UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Curvatura no-positiva y grupos de Artin

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Martín Axel Blufstein

Director: Elías Gabriel Minian
Consejero de estudios: Jonathan Ariel Barmak

Buenos Aires, 16 de marzo de 2023

Curvatura no-positiva y grupos de Artin

Resumen. En esta tesis introducimos diferentes generalizaciones y variantes de la noción de curvatura no-positiva en el contexto de la teoría geométrica de grupos. Presentamos nuevas condiciones de small cancellation (T'), $\mathcal{T}'$ y $\mathcal{T}'_<$, y estudiamos sus propiedades. Obtenemos resultados acerca de hiperbolicidad, reducibilidad diagramática, ecuaciones sobre grupos y resolubilidad de los problemas de la palabra y la conjugación para grupos que satisfacen estas condiciones. En el proceso definimos complejos (estrictamente) sistólicos angulados, que generalizan a los complejos sistólicos al permitir ángulos diferentes a $\frac{\pi}{3}$.

El segundo punto central de esta tesis son los grupos de Artin. Estudiando la condición $\mathcal{T}'$, mostramos que los grupos de Artin son dos-dimensionales (i.e. tienen dimensión geométrica a lo sumo 2) si y sólo si su presentación estándar satisface la condición $\mathcal{T}'$. Una importante conjetura acerca de grupos de Artin es si la intersección de subgrupos parabólicos es un subgrupo parabólico. Al introducir complejos sistólicos-por-función (otra generalización de complejos sistólicos) y utilizar su geometría, resolvemos esta conjetura para el caso de grupos de Artin (2,2)-libres dos-dimensionales.

Otra pregunta abierta para grupos de Artin consistía en decidir si un subgrupo parabólico P_1 de un grupo de Artin A contenido en otro subgrupo parabólico P_2 de A es un subgrupo parabólico de P_2. Finalizamos esta tesis dando una respuesta afirmativa a esta pregunta para todos los grupos de Artin. A diferencia del resto de nuestro trabajo, las técnicas utilizadas en este caso son mayoritariamente algebraicas en lugar de geométricas.

Palabras clave: curvatura no-positiva, grupos hiperbólicos, small cancellation, sistolicidad, grupos de Artin, subgrupos parabólicos.

Non-positive curvature and Artin groups

Abstract. In this thesis we introduce different generalizations and variants of the notion of non-positive curvature in the context of geometric group theory. We present new small cancellation conditions (T'), $\mathcal{T}'$ and $\mathcal{T}'_<$ and study their properties. We obtain results concerning hyperbolicity, diagrammatic reducibility, equations over groups, and solvability of the word and conjugacy problems for groups satisfying these conditions. In the process we define (strictly) systolic angled complexes, which generalize systolic complexes by allowing angles different from $\frac{\pi}{3}$.

The second focal point of the thesis are Artin groups. While studying condition $\mathcal{T}'$, we show that Artin groups are two-dimensional (i.e. they have geometric dimension at most 2) if and only if their standard presentation satisfies condition $\mathcal{T}'$. An important conjecture regarding Artin groups is that any intersection of parabolic subgroups is a parabolic subgroup. By introducing systolic-by-function complexes (another generalization of systolic complexes) and using their geometry, we solve this conjecture in the case of two-dimensional (2,2)-free Artin groups.

Another open question for Artin groups was to decide whether a parabolic subgroup P_1 of an Artin group A contained in another parabolic subgroup P_2 of A is a parabolic subgroup of P_2. We finish this thesis by answering this question in the positive for all Artin groups. In contrast to the rest of our work, the techniques used in this case are mostly algebraic instead of geometric.

Key words: non-positive curvature, hyperbolic groups, small cancellation, systolicity, Artin groups, parabolic subgroups.

Agradecimientos

Gracias Gabriel por todo, por habértela jugado y por confiar en mí, por tu energía, por tu ayuda, por tu trabajo incansable, por todo lo que te dedicaste a mí y a este doctorado. De verdad es invaluable todo lo que hacés, que hayas ayudado a tantos alumnos y que, ojalá, tantos otros más puedan tenerte como director.

Quiero agradecer también al jurado de esta tesis, a Gabriel, a Alex y a Damian. Además de su trabajo y sus comentarios, todos siempre fueron muy amables conmigo y me ayudaron enormemente en mi formación como matemático.

Gracias mamá, papá y Marcos por ser mi familia y estar siempre presentes. Me siento muy afortunado de que sean ustedes. También gracias a abuelos, tíos y primos.

A todos mis amigos y compañeros, con quienes compartí muchos momentos, charlas y pasillos. Incluso en tiempos de inconexión seguimos conectados.

Al fantástico grupo de topo que hay en la facultad y disperso por todo el mundo. Siempre dispuestos a escuchar y a ayudar.

A Luis, María, Yago, Juan, Macarena, Xabi, Nicolas, Henry y tantos otros grandes matemáticos que tuve el gusto de conocer durante mi doctorado.

Gracias Jaqui por ser mi amor y contención todos estos años. Tu compañía constante hizo que el tiempo volara y que este proceso haya sido hermoso. Que el tiempo siga volando así.

Introducción

La teoría geométrica de grupos consiste en el estudio de grupos por sus acciones en objetos con una geometría interesante en un sentido amplio. Sus orígenes se remontan a los trabajos de numerosos matemáticos, particularmente aquellos de Max Dehn. Entre sus múltiples contribuciones, formuló los siguientes problemas [35] (ver también [68]):

El problema de la palabra: un grupo G con presentación $\langle S \mid R \rangle$ admite solución al problema de la palabra si existe un algoritmo que decide, dade una palabra $w \in F(S)$, si w es trivial en G.

El problema de la conjugación: un grupo G con presentación $\langle S \mid R \rangle$ admite solución al problema de la conjugación si existe un algoritmo que decide, dadas dos palabras $w_1, w_2 \in F(S)$, si w_1 y w_2 son conjugadas en G.

El problema del isomorfismo: dadas dos presentaciones finitas, decidir si presentan grupos isomorfos.

Si bien parecen algebraicos o algorítmicos en un principio, como veremos en esta tesis, estos problemas tienen una profunda conexión con la geometría de los grupos y las presentaciones involucrados. Sin embargo, aunque el trabajo de Dehn data de comienzos del siglo XX, el enfoque de estudiar grupos geométricamente no ocupó un papel central hasta mucho después. Entre los trabajos de Dehn y la teoría geométrica de grupos, yacen la teoría combinatoria de grupos y la teoría de small cancellation. El procedimiento original consistía en trabajar con presentaciones de grupos combinatoriamente. Al estudiar complejos de presentaciones y grafos de Cayley, estas ideas combinatorias se vuelven más geométricas. La investigación en este sentido fue desarrollada por Magnus, Baumslag, Solitar, Greendlinger, Lyndon, Schupp y Rips entre otros.

Es en el trabajo seminal de Gromov y su artículo [50] que la teoría geométrica de grupos finalmente se establece como un área activa. Gromov introdujo dos de las familias de grupos de curvatura no-positiva o negativa más importantes: grupos hiperbólicos y grupo CAT(0). Estos grupos se caracterizan por actuar bien (geométricamente) en espacios métricos hiperbólicos y respectivamente CAT(0). Ambas familias de espacios métricos poseen propiedades de curvatura a gran escala. Gracias a trabajos de Gromov y autores posteriores, las tres preguntas de Dehn tienen una respuesta afirmativa para grupos hiperbólicos, y los problemas de la palabra y la conjugación admiten solución en grupos CAT(0).

Motivados por las contribuciones de Gromov, muchas nociones de curvatura no-positiva han surgido recientemente. Una de ellas es la de complejos simpliciales y grupos sistólicos. Los complejos fueron originalmente introducidos por Chepoi bajo el nombre de *complejos bridged* en [23]. Los complejos sistólicos fueron más tarde redescubiertos y estudiados por Januszkiewicz y Świątkowski en [61] y por Haglund en [52]. Seguiremos el punto de vista de Januszkiewicz y Świątkowski (ver Sección 1.3 para definiciones). La idea detrás de los complejos sistólicos es encontrar una condición combinatoria fácil de verificar en complejos simpliciales, similar a la que se tiene para complejos cúbicos CAT(0). Si bies los complejos sistólicos no son necesariamente CAT(0), los grupos que actúan geométricamente en ellos comparten muchas propiedades con los grupos CAT(0).

En esta tesis exploraremos dos generalizaciones de complejos y grupos sistólicos. La primera son los complejos (estrictamente) sistólicos angulados. En lugar de pensar que todos los triángulos son equiláteros con ángulos de $\frac{\pi}{3}$, permitimos ángulos diferentes, ganando más flexibilidad. La segunda son los complejos sistólicos-por-función. En este caso lo que cambiamos son las longitudes de los lados de los triángulos. Lo hacemos de forma combinatoria en lugar de métrica. Ambas definiciones fueron inspiradas por los complejos métricamente sistólicos, una generalización métrica de los complejos sistólicos introducida por Huang y Osajda en [57] para estudiar grupos de Artin dos-dimensionales.

La teoría de small cancellation consiste en estudiar grupos dados por presentaciones en las que las relaciones tienen superposiciones pequeñas. Estas superposiciones pequeñas son formalizadas en las que se llaman condiciones

de small cancellation. Grupos que satisfacen condiciones de small cancellation lo suficientemente fuertes tienen buenas propiedades algebraicas, algorítmicas y geométricas, tales como admitir solución a los problemas de la palabra y la conjugación o ser hiperbólicos. Las condiciones de small cancellation se enuncian en términos puramente algebraicos, pero tienen interpretaciones geométricas muy claras. Debido a los trabajos de van Kampen [62] y Lyndon [67] es sabido que una palabra trivial en un grupo presentado por una presentación P es equivalente a tener un diagrama de disco sobre el complejo de la presentación K_P cuya frontera lea dicha palabra (i.e. un morfismo combinatorio de una estructura combinatoria de un disco singular a K_P). Como veremos en la Sección 1.5, las condiciones de small cancellation sobre una presentación se traducen en condiciones geométricas sobre estos diagramas.

En el Capítulo 1 recordaremos las ideas y resultados básicos sobre espacios y grupos de curvatura no-positiva. Comenzamos con espacios y grupos hiperbólicos, y en el proceso recordamos algunos conceptos de interés independiente (cuasi-isometrías, espacios métricos geodésicos, funciones de Dehn y complejos simpliciales métricos entre otros). Luego presentamos sistolicidad y una generalización más reciente, sistolicidad métrica. Estas do nociones juegan un rol fundamental en el resto de la tesis, ya que sirven de inspiración para complejos sistólicos angulados (ver Sección 3.1) y complejos sistólicos-por-función (ver Sección 4.2). Finalmente, damos una breve introducción a la teoría de small cancellation.

En el Capítulo 3 introducimos nuevas condiciones de small cancellation que unifican y expanden a las clásicas. Comenzamos por definir los complejos estrictamente sistólicos angulados (ver Definición 3.1.1). Utilizando técnicas de curvatura y una versión combinatoria del teorema de Gauss–Bonnet probamos lo siguiente:

Teorema 3.1.9. *Sea X un complejo estrictamente sistólico angulado. Entonces existe una constante $K > 0$ tal que*

$$\text{Area}(\gamma) \leq Kl(\gamma),$$

para cada camino de aristas cerrado γ en X.

Es decir, probamos que los complejos estrictamente sistólicos angulados satisfacen una desigualdad isoperimétrica lineal, y por lo tanto tenemos el sub-

siguiente corolario. En particular se sigue lo los grupos que actúan geométricamente en estos complejos son hiperbólicos.

Corolario 3.1.10. *El 1-esqueleto $X^{(1)}$ de un complejo estrictamente sistólico angulado X con su métrica geodésica estándar es hiperbólico. Más generalmente, si le damos a X una métrica euclidiana a trozos con* Shapes(X) *finito, entonces X es hiperbólico.*

como aplicación de este corolario, investigamos cuándo los grupos one-relator actúan propia y cocompactamente por automorfismos simpliciales en un complejo estrictamente sistólico angulado. Dado un grupo one-relator, comenzamos por tomar su complejo de Cayley y lo engordamos de forma dual, similarmente a lo que Huang y Osajda hacen para grupos de Artin dos-dimensionales en [57]. Analizando este complejo, emerge una condición de small cancellation natural. Llamamos a esta condición de small cancellation (T'). Esta condición junto con la condición $C'(\frac{1}{4})$ son suficientes para obtener el resultado deseado.

Teorema 3.2.1. *Sea Γ un grupo one-relator con presentación $P = \langle \mathcal{A} \mid R \rangle$. Si P satisface la condición métrica de small cancellation $C'(\frac{1}{4})$ y la Condición (T'), entonces Γ es hiperbólico.*

Motivados por este resultado, planteamos la siguiente pregunta: puede la condición (T') ser estudiada combinatoriamente como las condiciones clásicas de small cancellation? Eso es, independientemente de los complejos estrictamente sistólicos angulados. Mostramos que la respuesta es afirmativa. Más aún, definimos condiciones más generales $\mathcal{T}'$ y $\mathcal{T}'_<$. La condición $\mathcal{T}'_<$ abarca las condiciones $C'(\frac{1}{4}) - (T'), C'(\frac{1}{6}), C'(\frac{1}{4}) - T(4)$ y $C'(\frac{1}{3}) - T(6)$, mientras que la condición $\mathcal{T}'$ es la versión no estricta. Esencialmente, estas condiciones permiten superposiciones grandes entre relaciones mientras que, al ser vistas en un diagrama de disco, estas superposiciones no se concentren en un mismo vértice.

Enunciamos ahora algunos de los resultados que obtuvimos con estas nuevas condiciones. La primera está relacionada a reducibilidad diagramática. La reducibilidad diagramática (DR) es una condición combinatoria más fuerte que asfericidad, que tiene aplicaciones a ecuaciones sobre grupos (ver Sección 3.4).

Teorema 3.4.2. *Si una presentación P satisface la condición $\mathcal{T}'$ y no tiene potencias propias, entonces es DR.*

Luego probamos teoremas relacionados a propiedades de curvatura no-positiva de los grupos. El primero es una versión más fuerte del Teorema 3.2.1.

Teorema 3.4.4. *Sea G un grupo que admite una presentación que satisface las condiciones $\mathcal{T}'_<$ y $C(3)$. Entonces G es hiperbólico.*

El segundo está relacionado a la condición no estricta. Notar que en este teorema, requerimos que todas las relaciones tengan la misma longitud. Creemos que el resultado es verdadero sin esta última condición, pero aún no contamos con una demostración.

Teorema 3.5.2. *Sea P una presentación que satisface las condiciones $\mathcal{T}' - C'(\frac{1}{2})$ y tal que todas sus relaciones tienen longitud r, entonces P tiene función de Dehn cuadrática. Más aún, si P es finita el grupo G presentado por P admite solución al problema de la conjugación.*

El tercero es sobre ejemplos de grupos cuyas presentaciones satisfacen la condición $\mathcal{T}'$. El ejemplo principal son los grupos de Artin dos-dimensionales. De hecho, probamos lo siguiente:

Teorema 3.3.2. *Un grupo de Artin A_Γ es dos-dimensional si y sólo si su presentación estándar P_Γ satisface la condición $\mathcal{T}'$.*

La mayoría de los resultados del Capítulo 3 son parte de los artículos [9] y [10] escritos en colaboración con Minian, y Minian y Sadofschi-Costa respectivamente.

Los grupos de Artin constituyen una de las familia más estudiadas en la teoría geométrica de grupos. Están profundamente conectados con los grupos de Coxeter y también son una generalización de los grupos de trenzas. En el Capítulo 2 recordamos su definición y resultados básicos, y enunciamos algunos hechos conocidos y problemas abiertos. Como veremos, muchas preguntas relacionadas a grupos de Artin son de naturaleza geométrica. Luego, tener una buena estructura geométrica para trabajar parece prometedor. El

Teorema 3.3.2 nos da dicha estructura geométrica en grupos de Artin dos-dimensionales. Nos preguntamos si estas ideas pueden usarse para atacar problemas abiertos para grupos de Artin en el caso dos-dimensional. Ese es el contenido de Capítulo 4. Los grupos de Artin tienen una familia natural de subgrupos llamados subgrupos parabólicos. Estos juegan un rol central en su estudio y pueden pensarse como las partes más elementales de un grupo de Artin. Una pregunta que ha recibido mucha atención en años recientes es si una intersección de subgrupos parabólicos es nuevamente un subgrupo parabólico. En el Capítulo 4 damos una respuesta afirmativa a esta pregunta para grupos de Artin $(2,2)$-libres dos-dimensionales.

En un artículo reciente por Cumplido, Martin y Vaskou [31] resuelven este problema para grupos de Artin de tipo large. Lo hacen estudiando un complejo simplicial llamado el complejo de Artin. Ellos prueban que la intersección de subgrupos parabólicos es un subgrupo parabólico cuando la acción del grupo de Artin en el complejo de Artin satisface una condición de fijado de caminos. Luego prueban que cuando un grupo de Artin es de tipo large, este complejo es sistólico. Los complejos sistólicos satisfacen la condición de fijado de caminos necesaria, y el resultado se sigue. Deseamos recuperar el resultado para una familia más amplia de grupos de Artin, así que necesitamos una noción geométrica más abarcativa. Logramos esto definiendo complejos sistólicos-por-función, que generalizan a los complejos sistólicos. Loa complejos sistólicos-por-función tienen una estructura más flexible que los complejos sistólicos ya que permitimos que las aristas tengas distintas longitudes. Al mismo tiempo, su geometría es lo suficientemente rígida como para satisfacer un análogo al teorema de Cartan–Hadamard y otras propiedades similares a las de los complejos sistólicos. En particular, satisfacen una condición de fijado de caminos (ver Teorema 4.3.1) y luego podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 4.3.2. *Sea A_Σ un grupo de Artin $(2,2)$-libre dos-dimensional. Entonces la intersección de una familia arbitraria de subgrupos parabólicos es un subgrupo parabólico.*

Como consecuencia de este teorema y un algoritmo introducido por Cumplido [29] resolvemos el problema de estabilidad por conjugación para grupos de Artin $(2,2)$-libres dos-dimensionales. Un subgrupo H de un grupo G es

estable por conjugación si, para cada par $h, h' \in H$ tal que existe $g \in G$ con $g^{-1}hg = h'$, existe $\tilde{h} \in H$ tal que $\tilde{h}^{-1}h\tilde{h} = h'$. El problema de estabilidad por conjugación consiste en decidir cuáles subgrupos parabólicos de un grupo de Artin son estables por conjugación.

Teorema 4.3.9. *Sean A_Γ un grupo de Artin $(2,2)$-libre dos-dimensional y A_{Γ_X} un subgrupo parabólico estándar. Entonces A_{Γ_X} no es estable por conjugación si y sólo si existen vértices x, y en Γ_X que están conectados por un camino de etiquetas impares en Γ, pero no están conectados por un camino de etiquetas impares en Γ_X.*

Algunos de los resultados del Capítulo 4 aparecen en el artículo reciente [8].

El Capítulo 5 es parcialmente independiente de los capítulos anteriores. Aunque continuamos investigando grupos de Artin y sus subgrupos parabólicos, las técnicas utilizadas son completamente diferentes. Si bien tienen un trasfondo geométrico (ver Sección 5.2), los argumentos son mayoritariamente algebraicos. Los contenidos del Capítulo 5 corresponden a un artículo en colaboración con Paris [11]. En [47] Godelle conjetura que un subgrupo parabólico P_1 de un grupo de Artin A que está contenido en otro subgrupo parabólico P_2 de A es un subgrupo parabólico de P_2. Esta conjetura ya había sido probada para algunas familias de grupos de Artin. Nosotros probamos que es cierta para todos los grupos de Artin. Más precisamente, probamos lo siguiente.

Teorema 2.3.1. *Sea Γ un grafo simplicial finito, sea $m : E(\Gamma) \to \mathbb{N}_{\geq 2}$ un etiquetado, y sea $A = A_\Gamma$ el grupo de Artin correspondiente a Γ. Sean $X, Y \subset V(\Gamma)$ y $\alpha \in A$ tales que $\alpha A_Y \alpha^{-1} \subset A_X$. Entonces existen $Y' \subset X$ y $\gamma \in A_X$ tales que $\alpha A_Y \alpha^{-1} = \gamma A_{Y'} \gamma^{-1}$.*

Índice general

1. Espacio y grupos de curvatura no-positiva **19**

1.1. Espacios y grupos hiperbólicos 19

1.1.1. Espacios métricos geodésicos y cuasi-isometrías 20

1.1.2. Espacios métricos hiperbólicos 21

1.1.3. Grupos hiperbólicos 22

1.1.4. Funciones de Dehn 24

1.1.5. Problemas de Dehn 25

1.2. Espacios y grupos CAT(0) 26

1.2.1. Espacios métricos CAT(0) 26

1.2.2. Complejos simpliciales CAT(0) 28

1.3. Sistolicidad 30

1.4. Sistolicidad métrica 32

1.5. Teoría de small cancellation 34

2. Grupos de Artin **39**

2.1. Grupos de Coxeter 39

2.2. Familias de grupos de Artin y problemas abiertos 41

2.3. Subgrupos parabólicos 43

3. Complejos estrictamente sistólicos angulados y small cancellation generalizada **47**

3.1. Complejos estrictamente sistólicos angulados 48

3.2. Aplicación a grupos one-relator 58

3.3. Condition $\mathcal{T}'$ 64

3.4. Curvatura y reducibilidad diagramática 72

3.5. Funciones de Dehn y el problema de la conjugación 76

3.6. Computabilidad de la condición $\mathcal{T}'$ 83
3.7. Complejos sistólicos angulados y $\mathcal{T}'$ 87

4. Sistolicidad-por-función y grupos de Artin dos-dimensionales 89
4.1. El complejo de Artin 90
4.2. Complejos sistólicos-por-función 92
4.3. Subgrupos parabólicos 99

5. Parabólicos dentro de parabólicos 107
5.1. Las demostraciones 108
5.2. El complejo de Salvetti 112

Bibliografía 117

Capítulo 1

Espacio y grupos de curvatura no-positiva

1.1. Espacios y grupos hiperbólicos

Los espacios métricos hiperbólicos fueron introducidos por Gromov en [50]. En esencia, un grupo es hiperbólico si, cuando es equipado con la métrica de la palabra, satisface ciertas propiedades geométricas análogas a aquellas de la geometría hiperbólica clásica. Además de la teoría clásica de variedades de curvatura negativa, la definición de Gromov se inspira en los trabajos de Dehn y Rips. A diferencia de las condiciones CAT(κ) que presentaremos más adelante, la hiperbolicidad captura la geometría a gran escala de un espacio. Más precisamente, la hiperbolicidad se preserva por cuasi-isometrías. Intuitivamente, dos espacios son cuasi-isométricos si cuando se los mira desde lejos se ven igual. El artículo de Gromov [50] puede considerarse como el punto de partida de la teoría geométrica de grupos moderna. Desde su introducción, los grupos hiperbólicos han jugado un rol central en el área. Referimos al lector al libro de Bridson y Haefliger's [15] y a una serie de notas editadas por Short [80] para una exposición más detallada. Aquí sólo recordaremos las definiciones básicas y los resultados que utilizaremos más adelante.

1.1.1. Espacios métricos geodésicos y cuasi-isometrías

Antes de definir a los grupos hiperbólicos, necesitamos algunos conceptos básicos sobre espacios geodésicos.

Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos la *longitud* de una curva continua $\gamma : [a, b] \to X$ como

$$l(\gamma) = \sup_{a=t_o \leq t_1 \cdots \leq t_n = b} \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})).$$

Si el largo de la curva γ es finito, γ se dice *rectificable*.

Definición 1.1.1. Un espacio métrico (X, d) es un *espacio de longitud* si la distancia entre cada par de puntos $x, y \in X$ es igual al ínfimo de las longitudes de las curvas que los conectan.

Deseamos una condición levemente más fuerte, en donde estos ínfimos se realicen. Para eso necesitamos geodésicas.

Definición 1.1.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Una *geodésica* de $x \in X$ a $y \in X$ es una función continua $\gamma : [0, l] \to X$ tal que $\gamma(0) = x$, $\gamma(l) = y$ y $d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'|$ para todos $t, t' \in [0, l]$. Usualmente denotamos la imagen de γ por $[x, y]$ y la llamamos un *segmento geodésico*.

Es claro de la definición que el largo de una geodésica $\gamma : [0, l] \to X$ es igual a l. Un espacio métricos se dice *geodésico* si cada par de puntos se conecta por una geodésica. algunos ejemplos de espacios métricos geodésicos son espacios vectoriales normados (en particular espacios euclídeos), espacios modelo de curvatura constante (ver Definición 1.2.1) y grafos métricos cuyas aristas tienen sólo finitas longitudes diferentes.

Los espacios de longitud no siempre son geodésicos. sin embargo, bajo hipótesis razonables lo son. Esto último se conoce como el teorema de Hopf–Rinow.

Teorema 1.1.3 (Teorema de Hopf–Rinow)**.** *sea X un espacio de longitud completo y localmente compacto. Entonces X es geodésico, y cada subconjunto acotado de X es compacto.*

Otra noción que necesitaremos es la de cuasi-isometría. Como mencionamos antes, una propiedad saliente de los grupos hiperbólicos es que son estables por cuasi-isometrías. En consecuencia, la hiperbolicidad refleja la geometría a gran escala de un espacio.

Definición 1.1.4. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Una función $f : X_1 \to X_2$ es un *embedding cuasi-isométrico* si existen constantes $A \geq 1$ y $B \geq 0$ tales uqe para cada $x, y \in X_1$,

$$\frac{1}{A} d_1(x, y) - B \leq d_2(f(x), f(y)) \leq A d_1(x, y) + B.$$

Si además existe una constante $C \geq 0$ tal que para cada $z \in X_2$ existe un $x \in X_1$ que satisface

$$d_2(z, f(x)) \leq C,$$

decimos que f es una *cuasi-isometría*. Cuando esta última condición se cumple, decimos que la imagen de f es *cuasi-densa* en X_2. Dos espacios métricos son *cuasi-isométricos* si existe una cuasi-isometría entre ellos. Es fácil ver que ser cuasi-isométricos es una relación de equivalencia.

Por ejemplo, cualesquiera dos espacios métricos acotados son cuasi-isométricos. Uno puede pensar en los espacios métricos acotados como un punto cuando se los mira de lejos. Otro ejemplo estándar de espacios cuasi-isométricos son $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$ con sus métricas de norma usuales, donde la cuasi-isometría está dada por la inclusión $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Como veremos más adelante, este es un caso particular de un fenómeno más general que nos permitirá comparar la geometría de un grupo con la de un espacio métrico geodésico.

1.1.2. Espacios métricos hiperbólicos

En [50], Gromov atribuye la siguiente definición a Rips.

Definición 1.1.5. Sea $\delta > 0$. Un espacio métrico geodésico X es *δ-hiperbólico* si para cada $x, y, z \in X$ y segmentos geodésicos $[x, y], [x, z], [y, z]$ tenemos que

$$[x, y] \subseteq \bar{B}_\delta([x, z]) \cup \bar{B}_\delta([y, z]),$$

donde $\bar{B}_\delta(Y)$ denota la δ-bola cerrada alrededor de un subconjunto $Y \in X$ (i.e., $\bar{B}_\delta(Y) = \{x \in X \mid d(x, Y) \leq \delta\}$). El espacio X es *hiperbólico* si es δ-hiperbólico para algún δ.

La definición anterior requiere que el espacio métrico sea geodésico y la condición usualmente se conoce como la "condición de triángulos delgados". Sin embargo, hay otra caracterización de hiperbolicidad que no requiere que el espacio métrico sea geodésico y que es equivalente a la definición anterior cuando el espacio métrico es geodésico. Para esto necesitamos la noción de producto de Gromov. Sea X un espacio métrico. Dados tres puntos $x, y, z \in X$, el *producto de Gromov* de x e y en z es

$$\langle x, y \rangle_z = \frac{1}{2}(d(x, z) + d(y, z) - d(x, y)).$$

Definición 1.1.6. Sean $p \in X$ y $\delta > 0$. El par (X, p) es *δ-hiperbólico* si para cada $x, y \in X$

$$\langle x, y \rangle_p \geq \min_{z \in X} \{\langle x, z \rangle_p, \langle y, z \rangle_p\} - \delta.$$

Un espacio métrico X es *hiperbólico* si existen $p \in X$ y $\delta > 0$ tales que (X, p) es δ-hiperbólico.

Las definiciones 1.1.6 y 1.1.5 coinciden cuando el espacio métrico es geodésico. Hay más definiciones equivalentes de hiperbolicidad. Una buena exposición de estas equivalencias puede encontrarse en [80].

Una propiedad destacable de hiperbolicidad es que es invariante por cuasi-isometrías en espacios métricos geodésicos. Como dijimos antes, esto nos dice que la hiperbolicidad captura la geometría a gran escala del espacio.

Teorema 1.1.7. *Sean X_1 y X_2 espacios métricos geodésicos cuasi-isométricos. Entonces X_1 es hiperbólico si y sólo si X_2 es hiperbólico.*

1.1.3. Grupos hiperbólicos

Queremos entender a los grupos geométricamente. Una forma de lograr esto es viéndolos como espacios métricos. Para hacerlo, necesitamos las nociones de métrica de la palabra y grafo de Cayley.

Sea G un grupo con generadores S. Dados $g, h \in G$, definimos $d_S(g, h) = 0$ si $g = h$. En otro caso, definimos $d_S(g, h)$ como el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que existen $s_1, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}$ con $s_1 \cdots s_n = g^{-1}h$. Llamamos a d_S la *métrica de la palabra* en G asociada a S.

Sea G un grupo con generadores S. El *grafo de Cayley* $\Gamma(G, S)$ de G con respecto a S es el grafo cuyos vértices son los elementos de G y que tiene una arista conectando g a gs para cada $g \in G$ y $s \in S$. Puede dársele una métrica declarando que cada arista sea isométrica al intervalo de longitud uno.

Notar que la inclusión natural $i : (G, d_S) \to \Gamma(G, S)$ es una cuasi-isometría. Un caso particular de este hecho es el ejemplo que dimos previamente sobre la cuasi-isometría entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$. Es bien sabido que si G es finitamente generado y S_1 y S_2 son conjuntos de generadores finitos, entonces (G, d_{S_1}) y (G, d_{S_2}) son cuasi-isométricos. Luego, la siguiente definición no depende del sistema de generadores (finito) elegido.

Definición 1.1.8. Un grupo finitamente generado G es *hiperbólico* si existe un conjunto de generadores finito tal que (G, d_S) (o equivalentemente $\Gamma(G, S)$) es un espacio métrico hiperbólico.

Una temática usual en teoría geométrica de grupos es estudiar a los grupos por sus acciones en espacios métricos. Es conveniente estudiar acciones que sean, en algún sentido, buenas.

Definición 1.1.9. Una acción (a izquierda) de un grupo G en un espacio métrico X se dice

- *cocompacta* si existe un subconjunto compacto $K \subseteq X$ tal que $X = GK$;
- *propia* si para cada $x \in X$ existe $r > 0$ tal que el conjunto $\{g \in G \mid gB_r(x) \cap B_r(x) \neq \emptyset\}$ es finito;
- *geométrica* si G actúa por isometrías y la acción es cocompacta y propia.

El siguiente es un resultado fundamental en teoría geométrica de grupos. Nos permite entender a un grupo en términos de la geometría de un espacio métrico sobre el cual actúa geométricamente.

Teorema 1.1.10 (Lema de Švarc–Milnor)**.** *Sean G un grupo y X un espacio de longitud. Si G actúa geométricamente en X, entonces G es finitamente generado, y para cualquier elección de punto base $x_0 \in X$, el mapa $g \mapsto gx_0$ es una cuasi-isometría.*

Corolario 1.1.11. *Un grupo G actuando geométricamente en un espacio de longitud hiperbólico X es un grupo hiperbólico.*

1.1.4. Funciones de Dehn

Presentaremos otra caracterización de grupos hiperbólicos en términos de sus presentaciones. Una herramienta fundamental para entender presentaciones de grupos geométricamente es la función de Dehn.

Sea G un grupo finitamente presentado con presentación finita $\langle S \mid R\rangle$. Dadas dos palabras w y w' en el grupo libre $F(S)$, escribimos $w =_G w'$ para indicar que representan al mismo elemento en G. Sea $w \in F(S)$ una palabra cíclicamente reducida en el grupo libre sobre S que es trivial en G. Entonces w admite una expresión de la forma

$$w = \prod_{i=1}^{k} u_i r_i^{\pm 1} u_i^{-1},$$

donde $r_i \in R$ y $u_i \in F(S)$ para todo i. El *área* de una palabra w que es trivial en G es la menor cantidad de relaciones requerida para expresar a w como producto de conjugados de relaciones y de sus inversos (es decir, el mínimo k en la fórmula anterior). Se denota por $A(w)$. El término "área"tiene una clara interpretación geométrica en términos de diagramas sobre la presentación, que será explorada en la Sección 1.5. La siguiente definición nos permite acotar el área de una palabra en términos de su longitud con la métrica de la palabra (cuando miramos diagramas, esto se traduce en acotar sus áreas por sus perímetros).

Definición 1.1.12. La *función de Dehn* de un grupo G con respecto a una presentación finita $P = \langle S \mid R\rangle$ es

$$Dehn_{G,P}(l) = \max_{l(w)\leq l,\ w=_G 1} \{A(w)\},$$

donde $l(w) = d_S(w, 1)$.

Para ver que la función de Dehn no depende (salvo una relación de equivalencia) de la presentación finita que elegimos, necesitaremos la siguiente definición.

Definición 1.1.13. Sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dos dunciones no decrecientes. Decimos que f es *Dehn dominada* por g si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) \leq Cg(Cn + C) + Cn + C.$$

Lo denotamos por $f \prec g$. Si $f \prec g$ y $g \prec f$, decimos que f y g son *Dehn equivalentes*, y no notamos $f \sim g$.

Proposición 1.1.14. *Si $\langle S_1 \mid R_1 \rangle$ y $\langle S_2 \mid R_2 \rangle$ son presentaciones finitas de un grupo G, entonces las funciones de Dehn con respecto a $\langle S_1 \mid R_1 \rangle$ y $\langle S_2 \mid R_2 \rangle$ son Dehn equivalentes.*

Cuando $Dehn_G \prec f$ y f es lineal (resp. cuadrática, polinomial, exponencial, etc), decimos que G satisface una desigualdad isoperimétrica lineal (resp. cuadrática, polinomial, exponencial, etc). Esta terminología será más clara en la Sección 1.5). Ahora podemos dar una nueva caracterización de los grupos hiperbólicos.

Teorema 1.1.15 ([44, 50])**.** *Un grupo G es hiperbólico si y sólo si es finitamente presentado y satisface una desigualdad isoperimétrica lineal.*

Notar que en particular, todos los grupos hiperbólicos admiten una presentación finita. Al igual que con hiperbolicidad, la función de Dehn de un grupo finitamente presentado en invariante por cuasi-isometría.

1.1.5. Problemas de Dehn

En 1911 Max Dehn propuso los siguientes problemas [35]. Aunque a primera vista no parezcan ser geométricos, motivaron gran parte del desarrollo de las teorías combinatoria y geométrica de grupos modernas, y siguen siendo ampliamente estudiados. Para una exposición más en profundidad sobre estas preguntas, recomendamos el libro de Brady, Riley y Short [14].

El problema de la palabra: un grupo G con presentación $\langle S \mid R \rangle$ admite solución al problema de la palabra si existe un algoritmo que decide, dada na palabra $w \in F(S)$, si w es trivial en G.

El problema de la conjugación: un grupo G con presentación $\langle S \mid R \rangle$ admite solución al problema de la conjugación si existe un algoritmo que decide, dadas dos palabras $w_1, w_2 \in F(S)$, si w_1 y w_2 son conjugadas en G.

El problema del isomorfismo: dadas dos presentaciones finitas, decidir si presentan grupos isomorfos.

Notar que admitir solución al problema de la conjugación implica admitir solución al problema de la palabra, ya que una palabra es trivial si y sólo

si es un conjugado de la palabra trivial. Es sabido que estos problemas no admiten solución en general, incluso restringiéndonos a grupos finitamente presentados.

Existe una conexión cercana entre estos problemas y la función de Dehn de una presentación. Por ejemplo, si la unción de Dehn es recursiva, podemos acotar el área de una palabra que representa al elemento trivial en términos de su longitud. Puede verse que, si la palabra fuera trivial, un algoritmo en tiempo finito da una expresión para la palabra como producto de conjugados de relaciones y sus inversos. Más aún, los grupos finitamente presentados asmiten solución al problema de la palabra si y sólo si su función de Dehn es recursiva (ver Gersten [42]). Por lo tanto, los grupos hiperbólicos admiten solución al problema de la palabra. Adicionalmente, admiten solución al problema de la conjugación [15] y al problema del isomorfismo por Dahmani y Groves, Dahmani y Guiradel, y Sela [32, 33, 79].

1.2. Espacios y grupos CAT(0)

Presentaremos algunas definiciones estándar y resultados acerca de espacios y grupos CAT(0). Al igual que antes, referimos al lector a [15] para una exposición más detallada.

1.2.1. Espacios métricos CAT(0)

Para hablar sobre espacios métricos CAT(0), primero tenemos que introducir a los espacios métricos CAT(κ). Luego nos concentraremos en el caso de curvatura no-positiva.

Definición 1.2.1. Sean $\kappa \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. El *espacio modelo* n-dimensional de curvatura κ, denotado M^n_κ, se define como sigue:

- si $\kappa > 0$, entonces M^n_κ es la esfera unitaria n-dimensional $\mathbb{S}^n$ con la distancia usual multiplicada por $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$;
- si $\kappa = 0$, entonces M^n_0 es el espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{E}^n$;
- si $\kappa < 0$, entonces M^n_κ es el espacio hiperbólico n-dimensional $\mathbb{H}^n$ con la distancia usual multiplicada por $\frac{1}{\sqrt{-\kappa}}$.

Un espacio métrico geodésico CAT(κ) es aquel en el que los triángulos geodésicos son más "delgados" que en el espacio modelo correspondiente M^2_κ. Hagamos esto más preciso. Sean X un espacio métrico geodésico, $x, y, z \in X$ y $\kappa \in \mathbb{R}$. Si $\kappa > 0$, también asumimos que $d(x,y)+d(y,z)+d(z,x) < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ (que es el diámetro de M^2_κ). Sea $\Delta = \Delta([x,y],[y,z],[z,x])$ un triángulo geodésico con vértices x, y, z. Un *triángulo de comparación* para Δ en M^2_κ es un triángulo geodésico $\Delta' = \Delta([x',y'],[y',z'],[z',x']) \subseteq M^2_\kappa$ con $d(x,y) = d(x',y')$, $d(y,z) = d(y',z')$ y $d(z,x) = d(z',x')$. Sea $p \in [x,y]$. El *punto de comparación* para p en Δ' es el único punto $p' \in [x',y']$ tal que $d(x,p) = d(x',p')$. Los puntos de comparación en los otros dos lados se definen de manera análoga.

Definición 1.2.2. Sean X un espacio métrico geodésico y $\kappa \in \mathbb{R}$. El espacio X es *CAT(κ)* Si para cada triángulo geodésico $\Delta = \Delta([x,y],[y,z],[z,x])$ (donde $d(x,y)+d(y,z)+d(z,x) < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ si $\kappa > 0$), y triángulo de comparación Δ', tenemos que si $p, q \in \Delta$ y $p', q' \in \Delta'$ son sus puntos de comparación, $d(p,q) \leq d(p',q')$.

Es un hehco conocido que si un espacio es CAT(κ), entonces es CAT(κ') para todo $\kappa < \kappa'$. A diferencia de hiperbolicidad, las condiciones(κ) no son invariantes por cuasi-isometrías. Enunciamos algunas de las propiedades del caso CAT(0) (y por lo tanto de todos los casos de curvatura negativa).

Proposición 1.2.3 ([15])**.** *Sea X un espacio $CAT(0)$. Entonces:*

- *X es unívocamente geodésico, y las geodésicas varían continuamente con sus extremos;*
- *la distancia es convexa. Es decira, dados geodésicas $\gamma : [0,T] \to X$ y $\gamma' : [0,T] \to X$, tenemos que para todo $t \in [0,T]$*

$$d(\gamma(t), \gamma'(t)) \leq (1-t)d(\gamma(0), \gamma'(0)) + td(\gamma(T), \gamma'(T));$$

- *X es contráctil;*
- *una función $\gamma : I \to X$ es una geodésica si y sólo si es localmente una geodésica.*

Teorema 1.2.4. *Sean X un espacio $CAT(0)$ y G un grupo finito actuando por isometrías en X. Entonces la acción de G tiene un punto fijo. Más aún, el conjunto de puntos fijos en un subespacio convexo y no vacío.*

La condición CAT(κ) es una condición global. Esto hace que sea difícil de verificar en un contexto general. Afortunadamente, en el caso de curvatura no-positiva existe un resultado análogo al teorema de Cartan–Hadamard para variedades Riemannianas de curvatura seccional no-positiva. Es decir, podemos pasar de una condición local a una condición global cuando nuestro espacio es simplemente conexo. Un espacio métrico X es de *curvatura* $\leq \kappa$ si es localmente CAT(κ). O sea, si cada punto en X tiene un entorno CAT(κ).

Teorema 1.2.5 (Teorema de Cartan–Hadamard, [15])**.** *Sea X un espacio métrico completo y conexo. Si X es de curvatura $\leq \kappa$ con $\kappa \leq 0$, entonces su revestimiento universal $\tilde{X}$ es CAT(κ). En particular, un espacio de curvatura no-positiva simplemente conexo es CAT(0).*

Como ocurre con espacios métricos y grupos hiperbólicos, estamos interesados en grupos actuando agradablemente en espacios CAT(κ). Un grupo G actuando geométricamente en un espacio CAT(κ) es un *grupo CAT(κ)*. Los grupos que son CAT(κ) con $\kappa < 0$ son hiperbólicos. Sin embargo, no todos los grupos CAT(0) son hiperbólicos (pueden actuar en espacios "planos"). Aún así, exhiben muchas propiedades similares.

Proposición 1.2.6 ([15])**.** *Sea G un grupo CAT(0). Entonces:*

- *G es finitamente presentado;*
- *existe una cota en el rango de los subgrupos abelianos libres de G;*
- *G satisface una desigualdad isoperimétrica cuadrática;*
- *G admite solución al problema de la conjugación.*

1.2.2. Complejos simpliciales CAT(0)

Probar que un espacio métrico es CAT(0) sueele ser una tarea complicada, puesto que es un a condición global. Una solución a este problema es restringirse a una familia de espacios más controlables. En esa dirección, Bridson introdujo la siguiente clase de complejos simpliciales [15].

Definición 1.2.7. Sea $\kappa \in \mathbb{R}$. Un complejo simplicial X se dice un M_κ-*complejo simplicial* si

- para cada símplex σ de X, hay una biyección $p_\sigma : \sigma \to M^n_\kappa$ de σ a un símplex en M^n_κ de la dimensión correspondiente;
- siempre que dos símplices σ_1, σ_2 de X comparten una cara τ, la composición $p_{\sigma_2} \circ p^{-1}_{\sigma_1}$ es una isometría de $p_{\sigma_1}(\tau)$ a $p_{\sigma_2}(\tau)$.

El conjunto de clases de isometría de símplices de X se denota Shapes(X) (shapes de X). Cuando $\kappa = 0$ ($\kappa < 0, \kappa > 0$), decimos que X es euclidiano a piezas (resp. hiperbólico, esférico).

Para estudiar estos complejos geométricamente, les damos una pseudométrica. Sean X un M_κ-complejo simplicial y $x, y \in X$. Una *m-tira* de x a y es una secuencia $\Sigma = (x_0, \ldots, x_m)$ de puntos en X tal que $x_0 = x$, $x_m = y$, y para cada $i = 0, \ldots, m-1$, existe un símplex σ_i que contiene a x_i y a x_{i+1}. Definimos la longitud de Σ como

$$l(\Sigma) = \sum_{i=0}^{m-1} d_{\sigma_i}(x_i, x_{i+1}),$$

donde d_{σ_i} es la distancia en σ_i inducida por la biyección p_{σ_i}. La *pseudométrica intrínseca* en X se define como

$$d(x, y) = \text{ínf}\{l(\Sigma) \mid \Sigma \text{ a string from } x \text{ to } y\}.$$

Un resultado destacable de Bridson es el siguiente.

Teorema 1.2.8 ([15])**.** *Sea X un M_κ-complejo simplicial. Si* Shapes(X) *es finito, entonces X con la pseudométrica intrínseca es un espacio geodésico completo.*

Una buena propiedad de los M_κ-complejos simpliciales es que, cuando son simplemente conexos, tenemos un criterio local para ver si son CAT(0). Esto es en el mismo espíritu que el teorema de Cartan–Hadamard para espacios métricos de curvatura no-positiva.

Sean X un M_κ-complejo simplicial con Shapes(X) finito y $v \in X^{(0)}$. Recordamos que dado un símplex σ en X, su *link* $\text{lk}_X(\sigma)$ es el subcomplejo de

X que consiste de los símplices que son disjuntos de σ y tales que, junto con σ, generan un símplex de X. Sea τ un símplex en $\mathrm{lk}_X(v)$, y $x, y \in \tau$. La *distancia angular* entre x e y, denotada $\angle(x, y)$, es definida como en ángulo en v entre los segmentos geodésicos $[v, x]$ y $[v, y]$ en σ. Esto hace a $\mathrm{lk}_X(v)$ un M_1-complejo simplicial con $\mathrm{Shapes}(\mathrm{lk}_X(v))$ finito. La *métrica angular* en $\mathrm{lk}_X(v)$ es una pseudométrica intrínseca.

El siguiente criterio local sele llamarse la condición del link de Gromov.

Teorema 1.2.9 ([50])**.** *Sea X un M_κ-complejo simplicial simplemente conexo con* $\mathrm{Shapes}(X)$ *finito. Entonces X es CAT(κ) si y sólo si el link de cada vértice es CAT(1) con la métrica angular.*

Esta condición local sigue siendo difícil de verificar en general, ya que los links de los vértices pueden ser complejos simpliciales de dimensión alta. Sin embargo, cuando X es 2-dimensional, los links de los vértices son grafos simpliciales y la condición CAT(1) es fácil de chequear.

Corolario 1.2.10. *Sea X un M_κ-complejo simplicial 2-dimensional y simplemente conexo con* $\mathrm{Shapes}(X)$ *finito. Entonces X es CAT(κ) si y sólo si cada ciclo simple en el link de cada vértice tiene longitud mayor o igual a 2π con la métrica angular.*

1.3. Sistolicidad

Otra familia de espacios CAT(0) son los complejos cúbicos CAT(0). Son prominentes porque la condición CAT(0) es fácil de verificar: un complejo cúbico es CAT(0) si y sólo si los links de sus vértices son complejos simpliciales flag (i.e. todo conjunto finito de vértices adyacentes dos a dos genera un símplex).

Motivado por esta caracterización, uno podría preguntarse si una condición combinatoria sencilla existe para el caso de complejos simpliciales. Una posible respuesta viene dada por los complejos sistólicos Si bien los complejos sistólicos no son CAT(0), se comportan de manera muy similar a los complejos CAT(0) y constituyen una respuesta parcial a esta pregunta. Fueron definidos en primera instancia por Chepoi bajo el nombre de *complejos bridged* en [23].

Los complejos sistólicos fueron más tarde redescubiertos y estudiados por Januszkiewicz y Świątkowski en [61], y por Haglund en [52]. Pasamos ahora a las definiciones, siguiendo principalmente a Januszkiewicz y Świątkowski [61].

Un *ciclo* en un complejo simplicial X es un subcomplejo σ homeomorfo a S^1. Denotamos por $|\sigma|$ al número de aristas en σ, y lo llamamos su *longitud*. Un subcomplejo K de un complejo simplicial X es *full* si cualquier símplex de X generado por un conjunto de vértices en K es un símplex de K. Una *diagonal* en un ciclo σ en un complejo simplicial X es una arista de X que conecta dos vértices no consecutivos de σ. Luego, un ciclo es full si y sólo si no tiene diagonales y no genera un símplex.

Definición 1.3.1. Dado un número natural $k \geq 4$, un complejo simplicial X es *k-large* si es flag y si cada ciclo full tiene longitud mayor o igual que k. Es *localmente k-large* si el link de todo vértice es large.

Es claro de las definiciones que un complejo k-large es localmente k-large. Esto es porque, como el complejo es flag, los links de sus vértices son flag y ciclos full en los links son ciclos full en el complejo. Cuando X es simplemente conexo y $k \geq 6$ vale la recíproca. Eso es, un complejo localmente k-large y simplemente conexo con $k \geq 6$ es k-large [23, 61]. Este es un teorema local-a-global análogo al resultado clásico para espacios CAT(0), que motiva la siguiente definición.

Definición 1.3.2. Un complejo simplicial X es *k-sistólico* si es conexo, simplemente conexo y localmente k-large.

Por el teorema local-a-global, vale que un complejo k-sistólico es k-large si $k \geq 6$. En particular también es flag. Esto significa que están determinados por su 1-esqueleto.

Un grupo actuando propia, cocompactamente y por automorfismos simpliciales en un complejo k-sistólico se llama un grupo *k-sistólico*. Como los complejos y grupos 6-sistólicos son los más estudiados, convencionalmente se los llama complejos y grupos *sistólicos*. Para $k \geq 6$, estos grupos satisfacen buenas propiedades, que resumimos en la siguiente proposición.

Proposición 1.3.3. *Sea G un grupo k-sistólico con $k \geq 6$. Entonces:*

- *[61, 82] G es biautomático. En particular es finitamente presentable, tiene función de Dehn cuadrática y admite solución al problema de la conjugación;*
- *[61] si $k \geq 7$, G es hiperbólico;*
- *[53, 89] subgrupos finitamente presentados de G son k-sistólicos;*
- *[58] los subgrupos virtualmente resolubles de G son virtualmente cíclicos o virtualmente $\mathbb{Z}^2$;*
- *[71] el centralizador de un elemento de orden infinito de G es conmensurable con $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z} \times F_n$.*

Los complejos sistólicos además satisfacen un teorema de punto fijo para grupos finitos, al igual que en el caso CAT(0). Este fue probado por Chepoi y Osajda en [24].

Teorema 1.3.4. *[24] Sea G un grupo finito actuando por automorfismos simpliciales en un complejo sistólico X. Entonces existe un símplex $\sigma \in X$ que es estabilizado por G.*

1.4. Sistolicidad métrica

Los complejos y grupos sistólicos satisfacen numerosas buenas propiedades, como mostramos en la sección anterior. Sin embargo, su estructura es a veces demasiado rígida, y para conseguir más ejemplos es necesaria una condición más laxa. En esta dirección, Huang y Osajda introdujeron los complejos métricamente sistólicos, que son una generalización de los complejos sistólicos [57]. En su artículo previo [58] habían probado que los grupos de Artin de tipo large son sistólicos (ver el Capítulo 2 para una definición de estos grupos). Los complejos métricamente sistólicos fueron introducidos en [57] para obtener resultados similares (ver Proposición 1.4.2) para grupos de Artin dos-dimensionales (que contienen a los grupos de Artin de tipo large).

La idea de definir geometrías más permisivas para obtener resultados más generales es un tema que atraviesa esta tesis. Los Capítulos 3 y 4 siguen esta línea de acción en diferentes direcciones.

Sea X un complejo simplicial flag cuyo 2-esqueleto $X^{(2)}$ es un M_κ-complejo simplicial con shapes finitos. Llamamos a estos complejos *complejos simpliciales métricos*. En este contexto, el link de un vértice es el link en $X^{(2)}$ con la métrica angular.

Sea $k \geq 4$. Un ciclo simple σ con k aristas en un complejo simplicial es 2-full si no posee ninguna arista que conecta vos vértices en σ que tienen un vecino común en σ.

Definición 1.4.1. El link de un vértice en un complejo simplicial métrico es 2π-large si cada ciclo simple 2-full en el link tiene longitud angular al menos 2π. Un complejo simplicial métrico X es localmente 2π-large si los links de todos sus vértices son 2π-large. Un complejo métrico simplemente conexo y localmente 2π-large es un *complejo métricamente sistólico*. Los *grupos métricamente sistólicos* son los grupos que actúan geométricamente en complejos métricamente sistólicos.

Notar que los complejos sistólicos son métricamente sistólicos cuando a su 2-esqueleto le damos la métrica en la que todo triángulo es isométrico a un triángulo euclidiano equilátero cuyos lados miden 1. Si bien son ciertamente más flexibles, los complejos y grupos métricamente sistólicos no tienen propiedades tan fuertes como aquellas del caso sistólico. Aún así, se comportan muy bien y muestran un comportamiento de curvatura no-positiva.

Proposición 1.4.2 ([57])**.** *Sean X un complejo métricamente sistólico y G un grupo métricamente sistólico. Entonces:*

- *todo ciclo en $X^{(1)}$ puede llenarse con un mapa simplicial de un disco simplicial CAT(0);*
- *Como consecuencia directa, G tiene función de Dehn cuadrática;*
- *subgrupos finitamente presentados de G son métricamente sistólicos;*
- *si G es libre de torsión y para cada $g \in G$ g^m es conjugado de g^n sólo cuando $m = n$, entonces G admite solución al problema de la conjugación.*

En [57], Huang y Osajda plantean muchas preguntas sobre complejos y grupos métricamente sistólicos. Entre ellas, preguntan si los complejos métricamente sistólicos son contráctiles y si los grupos métricamente sistólicos son biautomáticos. También se preguntan si hay un teorema de punto fijo para grupos finitos actuando en complejos métricamente sistólicos, análogo al Teorema 1.3.4. En el Capítulo 4 introducimos otra generalización de sistolicidad, que llamamos sistolicidad-por-función. Creemos que la respuesta a estas preguntas es afirmativa para complejos y grupos sistólicos-por-función. Como veremos en el Capítulo 4, muchos de los complejos sistólicos-por-función son métricamente sistólicos, pero levemente más rígidos.

1.5. Teoría de small cancellation

La teoría de small cancellation estudia las presentaciones de grupos en términos de la superposición de sus relaciones (i.e. sus cancelaciones). Se enuncia en términos puramente algebraicos, pero tiene una rica interpretación geométrica que captura muchas de las ideas que luego se volverían estándar en la teoría geométrica de grupos. Sus orígenes se remontan al trabajo de Max Dehn [36] en 1912, donde resolvió el problema de la palabra para grupos fundamentales de superficies cerradas orientables de género al menos dos. Durante la segunda mitad del siglo pasado, fue desarrollada la teoría de small cancellation clásica. Una referencia estándar y comprensiva para esta teoría se encuentra en el libro de Lyndon y Shupp [68].

Asumimos que estamos trabajando con presentaciones $\langle S \mid R\rangle$ donde las relaciones son cíclicamente reducidas y ninguna relación es una permutación cíclica de otra relación o del inverso de otra relación. Sea R^* el conjunto de todas la permutaciones cíclicas de los elementos de R y de sus inversos. Una palabra en $F(S)$ en una *pieza* si es un prefijo común de dos elementos diferentes en R^*. Dada una palabra $w \in F(S)$ notamos su número de letras por $|w|$. Ahora enunciamos las condiciones clásicas de la teoría de small cancellation.

Definición 1.5.1. Sean $P = \langle S \mid R\rangle$ una presentación, $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ y $0 < \lambda < 1$. Entonces:

- P satisface la condición $C'(\lambda)$ si para cada pieza u, si u es una subpalabra de alguna $r \in R^*$, entonces $|u| < \lambda|r|$;

- P satisface la condición $C(p)$ si ningún elemento de R^* puede ser escrito como el producto de menos de p piezas;
- P satisface la condición $T(q)$ si siempre que $3 \leq l \leq q$ y $r_1, \ldots, r_l$ en R^* son tales que $r_1 \neq r_2^{-1}, \ldots, r_l \neq r_1^{-1}$ entonces al menos uno de los productos $r_1 r_2, \ldots, r_{l-1} r_l, r_l r_1$ es libremente reducido.

La condición $C'(\lambda)$ se llama la condición de small cancellation métrica, y las otras dos las condiciones no-métricas. Las piezas representan la posible cancelación entre relaciones y las condiciones $C'(\lambda)$ y $C(p)$ nos dicen que estas cancelaciones son pequeñas en relación a la longitud de las relaciones. Notar que $C'(\frac{1}{n})$ implica $C(n+1)$. La condición $T(q)$ no es tan intuitiva, pero tiene una interpretación muy clara en términos de diagramas.

Vamos a dar un tratamiento geométrico de la teoría de small cancellation en términos de diagramas introducidos por primera vez por van Kampen en 1933 [62] y más tarde redescubiertos por Lyndon en 1966 [67]. Un mapa celular $f : L \to K$ entre CW-complejos es *combinatorio* si su restricción a cada celda abierta de L es un homeomorfismo a una celda de K, y un *2-complejo combinatorio* es un CW-complejo para el que la función de adjunción $\psi : S^1 \to K^{(1)}$ de cada 2-celda es combinatorio luego de subdividir adecuadamente a S^1 (ver [41, 88]). Sea K un 2-complejo combinatorio. Un diagrama Δ en K en un mapa combinatorio $\varphi : M \to K$ donde M en una estructura combinatoria de la esfera a la que, posiblemente, le sacamos algunas 2-celdas abiertas. Esto incluye diagramas esféricos (cuando M es toda la esfera), diagramas de disco (singulares) (cuando M es la esfera sin una 2-celda), y diagramas anulares (cuando M es una esfera con dos 2-celdas removidas). Como es usual, las 0-celdas, 1-celdas y 2-celdas son llamadas respectivamente vértices, aristas y caras.

Sea $P = \langle S \mid R \rangle$ una presentación de un grupo G. Su complejo de presentación K_P es un 2-complejo combinatorio que consiste de un bouquet de $|S|$ círculos orientados (uno por cada generador en S) y una 2-celda para cada relación en R adjuntada a lo largo de la palabra correspondiente. Su grupo fundamental es G, y el 1-esqueleto de su revestimiento universal es el grafo de Cayley $\Gamma(G, S)$. Un diagrama sobre P es un diagrama $\varphi : M \to K_P$ donde K_P es el 2-complejo estándar asociado a la presentación P. Como M es orientable podemos fijar una orientación de la forma usual, de manera que al recorrer

las fronteras de las 2-celdas las aristas en la intersección de dos caras f, f' son atravesadas dos veces, una en cada posible orientación. El mapa $\varphi : M \to K_P$ induce un etiquetado en las aristas de M por elementos de S y sus inversos. La etiqueta en la frontera de una cara orientada del diagrama (comenzando en cualquier vértice) se llama la etiqueta de la frontera. Notar que las etiquetas de las fronteras son elementos en R^*.

Un diagrama Δ es *reducible* si contiene dos caras f, f' tales que la intersección de sus fronteras $\partial f \cap \partial f'$ contiene una arista tal que las etiquetas de las fronteras de f y f' leídas con orientaciones opuestas comenzando en un vértice de dicha arista coinciden. En otro caso Δ se dice *reducido* (ver [68, Chapter V, Section 2] para más detalles). El grado $d(v)$ de un vértice v en un diagrama Δ es el número de aristas incidentes a v (las aristas con ambos extremos en v se cuentan dos veces). Un vértice v se llama interior si $v \notin \partial M$.

Dado un diagrama reducido Δ sobre una presentación P, podemos remover todos sus vértices interiores de grado 2 y etiquetar las nuevas aristas con las palabras correspondientes. Observar que en este nuevo diagrama, las etiquetas de las aristas interiores se corresponden con piezas en R^*. La longitud $\ell(e)$ de una arista interior e en este nuevo diagrama es definida como la longitud de la palabra correspondiente (equivalentemente, es el número de aristas del diagrama original que fueron identificadas para obtener).

Con estos diagramas podemos dar una nueva interpretación de las condiciones de small cancellation. Para demostraciones de las siguientes afirmaciones, ver [68, Chapter V, Section 2]. Si $P = \langle S \mid R \rangle$ es una presentación y λ, p, q son como antes, entonces

- P satisface la condición $C'(\lambda)$ si y sólo si para cada diagrama reducido sobre P la longitud de cada arista interior es menor que λ por la longitud de todas las relaciones que etiquetan a una cara que contiene a dicha arista;

- P satisface la condición $C(p)$ si y sólo si las caras sin aristas en la frontera de diagramas reducidos sobre P tiene al menos p lados;

- P satisface la condición $T(q)$ si y sólo si los vértices interiores en diagramas reducidos sobre P tienen grado al menos q.

Comenzamos diciendo que el origen de la teoría de small cancellation se remonta a la solución de Dehn del problema de la palabra para grupos fundamentales de superficies cerradas orientables de género al menos dos. El siguiente teorema, conocido como el lema de van Kampen da una relación entre diagramas de disco y palabras triviales.

Teorema 1.5.2 (Lema de van Kampen [68]). *Sea $P = \langle S \mid R \rangle$ una presentación de un grupo G. Entonces una palabra $w \in F(S)$ es trivial en G si y sólo si existe una diagrama de disco reducido sobre P que tiene a la palabra w como etiqueta de frontera.*

Llamamos s dicho diagrama un *diagrama para w*. El término "área" para la cantidad mínima de relaciones requeridas para escribir una palabra trivial introducido previamente ahora se vuelve mucho más claro. Es exactamente la cantidad minimal de caras de un diagrama para w. Similarmente, el uso de "desigualdad isoperimétrica" para hablar de funciones de Dehn resulta más transparente. La función de Dehn acota el número de caras de un diagrama de disco minimal en términos de su perímetro.

La pregunta ahora es cómo las condiciones de small cancellation entran en juego. Debido a nuestras observaciones previas, las condiciones de small cancellation determinan la geometría de los diagramas. Luego, cuando los diagramas son de curvatura no-positiva, obtenemos control sobre la función de Dehn. Las condiciones clásicas son $C(6)$, $C(4)-T(4)$ y $C(3)-T(6)$ (notar que toda presentación es $T(3)$). Estos ejemplos corresponden intuitivamente a las teselaciones regulares del plano por hexágonos, cuadrados y triángulos respectivamente. Por ejemplo, las condiciones $C(4) - T(4)$ significan que las caras sin aristas en el borde de los diagramas tienen al menos 4 lados, y que los vértices interiores tienen grado al menos 4. En el Capítulo 3 vamos a interpretar (generalizaciones de) estas condiciones introduciendo curvatura combinatoria y una versión combinatoria del teorema de Gauss–Bonnet.

Ahora enunciamos algunos resultados estándar de la teoría de small cancellation.

Teorema 1.5.3 ([68]). *Sea $P = \langle S \mid R \rangle$ una presentación de un grupo G. Si P es $C(6)$, $C(4) - T(4)$ o $C(3) - T(6)$ entonces:*

- *si P es finita, entonces P tiene función de Dehn cuadrática y admite solución al problema de la conjugación;*

- K_P *es asférico.*

Teorema 1.5.4 ([68])**.** *Si una presentación finita P de un grupo G es $C'(\frac{1}{6})$, $C'(\frac{1}{4}) - T(4)$ o $C'(\frac{1}{3}) - T(6)$ entonces G es hiperbólico.*

Teorema 1.5.5 ([87])**.** *Sea P una presentación finita de un grupo G. Si P es $C(6)$ entonces G es sistólico.*

Teorema 1.5.6 (Lema de Greendlinger [49, 68])**.** *Sea $P = \langle S \mid R \rangle$ una presentación de un grupo G que satisface la condición $C'(\lambda)$ con $1 < \lambda \leq \frac{1}{6}$. Sea $w \in F(S)$ una palabra no trivial libremente reducida que representa el elemento trivial en G. Entonces existen una subpalabra v de w y una palabra $r \in R^*$ tales que v también es una subpalabra de r y $|v| > (1 - 3\lambda)|r|$.*

Capítulo 2

Grupos de Artin

Los grupos de Artin son una de las familias de grupos más estudiadas en la teoría geométrica de grupos. En esta sección daremos algunas definiciones básicas, resultados y presentaremos preguntas abiertas sobre los grupos de Artin. Serán nuestro principal objeto de estudio durante la segunda mitad de esta tesis. Antes de empezar a hablar de ellos, tenemos que presentar a los grupos de Coxeter. Aunque no vamos a estudiar a los grupos de Coxeter en esta tesis, están estrechamente relacionados con los grupos de Artin.

2.1. Grupos de Coxeter

Los grupos de Coxeter fueron introducidos por Coxeter en [27], y desarrollados en gran profundidad por Tits en [84], y en el libro de Bourbaki "Lie groups and Lie algebras" [12]. Son grupos formales de reflexiones que generalizan los grupos de reflexión euclidianos finitos. Los grupos de Coxeter son frecuentes en muchas áreas de la matemática, como la teoría de grupos y álgebras de Lie, la teoría de la representaciones, la combinatoria y la teoría geométrica de grupos.

Los grupos de Coxeter se pueden definir en términos de un grafo etiquetado. Sea Γ un grafo simplicial finito. Denotamos por $V(\Gamma)$ su conjunto de vértices y por $E(\Gamma)$ su conjunto de aristas. Dotamos a $E(\Gamma)$ de un etiquetado $m : E(\Gamma) \to \mathbb{N}_{\geq 2}$ y tomamos un conjunto abstracto $S = \{s_x \mid x \in V(\Gamma)\}$ en correspondencia uno a uno con $V(\Gamma)$. Observamos que $m_{xy} = m_{yx} = m(\{x, y\})$

y decimos que $m_{xy} = \infty$ si x e y no están conectados en Γ. Entonces el *grupo de Coxeter* W_Γ de Γ está definido por la presentación

$$\langle S \mid (s_x s_y)^{m_{xy}} \text{ para } e = x, y \in E(\Gamma), s_x^2 \text{ para } x \in V(\Gamma)\rangle.$$

Cuando el grafo Γ está claro en el contexto podemos denotar al grupo Coxeter por W_S.

Ejemplos de grupos de Coxeter son los grupos diedrales y los grupos simétricos finitos. Los grupos de Coxeter pueden ser finitos o infinitos, y los grupos de Coxeter finitos se clasifican en función de sus grafos definitorios (ver [12]).

Comentario 2.1.1. *El etiquetado del grafo que hemos descrito es el más utilizado cuando se estudian grupos de Artin. La convención para el etiquetado cuando se trabaja con grupos Coxeter suele ser diferente. La mayoría de las veces los vértices x e y no están conectados si $m_{xy} = 2$, y si $m_{xy} = \infty$ están conectados por una arista etiquetada por infinito.*

Un grupo Coxeter W_Γ actúa sobre $\mathbb{C}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ como grupo de reflexión. Esta acción preserva un cono abierto conocido como el cono de Tits, donde W_Γ actúa adecuadamente. Este cono está delimitado por los hiperplanos de reflexión. El complemento de estos hiperplanos es el conjunto de puntos regulares del cono (aquellos con isotropía trivial). Sea $\mathcal{H}_{W_\Gamma}$ este complemento de los hiperplanos. Entonces $\mathcal{H}_{W_\Gamma}/W_\Gamma$ tiene grupo fundamental dado por la siguiente presentación

$$P_\Gamma = \langle \Sigma \mid \underbrace{\sigma_x\sigma_y\sigma_x\cdots}_{m_{xy} \text{ letras}} = \underbrace{\sigma_y\sigma_x\sigma_y\cdots}_{m_{xy} \text{ letras}} \text{ para } e = \{x, y\} \in E(\Gamma)\rangle,$$

donde $\Sigma = \{\sigma_x \mid x \in V(\Gamma)\}$ es un conjunto abstracto en correspondencia uno a uno con $V(\Gamma)$ (ver van der Lek [65]). El grupo presentado por P_Γ es el *grupo de Artín* A_Γ de Γ. Al igual que con los grupos de Coxeter, podemos denotarlo por A_Σ si el grafo es claro en el contexto. Uno de los principales problemas abiertos en relación con los grupos de Artin es si $\mathcal{H}_{W_\Gamma}/W_\Gamma$ es un espacio $K(A_\Gamma, 1)$. Esto se conoce normalmente como la conjetura $K(\pi, 1)$. Desde que se hizo esta conexión, los grupos de Artin se han estudiado intensamente.

Otra fuente de motivación para estudiar los grupos de Artin es que son una natural y vasta generalización de los grupos de trenzas. De hecho, reciben

el nombre de grupos de Artin por el trabajo de Emil Artin sobre los grupos de trenzas y sus presentaciones [4]. Aparte de los grupos de trenzas, los ejemplos básicos de grupos de Artin son los grupos libres (cuando no hay aristas en el grafo) y los grupos abelianos libres (cuando el grafo es completo y cada etiqueta es un 2).

En el Capítulo 5 vamos a profundizar en los grupos Coxeter y en algunas de sus propiedades. Los utilizaremos y su estrecha conexión con los grupos de Artin como herramienta auxiliar para demostrar hechos sobre los grupos de Artin. Para un tratamiento moderno de los grupos de Coxeter desde el punto de vista de la teoría geométrica y combinatoria de grupos, recomendamos el libro de Davis [34].

2.2. Familias de grupos de Artin y problemas abiertos

A diferencia de los grupos Coxeter, que se entienden muy bien, los grupos Artin tienen una naturaleza más misteriosa. Apenas se conocen resultados para todos los grupos de Artin. Sin embargo, algunas familias particulares han demostrado ser más permisivas y fáciles de estudiar. Aquí presentamos las más relevantes. Se dice que un grupo de Artin A_Γ es

- *right-angled* si todas las artistas de Γ están etiquetadas por 2;
- *esférico* si el grupo de Coxeter correspondiente W_Γ es finito;
- *de tipo FC* si los grupos de Artin correspondientes a todos los subgrafos clique de Γ son esféricos;
- *de tipo large* si toda etiqueta en Γ es mayor o igual que 3;
- *dos-dimensional* si tiene dimensión geométrica a lo sumo 2. Por resultados de Charney y Davis [19, 20] un grupo de Artin es dos-dimensional si y sólo si para cada triángulo en el grafo Γ con aristas etiquetadas por p, q y r tenemos $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1$.

Ejemplo 2.2.1. El gráfico engañosamente simple de la figura 2.1 define un grupo Artin que no está en ninguna de las familias anteriores. No se sabe casi nada de tales grupos de Artin.

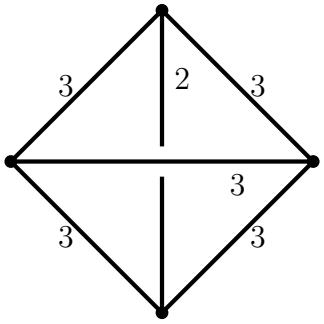

Figura 2.1: El grafo de un grupo de Artin que no es bien entendido.

Hay muchos problemas abiertos relacionados con los grupos de Artin, y cada una de estas familias tiene numerosas propiedades. Aquí nos limitaremos a una pequeña fracción de todo el cuerpo de trabajo sobre los grupos de Artin. Enunciamos algunos problemas y preguntas para los grupos de Artin, y decimos para cuál de las familias anteriores se conoce la respuesta. También damos referencias a algunas de las soluciones de los problemas mencionados. Nuestras listas no son exhaustivas, ya que la bibliografía es muy extensa. Ninguno de los siguientes problemas se conoce para todos los grupos de Artin:

- La conjetura del $K(\pi, 1)$: se sabe que es cierta en todas las familias mencionadas. Ver [16, 17, 19, 20, 37, 54, 72] para pruebas de varias de las instancias de la conjetura. Charney y Davis demostraron que los grupos de Artin para los que vale la conjetura del $K(\pi, 1)$ admiten un espacio clasificante finito [19]. En particular, esto implicaría que son libres de torsión.

- ¿Son los grupos de Artin CAT(0)? Se conjetura que lo son y se sabe que son CAT(0) en algunos casos. Más notablemente, los grupos de Artin right-angled son CAT(0) [19]. Hay otros ejemplos conocidos, pero no se sabe si otra de las familias mencionadas es CAT(0).

- Los problemas de la palabra y la conjugación: el problema de la palabra admite solución para todas las familias previamente mencionadas y más (ver [1, 4, 7, 16, 25, 37]), y se sabe que el problema de la conjugación admite solución para todas las familias mencionadas (ver [3, 16, 18, 28, 37, 57]).

- ¿Son los grupos de Artin biautomáticos? La biautomaticidad ha sido establecida para algunas familias de grupos de Artin, incluyendo los de tipo FC y los de tipo large (ver [13, 18, 44, 55, 58, 75]).

2.3. Subgrupos parabólicos

Una herramienta clave en el estudio de los grupos de Artin son sus subgrupos parabólicos. Sea Γ un grafo etiquetado que define un grupo de Artin y sea X un subconjunto de $V(\Gamma)$. Denotamos por Γ_X el subgrafo completo de Γ generado por X con el etiquetado inducido. Establecemos $\Sigma_X = \{\sigma_x \mid x \in X\}$ y denotamos por A_X el subgrupo de A generado por Σ_X. Un resultado notable de van der Lek [65] nos dice que A_X es naturalmente isomorfo a A_{Γ_X}, por lo que no diferenciaremos A_X de A_{Γ_X}. El subgrupo A_X se llama *subgrupo parabólico estándar* de A_Γ y un subgrupo conjugado a A_X se llama *subgrupo parabólico* de A_Γ.

El hecho de que los subgrupos parabólicos de los grupos de Artin sean a su vez grupos de Artin hace que desempeñen un papel central. La mayoría de las pruebas de los problemas y preguntas mencionadas en las secciones anteriores se basan en los subgrupos parabólicos de los grupos de Artin. Pueden considerarse como pequeños "bloques de construcciónz utilizarse para realizar pruebas de tipo inductivo. Su estructura también se utiliza en muchas construcciones geométricas, como el complejo de Deligne, el complejo de Artin, el complejo de Salvetti, el complejo clique-cube y otros (véase [19, 20, 21, 31, 78]).

Al ser tan importantes, entender su estructura algebraica se convierte en algo natural. Uno de los problemas que más interés ha suscitado en los últimos años es si son estables bajo intersección. Más concretamente, ¿es la intersección de dos subgrupos parabólicos un subgrupo parabólico? En [69] Möller, Paris y Varghese demuestran que si este es el caso, entonces cualquier in-

tersección arbitraria de subgrupos parabólicos de un grupo de Artin A_Γ es un subgrupo parabólico de A_Γ. Como corolario directo se obtiene que para cualquier subconjunto $B \subseteq A_\Gamma$ existe un único subgrupo parabólico mínimo (respecto a la inclusión) que contiene a B. Esto se suele llamar la *clausura parabólica* de B.

La respuesta a esta pregunta ya se sabía que era afirmativa para la intersección de subgrupos parabólicos estándar por van der Lek [65] y en el caso de los grupos trenza. Un grupo de trenzas sobre n hilos puede pensarse como el grupo mapping class de un disco punteado D_n con n pinchazos. Sus subgrupos parabólicos están en biyección con clases de isotopía de multicurvas cerradas simples no degeneradas en D_n. El complemento de cada una de estas multicurvas es una unión disjunta de discos perforados en D_n. En Farb y Margalit [39] se define una intersección entre estas familias de discos perforados. Esta intersección corresponde, a través de la biyección, a la intersección entre subgrupos parabólicos, y puede utilizarse para dar una respuesta afirmativa a la pregunta. También se sabía que la pregunta análoga era cierta para todos los grupos de Coxeter (ver Solomon [81]).

Todos los resultados anteriores motivaron el estudio de esta cuestión para los grupos generales de Artin. Se ha demostrado para productos gráficos de grupos (que generalizan a los grupos de Artin right-angled, ver Antolín y Minasyan [2]), y en particular para grupos de Artin de right-angled (ver Duncan, Kazachkov y Remeslennikov [38]). Más recientemente, Cumplido, Gebhardt, González-Meneses y Wiest [30] generalizaron el caso de los grupos trenzados a los grupos de Artin de tipo esférico utilizando la teoría de Garside. Combinando este resultado anterior con la estructura del complejo de Deligne, Morris-Wright [70] demostró que la intersección de dos subgrupos parabólicos de tipo esférico dentro de un grupo de Artin de tipo FC es un subgrupo parabólico de tipo esférico. Este último resultado ha sido extendido por Möller, Paris y Varghese [69], quienes mostraron que si la intersección de subgrupos parabólicos correspondientes a subgrafos de un subgrupo clique de Γ es un subgrupo parabólico, entonces la intersección de un subgrupo parabólico con un subgrupo parabólico correspondiente a un subgrupo de clique es un subgrupo parabólico.

En [31] Cumplido, Martin y Vaskou utilizaron un enfoque geométrico para resolver este problema para grupos de Artin de tipo large. Introdujeron un

complejo simplicial asociado a un grupo de Artin, llamado complejo de Artin, sobre el que el grupo de Artin actúa de forma cocompacta y sin inversiones. Resulta que este complejo es sistólico si el grupo de Artin es de tipo large. Utilizando las propiedades geométricas de los complejos sistólicos dieron una respuesta positiva a la pregunta. En el Capítulo 4 introduciremos los complejos sistólicos por función y utilizaremos su geometría para responder a la pregunta en el caso dos-dimensional (2,2)-libre (los grupos de Artin (2,2)-libres son aquellos cuyo grafo definitorio no tiene dos aristas consecutivas etiquetadas por 2).

Una pregunta relacionada con lo anterior es si un subgrupo parabólico P_1 de un grupo de Artin A_Γ contenido en otro subgrupo parabólico P_2 es un subgrupo parabólico de P_2. Más precisamente, si P_1 y P_2 son subgrupos parabólicos de un grupo de Artin A_Γ tal que $P_1 \subseteq P_2$, decimos que P_1 es un subgrupo parabólico de P_2 si $P_1 \subseteq P_2$ es conjugado a una inclusión $A_{X_1} \subseteq A_{X_2}$. Un grupo de Artin que satisface esta propiedad se llama *estandarisable* en [29]. Este resultado es preliminar a la cuestión anterior, y fue una cuestión planteada por Godelle [47, Conjetura 2]. Además, es un paso central para resolver el problema de la estabilidad de la conjugación para los grupos de Artin (ver Cumplido [29]). La cuestión parece obvia pero no lo es. También está relacionada con el estudio de los normalizadores y centralizadores de subgrupos parabólicos. En el Capítulo 5 5 demostramos esta conjetura. Enunciamos el teorema con más precisión.

Teorema 2.3.1. *Sea Γ un grafo simplicial finito, sea $m : E(\Gamma) \to \mathbb{N}_{\geq 2}$ un etiquetado, y sea $A = A_\Gamma$ el grupo de Artin de Γ. Sean $X, Y \subset V(\Gamma)$ y $\alpha \in A$ tales que $\alpha A_Y \alpha^{-1} \subset A_X$. Entonces existen $Y' \subset X$ y $\gamma \in A_X$ tales que $\alpha A_Y \alpha^{-1} = \gamma A_{Y'} \gamma^{-1}$.*

Corolario 2.3.2. *Sea $P_1 \subseteq \cdots \subseteq P_n$ una cadena de subgrupos parabólicos de un grupo de Artin A_Γ. Entonces existen $X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_n \subseteq V(\Gamma)$ y $g \in A_\Gamma$ tales que $P_i = g A_{X_i} g^{-1}$ para todo $1 \leq i \leq n$.*

Capítulo 3

Complejos estrictamente sistólicos angulados y small cancellation generalizada

La primera parte de este capítulo se refiere al contenido de [9] escrito junto con Gabriel Minian. Introducimos la noción de complejos estrictamente sistólicos angulados. Generalizan los complejos 7-sistólicos de [61] y sus contrapartes métricas, que aparecen como análogos naturales de los complejos simpliciales métricamente sistólicos de Huang y Osajda [57] en el contexto de curvatura negativa (ver el Capítulo 1 para las definiciones). Demostramos que los complejos estrictamente sistólicos angulados y los grupos que actúan sobre ellos geométricamente, junto con sus subgrupos finitamente presentados, son hiperbólicos. Finalmente, encontramos una condición de small cancellation para los grupos one-relator sin torsión que asegura que actúan geométricamente sobre un complejo estrictamente sistólico angulado (y por tanto son hiperbólicos).

En la segunda parte de este capítulo cubrimos el contenido de [10] escrito junto con Gabriel Minian e Iván Sadofschi Costa. Presentamos una condición métrica $\mathcal{T}'$ que describe la geometría de los grupos clásicos de small cancellation y se aplica también a otras clases conocidas de grupos como los grupos de Artin dos-dimensionales. Probamos que las presentaciones que satisfacen la condición $\mathcal{T}'$ son diagramáticamente reducibles en el sentido de Sieradski y

Gersten. En particular, deducimos que la presentación estándar de un grupo de Artin es asférica si y sólo si es diagramáticamente reducible. Demostramos que, bajo algunas hipótesis adicionales, los grupos $\mathcal{T}'$ tienen funciones de Dehn cuadráticas y admiten solución al problema de la conjugación. En el espíritu del lema de Greendlinger, demostramos que si una presentación $P = \langle X \mid R\rangle$ de un grupo G satisface las condiciones $\mathcal{T}' - C'(\frac{1}{2})$, la longitud de cualquier palabra no trivial en el grupo libre generado por X que representa al elemento trivial en G es al menos la de la relación más corta. También introducimos una condición métrica estricta $\mathcal{T}'_<$, que implica hiperbolicidad y amplía el trabajo del principio del capítulo. Estas dos condiciones surgieron como generalizaciones naturales de la condición (T'), con la intención de estudiarla en términos combinatorios.

3.1. Complejos estrictamente sistólicos angulados

Esencialmente, un complejo estrictamente sistólico angulado es un complejo combinatorio cuyas celdas son símplices, tal que su 2-esqueleto es un 2-complejo angulado no negativo en el sentido de Wise [88] y con una condición del link similar a la condición 2π-large de Huang y Osajda para complejos simpliciales métricamente sistólicos [57]. Esta nueva noción es lo suficientemente flexible como para incluir objetos de naturaleza combinatoria, como los complejos simpliciales 7-sistólicos de Januszkiewicz y Świątkowski [61], y también de naturaleza geométrica, como una variación, para curvatura negativa, de los complejos simpliciales métricamente sistólicos de Huang y Osajda.

Un *complejo cuasi-simplicial* es un complejo combinatorio X cuyas celdas cerradas son símplices y tal que diferentes 2-símplices no tienen dos o más aristas en común. Observar que los complejos cuasi-simpliciales no tienen bucles, ya que las celdas cerradas son símplices. Esta noción es menos rígida que la de complejo simplicial, ya que admitimos múltiples aristas entre vértices. Se supone que todos los complejos que tratamos en este capítulo son localmente finitos. Decimos que un complejo cuasi simplicial X es *3-flag* si cada vez que X tiene tres caras de un tetraedro, entonces todo el tetraedro está en X (y en particular, la cuarta cara está en X). Notar que un complejo simplicial flag

es, en particular, un complejo cuasi-simplicial 3-flag.

Al igual que en [41, 88], definimos una *función de peso* ω sobre los *corners* de los 2-simplices de X. Dado un vértice $v \in X$ denotamos por $\mathrm{lk}_X(v)$ al *link geométrico* de v en el 2-esqueleto $X^{(2)}$. Recordemos que $\mathrm{lk}_X(v)$ es el grafo correspondiente a una esfera épsilon alrededor del vértice v en $X^{(2)}$. Los ángulos del 2-esqueleto corresponden a las aristas del link, y la función ω asigna un valor no negativo a cada arista en $\mathrm{lk}_X(v)$ para cada vértice $v \in X$ (es decir, el 2-esqueleto $X^{(2)}$ es un 2-complejo angulado no negativo en el sentido de [88]). Requerimos que la imagen de ω sea finita y que ω satisfaga una desigualdad triangular débil: para cualquier vértice v, si α_{ij} es una arista en $\mathrm{lk}_X(v)$ desde v_i hasta v_j entonces $\omega(\alpha_{13}) \leq \omega(\alpha_{12}) + \omega(\alpha_{23})$. El complejo X junto con una función de peso fija se llama un *complejo angulado*.

Siguiendo a Huang y Osajda [57], decimos que un ciclo simple σ de longitud mayor que 3 en el enlace de un vértice $venX$ es 2-*full* si no hay ninguna arista en $\mathrm{lk}_X(v)$ que conecte dos vértices que tengan un vecino común en σ. La longitud angular de un camino en el link de un vértice en un complejo angular es la suma de los pesos de sus aristas, contados con multiplicidad. Un complejo angulado X es *localmente* 2π*-large* si cada ciclo 2-full en cada link de un vértice tiene longitud angular mayor o igual a 2π.

Definición 3.1.1. Un complejo angulado simplemente conexo, localmente 2π-large, 3-flag, en el que la suma de los pesos internos de cada triángulo es (estrictamente) menor a π se llama un *complejo estrictamente sistólico angulado*.

Mostraremos que los complejos estrictamente sistólicos angulados satisfacen una desigualdad isoperimétrica lineal. Como consecuencia, los grupos que actúan geométricamente sobre complejos angulares estrictamente sistólicos son hiperbólicos. La prueba seguirá las ideas de Gersten [41], Huck y Rosebrock [59], Wise [88], Januszkiewicz y Świątkowski [61], y Huang y Osajda [57].

Al igual que en la teoría de la small cancellation, trabajamos con diagramas en este contexto. Un *disco singular* es un 2-complejo combinatorio simplemente conexo y planar cuyas celdas son símplices. Llamamos a un mapa simplicial si lleva símplices a símplices (no necesariamente de la misma dimensión). Explícitamente, un mapa es simplicial si lleva vértices a vértices,

siempre que los vértices generen un símplex entonces sus imágenes lo hacen, y la restricción del mapa a cada símplex es lineal. Sea X un complejo estrictamente sistólico angulado, y sea $\gamma : S \to X^{(1)}$ un mapa combinatorio desde una triangulación de S^1 al 1-esqueleto de X. Su imagen es un camino de aristas cerrado en X que también denotaremos por γ. Un *diagrama singular* para γ es un mapa simplicial $f : D \to X$ desde un disco singular tal que $f|_{\partial D} = \gamma$.

Observar que como X es simplemente conexo, todo camino de aristas cerrado en X admite un diagrama singular. Esto es una consecuencia directa del teorema de aproximación simplicial relativa (ver [90]).

Definimos el área de un camino de aristas cerrado $\gamma : S \to X$ como

$$\text{Area}(\gamma) = \text{mín}\{|D| : f : D \to X \text{ es un diagrama singular para } \gamma\},$$

donde $|D|$ denota el número de caras (2-símbolos) en el correspondiente disco singular D. La longitud $l(\gamma)$ de un camino de aristas cerrado $\gamma : S \to X$ es el número de aristas en S. Nuestro objetivo es demostrar que existe una constante $K > 0$ tal que $\text{Area}(\gamma) \leq Kl(\gamma)$ para todo camino de aristas cerrado γ. Para demostrar esto necesitaremos diagramas que se comporten bien. Se dice que un diagrama singular es *no degenerado* si es inyectivo en cada símplex.

Lema 3.1.2 ([61], Lema 1.6)**.** *Sea γ un camino de aristas cerrado homotópicamente trivial en un complejo cuasi-simplicial X. Entonces existe un diagrama singular no degenerado para γ.*

Januszkiewicz y Świątkowski demostraron este lema en el caso en que X es un complejo simplicial y γ es un camino simple, pero la demostración es válida para γ un camino de aristas cerrado arbitrario como el definido anteriormente. La utilizaremos en su forma original en el Capítulo 4. En la primera parte de su prueba muestran que un diagrama singular, que ellos llaman *casi simplicial*, puede ser modificado para ser no degenerado. La prueba se basa en el hecho de que el mapa del disco al complejo es simplicial. La misma prueba funciona cuando X es un complejo cuasi-simplicial, ya que los mapas definitorios de nuestros diagramas singulares también son simpliciales (en el sentido de que llevan a los símplices hacia los símplices). Además, demostraron que, en el caso simplicial, los diagramas no degenerados pueden modificarse aún más para convertirse en simpliciales. En nuestro caso, como

X es cuasi-simplicial, no podemos modificar los diagramas no degenerados para convertirlos en simpliciales.

Por el Lema 3.1.2 podemos suponer que los diagramas $f : D \to X$ son no degenerados. Ahora adoptamos la terminología de Huck y Rosebrock [59]. Dado un diagrama singular $f : D \to X$, decimos que es *vertex reduced* si mapea el link de cada vértice de D a un camino en el link de un vértice en X en el que ninguna arista se pasa dos veces en direcciones opuestas. Supongamos que tenemos un diagrama no vertex reduced $f : D \to X$, siendo X un complejo estrictamente sistólico angulado. Si nos encontramos en la situación en la que un link problemático tiene dos aristas, el diagrama tiene localmente el aspecto de la Figura 3.1. Podemos identificar las aristas e_1 y e_2 y colapsar las caras correspondientes para obtener un nuevo diagrama. Llamamos a este movimiento una reducción de aristas"(ver la figura reducción de aristas").

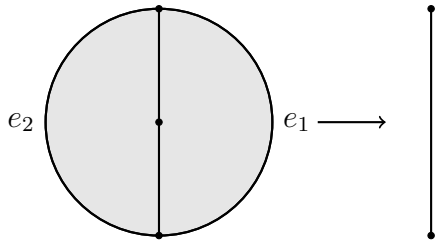

Figura 3.1: Reducción de aristas.

Si el link tiene más de dos aristas, podemos aplicar una secuencia de movimientos de diamante como en [26, 59], seguido de una reducción de aristas. Esto se muestra en la Figura 3.2. Observar que, si el diagrama no es vertex reduced, hay un vértice v y dos triángulos en D que son incidentes a v que se mapean al mismo triángulo en X. En particular, hay dos pares de aristas tales que cada par se mapea a una sola arista. Uno de estos pares se muestra en la Figura 3.2. Para una exposición detallada de los movimientos de diamante ver [26].

Notar que estos movimientos reducen el número de caras del diagrama. Por lo tanto, partiendo de un diagrama singular no degenerado, podemos obtener un diagrama singular no degenerado y vertex reduced con la misma frontera. Sea $f : D \to X$ un diagrama vertex reduced no degenerado y v un

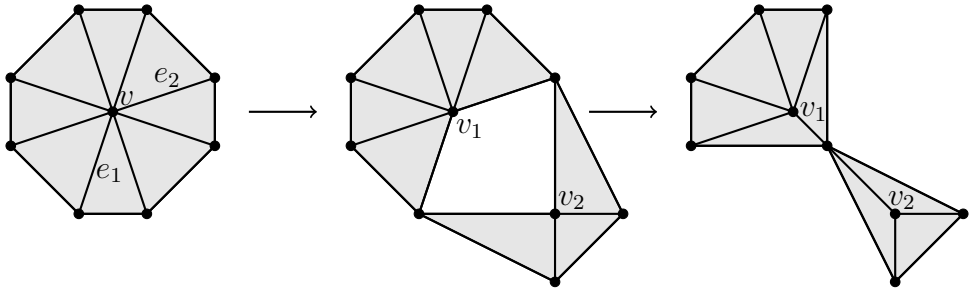

Figura 3.2: Movimiento de diamante. Las aristas e_1 y e_2 se cortan y luego se pegan de manera diferente.

vértice interior de D. El link de v es un grafo y puede descomponerse como $\mathrm{lk}_D(v) = \cup_{i=1}^{n} C_i$, donde cada C_i es una unión de aristas, las intersecciones por pares de los C_i están vacías o contienen sólo vértices, y $f(C_i)$ es un ciclo simple en $\mathrm{lk}_X(f(v))$ para cada $1 \leq i \leq n$ (ver [59, 2. 2]). En este caso, decimos que $f(\mathrm{lk}_D(v))$ admite una *descomposición en ciclos simples*. La discusión anterior puede resumirse en el siguiente lema.

Lema 3.1.3. *Sea $f : D \to X$ un diagrama singular no degenerado para un camino cerrado de aristas γ en un complejo cuasi-simplicial X. Entonces puede ser modificado para obtener un diagrama singular no degenerado vertex reduced para γ. Más aún, la imagen del link de cada vértice interior admite una descomposición en ciclos simples.*

Lema 3.1.4. *Sean X un complejo estrictamente sistólico angulado, v un vértice de X y σ un ciclo simple en $\mathrm{lk}_X(v)$. Entonces $\sum_{c\in\sigma} \omega(c) \geq 2\pi$ o σ es la frontera de un disco triangulado sin vértices interiores, cuyas aristas se mapean al link simplicial de v en X.*

Demostración. Procedemos por inducción en la longitud de σ. No hay ciclos con dos aristas, porque X es cuasi-simplicial. Si tiene tres aristas, entonces σ es un triángulo y se llena porque X es 3-flag, por lo que la afirmación se mantiene. Supongamos que σ tiene más de tres aristas. Si es 2-full, entonces tiene longitud angular mayor o igual a 2π. Si no es 2-full, entonces existe una arista e en $\mathrm{lk}_X(v)$ que conecta dos vértices de σ con un vecino común. Esta arista subdivide σ en dos caminos: uno de longitud 2, y otro de longitud $l(\sigma)-2$, que llamamos σ_1 y σ_2 respectivamente (ver Figura 3.3). Por hipótesis

inductiva, $\sigma_2 \cup e$ o bien se subdivide en triángulos o bien tiene una longitud angular mayor o igual que 2π. Si se subdivide, induce una subdivisión para σ. Si no lo hace, por la desigualdad triangular tenemos

$$2\pi \leq \sum_{c \in \sigma_2 \cup e} \omega(c) \leq \sum_{c \in \sigma_2 \cup \sigma_1} \omega(c) = \sum_{c \in \sigma} \omega(c). \qquad \square$$

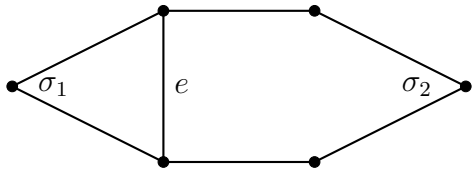

Figura 3.3: Subdividiendo σ.

Lema 3.1.5. *Sean X un complejo estrictamente sistólico angulado y $f : D \to X$ un diagrama singular no degenerado vertex reduced para un camino cerrado de aristas γ. entonces existe un diagrama singular no degenerado vertex reduced $g : \tilde{D} \to X$ para γ tal que la imagen por g de los links de los vértices interiores de $\tilde{D}$ admite una descomposición en ciclos simples de longitud angular mayor o igual a 2π.*

Demostración. Sea v un vértice interior de D. Por el lema 3.1.3, la imagen de su link admite una descomposición en ciclos simples. Supongamos que uno de esos ciclos simples en la descomposición de $f(\mathrm{lk}_D(v))$, llamémoslo σ, tiene longitud angular menor que 2π. Si σ no es el único ciclo simple en la descomposición de $f(\mathrm{lk}_D(v))$, entonces existen dos aristas e_1 y e_2 incidentes en v que satisfacen $f(e_1) = f(e_2)$. Mediante un movimiento de diamante, podemos obtener un nuevo diagrama singular no degenerado $f' : D' \to X$ para γ con el mismo número de caras y nuevos vértices v_1 y v_2 (ver Figura 3.2). Por tanto, podemos suponer que σ es el único ciclo simple en la descomposición de $f(\mathrm{lk}_{D'}(v_1))$. Como su longitud angular es menor que 2π, por el lema 3.1.4 se subdivide en triángulos en $\mathrm{lk}_X(f(v_1))$. Esto se corresponde con la situación mostrada en la Figura 3.4. Como X es 3-flag, podemos modificar f eliminando el vértice problemático v_1, como se muestra en la Figura 3.5.

Después de aplicar este cambio, obtenemos un nuevo diagrama singular no degenerado para γ con menos caras. Luego podemos hacerlo vertex reduced

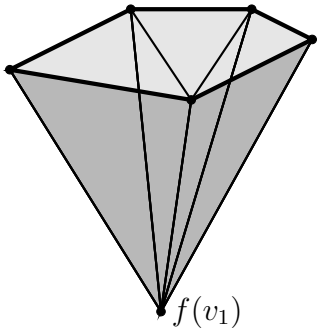

Figura 3.4: el ciclo σ se subdivide en $\mathrm{lk}_X(f(v_1))$.

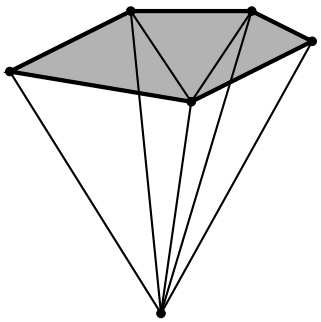

Figura 3.5: Removemos v_1.

reduciendo el número de caras una vez más, y continuando con este proceso. Como el número de caras decrece en cada paso, el proceso termina y obtenemos un diagrama singular no degenerado y vertex reduced $g : \tilde{D} \to X$ para γ, que satisface la condición deseada. □

Los argumentos anteriores pueden ser hechos en términos de diagramas minimales. Un diagrama para un camino de aristas cerrado γ es *minimal* si tiene la menor cantidad de triángulos. De los lemas anteriores no es difícil deducir lo siguiente.

Lema 3.1.6. *Sean X un complejo estrictamente sistólico angulado y $f : D \to X$ un diagrama singular minimal para un camino cerrado de aristas γ. Entonces f es no degenerado, vertex reduced y la imagen por f de los links de los vértices interiores de $\tilde{D}$ admiten una descomposición en ciclos simples de longitud angular mayor o igual a 2π.*

En el Capítulo 4 trabajaremos con diagramas minimales en lugar de modificar los diagramas. Creemos que ambos enfoques son fructíferos y por eso hemos decidido incluirlos.

Si X es un complejo estrictamente sistólico angulado y $f : D \to X$ es un diagrama singular con f no degenerado, podemos pullbackear los pesos de los corners de X a D. Aplicaremos el teorema combinatorio de Gauss–Bonnet al complejo angulado D. Como su nombre indica, este teorema relacionará la curvatura combinatoria de un complejo con su característica de Euler de la misma manera que el teorema clásico para las variedades Riemannianas. Recordamos primero algunas nociones combinatorias de curvatura de [88].

Definición 3.1.7. Sea L un 2-complejo angulado cuyas celdas son símplices. Si v es un vértice de L, la curvatura de v se define como

$$\kappa(v) = 2\pi - \pi\chi(\mathrm{lk}_L(v)) - \sum_{c \in v} \omega(c).$$

donde la suma es sobre todos los corners de v, y χ denota la característica de Euler. La curvatura de una cara (2-símplex) F es

$$\kappa(F) = (\sum_{c \in F} \omega(c)) - \pi,$$

donde la suma es sobre todos los corners en F.

Teorema 3.1.8 (Teorema de Gauss–Bonnet Combinatorio [5, 88])**.** *Sea L un 2-complejo angulado finito. Entonces*

$$\sum_{F \in caras(L)} \kappa(F) + \sum_{v \in L^{(0)}} \kappa(v) = 2\pi\chi(L).$$

Ahora estamos listos para probar la desigualdad isoperimétrica lineal.

Teorema 3.1.9. *Sea X un complejo estrictamente sistólico angulado. Entonces existe una constante $K > 0$ tal que*

$$\mathrm{Area}(\gamma) \leq Kl(\gamma),$$

para todo camino de aristas cerrado γ en X.

Demostración. Encontraremos una constante positiva K tal que para cualquier camino de aristas cerrado γ, existe un diagrama singular $g : D \to X$ para γ con $|D| \leq Kl(\gamma)$. Dado γ, tomamos un diagrama singular $g : D \to X$ no degenerado y vertex reduced que satisfaga las condiciones del Lema 3.1.5. Como g es no degenerado, podemos pullbackear ω a D a través de g. Como la suma de los pesos internos de cada cara de X es menor que π, entonces $\kappa(F) < 0$ para cada cara F de D. Además, como la imagen de ω es finita, $\kappa(F) \leq M < 0$, donde M es el máximo de las sumas de los triples de pesos que suman menos que π, menos π. Notar que M es independiente de g, D y γ, y estrictamente negativo. La imagen del link de cada vértice interior admite una descomposición en ciclos simples de longitud angular mayor o igual a π. Entonces $\kappa(v) \leq 0$ si v es un vértice interior de D. Ahora aplicamos el teorema combinatorio de Gauss–Bonnet a D y obtenemos

$$M|D| \geq \sum_{F \in \text{caras}(D)} \kappa(F) = 2\pi\chi(D) - \sum_{v \in D^{(0)}} \kappa(v) = 2\pi - \sum_{v \in D^{(0)}} \kappa(v),$$

y por lo tanto

$$|D| \leq \frac{1}{-M}\Big(\sum_{v \in D^{(0)}} \kappa(v) - 2\pi\Big) \leq \frac{1}{-M}\Big(\sum_{v \in \partial D^{(0)}} \kappa(v) - 2\pi\Big),$$

donde ∂D denota la frontera de D. Notar que el número de vértices en ∂D es menor o igual a $l(\gamma)$. Como los enlaces de los vértices en ∂D tienen característica de Euler mayor o igual a 1, y como el peso es no negativo, su curvatura es como máximo π. Fijando $K = \frac{\pi}{-M}$, obtenemos $|D| \leq Kl(\gamma)$. □

En base al Teorema 3.1.9, y por [15, III.2.9], obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 3.1.10. *El 1-esqueleto $X^{(1)}$ de un complejo estrictamente sistólico angulado X con su métrica geodésica estándar es hiperbólico. Más generalmente, si le damos a X una métrica euclidiana a trozos con* Shapes(X) *finito, entonces X es hiperbólico.*

Un grupo Γ que actúa propiamente y cocompactamente por automorfismos simpliciales sobre un complejo estrictamente sistólico angulado, y tal que la función de peso es Γ-invariante se llama un grupo *estrictamente sistólico.*

Notar que, al igual que en [57, Teorema 3.1], ya que la clase de los complejos angulares localmente 2π-large, 3-flag es cerrada al tomar subcomplejos full y revestimientos, por [53, Teorema 1.1] subgrupos finitamente presentados de los grupos estrictamente sistólicos son estrictamente sistólicos. Del Corolario 3.1.10 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.1.11. *Los grupos estrictamente sistólicos son hiperbólicos. Más aún, todos los subgrupos finitamente presentados de un grupo estrictamente sistólico son estrictamente sistólicos, y por lo tanto, hiperbólicos.*

Notar que en el Corolario 3.1.10, los ángulos (o pesos) del complejo estrictamente sistólico angulado X son independientes de la métrica. Sin embargo, si se nos da un complejo simplicial o cuasi-simplicial X con una métrica euclidiana o hiperbólica a trozos sobre el esqueleto $X^{(2)}$, podemos definir una función de peso para X. Si X satisface una condición del link "suficientemente buena", esta función de peso hace que X sea un complejo estrictamente sistólico angulado. La siguiente definición es análoga a la noción de complejo métricamente sistólico (ver la Sección 1.4) introducida por Huang y Osajda [57].

Definición 3.1.12. Un complejo *estrictamente métricamente sistólico* es un complejo cuasi-simplicial X simplemente conexo y 3-flag, tal que su 2-esqueleto está dotado de una métrica hiperbólica a trozos o de una métrica euclidiana a trozos (con shapes finitos) y tal que la distancia angular inducida en los links de los vértices satisface la desigualdad triangular débil y los links de los vértices (con la distancia angular) son 2-large en el caso hiperbólico o estrictamente 2-large en el caso euclidiano. Es decir, cada ciclo 2-full tiene una longitud angular mayor o igual a 2π (resp. mayor a 2π).

Notar que la diferencia entre esta definición y la de sistolicidad métrica dada en la Definición 1.4.1 es que, en nuestro caso, o bien la métrica es hiperbólica a trozos en ligar de euclidiana a trozos o, en el caso euclidiano, la longitud de los ciclos 2-full es estrictamente mayor que 2π.

Proposición 3.1.13. *Los complejos estrictamente métricamente sistólicos son complejos estrictamente sistólicos angulados.*

Demostración. En el caso hiperbólico a trozos, la métrica induce una función de peso ω en X. La suma de los pesos internos de cada triángulo es menor que π, ya que la métrica es hiperbólica a trozos. Entonces X junto con ω es un complejo angular estrictamente sistólico.

En el caso euclidiano a trozos, dado que $X^{(2)}$ tiene shapes finitos, existe $L > 2\pi$ tal que cada ciclo 2-full tiene una longitud angular mayor o igual a L. Entonces podemos definir un peso apropiado en los ángulos restando a cada ángulo un $\delta > 0$ suficientemente pequeño. □

Los Corolarios 3.1.10 y 3.1.11 generalizan los resultados de Januszkiewicz y Świątkowski's sobre complejos simpliciales y grupos 7-sistólicos [61, Teorema 2.1 y Corolario 2.2] (ver Sección 1.3 para definiciones). Se sigue de su definición que los ciclos 2-full en un complejo 7-sistólico tienen al menos siete aristas. Luego, cualquier complejo 7-sistólico X junto con la función de peso que asigna $\frac{2}{7}\pi$ a cada corner, es un complejo estrictamente sistólico angulado.

3.2. Aplicación a grupos one-relator

Utilizamos complejos estrictamente sistólicos angulados para investigar la geometría de los grupos one-relator. Es bien sabido que todos los grupos one-relator con torsión son hiperbólicos. Este es un corolario inmediato del Teorema de Spelling de Newman. Recordemos que un grupo one-relator tiene torsión si y sólo si su relación es una potencia propia (ver [64]). Por otro lado, la geometría de los grupos one-relator sin torsión es más intrincada. Ivanov y Schupp describieron la hiperbolicidad en algunas clases de grupos one-relator [60]. Más recientemente Marco Linton demostró que los grupos one-relator con inmersiones negativas son hiperbólicos [66].

Como se ha visto en la sección 1.5, las condiciones $C'(\frac{1}{6})$ y $C'(\frac{1}{4})-T(4)$ implican hiperbolicidad (ver [44, 50]). Introducimos una hipótesis de small cancellation más débil $C'(\frac{1}{4})-(T')$, que generaliza tanto $C'(\frac{1}{6})$ como $C'(\frac{1}{4})-T(4)$, y mostramos que basta para demostrar la hiperbolicidad de grupos one-relator. Incluimos algunos ejemplos que ilustran este resultado y lo comparamos con las condiciones clásicas.

Dado que todos los grupos one-relator con torsión son hiperbólicos, consideraremos sólo los grupos one-relator sin torsión. Están dados por presenta-

ciones $P = \langle \mathcal{A} \mid R \rangle$, donde $\mathcal{A}$ es finito y R es una palabra cíclicamente reducida que no es una potencia propia. Notar que ninguna subpalabra propia de R es trivial en el grupo presentado Γ (ver [86, Teorema 2]). Esto nos dice que las 2-celdas del revestimiento universal del complejo de la presentación no se auto-intersecan.

En el caso de las presentaciones one-relator, la condición $T(4)$ puede replantearse como sigue: la palabra reducida cíclicamente R no contiene piezas W_1, W_2, W_3 tales que W_1W_2, W_1W_3 y $W_2^{-1}W_3$ son subpalabras no vacías de R o R^{-1} o cualquier permutación cíclica de las mismas. Aplicaremos el Corolario 3.1.11 para demostrar que $C'(\frac{1}{4})$ junto con una condición mucho más débil que $T(4)$ garantiza la hiperbolicidad de los grupos one-relator. A diferencia de la condición $T(4)$, permitimos la existencia de piezas W_1, W_2 y W_3 tales que W_1W_2, W_1W_3 y $W_2^{-1}W_3$ son subpalabras no vacías, pero imponemos una condición sobre sus longitudes. Concretamente, la condición $T(4)$ se sustituye por la más débil *Condición (T')*.

Condición (T'): Si existen piezas W_1, W_2, W_3 de R tales que W_1W_2, W_1W_3 y $W_2^{-1}W_3$ son subpalabras no vacías de R o R^{-1} o cualquier permutación cíclica de las mismas, entonces $l(W_1) + l(W_2) + l(W_3) < \frac{l(R)}{2}$.

Teorema 3.2.1. *Sea Γ un grupo one-relator con presentación $P = \langle \mathcal{A} \mid R \rangle$. Si P satisface la condición métrica de small cancellation $C'(\frac{1}{4})$ y la Condición (T'), entonces Γ es hiperbólico.*

Notar que una presentación one-relator $C'(\frac{1}{6})$ automáticamente satisface la Condition (T'), ya que

$$l(W_1) + l(W_2) + l(W_3) < \frac{l(R)}{6} + \frac{l(R)}{6} + \frac{l(R)}{6} = \frac{l(R)}{2}$$

Antes de seguir con la demostración, vamos a ilustrar el resultado con un ejemplo.

Ejemplo 3.2.2. Consideremos la presentación

$$P = \langle a, b | a^4b^{-1}a^{-1}b^{-1}a^4baba^{-1}ba^{-1}bglangle.$$

El grupo presentado satisface las hipótesis del teorema y, por tanto, es hiperbólico. Notar que no es $C(7)$ (en particular, no es $C'(\frac{1}{6})$) ni $T(4)$. Tampoco satisface ninguna prueba de peso hiperbólico [41, 59] y no está en ninguna de las familias clasificadas por Ivanov y Schupp [60].

Para demostrar el Teorema **??**, construiremos un complejo estrictamente sistólico angulado X a partir de P, sobre el que Γ actúa propiamente y cocompactamente por automorfismos simpliciales, y tal que su función de peso es Γ-invariante. Esta construcción está inspirada en la construcción de Huang y Osajda para grupos de Artin [57], pero adaptada a la geometría de los grupos one-relator.

Comenzamos con la construcción del complejo X. Sea $r = l(R)$. Podemos suponer que $r \geq 4$, ya que Γ es libre (y por tanto hiperbólico) cuando $r \leq 3$. Sea K_P el 2-complejo estándar asociado a P. Recordemos que K_P tiene una 0-celda, una 1-celda por cada generador $a \in \mathcal{A}$ y una 2-celda correspondiente a la palabra R. Denotamos por $\tilde{K}_P$ a su revestimiento universal. Siguiendo la terminología de [57], las 2-celdas cerradas de $\tilde{K}_P$ (correspondientes a todos los levantamientos de la única 2-celda de K_P) se llamarán preceldas. Observar que, como ninguna subpalabra propia de R es trivial en Γ (ver [86, Teorema 2]), las preceldas están embebidas en $\tilde{K}_P$. Es decir, sus bordes no tienen auto-intersecciones. Triangulamos cada preceldas de $\tilde{K}_P$ añadiendo un vértice central. Llamaremos a estos nuevos vértices *centrales*, para distinguirlos de los vértices *originales* de $\tilde{K}_P$.

Ahora bien, si dos preceldas se cruzan, lo hacen en una unión disjunta de vértices y caminos. Esto se debe a que ninguna subpalabra propia de R es trivial en Γ. Observar que cada intersección, cuando no es un solo vértice, equivale a una pieza en R. Sean C_1 y C_2 dos preceldas que se intersecan con sus correspondientes centros c_1 y c_2. Por cada componente conexa de su intersección añadimos una arista entre c_1 y c_2. Notar que puede haber más de una arista entre dos centros. Sean $v_1, \ldots, v_k$ los vértices de una componente de la intersección. Entonces, para cada i añadimos también triángulos con vértices $\{c_1, c_2, v_i\}$ (una de las aristas de la frontera del triángulo es la arista correspondiente entre los centros). Rellenamos los tetraedros necesarios para que el complejo sea 3-flag (ver Figura 3.6).

Si tres preceldas C_1, C_2 y C_3 se cruzan, añadimos triángulos con vértices en los tres centros (uno por cada componente de $C_1 \cap C_2 \cap C_3$) y los tetraedros necesarios para que el complejo resultante sea 3-flag. Denotamos por X al complejo que obtenemos. Intuitivamente, estamos rellenando el complejo en los vértices originales, eliminando toda posible curvatura no negativa de los vértices originales. A su vez, ahora tenemos que entender la curvatura en

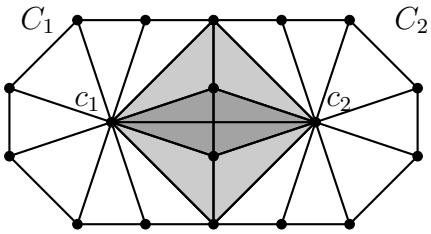

Figura 3.6: Intersección de dos preceldas.

los nuevos vértices centrales. Observar que X es cuasi-simplicial ya que la presentación satisface, en particular, la condición métrica $C'(\frac{1}{2})$. Está claro que X es 3-flag por construcción. Notar que Γ actúa de forma simplicial, propia y cocompacta sobre X ya que las modificaciones que hicimos sobre $\tilde{K}_P$ son Γ-equivariantes.

Lema 3.2.3. *El complejo X es simplemente conexo.*

Demostración. En primer lugar, observamos que X se obtiene de (una subdivisión de) $\tilde{K}_P$ añadiendo aristas, triángulos y tetraedros. Sea e una arista en X que no está en $\tilde{K}_P$. Entonces conecta los vértices centrales de dos preceldas diferentes. Por construcción, existe un triángulo o un tetraedro por el que e es homotópico a un camino en $\tilde{K}_P$ con los mismos vértices. Por tanto, como $\tilde{K}_P$ es simplemente conexo, también lo es X. □

Ahora definimos una función de peso ω sobre X y estudiamos bajo qué condiciones (X, w) es un complejo estrictamente sistólico angulado. Mostraremos a continuación que, por construcción de X, los links de los vértices originales de X no tienen ciclos 2-full. Por tanto, sólo tenemos que controlar los pesos de los corners en los vértices centrales y la suma de los ángulos internos de los triángulos. Hay tres tipos de triángulos en X:

1. triángulos que vienen de la subdivisión de una precelda,
2. triángulos con dos vértices centrales,
3. triángulos con tres vértices centrales.

Recordemos que r denota la longitud de la relación R. Si el triángulo es del tipo (1), entonces el peso asignado al ángulo del vértice central es $\frac{2\pi}{r}$, y los pesos de los otros dos son 0.

Si el triángulo es del tipo (2), el peso de los dos ángulos centrales es $\frac{l}{r}\pi$, donde l es la longitud de la componente de la intersección correspondiente a ese triángulo. El ángulo restante es igual a 0.

Si el triángulo es del tipo (3), corresponde a la intersección de tres preceldas C_1, C_2 y C_3 con centros c_1, c_2 y c_3. Sea l_{12} la longitud de la componente de la intersección entre C_1 y C_2. Análogamente definimos l_{13}, l_{23} y l_{123} (la longitud de la componente de $C_1 \cap C_2 \cap C_3$). Observar que si $l_{123} \neq 0$, entonces es igual al mínimo de l_{12}, l_{13} y l_{23}. Los pesos de los ángulos en c_1, c_2 y c_3 son $\frac{1}{r}(l_{12}+l_{13}-2l_{123})\pi$, $\frac{1}{r}(l_{12}+l_{23}-2l_{123})\pi$ y $\frac{1}{r}(l_{13}+l_{23}-2l_{123})\pi$ respectivamente. La suma de los ángulos es $\frac{1}{r}(2l_{12}+2l_{13}+2l_{23}-6l_{123})\pi$, que es menor que π si la presentación es $C'(\frac{1}{4})$ y si, siempre que la intersección de las tres celdas sea un vértice, $l_{12}+l_{13}+l_{23} < \frac{r}{2}$, que es la condición (T').

En estas circunstancias, todos los triángulos tienen un peso interno menor que π, y se ve fácilmente que se satisface la desigualdad triangular. También se ve que la función de peso ω es Γ-invariante.

Lema 3.2.4. *El complejo angulado X con función de peso ω es localmente 2π-large.*

Demostración. Analizamos los links de los vértices en X y sus ciclos 2-full. Hay dos tipos de vértices en X. Los vértices originales (vértices de $\tilde{K}_P$) y los vértices centrales. Observar que los links de dos vértices cualesquiera del mismo tipo son isomorfos, por lo que necesitamos verificar sólo dos casos.

Primero estudiamos los links de los vértices centrales (ver la Figura 3.7). Sea c un vértice central de una precelda C. Su enlace tiene dos tipos de vértices:

(i) aquellos que vienen de aristas de la triangulación de C,

(ii) aquellos que corresponden a aristas entre c y otro vértice central.

Sea σ un ciclo 2-full en $\mathrm{lk}(c)$. Veremos que su longitud angular es mayor o igual a 2π. Examinamos los posibles casos.

Case 1 Si σ solo pasa por vértices de tipo (i), entonces σ es un círculo de longitud angular 2π.

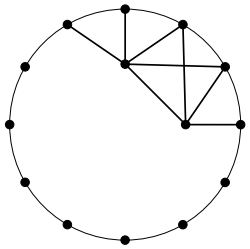

Figura 3.7: El link de un vértice central. Los vértices de tipo (i) se encuentran en el círculo exterior, y los vértices de tipo (ii) en el interior.

Case 2 Supongamos que σ sólo pasa por vértices de tipo (ii). Esos vértices corresponden a caminos en la frontera de la precelda. Notar que estos caminos son componentes conexas de las intersecciones de esta precelda con otras preceldas. Cada camino interseca a otros dos caminos (porque σ es un ciclo) y no hay tres caminos que tengan intersección común (porque σ es 2-full). Por lo tanto su unión cubre el borde de la precelda. Sean $s_1, \ldots, s_k$ esos caminos. Entonces la longitud angular de σ es igual a

$$\frac{(l(s_1) + l(s_2) - 2l(s_1 \cap s_2)) + \cdots + (l(s_k) + l(s_1) - 2l(s_k \cap s_1))}{r}\pi.$$

Por un argumento de inclusión-exclusión esto es exactamente 2π.

Case 3 Por último, supongamos que σ pasa por vértices de ambos tipos. Dada una orientación para σ, sea v_1 un vértice de tipo (i) tal que el siguiente vértice en σ, digamos u, sea de tipo (ii). Sea v_2 el siguiente vértice de tipo (i) que aparece siguiendo esta orientación (notar que $v_1 \neq v_2$ ya que σ es de tipo 2). El vértice u es adyacente a algunos vértices de tipo (i) $v'_1, \ldots, v'_l$ entre v_1 y v_2. Denotemos por $[v_1, v_2]$ al camino de aristas que pasa sólo por vértices de tipo (i) que conecta v_1 con v_2 y que contiene $v'_1, \ldots, v'_l$. Los contiene a todos porque σ es de tipo 2. Por un argumento análogo al del caso 2, el subcamino de σ que va de v_1 a v_2 tiene longitud angular mayor o igual que $\frac{2l([v_1,v_2])}{r}\pi$. Inductivamente, el subcamino restante de σ tiene una longitud angular mayor o igual a $\frac{2(r-l([v_1,v_2]))}{r}\pi$. Por lo tanto σ tiene una longitud angular mayor o igual a 2π.

Por último analizamos los links de los vértices originales. Por la definición de X, el link de cualquier vértice original en el 2-esqueleto X se obtiene a partir del link del vértice en el revestimiento universal $\tilde{K}_P$ subdividiendo

todas las aristas (añadiendo un nuevo vértice en cada arista del link original), y añadiendo luego todas las aristas entre todos los pares de nuevos vértices del link. En particular, los links de los vértices originales en $X^{(2)}$ no tienen ciclos 2-full, y por lo tanto la condición del link alrededor de estos vértices se satisface automáticamente. □

Demostración de Teorema 3.2.1. Por la discusión previa y los Lemas 3.2.3 y 3.2.4, X es un complejo estrictamente sistólico angulado en el que Γ actúa propia y cocompactamente por automorfismos simpliciales, y su función de peso es Γ-invariante. Por lo tanto, por el Corolario 3.1.11 Γ es hiperbólico. □

Observar que, por el Corolario 3.1.11, todos los subgrupos finitamente presentados de los grupos one-relator Γ del Teorema 3.2.1 son también hiperbólicos. Este hecho también puede deducirse del Teorema 3.2.1 por un resultado conocido de Gersten sobre subgrupos finitamente presentados de grupos hiperbólicos de dimensión 2 [43]. Recordemos que los grupos one-relator sin torsión tienen dimensión cohomológica 2.

Ejemplo 3.2.5. La construcción que introdujimos en la demostración del Teorema 3.2.1 también puede aplicarse para probar la hiperbolicidad de grupos one-relator que no satisfacen las hipótesis del teorema. Un tal ejemplo es el grupo presentado por $\langle a, t | at^{-1}ata^2t^{-2}a^{-1}t^2\rangle$. Este grupo aparece en [63], donde se prueba que es hiperbólico utilizando técnicas diferentes.

3.3. Condition $\mathcal{T}'$

En esta sección definimos las condiciones $\mathcal{T}'$ y $\mathcal{T}'_<$. Se definen en términos de las longitudes de las piezas y relaciones incidentes en los vértices interiores de los diagramas reducidos sobre las presentaciones. A primera vista puede parecer que estas condiciones son difíciles de comprobar ya que las definiciones requieren analizar todos los vértices interiores de cada diagrama posible sobre la presentación P. Sin embargo, demostraremos que, para presentaciones finitas, estas condiciones pueden verificarse analizando los ciclos dirigidos en un grafo pesado finito $\Gamma(P)$ asociado a P. En esta dirección, en la Sección 3.6 describimos un algoritmo que decide si una presentación finita dada P

satisface estas condiciones. Este algoritmo se ha implementado en el paquete de GAP [83] SmallCancellation [77].

En lo que sigue consideramos diagramas $\varphi : M \to K$ a un complejo combinatorio K sin vértices interiores de grado 2. Al igual que en la sección 3.1, definimos el *link geométrico* de un vértice v en un complejo combinatorio K como una épsilon esfera alrededor de v (que hereda una estructura combinatoria), y los *corners* de las 2-celdas en v corresponden a aristas en el link. Los puntos finales de un corner en M (de una 2-celda f) en v corresponden a aristas en el diagrama incidentes a v. Dado un corner c en un vértice interior v, denotamos por $\ell_1(c)$ y $\ell_2(c)$ las longitudes de las aristas incidentes y por $\ell_r(c)$ la longitud de la relación $r \in R$ correspondiente a la 2-celda f. Sea $d'_F(v) = \sum_{c \ni v} \frac{\ell_1(c)+\ell_2(c)}{\ell_r(c)}$, donde la suma se realiza sobre todas las esquinas en v.

Definición 3.3.1. Decimos que una presentación P satisface la condición de small cancellation $\mathcal{T}'$ si para cada vértice interior de cualquier diagrama reducido sobre P (sin vértices interiores de grado 2), $d'_F(v) \leq d(v) - 2$. Del mismo modo, P satisface la condición de small cancellation estricta $\mathcal{T}'_<$ si para cada vértice interior de cualquier diagrama reducido sobre P, $d'_F(v) < d(v)-2$. Un grupo G que admite una presentación P que satisface la condición $\mathcal{T}'$ (resp. $\mathcal{T}'_<$) se denomina grupo $\mathcal{T}'$ (resp. $\mathcal{T}'_<$).

La condición $\mathcal{T}'$ puede pensarse como un "balance" entre condiciones de tipo C' y T. Permitimos que las piezas sean grandes con respecto a la longitud de las relaciones, siempre que esas piezas grandes no choquen en un mismo vértice. También permitimos que los vértices interiores tengan un grado alto si las piezas que inciden en dicho vértice son cortas. Ahora investigamos los primeros ejemplos de presentaciones que satisfacen las condiciones $\mathcal{T}'$ y $\mathcal{T}'_<$.

Condiciones clásicas de small cancellation métricas. Es fácil comprobar que las condiciones clásicas de small cancellation métricas $C'(\frac{1}{6})$, $C'(\frac{1}{4})-T(4)$ y $C'(\frac{1}{3})-T(6)$ implican la condición $\mathcal{T}'_<$. Demostraremos a continuación que los grupos $\mathcal{T}'_<-C(3)$ de presentación finita son hiperbólicos, generalizando el resultado clásico para grupos de small cancellation (ver [15, 50]).

Grupos de Artin dos-dimensionales. Recordemos que un grupo de Artin es dos-dimensional si su grafo Γ satisface la siguiente condición: para

cada triángulo en el grafo Γ con aristas etiquetadas por p, q y r tenemos $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1$ (ver Sección 2.2).

Demostraremos que un grupo de Artin es dos-dimensional si y sólo si su presentación estándar P_Γ satisface la condición $\mathcal{T}'$. También demostraremos a continuación que cualquier grupo que admita una presentación finita P que satisfaga las condiciones $\mathcal{T}'$ y $C'(\frac{1}{2})$ y con todas las relaciones de la misma longitud, tiene función de Dehn cuadrática y admite solución al problema de la conjugación (ver Teorema 3.5.2). Estos resultados en conjunto recuperan parcialmente, con una demostración alternativa y más sencilla, resultados similares para grupos de Artin dos-dimensionales obtenidos recientemente por Huang y Osajda [57].

Teorema 3.3.2. *Un grupo de Artin A_Γ es dos-dimensional si y sólo si su presentación estándar P_Γ satisface la condición $\mathcal{T}'$.*

Demostración. Sea A_Γ un grupo de Artin y sea K el 2-complejo asociado a su presentación estándar. Notar que las 2-celdas de K tienen dos lados distinguidos en los que todas las aristas tienen la misma orientación (ver la Figura 3.8). Si la etiqueta de la arista en Γ correspondiente a la relación es m, cada uno de estos lados tiene m aristas. Los vértices terminales de ambos lados se llaman vértices iniciales y finales de la relación, según la orientación de las aristas (ver [57, Sección 4.1]).

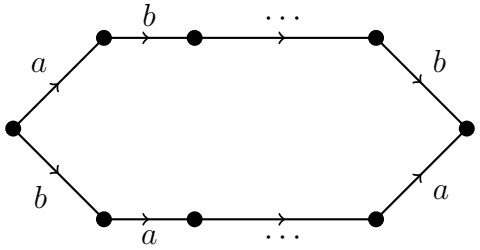

Figura 3.8: Una 2-celda de un grupo de Artin.

Sea $\varphi\colon M \to K$ un diagrama reducido. Analizamos primero los vértices interiores de grado 3. Es fácil ver que los vértices de grado 3 sólo corresponden a intersecciones de caras en el diagrama que son mapeadas a tres relaciones diferentes que forman un triángulo en el grafo Γ. Como las tres relaciones son

diferentes, la longitud de las tres piezas implicados es de 1. Si las etiquetas de las aristas del triángulo son p, q y r, entonces la ecuación de la condición $\mathcal{T}'$ es la siguiente

$$\frac{1+1}{2p} + \frac{1+1}{2q} + \frac{1+1}{2r} \leq 3 - 2.$$

Es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1$, que es exactamente la condición necesaria y suficiente para que el grupo de Artin sea dos-dimensional.

Ahora demostramos que la condición $\mathcal{T}'$ se satisface siempre en vértices interiores de grado mayor o igual a 4 (para cualquier grupo de Artin, no necesariamente dos-dimensional). Notar que dicho vértice interior v puede ser un vértice terminal o puede estar dentro de uno de los lados de las 2-celdas que lo contienen. Por ejemplo, en la figura 3.9, v es un vértice terminal de r_1 y r_4, y está en uno de los lados de r_2 y r_3.

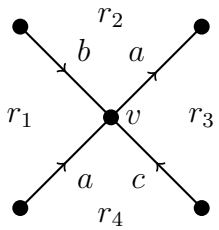

Figura 3.9: Un vértice interior de grado 4.

Si no todas las 2-celdas incidentes en v están asignadas a la misma relación, al menos cuatro de ellas compartirán una arista incidente en v con una celda correspondiente a una relación diferente. En la Figura 3.9, r_1 comparte una arista con r_4, y r_2 con r_3. Como las celdas correspondientes a diferentes relaciones se cruzan en caminos de longitud como máximo 1, al menos cuatro de ellos tendrán una pieza de longitud 1. Además, la pieza más larga de una 2-celda con frontera de longitud $2n$ es $n-1$, y por tanto los sumandos en la condición $\mathcal{T}'$ pueden ser como máximo $\frac{2n-2}{2n}$. En conclusión, si hay 2-celdas incidentes en el vértice que se asignan a diferentes relaciones, hay al menos cuatro sumandos en la ecuación de la condición $\mathcal{T}'$ que son menores o iguales a $\frac{1}{2}$, y cualquier otro sumando es menor que 1. Entonces se cumple la condición $\mathcal{T}'$.

Analizamos ahora el caso en el que el vértice tiene grado mayor o igual a 4 y todas las 2-celdas están mapeadas a la misma relación. Observar que si una 2-celda contiene a v en uno de sus lados, el sumando correspondiente a esa 2-celda es a lo sumo $\frac{1}{2}$. Por tanto, hay como mucho tres de estas 2-celdas, y el resto tienen que contener v como vértice terminal. Si una 2-celda de f contiene v como vértice terminal, entonces las dos 2-celdas adyacentes a f contienen el vértice en un lado. Esto implica que podemos reducirnos a los casos en los que v tiene grado 4, 5 o 6.

Nos fijamos en la orientación de las aristas que inciden en v, recorriéndolas en el sentido de las agujas del reloj. Si pasamos por una 2-celda que tenga a v como vértice terminal, la orientación de estas aristas se conserva, y si no, se invierte. Por lo tanto, el número de 2-celdas que tienen a v en uno de sus lados es par. Entonces, cuando v tiene grado 5 o 6, hay al menos cuatro 2-celdas que tienen a v en un lado.

Sólo queda comprobar el caso en el que v tiene grado 4, dos de las 2-celdas lo contienen como vértice terminal y las otras dos en un lado. Esta situación se ilustra en la Figura 3.10. Sean l_1, l_2, l_3, l_4 las longitudes de las piezas implicadas y sea $2n$ la longitud de la relación.

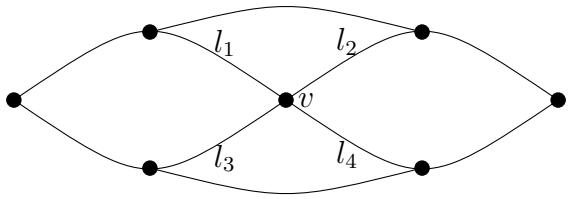

Figura 3.10: Un vértice con grado 4 con las 2-celdas mapeando a la misma relación.

Aquí la condición $\mathcal{T}'$ puede reformularse como:

$$\frac{l_1+l_2}{2n}+\frac{l_2+l_4}{2n}+\frac{l_3+l_4}{2n}+\frac{l_1+l_3}{2n}=\frac{2l_1+2l_2+2l_3+2l_4}{2n}\leq 2.$$

Como $l_1+l_2\leq n$ y $l_3+l_4\leq n$, la condición $\mathcal{T}'$ se satisface. □

Comentario 3.3.1. *Combinado con el Teorema 3.4.2, el Teorema 3.3.2 implica que la presentación estándar P_Γ de un grupo de Artin es asférica (i.e. el*

grupo A_Γ es dos-dimensional) si y sólo si P_Γ es diagramáticamente reducible (DR, para abreviar). Recordar que una presentación P sin potencias propias es DR si todos los diagramas esféricos sobre P son reducibles. Notar que ser DR es en general una condición más fuerte que se asférico (ver [41]).

Ahora introducimos presentaciones un poco más generales y mostramos que satisfacen la condición $\mathcal{T}'$. Sea F un grupo libre sobre un conjunto finito de generadores X. Sea $W \subset F$ un subconjunto finito de palabras, y sea Γ un grafo simple finito con conjunto de vértices W y un etiquetado en las aristas por enteros $m \geq 2$. Podemos considerar la presentación $P_{\Gamma,F}$ con generadores X, y una relación

$$\underbrace{vwvwv\cdots}_{m \text{ factores}} = \underbrace{wvwwv\cdots}_{m \text{ factores}}$$

para cada par de palabras $v, w \in W$ conectadas por una arista etiquetada por m. Denotamos por $A_{Gamma,F}$ al grupo presentado por $P_{Gamma,F}$. Esto es obviamente una generalización de la definición de un grupo de Artin. El siguiente resultado generaliza el Teorema 3.3.2 para los grupos $A_{Gamma,F}$ bajo ciertas restricciones en las palabras y el etiquetado de las aristas.

Teorema 3.3.3. *La presentación $P_{\Gamma,F}$ satisface $\mathcal{T}'$ provisto que todas las aristas en Γ estén etiquetadas por el mismo entero $m \geq 3$, y que las palabras en W tengan todas la misma longitud, sean cíclicamente reducidas y no compartan letras (i.e. cada generador aparece a lo sumo en una de las palabras de W).*

Demostración. Sea n la longitud de las palabras de W. Sea $\varphi\colon M \to K$ un diagrama reducido y sea v un vértice interior de grado al menos 3. Sea $k = d(v)$ y sean $f_1, \ldots, f_k$ las 2-celdas de M incidentes en v, numeradas en el sentido de las agujas del reloj.

Observar que, dado que las palabras de W no comparten letras, existe un subconjunto $D(f_i)$ de vértices *distinguidos* de la frontera de f_i que se caracteriza por la siguiente propiedad: $D(f_i)$ divide la palabra escrita en la frontera de f_i en palabras que pertenecen o bien a W o bien a W^{-1} (aquí W^{-1} denota el conjunto de los inversos de las palabras de W). Observar que un vértice puede distinguirse en cierta 2-celda de f_i pero no en una cara vecina.

Sea x_i (resp. y_i) la palabra (posiblemente vacía) leída en el sentido contrario a las agujas del reloj (resp. en el sentido de las agujas del reloj) en la

frontera de f_i, comenzando en v y terminando en la primera ocurrencia de un vértice que pertenece a $D(f_i)$ (ver la Figura 3.11). Notar que $|x_i| + |y_i| \equiv 0$ (mód n). Aquí $|x|$ denota la longitud de la palabra x. El *desajuste entre* f_i *y* f_{i+1} se define como $|y_{i+1}| - |x_i| | in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si el desajuste es distinto de cero decimos que hay un *desajuste propio* entre f_i y f_{i+1}. Sea s el número de desajustes propio alrededor de v.

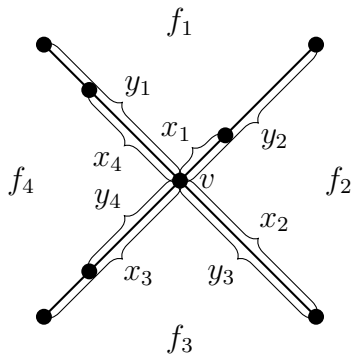

Figura 3.11: Desajustes alrededor de un vértice interior.

Si no hay desajustes propios, entonces la prueba de que se cumple la condición $\mathcal{T}'$ es análoga a la del Teorema 3.3.2. Si hay un desajuste propio entre dos caras, su intersección tiene longitud menor que n. Observar que la longitud de una pieza es como máximo $n(m-1)$, y la longitud de las relaciones es $2nm$. Por lo tanto, si $s \geq 2$, se cumple la condición $\mathcal{T}'$. Por lo tanto, sólo tenemos que demostrar que $s \neq 1$.

Supongamos que hay exactamente un desajuste propio, digamos entre f_1 y f_k. Entonces se cumple lo siguiente.

$$\begin{aligned} |y_1| &\not\equiv |x_k| \pmod{n}, \\ |y_{i+1}| &\equiv |x_i| \pmod{n} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k-1, \\ |x_i| &\equiv -|y_i| \pmod{n} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

Se deduce que $|x_1| \not\equiv (-1)^k |x_1| \pmod{n}$. Esto es una contradicción si k es par.

Ahora estudiamos el caso en el que k es impar y $s = 1$. Es fácil ver que si uno de los x_i o y_i es vacío, entonces hay al menos dos desajustes propios, por lo

que podemos suponer que ningún x_i o y_i está vacío. Dado que las palabras en W no comparten letras, existe w enW tal que para cada $1 \leq i \leq k$, la palabra $y_i^{-1}x_i$ es igual a w o w^{-1}. De nuevo, podemos suponer que el único desajuste propio está entre f_1 y f_k. Si existe $1 \leq i \leq k-1$ tal que $y_i^{-1}x_i = y_{i+1}^{-1}x_{i+1}$, ya que $x_i = y_{i+1}$, deducimos que $y_i^{-1}x_{i+1} = w^2$ o $y_i^{-1}x_{i+1} = w^{-2}$. Esto es una contradicción porque w se reduce cíclicamente. Entonces $y_i^{-1}x_i = (y_{i+1}^{-1}x_{i+1})^{-1}$ para cada $1 \leq i \leq k$. Sin embargo esto no puede ocurrir ya que k es impar. Por lo tanto $s \geq 2$. □

Grupos one-relator. En la Sección 3.2 introdujimos la condición de small cancellation (T') para estudiar la hiperbolicidad de los grupos one-relator. La condición $\mathcal{T}'_<$ generaliza la condición (T') a cualquier presentación y el Teorema 3.4.4 que se expone a continuación proporciona una prueba alternativa, más sencilla y más general del Teorema 3.2.1 para grupos one-relator.

Ejemplo 3.3.4. La siguiente presentación one-relator no satisface las condiciones $C(6)$ ni $T(4)$, pero es $\mathcal{T}'$. Tampoco cae bajo las hipótesis del Teorema 3.2.1 ya que es $C'(\frac{1}{2})$, pero no $C'(\frac{1}{4})$.

$$\langle a, b \mid a^3b^4a^3b^4(b^4a^3b^4a^3)^{-1}\rangle.$$

Presentaciones cíclicas. Las afirmaciones hechas en los siguientes ejemplos pueden ser verificadas usando el paquete de GAP [83] SmallCancellation [77].

Ejemplo 3.3.5. La siguiente presentación cíclica de un grupo superperfecto satisface la condición $\mathcal{T}'_<$ pero no es $C(6)$ ni $T(4)$.

$$\langle x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \mid x_{i+4}^{-1}x_{i+1}^{-1}x_i^{-1}(x_{i+4}x_{i+1})^2 \text{ for } i = 0, \ldots, 4\rangle$$

Ejemplo 3.3.6. La siguiente presentación cíclica de un grupo superperfecto satisface la condición $\mathcal{T}' - C'(\frac{1}{2})$

$$\langle x_0, \ldots, x_6 \mid x_{i+1}x_i^{-1}x_{i+6}x_{i+1}^{-1}x_ix_{i+6}^{-1}x_{i+2}^{-1} \text{ for } i = 0, \ldots, 6\rangle$$

Luego por el Teorema 3.5.2 este grupo tiene función de Dehn cuadrática. Sin embargo el grupo no es $\mathcal{T}'_<$, ni $C(6)$, $C(4) - T(4)$ o $C(3) - T(6)$.

3.4. Curvatura no-positiva, reducibilidad diagramática e hiperbolicidad

En primer lugar, definimos algunas nociones básicas sobre la curvatura combinatoria análogas a las definidas en la sección 3.1, pero en el contexto más general de los 2-complejos combinatorios. Dado un 2-complejo combinatorio K, podemos asignar un número real $\omega(c)$ a los corners, que consideramos como ángulos. Esta asignación es una *función de peso* para el complejo. Un 2-complejo combinatorio finito con tal función de peso se llama complejo angulado (ver [41, 88]).

Sea K un complejo angulado. Si v es un vértice de K, su curvatura se define como

$$\kappa(v) = 2\pi - \pi\chi(\mathrm{lk}_v) - \sum_{c \ni v} \omega(c).$$

Aquí $\chi(\mathrm{lk}_K(v))$ denota la característica de Euler del link de v, y la suma se toma sobre todos los corners en v. La curvatura de una cara f se define como

$$\kappa(f) = 2\pi - \pi\ell(\partial f) + \sum_{c \in f} \omega(c),$$

donde la suma se toma sobre todos los corners en f y $\ell(\partial f)$ es el número de aristas en la frontera de f. Como antes, podemos enunciar un teorema combinatorio de Gauss–Bonnet. [5, 88].

Teorema 3.4.1 (Teorema de Gauss–Bonnet Combinatorio, [5, 88])**.** *Sea K un 2-complejo angulado. Entonces*

$$\sum_{f \in caras(K)} \kappa(f) + \sum_{v \in K^{(0)}} \kappa(v) = 2\pi\chi(K).$$

Asignación de funciones de peso

Sea P una presentación que satisface al condición $\mathcal{T}'$ o $\mathcal{T}'_<$. Dado un diagrama reducido $f\colon M \to K_P$ sobre P, definimos la siguiente función de peso en M. El peso de un corner c en un vértice interior v es $\omega(c) = \pi - \frac{\ell_1(c)+\ell_2(c)}{\ell_r(c)}\pi$ (recordar que no hay vértices interiores de grado 2). El peso de un corner c en un vértice $v \in \partial M$ de grado 2 es $\omega(c) = \pi$. Si c es un corner en un vértice

$v \in \partial M$ de grado mayor que 2, definimos $\ell_1(c)$ y $\ell_2(c)$ similarmente a como lo hicimos con los vértices interiores (las longitudes de las aristas incidentes obtenidas si removemos los vértices de grado 2) y $\omega(c) = \pi - \frac{\ell_1(c)+\ell_2(c)}{\ell_r(c)}\pi$.

Con esta asignación, la cuvatura de las caras de M es 0, y la curvatura de los vértices interiores es no-positiva si P satisface la condition $\mathcal{T}'$, y estrictamente negativa si P satisface la condition $\mathcal{T}'_<$.

Demostraremos que las presentaciones que satisfacen la condición $\mathcal{T}'$ y sin potencias propias son DR y que los grupos $\mathcal{T}'_< - C(3)$ finitamente presentados son hiperbólicos. Dado un 2-complejo M, denotamos por $\mathcal{V}(M), \mathcal{E}(M)$ y $\mathcal{F}(M)$ al número de vértices, aristas y caras de M respectivamente.

Teorema 3.4.2. *Si una presentación P satisface la condición $\mathcal{T}'$ y no tiene potencias propias, entonces es DR.*

Demostración. Como P no tiene potencias propias, nuestra noción de diagrama esférico reducido sobre P coincide con la de [41]. Por lo tanto, para demostrar que P es DR, sólo tenemos que verificar que no hay diagramas esféricos reducidos sobre P. Supongamos que $\varphi\colon M \to K_P$ es un diagrama esférico reducido. Tenemos las siguientes identidades:

$$\mathcal{E}(M) = \frac{1}{2}\sum_{v\in M^{(0)}} d(v),$$
$$\mathcal{F}(M) = \frac{1}{2}\sum_{v\in M^{(0)}} d'_F(v).$$

La primera está clara, ya que cada arista es incidente en dos vértices. La segunda se deduce del hecho de que en la parte derecha de la segunda igualdad estamos sumando dos veces la longitud de cada relación, dividida por la longitud de cada relación. Es decir, estamos sumando 2 por cada cara. Entonces

$$2 = \mathcal{V}(M) - \mathcal{E}(M) + \mathcal{F}(M) = \mathcal{V}(M) - \frac{1}{2}\sum_{v\in M^{(0)}} d(v) + \frac{1}{2}\sum_{v\in M^{(0)}} d'_F(v) \leq 0,$$

donde la última desigualdad vale porque todos los vértices de la esfera son vértices interiores. Esto es una contradicción, y por lo tanto P es diagramáticamente reducible. □

Ecuaciones sobre grupos

Un sistema de ecuaciones sobre un grupo G con incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un conjunto $\{w_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ de palabras en $G * F(x_1, \ldots, x_n)$. Aquí $F(x_1, \ldots, x_n)$ es el grupo libre con base $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Las letras de w_j que se encuentran en G son los *coeficientes* de w_j. La palabra r_j (no necesariamente reducida) en el alfabeto $x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}$ que se obtiene borrando los coeficientes de w_j es la *forma* de w_j, y la palabra r_j considerada como un elemento del grupo libre $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se llama el *contenido* de w_j. Decimos que el sistema tiene solución en un sobregrupo de G si existe un grupo H del que G es un subgrupo y elementos $h_1, h_2, \ldots, h_n$ en H tales que $w_j(h_1, h_2, \ldots, h_n) = 1$ en H para cada j. La conjetura de Kervaire–Laudenbach afirma que para cualquier grupo G, una ecuación única w con una única incógnita x tiene solución en un sobregrupo de G si w es no singular, lo que significa que el exponente total de x es distinto de cero. La llamada Conjetura de Kervaire–Laudenbach–Howie generaliza esto a un número finito arbitrario n de incógnitas y a un sistema no singular de m ecuaciones (en este caso, no singular significa que el rango de la matriz $m + n$ de exponentes totales es igual a m).

Sea S un sistema de ecuaciones $w_1, w_2, \ldots, w_m$ sobre un grupo G. Sea P la presentación $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n | r_1, r_2, \ldots, r_m \rangle$ cuyos generadores son las incógnitas de S y sus relaciones son las formas de las ecuaciones w_j. Un conocido resultado de Gersten [41] afirma que si P es DR, entonces S tiene solución en un sobregrupo de G. En otras palabras, para cualquier grupo H, cualquier sistema de ecuaciones modelado por la presentación P tiene una solución en un sobregrupo de H. Una se dice que una presentación con esta propiedad es *Kervaire*. La inversa de este resultado es falsa. La presentación $P = langlet|ttt^{-1}\rangle$ no es DR, pero es Kervaire: cualquier ecuación $atbtct^{-1}$ modelada por P sobre cualquier grupo de coeficientes H tiene solución en un sobregrupo de H [56].

De los resultados anteriores deducimos lo siguiente.

Proposición 3.4.3. *Sean $k, l, m \in \mathbb{N}$ y w_1, w_2, w_3 palabras cíclicamente reducidas del mismo largo en las incógnitas x_i, y_j, z_s respectivamente. Entonces*

para cualquier $p \geq 2$, la presentación

$$P = \langle x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l, z_1, \ldots, z_m \mid (w_1w_2)^p(w_2w_1)^{-p}, (w_2w_3)^p(w_3w_2)^{-p}, (w_3w_1)^p(w_1w_3)^{-p} \rangle$$

es DR. Por lo tanto, para cualquier grupo G, cualquier sistema de ecuaciones modelado por P tiene solución en un sobregrupo de G.

Demostración. La presentación P corresponde a una presentación de tipo $P_{\Gamma,F}$ donde Γ es un triángulo con vértices w_1, w_2 y w_3 y cuyas tres aristas están etiquetadas por $2p$. Ahora el resultado se sigue de los Teoremas 3.3.3 y 3.4.2 y del resultado de Gersten mencionado arriba. □

Hyperbolicity

Ahora probamos que la condición métrica estricta $\mathcal{T}'_<$ implica hiperbolicidad. Lo hacemos probando que la función de Dehn el lineal. Este es un fortalecimiento del Teorema 3.2.1.

Teorema 3.4.4. *Sea G un grupo que admite una presentación finita que satisface las condiciones $\mathcal{T}'_<$ y $C(3)$. Entonces G es hiperbólico.*

Demostración. Demostramos que una presentación finita P que satisface las condiciones $\mathcal{T}'_<$ y $C(3)$ tiene una desigualdad isoperimétrica lineal. Notar que basta con considerar diagramas de disco no singulares.

Sea $\varphi\colon M \to K_P$ un diagrama de disco reducido no singular. Asignamos pesos a los corners de M como hicimos antes. Entonces, por el Teorema de Gauss–Bonnet Combinatorio,

$$2\pi = \sum_{v \in M^{(0)}} \kappa(v) + \sum_{f \in \text{caras}(M)} \kappa(f) = \sum_{v \in M^{(0)}} \kappa(v).$$

Como P satisface $\mathcal{T}'_<$, entonces $\kappa(v) < 0$ para cada vértice interior v, y como P es finito, por el Corolario 3.6.3 existe una constante $N < 0$, que es independiente del diagrama, tal que $\kappa(v) \leq N$ para todo vértice interior v. Además, para todo vértice del borde v, se cumple que $\kappa(v) < \pi$ ya que los

pesos en M son no negativos. Entonces

$$\begin{aligned} 2\pi &\leq \mathcal{V}^\circ(M)N + \sum_{v\in(\partial M)^{(0)})} \kappa(v) \\ &\leq \mathcal{V}^\circ(M)N + \mathcal{V}(\partial M)\pi \\ &= \mathcal{V}(M)N + \ell(\partial M)(\pi - N), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{V}^\circ(M)$ denota el número de vértices interiores de M, y $\ell(\partial M)$ es la longitud de la frontera. La última igualdad vale porque M es no singular. Entonces,

$$-\mathcal{V}(M)N \leq \ell(\partial M)(\pi - N) - 2\pi$$

y por lo tanto

$$\mathcal{V}(M) \leq \ell(\partial M)\frac{\pi - N}{-N} + \frac{2\pi}{N}.$$

Ahora bien, como P satisface la condición $C(3)$, el número de caras puede acotarse linealmente por el número de vértices del diagrama. En consecuencia, el número de caras del diagrama está linealmente acotado por la longitud de su frontera. □

3.5. Función de Dehn cuadrática y el problema de la conjugación

En esta sección mostraremos que un grupo finitamente presentado que admite una presentación P que satisface las condiciones $\mathcal{T}'$ y $C'(\frac{1}{2})$ y tal que todas las relaciones de P tienen la misma longitud r, tiene función de Dehn cuadrática y admite solución al problema de la conjugación.

Sea $\varphi\colon M \to K_P$ un diagrama sobre P. La *capa de frontera* L de M consiste de cada vértice en la frontera de M, cada arista incidente a un vértice en la frontera, y cada cara abierta con un vértice en la frontera. Notar que L no suele ser un complejo combinatorio. Sea $M_1 = M\backslash L$ el complemento de la capa de frontea. Notar que M_1 es un subcomplejo de M. El siguiente lema se utilizará para demostrar el resultado principal de esta sección.

Lema 3.5.1. *Sea P una presentación que satisface las condiciones $\mathcal{T}' - C'(\frac{1}{2})$ y tal que todas sus relaciones tienen longitud r, y sea $\varphi\colon M \to K_P$ un diagrama anular o de disco sobre P. Entonces*

$$\mathcal{V}(\partial M_1) \leq \mathcal{V}(\partial M) - r\chi(M).$$

Demostración. Previamente habíamos removido los vértices interiores de grado 2 de los diagramas. Subdividimos la frontera de M_1 reintroduciendo los vértices de grado 2, y seguimos denotando este diagrama por M.

Para los vértices de M de grado mayor que 2, asignamos pesos a los corners como antes, y en los vértices de grado 2, ambos pesos son iguales a π. Con esta asignación, toda cara tiene curvatura 0 y todos los vértices interiores tienen curvatura no positiva, ya que P satisface $\mathcal{T}'$. Notar que $\kappa(v) = 0$ para vértices interiores de grado 2.

En lo que sigue, podemos suponer sin pérdida de generalidad que M es no singular, ya que vamos a acotar la longitud de la frontera de M_1 en términos de la longitud de la frontera de M. Dado que P es $C'(\frac{1}{2})$ podemos suponer que cada 2-celda de la frontera f tiene al menos dos aristas que no están en la frontera de M, pues en caso contrario podemos eliminar f disminuyendo la longitud de la frontera y sin cambiar M_1. En particular, esta reducción nos permite suponer que $M_1 \neq \emptyset$.

Consideramos el complejo B construido tomando la unión disjunta de las 0-celdas, las 1-celdas y las 2-celdas (ahora cerradas) de la capa de frontera de M e identificando los bordes de las 2-celdas cerradas pero sólo en los vértices y aristas de la capa de frontera de M (ver Figura 3.12).

Omitimos los vértices de grado 2 en la estructura de celdas de B. Notar que $\ell(\partial B) = \ell(\partial M) + \ell(\partial M_1)$. Si M es un disco, B es un complejo combinatorio plano y conexo, por lo que su característica de Euler es menor o igual que $1 = \chi(M)$. Si M es un anillo, B puede tener más de una componente conexa, pero ninguna de ellas será un disco, ya que todos tienen un complemento disconexo. Por lo tanto su característica de Euler es menor o igual que $0 = \chi(M)$.

Separamos sus vértices en dos conjuntos: V_1 denotará el conjunto de vértices de B que están en la frontera de M, y V_2 el conjunto de vértices restantes de B. Como P satisface la condición $\mathcal{T}'$, por Gauss–Bonnet tenemos

$$2\pi\chi(M) \leq \sum_{v \in V_1} \kappa(v).$$

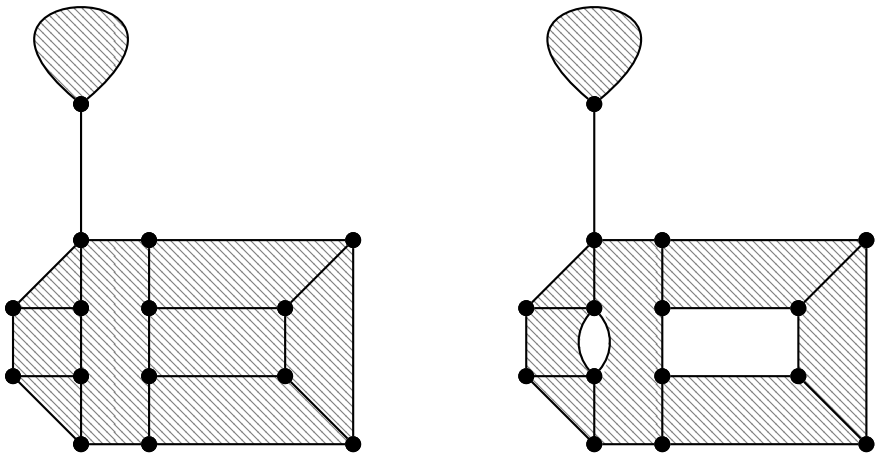

Figura 3.12: A la izquierda el complejo M. A la derecha el complejo B construido a partir de M en la demostración del Lema 3.5.1.

También por Gauss–Bonnet, tenemos

$$\sum_{v \in B^{(0)}} \kappa(v) = 2\pi\chi(B).$$

Por lo tanto

$$\sum_{v \in V_2} \kappa(v) \leq 0.$$

Ahora bien, como cada 2-celda de frontera tiene al menos dos aristas que no están en la frontera de M tenemos

$$\mathcal{V}_1 + \sum_{v \in V_2} \sum_{c \ni v} 1 = \mathcal{V}(B) + \mathcal{E}(B) - \ell(\partial B) = \mathcal{V}_2 + \sum_{v \in V_1} \sum_{c \ni v} 1 - \mathcal{V}^{\circ}(B).$$

Poniendo todo junto

$$\begin{aligned}
2\pi\chi(M) &\leq \sum_{v\in V_1}\kappa(v) - \sum_{v\in V_2}\kappa(v)\\
&= \sum_{v\in V_1}\left(\pi - \sum_{c\ni v}\left(\pi - \frac{\ell_1(c)+\ell_2(c)}{r}\pi\right)\right)\\
&\quad - \sum_{v\in V_2}\left(\pi - \sum_{c\ni v}\left(\pi - \frac{\ell_1(c)+\ell_2(c)}{r}\pi\right)\right)\\
&\leq \sum_{v\in V_1}\sum_{c\ni v}\frac{\ell_1(c)+\ell_2(c)}{r}\pi - \sum_{v\in V_2}\sum_{c\ni v}\frac{\ell_1(c)+\ell_2(c)}{r}\pi\\
&= \frac{2\mathcal{V}(\partial M) - 2\mathcal{V}(\partial M_1)}{r}\pi.
\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\mathcal{V}(\partial M_1) \leq \mathcal{V}(\partial M) - r\chi(M).$$

□

Teorema 3.5.2. *Sea P una presentación que satisface las condiciones $\mathcal{T}' - C'(\frac{1}{2})$ y tal que todas sus relaciones tienen longitud r, entonces P tiene una función de Dehn cuadrática. Además, si P es finito el grupo G presentado por P admite solución al problema de la conjugación.*

Demostración de la función de Dehn cuadrática. Sea $\varphi\colon M \to K_P$ un diagrama de disco reducido. Demostramos que $\mathcal{V}(M) \leq \frac{1}{r}\mathcal{V}(\partial M)^2$ por inducción en el número de vértices interiores de M. Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(M) &= \mathcal{V}(M_1) + \mathcal{V}(\partial M)\\
&\leq \frac{1}{r}\mathcal{V}(\partial M_1)^2 + \mathcal{V}(\partial M)\\
&\leq \frac{1}{r}(\mathcal{V}(\partial M) - r)^2 + \mathcal{V}(\partial M)\\
&= \frac{1}{r}\mathcal{V}(\partial M)^2 - 2\mathcal{V}(\partial M) + r + \mathcal{V}(\partial M)\\
&\leq \frac{1}{r}\mathcal{V}(\partial M)^2.
\end{aligned}$$

La primera desigualdad se sigue por inducción, y la segunda se sigue del lema 3.5.1. Finalmente, como P satisface $C'(\frac{1}{2})$, cada cara de M tiene al menos tres

lados. Entonces podemos acotar el número de caras de M por el número de vértices de M, obteniendo desigualdad isoperimétrica cuadrática deseada. □

Se deduce que los grupos finitamente generados que admiten presentaciones que satisfacen las hipótesis del Teorema 3.5.2 admiten solución al problema de la palabra. Esto nos servirá para demostrar que también admiten solución al problema de la conjugación.

Atacaremos el problema de la conjugación siguiendo la estrategia de [68, Sección V.7]).

Comentario 3.5.1. *Sea $P = \langle X \mid R\rangle$ una presentación finita de un grupo G que admite solución al problema de la palabra. Supongamos que todas las relaciones tienen la misma longitud r. Sean w_1 y w_2 palabras del grupo libre $F(X)$. Escribimos $w_1 \sim w_2$ si existe una palabra b en $F(X)$ con $|b| < r$ tal que $bw_1b^{-1}w_2^{-1} = 1$ en G. Aquí $|b|$ denota la longitud de la palabra b. Como admite solución al problema de la palabra, la relación $\sim$ es decidible. Ahora dejemos que u y v sean palabras cíclicamente reducidas en $F(X)$ y que $d = |u| + |v|$. Tomemos $W = \{w \in F(X), |w| \leq d\}$. Notar que W es finito ya que X es finito. Observar también que el conjunto W depende de las longitudes de u y v y que $u, v \in W$. Escribimos $u \approx v$ si existen palabras $w_1, \ldots, w_k$ en W tales que $u \sim w_1 \sim \ldots \sim w_k \sim v$. Equivalentemente, $\approx$ es la clausura transitiva en W de la relación $\sim$. Notar que esta relación también es decidible ya que W es finito. Para demostrar que el problema de la conjugación es resoluble basta con demostrar que si dos palabras u, v en$F(X)$ son conjugadas en G, entonces $u \approx v$.*

También utilizaremos el siguiente resultado de Schupp [68, Sección V.7]. Sea A un diagrama anular y L su capa de frontera. El diagrama $A_1 = A\backslash L$ (el complemento de L en A) puede ser disconexo, pero tiene como máximo una componente anular. Una componente simplemente conexa de A_1 se llama un *gap*. Sean $K_1, \ldots, K_n$ los huecos. Entonces $H = A\backslash(L \cup \bigcup_{i=1}^{n} K_i)$ es la componente anular de A_1, suponiendo que haya alguna. Sean σ y τ los bordes exterior e interior de H. Un par (D_1, D_2) de caras (no necesariamente distintas) en A se llama un par de enlace de fronteras si $\sigma \cap \partial D_1 \neq \emptyset$, $\partial D_1 \cap \partial D_2 \neq \emptyset$, y $\partial D_2 \cap \tau \neq \emptyset$.

Lema 3.5.3 (Schupp)**.** *Sea A un diagrama anular que tiene al menos una región, y sea H el diagrama que se obtiene eliminando su capa de frontera y sus huecos. Si no hay pares de enlace de límites, H es un diagrama anular.*

Demostración del problema de la conjugación. Tomemos palabras cíclicamente reducidas $u, v\ enF(X)$ y supongamos que son conjugadas en G. Sea $d = |u| + |v|$. Por la Observación 3.5.1, sólo tenemos que demostrar que $u \overline{\sim} v$. Sea A un diagrama anular con u y v^{-1} como bordes interior y exterior. Construyamos los diagramas $A = H_0, H_1, \ldots, H_k$, donde H_{i+1} se obtiene a partir de H_i eliminando su capa de frontera y sus huecos, y sea H_k el primero de tales diagramas con un par de enlace. Por el Lema 3.5.1, $\ell(\partial H_{i+1}) \leq \ell(\partial H_i)$ para cada $0 \leq i \leq k-1$. Por lo tanto, $\ell(\partial H_i) \leq d$ para cada i (y así las etiquetas de frontera de ∂H_i están en el conjunto W).

Sean σ_i y τ_i las fronteras exterior e interior de H_i respectivamente. Sea S_i el subdiagrama de M formado por σ_i, σ_{i+1} y todas las celdas de M entre estos dos caminos. Definir T_i de la misma manera con respecto a τ_i y τ_{i+1}. Es evidente que cualquier cara de la frontera de S_i interseca ambas fronteras de S_i. Por tanto, existe un camino γ_i desde σ_i hasta σ_{i+1} con una etiqueta de longitud menor o igual a r. Sean s_i y s_{i+1}^{-1} las etiquetas de σ_i y σ_{i+1} que parten de un vértice determinado. Entonces $s_i \sim s_{i+1}$. Análogamente, tenemos $t_i \sim t_{i+1}$ donde t_i^{-1} y t_{i+1} son las etiquetas de T_i.

El último anillo H_k tiene un par de enlace de frontera (D_1, D_2). Tenemos vértices $v_0 \in \sigma_k \cap \partial D_1$, $v_1 \in \partial D_1 \cap \partial D_2$, y $v_2 \in \partial D_2 \cap \tau_k$. Por lo tanto, hay caminos β_1 y β_2 de v_0 a v_1 y de v_1 a v_2 etiquetados por palabras b_1 y b_2 de longitud menor o igual a $\frac{r}{2}$. Sea $\beta = \beta_1\beta_2$, entonces su etiqueta es una palabra de longitud menor que r. Sea s la palabra leída en la frontera exterior de H_k que comienza en v_0, y t^{-1} la palabra leída en la frontera interior de H_k que comienza en v_2. Tenemos que $sb_1b_2t^{-1}b_2^{-1}b_1^{-1} = 1$ en G. Entonces $s \sim t$.

Como s_0 y t_0 son permutaciones cíclicas de u y v respectivamente, y s y t son permutaciones cíclicas de s_k y t_k respectivamente, tenemos

$$u \overline{\sim} s_0 \sim s_1 \sim \ldots \sim s_k \overline{\sim} s \sim t \overline{\sim} t_k \sim \ldots \sim t_0 \overline{\sim} v.$$

□

Una ligera modificación en la demostración del Lema 3.5.1 permite obtener una cota inferior en la longitud de las palabras que representan el elemento

trivial en el grupo G, incluso si las relaciones tienen diferentes longitudes. Este resultado está en el espíritu del lema de Greendlinger (Lema 1.5.6).

Proposición 3.5.4. *Sea $P = \langle X \mid R\rangle$ una presentación de un grupo G, que satisface las condiciones $\mathcal{T}' - C'(\frac{1}{2})$. Sea $r_{\text{mín}}$ la longitud de la relación más corta. Entonces cualquier palabra no trivial W en el grupo libre generado por X que representa el elemento trivial en G tiene una longitud de al menos $r_{\text{mín}}$. En particular, si P tiene una relación de longitud mayor o igual a 2, entonces G es no trivial.*

Demostración. Sea M un diagrama de disco reducido. Seguimos los mismos pasos que en la demostración del Lema 3.5.1 y obtenemos que

$$2\pi\chi(M) \leq \sum_{v\in V_1}\sum_{c\ni v}\frac{\ell_1(c)+\ell_2(c)}{l_r(c)}\pi - \sum_{v\in V_2}\sum_{c\ni v}\frac{\ell_1(c)+\ell_2(c)}{l_r(c)}\pi.$$

En particular, dado que los términos $\frac{\ell_i(c)}{\ell_r(c)}$ de la primera suma que no corresponden a aristas en la frontera se cancelan con los términos de la segunda suma, tenemos $r_{\text{mín}}\chi(M) \leq V(\partial M)$. Por lo tanto, como M es un disco, $r_{\text{mín}} \leq V(\partial M)$, lo que implica que las palabras que representan al elemento trivial tienen una longitud de al menos $r_{\text{mín}}$.

Para la segunda afirmación, eliminando todas las relaciones de longitud 1 junto con los generadores correspondientes, podemos suponer que cada relación de P tiene una longitud de al menos 2. Observar que la condición $C'(\frac{1}{2})$ garantiza que cada uno de estos generadores sólo puede aparecer en una relación. □

En el Teorema 3.5.2 demostramos la existencia de funciones cuadráticas de Dehn y la resolubilidad del problema de la conjugación para presentaciones que satisfacen las condiciones $\mathcal{T}' - C'(\frac{1}{2})$, siempre que las relaciones tengan la misma longitud. Creemos que el resultado sigue siendo válido sin la suposición de las longitudes de las relaciones. Discutimos ahora una estrategia para demostrar la resolubilidad del problema de la palabra para una clase más amplia de grupos. Dada una presentación $P = \langle X|\ R\rangle$ de un grupo G, nuestro objetivo es obtener una nueva presentación P' de un grupo H tal que G se embebe en H, y tal que P' satisface las condiciones $\mathcal{T}' - C'(\frac{1}{2})$ y las relaciones tienen la misma longitud. Por el Teorema 3.5.2, esto implicaría que H, y por

tanto G, admiten solución al problema de la palabra. Para ello, elegiremos un entero positivo n_x para algún $x \in X$ y sustituiremos cada ocurrencia de x en las relaciones por x^{n_x}. Si el elemento x en el grupo G tiene orden infinito, esto corresponde a añadir una raíz n_x-ésima, o equivalentemente, a tomar el producto amalgamado de G con $\mathbb{Z}$ a lo largo del subgrupo $n_x\mathbb{Z}$. Si hacemos estas sustituciones para un número finito de $x \in X$, obtenemos una nueva presentación P' de un sobregrupo H de G. Por supuesto, no siempre es posible elegir los n_x de forma que todas las relaciones de la nueva presentación tengan la misma longitud e incluso si esto es posible, la presentación P' obtenida puede no satisfacer las condiciones $\mathcal{T}' - C'(\frac{1}{2})$ (aunque P lo haga). El siguiente ejemplo ilustra esta técnica.

Ejemplo 3.5.5. Consideremos la siguiente presentación

$$P = \langle a, b, c, s, t \mid tats^{-1}b^{-1}s^{-1}, tbts^{-1}c^{-2}s^{-1}, tc^2ts^{-1}a^{-1}s^{-1}\rangle.$$

Notar que las relaciones no tienen la misma longitud. Esta presentación no satisface las condiciones $C(5)$, $T(4)$ ni $\mathcal{T}'$. Ahora, es fácil ver que a y b tienen orden infinito en el grupo G presentado por P, y eligiendo $n_a = 2$ y $n_b = 2$, obtenemos la siguiente presentación

$$P' = \langle a, b, c, s, t \mid ta^2ts^{-1}b^{-2}s^{-1}, tb^2ts^{-1}c^{-2}s^{-1}, tc^2ts^{-1}a^{-2}s^{-1}\rangle.$$

Ahora todas las relaciones tienen la misma longitud. Se puede comprobar que P' satisface las condiciones $\mathcal{T}' - C'(\frac{1}{2})$ (aunque no satisface las condiciones $C(5)$ ni $T(4)$). Esto implica que G admite solución al problema de la palabra.

3.6. Computabilidad de la condición $\mathcal{T}'$

En esta sección damos un algoritmo para verificar si una presentación finita $P = \langle X \mid R\rangle$ satisface la condición $\mathcal{T}'$. Notar que a priori no está claro que exista tal algoritmo, ya que la definición implica comprobar una condición para cada diagrama posible sobre P. El algoritmo descrito aquí ha sido implementado en el paquete de GAP[83] SmallCancellation [77].

Describimos un grafo dirigido ponderado $\Gamma(P)$. Los vértices de este grafo son las tuplas (r, p, q) tales que

- $r \in R^*$,
- p y q son piezas, y
- podemos escribir $r = qsp$ sin cancelaciones.

Existe una arista $(r, p, q) \to (r', p', q')$ si

- $p' = q^{-1}$, y
- $r' \neq r^{-1}$.

El peso de esta arista es $1 - \frac{|p|+|q|}{|r|}$ (por simplicidad, dividimos por π los pesos que consideramos en la Sección 3.4). El peso de un ciclo es la suma de los pesos de sus aristas.

Dado un diagrama $\varphi\colon M \to K_P$, podemos fijar una orientación en M como se explica en la Sección 1.5. Los corners del diagrama heredan las orientaciones de las caras correspondientes. Observar que si c es un corner en un vértice interior $v(c)$, entonces $(r(c), w_1(c), w_2(c))$ es un vértice en $\Gamma(P)$. Aquí $r(c)$ denota la relación leído en la frontera de la cara, partiendo del vértice $v(c)$ y siguiendo la orientación de la cara, $w_1(c)$ y $w_2(c)$ son las subpalabras escritas en las aristas del corner orientado (siendo la primera arista la orientada hacia $v(c)$). Esta observación y la siguiente proposición aclaran por qué este gráfico tiene sentido. Esencialmente, este gráfico codifica los ciclos que aparecen en los vértices interiores de los diagramas reducidos sobre P.

Proposición 3.6.1. *(i) Sea v un vértice interior en un diagrama reducido $\varphi\colon M \to K_P$. Entonces existe un ciclo dirigido γ en $\Gamma(P)$ de longitud al menos 3 y peso $d(v) - d'_F(v)$.*

(ii) Sea γ un ciclo dirigido en $\Gamma(P)$ de longitud al menos 3 y peso w. Entonces existe un diagrama reducido sobre P y un vértice interior v tal que $d(v) - d'_F(v) = w$.

Demostración. Primero probamos (i). Sea v un vértice interior en un diagrama reducido $\varphi\colon M \to K_P$. Sean $c_1, \ldots, c_n$ los corners alrededor v, numerados en sentido horario. Entonces $w_1(c_{i+1}) = w_2(c_i)^{-1}$ (índices módulo n). Como el diagrama es reducido tenemos $r(c_{i+1})^{-1} \neq r(c_i)^{-1}$ y por lo tanto existe una arista

$$(r(c_i), w_1(c_i), w_2(c_i)) \xrightarrow{e_i} (r(c_{i+1}), w_1(c_{i+1}), w_2(c_{i+1}))$$

en $\Gamma(P)$ con peso $1 - \frac{\ell_1(c_i)+\ell_2(c_i)}{\ell_r(c_i)}$. Entonces el ciclo $\gamma = (e_1, \ldots, e_n)$ tiene peso $d(v) - d'_F(v)$.

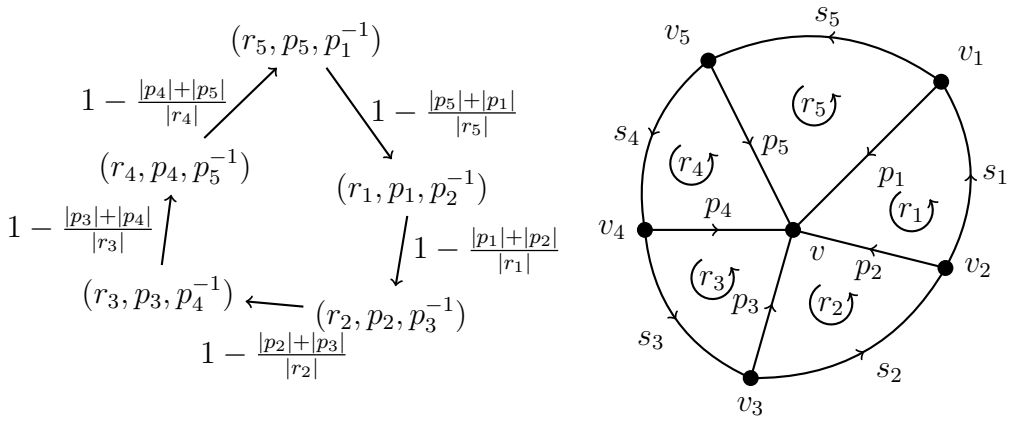

Figura 3.13: A la izquierda un ciclo γ en $\Gamma(P)$, a la derecha el diagrama correspondiente construido en la demostración de la parte (ii) de la Proposición 3.6.1.

Ahora demostramos (ii). Sea $n \geq 3$ y sea γ un ciclo en $\Gamma(P)$ de longitud n. Por la primera condición para las aristas de $\Gamma(P)$, los vértices de γ pueden llamarse (r_1, p_1, p_2^{-1}), (r_2, p_2, p_3^{-1}), $\ldots$, (r_n, p_n, p_1^{-1}). Para cada i consideramos la palabra s_i tal que $r_i = p_{i+1}^{-1} s_i p_i$ sin cancelaciones. Construimos un diagrama de disco Δ con $n+1$ vértices, $2n$ aristas y n caras como sigue. Los vértices de Δ se denotarán por $v, v_1, \ldots, v_n$. Para cada i el diagrama tiene una arista $v_i \xrightarrow{e_i} v$ que dice p_i y una arista $v_{i+1} \xrightarrow{\alpha_i} v_i$ que lee s_i. Para cada i hay una cara f_i unida con la arista $(e_{i+1}^{-1}, \alpha_i, e_i)$ que lee r_i (empezando por v) (ver la Figura 3.13). Por la segunda condición para una arista en $\Gamma(P)$, el diagrama es reducido. Notar que por construcción, $d(v) - d'_F(v)$ es el peso de γ. □

Corolario 3.6.2. *Una presentación P satisface la condición $\mathcal{T}'$ si y sólo si cada ciclo dirigido en $\Gamma(P)$ de una longitud de al menos 3 tiene un peso mayor o igual a 2.*

Una presentación P satisface la condición $\mathcal{T}'_<$ si y sólo si cada ciclo dirigido en $\Gamma(P)$ de una longitud de al menos 3 tiene un peso mayor que 2.

Notar que el Corolario 3.6.2 da un algoritmo para comprobar si una presentación finita satisface $\mathcal{T}'$, ya que es posible utilizar el algoritmo de Dijkstra

para encontrar el menor peso de un ciclo dirigido de longitud al menos k en un grafo dirigido con pesos de aristas positivos. Esto puede hacerse construyendo un grafo auxiliar que tenga $(k+1)$ vértices por cada vértice del grafo original. Para más detalles sobre esto, véase la implementación en el paquete de GAP SmallCancellation [77].

De la Proposición 3.6.1 deducimos el siguiente resultado, que se utiliza en la demostración del Teorema 3.4.4.

Corolario 3.6.3. *Si una presentación finita P satisface la condición $\mathcal{T}'_<$ existe una constante $N < 0$ tal que $\kappa(v) \leq N$ para todo diagrama Δ y todo vértice interior v enΔ.*

Demostración. Dado que los pesos son positivos, podemos tomar N como $-\pi$ veces el peso mínimo de un ciclo dirigido simple de longitud al menos 3 en $\Gamma(P)$. Observar que, como el grafo $\Gamma(P)$ es finito, hay un número finito de tales ciclos. □

Los siguientes ejemplos de grupos que no satisfacen $\mathcal{T}'$ son consistentes con nuestra conjetura de que $\mathcal{T}' - C'(\frac{1}{2})$ implica una desigualdad isoperimétrica cuadrática incluso si la presentación tiene relaciones de diferentes longitudes.

Ejemplo 3.6.4. Por [6] sabemos que el grupo Baumslag–Solitar $BS(p,q)$ tiene función exponencial de Dehn si $|p| \neq |q|$. Por lo tanto, por el Teorema 3.5.2 los grupos $BS(n, n+1)$ no satisfacen $\mathcal{T}'$. Se puede ver que el mínimo de $d(v) - d'_F(v)$ para v un vértice interior en un diagrama para la presentación habitual de $BS(n, n+1)$ es $2 - \frac{1}{2n+3}$, que tiende a 2 a medida que $n \to \infty$. Obsérvese que $BS(n,n)$ satisface $\mathcal{T}' - C'(\frac{1}{2})$ por lo que por el Teorema 3.5.2 se puede verificar el conocido hecho de que estos grupos tienen función de Dehn cuadrática.

Ejemplo 3.6.5. En [6, Lemma 11] se considera una familia de grupos $M_{c,d}$ y se demuestra que la función de Dehn de $M_{c,d}$ tiene orden n^{c+d}. Tenemos que $M_{1,1}$ (que es un RAAG) satisface $\mathcal{T}' - C'(\frac{1}{2})$. Algunos cálculos en GAP sugieren que el mínimo de $d(v) - d'_F(v)$ para estos grupos es $\frac{23}{20}$ para cualquier $(c,d) \neq (1,1)$.

Ejemplo 3.6.6. En [6] se demuestra que la función de Dehn del grupo $E = \langle b, s, t \mid s^{-1}bs = b^2, t^{-1}bt = b \rangle$ es al menos 2^n. Este grupo no satisface $\mathcal{T}'$ (el mínimo de $d(v) - d'_F(v)$ es $\frac{8}{5}$).

Como sugieren estos ejemplos, sería interesante saber más sobre lo que el mínimo de $d(v) - d'_F(v)$ dice sobre una presentación.

3.7. Complejos sistólicos angulados y $\mathcal{T}'$

En la sección 3.1 introdujimos los complejos (estrictamente) sistólicos angulados. Luego definimos una condición de small cancellation métrica (T') que junto con la condición $C'(\frac{1}{4})$ aseguraba que los grupos one-relator eran estrictamente sistólicos. Las condiciones $\mathcal{T}'$ y $\mathcal{T}'_<$ se introdujeron en un intento de generalizar y estudiar las condiciones $C'(\frac{1}{4}) - (T')$ de forma combinatoria. Resulta que podemos obtener propiedades más fuertes y más generales de esta manera. Aunque el enfoque de la segunda mitad de este capítulo ha sido combinatorio, existe una relación con los complejos sistólicos angulados. Más concretamente podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.7.1. *Sea P una presentación finita que satisface las condiciones $C'(\frac{1}{2}) - \mathcal{T}'$ (resp. $\mathcal{T}'_<$). Entonces el grupo presentado por P actúa geométricamente por automorfismos simpliciales sobre un complejo sistólico angulado (resp. complejo estrictamente sistólico angulado).*

La prueba es exactamente la misma que la del Teorema 3.2.1. El único ingrediente de la prueba que falta es el hecho de que las 2-celdas están embebidas en el complejo de presentación $\tilde{K}_P$. Es decir, sus bordes no tienen auto-intersecciones. Esto se deduce si ninguna subpalabra propia de una relación es trivial en el grupo presentado (lo que se cumple para grupos one-relator [86, Teorema 2]). Afortunadamente hemos demostrado esto en la Proposición 3.5.4.

El teorema 3.7.1 puede considerarse como una versión angular del resultado de Wise que afirma que los grupos $C(6)$ son sistólicos [87].

Capítulo 4

Sistolicidad-por-función y grupos de Artin dos-dimensionales

Como mencionamos en la Sección 2.3, en este capítulo vamos a extender resultados previos de Cumplido, Martin y Vaskou [31] sobre subgrupos parabólicos de grupos de Artin de tipo large a una familia más amplia de grupos de Artin dos-dimensionales. Probamos que una intersección arbitraria de subgrupos parabólicos de un grupo de Artin $(2,2)$-libre y dos-dimensional es un subgrupo parabólico. Un grupo de Artin es $(2,2)$-*libre* si su grafo asociado no tiene dos aristas consecutivas etiquetadas por 2. Como consecuencia de este resultado, resolvemos el problema de estabilidad por conjugación para esta familia aplicando nu algoritmo introducido por Cumplido [29]. Todo esto se logra al considerar complejos sistólicos-por-función, que generalizan a los complejos sistólicos. Los complejos sistólicos-por-función tienen una estructura más flexible que los complejos sistólicos ya que permitimos a las aristas tener longitudes distintas. Al mismo tiempo, su geometría es lo suficientemente rígida como para satisfacer un análogo al teorema de Cartan–Hadamard y otras propiedades geométricas similares a las de complejos sistólicos. Los resultados de este capítulo pueden encontrarse en [8].

4.1. El complejo de Artin

En [31] Cumplido, Martin y Vaskou usaron un enfoque geométrico para resolver el problema de intersección de subgrupos parabólicos para grupos de Artin de tipo large (i.e. aquellos con $m_{st} \geq 3$ para todo $s, t \in S$). Ellos introdujeron un complejo simplicial asociado a un grupo de Artin, llamado el complejo de Artin, sobre el cual el grupo de Artin actúa cocompactamente y sin inversiones. Este complejo también había sido definido previamente en [20] bajo el nombre de complejo de Deligne (ahora el término complejo de Deligne se usa comúnmente para el complejo de Deligne modificado introducido en [20]).

En esta sección recordamos la construcción del complejo de Artin. Seguimos la descripción y la notación de [31]. Las definiciones y notación relacionadas a complejos de grupo son las de [15, Chapter II.12].

Sea A_Σ un grupo de Artin con generadores Σ (con $|\Sigma| \geq 2$). Sea K un símplex de dimensión $|\Sigma| - 1$ y definimos un símplex de grupos sobre K. Primero, le damos al símplex K el grupo trivial como grupo local. Los símplices de codimensión 1 están en correspondencia con elementos $\sigma_i \in \Sigma$, y son denotados por Δ_{σ_i}. El símplex Δ_{σ_i} recibe el grupo local $\langle \sigma_i \rangle$. Ahora cada símplex de codimensión k está en correspondencia con un subconjunto de Σ de cardinalidad k. Dado $\Sigma' \subset \Sigma$ con $|\Sigma'| = k$, su cara correspondiente puede ser escrita de manera única como

$$\Delta_{\Sigma'} = \cap_{\sigma_i \in \Sigma'} \Delta_{\sigma_i}.$$

El símplex $\Delta_{\Sigma'}$ es dado el grupo local $A_{\Sigma'}$.

Dada una inclusión $\Delta_{\Sigma''} \subset \Delta_{\Sigma'}$ existe una inclusión natural $\psi_{\Sigma'\Sigma''} : A_{\Sigma'} \to A_{\Sigma''}$. Sea $\mathcal{P}$ el poset de subgrupos parabólicos estándar de A_Σ con el orden dado por la inclusión natural. Como cada subgrupo parabólico estándar es en sí mismo un grupo de Artin [65], existe un morfismo simple $\varphi : G(\mathcal{P}) \to A_\Sigma$, dado por la inclusión, del complexo de grupos a A_Σ.

Definición 4.1.1. El *complejo de Artin* asociado a A_Σ es el desarrollo $X_\Sigma := D_K(\mathcal{P}, \varphi)$ de $\mathcal{P}$ sobre K a lo largo de φ ([15, Theorem II.12.18]).

En la demostración de [15, Theorem II.12.18], una descripción explícita de

X_Σ es dada. El complejo simplicial X_Σ puede ser definido como

$$X_\Sigma := A_\Sigma \times K/\sim,$$

donde $(g,x) \sim (g',x')$ si y sólo si $x = x'$ y $g^{-1}g'$ está en el grupo local del menor símplex de K que contiene a x.

La acción de A_Σ en X_Σ es por isomorfismos simpliciales, sin inversiones y cocompacta, con dominio fundamental estricto K. Cualquier símplex Δ de X_Σ está en la órbita de exactamente un $\Delta_{\Sigma'} \subset K$ para algún $\Sigma' \subset \Sigma$. En ese caso Δ se dice *de tipo* Σ'. Ahora recordamos algunos resultados de [31] sobre el complejo X_Σ.

Lema 4.1.2 ([31], Lema 4)**.** *Sea A_Σ un grupo de Artin y sea X_Σ su complejo de Artin. Entonces X_Σ es conexo. Adicionalmente, si $|\Sigma| \geq 3$, entonces X_Σ es simplemente conexo.*

Lema 4.1.3 ([31], Lema 6)**.** *Sea A_Σ un grupo de Artin con complejo de Artin X_Σ. El link de un símplex de tipo Σ' es isomorfo al complejo de Artin $X_{\Sigma'}$ asociado al grupo de Artin $A_{\Sigma'}$.*

Lema 4.1.4 ([31], Lema 9)**.** *Sea A_Σ un grupo de Artin con $\Sigma = \{\sigma_x, \sigma_y\}$. Entonces cualquier ciclo en X_Σ tiene al menos $2m_{xy}$ aristas, y es un árbol si $m_{xy} = \infty$.*

Comentario 4.1.1. *En [31], prueban el lema anterior para $m_{xy} \in \{3, 4, \ldots, \infty\}$, ya que trabajan con grupos de Artin de tipo large. Sin embargo, el resultado también vale para el caso $m_{xy} = 2$, y la demostración es la misma que en los otros casos.*

Ahora enunciamos la conexión entre el complejo de Artin y la intersección de subgrupos parabólicos. Este resultado da un nuevo enfoque al problema de intersección de subgrupos parabólicos.

Teorema 4.1.5 ([31], Teorema 11, Comentario 15, Corolario 16)**.** *Sean A_Σ un grupo de Artin y X_Σ su complejo de Artin. Si cada vez que un elemento de A_Σ fija dos vértices de X_Σ fija puntualmente un camino combinatorio que los conecta, entonces una intersección arbitraria de subgrupos parabólicos de A_Σ es un subgrupo parabólico de A_Σ.*

Con este teorema en mente, la pregunta puede ser respondida de una manera completamente geométrica. Para probar que los grupos de Artin de tipo large satisfacen las condiciones del teorema, Cumplido, Martin y Vaskou probaron que sus complejos de Artin son sistólicos en el sentido de [61]. Luego usaron el hecho de que si un grupo G actúa sin inversiones en un complejo sistólico y fija dos vértices, entonces fija puntualmente todo camino combinatorio geodésico que los conecta ([31, Lemma 14]).

Queremos generalizar el resultado de Cumplido, Martin y Vaskou a una clase más amplia de grupos de Artin dos-dimensionales. Esto lo lograremos considerando una estructura geométrica más flexible que sistolicidad. Esta flexibilidad nos permite incluir más ejemplos, manteniendo una geometría lo suficientemente rígida.

4.2. Complejos sistólicos-por-función

En esta sección definimos los complejos sistólicos por función, que son una generalización de los complejos sistólicos. Probamos algunas propiedades básicas y un teorema local-a-global análogo al teorema de Cartan–Hadamard. En la Sección 4.3 utilizaremos esta estructura geométrica para probar la condición de fijado de caminos requerida por el Teorema 4.1.5.

Definición 4.2.1. Una *función de longitud* para un complejo simplicial X es una función $l : \text{aristas}(X) \to [0, \frac{1}{2}]$ que asigna un número real entre 0 y $\frac{1}{2}$ a cada arista de X, satisfaciendo las siguientes dos condiciones:

- la suma de las longitudes de las tres aristas de cualquier triángulo es menor o igual a 1;
- vale la desigualdad triangular. Es decir, dadas tres aristas e_0, e_1, e_2 que forman un triángulo, $l(e_i) \leq l(e_{i+1}) + l(e_{i+2})$ (índices módulo 3).

Un complejo simplicial junto con una función de longitud se llama un *complejo de longitud*.

Un *ciclo* en un complejo (de longitud) X es un subcomplejo σ homeomorfo a S^1. Denotamos por $|\sigma|$ al número de aristas en σ. La longitud de σ es la suma

de las longitudes de sus aristas, y la denotamos por $l(\sigma)$. Un *camino* en X es un subcomplejo γ homeomorfo a $[0,1]$. Definimos $|\gamma|$ y $l(\gamma)$ análogamente.

Recordamos algunas definiciones de la Sección 1.3. Un subcomplejo K de un complejo simplicial X es *full* si cualquier símplex de X generado por un conjunto de vértices en K es un símplex de K. Una *diagonal* en un ciclo σ en un complejo simplicial X es una arista de X que conecta dos vértices no consecutivos de σ. Luego, un ciclo es full si y sólo si no tiene diagonales y no genera un símplex. Un complejo simplicial X es *flag* si todo conjunto de vértices adyacentes dos a dos genera un símplex de X.

Definición 4.2.2. Un complejo de longitud X es *large* si es flag y si cada ciclo full tiene largo mayor o igual a 2. Es *localmente large* si el link de cada vértice es.

Es claro de las definiciones que un complejo de longitud large es localmente large. Esto es porque, como el complejo es flag, los links de los vértices son flag y ciclos full en los links son ciclos full en el complejo. Es resto de esta sección está dedicado a probar que el recíproco vale cuando X es simplemente conexo. Este es un teorema local-a-global análogo al resultado clásico para complejos sistólicos [61].

Definición 4.2.3. Un complejo de longitud X es *sistólico-por-función* si es conexo, simplemente conexo y localmente large.

Comentario 4.2.1. *Un complejo simplicial es sistólico si y sólo si es sistólico-por-función con función de longitud constante $l \equiv \frac{1}{3}$. En general, un complejo simplicial es k-sistólico si y sólo si es sistólico-por-función con constante de longitud $l \equiv \frac{2}{k}$.*

Teorema 4.2.4. *Sea X un complejo de longitud sistólico-por-función. Entonces X es large.*

Para probar este teorema, tendremos que estudiar la estructura de los diagramas sobre un complejo sistólico-por-función. Un *diagrama* Δ en X es un morfismo simplicial $\varphi : M \to X$. Si M es una estructura simplicial de un disco 2-dimensional, decimos que Δ es un *diagrama de disco*. Un morfismo simplicial se dice *no degenerado* si es inyectivo en cada símplex.

Lema 4.2.5 ([61], Lema 1.6)**.** *Sean X un complejo simplicial, y σ un ciclo homotópicamente trivial en X. Entonces existe un diagrama de disco no degenerado $\varphi : D \to X$, que manda la frontera de D de manera isomorfa a σ.*

Un tal diagrama se llama *diagrama de relleno* para σ. En un espacio de longitud simplemente conexo, el lema anterior implica que cada ciclo tiene un diagrama de relleno. Para entender estos diagramas, tenemos que recordar algunas nociones básicas de curvatura combinatoria. Estas definiciones son análogas a las del Capítulo 3, pero en el contexto de complejos de longitud.

Sea X un complejo de longitud 2-dimensional. Si v es un vértice de X, su curvatura se define como

$$\kappa(v) = 2 - \chi(\mathrm{lk}_X(v)) - \sum_{e \in \mathrm{lk}_X(v)} l(e).$$

Aquí $\chi(\mathrm{lk}_X(v))$ denota la característica de Euler del link de v. Definimos la curvatura de un 2-símplex f de X como

$$\kappa(f) = \left(\sum_{e \in \partial f} l(e) \right) - 1,$$

donde ∂f es la frontera de f y la suma es sobre sus tres aristas. Notar que la curvatura de una cara es siempre no-positiva.

Teorema 4.2.6 (Teorema de Gauss–Bonnet Combinatorio)**.** *Sea X un complejo de longitud 2-dimensional. Entonces*

$$\sum_{f \in caras(X)} \kappa(f) + \sum_{v \in vértices(X)} \kappa(v) = 2\chi(X).$$

Notar que la fórmula no es exactamente igual a las que aparecen en el Capítulo 3. El tamaño de un ángulo puede ser pensado como la longitud de el lado opuesto a él, multiplicado por π. Omitimos el factor de π por simplicidad.

Definición 4.2.7. Sea σ un ciclo en un complejo simplicial X. Un diagrama de relleno $\varphi : D \to X$ para σ es *minimal* si D tiene la menor cantidad de 2-símplices entre todos los diagramas para σ.

Observar que si $\varphi : D \to X$ es un diagrama de relleno minimal para un ciclo σ, es no degenerado: si una arista e fuera enviada a un vértice, podríamos tomar los dos triángulos que contienen a e, borrar el interior de su unión y pegar las cuatro aristas restantes, así obteniendo un diagrama de relleno para σ con menos 2-símplices. Dado un diagrama no degenerado $\varphi : M \to X$, donde X es un complejo de longitud, podemos pullbackear la función de longitud a M, para que M resulte un complejo de longitud.

Lema 4.2.8. *Sean X un complejo de longitud large y σ un ciclo en X de longitud menor a 2. Entonces existe un diagrama de relleno $\varphi : D \to X$ para σ tal que D no tiene vértices interiores.*

Demostración. Procedemos por inducción en $|\sigma|$. Si $|\sigma| = 3$, entonces el resultado se sigue por ser flag. Ahora supongamos que $|\sigma| > 3$. Como X es large, σ no puede ser full. Entonces σ tiene una diagonal e que conecta dos vértices no consecutivos de σ. Esta arista subdivide a σ en dos caminos, ambos con menos de $|\sigma|-1$ aristas. Los llamamos σ_1 y σ_2. Adjuntando e a ambos σ_1 y σ_2, conseguimos dos ciclos con menos aristas que σ. Por la desigualdad triangular $l(\sigma_i \cup e) \leq l(\sigma)$ para $i = 1, 2$. Por hipótesis inductiva, existe un diagrama de relleno sin vértices interiores para ambos ciclos. Pegando estos dos diagramas a lo largo de dos aristas mapeadas a e obtenemos el diagrama deseado para σ. □

Lema 4.2.9. *Sea σ un ciclo homotópicamente trivial en un complejo de longitud localmente large X. Entonces para cada diagrama de relleno minimal $\varphi : D \to X$ para σ, D es localmente large cuando lo consideramos con la longitud del pullback.*

Demostración. Sea $\varphi : D \to X$ un diagrama de relleno minimal para σ. Supongamos que hay un vértice interior v de D tal que $\mathrm{lk}_D(v)$ no es large. Como D es simplicial, $\mathrm{lk}_D(v)$ es un ciclo full en D (que tiene longitud menor a 2). Consideremos $\varphi(\mathrm{lk}_D(v))$ como un ciclo en $\mathrm{lk}_X(\varphi(v))$. Como X es localmente large, $\mathrm{lk}_X(\varphi(v))$ es un complejo de longitud large. Luego, por el Lema 4.2.8, existe un diagrama de relleno $\psi : D' \to \mathrm{lk}_X(\varphi(v)) \subset X$ para $\varphi(\mathrm{lk}_D(v))$ sin vértices interiores. Hay $|\mathrm{lk}_D(v)|$ 2-símplices cerrados en D que contienen a v. Como ψ es un diagrama de relleno para $\varphi(\mathrm{lk}_D(v))$ y D' no tiene vértices interiores, el número de 2-símplices en D' es $|\varphi(\mathrm{lk}_D(v))| - 2 < |\mathrm{lk}_D(v)|$. Por lo

tanto, si reemplazamos el conjunto de 2-símplices cerrados de D que contienen a v por este nuevo diagrama, obtenemos un diagrama de relleno para σ con menos 2-símplices, lo que es una contradicción. Por lo tanto D es localmente large. □

Comentario 4.2.2. *Si $\varphi : M \to X$ es un diagrama de disco no degenerado, entonces ser localmente large es equivalente a $\kappa(v) \leq 0$ para cada vértice interior v de M. Esto es porque, para un vértice interior v, $\kappa(v) = 2 - \sum_{e \in \mathrm{lk}_M(v)} l(e)$.*

Sea $\varphi : D \to X$ un diagrama de disco. La *capa de frontera* L de D consiste de cada vértice en la frontera de D, cada arista incidente a un vértice en la frontera, y cada 2-símplex abierto cuya clausura tiene un vértice en la frontera. Aquí consideramos 2-símplices abiertos porque no queremos aristas que no sean incidentes a un vértice en la frontera sean parte de la capa de frontera. Notar que L no es usualmente un complejo simplicial. Si D tiene al menos dos vértices interiores, y ninguna arista conecta do vértices no consecutivos de la frontera, definimos el siguiente complejo. Consideramos el complejo simplicial A construido por tomar la unión disjunto de los vértices, aristas y 2-símplices (ahora cerrados) dela capa de frontera de D e identificar sus fronteras de los 2-símplices cerrados, pero sólo en los vértices y aristas de la capa de frontera de D (ver Figura 4.1). Como D tiene más de un vértice interior y ninguna arista conectando vértices no consecutivos de la frontera, A es un anillo sin vértices interiores. Llamamos a A el *complejo de frontera* de D. Tiene dos componentes de frontera $\partial_1 A$ y $\partial_2 A$, con la primera isomorfa a ∂D. Si D es un complejo de longitud, entonces A es un complejo de longitud con la longitud inducida. Notar que si D tiene exactamente dos vértices interiores, si complejo de frontera A no es un complejo simplicial, ya que tiene una arista doble. Sin embargo, es fácil ver que todas las definiciones y resultados pueden adaptarse a este caso.

Notar que si el disco tuviera un sólo vértice interior, su complejo de frontera sería el mismo disco. Es por eso que excluimos ese caso de la definición anterior.

Lema 4.2.10. *Sea $\varphi : D \to X$ un diagrama de relleno minimal para un ciclo σ en un complejo de longitud localmente large X, donde D tiene al menos dos*

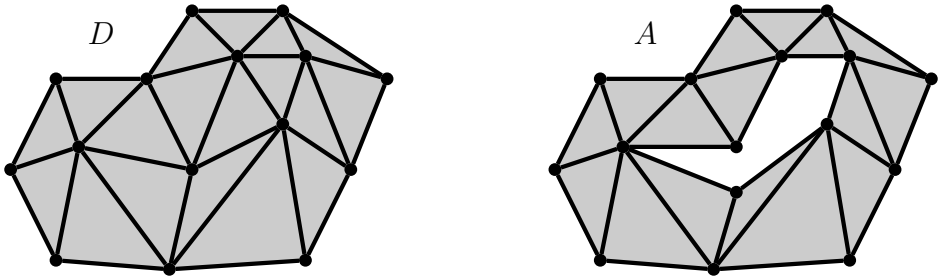

Figura 4.1: Un disco D y su complejo de frontera A

vértices interiores, y ninguna arista que conecta vértices no consecutivos de la frontera. Sea A el complejo de frontera de D. Entonces:

$$l(\partial_1 A) \geq l(\partial_2 A) + 2.$$

Demostración. Aplicamos Gauss–Bonnet a D y A para obtener (luego de simplificar la notación de los índices de las sumas)

$$2 = \sum_{f\in D} \kappa(f) + \sum_{v\in D} \kappa(v) \leq \sum_{f\in A} \kappa(f) + \sum_{v\in \partial D} \kappa(v) = \sum_{f\in A} \kappa(f) + \sum_{v\in \partial_1 A} \kappa(v),$$

$$0 = \sum_{f\in A} \kappa(f) + \sum_{v\in \partial_1 A\cup\partial_2 A} \kappa(v).$$

Las primera y última igualdades valen porque la característica de Euler de un disco y un anillo son 1 y 0 respectivamente. La primera desigualdad vale porque la curvatura de las caras y los vértices interiores es siempre no positiva.

Al tomar el doble de la primera expresión y restarle la segunda expresión conseguimos

$$\begin{aligned} 4 &\leq 2\left(\sum_{f\in A} \kappa(f) + \sum_{v\in \partial_1 A} \kappa(v)\right) - \sum_{f\in A} \kappa(f) - \sum_{v\in \partial_1 A\cup\partial_2 A} \kappa(v) \\ &= \sum_{f\in A} \kappa(f) + \sum_{v\in \partial_1 A} \kappa(v) - \sum_{v\in \partial_2 A} \kappa(v). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Observar que la característica de Euler del link de un vértices en la frontera es igual a 1. Notamos por F_1 y F_2 a los conjuntos de 2-símplices de A que tienen una arista en $\partial_1 A$ y $\partial_2 A$ respectivamente. Para una cara f en F_1 o F_2 denotamos sus tres lados por e_1^f, e_2^f y e_3^f, donde e_1^f es el que está en la componente

de la frontera correspondiente. También denotamos sus respectivas longitudes por l_1^f, l_2^f y l_3^f. Notar que la cardinalidad de F_i es $|\partial_i A|$ para $i = 1, 2$. De esto tenemos que

$$\begin{aligned}
4 &\leq \sum_{f\in A}\left(\left(\sum_{e\in\partial f} l(e)\right) - 1\right) + \sum_{v\in\partial_1 A}\left(1 - \sum_{e\in Lk_A(v)} l(e)\right) \\
&\quad - \sum_{v\in\partial_2 A}\left(1 - \sum_{e\in Lk_A(v)} l(e)\right) \\
&= \sum_{f\in F_1}\left(\left(\sum_{e\in\partial f} l(e)\right) - 1 + 1 + l_1^f - l_2^f - l_3^f\right) \\
&\quad + \sum_{f\in F_2}\left(\left(\sum_{e\in\partial f} l(e)\right) - 1 - 1 - l_1^f + l_2^f + l_3^f\right) \\
&= \sum_{f\in F_1} 2l_1^f + \sum_{f\in F_2}\left(-2 + 2l_2^f + 2l_3^f\right) \\
&\leq \sum_{f\in F_1} 2l_1^f + \sum_{f\in F_2} -2l_1^f \\
&= 2l(\partial_1 A) - 2l(\partial_2 A).
\end{aligned}$$

La primera igualdad es un reordenamiento de los términos usando la nueva notación y la observación sobre las cardinalidades de los F_i. La última desigualdad vale porque la suma de las longitudes de los lados de cualquier 2-símplex es menor o igual a 1. Dividiendo ambos lados por 2, obtenemos la desigualdad deseada $l(\partial_1 A) \geq l(\partial_2 A) + 2$. □

Ahora tenemos todos los ingredientes necesarios para probar el Teorema 4.2.4.

Demostración de l Teorema 4.2.4. Tenemos que probar que todo ciclo full en X tiene longitud mayor o igual a 2, y que X es flag. Sea σ un ciclo full en X. Como X es simplemente conexo, por el Lema 4.2.5 existe un diagrama de relleno minimal para σ, digamos $\varphi : D \to X$. Sabemos que φ es no degenerado porque es minimal. Luego, por el Lema 4.2.9, D es localmente large. Como σ es full, no hay aristas en D conectando vértices no consecutivos de su frontera,

y D tiene al menos un vértice interior. Si D tiene sólo un vértice interior v tenemos

$$0 \geq \kappa(v) = 2 - \sum_{e \in \mathrm{lk}_D(v)} l(e) = 2 - l(\sigma).$$

Por lo tanto $l(\sigma) \geq 2$. Si D tiene más de un vértice interior, entonces estamos bajo las hipótesis del Lema 4.2.10, y $l(\sigma) = l(\partial_1 A) \geq 2$.

Ahora probamos que X es flag. Vamos a ver que es suficiente probar que todo ciclo de tres aristas genera un 2-símplex en X. En efecto, supongamos que tenemos vértices $v_1, \ldots, v_n$ que están conectados dos a dos. Si cada triángulo está lleno, tenemos el 1-esqueleto de un $(n-1)$-símplex en $\mathrm{lk}_X(v_1)$. Como los links de los vértices son flag, $v_1, \ldots, v_n$ tienen que generar un n-símplex en X.

Tomemos un ciclo σ con tres aristas, y sea $\varphi : D \to X$ un diagrama de relleno minimal para σ. Si D tiene más de un vértice interior, entonces por el Lema 4.2.10, $l(\sigma) \geq 2$, lo que es imposible. Si D tiene exactamente un vértice interior v, entonces al igual que antes

$$0 \geq \kappa(v) = 2 - \sum_{e \in \mathrm{lk}_D(v)} l(e) = 2 - l(\sigma).$$

Una vez más, esto implicaría que $l(\sigma) \geq 2$. Entonces la única posibilidad es que D no tenga vértices interiores. Luego, σ genera un 2-símplex en X. □

4.3. Subgrupos parabólicos

Ahora definimos una función de longitud para el complejo de Artin de un grupo de Artin $(2,2)$-libre dos-dimensional, y mostramos que es sistólico-por-función. Luego usamos su estructura geométrica para probar el siguiente teorema. La definición de geodésica utilizada en el teorema será introducida una vez que tengamos definida la función de longitud para el complejo de Artin.

Teorema 4.3.1. *Sea A_Σ un grupo de Artin $(2,2)$-libre dos-dimensional con $|\Sigma| \geq 3$ y X_Σ su complejo de Artin. Sean u y v vértices de X_Σ. Entonces existe un camino conectando u y v tal que si un elemento de A_Σ fija u y v, fija a este camino puntualmente.*

Como consecuencia inmediata, los resultados del Teorema 4.1.5 valen para todos los grupos de Artin $(2,2)$-libres dos-dimensionales (los casos con menos de 3 generadores fueron establecidos en [30, 31]). En particular, derivamos el principal resultado de este capítulo.

Teorema 4.3.2. *Sea A_Σ un grupo de Artin $(2,2)$-libre dos-dimensional. Entonces la intersección de una familia arbitraria de subgrupos parabólicos es un subgrupo parabólico.*

Comenzamos por caracterizar a los grupos de Artin $(2,2)$-libres dos-dimensionales.

Proposición 4.3.3. *un grupo de Artin dos-dimensional A_Γ es $(2,2)$-libre si y sólo si existen números $m'_{xy} \in \{2,3,4,6\}$ con $m'_{xy} \leq m_{xy}$ y $m'_{xy} = m'_{yx}$ para cada $x, y \in V(\Gamma)$, tales que $\frac{1}{m'_{xy}} + \frac{1}{m'_{yz}} + \frac{1}{m'_{zx}} \leq 1$ y $\frac{1}{m'_{xy}} \leq \frac{1}{m'_{yz}} + \frac{1}{m'_{zx}}$ para cada $x, y, z \in V(\Gamma)$.*

Demostración. Es claro que si tales m'_{xy} existen, entonces A_Σ es $(2,2)$-libre. Ahora supongamos que Γ no tiene dos aristas consecutivas etiquetadas por 2. Entonces podemos definir a los m'_{xy} de la siguiente manera:

- si $m_{xy} = 2$, entonces $m'_{xy} = 2$;
- si $m_{xy} = 3$, entonces $m'_{xy} = 3$;
- si $m_{xy} > 3$ y la arista no es adyacente a una arista etiquetada por 2, entonces $m'_{xy} = 3$;
- si m_{xy} forma un triángulo con un 2 y un 3, entonces $m'_{xy} = 6$;
- en cualquier otro caso, $m'_{xy} = 4$.

Es fácil ver que dicho etiquetado está bien definido ya que A_Σ es un grupo de Artin $(2,2)$-libre dos-dimensional, y que satisface las condiciones requeridas. □

Sea A_Σ un grupo de Artin $(2,2)$-libre dos-dimensional. Definimos una función de longitud para X_Σ, $l : \text{edges}(X_\Sigma) \to [0, \frac{1}{2}]$ como sigue. Aristas en X_Σ son símplices de codimensión $|\Sigma| - 2$, así que se corresponden con subconjuntos de Σ a los que les faltan dos elementos. Definimos la longitud de una arista

de tipo $\Sigma\backslash\{\sigma_x, \sigma_y\}$ como $\frac{1}{m'_{xy}}$, donde los m'_{xy} son los de la Proposición 4.3.3. Como A_Σ es $(2,2)$-libre y dos-dimensional, la suma de las longitudes de los tres lados de cada triángulo es menor o igual a 1, y la desigualdad triangular vale, así que l está bien definida.

Teorema 4.3.4. *Sea A_Σ un grupo de Artin $(2,2)$-libre dos-dimensional con $|\Sigma| \geq 3$. Entonces X_Σ con la función de longitud definida arriba es sistólico-por-función.*

Demostración. La demostración procede por inducción en $|\Sigma|$ utilizando nuestro teorema local-a-global 4.2.4.

Si $|\Sigma| = 3$, por el Lema 3.2.3 X_Σ es conexo y simplemente conexo. Sea v un vértice de X_Σ. El Lema 4.1.3 dice que $\mathrm{lk}_{X_\Sigma}(v)$ es isomorfo al complejo de Artin $X_{\Sigma'}$ asociado al grupo de Artin $A_{\Sigma'}$, donde $\Sigma' \subset \Sigma$ con $|\Sigma'| = 2$. El complejo $X_{\Sigma'}$ es un grafo y hereda la función de longitud de X_Σ. Si $X_{\Sigma'}$ es un árbol, entonces claramente es un complejo de longitud large. Si no es un árbol, entonces por la Proposición 4.3.3, la longitud de sus aristas es mayor o igual a $\frac{1}{m}$, donde m es la etiqueta en $A_{\Sigma'}$. Por el Lema 4.1.4 todos los ciclos en $X_{\Sigma'}$ tienen al menos $2m$ aristas, así que es un complejo de longitud large. Luego X_Σ es sistólico-por-función.

Ahora asumimos que $|\Sigma| > 3$ y que la afirmación vale para todo grupo de Artin $(2,2)$-libre dos-dimensional con menos generadores. Una vez más, sabemos que X_Σ es conexo y simplemente conexo por el Lema 3.2.3. Aplicando el Lema 4.1.3 conseguimos que el link de cada vértice es sistólico-por-función. Luego, por el Teorema 4.2.4, el link de cada vértice es large. Por lo tanto X_Σ es sistólico-por-función. □

Con la función de longitud definida como arriba, podemos darle a X_Σ una métrica tal que sea métricamente sistólico en el sentido de [57] (ver Sección 1.4). Concretamente, si una arista $e \in X_\Sigma$ tiene $l(e) = \frac{1}{k}$, entonces el largo de e en la métrica es $\sin(\frac{\pi}{k})$. Más en general, si X es un complejo sistólico-por-función con función de longitud l, donde la imagen de l es finita y l es positiva, entonces a X puede dársele una métrica tal que sea métricamente sistólico. Al igual que en el complejo de Artin, la longitud de una arista e en el espacio métrico es $\sin(\pi l(e))$. Esta asignación funciona por la ley del seno. No utilizaremos sistolicidad métrica en este capítulo, pero este hecho puede ser de interés para otras aplicaciones.

Definimos la *distancia* entre dos vértices $u, v \in X_\Sigma$ como

$$d(u,v) = \text{mín}\{l(\gamma) \mid \gamma \text{ es un camino conectando } u \text{ y } v\}.$$

Notar que este mínimo se alcanza, porque X_Σ es conexo y la imagen de l es un subconjunto finito de $[0, \frac{1}{2}]$. Decimos que un camino γ entre u y v es una *geodésica* si es de longitud mínima.

Ahora estamos listos para probar el Teorema 4.3.1.

Demostración del Teorema 4.3.1. Queremos probar que para cada par de vértices $u, v \in X_\Sigma^{(0)}$ existe un camino conectando u y v tal que si un elemento $g \in A_\Sigma$ fija a u y a v, entonces fija puntualmente este camino. Supongamos que no es el caso. Tomamos vértices u y v tales que no existe tal camino y tales que $d(u,v)$ es minimal entre dicho pares. Sea γ una geodésica entre ellos (existe porque X_Σ es conexo), y $g \in A_\Sigma$ un elemento que fija u y v, pero no γ. Entonces g manda γ a otra geodésica γ' entre u y v. Como $d(u,v)$ es minimal, la unión de γ y γ' determina un ciclo en X_Σ. Mostraremos que podemos llenar el ciclo con un diagrama minimal y encontrar un atajo (i.e. un camino más corto que γ) entre u y v, contradiciendo el hecho de que γ sea geodésica.

Sea $\varphi : D \to X_\Sigma$ un diagrama de relleno minimal para la concatenación de γ y γ' (existe porque X_Σ es simplemente conexo). Etiquetamos los vértices de γ en D como $u = v_0, v_1, \ldots, v_{|\gamma|-1}, v_{|\gamma|} = v$, y los vértices de γ' en D como $u = v'_0, v'_1, \ldots, v'_{|\gamma'|-1}, v'_{|\gamma'|} = v$. Notar que

1. podemos asumir, sin pérdida de la generalidad, que no hay ninguna arista entre vértices no consecutivos de γ, o entre vértices no consecutivos de γ', porque γ es una geodésica, y

2. no hay ninguna arista entre v_i y v'_i para $1 \leq i \leq |\gamma| - 1$, porque vértices de un mismo tipo no son adyacentes en X_Σ.

Sin embargo, puede haber una arista entre v_i y v'_j si $i \neq j$. Tomamos la que está más a la derecha entre estas aristas. La llamamos e y asumimos que conecta v_k con v'_{k+r} (ver Figura 4.2). Sea $\tilde{D}$ el disco delimitado por e, y sean $\tilde{\gamma}$ y $\tilde{\gamma'}$ los caminos conectando v_k y v a lo largo de la frontera de $\tilde{D}$, donde $\tilde{\gamma'}$ contiene a e. Si no hay tal arista e, consideramos $\tilde{D} = D$, $\tilde{\gamma} = \gamma$ y $\tilde{\gamma'} = \gamma'$, y continuamos de la misma manera. Es claro que $\tilde{\gamma}$ es una geodésica. Entonces $l(e) \geq d(v_k, v_{k+r})$. También tenemos que $l(e) \leq d(v_k, v_{k+r})$. Para verlo,

proyectamos a e y al camino en $\tilde{\gamma}$ entre v_k y v_{k+r} al domino fundamental K, y aplicamos la desigualdad triangular $r-1$ veces. Luego, $l(\tilde{\gamma'}) = l(\tilde{\gamma})$. De las observaciones anteriores, deducimos que $\tilde{D}$ no tiene aristas conectando vértices no consecutivos del borde. Por lo tanto, tiene al menos un vértice interior. Al igual que en la demostración del Teorema 4.2.4 tenemos que $l(\partial\tilde{D}) = l(\tilde{\gamma}) + l(\tilde{\gamma'}) \geq 2$.

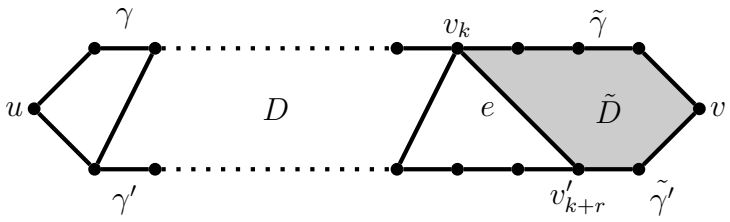

Figura 4.2: El disco D, la arista e y el disco $\tilde{D}$

Si v_k o v tiene grado mayor a 3, por el Lema 4.2.10 podemos encontrar un camino en $\tilde{D}$ conectando v_k y v más corto que $\tilde{\gamma}$. Esto contradiría el hecho de que γ es una geodésica. Así que podemos asumir que v_k y v tienen grado 3 (es claro que no pueden tener grado 2). Sean e_1 y e_2 las aristas interiores incidentes a v_k y v respectivamente. Si alguna de ellas tiene longitud menor a $\frac{1}{2}$, entonces o bien por el Lema 4.2.10, en caso de que $\tilde{D}$ tenga más de un vértice interior, o por la desigualdad $l(\partial\tilde{D}) \geq 2$ si $\tilde{D}$ tiene exactamente un vértice interior, podemos encontrar un atajo y llegar a una contradiccón.

La única situación restante es cuando v_k y v tienen grado 3, y $l(e_1) = l(e_2) = \frac{1}{2}$. En ese caso podemos encontrar un camino σ en $\tilde{D}$ comenzando en v_k y terminando en e_2, con $l(\sigma) \leq l(\tilde{\gamma})$. Si la desigualdad es estricta, terminamos la demostración. Si $l(\sigma) = l(\tilde{\gamma})$, consideramos la geodésica τ de u a v que consiste de concatenar el subcamino de γ que va de u a v_k con $\varphi(\sigma)$. Podemos asumir que $\varphi(\sigma)$ es un camino en X_Σ, porque de otra forma habríamos encontrado un atajo. Como esta geodésica termina con una arista de longitud $\frac{1}{2}$ y ningún triángulo tiene dos aristas de longitud $\frac{1}{2}$, aplicando el mismo procedimiento a τ nos da un camino entre u y v más corto que γ, obteniendo la contradicción deseada. □

El Teorema 4.3.2 se sigue inmediatamente de los Teoremas 4.1.5 y 4.3.1.

Aplicando este Teorema 4.3.2 junto con resultados previos, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.3.5. *Sea A_Σ un grupo de Artin con a lo sumo tres generadores. Entonces la intersección de una familia arbitraria de subgrupos parabólicos de A_Σ es un subgrupo parabólico de A_Σ.*

Demostración. Dicho grupo de Artin es de tipo esférico, right-angled o $(2,2)$-libre dos-dimensional. Por lo tanto, ya sea por [30] para el caso esférico; por [38] para el caso right-angled; o por el Teorema 4.3.2 para el caso $(2,2)$-libre dos-dimensional, conseguimos el resultado deseado. □

Combinando el trabajo reciente de Möller, Paris y Varghese [69] con el Teorema 4.3.2, obtenemos un resultado parcial para todos los grupos de Artin dos-dimensionales.

Corolario 4.3.6. *Sea A_Γ un grupo de Artin dos-dimensional. Sea P_1 un subgrupo parabólico correspondiente a un subgrafo completo de Γ, y sea P_2 un subgrupo parabólico arbitrario. Entonces $P_1 \cap P_2$ es un subgrupo parabólico de A_Γ.*

Desafortunadamente, un resultado análogo al Teorema 4.3.1 no vale para todos los grupos de Artin. Luego, este método de encontrar caminos fijados en el complejo de Artin no funciona como un enfoque unificador para el problema de intersección de subgrupos parabólicos. Damos dos ejemplos en los que falla. Uno de ellos no es $(2,2)$-libre y el otro no es dos-dimensional.

Ejemplo 4.3.7. Consideremos el primer ejemplo a la izquierda de la Figura 4.3. La etiqueta n puede ser ∞, en cuyo caso el grupo de Artin correspondiente es dos-dimensional, pero sigue sin ser $(2,2)$-libre. En cualquier caso, el elemento $\sigma_x\sigma_z$ fija todos los vértices de tipo $\langle\sigma_x,\sigma_z\rangle$. Sin embargo no fija ningún vértices de tipo $\langle\sigma_x,\sigma_y\rangle$ o $\langle\sigma_y,\sigma_z\rangle$. Luego no fija ningún camino entre vértices de tipo $\langle\sigma_x,\sigma_z\rangle$.

Ahora veamos el ejemplo a la derecha. Este grupo de Artin es $(2,2)$-libre, pero no es dos-dimensional. El elemento $\sigma_a\sigma_b$ fija a los vértices $\langle\sigma_a,\sigma_b\rangle$ y $\sigma_c\sigma_a\sigma_b\sigma_c\langle\sigma_a,\sigma_b\rangle$, pero no fija ningún camino que los conecta.

En ambos ejemplos, es fácil ver a mano que los elementos propuestos funcionan. Igualmente, hay un intuición geométrica de por qué fallan. Cuando

el grupo de Artin es esférico, el grupo de Coxeter correspondiente es finito. El complejo de Coxeter en estos casos (que se define de la misma forma que el complejo de Artin, pero considerando el grupo de Coxeter) es una esfera. Si vértices del complejo de Artin fueran fijados por un automorfismo, entonces los elementos correspondientes del complejo de Coxeter también deberían quedar fijos. Lo que hacemos en estos ejemplos es elegir polos opuestos en el complejo de Coxeter y rotar la esfera alrededor del eje que conecta los vértices.

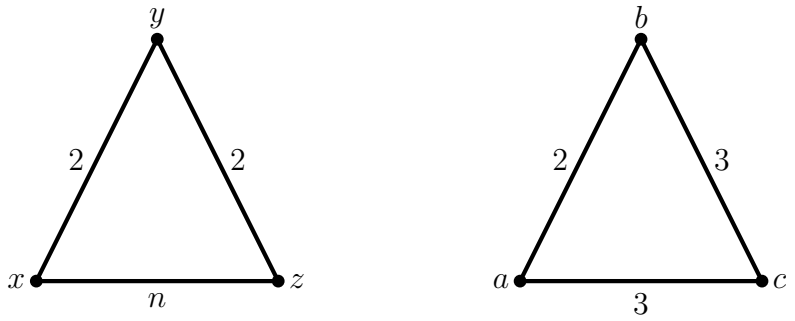

Figura 4.3: Grafos de los ejemplos que fallan.

Terminamos este capítulo aplicando nuestros resultados y el algoritmo introducido en [29, Algorithm 4] para resolver el problema de estabilidad por conjugación para grupos de Artin $(2,2)$-libres dos-dimensionales. Un subgrupo H de un grupo G es *estable por conjugación* si, para cada par $h, h' \in H$ tal que existe $g \in G$ con $g^{-1}hg = h'$, existe $\tilde{h} \in H$ tal que $\tilde{h}^{-1}h\tilde{h} = h'$. El problema de estabilidad por conjugación consiste en decidir cuáles subgrupos parabólicos de un grupo de un grupo de Artin son estables por conjugación. Seguimos la notación y las definiciones de [29].

Teorema 4.3.8 ([29], Teorema A)**.** *Sea A_Σ un grupo de Artin estandarizable que satisface la propiedad de la cinta, y tal que todo elemento en A_Σ admite una clausura parabólica. Entonces, existe un algoritmo que decide si un subgrupo parabólico P de A_Σ es estable por conjugación o no.*

Es sabido por resultados de Godelle [47] que los grupos de Artin dos-dimensionales Artin son estandarizables y satisfacen la propiedad de la cinta. Además, por el Teorema 4.3.1 y el Teorema 4.1.5, cualquier elemento en

un grupo de Artin $(2,2)$-libre dos-dimensional tiene una clausura parabólica. Por lo tanto, los grupos de Artin $(2,2)$-libres dos-dimensionales satisfacen las hipótesis del Teorema 4.3.8. Examinando el algoritmo en el caso de grupos de Artin $(2,2)$-libres dos-dimensionales obtenemos el siguiente teorema de clasificación.

Teorema 4.3.9. *Sean A_Γ un grupo de Artin $(2,2)$-libre dos-dimensional y A_{Γ_X} un subgrupo parabólico estándar. Entonces A_{Γ_X} no es estable por conjugación si y sólo si existen vértices x, y en Γ_X que están conectados por un camino con etiquetas impares en Γ, pero no están conectados por un camino con etiquetas impares en Γ_X.*

Demostración. Necesitamos entender [29, Algorithm 4] en el caso de un grupo de Artin $(2,2)$-libre dos-dimensional A_Γ y un subgrupo parabólico estándar A_{Γ_X}. Como A_Γ es dos-dimensional, los únicos subgrupo parabólicos de tipo esférico son grupos de Artin dihedrales de tipo $I_2(m)$. Luego, el algoritmo se reduce a chequear si existen vértices x, y en Γ_X que están conectados por un camino con etiquetas impares en Γ, pero no están conectados por un camino con etiquetas impares en Γ_X. Esto es exactamente lo que queríamos probar. □

Para una demostración más detallada de este hecho, ver [31, Theorem C]. Su demostración es para grupos de Artin de tipo large, pero también funciona en el caso $(2,2)$-libre dos-dimensional.

Capítulo 5

Parabólicos dentro de parabólicos

En este capítulo probamos el Teorema 2.3.1. Es decir, probamos que un subgrupo parabólico de un grupo de Artin que está contenido en otro subgrupo parabólico es un subgrupo parabólico de dicho subgrupo parabólico. Los resultados presentados son trabajo conjunto con Luis Paris y pueden encontrarse en [11].

El Teorema 2.3.1 fue probado por Rolfsen en [76] y por Fenn, Rolfsen y Zhu en [40] para grupos de trenzas, por Paris en [73] y por Godelle en [45] para grupos de Artin de tipo esférico, por Godelle en [46] para grupos de Artin de tipo FC, por Godelle en [47] para grupos de Artin dos-dimensionales y por Haettel en [51] para algunos grupos de Artin de tipo euclidiano. Nuestra prueba en independiente de estos trabajos y es válida para todos los grupos de Artin. Notar que los resultados probados para todos los grupos de Artin son poco comunes en la literatura, y este resultado es en cierto sentido una rareza.

Seguimos la notación introducida en el Capítulo 2. Sea $X \subset V(\Gamma)$. Para lograr nuestro objetivo, construiremos una retracción conjuntista $\pi_X : A_\Gamma \to A_X$ a la inclusión $A_X \hookrightarrow A_\Gamma$ (ver Proposición 5.1.3). Esta función se define directamente en las palabras que representan elementos de A, pero no es un homeomorfismo, aunque su restricción al llama subgrupo coloreado es un homeomorfismo. La construcción de esta función es interesante en sí misma y puede considerarse un resultado importante del capítulo. Sin embargo, des-

tacamos que esta construcción ya se encontraba implícita en la prueba del Teorema 1.2 de Charney y Paris [22] y nuestra contribución consiste en hacerla explícita.

5.1. Las demostraciones

Sea X un subconjunto de $V(\Gamma)$. Fijamos $S_X = \{s_x \mid x \in X\}$ y denotamos por W_X al subgrupo de W_Γ generado por S_X. Sabemos por Bourbaki [12] que W_X es naturalmente isomorfo a W_{Γ_X}, y luego, al igual que para grupos de Artin, no diferenciaremos W_X de W_{Γ_X}. El subgrupo W_X se llama un *subgrupo parabólico estándar* de W_Γ y un subgrupo conjugado a W_X se llama un *subgrupo parabólico* de W_Γ.

Denotamos por $\theta : A_\Gamma \to W_\Gamma$ al epimorfismo natural que envía σ_x a s_x para todo $x \in V(\Gamma)$. El núcleo de θ se denota por CA_Γ y es llamado el *grupo de Artin coloreado* de Γ. El epimorfismo θ tiene una sección conjuntista natural $\iota : W_\Gamma \to A_\Gamma$ definida como sigue. Para $w \in W_\Gamma$ la longitud de la palabra de w con respecto a S se denota por $\ell_S(w)$, y una expresión $w = s_{x_1} s_{x_2} \cdots s_{x_p}$ se dice *reducida* si $p = \ell_S(w)$. Sea $w \in W_\Gamma$. Elegimos una expresión reducida $w = s_{x_1} s_{x_2} \cdots s_{x_p}$ y fijamos $\iota(w) = \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \cdots \sigma_{x_p}$. Por Tits [85] esta definición no depende de la elección de la expresión reducida. Notar que ι no es un homeomorfismo, pero, si $u, v \in W_\Gamma$ son tales que $\ell_S(uv) = \ell_S(u) + \ell_S(v)$, entonces $\iota(uv) = \iota(u)\,\iota(v)$. Claramente tenemos que $\theta \circ \iota = \mathrm{id}$.

Para $X \subset V(\Gamma)$ fijamos $\mathrm{CA}_X = \mathrm{CA}_\Gamma \cap A_X$. Como la inclusión de Γ_X en Γ induce isomorfismos $W_{\Gamma_X} \to W_X$ u $A_{\Gamma_X} \to A_X$, el isomorfismo $A_{\Gamma_X} \to A_X$ se restringe a un isomorfismo $\mathrm{CA}_{\Gamma_X} \to \mathrm{CA}_X$. Luego, al igual que con W_X y A_X, no vamos a diferenciar CA_X de CA_{Γ_X}.

El siguiente lema se sigue de los ejercicios en el Capítulo 4 de Bourbaki [12] (ver también Davis [34, Section 4.3]) y es muy utilizado en el estudio de grupos de Coxeter.

Lema 5.1.1 (Bourbaki [12])**.** *Sean $X, Y \subset V(\Gamma)$ y sea $w \in W_\Gamma$.*

(1) Existe un único elemento de longitud minimal en el coset doble $W_X\, w\, W_Y$.

(2) Sea w_0 el elemento de longitud minimal en $W_X\, w\, W_Y$. Para cada $v \in W_X\, w\, W_Y$ existen $u_1 \in W_X$ y $u_2 \in W_Y$ tales que $v = u_1 w_0 u_2$ y $\ell_S(v) =$

$\ell_S(u_1) + \ell_S(w_0) + \ell_S(u_2)$.

(3) Sea w_0 el elemento de longitud minimal en $W_X\, w\, W_Y$. Para cada $u_1 \in W_X$ tenemos que $\ell_S(u_1 w_0) = \ell_S(u_1) + \ell_S(w_0)$, y para cada $u_2 \in W_Y$ tenemos que $\ell_S(w_0 u_2) = \ell_S(w_0) + \ell_S(u_2)$.

Sean $X, Y \subset V(\Gamma)$ y $w_0 \in W_\Gamma$. Decimos que w_0 es (X,Y)-*minimal* si es de longitud minimal en el doble coset $W_X\, w_0\, W_Y$.

El primer ingrediente el a demostración del Teorema 2.3.1 es el siguiente. Esencialmente dice que la conclusión del Teorema 2.3.1 vale si estamos bajo las mismas hipótesis, pero sobre el grupo de Coxeter.

Lema 5.1.2. *Sean $X, Y \subset V(\Gamma)$ y $w \in W_\Gamma$ tal que $wW_Y w^{-1} \subset W_X$. Entonces existen $Y' \subset X$ y $\alpha \in A_X$ tales que $\iota(w)\, A_Y\, \iota(w)^{-1} = \alpha A_{Y'} \alpha^{-1}$. En particular, $\iota(w)\, A_Y\, \iota(w)^{-1} \subset A_X$.*

Demostración. Sea w_0 el elemento de longitud minimal en el coset doble $W_X\, w\, W_Y$. Por el Lema 5.1.1 existen $u_1 \in W_X$ y $u_2 \in W_Y$ tales que $w = u_1 w_0 u_2$ y $\ell_S(w) = \ell_S(u_1) + \ell_S(w_0) + \ell_S(u_2)$. Como $wW_Y w^{-1} \subset W_X$, $u_1 \in W_X$ y $u_2 \in W_Y$, tenemos que $w_0 W_Y w_0^{-1} \subset W_X$.

Sea $y \in Y$, y sea $\psi(y) = w_0 s_y w_0^{-1} \in W_X$. Tenemos que $w_0 s_y = \psi(y)\, w_0$. Más aún, por el Lema 5.1.1 (3), tenemos que $\ell_S(w_0) + 1 = \ell_S(w_0 s_y) = \ell_S(\psi(y)\, w_0) = \ell_S(\psi(y)) + \ell_S(w_0)$, y luego $\ell_S(\psi(y)) = 1$. Por lo tanto, existe $f(y) \in X$ tal que $w_0 s_y w_0^{-1} = \psi(y) = s_{f(y)}$. Notar que la función recién definida $f : Y \to X$ es inyectiva ya que la conjugación por w_0 es un automorfismo. Fijamos $Y' = f(Y) \subset X$.

Sea $y \in Y$. Tenemos que $w_0 s_y = s_{f(y)} w_0$ y $\ell_S(w_0 s_y) = \ell_S(s_{f(y)} w_0) = \ell_S(w_0) + 1$, luego

$$\iota(w_0)\, \sigma_y = \iota(w_0)\, \iota(s_y) = \iota(w_0 s_y) = \iota(s_{f(y)} w_0) = \iota(s_{f(y)})\, \iota(w_0) = \sigma_{f(y)}\, \iota(w_0)\,.$$

Esto implica que $\iota(w_0)\, \Sigma_Y\, \iota(w_0)^{-1} = \Sigma_{Y'}$, y entonces $\iota(w_0)\, A_Y\, \iota(w_0)^{-1} = A_{Y'}$.

Fijamos $\alpha = \iota(u_1) \in A_X$. Entonces, como $\iota(u_2) \in A_Y$,

$$\iota(w)\, A_Y\, \iota(w)^{-1} = \iota(u_1)\, \iota(w_0)\, \iota(u_2)\, A_Y\, \iota(u_2)^{-1} \iota(w_0)^{-1} \iota(u_1)^{-1} =$$
$$\iota(u_1)\, \iota(w_0)\, A_Y\, \iota(w_0)^{-1} \iota(u_1)^{-1} = \iota(u_1)\, A_{Y'}\, \iota(u_1)^{-1} = \alpha A_{Y'} \alpha^{-1}\,.$$

□

Ahora pasamos a construir la retracción conjuntista de la inclusión de A_X a A_Γ, es decir, una función $\pi_X : A_\Gamma \to A_X$ que satisface $\pi_X(\alpha) = \alpha$ para todo $\alpha \in A_X$. Esta función será utilizada para probar el Lema 5.1.4 que es el segundo y último ingrediente en la prueba del Teorema 2.3.1. Notar que las principales ideas de la demostración de la Proposición 5.1.3 vienen de la demostración del Teorema 1.2 de Charney y Paris [22].

Recordar que $(\Sigma \sqcup \Sigma^{-1})^*$ denota el monoide libre libremente generado por $\Sigma \sqcup \Sigma^{-1}$, es decir, el conjunto de palabras en el alfabeto $\Sigma \sqcup \Sigma^{-1}$. Sea $X \subset V(\Gamma)$. Sean $\hat{\alpha} = \sigma_{z_1}^{\varepsilon_1}\sigma_{z_2}^{\varepsilon_2}\cdots\sigma_{z_p}^{\varepsilon_p} \in (\Sigma \sqcup \Sigma^{-1})^*$. Fijamos $u_0 = 1 \in W_\Gamma$ y, para $i \in \{1, \ldots, p\}$, fijamos $u_i = s_{z_1}s_{z_2}\cdots s_{z_i} \in W_\Gamma$. Escribimos cada u_i en la forma $u_i = v_i w_i$, donde $v_i \in W_X$ y w_i es $(X, \emptyset)$-minimal. Sea $i \in \{1, \ldots, p\}$. Fijamos $t_i = w_{i-1}s_{z_i}w_{i-1}^{-1}$ si $\varepsilon_i = 1$ y $t_i = w_i s_{z_i} w_i^{-1}$ si $\varepsilon_i = -1$. Si $t_i \notin S_X$, Entonces fijamos $\tau_i = 1$. Supongamos que $t_i \in S_X$, y sea $x_i \in X$ tal que $t_i = s_{x_i}$. Entonces fijamos $\tau_i = \sigma_{x_i}^{\varepsilon_i}$. Por último, fijamos,

$$\hat{\pi}_X(\hat{\alpha}) = \tau_1\tau_2\cdots\tau_p \in (\Sigma_X \sqcup \Sigma_X^{-1})^*.$$

Proposición 5.1.3. *Sea $X \subset V(\Gamma)$.*

(1) Sea $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in (\Sigma \sqcup \Sigma^{-1})^*$. Si $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ representan el mismo elemento de A_Γ, entonces $\hat{\pi}_X(\hat{\alpha})$ y $\hat{\pi}_X(\hat{\beta})$ representan el mismo elemento de A_X. En otras palabras, la función $\hat{\pi}_X : (\Sigma \sqcup \Sigma^{-1})^* \to (\Sigma_X \sqcup \Sigma_X^{-1})^*$ induce una función $\pi_X : A_\Gamma \to A_X$.

(2) Tenemos que $\pi_X(\alpha) = \alpha$ para todo $\alpha \in A_X$.

(3) La restricción de π_X a CA_Γ es un morfismo $\pi_X : \mathrm{CA}_\Gamma \to \mathrm{CA}_X$.

Si bien la definición de $\hat{\pi}_X$ puede parecer ad hoc en un principio, se volverá más clara en la Sección 5.2, donde introducimos el complejo de Salvetti y probamos la Proposición 5.1.3. Ahora, gracias a la Proposición 5.1.3 podemos probar el segundo ingrediente de la demostración del Teorema 2.3.1.

Lema 5.1.4. *Sean $X \subset V(\Gamma)$, $\alpha \in A_X$ y $\beta \in \mathrm{CA}_\Gamma$. Si $\beta\alpha\beta^{-1} \in A_X$, entonces $\beta\alpha\beta^{-1} = \pi_X(\beta)\,\alpha\,\pi_X(\beta)^{-1}$.*

Demostración. Elegimos una palabra $\sigma_{z_1}^{\varepsilon_1}\sigma_{z_2}^{\varepsilon_2}\cdots\sigma_{z_p}^{\varepsilon_p} \in (\Sigma \sqcup \Sigma^{-1})^*$ que representa a β y una palabra $\sigma_{x_1}^{\mu_1}\sigma_{x_2}^{\mu_2}\cdots\sigma_{x_q}^{\mu_q} \in (\Sigma_X \sqcup \Sigma_X^{-1})^*$ que representa a α.

Comenzamos con la definición de $\pi_X(\beta\alpha\beta^{-1})$ que usa a la palabra representante $\sigma_{z_1}^{\varepsilon_1}\cdots\sigma_{z_p}^{\varepsilon_p}\sigma_{x_1}^{\mu_1}\cdots\sigma_{x_q}^{\mu_q}\sigma_{z_p}^{-\varepsilon_p}\cdots\sigma_{z_1}^{-\varepsilon_1}$. Fijamos $u_{0,1}=1$ y, para $i\in\{1,\dots,p\}$, fijamos $u_{i,1}=s_{z_1}s_{z_2}\cdots s_{z_i}$. Escribimos cada $u_{i,1}$ en la forma $u_{i,1}=v_{i,1}w_{i,1}$ donde $v_{i,1}\in W_X$ y $w_{i,1}$ es $(X,\emptyset)$-minimal. Sea $i\in\{1,\dots,p\}$. Fijamos $t_{i,1}=w_{i-1,1}s_{z_i}w_{i-1,1}^{-1}$ si $\varepsilon_i=1$, y $t_{i,1}=w_{i,1}s_{z_i}w_{i,1}^{-1}$ si $\varepsilon_i=-1$. Fijamos $\tau_{i,1}=1$ si $t_{i,1}\notin S_X$, y $\tau_{i,1}=\sigma_{x_{i,1}}^{\varepsilon_i}$ si $t_{i,1}\in S_X$, donde $x_{i,1}$ es el elemento de X tal que $t_{i,1}=s_{x_{i,1}}$. Fijamos $u_{0,2}=\theta(\beta)$ y, para $i\in\{1,\dots,q\}$, fijamos $u_{i,2}=\theta(\beta)\,s_{x_1}s_{x_2}\cdots s_{x_i}$. Escribimos cada $u_{i,2}$ en la forma $u_{i,2}=v_{i,2}w_{i,2}$, donde $v_{i,2}\in W_X$ y $w_{i,2}$ es $(X,\emptyset)$-minimal. Sea $i\in\{1,\dots,q\}$. Fijamos $t_{i,2}=w_{i-1,2}s_{x_i}w_{i-1,2}^{-1}$ si $\mu_i=1$, y $t_{i,2}=w_{i,2}s_{x_i}w_{i,2}^{-1}$ si $\mu_i=-1$. Fijamos $\tau_{i,2}=1$ si $t_{i,2}\notin S_X$, y $\tau_{i,2}=\sigma_{x_{i,2}}^{\mu_i}$ si $t_{i,2}\in S_X$, donde $x_{i,2}$ es el elemento de X tal que $t_{i,2}=s_{x_{i,2}}$. Fijamos $u_{p+1,3}=\theta(\beta)\,\theta(\alpha)$ y, para $i\in\{1,\dots,p\}$, fijamos $u_{i,3}=\theta(\beta)\,\theta(\alpha)\,s_{z_p}s_{z_{p-1}}\cdots s_{z_i}$. Escribimos cada $u_{i,3}$ en la forma $u_{i,3}=v_{i,3}w_{i,3}$, donde $v_{i,3}\in W_X$ y $w_{i,3}$ es $(X,\emptyset)$-minimal. Sea $i\in\{1,\dots,p\}$. Fijamos $t_{i,3}=w_{i+1,3}s_{z_i}w_{i+1,3}^{-1}$ si $\varepsilon_i=-1$, y $t_{i,3}=w_{i,3}s_{z_i}w_{i,3}^{-1}$ si $\varepsilon_i=1$. Fijamos $\tau_{i,3}=1$ si $t_{i,3}\notin S_X$, y $\tau_{i,3}=\sigma_{x_{i,3}}^{-\varepsilon_i}$ si $t_{i,3}\in S_X$, donde $x_{i,3}$ es el elemento de X tal que $t_{i,3}=s_{x_{i,3}}$. Entonces, por definición,

$$\pi_X(\beta\alpha\beta^{-1})=\tau_{1,1}\tau_{2,1}\cdots\tau_{p,1}\tau_{1,2}\tau_{2,2}\cdots\tau_{q,2}\tau_{p,3}\cdots\tau_{2,3}\tau_{1,3}\,.$$

También tenemos que $\pi_X(\beta\alpha\beta^{-1})=\beta\alpha\beta^{-1}$, ya que $\beta\alpha\beta^{-1}\in A_X$.

Tenemos que $\tau_{1,1}\tau_{2,1}\cdots\tau_{p,1}=\pi_X(\beta)$ por definición. Sea $i\in\{0,1,\dots,q\}$. Sabemos que $\theta(\beta)=1$ ya que $\beta\in\mathrm{CA}$, y luego $u_{i,2}=s_{x_1}s_{x_2}\cdots s_{x_i}\in W_X$. Se sigue que $v_{i,2}=u_{i,2}$ y $w_{i,2}=1$. Sea $i\in\{1,\dots,q\}$. Entonces $t_{i,2}=s_{x_i}\in S_X$ y $\tau_{i,2}=\sigma_{x_i}^{\mu_i}$. Luego,

$$\tau_{1,2}\tau_{2,2}\cdots\tau_{q,2}=\sigma_{x_1}^{\mu_1}\sigma_{x_2}^{\mu_2}\cdots\sigma_{x_q}^{\mu_q}=\alpha\,.$$

Sea $i\in\{0,1,\dots,p\}$. Tenemos que $1=\theta(\beta)=s_{z_1}\cdots s_{z_i}s_{z_{i+1}}\cdots s_{z_p}$, luego $s_{z_p}\cdots s_{z_{i+1}}=s_{z_1}\cdots s_{z_i}=u_{i,1}$, y por lo tanto

$$u_{i,3}=\theta(\beta)\,\theta(\alpha)\,s_{z_p}\cdots s_{z_i}=\theta(\alpha)\,u_{i-1,1}=\theta(\alpha)\,v_{i-1,1}w_{i-1,1}\,.$$

Como $\theta(\alpha)\in W_X$, se sigue que $v_{i,3}=\theta(\alpha)\,v_{i-1,1}$ y $w_{i,3}=w_{i-1,1}$. Sea $i\in\{1,\dots,p\}$. Si $\varepsilon_i=1$, entonces

$$t_{i,3}=w_{i,3}s_{z_i}w_{i,3}^{-1}=w_{i-1,1}s_{z_i}w_{i-1,1}^{-1}=t_{i,1}\,.$$

Similarmente, si $\varepsilon_i = -1$, entonces

$$t_{i,3} = w_{i+1,3} s_{z_i} w_{i+1,3}^{-1} = w_{i,1} s_{z_i} w_{i,1}^{-1} = t_{i,1}\,.$$

en ambos casos, se sigue que $\tau_{i,3} = \tau_{i,1}^{-1}$. Así,

$$\tau_{p,3} \cdots \tau_{2,3} \tau_{1,3} = \tau_{p,1}^{-1} \cdots \tau_{2,1}^{-1} \tau_{1,1}^{-1} = \pi_X(\beta)^{-1}\,.$$

Finalmente,

$$\beta\alpha\beta^{-1} = \pi_X(\beta\alpha\beta^{-1}) = \pi_X(\beta)\,\alpha\,\pi_X(\beta)^{-1}\,.$$

□

Demostración del Teorema 2.3.1. Sean $X, Y \subset V(\Gamma)$ y $\alpha \in A$ como en el teorema tales que $\alpha A_Y \alpha^{-1} \subset A_X$. Sea $w = \theta(\alpha)$. Tenemos que $wW_Y w^{-1} \subset W_X$, luego, por el Lema 5.1.2, existen $Y' \subset X$ y $\beta_2 \in A_X$ tales que $\iota(w)\, A_Y\, \iota(w)^{-1} = \beta_2 A_{Y'} \beta_2^{-1}$. Sea $\beta_1 = \alpha\, \iota(w)^{-1}$. Entonces

$$\alpha A_Y \alpha^{-1} = \alpha\, \iota(w)^{-1}\, \iota(w)\, A_Y\, \iota(w)^{-1}\, \iota(w)\, \alpha^{-1} = \beta_1 \beta_2 A_{Y'} \beta_2^{-1} \beta_1^{-1}\,.$$

Tenemos que $\beta_1 \in \mathrm{CA}$, ya que $\theta(\beta_1) = ww^{-1} = 1$. Ahora, $\beta_2 A_{Y'} \beta_2^{-1} \subset A_X$ y $\beta_1(\beta_2 A_{Y'} \beta_2^{-1})\beta_1^{-1} \subset A_X$, Luego, por el Lema 5.1.4,

$$\alpha A_Y \alpha^{-1} = \beta_1(\beta_2 A_{Y'} \beta_2^{-1})\beta_1^{-1} = \pi_X(\beta_1)\,(\beta_2 A_{Y'} \beta_2^{-1})\,\pi_X(\beta_1)^{-1}\,.$$

Por lo tanto, si $\gamma = \pi_X(\beta_1)\,\beta_2$, entonces $\gamma \in A_X$ y $\alpha A_Y \alpha^{-1} = \gamma A_{Y'} \gamma^{-1}$. □

5.2. El complejo de Salvetti

En esta sección recordamos una construcción geométrica asociada a un grupo de Artin y la usamos para probar la Proposición 5.1.3. El *complejo de Salvetti* de Γ es un CW-complejo $\overline{\mathrm{Sal}}(\Gamma)$ cuyo 2-esqueleto coincide con el 2-complejo asociado a la presentación estándar de A_Γ (ver Godelle y Paris [48], Paris [74], Salvetti [78], o Charney y Davis [19] para una definición precisa). En particular, $\overline{\mathrm{Sal}}(\Gamma)$ tiene un único vértice o_0, y una arista $\bar{a}_x$ por cada $x \in V(\Gamma)$. También tenemos un isomorfismo $A_\Gamma \to \pi_1(\overline{\mathrm{Sal}}(\Gamma))$ que manda σ_x a la clase de homotopía de $\bar{a}_x$ para todo $x \in V(\Gamma)$. Sea $p : \mathrm{Sal}(\Gamma) \to \overline{\mathrm{Sal}}(\Gamma)$ el revestimiento regular asociado a $\theta : A_\Gamma \to W_\Gamma$. Notar que $\mathrm{Sal}(\Gamma)$ tiene

grupo fundamental CA_Γ. El conjunto de vértices de $\mathrm{Sal}(\Gamma)$ es un conjunto $\{o(u) \mid u \in W_\Gamma\}$ en correspondencia uno-a-uno con W_Γ y el conjunto de aristas es $\{a_x(u) \mid x \in V(\Gamma)\,,\ u \in W_\Gamma\}$ en correspondencia uno-a-uno con $V(\Gamma) \times W_\Gamma$. Una arista $a_x(u)$ conecta $o(u)$ con $o(us_x)$, y asumimos que está orientada de $o(u)$ a $o(us_x)$. Tenemos que $p(o(u)) = o_0$ para todo $u \in W_\Gamma$ y $p(a_x(u)) = \bar{a}_x$ f para todo$(x, u) \in V(\Gamma) \times W_\Gamma$. Tenemos una acción de W_Γ en $\mathrm{Sal}(\Gamma)$ por transformaciones deck, y $\mathrm{Sal}(\Gamma)/W = \overline{\mathrm{Sal}}(\Gamma)$. Esta acción está definida en los vértices y las aristas como sigue:

$$v\, o(u) = o(vu)\,,\ v\, a_x(u) = a_x(vu)\,.$$

Sea $X \subset V(\Gamma)$. Tenemos un embedding $\bar{\nu}_X : \overline{\mathrm{Sal}}(\Gamma_X) \to \overline{\mathrm{Sal}}(\Gamma)$ que manda $\bar{a}_x$ a $\bar{a}_x$ para todo $x \in X$ y que induce el embedding natural de A_X a A_Γ. También tenemos un embedding $\nu_X : \mathrm{Sal}(\Gamma_X) \to \mathrm{Sal}(\Gamma)$ que manda $o(u)$ a $o(u)$ para todo $u \in W_X$, que manda $a_x(u)$ a $a_x(u)$ para todo $(x, u) \in X \times W_X$, y que induce el embedding natural de CA_X a CA_Γ. Estos dos embeddings están conectados por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sal}(\Gamma_X) & \xrightarrow{\nu_X} & \mathrm{Sal}(\Gamma) \\ \big\downarrow p & & \big\downarrow p \\ \overline{\mathrm{Sal}}(\Gamma_X) & \xrightarrow{\bar{\nu}_X} & \overline{\mathrm{Sal}}(\Gamma) \end{array}$$

Sabemos por Godelle y Paris [48, Theorem 2.2] que el embedding $\nu_X : \mathrm{Sal}(\Gamma_X) \to \mathrm{Sal}(\Gamma)$ admite una retracción continua $\rho_X : \mathrm{Sal}(\Gamma) \to \mathrm{Sal}(\Gamma_X)$. Esta retracción es celular en el sentido de que manda el k-esqueleto de $\mathrm{Sal}(\Gamma)$ al k-esqueleto de $\mathrm{Sal}(\Gamma_X)$ para todo $k \geq 0$. La siguiente descripción explícita de ρ_X en los 0 y 1-esqueletos de $\mathrm{Sal}(\Gamma)$ fue probada por Charney y Paris en [22, Lemma 2.6]. Sean $u \in W_\Gamma$ y $z \in V(\Gamma)$. Escribimos a u en la forma $u = vw$ donde $v \in W_X$ y w son $(X, \emptyset)$-minimales.

- $\rho_X(o(u)) = o(v)$.
- si $ws_zw^{-1} \notin S_X$, entonces $\rho_X(a_z(u)) = o(v)$.
- Supongamos que $ws_zw^{-1} \in S_X$. Sea $x \in X$ tal que $ws_zw^{-1} = s_x$. Entonces $\rho_X(a_z(u)) = a_x(v)$.

En lo que sigue componemos caminos de izquierda a derecha. Sea $\hat{\alpha} = \sigma_{z_1}^{\varepsilon_1}\sigma_{z_2}^{\varepsilon_2}\cdots\sigma_{z_p}^{\varepsilon_p}$ un elemento de $(\Sigma \sqcup \Sigma^{-1})^*$. Sea

$$\bar{\gamma}(\hat{\alpha}) = \bar{a}_{z_1}^{\varepsilon_1}\bar{a}_{z_2}^{\varepsilon_2}\cdots\bar{a}_{z_p}^{\varepsilon_p}\,.$$

Vemos que, si α es el elemento de A_Γ representado por $\hat{\alpha}$, entonces α, pensado como elemento de $\pi_1(\overline{\mathrm{Sal}}(\Gamma)) = A_\Gamma$, es representado por el lazo $\bar{\gamma}(\hat{\alpha})$. Sea $\gamma(\hat{\alpha})$ el levantamiento de $\bar{\gamma}(\hat{\alpha})$ en $\mathrm{Sal}(\Gamma)$ comenzando en $o(1)$. Fijamos $u_0 = 1 \in W_\Gamma$ y, para $i \in \{1,\ldots,p\}$, fijamos $u_i = s_{z_1}s_{z_2}\cdots s_{z_i} \in W_\Gamma$. Para $i \in \{1,\ldots,p\}$ fijamos $a_i = a_{z_i}(u_{i-1})$ si $\varepsilon_i = 1$, y $a_i = a_{z_i}(u_i)$ si $\varepsilon_i = -1$. Entonces

$$\gamma(\hat{\alpha}) = a_1^{\varepsilon_1}a_2^{\varepsilon_2}\cdots a_p^{\varepsilon_p}\,.$$

Sea $\gamma_X(\hat{\alpha}) = \rho_X(\gamma(\hat{\alpha}))$. Escribimos cada u_i en la forma $u_i = v_i w_i$ donde $v_i \in W_X$ y w_i es $(X,\emptyset)$-minimal. Sea $i \in \{1,\ldots,p\}$. Fijamos $t_i = w_{i-1}s_{z_i}w_{i-1}^{-1}$ si $\varepsilon_i = 1$, y $t_i = w_i s_{z_i} w_i^{-1}$ si $\varepsilon_i = -1$. Si $t_i \notin S_X$, entonces, como fue demostrado por Charney y Paris en [22, Lemma 2.6], $v_i = v_{i-1}$. En ese caso denotamos por b_i al camino constante en $o(v_{i-1}) = o(v_i)$. Supongamos que $t_i \in S_X$. Sea $x_i \in X$ tal que $t_i = s_{x_i}$. Fijamos $b_i = a_{x_i}(v_{i-1})$ si $\varepsilon_i = 1$, y $b_i = a_{x_i}(v_i)^{-1}$ si $\varepsilon_i = -1$. Se sigue de la descripción del mapa ρ_X en los 0 y 1-esqueletos dada antes que

$$\gamma_X(\hat{\alpha}) = b_1 b_2 \cdots b_p\,.$$

Sea $\bar{\gamma}_X(\hat{\alpha}) = p(\gamma_X(\hat{\alpha}))$. Sea $i \in \{1,\ldots,p\}$. Si $t_i \notin S_X$, entonces denotamos por $\bar{b}_i$ al camino constante en $\overline{\mathrm{Sal}}(\Gamma_X)$ basado en o_0. Supongamos que $t_i \in S_X$. Sea $x_i \in X$ tal que $t_i = s_{x_i}$ como antes. Fijamos $\bar{b}_i = \bar{a}_{x_i}$ si $\varepsilon_i = 1$, y $\bar{b}_i = \bar{a}_{x_i}^{-1}$ si $\varepsilon_i = -1$. Entonces

$$\bar{\gamma}_X(\hat{\alpha}) = \bar{b}_1\bar{b}_2\cdots\bar{b}_p\,.$$

Sea $\alpha' \in A_X = \pi_1(\overline{\mathrm{Sal}}(\Gamma_X))$ el elemento representado por el lazo $\bar{\gamma}_X(\hat{\alpha})$. Entonces es fácil ver que α' es exactamente el elemento de A_X representado por la palabra $\hat{\pi}_X(\hat{\alpha}) \in (\Sigma_X \sqcup \Sigma_X^{-1})^*$.

Demostración de la Porposición 5.1.3. Demostración de la Parte (1). Sean $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in (\Sigma \sqcup \Sigma^{-1})^*$ dos palabras que representan el mismo elemento de A_Γ. Entonces $\bar{\gamma}(\hat{\alpha})$ y $\bar{\gamma}(\hat{\beta})$ representan el mismo elemento de $A_\Gamma = \pi_1(\overline{\mathrm{Sal}}(\Gamma))$, y luego $\bar{\gamma}(\hat{\alpha})$ y $\bar{\gamma}(\hat{\beta})$ son lazos homotópicos. Como $p : \mathrm{Sal}(\Gamma) \to \overline{\mathrm{Sal}}(\Gamma)$ en un revestimiento, $\gamma(\hat{\alpha})$ y $\gamma(\hat{\beta})$ son homotópicos relativo a sus extremos. Como

ρ_X es continua, se sigue que $\gamma_X(\hat{\alpha})$ y $\gamma_X(\hat{\beta})$ son homotópicos relativo a sus extremos. Otra vez, el mapa $p : \mathrm{Sal}(\Gamma_X) \to \overline{\mathrm{Sal}}(\Gamma_X)$ es continuo, y luego $\bar{\gamma}_X(\hat{\alpha})$ y $\bar{\gamma}_X(\hat{\beta})$ son lazos homotópicos y representan el mismo elemento de $A_X = \pi_1(\overline{\mathrm{Sal}}(\Gamma_X))$. Concluimos que $\hat{\pi}_X(\hat{\alpha})$ y $\hat{\pi}_X(\hat{\beta})$ representan al mismo elemento de A_X.

Demostración de la Parte (2). Sea $\alpha \in A_X$. Elegimos una palabra $\hat{\alpha} = \sigma_{x_1}^{\varepsilon_1}\sigma_{x_2}^{\varepsilon_2}\cdots\sigma_{x_p}^{\varepsilon_p} \in (\Sigma_X \sqcup \Sigma_X^{-1})^*$ que representa a α. Siguiendo la definición de arriba, fijamos $u_0 = 1$ y, para $i \in \{1,\ldots,p\}$, fijamos $u_i = s_{x_1}s_{x_2}\cdots s_{x_i}$. Escribimos cada u_i en la forma $u_i = v_i w_i$ donde $v_i \in W_X$ y w_i es $(X,\emptyset)$-minimal. Notar que $u_i \in W_X$, y luego $v_i = u_i$ y $w_i = 1$. Sea $i \in \{1,\ldots,p\}$. Fijamos $t_i = w_{i-1}s_{x_i}w_{i-1}^{-1}$ si $\varepsilon_i = 1$, y $t_i = w_i s_{x_i} w_i^{-1}$ si $\varepsilon_i = -1$. En ambos casos tenemos que $t_i = s_{x_i}$, y entonces $\tau_i = \sigma_{x_i}^{\varepsilon_i}$. Así,

$$\hat{\pi}_X(\hat{\alpha}) = \tau_1\tau_2\cdots\tau_p = \sigma_{x_1}^{\varepsilon_1}\sigma_{x_2}^{\varepsilon_2}\cdots\sigma_{x_p}^{\varepsilon_p} = \hat{\alpha}\,,$$

luego $\pi_X(\alpha) = \alpha$.

Demostración de la Parte (3). Observar que la restricción de π_X a CA_Γ coincide con el morfismo $\rho_{X,*} : \mathrm{CA}_\Gamma = \pi_1(\mathrm{Sal}(\Gamma)) \to \pi_1(\mathrm{Sal}(\Gamma_X)) = \mathrm{CA}_X$ inducido por el mapa $\rho_X : \mathrm{Sal}(\Gamma) \to \mathrm{Sal}(\Gamma_X)$. Para ver esto, notar que ρ_X hace a caminos de aristas en $\mathrm{Sal}(\Gamma)$ lo que $\hat{\pi}_X$ hace a elementos en $(\Sigma \sqcup \Sigma^{-1})^*$ (donde los ε que aparecen en la definición de $\hat{\pi}_X$ reflejan al orientación de las aristas en $\mathrm{Sal}(\Gamma)$). Por lo tanto la restricción de π_X a CA_Γ es un morfismo $\pi_X : \mathrm{CA}_\Gamma \to \mathrm{CA}_X$. □

Bibliografía

[1] Altobelli, J.A. *The word problem for Artin groups of FC type*. J. Pure Appl. Algebra **129** (1998), no. 1, 1–22.

[2] Antolin, Y. and Minasyan, A. *Tits Alternatives for graph products*. J. Reine Angew. Math. **704** (2015), 55–83.

[3] Appel, K.I. and Schupp, P.E. *Artin groups and infinite Coxeter groups*. Invent. Math. **72** (1983), no. 2, 201–220.

[4] Artin, E. *Theory of Braids*. Ann. of Math. **2** (1947), 101–126.

[5] Ballmann, W. and Buyalo, S. *Nonpositively curved metrics on 2-polyhedra*. Math. Z. **222** (1996), no. 1, 97–134.

[6] Baumslag, G., Miller, III, C.F. and Short, H. *Isoperimetric inequalities and the homology of groups*. Invent. Math. **113** (1993), no. 3, 531–560.

[7] Blasco-García, R., Cumplido, M. and Morris-Wright, R. *The word problem is solvable for 3-free Artin groups*. Preprint, arXiv:2204.03523 (2022).

[8] Blufstein, M.A. *Parabolic subgroups of two-dimensional Artin groups and systolic-by-function complexes*. Bull. Lond. Math. Soc. **54** (2022), 2338–2350.

[9] Blufstein, M.A. and Minian, E.G. *Strictly systolic angled complexes and hyperbolicity of one-relator groups*. Algebr. Geom. Topol. **22** (2022), no. 3, 1159–1175.

[10] Blufstein, M.A., Minian, E.G and Sadofschi-Costa, I. *Generalized small cancellation conditions, non-positive curvature and diagrammatic reducibility*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **152** (2021), no. 3, 545–566.

[11] Blufstein M.A., Paris, L. *Parabolic subgroups inside parabolic subgroups of Artin groups*. Proc. Amer. Math Soc. (2022, en prensa).

[12] Bourbaki, N. *Eléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: Systèmes de racines*. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337, Hermann, Paris (1968).

[13] Brady, T. and McCammond, J.P. *Three-generator Artin groups of large type are biautomatic*. J. Pure Appl. Algebra **151** (2000), no. 1, 1–9.

[14] Brady, N., Riley, T. and Short, H. *The Geometry the String Topology of and Word for Finitely Cyclic Problem Homology Generated Groups*. Birkhauser Verlag (2007).

[15] Bridson, M. and Haefliger, A. *Metric spaces of non-positive curvature*. Springer Verlag (1999).

[16] Brieskorn, E. and Saito, K. *Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen*. Invent. Math. **17** (1972), 245–271.

[17] Callegaro, F., Moroni, D. and Salvetti, M. *The $K(\pi, 1)$ problem for the affine Artin group of type B_n and its cohomology*. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **12** (2010), no. 1, 1–22.

[18] Charney, R. *Artin groups of finite type are biautomatic*. Math. Ann. **292** (1992), no. 4, 671–683.

[19] Charney, R. and Davis, M.W. *Finite $K(\pi, 1)$s for Artin groups*. Ann. of Math. Stud. **138** (1995), 110–124.

[20] Charney, R. and Davis, M.W. *The $K(\pi, 1)$–problem for hyperplane complements associated to infinite reflection groups*. J. Amer. Math. Soc. **8**(3) (1995), 597–627.

[21] Charney, R. and Morris-Wright, R. *Artin groups of infinite type: Trivial centers and acylindrical hyperbolicity*. Proc. Amer. Math. Soc. **147** (2019), no. 9, 3675–3689.

[22] Charney, R. and Paris, L. *Convexity of parabolic subgroups in Artin groups*. Bull. London Math. Soc. **46** (2014), no. 6, 1248–1255.

[23] Chepoi, V. *Graphs of some CAT(0) complexes*. Adv. in Appl. Math. **24**(2) (2000), 125–179.

[24] Chepoi, V and Osajda, D. *Dismantlability of weakly systolic complexes and applications*. Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), no. 2, 1247–1272.

[25] Chermak, A. *Locally non-spherical Artin groups*. J. Algebra **200** (1998), no. 1, 56–98.

[26] Collins, D. J. and Huebschmann, J. *Spherical diagrams and identities among relations*. Math. Ann. **261** (1982), 155–183.

[27] Coxeter, H. S. M. *Discrete groups generated by reflections*, Ann. Math. **35** (1934), no. 3, 588–621.

[28] Crisp, J., Godelle, E. and Wiest, B. *The conjugacy problem in subgroups of right-angled Artin groups*. J. Topol. **2** (2009), no. 3, 442–460.

[29] Cumplido, M. *The conjugacy stability problem for parabolic subgroups in Artin groups*. Preprint, arXiv:2107.13372 (2021).

[30] Cumplido, M., Gebhardt, V., González-Meneses, J. and Wiest, B. *On parabolic subgroups of Artin–Tits groups of spherical type*. Adv.Math. **352** (2019), 572–610.

[31] Cumplido, M., Martin, A. and Vaskou, N. *Parabolic subgroups of large-type Artin groups*. Preprint, arXiv:2012.02693 (2021).

[32] Dahmani, F. and Groves, D. *The isomorphism problem for toral relatively hyperbolic groups*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **107** (2008), 211–290.

[33] Dahmani, F. and Guiradel, V. *The Isomorphism Problem for All Hyperbolic Groups*. Geom. Funct. Anal. **21** (2010), 223–300.

[34] Davis, M.W. *The geometry and topology of Coxeter groups*. London Mathematical Society Monographs Series, 32. Princeton University Press, Princeton, NJ (2008).

[35] Dehn, M. *Über unendliche diskontinuierliche Gruppen*. Math. Ann. **71** (1911), no. 1, 116–144.

[36] Dehn, M. *Transformation der Kurven auf zweiseitigen Flächen*. Math. Ann., **72** (1912), no. 3, 413-–421.

[37] Deligne, P. *Les immeubles des groupes de tresses généralisés*. Invent. Math. *17* (1972), 273–302.

[38] Duncan, A.J., Kazachkov, I.V. and Remeslennikov, V.N. *Parabolic and quasiparabolic subgroups of free partially commutative groups*, J. Algebra 318 (2007), no.2, 918–932.

[39] Farb, B. and Margalit, D. *A primer on maping class groups*. Princeton Mathematical Series (2012).

[40] Fenn, R., Rolfesn, D. and Zhu, J. *Centralisers in the braid group and singular braid monoid*. Enseign. Math. (2) **42** (1996), no. 1-2, 75–96.

[41] Gersten, S.M. *Reducible diagrams and equations over groups*. Essays in group theory, Springer-Verlag, (1987), 15–73.

[42] Gersten, S.M. *Isoperimetric and isodiametric functions of finite presentations*. Geometric Group Theory, Volume 1 (G. Niblo and M Roller, ed.), London Math. Society Lecture Notes Series, **181**, Cambridge Univ. Press (1993), 79–96.

[43] Gersten, S.M. *Subgroups of word hyperbolic groups in dimension 2*. J. Lond. Math. Soc. **54** (1996), 261–283.

[44] Gersten, S.M. and Short, H. *Small cancellation theory and automatic groups*. Invent. Math. **102** (1990), 305–334.

[45] Godelle, E. *Normalisateur et groupe d'Artin de type sphérique*. J. Algebra **269** (2003), no. 1, 263–274.

[46] Godelle, E. *Parabolic subgroups of Artin groups of type FC*. Pacific J. Math. **208** (2003), no. 2, 243–254.

[47] Godelle, E. *Artin-Tits groups with CAT(0) Deligne complex*. J. Pure Appl. Algebra 208 (2007), no. 1, 39–52.

[48] Godelle,E. and Paris, L. $K(\pi, 1)$ *and word problems for infinite type Artin-Tits groups, and applications to virtual braid groups* Math. Z. **272** (2012), no. 3-4, 1339–1364.

[49] Greendlinger, M. *Dehn's algorithm for the word problem*. Comm. Pure Appl. Math. **13** (1960), 67–83.

[50] Gromov, M. *Hyperbolic groups*. Essays in group theory, Springer-Verlag (1987), 75–263.

[51] Haettel, T. *Lattices, injective metrics and the* $K(\pi, 1)$ *conjecture*. Preprint, arXiv:2109.07891 (2021).

[52] Haglund, F. *Complexes simpliciaux hyperboliques de grande dimension*. Prepublication Orsay **71** (2003).

[53] Hanlon, R. and Martínez-Pedroza, E. *Lifting group actions, equivariant towers and subgroups of non-positively curved groups*. Algebr. Geom. Topol. **14** (2014), 2783–2808.

[54] Hendriks, H. *Hyperplane complements of large type*. Invent. Math. **79** (1985), no. 2, 375–381.

[55] Holt, D.F and Rees, S. *Artin groups of large type are shortlex automatic with regular geodesics*. Proc. Lond. Math. Soc. **104** (2012), no. 3, 486–512.

[56] Howie, J. *The solution of length three equations over groups*. Proc. Edinb. Math. Soc. **26** (1983), no. 1, 89–96.

[57] Huang, J. and Osajda, D. *Metric systolicity and two-dimensional Artin groups*. Math. Ann. 374 (2019), 1311-1352.

[58] Huang, J. and Osajda, D. *Large-type Artin groups are systolic*. Proc. Lond. Math. Soc. **120** (2020), no. 1, 95–123.

[59] Huck, G. and Rosebrock, S. *Weight tests and hyperbolic groups*. London Math. Soc. Lecture Note Ser. **204** (1995), 174–186.

[60] Ivanov, S.V. and Schupp, P.E. *On the hyperbolicity of small cancellation groups and one-relator groups*. Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), no. 5, 1851–1894.

[61] Januszkiewicz, T. and Świątkowski, J. *Simplicial nonpositive curvature*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **104** (2006), 1–85.

[62] van Kampen, E. R. *On some lemmas in the theory of groups*. Amer. J. Math. **55** (1933), 268-273.

[63] Kapovich, I. *Howson property and one-relator groups*. Comm. Algebra **27** (1999), no. 3, 1057–1072.

[64] Karrass, J. and Magnus, W. and Solitar, D. *Combinatorial group theory*. Interscience Pub., John Wiley and Sons, (1955).

[65] Van del Lek, H. *The homotopy Type of Complex Hyperplane Complements*. Ph.D. thesis, Nijmegen (1983).

[66] Linton, M. *One-relator hierarchies*. Preprint, arXiv:2202.11324 (2022).

[67] Lyndon, R. C. *On Dehn's algorithm*. Math. Ann. **166** (1966), 208-–228.

[68] Lyndon, R. C. and Schupp, P. E. *Combinatorial group theory*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin (1977).

[69] Möller, P., Paris, L. and Varghese, O. *On parabolic subgroups of Artin groups*. Israel J. Math. (2022, en prensa).

[70] Morris-Wright, R. *Parabolic subgroups in FC–type Artin groups*. J. Pure Appl. Algebra **225**(1) (2021), 106469.

[71] Osajda, D. and Prytuła, T. *Classifying spaces for families of subgroups for systolic groups* Groups Geom. Dyn. **12** (2018), no. 3, 1005–1060.

[72] Paolini, G. and Salvetti, M. *Proof of the $K(\pi, 1)$ conjecture for affine Artin groups*. Invent. Math. **224** (2021), 487–572.

[73] Paris, L. *Parabolic subgroups of Artin groups*. J. Algebra **196** (1997), no. 2, 369–399.

[74] Paris, L. *$K(\pi, 1)$ conjecture for Artin groups*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **23** (2014), no. 2, 361–415.

[75] Pride, S.J. *On Tits' conjecture and other questions concerning Artin and generalized Artin groups*. Invent. Math. **86** (1986), no. 2, 347–356.

[76] Rolfsen, D. *Braid subgroup normalisers, commensurators and induced representations*. Invent. Math. **130** (1997), no. 3, 575–587.

[77] Sadofschi Costa, I. *SmallCancellation - Metric and nonmetric small cancellation conditions*, Version 1.0.4. GAP package, DOI: 10.5281/zenodo.3906472 (2020).

[78] Salvetti, M. *The homotopy type of Artin groups*. Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 5, 565–577.

[79] Sela, Z. *The isomorphism problem for hyperbolic groups. I*. Ann. Math. **141** (1995), no. 2, 217–283.

[80] Alonso, J.M., Brady, T., Cooper, D., Ferlini, V., Lustig, M., Mihalik, M., Shapiro, M. and Short, H. *Notes on word hyperbolic groups* (1990).

[81] Solomon, L. *A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group*. J. Algebra **41** (1976), 255–268.

[82] Świątkowski, J. *Regular path systems and (bi)automatic groups*. Geom. Dedicata **118** (2006), 23–48.

[83] The GAP Group. GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.10.1 (2019).

[84] Tits, J. *Groupes et géométries de Coxeter*. Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Paris (1961).

[85] Tits, J. *Le problème des mots dans les groupes de Coxeter*. 1969 Symposia Mathematica (INDAM, Rome, 1967/68), Vol. 1, pp. 175–185. Academic Press, London.

[86] Weinbaum, C.M. *On relators and diagrams for groups with one defining relation*. Illinois J. Math. **16** (1972), no. 2, 308–322.

[87] Wise, D. *Sixtolic complexes and their fundamental groups*. Unpublished preprint (2003).

[88] Wise, D. *Sectional curvature, compact cores and local quasiconvexity*. Geom. Funct. Anal. **14** (2004), 433–468.

[89] Zadnik, G. *Finitely presented subgroups of systolic groups are systolic*. Fund. Math. **227** (2014), no.2, 187–196.

[90] Zeeman, E.C. *Relative simplicial approximation* Proc. Camb. Phil. Soc. **60** (1964), no. 1, 39–43.