ISSN 1851-149X

Fascículo 7

Cursos y seminarios de matemática

Serie B

José M. Mazón

El Flujo Variación total

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

2013

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie B

Fascículo 7

ISSN 1851-149X (Versión Electrónica)
ISSN 1851-1481 (Versión Impresa)

Universidad de Buenos Aires.
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

José M. Mazón

El Flujo Variación Total

Buenos Aires, Marzo 2013

A Claudia, que propicio este curso.

Prefacio

Estas notas son el contenido de un curso de doctorado impartido en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires en Marzo de 2013. En dicho curso resumimos algunos de nuestros resultados sobre el Flujo Variación Total, que fueron principalmente motivados por problemas que surgen en el Procesamiento de Imágenes. En primer lugar, recordamos el papel desempeñado por la variación total en el procesamiento de imágenes, en particular, en la formulación variacional del problema de la restauración. Este modelo, introducido inicialmente por Rudin, Osher y Fatemi, tuvo una fuerte influencia en el desarrollo de métodos variacionales para limpiar el ruido de la imagen, su restauración. Después de este análisis se describen algunas de las herramientas que necesitamos, como son: las funciones de variación acotada, la fórmula de Green generalizada y los flujos gradiente en espacios de Hilbert. La parte principal del curso está dedicada a estudiar el Flujo Variación Total con con diferentes condiciones de contorno. Además de ver que dichos problemas están bien puestos en el sentido de Hadamard, también se estudian algunas de sus propiedades cualitativas. En particular, calculamos varias soluciones explícitas.

Índice general

Capítulo 1

El Flujo Variación Total en el Procesamiento de Imágenes

Supondremos que nuestra imagen (o dato) u_d es una función definida en un abierto acotado D de $\mathbb{R}^N$ con frontera suave a trozos (típicamente será un rectángulo en $\mathbb{R}^2$).

Observar que la información importante de una imagen (su geometría) está en sus contornos que corresponden a puntos donde el gradiente de u es muy grande.

Generalmente la degradación de la imagen original u sucede durante su adquisición y se puede modelar mediante la ecuación

$$u_d = Ku + n, \tag{1.1}$$

donde K es un operador de convolución con impulso respuesta k, i.e., $Ku = k * u$, y n es un ruido que en la práctica se puede considerar Gausiano.

El problema de recuperar u de u_d está mal puesto. En general el operador K no tiene por qué ser invertible, pero además, si suponemos que si lo es, aplicando K^{-1} a ambos lados de la ecuación (1.1) obtenemos

$$K^{-1}u_d = u + K^{-1}n. \tag{1.2}$$

Escribiendo $K^{-1}n$ en el dominio de Fourier, obtenemos que

$$K^{-1}n = \left(\frac{\hat{n}}{\hat{k}}\right)^{\vee}$$

donde $\hat{f}$ denota la transformada de Fourier de f y $f^{\vee}$ denota la inversa de la transformada de Fourier. De esta ecuación se desprende que el ruido debe explotar a las altas frecuencias a las que $\hat{k}$ se anula o es pequeño.

La estrategia típica para resolver este tipo de problemas es por regularización. La solución del problema (1.1) se estima por minimización del funcional

$$J_\gamma(u) = \| Ku - u_d \|_2^2 + \gamma \| Qu \|_2^2, \tag{1.3}$$

donde Q es un operador lineal de regularización.

Uno de los primeros métodos de regularización usados, debido a Tikhonov y Arsemin, consistió en elegir, entre todas las posibles soluciones (1.2) la que minimiza la seminorma de Sobolev de u

$$\int_D |Du|^2 \, dx,$$

la cual corresponde a tomar $Qu = \nabla u$.

La ligadura anterior presupone que las imágenes son funciones de $W^{1,2}(\Omega)$ (i.e., funciones $u \in L^2(\Omega)$ tales que $Du \in L^2(\Omega)$) que no tiene discontinuidades a lo largo de curvas rectificables, fenómeno que es típico de las imágenes reales.

El espacio funcional cuyos elementos pueden tener discontinuidades a lo largo de curvas rectificables, es el espacio de las *funciones de variación acotada*. Los primeros en proponer este espacio como el natural para los problemas del Procesamiento de Imágenes fueron, independientemente, E. de Giorgi y L. Rudin, en 1984. Una función $u \in L^1(\Omega)$ cuyas derivadas en el sentido de las distribuciones son medidas con variación total finita en Ω se denomina una función de variación acotada. La clase de tales funciones se denota por $BV(\Omega)$. Este espacio lo estudiaremos en el Capítulo 2. Las funciones de variación acotada tienen discontinuidades sobre curvas rectificables, siendo continuas en algún sentido fuera de de sus discontinuidades. Las discontinuidades pueden identificarse con los contornos de la imagen.

Los primeros en introducir la variación total en modelos de restauración de imágenes fueron L. Rudin, S. Osher y E. Fatemi en su seminal trabajo [31]. En dicho trabajo proponen resolver el siguiente problema de minimización con ligaduras:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \int_D \|Du\| \, dx \\ &\text{con} \quad \int_D Ku = \int_D u_d, \quad \int_D |Ku - u_d|^2 \, dx = \sigma^2 |D|. \end{aligned} \tag{1.4}$$

La primera ligadura corresponde a la suposición de que el ruido tiene media cero, y la segunda a que su desviación estándar es σ. Estas ligaduras son un modo de incorporar el método de adquisición de la imagen en términos de la ecuación (1.1).

Bajo la hipótesis

$$\left\| u_d - \int_\Omega u_d \right\| \geq \sigma^2,$$

la ligadura

$$\int_D |Ku - u_d|^2 \, dx = \sigma^2 |D| \tag{1.5}$$

es equivalente a

$$\int_D |Ku - u_d|^2 \, dx \leq \sigma^2 |D|,$$

que viene a decir que que σ es una cota superior de la desviación estándar de n. Además, asumiendo que $K1 = 1$, la ligadura $\int_D Ku = \int_D u_d$ se satisface automáticamente [14].

En la práctica, el problema anterior se resuelve por medio del siguiente problema de minimización sin ligaduras

$$\text{Minimize} \int_\Omega \|Du\|\, dx + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |Ku - u_d|^2\, dx \tag{1.6}$$

para algún multiplicador de Lagrange λ.

La conexión entre los problemas (1.4) y (1.6) fue dada por A. Chambolle y P.L. Lions en [14]. En efecto, ellos probaron que ambos problemas son equivalentes para algún valor positivo del multiplicador de λ.

Definimos el funcional $\Phi : L^2(\Omega) \to (-\infty, +\infty]$ como

$$\Phi(u) := \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \|Du\| & si \quad u \in L^2(\Omega) \cap BV(\Omega) \\ +\infty & si \quad u \in L^2(\Omega) \setminus BV(\Omega). \end{cases} \tag{1.7}$$

Proposición 1.1. *Si u es una solución de (1.4), Entonces existe un $\lambda \geq 0$ tal que*

$$-\lambda K^t(Ku - u_d) \in \partial\Phi(u). \tag{1.8}$$

En particular, la ecuación de Euler-Lagrange asociada con el problema de eliminación de ruidos, es decir, para el problema (1.4) con $K = I$, es la ecuación

$$-\lambda(u - u_d) \in \partial\Phi(u). \tag{1.9}$$

Formalmente,

$$\partial\Phi(u) = -\text{div}\left(\frac{Du}{\|Du\|}\right).$$

Ahora, el problema es dar sentido a (1.9) como una ecuación en derivadas parciales, describiendo la subdiferencial de Φ en sentido distribucional.

Motivados por problemas en restauración de imágenes en [3] iniciamos el estudio de la minimización del flujo variación total $u_t = \text{div}(\frac{Du}{\|Du\|})$. En efecto, esta ecuación en derivadas parciales es descenso de gradiente asociado a la energía

$$\int_\Omega \|Du\|.$$

Observar que no estamos considerando la ligadura dada por la adquisición de la imagen. Por tanto, nuestras conclusiones no informan directamente sobre el modelo completo (1.4).

En lugar de ello, nuestro propósito fue entender como la minimización del flujo variación total minimiza la variación total. Hay diferentes flujos que minimizan la variación total de una función. Uno de ellos es el movimiento por curvatura media ([29])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \|Du\| \mathrm{div} \left(\frac{Du}{\|Du\|} \right). \tag{1.10}$$

En efecto, este flujo corresponde al movimiento de una curva en $\mathbb{R}^2$ o una hipersuperficie $S(t)$ en $\mathbb{R}^N$ por curvatura media, i.e.,

$$X_t = H\vec{N} \tag{1.11}$$

donde X denota una parametrización de $S(t)$, H denota su curvatura media y $\vec{N}$ el vector unitario normal. El clásico movimiento dado por (1.11) corresponde al descenso de gradiente del funcional de área $\int_S dS$. Ambos flujos, el clásico movimiento por curvatura media (1.11), y su formulación por soluciones de viscosidad (1.10) han sido estudiados por diferentes autores, en particular nos referimos al trabajo de L.C. Evans and J. Spruck ([22], [23]) y Y-G. Chen, Y. Giga y S. Goto [15] . La formulación por medio de los conjuntos de nivel del clásico movimiento por curvatura media, inicialmente propuesto por S. Osher y J. Sethian, es el siguiente: Si $S(t)$ es una superficie moviéndose por curvatura media con condición inicial $S(0)$, y $u(0, x)$ es la distancia signada a $S(0)$, i.e., si $u(0, x) = d(x, S(0))$ cuando x está fuera de $S(0)$, y $u(0, x) = -d(x, S(0))$ si x está dentro de $S(0)$, entonces $S(t) = \{x : u(t, x) = 0\}$ para cada $t \geq 0$, donde $u(t, x)$ es solución de viscosidad de (1.10). Esta es la formulación por conjuntos de nivel del clásico movimiento por curvatura media, inicialmente propuesta por S. Osher y J. Sethian en [29] y cuyo análisis matemático fue dado en [22] y seguido por otros muchos autores. En particular, como fue demostrado por, G. Barles, H.M. Soner and P. Souganidis ([9]), que si en lugar de sumergir $S(0)$ como el conjunto de nivel cero de una función continua, tomamos as $u(0, x) = \chi_{C(0)}$ donde $C(0)$ es la región interior a $S(0)$, y asumimos que $S(0)$ es una superficie suave, entonces $u(t, x) = \chi_{C(t)}$ donde $C(t)$ es la región interior a $S(t)$. Por tanto, el movimiento por curvatura media decrece la variación total $\chi_{C(0)}$ decreciendo la medida Haussdorff $(N-1)$-dimensional de la frontera $S(t)$ de $C(t)$ [23]. Puesto que la variación total de de la función $u_0(x) = h\chi_C$ es

$$TV(h\chi_C) = hPer(C)$$

vemos que hay dos formas básicas de de miniminizar la variación total de una tal función: decreciendo la altura de $u_0(x)$ o decreciendo el perímetro de su frontera. El movimiento por curvatura media decrece el perímetro de su frontera. Bajo ciertas condiciones geométricas sobre el conjunto $C(0)$, la estrategia de minimización seguida por el flujo variación total consiste en decrecer la altura sin distorsionar su frontera. Consecuentemente, la estrategia seguida el flujo variación total es muy diferente a la seguida por el flujo por curvatura media.

Capítulo 2

Funciones de Variación Acotada

En todo este apartado Ω será un abierto de $\mathbb{R}^N$. Vamos a dar una introducción a las funciones de variación acotada en Ω, para un estudio más exhaustivo de dichas funciones ver [2], [21], [26] ó [32].

Definición 2.1. Se dice que una función $u \in L^1(\Omega)$ es una *función de variación acotada* en Ω si sus derivadas parciales en el sentido de las distribuciones son medidas de Radon con variación finita, *i.e.*, si existen medidas de Radon $\mu_1, \ldots, \mu_N \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\Omega)$, tales que

$$\int_\Omega u\,\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\,dx = -\int_\Omega \phi d\mu_i \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

con $|\mu_i|(\Omega) < \infty$ para $i = 1, 2, \ldots, N$.

Aquí estamos identificando la medida de Radon μ_i con la medida de Borel regular que sabemos existe por el Teorema de representación de Riesz. Denotaremos $D_i u = \mu_i$, y $Du = (D_1 u, \ldots, D_N u)$. Al espacio vectorial de todas las funciones de variación acotada en Ω lo denotaremos por $BV(\Omega)$.

Se dice que una función u es *localmente de variación acotada* en Ω si $u \in BV(U)$ para cada abierto $U \subset\subset \Omega$. Al espacio de todas las funciones localmente de variación acotada en Ω lo denotaremos por $BV_{loc}(\Omega)$.

Evidentemente, el espacio de Sobolev $W^{1,1}(\Omega)$ está contenido en $BV(\Omega)$ y además, para cada $u \in W^{1,1}(\Omega)$, $Du = \nabla u\,\mathcal{L}^N$, siendo $\mathcal{L}^N$ la medida de Lebesgue N-dimensional. Además la inclusión es estricta, *i.e.*, existen funciones $u \in BV(\Omega)$ tales que Du es singular respecto a la medida $\mathcal{L}^N$, por ejemplo, si $\Omega = (-1, 1)$ y tomamos $u := \chi_{(0,1)}$, tenemos que $Du = \delta_0$, con lo que $u \in BV(\Omega) \setminus W^{1,1}(\Omega)$.

Para cada $u \in BV(\Omega)$, se define

$$\|Du\|(\Omega) := \sup\left\{ \int_\Omega u\,div\,\varphi\,dx \ : \ \varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N),\ \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Usaremos también la notación
$$\int_\Omega \|Du\| = \|Du\|(\Omega).$$

Usando integración por partes se tiene que

$$\|Du\|(\Omega) = \int_\Omega |\nabla u|\,dx \qquad \forall\, u \in W^{1,1}(\Omega).$$

Por el Teorema de representación de Riesz para medidas vectoriales (ver [21]), se puede ver que $\|Du\|$ coincide con la variación total de la medida vectorial Du, *i.e.*, $\|Du\| = |Du|(\Omega)$.

Teorema 2.2. *Sea $u \in L^1(\Omega)$, entonces, $u \in BV(\Omega)$ si, y sólo si, $\|Du\|(\Omega) < \infty$. La aplicación $u \mapsto \|Du\|$ es semicontinua inferiormente respecto de la L^1-convergencia, i.e., si $u_n \to u$ en $L^1(\Omega)$, entonces $\|Du\|(\Omega) \leq \liminf_{n\to\infty} \|Du_n\|(\Omega)$.*

Demostración. Supongamos que $u \in BV(\Omega)$ y sea $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Entonces,

$$\left|\int_\Omega u\,div\,\varphi\,dx\right| = \left|\sum_{i=1}^N \int_\Omega u\,\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\,dx\right| = \left|-\sum_{i=1}^N \int_\Omega \varphi_i\,dD_i u\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\varphi_i| d|D_i u| \leq \sum_{i=1}^N |D_i u|(\Omega) < \infty,$$

con lo que $\|Du\|(\Omega) < \infty$.

Supongamos ahora que $u \in L^1(\Omega)$ y $\|Du\| < \infty$. Dada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, con $|\phi| \leq 1$, si consideramos el campo vectorial $\varphi = (0, \ldots, 0, \phi, 0, \ldots, 0)$, tenemos que

$$\left|\int_\Omega \phi\,dD_i u\right| = \left|\int_\Omega u\,div\,\varphi\,dx\right| \leq \|Du\|(\Omega),$$

de donde se deduce por densidad que $|D_i u|(\Omega) \leq \|Du\|(\Omega)$, consecuentemente $u \in BV(\Omega)$.

Supongamos que $u_n \to u$ en $L^1(\Omega)$. Entonces, si $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, tenemos que

$$\int_\Omega u\,div\,\varphi\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u\,div\,\varphi\,dx \leq \liminf_{n\to\infty} \|Du_n\|(\Omega),$$

con lo que
$$\|Du\|(\Omega) \leq \liminf_{n\to\infty} \|Du_n\|(\Omega).$$

$\square$

Nota 2.3. Se puede probar que $BV(\Omega)$ es un espacio de Banach respecto a la norma

$$\|u\|_{BV(\Omega)} := \|u\|_1 + \|Du\|(\Omega),$$

Ahora, dicha norma es demasiado fuerte ya que no le proporciona estructura de espacio separable y además, $C^1(\Omega) \cap BV(\Omega)$ no es denso en $BV(\Omega)$ respecto a dicha norma pues la $\| \, \|_{BV(\Omega)}$-clausura de $C^1(\Omega) \cap BV(\Omega)$ coincide con $W^{1,1}(\Omega)$. Sin embargo, las funciones de $BV(\Omega)$ se pueden aproximar en la L^1-convergencia por funciones suaves. Más concretamente, se tiene el siguiente teorema de aproximación.

Teorema 2.4. *(***Aproximación por funciones suaves***) Dada $u \in BV(\Omega)$ existen $u_n \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$, tales que*

(i) $u_n \to u$ *en* $L^1(\Omega)$ *y*

(ii) $\|Du\|(\Omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n| \, dx.$

Demostración. Fijamos un $\epsilon > 0$. Debido a la regularidad de la medida $\|Du\|$, existe un $m \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|Du\|(\Omega \setminus \Omega_1) < \epsilon, \tag{2.1}$$

siendo

$$\Omega_k := \left\{ x \in \Omega \ : \ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{m+k} \right\} \cap B(0, k+m), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Tomemos $\Omega_0 := \emptyset$, y definamos

$$U_k := \Omega_{k+1} \setminus \overline{\Omega_k}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Sea $\{\psi_k\}$ una partición de la unidad subordinada a la familia de abiertos $\{U_k\}$, y para $\delta > 0$ sea

$$\rho_\delta(x) = \frac{1}{\delta^N} \rho\left(\frac{x}{\delta}\right),$$

siendo $0 \leq \rho \in \mathcal{D}(\Omega)$, con

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) \; dx = 1, \qquad \operatorname{sop}(\rho) \subset B(0,1).$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, elegimos un $\delta_k > 0$ suficientemente pequeño para que se cumpla

$$\begin{cases} \operatorname{sop}(\rho_{\delta_k} \star (u\psi_k)) \subset U_k, \\ \displaystyle\int_\Omega |\rho_{\delta_k} \star (u\psi_k) - u\psi_k| \, dx < \frac{\epsilon}{2^k}, \\ \displaystyle\int_\Omega |\rho_{\delta_k} \star (u\nabla\psi_k) - u\nabla\psi_k| \, dx < \frac{\epsilon}{2^k}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Definimos

$$u_\epsilon := \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{\delta_k} \star (u\psi_k).$$

Como para cada $x \in \Omega$ existe un entorno donde sólo son no nulos un número finito de elementos de la serie que define u_ϵ, se tiene que

$$u_\epsilon \in C^\infty(\Omega).$$

Además, al ser $\{\psi_k\}$ una partición de la unidad,

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u\psi_k,$$

con lo cual, teniendo en cuenta (2.3), se tiene que

$$\|u_\epsilon - u\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega |\rho_{\delta_k} \star (u\psi_k) - u\psi_k|\, dx < \epsilon.$$

Por tanto,

$$u_\epsilon \to u \quad \text{en } L^1(\Omega), \quad \text{cuando } \epsilon \to 0.$$

De aquí, aplicando el teorema anterior tenemos que

$$\|Du\| \leq \liminf_{\epsilon \to 0} \|Du_\epsilon\|. \tag{2.3}$$

Sea $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Entonces, teniendo en cuenta que $\sum_{k=1}^{\infty} \nabla\psi_k = 0$, nos queda que

$$\int_\Omega u_\epsilon\, div\varphi\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega \rho_{\delta_k} \star (u\psi_k)\, div\,\varphi\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega u\psi_k\, div(\rho_{\delta_k} \star \varphi)\, dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega u\, div(\psi_k(\rho_{\delta_k} \star \varphi))\, dx - \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega u\, \nabla\psi_k \cdot (\rho_{\delta_k} \star \varphi)\, dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega u\, div(\psi_k(\rho_{\delta_k} \star \varphi))\, dx - \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega \varphi \cdot (\rho_{\delta_k} \star (u\nabla\psi_k) - u\nabla\psi_k)\, dx.$$

Ahora, como $|\psi_k(\rho_{\delta_k} \star \varphi)| \leq 1$ y cada punto de Ω pertenece a lo más a tres conjuntos de $\{U_k\}$, teniendo en cuenta (2.1), nos queda que

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega u\, div(\psi_k(\rho_{\delta_k} \star \varphi))\, dx \right|$$

$$= \left| \int_\Omega u\, div(\psi_1(\rho_{\delta_1} \star \varphi))\, dx + \sum_{k=2}^{\infty} \int_\Omega u\, div(\psi_k(\rho_{\delta_k} \star \varphi))\, dx \right|$$

$$\leq \|Du\|(\Omega) + \sum_{k=2}^{\infty} \|Du\|(U_k) \leq \|Du\|(\Omega) + 3\|Du\|(\Omega \setminus \Omega_k) \leq \|Du\| + 3\epsilon.$$

Por otra parte, como consecuencia de (2.3), se tiene que

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega}\varphi\cdot(\rho_{\delta_k}\star(u\nabla\psi_k)-u\nabla\psi_k)\,dx\right|<\epsilon.$$

Por tanto obtenemos que

$$\int_{\Omega}u_{\epsilon}\,div\varphi\,dx\leq\|Du\|(\Omega)+4\epsilon,$$

y consecuentemente,

$$\|Du_{\epsilon}\|(\Omega)\leq\|Du\|(\Omega)+4\epsilon.$$

De esta última desigualdad y de (2.3) obtenemos (ii) y concluimos la prueba. □

Corolario 2.5. *(**Inmersión compacta**) Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un abierto acotado de clase C^1. Sea $\{u_n\}$ una sucesión en $BV(\Omega)$, tal que $\|u_n\|_{BV(\Omega)}\leq M$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Entonces existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ y una función $u\in BV(\Omega)$, tales que*

$$\lim_{k\to\infty}u_{n_k}=u\qquad\text{en}\quad L^1(\Omega).$$

Demostración. Por el teorema anterior, para cada $n\in\mathbb{N}$ podemos encontrar una función $v_n\in C^{\infty}(\Omega)\cap BV(\Omega)$, tal que

$$\|u_n-v_n\|_1\leq\frac{1}{n},\qquad\forall\,n\in\mathbb{N},\tag{2.4}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\Omega}|\nabla v_n|\,dx<\infty.\tag{2.5}$$

Como consecuencia de (2.4) y (2.5), tenemos que $\{v_n\}$ es una sucesión acotada en $W^{1,1}(\Omega)$. Entonces, aplicando el Teorema de Rellich-Kondrakov, existe una subsucesión $\{v_{n_k}\}$ y una función $u\in L^1(\Omega)$, tales que

$$\lim_{k\to\infty}v_{n_k}=u\qquad\text{en}\quad L^1(\Omega).$$

Entonces, por (2.4), tenemos que

$$\lim_{k\to\infty}u_{n_k}=u\qquad\text{en}\quad L^1(\Omega).$$

Finalmente, como consecuencia del Teorema 2.2, $u\in BV(\Omega)$. □

Con una técnica similar a la usada en la demostración del resultado anterior podemos obtener fácilmente desigualdades de tipo Sobolev para funciones de variación acotada. Más concretamente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.6. *Para $N\geq 2$, existe una constante $S(N)>0$ tal que*

$$\|u\|_{L^{N/N-1}(\mathbb{R}^N)}\leq S(N)\|Du\|(\mathbb{R}^N)\qquad\forall\,u\in BV(\mathbb{R}^N).\tag{2.6}$$

Demostración. Por el Teorema 2.4 existen $u_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap BV(\Omega)$, tales que

$$\begin{cases} u_n \to u \quad \text{en} \quad L^1(\Omega), \qquad u_n \to u \quad c.p.p. \\ \\ \|Du\|(\mathbb{R}^N) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n| \, dx. \end{cases}$$

Entonces, aplicando el Lema de Fatou y la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (ver por ejemplo [20]), tenemos que

$$\|u\|_{L^{N/N-1}(\mathbb{R}^N)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^{N/N-1}(\mathbb{R}^N)}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} S(N) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n| = S(N)\|Du\|(\mathbb{R}^N),$$

con lo que tenemos probado el teorema. □

También se pueden obtener desigualdades de tipo Poincaré-Wirtinger para las funciones de variación acotada. Más concretamente, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo y acotado con frontera de clase C^1. Entonces, existe una constante $C > 0$, que sólo depende de Ω, tal que*

$$\int_\Omega |u - u_\Omega| \, dx \leq C\|Du\|(\Omega) \qquad \forall \, u \in BV(\Omega). \tag{2.7}$$

Demostración. Supongamos que el resultado no es cierto. Entonces existe una sucesión $\{u_n\} \subset BV(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega |u_n - (u_n)_\Omega| \, dx \geq n\|Du_n\|(\Omega) \qquad \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que ambos miembros de la desigualdad anterior son homogéneos de grado 1, podemos renormalizar y trasladar las funciones u_n y obtener funciones $v_n \in BV(\Omega)$, tales que

$$\int_\Omega |v_n| \, dx = 1, \quad \int_\Omega v_n \, dx = 0, \quad \|Dv_n\|(\Omega) \leq \frac{1}{n}, \quad \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Aplicando el Corolario 2.5, podemos asumir (extrayendo una subsucesión si es necesario) que $v_n \to v$ en $L^1(\Omega)$, con

$$\int_\Omega |v| \, dx = 1, \qquad \int_\Omega v \, dx = 0.$$

Ahora, como $\|Dv_n\|(\Omega) \leq \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por la semicontinuidad inferior de la variación (Teorema 2.2), tenemos que $\|Dv\|(\Omega) = 0$. Entonces, como Ω es conexo, es fácil ver que v debe ser constante en Ω, lo que nos lleva a una contradicción. □

Nota 2.8. Si aplicamos el resultado anterior al caso en que $\Omega = B(x,r)$, y usamos la notación

$$(u)_{x,r} = u_{B(x,r)} = \fint_{B(x,r)} u(x)\, dx,$$

obtenemos que existe una constante $C > 0$, que depende de $B(x,r)$, tal que

$$\int_{B(x,r)} |u - (u)_{x,r}|\, dy \leq C\|Du\|(B(x,r)) \quad \forall\, u \in BV(B(x,r)). \tag{2.8}$$

Ahora, la mejor constante C de la desigualdad anterior no depende de x. En efecto: basta con considerar la transformación $T : BV(B(x,r)) \to BV(B(0,1))$, definida por $T(u)(y) := u(x+ry)$, que es sobreyectiva, para ver que si $C(B(x,r))$ es la mejor constante asociada a la bola $B(x,r)$, entonces, $C(B(x,r)) = C(N)r$, siendo $C(N) = C(B(0,1))$. Por tanto, como consecuencia de (2.7), tenemos que

$$\int_{B(x,r)} |u - (u)_{x,r}|\, dy \leq C(N)\, r\|Du\|(B(x,r)) \qquad \forall\, u \in BV(B(x,r)) \tag{2.9}$$

para cada $x \in \mathbb{R}^N$ y cada $r > 0$.

Definición 2.9. Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto $\mathcal{L}^N$-medible. Se dice que E es un *conjunto de perímetro finito* en el abierto Ω si $\chi_E \in BV(\Omega)$; y en este caso se define el *perímetro* de E en Ω como

$$P(E,\Omega) := \|D\chi_E\|(\Omega).$$

Tenemos pues que

$$P(E,\Omega) = \sup\left\{ \int_E div\, \varphi\, dx \ :\ \varphi \in C_0^1(\Omega,\mathbb{R}^N),\ \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}. \tag{2.10}$$

Se dice que E es un *conjunto de perímetro localmente finito* si $P(E,\Omega) < \infty$ para cada $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado. A dichos conjuntos también se les suele denominar *conjuntos de Caccioppoli*. Cuando E es de perímetro finito en $\mathbb{R}^N$, diremos simplemente que E es un conjunto de *perímetro finito* y escribiremos

$$\mathrm{Per}(E) = P(E,\mathbb{R}^N).$$

Nota 2.10. Si $E \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado con frontera ∂E de clase C^2, entonces E es un conjunto de Caccioppoli y además, para cada $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado se tiene que

$$P(E,\Omega) = \mathcal{H}^{N-1}(\Omega \cap \partial E), \tag{2.11}$$

siendo $\mathcal{H}^{N-1}$ la medida de Hausdorff $(N-1)$-dimensional. En efecto: si $\varphi \in C_0^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$ con $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, aplicando el clásico Teorema de Green-Gauss, tenemos que

$$\int_E div\, \varphi\, dx = \int_{\partial E} \varphi \cdot \nu\, d\mathcal{H}^{N-1} \leq \mathcal{H}^{N-1}(\Omega \cap \partial E) < \infty,$$

siendo ν la normal exterior unitaria a ∂E. Entonces, por (2.10), tenemos que

$$P(E,\Omega) \leq \mathcal{H}^{N-1}(\Omega \cap \partial E).$$

Veamos la otra desigualdad. Como ∂E es de clase C^2, existe un conjunto abierto U conteniendo a ∂E, tal que $d(x) = \operatorname{dist}(x,E)$ es de clase C^1 en $U \setminus \partial E$ y

$$\nabla d(x) = \frac{x - \xi(x)}{d(x)},$$

siendo $\xi(x)$ el único punto de ∂E más próximo a x. Por tanto, la normal exterior unitaria ν a ∂E tiene una extensión $\tilde{\nu} \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$, tal que $|\tilde{\nu}| \leq 1$. Consecuentemente, si tomamos $\varphi = \eta\tilde{\nu}$ con $\eta \in \mathcal{D}(\Omega)$, nos queda que

$$\int_E div\,\varphi\,dx = \int_E div(\eta\tilde{\nu})\,dx = \int_{\partial E} \eta\,d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Por tanto,

$$P(E,\Omega) \geq \sup\left\{ \int_{\partial E} \eta\,d\mathcal{H}^{N-1} \ : \ \eta \in \mathcal{D}(\Omega),\ |\eta| \leq 1 \right\} = \mathcal{H}^{N-1}(\Omega \cap \partial E).$$

Recordemos que la clásica fórmula coárea para una función suave u asegura que

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{N-1}(\{x \in \Omega \ : \ u(x) = t\})\,dt. \tag{2.12}$$

Por el Teorema de Sard, para casi todo $t \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in \Omega \ : \ u(x) = t\}$ es una hipersuperficie suave que coincide con la frontera del conjunto de nivel superior

$$E_t(u) := \{x \in \Omega \ : u(x) > t\}.$$

Por tanto, como consecuencia de (2.11), podemos escribir la fórmula coárea como

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \|D\chi_{E_t(u)}\|(\Omega)\,dt. \tag{2.13}$$

En 1960, W. H Fleming y R. Rishel ([24]) demostraron que la fórmula coárea es también cierta para funciones de variación acotada, concretamente establecieron el siguiente resultado.

Teorema 2.11. *(***La fórmula coárea***) Sea $u \in BV(\Omega)$. Entonces, para casi todo $t \in \mathbb{R}$ el conjunto*

$$E_t(u) := \{x \in \Omega \ : u(x) > t\}$$

tiene perímetro finito y se cumple que

$$\|Du\|(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \|D\chi_{E_t(u)}\|(\Omega)\,dt. \tag{2.14}$$

Inversamente, si $u \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|D\chi_{E_t(u)}\|(\Omega)\,dt < \infty,$$

entonces $u \in BV(\Omega)$.

Demostración. Observemos primeramente que para cada función $u \in L^1(\Omega)$ se tiene que

$$u(x) = u^+(x) - u^-(x) = \int_0^{+\infty} \chi_{E_t(u)}(x)\,dt - \int_{-\infty}^0 (1-\chi_{E_t(u)}(x))\,dt. \tag{2.15}$$

Veamos ahora que para $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, se tiene que

$$\int_\Omega u\,div\,\varphi\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{E_t(u)} div\,\varphi\,dx \right) dt. \tag{2.16}$$

Teniendo en cuenta (2.15) y que $\displaystyle\int_\Omega div\,\varphi\,dx = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega u\,div\,\varphi\,dx &= \int_\Omega \left(\int_0^{+\infty} \chi_{E_t(u)}(x)\,dt - \int_{-\infty}^0 (1-\chi_{E_t(u)}(x))\,dt \right) div\,\varphi\,dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_\Omega \chi_{E_t(u)}(x)\,div\,\varphi\,dx \right) dt - \int_{-\infty}^0 \left(\int_\Omega (1-\chi_{E_t(u)}(x))\,div\,\varphi\,dx \right) dt \\ &= \int_\infty^{+\infty} \left(\int_\Omega \chi_{E_t(u)}(x)\,div\,\varphi\,dx \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{E_t(u)} div\,\varphi\,dx \right) dt. \end{aligned}$$

Como consecuencia de (2.16), se obtiene que

$$\|Du\|(\Omega) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|D\chi_{E_t(u)}\|(\Omega)\,dt. \tag{2.17}$$

Luego, si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|D\chi_{E_t(u)}\|(\Omega)\,dt < \infty,$$

tendremos que $\|Du\|(\Omega) < \infty$, con lo que $u \in BV(\Omega)$ por el Teorema 2.2.

Supongamos que $u \in BV(\Omega)$. Veamos primeramente que la aplicación $t \mapsto \|D\chi_{E_t(u)}\|$ es $\mathcal{L}^1$-medible. En efecto: como la aplicación

$$(x,t) \mapsto \chi_{E_t(u)}(x)$$

es $(\mathcal{L}^N \times \mathcal{L}^1)$-medible, tenemos que para cada $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, la función

$$t \mapsto \int_{E_t(u)} div\,\varphi\,dx = \int_\Omega \chi_{E_t(u)} div\,\varphi\,dx$$

es $\mathcal{L}^1$-medible. Ahora, si D es un subconjunto denso y numerable de $C_0^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$, tenemos que

$$t \mapsto \|D\chi_{E_t(u)}\| = \sup\left\{\int_{E_t(u)} div\,\varphi\,dx \;:\; \varphi \in D,\; \|\varphi\|_\infty \leq 1\right\},$$

con lo que la aplicación $t \mapsto \|D\chi_{E_t(u)}\|$ es $\mathcal{L}^1$-medible.

Veamos ahora que (2.14) es cierto para $u \in BV(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)$. Sea

$$f(t) := \int_{\Omega\setminus E_t(u)} |\nabla u|\,dx = \int_{\{u\leq t\}} |\nabla u|\,dx.$$

Como la función f es creciente, existe $f'(t)$ para casi todo $t \in \mathbb{R}$, y se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,dt \leq \int_\Omega |\nabla u|\,dx. \tag{2.18}$$

Para $t \in \mathbb{R}$ $r > 0$ fijos, definimos $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$\eta(s) := \begin{cases} 0 & \text{si } \; s \leq t \\ \dfrac{s-t}{r} & \text{si } \; t \leq s \leq t+r \\ 1 & \text{si } \; s \geq t+r. \end{cases}$$

Entonces

$$\eta'(s) := \begin{cases} \dfrac{1}{r} & \text{si } \; t < s < t+r \\ 0 & \text{si } \; s < t \;\text{ o }\; s > t+r. \end{cases}$$

Por tanto, para cada $\varphi \in C_0^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$, tenemos que

$$-\int_\Omega \eta(u(x))\,div\,\varphi\,dx = \int_\Omega \eta'(u(x))\nabla u\cdot\varphi\,dx = \; = \frac{1}{r}\int_{E_t(u)\setminus E_{t+r}(u)} \nabla u\cdot\varphi\,dx,$$

con lo que

$$\begin{aligned} \frac{f(t+r)-f(t)}{r} &= \frac{1}{r}\left(\int_{\Omega\setminus E_{t+r}(u)} |\nabla u|\,dx - \int_{\Omega\setminus E_t(u)} |\nabla u|\,dx\right) \\ &= \frac{1}{r}\int_{E_t(u)\setminus E_{t+r}(u)} |\nabla u|\,dx \geq \frac{1}{r}\int_{E_t(u)\setminus E_{t+r}(u)} \nabla u\cdot\varphi\,dx \\ &= -\int_\Omega \eta(u(x))\,div\,\varphi\,dx. \end{aligned}$$

de aquí, haciendo tender $r \to 0$, obtenemos que

$$f'(t) \geq -\int_{E_t(u)} div\,\varphi\,dx \qquad \text{para casi todo } \; t \in \mathbb{R}.$$

Entonces, tomando supremo sobre las $\varphi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, con $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, deducimos que

$$\|D\chi_{E_t(u)}\|(\Omega) \leq f'(t),$$

de donde teniendo en cuenta (2.18), obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|D\chi_{E_t(u)}\|(\Omega)\, dt \leq \int_\Omega |\nabla u|\, dx = \|Du\|(\Omega).$$

De aquí, teniendo en cuenta (2.17), completamos la prueba de (2.14) para $u \in BV(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$. Veamos finalmente que (2.14) es cierto para $u \in BV(\Omega)$. Por el Teorema 2.4, dada $u \in BV(\Omega)$ existen $u_n \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$, tales que

$$u_n \to u \quad \text{en} \quad L^1(\Omega) \tag{2.19}$$

$$\|Du\|(\Omega) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|\, dx. \tag{2.20}$$

Por lo visto anteriormente, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \|D\chi_{E_t(u_n)}\|(\Omega)\, dt. \tag{2.21}$$

Ahora,

$$\int_\Omega |u_n(x) - u(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_\Omega \left| \chi_{E_t(u_n)}(x) - \chi_{E_t(u)}(x) \right| dx \right) dt.$$

Luego, teniendo en cuenta (2.19),

$$\chi_{E_t(u_n)} \to \chi_{E_t(u)} \quad \text{en} \quad L^1(\Omega) \quad \text{para casi todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entonces, por la semicontinuidad inferior de la variación,

$$\|D\chi_{E_t(u)}\|(\Omega) \leq \liminf_{n\to\infty} \|D\chi_{E_t(u_n)}\|(\Omega).$$

Por tanto, por el Lema de Fatou, (2.20) y (2.21), obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|D\chi_{E_t(u)}\|(\Omega)\, dt \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \|D\chi_{E_t(u_n)}\|(\Omega)\, dt$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|\, dx = \|Du\|(\Omega),$$

con lo que teniendo en cuenta (2.17) concluimos la prueba. □

Teorema 2.12. *(***Desigualdad Isoperimétrica***) Sea E un conjunto de Caccioppoli acotado en $\mathbb{R}^N$. Entonces,*

$$\mathcal{L}^N(E)^{(N-1)/N} \leq I(N)\, Per(E), \tag{2.22}$$

con $I(N) = S(N)$.

Demostración. Como $\chi_E \in BV(\mathbb{R}^N)$, basta con aplicar la desigualdad de Sobolev (2.6) a la función χ_E. $\square$

Nota 2.13. Hemos visto que la desigualdad isoperimétrica (2.22) es consecuencia de la desigualdad de Sobolev (2.6). Veamos que el recíproco también es cierto. Sea T_k el operador de truncamiento a niveles k y $-k$, *i.e.*,

$$T_k(r) := \begin{cases} r & \text{si } \ |r| \leq k \\ k\,\mathrm{sign}(r)k & \text{si } \ |r| > k. \end{cases}$$

Consideremos la función

$$f(t) := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |T_t(u)|^{N/(N-1)}\,dx \right)^{(N-1)/N}.$$

Para cada $h > 0$ tenemos que

$$|T_{t+h}(u)| \leq |T_t(u)| h \chi_{E_t(u)},$$

con lo que

$$f(t+h) \leq f(t) + h \left(\mathcal{L}^N(E_t(u))\right)^{(N-1)/N}.$$

De donde se deduce que

$$f'(t) \leq \left(\mathcal{L}^N(E_t(u)) \right)^{(N-1)/N}.$$

Entonces, teniendo en cuenta la fórmula coárea, de (2.22) se deduce que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{N/(N-1)}\,dx \right)^{(N-1)/N} = f(\infty) - f(0) = \int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \left(\mathcal{L}^N(E_t(u)) \right)^{(N-1)/N} \leq I(N) \int_0^{+\infty} \mathrm{Per}(E_t(u))\,dt = I(N)\|Du\|(\mathbb{R}^N).$$

Con un argumento de simetrización se puede probar que la mejor constante $I(N)$ para la desigualdad isoperimétrica es la que se obtiene para la bola unidad, *i.e.*,

$$S(N) = I(N) = \left(\mathcal{L}^N(B(0,1)) \right)^{(N-1)/N} (Per(B(0,1))^{-1} = N^{-1}\sigma_N^{-1/N},$$

siendo σ_N el volumen de la bola unidad de $\mathbb{R}^N$, $\sigma_N = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^N}{\Gamma(N+\frac{1}{2})}$.

También se tienen las siguientes *desigualdades isoperimétricas relativas.*

Teorema 2.14. *Sea E un conjunto de perímetro localmente finito en $\mathbb{R}^N$. Entonces, existe una constante C_N que sólo depende de la dimensión N, tal que, para cada bola $B(x,r) \subset \mathbb{R}^N$ se cumplen:*

$$\mathcal{L}^N(E \cap B(x,r))\,\mathcal{L}^N(B(x,r) \setminus E) \leq C_N\, r^{N+1} P(E, B(x,r)). \tag{2.23}$$

$$\text{mín}\{\mathcal{L}^N(E \cap B(x,r)),\, \mathcal{L}^N(B(x,r) \setminus E)\} \leq C_N\, r P(E, B(x,r)). \tag{2.24}$$

Demostración. Como el valor medio de $u := \chi_{E \cap B(x,r)}$ sobre $B(x,r)$ viene dado por

$$(u)x, r = \frac{\mathcal{L}^N(E \cap B(x,r))}{\mathcal{L}^N(B(x,r))}$$

e

$$\int_{B(x,r)} |u - (u)_{x,r}|\, dy = 2\frac{\mathcal{L}^N(E \cap B(x,r))\,\mathcal{L}^N(B(x,r) \setminus E)}{\mathcal{L}^N(B(x,r))},$$

aplicando la desigualdad (2.9) obtenemos que

$$2\frac{\mathcal{L}^N(E \cap B(x,r))\,\mathcal{L}^N(B(x,r) \setminus E)}{\mathcal{L}^N(B(x,r))} \leq C(N)\, r P(E, B(x,r)), \tag{2.25}$$

de donde se deduce (2.23). Por otra parte, de (2.25) se deduce que

$$2\frac{\mathcal{L}^N(E \cap B(x,r))}{\mathcal{L}^N(B(x,r))}\left(1 - \frac{\mathcal{L}^N(E \cap B(x,r))}{\mathcal{L}^N(B(x,r))}\right)$$

$$\leq C(N)\, r P(E, B(x,r))\mathcal{L}^N(B(x,r)).$$

De aquí, como

$$\frac{\mathcal{L}^N(E \cap B(x,r))}{\mathcal{L}^N(B(x,r))} \in [0,1]$$

y $\text{mín}\{t, 1-t\} \leq 2t(1-t)$, se tiene que

$$\text{mín}\left\{\frac{\mathcal{L}^N(E \cap B(x,r))}{\mathcal{L}^N(B(x,r))}, 1 - \frac{\mathcal{L}^N(E \cap B(x,r))}{\mathcal{L}^N(B(x,r))}\right\}$$

$$\leq C(N)\, r P(E, B(x,r))\mathcal{L}^N(B(x,r)),$$

de donde se deduce (2.24). □

El concepto de traza para las funciones de los espacios de Sobolev se puede extender al contexto más general de las funciones de variación acotada. Se tiene el siguiente resultado, cuya demostración se encuentra por ejemplo en [21].

Teorema 2.15. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado con frontera Lipschitz continua. Existe un operador lineal acotado y sobreyectivo $T : BV(\Omega) \to L^1(\partial\Omega, \mathcal{H}^{N-1})$ tal que*

$$\int_\Omega u\, div\, \varphi\ dx = -\int_\Omega \varphi \cdot Du + \int_{\partial\Omega} (\varphi \cdot \nu) T(u)\ d\mathcal{H}^{N-1} \tag{2.26}$$

para cada $u \in BV(\Omega)$ *y* $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$*, siendo* ν *la normal exterior unitaria a* $\partial\Omega$*. Además se tiene que para* $\mathcal{H}^{N-1}$*-c.p.p.* $x \in \partial\Omega$*,*

$$T(u)(x) = \lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)\cap\Omega} u(y)\, dy.$$

A la función $T(u)$ se le denomina la *traza* de u sobre $\partial\Omega$. En el caso en que $u \in W^{1,1}(\Omega)$, se tiene que $T(u) = \gamma(u)$, siendo γ el operador traza definido en $W^{1,1}(\Omega)$.

Teorema 2.16. *(***Extensión***) Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un abierto acotado de clase* C^1*. Sean* $u_1 \in BV(\Omega)$*,* $u_2 \in BV(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega})$*. Definimos*

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u_1(x) & x \in \Omega \\ \\ u_2(x) & x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Entonces, $\tilde{u} \in BV(\mathbb{R}^N)$ *y*

$$\|D\tilde{u}\|(\mathbb{R}^N) = \|Du_1\|(\Omega) + \|Du_2\|(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}) + \int_{\partial\Omega} |T(u_1) - T(u_2)|\, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Demostración. Sea $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N.\mathbb{R}^N)$ con $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Entonces, teniendo en cuenta el Teorema 2.15, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}\, div\, \varphi\, dx &= \int_\Omega u_1\, div\, \varphi\, dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{\Omega}} u_2\, div\, \varphi\, dx \\ = -\int_\Omega \varphi \cdot Du_1 &- \int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{\Omega}} \varphi \cdot Du_2 + \int_{\partial\Omega} (T(u_1) - T(u_2))\varphi \cdot \nu\, d\mathcal{H}^{N-1} \\ &\leq \|Du_1\|(\Omega) + \|Du_2\|(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}) + \int_{\partial\Omega} |T(u_1) - T(u_2)|\, d\mathcal{H}^{N-1}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\tilde{u} \in BV(\mathbb{R}^N)$ y además

$$\|D\tilde{u}\|(\mathbb{R}^N) \leq \|Du_1\|(\Omega) + \|Du_2\|(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}) + \int_{\partial\Omega} |T(u_1) - T(u_2)|\, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Para demostrar la igualdad, observemos primeramente que para cada $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N.\mathbb{R}^N)$ se tiene que

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \cdot D\tilde{u} &= -\int_\Omega \varphi \cdot Du_1 - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{\Omega}} \varphi \cdot Du_2 \\ &+ \int_{\partial\Omega} (T(u-1) - T(u_2))\, \varphi \cdot \nu\, d\mathcal{H}^{N-1}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Por tanto,

$$D\tilde{u} = \begin{cases} Du_1 & \text{sobre } \Omega \\ \\ Du_2 & \text{sobre } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Entonces, teniendo en cuenta (2.27), se tiene que

$$-\int_{\partial\Omega} \varphi D\tilde{u} = \int_{\partial\Omega} (T(u-1) - T(u_2))\, \varphi \cdot \nu \; d\mathcal{H}^{N-1},$$

con lo que

$$\|D\tilde{u}\|(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} |T(u_1) - T(u_2)|\, d\mathcal{H}^{N-1},$$

y de aquí se deduce la igualdad. □

Corolario 2.17. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de clase C^1. Sea $u \in BV(\Omega)$. Definimos*

$$E(u)(x) := \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Entonces, $E(u) \in BV(\mathbb{R}^N)$ y

$$\|DE(u)\|(\mathbb{R}^N) = \|Du\|(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |T(u)|\, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

En particular, Ω tiene perímetro finito y

$$Per(\Omega) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega).$$

Demostración. La primera parte es consecuencia inmediata del resultado anterior y para demostrar la última parte basta con aplicar la primera a $u = \chi_\Omega$. □

Teorema 2.18. *(***Teorema de inmersión***) Supongamos que $N \geq 2$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de clase C^1. Entonces la inmersión $BV(\Omega) \hookrightarrow L^{N/N-1}(\Omega)$ es continua, siendo compacta en $L^p(\Omega)$ para cada $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$.*

Demostración. Teniendo en cuenta el corolario anterior, si aplicamos (2.6) a $E(u)$, nos queda que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{N/N-1}(\Omega)} &= \|E(u)\|_{L^{N/N-1}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|DE(u)\|(\mathbb{R}^N) \\ &= C\bigg(\|Du\|(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |T(u)|\, d\mathcal{H}^{N-1}\bigg). \end{aligned}$$

De aquí, teniendo en cuenta la continuidad del operador traza se obtiene la inmersión continua $BV(\Omega) \hookrightarrow L^{N/N-1}(\Omega)$. Ahora, por el Corolario 2.5, tenemos que la inmersión $BV(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ es compacta. Por tanto, aplicando la desigualdad de Hölder, obtenemos que la inmersión $BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es compacta para cada $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$. □

Capítulo 3

Una Fórmula de Green para Funciones de Variación Acotada

Este Capítulo está dedicado a establecer una fórmula de Green para funciones de variación acotada debido a G. Anzellotti [7].

3.1. Traza de la componente normal de ciertos campos vectoriales

Es bien conocido que condiciones de sumabilidad sobre la divergencia de un campo vectorial z en Ω da lugar a propiedades de traza de la componente normal de z sobre $\partial\Omega$. En esta Sección vamos a definir una función $[z,\nu] \in L^\infty(\partial\Omega)$ asociadad a cada campo vectorial $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $\operatorname{div}(z)$ es una medida acotada en Ω.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ y $1 \leq p \leq N$, $\frac{N}{N-1} \leq q \leq \infty$. Consideraremos los siguientes espacios:

$$BV(\Omega)_q := BV(\Omega) \cap L^q(\Omega)$$
$$BV(\Omega)_c := BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \cap C(\Omega)$$
$$X(\Omega)_p := \{z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \ : \ \operatorname{div}(z) \in L^p(\Omega)\}$$
$$X(\Omega)_\mu := \{z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \ : \ \operatorname{div}(z) \text{ es una medida acotada en } \Omega\}.$$

En el teorema siguiente definimos un acoplamiento $\langle z, u\rangle_{\partial\Omega}$, para $z \in X(\Omega)_\mu$ y $u \in BV(\Omega)_c$. Necesitamos el siguiente resultado, que se puede obtener por medio de la técnica usado por Gagliardo en [25] para probar el teorema de extensión $L^1(\partial\Omega) \to W^{1,1}(\Omega)$.

Lema 3.1. *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera Lipschitz continua. Entonces, para cada función $u \in L^1(\partial\Omega)$ y cada $\epsilon > 0$ existe una función $w \in W^{1,1}(\Omega) \cap C(\Omega)$ tal que*

$$w|_{\partial\Omega} = u$$

$$\int_\Omega |\nabla w|\,dx \le \int_{\partial\Omega} |u|\,d\mathcal{H}^{N-1} + \epsilon$$

$$w(x) = 0 \quad \text{ if } \ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon.$$

Además, fijado $1 \le q < \infty$, se puede encontrar una función w tal que

$$\|w\|_q \le \epsilon.$$

Finalmente, si también se tiene que $u \in L^\infty(\partial\Omega)$, se puede encontrar w satisfaciendo

$$\|w\|_\infty \le \|u\|_\infty.$$

Teorema 3.2. *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera $\partial\Omega$ Lipschitz continua. Denotamos por $\nu(x)$ la normal exterior unitaria a $\partial\Omega$. Entonces existe una aplicación bilineal $\langle z, u\rangle_{\partial\Omega} : X(\Omega)_\mu \times BV(\Omega)_c \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\langle z, u\rangle_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} u(x) z(x)\cdot \nu(x)\ d\mathcal{H}^{N-1} \qquad \text{si} \ \ z \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \tag{3.1}$$

$$|\langle z, u\rangle_{\partial\Omega}| \le \|z\|_\infty \int_{\partial\Omega} |u(x)|\ d\mathcal{H}^{N-1} \qquad \text{para todo} \ \ z, u. \tag{3.2}$$

Demostración. Para $u \in BV(\Omega)_c \cap W^{1,1}(\Omega)$ y $z \in X(\Omega)_\mu$, definimos

$$\langle z, u\rangle_{\partial\Omega} := \int_\Omega u\,\mathrm{div}(z) + \int_\Omega z\cdot\nabla u\,dx.$$

Veamos que si $u, v \in BV(\Omega)_c \cap W^{1,1}(\Omega)$ y $u = v$ sobre $\partial\Omega$ entonces se tiene que

$$\langle z, u\rangle_{\partial\Omega} = \langle z, v\rangle_{\partial\Omega} \qquad \text{para todo} \ \ z \in X(\Omega)_\mu.$$

En efecto, por técnicas estándar en la teoría de espacios de Sobolev, podemos encontrar funciones $g_i \in \mathcal{D}(\Omega)$ tales que, para todo $z \in X(\Omega)_\mu$, se tiene que

$$\langle z, u - v\rangle_{\partial\Omega} = \int_\Omega (u - v)\,\mathrm{div}(z) + \int_\Omega z\cdot\nabla(u - v)\,dx$$

$$= \lim_{i\to\infty}\left(\int_\Omega g_i\,\mathrm{div}(z) + \int_\Omega z\cdot\nabla g_i\,dx\right) = 0.$$

Definimos $\langle z, u\rangle_{\partial\Omega}$ para toda $u \in BV(\Omega)_c$ como

$$\langle z, u\rangle_{\partial\Omega} = \langle z, w\rangle_{\partial\Omega},$$

siendo w cualquier función de $BV(\Omega)_c \cap W^{1,1}(\Omega)$ tal que $u = w$ sobre $\partial\Omega$. Esta definición es correcta en vista de la anterior observación y del Lema 3.1.

Para probar (3.2), tomamos una sucesión $u_n \in BV(\Omega)_c \cap C^\infty(\Omega)$ convergiendo a u como en el Teorema 2.4 y obtenemos que

$$|\langle z, u\rangle_{\partial\Omega}| = |\langle z, u_n\rangle_{\partial\Omega}| \leq \left|\int_\Omega u_n \operatorname{div}(z)\right| + \|z\|_\infty \int_\Omega |\nabla u_n|\, dx$$

para todo z y para todo n.

Por tanto, tomando límites cuando $n \to \infty$ tenemos que

$$|\langle z, u\rangle_{\partial\Omega}| \leq \left|\int_\Omega u \operatorname{div}(z)\right| + \|z\|_\infty \int_\Omega \|Du\|.$$

Ahora, fijado un $\epsilon > 0$ consideramos una función w como en el Lema 3.1. Entonces

$$|\langle z, u\rangle_{\partial\Omega}| = |\langle z, w\rangle_{\partial\Omega}| \leq \|w\|_\infty \int_{\Omega\setminus\Omega_\epsilon} |\operatorname{div}(z)| + \|z\|_\infty \left(\int_{\partial\Omega} |u|\, dx + \epsilon\right),$$

siendo $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega \ : \ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$.

Puesto que $\operatorname{div}(z)$ es una medida de variación total acotada en Ω,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\Omega\setminus\Omega_\epsilon} d|\operatorname{div}(z)| = 0.$$

Consecuentemente, (3.2) se cumple.

Teorema 3.3. *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera $\partial\Omega$ Lipschitz continua. Entonces existe un operador lineal $\gamma : X(\Omega)_\mu \to L^\infty(\partial\Omega)$ tal que*

$$\|\gamma(z)\|_\infty \leq \|z\|_\infty \tag{3.3}$$

$$\langle z, u\rangle_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \gamma(z)(x) u(x)\, d\mathcal{H}^{N-1} \qquad \text{para todo} \quad u \in BV(\Omega)_c \tag{3.4}$$

$$\gamma(z)(x) = z(x)\cdot\nu(x) \qquad \text{para todo} \quad x \in \partial\Omega \ \text{ si } \ z \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N). \tag{3.5}$$

La función $\gamma(z)$ es una traza débil sobre $\partial\Omega$ de la componente normal de z. Denotaremos a $\gamma(z)$ como $[z,\nu]$.

Demostración. Fijemos un $z \in X(\Omega)_\mu$. Consideramos el funcional $F : L^1(\partial\Omega) \to \mathbb{R}$ definido como

$$F(u) := \langle z, w\rangle_{\partial\Omega},$$

donde $w \in BV(\Omega)_c$ es tal que $w|_{\partial\Omega} = u$.

Por la estimación (3.2),

$$|F(u)| \leq \|z\|_\infty \|u\|_1.$$

Por tanto existe una función $\gamma(z) \in L^{\infty}(\partial\Omega)$ tal que

$$F(u) = \int_{\partial\Omega} \gamma(z)(x)u(x)\, d\mathcal{H}^{N-1}$$

y el resultado queda demostrado. □

Obviamente, $X(\Omega)_p \subset X(\Omega)_\mu$ para todo $p \geq 1$ y consecuentemente, la traza $[z,\nu]$ está definida para todo $z \in X(\Omega)_p$.

3.2. La medida (z, Du)

Aproximando por funciones suaves y aplicando la fórmula de Green se deduce fácilmente el siguiente resultado.

Proposición 3.4. *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera $\partial\Omega$ Lipschitz continua y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces, para todo $z \in X(\Omega)_p$ y $u \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^{p'}(\Omega)$, se tiene que*

$$\int_\Omega u \operatorname{div}(z)\, dx + \int_\Omega z \cdot \nabla u\, dx = \int_{\partial\Omega} [z,\nu](x)u(x)\, d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{3.6}$$

De ahora en adelante consideraremos pares (z, u) tales que cumplen alguna de las condiciones siguientes:

$$\begin{cases} a)\ u \in BV(\Omega)_{p'},\ z \in X(\Omega)_p \quad \text{y} \quad 1 < p \leq N; \\ \\ b)\ u \in BV(\Omega)_\infty,\ z \in X(\Omega)_1; \\ \\ c)\ u \in BV(\Omega)_c,\ z \in X(\Omega)_\mu. \end{cases} \tag{3.7}$$

Definición 3.5. Sean z, u cumpliendo una de las condiciones de (3.7). Entonces, definimos el funcional $(z, Du) : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ como

$$\langle (z, Du), \varphi\rangle := -\int_\Omega u\varphi \operatorname{div}(z)\, dx - \int_\Omega uz \cdot \nabla\varphi\, dx.$$

Teorema 3.6. *Para todo abierto $U \subset \Omega$ y para toda función $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, se tiene que*

$$|\langle (z, Du), \varphi\rangle| \leq \|\varphi\|_\infty \, \|z\|_{L^\infty(U)} \int_U |Du|, \tag{3.8}$$

consecuentemente (z, Du) es una medida de Radon en Ω.

Demostración. Tomemos una sucesión $u_n \in C^\infty(\Omega)$ convergiendo a u como en el Teorema 2.4. Dada $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ consideremos un abierto V tal que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset V \subset\subset U$. Entonces,

$$|\langle (z, Du_n), \varphi\rangle| \leq \|\varphi\|_\infty \, \|z\|_{L^\infty(U)} \int_V |Du_n| \quad \text{para todo } \ n \in \mathbb{N}.$$

De aquí, tomando límites cuando $n \to \infty$ se sigue el resultado. $\square$

Denotaremos por $|(z, Du)|$ la variación total de la medida (z, Du) y por $\int_B |(z, Du)|$, $\int_B (z, Du)$ el valor de estas medidas en cada conjunto de Borel $B \subset \Omega$.

Como consecuencia del Teorema anterior se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.7. *Las medidas (z, Du), $|(z, Du)|$ son absolutamente continuas con respecto a la medida $\|Du\|$ y además*

$$\left| \int_B (z, Du) \right| \leq \int_B |(z, Du)| \leq \|z\|_{L^\infty(U)} \int_B |Du|$$

para cada conjunto de Borel B y para cada conjunto abierto U tal que $B \subset U \subset \Omega$. Además, por el Teorema de Radon-Nikodym, existe una función $\|Du\|$-medible

$$\theta(z, Du, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$$

tal que

$$\int_B (z, Du) = \int_B \theta(z, Du, x)\, |Du| \qquad \text{para todo conunto de Borel} \quad B \subset \Omega$$

y

$$\|\theta(z, Du, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega, \|Du\|)} \leq \|z\|_\infty.$$

Asumamos que u, z satisfacen alguna de las condiciones (3.7). Escribiendo

$$z \cdot D^s u := (z, Du) - (z \cdot \nabla u)\, d\mathcal{L}^N,$$

tenemos que $z \cdot D^s u$ es una medida acotada. Además, con un argumento de aproximación como el usado en la demostración de Teorema 3.6, tenemos que $z \cdot D^s u$ es absolutamente continua con respecto a la medida $\|D^s u\|$ (y, por tanto, es una medida singular respecto a la medida $\mathcal{L}^N$), y

$$|z \cdot D^s u| \leq \|z\|_\infty |D^s u|. \tag{3.9}$$

3.3. La fórmula de Green

Lema 3.8. *Asumamos que u, z satisfacen una de las condiciones de (3.7). Sea $u_n \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ convergiendo a u como en el Teorema 2.4. Entonces se tiene que*

$$\int_\Omega z \cdot \nabla u_n \, dx \to \int_\Omega (z, Du).$$

Demostración. Dado un $\epsilon > 0$, tomamos un abierto $U \subset\subset \Omega$ tal que

$$\int_{\Omega \setminus U} |Du| < \epsilon.$$

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi(x) = 1$ en U y $0 \leq \varphi \leq 1$ en Ω.

Entonces,

$$\left| \int_{\Omega} (z, Du_n) - \int_{\Omega} (z, Du) \right| \leq$$

$$|\langle (z, Du_n), \varphi \rangle - \langle (z, Du), \varphi \rangle| + \int_{\Omega} |(z, Du_n)|(1 - \varphi) + \int_{\Omega} |(z, Du)|(1 - \varphi).$$

Puesto que

$$\lim_{n \to \infty} \langle (z, Du_n), \varphi \rangle = \langle (z, Du), \varphi \rangle,$$

$$\limsup_{n \to \infty} \int_{\Omega} |(z, Du_n)|(1 - \varphi) \leq \|z\|_\infty \limsup_{n \to \infty} \int_{\Omega \setminus U} |Du_n| < \epsilon \, \|z\|_\infty,$$

$$\int_{\Omega} |(z, Du)|(1 - \varphi) \leq \epsilon \, \|z\|_\infty$$

y ϵ es arbitrario, el lema se sigue. □

Veamos ahora la *fórmula de Green* que relaciona la función $[z, \nu]$ y la medida (z, Du).

Teorema 3.9. *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera $\partial\Omega$ Lipschitz continua y sean z, u cumpliendo una de las condiciones de (3.7). Entonces, se tiene que*

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div}(z) + \int_{\Omega} (z, Du) = \int_{\partial\Omega} [z, \nu] u \, d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{3.10}$$

Demostración. Tomemos una sucesión $u_n \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ convergiendo a u como en el Teorema 2.4. Entonces, por el Lema 3.8 y la Proposición 3.4, tenemos que

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div}(z) + \int_{\Omega} (z, Du) = \lim_{n \to \infty} \left(\int_{\Omega} u_n \operatorname{div}(z) + \int_{\Omega} z \cdot \nabla u_n \, dx \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_{\partial\Omega} [z, \nu] u_n \, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\partial\Omega} [z, \nu] u \, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

□

Nota 3.10. Observar que con una prueba similar a la del teorema anterior, en el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$, se obtiene la siguiente fórmula de integración por partes: para z y w satisfaciendo una de las condiciones de (3.7), se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} w \operatorname{div}(z) + \int_{\mathbb{R}^N} (z, Dw) = 0. \tag{3.11}$$

Capítulo 4

Flujos Gradiente

Uno de los ejemplos más importantes de operadores maximales monótonos en espacios de Hilbert, que proceden de la teoría de la optimización, son las subdiferenciales de funciones convexas que vamos a estudiar en este Capítulo.

En todo este capítulo, H denotará un espacio de Hilbert real, con producto interior $(/)$ y norma $\| \ \|$.

4.1. Funciones convexas en espacios de Hilbert

Una función $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ es *convexa* si

$$\varphi(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha\varphi(u) + (1-\alpha)\varphi(v)$$

para todo $\alpha \in [0,1]$ y $u, v \in H$.

Denotamos

$$D(\varphi) = \{u \in H \ : \ \varphi(u) \neq +\infty\} \quad \text{(dominio efectivo)}.$$

Se dice que φ es propia si $D(\varphi) \neq \emptyset$.

Se dice φ es *semi-contínua inferiormente* (s.c.i) si $u_n \to u$ en H implica que $\varphi(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n)$.

Muchas de las propiedades de φ se reflejan en su *epigrafo*:

$$\operatorname{epi}(\varphi) := \{(u,r) \in H \times \mathbb{R} \ : \ r \geq \varphi(u)\}.$$

φ es convexa si y sólo si $\operatorname{epi}(\varphi)$ es un subconjunto convexo de H; y φ es semi-contínua inferiormente si y sólo si $\operatorname{epi}(\varphi)$ es cerrado.

La *subdiferencial* $\partial\varphi$ de φ es el operador definido por

$$w \in \partial\varphi(z) \iff \varphi(u) \geq \varphi(z) + (w/u - z) \quad \forall\, u \in H.$$

Observar que $0 \in \partial\varphi(z) \iff \varphi(u) \geq \varphi(z) \;\; \forall\, u \in H \iff$

$$\varphi(z) = \min_{u \in D(\varphi)} \varphi(u).$$

Por tanto, tenemos que $0 \in \partial\varphi(z)$ es la *ecuación de Euler* del problema variacional

$$\varphi(z) = \min_{u \in D(\varphi)} \varphi(u).$$

Si $(z,w), (\hat{z}, \hat{w}) \in \partial\varphi$, entonces $\varphi(z) \geq \varphi(\hat{z}) + (\hat{w}/z - \hat{z})$ y $\varphi(\hat{z}) \geq \varphi(z) + (w/\hat{z} - z)$. Sumando estas desigualdades obtenemos que

$$(w - \hat{w}/z - \hat{z}) \geq 0.$$

Por tanto, $\partial\varphi$ es un *operador monótono*.

Sea $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$. La *derivada direccional* $D_v\varphi(u)$ de φ en el punto $u \in D(\varphi)$ en la dirección $v \in H$ se define como

$$D_v\varphi(u) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\varphi(u + \lambda v) - \varphi(u)}{\lambda}$$

cuando el límite existe.

Si existe un $w \in H$ tal que $D_v\varphi(u) = (v/w)$ para todo $v \in H$, entonces se dice que φ es *Gâteaux diferenciable* en u, y a w se le denomina la *derivada de Gâteaux* de φ en u, la cual se denota por $\varphi'(u)$.

Proposición 4.1. *Sea $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ una función convexa propia. Si φ es Gâteaux diferenciable en u, entonces*

$$\partial\varphi(u) = \{\varphi'(u)\}.$$

Demostración. Dado $w \in H$, como φ es convexa, tenemos que

$$(\varphi'(u)/w - u) = D_{w-u}\varphi(u) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\varphi(u + \lambda(w - u)) - \varphi(u)}{\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\varphi(\lambda w + (1 - \lambda)u) - \varphi(u)}{\lambda} \leq \varphi(w) - \varphi(u).$$

Por tanto, $\varphi'(u) \in \partial\varphi(u)$.

Por otra parte, si $v \in \partial\varphi(u)$, dado $w \in H$ y $\lambda > 0$, tenemos

$$\frac{\varphi(u + \lambda w) - \varphi(u)}{\lambda} \geq \frac{1}{\lambda}(v/u + \lambda w - u) = (v/w),$$

de donde se sigue que

$$D_w\varphi(u) \geq (v/w) \quad \forall\, w \in H.$$

Además, tomando $w = -w$, tenemos

$$-D_{-w}\varphi(u) \leq (v/w) \leq D_w\varphi(u).$$

Por tanto, puesto que φ es Gâteaux diferenciable en u, obtenemos

$$(\varphi'(u)/w) = -(\varphi'(u)/-w) \leq (v/w) \leq (\varphi'(u)/w) \quad \forall\, w \in H,$$

y consecuentemente, $v = \varphi'(u)$.

□

Nota 4.2. Si φ es continua en u, el recíproco también es cierto (ver [16]). En este caso se tiene que

$$\varphi \text{ es Gateaux diferenciable en } u \Leftrightarrow\ \partial\varphi(u) = \{\varphi'(u)\}.$$

Ejemplo 4.3. Si $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ está definida como $\varphi(x) := \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^N$, es fácil ver que

$$\partial\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|} & \text{if } \ x \neq 0 \\ \\ \overline{B_1(0)} & \text{si } \ x = 0. \end{cases}$$

Ejemplo 4.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto acotado con frontera suave. Consideremos el funcional $\varphi : L^2(\Omega) \to]-\infty, +\infty]$ definido por

$$\varphi(u) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 & \text{si } \ u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \\ +\infty & u \in L^2(\Omega) \setminus W_0^{1,2}(\Omega). \end{cases}$$

Entonces,

$$D(\partial\varphi) = W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$$

y

$$v \in \partial\varphi(u) \Leftrightarrow v = -\Delta u.$$

Por tanto, son equivalentes:

(i) u es una solución del problema variacional

$$\varphi(u) = \min_{w \in L^2(\Omega)} \varphi(w).$$

(ii) u es una solución débil del *problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Teorema 4.5. *Sea $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ una función convexa, propia y semicontinua inferiormente. Entonces, para cada $w \in H$ y $\lambda > 0$, el problema*

$$u + \lambda \partial\varphi(u) \ni w$$

tiene una única solución $u \in D(\partial\varphi)$.

Demostración. Dado $w \in H$ y $\lambda > 0$, consideramos el funcional $J : H \to]-\infty, +\infty]$ definido como

$$J(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2 + \lambda\varphi(u) - (u/w).$$

Queremos probar que J toma su mínimo en H. Veamos primeramente que J es débilmente semicontinuo inferiormente, es decir que se cumple,

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ debilmente en } H \ \Rightarrow \ J(u) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n). \tag{4.1}$$

Obviamente, es suficiente con demostrar (4.1) para φ. Sea u_{n_k} tal que

$$l = \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n) = \lim_{k\to\infty} \varphi(u_{n_k}).$$

Para cada $\epsilon > 0$ el conjunto

$$K_\epsilon := \{w \in H \ : \ \varphi(w) \leq l + \epsilon\}$$

es un cerrado convexo, y consecuentemente es un débil cerrado.

Puesto que todos, salvo un número finito de puntos de $\{u_{n_k}\}$ están en K_ϵ, $u \in K_\epsilon$, y consecuentemente

$$\varphi(u) \leq l + \epsilon = \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n) + \epsilon.$$

Puesto que la anterior desigualdad es cierta para todo $\epsilon > 0$, se cumple (4.1).

Veamos ahora que

$$\varphi(u) \geq -C - C\|u\| \qquad \forall\, u \in H \tag{4.2}$$

para alguna constante $C > 0$.

Supongamos por reducción al absurdo que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $u_n \in H$ tal que

$$\varphi(u_n) \leq -n - n\|u_n\| \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Si la sucesión $\{u_n\}$ es acotada en H, existe una subsucesión débilmente convergente $u_{n_k} \rightharpoonup u$. Pero entonces, (4.1) y (4.3) implican la contradicción $\varphi(u) = -\infty$. Por tanto podemos asumir que, pasando a una subsucesión si es necesario, $\|u_n\| \to \infty$.

Seleccionemos un $u_0 \in H$ tal que $\varphi(u_0) < \infty$ y ponemos

$$v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|} + \left(1 - \frac{1}{\|u_n\|}\right) u_0.$$

Entonces, por la convexidad de φ, tenemos que

$$\varphi(v_n) \leq \frac{1}{\|u_n\|}\varphi(u_n) + \left(1 - \frac{1}{\|u_n\|}\right)\varphi(u_0)$$

$$\leq \frac{1}{\|u_n\|}(-n - n\|u_n\|) + |\varphi(u_0)| \leq -n + |\varphi(u_0)|.$$

Como $\{v_n\}$ es acotada, podemos extraer una subsucesión débilmente convergente $v_{n_k} \rightharpoonup v$, y llegar de nuevo a la contradicción $\varphi(v) = -\infty$. Consecuentemente hemos establecido (4.2).

Elegimos una sucesión minimizante $\{u_n\}$ así que

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{v\in H} J(v) = m.$$

Por (4.2), no es difícil ver que $m \in \mathbb{R}$. Entonces, teniendo en cuenta (4.2), existe $M > 0$, tal que

$$M \geq J(u_n) \geq \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - (\lambda C + \|w\|)\|u_n\| - \lambda C$$

$$= \frac{1}{2}(\|u_n\| - (\lambda C + \|w\|))^2 - \lambda C - \frac{1}{2}(\lambda C + \|w\|)^2.$$

Por tanto, tenemos que $\{u_n\}$ es acotada. Podemos entonces extraer una subsucesión débilmente convergente $u_{n_k} \rightharpoonup u$. Entonces, por (1) J tiene un ínfimo en u. Consecuentemente, $0 \in \partial J(u)$.

Es fácil ver que $\partial J(u) = u - w + \lambda\partial\varphi(u)$, y así

$$u + \lambda\partial\varphi(u) \ni w.$$

Finalmente, para ver la unicidad, supongamos que también

$$\overline{u} + \lambda\partial\varphi(\overline{u}) \ni w.$$

Entonces, $u + \lambda v = w$, $\overline{u} + \lambda\overline{v} = w$ para $v \in \partial\varphi(u)$, $\overline{v} \in \partial\varphi(\overline{u})$. Por tanto, por la monotonía de $\partial\varphi$, tenemos que

$$0 \leq (u - \overline{u}/v - \overline{v}) = \left(u - \overline{u}/\frac{\overline{u}}{\lambda} - \frac{u}{\lambda}\right) = -\frac{1}{\lambda}\|u - \overline{u}\|^2.$$

Puesto que $\lambda > 0$, $u = \overline{u}$. $\square$

Definición 4.6. Sea $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ una función convexa, propia y semicontinua inferiormente. Para cada $\lambda > 0$ se define la *resolvente* J_λ^φ de $\partial\varphi$ como el operador $J_\lambda^\varphi : H \to D(\partial\varphi)$ definido por $J_\lambda^\varphi(w) := u$, donde u es la única solución de

$$u + \lambda\partial\varphi(u) \ni w.$$

El *aproximante de Yosida* es el operador $A_\lambda^\varphi : H \to H$ definido por

$$A_\lambda^\varphi(w) := \frac{1}{\lambda}(w - J_\lambda^\varphi(w)).$$

En el siguiente resultado veremos algunas de las propiedades del operador resolvente y de los aproximantes de Yosida.

Teorema 4.7. *Sea $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ una función convexa, propia y semicontinua inferiormente. Para $\lambda > 0$, sea $J_\lambda = J_\lambda^\varphi$ y $A_\lambda = A_\lambda^\varphi$. Se cumple que:*

(i) $\|J_\lambda(w) - J_\lambda(\overline{w})\| \leq \|w - \overline{w}\|$ *para todo* $w, \overline{w} \in H$.

(ii) $\|A_\lambda(w) - A_\lambda(\overline{w})\| \leq \frac{2}{\lambda}\|w - \overline{w}\|$ *para todo* $w, \overline{w} \in H$.

(iii) $0 \leq (w - \overline{w}/A_\lambda(w) - A_\lambda)$, *i.e.,* A_λ *es un operador monótono.*

(iv) $A_\lambda(w) \in \partial\varphi(J_\lambda(w))$ *para todo* $w \in H$.

(v) Si $w \in D(\partial\varphi)$, *entonces*

$$\sup_{\lambda>0} \|A_\lambda(w)\| \leq |(\partial\varphi)^0(w)| := \min\{\|u\| \ : \ u \in \partial\varphi(w)\}.$$

(vi) Para cada $w \in \overline{D(\partial\varphi)}$,

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} J_\lambda(w) = w.$$

Demostración. (i) Sean $u = J_\lambda(w)$, $\overline{u} = J_\lambda(\overline{w})$. Entonces $u + \lambda v = w$, $\overline{u} + \lambda\overline{v} = \overline{w}$ para algún $v \in \partial\varphi(u)$, $\overline{v} \in \partial\varphi(\overline{u})$.

Por tanto

$$\|w - \overline{w}\|^2 = \|u - \overline{u} + \lambda(v - \overline{v})\|^2$$
$$= \|u - \overline{u}\|^2 + 2\lambda(u - \overline{u}/v - \overline{v}) + \lambda^2\|v - \overline{v}\|^2 \geq \|u - \overline{u}\|^2.$$

Esto prueba (i)

La afirmación (ii) se sigue de (i) y de la definición de los aproximantes de Yosida.

(iii) Teniendo en cuenta (i), se tiene que

$$(w - \overline{w}/A_\lambda(w) - A_\lambda) = \frac{1}{\lambda}(w - \overline{w}/w - \overline{w} - (J_\lambda(w) - J_\lambda(\overline{w}))$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\|w-\overline{w}\|^2 - (w-\overline{w}/-(J_\lambda(w)-J_\lambda(\overline{w}))\right)$$

$$\geq \frac{1}{\lambda}\left(\|w-\overline{w}\|^2 - \|w-\overline{w}\|\|J_\lambda(w)-J_\lambda(\overline{w}\|\right) \geq 0.$$

(iv) Notar que $u = J_\lambda(w)$ si y sólo si $u+\lambda v = w$ para algún $v \in \partial\varphi(u) = \partial\varphi(J_\lambda(w))$. Pero

$$v = \frac{1}{\lambda}(w-u) = \frac{1}{\lambda}(w - J_\lambda(w)) = A_\lambda(w).$$

(v) Asumamos que $w \in D(\partial\varphi)$, $u \in \partial\varphi(w)$. Sea $z = J_\lambda(w)$, así que $z+\lambda v = w$, donde $v \in \partial\varphi(z)$. De la monotonía de se sigue que

$$0 \leq (w-z/u-v) = \left(w - J_\lambda(w)/u - \frac{1}{\lambda}(w-J_\lambda(w))\right) = (\lambda A_\lambda(w)/u - A_\lambda(w)).$$

Consecuentemente

$$\lambda\|A_\lambda(w)\|^2 \leq (\lambda A_\lambda(w)/u) \leq \lambda\|A_\lambda(w)\|\,\|u\|,$$

y así

$$\|A_\lambda(w)\| \leq \|u\|.$$

Puesto que esta estimación es válida para todo $\lambda > 0$ y $u \in \partial\varphi(w)$, se cumple (v).

(vi) Si $w \in D(\partial\varphi)$, por (v), tenemos

$$\|J_\lambda(w) - w\| = \lambda\|A_\lambda(w)\| \leq \lambda|(\partial\varphi)^0(w)|,$$

y consecuentemente

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} J_\lambda(w) = w.$$

Sea $w \in \overline{D(\partial\varphi)}$. Dado $\epsilon > 0$ existe $\overline{w} \in D(\partial\varphi)$ tal que $\|w-\overline{w}\| \leq \frac{\epsilon}{4}$.

Ahora, como $\overline{w} \in D(\partial\varphi)$, existe $\lambda_0 >$ tal que $\|J_\lambda(\overline{w}) - \overline{w}\| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Entonces,

$$\|J_\lambda(w) - w\| \leq \|J_\lambda(w) - J_\lambda(\overline{w})\| + \|J_\lambda(\overline{w}) - \overline{w}\| + \|w - \overline{w}\|$$

$$\leq 2\|w-\overline{w}\| + \|J_\lambda(\overline{w}) - \overline{w}\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

4.2. Flujos gradiente en espacios de Hilbert

Muchos problemas en Física y Mecánica se pueden escribir como un un sistema gradiente

$$\begin{cases} u'(t) = -\nabla V(u(t)) & 0 < t < T \\ \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

donde $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es un potencial.

En esta sección vamos a considerar la generalización infinito dimensional (en el contexto de los espacios de Hilbert) de los sistemas gradiente. Nos proponemos estudiar ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{cases} u'(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni 0 & t \geq 0 \\ \\ u(0) = u_0 \in H, \end{cases} \tag{4.4}$$

donde H es un espacio de Hilbert y $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ es una función convexa y semicontinua inferiormente. A un problema de la forma (5.19) se le denomina un *flujo gradiente*. Muchas ecuaciones en derivadas parciales se pueden reescribir como un flujo gradiente en un espacio de Hilbert de funciones. Por ejemplo, como vimos en el Ejemplo 4.4, si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera suave, y consideramos el funcional $\varphi : L^2(\Omega) \to] - \infty, +\infty]$ definido como

$$\varphi(u) := \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 & \text{si} \ \ u \in W_0^{1,2}(\Omega) \\ \\ +\infty & \text{si} \quad u \in L^2(\Omega) \setminus W_0^{1,2}(\Omega). \end{cases}$$

Entonces,

$$D(\partial\varphi) = W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$$

y

$$v \in \partial\varphi(u) \Leftrightarrow v = -\Delta u.$$

Por tanto, el problema de valores iniciales para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{en} \ \ (0,\infty) \times \Omega \\ \\ u = 0 & \text{sobre} \ \ (0,\infty) \times \partial\Omega \\ \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

puede ser reescrito como un flujo gradiente en el espacio $L^2(\Omega)$.

Tenemos el siguiente resultado sobre existencia y unicidad de soluciones para los flujos gradiente.

Teorema 4.8. *Sea $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ una función convexa, propia semicontinua inferiormente. Para cada $u_0 \in D(\partial\varphi)$ existe una única función $u \in C([0,\infty[, H)$, con $u' \in L^\infty(0,\infty; H)$ tal que $u(0) = u_0$, $u(t) \in D(\partial\varphi)$ para cada $t > 0$ y*

$$u'(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni 0, \qquad \text{c.p.p.} \quad t \geq 0.$$

Demostración. Para $\lambda > 0$, sea $J_\lambda = J_\lambda^\varphi$ la resolvente de $\partial\varphi$ y $A_\lambda = A_\lambda^\varphi$ su aproximante de Yosida.

Por el Teorema 4.7 , $A_\lambda : H \to H$ es una aplicación Lipschitz continua, y por tanto, por el clásico Teorema de Picard-Lindelöf existe una única solución $u_\lambda \in C^1([0,\infty[; H)$ del problema

$$\begin{cases} u_\lambda'(t) + A_\lambda(u_\lambda(t)) = 0 & t \geq 0 \\ \\ u_\lambda(0) = u_0. \end{cases}$$

Paso 1 Dada $v \in H$, sea v_λ la solución del problema

$$\begin{cases} v_\lambda'(t) + A_\lambda(v_\lambda(t)) = 0 & t \geq 0 \\ \\ v_\lambda(0) = v. \end{cases}$$

Entonces, por la monotonía de A_λ, tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t) - v_\lambda(t)\|^2$$
$$= (u_\lambda'(t) - v_\lambda'(t)/u_\lambda(t) - v_\lambda)(t) = (-A_\lambda(u_\lambda(t)) + A_\lambda(v_\lambda(t))/u_\lambda(t) - v_\lambda(t)) \leq 0.$$

Por tanto, integrando obtenemos que

$$\|u_\lambda(t) - v_\lambda(t)\| \leq \|u_0 - v\| \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{4.5}$$

En particular, si $h > 0$ y $v = u_\lambda(h)$, por unicidad $v_\lambda(t) = u_\lambda(t+h)$. Consecuentemente, (4.5) implica

$$\|u_\lambda(t+h) - u_\lambda(t)\| \leq \|u_\lambda(h) - u_0\|.$$

Dividiendo por h, haciendo tender $h \to 0$, y teniendo en cuenta (v) del Teorema **??**, obtenemos que

$$\|u_\lambda'(t)\| \leq \|u_\lambda'(0)\| = \|A_\lambda(u_0)\| \leq |(\partial\varphi)^0(u_0)|. \tag{4.6}$$

Paso 2. Tomamos $\lambda, \mu > 0$ y calculamos

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 = (u_\lambda'(t) - u_\mu'(t)/u_\lambda(t) - u_\mu(t)) \\ &= (-A_\lambda(u_\lambda(t)) + A_\mu(u_\mu(t))/u_\lambda(t) - u_\mu(t)). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ahora

$$u_\lambda(t) - u_\mu(t) = (u_\lambda(t) - J_\lambda(u_\lambda(t))) + (J_\lambda(u_\lambda(t)) - J_\mu(u_\mu(t))) + (J_\mu(u_\mu(t)) - u_\mu(t))$$

$$= \lambda A_\lambda(u_\lambda(t)) + J_\lambda(u_\lambda(t)) - J_\mu(u_\mu(t)) - \mu A_\mu(u_\mu(t)).$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned}
&(A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t))/u_\lambda(t) - u_\mu(t)) \\
&= (A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t))/J_\lambda(u_\lambda(t)) - J_\mu(u_\mu(t))) \qquad (4.8)\\
&+(A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t))/\lambda A_\lambda(u_\lambda(t))) - \mu A_\mu(u_\mu(t))).
\end{aligned}$$

Puesto que $A_\lambda(u_\lambda(t)) \in \partial\varphi(J_\lambda(u_\lambda(t)))$ y $A_\mu(u_\mu(t)) \in \partial\varphi(J_\mu(u_\mu(t)))$, la monotonía de $\partial\varphi$ implica que el primer término de la parte derecha de (4.8) es positivo. Por tanto,

$$(A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t))/u_\lambda(t) - u_\mu(t)) \geq$$
$$\lambda\|A_\lambda(u_\lambda(t))\|^2 + \mu\|A_\mu(u_\mu(t))\|^2 - (\lambda+\mu)\|A_\lambda(u_\lambda(t))\|\,\|A_\mu(u_\mu(t))\|.$$

Puesto que

$$(\lambda+\mu)\|A_\lambda(u_\lambda(t))\|\,\|A_\mu(u_\mu(t))\| \leq$$
$$\lambda\left(\|A_\lambda(u_\lambda(t))\|^2 + \frac{1}{4}\|A_\mu(u_\mu(t))\|^2\right) + \mu\left(\|A_\mu(u_\mu(t))\|^2 + \frac{1}{4}\|A_\lambda(u_\lambda(t))\|^2\right)$$

deducimos

$$(A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t))/u_\lambda(t) - u_\mu(t)) \geq -\frac{\lambda}{4}\|A_\mu(u_\mu(t))\|^2 - \frac{\mu}{4}\|A_\lambda(u_\lambda(t))\|^2.$$

Entonces, por (4.6), obtenemos que

$$(A_\lambda(u_\lambda(t)) - A_\mu(u_\mu(t))/u_\lambda(t) - u_\mu(t)) \geq -\frac{\lambda+\mu}{4}|(\partial\varphi)^0(u_0)|.$$

Consecuentemente, por (4.7) y (4.8), obtenemos la desigualdad

$$\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 \leq \frac{\lambda+\mu}{2}|(\partial\varphi)^0(u_0)|$$

y por tanto

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 \leq \frac{\lambda+\mu}{2}t|(\partial\varphi)^0(u_0)| \qquad \forall\ t \geq 0. \tag{4.9}$$

Teniendo en cuenta la estimación (4.9) existe una función $u \in C([0,\infty[, H)$ tal que

$$u_\lambda \to u \quad \text{uniformemente en} \quad C([0,T], H)$$

cuando $\lambda \downarrow 0$, para cada tiempo $T > 0$.

Además la estimación (4.6) implica que

$$u'_\lambda \rightharpoonup u' \quad \text{debilmente en} \quad L^2(0,T;H) \tag{4.10}$$

para cada $T > 0$, y

$$\|u'(t)\| \leq |(\partial\varphi)^0(u_0)| \qquad \text{a.e. } t. \tag{4.11}$$

Paso 3. Debemos probar que $u(t) \in D(\partial\varphi)$ para cada $t \geq 0$ y

$$u'(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni 0, \qquad \text{c.p.p.} \;\; t \geq 0.$$

Ahora, por (4.6)

$$\|J_\lambda(u_\lambda(t)) - u_\lambda(t)\| = \lambda\|A_\lambda u_\lambda(t)\| = \lambda\|u'_\lambda(t)\| \leq \lambda|(\partial\varphi)^0(u_0)|.$$

Por tanto

$$J_\lambda(u_\lambda) \to u \quad \text{uniformemente en} \;\; C([0,T],H), \;\; \forall\, T > 0. \tag{4.12}$$

Por otra parte, para cada$t \geq 0$,

$$-u'_\lambda(t) = A_\lambda(u_\lambda(t)) \in \partial\varphi(J_\lambda(u_\lambda(t))).$$

Por tanto, dado $w \in H$, tenemos

$$\varphi(w) \geq \varphi(J_\lambda(u_\lambda(t))) - (u'_\lambda(t)/w - J_\lambda(u_\lambda(t))).$$

Consecuentemente, si $0 \leq s \leq t$,

$$(t-s)\varphi(w) \geq \int_s^t \varphi(J_\lambda(u_\lambda(\tau)))\, d\tau - \int_s^t (u'_\lambda(\tau)/w - J_\lambda(u_\lambda(\tau)))\, d\tau.$$

En vista de (4.12), la semicontinuidad de φ, y el Lema de Fatou, podemos concluir, haciendo tender $\lambda \downarrow 0$ que

$$(t-s)\varphi(w) \geq \int_s^t \varphi(u(\tau))\, d\tau - \int_s^t (u'(\tau)/w - u(\tau))\, d\tau.$$

Por tanto

$$\varphi(w) \geq \varphi(u(t)) - (u'(t)/w - u(t))$$

si t es un punto de Lebesgue de Lebesgue de u' y de $\varphi(u)$. Consecuentemente, para casi todo $t \geq 0$

$$\varphi(w) \geq \varphi(u(t)) - (u'(t)/w - u(t)) \quad \forall\, w \in H.$$

Por tanto $u(t) \in D(\partial\varphi)$, con

$$u'(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni 0, \qquad \text{for a.e.} \;\; t \geq 0.$$

Finalmente, veamos que $u(t) \in D(\partial\varphi)$ para cada $t \geq 0$. Para ello, fijamos un $t \geq 0$ y elegimos $t_n \to t$ tal que $u(t_n) \in D(\partial\varphi)$, $-u'(t_n) \in \partial\varphi(u(t_n))$. Por (4.11) podemos asumir, pasando a una subsucesión si es necesario, que,

$$u'(t_n) \rightharpoonup v \qquad \text{debilmente en } H.$$

Fijamos $w \in H$. Entonces

$$\varphi(w) \geq \varphi(u(t_n)) - (u'(t_n)/w - u(t_n)).$$

Sea $t_n \to t$ y como $u \in C([0,\infty[, H)$ y φ es semicontinua inferiormente, obtenemos que

$$\varphi(w) \geq \varphi(u(t)) - (v/w - u(t)).$$

Por tanto, $u(t) \in D(\partial\varphi)$ y $-v \in \partial\varphi(u(t))$.
Paso 4. Para probar la unicidad, asumamos que $\overline{u}$ es otra solución. Como $-u'(t) \in \partial\varphi(u(t))$ y $-\overline{u}'(t) \in \partial\varphi(\overline{u}(t))$, tenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t) - \overline{u}(t)\|^2 = (u'(t) - \overline{u}'(t)/u(t) - \overline{u}(t)) \leq 0 \qquad \text{c.p.p. } t \geq 0.$$

Entonces, integrado obtenemos que

$$\|u(t) - \overline{u}(t)\|^2 \leq \|u(0) - \overline{u}(0)\|^2.$$

□

Bajo las hipótesis del teorema anterior, si para cada $u_0 \in D(\partial\varphi)$ definimos

$$S(t)u_0 := u(t) \qquad \forall\, t \geq 0,$$

siendo $u(t)$ la única solución del problema

$$\begin{cases} u'(t) + \partial\varphi(u(t)) \ni 0, & \text{c.p.p. } \; t \geq 0 \\ \\ u(0) = u_0, & \end{cases}$$

tenemos la familia de operadores $(S(t))_{t\geq 0}$ satisfaciendo

(i) $S(0) = I$,

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ para todo $s, t \geq 0$,

(iii) la aplicación $t \mapsto S(t)u_0$ es continua de $[0,\infty[$ en H.

A una familia de operadores $(S(t))_{t\geq 0}$ satisfaciendo las condiciones (i)-(iii) se le denomina un *semigrupo no lineal de operadores*

Como consecuencia del teorema anterior tenemos que

$$\|S(t)u_0 - S(t)\overline{u_0}\| \leq \|u_0 - \overline{u_0}\|, \quad \forall\, t \geq 0, \text{ y } u_0, \overline{u_0} \in D(\partial\varphi).$$

Usando esta desigualdad el semigrupo de operadores no lineales $(S(t))_{t\geq 0}$ se puede extender a $\overline{D(\partial\varphi)}$.

Sea $A \subset H \times H$ un operador (posiblemente multivaluado) en el espacio de Hilbert real H. Decimos que A es *monótono* si

$$(u - \overline{u}/v - \overline{v}) \geq 0 \quad \forall\,(u, \overline{u}), (v, \overline{v}) \in A.$$

Recordemos que habíamos probado que $\partial\varphi$ es un operador monótono. Ahora, si φ es convexa, propia y semicontinua inferiormente, se puede probar que $\partial\varphi$ es *maximal monótono* (ver, [13], [10]), i.e., cada extensión monótona de $\partial\varphi$ coincide con $\partial\varphi$. El siguiente resultado clásico es debido a G. Minty [28].

Teorema 4.9. *(***Teorema de Minty***) Sea A un operador monótono en el espacio de Hilbert real H. Entonces, A es maximal monótono si y sólo si $Ran(I + \lambda A) = H$ para todo $\lambda > 0$.*

Dado un operador $A \subset H \times H$, consideramos el problema abstracto de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) + A(u(t)) \ni 0, & \text{para c.p.p. } t \in (0,T) \\ \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{4.13}$$

Decimos que la función $u \in C([0,T]; H)$ es una *solución fuerte* del problema (4.13) si $u(0) = u_0$, u es derivable c.p.p. $t \in (0,T)$, $u(t) \in D(A)$ y satisface (4.13) para casi todo $t \in (0,T)$.

Nota 4.10. El Teorema 4.8 establece que para cada $u_0 \in D(\partial\varphi)$, $u(t) = S(t)u_0$ es una solución fuerte del problema abstracto de Cauchy asociado con $\partial\varphi$. Ahora, este resultado es también cierto en el caso general en que A es un operador maximal monótono (ver [13], [10]). Además, en el caso $A = \partial\varphi$, con $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ convexa, propia y semicontinua inferiormente, también se tiene que para todo $u_0 \in \overline{D(\partial\varphi)}$, $u(t) = S(t)u_0$ es una solución fuerte (ver [13]).

4.3. El Teorema de Crandall-Liggett

En esta sección vamos a resumir los puntos más importantes de la teoría de semigrupos de operadores no lineales y de las ecuaciones de evolución gobernadas por operadores acretivos. Para un desarrollo más completo de esta teoría referimos al lector a las referencias: [10], [11], [18], [19], [17].

Sea X un espacio de Banach real. La generalización de los Flujos Gradiente en espacios de Hilbert al contexto más general de los espacios de Banach son los problemas de evolución de la forma:

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) \ni f(t) \qquad \text{sobre} \ \ t \in]0, T[\\ \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{4.14}$$

donde $f : (0, T) \to X$ y A es un operador en X, posiblemente multivaluado. A un problema de la forma (4.14) se le denomina un *problema abstracto de Cauchy*, y lo denotaremos como $(\mathrm{CP})_{x,f}$. En el caso homogéneo, es decir, para $f = 0$, escribiremos $(\mathrm{CP})_x$ en lugar de $(\mathrm{CP})_{x,0}$.

Para el problema (4.14) se puede definir solución fuerte de forma similar al caso de espacios de Hilbert. Ahora, en este contexto, no siempre hay soluciones fuertes. La noción de solución adecuada es la de solución leve (*mild solution* en inglés), introducido por M.G. Crandall y T.M. Liggett en [17] y por Ph. Bénilan en [11].

En términos generales, una solución leve del problema

$$u' + Au \ni f \qquad \text{sobre} \ \ [a, b] \tag{4.15}$$

es una función continua $u \in C([a, b]; X)$ que es límite uniforme de soluciones de problemas discretizados en tiempo, dados por esquemas implícitos de Euler de la forma

$$\frac{v(t_i) - v(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} + Av(t_i) \ni f_i,$$

donde f_i son aproximaciones de f cuando $|t_i - t_{i-1}| \to 0$. Tenemos pues que la idea que hay detrás de la noción de solución leve es simple, e incluso clásica desde el punto de vista del análisis numérico. Formalmente, la definición es la siguiente.

Definición 4.11. Sea $\epsilon > 0$. Una *ϵ-discretización* de $u' + Au \ni f$ sobre $[a, b]$ consiste de una partición $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ y una sucesión finita $f_1, f_2, \ldots, f_N$ de elementos de X tales que

$$\begin{array}{l} a \le t_0 < t_1 < \cdots < t_N \le b, \ \ \text{con} \\ t_i - t_{i-1} \le \epsilon, \ i = 1, \ldots, N, \ \ t_0 - a \le \epsilon \ \ \text{y} \ \ b - t_N \le \epsilon. \end{array} \tag{4.16}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f(s) - f_i\| \, ds \le \epsilon. \tag{4.17}$$

Denotaremos a esta discretización por $D_A(t_0, \ldots, t_N; f_1, \ldots, f_N)$.

Una *solución de la discretización* $D_A(t_0, \ldots, t_N; f_1, \ldots, f_N)$ es una función $v : [t_0, t_N] \to X$ constante a trozos cuyos valores $v(t_0) = v_0$, $v(t) = v_i$ para $t \in]t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, N$, satisfacen

$$\frac{v_i - v_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + Av_i \ni f_i, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{4.18}$$

Una *solución leve* de $u' + Au \ni f$ sobre $[a, b]$ es una función continua $u \in C([a, b]; X)$ tal que, para cada $\epsilon > 0$ existe una ϵ-discretización $D_A(t_0, \ldots, t_N; f_1, \ldots, f_N)$ de $u' + Au \ni f$ sobre $[a, b]$ que posee una solución v satisfaciendo

$$\|u(t) - v(t)\| \le \epsilon \qquad \text{para} \ \ t_0 \le t \le t_N.$$

Definición 4.12. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f \in L^1_{loc}(I;X)$. Una *solución leve* de $u' + Au \ni f$ sobre I es una función $u \in C(I;X)$ cuya restricción a cada subintervalo compacto $[a,b]$ de I es una solución leve de $u' + Au \ni f$ sobre $[a,b]$.

Uno puede asociar a cada operador A en X un semigrupo fuertemente continuo $(S^A(t))_{t\geq 0}$ por medio de la siguiente definición:

$$D\left(S^A\right) := \big\{x \in X \ : \ \exists \text{ una única solución leve } u_x \text{ de } u' + Au \ni 0$$
$$\text{sobre } \ (0,+\infty) \text{ con } u_x(0) = x\big\}.$$

Para $t \geq 0$ y $x \in D(S^A)$, escribimos

$$S^A(t)x := u_x(t). \tag{4.19}$$

De las propiedades de las soluciones leves se desprende que $\left(S^A(t)\right)_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo sobre $D(S^A)$.

El concepto de solución leve generaliza al de solución fuerte.

Teorema 4.13. *Sea $f \in L^1_{loc}(I;X)$ y u una solución fuerte de $u' + Au \ni f$ sobre I. Entonces u es una solución leve de $u' + Au \ni f$ sobre I.*

Vamos a introducir la clase de operadores para los cuales se puede obtener existencia y unicidad de soluciones leves. Para ello, como hemos puntualizado antes, se requiere la existencia de soluciones de ecuaciones discretizadas de la forma

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + Ax_i \ni f_i, \qquad i = 1, \ldots, N$$

o equivalentemente

$$x_i + (t_i - t_{i-1})Ax_i \ni (t_i - t_{i-1})f_i + x_{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{4.20}$$

Entonces, para resolver (4.20) de manera única necesitamos que el inverso del operador $(I + \lambda A)$ sea un operador univaluado. Operadores que tienen esta propiedad son los siguientes:

Definición 4.14. Un operador A en X es *acretivo* si

$$\|x - \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x} + \lambda(y - \hat{y})\|, \quad \text{siempre que } \ \lambda > 0 \ \text{ y } \ (x,y), (\hat{x},\hat{y}) \in A.$$

Notar que el operador A es acretivo si y sólo si para $\lambda > 0$ y $z \in X$, $x + \lambda y = z$ tiene a lo más una solución $(x,y) \in A$ y la relación $x + \lambda y = z$, $(x,y) \in A$, $\hat{x} + \lambda\hat{y} = \hat{z}$, $(\hat{x},\hat{y}) \in A$ implica

$$\|x - \hat{x}\| = \left\|(I + \lambda A)^{-1}z - (I + \lambda A)^{-1}\hat{z}\right\| \leq \|z - \hat{z}\|.$$

Por tanto tenemos que

Proposición 4.15. *A es acretivo si y sólo si $(I + \lambda A)^{-1}$ es una aplicación univaluada y no expansiva para todo $\lambda > 0$.*

Si A es acretivo, denotamos $J_\lambda^A = (I+\lambda A)^{-1}$ y la denominamos *resolvente* de A. Notar que $D(J_\lambda^A) = R(I+\lambda A)$.

Para verificar la acretividad de un operador dado es útil tener caracterizaciones de esta propiedad. Para ello necesitamos introducir el corchete.

Para cada $\lambda \neq 0$ definimos $[\cdot,\cdot]_\lambda : X \times X \to \mathbb{R}$ por

$$[x,y]_\lambda := \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda}.$$

Fijado $(x,y) \in X \times X$, $\lambda \mapsto [x,y]_\lambda$ es no decreciente para $\lambda > 0$. En efecto, si $\lambda \geq \mu > 0$ entonces

$$\|x+\mu y\| = \left\| \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) x + \frac{\mu}{\lambda}(x+\lambda y) \right\| \leq \left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)\|x\| + \frac{\mu}{\lambda}\|x+\lambda y\|,$$

de donde se sigue que $[x,y]_\mu \leq [x,y]_\lambda$. Por tanto, para cada $(x,y) \in X \times X$ podemos definir:

$$[x,y] := \lim_{\lambda \downarrow 0} [x,y]_\lambda = \inf_{\lambda > 0} [x,y]_\lambda.$$

El número $[x,y]$ es la derivada por la derecha de la norma de x en la dirección y. En la siguiente proposición listamos algunas de las propiedades del corchete $[\cdot,\cdot]$.

Proposición 4.16. *Si $x,y,z \in X$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, entonces*

(i) $[\cdot,\cdot] : X \times X \to \mathbb{R}$ *es semicontinua superiormente,*

(ii) $[\alpha x, \beta y] = |\beta|[x,y]$ *si* $\alpha \cdot \beta > 0$,

(iii) $[x, \alpha x + y] = \alpha\|x\| + [x,y]$,

(iv) $[x,y] \geq 0$ *si y sólo si* $\|x+\lambda y\| \geq \|x\|$ *for* $\lambda \geq 0$,

(v) $|[x,y]| \leq \|y\|$ *y* $[0,y] = \|y\|$,

(vi) $[x,y] \geq -[x,-y]$,

(vii) $[x,y+z] \leq [x,y] + [x,z]$,

(viii) sea $u :]a,b[\to \mathbb{R}$ *y* $t_0 \in]a,b[$ *tales que* u *es diferenciable en* t_0*, entonces* $t \mapsto \|u(t)\|$ *es diferenciable en* t_0 *si y sólo si* $[u(t_0), u'(t_0)] = -[u(t_0), -u'(t_0)]$*; en este caso*

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{|t=t_0} = [u(t_0), u'(t_0)].$$

Como consecuencia de (iv) de la proposición anterior tenemos la siguiente caracterización de los operadores acretivos.

Corolario 4.17. *Un operador A en X es acretivo si y sólo si $[x-\hat{x}, y-\hat{y}] \geq 0$ siempre que $(x,y),(\hat{x},\hat{y}) \in A$.*

En espacios de Banach concretos el corchete $[\cdot,\cdot]$ se puede computar explícitamente. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 4.18. Sea $(H, (\ |\ ))$ un espacio de Hilbert. Entonces, para cada $x, y \in H$,

$$\big(\|x+\lambda y\| - \|x\|\big)\big(\|x+\lambda y\| + \|x\|\big) = \|x+\lambda y\|^2 - \|x\|^2 = 2\lambda (x|y) + \lambda^2 \|y\|^2.$$

Dividiendo esta igualdad por λ se obtiene

$$\big(\|x+\lambda y\| + \|x\|\big)[x,y]_\lambda = 2(x|y) + \lambda \|y\|^2,$$

así se tiene que

$$\|x\|[x,y] = (x|y).$$

Entonces, por el Corolario 4.17, se sigue que: un operador A en H es acretivo si y sólo si

$$(x-\hat{x}|y-\hat{y}) \geq 0 \qquad \forall\,(x,y),(\hat{x},\hat{y}) \in A. \tag{4.21}$$

Por tanto en espacios de Hilbert los operadores monótonos y los acretivos coinciden.

Ejemplo 4.19. Sea $X = L^p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$. Por la convexidad de la aplicación $t \mapsto |t|^p$, y aplicando el Teorema de la convergencia dominada, es fácil ver que para $f \neq 0$,

$$[f,g] = \|f\|_p^{1-p} \int_\Omega g|f|^{p-1}\,\mathrm{sign}_0(f).$$

En el caso $p = 1$, i.e., para $X = L^1(\Omega)$, se tiene que

$$[f,g] = \int_\Omega g\,\mathrm{sign}_0(f) + \int_{\{f=0\}} |g|.$$

La acretividad implica la unicidad de soluciones fuertes. Más precisamente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.20. *Sea $f, \hat{f} \in L^1(0,T;X)$, A un operador acretivo y $u, \hat{u}$ soluciones fuertes de $u' + Au \ni f$, $\hat{u}' + A\hat{u} \ni \hat{f}$, respectivamente, sobre $[0,T]$. Entonces,*

$$\|u(t)-\hat{u}(t)\| \leq \|u(0)-\hat{u}(0)\| + \int_0^t e^{w(t-s)} \left[u(s)-\hat{u}(s), f(s)-\hat{f}(s)\right]\,ds$$

$$\leq e^{wt}\|u(0)-\hat{u}(0)\| + \int_0^t e^{w(t-s)} \|f(s)-\hat{f}(s)\|\,ds$$

para $t \in [0,T]$.

En particular, las soluciones fuertes de $(CP)_{x,f}$ son únicas.

Demostración. Puesto que u y $\hat{u}$ son diferenciables c.p.p. en $]0,T[$, por (viii) de la Proposición 4.16, tenemos

$$\frac{d}{dt}\|u(t)-\hat{u}(t)\| = -\left[u(t)-\hat{u}(t), \hat{u}'(t)-u'(t)\right]$$

$$= -\left[u(t)-\hat{u}(t), (f(t)-u'(t)) - (\hat{f}(t)-\hat{u}'(t)) + (\hat{f}(t)-f(t))\right]$$

para casi todo $t \in]0,T[$.

Además, para casi todo $t \in]0,T[$, $(u(t), f(t)-u'(t)) \in A$ y $(\hat{u}(t), \hat{f}(t)-\hat{u}'(t)) \in A$. Entonces, por el Corolario 4.17 y (vi), (vii) de la Proposición 4.16, obtenemos que

$$\left[u(t)-\hat{u}(t), (f(t)-u'(t)) - (\hat{f}(t)-\hat{u}'(t)) + (\hat{f}(t)-f(t))\right]$$

$$\geq \left[u(t)-\hat{u}(t), (f(t)-u'(t)) - (\hat{f}(t)-\hat{u}'(t))\right] - \left[u(t)-\hat{u}(t), f(t)-\hat{f}(t)\right]$$

$$\geq -\left[u(t)-\hat{u}(t), f(t)-\hat{f}(t)\right].$$

Consecuentemente,

$$\frac{d}{dt}\|u(t)-\hat{u}(t)\| \leq \left[u(t)-\hat{u}(t), f(t)-\hat{f}(t)\right].$$

De aquí, aplicando la desigualdad de Gronwall obtenemos que

$$\|u(t)-\hat{u}(t)\| \leq \|u(0)-\hat{u}(0)\| + \int_0^t \left[u(s)-\hat{u}(s), f(s)-\hat{f}(s)\right] \, ds$$

$$\leq \|u(0)-\hat{u}(0)\| + \int_0^t \|f(s)-\hat{f}(s)\| \, ds.$$

□

Más generalmente, la acretividad de un operador implica la unicidad de soluciones leves.

Teorema 4.21. *Sea A un operador acretivo en X. Si u una solución leve de $u' + Au \ni 0$ sobre $[0,T]$ y $\hat{u}$ es una solución leve de $\hat{u}' + A\hat{u} \ni 0$ sobre $[0,T]$, entonces*

$$\|u(t)-\hat{u}(t)\| \leq \|u(0)-\hat{u}(0)\| \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{4.22}$$

Hemos visto que la acretividad de un operador A implica la unicidad de la solución x_i de la ecuación discretizada

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + Ax_i \ni f_i, \qquad i = 1, \ldots, N$$

la cual, si existe viene dada por

$$x_i = J^A_{(t_i - t_{i-1})}\left((t_i - t_{i-1})f_i + x_{i-1}\right) \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Esta fórmula indica que además de la acretividad uno debe esperar que una condición rango (i.e., una condición sobre $R(I+\lambda A) = D(J^A_\lambda)$) se necesite para tener la existencia de soluciones. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.22. Un operador A se denomina m-*acretivo* en X si y sólo si A es acretivo y $R(I + \lambda A) = X$ para todo $\lambda > 0$.

Aplicando el Teorema del punto fijo de Banach no es difícil ver que si A es acretivo entonces A es m-acretivo si existe un $\lambda > 0$ tal que $R(I + \lambda A) = X$.

Como consecuencia del Teorema de Minty tenemos que en el caso de espacios de Hilbert los operadores m-acretivos coinciden con los maximal monótonos. La generalización del Teorema 4.8 es el siguiente teorema de existencia y unicidad de soluciones leves. En este contexto general no se tiene existencia de soluciones fuertes aunque hay resultados de regularidad que aseguran, en ciertos casos, que las soluciones leves son soluciones fuertes.

Teorema 4.23. *Sea A un operador en X, $f \in L^1(0,T;X)$ y $x_0 \in \overline{D(A)}$. Si A es m-acretivo, entonces el problema*

$$u' + Au \ni f \quad \text{on} \quad [0,T], \qquad u(0) = x_0$$

tiene una única solución leve u sobre $[0,T]$.

De ahora en adelante, al semigrupo $S^A(t)$ definido por (4.19) lo denotaremos por e^{-tA} y lo denominaremos como el *semigrupo generado* por $-A$.

Como consecuencia del Teorema 4.21, si A es acretivo, entonces $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracciones, i.e.,

$$\|e^{-tA}x - e^{-tA}\hat{x}\| \leq \|x - \hat{x}\| \qquad \forall\, x, \hat{x} \in D(S^A),\ \forall\, t \geq 0.$$

Además, es fácil ver que $D(S^A)$ es un cerrado y por el Teorema 4.21, se tiene que la aplicación

$$(t,x) \mapsto e^{-tA}x \quad \text{es continua en } [0,+\infty[\times D(S^A).$$

Como consecuencia del Teorema 4.23 tenemos que si A es m-acretivo en X, entonces $D(S^A) = \overline{D(A)}$ y $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracciones en $\overline{D(A)}$.

Veamos ahora que en el caso homogéneo se puede debilitar la m-acretividad del operador y obtener una representación explícita de la solución leve. Supongamos por el momento que A es m-acretivo. Sea $\lambda > 0$ y v una solución de la discretización $D_A(0, \lambda, 2\lambda, \ldots, N\lambda; 0, \ldots, 0)$ satisfaciendo $v(0) = x_0$. Debido al hecho de que la discretización tiene un tamaño constante de paso λ, la ecuación diferencial para v es equivalente a

$$\begin{cases} v(t) = x_0 \quad \text{para} \quad -\lambda < t \leq 0, \\ \dfrac{v(t) - v(t-\lambda)}{\lambda} + Av(t) \ni 0 \quad \text{para} \ \ 0 < t \leq N\lambda. \end{cases} \tag{4.23}$$

Además, $v(k\lambda) = J_\lambda v((k-1)\lambda)$, luego, iterando,

$$v(k\lambda) = J_\lambda^k v(0) = J_\lambda^k x_0.$$

Entonces para resolver (4.23) sólo necesitamos que $\overline{D(A)} \subset D(J_\lambda)$ para $\lambda > 0$ y por supuesto la acretividad del operador A.

Definición 4.24. Se dice que un operador acretivo A satisface la *condición rango* si $\overline{D(A)} \subset R(I + \lambda A)$ para todo $\lambda > 0$.

Teorema 4.25. *(***Teorema de de Crandall-Liggett***) Si A es un operador acretivo que satisface la condición rango, entonces $-A$ genera un semigrupo de contracciones $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ sobre $\overline{D(A)}$ y:*

(i) para $x_0 \in \overline{D(A)}$ y $0 \leq t < \infty$,

$$\lim_{\lambda\downarrow 0, k\lambda\to t} J_\lambda^k x_0 = e^{-tA} x_0$$

uniformemente para t en subintervalos compactos de $[0, \infty[$;

(ii) si $x_0 \in \overline{D(A)}$, $t > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\left\| J_{t/n}^n x_0 - e^{-tA} x_0 \right\| \leq \frac{t}{\sqrt{n}} \|y\| + 2\|x_0 - x\| \tag{4.24}$$

para cada $(x, y) \in A$.

Del teorema anterior se deduce que

$$e^{-tA} x = \lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{t}{n} A \right)^{-n} x \quad \text{para cada } \ x \in \overline{D(A)}. \tag{4.25}$$

A esta representación del semigrupo $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ se le denomina *fórmula exponencial* por analogía con la fórmula $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{t}{n} a)^{-n} = e^{-ta}$ para $a \in \mathbb{C}$.

Capítulo 5

El problema de Neumann para el Flujo Variación Total

En este Capítulo probamos la existencia y unicidad de soluciones para el flujo variación total con condiciones de frontera de Neumann, i.e., el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{\|Du\|}\right) & \text{en} \quad Q = (0,\infty)\times\Omega \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre} \quad S = (0,\infty)\times\partial\Omega \\[2ex] u(0,x) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

donde Ω es un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera Lipschitz continua $\partial\Omega$ y $u_0 \in L^1(\Omega)$.

Como vimos en el Capítulo 1 esta ecuación en derivadas parciales aparece cuando se usa el método de mayor descenso para minimizar la variación total, método introducido por L. Rudin, S. Osher and E. Fatemi ([31]). En el contexto del Procesamiento de Imágenes, resolver (5.1) significa regularizar, o en otras palabras filtrar la imagen inicial u_0. Este proceso de filtrado tiene menos efecto destructivo sobre los contornos que filtrar con una Gausiana, i.e., que resolver la ecuación del calor con dato inicial u_0. En este contexto la *imagen* dada u_0 es una función definida en un acotado Ω de $\mathbb{R}^N$ con frontera suave a trozos, típicamente Ω será un rectángulo en $\mathbb{R}^2$. Como se argumenta en [1], la elección de la condición frontera de Neumann es la natural en el contexto del Procesamiento de Imágenes. Ella corresponde a la reflexión de la imagen sobre la frontera y tiene la ventaja de no imponer ningún valor sobre la frontera y no crear contorno en ella.

5.1. Soluciones fuertes en $L^2(\Omega)$

Consideremos el funcional de energía $\Phi : L^2(\Omega) \to (-\infty, +\infty]$ definido por

$$\Phi(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \|Du\| & \text{si } \; u \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega) \\ +\infty & \text{si } \; u \in L^2(\Omega) \setminus BV(\Omega). \end{cases} \tag{5.2}$$

Puesto que el funcional Φ es convexo, semicontcnuo inferiormente y própio, entonces $\partial\Phi$ es un operador máximal monótono con dominio denso, con lo que genera un semigrupo de contracción en $L^2(\Omega)$ (ver subsección 4.2 or [13]). Por tanto, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.1. *Sea $u_0 \in L^2(\Omega)$. Entonces existe una úinca solución fuerte u del problema (5.1) en $[0,T]$ para cada $T > 0$, i.e., $u \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^N)) \cap W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(0,T; L^2(\Omega))$, $u(t) \in D(\partial\Phi)$* c.p.p. *en $t \in [0,T]$ y*

$$-u'(t) \in \partial\Phi(u(t)) \quad \text{c.p.p. en } t \in [0,T]. \tag{5.3}$$

Además, si u y v son soluciones fuertes de (5.1) correspondientes a las condiciones iniciales $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$, entonces

$$\|u(t) - v(t)\|_2 \leq \|u_0 - v_0\|_2 \quad \text{para cada } t > 0. \tag{5.4}$$

Nuestro objectivo a hora es dar sentido a (5.3) como una ecuación en derivadas parciales, para ello tenemos que caracterizar la subdiferencial de Φ en sentido distributional. Siendo más precisos, en un sentido débil usando como funciones test funciones de $BV(\Omega)$. Para ello necesitamos primeramente recordar algunos resultados inspirados en la teoría de la dualidad del Análisis Convexo.

Sea H un espacio de Hilbert real con producto interior $(\ /\ )$ y sea $\Psi : H \to [0,\infty]$ una función. Definimos $\tilde{\Psi} : H \to [0,\infty]$ como

$$\tilde{\Psi}(x) = \sup\left\{ \frac{(x/y)}{\Psi(y)} \ : \ y \in H \right\} \tag{5.5}$$

con la convención $\frac{0}{0} = 0$, $\frac{0}{\infty} = 0$. Notar que $\tilde{\Psi}(x) \geq 0$, para cada $x \in H$ y que también el supremo se toma en el conjunto de los $y \in H$ tales sue $(x/y) \geq 0$. Notar también que se cumple la siguiente desigualdad de tipo Cauchy-Schwartz

$$(x/y) \leq \tilde{\Psi}(x)\Psi(y) \quad \text{si } \Psi(y) > 0.$$

El lemma siguiente es una simple consecuencia de la anterior definición.

Lema 5.2. *Sean $\Psi_1, \Psi_2 : H \to [0,\infty]$. Si $\Psi_1 \leq \Psi_2$, entonces $\tilde{\Psi}_2 \leq \tilde{\Psi}_1$.*

Proposición 5.3. *Si Ψ es una función convexa, semi-contínua inferiormente y positivamente homogénea de grado 1, entonces $\tilde{\tilde{\Psi}} = \Psi$.*

Demostración. Puesto que $\frac{(y/x)}{\Psi(x)} \leq \tilde{\Psi}(y)$ para cada $x, y \in H$, tenemos que $\frac{(y/x)}{\tilde{\Psi}(y)} \leq \Psi(x)$ para cada $x, y \in H$. Esto implica que $\tilde{\tilde{\Psi}}(x) \leq \Psi(x)$ para cada $x \in H$. Assumamos que exist algún $x \in H$ y $\epsilon > 0$ tal que $\tilde{\tilde{\Psi}}(x) + \epsilon < \Psi(x)$, entonces, en particular, $\Psi(x) > 0$ y $\tilde{\tilde{\Psi}}(x) < \infty$. Como consecuencia del Teorema de Hahn-Banach existe $y \in H$ separando x del cerrado convexo $C := \{z \in H : \Psi(z) \leq \tilde{\tilde{\Psi}}(x) + \epsilon\}$. Puesto que $0 \in C$ podemos incluso asumir que $(y/x) = 1$ y $(y/z) \leq \alpha < 1$ para cada $z \in C$. Notar que, de la definición de $\tilde{\tilde{\Psi}}$, se tiene que

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(x) \geq \frac{1}{\tilde{\Psi}(y)}. \tag{5.6}$$

Veamos que $\tilde{\Psi}(y) \leq \frac{1}{\tilde{\tilde{\Psi}}(x)+\epsilon}$. Para ello es sufficient con probar que

$$\frac{(y/z)}{\Psi(z)} \leq \frac{1}{\tilde{\tilde{\Psi}}(x) + \epsilon} \tag{5.7}$$

para cada $z \in H$ tal que $(y/z) \geq 0$. Sea $z \in H$, $(y/z) \geq 0$. Si $\Psi(z) = \infty$, entonces (5.7) se cumple. Si $\Psi(z) = 0$, entonces también $\Psi(tz) = 0$ para cada $t \geq 0$. Por tanto $tz \in C$ para todo $t \geq 0$, y tenemos que $0 \leq (y/tz) \leq 1$ para todo $t \geq 0$. Consecuentemente $(y/z) = 0$, y, por tanto, (5.7) se crumple. Finalmente, asumamos que $0 < \Psi(z) < \infty$. Sea $t > 0$ tal que $\Psi(tz) = \tilde{\tilde{\Psi}}(x) + \epsilon$. Usando que $tz \in C$, tenemos que

$$\frac{(y/z)}{\Psi(z)} = \frac{(y/tz)}{\Psi(tz)} \leq \frac{1}{\tilde{\tilde{\Psi}}(x) + \epsilon}.$$

Entonces (5.6) y (5.7) dan lugar a una contradicción. Con lo que concluimos que $\tilde{\tilde{\Psi}}(x) = \Psi(x)$ para cada $x \in H$. □

Lema 5.4. *Asumamos que Ψ es convexa, semi-contínua inferiormente y positivamente homogénea de grado 1. Si $u \in D(\partial\Psi)$ y $v \in \partial\Psi(u)$, entonces $(v/u) = \Psi(u)$.*

Demostración. Tenemos que, si $v \in \partial\Psi(u)$, entonces

$$(v/w - u) \leq \Psi(w) - \Psi(u), \quad \text{para todo } w \in H.$$

Para obtener el resultado es sufficient con tomar $w = 0$ y $w = 2u$ en la anterior desigualdad. □

Teorema 5.5. *Asumamos sue Ψ es convexa, semi-contínua inferiormente y positivamente homogénea de grado 1. Entonces, $v \in \partial\Psi(u)$ si y solo si $\tilde{\Psi}(v) \leq 1$ y $(v/u) = \Psi(u)$ (consecuentemente, $\tilde{\Psi}(v) = 1$ si $\Psi(u) > 0$).*

Demostración. Cuando $(v/u) = \Psi(u)$, la condición $v \in \partial\Psi(u)$ se puede escribir como $(v/x) \leq \Psi(x)$ para todo $x \in H$, lo cual es equivalente a $\tilde{\Psi}(v) \leq 1$. □

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$ con frontera Lipschitz contínua. Consideremos el espacio (ver Capítulo 3)

$$X(\Omega)_2 := \left\{ z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \ : \ \mathrm{div}(z) \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Parar $v \in L^2(\Omega)$ definimos

$$\Psi(v) = \text{ínf} \left\{ \| \, z \, \|_\infty : \ z \in X(\Omega)_2, \, v = -\mathrm{div}(z) \, \text{in} \, \mathcal{D}'(\Omega), \, [z, \nu] = 0 \right\}, \tag{5.8}$$

siendo ν la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$ y $[z, \nu]$ la traza de la components normal de z (ver SCapítulo 3). Definimos $\Psi(v) = +\infty$ si no existe un $z \in X(\Omega)_2$ satisfaciebdo $v = -\mathrm{div}(z)$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, $[z, \nu] = 0$.

Observar sue Ψ es convexa, semi-contínua inferiormente y positivamente homogénea de grado 1. Además, es fácil ver que, si $\Psi(v) < \infty$, el infimo en (5.8) se toma, i.e., existe un $z \in X(\Omega)_2$ tal que $v = -\mathrm{div}(z)$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, $[z, \nu] = 0$ y $\Psi(v) = \|z\|_\infty$.

Proposición 5.6. *Se tiene que* $\Psi = \tilde{\Phi}$.

Demostración. Sea $v \in L^2(\Omega)$. Si $\Psi(v) = \infty$, entonces tenemos que $\tilde{\Phi}(v) \leq \Psi(v)$. Por tanto, podemos asumir que $\Psi(v) < \infty$. Sea $z \in X(\Omega)_2$ tal que $v = -\mathrm{div}(z)$ y $[z, \nu] = 0$. Entonces

$$\int_\Omega vu \, dx = \int_\Omega (z, Du) \leq \| \, z \, \|_\infty \, \Phi(u) \quad \text{para todo } u \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

Tomando supremos en u obtenemos $\tilde{\Phi}(v) \leq \| \, z \, \|_\infty$. Ahora, tomando ínfimos en z, se obtiene $\tilde{\Phi}(v) \leq \Psi(v)$.

Para demostrar la otra desigualdad, denotamos

$$D = \left\{ \mathrm{div}(z) \ : \ z \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \right\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sup_{v \in L^2} \frac{\displaystyle\int_\Omega uv \, dx}{\Psi(v)} \quad &\geq \quad \sup_{v \in D} \frac{\displaystyle\int_\Omega uv \, dx}{\Psi(v)} \geq \sup_{v \in D, \Psi(v) < \infty} \frac{\displaystyle\int_\Omega uv \, dx}{\Psi(v)} \\ &\geq \quad \sup_{z \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)} \frac{-\displaystyle\int_\Omega u \mathrm{div}(z) \, dx}{\| \, z \, \|_\infty} = \Phi(u). \end{aligned}$$

Por tanto, $\Phi \leq \tilde{\Psi}$. Esto implica que $\tilde{\tilde{\Psi}} \leq \tilde{\Phi}$, y, usando la Proposición 5.3, obtenemos que $\Psi \leq \tilde{\Phi}$. $\square$

Tenemos la siguiente caracterización de la subdiferencial $\partial\Phi$.

Teorema 5.7. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $v \in \partial\Phi(u)$*;*

(b)

$$u \in L^2(\Omega) \cap BV(\Omega),\ v \in L^2(\Omega), \tag{5.9}$$

$$\exists z \in X(\Omega)_2,\ \|z\|_\infty \leq 1,\ \text{tal que } v = -\text{div}(z) \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \tag{5.10}$$

y

$$\int_\Omega (z, Du) = \int_\Omega \|Du\|, \tag{5.11}$$

$$[z, \nu] = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega; \tag{5.12}$$

(c) (5.9) y (5.10) se cumplen, y

$$\int_\Omega (w-u)v\,dx \leq \int_\Omega z \cdot \nabla w\,dx - \int_\Omega \|Du\|, \qquad \forall w \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega); \tag{5.13}$$

(d) (5.9) y (5.10) se cumplen, y

$$\int_\Omega (w-u)v\,dx \leq \int_\Omega (z, Dw) - \int_\Omega \|Du\| \qquad \forall w \in L^2(\Omega) \cap BV(\Omega); \tag{5.14}$$

(e) (5.9) y (5.10) se cumplen, y (5.14) se crumple con igualdad en lugar de desigualdad.

Demostración. Por el Teorema 5.5, tenemos que $v \in \partial\Phi(u)$ si y solo si $\tilde{\Phi}(v) \leq 1$ y $\int_\Omega vu\,dx = \Phi(u)$. Puesto que $\tilde{\Phi} = \Psi$, de la definición de Ψ y de la observación siguiente a dicta definición, se sigue que exist agún $z \in X(\Omega)_2$ tal que $v = -\text{div}(z)$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, $[z,\nu] = 0$ y $\tilde{\Phi}(v) = \|z\|_\infty$. Por tanto, tenemos que $v \in \partial\Phi(u)$ si y solo si existe un $z \in X(\Omega)_2$, con $\|z\|_\infty \leq 1$, tal que $v = -\text{div}(z)$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, $[z,\nu] = 0$ y $\int_\Omega vu\,dx = \Phi(u)$. Entonces, aplicando la fórmula de Green (3.10) se sigue la equivalencia de (a) y (b).

Para obtainer (e) de (b) es suficiente con multiplicar ambos términos de la ecuación $v = -\text{div}(z)$ por $w-u$, para $w \in L^2(\Omega) \cap BV(\Omega)$ e integrar por partes usando la fórmula de (3.10). ES claro que (e) implica (d), y (d) implica (c). Para probar que (b) se sigue de (d) elegimos $w = u$ en (5.14) y obtenemos que

$$\int_\Omega \|Du\| \leq \int_\Omega (z, Du) \leq \|z\|_\infty \int_\Omega \|Du\| \leq \int_\Omega \|Du\|.$$

Para obtener (5.12) elegimos $w = u \pm \varphi$ en (5.14) con $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ y obtenemos que

$$\pm \int_\Omega v\varphi\,dx \leq \pm \int_\Omega z \cdot D\varphi = - \pm \int_\Omega \text{div}(z)\,\varphi\,dx + \pm \int_{\partial\Omega} [z,\nu]\,\varphi\,d\mathcal{H}^{N-1},$$

lo que implica (5.12). Para probar que (c) implica (d), sea $w \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Usando el Teorema 2.4 sabemos que exist una sucesión $w_n \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ tal que

$$w_n \to w \quad \text{en} \quad L^2(\Omega) \quad \text{y} \quad \int_\Omega |\nabla w_n|\,dx \to \int_\Omega \|Dw\|.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_\Omega z \cdot \nabla w_n \, dx &= -\int_\Omega \mathrm{div}(z)\, w_n \, dx + \int_{\partial\Omega} [z,\nu] w_n \, d\mathcal{H}^{N-1} \\ &\to -\int_\Omega \mathrm{div}(z)\, w \, dx + \int_{\partial\Omega} [z,\nu] w \, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_\Omega (z, Dw).\end{aligned}$$

Ahora, usamos w_n como función test en (5.13) y hacemos tender $n \to \infty$ para obtener (5.14). □

Definición 5.8. *Diremos que $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ es una solución fuerte de (5.1) si*

$$u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^1_w(]0,T[; BV(\Omega)),$$

$u(0) = u_0$, y existe un $z \in L^\infty\left(]0,T[\times\Omega; \mathbb{R}^N\right)$ tal que $\|z\|_\infty \leq 1$,

$$[z(t),\nu] = 0 \quad \text{in } \partial\Omega, \text{ a.e. } t \in [0,T]$$

satisfaciendo

$$u_t = \mathrm{div}(z) \qquad \text{in } \mathcal{D}'\left(]0,T[\times\Omega\right)$$

y

$$\begin{gathered}\int_\Omega (u(t) - w) u_t(t)\, dx = \int_\Omega (z(t), Dw) - \int_\Omega \|Du(t)\| \\ \forall w \in L^2(\Omega) \cap BV(\Omega), \text{ c.p.p. } t \in [0,T].\end{gathered} \tag{5.15}$$

Obviamente, usando el Teorema 5.7 , una solución fuerte de (5.1) es una solución fuerte en el sentido de la Teoría de semigrupos. La implicació inversa se sigue de la misma forma, excepto la medibilidad de $z(t,x)$. Para asegurar la medibilidad de z hay que tener en cuenta que, por el Teorema 4.8, la solición semigrupo se puede aproximar por una discretización implícita en tiempo de (5.3), y uno construye una función $z(t,x) \in L^\infty((0,T)\times\Omega)$ satisfaciendo los requerimientos de la Definición 5.8. No daremos aquí los detalles de esta demostración. De esta forma, como consecuencia del Teorema 4.8 (ver también Nota 4.10), obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.9. *Sea $u_0 \in L^2(\Omega)$. Entonces existe una única solución fuerte u de (5.1) en $[0,T]\times\Omega$ para cada $T > 0$. Además, si u y v son soliciones fuertes de (5.1) correspondientes a los datos iniciales $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$, entonces*

$$\|u(t) - v(t)\|_2 \leq \|u_0 - v_0\|_2 \quad \text{for any } t > 0. \tag{5.16}$$

Nota 5.10. Es posible obtener existencia y unicidad de soluciones para datos iniciales en $L^1(\Omega)$. En éste caso necesitamos usar funciones de truncamiento del tipo T_k: $T_k(r) = [k - (k - |r|)^+]\mathrm{sign}_0(r)$, $k \geq 0$, $r \in \mathbb{R}$, y el siguiente concept de solución.

Definición 5.11. Ana función medoble $u : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ es una *solición débil* de (5.1) en $(0,T) \times \Omega$ si $u \in C([0,T], L^1(\Omega)) \cap W^{1,1}_{loc}(0,T; L^1(\Omega))$, $T_k(u) \in L^1_w(0,T; BV(\Omega))$ para todo $k > 0$ y existe $z \in L^\infty((0,T) \times \Omega)$ con $\|z\|_\infty \leq 1$, $u_t = \mathrm{div}(z)$ in $\mathcal{D}'((0,T) \times \Omega)$ tal que

$$\int_\Omega (T_k(u(t)) - w) u_t(t)\, dx \leq \int_\Omega z(t) \cdot \nabla w\, dx - \int_\Omega \|DT_k(u(t))\| \tag{5.17}$$

para cada $w \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y c.p.p. en $[0,T]$.

En [3] (ver también [6]) probamos el siguiente resultado de existencia y unicidad.

Teorema 5.12. *Sea $u_0 \in L^1(\Omega)$. Entonces exist una único solución débil de (5.1) en $(0,T)\times\Omega$ para cada $T > 0$ tal que $u(0) = u_0$. Además, si $u(t), \hat{u}(t)$ son soluciones correspondientes a los datos iniciales $u_0, \hat{u}_0$, respectivamente, entonces*

$$\|(u(t) - \hat{u}(t))^+\|_1 \leq \|(u_0 - \hat{u}_0)^+\|_1 \quad \text{y} \quad \|u(t) - \hat{u}(t)\|_1 \leq \|u_0 - \hat{u}_0\|_1, \tag{5.18}$$

para todo $t \geq 0$.

Para demostrar el Teorema 5.12 usamos la regularidad de los operadores completamente acretivos ([12]) y el Teorema de Crandall-Liggett (Teorema 4.25). Para ello, asociamos un operador completamente acretivo $\mathcal{A}$ a la expresión diferencial formal$-\mathrm{div}(\frac{Du}{\|Du\|})$ junto con condiciones de frontera de tipo Neumann. Entonces, usando el Teorema de Crandall-Liggett (Teorema 4.25) concluimos que el problema abstracto de Cauchy en $L^1(\Omega)$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \mathcal{A}u \ni 0, \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{5.19}$$

tiene una única solución fuerte $u \in C([0,T], L^1(\Omega)) \cap W^{1,1}_{loc}(0,T; L^1(\Omega))$ $(\forall T > 0)$ con dato inicial $u(0) = u_0$, y después probamos que las soluciones fuertes de (5.19) coinciden con las soliciones débiles de (5.1).

5.2. Comportamiento asintótico de las soluciones

Para ver que nuestro concepto de solución es útil vamos a calcular la solución explícita cuando el data initial es la función characteristica de una bola.

Teorema 5.13. *Sea $\Omega = B(0,R)$ la bla en $\mathbb{R}^N$ centrada en 0 con radio R, y $u_0(x) = k\chi_{B(0,r)}$, con $0 < r < R$ y $k > 0$. Entonces, la solución fuerte de (5.1) para el dato inicial u_0 viene dada por*

$$u(t) = \begin{cases} \left(k - \frac{N}{r}t\right)\chi_{B(0,r)} + \frac{Nr^{N-1}}{R^N - r^N} t\chi_{B(0,R)\setminus B(0,r)} & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ \\ (k - \frac{N}{r}T)\chi_{B(0,R)} = \frac{Nr^{N-1}}{R^N - r^N} T\chi_{B(0,R)} & \text{si } t \geq T, \end{cases} \tag{5.20}$$

donde T viene dado por

$$T\left(\frac{N}{r}+N\frac{r^{N-1}}{R^N-r^N}\right)=k. \tag{5.21}$$

Demostración. Buscamos una solución de (5.1) de la forma $u(t)=\alpha(t)\chi_{B(0,r)}+\beta(t)\chi_{B(0,R)\setminus B(0,r)}$ en algún intervalo de tiempo $(0,T)$ definido por la desigualdad $\alpha(t)>\beta(t)$ para todo $t\in(0,T)$, y $\alpha(0)=k$, $\beta(0)=0$. Entonces, buscamos un $z\in L^\infty((0,T)\times B(0,R))$ con $\|z\|_\infty\le 1$, tal que

$$\begin{aligned} &\alpha'(t)=\mathrm{div}(z(t)) && \text{en } (0,T)\times B(0,r)\\ &z(t,x)=-\frac{x}{|x|} && \text{en } (0,T)\times\partial B(0,r), \end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned} &\beta'(t)=\mathrm{div}(z(t)) && \text{en } (0,T)\times(B(0,R)\setminus B(0,r))\\ &z(t,x)=-\frac{x}{|x|} && \text{en } (0,T)\times\partial B(0,r)\\ &z(t)\cdot n=0 && \text{en } (0,T)\times\partial B(0,R) \end{aligned} \tag{5.23}$$

and

$$\int_{B(0,R)} z(t)\cdot Du(t)=\int_{B(0,R)}\|Du(t)\| \qquad \text{para todo } t\in(0,T). \tag{5.24}$$

Integrando la ecuación (5.22) en $B(0,r)$ obtenemos

$$\alpha'(t)|B(0,r)|=\int_{B(0,r)}\mathrm{div}(z(t))dx=\int_{\partial B(0,r)} z(t)\cdot n=-\mathcal{H}^{N-1}(\partial B(0,r)).$$

Por tanto

$$\alpha'(t)=-\frac{N}{r}.$$

y, consecuentemente,

$$\alpha(t)=k-\frac{N}{r}t.$$

En este caso tomamos $z=-\frac{x}{r}$ y (5.22) se cumple. Similarmente, deducimos que

$$\beta'(t)=\mu:=N\frac{r^{N-1}}{R^N-r^N},$$

con lo que,

$$\beta(t)=N\frac{r^{N-1}}{R^N-r^N}t.$$

Nuestra primera observación es que T viene dado por

$$T\left(\frac{N}{r}+N\frac{r^{N-1}}{R^N-r^N}\right)=k. \tag{5.25}$$

Para construir z in $(0,T)\times(B(0,R)\setminus B(0,r))$ buscamos un z de la forma $z(t,x)=\rho(|x|)\frac{x}{|x|}$ tal que $\operatorname{div}(z(t))=\beta'(t)$, $\rho(r)=-1$, $\rho(R)=0$. Puesto que

$$\operatorname{div}(z(t))=\nabla\rho(|x|)\cdot\frac{x}{|x|}+\rho(|x|)\operatorname{div}(\frac{x}{|x|})=\rho'(|x|)+\rho(|x|)\frac{N-1}{|x|},$$

tenemos que tener

$$\rho'(s)+\rho(s)\frac{N-1}{s}=N\frac{r^{N-1}}{R^N-r^N}\qquad s\in(r,R). \tag{5.26}$$

La solución de (5.26) tal que $\rho(R)=0$ es

$$\rho(s)=\frac{\mu s}{N}-\frac{\mu R^N}{Ns^{N-1}}$$

que tambié satisface $\rho(r)=-1$. Por tanto, en $B(0,R)\setminus B(0,r)$,

$$z(t,x)=\frac{\mu x}{N}-\frac{\mu R^N x}{N|x|^N}.$$

Es fácil de comprobar que (5.24) se cumple. Por tanto,

$$u(t)=(k-\frac{N}{r}t)\chi_{B(0,r)}+\frac{Nr^{N-1}}{R^N-r^N}t\chi_{B(0,R)\setminus B(0,r)}.$$

in $(0,T)\times B(0,R)$ where T is given by (5.25). On the other hand, we take

$$u(t)=(k-\frac{N}{r}T)\chi_{B(0,R)}=\frac{Nr^{N-1}}{R^N-r^N}T\chi_{B(0,R)},$$

y $z(t,x)=0$ en $(T,\infty)\times B(0,R)$. Es fácil ver que $u(t)$ es solución de (5.1) en $(0,\infty)\times B(0,R)$ con dato inicial $u_0(x)$. □

Nota 5.14. El anterior resultado demuestra que no hay efecto regularizan espacial, para $t>0$, similar al que tiene la ecuación lineal del calor y muchas ecuaciones parabólicas cuasi lineales. En nuestro caso, la solución es discontinua y tiene la mímima regularidad espacial requerida : $u(t)\in BV(\Omega)\setminus W^{1,1}(\Omega)$.

Denotaremos por $(S(t))_{t\geq 0}$ el semigrupo en $L^2(\Omega)$ generado por la subdiferencial del funcional de energía Φ, i.e., para cada $u_0\in L^2(\Omega)$, $u(t):=S(t)u_0$ es la única solución solución fuerte de (5.1) obtenida en el Teorema 5.9.

Para estudiar el comportamiento asintótico del semigrupo $(S(t))_{t\geq 0}$ necesitamos probar que sus órbitas son relativamente compactas.

Lema 5.15. *Para cada $u_0\in L^1(\Omega)$, la órbita $\gamma(u_0)=\{S(t)u_0\ :\ t\geq 0\}$ es un subconjunto relativamente compacto de $L^1(\Omega)$.*

Demostración. Sea J_λ la resolvente del operador $\partial\Phi$. Entonces, $J_\lambda(B)$ es un subconjunto relativamente compacto de $L^1(\Omega)$ si B es un subconjunto acotado de $L^2(\Omega)$. En efecto, sea B un subconjunto acotado de $L^2(\Omega)$. Tomemos $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq B$ y sean $u_n := J_\lambda f_n$. Entonces, $\|f_n\|_2 \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $(u_n, \frac{1}{\lambda}(f_n - u_n)) \in \partial\Phi$, tenemos que

$$\Phi(w) - \Phi(u_n) \geq \int_\Omega \frac{1}{\lambda}(f_n - u_n)(w - u_n) \quad \forall\, w \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

Tomando $w = 0$, nos queda que

$$\int_\Omega \|Du_n\| = \int_\Omega \frac{1}{\lambda}(f_n - u_n)u_n\, dx \leq \frac{1}{\lambda} M^2 \mathcal{L}^N(\Omega) \qquad \text{for all } \ n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, $\{u_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión acotada en $BV(\Omega)$, y por el Teorema de inmersión (Teorema 2.18), tenemos que $\{u_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto relativamente compacto de $L^1(\Omega)$.

Consideremos primero $u_0 \in \mathcal{D}(\partial\Phi)$. Entonces, como

$$\|S(t)u_0\|_2 \leq \|u_0\|_2 \quad \text{para todo } \ t \geq 0,$$

tenemos que $\gamma(u_0)$ es un acotado de $L^2(\Omega)$ y consecuentemente, $J_\lambda(\gamma(u_0))$ es un subconjunto relativamente compacto de $L^1(\Omega)$ para todo $\lambda > 0$. Además,

$$\|S(t)u_0 - J_\lambda S(t)u_0\|_1 \leq \lambda \operatorname{ínf}\{\|v\|_1 \ : \ v \in \ \partial\Phi(u_0)\}.$$

Con lo que, $\gamma(u_0)$ es un relativamente compacto en $L^1(\Omega)$. Finalmente, como $\mathcal{D}(\partial\Phi)$ es denso en $L^2(\Omega)$, dado un $u_0 \in L^2(\Omega)$ y un $\epsilon > 0$, existe un $v_0 \in \mathcal{D}(\partial\Phi)$ tal que $\|u_0 - v_0\|_2 < \epsilon$. Por tanto, tenemos que

$$\sup_{t\geq 0} \operatorname{ínf}_{s \geq 0} \|S(t)u_0 - S(s)v_0\|_2 \leq \sup_{t \geq 0} \|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_2 \leq \|u_0 - v_0\|_2 < \epsilon.$$

de donde se sigue que $\gamma(u_0)$ es un relativamente compacto en $L^1(\Omega)$. $\square$

Necesitamos también el siguiente resultado sobre conservación de las masas.

Lema 5.16. *Sea $(S(t))_{t\geq 0}$ el semigrupo generado por $\partial\Phi$. Entonces, tenets conservación de las masas, es decir,*

$$\int_\Omega S(t)u_0\, dx = \int_\Omega u_0\, dx, \qquad \text{for all } \ t \geq 0.$$

Demostración. Dada $u_0 \in L^2(\Omega)$, sea $u(t) = S(t)u_0$. Entonces, $(u(t), -u'(t)) \in \partial\Phi$, con lo que

$$\Phi(w) - \Phi(u(t)) \geq -\int_\Omega u'(t)(w - u(t)) \quad \forall\, w \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega). \tag{5.27}$$

Tomando $w = u(t) \pm 1$ como función test en (5.27), obtenemos que $\int_\Omega u'(t) = 0$. Consecuentemente, la función $t \mapsto \int_\Omega u(t)$ es constantante, y concluimos la demostración. $\square$

Denotamos por $\omega(u_0)$ el conjunto ω-límite de u_0, i.e.,

$$\omega(u_0) := \left\{ v \in L^1(\Omega) \ : \ \exists t_n \to +\infty, \ \lim_{k\to\infty} S(t_{n_k})u_0 = v \right\}.$$

Respecto al comportamiento asintótico de las soluciones obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.17. *Sea $u_0 \in L^2(\Omega)$ y $u(t)$ la única solución fuerte de (5.1) tal que $u(0) = u_0$. Entonces,*

$$\|u(t) - (u_0)_\Omega\|_1 \to 0 \quad \text{cuando} \quad t \to \infty,$$

siendo

$$(u_0)_\Omega = \frac{1}{\mathcal{L}^N(\Omega)} \int_\Omega u_0(x)\ dx.$$

Además, existe una constante C, independendiente de u_0, tal que

$$\|S(t)u_0 - (u_0)_\Omega\|_p \leq \frac{C\|u_0\|_2^2}{t} \qquad \text{para todo} \quad t > 0, \quad \text{y} \quad 1 \leq p \leq \frac{N}{N-1}.$$

Demostración. Tomando $w = 0$ en (5.27) tenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t)^2 + \int_\Omega |Du(t)| \leq 0,$$

de donde se deduce que

$$\int_0^s \int_\Omega \|Du(t)\| + \frac{1}{2}\int_\Omega u(s)^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2 \leq 0. \tag{5.28}$$

De esta desigualdad se llega a

$$\int_0^\infty \int_\Omega \|DS(\tau)u_0\|\ d\tau \leq \frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2\, dx. \tag{5.29}$$

Por tanto, existe una sucesión $t_n \to \infty$, tal que $\displaystyle\int_\Omega \|DS(t_n)u_0\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Ahora, por el Lema 5.15, existe una subsucesión (t_{n_k}) tal que

$$\lim_{k\to\infty} S(t_{n_k})u_0 = v \in \omega(u_0),$$

y pro la semicontinuidad inferior de la variación total, se sigue

$$\int_\Omega \|Dv\| \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \|DS(t_{n_k})u_0\| = 0.$$

Por tanto, v es una constante K, y consecuentemente, $S(t)K = K$ para todo $t \geq 0$, puerto que los operadores $S(t)$ son contracciones obtenemos que $\omega(u_0) = \{K\}$ y

$$\lim_{t\to\infty} S(t)u_0 = K.$$

Ahora, como consecuencia del Lema 5.16, $K = (u_0)_\Omega$ con lo que concluimos la prueba de la primera parte.

Como consecuencia de (5.28) tenemos que

$$\int_0^s \int_\Omega \|Du(t)\| dt \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 \quad \forall\ t > 0. \tag{5.30}$$

Por otra parte, como $(S(s)u_0)_\Omega = (u_0)_\Omega$, por la desigualdad de Poincaré (Teorema 2.8), se sigue que

$$\|S(s)u_0 - (u_0)_\Omega\|_p = \|S(s)u_0 - (S(s)u_0)_\Omega\|_p \leq M \int_\Omega \|DS(s)u_0\|, \tag{5.31}$$

para todo $s > 0$, y $1 \leq p \leq \frac{N}{N-1}$. Entonces, (5.30) y (5.31) implican que

$$\int_0^t \|S(s)u_0 - (u_0)_\Omega\|_p \ ds \leq \frac{M}{2}\|u_0\|_2^2 \qquad \forall\ t > 0. \tag{5.32}$$

Además, como la aplicación $t \mapsto \|S(t)u_0 - (u_0)_\Omega\|_p$ es decreciente, usando (5.32) obtenemos que

$$t\|S(t)u_0 - (u_0)_\Omega\|_p \leq \int_0^t \|S(s)u_0 - (u_0)_\Omega\|_p \ ds \leq \frac{M}{2}\|u_0\|_2^2,$$

y la demostración finaliza

□

Veamos a hora que en el case bidimensional, usando métodos de energía, se tiene que el estado asintórico se alcanza en tiempo finito.

Teorema 5.18. *Supongamos que $N = 2$. Sea $u_0 \in L^2(\Omega)$ y $u(t,x)$ la úinca solución fuerte del problema (5.1). Entonces, existe un tiempo finito T_0 tal que*

$$u(t) = (u_0)_\Omega = \frac{1}{\mathcal{L}^N(\Omega)} \int_\Omega u_0(x)\ dx \qquad \forall\ t \geq T_0.$$

Demostración. Puesto sue u es una solución fuerte del problema (5.1), existe $z \in L^\infty(Q)$ con $\|z\|_\infty \leq 1$, $u_t = \operatorname{div}(z)$ in $\mathcal{D}'(Q)$ tal que

$$\int_\Omega (u(t) - w)u_t(t)\, dx = \int_\Omega (z(t), Dw) - \int_\Omega \|Du(t)\| \tag{5.33}$$

para todo $w \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Luego, tomando $w = (u_0)_\Omega$ como función test en (5.33), se tiene

$$\int_\Omega \big(u(t) - (u_0)_\Omega\big)u_t(t)\, dx = -\int_\Omega \|Du(t)\|.$$

Ahora, por la desgualdad de Sobolev-Poincaré para funciones BV (2.7) y teniendo en cuenta que hay conservación de masa, obtenemos que

$$\|u(t) - (u_0)_\Omega\|_2 \leq C \int_\Omega \|Du(t)\|.$$

Por tanto, se tiene que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(u(t) - (u_0)_\Omega\right)^2 dx + \frac{1}{C}\|u(t) - (u_0)_\Omega\|_2 \leq 0. \tag{5.34}$$

Consecuentemente, la función

$$y(t) := \int_\Omega \left(u(t) - (u_0)_\Omega\right)^2 dx$$

satisface la desigualdad

$$y'(t) + My(t)^{1/2} \leq 0,$$

de donde se sigue que exist un $T_0 > 0$ such that $y(t) = 0$ para todo $t \geq T_0$. □

Como consecuencia del Teorema 5.18, dado $u_0 \in L^2(\Omega)$, si $u(t,x)$ es la única solución fuerte del problema (5.1), entonces

$$T^*(u_0) := \operatorname{ínf}\{t > 0 \ : \ u(t) = (u_0)_\Omega\} < \infty.$$

En [5] (ver también [6]) estudiamos el comportamiento de $u(t)$ cerca de $T^*(u_0)$ estableciendo el siguiente resultado.

Teorema 5.19. *Supongamos que $N = 2$. Sea $u_0 \in L^2(\Omega)$ y sea $u(t,x)$ la única solución fuerte del problema (5.1). Sea*

$$w(t,x) := \begin{cases} \dfrac{u(t,x) - (u_0)_\Omega}{T^*(u_0) - t} & \text{si } \ 0 \leq t < T^*(u_0), \\[2ex] 0 & \text{si } \ t \geq T^*(u_0). \end{cases}$$

Entonces, exist una sucesión creciente $t_n \to T^*(u_0)$, y una solución $v^* \neq 0$ del problema

$$(S_N) \begin{cases} -\mathrm{div}\left(\dfrac{Dv}{|Dv|}\right) = v & \text{en} \quad \Omega \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

tal que

$$\lim_{n\to\infty} w(t_n) = v^* \quad \text{in} \quad L^p(\Omega)$$

para todo $1 \leq p < \infty$.

Capítulo 6

El problema de Cauchy para el flujo variación total

En este capítulo estudiaremos el el problema de Cauchy para el flujo variación total, i.e., el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{\|Du\|}\right) & \text{en }]0,\infty[\times\mathbb{R}^N, \\ \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{6.1}$$

6.1. Condiciones iniciales en $L^2(\mathbb{R}^N)$

En esta sección consideraremos que el dato inicial $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. El concepto de solución es el siguiente.

Definición 6.1. Una función $u \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^N))$ se denomina una solución fuerte de (6.1) si

$$u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(0,T; L^2(\mathbb{R}^N)) \cap L^1_w(0,T; BV(\mathbb{R}^N)), \quad u(0) = u_0$$

y existe $z \in L^\infty\left(]0,T[\times\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N\right)$ con $\|z\|_\infty \leq 1$ tal que

$$u_t = \operatorname{div}(z) \qquad \text{en } \mathcal{D}'(]0,T[\times\mathbb{R}^N)$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u(t) - w) u_t(t)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (z(t), Dw) - \int_{\mathbb{R}^N} \|Du(t)\| \tag{6.2}$$

para toda $w \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap BV(\mathbb{R}^N)$, c.p.p. $t \in [0,T]$.

En la definición anterior hemos usado el espacio $L^1_w(0,T;BV(\mathbb{R}^N))$. En general, si X es un espacio de Banach, el espacio $L^1_w(0,T;X)$ consiste de las aplicaciones $f:(0,T)\to X$ que son débilmente medibles tales que

$$\int_0^T \|f(t)\|\,dt < \infty.$$

Tenemos el siguiente resultado sobre existencia y unicidad de soluciones.

Teorema 6.2. *Sea $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Entonces existe una única solución fuerte u de (6.1) en $[0,T]\times\mathbb{R}^N$ para cada $T>0$. Además, si u y v son soluciones fuertes de (6.1) correspondientes a los datos iniciales $u_0, v_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, entonces*

$$\|u(t)-v(t)\|_2 \le \|u_0-v_0\|_2 \quad \text{para cada } t>0. \tag{6.3}$$

Demostración. Introducimos el siguiente operador multivaluado $\mathcal{B}$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$: un par de funciones (u,v) pertenecen a la gráfica de $\mathcal{B}$ si y sólo si

$$u \in L^2(\mathbb{R}^N)\cap BV(\mathbb{R}^N),\ v\in L^2(\mathbb{R}^N), \tag{6.4}$$

$$\text{existe } z\in X(\mathbb{R}^N)_2 \text{ con } \|z\|_\infty \le 1, \text{ tal que } v=-\mathrm{div}(z) \tag{6.5}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^N}(w-u)v\,dx \le \int_{\mathbb{R}^N} z\cdot\nabla w\,dx - \int_{\mathbb{R}^N}\|Du\|, \quad \forall w\in L^2(\mathbb{R}^N)\cap W^{1,1}(\mathbb{R}^N).$$

Sea $\Psi : L^2(\mathbb{R}^N)\to\ ]-\infty,+\infty]$ el funcional definido por

$$\Psi(u) := \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\|Du\| & \text{si} \quad u\in L^2(\mathbb{R}^N)\cap BV(\mathbb{R}^N) \\ \\ +\infty & \text{si} \quad u\in L^2(\mathbb{R}^N)\setminus BV(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{6.6}$$

Puesto que Ψ es convexo y semi-continuo inferiormente en $L^2(\mathbb{R}^N)$, su subdiferencial $\partial\Psi$ es un operador maximal monótono en $L^2(\mathbb{R}^N)$. Con una demostración similar a la dada para el problema de Neumann (Teorema 5.7), se demustra que $\mathcal{B}=\partial\Psi$. Como consecuencia, teniendo en cuenta el Teorema 4.8 (ver también Nota 4.10), tenemos que el semigrupo generado por $\mathcal{B}$ coincide con semigrupo generado por $\partial\Psi$ y por tanto $u(t,x)=e^{-t\mathcal{B}u_0(x)}$ es una solución fuete de

$$u_t+\mathcal{B}u \ni 0,$$

i.e., $u\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(]0,T[;L^2(\mathbb{R}^N))$ y $-u_t(t)\in\mathcal{B}u(t)$ para casi todo$t\in\ ]0,T[$, con lo que finalizamos la demostración del teorema. $\square$

Remarquemos que con un prueba similara a la dada en el Teorema 5.7, tenemos las siguientes caracterizaciones del operador $\mathcal{B}$.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $(u, v) \in \mathcal{B}$;

(b) (6.4) y (6.5) se cumple,

y

$$\int_{\mathbb{R}^N} (w-u)v\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (z, Dw) - \int_{\mathbb{R}^N} \|Du\| \tag{6.7}$$

para toda $w \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap BV(\mathbb{R}^N)$;

(c) (6.4) y (6.5) se cumple, y (6.7) se cumple con igualdad en lugar de desigualdad;

(d) (6.4) y (6.5) se cumple, e

$$\int_{\mathbb{R}^N} (z, Du) = \int_{\mathbb{R}^N} \|Du\|. \tag{6.8}$$

Dada una función $g \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^N(\mathbb{R}^N)$, definimos

$$\|g\|_* := \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^N} g(x)u(x)\;dx \right| : u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap BV(\mathbb{R}^N),\; \int_{\mathbb{R}^N} \|Du\| \leq 1 \right\}.$$

La parte (b) del siguiente resultado proporciona una caracterización de $\mathcal{B}(0)$. Dicha caracterización fue probada por Y. Meyer [27] en el contexto del modelo de Rudin-Osher-Fatemi de limpiado de imágenes.

Teorema 6.3. *Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^N(\mathbb{R}^N)$ y $\lambda > 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) La función u es solución de

$$\min_{w \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap BV(\mathbb{R}^N)} D(w), \quad D(w) := \int_{\mathbb{R}^N} \|Dw\| + \frac{1}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} (w-f)^2\;dx \tag{6.9}$$

si y sólo si existe un $z \in X(\mathbb{R}^N)_2$ satisfaciendo (6.8) con $\|z\|_\infty \leq 1$ y $-\lambda \operatorname{div}(z) = f - u$.

(b) La función $u \equiv 0$ es la solución de (6.9) si y sólo si $\|f\|_* \leq \lambda$.

(c) Si $N = 2$, $\mathcal{B}(0) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) : \|f\|_* \leq 1\}$.

Demostración. (a). Gracias a la estricta convexidad de D, u es solución de (6.9) si y sólo si $0 \in \partial D(u) = \partial \Psi(u) + \frac{1}{\lambda}(u-f) = \mathcal{B}(u) + \frac{1}{\lambda}(u-f)$, donde Ψ es definido en (6.6).

Esto significa que, recordando la definición de $\mathcal{B}$ en la demostración del Teorema 6.2, que existe un $z \in X(\mathbb{R}^N)_2$ satisfaciendo (6.8) con $\|z\|_\infty \leq 1$ y $-\lambda \operatorname{div}(z) = f - u$.

(b). La función $u \equiv 0$ es la solución de (6.9) si y sólo si

$$\int_{\mathbb{R}^N} \|Dv\| + \frac{1}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} (v-f)^2\,dx \geq \frac{1}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} f^2\,dx \qquad \forall v \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap BV(\mathbb{R}^N). \tag{6.10}$$

Reemplazando v por ϵv (con $\epsilon > 0$), expandiendo la L^2-norma, dividiendo por $\epsilon > 0$, y haciendo tender $\epsilon \to 0+$ tenemos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x) v(x)\, dx \right| \leq \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \|Dv\| \qquad \forall v \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap BV(\mathbb{R}^N). \tag{6.11}$$

Puesto que (6.11) implica (6.10), tenemos que (6.10) y (6.11) son equivalentes. La afirmación se sigue observando que (6.11) es equivalente a $\|f\|_* \leq \lambda$.

(c) Sea $N = 2$. Tenemos que

$$\mathcal{B}(0) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^2) \ : \ \exists z \in X(\mathbb{R}^2)_2,\ \|z\|_\infty \leq 1, -\mathrm{div}(z) = f \right\}.$$

Por otra parte, de (a) y (b) se sigue que $\|f\|_* \leq 1$ si y sólo si existe un $z \in X(\mathbb{R}^2)_2$ con $\|z\|_\infty \leq 1$ y tal que $f = -\mathrm{div}(z)$. Entonces la afirmación se sigue. □

Consideremos el problema

$$-\mathrm{div}\left(\frac{Du}{\|Du\|} \right) = f \in L^2(\mathbb{R}^N), \tag{6.12}$$

Observemos que la soluciones de (6.12) no son únicas. En efecto, si $u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap BV(\mathbb{R}^N)$ es una solución de (6.12) y $g \in C^1(\mathbb{R})$ con $g'(r) > 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$, entonces $w = g(u)$ es también una solución de (6.12). Dicho de otra forma, un cambio de contraste de u produce una nueva solución de (6.12).

Para expresar esta no unicidad de un modo mas general supongamos que

$(u_1, v), (u_2, v) \in \mathcal{B}$, i.e., existen campos vectoriales $z_i \in X(\mathbb{R}^N)_2$ con $\|z_i\|_\infty \leq 1$, tales que

$$-\mathrm{div}(z_i) = v, \qquad \int_{\mathbb{R}^N} (z_i, Du_i) = \int_{\mathbb{R}^N} \|Du_i\|, \qquad i = 1, 2.$$

Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_{\mathbb{R}^N} (\mathrm{div}(z_1) - \mathrm{div}(z_2))(u_1 - u_2)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (z_1 - z_2, Du_1 - Du_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \|Du_1\| - (z_2, Du_1) + \int_{\mathbb{R}^N} \|Du_2\| - (z_1, Du_2). \end{aligned}$$

Con lo que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \|Du_1\| = \int_{\mathbb{R}^N} (z_2, Du_1) \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \|Du_2\| = \int_{\mathbb{R}^N} (z_1, Du_2).$$

En otras palabras, z_1 es en algún sentido un campo vectorial unitario normal a los conjuntos de nivel de u_2 y similarmente se puede decir de z_2 con respecto a u_1.

6.2. Soluciones explícitas

Vamos a calcular explícitamente cual es la evolución de la función caracterítica de una bola y de un anillo.

Teorema 6.4. *Sea $u_0 = k\chi_{B_r(0)}$. Entonces la única solución $u(t,x)$ del problema (6.1) con dato inicial u_0 viene dada por*

$$u(t,x) = \operatorname{sign}(k)\frac{N}{r}\left(\frac{|k|r}{N} - t\right)^+ \chi_{B_r(0)}(x).$$

Observar que podemos escribir

$$u(t,x) = \operatorname{sign}(k)\left(|k| - \frac{\mathcal{H}^{N-1}(\partial B_r(0))}{\mathcal{L}^N(B_r(0))}t\right)^+ \chi_{B_r(0)}(x).$$

Demostración. Supongamos que $k > 0$. Buscamos una solución de (6.1) de la forma

$$u(t,x) = \alpha(t)\chi_{B_r(0)}(x)$$

en algún intervalo temporal $(0,T)$.

Entonces, buscamos un campo vectorial $z(t) \in X(\mathbb{R}^N)_2$ con $\|z\|_\infty \leq 1$, tal que

$$u'(t) = \operatorname{div}(z(t)) \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \tag{6.13}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (z(t), Du(t)) = \int_{\mathbb{R}^N} \|Du(t)\|. \tag{6.14}$$

Si tomamos $z(t)(x) = -\dfrac{x}{r}$ para $x \in \partial B_r(0)$, integrando la ecuación (6.13) en $B_r(0)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}&\alpha'(t)\,\mathcal{L}^N(B_r(0)) \\ &= \int_{B_r(0)} \operatorname{div}(z(t))\,dx = \int_{\partial B_r(0)} z(t)\cdot\nu\, d\mathcal{H}^{N-1} = -\mathcal{H}^{N-1}(\partial B_r(0)).\end{aligned}$$

Por tanto

$$\alpha'(t) = -\frac{N}{r},$$

y, consecuentemente,

$$\alpha(t) = k - \frac{N}{r}t.$$

En cuyo caso, T tiene que venir dado por $T = \dfrac{kr}{N}$.

Para construir z en $(0,T) \times (\mathbb{R}^N \setminus B_r(0))$ buscamos campos z de la forma $z = \rho(\|x\|)\dfrac{x}{\|x\|}$ tal que $\operatorname{div}(z(t)) = 0$, $\rho(r) = -1$.

Puesto que

$$\operatorname{div}(z(t)) = \nabla\rho(\|x\|)\cdot\frac{x}{\|x\|} + \rho(\|x\|)\operatorname{div}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \rho'(\|x\|) + \rho(\|x\|)\frac{N-1}{\|x\|},$$

se debe tener

$$\rho'(s) + \rho(s)\frac{N-1}{s} = 0 \qquad \text{for} \quad s > r. \tag{6.15}$$

La solución de (6.15) tal que $\rho(r) = -1$ es

$$\rho(s) = -r^{N-1}s^{1-N}.$$

Por tanto, en $\mathbb{R}^N \setminus B_r(0)$,

$$z(t) = -r^{N-1}\frac{x}{\|x\|^N}.$$

Consecuentemente, el candidato para $z(t)$ es el campo vectorial

$$z(t,x) := \begin{cases} -\dfrac{x}{r} & \text{si} x \in B_r(0) \ \text{ and } \ 0 \le t \le T \\ \\ -r^{N-1}\dfrac{x}{\|x\|^N} & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_r(0)}, \ \text{ y } 0 \le t \le T \\ \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \ \text{ y } \ t > T, \end{cases}$$

y la correspondiente función $u(t,x)$ es

$$u(t,x) = \left(k - \frac{N}{r}t\right)\chi_{B_r(0)}(x)\chi_{[0,T]}(t), \quad \text{where } T = \frac{kr}{N}.$$

Veamos que $u(t,x)$ satisface (6.13), (6.14). Un simple calculo demuestra que se cumple (6.13).

Finalmente, si $0 \le t \le T$, por la fórmula de Green, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(z(t), Du(t)) = -\int_{\mathbb{R}^N}\operatorname{div}(z(t))u(t)\,dx =$$

$$-\int_{B_r(0)}\left(k - \frac{N}{r}t\right)\operatorname{div}(z(t))\,dx = \int_{B_r(0)}\left(k - \frac{N}{r}t\right)\frac{N}{r}\,dx =$$

$$\left(k - \frac{N}{r}t\right)\frac{N}{r}\mathcal{L}^N(B_r(0)) = \left(k - \frac{N}{r}t\right)\mathcal{H}^{N-1}(\partial B_r(0)) = \int_{\mathbb{R}^N}\|Du(t)\|.$$

Por tanto (6.14) se cumple, y consecuentemente $u(t,x)$ es la solución de (6.1) con dato inicial $u_0 = k\chi_{B_r(0)}$. $\square$

Teorema 6.5. *Sea* $\Omega = B_R(0) \setminus \overline{B_r(0)}$, $0 < r < R$ *y* $u_0 = k\chi_\Omega$. *Entonces la única solución* $u(t,x)$ *del problema (6.1) con dato inicial* u_0 *es*

$$u(t,x) = \mathrm{sign(k)}\left(|k| - \frac{Per(\Omega)}{\mathcal{L}^N(\Omega)}t\right)\chi_\Omega(x) + \frac{\mathrm{Per}(B_r(0))}{\mathcal{L}^N(B_r(0))}t\chi_{B_r(0)}(x) \tag{6.16}$$

$t \in [0, T_1]$, $x \in \mathbb{R}^N$, *donde* T_1 *cumple*

$$T_1 \cdot \left(\frac{Per(\Omega)}{\mathcal{L}^N(\Omega)} + \frac{Per(B_r(0))}{\mathcal{L}^N(B_r(0))}\right) = |k|$$

y $u(t,x)$ *evoluciona como la solución dada en el Teorema 6.4 hasta su extinción.*

Demostración. Sea $\xi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ el campo vectorial definido por

$$\xi(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{r} & \text{para } x \in B_r(0), \\[2ex] \left((Rr)^{N-1}\dfrac{R+r}{\|x\|^N} - (R^{N-1} + r^{N-1})\right)\dfrac{x}{R^N - r^N}, & x \in B_R(0) \setminus \overline{B_r(0)}, \\[2ex] -\dfrac{R^{N-1}}{\|x\|^N}x & \text{for } x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}. \end{cases}$$

Entonces $\|\xi\|_\infty \leq 1$, $\mathrm{div}(\xi) = \frac{N}{r} = \frac{\mathrm{Per}(B_r(0)}{\mathcal{L}^N(B_r(0))}$ en $B_r(0)$, $\mathrm{div}(\xi) = -\frac{\mathrm{Per}(\Omega)}{\mathcal{L}^N(\Omega)}$ on $B_R(0) \setminus \overline{B_r(0)}$, $\mathrm{div}(\xi) = 0$ on $\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}$, y $\xi \cdot \nu^{B_r(0)} = 1$ on $\partial B_r(0)$, $\xi \cdot \nu^{B_R(0)} = -1$ en $\partial B_R(0)$. Por tanto, se puede comprobar sue la solución u de (6.1) con dato inicial $u_0 = \chi_\Omega$ in $[0, T_1]$ viene dada por (6.16). Cuando $t = T_1$, los dos conjuntos sue evolucionan alcanzan la miasma altura y $u(T_1, x) = \alpha\chi_{B_R(0)}$ para algún $\alpha > 0$. Para $t > T_1$ la solución u es igual a la solución con dato inicial $\alpha\chi_{B_R(0)}$ (al tiempo T_1) como se describe en el Teorema 6.4. □

Nota 6.6. Los resultados anteriores demuestran que no hay efecto regularizante espacial, para $t > 0$, similar al case de la ecuación del cal or y much as otras ecuaciones parabólucas cuasilineales. En nuestro caso caso, la solución es discontinua y tiene la mínima regularidad espacial $u(t,.) \in BV(\mathbb{R}^N) \setminus W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$.

6.3. Comportamiento asintótico

Teorema 6.7. *Asumamos que* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ *tiene soporte compacto contenido en una bola de radio* R *y sea* $u(t)$ *la ùnica soluciòn de del problema de Cauchy para la variaciòn total con dato inicial* u_0. *Entonces,* $\mathrm{sop}(u(t)) \subset B$ *para todo* $t \geq 0$ *y se tiene que*

$$\|u(t)\|_\infty \leq \frac{N}{R}\left(\frac{R\|u_0\|_\infty}{N} - t\right)^+.$$

Por tanto, si

$$T^*(u_0) := \text{ínf}\{t > 0 \ : \ u(t) = 0\},$$

se tiene que

$$T^*(u_0) \leq \frac{R\|u_0\|_\infty}{N}\chi_B(x)$$

Demostración. Basta con tomar

$$v(t,x) := \frac{N}{R}\left(\frac{R\|u_0\|_\infty}{N} - t\right)^+ \chi_B(x).$$

y usando el principio de comparaciòn se tiene que

$$-v(t) \leq u(t) \leq v(t).$$

□

Teorema 6.8. *Asumamos que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ tiene soporte compacto contenido en una bola de radio R y sea $u(t)$ la ùnica soluciòn de del problema de Cauchy para la variaciòn total con dato inicial u_0. Entonces*

$$\|u(t)\|_\infty \geq \frac{N}{R}(T^*(u_0) - t) \quad \textit{para} \ \ 0 \leq t \leq T^*(u_0).$$

Demostración. Sea $k > 0$ tal que $\frac{kR}{N} = T^*(u_0)$. Por el Teorema 6.4 sabemos que

$$v(t,x) := \frac{N}{R}\left(\frac{kR}{N} - t\right)^+ \chi_B(x)$$

es una soluciòn del problema de Cauchy con dato inicial $v_0 = k\chi_B$. Luego tenemos que probar que $\|u(t)\|_\infty \geq \|v(t)\|_\infty$.

Por reducciòn al absurdo supongamos que existe un $0 < t_0 < T^*(u_0)$ y un $\epsilon > 0$, tales que

$$\|u(t_0)\|_\infty < \|v(t_0)\|_\infty - \epsilon = k - \frac{t_0 N}{R} - \epsilon = k_1.$$

Entonces, si consideramos las funciones

$$v_1(t,x) := \frac{N}{R}\left(\frac{k_1 R}{N} - t\right)^+ \chi_B(x), \quad v_2(t,x) := -\frac{N}{R}\left(\frac{k_1 R}{N} - t\right)^+ \chi_B(x),$$

tenemos que $v_2(t) \leq u(t_0 + t) \leq v_1(t)$. Con lo que

$$T^*(u_0) - t_0 = T^*(u(t_0)) \leq \frac{k_1 R}{N} = \frac{R}{N}\left(k - \frac{t_0 N}{R} - \epsilon\right) = T^*(u_0) - t_0 - \frac{\epsilon R}{N},$$

que es una contradicciòn. □

Capítulo 7

El problema de Dirichlet para el flujo variación total

En [8] se propone un método variacional para extender datos φ de $\partial\Omega$ a una función u en Ω a lo largo de curvas integrales de $\theta^{\perp}$, el vector ortogonal a θ, donde $\theta : \Omega \to \mathbb{R}^N$ es un campo vectorial con $|\theta| \leq 1$. Dicho método da lugar al estudio del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = div\left(\dfrac{Du}{\|Du\|}\right) & \text{en} \quad Q = (0,\infty) \times \Omega \\ u(t,x) = \varphi(x) & \text{sobre} \quad S = (0,\infty) \times \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en} \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{7.1}$$

donde Ω es un dominio acotado, $u_0 \in L^1(\Omega)$ y $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega)$.

El problema (7.1) lo hemos estudiado en [4]. Aquí vamos a dar algunas de las ideas y resultados de dicho trabajo.

Sea $\Psi_\varphi : L^2(\Omega) \to]-\infty, +\infty]$, el funcional definido por

$$\Psi_\varphi(u) = \begin{cases} \|Du\| + \displaystyle\int_{\partial\Omega} |u - \varphi| & \text{si } u \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega) \\ +\infty & \text{si } u \in L^2(\Omega) \setminus BV(\Omega) \cap L^2(\Omega) \end{cases} \tag{7.2}$$

Lema 7.1. *Para cada $\varphi \in L^1(\partial\Omega)$, el operador Ψ_φ es semi-continuo inferiormente respecto la L^1 convergencia.*

Demostración. Dada $\varphi \in L^1(\partial\Omega)$, por el Teorema 2.15, existe $w \in BV(\Omega)$ tal que $\varphi|_{\partial\Omega} = w$.

Para $u \in BV(\Omega)$ definimos

$$u_\varphi := \begin{cases} u & \text{en } \Omega \\ \\ w & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Por el Teorema de extensió (Teoerema 2.16) tenemos que

$$\|Du_\varphi\|(\mathbb{R}^N) = \|Du\|(\Omega) + \|Dw\|(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}) + \int_{\partial\Omega} |u - \varphi| d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Con lo cual, si $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$, como $(u_n)_\varphi \to u_\varphi$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$, teniendo en cuenta la semicontinuidad inferior de la variación total, tenemos que

$$\|Du_\varphi\|(\mathbb{R}^N) \leq \liminf_{n\to\infty} \|D(u_n)_\varphi\|(\mathbb{R}^N)$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \left[\|Du_n\|(\Omega) + \|Dw\|(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}) + \int_{\partial\Omega} |u_n - \varphi| d\mathcal{H}^{N-1} \right],$$

de donde se sigue que

$$\Psi_\varphi(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \Psi_\varphi(u_n).$$

□

Puesto que el funcional Ψ_φ es convexo y semi-continuo inferiormente en $L^2(\Omega)$, tenemos que $\partial\Psi_\varphi$ es un operador maximal monótono en $L^2(\Omega)$, y consecuentemente, si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo en $L^2(\Omega)$ generado por $\partial\Psi_\varphi$, para cada $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u(t) := T(t)u_0$ es una solución fuerte del problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \partial\Psi_\varphi u(t) \ni 0 \\ \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{7.3}$$

Definimos en $L^2(\Omega)$ el operador B_φ como:

$$(u, v) \in B_\varphi \iff \exists\, z \in X_2(\Omega),\ \|z\|_\infty \leq 1,\ v = -\mathrm{div}(\mathbf{z}) \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

satisfaciendo

$$\int_\Omega (w-u)v \leq \int_\Omega (z, Dw) - \int_\Omega \|Du\| + \int_{\partial\Omega} |w-\varphi| - \int_{\partial\Omega} |u-\varphi| \quad \forall w \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega). \tag{7.4}$$

Teorema 7.2. *Sea $\varphi \in L^1(\partial\Omega)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $(u, v) \in \partial\Psi_\varphi$

(2) $\exists\, z \in X_2(\Omega),\ \|z\|_\infty \leq 1,\ v = -\mathrm{div}(z)$ *in* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *tal que*

$$(z, Du) = \|Du\|, \qquad [z, \nu] \in \mathrm{sign}(\varphi - u) \quad \mathcal{H}^{N-1} \ \textit{sobre } \partial\Omega.$$

(3) $(u,v) \in B_{\varphi}$.

Demostración. (2) implica (1): Dada $w \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, aplicando la Fómula de Green tenemos que

$$\int_\Omega v(w-u) = -\int_\Omega \mathrm{div}(z)(w-u) = \int_\Omega (z,Dw) - (z,Du) - \int_{\partial\Omega} [z,\nu](w-u)$$

$$\int_\Omega (z,Dw) - \int_\Omega \|Du\| - \int_{\partial\Omega} [z,\nu](w-\varphi) - \int_{\partial\Omega} [z,\nu](\varphi - u)$$

$$\leq \int_\Omega \|Dw\| - \int_\Omega \|Du\| + \int_{\partial\Omega} |w-\varphi| - \int_{\partial\Omega} |u-\varphi| = \Psi_\varphi(w) - \Psi_\varphi(u).$$

Luego $(u,v) \in \partial\Psi_\varphi$.

(3) implica (2): Tomando $w = u$ en (7.4), tenemos que

$$0 \leq \int_\Omega (z,Du) - \int_\Omega \|Du\|,$$

luego

$$\int_\Omega \|Du\| \leq \int_\Omega (z,Du) \leq \|z\|_\infty \int_\Omega \|Du\| \leq \int_\Omega \|Du\|.$$

Por tanto,

$$(z,Du) = \|Du\|.$$

Como consecuencia del Lema 3.1, existen $w_n \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ tales que $w_n|_{\partial\Omega} = \varphi$, satisfaciendo

$$\|w_n\|_1 \leq \frac{1}{n}, \qquad \int_\Omega |\nabla w_n| \leq \int_{\partial\Omega} |\varphi| + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tomando w_n como función test en (7.4) y aplicando la fórmula de Green, tenemos que

$$\int_\Omega (w_n - u)v \leq \int_\Omega (z,Dw_n) - \int_\Omega \|Du\| - \int_{\partial\Omega} |u-\varphi|$$

$$= -\int_\Omega \mathrm{div}(z) w_n + \int_{\partial\Omega} [z,\nu]\varphi - \int_{\partial\Omega} |u-\varphi|.$$

Entonces, tomando límites cuando $n \to \infty$, obtenemos que

$$-\int_\Omega uv \leq \int_{\partial\Omega} [z,\nu]\varphi - \int_\Omega \|Du\| - \int_{\partial\Omega} |u-\varphi|.$$

Por otra parte, como $v = -\mathrm{div}(z)$, aplicando la Fórmula de Green, tenemos que

$$\int_\Omega \|Du\| = \int_\Omega (z,Du) = \int_\Omega uv + \int_{\partial\Omega} [z,\nu]u.$$

Consecuentemente,

$$0 \leq \int_{\partial\Omega} [z,\nu](\varphi - u - |u-\varphi|),$$

y como

$$[z,\nu](\varphi - u - |u-\varphi|) \leq 0, \quad \mathcal{H}^{N-1} - c.p.p. \text{ en } \partial\Omega,$$

tenemos que

$$[z,\nu](\varphi - u - |u) = |u-\varphi| \quad \mathcal{H}^{N-1} - c.p.p. \text{ en } \partial\Omega,$$

con lo que

$$[z,\nu] \in \operatorname{sign}(\varphi - u) \quad \mathcal{H}^{N-1} - c.p.p. \text{ en } \partial\Omega.$$

(1) implica (3): Veamos que el operador B_φ es monótono. Sea $(u,v),(\overline{u},\overline{v}) \in B_\varphi$, entonces

$$\int_\Omega (\overline{u}-u)v \leq \int_\Omega (z, D\overline{u}) - \int_\Omega \|Du\| + \int_{\partial\Omega} |\overline{u}-\varphi| - \int_{\partial\Omega} |u-\varphi|$$

y

$$\int_\Omega (u-\overline{u})\overline{v} \leq \int_\Omega (\overline{z}, Du) - \int_\Omega \|D\overline{u}\| + \int_{\partial\Omega} |u-\varphi| - \int_{\partial\Omega} |\overline{u}-\varphi|,$$

de donde se deduce que

$$\int_\Omega (u-\overline{u})(v-\overline{v}) \geq \int_\Omega \|Du\| + \int_\Omega \|D\overline{u}\| - \int_\Omega (z, D\overline{u}) - \int_\Omega (\overline{z}, Du) \geq 0.$$

Si demostramos que $R(I+B_\varphi) = L^2(\Omega)$, entonces, tendremos que B_φ será maximal monótono y como $B_\varphi \subset \partial\Psi_\varphi$, se tendrá que $B_\varphi = \partial\Psi_\varphi$. Consecuentemente, para finalizar la demostración, tenemos que probar que dada $f \in L^2(\Omega)$ existe una u tal que

$$u + B_\varphi(u) = f. \tag{7.5}$$

No daremos la demostración de este hecho, sólo decir que para ello, consideramos primero $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega)$, tal que $\varphi = w|_{\partial\Omega}$, con $w \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces existe $u_p \in W^{1,p}(\Omega)$ solución del problema

$$\begin{cases} u_p - \Delta_p u_p = f & \text{en } \Omega \\ \\ u_p = \varphi & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

El paso siguiente es demostrar que $u_p \to u$ cuando $p \to 1$, siendo u la solución de (7.5). Para una demostración de este útimo ver [4] . □

Como consecuencia del Teorema 4.8 (ver también Nota 4.10) y del Teorema 7.3, tenemos el siguiente resultado sobre existencia y unicidad de soluciones.

Teorema 7.3. *Sea $\varphi \in L^1(\partial\Omega)$. Dada $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u(t) = S(t)u_0$ es una solución fuerte de (7.3). Además, $u'(t) \in L^2(\Omega)$, $u(t) \in BV(\Omega)$, y existe $z(t) \in X(\Omega)$, $\|z(t)\|_\infty \leq 1$ y $u'(t) = div(z(t))$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ a.e. $t \in [0,+\infty[$, satisfaciendo para cada $w \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$,*

$$-\int_\Omega (w-u(t))u'(t) \leq \int_\Omega (z(t), Dw) - \|Du(t)\| -$$
$$\int_{\partial\Omega} [z(t),\nu](w-\varphi) - \int_{\partial\Omega} |u(t)-\varphi|$$

Además, $u(t)$ también se caracteriza de la forma siguiente: existe $z(t) \in X(\Omega)$, $\|z(t)\|_\infty \leq 1$ y $u'(t) = div(z(t))$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ a.e. $t \in [0, +\infty[$, satisfaciendo

$$\int_\Omega (z(t), Du(t)) = \|Du(t)\| \quad [z(t), \nu] \in sign(\varphi - u(t)) \quad \mathcal{H}^{N-1} - cp.p.. \text{ on } \partial\Omega.$$

Observar que la condición de frontera no se toma puntualmente.

Para estudiar el problema con dato en $L^1(\Omega)$ se utiliza la teoría desarrollada en la Sección 4.3. Para ello se define un operador en $L^1(\Omega)$ asociado con el problema de Dirichlet. Para la definición de dicho operador se necesitan las siguientes funciones de truncamiento:

Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las funciones continuas no decrecientes $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tales que existe p' excepto en un conjunto finito y $\mathrm{supp}(p')$ es compacto.

Definimos en $L^1(\Omega)$ el operador

Definición 7.4. $(u, v) \in \mathcal{A}_\varphi$ si y sólo si $u, v \in L^1(\Omega)$, $p(u) \in BV(\Omega)$ para todo $p \in \mathcal{P}$ y existe un $z \in X(\Omega)$ con $\|z\|_\infty \leq 1$, $v = -div(z)$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega (w - p(u))v \leq \int_\Omega z \cdot \nabla w - \|Dp(u)\| + \int_{\partial\Omega} |w - p(\varphi)| - \int_{\partial\Omega} |p(u) - p(\varphi)|,$$

$\forall w \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y $\forall p \in \mathcal{P}$.

Se tiene la siguiente caracterización del operador $\mathcal{A}_\varphi$.

Proposición 7.5. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $(u, v) \in \mathcal{A}_\varphi$

(b) $u, v \in L^1(\Omega)$, $p(u) \in BV(\Omega)$ *para todo* $p \in \mathcal{P}$, *y existe* $z \in X(\Omega)$, *con* $\|z\|_\infty \leq 1$, $v = -div(z)$ *en* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega (w - p(u))v \leq \int_\Omega (z, Dw) - \|Dp(u)\| + \int_{\partial\Omega} |w - p(\varphi))| - \int_{\partial\Omega} |p(u) - p(\varphi)|$$

para cada $w \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *y* $p \in \mathcal{P}$.

(d) $u, v \in L^1(\Omega)$, $p(u) \in BV(\Omega)$ *para todo* $p \in \mathcal{P}$, *y existe un* $z \in X(\Omega)$, *con* $\|z\|_\infty \leq 1$, $v = -div(z)$ *en* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega (z, Dp(u)) = \|Dp(u)\| \qquad \forall\, p \in \mathcal{P}$$

$$[z, \nu] \in sign(p(\varphi) - p(u)) \quad H^{N-1} - a.e. \text{ sobre } \partial\Omega, \quad \forall\, p \in \mathcal{P}.$$

Se demuestra que el operador $\mathcal{A}_\varphi$ es m-acretivo con dominio denso (ver [4] o [6]). Entonces, usando el Teorema de Crandall-Liggett (Teorema 4.25) concluimos que el problema abstracto de Cauchy en $L^1(\Omega)$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \mathcal{A}_\varphi u \ni 0, \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{7.6}$$

tiene una úinca solución leve. Ahora, en general dichas soluciones leves no son fuertes, y el problema aquí es caracterizar dichas soluciones. Para dicha caracterzación ver [4] o [6].

Bibliografía

[1] L. Alvarez, P.L. Lions, and J.M. Morel, *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion*, SIAM J. Numer. Anal. **29** (1992), pp. 845-866.

[2] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara: *Function of Bounded Variation and Free Discontinuous problems.* Oxford mathematical Monographs, 2000.

[3] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J. M. Mazón, *Minimizing Total Variation Flow*, Diff. and Int. Eq. **14** (2001), 321-360.

[4] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J. M. Mazón, *The Dirichlet problem for the total variational flow*, J. Funct. Anal. **580** (2001), 387-473.

[5] F. Andreu, V. Caselles, J.I. Diaz, and J.M. Mazón, *Qualitative properties of the total variation flow*, J. Funct. Analysis **188** (2002), 516-547.

[6] F. Andreu, V. Caselles, and J.M. Mazón, *Parabolic Quasilinear Equations Minimizing Linear Growth Functionals.* Progress in Mathematics, vol. 223, 2004. Birkhauser.

[7] G. Anzellotti, *Pairings Between Measures and Bounded Functions and Compensated Compactness*, Ann. di Matematica Pura ed Appl. IV (135) (1983), 293-318.

[8] C. Ballester, M. Bertalmio, V. Caselley, G. Sapiro and J. Verdera, *Filling-In by Joint Interpolation of Vector Fields and Grey Levels*, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 10(8), pp. 1300-1211, 2001.

[9] G, Barlet, H. M. Soner and P. Souganidis. *Front propagation and phase field theory.* J. Control Optim **31** (1993), 439-469.

[10] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces.* Noordhoff International Publisher, 1976.

[11] Ph. Bénilan, *Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications,* Thése Orsay, 1972.

[12] Ph. Bénilan and M. G. Crandall, *Completely accretive operators.* In *Semigroup Theory and Evolution Equations (Delft, 1989)*, volume 135 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 41–75, Dekker, New York, 1991.

[13] H. Brezis, *Operateurs Maxiaux Monotones.* North-Holland, Amsterdam, 1973.

[14] A. Chambolle and P.L. Lions, *Image Recovery via Total Variation Minimization and Related Problems*, Numer. Math. **76** (1997), 167-188.

[15] Y.G. Chen, Y. Giga and S. Goto *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations.* J. Differential Geom. **33**, (1991), 749-786.

[16] Ph. Clement et alt. *One-Parameter Semigroups* CWI Monographs **5**, North-Holland, 1987.

[17] M.G. Crandall and T.M. Liggett, *Generation of Semigroups of Nonlinear Transformations on General Banach Spaces.* Amer. J. Math. **93** (1971), 265-298.

[18] M.G. Crandall, *Semigroups of Nonlinear Transformations in Banach Spaces.* In Contribution to Nonlinear Functional Analysis (E.H. Zarantonello, ed.) Academic Press, New York 1971, 149-179.

[19] M.G. Crandall, *Nonlinear Semigroups and Evolution Governed by Accretive Operators.* In Proceeding of Symposium in Pure Mat., Part I (F. Browder, ed.) A.M.S., Providence 1986, 305-338.

[20] L.C. Evans *Partial Differential Equations*, Birkhäuser, 1984.

[21] L.C. Evans and R.F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Graduate Studies in Mathematics, Vol 19. 1997.

[22] L. C. Evans and J. Spruck *Motion of level sets by mean curvature I*, J. Diff. Geometry **33** (1991), 635-681.

[23] L. C. Evans and J. Spruck *Motion of level sets by mean curvature II*, Trans. Amer. math. Soc, **330** (1992), 321-332.

[24] W. H. Fleming, R. Rishel: *An integral formula for total gradient variation.* Arch. Math. **11** (1960), 218-222.

[25] E. Gagliardo, *Caratterizzazione delle trace sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili*, Rend. Sem. mat. Padova **27** (1957), 284-305.

[26] E. Giusti, *Minimal Surface and Functions of Bounded variation*, Birkhäuser, 1984.

[27] Y. Meyer, *Oscillating patterns in image processing and nonlinear evolution equations,* The fifteenth Dean Jacqueline B. Lewis memorial lectures. University Lecture Series, 22. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[28] G. Minty, *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space,* Duke Math. **29** (1962), 341-346.

[29] S. Osher and J. A. Sethian *Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms base on hamilton-Jacabi formulations* J. of Comp. Phys. **79** (1988), 12-49.

[30] L. Rudin, *Images, Numerical Analysis of Singularities and Shock Filters,* Ph. D. Thesis, Caltech 1987.

[31] L. Rudin, S. Osher and E. Fatemi, *Nonlinear Total Variation based Noise Removal Algorithms*, Physica D.**60** (1992), 259-268.

[32] W. P. Ziemer, *Weakly Differentiable Functions*, GTM 120, Springer Verlag, 1989.