end{tikzcd}$$

$$Co(i) = Co(f) \oplus N[-1] = N \oplus M[-1] \oplus N[-1]$$

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & Co(f) \arrow[r] \arrow[d, equal] & M[-1] \arrow[r, "-f"] \arrow[d, equal] & N[-1] \arrow[d, equal] \\
N \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & N \oplus M[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & M[-1] \arrow[r, "-f"] \arrow[d, "i_f"] & N[-1] \arrow[d, equal] \\
N \arrow[r, "i"] & Co(f) \arrow[r] & Co(i) \arrow[r] & N[-1]
\end{tikzcd}$$

Para que el cuadrado de la derecha conmute, definimos $i_f(m) = (0, m, -f(m))$ y vemos que el cuadrado del medio no conmuta...

$$\begin{tikzcd}
 & & m \arrow[rrd, mapsto] \arrow[dddd, mapsto, bend left] & & \\
(n,m) \arrow[rru, mapsto, bend left] \arrow[d, mapsto] & N \oplus M[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & M[-1] \arrow[r, "-f"] \arrow[d, "i_f"] & N[-1] \arrow[d, equal] & -f(m) \arrow[dd, mapsto] \\
(n,m) \arrow[rrd, mapsto, bend right] & N \oplus M[-1] \arrow[r] & N \oplus M[-1] \oplus N[-1] \arrow[r] & N[-1] & \\
 & & (n,m,0) & & -f(m) \\
 & & (0,m,-f(m)) \arrow[rru, mapsto] & &
\end{tikzcd}$$

sin embargo, si $\phi, \psi : Co(f) \to Co(i)$ están definidas por

$$\phi(n,m) = (n,m,0)$$

$$\psi(n,m) = (0,m,-f(m))$$

$\phi \sim_h \psi$ via $h(n,m) = (0,0,n)$:

$$(hd + dh)(n, m) = h(dn + f(m), -dm) + d(0, 0, n)$$
$$= (0, 0, dn + f(m)) + (n, 0, -dn)$$
$$= (n, 0, f(m)) = (n, m, 0) - (0, m, -f(m))$$
$$\therefore hd + dh = \phi - \psi$$

y el diagrama conmuta en $\mathcal{H}(A)$

A su vez, $i_f : M[-1] \to Co(i) = N \oplus M[-1] \oplus N[-1]$ no es un isomorfismo de complejos... sin embargo, si definimos $p : M : Co(i) \to M[-1]$ como la proyección en la coordenada $M[-1]$, claramente $p_M \circ i_f = \mathrm{Id}_{M[-1]}$. La otra composición da

$$i_f(p_M(n, m, n')) = i_f(m) = (0, m, -f(m))$$

y se tiene $i_f \circ p \sim \mathrm{Id}_{Co(i)}$ via

$$h(n, m, n') = (0, 0, n) :$$
$$(hd + dh)(n, m, n') = h(dn + f(m) + n', -dm, -dn') + \partial(0, 0, n)$$
$$= (0, 0, dn + f(m) + n') + (n, 0, -dn) = (n, 0, f(m) + n')$$
$$= (n, m, n') - (0, m, -f(m))$$

Es decir, $i_f \circ p_M \sim \mathrm{Id}_{Co(i)}$.

La demostración de la traslación para el otro sentido la dejamos como ejercicio. □

T3: Sea
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[d, "b"] \\ X' \arrow[r, "g"] & Y' \end{tikzcd}$$
un diag. conmut. en Chain(A),

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "b"] & Co(f) \arrow[r] \arrow[d, "b\oplus a"] & X[-1] \arrow[d, "a"] \\ X' \arrow[r, "g"] & Y' \arrow[r] & Co(g) \arrow[r] & X'[-1] \end{tikzcd}$$

es un morfismo de triángulos

Demostración. es claro que el diagrama conmuta, para ver que es morfismo de complejos:

$$(b \oplus a)d(y, x) = (b \oplus a)(dy + fx, -dx) = (bdy + bfx, -adx) =$$

$$d(b \oplus a)(y, x) = d(by, ax) = (dby + gax, -dax)$$

sabemos $ad = da$, $db = bd$, y como el cuadrado riginal conmutaba, $bf = ga$. □

11.4. Categorías trianguladas

Definición:(Verdier) Una categoría aditiva $\mathcal{T}$ se dice triangulada si tiene un autofuntor $M \mapsto M[1]$ y una clase distinguida de ternas $\{(X \stackrel{u}{\to} Y \stackrel{v}{\to} Z \stackrel{w}{\to} X[-1])\}$ satisfaciendo:

[T1] $\forall u : X \to Y$ existe un triángulo que empieza con u: $(X \stackrel{u}{\to} Y \stackrel{v}{\to} Z \stackrel{w}{\to} X[-1])$. La terna $(X \stackrel{\mathrm{Id}}{\to} X \stackrel{0}{\to} 0 \stackrel{0}{\to} X[-1])$ es un triángulo, y la clase de triángulos es cerrada por isomorfismos de triángulos, i.e.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"', "\cong"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"', "\cong"] & W \arrow[r, "u"] \arrow[d, "c"', "\cong"] & X[-1] \arrow[d, "a[-1]"', "\cong"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & W' \arrow[r, "u"] & X'[-1] \end{tikzcd}$$

si la fila de arriba es un triángulo $\Rightarrow$ la de abajo también.

[T2] (rotación) si $(X \stackrel{u}{\to} Y \stackrel{v}{\to} Z \stackrel{w}{\to} X[-1])$ es un triángulo, sus "rotados"

$$(Y \stackrel{v}{\to} Z \stackrel{w}{\to} X[-1] \stackrel{-u}{\longrightarrow} Y[-1]),$$

$$(Z[1] \stackrel{-w}{\longrightarrow} X \stackrel{u}{\to} Y \stackrel{v}{\to} Z)$$

también lo son.

[T3](extensión de morfismos) Si se tienen dos triángulos como las filas, y el cuadrado de la izq. conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"'] & W \arrow[r, "u"] \arrow[d, dotted, "\exists c"'] & X[-1] \arrow[d, "a[-1]"'] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & W' \arrow[r, "u"] & X'[-1] \end{tikzcd}$$

entonces se puede extender a un morfismo de triángulos

[T4] El axioma del octaedro:

(No se conoce ejemplo de categoría aditiva que satisfaga T1 T2 T3 y no T4.) Consideremos dos flechas componibles:

$$X \stackrel{f}{\to} Y \stackrel{g}{\to} Z$$

y los completamos a triángulos

$$X \stackrel{f}{\to} Y \stackrel{i}{\to} Z' \stackrel{i'}{\to} X[-1]$$

$$Y \stackrel{g}{\to} Z \stackrel{j}{\to} X' \stackrel{j'}{\to} Y[-1]$$

$$X \xrightarrow{gf} Z \xrightarrow{k} Y' \xrightarrow{k'} X[-1]$$

los acomodamos en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "gf"] & & & \\
Y \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "i"] & & Z \arrow[r, "j"] \arrow[d, "k"] & X' \arrow[r, "j'"] & Y[-1] \\
Z' \arrow[d, "i'"] & & Y' \arrow[d, "k'"] & & \\
X[-1] & & X[-1] & &
\end{tikzcd}$$

Entonces existen $u : Z' \to Y'$ y $v : Y' \to X'$ tales que el siguiente diagrama conmuta y la tercer fila es un triángulo:

$$\begin{tikzcd}
& Y'[1] \arrow[r, "k'[1]"] \arrow[dl, "v[1]"'] & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, "gf"] & & & \\
X'[1] \arrow[r, "j'[1]"] & Y \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "i"] & & Z \arrow[r, "j"] \arrow[d, "k"] & X' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, equal] & Y[-1] \arrow[d, "i[-1]"] \\
& Z' \arrow[rr, "\exists u"] \arrow[dr, "i'"] & & Y' \arrow[r, "\exists v"] \arrow[dl, "k'"] & X' \arrow[r, "j'i[-1]"] & Z'[-1] \\
& & X[-1] & & &
\end{tikzcd}$$

O sea, este axioma relaciona $Co(f)$, $Co(f)$ y $Co(gf)$.

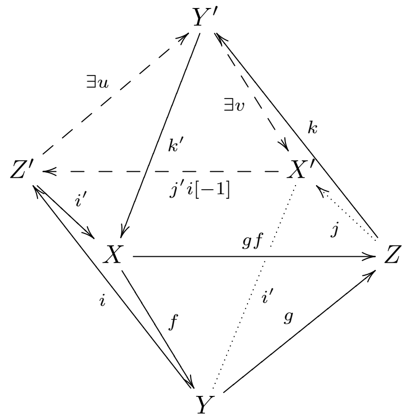
el siguiente diagrama conmuta y la tercer fila es un triángulo:

$$\begin{tikzcd}
& Co(gf)[1] \arrow[r, "k'[1]"] \arrow[dl, "v[1]"'] & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, "gf"] & & & \\
Co(g)[1] \arrow[r, "j'[1]"] & Y \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "i"] & & Z \arrow[r, "j"] \arrow[d, "k"] & Co(g) \arrow[r, "j'"] \arrow[d, equal] & Y[-1] \arrow[d, "i[-1]"] \\
& Co(f) \arrow[rr, "\exists u"] \arrow[dr, "i'"] & & Co(gf) \arrow[r, "\exists v"] \arrow[dl, "k'"] & Co(g) \arrow[r, "j'i[-1]"] & Co(f)[-1] \\
& & X[-1] & & &
\end{tikzcd}$$

O sea, este axioma relaciona $Co(f)$, $Co(f)$ y $Co(gf)$. Si pensamos $Co(f) = Y/X$, $Co(gf) = Z/X$, $Co(g) = Y/Z$ entonces tendriamos "$Y/Z = \dfrac{Y/X}{Z/X}$".

La manera "octaedral"

Al octaedro se le completa el triángulo de atrás. Todas las caras de este octaedro son o bien triángulos o bien diagramas conmutativos:



$$iu = gk, \quad uk' = i', \quad kv = j, \quad k'f[-1] = vj'$$

11.5. Propiedades homológicas de categorías (pre) trianguladas

Fijamos $\mathcal{T}$ una categoría aditiva con funtor de suspensión [1] y una colección de "triángulos" $\{(X \overset{u}{\to} Y \overset{v}{\to} Z \overset{w}{\to} X[-1])\}$ que satisface T1 T2 T3, y no nos preocuparemos por T4. (Una tal categoría se la denomina pre-triangulada.)

Hecho 1: en un triángulo, la composición de 2 seguidos es cero.

Demostración. tomemos $(X \overset{u}{\to} Y \overset{v}{\to} Z \overset{w}{\to} X[-1])$ un triángulo y consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X[-1] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[-1]
\end{tikzcd}$$

□

Hecho 2: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,-)$ manda triángulos en s.e.largas:
si $(X \overset{u}{\to} Y \overset{v}{\to} Z \overset{w}{\to} X[-1])$ es triángulo y $W \in \mathrm{Obj}(\mathcal{T}) \Rightarrow$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,X[-1])$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos.

Denotemos $H_n^W(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,X[n])$, queremos ver que tenemos una s.e. larga

$$\cdots \to H_n^W(X) \to H_n^W(Y) \to H_n^W(Z) \to H_{n-1}^W(X) \to \cdots$$

(por traslación, basta ver que es exacto en un solo lugar!)

Demostración. Sabemos que la composición de dos seguidos es cero, luego $v_*u_* = (vu)_* = 0_* = 0$. Supongamos ahora

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W,Z)$$
$$f \mapsto v \circ f = 0$$

Entonces podemos hacer el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & W \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & W[-1] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[-1]
\end{tikzcd}$$

o bien, trasladando para atrás,

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & W[-1] \arrow[r] & W[1] \\
Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[-1] \arrow[r, "-u[-1]"] & Y[-1]
\end{tikzcd}$$

Por T3 $\exists c$ que completa a un morfismo de triángulos

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & W[-1] \arrow[r] \arrow[d, dashed, "c"] & W[1] \arrow[d, "f[-1]"] \\
Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[-1] \arrow[r, "-u[-1]"] & Y[-1]
\end{tikzcd}$$

y ahora volvemos a trasladar

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "{c[1]}"] & W \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & W[-1] \arrow[d, "c"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[-1]
\end{tikzcd}$$

Si llamamos $g := c[1]$, tenemos
$$f = u \circ g = u_*(f)$$
es decir, $\mathrm{Ker}(v_*) \subseteq Im(u_*)$. $\square$

Hecho 2*: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, W)$ manda triángulos en s.e.largas:
si $(X \overset{u}{\to} Y \overset{v}{\to} Z \overset{w}{\to} X[-1])$ en un triángulo y $W \in \mathrm{Obj}(\mathcal{T})$, entonces

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X[\text{-}1], W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Z, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, W)$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos

Demostración. Ejercicio! $\square$

Hecho 3: (Lema de los 5) Si en un morfismo de triángulos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "c"'] & X[-1] \arrow[d, "a[-1]"'] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[-1] \end{tikzcd}$$

de a, b, c, dos de ellos son isos, entonces el tercero es iso.

Demostración. sup. a y b son isos y $W \in \mathrm{Obj}\mathcal{T} \Rightarrow$ morfismo de s.ex.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X) \arrow[r] \arrow[d, "a_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Y) \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Z) \arrow[r] \arrow[d, "c_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X[\text{-}1]) \arrow[d, "a[\text{-}1]_*"'] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Y') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, Z') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(W, X'[\text{-}1]) \end{tikzcd}$$

y por el lema de los 5 tradicional c_* es iso $\forall W \Rightarrow c$ es iso. $\square$

Corolario 11.6. *$u : X \to Y$ determina al triángulo $(X \overset{u}{\to} Y \overset{v}{\to} Z \overset{w}{\to} X[-1])$ a menos de isomorfismo (no único) de triángulos.*

Hecho 4: $u : X \to Y$ es un iso si y sólo si $\forall$ triángulo de la forma $X \overset{u}{\to} Y \overset{v}{\to} Z \overset{w}{\to} X[-1]$, necesariamente $Z = 0$.

Demostración. Basta ver que $X \overset{u}{\to} Y \to 0 \to X[-1]$ es un triángulo si y sólo si u es un iso. Supongamos que u es un iso, entonces se tiene un diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X[-1] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X[-1] \end{tikzcd}$$

como el de arriba es triángulo el de abajo también.

Recíprocamente, asumiendo que $X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow X[-1]$ es un triángulo, del cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Y[-1] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X[-1] \end{tikzcd}$$

extendemos a un morfismo de triángulos

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, dashed] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Y[-1] \arrow[d, dashed] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X[-1] \end{tikzcd}$$

y así obtenemos una flecha $a : Y \to X$ tal que $u \circ a = \mathrm{Id}_Y$. Por el lema de los 5, a es iso, luego $u = a^{-1}$ y u un iso. □

"Corolario": Si en una categoría triangulada se quiere localizar una clase de flechas (e.g. $\mathcal{T} = \mathcal{H}(A)$ y la clase de flechas = los qisos), entonces

" localizar por los q-iso" $\equiv$ "cocientar por los acíclicos"

(que son los conos de los quasi-isos.)

11.6. Objetos cerrados

Comenzamos con un ejemplo:

Ejemplo 11.7. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M) \cong H_0(M)$

Demostración. $f : A \to M$ está unívocamente determinado por

$$f(1) =: m \in M_0$$

Además, $d(1) = 0$ y $fd = df \Rightarrow m \in \mathrm{Ker} d_M$.

Si $f \sim g$, $f(1) = m$, $g(1) = m'$, $\exists h$ tal que

$$f - g = dh + hd$$

$$\Rightarrow m - m' = dh(1) + hd(1) = d(h(1)) \Rightarrow [m] = [m'] \in H_0(M)$$

Recíprocamente, si $m, m' \in M$, $f(a) = am$, $g(a) = am'$,

si $m - m' = dx$, se define $h : A \to M$

$$h(a) = ax$$

y resulta $f \sim_h g$.

□

Observación 11.8. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M) \cong H_0(M)$ y si $f : M \to M'$ es un q-iso $\Rightarrow$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M')$$

es un iso, también si $g : M'' \to M$ es un q-iso $\Rightarrow$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M'') \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M)$$

es iso. Esto nos da una indicación de que el funtor natural $\mathcal{H}(A) \to D(A)$ debería inducir un iso

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{D(A)}(A, M)$$

Para demostrar con rigor esta afirmación necesitamos una construcción concreta de la categoría $D(A)$, que es lo que haremos ahora.

11.7. La condición de Ore y la localización categórica en $\mathcal{H}(A)$

La condición de Ore es utilizada para construir localización en anillos conmutativos, en el caso particular en que toda fracción a izquierda equivale a una fracción a derecha. Esquemáticamente

$$''\boxed{g\ t^{-1} = s^{-1} f}''$$

Cuando esto es posible, la localización no conmutativa se describe formalmente de forma muy similar a la localización conmutativa usual. Para la localización categórica en la categoría de complejos, esta equivalencia de fracciones a izquierda y fracciones a derecha (donde el denominador es un quasi-isomorfismo) es válida en el siguiente sentido:

Lema 11.9. *si $t : X \to Y$ es q-iso y $g : X \to Z$ es morfismo, entonces el diagrama siguiente se puede completar a un cuadrado con morfismos f y s, donde s es un q-iso:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[d, dotted, "f"] \\ Z \arrow[r, dotted, "s"] & W \end{tikzcd}$$

Demostración. Consideramos el cono de t, lo que define la flecha p, y el cono de $g \circ p$:

$$\begin{tikzcd} C[1] \arrow[r, "p"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"] & C \arrow[d, equal] \\ C[1] \arrow[r, "g \circ p"] & Z \arrow[r, "s"] & W \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Del cuadrado conmutativo se sigue que se puede extender a un morfismo de triángulos (en a categoría de homotopía). Como t es q-iso $\Rightarrow C$ acíclico $\Rightarrow s$ es q-iso. $\square$

Análogamente, si el dato original no es t, g sino s, f, la igualdad de fracciones sería la misma pero leída en distinto orden temporal:

$$''\boxed{g\ t^{-1} = s^{-1}f}'' \leftrightarrow'' \boxed{s^{-1}f = g\ t^{-1}}''$$

y el lema correspondiente es:

Lema 11.10. *Si $s : Z \to W$ es q-iso y $f : Y \to W$, entonces se puede completar con g y t un q-iso:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dotted, "t"] \arrow[d, dotted, "g"] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "s"] & W \end{tikzcd}$$

Demostración.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dotted, "t"] \arrow[d, dotted, "g"] & Y \arrow[r, "i\circ f"] \arrow[d, "f"] & Co(s) \arrow[r, dotted] \arrow[d, equal] & X[-1] \arrow[d, dotted] \\ Z \arrow[r, "s"] & W \arrow[r, "i"] & Co(s) \arrow[r] & Z[-1] \end{tikzcd}$$

s q-iso $\Rightarrow Co(s)$ acíclico $\Rightarrow t$ es q-iso por s.e. larga

$\square$

Corolario 11.11. *Se pueden componer fracciones a izquierda (o a dererecha):*

$$(t_1^{-1}g_1)(t_2^{-1}g_2) = t_1^{-1}(g_1 t_2^{-1})g_2 = t_1^{-1}(s^{-1}f)g_2 = (st_1)^{-1}(fg_2)$$

(suponiendo que todo este bien definido.) Para esto definimos la siguiente relación de equivalencia

Definición 11.12. Si t es un q-iso, denotamos ”$t^{-1}f$” a la clase de equivalencia del par de flechas “no componibles”

$$X \overset{f}{\to} Y \overset{t}{\leftarrow} Z$$

con la relación

$$X \overset{f_1}{\to} Y_1 \overset{t_1}{\leftarrow} Z \quad \sim \quad X \overset{f_2}{\to} Y_2 \overset{t_2}{\leftarrow} Z$$

$\iff \exists$ un diagrama conmutativo (con t q-iso)

$$\begin{tikzcd} & Y_1 \arrow[dr, "t_1"] & \\ X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & X_3 \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "t"] & Y \\ & Y_2 \arrow[ur, "t_2"'] & \end{tikzcd}$$

Notamos que también **se puede definir la suma** de fracciones:

$$\begin{tikzcd} & X_1 & \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & N, \arrow[ul, "t"'] \arrow[dl, "s"] \\ & X_2 & \end{tikzcd} \qquad t^{-1}f + s^{-1}g = ?$$

Usamos los lemas previos para completar a un diagrama como sigue:

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[d, dotted, "s'"] & \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & X_3 & N \arrow[ul, "t"'] \arrow[dl, "s"] \arrow[l, dotted, "s't=t's"'] \\ & X_2 \arrow[u, dotted, "t'"'] & \end{tikzcd}$$

y definimos

$$t^{-1}f + s^{-1}g = t^{-1}(s')^{-1}s'f + (s)^{-1}(t')^{-1}t'g = (s't)^{-1}(s'f + t'g)$$

11.8. Construcción "concreta" de $D(A)$ a partir de $\mathcal{H}(A)$

Recordamos:

Ejemplo 11.13. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M) = H_0(M)$

Demostración. $f : A \to M$ está unívocamente determinado por

$$f(1) =: m \in M_0$$

$d(1) = 0 \Rightarrow dm = 0$,

si $f \sim g$, $f(1) = m$, $g(1) = m'$

$$m - m' = dm'' \qquad \leftrightarrow \qquad h(1) = m'', \quad f - g = dh + hd$$

□

Ejemplo 11.14. $\mathrm{Hom}_{D(A)}(A, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M)$

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(A, M) = \Big\{ \big(A \overset{[f]}{\to} M' \overset{[t]}{\leftarrow} M \big) : [f] \in \underset{(y\ t\ qiso)}{\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M)} \Big\}$$

$$\cong \Big\{ \big([m'], M' \overset{[t]}{\leftarrow} M\big) : [m'] \in H_0(M') \overset{t_*}{\underset{\leftarrow}{\cong}} H_0(M) \Big\}$$

$$\Big(([m'], t) \mapsto \underbrace{t_*^{-1}([m'])}_{\in H_0(M)}\Big) \;\cong\; H_0(M)$$

$\therefore$ el funtor natural $\mathcal{H}(A) \to D(A)$ induce un iso

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(A, M) \quad \cong \quad H_0(M) \quad \cong \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M)$$

$$t^{-1} f = \big(A \overset{f}{\to} M' \overset{t}{\leftarrow} M\big) \mapsto (t_*)^{-1}([f(1)]) = [m] \mapsto [\phi_m] : (1 \mapsto m)$$

Definición: decimos que P es **cerrado** si $\forall M \in \mathrm{Chain}(A)$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P, M) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{D(A)}(P, M)$$

Ejemplo 11.15. $P = A$ es cerrado.

Ejemplo 11.16. k cuerpo, A k-álgebra, $V \in \mathrm{Chain}(k) \Rightarrow P = A \otimes V$ es cerrado:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(A \otimes V, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(k)}(V, M)$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A \otimes V, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(k)}(V, M)$$
$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(A \otimes V, M) \cong \mathrm{Hom}_{D(k)}(V, M)$$

Pero $\mathcal{H}(k) = D(k)$ porque q-iso k-lineal = equiv. homotópica.

Lema 11.17. *1. Ser cerrado es estable por suspensión:*

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(P[1], M) \cong \mathrm{Hom}_{D(A)}(P, M[-1])$$
$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P, M[-1]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P[1], M)$$

2. $P \overset{u}{\to} P' \overset{v}{\to} P'' \overset{w}{\to} P[-1]$ *un triángulo, si dos son cerrados, el tercero también.*

3. $\{P_i\}_{i\in I}$ *cerrados* $\Rightarrow \bigoplus_{i\in I} P_i$ *cerrados.*

Teorema 11.18. *k cuerpo, A k-álgebra* $\Rightarrow \forall M \in \mathrm{Chain}(A)$

$$P(M) := \big(\bigoplus_{n\geq 1} A^{\otimes n} \otimes M, b' + d_M\big)$$

es cerrado

Lema 11.19. *Si* $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ *es una s.e.c. en* $\mathrm{Chain}(A)$ *que se parte como A-mod* $\Rightarrow \exists f : Z[-1] \to X$ *y un iso uplas*

$$\begin{tikzcd}
Z[1] \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & Z \arrow[d, equal] \\
Z[1] \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & X \oplus_f Z \arrow[r, "p"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[d, equal] \\
Z[1] \arrow[r, "f"] & X \arrow[r] & Co(f) \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

Demostración.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X_n \arrow[r, "i"] & Y_n \arrow[r, "\pi"'] & Z_n \arrow[l, bend right, "s"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow Y \quad \cong \quad i(X_n) \oplus s(Z_n) \quad \cong \quad X_n \oplus Z_n$$

$$y \mapsto (y\text{-}s(\pi(y)), s(\pi(y)) \mapsto i^{-1}(y\text{-}s(\pi(y)) \oplus \pi(y)$$

como X_n es subcomplejo, $d(x,0) = (dx, 0)$, como π es morfismo, $d(0,z) = (?, dz)$

$\therefore$ se define $f : Z[1] \to X$ como

$$d(0,z) = (f(z), dz)$$

(notar que f baja el grado, como d), o bien,

$$f(z) = i^{-1}\Big(d(s(z)) - s(d(z))\Big)$$

$$(0,0) = d^2(0,z) = d(f(z), d(z)) = (df(z) + f(dz), d^2 z)$$

entonces f no es morfismo de complejos $Z \to X$, porque baja el grado y anticonmuta con el d original, pero sí es un morfismo de complejos $Z[1] \to X$.

Notar que hay un isomorfismo en Chain(A), por lo tanto el original es parte de un triángulo tanto en $D(A)$ como en $\mathcal{H}(A)$.

$\square$

Lema 11.20. *(B. Keller) Si en un complejo P se tiene una filtración que satisface*

1) $P = \bigcup_{p \geq 0} F_p$ *(* $F_{-1} = 0$*),*

2) $0 \to F_p \to F_{p+1} \to F_{p+1}/F_p$ *se parte como A-módulo, y*

3) F_{p+1}/F_p *cerrado* $\forall p$*,*

entonces P es cerrado.

Ejemplo 11.21. $P(M) = \bigoplus_{p \geq 1} A^{\otimes p} \otimes M$ es cerrado (y $\rho : P(M) \to M$ es q-iso) con

$$F_p = \bigoplus_{n=1}^{p} A^{\otimes n} \otimes M,$$

pues $F_p/F_{p-1} = A^{\otimes p} \otimes M$ es A-libre

Observación 11.22. si vale 1) 2) $\Rightarrow P \cong \bigoplus_{n \geq 0} F_n/F_{n-1}$ como A-módulo, pero no necesariamente como complejo.

Demostración. 1ero) inductivamente F_n es cerrado para todo n.

Afirmación: La siguiente es una s.e.c. en Chain(A) que se parte como A-módulo, luego, un triangulo en $\mathcal{H}(A)$:

$$0 \to \bigoplus_n F_n \xrightarrow{\Phi} \bigoplus_n F_n \xrightarrow{can} P \to 0$$

donde, $\Phi|_{F_n} : F_n \to F_n \oplus F_{n+1}$

$$m_n \mapsto m_n - i(m)_{n-1}$$

O sea

$$\Phi(m_0, m_1, m_2, m_3, \cdots) = (m_0, m_1 - m_0, m_2 - m_1, m_3 - m_2, \cdots)$$

y $can : \bigoplus_n F_n \to P$ es

$$can(m_0, m_1, m_2, m_3, \cdots) = \sum_{n\geq 0} m_n$$

Exactitud: claramente can es epi. Φ es inyectiva pues si

$$0 = \Phi(m_0, m_1, m_2, m_3, \cdots, m_p, 0, 0, \cdots)$$

$$= (m_0, m_1 - m_0, m_2 - m_1, m_3 - m_2, \cdots, m_p - m_{p-1}, -m_p, 0, 0, \cdots)$$

$$\Rightarrow m_0 = 0 \Rightarrow m_1 = 0 \Rightarrow m_2 = 0 \Rightarrow \cdots \quad \Rightarrow \quad m_n = 0 \forall n$$

Exactitud al medio: supongamos $\underline{m} \in \mathrm{Ker}(can)$:

$$can(\underline{m}) = can(m_0, m_1, m_2, m_3, \cdots) = \sum_{n\geq 0} m_n = 0$$

Sobre los elementos de Ker(can) podemos definir

$$p(\underline{m}) = (m_0, m_1 + m_0, m_2 + m_1 + m_0, \cdots, \overbrace{\sum_{i=0}^{p} m_i}^{lugar\ p}, \cdots) \in \bigoplus_n F_n$$

y claramente vale $\Phi(p(\underline{m})) = \underline{m}$. □

Hecho: M es cerrado $\iff$ $\rho : P(M) \to M$ es una equivalencia homotópica.

Este hecho no es trivial, pero es cierto, y nos dará la siguiente caracterización:

Teorema 11.23. *La asignación $M \mapsto P(M)$ induce una equivalencia de categorías trianguladas $D(A) \to \mathcal{H}_{cerr}(A)$*

Notar que en una dirección

$$D(A) \to \mathcal{H}_{cerr}(A) \to D(A)$$

$$M \mapsto P(M) \mapsto P(M)$$

y para todo M, $\rho : P(M) \to M$ es q-iso. En la otra dirección,

$$\mathcal{H}_{cerr}(A) \to D(A) \to \mathcal{H}_{cerr}(A)$$

$$C \mapsto C \mapsto P(C)$$

y como C es cerrado, $P(C) \to C$ es equivalencia homotópica (por el hecho anteriormente mencionado).

Para mostrar este resultado, comenzamos con la siguiente definición:

Definición 11.24. M se dice fuertemente cerrado (f. cerrado) si $P(M) \to M$ es una equivalencia homotópica.

Observación 11.25. $P(M)$ siempre es cerrado, y si $P(M) \to M$ es una equivalencia homotópica entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(M,-) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P(M),-) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{D(A)}(P(M),-) \cong \mathrm{Hom}_{D(A)}(M),-) \end{aligned}$$

El iso del primero es por ser equivalencia homotópica. Del 1er al 2do: $P(M)$ es cerrado, y el último iso, porque $P(M) \to M$ siempre es qiso. Concluimos que f. cerrado implica cerrado, y la denominación tiene sentido.

Nuestro objetivo es mostrar que cerrado implica f.cerrado. Es decir, que las dos nociones coinciden.

Observación 11.26. $P(-)$ conmuta con traslación, conos, y si $V \in \mathrm{Chain}(k) \Rightarrow P(M \otimes V) = P(M) \otimes V$, luego ser f-cerrado es estable por suspensión, 2 de 3 en triángulos de $\mathcal{H}(A)$, y $- \otimes V$.

Demostración. Consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} P(M) \arrow[r, "P(f)"] \arrow[d, "\rho_M"] & P(N) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_N"] & P(Co(f)) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{Co}"] & P(M[-1]) \arrow[d, "\rho_M[-1]"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & Co(f) \arrow[r] & M[-1] \end{tikzcd}$$

$P(M \otimes V) \cong P(M) \otimes V$ y $- \otimes V$ preserva equivalencias homotópicas.

$\square$

Ejemplo 11.27. A es f.cerrado (con $h(\omega) = \omega \otimes 1$), también $A \otimes V$ para cualquier $V \in \mathrm{Chain}(k)$.

Usando el argumento de B. Keller tenemos el siguiente corolario:

Corolario 11.28.
- $P_{\leq}n(M)/P_{\leq n-1}(M) = A \otimes W_n$ *es f-cerrado para todo* n
- $P_{\leq}n(M)$ *es f-cerrado para todo* n
- $P(M)$ *es f-cerrado*

Cerrado implica f-cerrado

Sea M es cerrado y $\rho : P(M) \to M$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(P(M), P(M))) \arrow[r, equal] & \mathrm{Hom}_D(P(M), P(M)) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(M, P(M)) \arrow[r, equal] \arrow[u, "\rho_*"] & \mathrm{Hom}_D(M, P(M)) \arrow[u, "\rho_*", "\cong"'] \end{tikzcd}$$

ρ_* es iso del lado D. Por ser M (y $P(M)$) cerrado se tienen los isos horizontales. Luego, ρ_* es iso del lado $\mathcal{H}$, en particular epi:

$$[\mathrm{Id}_{P(M)}] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(P(M), P(M)) \in Im(\rho_*)$$

y por lo tanto $\exists g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(M, P(M))$ tal que $[\mathrm{Id}_{P(M)}] = \rho_*[g]$:

$$\mathrm{Id}_{P(M)} \sim_h \rho \circ g$$

Si ahora consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(M, M) \arrow[r, equal] & \mathrm{Hom}_D(M, M) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(M, P(M)) \arrow[r, equal] \arrow[u, "\rho^*"] & \mathrm{Hom}_D(M, P(M)) \arrow[u, "\rho^*", "\cong"'] \end{tikzcd}$$

ρ^* es iso del lado D, y M (y $P(M)$) cerrado implica isos horizontales. Por lo tanto ρ^* es iso del lado $\mathcal{H}$. Concluimos

$$[\mathrm{Id}_M] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(M, M) \in Im(\rho^*)$$

y entonces $\exists [g'] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(M, P(M))$ t.q.

$$[\mathrm{Id}_M] = \rho^*([g']) = [g' \circ \rho]$$

Vemos entonces que ρ tiene inversa homotópica a izq. derecha g y a izquierda g', luego $g \sim g'$ y ρ es una equivalencia homotópica. □

Observación 11.29. Si $F : A$-Mod$\to B$-Mod es un funtor aditivo, podemos extenderlo a un funtor entre complejos $\rightsquigarrow F : \mathrm{Chain}(A) \to \mathrm{Chain}(B)$

$$(M_\bullet, d) \mapsto (FM_\bullet, Fd)$$

y resulta un complejo pues F aditivo implica $F(d)^2 = F(d') = F(0) = 0$. A su vez, como es aditivo, si $f \sim g$, $f - g = hd + dh$ para alguna h A-lineal, luego, por ser F aditivo

$$F(f) - F(g) = F(f - g) = F(hd + dh) = F(hd) + F(dh) = F(h)F(d) + F(d)F(h)$$

Es decir, $F(h)$ es una homotopía entre $F(f)$ y $F(d)$, luego, F induce un funtor bien definido

$$F : \mathcal{H}(A) \to \mathcal{H}(B)$$

Notar que F aditivo también implica

$$F(Co(f : M \to N)) = Co(F(f) : FM \to FN)$$

Si F fuera *exacto*, entonces manda acíclicos en acíclicos y en consecuencia q-isos (con cono acíclico) en q-iso, luego, la propiedad universal de $D(A)$ dice que la composición $\mathrm{Chain}(A) \to \mathrm{Chain}(B) \to D(B)$ determina que F esta bien definido como funtor $D(A) \to D(B)$. Sin embargo, si F *no es exacto*, entonces aplicar F término a término en un complejo *no está bien definido*.

Sin embargo, la caracterización $D(A) \cong \mathcal{H}_{cerr}(A) \subset \mathcal{H}(A)$ permite dar una definición de funtor derivado vía

$$\begin{tikzcd} D(A) \arrow[r, "P", "\cong"'] \arrow[rrr, bend left, "DF"] & \mathcal{H}(A) \arrow[r, "F"] & \mathcal{H}(B) \arrow[r, "Q"] & D(B) \end{tikzcd}$$

$$M \longmapsto P(M) \longmapsto F(P(M)) \longmapsto F(P(M)) =\!=\!= : DF(M)$$

Notar que los funtores derivados a izquierda los hemos definido como

$$L_n F(M) := H_n(DF(M[0]))$$

donde $M \in A$-Mod y $M[0]$ es el complejo que tiene a M concentrado en grado cero. La definició de categoría derivada, su caracterización, y la manera de extender funtores de A-módulos nos proveen de un objeto más sutil que la definición de funtor derivado de los capítulos anteriores, pues nos da un marco categórico en donde el funtor derivado da un complejo, y la definición previa se obtiene tomando homología de este complejo.

Ejemplo 11.30. Si $F = (-) \otimes_A X : A\text{-Mod} \to k\text{-Mod}$, se denota $- \otimes_A^L X := DF$

$$M \mapsto P(M) \otimes_A X =: M \otimes_A^L X$$

Esta definido para complejos M. En particular si $M \in A$-Mod,

$$\mathrm{Tor}_n^A(M, X) = H_n(M[0] \otimes_A^L X)$$

Parte II

Ejercicios

Capítulo 12

Ejercicios introductorios

12.1. Lema de la serpiente - I

1. Sea A un anillo, $g \in U(A)$, y M un A-módulo; definimos

$$M^g := \{m \in M : gm = m\},\ M_g := M/\{m - gm : m \in M\}$$

   a) Muestre que M es un $\mathcal{Z}_g(A)$-módulo, donde $\mathcal{Z}_g(A) = \{a \in A : ag = ga\}$.

   b) Si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una sucesión exacta corta de A-módulos, muestre que

$$0 \to X^g \to Y^g \to Z^g \xrightarrow{\S} X_g \to Y_g \to Z_g \to 0$$

   es exacta.

   c) Si la multiplicación por g en M tiene orden finito n (por ejemplo si g tiene orden finito) y la multiplicación por n es inversible en M, muestre que la inclusión $M^g \to M$ compuesta con la proyección al cociente $M \to M_g$ da un isomorfismo

$$M^g \cong M_g$$

   d) Si G es un grupo finito y $|G|$ es inversible en A entonces el funtor $(-)^G$ es exacto (i.e. manda sucesiones exactas cortas en exactas cortas)

Más generalmente, sea k un anillo, G un grupo, y M un $k[G]$-módulo (es decir, un k-módulo provisto de una acción de G donde los elementos de G actúan k-linealmente. Definimos

$$(\textit{invariantes}) \qquad M^G = \{m \in M : gm = m \forall g \in G\}$$

$$(\textit{coinvariantes}) \qquad M_G = \frac{M}{\langle gm - m : m \in M, g \in G\rangle}$$

2. Si $0 \to M \to N \to T \to 0$ es una s.e.c. de $k[G]$-módulos, entonces quedan inducidas sucesiones exactas
$$0 \to M^G \to N^G \to T^G$$
y
$$M_G \to N_G \to T_G \to 0$$

3. A partir de ahora G es finito. Muestre que $p_G := \sum_{g\in G} \in k[G]$ define una aplicación
$$\begin{aligned} M &\to M^G \\ m &\mapsto \sum_{g\in G} gm \end{aligned}$$
que se factoriza a través de M_G, es decir, que queda bien definida una aplicación
$$\begin{aligned} \overline{p} : M_G &\to M^G \\ \overline{m} &\mapsto \sum_{g\in G} gm \end{aligned}$$

4. Qué significaría que $\overline{p} : (-)^G \to (-)_G$ sea una transformación natural entre los funtores coinvariantes e invariantes? Es $\overline{p}$ una transformación natural?

5. Muestre que si $n = |G|$ es inversible en k entonces $\overline{p}$ es una biyección para todo M. Concluya que en ese caso $(-)^G$ resulta un funtor exacto, o sea
$$0 \to M^G \to N^G \to T^G \to 0$$
es exacta para toda s.e.c. $0 \to M \to N \to T \to 0$

6. (Versión infinitesimal) A anillo, $D \in A$, M un A-módulo, se define
$$M^D = \{m \in M : Dm = 0\}, \ M_D = M/DM$$
Muestre que M^D y M_D son módulos sobre $\mathcal{Z}_D(A) = \{a \in A : Da = aD\}$. Muestre que si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una sucesión exacta corta de A-módulos, entonces
$$0 \to X^D \to Y^D \to Z^D \xrightarrow{\delta} X_D \to Y_D \to Z_D \to 0$$
es exacta.

7. Sea A un dominio íntegro, K su cuerpo de fracciones, si M es un A-módulo se define
$$M_K = \left\{\frac{m}{a} : m \in M, \ a \in A \setminus \{0\}\right\}$$
$j_M : M \to M_K$ por $j(m) = \frac{m}{1}$, y
$$t(M) = \{m \in M : \exists a \in A \setminus \{0\} \text{ con } am = 0\}$$
Mostrar que $t(M) = \mathrm{Ker} j_M$ y que si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una s.e.c. de A-módulos entonces existe una sucesión exacta de la forma
$$0 \to t(X) \to t(Y) \to t(Z) \xrightarrow{\delta} X_K/j(X) \to Y_K/j(Y) \to Z_K/j(Z) \to 0$$

12.2. Funtores

Sean $F, G : C \to D$ dos funtores. Recordamos una *transformación natural* $\eta : F \to G$ es dar, para cada $X \in \mathrm{Obj}(C)$, un morfismo $\eta_X : F(X) \to G(X)$ (en D) que verifica que, para todo morfismo $f : X \to Y$ (en C), el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Si $\forall X \in \mathrm{Obj}(C)$ resulta η_X un isomorfismo, η se dice un *isomorfismo natural*.

1. Muestre que $O_4 : Gr \to Sets$ dado por

$$O_4(G) = \{g \in G : g^4 = 1\}$$

(parte del ej es ver que es funtor) y $\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z}_4, -) : Gr \to Sets$ son naturalmente isomorfos. Mas precisamente,

$$\eta_G : O_4(G) \to \mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z}_4, G)$$

definido por

$$\eta_G(g) = \text{ el unico morfismo } f : \mathbb{Z}_4 \to G \text{ determinad por } f(1) = g$$

es un isomorfismo natural de funtores.

2. (pares que conmutan) Sea $F : Gr \to Sets$ dado por

$$F(G) = \{(g, h) \in G \times G : gh = hg\}$$

es funtorial, es decir, si $f : G_1 \to G_2$ es un morfismo de grupos entonces $(f(g), f(h)) \in F(G_2)$ si $(g, h) \in F(G_1)$. Muestre que este funtor es naturalmente isomorfo a (i.e. existe un isomorfismo natural con) $\mathrm{Hom}_{Gr}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, -)$.

3. Se $F : Gr \to Sets$ dado por $F(G) = \{(g, h) \in G \times G : g^3 = 1,\ h^2 = 1,\ gh = hg^{-1}\}$. Es F de la forma $\mathrm{Hom}_{Gr}(G_0, -)$ para algún grupo G_0?

4. Muestre que $j_M : M \to M_K$ es una transformación natural entre Id y $(-)_K$.

5. Sea $f : X \to Y$ es un morfismo en una categoría C, entonces f induce una transformación natural

$$f^* : \mathrm{Hom}_C(N, -) \to \mathrm{Hom}_C(M, -)$$

via

$$f^*_X : \mathrm{Hom}_C(N, X) \to \mathrm{Hom}_C(M, X)$$

$$\phi \mapsto \phi \circ_C f$$

Muestre que los funtores $\mathrm{Hom}_C(N, -)$ y $\mathrm{Hom}_C(M, -)$ son naturalmente isomorfos sí y sólo si M y N son isomorfos en C (i.e. existen morfismos $f : M \to N$ y $g : N \to M$ tales que $f \circ_C g = \mathrm{Id}_N$ y $g \circ_C f = \mathrm{Id}_M$).

6. Sea C una categoría tal que $\mathrm{Obj}(C)$ es un conjunto con un único elemento $*$, muestre que $M := \mathrm{Hom}_C(*, *)$ es un monoide con neutro, y que dar funtor $C \to C$ es lo mismo que dar $f : M \to M$ un morfismo de monoides que preservan la unidad.

7. Si C y D son dos posets vistos como categorías, entonces un funtor $f : C \to D$ es lo mismo que una función monótona creciente $C \to D$.

8. Sea A un anillo y A-bimod la categoría de A-bimódulos. Muestre que

$$M^A := \{m \in M : am = ma\ \forall a \in A\}$$

es un funtor A-bimod$\to$ $Z(A)$-bimod, exacto a izquierda, es decir, si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una s.e.c. entonces

$$0 \to X^A \to Y^A \to Z^A$$

es exacta. Es $(-)^A$ de la forma $\mathrm{Hom}_{A\text{-bimod}}(M_0, -)$ para algún bimódulo M_0?

9. Si $M \in A$-bimod, definimos

$$\mathrm{Der}(A, M) = \{D : A \to M : D(a + b) = D(a) + D(b),\ D(ab) = aD(b) + D(a)b\}$$

Muestre que $\mathrm{Der}(A, M)$ es un subgrupo abeliano de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M)$ y que $\mathrm{Der}(A, -)$: $A-$bimod$\to$ Ab es un funtor. Además, si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es una s.e.c. de A-bimódulos,

$$0 \to \mathrm{Der}(A, X) \to \mathrm{Der}(A, Y) \to \mathrm{Der}(A, Z)$$

es exacta.

10. Si M es un A-bimódulo, consideramos el anillo

$$B = B(M) := A \oplus M$$

con la suma usual, es decir $(a + m) + (a' + m') = (a + a') + (m + m')$, y el producto dado por

$$(a + m)(a' + m') = aa' + am' + ma'$$

Notar que M se identifica con un subgrupo abeliano de B, que además es un ideal bilátero de cuadrado cero. Notar también que la proyección $\pi : B \to A$ es morfismo de anillos.

   a) $B(-)$ es un funtor de la categoría de A-bimódulos en la categoría de anillos, y π es una transformación natural entre $B(-)$ y el funtor constantemente A (el funtor que asigna A a todo bimódulo, y la identidad de A a toda flecha).

b) Muestre que $s : A \to B(M)$ es una sección de π que es morfismo de anillos sí y sólo si s es de la forma
$$s(a) = a + D(a)$$
con $D \in \mathrm{Der}(A, M)$.

11. (*) Sea M una variedad diferenciable compacta, mostrar que todo morfismo de anillos $\mathbb{R}$-lineal $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ es de la forma ev_p para algún p, donde $ev_p(f) = f(p)$, es decir
$$M \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-alg}(C^\infty(M), \mathbb{R})$$
$$p \mapsto ev_p$$
Muestre además que
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-alg}(C^\infty(M), \mathbb{R}[x]/x^2) \cong TM$$

12.3. Egalizador, coegalizador, límites y colímites

1. Escribir la definición de egalizador y coegalizador.
   - Mostrar que en Sets, el egalizador de $f, g : X \to Y$ esta dado por (la inclusión de) el subconjunto de X en donde las funciones coinciden, y el coegalizador está dado por (la proyección a) el cociente de Y por la relación $f(x) \sim g(x)$, $\forall x \in X$.
   - Calcular egalizador y coegalizador en grupos abelianos.
2. Mostrar que p es el coegalizador de $f, g : X \to Y$ en $\mathcal{C}$
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "p"] & Z \end{tikzcd}$$
si y sólo si, para todo objeto W, el siguiente es un diagrama de egalizador en Sets:
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W) \arrow[r, "p^*"] & \mathrm{Hom}(Y, W) \arrow[r, shift left, "f^*"] \arrow[r, shift right, "g^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \end{tikzcd}$$
3. Dualmente, mostrar que i es el *coegalizador* de $f, g : X \to Y$ en $\mathcal{C}$
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$
si y sólo si, para todo objeto W, el siguiente es un diagrama de *egalizador* en Sets:
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z) \arrow[r, "i_*"] & \mathrm{Hom}(W, X) \arrow[r, shift left, "f_*"] \arrow[r, shift right, "g_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y) \end{tikzcd}$$
Observación: tanto en el caso de egalizador como de COegalizador, al tomar Hom, como en uno es en una variable y en el otro caso en la otra, ambos se traducen a egalizadores en Sets.

4. Sea $\mathcal{C}$ una categoría donde existen coproductos arbitrarios y coegalizadores. Sea $(I, \leq)$ un poset y $(X_i \stackrel{\iota_{ij}}{\to} X_j)_{i \leq j}$ un sistema directo en $\mathcal{C}$. Consideramos $\coprod_I X_i$ (existe por hipótesis). Notar que para cada $i \leq j$, el siguiente diagrama NO necesariamente conmuta

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\iota_{ij}"] \arrow[rr, bend right, "\iota_i"'] & X_j \arrow[r, "\iota_j"] & \coprod_I X_i \end{tikzcd}$$

Llamemos $f_{ij} := \iota_j \circ \iota_{ij}$. Como para cada $i \leq j$ estan definidos

$$X_i \xrightarrow{f_{ij}} \textstyle\coprod_I X_i$$

$$X_i \xrightarrow{\iota_i} \textstyle\coprod_I X_i$$

la propiedad universal del coproducto (no sobre I sino sobre todos los pares (i, j) tales que $i \leq j$) determina un único morfismo para las f_i

$$f : \coprod_{\{(i,j): i \leq j\}} X_i \to \coprod_I X_i$$

y otro único morfismo para las ι_i

$$\iota : \coprod_{\{(i,j): i \leq j\}} X_i \to \coprod_I X_i$$

Muestre que el coegalizador de f y ι tiene la propiedad universal del colímite:

$$\textstyle\coprod_{\{(i,j): i \leq j\}} X_i \underset{\iota}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \coprod_I X_i \xrightarrow{p} \varinjlim_I X_i \ := \mathit{Coegalizador}(f, \iota)$$

Las flechas $X_i \to \lim_I X_i$ estan dadas por la composición de la flecha correspondiente a $i \leq i$ que va de X_i en $\coprod_{\{(i,j): i \leq j\}} X_i$, compuesta con f (o con ι, da lo mismo!) y compuesta con p.

5. Dualmente, muestre que si $\mathcal{C}$ es una categoría donde existen productos arbitrarios y egalizadores, entonces existen limites inversos arbitrarios. *sugerencia: dar vuelta las flechas y comparar lo que se tiene con la descripción del límite inverso en Sets.*

12.4. Producto tensorial

1. Muestre que la multiplicación $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ induce un isomorfismo $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{(n:m)}$ $(a \otimes b \mapsto ab)$.

2. Si M es un grupo abeliano, $\mathbb{Z}_p \otimes M \cong M/pM$.

3. Muestre que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \oplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Muestre que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es divisible (y de torsión).

4. Sea T un grupo abeliano de torsión y D divisible, mostrar que $D \otimes_{\mathbb{Z}} T = 0$. Mostrar que si T tiene p-torsión y la multiplicación por $p. : D \to D$ es sobreyectiva (D es p-divisible) entonces también $D \otimes_{\mathbb{Z}} T = 0$

5. Sea A un anillo íntegro, muestre que M es un A-módulo divisible y sin torsión si y sólo si es un K-espacio vectorial (K=cuerpo de fracciones de A).

6. Sea A un anillo que es subanillo de B, M_B, ${}_BN$ dos B-módulos, muestre que
$$M \otimes_B N = (M \otimes_A N)/\langle mb \otimes_A n - m \otimes_A bn : m \in M,\ n \in N,\ b \in B\rangle$$

7. Si M es un $k[x]$-módulo y k es el $k[x]$-módulo dado por $x.\lambda = 0$ ($\lambda \in k$), entonces
$$k \otimes_{k[x]} M \cong M/xM$$

8. Sea V es k-espacio vectorial de dimensión finita, $f \in \mathrm{End}_k(V)$ y M el $k[x]$-módulo dado por V y f. Sea $\lambda_0 \in k$ y $k_{\lambda_0} = k$ como espacio vectorial pero con la estructura de $k[x]$-módulo dada por $p(x),1 = p(\lambda_0)$. Mostrar que
   a) Si λ_0 NO es autovalor de $f \Rightarrow k_{\lambda_0} \otimes_{k[x]} M = 0$. Compare con ejercicio 5.
   b) Asumamos f diagonalizable y λ_0 un autovalor, entonces $k_{\lambda_0} \otimes_{k[x]} M \cong V_{\lambda_0}$ (el subespacio de autovectores de autovalor λ_0).
   c) Si f no es diagonalizable pero λ_0 es autovalor, entonces $k_{\lambda_0} \otimes_{k[x]} M$ calcula el subespacio de autovectores de autovalor λ_0 o el subespacio de $(x - \lambda_0)$-torsión?

9. Si A es subanillo de B (o si se tiene dado un morfismo de anillos $f : A \to B$) y ${}_AM$ es un A-módulo, se define la *extensión de escalares* como $B \otimes_A M$. Muestre que si N es un B-módulo (en particular es A-módulo, via $a \cdot n = f(a)n$) entonces
$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N) \cong \mathrm{Hom}_A(M, N)$$

10. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. se define $V[i] := V \oplus Vi$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, con la estructura de $\mathbb{C}$ espacio vectorial dada por, si $z = a + bi \in \mathbb{C}$ y $w = u + vi$,
$$z \cdot w := (au - bv) + (av + bu)i$$
Muestre que esta construcción es funtorial (entre la categoría de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales y la de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales. Muestre que $V[i] \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$.

11. Sea W un $\mathbb{C}$-espacio vectorial provisto de una involución σ, es decir, $\sigma : W \to W$ es $\mathbb{R}$-lineal, $\sigma^2 = \mathrm{Id}_W$, y $\sigma(zw) = \overline{z}\sigma w$ si $w \in W$ y $z \in \mathbb{C}$. Muestre que, si $W^\sigma = \{w \in W : \sigma(w) = w\}$ entonces $\dim_{\mathbb{R}}(W^\sigma) = \dim_{\mathbb{C}}(W)$ y $W \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W^\sigma$, más aún, bajo esa identificacion, la involución de W se corresponde con la conjugación de $\mathbb{C}$ tensor la identidad de W^σ.

12. Si A y B son dos anillos, muestre que la formula
$$(a \otimes b)(a' \otimes b') := (aa') \otimes (bb')$$
esta bien definida (como aplicación $(A \otimes_{\mathbb{Z}} B) \times (A \otimes_{\mathbb{Z}} B) \to A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ y, en caso que $1_A \otimes 1_B \neq 0$, define una estructura de anillo en $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$.

13. Muestre que en la categoría de anillos conmutativos, $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ es el coproducto. En la categoría de k-álgebras conmutativas, el coproducto es $A \otimes_k B$.

14. Muestre que $k[x, y] \cong k[x] \otimes_k k[y]$. Si G y H son grupos (o monoides con 1) $\Rightarrow k[G \times H] \cong k[G] \otimes_k k[H]$.

15. Muestre que el isomorfismo del ejercicio 1 ($\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{(m:n)}$) es un iso de anillos.

16. Sean A, B, C anillos conmutativos y consideramos $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ como anillo. Muestre
$$\mathrm{Hom}_{anillos}(A \otimes_{\mathbb{Z}} B, C) \cong \mathrm{Hom}_{anillos}(A, C) \times \mathrm{Hom}_{anillos}(B, C)$$

17. Bajo la identificación B^{op}-módulos a izquierda $\equiv$ B-módulos a derecha muestre que
$${}_A\mathrm{mod}_B = {}_{A \otimes_{\mathbb{Z}} B^{op}}\mathrm{mod}$$

18. Muestre que existe un isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras: $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

19. Sea G grupo, V y W $k[G]$-módulos, entonces en $V \otimes W$ la formula $g \cdot (v \otimes w) := gv \otimes gw$ define una estructura de $k[G]$-módulo. También $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ es $k[G]$-módulo via $(g \cdot \phi)(v) := g\phi(g^{-1}v)$. Muestre que si en k ponemos la acción trivial, entonces en particular V^* es un $k[G]$-módulo y el isomorfismo natural
$$\mathrm{Hom}_k(V, W) \cong V^* \otimes W$$
es de $k[G]$-módulos. Tambien $\mathrm{Hom}_{k[G]}(V, W) = (\mathrm{Hom}_k(V, W))^G$.

20. Diremos que M_A es A-playo si $M \otimes_A -$ es exacto.

    a) M_A es A-playo si y sólo si $M \otimes_A -$ preserva monomorfismos.

    b) Muestre que sumas directas de playos y sumandos directos de playos son playos.

    c) (Proyectivo implica playo) El módulo a derecha $M = A_A$ es A-playo, luego si M es A-proyectivo (visto como A-módulo a derecha) entonces es playo.

    d) Si A es íntegro y K su cuerpo de fracciones, entonces K es playo. Muestre que si $A \neq K$ entonces K no es proyectivo. (sugerencia, muestre que todo par de elementos de K son l.d. y use esto para ver que K no esta contenido en ningun A-libre salvo que $K = A$).

    e) S subconjunto multiplicativo de A, entonces $S^{-1}A$ es A-playo.

    f) (no tan fácil) Sea $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ una s.e.c. de módulos sobre un anillo, si Y y Z son playos, muestre que X es playo. (un poco mas fácil) si X y Z son playos entonces Y es playo.

12.5. Proyectivos

1. Muestre que P es proyectivo si y sólo si toda sucesión exacta del tipo
$$0 \to X \to Y \to P \to 0$$
se parte.

2. Exhiba sucesiones exactas cortas de módulos sobre algún anillo que no se partan (en particular habrá exhibido módulos no proyectivos).

3. Sea $F : A\text{-mod}\to Ab$ un funtor aditivo (i.e. $F(f_1 + f_2) = F(f_1) + F(f_2)$) y
$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$
una s.e.c. que se parte, mostrar que
$$0 \to FX \to FY \to FZ \to 0$$
es exacta, mas aun: se parte.

4. P es proyectivo si y sólo si es sumando directo de un libre, y si P es finitamente generado (f.g.) entonces es sumando directo de un libre f.g.

5. Si M es un A-módulo a izquierda entonces
$$M^* := \mathrm{Hom}_A(M, A)$$
es un A-módulo a derecha via
$$(f \cdot a)(m) := f(am)$$

6. Sean P y N dos A-módulos y considere la siguiente aplicación
$$P^* \times N \to \mathrm{Hom}_A(P, N)$$
$$(f, n) \mapsto \Big(p \mapsto f(p)n\Big)$$
Muestre que es bilineal y A-balanceada, por lo tanto define un morfismo de grupos abelianos
$$P^* \otimes_A N \to \mathrm{Hom}_A(P, N)$$
$$f \otimes n \mapsto \Big(p \mapsto f(p)n\Big)$$
Muestre que la clase de módulos P tal que la aplicación anterior es un iso para cualquier N es cerrad por sumas directas finitas y sumandos directos. Muestre que esa clase contienen a $P = A$. Concluya que para todo proyectivo de tipo finito P, la aplicación anterior es un iso.

7. Sea P proyectivo f.g. y $p_1, \cdots p_n$ un sistema de generadores. Muestre que existen $\phi_1, \ldots, \phi_n \in P^*$ tales que para todo $x \in P$ vale
$$x = \sum_i \phi_i(x) p_i$$
es decir, $\mathrm{Id} = \sum_i \phi_i \otimes_A p_i \in P^* \otimes P \cong \mathrm{End}_A(P)$

8. Muestre que si Id_M esta en la imagen de $M^* \otimes_A M \to \mathrm{End}_A(M)$ entonces M es proyectivo de tipo finito.

9. Sea $A = k[x]$ y $M = k \cong k[x]/(x)$, muestre que
$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{\pi} k \longrightarrow 0$$
es una resolución proyectiva.

10. Sea $A = k[x]/(x^2)$ y $M = k \cong k[x]/(x)$, muestre que
$$\cdots \longrightarrow A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{\pi} k \longrightarrow 0$$
es una resolución proyectiva.

11. Sea $A = k[x]/(x^N)$ con $N \geq 2$ y $M = k \cong k[x]/(x)$, muestre que
$$\cdots \longrightarrow A \xrightarrow{x^{N-1}} A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{x^{N-1}} A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{\pi} k \longrightarrow 0$$
es una resolución proyectiva.

12. Sea $A = k[x, y]$, muestre que la siguiente es una sucesión exacta
$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{d_2} A \oplus A \xrightarrow{d_1} A \xrightarrow{\pi} A/(x, y) \longrightarrow 0$$
donde $d_2(p) = (yp, -xp)$ y $d_1(p, q) = xp + yq$.

12.6. Inyectivos

1. Muestre que I es inyectivo si y sólo si toda sucesión exacta del tipo
$$0 \to I \to X \to Y \to 0$$
se parte. Observar que el ejercicio 2 de la sección anterior exhibe módulos no inyectivos.

2. Sea A un anillo, probar que son equivalentes
   - Todo A-módulo es proyectivo.

- Todo A-módulo es inyectivo.

3. Sea A un dip (dominio de ideales principales), muestre que I es inyectivo si y sólo si es A-divisible (i.e. para todo $x \in I$, si $a \in A \setminus \{0\}$ entonces existe $\widetilde{x} \in I : a\widetilde{x} = x$). En particular si K es el cuerpo de fracciones de A, K es A-inyectivo, tambien K/A.

4. Sea $A = k[x]$ y $I = k[t]$ como espacio vectorial, con la estructura de $k[x]$-módulo dada por
$$x \cdot t^n = t^{n-1} \text{ si } n > 0 \text{ y } x \cdot 1 = 0$$
Muestre que I inyectivo. Observar que $k = k[x]/(x) \hookrightarrow I$ como $k[x]$-módulo.

5. Sea k un cuerpo y A una k-álgebra, si M es un A-módulo a derecha, se define el A-módulo a izquierda
$$M' := \mathrm{Hom}_k(M, k)$$
(no confundir con $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$) con la estructura de A-módulo (a izquierda) dada por
$$(a \cdot \phi)(m) := \phi(ma)$$
Mostrar que si M es A-playo (en particular si M es proyectivo, o libre), entonces M' es inyectivo.

6. Sea $A = k[x]$, muestre que si $M = k[t]$ como en el ejercicio 3, entonces M se identifica con un submódulo de A'.

12.7. Más sobre Proyectivos e inyectivos

7. Si $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ es un sucesión exacta corta de A-módulos y $P \to X$, $Q \to Z$ son epi, con P y Q proyectivos:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & \\
P \arrow[r, "p"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
& Y \arrow[d, "g"] & \\
Q \arrow[r, "q"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
& 0 &
\end{tikzcd}$$

Mostrar que se puede completar a un diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
P \arrow[r, "p"] \arrow[d, "i_P"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
P \oplus Q \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\pi_Q"] & Y \arrow[r, dotted] \arrow[d, "g"] & 0 \\
Q \arrow[r, "q"] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

8. Sea A un anillo. Muestre que son equivalentes
   - a) Todo módulo es proyectivo.
   - b) Todo módulo es inyectivo.
   - c) Todo submódulo es un sumando directo.
   - d) (un poco mas difícil, mucho Zorn..) Todo módulo es suma directa de simples.
9. (un poco mas difícil) Sea A como en el ejemplo anterior. Supongamos que existe una única clase de isomorfismo de simples. Es decir, sea S_0 un A-módulo simple, y asumimos que si S es simple, entonces $S \cong S_0$. Muestre que necesariamente $A \cong M_n(D)$ para cierto $n \in \mathbb{N}$ y D un anillo de división. (Sugerencia: primero caracterizamos A^{op}, usamos el isomorfismo de anillos $A^{op} \cong \mathrm{Hom}_A(A, A)$, habiendo descompuesto a A (como A-módulo a izquierda) como suma directa de simples.)

12.8. Álgebras de Frobenius

En esta sección k es cuerpo, A es k-álgebra (i.e. $k \subseteq Z(A)$) **de dimensión finita**.

Una forma bilineal **balanceada** es una función $\phi : A \times A \to k$ bilineal tal que

$$\phi(xa, y) = \phi(a, xy), \ \forall a, x, y \in A$$

Se dice **no degenerada** si la aplicación $A \to A'$ $\Big(a \mapsto \phi(a, -)\Big)$ es inyectiva.

Recordamos que si M es un A-módulo a *derecha*, entonces $M' := \mathrm{Hom}_k(M, k)$ (no confundir con $\mathrm{Hom}_A(M, A)$) es un A-módulo a izquierda via

$$(a \cdot f)(m) := f(ma)$$

También, si M fuera un A-módulo a *izquierda*, entonces M' resulta A-módulo *derecha* via

$$(f \cdot a)(m) := f(am)$$

1. Sea $\phi : \times A \to k$ bilineal A-balanceada, entonces $\widetilde{\phi} :^{op} \times A^{op} \to k$ dada por
$$\widetilde{\phi}(a,b) := \phi(b,a)$$
es A^{op}-balanceada. Además $\widetilde{\phi}$ es no degenerada si y sólo si ϕ es no degenerada.

2. Muestre que efectivamente M' es un A-módulo del otro lado que M. Además, si $\dim_k M < \infty$, el iso standard $M \cong M''$ es A-lineal.

3. Son equivalentes

   a) existe un isomorfismo de A-módulos a izquierda ${}_AA \cong (A_A)'$,

   b) existe una forma bilineal A-balanceada no degenerada.

   En cualquiera de esos casos, A se dirá un **álgebra de Frobenius**

4. A es Frobenius $\iff$ A es inyectivo como A-módulo a izquierda ($\iff$ a derecha).

5. Sea A un álgebra de Frobenius. Muestre que M es proyectivo $\iff$ M es inyectivo.

6. Muestre que las siguientes son álgebras de Frobenius:

   a) $k[x]/x^2$. Más en general, si $A = k[x]/(x^{N+1})$, definimos $\phi : A \to k$ por el coeficiente de grado máximo, es decir, si $a = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N$ con $a_i \in k$, $\phi(a) = a_N$. Muestre que $\langle a,b\rangle := \phi(ab)$ es una forma bilineal balanceada no degenerada, por lo tanto A es Frobenius.

   b) $k\{x,y\}/(x^2, xy + yx, y^2)$. (En general, un álgebra exterior en un espacio vectorial de dimensión finita es Frobenius)

   c) $M_n(k)$ (sugerencia: considerar la traza del producto).

   d) $k[G]$ donde G es un grupo finito.

   e) Si A y B son Frobenius, entonces $A \times B$ y $A \otimes B$ también lo son.

7. Sea M un A-módulo a izquierda finitamente generado. Buscamos un monomorfismo $i : M \to I$ con I inyectivo:

   - Sea $p : P \to M$ un epi de módulos a iq., con P proyectivo (por ejemplo, $P = A \otimes M$. Muestre que
   $$p' : M' \to P'$$
   es un monomorfismo de A-módulos a derecha, con P' inyectivo como A-módulo a derecha.
   - Lo mismo cambiando izq$\leftrightarrow$derecha.
   - Sea $\widetilde{p} : \widetilde{P} \to M'$ un epi con $\widetilde{P}$ proyectivo a derecha
   $$\textit{por ejemplo } P := M' \otimes A \xrightarrow{\widetilde{p}} M'$$
   $$f \otimes a \mapsto f \cdot a$$

Muestre que

$$(\widetilde{p})' : M'' \to P'$$

es un monomorfismo de A-módulos a izq., y que P' es inyectivo a izq.

- Usando el isomorfismo standard $M \cong M''$ y tomando $P = M' \otimes A_A$ (donde A_A denota a A visto como A-módulo a derecha), junto con el isomorfismo $P' = (M' \otimes A_A)' \cong (A_A)' \otimes M'' \cong (A_A)' \otimes M$, donde la estructura de A-módulo a derecha $M' \otimes A_A$ viene de A_A y la de A-módulo a izquierda de $(A_A)' \otimes M''$ (y de $(A_A)' \otimes M$) viene de $(A_A)'$, explicíte la fórmula de la inclusión inyectiva

$$M \to A' \otimes M$$

8. Explicitar lo anterior para $A = k[x]/(x^2)$. (eventualmente, explicitar para $k[x]/(x^{N+1})$)

9. Las siguientes son álgebras graduadas de dimensión finita (muéstrelo encontrando bases), y el grado máximo tiene dimensión uno. Sea ϕ= coeficiente de grado máximo en una base del subespacio vectorial de grado máximo. Notar (haga la cuenta en los ejemplos primero) que ϕ depende de la base, pero está determinada a menos de múltiplo escalar no nulo. Muestre que $\langle(a, b) := \phi(ab)$ es una forma bilineal no degenerada A-balanceada, luego, cada una de ellas es Frobenius:

   a) $A = k[x, y](xy, x^2 + y^2)$

   b) $k\{x, y\}/(x^2, y^3, xy = qyx)$ (donde $q \in k \setminus \{0\}$)

   c) $k\{x, y, z\}/(x^2, y^2, z^2, xyz + yzx + zxy, xzy + zyx + yxz)$ (no comutativa)

12.9. Lema de la serpiente - II

1. Completar la demostración del lema de la serpiente.

2. Interpretar los ejercicios de la lista "Lema de la serpiente 1" en términos del Lema de la Serpiente (o de su conclusión: la s.e.larga en homología). *Sugerencia: si $f : M_1 \to M_2$ es un morfismo de A-módulos, entonces se lo puede ver como un complejo "de largo 2"*

$$\cdots \to 0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \to 0 \to \cdots$$

y un morfismo de s.e.c. de A-módulos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_X} & & \downarrow{\scriptstyle f_Y} & & \downarrow{\scriptstyle f_Z} & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

se lo puede ver como una s.e.c. de complejos (verticales, de largo 2).

3. (naturalidad de δ) si
$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[ddr, dashed] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[ddr, dashed] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[ddr, dashed] & 0 & \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[ddr, dashed] & Q \arrow[r] \arrow[ddr, dashed] & R \arrow[ddr, dashed] & & \\
 & & X' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "\beta'"] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma'"] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & P' \arrow[r] & Q' \arrow[r] & R' &
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo con flechas horizontales exactas, y llamemos f a las flechas punteadas ($f_M\colon M \to M'$), entonces f induce un morfismo de s. exactas

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "f_X|"] & \mathrm{Ker}(\beta) \arrow[r] \arrow[d, "f_Y|"] & \mathrm{Ker}(\gamma) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f_Z|"] & \mathrm{CoKer}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f_P}"] & \mathrm{CoKer}(\beta) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f_Q}"] & \mathrm{CoKer}(\gamma) \arrow[d, "\overline{f_R}"] \\
\mathrm{Ker}(\alpha') \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\beta') \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\gamma') \arrow[r, "\delta'"] & \mathrm{CoKer}(\alpha') \arrow[r] & \mathrm{CoKer}(\beta') \arrow[r] & \mathrm{CoKer}(\gamma')
\end{tikzcd}$$

4. Definir morfismo entre sucesiones exactas cortas de complejos. Mostrar que si

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "a"] & Y_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "b"] & Z_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X'_\bullet \arrow[r] & Y'_\bullet \arrow[r] & Z'_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es un morfismo de s.e.c. de complejos, entonces a, b, c, inducen morfismos de s.e. largas de sus homologías, es decir, un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(Z) \arrow[r] \arrow[d, "c"] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "a"] & H_n(Y) \arrow[r] \arrow[d, "b"] & H_n(Z) \arrow[r] \arrow[d, "c"] & H_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "a"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(Z') \arrow[r] & H_n(X') \arrow[r] & H_n(Y') \arrow[r] & H_n(Z') \arrow[r] & H_{n-1}(X') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

5. Sea k un cuerpo y $A = k[x, y]$, $0 \to X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z \to 0$ una s.e.c. de A-módulos y

consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_1"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_1"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "d_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \oplus X \arrow[r, "f\oplus f"] \arrow[d, "d_2"] & Y \oplus Y \arrow[r, "g\oplus g"] \arrow[d, "d_2"] & Z \oplus Z \arrow[r] \arrow[d, "d_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde $d_1(m) = (-ym, xm)$, $d_2(m, m') = xm + ym'$, $(m, m' \in X, Y, Z)$. Muestre que las filas son exactas y las columnas son complejos (i.e. $d_2 d_1 = 0$), por lo tanto se lo puede interpretar como una s.e.c. de complejos (los complejos escritos verticalmente)

$$\text{“}0 \to X_\bullet \to Y_\bullet \to Z_\bullet \to 0''$$

Si definimos, para M un A-módulo, los invariante y coinvariantes respectivamente por

$$M^{x,y} := \{m \in M : x \cdot m = 0 = y \cdot m\}$$

$$M_{x,y} := \frac{M}{x \cdot M + y \cdot M}$$

entonces, para cada s.e.c. en ${}_A Mod$ $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ $\exists$ una s.e.larga de la forma

$$0 \to X^{x,y} \to Y^{x,y} \to Z^{x,y} \to H^1_X \to H^1_Y \to H^1_Z \to X_{x,y} \to Y_{x,y} \to Z_{x,y} \to 0$$

donde H^1_M es el funtor que a un A-módulo M le asigna la homología del complejo

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_1} M \oplus M \xrightarrow{d_2} M \longrightarrow 0$$

en el lugar donde está $M \oplus M$.

6. Sea $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, presentado como grupo abeliano libre con dos generadores g_1 y g_2. Si M es un $k[G]$-módulo, definimos una estructura de $k[x, y]$-módulo vía

$$x \cdot m = (1 - g_1) \cdot m, \qquad y \cdot m = (1 - g_2) \cdot m$$

Muestre que $M^{x,y} = M^G$ y que $M_{x,y} = M_G$. Explicitar lo más que pueda la s. exacta anterior relacionando G-invariantes y G-coinvariantes.

7. Consideremos un diagrama conmutativo con filas exactas de la forma

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X_4 \arrow[d, "f_4"] \\ Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \end{tikzcd}$$

Muestre que si f_2 y f_4 son monos y f_1 epi, entonces f es mono. Dualmente, si se tiene un diagrama

$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X_4 \arrow[r] \arrow[d, "f4"] & X_5 \arrow[d, "f_5"] \\ Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \arrow[r] & Y_5 \end{tikzcd}$$

con f_2 y f_4 epi, y f_5 mono, entonces f es epi. Concluir el siguiente:

8. (Lema de los 5) Si $f_{1,2,4,5}$ son isos, entonces f es iso.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X_4 \arrow[r] \arrow[d, "f4"] & X_5 \arrow[d, "f_5"] \\ Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \arrow[r] & Y_5 \end{tikzcd}$$

(Ver Ejercicio 4) Dado un morfismo de sucesiones exactas cortas de complejos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "a"] & Y_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "b"] & Z_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X'_\bullet \arrow[r] & Y'_\bullet \arrow[r] & Z'_\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Si dos de las flechas a, b, c, inducen isomorfismo en homología, entonces la tercera también.

9. Sean ahora $0 \to X^\bullet \to Y^\bullet \to Z^\bullet \to 0$ una s.e.c. de complejo de COcadenas, es decir, $d(M^n) \subseteq M^{n+1}$, para $M = X, Y, Z$. Con el truco $\widetilde{M_n} := M^{-n}$ (o rehaciendo la demostración) muestre que esa s.e.c. induce una s.e.larga de la forma

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(Z) \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow H^n(Y) \longrightarrow H^n(Z) \longrightarrow H^{n+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

donde $H^n(M) = \dfrac{\operatorname{Ker}(d\colon M^n \to M^{n+1})}{d(M^{n-1})}$

10. (*En algún momento se requiere partición de la unidad*) Sea M una variedad diferenciable, $\Omega_c^k(M)$ las k-formas a soporte compacto, U y V dos abiertos de M tales que $V \cup U = M$. En general, si X es un abierto de M, identificamos $\Omega_c^k(X) \subset \Omega_c^k(M)$ como

las formas de M con soporte contenido en X. Muestre que existe una sucesión exacta de complejos de De Rham (de formas a soporte compacto)

$$0 \to \Omega_c^\bullet(U \cap V) \to \Omega_c^\bullet(U) \oplus \Omega_c^\bullet V \to \Omega_c^\bullet M \to 0$$

y por lo tanto una sucesión exacta larga en H_c (donde $H_c^n = H^n(\Omega_c^\bullet)$= cohomología de las formas a soporte compacto). Notar que la intersección y la unión están "al revés" con respecto a Mayer-Vietoris usual.

Por otro lado, la restricción a un abierto da morfismos $\Omega^k(M) \to \Omega^k(X)$ para cualquier abierto X, por lo tanto hay una sucesión de formas (no nec. a soporte compacto)

$$0 \to \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \to \Omega^\bullet(U \cap V) \to 0$$

que es exacta (la exactitud a izquierda es muy fácil, la exactitud a derecha necesita partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U, V\}$). Deducir la sucesión exacta larga para cohomología de De Rham.

Capítulo 13

Complejos de cadenas

Si A es un anillo, Chain(A) denota la categoría de complejos de A-módulos (con diferenciales A-lineales y morfismos de complejos A-lineales).

1. Sea $f : (M,d) \to (N,\partial)$ un morfismo de complejos. Muestre que $(\mathrm{Ker}(f),0)$ es un subcomplejo de (M,d), donde $Ker(f)_n = \mathrm{Ker}(f_n) \subseteq M_n$. Muestre que la imagen (lugar a lugar) de f es un subcomplejo de (N,∂) y que si definimos $\mathrm{CoKer}(f)_n := N_n/Im(f_n)$ entonces ∂ induce un diferencial $\overline{\partial}$ en $\mathrm{CoKer}(f)$, y éste tiene la propiedad universal del cociente. Es decir, para todo morfismo de complejos $g : (N,\partial) \to (W,d_W)$ tal que $fg = 0$, existe un unico $\overline{g} : (\mathrm{CoKer}f,\overline{\partial}) \to (W,d_W)$ morfismo de complejos con $\overline{g}\pi = g$.

2. Sea $f : M \to N$ (omitimos los diferenciales en la notación) un morfismo de complejos.

   a) Si f es monomorfismo (i.e. todas las f_n son monomorfismos) entonces Cono(f) es cuasi-isomorfo a $N/f(M)$.

   b) Si f es epimorfismo, entonces Cono(f) es cuasi-isomorfo a $\mathrm{Ker}(f)[-1]$

3. Muestre que Cono(Id) es contráctil.

4. Si (M,d_M) es un complejo de A-módulos a derecha (con d_M morfismos A-lineales) y (N,d_N) es un complejo de A-módulos a izquierda, muestre que

   $$(M \otimes_A N)_n := \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} M_p \otimes_A N_{n-p}$$

   resulta un complejo (de grupos abelianos) con el diferencial dado por

   $$d(x \otimes y) = d_M(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes d_N(y)$$

   donde $x \in M_p$ e $y \in N_{n-p}$. Muestre que la aplicación

   $$H_p(M) \times H_q(N) \to H_{p+q}(M \otimes_A N)$$

dada por
$$([x],[y]) \mapsto [x \otimes_A y]$$
es bilineal y A-balanceada y por lo tanto induce un morfismo (natural)
$$\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H_p(M) \otimes_A H_{n-p}(N) \to H_n(M \otimes_A N)$$

5. Sea $f : M \to N$ un morfismo de complejos, muestre que existe una sucesión exacta larga de la forma
$$\cdots \longrightarrow H_n(M) \xrightarrow{f} H_n(N) \longrightarrow H_n(\mathrm{Cono}(f)) \longrightarrow H_{n-1}(M) \xrightarrow{f} H_{n-1}(N) \longrightarrow \cdots$$

6. Consideremos un diagrama de A-módulos y morfismos A-lineales de la forma
$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r, "d_n"] & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_n \arrow[r, "d_n"] & Q_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "d_2"] & Q_1 \arrow[r, "d_1"] & Q_0 \arrow[r, "d_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
donde la fila de abajo es *exacta* (pero los Q no necesariamente proyectivos, y la fila de arriba es un complejo (no necesariamente exacto) donde los P_i son *proyectivos* para todo $i \geq 0$. Muestre que este diagrama se puede completar a un morfismo de complejos
$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "f_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_n \arrow[r, "d_n"] & Q_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "d_2"] & Q_1 \arrow[r, "d_1"] & Q_0 \arrow[r, "d_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

7. Recordemos que dos morfismos $f, g : M_\bullet \to N_\bullet$ (en $\mathrm{Chain}(A)$) se dicen homotópicos, y denotaremos $f \sim g$, si existe $h : M \to N$ A-lineal con $h(M_n) \subseteq N_{n+1}$ $\forall n$ (recordamos los diferenciales verifican $d(M_n) \subseteq N_{n-1}$) tal que $dh + hd = f - g$.

   a) Muestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.

   b) (compatibilidad con la suma) Si $f, g, f', g' : M \to N$ con $f \sim g$ y $f' \sim g'$, entonces $f + f' \sim g + g'$.

   c) (compatibilidad con la composición) Si $f \sim f'$ y $T : N \to W$ y $S : X \to M$ son morfismos de complejos, entonces $TfS \sim Tf'S$. En particular (si f y g son componibles y) si $f \sim f'$ y $g \sim g'$ entonces $fg \sim f'g'$.

   d) Si se define $\mathrm{Obj}(\mathcal{H}(A)) = \mathrm{Obj}(\mathrm{Chain}(A))$, pero
   $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(X_\bullet, Y_\bullet) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}}(X_\bullet, Y_\bullet)/\sim$$
   entonces la composición en $\mathrm{Chain}(A)$ induce en $\mathcal{H}(A)$ una composición, que hace de $\mathcal{H}(A)$ una categoría. Cualquier funtor F en $\mathrm{Chain}(A)$ que verifique $F(f) = F(f')$ para todo par f, f' con $f \sim f'$ (por ejemplo $X_\bullet \mapsto H_n(X_\bullet)$) se factoriza por $\mathcal{H}(A)$.

13.1. Significado directo de “$Co(f)$ contráctil”

Supongamos dada $h : Co(f) \to Co(f)$ una homotopía de contracción h, es decir, h verfica $\partial h + h\partial = \mathrm{Id}_{Co(f)}$. Recordemos

$$Co(f)_n = N_n \oplus M_{n-1}, \qquad h(Co(f)_n) \subseteq Co(f)_{n+1}$$

$$\partial(x, m) = (dx + fm, -dm)$$

escribamos, para cada $(x, m) \in N_n \oplus M_{n-1}$

$$h(x, 0) = (h_1 x, gx)$$

$$h(0, m) = (\phi m, h_2 m)$$

donde (para cada n)

$$h_1 : N_n \to N_{n+1}, \qquad h_2 : M_n \to M_{n+1}, \qquad g : N_n \to M_n, \qquad \phi : M_{n-1} \to N_{n+1}$$

Escribir explícitamente $\partial h + h\partial = \mathrm{Id}_{Co(f)}$ en términos de h_1, h_2, g y ϕ y concluir que $Co(f)$ contráctil equivale a que

$$\exists g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(N, M) : fg \sim \mathrm{Id} \text{ y } gf \sim \mathrm{Id}$$

y $\exists\phi : N \to M$ de grado 2 tal que $fh_2 + h_1 f = d\phi - \phi d$. En particular, M y N deben ser contráctiles (pero con homotopías que verifican una propiedad especial).

Los siguientes ejercicios tienen por objetivo final mostrar que si M y N son contráctiles, vía dos homotpías cualesquiera, entonces $Co(f)$ es contráctil, para cualquier $f : M \to N$.

La presentación está basada el una parte del Chp.3 (2.1 cycle operators, 2.4 Theorem, pp 75-76) del libro *Acyclic Models*, de Michael Barr, AMS, CRM (2017).

La recíproca

1. Sea $(M_\bullet, d)$ un complejo de A-módulos. Observar estas frases y convencerse de su equivalencia:

   a) $M_\bullet$ es exacto.

   b) para cada $m \in M_\bullet$ tal que $dm = 0$, existe m' con $m = dm'$.

   c) Denotemos $Z_\bullet = \{m \in M : dm = 0\}$ los ciclos de M. Entonces, existe una forma de hacer corresponder a cada $m \in Z_\bullet$ un m' tal que $dm' = m$.

   d) Existe una *función* (no necesariamente morfismo!) $Z_\bullet \to M_\bullet$, que a cada $m \in Z_\bullet$ le asigna m' tal que $dm' = m$.

e) Existe una *función* $z : Z_\bullet \to M_\bullet$ tal que $d \circ z = \mathrm{Id}_M$.

No es de sorprender que la existencia de un tal z que sea morfismo se traduzca en una propiedad adicional de $M_\bullet$.

Definición: Dado $M_\bullet$ un complejo de A-módulos, diremos que admite un **operador acíclico** si existe un **morfismo** $z : Z_\bullet(M) \to M_\bullet$ con $d \circ z = \mathrm{Id}_M$, donde $Z_\bullet(M)$=los ciclos de $M_\bullet$.

Obs: en inglés se llama "cyclic operator", pero "operador cíclico" se le suele llamar a otra cosa (acción de un grupo cíclico, que quizás veamos mas tarde enel curso), por eso lo llamé acíclico, en vez de cíclico.

2. (fácil) Sea $M_\bullet$ contráctil, supongamos que h es una homotopía tal que $hd + dh = \mathrm{Id}_M$. Muestre que $z := h|_Z : Z_\bullet \to M_\bullet$ es un operador acíclico.

3. (más interesante) **Proposición:** Si $M_\bullet$ admite un operador acíclico, entonces es contráctil. *Demostración: Sea* $z : Z \to M$ *tal que* $zd = \mathrm{Id}_M$*, entonces*

$$d = d \circ z \circ d$$

o bien

$$d \circ (\mathrm{Id}_M - z \circ d) = 0$$

$\Rightarrow$ *la imagen de* $\mathrm{Id}_M - z \circ d$ *esta contenida en los ciclos, y se puede componer con* z.

Se define $h : M \to M$ *vía*

$$h := z \circ (\mathrm{Id}_M - z \circ d)$$

Observar que la composición anterior tiene sentido, aún cuando "$z - z \circ z \circ d$*" no, pues* $z \circ z$ *(y por lo tanto* $z \circ z \circ d$*) no esta definido!*

Muestre que h *sirve de homotopía de contracción.*

4. Sea $f : M_\bullet \to N_\bullet$ un morfismo de complejos y $F : A - Mod \to \mathbb{Z} - Mod$ un funtor aditivo (es decir, $F(X \oplus Y) = F(X) \oplus F(Y)$ y $F(f + f') = F(f) + F(f')$. Si $(M_\bullet, d_M)$ es un complejo que admite un operador acíclico, entonces $(F(M_\bullet), F(d_M))$ también.

   En particular, para cada A-módulo C, si $M_\bullet$ admite un operador acíclico, entonces el complejo $\mathrm{Hom}_A(C, M_\bullet)$ también, donde

$$\mathrm{Hom}_A(C, M_\bullet)_n = \mathrm{Hom}_A(C, M_n)$$

   y su diferencial es d_*. Concluimos que $\mathrm{Hom}_A(C, M_\bullet)$ es necesariamente exacto.

5. (más interesante) Muestre que $M_\bullet$ admite un operador acíclico $\iff$ $\mathrm{Hom}_A(C, M_\bullet)$ es exacto para todo A-módulo C.

   Sugerencia: ver el significado de que $\mathrm{Hom}_A(C, M_\bullet)$ *sea exacto para el caso*

$$C := Z_{n_0} = \mathrm{Ker}(d : M_{n_0} \to M_{n_0 - 1}) \subseteq M_{n_0} \subseteq M$$

   y el elemento i= la inclusión $Z_{n_0} \hookrightarrow M_\bullet$*, observar que* $d_*(i) = d \circ i$*=0,*
   luego $i \in \mathrm{Hom}_A(Z_{n_0}, M_\bullet)_{n_0}$ *es un ciclo de ese complejo.*

6. Sea $f : M_\bullet \to N_\bullet$ un morfismo de complejos y $F : A - Mod \to \mathbb{Z} - Mod$ un funtor aditivo (es decir, $F(X \oplus Y) = F(X) \oplus F(Y)$ y $F(f + f') = F(f) + F(f')$). Muestre que
$$F(Co(f)) = Co(F(f))$$
En particular, para cualquier A-módulo C,
$$\mathrm{Hom}_A(C, Co(f)) = Co\Big(f_* : \mathrm{Hom}_A(C, M_\bullet) \to \mathrm{Hom}_A(C, N_\bullet)\Big)$$

7. Muestre que si $M_\bullet$ y $N_\bullet$ son contráctiles y $f : M_\bullet \to N_\bullet$ es un morfismo cualquiera, entonces $\mathrm{Hom}_A(C, Co(f))$ es exacto para cualquier A-módulo C (sugerencia: use la sucesión exacta larga de $Co(f_*)$). Concluya que $Co(f)$ admite un operador acíclico y por lo tanto es necesariamente contráctil. Compare con la primera sección.

13.2. Más sobre el Cono

8. Si M es un complejo, entonces $Co(\mathrm{Id}_M)$ es contráctil. En particular, todo complejo se inyecta en un complejo exacto, y es cociente de un exacto. Resulta claro que no puede esperarse que el funtor homología o preserve monomorfismos ni epimorfismos.

9. Si $f \colon M \to N$ es un morfismo de complejos $\Rightarrow Co(f)$ es el push-out de
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"] & N \\ Co(\mathrm{Id}_M) & \end{tikzcd}$$

10. Sea $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ una s.e.c. de complejos de A-módulos tal que $\forall n$,
$$0 \to X_n \to Y_n \to Z_n \to 0$$
se parte como s.e.c. de A-módulos (pero con secciones/retracciones que no necesariamente respetan el diferencial). Muestre que existe $f : \Sigma^{-1}Z \to X$ tal que $Y \cong Co(f)$.

11. (El axioma del octaedro en la categoría de homotopía) Sea $a : X \to Y$ y $b : Y \to Z$ dos morfismos, $ba : X \to Z$ la composición, y consideramos el siguiente diagrama donde las líneas llenas son las standards.
$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{-1}Co(ba) \arrow[r] & X \arrow[r, equal] \arrow[d, "a"] & X \arrow[d, "ba"] & & \\
\Sigma^{-1}Co(b) \arrow[r] & Y \arrow[r, "b"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & Co(b) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Sigma Y \arrow[d] \\
& Co(a) \arrow[r, dotted, "\exists f"] \arrow[d] & Co(ab) \arrow[r, dotted, "\exists i"] \arrow[d] & Co(b) \arrow[r, dotted, "\exists \pi"] & \Sigma Co(a) \\
& \Sigma X \arrow[r, equal] & \Sigma X & &
\end{tikzcd}$$

muestre que existen morfismos "obvios" de complejos f, i, π como en las flechas punteadas tales y que resulta que $Co(b)$ es *homotópico* al cono de f
(de hecho, $Co(f) = Co(b) \oplus \Sigma Co(\mathrm{Id}_X)$) y se tiene un diagrama

$$\begin{tikzcd}
Co(a) \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Co(ab) \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & Co(b) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi"] & \Sigma Co(a) \arrow[d, equal] \\
Co(a) \arrow[r, "f"] & Co(ab) \arrow[r] & Co(f) \arrow[r, "p"] & \Sigma Co(a)
\end{tikzcd}$$

donde ϕ es una equivalencia homotópica, y los cuadrados que involucran ϕ conmutan a menos de homotopía.

Hacer el dibujo del octaedro.

Capítulo 14

Complejos dobles, resoluciones, Tor y Ext

14.1. Hacia la s.e.larga de Tor

1. Muestre que si $0 \to M_i \to^{f_i} N_i \to^{g_i} R_i \to 0$ es una s.e.c. de A-módulos $\forall i \in I$, entonces

$$0 \to \bigoplus_I M_i \xrightarrow{\oplus_I f_i} \bigoplus_I N_i \xrightarrow{\oplus_I g_i} \bigoplus_I R_i \to 0$$

es una s.e.c. Deduzca que si $0 \to M_{\bullet\bullet} \to^f N_{\bullet\bullet} \to^g R_{\bullet\bullet} \to 0$ se dice una s.e.c. de complejos dobles entonces

$$0 \to Tot(M_{\bullet\bullet}) \to^f Tot(N_{\bullet\bullet}) \to^g Tot(R_{\bullet\bullet}) \to 0$$

es una s.e.c. de complejos usuales.

2. Sea $f : M_\bullet \to N_\bullet$ un morfismo de complejos. Muestre que

$$Co(f) = Tot\left(\begin{tikzcd} \cdots & M_{n-1} \arrow[l, "-d"'] \arrow[d, "f_{n-1}"] & M_n \arrow[l, "-d"'] \arrow[d, "f_{n-1}"] & M_{n+1} \arrow[l, "-d"'] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \arrow[l] \\ \cdots & N_{n-1} \arrow[l, "d"'] & N_n \arrow[l, "d"'] & N_{n+1} \arrow[l, "d"'] & \arrow[l] \end{tikzcd}\right)$$

donde la fila de N es la fila 0 y la de M es la fila 1.

3. Considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & & R_n \arrow[r] \arrow[d] & R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] & Q_n \arrow[r] \arrow[d] & Q_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

con columnas exactas y cuyas filas son complejos, Suponiendo que la primera y tercera fila son exactas y que Q_{n+1} es proyectivo, muestre que se puede extender a un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "i"] & P_n \arrow[r] \arrow[d] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & P_{n+1} \oplus Q_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "p"] & R_n \arrow[r] \arrow[d] & R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & Q_n \arrow[r] \arrow[d] & Q_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

de manera que la columna agregada es exacta, y la fila del medio sigue siendo un complejo. Sugerencia: considere el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "i"] & Im(d_P) = \mathrm{Ker}(d_P) \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed] & P_n \arrow[r] \arrow[d] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & P_{n+1} \oplus Q_{n+1} \arrow[d, "p"] & \mathrm{Ker}(d_R) \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed] & R_n \arrow[r] \arrow[d] & R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, dashed, "?"] & Im(d_Q) = \mathrm{Ker}(d_Q) \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "?"] & Q_n \arrow[r] \arrow[d] & Q_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Observación: para ver que la sucesión de los núcleos es exacta se puede utilizar la sucesión exacta larga de homología.

4. Concluya del ejercicio anterior que si $0 \to M \to E \to N \to 0$ es una s.e.c. de A-módulos

y resolvemos a M y a N:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & & E \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ se puede completar a un diagrama con columnas exactas y filas complejos:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & R_2 \arrow[r] \arrow[d] & R_1 \arrow[r] \arrow[d] & R_0 \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r] \arrow[d] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Concluya que necesariamente las columnas (salvo la de M,E,N) se parten y por lo tanto los R_n son proyectivos). Además (usando la s.e.larga) la fila del medio también es exacta.

5. Con las notaciones del ejercicio anterior, muestre que para cualquier A-módulo a derecha X, la siguiente es una s.e.c. de complejos "filas"

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & X \otimes_A P_2 \arrow[r] \arrow[d] & X \otimes_A P_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \otimes_A P_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X \otimes_A R_2 \arrow[r] \arrow[d] & X \otimes_A R_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \otimes_A R_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X \otimes_A Q_2 \arrow[r] \arrow[d] & X \otimes_A Q_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \otimes_A Q_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

y por lo tanto inducen una s.e.larga

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_2^A(X,N) \to \mathrm{Tor}_1^A(X,M) \to \mathrm{Tor}_1^A(X,E) \to \mathrm{Tor}_1^A(X,N) \to X \otimes_A M \to X \otimes_A E \to X \otimes_A N \to 0$$

14.2. Un poco de resoluciones y levantamientos de morfismos

1. Sobre levantamiento de morfismos cuando se tiene una homotopía de contracción: Consideremos un complejo de A-módulos

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, shift right] & P_n \arrow[l, shift right] \arrow[r, shift right, "d"'] & P_{n-1} \arrow[l, shift right, "h"'] \arrow[r, shift right] & \cdots \arrow[l, shift right] \arrow[r, shift right] & P_1 \arrow[l, shift right, "h"'] \arrow[r, shift right, "d"'] & P_0 \arrow[l, shift right, "h"'] \arrow[r, shift right, "\epsilon"'] & M \arrow[l, shift right, "h"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

provisto de una homotopía de contracción $h_n : P_n \to P_{n+1}$ (en principio $\mathbb{Z}$-lineal, y por convención $P_{-1} := M$), es decir, $hd + dh = \mathrm{Id}$. En particular es exacto.

Si tenemos un complejo de A-módulos libres y un morfismo A-lineal $f : N \to M$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{(X_n)} \arrow[r, "\partial"] & A^{(X_{n-1})} \arrow[r, "\partial"] & \cdots \arrow[r] & A^{(X_1)} \arrow[r, "\partial"] & A^{(X_0)} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, dotted] & N \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r, shift right] & P_n \arrow[l, shift right] \arrow[r, shift right, "d"'] & P_{n-1} \arrow[l, shift right, "h"'] \arrow[r, shift right] & \cdots \arrow[l, shift right] \arrow[r, shift right] & P_1 \arrow[l, shift right, "h"'] \arrow[r, shift right, "d"'] & P_0 \arrow[l, shift right, "h"'] \arrow[r, shift right, "\epsilon"'] & M \arrow[l, shift right, "h"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Se define $f_0 : A^{(X_0)} \to P_0$ como el único morfismo A-lineal tal que, si $x \in X_0$,

$$f_0(x) = hf\partial(x)$$

e inductivamente, si se tienen definidas las f_i para $i \leq n$, se define f como la única extensión A-lineal tal que $f_n(x) = h(f_{n-1}(\partial x))$ (para todo $x \in X_n$)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{(X_n)} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, dotted, "f_n"] & A^{(X_{n-1})} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & A^{(X_1)} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_1"] & A^{(X_0)} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_0"] & N \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r, shift left] & P_n \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left, "d"] & P_{n-1} \arrow[l, shift left, "h"] \arrow[r, shift left] & \cdots \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & P_1 \arrow[l, shift left, "h"] \arrow[r, shift left, "d"] & P_0 \arrow[l, shift left, "h"] \arrow[r, shift left, "\epsilon"] & M \arrow[l, shift left, "h"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Muestre que la familia de morfismos $\{f_n\}_n$ así construida es un morfismo de complejos.

2. Sea A una k-álgebra k-proyectiva y supongamos dado un complejo *exacto* de la forma

$$\cdots \to A \otimes V_2 \otimes A \stackrel{d_2}{\to} A \otimes V_1 \otimes A \stackrel{d_1}{\to} A \otimes A \stackrel{m}{\to} A \to 0$$

(m la multiplicación) donde V_i son k-módulos libres, $\otimes = \otimes_k$ y todos los morfismos son A-lineales a izquierda y a derecha. Muestre que

   a) Todas las componentes graduadas de este complejo son proyectivos como A-módulos a izquierda, y como A-módulos a derecha.

   b) Existe una homotopía de contracción A-lineal a derecha (y también existe alguna otra que es A-lineal a izquierda).

c) Para cualquier $M \in {}_A Mod$, el complejo siguiente es exacto

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A\otimes V_2\otimes A\underset{A}{\otimes} M \arrow[r, "d_2\underset{A}{\otimes}\mathrm{Id}_M"] \arrow[d, "\cong"] & A\otimes V_1\otimes A\underset{A}{\otimes} M \arrow[r, "d_1\underset{A}{\otimes}\mathrm{Id}_M"] \arrow[d, "\cong"] & A\otimes A\underset{A}{\otimes} M \arrow[r, "m\underset{A}{\otimes}\mathrm{Id}_M"] \arrow[d, "\cong"] & A\underset{A}{\otimes} M \to 0 \arrow[d, "\cong"] \\
\cdots \arrow[r] & A\otimes V_2\otimes M \arrow[r, "\widetilde{d}_2"] & A\otimes V_1\otimes M \arrow[r, "\widetilde{d}_1"] & A\otimes M \arrow[r, "\rho_M"] & M \to 0
\end{tikzcd}$$

d) Si M es k-proyectivo, entonces la anterior es una resolución A-proyectiva de M (y funtorial en M).

3. Observar que $k[x] \otimes k[x] \cong k[x, y]$ y que $k[x, y]/(x - y) \cong k[x]$. Muestre que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \to k[x] \otimes k[x] \xrightarrow{d} k[x] \otimes k[x] \xrightarrow{m} k[x] \to 0$$

donde $d(p \otimes q) = xp \otimes q - p \otimes xq$. Concluya que para todo $k[x]$-módulo que sea k-proyectivo, la siguiente es una resolución $k[x]$-proyectiva de M:

$$0 \to k[x] \otimes M \xrightarrow{\partial} k[x] \otimes M \xrightarrow{\rho} M \to 0$$

donde $\partial(p \otimes m) = xp \otimes m - p \otimes xm$.

4. (* Más adelante veremos una generalización *) Sea $A = \mathbb{Z}[M^+(X)]$ el anillo libre en un conjunto X (ver el apunte grupal para la definición). La siguiente es una sucesión exacta:

$$0 \to A \otimes k^{(X)} \otimes A \xrightarrow{d} A \otimes A \xrightarrow{m} A \to 0$$

donde $d(a \otimes x \otimes b) = ax \otimes b - a \otimes xb$.

14.3. Resoluciones, cálculo de Tor y Ext

1. Sea k un anillo conmutativo, consideramos $A = k[x]/x^2$. Muestre que

$$\cdots A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{\epsilon} k \to 0$$

es exacta, donde $\epsilon(\lambda + \mu x) = \lambda$. Encuentre una homotopía k-lineal de contraccion. Deduzca que para todo $n \geq 1$, $\mathrm{Tor}_n^A(k, M) \cong \{m \in M : xm = 0\}/xM$, en particular, $\mathrm{Tor}_n^A(k, k) = k$ para todo $n \geq 1$.

2. Sea $A = k[x]$ con k un cuerpo. Sabiendo que

$$0 \to k[x] \otimes_k M \xrightarrow{d} k[x] \otimes_k M \xrightarrow{\rho} M \to 0$$

(con $d(p(x)\otimes m) = p(x)x\otimes m - p(x)\otimes xm$ y $\rho(q(x)\otimes m) = q(x)\cdot m$) es exacta, describa $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ en términos de M y N para todo n.

3. Muestre que $\mathrm{Tor}_n^A(\oplus_i M_i, N) \cong \oplus_i \mathrm{Tor}_n^A(M_i, N)$, y lo mismo para la otra variable.

4. Sea $n > 1$ y $A = k[x]/(x^n - 1)$. Notar que $A \cong k[C_n]$ con C_n=grupo cíclico de orden n. Consideramos $M = k$ con la estructura de A-módulo dada por $x \cdot \lambda = \lambda$.

   a) Muestre que si M es un k-módulo con un automorfismo k-lineal g de orden n, entonces es un A-módulo via $x \cdot m := g(m)$ y que
   $$M_g = k \otimes_A M$$

   b) Muestre que si $N = \sum_{i=0}^{n-1} x^i$, entonces
   $$\cdots \longrightarrow A \xrightarrow{N} A \xrightarrow{1-x} A \xrightarrow{N} A \xrightarrow{1-x} A \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0$$
   provee de una resolución proyectiva de k como A-módulo (aquí $\epsilon(p(x)) = p(1)$). Concluya que $\mathrm{Tor}_n^A(k, M) \cong \mathrm{Tor}_{n+2}^A(k, M)$ para todo $n \geq 1$. Describa lo más explícitamente posible Tor_1 y Tor_2.

   c) Si n es inversible en k, muestre que k es isomorfo a un sumando directo de A (como A-módulo), concluya que en ese caso $\mathrm{Tor}_n^A(k, M) = 0$ para todo $n > 0$.

   d) Si la multiplicación por n no es necesariamente inversible en k, pero en M SI, muestre que $\mathrm{Tor}_n^A(k, M) = 0$ para todo $n > 0$.

5. Sea $A = k[x, y]$ y consideramos k como A-módulo via $p(x, y) \cdot \lambda := p(0, 0)\lambda$. Utilice el ejercicio 9 de la práctica 3 para mostrar que
   $$\mathrm{Tor}_n^A(k, M) = 0 \ \forall n \geq 3$$
   Describa lo más explícitamente posible $\mathrm{Tor}_1^A(k, M)$ y $\mathrm{Tor}_2^A(k, M)$.

6. Sea $0 \to X \to Y \to Z$ una s.e.c. de A-módulos. Muestre que si X y Z son playos, entonces Y es playo. También si Y y Z son playos, entonces X es playo.

7. Sea A un dominio íntegro. Muestre que si M es playo entonces M no tiene torsión.

8. Sea A un anillo conmutativo. Si M y N son dos A-módulos a izquierda, los consideramos como A-bimódulos de manera simétrica (i.e. $ma = am$, etc). Muestre que $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ es naturalmente un A-módulo (simétrico).

9. Sea A un anillo conmutativo y S un subconjunto multiplicativo. Muestre que, para todo par de A-módulos M, N hay isomorfismos naturales
   $$\mathrm{Tor}_\bullet^A(M, N)_S = \mathrm{Tor}_\bullet^A(M_S, N_S) = \mathrm{Tor}_\bullet^A(M_S, N) = \mathrm{Tor}_\bullet^A(M, N_S) = \mathrm{Tor}_\bullet^{A_S}(M_S, N_S)$$

Más sobre Tor

1. Sea A un anillo íntegro, $x \in A$ no nulo. Muestre que

$$\operatorname{Tor}_n^A(A/(x), M) = 0 \ \forall n \geq 2$$

Describa lo mas explícitamente posible $\operatorname{Tor}_n^A(A/(x), A/(y))$, donde $y \in A$ (y $n \in \mathbb{N}$).

2. Muestre que $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{(n:m)}$.

3. (Cambio de base playo) Sea $A \to B$ un morfismo de anillos tal que B es A-playo como A-módulo a izquierda. Si W es un B-módulo (y por lo tanto, via el morfismo $A \to B$ es un A-módulo, muestre que

$$\operatorname{Tor}_n^B(M \otimes_A B, W) = \operatorname{Tor}_n^A(M, W)$$

compare con el último ejercicio de la guía 5.

4. Sea $A = k[\mathbb{Z}]$, observar que $A \cong k[x]_S$, donde $S = \{1, x, x^2, x^3, \cdots\}$. Describa lo más explícitamente posible $\operatorname{Tor}_n^{k[\mathbb{Z}]}(M, N)$, donde M y N son $k[\mathbb{Z}]$-módulos cualesquiera.

5. Sea A íntegro y $0 \neq x \in A$, muestre que el complejo

$$X = (\cdots 0 \to A \xrightarrow{x} A \to 0 \cdots)$$

verifica $Z(X)_n$ y $B(X)_n$ proyectivo para todo n, luego, se puede utilizar la fórmula de Künneth para este complejo. Dice ésto algo nuevo con respecto al ejercicio 1?

14.4. Cálculo de Ext

1. Utilizando simplemente la (buena) definición de

$$\operatorname{Ext}_A^n(M, N) = H_n(\operatorname{Hom}_A(P(M)_\bullet, N), d^*),$$

donde $(P(M)_\bullet, d)$ es *alguna* resolución proyectiva de M, muestre que

   a) P es proyectivo si y sólo si $\operatorname{Ext}_A^n(P, N) = 0$ para todo $n > 0$ y para todo N,

b) I es inyectivo si y sólo si $\mathrm{Ext}^n_A(M, I) = 0$ para todo $n > 0$ y para todo M.

2. Si A es dominio principal, entonces $\mathrm{Ext}^n_A(M, N) = 0$ si $n \geq 2$.

3. Sea A un anillo. Muestre que son equivalentes
   - Cocientes de inyectivos son inyectivos.
   - Submódulos de proyectivos son proyectivos.
   - $\mathrm{Ext}^n_A(M, N) = 0$ si $n \geq 2$ para todo M, N.

4. Muestre que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{(m:n)}$

5. Calcule $\mathrm{Ext}^1_{k[x]}(k, k)$. Es cierto que $\mathrm{Ext}^1_{k[x]}(k[x]/(f), k[x]/(g)) \cong k[x]/(f, g)$?

6. Sea $A = k[x]$, M, N son A-módulos donde M es k-proyectivo. Utilizando la resolución
$$0 \to A \otimes_k M \xrightarrow{d} A \otimes_k M \to M \to 0$$
donde $d(a \otimes m) = xa \otimes m - a \otimes xm$. Describa lo más explícitamente posible $\mathrm{Ext}^n_A(M, N)$.

7. Sea k un cuerpo, V un k-espacio vectorial y $A = TV$, el álgebra tensorial. Si M es un TV-módulo, muestre que el complejo
$$0 \to TV \otimes V \otimes M \xrightarrow{d} TV \otimes M \xrightarrow{\rho} M \to 0$$
es exacto, donde las flechas están definidas por $d(w \otimes v \otimes m) = wv \otimes m - w \otimes vm$, $\rho(w \otimes m) = wm$ ($w \in TV$, $v \in V$, $m \in M$). Concluya que $\mathrm{Ext}^n_A(M, N) = 0$ si $n \geq 2$.

8. Concluya del ejercicio anterior que cocientes de TV-inyectivos son TV-inyectivos.

9. Utilice la resolución del ejercico 12 de la práctica 3 (donde se resuelve a k como $k[x, y]$-módulo) para calcular $\mathrm{Ext}^n_{k[x,y]}(k, k)$ para todo n.

10. Sea $G = C_n = \langle g : g^n = 1 \rangle$ el grupo cíclico de orden n. Calcule $\mathrm{Ext}^k_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Si M es un $\mathbb{Z}[G]$-módulo, describa lo más explícitamente posible $\mathrm{Ext}^k_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$, y en particular $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$.

11. Sea $G = C_n \times C_m$. Tensorizando una resolución de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[C_n]$ y otra resolución de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[C_m]$ (y la fórmula de Künneth) encuentre una resolución de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$. Utilícela para describir $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$ y $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$, donde M es un $k[G]$-módulo.

12. Sea H un subgrupo normal de un grupo E y $G = E/H$. Muestre que si $H \subseteq Z(E)$, entonces la acción de G en H inducida por la sucesión exacta corta
$$1 \to H \to E \to G \to$$
es la acción trivial.

13. Calcule $H^2(G,\mathbb{Z}_p) = \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_p)$ para $G = C_p$ (el grupo cíclico de orden p), C_{p^2}, y $C_p \times C_p$.
14. Sea E un grupo de orden p^3. Muestre que existe una sucesión exacta del tipo
$$1 \to C_p \to E \to G \to 1$$
donde $C_p \subseteq Z(E)$. Utilice el cálculo de H^2 del ejercicio anterior para determinar todos los grupos de orden p^3.
15. Sean
$$(E) = (0 \to X \to E_1 \to E_2 \to \cdots \to E_n \xrightarrow{\epsilon} Y \to 0)$$
$$(F) = (0 \to Y \xrightarrow{\eta} F_1 \to F_2 \to \cdots \to F_m \to Z \to 0)$$
dos extensiones (de (Y,X) y de (Z,Y), de grado n y m respectivamente), muestre que
$$0 \to X \to E_1 \to E_2 \to \cdots \to E_n \xrightarrow{\eta\epsilon} F_1 \to F_2 \to \cdots \to F_m \to Z \to 0$$
es una extensiones de grado $n+m$, y que esto dota al conjunto de las extensiones de un producto asociativo; este producto está bien definido en la clase de equivalencia de extensiones.
16. (Lema de Shapiro) Sea H un subgrupo de G, y N un $\mathbb{Z}[H]$-módulo, entonces
$$H_*(G,\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}[H]} N) \cong H_*(H,N)$$
$$H_*(G,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G],N)) \cong H_*(H,N)$$
mostrar que si $[H:G] < \infty$, entonces
$$\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}[H]} N \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G],N)$$
como $\mathbb{Z}[G]$-módulo, con un isomorfismo natural en N.
17. Sean $f : A \to B$ un morfismo de anillos. Bajo la hipotesis que B sea A-playo, o A-proyectivo, generalice el lema de Shapiro.

14.5. Resoluciones funtoriales

1. Sea M un A-módulo, se define $P(M) = A^{(M)}$ y $p_M : A^{(M)} \to M$ vía
$$\sum_{m\in M} a_m e_m \mapsto \sum_{m\in M} a_m m$$
Se define $Z_0(M) := \mathrm{Ker} p_M$, $P_1(M) := A^{(Z_0)}$ y $d_1 : P_1(M) \to P_0(M)$ como la composición
$$P_1(M) = A^{(Z_0)} \to Z_0(M) = \mathrm{Ker}(p_M) \hookrightarrow P_0(M)$$

y así continuamos, $Z_1(M) = \mathrm{Ker}(d_1)$, $d_2 : P_2(M) = A^{(Z_1)} \to Z_1 \hookrightarrow P_1(M)$ etc. Muestre que

$$\cdots \to P_n(M) \to \cdots \to P_1(M) \to P_0(M) \to M \to 0$$

es una resolución libre y por lo tanto proyectiva de M. Además, todos los $P_i(M)$ son funtoriales en M y los d_i son transformaciones naturales. En otras palabras, esta resolución es funtorial en M, como funtor de A-Mod en Chain(A).

2. Sea A un anillo con $gldim(A) = d < \infty$, y para cada $M \in A$-mod, sea

$$\cdots \to P_n(M) \to \cdots \to P_1(M) \to P_0(M) \to M \to 0$$

la resolución del ejercicio anterior. Muestre que la resolución

$$0 \to K_d \to P_{d-1}(M) \to P_{d-2}(M) \to \cdots \to P_1(M) \to P_0(M) \to M \to 0$$

(donde $K_d = \mathrm{Ker}(P_{d-1} \to P_{d-2})$) es una resolución proyectiva y también funtorial.

14.6. Resolución standard

$$\cdots \to A^{\otimes n+1} \to \cdots \to A^{\otimes 3} \to A^{\otimes 2} \to A \to 0$$

Sea A una k-álgebra. Definimos

$$B_n(A) := A^{\otimes n+1}$$

con diferencial

$$b'(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n - a_0 \otimes a_1a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \pm$$

$$\pm \cdots + (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_ia_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n + \cdots + (-1)^{n-1} a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}a_n$$

En grados bajos:

$$b'(a \otimes b \otimes c) = ab \otimes c - a \otimes bc$$

$$b'(a \otimes b) = ab = m(a \otimes b)$$

1. Sea $s : A^{\otimes n} \to A^{\otimes n+1}$ k-lineal dada por

$$s(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) := 1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_n$$

Calcular $sb' + b's$ y concluya que $(B_\bullet(A), b')$ es exacta.

2. Sea M un A-bimódulo (en particular M es un k-bimódulo) y sea V un k-bimódulo. Muestre que hay un isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{A-bimod}(A \otimes_k V \otimes_k A, M) \cong \mathrm{Hom}_{k-bimod}(V, M)$$

Concluya que si V es proyectivo como k-bimódulo, entonces $A \otimes V \otimes A$ es proyectivo como A-bimódulo.

3. Un A-bimódulo M se dice k-simétrico si

$$\lambda \cdot m = m \cdot \lambda \ \forall m \in M, \ \lambda \in k$$

Muestre que la categoría de A-bimódulos simétricos se identifica con la categoría de $A \otimes A^{op}$-módulos a izquierda (o a derecha) vía

$$(a \otimes a') \cdot m = ama' = m \cdot (a' \otimes a)$$

Notación: $A^e := A \otimes A^{op}$

4. Concluya que $(B_\bullet(A), b')$ nos da una resolución de A como A-bimódulo k-simétrico.

Definición: Si M es un A-bimódulo k-simétrico se define

$$H_\bullet(A, M) = \mathrm{Tor}_\bullet^{A^e}(A, M)$$

(en la notación se sobreentiende k, si hace fata se denota $H_\bullet(A; k, M)$)

$$H^\bullet(A, M) = \mathrm{Ext}_{A^e}^\bullet(A, M)$$

se llama la homología y cohomología de Hochschild de A a coeficientes en M

5. $H^0(A, M) \cong M^A := \{m \in M : am = ma \ \forall a \in A\}$.

6. $H^1(A, M) = \mathrm{Der}_k(A, M)/Innder(A, M)$, donde $\mathrm{Der}_k(A, M) = \{D : A \to M$ k-lineal$/D(ab) = aD(b) + D(a)b \forall a, b \in A\}$, $Innder = \{D : \exists m_0 \in M/D(a) = am_0 - m_0a\}$

14.7. Localización en CO-homología

Definición: un A-módulo M se dice **finitamente presentado** si existe una sucesión exacta del tipo

$$A^m \xrightarrow{p_2} A^n \xrightarrow{p_1} M \longrightarrow 0$$

(con $n, m \in \mathbb{N}$)

1. Si M es finitamente presentado y N arbitrario $\Rightarrow \exists$ una s.exacta de la forma

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, N) \to N^n \to N^m$$

2. Muestre que $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es un $Z(A)$-módulo vía

$$(a \cdot f)(m) := af(m) \quad (= f(am))$$

Observación: Si $S \subset A$ es un subconjunto central y multiplicativamente cerrado, existe una flecha natural (el funtor localización)

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S,N_S)$$
$$f \mapsto \widetilde{f} = \left(\frac{m}{s} \mapsto \frac{f(m)}{s}\right)$$

que es un morfismo de $Z(A)$-módulos, en donde a la derecha, la acción de S es claramente biyectiva, por lo tanto induce un morfismo

$$\mathrm{Hom}_A(M,N)_S \to \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S,N_S)$$

3. Muestre que si M es finitamente presentado, entonces el morfismo anterior es un iso. (Sugerencia: utilice el hecho de que la localización preserva monomorfismos, el ejercicio 1, y la propiedad universal del núcleo.)

4. Sea $(C_\bullet, d)$ un complejo de A-módulos donde C_n es finitamente presentado para todo n. Muestre que para todo A-módulo N,

$$H^\bullet(\mathrm{Hom}_A(C_\bullet,N),d^*)_S \cong H^\bullet(\mathrm{Hom}_{A_S}(C_{S\bullet},N_S),d^*)$$

5. Sea A un anillo, M y N dos A-módulos. Muestre que $\mathrm{Ext}^\bullet_A(M,N)$ es un $Z(A)$-módulo. Si $S \subset A$ es un subconjunto central y multiplicativamente cerrado, entonces siempre existe un morfismo natural

$$\mathrm{Ext}^\bullet_A(M,N)_S \to \mathrm{Ext}_{A_S}(M_S,N_S)$$

Muestre que si A es un *anillo noetheriano* y M es *finitamente generado*, entonces M admite una resolución proyectiva donde cada proyectivo es finitamente generado (y por lo tanto finitamente presentado), concluya que en ese caso, para cualquier N se tiene

$$\mathrm{Ext}^\bullet_A(M,N)_S \cong \mathrm{Ext}_{A_S}(M_S,N_S)$$

6. Sea A una k-álgebra tal que A^e es noetheriano. Muestre que A admite una resolución A^e-proyectiva

$$\cdots \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

donde cada P_n es finitamente presentado.

7. Si $S \subset A$ es un subconjunto central y multiplicativo, considere $S^e \subset A^e$ el subconjunto multiplicativo generado por $S \otimes \{1\} \cup \{1\} \otimes S$, o sea, $\{s \otimes t : s,t \in S\}$. Muestre que para cada A-bimódulo M,

$${}_SM_S = A_S \otimes_A M \otimes_A A_S = M_{S^e}$$

Muestre que $H^\bullet(A,M)$ es un $Z(A)$-bimódulo (de hecho, es un $Z(A)$-módulo simétrico), y que y que si A admite una resolución A^e-proyectiva $P_\bullet \to A$ donde cada P_n es finitamente A^e-presentado, entonces

$$H^\bullet(A,M)_{S^e} \cong H^\bullet(A_S, {}_SM_S) \cong H^\bullet(A, {}_SM_S)$$

Sugerencia: muestre que si $P_\bullet \to A$ es una resolución como A-bimódulo, entonces

$$A_S \otimes_A P_\bullet \otimes_A A_S \to A_S \otimes_A A \otimes_A A_S$$

es exacto, y por lo tanto se tiene una resolución A_S^e-proyectiva de

$$A_S \underset{A}{\otimes} A \underset{A}{\otimes} A_S \cong A_S \otimes_A A_S \cong A_S$$

8. Sea k un cuerpo y $A = k(x_1, \dots, x_n) = Frac(k[x_1, \dots, x_n])$ el cuerpo de fracciones de polinomios en n variables. Muestre que $pdim_{A^e}(A) = n$ (y por otra parte $gldim(A) = 0$ pues es un cuerpo). O sea, HH detecta grado de trascendencia.

Capítulo 15

Dimensión homológica

1. Si L es A^e-libre, digamos $L \cong (A^e)^{(I)}$ para un conjunto I, denotemos $V = k^{(I)}$, entonces

$$L \cong A^e \otimes_k V \cong A \otimes V \otimes A$$

donde en A^e se toma la estructura usual de A^e-módulo a izquierda, y en $A \otimes V \otimes A$ se toma la estructura de bimódulo "exterior", específicamente

$$(a \otimes a') \cdot (a_1 \otimes v \otimes a_2) = aa_1 \otimes v \otimes a_2 a'$$

2. Si L es A^e libre, lo vemos como A-bimódulo (k-simétrico), entonces para cualquier A-módulo a izquierda M, $L \otimes_A M$ es un A-módulo a izquierda libre. Si $L \cong A^e \otimes V$ y lo vemos como A-bimódulo entonces $L \otimes_A M \cong A \otimes (V \otimes M)$. Concluir que si P es A^e-proyectivo entonces $P \otimes_A M$ es proyectivo como A-módulo a izquierda.

3. Muestre que si $P_\bullet \to A$ es una resolución de A como A^e-módulo entonces es contráctil como resolución de A-módulos a derecha, y por lo tanto al tensorizar $- \otimes_A M$ sigue exacta y $P_\bullet \otimes_A M$ resulta una resolución de M. (De paso, es una resolución funtorial en M.)

4. Muestre que si k es un cuerpo, si $A = TV$ (el álgebra tensorial), $A = kQ$ (el álgebra de caminos de un quiver), son álgebras de dimensión global 1.

5. Sea Q un quiver sin ciclos orientados (y por lo tanto kQ es de dimensión finita) y sea I el ideal bilátero generado por Q_1. Utilice la resolución conocida (si no la conoce, deje este ejercicio y vaya a conocerla) para mostrar que $A = kQ/I^2$ tiene dimensión global finita, igual a la longitud del camino más largo posible en Q. Para el quiver

$$1 \to 2 \to \cdots \to n$$

el álgebra kQ/I^2 tiene dimensión global n.

6. Sea k un cuerpo y consideramos $A = k(x)$=el cuerpo de fracciones de $k[x]$. Muestre que $\mathrm{Der}_k(k(x), k(x)) \neq 0$, luego $0 \neq HH^1(A, A) = \mathrm{Ext}^1_{A^e}(A, A)$ y por lo tanto $pdim_{A^e}(A) \geq 1$ (de hecho, es igual a 1). Sin embargo $gldim(A) = 0$ pues A es un cuerpo, lo que muestra que la desigualdad $gldim(A) \leq pdim_{A^e}(A)$ puede ser estricta.

15.1. Más sobre resoluciones

1. Sea $A = A_1 \times A_2$ el producto cartesiano de anillos (con producto coordenada a coordenada). Muestre que todo módulo M es canónicamente isomorfo a $M = M_1 \times M_2$ donde M_i es un A_i-módulo; M es proyectivo como A-módulo si y sólo si M_i lo es como A_i-módulo. Más aún, si N es otro A-módulo, entonces
$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \cong \mathrm{Hom}_{A_1}(M_1, N_1) \times \mathrm{Hom}_{A_2}(M_2, N_2)$$
Si $P^1_\bullet$ es una resolución de M_1 y $P^2_\bullet$ es una resolución de M_2, entonces
$$P_n = P^1_n \times P^2_n$$
con diferencial coordenada a coordenada es una resolución de $M_1 \times M_2$.

2. Sea k un anillo conmutativo y A y B dos k-álgebras (podría ser $k = \mathbb{Z}$).
   a) Si M es un A-módulo y N un B-módulo, muestre que $M \otimes_k N$ es un $A \otimes_k B$-módulo de manera natural.
   b) Si L es A-libre y F es B-libre entonces $L \otimes F$ es $A \otimes B$-libre. Deduzca que si si P es A-proyectivo y Q es B-proyectivo entonces $P \otimes Q$ es $A \otimes B$-proyectivo.
   c) Si $P_\bullet \to M$ y $Q_\bullet \to N$ son dos resoluciones y k es un cuerpo entonces $P^1_\bullet \otimes P^2_\bullet$ (el producto tensorial de los complejos) es una resolución A-proyectiva de $M \otimes N$. Muestre que si (k es cuerpo y) M, M' son A-módulos a derecha e izquierda respectivamente y N, N' son B-módulos a izq y derecha resp. entonces
$$\mathrm{Tor}^\bullet_{A\otimes B}(M \otimes N, M' \otimes N') = \mathrm{Tor}^\bullet_A(M, M') \otimes \mathrm{Tor}^\bullet_B(N, N')$$
   d) Muestre que si P es A-proyectivo de tipo finito, Q un B-módulo proyectivo de tipo finito, entonces el morfismo natural
$$\mathrm{Hom}_A(P, M) \otimes_k \mathrm{Hom}_B(Q, N) \to \mathrm{Hom}_{A\otimes_k B}(P \otimes_k Q, M \otimes_k N)$$
   es un isomorfismo.
   e) Supongamos que M y N admiten resoluciones proyectivas tal que en cada grado los proyectivos son finitamente generados (por ejemplo si M y N son finitamente generados y A y B son anillos noetherianos) Suponiendo que k es cuerpo, muestre que
$$\mathrm{Ext}^n_{A\otimes B}(M \otimes_k N, U \otimes V) \cong \bigoplus_{p=0}^{n} \mathrm{Ext}^p_A(M, U) \otimes \mathrm{Ext}^{n-p}_B(N, V)$$
   para todo A-módulo U y B-módulo V.

f) Sean A y B dos k-álgebras aumentadas, es decir, se tienen dados morfismos de álgebras $\epsilon : A \to k$ y $\eta : B \to k$. Supongamos que A es noetheriana, k-libre, y k un dominio principal (e.g. $\mathbb{Z}$, o un cuerpo), muestre que

$$\mathrm{Ext}^{\bullet}_{A\otimes_k B}(k,k) \cong \mathrm{Ext}^{\bullet}_{A}(k,k) \otimes_k \mathrm{Ext}^{\bullet}_{B}(k,k)$$

g) Explicite los cálculos de Tor y Ext para

1) $k[x,y] \cong k[x] \otimes k[y] = A \otimes B$ con $M = M' = N = N' = k$,
2) $k[x,y]/(x^2,y^2) \cong (k[x]/(x^2)) \otimes (k[y]/(y^2))$, con $M = M' = N = N' = k$

3. Sea F_n el grupo libre con n generadores $x_1, \ldots, x_n$ y k un anillo conmutativo. Muestre que la aplicación $k[F_n]$-lineal determinada por

$$\bigoplus_{i=1}^{n} k[F_n]e_i \to k[F_n]$$

$$e_i \mapsto x_i - 1$$

es inyectiva (comparar con el ejercicio 6 de la 2da parte de la práctica 6). Concluya que

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{n} k[F_n]e_i \to k[F_n] \to^{\epsilon} k$$

donde $\epsilon(g) = 1$ para todo $g \in F_n$, es una resolución libre de k como $k[F_n]$-módulo. En particular $H^k(F_n, M) = H_k(F_n, M) = 0$ para todo $k > 1$ y para todo $k[F_n]$-módulo M.

4. Sean

$$(E) = (0 \to X \to E_1 \to E_2 \to \cdots \to E_n \xrightarrow{\epsilon} Y \to 0)$$

$$(F) = (0 \to Y \xrightarrow{\eta} F_1 \to F_2 \to \cdots \to F_m \to Z \to 0)$$

dos extensiones (de (Y,X) y de (Z,Y), de grado n y m respectivamente), muestre que

$$0 \to X \to E_1 \to E_2 \to \cdots \to E_n \xrightarrow{\eta\epsilon} F_1 \to F_2 \to \cdots \to F_m \to Z \to 0$$

es una extensiones de grado $n+m$, y que esto dota al conjunto de las extensiones de un producto asociativo: este producto está bien definido en la clase de equivalencia de extensiones.

5. Sea k un cuerpo y $A = kQ$, $K = kQ_0$ donde $Q = (Q_1, Q_0)$ es un quiver con Q_0 finito.

a) Si V es un kQ_0-Mod a izquierda entonces $A \otimes_{kQ_0} V$ es A proyectivo, además es un sumando directo de $A \otimes V$ (que es A-libre).

b) Si V es un kQ_0 bimódulo (por ejemplo kQ_1), entonces $A \otimes_{kQ_0} V \otimes_{kQ_0} A$ es un sumando directo de $A \otimes V \otimes A$, en particular, es proyectivo en la categoría de A-bimódulos k-simétricos.

c) Muestre que
$$0 \to A \otimes_{kQ_0} kQ_1 \otimes_{kQ_0} A \to A \otimes_{kQ_0} A \to A \to 0$$
provee de una resolución de A como bimódulo k-simétrico y por lo tanto, para cualquier $M \in A$-Mod,
$$0 \to A \otimes_{kQ_0} kQ_1 \otimes_{kQ_0} M \to A \otimes_{kQ_0} M \to M \to 0$$
da una resolución A-proyectiva de M. Concluya que kQ es hereditario (i.e. submódulo de un proyectivo es proyectivo).

d) Notar que kQ es graduada (por la longitud de los caminos), por lo tanto kQ_0 no sólo es subálgebra sino que se tiene un morfismo de álgebras $kQ \to kQ_0$ (que manda Q_1 cero). Utilizar la resolución anterior para dar una descripción general de $\mathrm{Tor}_1^{kQ}(kQ_0, kQ_0)$.

e) Explicitar todo lo anterior para el quiver con un único punto y una única flecha (un loop), para un solo punto y varias flechas, para dos puntos y una flecha de uno en otro, para dos puntos y varias flechas.

f) (*) Sea $A = kQ/I$ donde Q es un quiver e I es el ideal generado por PQ_2=los caminos de longitud 2. Muestre que
$$\cdots \to A \otimes_{kQ_0} kQ_n \otimes_{kQ_0} \to \cdots \to A \otimes_{kQ_0} kQ_2 \otimes_{kQ_0} \to A \otimes_{kQ_0} kQ_1 \otimes_{kQ_0} \to A \otimes_{kQ_0} A \to A \to 0$$
donde el diferencial está dado por
$$A \otimes_{kQ_0} kQ_n \otimes_{kQ_0} \to A \otimes_{kQ_0} kQ_{n-1} \otimes_{kQ_0}$$
$$1 \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_n \otimes 1 \mapsto \alpha_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_n \otimes 1 + (-1)^n 1 \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \otimes \alpha_n$$
y el último diferencial es la multiplicación.

g) Explicitar la resolución anterior para

1) $k[x]/(x^2)$ visto como álgebra de quiver con un solo loop.
2) $k \oplus V$ con V un ideal con producto nulo. (un solo punto y tantos loops como $\dim_k V$)
3) Q cada uno de los quivers
$$1 \to 2$$
$$1 \to 2 \to 3$$
$$1 \to 2 \to 3 \to 4$$

Capítulo 16

Cohomología de grupos

1. Tensorizar la resolución standard de $k[G]$ como $k[G]$-bimódulo a derecha por $-\otimes_{k[G]} k$ (donde k es el G-módulo trivial) y describir el diferencial.

2. Deducir la fórmula del diferencial que calcula la cohomología de grupo vía el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{k[G]}(B_n, M) = \mathrm{Hom}_{k[G]}(k[G] \otimes k[G]^{\otimes n}, M) \cong Func(G^n, M)$$

3. Sean M y N dos A-módulos izquierda, entonces

$$\mathrm{Hom}_k(M, N) \in {}_A Mod_A$$

via

$$(a \cdot f \cdot a')(m) := af(a'm)$$

si P es un A-bimódulo, entonces

$$\mathrm{Hom}_{A-bimod}(P, \mathrm{Hom}_k(M, N)) \cong \mathrm{Hom}_A(P \otimes_A M, N)$$

Sea A una k-álgebra sobre un cuerpo, M y N dos A-módulos a izquierda y consideramos $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ como A-bimódulo como antes. Muestre que

$$H^\bullet(A, \mathrm{Hom}_k(M, N)) = \mathrm{Ext}^\bullet_A(M, N)$$

En particular, para $A = k[G]$ y $M = k$ con acción trivial, se tiene que $\mathrm{Hom}_k(k, N) \cong N$ como G-módulo a izquierda y tiene acción trivil a derecha, lo que denotamos por N_ϵ. Luego la cohomología de Hochschild y la de grupo están ligadas por

$$H^\bullet(k[G], N_\epsilon) \cong H^\bullet(G, N)$$

16.1. $H^2(G,M)$ y extensiones abelianas

Consideraremos

$$0 \to M \to E \to G \to 1$$

una extensión de grupos con M abeliano. Es decir, M es un grupo abeliano, subgrupo invariante de un grupo mas grande E, y $E/M \cong G$.

1. Completar las demostraciones de los Lemas/Ejercicios 1,2,3,4 de la teórica.

2. La acción de G en M es trivial si y sólo si M es central en E.

3. E un grupo con $|E| = p^n$ y n primo, muestre que E sucede en una extensión de la forma

$$0 \to \mathbb{Z}_p \to E \to G \to 1$$

con $\mathbb{Z}_p$ *central* en E, por lo tanto E está determinado por un grupo G de orden p^{n-1} y un 2-cociclo $[f] \in H^2(G, \mathbb{Z}_p)$ donde en $\mathbb{Z}_p$ la acción de G es trivial.

4. Sea $G = \mathbb{Z}^n$, notar $k[\mathbb{Z}^n] \cong k[t_1^{\pm 1} \cdots, k[t_n^{\pm 1}]$ es una localización del anillo de polinomios. Muestre que el complejo de Koszul

$$0 \to k[t_1, \cdots, t_n] \otimes \Lambda^n V \to \cdots \to k[t_1, \cdots, t_n] \otimes \Lambda^2 V \to k[t_1, \cdots, t_n] \otimes V \to k[t_1, \cdots, t_n] \to k \to 0$$

donde $V = \oplus_{i=1}^n k e_i$ y $d(e_i) = (t_i - 1)$, da una resolución de k como $k[t_1, \ldots, t_n]$ módulo donde la acción es evaluar t_i en 1 (no en 0). Muestre que localizando la anterior, se obtiene una resolución de k como $k[\mathbb{Z}^n]$-módulo de la forma

$$0 \to k[\mathbb{Z}^n] \otimes \Lambda^n V \to \cdots \to k[\mathbb{Z}^n] \otimes \Lambda^2 V \to k[\mathbb{Z}^n] \otimes V \to k[\mathbb{Z}^n] \to k \to 0$$

5. Sea F_n el grupo libre con n generadores $x_1, \ldots, x_n$ y k un anillo conmutativo. Muestre que hay una resolución de $k[F_n]$ como $k[F_n]$-bimódulo de la forma

$$0 \to k[F_n] \otimes V \otimes k[F_n] \to k[F_n] \otimes k[F_n] \to^{\epsilon} k[F_n] \to 0$$

donde $V = \bigoplus_{i=1}^n k e_i$, con las "mismas" fórmulas que la resolución del álgebra tensorial. Concluya que

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{n} k[F_n] e_i \to k[F_n] \to^{\epsilon} k$$

$$e_i \mapsto x_i - 1$$

donde $\epsilon(g) = 1$ para todo $g \in F_n$, es una resolución libre de k como $k[F_n]$-módulo. En particular $H^k(F_n, M) = H_k(F_n, M) = 0$ para todo $k > 1$ y para todo $k[F_n]$-módulo M.

6. (Lema de Shapiro) Sea H un subgrupo de G, y N un $\mathbb{Z}[H]$-módulo, entonces

$$H_*(G, \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} N) \cong H_*(H, N)$$

$$H^*(G, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], N)) \cong H^*(H, N)$$

mostrar que si $[H : G] < \infty$, entonces

$$\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} N \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], N)$$

como $\mathbb{Z}[G]$-módulo, con un isomorfismo natural en N.

7. Sean $f : A \to B$ un morfismo de anillos. Bajo la hipótesis que B sea A-playo, o A-proyectivo, generalice el lema de Shapiro.

16.2. Cálculo iterativo de grupos de orden p^n

Sea p primo y E un grupo de orden p^n. Entonces E tiene centro no trivial y por lo tanto un subgrupo (central), y en consecuencia un subgrupo (central) isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que E contiene a $\mathbb{Z}_p$. Luego $G := E/\mathbb{Z}_p$ es un grupo de orden p^{n-1}. Si (inductivamente) conocemos *todos* los grupos G de orden p^{n-1}, entonces sólo tenemos que calcular $H^2(G, \mathbb{Z}_p)$ y reconstruir todos los posibles grupos de orden p^n.

Atención: Hay más de 10 millones de (clases de isomorfismo de) grupos de orden 512. (más precisamente, hay 10494213 (GAP)).

16.3. Grupos de orden p^3

1. Sea $C_n = \langle t : t^n = 1 \rangle$ el grupo (multiplicativo) cíclico de orden n. Utilice la resolución pequeña de $\mathbb{Z}$ como C_n-módulo trivial para calcular $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[C_n]}(C_n, M)$ donde M es un C_n-módulo. Explicite el caso en que M tiene acción trivial.

2. Sea $G = C_n \times C_n$. Use la fórmula de Künneth para mostrar que el producto tensorial (sobre $\mathbb{Z}$) de las resoluciones de C_n da una resolución para $C_n \times C_n$ Explicite lo más posible $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[C_n \times C_n]}(C_n, M)$ donde M es un módulo con acción trivial.

3. Sea E un grupo de orden p^3. Muestre que E aparece en una extensión de la forma

$$0 \to \mathbb{Z}_p \to E \to G \to 1$$

donde $G \cong C_{p^2}$ o $G \cong C_p \times C_p$, y $\mathbb{Z}_p$ es central (y por lo tanto la acción de G en $\mathbb{Z}_p$ es trivial). Calcule todos los posibles grupos de orden p^3.

4. Otra estrategia podría ser: si $|E| = p^3$ entonces E admite un subgrupo invariante de orden p^2, llamémoslo M, y por lo tanto M es necesariamente abeliano (aunque no necesariamente central), y $G = E/M \cong C_p$.

   - Muestre que si M es central entonces E es abeliano, y del teorema de estructura sobre un dip sabemos que $E \cong \mathbb{Z}_{p^3}$, $\mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p$, o $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.

- Si M no es central, entonces se tiene un acción no trivial de C_p en M.
  - Según $M \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ o $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, encuentre los elementos de orden p en $U(\mathbb{Z}_{p^2})$, o en $GL(2, \mathbb{Z}_p)$, eso dará las posibles acciones de C_p en M.
  - para cada una de las acciones (o de las acciones a menos de conjugación) calcule $H^2(C_p, M)$, y reconstruya las posibles tablas de multiplicar en E.

Capítulo 17

(co)Homología de Hochschild

1. Sea M un A-bimódulo k-simétrico. Se define el complejo

$$C_n(A,M) = M \otimes A^{\otimes n} \ (n \geq 0)$$

con diferencial

$$b(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = ma_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n + (-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}$$

Muestre que

$$(C_\bullet(A,M), b) \cong \big(M \otimes_{A^e} (A \otimes A^\bullet \otimes A), \mathrm{Id}_M \otimes b'\big)$$

2. Sea M un A-bimódulo k-simétrico. Se define

$$C^n(A,M) = \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, M) \ (n \geq 0)$$

con diferencial

$$\partial(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) + (-1)^n f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}) a_n$$

Muestre que

$$(C^\bullet(A,M), \partial) \cong \mathrm{Hom}_{A^e}(A \otimes A^\bullet \otimes A, M), (b')^*)$$

En particular, si A es k-proyectiva, entonces la (co)homología de estos complejos calculan $\mathrm{Tor}_\bullet^{A^e}(A,M)$ y $\mathrm{Ext}_{A^e}^\bullet(A,M)$ respectivamente.

3. $H_0(A,M) = M/[A,M]$.

4. (Diferenciales de Kähler) Si A es conmutativo, muestre que la multiplicación $m : A \otimes A \to A$ es morfismo de álgebras. Sea $I = \mathrm{Ker}(m)$ y definimos $\Omega_k(A) = I/I^2$.

   a) $A \otimes A$ es un A-bimódulo no simétrico ($a \cdot (x \otimes y) \neq (x \otimes y) \cdot a$ en general). I es un sub-bimódulo, en general no simétrico, pero I/I^2 es un A-bimódulo A-simétrico ($a \cdot \omega = \omega \cdot a$, $\forall a \in A, \omega \in I/I^2$).

   b) Sea $d : A \to A \otimes A$ definido por $d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$. Muestre que d es una derivación, y que su imagen está contenida en I. Por abuso de notación llamamos con la misma letra $d : A \to \Omega_k(A)$ dada por $d(a) = \overline{1 \otimes a - a \otimes 1}$.

   c) Si $\sum_i a_i \otimes b_i \in I$, entonces $\sum_i a_i b_i = 0$. Utilice este hecho para mostrar que en $\Omega^1_k(A)$
   $$\sum_i a_i \otimes b_i = \sum_i a_i d(b_i) = \sum_i d(b_i) a_i$$
   En particular, la imagen de $d : A \to \Omega^1_k(A)$ genera $\Omega^1_k(A)$ como A-módulo.

   d) Consideramos $H_\bullet(A, A)$ calculado con la resolución standard. En lugar 1:
   $$\cdots \xrightarrow{b} A^{\otimes 3} \xrightarrow{b} A^{\otimes 2} \xrightarrow{b} A \longrightarrow 0$$
   $$a \otimes b \otimes c \mapsto ab \otimes c - a \otimes bc + ca \otimes b$$
   Notar que para A conmutativo, $b : A^{\otimes 2} \to A$ es cero. $H_1(A, A) = A^{\otimes 2}/b(A^{\otimes 3})$. Muestre que $ad(b) \leftrightarrow \overline{a \otimes b}$ está bien definida entre $\Omega^1_k(A)$ y $H_1(A, A)$ dando un isomorfismo
   $$\Omega^1_k(A) \cong H_1(A, A)$$
   (en particular $\overline{a \otimes 1} = 0 \in H_1(A, A)$)

5. *Propiedad universal de* $\Omega^1_k(A)$. Sea A una k-álgebra conmutativa y M un A-módulo a izquierda, que lo vemos como A-bimódulo (A-simétrico). Si $f : \Omega^1_k(A) \to M$ es un morfismo A-lineal, entonces $f \circ d : A \to M$ es una derivación k-lineal. Muestre que si $D : A \to M$ es una derivación k-lineal, entonces $\exists!$ morfismo A-lineal $\widetilde{D} : \Omega_1(A) \to M$ tal que $D = \widetilde{D} \circ d$. En diagramas
   $$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "D"] \arrow[d, "d"'] & M \\ \Omega^1_k(A) \arrow[ur, dashed, "\exists! \widetilde{D}"'] & \end{tikzcd}$$
   En el Hom: la composición con d induce una biyección (natural en M)
   $$\mathrm{Hom}_A(\Omega^1_k(A), M) \cong \mathrm{Der}_k(A, M)$$
   $$f \mapsto D_f = f \circ d$$

6. (1-formas no conmutativas) Si A es una k-álgebra no necesariamente conmutativa se define
$$\Omega_k^{nc}(A) := \mathrm{Ker}(m : A \otimes A \to A)$$
como m es morfismo de A-bimódulos, es un A-bimódulo. Muestre que es k-simétrico y que $d : A \to \mathrm{Ker}(m)$ dado por
$$d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$$
es una derivación k-lineal. Por lo tanto, si M es otro A-bimódulo k-simétrico y $f : \Omega_k^{nc}(A) \to M$ es un morfismo de A-bimódulos, $f \circ d : A \to M$ es una derivación k-lineal. Muestre que esta derivación $d : A \to \Omega_k^{nc}(A)$ es universal en el sentido que para todo A-bimódulo k-simétrico M, se tiene la propiedad universal
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "D"] \arrow[d, "d"'] & M \\ \Omega_k^1(A) \arrow[ur, dashed, "\exists! \widetilde{D}"'] & \end{tikzcd}$$
donde $\widetilde{D}$ es morfismo de A-bimódulos. En términos de Hom: la composición con d induce una biyección (natural en los A-bimódulos k-simétricos M)
$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_k^{nc}(A), M) \cong \mathrm{Der}_k(A, M)$$
$$f \mapsto D_f = f \circ d$$

7. $H^0(A, M) \cong M^A := \{m \in M : am = ma \ \forall a \in A\}$.

8. $H^1(A, M) = \mathrm{Der}_k(A, M)/Innder(A, M)$, donde
$$\mathrm{Der}_k(A, M) = \{D : A \to M \ k\text{-lineal } / D(ab) = aD(b) + D(a)b \forall a, b \in A\},$$
$$\mathrm{InnDer} = \{D : \exists m_0 \in M / D(a) = am_0 - m_0 a\}.$$

9. Sea $C^n(A) = \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, A)$. Definimos, para $f \in C^p(A)$, $g \in C^q(A)$, $f \cup g \in C^{p+q}(A)$ via
$$(f \cup g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q) := f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p) g(b_1 \otimes \cdots \otimes b_q)$$
Muestre que es un producto asociativo en $C^\bullet(A) = \oplus_n C^n(A)$ y que
$$\partial(f \cup g) = \partial(f) \cup g + (-1)^p f \cup \partial(g)$$
En particular, $HH^\bullet(A) = \oplus_n H^n(A, A)$ es un álgebra asociativa graduada con el producto inducido por $\cup$. Por ejemplo, $HH^\bullet(A)$ es una $Z(A)$-álgebra, pero también si D y D' son derivaciones, entonces $f(a \otimes b) := D(a)D'(b)$ es un 2-cociclo.

17.1. Sobre la fórmula $H^\bullet(k[G], M) = H^\bullet(G, M^{ad})$

1. Si M es un $k[G]$-bimódulo, se define M^{ad} como el G-módulo a izquierda con acción

$$g \cdot_{ad} m := gmg^{-1}$$

Observación: el funtor ad preserva el espacio vectorial subyacente, por lo tanto preserva límites y colímites, sumas directas y productos directos. Veremos que también preserva objetos proyectivos e inyectivos, lo que nos dará una relación entre la (co)homología de grupos y la (co)homología de Hochschild de $k[G]$.

2. Si M es un $k[G]$bimódulo, entonces

$$H^0(k[G], M) = M^{k[G]} = \{m \in m : am = ma,\ \forall a \in k[G]\}$$

$$= (M^{ad})^G = \{m \in M : g \cdot_{ad} m = m,\ \forall g \in G\}$$

3. Si $M = k[G] \otimes k[G]$ como $k[G]$-bimódulo, entonces

$$M^{ad} \cong k[G]^{(G)} = k[G] \otimes V$$

donde a a derecha la acción de $k[G]$ es en el primer tensor, y V es un k-módulo libre de rango $\#G$. Sugerencia: considere el morfismo k-lineal

$$k[G] \otimes k[G] \to k[G] \otimes V$$

$$g \otimes g' \mapsto g \otimes g'g$$

donde $V = k[G]$ como k-módulo. Encuentre la aplicación inversa y muestre que realiza el isomorfismo deseado. Concluya que si P es $k[G]^e$ proyectivo entonces M^{ad} es $k[G]$-proyectivo como G-módulo.

4. Sean V y W dos G-módulos. Muestre que

$$\mathrm{Hom}_k(V, W)$$

es un $k[G]$-bimódulo vía

$$(gfg')(v) := gf((g')^{-1}m)$$

y por lo tanto un G-módulo vía la acción adjunta

$$(g \cdot_{ad} f)(v) = gf(g^{-1}(v)$$

Muestre que

$$(\mathrm{Hom}_k(V, W))^{k[G]} = (\mathrm{Hom}_k(V, W)^{ad})^G = \mathrm{Hom}_{k[G]}(V, W)$$

5. Sea A una k-álgebra con k un cuerpo (o que A sea k-proyectiva), muestre que si P_A es A-proyectivo a derecha, entonces el A-módulo a izquierda
$$I := \mathrm{Hom}_k(P_A, k)$$
es inyectivo como A-módulo a izquierda.

6. Sea M un $k[G]^e$-módulo a izquierda, luego M^* es $k[G]^e$-módulo a derecha (y por lo tanto a izq.), si $p : P \to M^*$ un epi con P un $k[G]^e$-proyectivo (a derecha), entonces
$$p^* : M^{**} \to P^*$$
es monomorfismo, con P^* un $k[G]^e$ módulo (a izquierda) inyectivo. Luego, la composición $M \to M^{**} \to P^*$ nos da un mono en un $k[G]^e$-inyectivo. Concluya que todo inyectivo es isomorfo a un factor directo de un producto arbitrario de $(k[G]^e)^*$

7. Sea I un $k[G]^e$-inyectivo, que podemos suponer un sumando directo de $((k[G]^e)^{(X)})^* = ((k[G]^e)^*)^X = (k^{G\times G})^X$. Muestre que el $k[G]$-bimódulo $(k[G]^e)^* \cong k^{G\times G}$ verifica
$$(k^{G\times G})^{ad} \cong (k^G)^X$$
con $\#X = \#G$. Concluya que si I es $k[G]^e$ inyectivo entonces I^{ad} es inyectivo como G-módulo.

8. Muestre que $H^\bullet(k[G], M) = H^\bullet(G, M^{ad})$. Sugerencia: calcule $H^\bullet(k[G], M)$ usando una resolución $k[G]^e$ **inyectiva** de M.

17.2. Suavidad y HKR

Notación: $HH_\bullet(A) := H_\bullet(A, A)$ y $HH^\bullet(A) := H^\bullet(A, A)$.

1. Utilice la resolución
$$0 \to TV \otimes V \otimes TV \to TV \otimes TV \to TV \to 0$$
$$1 \otimes v \otimes 1 \mapsto v \otimes 1 - 1 \otimes v$$
de TV como TV-bimódulo para describir un complejo que calcule $HH_\bullet(TV)$ y $HH^\bullet(TV)$.

2. (supongamos k cuerpo) Sean A y B dos k-álgebras sobre un cuerpo k, muestre que $HH_\bullet(A \otimes B) \cong HH_\bullet(A) \otimes HH_\bullet(B)$.

3. (supongamos k cuerpo) Sea A tal que admite una resolución de A^e-módulos proyectivos de tipo finito (por ejemplo si A^e es noetheriano). Muestre que $HH^\bullet(A\otimes B) \cong HH^\bullet(A)\otimes HH^\bullet(B)$.

4. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita, muestre que

$$HH_\bullet(S(V)) \cong S(V) \otimes \Lambda^\bullet V$$

$$HH^\bullet(S(V)) \cong S(V) \otimes \Lambda^\bullet V^*$$

Sugerencia: para $\dim V = 1$, $V = kx$ entonces $S(V) = k[x] = T(kx)$, se puede calcular como en el ejercicio 1. Para $\dim V > 1$, si $V = V_1 \oplus V_2$ muestre que $S(V_1 \oplus V_2) \cong S(V_1) \otimes S(V_2)$, idem para $\Lambda^\bullet(V_1 \oplus V_2)$, y utilice los ejercicios 2 y 3.

5. Sea $0 \to M \to B \to A \to 0$ una s.e.c. donde $p : B \to A$ es un epi de k-álgebras con núcleo M de cuadrado cero.

   a) Sea $s : A \to B$ una sección k-lineal. Se define $f_s : A^{\otimes 2} \to B$ vía

   $$f_s(a \otimes a') := s(a)s(a') - s(aa')$$

   claramente, si s es una sección multiplicativa, $f_s \equiv 0$. Muestre que $Im(f_s) \subseteq \mathrm{Ker}(p) = M$, y por lo tanto $f_s : A^{\otimes 2} \to M$.

   b) Sea $\widetilde{s} : A \to M$ *otra* sección, denotamos $f = f_s$ y $\widetilde{f} = f_{\widetilde{s}}$. Muestre que f es cohomóloga a $\widetilde{f}$, es decir, $[f] = [\widetilde{f}]$ en $H^2(A, M)$, o sea, existe $D : A \to M$ tal que $f - \widetilde{f} = \partial D$.
   concluya que la asignación

   $$(0 \to M \to B \to A \to 0) \mapsto [f] \in H^2(A, M)$$

   que a una s.e.c. que se parte como sucesión de k-módulos, le asigna el 2-cociclo f, esta bien definida.

   c) Muestre que una sucesión $0 \to M \to B \to A \to 0$ que se k-parte admite una sección de k-álgebras si y sólo si el cociclo $[f]$ correspondiente es 0 en $H^2(A, M)$.

Definición: Sea A conmutativa, se dice **suave** si para tiene la siguiente propiedad de levantamiento: $\forall$ k-álgebra conmutativa C y todo ideal $I \subset C$ de cuadrado cero, si $f : A \to C/I$ es un morfismo de k-álgebras,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & C \arrow[r, "p"] & C/I \arrow[r] & 0 \\ & & & A \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dotted, "\exists \widetilde{f}"] & \end{tikzcd}$$

Es decir, si $p*$

$$\mathrm{Hom}_{k-alg}(A, C) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Hom}_{k-alg}(A, C/I) \to 0$$

es suryectiva, para toda k-álgebra conmutativa C e ideal $I \subset C$ de cuadrado cero.

6. Sea A k-álgebra conmutativa, M un A-módulo, que lo vemos como A-bimódulo simétrico, y $f : A^{\otimes 2} \to M$ un 2-cociclo de Hochschild. Muestre que

$$B := (M \oplus A, *_f)$$

es una k-álgebra conmutativa $\iff$ f es simétrico, es decir, $f(a \otimes a') = f(a' \otimes a)$ $\forall a, a' \in A$.

7. Sea un diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & C \arrow[r, "p"] & C/I \arrow[r] & 0 \\ & & & A \arrow[u, "f"'] & \end{tikzcd}$$

como en la definición de suavidad. Muestre que

a) el pull-back

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & C \arrow[r, "p"] & C/I \arrow[r] & 0 \\ & & A\prod_{C/I} C \arrow[u] \arrow[r] & A \arrow[u, "f"'] & \end{tikzcd}$$

$$B := A \prod_{C/I} C = \{(a,c) \in A \times C : f(a) = p(c)\}$$

es una k-álgebra (conmutativa) y que la flecha $B \to A$ es sobreyectiva, con núcleo un ideal de cuadrado cero (isomorfo a I).

b) Si p es k-split, entonces $B \to A$ es k-split, y por lo tanto $B \cong (I \oplus A, *_f)$ para un cierto 2-cociclo simétrico $f : A^{\otimes 2} \to I$.

c) Muestre que si el 2-cociclo f anterior es cohomólogo a 0, entonces existe $s : A \to B$ un splitting de álgebras de $B \to A$ y por lo tanto existe $\widetilde{f}$ como en el diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & C \arrow[r, "p"] & C/I \arrow[r] & 0 \\ & & A\prod_{C/I} C \arrow[u] \arrow[r] & A \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dotted, "\widetilde{f}"'] \arrow[l, dotted, bend left, "s"] & \end{tikzcd}$$

d) Supongamos k es un cuerpo y A una k-álgebra conmutativa. Muestre que si para todo A-módulo a izquierda M, que lo vemos como A-bimódulo simétrico, si todo 2-cociclo $f : A^{\otimes 2} \to M$ es cohomólogo a uno antisimétrico, entonces A es suave.

e) Use la resolución de Koszul de $A = S(V)$ para mostrar que $S(V)$ es suave.

17.3. Separabilidad, derivaciones y (co)Homología

Definición / Teorema: Sea $f : R \to S$ un morfismo de anillos, son equivalentes:

1. El morfismo inducido por la multiplicación $S \otimes_R S \to S$ admite una sección S-lineal a izquierda y derecha.
2. Para todo S-módulo N (en particular es R-módulo via f, el epimorfismo $S \otimes_R N \to N$ se parte (como morfismo de S-módulos), de forma natural en la variable N.
3. Para todo S-bimódulo M, si $D : S \to M$ es una derivación que se anula en R, entones es interior.
4. Si $\Omega_R^{nc}(S) = \mathrm{Ker}(m : S \otimes_R S \to S)$, entonces la derivación $d : S \to \Omega_R^{nc}(S)$ dada por $d(s) = s \otimes 1 - 1 \otimes s$ es interior.

Si una de estas condiciones se verifica, diremos que S es separable sobre R (en el sentido no necesariamente conmutativo).

Observación: $a \otimes 1 - 1 \otimes a = a \cdot (1 \otimes 1) - (1 \otimes 1) \cdot a$, luego, la derivación $d : S \to S \otimes_R S$ dada por $d(a) = a \otimes 1 - 1 \otimes a$ siempre es interior, pero en el punto (d) anterior se pide que $d : S \to \Omega_R^{nc}(S)$ sea interior, y $1 \otimes 1 \notin \mathrm{Ker}(m)$, asi que la condición (d) exije que exista $\omega = \sum_i a_i \otimes b_i \in S \otimes_R S$ con $\sum_i a_i b_i = 0$ tal que

$$s \otimes 1 - 1 \otimes s = \sum_i s a_i \otimes b_i - a_i \otimes b_i s$$

Referencia para 3. y 4.: ver Prop. 7.2 (pag. 21) de
http://mate.dm.uba.ar/~mfarinat/ERP/Galois.pdf
(y referencias ahí) y hacer previamente el ejercicio 2:

1. Demuestre la equivalencia entre 1 y 2 de la definición de separabilidad.
2. Sea $R \to S$ un morfismo de anillos, muestre que $\Omega^1_{nc}(S/R) := \mathrm{Ker}(S \otimes_R S \to S)$ es un S bimódulo, y $d : S \to \Omega^1_{nc}(S/R)$ dado por

   $$d(a) = 1 \otimes_R a - a \otimes_R 1$$

   es una derivación que se anula en R, que tiene la propiedad universal siguiente:

   Para todo S-bimódulo M y para toda derivación $D : S \to M$ que se anule en R, existe un morfismo de bimódulos $\widetilde{D} : \Omega^1_{nc}(S/R) \to M$ tal que $D = \widetilde{D} \circ d$.

   En diagramas: $\forall D \in \mathrm{Der}_R(S, M) = \{D : S \to M \text{ derivación } R\text{-lineal}\}$:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "D"] \arrow[d, "d"'] & M \\ \Omega^1_R(S) \arrow[ur, dashed, "\exists! \widetilde{D}"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\widetilde{D}$ es morfismo de S-bimódulos. En términos de Hom: la composición con d induce una biyección (natural en los S-bimódulos M)

$$\mathrm{Hom}_{S-bimod}(\Omega_R^{nc}(S), M) \cong \mathrm{Der}_R(S, M)$$

$$f \mapsto D_f = f \circ d$$

3. Utilizando la construcción anterior, lea de la referencia la dem. de la equivalencia de 1 y 2 con 3 y 4 de la definición de separabilidad.
4. Ejemplos: $k \times k$ es separable sobre k, también $\underbrace{k \times \cdots \times k}_{n-veces}$ es k-separable. pero $k[x]/(x^2)$ no, tampoco $k[x]/(x^N)$ (donde $N \geq 2$). (Trate de demostrar esto por lo menos de 2 maneras distintas.
5. $\mathcal{H}$ es separable sobre $\mathbb{C}$, y sobre $\mathbb{R}$ (ver 5(b)).
6. Muestre que $M_n(A)$ es A-separable.
7. Sea $k \to R$ y $R \to S$ dos morfismos de anillos.
   a) Muestre que si S es k-separable, entonces S es R-separable.
   b) Muestre que si S es R-separable y R es k-separable, entonces S es k-separable.
8. Sea A una k-álgebra (o sea, $k \to Z(A)$), muestre que son equivalentes
   - A es k-separable
   - $H^n(A, M) = 0$ para todo $n > 0$ y para todo A-bimódulo k-simétrico M,
   - para toda derivación k-lineal $D : A \to M$, existe $m_0 \in M$ tal que $d(a) = am_0 - m_0 a$.
9. Sea k un cuerpo de característica p, $\lambda \in k$ y $A = k[x]/(x^p - \lambda)$. Muestre que la aplicación $E : A \to A$ dada por $E(x^i) = ix^i$ $(i = 0, \ldots, p-1)$ es una derivación. Concluya que A no es separable.
10. Si $A = k[x]/(x^N)$, muestre que $x^i \mapsto ix^i$ es una derivación, luego, A no es separable.
11. Sea $D : A \to M$ una derivación y $e \in A$. Muestre que si $e^2 = e$ entonces existe una derivación $\widetilde{D} : A \to M$ que es igual a D módulo derivaciones interiores y que verifica $\widetilde{D}(ea) = e\widetilde{D}(a)$ y $\widetilde{D}(ae) = \widetilde{D}(a)e$ para todo a.
12. Sea A una k-álgebra y supongamos $k \subset R \subset A$, con R un subanillo de A (y por lo tanto una k-álgebra). Consideramos en complejo con $\otimes_R$ en lugar de $\otimes_k$:

$$\cdots \to A \otimes_R A \otimes_R A \to A \otimes_R A \otimes_R A \to A \otimes_R A \to A \to 0$$

Muestre que es exacto (sugerencia: la “misma” homotopía de antes sigue funcionando).

13. Sea $k \subseteq R \subseteq A$ como antes, pero asumimos R es separable sobre k. Muestre que una sección de R bimódulos de la multiplicación

$$\begin{tikzcd} R \otimes_k R \arrow[r, "m"] & R \arrow[l, bend right, dotted, "s"'] \end{tikzcd}$$

induce una sección de A-bimódulos, para cualquier $M \in {}_A Mod_R$ y $N \in {}_R Mod_A$:

$$\begin{tikzcd} M \otimes_R R \otimes_k R \otimes_R N \arrow[r] \arrow[d, equal, "\cong"'] & M \otimes_R R \otimes_R N \arrow[l, bend right, dotted] \arrow[d, equal, "\cong"'] \\ M \otimes_k N \arrow[r] & M \otimes_R N \arrow[l, bend left, dotted, "s'"] \end{tikzcd}$$

Concluya que (si R es separable sobre k entonces) $M \otimes_k N$ es un sumando directo de $M \otimes_R N$ como bimódulo y que la resolución con $\otimes_R$ en vez de $\otimes_k$ es A^e-proyectiva, y puede ser utilizada para calcular la homología y cohomología de A como k-álgebra. Más generalmente, se pueden usar módulos que sean sumandos directos de sumas directas de $A \otimes_R A$ (en vez de sumandos directos de sumas directas de $A \otimes_k A$). Observar que esto muestra el ejercicio 11, incluso para cociclos de cualquier grado.

14. Sea Q un quiver con Q_0 finito, I un ideal admisible de kQ y $A = kQ/I$. Muestre que kQ_0 es k separable y por lo tanto, para A se puede utilizar la resolución con $\otimes_{kQ_0}$ en vez de $\otimes_k$. Más generalmente, si se tiene un complejo de la forma

$$\cdots A \otimes_{kQ_0} V_n \otimes_{kQ_0} A \to \cdots \to A \otimes_{kQ_0} V_1 \otimes_{kQ_0} A \to A \otimes_{kQ_0} A \to A \to 0$$

que es exacto, entonces es una resolución A^e-proyectiva de A.

15. Sea $A = kQ$ con Q finito. Con la resolución de largo 1 de A como A^e-módulo

$$0 \to A \otimes_{kQ_0} kQ_1 \otimes_{kQ_0} A \to A \otimes_{kQ_0} A \to A \to 0$$

describir homología y cohomología de Hochschild a coeficientes en el A bimódulo kQ_0 en términos del quiver.

16. Sea Q un quiver con Q_0 finito, considerar kQ, $I = (Q_1)$ el ideal generado por las flechas, y $A = kQ/(I)^2$. Utilizar la resolución

$$\cdots \to A \underset{kQ_0}{\otimes} kQ_3 \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} kQ_2 \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} kQ_1 \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \underset{kQ_0}{\otimes} A \to A \to 0$$

para describir homología y cohomología de Hochschild a coeficientes en el A-bimódulo kQ_0 en términos del quiver.

17.4. Dualidad de Van den Bergh

El objetivo es demostrar el siguiente teorema:

Teorema: *(M. Van den Bergh) Sea A una k-álgebra que admite una resolución A^e proyectiva $P_\bullet \to A$ con P_n finitamente generado (como A^e-módulo) $\forall n$. Son equivalentes*

i) $pdim_{A^e}(A) = d$ *y* $\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A^e) \cong \begin{cases} A & \text{si } n = d, \text{ iso como } A^e\text{-módulo} \\ 0 & \text{si } n \neq d \end{cases}$

ii) $\exists d \in \mathbb{N}$ *y un isomorfismo (de k-módulos) natural en M*

$$H^\bullet(A, M) \cong H_{d-\bullet}(A, M)$$

para todo A-bimódulo M.

Una k-álgebra satisfaciendo alguna de estas condiciones se denomina Calabi-Yau.

Van den Bergh mostró un teorema un poco más general, con $\mathrm{Ext}_{A^e}(A, A^e) \cong U \in Pic_k(A)$, del cual $U = A$ es un caso particular, y $U = A_\phi$=el bimódulo A con acción de un lado torcida por un automorfismo de A se denomina *twisted Calaby - Yau*. Una k-álgebra que satisface el teorema general se dice que verifica la dualidad de Van den Bergh. Esta versión (y su demostración) se recoge la idea principal del teorema de Van den Bergh.

Obs: Cualquiera de esas condiciones equivalentes implican a su vez que A tiene dimensión global finita, por lo tanto, en el caso conmutativo y característica cero implica suavidad.

1. Sea A un anillo, $M \in {}_AMod$ y $N \in {}_AMod_B$. Muestre que $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es naturalmente un B-módulo a izquierda. Concluya que $\mathrm{Ext}^n_A(M, N)$ hereda una estructura de B-módulo a izquierda. Si $b \in B$ y r_b es la multiplicación a derecha en N:

$$r_b : N \to N$$

$$x \mapsto xb$$

   r_b es A-lineal a izquierda y por la funtorialidad de Ext se tiene una flecha

$$\mathrm{Ext}^n_A(M, r_b) = (r_b)_* : \mathrm{Ext}^n_A(M, N) \to \mathrm{Ext}^n_A(M, N)$$

   Muestre que la estructura de B-módulo a izquierda está dada justamente por la flecha anterior, es decir, para cada $b \in B$,

$$b \cdot - = (r_b)_* : \mathrm{Ext}^n_A(M, N) \to \mathrm{Ext}^n_A(M, N)$$

2. Sea A una k-álgebra, usando que A^e es un A^e-BI-módulo, muestre que $H^\bullet(A, A^e) = \mathrm{Ext}^\bullet_{A^e}(A, A^e)$ es un A-bimódulo.

3. $ii) \Rightarrow i)$. Consideremos el caso $M = A^e$:

$$H^\bullet(A, A^e) \cong H_{d-\bullet}(A, A^e)$$

Como

$$H_{d-\bullet}(A, A^e) = \mathrm{Tor}_{d-\bullet}(A, A^e)$$

y A^e es A^e-libre, luego proyectivo, luego playo,

$$\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A^e) = H^\bullet(A, A^e) \cong \mathrm{Tor}_{d-n}(A, A^e) = 0 \forall n \neq d$$

y para $n = d$

$$\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A, A^e) \cong \mathrm{Tor}^{A^e}_0(A, A^e) = A \otimes_{A^e} A^e \cong A$$

El isomorfismo en principio es como k-módulo. Utilice la naturalidad y la estructura de A^e-módulo a derecha de A^e para concluir que el isomorfismo es de A^e-módulos.

Por otra parte, como $H_n(A, M) = 0$ para $n < 0$, si $H^n(A, M) \cong H_{d-n}(A, A^e)$ entonces $H^n(A, M) = 0$ para $n > d$. Por otra parte $H^d(A., A^e) \neq 0$ luego $pdim_{A^e}(A) = d$.

4. $i) \Rightarrow ii)$ sea

$$0 \to P_d \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$$

una resolución proyectiva de A como A^e-bimódulo donde cada P_i es finitamente generado. Calculamos $\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, M)$ con una resolución así y obtenemos:

$$H^n(A, M) = H_n(\mathrm{Hom}_{A^e}(P_\bullet, M), d^*)$$

y como los P_i son A^e-proyectivos de t.f.

$$\cong H_n(\mathrm{Hom}_{A^e}(P, A^e) \otimes_{A^e} M, d^* \otimes \mathrm{Id}_M) = H_n(P^*_\bullet \otimes_{A^e} M, d^* \otimes \mathrm{Id}_M)$$

Pero $\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A^e) = 0$ salvo $n = d$,

$$\Rightarrow \; H_n(\mathrm{Hom}_{A^e}(P, A^e)) = 0$$

si $n \neq d$ y $\cong A$ si $n = d$, eso significa que el complejo

$$0 \to P^*_0 \to P^*_1 \to \cdots \to P^*_d \to 0$$

es exacto en todos lados salvo al final, y que el conúcleo de $P_{d-1} \to P_d$ es iso a A. O sea, salvo lugar desde donde se cuentan los grados, es una resolución proyectiva de A, pues P^*_i es A^e proyectivo. Llamemos $Q_i := P_{d-i}$, entonces tenemos

$$0 \to Q^*_d \to Q^*_{d-1} \to \cdots \to Q^*_0 \to 0$$

es una resolución A^e-proyectiva de A y

$$H_n(Q_\bullet \otimes_{A^e} M) = \mathrm{Tor}^{A^e}_n(A, M) = H_n(A, M)$$

luego

$$H^n(A, M) = H_n(P^*_\bullet \otimes_{A^e} M) = H_n(Q_{d-\bullet} \otimes_{A^e} M) = H_{d-n}(A, M)$$

5. Si A y B son k-álgebras Calaby-Yau entonces $A \otimes B$ también (y la dimensión es la suma).

6. $A = M_n(k)$ es CY de dimensión 0. Luego, si A es CY, entonces $M_n(A)$ también es CY (de la misma dimensión).

7. Si A una k-álgebra CY y G es un grupo finito con $|G|$ inversible en $A[G]$, el álgebra de grupo, también es CY (de la misma dimensión).

8. Sea A una k-álgebra y M un A^e-módulo. Recordamos $M^A = \{m \in M : am = ma \forall a \in A\} = H^0(A, M)$ y $M_A = M/[A, M] = H_0(A, M)$. La composición

$$\begin{tikzcd} M^A \arrow[r, hook, "i"] & M \arrow[r, two heads, "p"] & M_A \end{tikzcd}$$

define una transformación natural entre los funtores $(-)^A$ y $(-)_A$. Muestre que si esa transformación es un iso para todo M entonces necesariamente $H^1(A, M) = 0$ todo A^e-módulo M, o sea, $pdim_{A^e}(A) = 0$; en particular, si k es cuerpo, A debe ser semisimple.

Nota: Marcelo Aguiar mostró -entre otras cosas- en [*A note on strongly separable algebras*, Bol. A.N.C. (Córdoba, Argentina), vol 65 (2000) 51-60] que si k es cuerpo, $\dim_k A < \infty$ y la aplicación bilineal

$$A \times A \to k$$
$$(a, b) \mapsto tr(ab)$$

es no degenerada (donde $tr(a)$=traza del endomorfismo $x \mapsto ax$), entonces la transformación natural anterior $M^A \to M_A$ es un isomorfismo. O sea, A es CY de dimensión 0. También mostró que en característica cero, $M^A \to M_A$ es iso si y sólo si A es semisimple. Luego, $A = M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k)$ es CY de dimensión 0 (si las D_i son álgebras de división de dimensión finita sobre k, por ejemplo, extensiones finitas de cuerpo). En consecuencia, si B es CY de dimensión d, entonces $M_{n_1}(B \otimes_k D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(B \otimes_k D_k)$ es también CY (de la misma dimensión).

9. Sea $A = k[x]/(x^2)$.

$$\mathrm{Ext}^0_{A^e}(A, A^e) = \mathrm{Hom}_{A^e}(A, A^e) \cong A$$

Use la resolución

$$\cdots \xrightarrow{x\otimes 1 - 1\otimes x} A^e \xrightarrow{x\otimes 1 + 1\otimes x} A^e \xrightarrow{x\otimes 1 - 1\otimes x} A^e \xrightarrow{x\otimes 1 + 1\otimes x} A^e \xrightarrow{x\otimes 1 - 1\otimes x} A^e \xrightarrow{\quad m \quad} A \to 0$$

para mostrar que

$$\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A, A^e) = 0 \forall i > 0$$

Sin embargo $k[x]/x^2$ no es CY pues $pdim_{A^e}(A) = \infty$.

10. Si A es CY y $S \subseteq A$ es un subconjunto central multiplicativamente cerrado entonces A_S es CY (de la misma dimensión).

11. $k[x]$ es CY, luego $k[x_1, \ldots, x_n]$ también, y $k[\mathbb{Z}^n]$ también.

12. Si $G = \mathbb{Z}_p$ y k es un cuerpo de característica p, entonces $A = k[\mathbb{Z}_p]$ no es CY, pues $pdim_{A^e}(A) = \infty$ (notar que $A \cong k[x]/(x^p - 1)$, y si $t := x - 1$ entonces $A \cong k[t]/t^p$).

Capítulo 18

Álgebras filtradas: el ejemplo del álgebra de Weyl

k en principio anillo conmutativo. Sea $\partial : k[x] \to k[x]$ dado por

$$\partial(p(x)) = p'(x)$$

y por abuso de notación, indicaremos $x=$ la multiplicación por x, como endomorfismo de $k[x]$. Muestre que

$$[\partial, x] = \mathrm{Id} \in \mathrm{End}_k(k[x])$$

Se define el álgebra de Weyl $A_1(k) := k\{x, y\}/([y, x] = 1)$ y denotamos $\partial = \overline{y} \in A_1(k)$. Por lo anterior, $A_1(k)$ tiene a $k[x]$ como representación natural.

1. Muestre que los monomios $\{x^i\partial^j : i, j \in \mathbb{N}_0\}$ forman un sistema de generadores como k-módulo.

2. *Supondremos de aquí en adelante que k es un cuerpo de característica cero.* Muestre que $A_1(k)$ no tiene representaciones de dimensión finita sobre k. (Sugerencia: si V es una representación de $A_1(k)$, se tiene que

$$[\partial|_V, x|_V] = \mathrm{Id}_V$$

donde, si $P \in A_1(k)$, denotamos $P|_V = P \cdot - : V \to V$. En particular, Id_V debe ser un conmutador, y si V tiene dimensión finita esto implica que tiene traza cero, absurdo.

3. Consideremos $P = \sum_{i,j} a_{ij}x^i\partial^j \in A_1(k)$ y llamaremos *parte principal* a la parte con j máximo dentro del soporte de los a_{ij}, es decir, que podemos escribir a P como

$$P = p(x)\partial^N + \sum_{i,j:j<N} a_{ij}x^i\partial^j$$

Si $M = k[x]$ como $A_1(k)$-módulo, muestre que

$$P \cdot x^N = Np(x)$$

y por lo tanto $p(x)$ está bien definido (como función de P). Concluya con un argumento inductivo que $\{x^i\partial^j : i, j \in \mathbb{N}_0\}$ no sólo generan sino que son una k-base de $A_1(k)$. (ell resultado es cierto en cualquier característica, pero con otra demostración)

4. Consideramos en $A_1(k)$ la filtración dada por $F_p(A_1(k)) = \langle x^i\partial^j : i+j \leq p\rangle$ (subespacio generado sobre k). Muestre que $gr(A_1(k)) \cong k[x, y]$ como k-álgebra.

5. Sea $P = \sum_j a_j p_j(x)\partial^j$, muestre que

$$[\partial, P] = \sum_j a_i p_j'(x)\partial^j$$

y si escribimos $Q = \sum_i x^i q(\partial)$ con q un polinomio en ∂, entonces

$$[x, Q] = -\sum_i x^i q'(\partial)$$

   a) Concluya que $A_1(k)$ es simple (recordamos que asumimos k cuerpo de característica cero). Más precisamente, si I es un ideal bilátero y $P \in I$ es no nulo, entonces I contiene una constante no nula.

   b) Concluya también (recordamos que asumimos k cuerpo de característica cero) que $A_1(k)$ es central, es decir, $Z(A) = k$. Si k tiene característica $p > 0$ muestre que x^p y ∂^p son centrales en $A_1(p)$

6. Sea V el espacio vectorial de dimensión 2 con base $\{e_x, e_\partial\}$. Muestre (Shridaran) que la siguiente es una resolución, donde los diferenciales son A-lineales a izquierda y derecha, definidos en base por

$$0 \to A \otimes e_x \wedge e_\partial \otimes A \longrightarrow A \otimes (ke_x \oplus ke_\partial) \otimes A \longrightarrow A \otimes A \xrightarrow{m} A \to 0$$

$$\begin{array}{rcl} 1 \otimes e_x \wedge e_\partial \otimes 1 & \mapsto & x \otimes e_\partial \otimes 1 - 1 \otimes e_\partial \otimes x \\ & & -\partial \otimes e_x \otimes 1 + 1 \otimes e_x \otimes \partial, \\ 1 \otimes e_x \otimes 1 & \mapsto & x \otimes 1 - 1 \otimes x, \\ 1 \otimes e_\partial \otimes 1 & \mapsto & \partial \otimes 1 - 1 \otimes \partial. \end{array}$$

   Sugerencia:

   a) Muestre que $d^2 = 0$

   b) Encuentre una filtración del complejo tal que el graduado asociado sea una resolución de Koszul.

7. Use la resolución anterior para mostrar que

$$H^\bullet(A, M) \cong H_{2-\bullet}(A, M) \ \forall M \in {}_A Mod_A$$

(Observación: basta ver el caso $M = A^e$.) Calcule $HH^n(A)$ y $HH_n(A)$ para $n = 0, 1, 2$.

Capítulo 19

Álgebras de Lie, complejo de Chevalley-Eilenberg

19.1. El Casimir y álgebras semisimples

En esta sección y la siguiente supondremos k un cuerpo de característica cero, y $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie de dimensión finita.

Definición: un ideal de un álgebra $\mathfrak{g}$ es un subespacio $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ tal que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$.

Definición: Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *simple* si no tiene ideales salvo 0 y $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}$ no es abeliana (excluyendo de esta manera el caso trivial cuando $\dim_k \mathfrak{g} = 1$)

Definición: Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *semisimple* si es isomorfa a un producto directo (con corchete coordenada a coordenada) de álgebras de Lie simples.

1. Sea V un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita. Llamamos

   $$x|_V := x \cdot - : V \to V$$

   a la acción de un elemento x de $\mathfrak{g}$ en V. Se define la forma bilineal asociada b_V por

   $$b_V(x, y) = tr_V(x|_V \circ y|_V)$$

   donde tr_V es la traza en $\mathrm{End}_k(V)$. Muestre que b_V es simétrica y $\mathfrak{g}$-invariante en el siguiente sentido:

   $$b_V(x, y) = b_V(y, x)$$
   $$b_V([x, y], z) = b_V(x, [y, z])$$

Si $\mathfrak{g}$ es de dimensión finita y $V = \mathfrak{g}^{ad}$, la forma bilineal se llama *forma de Killing* y se denota $(-,-)$, o $\kappa(-,-)$.

2. Calcule la matriz de la forma bilineal de κ para $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, muestre que la forma bilineal es no degenerada.

Criterio de Cartan: ($\mathfrak{g}$ de dimensión finita sobre un cuerpo de característica cero)

i) $\mathfrak{g}$ es semisimple si y sólo si su forma de Killing es no-degenerada.

ii) Si $\mathfrak{g}$ en una subálgebra de Lie $M_n(k)$, entonces $\beta(x,y) := tr(xy)$ (la traza usual de matrices) también es no degenerada.

Utilizaremos este criterio sin demostración. (Ver por ejemplo las referencias en la Wikipedia, o [Humphreys, J., Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. Second printing, revised. Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.] o bien [Knapp, A., Lie Groups Beyond an Introduction. Progress in Mathematics, 140. Birkhäuser, Boston, MA, 1996.])

De aquí en adelante $\mathfrak{g}$ es semisimple, o equivalentemente es tal que su forma de Killing es no degenerada.

3. Sea $x_1, \dots, x_n$ una base, y sean $x^1, \dots, x^n$ en $\mathfrak{g}$ tales que

$$\kappa(x_i, x^j) = \delta_i^j$$

Muestre que el elemento, llamado **Casimir**, definido por

$$\Omega := \sum_{i=1}^{n} x_i x^i \in U(\mathfrak{g})$$

es independiente de la base elegida. En particular, $\Omega := \sum_{i=1}^n x_i x^i = \sum_{i=1}^n x^i x_i$.

4. Si $x \in \mathfrak{g}$ y $[x_i, x] = \sum_j c_{ij} x_j$ entonces $[x, x^j] = \sum_i c_{ij} e^j$ (sugerencia: use que la forma de Killing es invariante)

5. Muestre que Ω está en en centro de $U(\mathfrak{g})$, y por lo tanto para cualquier $\mathfrak{g}$-módulo M, la multiplicación por Ω es $U(\mathfrak{g})$-lineal.

6. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_k$ es un producto de simples, entonces su casimir $\Omega = \sum_{i=1}^k \Omega_i$ es a suma de los casimires de cada $\mathfrak{g}_i$.

7. (Lema de Schur) Sea M un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita y simple (i.e. los únicos $\mathfrak{g}$-submódulos son 0 y M). Si k es algebraicamente cerrado, muestre que la acción de Ω en M es un múltiplo de la identidad, es decir, $\exists c_M \in k$ tal que

$$\Omega|_M = c_M \mathrm{Id}_M$$

Notar que esto implica que $c_M \dim_k(M) = tr(\Omega|_M)$. *Sugerencia: muestre que $\Omega|_M$ tiene algún autovalor, y que el subespacio de autovectores correspondiente es un $\mathfrak{g}$-submódulo no nulo.*

19.2. Generalidades de representaciones y el Casimir

1. Sean M y N dos $\mathfrak{g}$-módulos, muestre que

   a) $M \otimes N$ es naturalmente un $\mathfrak{g}$-módulo con la acción

   $$x \cdot (m \otimes n) = xm \otimes n + m \otimes xn$$

   y el isomorfismo de trasposición $M \otimes N \cong N \otimes M$ es de $\mathfrak{g}$-módulos.

   b) $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ es un $\mathfrak{g}$-módulo via

   $$(x \cdot f)(m) := xf(m) - f(xm)$$

   En particular, viendo k como $\mathfrak{g}$-módulo trivial, M^* es $\mathfrak{g}$-módulo con $(x \cdot \phi)(m) = -\phi(xm)$.

   c) Muestre que el morfismo natural

   $$M^* \otimes N \to \mathrm{Hom}_k(M, N)$$

   es de $\mathfrak{g}$-módulos.

   d) $\mathrm{Hom}_\mathfrak{g}(M, N) = \mathrm{Hom}_k(M, N)^\mathfrak{g}$ donde, si V es una representación, $V^\mathfrak{g} = \{v \in V : xv = 0 \forall x \in \mathfrak{g}\} \cong \mathrm{Hom}_\mathfrak{g}(k, V)$.

   e) Si M y N son de dimensión finita, entonces $\mathrm{Hom}_\mathfrak{g}(M, N) \cong (M^* \otimes N)^\mathfrak{g}$

   f) La descomposición en tensores simétricos y antisimétricos $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} = S^2\mathfrak{g} \oplus \Lambda^2\mathfrak{g}$ es también como $\mathfrak{g}$-módulos. Si $\mathfrak{g}$ es semisimple, entonce el "casimir"

   $$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x^i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$

   donde $\{x_i\}_i$ es una base y $\kappa(x_i, x^j) = \delta_i^j$ es un elemento simétrico e invariante, es decir, un elemento de $S^2(\mathfrak{g})^\mathfrak{g}$.

2. Sea $\mathfrak{g}$ simple, muestre

   a) $M = \mathfrak{g}^{ad}$ es una representación simple, luego $\mathrm{Hom}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ tiene dimensión 1.

   b) $\mathfrak{g}$ semisimple entonces $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$ como representaciones, si además $\mathfrak{g}$ es simple, entonces $\mathrm{Hom}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}) \cong (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^\mathfrak{g}$ tiene dimensión 1. Concluimos que $(S^2\mathfrak{g})^\mathfrak{g}$ tiene dimensión 1 y está generado por el Casimir y que $(\Lambda^2\mathfrak{g})^\mathfrak{g} = 0$. endenumerate

   c) Sea $\mathfrak{g}$ simple y Sea M un $\mathfrak{g}$-módulo simple **no trivial** de dimensión m, llamemos

   $$\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(M) = M_m(k)$$

   a la acción. Muestre que

1) (usando el criterio de Cartan parte ii) $\beta(x,y) = tr(\rho(x)\circ\rho(y))$ es un múltiplo no nulo de la forma de Killing. Por lo tanto, si $x_1,\dots,x_n$ es una base de $\mathfrak{g}$ y $\{y^1,\dots,y^n\}$ en $\mathfrak{g}$ satisfacen
$$\beta(x_i, y^j) = \delta_i^j$$
entonces $\widetilde{\Omega} = \sum_{i=1}^n x_i y^i$ es un múltiplo escalar no nulo del Casimir de $\mathfrak{g}$.

2) La multiplicación por $\widetilde{\Omega}$ en M es un múltiplo de la identidad, llamémoslo $\widetilde{c}_M$, que a su vez, es un múltiplo no nulo de la acción del Casimir Ω en M (que es el escalar c_M).

3) Tomando traza al endomorfismo $\widetilde{\Omega}|_M$ muestre que (k de característica cero) $\widetilde{c}_M = 1$, y por lo tanto $c_M \neq 0$.

3. Sea $\mathfrak{g}$ semisimple y M de dimensión finita una representación simple no trivial. Muestre que el Casimir actúa por un escalar no nulo.

19.3. Lemas de Whitehead y Teorema de Weyl

En esta sección, k es cuerpo de característica cero, y $\mathfrak{g}$ es semisimple.

1. Sea M simple de dimensión finta que no es el módulo trivial. Muestre que
$$H^\bullet(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Ext}^\bullet_{U\mathfrak{g}}(k, M) = 0$$
Sugerencia: para cualquier anillo A, $\mathrm{Ext}^\bullet_A(M,N)$ *es siempre un $Z(A)$-módulo y su acción de $Z(A)$ inducida por la acción en M coincide con la inducida por N. Luego, usando el Casimir, la multiplicación por un escalar no nulo (si lo vemos actuando en M) debe ser cero (si lo vemos actuando en k).*

2. Sea $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ (muestre que si $\mathfrak{g}$ es semimisple entonces $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$). Muestre que $H^1(\mathfrak{g}, k) = 0$.

3. **Primer Lema de Whitehead**. Usando que $H^1(\mathfrak{g}, k) = 0$ y que $H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$ para todo M *simple* de dimensión finita que no sea el módulo trivial, muestre que (segundo Lema de Whitehead)
$$H^1(\mathfrak{g}, M) = 0$$
para todo M de dimensión finita. (Sugerencia: use inducción en la dimensión y la sucesión exacta larga de cohomología).

4. **Teorema de Weyl.** Sea $\mathfrak{g}$ semisimple y k de característica cero. Entonces todo $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión de dimensión finita es completamente reducible, o equivalentemente, todo submódulo de un módulo de dimensión finita admite un complemento. O equivalentemente, la categoría de $\mathfrak{g}$-módulos *de dimensión finita* es semisimple.

   Demostración: Sea M de dimensión finita que no sea simple y M_0 un submódulo propio, consideremos la s.e.c.
$$0 \to M_0 \to M \to M/M_0 \to 0$$

Utilice el isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^1_{U\mathfrak{g}}(M/M_0, M_0) \cong H^1(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_k(M/M_0, M_0))$$

mas el primer Lema de Whitehead y concluya que la sucesión se parte, y por lo tanto M_0 se complementa en M.

5. Sea $0 \to k \to \mathfrak{e} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$ una s.e.c con π morfismo de álgebras de Lie y k un ideal de dimensión 1. Si $e \in \mathfrak{e}$ y $x \in \mathfrak{g}$, sea $\widetilde{x} \in \mathfrak{e}$ tal que $\pi(\widetilde{x}) = x$. Definimos

$$x \cdot e := [\widetilde{x}, e]$$

Muestre que está bien definido y que $\mathfrak{e}$ resulta un $\mathfrak{g}$-módulo con esta acción, y que π resulta $\mathfrak{g}$-lineal. Concluya del Teorema de Weyl que π admite una sección como $\mathfrak{g}$-módulo, y por lo tanto una sección de álgebras de Lie. Concluya que $H^2(\mathfrak{g}, k) = 0$ si $\mathfrak{g}$ es semisimple.

6. **Segundo Lema de Whithead.** Muestre que si M tiene dimensión finita y $\mathfrak{g}$ es semisimple entonce $H^2(\mathfrak{g}, M) = 0$.

7. Muestre que $H^3(\mathfrak{sl}(2,k), k) \cong k$, por lo tanto no hay tercer lema de Whitehead.

Capítulo 20

Estructura super, complejos, estructuras (co)algebraicas

20.1. Super álgebras de Lie

1. Super-Lie en términos usuales: Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 \oplus \mathfrak{L}_1$ una super álgebra de Lie. Llamemos

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{L}_0, \qquad V := \mathfrak{L}_1$$

Muestre que

- $\mathfrak{g}$ es álgebra de Lie (en el sentido usual)
- V es un $\mathfrak{g}$-módulo con la acción

$$x \cdot v := [x, v]_{\mathfrak{L}}$$

- $\phi : V \times V \to \mathfrak{g}$ definido por

$$\phi(v, w) := [v, w]_{\mathfrak{L}}$$

es bilineal, *simétrica* e invariante (o sea $\phi(x \cdot v, w) + \phi(v, x \cdot w) = [x, \phi(v, w)]$) y verifica

$$(\star) \qquad \phi(v, w) \cdot u = \phi(u, v) \cdot w - \phi(u, w) \cdot v$$

- Recíprocamente, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y V un $\mathfrak{g}$-módulo, junto con una aplicación bilineal simétrica $\phi : V \times V \to \mathfrak{g}^{ad}$ y $\mathfrak{g}$-invariante que verifica $(\star)$, entonces $\mathfrak{L} := \mathfrak{g} \oplus V$ con el corchete

$$[(x, v), (y, w)] := ([x, y] + \phi(v, w), x \cdot w + y \cdot v)$$

es una super álgebra de Lie. Estas construcciones son recíprocas, es decir, toda super álgebra de Lie sucede en esta forma.

2. Sea $\mathfrak{L}$ una superálgebra de Lie. Un $\mathfrak{L}$-módulo es un super k-espacio vectorial (o sea, un espacio vectorial $\mathbb{Z}_2$-graduado) junto con una acción

$$\mathfrak{L} \otimes M \to M$$

$$x \otimes m \mapsto x \cdot m$$

que es un morfismo homogéneo de grado cero, o sea

$$\mathfrak{L}_i \cdot M_j \subseteq M_{i+j}$$

y que verifica
$$x \cdot (y \cdot m) - (-1)^{|x||y|} y \cdot (x \cdot m) = [x, y]_{\mathfrak{L}} \cdot m$$

Si $\mathfrak{L}$ es superálgebra de Lie porque es $\mathbb{Z}$-graduada y M es $\mathbb{Z}$-graduado, entonces la definición de $\mathfrak{L}$-módulo es "la misma", lo único es que en la condición $\mathfrak{L}_i \cdot M_j \subseteq M_{i+j}$ se toman i, j en $\mathbb{Z}$, y no en $\mathbb{Z}_2$.

a) Escriba, para $\mathfrak{L} = \mathfrak{g} \oplus V$, la condición de ser $\mathfrak{L}$-módulo en términos de $\mathfrak{g}$ y V.

b) Si $\mathfrak{L} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{L}_n$ es superálgebra $\mathbb{Z}$-graduada y $M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ es un módulo $\mathbb{Z}$-graduado, escriba la condición de "ser $\mathfrak{L}$-módulo" en términos de las acciones de $\mathfrak{L}_i$.

3. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie usual, llamemos $V := \mathfrak{g}^{ad}$. Consideramos la super-álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada dada por
$$\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$
con corchete $\mathbb{Z}$-graduado (o sea, $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subseteq \mathfrak{g}_2 = 0$ en este caso, similarmente $0 = [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1}]$, $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1] \subseteq \mathfrak{g}_0$, etc.) con componentes graduadas dadas por

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$$

$$\mathfrak{g}_1 = V = \mathfrak{g}^{ad}$$

$$\mathfrak{g}_{-1} = kd \qquad \text{(el espacio 1-dimensional con base } d$$

donde el corchete entre $\mathfrak{g}$ y V es la acción de $\mathfrak{g}$ en $V = \mathfrak{g}^{ad}$. Sea $x \leftrightarrow x'$ una biyección $\mathfrak{g}$-lineal entre $\mathfrak{g}$ y $V = \mathfrak{g}^{ad}$ (por ejemplo la identidad) donde los x los vemos en $\mathfrak{g} = \mathfrak{L}_0$ y $x' \in V = \mathfrak{L}_1$. Definimos el corchete

$$[d, x'] := x$$

Muestre que el dato anterior determina toda la estructura de super álgebra de Lie en

$$\mathfrak{L} = kd \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{ad} = \mathfrak{L}_{-1} \oplus \mathfrak{L}_0 \oplus \mathfrak{L}_1$$

Si $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ es un super $\mathfrak{L}$-módulo en el sentido $\mathbb{Z}$-graduado, describa el significado de "ser supermódulo" en términos de $\mathfrak{g}$ y d.

20.2. Super derivaciones

4. Muestre que el diferencial de Chevalley-Eilenberg en $\mathrm{Hom}(\Lambda^*\mathfrak{g}, k) \cong \Lambda^\bullet\mathfrak{g}^*$ es una super-derivación (de grado $+1$) con respecto al producto wedge en $\Lambda^*\mathfrak{g}$, por lo tanto, la cohomología es un álgebra (super-conmutativa).

5. Muestre que el diferencial de Hochschild es una super-derivación (de grado $+1$) con respecto al producto cup en $\oplus_n \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A)$.

6. Sea A una superálgebra asociativa y $\mathrm{Der}_s(A) \subseteq \mathrm{End}(A)$ la suma directa de las super-derivaciones de todos los posibles grados. Muestre que $\mathrm{Der}_s(A)$ es estable por el super-conmutador.

7. Con mismas notaciones que el ej anterior, muestre que si D es una (super)derivación impar, entonces D^2 es una derivación en el sentido usual.

8. Sea $A = \Lambda^\bullet V$ vista como superálgebra con la graduación dada por la cantidad de tensores. Si $D : A \to A$ es una super-derivación de grado $+1$, muestre que $D^2 = 0$ si y sólo si $D^2|_V : V \to \Lambda^3 V$ es cero.

9. Sea $\mathfrak{g}$ un espacio vectorial de dimensión finita y $c : \Lambda^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ una aplicación lineal. Definimos $\delta : \mathfrak{g}^* \to \Lambda^2\mathfrak{g}^*$ la aplicación lineal traspuesta. Se define ∂_δ a la única super-derivación de grado $+1$ tal que $\partial_\delta|_{\mathfrak{g}^*} = \delta$, donde $\Lambda^\bullet\mathfrak{g}^*$ es super-conmutativa libre, ∂_δ está bien definida. Muestre que $\partial_\delta^2 = 0$ si y sólo si $c : \Lambda^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es un corchete de Lie, es decir, si denotamos $[x, y] := c(x \wedge y)$, entonces $\partial_\delta^2 = 0$ si y sólo si $[-, -]$ verifica Jacobi.

10. Sea $\mathfrak{g}$ una super-álgebra de Lie que sea $\mathbb{Z}$-graduada y $m \in \mathfrak{g}_1$ que verifique $[m, m] = 0$. Notar que la ecuación es no trivial pues m tiene grado impar.

    - Muestre que
    $$\partial := [m, -]$$
    es un diferencial en $\mathfrak{g}$ (de grado $+1$), es decir, que $\partial^2 = 0$,
    - ∂ es una super-derivación del álgebra de Lie,
    - $Z_m = \{x \in \mathfrak{g} : [m, x] = 0\}$ es una subálgebra de Lie (Z por centralizador y por ciclos), y muestre que $B_m := \{x \in \mathfrak{g} : \exists y \ / \ x = [m, y]\}$ es un ideal de Lie de Z_m (aunque en general no es un ideal de $\mathfrak{g}$) y por lo tanto $H_m(\mathfrak{g}) := \dfrac{Z_m}{B_m}$ resulta una superálgebra de Lie.

20.3. Coálgebras y coderivaciones

11. Una **coálgebra** sobre k es un k-espacio vectorial junto con una aplicación (llamada comultiplicación) $\Delta : C \to C \otimes C$ y una counidad $\epsilon : C \to k$ que satisfacen los axiomas duales a los de álgebra, escritos en términos de diagramas conmutativos:

- coasociatividad:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C\otimes C \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\Delta"] \\ C\otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{Id}"] & C\otimes C\otimes C \end{tikzcd}$$

- counitariedad

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & C\otimes C \arrow[d, "\epsilon\otimes\mathrm{Id}"] \\ C \arrow[r, "\cong"] & k\otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & C\otimes C \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\epsilon"] \\ C \arrow[r, "\cong"] & C\otimes k \end{tikzcd}$$

12. Muestre que si A es una k-álgebra de dimensión finita entonces A^* es una coálgebra con $\Delta = m^*$ y $\epsilon = \mu^*$ donde $\mu : k \to A$ es la inclusión de k en A. Si $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ y cada A_n es de dimensión finita, entonces el dual graduado

$$C := A' := \oplus_{n\geq 0} A_n^*$$

es una coálgebra, que además es graduada en el sentido que $\Delta(C_n) \subseteq \bigoplus\limits_{p+q=n} C_p \otimes C_q$.

13. Si C es coálgebra, entonces C^* siempre es un álgebra.

14. Sea V un k-esp vectorial y $C = T^cV = \oplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$ el álgebra tensorial *pero la vemos como espacio vectorial*. Un elemento de $V^{\otimes n}$ lo escribimos como sumas de elementos de la forma $v_1 \cdots v_n$. Definimos la *deconcatenación* como

$$\begin{aligned} \Delta(v_1\cdots v_n) &= 1\otimes v_1\cdots v_n + v_1\otimes v_2\cdots v_n + \cdots + v_1\cdots v_{n-1}\otimes v_n + v_1\cdots v_n\otimes 1 \\ &= \sum_{i=0}^{n} v_1\cdots v_i \otimes v_{i+1}\cdots v_n \qquad \text{(por convención } v_0 = 1 = v_{n+1}) \end{aligned}$$

Muestre que C es coálgebra, graduada, con ϵ=la proyección en k. Si V es de dimensión finita, entonces T^cV es isomorfa al dual graduado del álgebra TV^*.

15. Dada C una coálgebra, decimos que $D : C \to C$ es una *coderivación* si es k-lineal y

$$(D\otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id}\otimes D)\Delta = \Delta D$$

o equivalentemente, que $D^* : C^* \to C^*$ es una derivación. Muestre que $Coder(C) \subset \mathrm{End}_k(C)$ es subálgebra de Lie.

16. Si $C = \oplus_n C_n$ es una coálgebra graduada, un morfismo k-lineal D de grado p se dice super coderivación si D^* es una super-derivación (de grado $-p$) de C' (el dual graduado de C), o equivalentemente

$$(D\otimes \mathrm{Id} + \pm\mathrm{Id}\otimes D)\Delta = \Delta D$$

donde $\pm\mathrm{Id}$ es Id en los grados pares y $-\mathrm{Id}$ en los grados impares. Muestre que la suma de todas las super-coderivaciones es una super-álgebra de Lie.

17. Sea A un k-espacio vectorial, consideramos la coálgebra graduada con la deconcatenación T^cA. Muestre que hay una correspondencia biyectiva entre
$$\mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A) \cong Coder_{n-1}(T^cA)$$
donde $Coder_{n-1}(A)$ son las coderivaciones de grado $n-1$, en particular
$$\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A) \cong Coder(T^cA)$$
es una superálgebra de Lie. **Observación:** Si A tiene dimensión finita, esto es exactamente el enunciado dual-graduado de que TA^* es el álgebra libre y por lo tanto $\mathrm{Der}(TA^*) \cong \mathrm{Hom}(A^*, TA^*)$.

18. Sea $f : A^{\otimes 2} \to A$, que lo vemos como un morfismo de grado -1 de $T^cA \to A$ (extendiendo por cero en los demás sumandos).
    - Explicite la coderivación asociada $D_f : T^cA \to T^cA$.
    - Si f se llama m, muestre que $D_m^2 = 0$ si y sólo si m es un producto asociativo.
    - Si (A, m) es una k-álgebra asociativa, muestre que el diferencial de Hochschild es (a menos de signo),
    $$\partial = [m, -]$$
    donde $[-, -]$ es el super corchete de Lie en $\mathrm{Hom}(T^cA, A) \cong Coder(T^cA)$. En particular, $HH^{\bullet-1}(A)$ es una superálgebra de Lie, o sea,
    $$[HH^p, HH^q] \subseteq HH^{p+q-2}$$
    y verifica super Jacobi con respecto al grado $p-1$ si un elemento esta en HH^p.

    En particular, $HH^1(A) = \mathrm{Der}(A)/Innder(A)$ es una subálgebra de Lie que es álgebra de Lie en el sentido usual, cosa que es obvia, pero $\mathrm{Der}(A)$ actúa en toda la cohomología (cosa que se podría adivinar porque $\mathrm{Aut}(A)$ actúa) y se deduce que $InnDer(A)$ actúa trivialmente (cosa que se podría imaginar porque $InnAut(A)$ actúa trivialmente). Pero más aún, el corchete da operaciones adicionales, por ejemplo $[HH^2, HH^2] \subseteq HH^3$, etc.

    Observación: Si $\mathfrak{g}$ es un k-espacio vectorial de dimensión arbitraria, $\Lambda\mathfrak{g}$= los tensores completamente antisimétricos, $\Lambda\mathfrak{g}$ es una subcoálgebra de $T^c\mathfrak{g}$, y el diferencial de Chevalley en homología se puede definir como la única super coderivación de grado -1 tal que su restricción a $\Lambda^2\mathfrak{g}$ coincide con el corchete de Lie de $\mathfrak{g}$. Verifica que al cuadrado es cero si y sólo si el corchete $\Lambda^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ verifica Jacobi.

19. **El complejo** $\mathcal{H}om$. Sean $(X_\bullet, d_X)$, $(Y_\bullet, d_Y)$ dos complejos de A-módulos, se define el complejo Hom como el objeto graduado que en grado n tiene
$$\mathcal{H}om_A(X, Y)_n := \prod_i \mathrm{Hom}_A(X_i, Y_{i+n}) = \{f : X \to Y \ / \ f(X_i) \subseteq Y_{i+n} \forall i$$
los "morfismos homogéneos de grado n". El diferencial está dado por
$$\partial(f) := d_Y \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d_X$$

a) Muestre que $\partial^2 = 0$, que los ciclos de grado 0 son los morfismos de complejos, y que la homología en grado cero son las clases de homotopía de morfismos de complejos.

b) Muestre que

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A(X,Y)_n \subseteq \mathrm{Hom}_A(X,Y)$$

(donde a la derecha $X = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}X_n$, $Y = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}Y_n$ son considerados como A-módulos, olvidando diferencial y graduación). En general la contención es estricta, salvo que por ejemplo X tenga finitas componentes homogéneas no nulas.

c) Sea kd el álgebra de Lie 1-dimensional con generador d y consideramos a X y a Y como $\mathfrak{g}$-módulos. Muestre que $\mathcal{H}om_A(X,Y) \subset \mathrm{Hom}_k(X,Y)$ es un $\mathfrak{g}$-submódulo, y que la acción de d en $\mathcal{H}om_A(X,Y)$ da justamente el diferencial.

20.4. Algebras de Poisson 0

Recordamos $(A, \cdot, \{,\})$ se dice un álgebra de Poisson si A es un álgebra conmutativa, $(A, \{,\})$ es de Lie, y vale la identidad

$$\{a, bc\} = \{a, b\}c + \{a, c\}b$$

Si M es una variedad diferenciable, $C^\infty(T^*M)$, las funciones en el cotangente, es el ejemplo clásico de álgebra de Poisson.

Si $A = k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ entonces

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i} f \partial_{x_i} g - \partial_{x_i} f \partial_{y_i} g$$

es un ejemplo de álgebra de Poisson. Notar

$$\{x_i, x_j\} = 0 = \{y_i, y_j\}$$

$$\{y_i, x_j\} = \delta_{ij} = -\{x_j, y_i\}$$

En cierto sentido, el álgebra de Weyl es una deformación de $k[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n]$ en la dirección de este corchete de Poisson, dado por la siguiente construcción:

20. Sea A una k-álgebra filtrada cuyo graduado asociado es conmutativo. Es decir, $A = \cup_p A_p$ con $A_pA_q \subseteq A_{p+q}$ pero que para cada $a \in A_p$ y $b \in A_q$,

$$ab - ba \in A_{p+q-1}$$

Muestre que $gr(A)$ es un álgebra de Poisson (que además es homogéneo) con el corchete dado por, si $a \in A_p$, $b \in A_q$:

$$\{\overline{a}, \overline{b}\} := \overline{ab - ba}\ Mod\ p + q - 1$$

El ejemplo del álgebra de Weyl, con la filtración por grado de operador diferencial, da la estructura de Poisson standard en $k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$.

21. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, entonces $S(\mathfrak{g})$= el álgebra simétrica en $\mathfrak{g}$ admite un único corchete de Poisson tal que

$$\{x, y\} = [x, y] \; \forall \qquad x, y \in \mathfrak{g}$$

Sugerencia: $S(\mathfrak{g}) \cong gr(U(\mathfrak{g}))$

20.5. Una super álgebra de Poisson

Si $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial de dimensión finita, se considera el álgebra superconmutativa libre

$$\Lambda := \Lambda(\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}) = \Lambda(\mathfrak{g}^*)\widehat{\otimes}\Lambda(\mathfrak{g})$$

Con la bigraduación

$$\Lambda = \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q} = \bigoplus_{p,q} \Lambda^p\mathfrak{g}^* \otimes \Lambda^q\mathfrak{g}$$

Pero consideramos la graduación en $\mathbb{Z}$ dada por un corrimiento de la graduación total:

$$\boxed{|\Lambda^{p,q}| = p + q - 2}$$

De esta forma, por ejemplo $\Lambda\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ está en grado 0.
El super corchete de Lie $\{-.-\} : \Lambda^{p,q} \times \Lambda^{r,s} \to \Lambda^{p+r-1,q+s-1}$ se define como el único determinado por:

$$\{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}\} = 0 = \{\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}^*\}$$

$$\{a_{p,q}, b_{r,s}\} = -(-1)^{(p+q)(r+s)}\{b, a\} = -(-1)^{|a||b|}\{b, a\}$$

$$(**) \qquad \{a_{p,q}b_{r,s}, c_{t,u}\} = a_{p,q}\{b_{r,s}, c_{t,u}\} + (-1)^{|a||b|}b_{r,s}\{a_{p,q}, c_{t,u}\}$$

Y si $\phi \in \mathfrak{g}^*$, $x \in \mathfrak{g}$, entonces

$$\{\phi, x\} = \phi(x) = \{x, \phi\}$$

Por ejemplo, si $D, E \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \cong \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, escribimos

$$D = \sum_i \phi_i \otimes x_i, \qquad E = \sum_j \psi_i \otimes y_j$$

entonces (chequear los pasos y completar)

$$\{D, E\} = \sum_{i,j}\{\phi_i \otimes x_i, \psi_j \otimes y_j\} = \sum_{i,j} \phi_i \otimes \{x_i, \psi_j \otimes y_j\} - x_i \otimes \{\phi_i, \psi_j \otimes y_j\}$$

$$= \sum_{i,j} \psi_j(x_i)\phi_i \otimes y_j - \phi_i(y_j)x_i \otimes \psi_j = E \circ D - D \circ E$$

Es decir, $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie, isomorfa a $\mathrm{End}(\mathfrak{g})^{op}$.

22. Mostrar que efectivamente el supercorchete de Lie así definido verifica super-Jacobi. *Sugerencia: muestre a mano Jacobi en grados bajos y use la condición (**) mas inducción en el grado para grados altos.*

    Observación: Si $c\colon \Lambda^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, lo identificamos con un elemento $c \in \Lambda^2\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$,
    $$\{c, -\} : \Lambda^p\mathfrak{g}^* \otimes \Lambda^q\mathfrak{g} \to \Lambda^{p+1}\mathfrak{g}^* \otimes \Lambda^q\mathfrak{g}$$
    resulta una derivación con el producto wedge (porque es super-Poisson).

23. Muestre que para $q = 0$, $\{c, -\}$ da una derivación en $\Lambda^\bullet\mathfrak{g}^*$. Muestre que es de cuadrado cero si y sólo si c es un corchete de Lie, y en ese caso, da -a menos de signo- el diferencial de Chevalley Eilenberg de $(\mathfrak{g}, c)$ que calcula $H^\bullet(\mathfrak{g}_c, k)$.

24. Muestre en general que si c es un corchete de Lie entonces $\{c, -\}$ es el diferencial de Chevalley Eilenberg del álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, c)$ a coeficientes en $\Lambda^\bullet\mathfrak{g}$, en el sentido que si $f : \Lambda^p\mathfrak{g} \to \Lambda^q\mathfrak{g}$ lo identificamos con un elemento de $\Lambda^p\mathfrak{g}^* \otimes \Lambda^q\mathfrak{g}$, entonces
    $$\{c, f\} \in \Lambda^{p+1}\mathfrak{g}^* \otimes \Lambda^q\mathfrak{g} \cong \mathrm{Hom}(\Lambda^{p+1}\mathfrak{g}, \Lambda^q\mathfrak{g})$$
    se corresponde con ∂f.

25. Notar que como $c \in \Lambda^{2,1}$, entonces $\{c, \mathfrak{g}\} = \{c, \Lambda^{0,1}\} \subseteq \Lambda^{1,1}$ y $\{\{c, \mathfrak{g}\}, \mathfrak{g}\} \subseteq \mathfrak{g}$. Muestre la fórmula
    $$\{\{c, x\}, y\} = [x, y]_c$$

26. Concluya que
    $$\bigoplus_{p,q\geq 0} H^{p,q} := \bigoplus_{p,q} H^p(\mathfrak{g}, \Lambda^q\mathfrak{g})$$
    es una super-álgebra de Poisson, es decir, tiene un producto super-conmutativo y un super-corchete de Lie, que deriva al producto asociativo. Con respecto la bi-graduación, las operaciones verifican
    $$H^{p,q} \wedge H^{p',q'} \subseteq H^{p+p',q+q'}; \quad \{H^{p,q}, H^{p',q'}\} \subseteq H^{p+p'-1,q+q'-1}$$

    Este álgebra de super-Poisson tiene tres subálgebras de Poisson distinguidas (las primeras dos son Poisson-abelianas):
    $$(\Lambda^\bullet\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = H^0(\mathfrak{g}, \Lambda^\bullet\mathfrak{g}), \quad H^\bullet(\mathfrak{g}, k), \quad H_{diag} := \bigoplus_n H^n(\mathfrak{g}, \Lambda^n\mathfrak{g})$$

    En particular, $H^\bullet(\mathfrak{g}, \Lambda^\bullet\mathfrak{g})$ es un $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$-módulo de Lie bigraduado. Es decir, para todo p, q, $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ actúa en $H^p(\mathfrak{g}, \Lambda^q\mathfrak{g})$ y esta acción restringida a $\mathrm{InnDer}(\mathfrak{g})$ es trivial. Pero también hay otras operaciones, por ejemplo, cualquier elemento $[\omega] \in H^2(\mathfrak{g}, \Lambda^2\mathfrak{g})$ determina, por producto wedge y por corchete de Poisson, dos operaciones
    $$\omega \wedge - : H^p(\mathfrak{g}, \Lambda^q\mathfrak{g}) \to H^{p+2}(\mathfrak{g}, \Lambda^{q+2}\mathfrak{g})$$
    $$\{\omega, -\} : H^p(\mathfrak{g}, \Lambda^q\mathfrak{g}) \to H^{p+1}(\mathfrak{g}, \Lambda^{q+1}\mathfrak{g})$$

Capítulo 21

Álgebras de Koszul

1. Sea $A = k_q[x,y] = k\langle x,y|xy = qyx\rangle$, o sea $V = kx \oplus ky$, $R = k(x \otimes y - qy \otimes x)$.

   a) Consideramos $X, Y \in V^*$ la base dual de $\{x,y\}$. Muestre que R^0 está generado por $\{X \otimes X, Y \otimes Y, X \otimes Y + q^{-1}Y \otimes X\}$ y que por lo tanto

   $$A^! = k\langle X,Y|X^2 = 0 = Y^2, XY = q^{-1}YX\rangle$$

   $A^!$ tiene dimensión finita (4) y su componente de grado máximo es 2, por lo tanto el complejo de Koszul de A tiene longitud 2.

   b) Usando que $k_q[x,y]$ es libre sobre k con base los monomios ordenados $\{x^i y^j : i,j \in \mathbb{N}_0\}$, muestre que el complejo de Koszul

   $$0 \to k_q[x,y] \otimes (x \otimes y - qy \otimes x) \to A \otimes x \oplus A \otimes y \to A \to k \to 0$$

   es exacto, y por lo tanto $k_q[x,y]$ es un álgebra de Koszul.

   c) Calcule $\mathrm{Tor}_n^A(k,k)$ y $\mathrm{Ext}_A^n(k,k)$

2. Para las siguientes álgebras, Calcule $A^!$. Calcule las dimensiones de $A_2^!$ y $A_3^!$. Escriba explícitamente el complejo de Koszul hasta grado 3:

   $$A \otimes R_3 \to A \otimes R \to A \otimes V \to A \to k \to 0$$

   a) $A = k\langle x,y\rangle/(xy, yx)$.

   b) $A = k\langle x,y\rangle/(x^2 = y^2, xy = yx)$.

   c) $A = k\langle x,y\rangle/(x^2, yx)$ (ésta no es Koszul!).

3. Sea $A = TV/(R)$, llamemos $R(A) = \bigoplus_n R_n$. Observemos que el diferencial

   $$d_A : A \otimes R_n \to A \otimes R_{n-1}$$

es homogéneo de grado cero si consideramos el grado total en $A \otimes R_n$, o sea,

$$d_A| : A_p \otimes R_n \to A_{p+1} \otimes R_{n-1}$$

Usando que $R_n^* = A^!_n$ y que $A_n^* = R_n(A^!)$ (identificando V con V^{**}), muestre que la traspuesta da el diferencial de $A^!$ cuando se hace el complejo de Koszul a derecha, más precisamente

$$\begin{tikzcd}
A_{p+1}^* \otimes R_{n-1}^* \arrow[r, "(d_A|)^*"] \arrow[d, equal] & A_p^* \otimes R_{n-1}^* \arrow[d, equal] \\
R(A^!)_{p+1} \otimes A^!_{n-1} \arrow[r, "d_{A^!}"] & R(A^!)_p \otimes A^!_n
\end{tikzcd}$$

concluya que $A \otimes R_\bullet(A)$ es una resolución de k como A-módulo a izquierda si y sólo si $R_\bullet(A^!) \otimes A^!$ es una resolución de k como $A^!$-módulo a derecha y por lo tanto A es Koszul (a izquierda) si y sólo si $A^!$ es Koszul (a derecha).

(Veremos luego que A es Koszul a izq $\iff$ lo es a derecha)

4. Muestre que $\mathrm{Ext}^\bullet_{\Lambda V}(k,k) \cong S(V^*)$, y que $\mathrm{Ext}^\bullet_{k \oplus V}(k,k) \cong T(V^*)$.

21.1. La serie de Hilbert y la de Poincaré

En esta sección, k es un cuerpo.

Definición 21.1. $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ un k-esp vect graduado tal que $\dim_k(A_n) < \infty \forall n$, su **serie de Hilbert** se define como

$$Hilb(A)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim_k(A_n) t^n \qquad \in \mathbb{Z}[[t]]$$

Si A es una k- álgebra aumentada se define su **serie de Poincaré** como

$$P(A)(t) = \sum_{n \geq 0} \dim_k(\mathrm{Ext}^n_A(k,k)) t^n \qquad \in \mathbb{Z}[[t]]$$

Observación 21.2. Si A es Koszul, entonces $P(A)(t) = Hilb(A^!)(t)$.

Definición 21.3. Si $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ es espacio vectorial graduado un complejo de espacios vectoriales con $\dim_k \left(\bigoplus_n M_n \right) < \infty$, se define su característica de Euler como

$$\chi(M) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \dim_k M_n \qquad \in \mathbb{Z}$$

5. Sea (M,d) un complejo de k-esp. vect. con $\dim_k\left(\bigoplus_n M_n\right)<\infty$, muestre que
$$\chi(M)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\dim_k M_n=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\dim_k H_n(M_\bullet,d)=\chi(H_\bullet(M,d))$$
6. $\dim_k V<\infty$, $R\subseteq V^{\otimes 2}$ y $A=TV/(R)$ un álgebra de Koszul. Mostraremos que
$$Hilb(A)(t)\cdot P(A)(-t)=Hilb(A)(t)\cdot Hilb(A^!)(-t)=1$$
Para esto, chequeamos lo siguiente:

   a) Si A es cuadrática (no necesariamente Koszul) y en el complejo de Koszul
$$K(A)=(\cdots\to A\otimes A_i^{¡}\to A\otimes A_{i-1}^{¡}\to\cdots)$$
   consideramos la graduación
$$A\otimes A_i^{¡}=\Big(\bigoplus_{p\geq 0}A_p\Big)\otimes A_i^{¡}$$
$$a\in A_p, r\in A_i^{¡}=R_i\Rightarrow|a\otimes r|=p+i$$
   entonces el diferencial es homogéneo de grado cero.

   b) El complejo de Koszul es una suma directa de subcomplejos
$$(K(A),d)=\bigoplus_{m\geq 0}(K(A)_m,d_m)$$
   donde $K(A)_m$ es el la parte homogénea de grado m:
$$K(A)_m=(\cdots\to A_{m-i}\otimes A_i^{¡}\to A_{m+1-i}\otimes A_{i-1}^{¡}\to\cdots)$$

   c) Si A es Koszul, entonces
$$\forall m:\qquad \chi(K(A)_m)=\chi((A\otimes R_\bullet)_m)=\sum_n(-1)^n\dim_k\Big(A_{m-n}\otimes R_n\Big)$$
$$=\sum_n(-1)^n\dim_k(H_n(A\otimes R_\bullet,d)_m)=\begin{cases}1 & \text{si } m=0\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$
   Concluimos
$$\begin{aligned}1 &= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}t^m\Big(\sum_n(-1)^n\dim_k(H_n(A\otimes R_\bullet,d)_m)\Big)\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}t^m\Big(\sum_n(-1)^n\dim_k(A_{m-n}\otimes R_n)\Big)\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}t^m\Big(\sum_n(-1)^n\dim_k(A_{m-n})\cdot\dim_k(A_n^!)\Big)\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}_0}\sum_n\dim_k(A_{m-n})t^{m-n}\cdot\dim_k(A_n^!)(-t)^n\\
&= \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\dim_k(A_n)t^n\Big)\cdot\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\dim_k(A_n^!)(-t)^n\Big)\\
&= Hilb(A)(t)\cdot Hilb(A^!)(-t)=Hilb(A)(t)\cdot P(A)(-t)\end{aligned}$$

Como corolario:

7. Si A es cuadrática y $Hilb(A)(t) \cdot Hilb(A^!)(-t) \neq 1$ entonces A no puede se Koszul.

8. Sea V con $\dim V = n$, calcular la serie de Hilbert de $S(V)$, $\Lambda(V)$, TV, $k \oplus V$ y verificar la igualdad anterior. (Notar que la serie de Hillbert de $k_q[x,y]$ es la misma que la de $k[x,y]$.)

9. Calcule $Hilb(A)(t)$ y $Hilb(A^!)(-t)$ para $A = k\{x,y\}/(x^2)$.

10. Muestre que $A = k\{x,y\}/(x^2, xy)$ "pasa el test" de la serie de Hilbert, sin embargo no es Koszul, por lo tanto la propiedad es necesaria pero no suficiente en general.

11. Para el interesado, bibliografía sobre chequeo de Koszulidad sepuede ver en Sección 4.1 y 4.3 de [JL.L. Loday - B. Vallette, *Algebraic Operads*]

    https://www.math.univ-paris13.fr/~vallette/Operads.pdf

    Otra bibliografía relevante para bases:

    [G. M. Bergman, *The diamond lemma for ring theory*, Adv. in Math. 29 (1978), no. 2, 178-218.

21.2. Operaciones entre álgebras cuadráticas

En esta sección, k es un cuerpo, las álgebras serán finitamente generadas como álgebras.

12. Llamemos c-alg la categoría de álgebras cuadráticas, es decir, lo objetos son álgebras presentadas de la forma $A = TV/(R)$ con $R \subseteq V^{\otimes 2}$, y los morfismos son morfismos de k-álgebras que respetan el grado.

    a) Si $A = TV/(R)$, $B = TW/(S)$, entonces
    $$\mathrm{Hom}_{c-alg}(A,B) \cong \{f : V \to W : (f \otimes f)(R) \subseteq S \ (\subseteq W \otimes W)\}$$

    b) La operación $(-)^!$ es un funtor contravariante, en la categoría de álgebras cuadráticas finitamente generadas, es decir, si $f : A \to B$ es un morfismo de álgebras cuadráticas, entonces $(f|_V)^* : W^* \to V^*$ induce un morfismo $B^! \to A^!$, que llamamos $f^!$, donde claramente $\mathrm{Id}^! = \mathrm{Id}$, y además $(fg)^! = g^! f^!$

13. Sean A y B dos álgebras cuadráticas. Si $A = TV/(R)$ y $B = TW/(S)$, escriba las relaciones que hay que poner en $T(V \oplus W)$ para obtener $A \otimes B$, en particular, $A \otimes B$ también resulta cuadrática.

14. Sean A y B dos álgebras cuadráticas, en particular son graduadas. Muestre que $A \widehat{\otimes} B$ también es cuadrática, donde $A \widehat{\otimes} B = A \otimes B$ como espacio vectorial, pero el producto está dado por
    $$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{|b||a'|} aa' \otimes bb'$$
    (donde b y a' se suponen homogéneos). Más precisamente, exhiba el subespacio de relaciones en términos de las relaciones de A y de B.

15. Muestre que
$$(A \otimes B)^! = A^! \widehat{\otimes} B^!$$
$$(A \widehat{\otimes} B)^! = A^! \otimes B^!$$

16. Muestre que si A y B son de Koszul, entonces $A \otimes B$ y $A \widehat{\otimes} B$ también lo son.

21.3. Productos de Manin

Si V_1, V_2, V_3, V_4 son cuatro espacios vectoriales, denotaremos (23) la transformación lineal que permuta los factores 2,3:

$$(23) : V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \otimes V_4 \to V_1 \otimes V_3 \otimes V_2 \otimes V_4$$

$$x \otimes y \otimes z \otimes t \mapsto x \otimes z \otimes y \otimes t$$

Si $A = TV/R$, $B = TW/S$, $U := V \otimes W$, se definen

$$A \bullet B := T(V \otimes W)/((23)(R \otimes S))$$

$$A \circ B := T(V \otimes W)/((23)(R \otimes W^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 2} \otimes S))$$

Notar que existe un morfismo canónico $A \bullet B \to A \circ B$

17. Muestre que $A \bullet B = \bigoplus_n (A_n \otimes B_n)$

18. Muestre
$$(A \bullet B)^! = (A^! \circ B^!)$$
$$(A \circ B)^! = (A^! \bullet B^!)$$

19. Tanto $\bullet$ como $\circ$ son asociativos, el álgebra $k[x]$ es el neutro para $\bullet$ y $k[x]/(x^2)$ es el neutro para $\circ$, es decir,
$$A \bullet (B \bullet C) \cong (A \bullet B) \bullet C$$
$$k[x] \bullet A \cong A \cong A \bullet k[x]$$

$$A \circ (B \circ C) \cong (A \circ B) \circ C$$
$$k[x]/(x^2) \circ A \cong A \cong A \circ k[x]/(x^2)$$

20. Calcule los generadores y relaciones de $A^! \circ A$ para $A = k[x, y]$, $k_q[x, y]$ y TV

21. **Hecho:** *si A y B son Koszul, $A \bullet B$ y $A \circ B$ también lo son.* [J. Backelin and R. Fröberg, *Koszul algebras, Veronese subrings and rings with linear resolutions*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl.30(1985), no. 2, 85-97. 86]

22. Muestre que existe un isomorfismo canónico

$$\mathrm{Hom}_{c-alg}(A \bullet B^!, C) = \mathrm{Hom}_{c-alg}(A, B \circ C)$$

23. (las biálgebras de Manin) Sea $A = TV/(R)$ un álgebra cuadrática $x_1, \dots, x_n$ una base de V, $x^1, \dots, x^n$ su base dual, llamamos $t^i_j = x^i \otimes x_j \in V^* \otimes V$, notar que $\{t^i_j : i, j = 1, \dots n\}$ es una base de $V^* \otimes V$.

    a) Muestre que el morfismo

    $$\Delta : V^* \otimes V \to (V^* \otimes V) \otimes (V^* \otimes V)$$

    $$t^i_j \mapsto \sum_{k=1}^{n} t^i_k \otimes t^k_j$$

    es independiente de la base $x_1, \dots, x_n$ elegida.

    b) Denotemos $end(A) := A^! \bullet A$, muestre que Δ determina un morfismo de álgebras que es coasociativo y counitario

    $$\Delta : end(A) \to end(A) \otimes end(A)$$

Capítulo 22

Construcción bar y cobar

22.1. Resolución standard normalizada

Sea A una k-álgebra y denotamos $\overline{A} = A/k.1$, es un k-módulo. Mostraremos que b' queda bien definido en $(A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes A)$ y que la proyección induce un quasi isomorfismo

$$(A \otimes A^{\otimes n} \otimes A, b') \to (A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \otimes A, \overline{b}')$$

1. Consideremos el módulo graduado (el morfismo es el inducido por la inclusión $k \subset A$ en el lugar correspondiente)

$$\begin{tikzcd}
\cdots & A \otimes A^{\otimes 2} \otimes k \otimes A \arrow[d, hook] & A \otimes A \otimes k \otimes A \arrow[d, hook] & A \otimes k \otimes A \arrow[d, hook] & A \otimes A \arrow[d, hook] & A \arrow[d, hook] \\
\cdots \arrow[r, "b'"] & A \otimes A^{\otimes 3} \otimes A \arrow[r, "b'"] & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[r, "b'"] & A \otimes A \otimes A \arrow[r, "b'"] & A \otimes A \arrow[r, "b'"] & A
\end{tikzcd}$$

Muestre que es un subcomplejo.

2. Muestre que el conúcleo de la inclusión anterior está dada por

$$a \otimes b \otimes 1 \otimes c \longmapsto ab \otimes 1 \otimes c$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A \otimes A^{\otimes 2} \otimes k \otimes A \arrow[r, "b'|"] \arrow[d, hook] & A \otimes A \otimes k \otimes A \arrow[r, "b'|"] \arrow[d, hook] & A \otimes k \otimes A \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "b'"] & A \otimes A^{\otimes 3} \otimes A \arrow[r, "b'"] \arrow[d] & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[r, "b'"] \arrow[d] & A \otimes A \otimes A \arrow[r, "b'"] \arrow[d] & A \otimes A \arrow[r, "b'"] \arrow[d] & A \\
\cdots \arrow[r] & A \otimes A^{\otimes 2} \otimes \overline{A} \otimes A \arrow[r, "\overline{b}'"] & A \otimes A \otimes \overline{A} \otimes A \arrow[r, "\overline{b}'"] & A \otimes \overline{A} \otimes A \arrow[r, "\overline{b}'"] & A \otimes A \arrow[r, "\overline{b}'"] & A
\end{tikzcd}$$

Muestre que hay un isomorfismo obvio entre el subcomplejo

$$\cdots \longrightarrow A \otimes A^{\otimes 2} \ \otimes \ k \otimes A \xrightarrow{b'} A \otimes A \ \otimes \ k \otimes A \xrightarrow{b'} A \ \otimes \ k \otimes A \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

y la resolución de A tensorizada con k y A (con diferencial $b' \otimes \mathrm{Id}_k \otimes \mathrm{Id}_A$) :

$$\Big(\cdots \longrightarrow A \otimes A \otimes A \xrightarrow{b'} A \otimes A \xrightarrow{b'} A \xrightarrow{m} 0 \longrightarrow 0 \Big) \otimes k \otimes A$$

Concluya que este subcomplejo es acíclico y por lo tanto la proyección es un quasi-isomorfismo

3. Por simplicidad escribiremos V^n en lugar de $V^{\otimes n}$. Supongamos inductivamente que la proyección da un quasi-isomorfismo para un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A \otimes A^{n_0+2} \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes A^{n_0+1} \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes A^{n_0} \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & A \otimes A^{2} \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes A \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes A \arrow[d, equal] \\
\cdots \arrow[r] & A \otimes A^2 \otimes \overline{A}^{n_0} \otimes A \arrow[r] & A \otimes A \otimes \overline{A}^{n_0} \otimes A \arrow[r] & A \otimes \overline{A}^{n_0} \otimes A \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A \otimes \overline{A}^{2} \otimes A \arrow[r] & A \otimes \overline{A} \otimes A \arrow[r] & A \otimes A
\end{tikzcd}$$

Si al complejo de abajo lo llamamos $C_{n_0}(A)$, calcule el núcleo del morfismo natural $C_{n_0} \to C_{n_0+1}$ que proyecta A en $\overline{A}$ en el factor correspondiente (a partir del lugar $n_0 + 1$). Calcule b' restringido a ese núcleo (recuerde que $\overline{1} = 0$ en $\overline{A}$) y concluya que ese subcomplejo núcleo es acíclico, con un argumento similar al punto anterior.

4. Concluya que $H_\bullet(A, M) = H_\bullet(M \otimes A^{\otimes \bullet}) \cong H_\bullet(M \otimes \overline{A}^{\otimes \bullet})$ y similarmente para cohomología, si $C^n(A, M) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, M)$, el siguiente es un subcomplejo

$$\overline{C}^n(A, M) = \mathrm{Hom}(\overline{A}^{\otimes n}, M)$$
$$= \{f : A^{\otimes n} \to M : f(a_1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \cdots a_n) = 0\}$$

= las funciones que dan cero si por lo menos uno de los factores es un 1. Se llama el complejo normalizado, y calcula la misma cohomología.

22.2. La construcción bar

La siguiente es una construcción que a toda álgebra aumentada $\epsilon : A \to k$ le asigna una coálgebra diferencial graduada

Definición 22.1. Sea $\epsilon : A \to k$ un morfismo de álgebras que consideramos fijado, luego k es un A-módulo vía ϵ. Notar que $A = k1 \oplus \mathrm{Ker}\epsilon$ como k-módulo, luego $\overline{A} = A/k1 \cong \mathrm{Ker}\epsilon$. De aquí en adelante, como ϵ está fijo, denotamos $\overline{A} := \mathrm{Ker}\epsilon$.

Definimos $B(A) := T^c\overline{A}$ la coálgebra tensorial en $\overline{A}$ con la deconcatenación como comultiplicación

$$\Delta(a_1|\cdots|a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_1|\cdots|a_i \otimes a_{i+1}|\cdots|a_n \in T^c\overline{A} \otimes T^c\overline{A}$$

donde hemos denotado $|$ al producto tensorial interno de T^cA (ese es el origen del nombre "construcción bar"), y por convención en esa suma $a_0 = 1 = a_{n+1}$. Por ejemplo, si $a|b|c \in \overline{A}^{\otimes 3} \subset T^c\overline{A}$,

$$\Delta a|b|c = 1 \otimes a|b|c + a \otimes b|c + a|b \otimes c + a|b|c \otimes 1$$

5. Muestre que si consideramos la graduación $deg\overline{A} = 1$, entonces b' es una super co-derivación, donde
$$b'(a_1|\cdots|a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_1|\cdots|a_ia_{i+1}|\cdots|a_n$$
Observar que ya sabíamos que $b'^2 = 0$.

6. Muestre que $H_\bullet(T^c\overline{A}, b') = \mathrm{Tor}_\bullet^A(k,k)$ es naturalmente una coálgebra.

7. Si $A = TV/(R)$ es cuadrática Koszul, entonces la inclusión
$$\begin{tikzcd} R_\bullet \arrow[r, equal] \arrow[rrr, bend left] & A^{¡} \arrow[r, hook] & T^cV \arrow[r, hook] & (T^c\overline{A}, b') \end{tikzcd}$$
es un quasi-isomorfismo, donde a $R_\bullet$ se la considera una coálgebra d.g. con $d = 0$.

8. Si $A = TV/(R)$ es cuadrática y la inclusión anterior es un quasi-isomorfismo, entonces A es Koszul.

22.3. Construcción cobar

Dualmente a la construcción bar, a toda coálgebra co-aumentada le asignaremos un álgebra d.g.

Definición 22.2. Sea C una coálgebra sobre k, diremos que es co-aumentada si se tiene dado un morfismo de coálgebras $k \to C$, es decir, si C tiene un elemento e tal que $\Delta e = e \otimes e$. De aquí en adelante fijaremos una coálgebra coaumentada y su coaumentación.

Notar que por counitariedad, si $\epsilon : C \to k$ es la counidad, necesariamente $\epsilon(e) = 1$, y por lo tanto tenemos una descomposición como k- espacios vectoriales

$$\begin{array}{ccccc} C & = & \overline{C} & \oplus & ke \end{array}$$
$$c \mapsto (c - \epsilon(c)e) + \epsilon(c)e$$

donde $\overline{C} = \mathrm{Ker}\epsilon$. Se define
$$\Omega(C) := T\overline{C}$$
el **álgebra** tensorial en $\overline{C}$. Es graduada poniendo $\deg \overline{C} = 1$. Recordar que (C, Δ_C) es una coálgebra. Se define $d_\Delta : \overline{C} \to \overline{C} \otimes \overline{C}$ de la siguiente forma: si

$$\Delta c = \sum_i c_i' \otimes c_i'' \qquad \in C \otimes C$$

entonces se define

$$d_\Delta c = \sum_i (c_i' - \epsilon(c_i')e) \otimes (c_i'' - \epsilon(c_i'')e \qquad \in \overline{C} \otimes \overline{C}$$

9. Muestre (sugerencia: use el axioma de la counidad de C) que

$$d_\Delta c = \Delta c - e \otimes c - c \otimes e$$

10. Considerando $\overline{C} \otimes \overline{C} \subset T\overline{C}$ como subespacio, muestre que d_Δ se extiende de manera única a una super-derivación (de grado $+1$) que coincide con d_Δ en los generadores.

$$d_\Delta : T\overline{C} \to T\overline{C}$$

11. Muestre que $d_\Delta^2 = 0$ si y sólo si Δ es coasociativa.

    Se denomina *construcción cobar* de la coálgebra C a la k-álgebra diferencial graduada

$$\Omega(C) = (T\overline{C}, d_\Delta)$$

12. Sea $A = TV/(R)$ y $C = R_\bullet = A^{¡} \subseteq T^cV = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$. Notar que C es coaumentada con $e = 1$, $\overline{C} = V \oplus R \oplus \cdots$. Considermos $\overline{C} \to V$ la proyección en el sumando V. Se define $\Omega(C) \to C$ por la composición

$$\begin{tikzcd} \Omega(C) \arrow[r, equal] & T\overline{C} \arrow[r, two heads] \arrow[rrr, bend left, two heads] & TV \arrow[r, two heads] & TV/(R) \arrow[r, equal] & A \end{tikzcd}$$

    Mostrar que es un morfismo de álgebras diferenciales graduadas, donde A se la considera d.g. con su graduación habitual y con diferencial nulo.

13. Sea $A = TV$ (o sea, $R = 0$), describa el morfismo anterior en este caso:

$$\begin{tikzcd} \Omega(C) \arrow[r, equal] & T\overline{C} \arrow[r, two heads] \arrow[rrr, bend left, two heads] & TV \arrow[r, two heads] & TV/(R) \arrow[r, equal] & A \end{tikzcd}$$

14. Lo mismo que el ejercicio anterior pero para $A = k[x]/(x^2) = T(kx)/(x \otimes x)$. Calcule d_Δ y $H_\bullet(\Omega(C))$ de manera directa.

15. Supongamos $\dim V < \infty$.

    Notar que en cada grado n, $\dim A_n < \infty$ y $\Omega(A^{¡})_n = \overline{A}^{¡ \otimes n}$ es a su vez bi-graduado teniendo en cuenta la graduación interna de $\overline{A}^{¡} = V \oplus R \oplus \cdots$. consideramos A bi-graduada con una bi-graduación concentrada A_n en el lugar (n, n)

    a) en cada bigrado (n, m) ambas álgebras ($\Omega(A^{¡})$ y A) tienen componentes de dimensión finita, y por lo tanto podemos considerar sus duales (bi)graduados (los llamaremos $(-)'$ en vez de $(-)^*$).

b) $(\Omega(A^{¡})', d^*_\Delta) = (B(A^!), b')$. *Sugerencia: en vez de demostrar esta versión, es más cómodo mostrar que*

$$B(A^!)' \cong \Omega(A^{¡})$$

(iso de álgebras graduadas) y en vez de mostrar que $d^*_\Delta = b'$ *es más fácil ver que* $b'^* = d_\Delta$ *pues siendo una (super) derivación, basta ver que coincide en* $\overline{A}^{¡} \subset T\overline{A}^{¡} = \Omega(A^{¡})$*. También, cambiando* A *por* $A^!$*, como* $A^{!!} = A$*, se puede demostrar equivalentemente el siguiente iso de duales bi-graduados:*

$$B(A)' \cong \Omega(A')$$

c) El morfismo $\Omega(A^{¡}) \to A$ es un q-iso si y sólo si su dual (bi)graduado

$$A' \to (B(A^!), b')$$

si y sólo $A^!$ es Koszul (si y sólo si A es Koszul)

Capítulo 23

Categorías derivadas

Mapping cylinder

1. Si $u : X \to Y$, se define $cyl(f)_n = X_n \oplus X_{n-1} \oplus Y_n$ con diferencial

$$d(x, x', y) = (dx + x', -dx', dy - u(x))$$

   a) Muestre que $d^2 = 0$.

   b) En el caso $u = \mathrm{Id}_X$,

      1) muestre que $cyl(X) := cyl(\mathrm{Id}_X)$ es homotópicamente equivalente a X.

      2) $\phi : cyl(X) \to Y$ es un morfismo de complejos $\iff$ ϕ es de la forma

$$\phi(x, x', x'') = f(x) + h(x') + g(x'')$$

      donde $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(M, N)$ y $h : X[-1] \to Y$ es una homotopía entre f y g, es decir,

$$f - g = dh + hd$$

2. $i_1 : X \to cyl(X)$, $x \mapsto (x, 0, 0)$ es un morfismo de complejos, también $i_2 : X \to cyl(X)$, $x \mapsto (0, 0, x)$. Las proyecciones $p_i : cyl(X) \to X$ dadas por $p_1(x, x', x'') = x$ y $p_(x, x', x'') = x''$ *no son morfismos de complejos*, sin embargo,

$$p : cyl(X) \to X$$

$$(x, x', x'') \mapsto x + x''$$

   sí es un morfismo de complejos, y se tiene $p \circ i_1 = \mathrm{Id}_X = p \circ i_2$. Muestre que tanto $i_1 \circ p$ como $i_2 \circ p$ son homotópicas a la identidad de $cyl(X)$.

Triángulos

Recordar que llamamos **triángulo** en $\mathcal{H}(A)$ a una terna

$$(X, Y, Z, u : X \to Y, v : Y \to Z, w : Z \to X[-1])$$

que sea isomorfa a un cono, más precisamente, un triángulo en $\mathcal{H}(A)$ es a toda terna donde exista un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal, "a"', "\cong"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal, "b"', "\cong"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, equal, "c"', "\cong"] & X[-1] \arrow[d, equal, "a[-1]"', "\cong"] \\
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & Co(f) \arrow[r] & M[-1]
\end{tikzcd}$$

donde los cuadrados conmutan a menos de homotopía y a, b, c son equivalencias homotópicas. Recordamos $Co(f) = N \oplus M[-1]$ con diferencial

$$d(n, m) = (dn + f(m), -dm)$$

Un triángulo que directamente sea un cono se lo llamará *distinguido*.

Los triángulos en $D(A)$ son la menor clase de uplas cerrada por isomorfismo que contienen a los triángulos distinguidos.

3. Muestre que la suma directa de triángulos es triángulo.

4. Sea A es k-álgebra, $M \in \mathrm{Chain}(A)$, $V \in \mathrm{Chain}(k)$, definimos $M \otimes V$ con la estructura diferencial usual y la estructura de A-módulo dada por M. Muestre que

   - Si $f : M \to N$ es un morfismo de complejos, entonces

$$(M \otimes V)[-1] \cong M[-1] \otimes V, \qquad Co(f \otimes \mathrm{Id}_V) \cong Co(f) \otimes V, \qquad cyl(f \otimes \mathrm{Id}_V) \cong cyl(f) \otimes V,$$

   - Si $X \to Y \to Z \to X[\text{-}1]$ es triang. en $\mathcal{H}(A) \Rightarrow X \otimes V \to Y \otimes V \to Z \otimes V \to X[\text{-}1] \otimes V$ también. Si k es cuerpo (o los V_n son k-playos) y se tenía un triang. en $D(A) \Rightarrow$ $X \otimes V \to Y \otimes V \to Z \otimes V \to X[\text{-}1] \otimes V$ también Δ en $D(A)$.
   - Si $f \sim_h g$ son dos morfismos homotópicos, entonces $f \otimes \mathrm{Id}_V \sim g \otimes \mathrm{Id}_V$

5. Muestre que si $(X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[\text{-}1])$ es un triángulo, sus trasladados

$$(Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[\text{-}1] \xrightarrow{-u} Y[\text{-}1]) \qquad \text{y} \qquad (Z[1] \xrightarrow{-w} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z)$$

   también lo son. (el primer caso lo hicimos en clase, hacer el segundo)

6. Denotamos por la misma letra A al complejo de A-módulos concentrado en grado cero con componente 0 igual a A. Muestre que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A, M[n]) \cong H_n(M)$ (iso de funtores).

7. Sea $x \in A$ un elemento central, cómo podría describir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A/(x), M[n])$?

8. Sea $x \in A$ un elemento central y $C := Co(A \xrightarrow{x} A)$ (donde identificamos un morfismo de A-módulos con un morfismo de complejos concentrados en grado cero, notar que el cono no está concentrado en grado cero), describa lo más explícitamente posible $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(C, M)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(C, M)$.

9. $u : X \to Y$ es un morfismo y $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[-1]$ es un triángulo entonces Z está determinado por $u : X \to Z$ a menos de isomorfismo (no único).

10. Consideremos la categoría $\mathcal{H}(A)$ y consideramos $\widetilde{D}(A)$ la categoría con los mismos objetos de $\mathcal{H}(A)$ (o sea, los objetos de $\mathrm{Chain}(A)$) y definimos

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, N) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(M, N)/\equiv$$

donde $\equiv$ es la relación de equivalencia determinada por $f \equiv 0$ si y sólo si existe un complejo acíclico C y una factorización

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed] & & N \\ & C \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

(y $f \equiv g \iff f - g \equiv 0$). Muestre que la proyección en el Hom define un funtor natural $\mathcal{H}(A) \to \widetilde{D}(A)$, que $\widetilde{D}(A)$ es una categoría naturalmente triangulada (con los triángulos isomorfos a los que vienen de conos), que el funtor $\mathcal{H}(A) \to \widetilde{D}(A)$ manda triángulos, que los q-isos van a parar a isomorfismos, y que $\widetilde{D}(A) \cong D(A)$.

23.1. Triángulos en $D(A)$

11. Muestre que si

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} Z \to 0$$

es una s.e.c. en $\mathrm{Chain}(A)$ entonces existe un quasi-isomorfismo $Co(f) \to Z$ y que esa s.e.c. se la puede ver como parte de un triángulo en $D(A)$. Concluya la s.e.l. de homología aplicando $\mathrm{Hom}_{D(A)}(A, -)$.

12. Recíprocamente, si $X \to Y \to Z \to X[-1]$ es un triángulo en $D(A)$, muestre que existe un morfismo de complejos $f : M \to N$ y un isomorfismo de triángulos (en $D(A)$) entre el triángulo original y a una s.e.c. del tipo

$$0 \to N \xrightarrow{i} Co(f) \xrightarrow{\pi} M[-1] \to 0$$

23.2. Localización

13. Consideremos un diagrama conmutativo en $Chain(A)$ con s y t q-isomorfismos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"] & Y \arrow[d, "s'"] \\ Z \arrow[r, "t'"] & W \end{tikzcd}$$

Muestre que t' es q-iso $\iff$ s' es q-iso.

14. Ver que la suma en $\mathrm{Hom}_{D(A)}(M,N)$ está bien definida. Recordamos la suma estaba definida via

$$\begin{tikzcd} & X_1 & \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & N, \arrow[ul, "t"'] \arrow[dl, "s"] \\ & X_2 & \end{tikzcd} \qquad t^{-1}f + s^{-1}g = ?$$

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[d, dotted, "s'"] & \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & X_3 & N \arrow[ul, "t"'] \arrow[dl, "s"] \arrow[l, dotted, "s't=t's"'] \\ & X_2 \arrow[u, dotted, "t'"'] & \end{tikzcd}$$

$$t^{-1}f + s^{-1}g = t^{-1}(s')^{-1}s'f + (s)^{-1}(t')^{-1}t'g = (s't)^{-1}(s'f + t'g)$$

y la relación de equivalencia está dada por

$$X \stackrel{f_1}{\to} Y_1 \stackrel{t_1}{\leftarrow} Z \quad \sim \quad X \stackrel{f_2}{\to} Y_2 \stackrel{t_2}{\leftarrow} Z$$

$\iff$ $\exists$ un diagrama conmutativo (con t q-iso)

$$\begin{tikzcd} & Y_1 \arrow[dr, "t_1"] & \\ X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & X_3 \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "t"] & Y \\ & Y_2 \arrow[ur, "t_2"'] & \end{tikzcd}$$

15. Ver que la composición en $D(A)$ está bien definida.

23.3. Las categorías $D(A)$ y $\mathcal{H}_{cerr}(A)$

16. Sea k semisimple. Muestre que un complejo es acíclico si y sólo si es contráctil, por lo tanto equivalencia homotópica coincide con quasi-isomorfismo. El funtor proyección natural $\mathrm{Chain}(k) \to \mathcal{H}(k)$ tiene la propiedad universal de la localización con respecto a los q-isos, y por lo tanto $\mathcal{H}(k) = D(k)$.

17. Muestre que el iso de k-módulos $\mathrm{Hom}_A(A \otimes V, M) \cong \mathrm{Hom}_k(V, M)$ induce los isomorfismos

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(A)}(A \otimes V, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Chain}(k)}(V, M)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A \otimes V, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(k)}(V, M)$$

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(A \otimes V, M) \cong \mathrm{Hom}_{D(k)}(V, M)$$

concluya (asumiendo k cuerpo, o anillo conmutativo semisimple) que para cualquier $V \in \mathrm{Chain}(k)$, el funtor canónico $\mathcal{H}(A) \to D(A)$ induce un isomorfismo de funtores

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(A \otimes V, -) \cong \mathrm{Hom}_{D(A)}(A \otimes V, -)$$

18. Sea $P \in \mathrm{Chain}(A)$ un sumando directo de L, es decir, existe un complejo Q tal que $P \oplus Q \cong L$. Muestre que P es parte de una s.e.c. que se parte de la forma

$$0 \to P \to L^{\mathbb{N}} \to L^{\mathbb{N}} \to 0$$

Sugerencia: considere el isomorfismo

$$(P \oplus Q) \oplus (P \oplus Q) \oplus (P \oplus Q) \cdots \cong P \oplus (Q \oplus P) \oplus (Q \oplus P) \oplus (Q \cdots$$

Concluya con argumento de triángulos que si una subcategoría triangulada de una categoría triangulada tiene sumas directas numerables, entonces es cerrada por sumandos directos.

19. Recordamos $P \in \mathrm{Chain}(A)$ se dice cerrado si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P, -) \to \mathrm{Hom}_{D(A)}(P, -)$ es un iso. Muestre el **Lema:** $P \stackrel{u}{\to} P' \stackrel{v}{\to} P'' \stackrel{w}{\to} P[-1]$ un triángulo en $\mathcal{H}(A)$, si dos son cerrados, el tercero también.

20. Si $M, N \in \mathrm{Chain}(A)$, entonces

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(M, N) \cong \mathrm{Hom}_{D(A)}(P(M), N) \cong \mathrm{Hom}_{D(A)}(P(M), P(N))$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P(M), N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(P(M), P(N))$$

21. Muestre que si $M, N \in A$-Mod y los vemos como complejos concentrados en lugar cero, entonces $\mathrm{Hom}_{D(A)}(M, N[n]) = \mathrm{Ext}^n_A(M, M)$

23.4. Funtores derivados

22. Sea $F : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$ un funtor aditivo y $DF : D(A) \to D(B)$ dado por

$$DF(M) := F(P_A(M))$$

donde $P_A(M)$ es "una resolución funtorial de M".

a) Muestre que si F es exacto entonces F está bien definido en $D(A)$ y $F(\rho) : DF \to F$ es un isomorfismo de funtores, donde $\rho : P_A(M) \to M$ es el quasi-iso de la resolución de M.

b) Si $F : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$ es exacto a derecha y $M \in A\text{-Mod}$, que lo vemos como complejo concentrado en lugar cero, entonces $H_0(DF(M)) \cong F(M)$.

c) Sean $F : A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$ y $G : B\text{-Mod} \to C\text{-Mod}$ dos funtores aditivos, si uno de los dos es exacto entonces

$$DG \circ DF \cong D(G \circ F) : D(A) \to D(C)$$

23. Sea G un grupo y $N \triangleleft G$ un subgrupo *normal* y V un G-módulo. Muestre que

a) V^N es naturalmente un $k[G/N]$-módulo, más aún,

b) $H^n(N, V)$ es un G/N-módulo para todo n.

c) $V^G = (V^N)^{G/N}$

d) Si N tiene índice finito $(G : N) = d$, k es un anillo con $\frac{1}{d} \in k$ y V un $k[G]$-módulo, entonces $H^n(G, V) = H^n(N, V)^{G/N}$ para todo n.

24. Sea A un anillo y G un grupo que actúa en A por automorfismos de anillo. Se define $A \rtimes G = A[G]$ como grupo abeliano pero con la multiplicación

$$ag \cdot bh = ag(b)gh$$

a) Si M es un $A \rtimes G$-bimódulo, entonces

$$M^A = H^0(A, M) = \{m \in M : am = ma \ \forall a \in A\}$$

es un G-módulo vía $g \cdot_{ad} m := gmg^{-1}$

b) $M^{A \rtimes G} = H^0(A \rtimes G, M) = \{m \in M : \omega m = m\omega \ \forall \omega \in A \rtimes G\}$

$$= (M^A)^G = \{m \in M^A : g \cdot_{ad} m = m \ \forall g \in G\}$$

c) Si G es finito y $|G|$ es inversible en A, entonces

$$H^n(A \rtimes G, M) = H^n(A, M)^G$$

25. Sea k un cuerpo, A una k-álgebra, y $\mathcal{T}$ un subcategoría de $D(A)$ que satisface

a) $\mathcal{T}$ es estable por suspensión y triángulos (i.e. $M \in \mathcal{T} \Rightarrow M[1], M[-1] \in \mathcal{T}$, y si $X \to Y \to Z \to X[-1]$ es un triángulo, $X, Y \in \mathcal{T} \Rightarrow Z \in \mathcal{T}$)

b) Si $V \in \mathrm{Chain}(k)$ y $X \in \mathcal{T}$ entonces $X \otimes V \in \mathcal{T}$

c) $\mathcal{T}$ es estable por sumas directas arbitrarias

Muestre que si $A \in \mathcal{T}$ entonces $\mathcal{T} \cong D(A)$.

Bibliografía

[B] M. Barr, *Acyclic Models*, AMS CRM. CRM Monograph Series Series. 17. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). xi, 179 p. (2002).

[CE] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Mathematical Series. 19. Princeton, New Jersey: Princeton University Press. xv, 390 p. (1956).

[FSS] M. Farinati, A. Solotar, M. Suárez-Álvarez, *Módulos y sus categorías de representaciones.* Cuadernos de Matemática y Mecánica IMAL (CONICET - UNL) - CIMEC (INTEC, CONICET - UNL) 2007.

[GM] S. Gelfand, Y. Manin, *Methods of Homological Algebra, Springer Monographs in Mathematics.* Berlin: Springer. xviii, 372 p. (1996).

[GS] V. Guillemin, S. Sternberg, *Supersymmetry and Equivariant de Rham Theory.* Mathematics: Past and Present. Berlin: Springer. xxiii, 228 p. (1999).

[K] B. Keller, *Derived categories and their uses.* Handbook of Algebra Volume 1, 1996, Pages 671, 673-701

[L] J.L. Loday, *Cyclic homology.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (1998).

[LV] J.L. Loday, B. Vallette, *Algebraic Operads.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Berlin: Springer, 634 p. (2012).

[McL] Mc Lane, *Homology.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften (1975).

[W] C. Weibel, *An introduction to homological algebra.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics Series. 38. Cambridge: Cambridge University Press. xiv, 450 p. (1994).

[Y] A. Yekutieli, *Derived Categories*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics Series 183. Cambridge: Cambridge University Press. xi, 607 p. (2020).