UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Juegos evolutivos con interacciones múltiples

Tesis presentada para optar al título de Doctora de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Natalia Lucia Kontorovsky

Director de tesis: Juan Pablo Pinasco
Director adjunto: Federico Vazquez
Consejera de estudios: Gabriela Jeronimo

Lugar de trabajo: IMAS, IC Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.

Buenos Aires, 2024.

Juegos evolutivos con interacciones múltiples

(Resumen)

En esta tesis investigamos, dentro del marco de la teoría de juegos evolutiva, cómo las interacciones entre diferentes cantidades de jugadores influyen en los equilibrios y su estabilidad. Comenzamos estudiando un modelo de parasitoides donde el equilibrio de las estrategias depende de la cantidad de hospedadores y larvas presentes en el juego. Luego analizamos el concepto de estrategias evolutivamente estables en juegos en los que, en cada ronda, con una probabilidad p, se juega un juego entre dos jugadores y con la probabilidad complementaria $1 - p$ se juega de a tres. Aplicamos la teoría desarrollada al ejemplo particular del "duelo-truelo" y lo modelamos en redes complejas consiguiendo una dinámica equivalente a la dinámica del replicador. Generalizando la teoría, estudiamos las estrategias evolutivamente estables en juegos donde, en cada ronda, puede participar una cantidad aleatoria k de jugadores. Por último estudiamos la ecuación del replicador en un continuo de estrategias a partir de una dinámica discreta relacionada con la desarrollada para redes complejas.

Palabras Claves: Juegos evolutivos, teoría de juegos, redes complejas, ecuaciones diferenciales, estrategias evolutivamente estables

Evolutionary games with multiple interactions

(Abstract)

In this thesis, we investigate, within the framework of evolutionary game theory, how interactions between different numbers of players influence equilibria and their stability. We begin by studying a model of eusocial animals where the equilibrium of strategies depends on the number of hosts and larvae present in the game. We then analyze the concept of evolutionary stable strategies in games where, in each round, with a probability p, a game between two players is played, and with the complementary probability $1-p$, the game between three players is played. We apply the developed theory to the particular example of the 'duel-truel' game and model it in complex networks, achieving a dynamic equivalent to the replicator dynamic. Generalizing the theory, we study evolutionary stable strategies in games where, in each round, a random number k of players can participate. Finally, we study the replicator equation in a continuum of strategies derived from a discrete dynamic related to that developed for complex networks.

Key words: Evolutionary games, game theory, complex networks, diferencial equations, evolutionary stable strategies

Agradecimientos

A mi director, Juan Pablo Pinasco por incentivarme siempre a pensar nuevos problemas y por la paciencia.

Al jurado por su tiempo y dedicación.

A la educación pública, al CONICET y a la UBA.

A Fede, Mayte y Crespo, por el trabajo compartido que fue muy valioso.

A Martu, mi hermana del doc y para siempre.

A mis amigos y amigas y a mi familia por acompañarme.

A mi mamá y mi papá especialmente, por el cariño, por el apoyo y por transmitirme el amor al conocimiento.

A Nico, por estar siempre y ayudarme con amor.

Índice general

Resumen III

Abstract V

Agradecimientos VII

1. Introducción 1

2. Preliminares 6

2.1. Notación . . . 6

2.1.1. Estrategias mixtas . . . 7

2.1.2. Equilibrio de Nash . . . 7

2.2. Teoría de juegos evolutiva . . . 7

2.2.1. Equilibrio de Nash y ecuación del replicador . . . 9

2.2.2. Estrategias evolutivamente estables . . . 9

2.3. Redes complejas . . . 10

2.3.1. El modelo de Erdös Rényi . . . 10

2.3.2. Grafos aleatorios de grado regular . . . 12

3. Un modelo de parasitoides 15

3.1. Modelo . . . 15

3.1.1. Dinámica del parasitismo en una caja . . . 16

3.1.2. Una formulación alternativa de la dinámica . . . 16

3.2. Resultados . . . 18

3.2.1. Enfoque analítico . . . 18

3.2.2. Simulaciones numéricas . . . 26

3.3. Discusión y conclusiones 32

4. Estrategias evolutivamente estables en juegos de dos o tres jugadores 35

4.1. Definición ESS 35

4.2. Juegos de dos estrategias 39

4.2.1. ESS puras 40

4.2.2. ESS mixtas 40

4.3. El juego del duelo o truelo 41

4.4. Conclusiones 43

5. Dinámica basada en agentes sobre redes complejas 44

5.1. La dinámica 44

5.1.1. Grafo completo 45

5.1.2. Redes complejas 47

5.1.3. Simulaciones de Monte Carlo 49

5.2. Conclusiones 52

6. Estrategias evolutivamente estables en juegos con participación aleatoria 54

6.1. Notación y resultados 55

6.2. Caracterización de ESS: 2-estrategias, cantidad aleatoria de jugadores 56

6.2.1. ESS puras 57

6.2.2. ESS mixtas 57

6.2.3. Condición general 59

6.3. Aplicaciones 61

6.3.1. Dilema del voluntario 61

6.3.2. Juegos de bienes públicos 63

6.4. Conclusiones 68

7. La dinámica del replicador para un juego con un continuo de estrategias 70

7.1. Descripción de la dinámica 71

7.2. Derivación heurística de la ecuación del replicador 73

7.3. Existencia y unicidad de solución 74

7.4. Discretización numérica de la ecuación continua 77

7.5. Convergencia del método numérico 79
7.6. Soluciones estacionarias y equilibrios de Nash 88
7.6.1. Ejemplo 88

8. Conclusiones y trabajo futuro **92**

A. Apéndice A **98**

B. Apéndice B **100**
B.1. Deducción de la ecuación de evolución para σ 100
B.2. Deducción de la ecuación de evolución para ρ 104

C. Apéndice C **106**

D. Apéndice D **108**

1

Introducción

La teoría de juegos evolutiva proporciona un marco para estudiar el comportamiento de grandes poblaciones donde individuos que juegan diferentes estrategias (o tienen diferentes rasgos biológicos) interactúan a través de algún juego y pueden replicarse según sus pagos.

El concepto de estrategia evolutivamente estable (ESS) fue introducido por Maynard Smith y Price [1], y puede caracterizarse en términos de los pagos entre los miembros de la población original (residentes) y los invasores (o mutantes). Intuitivamente, si todos los individuos residentes adoptan una estrategia evolutivamente estable, entonces ninguna minoría de "mutantes" (pequeño grupo de jugadores que ingresan a la población empleando otra estrategia) puede invadirla exitosamente. Podemos entenderlo como un refinamiento del equilibrio de Nash, ya que implica una condición de no desviación colectiva al menos hasta una fracción crítica de jugadores, en lugar de considerar desviaciones de un solo jugador. Por lo tanto, una ESS satisface la condición adicional y más fuerte de estabilidad, lo que implica que si se alcanza una ESS, las proporciones de jugadores que juegan las diferentes estrategias no cambian con el tiempo.

Una de las componentes centrales en las dinámicas evolutivas es la interacción entre los jugadores. Los juegos evolutivos con interacciones de a pares han sido ampliamente estudiados en el pasado. En este trabajo, investigamos cómo las interacciones entre diferentes cantidades de jugadores afectan a los equilibrios y su estabilidad.

En el capítulo 3 estudiamos un modelo de parasitoides basado en un contexto biológico real [2], donde hay larvas que son ectoparasitoides de larvas de escarabajos (*Cyclocephala signaticollis*) que llamaremos hospedadores [3, 4, 5]. Introducimos y estudiamos un modelo de poblaciones que intenta reproducir la dinámica del parasitismo en el campo. Hay dos tipos de larvas, comunitarias y solitarias, que se comportan distinto al parasitar: mientras que las larvas comunitarias, que fueron criadas en alta densidad, no tienen restricciones para seleccionar y parasitar un hospedador; las larvas solitarias, que fueron criadas en baja densidad, sólo seleccionan hospedadores que no están parasitados.

El hecho de que las larvas puedan parasitar hospedadores ya parasitados conduce al fenómeno

de superparasitarismo, que evolutivamente parece subóptimo ya que sólo una larva sobrevive y se desarrolla. Estudiamos la dinámica de poblaciones de las larvas solitarias y comunitarias bajo hipótesis biológicas razonables. Veremos que el estado estacionario varía según el número de hospedadores y larvas, consiguiendo condiciones bajo las cuales se dan los tres posibles escenarios: las solitarias dominan, las comunitarias dominan, o ambas coexisten.

Si reformuláramos en términos de teoría de juegos evolutiva, estamos en el caso de una estrategia subóptima que sobrevive o incluso resulta dominante. Este fenómeno ya se había observado en juegos de duelos y truelos: en un duelo dos jugadores intentan eliminarse mutuamente, mientras que en un truelo son tres los jugadores que buscan eliminarse. Los truelos fueron introducidos de manera independiente por Shubik [6] y Epstein [7].

La paradoja es que el jugador que tiene la mayor probabilidad de aniquilar a los competidores no necesariamente será el ganador de este juego [6, 8, 9, 10]. Consideremos una ronda en la que dos jugadores tengan puntería perfecta y uno no, si el jugador con la peor puntería tiene que disparar primero, preferirá disparar al aire en lugar de disparar a uno de los oponentes, ya que si mata a uno de ellos, será eliminado por el jugador restante. De este modo, los jugadores con puntería perfecta se disparan entre sí, lo que aumenta la probabilidad de supervivencia del jugador con la peor puntería.

En muchas situaciones el número de jugadores puede variar a lo largo del tiempo, como en concursos de muchos jugadores, mercados o el acceso a redes de comunicación [11, 12, 13], aunque el estudio de las estrategias evolutivamente estables no estaba desarrollado. La mayoría de los trabajos consideran un número fijo de jugadores y nos propusimos modelar e investigar el escenario en el que cada juego puede ser jugado por un número aleatorio de jugadores.

Este tipo de juegos donde el número de jugadores viene dado por una variable aleatoria fueron estudiados por Myerson [14, 15], y se los conoce como juegos de Poisson. En sus estudios pioneros utiliza el ejemplo de una elección a gran escala para justificar que la suposición de que cada jugador conoce a todos los demás jugadores es irreal. En su lugar, propuso un modelo que reconoce la incertidumbre sobre el número de jugadores, descripta mediante una distribución de Poisson.

En el capítulo 4, estudiamos una dinámica donde con probabilidad p se juega un juego entre dos jugadores y con la probabilidad complementaria $1 - p$ se juega el juego de a tres. Formalizamos y generalizamos la definición de estrategia evolutivamente estable para poder incluir este escenario. Esta pregunta fue analizada anteriormente [13], sin embargo, no se consideró la jerarquía correcta de pagos para caracterizar una ESS cuando el número de jugadores en cada interacción es una variable aleatoria.

En particular, estudiamos el juego de duelo-truelo. La mecánica en el truelo es la siguiente: en cada paso de tiempo se establece un orden entre los tres jugadores y disparan cíclicamente, decidiendo quién será su objetivo. Cada jugador apunta a su oponente elegido y, con una probabilidad dada por su estrategia, logra el objetivo de eliminar a este jugador del juego. Este proceso se repite hasta que queda sólo uno de los tres jugadores.

Consideramos solo dos estrategias, *mediocre* que tiene una probabilidad de matar igual a $1/2$, y *perfecto* que tiene una probabilidad de matar igual a 1. Este juego fue considerado anteriormente [16], y sólo se obtuvieron las probabilidades de supervivencia de cada estrategia sin considerar la opción óptima de disparar al aire. Los pagos de la matriz en el juego del duelo favorecen a la población que usa la estrategia más fuerte, mientras que los pagos de las matrices del truelo favorecen a la población que usa la estrategia más débil.

En otras palabras, si las interacciones locales entre los jugadores en la población fueran de a pares, la ESS sería que toda la población jugara la estrategia *perfecta*, mientras que si las interacciones involucran a tres jugadores, la ESS sería que toda la población jugara la estrategia *mediocre*. Esto nos llevó a considerar cuál sería la ESS en un escenario donde los agentes juegan un duelo con probabilidad $p \in (0, 1)$ y un truelo con probabilidad $1 - p$.

Además, introducimos un modelo basado en agentes en el cual los jugadores interactúan en una red compleja copiando las estrategias de sus vecinos, con una dinámica que, en promedio, evoluciona siguiendo la ecuación del replicador. Observemos que la dinámica del replicador generalmente se define en términos de nuevos individuos que ingresan a la población, seleccionando una estrategia pura con una probabilidad proporcional al pago, dado el estado actual de agentes. Algunos trabajos también han explorado cuestiones similares [17], pero asumen que los individuos se reproducen en lugar de copiar estrategias.

Nuestro enfoque tiene la ventaja de que puede ser utilizado en redes con un número fijo de nodos o agentes, evitando el problema de cómo añadir nuevos nodos a medida que los agentes se replican.

Realizamos simulaciones de Monte Carlo (MC) del modelo en diferentes tipos de redes y desarrollamos un enfoque analítico basado en una aproximación de a pares [18, 19, 20, 21]. Esto nos permitió investigar si las transiciones entre ESS en estrategias puras y mixtas encontradas dentro de la teoría de equilibrio de Nash también se observan en redes complejas, y cómo la topología de las redes afecta la existencia de equilibrios mixtos.

En el trabajo de Tembine [13] se intentó extender el marco de juegos evolutivos para permitir un número arbitrario, posiblemente aleatorio, de jugadores involucrados en una interacción local en el contexto del juego de acceso a conexiones de red. Sin embargo, no se consideró la jerarquía de recompensas necesaria para caracterizar una ESS cuando el número de jugadores en cada interacción es una variable aleatoria. Este problema se menciona en [22], pero no se profundiza en la definición, y caracteriza las ESS en un juego donde el número de jugadores es aleatorio, dado por una distribución de Poisson, en el contexto de la protección contra epidemias en redes heterogéneas.

En el capítulo 6, generalizamos la teoría del capítulo 4 permitiendo que, con una cierta probabilidad P_k, cualquier cantidad de jugadores $1 < k \leq N$ pueden ser elegidos al azar para jugar entre sí en cada ronda, y definimos ESS en este escenario.

En el caso de juegos de dos estrategias, caracterizamos las condiciones bajo las cuales los equilibrios puros son evolutivamente estables, y cuándo el equilibrio mixto es ESS de nivel 1.

Para determinar si una estrategia particular x es ESS se examina una población en la que casi todos adoptan esta estrategia, excepto una pequeña fracción ε de individuos llamados mutantes o invasores que juegan una estrategia diferente y. La estrategia x será evolutivamente estable si su pago esperado jugando contra toda la población es superior al pago esperado de la estrategia y al enfrentarse a la misma población.

En el contexto del juego aleatorio 2-3, identificamos 3 niveles de ESS. Estos niveles se derivan del hecho de que es más probable seleccionar a un incumbente para jugar, y de que un jugador puede enfrentarse como máximo a otros 2 rivales. En un escenario más general donde se puede competir contra un máximo de $k_{max} - 1$ oponentes (siendo k_{max} el mayor valor de k para el cual la distribución de probabilidad P_k es positiva), existirán k_{max} niveles de ESS. Teniendo en cuenta esto, obtuvimos el teorema que dice que dada una estrategia $x = (x_1, 1 - x_1)$, si θ es impar, va a existir una expresión que depende solamente de los parámetros del juego y x_1 a partir de la cual seremos capaces de decidir si x es ESS de nivel θ. Por el contrario, si θ es par, la estrategia x no es ESS.

Aplicamos la teoría desarrollada a dos problemas muy estudiados en la teoría de juegos: el dilema del voluntario y el juego de bienes públicos. El dilema del voluntario plantea un escenario donde los individuos deben decidir si realizan un sacrificio individual, o se abstienen, sabiendo que el beneficio colectivo depende de que al menos una persona se ofrezca como voluntaria. Podría ejemplificarse en un escenario de la vida real con individuos caminando por la calle cuando, de repente, alguien se desmaya. En esta situación, el costo de ser voluntario es equivalente al esfuerzo y la responsabilidad de llamar a una ambulancia. El dilema surge cuando cada transeúnte considera si asumir este costo por el bienestar colectivo. Si una persona toma la iniciativa y hace la llamada, hay un beneficio colectivo para todos los involucrados. Sin embargo, si nadie da el paso adelante, el grupo en conjunto experimenta una menor ganancia. Es importante notar que, en este contexto, la representación de "individuos caminando por la calle" proporciona una ilustración convincente de un fenómeno que se modela de manera más precisa al incorporar un número variable de participantes en cada ronda.

En el contexto de los juegos de bienes públicos los individuos contribuyen a un esfuerzo colectivo cuyo pago dependerá de cuántos contribuyeron y se benefician todos. Podemos usar la analogía de individuos que contribuyen al pago de los gastos de electricidad, cada persona decide si aporta financieramente al fondo común. En la literatura también se incorpora un subconjunto de individuos que optan por no participar, con lo cual no aportan ni reciben beneficios. Nuestro marco considera la participación activa de los agentes en el juego como una variable aleatoria, reconociendo las posibles fluctuaciones a lo largo del tiempo.

Por último, en el capítulo 7 estudiamos la ecuación del replicador considerando un continuo de estrategias. Esto permite modelar de manera más precisa diversos procesos en campos biológicos, económicos y sociales. Es particularmente útil en áreas como la competencia en mercados de duopolios y oligopolios, la gestión de bienes públicos o el modelado de subastas, entre otros. En estos casos, el conjunto de estrategias puras debe ser representado por un subconjunto continuo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, y cada punto $x \in \Omega$ se considera como una posible estrategia pura a ser empleada por un

jugador.

Al trabajar con un continuo de estrategias, el enfoque del replicador consideraría una ecuación diferencial ordinaria (ODE) para cada estrategia. Esto genera problemas relacionados con la teoría de la medida, y se define una ODE para cada boreliano sobre las estrategias. Las trabajos que se realizaron desde la perspectiva económica o de la teoría de juegos (ver por ejemplo, [23] y [24]), caracterizan el estado de las estrategias de la población utilizando una medida de probabilidad P con respecto a un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{B})$, donde $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel en Ω. Este enfoque les permite obtener teoremas abstractos de existencia y analizar la convergencia en la topología débil, pero el sistema de ecuaciones que resulta tiene una ecuación para la evolución temporal de P para cada boreliano $B \in \mathcal{B}$.

Sin embargo, se puede obtener una ecuación no local que esté definida para las funciones continuas; como en [25], pero solo consideran interacciones entre jugadores con estrategias infinitesimalmente cercanas, lo que lleva a aproximaciones no muy adecuadas desde el enfoque de la teoría de juegos.

En este capítulo, discretizamos el conjunto de estrategias y definimos una dinámica discreta, llegando a un conjunto de ecuaciones que describen la evolución temporal de la proporción de jugadores en las estrategias discretas. Luego pasando al límite refinando la discretización, obtenemos la ecuación del replicador que es una ecuación integro-diferencial que coincide con la de los trabajos previos [25],[23]. Una diferencia importante es que llegamos al planteo continuo de manera constructiva basándonos en la interacción descripta en el capítulo 5 cuando desarrollamos una dinámica en redes complejas. Se demuestra además la existencia y unicidad de solución para la ecuación, y mediante un ejemplo, verificamos algunos resultados del Teorema Folk, lo que nos lleva a conjeturar que podría extenderse a este contexto.

2

Preliminares

En la primera sección de este capítulo presentamos la notación que usamos a lo largo de toda la tesis e introducimos las ideas básicas de la teoría de juegos que necesitamos para este trabajo.

2.1. Notación

Para definir un juego necesitamos tres elementos:

- Un conjunto J de jugadores.
- Un conjunto de estrategias puras $S^{(i)}$ para cada jugador $i \in J$.
- Una función de utilidad U que definiremos como el pago del juego cuando cada jugador elige una estrategia.

El conjunto J va a consistir en una cantidad finita de jugadores que participarán en el juego y utilizaremos la letra $k = \#J$ para notar la cantidad de individuos totales (que también llamamos indistintamente agentes o jugadores).

Trabajamos con juegos que tienen el mismo conjunto S de acciones o estrategias puras para todos los jugadores. Suponemos que es finito de cardinal $m = \#S$ y llamamos $s_1, \ldots, s_m$, a los elementos de S.

Finalmente, definiremos la función de utilidad $U : S^k \to \mathbb{R}^k$. Llamaremos $U^{(i)}(v^{(i)}, v^{(-i)})$ al pago del jugador i, donde $v = (v^{(i)}, v^{(-i)})$ representa un vector de k coordenadas, separando la coordenada i-ésima del resto.

Definición 2.1.1. Sea (J, S, U) un juego. Si $S = \{s_1, ..., s_m\}$ es el mismo conjunto de estrategias para todos los jugadores y $U^{(i)} = U^{(j)}$ para todo i, j, entonces decimos que el juego es simétrico.

2.1.1. Estrategias mixtas

En general se permite que un jugador no tenga que eligir una única estrategia pura, sino que pueda asignar una probabilidad a cada una de ellas. Esto nos lleva a la noción de estrategias mixtas. Asociamos la estrategia pura $s_i \in S$ con el i-ésimo vector e_i de la base canónica de $\mathbb{R}^m$. Entonces una estrategia mixta x es un vector $x = (x_1, \ldots, x_m)$ donde x_i es la probabilidad de jugar s_i.

De manera equivalente, consideramos el simplex de estrategias mixtas, el conjunto de vectores de probabilidad,

$$\Delta_S = \Big\{x = (x_1, \ldots, x_m) : 0 \leq x_i, \sum x_i = 1\Big\},$$

donde un jugador usando la estrategia mixta $x \in \Delta_S$ juega la estrategia pura s_i con probabilidad x_i.

Entonces extendemos las funciones de pagos $U^{(i)}$ a Δ_S^k de forma natural como el pago esperado:

$$E^{(i)}[x^1, \ldots, x^k] = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{m} x_{i_1}^1 \times \ldots \times x_{i_k}^k \times U^{(i)}(s_{i_1}, \ldots, s_{i_k})$$

donde x^j es la estrategia mixta de la jugadora j para $1 \leq j \leq k$.

Notemos que cuando el juego es simétrico $E^{(i)} = E^{(j)}$ para todo $i, j \in J$. En estos casos utilizaremos la notación $E[x^1, \ldots, x^k]$ para referirnos al pago esperado del jugador 1 (el que está jugando la estrategia mixta x^1).

2.1.2. Equilibrio de Nash

Decimos que un equilibrio de Nash es un vector de estrategias, una para cada jugador, tal que ningún jugador puede mejorar su recompensa cambiando su estrategia unilateralmente [26].

Definición 2.1.2. Un equilibrio de Nash en un juego (J, S, U), es un conjunto de estrategias $(x^{(i)})_{i \in J} \in \Delta_S^k$, con $k = \#J$, tal que para cada jugador $i \in J$ se tiene que

$$E^{(i)}(x^{(i)}, x^{(-i)}) \geq E^{(i)}(y^{(i)}, x^{(-i)}) \quad \text{para cualquier} \quad y^{(i)} \in \Delta_S\,.$$

2.2. Teoría de juegos evolutiva

El trabajo se enmarca dentro de la teoría de juegos evolutiva, por lo que pasaremos a describir en qué consiste.

Hablar de teoría de juegos evolutiva requiere ciertas modificaciones en el enfoque conceptual de la teoría de juegos clásica. De manera simplificada se puede decir que la teoría de juegos clásica se centra en un individuo racional, llamado jugador, que participa en una interacción determinada o juego con otros jugadores y tiene que decidir entre diferentes opciones, o estrategias, con el fin

de maximizar una "recompensa", que llamamos pago, que depende de las estrategias de los demás jugadores (quienes, a su vez, intentan maximizar su recompensa). Por el contrario, la teoría de juegos evolutiva se ocupa de poblaciones enteras de jugadores, todos programados para utilizar alguna estrategia (o tipo de comportamiento). Las estrategias con altos pagos se extenderán dentro de la población, lo cual puede lograrse mediante aprendizaje, imitación, herencia de estrategias o incluso por infección. Los pagos o ganancias están influenciados por las acciones de los co-jugadores y, en consecuencia, por la frecuencia de las estrategias dentro de la población. Como las frecuencias varían en función de los pagos, se genera un ciclo de retroalimentación. El análisis de este ciclo es el foco principal de la teoría de juegos evolutiva.

Existen muchas dinámicas de juego, que pueden consistir en cambios en las estrategias de los jugadores, su reproducción y muerte basadas en los pagos, etc. A continuación presentamos tres de ellas a modo de ejemplo: la dinámica de imitación, la dinámica de mejor repuesta y la dinámica del replicador.

Dinámica de imitación.

Las estrategias pueden difundirse entre la población mediante la imitación. Este proceso puede ser modelado de muchas formas. Por ejemplo, siguiendo a Weibull [27], podemos asumir que los individuos ocasionalmente eligen al azar otro agente en la población, y adoptan su estrategia con cierta probabilidad que puede depender de la diferencia entre los pagos, la frecuencia de la estrategias, etc. Asumir esta regla nos lleva al sistema de ecuaciones

$$\dot{x}_i = x_i \sum_j \Big(f_{ij}(x) - f_{ji}(x) \Big) x_j$$

donde f_{ij} es la tasa a la que un jugador con estrategia j adopta la estrategia i. Una suposición plausible es que esta tasa depende solamente de los pagos de los dos jugadores involucrados. La forma más simple es la de imitación al mejor, es decir el jugador j imita a la jugadora i solo si su pago jugando contra la población es mayor que el suyo.

Dinámica de mejor respuesta

Aprender mediante la imitación solo requiere modestas capacidades cognitivas de los jugadores. La dinámica de mejor respuesta [28], [29] asume mayor sofisticación: en una población grande, una pequeña fracción de los jugadores revisa su estrategia, eligiendo las mejores respuestas BR(x) a la estrategia media actual de la población x. Este enfoque postula que los jugadores son lo suficientemente inteligentes como para medir el estado actual de la población y responder. La evolución siguiendo la dinámica de mejor respuesta (BR) viene descripta por

$$\dot{x} \in BR(x) - x$$

Dado que las mejores respuestas generalmente no son únicas, esto es una *inclusión* diferencial en lugar de una ecuación diferencial.

Dinámica del replicador

Consideremos ahora una población de N agentes y un juego de dos jugadores ($k = 2$) con una cantidad finita de estrategias puras $s_1, \ldots, s_m$. Supongamos que en cada ronda se eligen dos

agentes de la población al azar para que jueguen. Cada uno jugará con una estrategia pura. La dinámica del replicador define la forma en la cual crece o decrece la proporción de jugadores que usan cada estrategia pura respecto de lo que ocurre en la población total. Si los individuos se encuentran al azar y luego participan en un juego simétrico $E[e_i, x]$ es el pago esperado para un individuo jugando la estrategia i y $E[x, x]$ es el pago promedio de la población que juega x. Se asume que la tasa de crecimiento per cápita, es decir, la derivada logarítmica $(log x_i)' = x_i'/x_i$ está dada por la diferencia entre el pago para la estrategia i y el pago promedio en la población y las estrategias evolucionan siguiendo esa regla microscópica.

Nos interesa mirar las proporciones de agentes en la población que juegan cada estrategia, donde $x_i(t)$ es la proporción de jugadores jugando la estrategia s_i a tiempo t. De esta manera, la evolución de la proporción de agentes que juegan la estrategia s_i viene dada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{x}_i(t) = x_i\{E[e_i, x] - E[x, x]\}, \tag{2.2.1}$$

con $1 \leq i \leq m$, donde e_i es el i-ésimo vector canónico, conocido como la *ecuación del replicador*.

Notemos que esta idea puede extenderse a juegos de más de dos participantes.

2.2.1. Equilibrio de Nash y ecuación del replicador

El siguiente teorema, conocido en la literatura como el *folk theorem*, describe las relaciones conocidas entre las nociones de punto de equilibrio para la dinámica del replicador y la de equilibrio de Nash para el juego.

Teorema 2.2.1. *Valen las siguientes afirmaciones:*

- *Si z es un equilibrio de Nash, entonces es un cero del campo vectorial dado por el lado derecho de (2.2.1).*
- *Si z es un equilibrio de Nash estricto, entonces es un punto de equilibrio asintóticamente estable.*
- *Si el punto de equilibrio z es el límite de una órbita interior (en el interior de Δ_S) para $t \to +\infty$, entonces z es un equilibrio de Nash.*
- *Si el punto de equilibrio z es estable, entonces es un equilibrio de Nash.*

2.2.2. Estrategias evolutivamente estables

El concepto más importante de la teoría de juegos evolutiva es el de estabilidad evolutiva [26]. Intuitivamente, si todos los individuos de la población adoptan una estrategia evolutivamente estable (que denominaremos ESS por sus siglas en inglés, Evolutionary Stable Strategy), entonces

ninguna minoría de "mutantes" (pequeño grupo de jugadores que ingresan a la población empleando otra estrategia) puede invadirla exitosamente. Esto implica que no pueden estar distribuidos en las estrategias con una proporción diferente a la de toda la población y obtener un pago esperado mayor.

Supongamos que la estrategia x es jugada por casi todos los miembros de la población, mientras que el resto de la población es un pequeño grupo mutante (constituyendo una fracción ε del total de la población) que juega y.

Definición 2.2.2. Decimos que x es ESS si para todo $y \neq x$, existe $\varepsilon_0 \in (0,1)$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$E[x, (1-\varepsilon)x + \varepsilon y] > E[y, (1-\varepsilon)x + \varepsilon y].$$

Usualmente, la estabilidad es formulada a partir de condiciones de primer y segundo orden en términos de que la población actual juegue x y cualquier otra población mutante esté distribuida en las estrategias de acuerdo con una proporción y. De esta forma, la condición de primer orden sería:

$$E[x, x] > E[y, x] \tag{2.2.2}$$

y las condiciones de segundo orden serían las siguientes:

$$\begin{aligned} E[x, x] &= E[y, x], \\ E[x, y] &> E[y, y]. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Como la condición $E[x, x] \geq E[y, x]$ se satisface debido a que x es un equilibrio de Nash, tenemos que o bien los mutantes ganan estrictamente menos que un jugador de los que juegan x (al que llamaremos incumbente), o en caso de ganar lo mismo, la ventaja se obtiene si los incumbentes ganan más cuando juegan contra los mutantes, que los mutantes cuando juegan entre ellos.

2.3. Redes complejas

En la siguiente sección repasaremos ciertos conceptos de redes complejas clásicas que utilizaremos a lo largo del desarrollo del capítulo 5. Seguiremos la notación y explicación del libro de Newman [30].

En un contexto matemático, una red compleja se representa mediante un grafo. Un grafo es un par de conjuntos $G = \{P, E\}$ donde P es un conjunto de N nodos o vértices y E es un conjunto de aristas o links que conectan dos elementos de P (ver figura 2.1).

2.3.1. El modelo de Erdös Rényi

Un grafo aleatorio $G_{N,E}$ se obtiene partiendo de un conjunto de N vértices diferentes y conectándolos entre sí según algún proceso estocástico. En particular, en el grafo de Erdös Rényi

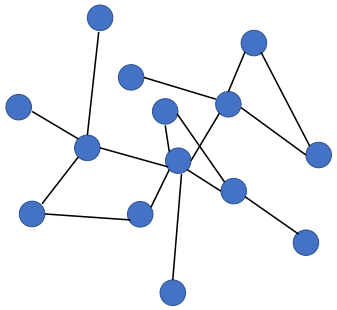

Figura 2.1: Ejemplo ilustrativo de grafo.

(ER), que notaremos $G_{N,p}$, cada una de las $N(N-1)/2$ aristas posibles está presente con probabilidad p (la probabilidad de conexión).

A continuación, presentaremos una serie de propiedades de estas redes que serán utilizadas en los cálculos realizados en el capítulo 5.

Distribución de grados: El grado de un nodo es el número de aristas que están conectadas a dicho nodo en la red. Un nodo dado en la red está conectado con una probabilidad independiente p a cada uno de los otros $N-1$ nodos. Por lo tanto, la probabilidad de estar conectado a k nodos específicos y no a ninguno de los restantes es $p^k(1-p)^{N-1-k}$. Hay $\binom{N-1}{k}$ maneras de elegir esos k otros nodos, y por lo tanto, la probabilidad total de estar conectado exactamente con k nodos tiene una distribución binomial,

$$\mathcal{P}_k = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}. \tag{2.3.1}$$

Muchas propiedades del grafo aleatorio se pueden resolver de manera exacta en el límite de N tendiendo a infinito. Típicamente, el límite para N grande se toma manteniendo el grado medio de la red $\mu = p(N-1)$ constante, en cuyo caso el modelo tiene una distribución de grado de Poisson. Utilizando la expresión de la distribución de grados anterior, se obtiene que para N grande, la probabilidad de que un vértice tenga grado k es

$$\mathcal{P}_k \approx \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}. \tag{2.3.2}$$

Grado medio de la red: El grado medio de la red (μ) viene dado por el número promedio de aristas generado en la construcción del grafo, $\langle E \rangle = \frac{1}{2}N(N-1)p$. Como cada arista contribuye al

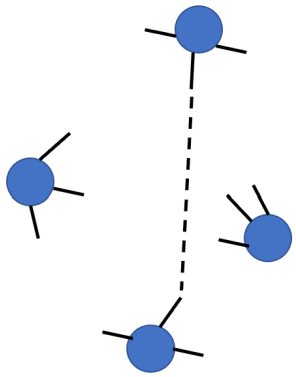

Figura 2.2: Ejemplo ilustrativo del *configuration model*. Cada nodo tiene un número dado de medias aristas igual a su número de grado deseado. En este caso todos tienen grado deseado igual a 3. Luego las medias aristas son elegidas al azar y conectadas para formar aristas (línea discontinua).

grado de dos vértices, obtenemos

$$\mu = \frac{2\langle E\rangle}{N} = p(N-1).$$

Coeficiente de agrupamiento: El coeficiente de agrupamiento (clustering coefficient) C es una medida de la transitividad en una red y se define como la probabilidad de que dos vecinos de un mismo nodo en la red, también sean vecinos entre sí (formen un triángulo). En un grafo de ER, la probabilidad de que dos nodos cualesquiera sean vecinos es exactamente la misma, todas esas probabilidades son iguales a $p = \mu/(N-1)$, luego

$$C = \frac{\mu}{N-1}. \tag{2.3.3}$$

Notemos que este coeficiente, para un grado medio de red μ fijo, tiende a cero cuando $N \to \infty$.

2.3.2. Grafos aleatorios de grado regular

Para tener un mayor control sobre los resultados en el capítulo 5 comenzamos utilizando grafos aleatorios de grado regular (en inglés Degree Regular Random Graphs, DRRG). En estos grafos nos aseguramos de que todos los vértices tengan el mismo grado k (eso es que sea grado-regular).

En general este tipo de grafos es un caso particular de los obtenidos a partir de un modelo conocido como *Configuration model*. En este modelo se especifica el grado exacto de cada nodo individual en el grafo. En el caso de requerir un DRRG, se fija el grado deseado igual para todos los

nodos. Supongamos entonces que especificamos el grado $k_i = k$ de cada nodo para $i = 1, \cdots, N$ en nuestra red. Podemos crear una red aleatoria con estos grados utilizando el proceso representado en la figura 2.2. Damos a cada nodo i un total de k_i "trozos" de aristas, también llamadas "medias aristas", y se tiene $\sum_i k_i = 2m$ donde m es el número total de aristas. Ahora elegimos dos de las medias aristas al azar con distribución uniforme y las conectamos para formar una arista, como se indica con la línea punteada en la figura. Luego elegimos otro par de las $2m - 2$ medias aristas restantes, las conectamos, y así sucesivamente hasta que se utilicen todas. El resultado final es una red en la que cada nodo tiene exactamente el grado deseado. El proceso anterior genera cada posible emparejamiento de medias aristas con igual probabilidad.

Un problema que surge es que la red podría contener auto-aristas o multi-aristas, o ambos. No hay nada en el proceso de generación de la red que nos impida crear una arista que conecte un nodo consigo mismo o que conecte dos nodos que ya estén conectados por otra arista. Sin embargo, la densidad de auto-aristas y multi-aristas en el modelo de configuración tiende a cero a medida que la red se vuelve grande (ver [30] para más detalle), lo que significa que su efecto en nuestros cálculos típicamente será despreciable siempre y cuando trabajemos con redes lo suficientemente grandes.

Mencionamos ahora algunas propiedades que utilizamos en el capítulo 5 para los DRRG. Una propiedad central del modelo de configuración (vale en general y en particular para los DRRG) es la probabilidad p_{ij} de que dos nodos i y j estén conectados. Si alguno de los nodos tiene grado cero, entonces la probabilidad de una arista también es cero, así que asumamos que los grados k_i y k_j son distintos de cero. Ahora consideremos una de las medias aristas que emerge del nodo i. La probabilidad de que esté conectada a alguna de las medias aristas del nodo j es $k_j/(2m - 1)$ si excluimos la que está conectada a i que estamos observando actualmente. Pero hay k_i medias aristas alrededor del nodo i, por lo que la probabilidad total de una conexión entre i y j es

$$p_{ij} = \frac{k_i k_j}{2m - 1} \tag{2.3.4}$$

En el límite de m grande podemos ignorar el -1 en el denominador y, por lo tanto, podemos escribir

$$p_{ij} = \frac{k_i k_j}{2m}. \tag{2.3.5}$$

Probabilidad de grado excedente: Supongamos que tomamos un nodo (elegido al azar o no) y seguimos una de sus aristas (suponiendo que tenga al menos una) hasta el nodo en el otro extremo. ¿Cuál es la probabilidad de que este nodo tenga grado k?. En algunos de los cálculos del capítulo 5, estaremos interesados en ese número que se llama grado excedente $(k - 1)$ del nodo.

Sabemos que una arista que emerge de un nodo en una red del configuration model tiene la misma probabilidad de terminar en cualquier media arista que esté en cualquier otro lugar de la red. Dado que hay $2m - 1$ medias aristas en total, excluyendo la que está al principio de nuestra arista, y k de ellas están unidas a cualquier nodo en particular con grado k, nuestra arista tiene una probabilidad de $k/(2m - 1)$ de terminar en cualquier nodo en particular de grado k, de nuevo en el

límite de m grande ignoramos el -1 y nos queda $k/2m$. Si p_k es la fracción total de nodos en la red con grado k, el número total de nodos con grado k es Np_k y por lo tanto, la probabilidad de que nuestra arista se conecte a cualquier nodo con grado k es

$$\frac{k}{2m}Np_k = \frac{kp_k}{\langle k\rangle} \tag{2.3.6}$$

donde $\langle k\rangle$ es el grado medio de la red y usamos que $\langle k\rangle = 2m/N$.

Calculamos entonces la distribución de probabilidad del grado excedente a partir de la ecuación (2.3.6). La probabilidad q_k de tener un grado excedente k es igual a la probabilidad de tener grado total $k+1$, normalizando obtenemos

$$q_k = \frac{(k+1)p_{k+1}}{\langle k\rangle}. \tag{2.3.7}$$

Coeficiente de agrupamiento: Recordemos que el coeficiente de agrupamiento es la probabilidad promedio de que dos vecinos de un nodo también sean vecinos entre sí. Consideremos un nodo v que tenga al menos dos vecinos i y j. Al ser i y j vecinos de v tendremos que ambos tienen una de sus aristas conectada a v, luego el número de otras aristas conectadas a ellos, que llamamos k_i y k_j van a seguir la distribución de grado excedente que describimos arriba. Como dijimos, la probabilidad de una arista entre i y j es $k_jk_i/2m$, promediando k_j y k_i con la distribución q_k, obtenemos la expresión para el coeficiente de agrupamiento:

$$\begin{aligned} C &= \sum_{k_i,k_j=0}^{\infty} q_{k_i}q_{k_j}\frac{k_jk_i}{2m} = \frac{1}{2m}\left[\sum_{k=0}^{\infty} kq_k\right]^2 \\ &= \frac{1}{2m\langle k\rangle^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)p_{k+1}\right]^2 = \frac{1}{2m\langle k\rangle^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)kp_k\right]^2 \\ &= \frac{1}{N}\frac{\left[\langle k^2\rangle - \langle k\rangle\right]^2}{\langle k^3\rangle}. \end{aligned}$$

Al igual que el coeficiente de agrupamiento del grafo aleatorio de ER (ecuación (2.3.3)), esta expresión decae como N^{-1} y por lo tanto tiende a cero siempre y cuando los momentos $\langle k\rangle$ y $\langle k^2\rangle$ de la distribución de grados estén acotados.

3

Un modelo de parasitoides

En este capítulo introducimos un modelo basado en agentes que intenta capturar las características esenciales de la dinámica del parasitismo de una larva parasitoide que se encuentra en la búsqueda de hospedadores que viven bajo tierra. Estudiamos la competencia entre dos tipos de larvas parasitoides, solitarias y comunitarias, que tendrán una probabilidad de parasitismo efectiva diferente. Primero derivamos las ecuaciones analíticamente para un número específico de parasitoides y hospedadores. Luego, extendemos los diferentes escenarios a través de experimentos de simulación y exploramos las condiciones bajo las cuales un tipo es favorecido por sobre otro, o si puede existir coexistencia. Mostramos que la cantidad de larvas y hospedadores que interactúan puede tener un impacto profundo en el patrón de parasitismo de este tipo de parasitoides.

3.1. Modelo

Introducimos un modelo que involucra hospedadores y larvas que intenta capturar las características esenciales de la dinámica del parasitismo, en el cual se liberan n_l larvas dentro de una caja y buscan un hospedador para parasitar. Hay N_h hospedadores en la caja, y cada larva puede parasitar sólo un hospedador que elige al azar. En caso de que un hospedador sea elegido por más de una larva (superparasitismo), solo una larva logra un parasitismo exitoso, es decir, sobrevive al competir con las otras larvas que parasitan al hospedador. Hay dos tipos de larvas: larvas que fueron criadas a alta densidad con otras larvas, a las que llamamos larvas *comunitarias*, y larvas criadas a baja densidad, llamadas larvas *solitarias*. Asumimos que estas larvas implementan diferentes modos de parasitismo: las larvas comunitarias (C–larvas) intentan parasitar cualquier hospedador, mientras que las larvas solitarias (S–larvas) intentan parasitar sólo hospedadores que no están siendo parasitados por ninguna otra larva.

3.1.1. Dinámica del parasitismo en una caja

Inicialmente, se colocan $n_l = n_c^0 + n_s^0$ larvas dentro de una caja, donde n_c^0 y n_s^0 son los números iniciales de larvas C y S, respectivamente, que compiten por parasitar en esa caja (ver figura 3.1). En cada iteración se elige una larva al azar para intentar el parasitismo. Si la larva elegida es del tipo C, selecciona un hospedador al azar y luego lo parasita con probabilidad p, mientras que con la probabilidad complementaria $1 - p$ esta larva C falla en el parasitismo y no intenta parasitar a ningún otro hospedador. Es decir, una larva C tiene sólo una oportunidad para parasitar a un hospedador al azar. Si la larva elegida es del tipo S, selecciona un hospedador al azar y, si el hospedador ya está siendo parasitado (ocupado) por al menos otra larva (C o S), la larva S rechaza ese hospedador y elige otro hospedador al azar. Este proceso de selección de hospedador se repite hasta que la larva S encuentra un hospedador desocupado e intenta parasitarlo con probabilidad p, mientras que con probabilidad $1 - p$ el parasitismo falla para esa larva S. Esto es equivalente a seleccionar un hospedador "libre" al azar y parasitarlo con probabilidad p. Si todos los hospedadores ya están ocupados por al menos una larva, entonces la larva S falla en el parasitismo. Es decir, una larva S puede tener múltiples oportunidades para intentar el parasitismo, siempre y cuando haya al menos un hospedador libre. Una vez que se completa el evento de parasitismo para esta larva, se elige otra larva al azar entre las otras $n_l - 1$ larvas restantes, e intenta parasitar. Esta iteración se repite hasta que todas las n_l larvas hayan tenido sus respectivas oportunidades de parasitismo. En este estado final, puede haber hospedadores con cero larvas, una larva y también con más de una larva parasitando (superparasitismo). Sin embargo, sólo una larva elegida al azar en cada hospedador sobrevive, y así el número total de larvas sobrevivientes en una caja varía entre 0 y N_h. Asumimos que el orden de llegada no afecta la probabilidad de supervivencia, es decir, cada una de las n larvas que parasitan un hospedador dado tiene la misma probabilidad de supervivencia $1/n$. La figura 3.1 es una representación esquemática de los posibles procesos que pueden tener lugar en el caso de una caja con un hospedador, una larva C y una larva S.

3.1.2. Una formulación alternativa de la dinámica

Como nos interesa la dinámica competitiva de una gran población de larvas, realizamos el experimento de parasitismo descripto en la sección 3.1.1 en N cajas independientes, cada una con el mismo número de hospedadores N_h y el número total de larvas iniciales n_l. Asumimos que la dinámica poblacional de todo el sistema compuesto por Nn_l larvas resulta de la dinámica de agregación de N subsistemas independientes. Los números iniciales n_c^0 y n_s^0 de larvas C y S, respectivamente, pueden variar de una caja a otra como explicaremos a continuación. Después de completar los N experimentos, sobreviven un total de $\sum_{i=1}^{N} n_{c,1}^i$ y $\sum_{i=1}^{N} n_{s,1}^i$ larvas, donde $n_{c,1}^i$ ($n_{s,1}^i$) es el número de larvas C (larvas S) que sobreviven en la caja i ($i = 1, \cdots, N$) en la primera generación (el subíndice 1 denota la primera generación). Como los N experimentos son idénticos, resulta conveniente trabajar con el promedio de larvas sobrevivientes de cada tipo por caja, que se definen como $c_1 \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_{c,1}^i$ y $s_1 \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_{s,1}^i$, donde $0 \leq c_1 + s_1 \leq N_h$, ya que como máximo sobrevive una larva por hospedador. La segunda generación también ocurre en N cajas

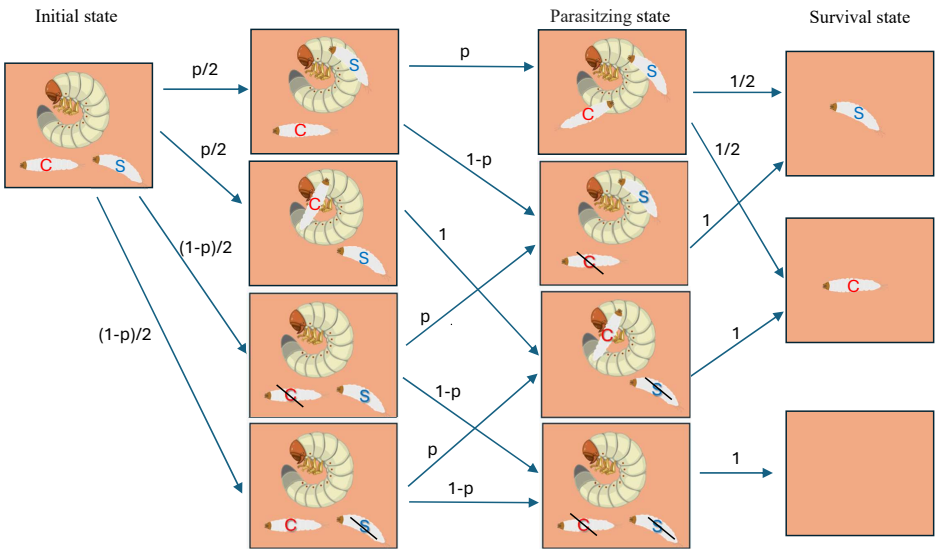

Figura 3.1: Esquema ilustrativo del proceso de parasitismo en una caja, para el escenario de un hospedador, una larva C y una larva S. Las flechas indican las posibles transiciones entre diferentes estados de la caja y sus probabilidades asociadas, con una probabilidad de parasitismo p. En el "estado inicial" (primera columna desde la izquierda), se colocan un hospedador y los dos tipos de larvas en una caja. En la primera iteración, una larva seleccionada al azar parasita al hospedador con una probabilidad p y falla con una probabilidad $1 - p$ (segunda columna). En la segunda iteración, la otra larva intenta parasitar, llevando al "estado de parasitismo" (tercera columna). Sin embargo, la larva S se niega a parasitar si la larva C ya está parasitando (tercera fila de la tercera columna). El proceso termina en el "estado de supervivencia" después de la tercera iteración (cuarta columna), donde se elige al azar una larva para sobrevivir entre todas las larvas que están parasitando, y el hospedador muere.

independientes con N_h hospedadores y $n_l = n_c^0 + n_s^0$ larvas por caja, donde el tipo de cada larva se asigna con probabilidad $c_1/(c_1 + s_1)$, la fracción relativa de larvas comunitarias sobrevivientes en la primera generación. En general, cada generación se realiza con el mismo número total de larvas Nn_l, donde el número de cada tipo es proporcional a la fracción de larvas que sobrevivieron en la generación anterior.

Esta suposición hace que las simulaciones sean computacionalmente viables. Dado que cada larva sobreviviente en la vida real da lugar a muchas otras larvas de su mismo tipo, esperamos que el número total de larvas en el sistema crezca rápidamente a lo largo de las generaciones, implicando un costo computacional que crece exponencialmente. Sin embargo, las variables colectivas como las proporciones relativas de cada tipo deben ser independientes del número absoluto de larvas para una población lo suficientemente grande.

Las fracciones relativas $c_2/(c_2 + s_2)$ y $s_2/(c_2 + s_2)$ de larvas C y S se utilizan para inicializar la siguiente generación, y así sucesivamente. En general, denotamos por c_t (s_t) el promedio de larvas C (larvas S) que sobreviven en una caja en la generación t. Estamos interesados en los valores estacionarios de c_t y s_t después de muchas generaciones de la dinámica, ya que esto podría permitir dilucidar los mecanismos relevantes bajo los cuales un tipo de larva domina a largo plazo, o bien es posible una coexistencia de ambos tipos.

Observemos que las larvas solitarias sólo entran a un hospedador si está vacío, lo cual maximiza su probabilidad de sobrevivir, mientras que las larvas comunitarias no tienen problema en parasitar un hospedador ya parasitado aunque en ese caso reducen de inmediato su probabilidad de sobrevivir a la mitad (o menos si había más de un parasitoide).

Esta aparente ventaja de las larvas S sobre las larvas C en términos de supervivencia nos podría hacer suponer que las C acabarían por extinguirse. Sin embargo, cuando hay pocos hospedadores, dicha ventaja desaparece, ya que resulta preferible ingresar en un hospedador ya parasitado a no hacerlo debido a la falta de otros hospedadores disponibles.

De todos modos, el resultado más interesante que vamos a mostrar es que aún para una proporción fija de hospedadores y parasitoides, esta ventaja desaparece, y terminan extinguiéndose las larvas solitarias.

3.2. Resultados

3.2.1. Enfoque analítico

Estamos interesados en el estado estacionario del sistema que eventualmente se logra después de muchas generaciones de la dinámica. En esta sección derivamos un conjunto de ecuaciones en diferencias acopladas para la evolución de c_t y s_t a lo largo de las generaciones, en el límite de un gran número de cajas $N \gg 1$.

Comenzamos estudiando analíticamente el caso más simple de un hospedador y una larva, intro-

duciendo la notación matemática que resulta útil cuando estudiamos el caso de un mayor número de hospedadores y larvas, como veremos. Además, para calcular las probabilidades de un resultado dado de un experimento en una caja, definimos los siguientes tres estados del sistema de hospedadores y larvas, correspondientes a las diferentes etapas del experimento, como podemos ver en la figura 3.1 para el caso de un hospedador, una larva C y una larva S: el "estado inicial" consiste en un número dado n_c^0 y n_s^0 de larvas C y S, respectivamente, colocadas dentro de la caja (primera columna a la izquierda con $n_c^0 = n_s^0 = 1$), el "estado de parasitismo" denota la configuración intermedia después de que todas las larvas tuvieron sus oportunidades de parasitar (tercera columna), y así cada hospedador puede estar ocupado por cero, una o más larvas, y el "estado de supervivencia" es la configuración final que resulta de seleccionar una larva al azar para sobrevivir por cada hospedador.

Caso de un hospedador y una larva

En el experimento con un hospedador ($N_h = 1$) y una larva ($n_l = 1$), solo una larva se coloca en cada caja inicialmente, ya sea una larva C o una larva S. Comenzando con una larva C, la larva parasita al hospedador con probabilidad p o falla con probabilidad $1-p$, lo que lleva a los posibles estados de parasitismo que denotamos por c y ϕ, correspondientes a una larva C y a cero larvas C parasitando al hospedador, respectivamente, los cuales ocurren con probabilidades $P_c(c) = p$ y $P_c(\phi) = 1-p$. Aquí, el subíndice c en $P_c(\bullet)$ indica el estado inicial, mientras que el símbolo $\bullet$ entre paréntesis denota el estado de parasitismo (c o ϕ). Como la única larva parasitante no compite con otras larvas por la supervivencia, encontramos que la larva C sobrevive con una probabilidad

$$P(1,0|1,0) = P_c(c) = p \tag{3.2.1}$$

en un experimento que comienza con una larva C. A su vez, la larva no sobrevive con la probabilidad complementaria $P(0,0|1,0) = P_c(\phi) = 1-p$. Aquí hemos introducido la notación $(n_c, n_s|n_c^0, n_s^0)$ para describir los estados iniciales y de supervivencia (finales) de un experimento en una sola caja que comienza con n_c^0 y n_s^0 larvas (inicial) y termina con n_c y n_s larvas sobrevivientes de cada tipo (supervivencia). De manera análoga, la probabilidad de que una larva S sobreviva en una caja que comienza con una larva S es

$$P(0,1|0,1) = P_s(s) = p, \tag{3.2.2}$$

y la probabilidad de no sobrevivir es $P(0,0|0,1) = P_s(\phi) = 1-p$. Entonces, el número promedio de larvas C y larvas S que sobreviven en una caja en la generación t se puede calcular como

$$c_t = P_t(1,0)P(1,0|1,0) = \frac{p\, c_{t-1}}{(c_{t-1} + s_{t-1})} \tag{3.2.3}$$

y

$$s_t = P_t(0,1)P(0,1|0,1) = \frac{p\, s_{t-1}}{(c_{t-1} + s_{t-1})} \tag{3.2.4}$$

donde

$$P_t(1,0) = \frac{c_{t-1}}{(c_{t-1} + s_{t-1})} \quad \text{y} \quad P_t(0,1) = \frac{s_{t-1}}{(c_{t-1} + s_{t-1})} \tag{3.2.5}$$

son las probabilidades de que un experimento en la generación t comience con una larva C y una larva S, respectivamente, elegidas con una probabilidad igual a la fracción de larvas sobrevivientes en la generación anterior $t-1$, como se describe en la sección 3.1.2. En general, la probabilidad de comenzar con n_c^0 y $n_s^0 = n_l - n_c^0$ larvas de cada tipo en la generación t está dada por la distribución Binomial

$$\binom{n_l}{n_c^0} p_c^{n_c^0}\, p_s^{n_s^0}, \tag{3.2.6}$$

donde $p_c = c_{t-1}/(c_{t-1} + s_{t-1})$ es la probabilidad de que una larva sea del tipo C y $p_s = s_{t-1}/(c_{t-1} + s_{t-1})$ es la probabilidad de que una larva sea del tipo S, en el estado inicial. Así, las probabilidades del estado inicial de la generación t son

$$P_t(n_c^0, n_s^0) = \binom{n_l}{n_c^0} \frac{c_{t-1}^{n_c^0}\, s_{t-1}^{n_s^0}}{(c_{t-1} + s_{t-1})^{n_l}}. \tag{3.2.7}$$

Las ecuaciones (3.2.3) y (3.2.4) constituyen un sistema recursivo de ecuaciones acopladas que pueden resolverse por iteración a partir de la condición inicial (c_0, s_0) en $t = 0$.

Observación 3.2.1. En general tomaremos como condición inicial del sistema c_0 y s_0 que son las cantidades promedio de larvas sobrevivientes en la generación cero. Esto se interpreta como punto de partida de la dinámica, es decir que en un tiempo inicial t_0 la dinámica comienza con una proporción $c_0/(c_0 + s_0)$ de larvas comunitarias.

Los valores c_t y s_t representan los números medios de larvas C y S por caja en el límite de un sistema muy grande ($N \gg 1$), donde se descartan las fluctuaciones. La solución de las ecuaciones (3.2.3) y (3.2.4) es

$$c_t = \frac{p\, c_0}{(c_0 + s_0)} \quad \text{y} \quad s_t = \frac{p\, s_0}{(c_0 + s_0)} \quad \text{para } t \geq 1, \tag{3.2.8}$$

con $0 \leq c_0 \leq 1$, $0 \leq s_0 \leq 1$ y $0 \leq c_0 + s_0 \leq 1$. Aquí consideramos que el número inicial de larvas de cada tipo por caja no es mayor que uno, ya que hay una larva en cada caja. Notamos que el número promedio de larvas sobrevivientes por caja es $c_t + s_t = p$ para todo $t \geq 1$, debido al hecho de que no hay competencia por el parasitismo entre las larvas, y así cada larva sobrevive con una probabilidad p. En este punto, resulta conveniente introducir las fracciones relativas de cada tipo que sobreviven en la generación t,

$$\hat{c}_t \equiv \frac{c_t}{c_t + s_t}, \qquad \text{y} \qquad \hat{s}_t \equiv 1 - \hat{c}_t. \tag{3.2.9}$$

Podemos verificar que para este caso simple de un solo hospedador y una sola larva, $\hat{c}$ y $\hat{s}$ son conservados por la dinámica, es decir, $\hat{c}_t = \hat{c}_0$ y $\hat{s}_t = \hat{s}_0$ para todo $t \geq 1$.

Dentro del enfoque de ecuaciones en diferencias introducido en esta sección, los valores estacionarios al punto fijo de las ecuaciones (3.2.3) y (3.2.4), $\vec{x}^{1,1} = [pc_0/(c_0 + s_0), ps_0/(c_0 + s_0)]$, cuyo valor depende de la condición inicial. Este puede corresponder tanto a la dominancia de las C–larvas $[\vec{x}_c^{1,1} = (p, 0)]$ si $s_0 = 0$, como a la dominancia de las S–larvas $[\vec{x}_s^{1,1} = (0, p)]$ si $c_0 = 0$, o a la coexistencia de ambos tipos de larvas si $c_0 > 0$ y $s_0 > 0$.

Caso de un hospedador y dos larvas

Para el caso de un hospedador ($N_h = 1$) y dos larvas ($n_l = 2$) por caja, cada experimento consiste en una iteración por larva. En una iteración, una larva seleccionada al azar intenta un evento de parasitismo: una larva C parasita al hospedador con probabilidad p, mientras que una larva S parasita al hospedador con probabilidad p si está libre, y con probabilidad 0 si está ocupado. Comenzando con dos larvas C (estado cc), los posibles estados de parasitismo y sus respectivas probabilidades son

$$P_{cc}(\phi) = (1-p)^2, \tag{3.2.10a}$$

$$P_{cc}(c) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p) \quad \text{y} \tag{3.2.10b}$$

$$P_{cc}(cc) = p^2, \tag{3.2.10c}$$

que describen los escenarios donde ninguna larva, una larva C, y dos larvas C parasitan al hospedador, respectivamente. Se puede verificar que la suma de las probabilidades es igual a 1. Los dos términos en $P_{cc}(c)$ describen explícitamente los dos procesos que terminan con el parasitismo de una larva C. O bien la primera larva seleccionada parasita a un hospedador y la segunda no, o viceversa. Aunque todos los eventos de selección posibles que llevan a un estado de parasitismo dado son muy simples en este caso, es difícil realizar estos cálculos para todas las combinaciones posibles de selección de larvas y sus resultados de probabilidad asociados para el caso de más hospedadores y larvas (ver en el Apéndice de [2] la notación que desarrollamos para capturar correctamente todas las combinaciones posibles). Luego, en el experimento con dos larvas C, una larva C sobrevive con probabilidad

$$P(1,0|2,0) = P_{cc}(c) + P_{cc}(cc) = p(2-p), \tag{3.2.11}$$

donde solo una larva sobrevive después de que una o dos larvas hayan parasitado.

Análogamente, en un experimento que comienza con dos larvas S (estado ss), una larva S sobrevive con probabilidad

$$P(0,1|0,2) = P_{ss}(s) = p + (1-p)p = p(2-p). \tag{3.2.12}$$

Aquí el primer término en $P_{ss}(s)$ describe el proceso donde la primera larva seleccionada $S-$ larva parasita con probabilidad p, y la segunda larva, con probabilidad 1, no parasita porque no está permitido parasitar al mismo hospedador. El segundo término corresponde a la primera larva seleccionada que falla en el parasitismo con probabilidad $1-p$ y la segunda larva que parasita con probabilidad p.

Siguiendo el mismo razonamiento, las probabilidades de estado de parasitismo comenzando con una larva C y una larva S (estado cs) son (ver apéndice de [2])

$$P_{cs}(c) = \frac{1}{2}p(2-p), \tag{3.2.13a}$$

$$P_{cs}(s) = p(1-p) \quad \text{y} \tag{3.2.13b}$$

$$P_{cs}(cs) = \frac{1}{2}p^2, \tag{3.2.13c}$$

dando las probabilidades

$$P(1,0|1,1) = P_{cs}(c) + \frac{1}{2}P_{cs}(cs) = p(1-p/4), \quad \text{y} \tag{3.2.14a}$$

$$P(0,1|1,1) = P_{cs}(s) + \frac{1}{2}P_{cs}(cs) = p(1-3p/4) \tag{3.2.14b}$$

para la supervivencia de una larva C–larva y una S–larva, respectivamente. El término $\frac{1}{2}P_{cs}(cs)$ cuenta con que ya sea la larva C o la S–larva sobrevive con la misma probabilidad $1/2$. Finalmente, para los tres estados iniciales posibles, la probabilidad de que ninguna larva sobreviva es $P(0,0|2,0) = P(0,0|0,2) = P(0,0|1,1) = (1-p)^2$.

Entonces, el sistema evoluciona de acuerdo a

$$c_t = P_t(2,0)P(1,0|2,0) + P_t(1,1)P(1,0|1,1) \quad \text{y} \tag{3.2.15a}$$

$$s_t = P_t(0,2)P(0,1|0,2) + P_t(1,1)P(0,1|1,1), \tag{3.2.15b}$$

que se convierte en

$$c_t = \frac{p\,c_{t-1}\left[(2-p)c_{t-1} + \left(2-\frac{1}{2}p\right)s_{t-1}\right]}{(c_{t-1}+s_{t-1})^2} \quad \text{y} \tag{3.2.16a}$$

$$s_t = \frac{p\,s_{t-1}\left[(2-p)s_{t-1} + \left(2-\frac{3}{2}p\right)c_{t-1}\right]}{(c_{t-1}+s_{t-1})^2}, \tag{3.2.16b}$$

después de sustituir las expresiones de la ecuación (3.2.7) para las probabilidades de estado inicial $P_t(2,0)$, $P_t(1,1)$ y $P_t(0,2)$, y las expresiones (3.2.11), (3.2.12) y (3.2.14) para las probabilidades de estado de supervivencia en las ecuaciones (3.2.15).

Tras múltiples generaciones de la dinámica, el sistema de N cajas alcanza un estado estacionario caracterizado por el número promedio de cada tipo de larva sobreviviente por caja. Estos promedios corresponden al punto fijo estable del sistema de ecuaciones (3.2.16), denotado por $\vec{x}_c = [p(2-p), 0]$ (ver Apéndice de [2] para el análisis de estabilidad lineal de las ecuaciones (3.2.16)). Este punto fijo estable representa el dominio de las larvas de tipo C. El punto fijo $\vec{x}_s = [0, p(2-p)]$ que representa el dominio de las larvas de tipo S es inestable. La Figura 3.2(a) muestra el diagrama de flujo con la evolución de las trayectorias del sistema en el espacio C–S para un caso específico donde $p = 0{,}5$. El diagrama describe cómo las trayectorias que comienzan desde cualquier condición inicial con valores positivos para larvas C y S ($c_0 > 0$ y $s_0 > 0$) convergerán hacia el punto fijo estable $\vec{x}_c = [0{,}75, 0]$.

Estos resultados muestran que las larvas C dominan a largo plazo debido a una desventaja de supervivencia que sufren las larvas S frente a las larvas C. Esta desventaja se debe a que existen eventos en los que una larva S no puede parasitar al hospedador porque ya está siendo parasitado por una larva C. La situación inversa no ocurre con una larva C, la cual intenta parasitar al hospedador incluso en el caso de que ya esté ocupado por una larva S. Sin embargo, como veremos en la próxima sección, este resultado puede cambiar en el caso de dos hospedadores y dos larvas ($N_h = 2$, $n_l = 2$), ya que se libera la restricción en el número de hospedadores disponibles.

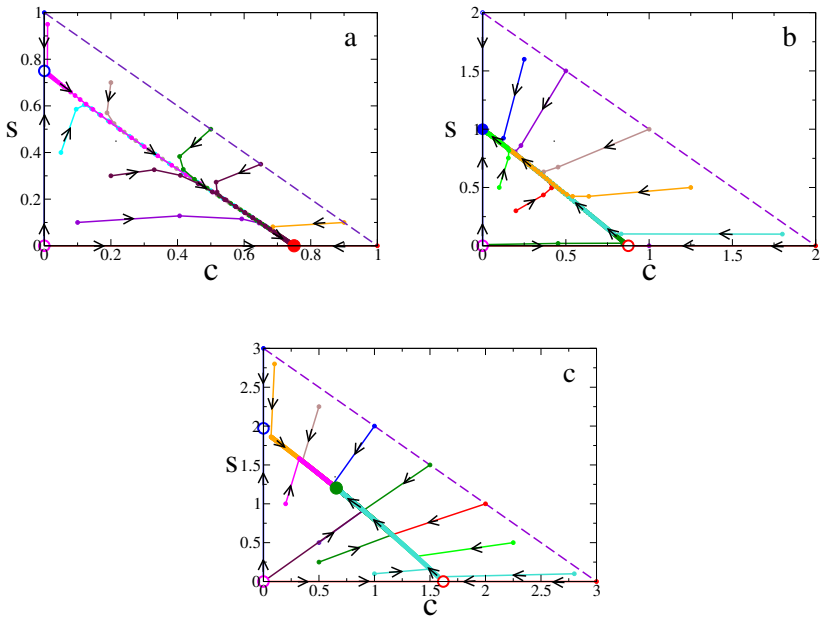

Figura 3.2: (a) Caso de un hospedador y dos larvas (dominancia de C). Las trayectorias del sistema en el espacio C–S se obtuvieron a partir del sistema de ecuaciones en diferencias (3.2.16) para diferentes valores de (c_0, s_0) y una probabilidad de parasitar $p = 0{,}5$. Las trayectorias que comienzan en $0 < c_0 \leq 1$ y $0 \leq s_0 \leq 1$ convergen hacia el punto fijo estable $(0{,}75, 0)$ (círculo rojo), que corresponde a la extinción de las larvas S. El punto fijo $(0, 0{,}75)$ representado por un círculo azul (extinción de las larvas C) es inestable en la dirección C. (b) Caso de dos hospedadores y dos larvas (dominancia de S). Las trayectorias de las ecuaciones (3.2.19) para una probabilidad de parasitar $p = 0{,}5$. El punto fijo estable $(0, 1)$ (círculo azul) corresponde a la dominancia de las larvas S para $0 < c_0 + s_0 \leq 2$ con $s_0 > 0$ mientras que el punto fijo $(0{,}875, 0)$ (círculo rojo) que corresponde a la dominancia de C es inestable en la dirección S. (c) Caso dos hospedadores y tres larvas (coexistencia C–S). Las trayectorias provienen de las ecuaciones (3.2.21) con $p = 0{,}85$. El punto fijo $(0{,}656, 1{,}203)$ (círculo verde sólido) representa la coexistencia estable de C y larvas S para $0 < c_0 + s_0 \leq 3$ con $s_0 > 0$ y $c_0 > 0$, mientras que los puntos fijos de dominancia de C y dominancia de S, $(1{,}62, 0)$ (círculo rojo abierto) y $(0, 1{,}971)$ (círculo azul abierto), respectivamente, son inestables.

Por lo tanto, las larvas S tendrían una ventaja competitiva al evitar la competencia con otras larvas mediante la selección de un hospedador libre.

Caso de dos hospedadores y dos larvas

Al igual que en la sección anterior, en este caso con dos hospedadores y dos larvas ($N_h = 2, n_l = 2$) hay dos iteraciones por experimento, una por larva. En cada iteración, se elige una larva al azar e intenta parasitar con probabilidad p. Una larva C intenta parasitar a uno de los dos hospedadores al azar, cada uno con probabilidad $1/2$, mientras que una larva S intenta parasitar a un hospedador libre al azar (cada uno con probabilidad $1/2$ si ambos están libres, y con probabilidad 1 si solo uno está libre).

Los estados iniciales (cc), (ss) y (cs) son los mismos que para el caso $N_h = 1$ y $n_l = 2$ estudiado en la sección anterior, cuyas probabilidades se dan mediante las ecuaciones (3.2.7). Las probabilidades asociadas a los estados de supervivencia con al menos una larva sobreviviente son (ver Apéndice de [2])

$$P(1,0|2,0) = P_{cc}(c,\phi) + P_{cc}(cc,\phi) = p(2-3p/2), \tag{3.2.17a}$$
$$P(2,0|2,0) = P_{cc}(c,c) = p^2/2, \tag{3.2.17b}$$
$$P(0,1|0,2) = P_{ss}(s,\phi) = 2p(1-p), \tag{3.2.17c}$$
$$P(0,2|0,2) = P_{ss}(s,s) = p^2, \tag{3.2.17d}$$
$$P(1,0|1,1) = P_{cs}(c,\phi) + \frac{1}{2}P_{cs}(cs,\phi) = p(1-7p/8), \tag{3.2.17e}$$
$$P(0,1|1,1) = P_{cs}(s,\phi) + \frac{1}{2}P_{cs}(cs,\phi) = p(1-7p/8), \tag{3.2.17f}$$
$$P(1,1|1,1) = P_{cs}(c,s) = 3p^2/4 \tag{3.2.17g}$$

donde las expresiones para las probabilidades P_{cc}, P_{cs} y P_{ss} fueron derivadas también en [2]. Luego tenemos

$$c_t = P_t(2,0)\left[P(1,0|2,0) + 2P(2,0|2,0)\right] + P_t(1,1)\left[P(1,0|1,1) + P(1,1|1,1)\right], \tag{3.2.18a}$$
$$s_t = P_t(0,2)\left[P(0,1|0,2) + 2P(0,2|0,2)\right] + P_t(1,1)\left[P(0,1|1,1) + P(1,1|1,1)\right]. \tag{3.2.18b}$$

Introduciendo en las ecuaciones (3.2.18) las expresiones para $P_t(2,0)$, $P_t(1,1)$ y $P_t(0,2)$ de las ecuaciones (3.2.7), y las expresiones para las probabilidades de estados de supervivencia de las ecuaciones (3.2.17), y realizando algo de álgebra, las ecuaciones (3.2.18) se convierten en:

$$c_t = \frac{2p\,c_{t-1}\left[\left(1-\frac{1}{4}p\right)c_{t-1} + \left(1-\frac{1}{8}p\right)s_{t-1}\right]}{(c_{t-1}+s_{t-1})^2}, \tag{3.2.19a}$$
$$s_t = \frac{2p\,s_{t-1}\left[\left(1-\frac{1}{8}p\right)c_{t-1} + s_{t-1}\right]}{(c_{t-1}+s_{t-1})^2}. \tag{3.2.19b}$$

El punto fijo $\vec{x}_c = [p(2 - p/2), 0]$, correspondiente a la dominancia de las larvas de tipo C, es inestable. El punto fijo estable es $\vec{x}_s = [0, 2p]$, y representa un dominio estable de las larvas de tipo S (ver figura 3.2(b)), lo que implica que las larvas S tienen una ventaja competitiva sobre las larvas C en el estado estacionario. Se puede obtener una idea de este resultado comparando las probabilidades de supervivencia de cada tipo de larva para diferentes configuraciones iniciales. Es decir, si el experimento comienza con una larva de tipo C y otra de tipo S, el proceso de parasitismo conduce a la misma probabilidad de supervivencia para cada larva, es decir, $P(1, 0|1, 1) = P(0, 1|1, 1) = p(1 - 7p/8)$, dado que cada larva sobrevive con probabilidad 1 cuando parasitan a un hospedador diferente, y con probabilidad $1/2$ cuando compiten por el mismo hospedador. Sin embargo, comenzar con dos larvas de tipo C podría conducir a la competencia de ambas larvas si parasitan el mismo hospedador. Por el contrario, esta competencia nunca ocurre cuando el experimento comienza con dos larvas de tipo S, ya que eligen un hospedador diferente, lo que conduce a un mejor rendimiento general sobre las larvas C.

El mismo análisis se puede realizar para un mayor número de hospedadores y larvas. En general, se puede comprobar que las larvas de tipo S dominan cuando el número de hospedadores es al menos igual al número de larvas ($N_h \geq n_l$), por lo que las larvas S siempre tienen hospedadores libres para parasitar. Esta conclusión plantea dos puntos que vale la pena investigar. En primer lugar, se puede obtener una condición para el dominio de las larvas de tipo S, es decir, el mecanismo de hospedador libre prevalece cuando hay más hospedadores disponibles que larvas, ya que las larvas de tipo S tienden a evitar la competencia y aumentan sus posibilidades de supervivencia. En segundo lugar, cuando hay menos hospedadores que larvas, no está claro qué mecanismo prevalece, ya que esto depende de la cantidad de hospedadores y larvas. Por ejemplo, está claro que tener un hospedador y muchas larvas definitivamente conduciría al dominio de las C, pero tener un hospedador menos que larvas podría no ser suficiente para un dominio de las S. Aunque se espera una transición de dominio, también podría ocurrir un estado estacionario donde coexistan ambos tipos de larvas para algún caso particular. Para estudiar este posible escenario analizamos el siguiente caso no trivial $N_h = 2$, $n_l = 3$.

Caso dos hospedadores y tres larvas

En este caso de más larvas que hospedadores, hay tres iteraciones por experimento, una por cada larva, análogas a los casos anteriores. Las probabilidades del estado inicial $P_t(3, 0)$, $P_t(0, 3)$, $P_t(2, 1)$ y $P_t(1, 2)$ están dadas por la ecuación (3.2.7), mientras que las probabilidades de los diferentes estados de supervivencia donde como máximo una larva sobrevive por hospedador se pueden obtener a partir de las probabilidades de los estados de parasitismo P_{ccc}, P_{sss}, P_{ccs} y P_{css}

calculadas en el Apéndice de [2]. Por lo tanto, las probabilidades de supervivencia son:

$$P(1,0|3,0) = P_{ccc}(c,\phi) + P_{ccc}(cc,\phi) + P_{ccc}(ccc,\phi) = 3p - 9p^2/2 + 7p^3/4, \tag{3.2.20a}$$
$$P(2,0|3,0) = P_{ccc}(c,c) + P_{ccc}(cc,c) = 3p^2/2 - 3p^3/4, \tag{3.2.20b}$$
$$P(0,1|0,3) = P_{sss}(s,\phi) = 3p(1-p)^2, \tag{3.2.20c}$$
$$P(0,2|0,3) = P_{sss}(s,s) = p^2(3-2p), \tag{3.2.20d}$$
$$P(1,0|2,1) = P_{ccs}(c,\phi) + P_{ccs}(cc,\phi) + \frac{1}{2}P_{ccs}(cs,\phi) + \frac{2}{3}P_{ccs}(ccs,\phi) \tag{3.2.20e}$$
$$= 2p - 13p^2/4 + 47p^3/36, \tag{3.2.20f}$$
$$P(0,1|2,1) = P_{ccs}(s,\phi) + \frac{1}{2}P_{ccs}(cs,\phi) + \frac{1}{3}P_{ccs}(ccs,\phi) \tag{3.2.20g}$$
$$= p - 7p^2/4 + 7p^3/9, \tag{3.2.20h}$$
$$P(1,1|2,1) = P_{ccs}(c,s) + P_{ccs}(cc,s) + \frac{1}{2}P_{ccs}(cs,c) \tag{3.2.20i}$$
$$= 3p^2/2 - 11p^3/12, \tag{3.2.20j}$$
$$P(2,0|2,1) = P_{ccs}(c,c) + \frac{1}{2}P_{ccs}(cs,c) = p^2/2 - p^3/6, \tag{3.2.20k}$$
$$P(0,1|1,2) = P_{css}(s,\phi) + \frac{1}{2}P_{css}(cs,\phi) = 2p - 15p^2/4 + 7p^3/4, \tag{3.2.20l}$$
$$P(1,0|1,2) = P_{css}(c,\phi) + \frac{1}{2}P_{css}(cs,\phi) = p - 7p^2/4 + 3p^3/4, \tag{3.2.20m}$$
$$P(1,1|1,2) = P_{css}(c,s) + \frac{1}{2}P_{css}(cs,s) = 3p^2/2 - 3p^3/4, \tag{3.2.20n}$$
$$P(0,2|1,2) = P_{css}(s,s) + \frac{1}{2}P_{css}(cs,s) = p^2 - 3p^3/4,. \tag{3.2.20ñ}$$

Luego, tenemos

$$c_t = P_t(3,0)\,[P(1,0|3,0) + 2P(2,0|3,0)] + P_t(1,2)\,[P(1,0|1,2) + P(1,1|1,2)] \tag{3.2.21a}$$
$$+ P_t(2,1)\,[P(1,0|2,1) + P(1,1|2,1) + 2P(2,0|2,1)]\,,$$
$$s_t = P_t(0,3)\,[P(0,1|0,3) + 2P(0,2|0,3)] + P_t(2,1)\,[P(0,1|2,1) + P(1,1|2,1)] \tag{3.2.21b}$$
$$+ P_t(1,2)\,[P_t(0,1|1,2) + P_t(1,1|1,2) + 2P(0,2|1,2)]\,.$$

Aunque es difícil realizar un estudio analítico del estado estacionario, el sistema de ecuaciones (3.2.21) junto con las expresiones para las probabilidades de las ecuaciones (3.2.7) y (3.2.20) se pueden iterar numéricamente para obtener la evolución temporal de c_t y s_t para diferentes valores de p. Veremos en la sección 3.2.2 que estas ecuaciones predicen una coexistencia estable de ambos tipos de larvas.

3.2.2. Simulaciones numéricas

En las secciones anteriores derivamos las ecuaciones en diferencias que describen la dinámica en escenarios que involucran un hospedador y una larva, un hospedador y dos larvas, dos hospedadores y dos larvas, y dos hospedadores y tres larvas. Debido a la complejidad de la dinámica,

los cálculos teóricos se vuelven inaccesibles para un mayor número de larvas y hospedadores. Por lo tanto, realizamos simulaciones de Monte Carlo (MC) para obtener información sobre el comportamiento de la dinámica en escenarios con cualquier cantidad de hospedadores y larvas.

Realizamos extensas simulaciones numéricas del modelo descripto en la sección 3.1.1. En todas las simulaciones, obtuvimos el valor de $\hat{c}_t = c_t/[c_t + s_t]$, indicando la proporción de larvas comunitarias en la población. Se asumió que el estado inicial de la población era $\hat{c}_0 = 0{,}5$. Primero, realizamos las simulaciones de la dinámica con dos larvas y un hospedador en cada caja para $N_{boxes} = 100000$, donde N_{boxes} es el número de cajas en las que se simula el experimento y $t = 125$, siendo t el número de generaciones. Los resultados para $p = 0{,}2, 0{,}5$ y 1 se muestran en la figura 3.3. En el escenario de dos larvas y un hospedador, la proporción de larvas C tiende a 1 a diferentes velocidades para cada valor de p (aumentando con p).

Para estudiar cómo el valor de p afecta la aproximación al estado de dominancia de las larvas de tipo C, realizamos un análisis de perturbación lineal de las ecuaciones (3.2.16), alrededor del punto fijo estable $\vec{x_c} = [p(2-p), 0]$. Derivando el sistema de ecuaciones linealizado para las pequeñas perturbaciones ϵ y δ, se obtuvieron las siguientes expresiones:

$$\epsilon_t = \frac{(4-3p)}{2(2-p)}\delta_{t-1} \tag{3.2.22}$$

$$\delta_t = \frac{(4-3p)}{2(2-p)}\delta_{t-1}, \tag{3.2.23}$$

donde $c_t = p(2-p) - \epsilon_t$ y $s_t = \delta_t$. De este sistema, se sigue que $c_t = p(2-p) - \delta_0\,\alpha_{12}^t = p(2-p) - \delta_0\, e^{t\log\alpha_{12}}$ y $s_t = \delta_0\alpha_{12}^t$, donde $\alpha_{12}(p) = (4-3p)/2(2-p)$. Por lo tanto, se deduce que $\hat{s}_t$ ($\hat{c}_t$) se aproxima exponencialmente rápido a 0 (1) con una tasa dependiente de p dada por $\log[\alpha_{12}(p)]$, cuyo valor absoluto aumenta a medida que p se incrementa. En el inset de la figura 3.3 se muestra que las curvas para los tres valores de p colapsan en una única curva cuando el eje x se reescala por $\log[\alpha_{12}(p)]$.

Luego realizamos las simulaciones de una dinámica con dos larvas y dos hospedadores en cada caja para $N_{boxes} = 100000$, los resultados para $p = 0{,}2, 0{,}5$ y 1 se muestran en la figura 3.4. Los símbolos y las líneas continuas corresponden a los resultados de MC y a la iteración numérica de las ecuaciones (3.2.19), respectivamente. Tal como lo predijo el enfoque analítico, vemos que ahora las larvas S dominan a largo plazo, en contraste con el caso anterior de un hospedador y dos larvas.

De manera análoga al caso de un hospedador y dos larvas, se realizó un análisis de perturbación lineal de las ecuaciones (3.2.19) alrededor del punto fijo estable $\vec{x_s} = [0, 2p]$, correspondiente a la dominancia de las larvas de tipo S. Derivando el sistema de ecuaciones linealizado, se obtuvieron las siguientes expresiones:

$$\epsilon_t = \Big(1 - \frac{1}{8}p\Big)\epsilon_{t-1} \tag{3.2.24}$$

$$\delta_t = \Big(1 + \frac{1}{8}p\Big)\epsilon_{t-1} \tag{3.2.25}$$

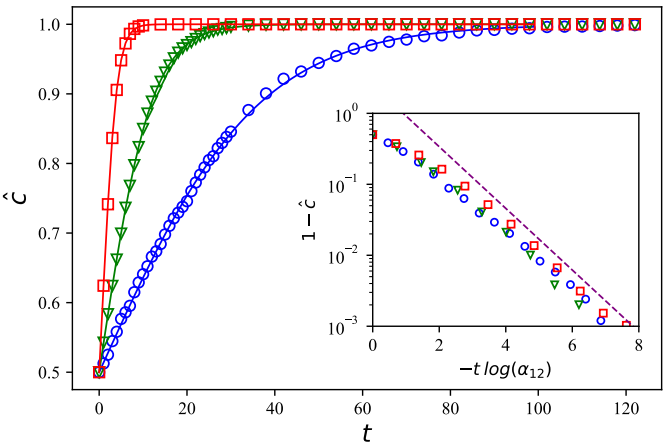

Figura 3.3: Un hospedador y dos larvas. Evolución temporal de $\hat{c}_t = c_t/[c_t + s_t]$ obtenida a partir de simulaciones numéricas sobre $N_{boxes} = 100000$ para probabilidades de parasitismo $p = 0{,}2$ (círculos), $p = 0{,}5$ (triángulos) y $p = 1$ (cuadrados). Las líneas continuas son las soluciones analíticas de las ecuaciones (3.2.16). Inset: $1 - \hat{c}$ vs la variable de escala $x = -t \log(\alpha_{12})$, con $\alpha_{12}(p) = (4-3p)/2(2-p)$, en una escala lineal–logarítmica. La línea discontinua tiene pendiente -1.

donde $c_t = \epsilon_t$ y $s_t = 2p - \delta_t$. Del sistema, se sigue que $c_t = \epsilon_0\, \alpha_{22}^t = \epsilon_0\, e^{t \log \alpha_{22}}$ y $s_t = 2p - \epsilon_0(1 + p/8)\alpha_{22}^{t-1}$, donde $\alpha_{22}(p) = 1 - \frac{1}{8}p$. El inset de la figura 3.4 muestra el decaimiento exponencial de $\hat{c}$ a 0, y el colapso de las curvas para los tres valores de p utilizando la variable de escala $t \log \alpha_{22}$. De manera análoga al caso anterior, la tasa de decaimiento $\log[\alpha_{22}(p)]$ aumenta con p.

Los resultados numéricos anteriores confirman que el estado estacionario del sistema depende fuertemente del número de hospedadores y larvas, y que la aproximación a este estado es más rápida a medida que aumenta la probabilidad de parasitismo. Una explicación intuitiva de este resultado puede darse analizando las oportunidades de parasitismo de ambos tipos de larvas en los dos escenarios. En el escenario con dos larvas y un único hospedador, la dinámica se reduce a si logran parasitar al hospedador disponible o no. Si la larva solitaria parasita primero, la larva comunitaria aún tiene la posibilidad de parasitar al mismo hospedador, lo que resulta en la misma probabilidad de supervivencia para ambas posteriormente. Sin embargo, si la situación se invierte y la larva comunitaria parasita primero, la larva solitaria pierde la oportunidad de parasitar, por lo que la larva comunitaria tiene una ventaja de supervivencia. Por lo tanto, esperamos una eventual dominancia de las larvas comunitarias después de muchas generaciones. Una dinámica distinta surge cuando hay un hospedador adicional, y el resultado anterior se invierte por completo. Es decir, en el caso de dos hospedadores y dos larvas, si la larva solitaria intenta parasitar a un hospedador que ya ha sido parasitado, puede cambiar al otro hospedador, que siempre estará disponible. Sin embargo, la larva comunitaria, al intentar parasitar un hospedador, no considera si ya ha sido parasitado, lo que reduce su probabilidad de supervivencia a la mitad. Como resultado, a largo

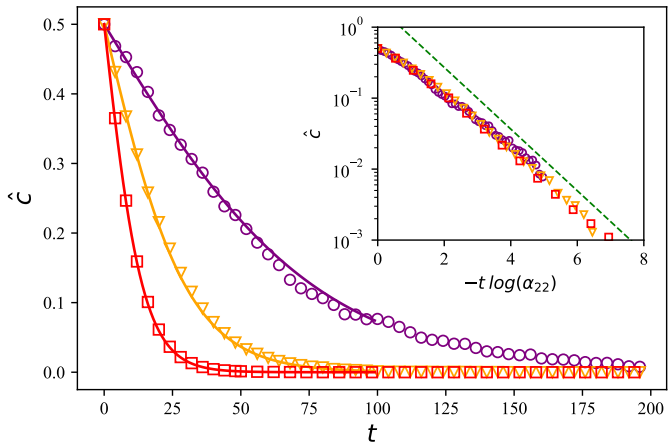

Figura 3.4: Dos hospedadores y dos larvas. Evolución temporal de $\hat{c}_t = c_t/[c_t + s_t]$ obtenida a partir de simulaciones numéricas sobre $N_{boxes} = 100000$ para probabilidades de parasitismo $p = 0{,}2$ (círculos), $p = 0{,}5$ (triángulos) y $p = 1$ (cuadrados). Las líneas continuas son las soluciones analíticas de las ecuaciones (3.2.19). Inset: $\hat{c}$ vs la variable de escala $x = -t\log(\alpha_{22})$, con $\alpha_{22}(p) = 1 - \frac{1}{8}p$, en una escala lineal-logarítmica. La línea discontinua tiene pendiente -1.

plazo, se espera que domine la población de larvas solitarias.

Estos razonamientos indican que diferentes escenarios, caracterizados por distintas combinaciones de larvas y hospedadores por caja, pueden llevar a la supervivencia de un tipo de larva sobre otro. Sin embargo, el enfoque analítico para dos hospedadores y tres larvas (3.2.21) predice que una coexistencia estable de ambos tipos de larvas también es un resultado posible para algunos valores de p. Para estudiar este caso en más detalle, realizamos simulaciones de MC del modelo con $N_{\text{box}} = 10^5$ cajas y exploramos la evolución temporal de la fracción media de larvas C, $\hat{c}$, para varios valores de p. Los resultados de la simulación se muestran con círculos en la figura 3.5 en una escala doble logarítmica. Observamos que $\hat{c}_t$ tiende a cero con el tiempo para valores bajos de p, pero alcanza un valor estacionario mayor que cero para p lo suficientemente grande, indicando una transición en $p_c = 0{,}75$ de dominancia de S para $p < p_c$ a coexistencia para $p > p_c$. En el punto de transición p_c, $\hat{c}$ decae como una ley de potencia en el tiempo. También trazamos con líneas continuas el valor de $\hat{c}_t$ obtenido de la iteración numérica de las ecuaciones (3.2.21), que concuerdan muy bien con los resultados de la simulación (círculos). Para describir mejor la transición, trazamos en la figura 3.6 los valores estacionarios de $\hat{c}$ como función de p ($\hat{c}^{\text{stat}}$), calculados como el valor asintótico $\hat{c}_t \simeq 0$ para $p < p_c$, y como el valor promedio de $\hat{c}_t$ en el intervalo $t \in [600, 1000]$ para $p > p_c$. Para comparar, también trazamos los valores estacionarios de $\hat{c}^{\text{stat}}$ obtenidos de las ecuaciones (3.2.21)) (líneas continuas), donde vemos un buen acuerdo con los resultados de la simulación de MC (círculos). A medida que p aumenta más allá de p_c, observamos una transición de una fase de dominancia de S, a una fase donde $\hat{c}^{\text{stat}} > 0$, indicando que ambos

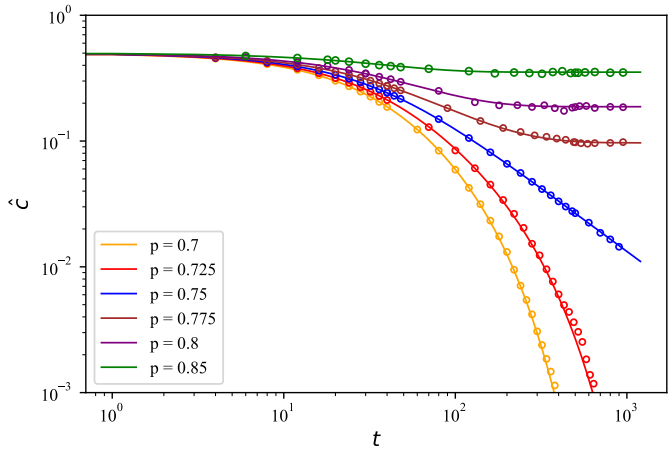

Figura 3.5: Dos hospedadores y tres larvas. Evolución temporal de $\hat{c}_t = c_t/[c_t + s_t]$ obtenida de simulaciones numéricas sobre $N_{boxes} = 100000$ para varios valores de p. Los círculos corresponden a $p = 0{,}85, 0{,}8, 0{,}775, 0{,}75, 0{,}725$ y $0{,}7$ (de arriba hacia abajo). En el punto de transición $p = 0{,}75$, $\hat{c}_t$ decae como t^{-1}. Las líneas continuas son las soluciones analíticas de las ecuaciones (3.2.21).

tipos de larvas coexisten.

Los tres casos analizados anteriormente, $(N_h, n_l) = (1, 2), (2, 2)$ y $(2, 3)$, muestran la existencia de tres fases diferentes predichas por el enfoque analítico y confirmadas por las simulaciones de MC: dominancia C, dominancia S y coexistencia C–S. Uno podría preguntarse si estas fases pueden aparecer en un solo escenario al variar p. Dado que el enfoque analítico es impráctico para $N_h > 2$ y $n_l > 3$, recurrimos a simulaciones de MC y estudiamos el caso $N_h = 2$ y $n_l = 4$. El inset de la figura 3.6 muestra el valor estacionario $\hat{c}^{\text{stat}}$ en función de p, lo que indica la presencia de las tres fases. Podemos observar que las larvas solitarias dominan para $p \lesssim 0{,}45$, mientras que las larvas comunitarias prevalecen para $p \gtrsim 0{,}8$. Entre estos umbrales, hay una coexistencia de ambos tipos de larvas, con una fracción de larvas C que aumenta con p.

Es importante señalar que, al igual que ocurre en el caso de $N_h = 2$ y $n_l = 3$, un aumento en la probabilidad de parasitismo p favorece a las larvas comunitarias, ya que estas intentan parasitar de manera constante, lo que incrementa su probabilidad de supervivencia posteriormente.

Nuestro enfoque específico ahora se centra en determinar si es posible una coexistencia estable en otros escenarios que involucren un número genérico de hospedadores N_h y larvas n_l. Para ello, realizamos extensas simulaciones de Monte Carlo para todas las combinaciones posibles de N_h desde 1 hasta 8 y n_l desde 1 hasta 19, con una probabilidad de parasitismo p fija. Para cada caso, calculamos el valor estacionario $\hat{c}^{\text{stat}}$ como se describió anteriormente. Los diagramas de fase resultantes para $p = 0{,}5$ y $p = 1{,}0$ se muestran en las figuras 3.7 (a) y (b), respectivamente, donde el valor de la fracción $\hat{c}^{\text{stat}}$ está codificado por colores. Para $n_l = 1$ y cualquier número de

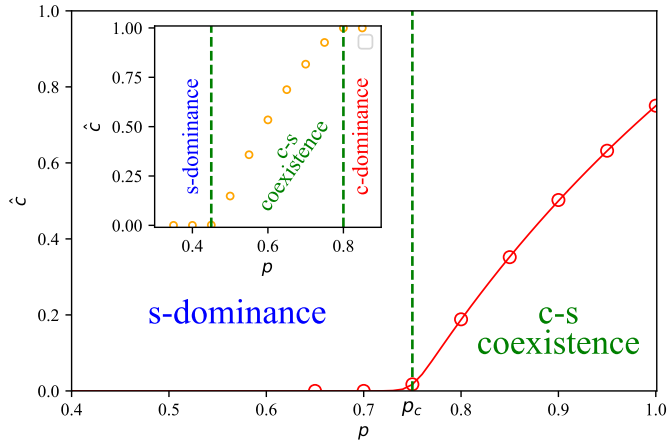

Figura 3.6: Fracción estacionaria de larvas comunitarias ($\hat{c}$) vs probabilidad de parasitismo p, para $N_{boxes} = 100000$. Panel principal: caso de tres larvas y dos hospedadores, la línea continua representa la solución de las ecuaciones (3.2.21). Inset: caso de cuatro larvas y dos hospedadores.

hospedadores, aproximadamente la mitad de las cajas están inicialmente ocupadas por una larva C y la otra mitad por una larva S, ya que el estado inicial se establece en $\hat{c}_0 = 0{,}5$. Luego, dado que ambos tipos de larvas parasitan y sobreviven con la misma probabilidad p, el estado estacionario es alrededor de $\hat{c}^{\text{stat}} = 0{,}5$.

Para los dos valores de p, podemos observar la presencia de las tres fases a medida que se varían N_h y n_l. También notamos que la región de coexistencia se amplía a medida que aumentan N_h y n_l. Un análisis cualitativo de la transición entre fases se puede realizar considerando cómo se ve afectada la ocupación de los hospedadores cuando se varían N_h y n_l, y teniendo en cuenta que las larvas solitarias siempre buscan un hospedador libre para intentar parasitar. Para un valor fijo de $N_h \geq 2$, al aumentar n_l desde 2, el sistema pasa de la fase de dominancia S a la fase de coexistencia y luego a la fase de dominancia C. Esto se debe a que agregar más larvas manteniendo el mismo número de hospedadores se convierte en una desventaja para las larvas S, ya que es más probable que una larva S encuentre todos los hospedadores ocupados cuando intenta parasitar, perdiendo así sus oportunidades de parasitismo. Como consecuencia, las larvas C aumentan sus posibilidades de supervivencia cuando n_l aumenta. Un análisis similar se aplica cuando se incrementa N_h manteniendo fijo $n_l \geq 2$, donde observamos que el sistema pasa de dominancia C a coexistencia y luego a dominancia S. Agregar hospedadores aumenta el número de hospedadores libres disponibles en el proceso de parasitismo, aumentando así la probabilidad de que una larva S encuentre un hospedador vacío cuando intenta parasitar, lo que eventualmente conduce a una ventaja de supervivencia de las larvas S sobre las larvas C.

También podemos observar que ambas líneas de transición para los casos $p = 0{,}5$ y $p = 1$ son diferentes. Específicamente, las líneas de transición se desplazan hacia la derecha para el caso de

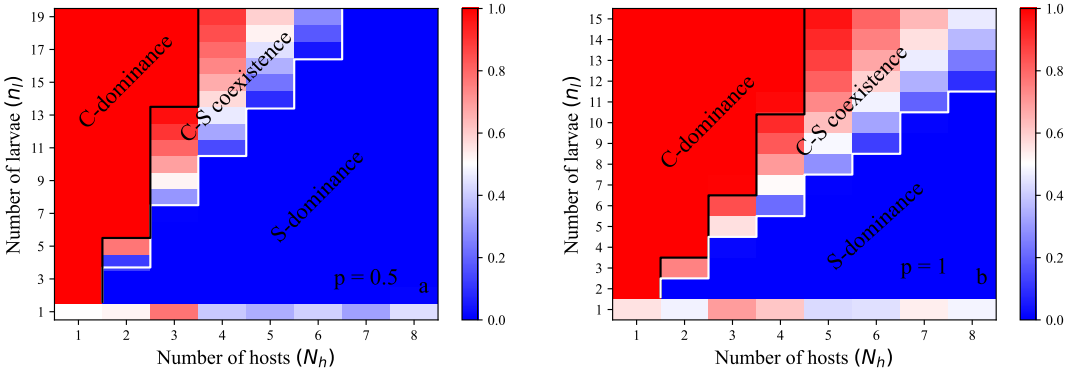

Figura 3.7: Diagrama de fases en el espacio $n_l - N_h$ definido por la fracción media estacionaria $\hat{c}$, cuyo valor está codificado por colores: dominancia de S ($\hat{c}^{\text{stat}} = 0$, azul), coexistencia C–S ($0 < \hat{c}^{\text{stat}} < 1$) y dominancia de C ($\hat{c}^{\text{stat}} = 1$, rojo). (a) $p = 0{,}5$. (b) $p = 1{,}0$.

$p = 1$, y por lo tanto, la fase de dominancia C se amplía. Una forma de entender este fenómeno es analizar cómo p afecta las posibilidades de parasitismo de ambos tipos de larvas para un valor fijo de N_h y n_l. Cuando la probabilidad de parasitismo p aumenta, ambos tipos de larvas aumentan igualmente sus posibilidades de parasitar un hospedador elegido, pero también los hospedadores tienden a estar más ocupados por larvas durante el proceso de parasitismo. Entonces, mientras que una mayor ocupación de hospedadores tiene el efecto de reducir las posibilidades de que las larvas S encuentren un hospedador libre para parasitar, las posibilidades de parasitismo de las larvas C no se ven afectadas porque parasitan cualquier hospedador elegido. Esto tiene el efecto general de reducir el éxito de supervivencia de las larvas S en relación con las larvas C a medida que p aumenta, lo que tiende a aumentar la fracción estacionaria $\hat{c}^{\text{stat}}$ para un par fijo (N_h, n_l). Esto puede llevar a una transición de dominancia S a coexistencia y luego a dominancia C cuando p aumenta, como vemos en el inset de la figura 3.6 para $(N_h, n_l) = (2, 4)$, y también podemos comprobar en las figuras 3.7 (a) y (b) (el cuadrado azul para $p = 0{,}5$ se convierte en rojo para $p = 1$). Este cambio de azul (dominancia S) a rojo (dominancia C) explica la expansión de la región de dominancia C en el espacio de fases N_h–n_l cuando p aumenta.

En resumen, aumentar la ocupación de hospedadores, ya sea disminuyendo el número de hospedadores, aumentando el número de larvas o aumentando p, tiende a favorecer la supervivencia de las larvas C.

3.3. Discusión y conclusiones

En este trabajo desarrollamos un modelo basado en agentes para estudiar el comportamiento de las larvas parasitoides que buscan activamente hospedadores ocultos. En particular, asumimos

que hay dos tipos de larvas, larvas solitarias o larvas comunitarias. Estos dos comportamientos influyen en el destino de una larva determinada en la población.

Para investigar las consecuencias de tener estos dos tipos de larvas compitiendo por los hospedadores, primero estudiamos el modelo de manera analítica para el caso más simple donde solo una larva buscaba un único hospedador. Esto permitió desarrollar la notación y estudiar el comportamiento del sistema analíticamente. Luego, estudiamos el caso en el que hay más larvas que hospedadores para analizar el comportamiento cuando ocurre una competencia efectiva. Finalmente, analizamos los escenarios con dos hospedadores para los casos de dos y tres larvas, es decir, cuando el número de larvas coincide con el de hospedadores y cuando hay un exceso de larvas en relación con los hospedadores disponibles. Para cada uno de estos casos, calculamos las probabilidades de parasitismo y supervivencia para larvas solitarias y comunitarias, y estudiamos la dinámica.

El análisis de los puntos fijos de estos sistemas mostró que, en general, las larvas del tipo S dominan cuando hay menos larvas que hospedadores ($n_l \leq N_h$), es decir, el mecanismo de hospedador libre prevalece cuando hay más hospedadores disponibles que larvas, ya que las larvas del tipo S tienden a evitar la competencia y aumentar sus probabilidades de supervivencia. Por otro lado, cuando hay menos hospedadores que larvas no está claro qué mecanismo prevalece, ya que esto depende de los números de hospedadores y larvas. Por ejemplo, el caso con un hospedador y muchas larvas llevaría a la dominancia de C, pero el caso con solo una larva más que el número de hospedadores puede no ser suficiente para una dominancia de C como puede observarse en las simulaciones.

Luego exploramos el modelo para casos más generales a través de un enfoque computacional porque la derivación analítica es inaccesible para un gran número de hospedadores y larvas. Las simulaciones mostraron una alta concordancia con las soluciones analíticas.

Un parámetro clave que determina la evolución del sistema es la probabilidad de parasitismo, p. Este parámetro captura la decisión individual de una larva de parasitar un hospedador. Debido a la estricta regla asumida de que las larvas solitarias no parasitarán un hospedador ya parasitado, el tipo comunitario de larvas tiene una ventaja competitiva sobre las larvas solitarias. Por lo tanto, como se ve en los diagramas de fase, para mayores valores de p, se reduce la zona exclusiva de las solitarias. Este resultado también se observa en el inset de la figura 3.6 donde tratamos subsistemas de 4 larvas y 2 hospedadores. Se puede observar cómo varían los estados estacionarios a medida que aumenta el valor de p. Para los valores de p por debajo de cierto umbral, las larvas solitarias dominan, luego hay un intervalo donde ambas larvas coexisten, y finalmente, para valores de p superiores a otro umbral, las larvas comunitarias dominan. Un paso interesante a explorar sería incorporar distintos valores de p para cada tipo de larva.

Por otro lado, también observamos en los diagramas de fase que la variabilidad en el número de hospedadores y larvas por subsistema es un factor determinante para los estados estacionarios. Generalizando lo que se vio en el tratamiento analítico, vemos que, el tipo comunitario es una estrategia más ventajosa cuando los hospedadores son escasos. Sin embargo, esta estrategia implica

un costo de competencia y disminuye la probabilidad de supervivencia de una larva individual. A su vez, la estrategia solitaria tiene una ventaja cuando hay más hospedadores que larvas porque evitan la competencia buscando hospedadores libres. La variabilidad en el número de hospedadores por subsistema refleja muchos procesos diferentes que incluyen condiciones ambientales como temperatura, regímenes de lluvia y condiciones del suelo, así como el tipo de uso del suelo o labranza que, en última instancia, definirán el desarrollo de los hospedadores en una porción particular de suelo.

Si bien este análisis fue realizado con dinámica de poblaciones, podría encararse desde la teoría de juegos evolutivos. Aquí, cada tipo de larva correspondería a una estrategia, los pagos se definirían vía la probabilidad de supervivencia, y cada instancia del juego sería un experimento en una caja. Con este enfoque, la estrategia de superparasitar, que a priori parece subóptima, vemos que puede coexistir o incluso convertirse en dominante, dependiendo de la cantidad de jugadores que participen en el juego y cuántos hospedadores hay en la caja.

4

Estrategias evolutivamente estables en juegos de dos o tres jugadores

El estudio de los juegos evolutivos con interacciones locales entre pares ha sido de interés para muchas disciplinas diferentes. También se han considerado interacciones locales con múltiples oponentes, aunque siempre para una cantidad fija de jugadores. En muchas situaciones, sin embargo, podrían tener lugar interacciones con distinta cantidad de jugadores en cada ronda, y este caso no puede reducirse a interacciones entre pares.

En este capítulo formalizamos y generalizamos la definición de estrategia evolutivamente estable (ESS) para poder incluir un escenario en el que juegan dos jugadores con probabilidad p, y tres jugadores con la probabilidad complementaria $1 - p$.

Mostramos la existencia de equilibrios en estrategias puras y mixtas dependiendo de la probabilidad p en un ejemplo concreto del juego que llamamos "duelo-truelo". Además, encontramos un rango de valores de p para los cuales el juego tiene un equilibrio mixto y la proporción de jugadores en cada estrategia depende del valor particular de p. Demostramos que cada uno de estos puntos de equilibrio mixtos son ESS.

4.1. Definición ESS

Nuestra próxima tarea es ampliar la definición 2.2.2 de ESS introducida en el capítulo 2 a juegos simétricos con un número aleatorio de jugadores. Para esto, consideramos un juego $G = (G_1, G_2)$ con $G_1 = (J_1, S, U_1)$ y $G_2 = (J_2, S, U_2)$, donde $S = \{s_1, ..., s_m\}$ es el conjunto de estrategias puras. J_1 es el conjunto de jugadores de G_1 que está compuesto por dos jugadores, J_2 es el conjunto de jugadores de G_2 que está compuesto por tres jugadores. U_1 es la función de pago de G_1 y U_2 es la función de pago de G_2. Vamos a tener una población de N agentes que jugarán el juego G, esto significa que con cierta probabilidad p dos jugadores son elegidos de manera aleatoria y juegan el juego (G_1) entre sí, y con la probabilidad complementaria $1 - p$ se eligen tres jugadores al azar y juegan (G_2) entre ellos. Llamaremos al juego G "juego aleatorio 2-3".

Necesitamos definir el pago esperado en el juego G de un agente jugando la estrategia s_i contra el resto de la población jugando las diferentes estrategias con una proporción dada x. En nuestro caso está dado por

$$E_G[e_i, x] = pE[e_i, x] + (1-p)E[e_i, x, x], \quad i = 1, ..., m.$$

Donde, como ya mencionamos en 2, $E[e_i, x]$ es el pago esperado de un jugador usando la estrategia s_i contra un jugador que usa la estrategia x y $E[e_i, x, x]$ es el pago esperado contra dos jugadores que usan la estrategia x. Con esa definición y siguiendo la dinámica de la ecuación del replicador, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = x_i\{E_G[e_i, x] - E_G[x, x]\}, \quad i = 1, ..., m. \tag{4.1.1}$$

Ahora supongamos que la población está distribuida en cada estrategia pura definiendo una estrategia mixta x (llamados incumbentes), y que una pequeña fracción ε de mutantes se distribuye definiendo una estrategia y.

Definición 4.1.1. Decimos que x es *evolutivamente estable* (ESS) si para todo $y \neq x$, existe $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned}
&p\Big\{\varepsilon E[x, y] + (1-\varepsilon)E[x, x]\Big\}+ \\
&(1-p)\Big\{2\varepsilon(1-\varepsilon)E[x, y, x] + (1-\varepsilon)^2E[x, x, x] + \varepsilon^2E[x, y, y]\Big\} \\
&> \\
&p\Big\{\varepsilon E[y, y] + (1-\varepsilon)E[y, x]\Big\}+ \\
&(1-p)\Big\{2\varepsilon(1-\varepsilon)E[y, y, x] + (1-\varepsilon)^2E[y, x, x] + \varepsilon^2E[y, y, y]\Big\}
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Por conveniencia llamaremos $d_{i,j}$ a la diferencia entre el pago esperado de un agente que juega la estrategia x contra i agentes que juegan la misma estrategia y j agentes que juegan la estrategia y y el pago esperado de un agente que juega la estrategia y contra una cantidad i y j de oponentes que juegan x e y, respectivamente.

Luego,

$$\begin{aligned}
d_{1,0} &= E[x, x] - E[y, x], \\
d_{2,0} &= E[x, x, x] - E[y, x, x], \\
d_{0,1} &= E[x, y] - E[y, y], \\
d_{0,2} &= E[x, y, y] - E[y, y, y], \\
d_{1,1} &= E[x, y, x] - E[y, y, x].
\end{aligned}$$

De esta manera, la condición de la ecuación (4.1.2) es equivalente a la siguiente definición:

Definición 4.1.2. Una estrategia x es ES contra una estrategia y si ocurre

$$p\, d_{1,0} + (1-p)d_{2,0} > 0, \tag{4.1.3}$$

o

$$\begin{aligned} p\,(d_{0,1} - d_{1,0}) + (1-p)2(d_{1,1} - d_{2,0}) &> 0 \\ p\, d_{1,0} + (1-p)d_{2,0} &= 0, \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

o

$$\begin{aligned} (1-p)(-2d_{1,1} + d_{2,0} + d_{0,2}) &> 0 \\ p\,(d_{0,1} - d_{1,0}) + (1-p)2(d_{1,1} - d_{2,0}) &= 0 \\ p\, d_{1,0} + (1-p)d_{2,0} &= 0. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Llamamos a la ecuación (4.1.3) condición de nivel 0, la ecuación (4.1.4) condición de nivel 1 y a la ecuación (4.1.5) condición de nivel 2. El nivel está dado por la potencia de ε que estamos mirando en cada caso. El nivel 0 corresponde a que un incumbente tenga mejor pago esperado cuando juega contra todos incumbentes que el mutante cuando juega contra todos incumbentes. El nivel 1 corresponde a que la condición de nivel 0 se cumpla por igualdad, pero que el pago esperado de x sea mejor que el de y cuando juegan contra un solo mutante y el resto incumbentes. Por último el nivel 2 corresponderá a que los pagos en los escenarios de niveles 0 y 1 se cumplan por igualdad, pero que el pago esperado de x sea mejor que el de y cuando juega contra dos mutantes y el resto incumbentes. La existencia de los niveles se debe a que habrá una probabilidad mayor de jugar contra más incumbentes por el hecho de ser mayoría en la población. En este caso solo tenemos dos niveles porque como máximo en el juego aleatorio 2-3 un jugador puede jugar contra otros 2 rivales.

Es sabido que en un juego de dos jugadores, dos estrategias evolutivamente estables distintas no pueden compartir el mismo soporte. Por el contrario, para un juego de muchos jugadores la situación es diferente. En el trabajo [31] que estudia más de dos jugadores, se establece que cuando la cantidad de jugadores es 3 en cada ronda, no es posible tener dos ESS con el mismo soporte. Sin embargo, este patrón no se mantiene cuando el número de jugadores excede tres. En el siguiente teorema, extendemos el resultado para un juego aleatorio $2-3$. Notemos que en lo definido hasta ahora el juego tiene una cantidad m de estrategias puras y la demostración siguiente vale en este mismo contexto.

Teorema 4.1.3. *Dado un juego aleatorio* $2-3$*, donde* p *es la probabilidad de elegir* 2 *jugadores, no es posible tener dos ESS con el mismo soporte.*

Demostración. Utilizaremos la definición 4.1.2. Supongamos que x es una ESS del juego aleatorio $2-3$. Si y es otra ESS distinta con el mismo soporte, entonces afirmamos que la condición (4.1.4) es la única posibilidad.

Esto ocurre debido a que como x e y son distintas con el mismo soporte, son ESSs mixtas (luego la condición (4.1.3) queda descartada). Utilizando la notación tenemos que

$$p\, d_{1,0} + (1-p)d_{2,0} = 0, \quad \text{y}$$
$$p(-d_{0,1}) + (1-p)(-d_{0,2}) = 0.$$

Si además tenemos que $p\,(d_{0,1} - d_{1,0}) + (1-p)2(d_{1,1} - d_{2,0}) = 0$, eso implica que la expresión $-2d_{1,1} + d_{2,0} + d_{0,2}$ también es nula, lo que descarta la condición (4.1.5).

Luego sabiendo que y es una ESS diferente con el mismo soporte que x, las siguientes condiciones van a ser satisfechas:

$$p\, d_{1,0} + (1-p)d_{2,0} = 0 \tag{4.1.6}$$

$$p(-d_{0,1}) + (1-p)(-d_{0,2}) = 0 \tag{4.1.7}$$

$$p(d_{0,1} - d_{1,0}) + 2(1-p)(d_{1,1} - d_{2,0}) > 0 \tag{4.1.8}$$

$$p(-d_{1,0} + d_{0,1}) + 2(1-p)(-d_{1,1} + d_{0,2}) > 0 \tag{4.1.9}$$

De las primeras dos condiciones obtenemos que

$$p(d_{0,1} - d_{1,0}) = (1-p)d_{2,0} + (1-p)(-d_{0,2}).$$

Reemplazando en (4.1.8) tenemos

$$\begin{aligned}
&p(d_{0,1} - d_{1,0}) + 2(1-p)(d_{1,1} - d_{2,0}) > 0\\
&(1-p)d_{2,0} + (1-p)(-d_{0,2}) + 2(1-p)(d_{1,1} - d_{2,0}) > 0\\
&d_{2,0} + (-d_{0,2}) + 2(d_{1,1} - d_{2,0}) > 0\\
&-d_{2,0} + (-d_{0,2}) + 2d_{1,1} > 0\\
&2d_{1,1} > d_{2,0} + d_{0,2}
\end{aligned}$$

y luego reemplazando en (4.1.9)

$$\begin{aligned}
&p(-d_{1,0} + d_{0,1}) + 2(1-p)(-d_{1,1} + d_{0,2}) > 0\\
&(1-p)d_{2,0} + (1-p)(-d_{0,2}) + 2(1-p)(-d_{1,1} + d_{0,2}) > 0\\
&d_{2,0} + (-d_{0,2}) + 2(-d_{1,1} + d_{0,2}) > 0\\
&d_{2,0} - (-d_{0,2}) > 2d_{1,1}\\
&2d_{1,1} < d_{2,0} + d_{0,2}
\end{aligned}$$

Esta contradicción completa la prueba. □

A partir de la definición 4.1.1 será sencillo generalizar esta idea a juegos en los que el número de jugadores puede ser cualquier cantidad, siempre que se utilice el mismo conjunto finito de estrategias puras como lo haremos en el capítulo 6.

En la caracterización de ESS analizada previamente [13] solo dos casos de interacciones fueron considerados, incumbentes contra un incumbente versus incumbentes contra un mutante, o interacciones inter-grupo (todos mutantes-todos incumbentes), como en las ecuaciones (2.2.2) y (2.2.3). Es importante destacar que aquí se tienen en cuenta todas las interacciones posibles y que todas están involucradas en el cálculo de las desigualdades que determinan si una estarategia es ESS o no.

4.2. Juegos de dos estrategias

Con el objetivo de simplificar, nos enfocamos únicamente en dos estrategias, s_1 y s_2, y dos juegos simétricos G_1 y G_2 con estas estrategias, uno para dos jugadores y otro para tres jugadores. Con probabilidad p un par de agentes es elegido para jugar G_1, y con probabilidad $1-p$ se elige una terna para el juego G_2. Denotamos por a_{ij} el pago de un agente (jugador I) que juega la estrategia s_i contra otro agente (jugador II) que juega la estrategia s_j, en un juego de dos jugadores. De manera similar, a_{ijk} denota el pago del jugador I que juega la estrategia s_i contra otros dos agentes que juegan las estrategias s_j (jugador II) y s_k (jugadora III), en un juego de tres jugadores. Consideramos que este puede ser un contexto general en el que se trate del mismo juego, pero con pagos diferentes para los jugadores dependiendo de si se juega entre dos o entre tres jugadores.

Recordemos que $a_{121} = a_{112}$ y $a_{221} = a_{212}$ debido a la simetría del juego, y además $a_{11} = a_{22} = 1/2$ y $a_{111} = a_{222} = 1/3$.

Para el juego con dos jugadores, si el jugador I juega la estrategia s_i y la jugadora II juega s_j, luego I recibe el pago a_{ij} y II recibe a_{ji}. Los valores a_{ij} pueden ser pensados como elementos de una matriz A_2 de 2×2. De la misma forma, si tres jugadores I, II y III están involucrados, tales que juegan las estrategias s_i, s_j y s_k, respectivamente, luego I recibe el pago a_{ijk}, II recibe a_{jik} y III recibe a_{kij}. En este caso, los valores a_{ijk} son los elementos de dos matrices A_{3k} de 2×2.

Como estamos considerando solo dos estrategias en esta sección, notaremos al conjunto de estrategias mixtas como $\Delta_S = \{(\sigma, 1-\sigma) : \sigma \in [0,1]\}$. Así, el pago esperado de un jugador usando la estrategia $(\sigma, 1-\sigma)$ contra un oponente que utiliza la estrategia s_j es $\sigma a_{1j} + (1-\sigma)a_{2j}$, y cuando juega contra dos oponentes que utilizan las estrategias s_j y s_k es $\sigma a_{1jk} + (1-\sigma)a_{2jk}$. Esta forma de computar los pagos esperados también aplica cuando más de un jugador usa estrategias mixtas.

Supongamos que una proporción $\sigma(t)$ de la población juega la estrategia s_1 a tiempo t, y $1-\sigma(t)$ juega s_2. Asumiendo que los jugadores se seleccionan al azar de la población, la evolución temporal de esta proporción está dada por la ecuación del replicador (4.1.1),

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sigma\{E_G[1,\sigma] - E_G[\sigma,\sigma]\}, \tag{4.2.1}$$

donde $E_G[1,\sigma]$ y $E_G[\sigma,\sigma]$ son abreviaturas para $E_G[(1,0),(\sigma,1-\sigma)]$ y $E_G[(\sigma,1-\sigma),(\sigma,1-\sigma)]$,

respectivamente. Aquí estamos utilizando el hecho de que el símplex de estrategias es el segmento $[0, 1]$, por lo tanto podemos identificar una estrategia dada $(\sigma, 1-\sigma)$ utilizando un solo valor σ, que es la probabilidad de jugar s_1. Finalmente, la ecuación (4.2.1) puede ser expandida para obtener una expresión más simétrica

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sigma(1-\sigma)\{E_G[1,\sigma] - E_G[0,\sigma]\}, \tag{4.2.2}$$

luego de usar la relación

$$E_G[\sigma,\sigma] = \sigma E_G[1,\sigma] + (1-\sigma)E_G[0,\sigma].$$

4.2.1. ESS puras

Consideremos primero la estrategia pura $x = (1, 0)$ (s_1), y sea $x \neq y = (q, 1-q)$ una estrategia cualquiera. Luego por la ecuación (4.1.3) tenemos que

$$\begin{aligned} p\left\{\frac{1}{2} - \left[q\frac{1}{2} + (1-q)a_{21}\right]\right\} \quad + \\ (1-p)\left\{\frac{1}{3} - \left[q\frac{1}{3} + (1-q)a_{211}\right]\right\} \quad > \quad 0, \end{aligned}$$

y eso es equivalente a

$$(1-q)\left[p\left(\frac{1}{2} - a_{21}\right) + (1-p)\left(\frac{1}{3} - a_{211}\right)\right] > 0.$$

Como el término $(1-q)$ es positivo, se sigue que la estrategia pura s_1 es una ESS si

$$p\left(\frac{1}{2} - a_{21}\right) + (1-p)\left(\frac{1}{3} - a_{211}\right) > 0, \tag{4.2.3}$$

análogamente tenemos que la estrategia pura s_2 es una ESS si

$$p\left(\frac{1}{2} - a_{12}\right) + (1-p)\left(\frac{1}{3} - a_{122}\right) > 0. \tag{4.2.4}$$

4.2.2. ESS mixtas

Ahora sea $x = (\sigma, 1-\sigma)$ $(\sigma \neq 0)$, un equilibrio de Nash. Luego para ser ESS, x tiene que satisfacer la desigualdad (4.1.4) o bien si se cumple por igualdad, satisfacer la desigualdad (4.1.5) para cualquier $y = (q, 1-q) \neq x$.

La condición que provee la desigualdad (4.1.4) se satisface si

$$\begin{aligned} (\sigma - q)^2\Big[p\,(a_{12} + a_{21} - 1) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (4.2.5) \\ + (1-p)2\left(\left(a_{211} - \frac{1}{3}\right)\sigma + (1-\sigma)\left(a_{122} - \frac{1}{3}\right) + (2\sigma - 1)\,(a_{121} - a_{221})\right)\Big] > 0, \end{aligned}$$

mientras que en caso de cumplirse por igualdad, la condición de la desigualdad (4.1.5) tiene que satisfacerse, lo cual equivale a cumplir

$$(\sigma - q)\left(\left(\frac{1}{3} - a_{211}\right) + \left(a_{122} - \frac{1}{3}\right) - 2(a_{121} - a_{221})\right) > 0. \tag{4.2.6}$$

Notemos que en este último casi el término entre paréntesis depende de los pagos y tiene un signo fijo, mientras que el signo del término $(\sigma - q)$ varía. Luego, no tiene un signo fijo para todo $q \neq \sigma$, y nos lleva a concluir que x es ESS si y solo si satisface la condición de la ecuación (4.2.5).

En el caso general cuando con probabilidad p_k una cantidad k de jugadores están involucrados en el juego vamos a tener un fenómeno similar. La desigualdad que obtenemos en la condición para que una estrategia sea ESS en los niveles pares va a tener una dependencia del signo de $(\sigma - q)$, por lo tanto en esos niveles no tendremos ESS. Este resultado se desarrollará en detalle en el capítulo 6.

4.3. El juego del duelo o truelo

Consideramos el juego aleatorio del Duelo-Truelo. Vamos a considerar solamente dos estrategias puras: s_1 y s_2. En estos juegos, los jugadores y las jugadoras disparan cada uno en turnos, hasta que solo un jugador o jugadora queda vivo. Un jugador que usa la estrategia s_1 mata a su oponente con probabilidad 1 cuando dispara. Llamaremos estrategia *perfecta* a s_1. Por otro lado si usa la estrategia s_2 mata con probabilidad $1/2$. A esta estrategia la llamaremos estrategia *mediocre*.

En el juego del duelo, en una ronda dada, un jugador es elegido al azar (con probabilidad $1/2$) para disparar primero, y matará a su oponente con una probabilidad que depende de la estrategia que use, s_1 o s_2. En el caso de que el jugador no logre su objetivo y por lo tanto su oponente sobreviva, entonces al oponente le tocará disparar. Los tiroteos y rondas continúan hasta que finalmente un jugador muere y el otro sobrevive, y el juego termina. De manera similar en una ronda del juego del truelo un jugador es elegido al azar con probabilidad $1/3$ para comenzar a disparar. Si mata a su oponente, luego, el oponente restante dispara; de lo contrario, se elige uno de los dos oponentes vivos para disparar con probabilidad $1/2$. Igual que en el duelo, la partida finaliza cuando solo uno de los tres jugadores queda con vida.

Las acciones de cada jugador siempre son tomadas para mejorar sus posibilidades de supervivencia. El elemento a_{ij} de la matriz del duelo es la probabilidad de que el jugador I sobreviva (o el pago que recibe), cuando usa la estrategia s_i y juega contra la jugadora II que usa la estrategia s_j. Análogamente, el elemento a_{ijk} de la matriz del truelo es la probabilidad de supervivencia del jugador I, que usa la estrategia s_i, cuando juega contra los jugadores II y III que usan las estrategias s_j y s_k, respectivamente. Los valores de estos elementos son calculados en el apéndice A, y están dados por $a_{11} = a_{22} = 1/2$, $a_{21} = 1/4$ y $a_{12} = 3/4$ para la matriz de duelo, y $a_{111} = a_{222} = 1/3$, $a_{211} = 1/2$, $a_{121} = a_{112} = 1/4$, $a_{221} = a_{212} = 17/48$ y $a_{122} = 7/24$ para las matrices del truelo. Las matrices restantes son obtenidas transponiendo las posiciones de los jugadores. Luego la matriz del duelo está dada por:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} & \begin{array}{cc} (1/2,1/2) & (3/4,1/4) \\ (1/4,3/4) & (1/2,1/2) \end{array} \end{array},$$

mientras que las matrices del truelo vienen dadas por:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} & \begin{array}{cc} (1/3,1/3,1/3) & (1/4,1/4,1/2) \\ (1/4,1/2,1/4) & (7/24,17/48,17/48) \end{array} \end{array}$$

cuando el jugador III juega s_1, y por

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} & \begin{array}{cc} (1/2,1/4,1/4) & (17/48,7/24,17/48) \\ (17/48,17/48,7/24) & (1/3,1/3,1/3) \end{array} \end{array}$$

cuando el jugador III juega s_2.

Computamos así los pagos esperados $E_G[1,\sigma]$ y $E_G[0,\sigma]$ del jugador I cuando usa las estrategias s_1 y s_2, respectivamente, como

$$\begin{aligned} E_G[1,\sigma] &= p\,[a_{11}\sigma + a_{12}(1-\sigma)] \\ &\quad +(1-p)\left[a_{122}(1-\sigma)^2 + (a_{121}+a_{112})\sigma(1-\sigma) + a_{111}\sigma^2\right], \\ E_G[0,\sigma] &= p\,[a_{21}\sigma + a_{22}(1-\sigma)] \\ &\quad +(1-p)\left[a_{222}(1-\sigma)^2 + (a_{221}+a_{212})\sigma(1-\sigma) + a_{211}\sigma^2\right], \end{aligned}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} E_G[1,\sigma] &= p\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sigma\right) \\ &\quad +(1-p)\left[\frac{7}{24}(1-\sigma)^2 + \frac{1}{2}\sigma(1-\sigma) + \frac{1}{3}\sigma^2\right], \\ E_G[0,\sigma] &= p\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sigma\right) \\ &\quad +(1-p)\left[\frac{1}{3}(1-\sigma)^2 + \frac{17}{24}\sigma(1-\sigma) + \frac{1}{2}\sigma^2\right], \end{aligned}$$

luego de reemplazar los coeficientes a_{ij} y a_{ijk} $(i,j,k = 1,2)$.

La ecuación del replicador es entonces

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sigma(1-\sigma)\left[\frac{p}{4} - (1-p)\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8}\sigma\right)\right]. \tag{4.3.1}$$

Esta ecuación tiene tres puntos fijos: $\sigma = 0$, $\sigma = 1$ y

$$\sigma^* = \frac{7p-1}{3(1-p)}. \tag{4.3.2}$$

Como σ^* es la proporción de la población jugando la estrategia s_1, necesitamos que $0 < \sigma^* < 1$, lo cual se cumple si $\frac{1}{7} < p < \frac{2}{5}$. Del Folk Theorem 2.2.1 [32], se deduce que el punto de equilibrio interno es un equilibrio de Nash, sin embargo los puntos de los extremos pueden ser equilibrios de Nash o no.

Al usar las condiciones (4.2.3) y (4.2.4), obtenemos que el equilibrio de Nash del juego depende del valor de p que estemos usando,

$$\sigma_{NE} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad p \leq \frac{1}{7}, \\ \sigma^* & \text{if} \quad \frac{1}{7} < p < \frac{2}{5}, \\ 1 & \text{if} \quad \frac{2}{5} \leq p. \end{cases}$$

Los equilibrios de Nash puros son ESS. Para analizar el equilibrio mixto, necesitamos considerar la inecuación (4.1.4), y esto demuestra que el equilibrio mixto es ESS para $\frac{1}{7} < p < \frac{2}{5}$.

Observemos que las probabilidades de matar $1/2$ y 1 para las estrategias *mediocre* y *perfecta* respectivamente, no son críticas para los resultados que obtuvimos. Un análisis de sensibilidad muestra que podemos variar ambas probabilidades en cierto rango y los resultados aún se mantienen, cambiando solo los intervalos para p.

4.4. Conclusiones

En este capítulo, hemos extendido la definición de estrategia evolutivamente estable (ESS) a juegos simétricos con un número aleatorio de jugadores. Derivamos las condiciones bajo las cuales una estrategia dada es una ESS y aplicamos este concepto al estudio de una población de jugadores que pueden usar una de dos estrategias posibles, perfecta y mediocre, y jugar un duelo con probabilidad p o un truelo con probabilidad $1 - p$. Demostramos que el juego de duelo-truelo tiene un equilibrio mixto que es una ESS para valores de p en un intervalo en el cual los jugadores perfectos y mediocres coexisten.

Finalmente, como trabajo futuro, podríamos aplicar las condiciones obtenidas para ESS a juegos con interacciones de más de tres jugadores y diferentes estrategias, y también explorar la estabilidad de la fase de coexistencia para diferentes valores de las probabilidades de eliminación de jugadores perfectos y mediocres.

5

Dinámica basada en agentes sobre redes complejas

Una forma que nos resultó más realista para estudiar la dinámica del duelo-truelo, que involucra interacciones de orden superior, fue analizar su evolución en redes complejas. En este capítulo introducimos y estudiamos un modelo basado en agentes en una red con un número fijo de nodos, con una dinámica microscópica que conduce a una evolución que se describe, en campo medio (interacción de todos contra todos o grafo completo), por la ecuación del replicador del juego duelo-truelo. Este enfoque nos permitirá indagar si las transiciones entre ESS en estrategias puras y mixtas encontradas utilizando la teoría de equilibrio de Nash desarrollada en el capítulo anterior también se observan en redes complejas, así como identificar el impacto de la topología de las redes en la existencia de equilibrios mixtos. Notemos que, típicamente, la dinámica del replicador se define en función de nuevos individuos que ingresan a la población, seleccionando una estrategia pura con una probabilidad proporcional al beneficio dado por la configuración actual de agentes. Nuestro enfoque tiene un interés independiente y ofrece la ventaja de poder ser utilizado en redes con un número fijo de nodos o agentes, eludiendo el problema de cómo agregar nuevos nodos a medida que los agentes se replican.

5.1. La dinámica

El sistema consta de una población de N agentes que juegan los juegos del duelo y truelo, y se les permite actualizar sus estrategias (perfectos versus mediocres) a medida que interactúan con otros agentes. Cada agente está ubicado en un nodo de una red compleja de N nodos y distribución de grados $\mathcal{P}_k$ (fracción de nodos con k enlaces), y tiene permitido interactuar con sus vecinos en la red. Un agente dado i ($i = 1, .., N$) puede estar en uno de dos estados posibles, $\theta_i = 1$ (jugando la estrategia s_1) o $\theta_i = 2$ (jugando la estrategia s_2), correspondiente a las estrategias de los jugadores perfectos y mediocres, respectivamente. En la configuración inicial cada agente toma el estado 1 o 2 con igual probabilidad $1/2$. Llamamos σ_i a la fracción de vecinos perfectos del agente i, es decir, los vecinos del agente i en el estado $\theta = 1$. Los pagos esperados del agente i dependen de

σ_i, su estado θ_i, y el juego (duelo o truelo) en el que participa, y se expresan como sigue:

$$P_1^i = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sigma_i \quad \text{si } \theta_i = 1, \tag{5.1.1a}$$

$$P_2^i = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sigma_i \quad \text{si } \theta_i = 2, \tag{5.1.1b}$$

cuando i juega el duelo, y por

$$\tilde{P}_1^i = \frac{1}{3}\sigma_i^2 + \frac{1}{2}\sigma_i(1-\sigma_i) + \frac{7}{24}(1-\sigma_i)^2 \quad \text{si } \theta_i = 1, \tag{5.1.2a}$$

$$\tilde{P}_2^i = \frac{1}{2}\sigma_i^2 + \frac{17}{24}\sigma_i(1-\sigma_i) + \frac{1}{3}(1-\sigma_i)^2 \quad \text{si } \theta_i = 2, \tag{5.1.2b}$$

cuando i juega el truelo.

Este sistema de agentes evoluciona de acuerdo a la siguiente dinámica. En un paso temporal $\Delta t = 1/N$, un agente i con estado θ_i es elegido al azar. Luego, con probabilidad p el agente i juega el duelo: se elige aleatoriamente un agente vecino j de i, e i adopta el estado θ_j de j ($\theta_i \to \theta_i = \theta_j$) con una probabilidad igual al pago esperado P_{θ_j} de j. Con la probabilidad complementaria $1-p$, el agente i juega el juego del truelo: se eligen al azar dos vecinos j y h de i, e i intenta adoptar ya sea el estado θ_j de j ($\theta_i \to \theta_i = \theta_j$) con probabilidad $\frac{1}{2}\tilde{P}_{\theta_j}$ o el estado θ_h de h ($\theta_i \to \theta_i = \theta_h$) con probabilidad $\frac{1}{2}\tilde{P}_{\theta_h}$. En caso de que se elija un nodo con solo un vecino (grado $k = 1$) para participar en un truelo, no ocurre nada.

El sistema evoluciona siguiendo esta dinámica hasta que alcanza un estado estacionario, donde la fracción de agentes perfectos permanece en un valor estacionario σ^{stat}. Notemos de las ecuaciones (5.1.1) y (5.1.2) que $P_1^i > P_2^i$ y $\tilde{P}_2^i > \tilde{P}_1^i$ para todo $0 \le \sigma_i \le 1$. Por lo tanto, a largo plazo, esperamos un consenso de agentes en el estado 1 (todos los agentes en el estado $\theta = 1$, $\sigma^{\text{stat}} = 1$) cuando todos los agentes juegan el duelo, y un consenso de agentes en el estado 2 cuando todos los agentes juegan el truelo ($\sigma^{\text{stat}} = 0$). Sin embargo, una coexistencia estacionaria de ambos tipos de agentes podría ser posible cuando se permite a los agentes jugar al duelo o al truelo con probabilidad p y $1-p$, respectivamente. Nos interesa explorar el comportamiento de σ^{stat} con respecto a p para redes con distintas distribuciones de grados, y cómo σ^{stat} se compara con el valor de σ^* (4.3.2) obtenido en el equilibrio mixto predicho en la sección 4,3. En las siguientes dos secciones estudiamos el sistema en un grafo completo (interacciones de todos contra todos) y sobre redes aleatorias con distintas distribuciones de grados, respectivamente.

5.1.1. Grafo completo

Para obtener un conocimiento más profundo de la evolución del sistema, investigamos en esta sección el caso en el que cada agente puede interactuar con cualquier otro, lo cual corresponde al modelo en un grafo completo (CG, del inglés *Complete Graph*) o de campo medio (MF, del inglés *Mean Field*) en el que cada nodo está conectado con todos los $N-1$ restantes en la red

($\mathcal{P}_k = \delta_{k,N-1}$). Definimos por σ a la fracción de agentes con estado 1 (jugadores perfectos), por lo tanto, la fracción de agentes con estado 2 (jugadores mediocres) es $1-\sigma$. En el límite de $N \to \infty$, la evolución de σ en el tiempo está dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \Big[p(P_1 - P_2) + (1-p)(\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2)\Big]\sigma(1-\sigma), \tag{5.1.3}$$

que se transforma en

$$\frac{d\sigma}{dt} = \left[\frac{1}{4}p - \left(\frac{1}{24} + \frac{\sigma}{8}\right)(1-p)\right]\sigma(1-\sigma) \tag{5.1.4}$$

después de sustituir las expresiones por los pagos esperados de la ecuación (5.1.1) y (5.1.2), y tomando $\sigma_i = \sigma$, dado que en un CG la fracción de vecinos con estado 1 de un agente dado coincide con la fracción de agentes con estado 1 en la población completa cuando $N \gg 1$.

El primer término en la ecuación (5.1.3) corresponde a un evento de duelo, que ocurre con probabilidad p. El término de ganancia $P_1\,\sigma(1-\sigma)$ representa la transición $21 \to 11$, donde dos agentes aleatorios i y j con estados $\theta_i = 2$ y $\theta_j = 1$, respectivamente, son elegidos con probabilidad $(1-\sigma)\sigma$, y luego i copia el estado de j con probabilidad P_1, provocando un incremento de $1/N$ en σ. El término de pérdida $P_2\,\sigma(1-\sigma)$ corresponde a la transición $12 \to 22$, donde un agente i con estado $\theta_i = 1$ copia el estado de otro agente j con estado $\theta_j = 2$, provocando una reducción de $1/N$ en σ. Análogamente, el segundo término de la ecuación (5.1.3) corresponde a un evento de truelo (probabilidad $1-p$), donde las tres transiciones posibles que componen el término de ganancia $\tilde{P}_1\,\sigma(1-\sigma)$ son

$$211 \to 111 \quad \text{con prob. } (1-\sigma)\sigma^2\,\tilde{P}_1, \tag{5.1.5a}$$
$$221 \to 121 \quad \text{con prob. } (1-\sigma)^2\sigma\,\tfrac{1}{2}\tilde{P}_1, \tag{5.1.5b}$$
$$212 \to 112 \quad \text{con prob. } (1-\sigma)^2\sigma\,\tfrac{1}{2}\tilde{P}_1, \tag{5.1.5c}$$

mientras que las transiciones que constituyen el término de pérdida $\tilde{P}_2\,\sigma(1-\sigma)$ son

$$122 \to 222 \quad \text{con prob. } \sigma(1-\sigma)^2\,\tilde{P}_2, \tag{5.1.6a}$$
$$112 \to 212 \quad \text{con prob. } \sigma^2(1-\sigma)\,\tfrac{1}{2}\tilde{P}_2, \tag{5.1.6b}$$
$$121 \to 221 \quad \text{con prob. } \sigma^2(1-\sigma)\,\tfrac{1}{2}\tilde{P}_2. \tag{5.1.6c}$$

Notamos que la ecuación (5.1.4) coincide con la ecuación del replicador (4.3.1) derivada en la sección 4.3, la cual tiene tres puntos fijos. Los puntos fijos $\sigma = 0$ y $\sigma = 1$ corresponden al consenso de jugadores mediocres y perfectos, respectivamente, mientras el tercer punto fijo $\sigma^* = (7p-1)/[3(1-p)]$ corresponde a un estado mixto donde los agentes con estado 1 y los agentes con estado 2 coexisten con fracciones σ^* y $1-\sigma^*$, respectivamente. Una expansión de la ecuación (5.1.4) alrededor de $\sigma = 0$ a primer orden en $\epsilon = \sigma \ll 1$ resulta en $\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{(7p-1)}{24}\epsilon$ y, por lo tanto, $\sigma = 0$ es estable para $p < 1/7$. Un análisis de estabilidad similar se realiza alrededor del valor $\sigma = 1$ que resulta en $\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{(2-5p)}{12}\epsilon$, donde $\epsilon = 1-\sigma \ll 1$, y por lo tanto $\sigma = 1$ es estable para

$p > 2/5$. Luego, los puntos fijos estables en un CG están dados por

$$\sigma_{\text{CG}} = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad p \leq \frac{1}{7}, \\ \frac{7p-1}{3(1-p)} & \text{para} \quad \frac{1}{7} < p < \frac{2}{5}, \\ 1 & \text{para} \quad p \geq \frac{2}{5}. \end{cases} \tag{5.1.7}$$

En la figura 5.1 representamos con una línea discontinua los puntos fijos estables σ_{CG} de la ecuación (5.1.4) como función de p, lo cual corresponde a la dinámica en un grafo completo.

Este comportamiento es similar al obtenido a partir de la teoría de equilibrio de Nash analizada en la sección 4.3. Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que el equilibrio de Nash corresponde a los estados estables del modelo basado en agentes en un escenario de grafo completo o campo medio.

Estos resultados muestran que se obtiene una coexistencia estable de jugadores perfectos y mediocres para valores de p en el intervalo $p_0 < p < p_1$, con $p_0 = 1/7$ y $p_1 = 2/5$, mientras que para $p < p_0$ dominan los jugadores mediocres y para $p > p_1$ dominan los jugadores perfectos. Para explorar cómo la fase de coexistencia se ve afectada por la topología de las interacciones entre agentes, estudiamos en la siguiente sección la dinámica de duelos y truelos en redes complejas.

5.1.2. Redes complejas

En esta sección, derivamos y analizamos ecuaciones que describen la evolución temporal del sistema en redes complejas con una distribución general de grados $\mathcal{P}_k$, es decir, la fracción de nodos con k aristas, que cumple la normalización $\sum_{k=1}^{N-1} \mathcal{P}_k = 1$. Para esto, empleamos el método conocido como *aproximación de a pares* (PA, del inglés *Pair Approximation*) desarrollado en [18, 19, 20, 21]. Este método es un enfoque de campo medio que considera las correlaciones de estados entre vecinos de primer orden en la red y descarta las correlaciones con vecinos de segundo orden y de orden superior. Esta aproximación debería funcionar bien en redes no correlacionadas o aleatorias, como grafos aleatorios de grado regular (DRRG, del inglés *Degree Regular Random Graph*) o redes de Erdös-Renyi (ER), donde los vecinos de cada nodo son elegidos al azar y, por lo tanto, las correlaciones de grado son despreciables. En el apéndice B derivamos una ecuación para la evolución de la fracción de agentes perfectos σ que depende de σ y de la fracción de *aristas activas* ρ, es decir, aristas que conectan agentes mediocres con perfectos (aristas 2–1 o 1–2) y, por lo tanto, son susceptibles a cambios. La densidad ρ permite capturar correlaciones entre los estados de nodos vecinos en la red, y junto con σ forman el siguiente sistema de dos ecuaciones que describe la dinámica del modelo en una red compleja (ver apéndice B):

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\rho}{2}\Big[p(P_{1|2} - P_{2|1}) + (1-p)(\tilde{P}_{1|2} - \tilde{P}_{2|1})(1 - \mathcal{P}_1)\Big], \tag{5.1.8}$$

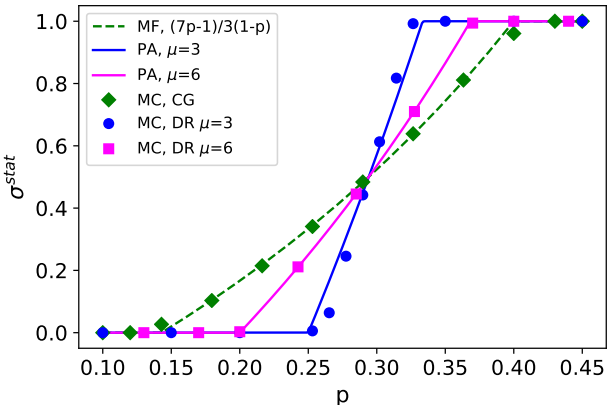

Figura 5.1: Fracción estacionaria de agentes perfectos σ^{stat} versus la probabilidad de duelo p, para los valores de grado medio μ indicados en la leyenda. La línea punteada corresponde a la solución estable σ_{CG} en un CG (5.1.7), mientras las líneas continuas representan la soluciones de las ecuaciones de PA (5.1.8), (5.1.9), (5.1.10) y (5.1.11). Los símbolos corresponden al valor promedio de σ en el estado estacionario obtenido de las simulaciones de MC en un grafo completo de tamaño $N = 10^3$ (diamantes), y un DRRGs de tamaño $N = 10^4$ y grados $\mu = 6$ (cuadrados) y $\mu = 3$ (círculos). Los promedios fueron hechos sobre diferentes realizaciones independientes de la dinámica, 100 para el CG y 10 para los DRRGs.

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} =& \frac{\rho}{\mu}\Bigg\{\Big[pP_{2|1} + (1-p)\tilde{P}_{2|1}\Big]\Big[(\mu-1)\Big(1-\frac{\rho}{\sigma}\Big)-1\Big] \\ &+ \Big[pP_{1|2} + (1-p)\tilde{P}_{1|2}\Big]\Big[(\mu-1)\Big(1-\frac{\rho}{1-\sigma}\Big)-1\Big] \\ &+ (1-p)\Big(\tilde{P}_{2|1} + \tilde{P}_{1|2}\Big)\mathcal{P}_1\Bigg\},\end{aligned} \tag{5.1.9}$$

donde $\mu \equiv \langle k\rangle = \sum_{k=1}^{N-1} k\mathcal{P}_k$ es el grado medio de la red. Los términos que involucran a $\mathcal{P}_1$ corresponden al caso en el que un agente de grado $k = 1$ no logra participar en un juego de truelo. Notamos por $P_{2|1}$ y $\tilde{P}_{2|1}$ el pago esperado de un agente con estado 2 que tiene al menos un vecino con estado 1, cuando juega un duelo o un truelo, respectivamente, y análogamente para $P_{1|2}$ y $\tilde{P}_{1|2}$. Los pagos esperados están dados por las ecuaciones (5.1.1) y (5.1.2):

$$P_{2|1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sigma_{2|1}, \tag{5.1.10a}$$

$$P_{1|2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sigma_{1|2}, \tag{5.1.10b}$$

$$\tilde{P}_{2|1} = \frac{1}{2}\sigma_{2|1}^2 + \frac{17}{24}\sigma_{2|1}(1-\sigma_{2|1}) + \frac{1}{3}(1-\sigma_{2|1})^2, \tag{5.1.10c}$$

$$\tilde{P}_{1|2} = \frac{1}{3}\sigma_{1|2}^2 + \frac{1}{2}\sigma_{1|2}(1-\sigma_{1|2}) + \frac{7}{24}(1-\sigma_{1|2})^2, \tag{5.1.10d}$$

donde $\sigma_{2|1}$ ($\sigma_{1|2}$) es la fracción de vecinos perfectos de un nodo con estado 2 (estado 1) que tiene al menos un vecino en el estado opuesto 1 (2), y puede estimarse como (ver Apéndice B.1)

$$\sigma_{2|1} \simeq \frac{1}{\mu}\left[1 + \frac{(\mu-1)\rho}{2(1-\sigma)}\right] \quad \text{y} \tag{5.1.11a}$$

$$\sigma_{1|2} \simeq \frac{(\mu-1)}{\mu}\left(1 - \frac{\rho}{2\sigma}\right). \tag{5.1.11b}$$

Ahora podemos utilizar estas ecuaciones para estudiar cómo el grado medio μ de la red y $\mathcal{P}_1$ afectan el comportamiento de σ con respecto a p en el estado estacionario. Para ello, integramos numéricamente el conjunto de ecuaciones (5.1.8) y (5.1.9) junto con las ecuaciones (5.1.10) y (5.1.11), y graficamos el valor estacionario σ^{stat} vs p para diferentes valores de μ y $\mathcal{P}_1$, como se muestra mediante líneas continuas en la Figura 5.1. En esta figura, observamos los resultados para una distribución de grados $\mathcal{P}_k = \delta_{k,\mu}$, con $\mathcal{P}_1 = 0$ y $\mu = 6$ y 3 (líneas continuas), que corresponden a DRRGs donde cada nodo está conectado con otros μ nodos aleatorios. También verificamos que la solución para el caso $\mathcal{P}_k = \delta_{k,N-1}$ concuerda con la solución en el caso de CG obtenida a partir de la ecuación (5.1.4), y representada por una línea discontinua. Observamos que, a medida que μ disminuye, los valores de transición p_0 y p_1 que definen la fase de coexistencia se acercan y, por lo tanto, el intervalo de p para el cual hay una coexistencia de jugadores perfectos y mediocres se reduce. Esto sugiere que la fase de coexistencia tiende a contraerse y podría eventualmente desaparecer a medida que la red se vuelve más dispersa al reducir μ.

Aunque estos resultados se obtuvieron a partir de las ecuaciones de PA y para DRRGs, veremos en la próxima sección que se observa un comportamiento similar para redes con una distribución de grados más amplia.

5.1.3. Simulaciones de Monte Carlo

Hemos realizado simulaciones numéricas extensas en diversas redes que verifican los resultados analíticos obtenidos en las secciones 5.1.1 y 5.1.2. Comenzamos ejecutando la dinámica de Monte Carlo (MC) descripta en la sección 5.1 en un CG de $N = 10^3$ nodos, y en DRRGs de $N = 10^4$ nodos cada uno, con grados medios $\mu = 3$ y $\mu = 6$. Ejecutamos la dinámica hasta que la fracción de agentes perfectos σ alcanzó un valor estacionario y calculamos el valor promedio de σ en el estado estacionario sobre 100 realizaciones independientes para el CG y sobre 10 realizaciones independientes para el DRRGs. Los resultados se muestran mediante símbolos en la figura 5.1.

Observamos una buena concordancia con los resultados analíticos proporcionados por la aproximación de campo medio σ_{CG} en un CG de la ecuación (5.1.7) (línea discontinua), y por la PA en la ecuación (5.1.8) y (5.1.9) (línea continua). Sin embargo, observamos que cerca de los puntos de transición p_0 y p_1, los puntos de la simulación se desvían ligeramente de la predicción analítica. Para verificar si esto se debe a efectos de tamaño finito, hemos realizado experimentos de propagación que permitieron calcular los puntos de transición con alta precisión. Estos experimentos consistieron en realizar una pequeña perturbación de los dos estados absorbentes correspondientes

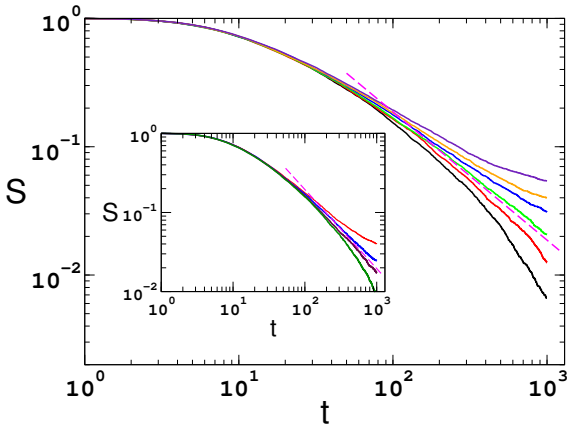

Figura 5.2: Probabilidad de supervivencia S vs t en experimentos de dispersión, en un DRRG de $N = 10^4$ nodos, grado medio $\mu = 3$ y varios valores de p. Panel principal: evolución de S luego de una pequeña perturbación del estado absorbente de consenso 2. Las curvas corresponden a $p = 0{,}265, 0{,}260, 0{,}255, 0{,}250, 0{,}245$ y $0{,}240$ (de arriba hacia abajo). Inset: evolución de S luego de una pequeña perturbación del estado absorbente de concenso 1. Las curvas corresponden a $p = 0{,}325, 0{,}330, 0{,}335$ y $0{,}340$ (de arriba hacia abajo). En los puntos de transición $p_0 \simeq 0{,}250$ y $p_1 \simeq 0{,}335$, S decae como $S \sim t^{-1}$ (líneas discontinuas).

al consenso en el estado 2 y al consenso en el estado 1, y observar cómo evoluciona esta perturbación. Por ejemplo, para el estado absorbente $\sigma = 0$ asignamos inicialmente el estado $\sigma = 0$ a todos los agentes, excepto a una pequeña semilla de cuatro agentes vecinos aleatorios en la red a los que se les asignó el estado $\sigma = 1$, y luego dejamos evolucionar el sistema. Se observa que para valores de p por debajo del punto de transición p_0, la semilla desaparece rápidamente y, por lo tanto, todas las realizaciones alcanzan rápidamente el estado absorbente. En cambio, para $p > p_0$, hay algunas realizaciones que sobreviven, donde la semilla se propaga sobre una fracción de la población. Un comportamiento análogo se obtiene alrededor de p_1 perturbando el estado absorbente $\sigma = 1$. Para cuantificar esto, ejecutamos la dinámica con estas condiciones iniciales y medimos la probabilidad de supervivencia $S(t)$ de una sola ejecución, calculada como la fracción de realizaciones que no alcanzaron el estado absorbente hasta el tiempo t. Luego, el punto de transición se estima como el valor de p para el cual $S(t)$ decae como una ley de potencia en el tiempo. En la figura 5.2 graficamos el tiempo de evolución $S(t)$ para un DRRG de tamaño $N = 10^4$ y $\mu = 3$. Vemos que $S(t)$ decae como una ley de potencia con exponente -1 en los puntos de transición $p_0 \simeq 0{,}250$ (panel principal y $p_1 \simeq 0{,}335$ (inset). Estos valores son muy similares a los obtenidos a partir de la PA, $p_0 \simeq 0{,}248$ y $p_1 \simeq 0{,}338$, lo que confirma que las discrepancias con las simulaciones numéricas en la Figura 5.1 se deben a efectos de tamaño finito.

Luego realizamos simulaciones en redes Erdös-Renyi (ER) para explorar el impacto de la am-

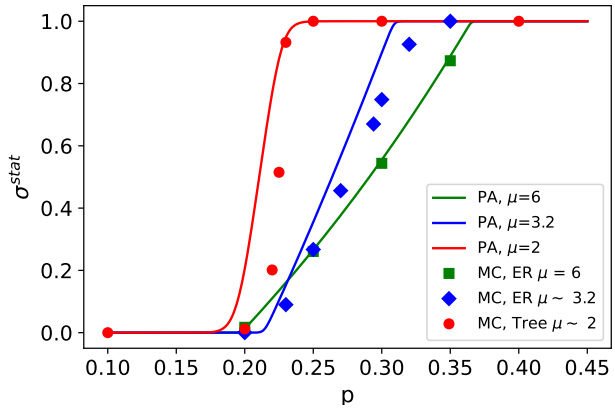

Figura 5.3: σ^{stat} vs probabilidad de duelo p para los valores de μ indicados en la leyenda. Las líneas continuas son las soluciones de la PA, mientras que los símbolos corresponden al valor promedio de σ sobre 10 realizaciones independientes en el estado estacionario obtenidas de las simulaciones de MC en una red ER con $N = 10^4$ nodos y grado medio $\mu = 6$ (cuadrados) y $\mu \simeq 3{,}2$ (diamantes), y en una red tipo árbol (tree network) con $N = 10^4$ nodos y $\mu \simeq 2$ (círculos).

plitud de la distribución de grado en los resultados mostrados anteriormente. Nos enfocamos particularmente en los casos de grados medios bajos, donde el comportamiento tiende a ser bastante diferente al de la aproximación de campo medio (MF), y donde las aproximaciones analíticas suelen fallar. Como las redes ER con grado medio bajo pueden desconectarse, consideramos la mayor componente conexa de la red como el nuevo sistema, y utilizamos los valores del grado medio resultante μ y $\mathcal{P}_1$ en las ecuaciones de la PA. También realizamos simulaciones en redes con una estructura similar a un árbol, que tienen un grado medio cercano a 2.

En la figura 5.3 mostramos con símbolos los resultados de las simulaciones de MC para redes ER de $N = 10^4$ nodos cada una y grados medios $\mu = 6$ y $\mu = 3{,}2$, y para una red con estructura de árbol de $N = 10^4$ nodos y $\mu \simeq 2$. También mostramos con líneas continuas las soluciones de las ecuaciones de la PA (5.1.8) y (5.1.9), con los valores de μ y $\mathcal{P}_1$ que corresponden a cada red, como se muestra en la leyenda. Para la red ER con $\mu = 6$, observamos una buena concordancia entre las simulaciones y las predicciones de la aproximación de a pares homogéneos, pero surgen discrepancias para la red ER con $\mu = 3{,}2$ y la red tipo árbol, lo que confirma que la PA comienza a fallar para valores muy bajos de μ.

También podemos observar en la figura 5.3 que la fase de coexistencia se achica cuando μ decrece, como ya hemos visto para DRRGs (figura 5.1), pero no parece desaparecer por completo. Por ejemplo, la fase de coexistencia para la red tipo árbol ($\mu \simeq 2$) queda reducida al intervalo $0{,}20 \lesssim p \lesssim 0{,}25$. Para explorar esto en más detalle, integramos las ecuaciones (5.1.8) y (5.1.9) para varios valores de $\mu \geq 2$ y $\mathcal{P}_1$ correspondientes a una red ER, y obtuvimos las líneas de transición

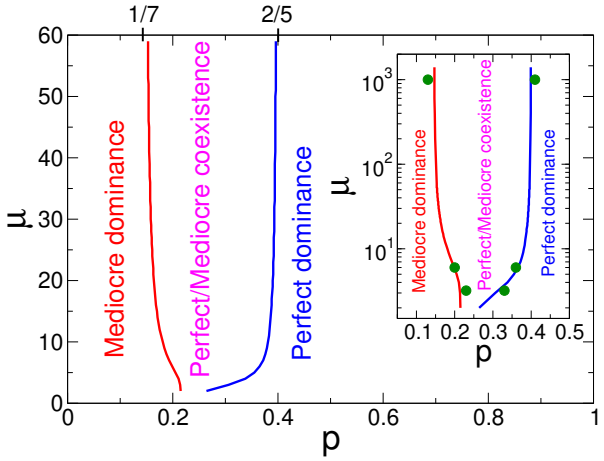

Figura 5.4: Diagrama de fase en el espacio p–μ mostrando las líneas de transición entre las fases de coexistencia y dominio del modelo en redes ER, obtenidas de las ecuaciones de la PA (5.1.8) y (5.1.9) (curvas continuas) y de las simulaciones de MC en redes ER con grados medios $\mu = 3{,}2$ y 6, y en CG con $N = 10^3$ ($\mu = 999$) (círculos sólidos en el inset). El inset muestra el gráfico en escala lineal-logarítmica para una mejor visualización de los puntos en el rango $\mu \in (2, 1000)$.

$p_0(\mu)$ y $p_1(\mu)$ que separan las fases de coexistencia y predominio. Esto se muestra en el diagrama de fases de la figura 5.4, donde observamos que la fase de coexistencia aumenta con μ y se acerca a la región definida por el intervalo $[1/7, 2/5]$ que corresponde al CG. En el inset de la figura 5.4 mostramos el mismo gráfico en una escala lineal-logarítmica para una mejor visualización, donde añadimos los puntos de transición obtenidos de las simulaciones de MC (círculos) para las redes CG y ER con $\mu = 3{,}2$ y 6 (ver figuras 5.1 y 5.3).

5.2. Conclusiones

En este capítulo introdujimos y estudiamos un modelo basado en agentes en redes complejas con una dinámica microscópica que condujo a una evolución bien descripta en promedio por la ecuación del replicador del juego de duelo-truelo. Mostramos que las soluciones estables de esta ecuación corresponden a las ESS. Además, desarrollamos un enfoque de aproximación de a pares para estudiar la dinámica del modelo en redes complejas con una distribución de grado general, lo que mostró que la fase de coexistencia predicha por la teoría en el capítulo anterior también está presente cuando los agentes interactúan en topologías complejas.

Aplicamos este enfoque a redes aleatorias y encontramos que el intervalo de p para el cual se observa la coexistencia estable de jugadores perfectos y mediocres depende del grado medio

de la red μ. Descubrimos que la fase de coexistencia se reduce a medida que μ disminuye, pero no parece desaparecer completamente incluso para valores pequeños de μ. Como consecuencia, una mezcla inestable dada de los dos tipos de jugadores para algún valor de p puede volverse estable cuando el número medio de vecinos de un jugador se incrementa más allá de un umbral. Este resultado implica que la red de interacciones afecta la estabilidad del sistema al inducir una coexistencia estable cuando su conectividad aumenta.

Para verificar estos hallazgos, realizamos simulaciones de Monte Carlo del modelo en grafos aleatorios de grado regular con grados medios bajos, y pudimos verificar que los resultados analíticos coincidían de manera consistente con las simulaciones en estas redes. La precisión de los puntos de transición entre las fases de coexistencia y dominancia predichas por la aproximación de a pares también se probó mediante experimentos de propagación. También llevamos a cabo simulaciones en redes de Erdös-Rényi y redes tipo árbol para investigar el comportamiento del modelo para distribuciones de grado amplias y μ cercano a 2. Encontramos que para grados bajos, la aproximación analítica da resultados que se desvían de las simulaciones. Sin embargo, pudimos verificar numéricamente que, aunque muy pequeña, la fase de coexistencia todavía está presente en redes dispersas.

Sería valioso realizar un estudio más profundo del juego de duelo-truelo en redes complejas con distribuciones de grado muy amplias, como las redes *scale-free*, e investigar si la fenomenología observada se ve afectada por la amplitud de la distribución. También podría ser interesante extender las aproximaciones teóricas para redes que tienen correlaciones de grado.

6

Estrategias evolutivamente estables en juegos con participación aleatoria

En el capítulo 4 extendimos la definición de ESS a juegos simétricos con una cantidad aleatoria de jugadores. Consideramos una población de N agentes que juegan un juego dado G. Con cierta probabilidad p dos jugadores se elegían al azar y jugaban entre ellos, y con la probabilidad complementaria $1 - p$ tres jugadores eran elegidos al azar y jugaban entre ellos (llamamos a esta dinámica el "juego aleatorio 2-3"). Este fue el primer paso hacia nuestra caracterización de ESS en juegos con una cantidad de jugadores aleatoria.

En este capítulo, también consideramos una población de N agentes, pero proponemos que la cantidad de jugadores sea aleatoria en un sentido más amplio. En este nuevo enfoque, con una cierta probabilidad P_k, cualquier cantidad de jugadores $1 < k \leq N$ pueden ser elegidos al azar para jugar entre sí en cada ronda.

Siguiendo los resultados del trabajo [31] donde se proporciona una caracterización detallada de las estrategias evolutivamente estables en juegos donde juegan k jugadores en todas las rondas, avanzamos en la caracterización de ESS para nuestro caso aleatorio definiendo ESS en este escenario. Investigamos el caso donde solo hay dos estrategias puras y caracterizamos las condiciones del juego para las cuales los equilibrios puros son evolutivamente estables y para las cuales el equilibrio mixto es ESS de nivel 1.

Recordando la definición de ESS, para ver si una estrategia en particular x es evolutivamente estable, se considera una población en la cual todos juegan esta estrategia excepto una proporción pequeña ε llamados mutantes o invasores que juegan una estrategia diferente $y \neq x$. La estrategia en cuestión será evolutivamente estable si su pago esperado jugando contra toda la población es mejor que el pago esperado de la estrategia y jugando contra toda la población. Como comentamos al pie de la definición 4.1.2 en el caso del juego aleatorio 2-3, tenemos 3 niveles de ESS. Estos niveles surgen porque jugar contra una mayoría de incumbentes tiene una probabilidad mayor. En ese caso, solo hay tres niveles, ya que en el juego aleatorio 2-3 un jugador puede enfrentarse como máximo a otros 2 rivales. Esto nos lleva a concluir que, en un escenario generalizado donde se

puede jugar contra un máximo de $k_{max} - 1$ contrincantes (siendo k_{max} el mayor valor de k para el cual la distribución de probabilidad P_k es positiva, es decir, el máximo del soporte de P_k), habrá k_{max} niveles de ESS.

Considerando entonces un juego con una probabilidad P_k general, obtuvimos el teorema que dice que dada una estrategia $x = (x_1, 1 - x_1)$, si θ es impar, va a existir una expresión que depende solamente de los parámetros del juego y x_1 que nos permitirá decidir si x es ESS de nivel θ. Por el contrario, si θ es par, luego la estrategia x no es ESS de nivel θ.

Por último aplicamos la teoría desarrollada en dos juegos conocidos: el dilema del voluntario y el juego de bienes públicos. En ambos casos es razonable y aporta más precisión al modelado de los escenarios considerar que el número de jugadores cambie aleatoriamente en cada ronda.

6.1. Notación y resultados

Generalizando la notación del capítulo 4, tenemos un juego finito $G^R = (G_1^R, G_2^R, ..., G_N^R)$, donde $G_i^R = (J_i, S, U_i)$ para $1 \leq i \leq N$. $S = s_1, ..., s_m$ es el conjunto de estrategias puras. J_i es el conjunto de jugadores de G_i^R que está compuesto por i jugadores, es decir que el juego G_i^R se juega entre i jugadores. Por último U_i será la función de pago para el juego G_i^R para $1 \leq i \leq N$.

Tendremos una población de N agentes que jugarán el juego G^R. También contaremos con una distribución de probabilidad P_k, que es la probabilidad de que el juego G^R se juegue entre k jugadores en una ronda dada, donde $\sum_{k=1}^{N} P_k = 1$. En cada ronda con probabilidad P_i, se seleccionarán al azar i jugadores para jugar el juego G_i^R entre ellos. De esta forma, en cada ronda, el juego G^R se jugará entre un número diferente de jugadores según la distribución de probabilidad P_k, que es parte de los datos del juego G^R. Notemos que el juego G^R tiene siempre un mismo conjunto de estrategias S, pero los pagos van a variar dependiendo de la cantidad de jugadores entre los que se juega, lo que hace necesaria esta notación que define los G_i^R de manera precisa. También vale la pena notar que, por ejemplo, si la probabilidad de jugar entre j jugadores es 0 ($P_j = 0$), el juego G_j^R nunca se jugará. Se asume que no más de N jugadores pueden competir en una sola ronda.

En el capítulo 4 extendimos la definición de ESS para el juego G. El objetivo ahora es pasar a definir qué condiciones se tienen que cumplir para que una estrategia sea evolutivamente estable en el juego G^R.

Mantenemos las suposiciones anteriores de que el orden de los jugadores es irrelevante por la simetría y todos los jugadores tienen acceso al mismo conjunto de estrategias. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos analizar el juego desde la perspectiva del primer jugador. Como se describe en 2, notamos $E[x; x_1, ..., x_{k-1}]$ el pago esperado de un individuo que juega la estrategia x en un juego de k jugadores, donde los oponentes juegan las estrategias $x_1, x_2, ..., x_{k-1}$. Cuando algunos jugadores emplean la misma estrategia, podemos expresar el pago esperado utilizando notación como $E[x; x^i, y^{k-i-1}]$, que es el pago esperado para un individuo que juega x en un juego que involucra un total de k jugadores, donde i de los otros jugadores están jugando x y los restantes $k - i - 1$ jugadores utilizan la estrategia y. El conjunto de oponentes será elegido al azar de la

población entera.

Dado que la función de pago esperado es lineal en cada una de sus componentes, para un determinado $\varepsilon > 0$ tenemos

$$E[x; \{(1-\varepsilon)x + \varepsilon y\}^{k-1}] = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (1-\varepsilon)^j \varepsilon^{k-1-j} E[x; x^j, y^{k-1-j}],$$

donde $E[x; \{(1-\varepsilon)x+\varepsilon y\}^{k-1}]$ es el pago esperado de un jugador usando la estrategia x contra $k-1$ jugadores usando la estrategia $(1-\varepsilon)x + \varepsilon y$.

Usando esta información, formulamos la definición de una Estrategia Evolutivamente Estable (ESS) en este contexto.

Definición 6.1.1. La estrategia x es ESS si para todo $y \neq x$, existe $\varepsilon_0 \in (0,1)$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$\sum_{k=1}^{N} P(K=k) \left(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \varepsilon^{k-i-1} (1-\varepsilon)^i \left(E[x; x^i, y^{k-i-1}] - E[y; x^i, y^{k-i-1}] \right) \right) > 0.$$

De la definición 6.1.1 dado que la expresión a la izquierda es un polinomio en ε, encontramos que tenemos diferentes niveles de ESS. Basándonos en esta noción, formulamos la siguiente definición:

Definición 6.1.2. La estrategia x es ESS de nivel θ si

$$\sum_{k=1}^{N} P(K=k) \left(\sum_{i=k-1-j}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-1)^{i-(k-1-j)} \binom{i}{i-(k-1-j)} (E[x; x^i, y^{k-i-1}] - E[y; x^i, y^{k-i-1}]) \right) = 0$$

para todo $j < \theta$, y para $j = \theta$ tenemos

$$\sum_{k=1}^{N} P(K=k) \left(\sum_{i=k-1-\theta}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-1)^{i-(k-1-\theta)} \binom{i}{i-(k-1-\theta)} (E[x; x^i, y^{k-i-1}] - E[y; x^i, y^{k-i-1}]) \right) > 0.$$

Como siempre, cuando las expresiones en niveles inferiores se anulan, no hay una determinación concluyente. En su lugar, el enfoque se desplaza hacia las expresiones de orden superior para determinar si una estrategia es una Estrategia Evolutivamente Estable (ESS) o no.

6.2. Caracterización de ESS: 2-estrategias, cantidad aleatoria de jugadores

Investigamos el escenario donde existen solo dos estrategias, pero se considera cualquier cantidad de jugadores. Esto representa un escenario fundamental no trivial, que nos permite caracterizar con precisión todas las posibles ESSs.

6.2.1. ESS puras

Para juegos de dos estrategias (s_1, s_2) las únicas estrategias capaces de satisfacer el requisito de nivel 0 son las estrategias puras. Consideremos una estrategia pura x. En concordancia con la definición 6.1.2, el criterio para que x sea un ESS de nivel 0 es:

$$\sum_{k=1}^{N} P(K=k)\left(E[x;x^{k-1}] - E[y;x^{k-1}]\right) > 0 \tag{6.2.1}$$

para todo $y \neq x$.

Siguiendo la notación definida anteriormente, supongamos que el juego G^R se juega entre $a+b+1$ jugadores, luego tenemos el juego $G^R_{a+b+1} = (J_{a+b+1}, S, U_{a+b+1})$. Llamamos $U^{(1)}_{a+b+1}(i, \underbrace{s_1,\dots s_1}_{a}, \underbrace{s_2 \dots s_2}_{b}) = \alpha_i^{a,b}$ al pago de un jugador que juega la estrategia i contra a jugadores que juegan la estrategia 1 y b jugadores que juegan la estrategia 2. Es importante señalar que estos valores son los pagos asociados con el juego. Esto implica que son datos predefinidos para un juego específico dado, lo que nos llevará a tener una forma precisa de realizar los cálculos para obtener la información que buscamos.

Primero, si $x = (1,0)$ representa la estrategia pura s_1, luego $E[x;x^{k-1}] - E[y;x^{k-1}] = \frac{1}{k} - \alpha_2^{k-1,0}$. Análogamente, si $x = (0,1)$ representa la estrategia pura s_2, luego $E[x;x^{k-1}] - E[y;x^{k-1}] = \frac{1}{k} - \alpha_1^{0,k-1}$. Reemplazando en 6.2.1, se puede calcular una fórmula explícita para cada instancia.

6.2.2. ESS mixtas

Pasamos a examinar el caso de las estrategias mixtas. Si x es una estrategia mixta, tendremos

$$\sum_{k=1}^{N} P(K=k)\left(E[x;x^{k-1}] - E[y;x^{k-1}]\right) = 0$$

para todo $y \neq x$.

Para ser ESS de nivel 1 necesitaremos que x satisfaga

$$\sum_{k=1}^{N} P(K=k)(k-1)\left(E[x;y,x^{k-2}] - E[y;y,x^{k-2}] - (E[x;x^{k-1}] - E[y;x^{k-1}])\right) > 0 \tag{6.2.2}$$

para todo $y \neq x$.

Primero calculamos el término $A_1 = \left(E[x;y,x^{k-2}] - E[y;y,x^{k-2}]\right)$:

$$\begin{aligned} A_1 &= (x_1 - y_1)\left(E[e_1;y,x^{k-2}] - E[e_2;y,x^{k-2}]\right) \\ &= (x_1 - y_1)\left(\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j} P(j \text{ juegan } s_1)\alpha_1^{j,k-1-j} - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j} P(j \text{ juegan } s_1)\alpha_2^{j,k-1-j}\right), \end{aligned}$$

donde $P(j \textit{ juega } s_1)$ denota la probabilidad de que j agentes de los $k-1$ jueguen la estrategia 1.

Notemos que en esta situación, donde necesitamos calcular $E[e_1; y, x^{k-2}]$ y $E[e_2; y, x^{k-2}]$, hay dos escenarios potenciales a considerar: o bien el jugador que juega la estrategia y es uno de los j jugadores que van a jugar la estrategia 1, o no lo es. Luego

$$\begin{aligned} P(\text{j juegan } s_1) =& P(\text{j juegan } s_1 | \text{uno de ellos juega } y) \times P(\text{uno de los } j \text{ jugadores juega } y) \\ &+ P(\text{j juegan } s_1 | \text{ninguno de los } j \text{ jugadores juega } y) \\ &\times P(\text{ninguno de los } j \text{ jugadores juega } y). \end{aligned}$$

El término $P(\text{ninguno de los } j \text{ jugadores juega } y) = \frac{\binom{k-2}{j}}{\binom{k-1}{j}} = \frac{k-1-j}{k-1}$ es la probabilidad de que aquel que juega y no esté entre los j jugadores que juegan la estrategia 1. Entonces tenemos

$$P(\text{j juegan } s_1) = (1-x_1)^{k-1-j} y_1 x_1^{j-1} \left(1 - \frac{k-1-j}{k-1}\right) + (1-y_1)(1-x_1)^{k-2-j} x_1^j \frac{k-1-j}{k-1}.$$

Reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned} &E[e_1; y, x^{k-2}] - E[e_2; y, x^{k-2}] \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left[(1-x_1)^{k-1-j} y_1 x_1^{j-1} \left(\frac{j}{k-1}\right) + (1-y_1)(1-x_1)^{k-2-j} x_1^j \frac{k-1-j}{k-1}\right] \left[\alpha_1^{j,k-1-j} - \alpha_2^{j,k-1-j}\right] \\ &= y_1 \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left[(1-x_1)^{k-1-j} x_1^{j-1} \left(\frac{j}{k-1}\right)\right] \left[\alpha_1^{j,k-1-j} - \alpha_2^{j,k-1-j}\right] \\ &\quad + (1-y_1) \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left[(1-x_1)^{k-2-j} x_1^j \frac{k-1-j}{k-1}\right] \left[\alpha_1^{j,k-1-j} - \alpha_2^{j,k-1-j}\right]. \end{aligned}$$

Ahora calculamos el término $A_2 = E[x; x^{k-1}] - E[y; x^{k-1}] = (x_1 - y_1)\left(E[e_1; x^{k-1}] - E[e_2; x^{k-1}]\right)$.

Reescribimos

$$\begin{aligned} &E[e_1; x^{k-1}] - E[e_2; x^{k-1}] \\ &= E[e_1; x, x^{k-2}] - E[e_2; x, x^{k-2}] \\ &= x_1 \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left[(1-x_1)^{k-1-j} x_1^{j-1} \left(1 - \frac{k-1-j}{k-1}\right)\right] \left[\alpha_1^{j,k-1-j} - \alpha_2^{j,k-1-j}\right] \\ &\quad + (1-x_1) \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left[(1-x_1)^{k-2-j} x_1^j \frac{k-1-j}{k-1}\right] \left[\alpha_1^{j,k-1-j} - \alpha_2^{j,k-1-j}\right]. \end{aligned}$$

Luego, tenemos

$$\begin{aligned}
&E[x; y, x^{k-2}] - E[y; y, x^{k-2}] - \Big(E[x; x^{k-1}] - E[y; x^{k-1}]\Big) \\
&= A_1 - A_2 \\
&= (x_1 - y_1)^2 \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left(\frac{k-1-j}{k-1} x_1^j (1-x_1)^{k-2-j} - \frac{j}{k-1} x_1^{j-1} (1-x_1)^{k-1-j}\right) \left[\alpha_1^{j,k-1-j} - \alpha_2^{j,k-1-j}\right].
\end{aligned}$$

Como la expresión

$$\frac{k-1-j}{k-1} x_1^j (1-x_1)^{k-2-j} - \frac{j}{k-1} x_1^{j-1} (1-x_1)^{k-1-j} \tag{6.2.3}$$

puede ser reescrita como

$$x_1^{j-1} (1-x_1)^{k-2-j} \left[x_1 - \frac{j}{k-1}\right], \tag{6.2.4}$$

esto nos lleva a la conclusión de que la condición que debe satisfacer x para ser una ESS de orden 1 en problemas con estas características es:

$$\sum_{k=1}^{N} P(K=k)(k-1) \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} x_1^{j-1} (1-x_1)^{k-2-j} \left[x_1 - \frac{j}{k-1}\right] \left[\alpha_1^{j,k-1-j} - \alpha_2^{j,k-1-j}\right] > 0.$$

La aplicabilidad de esta fórmula se hace evidente cuando buscamos calcular el valor de la ecuación (6.2.2) explícitamente para el primer orden ($\theta = 1$), ya que es independiente de la estrategia y, depende exclusivamente de los valores de x y los datos pertinentes del problema. En consecuencia, este orden ofrece información sobre si x es una ESS o no, a menos que la expresión se anule. En ese caso, se hace necesario un análisis de orden superior.

6.2.3. Condición general

Volviendo al caso general, nuestro objetivo es analizar los escenarios o situaciones en los que se cumplen las condiciones estipuladas en la definición 6.1.2 y tienen implicaciones significativas. Para ello, debemos comprender en qué niveles θ obtendremos información y la naturaleza de la información que podremos extraer.

Este tipo de resultado general fue investigado en el artículo pionero [31]. Allí estudian un escenario con un número fijo de jugadores en cada ronda y caracterizan las condiciones para ser ESS de un nivel genérico θ. Aunque no está demostrado formalmente para un θ general, de ese resultado se sigue el hecho de que, dada una estrategia x, si θ es par, no podrá ser evolutivamente estable de nivel θ, lo que nos hace pensar que es un resultado natural para un escenario más complejo como

el nuestro. En ese trabajo, la demostración para el nivel 1 se lleva a cabo utilizando un polinomio que tiene una dependencia directa en la matriz de pagos (que en nuestra instancia corresponde a los datos del juego $\alpha_i^{j,k}$). En nuestro escenario específico, nos abstenemos de formularlo explícitamente de esa manera, ya que también tendremos una dependencia en los pesos proporcionados por la probabilidad del número de agentes que participan en cada ronda. Sin embargo, como era de esperar, se logra un resultado similar, alineándose bien con nuestro caso, y ahora avanzamos para presentarlo.

Para esto, primero tenemos que demostrar el siguiente lema:

Lema 6.2.1. *Sea $x = (x_1, 1 - x_1)$ y $y = (y_1, 1 - y_1)$, luego x_1 es una raíz de multiplicidad θ del polinomio*

$$P(y_1) = \sum_{j=0}^{\theta} (-1)^{\theta-j} \binom{\theta}{j} (E[e_1; x^{k-1-j}, y^j] - E[e_2; x^{k-1-j}, y^j]).$$

Demostración. La prueba completa se presenta en el apéndice C. □

A partir de este resultado, podemos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 6.2.2. *Sea $x = (x_1, 1 - x_1)$ una estrategia. Si θ es impar, va a existir una expresión que depende solamente de los parámetros del juego y de x_1, a partir de la cual, seremos capaces de decidir si x es ESS de nivel θ o no. Cuando θ es par, la estrategia x no puede ser ESS de nivel θ.*

Demostración. Queremos analizar el signo de la expresión de la definición 6.1.2. Reescribiendo tenemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} P(K=k) \left(\sum_{i=k-1-\theta}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-1)^{i-(k-1-\theta)} \binom{i}{i-(k-1-\theta)} (E[x; x^i, y^{k-i-1}] - E[y; x^i, y^{k-i-1}]) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} P(K=k) \binom{k-1}{\theta} \left(\sum_{i=k-1-\theta}^{k-1} (-1)^{i-(k-1-\theta)} \binom{\theta}{k-1-i} (E[x; x^i, y^{k-i-1}] - E[y; x^i, y^{k-i-1}]) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} P(K=k) \binom{k-1}{\theta} \left(\sum_{j=0}^{\theta} (-1)^{\theta-j} \binom{\theta}{j} (E[x; x^{k-1-j}, y^j] - E[y; x^{k-1-j}, y^j]) \right) \\
&= (x_1 - y_1) \sum_{k=1}^{N} P(K=k) \binom{k-1}{\theta} \left(\sum_{j=0}^{\theta} (-1)^{\theta-j} \binom{\theta}{j} (E[e_1; x^{k-1-j}, y^j] - E[e_2; x^{k-1-j}, y^j]) \right).
\end{aligned}$$

Como x_1 es una raíz de multiplicidad θ del polinomio

$$P(y_1) = \sum_{j=0}^{\theta} (-1)^{\theta-j} \binom{\theta}{j} (E[e_1; x^{k-1-j}, y^j] - E[e_2; x^{k-1-j}, y^j])$$

y P es un polinomio con grado θ, podemos afirmar que

$$\sum_{j=0}^{\theta} (-1)^{\theta-j} \binom{\theta}{j} (E[e_1; x^{k-1-j}, y^j] - E[e_2; x^{k-1-j}, y^j]) = (y_1 - x_1)^{\theta} f(x_1)$$

donde f es una función que depende solamente de los parámetros del juego, pero no de y_1.

Luego,

$$(x_1 - y_1)\sum_{k=1}^{N} P(K=k)\binom{k-1}{\theta}(y_1 - x_1)^{\theta} f(x_1) = (x_1 - y_1)^{\theta+1}\sum_{k=1}^{N} P(K=k)\binom{k-1}{\theta} f(x_1).$$

Si θ es impar, como $\theta + 1$ es par, tenemos que el signo de la desigualdad estará dado por el signo del término:

$$\sum_{k=1}^{N} P(K=k)\binom{k-1}{\theta} f(x_1),$$

el cual depende solamente de los parámetros del juego y de la estrategia x. □

6.3. Aplicaciones

En esta sección, aplicamos el marco desarrollado en las secciones anteriores en dos ejemplos ya conocidos y estudiados en la teoría de juegos: el Dilema del Voluntario y el Juego de Bienes Públicos. Estos juegos van a cumplir el rol de escenarios en los que un número variable de jugadores participa en cada ronda, proporcionando información sobre lo que ocurre con la dinámica en cada caso.

6.3.1. Dilema del voluntario

El dilema del voluntario, modelado por Diekmann [33], es una situación en la que un bien colectivo o un beneficio común depende de que al menos una persona realice una acción, pero esta acción tiene un costo personal. Aunque todos los involucrados prefieren que se realice la acción para obtener el beneficio colectivo, también prefieren que lo haga otra persona para evitar el costo individual. En esta sección nos centramos en una situación social típica, relacionada con el comportamiento de ayuda de personas que presencian un accidente o crimen. La conciencia pública sobre este problema se intensificó en 1964 a raíz del famoso caso de Kitty Genovese.

Se sabe que cuantos más jugadores participen, la probabilidad de que nadie actúe aumenta. Esto ocurre porque la probabilidad de ser voluntario disminuye cuando hay más jugadores, cada uno confía más en que en que otro se ofrecerá. Aumentar el tamaño del grupo no conduce a un beneficio para el grupo.

En el planteo clásico, hay k personas sintiendo compasión por una víctima. Hay dos estrategias s_1, ser voluntario y s_2, ignorar. Estas personas reciben una ganancia V si hay al menos un voluntario ayudando a la víctima. Debido a que ayudar tiene un costo, el voluntario obtiene un pago de $V - C$. En tal situación, cada persona podría estar inclinada a desertar esperando que alguien más

ayude a la víctima. Si nadie se ofrece como voluntario, entonces todos reciben un pago L tal que $L < V - C$.

Para calcular el equilibrio de Nash simétrico, se define p como la probabilidad de que un jugador elija ser voluntario. Los pagos de las dos estrategias puras, dado que el resto juega la estrategia $x = (p, 1-p)$ son

$$E[s_1, x, ..., x] = V - C$$
$$E[s_2, x, ..., x] = V\left[1 - (1-p)^{k-1}\right] + L(1-p)^{k-1}$$

y el pago de la estrategia mixta es

$$E[x, x, ..., x] = pE[s_1, x, ..., x] + (1-p)E[s_1, x, ..., x].$$

Igualando y despejando se obtiene el equilibrio mixto

$$p_{eq} = 1 - \left(\frac{C}{V-L}\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Es intuitivo que la probabilidad de ser voluntario disminuya cuando el costo de ayudar, C, aumenta. Como mencionamos antes, en esta expresión se ve que la probabilidad de ser voluntario disminuye con k. Dado que la probabilidad de que nadie se ofrezca como voluntario es $(1-p_{eq})^k = (1-p_{eq})\frac{C}{V-L}$, vemos que, como $(1-p_{eq})$ aumenta con k, $(1-p_{eq})^k$ también. Este escenario descripto anteriormente considera un número fijo k de jugadores.

En estas circunstancias, con transeúntes caminando por la calle o pasando por un espacio público, no sabemos con certeza cuántas personas están participando en la situación, lo que introduce una variable de incertidumbre. Por eso, proponemos un nuevo enfoque en el que el número de jugadores en cada ronda es una cantidad aleatoria k. Utilizando la teoría desarrollada en la sección 6.1, P_k es la probabilidad de que el juego se juegue entre k agentes, con $\sum_{k=1}^{N} P_k = 1$, donde N es el máximo número de jugadores posible.

Tomando en cuenta este planteo, el pago del voluntario sigue siendo el mismo $(V - C)$. Ahora, el pago esperado de la estrategia de ignorar está dado por

$$\sum_{k=1}^{N} P_k \left(V\left(1 - (1-p)^{k-1}\right) + L\left((1-p)^{k-1}\right)\right). \tag{6.3.1}$$

Igualando $V - C$ y 6.3.1 se obtiene el equilibrio mixto y es el p_{eq} que satisface la siguiente ecuación

$$\frac{C}{V-L} = \sum_{k=1}^{N} P_k (1-p_{eq})^{k-1}. \tag{6.3.2}$$

Ahora, a partir de este nuevo marco, obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 6.3.1. *Sea p_{eq} el valor que satisface (6.3.2), $x = (p_{eq}, 1 - p_{eq})$. Entonces, x es una estrategia evolutivamente estable.*

Demostración. Sea $y = (q, 1 - q)$ cualquier estrategia tal que $y \neq x$.

Para ver que x es una estrategia evolutivamente estable, tenemos que mirar el signo de la siguiente expresión:

$$\sum_{k=1}^{N} P_k(k-1)\left(E[x; y, x^{k-2}] - E[y; y, x^{k-2}] - (E[x; x^{k-1}] - E[y; x^{k-1}])\right).$$

Considerando los parámetros intrínsecos del juego, obtenemos:

$$E[x; y, x^{k-2}] = p_{eq}(V - C) + (1 - p_{eq})\Big(V(1 - (1 - p_{eq})^{k-2}(1 - q)) + L(1 - p_{eq})^{k-2}(1 - q)\Big).$$

Utilizando esa expresión obtenemos

$$E[x; y, x^{k-2}] - E[y; y, x^{k-2}] = (p_{eq} - q)\Big[(-C) + V(1 - p_{eq})^{k-2}(1 - q) - L(1 - p_{eq})^{k-2}(1 - q)\Big].$$

Por otro lado,

$$E[x; x^{k-1}] - E[y; x^{k-1}] = (p_{eq} - q)\Big[(-C) + V(1 - p_{eq})^{k-1} - L(1 - p_{eq})^{k-1}\Big].$$

Luego, obtenemos que la expresión

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{N} P_k(k-1)\left(E[x; y, x^{k-2}] - E[y; y, x^{k-2}] - (E[x; x^{k-1}] - E[y; x^{k-1}])\right)\\ &= \sum_{k=1}^{N} P_k(k-1)\left((p_{eq} - q)^2(V - L)(1 - p_{eq})^{k-2}\right) > 0\end{aligned}$$

es positiva.

Podemos concluir, basándonos en la teoría desarrollada en la sección 6.1 que si $x = (p_{eq}, 1-p_{eq})$, donde p_{eq} satisface la condición de equilibrio de Nash mixto es también una estrategia evolutivamente estable (ESS de nivel 1), y concluímos la demostración. □

6.3.2. Juegos de bienes públicos

Otra aplicación interesante de la teoría podría ser considerar juegos de bienes públicos (*Public Good Games*), donde los individuos contribuyen con recursos a un fondo común, cuyos beneficios se distribuyen equitativamente entre todos los participantes. Este juego se ha utilizado ampliamente como un paradigma para explorar cómo las interacciones entre los jugadores influyen en su disposición a cooperar en tales escenarios.

La cooperación ha sido uno de los problemas más estudiados con modelos basados en agentes, desde el trabajo seminal de Robert Axelrod [34], quien estaba especialmente interesado en comprender cómo puede surgir, teniendo en cuenta que los no cooperadores o "defectores" reciben ganancias más altas que los cooperadores en el dilema del prisionero.

Van de Kargt et al. [35] estudian el juego de bienes públicos, que generaliza el dilema del prisionero a más jugadores. Aquí, los beneficios se comparten entre el grupo o la población en su conjunto, sin importar quiénes contribuyeron a formar o mantener un bien común. A pesar de esta aparente ventaja, el surgimiento de la cooperación es un fenómeno crucial que contradice las expectativas de la selección natural, donde se podría esperar que los no cooperadores dominen la población, como observó Elinor Ostrom [36].

En la literatura existen distintas versiones del juego de bienes públicos y generalizaciones. Por ejemplo, el trabajo [37] se enfoca en investigar las dinámicas evolutivas de la cooperación en dilemas sociales cuando la población puede fluctuar en tamaño e incluso extinguirse. Por otro lado en [38] estudian los efectos de la agrupación dinámica aleatoria de jugadores de diferentes tamaños sobre el nivel de cooperación en una población dentro del contexto del Juego de Bienes Públicos, bajo un mecanismo de imitación para la actualización de estrategias, lo que les permite realizar un estudio analítico.

Examinemos la definición del problema clásico. Consideremos una gran población de la cual, de vez en cuando, se selecciona aleatoriamente a N individuos para participar en un juego de bienes públicos. En el juego, cada jugador debe decidir si contribuye o no con una cantidad positiva c al fondo común. Los individuos que contribuyen son cooperadores (estrategia s_1) y aquellos que no contribuyen son defectores (estrategia s_2). La contribución total al fondo común se multiplica por un factor r; $1 < r < N$ que sirve como una medida del retorno de la inversión en el recurso compartido o puede percibirse como la tasa de reproducción del dinero. La cantidad en el fondo común se distribuye equitativamente entre todos. Asumimos $c = 1$, por simetría, los pagos de cada estrategia con N jugadores, donde n_x son cooperadores, $N - n_x$ son defectores, y $N \geq 2$, se definen por:

$$U^{(1)}(\underbrace{s_1, s_1, ..., s_1}_{n_x}, s_2, ..., s_2) = r\frac{n_x}{N} - 1$$

$$U^{(1)}(s_2, \underbrace{s_1, ..., s_1}_{n_x}, s_2, ..., s_2) = r\frac{n_x}{N}.$$

Ciertos estudios [39] consideran que los N agentes están compuestos por 3 clases N_x, N_y y N_z, donde $N = n_x + n_y + n_z$, con n_y el número de defectores, y n_z los que eligen no participar en el juego. Si consideramos que el número de agentes que participan activamente en el juego, denotado como k en cada ronda, se convierte en una variable aleatoria, definimos $k = n_x + n_y$. Aquellos que deciden jugar el juego de bienes públicos recibirán sus respectivos pagos del juego, como se definió anteriormente. Ahora, N será el número máximo posible de participantes en el juego.

Notemos que en el escenario específico donde el número de jugadores permanece fijo en N, el

factor de multiplicación r adquiere significado y relevancia cuando su valor se encuentra dentro del rango de 1 a N. Si r fuera menor que 1, todos los jugadores participantes experimentarían pérdidas financieras, mientras que si fuera mayor que N, siempre obtendrían ganancias. Por lo tanto, el intervalo de interés, que tiene implicaciones significativas para el estudio, es cuando $1 < r < N$. De acuerdo con este criterio, es necesaria una re-definición de la tasa de reproducción r. Dado $1/2 < \beta < 1$, establecemos $r = \beta k$, asegurando que el valor de r caiga en el intervalo de interés $1 < r < k$.

Juego de bienes públicos con castigo

La consideración de un sistema de castigo se vuelve particularmente valiosa en este contexto [40, 39, 41]. El castigo sirve como un medio alternativo para fomentar el comportamiento cooperativo sin incurrir en los altos costos asociados con los incentivos.

Cuando se aplica un castigo [40], consideramos que solo una fracción d, $(0 < d < 1)$, de los defectores serán castigados, modificando el pago de esta estrategia. En particular, asumimos que este conjunto de defectores seleccionados al azar tendrán su pago correspondiente reducido a 0, mientras que los demás aprovechadores obtendrán el pago normal. Por lo tanto, un defector que no sabe si será castigado o no, jugando en un grupo de k jugadores, en presencia de j cooperadores, tendrá un pago igual a

$$U_d^{(1)}(s_2, \underbrace{s_1, ..., s_1}_{j}, \underbrace{s_2, ..., s_2}_{k-j-1}) = (1-d)\beta j + d \cdot 0$$

El pago esperado de un cooperador en un grupo de k jugadores, en presencia de j cooperadores será:

$$U_d^{(1)}(s_1, \underbrace{s_1, ..., s_1}_{j}, \underbrace{s_2, ..., s_2}_{k-j-1}) = \beta(j+1) - 1.$$

Considerando el castigo y la aleatoriedad en la cantidad de jugadores en cada ronda, ahora nuestro objetivo es analizar la estabilidad de los equilibrios de Nash del juego.

Teorema 6.3.2. *El equilibrio puro donde todos los jugadores son defectores es una estrategia evolutivamente estable (ESS) de nivel* 0.

Demostración. Siguiendo la definición 6.1.2, tendremos que x es ESS de nivel $\theta = 0$ si

$$\sum_{k=1}^{N} P_k \left(E[x; x^{k-1}] - E[y; x^{k-1}] \right) > 0$$

para todo $y \neq x$.

Analicemos el término $(E[x; x^{k-1}] - E[y; x^{k-1}])$ en este ejemplo. Vamos a tener que

$$E[x; x^{k-1}] - E[y; x^{k-1}] = (x_1 - y_1)\Big(E[e_1; x^{k-1}] - E[e_2; x^{k-1}] \Big).$$

Los términos $E[e_1; x^{k-1}]$ y $E[e_2; x^{k-1}]$ en nuestro ejemplo quedan de la siguiente forma:

$$E[e_1; x^{k-1}] = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} x_1^j (1-x_1)^{k-1-j} [\beta(j+1) - 1],$$
$$E[e_2; x^{k-1}] = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} x_1^j (1-x_1)^{k-1-j} [\beta j(1-d)].$$

Como en la sección anterior, sea P_k la probabilidad de que el juego se juegue entre k agentes, con $\sum_{k=1}^{N} P_k = 1$. Luego, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{N} P_k \left(E[x; x^{k-1}] - E[y; x^{k-1}] \right) = \sum_{k=1}^{N} P_k (x_1 - y_1)(\beta + d\beta(k-1)x_1 - 1). \tag{6.3.3}$$

Para $x = (0, 1)$, el equilibrio puro donde todos los jugadores son defectores, tenemos

$$\sum_{k=1}^{N} P_k (x_1 - y_1)(\beta + d\beta(k-1)x_1 - 1) = \sum_{k=1}^{N} P_k (-y_1)(\beta - 1) > 0.$$

El teorema queda demostrado. □

El resultado de este teorema es lógico ya que, en ausencia de cualquier consideración de castigo, la estrategia de todos los jugadores defectando constituye un equilibrio de Nash.

Teorema 6.3.3. *El equilibrio puro donde todos los jugadores cooperan es una estrategia evolutivamente estable (ESS) de nivel* 0 *si el parámetro de castigo d satisface*

$$d > \frac{1-\beta}{\beta(E(P) - 1)}, \tag{6.3.4}$$

donde $E(P) = \sum_{k=1}^{N} P_k k$ *es el número esperado de la cantidad de jugadores.*

Demostración. Sea $x = (1, 0)$ el equilibrio puro donde todos los jugadores cooperan, y sea $y = (y_1, 1 - y_1) \neq x$. Usando la expresión (6.3.3), tenemos

$$\sum_{k=1}^{N} P_k (1 - y_1)(\beta + d\beta k - d\beta - 1) = (1 - y_1)(\beta + d\beta E(P) - d\beta - 1).$$

El signo de esta expresión depende del signo del término $(\beta + d\beta E(P) - d\beta - 1)$. Luego, si d satisface la condición 6.3.4, el término será positivo para toda $y_1 \neq 1$, y la condición para ESS de nivel 0 se cumple. □

Vale la pena notar que para $d = 0$, la condición no se satisfará. Esto tiene sentido porque un equilibrio puro, donde todos los jugadores son cooperadores, no es un equilibrio de Nash cuando no hay castigo.

Observemos también que la condición (6.3.4) para d depende de la tasa β, y por otro lado, depende del número esperado de jugadores $E(P)$. Cuando examinamos cómo depende de β, vemos que cuando β tiende a 1, el lado derecho de la condición (6.3.4) tiende a 0 y tendremos que, con la mínima cantidad de castigo, la estrategia de todos cooperando se convierte en un equilibrio de Nash. Por otro lado, al analizar lo que ocurre cuando β se aproxima a su valor mínimo ($1/2 < \beta$), la condición (6.3.4) se transforma en $d > \frac{1}{(E(P)-1)}$, que solo depende del número esperado de jugadores. En consecuencia, en el caso de un valor bajo de β, la condición será más exigente para valores pequeños de $E(P)$, pero se relajará para valores grandes de $E(P)$.

Ahora, si observamos la condición para ESS de nivel 1, siguiendo la definición 6.1.2, tendremos que x es ESS de nivel $\theta = 1$ si

$$\sum_{k=1}^{N} P_k(x_1 - y_1)\left(\frac{r}{k} + d\frac{r}{k}(k-1)x_1 - 1\right) = 0 \tag{6.3.5}$$

y

$$\sum_{k=1}^{N} P_k(k-1)\left(E[x; y, x^{k-2}] - E[y; y, x^{k-2}] - (E[x; x^{k-1}] - E[y; x^{k-1}])\right) > 0$$

para todo $y \neq x$.

Cuando observamos la igualdad (6.3.5), vemos que se cumple para todo $y \neq x$ si y solo si

$$x_1 = \frac{1-\beta}{d\beta(E(p)-1)}. \tag{6.3.6}$$

Esto es válido si $0 < x_1 < 1$, lo cual se cumple si d satisface la condición (6.3.4). Esto nos lleva a pensar que las condiciones solicitadas son las naturales del problema. Entonces, podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 6.3.4. *Supongamos que la condición* (6.3.4) *se satisface. Luego, el equilibrio mixto* $x = (x_1, 1 - x_1)$ *con* $x_1 = \frac{1-\beta}{d\beta(E(p)-1)}$ *no será una estrategia evolutivamente estable.*

Demostración. Supongamos que se cumple la condición (6.3.4) y calculemos la expresión

$$\sum_{k=1}^{N} P_k(k-1)\left(E[x; y, x^{k-2}] - E[y; y, x^{k-2}] - \left(E[x; x^{k-1}] - E[y; x^{k-1}]\right)\right).$$

Utilizando la teoría de la sección 6.2.3 tenemos que

$$\begin{aligned}
&E[x; y, x^{k-2}] - E[y; y, x^{k-2}] - \left(E[x; x^{k-1}] - E[y; x^{k-1}]\right) \\
&\quad = (x_1 - y_1)^2\left(E[e_1; e_2, x^{k-2}] - E[e_2; e_2, x^{k-2}] - \left(E[e_1; e_1, x^{k-2}] - E[e_2; e_1, x^{k-2}]\right)\right) \\
&\quad = (x_1 - y_1)^2 \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} x_1^{j-1}(1-x_1)^{k-2-j}\left[x_1 - \frac{j}{k-1}\right]\left[\alpha_1^{j,k-1-j} - \alpha_2^{j,k-1-j}\right].
\end{aligned}$$

Donde, para este problema en particular, $\alpha_1^{j,k-1-j} = \beta(j+1) - 1$ y $\alpha_2^{j,k-1-j} = \beta j(1-d)$.

Luego obtendremos,

$$\begin{aligned}
&E[x; y, x^{k-2}] - E[y; y, x^{k-2}] - \Big(E[x; x^{k-1}] - E[y; x^{k-1}]\Big) \\
&= (x_1 - y_1)^2 \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} x_1^{j-1} (1-x_1)^{k-2-j} \left[x_1 - \frac{j}{k-1}\right] \left[\frac{r}{k}(1+jd) - 1\right] \\
&= (x_1 - y_1)^2 \left(-d\frac{r}{k}\right).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} P_k(k-1) \Big(E[x; y, x^{k-2}] - E[y; y, x^{k-2}] - \Big(E[x; x^{k-1}] - E[y; x^{k-1}]\Big)\Big) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{N} P_k(k-1)(x_1 - y_1)^2(-d\beta) \\
&\quad = (-d\beta)(x_1 - y_1)^2 \sum_{k=1}^{N} P_k(k-1) \\
&\quad = (-d\beta)(x_1 - y_1)^2 (E(P) - 1)
\end{aligned}$$

que es negativo para todo y_1, lo que implica que x no es una estrategia evolutivamente estable. La demostración queda terminada. □

6.4. Conclusiones

En este estudio logramos generalizar y profundizar el enfoque en el cual el número de jugadores es incierto en cada ronda. Establecimos un marco detallado para analizar estrategias evolutivamente estables (ESS). Formalizamos y ampliamos el concepto de ESS, introduciendo cálculos explícitos para juegos de dos estrategias y caracterizando los diferentes niveles que surgen de esta definición. Un teorema integral guía la determinación de si una estrategia es una ESS en cualquier nivel general θ, proporcionando un enfoque sistemático para el análisis.

Aplicando el marco desarrollado a problemas clásicos de la teoría de juegos, ahondamos nuestra comprensión del dilema del voluntario, modelando escenarios con participación de jugadores aleatoria. El marco ofrece una modelización precisa, particularmente en casos donde el número de jugadores es desconocido o variable, como ejemplifica el famoso caso de Kitty Genovese. Utilizamos la teoría para la caracterización de los equilibrios, encontrando que el equilibrio mixto es también una estrategia evolutivamente estable.

En el contexto de los juegos de bienes públicos, profundizamos en el estudio de la dinámica de la cooperación y los efectos del castigo, destacando la importancia de la incertidumbre y las fluctuaciones en el número de jugadores. Encontramos que la estabilidad de los equilibrios varía

dependiendo de una condición que relaciona el parámetro de castigo d y el número esperado de jugadores en cada ronda. Observamos que, cuanto mayor sea el número esperado de jugadores, el equilibrio en el que todos los jugadores cooperan se logrará como una estrategia evolutivamente estable para valores menores de castigo.

7

La dinámica del replicador para un juego con un continuo de estrategias

En este capítulo estudiamos la ecuación del replicador considerando un continuo de estrategias. Muchos procesos biológicos, económicos o sociales se modelan de manera más adecuada utilizando un continuo de estrategias. Este enfoque es especialmente relevante en juegos de negociación, timing, duopolios y oligopolios, bienes públicos, modelado de subastas, War of Attrition entre animales, y guerra de precios entre diferentes marcas de productos, entre muchos otros. En estos casos, el conjunto de estrategias puras debe ser representado por un subconjunto continuo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, y cada punto $x \in \Omega$ se considera como una posible estrategia pura a ser empleada por un jugador.

Al trabajar con un continuo de estrategias, el enfoque del replicador consideraría una ecuación diferencial ordinaria (ODE) para cada estrategia. Esto genera problemas relacionados con la teoría de la medida, luego se define una ODE para cada boreliano sobre las estrategias. En [23, 24], asumen que los individuos juegan una estrategia de un mismo conjunto S y el estado de la población está dado por una medida de probabilidad P con respecto a un espacio de medida $(S, \mathcal{B})$, donde $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel en S. Si $B \in \mathcal{B}$, $P(B)$ es interpretada como la proporción de individuos en la población que están utilizando estrategias en B. Para un $s \in S$, se denota el pago esperado para un individuo que juega la estrategia s contra una población en el estado P como $\Pi(s, P) = \Pi(\delta_s, P)$, donde δ_s es la delta de Dirac. La función de pago $\Pi(s, P)$ va a estar dada por $\int_S f(s, y)P(dy)$ donde $f : S \times S \to \mathbb{R}$ es una función a valores reales continua. El pago promedio de un individuo aleatorio en la población con estado P es entonces $\Pi(P, P) = \int_S \Pi(\delta_s, P)P(ds)$.

Para un S general la dinámica del replicador bajo este marco teórico tiene la forma

$$\frac{dP}{dt}(B) = \int_B (\Pi(\delta_s, P) - \Pi(P, P))P(ds). \tag{7.0.1}$$

Un estado de la población P^* es un punto de equilibrio de (7.0.1) si y solo si $(\Pi(\delta_s, P^*) - \Pi(P^*, P^*)) = 0$ para todo $s \in \text{sop}(P^*)$.

El análisis de la estabilidad de los equilibrios de Nash va a depender fuertemente de la topología

utilizada. En [42, 43, 24] usan la topología débil donde $P(t)$ converge a P^* si y solo si

$$\lim_{t\to\infty} \int_S g(x)P(t)(dx) = \int_S g(x)P^*(dx)$$

para todas las funciones continuas $g : S \to \mathbb{R}$. Una de las razones por las cuales utilizan esa topología es que dos poblaciones monomórficas δ_x y δ_y están cerca entre sí, si y solo si x e y están cerca bajo la distancia euclídea, lo cual es deseable. Esto les permite obtener teoremas abstractos de existencia y analizar la convergencia en la topología débil.

Sin embargo, la ecuación integro-diferencial que obtienen solo se interpreta en sentido débil. Utilizando ideas similares a las de mecánica estadística, uno puede obtener una ecuación no local que esté definida para las funciones continuas.

Este enfoque puede verse en [25], donde pasan a una ecuación en derivadas parciales para la función de densidad que caracteriza la distribución de la población sobre el conjunto de estrategias, que solo permite interacciones entre jugadores con estrategias infinitesimalmente cercanas. Esta simplificación descarta términos críticos del modelo, y no se obtiene una buena aproximación del problema.

En este capítulo, discretizamos el conjunto de estrategias, y la dinámica discreta sobre finitas estrategias se pensará como un esquema numérico que en el límite aproximará la ecuación del replicador en el continuo obtenida en [25] sin simplificarla. La convergencia del método numérico nos dice que podemos aproximar arbitrariamente un juego con infinitas estrategias mediante juegos con un número finito de estrategias.

Probamos también la existencia y unicidad de solución para la ecuación no local, y mostramos en un ejemplo un comportamiento que no es posible con las simplificaciones de [25].

7.1. Descripción de la dinámica

Consideramos una dinámica basada en un juego y una población formada por N agentes. En cada ronda elegimos dos agentes al azar e interactúan entre ellos. Definimos $\sigma : \{1, 2, \ldots, N\} \times [0, \infty) \to \Omega$, donde $\Omega = [-L, L]$ para $L > 0$ y $\sigma(i, t)$ es la estrategia del jugador i a tiempo t. El juego tiene su función de pago $J : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ que es una función continua donde $J(x, y)$ representa el pago para el jugador 1 cuando juega la estrategia $x \in \Omega$ contra el jugador 2 que juega la estrategia $y \in \Omega$.

Los agentes tienen permitido actualizar sus estrategias σ cuando interactúan con otros agentes. La dinámica es la siguiente: si los agentes i y j interactúan, entonces el agente i adopta la estrategia del agente j con una probabilidad igual al pago esperado de j si interactúa con toda la población, denotado como $P(j, t)$.

Para obtener la ecuación maestra de este modelo, subdividimos el dominio Ω en la familia de

intervalos $\{I_j\}_{j=1}^{M}$, donde $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $x_0 = -L$, $x_M = L$ con longitud $h = \frac{2L}{M}$ y definimos:

$$s(j,t) = \frac{\#\{i : \sigma(i,t) \in I_j\}}{N} \tag{7.1.1}$$

para $j \in \{1, ...M\}$, como la proporción de jugadores con estrategia σ en el intervalo I_j. Deduzcamos la ecuación maestra para la densidad s.

Para estudiar el cambio esperado $s(j, t + \Delta t) - s(j, t)$ en un intervalo de tiempo pequeño $[t, t + \Delta t]$ asumamos que la probabilidad de una interacción está dada por un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 1$, reescalando el tiempo si es necesario, tal que la probabilidad de una interacción en el intervalo $[t, t+\Delta t]$ tienda a Δt. Con probabilidad $1 - \Delta t$ no ocurre ninguna interacción y dos o más interacciones ocurren con una probabilidad despreciable $o(\Delta t)$. Luego nos queda la siguiente ecuación maestra para $s(j, t + \Delta t)$:

$$s(j, t + \Delta t) = (1 - \Delta t)s(j, t) + \Delta t s^*(j, t),$$

donde $s^*(j, t)$ es el valor esperado de la proporción de agentes con estrategia en el intervalo I_j cuando ocurre una interacción, donde

- $s^*(j,t) = s(j,t) + \frac{1}{N}$, cuando se elige un jugador que tenía su estrategia en un intervalo distinto a I_j y pasa a tener su estrategia en el intervalo I_j. Esto ocurre con probabilidad $s(j,t)P(j,t)\sum_{i\neq j} s(i,t)$.
- $s^*(j,t) = s(j,t) - \frac{1}{N}$, cuando se elige un jugador que tenía su estrategia en el intervalo I_j y pasa a tener su estrategia en otro intervalo. Esto ocurre con probabilidad $s(j,t)\sum_{i\neq j} s(i,t)P(i,t)$.
- $s^*(j,t) = s(j,t)$ cuando o bien se eligen dos jugadores en intervalos distintos al intervalo I_j, o ambos se eligen en el intervalo I_j, o cuando uno se elige en el intervalo I_j y el otro no, pero no se copian. Esto ocurre con probabilidad $(1-s(j,t))^2+s(j,t)^2+s(j,t)(1-P(j,t))\sum_{i\neq j} s(i,t)+ s(j,t)\sum_{i\neq j} s(i,t)(1 - P(i,t))$

Las probabilidades calculadas se basan en que la probabilidad de que el jugador i que tiene su estrategia en el intervalo I_i adopte la estrategia del jugador j que tiene su estrategia en el intervalo I_j está dada por el pago esperado del jugador j, expresado como $P(j,t) = \sum_k J(j,k)s(k,t)$, donde $J(j,k)$ representa el pago para el jugador j cuando tiene una estrategia que pertenece al intervalo I_j y juega contra el jugador k que tiene una estrategia en el intervalo I_k. Acá estamos considerando que $J(j,k)$ es el valor de la función J evaluada en los puntos medios de los intervalos I_j e I_k respectivamente.

Por lo tanto, para cada $j \in \{1, ...M\}$ tenemos

$$s(j, t + \Delta t) - s(j, t) = \Delta t\left(\frac{1}{N}s(j,t)P(j,t)\sum_{i\neq j} s(i,t) - \frac{1}{N}s(j,t)\sum_{i\neq j} s(i,t)P(i,t)\right).$$

Como $\sum_i s(i,t) = 1$, obtenemos

$$\frac{s(j,t+\Delta t) - s(j,t)}{\Delta t} = \left(\frac{1}{N} s(j,t) P(j,t) - \frac{1}{N} s(j,t) \sum_i s(i,t) P(i,t) \right).$$

Finalmente, podemos reescalar el tiempo para eliminar el factor $1/N$, y al reordenar los términos obtenemos la ecuación

$$\frac{s(j,t+\Delta t) - s(j,t)}{\Delta t} = s(j,t) \left(P(j,t) - \sum_i s(i,t) P(i,t) \right). \tag{7.1.2}$$

7.2. Derivación heurística de la ecuación del replicador

Nuestro objetivo es obtener, a partir de este enfoque discreto de interacción descripto anteriormente, la versión continua de la dinámica del replicador. Con este fin, introducimos una función suave $u(x,t) : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^+$ tal que,

$$s(j,t) = \int_{Ij} u(x,t) dx$$

Esto quiere decir que para un intervalo dado I, $\int_I u(x,t)dx$ describe la proporción de jugadores que tienen su estrategia en el intervalo I a tiempo t. Luego la función u nos da una descripción de la distribución de estrategias de la población para cada instante.

Si aproximamos $s(j,t) \approx hu(x_j,t)$ y reemplazamos en (7.1.2) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{hu(x_j,t+\Delta t) - hu(x_j,t)}{\Delta t} &= hu(x_j,t) P(j,t) - hu(x_j,t) \sum_i hu(x_i,t) P(i,t) \\
&= hu(x_j,t) \sum_k J(x_j,x_k) s(k,t) - hu(x_j,t) \sum_i hu(x_i,t) \sum_k J(x_i,x_k) s(k,t) \\
&= hu(x_j,t) \sum_k J(x_j,x_k) hu(x_k,t) - hu(x_j,t) \sum_i hu(x_i,t) \sum_k J(x_i,x_k) hu(x_k,t) \\
&= hu(x_j,t) \left[\sum_k J(x_j,x_k) hu(x_k,t) - \sum_i hu(x_i,t) \sum_k J(x_i,x_k) hu(x_k,t) \right]
\end{aligned} \tag{7.2.1}$$

Cancelando h a ambos lados y tomando $\Delta t \to 0$ obtenemos que el término de la izquierda converge a la derivada temporal de u. Cuando $h \to 0$ notamos que por la regla del rectángulo las sumatorias $\sum_k J(x_j,x_k) hu(x_k,t)$ convergen a las integrales $\int_\Omega J(x_j,z) u(z,t) dz$ y obtenemos

$$u_t(x_j) = u(x_j,t)\left[\int_\Omega J(x_j,z)u(z,t)dz - \int_\Omega\int_\Omega J(y,z)u(z,t)dzu(y,t)dy\right].$$

Esto sugiere que la evolución en el tiempo del estado de las estrategias de la población u sigue la ecuación integro-diferencial:

$$u_t = u(x,t)\left[\int_\Omega J(x,y)u(y,t)dy - \int_\Omega\int_\Omega J(y,z)u(z,t)dzu(y,t)dy\right]. \tag{7.2.2}$$

Esta ecuación es conocida en la literatura como la dinámica del replicador cuando el espacio de estrategias es infinito, basándose únicamente en el hecho de que si tomamos Ω igual a un conjunto finito, se obtiene la formulación habitual de la dinámica del replicador para el caso de estrategias finitas. Probaremos en las secciones siguientes existencia y unicidad de solución de esta ecuación y la convergencia de manera rigurosa del método numérico.

7.3. Existencia y unicidad de solución

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$, con $\bar{\Omega}$ compacto, sea $T > 0$. Consideramos el núcleo $J : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, que satisface $J \in C\left(\overline{\Omega}, C(\overline{\Omega})\right)$. Nos interesa probar existencia y unicidad de solución del problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u(x,t)\left[\displaystyle\int_\Omega J(x,y)u(y,t)dy - \int_\Omega\int_\Omega J(y,z)u(z,t)dzu(y,t)dy\right] & x \in \Omega,\ t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega, \end{cases} \tag{7.3.1}$$

con $u_0 \in C(\overline{\Omega})$.

Consideremos el espacio $X_{t_0} = C([0,t_0]; C(\overline{\Omega}))$ provisto de la norma

$$\|u\|_{X_{t_0}} = \max_{t\in[0,t_0]} \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x,t)|,$$

que convierte a X_{t_0} en un espacio de Banach.

Definición 7.3.1. Sea $T > 0$ y $t_0 \in [0,T)$. Definimos la solución de (7.3.1), como $u \in X_{t_0}$ tal que

$$u(x,t) = u_0(x) + \int_0^t u(x,s)\left[\int_\Omega J(x,y)u(y,s)dy - \int_\Omega\int_\Omega J(y,z)u(z,s)dz\, u(y,s)dy\right]ds, \tag{7.3.2}$$

para todo $x \in \Omega$ y $t \in [0,t_0]$.

Dada $u_0 \in C(\overline{\Omega})$, definimos el operador $\mathcal{F}_{u_0} : X_{t_0} \to X_{t_0}$ como

$$\mathcal{F}_{u_0}u(x,t) = u_0(x) + \int_0^t u(x,s)\left[\int_\Omega J(x,y)u(y,s)dy - \int_\Omega\int_\Omega J(y,z)u(z,s)dz\, u(y,s)dy\right]ds. \tag{7.3.3}$$

Este operador está bien definido, ya que es continuo con respecto a x por composición de funciones continuas, y en lo que respecta a la variable temporal, para $u \in X_{t_0}$, sean $t_1, t_2 \in [0, t_0]$, se cumple

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{F}_{u_0}u(x,t_1) - \mathcal{F}_{u_0}u(x,t_2)\right| \\
&\quad = \left|\int_{t_1}^{t_2} u(x,s)\left[\int_\Omega J(x,y)u(y,s)dy - \int_\Omega\int_\Omega J(y,z)u(z,s)dz\, u(y,s)dy\right]ds\right| \\
&\quad \le |t_2 - t_1|\|u\|_{X_{t_0}}\left(\|J\|_{L^\infty(\Omega(L^1(\Omega))}\|u\|_{X_{t_0}} + \|J\|_{L^1(\Omega,L^1(\Omega))}\|u\|_{X_{t_0}}^2\right) \\
&\quad \le C|t_2 - t_1|\left(\|u\|_{X_{t_0}}^2 + \|u\|_{X_{t_0}}^3\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{F}_{u_0}$ es continuo en el tiempo. Luego, hemos demostrado que $\mathcal{F}_{u_0}$ está bien definido como aplicación $\mathcal{F}_{u_0} : X_{t_0} \to X_{t_0}$.

Lema 7.3.2. *Sea $\mathcal{F}_{u_0} : X_{t_0} \to X_{t_0}$. Para cualquier $u_0, v_0 \in C(\overline{\Omega})$ y $u, v \in X_{t_0}$, se cumple*

$$\|\mathcal{F}_{u_0}(u) - \mathcal{F}_{v_0}(v)\|_{X_{t_0}} \le \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + Ct_0\|u - v\|_{X_{t_0}}. \tag{7.3.4}$$

donde $C = C(J, \|u\|_{X_{t_0}}, \|v\|_{X_{t_0}})$. Luego, para $R \in \mathbb{R}$ estrictamente positivo, si t_0 es suficientemente pequeño, $\mathcal{F}_{u_0}$ es una contracción estricta en la bola $B(u_0, R) \subset X_{t_0}$.

Demostración. Demostremos primero la desigualdad (7.3.4). Como $u_0, v_0 \in C(\overline{\Omega})$, $J \in L^\infty(\Omega, L^1(\Omega))$ y $u, v \in X_{t_0}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{F}_{u_0}u(x,t) - \mathcal{F}_{v_0}v(x,t)\right| \\
&\quad \le \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + \left|\int_0^t u(x,s)\left[\int_\Omega J(x,y)u(y,s)dy - \int_\Omega\int_\Omega J(y,z)u(z,s)dz\, u(y,s)dy\right]\right. \\
&\qquad \left. -v(x,s)\left[\int_\Omega J(x,y)v(y,s)dy - \int_\Omega\int_\Omega J(y,z)v(z,s)dz\, v(y,s)dy\right]ds\right| \\
&\quad = \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + \left|\int_0^t u(x,s)\left[\int_\Omega J(x,y)u(y,s)dy - \int_\Omega\int_\Omega J(y,z)u(z,s)dz\, u(y,s)dy\right]\right. \\
&\qquad -u(x,s)\int_\Omega J(x,y)v(y,s)dy + u(x,s)\int_\Omega J(x,y)v(y,s)dy \\
&\qquad +u(x,s)\int_\Omega\int_\Omega J(y,z)u(z,s)dz\, v(y,s)dy - u(x,s)\int_\Omega\int_\Omega J(y,z)u(z,s)dz\, v(y,s)dy \\
&\qquad +v(x,s)\int_\Omega\int_\Omega J(y,z)u(z,s)dz\, v(y,s)dy - v(x,s)\int_\Omega\int_\Omega J(y,z)u(z,s)dz\, v(y,s)dy \\
&\qquad \left. -v(x,s)\left[\int_\Omega J(x,y)v(y,s)dy - \int_\Omega\int_\Omega J(y,z)v(z,s)dz\, v(y,s)dy\right]ds\right| \\
&\quad \le \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + t\|J\|_{L^\infty(\Omega,L^1(\Omega))}\left(\|u\|_{X_{t_0}} + \|v\|_{X_{t_0}}\right)\|u - v\|_{X_{t_0}} \\
&\qquad +t\left(\|u\|_{X_{t_0}}^2 + \|u\|_{X_{t_0}}\|v\|_{X_{t_0}} + \|v\|_{X_{t_0}}^2\right)\|J\|_{L^1(\Omega,L^1(\Omega))}\|u - v\|_{X_{t_0}} \\
&\quad = \|u_0 - v_0\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} + Ct\|u - v\|_{X_{t_0}},
\end{aligned}$$

donde $C = C(J, \|u\|_{X_{t_0}}, \|v\|_{X_{t_0}})$. Por lo tanto, hemos probado (7.3.4). Demostremos ahora que $\mathcal{F}_{u_0}$ es contractiva en la bola $B(u_0, R) \subset X_{t_0}$. Probamos primero que $\mathcal{F}_{u_0}(B(u_0, R)) \subset B(u_0, R)$ para un

tiempo t_0 suficientemente chico. Sea $u \in B(u_0, R)$, luego

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_{u_0}u - u_0\|_{X_{t_0}} &\leq t_0\|u\|_{X_{t_0}}\left(\|J\|_{L^\infty(\Omega,L^1(\Omega))}\|u\|_{X_{t_0}} + \|J\|_{L^1(\Omega,L^1(\Omega))}\|u\|^2_{X_{t_0}}\right) \\ &< t_0R\left(\|J\|_{L^\infty(\Omega,L^1(\Omega))}R + \|J\|_{L^1(\Omega,L^1(\Omega))}R^2\right) \end{aligned}$$

Entonces, existe $t_0 < 1/\left(\|J\|_{L^\infty(\Omega,L^1(\Omega))}R + \|J\|_{L^1(\Omega,L^1(\Omega))}R^2\right)$ tal que $\|\mathcal{F}_{u_0}u - u_0\|_{X_{t_0}} \leq R$. Más aún, para $u, v \in B(u_0, R)$, tenemos que

$$\|\mathcal{F}_{u_0}u - \mathcal{F}_{u_0}v\|_{X_{t_0}} \leq t_0C(J, \|u\|_{X_{t_0}}, \|v\|_{X_{t_0}})\|u - v\|_{X_{t_0}}.$$

Por lo cual, alcanza con elegir t_0 suficientemente pequeño tal que $t_0C < 1$ para obtener una contracción estricta en la bola $B(u_0, R)$. Elegimos el mínimo entre el t_0 necesario para obtener $F_{u_0}(B(u_0, R)) \subset B(u_0, R)$, y el t_0 necesario para obtener la contracción. Esto nos brinda el resultado. □

Como consecuencia directa del lema previo 7.3.2, obtenemos la existencia y unicidad de soluciones de (7.3.1).

Teorema 7.3.3. *Existe una única solución del problema* (7.3.1) *en* $[0, T) \times \bar{\Omega}$ *en el sentido de la definición 7.3.1. Más aún, si* $T < \infty$*, la solución diverge en un tiempo finito* T*. Es decir, existe* $\{t_n\} \nearrow T^-$ *tal que*

$$\lim_{\{t_n\}\to T^-} \|u(\cdot, t_n)\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} = +\infty.$$

Demostración. Gracias al lema 7.3.2, tenemos que $\mathcal{F}_{u_0}u(x, t)$ es estrictamente contractiva para todo $t \in [0, t_0]$ donde t_0 es suficientemente pequeño, luego el teorema de punto fijo de Banach establece que existe una única solución dada por (7.3.2) para todo $t \in [0, t_0]$ en X_{t_0}. Por argumentos de extensión, tenemos que existe una única solución en $[0, T) \times \bar{\Omega}$. Si $T < +\infty$, asumiendo que

$$\sup_{t\in[0,T)} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq C$$

luego, aplicando argumentos de extensión para $t < T$, obtenemos existencia hasta tiempo $T + \delta$ para un $\delta > 0$, esto nos lleva a una contradicción. Luego probamos el resultado. □

Observación 7.3.4. Notemos que más aún si $J \in C^k(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ podemos definir el operador $\mathcal{F}_{u_0}$ en el espacio $Y_{t_0} = C([0, t_0]; C^k(\overline{\Omega}))$, con la norma

$$\|u\|_{Y_{t_0}} = \max_{0\leq t\leq t_0} \sum_{\alpha=0}^{k} \|D^\alpha_x u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}.$$

Argumentando como en el lema 7.3.2 encontramos una estimación similar

$$\|\mathcal{F}_{u_0}(u) - \mathcal{F}_{v_0}(v)\|_{Y_{t_0}} \leq \|u_0 - v_0\|_{C^k(\overline{\Omega})} + Ct\|u - v\|_{Y_{t_0}},$$

donde $C = C(\|u\|_{Y_{t_0}}, \|v\|_{Y_{t_0}}, \|J\|_{C^k(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})}, |\Omega|)$.

Luego, para $u_0 \in C^k(\overline{\Omega})$, $\mathcal{F}_{u_0}$ es una contracción estricta en la bola de Y_{t_0} para t_0 suficientemente chico.

7.4. Discretización numérica de la ecuación continua

Nuestro objetivo principal es proponer un esquema numérico para aproximar el problema (7.3.1). Para aplicar el método de elementos finitos, realizamos una partición uniforme del intervalo $\Omega = [-L, L]$ de longitud $h = \frac{2L}{M}$, tal que $-L = x_0, \cdots, x_M = L$ y elegimos el espacio estándar de elementos finitos de funciones constantes a trozos, un espacio de dimensión finita en $L^2([-L, L])$ definido de la siguiente manera

$$V_h = \left\{ v \in L^2([-L, L]), v = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \chi_i,\ \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, M \right\},$$

siendo χ_i la función característica en I_i. Es decir,

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in I_i \\ 0 \text{ si } x \notin I_i. \end{cases}$$

El interpolador natural asociado a V_h, $I_h : L^2([-L, L]) \to V_h$ se define de la siguiente manera

$$f \in L^2([-L, L]),\ I_h(f) = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{h} \int_{I_k} f(y)dy\, \chi_k.$$

Dada $\{0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, n\Delta t, \cdots (K+1)\Delta t\}$ cierta sucesión uniforme de tiempos discretos, hasta cierto $(K+1)\Delta t = t_{k+1} < T$. Para cada $t_n = n\Delta t$, queremos encontrar funciones $\{u_h^n\}_{n=0,\cdots,K+1} \in V_h$, que satisfaga

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{u_h^{n+1}(x) - u_h^n(x)}{\Delta t}\varphi(x)dx = \int_\Omega u_h^n(x) \int_\Omega I_h(J)(x, y)u_h^n(y)dy\varphi(x)dx \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_\Omega u_h^n(x) \int_\Omega \int_\Omega I_h(J)(y, z)u_h^n(z)dz u_h^n(y)dy\varphi(x)dx \\ \displaystyle\int_\Omega u_h^0(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega u_0(x)\varphi(x), \end{cases} \tag{7.4.1}$$

para todo $\varphi \in V_h$, y $0 \le n \le K$. Para cada $x \in \Omega$, en (7.4.1) escribimos

$$u_h(x, t_n) = u_h^n(x) = \sum_{i=0}^{M} \hat{u}_i^n \chi_i(x), \quad 0 \le n \le K+1, \tag{7.4.2}$$

y definimos

$$\delta_t u_h^n = \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t},$$

para obtener

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \sum_{i=0}^{M} \delta_t \hat{u}_i^n \chi_i(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega \sum_{i=0}^{M} \hat{u}_i^n \chi_i(x) \int_\Omega I_h(J)(x,y) \sum_{k=0}^{M} \hat{u}_k^n \chi_k(y)dy\, \varphi(x)dx \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_\Omega \int_\Omega I_h(J)(y,z) \sum_{l=0}^{M} \hat{u}_l^n \chi_l(z)dz \sum_{k=0}^{M} \hat{u}_k^n \chi_k(y)dy\, \varphi(x)dx, \\ \displaystyle\int_\Omega \sum_{i=0}^{M} \hat{u}_i^0 \chi_i(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega I_h(u_0)(x)\varphi(x)dx. \end{cases}$$

Tomando como función test $\varphi = \chi_j \in V_h$ para $j = 1, \cdots, M$, el problema anterior se desacopla en el siguiente sistema de ecuaciones para $j = 1, \cdots M$

$$\begin{cases} h\delta_t \hat{u}_j^n = \hat{u}_j^n \displaystyle\sum_{k=1}^{M} \hat{u}_k^n \int_{I_k}\int_{I_j} I_h(J)(x,y)dxdy - h\hat{u}_j^n \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} \hat{u}_k^n \hat{u}_l^n \int_{I_k}\int_{I_l} I_h(J)(y,z)dydz, \\ \hat{u}_j^0 = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{I_j} u_0(y)dy. \end{cases}$$

Finalmente, observemos que para cada $x, y \in \Omega$, $I_h(J)$ se expresa como

$$I_h(J)(x,y) = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{M} \int_{I_i}\int_{I_k} J(x,y)dydx\chi_i(x)\chi_k(y).$$

Considerando un desarrollo de Taylor y la simetría proporcionada por el punto medio, para $f \in C^2(\overline{\Omega})$,

$$\int_{I_k} f(x)dx = hf(y_k) + O(h^3), \text{ con } y_k \text{ el punto medio de } I_k, \tag{7.4.3}$$

el interpolador promedio anterior suele ser reemplazado por $I_h : L^2([-L,L]) \to V_h$

$$f \in L^2([-L,L]),\ \ I_h(f) = \sum_{k=1}^{M} f(y_k)\chi_k,\ \ y_k \text{ el punto medio de } I_k. \tag{7.4.4}$$

Luego, $I_h(J)$ y $I_h(u_0)$ se reducen, respectivamente, en

$$I_h(J)(x,y) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{M} J(y_i,y_k)\chi_i(x)\chi_k(y), \quad I_h(u_0) = \sum_{i=1}^{M} u_0(y_i)\chi_i.$$

En consecuencia, el esquema numérico discreto que proponemos analizar es

$$h\delta_t \hat{u}_j^n = h\hat{u}_j^n \sum_{k=1}^{M} h\hat{u}_k^n J(y_j,y_k) - h\hat{u}_j^n \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} h\hat{u}_k^n h\hat{u}_l^n J(y_k,y_l), \quad \hat{u}_j^0 = u_0(y_j) \quad j = 1, \cdots, M, \tag{7.4.5}$$

siendo y_k el punto medio de I_k.

En esta etapa relacionemos la ecuación anterior con la dinámica discreta descripta en la sección 7.1. Dedujimos que la proporción $s(j,t)$, $j = 1, \cdots, M$ y $t \geq 0$, definida en (7.1.1), en cierta sucesión de intervalos disjuntos, $\{I_j\}_{j=1}^{M}$ de igual longitud cubriendo $[-L, L]$, satisface (7.1.2).

Asumiendo que

$$s(j,t_n) = \int_{I_j} u_h(x,t_n)dx = \int_{I_j} \sum_{i=0}^{M} \hat{u}_i^n \chi_i(x)dx = h\hat{u}_j^n. \tag{7.4.6}$$

La identidad anterior significa que el sistema de ecuaciones (7.4.5), que constituye una discretización numérica de (7.2.2), corresponde exactamente al sistema de ecuaciones (7.1.2) que describe las dinámicas discretas.

En conclusión, hemos demostrado que el análisis de la convergencia del esquema numérico dado por (7.4.5), es equivalente a probar la convergencia de la dinámica discreta (7.1.2) a la continua (7.3.1), cuando el número de estrategias puras $M = 2L/h$ tiende a infinito, cubriendo todo el dominio $[-L, L]$. Dedicamos precisamente la siguiente sección a lograr este objetivo.

7.5. Convergencia del método numérico

En esta sección analizamos la convergencia de la discretización numérica del problema (7.3.1), resultante de aplicar el método de elementos finitos constantes, derivado en la sección anterior. Se demostró que este esquema numérico conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} h\delta_t \hat{u}_j^n &= h\hat{u}_j^n \sum_{k=0}^{M} h\hat{u}_k^n J(x_j, x_k) - h\hat{u}_j^n \sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{M} h\hat{u}_k^n h\hat{u}_l^n J(x_k, x_l), \\ \hat{u}_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 1, \cdots M, \quad 0 \leq n \leq K+1. \end{aligned} \tag{7.5.1}$$

Necesitamos definir la formulación de la dinámica discreta. En consecuencia, introducimos la versión discreta del producto escalar en $L^2(\Omega)$, correspondiente al interpolador (7.4.4)

$$(f,g)_h = \sum_{k=1}^{M} hf(y_k)g(y_k), \quad y_k \text{ el punto medio de } I_k. \tag{7.5.2}$$

La forma débil del problema discreto es encontrar $u_h^n \in V_h$ tal que

$$\begin{cases} (\delta_t u_h^{n+1}, \psi)_h &= (u_h^n \left(J(\cdot,\cdot), u_h^n\right)_h, \psi)_h - \left(\left(J(\cdot,\cdot), u_h^n\right)_h, u_h^n\right)_h (u_h^n, \psi)_h, \\ (u_h^0, \psi)_h &= (u_0, \psi)_h \end{cases}$$

para todo $\psi \in V_h$ y $0 \leq n \leq K+1$.

Nuestro objetivo es demostrar que la diferencia entre la aproximación numérica dada por (7.4.2) que satisface (7.5.1) y la solución del problema original (7.3.1) tiende a cero a medida que refinamos la malla espacial y temporal.

Teorema 7.5.1. *Consideramos $u_0 \in C^2(\overline{\Omega})$, $J \in C^2(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$ y sea $u \in C^2([0,T)\times\overline{\Omega})$ solución de (7.3.1) correspondiente al dato inicial u_0. Notamos por $\{u_h^n\}_{n=0,\cdots,K+1} \in V_h$ las funciones constantes a trozos dadas por (7.4.2), que verifican las ecuaciones (7.5.1) para cada $n = 0,\cdots,K+1$. Luego, el error de discretización*

$$E_h^n(x) = u_h^n(x) - u(t_n, x),$$

satisface para $n = 0,\cdots,K+1$ que

$$\|E_h^n\|_{L^2} = \|u_h^n - u(t_n,\cdot)\|_{L^2} \to 0, \text{ cuando } h, \Delta t \to 0. \tag{7.5.3}$$

Probamos primero el siguiente lema que será útil en la demostración del teorema 7.5.1.

Lema 7.5.2. *Sea $v \in C^2(\Omega)$ y $I_h : L^2(\Omega) \to V_h$ el interpolador definido por (7.4.4). Luego,*

$$\|v - I_h v\|^2_{L^2(\Omega)} \le Ch^2 \|v\|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{7.5.4}$$

donde $C > 0$ no depende de h.

Demostración. Recordemos que $I_h v(x) = \sum_{k=1}^M v(y_k)\chi_k(x)$, con y_k el punto medio de cada I_k. Haciendo una expansión de Taylor de segundo orden de v obtenemos

$$\begin{aligned}
\|v - I_h v\|^2_{L^2(I_k)} &= \int_{y_k-\frac{h}{2}}^{y_k+\frac{h}{2}} (v(x) - v(y_k))^2 dx \\
&= \int_{y_k-\frac{h}{2}}^{y_k+\frac{h}{2}} \left(v'(y_k)(x-y_k) + \frac{1}{2}v''(\eta_k)(x-y_k)^2 \right)^2 dx \\
&= (v'(y_k))^2 \int_{y_k-\frac{h}{2}}^{y_k+\frac{h}{2}} (x-y_k)^2 dx + \frac{1}{4}(v''(\eta_k))^2 \int_{y_k-\frac{h}{2}}^{y_k+\frac{h}{2}} (x-y_k)^4 dx \\
&= \frac{1}{12}(v'(y_k))^2 h^3 + O(h^5),
\end{aligned}$$

con $\eta_k \in I_k$. Luego,

$$\|v - I_h v\|^2_{L^2(I_k)} \le C(v'(y_k))^2 h^3,$$

con C independiente de u y h. Por lo tanto deducimos

$$\|v - T_h v\|^2_{L^2(\Omega)} \le C \sum_{k=1}^M (v'(y_k))^2 h^3 \le Ch^2 \|v\|^2_{H^1(\Omega)} + O(h^4),$$

lo que muestra (7.5.4).

□

Pasamos ahora a la demostración del teorema 7.5.1.

Demostración. Notemos primero que la norma natural para estimar el error entre la solución de (7.3.1) y su aproximación discreta que satisface (7.5.1) es $\|\cdot\|_{\ell^2}$, es decir, la norma asociada al producto escalar discreto definido en (7.5.2).

Como muchas veces vamos a reemplazar

$$(f,g)_h \approx (f,g),$$

notemos que, según la fórmula simple de cuadratura del punto medio, si $f,g \in C^2(\Omega)$

$$\begin{aligned}(f,g) = \int_\Omega fg dx &= \sum_{k=1}^{M} \int_{I_k} fg dx \\ &= \sum_{k=1}^{M} \Big(h f(y_j) g(y_j) + O(h^3) \Big) \\ &= (f,g)_h + O(h^2)\end{aligned}$$

mientras que si $f,g \in V_h$, tenemos $(f,g)_h = (f,g)$.

En efecto, de (7.3.1) y de (7.5.3) se deduce la siguiente cadena de identidades, para $\psi \in V_h$

$$\begin{aligned}(\delta_t E_h^{n+1}, \psi) =& (\delta_t u_h^{n+1}, \psi)_h - (\delta_t u(t_{n+1}), \psi) \\ =& (\delta_t u_h^{n+1}, \psi)_h + (u_t(t_n) - \delta_t u(t_{n+1}), \psi) - (u_t(t_n), \psi) \\ =& (u_h^n (J(\cdot,\cdot), u_h^n)_h, \psi)_h - ((J(\cdot,\cdot), u_h^n)_h, u_h^n)_h (u_h^n, \psi)_h \\ &+ (\epsilon_h^{\Delta t}, \psi) - (u(J(\cdot,\cdot)u)_h, \psi)_h + ((J(\cdot,\cdot), u(t_n))_h, u(t_n))_h (u(t_n), \psi)_h. \end{aligned} \tag{7.5.5}$$

En el término $\epsilon_h^{\Delta t}$ hemos almacenado el error que se comete al someter a la solución continua u de (7.3.1) a verificar el problema discreto (7.5.3). Se conoce como error de consistencia (o error de truncado), y en este caso viene dado por:

$$\begin{aligned}\epsilon_h^{\Delta t} =& u_t(t_n,\cdot) - \frac{u(t_{n+1},\cdot) - u(t_n,\cdot)}{\Delta t} \\ &- u(t_n,\cdot) \int_\Omega J(\cdot,y) u(t_n,y) dy \\ &+ \int_\Omega \int_\Omega J(y,z) u(t_n,y) u(t_n,z) dy dz u(t_n,\cdot) \\ &+ u(t_n,\cdot) \sum_{i=1}^{N} J(\cdot,x_i) u(t_n,x_i) h \\ &- u(t_n,\cdot) \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} J(x_i,x_k) u(t_n,x_i) u(t_n,x_k) h^2\end{aligned}$$

Ahora necesitamos tomar como test una función relacionada con el propio error. Sin embargo, como en principio $u \notin V_h$, en consecuencia $E_h^n \notin V_h$, no siendo admisible como test. Por este

motivo descomponemos el error como sigue:

$$E_h^n = u_h^n - u(t_n) = u_h^n - I_h(u(t_n)) + I_h(u(t_n)) - u(t_n)$$

donde $e_h^n = u_h^n - I_h(u(t_n))$ y $e_i(t_n) = I_h(u(t_n)) - u(t_n)$ es el error de interpolación. Tomando $I_h u$ el interpolador u dado por 7.4.4, entonces $I_h u \in V_h$ y por lo tanto $e_h^n \in V_h$. Por otro lado, usando lo mencionado en 7.4.3, dado que $u(t,\cdot) \in C^2(\overline{\Omega})$ para cada $t > 0$, en cada intervalo el error de interpolación verifica $\|e_i\|_{L^2(I_k)} = O(h^3)$. Luego tenemos que $\|e_i(t_n)\|_{L^2} = O(h^2)$ y en consecuencia $\|e_i(t_n)\|_{L^2} \to 0$ cuando $h \to 0$, para cada t_n. Como

$$\|E_h^n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_h^n - I_h(u(t_n))\|_{\ell^2} + O(h^2), \tag{7.5.6}$$

el objetivo (7.5.3) se reduce a probar $\|e_h^n\|_{\ell^2} = \|u_h^n - I_h(u(t_n))\|_{\ell^2} \to 0$ cuando $h, \Delta t \to 0$.

Retomamos (7.5.5) y sumamos e_h^n en ambos miembros para obtener:

$$\begin{aligned}(\delta_t E_h^{n+1}, \psi) + (e_h^n, \psi)_h =& (e_h^n, \psi)_h + (u_h^n(J(\cdot,\cdot), u_h^n)_h, \psi)_h - ((J(\cdot,\cdot), u_h^n)_h, u_h^n)_h(u_h^n, \psi)_h \\ & - (u(J(\cdot,\cdot)u)_h, \psi)_h + ((J(\cdot,\cdot), u(t_n))_h, u(\cdot, t_n))_h(\cdot, u(t_n), \psi)_h + (\epsilon_h^{\Delta t}, \psi)\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $E_h^n = e_h^n + e_i(t_n)$ y tomando como test $\psi = \delta_t e_h^{n+1} \in V_h$, la identidad anterior se transforma en:

$$(\delta_t e_h^{n+1}, \delta_t e_h^{n+1})_h + (e_h^n, \delta_t e_h^{n+1})_h = (I) + (II) + (III) + (IV), \tag{7.5.7}$$

donde

$$\begin{aligned}(I) =& (e_h^n, \delta_t e_h^{n+1})_h \\ (II) =& (u_h^n(J(\cdot,\cdot), u_h^n)_h, \delta_t e_h^{n+1})_h \\ & - (u(\cdot, t_n)(J(\cdot,\cdot), u(\cdot, t_n))_h, \delta_t e_h^{n+1})_h \\ (III) =& ((J(\cdot,\cdot), u(\cdot, t_n))_h, u(\cdot, t_n))_h(u(\cdot, t_n), \delta_t e_h^{n+1})_h \\ & - ((J(\cdot,\cdot), u_h^n)_h, u_h^n)_h(u_h^n, \delta_t e_h^{n+1})_h \\ (IV) =& (\epsilon_h^{\Delta t} - \delta_t e_i(u(t_{n+1})), \delta_t e_h^{n+1})\end{aligned}$$

Comenzamos acotando el primer término, utilizando la desigualdad de Young:

$$(I) \leq \zeta(\varepsilon)\|e_h^n\|_{\ell^2}^2 + \varepsilon\|\delta_t e_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2, \tag{7.5.8}$$

donde $\zeta(\varepsilon)$ denotará en adelante la constante de la desigualdad de Young para ε en cada caso, y que puede ser distinta línea a línea.

Reescribimos el término (II) utilizando las sumatorias

$$\begin{aligned}(II) &= \left(u_h^n \sum_{j=1}^{M} J(\cdot, x_j)\hat{u}_j^n h - u(\cdot, t_n) \sum_{j=1}^{M} J(\cdot, x_j) u(x_j, t_n) h, \delta_t e_h^{n+1} \right)_h \\ &= \left((u_h^n - u(\cdot, t_n)) \sum_{j=1}^{M} J(\cdot, x_j)\hat{u}_j^n h, \delta_t e_h^{n+1} \right)_h + \left(u(\cdot, t_n) \left[\sum_{j=1}^{M} J(\cdot, x_j)(\hat{u}_j^n - u(x_j, t_n)) h \right], \delta_t e_h^{n+1} \right)_h\end{aligned}$$

Cuando acotamos el primer término de (II) obtenemos:

$$\left((u_h^n - u(\cdot, t_n)) \sum_{j=1}^{M} J(\cdot, x_j)\hat{u}_j^n h, \delta_t e_h^{n+1} \right)_h \leq \zeta(\varepsilon) M_J^2 \|u_h^n\|_{l^1}^2 \|u_h^n - u(\cdot, t_n)\|_{\ell^2}^2 + \varepsilon \|\delta_t e_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2,$$

donde $M_J = \|J\|_{L^\infty(\Omega\times\Omega)}$ y $\|u_h^n\|_{\ell^1} = \sum_{j=1}^{M} \hat{u}_j^n h$.

Para acotar el segundo término de (II) utilizamos nuevamente la desigualdad de Young, llegando a:

$$\begin{aligned}\left(u(\cdot, t_n) \left[\sum_{j=1}^{M} J(\cdot, x_j)(\hat{u}_j^n - u(x_j, t_n)) h \right], \delta_t e_h^{n+1} \right)_h &\leq \zeta(\varepsilon) M_J^2 \left(\sum_{j=1}^{M} |E_h^n(x_j)| h \right)^2 \|u(\cdot, t_n)\|_{\ell^2}^2 + \varepsilon \|\delta_t e_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2 \\ &\leq \zeta(\varepsilon) M_J^2 C(\Omega) \|E_h^n\|_{\ell^2}^2 \|u(\cdot, t_n)\|_{\ell^2}^2 + \varepsilon \|\delta_t e_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2.\end{aligned}$$

Notamos que la segunda desigualdad sale de aplicar la desigualdad discreta de Jensen al término del error $\|E_h^n\|_{\ell^1}^2$.

En definitiva,

$$(II) \leq \left[\zeta(\varepsilon) M_J^2 \|u_h^n\|_{\ell^1}^2 + \zeta(\varepsilon) M_J^2 C(\Omega) \|u(\cdot, t_n)\|_{\ell^2}^2 \right] \|E_h^n\|_{\ell^2}^2 + 2\varepsilon \|\delta_t e_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2. \tag{7.5.9}$$

El término (III) se acota con argumentos similares a los anteriores. No obstante, para mayor completitud, incluimos todos los pasos, y sumando y restando convenientemente ciertos términos, lo separamos en tres partes:

$$\begin{aligned}(III) =& \sum_{k=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} J(x_k, x_i) u(x_k, t_n) u(x_i, t_n) h^2 \left(u(\cdot, t_n), \delta_t e_h^{n+1} \right)_h \\ &- \sum_{k=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} J(x_k, x_i) \hat{u}_k^n \hat{u}_i^n h^2 \left(u_h^n, \delta_t e_h^{n+1} \right)_h, \\ =& \alpha + \beta + \gamma,\end{aligned} \tag{7.5.10}$$

siendo

$$\alpha = \sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} J(x_k,x_i)u(x_k,t_n)u(x_i,t_n)h^2\left(u(\cdot,t_n),\delta_t e_h^{n+1}\right)_h - \sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} J(x_k,x_i)u(x_k,t_n)\hat{u}_i^n h^2\left(u(\cdot,t_n),\delta_t e_h^{n+1}\right)_h,$$

$$\beta = \sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} J(x_k,x_i)u(x_k,t_n)\hat{u}_i^n h^2\left(u(\cdot,t_n),\delta_t e_h^{n+1}\right)_h - \sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} J(x_k,x_i)\hat{u}_k^n\hat{u}_i^n h^2\left(u(\cdot,t_n),\delta_t e_h^{n+1}\right)_h,$$

$$\gamma = \sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} J(x_k,x_i)\hat{u}_k^n\hat{u}_i^n h^2\left(u(\cdot,t_n),\delta_t e_h^{n+1}\right)_h - \sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} J(x_k,x_i)\hat{u}_k^n\hat{u}_i^n h^2\left(u_h^n,\delta_t e_h^{n+1}\right)_h.$$

Reagrupando en cada término la parte común:

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} J(x_k,x_i)u(x_k,t_n)h(u(x_i,t_n)-\hat{u}_i^n)h\left(u(\cdot,t_n),\delta_t e_h^{n+1}\right)_h\\ &\leq \zeta(\varepsilon)M_J^2\|u(\cdot,t_n)\|_{\ell^1}^2\|E_h^n\|_{\ell^1}^2\|u(\cdot,t_n)\|_{\ell^2}^2+\varepsilon\|\delta_t e_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2\\ &\leq \zeta(\varepsilon)M_J^2C(\Omega)\|u(\cdot,t_n)\|_{\ell^1}^2\|E_h^n\|_{\ell^2}^2\|u(\cdot,t_n)\|_{\ell^2}^2+\varepsilon\|\delta_t e_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2,\end{aligned}$$

donde hemos aplicado primero la desigualdad de Young y a continuación la desigualdad de Jensen discreta al término de error, como hicimos anteriormente.

De manera muy similar,

$$\begin{aligned}\beta &= \sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} J(x_k,x_i)(u(x_k,t_n)-\hat{u}_k^n)h\hat{u}_i^n h\left(u(\cdot,t_n),\delta_t e_h^{n+1}\right)_h\\ &\leq \zeta(\varepsilon)M_J^2\|E_h^n\|_{\ell^1}^2\|u_h^n\|_{\ell^1}^2\|u(\cdot,t_n)\|_{\ell^2}^2+\varepsilon\|\delta_t e_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2\\ &\leq \zeta(\varepsilon)M_J^2C(\Omega)\|E_h^n\|_{\ell^2}^2\|u_h^n\|_{\ell^1}^2\|u(\cdot,t_n)\|_{\ell^2}^2+\varepsilon\|\delta_t e_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2,\end{aligned}$$

y finalmente,

$$\begin{aligned}\gamma &= \sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{M} J(x_k,x_i)\hat{u}_k^n\hat{u}_i^n h^2\left(u(\cdot,t_n)-u_h^n,\delta_t e_h^{n+1}\right)_h\\ &\leq \zeta(\varepsilon)M_J^2\|u_h^n\|_{\ell^1}^4\|E_h^n\|_{\ell^2}^2+\varepsilon\|\delta_t e_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2.\end{aligned}$$

En esta etapa, recordemos que la solución del problema continuo (7.3.1) verifica que $\int_\Omega u(x,t)dx = 1$ para todo $t \geq 0$. Como la norma discreta $\|\cdot\|_{\ell^1}$ es una aproximación de la norma $\|\cdot\|_{L^1}$ por la fórmula de cuadratura del punto medio, se tiene que $\|u(\cdot,t_n)\|_{\ell^1} \leq 2$ para todo t_n. Más aún, como también $\int_\Omega u_0(x)dx = 1$ implica que $\|u_h^0\|_{\ell^1} = 1 + O(h^2)$. Entonces, por la dinámica discreta (7.5.1) calculamos

$$\begin{aligned}\|u_h^1\|_{\ell^1} &= \|u_h^0\|_{\ell^1} + \Delta t\left[\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} J(x_k,x_j)\hat{u}_k^0\hat{u}_j^0 h^2\right]O(h^2)\\ &\leq \|u_h^0\|_{\ell^1} + \Delta t J_M(\|u_h^0\|_{\ell^1})^2 O(h^2) = 1 + O(h^2) + J_M\Delta t O(h^2).\end{aligned}$$

De forma recurrente se puede ver que

$$\|u_h^n\|_{\ell^1} = 1 + O(h^2) + Cn\Delta t O(h^2) = 1 + O(h^2) + Ct_n O(h^2) \leq 1 + O(h^2) + CT O(h^2) = 1 + O(h^2) \leq 2.$$

Para concluir, notamos que de hecho la solución del problema continuo (7.3.1) está acotada. Sea $M_u = \max_{t\in[0,T]}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}$. Entonces, $\left(\|u(\cdot,t_n)\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 \leq \mu(\Omega)M_u^2$, luego $\|u(\cdot,t_n)\|_{\ell^2}^2 \leq \mu(\Omega)M_u^2 + O(h^2) \leq K$. Recapitulando lo que llevamos hasta ahora:

$$\begin{aligned}(I)+(II)+(III) &\leq C_1\|e_h^n\|_{\ell^2}^2 + C_2\|E_h^n\|_{\ell^2}^2 + 6\varepsilon\|\delta_t e_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2\\ &\leq (C_1+C_2)\|e_h^n\|_{\ell^2}^2 + C_2\|e_i(t_n)\|_{\ell^2}^2 + 6\varepsilon\|\delta_t e_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2\\ &\leq (C_1+C_2)\|e_h^n\|_{\ell^2}^2 + 6\varepsilon\|\delta_t e_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2 + O(h^4)\end{aligned} \tag{7.5.11}$$

siendo $C_1, C_2 > 0$ constantes que no dependen de h ni de Δt.

Para finalizar aún debemos acotar el término (IV) en (7.5.7) conteniendo los diferentes errores, que debería hacerse pequeño cuando $h, \Delta t \to 0$. Primero agrupamos convenientemente

$$\begin{aligned}\epsilon_h^{\Delta t} - \delta_t e_i(u(t_{n+1},\cdot)) =& u_t(t_n,\cdot) - \frac{u(t_{n+1},\cdot)-u(t_n,\cdot)}{\Delta t}\\ &+ u(t_n,\cdot)\left[\sum_{i=1}^{M} J(\cdot,x_i)u(t_n,x_i)h - \int_\Omega J(\cdot,y)u(t_n,y)dy\right]\\ &+ u(t_n,\cdot)\left[\int_\Omega\int_\Omega J(y,z)u(t_n,y)u(t_n,z)dydz - \sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{M} J(x_i,x_k)u(t_n,x_i)u(t_n,x_k)h^2\right]\\ &- \delta_t e_i(u(t_{n+1},\cdot))\\ =& g_1(t_n,\cdot) + g_2(t_n,\cdot) + g_3(t_n,\cdot) - \delta_t e_i(u(t_{n+1},\cdot)).\end{aligned}$$

Mediante un desarrollo de Taylor tenemos

$$\|g_1(t_n,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} = O((\Delta t))\|u_{tt}(t_n,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Por otro lado, notando que los $x_k \in I_k$ son el punto medio de cada intervalo, para $i = 2, 3$ tenemos

$$\|g_i(t_n,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} = O(h^2)\|u(t_n,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}.$$

En cuanto a la derivada discreta del error de interpolación,

$$\delta_t e_i(u(t_{n+1}),\cdot) = \frac{e_i(u(t_{n+1},\cdot)) - e_i(u(t_n,\cdot))}{\Delta t},$$

en cada I_k se tendría que

$$|\delta_t e_i(u(t_{n+1}),\cdot)| \leq C\frac{h^2}{\Delta t}.$$

Esta acotación nos lleva cuando tomemos norma, a que

$$\|\delta_t e_i(u(t_{n+1}))\|^2_{L^2} \leq C\frac{h^4}{(\Delta t)^2}. \tag{7.5.12}$$

Vamos a necesitar emplear un argumento que usan en [44] para obtener una cota de $\|\delta_t e_i(u(t_{n+1}))\|^2_{L^2}$ menos singular respecto a Δt que la anterior.

Reescribimos el término

$$\delta_t e_i(u(t_{n+1},\cdot)) = e_i(\delta_t u(t_{n+1},\cdot)) = e_i\left(\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} u_t(t,\cdot)dt\right) = \frac{1}{\Delta t}e_i\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} u_t(t,\cdot)dt\right),$$

La elección $v(\cdot,t) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_t(\cdot,t)dt$ satisface $\max_{t\in[0,t_0]}\|v(\cdot,t)\|_{C^2(\Omega)} \leq C$, para cualquier $t_0 < T$. Luego, v satisface las hipótesis del lema 7.5.2. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|\delta_t e_i(u(t_{n+1},\cdot))\|_{L^2(\Omega)} &= \frac{1}{\Delta t}\left\|e_i\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} u_t(t,\cdot)dt\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\frac{h^2}{\Delta t}\left\|\int_{t_n}^{t_{n+1}} u_t(t,\cdot)dt\right\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C\frac{h^2}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_t(t,\cdot)\|_{H^1(\Omega)}dt \leq C\frac{h^2}{\Delta t}(\Delta t)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_t(t,\cdot)\|^2_{H^1(\Omega)}dt\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

donde además de aplicar 7.5.2 hemos usado Fubini y la desigualdad de Hölder. Esto prueba que

$$\|\delta_t e_i(u(t_{n+1},\cdot))\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\frac{h^4}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_t(t,\cdot)\|^2_{H^1(\Omega)}dt,$$

y hemos reducido la singularidad respecto a Δt en (7.5.12) un orden en el denominador.

Ya estamos preparados para aplicar nuevamente la desigualdad de Young a (IV):

$$\begin{aligned}(IV) =&(\epsilon_h^{\Delta t} - \delta_t e_i(u(t_{n+1})), \delta_t e_h^{n+1}) \leq \zeta(\varepsilon)\left[\|\epsilon_h^{\Delta t}\|^2_{L^2} + \|\delta_t e_i(u(t_{n+1}))\|^2_{L^2}\right] + \varepsilon\|\delta_t e_h^{n+1}\|^2_{\ell^2} \\ &\leq \zeta(\varepsilon)\frac{h^4}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|u_t(t,\cdot)\|^2_{H^1(\Omega)}dt + \varepsilon\|\delta_t e_h^{n+1}\|^2_{\ell^2} + O(h^2\Delta t) + O((\Delta t)^2)\end{aligned} \tag{7.5.13}$$

Volviendo a (7.5.7) y sabiendo que se dan (7.5.11) y (7.5.13) obtenemos

$$(1-7\varepsilon)\|\delta_t e_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2 + (e_h^n, \delta_t e_h^{n+1})_h \leq \zeta(\varepsilon)\left[\|e_h^n\|_{\ell^2}^2 + \frac{h^4}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_t(t,\cdot)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt\right] \\ O(h^2\Delta t) + O((\Delta t)^2) \tag{7.5.14}$$

Nos ocupamos ahora de arreglar la parte izquierda de la desigualdad. Para ello observamos que se da la siguiente identidad elemental, $(b-a)a = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}(b-a)^2$. En consecuencia, podemos escribir el segundo término de

$$\begin{aligned}(e_h^n, \delta_t e_h^{n+1})_h &= \frac{1}{\Delta t}(e_h^n, e_h^{n+1} - e_h^n)_h \\ &= \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{1}{2}\|e_h^{n+1}\|_{l^2}^2 - \frac{1}{2}\|e_h^n\|_{l^2}^2 - \frac{1}{2}\|e_h^{n+1} - e_h^n\|_{l^2}^2\right] \\ &= \frac{1}{2\Delta t}\|e_h^{n+1}\|_{l^2}^2 - \frac{1}{2\Delta t}\|e_h^n\|_{l^2}^2 - \frac{1}{2}\Delta t\|\delta t e_h^{n+1}\|_{l^2}^2\end{aligned}$$

Luego para $\alpha = (1 - \varepsilon - \frac{1}{2}\Delta t) \in (0,1)$, la relación (7.5.14) se transforma en

$$\alpha\|\delta_t e_h^{n+1}\|_{l^2}^2 + \frac{1}{2\Delta t}\|e_h^{n+1}\|_{l^2}^2 - \frac{1}{2\Delta t}\|e_h^n\|_{l^2}^2 \leq \zeta(\varepsilon)\left[\|e_h^n\|_{\ell^2}^2 + \frac{h^4}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u_t(t,\cdot)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt\right] \\ + O(h^2\Delta t) + O((\Delta t)^2) \tag{7.5.15}$$

Ya tenemos (7.5.15) preparada para utilizar nuevamente un argumento de [44]. Para ello vamos a precisar la siguiente versión discreta de la Desigualdad de Gronwall que se encuentra en [45] en el Lema 5.1 y la observación posterior. Ambas implican lo siguiente Sean $k, B, a_m, b_m, c_m, \gamma_m$ números no negativos $\forall m = 0, \cdots n$ tales que

$$a_{n+1} + k\sum_{m=0}^{n+1} b_m \leq k\sum_{m=0}^{n} \gamma_m a_m + k\sum_{m=0}^{n+1} c_m + B,$$

y además $k\gamma_m < 1\ \forall m = 0, \cdots n$. Se tiene

$$a_{n+1} + k\sum_{m=0}^{n+1} b_m \leq \exp\left(k\sum_{m=0}^{n+1}\gamma_m\right)\left[k\sum_{m=0}^{n+1} c_m + B\right].$$

Para aplicar este resultado multiplicamos la ecuación (7.5.15) por Δt y sumamos en $m = 0, ..., n$

$$\Delta t\alpha\sum_{m=0}^{n}\|\delta_t e_h^{m+1}\|_{\ell^2}^2 + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n}(\|e_h^{m+1}\|_{\ell^2}^2 - \|e_h^m\|_{\ell^2}^2) \\ \leq \Delta t\zeta(\varepsilon)\sum_{m=0}^{n}\|e_h^m\|_{\ell^2}^2 + \zeta(\varepsilon)h^4\int_0^{t_{n+2}}\|u_t(t,\cdot)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \Delta t\sum_{m=0}^{n} C\Theta(h,\Delta t),$$

siendo $\Theta(h,\Delta t) = O(h^2\Delta t) + O((\Delta t)^2)$. Multiplicamos la expresión por 2 y cancelamos términos

$$\Delta t 2\alpha \sum_{m=0}^{n} \|\delta_t e_h^{m+1}\|_{\ell^2}^2 + \|e_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2 \leq \|e_h^0\|_{\ell^2}^2 + \zeta(\varepsilon)h^4 \int_0^{t_{n+2}} \|u_t(t,\cdot)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \tag{7.5.16}$$
$$+\Delta t 2\zeta(\varepsilon) \sum_{m=0}^{n-1} \|e_h^{m+1}\|_{\ell^2}^2 + \Delta t \sum_{m=0}^{n} C\Theta(h,\Delta t).$$

Ahora ya sí es fácil ver que tomando

$$a_m = \|e_h^{m+1}\|_{\ell^2}^2, \quad b_m = 2\alpha\|\delta_t e_h^{m+1}\|_{\ell^2}^2, \quad \gamma_m = 2\zeta(\varepsilon), \quad c_m = C\Theta(h,\Delta t),$$

$$B = \|e_h^0\|_{l^2}^2 + \zeta(\varepsilon)h^4 \int_0^{t_{n+2}} \|u_t(t,\cdot)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt, \text{ y } k = \Delta t,$$

para Δt suficientemente pequeño de manera que $2\Delta t\zeta(\varepsilon) < 1$, por la Desigualdad de Gronwall tenemos que para cada $n \geq 0$

$$2\Delta t\alpha \sum_{m=0}^{n} \|\delta_t e_h^{m+1}\|_{l^2}^2 + \|e_h^{n+1}\|_{\ell^2}^2 \leq \exp\left(\Delta t \sum_{m=0}^{n} 2\zeta(\varepsilon)\right)\mathcal{H},$$

donde

$$\mathcal{H} = \Delta t \sum_{m=0}^{n} \Theta(h,\Delta t) + \|e_h^0\|_{\ell^2}^2 + \zeta(\varepsilon)h^4 \int_0^{t_{n+2}} \|u_t(t,\cdot)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt$$
$$= \|e_h^0\|_{\ell^2}^2 + \zeta(\varepsilon)h^4 \int_0^T \|u_t(t,\cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 dt + O(h^2\Delta t) + O((\Delta t)^2).$$

Como $\exp\left(\Delta t \sum_{m=0}^{n} 2\zeta(\varepsilon)\right) \leq \exp(T2\zeta(\varepsilon)) \leq C$, esto concluye la demostración. □

7.6. Soluciones estacionarias y equilibrios de Nash

7.6.1. Ejemplo

Consideremos un juego con un conjunto de estrategias compacto $\Omega = [0,1]$ y una función de pagos lineal $J : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, $J(x,y) = x - y + 1$. La ecuación del replicador (7.2.2) en este caso nos queda

$$u_t = u(x,t)\left[\int_0^1 (x-y+1)u(y,t)dy - \int_0^1 \int_0^1 (y-z+1)u(z,t)dz u(y,t)dy\right] \tag{7.6.1}$$
$$= u(x,t)\left(x - \bar{u}\right).$$

con un dato inicial $u(x,0) = u_0(x)$ y $\overline{u} = \int_0^1 u(x,t)xdx$.

A partir de la ecuación (7.6.1), obtenemos la siguiente ecuación para la evolución en el tiempo de la media de u ($\overline{u}$):

$$\begin{aligned} \bar{u}_t(x,t) &= \int_0^1 x^2 u(x,t)dx - \bar{u}^2 \\ &= Var(u). \end{aligned} \tag{7.6.2}$$

Por otro lado podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 7.6.1. *Sea $u \in C(0,T;C(\overline{\Omega}))$ solución de la ecuación 7.6.1, entonces el soporte de u está contenido en el soporte de u_0.*

Demostración. Sea $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ multiplicamos e integramos (7.6.1)

$$\int_0^1 u(x,T)\phi dx - \int_0^1 u(x,0)\phi dx = \int_0^T \int_0^1 u(x,t)\,(x-\bar{u})\,\phi dx dt, \tag{7.6.3}$$

Ahora, por el absurdo, suponemos que el soporte de u no está contenido en el soporte de u_0. Luego, tenemos $\hat{x} \in sop(u)$ tal que $\hat{x} \notin sop(u_0)$.

Como $\hat{x} \notin sop(u_0)$, existe una bola centrada en $\hat{x}$, $B_\varepsilon(\hat{x})$, tal que $u_0(x) = 0$ para todo $x \in B_\varepsilon(\hat{x})$. Elegimos $\phi \geq 0$ tal que el $B_{\varepsilon/2}(\hat{x}) \subset sop(\phi) \subset B_\varepsilon(\hat{x}) \subset \Omega \backslash \text{sop}(u_0)$. Entonces el término $\int_0^1 u(x,0)\phi dx$ se anula.

Aplicando la desigualdad de Grönwall tenemos que $\int_0^1 u(x,T)\phi dx \leq 0$ para toda ϕ, lo que implica que $u(x,T)$ es cero para todo $x \in sop(\phi)$, pero $\hat{x} \in sop(\phi)$, lo cual nos lleva a un absurdo, que viene de suponer que el soporte de u no está contenido en el soporte de u_0. □

Utilizando el teorema 7.6.1 y la ecuación (7.6.2), obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 7.6.2. *Sea M_{sop} el supremo del soporte de u_0, luego $\bar{u} \to c$ cuando $t \to \infty$ con $c = M_{sop}$.*

Demostración. Observemos que la ecuación (7.6.2) nos dice que la media de u es no decreciente dado que $Var(u) \geq 0$. Como $\bar{u}$ también es acotada, converge a un valor $c \leq 1$.

Dado que el soporte de u está contenido en el soporte de u_0, tenemos que $\bar{u} \leq M_{sop}$, por lo tanto $c \leq M_{sop}$.

Ahora supongamos que $c < M_{sop}$ y sea $c < d < M_{sop}$. Definimos $a(t) = \int_d^{M_{sop}} u(x,t)dx$. Luego, utilizando la ecuación (7.6.1) tenemos que

$$a'(t) = \int_d^{M_{sop}} u_t(x,t)dx = \int_d^{M_{sop}} u(x,t)(x-\bar{u})dx$$

Como $\bar{u}$ es no decreciente y converge a c, tenemos que $\bar{u} \leq c$, luego

$$a'(t) \geq \int_d^{M_{sop}} u(x,t)xdx - c\int_d^{M_{sop}} u(x,t)dx$$

Acotando x en la primer integral por el mínimo valor (d), obtenemos

$$a'(t) \geq (d-c)a(t).$$

Integrando a ambos lados y despejando, obtenemos que $a(t) \geq a(0)e^{(d-c)t}$. Como $a(0) = \int_d^{M_{sop}} u(x,0)dx > 0$, porque M_{sop} es el supremo del soporte de u_0, tenemos que $a(t) \geq a(0) > 0$ para todo $t \geq 0$. Es decir $\int_d^{M_{sop}} u(x,t)dx \geq a(0) > 0$.

Ahora mirando la varianza de u, sabemos que si $\bar{u} \to c$, $var(u) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} var(u) &= \int_0^1 (x-\bar{u})^2 u(x,t)dx \\ &\geq \int_d^{M_{sop}} (x-\bar{u})^2 u(x,t)dx \\ &\geq (d-c)^2 \int_d^{M_{sop}} u(x,t)dx \geq (d-c)^2 a(0) > 0. \end{aligned}$$

Esto nos lleva a un absurdo, luego $c = M_{sop}$. □

Ahora pasamos a definir qué es un equilibrio de Nash en este contexto.

Definición 7.6.3. Sea $v \in C(\overline{\Omega})$, tal que $v(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$ y $\int_\Omega v(x) = 1$, decimos que v es un equilibrio de Nash si

$$E[v,v] \geq E[w,v] \quad \text{para toda } w \neq v.$$

Esto es equivalente a que se cumpla

$$\int_\Omega \int_\Omega J(x,y)v(x)v(y)dydx \geq \int_\Omega \int_\Omega J(x,y)w(x)v(y)dydx \quad \text{para toda } w \neq v.$$

Dado que muchas veces los equilibrios serán puros y una delta de Dirac en un punto no es una función continua (lo cual implica que no pueden considerarse soluciones de la ecuación), es útil definir cuándo una delta puede considerarse un equilibrio de Nash en el juego.

Definición 7.6.4. Dado $s \in \Omega$, sea $v(x) = \delta_s(x)$, la delta de Dirac, decimos que v es un equilibrio de Nash si

$$E[v,v] \geq E[w,v] \quad \text{para toda } w \in C(\overline{\Omega}),\ w \geq 0,\ \int_\Omega w(x) = 1.$$

Esto es equivalente a que se cumpla

$$J(s,s) \geq \int_\Omega J(x,s)w(x)dx \quad \text{para toda } w \in C(\overline{\Omega}),\ w \geq 0,\ \int_\Omega w(x) = 1.$$

El resultado del teorema 7.6.2 nos dice que si $M_{sop} = 1$, tendremos que $\bar{u} \to 1$ cuando $t \to \infty$, lo cual implica que la población se concentra en el equilibrio de Nash del juego, la estrategia $x = 1$. Por otro lado si $M_{sop} < 1$ converge a una estrategia que no es un equilibrio de Nash. También podemos observar que si toda la población comienza jugando la misma estrategia, cualquier estrategia pura en el $[0, 1]$ es una solución estacionaria de la ecuación en un sentido débil, pero no es un equilibrio de Nash, lo cual coincide con lo que establece el *Folk Theorem* para juegos con finitas estrategias.

8

Conclusiones y trabajo futuro

En el trabajo que presentamos en esta tesis, introdujimos avances en la teoría de juegos evolutivos mediante la creación y desarrollo de modelos, herramientas y conceptos que ampliaron nuestra comprensión de la estabilidad de las estrategias en juegos evolutivos con diversas cantidades de jugadores.

En el primer trabajo desarrollamos un modelo basado en agentes para estudiar la competencia entre diferentes tipos de larvas parasitoides, que se encuentran en la búsqueda de hospedadores que viven bajo tierra. Este estudio destaca la importancia de considerar la variabilidad en el número de jugadores, en este caso, larvas y hospedadores por subsistema, y cómo esta variabilidad impacta la dominancia de las estrategias a largo plazo. Una estrategia subóptima, como la de las larvas comunitarias que parasitan hospedadores ya parasitados, puede convertirse en la estrategia dominante en ciertos casos.

En el segundo trabajo extendimos la definición de estrategias evolutivamente estables a juegos simétricos donde el número de jugadores es aleatorio y con cierta probabilidad p se juega de a dos y con la probabilidad complementaria $1 - p$ se juega de a tres. Exploramos en detalle el juego del duelo-truelo donde obtenemos, para ciertas condiciones sobre la probabilidad de jugar duelo p, la existencia de estrategias mixtas estables, es decir donde la coexistencia de estrategias perfectas y mediocres en la población es estable en el tiempo.

Introdujimos y validamos un enfoque basado en redes complejas para estudiar el juego en esta estructura. Obtuvimos una dinámica equivalente a la del replicador a partir de un proceso de imitación proporcional a los pagos, sin la necesidad de incorporar nuevos jugadores que alteren el grafo. Demostramos que la estabilidad y la coexistencia de estrategias dependen también de la conectividad de la red, en particular del grado medio.

En el tercer trabajo planteamos un marco más general para analizar estrategias evolutivamente estables en entornos con número incierto de jugadores. Aquí permitimos que con una probabilidad P_k cualquier cantidad k (menor al número total de la población) de jugadores sean elegidos al azar y juegan el juego entre ellos en cada ronda. Obtuvimos la definición de ESS para estos juegos, y caracterizamos los criterios que permiten decidir si una estrategia lo es o no. Este enfoque permite

una modelización precisa de problemas clásicos y actuales en la teoría de juegos, incluyendo dilemas de cooperación y bienes públicos.

Por último, partiendo de una dinámica discreta basada en la interacción de imitación descripta en el capítulo 5, generalizamos el problema a juegos con un continuo de estrategias. Derivamos una ecuación integro-diferencial que modela la dinámica del replicador en el continuo y probamos que la dinámica discreta sobre finitas estrategias aproxima a esta ecuación tal como lo hace un método numérico discretizando en el espacio. En términos del juego, se estaría aproximando el juego con infinitas estrategias por un juego finito.

Una de las principales conclusiones de esta tesis es que la variabilidad en la cantidad de jugadores en distintos juegos y modelos influye en los equilibrios del sistema. Esto lo observamos en diversos contextos, desde modelos biológicos hasta juegos en redes complejas y problemas clásicos de la teoría de juegos.

Consideramos que emergen ramas interesantes a profundizar. Por un lado, en el modelo de parasitoides, se puede suponer que hay diferentes cantidades de larvas y hospedadores en cada subsistema, lo cual sería más realista en el contexto del campo. Cada combinación de cantidades de larvas y hospedadores se daría con cierta probabilidad, lo que implicaría aleatorizar la cantidad de jugadores en el juego. En particular, esto podría explicar el crecimiento de la región de coexistencia a medida que aumenta el número de larvas y hospedadores en los diagramas de fase, entendiéndola como una descomposición de un subsistema de varias larvas y hospedadores, como una superposición de varios subsistemas más chicos.

Respecto al replicador en juegos con un continuo de estrategias, queda por responder la pregunta de cuáles son las condiciones que aseguran la estabilidad de las estrategias, y extender la ecuación a la interacción de más de dos jugadores. En los enfoques que caracterizan a las estrategias de la población como una medida de probabilidad, se realizan caracterizaciones adecuadas para ese marco. Cuando se cuenta con un conjunto finito de estrategias, tenemos el ya mencionado *Folk Theorem*, que describe las relaciones conocidas entre las nociones de punto de equilibrio para la dinámica del replicador y la de equilibrio de Nash para el juego. En este caso, de manera análoga al caso discreto, se puede probar que dado un equilibrio de Nash u puro del juego, u es una solución estacionaria de la ecuación integro-diferencial y en el ejemplo descripto en la sección 7.6 mostramos que hay soluciones estacionarias que no son equilibrios de Nash si nos restringimos a estrategias puras.

Bibliografía

[1] J. M. Smith and G. R. Price, "The logic of animal conflict," *Nature*, vol. 246, no. 5427, pp. 15–18, 1973. 1

[2] N. Kontorovsky, J. E. Crespo, G. A. Martinez, J. P. Pinasco, and F. Vazquez, "Larval density modulates superparasitism pattern promoting coexistence in solitary ground dwelling larval parasitoids," *Preprint*, 2024. 1, 21, 22, 24, 26

[3] M. K. Castelo and C. R. Lazzari, "Host-seeking behavior in larvae of the robber fly Mallophora ruficauda (Diptera: Asilidae)," *Journal of Insect Physiology*, vol. 50, pp. 331–336, Apr. 2004. Number: 4. 1

[4] M. K. Castelo and J. C. Corley, "Oviposition Behavior in the Robber Fly Mallaphora ruficauda (Diptera: Asilidae)," *Annals of the Entomological Society of America*, vol. 97, pp. 1050–1054, Sept. 2004. Publisher: Entomological Society of America. 1

[5] J. E. Crespo and M. K. Castelo, "The ontogeny of host-seeking behaviour in a parasitoid dipteran," *Journal of insect physiology*, vol. 54, pp. 842–847, May 2008. Number: 5. 1

[6] M. Shubik, *Game theory in the social sciences: concepts and solutions*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1984. 2

[7] R. A. Epstein, *The theory of gambling and statistical logic*. Academic Press, 2012. 2

[8] P. Amengual and R. Toral, "Truels, or survival of the weakest," *Computing in Science & Engineering*, vol. 8, no. 5, pp. 88–95, 2006. 2

[9] D. M. Kilgour, "The sequential truel," *International Journal of Game Theory*, vol. 4, no. 3, pp. 151–174, 1975. 2

[10] R. Toral and P. Amengual, "Distribution of winners in truel games," in *AIP Conference Proceedings*, vol. 779, pp. 128–141, American Institute of Physics, 2005. 2

[11] L. Boosey, P. Brookins, and D. Ryvkin, "Contests between groups of unknown size," *Games and Economic Behavior*, vol. 113, pp. 756–769, 2019. 2

[12] W. Lim and A. Matros, "Contests with a stochastic number of players," *Games and Economic Behavior*, vol. 67, no. 2, pp. 584–597, 2009. 2

[13] H. Tembine, E. Altman, R. El-Azouzi, and Y. Hayel, "Evolutionary games with random number of interacting players applied to access control," in *2008 6th International Symposium on Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc, and Wireless Networks and Workshops*, pp. 344–351, IEEE, 2008. 2, 3, 39

[14] R. B. Myerson, "Population uncertainty and poisson games," *International Journal of Game Theory*, vol. 27, no. 3, pp. 375–392, 1998. 2

[15] R. B. Myerson, "Large poisson games," *Journal of Economic Theory*, vol. 94, no. 1, pp. 7–45, 2000. 2

[16] M. Archetti, "Survival of the weakest in n-person duels and the maintenance of variation under constant selection," *Evolution: International Journal of Organic Evolution*, vol. 66, no. 3, pp. 637–650, 2012. 3

[17] A. Traulsen, J. C. Claussen, and C. Hauert, "Coevolutionary dynamics: from finite to infinite populations," *Physical Review Letters*, vol. 95, no. 23, p. 238701, 2005. 3

[18] F. Vazquez, V. M. Eguíluz, and M. San Miguel, "Generic absorbing transition in coevolution dynamics," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, p. 108702, 2008. 3, 47

[19] F. Vazquez and V. M. Eguíluz, "Analytical solution of the voter model on uncorrelated networks," *New Journal of Physics*, vol. 10, no. 6, p. 063011, 2008. 3, 47

[20] F. Vazquez, X. Castelló, and M. San Miguel, "Agent based models of language competition: macroscopic descriptions and order–disorder transitions," *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 2010, no. 04, p. P04007, 2010. 3, 47

[21] G. Demirel, F. Vazquez, G. Böhme, and T. Gross, "Moment-closure approximations for discrete adaptive networks," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 267, pp. 68 – 80, 2014. 3, 47

[22] Y. Hayel and Q. Zhu, "Epidemic protection over heterogeneous networks using evolutionary poisson games," *IEEE Transactions on Information Forensics and Security*, vol. 12, no. 8, pp. 1786–1800, 2017. 3

[23] J. Oechssler and F. Riedel, "Evolutionary dynamics on infinite strategy spaces," *Economic theory*, vol. 17, pp. 141–162, 2001. 5, 70

[24] J. Oechssler and F. Riedel, "On the dynamic foundation of evolutionary stability in continuous models," *Journal of Economic Theory*, vol. 107, no. 2, pp. 223–252, 2002. 5, 70, 71

[25] N. I. Kavallaris, J. Lankeit, and M. Winkler, "On a degenerate nonlocal parabolic problem describing infinite dimensional replicator dynamics," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 49, no. 2, pp. 954–983, 2017. 5, 71

[26] J. Hofbauer and K. Sigmund, *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge university press, 1998. 7, 9

[27] J. W. Weibull, *Evolutionary game theory*. MIT press, 1997. 8

[28] I. Gilboa and A. Matsui, "Social stability and equilibrium," *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 859–867, 1991. 8

[29] A. Matsui, "Best response dynamics and socially stable strategies," *Journal of Economic Theory*, vol. 57, no. 2, pp. 343–362, 1992. 8

[30] M. Newman, *Networks*. Oxford university press, 2018. 10, 13

[31] M. Broom, C. Cannings, and G. Vickers, "Multi-player matrix games," *Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 59, pp. 931–952, 1997. 37, 54, 59

[32] R. Cressman, *The stability concept of evolutionary game theory: a dynamic approach*, vol. 94. Springer Science & Business Media, 2013. 43

[33] A. Diekmann, "Volunteer's dilemma," *Journal of conflict resolution*, vol. 29, no. 4, pp. 605–610, 1985. 61

[34] R. Axelrod and W. D. Hamilton, "The evolution of cooperation," *science*, vol. 211, no. 4489, pp. 1390–1396, 1981. 64

[35] A. J. Van de Kragt, J. M. Orbell, and R. M. Dawes, "The minimal contributing set as a solution to public goods problems," *American Political Science Review*, vol. 77, no. 1, pp. 112–122, 1983. 64

[36] E. Ostrom, *Rules, games, and common-pool resources*. Michigan University Press, 1994. 64

[37] A. McAvoy, N. Fraiman, C. Hauert, J. Wakeley, and M. A. Nowak, "Public goods games in populations with fluctuating size," *Theoretical population biology*, vol. 121, pp. 72–84, 2018. 64

[38] C. Xu and P. Hui, "Evolution of cooperation in public goods game in populations of dynamic groups of varying sizes," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 613, p. 128519, 2023. 64

[39] C. Hauert, A. Traulsen, H. De Silva née Brandt, M. A. Nowak, and K. Sigmund, "Public goods with punishment and abstaining in finite and infinite populations," *Biological theory*, vol. 3, pp. 114–122, 2008. 64, 65

[40] R. Botta, G. Blanco, and C. E. Schaerer, "Fractional punishment of free riders to improve cooperation in optional public good games," *Games*, vol. 12, no. 1, p. 17, 2021. 65

[41] T. Yamagishi, "The provision of a sanctioning system as a public good.," *Journal of Personality and social Psychology*, vol. 51, no. 1, p. 110, 1986. 65

[42] R. Cressman, "Stability of the replicator equation with continuous strategy space," *Mathematical Social Sciences*, vol. 50, no. 2, pp. 127–147, 2005. 71

[43] V. Jaćimović, "Natural gradient ascent in evolutionary games," *Biosystems*, vol. 236, p. 105127, 2024. 71

[44] F. Guillén-gonzález and G. Tierra, "Superconvergence in velocity and pressure for the 3 d time-dependent navier-stokes equations," *SeMA Journal*, vol. 57, pp. 49–67, 2012. 86, 87

[45] J. G. Heywood and R. Rannacher, "Finite element approximation of the nonstationary navier–stokes problem. i. regularity of solutions and second-order error estimates for spatial discretization," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 19, no. 2, pp. 275–311, 1982. 87

A

Apéndice A

En esta sección calculamos los elementos a_{ij} y a_{ijk} de las matrices del duelo y truelo, respectivamente. El elemento a_{ij} es el pago que recibe el jugador I, que usa la estrategia s_i, cuando juega contra el jugador II, que usa la estrategia s_j, y corresponde a la probabilidad de que el jugador I sobreviva en un duelo (el jugador II muere). Análogamente, el elemento a_{ijk} es el pago del jugador I usando la estrategia s_i cuando juega contra los jugadores II y III que usan las estrategias s_j y s_k, respectivamente, y corresponde a la probabilidad de supervivencia del jugador I en un truelo (los jugadores II y III mueren).

En el duelo, uno de los dos jugadores es elegido al azar (con probabilidad $1/2$) para disparar primero. Por simetría, si ambos utilizan la misma estrategia, cada uno sobrevive con probabilidad $1/2$, y tenemos $a_{11} = a_{22} = 1/2$. Si el jugador I utiliza la estrategia s_2 y el jugador II usa la estrategia s_1, el jugador I solamente puede sobrevivir cuando dispara primero y mata al jugador II, dado que si no logra el objetivo (no mata al jugador II) luego el jugador II lo matará en el siguiente turno. Entonces, la probabilidad de supervivencia del jugador I es $a_{21} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. A partir de este resultado se sigue que el jugador II sobrevive con la probabilidad complementaria $a_{12} = 3/4$.

Para el truelo, cada jugador sobrevive con la misma probabilidad $1/3$ cuando los tres jugadores utilizan la misma estrategia, luego $a_{111} = 1/3$ y $a_{222} = 1/3$.

Si el jugador I usa la estrategia s_1 y los jugadores II y III usan la estrategia s_2, consideramos que II y III siempre van a dispararle a I mientras esté vivo, para aumentar sus posibilidades de sobrevivir. Para obtener la probabilidad de supervivencia del jugador I, consideramos los tres escenarios en los que el jugador I dispara en el primer, segundo y tercer turno, donde cada uno ocurre con probabilidad $1/3$. Si el jugador I dispara primero, mata a II o III. Entonces, el jugador restante dispara a I, quien sobrevive con probabilidad $1/2$, y luego elimina al jugador restante, poniendo fin al juego. Por lo tanto, el jugador I sobrevive en el juego con una probabilidad de $1/2$. En el caso de que el jugador I dispare segundo, el jugador que dispara primero dispara a I, quien sobrevive con probabilidad $1/2$. Después de eso, I mata a II o III, y luego el jugador restante dispara a I, quien sobrevive con probabilidad $1/2$ y luego mata a este jugador, poniendo fin al

juego. Siguiendo la misma línea de razonamiento, cuando el jugador I dispara tercero, sobrevive solo si los otros dos jugadores fallan juntos las tres veces. Sumando los tres casos, la probabilidad de supervivencia del jugador I es $a_{122} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = \frac{7}{24}$. De este resultado, los jugadores II y III sobreviven con probabilidad $\frac{17}{48}$ cada uno y, por lo tanto, $a_{212} = a_{221} = \frac{17}{48}$.

Finalmente, consideramos el caso en el que el jugador I utiliza la estrategia s_2 y los jugadores II y III utilizan s_1. Cuando el jugador I dispara primero, suponemos que tiene la opción de pasar su turno al fallar el disparo a propósito ("disparando al aire"), con el fin de aumentar sus posibilidades de sobrevivir. De lo contrario, si el jugador I mata a cualquiera de II o III, entonces sería eliminado por el jugador restante, por lo que su probabilidad de supervivencia sería cero. Por lo tanto, si el jugador I falla el disparo, entonces II matará a III o viceversa, y luego I matará al jugador perfecto restante con probabilidad $1/2$, es decir, sobreviviendo con probabilidad $1/2$. Cuando el jugador I dispara segundo, o bien II o III está vivo, ya que uno mató al otro en el primer turno para mejorar sus posibilidades de supervivencia. Entonces, I sobrevive con probabilidad $1/2$ frente a su oponente perfecto. Dado que el jugador I no puede disparar tercero, sobrevive el truelo con probabilidad $a_{211} = 1/2$. Por lo tanto, los jugadores perfectos II y III sobreviven con probabilidad $1/4$ cada uno, y tenemos $a_{112} = a_{121} = 1/4$.

B

Apéndice B

En esta sección deducimos las ecuaciones para la evolución de la fracción de agentes perfectos σ y la fracción de enlaces activos ρ en redes aleatorias con una distribución de grado general $\mathcal{P}_k$.

B.1. Deducción de la ecuación de evolución para σ

En la figura B.1(a) mostramos una ilustración esquemática de la transición $21 \rightarrow 11$ en un único evento de actualización, lo que conlleva a un cambio de $1/N$ en σ. Esta transición implica los siguientes procesos y probabilidades asociadas. Un nodo i con estado $\theta_i = 2$ y grado k es elegido al azar con probabilidad $(1-\sigma)\mathcal{P}_k$. Luego, con probabilidad $n^1_{2,k}/k$ un vecino j con estado $\theta_j = 1$ es elegido al azar, donde $n^1_{2,k}$ $(0 \leq n^1_{2,k} \leq k)$ es el número de vecinos de i en el estado opuesto $\theta = 1$, es decir, el número de *links activos* conectados al nodo i. Recordamos que un enlace activo es un enlace que conecta nodos con estados diferentes (enlaces 2–1 o 1–2). Finalmente, el nodo i copia el estado de j con una probabilidad igual al pago esperado de j, que denotamos como $P_{1|2}$ o $\tilde{P}_{1|2}$, cuando i juega un duelo o un truelo, respectivamente. Aquí utilizamos el subíndice 1|2 para notar que j tiene estado $\theta_j = 1$ y al menos un vecino (nodo i) con estado $\theta_i = 2$ [ver figura B.1(a)].

Análogamente, con probabilidad $\sigma\mathcal{P}_k \frac{n^2_{1,k}}{k} P_{2|1}$ un nodo i es elegido al azar con estado $\theta_i = 1$ y grado k copia a un vecino aleatorio j con estado $\theta_j = 2$ cuando juega un duelo [ver figura B.1(b)], donde $n^2_{1,k}$ es el número de vecinos de estado–2 de i y $P_{2|1}$ es el pago esperado de j, que tiene al menos un vecino con estado 1 (nodo i). Esto corresponde a una transición $12 \rightarrow 22$, lo que conlleva a un cambio de $-1/N$ en σ. La expresión para la probabilidad en el juego del truelo es la misma, pero reemplazando $P_{2|1}$ por $\tilde{P}_{2|1}$. Sumando estos cuatro términos correspondientes a las dos transiciones y las dos estrategias de juego, podemos escribir el cambio medio de σ en un paso de temporal $\Delta t = 1/N$ como

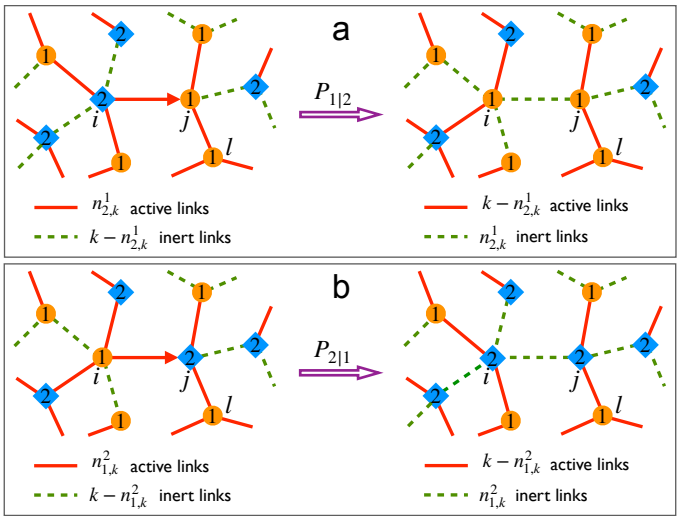

Figura B.1: a) Evento de actualización en el cual un nodo i con estado $\theta_i = 2$ (diamante) adopta el estado $\theta_j = 1$ de su nodo vecino j (círculo) con probabilidad $P_{1|2}$ (pago de j). El cambio en σ y ρ es $1/N$ y $\frac{2(k-2n^1_{2,k})}{\mu N}$, respectivamente. b) Evento de actualización en el cual un nodo i con estado $\theta_i = 1$ (círculo) adopta el estado $\theta_j = 2$ de su nodo vecino j (diamante) con probabilidad $P_{2|1}$ (pago de j). El cambio en σ y ρ es $-1/N$ y $\frac{2(k-2n^2_{1,k})}{\mu N}$, respectivamente.

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dt} =& \frac{(1-\sigma)}{1/N}\left\{p\sum_{k=1}^{N-1}\mathcal{P}_k\sum_{n^1_{2,k}=0}^{k}B\left(n^1_{2,k}\right)\frac{n^1_{2,k}}{k}P_{1|2} + (1-p)\sum_{k=2}^{N-1}\mathcal{P}_k\sum_{n^1_{2,k}=0}^{k}B\left(n^1_{2,k}\right)\frac{n^1_{2,k}}{k}\tilde{P}_{1|2}\right\}\frac{1}{N}\\ &+ \frac{\sigma}{1/N}\left\{p\sum_{k=1}^{N-1}\mathcal{P}_k\sum_{n^2_{1,k}=0}^{k}B\left(n^2_{1,k}\right)\frac{n^2_{1,k}}{k}P_{2|1} + (1-p)\sum_{k=2}^{N-1}\mathcal{P}_k\sum_{n^2_{1,k}=0}^{k}B\left(n^2_{1,k}\right)\frac{n^2_{1,k}}{k}\tilde{P}_{2|1}\right\}\left(-\frac{1}{N}\right),\end{aligned} \tag{B.1.1}$$

donde $B\left(n^1_{2,k}\right)$ es la probabilidad de que $n^1_{2,k}$ links activos estén conectados a un nodo de estado 2 y grado k; y análogamente para $B\left(n^2_{1,k}\right)$. Las primeras y segundas sumatorias en cada término se realizan sobre los grados k y el número de enlaces activos alrededor de un nodo de grado k, respectivamente. Notamos que las sumatorias sobre k en el segundo y el cuarto término, que corresponden a el juego del truelo, empiezan desde $k = 2$ porque un nodo con un único vecino (grado $k = 1$) no puede jugar el juego del truelo. Los pagos esperados de un vecino j de i están dados por las ecuaciones (5.1.1) y (5.1.2):

$$P_{2|1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sigma_{2|1}, \tag{B.1.2a}$$

$$\tilde{P}_{2|1} = \frac{1}{2}\sigma^2_{2|1} + \frac{17}{24}\sigma_{2|1}(1-\sigma_{2|1}) + \frac{1}{3}(1-\sigma_{2|1})^2, \tag{B.1.2b}$$

si $\theta_j = 2$ y $\theta_i = 1$, y

$$P_{1|2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sigma_{1|2}, \tag{B.1.3a}$$

$$\tilde{P}_{1|2} = \frac{1}{3}\sigma_{1|2}^2 + \frac{1}{2}\sigma_{1|2}(1-\sigma_{1|2}) + \frac{7}{24}(1-\sigma_{1|2})^2, \tag{B.1.3b}$$

si $\theta_j = 1$ y $\theta_i = 2$, donde notamos por $\sigma_{2|1}$ y $\sigma_{1|2}$ la fracción de vecinos de estado–1 de j cuando este tiene estado $\theta_j = 2$ y $\theta_j = 1$, respectivamente. Estas fracciones pueden ser estimadas como

$$\sigma_{2|1} \simeq \sum_{k'=1}^{N-1} \frac{k'\mathcal{P}_{k'}}{\mu}\frac{\langle n^1_{2,k'}\rangle}{k'} \quad \text{y} \quad \sigma_{1|2} \simeq \sum_{k'=1}^{N-1} \frac{k'\mathcal{P}_{k'}}{\mu}\frac{\langle n^1_{1,k'}\rangle}{k'}, \tag{B.1.4}$$

donde $\langle n^1_{2,k'}\rangle$ ($\langle n^1_{1,k'}\rangle$) es el número medio de vecinos de j que tienen estado 1 cuando $\theta_j = 2$ ($\theta_j = 1$). También usamos que j tiene grado k' con probabilidad $k'\mathcal{P}_{k'}/\mu$, dado que en un grafo aleatorio la probabilidad de que un nodo aleatorio (nodo i) esté conectado a un nodo de grado k' (nodo j) es proporcional a su grado (ver definición de probabilidad de grado excedente en preliminares para más detalle). Luego, los promedios $\langle n^1_{2,k'}\rangle$ y $\langle n^1_{1,k'}\rangle$ pueden ser aproximados como

$$\langle n^1_{2,k'}\rangle \simeq 1 + (k'-1)P(1|21) \tag{B.1.5a}$$

$$\langle n^1_{1,k'}\rangle \simeq (k'-1)P(1|12), \tag{B.1.5b}$$

donde $P(1|21)$ ($P(1|12)$) es la probabilidad condicional de que un vecino $l \neq i$ de j tenga estado $\theta_l = 1$ dado que $\theta_j = 2$ ($\theta_j = 1$) y $\theta_i = 1$ ($\theta_i = 2$) (ver figura B.1). Las ecuaciones (B.1.5a) y (B.1.5b) toman en cuenta que j tiene al menos un vecino (nodo i) con estado 1 y 2, respectivamente. En el marco de PA, $P(1|21)$ y $P(1|12)$ pueden ser aproximadas por $P(1|2)$ y $P(1|1)$, respectivamente, si despreciamos las correlaciones entre segundos vecinos, es decir, entre θ_l y θ_i. Esto lo podemos hacer porque estamos asumiendo que estos grafos tienen un coeficiente de agrupamiento que decrece como N^{-1}, lo cual significa que la probabilidad de que θ_l y θ_i estén conectados es muy pequeña si tomamos N grande (ver definición de coeficiente de agrupamiento en los preliminares).

Luego, si notamos por ρ la fracción de links activos, $P(1|2)$ y $P(1|1)$ pueden ser calculadas a partir de la igualdad de Bayes

$$\rho = P(2)P(1|2) + P(1)P(2|1), \tag{B.1.6}$$

donde $P(2) = (1-\sigma)$ y $P(1) = \sigma$ son las probabilidades de que un nodo elegido al azar tenga estado 2 y 1, respectivamente. Como los dos términos en el lado derecho de la ecuación (B.1.6) son iguales, tenemos que

$$P(1|2) = \frac{\rho}{2(1-\sigma)}, \tag{B.1.7a}$$

$$P(2|1) = \frac{\rho}{2\sigma}, \tag{B.1.7b}$$

y entonces

$$P(1|1) = 1 - P(2|1) = 1 - \frac{\rho}{2\sigma}. \tag{B.1.8}$$

Usando estas expresiones para $P(1|2)$ y $P(1|1)$ obtenemos de las ecuaciones (B.1.5) que

$$\langle n^1_{2,k'}\rangle \simeq 1 + (k'-1)\frac{\rho}{2(1-\sigma)}, \tag{B.1.9a}$$

$$\langle n^1_{1,k'}\rangle \simeq (k'-1)\left(1 - \frac{\rho}{2\sigma}\right). \tag{B.1.9b}$$

Insertando estas expresiones en las ecuaciones (B.1.4) y realizando las sumatorias, finalmente obtenemos

$$\sigma_{2|1} \simeq \frac{1}{\mu}\left[1 + \frac{(\mu-1)\rho}{2(1-\sigma)}\right]\sigma_{1|2} \simeq \frac{(\mu-1)}{\mu}\left(1 - \frac{\rho}{2\sigma}\right), \tag{B.1.10}$$

que se citan en la ecuación (5.1.11) del texto principal.

Como $\sigma_{2|1}$ y $\sigma_{1|2}$ dependen solamente de σ, ρ y μ, así como también los pagos de las ecuaciones (B.1.2) y (B.1.3), podemos sacar $P_{1|2}$, $\tilde{P}_{1|2}$, $P_{2|1}$ y $\tilde{P}_{2|1}$ fuera de las sumatorias de la ecuación (B.1.1). Luego, expresando la segunda y la cuarta sumatoria sobre k como $\sum_{k=2}^{N-1}\mathcal{P}_k = \sum_{k=1}^{N-1}\mathcal{P}_k - \mathcal{P}_1$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{dt} =& (1-\sigma)\left\{\left[pP_{1|2} + (1-p)\tilde{P}_{1|2}\right]\sum_{k=1}^{N-1}\mathcal{P}_k\sum_{n^1_{2,k}=0}^{k}B\left(n^1_{2,k}\right)\frac{n^1_{2,k}}{k} - (1-p)\tilde{P}_{1|2}\mathcal{P}_1\sum_{n^1_{2,1}=0}^{1}B\left(n^1_{2,k}\right)n^1_{2,1}\right\}\\
&-\sigma\left\{\left[pP_{2|1} + (1-p)\tilde{P}_{2|1}\right]\sum_{k=1}^{N-1}\mathcal{P}_k\sum_{n^2_{1,k}=0}^{k}B\left(n^2_{1,k}\right)\frac{n^2_{1,k}}{k} - (1-p)\tilde{P}_{2|1}\mathcal{P}_1\sum_{n^2_{1,1}=0}^{1}B\left(n^2_{1,1}\right)n^2_{1,1}\right\}\\
=&(1-\sigma)\left\{\left[pP_{1|2} + (1-p)\tilde{P}_{1|2}\right]\sum_{k=1}^{N-1}\mathcal{P}_k\frac{\langle n^1_{2,k}\rangle}{k} - (1-p)\tilde{P}_{1|2}\mathcal{P}_1\langle n^1_{2,1}\rangle\right\}\\
&-\sigma\left\{\left[pP_{2|1} + (1-p)\tilde{P}_{2|1}\right]\sum_{k=1}^{N-1}\mathcal{P}_k\frac{\langle n^2_{1,k}\rangle}{k} - (1-p)\tilde{P}_{2|1}\mathcal{P}_1\langle n^2_{1,1}\rangle\right\},
\end{aligned} \tag{B.1.11}$$

donde $\langle n^1_{2,k}\rangle$ y $\langle n^2_{1,k}\rangle$ son los primeros momentos de $B\left(n^1_{2,k}\right)$ y $B\left(n^2_{1,k}\right)$, respectivamente. Estos momentos pueden ser calculados como promedios de las probabilidades condicionales de las ecuaciones (B.1.7) como

$$\langle n^1_{2,k}\rangle = kP(1|2) = \frac{k\rho}{2(1-\sigma)} \tag{B.1.12a}$$

$$\langle n^2_{1,k}\rangle = kP(2|1) = \frac{k\rho}{2\sigma}. \tag{B.1.12b}$$

Finalmente, reemplazando estas expresiones por los primeros momentos en la ecuación (B.1.11) y reordenando términos, llegamos a la siguiente ecuación para la evolución de la fracción de agentes perfectos citada en la ecuación (5.1.8) del texto principal:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\rho}{2}\left[p(P_{1|2} - P_{2|1}) + (1-p)(\tilde{P}_{1|2} - \tilde{P}_{2|1})(1-\mathcal{P}_1)\right], \tag{B.1.13}$$

donde los pagos P están dados por las ecuaciones (B.1.2), (B.1.3) y (B.1.10).

B.2. Deducción de la ecuación de evolución para ρ

Para deducir una ecuación para la fracción de links activos ρ seguimos un enfoque similar al de la sección B.1 para σ. En la figura B.1(a) describimos el cambio en ρ en un paso temporal $\Delta t = 1/N$, cuando un nodo i con estado $\theta_i = 2$ y grado k copia el estado $\theta_j = 1$ de un nodo aleatorio j (transición $21 \to 11$). Los $n^1_{2,k}$ links activos (2–1) conectados al nodo i se vuelven inertes (1–1) y viceversa, resultando en un cambio local $\Delta n^1_{2,k} = k - 2n^1_{2,k}$ en el número de links activos y un cambio $\Delta\rho = \frac{2(k-2n^1_{2,k})}{\mu N}$ en ρ, donde $\mu N/2$ es el número total de links en el sistema. De manera similar, en una transición $12 \to 22$ el cambio es $\Delta\rho = \frac{2(k-2n^2_{1,k})}{\mu N}$. Considerando las dos transiciones y las dos estrategias del juego, podemos escribir la siguiente ecuación análoga a la ecuación (B.1.1):

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} =& \frac{(1-\sigma)}{1/N}\Bigg\{p\sum_{k=1}^{N-1}\mathcal{P}_k\sum_{n^1_{2,k}=0}^{k}B\left(n^1_{2,k}\right)\frac{n^1_{2,k}}{k}P_{1|2}\,\frac{2\left(k-2n^1_{2,k}\right)}{\mu N}\\ &+(1-p)\sum_{k=2}^{N-1}\mathcal{P}_k\sum_{n^1_{2,k}=0}^{k}B\left(n^1_{2,k}\right)\frac{n^1_{2,k}}{k}\tilde{P}_{1|2}\,\frac{2\left(k-2n^1_{2,k}\right)}{\mu N}\Bigg\}\\ &+\frac{\sigma}{1/N}\Bigg\{p\sum_{k=1}^{N-1}\mathcal{P}_k\sum_{n^2_{1,k}=0}^{k}B\left(n^2_{1,k}\right)\frac{n^2_{1,k}}{k}P_{2|1}\,\frac{2\left(k-2n^2_{1,k}\right)}{\mu N}\\ &+(1-p)\sum_{k=2}^{N-1}\mathcal{P}_k\sum_{n^2_{1,k}=0}^{k}B\left(n^2_{1,k}\right)\frac{n^2_{1,k}}{k}\tilde{P}_{2|1}\,\frac{2\left(k-2n^2_{1,k}\right)}{\mu N}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{B.2.1}$$

Como hicimos en la sección B.1, podemos sacar $P_{1|2}$, $\tilde{P}_{1|2}$, $P_{2|1}$ y $\tilde{P}_{2|1}$ afuera de las sumatorias, convirtiendo la primera y segunda sumatoria sobre k en una, así como también la tercera y la cuarta, y realizando las sumas sobre el número de links activos conectados al nodo i, para obtener

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dt} =& \frac{2(1-\sigma)}{\mu}\Bigg\{\left[pP_{1|2}+(1-p)\tilde{P}_{1|2}\right]\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\mathcal{P}_k}{k}\left[k\langle n^1_{2,k}\rangle-2\langle(n^1_{2,k})^2\rangle\right]\\ &-(1-p)\tilde{P}_{1|2}\mathcal{P}_1\left(k\langle n^1_{2,1}\rangle-2\langle(n^1_{2,1})^2\rangle\right)\Bigg\}\\ &+\frac{2\sigma}{\mu}\Bigg\{\left[pP_{2|1}+(1-p)\tilde{P}_{2|1}\right]\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\mathcal{P}_k}{k}\left[k\langle n^2_{1,k}\rangle-2\langle(n^2_{1,k})^2\rangle\right]\\ &-(1-p)\tilde{P}_{2|1}\mathcal{P}_1\left[\langle n^2_{1,1}\rangle-2\langle(n^2_{1,1})^2\rangle\right]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{B.2.2}$$

Aquí $\langle (n^1_{2,k})^2 \rangle$ y $\langle (n^2_{1,k})^2 \rangle$ son los segundos momentos de las distribuciones Binomiales $B\left(n^1_{2,k}\right)$ y $B\left(n^2_{1,k}\right)$, respectivamente, que están dados por

$$\langle (n^1_{2,k})^2 \rangle = kP(1|2) + k(k-1)P(1|2)^2 = \frac{k\rho}{2(1-\sigma)} + \frac{k(k-1)\rho^2}{4(1-\sigma)^2} \tag{B.2.3a}$$

$$\langle (n^2_{1,k})^2 \rangle = kP(2|1) + k(k-1)P(2|1)^2 = \frac{k\rho}{2\sigma} + \frac{k(k-1)\rho^2}{4\sigma^2}. \tag{B.2.3b}$$

Finalmente, insertando estas expresiones para los segundos momentos y las expresiones de las ecuaciones (B.1.12) para los primeros momentos en la ecuación (B.2.2) obtenemos, después de realizar algunas operaciones algebraicas, la siguiente ecuación para la evolución de la fracción de enlaces activos:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} =& \frac{\rho}{\mu}\Bigg\{ \left[pP_{2|1} + (1-p)\tilde{P}_{2|1}\right]\left[(\mu-1)\left(1-\frac{\rho}{\sigma}\right)-1\right] \\ &+ \left[pP_{1|2} + (1-p)\tilde{P}_{1|2}\right]\left[(\mu-1)\left(1-\frac{\rho}{1-\sigma}\right)-1\right] \\ &+ (1-p)\left(\tilde{P}_{2|1} + \tilde{P}_{1|2}\right)\mathcal{P}_1\Bigg\},\end{aligned}$$

la cual es citada en la ecuación (5.1.9) del texto principal.

C

Apéndice C

Si x representa una estrategia mixta, luego para ser ESS de nivel 1, necesitamos que x satisfaga

$$\sum_{k=1}^{N} P(K=k)\left(E[x;x^{k-1}]-E[y;x^{k-1}]\right)=0$$

y

$$\sum_{k=1}^{N} P(K=k)(k-1)\left(E[x;y,x^{k-2}]-E[y;y,x^{k-2}]-\left(E[x;x^{k-1}]-E[y;x^{k-1}]\right)\right)>0$$

para todo $y \neq x$.

Luego analizamos la expresión $E[x;y,x^{k-2}]-E[y;y,x^{k-2}]-\left(E[x;x^{k-1}]-E[y;x^{k-1}]\right)$.

Primero tenemos que

$$\begin{aligned}&E[x;y,x^{k-2}]-E[y;y,x^{k-2}]-\left(E[x;x^{k-1}]-E[y;x^{k-1}]\right)\\&=(x_1-y_1)\left(E[e_1;y,x^{k-2}]-E[e_2;y,x^{k-2}]-\left(E[e_1;x^{k-1}]-E[e_2;x^{k-1}]\right)\right).\end{aligned}$$

Reescribiendo el término $E[e_1;y,x^{k-2}]-E[e_2;y,x^{k-2}]-\left(E[e_1;x^{k-1}]-E[e_2;x^{k-1}]\right)$, tenemos

$$\begin{aligned}&E[e_1;y,x^{k-2}]-E[e_2;y,x^{k-2}]-\left(E[e_1;x^{k-1}]-E[e_2;x^{k-1}]\right)\\&=y_1E[e_1;e_1,x^{k-2}]+(1-y_1)E[e_1;e_2,x^{k-2}]-y_1E[e_2;e_1,x^{k-2}]-(1-y_1)E[e_2;e_2,x^{k-2}]\\&\quad-x_1E[e_1;e_1;x^{k-2}]-(1-x_1)E[e_1;e_2;x^{k-2}]+x_1E[e_2;e_1;x^{k-2}]+(1-x_1)E[e_2;e_2;x^{k-2}]\\&=(x_1-y_1)\left(E[e_1;e_2,x^{k-2}]-E[e_2;e_2,x^{k-2}]-(E[e_1;e_1,x^{k-2}]-E[e_2;e_1,x^{k-2}])\right).\end{aligned}$$

Ahora computamos los términos $E[e_1;e_2,x^{k-2}]-E[e_2;e_2,x^{k-2}]$ y $E[e_1;e_1,x^{k-2}]-E[e_2;e_1,x^{k-2}]$. Tenemos que

$$E[e_1;e_2,x^{k-2}]-E[e_2;e_2,x^{k-2}]=\sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j}x_1^j(1-x_1)^{k-2-j}\left[\alpha_1^{j,k-1-j}-\alpha_2^{j,k-1-j}\right]$$

y

$$E[e_1; e_1, x^{k-2}] - E[e_2; e_1, x^{k-2}] = \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k-2}{j-1} x_1^{j-1} (1-x_1)^{k-1-j} \left[\alpha_1^{j,k-1-j} - \alpha_2^{j,k-1-j}\right]$$

Luego

$$E[e_1; e_2, x^{k-2}] - E[e_2; e_2, x^{k-2}] - \Big(E[e_1; e_1, x^{k-2}] - E[e_2; e_1, x^{k-2}]\Big) =$$
$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \left(\frac{k-1-j}{k-1} x_1^j (1-x_1)^{k-2-j} - \frac{j}{k-1} x_1^{j-1} (1-x_1)^{k-1-j}\right) \left[\alpha_1^{j,k-1-j} - \alpha_2^{j,k-1-j}\right].$$

D

Apéndice D

Demostremos el lema 6.2.1:

Demostración. Para facilitar la representación de todas las expresiones matemáticas, es esencial definir la siguiente notación:

$$E_{1,2}(a,b,c) = \mathbb{E}[e_1; x^a, e_1^b, e_2^c] - \mathbb{E}[e_2; x^a, e_1^b, e_2^c].$$

Probaremos por inducción en θ que todo polinomio de la forma:

$$P^{\theta}_{r,t}(y_1) = \sum_{j=0}^{\theta}(-1)^{\theta-j}\binom{\theta}{j}\sum_{h=0}^{j}\binom{j}{h}y_1^h(1-y_1)^{j-h}E_{1,2}(k-1-j-t-r, h+t, j-h+r)$$

tal que $t + r < k - 1 - \theta$, tiene a x_1 como raíz de multiplicidad θ.

Caso base $\theta = 1$:

$$\begin{aligned}
P^{1}_{r,t}(y_1) =& \sum_{j=0}^{1}(-1)^{1-j}\binom{1}{j}\sum_{h=0}^{j}\binom{j}{h}y_1^h(1-y_1)^{j-h}E_{1,2}(k-1-j-t-r, h+t, j-h+r)\\
=&(-1)E_{1,2}(k-1-t-r,t,r) + \sum_{h=0}^{1}\binom{1}{h}y_1^h(1-y_1)^{1-h}E_{1,2}(k-2-t-r, h+t, 1-h+r)\\
=&(-1)E_{1,2}(k-1-t-r,t,r)\\
&+ (1-y_1)E_{1,2}(k-2-t-r,t,1+r) + y_1E_{1,2}(k-2-t-r,1+t,r).
\end{aligned}$$

Reescribiendo el término $E_{1,2}(k-1-t-r,t,r)$, tenemos

$$\begin{aligned}
(-1)E_{1,2}(k-1-t-r,t,r) =& -x_1E[e_1; x^{k-2-t-r}, e_1^{t+1}, e_2^r] - (1-x_1)E[e_1; x^{k-2-t-r}, e_1^t, e_2^{r+1}]\\
&+ x_1E[e_2; x^{k-2-t-r}, e_1^{t+1}, e_2^r] + (1-x_1)E[e_2; x^{k-2-t-r}, e_1^t, e_2^{r+1}].
\end{aligned}$$

Luego usando la definición de $E_{1,2}(k-2-t-r,t,1+r)$ y de $E_{1,2}(k-2-t-r,1+t,r)$, obtenemos que

$$P^1_{r,t}(y_1) = (y_1 - x_1)\left(E_{1,2}(k-2-t-r,t+1,r) - E_{1,2}(k-2-t-r,t,r+1)\right).$$

Luego el polinomio de grado 1 satisface que tiene a x_1 como raíz de multiplicidad 1 para $t+r \leq k-2$, luego el caso base queda demostrado.

Hipótesis inductiva: El polinomio

$$P^{\theta-1}_{r,t}(y_1) = \sum_{j=0}^{\theta-1}(-1)^{\theta-1-j}\binom{\theta-1}{j}\sum_{h=0}^{j}\binom{j}{h}y_1^h(1-y_1)^{j-h}E_{1,2}(k-1-j-t-r,h+t,j-h+r)$$

tal que $t+r < k-1-(\theta-1)$, tiene a x_1 como raíz de multiplicidad $\theta-1$.

Para demostrar el paso inductivo, derivamos $P^{\theta}_{r,t}$ con respecto a y_1:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y_1}\sum_{j=0}^{\theta}(-1)^{\theta-j}\binom{\theta}{j}\sum_{h=0}^{j}\binom{j}{h}y_1^h(1-y_1)^{j-h}E_{1,2}(k-1-j-t-r,h+t,j-h+r)\\
&=\sum_{j=0}^{\theta}(-1)^{\theta-j}\binom{\theta}{j}\sum_{h=0}^{j}\binom{j}{h}hy_1^{h-1}(1-y_1)^{j-h}E_{1,2}(k-1-j-t-r,h+t,j-h+r)\\
&\quad-\sum_{j=0}^{\theta}(-1)^{\theta-j}\binom{\theta}{j}\sum_{h=0}^{j}\binom{j}{h}y_1^h(1-y_1)^{j-h-1}(j-h)E_{1,2}(k-1-j-t-r,h+t,j-h+r). \quad \text{(D.0.1)}
\end{aligned}$$

Comenzamos las sumatorias en $j=1$ y en la segunda expresión reemplazamos h por $j-1$.

(D.0.1)

$$\begin{aligned}
&=\sum_{j=1}^{\theta}(-1)^{\theta-j}\binom{\theta}{j}\sum_{h=0}^{j}\binom{j}{h}hy_1^{h-1}(1-y_1)^{j-h}E_{1,2}(k-1-j-t-r,h+t,j-h+r)\\
&\quad-\sum_{j=1}^{\theta}(-1)^{\theta-j}\binom{\theta}{j}\sum_{h=0}^{j-1}\binom{j}{h}y_1^h(1-y_1)^{j-h-1}(j-h)E_{1,2}(k-1-j-t-r,h+t,j-h+r).
\end{aligned} \quad \text{(D.0.2)}$$

Tomamos $j-1=f$,

(D.0.2)

$$\begin{aligned}
&=\sum_{f=0}^{\theta-1}(-1)^{\theta-f-1}\binom{\theta}{f+1}\sum_{h=1}^{f+1}\binom{f+1}{h}hy_1^{h-1}(1-y_1)^{f+1-h}E_{1,2}(k-2-f-t-r,h+t,f+1-h+r)\\
&\quad-\sum_{f=0}^{\theta-1}(-1)^{\theta-(f+1)}\binom{\theta}{f+1}\sum_{h=1}^{f}\binom{f+1}{h}y_1^h(1-y_1)^{f-h}(f+1-h)E_{1,2}(k-2-f-t-r,h+t,f+1-h+r).
\end{aligned} \quad \text{(D.0.3)}$$

Tomamos $h-1=s$ en la primera expresión,

(D.0.3)

$$= \sum_{f=0}^{\theta-1}(-1)^{\theta-(f+1)}\binom{\theta}{f+1}\sum_{s=0}^{f}\binom{f+1}{s+1}(s+1)y_1^s(1-y_1)^{f-s}E_{1,2}(k-2-f-t-r,s+1+t,f-s+r)$$
$$-\sum_{f=0}^{\theta-1}(-1)^{\theta-(f+1)}\binom{\theta}{f+1}\sum_{h=0}^{f}\binom{f+1}{h}y_1^h(1-y_1)^{f-h}(f+1-h)E_{1,2}(k-2-f-t-r,h+t,f+1-h+r).$$

(D.0.4)

Usando que

$$\binom{\theta}{f+1}\binom{f+1}{s+1}(s+1)=\theta\binom{\theta-1}{f}\binom{f}{s} \quad \text{y} \quad \binom{\theta}{f+1}\binom{f+1}{h}(f+1-h)=\theta\binom{\theta-1}{f}\binom{f}{h}$$

cambiamos el combinatorio,

(D.0.4) $=\theta\sum_{f=0}^{\theta-1}(-1)^{\theta-(f+1)}\binom{\theta-1}{f}\sum_{s=0}^{f}\binom{f}{s}y_1^s(1-y_1)^{f-s}E_{1,2}(k-2-f-t-r,s+1+t,f-s+r)$
$-\theta\sum_{f=0}^{\theta-1}(-1)^{\theta-(f+1)}\binom{\theta-1}{f}\sum_{h=0}^{f}\binom{f}{h}y_1^h(1-y_1)^{f-h}E_{1,2}(k-2-f-t-r,h+t,f+1-h+r).$

Luego llamamos:

$$Q_1(y_1)=\sum_{f=0}^{\theta-1}(-1)^{\theta-(f+1)}\binom{\theta-1}{f}\sum_{s=0}^{f}\binom{f}{s}y_1^s(1-y_1)^{f-s}E_{1,2}(k-1-f-(t+r+1),s+t+1,f-s+r)$$

$$Q_2(y_1)=\sum_{f=0}^{\theta-1}(-1)^{\theta-(f+1)}\binom{\theta-1}{f}\sum_{h=0}^{f}\binom{f}{h}y_1^h(1-y_1)^{f-h}E_{1,2}(k-1-f-(t+r+1),h+t,f-h+r+1).$$

Por hipótesis inductiva, los polinomios Q_1 y Q_2 tienen a x_1 como raíz de multiplicidad $\theta-1$ para $t+r+1<k-1-(\theta-1)$.

Luego

$$\frac{\partial}{\partial y_1}P_{r,t}^{\theta}(y_1)=(y_1-x_1)^{\theta-1}f(x_1)$$

para $t+r<k-1-\theta$.

Solo resta mostrar que esto implica que $P_{r,t}^{\theta}$ tiene a x_1 como raíz de multiplicidad θ para $t+r<k-1-\theta$.

Integrando con respecto a y_1 a ambos lados de la expresión obtenemos:

$$P^{\theta}_{r,t}(y_1) = \frac{(y_1 - x_1)^{\theta}}{\theta} f(x_1) + C$$

.

Será suficiente demostrar que la constante $C = 0$. Evaluando la expresión en x_1, tenemos:

$$P^{\theta}_{r,t}(x_1) = C$$

Dado que

$$\begin{aligned} C &= P^{\theta}_{r,t}(x_1) \\ &= \sum_{j=0}^{\theta} (-1)^{\theta-j} \binom{\theta}{j} (E[e_1; x^{k-1-t-r}, e_1^{h+t}, e_2^{j-h+r}] - E[e_2; x^{k-1-t-r}, e_1^{h+t}, e_2^{j-h+r}]) \\ &= (E[e_1; x^{k-1-t-r}, e_1^{h+t}, e_2^{j-h+r}] - E[e_2; x^{k-1-t-r}, e_1^{h+t}, e_2^{j-h+r}]) \sum_{j=0}^{\theta} (-1)^{\theta-j} \binom{\theta}{j} \\ &= 0, \end{aligned}$$

obtenemos el resultado deseado. □