



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

**Muestreo: Bases de Riesz de exponenciales, operadores que conmutan  
con las traslaciones y muestreo dinámico**

Tesis presentada para optar al título de Doctora de la Universidad de Buenos Aires en el área  
Ciencias Matemáticas

**Diana Agustina Carbajal**

Director de tesis: Carlos Cabrelli

Consejera de estudios: Ursula Molter

Buenos Aires, 2021



# Introducción

En la teoría del procesamiento digital de señales o imágenes, es necesario poder trabajar con una versión discretizada de las mismas. Esta discretización se obtiene a través de un muestreo apropiado de la señal, que consiste en evaluarla sobre un subconjunto discreto de su dominio. El problema del muestreo es el que se pregunta cuándo y cómo una señal puede ser recuperada por medio de dichas evaluaciones.

Matemáticamente, el problema puede ser formulado de la siguiente manera: Dado un espacio de funciones  $\mathcal{F}$  en  $\mathbb{R}^d$  (con valores en  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ), queremos encontrar un conjunto discreto  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  para que toda función  $f \in \mathcal{F}$  pueda ser reconstruida unívocamente y de manera estable a partir de sus muestras  $\{f(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ . A este conjunto  $\Gamma$  se lo llama *conjunto de muestreo* para  $\mathcal{F}$ .

Al trabajar con este problema, se deben requerir ciertas condiciones sobre el espacio  $\mathcal{F}$  para que las evaluaciones estén bien definidas. La suposición estándar es que las funciones pertenezcan al espacio de *Paley-Wiener*, también conocido por el subespacio de funciones de *banda limitada*. Esto es, dado  $\sigma > 0$ , el espacio

$$PW_\sigma := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{sop } \hat{f} \subseteq [-\sigma, \sigma] \right\}.$$

Es sobre estos espacios que surge el primer resultado en dar origen a la teoría del muestreo, el denominado *Teorema Clásico del Muestreo*. Este enuncia que toda función  $f$  en  $PW_\sigma$  puede ser recuperada a través de sus muestras  $\left\{ f\left(\frac{k}{2\sigma}\right) : k \in \mathbb{Z} \right\}$ . Más aún, se tiene la siguiente fórmula de reconstrucción:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2\sigma}\right) \frac{\text{sen}\left(2\pi\sigma\left(x - \frac{k}{2\sigma}\right)\right)}{2\pi\sigma\left(x - \frac{k}{2\sigma}\right)}, \quad (0.0.1)$$

donde la convergencia de la serie es en  $L^2(\mathbb{R})$  y uniforme sobre  $\mathbb{R}$ . La demostración de este teorema es sencilla y se basa en el hecho de que el sistema  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} e^{-2\pi i \frac{k}{2\sigma} \omega} : k \in \mathbb{Z} \right\}$  forma una base ortonormal de  $L^2[-\sigma, \sigma]$ . Además, se extiende fácilmente a  $\mathbb{R}^d$ .

El Teorema Clásico del muestreo, el cual también es conocido como el Teorema de Whittaker-Shannon-Kotel'nikov, se hizo popular en la teoría de comunicaciones por el año 1949 gracias a Shannon [85], aunque el resultado ya había sido mencionado en trabajos previos de Whittaker y Kotel'nikov al rededor del año 1930 [89, 68]. Actualmente, es una herramienta fundamental en muchas ramas de la ingeniería y el procesamiento digital de señales, y dio inicio al estudio de numerosas generalizaciones en bastas direcciones [88]. Esta tesis es una contribución a esta teoría realizando avances en sentidos diferentes, que presentaremos a continuación.

### Bases de Riesz de exponenciales

Son muchas las situaciones reales donde es más conveniente considerar un conjunto de muestreo no uniforme, es decir, donde las muestras no pertenecen a un reticulado de  $\mathbb{R}^d$ . Un ejemplo se puede ver en la teoría de comunicaciones, donde nos podemos enfrentar con pérdidas de información durante una transmisión. El resultado de una medición uniforme, luego de las pérdidas, puede considerarse como un muestreo no uniforme. Otro caso es el de diagnóstico por imágenes en medicina, como las resonancias magnéticas (MRI), donde se han realizado aplicaciones con muestreos sobre conjuntos polares y espiralados [23, 81, 61].

Más aún, el problema puede ser estudiado en el espacio de Paley-Wiener generalizado  $PW_\Omega = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \text{sop } \hat{f} \subseteq \Omega\}$  con  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un compacto arbitrario, e incluso para  $\Omega$  de medida finita no necesariamente acotado. El problema de encontrar un conjunto de muestreo  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  para  $PW_\Omega$  resulta equivalente al de la existencia de marcos de exponenciales de la forma

$$E(\Gamma) := \left\{ e^{-2\pi i \gamma \omega} : \gamma \in \Gamma \right\}$$

en  $L^2(\Omega)$  (ver Sección 1.2).

Desde este punto de vista y con esta generalidad, el problema se vuelve de una naturaleza muy diferente a su versión clásica y utiliza herramientas matemáticas muy diversas tales como análisis complejo, análisis funcional, teoría de marcos, teoría de operadores y teoría de números. En esta dirección, Nitzan, Olevskii y Ulanovskii probaron en [78] que siempre es posible hallar un conjunto de muestreo para  $PW_\Omega$  con  $\Omega$  un conjunto de medida finita, no necesariamente acotado.

Por otro lado, el problema del muestreo en  $PW_\Omega$  está vinculado a su problema dual de interpolación. Este es, encontrar un conjunto discreto  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  para el cual se satisfaga que para toda sucesión  $c = \{c_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \in \ell^2(\Gamma)$ , exista una función  $f \in PW_\Omega$  tal que  $f(\gamma) = c_\gamma$  para todo  $\gamma \in \Gamma$ . En este caso, decimos que  $\Gamma$  es un *conjunto de interpolación* para  $PW_\Omega$ .

En trabajos de Beurling [24, 25] y Landau [73], se encontraron fuertes conexiones entre los conjuntos que son de muestreo o interpolación y su *densidad de Beurling*, que mide el promedio de muestras por unidad de área. En [76], Matei y Meyer encontraron extensiones de estos resultados al introducir la teoría de los cuasicristales. La dualidad entre el problema del muestreo y el de interpolación puede verse reflejada en los trabajos de Matei y Meyer [76, 77], y Olevskii y Ulanovskii [79], ver también la Sección 1.2.4. En un nivel de mayor generalidad, estos resultados también fueron estudiados en el contexto de grupos topológicos abelianos localmente compactos [53, 3].

Un conjunto  $\Gamma$  es de muestreo e interpolación para  $PW_\Omega$  si y sólo si  $E(\Gamma)$  es una base de Riesz de  $L^2(\Omega)$  (ver Sección 1.2). El caso más deseado es cuando la base es ortogonal. Desafortunadamente, la ortogonalidad del sistema  $E(\Gamma)$  impone una estructura muy rígida sobre  $\Gamma$  y  $\Omega$ , y se ha probado que existen conjuntos de  $\mathbb{R}^d$  que no admiten una base ortogonal de exponenciales para ningún conjunto de frecuencias. Por ejemplo, la bola en dimensión  $d > 1$  [51] y los conjuntos convexos no simétricos [65] son algunos de ellos. Incluso, ciertas uniones de dos intervalos en la recta podrían no gozar de una base ortogonal de exponenciales [71].

Fuglede [50] conjeturó en 1974 que si  $\Omega$  es un conjunto medible de medida finita, el sistema de exponenciales  $E(\Gamma)$  es una base ortogonal de  $L^2(\Omega)$  si y sólo si el conjunto  $\Omega$  tesela  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones sobre algún conjunto discreto  $\Gamma$  (ver Definición 2.0.1).

Lamentablemente, la conjetura de Fuglede es falsa en ambas direcciones cuando  $d \geq 3$ , pero aún se mantiene abierta para las dimensiones uno y dos [87, 67, 44, 45]. Sin embargo, existen algunos casos particulares donde la conjetura resulta ser cierta [72, 60]. Uno de estos casos se da cuando imponemos que el conjunto de traslaciones sea un reticulado completo (i.e. la imagen de  $\mathbb{Z}^d$  por una matriz inversible) [50, 59]. Más precisamente, si  $H$  es un reticulado completo de  $\mathbb{R}^d$ , vale que el sistema  $E(H)$  es una base ortogonal de  $L^2(\Omega)$  si y sólo si  $\Omega$  tesela a  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones de un reticulado  $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ , el dual de  $H$ .

Cuando no se tienen bases ortogonales de exponenciales, las bases de Riesz de exponenciales resultan ser la segunda mejor opción. Hasta el día de hoy, no se conoce ningún ejemplo de un conjunto  $\Omega$  de medida positiva que no admita una base de Riesz de exponenciales, aunque son muy pocos los casos donde la existencia de bases de Riesz de exponenciales se pudo demostrar positivamente. Un avance muy significativo en esta dirección fue el de Kozma y Nitzan [69, 70], que probaron que cualquier unión finita de rectángulos en  $\mathbb{R}^d$  admite una base de Riesz de exponenciales.

Grepstad y Lev [52] probaron que los conjuntos Riemann integrables (i.e. la medida de su frontera es cero) acotados de  $\mathbb{R}^d$  que satisfacen una condición de *multi-teselado* admiten bases de Riesz de exponenciales. Para probar esto, utilizaron la teoría de los cuasicristales. Luego, Kolountzakis [66] encontró una demostración más sencilla que remueve la hipótesis

de Riemann integrabilidad del conjunto. Más precisamente, lo que probaron es que dado un conjunto medible y acotado que  $k$ -tesela a  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones de un reticulado completo  $\Delta \subset \mathbb{R}^d$  (ver Definición 2.1.1) existen vectores  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$  para los cuales

$$E(H; a_1, \dots, a_k) := \left\{ e^{2\pi i(a_j+h)\cdot\omega} : h \in H, j = 1, \dots, k \right\}, \quad (0.0.2)$$

es una base de Riesz de  $L^2(\Omega)$ , donde  $H$  es el reticulado dual de  $\Delta$ . De esta manera, se obtiene que una unión finita de traslaciones del reticulado  $H$  forma un conjunto de muestreo e interpolación para  $PW_\Omega$ . Decimos que un sistema de exponenciales como en (0.0.2) es *estructurado*.

El resultado fue extendido por Agora, Antezana y Cabrelli al caso de grupos abelianos localmente compactos en [2] utilizando la teoría de espacios invariante por traslaciones. Además, en ese mismo trabajo probaron que la vuelta del teorema también es cierta.

En [66] se dejó la pregunta abierta sobre si este resultado sigue siendo cierto para conjuntos *no acotados* de medida finita que multi-teselan. En [2], los autores lo respondieron por la negativa. Ellos construyeron un contraejemplo de un conjunto no acotado que 2-tesela en la recta y que no posee una base de Riesz de exponenciales estructurada.

En esta tesis, presentamos nuevas condiciones suficientes para que conjuntos de medida finita que multi-teselan a  $\mathbb{R}^d$ , *no necesariamente acotados*, soporten una base de Riesz de exponenciales estructurada. Esta condición requerida es una propiedad aritmética que llamamos *admisibilidad* (ver Definición 2.3.1). Por otra parte, también probamos que los conjuntos de medida finita que submulti-teselan a  $\mathbb{R}^d$  (ver Definición 2.4.1) y son admisibles admiten marcos de exponenciales estructurados.

## El problema del muestreo dinámico

En las aplicaciones, dado por las limitaciones en la precisión de los equipamientos de medición, podría ser imposible obtener el valor exacto de una señal en un punto dado. Para evitar esto, lo que se puede hacer es tomar como medición al promedio local de la función cerca del punto, esto es, los valores  $\langle f, \varphi_i \rangle$ , donde  $\varphi_i$  es una función bien localizada al rededor de un punto  $x_i \in \mathbb{R}^d$  del espacio. Este tipo de muestreo también nos permite trabajar en espacios de Hilbert más abstractos y donde la condición de poder evaluar funciones no necesariamente se cumple. Las muestras  $\{\langle f, \varphi_i \rangle\}_{i \in I}$  serán suficientes para recuperar a  $f$  en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  separable cuando  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  sea un marco de  $\mathcal{H}$  (ver Sección 1.2).

Por otro lado, incluso si tuvieramos un conjunto de muestreo apropiado para nuestras señales, podríamos tener que lidiar con problemas de restricciones espaciales. Por ejemplo, en las redes de sensores (WSN), una gran cantidad de sensores son distribuidos sobre una región para monitorear algún fenómeno físico tal como la temperatura, polución o

presión. Las posiciones en el espacio donde debemos muestrear nuestra señal podrían no ser accesibles debido a limitaciones geográficas (una montaña, un río, etc). Además, dado que los equipamientos de medición suelen tener un costo elevado, muestrear en el espacio con alta densidad podría exceder el presupuesto deseado.

La idea del muestreo dinámico es esquivar estos problemas reduciendo el número de muestras en el espacio y considerando en su lugar un conjunto de muestras espacio-temporales. Esto se logra asumiendo que las señales que queremos reconstruir evolucionan en el tiempo bajo la acción de un operador de evolución  $R$ , es decir, que la evolución de  $f$  en un cierto momento  $t$  está dado por  $R^t f$ . Supongamos que un conjunto discreto  $\{x_i\}_{i \in I}$  es insuficiente para reconstruir  $f$ , el muestreo dinámico se ocupa de responder la siguiente pregunta: ¿Será posible compensar la falta de información de  $f$  si muestreamos las distintas evoluciones de la señal en las mismas posiciones, es decir, consideramos las muestras  $\{f(x_i), Rf(x_i), R^2 f(x_i), \dots\}_{i \in I}$ ?

El problema del muestreo dinámico fue estudiado en diversas instancias y es hoy en día un área de investigación muy activo. Los artículos de Lu, Vetterli, et al. [75, 82] se consideran los primeros trabajos en el área, donde la evolución es modelada por la ecuación del calor. Luego, Aldroubi et al. [7, 8, 1] estudiaron el problema en  $\ell^2(\mathbb{Z})$  donde el operador evolución es una convolución discreta y utilizaron estos resultados para distintas aplicaciones.

En el contexto más general el problema puede ser reformulado como sigue [6]: Dado  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert separable, queremos encontrar condiciones sobre un operador acotado  $R : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  y un conjunto de funciones  $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ , de manera tal que  $\{R^j f_i : i \in I, j \in J\}$  forme un marco de  $\mathcal{H}$ , donde  $I$  y  $J$  son subconjuntos de  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ . El caso finito-dimensional fue resuelto por completo en [6] donde el operador es una transformación lineal arbitraria actuando en un espacio vectorial de dimensión finita (ver también [31]). El caso infinito-dimensional es un problema más desafiante y para trabajar con él se han utilizado técnicas de distintas áreas como la teoría espectral, espacios de Hardy, y la medida de Carleson (ver [11, 31, 5, 36, 38, 39, 32, 37] y las referencias allí dentro).

En esta tesis, estudiamos un problema del muestreo dinámico en espacios *invariantes por traslaciones*. Antes de mostrar de qué se trata este problema, expliquemos brevemente el marco teórico.

Dado un reticulado completo  $H \subset \mathbb{R}^d$ , decimos que un subespacio cerrado  $V$  de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  es *H-invariante* si para toda  $f \in V$ , se tiene que  $T_h f \in V$  para todo  $h \in H$ , donde  $T_h f(x) := f(x - h)$ . Dada una familia de funciones a lo sumo numerable  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ , el espacio

$$S(\Phi) := \overline{\text{gen}} \{T_h \varphi : \varphi \in \Phi, h \in H\}$$

es *H-invariante* y a  $\Phi$  se lo llama *conjunto de generadores* para dicho espacio. Todo

espacio invariante por traslaciones es de esta forma. Cuando  $\Phi$  es finito decimos que  $V$  es *finitamente generado*. Finalmente, diremos que un operador  $L : V \rightarrow V$ , es  $H$ -*conmutante* si conmuta con las traslaciones por  $H$ , es decir,  $LT_h = T_hL$  para todo  $h \in H$ .

Una razón por la cual es natural trabajar con los espacios invariantes por traslaciones para problemas del muestreo es la siguiente. Observemos que si denotamos por

$$\psi_\sigma(x) = \frac{\text{sen}(2\pi\sigma x)}{2\pi\sigma x},$$

la ecuación (0.0.1) nos dice que el espacio  $PW_\sigma$  con  $\sigma > 0$  coincide con el espacio

$$S(\psi_\sigma) := \overline{\text{gen}} \left\{ \psi_\sigma \left( \cdot - \frac{k}{2\sigma} \right) : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Es decir, el espacio  $PW_\sigma$  es un espacio  $\frac{1}{2\sigma}\mathbb{Z}$ -invariante generado por  $\psi_\sigma$  (más aún, es un espacio invariante por todas las traslaciones). Debido a que  $\psi_\sigma$  es una función de soporte infinito y de lento decaimiento, la reconstrucción que nos brinda el Teorema Clásico del Muestreo no siempre es la más adecuada para las implementaciones numéricas. Además, la suposición de banda limitada puede no ser un modelo realista para numerosas aplicaciones. Por lo tanto, considerar en su lugar modelos de espacios invariantes por traslaciones más apropiados es una buena opción que preserva una estructura similar a los de banda limitada.

Los espacios invariantes por traslaciones fueron utilizados en bastas aplicaciones como la teoría de aproximación y wavelets, y su estructura es bien conocida, ver [57, 41, 40, 83, 27] para el caso Euclideo y [33, 29, 21] para el contexto de grupos topológicos. En particular, problema del muestreo en espacios invariantes por traslaciones fue estudiado en numerosos trabajos, ver por ejemplo [9, 12, 10, 54] y las referencias allí dentro.

Cada espacio  $H$ -invariante  $V$  tiene asociada una *función rango* (ver Definición 1.3.7). Esta es un mapa que toma como valores subespacios cerrados de  $\ell^2(H)$  (los espacios de fibras). La representación de  $V$  a través de las fibras es fundamental para estudiar la estructura del espacio. Por ejemplo, las traslaciones de un conjunto de funciones es un marco de  $V$  si y sólo si las fibras de las funciones de dicho conjunto forman un marco de los espacios de fibras, con constantes uniformes, en casi todo punto (ver Teorema 1.3.10).

Algo parecido sucede con los operadores  $H$ -conmutantes. En [27] (ver también [28]) Bownik estudia las propiedades de estos operadores a través del concepto de *operador rango* (ver Definición 1.4.1). Dado un operador  $L$  acotado y  $H$ -conmutante, el operador rango de  $L$  es un mapa que toma como valores operadores acotados que actúan sobre los espacios de fibras. Algunas propiedades de estos operadores nos permiten comprender el comportamiento de  $L$ , por ejemplo,  $L$  es normal si y sólo si los valores del operador rango son operadores normales en casi todo punto (ver Teorema 1.4.4).



En particular, cuando el espacio invariante por traslaciones es finitamente generado, todos los espacios de fibras son de dimensión finita y en consecuencia los valores del operador rango son transformaciones lineales actuando en espacios de dimensión finita. Luego, la representación de  $V$  y  $L$  a través de las fibras nos permite reducir problemas infinito-dimensionales a problemas de álgebra lineal de dimensión finita.

El problema del muestreo dinámico que estudiaremos es el siguiente. Supongamos que  $V$  es un espacio  $H$ -invariante finitamente generado de longitud  $\ell$  (ver Definición 1.3.4). Sean  $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\} \subset V$  con  $I$  un conjunto de índices finito y  $L : V \rightarrow V$  un operador acotado  $H$ -conmutante. Encontrar condiciones necesarias y suficientes para que

$$\{T_h L^j f_i : i \in I, j = 0, \dots, \ell - 1, h \in H\}$$

sea un marco de  $V$ .

Los resultados que obtuvimos requirieron un estudio profundo sobre la estructura de los operadores  $H$ -conmutantes. Explotando las técnicas de fiberización, podemos reducir nuestro problema a una familia de problemas del muestreo dinámico donde el operador que itera es una transformación lineal actuando en espacios de dimensión finita (el espacio de fibras). Luego, aplicamos los resultados ya conocidos del muestreo dinámico finito-dimensional en cada uno de estos espacios de fibras. Para poder trasladar estos resultados al espacio original, precisamos cálculos de cotas con uniformidad e hicimos uso de la teoría de la  $H$ -diagonalización. Esta última, nació con el objetivo de resolver nuestro problema del muestreo dinámico pero terminó cobrando un gran interés por sí misma. A continuación daremos una descripción de dicho trabajo.

## Diagonalización de operadores que conmutan con las traslaciones

La teoría de la  $H$ -diagonalización es una nueva noción de diagonalización para operadores que conmutan con las traslaciones actuando sobre espacios invariantes por traslaciones. Esta consiste en descomponer el espacio en una suma directa de subespacios invariantes por traslaciones, cada uno invariante por el operador, sobre los cuales el operador toma una forma muy simple: una combinación lineal de operadores de traslación.

Para esto, definimos los  $H$ -autovalores, cuya noción generaliza el concepto clásico de autovalor: Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado, dada una sucesión  $a \in \ell^2(H)$  de espectro acotado (ver Definición 1.4.9), decimos que

$$\Lambda_a = \sum_{h \in H} a(h) T_h$$

es un  $H$ -autovalor de  $L$  si  $V_a = \ker(L - \Lambda_a) \neq \{0\}$ . Aquí, el operador  $\Lambda_a$  está bien definido y es acotado sobre un conjunto denso en  $L^2(\mathbb{R}^d)$  y se extiende por continuidad a

$L^2(\mathbb{R}^d)$ . A los subespacios  $V_a$  los denominamos *H-autoespacios* de  $L$ . Decimos que  $L$  es *H-diagonalizable* si existen finitos (numerables) *H-autoespacios* que descomponen a  $V$  en suma directa (ortogonal).

Uno de nuestros resultados principales muestra que si  $V$  es un espacio *H*-invariante finitamente generado y  $L : V \rightarrow V$  es un operador *H*-conmutante acotado y normal, entonces  $L$  es *H-diagonalizable* y admite un tipo de descomposición espectral

$$L = \sum_{j=1}^m \Lambda_{a_j} P_{V_{a_j}}$$

donde  $P_{V_{a_j}}$  denota la proyección ortogonal sobre el subespacio cerrado  $V_{a_j}$  dentro de  $V$  (Ver Teorema 3.3.16). Este teorema también se extiende a espacios  $V$  cuyos espacios de fibras son finito-dimensionales (Teorema 3.4.4).

La idea detrás de la *H*-diagonalización consiste en relacionar propiedades del operador  $L$  con las propiedades de diagonalización de las fibras de su operador rango. Cuando la dimensión de los espacios de fibras es finita, el operador rango puede verse como un mapa de matrices finitas a las cuales podemos encontrarles una selección medible de autovalores. Cuando se remueve la hipótesis de que los espacios de fibras sean finito-dimensionales el problema no se puede abordar con las mismas herramientas. En este caso, para poder obtener una *H*-diagonalización de operadores *H*-conmutantes acotados y normales, precisamos pedir una estructura especial en su operador rango.

Todos estos resultados que obtuvimos pueden ser generalizados sin esfuerzo reemplazando  $\mathbb{R}^d$  por un grupo localmente compacto abeliano  $\mathfrak{S}$  que satisface el segundo axioma de numerabilidad y  $H$  por un reticulado uniforme de  $\mathfrak{S}$  (esto es,  $H$  un grupo discreto tal que  $\mathfrak{S}/H$  es compacto). Por otro lado, en esta tesis también consideramos una mayor generalidad del problema de *H*-diagonalización y buscamos descomposiciones similares para operadores que actúan en subespacios invariantes no sólo por traslaciones, si no también por otros movimientos rígidos como las rotaciones.

Más precisamente, supongamos que  $G$  es un grupo discreto finito que actúa sobre  $\mathfrak{S}$  por automorfismos continuos y que preserva  $H$  (es decir,  $gH = H$  para todo  $g \in G$ ) y consideremos el producto semidirecto  $\Gamma = H \rtimes G$ . Los grupos de esta forma incluyen, en particular, a la clase de los grupos cristalográficos que se separan. Si denotamos por  $R_g f(x) = f(g^{-1}x)$ , para  $f \in L^2(\mathfrak{S})$  y  $g \in G$ , se puede ver que el mapa  $(h, g) \mapsto T_h R_g$  define una representación unitaria de  $\Gamma$  en  $L^2(\mathfrak{S})$ . Recientemente, en [18], se estudió la estructura de los subespacios de  $L^2(\mathfrak{S})$  invariantes por dicha representación, a los cuales llamaron espacios  $\Gamma$ -invariantes. Estos grupos son importantes en aplicaciones del procesamiento de imágenes como modelos para imágenes [19].

En este contexto, lo que hicimos fue considerar operadores actuando sobre espacios

$\Gamma$ -invariantes que conmutan con la representación unitaria de  $\Gamma$  en  $L^2(\mathfrak{S})$ . Nos referiremos a estos operadores como  $\Gamma$ -conmutantes. Encontramos condiciones para que estos operadores admitan una  $H$ -diagonalización donde cada  $H$ -autovalor sea  $\Gamma$ -conmutante y cada  $H$ -autoespacio sea  $\Gamma$ -invariante, la cual llamaremos  $\Gamma$ -diagonalización.

## Estructura de la tesis

Esta tesis está organizada de la siguiente manera.

En el Capítulo 1 daremos una introducción a la teoría sobre la cual se construye este trabajo. En primer lugar, encontraremos un resumen sobre marcos y bases de Riesz en espacios de Hilbert. Luego, discutiremos los conceptos y resultados más básicos de la teoría de muestreo e interpolación. Más adelante, abordaremos la teoría de los espacios invariantes por traslaciones y los operadores que conmutan con las traslaciones. Finalmente, explicaremos cómo es posible extender estos últimos al contexto de los grupos localmente compactos y abelianos.

El Capítulo 2 tratará el problema de encontrar bases de Riesz estructuradas de exponenciales para conjuntos que multi-teselan. Para esto veremos una caracterización de las bases de Riesz estructuradas sobre conjuntos que  $k$ -teselan. Daremos la definición de conjunto admisible, junto con algunos ejemplos de conjuntos que satisfacen esta propiedad. Probaremos que todo conjunto admisible que multi-tesela (no necesariamente acotado) admite una base de Riesz estructurada de exponenciales y mostraremos con un ejemplo que la admisibilidad no es una condición necesaria para admitir bases de este tipo. Finalmente, daremos una generalización de este teorema para el caso de submulti-teselados donde obtendremos marcos de exponenciales estructurados.

El Capítulo 3 está dedicado a desarrollar la teoría de la  $H$ -diagonalización de operadores  $H$ -conmutantes. Comenzaremos por dar las definiciones de  $H$ -autovalor y  $H$ -autoespacio, y sus propiedades relacionadas a los autovalores y autoespacios del operador rango. Veremos que es posible construir funciones medibles a partir de selecciones medibles de los autovalores del operador rango que servirán para construir los  $H$ -autovalores. Luego, daremos la definición de  $H$ -diagonalización sobre espacios  $H$ -invariantes finitamente generados, y estudiaremos condiciones necesarias y suficientes para que un operador sea  $H$ -diagonalizable. Finalmente, veremos algunas extensiones de esta teoría al caso de los espacios  $H$ -invariantes generales.

El problema del muestreo dinámico para operadores  $H$ -conmutantes será abordado en el Capítulo 4. Allí discutiremos cómo es posible utilizar las técnicas de fiberización de espacios invariantes por traslaciones para reducir el problema a un problema de muestreo dinámico finito-dimensional. Para ello, daremos estimaciones de las constantes de marco

para el caso finito-dimensional del muestreo dinámico y aplicaremos estos resultados para resolver nuestro problema.

Por último, en el Capítulo 5 estudiaremos el problema de diagonalización de operadores  $\Gamma$ -conmutantes. Para esto, veremos las propiedades características de la estructura de dichos operadores. Encontraremos qué condiciones debe cumplir un  $H$ -autovalor para conmutar con la representación unitaria de  $\Gamma$  y veremos que, bajo ciertas hipótesis, si un operador  $\Gamma$ -conmutante es  $H$ -diagonalizable, entonces admite una  $\Gamma$ -diagonalización.

### **Publicaciones incluidas**

Los resultados exhibidos en esta tesis forman parte de los siguientes artículos:

- Carlos Cabrelli y Diana Carbajal. *Riesz bases of exponentials on unbounded multitiles*. Proc. Amer. Math. Soc., 146(5):1991-2004, 2018.
- Alejandra Aguilera, Carlos Cabrelli, Diana Carbajal, y Victoria Paternostro. *Diagonalization of shift-preserving operators*. arXiv preprint arXiv:1910.05188, 2019.
- Davide Barbieri, Carlos Cabrelli, Diana Carbajal, Eugenio Hernández, y Ursula Molter. *The structure of group preserving operators*. Sampl. Theory Signal Process. Data Anal. 19, 5, 2021.
- Alejandra Aguilera, Carlos Cabrelli, Diana Carbajal, y Victoria Paternostro. *Dynamical sampling for shift-preserving operators*. Appl. Comput. Harmon. Anal., 51:258-274, 2021.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>15</b>
1.1 Marcos y bases de Riesz en espacios de Hilbert . . . . .	16
1.2 Muestreo e interpolación . . . . .	20
1.2.1 El espacio de Paley-Wiener . . . . .	20
1.2.2 El problema del muestreo e interpolación en espacios de Paley-Wiener	22
1.2.3 El problema del muestreo e interpolación en espacios de Hilbert abstractos . . . . .	24
1.2.4 Dualidad entre el muestreo y la interpolación . . . . .	26
1.3 Espacios invariantes por traslaciones . . . . .	28
1.3.1 Fiberización y función rango . . . . .	30
1.3.2 Descomposición ortogonal en principales . . . . .	33
1.4 Operadores que conmutan con las traslaciones . . . . .	34
1.4.1 Operador rango . . . . .	34
1.4.2 Funciones multivaluadas medibles . . . . .	38
1.4.3 El espectro de los operadores $H$ -conmutantes . . . . .	39
1.5 Grupos localmente compactos y abelianos . . . . .	41
<b>2 Multi-teselados y bases de Riesz</b>	<b>43</b>
2.1 Multi-teselados . . . . .	44
2.2 Bases de Riesz de exponenciales estructuradas . . . . .	46
2.3 Conjuntos Admisibles . . . . .	49

2.4	Submulti-teselados y marcos de exponenciales . . . . .	53
2.5	Avances posteriores en el tema . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Diagonalización de operadores <math>H</math>-conmutantes</b>	<b>57</b>
3.1	$H$ -autovalores y $H$ -autoespacios . . . . .	58
3.2	Selecciones medibles de autovalores . . . . .	61
3.3	$H$ -diagonalización: caso finitamente generado . . . . .	66
3.3.1	Definición y propiedades de $s$ -diagonalizaciones . . . . .	66
3.3.2	Operadores rango con fibras diagonalizables . . . . .	70
3.3.3	Ángulo entre subespacios . . . . .	72
3.3.4	Condiciones suficientes para la $H$ -diagonalización y minimalidad . . . . .	74
3.3.5	Operadores $H$ -conmutantes normales . . . . .	76
3.4	$H$ -diagonalización: caso no finitamente generado . . . . .	79
3.4.1	Fibras localmente finito-dimensionales . . . . .	80
3.4.2	Fibras infinito-dimensionales . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Muestreo Dinámico para operadores <math>H</math>-conmutantes</b>	<b>85</b>
4.1	Muestreo dinámico finito-dimensional . . . . .	86
4.2	Muestreo dinámico para operadores $H$ -conmutantes . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Diagonalización de operadores <math>\Gamma</math>-conmutantes</b>	<b>97</b>
5.1	Marco teórico . . . . .	98
5.2	Espacios $\Gamma$ -invariantes . . . . .	101
5.3	Operadores $\Gamma$ -conmutantes . . . . .	102
5.4	$\Gamma$ -diagonalización . . . . .	106
	<b>Bibliografía</b>	<b>109</b>

# Capítulo 1

## Preliminares

El fin de este capítulo será dar el marco teórico sobre el cual se desarrolla esta tesis. Introduciremos notaciones, definiciones y resultados con los que trabajaremos en los siguientes capítulos. En general no incluiremos las demostraciones de los resultados enunciados salvo que estos no se encuentren de manera explícita en la literatura. La estructura de este capítulo será la siguiente:

En la Sección 1.1 nos ocuparemos de repasar las definiciones de marco, sucesión de Riesz, base de Riesz en espacios de Hilbert separables, revisaremos algunas propiedades importantes sobre estos sistemas e introduciremos ciertos operadores esenciales de esta teoría: los operadores de síntesis y análisis, y el operador de marco.

La Sección 1.2 estará dedicada a introducir el problema de muestreo e interpolación, tanto en el espacio clásico de Paley-Wiener como en espacios de Hilbert más abstractos. En esta, se mostrará la relación que existe entre el problema de muestreo e interpolación, los sistemas de exponenciales y los sistemas de traslaciones.

En las Secciones 1.3 y 1.4, introduciremos los espacios invariantes por traslaciones de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  y los operadores que conmutan con las traslaciones actuando en dichos espacios. La teoría será planteada en el contexto Euclideo. En la Sección 1.5 explicaremos cómo se puede extender al caso general de los grupos localmente compactos y abelianos.

Antes de comenzar, fijaremos algunas notaciones y convenciones. Dado un conjunto  $I$  notaremos su cardinal como  $\#I$ . Utilizaremos el símbolo  $\oplus$  para determinar la suma directa de subespacios y  $\dot{\oplus}$  cuando esta suma sea ortogonal. Dado un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^d$  medible (Lebesgue), notaremos su medida por  $|E|$ .

La transformada de Fourier para una función  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  está dada por

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \langle \omega, x \rangle} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}^d,$$

y se extiende por densidad a un isomorfismo isométrico en  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Haremos uso de la siguiente notación para las funciones exponenciales:

$$e_x(\omega) := e^{2\pi i \langle \omega, x \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \omega \in \mathbb{R}^d.$$

El operador de traslación por  $x \in \mathbb{R}^d$  en  $L^2(\mathbb{R}^d)$  se denotará por

$$T_x f(\cdot) := f(\cdot - x), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d). \quad (1.0.1)$$

Notar que se tiene la siguiente relación:

$$\mathcal{F}(T_x f)(\omega) = e_{-x}(\omega) \hat{f}(\omega), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d), x \in \mathbb{R}^d, \omega \in \mathbb{R}^d. \quad (1.0.2)$$

Dado un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  complejo y un operador acotado  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , denotaremos el espectro de  $A$  como  $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ no es inversible}\}$ . El espectro puntual, es decir, el conjunto de autovalores de  $A$  será notado por  $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ no es inyectivo}\}$ . Cuando  $\mathcal{H}$  es finito-dimensional,  $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ .

Si  $\mathcal{H}$  es finito-dimensional, diremos que  $A$  es diagonalizable si existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  autovectores de  $A$  para los cuales  $\mathcal{H} = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_m}$ . Cuando  $\mathcal{H}$  es infinito-dimensional, diremos que un operador  $A$  es diagonalizable si existe una base ortonormal de  $\mathcal{H}$  de autovectores de  $A$ , o equivalentemente, una sucesión  $(\lambda_j)_j \in \mathbb{C}$  de autovalores de  $A$  para los cuales  $\mathcal{H} = \bigoplus_j E_{\lambda_j}$ . Todo operador diagonalizable en este último sentido es normal.

## 1.1 Marcos y bases de Riesz en espacios de Hilbert

Esta subsección está dedicada a introducir el concepto de marcos y bases de Riesz de un espacio de Hilbert separable. Veremos que ambos son sucesiones completas provistas de ciertas propiedades deseadas que generalizan las de las bases ortonormales. Si bien todo espacio de Hilbert separable admite una base ortonormal, para muchas aplicaciones necesitaremos trabajar con sucesiones específicas y no siempre será posible garantizar la condición de ortonormalidad de estas. En su lugar, los marcos y bases de Riesz ofrecen una estructura lo suficientemente buena.



Todos los resultados presentados a continuación son bien conocidos de la literatura, se pueden encontrar con más detalle y con sus respectivas demostraciones en [35, 56, 90] y las citas dentro de ellos.

A lo largo de esta subsección  $\mathcal{H}$  siempre representará un espacio de Hilbert separable e  $I$  será un conjunto de índices a lo sumo numerable.

Comenzaremos por ver la definición de marco de un espacio de Hilbert.

**Definición 1.1.1.** Una sucesión  $\{\varphi_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{H}$  se dice que es un marco de  $\mathcal{H}$  si existen dos constantes positivas  $A, B > 0$  tales que

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Cuando sólo se satisface la desigualdad de la derecha, se dice que la sucesión es Bessel.

En este caso, nos referiremos a las constantes  $A, B$  como constantes de marco. Las constantes no son únicas y diremos que son óptimas cuando la constante superior (inferior) de marco sea el ínfimo (supremo) de todas las constantes. Notemos que una base ortonormal, en particular, es un marco y las constantes en ese caso son  $A = B = 1$  debido a la identidad de Parseval.

Es claro que un marco de  $\mathcal{H}$  es un sistema completo de  $\mathcal{H}$ , sin embargo, no es necesariamente una base y puede admitir redundancia. Por ejemplo, supongamos que  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ , la sucesión en  $\mathcal{H}$  formada por  $\{\varphi_1, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_2, \dots\}$  es un marco de  $\mathcal{H}$  con constantes  $A = B = 2$ .

**Definición 1.1.2.** Un marco se dice ajustado cuando  $A = B$ . En el caso que  $A = B = 1$  decimos que el marco es de Parseval.

A continuación daremos las definiciones de algunos operadores que son de gran importancia dentro de la teoría de marcos.

**Definición 1.1.3.** Sea  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  una sucesión de  $\mathcal{H}$ .

(i) El operador de análisis asociado a  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  se define por  $C : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(I)$  donde

$$Cf = \{\langle f, \varphi_i \rangle\}_{i \in I}, \quad f \in \mathcal{H}.$$

(ii) El operador de síntesis asociado a  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  es el operador adjunto de  $C$ , que está dado por  $U = C^* : \ell^2(I) \rightarrow \mathcal{H}$  donde

$$Uc = \sum_{i \in I} c_i \varphi_i, \quad c = \{c_i\} \in \ell^2(I).$$

(iii) El operador de marco asociado a  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  es el operador  $S = UC : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  dado por

$$Sf = \sum_{i \in I} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Se puede observar fácilmente que el operador de análisis  $C$  está bien definido y es acotado si y sólo si el sistema  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  es una sucesión Bessel. Por lo tanto, si ese es el caso, todos los operadores  $C$ ,  $U$  y  $S$  están bien definidos y son acotados. Por otro lado,  $S$  es un operador autoadjunto y positivo.

Así mismo, se puede ver que la sucesión  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  es un marco de  $\mathcal{H}$  con constantes de marco  $A, B > 0$  si y sólo si el operador de análisis  $C$  está acotado superior e inferiormente, es decir

$$A \|f\|^2 \leq \|Cf\|_{\ell^2}^2 \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Luego, se puede deducir el siguiente resultado.

**Teorema 1.1.4.** *Dada una sucesión  $\{\varphi_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{H}$ , son equivalentes:*

- (i)  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  es un marco de  $\mathcal{H}$ .
- (ii) El operador de análisis  $C$  es acotado, inyectivo y de rango cerrado.
- (iii) El operador de síntesis  $U$  es acotado y sobreyectivo.

Una propiedad importante de los marcos es que estos nos proveen de representaciones como combinación lineal de sus elementos para todo vector en  $\mathcal{H}$ , como se enuncia el último ítem del siguiente teorema.

**Teorema 1.1.5.** *Sea  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  una sucesión en  $\mathcal{H}$ . Los siguientes enunciados son equivalentes.*

- (i)  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  un marco de  $\mathcal{H}$  con constantes de marco  $A, B > 0$ .
- (ii) El operador de marco  $S$  es inversible y se tiene que

$$A \|f\|^2 \leq \langle Sf, f \rangle \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

- (iii)  $\{S^{-1}\varphi_i\}_{i \in I}$  es un marco de  $\mathcal{H}$  con constantes de marco  $B^{-1}, A^{-1}$ .
- (iv) Para todo  $f \in \mathcal{H}$  se tienen las siguientes igualdades

$$f = \sum_{i \in I} \langle f, S^{-1}\varphi_i \rangle \varphi_i = \sum_{i \in I} \langle f, \varphi_i \rangle S^{-1}\varphi_i, \quad (1.1.1)$$

donde estas series convergen incondicionalmente en  $\mathcal{H}$ .

Observemos que cuando  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  es un marco ajustado de  $\mathcal{H}$ , tenemos que  $S = AI$  y  $S^{-1} = A^{-1}I$ . Luego, en ese caso vale que  $f = A^{-1} \sum_{i \in I} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i$  para toda  $f \in \mathcal{H}$ .

A la sucesión  $\{S^{-1}\varphi_i\}_{i \in I}$  se la denomina *marco dual canónico* de  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ . Es importante remarcar que los coeficientes de la escritura como combinación lineal de los elementos del marco  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  dada en (1.1.1) no son únicos debido a la redundancia que un marco puede admitir.

Si bien esta redundancia podría ser de utilidad para algunas aplicaciones (por ejemplo, en problemas de transmisión de datos con pérdida de información), tener unicidad en las representaciones en serie de los vectores del espacio suele ser conveniente y para ello necesitamos que la sucesión sea una base de Schauder del espacio de Hilbert. Veremos a continuación la definición de bases de Riesz de un espacio de Hilbert.

**Definición 1.1.6.** Decimos que el sistema  $\{\varphi_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{H}$  es una sucesión de Riesz de  $\mathcal{H}$  si existen dos constantes  $A, B > 0$  tales que

$$A \sum_{i \in I} |c_i|^2 \leq \left\| \sum_{i \in I} c_i \varphi_i \right\|^2 \leq B \sum_{i \in I} |c_i|^2, \quad \forall c = \{c_i\} \in \ell^2(I).$$

Cuando una sucesión de Riesz es además completa en  $\mathcal{H}$ , decimos que es una base de Riesz de  $\mathcal{H}$ .

Nos referiremos a las constantes  $A, B$  como constantes de Riesz. Una base ortonormal es, en particular, una base de Riesz con constantes  $A = B = 1$ . Observemos que si  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  es una sucesión de Riesz de  $\mathcal{H}$ , entonces es una base de Riesz del espacio que genera, es decir  $\mathcal{H}_0 = \overline{\text{gen}\{\varphi_i\}_{i \in I}}$ .

Notemos que  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  es una sucesión de Riesz de  $\mathcal{H}$  con constantes de Riesz  $A, B$  si y sólo si el operador de síntesis  $U$  está acotado superior e inferiormente, es decir

$$A \sum_{i \in I} |c_i|^2 \leq \|Uc\|^2 \leq B \sum_{i \in I} |c_i|^2, \quad \forall c = \{c_i\} \in \ell^2(I).$$

En ese caso, el operador  $U$  está bien definido, es acotado, inyectivo y de rango cerrado. En consecuencia,  $C$  es acotado y sobreyectivo.

En particular, una sucesión de Riesz es necesariamente una sucesión Bessel. Dado que un marco es completo, es claro que si una sucesión es marco y sucesión de Riesz de  $\mathcal{H}$  entonces es una base de Riesz de  $\mathcal{H}$ . Por el otro lado, si una sucesión es base de Riesz de  $\mathcal{H}$ , se puede ver que es un marco de  $\mathcal{H}$ . Combinando esta última discusión con el Teorema 1.1.4, obtenemos que  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  es una base de Riesz de  $\mathcal{H}$  si y sólo si  $C$  y  $U$  son operadores acotados e inversibles.

Las bases de Riesz son bases de Schauder y por lo tanto proveen para cada vector en  $\mathcal{H}$  una única escritura como combinación lineal de los elementos de la sucesión. Más aún, los coeficientes de dicha escritura se obtienen a través de la sucesión biortogonal.

**Definición 1.1.7.** Sea  $\{\varphi_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{H}$ . Una sucesión  $\{g_i\}_{i \in I}$  se dice biortogonal a  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  si  $\langle \varphi_i, g_j \rangle = \delta_{i,j}$  para todo  $i, j \in I$ .

**Teorema 1.1.8.** Sea  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  una base de Riesz de  $\mathcal{H}$ , entonces existe una única sucesión biortogonal  $\{g_i\}_{i \in I}$  y para todo  $f \in \mathcal{H}$  se tiene que

$$f = \sum_{i \in I} \langle f, g_i \rangle \varphi_i,$$

donde la serie converge incondicionalmente. Además,  $\{g_i\}_{i \in I}$  es una base de Riesz de  $\mathcal{H}$ .

En particular, si una sucesión es una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ , su biortogonal es ella misma.

## 1.2 Muestreo e interpolación

La intención de esta sección es dar un panorama amplio sobre la teoría de muestreo e interpolación. Comenzaremos por introducir los espacios de Paley-Wiener. Luego, discutiremos sobre el problema del muestreo e interpolación en espacios de Paley-Wiener. En particular, veremos que existe una conexión entre un conjunto de muestreo (interpolación) y los marcos (sucesiones de Riesz) de exponenciales. Posteriormente, hablaremos sobre cómo se puede formular un problema de muestreo e interpolación en espacios de Hilbert más abstractos. Finalmente, dedicaremos la última subsección a explicar la dualidad entre el problema de muestreo y el de interpolación, donde demostraremos una generalización de un resultado de [79].

Referimos al lector a [90, 56, 80] y las referencias allí dentro para una lectura más detallada en estos temas y para las demostraciones de los resultados que mencionaremos.

### 1.2.1 El espacio de Paley-Wiener

**Definición 1.2.1.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto compacto, el espacio de Paley-Wiener se define por el conjunto

$$PW_\Omega := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \text{sop} \hat{f} \subseteq \Omega \right\}.$$

$PW_\Omega$  es un espacio de Hilbert provisto con la norma  $\|\cdot\|_2$  ya que es un subespacio cerrado dentro de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Muchas veces nos referiremos a él como el espacio de las funciones de *banda limitada*. Frecuentemente en las aplicaciones, las señales pueden ser modeladas por funciones de este tipo. Por ejemplo, dado que el oído humano sólo es capaz de reconocer frecuencias en un rango limitado entre 20 Hz y 20000 Hz, podemos considerar a las señales sonoras como de banda limitada.

El espacio de Paley-Wiener puede ser estudiado del lado de Fourier. Si notamos que el espacio  $L^2(\Omega)$  puede ser identificado como el subespacio cerrado de funciones de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  que se anulan fuera de  $\Omega$ , es decir, el espacio compuesto por  $f\chi_\Omega$  con  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , podemos ver que  $\mathcal{F}(PW_\Omega) = L^2(\Omega)$ , con lo cual  $PW_\Omega$  y  $L^2(\Omega)$  son espacios isométricamente isomorfos.

Como  $\Omega$  es compacto,  $\mathcal{F}(PW_\Omega) = L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ . En consecuencia, todas las funciones de  $PW_\Omega$  son continuas. Más aún, se puede ver que para toda  $f \in PW_\Omega$ , tenemos que  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  y todas sus derivadas parciales pertenecen a  $PW_\Omega$ . El hecho de que las funciones sean continuas nos garantiza que podamos considerar las evaluaciones de estas.

El ejemplo más clásico de los espacios de Paley-Wiener es cuando  $\Omega$  es un intervalo simétrico en la recta, es decir  $\Omega = [-\sigma, \sigma]$  con  $\sigma > 0$ , que lo notaremos simplemente  $PW_\sigma$ . Es bien sabido que  $L^2[-\sigma, \sigma]$  admite una base ortonormal de exponenciales de la forma

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} e^{\frac{k}{2\sigma}(\omega)} \chi_{[-\sigma, \sigma]}(\omega) : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Anti-transformando y usando (1.0.2), obtenemos por isometría la siguiente base ortonormal para  $PW_\sigma$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \psi_\sigma \left( x - \frac{k}{2\sigma} \right) : k \in \mathbb{Z} \right\},$$

donde

$$\psi_\sigma(x) = \mathcal{F}^{-1}(\chi_{[-\sigma, \sigma]})(x) = \frac{\text{sen}(2\pi\sigma x)}{\pi x}.$$

Cuando  $\sigma = 1/2$ , esta función se conoce como *seno cardinal*. Esta base ortonormal del espacio  $PW_\sigma$  se destaca en importancia debido a la siguiente propiedad. Dada  $f \in PW_\sigma$ , por la igualdad de Plancherel, sabemos que

$$\left\langle f, \psi_\sigma \left( \cdot - \frac{k}{2\sigma} \right) \right\rangle = \left\langle \hat{f}, e^{\frac{k}{2\sigma}\omega} \chi_{[-\sigma, \sigma]} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega \frac{k}{2\sigma}} d\omega = f\left(\frac{k}{2\sigma}\right), \quad (1.2.1)$$

para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .

Por la ortonormalidad de la base, esto nos dice que para toda  $f \in PW_\sigma$  tenemos la siguiente escritura como combinación lineal de sus elementos

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2\sigma}\right) \psi_\sigma \left( x - \frac{k}{2\sigma} \right), \quad (1.2.2)$$

donde la convergencia es en  $L^2(\mathbb{R})$  y también uniforme en  $\mathbb{R}$ .

La expansión obtenida en (1.2.2) es lo que se conoce por el Teorema Clásico del Muestreo y nos muestra que conociendo únicamente los valores de  $f$  en los puntos  $\Gamma = \frac{1}{2\sigma}\mathbb{Z}$  es posible reconstruir a la función por completo. Veremos en lo que sigue que  $\Gamma$  es un conjunto de muestreo para  $PW_\sigma$ .

## 1.2.2 El problema del muestreo e interpolación en espacios de Paley-Wiener

Como mencionamos en la introducción de esta tesis, dado un espacio de funciones  $\mathcal{F}$  en  $\mathbb{R}^d$  a valores en  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , el problema del muestreo busca encontrar un conjunto discreto  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ , con el cual toda función  $f \in \mathcal{F}$  pueda ser reconstruida unívocamente y de manera estable a partir de sus muestras  $\{f(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ . Cuando decimos que la reconstrucción es estable, nos referimos a que pequeñas perturbaciones en las muestras  $\{f(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$  generen pequeñas variaciones en la reconstrucción.

A continuación daremos la definición de conjunto de muestreo para el caso de los espacios de Paley-Wiener.

**Definición 1.2.2.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un compacto y  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto discreto. Decimos que  $\Gamma$  es un conjunto de muestreo para  $PW_\Omega$  si existen constantes  $A, B > 0$  tales que

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^2 \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in PW_\Omega. \quad (1.2.3)$$

Consideremos el operador de muestras  $M : PW_\Omega \rightarrow \ell^2(\Gamma)$  como

$$Mf = \{f(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}. \quad (1.2.4)$$

Dado  $x \in \mathbb{R}^d$  y  $f \in PW_\Omega$ , de manera análoga a (1.2.1), podemos ver que

$$f(x) = \langle \hat{f}, e_{-x} \chi_\Omega \rangle = \langle f, T_x \psi \rangle \quad (1.2.5)$$

donde  $\psi = \mathcal{F}^{-1}(\chi_\Omega)$  y  $T_x$  es el operador de traslación como en (1.0.1). Por lo tanto, el operador  $M$  coincide con el operador de análisis asociado al sistema  $\{T_\gamma \psi : \gamma \in \Gamma\}$  (ver Definición 1.1.3).

La ecuación (1.2.3) nos dice que  $M$  es un operador bien definido, acotado, inyectivo y de rango cerrado. La inyectividad de  $M$  nos garantiza unicidad de la reconstrucción de una función  $f$  a partir de sus muestras  $\{f(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ . Además, se tiene estabilidad ya que

$\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^2 \approx \|f\|^2$ . Por otro lado, esto nos indica que el sistema  $\{T_\gamma \psi : \gamma \in \Gamma\}$  es un marco de  $PW_\Omega$ .

Dado que la transformada de Fourier es un isomorfismo isométrico, esto es equivalente a que el sistema de exponenciales

$$E(\Gamma) := \{e_{-\gamma} \chi_\Omega : \gamma \in \Gamma\}$$

sea un marco de  $L^2(\Omega)$ . Resumiendo, obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 1.2.3.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  compacto y  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto discreto, entonces son equivalentes:*

- (i) *El conjunto  $\Gamma$  es de muestreo para  $PW_\Omega$*
- (ii) *El sistema  $\{T_\gamma \psi : \gamma \in \Gamma\}$  es un marco de  $PW_\Omega$ , con  $\psi = \mathcal{F}^{-1}(\chi_\Omega)$ .*
- (iii) *El sistema  $E(\Gamma)$  es un marco de  $L^2(\Omega)$ .*

Observar que si  $\Gamma$  es un conjunto de muestreo para  $PW_\Omega$ , por (1.1.1) y (1.2.5), tenemos la siguiente formula de reconstrucción para toda  $f \in PW_\Omega$ :

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) S^{-1} T_\gamma \psi,$$

donde  $S$  es el operador de marco de  $\{T_\gamma \psi : \gamma \in \Gamma\}$ .

Por ejemplo, cuando  $\sigma > 0$ , como  $E\left(\frac{1}{2\sigma}\mathbb{Z}\right)$  es una base ortogonal de  $L^2[-\sigma, \sigma]$ , en particular es un marco de  $L^2[-\sigma, \sigma]$ . Por lo tanto  $\Gamma = \frac{1}{2\sigma}\mathbb{Z}$  es un conjunto de muestreo para  $PW_\sigma$ .

**Definición 1.2.4.** *Decimos que un conjunto  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  es Bessel si el sistema de exponenciales  $E(\Gamma)$  es una sucesión Bessel en  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .*

**Definición 1.2.5.** *Decimos que  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  es un conjunto separado si existe  $d > 0$  tal que  $|\gamma - \gamma'| \geq d > 0$  para todo  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$  tales que  $\gamma \neq \gamma'$ . Si  $\Gamma$  es unión finita de conjuntos separados, decimos que  $\Gamma$  es relativamente separado.*

Se puede ver que si  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  es un conjunto separado, entonces  $\Gamma$  es Bessel. En particular, si  $\Gamma$  es separado entonces la desigualdad superior de (1.2.3) se satisface para toda  $f \in PW_\Omega$ . En el otro sentido, se sabe que si  $\Gamma$  es Bessel entonces,  $\Gamma$  es relativamente separado. Al trabajar con conjuntos de muestreo, podemos siempre considerarlos separados gracias a la siguiente proposición.

**Proposición 1.2.6.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  compacto y  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto de muestreo para  $PW_\Omega$ . Entonces, existe  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ , tal que  $\Gamma_0$  es separado y es un conjunto de muestreo para  $PW_\Omega$ .*

El problema del muestreo tiene un problema dual, que es el de interpolación. La razón por la cual se considera dual la discutiremos en la Subsección 1.2.4. La definición de un conjunto de interpolación para un espacio de Paley-Wiener es la siguiente.

**Definición 1.2.7.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  compacto y  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto discreto, decimos  $\Gamma$  es un conjunto de interpolación para  $PW_\Omega$  si para toda sucesión  $c = \{c_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \in \ell^2(\Gamma)$  existe una función  $f \in PW_\Omega$  tal que  $f(\gamma) = c_\gamma$  para todo  $\gamma \in \Gamma$ .*

Cuando un conjunto  $\Gamma$  es de interpolación, se puede probar que este es necesariamente un conjunto separado. Luego, esto implica que  $\Gamma$  debe ser Bessel. En terminos del operador de muestras  $M$  definido en (1.2.4), se tiene que  $\Gamma$  es de interpolación si  $M$  es acotado y sobreyectivo. En particular, dado que  $M$  es el operador de análisis de  $\{T_\gamma \psi : \gamma \in \Gamma\}$ , razonando de manera análoga a antes, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 1.2.8.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  compacto y  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto discreto, entonces son equivalentes:*

- (i) *El conjunto  $\Gamma$  es de interpolación para  $PW_\Omega$ .*
- (ii) *El sistema  $\{T_\gamma \psi : \gamma \in \Gamma\}$  es un una sucesión de Riesz de  $PW_\Omega$ , con  $\psi = \mathcal{F}^{-1}(\chi_\Omega)$ .*
- (iii) *El sistema  $E(\Gamma)$  es una sucesión de Riesz de  $L^2(\Omega)$ .*

Por ejemplo, si  $\sigma > 0$ , sabemos que  $E\left(\frac{1}{2\sigma}\mathbb{Z}\right)$  es una base ortogonal de  $L^2[-\sigma, \sigma]$  y en particular un una sucesión de Riesz de  $L^2[-\sigma, \sigma]$ . Por lo tanto  $\Gamma = \frac{1}{2\sigma}\mathbb{Z}$  es un conjunto de interpolación para  $PW_\sigma$ . En este caso,  $\Gamma$  es un conjunto de muestreo e interpolación al mismo tiempo.

Observar que si un conjunto  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  es de muestreo e interpolación para  $PW_\Omega$  con  $\Omega$  compacto, entonces se tiene que  $E(\Gamma)$  es una base de Riesz de  $L^2(\Omega)$ .

### 1.2.3 El problema del muestreo e interpolación en espacios de Hilbert abstractos

Los espacios de Paley-Wiener  $PW_\Omega$  con  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  compacto gozan una característica especial que es la de ser un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo.



**Definición 1.2.9.** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert de funciones definidas en un conjunto  $X$  con valores en  $\mathbb{C}$ . Decimos que  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo (EHNR) si para cada  $x \in X$ , el funcional lineal  $ev_x : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $ev_x(f) = f(x)$  es continuo.

Si un espacio  $\mathcal{H}$  es un EHNR, por el Teorema de Representación de Riesz, para cada  $x \in X$  existe un elemento  $k_x \in \mathcal{H}$  tal que  $f(x) = \langle f, k_x \rangle$  para toda  $f \in \mathcal{H}$ . Luego, se puede definir la función  $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  como  $K(x, y) = \langle k_y, k_x \rangle = k_y(x)$ , la cual se denomina *núcleo reproductivo de  $\mathcal{H}$* .

Por ejemplo, en el caso de  $PW_\Omega$  con  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  compacto, vimos en (1.2.5) que para todo  $x \in \mathbb{R}^d$  y  $f \in PW_\Omega$ ,  $f(x) = \langle f, T_x \psi \rangle$  donde  $\psi = \mathcal{F}^{-1}(\chi_\Omega)$ . Con lo cual,  $k_x = T_x \psi$  para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Dado que las evaluaciones son continuas, tiene sentido estudiar el problema del muestreo y el problema de interpolación para EHNR generales. Sea  $\mathcal{H}$  un EHNR de funciones definidas en un conjunto  $X$  con valores en  $\mathbb{C}$  y  $\Gamma \subset X$  un conjunto discreto. Al igual que para los espacios de Paley-Wiener, decimos que  $\Gamma$  es un *conjunto de muestreo* para  $\mathcal{H}$  si existen constantes  $A, B > 0$  tales que

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^2 \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Por el otro lado, decimos  $\Gamma$  es un *conjunto de interpolación* para  $\mathcal{H}$  si para toda sucesión  $c = \{c_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \in \ell^2(\Gamma)$  existe una función  $f \in \mathcal{H}$  tal que  $f(\gamma) = c_\gamma$  para todo  $\gamma \in \Gamma$ .

Debido a que  $f(x) = \langle f, k_x \rangle$  para toda  $f \in \mathcal{H}$  y  $x \in X$ , de manera análoga al Teorema 1.2.3 vemos que  $\Gamma \subset X$  es un conjunto de muestreo para  $\mathcal{H}$  si y sólo si  $\{k_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  es un marco de  $\mathcal{H}$ . Y también, como en el Teorema 1.2.8, obtenemos que  $\Gamma \subset X$  es un conjunto de interpolación para  $\mathcal{H}$  si y sólo si  $\{k_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  es una sucesión de Riesz de  $\mathcal{H}$ .

Para el caso de espacios de Hilbert separables de funciones más abstractos, el problema del muestreo mediante las evaluaciones podría perder el sentido. Sin embargo, las discusiones previas nos sugieren una generalización muy natural de este problema: en vez de considerar evaluaciones, se puede muestrear a una función  $f$  a través de ciertas mediciones  $\{\langle f, \varphi_i \rangle\}_{i \in I}$  para un conjunto discreto de índices  $I$  (por ejemplo,  $\varphi_i$  podría ser una función bien localizada alrededor de un punto).

Luego, el problema del muestreo para espacios de Hilbert abstractos se convierte en buscar funciones  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  con la propiedad de que toda  $f \in \mathcal{H}$  pueda ser recuperada de manera estable a partir de las muestras  $\{\langle f, \varphi_i \rangle\}_{i \in I}$ . Como esto es equivalente a que el operador de análisis de  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  sea acotado, inyectivo y de rango cerrado, esto se satisfecerá cuando el conjunto  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  sea un marco de  $\mathcal{H}$ .

Por otro lado, el problema de interpolación para espacios de Hilbert abstractos será

el de encontrar funciones  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  tales que para toda sucesión  $c = \{c_i\}_{i \in I} \in \ell^2(I)$  exista una función  $f \in \mathcal{H}$  tal que  $\langle f, \varphi_i \rangle = c_i$  para todo  $i \in I$ . Esto es equivalente a que el operador de análisis  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  sea acotado y sobreyectivo, lo cual será cierto cuando  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  sea una sucesión de Riesz de  $\mathcal{H}$ .

Observar que, en particular, esta noción más general de los problemas de muestreo e interpolación también nos permiten trabajar sobre espacios de Paley-Wiener  $PW_\Omega$  más generales donde el conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  es medible de medida finita no necesariamente acotado, como lo haremos en el Capítulo 2. En esta generalidad, el Teorema 1.2.3 y el Teorema 1.2.8 siguen valiendo al remover la hipótesis de compacidad.

### 1.2.4 Dualidad entre el muestreo y la interpolación

El problema del muestreo e interpolación se consideran problemas duales. Esto se debe a que, en algún sentido, las nociones de marco y sucesión de Riesz son duales. A continuación daremos una proposición que ejemplifica esta relación. Para ello, haremos uso del siguiente lema.

**Lema 1.2.10.** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert separable con descomposiciones ortogonales  $\mathcal{H} = V \oplus W$  y  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ . Sean  $P_1, P_2$  las proyecciones ortogonales de  $\mathcal{H}$  sobre  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  respectivamente. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i) *La restricción  $P_1|_V$  es sobreyectiva;*
- (ii) *La restricción  $P_2|_W$  es inyectiva y de rango cerrado.*

*Demostración.* (i)  $\Rightarrow$  (ii). Supongamos que la restricción  $P_1|_V$  es sobreyectiva. Observemos que esto dice, en particular, que  $P_1(V)$  es cerrado. Por [42, Teorema 4.1], también  $P_2(W)$  debe ser cerrado.

Falta probar que  $P_2|_W$  es inyectiva. Sea  $w \in W$  tal que  $P_2 w = 0$ , entonces  $w \in \mathcal{H}_1$ . Dado que  $P_1|_V$  es sobreyectiva, existe un elemento  $v \in V$  tal que  $w = P_1 v$ . Luego de descomponer  $v = h_1 + h_2$  con  $h_1 \in \mathcal{H}_1$  y  $h_2 \in \mathcal{H}_2$ , tenemos que

$$0 = \langle w, v \rangle = \langle w, h_1 \rangle + \langle w, h_2 \rangle,$$

pero  $\langle w, h_2 \rangle = 0$  porque  $w \in \mathcal{H}_1$ , entonces

$$0 = \langle w, h_1 \rangle = \langle w, P_1 v \rangle = \|w\|^2,$$

con lo cual  $w = 0$  como queríamos probar.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Supongamos ahora que la restricción  $P_2|_W$  es inyectiva y de rango cerrado. Queremos ver que  $P_1(V) = \mathcal{H}_1$ . Sabemos que  $P_1(V)$  es cerrado, sea  $P_1(V)^\perp$  el complemento ortogonal de  $P_1(V)$  dentro de  $\mathcal{H}_1$ . Si  $x \in P_1(V)^\perp$ , entonces  $\langle x, P_1v \rangle = 0$  para todo  $v \in V$ , de lo que se deduce que  $\langle x, v \rangle = 0$  para todo  $v \in V$  y por lo tanto  $x \in W$ . Pero, como  $x \in \mathcal{H}_1$  tenemos que  $P_2x = 0$ , luego  $x = 0$  ya que  $P_2|_W$  es inyectivo. Finalmente,  $P_1(V)^\perp = \{0\}$  y  $P_1(V) = \mathcal{H}_1$  como queríamos ver.  $\square$

El resultado que sigue, se trata de una generalización de [79, Proposición 4].

**Proposición 1.2.11.** *Sea  $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Riesz de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Sean  $W = \overline{\text{gen}}_{i \in \mathbb{N}}\{w_i\}$ ,  $V = W^\perp$  y  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset V$  un marco de  $V$ . Entonces, para toda descomposición ortogonal  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ , si  $P_1, P_2$  son las proyecciones ortogonales sobre  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  respectivamente, los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i)  $\{P_1v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es un marco de  $\mathcal{H}_1$ .
- (ii)  $\{P_2w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Riesz de  $\mathcal{H}_2$ .

*Demostración.* (i)  $\Rightarrow$  (ii). Supongamos que  $\{P_1v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es un marco de  $\mathcal{H}_1$ . Entonces,  $P_1|_V$  es sobreyectiva. En efecto, dado  $y \in \mathcal{H}_1$ , tenemos que

$$y = \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle y, P_1v_i^* \rangle P_1v_i = P_1 \left( \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle y, P_1v_i^* \rangle v_i \right),$$

donde  $\{P_1v_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$  es el marco dual canónico de  $\{P_1v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . La serie  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \langle y, P_1v_i^* \rangle v_i$  es convergente en  $V$  ya que  $\{\langle y, P_1v_i^* \rangle\}_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$  y  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es un marco de  $V$ . Luego, por el Lema 1.2.10, sabemos que  $P_2|_W$  es inyectivo y de rango cerrado. Esto implica que  $P_2|_W : W \rightarrow P_2(W)$  es inversible. Dado que  $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es una base de Riesz de  $W$ ,  $\{P_2w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es una base de Riesz de  $P_2(W)$ , luego  $\{P_2w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Riesz de  $\mathcal{H}_2$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Supongamos ahora que  $\{P_2w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Riesz de  $\mathcal{H}_2$ . Veamos que esto implica que  $P_2|_W$  es inyectiva y de rango cerrado. Para ver la inyectividad, sea  $w \in W$ , entonces  $w = \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle w, w_i^* \rangle w_i$ , donde  $\{w_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$  es la sucesión biortogonal de  $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Si

$$0 = P_2w = \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle w, w_i^* \rangle P_2w_i$$

entonces  $\langle w, w_i^* \rangle = 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , luego  $w = 0$ . Para ver que es de rango cerrado, notemos que

$$\overline{P_2(W)} \subseteq \overline{\text{gen}}_{i \in \mathbb{N}}\{P_2w_i\} \subseteq P_2(W)$$

donde la última inclusión se debe a que si  $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ , sabemos que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} c_i P_2 w_i = P_2 \left( \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i w_i \right),$$

y  $\sum_{i \in \mathbb{N}} c_i w_i$  converge en  $W$  ya que  $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es una base de Riesz de  $W$ . Luego, el Lema 1.2.10 dice que  $P_1|_V$  es sobreyectivo. Por lo cual, como  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es un marco de  $V$ ,  $\{P_1 v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es un marco de  $\mathcal{H}_1$ .  $\square$

En particular, dado  $\Omega \subset [0, 1]^d$  y  $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$ , esta proposición se puede utilizar con  $\mathcal{H} = L^2([0, 1]^d)$ ,  $\mathcal{H}_1 = L^2(\Omega)$ ,  $\mathcal{H}_2 = L^2([0, 1]^d \setminus \Omega)$  y  $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}} = E(\Gamma)$ ,  $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}} = E(\mathbb{Z}^d \setminus \Gamma)$ , para obtener el siguiente corolario (ver [77, 79]).

**Corolario 1.2.12.** *Sea  $\Omega \subset [0, 1]^d$  y  $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

1.  $\Gamma$  es un conjunto de muestreo para  $PW_\Omega$ .
2.  $\mathbb{Z}^d \setminus \Gamma$  es un conjunto de interpolación para  $PW_{[0, 1]^d \setminus \Omega}$ .

### 1.3 Espacios invariantes por traslaciones

En esta sección introduciremos los conceptos y resultados de la teoría de los espacios invariantes por traslaciones que serán necesarios en este trabajo. Los espacios invariantes por traslaciones de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  fueron extensivamente estudiados [57, 41, 40, 83, 27], (ver también [29, 21] para el contexto de grupos localmente compactos y abelianos). Vía la transformada de Fourier, los espacios invariantes por traslaciones se pueden ver como espacios multiplicativamente invariantes, ver por ejemplo [29, 28] para ese punto de vista teórico.

La definición de un espacio invariante por traslaciones puede darse en el contexto general de grupos localmente compactos y abelianos, con traslaciones por reticulados de dichos grupos. Pero, para mayor claridad de la exposición, comenzaremos por el caso Euclideo  $\mathbb{R}^d$  y explicaremos cómo se traducen los resultados al caso más general en la Sección 1.5.

**Definición 1.3.1.** *Un reticulado  $H$  es un subgrupo aditivo discreto de  $\mathbb{R}^d$ . Decimos que  $H$  es completo si existe una matriz inversible  $M$  de tamaño  $d \times d$  tal que  $H = M\mathbb{Z}^d$ . En ese caso, llamamos dominio fundamental de  $H$  al conjunto  $D_H = M[0, 1)^d$ .*

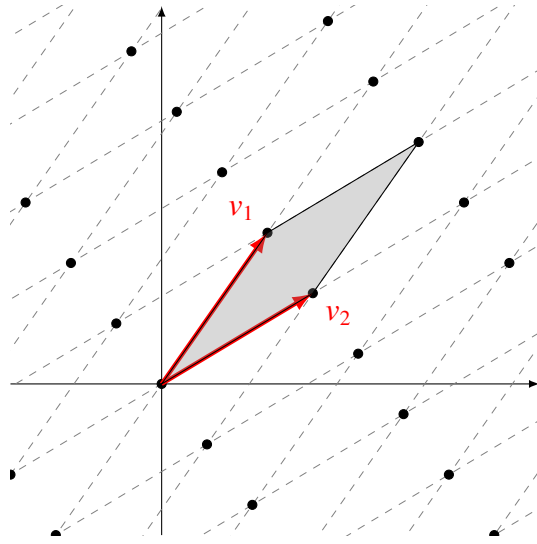


Figura 1.1: Si  $H = M\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$  y  $M = [v_1|v_2]$ , entonces el paralelogramo formado por los vectores  $v_1$  y  $v_2$  es el dominio fundamental de  $H$ .

Observar que el dominio fundamental  $D_H$  es un conjunto medible de representantes del cociente  $\mathbb{R}^d/H$ , ver figura 1.1.

**Definición 1.3.2.** Dado un reticulado  $H \subset \mathbb{R}^d$ , definimos como su reticulado dual al subgrupo

$$\Delta = H^* = \{\delta \in \mathbb{R}^d : \langle \delta, h \rangle \in \mathbb{Z}, \forall h \in H\}.$$

Se puede ver que si  $H = M\mathbb{Z}^d$ , entonces el reticulado dual de  $H$  es  $\Delta = (M^t)^{-1}\mathbb{Z}^d$ . En particular,  $\Delta$  también es un reticulado completo y tiene dominio fundamental  $D_\Delta = (M^t)^{-1}[0, 1)^d$ . Notar, por ejemplo, que si  $H = \mathbb{Z}^d$ , entonces  $\Delta = \mathbb{Z}^d$  y  $D_H = D_\Delta = [0, 1)^d$ .

A lo largo de esta sección fijaremos  $H \subset \mathbb{R}^d$  un reticulado completo de  $\mathbb{R}^d$  con reticulado dual  $\Delta \subset \mathbb{R}^d$  y diremos que el conjunto  $D = D_\Delta$ .

**Definición 1.3.3.** Decimos que un subespacio cerrado  $V \subset L^2(\mathbb{R}^d)$  es invariante por traslaciones por  $H \subset \mathbb{R}^d$  o  $H$ -invariante si para cada  $f \in V$  tenemos que  $T_h f \in V$ , para todo  $h \in H$ .

Notar que el espacio de Paley-Wiener  $PW_\Omega$  para  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto medible de medida finita es un espacio invariante por traslaciones para cualquier reticulado  $H \in \mathbb{R}^d$ . Más aún,  $PW_\Omega$  es invariante por todas las traslaciones  $T_x$  con  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Dado un conjunto de funciones a lo sumo numerable  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ , denotaremos

$$S(\Phi) := \overline{\text{gen}} \{T_h \varphi : \varphi \in \Phi, h \in H\}.$$

Decimos que  $\Phi$  es un conjunto de generadores de  $V$  si  $V = S(\Phi)$ . Todo espacio invariante por traslaciones por  $H$  admite un conjunto de generadores  $\Phi$ . Cuando  $\Phi$  es un conjunto finito, decimos que  $V$  es un espacio  $H$ -invariante *finitamente generado*. Si  $\Phi = \{\varphi\}$  decimos que  $V$  es *principal*. Además, el sistema de las traslaciones por  $H$  de un conjunto  $\Phi$  lo notaremos por

$$E(\Phi) := \{T_h \varphi : \varphi \in \Phi, h \in H\}.$$

Cuando  $E(\Phi)$  forme un marco de  $V$  diremos que  $\Phi$  es un *generador de marco* de  $V$ .

**Definición 1.3.4.** *La longitud de un espacio  $H$ -invariante  $V \subset L^2(\mathbb{R}^d)$  se define como el mínimo número natural  $\ell$  para el cual existen  $\varphi_1, \dots, \varphi_\ell \in V$  con  $V = S(\varphi_1, \dots, \varphi_\ell)$ , y la notaremos  $\mathcal{L}(V)$ .*

### 1.3.1 Fiberización y función rango

Una herramienta esencial en la teoría de los espacios invariantes por traslaciones de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  es el mapa de fibras. Este se trata de un isomorfismo isométrico entre  $L^2(\mathbb{R}^d)$  y el espacio  $L^2(D, \ell^2(\Delta))$ , introducido por Bownik en [27]. El espacio  $L^2(D, \ell^2(\Delta))$  es el espacio de Hilbert que consiste en las funciones a valores vectoriales medibles  $\psi : D \rightarrow \ell^2(\Delta)$  cuya norma, dada por

$$\|\psi\| := \left( \int_D \|\psi(\omega)\|_{\ell^2(\Delta)}^2 d\omega \right)^{1/2},$$

es finita.

**Proposición 1.3.5.** *El mapa  $\mathcal{T} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(D, \ell^2(\Delta))$  definido por*

$$\mathcal{T}f(\omega) = \{\hat{f}(\omega + \delta)\}_{\delta \in \Delta}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d), \omega \in D,$$

*es un isomorfismo isométrico.*

Nos referiremos a  $\mathcal{T}f(\omega)$  como la *fibra* de  $f$  en  $\omega$ . La buena definición del mapa de fibras se debe a que dadas dos funciones  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  cuyas transformadas de Fourier coinciden en casi todo punto, entonces  $\{\hat{f}(\omega + \delta)\}_{\delta \in \Delta} = \{\hat{g}(\omega + \delta)\}_{\delta \in \Delta}$  para casi todo  $\omega \in D$ .

**Ejemplo 1.3.6.** *Estudiemos cómo son las fibras de las funciones de  $PW_{\frac{1}{2}}$  cuando  $H = \mathbb{Z}$ . En este caso,  $\Delta = \mathbb{Z}$  y podemos tomar como dominio fundamental  $D = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ . Para ello, consideremos primero las funciones  $f \in PW_{\frac{1}{2}}$  cuya transformada de Fourier es continua. Tenemos que  $\mathcal{T}f(\omega) = \{\hat{f}(\omega + \delta)\}_{\delta \in \mathbb{Z}}$  con  $\omega \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ . Dado que  $\text{sop } \hat{f} \subseteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , vemos que  $\hat{f}(\omega + \delta) = 0$  para todo  $\delta \neq 0$ . Por lo cual,  $\mathcal{T}f(\omega) = \hat{f}(\omega)1_0$ , donde  $1_0$  es la sucesión en  $\ell^2(\Delta)$ , tal que  $1_0(0) = 1$  y  $1_0(\delta) = 0$  para  $\delta \neq 0$ . El caso general se obtiene por un argumento de densidad.*

Una observación importante es que para toda  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  y  $h \in H$ ,

$$\mathcal{T}T_h f(\omega) = e_{-h}(\omega) \mathcal{T}f(\omega).$$

En particular, esto nos indica que  $\mathcal{T}V$  es un espacio que es *invariante por las modulaciones en  $H$* . El mapa de fibras nos permite caracterizar los espacios invariantes por traslaciones mediante el concepto de función rango, introducido por Helson en [57].

**Definición 1.3.7.** *Una función rango es un mapa*

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : D &\rightarrow \left\{ \text{Subespacios cerrados de } \ell^2(\Delta) \right\} \\ \omega &\mapsto \mathcal{J}(\omega) \subset \ell^2(\Delta). \end{aligned}$$

*Decimos que  $\mathcal{J}$  es medible si la función escalar  $\omega \mapsto \langle P_{\mathcal{J}(\omega)}u, v \rangle$  es medible para todo  $u, v \in \ell^2(\Delta)$ , donde  $P_{\mathcal{J}(\omega)}$  es la proyección ortogonal de  $\ell^2(\Delta)$  sobre  $\mathcal{J}(\omega)$ .*

Muchas veces nos referiremos a  $\mathcal{J}(\omega)$  como *el espacio de fibras de  $V$  en  $\omega$* .

Dada una función rango  $\mathcal{J}$ , definimos el espacio

$$M_{\mathcal{J}} := \left\{ \psi \in L^2\left(D, \ell^2(\Delta)\right) : \psi(\omega) \in \mathcal{J}(\omega) \right\}. \quad (1.3.1)$$

Se puede ver que  $M_{\mathcal{J}}$  es un subespacio cerrado de  $L^2\left(D, \ell^2(\Delta)\right)$  invariante por las modulaciones en  $H$ . La siguiente propiedad se debe a Helson [57].

**Proposición 1.3.8.** *Sea  $\mathcal{J}$  una función rango medible, entonces*

$$(P_{M_{\mathcal{J}}}F)(\omega) = P_{\mathcal{J}(\omega)}(F(\omega)), \quad \forall F \in L^2(D, \ell^2(\Delta)),$$

*para casi todo  $\omega \in D$ .*

En [57], Helson probó que todo subespacio cerrado de  $L^2\left(D, \ell^2(\Delta)\right)$  invariante por las modulaciones en  $H$  debe ser de la forma  $M_{\mathcal{J}}$  para alguna función rango  $\mathcal{J}$ . El siguiente teorema, probado en [27] por Bownik, traslada este resultado hacia los espacios  $H$ -invariantes, mediante el mapa de fibras.

**Teorema 1.3.9.** *Sea  $V$  un subespacio cerrado de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  y  $\mathcal{T}$  el mapa de la Proposición 1.3.5. Entonces, el subespacio  $V$  es  $H$ -invariante si y sólo si existe una única función rango medible  $\mathcal{J}$  tal que*

$$V = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \mathcal{T}f(\omega) \in \mathcal{J}(\omega), \text{ c.t.p. } \omega \in D\}.$$

*Más aún, si  $V = S(\Phi)$  para algún conjunto  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R}^d)$  a lo sumo numerable, la función rango medible asociada a  $V$  satisface que para casi todo  $\omega \in D$ ,*

$$\mathcal{J}(\omega) = \overline{\text{gen}}\{\mathcal{T}\varphi(\omega) : \varphi \in \Phi\}. \quad (1.3.2)$$

La función rango es única en el siguiente sentido: dos funciones rango  $\mathcal{J}_1$  y  $\mathcal{J}_2$  son iguales si  $\mathcal{J}_1(\omega) = \mathcal{J}_2(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ . Observemos que el Teorema 1.3.9 dice que  $\mathcal{T}V = M_{\mathcal{J}}$ . Muchas veces haremos referencia a  $\mathcal{J}(\omega)$  como el espacio de fibras de  $V$  en  $\omega$ .

Es importante remarcar que cuando el espacio  $V$  es finitamente generado, la ecuación (1.3.2) nos dice que  $\mathcal{J}(\omega)$  es de dimensión finita para casi todo  $\omega \in D$ . Esto nos permite trasladar problemas en espacios de dimensión infinita a problemas de dimensión finita que pueden ser tratados con álgebra lineal. Más aún, se puede obtener una definición equivalente de la longitud de  $V$  en términos de la dimensión de su función rango asociada,

$$\mathcal{L}(V) = \sup_{\omega \in D} \text{dim } \mathcal{J}(\omega).$$

Además, el siguiente resultado dice que existe una caracterización de los generadores de marcos y bases de Riesz de un espacio invariante por traslaciones a través de su función rango asociada.

**Teorema 1.3.10.** *Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  con función rango  $\mathcal{J}$  y sea  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R}^d)$  un conjunto a lo sumo numerable. Entonces, son equivalentes:*

- (i) *El sistema  $E(\Phi)$  es un marco (base de Riesz) de  $V$  con constantes  $A, B > 0$ ;*
- (ii) *El sistema  $\{\mathcal{T}\varphi(\omega) : \varphi \in \Phi\} \subset \ell^2(\mathbb{Z}^d)$  es un marco (base de Riesz) de  $\mathcal{J}(\omega)$  con constantes uniformes  $A, B > 0$  para casi todo  $\omega \in D$ .*

**Definición 1.3.11.** *El espectro de un espacio  $H$ -invariante  $V \subset L^2(\mathbb{R}^d)$  con función rango  $\mathcal{J}$  es un subconjunto medible de  $D$  que se define por*

$$\Sigma(V) := \{\omega \in D : \mathcal{J}(\omega) \neq \{0\}\}.$$

En el siguiente lema, enumeraremos varias propiedades de los espacios invariantes por traslaciones que utilizaremos a lo largo de esta tesis.



**Lema 1.3.12.** Sean  $U$  y  $V$  dos espacios  $H$ -invariantes de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  con función rango  $\mathcal{J}_U$  y  $\mathcal{J}_V$  respectivamente, entonces los siguientes enunciados son ciertos:

- (i) Existe  $\varphi \in V$  tal que  $\text{sop } \|\mathcal{T}\varphi(\cdot)\| = \Sigma(V)$ .
- (ii) El complemento ortogonal de  $V$ ,  $V^\perp$ , es  $H$ -invariante y su función rango está dada por  $\mathcal{J}_{V^\perp}(\omega) = (\mathcal{J}_V(\omega))^\perp$  para casi todo  $\omega \in D$ .
- (iii) El espacio  $V \cap U$  es  $H$ -invariante y su función rango satisface que  $\mathcal{J}_{V \cap U}(\omega) = \mathcal{J}_V(\omega) \cap \mathcal{J}_U(\omega)$ , para casi todo  $\omega \in D$ .

### 1.3.2 Descomposición ortogonal en principales

A continuación enunciaremos un resultado que dice que un espacio  $H$ -invariante se puede descomponer en suma ortogonal de espacios  $H$ -invariantes principales. Este resultado se probó en [27].

**Teorema 1.3.13.** Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Entonces  $V$  puede descomponerse como la suma ortogonal

$$V = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} S(\varphi_i),$$

donde  $\varphi_i$  es un generador de marco de Parseval de  $S(\varphi_i)$ , y  $\Sigma(S(\varphi_{i+1})) \subset \Sigma(S(\varphi_i))$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

El siguiente lema es una consecuencia del Teorema 1.3.13 y será una herramienta clave para trabajar en problemas donde requerimos que la dimensión de la función rango sea constante.

**Lema 1.3.14.** Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  con función rango  $\mathcal{J}$ . Entonces, existen funciones  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  y una familia de conjuntos medibles y disjuntos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  y  $A_\infty$ , tales que  $D = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A_n\right) \cup A_\infty$  y vale que:

- (i)  $\{T_h \varphi_i : i \in \mathbb{N}, h \in H\}$  es un marco de Parseval de  $V$ .
- (ii) Para todo  $n \in \mathbb{N}$  y para todo  $i > n$ ,  $\mathcal{T}\varphi_i(\omega) = 0$  para casi todo punto  $\omega \in A_n$ ,
- (iii) Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{\mathcal{T}\varphi_1(\omega), \dots, \mathcal{T}\varphi_n(\omega)\}$  es una base ortonormal de  $\mathcal{J}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in A_n$ .
- (iv) Para todo  $n \in \mathbb{N}_0$  y  $n = \infty$ , tenemos que  $A_n = \{\omega \in D : \dim \mathcal{J}(\omega) = n\}$ .

*Demostración.* Sea  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$  el conjunto de funciones de la descomposición de  $V$  dada por el Teorema 1.3.13. Como  $\varphi_i$  es un generador de marco de Parseval de  $S(\varphi_i)$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , entonces  $\{T_h \varphi_i : i \in \mathbb{N}, h \in H\}$  es un marco de Parseval de  $V$ , con lo cual (i) es cierta.

Luego, definimos los conjuntos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  y  $A_\infty$ , como sigue:  $A_0 = D \setminus \Sigma(V)$ ,  $A_n = \Sigma(S(\varphi_n)) \setminus \Sigma(S(\varphi_{n+1}))$  para  $n \in \mathbb{N}$ , y  $A_\infty = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Sigma(S(\varphi_i))$ . Como  $\Sigma(S(\varphi_{i+1})) \subset \Sigma(S(\varphi_i))$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , los conjuntos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  y  $A_\infty$  son disjuntos y tenemos que  $D = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A_n\right) \cup A_\infty$ . El resto de las propiedades son fáciles de chequear.  $\square$

## 1.4 Operadores que conmutan con las traslaciones

Los operadores que conmutan con las traslaciones actuando en espacios invariantes por traslaciones fueron considerados (en este marco teórico) por primera vez por Bownik en [27]. Veremos que la forma en que estos operadores actúan se pueden comprender mediante técnicas de fiberización y la *función rango*.

La teoría que desarrollaremos en esta sección mantiene la misma notación que en la sección anterior. Es decir,  $H \subset \mathbb{R}^d$  es un reticulado completo de  $\mathbb{R}^d$  con reticulado dual  $\Delta \subset \mathbb{R}^d$  y  $D$  es el dominio fundamental de  $\Delta$ . Al igual que en la sección previa, todos los resultados se podrán extender al contexto de grupos localmente compactos y abelianos, siguiendo las especificaciones de la Sección 1.5.

**Definición 1.4.1.** Sean  $V$  y  $V'$  dos espacios  $H$ -invariantes de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  y  $L : V \rightarrow V'$  un operador acotado. Decimos que  $L$  es  $H$ -conmutante si  $LT_h = T_h L$  para todo  $h \in H$ .

### 1.4.1 Operador rango

La estructura de los operadores que conmutan con las traslaciones puede ser comprendida a través del concepto de la función rango, introducida por Bownik en [27]. Para conocer más sobre las propiedades del operador rango referimos al lector a [28].

**Definición 1.4.2.** Dadas dos funciones rango medibles  $\mathcal{J}$  y  $\mathcal{J}'$ , un operador rango  $\mathcal{R} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}'$  es una función que toma operadores acotados como valores, definida por  $\omega \mapsto (\mathcal{R}(\omega) : \mathcal{J}(\omega) \rightarrow \mathcal{J}'(\omega))$ , para  $\omega \in D$ .

Un operador rango  $\mathcal{R}$  se dice acotado si  $\sup_{\omega \in D} \|\mathcal{R}(\omega)\| < \infty$ , y es medible si la función escalar  $\omega \mapsto \langle \mathcal{R}(\omega) P_{\mathcal{J}(\omega)} u, v \rangle_{\ell^2(\Delta)}$  es medible para todo  $u, v \in \ell^2(\Delta)$ .

Diremos que  $\mathcal{R}(\omega)$  es la fibra del operador rango  $\mathcal{R}$  en  $\omega$ . En [27], Bownik probó que existe una correspondencia entre los operadores  $H$ -conmutantes y los operadores rango.

**Teorema 1.4.3.** Sean  $V, V' \subset L^2(\mathbb{R}^d)$  dos espacios  $H$ -invariantes con funciones rango  $\mathcal{J}$  y  $\mathcal{J}'$  respectivamente. Para todo operador  $L : V \rightarrow V'$  acotado  $H$ -conmutante existe un único operador rango acotado y medible  $\mathcal{R} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}'$  tal que para casi todo  $\omega \in D$  y para toda  $f \in V$ ,

$$\mathcal{T}(Lf)(\omega) = \mathcal{R}(\omega)(\mathcal{T}f(\omega)), \quad (1.4.1)$$

y se cumple que

$$\sup_{\omega \in D} \|\mathcal{R}(\omega)\| = \|L\|. \quad (1.4.2)$$

La unicidad se entiende en el sentido que dos operadores rango son identificados si coinciden en casi todo  $\omega \in D$ .

Las propiedades de un operador  $H$ -conmutante se relacionan con las propiedades puntuales del operador de rango, a continuación enumeraremos algunas de ellas que consideramos importantes en esta exposición (ver [28]).

**Teorema 1.4.4.** Sean  $V$  y  $V'$  dos espacios  $H$ -invariantes de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  con funciones rango  $\mathcal{J}$  y  $\mathcal{J}'$  respectivamente. Sea  $L : V \rightarrow V'$  un operador  $H$ -conmutante acotado con operador rango  $\mathcal{R} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}'$ . Entonces los siguientes enunciados son ciertos:

- (i) El operador adjunto  $L^* : V' \rightarrow V$  también es  $H$ -conmutante y su operador rango  $\mathcal{R}^* : \mathcal{J}' \rightarrow \mathcal{J}$  está dado por  $\mathcal{R}^*(\omega) = (\mathcal{R}(\omega))^*$  para casi todo  $\omega \in D$ .
- (ii)  $L$  es normal (auto-adjunto) si y sólo si  $\mathcal{R}(\omega)$  es normal (auto-adjunto) para casi todo  $\omega \in D$ .
- (iii)  $L$  es acotado inferiormente por  $C > 0$  (es decir,  $\|Lf\| \geq C\|f\|$  para toda  $f \in V$ ), si y sólo si  $\mathcal{R}(\omega)$  está uniformemente acotado inferiormente por  $C$  (es decir, para casi todo  $\omega \in D$ ,  $\|\mathcal{R}(\omega)a\| \geq C\|a\|$  para todo  $a \in \mathcal{J}(\omega)$ ).
- (iv)  $L$  es inyectivo si y sólo si  $\mathcal{R}(\omega)$  es inyectivo para casi todo  $\omega \in D$ .
- (v)  $L$  es inversible si y sólo si  $\mathcal{R}(\omega)$  es inversible para casi todo  $\omega \in D$  y está uniformemente acotado inferiormente por una constante  $C > 0$  como en (iii). En este caso,  $L^{-1}$  también es  $H$ -conmutante con operador rango  $\mathcal{R}^{-1}$  definido por  $\mathcal{R}^{-1}(\omega) = (\mathcal{R}(\omega))^{-1}$  para casi todo  $\omega \in D$ .
- (vi) El subespacio  $V'' = \overline{L(V)} \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$  es  $H$ -invariante y su función rango está dada por

$$\mathcal{J}_{V''}(\omega) = \overline{\mathcal{R}(\omega)\mathcal{J}(\omega)},$$

para casi todo  $\omega \in D$ .

(vii) *El subespacio  $\ker(L)$  es  $H$ -invariante y su función rango está dada por  $\ker(\mathcal{R}(\omega))$  para casi todo  $\omega \in D$ .*

Los enunciados (v) y (vii) de este teorema también fueron demostrados en el trabajo [4] previo a [28] bajo la hipótesis de que  $\dim \mathcal{J}(\omega) < \infty$  para casi todo  $\omega \in D$ .

Cuando un operador  $H$ -conmutante actúa sobre un espacio  $H$ -invariante que satisface que  $\dim \mathcal{J}(\omega) < \infty$  para casi todo  $\omega \in D$ , las fibras de su operador rango correspondiente pueden ser identificadas con matrices. Esto es lo que probaremos en la proposición que sigue.

**Proposición 1.4.5.** *Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  con función rango  $\mathcal{J}$  tal que  $\dim(\mathcal{J}(\omega)) < \infty$  para casi todo  $\omega \in D$  y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante con operador rango  $\mathcal{R} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ . Entonces,  $\mathcal{R}(\omega)$  tiene una representación matricial de entradas medibles. Más precisamente, si  $\dim(\mathcal{J}(\omega)) = n$  para casi todo  $\omega \in B$  donde  $B \subseteq D$  es medible, entonces, existen  $n^2$  funciones medibles definidas en  $B$ ,  $\{m_{i,j}\}_{i,j=1}^n$  tales que la representación matricial de  $\mathcal{R}(\omega)$  es*

$$[\mathcal{R}](\omega) = \begin{bmatrix} m_{1,1}(\omega) & m_{1,2}(\omega) & \cdots & m_{1,n}(\omega) \\ m_{2,1}(\omega) & m_{2,2}(\omega) & \cdots & m_{2,n}(\omega) \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n,1}(\omega) & m_{n,2}(\omega) & \cdots & m_{n,n}(\omega) \end{bmatrix},$$

para casi todo  $\omega \in B$ .

*Demostración.* Sean  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  y  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  como en el Lema 1.3.14. Fijado  $n \in \mathbb{N}$ , vemos que para casi todo  $\omega \in A_n$ ,  $\mathcal{R}(\omega)$  tiene una representación matricial  $[\mathcal{R}](\omega)$  relativa a la base ortonormal  $\{\mathcal{T}\varphi_1(\omega), \dots, \mathcal{T}\varphi_n(\omega)\}$  de  $\mathcal{J}(\omega)$  con entradas

$$m_{i,j}(\omega) := ([\mathcal{R}](\omega))_{i,j} = \langle \mathcal{R}(\omega)\mathcal{T}\varphi_j(\omega), \mathcal{T}\varphi_i(\omega) \rangle,$$

que son claramente medibles. Notar que como  $L$  es un operador acotado y (1.4.2) vale, entonces  $|m_{i,j}(\omega)| \leq \|L\|$  para  $i, j = 1, \dots, n$  y para casi todo  $\omega \in A_n$ .

Dado que para un conjunto medible  $B \subseteq D$  para el cual  $\dim \mathcal{J}(\omega) = n$  para casi todo  $\omega \in B$  está incluido en  $A_n$ , el enunciado de la proposición queda demostrado.  $\square$

Es importante remarcar que la condición  $\dim \mathcal{J}(\omega) < \infty$  para casi todo  $\omega \in D$  no implica que el espacio  $H$ -invariante sea finitamente generado, como mostramos en el ejemplo a continuación.

**Ejemplo 1.4.6.** Sea  $d = 1$ ,  $H = \mathbb{Z}$  y  $D = [0, 1)$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , definamos el conjunto  $E_n := [0, \frac{1}{n})$  y  $\psi_n \in L^2(\mathbb{R})$  a través del mapa  $\mathcal{T}$  como  $\mathcal{T}\psi_n := 1_n \chi_{E_n}$ , donde  $1_n \in \ell^2(\mathbb{Z})$  es la sucesión  $1_n(n) = 1$  y  $1_n(h) = 0$  para  $h \neq n$ . Entonces  $V := S(\{\psi_n : n \in \mathbb{N}\})$  es un espacio  $\mathbb{Z}$ -invariante que no es finitamente generado y su función rango  $\mathcal{J}$  satisface que  $\dim \mathcal{J}(\omega) < \infty$  para c.t.p.  $\omega \in [0, 1)$ . En efecto, sea  $A_n := E_n \setminus E_{n+1}$  para  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $[0, 1) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup \{0\}$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}$  y para c.t.p.  $\omega \in A_n$ , la dimensión de  $\mathcal{J}(\omega)$  es  $n$  ya que  $\{\mathcal{T}\psi_1(\omega), \dots, \mathcal{T}\psi_n(\omega)\}$  es una base ortonormal de  $\mathcal{J}(\omega)$ .

Veamos algunos ejemplos de operadores  $H$ -conmutantes y sus respectivos operadores rango. El primer ejemplo fue mostrado en [27].

**Ejemplo 1.4.7.** Sea  $I$  un conjunto de índices finito. Supongamos que  $\Phi = \{\varphi_i : i \in I\} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$  es un conjunto de funciones tales que  $E(\Phi)$  es una sucesión de Bessel de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Entonces, operador de marco de  $E(\Phi)$  es auto-adjunto y  $H$ -conmutante y su correspondiente operador rango  $\mathcal{R}$  está dado por el operador de marco de  $\{\mathcal{T}\varphi_i(\omega) : i \in I\}$  para casi todo  $\omega \in D$ .

**Ejemplo 1.4.8.** Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  con función rango  $\mathcal{J}$ . Denotemos por  $P_V : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$  la proyección ortogonal de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  sobre  $V$ . Entonces,  $P_V$  es  $H$ -conmutante y, por la Proposición 1.3.8, su operador rango está dado por  $\mathcal{R}(\omega) = P_{\mathcal{J}(\omega)}$  para casi todo  $\omega \in D$ .

Para el siguiente ejemplo, daremos una definición que necesitaremos también más adelante.

**Definición 1.4.9.** Decimos que una sucesión  $a = \{a(h)\}_{h \in H} \in \ell^2(H)$  es de espectro acotado si  $\hat{a} \in L^\infty(D)$ , donde

$$\hat{a}(\omega) := \sum_{h \in H} a(h)e_{-h}(\omega), \quad \omega \in D.$$

**Ejemplo 1.4.10.** Sea  $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$  un conjunto de funciones tal que  $V = S(\Phi)$  y  $E(\Phi)$  es una base de Riesz de  $V$ . Para todo  $f \in V$ , existen únicas sucesiones  $b_1, \dots, b_n$  en  $\ell^2(H)$  tales que  $f = \sum_{i=1}^n \sum_{h \in H} b_i(h)T_h \varphi_i$ . Ahora, sean  $a_1, \dots, a_n$  sucesiones de espectro acotado de  $\ell^2(H)$ , definimos el operador  $L : V \rightarrow V$  por

$$Lf := \sum_{i=1}^n \sum_{h \in H} (b_i * a_i)(h)T_h \varphi_i. \quad (1.4.3)$$

Entonces,  $L$  es un operador  $H$ -conmutante acotado, y su operador rango puede ser representado como una matriz diagonal de tamaño  $n \times n$  con diagonal  $\hat{a}_1(\omega), \dots, \hat{a}_n(\omega)$ , si la escribimos en la base  $\{\mathcal{T}\varphi_1(\omega), \dots, \mathcal{T}\varphi_n(\omega)\}$  para casi todo  $\omega \in D$ .

Otro ejemplo interesante de operador  $H$ -conmutante es el operador diferencial actuando sobre un espacio de Paley-Wiener  $PW_\Omega$  con  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  compacto.

**Ejemplo 1.4.11.** Consideremos el espacio  $PW_\Omega$  con  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  compacto y  $A_\alpha : PW_\Omega \rightarrow PW_\Omega$ , para  $1 \leq \alpha \leq d$ , el operador diferencial definido por

$$A_\alpha f = \frac{d}{dx_\alpha} f, \quad f \in PW_\Omega.$$

Entonces  $A_\alpha$  es un operador acotado que conmuta con todas las traslaciones  $T_x$ , con  $x \in \mathbb{R}^d$ . En particular, es un operador  $H$ -conmutante acotado.

Supongamos en particular que  $\Omega = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  y  $A = \frac{d}{dx} : PW_{\frac{1}{2}} \rightarrow PW_{\frac{1}{2}}$ . Como  $PW_{\frac{1}{2}}$  es un espacio  $\mathbb{Z}$ -invariante principal, el espacio de fibras es uni-dimensional. En particular, vimos en el Ejemplo 1.3.6 que las fibras de  $f$  son  $\mathcal{T}f(\omega) = \hat{f}(\omega)1_0$ .

Si  $\mathcal{R}$  es el operador rango de  $A$ , tenemos que para casi todo  $\omega \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\omega)(\mathcal{T}f(\omega)) &= \mathcal{T}(Af)(\omega) = \mathcal{T}f'(\omega) = \{\mathcal{F}(f')(\omega + k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \\ &= \{-2\pi i(\omega + k)\hat{f}(\omega + k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \\ &= -2\pi i\omega \mathcal{T}f(\omega). \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Una manera de entender los operadores rango es mediante la teoría de las integrales directas (ver [43] para definiciones). Más precisamente, se puede ver [28] que dado  $V \subset L^2(\mathbb{R}^d)$  un espacio  $H$ -invariante con función rango  $\mathcal{J}$ , entonces el espacio  $M_{\mathcal{J}}$  definido en (1.3.1) es la integral directa

$$M_{\mathcal{J}} = \int_D^{\oplus} \mathcal{J}(\omega) d\omega.$$

Por otro lado, dado  $L : V \rightarrow V$  es un operador  $H$ -conmutante acotado con operador rango  $\mathcal{R}$ , si definimos el operador  $\tilde{L} := \mathcal{T}L\mathcal{T}^{-1} : M_{\mathcal{J}} \rightarrow M_{\mathcal{J}}$ , donde  $\mathcal{T}$  es el mapa de fibras de la Proposición 1.3.5. Entonces,  $\tilde{L}$  es un operador que se descompone en integral directa como

$$\tilde{L} = \int_D^{\oplus} \mathcal{R}(\omega) d\omega.$$

## 1.4.2 Funciones multivaluadas medibles

Dado  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado, existe una relación entre el espectro de  $L$  y el espectro de su operador rango, esto lo discutiremos en la siguiente subsección. Pero para ello, debemos introducir el concepto de funciones multivaluadas medibles. Referimos al lector a [15] para una exposición detallada sobre la teoría de las funciones multivaluadas.

**Definición 1.4.12.** Sea  $(X, \mathcal{M})$  un espacio de medida e  $Y$  un espacio topológico. Una función multivaluada de  $X$  a  $Y$  es un mapa  $F : X \rightsquigarrow Y$  que toma como valores conjuntos en  $Y$ . Esto es,  $F(x) \subseteq Y$  para todo  $x \in X$ . Si  $F(x)$  es cerrado (compacto) para todo  $x \in X$ , entonces se dice que  $F$  es una función multivaluada a valores cerrados (compactos).

Una función multivaluada se dice medible si para todo conjunto abierto  $A \subset Y$ , el conjunto

$$F^{-1}(A) := \{x \in X : F(x) \cap A \neq \emptyset\} \in \mathcal{M}.$$

Por ejemplo, en [28] se probó que una función rango medible  $\mathcal{J}$  es, de hecho, una función multivaluada medible  $D \rightsquigarrow \ell_2(\Delta)$  a valores cerrados no vacíos.

**Definición 1.4.13.** Sea  $(X, \mathcal{M})$  un espacio de medida e  $Y$  un topológico. Dado  $F : X \rightsquigarrow Y$  una función multivaluada medible, decimos que una función medible  $f : X \rightarrow Y$  es una selección medible de  $F$  si  $f(x) \in F(x)$  para todo  $x \in X$ .

Un resultado muy relevante de esta teoría es la existencia de un conjunto denso de selecciones medibles para una función multivaluada medible, que se conoce por el Teorema de Selección de Castaign (ver [15]).

**Teorema 1.4.14** (Teorema de Selección de Castaign). Sea  $(X, \mathcal{M})$  un espacio de medida,  $Y$  un espacio métrico completo y separable, y  $F : X \rightsquigarrow Y$  una función multivaluada a valores cerrados no vacíos medible, entonces existe una sucesión de selecciones medibles  $f_j : X \rightarrow Y$ ,  $j \in \mathbb{N}$  tales que para cada  $x \in X$ .

$$F(x) = \overline{\{f_j(x) : j \in \mathbb{N}\}}.$$

### 1.4.3 El espectro de los operadores $H$ -conmutantes

Los dos teoremas que daremos a continuación fueron probados en [28] y también en [34, 74] en el contexto de integrales directas. El primer teorema afirma que los espectros de las fibras de un operador  $H$ -conmutante acotado  $L$  define una función multivaluada medible, y describe la relación entre estos espectros y el espectro de  $L$ .

**Teorema 1.4.15.** Sea  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado con operador rango  $\mathcal{R} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ . Entonces  $F : D \rightsquigarrow \mathbb{C}$  definido por  $F(\omega) = \sigma(\mathcal{R}(\omega))$ ,  $\omega \in D$  es una función multivaluada medible a valores compactos no vacíos y  $F(\omega) \subseteq \sigma(L)$  para casi todo  $\omega \in D$ .

Además, cuando  $L$  es normal,  $\sigma(L)$  coincide con el subconjunto de  $\mathbb{C}$  más pequeño que contiene a  $F(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ .

Supongamos ahora que  $L : V \rightarrow V$  es un operador  $H$ -conmutante acotado y normal. Entonces, existe una medida espectral  $E$  de  $L$  y tenemos que

$$L = \int_{\sigma(L)} \lambda dE(\lambda).$$

Dado que el operador rango  $\mathcal{R}$  satisface que  $\mathcal{R}(\omega)$  es normal para casi todo  $\omega \in D$ , existe una medida espectral  $E_\omega$  de  $\mathcal{R}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$  y

$$\mathcal{R}(\omega) = \int_{\sigma(\mathcal{R}(\omega))} \lambda dE_\omega(\lambda).$$

En esta dirección, se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 1.4.16.** *Sea  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado y normal con operador rango  $\mathcal{R}$ . Sea  $E$  la medida espectral de  $L$  y  $E_\omega$  la medida espectral de  $\mathcal{R}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ . Entonces, para todo conjunto de Borel  $B \subset \mathbb{C}$ ,  $E(B)$  es un operador  $H$ -conmutante acotado y su operador rango está dado por  $E_\omega(B)$  para casi todo  $\omega \in D$ .*

Finalmente, daremos la prueba de una propiedad interesante sobre el espectro puntual de multiplicidad finita de un operador  $H$ -conmutante acotado actuando sobre un espacio  $H$ -invariante. Decimos que un autovalor es de multiplicidad finita si el autoespacio asociado a este es de dimensión finita.

**Teorema 1.4.17.** *Sea  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado. Entonces  $L$  no tiene autovalores de multiplicidad finita.*

*Demostración.* Supongamos que existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  es un autovalor de multiplicidad finita. Entonces,  $E_\lambda = \ker(L - \lambda I) \neq \{0\}$ . Como  $E_\lambda$  es un espacio  $H$ -invariante y el único espacio  $H$ -invariante de dimensión finita es el espacio nulo, llegamos a una contradicción.  $\square$

Como consecuencia inmediata, tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 1.4.18.** *Sea  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado. Entonces,  $L$  es compacto si y sólo si  $L = 0$ .*

*Demostración.* Si  $L$  es compacto,  $L^*L$  es acotado, autoadjunto, compacto y  $H$ -conmutante. Luego,  $L^*L$  es diagonalizable. Además, por compacidad del operador, todo autovalor  $\lambda \neq 0$  de  $L^*L$  es de multiplicidad finita. Por el Teorema 1.4.17, deducimos que  $\lambda = 0$  es el único autovalor posible. Entonces  $L^*L = 0$  y por lo tanto  $L = 0$ .  $\square$



## 1.5 Grupos localmente compactos y abelianos

En esta última sección explicaremos brevemente cómo se extiende la teoría de los espacios invariantes por traslaciones y operadores que conmutan con las traslaciones al contexto general de los grupos localmente compactos y abelianos (LCA). La ventaja de considerar esta generalidad es que nos permite extender la teoría a grupos clásicos como  $\mathbb{Z}^d$ ,  $\mathbb{T}^d$  y  $\mathbb{Z}_n$ , que son de suma importancia en muchas aplicaciones. Para más detalles sobre análisis de Fourier en grupos ver [84, 48]. Por otro lado, para la teoría de espacios invariantes por traslaciones en grupos, referimos al lector a [33].

Sea  $\mathfrak{G}$  un grupo LCA que cumple el segundo axioma de numerabilidad. El dual de Pontryagin de  $\mathfrak{G}$  es el grupo

$$\widehat{\mathfrak{G}} = \{ \xi : \mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{C} : \xi \text{ es un caracter continuo de } \mathfrak{G} \},$$

donde un caracter es una función que satisface:

1.  $|\xi(x)| = 1$ , para todo  $x \in \mathfrak{G}$ ,
2.  $\xi(x + y) = \xi(x)\xi(y)$ , para todo  $x, y \in \mathfrak{G}$ .

El grupo  $\widehat{\mathfrak{G}}$ , provisto con la operación  $(\xi + \xi')(x) = \xi(x)\xi'(x)$ , es también un grupo LCA. Por otro lado, se sabe que todo grupo LCA  $\mathfrak{G}$  es el dual de su grupo dual  $\widehat{\widehat{\mathfrak{G}}}$ , con la identificación

$$x \in \mathfrak{G} \leftrightarrow e_x \in \widehat{\widehat{\mathfrak{G}}},$$

donde  $e_x(\xi) := \xi(x)$ . En el caso de  $(\mathbb{R}^d, +)$ , estas funciones son las exponenciales  $e_x(\xi) = e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle}$  con  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . Por lo tanto, utilizaremos indistintamente cualquiera de estas notaciones:

$$\xi(x), \quad \langle \xi, x \rangle, \quad \text{o} \quad e_x(\xi), \quad \xi \in \widehat{\mathfrak{G}}, \quad x \in \mathfrak{G}.$$

Notar que por las propiedades de los caracteres, tenemos que

$$\langle \xi, 0 \rangle = 1 = \langle 0, x \rangle \quad \text{y} \quad \langle \xi, x \rangle^{-1} = \langle -\xi, x \rangle = \langle \xi, -x \rangle = \overline{\langle \xi, x \rangle}$$

Un reticulado uniforme en  $\mathfrak{G}$  es un subgrupo discreto  $H \subset \mathfrak{G}$  tal que el cociente  $\mathfrak{G}/H$  es compacto. El anulador de  $H$  es el subgrupo de  $\widehat{\mathfrak{G}}$  definido por

$$\Delta = H^\perp = \{ \delta \in \widehat{\mathfrak{G}} : \langle \delta, h \rangle = 1 \quad \forall h \in H \}.$$

Se puede ver que  $\Delta$  es también un reticulado uniforme en  $\widehat{\mathfrak{G}}$ .

Cuando  $\mathfrak{S}$  es el grupo  $(\mathbb{R}^d, +)$ , un reticulado completo  $H$  de  $\mathbb{R}^d$  (ver Definición 1.3.1) es un reticulado uniforme, y su reticulado anulador  $\Delta$  coincide con el reticulado dual de  $H$  (ver Definición 1.3.2).

En todo grupo LCA existe una única medida de Haar, salvo constantes. Por comodidad la notaremos igual que la medida de Lebesgue, es decir, la medida de un conjunto medible  $E \subset \mathfrak{S}$  es  $|E|$ . La medida de Haar es una medida no-negativa, Borel regular que no es idénticamente cero y que es invariante por traslaciones. Esto último quiere decir que  $|E + x| = |E|$  para todo  $x \in \mathfrak{S}$  y para todo conjunto  $E \subset G$  medible Borel.

Dada una medida de Haar, podemos definir el espacio  $L^p(\mathfrak{S})$  como las funciones  $f : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{C}$  medibles tales que  $\|f\|^p := \int_{\mathfrak{S}} |f(x)|^p dx < \infty$ . Se tiene una transformada de Fourier definida en  $L^1(\mathfrak{S})$  por:

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathfrak{S}} f(x) \overline{\langle \xi, x \rangle} dx, \quad \xi \in \widehat{\mathfrak{S}},$$

que se puede extender por densidad a un isomorfismo isométrico  $\mathcal{F} : L^2(\mathfrak{S}) \rightarrow L^2(\widehat{\mathfrak{S}})$ .

Las definiciones de las últimas dos secciones son análogas. El operador de traslación se notará de la misma manera,

$$T_h f(x) = f(x - h), \quad f \in L^2(\mathfrak{S}), \quad h \in H, \quad x \in \mathfrak{S}.$$

Y al igual que el caso Euclideo, para todo  $h \in H$ ,

$$\widehat{T_h f}(\xi) = e_{-h}(\xi) \hat{f}(\xi).$$

Diremos que un espacio  $V \subset L^2(\mathfrak{S})$  es invariante por traslaciones de un reticulado uniforme  $H$  ( $H$ -invariante) si para cada  $f \in V$  tenemos que  $T_h f \in V$ , para todo  $h \in H$ . Por otro lado, si  $V$  y  $V'$  son dos espacios  $H$ -invariantes de  $L^2(\mathfrak{S})$  diremos que un operador acotado  $L : V \rightarrow V'$ , es  $H$ -conmutante si  $LT_h = T_h L$  para todo  $h \in H$ .

Para trabajar con las técnicas de fiberización, precisamos un conjunto  $D \subset \widehat{\mathfrak{S}}$  que sea un conjunto de representantes medible Borel del cociente  $\widehat{\mathfrak{S}}/\Delta$ , a esto se lo conoce como sección de Borel de  $\widehat{\mathfrak{S}}/\Delta$ . La existencia de dicha sección se puede ver en [47].

Luego, al igual que en la Proposición 1.3.5, el mapa  $\mathcal{T} : L^2(\mathfrak{S}) \rightarrow L^2(D, \ell^2(\Delta))$  definido por  $\mathcal{T}f(\omega) = \{\hat{f}(\omega + \delta)\}_{\delta \in \Delta}$  es un isomorfismo isométrico. A partir de aquí, todas las definiciones y todos los resultados vistos en las Secciones 1.3 y 1.4 se traducen de manera análoga reemplazando  $\mathbb{R}^d$  por un el grupo  $\mathfrak{S}$  y entendiendo a  $H, \Delta$  y  $D$  como los elementos descriptos en esta sección.

## Capítulo 2

# Multi-teselados y bases de Riesz de exponenciales

A lo largo de este capítulo,  $\Delta \subset \mathbb{R}^d$  siempre será un reticulado completo de  $\mathbb{R}^d$  con dominio fundamental  $D = D_\Delta$  y  $H \subset \mathbb{R}^d$  será su reticulado dual.

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto medible, de medida finita y  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto discreto. Decimos que  $\Omega$  tesela  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones sobre  $\Gamma$  si

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \Omega + \gamma = \mathbb{R}^d \quad \text{y} \quad |(\Omega + \gamma) \cap (\Omega + \gamma')| = 0, \quad \forall \gamma, \gamma' \in \Gamma, \gamma \neq \gamma'.$$

Esto quiere decir que al ser trasladado,  $\Omega$  cubre todo el espacio casi sin solapamientos. Por ejemplo, es claro que el dominio fundamental  $D$  del reticulado  $\Delta \subset \mathbb{R}^d$  es un teselado de  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones sobre  $\Delta$ . Entonces, tenemos la siguiente definición equivalente.

**Definición 2.0.1.** Decimos que un conjunto medible  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  tesela  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones sobre el reticulado completo  $\Delta$  si

$$\sum_{\delta \in \Delta} \chi_\Omega(\omega + \delta) = 1 \text{ para casi todo } \omega \in D.$$

Como comentamos en la introducción, el Teorema de Fuglede para reticulados [50] afirma que un conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  medible y de medida finita tesela  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones de  $\Delta$  si y sólo si el sistema de exponenciales  $E(H)$  es una base ortogonal de  $L^2(\Omega)$ . Una generalización de este resultado a los multi-teselados y las bases de Riesz de exponenciales, fue planteada en los trabajos de Grepstad y Lev [52], Kolountzakis [66] y Agora, Antezana y Cabrelli [2] para el caso donde  $\Omega$  es acotado (ver Teorema 2.2.3).

El objetivo de este capítulo es encontrar condiciones suficientes que permitan extender este resultado al caso no acotado. Estará organizado como sigue:

En la Sección 2.1 definiremos los conjuntos que multi-teselan y veremos ciertas propiedades especiales que estos gozan obtenidas mediante técnicas de fiberización.

En la Sección 2.2 daremos una caracterización de las bases de Riesz de exponenciales estructuradas para conjuntos que multi-teselan e incluiremos la prueba del Teorema 2.2.3. También daremos la prueba de la recíproca (que es cierta incluso en el caso no acotado).

En la Sección 2.3 introduciremos el concepto de conjunto admisible. Y demostraremos nuestro resultado principal (Teorema 2.3.6) que dice que los conjuntos admisibles que  $k$ -teselan admiten una base de Riesz de exponenciales estructurada. También, exhibiremos un ejemplo que muestra que esta condición es suficiente pero no necesaria.

La Sección 2.4 está dedicada a ver que un resultado muy similar al del Teorema 2.3.6 se puede obtener si consideramos submulti-teselados en lugar de multi-teselados. En este caso, lo que obtenemos son marcos de exponenciales estructurados.

Finalmente, en la Sección 2.5 comentamos brevemente los avances posteriores que se lograron en el problema de la existencia de bases de Riesz de exponenciales estructuradas.

## 2.1 Multi-teselados

La siguiente definición generaliza el concepto de teselar, admitiendo que al ser trasladado, el conjunto  $\Omega$  cubra todo el espacio múltiples veces.

**Definición 2.1.1.** *Sea  $k$  un entero positivo. Decimos que un conjunto medible  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  multi-tesela  $\mathbb{R}^d$  a nivel  $k$  (o  $k$ -tesela  $\mathbb{R}^d$ ) por traslaciones sobre el reticulado  $\Delta$  si para casi todo  $\omega \in D$ ,*

$$\sum_{\delta \in \Delta} \chi_{\Omega}(\omega + \delta) = k.$$

Para lo que sigue, necesitamos introducir la siguiente notación. Dado un conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , para cada  $\omega \in D$  denotaremos

$$\Delta_{\omega}(\Omega) = \Delta_{\omega} := \{ \delta \in \Delta : \omega + \delta \in \Omega \}.$$

**Observación 2.1.2.** *Observar que si  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  es un conjunto medible de medida finita, entonces  $\Delta_{\omega}$  debe ser finito para casi todo  $\omega \in D$ . En efecto,*

$$\int_D \sum_{\delta \in \Delta} \chi_{\Omega}(\omega + \delta) d\omega = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\Omega}(\omega) d\omega = |\Omega| < +\infty.$$

Notemos que si  $\Omega$  es un  $k$ -teselado de  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones sobre  $\Delta$ , entonces  $\#\Delta_\omega = k$  para casi todo  $\omega \in D$ .

Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  es un conjunto medible de medida finita, recordemos que el espacio  $PW_\Omega$  es un espacio invariante por traslaciones sobre cualquier reticulado, en particular, es un espacio  $H$ -invariante. Si denotamos su función rango como  $\mathcal{J}_\Omega$  y considerando la Observación 2.1.2, podemos caracterizar  $\mathcal{J}_\Omega$  como se muestra en la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.3.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto medible de medida finita. Entonces, para casi todo  $\omega \in D$  tenemos que*

$$\mathcal{J}_\Omega(\omega) \simeq \ell^2(\Delta_\omega).$$

*Demostración.* Fijemos  $\omega \in D \setminus E$  donde  $E \subset D$  es el conjunto de excepciones de medida cero donde  $\Delta_\omega$  no es finito y definamos  $S_\omega := \{a \in \ell^2(\Delta) : \text{Supp}(a) \subseteq \Delta_\omega\}$ , que es claramente isomorfo a  $\ell^2(\Delta_\omega)$ . Sea  $C_b(\Omega)$  el espacio de funciones continuas y acotadas definidas sobre  $\Omega$ , entonces tenemos que  $C_b(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ .

Sea  $\tilde{a} \in S_\omega$ , luego existe una sucesión  $a \in \ell^2(\Delta_\omega)$  tal que

$$\tilde{a}_\delta = \begin{cases} a_\delta & \text{if } \delta \in \Delta_\omega, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Por el Teorema de Extensión de Tietze, existe  $f_a \in C_b(\Omega)$  tal que  $f_a(\omega + \delta) = a_\delta$ . Si definimos  $\tilde{f}_a$  como  $f_a$  en  $\Omega$  y cero en  $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ , entonces  $(\tilde{f}_a)^\vee \in PW_\Omega$ , con lo cual  $\mathcal{T}[(\tilde{f}_a)^\vee](\omega) = \tilde{a} \in \mathcal{J}_\Omega(\omega)$ . Esto prueba que  $S_\omega \subseteq \mathcal{J}_\Omega(\omega)$ . La otra inclusión es fácil de probar. Concluimos que  $\mathcal{J}_\Omega(\omega) = S_\omega$ .  $\square$

Como consecuencia, vemos que  $\Omega$  es un  $k$ -teselado de  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones de  $\Delta$  si y sólo si  $\mathcal{J}_\Omega(\omega)$  es un espacio  $k$  dimensional para casi todo  $\omega \in D$ . Teniendo esto en cuenta, el siguiente resultado de [2] nos permite caracterizar las bases de Riesz en  $PW_\Omega$  generadas por las traslaciones de  $k$  funciones cuando  $\Omega$  es un  $k$ -teselado de  $\mathbb{R}^d$ .

**Teorema 2.1.4.** *Sea  $\Omega$  un conjunto medible que  $k$ -tesela  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones de  $\Delta$  y sea  $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_k\} \subset PW_\Omega$ . Para cada  $\omega \in D$  definimos*

$$T_\omega = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(\omega + \delta_1) & \dots & \hat{\phi}_k(\omega + \delta_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\phi}_1(\omega + \delta_k) & \dots & \hat{\phi}_k(\omega + \delta_k) \end{pmatrix}$$

donde  $\delta_j = \delta_j(\omega)$  para  $j = 1, \dots, k$  son los  $k$  elementos de  $\Delta_\omega$ . Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

- (i) El sistema  $S(\Phi) = \{T_h\phi_j : h \in H, j = 1, \dots, k\}$  es una base de Riesz de  $PW_\Omega$ .
- (ii) Existen constantes  $A, B > 0$  tales que para casi todo  $\omega \in D$ ,

$$A\|x\|^2 \leq \|T_\omega x\|^2 \leq B\|x\|^2, \quad (2.1.1)$$

para todo  $x \in \mathbb{C}^k$ .

## 2.2 Bases de Riesz de exponenciales estructuradas

**Definición 2.2.1.** Decimos que un sistema de exponenciales es estructurado si es de la forma  $E(H, a_1, \dots, a_k) = \{e_{a_j+h} : h \in H, j = 1, \dots, k\}$  con  $H \subset \mathbb{R}^d$  un reticulado completo y  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$ .

El siguiente lema conecta el Teorema 2.1.4 con el problema de encontrar bases de Riesz estructuradas. Esta conexión fue hallada en [2] y será una herramienta crucial para probar nuestro objetivo.

**Lema 2.2.2.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto medible que  $k$ -tesela  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones de  $\Delta$ , y  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$ . Para cada  $\omega \in D$  definimos

$$E_\omega = \begin{pmatrix} e_{a_1}(\delta_1) & \dots & e_{a_k}(\delta_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{a_1}(\delta_k) & \dots & e_{a_k}(\delta_k) \end{pmatrix}$$

donde  $\delta_j = \delta_j(\omega)$  para  $j = 1, \dots, k$  son los  $k$  elementos de  $\Delta_\omega$ . Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

- (i)  $E(H, a_1, \dots, a_k)$  es una base de Riesz de  $L^2(\Omega)$ .
- (ii) Existen constantes  $A, B > 0$  tales que para casi todo  $\omega \in D$ ,

$$A\|x\|^2 \leq \|E_\omega x\|^2 \leq B\|x\|^2, \quad (2.2.1)$$

para todo  $x \in \mathbb{C}^k$ .

*Demostración.* Supongamos que  $E(H, a_1, \dots, a_k) = \{e_{a_j+h} : h \in H, j = 1, \dots, k\}$  es una base de Riesz de  $L^2(\Omega)$ . Definamos  $\phi_1, \dots, \phi_k \in L^2(\mathbb{R}^d)$  por su transformada de Fourier como sigue:

$$\hat{\phi}_j := e_{a_j} \chi_\Omega, \quad j = 1, \dots, k. \quad (2.2.2)$$

Luego, tenemos que el sistema

$$\{e_h \hat{\phi}_j : h \in H, j = 1, \dots, k\}$$

es una base de Riesz de  $L^2(\Omega)$ , anti-transformando, esto es equivalente a que

$$\{T_h \phi_j : h \in H, j = 1, \dots, k\}^1$$

sea una base de Riesz de  $PW_\Omega$ .

El Teorema 2.1.4 afirma que esto es cierto si y sólo si las matrices

$$T_\omega = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(\omega + \delta_1) & \dots & \hat{\phi}_k(\omega + \delta_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\phi}_1(\omega + \delta_k) & \dots & \hat{\phi}_k(\omega + \delta_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{a_1}(\omega + \delta_1) & \dots & e_{a_k}(\omega + \delta_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{a_1}(\omega + \delta_k) & \dots & e_{a_k}(\omega + \delta_k) \end{pmatrix}$$

están uniformemente acotadas para casi todo  $\omega \in D$  como se muestra en la ecuación (2.1.1). Por otro lado, se puede ver que las matrices  $T_\omega$  pueden descomponerse como

$$\begin{pmatrix} e_{a_1}(\delta_1) & \dots & e_{a_k}(\delta_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{a_1}(\delta_k) & \dots & e_{a_k}(\delta_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{a_1}(\omega) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e_{a_2}(\omega) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_{a_{k-1}}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e_{a_k}(\omega) \end{pmatrix} = E_\omega U_\omega,$$

donde  $U_\omega$  es una matriz unitaria. Con lo cual, las desigualdades en (2.1.1) se satisfacen si y sólo si para casi todo  $\omega \in D$ ,

$$A\|x\|^2 \leq \|E_\omega x\|^2 \leq B\|x\|^2,$$

para todo  $x \in \mathbb{C}^k$ , con  $A, B > 0$  constantes. □

En los trabajos de Grepstad y Lev [52], Kolountzakis [66], y Agora, Antezana y Cabrelli [2], se probó el siguiente resultado para conjuntos *acotados* que multi-teselan.

**Teorema 2.2.3.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto acotado y medible que  $k$ -tesela  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones de  $\Delta$ , entonces existen vectores  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$  para los cuales  $E(H, a_1, \dots, a_k)$  es una base de Riesz de  $L^2(\Omega)$ .*

<sup>1</sup>Por la ecuación (1.0.2), al anti-transformar tenemos el sistema  $\{T_{-h}\phi_j\}_{h,j}$ . Pero dado que  $H$  es un reticulado, podemos eliminar el signo negativo.

*Demostración.* Por el Lema 2.2.2, sabemos que un sistema  $E(H, a_1, \dots, a_k)$  es una base de Riesz de  $L^2(\Omega)$  si y sólo si las matrices  $E_\omega$  están uniformemente acotadas para casi todo  $\omega \in D$ . Como  $\Omega$  es acotado sabemos que  $\bigcup_{\omega \in D} \Delta_\omega$  es finito, lo que implica que sólo hay finitas posibles matrices  $E_\omega$ , con  $\omega \in D$ .

Por lo tanto, sólo tenemos que hallar  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$  para que todas estas finitas matrices sean inversibles y la ecuación (2.2.1) se satisfará con dos constantes uniformes  $A, B > 0$ . Para ello, notemos que para cada  $\omega \in D$  el determinante de  $E_\omega$  es un polinomio trigonométrico que depende de  $(a_1, \dots, a_k)$ . Entonces, tenemos finitos polinomios trigonométricos y es posible elegir valores para  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$  donde ninguno se anule.  $\square$

En [2] los autores encontraron un contraejemplo de un conjunto *no acotado* que multi-tesela pero no admite una base de Riesz de exponenciales. El ejemplo es el siguiente.

**Ejemplo 2.2.4.** Considere la partición  $[0, 1)$  en intervalos  $I_j := [\frac{2^j-2}{2^j}, \frac{2^j-1}{2^j})$ ,  $j \geq 1$ . El conjunto

$$\Omega = [0, 1) \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} (I_j + j)$$

es un subconjunto no acotado de  $\mathbb{R}$  que 2-tesela por traslaciones sobre  $\mathbb{Z}$  (ver figura 2.1).

Para probar que no admite base de Riesz estructurada de exponenciales, en [2] se prueba que las matrices

$$E_\omega = \begin{pmatrix} e_{a_1}(\delta_1) & e_{a_2}(\delta_1) \\ e_{a_1}(\delta_2) & e_{a_2}(\delta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e_{a_1}(\delta_2) & e_{a_2}(\delta_2) \end{pmatrix}$$

no están acotadas uniformemente en  $\omega \in [0, 1)$  para ninguna elección de  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ .

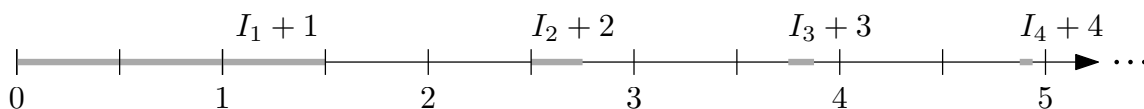


Figura 2.1: El conjunto  $\Omega$ .

Para el caso *acotado*, en [2] se probó que un conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  que admite una base de Riesz de exponenciales  $E(H; a_1, \dots, a_k)$ , para ciertos  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$ , debe ser necesariamente un  $k$ -teselado de  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones sobre  $\Delta$ . Este resultado se mantiene cierto para el caso *no acotado*.



**Teorema 2.2.5.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto medible de medida finita. Si  $L^2(\Omega)$  admite una base de Riesz de la forma  $E(H; a_1, \dots, a_k)$  para ciertos  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$ , entonces  $\Omega$   $k$ -tesela  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones sobre  $\Delta$ .*

*Demostración.* Definamos las funciones  $\phi_j, j = 1, \dots, k$  como en (2.2.2). Luego, tenemos que  $\{T_h \phi_j : h \in H, j = 1, \dots, k\}$  es una base de Riesz de  $PW_\Omega$ . Por el Teorema 1.3.10, esto implica que para casi todo  $\omega \in D$ ,  $\{\mathcal{T} \phi_1(\omega), \dots, \mathcal{T} \phi_k(\omega)\}$  es una base de Riesz de  $\mathcal{J}_\Omega(\omega)$ , y por lo tanto  $\dim \mathcal{J}_\Omega(\omega) = k$  para casi todo  $\omega \in D$ . Por la Proposición 2.1.3, concluimos que  $\Omega$  es un  $k$ -teselado de  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones sobre  $\Delta$ .  $\square$

## 2.3 Conjuntos Admisibles

Como vimos en el Ejemplo 2.2.4, no todos los conjuntos no acotados que multi-teselan admiten una base de Riesz estructurada de exponenciales. A continuación veremos una condición aritmética para un multi-teselado que será suficiente para que el conjunto admita una base de Riesz estructurada de exponenciales.

**Definición 2.3.1.** *Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto medible de medida finita y  $\Delta$  un reticulado completo de  $\mathbb{R}^d$ . Decimos que  $\Omega$  es admisible para  $\Delta$  si existe un vector  $v \in H$  y un número  $n \in \mathbb{N}$ , tales que para casi todo  $\omega \in D$ , los números  $\{\langle v, \delta \rangle : \delta \in \Delta_\omega\}$  son distintos (mod  $n$ ). En ese caso, también diremos que  $\Omega$  es  $(n, v)$ -admisible para  $\Delta$ , si queremos enfatizar la dependencia de  $n$  y  $v$ .*

Cuando  $d = 1$  y  $\Delta = \mathbb{Z}$ , esto es equivalente a decir que para casi todo  $\omega \in D$ , los elementos de  $\Delta_\omega \subset \mathbb{Z}$  son distintos (mod  $n$ ).

Una forma gráfica de describir admisibilidad es la siguiente: Sea  $\Omega$  un conjunto  $(n, v)$ -admisible para  $\Delta$ . Supongamos que tomamos un color diferente para cada elemento de  $\mathbb{Z}_n$ , y pintamos  $\mathbb{R}^d$  coloreando el conjunto  $D + \delta$  con el color asignado al resto (mod  $n$ ) de  $\langle v, \delta \rangle$ . Entonces la admisibilidad dice que para casi todo  $\omega \in D$  los elementos de la forma  $\omega + \delta$  con  $\delta \in \Delta$  que pertenecen a  $\Omega$  tienen distintos colores.

**Observación 2.3.2.** *Todo conjunto acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  es admisible. Esto se debe a que en este caso, la unión  $\cup_{\omega \in D} \Delta_\omega$  es finita, luego, para cualquier  $v \in H$ , se puede tomar un número  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande para que todos los números de  $\{\langle v, \delta \rangle : \delta \in \Delta_\omega\}$  sean distintos (mod  $n$ ).*

El siguiente ejemplo muestra que existen multi-teselados que no son admisibles.

**Ejemplo 2.3.3.** Considere el conjunto  $\Omega$  definido en el Ejemplo 2.2.4. Este es un subconjunto no acotado de  $\mathbb{R}$  que 2-tesela por traslaciones sobre  $\mathbb{Z}$  y que no es admisible para  $\mathbb{Z}$ . Para ver que la admisibilidad falla, notar que si  $n$  es un número natural fijo y  $\omega \in I_n$  entonces  $\Delta_\omega = \{0, n\}$ , que no son distintos (mod  $n$ ).

Por el otro lado, exhibimos un conjunto no acotado que sí es admisible:

**Ejemplo 2.3.4.** Si en el Ejemplo 2.2.4 trasladáramos los intervalos  $I_j$  sólo por los números impares, entonces

$$\Omega = [0, 1) \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} (I_j + 2j + 1),$$

es un conjunto que 2-tesela  $\mathbb{R}$  por traslaciones sobre  $\mathbb{Z}$  que es admisible para  $\mathbb{Z}$  tomando  $n = 2$ .

Otro ejemplo de conjunto admisible y no acotado es el siguiente.

**Ejemplo 2.3.5.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto medible de medida finita para el cual existe una constante  $K > 0$  tal que para casi todo  $\omega \in D$ , se tiene que  $|\delta - \delta'| \leq K$  para todo  $\delta, \delta' \in \Delta_\omega$ .

Este conjunto es admisible ya que, para cada  $\omega \in D$  podemos tomar una traslación apropiada  $\delta_0 = \delta_0(\omega) \in \Delta$  y ver que  $\Delta_\omega - \delta_0 \subset [-K, K]^d$ . Tomando  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, y  $v \in H$  todos los elementos  $\langle \delta, v \rangle$  con  $\delta \in \Delta_\omega - \delta_0$  son distintos (mod  $n$ ). Luego, todos los elementos de  $\langle \delta, v \rangle$  con  $\delta \in \Delta_\omega$  son distintos (mod  $n$ ) para casi todo  $\omega \in D$ .

Ya estamos listos para demostrar el teorema principal de este capítulo.

**Teorema 2.3.6.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto medible de medida finita. Si

- (i)  $\Omega$  multi-tesela  $\mathbb{R}^d$  a nivel  $k$  por traslaciones sobre  $\Delta$ , y
- (ii)  $\Omega$  es admisible para  $\Delta$ ,

entonces, existen vectores  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$  para los cuales el sistema  $E(H; a_1, \dots, a_k)$  es una base de Riesz de  $L^2(\Omega)$ .

*Demostración.* Por el Lema 2.2.2, es suficiente encontrar vectores  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$  para los cuales existen constantes  $A, B > 0$  tales que para casi todo  $\omega \in D$ ,

$$A\|x\|^2 \leq \|E_\omega x\|^2 \leq B\|x\|^2,$$

para todo  $x \in \mathbb{C}^k$ .

Como  $\Omega$  es admisible para  $\Delta$ , existe  $v \in H$  y  $n \in \mathbb{N}$  tales que para casi todo  $\omega \in D$ , los elementos en  $\{\langle v, \delta \rangle : \delta \in \Delta_\omega\}$  son distintos (mod  $n$ ).

Sea  $\mathcal{F}_n = \{e^{2\pi i r s/n}\}_{0 \leq r, s \leq n-1}$  la matriz de Fourier de orden  $n$ . Cualquier submatriz de  $\mathcal{F}_n$  de tamaño  $k \times k$ , formada por  $k$  columnas consecutivas y  $k$  filas cualesquiera, es una matriz inversible ya que es una matriz de Vandermonde.

Ahora, definamos  $a_j := \frac{j-1}{n}v$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Tenemos que para casi todo  $\omega \in D$ ,

$$E_\omega = \{e^{2\pi i(j-1)\langle v, \delta_i \rangle/n}\}_{1 \leq l, j \leq k}$$

es una de dichas submatrices de  $\mathcal{F}_n$ , excepto por alguna permutación de sus filas, con lo cual es inversible.

Más aún, sólo hay finitas matrices  $E_\omega$  ya que sólo hay finitas submatrices de tamaño  $k \times k$  de  $\mathcal{F}_n$ . Luego, existen dos constantes  $A, B > 0$  tales que las desigualdades en (2.2.1) valen para todo  $x \in \mathbb{C}^k$  y para casi todo  $\omega \in D$ .  $\square$

### Observación 2.3.7.

- (i) *Los vectores  $a_1, \dots, a_k$  definidos en esta prueba, sólo dependen del vector  $v \in H$  y  $n \in \mathbb{N}$  de la condición de admisibilidad. Entonces, el mismo sistema estructurado de exponenciales forma una base de Riesz para cualquier  $k$ -teselado  $\Omega$  que sea  $(n, v)$ -admisible para  $\Delta$ .*
- (ii) *Si  $n$  es un número primo, cualquier elección de  $k$  columnas y  $k$  filas de  $\mathcal{F}_n$  forma una matriz inversible (ver [86]). Entonces, en la prueba del Teorema 2.3.6, si  $n$  es un número primo podemos definir  $a_j := \frac{s_j}{n}v$ ,  $j = 1, \dots, k$  donde  $s_1, \dots, s_k$  son enteros distintos (mod  $n$ ).*

*Con un poco más de generalidad, si  $n$  es potencia de un número primo, cualquier submatriz de  $\mathcal{F}_n$ , formada por cualesquiera  $k$  filas y  $k$  columnas que satisfagan que su conjunto de índices  $\{s_1, \dots, s_k\}$  está uniformemente distribuido sobre los divisores de  $n$  (ver [13] para la definición), es inversible. Entonces, en la prueba del Teorema 2.3.6, si  $n = p^l$  con  $p$  primo y  $l$  un entero positivo, podríamos también definir  $a_j := \frac{s_j}{n}v$ ,  $j = 1, \dots, k$  donde  $\{s_1, \dots, s_k\}$  está uniformemente distribuido sobre los divisores de  $n$ .*

Es importante remarcar que existen multi-teselados que admiten una base de Riesz de exponenciales estructurada pero que no son admisibles. Esto lo veremos en el siguiente ejemplo.

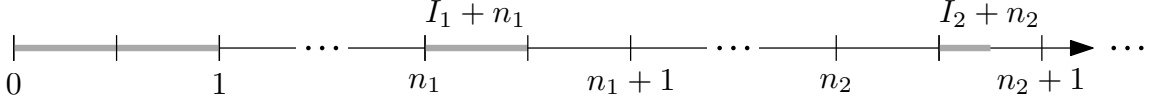


Figura 2.2: El conjunto  $\Omega$  del Ejemplo 2.3.8.

**Ejemplo 2.3.8.** Sean  $\{1, a_1, a_2\}$  números linealmente independientes sobre  $\mathbb{Q}$ . Tomemos la partición del  $[0, 1)$  como en el Ejemplo 2.2.4 y consideremos el siguiente conjunto que 2-tesela  $\mathbb{R}$  por traslaciones sobre  $\mathbb{Z}$ :

$$\Omega = [0, 1) \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} (I_j + n_j), \quad (2.3.1)$$

donde la sucesión infinita  $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  será elegida adecuadamente para nuestro propósito (ver figura 2.2).

Por el Lema 2.2.2, sabemos que  $E(\mathbb{Z}; a_1, a_2)$  es una base de Riesz de  $L^2(\Omega)$  si y sólo si las matrices

$$E_\omega = \begin{pmatrix} e_{a_1}(\delta_1) & e_{a_2}(\delta_1) \\ e_{a_1}(\delta_2) & e_{a_2}(\delta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e_{a_1}(\delta_2) & e_{a_2}(\delta_2) \end{pmatrix}$$

satisfacen que existen constantes  $A, B > 0$  para las cuales (2.2.1) vale.

Sean  $\beta_1, \beta_2 \in [0, 1)$  dos números distintos. La matriz

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{2\pi i \beta_1} & e^{2\pi i \beta_2} \end{pmatrix}$$

es inversible, y satisface que,

$$\gamma_{\min} \|x\|^2 \leq \|R x\|^2 \leq \gamma_{\max} \|x\|^2, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

donde  $\gamma_{\min}$  y  $\gamma_{\max}$  son el mínimo y máximo autovalor de  $RR^*$  respectivamente.

Para todo  $j \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $\{1, a_1 j, a_2 j\}$  también son linealmente independientes sobre  $\mathbb{Q}$ . Por el Teorema de Aproximación de Kronecker existen  $m_j \in \mathbb{Z}$  tales que

$$\left\| (e^{2\pi i a_1 j m_j}, e^{2\pi i a_2 j m_j}) - (e^{2\pi i \beta_1}, e^{2\pi i \beta_2}) \right\|_2 < \varepsilon.$$

Luego, para todo  $j \in \mathbb{N}$ , tomamos  $n_j = j m_j$  como la sucesión que requerimos en (2.3.1).

Por lo tanto, para casi todo  $\omega \in [0, 1)$ , las matrices  $E_\omega E_\omega^*$  y  $RR^*$  están cerca una de la otra. Entonces, los autovalores de dichas matrices deben estar cerca también. Con lo cual, tomando  $\varepsilon$  suficientemente pequeño obtenemos cotas uniformes para (2.2.1) y en consecuencia  $E(\mathbb{Z}; a_1, a_2)$  es una base de Riesz de  $L^2(\Omega)$ .

Sin embargo, este conjunto no es admisible para  $\mathbb{Z}$  porque para todo  $j \in \mathbb{N}$ , si  $\omega \in I_j$  entonces  $\Delta_\omega = \{0, jm_j\}$  que no son distintos (mod  $j$ ).

**Observación 2.3.9.** Se puede usar un argumento similar para extender el ejemplo anterior a un conjunto que  $k$ -tesela en  $\mathbb{R}$  por traslaciones sobre  $\mathbb{Z}$ . Si  $\{1, a_1, \dots, a_k\}$  son números linealmente independientes sobre  $\mathbb{Q}$ , tomemos el conjunto

$$\Omega = [0, k-1) \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} (I_j + n_j),$$

eligiendo  $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}_{\geq k}$  de manera adecuada para aproximar  $E_\omega$  a una matriz inversible, para casi todo  $\omega \in [0, 1)$ .

## 2.4 Submulti-teselados y marcos de exponenciales

En esta sección nos concentraremos en los marcos de exponenciales. No es difícil ver que todo conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  medible y *acotado* admite un marco de exponenciales. Esto es una consecuencia de los siguientes hechos: (i) para cualquier cubo  $Q$  en  $\mathbb{R}^d$  existe una base ortogonal de exponenciales en  $L^2(Q)$ . (ii) Si  $\Omega \subseteq Q$ , la restricción de una base ortogonal de exponenciales de  $L^2(Q)$  a  $\Omega$  es un marco de  $L^2(\Omega)$ .

Nitzan, Olevskii y Ulanovskii en [78] extendieron el resultado para cualquier conjunto medible *no acotado* de medida finita. Remarcamos que la prueba utilizó la conjetura de Kadison-Singer y no es constructiva. La meta de esta sección es explorar la relación entre los conjuntos no acotados que *submulti-teselan* y los marcos, construyendo ejemplos concretos de marcos de exponenciales.

**Definición 2.4.1.** Decimos que un conjunto medible  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , *submulti-tesela*  $\mathbb{R}^d$  a nivel  $k$  (o  $k$ -subtesela  $\mathbb{R}^d$ ) por traslaciones sobre el reticulado  $\Delta$  si para casi todo  $\omega \in D$ ,

$$\sum_{\delta \in \Delta} \chi_\Omega(\omega + \delta) \leq k.$$

Cuando  $\Omega$  es un  $k$ -subteselado que es admisible, no podemos afirmar que  $L^2(\Omega)$  tenga una base de Riesz de exponenciales estructurada, pero en su lugar podemos ver que admite un marco de exponenciales. Lo cual es conveniente ya que esto nos provee conjuntos de muestreo para el espacio  $PW_\Omega$  (ver la Sección 1.2 en las Preliminares).

La relación entre  $k$ -subteselados y marcos de exponenciales fue primero estudiada en [20] para el caso donde  $\Omega$  es un 1-subteselado de medida finita en el contexto de los grupos

LCA. Luego, se probó en [17] que si  $\Omega$  es un  $k$ -subteselado *acotado*, entonces admite un marco de exponenciales estructurado. En esta sección, adaptamos este último resultado al caso donde  $\Omega$  es un conjunto de medida finita (no necesariamente acotado) con la hipótesis extra de la admisibilidad. Más precisamente, probaremos el siguiente teorema.

**Teorema 2.4.2.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto medible de medida finita. Si*

- (i)  $\Omega$  *submulti-tesela*  $\mathbb{R}^d$  *a nivel*  $k$  *por traslaciones sobre*  $\Delta$ ,
- (ii)  $\Omega$  *es admisible para*  $\Delta$ ,

*entonces, existen  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$  tales que el sistema  $E(H; a_1, \dots, a_k)$  es un marco de  $L^2(\Omega)$ .*

La estrategia de la prueba en [17], consiste en que, dado un  $k$ -subteselado acotado  $\Omega$ , lo podemos agrandar a un  $k$ -teselado  $\Omega^*$ , luego tomar una base de Riesz estructurada de exponenciales en  $L^2(\Omega^*)$ , (que siempre existe para el caso de los  $k$ -teselados acotados). Esta base, al restringirla en  $\Omega$  es un marco estructurado de  $L^2(\Omega)$ .

En nuestro caso, como el  $k$ -subteselado  $\Omega$  no es necesariamente acotado, necesitamos agrandararlo a un conjunto admisible que  $k$ -tesele, para garantizar la existencia de una base de Riesz de exponenciales, que es lo que haremos en la siguiente proposición:

**Proposición 2.4.3.** *Sea  $\Omega$  un conjunto medible de medida finita que  $k$ -subtesela  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones sobre  $\Delta$  y es admisible para  $\Delta$ . Entonces, existe un conjunto  $\Omega^*$  medible de medida finita que  $k$ -tesela  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones sobre  $\Delta$  y admisible para  $\Delta$  tal que  $\Omega \subset \Omega^*$ .*

*Demostración.* Comenzaremos por dar una caracterización de los conjuntos que  $k$ -subteselan  $\mathbb{R}^d$  y son admisibles. Sean  $v$  un vector no nulo en  $H$  y  $n$  un número natural. Consideremos el sub-reticulado de  $\Delta$  definido por

$$\Delta^{(0)} := \{\delta \in \Delta : \langle v, \delta \rangle \equiv 0 \pmod{n}\},$$

y sean  $\Delta^{(r)}$ ,  $r = 0, \dots, n-1$ , las distintas clases del cociente  $\Delta/\Delta^{(0)}$ . Sean  $k \geq 1$  y  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un  $k$ -subteselado que es  $(n, v)$ -admisible para  $\Delta$ .

Definimos

$$\mathcal{R} := \{R \subset \Delta : \#R \leq k \text{ and } \delta - \delta' \notin \Delta^{(0)} \text{ si } \delta, \delta' \in R, \delta \neq \delta'\}.$$

Las propiedades impuestas sobre  $\Omega$  implican que  $\Delta_\omega \in \mathcal{R}$  para casi todo  $\omega \in D$ .

Ahora, para  $R \in \mathcal{R}$  definamos  $D_R := \{\omega \in D : \Delta_\omega = R\}$ . (Notar que si  $R \neq R'$ , entonces  $D_R \cap D_{R'} = \emptyset$  y que  $D_R$  podría ser vacío para algún  $R \in \mathcal{R}$ ).

Tenemos que  $D_R + R \subseteq \Omega$  y luego (salvo conjunto de medida cero):

$$\Omega = \bigcup_{R \in \mathcal{R}} D_R + R. \quad (2.4.1)$$

Veremos ahora que los conjuntos  $D_R$  son medibles. Consideremos las funciones

$$\psi_r(\omega) = \sum_{\delta \in \Delta^{(r)}} \chi_{\Omega}(\omega + \delta), \quad \omega \in D, \quad r = 0, \dots, n-1,$$

y sea  $[R] := \{r \in \{0, \dots, n-1\} : r \equiv \langle v, \delta \rangle \pmod{n}, \text{ para alg\u00fan } \delta \in R\}$ .

Entonces,

$$D_R = \bigcap_{r \in [R]} \psi_r^{-1}(1) \cap \bigcap_{r \notin [R]} \psi_r^{-1}(0),$$

que es una intersecci\u00f3n de conjuntos medibles.

Reciprocamente, para cada partici\u00f3n  $\{D_R : R \in \mathcal{R}\}$  de  $D$ , en conjuntos medibles (aqu\u00ed estamos permitiendo que algunos de los elementos de la partici\u00f3n tengan medida cero), el conjunto  $\Omega$  definido por (2.4.1), necesariamente  $k$ -subtesela  $\mathbb{R}^d$  y es  $(n, v)$ -admisibles para  $\Delta$ .

Ahora que tenemos la descomposici\u00f3n deseada, la proposici\u00f3n sigue de definir

$$\Omega^* = \bigcup_{R \in \mathcal{R}} D_R + (R \cup R').$$

donde para cada  $R \in \mathcal{R}$  elegimos un conjunto  $R' \subseteq \Delta$  complementario a  $R$ , en el sentido de que  $[R] \cap [R'] = \emptyset$  y  $\#([R] \cup [R']) = k$ .

□

Con esto, ya podemos probar el Teorema 2.4.2.

*Demostraci\u00f3n del Teorema 2.4.2.* Por la proposici\u00f3n 2.4.3, existe un conjunto medible de medida finita  $\Omega^*$ , que  $k$ -tesela  $\mathbb{R}^d$ , es admisible para  $\Delta$ , y contiene a  $\Omega$ . Entonces, por el Teorema 2.3.6 sabemos que existen vectores  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$  tales que  $E(H; a_1, \dots, a_k)$  es una base de Riesz de  $L^2(\Omega^*)$ . Con lo cual,  $E(H; a_1, \dots, a_k)$  es un marco de  $L^2(\Omega)$ . □

Como se vio en el Teorema 2.2.5, si  $\Omega$  admite una base de Riesz de exponenciales  $E(H; a_1, \dots, a_k)$ , para ciertos  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$ , entonces debe  $k$ -teselar  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones sobre  $\Delta$ . Cuando  $E(H; a_1, \dots, a_k)$  es un marco, un resultado similar puede ser probado.

**Teorema 2.4.4.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un conjunto medible de medida finita, si  $L^2(\Omega)$  admite un marco de la forma  $E(H; a_1, \dots, a_k)$  para ciertos  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$ , entonces existe  $\ell \leq k$ , tal que  $\Omega$   $\ell$ -subtesela  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones sobre  $\Delta$ .*

*Demostración.* Procediendo de manera análoga al Teorema 2.2.5, vemos que  $\{T_h \phi_j : h \in H, j = 1, \dots, k\}$  es un marco de  $PW_\Omega$ . Por el Teorema 1.3.10, esto implica que  $\{\mathcal{T} \phi_1(\omega), \dots, \mathcal{T} \phi_k(\omega)\}$  es un marco de  $\mathcal{J}_\Omega(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ , y por lo tanto  $\dim(\mathcal{J}_\Omega(\omega)) \leq k$  para casi todo  $\omega \in D$ . Por la proposición 2.1.3, tenemos que  $\#\Delta_\omega \leq k$ . Entonces, si tomamos

$$\ell := \sup_{\omega \in D} \text{ese} \sum_{\delta \in \Delta} \chi_\Omega(\omega + \delta),$$

$\Omega$  es un  $\ell$ -subteselado de  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones sobre  $\Delta$ . □

## 2.5 Avances posteriores en el tema

Como ya vimos en el Ejemplo 2.3.8, la condición de admisibilidad no es necesaria para que un conjunto que multi-tesela tenga una base de Riesz de exponenciales estructurada. La pregunta sobre qué multi-teselados no acotados admiten una base de Riesz de ese tipo se terminó de responder en un trabajo reciente de Cabrelli, Hare y Molter [30]. En este, se muestra una caracterización de dichos conjuntos en términos de la compactificación de Bohr del reticulado sobre el cual teselan. El resultado que obtuvieron se puede extender al contexto de los grupos LCA.

De esta manera, se encontraron nuevos ejemplos de conjuntos que multi-teselan, no admisibles, que admiten una base de Riesz de exponenciales estructurada.



# Capítulo 3

## Diagonalización de operadores $H$ -conmutantes

En este capítulo, mantendremos la notación de la Sección 1.3 y la Sección 1.4 para  $H, \Delta$  y  $D$  en  $\mathbb{R}^d$ . Todas las definiciones y resultados que veremos este capítulo se pueden generalizar de manera acorde al caso de grupos LCA como se explica en la Sección 1.5 de las Preliminares.

Dado  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , en este capítulo introduciremos un nuevo concepto de diagonalización para los operadores  $H$ -conmutantes y acotados que actúan en  $V$ , llamado  $H$ -diagonalización. Este se trata de una descomposición del espacio  $V$  en subespacios  $H$ -invariantes, cada uno invariante por el operador en cuestión, sobre los cuales el operador adquiere una forma muy simple. Cuando  $V$  es finitamente generado, esta descomposición puede ser finita. La idea es trabajar con los espacios de fibras y explotar la estructura que el operador rango tiene en cada fibra.

La disposición de las secciones será la siguiente:

En la Sección 3.1 daremos las definiciones de  $H$ -autovalor y  $H$ -autoespacio de un operador  $H$ -conmutante y veremos las conexiones que existen entre estos y los autovalores y autoespacio del operador rango.

La Sección 3.2 trata de resolver el problema de encontrar funciones medibles que son selecciones medibles de autovalores del operador rango sobre ciertos conjuntos.

En la Sección 3.3 daremos la definición de  $H$ -diagonalización sobre espacios  $H$ -invariantes finitamente generados. Luego, estudiaremos las propiedades de este nuevo concepto, buscaremos condiciones necesarias y suficientes para que un operador sea  $H$ -diagonalizable. Finalmente, veremos que los operadores normales son  $H$ -diagonalizables.

En la Sección 3.4 vemos una definición de  $H$ -diagonalización extendida para el caso de espacios  $H$ -invariantes generales, encontraremos condiciones necesarias para que un operador sea  $H$ -diagonalizable, y daremos algunos ejemplos de operadores que lo satisfacen.

### 3.1 $H$ -autovalores y $H$ -autoespacios

Dada una sucesión  $a \in \ell^2(H)$ , denotamos por  $M_{\hat{a}} : L^2(D, \ell^2(\Delta)) \rightarrow L^2(D, \ell^2(\Delta))$  el operador de multiplicación dado por  $M_{\hat{a}}\psi(\omega) = \hat{a}(\omega)\psi(\omega)$ , para toda  $\psi \in L^2(D, \ell^2(\Delta))$ ,  $\omega \in D$ . Si  $a$  es una sucesión de espectro acotado (ver Definición 1.4.9) entonces es bien sabido que  $M_{\hat{a}}$  está bien definido y es acotado.

**Definición 3.1.1.** Dada  $a \in \ell^2(H)$  de espectro acotado, denotamos por  $\Lambda_a : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$  el operador dado por

$$\Lambda_a := \mathcal{T}^{-1}M_{\hat{a}}\mathcal{T},$$

que está bien definido y es acotado.

Definimos el siguiente conjunto:

$$\mathfrak{B} := \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d) : E(\varphi) \text{ es una sucesión de Bessel}\}.$$

Recordemos que si  $a = \{a(h)\}_{h \in H} \in \ell^2(H)$  y  $f \in \mathfrak{B}$ , entonces la serie

$$\sum_{h \in H} a(h)T_h f \tag{3.1.1}$$

converge en  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .

**Proposición 3.1.2.** Sea  $a = \{a(h)\}_{h \in H} \in \ell^2(H)$  de espectro acotado. Si  $f \in \mathfrak{B}$ , entonces

$$\Lambda_a f = \sum_{h \in H} a(h)T_h f,$$

con convergencia en  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .

*Demostración.* Dado que (3.1.1) es convergente en  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , para casi todo  $\omega \in D$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \left( \sum_{h \in H} a(h)T_h f \right) (\omega) &= \left\{ \mathcal{F} \left( \sum_{h \in H} a(h)T_h f \right) (\omega + \delta) \right\}_{\delta \in \Delta} \\ &= \left\{ \sum_{h \in H} a(h) e_{-h}(\omega) \hat{f}(\omega + \delta) \right\}_{\delta \in \Delta} \\ &= \hat{a}(\omega) \{ \hat{f}(\omega + \delta) \}_{\delta \in \Delta} \\ &= M_{\hat{a}} \mathcal{T} f(\omega). \end{aligned}$$

Luego,  $\Lambda_a f = \sum_{h \in H} a(h) T_h f$ .  $\square$

Por otra parte,  $\mathfrak{B}$  es un conjunto denso de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  ya que las funciones de soporte compacto en  $L^2(\mathbb{R}^d)$  pertenecen a  $\mathfrak{B}$  (ver [35, Proposición 9.3.4]). Entonces, si  $a \in \ell^2(H)$  es de espectro acotado, es posible dar una definición alternativa de  $\Lambda_a$  como la extensión continua del operador  $\tilde{\Lambda}_a : \mathfrak{B} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ , definido por

$$\tilde{\Lambda}_a f := \sum_{h \in H} a(h) T_h f. \quad (3.1.2)$$

Por esta razón, a veces escribiremos  $\Lambda_a f$  como la serie (3.1.2), incluso para funciones que no están en  $\mathfrak{B}$ , sobreentendiendo la extensión de  $\tilde{\Lambda}_a$  a  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .

Notemos que en el caso particular donde  $a \in \ell^1(H)$  (y luego de espectro acotado), es fácil comprobar que  $\Lambda_a = \sum_{h \in H} a(h) T_h$  con convergencia puntual en  $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^d))$ .

Observar que, si  $V$  es  $H$ -invariante y  $a \in \ell^2(H)$  es de espectro acotado,  $\Lambda_a : V \rightarrow V$  es un operador  $H$ -conmutante y su operador rango correspondiente es  $\mathcal{R}_a(\omega) = \hat{a}(\omega) \mathcal{I}_\omega$  para casi todo  $\omega \in D$ , donde  $\mathcal{I}_\omega$  denota el operador identidad en  $\mathcal{J}(\omega)$ .

**Definición 3.1.3.** *Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado. Dada  $a \in \ell^2(H)$  una sucesión de espectro acotado, decimos que  $\Lambda_a$  es un  $H$ -autovalor de  $L$  si*

$$V_a := \ker(L - \Lambda_a) \neq \{0\}.$$

*En este caso, decimos que  $V_a$  es el  $H$ -autoespacio asociado a  $\Lambda_a$ .*

**Observación 3.1.4.** *Si  $\lambda \in \mathbb{C}$  es un autovalor de  $L$  (es decir,  $\ker(L - \lambda I) \neq \{0\}$ ), entonces es un  $H$ -autovalor  $\Lambda_a$  de  $L$ , tomando la sucesión  $a = \lambda 1_0$ . Entonces, los  $H$ -autovalores generalizan los autovalores de  $L$ .*

Notar que  $V_a$  es un subespacio  $H$ -invariante de  $V$  y es  $L$ -invariante, esto es,  $LV_a \subseteq V_a$ . Además, notemos que si  $f \in V_a$ ,  $Lf = \Lambda_a f$ , entonces por (1.4.1)

$$\mathcal{R}(\omega)(\mathcal{T}f(\omega)) = \mathcal{T}(Lf)(\omega) = \mathcal{T}(\Lambda_a f)(\omega) = \hat{a}(\omega) \mathcal{T}f(\omega), \quad (3.1.3)$$

para casi todo  $\omega \in D$ . Entonces, vemos que esta nueva definición de  $H$ -autovalor está relacionada con los autovalores del operador rango de  $L$ , como enunciaremos en la siguiente proposición.

**Proposición 3.1.5.** *Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante con función rango  $\mathcal{J}$ ,  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado con operador rango  $\mathcal{R}$  y  $a \in \ell^2(H)$  una sucesión de espectro acotado. Entonces, los siguientes enunciados son ciertos:*

- (i) Si  $\Lambda_a$  es un  $H$ -autovalor de  $L$ , entonces  $\lambda_a(\omega) := \hat{a}(\omega)$  es un autovalor de  $\mathcal{R}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in \Sigma(V_a)$ .
- (ii) El mapa  $\omega \mapsto \ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_a(\omega)\mathcal{I}_\omega)$ ,  $\omega \in D$  es la función rango medible de  $V_a$ , que denotaremos como  $\mathcal{J}_{V_a}$ .

*Demostración.* Por el ítem (i) del Lema 1.3.12, existe  $\varphi_a \in V_a$  tal que  $\text{sop } \|\mathcal{T}\varphi_a(\cdot)\| = \Sigma(V_a)$ . Por (3.1.3),  $\mathcal{T}\varphi_a(\omega) \in \ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_a(\omega)\mathcal{I}_\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ . Ahora, dado que  $\mathcal{T}\varphi_a(\omega) \neq 0$  en casi todo punto de  $\Sigma(V_a)$ , tenemos que para casi todo  $\omega \in \Sigma(V_a)$ ,

$$\ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_a(\omega)\mathcal{I}_\omega) \neq \{0\},$$

es decir,  $\lambda_a(\omega)$  es un autovalor de  $\mathcal{R}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in \Sigma(V_a)$ , lo cual prueba (i).

Para (ii), es claro que el mapa  $\omega \mapsto \mathcal{R}(\omega) - \lambda_a(\omega)\mathcal{I}_\omega$  es un operador rango medible. Entonces, por (vii) en el Teorema 1.4.4, el mapa  $\omega \mapsto \ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_a(\omega)\mathcal{I}_\omega)$  es una función rango medible.

Falta ver que es, de hecho, la función rango asociada a  $V_a$ , pero esto es una consecuencia inmediata de (3.1.3).  $\square$

Notar que probamos que la función rango asociada a  $V_a$  toma como valores los autoespacios de  $\mathcal{R}(\omega)$  asociados a los autovalores  $\lambda_a(\omega)$  para casi todo  $\omega \in \Sigma(V_a)$ .

Por el otro lado, los autovalores medibles de  $\mathcal{R}(\omega)$  inducen  $H$ -autovalores de  $L$ , como se plantea en el siguiente lema.

**Lema 3.1.6.** *Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado con operador rango  $\mathcal{R}$ . Sea  $B \subseteq D$  un conjunto medible de medida positiva. Supongamos que  $\lambda : B \rightarrow \mathbb{C}$  es una función medible tal que  $\lambda(\omega)$  es un autovalor de  $\mathcal{R}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in B$ , entonces existe  $a \in \ell^2(H)$  de espectro acotado tal que  $\lambda(\omega) = \hat{a}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in B$  y  $\Lambda_a$  es un  $H$ -autovalor de  $L$ .*

*Demostración.* Observar que como  $\mathcal{R}$  es el operador rango de  $L$ , por (1.4.2) tenemos que  $|\lambda(\omega)| \leq \|L\|$  para casi todo  $\omega \in B$ . Consideremos cualquier extensión medible de  $\lambda$  a  $D$  (acotada por  $\|L\|$ ), entonces, tenemos que  $\lambda \in L^\infty(D)$  y por lo tanto existe  $a \in \ell^2(H)$  de espectro acotado tal que  $\hat{a}(\omega) = \lambda(\omega)$ . Por el otro lado, como  $\lambda(\omega)$  es un autovalor de  $\mathcal{R}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in B$ , entonces

$$\ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda(\omega)\mathcal{I}_\omega) \neq \{0\}$$

para casi todo  $\omega \in B$ , de lo que se deduce que  $V_a \neq \{0\}$ , y luego  $\Lambda_a$  es un  $H$ -autovalor de  $L$ .  $\square$

Estudiaremos la existencia de estas funciones medibles en la siguiente sección. En la proposición que sigue daremos condiciones sobre dos  $H$ -autovalores para que sus  $H$ -autoespacios asociados estén en suma directa.

**Proposición 3.1.7.** *Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado. Sean  $a, b \in \ell^2(H)$  dos sucesiones distintas de espectro acotado tales que  $\Lambda_a$  y  $\Lambda_b$  son  $H$ -autovalores de  $L$ . Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i)  $V_a \cap V_b = \{0\}$ ,
- (ii)  $\hat{a}(\omega) \neq \hat{b}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in \Sigma(V_a) \cap \Sigma(V_b)$ .

*Demostración.* Asumamos que  $\Sigma(V_a) \cap \Sigma(V_b) \neq \emptyset$  ya que, de no ser así, la equivalencia vale.

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Por (iv) del Teorema 1.3.12, tenemos que  $\mathcal{J}_{V_a}(\omega) \cap \mathcal{J}_{V_b}(\omega) = \mathcal{J}_{V_a \cap V_b}(\omega) = \{0\}$ , es decir,

$$\ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_a(\omega)\mathcal{I}_\omega) \cap \ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_b(\omega)\mathcal{I}_\omega) = \{0\},$$

para casi todo  $\omega \in D$ .

Supongamos que existe un conjunto medible  $A \subset \Sigma(V_a) \cap \Sigma(V_b)$  tal que  $|A| > 0$  y  $\hat{a}(\omega) = \hat{b}(\omega)$  cuando  $\omega \in A$ . Entonces, si  $\omega \in A$ , tenemos que

$$\ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_a(\omega)\mathcal{I}_\omega) = \ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_b(\omega)\mathcal{I}_\omega) = \{0\},$$

lo cual es una contradicción.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Sea  $f \in V_a \cap V_b$ , entonces  $Lf = \Lambda_a f = \Lambda_b f$  y por lo tanto,

$$(\hat{a} - \hat{b})(\omega)\mathcal{T}f(\omega) = 0,$$

para casi todo  $\omega \in D$ . Por (ii), tenemos que  $\mathcal{T}f(\omega) = 0$  para casi todo  $\omega \in \Sigma(V_a) \cap \Sigma(V_b)$ . Dado que  $\Sigma(V_a \cap V_b) \subseteq \Sigma(V_a) \cap \Sigma(V_b)$ , deducimos que  $f = 0$ .  $\square$

## 3.2 Selecciones medibles de autovalores

En esta sección vamos a investigar la existencia de una selección medible de autovalores para un operador rango medible  $\mathcal{R} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ .

Comenzamos con el caso donde  $\dim \mathcal{J}(\omega)$  es constante y finita para casi todo  $\omega \in D$ . Primero, veremos que para una matriz  $M = M(\omega)$  de tamaño  $n \times n$  de funciones medibles existe una selección de autovalores medibles.

**Proposición 3.2.1.** *Si  $M = M(\omega)$  es una matriz de tamaño  $n \times n$  de funciones medibles definidas sobre un conjunto medible  $D$ , entonces existen  $n$  funciones medibles  $\lambda_j : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , tales que  $\lambda_1(\omega), \dots, \lambda_n(\omega)$  son los autovalores de  $M(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ , contadas con multiplicidad.*

*Demostración.* Sea  $M_n$  el álgebra de matrices complejas de tamaño  $n \times n$ . Por [16, Corolario 4], existe un mapa medible Borel  $J : M_n \rightarrow M_n$  tal que para toda  $A \in M_n$ ,  $J(A)$  es la forma canónica de Jordan de  $A$ . Como  $M : D \rightarrow M_n$  es medible, entonces  $J \circ M : D \rightarrow M_n$  es medible. Ahora, como las entradas de la diagonal de la forma canónica de Jordan de una matriz son sus autovalores, el resultado sigue.  $\square$

Como consecuencia, tenemos que:

**Teorema 3.2.2.** *Sea  $\mathcal{R} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$  un operador rango medible sobre una función rango medible  $\mathcal{J}$  que satisface que  $\dim \mathcal{J}(\omega) = n$  para casi todo  $\omega \in B$  donde  $B \subseteq D$  es medible. Entonces, existen  $n$  funciones medibles  $\lambda_j : B \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , tales que  $\lambda_1(\omega), \dots, \lambda_n(\omega)$  son los autovalores de  $\mathcal{R}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in B$ , contadas con multiplicidad.*

*Demostración.* Sean  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$  y el conjunto  $A_n$  como en el Lema 1.3.14. Definamos para cada  $\omega \in A_n$  el operador  $\nu(\omega) : \mathcal{J}(\omega) \rightarrow \mathbb{C}^n$  como

$$\nu(\omega)(\mathcal{T}\varphi_i(\omega)) = e_i,$$

para  $i = 1, \dots, n$ . Este es el operador de cambio de base de  $\{\mathcal{T}\varphi_1(\omega), \dots, \mathcal{T}\varphi_n(\omega)\}$  a  $\{e_1, \dots, e_n\}$  para casi todo  $\omega \in A_n$ .

Cuando  $\dim \mathcal{J}(\omega) = n$  en casi todo  $\omega \in B$ , el operador rango  $\mathcal{R}(\omega)$  se puede ver como una matriz de tamaño  $n \times n$  de funciones medibles sobre  $B$ , que denotaremos como  $[\mathcal{R}](\omega)$  (ver Proposición 1.4.5).

Como  $B \subseteq A_n$ , tenemos que para casi todo  $\omega \in B$ ,  $\mathcal{R}(\omega) = \nu(\omega)^{-1}[\mathcal{R}](\omega)\nu(\omega)$ . Entonces, si  $\lambda : B \rightarrow \mathbb{C}$  es una función medible, vale que

$$\ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda(\omega)\mathcal{I}_\omega) = \ker\left(\nu(\omega)^{-1}([\mathcal{R}](\omega) - \lambda(\omega)\mathcal{I}_\omega)\nu(\omega)\right)$$

para casi todo  $\omega \in B$ . Como consecuencia, los autovalores medibles de  $\mathcal{R}(\omega)$  y  $[\mathcal{R}](\omega)$  coinciden, y la Proposición 3.2.1 nos da lo que queremos.  $\square$

Para el caso donde  $\dim \mathcal{J}(\omega) < \infty$  para casi todo  $\omega \in D$ , podemos construir funciones en  $L^\infty(D)$  tales que restringidas a ciertos conjuntos medibles, son autovalores de  $\mathcal{R}(\omega)$ .

**Teorema 3.2.3.** *Sea  $\mathcal{R} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$  un operador rango medible y acotado sobre una función rango medible  $\mathcal{J}$  que satisface que  $\dim \mathcal{J}(\omega) < \infty$  para casi todo  $\omega \in D$ . Entonces, existen funciones  $\lambda_j \in L^\infty(D)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , tales que*

- (i)  $\lambda_j(\omega) \neq \lambda_{j'}(\omega)$  para  $j \neq j'$  y para casi todo  $\omega \in D$ ,
- (ii) si  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  son los conjuntos del Lema 1.3.14 y  $A_{n,i} := \{\omega \in A_n : \#\sigma(\mathcal{R}(\omega)) = i\}$ , entonces  $\sigma(\mathcal{R}(\omega)) = \{\lambda_1(\omega), \dots, \lambda_i(\omega)\}$  para casi todo  $\omega \in A_{n,i}$  y para todo  $i \leq n$ ,  $i, n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Sean  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  los conjuntos medibles y disjuntos del Lema 1.3.14. Tenemos que  $\Sigma(V) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , por el Teorema 3.2.2, existen  $n$  funciones medibles definidas sobre  $A_n$ , denotemoslas

$$\lambda_1^n, \dots, \lambda_n^n : A_n \rightarrow \mathbb{C},$$

tales que en casi todo  $\omega \in A_n$  los valores que estas funciones toman son los autovalores de  $\mathcal{R}(\omega)$ , contados con multiplicidad.

Ahora, para un  $n \in \mathbb{N}$  fijo y para todo  $1 \leq i \leq n$  los conjuntos  $A_{n,i}$  son

$$A_{n,i} = \{\omega \in A_n : \#\{\lambda_1^n(\omega), \dots, \lambda_n^n(\omega)\} = i\}.$$

Luego, estos también son conjuntos medibles y disjuntos (posiblemente de medida cero) tales que  $A_n = \bigcup_{i=1}^n A_{n,i}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sobre cada uno de estos conjuntos  $A_{n,i}$  tenemos  $i$  funciones medibles

$$\lambda_1^{n,i}, \dots, \lambda_i^{n,i} : A_{n,i} \rightarrow \mathbb{C},$$

tales que  $\lambda_j^{n,i}(\omega)$  es un autovalor de  $\mathcal{R}(\omega)$  y  $\lambda_j^{n,i}(\omega) \neq \lambda_{j'}^{n,i}(\omega)$  cuando  $j \neq j'$  para casi todo  $\omega \in A_{n,i}$ . La medibilidad de  $\lambda_j^{n,i}$  se puede justificar con el argumento como describimos ahora: particionyo  $A_{n,i}$  en todas las posibilidades donde  $i$  autovalores de  $\{\lambda_1^n(\omega), \dots, \lambda_n^n(\omega)\}$  son distintos y pegyolos apropiadamente obtenemos medibilidad.

Además, si  $\|\mathcal{R}(\omega)\| \leq K$  para casi todo  $\omega \in D$ , entonces tenemos que  $|\lambda_j^{n,i}(\omega)| \leq K$  para casi todo  $\omega \in A_{n,i}$ , y para todo  $j \leq i \leq n$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Ahora procedemos a pegar estas funciones como sigue:

Para todo  $j \in \mathbb{N}$ , sea  $\lambda_j : D \rightarrow \mathbb{C}$  definida como

$$\lambda_j(\omega) := \begin{cases} \lambda_j^{n,i}(\omega), & \text{cuando } \omega \in A_{n,i}, \text{ para } n \geq i \geq j, \\ K + j & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Estas son funciones medibles que satisfacen que  $\lambda_j(\omega) \neq \lambda_{j'}(\omega)$  cuando  $j \neq j'$  para casi todo  $\omega \in D$  y  $\lambda_j \in L^\infty(D)$  para  $j \in \mathbb{N}$ .

Finalmente, notemos que para todo  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_j(\omega)\mathcal{I}_\omega) = \ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_j^{n,i}(\omega)\mathcal{I}_\omega)$  para casi todo  $\omega \in A_{n,i}$  y para todo  $n \geq i \geq j$ . Luego,  $\lambda_j(\omega)$  es un autovalor de  $\mathcal{R}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in A_{n,i}$  y para todo  $n \geq i \geq j$ . De lo contrario,  $\ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_j(\omega)\mathcal{I}_\omega) = \{0\}$  ya que  $\lambda_j(\omega) = K + j$  no es un autovalor de  $\mathcal{R}(\omega)$ .  $\square$

Las funciones  $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  del Teorema 3.2.3 claramente no son únicas.

Definamos algunos elementos a los cuales recurriremos más adelante. Para  $i \in \mathbb{N}$ , sea

$$B_i := \bigcup_{n=i}^{\infty} A_{n,i}, \quad \text{y} \quad g := \max\{i \in \mathbb{N} : |B_i| > 0\}. \quad (3.2.1)$$

Observar que, de hecho,  $B_i$  es el conjunto de todos los  $\omega \in \Sigma(V)$  para los cuales  $\mathcal{R}(\omega)$  tiene exactamente  $i$  autovalores distintos. Luego, es fácil ver que

$$g = \sup_{\omega \in \Sigma(V)} \text{ess} \# \sigma(\mathcal{R}(\omega)).$$

Por otro lado, para  $j \in \mathbb{N}$ , sea

$$C_j := \bigcup_{i=j}^{\infty} B_i, \quad (3.2.2)$$

donde  $B_i$  son los conjuntos definidos atrás. Notar que  $C_{j+1} \subseteq C_j \subseteq \Sigma(V)$  para todo  $j \in \mathbb{N}$  y que cada  $C_j$  es el conjunto de todos los  $\omega \in \Sigma(V)$  para los cuales  $\mathcal{R}(\omega)$  tiene por lo menos  $j$  autovalores distintos.

#### **Observación 3.2.4.**

- (i) *Supongamos que  $\mathcal{J}$  es la función rango de un espacio  $H$ -invariante  $V$  que es finitamente generado. Entonces los conjuntos  $A_n$  tienen medida positiva sólo para finitos valores de  $n$ . En particular,  $|A_n| = 0$  para todo  $n > \mathcal{L}(V)$ . En ese caso, si descartamos las funciones  $\lambda_j$  tales que, para casi todo  $\omega \in D$ ,  $\lambda_j(\omega)$  no es un autovalor de  $\mathcal{R}(\omega)$ , el procedimiento anterior va a generar a lo sumo  $\mathcal{L}(V)$  funciones.*

*Más precisamente, si  $g$  es como en (3.2.1), tenemos que  $g \leq \mathcal{L}(V)$  y el procedimiento va a generar exáctamente  $g$  funciones.*

- (ii) *Si  $C_j$  es como en (3.2.2), podemos ver que por la construcción de las funciones  $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  del Teorema 3.2.3,*

$$C_j = \left\{ \omega \in D : \ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_j(\omega)\mathcal{I}_\omega) \neq \{0\} \right\},$$

*para todo  $j \in \mathbb{N}$  y  $|C_j| = 0$  para todo  $j > g$ .*



Ahora, si queremos remover la condición  $\dim \mathcal{J}(\omega) < \infty$  para casi todo  $\omega \in D$ , el Teorema 3.2.3 no es útil ya que su prueba se basa en que la dimensión de  $\mathcal{J}(\omega)$  es finita para casi todo  $\omega \in D$ . Por otro lado, si admitimos que la dimensión de  $\mathcal{J}(\omega)$  sea infinita sobre un conjunto de medida positiva, el espectro de  $\mathcal{R}(\omega)$  ya no se conforma únicamente de autovalores y necesitamos imponer más condiciones para poder encontrar selecciones medibles de estos. En el resultado que sigue haremos uso del Teorema de Selección de Castaign (Teorema 1.4.14) y, más precisamente, el siguiente lema.

**Lema 3.2.5.** *Sea  $(X, \mathcal{M})$  un espacio de medida, y sea  $F : X \rightsquigarrow \mathbb{C}$  una función multivaluada a valores cerrados no vacíos medible tal que  $F(x) \subseteq K$  para todo  $x \in X$  con  $K \subset \mathbb{C}$  un conjunto compacto. Entonces, existe una sucesión de funciones medibles y acotadas  $g_j : X \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $j \in \mathbb{N}$  tales que para cada  $j \neq j'$ ,  $g_j(x) \neq g_{j'}(x)$  para todo  $x \in X$  y*

$$F(x) \subset \overline{\{g_j(x) : j \in \mathbb{N}\}}, \quad x \in X.$$

*Demostración.* Por el Teorema 1.4.14 tenemos una sucesión de funciones medibles  $f_j : X \rightarrow Y$ ,  $j \in \mathbb{N}$  tales que  $F(x) = \overline{\{f_j(x) : j \in \mathbb{N}\}}$  para todo  $x \in X$ . Vamos a construir las funciones  $g_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$  inductivamente. Tomemos  $z_0 \notin K$  tal que  $z_0 + j \notin K$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ .

Sea  $g_1 := f_1$ . Ahora, consideremos el conjunto  $E_2 := \{x \in X : f_2(x) = g_1(x)\}$ . Dado que tanto  $f_2$  como  $g_1$  son funciones medibles, tenemos que  $E_2$  es medible. Ahora, definimos  $g_2 : X \rightarrow \mathbb{C}$  como sigue,

$$g_2(x) := \begin{cases} f_2(x) & x \notin E_2 \\ z_0 + 2 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Es claro que  $g_2$  es una función medible y acotada, y  $g_1(x) \neq g_2(x)$  para todo  $x \in X$ .

Ahora, sea  $E_3 := \{x \in X : f_3(x) = g_2(x)\} \cup \{x \in X : f_3(x) = g_1(x)\}$ . De nuevo, como  $f_3, g_2$  y  $g_1$  son funciones medibles,  $E_3$  es un conjunto medible. Por lo tanto, definimos  $g_3 : X \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$g_3(x) := \begin{cases} f_3(x) & x \notin E_3 \\ z_0 + 3 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Otra vez,  $g_3$  es una función medible y acotada, y  $g_3(x) \neq g_2(x) \neq g_1(x)$  para todo  $x \in X$ .

Procediendo de esta manera, en numerables pasos se obtiene una sucesión de funciones medibles y acotadas  $g_j : X \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $j \in \mathbb{N}$  tales que  $g_j(x) \neq g_{j'}(x)$  para  $j \neq j'$  y para todo  $x \in X$ . Más aún, es claro que por construcción  $\{f_j(x) : j \in \mathbb{N}\} \subset \{g_j(x) : j \in \mathbb{N}\}$  para todo  $x \in X$  y luego  $F(x) \subset \overline{\{g_j(x) : j \in \mathbb{N}\}}$  para todo  $x \in X$ .  $\square$

**Teorema 3.2.6.** *Sea  $\mathcal{R} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$  un operador rango medible y acotado sobre una función rango  $\mathcal{J}$ . Supongamos que todos los autovalores de  $\mathcal{R}(\omega)$  son puntos aislados de  $\sigma(\mathcal{R}(\omega))$  para casi todo  $\omega \in D$ . Entonces existen funciones  $\lambda_j \in L^\infty(D)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , tales que*

- (i)  $\lambda_j(\omega) \neq \lambda_{j'}(\omega)$  para  $j \neq j'$  y para casi todo  $D$ ,
- (ii)  $\sigma_p(\mathcal{R}(\omega)) \subset \{\lambda_j(\omega) : j \in \mathbb{N}\}$  para casi todo  $\omega \in D$ .

*Demostración.* Por el Teorema 1.4.15 y el Lema 3.2.5, existe una sucesión de funciones medibles y acotadas  $\lambda_j : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $j \in \mathbb{N}$  tales que  $\lambda_j(\omega) \neq \lambda_{j'}(\omega)$  para todo  $j \neq j'$  y  $\sigma(\mathcal{R}(\omega)) \subseteq \overline{\{\lambda_j(\omega) : j \in \mathbb{N}\}}$  para casi todo  $\omega \in D$ . Además, como todos los autovalores de  $\mathcal{R}(\omega)$  son puntos aislados de  $\sigma(\mathcal{R}(\omega))$  para casi todo  $\omega \in D$ , entonces

$$\sigma_p(\mathcal{R}(\omega)) \subset \{\lambda_j(\omega) : j \in \mathbb{N}\}$$

para casi todo  $\omega \in D$ .

Finalmente, si  $\|\mathcal{R}(\omega)\| \leq K$  para casi todo  $\omega \in D$ , entonces  $|\lambda_j(\omega)| \leq K$  para casi todo  $\omega \in D$  y luego  $\lambda_j \in L^\infty(D)$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . □

### 3.3 $H$ -diagonalización: caso finitamente generado

Ahora veremos la definición de  $H$ -diagonalización.

En esta sección nos dedicaremos al caso donde el operador actúa sobre un espacio  $H$ -invariante *finitamente generado*. Para establecer condiciones sobre un operador  $L$  para que sea  $H$ -diagonalizable, explotamos la estructura finito-dimensional de la función rango y el operador rango: si  $\mathcal{R} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$  es el operador rango de  $L$ , para casi todo  $\omega \in D$ , tenemos que  $\mathcal{R}(\omega) : \mathcal{J}(\omega) \rightarrow \mathcal{J}(\omega)$  es una transformación lineal actuando en un espacio vectorial de dimensión finita.

#### 3.3.1 Definición y propiedades de $s$ -diagonalizaciones

**Definición 3.3.1.** Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  finitamente generado y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado. Decimos que  $L$  es  $H$ -diagonalizable si existen un número finito de sucesiones de espectro acotado  $a_1, \dots, a_m \in \ell^2(H)$  tales que  $\Lambda_{a_1}, \dots, \Lambda_{a_m}$  son  $H$ -autovalores de  $L$  y  $V$  se descompone en la suma directa

$$V = V_{a_1} \oplus \dots \oplus V_{a_m}, \tag{3.3.1}$$

donde  $\Lambda_{a_j}$  y  $V_{a_j}$  son como en la Definición 3.1.3 para  $j = 1, \dots, m$ . En ese caso, decimos que  $(a_1, \dots, a_m)$  es una  $H$ -diagonalización de  $L$ .

**Observación 3.3.2.**

- (i) *Notar que si  $(a_1, \dots, a_m)$  es una H-diagonalización de  $L$ , entonces cada  $f \in V$  puede ser escrita de manera única como  $f = f_1 + \dots + f_m$  con  $f_j \in V_{a_j}$ . Por el otro lado, tenemos que  $Lf_j = \Lambda_{a_j}f_j$ , para  $j = 1, \dots, m$ . Si denotamos  $Q_{V_{a_j}}$  a la proyección oblicua de  $V$  sobre  $V_{a_j}$ , es decir  $Q_{V_{a_j}}f = f_j$ , podemos escribir:*

$$L = \sum_{j=1}^m \Lambda_{a_j} Q_{V_{a_j}}.$$

- (ii) *La descomposición en (3.3.1) no es única. Más aún, el número  $m$  de H-autoespacios de  $L$  para los cuales  $V$  admite una descomposición como en (3.3.1) podría ser arbitrariamente grande.*

*En efecto, tomemos por ejemplo el primer H-autovalor  $\Lambda_{a_1}$ , entonces, por la Proposición 3.1.5,  $\lambda_{a_1}(\omega) = \hat{a}_1(\omega)$  es un autovalor para  $\mathcal{R}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in \Sigma(V_{a_1})$ . Ahora, separemos  $\Sigma(V_{a_1}) = A \cup B$  donde  $A \cap B = \emptyset$  y ambos son de medida positiva. Luego, definamos  $\lambda_A(\omega) := \lambda_{a_1}(\omega)\chi_A(\omega)$  y  $\lambda_B(\omega) := \lambda_{a_1}(\omega)\chi_B(\omega)$ . Estas son funciones medibles que son autovalores de  $\mathcal{R}(\omega)$  sobre un conjunto de medida positiva. Por el Lema 3.1.6, es posible construir sucesiones  $a_A$  y  $a_B$  de espectro acotado tales que:  $\lambda_A(\omega) = \hat{a}_A(\omega)$  para casi todo  $\omega \in A$ ,  $\lambda_B(\omega) = \hat{a}_B(\omega)$  para casi todo  $\omega \in B$ ,  $\Lambda_{a_A}, \Lambda_{a_B}$  son H-autovalores de  $L$  y  $V_{a_1} = V_{a_A} \oplus V_{a_B}$ . Entonces, obtenemos otra descomposición en H-autoespacios:  $V = V_{a_A} \oplus V_{a_B} \oplus V_{a_2} \oplus \dots \oplus V_{a_m}$ .*

La siguiente proposición muestra que si  $L$  es acotado, inversible y H-diagonalizable,  $L^{-1}$  debe ser H-diagonalizable también.

**Proposición 3.3.3.** *Sea  $V$  un espacio H-invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  finitamente generado y  $L : V \rightarrow V$  un operador H-conmutante acotado e inversible. Si  $L$  es H-diagonalizable entonces  $L^{-1}$  es H-diagonalizable. Además, si  $(a_1, \dots, a_m)$  es una H-diagonalización de  $L$ , entonces  $(b_1, \dots, b_m)$  es una H-diagonalización de  $L^{-1}$  con  $\hat{b}_j(\omega) = (\hat{a}_j(\omega))^{-1}$  para casi todo  $\omega \in D$  y  $V_{b_j} = \ker(L^{-1} - \Lambda_{b_j}) = V_{a_j}$  para  $j = 1, \dots, m$ .*

*Demostración.* Fijemos  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Dado que  $L$  es inversible y  $L|_{V_{a_j}} = \Lambda_{a_j} : V_{a_j} \rightarrow V_{a_j}$ , vemos que  $\Lambda_{a_j}$  es inversible. Sea  $\mathcal{R}_{a_j}$  el operador rango asociado a  $\Lambda_{a_j}$ , esto es  $\mathcal{R}_{a_j}(\omega) = \hat{a}_j(\omega)\mathcal{I}_\omega$  para casi todo  $\omega \in D$ . Por el ítem (v) del Teorema 1.4.4, tenemos que existen dos constantes  $A, B > 0$  tales que  $A \leq |\hat{a}_j(\omega)| \leq B$  para casi todo  $\omega \in D$ .

Definamos  $b_j \in \ell^2(H)$  por su transformada de Fourier como  $\hat{b}_j(\omega) := (\hat{a}_j(\omega))^{-1}$  para casi todo  $\omega \in D$ . Entonces, tenemos que  $B^{-1} \leq |\hat{b}_j(\omega)| \leq A^{-1}$  para casi todo  $\omega \in D$ . En particular,  $b_j$  es de espectro acotado.

Veamos que  $\Lambda_{b_j}$  es un  $H$ -autovalor de  $L^{-1}$ . Sea  $f \in V_{a_j}$ , entonces  $\mathcal{T}(Lf)(\omega) = \hat{a}_j(\omega)\mathcal{T}f(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ . Ahora, sea  $g := Lf$  en  $V_{a_j}$ , tenemos que  $\mathcal{T}g(\omega) = \hat{a}_j(\omega)\mathcal{T}(L^{-1}g)(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ , que es lo mismo que  $\hat{b}_j(\omega)\mathcal{T}g(\omega) = \mathcal{T}(L^{-1}g)(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ . Esto prueba que para toda  $g \in V_{a_j}$ ,  $L^{-1}g = \Lambda_{b_j}g$  y por lo tanto  $V_{a_j} \subseteq \ker(L^{-1} - \Lambda_{b_j})$ . Un argumento similar prueba que, de hecho,  $V_{a_j} = \ker(L^{-1} - \Lambda_{b_j})$ .  $\square$

Uno de nuestros principales objetivos es explorar la relación entre la noción de  $H$ -diagonalización para un operador  $H$ -conmutante  $L$  y la diagonalización de las fibras de su operador rango.

En primer lugar, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.3.4.** *Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  finitamente generado y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado con operador rango  $\mathcal{R}$ . Si  $L$  es  $H$ -diagonalizable, entonces  $\mathcal{R}(\omega)$  es diagonalizable para casi todo  $\omega \in \Sigma(V)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $(a_1, \dots, a_m)$  es una  $H$ -diagonalización de  $L$ . Entonces, por la Proposition 3.1.5, para todo  $j = 1, \dots, m$ ,  $\lambda_{a_j}(\omega) = \hat{a}_j(\omega)$  es un autovalor de  $\mathcal{R}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in \Sigma(V_{a_j})$  y la función rango medible  $\mathcal{J}_{V_{a_j}}(\omega) = \ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_{a_j}(\omega)\mathcal{I}_\omega)$  es su autoespacio asociado. Veremos que  $\mathcal{J}(\omega) = \mathcal{J}_{V_{a_1}}(\omega) \oplus \dots \oplus \mathcal{J}_{V_{a_m}}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ .

Primero, notemos que como  $V_{a_j} \subseteq V$ , tenemos que  $\mathcal{J}_{V_{a_j}}(\omega) \subseteq \mathcal{J}(\omega)$  para todo  $j = 1, \dots, m$ , y luego  $\mathcal{J}_{V_{a_1}}(\omega) + \dots + \mathcal{J}_{V_{a_m}}(\omega) \subseteq \mathcal{J}(\omega)$ . Para la otra inclusión, si  $f \in V$ , entonces  $f = f_1 + \dots + f_m$ , donde  $f_j \in V_{a_j}$  para  $j = 1, \dots, m$ . Luego,  $\mathcal{T}f(\omega) = \mathcal{T}f_1(\omega) + \dots + \mathcal{T}f_m(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ , lo que implica que

$$\mathcal{J}(\omega) = \overline{\text{gen}\{\mathcal{T}\varphi(\omega) : \varphi \in \Phi\}} \subseteq \overline{\mathcal{J}_{V_{a_1}}(\omega) + \dots + \mathcal{J}_{V_{a_m}}(\omega)},$$

donde  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R}^d)$  es tal que  $V = S(\Phi)$ . Dado que  $\mathcal{J}(\omega)$  tiene dimensión finita para casi todo  $\omega \in D$ , la suma de subespacios cerrados es cerrada. Por (iii) en el Lema 1.3.12, la suma es directa.  $\square$

### Observación 3.3.5.

- (i) *Notar que acabamos de probar que si  $\mathcal{J}$  es la función rango de  $V$  y  $(a_1, \dots, a_m)$  es una  $H$ -diagonalización de  $L$ , entonces  $\mathcal{J}(\omega) = \mathcal{J}_{V_{a_1}}(\omega) \oplus \dots \oplus \mathcal{J}_{V_{a_m}}(\omega)$ , donde  $\mathcal{J}_{V_{a_j}}(\omega)$  es el autoespacio asociado al autovalor  $\lambda_{a_j}(\omega) = \hat{a}_j(\omega)$  de  $\mathcal{R}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in \Sigma(V_{a_j})$ , para  $j = 1, \dots, m$ .*

De esto podemos deducir que para casi todo  $\omega \in \Sigma(V)$ , el número de autovalores de  $\mathcal{R}(\omega)$  es a lo sumo  $m$ . Por lo tanto, si  $\mathfrak{g}$  es como en (3.2.1), entonces  $\mathfrak{g} \leq m$ .

- (ii) En la Observación 3.3.2 vimos que el número de  $H$ -autoespacios de una  $H$ -diagonalización puede ser arbitrariamente grande. Por la Proposición 3.1.7 y por el hecho de que  $\dim \mathcal{J}(\omega) \leq \mathcal{L}(V)$  para casi todo  $\omega \in D$ , sabemos que para casi todo  $\omega \in \Sigma(V)$ , la cantidad de autoespacios  $\mathcal{J}_{V_{a_j}}(\omega)$  no nulos no puede superar  $\mathcal{L}(V)$ .

El siguiente lema muestra la relación entre los espectros de los  $H$ -autoespacios de una  $H$ -diagonalización y la cantidad de autovalores de  $\mathcal{R}(\omega)$ .

**Lema 3.3.6.** *Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  finitamente generado y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado y  $H$ -diagonalizable. Sea  $(a_1, \dots, a_m)$  una  $H$ -diagonalización de  $L$ . Definamos para  $\omega \in \Sigma(V)$ ,*

$$h(\omega) := \sum_{j=1}^m \chi_{\Sigma(V_{a_j})}(\omega). \quad (3.3.2)$$

Entonces  $h(\omega) = \#\sigma(\mathcal{R}(\omega))$  para casi todo  $\omega \in \Sigma(V)$ .

*Demostración.* La función  $h(\omega)$  es medible y tenemos que  $h(\omega) \in \{1, \dots, m\}$  para casi todo  $\omega \in \Sigma(V)$ . Sea  $s \in \{1, \dots, m\}$  y definamos  $\mathcal{P}_s := \{P \subseteq \{1, \dots, m\} : \#P = s\}$ . Tenemos que  $h^{-1}(s) = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_s} B_P$  donde  $B_P := \{\omega \in \Sigma(V) : \omega \in \Sigma(V_{a_j}) \text{ if y only if } j \in P\}$ .

Dado un conjunto  $P = \{j_1, \dots, j_s\} \in \mathcal{P}_s$  vemos que, por la Proposición 3.1.5 y el Teorema 3.3.4, para casi todo  $\omega \in B_P$ ,  $\hat{a}_{j_1}(\omega), \dots, \hat{a}_{j_s}(\omega)$  son autovalores de  $\mathcal{R}(\omega)$  y

$$\mathcal{J}(\omega) = \mathcal{J}_{V_{a_{j_1}}}(\omega) \oplus \dots \oplus \mathcal{J}_{V_{a_{j_s}}}(\omega) \oplus \bigoplus_{1 \leq j \leq m, j \notin P} \{0\}.$$

Esto prueba que  $\#\sigma(\mathcal{R}(\omega)) = s$  para casi todo  $\omega \in B_P$ .

Como esto es cierto para todo  $P \in \mathcal{P}_s$  y para todo  $s \in \{1, \dots, m\}$ , podemos deducir que  $h(\omega) = \#\sigma(\mathcal{R}(\omega))$  para casi todo  $\omega \in \Sigma(V)$ .  $\square$

Dada una  $H$ -diagonalización  $(a_1, \dots, a_m)$  de  $L$ , la familia de espectros  $\{\Sigma(V_{a_j})\}_{j=1}^m$  siempre es un cubrimiento de  $\Sigma(V)$ . Vamos a probar en el Teorema 3.3.13 que todo operador  $H$ -diagonalizable  $L$  actuando sobre  $V$  admite una  $H$ -diagonalización  $(a_1, \dots, a_m)$  cuyos espectros satisfacen que  $\Sigma(V_{a_{j+1}}) \subseteq \Sigma(V_{a_j})$  para todo  $j = 1, \dots, m$ .

En la siguiente proposición veremos que cuando esta inclusión vale, el número de  $H$ -autoespacios en la descomposición asociada y sus espectros, están unívocamente determinados. Más adelante, veremos que una descomposición que satisface las inclusiones de arriba tiene el número minimal de  $H$ -autoespacios en el Teorema 3.3.15.

**Proposición 3.3.7.** *Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  finitamente generado y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado y  $H$ -diagonalizable con operador rango  $\mathcal{R}$ . Sea  $(a_1, \dots, a_m)$  una  $H$ -diagonalización de  $L$ .*

*Si  $\Sigma(V_{a_{j+1}}) \subseteq \Sigma(V_{a_j})$  para todo  $j = 1, \dots, m$ , entonces los espectros están unívocamente determinados por*

$$\Sigma(V_{a_j}) = \{ \omega \in \Sigma(V) : \#\sigma(\mathcal{R}(\omega)) \geq j \}$$

*para  $j = 1, \dots, m$  y  $m = g$ , donde  $g$  es como en (3.2.1).*

*Demostración.* Dado que  $\Sigma(V_{a_{j+1}}) \subseteq \Sigma(V_{a_j})$  para todo  $j = 1, \dots, m$ , es fácil ver que  $\Sigma(V_{a_j}) = \{ \omega \in \Sigma(V) : h(\omega) \geq j \}$  donde  $h$  es la función definida en (3.3.2). Luego, por el Lema 3.3.6, obtenemos inmediatamente que  $\Sigma(V_{a_j}) = \{ \omega \in \Sigma(V) : \#\sigma(\mathcal{R}(\omega)) \geq j \}$  para todo  $j = 1, \dots, m$ .

Ahora, sabemos que  $g \leq m$ . Supongamos que  $g < m$ . Entonces, tenemos que  $|\Sigma(V_{a_j})| = 0$  para todo  $g < j \leq m$ . Esto implica que  $V_{a_j} = \{0\}$  para todo  $g < j \leq m$ , lo cual no es posible. Por lo tanto,  $m = g$ .  $\square$

Notar que los conjuntos  $\{ \omega \in \Sigma(V) : \#\sigma(\mathcal{R}(\omega)) \geq j \}$  coinciden con los conjuntos  $C_j$  de (3.2.2) para todo  $j = 1, \dots, g$ .

### 3.3.2 Operadores rango con fibras diagonalizables

Lo que queremos ahora es obtener una recíproca para el Teorema 3.3.4. Si asumimos que para casi todo  $\omega$  el operador rango  $\mathcal{R}(\omega)$  es diagonalizable, entonces podemos encontrar una descomposición de  $\mathcal{J}(\omega)$  en un número finito de autoespacios medibles como veremos en el teorema que sigue. Sin embargo, para que esta descomposición corresponda a una  $H$ -diagonalización del operador  $H$ -conmutante, tenemos que añadir una hipótesis extra de uniformidad que explicaremos en la siguiente subsección.

**Teorema 3.3.8.** *Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  finitamente generado con función rango  $\mathcal{J}$ ,  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado con operador rango  $\mathcal{R}$ , y  $g$  como en (3.2.1). Si  $\mathcal{R}(\omega)$  es diagonalizable para casi todo  $\omega \in \Sigma(V)$ , entonces existen sucesiones de espectro acotado  $a_j \in \ell^2(H)$  y funciones rango  $\mathcal{J}_{a_j}(\omega) := \ker(\mathcal{R}(\omega) - \hat{a}_j(\omega)\mathcal{I}_\omega)$  para  $j = 1, \dots, g$  que satisfacen las siguientes condiciones:*

- (i)  $\mathcal{J}(\omega) = \mathcal{J}_{a_1}(\omega) \oplus \dots \oplus \mathcal{J}_{a_g}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ .
- (ii) Los conjuntos  $C_j = \{ \omega \in \Sigma(V) : \mathcal{J}_{a_j}(\omega) \neq \{0\} \}$  tienen medida positiva para todo  $j = 1, \dots, g$  y  $C_{j+1} \subseteq C_j$  para todo  $j = 1, \dots, g-1$ .

En particular,  $\Lambda_{a_1}, \dots, \Lambda_{a_g}$  son  $H$ -autovalores de  $L$ .

*Demostración.* Sean  $\{A_{n,i}\}_{n,i}$  como en el Teorema 3.2.3 y  $\lambda_1, \dots, \lambda_g \in L^\infty(D)$  las funciones medibles obtenidas luego de hacer un descarte como en (i) de la Observación 3.2.4.

Entonces, como  $\mathcal{R}(\omega)$  es diagonalizable para casi todo  $\omega \in \Sigma(V)$ , tenemos la siguiente descomposición

$$\mathcal{J}(\omega) = \bigoplus_{j=1}^g \ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_j(\omega)\mathcal{I}_\omega), \quad (3.3.3)$$

que vale para casi todo  $\omega \in D$ . En efecto, para casi todo  $\omega \notin \Sigma(V)$  tenemos que  $\mathcal{J}(\omega) = \{0\}$  y  $\ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_j(\omega)\mathcal{I}_\omega) = \{0\}$  para  $j = 1, \dots, g$ . Mientras que, para dados  $n, i$  y para casi todo  $\omega \in A_{n,i}$ , tenemos que

$$\bigoplus_{j=1}^g \ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_j(\omega)\mathcal{I}_\omega) = \bigoplus_{j=1}^i \ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_j^{n,i}(\omega)\mathcal{I}_\omega) \oplus \bigoplus_{j=i}^g \{0\},$$

que es igual a  $\mathcal{J}(\omega)$  porque  $\{\lambda_j^{n,i}(\omega)\}_{j=1}^i$  son los autovalores de  $\mathcal{R}(\omega)$  en  $A_{n,i}$ .

Finalmente, para cada  $j = 1, \dots, g$ ,  $\lambda_j \in L^\infty(D)$ , existe una sucesión  $a_j \in \ell^2(H)$  de espectro acotado tal que  $\lambda_j(\omega) = \hat{a}_j(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$  y una función rango medible  $\mathcal{J}_{a_j}(\omega) = \ker(\mathcal{R}(\omega) - \hat{a}_j(\omega)\mathcal{I}_\omega)$ . Como tenemos que (3.3.3) es cierto para casi todo  $\omega \in D$ , estas funciones rango descomponen a  $\mathcal{J}(\omega)$  como se enuncia en (i). Además, por el ítem (ii) en la Observación 3.2.4, vemos que los conjuntos  $C_j$  tienen medida positiva y  $C_{j+1} \subseteq C_j$  para todo  $j = 1, \dots, g-1$ .  $\square$

En las condiciones del Teorema 3.3.8, por la Proposición 3.1.5, cada  $\mathcal{J}_{a_j}$  es la función rango asociada al espacio  $H$ -invariante  $V_{a_j}$ , es decir,  $\mathcal{J}_{a_j} = \mathcal{J}_{V_{a_j}}$ , y tenemos la descomposición  $\mathcal{J}(\omega) = \mathcal{J}_{V_{a_1}}(\omega) \oplus \dots \oplus \mathcal{J}_{V_{a_g}}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ .

En este punto, uno querría concluir que  $V = V_{a_1} \oplus \dots \oplus V_{a_g}$  y por lo tanto deducir que  $L$  es  $H$ -diagonalizable. Para que esto sea cierto, algunas consideraciones respecto a la suma de espacios infinito dimensionales deben ser tenidas en cuenta. Recordemos que, cuando la suma directa no es ortogonal, la suma de subespacios cerrados infinito dimensionales no es necesariamente cerrada. En particular, la suma de espacios  $H$ -invariantes no es cerrada en general, aunque es invariante por traslaciones. (Ver [64, 14] para ver ejemplos de dos espacios  $H$ -invariantes cuya suma no es cerrada). Una condición que nos permite esquivar este problema se describe en la siguiente subsección.

### 3.3.3 Ángulo entre subespacios

Ahora veremos una definición de ángulo entre subespacios que provee una condición para determinar cuando la suma de subespacios es cerrada (ver [42] y las referencias ahí dentro).

**Definición 3.3.9.** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert. El ángulo de la  $m$ -tupla de subespacios cerrados  $(M_1, \dots, M_m)$  en  $\mathcal{H}$  es el ángulo en  $[0, \pi/2]$  cuyo coseno está dado por*

$$c_b(M_1, M_2, \dots, M_m) := \left\| P_{M_m} \dots P_{M_2} P_{M_1} P_{M_0}^\perp \right\|.$$

$$\text{donde } M_0 = \bigcap_{j=1}^m M_j.$$

Notar que cuando  $r = 2$  esta definición es equivalente a la definición del ángulo de Friedrich entre dos subespacios [49]. El siguiente lema nos da una caracterización de cuándo  $c_b(M_1, \dots, M_m) < 1$  y fue probada en [22, Theorem 3.7.4].

**Lema 3.3.10.** *Sean  $M_1, \dots, M_m$  subespacios cerrados de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i)  $c_b(M_1, \dots, M_m) < 1$ ,
- (ii)  $M_1^\perp + \dots + M_m^\perp$  es cerrado.

El coseno del ángulo entre dos subespacios  $H$ -invariantes fue considerado primero en [63, 64]. En los próximos dos resultados, los espacios  $H$ -invariantes no son necesariamente finitamente generados. El siguiente lema provee una relación entre el ángulo de la tupla de espacios  $H$ -invariantes y el ángulo de la tupla de sus respectivas funciones rangos.

**Lema 3.3.11.** *Sean  $V_1, \dots, V_m$  espacios  $H$ -invariantes de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  y  $\mathcal{J}_{V_1}, \dots, \mathcal{J}_{V_m}$  sus respectivas funciones rango. Entonces*

$$c_b(V_1, \dots, V_m) = \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in D} c_b(\mathcal{J}_{V_1}(\omega), \dots, \mathcal{J}_{V_m}(\omega)). \quad (3.3.4)$$

Este lema se probó en [14] para el caso de  $m = 2$ . La prueba es fácil de extender a nuestro contexto, como veremos ahora.

*Demostración.* Llamemos  $U := \left( \bigcap_{j=1}^m V_j \right)^\perp$ . Por virtud de (ii) en el Lema 1.3.12,  $U$  es un espacio  $H$ -invariante y

$$\mathcal{J}_U(\omega) = \left( \bigcap_{j=1}^m \mathcal{J}_{V_j}(\omega) \right)^\perp,$$



para casi todo  $\omega \in D$ .

Como las proyecciones ortogonales sobre espacios  $H$ -invariantes son operadores  $H$ -conmutantes (ver Ejemplo 1.4.8), tenemos que  $P_{V_m} \dots P_{V_2} P_{V_1} P_U$  es  $H$ -conmutante y su operador rango es

$$P_{\mathcal{J}_{V_m}(\omega)} \dots P_{\mathcal{J}_{V_2}(\omega)} P_{\mathcal{J}_{V_1}(\omega)} P_{\mathcal{J}_U(\omega)}.$$

Luego, por (1.4.2)

$$\sup_{\omega \in D} \text{ese} \left\| P_{\mathcal{J}_{V_m}(\omega)} \dots P_{\mathcal{J}_{V_2}(\omega)} P_{\mathcal{J}_{V_1}(\omega)} P_{\mathcal{J}_U(\omega)} \right\| = \left\| P_{V_m} \dots P_{V_2} P_{V_1} P_U \right\|,$$

y finalmente la igualdad (3.3.4) es cierta.  $\square$

Como consecuencia tenemos:

**Proposición 3.3.12.** *Sean  $V_1, \dots, V_m$  espacios  $H$ -invariantes de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  y  $\mathcal{J}_{V_1}, \dots, \mathcal{J}_{V_m}$  sus respectivas funciones rangos. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i) *El espacio  $U := V_1 + \dots + V_m$  es cerrado. En particular, es un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .*
- (ii)  $c_b(V_1^\perp, \dots, V_m^\perp) < 1$ .
- (iii)  $\sup_{\omega \in D} \text{ese } c_b(\mathcal{J}_{V_1^\perp}(\omega), \dots, \mathcal{J}_{V_m^\perp}(\omega)) < 1$ .
- (iv)  $\sup_{\omega \in D} \text{ese } c_b(\mathcal{J}_{V_1}(\omega)^\perp, \dots, \mathcal{J}_{V_m}(\omega)^\perp) < 1$ .

Además, si (i)-(iv) valen, entonces tenemos que  $\mathcal{J}_U(\omega) = \mathcal{J}_{V_1}(\omega) + \dots + \mathcal{J}_{V_m}(\omega)$ , para casi todo  $\omega \in D$ .

*Demostración.* Por el Lema 3.3.10 sabemos que (i) y (ii) son equivalentes. Por Lema 3.3.11 vemos que (ii) es equivalent a (iii). Finalmente, la equivalencia entre (iii) y (iv) es inmediata por el ítem (ii) en el Lema 1.3.12.

Falta ver que  $\mathcal{J}_U(\omega) = \mathcal{J}_{V_1}(\omega) + \dots + \mathcal{J}_{V_m}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ . Análogamente al Teorema 3.3.4, vemos que  $\mathcal{J}_{V_1}(\omega) + \dots + \mathcal{J}_{V_m}(\omega) \subseteq \mathcal{J}_U(\omega)$  y  $\mathcal{J}_U(\omega) \subseteq \overline{\mathcal{J}_{V_1}(\omega) + \dots + \mathcal{J}_{V_m}(\omega)}$ . Estos espacios no son necesariamente finitamente generados, pero, dado que (iv) se satisface, la suma es cerrada para casi todo  $\omega \in D$ .  $\square$

### 3.3.4 Condiciones suficientes para la $H$ -diagonalización y minimalidad

Usando la Proposición 3.3.12, estamos listos para dar condiciones suficientes para que un operador  $H$ -conmutante sea  $H$ -diagonalizable.

Como ya discutimos, para deducir que  $L$  es  $H$ -diagonalizable de la condición de que  $\mathcal{R}(\omega)$  es diagonalizable para casi todo  $\omega$ , una condición de uniformidad en el ángulo debe ser requerida.

Para esto, debemos introducir una nueva notación. Sea  $\mathcal{R} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$  un operador rango medible sobre  $\mathcal{J}$  tal que  $\mathcal{R}(\omega)$  es diagonalizable en casi todo punto y sea  $Z \subseteq D$  el conjunto de excepciones de medida cero donde no lo es. Entonces, si notamos  $k(\omega) = \#\sigma(\mathcal{R}(\omega))$ , para  $\omega \in D \setminus Z$  sabemos que

$$\mathcal{J}(\omega) = E_{\mu_1(\omega)} \oplus \cdots \oplus E_{\mu_{k(\omega)}(\omega)},$$

donde  $\mu_1(\omega), \dots, \mu_{k(\omega)}(\omega)$  son los distintos autovalores de  $\mathcal{R}(\omega)$  y  $E_{\mu_1(\omega)} \cdots E_{\mu_{k(\omega)}(\omega)}$  son sus autoespacios asociados. Notemos que hasta el momento no nos importa la medibilidad. Luego, podemos definir

$$C_b(\omega) := c_b \left( E_{\mu_1(\omega)}^\perp, \dots, E_{\mu_{k(\omega)}(\omega)}^\perp \right).$$

Supongamos ahora que  $a_1, \dots, a_m \in \ell^2(H)$  son sucesiones de espectro acotado tales que  $\{\mathcal{J}_{a_j}(\omega) := \ker(\mathcal{R}(\omega) - \hat{a}_j(\omega)\mathcal{I}_\omega)\}_{j=1}^m$  descomponen  $\mathcal{J}(\omega)$  como

$$\mathcal{J}(\omega) = \mathcal{J}_{a_1}(\omega) \oplus \cdots \oplus \mathcal{J}_{a_m}(\omega)$$

para casi todo  $\omega \in D$ . La existencia de dichas sucesiones está garantizada por el Teorema 3.3.8. Luego, para todo  $\omega \in D \setminus Z$  tenemos que

$$\{E_{\mu_1(\omega)} \cdots E_{\mu_{k(\omega)}(\omega)}\} = \{\mathcal{J}_{a_1}(\omega), \dots, \mathcal{J}_{a_m}(\omega)\} \setminus \{0\}.$$

Con lo cual,  $C_b(\omega) = c_b(\mathcal{J}_{a_1}(\omega)^\perp, \dots, \mathcal{J}_{a_m}(\omega)^\perp)$  en casi todo punto y como consecuencia  $C_b$  es medible.

**Teorema 3.3.13.** *Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  finitamente generado con función rango  $\mathcal{J}$  y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado con operador rango  $\mathcal{R}$ . Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i)  $L$  es  $H$ -diagonalizable.
- (ii)  $\mathcal{R}(\omega)$  es diagonalizable para casi todo  $\omega \in \Sigma(V)$  y  $\sup_{\omega \in D} c_b(\omega) < 1$ .

Además, cuando (i) o (ii) valen, existen sucesiones  $a_1, \dots, a_g \in \ell^2(H)$  de espectro acotado, tales que  $(a_1, \dots, a_g)$  es una  $H$ -diagonalización de  $L$  y  $\Sigma(V_{a_{j+1}}) \subseteq \Sigma(V_{a_j})$  para  $j = 1, \dots, g-1$ , donde  $g$  es como en (3.2.1).

*Demostración.* Asumamos primero que (ii) se satisface y consideremos las sucesiones de espectro acotado  $a_1, \dots, a_g$  dados por el Teorema 3.3.8 y sus respectivas funciones rango  $\mathcal{J}_{a_j}(\omega) := \ker(\mathcal{R}(\omega) - \hat{a}_j(\omega)\mathcal{I}_\omega)$  para  $j = 1, \dots, g$ .

Por la Proposición 3.1.5, tenemos que  $V_{a_j} = \ker(L - \Lambda_{a_j})$  es un espacio  $H$ -invariante asociado a la función rango  $\mathcal{J}_{a_j}$ , es decir,  $\mathcal{J}_{a_j} = \mathcal{J}_{V_{a_j}}$ . De (ii) en el Teorema 3.3.8, sabemos que  $\Sigma(V_{a_j})$  tiene medida positiva,  $\Lambda_{a_j}$  es un  $H$ -autovalor de  $L$  para todo  $j = 1, \dots, g$  y  $\Sigma(V_{a_{j+1}}) \subseteq \Sigma(V_{a_j})$  para  $j = 1, \dots, g-1$ .

Debido a que  $C_b(\omega) = c_b(\mathcal{J}_{V_{a_1}}(\omega)^\perp, \dots, \mathcal{J}_{V_{a_g}}(\omega)^\perp)$ , por la Proposición 3.3.12, vemos que  $V_{a_1} \oplus \dots \oplus V_{a_g}$  es un espacio cerrado  $H$ -invariante que está contenido en  $V$  y sus funciones rango coinciden. Esto implica que  $V = V_{a_1} \oplus \dots \oplus V_{a_g}$ . Luego,  $L$  es  $H$ -diagonalizable y  $(a_1, \dots, a_g)$  es una  $H$ -diagonalización de  $L$ .

Para la recíproca, el Teorema 3.3.4 asegura la diagonalización de  $\mathcal{R}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in \Sigma(V)$ . Por otro lado, asumamos que  $(a_1, \dots, a_m)$  es una  $H$ -diagonalización de  $L$ . Como  $V$  es cerrado, por la Proposición 3.3.12 tenemos que  $c_b(V_{a_1}^\perp, \dots, V_{a_m}^\perp) < 1$  y, equivalentemente,  $\sup_{\omega \in D} C_b(\omega) < 1$ .  $\square$

A continuación, caracterizaremos el mínimo número de componentes en una  $H$ -diagonalización de  $L$ .

**Definición 3.3.14.** Dado  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  finitamente generado y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado y  $H$ -diagonalizable, definimos  $\beta(V, L)$  como el mínimo número natural  $m$  para el cual existen  $a_1, \dots, a_m$  sucesiones de espectro acotado tales que  $(a_1, \dots, a_m)$  es una  $H$ -diagonalización de  $L$ . Diremos que una  $H$ -diagonalización es minimal si tiene exáctamente  $\beta(V, L)$  componentes.

**Proposición 3.3.15.** Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  finitamente generado,  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado y  $H$ -diagonalizable. Entonces, si  $g$  es como en (3.2.1),

$$\beta(V, L) = g.$$

*Demostración.* Sea  $(a_1, \dots, a_m)$  una  $H$ -diagonalización minimal de  $L$ , es decir  $m = \beta(V, L)$ . Por (i) en la Observación 3.3.5, tenemos que  $g \leq \beta(V, L)$ . Por el otro lado, por el Teorema 3.3.13, siempre existe una  $H$ -diagonalización de  $L$  cuyo número de  $H$ -autovalores es  $g$ , entonces  $\beta(V, L) \leq g$ .  $\square$

Notar entonces que el Teorema 3.3.13 dice que para todo operador  $H$ -diagonalizable existe una  $H$ -diagonalización minimal.

### 3.3.5 Operadores $H$ -conmutantes normales

Cuando  $L$  es normal,  $\mathcal{R}(\omega)$  es normal para casi todo  $\omega \in D$  y luego sus autoespacios son ortogonales. Este hecho nos permite esquivar la el problema del ángulo ya que la suma ortogonal de subespacios cerrados siempre es cerrada. Ahora veremos una generalización del Teorema Espectral finito-dimensional, para operadores  $H$ -conmutantes acotados y normales.

**Teorema 3.3.16.** *Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  finitamente generado y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado. Si  $L$  es normal entonces es  $H$ -diagonalizable y, si  $(a_1, \dots, a_m)$  es una  $H$ -diagonalización de  $L$ , tenemos que*

$$L = \sum_{j=1}^m \Lambda_{a_j} P_{V_{a_j}}, \quad (3.3.5)$$

donde  $P_{V_{a_j}}$  denota la proyección ortogonal de  $V$  sobre  $V_{a_j}$  para  $j = 1, \dots, m$ .

*Demostración.* Si  $L$  es normal, por el ítem (ii) del Teorema 1.4.4, sabemos que  $\mathcal{R}(\omega)$  es un operador normal actuando en un espacio finito-dimensional  $\mathcal{J}(\omega)$ , para casi todo  $\omega \in D$ . Entonces, para casi todo  $\omega \in D$ ,  $\mathcal{R}(\omega)$  es diagonalizable y sus autoespacios son ortogonales.

Sea  $g$  como en (3.2.1). Por el Teorema 3.3.8, existen sucesiones de espectro acotado  $a_1, \dots, a_g$  y funciones rango medibles  $\mathcal{J}_{a_j}(\omega) = \ker(\mathcal{R}(\omega) - \hat{a}_j(\omega)\mathcal{I}_\omega)$ , para  $j = 1, \dots, g$ , tales que

$$\mathcal{J}(\omega) = \mathcal{J}_{a_1}(\omega) \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \mathcal{J}_{a_g}(\omega)$$

para casi todo  $\omega \in D$ .

Por la Proposición 3.1.5, el subespacio  $V_{a_j} = \ker(L - \Lambda_{a_j})$  es el espacio  $H$ -invariante asociado a la función rango  $\mathcal{J}_{a_j}$ , esto es,  $\mathcal{J}_{a_j} = \mathcal{J}_{V_{a_j}}$ . Además, la ortogonalidad entre los espacios  $\mathcal{J}_{V_{a_j}}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ , implica que los  $H$ -autoespacios  $V_{a_j}$  son ortogonales. Luego, tenemos que la suma ortogonal  $V_{a_1} \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} V_{a_g}$  es un espacio cerrado  $H$ -invariante contenido en  $V$  y sus funciones rango coinciden. Concluimos que

$$V = V_{a_1} \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} V_{a_g}$$

y entonces  $L$  es  $H$ -diagonalizable.

Por otro lado, si  $(a_1, \dots, a_m)$  es una  $H$ -diagonalización de  $L$  (no necesariamente la minimal), al igual que antes, como los autoespacios de  $\mathcal{R}(\omega)$  son ortogonales para casi todo  $\omega \in D$ , los  $H$ -autoespacios  $V_{a_j}$  son ortogonales y  $V = V_{a_1} \oplus \dots \oplus V_{a_m}$ . Luego, la descomposición de  $L$  en (3.3.5) vale.

□

Veamos algunos ejemplos de operadores  $H$ -conmutantes normales que se  $H$ -diagonalizan.

**Ejemplo 3.3.17.** Sea  $\Phi = \{\varphi_i : i \in I\} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$  un conjunto finito de funciones, tal que  $E(\Phi)$  es una sucesión de Bessel en  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Como dijimos en el Ejemplo 1.4.7, el operador de marco asociado a  $E(\Phi)$  es  $H$ -conmutante. Como es auto-adjunto, por el Teorema 3.3.16, tenemos que es  $H$ -diagonalizable.

**Ejemplo 3.3.18.** En el contexto del Ejemplo 1.4.10, supongamos que  $E(\Phi)$  es una base ortonormal y sea  $L$  el operador  $H$ -conmutante definido en (1.4.3). Entonces, como la forma matricial de  $\mathcal{R}(\omega)$  escrita en la base  $\{\mathcal{T}\varphi_1(\omega), \dots, \mathcal{T}\varphi_n(\omega)\}$  es la matriz diagonal  $[\mathcal{R}](\omega) = \text{diag}(\hat{a}_1(\omega), \dots, \hat{a}_n(\omega))$  para casi todo  $\omega \in D$ , tenemos que  $\mathcal{R}(\omega)$  es normal para casi todo  $\omega \in D$ . Como consecuencia,  $L$  es normal también y por el Teorema 3.3.16, es  $H$ -diagonalizable. Además, tenemos que  $\Lambda_{a_1} \dots \Lambda_{a_n}$  son los  $H$ -autovalores de  $L$  y  $V_{a_j} = S(\varphi_j)$  para todo  $j = 1, \dots, n$ .

Cuando  $E(\Phi)$  es una base de Riesz, aún tenemos que  $\hat{a}_1(\omega), \dots, \hat{a}_n(\omega)$  son los autovalores de  $\mathcal{R}(\omega)$  con autovectores asociados  $\mathcal{T}\varphi_1(\omega), \dots, \mathcal{T}\varphi_n(\omega)$  y que

$$\mathcal{J}(\omega) = \text{gen}\{\mathcal{T}\varphi_1(\omega)\} \oplus \dots \oplus \text{gen}\{\mathcal{T}\varphi_n(\omega)\},$$

para casi todo  $\omega \in D$ . Sin embargo, para concluir que  $L$  es  $H$ -diagonalizable tenemos que imponer que

$$\sup_{\omega \in D} c_b(\text{gen}\{\mathcal{T}\varphi_1(\omega)\}^\perp, \dots, \text{gen}\{\mathcal{T}\varphi_n(\omega)\}^\perp) < 1.$$

**Ejemplo 3.3.19.** Sea  $A_\alpha : PW_\Omega \rightarrow PW_\Omega$ , para  $1 \leq \alpha \leq d$ , el operador diferencial definido en el Ejemplo 1.4.11, que es  $H$ -conmutante y acotado. Además,  $A_\alpha$  es normal ya que su operador adjunto es  $A_\alpha^* f = -\frac{d}{dx_\alpha} f$ .

Entonces, si  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  es un conjunto que  $k$ -tesela o  $k$ -subtesela  $\mathbb{R}^d$  por traslaciones de  $\Delta$  (ver Definiciones 2.1.1 y 2.4.1), por la Proposición 2.1.3, sabemos que  $PW_\Omega$  es finitamente generado. Por lo tanto, por el Teorema 3.3.16,  $A_\alpha$  es  $H$ -diagonalizable y existirá una  $H$ -diagonalización con por lo menos  $k$   $H$ -autovalores.

En el caso de  $A = \frac{d}{dx} : PW_{\frac{1}{2}} \rightarrow PW_{\frac{1}{2}}$ , vimos en (1.4.4) que su operador rango está dado por operador de multiplicación, de hecho  $\lambda(\omega) = -2\pi i \omega$  es el único autovalor de

$\mathcal{R}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ . Entonces, si tomamos la sucesión  $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$  tal que  $\hat{a}(\omega) = -2\pi i\omega$ , obtenemos que:

$$f'(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k f(x - k),$$

para todo  $f \in PW_{\frac{1}{2}}$  y  $x \in \mathbb{R}$ . Los valores de  $a_k$  se pueden computar fácilmente.

Para concluir esta sección, daremos una proposición que muestra la relación de la  $H$ -diagonalización de un operador normal con la de su operador adjunto.

**Proposición 3.3.20.** *Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  finitamente generado y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado. Si  $L$  es normal, los siguientes enunciados son ciertos:*

- (i)  $L$  y  $L^*$  son  $H$ -diagonalizables.
- (ii) Si  $\Lambda_a$  es un  $H$ -autovalor de  $L$ , entonces  $\Lambda_a^*$  es un  $H$ -autovalor de  $L^*$  y  $\ker(L^* - \Lambda_a^*) = V_a$ . Además,  $\Lambda_a^* = \Lambda_b$ , donde  $b \in \ell^2(H)$  se define por  $b(h) := \overline{a(-h)}$  para  $h \in H$ .
- (iii) Si  $(a_1, \dots, a_m)$  es una  $H$ -diagonalización de  $L$ , entonces  $(b_1, \dots, b_m)$  es una  $H$ -diagonalización de  $L^*$ , donde  $\Lambda_{b_j} = \Lambda_{a_j}^*$  para  $j = 1, \dots, m$ .

*Demostración.* Como  $L$  es normal, también lo es  $L^*$  y por el Teorema 3.3.16,  $L$  y  $L^*$  son  $H$ -diagonalizables, lo cual prueba (i).

Además, supongamos que  $\Lambda_a$  es un  $H$ -autovalor de  $L$ . Sean  $f, g \in V$ , tenemos que

$$\langle \Lambda_a f, g \rangle = \langle \hat{a}\hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle \hat{f}, \bar{\hat{a}}\hat{g} \rangle. \quad (3.3.6)$$

Por el otro lado, es fácil ver que

$$\bar{\hat{a}}(\omega) = \sum_{h \in H} \overline{a(-h)} e_{-h}(\omega).$$

Entonces, si definimos  $b \in \ell^2(H)$  como  $b(h) := \overline{a(-h)}$  para  $h \in H$ , deducimos de (3.3.6) que  $\langle \Lambda_a f, g \rangle = \langle f, \Lambda_b g \rangle$ , es decir,  $\Lambda_a^* = \Lambda_b$ .

Además,  $L - \Lambda_a$  es un operador normal y luego  $\{0\} \neq V_a = \ker(L - \Lambda_a) = \ker((L - \Lambda_a)^*) = \ker(L^* - \Lambda_b)$ , de lo que concluimos que  $\Lambda_b$  es un  $H$ -autovalor de  $L^*$ , como queríamos ver en (ii).

Para (iii), sólo queda observar que si  $(a_1, \dots, a_m)$  es una  $H$ -diagonalización de  $L$ , entonces tenemos que  $V = V_{a_1} \oplus \dots \oplus V_{a_m}$ , lo cual también es una descomposición en  $H$ -autoespacios de  $L^*$  porque  $\ker(L^* - \Lambda_{b_j}) = V_{a_j}$  para todo  $j = 1, \dots, m$  por el ítem (ii).  $\square$

### 3.4 $H$ -diagonalización: caso no finitamente generado

En esta sección daremos una definición de  $H$ -diagonalización para operadores  $H$ -conmutantes actuando en un espacio  $H$ -invariante no necesariamente finitamente generado. En este caso, la cantidad de  $H$ -autovalores podría ser infinta, por lo cual la descomposición del espacio en  $H$ -autoespacios deberá pedirse ortogonal.

**Definición 3.4.1.** *Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  no necesariamente finitamente generado y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado. Decimos que  $L$  es  $H$ -diagonalizable si existe un conjunto de índices  $I$  a lo sumo numerable y sucesiones de espectro acotado  $\{\lambda_j\}_{j \in I} \subseteq \ell^2(H)$ , tales que  $\lambda_{a_j}$  es un  $H$ -autovalor de  $L$  para todo  $j \in I$  y  $V$  se descompone en suma ortogonal*

$$V = \bigoplus_{j \in I} V_{a_j}. \quad (3.4.1)$$

Dada una descomposición de este tipo, diremos que  $(\lambda_j)_{j \in I}$  es una  $H$ -diagonalización de  $L$ .

Al igual que en el caso finitamente generado, si un operador  $L$  es  $H$ -diagonalizable, una descomposición como en (3.4.1) siempre existe pero no es única. Además, observemos que si  $(\lambda_j)_{j \in I}$  es una  $H$ -diagonalización de  $L$ , entonces

$$L = \sum_{j \in I} \lambda_{a_j} P_{V_{a_j}},$$

donde  $P_{V_{a_j}}$  es la proyección ortogonal de  $V$  sobre  $V_{a_j}$  y, si  $I$  es un conjunto infinito, la convergencia es en el sentido puntual.

De la misma manera que vimos en el caso finitamente generado, tenemos que cuando un operador es  $H$ -diagonalizable, sus fibras deben ser diagonalizables también. La demostración es análoga a la de Teorema 3.3.4.

**Teorema 3.4.2.** *Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado con operador rango  $\mathcal{R}$ . Entonces, si  $L$  es  $H$ -diagonalizable,  $\mathcal{R}(\omega)$  es diagonalizable para casi todo  $\omega \in \Sigma(V)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $(\lambda_j)_{j \in I}$  es una  $H$ -diagonalización de  $L$ . Entonces, por la Proposition 3.1.5, para todo  $j \in I$ ,  $\lambda_{a_j}(\omega) = \hat{\lambda}_j(\omega)$  es un autovalor de  $\mathcal{R}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in \Sigma(V_{a_j})$  y la función rango medible  $\mathcal{J}_{V_{a_j}}(\omega) = \ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_{a_j}(\omega)\mathcal{I}_\omega)$  es su autoespacio asociado. Veremos que

$$\mathcal{J}(\omega) = \bigoplus_{j \in I} \mathcal{J}_{V_{a_j}}(\omega)$$

para casi todo  $\omega \in D$ .

Como  $V_{a_j} \subseteq V$ , tenemos que  $\mathcal{J}_{V_{a_j}}(\omega) \subseteq \mathcal{J}(\omega)$  para todo  $j \in I$ , y luego  $\bigoplus_{j \in I} \mathcal{J}_{V_{a_j}}(\omega) \subseteq \mathcal{J}(\omega)$ . Para la otra inclusión, si  $f \in V$ , entonces  $f = \sum_{j \in I} f_j$ , donde  $f_j \in V_{a_j}$  para  $j \in I$ . Luego,  $\mathcal{T}f(\omega) = \sum_{j \in I} \mathcal{T}f_j(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ , lo que implica que

$$\mathcal{J}(\omega) = \overline{\text{gen}} \{ \mathcal{T}\varphi(\omega) : \varphi \in \Phi \} \subseteq \bigoplus_{j \in I} \mathcal{J}_{V_{a_j}}(\omega),$$

donde  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R}^d)$  es tal que  $V = S(\Phi)$ . La suma de la derecha es cerrada ya que la suma ortogonal de subespacios cerrados es cerrada.  $\square$

Notemos que de la prueba del Teorema 3.4.2, se deduce que si  $(a_j)_{j \in I}$  es una  $H$ -diagonalización de  $L$ , entonces los autovalores de  $\mathcal{R}(\omega)$  cumplen que

$$\sigma_p(\mathcal{R}(\omega)) \subset \{ \hat{a}_j(\omega) : j \in I \}$$

para casi todo  $\omega \in D$ .

Una consecuencia resultante de este teorema es que todo operador  $H$ -diagonalizable según la Definición 3.4.1 debe ser normal: si  $\mathcal{R}(\omega)$  es diagonalizable para casi todo  $\omega \in \Sigma(V)$  con descomposición ortogonal de sus autoespacios, entonces  $\mathcal{R}(\omega)$  es normal para casi todo  $\omega \in D$ . Por el ítem (ii) del Teorema 1.4.4,  $L$  es normal. Luego, lo que haremos en lo que queda de la sección es encontrar condiciones suficientes para que un operador normal  $H$ -conmutante sea  $H$ -diagonalizable.

### 3.4.1 Fibras localmente finito-dimensionales

A continuación veremos que el Teorema 3.3.16 se puede extender fácilmente al caso donde  $V$  es un espacio  $H$ -invariante no necesariamente finitamente generado y su función rango  $\mathcal{J}$  satisface que  $\dim \mathcal{J}(\omega) < \infty$  para casi todo  $\omega \in D$ . Pero primero, veamos una generalización del Teorema 3.3.8 adaptada a estas hipótesis.

**Teorema 3.4.3.** *Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  con función rango  $\mathcal{J}$  tal que  $\dim \mathcal{J}(\omega) < \infty$  y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado y normal con operador rango  $\mathcal{R}$ . Si  $\mathcal{R}(\omega)$  es diagonalizable para casi todo  $\omega \in \Sigma(V)$ , entonces existen un conjunto de índices  $I$ , sucesiones de espectro acotado  $a_j \in \ell^2(H)$  y funciones rango  $\mathcal{J}_{a_j}(\omega) := \ker(\mathcal{R}(\omega) - \hat{a}_j(\omega)\mathcal{I}_\omega)$  para  $j \in I$  que satisfacen las siguientes condiciones:*

- (i)  $\mathcal{J}(\omega) = \bigoplus_{j \in I} \mathcal{J}_{a_j}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ .



- (ii) Los conjuntos  $C_j = \{\omega \in \Sigma(V) : \mathcal{J}_{a_j}(\omega) \neq \{0\}\}$  son de medida positiva y cumplen que  $C_{j+1} \subseteq C_j$  para todo  $j \in I$ .

En particular,  $\Lambda_{a_j}$  son *H*-autovalores de  $L$  para todo  $j \in I$ . Además, si  $g$  es como en (3.2.1) y  $g < \infty$ , entonces  $I = \{1, \dots, g\}$ .

*Demostración.* Sean  $\{\lambda_j\}_{j \in I} \in L^\infty(D)$  las funciones medibles del Teorema 3.2.3 que nos quedan luego de hacer un descarte de aquellas que no son un autovalor de  $\mathcal{R}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ . Es evidente que si  $g < \infty$ , entonces  $I = \{1, \dots, g\}$ .

El resto de la prueba prosigue igual a la demostración del Teorema 3.3.8.  $\square$

**Teorema 3.4.4.** Sea  $V$  un espacio *H*-invariante con función rango  $\mathcal{J}$  que satisface que  $\dim \mathcal{J}(\omega) < \infty$  para casi todo  $\omega \in D$  y  $L : V \rightarrow V$  un operador *H*-conmutante acotado y normal. Entonces,  $L$  es *H*-diagonalizable.

*Demostración.* Como  $L$  es normal, por el ítem (ii) del Teorema 1.4.4, sabemos que  $\mathcal{R}(\omega)$  es un operador normal actuando en un espacio finito-dimensional  $\mathcal{J}(\omega)$ , para casi todo  $\omega \in D$ . Entonces, para casi todo  $\omega \in D$ ,  $\mathcal{R}(\omega)$  es diagonalizable.

Por el Teorema 3.4.3 existen sucesiones de espectro acotado  $(a_j)_{j \in I} \subset \ell^2(H)$  tales que

$$\mathcal{J}(\omega) = \bigoplus_{j \in I} \ker(\mathcal{R}(\omega) - \hat{a}_j(\omega)I_\omega)$$

para casi todo  $\omega \in D$ , y  $\Lambda_{a_j}$  es un *H*-autovalor de  $L$  para todo  $j \in I$ . Es directo ver que esto implica que

$$V = \bigoplus_{j \in I} V_{a_j},$$

y por lo tanto,  $L$  es *H*-diagonalizable.  $\square$

### 3.4.2 Fibras infinito-dimensionales

Cuando queremos remover la condición  $\dim \mathcal{J}(\omega) < \infty$  para casi todo  $\omega \in D$ , los resultados anteriores no siguen siendo válidos en general. El problema radica en poder encontrar selecciones medibles de autovalores para el operador rango, cuestión que se abordó en la Sección 3.2. Allí, vimos que el Teorema de selección de Castaign nos era de utilidad y, adicionando una hipótesis sobre el espectro puntual del operador rango, obtuvimos el Teorema 3.2.6.

**Teorema 3.4.5.** *Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  con función rango  $\mathcal{J}$  y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado y normal con operador rango  $\mathcal{R}$ . Supongamos que  $\mathcal{R}(\omega)$  es diagonalizable y todos sus autovalores son puntos aislados de  $\sigma(\mathcal{R}(\omega))$  para casi todo  $\omega \in D$ . Entonces,  $L$  es  $H$ -diagonalizable.*

*Demostración.* Por el Teorema 3.2.6, sabemos que existen funciones  $\lambda_j \in L^\infty(D)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , tales que  $\lambda_j(\omega) \neq \lambda_{j'}(\omega)$  para  $j \neq j'$  y para casi todo  $D$ , y

$$\sigma_p(\mathcal{R}(\omega)) \subset \{\lambda_j(\omega) : j \in \mathbb{N}\}$$

para casi todo  $\omega \in D$ .

Como  $\mathcal{R}(\omega)$  es diagonalizable para casi todo  $\omega \in D$ , la siguiente igualdad vale

$$\mathcal{J}(\omega) = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_j(\omega)\mathcal{I}_\omega). \quad (3.4.2)$$

Notar que  $\ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_j(\omega)\mathcal{I}_\omega)$  puede ser  $\{0\}$  para algún  $j$  y algún conjunto medible de medida positiva. Sin embargo, descartamos todas las funciones  $\lambda_j$  que no son autovalores de  $\mathcal{R}(\omega)$  en casi todo punto. Luego del descarte, tenemos  $\{\lambda_j\}_{j \in I}$  funciones.

Ahora, para cada  $j \in I$ , como  $\lambda_j \in L^\infty(D)$ , existe una sucesión de espectro acotado  $a_j \in \ell^2(H)$  tal que  $\hat{a}_j = \lambda_j$ . Luego, por el Lema 3.1.6, sabemos que  $\Lambda_{a_j}$  es un  $H$ -autovalor de  $L$  para todo  $j \in I$  y por (3.4.2) tenemos la descomposición ortogonal

$$V = \bigoplus_{j \in I} V_{a_j}.$$

□

En lo que queda, discutiremos dos ejemplos de operadores que satisfacen la condición impuesta sobre el operador rango  $\mathcal{R}$  en el Teorema 3.4.5, es decir, que  $\mathcal{R}(\omega)$  es diagonalizable y  $\sigma_p(\mathcal{R}(\omega))$  son puntos aislados de  $\sigma(\mathcal{R}(\omega))$  para casi todo  $\omega \in D$ .

**Ejemplo 3.4.6.** *Sea  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado, normal e inyectivo tal que  $\mathcal{R}(\omega)$  es un operador compacto para casi todo  $\omega \in D$ . Para este caso, por el Teorema 1.4.4,  $\mathcal{R}(\omega)$  es compacto, normal e inyectivo para casi todo  $\omega \in D$ . Luego,  $\mathcal{R}(\omega)$  es diagonalizable y sus autovalores son todos puntos aislados de  $\sigma(\mathcal{R}(\omega))$  para casi todo  $\omega \in D$ , por lo tanto,  $L$  es  $H$ -diagonalizable.*

**Observación 3.4.7.** *Notar que el hecho de que  $\mathcal{R}(\omega)$  sea compacto para casi todo  $\omega \in D$  no implica que  $L$  sea compacto, esto es una consecuencia del Corolario 1.4.18. Por ejemplo,*

sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante finitamente generado con función rango  $\mathcal{J}$  y sea  $L \neq 0$  un operador  $H$ -conmutante actuando en  $V$ . Entonces,  $\mathcal{R}(\omega) : \mathcal{J}(\omega) \rightarrow \mathcal{J}(\omega)$  es compacto ya que  $\dim \mathcal{J}(\omega) < \infty$  para casi todo  $\omega \in D$  pero  $L$  no puede serlo.

**Observación 3.4.8.** Sea  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado, normal tal que  $\mathcal{R}(\omega)$  es un operador compacto para casi todo  $\omega \in D$  pero no necesariamente inyectivo. Dado  $V' := \ker(L)^\perp$  el complemento ortogonal de  $\ker(L)$  en  $V$ , tenemos que  $V'$  es un espacio  $H$ -invariante que también es invariante por  $L$ . Luego, definimos  $L' := L|_{V'} : V' \rightarrow V'$ , y entonces  $L'$  es un operador que satisface las mismas hipótesis que el Ejemplo 3.4.6. Con lo cual,  $L'$  es  $H$ -diagonalizable sobre  $V'$ . Dada una  $H$ -diagonalización  $(a_j)_{j \in I}$  de  $L' : V' \rightarrow V'$ , podemos descomponer  $V$  como sigue

$$V = \ker(L) \dot{\oplus} \bigoplus_j V'_{a_j}.$$

donde  $V'_{a_j}$  son  $H$ -autoespacios de  $L'$ .

Ahora daremos algunas condiciones suficientes para que un operador  $H$ -conmutante admita sus fibras compactas en casi todo  $\omega \in D$ .

**Proposición 3.4.9.** Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  con función rango  $\mathcal{J}$  y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado con operador rango  $\mathcal{R}$ .

- (i) Si  $V' = \overline{L(V)}$  es un espacio  $H$ -invariante que satisface que  $\dim \mathcal{J}_{V'}(\omega) < \infty$  para casi todo  $\omega \in D$ , entonces  $\mathcal{R}(\omega)$  es de rango finito para casi todo  $\omega \in D$ . Diremos que estos son operadores con fibras de rango finito.
- (ii) Si existe una sucesión de operadores  $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que  $L_n : V \rightarrow V$  es un operador  $H$ -conmutante acotado con fibras de rango finito para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y  $L_n \rightarrow L$  cuando  $n \rightarrow \infty$  uniformemente, entonces  $\mathcal{R}(\omega)$  es compacto para casi todo  $\omega \in D$ .

*Demostración.* (1) Recordemos que por el ítem (vi) en el Teorema 1.4.4, la función rango  $\mathcal{J}$  asociada a  $\overline{L(V)}$  está dada por  $\mathcal{R}(\omega)\mathcal{J}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ . Entonces,  $\mathcal{R}(\omega)$  es un operador de rango finito para casi todo  $\omega \in D$ .

(2) Sea  $\mathcal{R}_n$  el operador rango asociado a cada  $L_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces por (1.4.2) tenemos que  $\mathcal{R}_n(\omega) \rightarrow \mathcal{R}(\omega)$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para casi todo  $\omega \in D$ . Luego, usando (i) de esta Proposición tenemos que  $\mathcal{R}_n(\omega)$  es de rango finito para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\mathcal{R}(\omega)$  es compacto para casi todo  $\omega \in D$ .  $\square$

Para el segundo ejemplo necesitamos dar una definición.

**Definición 3.4.10.** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert separable,  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operador acotado y normal,  $I$  un conjunto de índices finito y  $\{f_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{H}$ . Decimos que  $(\mathcal{H}, A, \{f_i\}_{i \in I})$  es un DS-triple si  $\{A^n f_i : n \in \mathbb{N}, i \in I\}$  es un marco de  $\mathcal{H}$ . En ese caso, decimos que  $A$  admite un DS-triple.

Las siglas DS se deben a que el problema de encontrar condiciones sobre  $\mathcal{H}$ ,  $A$  y  $\{f_i\}_{i \in I}$  para que  $(\mathcal{H}, A, \{f_i\}_{i \in I})$  sea un DS-triple está conectado con el problema del muestreo dinámico (dynamical sampling). El siguiente resultado fue probado en [31].

**Teorema 3.4.11.** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert separable infinito-dimensional,  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operador acotado y normal, y  $\{f_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{H}$  con  $I$  un conjunto de índices finito. Si  $(\mathcal{H}, A, \{f_i\}_{i \in I})$  es un DS-triple, entonces  $A$  es diagonalizable y  $\sigma_p(A) \subset \mathbb{D}$ , donde  $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ . Además, en este caso, la dimensión de cada autoespacio es menor o igual que  $\#I$  y los puntos de acumulación de  $\sigma_p(A)$  están contenidos en  $S_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ .

**Observación 3.4.12.** En una manera similar a la del Corolario 1.4.18, uno puede probar que si un operador  $H$ -conmutante  $L : V \rightarrow V$  admite un DS-triple  $(V, L, \{f_i\}_{i \in I})$  con  $I$  finito, entonces  $L = 0$ . Sin embargo, un operador  $H$ -conmutante  $L \neq 0$  podría satisfacer que  $\mathcal{R}(\omega)$  admita un DS-triple para casi todo  $\omega \in D$ .

Notemos además que un operador normal y compacto actuando en un espacio de Hilbert infinito-dimensional nunca admite un DS-triple ya que el único punto de acumulación posible de sus autovalores es, de existir, el cero. Por lo tanto tenemos el siguiente ejemplo, que es disconexo al Ejemplo 3.4.6.

**Ejemplo 3.4.13.** Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  con función rango  $\mathcal{J}$  tal que  $\dim \mathcal{J}(\omega) = \infty$  para casi todo  $\omega \in \Sigma(V)$ . Sea  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado y normal tal que  $\mathcal{R}(\omega)$  admite un DS-triple para casi todo  $\omega \in \Sigma(V)$ . Por el ítem (ii) del Teorema 1.4.4,  $\mathcal{R}(\omega)$  es normal para casi todo  $\omega \in D$ . Entonces, el Teorema 3.4.11 dice que  $\mathcal{R}(\omega)$  es diagonalizable y sus autovalores son todos puntos aislados de  $\sigma(\mathcal{R}(\omega))$  para casi todo  $\omega \in D$ , por lo tanto,  $L$  es  $H$ -diagonalizable.

Finalmente damos una condición suficiente para que un operador  $H$ -conmutante tenga fibras que admiten un DS-triple, que es una consecuencia inmediata de la relación (1.4.1) y el Teorema 1.3.10.

**Proposición 3.4.14.** Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  con función rango  $\mathcal{J}$  y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado y normal con operador rango  $\mathcal{R}$ . Supongamos que existen funciones  $\{f_i\}_{i \in I}$ , con  $I$  un conjunto de índices finito, tales que  $\{T_h L^j f_i : h \in H, j \in \mathbb{N}, i \in I\}$  es un marco de  $V$ , entonces  $(\mathcal{J}(\omega), \mathcal{R}(\omega), \{\mathcal{T} f_i(\omega)\}_{i \in I})$  es un DS-triple para casi todo  $\omega \in D$ .

# Capítulo 4

## Muestreo Dinámico para operadores $H$ -conmutantes

En este capítulo continuaremos con la notación de la Sección 1.3 y la Sección 1.4 para  $H$ ,  $\Delta$  y  $D$  en  $\mathbb{R}^d$ . Nuestro objetivo será aplicar la teoría de la  $H$ -diagonalización del Capítulo 3 para resolver un problema del muestreo dinámico para operadores  $H$ -conmutantes actuando sobre un espacio  $H$ -invariante finitamente generado de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .

Dado un conjunto de funciones  $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$  en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  y un operador acotado  $R : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , el problema general del muestreo dinámico consiste en encontrar condiciones sobre  $R$  y  $\mathcal{F}$  para que  $\{R^j f_i : i \in I, j \in J\}$  sea un marco de  $\mathcal{H}$ , donde  $I, J \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

El caso finito-dimensional de este problema fue resuelto por completo en [6]. Por otro lado, para el caso infinito-dimensional, un teorema de caracterización fue probado para operadores normales que iteran sobre un conjunto finito de funciones en [6] y [31].

En particular, en el contexto finito-dimensional la siguiente condición fue dada en [31].

**Teorema 4.0.1.** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert  $n$ -dimensional y sea  $R : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  una transformación lineal. Sean  $I$  un conjunto de índices finito,  $J = \{0, \dots, n-1\}$  y  $\{f_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{H}$ . Entonces,  $\{R^j f_i : i \in I, j \in J\}$  es un marco de  $\mathcal{H}$  si y sólo si para cada  $\lambda \in \sigma(R^*)$ ,*

$$\{P_{\ker(R^* - \lambda I)} f_i : i \in I\}$$

*es un marco de  $\ker(R^* - \lambda I)$ .*

El problema que proponemos en este capítulo es el siguiente. Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante finitamente generado cuya longitud es  $\mathcal{L}(V) = \ell$ . Supongamos que  $I$  es un

conjunto de índices finito y  $J = \{0, \dots, \ell - 1\}$ . Sea  $\{f_i : i \in I\}$  un conjunto de funciones en  $V$  y sea  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -invariante acotado. Queremos encontrar condiciones para que el sistema

$$\{L^j f_i : i \in I, j \in J\} \quad (4.0.1)$$

sea un generador de marco de  $V$  (recordar que esto quiere decir que las traslaciones de los elementos de este sistema forman un marco de  $V$ ).

Para resolver este problema utilizaremos las técnicas de fiberización de los espacios invariantes por traslaciones. Sea  $\mathcal{J}$  la función rango de  $V$  y sea  $\mathcal{R}$  el operador rango de  $L$ . Recordemos que por el Teorema 1.3.10, el sistema en (4.0.1) es un generador de marco de  $V$  si y sólo si sus fibras forman un marco de  $\mathcal{J}(\omega)$  con constantes uniformes para casi todo  $\omega \in D$ . Por el otro lado, por (1.4.1), sabemos que  $\mathcal{T}(L^j f_i)(\omega) = \mathcal{R}(\omega)^j(\mathcal{T} f_i(\omega))$ .

Esto nos permite reducir nuestro problema a un problema de muestreo dinámico finito-dimensional, estudiando condiciones para que el sistema

$$\{\mathcal{R}(\omega)^j(\mathcal{T} f_i(\omega)) : i \in I, j \in J\}$$

sea un marco de  $\mathcal{J}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ . Para esto, nos gustaría aplicar el Teorema 4.0.1 tomando  $R = \mathcal{R}(\omega)$  en casi todo  $\omega \in D$ . Para trasladar los resultados obtenidos del operador rango al operador  $H$ -invariante  $L$ , necesitamos uniformidad en las constantes de marco. Sin embargo, en el Teorema 4.0.1 no fueron provistas estimaciones de las constantes de marco.

Este capítulo está compuesto por dos secciones:

En la Sección 4.1 nos restringiremos al caso de muestreo dinámico en dimensión finita y nos ocuparemos de encontrar estimaciones de las constantes de marco del Teorema 4.0.1.

En la Sección 4.2 finalmente aplicamos los resultados obtenidos para resolver el problema de muestreo dinámico para operadores  $H$ -conmutantes que planteamos arriba.

## 4.1 Muestreo dinámico finito-dimensional

En esta sección vamos a asumir que  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert  $n$ -dimensional complejo y  $R : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  es una transformación lineal. Sean  $I$  un conjunto de índices finito y  $J = \{0, \dots, k\}$  donde  $k \geq n - 1$ . Por otro lado, para  $\lambda \in \mathbb{C}$  vamos a denotar  $E_\lambda = \ker(R^* - \lambda I)$  y por  $P_{E_\lambda}$  nos referiremos a la proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  sobre  $E_\lambda$ .

Para obtener estimaciones de las constantes de marco para el Teorema 4.0.1, debemos estudiar cada dirección por separado. En una dirección tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.1.** Si  $\{R^j f_i : i \in I, j \in J\}$  es un marco de  $\mathcal{H}$  con constantes  $A, B > 0$ , entonces para todo  $\lambda \in \sigma(R^*)$ , tenemos que  $\{P_{E_\lambda} f_i : i \in I\}$  es un marco para  $E_\lambda$ , con constantes  $A/C_\lambda$  y  $B/C_\lambda$ , donde  $C_\lambda = \sum_{j \in J} |\lambda|^{2j}$ .

*Demostración.* Sea  $\lambda \in \mathbb{C}$  un autovalor de  $R^*$  y  $f \in E_\lambda$ . Es suficiente observar que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} |\langle f, R^j f_i \rangle|^2 &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} |\langle R^{*j} f, f_i \rangle|^2 \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} |\langle \lambda^j f, f_i \rangle|^2 \\ &= \sum_{j \in J} |\lambda|^{2j} \sum_{i \in I} |\langle f, P_{E_\lambda} f_i \rangle|^2. \end{aligned}$$

□

En la otra dirección, se requiere más trabajo. Vamos a pedir que  $R$  sea una transformación lineal normal para tener una descomposición de  $\mathcal{H}$  en suma ortogonal de autoespacios. La prueba del siguiente teorema está inspirada en [37, Theorem 5.1.], donde fueron provistas estimaciones de las constantes de marco para el problema de muestreo dinámico infinito-dimensional, asumiendo que el operador es normal y sólo una función es iterada. Para esto, haremos uso de dos lemas muy técnicos, que veremos abajo.

Vamos a denotar por  $\mathcal{P}_k$  el espacio de Hilbert de polinomios de coeficientes complejos de grado menor o igual que  $k$ , provisto con el producto interno

$$\langle p, q \rangle = \sum_{j=0}^k c_j \bar{d}_j,$$

donde  $p(z) = \sum_{j=0}^k c_j z^j$  y  $q(z) = \sum_{j=0}^k d_j z^j$ . El espacio  $\mathcal{P}_k^{|I|}$  es el producto cartesiano de  $\#I$  copias de  $\mathcal{P}_k$  dotado con la norma

$$\|(p_i)_{i \in I}\|_{\mathcal{P}_k^{|I|}} = \left( \sum_{i \in I} \|p_i\|_{\mathcal{P}_k}^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |c_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

**Lema 4.1.2.** Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$  distintos. Definimos  $T : \mathcal{P}_k^{|I|} \rightarrow \ell^2(I \times \{1, \dots, r\})$  como

$$(p_i)_{i \in I} \mapsto (p_i(\lambda_s))_{i \in I, s \in \{1, \dots, r\}}, \quad (4.1.1)$$

y  $M : \ell^2(I \times \{1, \dots, r\}) \rightarrow \mathcal{P}_k^{|I|}$  como el operador dado por

$$(w_{is})_{i \in I, s \in \{1, \dots, r\}} \mapsto (p_i)_{i \in I}, \quad (4.1.2)$$

donde para todo  $i \in I$ ,  $p_i$  denota el polinomio de Lagrange de grado  $r - 1$  que interpola  $(\lambda_s, w_{is})$ ,  $s = 1, \dots, r$ . Entonces, los siguientes enunciados valen:

- (i)  $T$  es sobreyectivo.
- (ii)  $TM = I$ .
- (iii) La norma de los operadores  $T$  y  $M$  tienen las siguientes cotas:

$$\|T\| \leq \left( r \sum_{j=0}^k \beta^{2j} \right)^{1/2} \quad \text{and}$$

$$\|M\| \leq \left( \frac{r}{\alpha} \sum_{u=0}^{r-1} \binom{r-1}{u} \beta^{2u} \right)^{1/2}$$

con  $\alpha = \min_{1 \leq s \leq r} \prod_{\substack{u=1 \\ u \neq s}}^r |\lambda_s - \lambda_u|^2$  y  $\beta = \max_{1 \leq s \leq r} |\lambda_s|$ .

*Demostración.* Observemos que dado un vector  $(w_1, \dots, w_r) \in \mathbb{C}^r$ , podemos construir el polinomio de Lagrange de grado  $r - 1$  que interpola los puntos  $(\lambda_1, w_1), \dots, (\lambda_r, w_r)$ . Esto prueba que  $T$  es sobreyectivo. La relación  $TM = I$  sigue de la definición de  $T$  y  $M$ .

Para estimar la norma de  $T$ , sea  $(p_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}_k^{|I|}$ , y usando que para todo  $s = 1, \dots, r$ ,  $|\lambda_s| \leq \beta$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \|T(p_i)_{i \in I}\|_{\ell^2(I \times \{1, \dots, r\})} &= \left( \sum_{i \in I} \sum_{s=1}^r |p_i(\lambda_s)|^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{i \in I} \sum_{s=1}^r \left| \sum_{j=0}^k c_{ij} \lambda_s^j \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \sum_{i \in I} \sum_{s=1}^r \left( \sum_{j=0}^k |c_{ij}| |\lambda_s|^j \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \sum_{i \in I} \sum_{s=1}^r \left( \sum_{j=0}^k |c_{ij}|^2 \right) \left( \sum_{j=0}^k |\lambda_s|^{2j} \right) \right)^{1/2} \\ &\leq \|(p_i)_{i \in I}\|_{\mathcal{P}_k^{|I|}} \left( r \sum_{j=0}^k \beta^{2j} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ahora, sea  $w = (w_{is})_{i \in I, s \in \{1, \dots, r\}} \in \ell^2(I \times \{1, \dots, r\})$ . Recordemos que para todo  $i \in I$ , dados los puntos  $(\lambda_s, w_{is})$ ,  $s = 1, \dots, r$ , el polinomio de Lagrange que los interpola está



dado por  $p_i(z) = \sum_{s=1}^r w_{is} B_s(z)$ , donde

$$B_s(z) = \prod_{\substack{u=1 \\ u \neq s}}^r \frac{z - \lambda_u}{\lambda_s - \lambda_u},$$

entonces,

$$\begin{aligned} \|M(w)\|_{\mathcal{P}_k^l} &= \|(p_i)_{i \in I}\|_{\mathcal{P}_k^l} = \left( \sum_{i \in I} \left\| \sum_{s=1}^r w_{is} B_s \right\|_{\mathcal{P}_k}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \sum_{i \in I} \left( \sum_{s=1}^r |w_{is}| \|B_s\|_{\mathcal{P}_k} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \sum_{i \in I} \left( \sum_{s=1}^r |w_{is}|^2 \right) \left( \sum_{s=1}^r \|B_s\|_{\mathcal{P}_k}^2 \right) \right)^{1/2} \\ &= \left( \sum_{s=1}^r \|B_s\|_{\mathcal{P}_k}^2 \right)^{1/2} \|w\|_{\ell^2(I \times \{1, \dots, r\})}. \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

De nuevo, como para todo  $s = 1, \dots, r$ ,  $|\lambda_s| \leq \beta$ , luego

$$\begin{aligned} \|B_s\|_{\mathcal{P}_k}^2 &= \left\| \prod_{\substack{u=1 \\ u \neq s}}^r \frac{z - \lambda_u}{\lambda_s - \lambda_u} \right\|_{\mathcal{P}_n}^2 = \frac{1}{\prod_{u \neq s} |\lambda_s - \lambda_u|^2} \left\| \prod_{u \neq s} (z - \lambda_u) \right\|_{\mathcal{P}_n}^2 \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \left| \sum_{u \neq s} \lambda_u \right|^2 + \left| \sum_{\substack{1 \leq u < v \leq r \\ u, v \neq s}} \lambda_u \lambda_v \right|^2 + \dots + \left| \prod_{u \neq s} \lambda_u \right|^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \left( 1 + (r-1)^2 \beta^2 + \binom{r-1}{2} \beta^4 + \dots + \beta^{2(r-1)} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{u=0}^{r-1} \binom{r-1}{u} \beta^{2u}. \end{aligned}$$

Finalmente, juntando lo último y (4.1.3) obtenemos que

$$\|M\| \leq \left( \frac{r}{\alpha} \sum_{u=0}^{r-1} \binom{r-1}{u} \beta^{2u} \right)^{1/2}.$$

□

**Observación 4.1.3.** *Observemos que usando la equivalencia entre las normas  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_2$ , podemos obtener la siguiente cota*

$$\|B_s\|_{\mathcal{P}_k}^2 \leq \frac{1}{\alpha} \left( \sum_{u=0}^{r-1} \binom{r-1}{u} \beta^u \right)^2 = \frac{1}{\alpha} (1 + \beta)^{2r},$$

y por lo tanto,

$$\|M\| \leq \left( \frac{r}{\alpha} \right)^{1/2} (1 + \beta)^r.$$

**Teorema 4.1.4.** *Asumamos que  $R$  es una transformación lineal normal y sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$  distintos tales que  $R = \sum_{s=1}^r \lambda_s P_{E_{\lambda_s}}$ . Si para todo  $s = 1, \dots, r$ ,  $\{P_{E_{\lambda_s}} f_i : i \in I\}$  es un marco para  $E_{\lambda_s}$  con constantes de marco  $A_s, B_s > 0$ , entonces  $\{R^j f_i : i \in I, j \in J\}$  es un marco de  $\mathcal{H}$  con constantes*

$$A \left( \frac{r}{\alpha} \sum_{u=0}^{r-1} \binom{r-1}{u} \|R\|^{2u} \right)^{-1} \quad \text{y} \quad B \left( r \sum_{j=0}^k \|R\|^{2j} \right),$$

donde

$$\alpha = \min_{1 \leq s \leq r} \prod_{\substack{u=1 \\ u \neq s}}^r |\lambda_s - \lambda_u|^2 > 0,$$

y  $A = \min_s A_s$ ,  $B = \max_s B_s$ .

Observemos que las constantes que se obtienen sólo dependen de la norma del operador, la cantidad de autovalores distintos y, en la cota superior, el número de iteraciones  $\#J = k$ .

*Demostración.* Consideremos  $U : \ell^2(I \times J) \rightarrow \mathcal{H}$  el operador de síntesis de  $\{R^j f_i : i \in I, j \in J\}$  que está definido por

$$Uc = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} R^j f_i$$

para todo  $c \in \ell^2(I \times J)$ . Observemos que

$$\begin{aligned} Uc &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} R^j f_i = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} \sum_{s=1}^r \lambda_s^j P_{E_{\lambda_s}} f_i \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{s=1}^r \left( \sum_{j \in J} c_{ij} \lambda_s^j \right) P_{E_{\lambda_s}} f_i. \end{aligned}$$

La idea de esta demostración será estimar las constantes de marco a través del operador de síntesis y el de análisis. Para hacer esto, haremos una descomposición de  $U$  entre tres operadores auxiliares  $W$ ,  $P$  y  $T$ , que definiremos a continuación.

Comenzamos por definir  $W$ . Dado que  $\mathcal{H} = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$ , donde las sumas son ortogonales, y cada  $E_{\lambda_s}$  tiene un marco con las mismas constantes  $A$  y  $B$ , entonces la unión de estos marcos:

$$\{P_{E_{\lambda_s}} f_i : i \in I, s = 1, \dots, r\}, \quad (4.1.4)$$

es un marco de  $\mathcal{H}$  con constantes  $A$  y  $B$ . Entonces,  $W$  será el operador de síntesis de (4.1.4), es decir,  $W : \ell^2(I \times \{1, \dots, r\}) \rightarrow \mathcal{H}$  y

$$Wa = \sum_{i \in I} \sum_{s=1}^r a_{is} P_{E_{\lambda_s}} f_i$$

para  $a \in \ell^2(I \times \{1, \dots, r\})$ .

Segundo, definimos  $P : \ell^2(I \times J) \rightarrow \mathcal{P}_k^{|I|}$  como  $c = (c_{ij})_{i,j} \mapsto (p_i)_{i \in I}$  donde  $p_i(z) = \sum_{j=0}^k c_{ij} z^j$ . Notemos que  $P$  es una isometría. Finalmente, consideremos  $T$  como el operador definido en (4.1.1), siendo  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  los autovalores de  $R$ .

Usando los operadores definidos, el operador  $U$  toma la siguiente expresión

$$Uc = \sum_{i \in I} \sum_{s=1}^r (TPc)_{is} P_{E_{\lambda_s}} f_i = WTPc,$$

con lo cual, si  $f \in \mathcal{H}$ , entonces

$$\|U^* f\|^2 = \|P^* T^* W^* f\|^2 = \|T^* W^* f\|^2. \quad (4.1.5)$$

Dado que  $T$  es un operador sobreyectivo por el Lema 4.1.2, entonces  $T^*$  es un operador acotado por debajo por una constante positiva. En particular,

$$\inf \{ \|T^* a\| : a \in \ell^2(I \times \{1, \dots, r\}), \|a\| = 1 \} = \gamma > 0.$$

Además, es bien sabido que si existe un operador  $M$  tal que  $TM = I$ , entonces  $\gamma = 1/\|M\|$  (ver, por ejemplo, [26]). Sea  $M$  el operador definido en (4.1.2). Entonces, por el Lema 4.1.2,  $TM = I$  y dado que  $\|R\| = \beta = \max_{1 \leq s \leq r} |\lambda_s|$ , tenemos que

$$\gamma \geq \left( \frac{r}{\alpha} \sum_{u=0}^{r-1} \binom{r-1}{u} \|R\|^{2u} \right)^{-1/2}.$$

Con lo cual, de (4.1.5) deducimos que

$$\|U^* f\|^2 \geq \gamma \|W^* f\|^2 \geq \gamma A \|f\|^2 \geq A \left( \frac{r}{\alpha} \sum_{u=0}^{r-1} \binom{r-1}{u} \|R\|^{2u} \right)^{-1} \|f\|^2,$$

lo que nos da una constante de marco inferior para  $\{R^j f_i : i \in I, j \in J\}$ . Por el otro lado, por la cota de  $\|T\|$  obtenida en el Lema 4.1.2 se sigue que

$$\|U\|^2 = \|WTP\|^2 \leq B \|T\|^2 \leq B \left( r \sum_{j=0}^k \|R\|^{2j} \right),$$

lo que nos da una constante de marco superior para  $\{R^j f_i : i \in I, j \in J\}$ .  $\square$

## 4.2 Muestreo dinámico para operadores $H$ -conmutantes

En esta sección vamos a asumir que  $V$  es un espacio  $H$ -invariante finitamente generado de longitud  $\mathcal{L}(V) = \ell$ . Mostraremos la solución al problema de muestreo dinámico para un operador  $L : V \rightarrow V$   $H$ -conmutante, acotado y normal, actuando sobre un conjunto de funciones  $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$  de  $V$ . Esto es, damos condiciones sobre el operador  $L$  y  $\mathcal{F}$  para que el sistema

$$\{L^j f_i : i \in I; j \in J\}$$

sea un generador de marco de  $V$  (es decir, las traslaciones por  $H$  de sus elementos forman un marco), donde  $I$  es un conjunto de índices finito y  $J = \{0, \dots, \ell - 1\}$ .

Las condiciones encontradas son similares a las condiciones para el caso finito-dimensional del problema de muestreo dinámico clásico. Estas las obtenemos utilizando la teoría de la  $H$ -diagonalización de operadores  $H$ -conmutantes del capítulo anterior.

Probaremos dos teoremas, uno para las condiciones necesarias y otro para las condiciones suficientes. En el primer teorema, no precisamos asumir la normalidad del operador  $H$ -conmutante.

**Teorema 4.2.1.** *Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante finitamente generado de longitud  $\mathcal{L}(V) = \ell$ , y sea  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado. Supongamos que  $I$  es un conjunto de índices finito y  $J = \{0, \dots, \ell - 1\}$ . Sea  $\{f_i : i \in I\}$  un conjunto de funciones en  $V$ .*

*Si  $\{L^j f_i : i \in I, j \in J\}$  es un generador de marco para  $V$  con constantes  $A, B > 0$ , entonces para cada  $H$ -autovalor  $\Lambda_a$  de  $L^*$ , y  $V_a = \ker(L^* - \Lambda_a)$ , tenemos que  $\{P_{V_a} f_i : i \in I\}$*

es un generador de marco de  $V_a$  con constantes

$$A \left( \sum_{j=0}^{\ell-1} \|L\|^{2j} \right)^{-1} \quad \text{y} \quad B.$$

*Demostración.* Supongamos que  $\{L^j f_i : i \in I, j \in J\}$  es un generador de marco de  $V$  con constantes  $A, B > 0$ . Entonces, por el Teorema 1.3.10,

$$\{\mathcal{T}(L^j f_i)(\omega) : i \in I, j \in J\}$$

es un marco de  $\mathcal{J}(\omega)$  con constantes uniformes  $A, B$  para casi todo  $\omega \in D$ . Por (1.4.1) tenemos que

$$\{\mathcal{R}(\omega)^j(\mathcal{T} f_i(\omega)) : i \in I, j \in J\}$$

es un marco de  $\mathcal{J}(\omega)$  de constantes uniformes  $A, B$  para casi todo  $\omega \in D$ .

Sea  $\Lambda_a$  un  $H$ -autovalor de  $L^*$ . Por (i) de la Proposición 3.1.5 y por (i) en el Teorema 1.4.4, tenemos que  $\hat{a}(\omega)$  es un autovalor de  $\mathcal{R}^*(\omega) = (\mathcal{R}(\omega))^*$  para casi todo  $\omega \in \Sigma(V_a)$ . Entonces, el Teorema 4.1.1 implica que el conjunto

$$\{P_{\mathcal{J}_{V_a}(\omega)}(\mathcal{T} f_i(\omega)) : i \in I, j \in J\} \quad (4.2.1)$$

es un marco de  $\mathcal{J}_{V_a}(\omega)$  de constantes  $A/C_a(\omega)$  y  $B/C_a(\omega)$  para casi todo  $\omega \in \Sigma(V_a)$ , donde  $C_a(\omega) = \sum_{j=0}^{\ell-1} |\hat{a}(\omega)|^{2j}$ .

Notemos que por (1.4.2) obtenemos que

$$1 \leq C_a(\omega) = \sum_{j=0}^{\ell-1} |\hat{a}(\omega)|^{2j} \leq \sum_{j=0}^{\ell-1} \|\mathcal{R}(\omega)\|^{2j} \leq \sum_{j=0}^{\ell-1} \|L\|^{2j}.$$

Entonces, podemos encontrar constantes de marco uniformes para (4.2.1) para casi todo  $\omega \in \Sigma(V_a)$ . Finalmente, usando la Proposición 1.3.8 y el Teorema 1.3.10, vemos que  $\{P_{V_a} f_i : i \in I\}$  es un generador de marco de  $V_a$  con constantes  $A \left( \sum_{j=0}^{\ell-1} \|L\|^{2j} \right)^{-1}$  y  $B$ .  $\square$

Distinto al caso finito-dimensional del problema del muestreo dinámico, para una condición de suficiencia necesitamos añadir una condición más de uniformidad.

**Definición 4.2.2.** Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante finitamente generado y sea  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado con operador rango  $\mathcal{R}$ . Decimos que  $L$  tiene la propiedad de espectro uniformemente separado si existe una constante  $c > 0$  tal que  $|\lambda - \lambda'| \geq c$  para todo  $\lambda \neq \lambda'$  en  $\sigma(\mathcal{R}(\omega))$  y para casi todo  $\omega \in \Sigma(V)$ .

**Teorema 4.2.3.** *Sea  $V$  un espacio  $H$ -invariante finitamente generado de longitud  $\mathcal{L}(V) = \ell$ , y sea  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado y normal que satisface la propiedad de espectro uniformemente separado. Sea  $I$  un conjunto finito de índices,  $J = \{0, \dots, \ell - 1\}$  y sea  $\{f_i : i \in I\}$  un conjunto de funciones de  $V$ .*

*Entonces,  $\{L^j f_i : i \in I, j \in J\}$  es un generador de marco para  $V$  si y sólo si existen  $A, B > 0$  tales que para todo  $H$ -autovalor  $\Lambda_a$  de  $L^*$ , si  $V_a = \ker(L^* - \Lambda_a)$ , entonces  $\{P_{V_a} f_i : i \in I\}$  es un generador de marco para  $V_a$  con constantes  $A$  y  $B$ .*

*Demostración.* La necesidad ya se probó en el Teorema 4.2.1.

Para la recíproca, recordemos que como  $L$  es un operador normal, entonces  $L^*$  es  $H$ -diagonalizable (ver Teorema 3.3.20). Por el Teorema 3.3.8 existe una  $H$ -diagonalización  $(a_1, \dots, a_g)$  de  $L^*$  donde  $g$  es como en (3.2.1) y, dado que  $L$  tiene la propiedad de espectro uniformemente separado, existe una constante  $c > 0$  para la cual

$$|\hat{a}_s(\omega) - \hat{a}_u(\omega)| \geq c \quad (4.2.2)$$

para casi todo  $\omega \in D$  y para todo  $u \neq s$ , con  $u, s = 1, \dots, g$ .

Ahora, supongamos que  $\{P_{V_{a_s}} f_i : i \in I\}$  es generador de marco para  $V_{a_s}$  para todo  $s = 1, \dots, g$  con constantes  $A, B > 0$ . Entonces, por el Teorema 1.3.10,

$$\{\mathcal{T}(P_{V_{a_s}} f_i)(\omega) : i \in I\}$$

es un marco de  $\mathcal{J}_{V_{a_s}}(\omega)$  con constantes uniformes  $A, B$  para casi todo  $\omega \in D$  y para todo  $s = 1, \dots, g$ . Por la Proposición 1.3.8, tenemos que

$$\{P_{\mathcal{J}_{V_{a_s}}(\omega)}(\mathcal{T} f_i(\omega)) : i \in I\}$$

es un marco de  $\mathcal{J}_{V_{a_s}}(\omega)$  con constantes uniformes  $A, B$  para casi todo  $\omega \in D$  y para todo  $s = 1, \dots, g$ .

Recordemos que el número de autovalores de  $\mathcal{R}(\omega)$  podría variar para distintos valores de  $\omega$ . Para aplicar el Teorema 4.1.4, debemos separar al conjunto  $D$  en conjuntos medibles donde el número de autovalores es constante.

Para eso, consideremos  $B_r$  como en (3.2.1) para  $r = 1, \dots, g$ . Cada conjunto  $B_r$  es el conjunto de todos los  $\omega \in \Sigma(V)$  para los cuales  $\mathcal{R}(\omega)$  tiene exáctamente  $r$  autovalores distintos. Además,

$$D = \bigcup_{r=1}^g B_r \cup (D \setminus \Sigma(V)),$$

Fijemos  $r \in \{1, \dots, g\}$ . Para casi todo  $\omega \in B_r$ , tenemos que  $\{P_{J_{V_{a_s}}(\omega)}(\mathcal{T}f_i(\omega)) : i \in I\}$  es un marco de  $\mathcal{J}_{V_{a_s}}(\omega)$  para  $s = 1, \dots, g$ . El Teorema 4.1.4 implica que

$$\{\mathcal{R}(\omega)^j(\mathcal{T}f_i(\omega)) : i \in I, j \in J\} \quad (4.2.3)$$

es un marco de  $\mathcal{J}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in B_r$  con constantes de marco

$$A \left( \frac{r}{\alpha(\omega)} \sum_{u=0}^{r-1} \binom{r-1}{u} \|\mathcal{R}(\omega)\|^{2u} \right)^{-1} \quad \text{y} \quad B \left( r \sum_{j=0}^{\ell-1} \|\mathcal{R}(\omega)\|^{2j} \right),$$

$$\alpha(\omega) = \min_{1 \leq s \leq r} \prod_{\substack{u=1 \\ u \neq s}}^r |\hat{a}_s(\omega) - \hat{a}_u(\omega)|^2.$$

Observemos que como (4.2.2) vale, también podemos asumir que  $c < 1$ , y luego  $\alpha(\omega) \geq c^{2r} \geq c^{2g}$  para casi todo  $\omega \in B_r$ . Por otro lado, por (1.4.2) sabemos que  $\|\mathcal{R}(\omega)\| \leq \|L\|$  en casi todo punto. De esta manera, podemos encontrar constantes de marco uniformes para casi todo  $\omega \in B_r$ ,

$$A \left( \frac{r}{\alpha(\omega)} \sum_{u=0}^{r-1} \binom{r-1}{u} \|\mathcal{R}(\omega)\|^{2u} \right)^{-1} \geq A \left( \frac{g}{c^{2g}} \sum_{u=0}^{g-1} \binom{g-1}{u} \|L\|^{2u} \right)^{-1}$$

y

$$B \left( r \sum_{j=0}^{\ell-1} \|\mathcal{R}(\omega)\|^{2j} \right) \leq B \left( g \sum_{j=0}^{\ell-1} \|L\|^{2j} \right).$$

Como estas constantes son las mismas sobre  $B_r$  para todo  $r = 1, \dots, g$ , tenemos que (4.2.3) es un marco de  $\mathcal{J}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$  con constantes uniformes y luego

$$\{L^j f_i : i \in I, j \in J\}$$

es un generador de marco para  $V$  con constantes  $A \left( \frac{g}{c^{2g}} \sum_{u=0}^{g-1} \binom{g-1}{u} \|L\|^{2u} \right)^{-1}$  y  $B \left( g \sum_{j=0}^{\ell-1} \|L\|^{2j} \right)$ .  $\square$





# Capítulo 5

## Diagonalización de operadores $\Gamma$ -conmutantes

La exposición de este capítulo será dada en el contexto amplio de grupos LCA visto en la Sección 1.5. A lo largo,  $\mathfrak{S}$  siempre denotará un grupo LCA que cumple el segundo axioma de numerabilidad,  $H \subset \mathfrak{S}$  será un reticulado uniforme,  $\Delta \subset \widehat{\mathfrak{S}}$  será el anulador de  $H$  y  $D \subset \widehat{\mathfrak{S}}$  denotará una sección de Borel de  $\widehat{\mathfrak{S}}/\Delta$ .

En este capítulo, buscamos extender la teoría de la  $H$ -diagonalización para ciertos operadores que actúan sobre espacios invariantes por la acción de un grupo  $\Gamma$  que es el producto semi-directo entre  $H$  y un grupo discreto de automorfismos, los espacios  $\Gamma$ -invariantes. Estos grupos incluyen, por ejemplo, las traslaciones y rotaciones. Estos espacios fueron estudiados en [18].

La idea es estudiar, dado un operador que conmuta con la representación unitaria del grupo  $\Gamma$ , si es posible descomponer el espacio  $\Gamma$ -invariante en subespacios  $\Gamma$ -invariantes sobre los cuales el operador adquiera una forma especial.

La organización de este capítulo será como sigue:

En la Sección 5.1 explicaremos con detalle la estructura del grupo  $\Gamma$  con el que trabajaremos y definiremos algunas representaciones unitarias que jugarán un rol importante en el trabajo que sigue.

En la Sección 5.2 damos la definición de los espacios  $\Gamma$ -invariantes y vemos un resultado que caracteriza estos espacios a través de su función rango.

En la Sección 5.3 introducimos los operadores  $\Gamma$ -conmutantes y vemos qué propiedades especiales tienen mediante el paso a las fibras.

Finalmente, la Sección 5.4 definimos el concepto de  $\Gamma$ -diagonalización y vemos que

todo operador  $\Gamma$ -conmutante que es  $H$ -diagonalizable admite una  $\Gamma$ -diagonalización.

## 5.1 Marco teórico

Para el problema que buscamos estudiar, consideraremos un grupo discreto y a lo sumo numerable  $G$  que actúa sobre  $\mathfrak{S}$  por automorfismos continuos  $x \mapsto gx \in \mathfrak{S}$  para  $g \in G$  y  $x \in \mathfrak{S}$ . Asumiremos que la acción de  $G$  sobre  $\mathfrak{S}$  preserva  $H$ , esto es  $gH = H$  para todo  $g \in G$ . Esto implica en particular que la acción de  $G$  preserva la medida de Haar sobre  $\mathfrak{S}$ , i.e.

$$|gE| = |E|, \quad \forall E \subset \mathfrak{S} \text{ medible}, \quad \forall g \in G.$$

Esto se puede probar como sigue. Como  $G$  actúa sobre  $\mathfrak{S}$  por automorfismos, entonces (ver [58, Teorema 15.26]) existe un homomorfismo  $\rho : G \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que, para todo conjunto medible  $E \subset \mathfrak{S}$  tenemos que  $|gE| = \rho(g)|E|$ . Sea  $Q \subset \mathfrak{S}$  un dominio fundamental para  $\mathfrak{S}/H$ . Su medida  $|Q|$  es finita y, como la acción de  $G$  preserva  $H$ , entonces para todo  $g \in G$  el conjunto  $gQ$  es un dominio fundamental, con lo cual  $|gQ| = |Q|$ . Luego,  $\rho = 1$ .

La acción de  $G$  sobre  $\mathfrak{S}$  induce por dualidad una acción de  $G$  sobre  $\widehat{\mathfrak{S}}$ :

$$\langle g^* \xi, x \rangle := \langle \xi, gx \rangle, \quad g \in G, \quad \xi \in \widehat{\mathfrak{S}}, \quad x \in \mathfrak{S}.$$

Observar que esta acción satisface  $g_1^* g_2^* = (g_2 g_1)^*$  para todo  $g_1, g_2 \in G$  y preserva  $\Delta$  y la medida de Haar sobre  $\widehat{\mathfrak{S}}$ . Por otro lado, también induce una acción sobre el grupo cociente  $\widehat{\mathfrak{S}}/\Delta$  como sigue

$$g^*[\xi] := [g^* \xi], \quad \xi \in \widehat{\mathfrak{S}}, \quad g \in G,$$

donde  $[\xi]$  es la clase de  $\xi$  en  $\widehat{\mathfrak{S}}/\Delta$ . Por lo tanto, podemos definir una acción de  $G$  sobre la sección de Borel  $D$  de dicho cociente de la siguiente manera. Sea  $q_D : \widehat{\mathfrak{S}} \rightarrow D$  la sección canónica, es decir,  $q_D(\xi)$  es el único punto en  $[\xi] \cap D$ , y denotemos por  $\nu_D : \widehat{\mathfrak{S}} \rightarrow \Delta$  el mapa

$$\nu_D(\xi) = q_D(\xi) - \xi, \quad \xi \in \widehat{\mathfrak{S}}. \quad (5.1.1)$$

Entonces, los mapas  $\{g^\# : D \rightarrow D, g \in G\}$  dados por

$$g^\# \omega = q_D(g^* \omega) \quad (5.1.2)$$

definen una acción que satisface  $g_1^\# g_2^\# = (g_2 g_1)^\#$ . En efecto,

$$\begin{aligned} g_1^\# g_2^\# \omega &= q_D(g_1^* q_D(g_2^* \omega)) = q_D(g_1^* (q_D(g_2^* \omega) + \nu_D(g_2^* \omega))) \\ &= q_D(g_1^* g_2^* \omega + g_1^* \nu_D(g_2^* \omega)) = q_D(g_1^* g_2^* \omega) = q_D((g_2 g_1)^* \omega) \end{aligned}$$

donde la anteúltima igualdad se debe a que  $g_1^* \nu_D(g_2^* \omega) \in \Delta$ . La acción (5.1.2) va a coincidir con la acción dual de  $G$  en  $\widehat{\mathfrak{S}}$  solo cuando  $D$  es un subconjunto invariante de  $\widehat{\mathfrak{S}}$  por la acción dual.

Dado que la acción de  $G$  preserva  $H$ , podemos definir el producto semidirecto

$$\Gamma = H \rtimes G = \{(h, g) : h \in H, g \in G\},$$

provisto con la operación de composición

$$(h, g) \cdot (h', g') = (h + gh', gg').$$

Consideraremos la acción de  $\Gamma$  sobre  $\mathfrak{S}$  como

$$\gamma x = gx + h, \quad \gamma = (h, g) \in \Gamma, \quad x \in \mathfrak{S}.$$

Un ejemplo que nos motiva a considerar este grupo es el de los grupos cristalográficos.

**Definición 5.1.1.** *Un grupo cristalográfico  $\Gamma$  es un subgrupo discreto de isometrías de  $\mathbb{R}^d$  para la cual existe un conjunto medible Borel cerrado y acotado  $P$  tal que*

1.  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma P = \mathbb{R}^d$ .
2. Si  $\gamma \neq \gamma'$ , entonces  $|\gamma P \cap \gamma' P| = 0$ .

Particularmente, hay una subclase de los grupos cristalográficos en la cual estamos interesados.

**Definición 5.1.2.** *Decimos que un grupo cristalográfico  $\Gamma$  se separa si es el producto semidirecto  $\Gamma = H \rtimes G$  de un grupo finito  $G$  y un reticulado uniforme  $H$  de  $\mathbb{R}^d$ .*

Se puede ver que cualquier grupo cristalográfico está incluido dentro de un grupo cristalográfico que se separa. Referimos al lector a [46, 55] para más detalles sobre estos grupos.

En las siguientes secciones vamos a trabajar sobre subespacios cerrados de  $L^2(\mathfrak{S})$  que son invariantes bajo una representación unitaria del grupo  $\Gamma$ . Para definir dicha representación, necesitamos introducir la siguiente notación:

$$R_g f(x) = f(g^{-1}x), \quad f \in L^2(\mathfrak{S}), \quad g \in G, \quad x \in \mathfrak{S}.$$

Observar que para todo  $g \in G$ , la relación que sigue es cierta:

$$\widehat{R_g f}(\xi) = \hat{f}(g^* \xi). \tag{5.1.3}$$

Por otro lado, notemos que para cada  $(h, g) \in \Gamma$ , si  $T_h$  es el operador de traslación por  $h \in H$ , entonces

$$R_g T_h = T_{gh} R_g,$$

con lo cual, el mapa  $(h, g) \mapsto T_h R_g$  define una representación unitaria del producto semidirecto  $\Gamma = H \rtimes G$  en  $L^2(\mathfrak{S})$ .

**Definición 5.1.3.** Denotamos por  $\Pi$  la representación unitaria de  $G$  en el espacio de Hilbert  $L^2(\Omega, \ell^2(\Delta))$  definida por

$$\Pi(g) = \mathcal{T} R_g \mathcal{T}^{-1}, \quad g \in G.$$

La siguiente proposición provee una forma explícita de la representación  $\Pi$ .

**Proposición 5.1.4.** Sea  $\pi : D \times G \rightarrow \mathcal{U}(\ell^2(\Delta))$  el mapa

$$\pi^\omega(g)a(\delta) = a(g^* \delta - \nu_D(g^* \omega)), \quad a \in \ell^2(\Delta), \omega \in D, g \in G, \delta \in \Delta$$

donde  $\nu_D$  está dado por (5.1.1). Entonces la representación  $\Pi$  se puede expresar como

$$\Pi(g)F(\omega) = \pi^\omega(g)F(g^\sharp \omega), \quad F \in L^2(D, \ell^2(\Delta)), g \in G, \text{c.t.p. } \omega \in D. \quad (5.1.4)$$

Además, el mapa  $(\omega, g) \mapsto \pi^\omega(g)$  satisface  $\pi^\omega(e) = \mathcal{I}_{\ell^2(\Delta)}$  y la relación

$$\pi^\omega(g_1 g_2) = \pi^\omega(g_1) \pi^{g_1^\sharp \omega}(g_2). \quad (5.1.5)$$

*Demostración.* Por (5.1.1), (5.1.2) y (5.1.3), para toda  $f \in L^2(\mathfrak{S})$  tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(R_g f)(\omega) &= \{\hat{f}(g^* \omega + g^* \delta)\}_{\delta \in \Delta} = \{\hat{f}(g^\sharp \omega + g^* \delta - \nu_D(g^* \omega))\}_{\delta \in \Delta} \\ &= \pi^\omega(g) \mathcal{T} f(g^\sharp \omega) \end{aligned}$$

que prueba (5.1.4) usando que  $\mathcal{T}$  es un isomorfismo. Para ver (5.1.5), recordemos que  $\Pi$  es una representación unitaria ya que está definida como una conjugación entre una representación unitaria y un isomorfismo de espacios de Hilbert. Usando (5.1.4), esto implica que

$$\Pi(g_1) \Pi(g_2) F(\omega) = \Pi(g_1 g_2) F(\omega) = \pi^\omega(g_1 g_2) F(g_2^\sharp g_1^\sharp \omega).$$

Por el otro lado, tenemos que

$$\Pi(g_1) \Pi(g_2) F(\omega) = \pi^\omega(g_1) \Pi(g_2) F(g_1^\sharp \omega) = \pi^\omega(g_1) \pi^{g_1^\sharp \omega}(g_2) F(g_2^\sharp g_1^\sharp \omega).$$

Dado que las dos relaciones valen para todo  $F \in L^2(D, \ell^2(\Delta))$ ,  $g \in G$  y c.t.p.  $\omega \in D$ , esto prueba (5.1.5).  $\square$

## 5.2 Espacios $\Gamma$ -invariantes

Ahora tenemos las bases listas para trabajar sobre los subespacios cerrados de  $L^2(\mathfrak{S})$  que son invariantes bajo la representación unitaria  $T_h R_g$ , que llamamos  $\Gamma$ -invariantes. Estos espacios fueron considerados por primera vez en [18].

**Definición 5.2.1.** *Decimos que un subespacio cerrado  $V \subset L^2(\mathfrak{S})$  es  $\Gamma$ -invariante si para todo  $f \in V$ , tenemos que  $T_h R_g f \in V$  para todo  $(h, g) \in \Gamma$ .*

Un espacio  $\Gamma$ -invariante es, en particular,  $H$ -invariante ya que se puede ver que  $V$  es  $\Gamma$ -invariante si y sólo si

$$f \in V \Rightarrow T_h f \in V \quad \forall h \in H, \text{ y } R_g f \in V \quad \forall g \in G.$$

Observemos que, consecuentemente,  $V$  es  $\Gamma$ -invariante si y sólo si  $V$  es  $H$ -invariante, y

$$\Pi(g)\mathcal{T}V \subset \mathcal{T}V$$

para todo  $g \in G$ , donde  $\Pi$  es la representación dada en la Definición 5.1.3.

El siguiente teorema da una caracterización de los espacios  $\Gamma$ -invariantes en términos de una propiedad sobre la función rango asociada.

**Teorema 5.2.2.** *Un subespacio cerrado  $V$  de  $L^2(\mathfrak{S})$  es  $\Gamma$ -invariante si y solo si es  $H$ -invariante y su función rango asociada  $\mathcal{J}$  satisface*

$$\mathcal{J}(\omega) = \pi^\omega(g)\mathcal{J}(g^\sharp\omega), \text{ c.t.p. } \omega \in D, \quad \forall g \in G.$$

*Demostración.* Supongamos que  $V$  es  $H$ -invariante con función rango  $\mathcal{J}$ . Para cada  $g \in G$ , denotamos por  $V_g = R_g(V)$ . Entonces  $V_g$  también es  $H$ -invariante, y notaremos su función rango como  $\mathcal{J}_g$ . Afirmamos que

$$\mathcal{J}_g(\omega) = \pi^\omega(g)\mathcal{J}(g^\sharp\omega), \text{ c.t.p. } \omega \in D, \quad \forall g \in G.$$

Notar que, si probamos esta afirmación, también probaremos el enunciado del teorema.

Para esto, recordemos que por el Teorema 1.3.9,  $F \in \mathcal{T}V$  si y solo si  $F(\omega) \in \mathcal{J}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$  y, por (5.1.4), para  $F \in \mathcal{T}V$  tenemos que  $\Pi(g)F(\omega) = \pi^\omega(g)F(g^\sharp\omega)$ .

Asumamos primero que, para dado  $g \in G$ , tenemos una función  $H \in L^2(D, \ell^2(\Delta))$  tal que  $H(\omega) \in \mathcal{J}_g(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ , esto es,  $H \in \mathcal{T}[R_g(V)]$ . Queremos probar que  $H(\omega) \in \pi^\omega(g)\mathcal{J}(g^\sharp\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ . Por Definición 5.1.3, tenemos que  $\Pi(g^{-1})H \in \mathcal{T}V$ , lo cual implica

$$\pi^\omega(g^{-1})H((g^{-1})^\sharp\omega) \in \mathcal{J}(\omega), \text{ c.t.p. } \omega \in D.$$

Denotando por  $\omega' = (g^{-1})^\sharp \omega$ , esto es equivalente a

$$\pi^{g^\sharp \omega'}(g^{-1})H(\omega') \in \mathcal{J}(g^\sharp \omega'), \text{ c.t.p. } \omega' \in D.$$

Entonces, aplicando  $\pi^{\omega'}(g)$  en ambos lados, y usando la Proposición 5.1.4, obtenemos que  $H(\omega) \in \pi^\omega(g)\mathcal{J}(g^\sharp \omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ .

Ahora supongamos que, para  $g \in G$ , tenemos  $H \in L^2(D, \ell^2(\Delta))$  tal que  $H(\omega) \in \pi^\omega(g)\mathcal{J}(g^\sharp \omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ , y sea  $F = \Pi(g^{-1})H$ . Entonces

$$H(\omega) = \pi^\omega(g)F(g^\sharp \omega).$$

Como  $\pi^\omega(g)$  es un operador unitario en  $\ell^2(\Delta)$ , y  $g^\sharp$  es una biyección de  $D$  obtenemos que  $F(\omega) \in \mathcal{J}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ . Esto es,  $F \in \mathcal{TV}$ , o, equivalentemente,  $H \in \Pi(g)(\mathcal{TV}) = \mathcal{T}[R_g V]$ . Entonces,  $H(\omega) \in \mathcal{J}_g(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ .  $\square$

### 5.3 Operadores $\Gamma$ -conmutantes

En esta sección consideramos los operadores definidos en espacios  $\Gamma$ -invariantes acotados que conmutan con la representación unitaria  $T_h R_g$ .

**Definición 5.3.1.** Sean  $V$  y  $V'$  dos espacios  $\Gamma$ -invariantes de  $L^2(\mathfrak{S})$  y  $L : V \rightarrow V'$  un operador acotado. Decimos que  $L$  es  $\Gamma$ -conmutante si  $LT_h R_g = T_h R_g L$  para todo  $(h, g) \in \Gamma$ .

Observemos que, en particular,  $L$  es  $\Gamma$ -conmutante si y sólo si  $L$  es  $H$ -conmutante y además  $LR_g = R_g L$  para todo  $g \in G$ .

A partir de ahora nos concentraremos en los operadores  $\Gamma$ -conmutantes actuando sobre un espacio  $\Gamma$ -invariante  $V$ , es decir,  $L : V \rightarrow V$ . Como  $L$  es  $H$ -conmutante, existe un operador rango asociado  $\mathcal{R} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$  sobre  $\mathcal{J}$ , la función rango de  $V$ .

En el mismo espíritu que el Teorema 5.2.2, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 5.3.2.** Sea  $V \subset L^2(\mathfrak{S})$  un espacio  $\Gamma$ -invariante y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado con operador rango  $\mathcal{R}$ . Entonces,  $L$  es  $\Gamma$ -conmutante si y solo si para todo  $g \in G$  y para casi todo  $\omega \in D$ ,

$$\mathcal{R}(g^\sharp \omega) = \pi^{g^\sharp \omega}(g^{-1})\mathcal{R}(\omega)\pi^\omega(g). \tag{5.3.1}$$

*Demostración.* Supongamos que  $L$  es  $\Gamma$ -conmutante. Fijemos  $g \in G$  y notemos que para toda  $f \in V$ , y para casi todo  $\omega \in D$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\omega)(\Pi(g)\mathcal{T}f(\omega)) &= \mathcal{R}(\omega)\left(\mathcal{T}(R_g f)(\omega)\right) = \mathcal{T}(LR_g f)(\omega) \\ &= \mathcal{T}(R_g Lf)(\omega) = \Pi(g)\mathcal{T}(Lf)(\omega) \\ &= \Pi(g)\mathcal{R}(\omega)\mathcal{T}f(\omega).\end{aligned}$$

Entonces, si  $F \in \mathcal{T}V$ , por (5.1.4) tenemos que para casi todo  $\omega \in D$

$$\mathcal{R}(\omega)\pi^\omega(g)F(g^\sharp\omega) = \pi^\omega(g)\mathcal{R}(g^\sharp\omega)F(g^\sharp\omega).$$

Por (5.1.5),  $(\pi^\omega(g))^{-1} = \pi^{g^\sharp\omega}(g^{-1})$ , deducimos que para casi todo  $\omega \in D$ ,

$$\mathcal{R}(g^\sharp\omega) = \pi^{g^\sharp\omega}(g^{-1})\mathcal{R}(\omega)\pi^\omega(g).$$

Para la recíproca, si (5.3.1) vale, entonces para toda  $F \in \mathcal{T}V$  tenemos que para casi todo  $\omega \in D$  y todo  $g \in G$ ,

$$\mathcal{R}(\omega)\Pi(g)F(\omega) = \Pi(g)\mathcal{R}(\omega)F(\omega).$$

Por lo anterior, esto significa que para toda  $f \in V$  y para todo  $g \in G$ ,  $\mathcal{T}(LR_g f) = \mathcal{T}(R_g Lf)$ . Luego,  $LR_g = R_g L$  para todo  $g \in G$ .  $\square$

Como consecuencia, vemos que mucha de la estructura de  $\mathcal{R}$  se preserva por la acción de  $G$  sobre  $D$ . En particular, tenemos la siguiente proposición sobre el espectro de  $\mathcal{R}(\omega)$ .

**Proposición 5.3.3.** *Sea  $V$  un espacio  $\Gamma$ -invariante de  $L^2(\mathfrak{S})$  y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $H$ -conmutante acotado con operador rango  $\mathcal{R}$ . Entonces para todo  $g \in G$  y para casi todo  $\omega \in D$ ,*

- (i)  $\sigma(\mathcal{R}(\omega)) = \sigma(\mathcal{R}(g^\sharp\omega))$ .
- (ii)  $\sigma_p(\mathcal{R}(\omega)) = \sigma_p(\mathcal{R}(g^\sharp\omega))$ .

*Demostración.* Fijemos  $g \in G$  y  $\omega \in D$  donde  $\mathcal{J}$  y  $\mathcal{R}$  están definidos. Asumamos que  $\lambda \in \sigma(\mathcal{R}(\omega))$ , entonces  $\mathcal{R}(\omega) - \lambda\mathcal{I}_\omega$  no es inversible en  $\mathcal{J}(\omega)$ . Luego,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(g^\sharp\omega) - \lambda\mathcal{I}_{g^\sharp\omega} &= \pi^{g^\sharp\omega}(g^{-1})\mathcal{R}(\omega)\pi^\omega(g) - \lambda\pi^{g^\sharp\omega}(g^{-1})\pi^\omega(g) \\ &= \pi^{g^\sharp\omega}(g^{-1})(\mathcal{R}(\omega) - \lambda\mathcal{I}_\omega)\pi^\omega(g),\end{aligned}$$

lo que implica que  $\mathcal{R}(g^\sharp\omega) - \lambda\mathcal{I}_{g^\sharp\omega}$  no es inversible en  $\mathcal{J}(g^\sharp\omega)$ , lo cual prueba (1). Ahora, para probar (2), supongamos que  $\lambda \in \mathbb{C}$  es un autovalor de  $\mathcal{R}(\omega)$ , entonces existe  $v \neq 0$  y  $v \in \ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda\mathcal{I}_\omega)$ . Veremos que  $\pi^{g^\sharp\omega}(g^{-1})v \in \ker(\mathcal{R}(g^\sharp\omega) - \lambda\mathcal{I}_{g^\sharp\omega})$ . En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(g^\sharp\omega)(\pi^{g^\sharp\omega}(g^{-1})v) &= \pi^{g^\sharp\omega}(g^{-1})\mathcal{R}(\omega)\pi^\omega(g)(\pi^{g^\sharp\omega}(g^{-1})v) = \pi^{g^\sharp\omega}(g^{-1})\mathcal{R}(\omega)v \\ &= \pi^{g^\sharp\omega}(g^{-1})\lambda v = \lambda(\pi^{g^\sharp\omega}(g^{-1})v). \end{aligned}$$

Como  $v \neq 0$ , entonces  $\pi^{g^\sharp\omega}(g^{-1})v \neq 0$  y consecuentemente  $\ker(\mathcal{R}(g^\sharp\omega) - \lambda\mathcal{I}_{g^\sharp\omega}) \neq \{0\}$ .  $\square$

Es importante remarcar que dada una función medible  $\lambda : D \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\lambda(\omega)$  es un autovalor de  $\mathcal{R}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ , la proposición arriba no implica que  $\lambda(\omega) = \lambda(g^\sharp\omega)$  para todo  $g \in G$  y para casi todo  $\omega \in D$ .

Dado que estamos interesados en obtener una diagonalización para operadores  $\Gamma$ -conmutantes similar a la de la Definición 3.3.1 en el caso finitamente generado o la Definición 3.4.1 en el caso más general, debemos encontrar operadores adecuados que jueguen el rol de  $\Gamma$ -autovalor.

La elección natural sería  $K_a = \sum_{(h,g) \in \Gamma} a(h,g)T_h R_g$  para alguna sucesión  $a = \{a(h,g)\}_{(h,g) \in \Gamma}$  satisfaciendo ciertas condiciones. Sin embargo, si requerimos que estos operadores conmuten con  $T_h R_g$  para todo  $(h,g) \in \Gamma$ , no es difícil ver que la única posibilidad que nos queda es que el operador sea un múltiplo de la identidad.

Por lo tanto, en su lugar consideraremos los operadores  $H$ -conmutantes  $\Lambda_a$  de la Definición 3.1.1, con  $a \in \ell^2(H)$  de espectro acotado (ver Definición 1.4.9). Necesitamos caracterizar los operadores de esta forma que conmutan con la representación unitaria  $T_h R_g$ .

Para esto, primero daremos la siguiente definición.

**Definición 5.3.4.** Denotamos por  $\tilde{r} : G \rightarrow \mathcal{U}(\ell^2(H))$  la representación definida por

$$(\tilde{r}_g(a))(s) = a(g^{-1}s), \quad g \in G, a \in \ell^2(H), s \in H.$$

**Proposición 5.3.5.** Sea  $a \in \ell^2(H)$  de espectro acotado y sea  $\Lambda_a$  como en la definición 3.1.1. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.

1. Para todo  $g \in G$ ,  $R_g \Lambda_a = \Lambda_a R_g$ .
2. Para todo  $g \in G$ ,  $\tilde{r}_g(a) = a$ .
3. Para todo  $g \in G$ ,  $\hat{a}(g^\sharp\omega) = \hat{a}(\omega)$  para c.t.p.  $\omega \in D$ .



*Demostración.* Dado  $g \in G$ , primero computemos para  $\omega \in D$ ,

$$\begin{aligned} (\widehat{\tilde{r}_g(a)})(\omega) &= \sum_{s \in H} (\tilde{r}_g(a))(s) e^{-2\pi i \omega \cdot s} = \sum_{s \in H} a(g^{-1}s) e^{-2\pi i \omega \cdot s} \\ &= \sum_{s \in H} a(s) e^{-2\pi i \omega \cdot gs} = \sum_{s \in H} a(s) e^{-2\pi i g^* \omega \cdot s} \\ &= \sum_{s \in H} a(s) e^{-2\pi i g^\# \omega \cdot s} = \hat{a}(g^\# \omega). \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Ahora, recordando que  $\Pi(g) = \mathcal{T} R_g \mathcal{T}^{-1}$ , vemos que

$$R_g \Lambda_a = R_g \mathcal{T}^{-1} M_{\hat{a}} \mathcal{T} = \mathcal{T}^{-1} \Pi(g) M_{\hat{a}} \mathcal{T}. \quad (5.3.3)$$

Por otro lado, observemos que para  $F \in L^2(\Omega, \ell_2(\Delta))$ , usando (5.1.4)

$$\begin{aligned} \Pi(g) M_{\hat{a}} F(\omega) &= \Pi(g) \hat{a}(\omega) F(\omega) = \pi^\omega(g) \hat{a}(g^\# \omega) F(g^\# \omega) \\ &= \hat{a}(g^\# \omega) \pi^\omega(g) F(g^\# \omega) = M_{\hat{a}(g^\# \cdot)} \Pi(g) F(\omega). \end{aligned}$$

De la última igualdad, junto con (5.3.2) y (5.3.3) se sigue que

$$R_g \Lambda_a = \mathcal{T}^{-1} M_{\hat{a}(g^\# \cdot)} \Pi(g) \mathcal{T} = \mathcal{T}^{-1} M_{\hat{a}(g^\# \cdot)} \mathcal{T} R_g = \Lambda_{\tilde{r}_g(a)} R_g.$$

Entonces,  $R_g \Lambda_a = \Lambda_a R_g$  si y solo si  $\Lambda_{\tilde{r}_g(a)} R_g = \Lambda_a R_g$ . Como  $R_g$  es inversible, esto es cierto si y solo si  $\tilde{r}(g)(a) = a$  o, equivalentemente,  $\widehat{\tilde{r}(g)(a)} = \widehat{a}(\omega)$  para casi todo  $\omega \in D$ .  $\square$

Si  $a \in \ell^2(H)$  es una sucesión de espectro acotado que satisface las condiciones de arriba y  $V$  es un espacio  $\Gamma$ -invariante de  $L^2(\mathfrak{S})$ , entonces  $\Lambda_a(V) \subseteq V$  y  $\Lambda_a : V \rightarrow V$  es  $\Gamma$ -conmutante.

**Observación 5.3.6.** *Si el grupo  $G$  es infinito, en muchos casos esta clase de operadores es muy pequeña. En efecto, para dado  $h_0 \in H$ , por la invariancia (2) de la Proposición 5.3.5, tenemos que*

$$\sum_{h \in H} |a(h)|^2 \geq \sum_{h \in \{g^{-1}h_0 : g \in G\}} |a(s)|^2 = \#\{g^{-1}h_0 : g \in G\} \cdot |a(h_0)|^2.$$

*Dado que la sucesión  $a$  está en  $\ell^2(H)$ , para todo  $h \in H$  donde  $a(h) \neq 0$  tiene que valer*

$$\#\{gh : g \in G\} < \infty.$$

*Por ejemplo, consideremos el grupo de traslaciones y cortes en  $\mathbb{R}^2$ . Esto es,  $\mathfrak{S} = \mathbb{R}^2$ ,  $H = \mathbb{Z}^2$  y  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ , que preserva el reticulado  $\mathbb{Z}^2$ . Para cada  $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{Z}^2$*

tenemos que  $gh = (h_1 + kh_2, h_2)$ . Por lo tanto, si  $h_2 \neq 0$  entonces  $\#\{gh : g \in G\} = \infty$  y luego  $a(h) = 0$  necesariamente. En consecuencia, los operadores de este tipo deben tener la forma

$$\Lambda_a = \sum_{h_1 \in \mathbb{Z}} a(h_1, 0) T_{(h_1, 0)}.$$

Además, si  $G$  fuera un grupo infinito actuando de manera fiel sobre  $H$ , entonces todo operador  $\Lambda_a$  que conmuta con  $R_g$  para todo  $g \in G$  debe satisfacer que  $a(h) = 0$  para todo  $h \in H \setminus \{0\}$ .

## 5.4 $\Gamma$ -diagonalización

Nuestro objetivo entonces será encontrar condiciones sobre los operadores  $\Gamma$ -conmutantes para obtener una  $H$ -diagonalización donde cada  $H$ -autovalor de la descomposición es  $\Gamma$ -conmutante y cada  $H$ -autoespacio es  $\Gamma$ -invariante. A este tipo de diagonalización lo llamaremos  $\Gamma$ -diagonalización.

**Definición 5.4.1.** Sea  $V$  un espacio  $\Gamma$ -invariante de  $L^2(\mathfrak{S})$  y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $\Gamma$ -conmutante acotado. Sea  $a \in \ell^2(H)$  de espectro acotado, decimos que  $\Lambda_a : V \rightarrow V$  es un  $\Gamma$ -autovalor de  $L$  si  $\tilde{r}_g(a) = a$  para todo  $g \in G$  y  $\Lambda_a$  es un  $H$ -autovalor de  $L$ , es decir,

$$V_a := \ker(L - \Lambda_a) \neq \{0\}.$$

Además, diremos que  $L$  es  $\Gamma$ -diagonalizable si admite una  $H$ -diagonalización  $(a_j)_{j \in I}$  donde  $\Lambda_{a_j}$  es un  $\Gamma$ -autovalor para todo  $j \in I$ .

Aquí, cuando decimos que  $L$  es  $H$ -diagonalizable, se puede entender en el sentido de la Definición 3.3.1 cuando  $V$  es finitamente generado como espacio  $H$ -invariante. En el caso general, se debe interpretar como en la Definición 3.4.1.

Observemos que pedir que  $\tilde{r}_g(a) = a$ , por la Proposición 5.3.5, implica que  $\Lambda_a$  conmute con  $R_g$  para todo  $g \in G$ . En ese caso, el  $H$ -autoespacio  $V_a$  asociado a el  $\Gamma$ -autovalor  $\Lambda_a$  es un espacio  $\Gamma$ -invariante de  $V$ .

A partir de ahora, vamos a asumir que existe un conjunto medible Borel  $D_0 \subset D$  que es una transversal para la acción de  $G$  en  $D$ , esto es,  $D_0$  interseca cada órbita de la acción de  $G$  sobre  $D$  en exactamente un punto. Remarcamos que una transversal de Borel para la acción de  $G$  en  $D$  no es necesariamente un conjunto que tesela a  $D$ , es decir, un conjunto tal que  $\{g^\# D_0\}_{g \in G}$  es una partición de  $D$  (salvo un conjunto de medida cero).

Cuando  $G$  es finito, la existencia de una transversal de Borel está asegurado por el [62, Teorema 12.16]. Además, la existencia de una transversal de Borel es equivalente a la existencia de un *selector* de Borel para la acción de  $G$  sobre  $D$  (ver [62]), esto es, una función medible Borel  $s : D \rightarrow D$  tal que para todo  $\omega, \omega' \in D$ , tenemos que

$$\omega' \in O_G(\omega) \Rightarrow s(\omega) = s(\omega') \in O_G(\omega),$$

donde

$$O_G(\omega) = \{\omega' \in D : \omega' = g^\# \omega, g \in G\}.$$

Bajo estas hipótesis, mostraremos que un operador normal  $H$ -diagonalizable que además es  $\Gamma$ -conmutante siempre admite una  $\Gamma$ -diagonalización.

**Teorema 5.4.2.** *Sea  $V$  un espacio  $\Gamma$ -invariante y  $L : V \rightarrow V$  un operador  $\Gamma$ -conmutante acotado. Entonces,  $L$  es  $\Gamma$ -diagonalizable si y sólo si es  $H$ -diagonalizable.*

*Demostración.* Sólo debemos probar que si  $L$  es  $H$ -diagonalizable, entonces admite una  $H$ -diagonalización conformada por  $\Gamma$ -autovalores. Asumamos que  $(V, L, \{a_j\}_{j \in I})$  es una  $H$ -diagonalización de  $L$ . Por el teorema 3.4.2,  $\mathcal{R}(\omega)$  es diagonalizable y  $\sigma_p(\mathcal{R}(\omega)) \subset \{\hat{a}_j(\omega) : j \in I\}$  para casi todo  $\omega \in D$ .

Ahora, sea  $s : D \rightarrow D$  un selector de Borel para la acción de  $G$  sobre  $D$ . En particular, tenemos que  $\sigma_p(\mathcal{R}(s(\omega))) \subset \{\hat{a}_j(s(\omega)) : j \in I\}$  para casi todo  $\omega \in D$ . Además, por (ii) en la Proposición 5.3.3 vemos que  $\sigma_p(\mathcal{R}(\omega)) = \sigma_p(\mathcal{R}(s(\omega)))$  para casi todo  $\omega \in D$ . Con lo cual, tomando  $\lambda_j(\omega) = \hat{a}_j \circ s(\omega)$  obtenemos que

$$\sigma_p(\mathcal{R}(\omega)) \subset \{\lambda_j(\omega) : j \in I\}$$

para casi todo  $\omega \in D$ . Dado que  $s$  es un selector, vemos que  $\lambda_j(g^\# \omega) = \lambda_j(\omega)$  para todo  $j \in I$ ,  $g \in G$  y para casi todo  $\omega \in D$ . Además, como  $s$  es una función medible Borel y  $\hat{a}_j \in L^\infty(D)$ , obtenemos que  $\lambda_j \in L^\infty(D)$ .

Como  $\mathcal{R}(\omega)$  es diagonalizable la siguiente descomposición vale

$$\mathcal{J}(\omega) = \bigoplus_{j \in I} \ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_j(\omega)\mathcal{I}_\omega) \quad (5.4.1)$$

para casi todo  $\omega \in D$ . Ahora, descartamos las funciones  $\lambda_j$  tales que  $\ker(\mathcal{R}(\omega) - \lambda_j(\omega)\mathcal{I}_\omega) = \{0\}$  para casi todo  $\omega \in D$ . Para los  $j$  que quedan, existe una sucesión  $b_j \in \ell^2(H)$  de espectro acotado tal que  $\hat{b}_j = \lambda_j$ . Entonces,  $\Lambda_{b_j}$  es un  $\Gamma$ -autovalor de  $L$  para todo  $j$  y por (5.4.1) concluimos que

$$V = \bigoplus_j V_{b_j}.$$

Por lo tanto,  $L$  es  $\Gamma$ -diagonalizable. □



# Bibliografía

- [1] Roza Aceska, Akram Aldroubi, Jacqueline Davis, and Armenak Petrosyan. Dynamical sampling in shift-invariant spaces. In *Commutative and noncommutative harmonic analysis and applications*, volume 603 of *Contemp. Math.*, pages 139–148. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.
- [2] Elona Agora, Jorge Antezana, and Carlos Cabrelli. Multi-tiling sets, Riesz bases, and sampling near the critical density in LCA groups. *Adv. Math.*, 285:454–477, 2015.
- [3] Elona Agora, Jorge Antezana, Carlos Cabrelli, and Basarab Matei. Existence of quasicrystals and universal stable sampling and interpolation in LCA groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 372(7):4647–4674, 2019.
- [4] Alejandra Aguilera, Carlos Cabrelli, Diana Carbajal, and Victoria Paternostro. Diagonalization of shift-preserving operators. *arXiv preprint arXiv:1910.05188*, 2019.
- [5] A. Aldroubi, C. Cabrelli, A. F. Çakmak, U. Molter, and A. Petrosyan. Iterative actions of normal operators. *J. Funct. Anal.*, 272(3):1121–1146, 2017.
- [6] A. Aldroubi, C. Cabrelli, U. Molter, and S. Tang. Dynamical sampling. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 42(3):378–401, 2017.
- [7] Akram Aldroubi, Jacqueline Davis, and Ilya Krishtal. Dynamical sampling: time-space trade-off. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 34(3):495–503, 2013.
- [8] Akram Aldroubi, Jacqueline Davis, and Ilya Krishtal. Exact reconstruction of signals in evolutionary systems via spatiotemporal trade-off. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 21(1):11–31, 2015.
- [9] Akram Aldroubi and Karlheinz Gröchenig. Nonuniform sampling and reconstruction in shift-invariant spaces. *SIAM Rev.*, 43(4):585–620, 2001.

- [10] Akram Aldroubi and Ilya Krishtal. Robustness of sampling and reconstruction and Beurling-Landau-type theorems for shift-invariant spaces. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 20(2):250–260, 2006.
- [11] Akram Aldroubi and Armenak Petrosyan. Dynamical sampling and systems from iterative actions of operators. In *Frames and other bases in abstract and function spaces*, Appl. Numer. Harmon. Anal., pages 15–26. Birkhäuser/Springer, Cham, 2017.
- [12] Akram Aldroubi, Qiyu Sun, and Wai-Shing Tang. Nonuniform average sampling and reconstruction in multiply generated shift-invariant spaces. *Constructive Approximation*, 2(20):173–189, 2003.
- [13] Boris Alexeev, Jameson Cahill, and Dustin G Mixon. Full spark frames. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 18(6):1167–1194, 2012.
- [14] Magali Anastasio and Carlos Cabrelli. Sampling in a union of frame generated subspaces. *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, 8(3):261–287, 2009.
- [15] Jean-Pierre Aubin and Hélène Frankowska. *Set-valued analysis*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [16] Edward A Azoff. Borel measurability in linear algebra. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 42(2):346–350, 1974.
- [17] Davide Barbieri, Carlos Cabrelli, Eugenio Hernández, Peter Luthy, Ursula Molter, and Carolina Mosquera. Frames of exponentials and sub-multitiles in LCA groups. *Comptes Rendus Mathématique*, 356(1):107–113, 2018.
- [18] Davide Barbieri, Carlos Cabrelli, Eugenio Hernández, and Ursula Molter. Approximation by group invariant subspaces. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (in press)*. *arXiv preprint arXiv:1907.08300*, 2019.
- [19] Davide Barbieri, Carlos Cabrelli, Eugenio Hernández, and Ursula Molter. Optimal translational-rotational invariant dictionaries for images. In *Wavelets and Sparsity XVIII*, volume 11138, page 1113804. International Society for Optics and Photonics, 2019.
- [20] Davide Barbieri, Eugenio Hernández, and Azita Mayeli. Lattice sub-tilings and frames in LCA groups. *Comptes Rendus Mathématique*, 355(2):193–199, 2017.
- [21] Davide Barbieri, Eugenio Hernández, and Victoria Paternostro. The Zak transform and the structure of spaces invariant by the action of an LCA group. *J. Funct. Anal.*, 269(5):1327–1358, 2015.

- [22] Heinz H Bauschke, Jonathan M Borwein, and Adrian S Lewis. The method of cyclic projections for closed convex sets in Hilbert space. *Contemporary Mathematics*, 204:1–38, 1997.
- [23] John J Benedetto and Hui Chuan Wu. Nonuniform sampling and spiral MRI reconstruction. In *Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII*, volume 4119, pages 130–141. International Society for Optics and Photonics, 2000.
- [24] A Beurling. On balayage of measures in fourier transforms. In *Notes from a seminar at the Institute for Advanced Study, Princeton, NJ*, volume 60, 1959.
- [25] Arne Beurling. Local harmonic analysis with some applications to differential operators. *Some Recent Advances in the Basic Sciences*, 1:1962–1964, 1966.
- [26] Richard Bouldin. The essential minimum modulus. *Indiana University Mathematics Journal*, 30(4):513–517, 1981.
- [27] Marcin Bownik. The structure of shift-invariant subspaces of  $L^2(\mathbf{R}^n)$ . *J. Funct. Anal.*, 177(2):282–309, 2000.
- [28] Marcin Bownik and Joseph W Iverson. Multiplication-invariant operators and the classification of LCA group frames. *arXiv preprint arXiv:1912.04420*, 2019.
- [29] Marcin Bownik and Kenneth A. Ross. The structure of translation-invariant spaces on locally compact abelian groups. *J. Fourier Anal. Appl.*, 21(4):849–884, 2015.
- [30] Carlos Cabrelli, Kathryn Hare, and Ursula Molter. Riesz bases of exponentials and the Bohr topology. *Proc. Amer. Math. Soc.* to appear, 2020.
- [31] Carlos Cabrelli, Ursula Molter, Victoria Paternostro, and Friedrich Philipp. Dynamical sampling on finite index sets. *J. Anal. Math.*, 140(2):637–667, 2020.
- [32] Carlos Cabrelli, Ursula Molter, and Daniel Suárez. Multi-orbital frames through model spaces. *Complex Analysis and Operator Theory*, to appear, 2021.
- [33] Carlos Cabrelli and Victoria Paternostro. Shift-invariant spaces on LCA groups. *J. Funct. Anal.*, 258(6):2034–2059, 2010.
- [34] TR Chow. A spectral theory for direct integrals of operators. *Mathematische Annalen*, 188(4):285–303, 1970.
- [35] Ole Christensen. *An introduction to frames and Riesz bases*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, [Cham], second edition, 2016.

- [36] Ole Christensen and Marzieh Hasannasab. Operator representations of frames: boundedness, duality, and stability. *Integral Equations and Operator Theory*, 88(4):483–499, 2017.
- [37] Ole Christensen, Marzieh Hasannasab, and Friedrich Philipp. Frame properties of operator orbits. *Mathematische Nachrichten*, 293(1):52–66, 2020.
- [38] Ole Christensen, Marzieh Hasannasab, and Ehsan Rashidi. Dynamical sampling and frame representations with bounded operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 463(2):634–644, 2018.
- [39] Ole Christensen, Marzieh Hasannasab, and Diana T Stoeva. Operator representations of sequences and dynamical sampling. *Sampl. Theory Signal Image Process.*, 17(1):29–42, 2018.
- [40] Carl de Boor, Ronald A. DeVore, and Amos Ron. Approximation from shift-invariant subspaces of  $L_2(\mathbf{R}^d)$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 341(2):787–806, 1994.
- [41] Carl de Boor, Ronald A. DeVore, and Amos Ron. The structure of finitely generated shift-invariant spaces in  $L_2(\mathbf{R}^d)$ . *J. Funct. Anal.*, 119(1):37–78, 1994.
- [42] Frank Deutsch. The angle between subspaces of a Hilbert space. In *Approximation theory, wavelets and applications*, pages 107–130. Springer, 1995.
- [43] Jacques Dixmier. *von Neumann algebras*, volume 27. Elsevier, 2011.
- [44] Bálint Farkas, Máté Matolcsi, and Péter Móra. On Fuglede’s conjecture and the existence of universal spectra. *J. Fourier Anal. Appl.*, 12(5):483–494, 2006.
- [45] Bálint Farkas and Szilárd Gy. Révész. Tiles with no spectra in dimension 4. *Math. Scand.*, 98(1):44–52, 2006.
- [46] Daniel R Farkas. Crystallographic groups and their mathematics. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 11(4):511–551, 1981.
- [47] Jacob Feldman and Frederick Greenleaf. Existence of Borel transversals in groups. *Pacific Journal of Mathematics*, 25(3):455–461, 1968.
- [48] Gerald B Folland. *A course in abstract harmonic analysis*, volume 29. CRC press, 2016.



- [49] Kurt Friedrichs. On certain inequalities and characteristic value problems for analytic functions and for functions of two variables. *Transactions of the American Mathematical Society*, 41(3):321–364, 1937.
- [50] Bent Fuglede. Commuting self-adjoint partial differential operators and a group theoretic problem. *J. Functional Analysis*, 16:101–121, 1974.
- [51] Bent Fuglede. Orthogonal exponentials on the ball. *Expo. Math.*, 19(3):267–272, 2001.
- [52] Sigrid Grepstad and Nir Lev. Multi-tiling and Riesz bases. *Adv. Math.*, 252:1–6, 2014.
- [53] Karlheinz Gröchenig, Gitta Kutyniok, and Kristian Seip. Landau’s necessary density conditions for LCA groups. *J. Funct. Anal.*, 255(7):1831–1850, 2008.
- [54] Karlheinz Gröchenig, José Luis Romero, and Joachim Stöckler. Sampling theorems for shift-invariant spaces, Gabor frames, and totally positive functions. *Invent. Math.*, 211(3):1119–1148, 2018.
- [55] Branko Grünbaum and Geoffrey Colin Shephard. *Tilings and patterns*. Courier Dover Publications, 1987.
- [56] Christopher Heil. *A basis theory primer*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, New York, expanded edition, 2011.
- [57] Henry Helson. *Lectures on invariant subspaces*. Academic Press, New York-London, 1964.
- [58] Edwin Hewitt and Kenneth A Ross. *Abstract Harmonic Analysis: Volume I Structure of Topological Groups Integration Theory Group Representations*, volume 115. Springer Science & Business Media, 2012.
- [59] Alex Iosevich. Fuglede conjecture for lattices. *preprint available at [www.math.rochester.edu/people/faculty/iosevich/expository/FugledeLattice.pdf](http://www.math.rochester.edu/people/faculty/iosevich/expository/FugledeLattice.pdf)*.
- [60] Alex Iosevich, Nets Katz, and Terence Tao. The Fuglede spectral conjecture holds for convex planar domains. *Mathematical Research Letters*, 10(5):559–569, 2003.
- [61] Philippe Jaming, Felipe Negreira, and José Luis Romero. The Nyquist sampling rate for spiraling curves. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2020.
- [62] Alexander Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156. Springer Science & Business Media, 2012.

- [63] Hong Oh Kim, Rae Young Kim, and Jae Kun Lim. The infimum cosine angle between two finitely generated shift-invariant spaces and its applications. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 19(2):253–281, 2005.
- [64] Hong Oh Kim, Rae Young Kim, and Jae Kun Lim. Characterization of the closedness of the sum of two shift-invariant spaces. *Journal of mathematical analysis and applications*, 320(1):381–395, 2006.
- [65] Mihail N. Kolountzakis. Non-symmetric convex domains have no basis of exponentials. *Illinois J. Math.*, 44(3):542–550, 2000.
- [66] Mihail N. Kolountzakis. Multiple lattice tiles and Riesz bases of exponentials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143(2):741–747, 2015.
- [67] Mihail N. Kolountzakis and Máté Matolcsi. Tiles with no spectra. *Forum Math.*, 18(3):519–528, 2006.
- [68] Vladimir Aleksandrovich Kotel’nikov. On the transmission capacity of ‘ether’ and wire in electric communications. *Physics-Uspokhi*, 49(7):736, 2006.
- [69] Gady Kozma and Shahaf Nitzan. Combining Riesz bases. *Invent. Math.*, 199(1):267–285, 2015.
- [70] Gady Kozma and Shahaf Nitzan. Combining Riesz bases in  $\mathbb{R}^d$ . *Rev. Mat. Iberoam.*, 32(4):1393–1406, 2016.
- [71] I. Laba. Fuglede’s conjecture for a union of two intervals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129(10):2965–2972, 2001.
- [72] Jeffrey C Lagarias. Mathematical quasicrystals and the problem of diffraction. *Directions in mathematical quasicrystals*, 13:61–93, 2000.
- [73] H. J. Landau. Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions. *Acta Math.*, 117:37–52, 1967.
- [74] M.J.J. Lennon. Direct integral decomposition of spectral operators. *Mathematische Annalen*, 207(3):257–268, 1974.
- [75] Yue M Lu and Martin Vetterli. Spatial super-resolution of a diffusion field by temporal oversampling in sensor networks. In *2009 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 2249–2252. IEEE, 2009.

- [76] Basarab Matei and Yves Meyer. Quasicrystals are sets of stable sampling. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 346(23-24):1235–1238, 2008.
- [77] Basarab Matei and Yves Meyer. A variant of compressed sensing. *Rev. Mat. Iberoam.*, 25(2):669–692, 2009.
- [78] Shahaf Nitzan, Alexander Olevskii, and Alexander Ulanovskii. Exponential frames on unbounded sets. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 144(1):109–118, 2016.
- [79] A. Olevskii and A. Ulanovskii. On the duality between sampling and interpolation. *Anal. Math.*, 42(1):43–53, 2016.
- [80] Alexander M Olevskii and Alexander Ulanovskii. *Functions with disconnected spectrum*, volume 65. American Mathematical Soc., 2016.
- [81] Daniel Potts and Gabriele Steidl. New Fourier reconstruction algorithms for computerized tomography. In *Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII*, volume 4119, pages 13–23. International Society for Optics and Photonics, 2000.
- [82] Juri Ranieri, Amina Chebira, Yue M Lu, and Martin Vetterli. Sampling and reconstructing diffusion fields with localized sources. In *2011 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 4016–4019. IEEE, 2011.
- [83] Amos Ron and Zuowei Shen. Frames and stable bases for shift-invariant subspaces of  $L_2(\mathbf{R}^d)$ . *Canad. J. Math.*, 47(5):1051–1094, 1995.
- [84] Walter Rudin. *Fourier analysis on groups*, volume 121967. Wiley Online Library, 1962.
- [85] Claude E. Shannon. Communication in the presence of noise. *Proc. I.R.E.*, 37:10–21, 1949.
- [86] T Tao. An uncertainty principle for cyclic groups of prime order. *Mathematical research letters*, 12(1):121–128, 2005.
- [87] Terence Tao. Fuglede’s conjecture is false in 5 and higher dimensions. *Math. Res. Lett.*, 11(2-3):251–258, 2004.
- [88] Michael Unser. Sampling-50 years after Shannon. *Proceedings of the IEEE*, 88(4):569–587, 2000.

- [89] John M Whittaker. The “Fourier” theory of the cardinal function. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 1(3):169–176, 1928.
- [90] Robert M. Young. *An introduction to nonharmonic Fourier series*. Academic Press, Inc., San Diego, CA, first edition, 2001.

# Índice alfabético

- $1_0$ , 31
- $E(H, a_1, \dots, a_k)$ , 46
- $E(\Gamma)$ , 23
- $E(\Phi)$ , 30
- $PW_\Omega$ , 20
- $R_g$ , 99
- $S(\Phi)$ , 30
- $T_x$ , 16
- $\Gamma$ -conmutante, 102
- $\Gamma$ -diagonalizable, 106
- $\Gamma$ -diagonalización, 106
- $\Gamma$ -invariante, 101
- $\mathcal{J}(\omega)$ , 31
- $\mathcal{J}_\Omega(\omega)$ , 45
- $\mathcal{R}(\omega)$ , 34
- $\Sigma(V)$ , 32
- $\mathcal{T}f(\omega)$ , 30
- $H$ -autoespacio, 59
- $H$ -autovalor, 59
- $H$ -conmutante, 34
- $H$ -diagonalizable, 66, 79
- $H$ -diagonalización, 66, 79
- $H$ -invariante, 29
- $\Delta_\omega$ , 44
- $\mathcal{P}_k$ , 87
- $\mathcal{I}_\omega$ , 59
- $\sigma(A)$ , 16
- $\sigma_p(A)$ , 16
- $e_x$ , 16
- $k$ -subteselar, 53
- $k$ -teselar, 44
- admisibles, 49
- anulador, 41
- base de Riesz, 19
- Bessel, 17
- caracter, 41
- conjunto de interpolación, 24
- conjunto de muestreo, 22
- conjunto separado, 23
- constantes de marco, 17
- diagonalizable, 16
- dominio fundamental, 28
- DS-triple, 84
- espacio de fibras, 31
- espectro de un espacio  $H$ -invariante, 32
- espectro de un operador, 16
- espectro puntual de un operador, 16
- espectro uniformemente separado, 93
- fibra, 30
- finitamente generado, 30
- Fourier, 16, 42
- función multivaluada, 39

- función rango, 31
- generador de marco, 30
- grupo cristalográfico, 99
- integral directa, 38
- longitud de un espacio  $H$ -invariante, 30
- mapa de fibras, 30
- marco, 17
- marco de Parseval, 17
- minimal ( $H$ -diagonalización), 75
- muestreo dinámico, 85
- multi-teselar, 44
- operador de análisis, 17
- operador de marco, 18
- operador de síntesis, 17
- operador rango, 34
- Paley-Wiener, 20
- principal, 30
- reticulado completo, 28
- reticulado dual, 29
- reticulado uniforme, 41
- sección de Borel, 42
- selección medible, 39
- selector, 107
- seno cardinal, 21
- sistema de esponenciales estructurado, 46
- submulti-teselar, 53
- sucesión de espectro acotado, 37
- sucesión de Riesz, 19
- Teorema de Selección de Castaign, 39
- teselar, 43
- transversal, 106
- ángulo entre subespacios, 72