

Fascículo 9

Cursos y  
seminarios de  
matemática

**Serie B**

***Jonathan Barmak***

## Poliedros

Una introducción a la geometría y el álgebra  
de los complejos simpliciales

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2014

# Cursos y Seminarios de Matemática – Serie B

## Fascículo 9

### Comité Editorial:

Carlos Cabrelli (Director)  
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires  
E-mail: [cabrelli@dm.uba.ar](mailto:cabrelli@dm.uba.ar)

Gabriela Jerónimo  
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires  
E-mail: [jeronimo@dm.uba.ar](mailto:jeronimo@dm.uba.ar)

Claudia Lederman  
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires  
E-mail: [clerderma@dm.uba.ar](mailto:clerderma@dm.uba.ar)

Leandro Vendramin  
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.  
E-mail: [lvendramin@dm.uba.ar](mailto:lvendramin@dm.uba.ar)

ISSN 1851-149X (Versión Electrónica)

ISSN 1851-1481 (Versión Impresa)

Derechos reservados

© 2014 Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,

Universidad de Buenos Aires.  
Departamento de Matemática  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires  
Ciudad Universitaria – Pabellón I  
(1428) Ciudad de Buenos Aires  
Argentina.

<http://www.dm.uba.ar>

e-mail. [secre@dm.uba.ar](mailto:secre@dm.uba.ar)

tel/fax: (+54-11)-4576-3335

# Poliedros

Una introducción a la geometría y el álgebra de  
los complejos simpliciales

Jonathan A. Barmak

## Prefacio

La topología algebraica se ocupa, en gran medida, de estudiar propiedades topológicas de los espacios por medio de invariantes algebraicos. Por ejemplo, los grupos de homología, el anillo de cohomología y los grupos de homotopía pueden utilizarse para probar que dos espacios no tienen el mismo tipo homotópico. Calcular estos invariantes en un espacio arbitrario no es una tarea sencilla. Sin embargo, muchos de los espacios que conocemos tienen una descripción combinatoria que permite que este trabajo se simplifique. Los *poliedros* son espacios topológicos que se consiguen, salvo homeomorfismos, uniendo *simplices*, es decir, puntos, segmentos, triángulos, tetraedros y análogos de dimensión mayor. La clase de los poliedros incluye, por ejemplo, a todas las variedades diferenciables, en particular, a los discos, las esferas, los espacios euclídeos y las superficies.

Las estructuras combinatorias con las que modelaremos a los poliedros son los *complejos simpliciales*. Un complejo simplicial  $K$  es un conjunto  $V$  junto con un subconjunto  $S \subseteq \mathcal{P}_{<\infty}(V)$  del conjunto de partes finitas de  $V$ , que es cerrado por inclusiones. Cada complejo simplicial tiene asociado un espacio topológico y cada función combinatoria entre complejos simpliciales (*morfismo simplicial*) induce una función continua entre los poliedros asociados. Si bien no toda función continua entre poliedros es la inducida por un morfismo simplicial entre los complejos simpliciales, el Teorema de aproximación simplicial dice que toda función continua es homotópica a una simplicial, siempre que permitamos *subdividir* al complejo del dominio. Este resultado permite convertir problemas continuos en problemas discretos y, en particular, estudiar la teoría de homotopía de poliedros con herramientas combinatorias.

A diferencia de lo que ocurre con espacios arbitrarios, la homología de los poliedros puede calcularse algorítmicamente. La *homología simplicial* de un complejo simplicial se define de manera similar a la singular, como la homología de cierto complejo de cadenas. La homología simplicial de un poliedro coincide con la singular. De este modo, al tener una descripción combinatoria de un espacio, el cálculo de la homología pasa a convertirse en un problema simple. Cuando combinamos el Teorema de aproximación simplicial con elementos básicos de álgebra homológica, surgen resultados sorprendentes como el Teorema del punto fijo de Lefschetz, que dice en particular, que si un poliedro compacto  $X$  tiene todos sus grupos de homología de torsión, entonces toda función continua  $X \rightarrow X$  tiene un punto fijo. Esto generaliza el conocido Teorema del punto fijo de Brouwer. Cabe señalar que el Teorema de Lefschetz no vale para espacios métricos compactos, en general. Este ejemplo muestra una segunda ventaja que se manifiesta al trabajar con complejos simpliciales: no sólo el cálculo de invariantes homotópicos se simplifica en este contexto, sino que, al reducir la clase de espacios considerados, se obtienen resultados más fuertes que no valen para espacios topológicos en general. Otro resultado en esta dirección es el Teorema de Whitehead, del cual se deduce que todo poliedro simplemente conexo con grupos de homología triviales es necesariamente contráctil. Este teorema no vale para espacios topológicos arbitrarios, aunque sí para los denominados *CW-complejos*, que son una clase que contiene propiamente a los poliedros. Un CW-complejo tiene

una descripción híbrida, combinatoria y topológica.

El objetivo de estas notas es dar una introducción a esta parte combinatoria de la topología algebraica, presentando resultados básicos sobre complejos simpliciales y algunas de las herramientas clásicas que se usan en el área para estudiar invariantes homotópicos.

En la primera sección de este apunte introduciremos la noción de complejo simplicial, de morfismo simplicial y la de los espacios y funciones continuas modelados por ellos. En la segunda sección estudiaremos subdivisiones, probaremos el Teorema de aproximación simplicial y veremos algunas de sus aplicaciones. La Sección 3 está dedicada a definir la homología simplicial de un complejo, de un morfismo, la homología relativa de un par y probar resultados elementales como el Teorema de escisión. En la sección siguiente probaremos que los grupos de homología simplicial son un invariante homotópico. Con este fin demostraremos el Teorema del acyclic carrier, una de las herramientas algebraicas esenciales en esta teoría. Aquí veremos aplicaciones clásicas como el Teorema de no retracción, el Teorema del punto fijo de Brouwer y que espacios euclídeos de distinta dimensión no son homeomorfos. En la quinta sección definiremos el *número de Lefschetz*  $\Lambda(f)$  de una endofunción  $f : X \rightarrow X$  de un poliedro compacto. Luego probaremos el Teorema del punto fijo de Lefschetz mencionado antes, que afirma que si  $\Lambda(f) \neq 0$ , entonces  $f$  tiene un punto fijo. En la Sección 6 mostraremos que la homología simplicial de un poliedro coincide con su homología singular. Finalmente, en la última sección estudiaremos complejos simpliciales asociados a conjuntos parcialmente ordenados, el Teorema A de Quillen en este contexto, que da una condición suficiente para que un morfismo de posets induzca una equivalencia homotópica a nivel continuo, y aplicaciones de este resultado como el Teorema de Dowker.

Este apunte está dirigido a alumnos que hayan cursado la materia Topología de la licenciatura y supone conocidos los contenidos del programa. De todos modos, los resultados necesarios se recuerdan y enuncian en el texto y se dan referencias en los lugares pertinentes. No es imprescindible tener conocimientos previos sobre homología singular.

Estas notas siguen parte de las clases que di en la materia optativa Topología Algebraica en el primer cuatrimestre de 2013 en nuestro departamento. Dos excelentes libros que desarrollan con más profundidad los temas estudiados en este texto, y que contienen gran parte de los resultados presentados, son "Elements of Algebraic Topology" de J.R. Munkres [22] y "Algebraic Topology" de E. Spanier [26]. Varias de las demostraciones que aquí aparecen están inspiradas en las expuestas en dichas referencias.

En este apunte no estudiaremos cohomología, grupos de homotopía ni CW-complejos. El lector interesado en estos temas puede consultar referencias clásicas como [11, 14, 16, 17, 18, 22, 26, 27, 28].

Quiero agradecer a Iván Sadofski Costa por leer estas notas, por sus correcciones y comentarios.

Buenos Aires  
Junio de 2014

Jonathan A. Barmak

# Índice

1.	Complejos simpliciales y sus espacios asociados . . . . .	2
	Complejos simpliciales abstractos . . . . .	2
	Realización geométrica . . . . .	4
2.	Teorema de aproximación simplicial . . . . .	10
	Aproximaciones simpliciales . . . . .	11
	Subdivisiones . . . . .	12
	Símplices arbitrariamente chicos . . . . .	15
	Teorema de aproximación simplicial . . . . .	16
	Aplicaciones . . . . .	17
3.	Homología simplicial . . . . .	18
	El complejo de cadenas de símplexes orientados . . . . .	19
	Homología relativa y escisión . . . . .	23
	Homología en morfismos . . . . .	25
4.	Teorema del acyclic carrier e invarianza topológica de la homología . . . . .	25
	Homotopías entre morfismos de complejos de cadenas . . . . .	26
	Contigüidad . . . . .	27
	Acyclic carriers . . . . .	28
	Invarianza topológica . . . . .	30
	Aplicaciones . . . . .	33
	Invarianza homotópica . . . . .	34
5.	Teorema del punto fijo de Lefschetz . . . . .	35
	Teorema de la traza de Hopf . . . . .	35
	Característica de Euler . . . . .	38
	Teorema del punto fijo de Lefschetz . . . . .	40
	Funciones entre esferas . . . . .	42
6.	Relación con homología singular . . . . .	43
	Repaso de homología singular . . . . .	44
	Homología dirigida y dos isomorfismos . . . . .	45
7.	Conjuntos parcialmente ordenados . . . . .	48
	Contractible carriers y el Teorema A para posets . . . . .	48
	Aplicaciones . . . . .	50

# 1. Complejos simpliciales y sus espacios asociados

En esta primera sección introduciremos la categoría de complejos simpliciales, cuyos objetos y morfismos tienen una descripción discreta. A continuación veremos como el funtor *realización geométrica* asocia a cada complejo simplicial un espacio topológico y a cada morfismo simplicial una función continua.

## Complejos simpliciales abstractos

**Definición 1.1.** Un *complejo simplicial (abstracto)*  $K$  consta de un conjunto  $V_K$  cuyos elementos se denominan *vértices* y un conjunto  $S_K$ , cuyos elementos son subconjuntos no vacíos finitos de  $V_K$ , que es cerrado por inclusiones (i.e. si  $\sigma \in S_K$  y  $\emptyset \neq \tau \subseteq \sigma$ , entonces  $\tau \in S_K$ ) y tal que  $\{v\} \in S_K$  para todo  $v \in V_K$ . Los elementos de  $S_K$  se llaman *símplices* de  $K$ .

**Ejemplo 1.2.** Existe un complejo simplicial  $K$  que tiene a  $V_K = \{1, 2, 3\}$  como conjunto de vértices y a  $S_K = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$  como conjunto de símplices.

Como el conjunto de símplices determina el conjunto de vértices, a menudo se identifica el complejo simplicial  $K$  con  $S_K$ . Si  $\sigma \in S_K$ , escribimos también  $\sigma \in K$  y si  $v \in V_K$  escribimos  $v \in K$ .

Si  $\sigma \in K$  tiene  $n + 1$  elementos, decimos que  $\sigma$  es un *n-simplex* y que la *dimensión* de  $\sigma$  es  $\dim(\sigma) = n$ . Si  $\emptyset \neq \tau \subseteq \sigma$ , decimos que  $\tau$  es una *cara* de  $\sigma$ . Si además  $\dim(\tau) = \dim(\sigma) - 1$ ,  $\tau$  se dice *cara inmediata* de  $\sigma$ . En el ejemplo de arriba  $\{1\}$  es cara inmediata de  $\{1, 3\}$ . El simplex  $\{1, 3\}$  tiene tres caras en total,  $\{1\}$ ,  $\{3\}$  y  $\{1, 3\}$ . En general un *n-simplex* tiene  $2^{n+1} - 1$  caras.

La *dimensión* de un complejo simplicial  $K$  es  $\dim(K) = \sup_{\sigma \in K} \dim(\sigma)$ . Puede ser infinita. Un complejo  $K$  se dice *finito* si tiene finitos vértices o, equivalentemente, si tiene finitos símplices.

**Ejemplo 1.3.** El complejo  $K = \{\sigma \subseteq \mathbb{N} \mid \sigma \neq \emptyset, \#\sigma < \infty\}$  tiene dimensión infinita.

**Ejemplo 1.4.** Sea  $X$  un conjunto y sea  $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$  una colección de subconjuntos de  $X$ . El *nervio*  $N(\mathcal{U})$  de  $\mathcal{U}$  es el complejo simplicial cuyos vértices son los  $j \in J$  tales que  $U_j \neq \emptyset$  y cuyos símplices son los conjuntos  $J' \subseteq J$  finitos tales que  $\bigcap_{j \in J'} U_j \neq \emptyset$ .

Un *subcomplejo* de un complejo simplicial  $K$  es un complejo simplicial  $L$  tal que  $S_L \subseteq S_K$ . En este caso notamos  $L \leq K$ . Un subcomplejo  $L$  de  $K$  se dice *pleno* si cada simplex de  $K$  que tiene todos sus vértices en  $L$  es un simplex de  $L$ .

**Ejemplo 1.5.** Sea  $K = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$  y sea  $L = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ . Entonces  $L$  es un subcomplejo de  $K$  pero no es pleno.

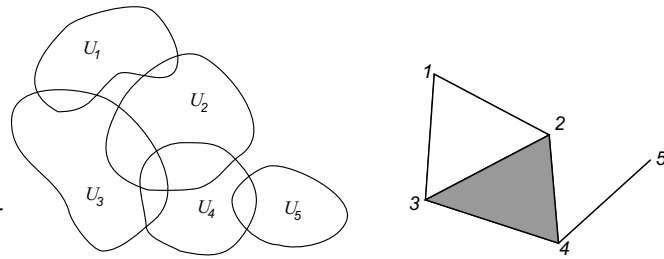


Figura 1: Cinco subconjuntos del plano y su nervio.

Cuando los complejos simpliciales tienen pocos vértices, a menudo se utilizan diagramas que permiten visualizarlos más rápidamente. Consideraremos un punto en el plano por cada vértice y la cápsula convexa de algunos de esos puntos si constituyen un simplex. Los complejos  $K$  y  $L$  del ejemplo anterior aparecen graficados en la Figura 2.

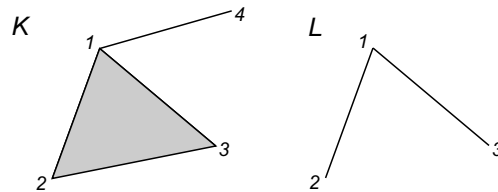


Figura 2: Un complejo simplicial  $K$  y un subcomplejo  $L$ .

La Figura 1 muestra una colección de cinco subconjuntos del plano y el diagrama que representa al nervio de esa colección. Veremos más adelante que en realidad esta representación gráfica describe al espacio topológico que se le asocia a cada complejo simplicial. Estos diagramas, además de representar a los complejos de una manera alternativa, muestran la geometría detrás del complejo abstracto.

Sea  $K$  un complejo simplicial y sea  $n \in \mathbb{N}_0$ . El  $n$ -esqueleto de  $K$ , denotado  $K^n$ , es el subcomplejo de  $K$  formado por los símlices de dimensión menor o igual a  $n$ .

Si  $\sigma$  es un simplex de un complejo  $K$ , notamos  $\bar{\sigma}$  al subcomplejo de  $K$  formado por las caras de  $\sigma$  (junto con  $\sigma$ ).

**Definición 1.6.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales. Supondremos  $V_K \cap V_L = \emptyset$ . En caso contrario cambiamos el nombre de los vértices de  $L$  para que valga esta condición. El *join*  $K * L$  entre  $K$  y  $L$  es el complejo simplicial que tiene conjunto de vértices  $V_K \cup V_L$  y cuyos símlices son los símlices de  $K$ , los de  $L$  y las uniones de un simplex de  $K$  y uno de  $L$ . El join está bien definido salvo nombres de los vértices.

Por ejemplo, el join entre un  $n$ -simplex y un  $m$ -simplex es un  $(n + m + 1)$ -simplex.

**Definición 1.7.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales. Un *morfismo (simplicial)*  $\varphi : K \rightarrow L$  es una función  $\varphi : V_K \rightarrow V_L$  que manda símlices en símlices, i.e.  $\varphi(\sigma) \in L$  para todo  $\sigma \in K$ . En este caso también decimos que  $\varphi : V_K \rightarrow V_L$  es *simplicial*.

*Observación 1.8.*

- (i) La identidad  $1_K$  de un complejo  $K$  es un morfismo.
- (ii) Composición de morfismos es morfismo.
- (iii) Si  $L \leq K$ , la inclusión  $i : L \hookrightarrow K$  es un morfismo. Restricciones de morfismos a subcomplejos son morfismos.
- (iv) Si  $\varphi_1 : K_1 \rightarrow L_1$  y  $\varphi_2 : K_2 \rightarrow L_2$  son morfismos,  $\varphi_1 * \varphi_2 : K_1 * K_2 \rightarrow L_1 * L_2$  definida como  $\varphi_i$  en los vértices de  $K_i$ , es simplicial.



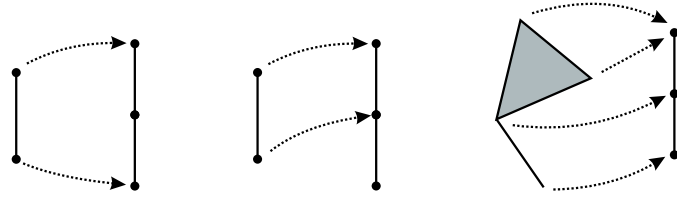


Figura 3: Tres funciones de vértices entre complejos simpliciales. La primera no es un morfismo simplicial. Las otras dos sí.

**Definición 1.9.** Un morfismo  $\varphi : K \rightarrow L$  se dice un *isomorfismo* si existe un morfismo  $\psi : L \rightarrow K$  tal que  $\psi\varphi = 1_K$  y  $\varphi\psi = 1_L$ . Dos complejos simpliciales  $K, L$  se dicen *isomorfos* si existe un isomorfismo  $K \rightarrow L$ .

### Realización geométrica

Cada complejo simplicial determina un espacio topológico, que en realidad es un espacio métrico cuando el complejo es finito. Veremos que muchos de los espacios que conocemos son espacios asociados a complejos simpliciales.

**Definición 1.10.** Sea  $\sigma$  un  $n$ -simplex de vértices  $v_0, v_1, \dots, v_n$ . La *realización geométrica*  $|\sigma|$  de  $\sigma$  es un espacio topológico. El conjunto subyacente de  $|\sigma|$  es el conjunto de expresiones formales

$$\sum_{i=0}^n t_i v_i$$

tales que  $t_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  para cada  $i$  y  $\sum t_i = 1$ . La topología de  $|\sigma|$  es la inducida por la métrica

$$d\left(\sum t_i v_i, \sum s_i v_i\right) = \sqrt{\sum (t_i - s_i)^2}.$$

Notar que  $|\sigma|$  es homeomorfo al  $n$ -simplex estándar

$$\Delta_n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i = 1, x_i \geq 0 \forall i\}.$$

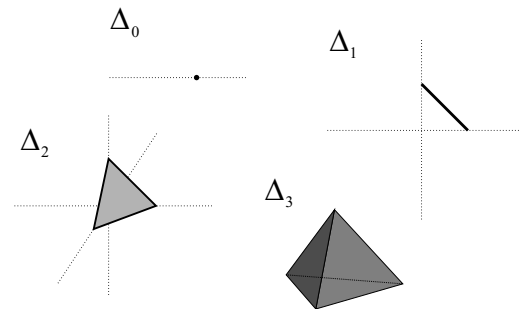


Figura 4: Los símlices estándar de dimensiones 0, 1, 2 y 3.

**Definición 1.11.** Sea  $K$  un complejo simplicial. La *realización geométrica*  $|K|$  de  $K$  es un espacio topológico. El conjunto subyacente de  $|K|$  es el conjunto de expresiones

$$\alpha = \sum_{v \in K} t_v v$$

tales que  $t_v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  para cada  $v$ ,  $\sum_{v \in K} t_v = 1$  y el soporte  $\text{sop}(\alpha) = \{v \in K \mid t_v > 0\}$  de  $\alpha$  es un simplex de  $K$ .

Para cada simplex  $\sigma \in K$  se tiene una inyección  $i_\sigma : |\sigma| \rightarrow |K|$  que manda  $\sum_{v \in \sigma} t_v v$  en  $\sum_{v \in K} s_v v$ , donde  $s_v = t_v$  para cada  $v \in \sigma$  y  $s_v = 0$  si  $v \notin \sigma$ . Si  $x \in |\sigma|$ , identificaremos  $x$  con  $i_\sigma(x)$ . La topología de  $|K|$  es la topología final respecto de las funciones  $i_\sigma$  con  $\sigma \in K$ . Es decir, la topología más fina que se le puede dar al conjunto  $|K|$  que hace a las  $i_\sigma$  continuas. En otras palabras,  $U \subseteq |K|$  es abierto si y sólo si  $U \cap |\sigma| = i_\sigma^{-1}(U)$  es abierto en  $|\sigma|$  para cada  $\sigma \in K$ . Esto es equivalente a decir que  $F \subseteq |K|$  es cerrado si y sólo si  $F \cap |\sigma| = i_\sigma^{-1}(F)$  es cerrado en  $|\sigma|$  para cada  $\sigma \in K$ . Recordar también que como  $|K|$  tiene la topología final respecto de las  $i_\sigma$ , una función  $f : |K| \rightarrow X$ , donde  $X$  es cualquier espacio topológico, es continua si y sólo si  $f \circ i_\sigma : |\sigma| \rightarrow X$  es continua para cada  $\sigma \in K$ .

**Ejemplo 1.12.** Sea  $K = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}\}$ . Veamos que  $|K|$  es homeomorfo al subespacio de  $\mathbb{R}^2$  que se ve en la Figura 5.

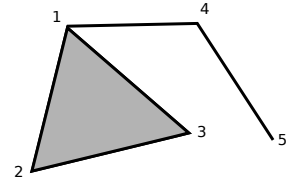


Figura 5: Un subespacio  $X$  de  $\mathbb{R}^2$  homeomorfo a  $|K|$ .

Este subespacio del plano es la unión de un triángulo y dos segmentos. También puede describirse como unión de once conjuntos  $F_1, F_2, \dots, F_{11}$ : La cápsula convexa de los puntos 1, 2, 3, la cápsula convexa de los puntos 1, 4, la cápsula convexa de los puntos 4, 5 (y aunque parezca innecesario), las cápsulas convexas de los conjuntos  $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$  y  $\{5\}$ . Es decir, las cápsulas convexas de puntos que corresponden a simplices de  $K$ .

Sean  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{11}$  los simplices de  $K$ ,  $\sigma_i$  el correspondiente a  $F_i$ . Los homeomorfismos  $f_i : |\sigma_i| \rightarrow F_i$  que mandan  $\sum_{v \in \sigma_i} t_v v \in |\sigma_i|$  en  $\sum_{v \in \sigma_i} t_v v \in F_i$ , se pegan bien y determinan una función  $f : |K| \rightarrow X$  que es continua porque lo es su restricción a cada  $|\sigma_i|$ . Las inversas  $f_i^{-1}$  de estos homeomorfismos están definidas en los finitos cerrados  $F_i$  y se pegan bien. Luego, determinan una función continua  $g : X \rightarrow |K|$ . Las funciones  $f$  y  $g$  son una inversa de la otra, por lo que  $|K|$  y  $X$  resultan homeomorfos.

Generalizando esta idea, uno puede probar que las realizaciones geométricas de complejos simpliciales finitos son homeomorfas a subespacios de  $\mathbb{R}^n$  para algún  $n$ . Simplemente hay que tener cuidado de tomar los puntos que representan a los vértices de modo tal que las cápsulas convexas de conjuntos correspondientes simplices disjuntos no se intersequen.

En la Figura 6 se ve una elección de los cinco puntos en  $\mathbb{R}^3$  que no satisface esta condición ya que las cápsulas convexas de  $\{1, 2, 3\}$  y de  $\{4, 5\}$  se intersecan (en este caso la función  $g$  de arriba no está bien definida). Tomar los puntos de modo que formen un conjunto afínmente independiente es suficiente para garantizar la condición requerida.

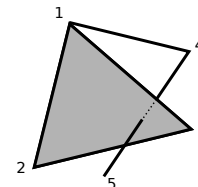


Figura 6: Un subespacio  $X$  de  $\mathbb{R}^3$  que no es homeomorfo a  $|K|$ .

**Ejercicio 1.13.** Probar que si  $K$  es un complejo simplicial finito de dimensión  $n$ , entonces  $|K|$  es homeomorfo a un subespacio de  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

*Observación 1.14.* Si  $K$  es un complejo simplicial y  $\sigma \in K$ , entonces  $i_\sigma : |\sigma| \rightarrow |K|$  es subespacio y cerrada. En otras palabras, es una función inyectiva, inicial y cerrada. Recordemos que inicial significa que los cerrados de  $|\sigma|$  son exactamente las preimágenes de los cerrados de  $|K|$ . Como  $i_\sigma$  es continua e inyectiva, sólo debemos ver que es cerrada. Sea entonces  $F \subseteq |\sigma|$  un cerrado. Queremos ver que  $i_\sigma(F) = F$  es un cerrado de  $|K|$ . Esto sucede si y sólo si  $F \cap |\tau|$  es cerrado en  $|\tau|$  para cada  $\tau \in K$ . Pero  $F \cap |\tau| = F \cap |\tau \cap \sigma|$  es cerrado en  $|\tau \cap \sigma|$  porque  $|\tau \cap \sigma|$  es subespacio de  $|\sigma|$ . Como  $|\tau \cap \sigma|$  es un subespacio cerrado de  $|\tau|$ ,  $F \cap |\tau|$  resulta cerrado en  $|\tau|$ , como queríamos demostrar.

Si  $\sigma$  es un simplex de  $K$ , diremos que  $|\sigma|$  es un *simplex cerrado* de  $|K|$ .

*Observación 1.15.* Al conjunto  $|K|$  le podemos dar otra topología, la inducida por la métrica

$$d\left(\sum_{v \in K} t_v v, \sum_{v \in K} s_v v\right) = \sqrt{\sum (t_v - s_v)^2}.$$

A este espacio métrico lo denotamos  $|K|_d$ . La identidad  $1_{|K|} : |K| \rightarrow |K|_d$  es continua porque  $1_{|K|}|_{|\sigma|} : |\sigma| \rightarrow |K|_d$  es una isometría para cada  $\sigma \in K$ . En otras palabras, la topología de la realización geométrica es más fina que la métrica. Como  $|K|_d$  es Hausdorff,  $|K|$  también lo es. En realidad, cualquiera sea el complejo  $K$ , puede probarse usando el Teorema de extensión de Tietze que  $|K|$  es un espacio normal (ver [26, Páginas 111,112]).

*Observación 1.16.* Si  $K$  es finito, entonces  $|K|$  es compacto por ser unión de finitos  $i_\sigma(|\sigma|)$ , que son compactos. En este caso  $1_{|K|} : |K| \rightarrow |K|_d$  es continua, biyectiva, sale de un compacto y llega a un Hausdorff, luego es un homeomorfismo. Por lo tanto, cuando  $K$  es finito,  $|K| = |K|_d$ . En el caso general  $K$  no tiene por qué ser un espacio métrico.

**Ejercicio 1.17.** Sea  $K$  el complejo simplicial de vértices  $V_K = \mathbb{N}_0$  y símlices  $S_K = \{n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \cup \{0, n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Probar que  $|K|$  no es un espacio métrico.

Para una caracterización de los complejos simpliciales con realización geométrica metrizable ver [26, Theorem 3.2.8].

**Definición 1.18.** Sea  $X$  un espacio topológico. Una *triangulación* de  $X$  es un par  $(K, f)$  donde  $K$  es un complejo simplicial y  $f : |K| \rightarrow X$  es un homeomorfismo. También diremos que  $K$  es una triangulación de  $X$  si existe algún homeomorfismo  $|K| \rightarrow X$ . Un espacio  $X$  se dice un *poliedro* si admite alguna triangulación, i.e. si es homeomorfo a la realización geométrica de un complejo simplicial.

**Ejemplos 1.19.**

(i) El intervalo  $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  es un poliedro. Si  $K = \bar{\sigma} = \{0, 1\}$  es un 1-simplex,

$$\begin{aligned} |\sigma| &\longrightarrow I \\ t_0 0 + t_1 1 &\longmapsto t_1 \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

(ii) El disco  $D^2$  de dimensión 2 es un poliedro, ya que si  $\sigma$  es un 2-simplex,  $|\sigma| = \Delta_2 = D^2$ .

(iii) En general, el disco  $n$ -dimensional  $D^n$  es un poliedro para todo  $n \geq 0$ .

(iv) La esfera  $n$ -dimensional  $S^n$  también es un poliedro para todo  $n \geq 0$ . Si  $\sigma$  es un  $(n + 1)$ -simplex, entonces  $S^n$  es homeomorfo a  $|\partial\sigma| = |\dot{\sigma}|$ . Aquí  $\partial\sigma = \dot{\sigma}$  denota al borde de  $\sigma$ , el subcomplejo de  $\bar{\sigma}$  formado por las caras propias de  $\sigma$ .

(v)  $\mathbb{R}$  con la topología usual es un poliedro. Sea  $K = \mathbb{Z} \cup \{\{n, n+1\} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Entonces

$$\begin{aligned} |K| &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (1-t)n + t(n+1) &\longmapsto n+t \end{aligned}$$

es una triangulación de  $\mathbb{R}$ .

(vi) La cinta de Möbius  $M$  es un poliedro.  $M$  es homeomorfo al cociente  $M = R / \sim$ , donde  $R = [0, 3] \times [0, 1]$  y  $(0, t) \sim (3, 1-t)$  (Figura 7).

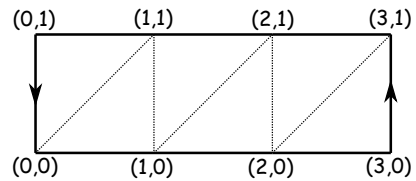


Figura 7: La cinta de Möbius  $M$ .

Sea  $K$  el complejo de vértices  $a, b, c, d, e, f$  generado por los simplices  $\{a, b, c\}$ ,  $\{a, c, e\}$ ,  $\{e, c, d\}$ ,  $\{e, d, f\}$ ,  $\{f, d, a\}$  y  $\{f, a, b\}$ , es decir, el complejo cuyos simplices son esos conjuntos y sus subconjuntos no vacíos. Graficamos a este complejo por medio de la Figura 8.

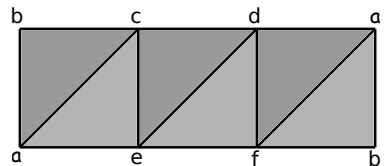


Figura 8: Una triangulación de  $M$ .

Por supuesto, a diferencia de lo que vimos en el Ejemplo 1.12, este gráfico no representa a un subespacio (rectángulo) de  $\mathbb{R}^2$ . Nos sirve simplemente para visualizar al complejo simplicial. Los simplices también están representados como cápsulas convexas de puntos en  $\mathbb{R}^2$ , pero algunos simplices ( $\{a, b\}$ ,  $\{a\}$  y  $\{b\}$ ) aparecen repetidos. Optamos por esta representación ya que la cinta de Möbius no es un subespacio de  $\mathbb{R}^2$ . Alternativamente, podemos dibujar la realización como subespacio de  $\mathbb{R}^3$  (Figura 9). A efectos prácticos, la representación en el plano para complejos de

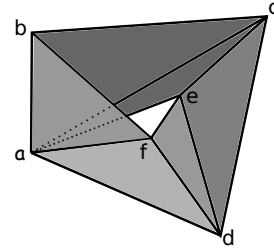


Figura 9: La misma triangulación de  $M$  graficada en  $\mathbb{R}^3$ .

dimensión dos suele ser más clara y útil, por ejemplo a la hora de calcular la homología (ver Ejemplo 3.4). Además, algunos poliedros de dimensión dos, como las superficies compactas no orientables, no son subespacios de  $\mathbb{R}^3$ .

Probamos que  $K$  es una triangulación de  $M$  exhibiendo un homeomorfismo  $|K| \rightarrow M$ . Notamos  $q : R \rightarrow M$  al cociente. Definimos un homeomorfismo  $h : |K| \rightarrow M$  del siguiente modo:

1.  $t_a a + t_b b + t_c c \rightarrow q(t_a(0, 0) + t_b(0, 1) + t_c(1, 1))$
2.  $t_a a + t_c c + t_e e \rightarrow q(t_a(0, 0) + t_c(1, 1) + t_e(1, 0))$
3.  $t_e e + t_c c + t_d d \rightarrow q(t_e(1, 0) + t_c(1, 1) + t_d(2, 1))$
4.  $t_e e + t_d d + t_f f \rightarrow q(t_e(1, 0) + t_d(2, 1) + t_f(2, 0))$
5.  $t_f f + t_d d + t_a a \rightarrow q(t_f(2, 0) + t_d(2, 1) + t_a(3, 1))$
6.  $t_f f + t_a a + t_b b \rightarrow q(t_f(2, 0) + t_a(3, 1) + t_b(3, 0))$

Notar que  $h$  es una función bien definida. Hay puntos, como los de la forma  $ta + (1 - t)b$  que aparecen en dos partes de la definición (1 y 6, en este caso), pero la definición coincide en ambas partes. Además la función es continua porque lo es en cada simplex. Es fácil ver que  $h$  es biyectiva. Como  $K$  es finito,  $|K|$  es compacto. Además  $M$  es Hausdorff y luego  $h$  resulta un homeomorfismo.

(vii) El plano proyectivo  $\mathbb{R}P^2$  también es un poliedro. Una idea general para tratar de hallar una triangulación de cierto cociente de un polígono, es dibujar al polígono, descomponerlo en triángulos y decidir los nombres de los vértices de estos triángulos de modo tal que las identificaciones que aparecen entre simplices sean exactamente las identificaciones que queremos en el polígono. El espacio  $\mathbb{R}P^2$  es un cociente de un cuadrado, en donde lados opuestos se identifican con direcciones inversas. La Figura 10 ilustra una triangulación de  $\mathbb{R}P^2$  con diez vértices.

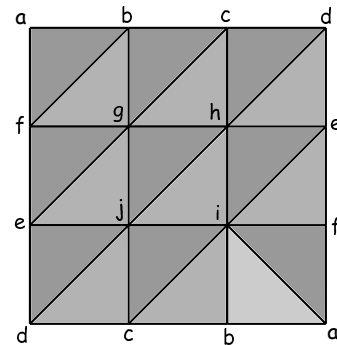


Figura 10: Una triangulación del plano proyectivo.

Un complejo con sólo seis vértices que también triangula a  $\mathbb{R}P^2$ , obtenido con la misma estrategia de arriba, aparece en la Figura 11.

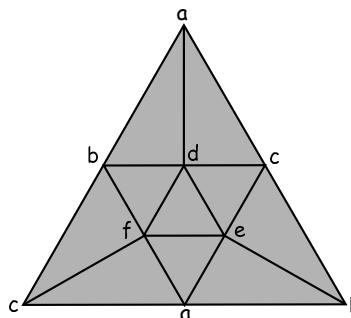


Figura 11: Otra triangulación de  $\mathbb{R}P^2$ .

**Ejercicio 1.20.** Probar que la botella de Klein y el toro  $T = S^1 \times S^1$  son poliedros y hallar complejos simpliciales que los triangulen.

Si  $\sigma$  es un simplex de un complejo simplicial  $K$  y  $x_0, x_1, \dots, x_l \in |\sigma| \subseteq |K|$ , tiene sentido hacer una combinación convexa de los puntos  $x_i$ . Más precisamente, si  $t_0, t_1, \dots, t_l \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\sum t_i = 1$  y supongamos que  $x_i = \sum_{v \in \sigma} r_{v,i} v$ , entonces se define

$$\alpha = \sum_{i=0}^l t_i x_i := \sum_{v \in \sigma} \left( \sum_{i=0}^l t_i r_{v,i} \right) v \in |\sigma| \subseteq |K|.$$

Notar que  $\alpha$  está bien definido ya que  $\sum_{i=0}^l t_i r_{v,i} \geq 0$  para todo  $v \in \sigma$ ,  $\sum_{v \in \sigma} \left( \sum_{i=0}^l t_i r_{v,i} \right) = \sum_{i=0}^l t_i \left( \sum_{v \in \sigma} r_{v,i} \right) = 1$  y  $\text{sop}(\alpha) \subseteq \sigma \in K$ .

Dado un morfismo simplicial  $\varphi : K \rightarrow L$ , se define la *realización geométrica* de  $\varphi$  como

$$\begin{aligned} |\varphi| : |K| &\longrightarrow |L| \\ \sum_{v \in K} t_v v &\longmapsto \sum_{v \in K} t_v \varphi(v). \end{aligned}$$

Notar que  $|\varphi|$  está bien definida porque  $\text{sop}(\sum t_v \varphi(v)) = \varphi(\text{sop}(\sum t_v v)) \in L$ , ya que  $\varphi$  es simplicial.

Además,  $|\varphi|$  es continua pues las restricciones  $|\varphi|_{|\sigma|} : |\sigma| \rightarrow |\varphi(\sigma)|$  son continuas. Si  $\sigma$  es un  $n$ -simplex y  $\varphi(\sigma)$  es un  $m$ -simplex, denotamos  $i : |\sigma| \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  y  $j : |\varphi(\sigma)| \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  a las inclusiones como símplices estándar. Para cada  $v \in \sigma$ ,  $i(v)$  es un vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . La transformación lineal  $T : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  que manda cada  $i(v)$  en  $j\varphi(v)$  cumple  $Ti = j|\varphi|_{|\sigma|}$ . En particular  $j|\varphi|_{|\sigma|}$  es continua y, entonces, también lo es  $|\varphi|_{|\sigma|}$ . Alternativamente, uno puede probar a mano que existe  $c > 0$  tal que  $d(|\varphi|(x), |\varphi|(y)) \leq cd(x, y)$  para cada  $x, y \in |\sigma|$ . Las cuentas de este tipo se simplifican si uno considera  $|\sigma| = \left\{ \sum_{v \in \sigma} t_v v \mid t_v \geq 0 \forall v \in \sigma, \sum t_v = 1 \right\}$  como subespacio métrico del espacio normado  $\left\{ \sum_{v \in \sigma} t_v v \mid t_v \in \mathbb{R} \right\}$ .

*Observación 1.21.* Si  $K$  es un complejo simplicial, la realización geométrica  $|1_K|$  de la identidad es  $1_{|K|}$  y la realización  $|\varphi\psi|$  de una composición es  $|\varphi|_{|\psi|}$ . Es decir que

realización geométrica es un funtor de la categoría de complejos simpliciales en la categoría de espacios topológicos.

Diremos que una función  $f : |K| \rightarrow |L|$  es *lineal* si preserva combinaciones convexas, i.e. si para cualesquiera puntos  $x_0, x_1, \dots, x_l$  en un simplex cerrado  $|\sigma|$  de  $K$ , vale que  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_l)$  están contenidos en un simplex cerrado de  $L$  y además  $f(\sum t_i x_i) = \sum t_i f(x_i)$ .

Notar que si  $\varphi : K \rightarrow L$  es un morfismo simplicial, entonces  $|\varphi| : |K| \rightarrow |L|$  es lineal.

**Ejercicio 1.22.** Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales. Probar que toda función lineal  $|K| \rightarrow |L|$  es continua.

**Ejercicio 1.23.** Si  $K$  es un complejo simplicial y  $L \leq K$ , entonces  $|L|$  es un subespacio cerrado de  $|K|$ .

**Ejercicio 1.24.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $X$  un espacio topológico. Probar que una función  $f : |K| \rightarrow X$  es continua si y sólo si la restricción  $f|_{|K^n|} : |K^n| \rightarrow X$  a cada esqueleto es continua.

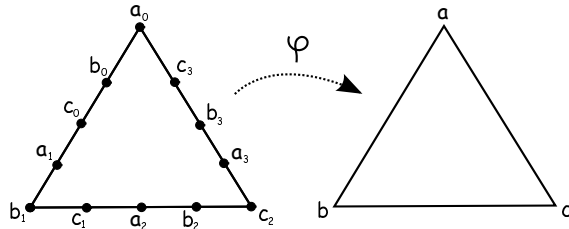
**Ejercicio 1.25.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Probar que  $|K|$  es conexo si y sólo si para cada par de vértices  $v, w \in K$  existe una sucesión  $v = v_0, v_1, \dots, v_r = w$  de vértices tal que  $v_i v_{i+1} \in K$  para todo  $i$ .

## 2. Teorema de aproximación simplicial

Dados dos espacios, en general es muy difícil dar una descripción satisfactoria del conjunto de todas las funciones continuas entre ellos. Sin embargo, los morfismos simpliciales entre complejos simpliciales finitos son fáciles de describir. La información es discreta, hay sólo finitos morfismos. El Teorema de aproximación simplicial dice en algún sentido que toda función continua entre poliedros se aproxima por una simplicial. Esta noción de aproximación implica que la función original y el morfismo son homotópicas.

Como ejemplo introductorio, consideremos  $\sigma$  un 2-simplex y sean  $K = L = \dot{\sigma}$ . No es cierto que toda función  $f : |K| \rightarrow |L|$  sea homotópica a la realización de un morfismo simplicial  $\varphi : K \rightarrow L$ . Hay infinitas clases homotópicas de funciones  $S^1 \rightarrow S^1$  y sólo finitos morfismos  $K \rightarrow L$ . Sin embargo, si *subdividimos*  $K$  podemos obtener clases homotópicas arbitrarias (Figura 12).

Figura 12: El morfismo  $\varphi$  que manda  $a_i$  en  $a$ ,  $b_i$  en  $b$  y  $c_i$  en  $c$  tiene grado cuatro.



El resultado principal de esta sección es una generalización del ejemplo anterior.

## Aproximaciones simpliciales

El primer resultado que veremos es un criterio muy útil para estudiar continuidad de homotopías  $X \times I \rightarrow Y$ , donde  $X$  es un poliedro e  $I$  denota al intervalo  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  con la topología usual.

**Proposición 2.1.** *Sea  $K$  un complejo simplicial,  $X$  un espacio topológico y sea  $H : |K| \times I \rightarrow X$  una función. Entonces  $H$  es continua si y sólo si  $H|_{|\sigma| \times I} : |\sigma| \times I \rightarrow X$  es continua para todo  $\sigma \in K$ .*

*Demostración.* Esto es una aplicación directa de la ley exponencial (el lector no familiarizado con este resultado puede consultar [21, Teorema 46.11] o [26, Página 6]). Como  $I$  es localmente compacto y Hausdorff, entonces  $H$  es continua si y sólo si la función inducida  $\theta(H) : |K| \rightarrow \mathcal{C}(I, X)$  es continua. Como  $|K|$  tiene la topología final de las inclusiones de sus simplices, esto es equivalente a que  $\theta(H)|_{|\sigma|} : |\sigma| \rightarrow \mathcal{C}(I, X)$  sea continua para todo  $\sigma \in K$ . Otra vez por la ley exponencial, esto ocurre si y sólo si las funciones inducidas  $\eta(\theta(H)|_{|\sigma|}) = H|_{|\sigma| \times I} : |\sigma| \times I \rightarrow X$  son continuas.  $\diamond \diamond$

**Notación 2.2.** Sea  $K$  un complejo simplicial y sea  $\sigma \in K$  un simplex. El *simplex abierto*  $\sigma$  es  $\overset{\circ}{\sigma} = \{x \in |K| \mid \text{sop}(x) = \sigma\}$ . Notar que  $|\sigma| = \bigcup_{\tau \subseteq \sigma} \overset{\circ}{\tau}$  y que  $|K|$  es la unión disjunta de todos los simplices abiertos. Los simplices abiertos no son en general subespacios abiertos de  $|K|$ . De hecho,  $\overset{\circ}{\sigma} \subseteq |K|$  es abierto si y sólo si  $\sigma$  es un simplex maximal de  $K$  (un simplex que no es cara de ningún otro simplex).

**Definición 2.3.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales y sea  $f : |K| \rightarrow |L|$  una función continua. Una *aproximación simplicial de  $f$*  es un morfismo simplicial  $\varphi : K \rightarrow L$  que cumple lo siguiente: para todo  $x \in |K|$ , si  $f(x) \in \overset{\circ}{\tau}$ , entonces  $|\varphi|(x) \in |\tau|$ . Esto es equivalente a decir que para cada  $x \in |K|$ , si  $f(x) \in |\tau|$ , entonces  $|\varphi|(x) \in |\tau|$ .

### Ejemplo 2.4.

1. Sean  $K, L$  los complejos simpliciales que aparecen en la Figura 13. Sea  $f : |K| \rightarrow |L|$  definida por  $f(ta + (1-t)b) = td + (1-t)\frac{d+e}{2}$ ,  $f(tc + (1-t)b) = te + (1-t)\frac{d+e}{2}$ . Es decir que  $f = 1_I$ . La función  $f$  no es (la realización de un morfismo) simplicial pero tiene una aproximación simplicial dada por  $\varphi : K \rightarrow L$ ,  $\varphi(a) = \varphi(b) = d$ ,  $\varphi(c) = e$ . Hay más aproximaciones simpliciales de  $f$ ? Cuántas?

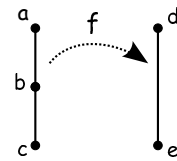


Figura 13: La identidad  $f : I \rightarrow I$ .

2. La inversa de  $f$ ,  $f^{-1} : |L| \rightarrow |K|$  no tiene aproximaciones simpliciales  $\varphi : L \rightarrow K$ . Un tal morfismo debería cumplir  $\varphi(d) = a$ ,  $\varphi(e) = c$  y entonces no sería simplicial.

Probaremos que las aproximaciones simpliciales de una función son homotópicas a esta. Necesitamos el siguiente

**Lema 2.5.** *Sea  $L$  un complejo simplicial. Sea  $A \subseteq |L|$  un subespacio compacto. Entonces  $A$  interseca sólo finitos simplices abiertos.*



*Demostración.* Para cada  $\sigma \in L$  tal que  $A \cap \overset{\circ}{\sigma} \neq \emptyset$ , sea  $x_\sigma \in A \cap \overset{\circ}{\sigma}$ . Sea  $B = \{x_\sigma\}_\sigma$ . Este es un subespacio cerrado de  $|L|$  ya que  $B \cap |\tau|$  es finito (y luego cerrado en  $|\tau|$ ) para todo  $\tau \in L$ . Como  $A$  es compacto,  $B$  es compacto. Además si  $B' \subseteq B$ ,  $B'$  es cerrado en  $|L|$  por el mismo argumento de recién, y entonces  $B'$  es cerrado en  $B$ . Esto prueba que  $B$  es discreto. Como  $B$  es discreto y compacto, es finito.  $\diamond\diamond$

De este lema y la Observación 1.16 se deduce el siguiente resultado.

**Corolario 2.6.** *Sea  $L$  un complejo simplicial. Entonces  $|L|$  es compacto si y sólo si  $L$  es finito.*

**Proposición 2.7.** *Sean  $K, L$  complejos simpliciales y sea  $f : |K| \rightarrow |L|$  una función continua. Si  $\varphi : K \rightarrow L$  es una aproximación simplicial de  $f$ , entonces  $|\varphi|$  y  $f$  son homotópicas.*

*Demostración.* La homotopía lineal

$$H : |K| \times I \longrightarrow |L| \\ (x, t) \longmapsto (1-t)|\varphi|(x) + tf(x)$$

está bien definida pues  $|\varphi|(x)$  y  $f(x)$  caen en un mismo simplex cerrado  $|\tau|$ . Resta probar la continuidad. Si  $\sigma \in K$ ,  $f(|\sigma|) \subseteq |L|$  es compacto. Por Lema 2.5, interseca a sólo finitos símlices abiertos. Sea  $\tilde{L} \leq L$  el subcomplejo generado por esos símlices. Entonces  $\tilde{L}$  es finito y, por la Observación 1.16,  $|\tilde{L}| = |\tilde{L}|_d$ . Notar que  $f(|\sigma|) \subseteq |\tilde{L}|$  y luego  $|\varphi|(|\sigma|) \subseteq |\tilde{L}|$  y  $H(|\sigma| \times I) \subseteq |\tilde{L}|$ . Para ver que  $H$  es continua basta probar que  $H|_{|\sigma| \times I} : |\sigma| \times I \rightarrow |\tilde{L}|_d$  es continua. Pero esto vale porque  $|\sigma|$  y  $|\tilde{L}|_d$  tienen la topología métrica. Hacemos la cuenta por completitud.

$$d((1-t)|\varphi|(x) + tf(x), (1-r)|\varphi|(y) + rf(y)) \leq \\ d((1-t)|\varphi|(x) + tf(x), (1-t)|\varphi|(y) + tf(y)) + d((1-t)|\varphi|(y) + tf(y), (1-r)|\varphi|(y) + rf(y)) \\ \leq (1-t)d(|\varphi|(x), |\varphi|(y)) + td(f(x), f(y)) + 2|t-r|.$$

$\diamond\diamond$

*Observación 2.8.* Si  $f$  y  $|\varphi|$  coinciden en un subespacio  $A \subseteq |K|$ , entonces  $H : |\varphi| \simeq f$  rel  $A$ .

**Ejercicio 2.9.** Probar que todo poliedro conexo tiene un revestimiento universal.

**Ejercicio 2.10.** Probar que los revestimientos de poliedros son poliedros.

## Subdivisiones

A continuación daremos una definición del concepto de *subdivisión* de un complejo simplicial. Esto se puede hacer de varias maneras equivalentes. Geométricamente, una subdivisión de un complejo simplicial  $K$  es otro complejo cuyos símlices están contenidos en símlices de  $K$ , de modo que cada simplex de  $K$  es unión de símlices de  $L$ . Más formalmente, una subdivisión es una nueva triangulación de  $|K|$  que cumple ciertas condiciones. Concretamente:

**Definición 2.11.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Una *subdivisión* de  $K$  es un complejo simplicial  $L$  que cumple las siguientes tres cosas:

- Los vértices de  $L$  son puntos de  $|K|$ .
- Para todo  $\tau \in L$  existe  $\sigma \in K$  tal que todos los vértices de  $\tau$  están en  $|\sigma|$ .
- La función lineal  $i : |L| \rightarrow |K|$  que manda cada vértice de  $L$  en sí mismo es un homeomorfismo.

**Ejemplo 2.12.** La Figura 14 ilustra a un complejo simplicial  $K$  y una subdivisión  $L$ .

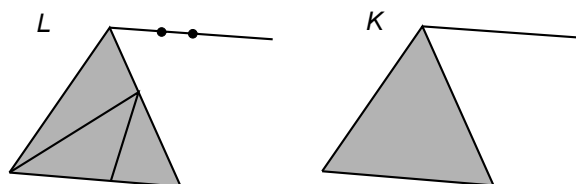


Figura 14:  $L$  es una subdivisión de  $K$ .

Si  $L$  es una subdivisión de  $K$ , identificaremos a los espacios  $|L|$  y  $|K|$  por medio del homeomorfismo lineal  $i : |L| \rightarrow |K|$ . Teniendo en cuenta esta identificación, todo simplex cerrado  $|\tau|$  de  $L$  está contenido en un simplex cerrado  $|\sigma|$  de  $K$ . Además es claro que composición de subdivisiones es subdivisión.

Al trabajar con complejos simpliciales finitos es muy útil considerar cierta clase de subdivisiones llamadas *baricéntricas*. En algún sentido estas subdivisiones alcanzan para probar la mayoría de los resultados que necesitaremos.

La subdivisión baricéntrica  $K'$  de un complejo simplicial  $K$  tiene como vértices a los *baricentros* de simplices de  $K$  y los simplices de  $K'$  son conjuntos de baricentros de simplices de  $K$  que forman un conjunto totalmente ordenado respecto al orden dado por la inclusión (ver Figura 15). Para describir más explícitamente esta construcción necesitamos un resultado previo.

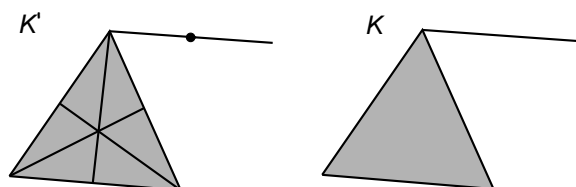


Figura 15:  $K'$  es la subdivisión baricéntrica de  $K$ .

**Lema 2.13.** Sea  $\sigma$  un simplex y supongamos que  $L$  es una subdivisión de  $\sigma$ . Sea  $w \in \overset{\circ}{\sigma}$ . Entonces  $wL = w * L$  es una subdivisión de  $\bar{\sigma}$  (ver Figura 16).

*Demostración.* Es fácil ver que valen las dos primeras condiciones de la definición de subdivisión. Resta probar que  $i : |wL| \rightarrow |\sigma|$  es homeomorfismo. La continuidad se deduce de la linealidad (ver Ejercicio 1.22). Como  $|L| = |\sigma|$  es compacto,  $L$  es finito por Corolario 2.6 y entonces  $wL$  es finito. Luego,  $|wL|$  es compacto. Como  $|\sigma|$  es Hausdorff, basta ver que  $i$  es biyectiva. Esto es una cuenta de álgebra lineal que incluimos por completitud.

Sean  $x, y \in |L|$ ,  $0 \leq t, r \leq 1$ , y supongamos que  $(1-t)x + tw = (1-r)y + rw$  en  $|\sigma|$ . Como  $w \in \overset{\circ}{\sigma}$ ,  $w = \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i$  con  $\alpha_i > 0$  para todo  $i$ , siendo  $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ .

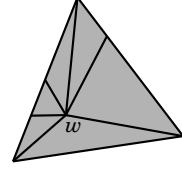


Figura 16: El cono  $wL$  es una subdivisión de  $\bar{\sigma}$ .

Como  $x \in |L| = |\dot{\sigma}|$ ,  $x = \sum_{i=0}^n t_i v_i$  y existe  $j$  tal que  $t_j = 0$ . La coordenada de  $v_j$  en  $(1-t)x + tw$  es  $t\alpha_j$ . La coordenada de  $v_j$  en  $(1-r)y + rw$  es mayor o igual a  $r\alpha_j$ . Por lo que  $t\alpha_j \geq r\alpha_j$ . Luego,  $t \geq r$ . Simétricamente  $r \geq t$ , y entonces  $r = t$ . Por lo tanto  $(1-t)x + tw = (1-r)y + rw$ . Si  $t \neq 1$ ,  $x = y$  en  $\dot{\sigma}$  y, luego, en  $|L|$ . En este caso  $(1-t)x + tw = (1-r)y + rw$  en  $|wL|$ . Si  $t = 1$ ,  $(1-t)x + tw = w = (1-r)y + rw$ . Esto prueba que  $i : |wL| \rightarrow |\sigma|$  es inyectiva.

Sea  $b \in |\sigma|$ . Si  $b = w$ ,  $b \in \text{Im}(i)$ . Caso contrario,  $b = \sum_{i=0}^n \beta_i v_i$  y existe  $j$  tal que  $\beta_j < \alpha_j$ . Tomamos  $j$  tal que  $\frac{\beta_j}{\alpha_j}$  sea mínimo. Sea

$$c = \sum_{i=0}^n (t\alpha_i + (1-t)\beta_i)v_i, \text{ donde } t = -\frac{\beta_j}{\alpha_j - \beta_j}$$

Notar que  $t\alpha_i + (1-t)\beta_i \geq 0$  por la elección de  $j$  y por lo tanto  $c \in |\sigma|$  está bien definido. Más aún,  $t\alpha_j + (1-t)\beta_j = 0$ , por lo que  $c \in |\dot{\sigma}| = |L|$ . Como  $b = \frac{c}{1-t} + \frac{-t}{1-t}w$ , tenemos que  $b \in \text{Im}(i)$ . Luego  $i$  es sobreyectiva.



**Definición 2.14.** Sea  $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  un  $n$ -simplex. El *baricentro* de  $\sigma$  es  $b(\sigma) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1}v_i \in |\sigma|$ . También denotaremos  $\hat{\sigma} = b(\sigma)$ .

Se define la *subdivisión baricéntrica* de un complejo simplicial  $K$  como el complejo  $K'$  que tiene como conjunto de vértices a  $V_{K'} = \{b(\sigma) \mid \sigma \in K\}$  y como conjunto de simpleses a  $S_{K'} = \{\{b(\sigma_0), b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_k)\} \mid \sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_k\}$ .

La Figura 15 muestra la subdivisión baricéntrica de un complejo  $K$ .

**Proposición 2.15.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Entonces  $K'$  es una subdivisión de  $K$ .

*Demostración.* Los vértices de  $K'$  están en  $|K|$ . Si  $\{b(\sigma_0), b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_k)\}$  es un simplex de  $K'$  con  $\sigma_i \subsetneq \sigma_{i+1}$ , entonces  $b(\sigma_i) \in |\sigma_k|$  para todo  $0 \leq i \leq k$ . Resta ver que  $i : |K'| \rightarrow |K|$  es un homeomorfismo. Hacemos inducción en la cantidad de simpleses. Sea  $\sigma \in K$  un simplex maximal. Entonces  $L = K \setminus \{\sigma\}$  es un complejo simplicial. Tenemos las siguientes igualdades:  $|K| = |L| \cup |\sigma|$ ,  $|L| \cap |\sigma| = |L \cap \sigma| = |\dot{\sigma}|$ ,  $|K'| = |L'| \cup |\dot{\sigma}'|$  y  $|L'| \cap |\dot{\sigma}'| = |L' \cap \dot{\sigma}'| = |\dot{\sigma}'|$ .

Por hipótesis inductiva las funciones lineales  $|L'| \rightarrow |L|$  y  $|\dot{\sigma}'| \rightarrow |\dot{\sigma}|$  son homeomorfismos. Como  $\bar{\sigma}' = b(\sigma) * \dot{\sigma}'$ ,  $b(\sigma) \in \overset{\circ}{\sigma}$  y  $\dot{\sigma}'$  es subdivisión de  $\dot{\sigma}$  por inducción, entonces por el Lema 2.13,  $\bar{\sigma}'$  es subdivisión de  $\bar{\sigma}$ . Luego  $|\bar{\sigma}'| \rightarrow |\bar{\sigma}|$  es un homeomorfismo. Estos tres homeomorfismos dicen que  $|K'| = |L'| \cup |\bar{\sigma}'| \rightarrow |L| \cup |\sigma| = |K|$  es un homeomorfismo, como queríamos ver.



*Notación 2.16.* Dado un complejo simplicial  $K$ , denotamos  $K^{(0)} = K$  y recursivamente  $K^{(n+1)} = (K^{(n)})'$ , la  $n$ -ésima subdivisión baricéntrica de  $K$ . Notar que  $K^{(n)}$  es subdivisión de  $K$  para todo  $n \geq 0$ .

### Símplices arbitrariamente chicos

El siguiente paso en nuestro camino hacia el Teorema de aproximación simplicial será ver que si consideramos subdivisiones baricéntricas  $K^{(n)}$  con  $n$  suficientemente grande, podemos hacer que los diámetros de los símplex sean tan chicos como queramos. Enunciaremos esto con precisión y daremos una demostración.

Sean  $p_0, p_1, \dots, p_m$  puntos en  $\mathbb{R}^n$  y supongamos que  $y = \sum t_i p_i$  es combinación convexa de los  $p_i$ . Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces

- (1)  $\|x - y\| = \|x - \sum t_i p_i\| = \|\sum t_i (x - p_i)\| \leq \sum t_i \|x - p_i\|$ . En particular,  
 (2)  $\|x - y\| \leq \max_i \|x - p_i\|$ .

Si además  $x$  es combinación convexa de los  $p_i$ , se tiene  $\|x - y\| \leq \max_{i,j} \|p_i - p_j\|$ .

En conclusión,

- (3) El diámetro de la cápsula convexa de los  $p_i$  es  $\max_{i,j} \|p_i - p_j\|$ .

Supongamos que  $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_m\}$  es un  $m$ -simplex y consideremos su realización  $|\sigma|$  con la métrica usual. Entonces existe una función  $f: |\sigma| \rightarrow \Delta_m \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$  que es una isometría y que preserva combinaciones convexas (la que manda los vértices de  $\sigma$  en vectores de la base canónica).

Si  $\tau$  es un simplex de  $\bar{\sigma}'$ , podemos ver al subconjunto  $|\tau| \subseteq |\sigma|$  con la métrica inducida. Entonces, en vista de (3),

- (4)  $\text{diám}(|\tau|) = \text{diám}f(|\tau|) = \max_{v,w \in \tau} \|f(v) - f(w)\|$ .

Supongamos que  $v = b(\sigma_0)$  y  $w = b(\sigma_1)$  para ciertos  $\sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subseteq \sigma$ . Digamos  $\sigma_0 = \{v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$  y  $\sigma_1 = \{v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}, v_{i_{k+1}}, \dots, v_{i_l}\}$ . En ese caso,  $v = \sum_{j=0}^k \frac{v_{i_j}}{k+1}$  y

$$w = \sum_{j=0}^l \frac{v_{i_j}}{l+1}, f(v) = \sum_{j=0}^k \frac{f(v_{i_j})}{k+1} \text{ y } f(w) = \sum_{j=0}^l \frac{f(v_{i_j})}{l+1}. \text{ Entonces, por (2),}$$

$$\|f(v) - f(w)\| \leq \max_{0 \leq j \leq k} \|f(v_{i_j}) - f(w)\|. \text{ A su vez, por (1),}$$

$$\|f(v_{i_j}) - f(w)\| \leq \sum_{r=0}^l \frac{1}{l+1} \|f(v_{i_j}) - f(v_{i_r})\| \leq \frac{1}{l+1} \text{diám}f(|\sigma|) = \frac{1}{l+1} \text{diám}(|\sigma|) \leq \frac{m}{m+1} \text{diám}(|\sigma|), \text{ ya que } m \geq l. \text{ Luego, por (4) vale}$$

$$\text{diám}(|\tau|) \leq \frac{m}{m+1} \text{diám}(|\sigma|).$$

Ahora,  $f|_{|\tau|}: |\tau| \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  es una isometría que preserva combinaciones convexas, por lo que si  $\rho$  es un simplex de  $\bar{\tau}'$ , el mismo argumento de recién nos dice que  $\text{diám}(|\rho|) \leq \frac{\text{dim}(\tau)}{\text{dim}(\tau)+1} \text{diám}(|\tau|) \leq (\frac{m}{m+1})^2 \text{diám}(|\sigma|)$ . Inductivamente, todo simplex de  $\bar{\sigma}^{(n)}$  tiene diámetro acotado por  $(\frac{m}{m+1})^n \text{diám}(|\sigma|)$ .

Si  $K$  es un complejo simplicial finito de dimensión  $m$ , la métrica usual en  $|K|$  hace que  $\text{diám}(|\sigma|) = \sqrt{2}$  para todo  $\sigma \in K$  de dimensión positiva. Luego, se tiene el siguiente

**Teorema 2.17.** Sea  $K$  un complejo simplicial finito de dimensión  $m$  y sea  $n \geq 0$ . Consideramos  $|K|$  con la métrica usual. Entonces, para todo  $\tau \in K^{(n)}$ ,

$$\text{diám}(|\tau|) \leq \left(\frac{m}{m+1}\right)^n \sqrt{2}.$$

### Teorema de aproximación simplicial

El último ingrediente que necesitamos para probar el resultado principal de esta sección es la noción de *star abierto* de un vértice. Estos conjuntos constituyen un cubrimiento por abiertos contráctiles y su utilidad trasciende los resultados de esta sección.

**Definición 2.18.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Sea  $v \in K$  un vértice. El *star abierto* de  $v$  en  $K$  es  $\overset{\circ}{\text{st}}_K(v) = \overset{\circ}{\text{st}}(v) = \{x \in |K| \mid v \in \text{sop}(x)\}$ .

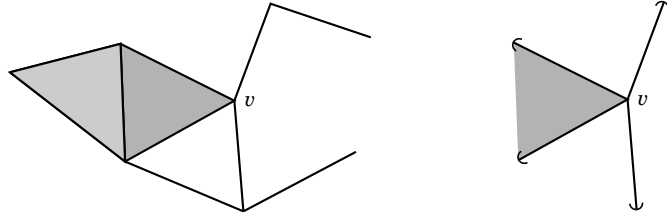


Figura 17: Un complejo  $K$  y el star abierto de un vértice  $v \in K$ .

*Observación 2.19.* Los stars abiertos forman un cubrimiento por abiertos de  $|K|$ .

**Ejercicio 2.20.** Sea  $\mathcal{U} = \{\overset{\circ}{\text{st}}(v) \mid v \in K\}$ . Probar que el nervio  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$  es isomorfo a  $K$ .

La siguiente es una caracterización de las aproximaciones simpliciales de una función (Definición 2.3) que hace uso de la noción de star abierto.

**Lema 2.21.** Sean  $K, L$  complejos simpliciales y sea  $f : |K| \rightarrow |L|$  una función continua. Una función de vértices  $\varphi : V_K \rightarrow V_L$  es una aproximación simplicial de  $f$  si y sólo si para cada  $v \in K$  vale

$$f(\overset{\circ}{\text{st}}(v)) \subseteq \overset{\circ}{\text{st}}(\varphi(v)).$$

*Demostración.* Probamos la vuelta. Supongamos que  $\varphi$  es una función de vértices tal que  $f(\overset{\circ}{\text{st}}(v)) \subseteq \overset{\circ}{\text{st}}(\varphi(v))$  para todo  $v \in K$ . Veamos que  $\varphi$  es simplicial. Sea  $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_k\} \in K$ . Entonces su baricentro  $\mathbf{b}(\sigma) \in \overset{\circ}{\text{st}}(v_i)$  para cada  $0 \leq i \leq k$ . Por hipótesis  $f(\mathbf{b}(\sigma)) \in \overset{\circ}{\text{st}}(\varphi(v_i))$  para todo  $i$ . Entonces  $\varphi(v_i) \in \text{sop}(f(\mathbf{b}(\sigma))) \forall i$  y, luego,  $\varphi(\sigma) \subseteq \text{sop}(f(\mathbf{b}(\sigma)))$  debe ser un simplex de  $L$ .

Si  $x \in \overset{\circ}{\sigma}$  y  $f(x) \in \overset{\circ}{\tau}$ , entonces, al igual que recién,  $\varphi(\sigma) \subseteq \text{sop}(f(x)) = \tau$ . Luego  $|\varphi|(|x|) \subseteq |\tau|$ . Esto demuestra que  $\varphi$  es una aproximación simplicial de  $f$ .

La ida usa el mismo tipo de ideas y queda como ejercicio para el lector.  $\diamond \diamond$

**Teorema 2.22** (Teorema de aproximación simplicial). Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales con  $K$  finito. Sea  $f : |K| \rightarrow |L|$  una función continua. Entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  y una aproximación simplicial  $\varphi : K^{(n)} \rightarrow L$  de  $f : |K^{(n)}| = |K| \rightarrow |L|$ .

*Demostración.* La familia  $\{\overset{\circ}{\text{st}}(w)\}_{w \in L}$  es un cubrimiento por abiertos de  $|L|$ . Como  $|K|$  es un espacio métrico compacto, existe un número de Lebesgue  $\delta > 0$  para el cubrimiento  $\{f^{-1}(\overset{\circ}{\text{st}}(w))\}_{w \in L}$ . Por el Teorema 2.17 existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{diám}(|\tau|) < \frac{\delta}{2}$  para todo  $\tau \in K^{(n)}$ .

Dado  $v \in K^{(n)}$ ,  $\text{diám}(\overset{\circ}{\text{st}}(v)) < \delta$ , ya que si  $x, y \in \overset{\circ}{\text{st}}(v)$ ,  $d(x, y) \leq d(x, v) + d(v, y) \leq \text{diám}(|\text{sop}(x)|) + \text{diám}(|\text{sop}(y)|)$ . Luego, existe  $w \in L$  tal que  $\overset{\circ}{\text{st}}(v) \subseteq f^{-1}(\overset{\circ}{\text{st}}(w))$ , o, en otras palabras,  $f(\overset{\circ}{\text{st}}(v)) \subseteq \overset{\circ}{\text{st}}(w)$ . Definimos la función de vértices  $\varphi : K^{(n)} \rightarrow L$  por  $\varphi(v) = w$ . Por el Lema 2.21,  $\varphi$  es aproximación simplicial de  $f$ .  $\diamond\diamond$

El Teorema de aproximación simplicial vale más en general, cuando  $K$  no es necesariamente finito, pero en este caso las subdivisiones baricéntricas no bastan y es necesario considerar otras subdivisiones de  $K$ . Para evitar detalles técnicos que extenderían las demostraciones, nos concentraremos en los complejos simpliciales finitos y dejaremos el caso general para ser estudiado por el lector interesado en otras fuentes (ver [22, §16]).

**Ejercicio 2.23.** Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales finitos y  $f : |K| \rightarrow |L|$  una función continua. Probar que para todo  $\epsilon > 0$  existen subdivisiones  $\tilde{K}$  de  $K$  y  $\tilde{L}$  de  $L$  y un morfismo simplicial  $\varphi : \tilde{K} \rightarrow \tilde{L}$  tal que  $d(f(x), |\varphi|(x)) < \epsilon$  para todo  $x \in |K|$ , donde  $d$  denota a la métrica usual de  $|L|$ .

**Ejercicio 2.24.** Probar que si  $X$  e  $Y$  son poliedros compactos, el conjunto  $[X, Y]$  de clases homotópicas de funciones de  $X$  a  $Y$  es numerable (o finito).

## Aplicaciones

Veamos algunos resultados que se deducen inmediatamente del Teorema de aproximación simplicial. Recordemos que si  $X$  es un espacio topológico, toda función continua  $f : X \rightarrow S^n$  no sobreyectiva es null-homotópica (i.e. es homotópica a una constante). Una tal función se factoriza por  $S^n \setminus \{x\}$ , que es un espacio contráctil.

**Corolario 2.25.** Si  $K$  es un complejo simplicial (finito) de dimensión  $\dim(K) = n < m$ , toda función  $f : |K| \rightarrow S^m$  es null-homotópica.

*Demostración.* Como  $S^m = |\dot{\sigma}|$  donde  $\sigma$  es un  $(m+1)$ -simplex, podemos suponer  $f : |K| \rightarrow |\dot{\sigma}|$ . Por el Teorema de aproximación simplicial existe  $k \in \mathbb{N}$  y  $\varphi : K^{(k)} \rightarrow \dot{\sigma}$  aproximación simplicial de  $f$ . Notar que  $\dim(K^{(k)}) = \dim(K) = n < m = \dim(\dot{\sigma})$ . Luego, si  $\tau \in \dot{\sigma}$  es un  $m$ -simplex,  $\text{b}(\tau) \notin \text{Im}(|\varphi|)$ , ya que todo  $x \in |K^{(k)}|$  tiene a lo sumo  $n+1$  vértices en su soporte y entonces  $|\varphi|(x)$  tiene a lo sumo  $n+1$  vértices en su soporte. Por el comentario anterior,  $|\varphi|$  es null-homotópica y luego,  $f \simeq |\varphi|$  también lo es.  $\diamond\diamond$

**Corolario 2.26.** Si  $n < m$ , toda función continua  $S^n \rightarrow S^m$  es null-homotópica.

Recordar que el grupo fundamental  $\pi_1(X, x_0)$  de un espacio topológico  $X$  con punto base  $x_0 \in X$  es el conjunto  $\{\gamma : I \rightarrow X \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$  cocientado por la relación determinada por las homotopías de caminos. La operación viene dada por la concatenación. Una descripción equivalente es  $\pi_1(X, x_0) = [(S^1, s_0); (X, x_0)]$ , el conjunto de clases homotópicas de funciones  $f : S^1 \rightarrow X$  tales que  $f(s_0) = x_0$  con homotopías relativas a  $s_0$ .

Por otro lado, recordemos que una función continua  $f : X \rightarrow Y$  entre espacios topológicos es null-homotópica si y sólo si se extiende al cono  $C(X) = X \times I / X \times \{1\}$ . Con esto probaremos que toda esfera de dimensión mayor a uno es simplemente conexa, i.e. su grupo fundamental es trivial. Esto se ve usualmente con el Teorema de van Kampen. Aquí damos una demostración distinta usando el último corolario.

**Corolario 2.27.** *Si  $n \geq 2$ ,  $S^n$  es simplemente conexo.*

*Demostración.* Sea  $[f] \in \pi_1(S^n, x_0)$ , donde  $f : S^1 \rightarrow S^n$ ,  $f(s_0) = x_0$ . Por el Corolario 2.26,  $f$  es null-homotópica y luego se extiende al cono a una función  $\bar{f} : D^2 = C(S^1) \rightarrow S^n$ . Consideramos la homotopía  $H : S^1 \times I \rightarrow S^n$  que recorre las circunferencias de  $D^2$  tangentes a  $S^1$  en  $s_0$ , y luego aplica  $\bar{f}$ , dada por  $H(s, t) = \bar{f}(ts_0 + (1-t)s)$ . Está bien definida y  $H : f \simeq C_{x_0} \text{rel}\{s_0\}$ . Esto prueba que  $[f] = 0 \in \pi_1(S^n, x_0)$ .  $\diamond\diamond$

Los grupos de homotopía de orden superior  $\pi_k(X, x_0)$  se definen similarmente al grupo fundamental. El conjunto subyacente del  $k$ -ésimo grupo de homotopía de  $X$  con punto base  $x_0$  es  $[(S^k, s_0); (X, x_0)]$ . A partir del Corolario 2.26 y repitiendo la demostración del último resultado, uno ve que  $\pi_k(S^n, x_0) = 0$  para todo  $k < n$ . Los grupos de homotopía, al igual que los grupos de homología, son invariantes homotópicos. A diferencia del grupo fundamental y los grupos de homología, los  $\pi_n$  son en general mucho más difíciles de calcular. Por ejemplo, el cálculo completo de los grupos de homotopía de las esferas es aún un problema abierto.

Una aplicación simple pero útil del Teorema de aproximación simplicial es la descripción del grupo fundamental de un poliedro  $|K|$  como el grupo de caminos de aristas en el 1-esqueleto de  $K$ , con cierta identificación. Este grupo conocido como el *edge-path group* permite dar una descripción puramente combinatoria del  $\pi_1$  (una presentación) conociendo sólo los 1-símplices y 2-símplices de  $K$ . No estudiaremos el edge-path group en este trabajo. El lector está invitado a leer más en [26, Section 3.6].

### 3. Homología simplicial

La homología singular de un espacio topológico  $X$  se define por medio del complejo de cadenas  $S_*(X)$  donde  $S_n(X)$  es el grupo abeliano libre generado por los símlices singulares  $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ . En el caso en que  $X$  sea un poliedro, es posible definir una noción similar, llamada *homología simplicial* de  $X$ . Si  $K$  es un complejo simplicial, consideraremos un nuevo complejo de cadenas, que tiene la ventaja de estar formado por grupos abelianos libres finitamente generados cuando  $K$  es finito. Esto hace que la homología simplicial sea mucho más sencilla de calcular. La homología simplicial de  $K$  coincide con la singular de  $|K|$ . De este modo uno tiene una manera algorítmica de calcular los grupos de homología de cualquier poliedro finito conociendo una triangulación. Aunque la definición de homología es puramente algebraica, el objetivo geométrico que la motiva es el de contar agujeros de diferentes dimensiones. Intuitivamente, el  $k$ -ésimo grupo de homología de un espacio  $X$  da información sobre la cantidad y el tipo de agujeros de dimensión  $k$  en  $X$ .

Esta sección es esencialmente autocontenida. Quienes posean conocimientos sobre homología de complejos de cadenas y homología singular podrán avanzar en la lectura más rápidamente, pero también podrá seguir el texto quien no haya tenido

contacto previo con el tema. Haremos algunas referencias en conexión con homología singular que no son imprescindibles para la comprensión del texto y postergaremos hasta la Sección 6 el estudio de la relación entre homología simplicial y singular. Los resultados algebraicos que no probemos aquí podrán encontrarse en referencias estándar como [32, Chapter I] (también [14, 22, 26, 28]) o quedarán como ejercicio para el lector. Así como en la sección anterior, probaremos algunos resultados sólo para complejos simpliciales finitos para evitar detalles más técnicos.

## El complejo de cadenas de símplexes orientados

Sea  $K$  un complejo simplicial y sea  $\sigma \in K$  un simplex. Decimos que dos ordenamientos  $(v_0, v_1, \dots, v_n), (v_{\pi(0)}, v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(n)})$  de los vértices de  $\sigma$  son *equivalentes* si difieren en una permutación  $\pi$  par. A la clase del ordenamiento  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  la denotamos  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$ . Cada clase se llama una *orientación* de  $\sigma$  o también *simplex orientado*  $\sigma$ . Cada simplex de dimensión positiva tiene dos orientaciones posibles.

Dado  $n \in \mathbb{Z}$ , se define el grupo  $C_n(K)$  cuyos elementos son las funciones  $c$  del conjunto de  $n$ -símplexes orientados de  $K$  a  $\mathbb{Z}$  que cumplen

- $c(\sigma) = -c(\sigma')$  si  $\sigma$  y  $\sigma'$  son orientaciones *opuestas* (distintas) del mismo simplex.
- $c(\sigma) \neq 0$  sólo para finitos  $\sigma$ .

La operación de  $C_n(K)$  viene dada por la operación usual de  $\mathbb{Z}$ :  $(c + c')(\sigma) = c(\sigma) + c'(\sigma)$ . Notar que  $C_n(K) = 0$  si  $n \leq -1$ . Los elementos  $c$  de  $C_n(K)$  se llaman  *$n$ -cadenas*. La cadena  $c_\sigma$  que vale 1 en un simplex orientado  $\sigma$ ,  $-1$  en el simplex con la orientación opuesta y 0 en todos los demás, será notada también  $\sigma$ . Si por cada simplex (no orientado) de  $K$  elegimos una orientación, las cadenas correspondientes  $c_\sigma$  forman una base del grupo abeliano libre  $C_n(K)$ . Según la identificación  $c_\sigma = \sigma$  entre símplexes orientados y cadenas, tenemos que para cada  $n$ -cadena  $c$  vale  $c = \sum c(\sigma)\sigma$ , donde la suma es sobre el conjunto de orientaciones elegidas para cada  $n$ -simplex. Por otro lado, si  $\sigma'$  es el simplex orientado con la orientación opuesta a  $\sigma$ , entonces  $\sigma' = -\sigma$ .

Dado un ordenamiento  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  de los vértices de un  $n$ -simplex, definimos  $d_n(v_0, v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ . Aquí,  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$  denota a  $[v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$ .

Notar que si  $(v_0, \dots, v_{j+1}, v_j, \dots, v_n)$  es un ordenamiento que se obtiene de  $(v_0, \dots, v_{j+1}, v_j, \dots, v_n)$  intercambiando dos términos consecutivos, entonces

$$\begin{aligned} d_n(v_0, \dots, v_{j+1}, v_j, \dots, v_n) &= \\ &= \sum_{i \leq j-1} (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{j+1}, v_j, \dots, v_n] + (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v}_{j+1}, \dots, v_n] + \\ &+ (-1)^{j+1} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n] + \sum_{i \geq j+2} (-1)^i [v_0, \dots, v_{j+1}, v_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= - \sum_{i \leq j-1} (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n] - (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n] - \\
&\quad - (-1)^{j+1} [v_0, \dots, \hat{v}_{j+1}, \dots, v_n] - \sum_{i \geq j+2} (-1)^i [v_0, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] = \\
&= -d_n(v_0, \dots, v_n).
\end{aligned}$$

Luego  $d_n$  induce una función bien definida que a cada simplex orientado  $[v_0, \dots, v_n]$  le asigna  $d_n(v_0, \dots, v_n)$ .

Se define el morfismo de grupos  $d_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$  que en un elemento  $\sigma$  de la base (un  $n$ -simplex orientado) vale  $d_n(\sigma)$ . Por la cuenta anterior  $d_n([v_0, \dots, v_n]) = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$  para cualquier simplex orientado  $[v_0, \dots, v_n]$ . La definición de  $d_n$  no depende de las orientaciones elegidas para cada simplex.

**Proposición 3.1.** *Sea  $K$  un complejo simplicial. Entonces  $(C_*(K), d_*)$  es un complejo de cadenas, es decir  $d_{n-1}d_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Basta probar que  $d_{n-1}d_n(\sigma) = 0$  para cualquier elemento  $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$  de la base de  $C_n(K)$ . Ahora,

$$\begin{aligned}
d_{n-1}d_n([v_0, \dots, v_n]) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i d_{n-1}[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] = \\
&= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] + \sum_{j > i} (-1)^{i+j-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n] = 0.
\end{aligned}$$

◇◇

**Definición 3.2.** *Sea  $K$  un complejo simplicial. El grupo de  $n$ -ciclos es  $Z_n(K) = \ker d_n$ . El grupo de  $n$ -bordes es  $B_n = \text{Im}(d_{n+1})$ . La homología simplicial de  $K$  se define como la homología del complejo de cadenas  $C_*(K)$ . Es decir, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , se define el  $n$ -ésimo grupo de homología simplicial de  $K$  como  $H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K)$ .*

**Ejemplo 3.3.** *Sea  $K$  el complejo simplicial ilustrado en la Figura 18.*

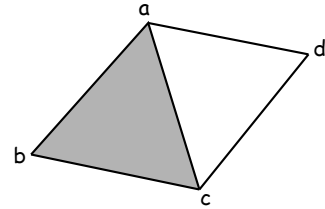


Figura 18: Un poliedro homotópicamente equivalente a  $S^1$ .

Entonces  $C_0(K) \cong \mathbb{Z}^4$  es el grupo abeliano libre generado por  $a, b, c, d$ . A su vez,  $C_1(K) = \langle [ab], [ac], [bc], [ad], [cd] \rangle \cong \mathbb{Z}^5$ ,  $C_2(K) = \langle [abc] \rangle \cong \mathbb{Z}$ ,  $C_n(K) = 0$  para  $n \geq 3$  (para los 0-simplices orientados a menudo omitiremos los corchetes en la notación y en general omitiremos las comas).

$$C_*(K) : \quad 0 \longrightarrow C_2(K) \longrightarrow C_1(K) \longrightarrow C_0(K) \longrightarrow 0$$

Como  $d_2([abc]) = [bc] - [ac] + [ab] \neq 0 \in C_1(K)$ ,  $d_2$  es monomorfismo,  $Z_2(K) = 0$  y luego  $H_2(K) = 0$ .  $B_0(K) = \langle d_1([ab]), d_1([ac]), \dots \rangle = \langle b-a, c-a, c-b, d-a, d-c \rangle$ .  $H_0(K) = \langle a, b, c, d \rangle / B_0(K) \cong \mathbb{Z}$ .  $B_1(K) = \langle [bc] - [ac] + [ab] \rangle$ . Calculamos los 1-ciclos.  $Z_1(K) = \{ \alpha[ab] + \beta[ac] + \gamma[bc] + \delta[ad] + \epsilon[cd] \mid \alpha b - \alpha a + \beta c - \beta a + \gamma c - \gamma b + \delta d - \delta a + \epsilon d - \epsilon c = 0 \}$ . La ecuación que define los ciclos es equivalente al sistema

$$\begin{cases} -\alpha - \beta - \delta = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ \beta + \gamma - \epsilon = 0 \\ \delta + \epsilon = 0 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon)$  está generado por  $(1, -1, 1, 0, 0)$  y  $(0, 1, 0, -1, 1)$ . Luego  $Z_1(K) \cong \langle (1, -1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, -1, 1) \rangle / \langle (1, -1, 1, 0, 0) \rangle \cong \mathbb{Z}$ .

En conclusión,  $H_0(K) \cong H_1(K) \cong \mathbb{Z}$  y  $H_n(K) = 0$  para  $n \geq 2$ . Los lectores familiarizados con homología singular notarán que  $|K|$  es homotópicamente equivalente a  $S^1$  y que los grupos de homología singular de  $S^1$  son exactamente los que acabamos de calcular.

Este ejemplo, aunque modesto, ilustra la motivación geométrica detrás de las definiciones algebraicas. Un 1-ciclo es precisamente una suma de ciclos en el sentido geométrico: caminos cerrados formados por 1-símplices. La idea intuitiva de un agujero de dimensión 1 es la de un ciclo que no está tapado, que no es el borde de una tapa de dimensión 2. La homología formaliza esta idea. Una 2-cadena  $c \in C_2(K)$  juega el papel de una tapa cuyo borde geométrico está representado por el borde formal  $d(c) \in B_1(K) \subseteq Z_1(K)$ . Por lo tanto el ciclo  $d(c)$  no debe ser considerado como un agujero y es por esto que su clase en la homología  $H_1(K)$  es cero. En el ejemplo anterior, el 1-ciclo  $c = [ab] + [bc] + [ca]$  que representa geoméricamente al borde del triángulo  $abc$ , no es un agujero porque justamente está tapado por dicho triángulo. Su clase en la homología es trivial. Sin embargo  $c' = [ac] + [cd] + [da]$  es un ciclo que no es borde de ninguna 2-cadena y entonces su clase homológica es no nula. Por supuesto, las tapas pueden ser más grandes que triángulos. Si imaginamos un octaedro, triangulado con ocho 2-símplices, y consideramos el complejo  $K$  que se obtiene al remover uno de esos 2-símplices  $\sigma = \{a, b, c\}$ , el 1-ciclo  $[ab] + [bc] + [ca]$  no es borde de un triángulo, pero sí es borde de la 2-cadena que es la suma de los siete 2-símplices de  $K$  (con ciertas orientaciones). La idea de agujeros de dimensión 1 se extiende a las demás dimensiones aunque geoméricamente sean más difíciles de ver. Los grupos de homología pueden tener torsión, lo que indica existencia de agujeros de distinta naturaleza.

**Ejemplo 3.4.** Sea  $K$  el complejo simplicial que aparece en la Figura 11, página 9 (una triangulación del plano proyectivo). Supongamos que  $z \in Z_2(K)$  es un 2-ciclo. Entonces  $z = \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma} \sigma$ , donde la suma es sobre los diez símplices de  $K$  orientados.

Como el 1-simplex  $\{de\}$  es cara de exactamente dos 2-símplices,  $\{cde\}$  y  $\{def\}$ , y  $d(z) = 0$ , debe ser  $\alpha_{[def]} = -\alpha_{[cde]}$ . Usando que  $\{df\}$  es cara de exactamente dos 2-símplices, tenemos que  $\alpha_{[bdf]} = \alpha_{[def]}$ . Similarmente  $\alpha_{[bcf]} = -\alpha_{[bdf]}$ ,  $\alpha_{[bce]} = -\alpha_{[bcf]}$  y  $\alpha_{[cde]} = \alpha_{[bce]}$ . Luego, todos estos coeficientes son nulos y, simétricamente,  $\alpha_{\sigma} = 0$  para cada 2-simplex  $\sigma \in K$ . Esto prueba que  $H_2(K) = 0$ . Este argumento sirve en realidad para ver que  $H_2$  es trivial para cada superficie no orientable (si es orientable uno deduce con la misma idea que  $H_2$  es cíclico infinito).

Supongamos que  $z = \sum_{\sigma} \beta_{\sigma} \sigma \in Z_1(K)$  es un 1-ciclo. Como  $H_1(K) \ni 0 = d(def) = [de] - [df] + [ef]$ ,  $z' = z + \beta_{[df]}([de] - [df] + [ef])$  es un ciclo *homólogo* a  $z$  (i.e. su clase

es la misma en la homología) y el coeficiente de  $[df]$  en  $z'$  es cero. Con la misma idea, podemos reemplazar  $[ef]$  por  $[af] - [ae]$  para obtener un ciclo  $z''$  homólogo a  $z$  que no contiene a  $[df]$  ni a  $[ef]$  en su escritura. Podemos eliminar luego, en este orden, a  $[ed]$ ,  $[ce]$ ,  $[cd]$ ,  $[bd]$ ,  $[bf]$ ,  $[af]$ ,  $[ae]$  para obtener un ciclo  $\tilde{z}$  homólogo a  $z$  soportado en los símlices  $[ab]$ ,  $[ac]$ ,  $[bc]$ ,  $[ad]$ ,  $[be]$ ,  $[cf]$ . Como  $e$  aparece sólo en uno de estos seis 1-símlices y  $d(\tilde{z}) = 0$ , el coeficiente de  $[be]$  en  $\tilde{z}$  debe ser nulo. Lo mismo se aplica a los coeficientes de  $[ad]$  y  $[cf]$ , por lo que  $\tilde{z} = \alpha[ab] + \beta[ac] + \gamma[bc]$ . Usando nuevamente que  $d(\tilde{z}) = 0$ , obtenemos  $\alpha = -\beta = \gamma$ . Luego, la clase de  $z$  en  $H_1(K)$  es un múltiplo de la clase de  $[ab] - [ac] + [bc]$ . Entonces  $H_1(K) = \langle g \rangle$ , donde  $g$  denota a la clase de  $[ab] - [ac] + [bc]$ .

Supongamos que  $g = 0 \in H_1(K)$ . En ese caso existe una 2-cadena  $c = \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma} \sigma \in C_2(K)$  tal que  $d(c) = [ab] - [ac] + [bc]$ . Usando el mismo razonamiento que aplicamos para calcular  $H_2(K)$ , concluimos que  $\alpha_{[bce]} = \alpha_{[cde]} = -\alpha_{[def]} = -\alpha_{[bdf]} = \alpha_{[bcf]}$ . Luego, el coeficiente de  $[bc]$  en  $d(c)$  es  $2\alpha_{[bce]} \neq 1$ . Entonces  $d(c) \neq [ab] - [ac] + [bc]$ , una contradicción. Luego  $g \neq 0 \in H_1(K)$ . Sin embargo  $2g = 0$ , ya que si sumamos todos los 2-símlices con la orientación adecuada, el borde de esta cadena es exactamente  $2([ab] - [ac] + [bc])$ . Concluimos entonces que  $H_1(K) = \mathbb{Z}_2$ .

El hecho de que  $H_0(K) = \mathbb{Z}$  se deduce del Ejercicio 3.6 abajo.

Notemos que, si bien puede requerir muchos cálculos, el cómputo de la homología simplicial de un complejo finito se puede hacer algorítmicamente. Sólo necesitamos saber calcular núcleos e imágenes de transformaciones lineales y cocientes por subgrupos. Para una justificación más detallada de esta afirmación ver [22, §11]. En particular, uno puede decidir efectivamente si dos complejos simpliciales finitos tienen los mismos grupos de homología. Esto es muy distinto de lo que ocurre con otros invariantes, como el caso del grupo fundamental. No existe ningún algoritmo que permita decidir si el grupo fundamental de (la realización de) un complejo simplicial es trivial o no.

*Observación 3.5.* Sea  $K$  un complejo simplicial. Entonces  $H_n(K) = 0$  para todo  $n > \dim(K)$ .

**Ejercicio 3.6.** Sea  $K$  un complejo simplicial finito. Probar que  $H_0(K)$  es un grupo abeliano libre con rango  $\text{rg}(H_0(K))$  igual al número de componentes conexas de  $|K|$ .

**Ejercicio 3.7.** Calcular los grupos de homología (de alguna triangulación) del toro y de la botella de Klein.

### Homología reducida

Los grupos  $C_n(K)$  son triviales para  $n \leq -1$ . El *complejo de cadenas aumentado*  $\tilde{C}_*(K)$  coincide con  $C_*(K)$  en grados distintos de  $-1$ , pero  $C_{-1}(K) = \mathbb{Z}$  y  $d_0 = \epsilon : C_0(K) \rightarrow C_{-1}(K) = \mathbb{Z}$  se define como  $\epsilon(\sum_{v \in K} n_v v) = \sum_{v \in K} n_v$ . El morfismo  $\epsilon$  se llama *aumentación*. El complejo aumentado es también un complejo de cadenas pues  $\epsilon d_1 = 0$ .

$$\tilde{C}_*(K) : \quad \cdots \rightarrow C_2(K) \xrightarrow{d_2} C_1(K) \xrightarrow{d_1} C_0(K) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

La *homología reducida* de  $K$  es la homología de  $\tilde{C}_*(K)$  y se denota  $\tilde{H}_*(K)$ . Claramente  $\tilde{H}_n(K) = H_n(K)$  para todo  $n \geq 1$ .

**Ejercicio 3.8.** Probar que si  $K$  es un complejo simplicial no vacío,  $H_0(K) = \tilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z}$ .

## Homología relativa y escisión

El Teorema de escisión para homología singular (Teorema 6.1) es una de las herramientas básicas que se aprenden en cualquier curso de topología algebraica. La demostración, lejos de ser trivial, requiere de algunos resultados técnicos y extensos. Definiremos ahora los grupos de homología simplicial relativos y veremos que la versión simplicial del Teorema de escisión se deduce inmediatamente de las definiciones.

**Definición 3.9.** Sea  $L$  un subcomplejo de un complejo simplicial  $K$  y sea  $n \geq 0$ . En este caso  $C_n(L)$  es un subgrupo de  $C_n(K)$  y se define  $C_n(K, L) = C_n(K)/C_n(L)$ . Notar que  $C_n(K, L)$  es un grupo abeliano libre con base las coclases de los  $n$ -símplices de  $K$  que no son símplices de  $L$ . Como  $d_n(C_n(L)) \subseteq C_{n-1}(L)$ ,  $d_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$  induce una función  $C_n(K, L) \rightarrow C_{n-1}(K, L)$  que también denotaremos  $d_n$ . Como  $d_n d_{n+1} = 0$ ,  $C_*(K, L)$  es un complejo de cadenas. La homología de este complejo  $H_*(K, L)$  es la *homología relativa del par*  $(K, L)$ .

Recordemos que dados dos complejos de cadenas de grupos abelianos  $(C_*, d)$ ,  $(D_*, d')$

$$C_* : \quad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d} C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

$$D_* : \quad \cdots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{d'} D_n \xrightarrow{d'} D_{n-1} \longrightarrow \cdots,$$

un morfismo (de complejos de cadenas)  $f : C_* \rightarrow D_*$  es una colección de morfismos de grupos  $f_n : C_n \rightarrow D_n$  tales que  $d'_n f_n = f_{n-1} d_n$  para todo  $n$ . Como es usual, muchas veces omitiremos los subíndices en la escritura de los morfismos  $d_n$  y de los morfismos de complejos. La identidad anterior será escrita como  $d'f = fd$ .

Un morfismo induce morfismos en los grupos de homología  $H_n(f) : H_n(C) \rightarrow H_n(D)$  que mandan la clase de un ciclo  $c$  a la clase de  $f(c)$ . La composición de morfismos es morfismo y  $H_n$  es un funtor:  $H_n(gf) = H_n(g)H_n(f)$  y  $H_n(1_{C_*}) = 1_{H_n(C)}$ . En particular, si  $f : C_* \rightarrow D_*$  es un isomorfismo de complejos de cadenas (existe morfismo inverso o, equivalentemente,  $f_n : C_n \rightarrow D_n$  es isomorfismo para cada  $n$ ), entonces  $H_n(f) : H_n(C) \rightarrow H_n(D)$  es un isomorfismo para todo  $n$ .

Notar que si  $M$  es un subcomplejo de un complejo simplicial  $K$ , la inclusión  $i : M \hookrightarrow K$  induce un morfismo de complejos de cadenas  $C_*(M) \rightarrow C_*(K)$  que manda un  $n$ -simplex orientado de  $M$  en sí mismo. Además, si  $L$  es otro subcomplejo de  $K$ , entonces  $i_* : C_n(M) \rightarrow C_n(K)$  induce morfismos  $C_n(M)/C_n(L \cap M) \rightarrow C_n(K)/C_n(L)$ . Este morfismo de complejos de cadenas  $i_* : C_*(M, L \cap M) \rightarrow C_*(K, L)$  induce morfismos en los grupos de homología relativos. Más adelante veremos que esto vale en general: todo morfismo simplicial (de complejos simpliciales o de pares) induce un morfismo de complejos de cadenas y por lo tanto morfismos en los grupos de homología.

**Teorema 3.10** (Teorema de escisión). *Sea  $K$  un complejo simplicial y sean  $L$  y  $M$  subcomplejos de  $K$  tales que  $K = L \cup M$ . Entonces la inclusión  $M \hookrightarrow K$  induce isomorfismos  $H_n(M, L \cap M) \rightarrow H_n(K, L)$  en todos los grupos de homología.*

*Demostración.* Consideramos la composición  $\phi : C_n(M) \hookrightarrow C_n(K) \rightarrow C_n(K)/C_n(L)$ . Es sobreyectiva por hipótesis y su núcleo es  $C_n(L \cap M)$ . Luego  $\phi$  induce un isomorfismo  $\bar{\phi} : C_n(M)/C_n(L \cap M) \rightarrow C_n(K)/C_n(L)$  para cada  $n$ , que es simplemente el morfismo inducido por la inclusión. Como  $i_* : C_n(M, L \cap M) \rightarrow C_n(K, L)$  es un isomorfismo, induce también isomorfismos en la homología.  $\diamond\diamond$

El lector familiarizado con el Teorema de escisión para homología singular notará que se podría probar que la inclusión  $|M| \hookrightarrow |K|$  induce isomorfismos en homología singular  $H_n^{sing}(|M|, |L| \cap |M|) \rightarrow H_n^{sing}(|K|, |L|)$  si tan sólo la clausura de  $|K| \setminus |M|$  estuviera contenida en el interior de  $|L|$ . Esto en general no es cierto. Sin embargo es posible aplicar el Teorema de escisión al reemplazar  $|L|$  por un subespacio abierto  $U$  de  $|K|$  que se retrae por deformación fuerte a  $|L|$  y tal que contiene a la clausura de  $|K| \setminus |M|$ . La idea para la construcción de  $U$  puede encontrarse en la demostración de [26, Corollary 3.3.11]. De todos modos, deduciremos el análogo del Teorema 3.10 para homología singular al estudiar la equivalencia entre la homología simplicial y la singular.

Un resultado tan importante como el Teorema de escisión es el Teorema de Mayer-Vietoris. Para resolver el siguiente ejercicio es útil el resultado algebraico (zig-zag Lemma) que dice que toda sucesión exacta corta de complejos induce una sucesión exacta larga en la homología (ver por ejemplo [22, Lemma 24.1], [32, Theorem 1.3.1]).

**Ejercicio 3.11** (Sucesión de Mayer-Vietoris). Probar que si un complejo simplicial  $K$  es unión de dos subcomplejos  $L$  y  $M$ , se tiene una sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \rightarrow C_*(L \cap M) \rightarrow C_*(L) \oplus C_*(M) \rightarrow C_*(K) \rightarrow 0$$

y por lo tanto se tiene una sucesión exacta larga

$$\cdots \rightarrow H_i(L \cap M) \rightarrow H_i(L) \oplus H_i(M) \rightarrow H_i(K) \rightarrow H_{i-1}(L \cap M) \rightarrow \cdots \rightarrow H_0(K) \rightarrow 0$$

para la homología simplicial. También se tiene una sucesión análoga para homología reducida cuando  $L \cap M$  es no vacío.

**Ejercicio 3.12.** Sea  $\sigma$  un 1-simplex,  $\partial\sigma$  su borde,  $K$  un complejo simplicial y  $\partial K$  el join de ambos (la *suspensión* de  $K$ ). Probar, que  $\tilde{H}_n(\partial K) = \tilde{H}_{n-1}(K)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Ejercicio 3.13.** Usando cierta sucesión exacta corta de complejos, probar que si  $L \leq K$ , se tiene una sucesión exacta larga

$$\cdots \rightarrow H_i(L) \rightarrow H_i(K) \rightarrow H_i(K, L) \rightarrow H_{i-1}(L) \rightarrow \cdots \rightarrow H_0(K, L) \rightarrow 0$$

y si  $L \neq \emptyset$ , se tiene una sucesión análoga para homología reducida

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_i(L) \rightarrow \tilde{H}_i(K) \rightarrow H_i(K, L) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(L) \rightarrow \cdots \rightarrow H_0(K, L) \rightarrow 0.$$

Estas últimas sucesiones constituyen las herramientas fundamentales para calcular grupos de homología de un complejo simplicial teniendo información sobre los grupos de homología de subcomplejos. En la Sección 6, veremos como escisión y la sucesión para homología relativa se entrelazan para dar un argumento inductivo que permitirá probar la equivalencia entre homología simplicial y singular.

## Homología en morfismos

Sea  $\varphi : K \rightarrow L$  un morfismo simplicial. Se definen los morfismos  $\varphi_n : C_n(K) \rightarrow C_n(L)$  que en los símplices orientados cumplen:

$$\varphi_n([v_0, \dots, v_n]) = \begin{cases} [\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_n)] & \text{si } \varphi(v_i) \neq \varphi(v_j) \forall i \neq j \\ 0 & \text{si existen } i \neq j \text{ tales que } \varphi(v_i) = \varphi(v_j). \end{cases}$$

Notar que  $\varphi_n$  está bien definido como función pues a ordenamientos equivalentes les corresponden las mismas cadenas y, como a orientaciones opuestas les corresponden cadenas opuestas, esto determina un morfismo de grupos bien definido.

Veamos que  $\varphi_* : C_*(K) \rightarrow C_*(L)$  es morfismo de complejos de cadenas. Basta probar que  $d\varphi(\sigma) = \varphi d(\sigma)$  para los elementos de la base  $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ . Si los  $\varphi(v_i)$  son distintos dos a dos, la igualdad es clara. Si existen dos pares distintos  $i \neq j, k \neq l$  tales que  $\varphi(v_i) = \varphi(v_j), \varphi(v_k) = \varphi(v_l)$ , también es claro que  $d\varphi(\sigma) = 0 = \varphi d(\sigma)$ . Supongamos entonces que  $\varphi(v_i) = \varphi(v_j)$  para ciertos  $i \neq j$  y que todos los demás  $\varphi(v_k)$  son distintos entre sí y distintos a  $\varphi(v_i)$ . En ese caso

$$\begin{aligned} \varphi d(\sigma) &= \\ \varphi \left( \sum_{k \neq i, j} (-1)^k [v_0, \dots, \hat{v}_k, \dots, v_n] + (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] + (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n] \right) &= \\ = (-1)^i [\varphi(v_0), \dots, \widehat{\varphi(v_i)}, \dots, \varphi(v_n)] + (-1)^j [\varphi(v_0), \dots, \widehat{\varphi(v_j)}, \dots, \varphi(v_n)]. & \end{aligned}$$

Pero esto es cero pues los ordenamientos  $(\varphi(v_0), \dots, \widehat{\varphi(v_i)}, \dots, \varphi(v_n))$  y  $(\varphi(v_0), \dots, \widehat{\varphi(v_j)}, \dots, \varphi(v_n))$  difieren en una permutación de signo  $(-1)^{i-j}$ . Luego  $\varphi d(\sigma) = 0 = d\varphi(\sigma)$  como queríamos ver.

Como  $\varphi_* : C_*(K) \rightarrow C_*(L)$  es morfismo, induce morfismos  $\varphi_n = H_n(\varphi) : H_n(K) \rightarrow H_n(L)$  para cada  $n$ .

Un morfismo simplicial  $\varphi : K \rightarrow L$  induce también un morfismo  $\varphi_* : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(L)$  que en grados no negativos coincide con el ya definido y es la identidad  $1_{\mathbb{Z}}$  en grado  $-1$ . Así, tenemos también morfismos  $\varphi_n = \tilde{H}_n(\varphi) : \tilde{H}_n(K) \rightarrow \tilde{H}_n(L)$ .

*Observación 3.14.*  $H_n(1_K) = 1_{H_n(K)}$  y  $H_n(\psi\varphi) = H_n(\psi)H_n(\varphi)$  si  $\psi$  y  $\varphi$  son morfismos simpliciales componibles. Lo mismo vale para homología reducida.

## 4. Teorema del acyclic carrier e invarianza topológica de la homología

El teorema al cual hace referencia el título de la sección permite construir morfismos  $\tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(L)$  entre los complejos de cadenas asociados a complejos simpliciales y, bajo ciertas condiciones, asegura que dos morfismos son homotópicos como morfismos de complejos de cadenas. Usaremos este resultado para probar que si  $K$  y  $L$  tienen realizaciones homeomorfas,  $\tilde{C}_*(K)$  y  $\tilde{C}_*(L)$  son complejos de cadenas homotópicamente equivalentes y, en particular, tienen la misma homología.

### Homotopías entre morfismos de complejos de cadenas

Recordemos que dos morfismos  $f, g : C_* \rightarrow D_*$  de complejos de cadenas se dicen homotópicos si existen morfismos de grupos  $F_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & F_n & \nearrow & g_n & \downarrow & f_n & \nearrow & F_{n-1} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & D_n & \longrightarrow & D_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

tales que  $d'_{n+1}F_n + F_{n-1}d_n = g_n - f_n$  para todo  $n$ . En este caso  $F = \{F_n\}_n$  se dice homotopía entre  $f$  y  $g$ , y notamos  $F : f \simeq g$  o simplemente  $f \simeq g$ .

Recordemos que valen las siguientes afirmaciones:

- Si  $f, g : C_* \rightarrow D_*$  son morfismos homotópicos, entonces  $f_* = g_* : H_n(C) \rightarrow H_n(D)$ .
- La relación  $\simeq$  entre morfismos  $C_* \rightarrow D_*$  es de equivalencia.
- Si  $f \simeq g, f' \simeq g'$  y las composiciones  $ff', gg'$  están bien definidas, entonces  $ff' \simeq gg'$ .

Estas afirmaciones quedan como ejercicio para el lector.

Un complejo simplicial  $K$  se dice *acíclico* si  $\tilde{H}_n(K) = 0$  para todo  $n \geq 0$ . A continuación veremos que todo cono es acíclico. Un cono (simplicial) es el join  $aK = a * K$  entre un complejo  $K$  y un vértice  $a \notin K$ . Al vértice  $a$  se lo llama *ápice* del cono.

Si  $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$  es un  $n$ -simplex orientado, notaremos  $\sigma^{(i)} = [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$  a su cara  $i$ -ésima. Luego  $d(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^{(i)}$ .

**Lema 4.1.** Sea  $aK$  un cono. Entonces  $aK$  es acíclico.

*Demostración.* Veamos que  $1_{\tilde{C}_*(aK)}$  y  $0 : \tilde{C}_*(aK) \rightarrow \tilde{C}_*(aK)$  son morfismos homotópicos. Definimos para  $n \geq 0, F_n : C_n(aK) \rightarrow C_{n+1}(aK)$  que en  $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$  vale

$$F_n(\sigma) = \begin{cases} a\sigma = [a, v_0, \dots, v_n] & \text{si } a \notin \sigma \\ 0 & \text{si } a \in \sigma, \end{cases}$$

y  $F_{-1} : \mathbb{Z} \rightarrow C_0(aK)$  que manda 1 en  $a$ . Así,  $F_n$  es un morfismo de grupos bien definido para todo  $n$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & C_n(aK) & \xrightarrow{d} & C_{n-1}(aK) & & \cdots & & C_0(aK) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{Z} \\
 & & \swarrow F_n & & \downarrow 1 & \searrow F_{n-1} & & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
 C_{n+1}(aK) & \xrightarrow{d} & C_n(aK) & & \cdots & & C_1(aK) & \xrightarrow{d} & C_0(aK) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{Z}
 \end{array}$$

Sea  $n \geq 1$ . Si  $\sigma$  es un  $n$ -simplex de  $K$ , entonces

$$\begin{aligned}
(dF + Fd)(\sigma) &= d(a\sigma) + F\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^{(i)}\right) \\
&= \sigma - \sum_{i=0}^n (-1)^i a\sigma^{(i)} + \sum_{i=0}^n (-1)^i a\sigma^{(i)} = \sigma = (1 - 0)(\sigma).
\end{aligned}$$

Si  $\sigma$  es un  $(n-1)$ -simplex de  $K$ , entonces  $(dF + Fd)(a\sigma) = F\left(\sigma - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a\sigma^{(i)}\right) = (1 - 0)(a\sigma)$ . Si  $v$  es un vértice de  $aK$ , también vale  $(dF + F\epsilon)(v) = (1 - 0)(v)$ . Luego  $F : 0 \simeq 1$ . Como los morfismos son homotópicos, inducen los mismos morfismos en homología, i.e.  $0 = 1 : \tilde{H}_n(aK) \rightarrow \tilde{H}_n(aK)$ . Entonces  $\tilde{H}_n(aK) = 0$ , como queríamos probar.  $\diamond$

## Contigüidad

Existe una versión simplicial de la noción de homotopía entre funciones. Este concepto mucho más rígido se denomina *contigüidad*.

**Definición 4.2.** Sean  $K, L$  complejos simpliciales. Decimos que dos morfismos  $\varphi, \psi : K \rightarrow L$  son *contiguos* si para cada  $\sigma \in K$ ,  $\varphi(\sigma) \cup \psi(\sigma)$  es un simplex de  $L$ . Las clases de equivalencia de la relación de equivalencia generada por la contigüidad se denominan *clases de contigüidad*. En otras palabras,  $\varphi, \psi : K \rightarrow L$  están en la misma clase de contigüidad si existe una sucesión  $\varphi = \varphi_0, \dots, \varphi_k = \psi$  de morfismos de  $K$  a  $L$  tales que  $\varphi_i$  y  $\varphi_{i+1}$  son contiguos para todo  $i$ .

**Ejercicio 4.3.** Probar que dos aproximaciones simpliciales  $K \rightarrow L$  de una misma función continua  $|K| \rightarrow |L|$  son contiguas.

*Observación 4.4.* Si  $\varphi, \psi : K \rightarrow L$  están en la misma clase de contigüidad, entonces  $|\varphi|, |\psi| : |K| \rightarrow |L|$  son funciones homotópicas ya que la homotopía lineal está bien definida:  $(1-t)|\varphi|(x) + t|\psi|(x)$  está bien definido para todo  $x \in |K|$  y  $t \in I$  porque si  $x \in |\sigma|$ , entonces  $|\varphi|(x), |\psi|(x) \in |\varphi(\sigma) \cup \psi(\sigma)|$ . La continuidad de la homotopía lineal sale como en la demostración de la Proposición 2.7.

Probaremos algo ligeramente distinto a lo que dice la observación anterior: que si  $\varphi$  y  $\psi$  están en la misma clase de contigüidad, entonces  $\varphi_*, \psi_* : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(L)$  son homotópicos como morfismos de complejos de cadenas. Para esto utilizaremos el Teorema del acyclic carrier.

**Ejercicio 4.5.** Sea  $X$  un conjunto. Decimos que un cubrimiento  $\mathcal{V}$  de  $X$  *refina* a otro cubrimiento  $\mathcal{U}$  si todo elemento de  $\mathcal{V}$  está contenido en uno de  $\mathcal{U}$ . Una *proyección canónica*  $\mathcal{N}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{U})$  es una aplicación que elige para cada  $V \in \mathcal{V}$  un elemento  $\varphi(V) = U \in \mathcal{U}$  que contiene a  $V$ . Probar que toda proyección canónica es un morfismo simplicial y que dos proyecciones canónicas son contiguas.

**Ejercicio 4.6.** Hallar dos morfismos simpliciales con realizaciones homotópicas que no sean contiguos. ¿Existen morfismos simpliciales en diferentes clases de contigüidad que tengan realizaciones homotópicas?

La diferencia entre contigüidad y homotopía se estudia a fondo en [3]. La noción de contigüidad da lugar a *tipos homotópicos fuertes* de complejos simpliciales. Estos, al tener una descripción combinatoria, son mucho más sencillos de entender que los tipos homotópicos usuales.



### Acyclic carriers

El Teorema del acyclic carrier es un resultado puramente algebraico. Antes de enunciarlo, introducimos un par de conceptos.

**Definición 4.7.** Sea  $K$  un complejo simplicial y sea  $L \leq K$  un subcomplejo. Diremos que una cadena  $c \in C_n(K)$  es *llevada* por  $L$  si  $c \in C_n(L)$ , i.e.  $c(\sigma) = 0$  para todo  $\sigma \in K$  tal que  $\sigma \notin L$ .

**Definición 4.8.** Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales. Un *acyclic carrier* de  $K$  a  $L$  es una función  $\Phi$  que le asigna a cada simplex  $\sigma \in K$  un subcomplejo  $\Phi(\sigma)$  de  $L$  de modo que valen las siguientes dos condiciones:

1.  $\Phi(\sigma)$  es no vacío y acíclico para todo  $\sigma \in K$ .
2. Si  $\tau$  es una cara de  $\sigma \in K$ , entonces  $\Phi(\tau) \subseteq \Phi(\sigma)$ .

Si  $\phi$  es un acyclic carrier de  $K$  a  $L$ , decimos que un morfismo de complejos de cadenas  $\varphi : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(L)$  es *llevado* por  $\Phi$  si para todo simplex orientado  $\sigma \in K$ , la cadena  $\varphi(\sigma) \in C_n(L)$  es llevada por el subcomplejo  $\Phi(\sigma)$ . Si  $F : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_{*+1}(L)$  es una homotopía entre dos morfismos de complejos de cadenas, diremos que  $F$  es *llevada* por  $\Phi$  si para cada simplex orientado  $\sigma \in K$ ,  $F(\sigma)$  es llevado por  $\Phi(\sigma)$ .

**Ejemplo 4.9.** Todo morfismo simplicial  $\varphi : K \rightarrow L$  induce un acyclic carrier  $\Phi$  de  $K$  en  $L$  que viene dado por  $\Phi(\sigma) = \overline{\varphi(\sigma)}$ . Esto se deduce del hecho de que todo simplex es un complejo simplicial acíclico por el Lema 4.1. El morfismo de complejos de cadenas  $\varphi_* : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(L)$  inducido por  $\varphi$  es llevado por  $\Phi$  ya que la cadena  $\varphi_*(\sigma)$  es llevada por el subcomplejo  $\overline{\varphi(\sigma)}$ .

**Teorema 4.10** (Teorema del acyclic carrier). *Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales y sea  $\Phi$  un acyclic carrier de  $K$  a  $L$ . Entonces*

- (i) *Existe un morfismo  $\varphi : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(L)$  llevado por  $\Phi$  que en grado  $-1$  es la identidad.*
- (ii) *Si  $\varphi, \psi : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(L)$  son dos morfismos llevados por  $\Phi$  que en grado  $-1$  son la identidad, entonces existe una homotopía  $F : \varphi \simeq \psi$  llevada por  $\Phi$ .*

*Demostración.* Para probar (i) construiremos el morfismo  $\varphi : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(L)$  grado por grado. En grado  $-1$  es la identidad.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{d} & C_2(K) & \xrightarrow{d} & C_1(K) & \xrightarrow{d} & C_0(K) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{Z} \\ & & & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_0 & & \downarrow 1 \\ \cdots & \xrightarrow{d} & C_2(L) & \xrightarrow{d} & C_1(L) & \xrightarrow{d} & C_0(L) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Queremos definir  $\varphi_0 : C_0(K) \rightarrow C_0(L)$  de modo tal que para todo  $v \in K$ ,  $\varphi_0(v)$  sea llevado por  $\Phi(v)$  y además  $\epsilon\varphi_0(v) = 1_{\mathbb{Z}}\epsilon(v) = 1$ . Basta tomar  $\varphi_0(v)$  como cualquier vértice de  $\Phi(v) \neq \emptyset$ .

Ahora queremos definir  $\varphi_1 : C_1(K) \rightarrow C_1(L)$  de modo tal que para todo 1-simplex  $[v, w] \in K$ ,  $\varphi_1([v, w])$  sea llevado por  $\Phi(\{v, w\})$  y  $d\varphi_1([v, w]) = \varphi_0 d([v, w]) = \varphi_0(w - v) = \varphi_0(w) - \varphi_0(v)$ . Como por construcción  $\varphi_0(w)$  está llevado por  $\Phi(w) \subseteq \Phi(\{v, w\})$  y  $\varphi_0(v)$  está llevado por  $\Phi(v) \subseteq \Phi(\{v, w\})$ , entonces  $\varphi_0(w) - \varphi_0(v) \in$

$C_0(\Phi(\{v, w\}))$ . Además  $\epsilon(\varphi_0(w) - \varphi_0(v)) = \epsilon\varphi_0 d([v, w]) = 1_{\mathbb{Z}}\epsilon d([v, w]) = 0$  pues  $\epsilon d = 0$ . Luego,  $\varphi_0(w) - \varphi_0(v) \in Z_0(\Phi(\{v, w\}))$ . Pero  $\Phi(\{v, w\})$  es un subcomplejo acíclico, luego  $Z_0(\Phi(\{v, w\})) = B_0(\Phi(\{v, w\}))$ . Es decir que existe  $c \in C_1(\Phi(\{v, w\}))$  tal que  $d(c) = \varphi_0(w) - \varphi_0(v)$ . Definimos entonces  $\varphi_1([v, w]) = c$ .

De este modo, recursivamente, definimos los morfismos  $\varphi_n$ . Supongamos  $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$  ya construidas. Queremos definir  $\varphi_n(\sigma)$  llevado por  $\Phi(\sigma)$  de modo tal que  $d\varphi_n(\sigma) = \varphi_{n-1}d(\sigma)$ . Pero  $d(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma^{(i)}$ . Por hipótesis inductiva  $\varphi_{n-1}(\sigma^{(i)})$  es

llevado por  $\Phi(\sigma^{(i)}) \subseteq \Phi(\sigma)$ . Luego  $\varphi_{n-1}d(\sigma) \in C_{n-1}(\Phi(\sigma))$ . Pero, también por inducción  $d\varphi_{n-1}d(\sigma) = \varphi_{n-2}d^2(\sigma) = 0$ . Entonces  $\varphi_{n-1}d(\sigma) \in Z_{n-1}(\Phi(\sigma)) = B_{n-1}(\Phi(\sigma))$  y existe  $c \in C_n(\Phi(\sigma))$  tal que  $d(c) = \varphi_{n-1}d(\sigma)$ . Definimos  $\varphi_n(\sigma) = c$ .

La demostración de (ii) es similar a la del punto anterior. Construiremos la homotopía  $F_n : \tilde{C}_n(K) \rightarrow \tilde{C}_{n+1}(L)$  grado por grado.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_2(K) & \xrightarrow{d} & C_1(K) & \xrightarrow{d} & C_0(K) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \\ & & \varphi \downarrow \psi & & \varphi \downarrow \psi & \swarrow F_0 & \varphi \downarrow \psi \swarrow F_{-1} \\ \dots & \longrightarrow & C_2(L) & \xrightarrow{d} & C_1(L) & \xrightarrow{d} & C_0(L) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \end{array}$$

Definimos  $F_{-1} = 0 : \mathbb{Z} \rightarrow C_0(L)$ . Queremos definir  $F_0 : C_0(K) \rightarrow C_1(L)$  de modo tal que  $dF_0 = \psi - \varphi$ . Ahora, si  $v \in K$ ,  $\psi(v) - \varphi(v) \in C_0(\Phi(v))$  y  $\epsilon(\psi(v) - \varphi(v)) = \epsilon(v) - \epsilon(v) = 0$ . Luego  $\psi(v) - \varphi(v) \in Z_0(\Phi(v)) = B_0(\Phi(v))$  y existe  $c \in C_1(\Phi(v))$  tal que  $d(c) = \psi(v) - \varphi(v)$ . Definimos  $F_0(v) = c$ .

Supongamos definidas  $F_{-1}, \dots, F_{n-1}$ . Queremos definir  $F_n : C_n(K) \rightarrow C_{n+1}(L)$  tal que  $dF_n + F_{n-1}d = \psi - \varphi$ . Si  $\sigma \in K$  es un  $n$ -simplex, necesitamos entonces que  $dF_n(\sigma) = \psi(\sigma) - \varphi(\sigma) - F_{n-1}d(\sigma)$ . Por hipótesis  $\psi(\sigma), \varphi(\sigma) \in C_n(\Phi(\sigma))$ . Por otro lado,  $d(\sigma) = \sum (-1)^i \sigma^{(i)}$  y por hipótesis inductiva  $F_{n-1}(\sigma^{(i)}) \in C_n(\Phi(\sigma^{(i)})) \subseteq C_n(\Phi(\sigma))$ . Luego  $\psi(\sigma) - \varphi(\sigma) - F_{n-1}d(\sigma) \in C_n(\Phi(\sigma))$ .

Además  $d(\psi(\sigma) - \varphi(\sigma) - F_{n-1}d(\sigma)) = \psi d(\sigma) - \varphi d(\sigma) - dF_{n-1}d(\sigma) = (\psi - \varphi - dF_{n-1})d(\sigma)$ . Por inducción  $\psi - \varphi - dF_{n-1} = F_{n-2}d$ . Entonces  $d(\psi(\sigma) - \varphi(\sigma) - F_{n-1}d(\sigma)) = F_{n-2}d^2(\sigma) = 0$ . En otras palabras,  $\psi(\sigma) - \varphi(\sigma) - F_{n-1}d(\sigma) \in Z_n(\Phi(\sigma)) = B_n(\Phi(\sigma))$ . Por lo tanto existe  $c \in C_{n+1}(\Phi(\sigma))$  tal que  $d(c) = \psi(\sigma) - \varphi(\sigma) - F_{n-1}d(\sigma)$ . Definimos  $F_n(\sigma) = c$ . Así, recursivamente, queda definida la homotopía entre  $\varphi$  y  $\psi$  y es llevada por  $\Phi$ .  $\diamond \diamond$

**Observación 4.11.** La definición de morfismo de cadenas y homotopía llevadas por un acyclic carrier bien puede hacerse para morfismos y homotopías entre complejos  $C_*(K), C_*(L)$  no aumentados. El Teorema del acyclic carrier vale también en su versión para complejos de cadenas no aumentados en donde (i) asegura la existencia de un morfismo  $\varphi : C_*(K) \rightarrow C_*(L)$  que además cumple  $\epsilon\varphi = \epsilon$  y la parte (ii) requiere que los morfismos  $\varphi, \psi : C_*(K) \rightarrow C_*(L)$  satisfagan la condición recién impuesta. La demostración se deduce de la anterior observando que  $F_{-1}$  se definió como cero y entonces la misma homotopía funciona.

**Proposición 4.12.** Sean  $\varphi, \psi : K \rightarrow L$  dos morfismos simpliciales en la misma clase de contigüidad. Entonces  $\varphi_* \simeq \psi_* : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(L)$ .

*Demostración.* Podemos suponer que  $\varphi$  y  $\psi$  son contiguos. Definimos un acyclic carrier  $\Phi$  de  $K$  a  $L$  dado por  $\Phi(\sigma) = \varphi(\sigma) \cup \psi(\sigma) \leq L$ . Es un acyclic carrier por el Lema 4.1. Claramente  $\varphi_*$  y  $\psi_* : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(L)$  son llevados por  $\Phi$ . Por el Teorema del acyclic carrier,  $\varphi_*$  y  $\psi_*$  son homotópicos.  $\diamond \diamond$

## Invarianza topológica

Utilizaremos el Teorema del acyclic carrier para probar que todo complejo simplicial  $K$  y su subdivisión baricéntrica  $K'$  tienen la misma homología.

Recordemos que una aproximación simplicial de una función continua  $f : |K| \rightarrow |L|$  es un morfismo simplicial  $\varphi : K \rightarrow L$  tal que si  $f(x) \in |\tau|$ , entonces  $|\varphi(x)| \in |\tau|$  y que, en vista del Lema 2.21, esto es equivalente a una función de vértices  $\varphi : V_K \rightarrow V_L$  que cumple  $f(\overset{\circ}{\text{st}}(v)) \subseteq \overset{\circ}{\text{st}}(\varphi(v))$  para cada  $v \in K$ .

**Proposición 4.13.** *Sea  $L$  una subdivisión de un complejo simplicial  $K$ . Entonces existe una aproximación  $\varphi : L \rightarrow K$  de la identidad  $1_{|K|} : |L| \rightarrow |K|$ .*

*Demostración.* Para cada vértice  $v \in L$  elegimos un vértice  $\varphi(v) \in K$  tal que  $\varphi(v) \in \text{sop}_K(v)$ . Veamos que esta función de vértices es una aproximación de la identidad.

Si  $x \in \overset{\circ}{\text{st}}_L(v)$ ,  $x = \sum t_i v_i$  donde  $t_i > 0$  para todo  $i$  y existe  $i'$  tal que  $v = v_{i'}$ . Cada  $v_i$ , como punto de  $|K|$  se escribe de la forma  $v_i = \sum_j r_{ij} w_{ij}$  para ciertos  $w_{ij} \in K$  y  $r_{ij} > 0$ . Entonces  $1_{|K|}(x) = \sum_i t_i \sum_j r_{ij} w_{ij} = \sum_{i,j} t_i r_{ij} w_{ij}$ . Como  $\varphi(v) \in \text{sop}_K(v)$ , existe  $j'$  tal que  $\varphi(v) = w_{i'j'}$ . Como  $t_{i'} r_{i'j'} > 0$ ,  $\varphi(v) \in \text{sop}_K(x)$ . En otras palabras,  $1_{|K|}(x) \in \overset{\circ}{\text{st}}_K(\varphi(v))$ . Por el Lema 2.21,  $\varphi$  es una aproximación de la identidad.  $\diamond \diamond$

**Observación 4.14.** Sea  $K'$  la subdivisión baricéntrica de un complejo simplicial  $K$ . Entonces una función de vértices  $\varphi : V_{K'} \rightarrow V_K$  es una aproximación de la identidad si y sólo si  $\varphi(\text{b}(\sigma)) \in \sigma$  para cada  $\sigma \in K'$ .

La suficiencia se deduce de la demostración de la proposición anterior, ya que  $\text{sop}_K(\text{b}(\sigma)) = \sigma$ . La necesidad es obvia de la definición de aproximación simplicial.

**Teorema 4.15** (Teorema de la subdivisión algebraica). *Sea  $K'$  la subdivisión baricéntrica de un complejo simplicial  $K$ . Entonces existe un único morfismo  $\lambda : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(K')$  que es la identidad en grado  $-1$  tal que  $\lambda(\sigma)$  es llevado por  $K'(\sigma) = \bar{\sigma}'$  para cada  $\sigma \in K$ . Además, si  $\varphi : K' \rightarrow K$  es una aproximación de la identidad, entonces  $\lambda$  y  $\varphi_* : \tilde{C}_*(K') \rightarrow \tilde{C}_*(K)$  son inversas homotópicas. En particular los morfismos  $\lambda_*$  y  $\varphi_*$  inducidos en la homología son isomorfismos.*

*Demostración.* Definimos un acyclic carrier  $\Lambda$  de  $K$  a  $K'$  dado por  $\Lambda(\sigma) = \bar{\sigma}' \leq K'$ . Estos subcomplejos son conos, con ápice en  $\text{b}(\sigma)$ , luego acíclicos por el Lema 4.1. Si  $\tau \subseteq \sigma$ ,  $\Lambda(\tau) \subseteq \Lambda(\sigma)$ . Por el Teorema del acyclic carrier existe  $\lambda : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(K')$  como en el enunciado.

Para probar que  $\varphi_*$  es inversa homotópica de  $\lambda$  definiremos un acyclic carrier  $\Theta$  de  $K$  a  $K$  y veremos que tanto  $\varphi_* \lambda$  como  $1_{\tilde{C}_*(K)}$  son llevados por  $\Theta$ . Definiremos otro acyclic carrier  $\Psi$  de  $K'$  a  $K'$  para ver que la otra composición también es homotópica a la identidad.

Si  $\sigma \in K$ , definimos  $\Theta(\sigma) = \bar{\sigma} \leq K$ . Si  $\{\text{b}(\sigma_i)\}_{0 \leq i \leq n}$  es un simplex de  $K'$ , con  $\sigma_i \subsetneq \sigma_{i+1}$ , definimos  $\Psi(\{\text{b}(\sigma_i)\}_{0 \leq i \leq n}) = \bar{\sigma}'_n \leq K'$ .

Sea  $\sigma \in K$  un  $n$ -simplex. Como  $\lambda$  es llevado por  $\Lambda$ ,  $\lambda(\sigma) \in C_n(\bar{\sigma}')$  es una combinación entera de símlices del tipo  $\tau = [\text{b}(\sigma_0), \dots, \text{b}(\sigma_n)] \in K'$  tales que cada  $\sigma_i$  es cara de  $\sigma$ . Ahora,  $\varphi_*(\tau)$  es cero o es  $[\varphi(\text{b}(\sigma_0)), \dots, \varphi(\text{b}(\sigma_n))] = [v_0, \dots, v_n]$ , donde  $v_i = \varphi(\text{b}(\sigma_i)) \in \sigma_i \subseteq \sigma$ , por la Observación 4.14. En cualquier caso,  $\varphi_*(\tau)$  es llevado por  $\Theta(\sigma) = \bar{\sigma}$  y entonces  $\varphi_* \lambda(\sigma)$  es llevado por  $\Theta(\sigma)$ . Claramente la identidad  $1_{\tilde{C}_*(K)}$  es llevada por  $\Theta$ . El Teorema del acyclic carrier garantiza que  $\varphi_* \lambda \simeq 1_{\tilde{C}_*(K)}$ .

En la otra dirección, sea  $\tau = [b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_n)] \in K'$  con  $\sigma_i \subsetneq \sigma_{i+1}$  para cada  $i$ . Entonces  $\varphi_*(\tau)$  es cero o es  $[v_0, \dots, v_n]$  con cada  $v_i \in \sigma_i \subseteq \sigma_n$ . En el segundo caso,  $\lambda\varphi_*(\tau)$  es llevado por  $\Lambda(\{v_0, \dots, v_n\}) = \overline{\{v_0, \dots, v_n\}}' \subseteq \bar{\sigma}'_n = \Psi(\tau)$ . Por lo tanto, en cualquier caso  $\lambda\varphi_*(\tau)$  es llevado por  $\Psi(\tau)$ . La identidad  $1_{\tilde{C}_*(K')}$  también es llevada por  $\Psi$  y entonces, el Teorema del acyclic carrier dice que  $\lambda\varphi_* \simeq 1_{\tilde{C}_*(K')}$ . Luego  $\varphi_*$  es inversa homotópica de  $\lambda$ .

Resta probar la unicidad de  $\lambda$ . Sea  $\delta : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(K')$  otro morfismo llevado por  $\Lambda$ . Por el Teorema de acyclic carrier existe una homotopía  $F : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_{*+1}(K')$  entre  $\lambda$  y  $\delta$  que es llevada por  $\Lambda$ .

$$\begin{array}{ccc}
 C_n(K) & \xrightarrow{d} & C_{n-1}(K) \\
 \swarrow F & \downarrow \lambda \downarrow \delta & \swarrow F \\
 C_{n+1}(K') & \xrightarrow{d} & C_n(K')
 \end{array}$$

Si  $\sigma \in K$  es un  $n$ -simplex, entonces  $F(\sigma) \in C_{n+1}(\bar{\sigma}')$ . Pero  $\bar{\sigma}'$  es un subcomplejo de dimensión  $n$ , por lo que  $C_{n+1}(\bar{\sigma}') = 0$ . Luego, la homotopía es trivial y  $\delta - \lambda = dF + Fd = 0$ .  $\diamond\diamond$

El resultado de recién sigue valiendo si reemplazamos la subdivisión baricéntrica  $K'$  por una subdivisión arbitraria  $L$  de  $K$ . En este caso uno necesita ver que  $L(\sigma) \leq L$  es un subcomplejo acíclico para cualquier simplex  $\sigma \in K$  y el Lema 4.1 no se aplica directamente. La demostración de este hecho la deduciremos de la invarianza topológica de los grupos de homología (Corolario 4.21). En el caso de la subdivisión baricéntrica, uno puede dar una fórmula explícita para el morfismo  $\lambda$ . Esencialmente  $\lambda : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(K')$  manda cada  $n$ -simplex  $\sigma \in K$  a la suma de los  $n$ -símplices de  $\bar{\sigma}'$  orientados coherentemente.

**Definición 4.16.** Al morfismo de complejos de cadenas  $\lambda : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(K')$  se lo llama *operador subdivisión*. Si  $K^{(n)}$  es la  $n$ -ésima subdivisión baricéntrica de  $K$ , el operador subdivisión  $\lambda : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(K^{(n)})$  es la composición de los operadores  $\tilde{C}_*(K^{(i)}) \rightarrow \tilde{C}_*(K^{(i+1)})$ .

Necesitaremos el siguiente

**Lema 4.17.** Sean  $K, L, M$  complejos simpliciales y sean  $f : |K| \rightarrow |L|$ ,  $g : |L| \rightarrow |M|$  funciones continuas. Si  $\varphi : K \rightarrow L$  y  $\psi : L \rightarrow M$  son aproximaciones simpliciales de  $f$  y  $g$ , entonces  $\psi\varphi$  es aproximación simplicial de  $gf$ .

*Demostración.* Se deduce inmediatamente del Lema 2.21.  $\diamond\diamond$

Ya sabemos como asociar morfismos en la homología a cada morfismo simplicial. Para probar que los grupos de homología son invariantes por homeomorfismos, queremos asociar morfismos  $\tilde{H}_k(K) \rightarrow \tilde{H}_k(L)$  a cada función continua  $|K| \rightarrow |L|$ . Para esto necesitamos aproximaciones simpliciales y el operador subdivisión. Definimos los morfismos inducidos por funciones continuas y luego probamos que esta definición no depende de las aproximaciones elegidas.

**Definición 4.18.** Sean  $K, L$  complejos simpliciales con  $K$  finito. Sea  $f : |K| \rightarrow |L|$  una función continua. Se define para cada  $k \geq 0$  el morfismo

$$f_* = f_*(K, L) : \tilde{H}_k(K) \rightarrow \tilde{H}_k(L)$$

como la composición  $f_* = \varphi_* \lambda_*$ , donde  $\varphi : K^{(n)} \rightarrow L$  es una aproximación simplicial de  $f$  y  $\lambda : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(K^{(n)})$  es el operador subdivisión.

**Proposición 4.19.** *El morfismo  $f_*$  está bien definido. No depende del  $n$  elegido ni de la aproximación simplicial  $\varphi$ .*

*Demostración.* Sean  $m \geq n \geq 0$  y sean  $\varphi : K^{(n)} \rightarrow L$ ,  $\psi : K^{(m)} \rightarrow L$  aproximaciones simpliciales de  $f$ . Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_k(K) & \xrightarrow{\lambda_*} & \tilde{H}_k(K^{(n)}) \\ \lambda'_* \downarrow & \swarrow \rho_* & \downarrow \varphi_* \\ \tilde{H}_k(K^{(m)}) & \xrightarrow{\psi_*} & \tilde{H}_k(L) \end{array}$$

donde  $\lambda$ ,  $\lambda'$  y  $\lambda''$  son los operadores subdivisión y  $\rho : K^{(m)} \rightarrow K^{(n)}$  es una composición de aproximaciones  $K^{(i+1)} \rightarrow K^{(i)}$  de la identidad. Por el Teorema de la subdivisión algebraica 4.15,  $(\lambda''_*)^{-1} = \rho_* : \tilde{H}_k(K^{(m)}) \rightarrow \tilde{H}_k(K^{(n)})$ .

Como  $\rho$  es composición de aproximaciones de la identidad y  $\varphi$  es aproximación de  $f$ ,  $\varphi \rho : K^{(m)} \rightarrow L$  es aproximación de  $f$  por el Lema 4.17. Por el Ejercicio 4.3,  $\varphi \rho$  y  $\psi$  son contiguas. Por la Proposición 4.12,  $\varphi_* \rho_* = \psi_* : \tilde{H}_k(K^{(m)}) \rightarrow \tilde{H}_k(L)$ . Luego  $\varphi_* \lambda_* = \varphi_* (\lambda''_*)^{-1} \lambda'_* = \varphi_* \rho_* \lambda'_* = \psi_* \lambda'_*$ .  $\diamond \diamond$

Vemos la funtorialidad:

**Proposición 4.20.**

- (a) *Sea  $K$  un complejo simplicial finito. Entonces  $(1_{|K|})_* = 1_{\tilde{H}_k(K)} : \tilde{H}_k(K) \rightarrow \tilde{H}_k(K)$ .*  
 (b) *Si  $K, L, M$  son complejos simpliciales con  $K$  y  $L$  finitos y  $f : |K| \rightarrow |L|$ ,  $g : |L| \rightarrow |M|$  son continuas, entonces  $(gf)_* = g_* f_* : \tilde{H}_k(K) \rightarrow \tilde{H}_k(M)$ .*

*Demostración.* La validez de (a) es obvia, tomando  $n = 0$  y  $\varphi = 1_K$  en la definición de  $(1_{|K|})_*$ . Probamos (b). Sea  $\psi : L^{(m)} \rightarrow M$  una aproximación simplicial de  $g$ ,  $\rho : L^{(m)} \rightarrow L$  una aproximación de la identidad y  $\varphi : K^{(n)} \rightarrow L^{(m)}$  una aproximación de  $f : |K| \rightarrow |L| = |L^m|$ . Consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_k(K) & \xrightarrow{\lambda_*} & \tilde{H}_k(K^{(n)}) & \xrightarrow{\varphi_*} & \tilde{H}_k(L^{(m)}) & \xrightarrow{\psi_*} & \tilde{H}_k(M) \\ & & \searrow (\rho\varphi)_* & & \uparrow \rho_* \downarrow \lambda'_* & & \\ & & & & \tilde{H}_k(L) & & \end{array}$$

donde los morfismos  $\lambda$  y  $\lambda'$  son los operadores subdivisión. Los morfismos verticales son uno el inverso del otro por el Teorema de la subdivisión algebraica y el Lema 4.17. La composición  $\psi\varphi$  es una aproximación de  $gf$  por el Lema 4.17, por lo que  $(gf)_* = (\psi\varphi)_* \lambda_*$ . Además,  $\rho\varphi$  es aproximación de  $f$  y luego  $f_* = (\rho\varphi)_* \lambda_*$ . Por definición  $g_* = \psi_* \lambda'_*$ . Entonces

$$(gf)_* = \psi_* \varphi_* \lambda_* = \psi_* \lambda'_* \rho_* \varphi_* \lambda_* = g_* f_*.$$

$\diamond \diamond$

**Corolario 4.21.** *Los grupos de homología simplicial reducida son un invariante topológico de complejos simpliciales finitos. Es decir, si  $K$  y  $L$  son complejos simpliciales finitos tales que  $|K|$  y  $|L|$  son homeomorfos, entonces  $\tilde{H}_k(K) = \tilde{H}_k(L)$  para todo  $k \geq 0$ .*

*Demostración.* Si  $f : |K| \rightarrow |L|$  es un homeomorfismo con inversa  $g$ , por la Proposición 4.20,  $g_*f_* = (gf)_* = (1_{|K|})_* = 1_{\tilde{H}_k(K)}$ . Simétricamente  $f_*g_* = 1_{\tilde{H}_k(L)}$ , por lo que  $f_* : \tilde{H}_k(K) \rightarrow \tilde{H}_k(L)$  es un isomorfismo.  $\diamond$

**Definición 4.22.** Dado un poliedro finito  $X$ , definimos para cada  $k$  el  $k$ -ésimo grupo de homología (simplicial) reducida de  $X$  como  $\tilde{H}_k(X) = \tilde{H}_k(K)$  donde  $K$  es cualquier triangulación de  $X$ .

*Observación 4.23.* En vista de la Observación 4.11, tenemos que la Proposición 4.12, el Teorema de la subdivisión algebraica, la Definición 4.18 junto con 4.19, la Proposición 4.20 y la invarianza topológica, son también válidos para complejos de cadenas no aumentados y grupos de homología no reducidos. Por supuesto, también es posible derivar estos resultados directamente de los correspondientes para homología reducida.

La Definición 4.18 sigue teniendo sentido si  $K$  no es finito, usando el Teorema de aproximación simplicial y el Teorema de la subdivisión algebraica en sus versiones generales. De ese modo se puede probar los grupos de homología son un invariante topológico para complejos simpliciales en general.

**Ejercicio 4.24.** Sea  $K$  un complejo simplicial y sea  $K'$  su subdivisión baricéntrica. Sea  $\lambda : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(K')$  el operador subdivisión. Probar que si  $\varphi : K' \rightarrow K$  es una aproximación de la identidad entonces  $\varphi_*\lambda : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(K)$  es la identidad.

## Aplicaciones

Mostramos como aplicación algunos resultados elementales que se deducen del cálculo de los grupos de homología de las esferas.

**Proposición 4.25.** *Los grupos de homología de la esfera  $n$ -dimensional  $S^n$  son*

$$\tilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$

*Demostración.* Si  $n = 0$ , el complejo simplicial que consta de dos vértices aislados triangula a  $S^0$  y es fácil ver que el resultado vale. Sea  $n \geq 1$ . Entonces  $K = \dot{\sigma} = \partial\sigma$ , donde  $\sigma$  es un  $(n + 1)$ -simplex, es una triangulación de  $S^n$ . Sea  $v \in \sigma$ . Entonces  $\partial\sigma = v\partial(\sigma \setminus v) \cup (\sigma \setminus v)$ . Como  $v\partial(\sigma \setminus v)$  y  $\sigma \setminus v$  son conos, son acíclicos por el Lema 4.1. Además,  $v\partial(\sigma \setminus v) \cap (\sigma \setminus v) = \partial(\sigma \setminus v)$ , es el borde de un  $n$ -simplex. Por el Teorema de Mayer-Vietoris (ver Ejercicio 3.11) se tiene una sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \tilde{H}_i(S^n) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{H}_0(S^n) \rightarrow 0.$$

Luego  $\tilde{H}_i(S^n) = \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$  y por inducción se deduce la proposición.  $\diamond$

Usando homología simplicial deducimos el clásico Teorema de no retracción.

**Teorema 4.26.** *No existe retracción  $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ .*

*Demostración.* Supongamos que sí existe  $r$  tal que  $ri = 1_{S^{n-1}}$  donde  $i$  denota la inclusión de la esfera en el disco. Como  $D^n = |\sigma|$  para  $\sigma$  un  $n$ -simplex,  $\tilde{H}_{n-1}(D^n) = 0$ . Las funciones  $i$  y  $r$  inducen morfismos  $i_* : \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(D^n) = 0$ ,  $r_* : \tilde{H}_{n-1}(D^n) = 0 \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$ . Entonces  $0 = r_*i_* = (ri)_* = (1_{S^{n-1}})_* = 1_{\mathbb{Z}}$ , absurdo.  $\diamond\diamond$

**Corolario 4.27** (Teorema del punto fijo de Brouwer). *El disco  $D^n$  tiene la propiedad del punto fijo, es decir, toda función continua  $f : D^n \rightarrow D^n$  tiene un punto fijo.*

*Demostración.* Usamos el argumento usual basado en el Teorema de no retracción. Si  $f : D^n \rightarrow D^n$  fuera una función sin puntos fijos, entonces la función  $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$  que manda un punto  $x \in D^n$  a la intersección de la semirrecta  $\overrightarrow{f(x)x}$  con  $S^{n-1}$  es una retracción, lo que contradice el resultado anterior.  $\diamond\diamond$

**Teorema 4.28.** *Los espacios  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  no son homeomorfos si  $n \neq m$ .*

*Demostración.* Si lo fueran, sus compactificaciones de Alexandroff,  $S^n$  y  $S^m$  serían homeomorfas. Luego  $\mathbb{Z} = \tilde{H}_n(S^n) = \tilde{H}_n(S^m) = 0$ , una contradicción.  $\diamond\diamond$

En la próxima sección estudiaremos una generalización del Teorema del punto fijo de Brouwer. Antes de eso, mostraremos que los grupos de homología son un invariante homotópico, i.e. poliedros homotópicamente equivalentes tienen grupos de homología isomorfos.

## Invarianza homotópica

Para demostrar que la homología es un invariante homotópico, veremos que funciones homotópicas entre poliedros inducen los mismos morfismos en la homología. Una forma de probar esto es con el Teorema del acyclic carrier. Aquí lo demostraremos usando aproximaciones simpliciales y la Proposición 4.12 (que en el fondo también usa acyclic carriers).

**Teorema 4.29.** *Sean  $K, L$  complejos simpliciales con  $K$  finito. Sean  $f, g : |K| \rightarrow |L|$  funciones continuas homotópicas. Entonces existe  $n \geq 0$  y aproximaciones simpliciales  $\varphi, \psi : K^{(n)} \rightarrow L$  de  $f$  y  $g$  en la misma clase de contigüidad.*

*Demostración.* Sea  $H : |K| \times I \rightarrow |L|$  una homotopía entre  $f$  y  $g$ . Como  $|K|$  es un espacio métrico compacto, el cubrimiento  $\{H^{-1}(\overset{\circ}{\text{st}}_L(w))\}_{w \in L}$  de  $|K| \times I$  tiene un número de Lebesgue  $\delta > 0$ , digamos, para la métrica infinito del producto. Sean  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$  tales que  $t_{i+1} - t_i < \delta$ . Para cada  $0 \leq i \leq k$ , definimos  $f_i : |K| \rightarrow |L|$  por  $f_i(x) = H(x, t_i)$ . Si  $x \in |K|$ ,  $d((x, t_i), (x, t_{i+1})) < \delta$ . Luego, existe  $w \in L$  tal que  $f_i(x), f_{i+1}(x) \in \overset{\circ}{\text{st}}(w)$ . Entonces  $\{f_i^{-1}(\overset{\circ}{\text{st}}(w)) \cap f_{i+1}^{-1}(\overset{\circ}{\text{st}}(w))\}_{w \in L}$  es un cubrimiento por abiertos de  $|K|$  para todo  $i$ . Sea  $\delta_i$  un número de Lebesgue para este cubrimiento. Al igual que en la demostración del Teorema de aproximación simplicial 2.22, existe  $n \geq 0$  tal que para cada  $v \in K^{(n)}$ ,  $\text{diám}(\overset{\circ}{\text{st}}(v)) < \delta_i$  para todo  $i$ . Luego, para cada  $0 \leq i < k$  y cada  $v \in K^{(n)}$  existe  $w \in L$  tal que

$$f_i(\overset{\circ}{\text{st}}(v)) \subseteq \overset{\circ}{\text{st}}(w) \text{ y } f_{i+1}(\overset{\circ}{\text{st}}(v)) \subseteq \overset{\circ}{\text{st}}(w)$$

Definimos  $\varphi_i(v) = w$ . Por el Lema 2.21,  $\varphi_i : K^{(n)} \rightarrow L$  es una aproximación simplicial de  $f_i$  y de  $f_{i+1}$  simultáneamente. Por el Ejercicio 4.3,  $\varphi_i$  y  $\varphi_{i+1}$  son contiguas

para todo  $0 \leq i < k$ . Luego  $\varphi = \varphi_0$  y  $\psi = \varphi_{k-1}$  son aproximaciones de  $f$  y  $g$  en la misma clase de contigüidad.  $\diamond\diamond$

**Corolario 4.30.** Sean  $K, L$  complejos simpliciales con  $K$  finito. Sean  $f, g : |K| \rightarrow |L|$  funciones continuas homotópicas. Entonces

$$f_* = g_* : \tilde{H}_k(K) \rightarrow \tilde{H}_k(L)$$

para todo  $k \geq 0$ .

*Demostración.* Por el teorema anterior existen aproximaciones simpliciales  $\varphi, \psi : K^{(n)} \rightarrow L$  de  $f$  y  $g$  en la misma clase de contigüidad. Por la Proposición 4.12,  $\varphi_* \simeq \psi_* : \tilde{C}_*(K^{(n)}) \rightarrow \tilde{C}_*(L)$ . Luego  $\varphi_* \lambda \simeq \psi_* \lambda : \tilde{C}_*(K) \rightarrow \tilde{C}_*(L)$ , donde  $\lambda$  es el operador subdivisión. Entonces los morfismos inducidos en la homología  $f_*$  y  $g_*$  coinciden.  $\diamond\diamond$

**Corolario 4.31.** Los grupos de homología reducidos son un invariante homotópico, i.e. si dos poliedros compactos son homotópicamente equivalentes, entonces tienen los mismos grupos de homología reducida.

En particular, todo poliedro compacto y contráctil es acíclico. La recíproca de este enunciado es, por supuesto, falsa (ver por ejemplo [14, Example 2.38]). Una consecuencia inmediata de los Teoremas de Hurewicz y de Whitehead es que todo poliedro acíclico y simplemente conexo es contráctil [14, Corollary 4.33].

El Teorema 4.29 falla si no pedimos que  $K$  sea finito, aún si permitimos subdivisiones arbitrarias (no necesariamente baricéntricas). Sin embargo, los Corolarios 4.30 y 4.31 sí valen con más generalidad cuando los complejos son no finitos. Una vez más, nos restringimos al caso finito en donde las demostraciones son más elegantes. Una prueba rigurosa, aunque más técnica, de 4.30 en el caso general, puede encontrarse en [22, Lemma 19.1, Theorem 19.2].

## 5. Teorema del punto fijo de Lefschetz

En esta sección estudiaremos uno de los resultados más lindos de la topología algebraica. El Teorema del punto fijo de Lefschetz generaliza ampliamente el Teorema del punto fijo de Brouwer. Dice en particular que todo poliedro compacto con grupos de homología de torsión tiene la propiedad del punto fijo.

### Teorema de la traza de Hopf

Necesitaremos dos resultados básicos de grupos que recordamos a continuación. Las demostraciones pueden encontrarse por ejemplo en [22, Lemma 11.1, Theorem 11.3] o en [12, Teorema 6.3.7, Lema 7.5.2].

**Teorema 5.1.** Sean  $G, H$  dos grupos abelianos libres finitamente generados y sea  $\varphi : G \rightarrow H$  un morfismo de grupos. Entonces existen bases de  $G$  y  $H$  tales que la matriz de  $\varphi$  en esas bases tiene la forma



$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & b_r & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \cdot$$

Donde  $b_i \geq 1$  para todo  $1 \leq i \leq r$  y  $b_i$  divide a  $b_{i+1}$ . Esta matriz está unívocamente determinada por  $\varphi$ .

La matriz del enunciado se llama la forma normal de  $\varphi$ . El Teorema de estructura para grupos abelianos finitamente generados se deduce rápidamente de este teorema. La idea para probar el Teorema 5.1 es hacer operaciones por filas y columnas usando el algoritmo de división.

El segundo resultado que usaremos será el siguiente

**Teorema 5.2.** *Sea  $G$  un grupo abeliano libre finitamente generado y sea  $H \leq G$  un subgrupo. Entonces  $H$  es libre finitamente generado y  $\text{rg}(H) \leq \text{rg}(G)$ .*

**Corolario 5.3.** *Sea  $G$  un grupo abeliano libre finitamente generado y sea  $H \leq G$  un subgrupo. Entonces existe una base  $e_1, e_2, \dots, e_k$  de  $G$  y enteros  $b_1, b_2, \dots, b_r$ , con  $r \leq k$  tales que  $b_1 e_1, b_2 e_2, \dots, b_r e_r$  es base de  $H$ .*

*Demostración.* Por el Teorema 5.2,  $r = \text{rg}(H) \leq \text{rg}(G) = k$ . Por el Teorema 5.1, existen bases  $a_1, a_2, \dots, a_r$  de  $H$  y  $e_1, e_2, \dots, e_k$  de  $G$  tales que la matriz de la inclusión  $i : H \hookrightarrow G$  en esas bases luce como en el enunciado de 5.1 para ciertos  $b_j$ . Como  $i$  es un monomorfismo, la matriz no tiene columnas nulas. Dado  $1 \leq j \leq r$  vale entonces  $a_j = i(a_j) = b_j e_j$ .  $\diamond$

**Definición 5.4.** Sea  $G$  un grupo abeliano libre finitamente generado y sea  $\varphi : G \rightarrow G$  un endomorfismo. La traza  $\text{tr}(\varphi) = \text{tr}(\varphi, G)$  de  $\varphi$  es la traza de la matriz de  $\varphi$  en cualquier base de  $G$ .

Si  $K$  es un complejo simplicial finito y  $\varphi : C_*(K) \rightarrow C_*(K)$  es un morfismo de complejos de cadenas, notaremos  $\text{tr}(\varphi, C_k(K))$  a la traza de  $\varphi_k : C_k(K) \rightarrow C_k(K)$ . El grupo de homología  $H_k(K)$  no necesariamente es libre, pero si  $T_k(K)$  denota a su subgrupo de torsión, entonces  $H_k(K)/T_k(K)$  es libre finitamente generado y  $\varphi_* : H_k(K) \rightarrow H_k(K)$  induce un morfismo  $\varphi_* : H_k(K)/T_k(K) \rightarrow H_k(K)/T_k(K)$ . Denotamos  $\text{tr}(\varphi, H_k(K)/T_k(K))$  a la traza de dicho morfismo.

**Teorema 5.5** (Teorema de la traza de Hopf). *Sea  $K$  un complejo simplicial finito y sea  $\varphi : C_*(K) \rightarrow C_*(K)$  un morfismo de complejos de cadenas. Entonces*

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr}(\varphi, C_k(K)) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr}(\varphi, H_k(K)/T_k(K)).$$

Antes de dar la demostración, probaremos el siguiente

**Lema 5.6.** *Sea  $G$  un grupo abeliano libre finitamente generado y sea  $H \leq G$  un subgrupo tal que  $G/H$  es libre. Si  $\varphi : G \rightarrow G$  es un morfismo tal que  $\varphi(H) \subseteq H$ , entonces*

$$\text{tr}(\varphi) = \text{tr}(\varphi|_H) + \text{tr}(\bar{\varphi})$$

donde  $\varphi|_H : H \rightarrow H$  es la restricción y  $\bar{\varphi} : G/H \rightarrow G/H$  es el morfismo inducido en el cociente.

*Demostración.* Supongamos que  $B_1 = a_1, a_2, \dots, a_r$  es base de  $H$  y  $B_2 = \bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_k$  es base de  $G/H$ , donde  $\bar{b}_i$  denota la clase de  $b_i \in G$  en el cociente. Entonces es fácil ver que  $B_3 = a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_k$  es base de  $G$ . Además  $\overline{\varphi(b_j)} = \bar{\varphi}(\bar{b}_j) = \sum_i (|\bar{\varphi}|_{B_2})_{ij} \bar{b}_i$ . Luego,  $\varphi(b_j) = \sum_i (|\bar{\varphi}|_{B_2})_{ij} b_i + h_j$ , donde  $h_j \in H$ , y entonces la matriz de  $\varphi$  en la base  $B_3$  tiene forma

$$|\varphi|_{B_3} = \left( \begin{array}{c|c} |\varphi|_H|_{B_1} & * \\ \hline 0 & |\bar{\varphi}|_{B_2} \end{array} \right).$$

◇◇

*Demostración del Teorema de la traza de Hopf.* Denotamos  $C_k = C_k(K)$ ,  $Z_k = Z_k(K)$ ,  $B_k = B_k(K)$ ,  $W_k = \{c \in Z_k \mid \exists r \in \mathbb{N} \text{ con } rc \in B_k\}$ . Tenemos entonces las inclusiones  $B_k \subseteq W_k \subseteq Z_k \subseteq C_k$ . Todos estos grupos son invariantes por  $\varphi_* : C_*(K) \rightarrow C_*(K)$ .

El morfismo de borde  $d : C_k \rightarrow B_{k-1}$  es un epimorfismo y su núcleo es  $Z_k$ . Luego  $C_k/Z_k \cong B_{k-1}$  es libre. Además la conmutatividad del diagrama de la izquierda implica la del de la derecha

$$\begin{array}{ccc} C_k & \xrightarrow{d} & B_{k-1} & & C_k/Z_k & \xrightarrow{\bar{d}} & B_{k-1} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \bar{\varphi} & & \downarrow \varphi \\ C_k & \xrightarrow{d} & B_{k-1} & & C_k/Z_k & \xrightarrow{\bar{d}} & B_{k-1} \end{array}$$

por lo que

$$\text{tr}(\bar{\varphi}, C_k/Z_k) = \text{tr}(\varphi, B_{k-1}). \quad (1)$$

Sea  $H_k = H_k(K)$  y  $T_k \leq H_k$  el subgrupo de torsión. La composición de cocientes  $Z_k \rightarrow Z_k/B_k = H_k \rightarrow H_k/T_k$  es un epimorfismo y su núcleo es  $W_k$ . Luego induce un isomorfismo  $Z_k/W_k \cong H_k/T_k$  que también conmuta con los morfismos inducidos por  $\varphi$ . Entonces  $Z_k/W_k$  es libre y

$$\text{tr}(\bar{\varphi}, Z_k/W_k) = \text{tr}(\bar{\varphi}, H_k/T_k). \quad (2)$$

Por otro lado, el Corolario 5.3 aplicado a  $W_k \leq B_k$  dice que existe base  $e_1, e_2, \dots, e_t$  de  $B_k$  y enteros positivos  $b_1, b_2, \dots, b_r$  tales que  $b_1 e_1, b_2 e_2, \dots, b_r e_r$  es base de  $W_k$ . Como  $W_k/B_k$  es de torsión, debe ser  $r = t$ . Si  $\alpha_{ij}$  y  $\beta_{ij}$  son los coeficientes de las matrices de  $\varphi$  en las bases de  $B_k$  y de  $W_k$ , respectivamente, tenemos  $\varphi(e_j) = \sum_i \alpha_{ij} e_i$  y  $\varphi(b_j e_j) = \sum_i \beta_{ij} b_i e_i$ . Luego  $\sum_i \beta_{ij} b_i e_i = \varphi(b_j e_j) = \sum_i \alpha_{ij} b_j e_i$  y, en particular,  $\beta_{jj} = \alpha_{jj}$ . Entonces

$$\text{tr}(\varphi, W_k) = \text{tr}(\varphi, B_k). \quad (3)$$

Por el Lema 5.6,  $\text{tr}(\varphi, C_k) = \text{tr}(\bar{\varphi}, C_k/Z_k) + \text{tr}(\bar{\varphi}, Z_k/W_k) + \text{tr}(\varphi, W_k)$ , y a su vez, por las ecuaciones (1), (2), (3), esto es igual a  $\text{tr}(\varphi, B_{k-1}) + \text{tr}(\bar{\varphi}, H_k/T_k) + \text{tr}(\varphi, B_k)$ . Sumando alternadamente los números  $\text{tr}(\varphi, C_k)$  obtenemos la identidad deseada.

◇◇

## Característica de Euler

El Teorema de la traza de Hopf junto con la invarianza homotópica de los grupos de homología permite probar que cierto invariante combinatorio (i.e. que coincide en complejos simpliciales isomorfos) muy simple de calcular, es en realidad un invariante homotópico.

**Definición 5.7.** Sea  $K$  un complejo simplicial finito. Se define la *característica de Euler* de  $K$  como

$$\chi(K) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{rg}(C_k(K)) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{cantidad de } k\text{-símplices de } K.$$

**Ejemplo 5.8.** La Figura 19 muestra tres triangulaciones de  $S^1$  y tres triangulaciones de  $S^2$ .

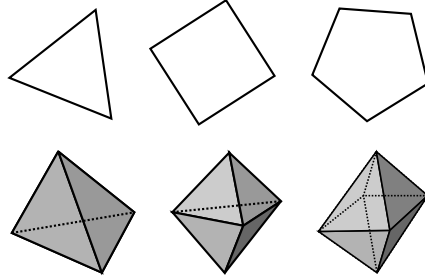


Figura 19: Triangulaciones de  $S^1$  y  $S^2$ .

La característica de Euler para las primeras tres es  $3 - 3 = 4 - 4 = 5 - 5 = 0$ . Para las siguientes,  $4 - 6 + 4 = 5 - 9 + 6 = 6 - 12 + 8 = 2$ . No es casualidad que la característica coincida en triangulaciones de un mismo espacio pues, como veremos ahora, este invariante depende solamente de los grupos de homología.

**Definición 5.9.** Sea  $K$  un complejo simplicial finito. Para cada  $k \geq 0$  se define el  $k$ -ésimo número de Betti de  $K$  como  $\beta_k = \text{rg}(H_k(K)/T_k(K))$ .

**Teorema 5.10.** Sea  $K$  un complejo simplicial finito. Entonces

$$\chi(K) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \beta_k.$$

*Demostración.* Consideramos  $\varphi = 1_{C_*(K)} : C_*(K) \rightarrow C_*(K)$ . Por el Teorema de la traza de Hopf

$$\chi(K) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr}(\varphi, C_k(K)) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr}(\varphi, H_k(K)/T_k(K)) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \beta_k.$$

◇◇

**Corolario 5.11.** La característica de Euler es un invariante homotópico.

**Ejemplo 5.12.** El corolario anterior da una manera sencilla de probar, en algunos casos, que dos poliedros dados tienen distinto tipo homotópico. Damos un ejemplo muy simple sólo para ilustrar la idea. Hay muchas maneras de ver que  $X = S^1 \vee S^1$  e  $Y = S^2$  no son homotópicamente equivalentes (calcular el grupo fundamental alcanza en este caso). Otra forma, es ver las triangulaciones de  $X$  e  $Y$  que muestra la Figura 20 y notar que  $\chi(X) = 5 - 6 = -1 \neq 2 = 4 - 6 + 4 = \chi(Y)$ .

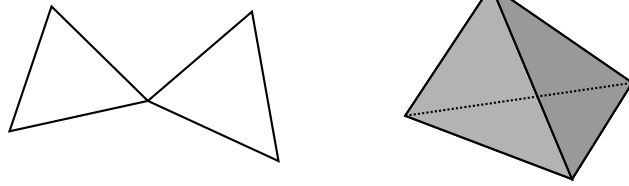


Figura 20: Triangulaciones de  $S^1 \vee S^1$  y  $S^2$ .

**Ejemplo 5.13.** Si  $K$  y  $L$  son complejos simpliciales finitos,  $K$  tiene una cantidad par de simplices y  $L$  una cantidad impar, entonces  $|K|$  y  $|L|$  tienen distinto tipo homotópico.

Veamos un ejemplo más interesante. Consideramos triangulaciones del toro  $T = S^1 \times S^1$ . Es fácil imaginar una triangulación que tenga 16 vértices pensando en un toro de sección cuadrada. Construir triangulaciones con sólo 12 o incluso 9 vértices tampoco es difícil. Existen triangulaciones con menos vértices? cuál es el mínimo número de vértices que puede tener una triangulación de  $T$ ?

Veremos cómo obtener una triangulación con sólo 7 vértices llamada el poliedro de Császár [9]. Consideramos la triangulación de 9 vértices que se muestra a la izquierda en la Figura 21.

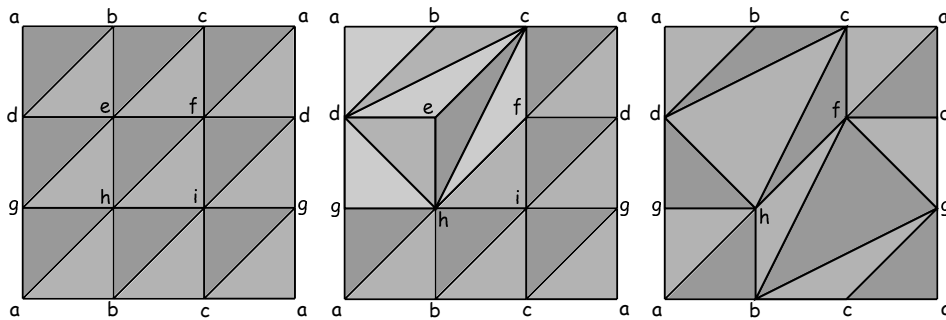


Figura 21: El poliedro de Császár obtenido por medio de bistellar moves a partir de una triangulación con 9 vértices.

El cuadrado de vértices  $dehg$  está triangulado con dos 2-simplices  $deg$  y  $ehg$ . Podemos cambiar la triangulación de este cuadrado por los dos simplices  $deh$  y  $dhg$ . De manera similar, la triangulación del cuadrilátero  $dbce$  con los simplices  $dbe, bce$  puede cambiarse a la dada por los simplices  $dbc, dce$ . En el cuadrilátero  $cfhe$  aplicamos la misma idea para obtener la triangulación del toro dada por la figura central. Estos tres movimientos se llaman *movimientos de Pachner* o *bistellar moves/flips* y permiten cambiar una triangulación por otra. Ahora, el triángulo  $dch$  está triangulado con tres 2-simplices. Si eliminamos el vértice interior  $e$  y reemplazamos los tres simplices por el simplex  $dch$ , conseguimos una triangulación del toro con sólo 8 vértices. Este último movimiento también es de la clase descrita anteriormente (aunque de otra dimensión). Un teorema de Pachner [23] afirma que dos triangulaciones de una misma variedad cerrada siempre están conectadas por medio de bistellar moves. Repitiendo el proceso anterior podemos eliminar un nuevo vértice para obtener la triangulación de 7 vértices que se muestra en la figura de la derecha.

Se puede probar que no hay triangulaciones con menos vértices. La característica

de Euler de  $T$  la podemos calcular con cualquiera de las triangulaciones que tenemos. Usando la última obtenemos  $\chi(T) = 7 - 21 + 14 = 0$ . Supongamos que  $K$  es una triangulación de  $T$ . Como  $T$  es una variedad, puede probarse que todo 1-simplex de  $K$  es cara de exactamente dos 2-símplices (un resultado general en esta dirección es la invarianza topológica de la propiedad de ser una pseudovariedad [26, p. 207]). Llamemos  $V$  a la cantidad de vértices de  $K$ ,  $E$  a la cantidad de 1-símplices y  $F$  a la cantidad de 2-símplices. Luego  $0 = \chi(K) = V - E + F$ , ya que  $\dim(K) = 2$ . Por el comentario anterior  $2E = 3F$ . Además,  $E \leq \binom{V}{2} = \frac{V(V-1)}{2}$ . Entonces

$$0 = 6(V - E + F) = 6V - 6E + 4E = 6V - 2E \geq 6V - V(V - 1) = -V^2 + 7V,$$

de donde  $V \geq 7$ .

### Teorema del punto fijo de Lefschetz

Damos ahora la definición de *número de Lefschetz* de una función y enunciamos el resultado principal de esta sección, cuya demostración requiere del Teorema de aproximación simplicial, así como de los resultados sobre homología, incluyendo el Teorema de la traza de Hopf.

**Definición 5.14.** Sea  $K$  un complejo simplicial finito y sea  $f : |K| \rightarrow |K|$  una función continua. Se define el *número de Lefschetz de  $f$*  como

$$\Lambda(f) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \operatorname{tr}(f_*, H_k(K)/T_k(K)).$$

Notar que  $\Lambda(1_{|K|}) = \chi(K)$  por la demostración del Teorema 5.10.

**Ejemplo 5.15.** Sea  $K = \sigma$  donde  $\sigma = \{a, b, c\}$  es un 2-simplex. Sea  $\varphi : K \rightarrow K$ , definida por  $\varphi(a) = a$ ,  $\varphi(b) = c$ ,  $\varphi(c) = b$ . Sea  $f = |\varphi| : |K| \rightarrow |K|$ . Calculemos  $\Lambda(f)$ . El morfismo  $f_* : H_k(K) \rightarrow H_k(K)$  es por definición  $f_* = \psi_* \lambda_*$  donde  $\psi$  es una aproximación simplicial de  $f$  y  $\lambda$  es el operador subdivisión. En este caso, como  $f$  ya es simplicial, podemos tomar  $\psi = \varphi$ ,  $\lambda = 1$  y entonces  $f_* = \varphi_* : H_*(K) \rightarrow H_*(K)$ . Por el Teorema de la traza de Hopf 5.5,  $\Lambda(f) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \operatorname{tr}(\varphi_*, H_k(K)/T_k(K)) =$

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \operatorname{tr}(\varphi_*, C_k(K)).$$

Ahora,  $C_0(K) = \langle a, b, c \rangle$  y  $\varphi_* : C_0(K) \rightarrow C_0(K)$  cumple  $\varphi_*(a) = a$ ,  $\varphi_*(b) = c$ ,  $\varphi_*(c) = b$ . Luego, la matriz de  $\varphi_*$  en la base  $a, b, c$  es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y su traza es  $\operatorname{tr}(\varphi_*, C_0(K)) = 1$ .  $C_1(K) = \langle [ab], [ac], [bc] \rangle$ ,  $\varphi_*([ab]) = [ac]$ ,  $\varphi_*([ac]) = [ab]$ ,  $\varphi_*([bc]) = -[bc]$  y la matriz de  $\varphi_* : C_1(K) \rightarrow C_1(K)$  en la base  $[ab], [ac], [bc]$  es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego,  $\operatorname{tr}(\varphi_*, C_1(K)) = -1$  y entonces  $\Lambda(f) = 1 - (-1) = 2$ .

*Observación 5.16.* Si  $X$  es un poliedro compacto y  $f : X \rightarrow X$  es una función continua, tiene sentido definir  $\Lambda(f) = \Lambda(h^{-1}fh)$  donde  $h : |K| \rightarrow X$  es cualquier triangulación, ya que si  $g : |L| \rightarrow X$  es otra,

$$\text{tr}((h^{-1}fh)_*, H_k(K)/T_k(K)) = \text{tr}((g^{-1}fg)_*, H_k(L)/T_k(L))$$

pues  $(g^{-1}fg)_* = (g^{-1}h)_*(h^{-1}fh)_*(g^{-1}h)_*^{-1}$  donde  $(g^{-1}h)_* : H_k(K) \rightarrow H_k(L)$  es un isomorfismo.

**Teorema 5.17** (Teorema del punto fijo de Lefschetz). *Sea  $X$  un poliedro compacto y sea  $f : X \rightarrow X$  una función continua. Si  $\Lambda(f) \neq 0$ ,  $f$  tiene un punto fijo.*

*Demostración.* Sea  $h : |K| \rightarrow X$  una triangulación de  $X$ . Entonces  $g = h^{-1}fh : |K| \rightarrow |K|$  tiene número de Lefschetz  $\Lambda(g) = \Lambda(f)$ . Supongamos que  $f$  no tiene puntos fijos y, luego,  $g$  tampoco. Como  $|K|$  con su métrica usual  $d$  es un espacio métrico compacto,

$$\begin{aligned} |K| &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x, g(x)) \end{aligned}$$

alcanza mínimo  $\epsilon > 0$ . Por el Lema 2.17, existe  $n \geq 0$  tal que todo simplex cerrado de  $L = K^{(n)}$  tiene diámetro menor a  $\epsilon/2$ . La función  $g$  vista como función  $|L| \rightarrow |L|$  tiene número de Lefschetz  $\Lambda(g) = \Lambda(f)$ .

Sea  $\varphi : L^{(m)} \rightarrow L$  una aproximación simplicial de  $g$ .

*Afirmación:* Si  $\tau \in L^{(m)}$  y  $\sigma \in L$  son tales que  $\tau \subseteq |\sigma|$ , entonces  $\varphi(\tau) \neq \sigma$ . Supongamos por el contrario que  $\varphi(\tau) = \sigma$  y sea  $w$  un vértice de  $\tau$ . En particular  $\varphi(w) \in \sigma$ . Sea  $\sigma_0 = \text{sop}_L(g(w))$ . En otras palabras,  $\sigma_0$  es el único simplex de  $L$  tal que  $g(w) \in \overset{\circ}{\sigma}_0$  (ver Figura 22). Como  $\varphi$  es una aproximación simplicial de  $g$ ,  $|\varphi(w) \in |\sigma_0|$ . Entonces  $\varphi(w) \in \sigma_0 \cap \sigma$ .

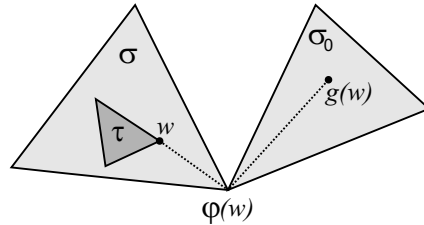


Figura 22: Prueba de la afirmación.

Luego  $d(w, g(w)) \leq d(w, \varphi(w)) + d(\varphi(w), g(w)) \leq \text{diám}(|\sigma|) + \text{diám}(|\sigma_0|) < \epsilon$ . Esto contradice la definición de  $\epsilon$  y, por lo tanto, la afirmación queda probada.

Recordemos que, por definición,  $g_* = \varphi_* \lambda_* : H_k(L) \rightarrow H_k(L)$ , donde  $\lambda : C_k(L) \rightarrow C_k(L^{(m)})$  es el operador subdivisión y  $\varphi_* : C_k(L^{(m)}) \rightarrow C_k(L)$ . Por el Teorema de la traza de Hopf 5.5,

$$\Lambda(g) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr}(g_*, H_k(L)/T_k(L)) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr}(\varphi_* \lambda, C_k(L)).$$

Pero si  $\sigma \in C_k(L)$  es un  $k$ -simplex de  $L$ ,  $\lambda(\sigma) \in C_k(L^{(m)})$  es llevado por  $\bar{\sigma}^{(m)}$ , por definición de  $\lambda$ . Es decir que  $\lambda(\sigma)$  es combinación entera de simplices  $\tau$  de  $L^{(m)}$  tales que  $\tau \subseteq |\sigma|$ . Por la afirmación probada arriba,  $\varphi(\tau) \neq \sigma$  para todos estos simplices  $\tau$ . Luego  $\varphi_* \lambda(\sigma)$  es una combinación entera de simplices de  $L$  todos distintos de  $\sigma$ .

Entonces, la matriz de  $\varphi_*\lambda : C_k(L) \rightarrow C_k(L)$  en la base dada por los  $k$ -símplices, en el coeficiente de la columna y fila correspondientes a  $\sigma$ , tiene un 0. Esto prueba que  $\text{tr}(\varphi_*\lambda, C_k(L)) = 0$  para todo  $k \geq 0$  y entonces  $\Lambda(f) = \Lambda(g) = 0$ .

◇◇

**Corolario 5.18.** *Sea  $X$  un poliedro compacto tal que  $\tilde{H}_k(X)$  es un grupo de torsión para cada  $k \geq 0$ . Entonces  $X$  tiene la propiedad del punto fijo.*

*Demostración.* Sea  $K$  una triangulación de  $X$  y  $f : |K| \rightarrow |K|$ . Para probar que  $f$  tiene un punto fijo calculamos su número de Lefschetz. Sólo el cálculo de  $\text{tr}(f_*, H_0(K))$  requiere explicación. Sea  $\varphi : K^{(n)} \rightarrow K$  una aproximación simplicial de  $f$ . Si  $v \in K$ ,  $\lambda(v) \in C_0(K^{(n)})$  es llevado por  $v$ . Luego  $\lambda(v)$  es un múltiplo entero de  $v$ . Como  $\lambda$  preserva la aumentación  $\epsilon$ , debe ser  $\lambda(v) = v$ .

Por los Ejercicios 3.6 y 3.8,  $H_0(K) = \tilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z}$  es libre. Luego  $\tilde{H}_0(K) = 0$  y entonces  $\text{Im}(d_1) = \ker(\epsilon)$ . Consideramos  $\varphi_* : C_0(K^{(n)}) \rightarrow C_0(K)$ . Como  $\epsilon(\varphi_*(v) - v) = 1 - 1 = 0$ ,  $\varphi_*(v) - v \in \ker(\epsilon) = \text{Im}(d_1)$ , y entonces  $[\varphi_*(v)] = [v] \in H_0(K) = C_0(K)/\text{Im}(d_1)$ . Luego  $f_* = \varphi_*\lambda_* : H_0(K) \rightarrow H_0(K)$  es la identidad. Como  $H_0(K) = \mathbb{Z}$ ,  $\text{tr}(f_*, H_0(K)) = 1$ .

Si  $k \geq 1$ ,  $\text{tr}(f_*, H_k(K)/T_k(K)) = 0$  pues  $T_k(K) = H_k(K)$ . Entonces  $\Lambda(f) = 1$ . Por el Teorema de Lefschetz,  $f$  tiene un punto fijo. ◇◇

**Ejemplo 5.19.** El plano proyectivo  $\mathbb{R}P^2$  tiene la propiedad del punto fijo ya que  $H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$  y  $H_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$  (ver Ejemplo 3.4).

**Corolario 5.20.** *Si  $X$  es un poliedro compacto contráctil, entonces tiene la propiedad del punto fijo.*

Notar que este caso muy particular del Teorema de Lefschetz generaliza al Teorema del punto fijo de Brouwer. Por supuesto, a diferencia de lo que ocurre en otros resultados estudiados, aquí la compacidad es absolutamente necesaria.

La demostración del siguiente resultado queda como ejercicio para el lector.

**Corolario 5.21.** *Sea  $X$  un poliedro compacto y  $f : X \rightarrow X$  una función null-homotópica. Entonces  $f$  tiene un punto fijo.*

## Funciones entre esferas

Para finalizar esta sección, veremos algunas aplicaciones del Teorema de Lefschetz.

**Definición 5.22.** Una función continua  $f : S^n \rightarrow S^n$  induce un morfismo  $f_* : \tilde{H}_n(S^n) = \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{H}_n(S^n) = \mathbb{Z}$ . Entonces  $f_*$  es multiplicar por un entero  $d$ . Se define el *grado* de  $f$  como  $\text{deg}(f) = d$ .

**Ejercicio 5.23.** Probar las siguientes afirmaciones:

- $\text{deg}(1_{S^n}) = 1$ .
- Si  $f : S^n \rightarrow S^n$  es null-homotópica,  $\text{deg}(f) = 0$ .
- $f : S^1 \rightarrow S^1$ , definida por  $f(z) = z^d$  tiene grado  $d$ .
- Si  $f, g : S^n \rightarrow S^n$ ,  $\text{deg}(fg) = \text{deg}(f)\text{deg}(g)$ .

**Proposición 5.24.** Si  $f : S^n \rightarrow S^n$  no tiene puntos fijos,  $\deg(f) = (-1)^{n+1}$ .

*Demostración.* Para  $n = 0$  esto es fácil de ver. Si  $n \geq 1$ ,  $\tilde{H}_0(S^n) = 0$  y por la demostración del Corolario 5.18,  $\text{tr}(f_*, H_0(S^n)) = 1$ . Por otro lado,  $\text{tr}(f_*, H_n(S^n)) = \deg(f)$  y entonces  $\Lambda(f) = 1 + (-1)^n \deg(f)$ . Como  $f$  no tiene puntos fijos, por el Teorema de Lefschetz  $\Lambda(f) = 0$  y luego  $\deg(f) = (-1)^{n+1}$ .  $\diamond\diamond$

**Corolario 5.25.** La función antipodal  $a : S^n \rightarrow S^n$  tiene grado  $(-1)^{n+1}$ .

**Corolario 5.26.** Sea  $f : S^n \rightarrow S^n$  tal que  $\deg(f) \neq 1$ . Entonces existe  $x \in S^n$  tal que  $f(x) = -x$ .

*Demostración.* Como  $\deg(af) = \deg(a)\deg(f) = (-1)^{n+1}\deg(f) \neq (-1)^{n+1}$ , por la Proposición 5.24,  $af$  tiene un punto fijo.  $\diamond\diamond$

**Corolario 5.27.**  $S^n$  tiene un campo tangente no nulo (i.e. existe  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  tal que  $f(x)$  y  $x$  son ortogonales para todo  $x \in S^n$ ) si y sólo si  $n$  es impar.

*Demostración.* Si  $n = 2k - 1$ , definimos

$$f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \mapsto (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2k}, x_{2k-1}),$$

que es un campo tangente no nulo. Recíprocamente, si  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  es un campo tangente,  $g = \frac{f}{\|f\|} : S^n \rightarrow S^n$  es tangente ( $g(x)$  y  $x$  son ortogonales). En particular,  $g(x) \neq x$  y  $g(x) \neq -x$  para todo  $x \in S^n$ . Luego por la Proposición 5.24,  $\deg(f) = (-1)^{n+1}$  y por el Corolario 5.26,  $\deg(f) = 1$ . Entonces  $n$  es impar.  $\diamond\diamond$

Recordemos que dado un grupo  $G$ , un  $G$ -espacio es un espacio topológico  $X$  junto con una acción de  $G$  en el conjunto subyacente de  $X$  tal que para cada  $g \in G$  la función  $\mu_g : X \rightarrow X$  que manda  $x$  en  $g \cdot x$  es continua. En este caso las funciones  $\mu_g$  resultan ser homeomorfismos. La acción de  $G$  en  $X$  se dice *libre* si  $\mu_g$  no tiene puntos fijos para todo  $g \neq 1 \in G$ .

**Proposición 5.28.** Sea  $n$  un entero positivo par. Sea  $G$  un grupo y supongamos que existe una acción libre de  $G$  en  $S^n$  que hace de  $S^n$  un  $G$ -espacio. Entonces  $G$  es trivial ó  $G = \mathbb{Z}_2$ .

*Demostración.* Como  $\mu_g$  es un homeomorfismo para todo  $g$ ,  $\deg(\mu_g) = 1$  ó  $-1$ .

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}_2 \\ g \mapsto \deg(\mu_g)$$

es morfismo de grupos. Si  $g \neq 1$ ,  $\mu_g$  no tiene puntos fijos y por la Proposición 5.24,  $\deg(\mu_g) = (-1)^{n+1} = -1$ . Por lo tanto,  $\varphi$  es un monomorfismo. Entonces  $G$  es subgrupo de  $\mathbb{Z}_2$ .  $\diamond\diamond$

## 6. Relación con homología singular

En esta sección mostraremos que la homología simplicial de un complejo simplicial coincide con la homología singular de su realización geométrica. Para esto enunciaremos primero los resultados de homología singular que asumiremos conocidos. Más detalles pueden encontrarse en [14, 22, 26, 28]. Las partes más mecánicas de las demostraciones que ya fueron estudiadas en secciones anteriores quedarán como ejercicio para el lector.



## Repaso de homología singular

Recordemos que si  $X$  es un espacio topológico, un  $n$ -simplex singular de  $X$  es una función continua  $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$  donde  $\Delta_n = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0 \forall i \text{ y } \sum t_i = 1\}$  denota al  $n$ -simplex estándar. Si  $\sigma$  es un  $n$ -simplex singular de  $X$ , y  $0 \leq i \leq n$ , la  $i$ -ésima cara de  $\sigma$  es el  $(n-1)$ -simplex singular  $\sigma^{(i)} : \Delta_{n-1} \rightarrow X$  definido por  $\sigma^{(i)}(t_0, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})$ . Denotamos por  $S_n(X)$  al grupo abeliano libre que tiene por base a los  $n$ -símplices singulares de  $X$ . El complejo singular de  $X$  es el complejo de cadenas

$$S_*(K) : \quad \cdots \longrightarrow S_{n+1}(X) \longrightarrow S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_0(X) \longrightarrow 0,$$

donde el morfismo de borde  $d : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  se define en un  $n$ -simplex singular  $\sigma$  como  $d(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^{(i)}$ . No es difícil chequear que  $d^2 = 0$ . La homología singular de  $X$  es la homología del complejo singular. La homología singular reducida es la homología del complejo singular aumentado  $\tilde{S}_*(X)$  con la aumentación  $\epsilon : S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  que manda cada punto de  $X$  a  $1 \in \mathbb{Z}$ . Los grupos de homología singular no reducidos y reducidos serán notados en esta sección como  $H_n^{sing}(X)$  y  $\tilde{H}_n^{sing}(X)$ .

Si  $A$  es un subespacio de  $X$ , se define  $S_n(X, A) = S_n(X)/S_n(A)$  y los morfismos de borde inducen morfismos  $d : S_n(X, A) \rightarrow S_{n-1}(X, A)$ . Queda determinado el complejo singular relativo  $S_*(X, A)$  y los grupos de homología relativa  $H_n^{sing}(X, A)$ . Si  $A \neq \emptyset$ , la sucesión exacta corta de complejos

$$0 \rightarrow \tilde{S}_*(A) \rightarrow \tilde{S}_*(X) \rightarrow S_*(X, A) \rightarrow 0$$

induce una sucesión exacta larga

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_n^{sing}(A) \rightarrow \tilde{H}_n^{sing}(X) \rightarrow H_n^{sing}(X, A) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}^{sing}(A) \rightarrow \cdots \rightarrow H_0^{sing}(X, A) \rightarrow 0.$$

Una función continua  $f : X \rightarrow Y$  induce un morfismo de complejos de cadenas  $f_* : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$  que manda  $\sigma$  en  $f\sigma$ . Esto induce morfismos  $f_* : H_n^{sing}(X) \rightarrow H_n^{sing}(Y)$ . Los operadores prisma permiten probar que funciones homotópicas inducen los mismos morfismos en homología (ver por ejemplo [14, Theorem 2.10]). En particular, los grupos de homología singular son un invariante homotópico. Así, todo simplex, siendo contráctil, resulta acíclico para la homología singular.

Una función de pares  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  (i.e.  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f(A) \subseteq B$ ) induce un morfismo  $S_*(X, A) \rightarrow S_*(Y, B)$  y luego morfismos en la homología relativa.

**Teorema 6.1** (Teorema de escisión). Sean  $Z \subseteq A \subseteq X$  espacios topológicos tales que la clausura  $\bar{Z}$  de  $Z$  está contenida en el interior  $\overset{\circ}{A}$  de  $A$ . Entonces la inclusión  $(X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$  induce isomorfismos

$$H_n^{sing}(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow H_n^{sing}(X, A)$$

para todo  $n \geq 0$ .

Para una demostración del Teorema de escisión, ver por ejemplo [14, Theorem 2.20]. Estos son todos los resultados que necesitamos sobre homología singular.

## Homología dirigida y dos isomorfismos

El objetivo de esta sección es probar que para todo complejo simplicial  $K$ , los grupos  $H_n(K)$  y  $H_n^{sing}(|K|)$  son isomorfos. Para esto introduciremos grupos que denotaremos  $H'_n(K)$  y veremos que los otros dos son iguales a este.

**Definición 6.2.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Un  $n$ -simplex dirigido de  $K$  es una  $(n+1)$ -upla ordenada de vértices  $\sigma = (v_0, \dots, v_n)$  tal que  $\{v_0, \dots, v_n\}$  es un simplex de  $K$ . Permitimos que algunos de los vértices sean iguales. Denotamos por  $C'_n(K)$  al grupo abeliano libre que tiene por base a los  $n$ -símplices dirigidos. Definimos

$$d : C'_n(K) \rightarrow C'_{n-1}(K)$$

$$(v_0, \dots, v_n) \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^{(i)},$$

donde  $\sigma^{(i)} = (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$ . La cuenta usual muestra que  $C'_*(K)$  es un complejo de cadenas. Su homología  $H'_n(K)$  se llama la *homología ordenada de  $K$* . Se definen también el complejo aumentado  $\tilde{C}'_n(K)$  y la homología reducida  $\tilde{H}'_n(K)$ .

**Teorema 6.3.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Consideramos un orden total en los vértices de  $K$ . Definimos para cada  $n \geq 0$  los morfismos

$$\varphi : \tilde{C}'_n(K) \rightarrow \tilde{C}'_n(K)$$

$$[v_0, \dots, v_n] \mapsto (v_0, \dots, v_n) \text{ si } v_0 < v_1 < \dots < v_n \text{ en el orden considerado, y}$$

$$\psi : \tilde{C}'_n(K) \rightarrow \tilde{C}'_n(K)$$

$$(v_0, \dots, v_n) \mapsto \begin{cases} [v_0, \dots, v_n] & \text{si } v_i \neq v_j \forall i \neq j, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Entonces  $\varphi$  y  $\psi$  son morfismos de complejos de cadenas y son uno inverso homotópico del otro.

La demostración es similar a otras vistas anteriormente y la dejaremos como ejercicio. Uno puede probar primero que los conos son acíclicos también para la homología ordenada y luego usar una idea parecida a la del Teorema del acyclic carrier para ver que las composiciones de  $\varphi$  y  $\psi$  son homotópicas a las identidades.

**Corolario 6.4.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Entonces  $\tilde{H}'_n(K) = \tilde{H}_n(K)$  para todo  $n \geq 0$ .

Si  $L$  es un subcomplejo de un complejo simplicial  $K$ , definimos  $C'_n(K, L) = C'_n(K)/C'_n(L)$ . Estos grupos junto con los morfismos de borde inducidos determinan un complejo de cadenas  $C'_n(K, L)$  y su homología  $H'_n(K, L)$ . También en este caso, si  $L$  es no vacío, hay una sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow \tilde{H}'_n(L) \rightarrow \tilde{H}'_n(K) \rightarrow H'_n(K, L) \rightarrow \tilde{H}'_{n-1}(L) \rightarrow \dots \rightarrow H'_0(K, L) \rightarrow 0.$$

**Definición 6.5.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Definimos para cada  $n \geq 0$ , el morfismo  $\theta : C'_n(K) \rightarrow S_n(|K|)$  que en un simplex dirigido  $(v_0, \dots, v_n)$  vale  $\sigma$ , donde  $\sigma$  es un  $n$ -simplex singular definido por  $\sigma(t_0, \dots, t_n) = \sum_{i=0}^n t_i v_i$ .

Así,  $\theta : C'_*(K) \rightarrow S_*(|K|)$  es un morfismo de complejos de cadenas y preserva la aumentación. Si  $L \leq K$ ,  $\theta$  induce un morfismo  $\theta : C'_*(K, L) \rightarrow S_*(|K|, |L|)$ .

**Teorema 6.6.** *Sea  $K$  un complejo simplicial y sea  $L \leq K$  un subcomplejo. Entonces para cada  $n \geq 0$  valen las siguientes afirmaciones:*

- (1)  $\theta_* : \tilde{H}'_n(K) \rightarrow \tilde{H}_n^{sing}(|K|)$  es un isomorfismo.
- (2)  $\theta_* : H'_n(K, L) \rightarrow H_n^{sing}(|K|, |L|)$  es un isomorfismo.

*Demostración.* Esta demostración sí la haremos para cualesquiera complejos  $K$  y  $L$ , no necesariamente finitos. La idea que se usa aquí para pasar del caso finito al infinito ilustra una estrategia recurrente al trabajar con homología singular o con grupos de homotopía.

Comenzamos probando (1) y (2) para  $K$  finito. Hacemos inducción en la cantidad de símlices de  $K$ . Notar que si probamos (1), obtenemos (2) en virtud del Lema de los cinco ([14, Página 129] o [32, Exercise 1.3.3]).

$$\begin{array}{ccccccccc} \tilde{H}'_n(L) & \longrightarrow & \tilde{H}'_n(K) & \longrightarrow & H'_n(K, L) & \longrightarrow & \tilde{H}'_{n-1}(L) & \longrightarrow & \tilde{H}'_{n-1}(K) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \tilde{H}_n^{sing}(|L|) & \longrightarrow & \tilde{H}_n^{sing}(|K|) & \longrightarrow & H_n^{sing}(|K|, |L|) & \longrightarrow & \tilde{H}_{n-1}^{sing}(|L|) & \longrightarrow & \tilde{H}_{n-1}^{sing}(|K|) \end{array}$$

Sea  $\sigma$  un simplex maximal de  $K$ . Entonces  $L = K \setminus \{\sigma\}$  es un subcomplejo de  $K$ . Consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} H'_n(L, \dot{\sigma}) & \xrightarrow{i_*} & H'_n(K, \bar{\sigma}) & \xleftarrow{q_*} & \tilde{H}'_n(K) \\ \downarrow \theta & & \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\ H_n^{sing}(|L|, |\dot{\sigma}|) & \xrightarrow{i_*} & H_n^{sing}(|K|, |\sigma|) & \xleftarrow{q_*} & \tilde{H}_n^{sing}(|K|) \end{array}$$

en donde  $i$  denota a las inclusiones  $L \hookrightarrow K$ ,  $|L| \hookrightarrow |K|$  y  $q$  a los cocientes  $C'_n(K) \rightarrow C'_n(K, \bar{\sigma})$  y  $S_n(|K|) \rightarrow S_n(|K|, |\sigma|)$ .

El morfismo vertical de la izquierda es un isomorfismo por hipótesis inductiva. El morfismo  $i_* : C'_n(L, \dot{\sigma}) = C'_n(L)/C'_n(\dot{\sigma}) \rightarrow C'_n(K, \bar{\sigma}) = C'_n(K)/C'_n(\bar{\sigma})$  es un isomorfismo de complejos de cadenas y por lo tanto es isomorfismo en la homología. Los morfismos  $q_*$  son ambos isomorfismos. Esto se deduce de las sucesiones exactas largas de homología relativa y de la aciclicidad de los símlices para las homologías ordenada y singular. Queremos ver que el morfismo  $i_* : H_n^{sing}(|L|, |\dot{\sigma}|) \rightarrow H_n^{sing}(|K|, |\sigma|)$  es un isomorfismo. No podemos aplicar directamente el Teorema de escisión pues la clausura de  $\dot{\sigma}$  no está contenida en el interior de  $|\sigma|$ . Factorizamos  $i_*$  del siguiente modo

$$H_n^{sing}(|L|, |\dot{\sigma}|) \xrightarrow{\alpha} H_k^{sing}(|K| \setminus \{\mathbf{b}(\sigma)\}, |\sigma| \setminus \{\mathbf{b}(\sigma)\}) \xrightarrow{\beta} H_n^{sing}(|K|, |\sigma|).$$

El morfismo  $\beta$  es isomorfismo por el Teorema de escisión, ya que (la clausura d)el punto  $\mathbf{b}(\sigma)$ , está en el interior de  $|\sigma|$  que es  $\dot{\sigma}$  (porque  $\sigma$  es un simplex maximal). Por otro lado,  $|\dot{\sigma}|$  es retracto por deformación fuerte de  $|\sigma| \setminus \{\mathbf{b}(\sigma)\}$ . La misma retracción

y homotopía prueban que  $|L|$  es retracto por deformación fuerte de  $|K| \setminus \{\mathbf{b}(\sigma)\}$ . Luego, las inclusiones inducen isomorfismos  $H_k^{sing}(|\dot{\sigma}|) \rightarrow H_k^{sing}(|\sigma| \setminus \{\mathbf{b}(\sigma)\})$  y  $H_k^{sing}(|L|) \rightarrow H_k^{sing}(|K| \setminus \{\mathbf{b}(\sigma)\})$  para todo  $k$  y, nuevamente por el Lema de los cinco,  $\alpha$  resulta un isomorfismo. Entonces,  $i_* : H_n^{sing}(|L|, |\dot{\sigma}|) \rightarrow H_n^{sing}(|K|, |\sigma|)$  es un isomorfismo.

De la conmutatividad del diagrama deducimos que el morfismo vertical central y luego el derecho son isomorfismos. Esto completa la demostración del teorema para el caso finito.

Nuevamente, para el caso general, basta probar (1). Sea  $K$  un complejo simplicial cualquiera. Queremos ver que  $\theta_* : \tilde{H}'_n(K) \rightarrow \tilde{H}_n^{sing}(|K|)$  es un isomorfismo. Veamos que es un epimorfismo y un monomorfismo. Sea  $[c] \in \tilde{H}_n^{sing}(|K|)$  la clase de una cadena  $c = \sum_{i=1}^l t_i \sigma_i$ , donde  $\sigma_i : \Delta_n \rightarrow |K|$  son símlices singulares. Como  $\Delta_n$  es compacto,  $\bigcup_{i=1}^l \sigma_i(\Delta_n) \subseteq |K|$  es compacto. Entonces interseca sólo finitos símlices abiertos por el Lema 2.5. El complejo  $L$  generado por esos símlices es un subcomplejo finito de  $K$ . Consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}'_n(L) & \xrightarrow{\theta_*} & \tilde{H}_n^{sing}(|L|) \\ \downarrow j_* & & \downarrow j_* \\ \tilde{H}'_n(K) & \xrightarrow{\theta_*} & \tilde{H}_n^{sing}(|K|) \end{array}$$

Como  $c$  es un ciclo en  $|L|$ ,  $[c] \in \tilde{H}_n^{sing}(|K|)$  está en la imagen del morfismo de la derecha. Ahora, por el caso finito, el morfismo superior es un isomorfismo. Entonces  $[c] \in \text{Im}(j_* \theta_*) = \text{Im}(\theta_* j_*)$ . Esto prueba que el morfismo inferior es un epimorfismo. Resta ver la inyectividad.

Sea  $c \in C'_n(K)$  un ciclo tal que  $\theta_*([c]) = 0 \in \tilde{H}_n^{sing}(|K|)$ . Es decir, existe  $a \in S_{n+1}(|K|)$  tal que  $\theta(c) = d(a)$ . La cadena  $a$  se escribe como  $a = \sum_{i=1}^l t_i \sigma_i$  donde los  $\sigma_i$  son  $(n+1)$ -símlices singulares de  $|K|$ . Al igual que antes existe un subcomplejo finito  $L_1 \leq K$  tal que las imágenes de los  $\sigma_i$  caen en  $|L_1|$ . Por otro lado  $c = \sum_{j=1}^k r_j \tau_j$  donde los  $\tau_j$  son  $n$ -símlices dirigidos de  $K$ . Luego existe  $L_2 \leq K$  finito tal que los  $\tau_j$  son símlices dirigidos de  $L_2$ . Sea  $L = L_1 \cup L_2$ . Se tiene un cuadrado conmutativo como arriba. Por construcción  $c \in C'_n(L)$  es un ciclo,  $a \in S_{n+1}(|L|)$  y  $\theta(c) = d(a)$ . Luego,  $\theta_*([c]) = 0 \in \tilde{H}_n^{sing}(|L|)$ . Por el caso finito,  $\theta_* : \tilde{H}'_n(L) \rightarrow \tilde{H}_n^{sing}(|L|)$  es un monomorfismo y, entonces  $[c] = 0 \in \tilde{H}'_n(L)$ . Por lo tanto  $[c] = j_*([c]) = 0 \in \tilde{H}'_n(K)$ . Esto prueba que  $\theta_* : \tilde{H}'_n(K) \rightarrow \tilde{H}_n^{sing}(|K|)$  es un monomorfismo y, en consecuencia, un isomorfismo.  $\diamond$

**Corolario 6.7.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Entonces  $\tilde{H}'_n(K) \cong \tilde{H}_n^{sing}(|K|)$  para todo  $n \geq 0$ .

Claramente los mismos isomorfismos valen para homología no reducida y valen también para homología relativa. Además, no es difícil probar que el isomorfismo entre homología simplicial y singular es natural, i.e. conmuta con los morfismos inducidos por funciones continuas entre realizaciones geométricas.

## 7. Conjuntos parcialmente ordenados

En esta sección estudiaremos algunos resultados que involucran conjuntos parcialmente ordenados (*posets*, por su nombre en inglés) y complejos simpliciales que uno puede asociarle a dichos conjuntos. La principal herramienta es un teorema que da condiciones suficientes para que un morfismo de órdenes entre posets induzca una equivalencia homotópica entre los poliedros asociados. Este resultado se le atribuye a McCord [19] y a Quillen [24, 25], entre otros. Lo llamaremos “Teorema A de Quillen para posets” por ser una versión particular del famoso Teorema A. La demostración que aquí veremos se debe a Walker [30]. Otra demostración también elemental de este resultado puede encontrarse en [2].

### Contractible carriers y el Teorema A para posets

La siguiente definición de Walker está basada en la noción de acyclic carrier. El resultado posterior es simplemente una versión homotópica del Teorema del acyclic carrier 4.10.

**Definición 7.1.** Sea  $K$  un complejo simplicial y sea  $X$  un espacio topológico. Un *contractible carrier* de  $K$  a  $X$  es una función  $\Phi$  que a cada simplex  $\sigma$  de  $K$  le asigna un subespacio  $\Phi(\sigma)$  de  $X$  de modo que valen

1.  $\Phi(\sigma)$  es contráctil para todo  $\sigma \in K$ .
2. Si  $\tau$  es cara de  $\sigma \in K$ , entonces  $\Phi(\tau) \subseteq \Phi(\sigma)$ .

Una función continua  $f : |K| \rightarrow X$  se dice *llevada* por  $\Phi$  si  $f(|\sigma|) \subseteq \Phi(\sigma)$  para todo  $\sigma$ .

**Teorema 7.2.** Sea  $\Phi$  un *contractible carrier* de un complejo simplicial  $K$  a un espacio  $X$ . Entonces

- (i) Existe una función continua  $f : |K| \rightarrow X$  llevada por  $\Phi$ .
- (ii) Dos funciones  $|K| \rightarrow X$  llevadas por  $\Phi$  son homotópicas.

*Demostración.* Definiremos  $f$  esqueleto por esqueleto. Recordar que el  $n$ -esqueleto  $K^n$  es el subcomplejo de  $K$  formado por los símlices de dimensión menor o igual a  $n$ . Definimos  $f : |K^0| \rightarrow X$ . Dado  $v \in K$ , como  $\Phi(v)$  es contráctil, en particular es no vacío y definimos  $f(v)$  como cualquier punto de  $\Phi(v)$ . Supongamos inductivamente definida  $f : |K^{n-1}| \rightarrow X$  tal que  $f(|\tau|) \subseteq \Phi(\tau)$  para todo  $\tau \in K^{n-1}$  y sea  $\sigma$  un  $n$ -simplex de  $K$ . Entonces  $f(|\dot{\sigma}|) \subseteq \Phi(\dot{\sigma})$ . Como  $\Phi(\sigma)$  es contráctil, la función  $f|_{|\dot{\sigma}|} : |\dot{\sigma}| \rightarrow \Phi(\sigma)$  se extiende al cono  $|\sigma|$  de  $|\dot{\sigma}|$ . Así, queda determinada  $f : |K^n| \rightarrow X$  y es continua porque lo es la restricción a cada simplex. La colección de funciones  $|K^n| \rightarrow X$  determina una función  $f : |K| \rightarrow X$ , que es continua porque lo es la restricción a cada esqueleto.

Supongamos ahora que  $f, g : |K| \rightarrow X$  son llevadas por  $\Phi$ . Construiremos inductivamente una homotopía  $H : |K| \times I \rightarrow X$  entre  $f$  y  $g$ . Definimos primero  $H : |K^0| \times I \rightarrow X$ . Si  $v \in K$ , como  $f(v), g(v) \in \Phi(v)$  y  $\Phi(v)$  es contráctil,  $H|_{\{v\} \times \{0,1\}} : \{v\} \times \{0,1\} \rightarrow \Phi(v)$  se extiende al cono  $\{v\} \times I$ . Supongamos  $H : |K^{n-1}| \times I \rightarrow X$  definida de modo tal que para todo  $\tau \in K^{n-1}$ ,  $H(|\tau| \times I) \subseteq \Phi(\tau)$ . Si  $\sigma \in K$  es un  $n$ -simplex,  $H$  está definida en  $|\dot{\sigma}| \times I \cup |\sigma| \times \{0,1\}$  con imagen contenida en  $\Phi(\sigma)$ . Luego se extiende al cono  $|\sigma| \times I$ . Esto determina  $H : |K^n| \times I \rightarrow X$  continua por la Proposición 2.1. La colección de homotopías definidas en cada esqueleto determina la homotopía buscada, que es continua porque lo es la restricción a cada  $|\sigma| \times I$ .  $\diamond$

**Definición 7.3.** Dado un poset  $X$  (i.e. un conjunto con una relación reflexiva, transitiva y antisimétrica), se define su *complejo simplicial asociado*  $\mathcal{K}(X)$  como el complejo simplicial cuyos símlices son las cadenas (subconjuntos totalmente ordenados) finitas no vacías de  $X$ . Si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo de órdenes ( $x \leq x'$  implica  $f(x) \leq f(x')$ ), denotaremos por  $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$  al morfismo simplicial que manda un vértice  $x$  en  $f(x)$ .

**Ejemplo 7.4.** La Figura 23 ilustra dos posets y sus complejos asociados. El primer poset  $X$  tiene como elementos a  $a, b, c$  y  $d$  con el orden  $c, d < b < a$ . Está representado mediante su diagrama de Hasse. Es decir, el grafo dirigido que tiene una arista de  $x$  a  $y$  si  $x < y$  y no hay ningún elemento entre  $x$  y  $y$ . En lugar de indicar con una flecha el sentido de una arista, simplemente ponemos al elemento mayor arriba. El complejo  $\mathcal{K}(X)$  asociado a  $X$  tiene entonces cuatro vértices y aparece graficado al lado del poset. El Complejo asociado a  $Y$  es un octaedro.

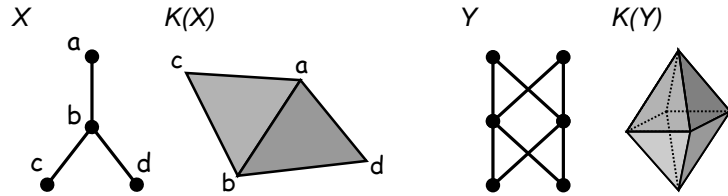


Figura 23: Dos posets y sus poliedros asociados.

*Notación 7.5.* Si  $X$  es un poset y  $x \in X$ , denotaremos  $U_x = \{x' \in X \mid x' \leq x\}$ .

**Teorema 7.6** (Teorema A de Quillen para posets). Sean  $X, Y$  posets y sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo de órdenes tal que  $|\mathcal{K}(f^{-1}(U_y))|$  es un poliedro contráctil para todo  $y \in Y$ . Entonces la función  $|\mathcal{K}(f)| : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow |\mathcal{K}(Y)|$  inducida en los poliedros es una equivalencia homotópica.

Por supuesto, en el enunciado del teorema  $f^{-1}(U_y) \subseteq X$  es un poset con el orden inducido por el orden de  $X$ . Antes de ver la demostración, mostramos un ejemplo.

**Ejemplo 7.7.** La Figura 24 muestra una función  $f$  que satisface las hipótesis del teorema anterior. La función manda  $a_i$  en  $a$ ,  $b$  en  $b$ ,  $c$  en  $c$ ,  $d$  en  $d$ . La preimagen de  $U_a$  es el subposet del dominio formado por los elementos  $a_0, a_1, a_2, c, d$  y  $|\mathcal{K}(f^{-1}(U_a))|$  es entonces una triangulación del intervalo  $I$  que consta de cuatro 1-símlices. En particular es contráctil. El poliedro  $|\mathcal{K}(f^{-1}(U_b))|$  también es  $I$  y los otros dos  $|\mathcal{K}(f^{-1}(U_c))|, |\mathcal{K}(f^{-1}(U_d))|$  son un punto cada uno. Luego  $|\mathcal{K}(f)|$  es una equivalencia homotópica.

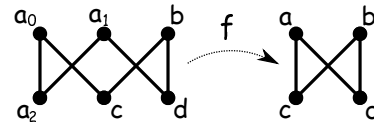


Figura 24: Un morfismo de órdenes que es equivalencia homotópica a nivel simplicial.

*Demostración del Teorema A.* Definimos un contractible carrier  $\Phi$  de  $|\mathcal{K}(Y)|$  a  $|\mathcal{K}(X)|$ . Si  $\sigma = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$  es una cadena en  $Y$  con  $y_i < y_{i+1}$ , sea  $\Phi(\sigma) = |\mathcal{K}(f^{-1}(U_{y_n}))| \subseteq |\mathcal{K}(X)|$ . Notar que  $\Phi(\sigma)$  es contráctil por hipótesis y que si  $\tau$  es cara de  $\sigma$ , entonces  $\text{máx}(\tau) \leq \text{máx}(\sigma)$ , luego  $U_{\text{máx}(\tau)} \subseteq U_{\text{máx}(\sigma)}$  y  $\Phi(\tau) \subseteq \Phi(\sigma)$ . Por el Teorema 7.2, existe  $g : |\mathcal{K}(Y)| \rightarrow |\mathcal{K}(X)|$  llevada por  $\Phi$ .

Sea ahora  $\Psi$  el carrier de  $\mathcal{K}(Y)$  a  $|\mathcal{K}(Y)|$  definido por  $\Psi(\sigma) = |\mathcal{K}(U_{\max(\sigma)})|$ . Como  $\mathcal{K}(U_y)$  es un cono (con ápice  $y$ ),  $\Psi$  es un contractible carrier. La composición  $|\mathcal{K}(f)|g$  es llevada por  $\Psi$ , ya que si  $\sigma \in \mathcal{K}(Y)$ ,  $g(|\sigma|) \subseteq \Phi(\sigma) = |\mathcal{K}(f^{-1}(U_{\max(\sigma)}))|$  y entonces  $|\mathcal{K}(f)|g(|\sigma|) \subseteq |\mathcal{K}(U_{\max(\sigma)})| = \Psi(\sigma)$ . Pero  $1_{|\mathcal{K}(Y)|}$  también es llevada por  $\Psi$ . Por el Teorema 7.2,  $|\mathcal{K}(f)|g \simeq 1_{|\mathcal{K}(Y)|}$ .

Por último definimos el contractible carrier  $\Theta$  de  $\mathcal{K}(X)$  a  $|\mathcal{K}(X)|$  dado por  $\Theta(\sigma) = |\mathcal{K}(f^{-1}(U_{\max(f(\sigma))}))|$ . Si  $\sigma \in \mathcal{K}(X)$ ,

$$g|\mathcal{K}(f)|(|\sigma|) \subseteq g(|f(\sigma)|) \subseteq |\mathcal{K}(f^{-1}(U_{\max(f(\sigma))}))| = \Theta(\sigma).$$

Luego,  $g|\mathcal{K}(f)|$  es llevada por  $\Theta$ , y lo mismo ocurre con  $1_{|\mathcal{K}(X)|}$ . Entonces  $g$  es una inversa homotópica de  $|\mathcal{K}(f)|$ .  $\diamond$

**Definición 7.8.** Dado un complejo simplicial  $K$ , se define su *poset asociado*  $\mathcal{X}(K)$  como el poset cuyos elementos son los símlices de  $K$  y donde  $\sigma \leq \tau$  si  $\sigma$  es cara de  $\tau$ . Un morfismo simplicial  $\varphi : K \rightarrow L$  determina un morfismo de órdenes  $\mathcal{X}(\varphi) : \mathcal{X}(K) \rightarrow \mathcal{X}(L)$  que en  $\sigma \in \mathcal{X}(K)$  vale  $\varphi(\sigma)$ .

La Figura 25 muestra el poset asociado a un 2-simplex.

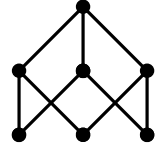


Figura 25: El poset asociado a un 2-simplex.

*Observación 7.9.* Si  $K$  es un complejo simplicial,  $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$  es isomorfo a la subdivisión baricéntrica  $K'$ .

## Aplicaciones

Vemos a continuación algunas consecuencias del Teorema A para posets.

**Corolario 7.10.** Sean  $K, L$  complejos simpliciales y sea  $\varphi : K \rightarrow L$  un morfismo simplicial tal que  $|\varphi|^{-1}(|\sigma|)$  es contráctil para todo  $\sigma \in L$ . Entonces  $|\varphi|$  es una equivalencia homotópica.

*Demostración.* Veamos que  $\mathcal{X}(\varphi) : \mathcal{X}(K) \rightarrow \mathcal{X}(L)$  satisface las hipótesis del Teorema 7.6. Sea  $\sigma \in L$  un punto de  $\mathcal{X}(L)$ . Entonces  $\mathcal{X}(\varphi)^{-1}(U_\sigma) = \{\tau \in K \mid \varphi(\tau) \subseteq \sigma\}$ . Si denotamos por  $\varphi^{-1}(\sigma)$  al subcomplejo de  $K$  formado por los símlices  $\tau$  tales que  $\varphi(\tau) \subseteq \sigma$ , tenemos que  $\mathcal{K}(\mathcal{X}(\varphi)^{-1}(U_\sigma)) = (\varphi^{-1}(\sigma))'$ . Pero  $|\varphi^{-1}(\sigma)| = |\varphi|^{-1}(|\sigma|)$ . Entonces, por hipótesis  $|\mathcal{K}(\mathcal{X}(\varphi)^{-1}(U_\sigma))|$  es contráctil. Por el Teorema A,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathcal{X}(\varphi)) &= \varphi' : K' \rightarrow L' \\ &\text{b}(\sigma) \rightarrow \text{b}(\varphi(\sigma)) \end{aligned}$$

es una equivalencia homotópica en las realizaciones geométricas. La relación entre  $\varphi'$  y  $\varphi$  es la siguiente. Sean  $\psi : K' \rightarrow K$  y  $\eta : L' \rightarrow L$  aproximaciones simpliciales de las identidades. Veamos entonces que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 K' & \xrightarrow{\varphi'} & L' \\
 \downarrow \psi & & \downarrow \eta \\
 K & \xrightarrow{\varphi} & L
 \end{array}$$

conmuta salvo contigüidad. Si  $b(\sigma)$  es un vértice de  $K'$ ,  $\psi(b(\sigma)) \in \sigma$ , por la Observación 4.14 y luego  $\varphi(\psi(b(\sigma))) \in \varphi(\sigma)$ . Por otro lado,  $\eta(\varphi'(b(\sigma))) = \eta(b(\varphi(\sigma))) \in \varphi(\sigma)$  también por 4.14. Entonces, si  $\tau = \{b(\sigma_0), b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_k)\}$  es un simplex de  $K'$ , con  $\sigma_i \subsetneq \sigma_{i+1}$ ,  $\varphi(\psi(\tau)) \cup \eta(\varphi'(\tau)) \subseteq \varphi(\sigma_k)$ . Como  $\varphi\psi$  y  $\eta\varphi'$  son contiguas, sus realizaciones son homotópicas por la Observación 4.4, y como  $|\varphi'|$ ,  $|\psi|$  y  $|\eta|$  son equivalencias homotópicas, también lo es  $|\varphi|$ . ◇◇

El resultado anterior se conoce como la versión simplicial del Teorema A de Quillen. Recordemos la noción de nervio de un cubrimiento vista en el Ejemplo 1.4 para enunciar el siguiente resultado, muchas veces llamado Nerve lemma.

**Teorema 7.11.** *Sea  $K$  un complejo simplicial y sea  $\mathcal{U} = \{L_j\}_{j \in J}$  una familia de subcomplejos de  $K$  que cubren  $K$  y tal que cada vértice de  $K$  está en finitos  $L_j$ . Supongamos además que intersecciones arbitrarias de elementos de  $\mathcal{U}$  son poliedros contráctiles o vacíos. Entonces  $|K|$  es homotópicamente equivalente al nervio  $|N(\mathcal{U})|$ .*

*Demostración.* Consideramos la función  $f : \mathcal{X}(K) \rightarrow \mathcal{X}(N(\mathcal{U}))^{op}$  que manda  $\sigma \in \mathcal{X}(K)$  a  $\{j \in J \mid \sigma \in L_j\}$ . Aquí  $X^{op}$  denota al poset  $X$  con el orden opuesto. Notar que  $f$  está bien definida y es morfismo de órdenes. Si  $J_0 \subseteq J$  es un simplex de  $N(\mathcal{U})$ ,  $f^{-1}(U_{J_0}) = \{\sigma \in K \mid \sigma \in L_j \forall j \in J_0\} = \mathcal{X}(\bigcap_{j \in J_0} L_j)$ . Entonces  $|\mathcal{K}(f^{-1}(U_{J_0}))| = |(\bigcap_{j \in J_0} L_j)'|$  es contráctil y por el Teorema 7.6,  $\mathcal{K}(f) : K' \rightarrow N(\mathcal{U})'$  es una equivalencia homotópica en las realizaciones. Luego  $|K| \simeq |N(\mathcal{U})|$ . ◇◇

**Ejemplo 7.12.** Sea  $K$  el hexágono, la triangulación de  $S^1$  que consta de seis vértices. La Figura 26 muestra dos cubrimientos de  $K$  por subcomplejos, aquellos en la regiones determinadas por las curvas cerradas. En el primer cubrimiento cada subcomplejo es una triangulación de  $I$ , la intersección de dos cualesquiera es un punto y la de los tres es vacía. El Teorema 7.11 se aplica en este caso y, de hecho, el nervio es el borde de un 2-simplex. En el segundo cubrimiento, si bien cada subcomplejo es contráctil, la intersección de los dos es un complejo desconexo. Las hipótesis del teorema no se satisfacen. En este caso el nervio del cubrimiento es un 1-simplex, que no es homotópicamente equivalente al hexágono original.

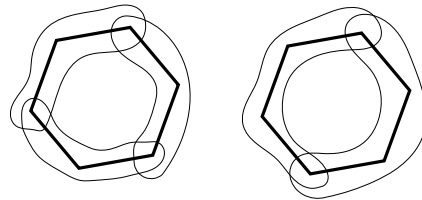


Figura 26: Dos cubrimientos del hexágono.

**Teorema 7.13 (Dowker).** *Sean  $X, Y$  conjuntos finitos y sea  $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$  una relación. Sea  $K_X$  el complejo simplicial que tiene como simplices a los conjuntos de puntos de  $X$  que*



están relacionados con un mismo elemento de  $Y$ . El complejo  $K_Y$  se define simétricamente. Entonces  $|K_X| \simeq |K_Y|$ .

*Demostración.* Dado  $y \in Y$ , notamos  $\sigma_y = \{x \in X \mid x\mathcal{R}y\}$ . Si  $\sigma_y \neq \emptyset$ , entonces es un simplex de  $K_X$ . Los subcomplejos  $\bar{\sigma}_y \leq K_X$  cubren  $K_X$  e intersecciones arbitrarias de ellos son vacías o símlices. Por el Teorema 7.11,  $|K_X| \simeq |N(\{\bar{\sigma}_y\}_{y \in Y})| = |K_Y|$ .  $\diamond$

Con la misma demostración que dimos, es fácil ver que el Teorema de Dowker vale también cuando sólo uno de los dos conjuntos es finito (definiendo a los símlices como conjuntos finitos de puntos relacionados con un mismo elemento), o, más generalmente, cuando uno de los dos conjuntos tiene a cada uno de sus elementos relacionado con sólo finitos del otro. En realidad la hipótesis de finitud no es necesaria en absoluto. El teorema vale para conjuntos y relaciones arbitrarias [10]. Una demostración/ejercicio guiado del nivel de este texto puede encontrarse en las notas [20] de G. Minian.

**Definición 7.14.** Dado un conjunto  $X$  y un cubrimiento  $\mathcal{U}$  de  $X$ , se define el *complejo de Vietoris*  $V(\mathcal{U})$  de  $\mathcal{U}$  que tiene como vértices a los puntos de  $X$  y como símlices a los subconjuntos finitos de cada  $U \in \mathcal{U}$ .

**Corolario 7.15.** Si  $\mathcal{U}$  es un cubrimiento de un conjunto  $X$ ,  $|V(\mathcal{U})|$  y  $|N(\mathcal{U})|$  son homotópicamente equivalentes.

*Demostración.* Consideramos la relación  $\mathcal{R} \subseteq X \times \mathcal{U}$  dada por  $x\mathcal{R}U$  si  $x \in U$ . Así, los complejos considerados por Dowker son exactamente el complejo de Vietoris y el nervio de  $\mathcal{U}$ . El caso en que el cubrimiento es finito o localmente finito se deduce de la versión que vimos arriba y el caso general, de la versión general del Teorema de Dowker.  $\diamond$

Recordemos que un lattice (o reticulado) finito es un poset finito  $X$  en el que todo subconjunto no vacío tiene supremo e ínfimo. En este caso  $X$  tiene máximo y entonces  $|\mathcal{K}(X)|$  es contráctil. Si  $X$  es un reticulado finito, notamos  $\hat{X}$  al subposet que se obtiene de  $X$  al quitar el máximo y el mínimo. Llamamos *lattice reducido* a todo poset finito de la forma  $\hat{X}$ .

**Ejercicio 7.16.** Probar que todo poliedro compacto es homeomorfo a la realización del complejo asociado  $\mathcal{K}(X)$  a un lattice reducido  $X$ .

Si  $X$  es un lattice reducido, definimos el complejo  $\mathcal{L}(X)$  cuyos vértices son los átomos (i.e. los elementos minimales) de  $X$  y cuyos símlices son los conjuntos de átomos que tienen una cota superior.

**Proposición 7.17.** Si  $X$  es un lattice reducido,  $|\mathcal{L}(X)| \simeq |\mathcal{K}(X)|$ .

*Demostración.* Para cada átomo  $x \in X$  consideramos el conjunto  $F_x = \{x' \in X \mid x' \geq x\}$  y sea  $\mathcal{U}$  el conjunto de subcomplejos  $\mathcal{K}(F_x)$  donde  $x$  es un átomo. Entonces  $\mathcal{U}$  es un cubrimiento de  $\mathcal{K}(X)$  y

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(F_{x_0}) \cap \mathcal{K}(F_{x_1}) \cap \dots \cap \mathcal{K}(F_{x_r}) = \\ \mathcal{K}(F_{x_0} \cap F_{x_1} \cap \dots \cap F_{x_r}) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \{x_0, x_1, \dots, x_r\} \text{ no tiene cota superior} \\ \mathcal{K}(F_{\sup\{x_i\}_i}) & \text{si tiene cota superior} \end{cases} \end{aligned}$$

Como  $\mathcal{K}(F_x)$  es un cono, por el Teorema 7.11,  $|\mathcal{K}(X)| \simeq |N(\mathcal{U})| = |\mathcal{L}(X)|$ .  $\diamond$

**Ejercicio 7.18.** Sea  $K$  un complejo simplicial finito. Sea  $L$  el complejo simplicial que tiene como vértices a los símlices maximales de  $K$  y como símlices a los conjuntos de símlices maximales de  $K$  con intersección no vacía. Probar que  $K$  y  $L$  son homotópicamente equivalentes.

**Ejercicio 7.19.** Probar que si  $f, g : X \rightarrow Y$  son morfismos de órdenes tales que  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in X$ , entonces  $|\mathcal{K}(f)| \simeq |\mathcal{K}(g)|$ . Probar que si además  $X$  es finito, vale algo más fuerte:  $\mathcal{K}(f)$  y  $\mathcal{K}(g)$  están en la misma clase de contigüidad.

**Ejercicio 7.20.** Sean  $X, Y$  posets y sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo de órdenes tal que  $|\mathcal{K}(f^{-1}(U_y))|$  es un poliedro acíclico para todo  $y \in Y$ . Entonces la función  $|\mathcal{K}(f)| : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow |\mathcal{K}(Y)|$  induce isomorfismos en todos los grupos de homología.

**Ejercicio 7.21.** Probar el siguiente caso particular del Teorema de Whitehead: Un poliedro es contráctil si y sólo si todos sus grupos de homotopía son cero.



## Bibliografía

- [1] M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto. *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*. Springer (2002).
- [2] J.A. Barmak. *On Quillen's Theorem A for posets*. J. Comb. Theory, Ser. A 118(2011), 2445-2453.
- [3] J.A. Barmak, E.G. Minian. *Strong homotopy types, nerves and collapses*. Discrete Comput. Geom. 47 (2012), 301-328.
- [4] A. Björner. *Posets, regular CW-complexes and Bruhat order*. Europ. J. Combinatorics 5 (1984), 7-16.
- [5] A. Björner. *Homotopy type of posets and lattice complementation*. J. Combin. Theory, Ser. A, 30 (1981), 90-100.
- [6] A. Björner. *Topological methods*. Handbook of Combinatorics, vol. 2 (1995), 1819-1872.
- [7] A. Björner. *Nerves, fibers and homotopy groups*. J. Combin. Theory, Ser. A, 102 (2003), 88-93.
- [8] A. Björner, M. Wachs and V. Welker. *Poset fiber theorems*. Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2004), 1877-1899.
- [9] Á. Császár. *A polyhedron without diagonals*. Acta Sci. Math. 13 (1949), 140-142.
- [10] C.H. Dowker. *Homology groups of relations*. Ann. of Math. 56 (1952), 84-95.
- [11] R. Fritsch and R.A. Piccinini. *Cellular Structures in Topology*. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1990).
- [12] E.R. Gentile. *Estructuras Algebraicas II*. O.E.A. (1971).
- [13] L. Glaser. *Geometrical combinatorial topology I*. Van Nostrand Reinhold, NY (1970).
- [14] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press (2002).
- [15] W.B.R. Lickorish. *Simplicial moves on complexes and manifolds*. Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998), 299-320. Geom. Topol. Monogr. 2, Geom. Topol. Publ., Coventry (1999).
- [16] A.T. Lundell and S. Weingram. *The topology of CW complexes*. Van Nostrand Reinhold Co. (1969).

- [17] W.S.Massey. *A basic course in algebraic topology*. Springer, New York (1991).
- [18] J. P. May. *A Concise Course in Algebraic Topology*. The University of Chicago Press, Chicago (1999).
- [19] M.C. McCord. *Singular homology and homotopy groups of finite spaces*. Notices Amer. Math. Soc., vol. 12 (1965), p. 622.
- [20] E.G. Minian. *Poliedros asociados a relaciones y cubrimientos*. Notas no publicadas. Disponibles en <http://mate.dm.uba.ar/~gminian/notarelaciones.pdf>
- [21] J.R. Munkres. *Topología*. Segunda edición, Prentice-Hall (2001).
- [22] J.R. Munkres. *Elements of Algebraic topology*. Addison-Wesley (1984).
- [23] U. Pachner. *Konstruktionsmethoden und das kombinatorische Homöomorphieproblem für triangulationen kompakter semilinearer Mannigfaltigkeiten*. Abh. Math. sem. Hamb. 57 (1987), 69-85.
- [24] D. Quillen. *Higher algebraic K-theory, I: Higher K-theories*. Lect. Notes in Math. 341 (1972), 85-147.
- [25] D. Quillen. *Homotopy properties of the poset of nontrivial  $p$ -subgroups of a group*. Adv. Math. 28 (1978), 101-128.
- [26] E. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer (1966).
- [27] R.M. Switzer. *Algebraic Topology: Homotopy and Homology*. Berlin, Springer (2002).
- [28] J. Vick. *Homology Theory*. Academic Press, New York (1973).
- [29] M. Wachs. *Poset topology: Tools and applications*. In: E. Miller, V. Reiner and B. Sturmfels, Editors, *Geometric Combinatorics*, IAS/Park City Math. Ser. vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2007), 497-615.
- [30] J.W. Walker. *Homotopy type and Euler characteristic of partially ordered sets*. Europ. J. Combinatorics 2 (1981), 373-384.
- [31] J.W. Walker. *Topology and combinatorics of ordered sets*. Thesis, M.I.T., Cambridge, MA (1981).
- [32] C.A. Weibel. *An introduction to Homological Algebra*. Cambridge Univ. Press. (1994).