UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

# Aspectos homológicos de la teoría de especies

Tesis presentada para optar al título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires
en el área Ciencias Matemáticas

**Fernando Daniel Martin**

Director de tesis: Mariano Suárez-Álvarez
Consejera de estudios: Andrea Solotar

Lugar de trabajo: Instituto de Investigaciones Matemáticas Luis A. Santaló

Buenos Aires, 2024

# Resumen

## Aspectos homológicos de la teoría de especies

En esta tesis estudiamos aspectos homológicos de la categoría de especies combinatorias linealizadas — es decir, de la categoría de funtores $\mathrm{Fin}^\times \to \mathbf{Fin}_{\Bbbk}$ que van de la categoría $\mathrm{Fin}^\times$ de los conjuntos finitos y biyecciones a la categoría $\mathbf{Fin}_{\Bbbk}$ de los $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita y transformaciones lineales — y de la categoría de GL-especies, una variante de este concepto en la que reemplazamos el dominio de los funtores por la categoría $\mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^\times$ de los espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}$ e isomorfismos lineales.

Determinamos la estructura de álgebra de la cohomología de la GL-especie de banderas completas como bicomódulo sobre la GL-especie exponencial $\mathbf{e}$ y observamos que es isomorfa a la cohomología de la especie de órdenes lineales L como bicomódulo sobre la especie exponencial e. Consideramos también a la especie L como bicomódulo sobre sí misma, determinamos su primer módulo de cohomología y construimos una sucesión espectral que converge a su cohomología. Mostramos que la página 1 de esta sucesión espectral codifica algebraicamente la construcción de Salvetti de un complejo celular que tiene el tipo homotópico del complemento de la complejificación del arreglo de trenzas.

Probamos que el grupo de Picard de la categoría de bicomódulos sobre una coálgebra $c$ en especies linealizadas conexa es isomorfo al grupo de automorfismos exteriores de $c$, generalizando un resultado clásico que establece este hecho para la categoría de bicomódulos sobre una coálgebra sobre espacios vectoriales.

Finalmente, estudiamos la homología operádica de Koszul $H_\bullet$ a coeficientes triviales de un magma nilpotente en 2 pasos $A$ y probamos que $A$ es libre si y sólo si $H_n(A) = 0$ para algún $n \geq 2$. Además, mostramos que en una gran variedad de casos $H_n(A)$ queda completamente determinada por $H_1(A)$ y $H_2(A)$. Damos también una descripción explícita de un complejo que calcula la homología operádica a coeficientes triviales de un álgebra de Lie nilpotente en 2 pasos.

*Palabras clave:* Especies combinatorias, Categorías monoidales, Grupo de Picard, Operads.

# English summary

## Homological aspects of the theory of species

In this thesis we study homological aspects of the category of linearized combinatorial species — that is, of the category $\mathrm{Fin}^{\times} \to \mathbf{Fin}_{\Bbbk}$ of functors going from the category $\mathrm{Fin}^{\times}$ of finite sets and bijections to the category $\mathbf{Fin}_{\Bbbk}$ of finite-dimensional $\Bbbk$-vector spaces and linear transformations — and the category of GL-species, a variation on this concept in which we replace the domain of the functors involved with the category $\mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ of finite-dimensional vector spaces over a finite field $\mathbb{F}$ and linear isomorphisms.

We determine the algebra structure for the cohomology of the GL-species of complete flags regarded as a bicomodule over the exponential GL-species $\mathbf{e}$ and find it is isomorphic to the cohomology of the species L of linear orders regarded as a bicomodule over the exponential species e. We also consider the L-bicomodule structure of the species L: we determine its first cohomology module and construct a spectral sequence converging to its cohomology. We show that the first page of this spectral sequence encodes Salvetti's construction for a cellular complex with the homotopy type of the complement of the complexification of the braid hyperplane arrangement.

We prove that the Picard group of the category of bicomodules over a connected coalgebra $c$ in the category of linearized species is isomorphic to the group of exterior automorphisms of $c$, generalizing a classical result that establishes this fact for the category of bicomodules over a coalgebra in the category of vector spaces.

Finally, we study the Koszul operadic homology $H_\bullet$ with trivial coefficients of a 2-step nilpotent magma $A$ and prove that $A$ is free if and only if $H_n(A)$ vanishes for any $n \geq 2$. Furthermore, we show that, in a wide variety of cases, $H_n(A)$ is completely determined by $H_1(A)$ and $H_2(A)$. We also provide an explicit description of a complex which computes the operadic homology with trivial coefficients of a 2-step nilpotent Lie algebra.

*Keywords:* Combinatorial species, Monoidal categories, Picard group, Operads.

# Introducción

En el artículo [Joy81] André Joyal presenta el concepto de *especie combinatoria*, con el objetivo de categorificar la teoría de funciones generadoras. Si notamos a la categoría de conjuntos finitos y funciones entre ellos como Fin y $\mathrm{Fin}^\times$ a su grupoide subyacente, una especie combinatoria es un funtor $\mathrm{x} : \mathrm{Fin}^\times \to \mathrm{Fin}$. A una especie x podemos asociarle su función generadora exponencial

$$F_{\mathrm{x}}(t) := \sum_{n=0}^{\infty} |\mathrm{x}(\{1, \ldots, n\})| \, \frac{t^n}{n!}.$$

La categoría de especies, que es una categoría de funtores, admite diferentes estructuras monoidales que categorifican operaciones del cálculo clásico de funciones generadoras. Por ejemplo, la suma y los productos de convolución y composición pueden levantarse a estructuras monoidales.

Existen muchos conceptos equivalentes o similares al de especie combinatoria. Definir una especie x es equivalente a definir una familia $(\mathrm{x}_n)$, indexada en los números naturales y el cero, en donde el $n$-ésimo miembro de la familia es un conjunto equipado con una acción del grupo simétrico $\mathbb{S}_n$. Estos objetos se conocen bajo el nombre de *sucesiones simétricas*. Por otro lado, en la literatura se consideran diferentes variaciones de la idea de especie combinatoria pensada como funtor en la que se modifican su dominio o su codominio. Una lista no exhaustiva incluye ejemplos como:

- las *especies linealizadas*, un tema central del trabajo de M. Aguiar y S. Mahajan [AM10], en las que reemplazamos el codominio por $\mathbf{Fin}_{\Bbbk}$, la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo $\Bbbk$;

- los *funtores de Schur*, objetos de estudio clásicos que, como indican J. C. Baez, J. Moeller y T. Trimble en [BMT21, §2.1], pueden definirse como los objetos de una cierta subcategoría de la categoría de especies linealizadas;

- los *FI-módulos* de T. Church, J. S. Ellenberg y B. Farb [CEF15], concepto clave en su trabajo sobre estabilidad homológica, en la que reemplazamos el dominio por la categoría de conjuntos finitos e inyecciones y el codominio por $\mathbf{Fin}_{\Bbbk}$;

- más generalmente los *módulos sobre EI-categorías* (categorías en donde todo endomorfismo es un isomorfismo), considerados en el contexto de grupos de transformaciones por W. Lück en [Lüc89], en donde reemplazamos el dominio por cualquier EI-categoría y el codominio por $\mathbf{Fin}_{\Bbbk}$.

De aquí en adelante hablaremos de especies para referirnos a especies linealizadas. Una especie de interés particular para nosotros será la especie e *constante* o *exponencial*, que toma el valor $\Bbbk$ para todo conjunto finito. Su nombre se debe a que la función generadora exponencial asociada a e es precisamente la función exponencial.

En la monografía [AM10], Aguiar y Mahajan hacen uso de las especies con el objetivo de producir estructuras de álgebras de Hopf a partir de ellas. Un problema natural es el de producir y estudiar deformaciones de estas álgebras, y en consecuencia también lo es el estudio de las deformaciones de especies, o más precisamente, de bicomódulos en especies. Como suele ser usual, estas deformaciones están parametrizadas por el segundo módulo de cohomología para cierta teoría de cohomología. En su tesis [Tam17], P. Tamaroff desarrolló una teoría de cohomología para bicomódulos sobre la especie exponencial, que se corresponde con aquella empleada por Aguiar y Mahajan para estudiar deformaciones.

Entre otros resultados, Tamaroff determinó completamente la estructura de álgebra graduada de la cohomología de la especie de órdenes lineales L como bicomódulo sobre la especie exponencial e. Exploramos dos variaciones diferentes de esta idea.

En primer lugar, consideramos otra variante del concepto de especie: la de *GL-especie*. Estos objetos son funtores $\mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times} \to \mathbf{Fin}_{\Bbbk}$: aquí reemplazamos el dominio de las especies linealizadas por la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}$ de $q$ elementos y los isomorfismos lineales entre ellos. De este modo, una GL-especie es una "sucesión simétrica" sobre la familia de grupos $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. En general pensamos a las GL-especies como un $q$-análogo de las especies, en línea con la analogía clásica que relaciona a conjuntos finitos y espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo finito, expuesta, por ejemplo, por H. Cohn en [Coh04]. Siguiendo esta propuesta, el $q$-análogo de la especie de órdenes lineales es la GL-especie $\mathbf{L}$ de banderas completas: una forma de justificar esto es observar que un orden total sobre un conjunto es equivalente a la filtración que determina. Desarrollamos los preliminares necesarios para definir con precisión y resolver el problema de la determinación de la estructura de la cohomología $H(\mathbf{L})$ de la GL-especie $\mathbf{L}$ como bicomódulo sobre la GL-especie exponencial $\mathbf{e}$, obteniendo el siguiente resultado:

**Teorema.** *El álgebra $H(\mathbf{L})$ de cohomología de la GL-especie $\mathbf{L}$ de banderas completas, considerada como bicomódulo sobre la GL-especie exponencial $\mathbf{e}$, es isomorfa como álgebra graduada a la cohomología $H(\mathrm{L})$ de la especie L de órdenes lineales, considerada como bicomódulo sobre la especie exponencial e.*

Este resultado es el contenido del Teorema 1.36 y puede interpretarse como un resultado de rigidez o estabilidad en el paso de 1 a $q$. La analogía entre conjuntos

finitos y espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo finito se ve reflejada también en similitudes entre la estrategia para la determinación de Tamaroff de $H(\mathrm{L})$ y la llevada a cabo en esta tesis. Por ejemplo, en la primera se requiere del estudio de la combinatoria de una subdivisión celular específica de la esfera: la correspondiente al complejo de Coxeter asociada al grupo simétrico. En nuestra determinación de $H(\mathbf{L})$ un paso fundamental es el estudio de la combinatoria del *building* de subespacios propios no triviales de un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo finito, del cual el complejo de Coxeter asociado al grupo simétrico es el modelo local. De manera similar, un ingrediente importante para la determinación de $H(\mathrm{L})$ es la representación por permutación inducida por la acción del grupo simétrico sobre la subdivisión de la esfera mencionada anteriormente, que es la representación de signo. En el caso de $H(\mathbf{L})$, la representación a considerar es la inducida por la acción del grupo $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ sobre el *building* de subespacios de $\mathbb{F}^n$, la cual fue estudiada por R. Steinberg en su trabajo [Ste51].

Otra dirección explorada es la de la determinación de la cohomología de la especie L no como bicomódulo sobre la especie exponencial, sino como bicomódulo sobre sí misma, de manera análoga a lo que sería la cohomología de Cartier para el caso de coálgebras coasociativas, que a su vez es el análogo de la cohomología de Hochschild en el contexto de álgebras asociativas. En el Teorema 2.28 demostramos que:

**Teorema.** *El primer módulo de cohomología* $H^1(\mathrm{L})$ *de la especie* L *de órdenes lineales, considerada como bicomódulo sobre sí misma, es de dimensión infinita.*

De manera similar a lo que mencionamos anteriormente, en este caso también nos encontramos con objetos geométricos que codifican la dificultad del problema:

**Teorema.** *Existe una sucesión espectral* $E(\mathrm{L})$ *que converge a la cohomología* $H^\bullet(\mathrm{L})$ *de la especie* L *considerada como bicomódulo sobre sí misma. El complejo de cadenas en la* $n$*-ésima columna de la página cero de esta sucesión es isomorfo al complejo que calcula la homología celular del complejo de Salvetti asociado al arreglo de trenzas en* $\mathbb{C}^n$*.*

Este resultado es el contenido del Corolario 2.4 y del Lema 2.11. La construcción de Salvetti es un mecanismo general que asocia a la complejificación de un arreglo de hiperplanos real un complejo celular con el tipo homotópico de su complemento. Este hecho nos resulta interesante dado que esta construcción sólo depende de la combinatoria del reticulado de intersecciones del arreglo, un objeto en principio geométrico, mientras que aquí surge en un contexto puramente algebraico.

Estudiamos también la categoría de bicomódulos sobre coálgebras en especies linealizadas y, en particular, su *grupo de Picard* en tanto categoría monoidal: el grupo de clases de isomorfismo de objetos inversibles para el producto monoidal. En el caso de categorías de bicomódulos sobre coálgebras coasociativas, el grupo de Picard es importante pues sus elementos son los bicomódulos inversibles para el producto cotensorial, que, de acuerdo

con la teoría de Morita–Takeuchi desarrollada en [Tak77], son los que a su vez dan lugar a las equivalencias entre categorías de comódulos.

Nuestra motivación particular para estudiar este grupo en el caso de especies fue tratar de ver si en nuestro contexto se presenta la estrecha relación entre objetos inversibles y los espacios de cohomología de grados bajos, en el espíritu de la que hay, por ejemplo, entre los fibrados de línea sobre una variedad y la cohomología de esta vía la construcción de las clases de Chern.

En el caso de bicomódulos sobre una coálgebra coasociativa $c$, distintos artículos (como por ejemplo los trabajos [TZ96] de B. Torrecillas e Y. H. Zhang y [CGRT00] de J. Cuadra, J. R. García Rozas y B. Torrecillas) demuestran que, bajo hipótesis adecuadas sobre $c$, el grupo de Picard $\mathrm{Pic}({}_c\mathrm{comod}_c)$ es isomorfo al grupo de automorfismos exteriores de la coálgebra $c$. En el Teorema 3.13 probamos este resultado en nuestro contexto:

**Teorema.** *El grupo de Picard* $\mathrm{Pic}({}_c\mathrm{comod}_c)$ *de la categoría de bicomódulos sobre una coálgebra conexa* $c$ *en especies linealizadas es isomorfo al grupo de automorfismos exteriores de* $c$*.*

El enfoque utilizado en los artículos citados emplea fuertemente la existencia de un funtor adjunto a izquierda al producto cotensorial, hecho que no es evidente en la categoría de especies; nuestra demostración hace uso de un argumento diferente que evita esta dificultad valiéndose de propiedades específicas de la estructura monoidal de nuestra categoría de interés. Damos también una descripción para el grupo de Picard de la categoría de bicomódulos de la especie exponencial y de la de órdenes lineales.

Finalmente, otro aspecto por el que las especies linealizadas son de interés es su conexión con la teoría de *operads*. A pesar de que usualmente su definición no se da en estos términos, una operad es un álgebra en especies respecto al producto de composición. En general, la teoría de deformaciones de una familia de estructuras algebraicas codificadas por una operad está controlada por una construcción general: la de su complejo cotangente o de deformación.

En el trabajo [BCCO17], A. Brega, L. Cagliero y A. Chaves-Ochoa estudian la teoría de deformaciones de la familia de álgebras de Lie nilpotentes en 2 pasos. Motivados por este trabajo, damos una primera aproximación a la descripción del complejo cotangente en este contexto. Concretamente, estudiamos el complejo de Koszul que determina la homología a coeficientes triviales tanto para la operad de álgebras de Lie nilpotentes en 2 pasos como para la de magmas nilpotentes en 2 pasos. En ambos casos damos descripciones concretas de este complejo, que pueden ser utilizadas para el cálculo explícito de ejemplos. Probamos además resultados estructurales para la homología de magmas; en particular, demostramos que un magma nilpotente en 2 pasos $A$ es libre si y sólo si $H_n(A) = 0$ para algún $n \geq 2$. Probamos también que, bajo hipótesis no muy restrictivas, los primeros dos módulos de homología determinan completamente a todos los siguientes. Nuestra herramienta principal para obtener estos resultados es el operador laplaciano,

imitando el enfoque utilizado por B. Kostant en [Kos61] para estudiar la cohomología de álgebras de Lie.

Esta tesis está organizada en cuatro capítulos. En el Capítulo 1 definimos en detalle la categoría de GL-especies, su estructura monoidal respecto al producto de Cauchy y la cohomología de un bicomódulo sobre una coálgebra en GL-especies. Recordamos también propiedades clásicas de la variedad de banderas parciales sobre un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo finito y sobre el módulo de Steinberg, ingredientes necesarios para la demostración del teorema central del capítulo, que consiste en la determinación de la cohomología de la GL-especie de banderas completas como bicomódulo sobre la GL-especie exponencial.

En el Capítulo 2 recordamos la definición de la categoría de especies linealizadas y su estructura monoidal respecto al producto de Cauchy. Establecemos preliminares sobre arreglos de hiperplanos: en particular, sobre la construcción de Salvetti para un complejo celular con el tipo homotópico del complemento de un arreglo de hiperplanos complejificado. Iniciamos el cálculo de la cohomología de la especie de órdenes lineales como bicomódulo sobre sí misma, identificando las columnas de la página 0 de una sucesión espectral que la determina con los complejos celulares asociado al complejo de Salvetti para el arreglo de trenzas. Determinamos explícitamente varias columnas y diagonales de la página 1. Demostramos también que el primer módulo de cohomología tiene dimensión infinita.

En el Capítulo 3 establecemos que el grupo de Picard de la categoría de bicomódulos sobre una coálgebra en especies linealizadas conexa es isomorfo a su grupo de automorfismos de coálgebra, generalizando un resultado análogo para coálgebras coasociativas; es decir, para coálgebras sobre la categoría de espacios vectoriales. Describimos el grupo de Picard para el caso de la especie exponencial y la especie de órdenes lineales.

Finalmente, en el Capítulo 4 damos una descripción explícita de los complejos que determinan la homología operádica a coeficientes triviales para las operads de magmas nilpotentes en 2 pasos y de álgebras de Lie nilpotentes en 2 pasos. En el caso de magmas, probamos además algunos resultados estructurales adicionales.

Incluimos al final de la tesis un Apéndice con el código que fue usado para realizar algunos de los cálculos hechos en esta tesis y la búsqueda de ejemplos.

# Índice general


**1 La cohomología de las GL-especies de banderas** **1**
1.1 Preliminares sobre banderas y permutaciones . . . 1
1.2 La categoría de GL-especies y su estructura monoidal . . . 4
1.3 La especie exponencial . . . 9
1.4 La cohomología de un e-bicomódulo . . . 11
1.5 El poset de subespacios de un $\mathbb{F}$-espacio vectorial . . . 13
1.6 Variedades de banderas . . . 15
1.7 Una sucesión espectral . . . 27
1.8 Especies de banderas . . . 32
1.9 La cohomología de las especies de banderas . . . 34

**2 La especie de órdenes lineales** **47**
2.1 La categoría de especies . . . 47
2.2 La coálgebra L . . . 48
2.3 Arreglos de hiperplanos . . . 52
2.4 El arreglo de trenzas . . . 54
2.5 El complejo de Salvetti . . . 55
2.6 La topología del complemento del arreglo . . . 64
2.7 La estructura de $E_1$ . . . 66
2.8 El primer módulo de cohomología . . . 75

**3 El grupo de Picard** **85**
3.1 Generalidades . . . 86
3.2 Formas torcidas . . . 91
3.3 El grupo de Picard de una coálgebra conexa . . . 93
3.4 Grupos de Picard . . . 97

**4 Álgebras nilpotentes en 2 pasos** **105**
4.1 Álgebras y magmas nilpotentes en 2 pasos . . . 106
4.2 Árboles . . . 108
4.3 El complejo $T_\bullet(A)$ . . . 109

4.4 El laplaciano . . . 112
4.5 Homología de magmas nilpotentes en 2 pasos . . . 114
4.6 Algunos ejemplos . . . 119
4.6.1 Magmas nilpotentes en 2 pasos libres . . . 119
4.6.2 Álgebras de Heisenberg . . . 120
4.6.3 Magmas tabulares . . . 122
4.7 La categoría Trees de árboles y flips . . . 125
4.8 Grupoides y coinvariantes . . . 132
4.9 El funtor $\underline{A}$ . . . 133
4.10 El complejo $C_\bullet(A)$ . . . 135

**A Código** **141**

**Glosario** **147**

**Notación** **149**

**Bibliografía** **151**

# Capítulo 1

# La cohomología de las GL-especies de banderas

A lo largo de este capítulo, $\Bbbk$ denotará un cuerpo de característica cero y $\mathbb{F}$ uno finito de $\ell$ elementos. Salvo cuando se indique lo contrario, los productos tensoriales y el funtor Hom de espacios vectoriales serán siempre tomados sobre el cuerpo $\Bbbk$, todos los espacios vectoriales considerados serán de dimensión finita y todas las acciones de grupos serán a izquierda. Ocasionalmente incluiremos ejemplos para ayudar al lector a familiarizarse con los conceptos que vayamos presentando. Estarán indicados con un sombreado gris y pueden ser ignorados si ya se conocen las definiciones que buscan clarificar.

## 1.1 Preliminares sobre banderas y permutaciones

Gran parte de las estructuras que consideraremos más adelante involucran el estudio de banderas, por lo que comenzamos fijando notación y desarrollando algunos preliminares al respecto.

Dados dos números naturales $m$ y $n$ con $m < n$, escribiremos $[\![n]\!]$ y $[\![m, n]\!]$ para referirnos a los conjuntos $\{1, 2, \ldots, n\}$ y $\{m, m+1, \ldots, n\}$ respectivamente.

Una **composición** de un número natural $n$ es una sucesión ordenada de naturales $k = (k_1, \ldots, k_l)$ tal que $k_1 + \cdots + k_l = n$. En este caso escribimos $k \vDash n$ y llamamos a $l$ la **longitud** de $k$. Si $k = (k_1, \ldots, k_l)$ y $k' = (k'_1, \ldots, k'_{l'})$ son composiciones de $n$ decimos que $k'$ **refina** a $k$ si tenemos una contención en las correspondientes sumas parciales

$$\{k_1, k_1 + k_2, \ldots, k_1 + \cdots + k_l\} \subseteq \{k'_1, k'_1 + k'_2, \ldots, k'_1 + \cdots + k'_{l'}\},$$

y en ese caso notamos $k \preceq k'$.

Una **partición ordenada** o **composición** de un conjunto $X$ de $n$ elementos es una sucesión ordenada de subconjuntos de $X$ disjuntos dos a dos $(X_1, X_2, \ldots, X_l)$ tal que $X = \bigcup X_i$. El número natural $l$ es la **longitud** de la partición y su **tipo** es la composición

de $n$ dada por

$$(|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_l|).$$

La **partición ordenada estándar** de tipo $k = (k_1, \ldots, k_l)$ del conjunto $[\![n]\!]$ es la partición

$$(\{1, \ldots, k_1\}, \{k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2\}, \ldots, \{n - k_l + 1, \ldots, n\}).$$

El grupo simétrico $\mathbb{S}_n$ actúa sobre los subconjuntos del conjunto $[\![n]\!]$ de la manera usual y sobre sus particiones ordenadas de tipo $k$ de modo que

$$\sigma \cdot (A_1, \ldots, A_{k_l}) = (\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_{k_l})).$$

El estabilizador de la partición ordenada estándar de tipo $k$ es un subgrupo $Y_k$ de $\mathbb{S}_n$ al que llamamos **subgrupo de Young de tipo** $k$, y que es isomorfo al producto de grupos simétricos

$$Y_k \cong \mathbb{S}_{k_1} \times \cdots \times \mathbb{S}_{k_l}.$$

Sea $V$ un espacio vectorial. Una **bandera** en $V$ es una sucesión estrictamente creciente $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_n)$ de subespacios de $V$ en la que $\mathcal{F}_0 = 0$ y $\mathcal{F}_n = V$. El número $n$ es la **longitud** de $\mathcal{F}$ y lo notamos $\operatorname{len}\mathcal{F}$; puede ser cualquier entero entre 0 y $\dim(V)$ inclusive. Una bandera de longitud maximal es una **bandera completa**. Escribiremos $\mathrm{Fl}(V)$ para referirnos al conjunto de todas las banderas en $V$, $\mathrm{Fl}_l(V)$ para el subconjunto formado por aquellas de longitud $l$ y $\mathrm{Fl}_+(V)$ para el subconjunto de banderas completas.

Si $d$ es la dimensión de $V$ y $k = (k_1, \ldots, k_l) \vDash d$, una bandera $\mathcal{F} \in \mathrm{Fl}_l(V)$ es **de tipo** $k$ si $\dim \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} = k_i$ para todo $i \in [\![l]\!]$. De este modo, una bandera completa es una bandera de tipo $(1, 1, \ldots, 1)$. Denotamos al conjunto de banderas de tipo $k$ en $V$ por $\mathrm{Fl}_k(V)$.

Si $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_0, \ldots, \mathcal{G}_n)$ es una sucesión creciente de subespacios de $V$ con $\mathcal{G}_0 = 0$ y $\mathcal{G}_n = V$, llamamos **reducción de** $\mathcal{G}$ y escribimos $\operatorname{red}(\mathcal{G}_0, \ldots, \mathcal{G}_n)$ a la bandera obtenida a partir de $\mathcal{G}$ eliminando las repeticiones. Observamos que $n$ es la longitud de esta bandera si y sólo si la sucesión $\mathcal{G}$ ya era una bandera.

Sean ahora $W$ otro espacio vectorial y $\varphi : V \to W$ una transformación lineal arbitraria. Si $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_n) \in \mathrm{Fl}_n(V)$, notamos $\varphi_*(\mathcal{F})$ a la bandera $\operatorname{red}(\varphi(\mathcal{F}_0), \ldots, \varphi(\mathcal{F}_n))$ en $\varphi(V)$; observemos que $\operatorname{len}(\varphi_*(\mathcal{F})) \leq n$ y que la igualdad vale si $\varphi$ es inyectiva. De este modo obtenemos una acción natural de $\mathrm{GL}(V)$ sobre el conjunto $\mathrm{Fl}(V)$: si $g \in \mathrm{GL}(V)$ y $\mathcal{F} \in \mathrm{Fl}(V)$, definimos $g \cdot \mathcal{F} = g_*(\mathcal{F})$. Los subconjuntos $\mathrm{Fl}_+(V)$, $\mathrm{Fl}_l(V)$ para cualquier entero no negativo $l$ y $\mathrm{Fl}_k(V)$ para cada $k \vDash n$ son $\mathrm{GL}(V)$-invariantes. Además, la restricción de esta acción a $\mathrm{Fl}_k(V)$ resulta transitiva para cada $k \vDash n$.

Sea ahora $\varphi : V \to W$ un monomorfismo lineal. Si $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_0, \ldots, \mathcal{G}_n) \in \mathrm{Fl}_n(W)$, denotamos como $\varphi^*(\mathcal{G}) \in \mathrm{Fl}(V)$ a la bandera $\operatorname{red}(\varphi^{-1}(\mathcal{G}_0), \ldots, \varphi^{-1}(\mathcal{G}_n))$ en $V$. Una vez más, esta bandera tiene longitud $\operatorname{len}(\varphi^*(\mathcal{G})) \leq n$ y la igualdad vale si $\varphi$ es un isomorfismo.

Sea $S \leq V$ un subespacio y consideremos la inclusión $i : S \to V$ y la proyección canónica $\pi : V \to V/S$. Si $\mathcal{F}$ es una bandera en $V$, su **restricción a** $S$ es la bandera

$$\mathcal{F}|_S = i^*(\mathcal{F}) \in \mathrm{Fl}(S)$$

y su **proyección a** $V/S$ es la bandera

$$\mathcal{F}|^{V/S} = \pi_*(\mathcal{F}) \in \mathrm{Fl}(V/S).$$

Sea $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_{n+1})$ una bandera en $V$. Definimos, para $i \in [\![0, n+1]\!]$, banderas $\partial_i(\mathcal{F})$ de longitud $n$ del siguiente modo:

$$\partial_i(\mathcal{F}) = \begin{cases} \mathcal{F}|^{V/\mathcal{F}_1}, & \text{si } i = 0; \\ (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{i-1}, \widehat{\mathcal{F}_i}, \mathcal{F}_{i+1}, \ldots, \mathcal{F}_{n+1}), & \text{si } 0 < i < n+1; \\ \mathcal{F}|_{\mathcal{F}_n}, & \text{si } i = n+1. \end{cases}$$

Todas ellas son banderas en $V$, salvo $\partial_0 \in \mathrm{Fl}_n(V/\mathcal{F}_1)$ y $\partial_{n+1}(\mathcal{F}) \in \mathrm{Fl}_n(\mathcal{F}_n)$.

Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son banderas en $V$, decimos que $\mathcal{G}$ **refina** a $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ como sucesiones, en cuyo caso notamos $\mathcal{F} \preceq \mathcal{G}$, y que $\mathcal{G}$ **refina directamente** a $\mathcal{F}$ si $\mathcal{G}$ refina a $\mathcal{F}$ y además $\mathrm{len}(\mathcal{G}) = \mathrm{len}(\mathcal{F}) + 1$.

**Lema 1.1.** *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son banderas en $V$, el estabilizador de $\mathcal{G}$ para la acción de* $\mathrm{GL}(V)$ *está contenido en el de $\mathcal{F}$ si y sólo si $\mathcal{F} \preceq \mathcal{G}$. Más aún, $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ si y sólo si sus estabilizadores coinciden.* □

Si $n$ es un entero positivo, la **bandera completa estándar** en $\mathbb{F}^n$ es la bandera $\mathcal{F}^0$ tal que

$$\mathcal{F}^0_i = \langle e_1, e_2, \ldots, e_i \rangle$$

para cada $i \in [\![n]\!]$. Si $k \vDash n$, la **bandera estándar de tipo** $k$ en $\mathbb{F}^n$ es la única bandera $\mathcal{F}^{0,k} \in \mathrm{Fl}_k(\mathbb{F}^n)$ tal que $\mathcal{F}^0$ refina a $\mathcal{F}^{0,k}$. Observamos que si $k$ y $k'$ son composiciones de $n$, entonces $\mathcal{F}^{0,k} \preceq \mathcal{F}^{0,k'}$ si y sólo si $k \preceq k'$.

Si $\mathcal{F} \in \mathrm{Fl}(V)$ es una bandera de tipo $(k_1, \ldots, k_n) \vDash n$, decimos que una base ordenada $(v_1, \ldots, v_n)$ de $V$ es **adaptada** a la bandera $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}_i = \langle v_1, \ldots, v_{k_1+\cdots+k_i} \rangle$ para todo $i \in [\![l]\!]$. Por ejemplo, la base estándar de $\mathbb{F}^n$ es adaptada a todas las banderas estándar en $\mathbb{F}^n$.

Fijemos un entero positivo $n$. Si un subconjunto $X \subseteq [\![n]\!]$ tiene $k$ elementos, el **shuffle** $\mathrm{sh}(X)$ asociado a $X$ es la única permutación $\sigma \in \mathbb{S}_n$ tal que $\sigma([\![k]\!]) = X$ y cuyas restricciones a los conjuntos $[\![k]\!]$ y $[\![k+1, n]\!]$ son funciones crecientes. Si queremos enfatizar el cardinal de $X$, diremos que $\sigma$ es un $k$**-shuffle**.

Recordemos que una **inversión** de una permutación $\sigma \in \mathbb{S}_n$, es un par $(i, j) \in [\![n]\!]^2$ tal que $i < j$ y $\sigma(i) > \sigma(j)$, y que escribimos $\mathrm{inv}(\sigma)$ al número de inversiones de $\sigma$.

**Lema 1.2.** *Si $n$ es un número natural y $X \subseteq [\![n]\!]$ es un subconjunto de $k$ elementos, entonces*

$$\mathrm{inv}(\mathrm{sh}(X)) = \sum_{x \in X} x - \binom{k+1}{2}.$$

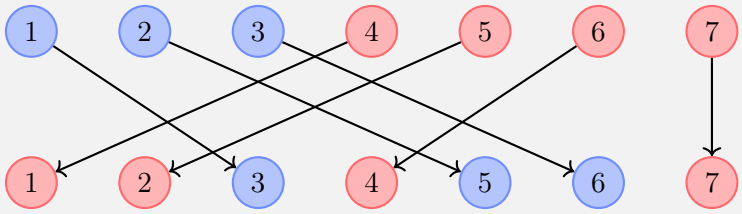
*En particular, este número es independiente de $n$.*

*Demostración.* Como tanto $\sigma|_{[\![k]\!]}$ como $\sigma|_{[\![k+1,n]\!]}$ son funciones crecientes, las inversiones de $\sigma$ son precisamente los pares $(x, y)$ con $x \leq k$, $y > k$ y $\sigma(x) > \sigma(y)$. Por otro lado, hay exactamente $\sum_{x\in X}(x-1)$ pares $(\sigma^{-1}(x), y)$ con $y \in [\![n]\!]$, $x \in k$ y $\sigma(y) < x$; este último conjunto de pares es precisamente la unión disjunta entre el conjunto de inversiones de $\sigma$ junto con el conjunto de pares $(a, b) \subseteq [\![k]\!]^2$ con $a > b$, de los que hay precisamente $\binom{k}{2}$. De este modo

$$\operatorname{inv}(\operatorname{sh}(X)) = \sum_{x\in X}(x-1) - \binom{k}{2} = \sum_{x\in X} x - \binom{k+1}{2},$$

como queríamos. □

**Ejemplo.** En la siguiente figura mostramos al shuffle de $\mathbb{S}_7$ asociado al conjunto $\{3, 5, 6\}$. Este posee exactamente 8 inversiones, que son $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$ y $(3, 6)$. Notemos que las inversiones están en correspondencia biyectiva con la cantidad de cruces entre las flechas que unen al dominio y codominio en la figura, y que $8 = 3 + 5 + 6 - \binom{3+1}{2}$, en concordancia con el Lema 1.2.




## 1.2 La categoría de GL-especies y su estructura monoidal

Si $K$ es un cuerpo, escribimos $\mathbf{Fin}_K$ y $\mathbf{Fin}_K^\times$ para denotar a la categoría de $K$-espacios vectoriales de dimensión finita y transformaciones lineales y a su grupoide de isomorfismos, respectivamente. En esta sección y de aquí en adelante haremos de cuenta que la categoría monoidal $\mathbf{Fin}_K$ es estricta, omitiendo explicitar la aplicación de asociadores.

Una **especie** es un funtor $\mathbf{x} : \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^\times \to \mathbf{Fin}_{\Bbbk}$. Notamos **Sp** a la categoría de las especies y sus morfismos. Como es el caso con cualquier categoría de funtores con codominio abeliano, la categoría de especies también es abeliana, como es explicado en [Mit65, §II.13]. La categoría **Sp** posee una estructura monoidal descripta en detalle en [JS95, §2] y que especificamos a continuación. Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son especies, la especie $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$, llamada el **producto de Cauchy** entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, es el funtor que

- toma el valor $(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})(V) = \bigoplus_{S\leq V} \mathbf{x}(S) \otimes_{\Bbbk} \mathbf{y}(V/S)$ sobre un objeto $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^\times$, y

- envía un morfismo $\varphi : V \to W$ en $\mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ a

$$(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})(\varphi) = \sum_{S \leq V} \mathbf{x}(\varphi|_S) \otimes_{\Bbbk} \mathbf{y}(\varphi|^{V/S}),$$

  donde los isomorfismos $\varphi|_S : S \to \varphi(S)$ y $\varphi|^{V/S} : V/S \to W/\varphi(S)$ son los inducidos de la manera evidente por $\varphi$.

Hemos remarcado por claridad que los productos tensoriales del lado derecho de las últimas dos igualdades son tomados sobre el cuerpo $\Bbbk$; para aligerar la notación dejaremos de decorar este símbolo esperando que el lector pueda distinguir a partir del contexto cuándo nos referimos al producto tensorial sobre $\Bbbk$ y cuándo al producto monoidal de $\mathbf{Sp}$.

La unidad para este producto monoidal es la especie $\mathbf{1}$ que toma, para cada $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$, el valor

$$\mathbf{1}(V) = \begin{cases} \Bbbk, & \text{si } V = 0; \\ 0, & \text{si no,} \end{cases} \tag{1.1}$$

y envía toda flecha a la identidad correspondiente. Los unitores de esta estructura monoidal son los que surgen de los unitores usuales de $\mathbf{Fin}_{\Bbbk}$ y dejamos su descripción a cargo del lector. En su lugar describiremos en detalle el asociador de $\mathbf{Sp}$, que será de utilidad más adelante.

Sean $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ especies. Para cada $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ tenemos

$$((\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) \otimes \mathbf{z})(V) = \bigoplus_{T \leq S \leq V} \mathbf{x}(T) \otimes \mathbf{y}(S/T) \otimes \mathbf{z}(V/S)$$

y

$$(\mathbf{x} \otimes (\mathbf{y} \otimes \mathbf{z}))(V) = \bigoplus_{T \leq S \leq V} \mathbf{x}(T) \otimes \mathbf{y}(S/T) \otimes \mathbf{z}((V/T)/(S/T)),$$

y la componente en $V$ del asociador $\alpha_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}} : (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) \otimes \mathbf{z} \to \mathbf{x} \otimes (\mathbf{y} \otimes \mathbf{z})$ es

$$\alpha_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}}(V) = \sum_{T \leq S \leq V} \mathbf{x}(\mathrm{id}_T) \otimes \mathbf{y}(\mathrm{id}_{S/T}) \otimes \mathbf{z}(\Phi_{T,S,V}),$$

donde para cada cadena de subespacios $T \leq S \leq V$ notamos

$$\Phi_{T,S,V} : V/S \to (V/T)/(S/T) \tag{1.2}$$

al isomorfismo natural dado por el tercer teorema de isomorfismo. Salvo un isomorfismo natural que proviene de iterar este asociador, podemos escribir a la potencia monoidal $\mathbf{x}^{\otimes l}$ de una especie $\mathbf{x}$ de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}^{\otimes l}(V) = \bigoplus_{0 = \mathcal{F}_0 \leq \mathcal{F}_1 \leq \cdots \leq \mathcal{F}_l = V} \mathbf{x}(\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0) \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}(\mathcal{F}_l/\mathcal{F}_{l-1}), \tag{1.3}$$

con un sumando por cada cadena creciente de subespacios de $V$ de longitud $l$. Más aún, si la especie $\mathbf{x}$ se anula sobre el espacio vectorial cero, esta suma directa puede

ser indexada por el conjunto de banderas $\mathrm{Fl}_l(V)$ de longitud $l$. Si $\mathcal{F} \in \mathrm{Fl}_l(V)$, notamos $\pi_{\mathcal{F}} : \mathbf{x}^{\otimes l}(V) \to \mathbf{x}^{\otimes l}(V)$ a la proyección sobre el sumando correspondiente a $\mathcal{F}$.

Aunque no hagamos mención de este hecho más adelante, vale la pena destacar que los autores de [JS95] muestran que la estructura monoidal de **Sp**, a pesar de no ser simétrica, es **trenzada**. Definiciones precisas de estos términos pueden ser encontradas, por ejemplo, en [Mac71, §XI].

Como la categoría **Sp** es monoidal, tiene sentido considerar álgebras, coálgebras y biálgebras en **Sp**, así como también estructuras de módulos, cómodulos y bimódulos sobre ellas. Los axiomas de (co)asociatividad y (co)unidad se traducen a condiciones más concretas una vez que vemos cómo se traducen específicamente en la categoría de especies con el producto de Cauchy. Para familiarizarnos con la estructura monoidal, exploraremos qué significa concretamente la coasociatividad para una coálgebra en especies.

**Ejemplo.** Si $\mathbf{x}$ es una cóalgebra en especies y $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ es un espacio vectorial, la comultiplicación $\Delta$ nos da un morfismo $\Bbbk$-lineal

$$\Delta_V : \mathbf{x}(V) \to \bigoplus_{S \leq V} \mathbf{x}(S) \otimes \mathbf{x}(V/S).$$

Escribamos

$$\Delta_S^V : \mathbf{x}(V) \to \mathbf{x}(S) \otimes \mathbf{x}(V/S)$$

para la componente correspondiente al sumando determinado por $S$ del codominio de $\Delta_V$. La coasociatividad de $\Delta$ implica, para cualquier sucesión de subespacios $T \leq S \leq V$, la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{x}(V) & \xrightarrow{\Delta_T^V} & \mathbf{x}(T) \otimes \mathbf{x}(V/T) & \xrightarrow{\mathrm{id}_T \otimes \Delta_{S/T}^{V/T}} & \mathbf{x}(T) \otimes \mathbf{x}(S/T) \otimes \mathbf{x}\left(\frac{V/T}{S/T}\right) \\
\downarrow{\scriptstyle \Delta_S^V} & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_T \otimes \mathrm{id}_{S/T} \otimes \mathbf{x}(\Phi_{T,S,V})} \\
\mathbf{x}(S) \otimes \mathbf{x}(V/S) & & \xrightarrow{\Delta_T^S \otimes \mathrm{id}_{V/S}} & & \mathbf{x}(T) \otimes \mathbf{x}(S/T) \otimes \mathbf{x}(V/S),
\end{array}$$

donde una vez más escribimos $\Phi_{T,S,V}$ para la flecha provista por el tercer teorema de isomorfismo.

Intuitivamente, si pensamos a los objetos de $\mathbf{x}(V)$ como "objetos en $V$ de tipo $\mathbf{x}$", el morfismo $\Delta_T^V$ determina cómo obtener simultáneamente "objetos en $T$ y $V/T$ de tipo $\mathbf{x}$" a partir de uno en $V$. En otras palabras, da una noción simultánea de restricción a subespacios y proyección al cociente. La condición de coasociatividad implica que esta noción es coherente al aplicarla iteradamente sobre una sucesión de subespacios, independientemente del orden en el que lo hagamos.

Sea $\mathbf{x}$ una biálgebra en **Sp**, con producto $\mu$ y coproducto $\Delta$, y, para cada número

natural $l$, notemos $\mu^l : \mathbf{x}^{\otimes(l+1)} \to \mathbf{x}$ y $\Delta^l : \mathbf{x} \to \mathbf{x}^{\otimes(l+1)}$ a las $l$-ésimas iteraciones de $\mu$ y $\Delta$. Si $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$, $z \in \mathbf{x}(V)$ y $\mathcal{F} \in \mathrm{Fl}_{l+1}(V)$, la **convolución** $z * \mathcal{F}$ es el elemento de $\mathbf{x}(V)$ dado por

$$z * \mathcal{F} = \Big(\mu^l(V) \circ \pi_{\mathcal{F}} \circ \Delta^l(V)\Big)(z). \tag{1.4}$$

Si $l = 1$ y $\mathcal{F} = (0, S, V)$, abusaremos la notación y escribiremos $z * S$ en lugar de $z * \mathcal{F}$. El concepto de producto de convolución es particularmente relevante para nosotros dado que para la especie $\mathbf{\Sigma}$ de banderas, que es el principal foco de estudio de este capítulo, el producto de convolución coincide con el **producto** o **proyección de Tits**, una operación interesante desde la geometría y la teoría de arreglos de hiperplanos. Utilizaremos esta herramienta en la Sección 1.8.

Si $V$ es un objeto en $\mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ su grupo de automorfismos en esa categoría es $\mathrm{GL}(V)$. En consecuencia si $\mathbf{x}$ es una especie, el espacio vectorial $\mathbf{x}(V)$ es un $\mathrm{GL}(V)$-módulo a izquierda: concretamente, si $g \in \mathrm{GL}(V)$ y $v \in \mathbf{x}(V)$ entonces $g \cdot v = \mathbf{x}(g)(v)$. Una especie $\mathbf{x}$ es **relativamente proyectiva** si para cada espacio vectorial $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ el $\mathrm{GL}(V)$-módulo $\mathbf{x}(V)$ es proyectivo. Como $\mathrm{GL}(V)$ es un grupo finito y $\Bbbk$ es un cuerpo de característica cero, el Teorema de Maschke implica que la categoría de $\mathrm{GL}(V)$-módulos de dimensión finita es semisimple. En términos del vocabulario que acabamos de presentar, este hecho muestra que toda especie es relativamente proyectiva si $\Bbbk$ es un cuerpo de característica cero.

Sea $n$ un entero no negativo. Tenemos un endofuntor $(-)_n : \mathbf{Sp} \to \mathbf{Sp}$ que asigna a cada $\mathbf{x}$ el objeto $\mathbf{x}_n$ dado por

$$\mathbf{x}_n(V) = \begin{cases} \mathbf{x}(V), & \text{si } \dim(V) = n; \\ 0, & \text{si no} \end{cases} \qquad \mathbf{x}_n(\varphi) = \begin{cases} \mathbf{x}(\varphi), & \text{si } \dim(V) = n; \\ 0, & \text{si no} \end{cases} \tag{1.5}$$

para cada $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ y cada morfismo $\varphi : V \to W$ en $\mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$. La acción de $(-)_n$ sobre flechas es la obvia. Decimos que una especie en la imagen de este funtor está **concentrada en dimensión** $n$. Hay una transformación natural $\pi_n : \mathrm{id}_{\mathbf{Sp}} \to (-)_n$ tal que para cada especie $\mathbf{x}$ y espacio $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ la aplicación $\pi_n(V) : \mathbf{x}(V) \to \mathbf{x}_n(V)$ es la identidad si $\dim(V) = n$ y cero en cualquier otro caso.

La categoría $\mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ es la unión disjunta de los grupoides ${}_n\mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ de espacios vectoriales de dimensión $n$. Podemos identificar a la subcategoría plena generada por $\mathbb{F}^n$ dentro de ${}_n\mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ con el grupo $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n)$ pensado como una categoría con un único objeto. La inclusión $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n) \to {}_n\mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ es una equivalencia, como lo es siempre la inclusión de un punto en un grupoide. Así, obtenemos una equivalencia de categorías

$$\mathbf{Sp} = \mathrm{Fun}(\mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}, \mathbf{Fin}_{\Bbbk}) \cong \prod_n \mathrm{Fun}(\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n), \mathbf{Fin}_{\Bbbk}) \cong \prod_n \mathrm{mod}_{\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n)}. \tag{1.6}$$

Esto implica que una especie $\mathbf{x}$ concentrada en dimensión $n$ está determinada salvo un isomorfismo natural por el $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n)$-módulo $\mathbf{x}(\mathbb{F}^n)$. La siguiente es una consecuencia útil de este hecho:

**Lema 1.3.** *Sea* $\mathbf{x}$ *una especie concentrada en grado* $n$ *e* $\mathbf{y}$ *una especie arbitraria. La aplicación*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ni \varphi \longmapsto \varphi(\mathbb{F}^n) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n)}(\mathbf{x}(\mathbb{F}^n),\mathbf{y}(\mathbb{F}^n))$$

*es un isomorfismo natural en* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$*.*

*Demostración.* Como $\mathbf{x}$ está concentrada en grado $n$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Hom}(\mathbf{x},\mathbf{y}_n)$ considerado en la categoría $\mathrm{Fun}({}_n\mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times},\mathbf{Fin}_{\Bbbk})$. Así, el resultado se sigue de aplicar las equivalencias de categorías de (1.6). □

Sea $\mathbf{c}$ una coálgebra en especies con counidad $\varepsilon$. Veremos tras algunos preliminares que la categoría de $\mathbf{c}$-(bi)comódulos tiene suficientes inyectivos:

**Proposición 1.4.** *Hay una adjunción entre el funtor* $-\otimes\mathbf{c}:\mathbf{Sp}\to\mathrm{comod}_{\mathbf{c}}$ *y el funtor de olvido* $U:\mathrm{comod}_{\mathbf{c}}\to\mathbf{Sp}$*. Concretamente, dada una especie* $\mathbf{y}$*, el isomorfismo natural*

$$F:\mathrm{Hom}_{\mathbf{c}}(-,\mathbf{y}\otimes\mathbf{c})\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(U(-),\mathbf{y}),$$

*está dado por*

$$F(\varphi)=(\mathrm{id}_{\mathbf{y}}\otimes\varepsilon)\varphi$$

*y su inversa es*

$$F^{-1}(\psi)=(\psi\otimes\mathrm{id}_{\mathbf{c}})\rho.$$ □

Un comódulo a derecha de la forma $\mathbf{y}\otimes\mathbf{c}$ se dice *libre*. La equivalencia de categorías

$$\mathbf{Sp}\cong\prod_n \mathrm{mod}_{\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n)}$$

establecida en (1.6), junto al Teorema de Maschke, muestran que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(-,\mathbf{y})$ es un funtor exacto. En consecuencia, gracias al isomorfismo natural de la proposición anterior vemos que todo comódulo libre es inyectivo.

**Corolario 1.5.** *Las categoría de* $\mathbf{c}$*-comódulos a izquierda, derecha y de* $\mathbf{c}$*-bicomódulos poseen suficientes inyectivos.*

*Demostración.* Solamente consideramos el caso a derecha, ya que las demostraciones para los otros casos son muy similares. Si $\mathbf{x}$ es un $\mathbf{c}$-comódulo a derecha, la coacción a derecha $\rho:\mathbf{x}\to\mathbf{x}\otimes\mathbf{c}$ es un monomorfismo, ya que $(\mathrm{id}_{\mathbf{x}}\otimes\varepsilon)\rho=\mathrm{id}_{\mathbf{x}}$. Como $\mathbf{x}\otimes\mathbf{c}$ es un $\mathbf{c}$-comódulo a derecha libre, es inyectivo, como queríamos. □

Para concluir esta sección, definimos la serie de Hilbert de una especie $\mathbf{x}$ como

$$\mathrm{Hilb}_{\mathbf{x}}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\dim(\mathbf{x}(\mathbb{F}^n))}{|\,\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n)|}\,t^n,$$

en analogía con las series de Hilbert exponenciales clásicas, donde el denominador del coeficiente que acompaña a $t^n$, en lugar de ser $n!=|\mathbb{S}_n|$, es

$$|\,\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n)|=\frac{\ell^{n(n-1)/2}}{(1-\ell)^n}\prod_{i=1}^{n}(1+\ell+\ell^2+\cdots+\ell^i).$$

## 1.3 La especie exponencial

La **especie exponencial e** está dada en cada espacio $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ por

$$\mathbf{e}(V) = \Bbbk \mathbf{e}_V,$$

donde $\Bbbk \mathbf{e}_V$ es el $\Bbbk$-espacio vectorial unidimensional libremente generado por el símbolo $\mathbf{e}_V$, y para cada morfismo $\varphi : V \to W$ en $\mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ la aplicación $\mathbf{e}(\varphi) : \mathbf{e}(V) \to \mathbf{e}(W)$ envía $\mathbf{e}_V$ en $\mathbf{e}_W$. El nombre de esta especie se debe a que su serie de Hilbert

$$\mathrm{Hilb}_{\mathbf{e}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{|\operatorname{GL}(\mathbb{F}^n)|}$$

es precisamente la $q$-exponencial, definida por ejemplo en [KC02, §9.7]. Esta serie es la serie hipergeométrica básica análoga a la exponencial clásica.

La especie exponencial es una biálgebra en **Sp**. La multiplicación $\mu : \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \to \mathbf{e}$, la unidad $\eta : \mathbf{1} \to \mathbf{e}$, la comultiplicación $\Delta : \mathbf{e} \to \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$ y la counidad $\varepsilon : \mathbf{e} \to \mathbf{1}$ tienen, para cada $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ y cada subespacio $S \leq V$, componentes tales que

$$\mu(V)(\mathbf{e}_S \otimes \mathbf{e}_{V/S}) = \mathbf{e}_V, \qquad \eta(0)(1) = \mathbf{e}_0,$$
$$\Delta(V)(\mathbf{e}_V) = \sum_{S \leq V} \mathbf{e}_S \otimes \mathbf{e}_{V/S}, \qquad \varepsilon(0)(\mathbf{e}_0) = 1$$

En particular, podemos hablar de **e-bicomódulos**: tales cosas son especies $\mathbf{x}$ munidas de morfismos $\lambda : \mathbf{x} \to \mathbf{e} \otimes \mathbf{x}$ y $\rho : \mathbf{x} \to \mathbf{x} \otimes \mathbf{e}$ que satisfacen las condiciones usuales. De modo similar a lo que observamos en el ejemplo de la Sección 1.2 para las coálgebras en especies, proveer una estructura de $\mathbf{e}$-bicomódulo en especies consiste en dar nociones de "restricción" y "proyección" a subespacios compatibles entre sí.

Veamos que describir una estructura de $\mathbf{e}$-comódulo a izquierda sobre una especie $\mathbf{x}$ es lo mismo que describir una extensión $\tilde{\mathbf{x}} : \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\geq} \to \mathbf{Fin}_{\Bbbk}$ de $\mathbf{x}$, donde $\mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\geq}$ es la categoría de $\mathbb{F}$-espacios vectoriales y epimorfismos lineales, de modo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times} & \xrightarrow{\mathbf{x}} & \mathbf{Fin}_{\Bbbk} \\ \big\downarrow{\scriptstyle i} & \nearrow_{\tilde{\mathbf{x}}} & \\ \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\geq} & & \end{array}$$

conmute. Solamente describiremos la forma de pasar de una estructura a la otra omitiendo las verificaciones, que son tediosas pero simples.

A partir de una estructura de $\mathbf{e}$-comódulo a izquierda sobre $\mathbf{x}$ con coacción $\lambda$, podemos describir una extensión $\tilde{\mathbf{x}}$ a $\mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\geq}$ del siguiente modo. Si $\varphi : V \to W$ es

un epimorfismo, definimos $\tilde{\mathbf{x}}(\varphi) : \tilde{\mathbf{x}}(V) \to \tilde{\mathbf{x}}(W)$ como la composición

$$\mathbf{x}(V) \xrightarrow{\lambda} \bigoplus_{S \leq V} \mathbf{e}(S) \otimes \mathbf{x}(V/S) \longrightarrow \mathbf{e}(\ker \varphi) \otimes \mathbf{x}(V/\ker \varphi) \xrightarrow{1 \otimes \mathbf{x}(\alpha)} \mathbf{x}(W)$$

donde $\alpha : V/\ker \varphi \to W$ es el isomorfismo natural provisto por el primer teorema de isomorfismo, la segunda flecha es la proyección al sumando en el que $S = \ker \varphi$ e identificamos $\mathbf{e}(\ker \varphi)$ de la manera obvia en el codominio de la última flecha.

Recíprocamente, dada una tal extensión $\tilde{\mathbf{x}}$, podemos definir una coacción a izquierda $\lambda : \mathbf{x} \to \mathbf{e} \otimes \mathbf{x}$ en la que para cada espacio $V$ se tiene

$$\mathbf{x}(V) \ni v \mapsto \sum_{S \leq V} \mathbf{e}_S \otimes \tilde{\mathbf{x}}(\pi_S)(v) \in (\mathbf{e} \otimes \mathbf{x})(V),$$

donde $\pi_S : V \to V/S$ es la proyección canónica.

De manera similar, las estructuras de $\mathbf{e}$-comódulo a derecha coinciden con las extensiones a la categoría $(\mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\leq})^{\mathrm{op}}$ opuesta a la de $\mathbb{F}$-espacios vectoriales y monomorfismos lineales.

Dado un $\mathbf{e}$-bicomódulo $\mathbf{x}$ para cada $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ y cada $z \in \mathbf{x}(V)$, el elemento $\lambda(V)(z)$ pertenece a $(\mathbf{e} \otimes \mathbf{x})(V)$, por lo que existen vectores $z|^{V/S} \in \mathbf{x}(V/S)$ bien definidos, uno por cada subespacio $S \leq V$, tales que

$$\lambda(V)(z) = \sum_{S \leq V} \mathbf{e}_S \otimes z|^{V/S}.$$

Similarmente, para cada $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ y cada $z \in \mathbf{x}(V)$ existen vectores $z|_S \in \mathbf{x}(S)$ bien definidos, uno por cada subespacio $S \leq V$, tales que

$$\rho(V)(z) = \sum_{S \leq V} z|_S \otimes \mathbf{e}_{V/S}.$$

Las condiciones sobre $\lambda$ y $\rho$ impuestas por el hecho de que den lugar a una estructura de bicomódulo implican la siguiente serie de identidades para todo $z \in \mathbf{x}(V)$ y para cada sucesión $S \leq T \leq V$ de subespacios:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}(\Phi_{T,S,V})\left((z|^{V/T})|^{(V/T)/(S/T)}\right) = z|^{V/S}, \quad (z|_S)|_T = z|_T, \\ &z|^{V/0} = z = z|_V, \qquad\qquad (z|_S)|^{S/T} = (z|^{V/T})|_{S/T}, \end{aligned}$$

donde $\Phi_{T,S,V} : V/S \to (V/T)/(S/T)$ es el isomorfismo natural de (1.2).

Recíprocamente, sea $\mathbf{x}$ una especie y, para cada par de subespacios $S \leq V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$, sean $l_{V,S} : \mathbf{x}(V) \to \mathbf{x}(S)$ y $r^{V,S} : \mathbf{x}(V) \to \mathbf{x}(V/S)$ transformaciones $\Bbbk$-lineales que cumplen, para cada subespacio $T \leq S$, las identidades

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}(\Phi_{T,S,V}) \circ r^{V/T,S/T} \circ r^{V,T} = r^{V,S}, \quad l_{S,T} \circ l_{V,S} = l_{V,T}, \\ &r^{V,0} = \mathrm{id}_{\mathbf{x}(V)} = l_{V,V}, \qquad\qquad r^{S,T} \circ l_{V,S} = l_{V/T,S/T} \circ r^{V,T}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

La especie $\mathbf{x}$ posee entonces una estructura de $\mathbf{e}$-bicomódulo con coacciones $\lambda : \mathbf{x} \to \mathbf{e} \otimes \mathbf{x}$ y $\rho : \mathbf{x} \to \mathbf{x} \otimes \mathbf{e}$ dadas por

$$\lambda(V)(z) = \sum_{S \leq V} \mathbf{e}_S \otimes r^{V,S}(z), \qquad \rho(V)(z) = \sum_{S \leq V} l_{V,S}(z) \otimes \mathbf{e}_{V/S}$$

para cada $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ y cada $z \in \mathbf{x}(V)$. En general describiremos todas las estructuras de $\mathbf{e}$-bicomódulo que consideremos de esta forma.

Como la coálgebra $\mathbf{e}$ es counitaria, tenemos una noción de bicomódulo **trivial**. Explícitamente, toda especie $\mathbf{x}$ resulta un $\mathbf{e}$-bicomódulo trivial si ponemos, para cada espacio $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ y cada subespacio $S \leq V$,

$$l_{V,S} = \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathbf{x}(V)}, & \text{si } S = V; \\ 0, & \text{si no,} \end{cases} \qquad r^{V,S} = \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathbf{x}(V)}, & \text{si } S = 0; \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Estas funciones satisfacen las identidades de (1.7). Las coacciones $\lambda$ y $\rho$ están dadas para cada $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ y $z \in \mathbf{x}(V)$ por

$$\lambda(V)(z) = \mathbf{e}_0 \otimes z, \qquad \rho(V)(z) = z \otimes \mathbf{e}_{V/V}.$$

Como la única estructura de $\mathbf{e}$-bicomódulo que podemos fijar sobre una especie $\mathbf{x}$ concentrada en una dimensión es la trivial, omitiremos la descripción de la estructura de $\mathbf{e}$-bicomódulo de esas especies.

## 1.4 La cohomología de un e-bicomódulo

Si $\mathbf{x}$ es un $\mathbf{e}$-bicomódulo, la **cohomología** de $\mathbf{x}$ es

$$H^{\bullet}(\mathbf{x}) = \mathrm{Ext}^{\bullet}(\mathbf{x}, \mathbf{e}),$$

con Ext calculado en la categoría de $\mathbf{e}$-bicomódulos. Recordemos que esto tiene sentido en vistas de que probamos que esta categoría tiene suficientes inyectivos en el Corolario 1.5. Esta cohomología puede calcularse por cualquier resolución inyectiva de $\mathbf{e}$ y en particular, a partir de la **construcción cobar reducida**, que describimos a continuación tras algunos preliminares. Referimos al lector a [Wei94, §8.7] para el desarrollo de la teoría en general.

La **especie exponencial reducida** $\overline{\mathbf{e}}$ es el conúcleo de la unidad $\eta : \mathbf{1} \to \mathbf{e}$, el cual es canónicamente isomorfo al núcleo de la counidad $\varepsilon : \mathbf{e} \to \mathbf{1}$. Esta especie coincide en todos los objetos no nulos de $\mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ con $\mathbf{e}$ y es tal que $\overline{\mathbf{e}}(0) = 0$. Al ser isomorfa al núcleo de la counidad, es una subcoálgebra no counital de $\mathbf{e}$: su comultiplicación $\overline{\Delta} : \overline{\mathbf{e}} \to \overline{\mathbf{e}} \otimes \overline{\mathbf{e}}$ está dada por

$$\overline{\Delta}(V)(\mathbf{e}_V) = \sum_{0 < S < V} \mathbf{e}_S \otimes \mathbf{e}_{V/S}$$

para cada $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ no nulo. Como $\overline{\mathbf{e}}$ se anula sobre el espacio nulo, para cada número natural $n$ la potencia $n$-ésima $\overline{\mathbf{e}}^{\otimes n}$ está dada en cada $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ por

$$\overline{\mathbf{e}}^{\otimes n}(V) = \bigoplus_{\mathcal{F} \in \mathrm{Fl}_n(V)} \overline{\mathbf{e}}(\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0) \otimes \overline{\mathbf{e}}(\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1) \otimes \cdots \otimes \overline{\mathbf{e}}(\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n-1})$$

de manera similar a lo que ocurre en (1.3), pero sólo indexando la suma sobre banderas en $V$. Si $\mathcal{F} \in \mathrm{Fl}_n(V)$, el sumando correspondiente a $\mathcal{F}$ en esta suma directa es el espacio vectorial de dimensión uno generado por el elemento

$$\mathbf{e}_{\mathcal{F}} := \mathbf{e}_{\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0} \otimes \mathbf{e}_{\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n-1}},$$

y la función

$$\Bbbk\mathrm{Fl}_n(V) \ni \mathcal{F} \longmapsto \mathbf{e}_{\mathcal{F}} \in \overline{\mathbf{e}}^{\otimes n}(V)$$

resulta un isomorfismo $\mathrm{GL}(V)$-equivariante al cual desde ahora consideraremos una identificación.

Usando la comultiplicación de $\overline{\mathbf{e}}$ podemos hacer del objeto graduado $\overline{\mathbf{e}}^{\otimes \bullet}$ de $\mathbf{Sp}$ un objeto semicosimplicial (ver [Wei94, §8.1]) con morfismos de cocara $\partial^i : \overline{\mathbf{e}}^{\otimes n} \to \overline{\mathbf{e}}^{\otimes n+1}$ dados por

$$\partial^i = \mathrm{id}_{\overline{\mathbf{e}}}^{\otimes i-1} \otimes \overline{\Delta} \otimes \mathrm{id}_{\overline{\mathbf{e}}}^{\otimes n-i} \qquad (1 \leq i \leq n). \tag{1.8}$$

Para cada entero positivo $n$, evaluando la especie semicosimplicial $\overline{\mathbf{e}}^{\otimes \bullet}$ en $\mathbb{F}^n$ obtenemos un $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n)$-módulo semicosimplicial $\overline{\mathbf{e}}^{\otimes \bullet}(\mathbb{F}^n)$. Notamos $\Sigma_n^{\bullet}$ al complejo de cocadenas asociado. Como veremos en la Sección 1.5, este complejo nos resultará interesante por su relevancia geométrica en la descripción del poset de subespacios de un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita.

Sea $\mathbf{x}$ un $\mathbf{e}$-bicomódulo y sean $\lambda : \mathbf{x} \to \mathbf{e} \otimes \mathbf{x}$ y $\rho : \mathbf{x} \to \mathbf{x} \otimes \mathbf{e}$ las $\mathbf{e}$-coacciones a izquierda y derecha sobre $\mathbf{x}$, respectivamente. Para cada entero no negativo $n$ la construcción cobar reducida $C^{\bullet}(\mathbf{x})$ es el complejo semicosimplicial

$$C^n(\mathbf{x}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{e}}^{\otimes n}) \tag{1.9}$$

con morfismos de cocara $\partial^i : C^n(\mathbf{x}) \to C^{n+1}(\mathbf{x})$, para cada $i \in [\![0, n+1]\!]$, tales que

$$\partial^i(\alpha) = \begin{cases} (\pi \otimes \alpha) \circ \lambda, & \text{si } i = 0; \\ (\mathrm{id}_{\overline{\mathbf{e}}}^{\otimes i-1} \otimes \overline{\Delta} \otimes \mathrm{id}_{\overline{\mathbf{e}}}^{\otimes n-i}) \circ \alpha, & \text{si } 0 < i < n+1; \\ (\alpha \otimes \pi) \circ \rho, & \text{si } i = n+1. \end{cases} \tag{1.10}$$

para cada $\alpha \in C^n(\mathbf{x})$. Aquí $\pi : \mathbf{e} \to \overline{\mathbf{e}}$ es el conúcleo del morfismo de unidad $\eta : \mathbf{1} \to \mathbf{e}$. De este modo, la diferencial $d : C^n(\mathbf{x}) \to C^{n+1}(\mathbf{x})$ de este complejo es

$$d = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial^i.$$

Si además $\mathbf{x}$ es una coálgebra, disponemos de un producto cup en $C^\bullet(\mathbf{x})$ compatible con la diferencial. Concretamente, dados $f \in C^m(\mathbf{x})$ y $g \in C^n(\mathbf{x})$, su producto $f \smile g$ es la composición

$$\mathbf{x} \xrightarrow{\Delta} \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \xrightarrow{f \otimes g} \overline{\mathbf{e}}^{\otimes m+n}.$$

Al ser compatible con la diferencial, este producto provee de una estructura de álgebra a $H^\bullet(\mathbf{x})$ y como suele ser el caso en diversos contextos, el producto a nivel homología resulta conmutativo por los argumentos presentados en [SA04]. Esta estructura nos será de especial utilidad al llevar a cabo cálculos explícitos.

Será útil también disponer de una expresión "en coordenadas" de los morfismos de cocara. Si $\alpha \in C^n(\mathbf{x})$, para cada $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ y cada $z \in \mathbf{x}(V)$ podemos escribir de manera única

$$\alpha(V)(z) = \sum_{\mathcal{F} \in \mathrm{Fl}_n(V)} \alpha(V, z, \mathcal{F}) \mathbf{e}_{\mathcal{F}}, \tag{1.11}$$

y es fácil ver que los escalares $\alpha(V, z, \mathcal{F}) \in \Bbbk$ determinan a $\alpha$ completamente. Además, el morfismo $\mathbf{x}(V) \ni z \mapsto \alpha(V, z, \mathcal{F}) \in \Bbbk$ es lineal. Escribamos los morfismos de cocara (1.10) en estos términos: siempre que $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$, $z \in \mathbf{x}(V)$ y $\mathcal{F} \in \mathrm{Fl}_{n+1}(V)$ tenemos

$$\partial^i(\alpha)(V, z, \mathcal{F}) = \begin{cases} \alpha(V/\mathcal{F}_1, z|^{\mathcal{F}_1}, \partial_0(\mathcal{F})), & \text{si } i = 0; \\ \alpha(V, z, \partial_i(\mathcal{F})), & \text{si } 0 < i < n+1; \\ \alpha(\mathcal{F}_n, z|_{\mathcal{F}_n}, \partial_{n+1}(\mathcal{F})), & \text{si } i = n+1. \end{cases} \tag{1.12}$$

Concluimos esta sección con una observación que será de utilidad más adelante:

**Lema 1.6.** *Si* $\mathbf{x}$ *es un* $\mathbf{e}$*-bicomódulo trivial, el complejo* $C^\bullet(\mathbf{x})$ *es isomorfo a la imagen del complejo* $\overline{\mathbf{e}}^{\otimes \bullet}$ *por el funtor* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(\mathbf{x}, -)$.

*Demostración.* Si $n$ es un entero no negativo, toda $n$-cocadena $\alpha \in C^n(\mathbf{x})$ es tal que las composiciones $(\pi \otimes \alpha) \circ \lambda$ y $(\alpha \otimes \pi) \circ \rho$ se anulan, pues la estructura de $\mathbf{e}$-bicomódulo sobre $\mathbf{x}$ es trivial. De este modo, los morfismos de cocara $\partial^i$ definidos en (1.10) son nulos si $i = 0$ o $i = n+1$ y por lo tanto coinciden con la composición de $\alpha$ con los morfismos de cocara $\partial^i$ de $\overline{\mathbf{e}}^{\otimes \bullet}$ definidos en (1.8). □

## 1.5 El poset de subespacios de un $\mathbb{F}$-espacio vectorial

El Lema 1.6 establece una conexión entre el complejo $C^\bullet(\mathbf{x})$ y el complejo $\overline{\mathbf{e}}^{\otimes \bullet}$. Es por ello que más adelante veremos que será necesario conocer la cohomología del complejo $\Sigma_n^\bullet$ asociado al $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n)$-módulo semicosimplicial $\overline{\mathbf{e}}^{\otimes \bullet}(\mathbb{F}^n)$ para poder determinar la cohomología de un $\mathbf{e}$-bicomódulo $\mathbf{x}$. Como $\overline{\mathbf{e}}^{\otimes k}(\mathbb{F}^n)$ posee una base indexada por banderas parciales de longitud $k$ en $\mathbb{F}^n$ y la diferencial del complejo $\Sigma_n^\bullet$ tiene en cuenta la forma en la que las banderas están dispuestas en el espacio, es de esperar que la descripción de su

cohomología requiera el estudio del poset de subespacios de $\mathbb{F}^n$, tarea que llevaremos a cabo en esta sección.

Fijemos un número natural $n$ por el resto de esta sección, llamemos $P_n$ al poset de subespacios propios y no nulos del espacio vectorial $\mathbb{F}^n$ y notemos $\Delta_n$ al ***order complex*** de $P_n$, definido por ejemplo en [Bar11, Definition 1.4.4]. Recordemos que un $k$-símplex en $\Delta_n$ es una cadena estricta $\mathcal{F}_1 < \mathcal{F}_2 < \cdots < \mathcal{F}_{k+1}$ de $k+1$ elementos de $P_n$. Esto es casi una bandera en $V$: la asignación

$$\varphi_k : \Delta_n^k \to \mathrm{Fl}_{k+2}(\mathbb{F}^n)$$

tal que $\varphi_k(\mathcal{F}_1 < \mathcal{F}_2 < \cdots < \mathcal{F}_{k+1}) = (0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{k+1}, \mathbb{F}^n)$ es una biyección a la que consideraremos una identificación; de este modo hablaremos de $k$-símplices en $\Delta_n$ o de banderas de longitud $k+2$ indistinguiblemente.

La acción obvia de $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n)$ sobre el conjunto de los subespacios de $\mathbb{F}^n$ se extiende a una acción simplicial en $\Delta_n$ y brinda una estructura de $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n)$-módulo a los $\Bbbk$-módulos de homología simplicial reducida $\tilde{H}_q(\Delta_n)$. Este objeto ha sido estudiado en detalle por Quillen, Solomon, Tits y otros:

**Teorema 1.7** (Solomon–Tits)**.** *El complejo simplicial $\Delta_n$ tiene el tipo homotópico de un ramo de $\ell^{\binom{n}{2}}$ esferas de dimensión $n-2$ y, en particular, su homología simplicial reducida está concentrada en grado $n-2$. Para cualquier anillo de coeficientes, el módulo de homología de dimensión máxima $\tilde{H}_{n-2}(\Delta_n)$ está generado como $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n)$-módulo por el elemento*

$$\varepsilon_n = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} \sigma \cdot \mathcal{F}^0.$$

*Aquí consideramos a cada biyección $\sigma$ como el automorfismo en $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n)$ inducido por la permutación de la base estándar $e_i \mapsto e_{\sigma(i)}$ y donde $\mathcal{F}^0 \in \mathrm{Fl}_+(\mathbb{F}^n)$ denota a la bandera completa estándar.*

*Demostración.* Las distintas partes del enunciado están probadas en [Sol69], [Qui73], [Ben98, Theorem 6.8.5]. □

La estructura de $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n)$-módulo sobre $\tilde{H}_{n-2}(\Delta_n)$ se conoce como el **módulo de Steinberg** y la notamos $\mathrm{St}_n$. Este módulo es el único $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n)$-módulo simple de grado $\ell^{\binom{n}{2}}$. Referimos al lector a [Hum87] para un resumen de sus muchas otras propiedades; al final de la Sección 1.6 explicitaremos los detalles que necesitamos sobre su teoría de representaciones.

Notemos $C_\bullet(\Delta_n)$ al $\Bbbk$-complejo de cadenas aumentado asociado a $\Delta_n$, de modo que $C_j(\Delta_n) = \Bbbk\mathrm{Fl}_{j+2}(\mathbb{F}^n)$ para $j \geq -1$. Si $D_\bullet$ es un complejo de (co)cadenas y $m \in \mathbb{Z}$, escribimos $D_\bullet[m]$ para el complejo tal que $D_k[m] = D_{k+m}$ y con diferenciales idénticas a las de $D_\bullet$ pero con índices trasladados acordemente. Remarcamos que a diferencia de lo que es usual en la literatura, *no* introducimos signos al trasladar índices.

**Proposición 1.8.** *Hay un isomorfismo de* $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n)$*-módulos semicosimpliciales*

$$\xi : \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C_\bullet(\Delta_n), \Bbbk) \to \overline{\mathbf{e}}^{\otimes \bullet+2}(\mathbb{F}^n) = \Sigma_n^\bullet[2]$$

*tal que si* $\delta_{\mathcal{F}}$ *es la transformación lineal en* $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C_k(\Delta_n), \Bbbk)$ *que se anula sobre todas las banderas de* $\mathrm{Fl}_{k+2}(\mathbb{F}^n)$ *salvo en* $\mathcal{F}$*, en donde toma el valor* 1*, entonces*

$$\xi(\delta_{\mathcal{F}}) = \mathbf{e}_{\mathcal{F}}.$$

La demostración de la proposición es simplemente una verificación, que omitimos. Dado que este resultado identifica $\Sigma_n^\bullet[2]$ con el complejo que calcula la cohomología simplicial reducida de $\Delta_n$, en lo que sigue abusaremos la notación y escribiremos $H^m(\Sigma_n^\bullet)$ para referirnos a $H^m(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C_\bullet(\Delta_n)[-2], \Bbbk))$. El isomorfismo de la proposición anterior nos es útil para describir la cohomología del complejo $\Sigma_n^\bullet$ a partir del Teorema de Solomon–Tits:

**Corolario 1.9.** *La cohomología del complejo* $\Sigma_n^\bullet$ *es tal que*

$$H^q(\Sigma_n^\bullet) \cong \begin{cases} \mathrm{St}_n^*, & \text{si } q = n; \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

*donde el isomorfismo es de* $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n)$*-módulos. Más aún, el* ***pairing*** *canónico*

$$\langle -, - \rangle : H^n(\Sigma_n^\bullet) \otimes H_n(\Sigma_n^\bullet) \to \Bbbk$$

*dado por la evaluación es no degenerado.*

*Demostración.* El isomorfismo del enunciado es el inducido por el isomorfismo semicosimplicial de la Proposición 1.8. Como el complejo $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C_\bullet(\Delta_n), \Bbbk)$ calcula la cohomología simplicial *reducida* de $\Delta_n$, el Teorema de Solomon–Tits 1.7 y la versión del Teorema de coeficientes universales presentada en [DK01, Corollary 2.31] prueban las otras afirmaciones del enunciado. □

## 1.6 Variedades de banderas parciales y el módulo de Steinberg

Por el resto de esta sección fijamos un número natural $n$ y llamamos $G$ al grupo $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^n)$. Varias veces hablaremos de una permutación $\sigma \in \mathbb{S}_n$ como un elemento de $G$: al hacer esto nos estamos refiriendo al automorfismo de $\mathbb{F}^n$ que permuta los elementos de la base estándar, de modo que $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.

Notaremos $B$ al **subgrupo (estándar) de Borel** de $G$ que consiste de todas las transformaciones que preservan a la bandera completa estándar, o en otras palabras, a las transformaciones que son representadas en la base estándar de $\mathbb{F}^n$ por matrices triangulares

superiores. Las coclases dobles de $B$ en $G$ pueden indexarse por permutaciones en $\mathbb{S}_n$ de un modo que explicaremos tras algunos preliminares.

Si $V$ es un espacio vectorial de dimensión $n$, existe una **función de distancia** $\mathrm{d} : \mathrm{Fl}_+(V) \times \mathrm{Fl}_+(V) \to \mathbb{S}_n$ a valores en el grupo simétrico de $n$ elementos descripta en detalle en [AB08, §4.3], donde los autores la llaman $\pi$. Explicaremos a continuación cómo se calcula.

Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son banderas completas en $V$, para cada $i \in [\![n]\!]$ la bandera $\mathcal{G}$ induce una filtración de largo $n$ en el espacio unidimensional $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$, y podemos definir $\mathrm{d}(\mathcal{F},\mathcal{G})(i)$ como el único índice $j$ tal que el cociente $(\mathcal{F}_i \cap (\mathcal{G}_j + \mathcal{F}_{i-1}))/F_{i-1}$ es no trivial. Equivalentemente, este índice $j$ puede calcularse como el mínimo tal que el cociente $(\mathcal{F}_i \cap \mathcal{G}_j)/(\mathcal{F}_{i-1} \cap \mathcal{G}_j)$ es no nulo. El lector familiarizado con la teoría de *buildings* podrá reconocer a la función d como la función de distancia de Weyl entre cámaras del *building* de subespacios de $V$, definida en esta generalidad en [AB08, §3.5].

La permutación $\mathrm{d}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ es también conocida como la **permutación de Jordan-Hölder** asociada al par $(\mathcal{F},\mathcal{G})$. El nombre se debe a que si consideramos a las banderas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ como series de composición de $V$, el Teorema de Jordan-Hölder afirma que hay una permutación $\sigma \in \mathbb{S}_n$ de modo que $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} \cong \mathcal{G}_{\sigma(i)}/\mathcal{G}_{\sigma(i)-1}$ para todo $i \in [\![n]\!]$. La permutación $\mathrm{d}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ es la permutación construida en una de las demostraciones estándar de este teorema (por ejemplo, la presentada en [Lan02, Theorem 3.5]).

**Ejemplo.** A modo de ejemplo, calcularemos esta permutación para el par de banderas $(\mathcal{F},\mathcal{G})$, donde $\mathcal{F}$ es la bandera completa estándar $\mathcal{F}^0$ en $\mathbb{F}^5$ y $\mathcal{G}$ es la bandera

$$\mathcal{G} = (0, \langle e_2\rangle, \langle e_2, e_3\rangle, \langle e_2, e_3, e_1 + e_2 + 2e_5\rangle, \langle e_2, e_3, e_1 + e_2 + 2e_5, e_1 + e_4\rangle, \mathbb{F}^5).$$

En la siguiente tabla indicamos la dimensión de los espacios $(\mathcal{F}_i \cap (\mathcal{G}_j + \mathcal{F}_{i-1}))/F_{i-1}$:

| | $\mathcal{F}_1$ | $\mathcal{F}_2$ | $\mathcal{F}_3$ | $\mathcal{F}_4$ | $\mathcal{F}_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{G}_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $\mathcal{G}_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $\mathcal{G}_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $\mathcal{G}_4$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $\mathcal{G}_5$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Si sombreamos las coordenadas no nulas de la tabla, vemos que hay precisamente una celda sombreada por cada fila y por cada columna. De acuerdo a la definición de la función de distancia, la celda $(j,i)$ está sombreada si y sólo si $\mathrm{d}(\mathcal{F},\mathcal{G})(i) = j$. Resulta entonces que

$$\mathrm{d}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = (1532),$$

donde escribimos a la permutación en su factorización en ciclos. De hecho, es

fácil ver que la tabla que escribimos es precisamente la matriz de permutación correspondiente a $\mathrm{d}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Mencionamos a continuación sólo dos de las muchas propiedades útiles de la permutación de Jordan-Hölder, refiriendo al lector a [Abe91, §II] para las demostraciones correspondientes:

**Proposición 1.10.** *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ banderas completas en $V$.*

- *La función de distancia* d *es invariante por la acción de $G$: concretamente, si $g \in G$ entonces $\mathrm{d}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathrm{d}(g \cdot \mathcal{F}, g \cdot \mathcal{G})$.*
- *La permutación $\mathrm{d}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sigma$ es la única tal que existe una base ordenada $(v_1, \ldots, v_n)$ adaptada a $\mathcal{F}$ de modo que la base ordenada $(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$ es adaptada a $\mathcal{G}$.* □

A partir del segundo enunciado de la proposición anterior se deduce fácilmente que $\mathrm{d}(\mathcal{F}, \sigma\mathcal{F}) = \sigma$ para cualquier bandera $\mathcal{F}$, hecho que también es posible chequear directamente a partir de la definición de la función de distancia.

Veamos ahora de qué modo $\mathbb{S}_n$ indexa las coclases dobles de $B$ en $G$:

**Proposición 1.11** (Descomposición de Bruhat, [Abe91, 4.2])**.** *Sean $g, h$ elementos de $G$:*

- *Tenemos que $BgB = BhB$ si y sólo si $\mathrm{d}(\mathcal{F}^0, g\mathcal{F}^0) = \mathrm{d}(\mathcal{F}^0, h\mathcal{F}^0)$, y si llamamos a esta última permutación $\sigma$, se tiene además que $BgB = B\sigma B$.*
- *Hay una descomposición $G = \coprod_{\sigma \in \mathbb{S}_n} B\sigma B$.*

*Demostración.* Si $BgB = BhB$, escribamos $h = b_1 g b_2$ con $b_1, b_2 \in B$. Tenemos entonces que

$$\mathrm{d}(\mathcal{F}^0, h\mathcal{F}^0) = \mathrm{d}(\mathcal{F}^0, b_1 g b_2 \mathcal{F}^0) = \mathrm{d}(\mathcal{F}^0, b_1 g \mathcal{F}^0) = \mathrm{d}(b_1^{-1}\mathcal{F}^0, b_1^{-1} b_1 g \mathcal{F}^0) = \mathrm{d}(\mathcal{F}^0, g\mathcal{F}^0).$$

Recíprocamente, si $\mathrm{d}(\mathcal{F}^0, g\mathcal{F}^0) = \sigma$, existe una base ordenada $(v_1, \ldots, v_n)$ adaptada a $\mathcal{F}^0$ de modo que la base ordenada $(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$ es adaptada a $g\mathcal{F}^0$, de acuerdo a la segunda parte de la proposición inmediatamente anterior. Esto nos dice que si $\varphi$ es el isomorfismo que envía $e_i \mapsto v_i$ para todo $i \in [\![n]\!]$ entonces

$$\sigma\varphi\mathcal{F}^0 = g\mathcal{F}^0,$$

por lo que $\varphi^{-1}\sigma^{-1}g \in B$. Además, como $(v_1, \ldots, v_n)$ es adaptada a $\mathcal{F}^0$, el isomorfismo $\varphi$ también pertenece al subgrupo de Borel $B$. Juntando estas dos afirmaciones probamos que $BgB = B\sigma B$, como queríamos. □

Una consecuencia útil de la descomposición de Bruhat es que muestra que la permutación de Jordan-Hölder es un invariante completo para clasificar órbitas de la acción de $G$ sobre pares de banderas completas, como indica el siguiente corolario:

**Corolario 1.12.** *Sean $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ y $(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$ dos pares de banderas completas. Existe una transformación $g \in G$ tal que $(g\mathcal{F}, g\mathcal{G}) = (\mathcal{F}', \mathcal{G}')$ si y sólo si $\mathrm{d}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathrm{d}(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$.*

*Demostración.* Probamos la implicación no evidente. Supongamos que $\mathrm{d}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathrm{d}(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$ y tomemos $h \in G$ tal que $h\mathcal{F} = \mathcal{F}^0$. Gracias a la invariancia de la distancia respecto a la acción de $G$ tenemos que $\mathrm{d}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathrm{d}(\mathcal{F}^0, h\mathcal{G})$. Similarmente si $h' \in G$ es tal que $h'\mathcal{F}' = \mathcal{F}^0$ tenemos que $\mathrm{d}(\mathcal{F}^0, h\mathcal{G}) = \mathrm{d}(\mathcal{F}^0, h'\mathcal{G}')$, por lo que el caso general se deduce del caso en que tanto $\mathcal{F}$ como $\mathcal{F}'$ son la bandera estándar $\mathcal{F}^0$.

Probemos entonces que si $\mathrm{d}(\mathcal{F}^0, \mathcal{G}) = \sigma = \mathrm{d}(\mathcal{F}^0, \mathcal{G}')$ entonces hay una transformación $g \in G$ tal que $g\mathcal{G} = \mathcal{G}'$ y que fija a $\mathcal{F}^0$. Escribimos $\mathcal{G} = h\mathcal{F}^0$ y $\mathcal{G}' = h'\mathcal{F}^0$ para ciertas transformaciones $h, h' \in G$. Por la descomposición de Bruhat 1.11 sabemos que $h = b_1\sigma b_2$ y $h' = b_3\sigma b_4$ con $b_i \in B$. Si definimos $g = b_3 b_1^{-1}$, entonces $g$ fija a la bandera estándar $\mathcal{F}^0$ pues $g \in B$, y además

$$g\mathcal{G} = gh\mathcal{F}^0 = b_3 b_1^{-1} b_1 \sigma b_2 \mathcal{F}^0 = b_3 \sigma \mathcal{F}^0 = b_3 \sigma b_4 \mathcal{F}^0 = h'\mathcal{F}^0 = \mathcal{G}',$$

como queríamos. □

Clasificar *ternas* de banderas completas por la acción diagonal de $G$ es mucho más complejo. En [MWZ99] se presenta una solución completa a este problema.

Llamaremos **subgrupo parabólico (estándar)** a cualquier subgrupo de $G$ que contenga a $B$. Estos subgrupos son análogos a los subgrupos de Young de $\mathbb{S}_n$, en un sentido que precisaremos a continuación. Recordemos que si $k \vDash n$, el grupo $G$ actúa sobre las banderas de $\mathrm{Fl}_k(\mathbb{F}^n)$ de modo que si $g \in G$ y $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_l) \in \mathrm{Fl}_k(\mathbb{F}^n)$, entonces $g \cdot \mathcal{F} = (g(\mathcal{F}_1), \ldots, g(\mathcal{F}_l))$. El siguiente lema muestra que los subgrupos parabólicos están parametrizados por el conjunto de composiciones de $n$.

**Lema 1.13.** *La asignación*

$$\{\textit{composiciones de } n\} \to \{\textit{subgrupos parabólicos de } G\}$$

*dada por $k \mapsto \mathrm{Stab}\, \mathcal{F}^{0,k}$ es una biyección que invierte el orden.*

Recordamos que aquí $\mathcal{F}^0$ denota a la bandera completa estándar.

*Demostración.* Recordemos que si $k, k'$ son composiciones de $n$, entonces $k \preceq k'$ exactamente cuando $\mathcal{F}^{0,k} \subseteq \mathcal{F}^{0,k'}$. Luego, como $\mathcal{F}^{0,k} \preceq \mathcal{F}^0$ para cualquier composición $k$, tenemos que $\mathrm{Stab}\, \mathcal{F}^{0,k} \supseteq \mathrm{Stab}\, \mathcal{F}^0 = B$, por lo que la asignación del enunciado está bien definida e invierte el orden. Además, $\mathrm{Stab}\, \mathcal{F}^{0,k}$ es el grupo de transformaciones que son representadas en la base estándar de $\mathbb{F}^n$ por matrices triangulares superiores por bloques

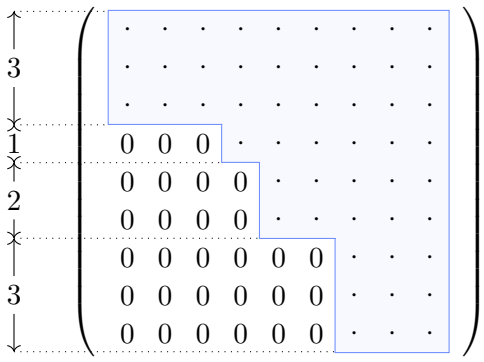



Figura 1.1: La correspondencia del Lema 1.13 asigna a la composición $(3,1,2,3)$ el subgrupo de transformaciones de $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^9)$ que tienen esta forma al expresarse en la base estándar de $\mathbb{F}^9$.

de tamaños dictados por $k$ de la manera que ilustra la Figura 1.1, lo que muestra que la asignación es inyectiva.

Para ver que es sobreyectiva, veamos que todo subgrupo parabólico de $G$ es de la forma $\operatorname{Stab}\mathcal{F}^{0,k}$ para alguna composición $k \vDash n$, siguiendo la demostración dada en [Igu, Theorem 16.5]. Sea $P$ un subgrupo parabólico. Como $P$ preserva la bandera trivial $(0,\mathbb{F}^n)$, existe una partición $k=(k_1,\dots,k_l)$ maximal respecto al refinamiento tal que $P$ preserva $\mathcal{F}^{0,k}$, o en otras palabras, tal que $P \subseteq \operatorname{Stab}\mathcal{F}^{0,k}$. Veamos ahora la contención inversa.

Llamemos $d=k_1$ para aligerar la notación. La maximalidad de $k$ implica que existe una transformación $\varphi \in P$ tal que $\varphi(e_1)$ tiene coordenada $d$-ésima no nula en su expresión en la base estándar y la descomposición de Bruhat 1.11 nos dice que $\varphi \in B\sigma B$ para alguna permutación $\sigma$, de manera que

$$\sigma \in B\varphi B \subseteq BPB = P.$$

Como $\sigma = b_1\varphi b_2$ con $b_1, b_2 \in B$, el vector $\sigma(e_1)$ tiene coordenada $d$-ésima no nula y en consecuencia es $\sigma(e_1) = e_d$. Si $\lambda \in \mathbb{F}$, escribimos $E_{ij}^{\lambda} \in G$ para la transformación "elemental" tal que

$$E_{ij}^{\lambda}(e_k) = \begin{cases} e_k, & \text{si } k \neq j; \\ e_k + \lambda e_i, & \text{si } k = j. \end{cases}$$

Observamos que $E_{ij}^{\lambda} \in B$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ siempre que $i<j$. Si elegimos $s$ de modo que $e_s = \sigma^{-1}(e_1)$, entonces

$$E_{d1}^{1} = \sigma E_{1s}^{1}\sigma^{-1} \in P.$$

Más aún, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ y $j \in [\![2,n]\!]$ tenemos que

$$[E_{d1}^{1}, E_{1j}^{\lambda}] = E_{dj}^{\lambda} \in P$$

y luego si $i < d$

$$[E^1_{id}, E^\lambda_{dj}] = E^\lambda_{ij} \in P.$$

Más generalmente, argumentos similares muestran que las transformaciones $E^\lambda_{ij}$ pertenecen a $P$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ y pares $i, j$ tales que

$$k_1 + \cdots + k_r \leq i < j$$

para algún $r \in [\![0, l-1]\!]$. Como estas transformaciones generan $\operatorname{Stab} \mathcal{F}^{0,k}$, esto demuestra lo que queríamos. □

Si $P$ es un subgrupo parabólico de $G$, el **tipo** de $P$ es la composición $k$ que se corresponde con $P$ bajo esta biyección, y el **rango** $|P|$ de $P$ es la longitud de $k$ o, equivalentemente, su coaltura en el poset de subgrupos parabólicos de $G$. Como muestra el próximo lema, el conjunto de coclases a izquierda de $P$ en $G$ parametriza a las banderas de tipo $k$ y por este motivo nos referimos a $G/P$ como la **variedad de banderas parciales** de tipo $k$.

**Lema 1.14.** *Sea $P$ el subgrupo parabólico de $G$ de tipo $k$. Hay una biyección*

$$G/P \to \mathrm{Fl}_k(\mathbb{F}^n)$$

*dada por $\overline{g} \mapsto g \cdot \mathcal{F}^{0,k}$.*

*Demostración.* Esto se deduce inmediatamente del teorema de órbitas y estabilizadores, observando que $P = \operatorname{Stab} \mathcal{F}^{0,k}$ y que la acción de $G$ sobre el conjunto de banderas $\mathrm{Fl}_k(\mathbb{F}^n)$ es transitiva. □

Vale la pena comparar el resultado anterior con su análogo combinatorio:

**Lema 1.15.** *Sea $Y_k$ el subgrupo de Young de $\mathbb{S}_n$ de tipo $k$. Llamemos $\Pi_k$ al conjunto de todas las particiones ordenadas de $[\![n]\!]$ de tipo $k$ y $\pi^{0,k}$ a la partición ordenada estándar de este tipo. Hay una biyección*

$$\mathbb{S}_n/Y_k \to \Pi_k$$

*dada por $\overline{\sigma} \mapsto \sigma \cdot \pi^{0,k}$.*

*Demostración.* Al igual que en el lema anterior, esto es consecuencia del teorema de órbitas y estabilizadores, porque la acción de $\mathbb{S}_n$ es transitiva sobre $\Pi_k$ y el subgrupo $Y_k$ es el estabilizador de la partición $\pi^{0,k}$. □

Los subgrupos parabólicos y de Young de un tipo dado están conectados por la siguiente identidad, que es un refinamiento de la descomposición de Bruhat:

**Lema 1.16.** *Si $P$ denota el subgrupo parabólico de $G$ de tipo $k$ e $Y_k$ el subgrupo de Young de $\mathbb{S}_n$ de ese tipo, entonces*

$$P = \coprod_{\sigma \in Y_k} B\sigma B.$$

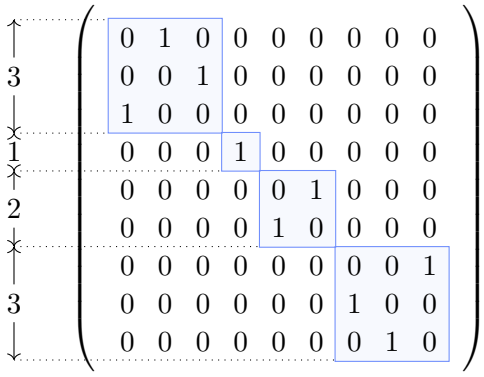



Figura 1.2: La permutación (321)(56)(789) pertenece al subgrupo de Young de tipo $(3, 1, 2, 3)$ de $\mathbb{S}_9$. Si la consideramos como una transformación lineal permutando la base estándar de $\mathbb{F}^9$, pertenece al subgrupo parabólico del mismo tipo.

En la Figura 1.2 vemos un ejemplo de una permutación dentro de un subgrupo de Young considerada como elemento del subgrupo parabólico correspondiente.

*Demostración.* Por la descomposición de Bruhat 1.11 sabemos que

$$P = \coprod_{\sigma \in \mathbb{S}_n} (B\sigma B) \cap P.$$

Afirmamos además que para cualquier $\sigma \in \mathbb{S}_n$ la intersección $(B\sigma B) \cap P$ es o bien vacía o bien igual a $B\sigma B$. En efecto, si no es vacía entonces $b_1 \sigma b_2 \in P$ para algunos $b_1, b_2 \in B$. Como $B \subseteq P$, esto implica que $B\sigma B \subseteq P$. Basta entonces con determinar qué permutaciones $\sigma$ son tales que $B\sigma B$ interseca no trivialmente a $P$, o equivalentemente, qué permutaciones $\sigma$ pertenecen a $P$. Gracias al Lema 1.13, podemos ver que esto ocurre si y sólo si $\sigma \in Y_k$. □

Si $P$ es un subgrupo parabólico, la variedad de banderas parciales $G/P$ es particionada por la acción del subgrupo de Borel $B$ por multiplicación a izquierda en órbitas llamadas **celdas de Schubert**. De este modo, los elementos de $G/P$ se corresponden con banderas del tipo de $P$ y sus celdas de Schubert están indexadas por las coclases dobles $BgP$ para $g \in G$. En el caso particular en que $P = B$, $G/P$ es la variedad de banderas completas y sus celdas de Schubert están indexadas por permutaciones: este es el contenido de la descomposición de Bruhat de 1.11.

A continuación probaremos algunos lemas que nos permitirán conocer cuántas celdas de Schubert hay en cualquier variedad de banderas parciales. Esto nos será útil para algunos argumentos combinatorios que haremos más adelante. Comenzaremos con uno particularmente técnico:

**Lema 1.17.** *Sean $\sigma, \tau$ permutaciones en $\mathbb{S}_n$, $P$ el subgrupo parabólico de tipo $k$ de $G$ e $Y_k$ el subgrupo de Young de $\mathbb{S}_n$ del mismo tipo. Si existe $b \in B$ tal que $\sigma^{-1}b\tau \in P$, entonces $\sigma^{-1}\tau \in Y_k$.*

*Demostración.* Escribamos $k = (k_1, \dots, k_l)$ y supongamos que $\sigma^{-1}b\tau \in P$ para cierto $b \in B$. Si queremos probar que $\sigma^{-1}\tau \in Y_k$, bastará entonces con probar para todo $r \in [\![l]\!]$ que siempre que $i \leq k_1 + \cdots + k_r$, se tiene que

$$\sigma^{-1}\tau(i) \leq k_1 + \cdots + k_r.$$

Tomemos $i \leq k_1 + \cdots + k_r$ y estudiemos la imagen del vector $e_i$ de la base estándar bajo la transformación $\sigma^{-1}b\tau$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}b\tau(e_i) &= \sigma^{-1}b(e_{\tau(i)}) \\ &= \sigma^{-1}\left(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_{\tau(i)}e_{\tau(i)}\right) \\ &= \alpha_1 e_{\sigma^{-1}(e_1)} + \cdots + \alpha_{\tau(i)}e_{\sigma^{-1}\tau(i)}\end{aligned}$$

para ciertos escalares $\alpha_i$. Sabemos que $\alpha_{\tau(i)} \neq 0$, porque los elementos de $B$ tienen diagonal no nula, y como $\sigma^{-1}b\tau \in P$, debe ser $\sigma^{-1}\tau(i) \leq k_1 + \cdots + k_r$, como queríamos. □

**Lema 1.18.** *Si $P$ es el subgrupo parabólico de tipo $k$ de $G$, entonces hay*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_l!}$$

*celdas de Schubert en la variedad de banderas parciales $G/P$.*

Vale la pena destacar que en el caso en que $P = B$ el tipo de $P$ es $(1, 1, \dots, 1)$ y el coeficiente multinomial asociado es igual a $n!$, en concordancia con el hecho de que las permutaciones indexan las coclases dobles de $B$. Resaltamos también que la cantidad de celdas de Schubert es independiente del cuerpo base $\mathbb{F}$.

*Demostración.* Si llamamos $Y_k$ al subgrupo de Young de tipo $k$ de $\mathbb{S}_n$, por lo visto en el Lema 1.16 sabemos que

$$P = \coprod_{\sigma \in Y_k} B\sigma B.$$

Luego, usando la descomposición de Bruhat 1.11 tenemos que

$$G = \coprod_{\sigma \in \mathbb{S}_n} B\sigma B = \coprod_{[\tau] \in \mathbb{S}_n/Y_k} B\tau \left( \coprod_{\omega \in Y_k} \omega B \right) = \bigcup_{[\tau] \in \mathbb{S}_n/Y_k} B\tau \left( \coprod_{\omega \in Y_k} B\omega B \right) = \bigcup_{[\tau] \in \mathbb{S}_n/Y_k} B\tau P.$$

Veremos ahora que la última unión es disjunta. Para ello debemos probar que si $\sigma$ y $\tau$ permutaciones en $\mathbb{S}_n$, se tiene que $B\sigma P = B\tau P$ si y sólo si $\sigma^{-1}\tau \in Y_k$.

Supongamos primero que $B\sigma P = B\tau P$, en cuyo caso tenemos que $\sigma = b\tau p$ para ciertos $b \in B$ y $p \in P$. De esto deducimos que $\sigma^{-1}b\tau \in P$ y luego gracias al Lema 1.17 podemos concluir que $\sigma^{-1}\tau \in Y_k$, como queríamos. Recíprocamente, si $\sigma^{-1}\tau \in Y_k$, entonces $\sigma^{-1}\tau \in P$ si pensamos a $\sigma$ y $\tau$ como transformaciones en $G$ permutando la base estándar de $\mathbb{F}^n$. De este modo $\tau = \sigma\sigma^{-1}\tau \in \sigma P \subseteq B\sigma P$. Como también se tiene que $\tau\sigma^{-1} \in P$, un razonamiento análogo prueba que $\sigma \in B\tau P$. Esto implica que $B\sigma P = B\tau P$.

De este modo obtenemos la siguiente identidad que generaliza la descomposición de Bruhat de 1.11 de un modo diferente a la identidad del Lema 1.16:

$$G = \coprod_{[\sigma]\in\mathbb{S}_n/Y_k} B\sigma P,$$

Como hay exactamente $k_1! \cdot k_2! \cdots k_l!$ permutaciones en $Y_k$, deducimos que hay

$$|\mathbb{S}_n/Y_k| = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_l!} = \binom{n}{k}$$

celdas de Schubert en $G/P$, como queríamos. □

Para lo que sigue, estaremos interesados en contar la cantidad de elementos de algunas variedades de banderas, para lo que precisamos algunas definiciones. Sean $\hbar$ una variable y $n$ un número natural. Escribimos

$$[n]_\hbar = \frac{1-\hbar^n}{1-\hbar} = 1 + \hbar + \hbar^2 + \cdots + \hbar^{n-1}$$

y definimos el **$\hbar$-factorial** como

$$[n]_\hbar! = [1]_\hbar \cdot [2]_\hbar \cdots [n]_\hbar.$$

Dado $i \in [\![n]\!]$, los **$\hbar$-binomiales**, también conocidos como **polinomios de Gauss**, se definen como

$$\binom{n}{i}_\hbar = \frac{[n]_\hbar!}{[i]_\hbar! \cdot [n-i]_\hbar!}.$$

A pesar de que no sea obvio a partir de la definición, los polinomios de Gauss son polinomios en $\hbar$ a coeficientes enteros (ver por ejemplo [Kas95, Proposition IV.2.1.(a)]). Veremos a continuación que los polinomios de Gauss nos permiten enumerar subespacios de $\mathbb{F}$-espacios vectoriales. Recordemos que $\ell$ denota el número de elementos de $\mathbb{F}$.

**Lema 1.19** ([Sta12, 1.3.18])**.** *Si $i$ y $n$ son números naturales con $i \leq n$, la evaluación del polinomio de Gauss*

$$\binom{n}{i}_\hbar$$

*en $\hbar = \ell$ es la cantidad de subespacios vectoriales de dimensión $i$ de un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión $n$ y su evaluación en $\hbar = 1$ es la cantidad de subconjuntos de cardinal $i$ de un conjunto de cardinal $n$.*

*Demostración.* Comenzamos contando cuántas $i$-uplas ordenadas de vectores linealmente independientes hay en un $\mathbb{F}$-espacio vectorial $V$ de dimensión $n$. El primer vector de una tal $i$-upla debe ser no nulo, por lo que tenemos $\ell^n - 1$ opciones para la primer elección. El segundo debe ser linealmente independiente con el primero, por lo que tenemos $\ell^n - \ell$ opciones para él, y prosiguiendo con este razonamiento vemos que tenemos

$$(\ell^n - 1)(\ell^n - \ell)\cdots(\ell^n - \ell^{i-1}) \tag{1.13}$$

$i$-uplas linealmente independientes en $V$. Ahora bien, muchas de ellas generan el mismo subespacio. Si fijamos un subespacio de $V$ de dimensión $i$ llamado $W$, vemos que el mismo razonamiento que antes muestra que hay

$$d := (\ell^i - 1)(\ell^i - \ell)\cdots(\ell^i - \ell^{i-1})$$

bases ordenadas diferentes para $W$, por lo que estamos contando a este subespacio exactamente $d$ veces en (1.13).

Tenemos entonces que la cantidad de subespacios de dimensión $i$ en $V$ es el cociente

$$\frac{(\ell^n - 1)(\ell^n - \ell)\cdots(\ell^n - \ell^{i-1})}{(\ell^i - 1)(\ell^i - \ell)\cdots(\ell^i - \ell^{i-1})} = \frac{(\ell^n - 1)(\ell^{n-1} - 1)\cdots(\ell^{n-i+1} - 1)}{(\ell^i - 1)(\ell^{i-1} - 1)\cdots(\ell - 1)} = \binom{n}{i}_{\hbar=\ell},$$

probando la primera afirmación del enunciado. La segunda es sencilla de demostrar observando que la evaluación de $[n]_\hbar$ en $\hbar = 1$ es $n$. □

Por otro lado, si $k = (k_1, \ldots, k_l) \vDash n$, el **$\hbar$-multinomial** asociado está definido por la fórmula

$$\binom{n}{k}_\hbar = \frac{[n]_\hbar!}{[k_1]_\hbar! \cdot [k_2]_\hbar! \cdots [k_l]_\hbar!}.$$

Como

$$\binom{n}{k}_\hbar = \binom{n}{k_1}_\hbar \cdot \binom{n-k_1}{k_2}_\hbar \cdot \binom{n-k_1-k_2}{k_3}_\hbar \cdots \binom{k_{l-1}+k_l}{k_{l-1}}_\hbar, \tag{1.14}$$

los $\hbar$-multinomiales también son polinomios en $\hbar$ a coeficientes enteros.

Si $P$ es un subgrupo parabólico de tipo $k$ de $G$, escribiremos

$$\binom{n}{P}_\hbar := \binom{n}{k}_\hbar.$$

El siguiente lema brinda una interpretación combinatoria del $\hbar$-multinomial en términos de puntos de la variedad $G/P$.

**Lema 1.20.** *Sea $P$ el subgrupo parabólico de tipo $k$ de $G$. La evaluación del $\hbar$-multinomial $\binom{n}{P}_\hbar$ en $\hbar = \ell$ es el número de puntos en la variedad de banderas parciales $G/P$ y su evaluación en $\hbar = 1$ es el número de particiones ordenadas de tipo $k$ de un conjunto de $n$ elementos.*

Vale la pena destacar que este resultado, junto al Lema 1.18, muestra que la evaluación de este multinomial en 1 cuenta la cantidad de celdas de Schubert en la variedad de banderas $G/P$.

*Demostración.* Gracias al Lema 1.14, sabemos que $|G/P| = |\mathrm{Fl}_k(\mathbb{F}^n)| = |\mathrm{Fl}_k(V)|$ donde $V$ es cualquier $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión $n$. El resultado es trivial para $n = 1$, por lo que trabajaremos inductivamente y lo asumiremos como válido para espacios de dimensión $n' < n$. Si $k = (k_1, \ldots, k_l) \vDash n$, hay una biyección entre el conjunto de banderas $\mathrm{Fl}_k(V)$ y el conjunto de pares $(W, \mathcal{F})$ con $W$ un subespacio de $V$ de dimensión $k_1$ y $\mathcal{F} \in \mathrm{Fl}_{(k_2,\ldots,k_l)}(V/W)$ dada por

$$(F_0, F_1, \ldots, F_l) \mapsto (F_1, (F_1/F_1, \ldots F_l/F_1)).$$

De esto se deduce la igualdad

$$|\mathrm{Fl}_k(V)| = \binom{n}{k_1}_{\hbar} \cdot \binom{n-k_1}{k_2, \ldots, k_l}_{\hbar}$$

gracias al Lema 1.19 y la hipótesis inductiva. Esta última igualdad y la identidad (1.14) completan la demostración.

De manera similar, la segunda afirmación del Lema 1.19 y la identidad (1.14) muestran que la evaluación del $\hbar$-multinomial en $\hbar = 1$ es simplemente el multinomial usual

$$\binom{n}{k}_{\hbar=1} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_l!} = \binom{n}{k},$$

que enumera los objetos mencionados en el enunciado. □

Presentamos a continuación una identidad que nos será de utilidad más adelante:

**Lema 1.21** ([Sol66, Corollary 1.1])**.** *Tenemos que*

$$\sum_{P \supseteq B} (-1)^{|P|} \binom{n}{P}_{\hbar} = \hbar^{\binom{n}{2}}$$

*como polinomios en $\hbar$.*

*Demostración.* Evaluando el lado izquierdo de la igualdad en $\hbar = \ell$ y usando el Lema 1.20, obtenemos que

$$\sum_{P \supseteq B} (-1)^{|P|} \binom{n}{P}_{\hbar=\ell} = (-1)^n \chi(C_\bullet(\Delta_n)), \tag{1.15}$$

donde $\chi(C_\bullet(\Delta_n))$ es la característica de Euler del complejo simplicial $C_\bullet(\Delta_n)$. Por el Teorema de Solomon–Tits 1.7, el lado derecho de la igualdad (1.15) resulta ser

$$(-1)^n \left( (-1)^{n-2} \ell^{\binom{n}{2}} \right) = \ell^{\binom{n}{2}}.$$

Como la identidad (1.15) es válida para cualquier potencia de primos $\ell$, esto establece que los polinomios del enunciado son iguales. □

Vale la pena destacar que al especializar el resultado anterior en $\hbar = 1$, obtenemos que

$$\sum_{P \supseteq B} (-1)^{|P|} \binom{n}{P}_{\hbar=1} = 1.$$

Mencionamos al pasar (para el lector familiarizado con la teoría de complejos de Coxeter) una interpretación homológica del hecho anterior: el lado izquierdo de la igualdad es, salvo el signo $(-1)^n$, la característica de Euler del complejo que calcula la homología reducida del complejo de Coxeter asociado al arreglo de trenzas de dimensión $n$. El tipo homotópico de ese arreglo es el de una esfera de dimensión $n$, de donde recuperamos que el lado derecho es 1.

Para cada subgrupo parabólico $P$, escribimos $\chi_P$ para el caracter del $G$-módulo de permutación sobre la variedad de banderas parciales $G/P$. De acuerdo a lo demostrado en [Hum87, 1.3] o [Cur66, Theorem 2], el caracter del $G$-módulo de Steinberg que mencionamos anteriormente en el Teorema de Solomon–Tits es es

$$\chi_{\mathrm{St}} = \sum_{P \supseteq B} (-1)^{|P|} \chi_P. \tag{1.16}$$

La descripción de este caracter nos permite establecer el siguiente hecho, que será de gran utilidad más adelante:

**Lema 1.22.** *El módulo de Steinberg es isomorfo a su dual siempre que el cuerpo de coeficientes* $\Bbbk$ *tenga característica cero.*

*Demostración.* De la fórmula (1.16) se desprende inmediatamente que el caracter del módulo de Steinberg toma valores enteros, y en particular reales, lo que implica que es isomorfo a su propio dual si $\Bbbk = \mathbb{Q}$, gracias a lo establecido en [EGH+11, Corollary 4.2.4]. Ahora bien, si $\Bbbk$ es un cuerpo de característica cero arbitrario y escribimos $V$ para el módulo de Steinberg definido sobre $\mathbb{Q}$, cualquier isomorfismo $\mathbb{Q}$-lineal $V \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, \mathbb{Q})$ da lugar a un isomorfismo $\Bbbk$-lineal

$$V \otimes \Bbbk \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, \mathbb{Q}) \otimes \Bbbk \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, \Bbbk) \cong \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V \otimes \Bbbk, \Bbbk)$$

compatible con la acción de $G$, donde el primero de los isomorfismos de arriba vale gracias a que $V$ es de dimensión finita. □

Concluimos la sección con un último lema técnico sobre el módulo de Steinberg:

**Lema 1.23.** *El subespacio de elementos $B$-invariantes del módulo de Steinberg es unidimensional. Si $P$ es cualquier subgrupo parabólico que contiene* propiamente *a $B$, el espacio de $P$-invariantes del módulo de Steinberg es nulo.*

*Demostración.* Por la fórmula de Frobenius (ver [FH91, (2.9)]), sabemos que

$$\dim \mathrm{St}^B = \frac{1}{|B|}\sum_{g\in B}\chi_{\mathrm{St}}(g) = \sum_{P\supseteq B}(-1)^{|P|}\left(\frac{1}{|B|}\sum_{g\in B}\chi_P(g)\right).$$

El Lema de Burnside nos dice que la expresión entre paréntesis es la cantidad de órbitas de $B$ en la variedad de banderas parciales $G/P$, que por definición son las celdas de Schubert. De acuerdo al Lema 1.20 este número es la evaluación del $\hbar$-multinomial correspondiente en $\hbar = 1$. Concluimos entonces que

$$\dim \mathrm{St}^B = \sum_{P\supseteq B}(-1)^{|P|}\binom{n}{P}_{\hbar=1} = 1^{\binom{n}{2}} = 1,$$

gracias al Lema 1.21.

Hasta ahora, hemos trabajado con el módulo de Steinberg presentado como el $G$-módulo $\tilde{H}_{n-2}(\Delta_n)$. De acuerdo a [Hum87], hay una realización concreta de este módulo como el submódulo de la representación regular (a izquierda) generado por el elemento

$$e = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n}\sum_{b\in B}(-1)^\sigma \sigma b.$$

En esta realización, un generador explícito para $\mathrm{St}^B$ pensado como subespacio del módulo regular está dada por

$$x = \left(\sum_{b\in B} b\right) e = \sum_{g\in G}(-1)^g g, \tag{1.17}$$

donde escribimos $(-1)^g$ para el signo de la permutación $\sigma \in \mathbb{S}_n$ que indexa la coclase doble $B\sigma B$ a la que pertenece $g$. Gracias al Lema 1.13 es fácil ver que todo parabólico distinto de $B$ contiene al menos una transposición $\tau$ (pensada como elemento de $G$). Como $\tau \in B\tau B$, el coeficiente de $\tau$ en el elemento $x$ de (1.17) es $-1$, pero por otro lado el coeficiente de $\tau$ en $\tau \cdot x$ es 1, probando que $P$ no preserva a $x$. Como $\mathrm{St}^P \subseteq \mathrm{St}^B$ y acabamos de ver que la contención es propia, concluimos que $\mathrm{St}^P = 0$. □

## 1.7 Una sucesión espectral

Fijemos un $\mathbf{e}$-bicomódulo $\mathbf{x}$. Estaremos interesados en calcular la cohomología de $\mathbf{x}$ como $\mathbf{e}$-bicomódulo. Organizaremos esto mediante una sucesión espectral que construiremos, como es usual, gracias a una filtración sobre el complejo cobar $C^\bullet(\mathbf{x})$ que presentamos en la Sección 1.4.

Para cada entero no negativo $n$ existe una filtración descendente $F$ en el espacio vectorial $C^n(\mathbf{x}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{e}}^{\otimes n})$ con capa $p$-ésima

$$F^pC^n(\mathbf{x}) = \{\alpha \in C^n(\mathbf{x}) : \alpha(V) = 0 \text{ para cada } V \text{ con } \dim(V) < p\}.$$

Juntando estas filtraciones obtenemos una filtración $F$ sobre el objeto semicosimplicial $C^\bullet(\mathbf{x})$. En efecto, si $\alpha \in F^pC^n(\mathbf{x})$ y $V \in \mathbf{Fin}_\mathbb{F}^\times$ tiene $\dim(V) < p$, para cada elemento $z \in \mathbf{x}(V)$, bandera $\mathcal{F} \in \mathrm{Fl}_{n+1}(V)$ e $i \in [\![0, n+1]\!]$ tenemos $\partial^i(\alpha)(V, z, \mathcal{F}) = 0$ gracias a (1.12), pues $V/\mathcal{F}_1$, $V$ y $\mathcal{F}_n$ son todos espacios de dimensión menor a $p$. De hecho, tanto $\partial^0(\alpha)$ como $\partial^{n+1}(\alpha)$ pertenecen a $F^{p+1}C^n(\mathbf{x})$.

Esta filtración determina una sucesión espectral $E(\mathbf{x})$, cuya convergencia probaremos más adelante. Su 0-ésima página tiene

$$E_0^{p,q}(\mathbf{x}) = \frac{F^pC^{p+q}(\mathbf{x})}{F^{p+1}C^{p+q}(\mathbf{x})}.$$

Notemos que si $\mathbf{x}$ posee además una estructura de coálgebra, la filtración es compatible con la estructura provista por el producto cup, por lo que la sucesión espectral que determina es multiplicativa.

Probamos ahora algunos lemas que brindan una descripción concreta de la sucesión espectral. Comenzamos describiendo los módulos de la 0-ésima página, recordando que si $\mathbf{x}$ es una especie y $n$ un entero no negativo, $\mathbf{x}_n$ denota a su imagen por el endofuntor $(-)_n$ definido en (1.5) en la Sección 1.2:

**Lema 1.24.** *Para cada entero no negativo $p$, hay un isomorfismo de complejos de cadenas*

$$f^p : (C^\bullet(\mathbf{x}_p))[p] \to E_0^{p,\bullet}(\mathbf{x})$$

*dado por $f^p(\alpha) = \alpha \circ \pi_p(\mathbf{x}) + F^{p+1}C^{p+q}(\mathbf{x})$ para cada $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(\mathbf{x}_p, \overline{\mathbf{e}}^{\otimes p+q})$.*

Notemos que el dominio de $f^p$ no depende de la estructura de $\mathbf{e}$-bicomódulo de $\mathbf{x}$, sino solamente de la especie subyacente.

*Demostración.* Fijemos $p$ y $q$ y sean $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(\mathbf{x}_p, \overline{\mathbf{e}}^{\otimes p+q})$. Es fácil verificar que $\alpha \circ \pi_p(\mathbf{x}) \in F^pC^{p+q}(\mathbf{x})$, por lo que el morfismo $f^p$ está bien definido. Supongamos que $f^p(\alpha) = f^p(\beta)$: entonces $(\alpha - \beta) \circ \pi_p(\mathbf{x}) \in F^{p+1}C^{p+q}(\mathbf{x})$, lo que implica que $\alpha$ coincide con $\beta$ en espacios de dimensión $p$. Como $\mathbf{x}_p$ está concentrada en dimensión $p$ esto muestra que $\alpha = \beta$ y luego $f^p$ es inyectiva.

Para mostrar que $f^p$ es sobreyectiva, sea $\hat{\alpha} \in F^pC^{p+q}(\mathbf{x})$ y consideremos el morfismo $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(\mathbf{x}_p, \overline{\mathbf{e}}^{\otimes p+q})$ tal que para cualquier espacio $V \in \mathbf{Fin}_\mathbb{F}^\times$ de $\dim(V) = p$ tenemos $\alpha(V) = \hat{\alpha}(V)$. Entonces por definición $f^p(\alpha) - \hat{\alpha} \in F^{p+1}C^{p+q}(\mathbf{x})$, y luego $f^p(\alpha) = \hat{\alpha} + F^{p+1}C^{p+q}(\mathbf{x})$ en $E_0^{p,q}(\mathbf{x})$, como queríamos. Esto muestra que $f^p$ es un isomorfismo de espacios vectoriales graduados; resta entonces mostrar que es compatible con las diferenciales.

Sea $\alpha \in C^{p+q}(\mathbf{x}_p)$. Como $\mathbf{x}_p$ es un $\mathbf{e}$-bicomódulo trivial,

$$f^p(\partial\alpha) = \left(\sum_{i=1}^{p+q} \mathrm{id}_{\overline{\mathbf{e}}}^{\otimes i-1} \otimes \overline{\Delta} \otimes \mathrm{id}_{\overline{\mathbf{e}}}^{\otimes p+q-i}\right) \circ \alpha \circ \pi_p(\mathbf{x}) + F^{p+1}C^{p+q+1}(\mathbf{x}),$$

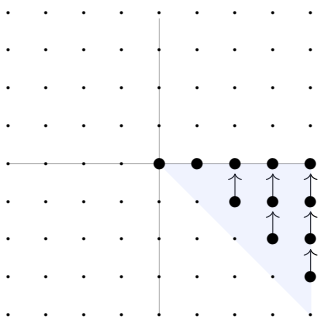


Figura 1.3: Los únicos módulos no nulos de la página $E_0$ son aquellos remarcados dentro de la región sombreada. Las flechas indican la dirección de la diferencial.

y por otro lado

$$\partial f^p(\alpha) = \sum_{i=0}^{p+q+1} \partial^i(\alpha \circ \pi_p(\mathbf{x}) + F^{p+1}C^{p+q}(\mathbf{x}))$$

donde $\partial^i$ denota al morfismo inducido por el morfismo de cocara correspondiente sobre la página $E_0$. Como podemos ver a partir de las fórmulas (1.12) y del hecho de que $\alpha \circ \pi_p(\mathbf{x})$ se anula en espacios de dimensión diferente a $p$, tanto el 0-ésimo como el último de los términos de la suma también se anulan, mostrando que $f^p$ es compatible con las diferenciales. □

Este lema nos indica que la sucesión espectral está concentrada en el cuarto cuadrante y también nos permite describir la página $E_1$:

**Lema 1.25.** *Si* $\mathbf{x}$ *es un* $\mathbf{e}$*-bicomódulo relativamente proyectivo como especie, para cada* $p$ *y cada* $q$ *tenemos isomorfismos*

$$E_1^{p,q}(\mathbf{x}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}(\mathbb{F}^p)}(\mathbf{x}_p(\mathbb{F}^p), H^q(\Sigma_p^\bullet[p])).$$

*En particular,* $E_1^{p,q}(\mathbf{x})$ *se anula salvo que* $p \geq 0$ *y* $q = 0$.

*Demostración.* Fijemos $p$ y $q$. El isomorfismo de complejos del enunciado del Lema 1.24 muestra que

$$E_1^{p,q}(\mathbf{x}) \cong H^q\Big((C^\bullet(\mathbf{x}_p))[p]\Big).$$

Como vimos en el Lema 1.6, la diferencial en $C^\bullet(\mathbf{x}_p)$ es la inducida por la diferencial de $\overline{\mathbf{e}}^{\otimes\bullet}$ tras aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sp}}(\mathbf{x}_p, -)$. Este hecho junto con la naturalidad del isomorfismo del Lema 1.3 muestran que

$$E_1^{p,q}(\mathbf{x}) \cong H^q(\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}(\mathbb{F}^p)}(\mathbf{x}_p(\mathbb{F}^p), \Sigma_p^\bullet[p])).$$

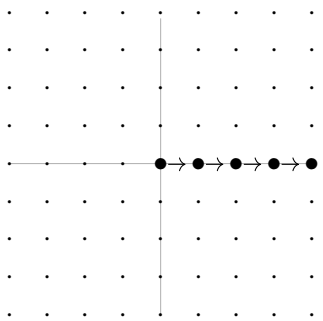


Figura 1.4: Los únicos módulos no nulos de la página $E_1$ son aquellos que aparecen en negrita. Las flechas indican la dirección de la diferencial.

Como $\mathbf{x}$ es un $\mathbf{e}$-bicomódulo relativamente proyectivo, por definición $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}(\mathbb{F}^p)}(\mathbf{x}_p(\mathbb{F}^p), -)$ es exacto y conmuta con la cohomología, probando el isomorfismo del enuciado. El hecho de que la página $E_1(\mathbf{x})$ de la sucesión espectral está concentrada en la fila $q = 0$ se deduce entonces de la descripción de la cohomología de $\Sigma_p^\bullet$ presentada en el Corolario 1.9 del Teorema de Solomon–Tits. □

Usando esta descripción de la página $E_1$ podemos enfocarnos en el problema de la convergencia de la sucesión espectral:

**Corolario 1.26.** *Si* $\mathbf{x}$ *es un* $\mathbf{e}$*-bicomódulo relativamente proyectivo como especie, la sucesión espectral* $E(\mathbf{x})$ *converge a* $H^\bullet(\mathbf{x})$*. Si además* $\mathbf{x}$ *es una coálgebra en la categoría de* $\mathbf{e}$*-bicomódulos, la convergencia es en tanto álgebras.*

La demostración de este hecho es totalmente análoga al argumento presentado en [Tam17, §IV.3]. Enfatizamos que el hecho de que $\mathbf{x}$ sea una coálgebra en la categoría de especies no implica automáticamente que sea una coálgebra en la categoría de $\mathbf{e}$-bicomódulos, pero todos los ejemplos que consideraremos en este capítulo lo son.

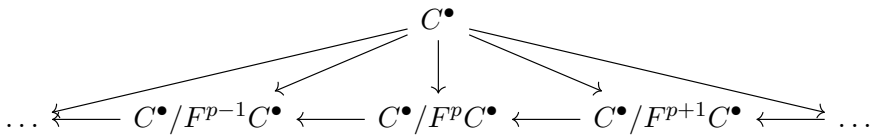
*Demostración.* Apelamos al Teorema de Convergencia Completa [Wei94, Theorem 5.5.10], que afirma que la sucesión espectral asociada a una filtración de un complejo converge a la cohomología de este siempre que la sucesión espectral sea regular y que la filtración sea acotada superiormente y completa. Recordamos que una filtración $F$ sobre un objeto $C$ es **completa** si

$$C \cong C/\varprojlim F^p C$$

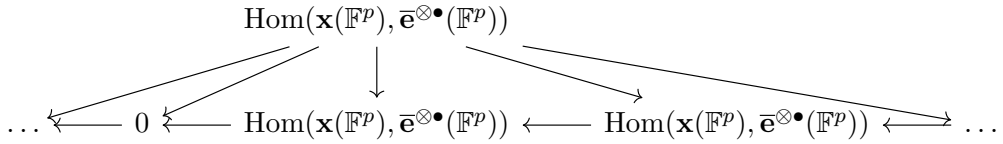
y que una sucesión espectral es **regular** si para cualesquiera sean $p$ y $q$ se tiene que la diferencial $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+1-r}$ es nula para $r$ suficientemente grande.

El Lema 1.25 nos asegura el colapso de la sucesión espectral en la página 2 siempre que el bicomódulo $\mathbf{x}$ es relativamente proyectivo, ya que en ese caso la página anterior está concentrada en una única fila. Esto, en particular, implica la regularidad de la filtración.

Además, esta última es obviamente acotada superiormente, por lo que lo único que hay que verificar es que es completa, es decir, que el cono en la categoría de especies




es universal. En vistas de la equivalencia de categorías (1.6), este hecho es equivalente a la universalidad de los conos




para cada natural $p$, lo cual es evidente. Finalmente, el hecho de que la sucesión espectral es multiplicativa en el caso en que $\mathbf{x}$ es una coálgebra establece la última afirmación del enunciado. □

**Ejemplo.** La convergencia y las descripciones de las dos primeras páginas de nuestra sucesión espectral nos permiten ya determinar completamente la cohomología de los $\mathbf{e}$-bicomódulos más sencillos:

**Corolario 1.27.** *Si $\Bbbk$ es un cuerpo de característica cero, entonces $H^\bullet(\mathbf{1}) \cong \Bbbk$ y $H^\bullet(\mathbf{e}) \cong \Bbbk$.*

*Demostración.* Comenzaremos probando el resultado para $\mathbf{e}$. Bajo la hipótesis del enunciado, $\mathbf{e}$ es relativamente proyectivo, por lo que por el Lema 1.25

$$E_1^{p,0}(\mathbf{e}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}(\mathbb{F}^p)}(\mathbf{e}_p(\mathbb{F}^p), H^0(\Sigma_p^\bullet[p]))$$

y todos los otros términos en la página $E_1$ se anulan. Como $\mathbf{e}_p(\mathbb{F}^p)$ es un $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^p)$-módulo trivial y $H^0(\Sigma_p^\bullet[p])$ es isomorfo al módulo de Steinberg $\mathrm{St}_p$, la dimensión de $E_1^{p,0}(\mathbf{e})$ es la multiplicidad de la representación trivial en $\mathrm{St}_p$. Ahora bien, el módulo de Steinberg es irreducible en característica cero, y solamente es isomorfo al módulo trivial cuando $p = 0$. Esto muestra que $E_1^{p,q}(\mathbf{e})$ se anula siempre que $(p, q) \neq (0, 0)$ y que $E_1^{0,0}(\mathbf{e}) \cong \Bbbk$, probando nuestra afirmación, ya que la sucesión espectral converge.

De manera similar,

$$E_1^{0,0}(\mathbf{1}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}(\mathbb{F}^0)}(\mathbf{e}_0(\mathbb{F}^0), H^0(\Sigma_0^\bullet[0])) \cong \Bbbk$$

es el único término no nulo de la página $E_1(\mathbf{1})$ y una vez más la convergencia de la sucesión espectral implica el resultado que buscábamos. □

## 1.8 Especies de banderas

La **especie de banderas**, que notamos $\mathbf{\Sigma}$, es la que en cada $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ toma el valor

$$\mathbf{\Sigma}(V) = \Bbbk\mathrm{Fl}(V).$$

Observemos que $\mathrm{Fl}(V)$ es un conjunto finito pues $\mathbb{F}$ es un cuerpo finito. Si $\varphi : V \to W$ es un morfismo en $\mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$, la transformación $\mathbf{\Sigma}(\varphi) : \mathbf{\Sigma}(V) \to \mathbf{\Sigma}(W)$ es el único morfismo $\Bbbk$-lineal tal que

$$\mathbf{\Sigma}(\varphi)(\mathcal{F}) = \varphi_*(\mathcal{F})$$

para toda bandera $\mathcal{F} \in \mathrm{Fl}(V)$. La **especie L de banderas completas** es la subespecie de $\mathbf{\Sigma}$ tal que

$$\mathbf{L}(V) = \Bbbk\mathrm{Fl}_+(V).$$

Para cada $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ y cada subespacio $S \leq V$ tenemos transformaciones $\Bbbk$-lineales $l^{V,S} : \mathbf{\Sigma}(V) \to \mathbf{\Sigma}(V/S)$ y $r_{V,S} : \mathbf{\Sigma}(V) \to \mathbf{\Sigma}(S)$ tales que

$$r_{V,S}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}|_S, \qquad\qquad l^{V,S}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}|^{V/S}$$

para cada bandera $\mathcal{F} \in \mathrm{Fl}(V)$. Una verificación tediosa pero simple muestra que estas funciones satisfacen las ecuaciones (1.7), de modo que $\mathbf{\Sigma}$ posee una estructura de $\mathbf{e}$-bicomódulo. Explícitamente, las coacciones a izquierda y derecha $\lambda : \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{e} \otimes \mathbf{\Sigma}$ y $\rho : \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{e}$ están dadas, para cada $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ y $\mathcal{F} \in \mathrm{Fl}(V)$, por

$$\lambda(V)(\mathcal{F}) = \sum_{S \leq V} \mathbf{e}_S \otimes \mathcal{F}|^{V/S}, \qquad\qquad \rho(V)(\mathcal{F}) = \sum_{S \leq V} \mathcal{F}|_S \otimes \mathbf{e}_{V/S}.$$

Es fácil verificar también que con esta estructura la subespecie $\mathbf{L}$ de banderas completas resulta ser un sub-$\mathbf{e}$-bicomódulo de $\mathbf{\Sigma}$, pues la restricción de una bandera completa en $V$ a un subespacio $S$ es una bandera completa en $S$, y lo mismo es cierto para la proyección.

La especie $\mathbf{\Sigma}$ posee una estructura de biálgebra que describimos a continuación. La multiplicación $\mu : \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma}$, la unidad $\eta : \mathbf{1} \to \mathbf{\Sigma}$, la comultiplicación $\Delta : \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{\Sigma}$ y la counidad $\varepsilon : \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{1}$ tienen, para cada $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$, cada subespacio $S \leq V$ y cada terna de banderas $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_l) \in \mathrm{Fl}(S)$, $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_0, \ldots, \mathcal{G}_k) \in \mathrm{Fl}(V/S)$ y $\mathcal{H} \in \mathrm{Fl}(V)$, componentes tales que

$$\mu(V)(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) = (\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_l, \pi_{V/S}^{-1}(\mathcal{G}_1), \ldots, \pi_{V/S}^{-1}(\mathcal{G}_k)), \qquad \eta(0)(1) = (0),$$
$$\Delta(V)(\mathcal{H}) = \sum_{S \leq V} \mathcal{H}|_S \otimes \mathcal{H}|^{V/S}, \qquad \varepsilon(0)((0)) = 1$$

Es fácil verificar que $\mathbf{L}$ es una sub-biálgebra de $\mathbf{\Sigma}$.

En particular, al ser $\mathbf{\Sigma}$ y $\mathbf{L}$ biálgebras, podemos considerar el producto de convolución definido en la ecuación (1.4) de la Sección 1.2. El lector familiarizado con la teoría de

*buildings* podrá observar que para cada $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ y cada par de banderas $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Fl}(V)$, la bandera $\mathcal{F} * \mathcal{G}$ coincide con la **proyección de Tits** de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{G}$ definida en [AB08, §4.9], donde consideramos a $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ como elementos del *building* de subespacios de $V$.

**Ejemplo.** Para familiarizarnos con esta definición, calcularemos el producto de Tits para un par de banderas en $\mathbb{F}^4$ a modo de ejemplo. Sean

$$\mathcal{F} = (0, \langle e_1 + e_4 \rangle, \langle e_1, e_4 \rangle, \mathbb{F}^4)$$

y $\mathcal{G}$ la bandera completa estándar sobre $\mathbb{F}^4$. Por definición, el producto de Tits $\mathcal{F} * \mathcal{G}$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{F} * \mathcal{G} &= \left(\mu^2(\mathbb{F}^4) \circ \pi_{\mathcal{F}} \circ \Delta^2(\mathbb{F}^4)\right)(\mathcal{G}) \\ &= \mu^2(\mathbb{F}^4)(\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2 \otimes \mathcal{G}_3) \\ &= (0, \langle e_1 + e_4 \rangle, \langle e_1, e_4 \rangle, \langle e_1, e_2, e_4 \rangle, \mathbb{F}^4), \end{aligned}$$

donde las banderas $\mathcal{G}_i$ son las banderas inducidas por la bandera $\mathcal{G}$ en los subcocientes $\langle e_1 + e_4 \rangle$, $\langle e_1, e_4 \rangle / \langle e_1 + e_4 \rangle$ y $\mathbb{F}^4 / \langle e_1, e_4 \rangle$ respectivamente.

Una buena idea informal para trabajar con $\mathcal{F} * \mathcal{G}$ es pensarla como una bandera en $V$ cuya sucesión de subespacios comienza como la de $\mathcal{F}$ y continúa de la manera "más natural posible" de acuerdo a los subespacios que aparecen en la de $\mathcal{G}$.

En [Tam17, §III.5-6] el autor determinó la cohomología de las especies (combinatorias) de órdenes lineales L (o totales) y de composiciones $\Sigma$ como bicomódulos sobre la especie exponencial. La elección de notación $\mathbf{L}$ y $\mathbf{\Sigma}$ para las especies de banderas es sugerente: las últimas son análogos sobre espacios vectoriales de las primeras, en el sentido que precisamos a continuación.

Recordemos que una composición o partición ordenada de un conjunto finito $X$ es una tupla $(X_1, \ldots, X_k)$ tal que los $X_i$ son subconjuntos de $X$ disjuntos 2 a 2 y cuya unión es $X$. El conjunto de composiciones de $X$ está en biyección con el conjunto de filtraciones crecientes por subconjuntos de $X$ mediante la asignación

$$(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k) \mapsto (X_1, X_1 \cup X_2, X_1 \cup X_2 \cup X_3, \ldots, X).$$

De modo similar, el conjunto de órdenes lineales sobre $X$ está en biyección con el conjunto de filtraciones crecientes por subconjuntos de $X$ maximales o, equivalentemente, en las que las diferencias de cardinal entre dos capas consecutivas es 1. Esta biyección se establece mediante la asignación

$$\leq \mapsto (\{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, X),$$

donde los $x_i$ enumeran los elementos de $X$ de modo que $x_i \leq x_j$ si y sólo si $i \leq j$. Así, vemos que el análogo natural sobre espacios vectoriales del conjunto de composiciones es

el conjunto de banderas, y de manera similar los órdenes lineales se corresponden con las banderas completas.

## 1.9 La cohomología de las especies de banderas

En esta sección determinaremos la cohomología de las especies de banderas $\mathbf{\Sigma}$ y $\mathbf{L}$. Para ello, nuestra estrategia consistirá en exhibir primero un par de cocadenas que resulten análogas a aquellos cociclos determinados en [Tam17] que generan a la especie de composiciones $\Sigma$. Estas cocadenas resultarán ser un 1- y un 2-cociclo. Más adelante describiremos la subálgebra que generan respecto al producto cup y veremos que coincide con el álgebra total de cohomología de $\mathbf{\Sigma}$. Finalmente veremos que esta última es isomorfa al álgebra de cohomología de $\mathbf{L}$.

La primera de las dos cocadenas que consideramos es la 1-cocadena análoga al 1-cociclo de cardinalidad. Esta es la **1-cocadena de dimensión** $\mathfrak{dim} : \mathbf{\Sigma} \to \overline{\mathbf{e}}$, que cada vez que $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ y $\mathcal{F} \in \mathrm{Fl}(V)$ toma el valor

$$\mathfrak{dim}(V, \mathcal{F}, (0, V)) := \dim(V),$$

donde $(0, V)$ es la bandera trivial en $V$ y estamos usando la notación presentada en (1.11).

**Lema 1.28.** *La cocadena* $\mathfrak{dim}$ *es un 1-cociclo que no es un coborde.*

*Demostración.* Usando las ecuaciones (1.12) que describen los operadores de cocara, para cada $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$, $\mathcal{F} \in \mathbf{L}(V)$ y cada subespacio $0 < S < V$ tenemos que

$$\begin{aligned} \partial(\mathfrak{dim})(V, \mathcal{F}, (0, S, V)) &= \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \partial^i(\mathfrak{dim})(V, \mathcal{F}, (0, S, V)) \\ &= \dim(V/S) - \dim(V) + \dim(S) \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo que muestra que $\mathfrak{dim}$ es un 1-cociclo.

Consideremos ahora una 0-cocadena $\beta : \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{1}$. Para describir a $\beta$ completamente basta con dar el escalar

$$b := \beta(0)(\mathcal{F}) \in \mathbf{1}(0) = \Bbbk,$$

donde $\mathcal{F}$ es la (única) bandera completa en el espacio nulo, ya que $\mathbf{1}$ se anula sobre todos los espacios vectoriales de dimensión positiva y por lo tanto también $\beta$. Usando las ecuaciones (1.12), vemos que el coborde de $\beta$ tiene coordenadas

$$\partial(\beta)(V, \mathcal{F}, (0, V)) = \beta(V/V, \mathcal{F}|^{V/V}, (V/V)) - \beta(0, \mathcal{F}|_0, (0)) = b - b = 0.$$

Vemos así que el único 1-coborde es el nulo y, en particular, que nuestro cociclo $\mathfrak{dim}$ no es un 1-coborde. □

Pasemos ahora al análogo al 2-cociclo de Schubert. En el caso de conjuntos, el estadístico de Schubert sch definido en [AM10, §10.13.6] se calcula a partir de un conjunto $I$, un subconjunto $S \subseteq I$ y una filtración creciente $H = (H_1, \ldots, H_l)$ de subconjuntos de $I$ del modo que detallaremos a continuación. Si $i, j$ son elementos de $I$ escribiremos $i \prec_H j$ si existe $t \in [\![l]\!]$ tal que $i \in H_t$ pero $j \notin H_t$. Notemos que en el caso en que la filtración $H$ es maximal se tiene que $i \prec_H j$ si y sólo si $i < j$ para el orden total que induce $H$. Empleando esta notación, el estadístico de Schubert se calcula del siguiente modo:

$$\mathrm{sch}(I, H, S) = |\{(i, j) : i \in S, j \in I \setminus S \text{ y } j \prec_H i\}|, \tag{1.18}$$

o en otras palabras, la cantidad de "inversiones" respecto al preorden $\prec_H$ determinado por la filtración $H$. Nos gustaría describir un 2-cociclo $\mathfrak{sch} : \mathbf{\Sigma} \to \overline{\mathbf{e}}^{\otimes 2}$ que sea un análogo lineal a sch. Lo haremos una vez más siguiendo la notación de (1.11): para cada $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$, subespacio $W \leq V$ y bandera $\mathcal{F} \in \mathrm{Fl}(V)$ daremos un escalar $\mathfrak{sch}(V, \mathcal{F}, (0, S, V))$.

Para darnos cuenta de cómo hacer esto, reescribiremos (1.18) de una forma más fácil de adaptar al contexto lineal. Afirmamos que

$$\begin{aligned}\mathrm{sch}(I, H, S) &= \left| \coprod_{k=1}^{l} ((S \cap H_k) \setminus (S \cap H_{k-1})) \times (H_{k-1} \setminus (S \cap H_{k-1})) \right| \\ &= \sum_{k=1}^{l} |(S \cap H_k) \setminus (S \cap H_{k-1})| \cdot |H_{k-1} \setminus (S \cap H_{k-1})|,\end{aligned}$$

donde convenimos que $H_0 = \emptyset$. En efecto, si $(i, j)$ es un par tal que $i \in S$, $j \in I \setminus S$ y $j \prec_H i$, tomando el mínimo $t$ tal que $i \in H_t$ tenemos que el par $(i, j)$ pertenece al unionando indexado por $k = t$. Recíprocamente, si $(i, j)$ pertenece a este unionando, entonces $i \in S$, $j \in I \setminus S$ y $j \prec_H i$, mostrando así que el cardinal de la unión coincide con la definición anterior del estadístico de Schubert. Con esta reescritura en mente, es fácil producir el siguiente análogo razonable para subespacios:

$$\mathfrak{sch}(V, \mathcal{F}, (0, S, V)) := \sum_{k=1}^{l} \dim\left(\frac{S \cap \mathcal{F}_k}{S \cap \mathcal{F}_{k-1}}\right) \dim\left(\frac{\mathcal{F}_{k-1}}{S \cap \mathcal{F}_{k-1}}\right). \tag{1.19}$$

**Lema 1.29.** *La cocadena $\mathfrak{sch}$ es un 2-cociclo que no es un coborde.*

*Demostración.* Para ver que $\mathfrak{sch}$ es un 2-cociclo usaremos una vez más las ecuaciones (1.12): para cada $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$, $\mathcal{F} \in \mathbf{L}(V)$ y cada bandera $\mathcal{G} \in \mathrm{Fl}_2(V)$ es

$$\begin{aligned}\partial(\mathfrak{sch})(V, \mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathfrak{sch}(V/\mathcal{G}_1, \mathcal{F}|^{\mathcal{G}_1}, (0, \mathcal{G}_2/\mathcal{G}_1, V/\mathcal{G}_1)) - \mathfrak{sch}(V, \mathcal{F}, (0, \mathcal{G}_2, V)) \\ + \mathfrak{sch}(V, \mathcal{F}, (0, \mathcal{G}_1, V)) - \mathfrak{sch}(\mathcal{G}_2, \mathcal{F}|_{\mathcal{G}_2}, (0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)).\end{aligned}$$

Escribamos esta suma alternada como $A - B + C - D$ y calculémosla por partes. Comenzamos con $C - D$:

$$\begin{aligned} C - D &= \sum_k \dim\left(\frac{\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{F}_k}{\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{F}_{k-1}}\right)\left[\dim\left(\frac{\mathcal{F}_{k-1}}{\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{F}_{k-1}}\right) - \dim\left(\frac{\mathcal{G}_2 \cap \mathcal{F}_{k-1}}{\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{F}_{k-1}}\right)\right] \\ &= \sum_k \dim\left(\frac{\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{F}_k}{\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{F}_{k-1}}\right)\dim\left(\frac{\mathcal{F}_{k-1}}{\mathcal{G}_2 \cap \mathcal{F}_{k-1}}\right). \end{aligned}$$

Con esta última expresión simplificada podemos reescribir ahora $-B + C - D$:

$$\begin{aligned} &- B + C - D \\ &\quad = \sum_k \left[\dim\left(\frac{\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{F}_k}{\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{F}_{k-1}}\right) - \dim\left(\frac{\mathcal{G}_2 \cap \mathcal{F}_k}{\mathcal{G}_2 \cap \mathcal{F}_{k-1}}\right)\right]\dim\left(\frac{\mathcal{F}_{k-1}}{\mathcal{G}_2 \cap \mathcal{F}_{k-1}}\right) \end{aligned}$$

y gracias al segundo teorema de isomorfismo esto es

$$\begin{aligned} &= \sum_k \left[\dim\left(\frac{(\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{F}_k) + \mathcal{F}_{k-1}}{\mathcal{F}_{k-1}}\right) - \dim\left(\frac{(\mathcal{G}_2 \cap \mathcal{F}_k) + \mathcal{F}_{k-1}}{\mathcal{F}_{k-1}}\right)\right]\dim\left(\frac{\mathcal{F}_{k-1}}{\mathcal{G}_2 \cap \mathcal{F}_{k-1}}\right) \\ &= -\sum_k \dim\left(\frac{(\mathcal{G}_2 \cap \mathcal{F}_k) + \mathcal{F}_{k-1}}{(\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{F}_k) + \mathcal{F}_{k-1}}\right)\dim\left(\frac{\mathcal{F}_{k-1}}{\mathcal{G}_2 \cap \mathcal{F}_{k-1}}\right) \\ &= -\sum_k \dim\left(\frac{(\mathcal{G}_2 \cap \mathcal{F}_k) + \mathcal{F}_{k-1}}{(\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{F}_k) + \mathcal{F}_{k-1}}\right)\dim\left(\frac{\mathcal{F}_{k-1} + \mathcal{G}_2}{\mathcal{G}_2}\right), \end{aligned}$$

otra vez por el mismo teorema de isomorfismo. Estudiemos ahora el sumando $A$, que es el más complicado:

$$\begin{aligned} A &= \sum_k \dim\left(\frac{\mathcal{G}_2/\mathcal{G}_1 \cap (\mathcal{F}_k + \mathcal{G}_1)/\mathcal{G}_1}{\mathcal{G}_2/\mathcal{G}_1 \cap (\mathcal{F}_{k-1} + \mathcal{G}_1)/\mathcal{G}_1}\right)\dim\left(\frac{(\mathcal{F}_{k-1} + \mathcal{G}_1)/\mathcal{G}_1}{\mathcal{G}_2/\mathcal{G}_1 \cap (\mathcal{F}_{k-1} + \mathcal{G}_1)/\mathcal{G}_1}\right) \\ &= \sum_k \dim\left(\frac{\mathcal{G}_2 \cap (\mathcal{F}_k + \mathcal{G}_1)}{\mathcal{G}_2 \cap (\mathcal{F}_{k-1} + \mathcal{G}_1)}\right)\dim\left(\frac{\mathcal{F}_{k-1} + \mathcal{G}_1}{\mathcal{G}_2 \cap (\mathcal{F}_{k-1} + \mathcal{G}_1)}\right) \\ &= \sum_k \dim\left(\frac{\mathcal{G}_2 \cap (\mathcal{F}_k + \mathcal{G}_1)}{\mathcal{G}_2 \cap (\mathcal{F}_{k-1} + \mathcal{G}_1)}\right)\dim\left(\frac{\mathcal{F}_{k-1} + \mathcal{G}_2}{\mathcal{G}_2}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si queremos ver que $A - B + C - D = 0$, alcanza con ver que

$$\frac{\mathcal{G}_2 \cap (\mathcal{F}_k + \mathcal{G}_1)}{\mathcal{G}_2 \cap (\mathcal{F}_{k-1} + \mathcal{G}_1)} \cong \frac{(\mathcal{G}_2 \cap \mathcal{F}_k) + \mathcal{F}_{k-1}}{(\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{F}_k) + \mathcal{F}_{k-1}},$$

y esto es precisamente el contenido del Lema de Zassenhaus, que el lector puede encontrar en [Pie82, Exercise 2.3.1].

Finalmente, veamos que $\mathfrak{sch}$ no es un coborde. Si $\beta : \mathbf{\Sigma} \to \overline{\mathbf{e}}$ es una 1-cocadena, entonces

$$\beta(V)(\mathcal{F}) = \beta(V)(\mathcal{G})$$

para todo espacio $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$ y todo par de banderas $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Fl}(V)$ del mismo tipo, dado que la acción de $\mathrm{GL}(V)$ es transitiva sobre el conjunto de banderas de un cierto tipo y trivial en $\overline{\mathbf{e}}(V)$. Por lo tanto, lo mismo es cierto para su imagen por la diferencial $d$. De esta forma, para ver que $\mathfrak{sch}$ no es un 2-coborde alcanza entonces con exhibir un espacio vectorial $V$ y dos banderas completas $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Fl}_+(V)$ tales que $\mathfrak{sch}(V)(\mathcal{F}) \neq \mathfrak{sch}(V)(\mathcal{G})$. Para esto usaremos banderas que no estén en la misma "posición relativa" dentro de $V$.

Tomemos $V = \mathbb{F}^2$ y elijamos como $\mathcal{F}$ a la bandera completa estándar $\mathcal{F}^0$ y como $\mathcal{G}$ a la bandera $(0, \langle e_2 \rangle, \mathbb{F}^2)$. Tenemos entonces que $\mathfrak{sch}(V, \mathcal{F}, \mathcal{F}) = 0$ mientras que $\mathfrak{sch}(V, \mathcal{G}, \mathcal{F}) = 1$, por lo que $\mathfrak{sch}(V)(\mathcal{F}) \neq \mathfrak{sch}(V)(\mathcal{G})$, probando lo que queríamos. □

El hecho de que el 2-cociclo de Schubert es efectivamente un cociclo puede establecerse de manera alternativa utilizando la siguiente definición equivalente, de caracter más geométrico. Si $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$, $\mathcal{F} \in \mathbf{L}(V)$ es una bandera completa y $0 < S < V$ es un subespacio, entonces

$$\mathfrak{sch}(V, \mathcal{F}, (0, S, V)) = \mathrm{inv}(\mathrm{d}(\mathcal{F}, \mathcal{F} * S)).$$

Notemos que esto es una generalización natural de la definición dada en [AM10, §10.13] a partir de la métrica de galerías de un complejo de Coxeter de tipo $A$.

No probaremos aquí la equivalencia de esta definición con la ya presentada anteriormente, dado que no la usaremos para lo que sigue, pero bosquejaremos cómo sería la demostración de que esta definición alternativa efectivamente determina un 2-cociclo. Usando las ecuaciones (1.12), para cada $V \in \mathbf{Fin}_{\mathbb{F}}^{\times}$, $\mathcal{F} \in \mathbf{L}(V)$ y cada bandera $\mathcal{G} \in \mathrm{Fl}_2(V)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\partial(\mathfrak{sch})(V, \mathcal{F}, \mathcal{G}) &= \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \partial^i(\mathfrak{sch})(V, \mathcal{F}, \mathcal{G}) \\ &= \mathrm{inv}(\mathrm{d}(\mathcal{F}|^{V/\mathcal{G}_1}, \mathcal{F}|^{V/\mathcal{G}_1} * \mathcal{G}_2/\mathcal{G}_1)) - \mathrm{inv}(\mathrm{d}(\mathcal{F}, \mathcal{F} * \mathcal{G}_2)) \\ &\quad + \mathrm{inv}(\mathrm{d}(\mathcal{F}, \mathcal{F} * \mathcal{G}_1)) - \mathrm{inv}(\mathrm{d}(\mathcal{F}|_{\mathcal{G}_2}, \mathcal{F}|_{\mathcal{G}_2} * \mathcal{G}_1)).\end{aligned}$$

Por [Abe91, Theorem 1.3], sabemos que si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son banderas completas en $V$, entonces

$$\mathrm{inv}(\mathrm{d}(\mathcal{F}, \mathcal{G})) = |\{\mathcal{F}_i + \mathcal{G}_j\}_{i,j}| - \dim(V).$$

Este teorema, junto con el hecho de que

$$(\mathcal{F}|^{V/\mathcal{G}_1})_i = \pi((\mathcal{F} * \mathcal{G}_1)_{\dim(\mathcal{G}_1)+i})$$

y

$$(\mathcal{F}|^{V/\mathcal{G}_1} * \mathcal{G}_2/\mathcal{G}_1)_j = \pi(((\mathcal{F} * \mathcal{G}_1) * \mathcal{G}_2)_{\dim(\mathcal{G}_1)+j}),$$

donde $\pi : V \to V/\mathcal{G}_1$ es la proyección al cociente, muestra que

$$\mathrm{inv}(\mathrm{d}(\mathcal{F}|^{V/\mathcal{G}_1}, \mathcal{F}|^{V/\mathcal{G}_1} * \mathcal{G}_2/\mathcal{G}_1)) = \mathrm{inv}(\mathrm{d}(\mathcal{F} * \mathcal{G}_1, (\mathcal{F} * \mathcal{G}_1) * \mathcal{G}_2)).$$

Por un argumento muy similar, tenemos que

$$\mathrm{inv}(\mathrm{d}(\mathcal{F}|_{\mathcal{G}_2}, \mathcal{F}|_{\mathcal{G}_2} * \mathcal{G}_1)) = \mathrm{inv}(\mathrm{d}(\mathcal{F} * \mathcal{G}_2, (\mathcal{F} * \mathcal{G}_2) * \mathcal{G}_1)).$$

Más aún, el hecho de que $\mathcal{G}_1$ es un subespacio de $\mathcal{G}_2$ implica que

$$(\mathcal{F} * \mathcal{G}_1) * \mathcal{G}_2 = (\mathcal{F} * \mathcal{G}_2) * \mathcal{G}_1 = \mathcal{F} * \mathcal{G}$$

por lo que basta con verificar la igualdad

$$\begin{aligned} &\mathrm{inv}(\mathrm{d}(\mathcal{F}, \mathcal{F} * \mathcal{G}_1)) + \mathrm{inv}(\mathrm{d}(\mathcal{F} * \mathcal{G}_1, \mathcal{F} * \mathcal{G})) \\ &= \mathrm{inv}(\mathrm{d}(\mathcal{F}, \mathcal{F} * \mathcal{G}_2)) + \mathrm{inv}(\mathrm{d}(\mathcal{F} * \mathcal{G}_2, \mathcal{F} * \mathcal{G})) \end{aligned}$$

para probar que $\mathfrak{sch}$ es un cociclo. La propiedad "***gate***" [AB08, Proposition 4.95] para el *building* de subespacios de $V$ implica que ambos lados de la igualdad son precisamente $\mathrm{inv}(\mathrm{d}(\mathcal{F}, \mathcal{F} * \mathcal{G}))$. Dicha propiedad es una generalidad sobre la geometría de *buildings*, que establece que

$$d(C, D) = d(C, A * C) + d(A * C, D)$$

siempre que $A$ sea un símplex, $C$ sea una cámara arbitraria y $D$ una cámara de la que $A$ es cara. Este argumento es esencialmente el mismo que el dado en [AM10, §10.13.1].

Ahora que disponemos de una descripción explícita de estos dos cociclos, abordamos el problema de describir los módulos de cohomología $H^\bullet(\mathbf{\Sigma})$. Para hacerlo comenzaremos por especializar la descripción de la página $E_1$ de la sucesión espectral del Lema 1.25 a la especie que nos interesa. Empezamos enunciando un resultado estándar en la teoría de representaciones de grupos:

**Lema 1.30.** *Sea $G$ un grupo, sea $X$ un $G$-conjunto transitivo y escribamos $M_X$ para el $\Bbbk G$-módulo de permutación inducido por $X$. Para todo $x \in X$ y todo $\Bbbk G$-módulo $N$ la asignación*

$$\mathrm{Hom}_G(M_X, N) \ni f \longmapsto f(x) \in N^{\mathrm{Stab}(x)}$$

*es un isomorfismo natural en $N$.*

*Demostración.* Fijemos $x \in X$ y un $\Bbbk G$-módulo $N$. La inyectividad de la asignación del enunciado es consecuencia del hecho de que $x$ genera $M_X$ como $G$-módulo, que a su vez se deduce de la transitividad de la acción de $\Bbbk G$ sobre $X$. Supongamos ahora que $y \in N$ es fijado por el subgrupo estabilizador $\mathrm{Stab}(x)$. La asignación $x \mapsto y$ se extiende de forma única a un morfismo de $\Bbbk G$-módulos $f : M_X \to N$ tal que $f(x) = y$. Esto muestra la sobreyectividad de la asignación del enunciado, completando la demostración. □

Si $\Bbbk$ es un cuerpo de característica cero, la especie $\mathbf{\Sigma}$ es relativamente proyectiva y luego por el Lema 1.25 sabemos que $E_1^{\bullet,\bullet}(\mathbf{\Sigma})$ está concentrada en una única fila. Esto implica que la sucesión espectral degenera en la segunda página, por lo que para calcular $H^\bullet(\mathbf{\Sigma})$ tenemos que determinar esta última. Mostraremos que la diferencial en la primera página es nula, y para ello la estrategia que usaremos es la siguiente:

- Mostraremos en el Lema 1.31 que $E_1^{p,0}(\mathbf{\Sigma})$ es unidimensional para todo entero $p \geq 0$.
- Veremos en el Lema 1.34 que los espacios $E_1^{p,0}(\mathbf{\Sigma})$ se pueden generar con productos cup iterados entre representantes en $E_1(\mathbf{\Sigma})$ de los cociclos no triviales $\mathfrak{dim}$ y $\mathfrak{sch}$.
- Ahora bien, como $\mathfrak{dim}$ y $\mathfrak{sch}$ son cociclos en el límite de la sucesión espectral $H^\bullet(\mathbf{\Sigma})$, estos generadores sobreviven hasta la página $E_2(\mathbf{\Sigma})$. En particular, esto muestra que la diferencial en la página $E_1(\mathbf{\Sigma})$ es nula.

A continuación describiremos los módulos que aparecen en la única fila no nula de la página $E_1^{\bullet,\bullet}(\mathbf{\Sigma})$ y daremos generadores explícitos para ellos.

**Lema 1.31.** *Para todo entero $p \geq 0$, hay un isomorfismo $\Phi_p : E_1^{p,0}(\mathbf{\Sigma}) \to H^p(\Sigma_p^\bullet)^B$. En particular, el dominio $E_1^{p,0}(\mathbf{\Sigma})$ es unidimensional.*

En la demostración elegiremos a $\Phi_p$ como la composición de los isomorfismos de los Lemas 1.25 y 1.30. En lo que sigue usaremos este isomorfismo como una identificación.

*Demostración.* Gracias al Lema 1.25 sabemos que

$$E_1^{p,0}(\mathbf{\Sigma}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}(\mathbb{F}^p)}(\mathbf{\Sigma}_p(\mathbb{F}^p), H^0(\Sigma_p^\bullet[p])) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}(\mathbb{F}^p)}(\mathbf{\Sigma}_p(\mathbb{F}^p), H^p(\Sigma_p^\bullet)) \tag{1.20}$$

para todo $p \geq 0$. Como la acción de $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^p)$ permuta transitivamente el conjunto de banderas de un tipo dado, es fácil ver que si para cada subgrupo parabólico $P$ escribimos $M_P$ al $\mathrm{GL}(\mathbb{F}^p)$-submódulo generado por las banderas cuyo tipo es el tipo de $P$, entonces

$$\mathbf{\Sigma}_p(\mathbb{F}^p) = \bigoplus_{P \supseteq B} M_P. \tag{1.21}$$

Así, el Lema 1.30 nos permite concluir a partir de (1.20) y (1.21) que

$$E_1^{p,0}(\mathbf{\Sigma}) \cong \bigoplus_{P \supseteq B} H^p(\Sigma_p^\bullet)^P.$$

Por el Corolario 1.9, tenemos que $H^p(\Sigma_p^\bullet)^P$ es isomorfo a $(\mathrm{St}_p^*)^P$ y de hecho también a $(\mathrm{St}_p)^P$, pues el módulo de Steinberg es auto-dual como vimos en 1.22. El Lema 1.23 muestra entonces que el espacio $E_1^{p,0}(\mathbf{\Sigma})$ es isomorfo a $H^p(\Sigma_p^\bullet)^B$, y en particular es unidimensional. □

El lema anterior es el punto central del argumento que nos permite describir la cohomología de $\mathbf{\Sigma}$ y hace uso de toda la maquinaria que desarrollamos hasta el momento.

A continuación describiremos generadores explícitos para $E_1^{p,0}(\mathbf{\Sigma})$ para cada entero no negativo $p$, que precisamos para describir la estructura de álgebra de la cohomología, que a su vez será determinada calculando productos cup entre estos.

Para cada $\sigma \in \mathbb{S}_p$ sea $\delta_{\sigma,p} : \Bbbk\mathrm{Fl}_+(\mathbb{F}^p) \to \Bbbk$ la transformación lineal definida por

$$\delta_{\sigma,p}(\mathcal{F}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathrm{d}(\mathcal{F}^0, \mathcal{F}) = \sigma; \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Esta función es $B$-invariante, pues d lo es, y toda $p$-cocadena en $\Sigma_p^\bullet$ es un cociclo, ya que $\Sigma_p^\bullet$ un complejo de dimensión $p$, así que la clase de cohomología $[\delta_{\sigma,p}] \in H^p(\Sigma_p^\bullet)$ es $B$-invariante. Por lo tanto, tiene sentido pensarla como elemento de $E_1^{p,0}(\mathbf{\Sigma})$ vía la identificación del Lema 1.31.

**Lema 1.32.** *Para cada entero no negativo $p$ el espacio $E_1^{p,0}(\mathbf{\Sigma})$ está generado por la clase $[\delta_{\sigma,p}]$, cualquiera sea la permutación $\sigma \in \mathbb{S}_p$. Más aún, tenemos que*

$$[\delta_{\sigma,p}] = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)}[\delta_{\mathrm{id},p}]$$

*como clases de cohomología en $E_1^{p,0}(\mathbf{\Sigma})$.*

*Demostración.* Sea $\sigma \in \mathbb{S}_p$ y recordemos que, de acuerdo al Teorema de Solomon–Tits 1.7, el elemento

$$\varepsilon_p = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_p} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} \sigma \cdot \mathcal{F}^0$$

genera $H_p(\Sigma_p^\bullet)$. Gracias al *pairing* canónico de 1.9, basta con verificar entonces que $\langle \delta_{\sigma,p}, \varepsilon_p \rangle \neq 0$ para ver que la clase de cohomología $[\delta_{\sigma,p}]$ es no nula en $E_1^{p,0}(\mathbf{\Sigma})$. Calculando, vemos que

$$\langle \delta_{\sigma,p}, \varepsilon_p \rangle = \sum_{\tau \in \mathbb{S}_p} (-1)^{\mathrm{inv}(\tau)} \delta_{\sigma,p}(\tau \cdot \mathcal{F}^0) = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)}, \tag{1.22}$$

y en particular vemos que este valor es no nulo. Como el espacio $E_1^{p,0}(\mathbf{\Sigma})$ es unidimensional, está generado por $[\delta_{\sigma,p}]$. Es por este motivo que $[\delta_{\mathrm{id},p}] = \lambda_\sigma [\delta_{\sigma,p}]$ para algún escalar no nulo $\lambda_\sigma \in \Bbbk$. Ahora, usando la ecuación (1.22) especializada primero en id y luego en $\sigma$ vemos que

$$1 = \langle \delta_{\mathrm{id},p}, \varepsilon_p \rangle = \langle \lambda_\sigma \delta_{\sigma,p}, \varepsilon_p \rangle = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} \lambda_\sigma,$$

y esto prueba la igualdad del enunciado. □

A continuación calcularemos los productos cup entre los generadores de los espacios $E_1^{p,0}(\mathbf{\Sigma})$. Para poder hacer esto precisaremos del siguiente lema, que encapsula un hecho combinatorio clave:

**Lema 1.33.** *Sean $n$ un número natural y $\mathcal{F} \in \mathrm{Fl}_+(\mathbb{F}^n)$ una bandera completa. La bandera $\mathcal{F}$ pertenece a la celda de Schubert asociada a un $k$-shuffle si y sólo si $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 * S$ para algún subespacio $S \leq \mathbb{F}^n$ de dimensión $k$.*

Recordamos que $\mathcal{F}^0 * S$ es la convolución entre $\mathcal{F}^0$ y la bandera $(0, S, \mathbb{F}^n)$, como definimos en (1.4).

*Demostración.* La estrategia de la demostración consistirá en ver que una bandera completa $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_n)$ en $\mathbb{F}^n$ perteneciente a una celda de Schubert asociada a un $k$-shuffle queda completamente determinada por el $k$-ésimo subespacio $\mathcal{F}_k$ que aparece en ella y que, más aún, se tiene que $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 * \mathcal{F}_k$. Para ello, comenzaremos con algunos preliminares técnicos válidos en un contexto más general que el que necesitamos, que nos permitirán disponer de bases con propiedades útiles.

Fijemos una permutación cualquiera $\sigma \in \mathbb{S}_n$. Para cada bandera completa $\mathcal{F}$ que pertenece a la celda de Schubert $B\sigma B$ existe una única base ordenada $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{F}^n$ tal que al escribir

$$v_i = \lambda_{i,1}e_1 + \lambda_{i,2}e_2 + \cdots + \lambda_{i,n}e_n,$$

(1) el escalar $\lambda_{i,\sigma(i)}$ es 1,

(2) los escalares $\lambda_{i,j}$ se anulan si $j = \sigma(k)$ para algún $k < j$ o $j > \sigma(i)$, y

(3) la base es adaptada a $\mathcal{F}$; es decir, tenemos que $\mathcal{F}_i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$.

Describamos brevemente cómo producir una base con estas propiedades. Inductivamente, asumimos que ya logramos producir una base parcial $(v_1, \ldots, v_{i-1})$ que satisface las condiciones anteriores. Sea $w_i$ un vector en $\mathcal{F}_i \setminus \mathcal{F}_{i-1}$ tal que $w_i \in \mathcal{F}^0_{\sigma(i)}$. Podemos asumir tras normalizar que

$$w_i = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_{\sigma(i)-1}e_{\sigma(i)-1} + e_{\sigma(i)},$$

y sustrayendo de $w_i$ una combinación lineal adecuada de elementos de la base parcial $(v_1, \ldots, v_{i-1})$ podemos producir un elemento $v_i$ bien determinado que también satisfaga la condición (2).

Esta construcción puede llevarse a cabo para cualquier permutación $\sigma$. En el caso en que si $\sigma$ es un $k$-shuffle, la base $(v_1, \ldots, v_n)$ producida a partir de este procedimiento es tal que $v_i = e_{\sigma(i)}$ para todo $i > k$.

Sea $\sigma = \mathrm{sh}(\{i_1, \ldots, i_k\})$ un $k$-shuffle con $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ y sea $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_n)$ una bandera que pertenece a la celda $B\sigma B$. Queremos ver que $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 * \mathcal{F}_k$. Sea $(v_1, \ldots, v_n)$ una base asociada a $\mathcal{F}$ obtenida mediante el proceso descripto arriba. Como la restricción $\sigma|_{\{1,\ldots,k\}}$ es monótona, es fácil ver que el segmento inicial $(v_1, \ldots, v_k)$ es una base adaptada a la bandera $(\mathcal{F}^0 * \mathcal{F}_k)|_{\mathcal{F}_k}$. Análogamente, si $\pi : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n/\mathcal{F}_k$ es la proyección al cociente, la base $(\pi(v_{k+1}), \ldots, \pi(v_n))$ es adaptada a $(\mathcal{F}^0 * \mathcal{F}_k)|^{\mathcal{F}_k}$. Así,

$$\begin{pmatrix} * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & * & 0 & * & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 1.5: La matriz de cambio de base entre la base estándar y la base asociada a una bandera perteneciente a la celda de Schubert indexada por el 3-shuffle $\mathrm{sh}(3, 6, 8)$.

vemos que la base $(v_1, \ldots, v_n)$ es adaptada tanto a $\mathcal{F}$ como a $\mathcal{F}^0 * \mathcal{F}_k$, por lo que estas dos banderas deben coincidir.

Recíprocamente, sea $S \leq \mathbb{F}^n$ un subespacio de dimensión $k$ y consideremos la bandera $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 * S$. Podemos elegir una base ordenada $(v_1, \ldots, v_k)$ de $S$ de modo que para todo $i \in [\![k]\!]$ se tenga que si $x_i$ es el mínimo entero tal que $\dim(S \cap \mathcal{F}^0_{x_i}) = i$, entonces $v_i \in \mathcal{F}^0_{x_i} \cap S$. Sean $1 \leq t_1 < \cdots < t_{n-k} \leq n$ los elementos de $\{1, \ldots, n\} \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$. Entonces, $\{v_1, \ldots, v_k, e_{t_1}, \ldots, e_{t_{n-k}}\}$ es una base ordenada adaptada a la bandera $\mathcal{F}$. Aplicando el $k$-shuffle $\sigma = \mathrm{sh}(\{x_1, \ldots, x_k\})$ a esta base ordenada, obtenemos una base ordenada adaptada a la bandera $\mathcal{F}^0$, mostrando que $\mathrm{d}(\mathcal{F}, \mathcal{F}^0 * S) = \sigma$ y por lo tanto que $\mathcal{F} \in B\sigma B$ como queríamos. □

Ahora sí podemos describir completamente el producto cup en $E_1(\mathbf{\Sigma})$:

**Lema 1.34.** *Para todo par de números naturales $n, m$ tenemos que*

$$\begin{aligned} [\delta_{\mathrm{id},2n}] \smile [\delta_{\mathrm{id},2m}] &= \binom{n+m}{n} [\delta_{\mathrm{id},2(n+m)}] \\ [\delta_{\mathrm{id},1}] \smile [\delta_{\mathrm{id},2n}] &= [\delta_{\mathrm{id},2n+1}] \\ [\delta_{\mathrm{id},1}] \smile [\delta_{\mathrm{id},2n-1}] &= 0 \end{aligned}$$

*como clases de cohomología en $E_1(\mathbf{\Sigma})$.*

*Demostración.* Para cada número natural $k$ consideramos la cocadena $\alpha_k : \mathbf{\Sigma} \to \overline{\mathbf{e}}^{\otimes k}$ tal que

$$\alpha_k(V)(\mathcal{F}) := \begin{cases} \mathbf{e}_{\mathcal{F}}, & \text{si } \mathcal{F} \text{ es una bandera completa y } \dim(V) = k; \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Es fácil verificar que la clase de $\alpha_k$ en $E_1^{k,0}(\mathbf{\Sigma})$ es $[\delta_{\mathrm{id},k}]$ usando las identificaciones del Lema 1.31. Fijamos ahora un número natural $r$. Tenemos que

$$\begin{aligned}(\alpha_1 \smile \alpha_r)(\mathbb{F}^{r+1})(\mathcal{F}^0) &= \sum_{\substack{S<\mathbb{F}^{r+1}\\ \dim(S)=1}} \alpha_1(S)(\mathcal{F}^0|_S) \otimes \alpha_r(\mathbb{F}^{r+1}/S)(\mathcal{F}^0|^{\mathbb{F}^{r+1}/S}) \\ &= \sum_{\substack{S<\mathbb{F}^{r+1}\\ \dim(S)=1}} \mathbf{e}_{\mathcal{F}^0|_S} \otimes \mathbf{e}_{\mathcal{F}^0|^{\mathbb{F}^{r+1}/S}} \\ &= \sum_{\substack{S<\mathbb{F}^{r+1}\\ \dim(S)=1}} \mathbf{e}_{\mathcal{F}^0 * S} \\ &= \sum_{\substack{\sigma\in\mathbb{S}_{r+1}\\ \sigma \text{ 1-shuffle}}} \sum_{\mathcal{F}\in B\sigma B} \mathbf{e}_{\mathcal{F}} \\ &= \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{\mathcal{F}\in B\,\mathrm{sh}(i)B} \mathbf{e}_{\mathcal{F}},\end{aligned}$$

por el Lema 1.33. Usando las identificaciones del Lema 1.31 y la observación del Lema 1.32, esto implica que

$$[\delta_{\mathrm{id},1}] \smile [\delta_{\mathrm{id},r}] = \sum_{i=1}^{r+1} [\delta_{\mathrm{sh}(i),r+1}] = \left(\sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{\mathrm{inv}(\mathrm{sh}(i))}\right) [\delta_{\mathrm{id},r+1}].$$

Finalmente, el Lema 1.2 muestra que esto es igual a

$$\left(\sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1}\right) [\delta_{\mathrm{id},r+1}].$$

El coeficiente que acompaña a $[\delta_{\mathrm{id},r+1}]$ es 1 si $r$ es par y 0 si $r$ es impar, lo que prueba las últimas dos identidades del enunciado.

Para probar la primera ecuación, empezamos calculando $[\delta_{\mathrm{id},2}] \smile [\delta_{\mathrm{id},2r}]$. Trabajando de manera parecida, vemos que

$$(\alpha_2 \smile \alpha_{2r})(\mathbb{F}^{2r+2})(\mathcal{F}^0) = \sum_{\substack{S<\mathbb{F}^{2r+2}\\ \dim(S)=2}} \mathbf{e}_{\mathcal{F}^0 * S},$$

por lo que otra vez usando el Lema 1.2 vemos que

$$\begin{aligned}[\delta_{\mathrm{id},2}] \smile [\delta_{\mathrm{id},2r}] &= \sum_{1\le i<j\le 2r+2} [\delta_{\mathrm{sh}(ij),2r+2}] \\ &= \left(\sum_{j=2}^{2r+2} \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{\mathrm{inv}(\mathrm{sh}(ij))}\right) [\delta_{\mathrm{id},2r+2}] \\ &= r \cdot [\delta_{\mathrm{id},2r+2}].\end{aligned}$$

Por inducción tenemos entonces que

$$[\delta_{\mathrm{id},2}]^{\smile n} = n! \cdot [\delta_{\mathrm{id},2n}].$$

La primera identidad del enunciado se sigue entonces de esta última igualdad tras una manipulación algebraica sencilla. □

A partir de todo lo hecho a lo largo del capítulo, podemos determinar completamente la estructura de álgebra graduada de $H^\bullet(\mathbf{\Sigma})$, lo que era nuestro objetivo central:

**Teorema 1.35.** *Hay un isomorfismo de álgebras graduadas*

$$H^\bullet(\mathbf{\Sigma}) \cong \Lambda[x] \otimes \Bbbk[y]$$

*que hace corresponder* $\mathfrak{dim}$ *con* $x$ *y* $\mathfrak{sch}$ *con* $y$.

Este resultado es análogo a [Tam17, Theorem III.5.6]. Notemos que allí el autor determina directamente la diferencial en la página $E_1$ de la sucesión espectral. Esto es factible en ese caso porque en esa página aparecen las representaciones de signo de los grupos simétricos, mientras que en nuestra situación tenemos que lidiar con la representación de Steinberg.

*Demostración.* Gracias al Lema 1.32 sabemos que para todo número natural $n$ los módulos $E_1^{n,0}(\mathbf{\Sigma})$ son unidimensionales, y el Lema 1.34 muestra que de hecho $E_1^{\bullet,0}(\mathbf{\Sigma})$ está generada como álgebra por las clases de cohomología $[\delta_{\mathrm{id},1}]$ y $[\delta_{\mathrm{id},2}]$. Una verificación sencilla usando las identificaciones del Lema 1.31 prueba que la clase del cociclo de dimensión en $E_1(\mathbf{\Sigma})$ es $[\delta_{\mathrm{id},1}]$ y la clase del cociclo de Schubert es $[\delta_{(12),2}] = -[\delta_{\mathrm{id},2}]$. Como estos cociclos no son cobordes –de manera que sobreviven hasta la página $E^\infty$– y sus clases en $E_1(\mathbf{\Sigma})$ generan a $E_1(\mathbf{\Sigma})$ como álgebra, la diferencial en esta página debe ser idénticamente nula, ya que la sucesión espectral es multiplicativa. Hemos probado entonces que para cada número natural $n$ el módulo $H^n(\mathbf{\Sigma})$ es unidimensional, y las relaciones sobre los productos dadas en el Lema 1.34 establecen la estructura de álgebra. □

Vale la pena destacar también que las relaciones del Lema 1.34 presentan a la subálgebra generada por la clase del cociclo de Schubert como un álgebra de potencias divididas. La hipótesis de que el cuerpo $\Bbbk$ es de característica cero, que hemos usado fuertemente a lo largo del capítulo, es necesaria una vez más para que esta estructura resulte isomorfa a un álgebra de polinomios.

Finalmente, podemos dar también una descripción para la estructura de álgebra de la cohomología de la especia de banderas *completas*.

**Teorema 1.36.** *La inclusión* $\mathbf{L} \to \mathbf{\Sigma}$ *induce un isomorfismo* $H^\bullet(\mathbf{L}) \cong H^\bullet(\mathbf{\Sigma})$ *entre sus álgebras de cohomología.*

Este resultado es análogo a [Tam17, Theorem III.6.10].

*Demostración.* Imitando la demostración del Lema 1.31, vemos que

$$E_1^{p,0}(\mathbf{L}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}(\mathbb{F}^p)}(\mathbf{L}_p(\mathbb{F}^p), H^p(\Sigma_p^\bullet)) \cong H^p(\Sigma_p^\bullet)^B.$$

Las clases de las restricciones de los cociclos de dimensión y de Schubert a $\mathbf{L}$ en $E_1(\mathbf{L})$ se identifican a través de este isomorfismo con $[\delta_{\mathrm{id},1}]$ y $[\delta_{(12),2}]$ respectivamente, por lo que la inclusión $\mathbf{L} \to \mathbf{\Sigma}$ induce un morfismo multiplicativo en las sucesiones espectrales que es un isomorfismo $E_1(\mathbf{\Sigma}) \to E_1(\mathbf{L})$ a nivel de las primeras páginas y en particular en la cohomología gracias al teorema de comparación de sucesiones espectrales presentado en [Wei94, Theorem 5.2.12]. □

# Capítulo 2

# La cohomología de la especie de órdenes lineales

En el capítulo anterior consideramos la cohomología de la GL-especie **L** de banderas como **e**-bicomódulo, que es una variante natural del estudio de la cohomología de la especie combinatoria L de órdenes lineales como e-bicomódulo llevada a cabo en [Tam17, §III.5-6]. En esta sección estudiaremos otra variante diferente de esta última idea: dado que L es una coálgebra, es un bicomódulo sobre sí misma, y tendrá sentido considerar su cohomología como L-bicomódulo. Esto es el análogo a la cohomología de Hochschild en este contexto. En particular, esto hace esperable que la determinación completa de esta estructura sea mucho más difícil a las llevadas a cabo en [Tam17] y en el capítulo anterior. Nos focalizaremos en dar, en su lugar, una descripción de un objeto geométrico que juegue el rol desempeñado por el complejo de Coxeter y el *building* de subespacios en estos trabajos.

Gran parte de los preliminares técnicos serán similares a los desarrollados en el capítulo anterior, por lo que el objetivo de las primeras secciones será principalmente fijar notación.

## 2.1 La categoría de especies

Recordemos que una especie combinatoria es un funtor $\mathrm{Fin}^{\times} \to \mathbf{Fin}_{\Bbbk}$, de el grupoide $\mathrm{Fin}^{\times}$ de *conjuntos* finitos y biyecciones a la categoría $\mathbf{Fin}_{\Bbbk}$ de los espacios vectoriales de dimensión finita y transformaciones lineales entre ellos. Escribiremos Sp a la categoría de especies combinatorias, que tiene como morfismos a las transformaciones naturales entre ellas. La categoría Sp tiene una estructura $\Bbbk$-lineal evidente, es abeliana y posee una estructura monoidal con un producto que al igual que el considerado en la sección anterior es conocido como producto de Cauchy. Si x e y son especies, su producto es el funtor $\mathrm{x} \otimes \mathrm{y}$ que

- en cada conjunto finito $A \in \mathrm{Fin}^\times$ toma el valor

$$(\mathrm{x} \otimes \mathrm{y})(A) = \bigoplus_{B \subseteq A} \mathrm{x}(B) \otimes_{\Bbbk} \mathrm{y}(A \setminus B),$$

- y que envía un morfismo $f : A \to B$ de $\mathrm{Fin}^\times$ a

$$(\mathrm{x} \otimes \mathrm{y})(f) = \sum_{C \subseteq A} \mathrm{x}(f|_C) \otimes_{\Bbbk} \mathrm{y}(f|_{A \setminus C}),$$

  donde $f|_C$ y $f|_{A\setminus C}$ son las restricciones de la función $f$ a $C$ y su complemento $A \setminus C$.

En adelante omitiremos el subíndice del producto tensorial de $\mathbf{Fin}_{\Bbbk}$.

La unidad para este producto monoidal es la especie 1 que toma el valor $\Bbbk$ en el conjunto vacío y el valor 0 en cualquier otro caso, y que actúa sobre flechas enviando todo morfismo a la identidad correspondiente. Los unitores y asociadores de esta estructura monoidal son los que surgen de los usuales de $\mathbf{Fin}_{\Bbbk}$. A diferencia del caso de las GL-especies, la estructura monoidal sobre la categoría de las especies convencionales es obviamente simétrica.

De manera similar a que en la sección anterior hablamos de GL-especies concentradas en una dimensión, en este contexto tiene sentido hablar de especies combinatorias concentradas en un cardinal y disponemos de una equivalencia de categorías

$$\mathrm{Sp} = \mathrm{Fun}(\mathrm{Fin}^\times, \mathbf{Fin}_{\Bbbk}) \cong \prod_n \mathrm{Fun}(\mathbb{S}_n, \mathbf{Fin}_{\Bbbk}) \cong \prod_n \mathrm{mod}_{\mathbb{S}_n}. \tag{2.1}$$

similar a la de (1.6) y, en particular, tenemos un análogo del Lema 1.3:

**Lema 2.1.** *Sea* x *una especie combinatoria concentrada en cardinal* $n$ *e* y *una especie arbitraria. La aplicación*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \ni f \longmapsto f([\![n]\!]) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}_n}(\mathrm{x}([\![n]\!]), \mathrm{y}([\![n]\!]))$$

*es un isomorfismo natural en* x *e* y. □

## 2.2 La coálgebra L

La **especie de órdenes lineales** L hace corresponder a cada conjunto finito $A$ el espacio vectorial $\mathrm{L}(A)$ libremente generado por el conjunto de órdenes lineales (también conocidos como órdenes totales) sobre $A$. Dada una biyección $f : A \to B$, el morfismo $\mathrm{L}(f) : \mathrm{L}(A) \to \mathrm{L}(B)$ es el que, en las bases distinguidas de $\mathrm{L}(A)$ y $\mathrm{L}(B)$, se obtiene transportando órdenes a lo largo de $f$.

La especie L es una coálgebra en la categoría monoidal Sp. Su comultiplicación $\Delta : \mathrm{L} \to \mathrm{L} \otimes \mathrm{L}$ tiene componentes tales que

$$\Delta(A)(z) = \sum_{B \subseteq A} z|_B \otimes z|_{A \setminus B}$$

para cualquier conjunto finito $A \in \mathrm{Fin}^{\times}$ y orden total $z$ sobre $A$. La única componente interesante de la counidad $\varepsilon : \mathrm{L} \to 1$ es la correspondiente al conjunto vacío, que es la función $\varepsilon(\emptyset) : \mathrm{L}(\emptyset) \to 1(\emptyset)$ que envía el único orden sobre el conjunto vacío al elemento 1 de $1(\emptyset) = \Bbbk$.

Como mencionamos al principio de la sección, estudiaremos la cohomología de L en tanto L-bicomódulo, es decir

$$H^{\bullet}(\mathrm{L}, \mathrm{L}) = \mathrm{Ext}^{\bullet}(\mathrm{L}, \mathrm{L})$$

con Ext calculado en la categoría de L-bicomódulos. Remarcamos que una vez más esto tiene sentido dado que esta categoría es abeliana y tiene suficientes inyectivos.

Para llevar a cabo esta tarea emplearemos una construcción totalmente análoga a la del capítulo anterior, en la que usamos una sucesión espectral que surge a partir de una filtración sobre la construcción cobar reducida. Mencionaremos sólo brevemente las definiciones necesarias para esto dado que toda la construcción funciona exactamente igual en este caso.

La **especie de órdenes lineales reducida** $\overline{\mathrm{L}}$ es el núcleo de la counidad $\varepsilon : \mathrm{L} \to 1$. Coincide en todos los conjuntos no vacíos con L y vale $\overline{\mathrm{L}}(\emptyset) = 0$. Es una subcoálgebra no counital de L y su comultiplicación $\overline{\Delta}$ es tal que

$$\overline{\Delta}(A)(z) = \sum_{\emptyset \subsetneq B \subsetneq A} z|_B \otimes z|_{A \setminus B}$$

para todo orden total $z$ sobre cada conjunto $A$. De manera análoga a (1.3), tenemos que

$$\overline{\mathrm{L}}^{\otimes n}(A) = \bigoplus_{(A_1, \ldots, A_n)} \overline{\mathrm{L}}(A_1) \otimes \overline{\mathrm{L}}(A_2) \otimes \cdots \otimes \overline{\mathrm{L}}(A_n) \tag{2.2}$$

donde ahora la suma directa está indexada por el conjunto de particiones ordenadas $(A_1, \ldots, A_n)$ de $A$ sin partes vacías[1]. Notamos que una base para $\overline{\mathrm{L}}^{\otimes n}(A)$ como espacio vectorial está indexada por el conjunto de particiones ordenadas $(X_1, \ldots, X_n)$ de $A$ en donde cada parte $X_i$ está totalmente ordenada y cada una de las $X_i$ es no vacía. Por ejemplo, un elemento básico típico de $\overline{\mathrm{L}}^{\otimes 3}([\![5]\!])$ es $(34) \otimes (5) \otimes (21)$, donde $(34)$ representa al orden total $3 < 4$ del conjunto $\{3, 4\}$.

El objeto graduado $\overline{\mathrm{L}}^{\otimes \bullet}$ de Sp posee una estructura semicosimplicial con morfismos de cocara $\partial^i : \overline{\mathrm{L}}^{\otimes n} \to \overline{\mathrm{L}}^{\otimes n+1}$ dados por

$$\partial^i = \mathrm{id}_{\overline{\mathrm{L}}}^{\otimes i-1} \otimes \overline{\Delta} \otimes \mathrm{id}_{\overline{\mathrm{L}}}^{\otimes n-i} \tag{2.3}$$

para cada $i \in [\![n]\!]$. Para cada entero positivo $n$, evaluando la especie semicosimplicial $\overline{\mathrm{L}}^{\otimes \bullet}$ en el conjunto $[\![n]\!]$ obtenemos un $\mathbb{S}_n$-módulo semicosimplicial $\overline{\mathrm{L}}^{\otimes \bullet}([\![n]\!])$ y notamos $\Sigma_n^{\bullet}$

[1] Estrictamente, si siguiéramos la construcción del capítulo anterior, la suma (2.2) quedaría indexada por secuencias $(B_1, \ldots, B_n)$ de subconjuntos crecientes de $A$. Dichas secuencias se corresponden unívocamente con las correspondientes secuencias de diferencias consecutivas $(B_1, B_2 \setminus B_1, \ldots, B_n \setminus B_{n-1})$, que son precisamente las particiones ordenadas de $A$.

al complejo de cocadenas asociado. Enfatizamos que el complejo $\Sigma_n^\bullet$ es diferente al presentado con el mismo nombre en el capítulo anterior; estamos reutilizando la notación para remarcar sus similitudes. En ambos casos, el complejo $\Sigma_n^\bullet$ resulta tener un origen geométrico que facilita el cómputo de su cohomología.

La **construcción cobar reducida** de un L-bicomódulo x es el espacio vectorial semicosimplicial $C^\bullet(\mathrm{x})$ dado por

$$C^n(\mathrm{x}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}\mathrm{p}}(\mathrm{x}, \overline{\mathrm{L}}^{\otimes n}) \tag{2.4}$$

para cada entero no negativo $n$ y cuyos morfismos de cocara $\partial^i : C^n(\mathrm{x}) \to C^{n+1}(\mathrm{x})$ están dados para cada $i \in [\![0, n+1]\!]$ por

$$\partial^i(\alpha) = \begin{cases} (\pi \otimes \alpha) \circ \lambda, & \text{si } i = 0; \\ (\mathrm{id}_{\overline{\mathrm{L}}}^{\otimes i-1} \otimes \overline{\Delta} \otimes \mathrm{id}_{\overline{\mathrm{L}}}^{\otimes n-i}) \circ \alpha, & \text{si } 0 < i < n+1; \\ (\alpha \otimes \pi) \circ \rho, & \text{si } i = n+1. \end{cases} \tag{2.5}$$

para cada $\alpha \in C^n(\mathrm{x})$. Una vez más, la suma alternada de los morfismos de cocara hace de $C^\bullet(\mathrm{x})$ un complejo. La misma demostración que la dada en el Lema 1.6 prueba el siguiente resultado:

**Lema 2.2.** *Si* x *es un* L*-bicomódulo trivial, el complejo* $C^\bullet(\mathrm{x})$ *es isomorfo a la imagen del complejo* $\overline{\mathrm{L}}^{\otimes \bullet}$ *por el funtor* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}\mathrm{p}}(\mathrm{x}, -)$. □

Procediendo de manera análoga a la Sección 1.7, si x es un L-bicomódulo, disponemos de una filtración descendente $F$ en el espacio $C^n(\mathrm{x})$ cuya capa $p$-ésima es

$$F^p C^n(\mathrm{x}) = \{\alpha \in C^n(\mathrm{x}) : \alpha(A) = 0 \text{ para cada } A \text{ con } |A| < p\}.$$

Juntando esta colección de filtraciones obtenemos una filtración $F$ sobre el complejo $C^\bullet(\mathrm{x})$ que determina una sucesión espectral $E(\mathrm{x})$ contenida en el cuarto cuadrante y cuya página 0-ésima está dada por

$$E_0^{p,q}(\mathrm{x}) = \frac{F^p C^{p+q}(\mathrm{x})}{F^{p+1} C^{p+q}(\mathrm{x})}.$$

Al igual que la presentada en el capítulo anterior, la página cero está concentrada en un cono idéntico al ilustrado en la Figura 1.3. El argumento presentado en la demostración de la Proposición 1.26 no es aplicable aquí para demostrar la convergencia de esta nueva sucesión espectral porque no tenemos ninguna forma de asegurar su regularidad, pero podemos apelar al siguiente teorema:

**Teorema 2.3.** [McC85, Theorem 3.2] *Sea* $(A, d, F)$ *un módulo diferencial graduado filtrado. Si la filtración* $F$ *es exhaustiva y débilmente convergente entonces la sucesión espectral asociada converge a* $H^\bullet(A)$. □

Recordemos que una filtración $F$ sobre $A$ es exhaustiva si $A = \bigcup_i F_i A$ y que la convergencia débil es implicada por el hecho de que $\bigcap_i F^i A = \{0\}$. Este criterio se aplica inmediatamente a nuestra sucesión espectral:

**Corolario 2.4.** *La sucesión espectral $E(\mathbf{x})$ converge a $H^\bullet(\mathbf{x})$.*

*Demostración.* Apelando al teorema anterior, basta con verificar que la filtración $F$ es exhaustiva y débilmente convergente. La condición de exhaustividad es automática dado que $F^0 C^\bullet(\mathrm{x}) = C^\bullet(\mathrm{x})$ y la convergencia débil es implicada por el hecho evidente de que $\bigcap_p F^p C^\bullet(\mathrm{x}) = 0$. □

Al igual que en el capítulo anterior, si x es una especie y $p$ un entero no negativo, $\mathrm{x}_p$ denotará a su imagen por el endofuntor $(-)_p$ definido de manera análoga al presentado en (1.5) en la Sección 1.2. La misma demostración del Lema 1.24 funciona en este contexto para probar el siguiente resultado:

**Lema 2.5.** *Para cada $p$, hay un isomorfismo de complejos de cadenas*

$$f^p : (C^\bullet(\mathrm{x}_p))[p] \to E_0^{p,\bullet}(\mathrm{x})$$

*dado por $f^p(\alpha) = \alpha \circ \pi_p(\mathrm{x}) + F^{p+1} C^{p+q}(\mathrm{x})$ para cada $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}}(\mathrm{x}_p, \overline{\mathrm{L}}^{\otimes p+q})$.* □

Nuestro objetivo en este capítulo será describir en detalle la página 1 en el caso en el que el L-bicomódulo x es L. Nuestra estrategia para ello será:

1. Describir la página $E_1$ para L caracterizando a los módulos que aparecen allí como la cohomología de ciertos complejos $\Sigma_p^\bullet$ de origen algebraico.

2. Presentar en detalle una familia de objetos geométricos con tipo homotópico conocido.

3. Notar que para cada uno de los complejos $\Sigma_p^\bullet$ existe una descomposición celular de uno de los objetos de la familia tal que el complejo que determina su homología celular resulta isomorfo a $\Sigma_p^\bullet$.

4. Trasladar nuestro conocimiento del tipo homotópico de los objetos geométricos para obtener una descripción de la página 1.

Pasemos ahora a describir la página $E_1$ de la sucesión espectral en el caso en que el bicomódulo x en cuestión es L:

**Lema 2.6.** *Para cada $p$ y $q$ tenemos isomorfismos $E_1^{p,q}(\mathrm{L}) \cong H^q(\Sigma_p^\bullet[p])$.*

*Demostración.* Fijemos $p$ y $q$. El isomorfismo de complejos del enunciado del Lema 2.5 muestra que

$$E_1^{p,q}(\mathrm{L}) \cong H^q((C^\bullet(\mathrm{L}_p))[p]).$$

Por el Lema 2.2, la diferencial en $C^\bullet(\mathrm{L}_p)$ es la inducida por la diferencial de $\overline{\mathrm{L}}^{\otimes\bullet}$ tras aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}}(\mathrm{L}_p, -)$. Usando este hecho junto a la naturalidad del isomorfismo del Lema 2.1 obtenemos:

$$E_1^{p,q}(\mathrm{L}) \cong H^q(\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}_p}(\mathrm{L}_p([\![p]\!]), \Sigma_p^\bullet[p])).$$

Vale la pena remarcar que el funtor Hom de la ecuación anterior es en la categoría de módulos sobre el grupo simétrico $\mathbb{S}_p$ y *no* sobre la categoría de especies Sp.

Ahora bien, es fácil verificar que el $\mathbb{S}_p$-módulo $\mathrm{L}_p([\![p]\!])$ es isomorfo al $\mathbb{S}_p$-módulo regular. Usando su proyectividad y el hecho de que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}_p}(\mathbb{S}_p, \mathrm{x}) \cong \mathrm{x}$ como espacios vectoriales obtenemos el resultado deseado. □

Una vez más, resulta ser que los módulos que aparecen en la página $E_1$ están controlados por un complejo de origen geométrico. En el cálculo de la cohomología de $\mathbf{L}$ como $\mathbf{e}$-bicomódulo de la sección anterior este complejo surgía de la geometría del poset de subespacios de un espacio vectorial sobre un cuerpo finito; en el caso de L como e-bicomódulo, estudiado en [Tam17], este complejo era el correspondiente a una triangulación de la esfera que surgía a partir del estudio de un arreglo de hiperplanos particular: el arreglo de trenzas. En el caso considerado en esta sección, veremos que está relacionado con la variante compleja de este mismo arreglo de hiperplanos. Para ello desarrollaremos primero algunos preliminares en la siguiente sección.

## 2.3 Arreglos de hiperplanos

Nuestra referencia principal para esta sección es [OT92], a pesar de que usaremos algunas convenciones ligeramente diferentes.

Un **arreglo de hiperplanos** es un conjunto finito de hiperplanos contenidos en un espacio vectorial ambiente $V$, que podrá ser real o complejo. Para nosotros un hiperplano será un subespacio *vectorial* de codimensión 1 y en particular, nuestros arreglos de hiperplanos son los que suelen llamarse *centrales*.

Sea $\mathcal{A} = \{H_i\}$ un arreglo de hiperplanos real sobre un espacio vectorial $V$. Por un lado, a partir de $\mathcal{A}$ podemos construir un arreglo de hiperplanos complejo sobre el espacio $V \otimes \mathbb{C}$, al que llamamos su **complejificación**, poniendo $\mathcal{A}^{\mathbb{C}} = \{H \otimes \mathbb{C} : H \in \mathcal{A}\}$. Por otro lado, podemos describir una estructura algebraica importante que codifica su combinatoria:

Las **cámaras** de $\mathcal{A}$ son las componentes arcoconexas del complemento $V \setminus \bigcup_i H_i$ de los hiperplanos de que lo conforman; se tratan siempre de conos simpliciales. Notaremos $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ al conjunto de las cámaras del arreglo $\mathcal{A}$. Por ejemplo, en el arreglo de hiperplanos en $\mathbb{R}^2$ de la Figura 2.1 hay 8 cámaras.

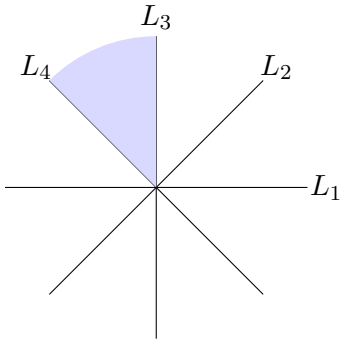



Figura 2.1: Un arreglo de 4 líneas, con una de sus cámaras sombreada en azul.

El **reticulado de intersecciones** de $\mathcal{A}$, al que denotamos $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, es el reticulado cuyos elementos son las intersecciones de elementos de $\mathcal{A}$ ordenadas por la inclusión. Remarcamos que los autores de [OT92] utilizan el orden inverso en este reticulado.

Dado un subespacio vectorial $X \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, la **restricción** de $\mathcal{A}$ a $X$, denotada $\mathcal{A}^X$, es el arreglo en $X$ dado por la familia de hiperplanos $\{H \cap X : H \in \mathcal{A}\} \setminus \{X\}$.

Una **cara** de $\mathcal{A}$ es una cámara de alguna restricción de $\mathcal{A}$. El conjunto $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ de caras de $\mathcal{A}$ es entonces

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}) = \bigcup_{x \in \mathcal{L}(\mathcal{A})} \mathcal{C}(\mathcal{A}^X).$$

El conjunto de caras admite un orden parcial en el que $P \leq Q$ si $P$ está contenida en la clausura de $Q$. En este caso decimos que $P$ **es cara de** $Q$ y si además $P \neq Q$, decimos que es una **cara propia** y escribimos $P < Q$. La **dimensión** de una cara es la dimensión del subespacio vectorial que genera. La cara $P$ es una **cara directa** de $Q$ si $P \leq Q$ y $\dim P + 1 = \dim Q$. En este caso notamos $P \prec Q$.

Siguiendo a [AM17, §1.4], definimos ahora un producto sobre el conjunto de caras conocido como **producto de Tits**. Dadas caras $P$ y $Q$, elegimos puntos $x \in P$ e $y \in Q$ y consideramos una parametrización $\sigma : [0, 1] \to V$ del segmento de recta que une $x$ e $y$. Si $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño, $\sigma((0, \varepsilon))$ está contenido en una única cara $R \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$. Definimos entonces al producto $PQ$ como $R$, notando que es independiente de nuestra elección de $x$, $y$, $\sigma$ y $\varepsilon$.

Este producto es asociativo y es fácil ver que tiene como elemento neutro a la cara correspondiente al origen. De este modo $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ es un semigrupo con el producto de Tits. De hecho, $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ es un ejemplo de una clase de semigrupos conocida como ***left-regular bands***, cuya estructura es bastante más manejable que la de un semigrupo arbitrario y cuya teoría de representaciones está caracterizada casi completamente. Referimos al lector a [Bro04] para más información sobre la conexión entre las *left-regular bands* y la teoría general de arreglos de hiperplanos.

El siguiente lema describe algunas propiedades del producto de Tits que nos serán de utilidad más adelante:

**Lema 2.7** (Proposition 10.1, [AM10])**.** *Sea $\mathcal{A}$ un arreglo de hiperplanos real.*

1. *El conjunto de las cámaras es un ideal a derecha para el producto de Tits. En otras palabras, si $Q \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, entonces $PQ \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ para toda cara $P \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$.*
2. *Para cualquier par de caras $P, Q \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$ es $P \leq PQ$.*
3. *Si $P \leq Q$ entonces $PQ = Q$ y $QP = Q$.* □

## 2.4 El arreglo de trenzas

El **arreglo de trenzas** real $\mathcal{B}_n$ es el arreglo en $\mathbb{R}^n$ dado por los $n(n-1)/2$ hiperplanos

$$H_{i,j} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = x_j\},$$

con $1 \leq i \neq j \leq n$. Su complejificación $\mathcal{B}_n^{\mathbb{C}}$ es el arreglo sobre $\mathbb{C}^n$ dado por los hiperplanos

$$H_{i,j}^{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C}^n : z_i = z_j\}.$$

Nos referiremos a $\mathcal{B}_n^{\mathbb{C}}$ como el **arreglo de trenzas complejo**.

Como el único arreglo de hiperplanos real que consideraremos en esta sección es $\mathcal{B}_n$, escribiremos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{C}$ para referirnos a los conjuntos $\mathcal{F}(\mathcal{B}_n)$ y $\mathcal{C}(\mathcal{B}_n)$ de sus caras y cámaras, respectivamente. Tanto $\mathcal{C}$ como $\mathcal{F}$ poseen interpretaciones combinatorias interesantes: $\mathcal{C}$ está en correspondencia biyectiva con el conjunto de permutaciones del conjunto $[\![n]\!]$ y $\mathcal{F}$ está en biyección con el conjunto de particiones ordenadas de $[\![n]\!]$. A continuación describiremos brevemente estas correspondencias. Para más detalle, el lector puede consultar [AM10, §10.2.2].

Sea $C \in \mathcal{C}$ una cámara y sea $x \in \mathcal{C}$ un punto. Como $x$ no pertenece a ninguno de los hiperplanos de $\mathcal{B}_n$, todas sus coordenadas son diferentes y existe entonces una única permutación $\sigma \in \mathbb{S}_n$ tal que $x_{\sigma(1)} < \cdots < x_{\sigma(n)}$. Nuestra biyección asigna a $C$ la permutación $\sigma$. Es fácil ver que esta construcción es independiente de la elección de $x$.

De manera similar, dada una cara $P \in \mathcal{F}$, elegimos un punto $x \in P$. Este punto puede estar contenido en algunos hiperplanos y en ese caso algunas de sus coordenadas serán iguales entre sí. Podemos escribir

$$x_{i_{1,1}} = \cdots = x_{i_{1,k_1}} < x_{i_{2,1}} = \cdots = x_{i_{2,k_2}} < \cdots < x_{i_{r,1}} = \cdots = x_{i_{r,k_r}}$$

para cierta elección de índices $i_{j,k}$ y de este modo, obtenemos una partición ordenada $(\{i_{1,1}, \ldots, i_{1,k_1}\}, \{i_{2,1}, \ldots, i_{2,k_2}\}, \ldots, \{i_{r,1}, \ldots, i_{r,k_r}\})$ a partir de la cara $P$. Observamos que la biyección entre cámaras y permutaciones es precisamente la restricción de la

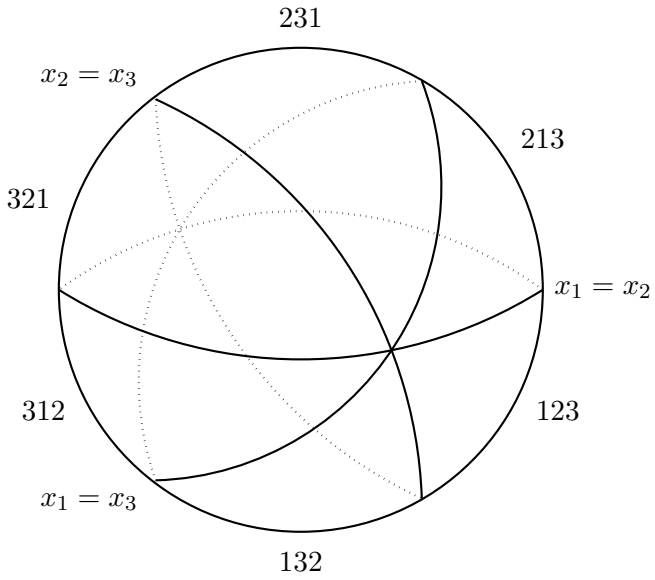



Figura 2.2: El arreglo de trenzas en $\mathbb{R}^3$ intersecado con la esfera unitaria. Podemos ver que los 3 hiperplanos del arreglo parten al espacio en 6 cámaras, una por cada permutación del conjunto de 3 elementos.

biyección entre caras y particiones ordenadas una vez que identificamos a las permutaciones con particiones ordenadas donde cada bloque posee exactamente un elemento.

Es fácil verificar que la relación de caras se corresponde bajo estas identificaciones con la relación de **refinamiento**; en otras palabras, si $P$ y $Q$ son particiones ordenadas, $P$ es cara de $Q$ si y sólo si podemos obtener a $P$ agrupando bloques *consecutivos* de $Q$. Por ejemplo, $(\{1,2,4\},\{5,7\},\{3,6\})$ es refinada por $(\{4\},\{1,2\},\{5,7\},\{3\},\{6\})$. Similarmente, $P$ es cara directa de $Q$ si y sólo si podemos obtener a $P$ agrupando un único par de bloques consecutivos de $Q$. Diremos que $P$ **refina** a $Q$ si $P \leq Q$ y que $Q$ es un **refinamiento directo** de $P$ si $P \prec Q$. La dimensión de la cara representada por una partición ordenada es el número de bloques de la partición.

## 2.5 El complejo de Salvetti

En su trabajo [Sal87], Salvetti construyó un complejo simplicial con el tipo homotópico del complemento de la complejificación $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ de un arreglo de hiperplanos real $\mathcal{A}$ dado. La construcción sólo depende de la combinatoria del reticulado de intersecciones $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Más aún, se pueden pegar ciertos símplices de este complejo para obtener un complejo celular regular[2] con el mismo tipo homotópico. Nos referiremos a ambos como el **complejo de**

[2]Recordemos que un complejo celular es *regular* si la función de pegado de cada celda es un homeomorfismo entre la bola cerrada de la dimensión correspondiente y la clausura de la celda.

**Salvetti** y presentaremos sus construcciones siguiendo [OT92, §5.2].

Comenzaremos describiendo el complejo simplicial (abstracto) asociado a $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$. En los siguientes párrafos fijaremos un arreglo de hiperplanos real $\mathcal{A}$ y omitiremos la referencia a $\mathcal{A}$ en la notación.

El conjunto de vértices de este complejo simplicial es el de todos los pares $(F, FC)$ con $F$ una cara y $C$ una cámara de $\mathcal{A}$, donde $FC$ es el producto de Tits entre caras descripto en la Sección 2.3. Por otro lado, hay un $k$-símplex $\Delta(C \geq F_1 < \cdots < F_{k+1})$ por cada forma de elegir una cadena estricta de caras $F_1 < F_2 < \cdots < F_{k+1}$ de $\mathcal{A}$ y una cámara $C \in \mathcal{C}$ de modo tal que $F_1 \leq C$; notemos que no imponemos ninguna relación entre $C$ y las caras $F_i$ con $i > 1$. Los vértices de dicho símplex son

$$\{(F_1, F_1C), (F_2, F_2C), \ldots, (F_{k+1}, F_{k+1}C)\}.$$

Si $K$ es la cadena propia de caras $F_1 < \cdots < F_{k+1}$, notaremos a este símplex $\Delta(C, K)$ para aligerar la notación. Hacemos ahora algunas observaciones:

1. La colección de símplices que acabamos de describir es cerrada por subconjuntos, de manera que efectivamente tenemos un complejo simplicial. Para ver esto, supongamos que $A = \{(F_{i_1}, F_{i_1}C), \ldots, (F_{i_r}, F_{i_r}C)\}$ es un subconjunto no vacío de $\Delta(C \geq F_1 < \cdots < F_{k+1})$, donde $i_1 < \cdots < i_r$. Afirmamos que

   $$A = \Delta(F_{i_1}C \geq F_{i_1} < \cdots < F_{i_r}).$$

   En primer lugar, la última expresión tiene sentido ya que $F_{i_1}C \in \mathcal{C}$ y que $F_{i_1} \leq F_{i_1}C$ gracias a las propiedades 1 y 2 del Lema 2.7, respectivamente. Los vértices del lado derecho de la ecuación son

   $$\{(F_{i_1}, F_{i_1}F_{i_1}C), (F_{i_2}, F_{i_2}F_{i_1}C) \ldots, (F_{i_r}, F_{i_r}F_{i_1}C)\},$$

   por lo que basta con probar que $F_{i_k}F_{i_1}C = F_{i_k}C$ para todo $k$. Esto es consecuencia de la propiedad 3 del Lema 2.7 y de la asociatividad del producto, pues $F_{i_1} \leq F_{i_k}$.

2. Como $F_1 \leq C$, la propiedad 3 del Lema 2.7 implica que $F_1C = C$, pero en general $F_iC \neq C$ para $i \geq 2$.

3. La dimensión del símplex $\Delta(C, K)$ es exactamente uno menos que la longitud de la cadena $K$. En particular, si $n$ es la dimensión del espacio ambiente del arreglo $\mathcal{A}$, todas las cadenas maximales $K$ tienen longitud $n$, por lo que el complejo es de dimensión $n - 1$.

4. Notemos que los 0-símplices del complejo son de la forma $\Delta(C \geq F)$, por lo que están indexados por pares $(F, C)$ con $C \in \mathcal{C}, F \in \mathcal{F}$ y $C \geq F$.

Localizamos ahora esta construcción general a nuestro caso de interés, que es aquel en el que $\mathcal{A}$ es el arreglo de trenzas en $\mathbb{R}^n$. De este modo, las cámaras se corresponden, como describimos antes, con permutaciones del conjunto $[\![n]\!]$ y las caras con las particiones ordenadas de este mismo conjunto. Un vértice $(F, C)$ nos provee de una partición $F$ y una permutación $C$, y como $C \geq F$, el vértice determina una partición ordenada del conjunto $[\![n]\!]$ en la que cada parte está ordenada. En particular, el conjunto de vértices queda ordenado por la relación de refinamiento de particiones ordenadas.

Llamemos $\mathbf{D}_\bullet^{\text{simp}}$ al complejo de cadenas asociado al complejo simplicial que acabamos de describir, en el que orientamos los símplices ordenando a sus vértices por la relación de refinamiento de particiones. Definiremos a continuación un subcomplejo $\mathbf{D}_\bullet^{\text{cell}}$ de $\mathbf{D}_\bullet^{\text{simp}}$, y veremos más adelante que $\mathbf{D}_\bullet^{\text{cell}}$ es el complejo celular de una descomposición en celdas regular de la realización geométrica del complejo simplicial de Salvetti. Comenzaremos describiendo una base de $\mathbf{D}_\bullet^{\text{cell}}$.

Fijemos un par $(F, C)$ donde $F \in \mathcal{F}$ es una cara de codimensión $k$ y $C \in \mathcal{C}$ es una cámara tal que $F \leq C$. Escribamos $\mathcal{K}_F$ al conjunto de todas las cadenas en $\mathcal{F}$ estrictamente crecientes que comienzan en $F$ y tienen longitud máxima, que necesariamente es $k+1$, y pongamos

$$D(F, C) = \sum_{K \in \mathcal{K}_F} (-1)^K \Delta(C, K),$$

donde $(-1)^K$ es un signo que depende de $K$ de una forma que explicitaremos a continuación.

Sea $K$ es una cadena en $\mathcal{K}_F$ de la forma

$$F_1 \prec F_2 \prec \dots F_{k+1},$$

donde $F_1 = F$. La cara $F_{k+1}$ es una cámara y por lo tanto determina una permutación. Del mismo modo, para cada $i$ las caras $F_i$ y $F_{i+1}$ determinan particiones ordenadas del conjunto $[\![n]\!]$ que difieren en un único refinamiento: hay un único índice $j$ de modo que los bloques $j$-ésimo y $(j+1)$-ésimo de $F_i$ unidos dan lugar al bloque $j$-ésimo de $F_{i+1}$. Definimos $\operatorname{sgn}(F_i; F_{i+1}) := (-1)^{j+1}$ y finalmente, ponemos

$$(-1)^K := \operatorname{sgn}(F_{k+1}) \prod_{i=1}^{k} \operatorname{sgn}(F_i; F_{i+1}),$$

donde $\operatorname{sgn}(F_{k+1})$ es simplemente el signo de la permutación correspondiente a $F_{k+1}$.

Definimos $\mathbf{D}_k^{\text{cell}}$ como el subespacio de $\mathbf{D}_k^{\text{simp}}$ generado por los elementos $D(F, C)$ con $F$ de codimensión $k$. A continuación verificaremos que $\mathbf{D}_\bullet^{\text{cell}}$ efectivamente define un subcomplejo de $\mathbf{D}_\bullet^{\text{simp}}$, pero primero mostraremos algunos ejemplos concretos de las definiciones que acabamos de presentar.

Como dijimos anteriormente, un par $(F, C)$ en el que $F \in \mathcal{F}$ es una cara, $C \in \mathcal{C}$ es una cámara y $F \leq C$ es esencialmente lo mismo que una partición ordenada $F$ junto con una

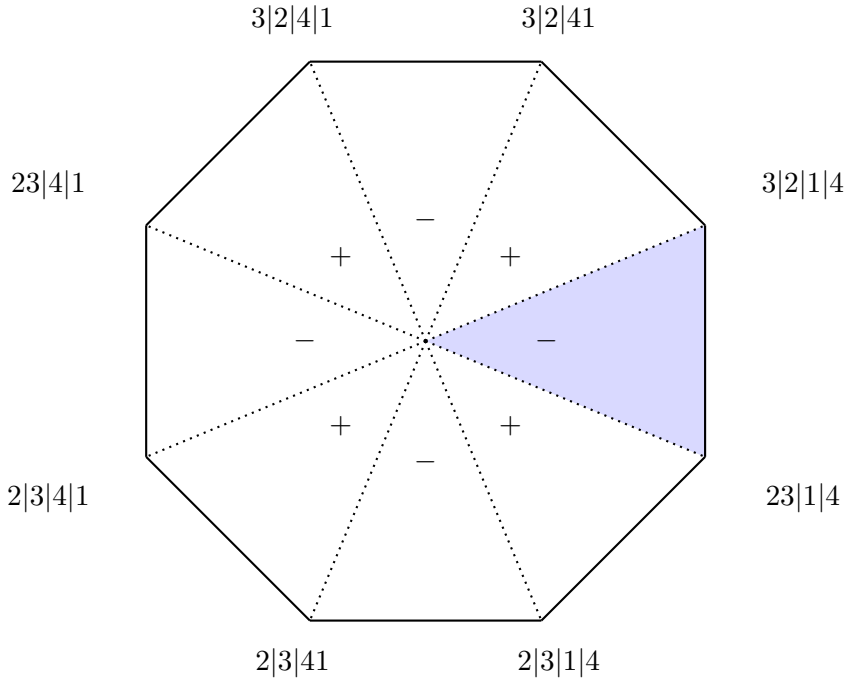



Figura 2.3: La 2-celda $D((\{2,3\},\{1,4\}),2341)$ asociada al arreglo de trenzas en $\mathbb{R}^4$. Los signos indican el signo del 2-símplex correspondiente en la combinación lineal que define la 2-celda. El vértice central de la 2-celda es 23|41 y el símplex coloreado es el correspondiente a la cadena de refinamientos $(\{2,3\},\{1,4\}) < (\{2,3\},\{1\},\{4\}) < (\{3\},\{2\},\{1\},\{4\})$.

permutación $C$ que la preserva (es decir, preserva cada bloque de la partición). Por lo tanto, si ordenamos cada bloque de $F$ de acuerdo a cómo $C$ lo ordena, obtenemos una partición ordenada del conjunto $[\![n]\!]$ en la que cada bloque en sí mismo está ordenado. Por ejemplo, el par $((\{1,3,4\},\{2,6\},\{5\}),314625)$ se corresponde con la partición $((314),(62),(5))$, a la que escribiremos de manera abreviada como 314|62|5. Utilizaremos este recurso como una notación más compacta para describir estos pares.

**Ejemplo.** A modo de ejemplo, calculemos el signo $(-1)^K$ para uno de los símplices $\Delta(C,K)$ de la Figura 2.3. Consideremos el 2-símplex

$$\Delta\Big((\{3\},\{2\},\{1\},\{4\}) \geq (\{2,3\},\{1,4\}) \prec (\{2,3\},\{1\},\{4\}) \prec (\{3\},\{2\},\{1\},\{4\})\Big),$$

que es aquel que aparece sombreado en la figura. La cámara 3214 que aparece en esta cadena se corresponde a la permutación 3214, cuyo signo es negativo. Por otro lado, los signos

$$\operatorname{sgn}\Big((\{2,3\},\{1,4\});(\{2,3\},\{1\},\{4\})\Big)$$

y

$$\operatorname{sgn}\Big((\{2,3\},\{1\},\{4\});(\{3\},\{2\},\{1\},\{4\})\Big)$$

son respectivamente negativo y positivo, dado que los refinamientos se dan en el bloque 2, que es par, y 1, que es impar. De este modo, el signo correspondiente a este 2-símplex es negativo.

**Ejemplo.** Siguiendo con la idea de presentar ejemplos concretos de estas construcciones, listaremos los elementos básicos del complejo $\mathbf{D}_\bullet^{\text{cell}}$ para el caso en el que $n = 3$. Escribiremos $x, y, z$ para los elementos de $\{1, 2, 3\}$, en algún orden. Tenemos que:

- El espacio de vértices $D_0^{\text{cell}}$ está generado por los seis elementos $D(x|y|z)$; en dicho vértice inciden las 1-celdas $D(x|yz)$ y $D(xy|z)$.
- El espacio de 1-celdas $D_1^{\text{cell}}$ está generado por doce elementos, que tienen la forma $D(xy|z)$ o $D(x|yz)$.
- El espacio de 2-celdas $D_2^{\text{cell}}$ está generado por los seis elementos $D(xyz)$. Estas celdas son *dígonos*: su borde está formado por las 1-celdas $D(x|yz)$ y $D(xy|z)$.

Ahora sí, retomamos la discusión principal:

**Lema 2.8.** *La diferencial* $\mathrm{d} : \mathbf{D}_\bullet^{\text{simp}} \to \mathbf{D}_\bullet^{\text{simp}}$ *se restringe a* $\mathbf{D}_\bullet^{\text{cell}}$ *y hace de* $\mathbf{D}_\bullet^{\text{cell}}$ *un subcomplejo.*

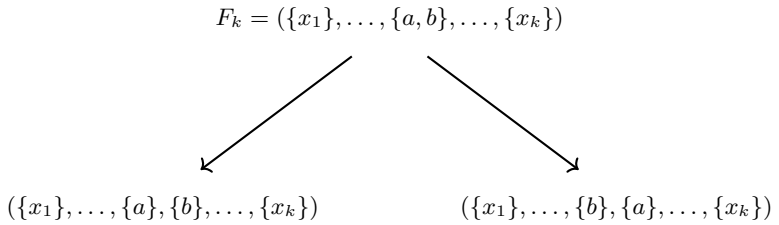
*Demostración.* Dado que orientamos a los símplices de $\mathbf{D}_\bullet^{\text{simp}}$ ordenando a los vértices por la relación de refinamiento, tenemos que si $C$ es una cámara y $F_1, \ldots, F_{k+1}$ una sucesión de caras tal que $F_1 \prec \cdots \prec F_{k+1}$ y $C \geq F_1$, entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\Delta(C \geq F_1 \prec \cdots \prec F_{k+1})) = &-\Delta(F_2C \geq F_2 \prec \cdots \prec F_{k+1}) \\ &+\sum_{i=2}^{k+1}(-1)^i\Delta(C \geq F_1 \prec \cdots \prec \hat{F}_i \prec \cdots \prec F_{k+1})).\end{aligned}$$

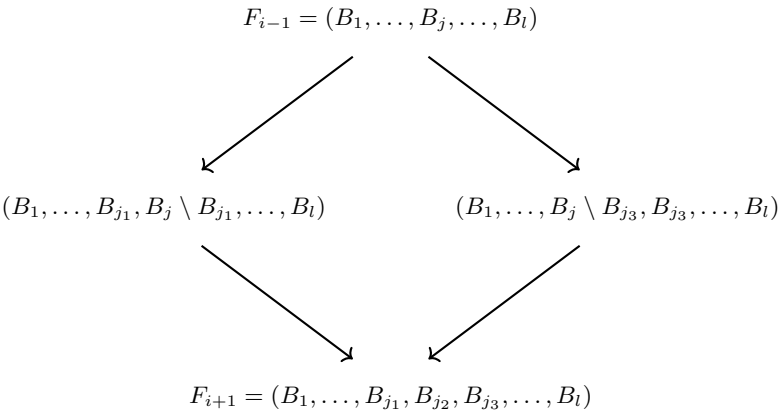
De este modo, si $F_1$ es una cara de codimensión $k$ y $C$ una cámara tal que $C \geq F_1$, entonces

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(D(F_1, C)) = \\ &\quad -\sum_{F_1\prec\cdots\prec F_{k+1}}(-1)^{F_1\prec\cdots\prec F_{k+1}}\Delta(F_2C \geq F_2 \prec \cdots \prec F_{k+1}) \\ &\quad +\sum_{i=2}^{k+1}(-1)^i\sum_{F_1\prec\cdots\prec F_{k+1}}(-1)^{F_1\prec\cdots\prec F_{k+1}}\Delta(C \geq F_1 \prec \cdots \prec \hat{F}_i \prec \cdots \prec F_{k+1})).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Veamos que el segundo sumando del lado derecho de la igualdad se anula. Consideremos un símplex $\Delta = \Delta(C \geq F_1 \prec \cdots \prec \hat{F}_i \prec \cdots \prec F_{k+1})$ que aparezca en el segundo sumando. Mirando las dimensiones de las caras $F_j$ podemos recuperar cuál es el índice $i$ faltante, dado que todas son caras directas de la anterior salvo la $i$-ésima. Así, veremos que hay exactamente dos caras $G$ de modo que $F \prec \cdots \prec F_{i-1} \prec G \prec F_{i+1} \prec \cdots \prec F_{k+1}$ y una verificación sencilla, que omitimos, mostrará que $\Delta$ aparece en sus diferenciales con signos opuestos. Si $i = k+1$ esto es claro, pues una cara $F_k$ de codimensión 1 es una partición ordenada en la que todos los bloques poseen un elemento a excepción de un único bloque de dos elementos, y consecuentemente tiene exactamente dos caras, de acuerdo al siguiente diagrama:

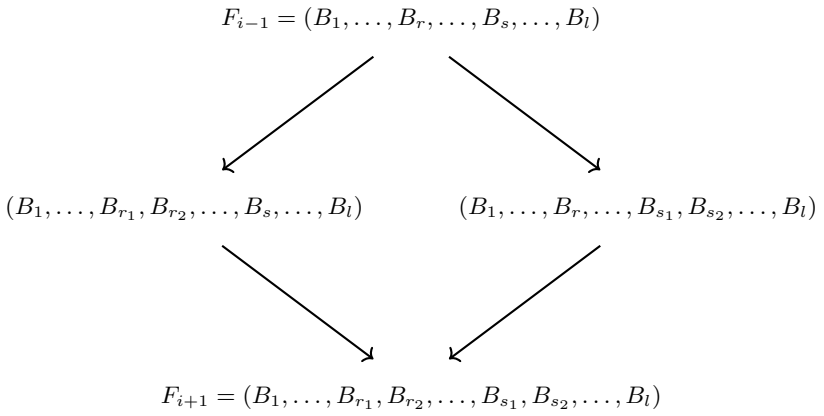



Si $i \neq k+1$, entonces $F_{i-1}$ y $F_{i+1}$ difieren por dos refinamientos directos consecutivos. Estos refinamientos pueden darse en el mismo bloque de la partición $F_{i-1}$ o no. Si este es el caso, al pasar de $F_{i-1}$ a $F_{i+1}$ un único bloque $B_j$ se refina a tres bloques diferentes $B_{j_1}, B_{j_2}, B_{j_3}$, y esto puede darse en exactamente dos formas, como lo muestra el siguiente diagrama:




El único caso que resta considerar es aquel en el que $F_{i-1}$ y $F_{i+1}$ difieren en dos refinamientos directos que tienen lugar en diferentes bloques $B_r$ y $B_s$ de $F_{i-1}$. El siguiente

diagrama muestra que esto también puede ocurrir de exactamente dos maneras:




Volviendo a la ecuación (2.6), lo que acabamos de probar muestra que

$$\mathrm{d}(D(F_1, C)) = - \sum_{F_1 \prec \cdots \prec F_{k+1}} (-1)^{F_1 \prec \cdots \prec F_{k+1}} \Delta(F_2 C \geq F_2 \prec \cdots \prec F_{k+1}).$$

Como por definición tenemos que

$$(-1)^{F_1 \prec \cdots \prec F_{k+1}} = \mathrm{sgn}(F_1; F_2)(-1)^{F_2 \prec \cdots \prec F_{k+1}},$$

agrupando sumandos obtenemos que

$$\mathrm{d}(D(F_1, C)) = - \sum_{F_1 \prec F_2} \mathrm{sgn}(F_1; F_2) D(F_2, F_2 C), \tag{2.7}$$

lo que prueba que $\mathbf{D}_\bullet^{\mathrm{cell}}$ es un subcomplejo de $\mathbf{D}_\bullet^{\mathrm{simp}}$, como buscábamos. □

La homología del complejo $\mathbf{D}_\bullet^{\mathrm{cell}}$ es entendible a partir del siguiente hecho:

**Teorema 2.9** (Theorem 5.50, [OT92]). *El complejo $\mathbf{D}_\bullet^{\mathrm{cell}}$ es el complejo asociado a una descomposición celular regular del complejo simplicial de Salvetti.* □

En particular, la homología de $\mathbf{D}_\bullet^{\mathrm{cell}}$ coincide con la homología singular del espacio dado por cualquier realización geométrica del complejo (simplicial) de Salvetti. Este espacio es entendible, a su vez, por el siguiente resultado:

**Teorema 2.10** (Theorem 5.49, [OT92] – Theorem 1, [Sal87]). *El tipo homotópico de cualquier realización geométrica del complejo de Salvetti asociado a un arreglo de hiperplanos real es el mismo que el del complemento de su complejificación.* □

De hecho, Salvetti describe una realización geométrica explícita en el espacio ambiente de la complejificación y prueba además que el complemento de la complejificación se retrae por deformación fuerte a esa realización.

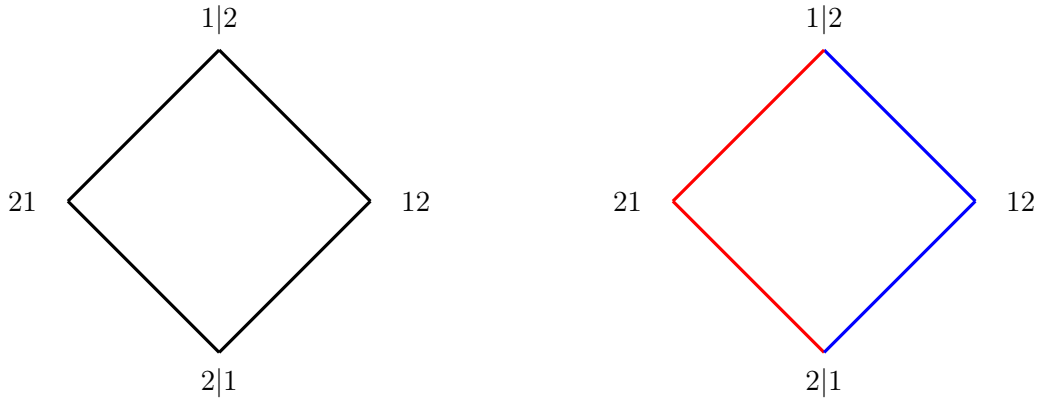



Figura 2.4: A la izquierda, la realización geométrica del complejo de Salvetti para el arreglo de trenzas en $\mathbb{R}^2$, que es el único que podemos dibujar. Su tipo homotópico es el de $S^1$, que coincide con el de $\mathbb{C}^2 \setminus \{(z,z)\}$, el complemento de su complejificación. A la derecha, la descomposición celular de este espacio, en la que coloreamos sus dos 1-celdas.

Fijemos ahora un número natural $m$ y escribamos $\mathbf{D}_\bullet^{\mathrm{cell},m}$ para la construcción de $\mathbf{D}_\bullet^{\mathrm{cell}}$ asociada al arreglo de trenzas en $\mathbb{R}^m$, de manera de enfatizar explícitamente la dependencia de este objeto respecto de $m$. El espacio $\mathbf{D}_k^{\mathrm{cell},m}$ tiene una base indexada por particiones ordenadas del conjunto $[\![m]\!]$ en $m-k$ partes ordenadas y no vacías. Ahora bien, en la discusión que sigue a (2.2) vimos que el espacio $\Sigma_m^{m-k}$ también posee una base indexada por el mismo conjunto. Llamemos $E(F,C)$ al elemento básico de $\Sigma_m^{m-k}$ correspondiente a la partición ordenada de $[\![m]\!]$ determinada por el par $(F,C)$ con $C$ una cámara del arreglo y $F$ una cara tal que $F \geq C$. Por ejemplo, si $F = (\{3,4\},\{5\},\{1,2\})$ y $C = 34521$, el elemento $E(F,C)$ de $\Sigma_5^3$ es

$$E(F,C) = (34) \otimes (5) \otimes (21) \in \Sigma_5^3.$$

**Lema 2.11.** *El morfismo de espacios vectoriales graduados* $\Theta : \Sigma_m^{m-\bullet} \to \mathbf{D}_\bullet^{\mathrm{cell},m}$ *dado por*

$$E(F,C) \mapsto (-1)^k D(F,C)$$

*es un isomorfismo de complejos de* $\Bbbk$*-espacios vectoriales.*

*Demostración.* Que esta función es un isomorfismo de espacios vectoriales es consecuencia del hecho de que envía una base a otra. Por otro lado, verificar su compatibilidad con las diferenciales de los complejos es sencillo a partir de las fórmulas (2.3) y (2.7). □

Dado que los espacios $\Sigma_m^{m-\bullet}$ y $\mathbf{D}_\bullet^{\mathrm{cell},m}$ son $\mathbb{S}_m$-módulos, tiene sentido preguntarse si el isomorfismo del este lema es $\mathbb{S}_m$-equivariante. Esto no es el caso, pero puede arreglarse modificando ligeramente la acción de $\mathbb{S}_m$ sobre $\mathbf{D}_\bullet^{\mathrm{cell},m}$. Si escribimos $\mathbf{D}_\bullet^{\mathrm{cell},m} \otimes \mathrm{sgn}$ para

el complejo de cadenas obtenido tensorizando $\mathbf{D}_\bullet^{\mathrm{cell},m}$ por la representación sgn de signo de $\mathbb{S}_m$, obtenemos el siguiente resultado:

**Lema 2.12.** *El morfismo de espacios vectoriales graduados* $\Theta : \Sigma_m^{m-\bullet} \to \mathbf{D}_\bullet^{\mathrm{cell},m} \otimes \mathrm{sgn}$ *es un isomorfismo de complejos de* $\mathbb{S}_m$*-módulos.*

*Demostración.* Lo único que debemos probar es la $\mathbb{S}_m$-equivariancia de $\Theta$. Observamos que si $\sigma \in \mathbb{S}_m$, $C$ es una cámara y $F$ una cara con $F \leq C$, entonces

$$\sigma \cdot E(F, C) = E(\sigma F, \sigma C),$$

mientras que si $D(F, C) \in \mathbf{D}_k^{\mathrm{cell},m}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma \cdot D(F, C) &= \sigma \cdot \left( \sum_{K \in \mathcal{K}_F} (-1)^K \Delta(C, K) \right) \\
&= \sum_{K \in \mathcal{K}_F} (-1)^K \Delta(\sigma C, \sigma K) \\
&= \sum_{K \in \mathcal{K}_F} \mathrm{sgn}(\sigma)(-1)^{\sigma K} \Delta(\sigma C, \sigma K) \\
&= \mathrm{sgn}(\sigma) D(\sigma F, \sigma C).
\end{aligned}$$

Esto muestra que el morfismo $\Theta$ es equivariante al torcer la acción sobre $\mathbf{D}_\bullet^{\mathrm{cell},m}$ por el signo. □

De este modo, obtenemos una caracterización de los $\mathbb{S}_m$-módulos de homología de $\Sigma_m^{m-\bullet}$:

**Corolario 2.13.** *Hay un isomorfismo de* $\mathbb{S}_m$*-módulos graduados*

$$H^{m-\bullet}(\Sigma_m) \cong H_\bullet(\mathbf{D}^{\mathrm{cell},m}) \otimes \mathrm{sgn}\,.$$

*Demostración.* Basta con componer el isomorfismo $\mathbb{S}_m$-lineal

$$H^{m-\bullet}(\Sigma_m) \cong H_\bullet(\mathbf{D}^{\mathrm{cell},m} \otimes \mathrm{sgn})$$

cuya existencia implica el Lema 2.12 con el isomorfismo canónico

$$H_\bullet(\mathbf{D}^{\mathrm{cell},m} \otimes \mathrm{sgn}) \cong H_\bullet(\mathbf{D}^{\mathrm{cell},m}) \otimes \mathrm{sgn}$$

para obtener lo buscado en el enunciado. □

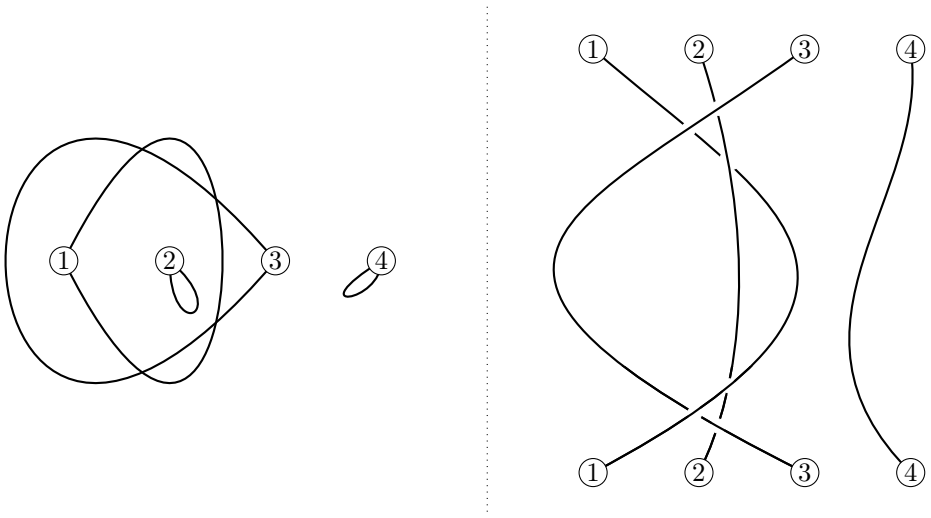



Figura 2.5: Un lazo en $\mathrm{Conf}(4, \mathbb{C})$ interpretado como una trenza pura.

## 2.6 La topología del complemento del arreglo de trenzas complejo

El complemento $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{B}_n^{\mathbb{C}}$ del arreglo de trenzas complejo es el espacio $\mathrm{Conf}(n, \mathbb{C})$ de configuraciones ordenadas de $n$ puntos en el plano; en otras palabras, consiste de todas las $n$-uplas de puntos del plano con todas sus coordenadas diferentes entre sí. Como es el caso con el complemento de cualquier arreglo complejo, $\mathrm{Conf}(n, \mathbb{C})$ es arcoconexo. Sus grupos de homotopía también son conocidos:

**Teorema 2.14.** *El grupo fundamental de* $\mathrm{Conf}(n, \mathbb{C})$ *es el grupo* $PB_n$ *de trenzas puras en* $n$ *cuerdas. Los grupos de homotopía superior de* $\mathrm{Conf}(n, \mathbb{C})$ *son triviales, por lo que este es un espacio de Eilenberg-MacLane* $K(PB_n, 1)$. □

Recordemos que el grupo de trenzas puras $PB_n$ es el subgrupo del grupo de trenzas $B_n$ definido como el núcleo de la aplicación $B_n \to \mathbb{S}_n$ dada por enviar cada trenza a la biyección de $[\![n]\!]$ que determinan sus extremos.

Un lazo en $\mathrm{Conf}(n, \mathbb{C})$ es simplemente un camino $\sigma : [0, 1] \to \mathrm{Conf}(n, \mathbb{C})$ cuyos extremos coinciden. Esto es lo mismo que una $n$-upla de lazos $\sigma_i : [0, 1] \to \mathbb{C}$ con la propiedad de que $\sigma_i(t) \neq \sigma_j(t)$ para todo $t \in [0, 1]$ siempre que $i \neq j$. De este modo, la clase de homotopía de lazos de $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ define una trenza, que resulta ser pura pues cada uno de los $\sigma_i$ es en sí mismo un lazo en $\mathbb{C}$. Esto está ilustrado en la Figura 2.5.

Referimos al lector a [FN62, Corollary 2.1] para una demostración de la afirmación sobre los grupos de homotopía superiores.

**Corolario 2.15.** *La cohomología singular $H^\bullet(\mathrm{Conf}(n,\mathbb{C}))$ coincide con la cohomología de grupos $H^\bullet(PB_n;\mathbb{Z})$ del grupo de trenzas puro.* □

El trabajo de Arnol′d nos provee una determinación completa de este objeto:

**Teorema 2.16** (Theorem, Corollary 2, [Arn69])**.** *El anillo de cohomología $H^\bullet(PB_n;\mathbb{Z})$ es un anillo graduado conmutativo generado por elementos $w_{i,j}$ para $1 \leq i \neq j \leq n$, todos ellos de grado 1 y sujetos a las relaciones*

$$w_{i,j} = w_{j,i}, \qquad w_{i,j}w_{j,k} + w_{j,k}w_{k,i} + w_{k,i}w_{i,j} = 0.$$

*El polinomio de Hilbert de esta cohomología $H^\bullet(PB_n;\mathbb{Z})$ es*

$$p(t) = (1+t)(1+2t)\dots(1+(n-1)t).$$ □

Gracias a este último resultado, podemos dar una descripción combinatoria de los números de Betti $b(n,k)$ (es decir, los coeficientes del polinomio de Hilbert) de $PB_n$. Para números naturales $n$ y $k$, definimos los **números de Stirling** $c(n,k)$ **de primera especie** (ver [OFI24a]) como la cantidad de permutaciones en $\mathbb{S}_n$ cuya factorización en ciclos disjuntos posee exactamente $k$ ciclos, en donde consideramos a los puntos fijos como ciclos de longitud 1.

Para entender la conexión entre los números de Stirling y los coeficientes del polinomio de Hilbert $p$, consideremos primero el polinomio

$$P(x,y) := \prod_{k=0}^{n-1}(kx+y) = \sum_{k=0}^{n-1} a(n,k)x^k y^{n-k}$$

para ciertos escalares $a_k$. Como $p(t) = P(t,1)$, deducimos que

$$\sum_{k=0}^{n-1} b(n,k)t^k = p(t) = P(t,1) = \sum_{k=0}^{n-1} a(n,k)t^k,$$

por lo que de hecho es $a(n,k) = b(n,k)$ para todo $n$ y $k$, y así vemos que

$$P(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1} b(n,k)x^k y^{n-k} \tag{2.8}$$

Además, el polinomio $q(t) = P(1,t)$ se conoce como el **factorial ascendente** y tiene la propiedad de que

$$q(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c(n,k)t^k,$$

como está probado en [Sta12, Proposition 1.3.4]. La igualdad de (2.8) muestra entonces que $b(n,k) = c(n,n-k)$.

| $E_1^{\bullet,\bullet}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| -1 | 0 | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 |
| -2 | 0 | 0 | 0 | 2 | 11 | 35 |
| -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 50 |
| -4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 24 |
| -5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Figura 2.6: Las dimensiones de algunos de los espacios de la página $E_1(\mathrm{L})$.

## 2.7 La estructura de $E_1$

Nuestro objetivo en esta sección es dar una descripción concreta de la página $E_1$ de la sucesión espectral que calcula la homología de la especie L.

Para ello requeriremos la siguiente variante del Teorema de Coeficientes Universales:

**Teorema 2.17.** [Wei94, Theorem 3.6.1] *Sea $M$ un grupo abeliano y $C^\bullet$ un complejo cuya cohomología a coeficientes enteros es de tipo finito. Hay una sucesión exacta corta*

$$0 \to H^n(C^\bullet;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M \to H^n(C^\bullet;M) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H^{n+1}(C^\bullet;\mathbb{Z}),M) \to 0.$$

Como en la sección anterior, escribimos $c(n,k)$ a los números de Stirling y convenimos que $c(0,0)=1$ y que $c(n,k)=0$ siempre que $n<0$, $k<0$ o que $k>n$.

**Teorema 2.18.** *Para cualesquiera $p$ y $q$ tenemos que*

$$\dim E_1^{p,q}(\mathrm{L}) = c(p,p+q).$$

*Demostración.* Gracias al Lema 2.6, sabemos que $E_1^{p,q}(\mathrm{L}) \cong H^q(\Sigma_p^\bullet[p]) = H^{p+q}(\Sigma_p^\bullet)$ y el Corolario 2.12 nos da un isomorfismo $H^{p+q}(\Sigma_p^\bullet) \cong H_{-q}(\mathbf{D}_\bullet^{\mathrm{cell},p}) \otimes \mathrm{sgn}$. Vale la pena destacar que el signo negativo sobre $q$ tiene sentido, pues esta fórmula describe lo que ocurre para $q \leq 0$.

Ahora bien, como $\Bbbk$ es un cuerpo sabemos que

$$H^{-q}(\mathrm{Conf}(p,\mathbb{C});\Bbbk) \cong \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H_{-q}(\mathrm{Conf}(p,\mathbb{C});\Bbbk),\Bbbk),$$

gracias a [MS74, Theorem A.1]. Como $H_q(\mathrm{Conf}(p,\mathbb{C});\Bbbk)$ es de dimensión finita, ya que el complejo celular que la determina también lo es, podemos dualizar nuevamente y obtener un isomorfismo (no natural)

$$H^{-q}(\mathrm{Conf}(p,\mathbb{C});\Bbbk) \cong H_{-q}(\mathrm{Conf}(p,\mathbb{C});\Bbbk). \tag{2.9}$$

Retomando el argumento original, como $\mathbf{D}_\bullet^{\mathrm{cell},p}$ es el complejo celular con escalares en $\Bbbk$ de un espacio con el tipo homotópico de $\mathrm{Conf}(p,\mathbb{C})$, que es un espacio de Eilenberg-MacLane $K(PB_p,1)$, tenemos entonces que

$$H_{-q}(\mathbf{D}_\bullet^{\mathrm{cell},p}) \cong H^{-q}(PB_p;\Bbbk) \cong H^{-q}(PB_p;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk,$$

donde el primer isomorfismo es el de (2.9) y el último se debe al Teorema de Coeficientes Universales 2.17 y el hecho de que los grupos de cohomología entera de $PB_p$ son libres, y en particular playos, gracias al Teorema 2.16. Finalmente, el resultado deseado se obtiene de este isomorfismo gracias a la determinación de los rangos de los grupos abelianos libres $H^{-q}(PB_p;\mathbb{Z})$ del Teorema 2.16. □

El resultado anterior caracteriza en tanto espacio vectorial a todos los módulos que aparecen en la página $E_1$ de la sucesión espectral. Por otro lado, como los espacios $E_0^{p,\bullet}$ son $\mathbb{S}_p$-módulos y las diferenciales de la página 0 son equivariantes respecto a la acción de $\mathbb{S}_p$, los espacios de la página $E_1$ también poseen estructura de módulo sobre el grupo simétrico correspondiente. La diferencial de esta última página tiene bigrado $(1,0)$, por lo que no tiene sentido hablar de la equivariancia de esta flecha, ya que $d : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$ tiene como dominio un $\mathbb{S}_p$-módulo y como codominio un $\mathbb{S}_{p+1}$-módulo. De todos modos, es de interés tratar de comprender la estructura de los espacios de la página $E_1$ como módulos sobre el grupo simétrico adecuado. En el resto de este capítulo llevaremos adelante esta tarea para algunas secciones de esta página y también probaremos que la diferencial de las primeras dos filas es nula.

Dado que el módulo $E_1^{p,q}$ tiene dimensión $c(p,p+q)$ y es un $\mathbb{S}_p$-módulo, es natural suponer que quizás es isomorfo al $\mathbb{S}_p$-módulo de permutación dado por la acción por conjugación de $\mathbb{S}_p$ sobre el conjunto de permutaciones de $p$ elementos con exactamente $p+q$ ciclos en su factorización en ciclos disjuntos, que tiene ese cardinal. Si esto fuera cierto, todos estos módulos tendrían al menos una copia del módulo trivial como sumando irreducible, pero como veremos a continuación, esto no ocurre:

**Proposición 2.19.** *Para todo $p \geq 2$ el espacio $E_1^{p,0}$ es isomorfo a la representación de signo como $\mathbb{S}_p$-módulo.*

*Demostración.* Gracias al Teorema 2.18 sabemos que $E_1^{p,0}$ es unidimensional, ya que su dimensión es $c(p,p)$, por lo que debe ser isomorfo o bien a la representación trivial o bien a la de signo. Para determinar a cuál de las dos, basta con ver cómo actúa una transposición sobre algún generador de $E_1^{p,0}$.

La identificación del Teorema 2.6 implica que el espacio $E_1^{p,0}$ está generado por la clase de cohomología de cualquier elemento no nulo de

$$H^0(\Sigma_p^\bullet[p]) = \mathrm{coker}\left(d : \overline{\mathrm{L}}^{\otimes p-1}(\llbracket p \rrbracket) \to \overline{\mathrm{L}}^{\otimes p}(\llbracket p \rrbracket)\right). \tag{2.10}$$

El espacio $\overline{\mathrm{L}}^{\otimes p-1}(\llbracket p \rrbracket)$ tiene una base dada por todas las particiones ordenadas de $p-1$ partes de elementos de $\llbracket p \rrbracket$ en donde cada parte a su vez está ordenada. La diferencial

$d$ de (2.10) envía a cada uno de estos elementos básicos a la suma de dos particiones ordenadas de $p$ partes de $[\![p]\!]$, con un signo que depende del lugar donde está la parte de dos elementos del elemento básico original. Por ejemplo,

$$12|3|4|5 \mapsto 1|2|3|4|5 + 2|1|3|4|5$$
$$1|23|4|5 \mapsto -1|2|3|4|5 - 1|3|2|4|5.$$

Aquí escribimos $x_1 \dots x_k|y_1 \dots y_j$ para denotar al elemento $(x_1 \dots x_k) \otimes (y_1 \dots y_j)$.

Dada una permutación $\sigma \in \mathbb{S}_p$, notamos $x_\sigma$ al elemento $\sigma(1)|\sigma(2)|\dots|\sigma(p) \in \overline{\mathrm{L}}^{\otimes p}([\![p]\!])$. Es fácil verificar que si $\operatorname{sgn} : \overline{\mathrm{L}}^{\otimes p}([\![p]\!]) \to \Bbbk$ es la transformación lineal determinada sobre la base de los elementos $x_\sigma$ como $x_\sigma \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma)$, entonces $\operatorname{img} d \subseteq \ker \operatorname{sgn}$. Como $\operatorname{sgn}(x_\sigma) = \pm 1$, esto muestra que ninguno de los elementos básicos $x_\sigma$ pertenece a la imagen de $d$.

Notemos que

$$(1|2|\dots|p) + (2|1|\dots|p) = d(12|3|\dots|p).$$

Si $\sigma$ es la transposición que intercambia 1 y 2 y escribimos con una barra a las clases de elementos en el conúcleo de $d$, vemos que

$$\sigma \cdot \overline{1|2|\dots|p} = \overline{2|1|\dots|p} = -\overline{1|2|\dots|p},$$

y como la clase del elemento $1|2|\dots|p$ es no trivial, ya que no está en la imagen de $d$, concluimos que $E_1^{p,0}$ es isomorfa a la representación de signo, como queríamos.

Una demostración alternativa puede darse también observando que la identificación presentada en la demostración del Teorema 2.18 entre los espacios $E_1^{p,q}(\mathrm{L})$ y $H_{-q}(\operatorname{Conf}(p, \mathbb{C}); \Bbbk)$ induce un isomorfismo $\mathbb{S}_p$-equivariante

$$E_1^{p,0} \cong H_0(\operatorname{Conf}(p, \mathbb{C}); \Bbbk) \otimes \operatorname{sgn},$$

y es fácil verificar que la acción de $\mathbb{S}_p$ sobre el 0-ésimo módulo de homología del espacio $\operatorname{Conf}(p, \mathbb{C})$ es trivial (como es el caso siempre para la acción sobre $H_0(X)$ inducida por cualquier acción de un grupo sobre un espacio arcoconexo $X$). □

Es natural conjeturar que, del mismo modo que ocurre con la sucesión espectral del capítulo anterior, todos los diferenciales a partir de la página $E_1$ se anulan, por lo que la sucesión espectral colapsa. En lo que resta del capítulo presentaremos evidencia parcial a favor de esta conjetura.

Empezamos probando la anulación de la diferencial de la página $E_1$ en la fila 0-ésima:

**Proposición 2.20.** *Para todo $p \geq 1$, la diferencial $d : E_1^{p,0} \to E_1^{p+1,0}$ es nula, de modo que $E_2^{\bullet,0}$ es isomorfo a $E_1^{\bullet,0}$.*

*Demostración.* Como establecimos en la demostración de la proposición anterior, la clase del elemento $w_p = 1|2|\dots|p$ genera $\operatorname{coker}(d : \overline{\mathrm{L}}^{\otimes p-1}([\![p]\!]) \to \overline{\mathrm{L}}^{\otimes p}([\![p]\!]))$, espacio que

identificamos con $E_1^{p,0}$. Para poder aplicar la diferencial, necesitamos un representante en $C^p(\mathrm{L})$ que descienda a la clase de $w_p$ en la página $E_1$. Es fácil verificar que un tal representante está dado por el morfismo de especies $\alpha_p : \mathrm{L} \to \overline{\mathrm{L}}^{\otimes p}$ tal que $\alpha_p(X) = 0$ para todo conjunto $X$ de cardinal distinto de $p$ y tal que

$$\begin{aligned} \alpha_p([\![p]\!]) : \mathrm{L}([\![p]\!]) &\to \overline{\mathrm{L}}^{\otimes p}([\![p]\!]) \\ 1 \dots p &\mapsto 1|2|\dots|p. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Para determinar $d : E_1^{p,0}(\mathrm{L}) \to E_1^{p+1,0}(\mathrm{L})$, calcularemos $d(\alpha_p)$ e identificaremos su clase en $E_1^{p+1,0}(\mathrm{L})$ con la correspondiente clase en $\operatorname{coker}(d : \overline{\mathrm{L}}^{\otimes p}([\![p+1]\!]) \to \overline{\mathrm{L}}^{\otimes p+1}([\![p+1]\!]))$ para así poder describir el resultado en términos del elemento $w_{p+1}$.

La diferencial $d(\alpha_p)$ es la suma alternada de la aplicación de los morfismos de cocara (2.5) sobre $\alpha_p$. Como $\alpha_p$ se anula sobre conjuntos de cardinal distinto de $p$, tenemos que

$$d(\alpha_p)([\![p+1]\!]) = ((\pi \otimes \alpha_p) \circ \Delta + (-1)^{p+1}(\alpha_p \otimes \pi) \circ \Delta)([\![p+1]\!]), \tag{2.12}$$

ya que todas las cocaras de $\alpha_p$ se anulan sobre $[\![p+1]\!]$ a excepción de la 0- y la $p+1$-ésima. De este modo, la evaluación de (2.12) en el elemento $1 \dots (p+1)$ de $\mathrm{L}([\![p+1]\!])$ es la clase en $\operatorname{coker}(d : \overline{\mathrm{L}}^{\otimes p}([\![p+1]\!]) \to \overline{\mathrm{L}}^{\otimes p+1}([\![p+1]\!]))$ con la que $d(\alpha_p)$ se identifica. Calculando, vemos que esta evaluación es exactamente el elemento

$$\sum_{n=1}^{p+1} \Big( n|1|\dots|\hat{n}|\dots|(p+1) + (-1)^{p+1}1|\dots|\hat{n}|\dots|(p+1)|n \Big).$$

Como el módulo $E_1^{p+1,0}$ es isomorfo a la representación de signo de $\mathbb{S}_{p+1}$, cada uno de los términos de esta suma es igual a $\pm w_{(p+1)} = \pm 1|2|\dots|p+1$. El signo que acompaña a un término dado es precisamente el signo de la permutación que se obtiene al escribirlo borrando las barras. Ahora bien, como

$$\operatorname{sgn}(n, 1, 2, \dots, \hat{n}, \dots, p, (p+1)) = (-1)^p \operatorname{sgn}(1, 2, \dots, \hat{n}, \dots, p, (p+1), n),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{p+1} \Big( n|1|\dots|\hat{n}|\dots|(p+1) + (-1)^{p+1}1|\dots|\hat{n}|\dots|(p+1)|n \Big) \\ &= \left( \sum_{n=1}^{p+1} \big( \operatorname{sgn}(n, 1, 2, \dots, \hat{n}, \dots, p, p+1) + (-1)^{p+1} \operatorname{sgn}(1, 2, \dots, \hat{n}, \dots, p, p+1, n) \big) \right) w_{p+1} \\ &= \left( \sum_{n=1}^{p+1} \big( (-1)^p + (-1)^{p+1} \big) \operatorname{sgn}(1, 2, \dots, \hat{n}, \dots, p, (p+1), n) \right) w_{p+1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo que prueba que la diferencial del enunciado es trivial. □

Haremos ahora algo similar para la fila con $q = -1$. Comenzamos describiendo bases explícitas de los módulos de dicha fila. Dado $p \geq 2$, para cada par de valores de $i, j$ con $1 \leq i < j \leq p$, consideramos el elemento

$$w^p_{i,j} := (ij|1|2|\dots|\hat{i}|\dots|\hat{j}|\dots|p) - (ji|1|2|\dots|\hat{i}|\dots|\hat{j}|\dots|p) \in \overline{\mathrm{L}}^{\otimes p-1}([\![p]\!]).$$

Es fácil verificar que todos los elementos $w^p_{i,j}$ pertenecen al núcleo de la diferencial $d : \overline{\mathrm{L}}^{\otimes p-1}([\![p]\!]) \to \overline{\mathrm{L}}^{\otimes p}([\![p]\!])$, por lo que tiene sentido considerar sus clases de cohomología $\overline{w^p_{i,j}}$ en $H^{-1}(\Sigma^\bullet_p[p])$, espacio que es isomorfo a $E_1^{p,1-p}(\mathrm{L})$ gracias al Lema 2.6.

**Proposición 2.21.** *La familia* $\{\overline{w^p_{i,j}} : 1 \leq i < j \leq p\}$ *es una base de* $H^{-1}(\Sigma^\bullet_p[p])$.

*Demostración.* El Teorema 2.18 nos dice que la dimensión de $E_1^{p,-1}(\mathrm{L}) \cong H^{-1}(\Sigma^\bullet_p[p])$ es $c(p, p-1) = \binom{p}{2}$, por lo que basta entonces con mostrar que la familia del enunciado es linealmente independiente. Para ello exhibiremos, para cada par de índices $i, j$ con $1 \leq i < j \leq p$, un funcional $\varphi^p_{i,j} : \overline{\mathrm{L}}^{\otimes p-1}([\![p]\!]) \to \Bbbk$ tal que

$$\varphi^p_{i,j}(w^p_{r,s}) = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } (r,s) = (i,j); \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\varphi^p_{i,j}(x) = 0 \text{ si } x \in \mathrm{img}(d : \overline{\mathrm{L}}^{p-2}([\![p]\!]) \to \overline{\mathrm{L}}^{p-1}([\![p]\!])). \tag{2.14}$$

La segunda igualdad muestra que los morfismos $\varphi^p_{i,j}$ inducen funciones lineales $\overline{\varphi^p_{i,j}} : E_1^{p,-1}(\mathrm{L}) \to \Bbbk$ y la primera muestra que es una base dual para la familia del enunciado.

Definimos $\varphi^p_{i,j}$ sobre los elementos básicos de $\overline{\mathrm{L}}^{p-1}([\![p]\!])$ poniendo

$$\varphi^p_{i,j}(x_1|\dots|x_k x_{k+1}|\dots|x_p) = (-1)^k \delta_{i,x_k} \delta_{j,x_{k+1}} \operatorname{sgn}(x_1, x_2, \dots, x_p).$$

En otras palabras, $\varphi^p_{i,j}$ se anula sobre todos los elementos básicos en los que el único bloque ordenado de 2 elementos no es el bloque $ij$, y en el caso en el que sí lo es, su valor es un signo que depende de la posición de ese bloque y del signo de la permutación formada al eliminar las barras de la escritura del elemento básico. Una verificación simple pero algo molesta evidencia que las funcionales $\varphi^p_{i,j}$ satisfacen las condiciones de (2.13). □

Teniendo a disposición esta familia de bases, podemos determinar la diferencial de la página $E_1$ también en la fila $q = -1$:

**Proposición 2.22.** *Para todo* $p \geq 2$, *la diferencial* $d : E_1^{p,-1} \to E_1^{p+1,-1}$ *es nula.*

*Demostración.* Al igual que en la Proposición 2.20, estudiamos la conjugación de la diferencial del enunciado por el isomorfismo $E_1^{p,-1}(\mathrm{L}) \cong H^{-1}(\Sigma^\bullet_p[p])$ del Lema 2.6. Bastará entonces con ver que la función

$$d : H^{-1}(\Sigma^\bullet_p[p]) \to H^{-1}(\Sigma^\bullet_{p+1}[p+1])$$

que obtenemos de esta forma es nula. Por lo establecido en la demostración de la Proposición 2.21, sabemos que la familia ordenada $\{\overline{w^p_{i,j}} : 1 \leq i < j \leq p\}$ es una base de $H^{-1}(\Sigma^\bullet_p[p])$ y que $\{\overline{\varphi^p_{i,j}}\}$ es su base dual asociada. Bastará entonces con verificar que

$$\overline{\varphi^{p+1}_{r,s}}(d(\overline{w^p_{i,j}})) = 0$$

para cualquier elección de $i, j, r, s$ con $1 \leq i < j \leq p$ y $1 \leq r < s \leq p+1$.

El morfismo de especies $\alpha^p_{i,j} : \mathrm{L} \to \overline{\mathrm{L}}^{\otimes p-1}$ tal que $\alpha^p_{i,j}(X) = 0$ para todo conjunto $X$ de cardinal distinto de $p$ y tal que

$$\begin{aligned}\alpha^p_{i,j}([\![p]\!]) : \mathrm{L}([\![p]\!]) &\to \overline{\mathrm{L}}^{\otimes p-1}([\![p]\!]) \\ 1\dots p &\mapsto (ij|1|2|\dots|\hat{i}|\dots|\hat{j}|\dots|p) - (ji|1|2|\dots|\hat{i}|\dots|\hat{j}|\dots|p)\end{aligned}$$

se identifica con $\overline{w^p_{i,j}}$ tras descender a la página $E_1$ y aplicar el isomorfismo del Lema 2.6, por lo que calcularemos la diferencial de este elemento de manera similar a lo hecho en la Proposición 2.20. Como ocurre allí, dado que $\alpha^p_{i,j}$ se anula sobre conjuntos de cardinal distinto de $p$, vemos que

$$d(\alpha^p_{i,j})([\![p+1]\!]) = ((\pi \otimes \alpha^p_{i,j}) \circ \Delta + (-1)^p(\alpha^p_{i,j} \otimes \pi) \circ \Delta)([\![p+1]\!]).$$

Así, la evaluación del lado derecho de esta igualdad en $1\dots(p+1)$ es

$$\sum_{k=1}^{p+1} \left(k|\alpha^p_{i,j}(1|\dots|\hat{k}|\dots|(p+1)) + (-1)^p\alpha^p_{i,j}(1|\dots|\hat{k}|\dots|(p+1))|k\right). \tag{2.15}$$

Resta entonces ver que la evaluación de $\overline{\varphi^{p+1}_{r,s}}$ en esta suma es nula para toda elección de $1 \leq r < s \leq p+1$. En vista de la definición de estos morfismos, esto es claro si $r \notin \{i, i+1\}$ o si $s \notin \{j, j+1\}$. Esto nos deja con cuatro casos a considerar. Explicitaremos el análisis sólo en aquel que $r = i$ y $s = j$; los restantes son muy similares.

Los únicos sumandos de (2.15) que no se anulan de manera evidente tras la aplicación de $\overline{\varphi^p_{r,s}}$ son aquellos en los que el bloque de dos elementos es $rs$. Si $r = i$ y $s = j$, esto nos dice que tras aplicar $\overline{\varphi^p_{r,s}}$ los términos con $k \leq j$ se anulan, y luego basta considerar la suma

$$\sum_{k=j+1}^{p+1} \left(k|\alpha^p_{i,j}(1|\dots|\hat{k}|\dots|(p+1)) + (-1)^p\alpha^p_{i,j}(1|\dots|\hat{k}|\dots|(p+1))|k\right)$$

que es igual a

$$\begin{aligned}\sum_{k=j+1}^{p+1} \Big(&k|ij|1|\dots|\hat{i}|\dots|\hat{j}|\dots|\hat{k}|\dots|(p+1) - k|ji|1|\dots|\hat{i}|\dots|\hat{j}|\dots|\hat{k}|\dots|(p+1) \\ &+ (-1)^p ij|1|\dots|\hat{i}|\dots|\hat{j}|\dots|\hat{k}|\dots|(p+1)|k \\ &- (-1)^p ji|1|\dots|\hat{i}|\dots|\hat{j}|\dots|\hat{k}|\dots|(p+1)|k\Big).\end{aligned}$$

Mostremos que cada uno de los términos de esta suma se anulan. Si

$$\overline{\varphi^p_{i,j}}\Big(k|ij|1|\dots|\hat{i}|\dots|\hat{j}|\dots|\hat{k}|\dots|(p+1)\Big) = \varepsilon,$$

con $\varepsilon = \pm 1$, entonces

$$\overline{\varphi^p_{i,j}}\Big((-1)^p ij|1|\dots|\hat{i}|\dots|\hat{j}|\dots|\hat{k}|\dots|(p+1)|k\Big) = (-1)^p(-1)^p(-\varepsilon) = -\varepsilon,$$

debido al $(-1)^p$ presente en el argumento, al hecho de que la permutación del argumento difiere de la anterior en una permutación de signo $(-1)^p$ y al hecho de que el bloque de dos elementos está en la primera posición en lugar de la segunda. Como los otros dos términos de cada sumando son anulados por $\overline{\varphi^p_{i,j}}$, esto concluye la demostración. □

Dado que ya vimos que las diferenciales de las primeras dos filas de la página $E_1$ son nulas, sabemos que $E_2^{p,q}(\mathrm{L}) \cong E_1^{p,q}(\mathrm{L})$ para $q = 0$ y $q = -1$. Con esta información podemos determinar el valor de los diferenciales de la página $E_2$ que van de la fila $q = 0$ a la fila $q = -1$:

**Proposición 2.23.** *Para $p \geq 1$, la diferencial $d_2^{p,0} : E_2^{p,0}(\mathrm{L}) \to E_2^{p+2,-1}(\mathrm{L})$ es nula.*

*Demostración.* Como ya sabemos que $E_2^{p,0} \cong E_1^{p,0}$, el dominio de $d_2^{p,0}$ es unidimensional y generado por la clase del morfismo de especies $\alpha_p : \mathrm{L} \to \overline{\mathrm{L}}^{\otimes p}$ descripto en (2.11). Para determinar la clase de $d_2^{p,0}(\alpha_p) \in E_2^{p+2,-1} \cong E_1^{p+2,-1}$, obtendremos sus coordenadas en la base $(\overline{w}^{p+2}_{i,j})$ de la Proposición 2.21 evaluando en $d(\alpha_p)$ la correspondiente base dual $(\overline{\varphi_{i,j}}^{p+2})$.

Una vez más, como $\alpha_p$ se anula en todo conjunto de cardinal distinto de $p$, tenemos que

$$d_2^{p,0}(\alpha_p)([\![p+2]\!]) = ((\pi \otimes \alpha_p) \circ \Delta + (-1)^{p+1}(\alpha_p \otimes \pi) \circ \Delta)([\![p+2]\!]).$$

La evaluación de este elemento en $1 \dots (p+2)$ es

$$\sum_{1 \leq i < j \leq p+2} \Big(ij|1|\dots|\hat{i}|\dots|\hat{j}|\dots|(p+2) + (-1)^{p+1}1|\dots|\hat{i}|\dots|\hat{j}|\dots|(p+2)|ij\Big),$$

y a su vez la evaluación en esta suma del funcional $\varphi^{p+2}_{i,j}$ es

$$\begin{aligned}\varphi^{p+2}_{i,j}(ij|1|\dots|\hat{i}|\dots|\hat{j}|\dots|(p+2)) + (-1)^{p+1}\varphi^{p+2}_{i,j}(1|\dots|\hat{i}|\dots|\hat{j}|\dots|(p+2)|ij) \\ = -\operatorname{sgn}(i,j,1,\dots,\hat{i},\dots,\hat{j},\dots,p+2) \\ + (-1)^{p+1}(-1)^{p+1}\operatorname{sgn}(1,\dots,\hat{i},\dots,\hat{j},\dots,p+2,i,j).\end{aligned}$$

Como las dos permutaciones a las que estamos calculándoles el signo difieren en una permutación de signo $(-1)^{2p} = 1$, sus signos coinciden y de este modo la evaluación en $\varphi^{p+2}_{i,j}$ es nula, como queríamos ver. □

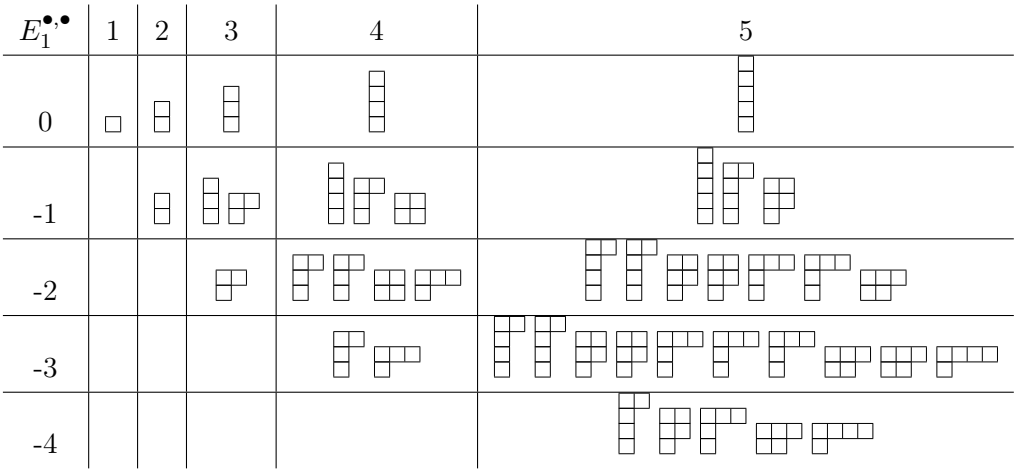



Figura 2.7: El tablero de Young asociado a cada representación irreducible de $E_1^{\bullet,\bullet}$.

Mediante un programa escrito en `SageMath`, disponible en el repositorio [Mar22] y en el apéndice A, determinamos las representaciones irreducibles que aparecen en cada módulo de la página $E_1$ hasta $p \leq 5$. Presentamos esta información en la tabla de la Figura 2.7, en la que dibujamos al tablero de Young asociado a cada representación irreducible.

La información de la figura concuerda con la presentada en [CF13, §1] tras torcer por la representación signo, y añade algunas entradas no incluidas allí. En general, para $p$ y $q$ arbitrarios, la descomposición en representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_p$ del módulo $E_1^{p,q}$ se desconoce.

De todos modos, sí existe información parcial al respecto: en [CF13] los autores prueban que, para cada $i$, la familia $H^i(PB_\bullet; \Bbbk)$ es **homológicamente estable**. Concretamente, lo que esto significa es que a partir de un $n$ (dependiente de $i$) lo suficientemente grande, los diagramas de Young correspondientes a las representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_n$ que constituyen $H^i(PB_n; \Bbbk)$ se obtienen de los diagramas de Young correspondientes a $H^i(PB_{n-1}; \Bbbk)$ simplemente añadiendo una caja a la primera fila de cada uno. En términos de la información presentada en la tabla, esto significa que el comportamiento de los tableros **de cada fila** se regulariza eventualmente. Esto no se alcanza a apreciar en la tabla que incluimos arriba dado que la estabilización ocurre para valores de $p$ grandes. No es posible extender este cálculo de manera efectiva para valores de $p$ mayores a los presentados usando la estrategia que usamos dado que la complejidad del cómputo crece muy rápidamente.

Avanzaremos ahora en otra dirección, estudiando el comportamiento de la diagonal $p = -q + 1$ de la página $E_1$. Esto hace uso de algunos prelimiares sobre álgebras de Lie libres. Nos basaremos en [Reu93, §8.2] para presentarlos.

Dado un número natural $n$, consideremos la $\Bbbk$-álgebra libre $A_n = \Bbbk\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ en $n$ generadores y $L_n$ el álgebra de Lie libre en las variables $x_1, \dots, x_n$ sobre el cuerpo $\Bbbk$. Pensando a $A_n$ con su estructura natural de álgebra de Lie, se puede ver que hay un monomorfismo de álgebras de Lie $i : L_n \to A_n$ tal que $i(x_j) = x_j$, y de hecho este morfismo nos permite identificar a $A_n$ con el álgebra envolvente universal de $L_n$. Llamamos **polinomio de Lie** a cualquier elemento de $A_n$ en la imagen de $i$: informalmente, los polinomios de Lie son todos los elementos del álgebra libre que se obtienen aplicando iteradamente el corchete dado por el conmutador sobre los generadores.

Llamamos **módulo de Lie de grado** $n$, y notamos $\mathrm{Lie}_n$, al $\mathbb{S}_n$-módulo dado por la parte multilineal de grado $n$ del álgebra de Lie libre $L_n$. Concretamente, los elementos de este módulo son polinomios de Lie que se escriben como combinación lineal de palabras de la forma $x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$ con $\sigma \in \mathbb{S}_n$. La acción de $\mathbb{S}_n$-módulo sobre este espacio está dada permutando las variables.

**Proposición 2.24.** *Para cada $p \geq 1$, el $\mathbb{S}_p$-módulo $E_1^{p,1-p}(\mathrm{L})$ es isomorfo a $\mathrm{Lie}_p$.*

*Demostración.* Mediante la identificación del Teorema 2.6, tenemos que

$$E_1^{p,1-p}(\mathrm{L}) \cong H^{p-1}(\Sigma_p^\bullet[p]) = \ker\Big(d : \overline{\mathrm{L}}([\![p]\!]) \to \overline{\mathrm{L}}^{\otimes 2}\Big)([\![p]\!]).$$

Como $\mathrm{L}([\![p]\!]) = \overline{\mathrm{L}}([\![p]\!])$, podemos escribir a $\ker d$ como el subespacio de los elementos $x \in \mathrm{L}([\![p]\!])$ tales que

$$d'(x) = x \otimes \mathrm{id}_\emptyset + \mathrm{id}_\emptyset \otimes x, \tag{2.16}$$

donde $d' : \mathrm{L}([\![p]\!]) \to \mathrm{L}^{\otimes 2}([\![p]\!])$ es la diferencial dada por la estructura semicosimplicial sobre L sin reducir.

Si $A_p$ es la $\Bbbk$-álgebra libre $\Bbbk\langle x_1, \dots, x_p\rangle$, tenemos un morfismo $\delta : A_p \to A_p \otimes A_p$ de $\Bbbk$-álgebras dado por $\delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$ para cada $i \in [\![p]\!]$. No es difícil ver que el morfismo $\delta$ es el coproducto de *unshuffling*: envía un monomio $w$ en la suma $\sum w_1 \otimes w_2$ indexada por los pares de monomios $w_1, w_2$ tales que $w_1$ y $w_2$ son subpalabras disjuntas de $w$ formadas por letras no necesariamente consecutivas que "cubren" a $w$. Este coproducto da lugar, junto con el producto usual y la antípoda dada por $x \mapsto -x$, a una estructura de álgebra de Hopf sobre $A_p$.

Tenemos también una inclusión de $\Bbbk$-espacios vectoriales $i : \mathrm{L}([\![p]\!]) \to A_p$ dada por $i(\sigma) = x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p)}$. Es fácil verificar que el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{L}([\![p]\!]) & \xrightarrow{d'} & \mathrm{L}^{\otimes 2}([\![p]\!]) \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i\otimes i} \\ A_p & \xrightarrow{\delta} & A_p \otimes A_p \end{array}$$

Identificando $\mathrm{L}([\![p]\!])$ con su imagen en $A_p$, la condición (2.16) se traduce usando el cuadrado conmutativo a

$$\delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \tag{2.17}$$

que nos dice que $x$ es un elemento primitivo para el coproducto $\delta$.

Para probar este resultado bastará entonces con caracaterizar al conjunto de los elementos primitivos de $A_p$ que pertenecen a la imagen de $i$. Ahora bien, la imagen de $i$ consiste exactamente de la parte multilineal de grado $p$ de $A_p$, y el Teorema [Reu93, Theorem 1.4] implica que los elementos primitivos para $\delta$ son precisamente los polinomios de Lie. Usando esta información y el hecho de que la inclusión $i$ es un morfismo de $\mathbb{S}_p$-módulos, esto implica que $\ker d$ es isomorfo a $\mathrm{Lie}_p$, como queríamos. □

Esta caracterización fue posible tras estudiar la diagonal $E_1^{p,1-p}(\mathrm{L})$ para grados bajos de $p$; como la dimensión de esos espacios es $p!$ fue natural conjeturar que lo observado en grados bajos valía en general. Este argumento no se extiende simplemente a otros sectores de la página 1 ya que no disponemos de familias "naturales" de módulos sobre el grupo simétrico adecuado con las dimensiones que sabemos que deberían tener.

## 2.8 El primer módulo de cohomología de la especie de órdenes lineales

En la Sección §1.7 estudiamos la cohomología de la GL-especie $\mathbf{\Sigma}$ a través de una sucesión espectral que colapsa en la página 2. A pesar de no tener una demostración del colapso en la página 2 de la sucesión espectral correspondiente a L, vemos a las Proposiciones 2.22 y 2.23 como evidencia a favor de esta conjetura. El propósito de esta sección será dar una descripción explícita del módulo $H^1(\mathrm{L},\mathrm{L})$ sin apelar a la sucesión espectral de la sección anterior. Esto provee evidencia adicional a la conjetura, ya que el resultado que obtendremos es consistente con el colapso de la sucesión. Por otro lado, es esperable que llevar adelante el mismo cálculo para otras diagonales de la página 1 sea considerablemente más difícil por el tamaño de los módulos involucrados.

Como la construcción cobar $C^\bullet(\mathrm{L})$ presentada en (2.4) se obtiene aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}\mathrm{p}}(\mathrm{L},-)$ a una resolución inyectiva de L como L-bicomódulo, tenemos que

$$H^1(\mathrm{L},\mathrm{L}) \cong \frac{\ker d_1 : C^1(\mathrm{L}) \to C^2(\mathrm{L})}{\mathrm{img}\, d_0 : C^0(\mathrm{L}) \to C^1(\mathrm{L})}.$$

Por otro lado, $d_0 = 0$: en efecto, esto siempre es el caso cuando estudiamos la diferencial $d_0 : C^0(\mathrm{x}) \to C^1(\mathrm{x})$ de la construcción cobar reducida asociada a una coálgebra conexa x considerada como x-bicomódulo. Más específicamente,

$$C^1(\mathrm{x}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}\mathrm{p}}(\mathrm{x},1) \cong \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\mathrm{x}(\emptyset),1(\emptyset))$$

es un espacio de dimensión uno siempre que x sea conexa, y la imagen de un morfismo $\alpha \in C^1(\mathrm{x})$ por $d_0$ es la composición $(\alpha\otimes\pi - \pi\otimes\alpha)\Delta$, cuya anulación es garantizada por la identidad triangular de los unitores. Tenemos entonces un isomorfismo canónico

$$H^1(\mathrm{L},\mathrm{L}) \cong \ker d_1 : C^1(\mathrm{L}) \to C^2(\mathrm{L}),$$

por lo que nos enfocaremos en estudiar el núcleo del morfismo $d_1$.

A lo largo de esta sección hablaremos indistintamente de permutaciones de un subconjunto finito $X$ de $\mathbb{N}$ y de órdenes lineales sobre $X$, identificando a una permutación $\sigma$ con el orden $<_\sigma$ sobre $X$ en el que $x <_\sigma y$ si y sólo si $\sigma^{-1}(x) < \sigma^{-1}(y)$ en el orden usual de $X$. También identificaremos a las permutaciones de $X$ con las palabras en el alfabeto $X$ que usan a cada letra exactamente 1 vez, relacionando a la permutación $\sigma$ con la única palabra de estas en la que $x$ precede a $y$ si y sólo si $\sigma^{-1}(x) < \sigma^{-1}(y)$ en el orden usual. Llamaremos **multilineales** a las palabras en un alfabeto $X$ en las que ninguna letra aparece repetida.

Recordemos que $C^1(\mathrm{L}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}}(\mathrm{L}, \overline{\mathrm{L}})$ y que si $\alpha \in C^1(\mathrm{L})$ y escribimos

$$\alpha([\![n]\!])(12\dots n) = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \lambda(\sigma)\sigma$$

para cada $n > 0$, el morfismo $\alpha$ queda completamente determinado por la familia de escalares $(\lambda(\sigma))_{\sigma\in\mathbb{S}_n, n>0}$. De manera más práctica pero equivalente, hablaremos del funcional lineal $\lambda : \bigoplus_{n>0} \Bbbk\mathbb{S}_n \to \Bbbk$ determinado por esta familia de escalares. Vale la pena remarcar que la aplicación $\Lambda : \alpha \in C^1(\mathrm{L}) \mapsto \lambda_\alpha \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\bigoplus_{n>0} \Bbbk\mathbb{S}_n, \Bbbk)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

La condición $d_1(\alpha) = 0$ es equivalente a una gran familia de ecuaciones que un funcional $\lambda_\alpha$ deberá satisfacer para pertencer al núcleo de $d_1$. Concretamente, si para cada $n$ escribimos

$$d_1(\alpha)([\![n]\!])(12\dots n) = \sum_{\substack{X \amalg Y = [\![n]\!] \\ X\neq\emptyset, Y\neq\emptyset \\ \sigma\in\mathbb{S}_X, \tau\in\mathbb{S}_Y}} \mu(\sigma\otimes\tau)\, \sigma\otimes\tau,$$

debe ser $\mu(\sigma \otimes \tau) = 0$ para cada elección posible de $\sigma$ y $\tau$. Aquí $\mu(\sigma \otimes \tau)$ es el coeficiente que acompaña a $\sigma \otimes \tau$, pero extenderemos $\mu$ linealmente de modo que $\mu(\sigma \otimes \tau + \sigma' \otimes \tau') = \mu(\sigma \otimes \tau) + \mu(\sigma' \otimes \tau')$.

Calculando $d_1(\alpha)$ usando la definición de $d_1$ como suma alternada de los morfismos de cocara dados en (2.5) podemos escribir $\mu(\sigma \otimes \tau)$ en términos de $\lambda$. Para describir el resultado precisaremos algo de notación. Si $\sigma$ y $\tau$ son palabras en subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}$, escribiremos $\sigma \odot \tau$ para la suma formal

$$\sigma \odot \tau = \sum_{\omega\in\mathrm{sh}(\sigma,\tau)} \omega,$$

donde $\mathrm{sh}(\sigma, \tau)$ es el conjunto de todos los **shuffles** entre $\sigma$ y $\tau$; es decir, todas las palabras $\omega$ que se escriben como la unión de las letras de $\sigma$ y $\tau$ y en las que $\sigma$ y $\tau$ aparecen como subpalabras no necesariamente consecutivos. Por ejemplo,

$$14 \odot 32 = 1432 + 1342 + 1324 + 3214 + 3142 + 3124.$$

Es fácil ver que $\sigma \odot \tau = \tau \odot \sigma$ y que $\sigma = \sigma \odot \varepsilon = \varepsilon \odot \sigma$ si $\varepsilon$ denota a la palabra vacía. Asignaremos al operador $\odot$ *menor* precedencia que el producto de concatenación. Así, por ejemplo, tenemos que

$$13 \odot 2 = 132 + 123 + 213$$

mientras que

$$1(3 \odot 2) = 132 + 123.$$

Otra observación importante es que todos los sumandos que aparecen en el soporte de $\sigma \odot \tau$ lo hacen con coeficiente 1.

Dadas palabras $\sigma$ y $\tau$, escribiremos $\sigma\tau$ a la palabra obtenida por su concatenación y notaremos $|\sigma|$ a la longitud de $\sigma$.

Si $X$ es un conjunto finito ordenado de cardinal $n$, llamamos $\mathbf{std} : X \to [\![n]\!]$ a la única biyección monótona entre esos conjuntos. Dado un orden total $\sigma \in \mathrm{L}(X)$, su **estandarización** es el orden $\mathbf{std}(\sigma) \in \mathrm{L}([\![n]\!])$ obtenido transportando la estructura a través de la biyección $\mathbf{std}$. Por ejemplo, $\mathbf{std}(387) = 132$. Como trabajaremos con combinaciones formales de permutaciones, usaremos $\mathbf{std}$ para referirnos indistintamente a la función que acabamos de describir o a su extensión lineal en caso que esto sea conveniente. De manera similar, extenderemos su definición también a objetos en potencias tensoriales de L de la manera obvia. Por ejemplo, $\mathbf{std}(45 \otimes 317) = 34 \otimes 215$.

Finalmente, escribiremos

$$\mathbf{inc}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \text{ es creciente como palabra;} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Habiendo presentado todos estos preliminares, podemos retomar nuestro objetivo inicial, que era describir a $\mu$ en términos de $\lambda$. Una verificación tediosa pero simple prueba que

$$\mu(\sigma \otimes \tau) = \lambda(\sigma \odot \tau) - \mathbf{inc}(\sigma)\,\lambda(\mathbf{std}(\tau)) - \mathbf{inc}(\tau)\,\lambda(\mathbf{std}(\sigma)) \tag{2.18}$$

para toda elección de $\sigma$ y $\tau$. Vale la pena remarcar que el término $\lambda(\sigma \odot \tau)$ representa una suma de muchos sumandos de la forma $\lambda(\alpha)$ con $|\alpha| = |\sigma| + |\tau|$. Los términos que aparecen con signo negativo tienen longitud menor y cada uno representa a lo sumo un sumando. A modo de ejemplo,

$$\begin{aligned} \mu(14 \otimes 32) &= \lambda(1432) + \lambda(1342) + \lambda(1324) + \lambda(3214) + \lambda(3142) + \lambda(3124) - \lambda(\mathbf{std}(32)) \\ &= \lambda(1432) + \lambda(1342) + \lambda(1324) + \lambda(3214) + \lambda(3142) + \lambda(3124) - \lambda(21). \end{aligned}$$

De este modo, la condición $d_1(\alpha) = 0$ es equivalente a que se satisfagan las ecuaciones

$$0 = \lambda(\sigma \odot \tau) - \mathbf{inc}(\sigma)\,\lambda(\mathbf{std}(\tau)) - \mathbf{inc}(\tau)\,\lambda(\mathbf{std}(\sigma)) \tag{2.19}$$

para cada elección posible de $\sigma$ y $\tau$: esto es, para cualquier par de conjuntos disjuntos y no vacíos $(X, Y)$ tales que $X \amalg Y = [\![n]\!]$ para algún $n \geq 2$ y permutaciones $\sigma \in \mathbb{S}_X$,

$\tau \in \mathbb{S}_Y$. Para simplificar la notación, escribiremos $\lambda(\sigma)$ en lugar de $\lambda(\mathbf{std}(\sigma))$ cuando $\sigma \in \mathrm{L}(X)$ con $X$ no necesariamente igual a $[\![n]\!]$. Del mismo modo, escribiremos $\mu(\sigma \otimes \tau)$ en lugar de $\mu(\mathbf{std}(\sigma \otimes \tau))$ si $\sigma \in \mathbb{S}_X$, $\tau \in \mathbb{S}_Y$ y $X \amalg Y$ es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$.

El siguiente lema técnico nos permitirá mostrar que el sistema de ecuaciones lineales de (2.19) es altamente redundante y que podemos quedarnos con un subconjunto de ecuaciones mucho menor.

**Lema 2.25.** *Sean $\sigma$ y $\tau$ permutaciones de conjuntos no vacíos $X$ e $Y$, respectivamente, tales que $X \amalg Y = [\![t]\!]$ para algún $t \geq 2$. El elemento $\mu(\sigma \otimes \tau)$ puede escribirse como combinación lineal de elementos $\mu(\sigma' \otimes \tau')$ en los que $\sigma'$ y $\tau'$ son permutaciones de conjuntos $X'$ e $Y'$, respectivamente, tales que $X' \amalg Y' = [\![k]\!]$ con $k \leq t$ y la primera letra de $\sigma'$ es 1.*

Para probar este resultado precisaremos primero otro lema técnico, de contenido puramente combinatorio.

**Lema 2.26.** *Si $\beta = x_1 \dots x_n$ y $\gamma = y_0 y_1 \dots y_m$ palabras disjuntas, con $n > 0, m \geq 0$, entonces se tiene que*

$$\beta\gamma = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left( y_0 (y_1 \dots y_m \odot \underbrace{x_n \dots x_{n-k+1}}_{k \text{ letras}}) \right) \odot \underbrace{x_1 \dots x_{n-k}}_{n-k \text{ letras}}.$$

*Demostración.* Supongamos que $\alpha$ es una palabra que pertenece al soporte de alguno de los sumandos del lado derecho de la igualdad que queremos probar. Escribiremos $x \prec y$ para indicar que la letra $x$ precede a la letra $y$ en $\alpha$. Sabemos que

$$y_0 \prec y_1 \prec \cdots \prec y_m.$$

Supongamos primero que $x_n \prec y_0$. De los únicos $n+1$ sumandos del lado derecho de la igualdad, el único en el que esto puede ocurrir es el correspondiente a $k = 0$, es decir, al sumando

$$y_0 y_1 \dots y_m \odot x_1 \dots x_n,$$

y la única permutación del soporte de este sumando que cumple $x_n \prec y_0$ es precisamente $\beta\gamma$.

Veremos que en cualquier otro caso $\alpha$ aparece exactamente una vez más en el soporte de otro sumando y con signo opuesto, de modo que se cancela. Supongamos entonces que $y_0 \prec x_n$ y sea $l$ el máximo natural tal que

$$x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_l.$$

La palabra $\alpha$ sólo puede aparecer en los términos

$$(y_0 (y_1 \dots y_m \odot x_n \dots x_{l+1})) \odot x_1 \dots x_l \tag{2.20}$$

o

$$(y_0(y_1 \dots y_m \odot x_n \dots x_l)) \odot x_1 \dots x_{l-1} \tag{2.21}$$

de la suma del enunciado. Si pertenece al soporte de (2.20), entonces tenemos que:

- $x_1 \prec \cdots \prec x_{l-1}$,
- $y_0 \prec y_1 \prec \cdots \prec y_m$,
- $y_0 \prec x_n \prec \cdots \prec x_{l+1}$ y $x_{l+1} \prec x_l$ por la maximalidad de $l$,

por lo que $\alpha$ está en el soporte de (2.21). Un argumento análogo prueba la recíproca. Como los términos (2.20) y (2.21) aparecen con signos opuestos en la suma del lado derecho de la ecuación del enunciado, todos ellos se cancelan entre sí. □

Ahora sí estamos en condiciones de demostrar el resultado que queríamos:

*Demostración del Lema 2.25.* Procederemos por inducción en $t$. El caso en el que $t = 2$ la afirmación del lema puede verificarse inmediatamente observando que $\mu(2 \otimes 1) = \mu(1 \otimes 2)$. Estableceremos a continuación el paso inductivo.

Fijemos $\sigma$ y $\tau$ con $|\sigma| + |\tau| = t$ y notemos que como $\mu(\sigma \otimes \tau) = \mu(\tau \otimes \sigma)$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el elemento 1 aparece en $\sigma$. Supongamos también que $\sigma$ no empieza con la letra 1 ya que en caso contrario el resultado es evidente. Escribamos entonces $\sigma = x_1 \dots x_n 1 y_1 \dots y_m$ y llamemos $\beta = x_1 \dots x_n$ y $\gamma = 1 y_1 \dots y_m$, de modo que $\sigma = \beta\gamma$. Consideremos la diferencia

$$\mu(\sigma \otimes \tau) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mu\left(\Big(1(y_1 \dots y_m \odot x_n \dots x_{n-k+1})\Big) \otimes \Big(x_1 \dots x_{n-k} \odot \tau\Big)\right). \tag{2.22}$$

Si escribimos esto en términos de $\lambda$ usando (2.18), vemos que los términos de la forma $\lambda(\omega)$ con $|\omega| = t$ que aparecen son

$$\begin{aligned}
&\lambda(\sigma \odot \tau) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \lambda\Big((1(y_1 \dots y_m \odot x_n \dots x_{n-k+1})) \odot x_1 \dots x_{n-k} \odot \tau\Big) \\
&\quad = \lambda\left(\sigma \odot \tau - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (1(y_1 \dots y_m \odot x_n \dots x_{n-k+1})) \odot x_1 \dots x_{n-k} \odot \tau\right) \\
&\quad = \lambda\left(\left(\beta\gamma - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (1(y_1 \dots y_m \odot x_n \dots x_{n-k+1})) \odot x_1 \dots x_{n-k}\right) \odot \tau\right) \\
&\quad = 0,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad vale gracias al Lema 2.26.

Resta ver qué ocurre con los términos de la forma $\lambda(\omega)$ con $|\omega| < t$. Repartiremos el trabajo en casos, dependiendo del valor de $\mathbf{inc}(\tau)$ e $\mathbf{inc}(\gamma)$:

- Supongamos primero que $\mathbf{inc}(\tau) = \mathbf{inc}(\gamma) = 0$. En este caso no hay palabras crecientes en el soporte de los elementos

$$1(y_1 \dots y_m \odot x_n \dots x_{n-k+1}),$$

ya que estos son combinaciones lineales de palabras que contienen las letras de $\gamma$ en el mismo orden que $\gamma$. Lo mismo ocurre con las palabras del soporte de

$$x_1 \dots x_{n-k} \odot \tau,$$

ya que estas contienen a las letras de $\tau$ en el mismo orden que $\tau$. De este modo, al expresar la suma de (2.22) en términos de $\lambda$, no aparece ningún término de la forma $\lambda(\omega)$ con $|\omega| < t$. Por lo tanto, la expresión (2.22) es nula, probando nuestro enunciado.

- Supongamos que $\mathbf{inc}(\tau) = 1$ e $\mathbf{inc}(\gamma) = 0$ y llamemos $l$ al máximo número natural tal que

$$x_1 < \cdots < x_l.$$

La suma de los términos de la forma $\lambda(\omega)$ con $|\omega| < t$ que aparecen en (2.22) es

$$-\lambda(\sigma) + \sum_{k=n-l}^{n} (-1)^k \lambda\Big(1(y_1 \dots y_m \odot x_n \dots x_{n-k+1})\Big). \tag{2.23}$$

Usando el Lema 2.26 podemos reescribir (2.23) en la forma

$$-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \lambda\Big((1(y_1 \dots y_m \odot x_n \dots x_{n-k+1})) \odot x_1 \dots x_{n-k}\Big) + \sum_{k=n-l}^{n} (-1)^k \lambda\Big(1(y_1 \dots y_m \odot x_n \dots x_{n-k+1})\Big),$$

y esto es exactamente

$$-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \mu\Big((1(y_1 \dots y_m \odot x_n \dots x_{n-k+1})) \otimes x_1 \dots x_{n-k}\Big),$$

que tiene la forma que queremos.

- Supongamos ahora que $\mathbf{inc}(\tau) = 0$ e $\mathbf{inc}(\gamma) = 1$ y llamemos $p$ al mínimo natural tal que

$$x_p > x_{p+1} > \cdots > x_n.$$

La suma de los términos de la forma $\lambda(\omega)$ con $|\omega| < t$ que aparecen en (2.22) es

$$\sum_{k=0}^{n-p+1} (-1)^k \lambda(x_1 \dots x_{n-k} \odot \tau). \tag{2.24}$$

Vamos a considerar dos casos, de acuerdo a si $p$ es igual a 1 o no. En el primero, es

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n,$$

y esto implica que la suma (2.24) coincide con

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \mu(x_1 \dots x_{n-k} \otimes \tau). \tag{2.25}$$

En efecto, como $\mathbf{inc}(x_1 \dots x_{n-k}) = 1$ sólo si $k = n-1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \mu(x_1 \dots x_{n-k} \otimes \tau) \\
&\quad = (-1)^{n-1}\mu(x_1 \otimes \tau) + \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \mu(x_1 \dots x_{n-k} \otimes \tau) \\
&\quad = (-1)^{n-1}\lambda(x_1 \odot \tau) - (-1)^{n-1}\lambda(\tau) + \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \lambda(x_1 \dots x_{n-k} \odot \tau) \\
&\quad = (-1)^{n-1}\lambda(x_1 \odot \tau) + (-1)^{n}\lambda(\tau) + \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \lambda(x_1 \dots x_{n-k} \odot \tau) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \lambda(x_1 \dots x_{n-k} \odot \tau),
\end{aligned}$$

como queremos.

Supongamos ahora que estamos en el caso en que $p \neq 1$ y veamos que la suma (2.24) coincide con

$$\sum_{k=0}^{n-p+1}(-1)^k \mu(x_1 \dots x_{n-k} \otimes \tau). \tag{2.26}$$

En efecto, si $\mathbf{inc}(x_1 \dots x_{p-1}) = 0$, entonces para todo $j \geq p-1$ es también $\mathbf{inc}(x_1 \dots x_j) = 0$ y luego

$$\mu(x_1 \dots x_j \otimes \tau) = \lambda(x_1 \dots x_j \odot \tau),$$

probando lo que queremos. Si por el contrario $\mathbf{inc}(x_1 \dots x_{p-1}) = 1$, la minimalidad de $p$ implica que también $\mathbf{inc}(x_1 \dots x_p) = 1$. En este caso, si además $p < n$, tenemos también que $\mathbf{inc}(x_1 \dots x_{p+1}) = 0$ y en particular $\mathbf{inc}(x_1 \dots x_j) = 0$ para todo $j \geq p+1$. Así, vemos que

$$\sum_{k=0}^{n-p+1}(-1)^k \mu(x_1 \dots x_{n-k} \otimes \tau)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-p-1} (-1)^k \mu(x_1 \dots x_{n-k} \otimes \tau) + (-1)^{n-p} \mu(x_1 \dots x_p \otimes \tau) \\
&\qquad\qquad + (-1)^{n-p+1} \mu(x_1 \dots x_{p-1} \otimes \tau) \\
&= \sum_{k=0}^{n-p-1} (-1)^k \lambda(x_1 \dots x_{n-k} \odot \tau) + (-1)^{n-p} (\lambda(x_1 \dots x_p \odot \tau) - \lambda(\tau)) \\
&\qquad\qquad + (-1)^{n-p+1} (\lambda(x_1 \dots x_{p-1} \odot \tau) - \lambda(\tau)) \\
&= \sum_{k=0}^{n-p+1} (-1)^k \lambda(x_1 \dots x_{n-k} \odot \tau).
\end{aligned}
$$

Finalmente, si por el contrario $p = n$, entonces sólo hay dos sumandos en (2.26) y ambos aportan un término de la forma $\lambda(\tau)$ con signos opuestos, probando lo que queremos.

Recapitulando, logramos reescribir (2.24) como una suma de elementos de la forma $\mu(\sigma' \otimes \tau')$ con $|\sigma'| + |\tau'| < t$. Utilizando la hipótesis inductiva sobre los elementos $\mu(\sigma' \otimes \tau')$ podemos entonces reescribir (2.24) como una suma de elementos $\mu(\sigma'' \otimes \tau'')$ con $|\sigma''| + |\tau''| < t$ y tales que $\sigma''$ comienza con 1, como queríamos.

- Finalmente, consideremos el caso en el que $\mathbf{inc}(\tau) = \mathbf{inc}(\gamma) = 1$ y mantengamos las notaciones introducidas en los casos anteriores. La suma de los términos de la forma $\lambda(\omega)$ con $|\omega| < t$ que aparecen en (2.22) es

$$
\begin{aligned}
&- \lambda(\sigma) + \sum_{k=n-l}^{n} (-1)^k \lambda\Big(1(y_1 \dots y_m \odot x_n \dots x_{n-k+1})\Big) \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=0}^{n-p+1} (-1)^k \lambda(x_1 \dots x_{n-k} \odot \tau).
\end{aligned}
$$

Una verificación similar a las anteriores y que omitimos muestra que esta suma coincide con

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \mu\Big((1(y_1 \dots y_m \odot x_n \dots x_{n-k+1})) \otimes x_1 \dots x_{n-k}\Big) \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \mu(x_1 \dots x_{n-k} \otimes \tau)
\end{aligned}
$$

si $p = 1$, y con

$$
- \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \mu\Big((1(y_1 \dots y_m \odot x_n \dots x_{n-k+1})) \otimes x_1 \dots x_{n-k}\Big)
$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-p+1} (-1)^k \mu(x_1 \dots x_{n-k} \otimes \tau)$$

en caso contrario. Una vez más, una aplicación de la hipótesis inductiva sobre estas expresiones concluye la demostración. □

Una consecuencia importante de este lema es que el sistema de ecuaciones (2.19) es altamente redundante: nos dice que la condición de que $d_1(\alpha) = 0$ es equivalente a que se cumplan las ecuaciones

$$0 = \lambda(\sigma \odot \tau) - \mathbf{inc}(\sigma)\,\lambda(\tau) - \mathbf{inc}(\tau)\,\lambda(\sigma) \tag{2.27}$$

en las que $\sigma$ es una palabra que comienza con 1, que son solamente algunas pocas de las que habíamos considerado inicialmente.

La siguiente observación que haremos es que este subsistema es "triangular".

**Proposición 2.27.** *Sea $X$ es el subespacio lineal de $\bigoplus_{n>0} \Bbbk\mathbb{S}_n$ generado por las palabras que comienzan en 1. Cualquier funcional $\hat{\lambda} : X \to \Bbbk$ se extiende de manera única a un funcional $\lambda : \bigoplus_{n>0} \Bbbk\mathbb{S}_n \to \Bbbk$ que satisface las ecuaciones (2.27). Recíprocamente, toda solución de (2.27) se puede obtener mediante este procedimiento.*

*Demostración.* La idea de la demostración consiste, como dijimos, en notar que el sistema (2.27) es triangular en un sentido que precisaremos a continuación.

Ordenemos a las palabras multilineales en el orden graduado lexicográfico. Podemos preguntarnos cuál es la mayor palabra que aparece como argumento de $\lambda$ en el soporte de $\mu(\sigma \otimes \tau)$. Por ejemplo,

$$\mu(1 \otimes 32) = -\lambda(12) + \lambda(132) + \lambda(312) + \lambda(321),$$

por lo que 321 es la mayor palabra que aparece como argumento de $\lambda$ en el soporte de $\mu(1 \otimes 32)$. En general, si $\sigma$ comienza con 1, la mayor palabra en el soporte de $\mu(\sigma \otimes \tau)$ es $\tau\sigma$, pues toda letra de $\tau$ es mayor que la primer letra de $\sigma$. Recíprocamente, si $\alpha = x_1 \dots x_n 1 y_1 \dots y_m$ es una palabra que no comienza con 1 (es decir, que tiene $n \neq 0$), existe exactamente un par de palabras $(\sigma, \tau)$ en el que $\sigma$ comienza en 1 y tal que la mayor palabra en el soporte de $\mu(\sigma \otimes \tau)$ es $\alpha$: este es el par $(1y_1 \dots y_m, x_1 \dots x_n)$.

De este modo, si asumimos que conocemos el valor de $\lambda$ sobre toda palabra lexicográficamente menor a $\alpha$, podemos despejar inductivamente el valor correspondiente a partir de la ecuación

$$\mu(1y_1 \dots y_m \otimes x_1 \dots x_n) = 0$$

en términos de los valores de $\lambda$ sobre palabras menores a $\alpha$. Prefijar el valor de $\lambda$ sobre el subespacio $X$ provee el caso base para esta inducción.

La afirmación recíproca del enunciado es consecuencia de que cada palabra que no comienza con 1 es la mayor que aparece en el soporte de exactamente una de las ecuaciones.

En la Figura 2.8 puede verse en un ejemplo pequeño la estructura triangular del sistema al que nos referimos. □

| | 1 | 12 | 21 | 123 | 132 | 213 | 231 | 312 | 321 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu(1 \otimes 32)$ | | $-\lambda(12)$ | | | $+\lambda(132)$ | | | $+\lambda(312)$ | $+\lambda(321)$ |
| $\mu(12 \otimes 3)$ | $-\lambda(1)$ | $-\lambda(12)$ | | $+\lambda(123)$ | $+\lambda(132)$ | | | $+\lambda(312)$ | |
| $\mu(1 \otimes 23)$ | $-\lambda(1)$ | $-\lambda(12)$ | | $+\lambda(123)$ | | $+\lambda(213)$ | $+\lambda(231)$ | | |
| $\mu(13 \otimes 2)$ | $-\lambda(1)$ | $-\lambda(12)$ | | $+\lambda(123)$ | $+\lambda(132)$ | $+\lambda(213)$ | | | |
| $\mu(1 \otimes 2)$ | $-2\lambda(1)$ | $+\lambda(12)$ | $+\lambda(21)$ | | | | | | |

Figura 2.8: La triangularidad del sistema (2.27), descripto aquí hasta el cardinal $n = 3$. Notar que para cada palabra que no empieza con 1 hay exactamente una ecuación en la que es la mayor. Notemos además que los únicos escalares que aparecen como coeficientes son $+1$, $-1$ y $-2$, y el coeficiente $-2$ aparece en la escritura de $\mu(\sigma \otimes \tau)$ si y sólo si $\mathbf{std}(\sigma) = \mathbf{std}(\tau)$. Esto es cierto siempre aunque no haremos uso de este hecho.

Juntando todo esto podemos determinar completamente el primer módulo de cohomología de L en tanto espacio vectorial.

**Teorema 2.28.** *El espacio $H^1(\mathrm{L}, \mathrm{L})$ es de dimensión infinita.*

*Demostración.* El isomorfismo lineal $\Lambda : C^1(\mathrm{L}) \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\bigoplus_{n>0} \Bbbk\mathbb{S}_n, \Bbbk)$ que asigna una cocadena a su funcional $\lambda$ asociado se restringe a un isomorfismo entre $\ker d_1$ y el subespacio de funcionales que satisfacen las ecuaciones (2.27). La Proposición 2.27 afirma que este último espacio es isomorfo al espacio $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, \Bbbk)$, que es de dimensión infinita. □

Vale la pena destacar que el espacio $X$ tiene una graduación evidente dada por la longitud de las palabras. Escribimos $X = \bigoplus_{n>0} X_n$, donde $X_n$ es el espacio generado por palabras de longitud $n$ que comienzan en 1. De este modo,

$$H^1(\mathrm{L}, \mathrm{L}) \cong \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X, \Bbbk) \cong \mathrm{Hom}_{\Bbbk}\left(\bigoplus_{n>0} X_n, \Bbbk\right) \cong \prod_{n>0} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X_n, \Bbbk).$$

Como

$$\dim\left(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X_n, \Bbbk)\right) = \dim(X_n) = (n-1)! = c(n,1) = \dim\left(E_1^{n,1-n}(\mathrm{L})\right),$$

vemos a este resultado como más evidencia parcial del colapso de la sucesión espectral en su segunda página.

# Capítulo 3

# El grupo de Picard de una coálgebra en especies

En capítulos anteriores estudiamos la estructura del álgebra de cohomología de ciertas especies. En este capítulo no nos focalizaremos en ejemplos específicos, sino en establecer un resultado general sobre la categoría de bicomódulos sobre una coálgebra en especies. Dicho resultado está motivado por la situación que describimos a continuación. Bajo ciertas condiciones sobre una variedad diferencial $X$, el Teorema de Serre-Swan establece una equivalencia monoidal entre la categoría de fibrados vectoriales sobre $X$ y la categoría de módulos proyectivos finitamente presentados sobre el álgebra de funciones continuas en $X$. Bajo esta equivalencia, los módulos inversibles para el producto tensorial se corresponden con los fibrados de línea en $X$. Esto motiva la consideración de los objetos inversibles para el producto en otras categorías monoidales. El **grupo de Picard** $\mathrm{Pic}(X)$ de una categoría monoidal $X$ el grupo de clases de isomorfismo de objetos inversibles para el producto. La categoría de los c-bicomódulos tiene una estructura monoidal dada por el **producto cotensorial**, y nos interesará estudiar el grupo de Picard asociado a esta estructura.

En varios contextos en el que $X$ es una categoría de bicomódulos sobre una coálgebra $c$ puede probarse que $\mathrm{Pic}(X)$ es isomorfo al grupo de automorfismos exteriores de $c$: por ejemplo, Torrecillas y Zhang establecen este resultado en el caso en que $c$ es una coálgebra coasociativa y coconmutativa en [TZ96] y Cuadra, García Rozas y Torrecillas lo hacen en [CGRT00] para el caso en que $c$ es una coálgebra coasociativa básica. El objetivo de este capítulo será establecer un resultado análogo en la categoría de especies. El enfoque más natural para llevar esta tarea a cabo sería imitar el argumento presentado en [TZ96] adaptándolo a la categoría de especies. Sin embargo, la principal herramienta técnica usada allí es la existencia de un funtor adjunto a izquierda al producto cotensorial. Este funtor se conoce en la literatura como el **funtor de cohomomorfismos** y fue estudiado en detalle por Takeuchi en [Tak77] para establecer resultados análogos a los de la Teoría de Morita para el contexto de comódulos. La existencia de tal adjunto no es evidente en

nuestro contexto, principalmente porque no hay un candidato obvio al que tomar como definición. Sin embargo, podemos demostrar la Proposición 3.9, que es el lema técnico central de la sección, apelando a un argumento diferente que no hace uso de la adjunción.

A lo largo de este capítulo trabajaremos sobre la categoría Sp de especies combinatorias y sobre un cuerpo base $\Bbbk$ de característica cero. Escribiremos $(\mathrm{c}, \Delta, \varepsilon)$ para referirnos a una coálgebra en especies **conexa**, lo que significa que $\mathrm{c}(\emptyset)$ es el espacio $\Bbbk$. La hipótesis de conexión será empleada fuertemente a lo largo de todo el capítulo. Vale la pena remarcar que la enorme mayoría de ejemplos naturales de especies cumplen esta condición. En los casos donde una especie codifica cierto tipo de familia de objetos combinatorios, la hipótesis de conexión solamente refleja el hecho de que hay una única estructura de ese tipo sobre el conjunto vacío. A modo de ejemplo, la especie de órdenes lineales L es conexa justamente porque hay un único orden lineal sobre el vacío: dicho orden genera el espacio $\mathrm{L}(\emptyset)$.

## 3.1 Generalidades

Comenzaremos esta sección describiendo una estructura monoidal sobre la categoría ${}_{\mathrm{c}}\mathrm{comod}_{\mathrm{c}}$ de c-bicomódulos similar a la construida en [EM66] para bicomódulos sobre una coálgebra coasociativa conexa c en la categoría de especies Sp. El producto monoidal de esta estructura es el **producto cotensorial** $\square$. Si $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in {}_{\mathrm{c}}\mathrm{comod}_{\mathrm{c}}$, este producto es

$$\mathrm{x} \,\square\, \mathrm{y} = \ker\left(\rho_{\mathrm{x}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{y}} - \mathrm{id}_{\mathrm{x}} \otimes \lambda_{\mathrm{y}}\right) \subseteq \mathrm{x} \otimes \mathrm{y},$$

de manera que $- \,\square\, -$ es un sub-bifuntor de $- \otimes -$. La compatibilidad de las coacciones a izquierda y a derecha de x y de y implica que $\mathrm{x} \,\square\, \mathrm{y}$ tiene una estructura de c-bicomódulo con coacciones $\lambda_{\mathrm{x}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{y}}$ e $\mathrm{id}_{\mathrm{x}} \otimes \rho_{\mathrm{y}}$ a izquierda y a derecha, respectivamente. La unidad para esta estructura monoidal es c. El unitor $\mathrm{x} \to \mathrm{x} \,\square\, \mathrm{c}$ es el inducido por la coacción a derecha de x y, simétricamente, el unitor $\mathrm{x} \to \mathrm{c} \,\square\, \mathrm{x}$ es el inducido por su coacción a izquierda.

La **coálgebra trivial** en Sp, a la que abusando la notación notaremos como $\Bbbk$, es la especie concentrada en el vacío, en donde toma el valor $\Bbbk$, munida del coproducto y la counidad obvias. Como tenemos un monomorfismo de coálgebras evidente $\Bbbk \to \mathrm{c}$, consideraremos a la coálgebra trivial como subcoálgebra de c. De este modo podemos pensar a $\Bbbk$ como un sub-c-bicomódulo de c.

Es fácil verificar que toda especie es un $\Bbbk$-bicomódulo con respecto a las acciones triviales, y que el producto de Cauchy de dos especies obtenidas de esta forma coincide con el producto cotensorial de $\Bbbk$-bicomódulos. En otras palabras, tenemos una equivalencia monoidal entre las categorías Sp y la de $\Bbbk$-bicomódulos.

**Proposición 3.1** ([BW03, 10.4] )**.** *Si* x *un* c*-comódulo a izquierda, el funtor* $- \,\square\, \mathrm{x}$ *es exacto a izquierda.*

De manera análoga, si x es un c-comódulo a derecha, el funtor $\mathrm{x}\,\square\,-$ también es exacto a izquierda.

*Demostración.* Supongamos que tenemos una sucesión exacta a izquierda de c-comódulos a izquierda

$$0 \longrightarrow \mathrm{y} \xrightarrow{f} \mathrm{z} \xrightarrow{g} \mathrm{w}.$$

Es sencillo verificar que el producto de Cauchy es exacto a izquierda, por lo que el siguiente diagrama conmutativo tiene su segunda y tercera filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{y}\,\square\,\mathrm{x} & \xrightarrow{f\square 1} & \mathrm{z}\,\square\,\mathrm{x} & \xrightarrow{g\square 1} & \mathrm{w}\,\square\,\mathrm{x} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{y}\otimes\mathrm{x} & \xrightarrow{f\otimes 1} & \mathrm{z}\otimes\mathrm{x} & \xrightarrow{g\otimes 1} & \mathrm{w}\otimes\mathrm{x} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{y}\otimes\mathrm{c}\otimes\mathrm{x} & \xrightarrow{f\otimes 1\otimes 1} & \mathrm{z}\otimes\mathrm{c}\otimes\mathrm{x} & \xrightarrow{g\otimes 1\otimes 1} & \mathrm{w}\otimes\mathrm{c}\otimes\mathrm{x} & &
\end{array}$$

Las flechas de las columnas son las empleadas para definir el producto cotensorial, por lo que el diagrama también tiene columnas exactas, y esto nos permite concluir la exactitud de la primera fila — por ejemplo, apelando al Strong Four Lemma presentado en [Mac67, Lemma 3.2] □

Gracias a esta última proposición podemos considerar a $\Bbbk\,\square\,\mathrm{x}$ como un subcomódulo izquierdo de $\mathrm{c}\,\square\,\mathrm{x} \cong \mathrm{x}$. Llamamos a $\Bbbk\,\square\,\mathrm{x}$ el **subcomódulo de coinvariantes** de x. Bajo esta identificación, si $I \in \mathrm{Fin}^{\times}$ es un conjunto, el espacio $(\Bbbk\,\square\,\mathrm{x})(I)$ consiste de todos los elementos $x \in \mathrm{x}(I)$ tales que $\lambda(x) = 1 \otimes x \in \mathrm{c}(\emptyset) \otimes \mathrm{x}(I)$.

Un argumento análogo al presentado en 1.5 muestra que la categoría de c-comódulos a izquierda tiene suficientes inyectivos; enfatizamos que esto es el caso porque en nuestro contexto el anillo de base es siempre un cuerpo. La existencia de suficientes inyectivos y la proposición anterior implican que tiene sentido considerar el funtor derivado a derecha de $-\,\square\,\mathrm{x}$, al que llamamos $\mathrm{Cotor}_{\mathrm{c}}(-,\mathrm{x})$.

Daremos ahora un lema técnico que nos permitirá probar una variante del Lema de Nakayama graduado adaptada a nuestro contexto (comparar con [Krä, Proposition 1]):

**Lema 3.2.** *Si* x *es un* c*-comódulo a izquierda no nulo e* $I$ *es un conjunto finito en* $\mathrm{Fin}^{\times}$ *tal que* $\mathrm{x}(I) \neq 0$ *y* $\mathrm{x}(K) = 0$ *para todo conjunto finito* $K$ *con* $|K| < |I|$*, entonces*

$$(\Bbbk\,\square\,\mathrm{x})(I) \neq 0.$$

Informalmente, este lema nos dice que siempre hay coinvariantes no triviales en el primer cardinal en que un comódulo es no nulo.

*Demostración.* Sean x e $I$ como en el enunciado, tomemos $x \in \mathrm{x}(I)$ un vector no nulo y consideremos su imagen por la componente en $I$ de la coacción izquierda

$$\lambda_I : \mathrm{x}(I) \to (\mathrm{c} \otimes \mathrm{x})(I) = \bigoplus_{J \subseteq I} (\mathrm{c}(J) \otimes \mathrm{x}(I \setminus J)).$$

Esta coacción es counital, lo que implica que $(\pi_{\mathrm{c}(\emptyset)\otimes \mathrm{x}(I)} \circ \lambda_I)(x) = 1 \otimes x$, donde

$$\pi_{\mathrm{c}(\emptyset)\otimes \mathrm{x}(I)} : (\mathrm{c} \otimes \mathrm{x})(I) \to \mathrm{c}(\emptyset) \otimes \mathrm{x}(I)$$

es la proyección. Como por hipótesis $\mathrm{x}(I \setminus J) = 0$ para todo subconjunto no vacío $J$, debe ser $\lambda_I(x) = 1 \otimes x$, y luego $x$ es un elemento no trivial del subcomódulo de coinvariantes de x. □

**Corolario 3.3** (Lema de Nakayama)**.** *Un* c*-comódulo a izquierda es nulo si y sólo si su subcomódulo de coinvariantes lo es.* □

El subcomódulo de coinvariantes de una coálgebra conexa c considerada como c-comódulo a izquierda con la estructura dada por la comultiplicación es particularmente sencillo:

**Lema 3.4.** *El subcomódulo de coinvariantes de un álgebra conexa es* $\Bbbk$.

*Demostración.* Si $I$ es un conjunto no vacío, la única componente no trivial del morfismo $(\mathrm{id}_\mathrm{c} \otimes \varepsilon)(I)$ es $\mathrm{id}_\mathrm{c}(I) \otimes \varepsilon(\emptyset)$, y como la counitariedad de la comultiplicación nos garantiza que

$$(\mathrm{id}_\mathrm{c} \otimes \varepsilon)\Delta = \mathrm{id}_\mathrm{c},$$

podemos concluir que la componente $\Delta(I) : \mathrm{c}(I) \to \mathrm{c}(I) \otimes \varepsilon(\emptyset)$ de la comultiplicación es no nula. En particular, $\Delta(x) \neq 1 \otimes x$ para todo $x \in I$ no nulo, lo que demuestra que $(\Bbbk \,\square\, \mathrm{c})(I) = 0$ para todo conjunto $I$ no vacío. Como $\mathrm{c} \neq 0$, el Lema de Nakayama nos permite concluir entonces que $(\Bbbk \,\square\, \mathrm{c})(\emptyset) \neq 0$, y como

$$(\Bbbk \,\square\, \mathrm{c})(\emptyset) \subseteq \mathrm{c}(\emptyset) \cong \Bbbk$$

gracias a la hipótesis de conexión, obtenemos el resultado buscado. □

El siguiente lema técnico nos será de utilidad:

**Lema 3.5.** *Si* $\pi : \mathrm{x} \to \Bbbk \,\square\, \mathrm{x}$ *es una sección de especies para la inclusión y* x *es un* c*-comódulo a izquierda, el morfismo de especies* $\psi : \mathrm{x} \to \mathrm{c} \otimes (\Bbbk \square \mathrm{x})$ *dado por la composición*

$$\mathrm{x} \xrightarrow{\lambda} \mathrm{c} \otimes \mathrm{x} \xrightarrow{\mathrm{id}_\mathrm{c} \otimes \pi} \mathrm{c} \otimes (\Bbbk \,\square\, \mathrm{x})$$

*es un monomorfismo de* c*-comódulos a izquierda. Si más aún* $\mathrm{Cotor}^1_\mathrm{c}(\Bbbk, \mathrm{x}) = 0$*, entonces* $\psi$ *es un isomorfismo.*

Siempre podemos construir un morfismo de especies $\pi : \mathrm{x} \to \Bbbk \square \mathrm{x}$ que sea una sección para la inclusión gracias al Teorema de Maschke, por lo que el enunciado del lema no es vacuo. Notamos además que la última condición del enunciado es automática siempre que x sea un c-comódulo a izquierda inyectivo.

*Demostración.* Para ver que el morfismo $\psi$ es de c-comódulos, debemos ver que conmute el siguiente diagrama de especies:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{x} & \xrightarrow{\lambda} & \mathrm{c} \otimes \mathrm{x} & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\pi} & \mathrm{c} \otimes (\Bbbk \square \mathrm{x}) \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & & & \downarrow{\scriptstyle \Delta\otimes\mathrm{id}} \\ \mathrm{c} \otimes \mathrm{x} & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\lambda} & \mathrm{c} \otimes \mathrm{c} \otimes \mathrm{x} & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\pi} & \mathrm{c} \otimes \mathrm{c} \otimes (\Bbbk \square \mathrm{x}) \end{array}$$

Esto ocurre como consecuencia del hecho de que los morfismos $\mathrm{id} \otimes \pi$ y $\Delta \otimes \mathrm{id}$ conmutan y de que la coacción $\lambda$ es coasociativa. Notemos que esto pasa siempre que $\pi$ sea un morfismo de especies, independientemente del hecho de que sea una sección.

Veamos ahora que $\psi$ es un monomorfismo. Notemos n al núcleo de $\psi$. Al aplicar el funtor exacto a izquierda $\Bbbk \square -$ a la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{n} \to \mathrm{x} \xrightarrow{\psi} \mathrm{c} \otimes (\Bbbk \square \mathrm{x})$$

obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \Bbbk \square \mathrm{n} \to \Bbbk \square \mathrm{x} \xrightarrow{\mathrm{id}_\Bbbk \square \psi} \Bbbk \square (\mathrm{c} \otimes (\Bbbk \square \mathrm{x})). \tag{3.1}$$

Es fácil ver que el término de la derecha es isomorfo a $(\Bbbk \square \mathrm{c}) \otimes (\Bbbk \square \mathrm{x})$, y más aún, podemos ver que es isomorfo a $\Bbbk \square \mathrm{x}$ tras aplicar los isomorfismos unitales $- \square \mathrm{c} \cong \mathrm{id}$ y $\Bbbk \otimes - \cong \mathrm{id}$.

Probemos entonces que bajo estas identificaciones el morfismo inducido $\mathrm{id}_\Bbbk \square \psi$ es simplemente la identidad de $\Bbbk \square \mathrm{x}$. Sean $I \in \mathrm{Fin}^\times$ un conjunto y $1 \otimes x$ un elemento de $(\Bbbk \square \mathrm{x})(I)$. Entonces

$$\begin{aligned} (\mathrm{id}_\Bbbk \square \psi)(1 \otimes x) &= 1 \otimes ((\mathrm{id}_\mathrm{c} \otimes \pi) \circ \lambda)(x) \\ &= 1 \otimes (\mathrm{id}_\mathrm{c} \otimes \pi)(1 \otimes x) \\ &= 1 \otimes 1 \otimes \pi(x) \\ &= 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes x, \end{aligned}$$

dado que $\pi$ es una sección. Como las identificaciones mencionadas anteriormente mandan $1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes x$ en $1 \otimes x$, esto prueba nuestra afirmación. La exactitud de (3.1) implica que $\Bbbk \square \mathrm{n} = 0$ y el Lema de Nakayama 3.3 nos permite concluir entonces que $\mathrm{n} = 0$, probando que $\psi$ es un monomorfismo.

Notemos ahora m al conúcleo de $\psi$. Al aplicarle el funtor de coinvariantes $\Bbbk \square -$ a la sucesión exacta corta

$$0 \to \mathrm{x} \to \mathrm{c} \otimes (\Bbbk \square \mathrm{x}) \to \mathrm{m} \to 0$$

obtenemos una sucesión exacta larga

$$0 \to \Bbbk \,\square\, \mathrm{x} \xrightarrow{\mathrm{id}_\Bbbk \square \psi} \Bbbk \,\square\, (\mathrm{c} \otimes (\Bbbk \,\square\, \mathrm{x})) \to \Bbbk \,\square\, \mathrm{m} \to \mathrm{Cotor}^1_{\mathrm{c}}(\Bbbk, \mathrm{x}) \to \dots$$

Como ya sabemos que el morfismo inducido $\mathrm{id}_\Bbbk \square \psi$ es un isomorfismo, la exactitud prueba que $\Bbbk \square \mathrm{m}$ es nulo si $\mathrm{Cotor}^1_{\mathrm{c}}(\Bbbk, \mathrm{x})$ lo es. En este caso otra aplicación del Lema de Nakayama 3.3 implica que $\mathrm{m} = 0$, de manera que $\psi$ es un epimorfismo, como queríamos. □

Un c-bicomódulo x es **inversible** si existe un c-bicomódulo y tal que $\mathrm{x} \square \mathrm{y} \cong \mathrm{c} \cong \mathrm{y} \square \mathrm{x}$. Llamaremos a un tal bicomódulo y una **inversa** para x. Si x es inversible, el endofuntor

$$\mathrm{x} \,\square\, - : {}_{\mathrm{c}}\mathrm{comod}_{\mathrm{c}} \to {}_{\mathrm{c}}\mathrm{comod}_{\mathrm{c}}$$

es una autoequivalencia de categorías, y lo mismo ocurre cuando lo consideramos como un endofuntor de la categoría de c-comódulos a izquierda o derecha. Vale la pena destacar que la asociatividad del producto monoidal implica que la inversa de un bicomódulo, en caso de existir, está bien definida salvo un isomorfismo natural.

**Lema 3.6.** *Todo* c*-bicomódulo inversible es isomorfo a* c *como* c*-comódulo a izquierda y como* c*-comódulo a derecha.*

Remarcamos que esto *no* implica que un c-bicomódulo inversible sea isomorfo a c como c-bicomódulo, cosa que en la mayoría de los casos no es cierta.

*Demostración.* Sea x un c-bicomódulo inversible. Como $\mathrm{x} \,\square\, -$ es una autoequivalencia en la categoría de c-comódulos a izquierda, tenemos que $\mathrm{x} \,\square\, \mathrm{c} \cong \mathrm{x}$ es un c-comódulo inyectivo, pues c lo es.

La inyectividad de x implica que $\mathrm{Cotor}^1_{\mathrm{c}}(\Bbbk, \mathrm{x}) = 0$, y gracias al Lema 3.5 vemos que x es isomorfo a $\mathrm{c} \otimes (\Bbbk \,\square\, \mathrm{x})$ como c-comódulo a izquierda. Además, si y es la inversa de x tenemos isomorfismos de c-comódulos a izquierda

$$\begin{aligned}
\Bbbk &\cong \Bbbk \,\square\, \mathrm{c} \\
&\cong \Bbbk \,\square\, (\mathrm{y} \,\square\, \mathrm{x}) \\
&\cong \Bbbk \,\square\, (\mathrm{y} \,\square\, (\mathrm{c} \otimes (\Bbbk \,\square\, \mathrm{x})) \\
&\cong \Bbbk \,\square\, ((\mathrm{y} \,\square\, \mathrm{c}) \otimes (\Bbbk \,\square\, \mathrm{x})) \\
&\cong \Bbbk \,\square\, (\mathrm{y} \otimes (\Bbbk \,\square\, \mathrm{x})) \\
&\cong (\Bbbk \,\square\, \mathrm{y}) \otimes (\Bbbk \,\square\, \mathrm{x}),
\end{aligned}$$

lo que prueba que el subcomódulo de coinvariantes de x y el de su inversa son ambos isomorfos a $\Bbbk$. Volviendo al isomorfismo garantizado por el Lema 3.5, obtenemos

$$\mathrm{x} \cong \mathrm{c} \otimes (\Bbbk \,\square\, \mathrm{x}) \cong \mathrm{c} \otimes \Bbbk \cong \mathrm{c},$$

como queríamos. El enunciado análogo a derecha se prueba de manera similar. □

## 3.2 Formas torcidas

A partir de un c-bicomódulo x podemos producir **formas torcidas** de x del siguiente modo: si $\varphi$ y $\psi$ son endomorfismos de coálgebra de c, la forma torcida ${}_{\varphi}\mathrm{x}_{\psi}$ es el c-bicomódulo que como especie coincide con x y tiene coacciones a izquierda y derecha dadas por $(\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{x}}) \circ \lambda$ e $(\mathrm{id}_{\mathrm{x}} \otimes \psi) \circ \rho$ respectivamente. El diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{x} & \xrightarrow{\lambda} & \mathrm{c} \otimes \mathrm{x} & \xrightarrow{\varphi\otimes\mathrm{id}} & \mathrm{c} \otimes \mathrm{x} & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\lambda} & \mathrm{c} \otimes \mathrm{c} \otimes \mathrm{x} \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\varphi\otimes\mathrm{id}} \\ \mathrm{c} \otimes \mathrm{x} & \xrightarrow{\varphi\otimes\lambda} & \mathrm{c} \otimes \mathrm{x} & & \xrightarrow{\Delta\otimes\mathrm{id}} & & \mathrm{c} \otimes \mathrm{c} \otimes \mathrm{x} \end{array}$$

conmuta gracias a que $\varphi$ es un morfismo de coálgebras y que $\lambda$ es una coacción a izquierda, y otros diagramas similares evidencian la counitariedad de la acción y hechos análogos para la estructura a derecha, y la compatibilidad entre las dos acciones. Cuando alguno de $\varphi$ o $\psi$ sea la identidad de c suprimiremos el subíndice correspondiente para aligerar la notación. Es fácil verificar que tenemos los siguientes isomorfismos:

$${}_{\varphi_2}({}_{\varphi_1}\mathrm{x}_{\psi_1})_{\psi_2} \cong {}_{\varphi_2\varphi_1}\mathrm{x}_{\psi_2\psi_1}, \qquad {}_{\varphi}\mathrm{x}_{\psi} \cong {}_{\varphi}\mathrm{c} \,\square\, \mathrm{x} \,\square\, \mathrm{c}_{\psi}.$$

Consideraremos ahora formas torcidas de la coálgebra c como bicomódulo sobre sí misma. El siguiente hecho es fácil de verificar y omitimos su demostración:

**Lema 3.7.** *Si $\alpha, \beta, \gamma$ son automorfismos de coálgebras de* c, $\alpha^{-1} : {}_{\beta}\mathrm{c}_{\gamma} \to {}_{\alpha}({}_{\beta}\mathrm{c}_{\gamma})_{\alpha}$ *es un isomorfismo de* c*-bicomódulos. En particular, los bicomódulos* $\mathrm{c}_{\alpha}$ *y* ${}_{\alpha^{-1}}\mathrm{c}$ *son isomorfos.* □

Nuestro interés en este caso particular se debe a que provee una fuente sencilla de bicomódulos inversibles:

**Lema 3.8.** *Si $\alpha$ es un automorfismo de coálgebras de* c*, el bicomódulo* $\mathrm{c}_{\alpha}$ *es inversible, con inversa* ${}_{\alpha}\mathrm{c}$.

*Demostración.* Debemos ver que

$$(\mathrm{c}_{\alpha}) \,\square\, ({}_{\alpha}\mathrm{c}) \cong \mathrm{c} \cong ({}_{\alpha}\mathrm{c}) \,\square\, (\mathrm{c}_{\alpha}).$$

Gracias al Lema 3.7, la aplicación

$$\alpha \,\square\, \alpha : (\mathrm{c}_{\alpha}) \,\square\, ({}_{\alpha}\mathrm{c}) \to ({}_{\alpha^{-1}}\mathrm{c}) \,\square\, (\mathrm{c}_{\alpha^{-1}})$$

es un isomorfismo de c-bicomódulos, por lo que basta entonces con ver que $\mathrm{c} \cong ({}_{\alpha}\mathrm{c}) \,\square\, (\mathrm{c}_{\alpha})$, y esto es consecuencia de otra aplicación del Lema 3.7 dado que

$$({}_{\alpha}\mathrm{c}) \,\square\, (\mathrm{c}_{\alpha}) = {}_{\alpha}(\mathrm{c} \,\square\, \mathrm{c})_{\alpha} \cong {}_{\alpha}\mathrm{c}_{\alpha} \cong \mathrm{c}.$$

□

Buscaremos ahora probar la recíproca del resultado anterior, es decir, que todo bicomódulo inversible se obtiene torciendo a c por un automorfismo. Para ello precisamos el siguiente resultado intermedio:

**Proposición 3.9.** *Si* x *es un* c*-bicomódulo tal que* $\mathrm{x} \cong \mathrm{c}$ *como* c*-comódulos a derecha, entonces existe un endomorfismo de coálgebras* $\alpha : \mathrm{c} \to \mathrm{c}$ *tal que* $\mathrm{x} \cong {}_{\alpha}\mathrm{c}$.

Remarcamos que los autores de [TZ96] hacen uso del funtor de cohomomorfismos, del cual no disponemos en nuestro contexto, para establecer este resultado en el caso de coálgebras en espacios vectoriales. Vale la pena destacar también que la hipótesis de conexión no es necesaria para la validez de este resultado.

*Demostración.* Sea x un c-bicomódulo isomorfo a c como comódulo a derecha. La coálgebra c obtiene una estructura de c-comódulo a izquierda transportando la de x a través del isomorfismo de comódulos a derecha del enunciado. Como las estructuras a izquierda y a derecha de x son compatibles, el morfismo de estructura $\lambda : \mathrm{c} \to \mathrm{c} \otimes \mathrm{c}$ es de comódulos a derecha, haciendo de c un bicomódulo con una estructura diferente a la original. Usando la adjunción de la Proposición 1.4 obtenemos un morfismo de especies $\alpha : \mathrm{c} \to \mathrm{c}$ tal que

$$\lambda = (\alpha \otimes \mathrm{id_c})\Delta.$$

Para probar la proposición bastará con ver que $\alpha$ es un morfismo de coálgebras. Como $\lambda$ da una estructura de c-comódulo a izquierda sobre c, tenemos que

$$(\Delta \otimes \mathrm{id_c})\lambda = (\mathrm{id_c} \otimes \lambda)\lambda.$$

Escribiendo esta identidad en términos de $\alpha$, vemos que

$$(\Delta\alpha \otimes \mathrm{id_c})\Delta = (\alpha \otimes \alpha \otimes \mathrm{id_c})(\mathrm{id_c} \otimes \Delta)\Delta = (\alpha \otimes \alpha \otimes \mathrm{id_c})(\Delta \otimes \mathrm{id_c})\Delta.$$

Aplicando $\mathrm{id_c} \otimes \mathrm{id_c} \otimes \varepsilon$ a los miembros extremos de esta igualdad obtenemos

$$\Delta\alpha = (\alpha \otimes \alpha)\Delta,$$

probando que $\alpha$ conmuta con la comultiplicación. Un razonamiento similar utilizando la compatibilidad de la coacción $\lambda$ con la counidad muestra que $\alpha$ preserva la counidad, por lo que es un endomorfismo de coálgebras. De este modo el isomorfismo de comódulos a derecha del enunciado resulta ser un isomorfismo de bicomódulos entre x y ${}_{\alpha}\mathrm{c}$. □

Ahora sí podemos probar lo que queríamos originalmente:

**Proposición 3.10.** *Todo* c*-bicomódulo inversible es isomorfo a* ${}_{\alpha}\mathrm{c}$ *para algún automorfismo de coálgebras* $\alpha : \mathrm{c} \to \mathrm{c}$.

Este resultado, en contraste con el anterior, sí requiere la hipótesis de conexión sobre c, dado que hace uso del Lema 3.6.

*Demostración.* Sea x un c-bicomódulo inversible. Gracias al Lema 3.6 sabemos que x es isomorfo a c como comódulo a derecha, y la Proposición 3.9 nos dice entonces que existe un endomorfismo de coálgebras $\alpha : \mathrm{c} \to \mathrm{c}$ tal que $\mathrm{x} \cong {}_{\alpha}\mathrm{c}$ como bicomódulos. Resta ver que $\alpha$ es un automorfismo.

Por transitividad tenemos que ${}_{\alpha}\mathrm{c} \cong \mathrm{c}$ como comódulos a izquierda, por lo que existe un isomorfismo de especies $f : \mathrm{c} \to \mathrm{c}$ tal que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{c} & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathrm{c} \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\ \mathrm{c} \otimes \mathrm{c} & \xrightarrow{\alpha \otimes f} & \mathrm{c} \otimes \mathrm{c} \end{array}$$

conmuta. De este modo, el isomorfismo $f$ coincide con $(\alpha \otimes \varepsilon f)\Delta$. Dado un conjunto finito $I$ arbitrario, llamamos $p_I : (\mathrm{c} \otimes \mathrm{c})(I) \to \mathrm{c}(I) \otimes \mathrm{c}(\emptyset)$ a la transformación lineal que se restringe a la identidad sobre $\mathrm{c}(I) \otimes \mathrm{c}(\emptyset)$ y es nula en todo otro sumando de $(\mathrm{c} \otimes \mathrm{c})(I)$. Como $\varepsilon f$ se anula sobre todo conjunto finito no vacío, tenemos la igualdad

$$(\alpha_I \otimes \varepsilon_\emptyset f_\emptyset) p_I \Delta_I = ((\alpha \otimes \varepsilon f)\Delta)_I = f_I : \mathrm{c}(I) \to \mathrm{c}(I).$$

La counitariedad de la estructura de coálgebra de c implica que $p_I \Delta_I$ es un isomorfismo, y como $f_I$ también lo es podemos concluir lo mismo para $\alpha_I \otimes \varepsilon_\emptyset f_\emptyset$ y, en particular, para $\alpha_I$. Como $\alpha_I$ es un automorfismo para cualquier conjunto finito $I$, concluimos que $\alpha$ es un automorfismo de coálgebras, como queríamos. □

## 3.3 El grupo de Picard de una coálgebra conexa

Dada una categoría monoidal $\mathbf{C}$ con producto $\otimes$ podemos construir su **grupo de Picard** $\mathrm{Pic}(\mathbf{C})$. Los elementos de este grupo son las clases de isomorfismo de objetos de $\mathbf{C}$ inversibles para el producto $\otimes$ y la operación está dada por

$$[M] \cdot [N] = [M \otimes N]$$

Si c es una coálgebra en la categoría de especies Sp, escribiremos $\mathrm{Pic}(\mathrm{c})$ para referirnos al grupo de Picard de la categoría ${}_{\mathrm{c}}\mathrm{comod}_{\mathrm{c}}$ de c-bicomódulos dotada de su producto monoidal $\square$.

Las formas torcidas nos proveen un morfismo de grupos

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(\mathrm{c}) &\to \mathrm{Pic}(\mathrm{c}) \\ \alpha &\mapsto [\mathrm{c}_\alpha] \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $\mathrm{Aut}(\mathrm{c})$ es el grupo de automorfismos de coálgebras de c. El hecho de que esta flecha sea un morfismo de grupos es consecuencia de que

$$\mathrm{c}_\varphi \,\square\, \mathrm{c}_\psi \cong {}_{\varphi^{-1}}\mathrm{c} \,\square\, \mathrm{c}_\psi \cong {}_{\varphi^{-1}}\mathrm{c}_\psi \cong \mathrm{c}_{\varphi\psi}$$

y de que ${}_{\mathrm{id}}\mathrm{c}_{\mathrm{id}} \cong \mathrm{c}$. Por otra parte, el Corolario 3.10 implica que esta aplicación es un epimorfismo. Veremos a continuación que el núcleo de esta aplicación consiste en una familia especial de automorfismos, a los que llamamos interiores. Para poder describirlos, precisamos de algunos preliminares.

Si c es una coálgebra en Sp, su dual $\mathrm{c}^* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}}(\mathrm{c}, \Bbbk)$ es un álgebra asociativa para el producto de convolución que describimos a continuación. Si $\varphi, \psi \in \mathrm{c}^*$, definimos

$$\varphi * \psi = \mu \circ (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta.$$

Como la unidad para el producto de la especie $\Bbbk$ es la identidad, la unidad para el producto de convolución es la counidad $\varepsilon$ de la coálgebra c. Un automorfismo de coálgebras $\alpha : \mathrm{c} \to \mathrm{c}$ se dice **interior** si existe un morfismo $u \in \mathrm{c}^*$ inversible para el producto de convolución de modo que

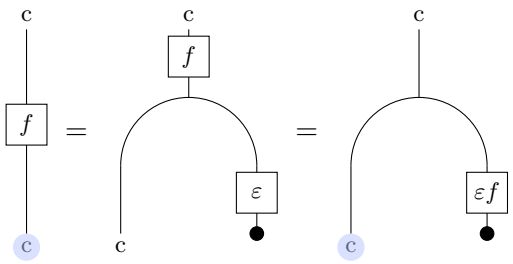
$$\alpha = (u \otimes \mathrm{id} \otimes u^{-1}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta,$$

donde obviamos explicitar la aplicación de unitores, convención que mantendremos en lo que sigue. Es fácil ver que los automorfismos interiores conforman un subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathrm{c})$ al que notamos $\mathrm{Inn}(\mathrm{c})$.

**Proposición 3.11.** *Sea $\alpha : \mathrm{c} \to \mathrm{c}$ un automorfismo de coálgebras. La forma torcida $\mathrm{c}_\alpha$ es isomorfa a c como bicomódulo si y sólo si $\alpha$ es interior.*

*Demostración.* Nuestra demostración es una adaptación de la presentada en [TZ96, Lemma 2.6.3] para la categoría de coálgebras sobre espacios vectoriales a una categoría monoidal arbitraria. Para ello emplearemos una representación pictórica de la composición de los morfismos, en donde una bifurcación representa la aplicación de la comultiplicación de c y un punto negro sólido al final de una línea representa que el codominio de la aplicación es $\Bbbk$ y, por lo tanto, que esa línea puede contraerse mediante la aplicación del unitor de la estructura monoidal. En los diagramas escribiremos c en lugar de $\mathrm{c}_\alpha$ dado que sólo nos interesará considerar igualdades entre funciones y que las estructuras adicionales de tanto el dominio como codominio no afectan este hecho.

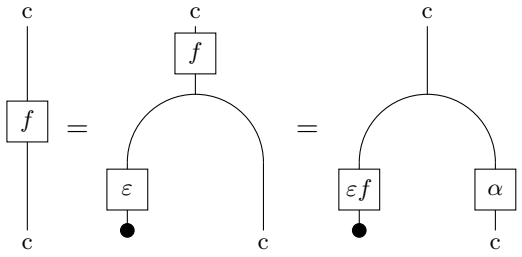
Supongamos que $f : \mathrm{c}_\alpha \to \mathrm{c}$ es un isomorfismo de bicomódulos. Como $f$ es un isomorfismo de comódulos a izquierda, sabemos que



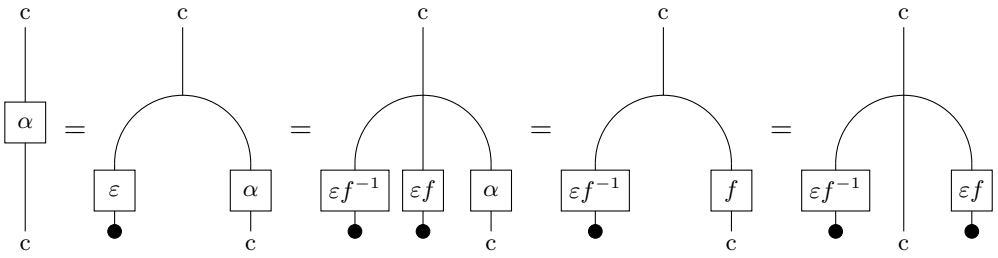

Aplicando $\varepsilon f^{-1}$ a los extremos coloreados de la igualdad anterior obtenemos que

$$\varepsilon = \varepsilon f * \varepsilon f^{-1},$$

y un cálculo análogo sobre $f^{-1}$ prueba que $\varepsilon = \varepsilon f^{-1} * \varepsilon f$, por lo que $\varepsilon f \in \mathrm{c}^*$ es inversible para el producto de convolución. Vale la pena remarcar que al escribir $f^{-1}$ estamos haciendo referencia a la inversa de $f$ en tanto función, y no usamos ninguna convención notacional para referirnos a la inversa de una función respecto al producto de convolución. Ahora bien, usando el hecho de que $f$ es un isomorfismo de comódulos a derecha vemos que

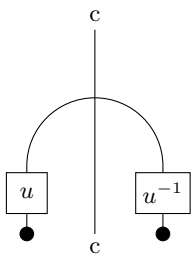



Así, tenemos que



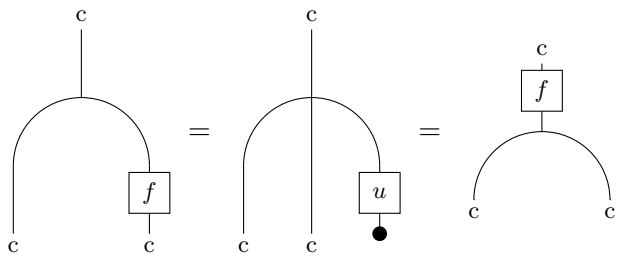

mostrando que $\alpha$ es interior. Hemos usado que $f$ es morfismo a izquierda para la última igualdad y que es morfismo a derecha para la penúltima.

Recíprocamente, si $\alpha$ es interior, por definición coincide con

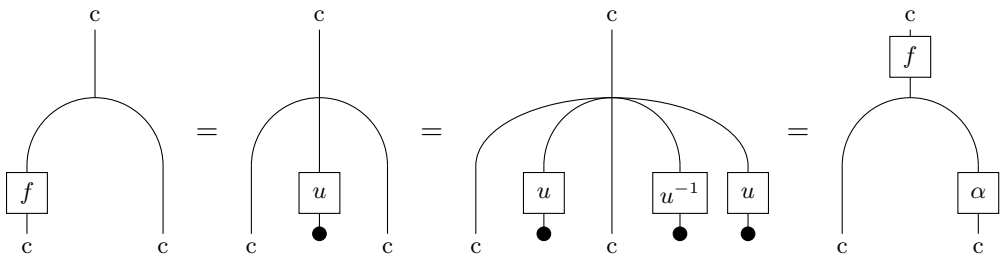



para algún $u : \mathrm{c} \to \Bbbk$ inversible para el producto de convolución. Si definimos a $f : \mathrm{c} \to \mathrm{c}_\alpha$ como $(\mathrm{id} \otimes u)\Delta$, es fácil ver que su inversa como función es $(u^{-1} \otimes \mathrm{id})\Delta$. Veamos que $f$

es un morfismo de bicomódulos. La igualdad de los diagramas




prueba que es un morfismo a izquierda y la de los diagramas




en la que usamos en el tercer paso que $u$ y $u^{-1}$ son inversos para el producto de convolución, prueba lo mismo a derecha. □

Gracias a esta proposición, obtenemos una sucesión exacta de grupos

$$1 \longrightarrow \mathrm{Inn}(\mathrm{c}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{c}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathrm{c}) \longrightarrow 1$$

análoga a la presentada en [TZ96, Theorem 2.7]. Como veremos a continuación, el subgrupo de automorfismos interiores de c es sencillo en el caso conexo:

**Proposición 3.12.** *Si* c *es una coálgebra conexa,* Inn(c) *es trivial.*

*Demostración.* Como la especie $\Bbbk$ es tal que $\Bbbk(I) = 0$ para todo conjunto $I$ no vacío y $\Bbbk(\emptyset) = \Bbbk$, tenemos que $\mathrm{c}^*$ es isomorfo a $\Bbbk$ como espacio vectorial. Concretamente, dado un elemento $\lambda \in \Bbbk$ tenemos un elemento $\varphi_\lambda \in \mathrm{c}^*$ tal que la componente

$$\varphi_\lambda(\emptyset) : \mathrm{c}(\emptyset) \to \Bbbk(\emptyset)$$

hace conmutar al cuadrado

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{c}(\emptyset) & \xrightarrow{\varphi_\lambda(\emptyset)} & \Bbbk(\emptyset) \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} \\ \Bbbk & \xrightarrow{\mu_\lambda} & \Bbbk \end{array}$$

donde $\mu_\lambda$ es la multiplicación por $\lambda$. Es fácil ver que $\varphi_\lambda$ es inversible para el producto de convolución si y sólo si $\lambda \neq 0$, y que en ese caso su inversa es $\varphi_{\lambda^{-1}}$. Por lo tanto, todo automorfismo interior de c es de la forma

$$\alpha = (\varphi_\lambda \otimes \mathrm{id} \otimes \varphi_{\lambda^{-1}}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$$

Notamos que $\varphi_\lambda \otimes \mathrm{id} \otimes \varphi_{\lambda^{-1}}$ se anula sobre todas las componentes de $(\mathrm{c} \otimes \mathrm{c} \otimes \mathrm{c})(I)$ salvo en $\mathrm{c}(\emptyset) \otimes \mathrm{c}(I) \otimes \mathrm{c}(\emptyset)$, en donde actúa como la identidad una vez que identificamos a este espacio con $\mathrm{c}(I)$ mediante la aplicación de $\varepsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \varepsilon$. Esto prueba que el único automorfismo interior de c es la identidad, como queríamos. □

**Teorema 3.13.** *El grupo de Picard de una coálgebra conexa es isomorfo a su grupo de automorfismos.* □

## 3.4 Los grupos de Picard de la especie exponencial y de órdenes lineales

La especie exponencial e es una coálgebra conexa, por lo que en vista de los resultados de la sección anterior, para entender su grupo de Picard basta con caracterizar su grupo de automorfismos de coálgebra.

**Proposición 3.14.** *La aplicación*

$$\Theta : \Bbbk \to \mathrm{End}_{\mathrm{coalg}}(\mathrm{e})$$

*tal que para todo $\tau \in \Bbbk$ e $I \in \mathrm{Fin}^\times$ se tiene*

$$\begin{aligned} \Theta(\tau)(I) : \mathrm{e}(I) &\to \mathrm{e}(I) \\ \mathrm{e}_I &\mapsto \tau^{|I|}\mathrm{e}_I \end{aligned}$$

*es un isomorfismo de monoides, donde consideramos a $\Bbbk$ como monoide con su estructura multiplicativa y convenimos que $0^0 = 1$. En particular, esta aplicación se restringe a un isomorfismo de grupos*

$$\Theta : \Bbbk^\times \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{coalg}}(\mathrm{e})$$

*entre los correspondientes grupos de unidades.*

*Demostración.* Como $\mathrm{e}(I)$ es unidimensional cualquiera sea el conjunto $I \in \mathrm{Fin}^\times$, todo endomorfismo $\varphi$ de e está determinado por una sucesión de escalares $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, de modo que para cada $I \in \mathrm{Fin}^\times$

$$\begin{aligned} \varphi(I) : \mathrm{e}(I) &\to \mathrm{e}(I) \\ \mathrm{e}_I &\mapsto \tau_{|I|}\,\mathrm{e}_I. \end{aligned}$$

La preservación de la counidad implica que $\tau_0 = 1$ y la preservación de la comultiplicación que

$$\sum_{J\subseteq I} \tau_{|I|}\cdot\tau_{|J\setminus I|}\,(\mathrm{e}_J \otimes \mathrm{e}_{I\setminus J}) = (\varphi\otimes\varphi)(I)(\Delta(\mathrm{e}_I)) = \Delta(\varphi(I)(\mathrm{e}_I)) = \Delta(\tau_{|I|}\mathrm{e}_I)$$

$$= \tau_{|I|}\left(\sum_{J\subseteq I} \mathrm{e}_J \otimes \mathrm{e}_{I\setminus J}\right),$$

por lo que

$$\tau_{|I|} = \tau_{|J|} \cdot \tau_{|I\setminus J|}$$

para todo conjunto $I \in \mathrm{Fin}^\times$ y subconjunto $J \subseteq I$. Un argumento inductivo prueba entonces que

$$\tau_n = \tau_1^n,$$

y es fácil ver que cualquier elección de $\tau_1 \in \Bbbk$ da lugar a un endomorfismo diferente, lo que establece lo que queríamos probar. □

Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es la siguiente descripción del grupo de Picard de la especie exponencial:

**Corolario 3.15.** *La aplicación*

$$\begin{aligned} \Bbbk^\times &\to \mathrm{Pic}(\mathrm{e}) \\ \lambda &\mapsto [{}_{\Theta(\lambda)}\mathrm{e}] \end{aligned}$$

*es un isomorfismo de grupos, donde* ${}_{\Theta(\lambda)}\mathrm{e}$ *es la forma torcida de* e *que induce el automorfismo* $\Theta(\lambda)$.

La descripción del grupo de Picard en el caso de la especie exponencial es particularmente sencillo. Veremos ahora un caso en donde es bastante más complicado.

La especie L de órdenes lineales tiene una estructura de coálgebra descripta en [Tam17, III.5]. Como es una coálgebra conexa, una vez más gracias al Teorema 3.13 basta con disponer de una caracterización de su grupo de automorfismos de coálgebra para entender a su grupo de Picard. Como veremos, dicha caracterización estará dada en términos de un álgebra asociativa (sobre espacios vectoriales, no en la categoría de especies) conocida como el **álgebra de Malvenuto-Reutenauer** $\mathcal{S}\mathrm{Sym}$. A continuación presentamos su definición y referimos al lector a [MR95] y [AS05] para una discusión en detalle de sus propiedades.

El álgebra $\mathcal{S}\mathrm{Sym}$ es un $\Bbbk$-espacio vectorial graduado cuya componente homogénea de grado $n$ tiene a los elementos del grupo simétrico $\mathbb{S}_n$ como base. Si $\sigma \in \mathbb{S}_p$ y $\tau \in \mathbb{S}_q$, llamamos $\sigma \times \tau \in \mathbb{S}_{p+q}$ a la permutación tal que

$$(\sigma \times \tau)(k) = \begin{cases} \sigma(k), & \text{si } 1 \leq k \leq p; \\ p + \tau(k-p), & \text{si } p+1 \leq k \leq p+q. \end{cases}$$

Definimos, para números naturales $p, q$, el conjunto

$$S^{(p,q)} = \{\omega \in \mathbb{S}_{p+q} : \omega(1) < \cdots < \omega(p) \text{ y } \omega(p+1) < \cdots < \omega(p+q)\}.$$

El producto del álgebra $\mathcal{S}\mathrm{Sym}$ está dado sobre elementos básicos $\sigma \in \mathbb{S}_p$ y $\tau \in \mathbb{S}_q$ por la fórmula

$$\sigma \cdot \tau = \sum_{\omega \in S^{(p,q)}} (\sigma \times \tau)\omega^{-1}. \tag{3.3}$$

Podemos dar una descripción más concreta de esta fórmula si escribimos a una permutación $\sigma \in \mathbb{S}_p$ como la sucesión finita de valores $(\sigma(1), \ldots, \sigma(p))$ que toma. De este modo, si $\tau \in \mathbb{S}_q$ y llamamos $\tau'$ a la sucesión $(p+\tau(1), \ldots, p+\tau(q))$, para describir el producto $\sigma \cdot \tau$ basta con sumar todas las formas de entrelazar ordenadamente $\sigma$ y $\tau'$ del modo ilustrado en el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} 21 \cdot 312 = {} & 21534 + 25134 + 25314 + 25341 \\ & + 52134 + 52314 + 52341 \\ & + 53214 + 53241 \\ & + 53421. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Retomemos ahora el problema de clasificar los automorfismos de coálgebra de la especie L. Si $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es un conjunto finito, escribiremos un orden lineal $<$ sobre $X$ como la palabra $x_{i_1} \ldots x_{i_n}$ de modo que $x_{i_1} < \cdots < x_{i_n}$. Sea entonces $f$ un endomorfismo de coálgebra de L. Como $\mathrm{L}(\llbracket n \rrbracket)$ es un $\mathbb{S}_n$-módulo libre generado por el orden lineal usual $12 \ldots n$, gracias a la equivalencia de categorías

$$\mathrm{Sp} \cong \prod_n \mathrm{mod}_{\mathbb{S}_n}$$

presentada en (2.1) basta con describir para cada $n$ el valor de $f$ sobre el orden $\beta_n := 12 \ldots n$ para caracterizar $f$ completamente. Se tiene entonces que

$$f(\beta_n) = \sum_\sigma \alpha_\sigma \sigma \in \mathrm{L}(\llbracket n \rrbracket),$$

donde la suma está indexada por todos los órdenes lineales $\sigma$ sobre el conjunto $\llbracket n \rrbracket$ y los $\alpha_\sigma$ son escalares en $\Bbbk$. El hecho de que $f$ es un morfismo de coálgebras impone ciertas condiciones sobre estos escalares que describimos a continuación.

Recordemos que si $X$ es un conjunto finito ordenado, llamamos $\mathbf{std} : X \to \llbracket |X| \rrbracket$ a la única biyección monótona entre esos conjuntos. Dado un orden total $\sigma \in \mathrm{L}(X)$, su **estandardización** es el orden $\mathbf{std}(\sigma) \in \mathrm{L}(\llbracket n \rrbracket)$ obtenido transportando la estructura a través de la biyección $\mathbf{std}$. También tiene sentido considerar la biyección inversa, a la cual notaremos $\mathbf{std}_X^{-1}$ para enfatizar su dependencia en $X$. Por ejemplo, si $X = \{3, 5, 9\}$ entonces $\mathbf{std}_X^{-1}(231) = 593$.

Como $f$ es un morfismo de coálgebras debe ser

$$\begin{aligned} \sum_{S,T} f(\beta_n|_S) \otimes f(\beta_n|_T) &= (f \otimes f)\Delta(\beta_n) = \Delta f(\beta_n) \\ &= \Delta\left(\sum_\sigma \alpha_\sigma \sigma\right) = \sum_{\sigma,S,T} \alpha_\sigma \, \sigma|_S \otimes \sigma|_T, \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde los términos de la primera suma están indexados sobre todas las particiones en conjuntos disjuntos $S \cup T = \llbracket n \rrbracket$ y los de la última sobre este mismo conjunto y el conjunto de órdenes lineales $\sigma$ sobre $\llbracket n \rrbracket$.

La funtorialidad de $f$ implica entonces que el valor de $f(\beta_n|_S)$ con $S$ un subconjunto de $[\![n]\!]$ es

$$f(\beta_n|_S) = \sum_{\sigma} \alpha_\sigma \, \mathbf{std}_S^{-1}(\sigma),$$

dado que $\beta_n|_S = \mathbf{std}_S^{-1}(\beta_n)$. Por lo tanto, de (3.5) concluimos que

$$\sum_{\tau,\omega,S,T} \alpha_\tau \alpha_\omega \, \mathbf{std}_S^{-1}(\tau) \otimes \mathbf{std}_T^{-1}(\omega) = \sum_{\sigma,S,T} \alpha_\sigma \, \sigma|_S \otimes \sigma|_T,$$

donde ahora la suma de la izquierda está indexada por todas las particiones en conjuntos disjuntos $S \cup T = [\![n]\!]$ y órdenes totales $\tau$ y $\omega$ sobre los conjuntos $S$ y $T$ respectivamente. Notemos que todos los elementos básicos que aparecen del lado izquierdo de la ecuación son diferentes entre sí, mientras que en la suma derecha hay elementos básicos repetidos, pues existen órdenes lineales sobre $[\![n]\!]$ distintos entre sí cuyas restricciones a $S$ y $T$ coinciden. En efecto, si elegimos órdenes totales $\tau$ y $\omega$ sobre $S$ y $T$, todos los entrelazamientos ordenados posibles entre $\tau$ y $\omega$ de la forma ejemplificada en (3.4) dan lugar a diferentes órdenes cuyas restricciones sobre $S$ y $T$ coinciden. De este modo, vemos que los escalares $\alpha_\sigma$ deben verificar las identidades

$$\alpha_\sigma \cdot \alpha_\tau = \sum_{\omega \in S^{(p,q)}} \alpha_{(\sigma \times \tau)\omega^{-1}}, \tag{3.6}$$

que se corresponden con las ecuaciones (3.3) que describen el producto del álgebra de Malvenuto-Reutenauer. Notamos que en la igualdad anterior estamos identificando una permutación $\sigma \in \mathbb{S}_n$ con el orden lineal $<$ determinado por $\sigma(1) < \cdots < \sigma(n)$.

Es fácil verificar que la condición de counitariedad del morfismo $f$ impone además la identidad $\alpha_\emptyset = 1$, donde $\emptyset$ es el único orden sobre el conjunto vacío, y que cualquier elección de escalares $(\alpha_\sigma)$ que satisfaga esta última condición y (3.6) da lugar a un endomorfismo de coálgebras de L. Una forma de decir esto es lo siguiente: a partir del morfismo de coálgebras $f : \mathrm{L} \to \mathrm{L}$ construimos una aplicación lineal $\chi_f : \mathcal{S}\mathrm{Sym} \to \Bbbk$ que sobre cada permutación $\sigma$ de $[\![n]\!]$ toma el valor $\alpha_\sigma$. Las observaciones anteriores prueban que $\chi_f$ es de hecho un morfismo de álgebras y por lo tanto tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 3.16.** *La función*

$$\begin{aligned} \chi : \mathrm{End}_{\mathrm{coalg}}(\mathrm{L}) &\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(\mathcal{S}\mathrm{Sym}, \Bbbk) \\ f &\mapsto \chi_f \end{aligned}$$

*es una biyección.* □

El valor de la proposición anterior recae en que el codominio de $\chi$ es un objeto mucho más concreto y que podemos apoyarnos en propiedades del álgebra $\mathcal{S}\mathrm{Sym}$ para describirlo, como haremos a continuación.

Una permutación $\sigma \in \mathbb{S}_n$ se dice **conexa** si no preserva ningún subgrupo de Young propio de $\mathbb{S}_n$. Equivalentemente, una permutación $\sigma$ es conexa si el único intervalo de la forma $[\![k]\!]$ que preserva es $[\![n]\!]$. Llamamos **Con** al conjunto de todas las permutaciones conexas. En el trabajo [PR95] Poirier y Reutenauer estudiaron la estructura de álgebra $\mathcal{S}\mathrm{Sym}$ y lograron establecer el siguiente resultado:

**Teorema 3.17** ([PR95, Théorème 2.1])**.** *El álgebra de Malvenuto-Reutenauer* $\mathcal{S}\mathrm{Sym}$ *está libremente generada por el conjunto* **Con** *de permutaciones conexas.* □

De este resultado y la Proposición 3.16 se sigue el siguiente corolario:

**Corolario 3.18.** *La función*

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_{\mathrm{coalg}}(\mathrm{L}) &\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{set}}(\mathbf{Con}, \Bbbk) \\ f &\mapsto \chi_f|_{\mathbf{Con}} \end{aligned}$$

*es una biyección.* □

Este resultado da una caracterización completa y minimal del conjunto de los endomorfismos de coálgebra de L, y, si uno logra identificar los elementos inversibles del codominio, del grupo de Picard de L gracias al Teorema 3.13. Vale la pena remarcar que hay una cantidad infinita de ellos, dado que hay infinitas permutaciones conexas. De todas maneras, sigue siendo desafiante poder exhibir ejemplos de endomorfismos de manera explícita. A continuación presentaremos algunos de ellos.

Nuestra estrategia para producir ejemplos consistirá en imponer condiciones adicionales sobre el conjunto de ecuaciones polinomiales (3.6). Observamos que en estas ecuaciones el lado izquierdo es siempre un producto de dos escalares y el lado derecho una suma de muchos escalares indexados por permutaciones de la misma longitud. Podemos preguntarnos si hay, por ejemplo, endomorfismos $f : \mathrm{L} \to \mathrm{L}$ tales que el correspondiente caracter $\chi_f : \mathcal{S}\mathrm{Sym} \to \Bbbk$ tome en cada permutación $\sigma$ un valor $\alpha_n$ que dependa exclusivamente de la longitud $n = |\sigma|$. Si imponemos esta condición en (3.6) debe ser

$$\alpha_n \cdot \alpha_m = \binom{n+m}{n} \alpha_{n+m}$$

para todos $n$ y $m$ naturales. Es fácil ver que las únicas soluciones a dicho juego de ecuaciones son las de la forma

$$\alpha_n = \frac{\lambda^n}{n!}$$

para algún $\lambda \in \Bbbk$. De esta manera vemos que para cada $\lambda \in \Bbbk$ hay un endomorfismo $\varphi_\lambda : \mathrm{L} \to \mathrm{L}$ que satisface la condición descripta arriba, que tiene

$$\varphi_\lambda(12\ldots n) = \frac{\lambda^n}{n!} \sum_\sigma \sigma,$$

con la suma indexada sobre todos los órdenes lineales $\sigma$ en el conjunto $[\![n]\!]$. Este endomorfismo no es, en general, un automorfismo. Por ejemplo, si $n = 2$, es fácil verificar que la imagen de $\varphi_\lambda : \mathrm{L}([\![2]\!]) \to \mathrm{L}([\![2]\!])$ está contenida en el subespacio lineal generado por $12 + 21$ y en particular no es un epimorfismo.

En efecto, los endomorfismos $\varphi_\lambda$ son precisamente aquellos endomorfismos de L que se factorizan por e en el sentido que precisamos a continuación. Tenemos morfismos de coálgebra $\Theta : \mathrm{L} \to \mathrm{e}$ y $\Psi : \mathrm{e} \to \mathrm{L}$ tales que para todo conjunto finito $I$ es

$$\begin{aligned} \Theta(I) : \mathrm{L}(I) &\to \mathrm{e}(I) & \qquad \Psi(I) : \mathrm{e}(I) &\to \mathrm{L}(I) \\ \sigma &\mapsto \mathrm{e}_I & \mathrm{e}_I &\mapsto \sum_{\sigma \in \mathrm{L}(I)} \sigma/|I|!. \end{aligned}$$

La imagen de $\Psi$ es una subcoálgebra de L a la que llamaremos $\mathrm{L_e}$, y es fácil verificar que $\Theta\Psi = \mathrm{id_e}$ y que $(\Psi\Theta)|_{\mathrm{L_e}} = \mathrm{id}_{\mathrm{L_e}}$, por lo que $\mathrm{L_e}$ es una subcoálgebra de L isomorfa a e. La familia de endomorfismos $\{\varphi_\lambda : \lambda \in \Bbbk\}$ es precisamente $\Psi \operatorname{End}_{\mathrm{coalg}}(\mathrm{e})\Theta$. En otras palabras, resulta ser una copia del conjunto de endomorfismos de e realizada en L dentro de la subcoálgebra $\mathrm{L_e}$. Todos estos endomorfismos se anulan fuera de $\mathrm{L_e}$, lo que da otra prueba alternativa de que no son automorfismos.

Otra condición razonable sobre las ecuaciones (3.6) consiste en imponer que, para cada número natural $n$, los escalares $\alpha_\sigma$ con $|\sigma| = n$ se anulen para todas las permutaciones salvo exactamente una, a la que llamaremos $\sigma_n$. Notemos que en las ecuaciones (3.6) el lado derecho es una suma de escalares indexados por permutaciones de un cierto tamaño $k$, que o bien se anula o bien contiene a $\alpha_{\sigma_k}$ como sumando. Por otro lado, el lado izquierdo es o bien nulo o bien $\alpha_{\sigma_n}\alpha_{\sigma_m}$ para ciertos $n$ y $m$ con $n + m = k$. Por lo tanto, la familia de permutaciones $(\sigma_k)_k$ debe cumplir que para cada par de números naturales $n, m$ con $n + m = k$ exista un único par de permutaciones $(\tau, \eta) \in \mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_m$ tal que $\sigma_k$ sea un sumando del producto en $\mathcal{S}\mathrm{Sym}$ de $\tau \cdot \eta$ calculado como en (3.3), y que ese par sea precisamente $(\sigma_n, \sigma_m)$. Afirmamos que las únicas familias que cumplen esa propiedad son $(\mathrm{id}_{[\![k]\!]})_k$ y $(\theta_k)_k$, donde $\theta_k$ es la permutación $k(k-1)\ldots 1$, que es la que tiene el máximo número de inversiones posible.

Sea $(\sigma_k)_k$ una familia de permutaciones que cumple las condiciones mencionadas anteriormente y supongamos primero que $\sigma_2 = 12 = \mathrm{id}_{[\![2]\!]}$. Veremos que en este caso debe ser $\sigma_k = \mathrm{id}_{[\![k]\!]}$ para todo $k$. Esto es cierto siempre para $k = 1$ y nuestra suposición lo hace cierto para $k = 2$. Si inductivamente suponemos que esto es cierto para todo valor menor a cierto $k$, debe ser

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_k = 123\ldots k(k+1) + 213\ldots k(k+1) + 231\ldots k(k+1) \\ + \cdots + 234\ldots 1(k+1) + 234\ldots(k+1)1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sigma_k\sigma_1 = 123\ldots k(k+1) + 123\ldots(k+1)k + \cdots + 12(k+1)\ldots(k-1)k \\ + 1(k+1)2\ldots(k-1)k + (k+1)12\ldots(k-1)k. \end{aligned}$$

Como los lados derechos de ambas ecuaciones deben ser no nulos y contener un único sumando no nulo, ese sumando debe ser $\mathrm{id}_{k+1}$, que es el único que pertenece a ambos, lo cual prueba lo que queríamos. Un argumento similar prueba que si $\sigma_2 = 21 = \theta_2$ entonces debe ser $\sigma_k = \theta_k$ para todo $k$.

Fijada la familia $(\sigma_k)_k$, es fácil verificar que $\alpha_{\sigma_k} = \alpha_{\sigma_1}^k$ y que efectivamente una elección de escalares de estas características satisface las ecuaciones (3.6). De este modo obtenemos dos familias $(\psi_\lambda)$ y $(\psi'_\lambda)$ de automorfismos de L, cada una indexada por un escalar $\lambda \in \Bbbk^\times$, en donde para todo $n$ es

$$\psi_\lambda(12\dots n) = \lambda^n \cdot 12\dots n$$

y

$$\psi'_\lambda(12\dots n) = \lambda^n \cdot n(n-1)\dots 1.$$

Vale la pena remarcar que este argumento que acabamos de presentar usa fuertemente la anulación de todos los escalares $\alpha_\sigma$ a excepción de uno por cada longitud de las palabras $\sigma$. En particular, no es posible adaptarlo siquiera al caso en donde relajamos esta hipótesis a la presencia de dos escalares no nulos por cada longitud.

A pesar de que sólo exhibimos algunas familias de automorfismos no triviales, existen muchos de ellos, como evidencia el argumento que daremos a continuación. Gracias al Corolario 3.18, sabemos que un endomorfismo de coálgebra de L está unívocamente determinado por una colección de escalares $\alpha = (\alpha_\sigma)_{\sigma\in\mathbf{Con}}$. Si llamamos $\varphi_\alpha$ al endomorfismo determinado por tal colección, para cada natural $n$ podemos escribir $\varphi_\alpha^n$ para denotar al morfismo

$$\varphi_\alpha^n = \varphi_\alpha(\llbracket n\rrbracket) : \mathrm{L}(\llbracket n\rrbracket) \to \mathrm{L}(\llbracket n\rrbracket).$$

El endomorfismo $\varphi_\alpha$ es un automorfismo si y sólo si todos los endomorfismos $\varphi_\alpha^n$ lo son, y tal condición es equivalente a la no anulación de $p_n = \det(\varphi_\alpha^n)$ para cada $n$. Ahora bien, es fácil ver que $p_n = q_n(\alpha_\sigma)$, donde $q_n$ es un elemento de $\Bbbk[x_\sigma]_{\sigma\in\mathbf{Con}}$, el anillo de polinomios en variables indexadas por las permutaciones conexas. Como existen automorfismos de L (como la identidad o el automorfismo $\psi$ explicitado anteriormente), ninguno de los polinomios $q_n$ es idénticamente nulo, y por lo tanto cualquier elección de escalares $(\alpha_\sigma)$ que pertenezca a la intersección de los complementos de los lugares de ceros de cada uno de los polinomios $q_n$ da lugar a un automorfismo. Ahora bien, si $\Bbbk = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, el espacio $\Bbbk^{\mathbf{Con}}$ dotado de la topología producto es un espacio de Baire ([Mun75, Chapter 8, §48, Exercise 12, p. 300]), y como para cada $n$ el complemento del lugar de ceros de $q_n$ es un abierto denso allí, existe una cantidad no numerable de elecciones de escalares $(\alpha_\sigma)$ que no anulan a ningún $q_n$, y en consecuencia dan lugar a una cantidad no numerable de automorfismos de L.

# Capítulo 4

# Álgebras nilpotentes en 2 pasos

Decimos que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es **nilpotente en $k$ pasos** si el $k$-ésimo paso $\mathfrak{g}_k$ de su serie central descendente se anula, donde

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g}_n = [\mathfrak{g}_{n-1}, \mathfrak{g}_{n-1}].$$

En este capítulo nos interesan las álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ que son nilpotentes en 2 pasos, es decir, tales que $[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = 0$. Observamos que dar una estructura de este tipo sobre un espacio vectorial $V$ consiste en dar una operación lineal $\mu : V \otimes V \to V$ antisimétrica y tal que

$$\mu(\mu(x, y), z) = \mu(x, \mu(y, z)) = 0 \tag{4.1}$$

para toda elección de $x, y, z \in V$, ya que la condición de Jacobi se satisface automáticamente una vez que se cumple esta identidad.

En [BLS05, Theorem 4.b], Belitskii, Lipyanski y Sergeichuk probaron que el problema de clasificación de estructuras de álgebras de Lie nilpotentes en 2 pasos es salvaje. Sin embargo, un acercamiento al entendimiento de la forma en que pueden comportarse estas estructuras puede darse mediante el estudio de su teoría de deformaciones, de manera análoga al trabajo desarrollado por Gerstenhaber para álgebras asociativas en [Ger64] y por Nijenhuis y Richardson para álgebras de Lie en [NR67]. El principio general de este enfoque es que las deformaciones de un tipo dado de estructura algebraica están parametrizadas por el segundo (o tercer) módulo de cierta teoría de cohomología asociada a la estructura siendo estudiada. En esa dirección, Brega, Cagliero y Chaves-Ochoa proponen en [BCCO17] una definición de una teoría de cohomología para álgebras de Lie nilpotentes en $k$ pasos motivada por una construcción geométrica inspirada en el Teorema de Nash–Moser. En grado 2, esa cohomología resuelve precisamente el problema de describir las deformaciones infinitesimales de una estructura dada, pero la teoría completa está construida de manera ad-hoc. Esto hace que, por ejemplo, no podamos usar las herramientas usuales del álgebra homológica para calcular.

Nuestro objetivo en este capítulo es estudiar una construcción diferente para la cohomología de álgebras de Lie nilpotentes en 2 pasos que sea, en cierto sentido, canónica

y que evite este problema. Las álgebras de Lie nilpotentes en 2 pasos son álgebras sobre una operad cuadrática que, más aún, es de Koszul, y entonces tiene asociada una teoría de cohomología natural construida originalmente por Ginzburg y Kapranov en [GK94] y descripta más convenientemente por Loday y Vallette en [LV12, §12.2]. Esta teoría da una construcción general que a partir de una operad de Koszul $\mathcal{O}$ produce su **complejo cotangente** o **complejo de deformación** asociado a las estructuras de $\mathcal{O}$-álgebras, y que se especializa en las operads asociativas y de Lie a los casos clásicos de Gerstenhaber y Nijenhuis y Richardson, respectivamente. En este capítulo llevaremos a cabo una descripción explícita del complejo de Koszul que determina la homología a coeficientes triviales asociada a la operad de álgebras de Lie nilpotentes en 2 pasos. Esto consiste en un primer acercamiento a la descripción del complejo cotangente en nuestro contexto.

Sean $\mathcal{O}$ una operad cuadrática, $A$ un álgebra sobre $\mathcal{O}$ y $V$ un $\mathbb{S}_n$-módulo y escribamos $\mathcal{O}^!$ para el dual de Koszul de $\mathcal{O}$ y $V^\vee$ para la representación dual de $V$ torcida por el signo. El complejo de Koszul $C_\bullet^{\mathcal{O}}(A)$ está dado, de acuerdo a lo expuesto por Gelfand y Kapranov en [GK94, §4.2.1], en cada grado por

$$C_n^{\mathcal{O}}(A) = A^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{S}_n} \mathcal{O}^!(n)^\vee. \tag{4.2}$$

Gran parte de la complejidad detrás de la descripción de estos espacios yace en la determinación de la estructura de $\mathbb{S}_n$-módulo de $\mathcal{O}^!(n)^\vee$. En particular, esto es así en el caso de la operad de álgebras de Lie nilpotentes en 2 pasos, que es la que nos interesa. Es por eso que comenzaremos estudiando este objeto en el caso en que $\mathcal{O}$ es la operad de **magmas** lineales nilpotentes en 2 pasos: un tal magma es un espacio vectorial $V$ dotado de una operación lineal $\mu : V \otimes V \to V$ en el que vale la identidad (4.1) pero en el que $\mu$ no necesariamente es antisimétrica. La descripción del complejo de Koszul para esta segunda operad es un poco más simple y nos servirá como paso intermedio de la descripción del caso de álgebras de Lie.

En todo lo relativo a la teoría de operads, y más específicamente a la teoría de operads de Koszul, usaremos como referencia al texto [LV12] de Loday y Vallette. En particular, uno de los resultados centrales probados allí y que usaremos fuertemente en lo que sigue es que toda operad cuadrática presentada por relaciones monomiales es de Koszul ([LV12, Theorem 4.3.4]). Otra referencia interesante para consultar sobre aspectos computacionales de la teoría es el texto [BD16] de Bremner y Dotsenko.

## 4.1 Álgebras y magmas nilpotentes en 2 pasos

Recordamos que un magma nilpotente en 2 pasos es un espacio vectorial $V$ junto con una operación lineal $\mu : V \otimes V \to V$ tal que

$$\mu(\mu(x, y), z) = \mu(x, \mu(y, z)) = 0, \tag{4.3}$$

y un álgebra de Lie nilpotente en 2 pasos es un magma nilpotente en 2 pasos en el que la operación $\mu$ es además antisimétrica. Notaremos $\mathcal{O}_{\mathbf{M}}$ y $\mathcal{O}_{\mathbf{L}}$ a las operads de magmas y álgebras de Lie nilpotentes en 2 pasos, respectivamente.

Estas operads pueden ser descriptas por generadores y relaciones de la siguiente manera:

$$\mathcal{O}_{\mathbf{M}} = \mathcal{F}(\mathrm{reg})/\mathcal{F}(\mathrm{reg})_{\geq 2}, \qquad \mathcal{O}_{\mathbf{L}} = \mathcal{F}(\mathrm{sgn})/\mathcal{F}(\mathrm{sgn})_{\geq 2},$$

donde reg y sgn denotan a las representaciones regular y signo de $\mathbb{S}_2$, respectivamente, y donde $\mathcal{F}(M)$ denota a la operad libre en $M$.

Como en ambos casos el ideal de relaciones consiste de toda la operad desde el cardinal 2 en adelante, dado que cualquier composición de las operaciones que generan a la operad es nula, los duales de Koszul de $\mathcal{O}_{\mathbf{M}}$ y $\mathcal{O}_{\mathbf{L}}$ son particularmente sencillos, pues son libres. En efecto, recordando que $V^\vee$ denota a la representación dual de $V$ torcida por el signo, tenemos que

$$\mathcal{O}^!_{\mathbf{M}} = \mathcal{F}(\mathrm{reg}^\vee) = \mathcal{F}(\mathrm{reg}), \qquad \mathcal{O}^!_{\mathbf{L}} = \mathcal{F}(\mathrm{sgn}^\vee) = \mathcal{F}(\mathrm{triv}),$$

donde triv denota la representación trivial de $\mathbb{S}_2$.

Como suele ser usual cuando uno trabaja con operads, se puede dar una base $\Bbbk$-lineal de $\mathcal{F}(\mathrm{reg})(n)$ indexada por árboles binarios planares de $n$ hojas decoradas con los elementos del conjunto $[\![n]\!]$. Aquí la acción de $\mathbb{S}_n$ está dada por la permutación de las decoraciones de las hojas y se puede probar que el $\mathbb{S}_n$-submódulo generado por un elemento básico $x$ es libre y está generado como espacio vectorial por el conjunto de árboles que, cuando olvidamos sus decoraciones, son isomorfos a $x$. De este modo, si $T_n$ denota al conjunto de clases de isomorfismo de árboles binarios con $n$ hojas sin decorar, se tiene que

$$\mathcal{O}^!_{\mathbf{M}}(n)^\vee \cong \bigoplus_{T_n} \Bbbk\mathbb{S}_n$$

como $\mathbb{S}_n$-módulos, por lo que para cualquier magma $A$ el complejo de Koszul descripto en (4.2) es

$$C_n^{\mathcal{O}_{\mathrm{M}}}(A) \cong \bigoplus_{T_n} A^{\otimes n}.$$

Como vemos, la descripción del complejo en tanto espacio vectorial graduado es relativamente sencilla: daremos una construcción en detalle, incluyendo una descripción de su diferencial, en la Sección 4.3, en la que notaremos $T_\bullet(A)$ al complejo $C_\bullet^{\mathcal{O}_{\mathrm{M}}}(A)$ para no sobrecargar la notación.

En contraste con esto, presentar una base $\Bbbk$-lineal para el dual de la operad de álgebras de Lie nilpotentes en 2 pasos $\mathcal{O}^!_{\mathbf{L}}(n)$ no es tan sencillo. Si bien podemos, como antes, pensar al espacio $\mathcal{O}^!_{\mathbf{L}}(n)$ como generado por el conjunto de árboles binarios con hojas decoradas por los elementos de $[\![n]\!]$, hay identificaciones entre algunos de estos elementos, ya que el generador de esta operad es una operación binaria *simétrica*. Describiremos al complejo $C_\bullet^{\mathcal{O}_{\mathrm{L}}}(A)$ en la Sección 4.10 y lo escribiremos por simplicidad como $C_\bullet(A)$.

## 4.2 Árboles

En la próxima sección daremos una descripción concreta del complejo $T_\bullet(A)$ que calcula la homología a coeficientes triviales de un magma nilpotente en 2 pasos $A$. Requeriremos algunos preliminares sobre árboles, que serán los objetos combinatorios que indexen las bases de este complejo y del correspondiente a las álgebras de Lie nilpotentes en 2 pasos, que describiremos más adelante.

Fijemos dos símbolos $\lambda$ y $\rho$. Un **árbol** $\tau$ es un subconjunto no vacío del monoide libre $M = \langle \lambda, \rho \rangle$ que:

- es **cerrado por sufijos**: si $w_1, w_2 \in M$ son tales que $w_1 w_2 \in \tau$ entonces $w_2 \in \tau$, y
- es **pleno** (*full*, en inglés): si $w \in M$, entonces $\lambda w \in \tau$ si y sólo si $\rho w \in \tau$.

Llamamos **vértices** a los elementos de $\tau$. La palabra vacía $\varepsilon$, a la que llamamos **raíz**, pertenece a todo árbol. Los vértices maximales de $\tau$ se dicen **hojas** y los vértices que no son hojas se dicen **vértices internos**. La **aridad** $|\tau|$ de un árbol $\tau$ es su cantidad de hojas.

Si $w \in \tau$ es un vértice interno, los elementos $\lambda w$ y $\rho w$ son vértices del árbol, a los que llamamos los **hijos izquierdo y derecho** de $w$, respectivamente. En ese caso $w$ es el **padre** de $\lambda w$ y $\rho w$. Más generalmente, si $v = zw$ es un vértice de $\tau$, decimos que $v$ es un **descendiente** de $w$ y notamos $w \rightsquigarrow v$.

El **árbol trivial** $\tau_{\mathrm{tr}}$ es el árbol $\{\varepsilon\}$. Es el único árbol de aridad 1 y posee un único vértice, que es a la vez su raíz y su única hoja. El árbol $\mathbf{V} = \{\varepsilon, \lambda, \rho\}$ es el único árbol de aridad 2.

Si $v$ es un vértice de un árbol $\tau$, el **árbol inducido por** $v$ es el árbol

$$\tau / v = \{w \in M : wv \in \tau\}.$$

Por ejemplo, el subárbol inducido por una hoja es el árbol trivial. Si $\tau$ no es el árbol trivial, diremos que las **ramas izquierda y derecha de** $\tau$ son los árboles $\tau/\lambda$ y $\tau/\rho$ respectivamente.

Podemos representar gráficamente a un árbol $\tau$ dibujando a los vértices como puntos y uniendo vértices internos con sus hijos mediante aristas. El hijo izquierdo (derecho) de un vértice se dibujará arriba a la izquierda (derecha) de su padre. De este modo, la representación gráfica determina unívocamente al árbol y viceversa. La figura 4.1 muestra un ejemplo de árbol de aridad 5 en el que explicitamos cada vértice.

Notamos **Trees** al conjunto de todos los árboles. Hay una operación de **yuxtaposición**

$$\smile : \mathbf{Trees} \times \mathbf{Trees} \to \mathbf{Trees} \tag{4.4}$$

dada por

$$\tau \smile \tau' = \{\varepsilon\} \cup \{w\lambda : w \in \tau\} \cup \{w'\rho : w' \in \tau'\}.$$

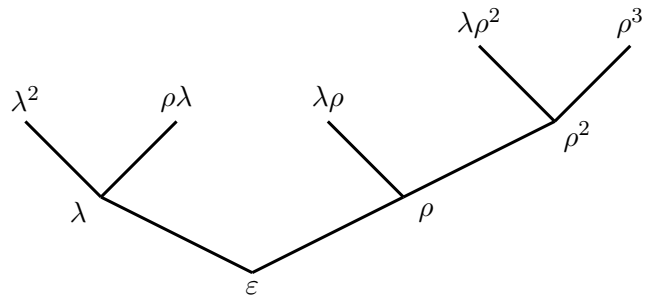



Figura 4.1: Un árbol de aridad 5.

Por ejemplo, la figura 4.1 representa al árbol $\mathbf{V} \smile (\tau_{\mathrm{tr}} \smile \mathbf{V})$.

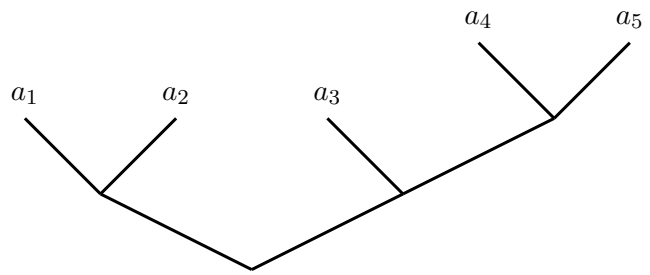
Si $A \in \mathbf{Vect}_{\Bbbk}$, definimos recursivamente la aplicación $\underline{A} : \mathbf{Trees} \to \mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ poniendo

$$\underline{A}(\tau) = \begin{cases} A & \text{si } \tau = \tau_{\mathrm{tr}}, \\ \underline{A}(\tau/\lambda) \otimes \underline{A}(\tau/\rho) & \text{si no.} \end{cases} \tag{4.5}$$

Para cada árbol $\tau$ tenemos un isomorfismo canónico $\tau : A^{\otimes|\tau|} \to \underline{A}(\tau)$ determinado recursivamente por la fórmula

$$\tau(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{|\tau|}) \otimes \tau'(a_{|\tau|+1} \otimes \cdots \otimes a_{|\tau|+|\tau'|}) = (\tau \smile \tau')(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{|\tau|+|\tau'|})$$

para toda elección de árboles $\tau$ y $\tau'$ y vectores $a_i \in A$ y poniendo $\tau_{\mathrm{tr}} : A^{\otimes 1} \to \underline{A}(\tau_{\mathrm{tr}})$ como la identidad. En todo lo que sigue, dados elementos $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j \in A$ escribiremos $a_{i,j}$ para referirnos al tensor elemental $a_i \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_j$, con el fin de aligerar la notación. Ocasionalmente nos referiremos al tensor elemental $\tau(a_{1,n})$ dibujando el árbol $\tau$ y decorando sus hojas con los elementos $a_i$ de forma creciente en $i$. Por ejemplo, si $\tau$ es el árbol de la figura 4.1, el siguiente es el elemento $\tau(a_{1,5}) \in \underline{A}(\tau)$:




## 4.3 El complejo $T_\bullet(A)$

Si tenemos una operación $\mu : A \otimes A \to A$ que da una estructura de magma a $A$, llamamos

$$T_n(A) = \bigoplus_{|\tau|=n} \underline{A}(\tau).$$

En particular, $T_0(A) = 0$, $T_1(A) = \underline{A}(\tau_{\mathrm{tr}}) = A$ y $T_2(A) = \underline{A}(\mathbf{V}) = A \otimes A$. Definimos inductivamente transformaciones lineales $d_n : T_n(A) \to T_{n-1}(A)$ poniendo $d_1 = 0$, $d_2 = \mu$ y llamando $d_n$, para cada $n \geq 3$, al único morfismo tal que

$$d_n(x \otimes y) = d_{|\tau/\lambda|}(x) \otimes y + (-1)^{|\tau/\lambda|} x \otimes d_{|\tau/\rho|}(y) \tag{4.6}$$

para todo $x \in \underline{A}(\tau/\lambda)$, $y \in \underline{A}(\tau/\rho)$ y todo árbol $\tau$ de aridad $n$. Notemos que esto es una versión de la regla de Leibniz.

Sea $\mathbf{Mag}_2$ la categoría de magmas 2-nilpotentes; es decir, magmas $(A, \mu)$ tales que

$$\mu \circ (\mu \otimes \mathrm{id}) = \mu \circ (\mathrm{id} \otimes \mu) = 0. \tag{4.7}$$

Nuestro primer resultado es que $T_\bullet$ es efectivamente un complejo:

**Proposición 4.1.** *Si $A$ es un magma nilpotente en 2 pasos, entonces $d_{n-1} \circ d_n = 0$. Más aún, tenemos un funtor $T_\bullet : \mathbf{Mag}_2 \to \mathbf{Ch}_{\Bbbk}$.*

*Demostración.* Que $d_{n-1} \circ d_n = 0$ es evidente cuando $n \leq 2$, y cuando $n = 3$ es precisamente la condición de nilpotencia en 2 pasos (4.7). Sean ahora $n \geq 4$, $\tau$ un árbol de aridad $n$, $x \in \underline{A}(\tau/\lambda)$ e $y \in \underline{A}(\tau/\rho)$. Aplicando dos veces la regla de Leibniz (4.6) tenemos que

$$\begin{aligned} d^2(x \otimes y) &= d(d(x) \otimes y) + (-1)^{|\tau/\lambda|} d(x \otimes d(y)) \\ &= d^2(x) \otimes y + (-1)^{|\tau/\lambda|-1} d(x) \otimes d(y) + (-1)^{|\tau/\lambda|} d(x) \otimes d(y) + x \otimes d^2(y) \\ &= d^2(x) \otimes y + x \otimes d^2(y), \end{aligned}$$

por lo que la primera mitad del enunciado se deduce por inducción.

Para probar la naturalidad de $T_\bullet$ observamos que si $f : A \to B$ es un morfismo de magmas entonces, por definición, debe conmutar con $d_2$ y luego usando la regla de Leibniz (4.6) podemos ver inductivamente que $f$ conmuta con $d_n$ para todo $n$. □

La definición recursiva de la diferencial no es la más práctica para llevar a cabo cálculos explícitos, por lo que presentaremos a continuación una fórmula directa. Para ellos precisamos algunas definiciones más.

Recordamos que $M$ denota al monoide libre $\langle \lambda, \rho \rangle$. Consideramos sobre él el **orden lexicográfico inverso** $\preceq$, que es el orden total definido del siguiente modo: dados elementos $w_1, w_2 \in M$ diremos que $w_1 \preceq w_2$ si $w_2 = z w_1$ para algún $z \in M$ o bien si

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 s, \\ w_2 &= v_2 s, \end{aligned}$$

con $s$ el sufijo común de $w_1$ y $w_2$ más largo, y $v_1$ una palabra que comienza con $\lambda$. Escribimos $\prec$ para el orden estricto asociado a $\preceq$.

Decimos que un vértice $v$ de un árbol $\tau$ es **superficial** si $\lambda v$ y $\rho v$ son hojas de $\tau$. En ese caso, no existe ninguna hoja $w$ tal que $\lambda v \prec w \prec \rho v$. Llamamos $\mathbf{supf}(\tau)$ al conjunto de vértices superficiales de $\tau$ y notamos $\mathbf{pos}_\tau(v) \in \mathbb{N}_0$ a la **posición de** $v$ **en** $\tau$ , que es la cantidad de hojas $w$ tales que $w \prec \lambda v$. Observamos que si $\tau$ es un árbol con aridad $|\tau| > 2$ entonces

$$\mathbf{supf}(\tau) = \big\{w\lambda : w \in \mathbf{supf}(\tau/\lambda)\big\} \cup \big\{w\rho : w \in \mathbf{supf}(\tau/\rho)\big\}.$$

Esto no es cierto para el árbol $\mathbf{V}$ de aridad 2, pues

$$\{\varepsilon\} = \mathbf{supf}(\mathbf{V}) \neq \emptyset.$$

Por otra parte, si $v$ y $w$ son vértices de $\tau$ con $v = v'\lambda$ y $w = w'\rho$, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{pos}_{\tau/\lambda}(v') &= \mathbf{pos}_\tau(v),\\ \mathbf{pos}_{\tau/\rho}(w') &= \mathbf{pos}_\tau(w) - |\tau/\lambda|.\end{aligned}$$

Dado un árbol $\tau$ y un vértice superficial $v$, la **contracción de** $\tau$ **en** $v$ es el árbol

$$c_v(\tau) = \tau \setminus \{\lambda v, \rho v\}.$$

Observemos que $|c_v(\tau)| = |\tau| - 1$. Si además $(A, \mu)$ es un magma, la **contracción en** $v$ es la aplicación lineal $c_v : \underline{A}(\tau) \to \underline{A}(c_v(\tau))$ tal que

$$c_v(\tau(a_{1,|\tau|})) = c_v(\tau)(a_1 \otimes \cdots \otimes \mu(a_{\mathbf{pos}_\tau(v)}, a_{\mathbf{pos}_\tau(v)+1}) \otimes \cdots \otimes a_{|\tau|}).$$

para todo tensor elemental $a_{1,|\tau|} \in A^{\otimes|\tau|}$. En otras palabras, esto se obtiene de aplicar $\mu$ sobre los elementos que decoran los dos hijos del vértice superficial $v$ y colocando el resultado en ese vértice.

Usando estas notaciones podemos dar una fórmula explícita para la diferencial de nuestro complejo:

**Proposición 4.2.** *Si $(A, \mu)$ es un magma 2-nilpotente, entonces*

$$d_n(x) = \sum_{v \in \mathbf{supf}(\tau)} (-1)^{\mathbf{pos}_\tau(v)} c_v(x)$$

*para todo $x \in \underline{A}(\tau)$ con $|\tau| = n$.*

*Demostración.* Si $n$ tiene aridad 1 o 2 el resultado se obtiene de una verificación muy simple, por lo que supondremos $|\tau| > 2$. Basta ver el resultado para elementos $x \in \underline{A}(\tau)$

de la forma $x = x_\lambda \otimes x_\rho$ con $x_l \in \underline{A}(\tau/\lambda)$ y $x_\rho \in \underline{A}(\tau/\rho)$. Por inducción, tenemos que

$$\begin{aligned} d(x) &= d(x_\lambda) \otimes x_\rho + (-1)^{|\tau/\lambda|} x_\lambda \otimes d(x_\rho) \\ &= \sum_{v \in \mathbf{supf}(\tau/\lambda)} (-1)^{\mathbf{pos}_{\tau/\lambda}(v)} c_v(x_\lambda) \smile x_\rho \\ &\qquad + (-1)^{|\tau/\lambda|} \sum_{w \in \mathbf{supf}(\tau/\rho)} (-1)^{\mathbf{pos}_{\tau/\rho}(w)} x_\lambda \smile c_w(x_\rho) \\ &= \sum_{v \in \mathbf{supf}(\tau/\lambda)} (-1)^{\mathbf{pos}_\tau(v\lambda)} c_v(x_\lambda) \smile x_\rho + \sum_{w \in \mathbf{supf}(\tau_r)} (-1)^{\mathbf{pos}_\tau(w\rho)} x_\lambda \smile c_v(x_\rho) \\ &= \sum_{v \in \mathbf{supf}(\tau)} (-1)^{\mathbf{pos}_\tau(v)} c_v(x), \end{aligned}$$

como queríamos. □

## 4.4 El laplaciano

Para la determinación de la homología del complejo $T_\bullet(A)$ en ejemplos específicos utilizaremos una técnica análoga a la empleada en teoría de Hodge para estudiar la cohomología de de Rham de variedades diferenciables mediante la introducción de un operador laplaciano. Este problema traduce el problema de calcular la homología al de determinar el espectro de un operador lineal, el cual resultará más accesible. También veremos que esta herramienta nos permite dar resultados generales sobre cómo se comporta la homología de un magma nilpotente en 2 pasos. Para la discusión de los preliminares necesarios seguiremos la exposición de Kostant presente en la segunda sección de [Kos61].

Sea $V \in \mathbf{Vect}_\Bbbk$ un espacio vectorial de dimensión finita dotado de una forma bilineal simétrica $\langle -, - \rangle : V \otimes V \to \Bbbk$. Si $V' \subseteq V$ es un subespacio, su **complemento ortogonal** es

$$V'^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \ \text{ para todo } w \in V'\}.$$

Decimos que $\langle -, - \rangle$ es **no degenerada** si la aplicación inducida

$$V \ni v \mapsto \langle v, - \rangle \in V^*$$

es un isomorfismo y que es **libre de isotropía** si $\langle v, v \rangle = 0$ si $v = 0$. Si la forma es libre de isotropía entonces para cualquier subespacio $V'$ se tiene que $V' \cap V'^\perp = 0$ y si es no degenerada entonces también $\dim V' + \dim V'^\perp = \dim V$, por lo que si se tienen ambas condiciones podemos afirmar que $V = V' \oplus V'^\perp$. El hecho de que $(V'^\perp)^\perp = V'$ cualquiera sea $V'$ también es consecuencia de que la forma sea no degenerada.

Sean $V, W \in \mathbf{Vect}_\Bbbk$ espacios dotados de formas bilineales simétricas no degeneradas a las que notamos $\langle -, - \rangle$ y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. La **adjunta** $f^*$ de $f$ es la única transformación lineal $f^* : W \to V$ tal que

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle$$

para todo $v \in V$ y $w \in W$. Es claro que $f^{**} = f$. Observemos también que en esta situación se tiene que

$$\ker f = (\operatorname{img} f^*)^\perp.$$

En efecto, $x \in \ker f$ si y sólo si $0 = \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$ para todo $y$. Tomando complemento ortogonal a ambos lados obtenemos la igualdad

$$(\ker f)^\perp = \operatorname{img} f^*.$$

Sea $(C_\bullet, d_\bullet)$ un complejo de cadenas de $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita dotados de formas bilineales simétricas no degeneradas y libres de isotropía, y supongamos además que la restricción de estas formas a cualquier subespacio es no degenerada. Una forma de garantizar esta propiedad es suponer que el cuerpo de base es $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ y que las formas bilineales son productos internos. El caso de $\mathbb{C}$ y los productos hermitianos puede manejarse de manera similar, aunque omitiremos los detalles.

Si notamos $\partial^n : C_{n-1} \to C_n$ a la adjunta de $d_n : C_n \to C_{n-1}$ tenemos

$$\langle \partial^2(x), y\rangle = \langle x, d^2(y)\rangle = 0$$

para todo $x, y$. Como las formas bilineales involucradas son no degeneradas, esto implica que $(C_\bullet, \partial^\bullet)$ es un complejo de cocadenas.

El **laplaciano** asociado al complejo $(C_\bullet, d_\bullet)$ es el operador homogéneo de grado cero $\Delta_\bullet : C_\bullet \to C_\bullet$ que en cada grado $n$ está dado por

$$\Delta_n = \partial^n \circ d_n + d_{n+1} \circ \partial^{n+1}.$$

Cuando sea conveniente omitiremos el subíndice $n$ para aligerar la notación y escribiremos simplemente

$$\Delta = \partial d + d\partial.$$

Observemos que el laplaciano es autoadjunto:

$$\langle \Delta(v), w\rangle = \langle \partial d(v), w\rangle + \langle d\partial(v), w\rangle = \langle v, \partial d(w)\rangle + \langle v, d\partial(w)\rangle = \langle v, \Delta(w)\rangle$$

para todo $v, w$.

La siguiente proposición describe el motivo por el cual nos importa esta construcción:

**Proposición 4.3.** *Todo elemento del núcleo de $\Delta_n$ es un ciclo y la inclusión $\ker \Delta_n \hookrightarrow Z_n$ induce un isomorfismo $\ker \Delta_n \cong H_n(C_\bullet)$.*

En particular, esto nos dice que toda clase de homología de $C_\bullet$ tiene un único representante en el núcleo de $\Delta$, al cual llamamos su **representante armónico**.

*Demostración.* Si $x \in \ker \Delta$ entonces $\partial d(x) = -d\partial(x)$. Aplicando $d$ a ambos lados obtenemos que

$$d\partial d(x) = -d^2\partial(x) = 0,$$

por lo que

$$\partial d(x) \in \ker d \cap \operatorname{img} \partial = (\operatorname{img} \partial)^{\perp} \cap \operatorname{img} \partial = 0,$$

y esta última igualdad es consecuencia de la hipótesis impuesta sobre la restricción de nuestras formas bilineales. Esto implica ahora que

$$d(x) \in \ker \partial \cap \operatorname{img} d = (\operatorname{img} d)^{\perp} \cap \operatorname{img} d = 0,$$

por lo que $\ker \Delta \subseteq Z_n$. Una demostración análoga muestra que también $\ker \Delta \subseteq \ker \partial$.

Si $x \in Z_n$, entonces

$$d(\Delta(x)) = d\partial d(x) + d^2\partial(x) = 0,$$

por lo que $\Delta$ se restringe a un endomorfismo $\Delta|_{Z_n} : Z_n \to Z_n$. Como $\Delta$ es autoadjunto, tenemos

$$Z_n = \ker \Delta|_{Z_n} \oplus (\ker \Delta|_{Z_n})^{\perp} = \ker \Delta|_{Z_n} \oplus (\ker \Delta|^{*}_{Z_n})^{\perp} = \ker \Delta|_{Z_n} \oplus \operatorname{img} \Delta|_{Z_n}.$$

Para probar la segunda afirmación de la proposición basta entonces con mostrar que $B_n = \operatorname{img} \Delta|_{Z_n}$. Es obvio que $\operatorname{img} \Delta|_{Z_n} \subseteq B_n$ pues $\Delta|_{Z_n} = d\partial$. Para ver la otra inclusión observamos que si $x \in B_n$ entonces $x = d(y)$ para algún $y$ y por lo tanto

$$\langle x, z\rangle = \langle d(y), z\rangle = \langle y, \partial(z)\rangle = 0$$

para todo $z \in \ker \Delta|_{Z_n}$, ya que $\ker \Delta \subseteq \ker \partial$, por lo que $x \in (\ker \Delta|_{Z_n})^{\perp} = \operatorname{img} \Delta|_{Z_n}$. □

## 4.5 Homología de magmas nilpotentes en 2 pasos

Sea $(A, \mu)$ un magma nilpotente en 2 pasos provisto de una forma bilineal simétrica, no degenerada y libre de isotropía $\langle -, -\rangle : A \times A \to \Bbbk$ que además se restringe a una forma no degenerada sobre todo subespacio de $A$, de modo que podamos aplicar la maquinaria desarrollada en la sección anterior. Diremos que una forma bilineal con estas propiedades es **fuertemente no degenerada**. En esta sección estudiaremos el comportamiento de la homología de un tal magma.

Para todo número natural $n$, tenemos una forma bilineal fuertemente no degenerada inducida en $A^{\otimes n}$ dado en tensores elementales por

$$\langle a_1 \otimes \cdots \otimes a_n, b_1 \otimes \cdots \otimes b_n\rangle = \prod_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i\rangle.$$

De este modo, para cada árbol $\tau$ el espacio $\underline{A}(\tau)$ es provisto de una forma bilineal fuertemente no degenerada a partir de la identificación canónica $\tau : A^{\otimes|\tau|} \to \underline{A}(\tau)$. Finalmente obtenemos para cada natural $n$ una forma bilineal fuertemente no degenerada sobre

$$T_n(A) = \bigoplus_{|\tau|=n} \underline{A}(\tau)$$

haciendo que los sumandos directos sean ortogonales entre sí. De este modo el complejo $T_\bullet(A)$ dotado de estos productos internos satisface las hipótesis necesarias para considerar sus laplacianos asociados y aplicar la Proposición 4.3.

Dados dos árboles $\tau$ y $\tau'$ de aridad $n$ y $m$ respectivamente, definimos un operador bilineal

$$\smile : \underline{A}(\tau) \times \underline{A}(\tau') \to \underline{A}(\tau \smile \tau')$$

al que llamaremos **yuxtaposición**, dado sobre tensores elementales por

$$\tau(a_{1,n}) \smile \tau'(a_{n+1,n+m}) = (\tau \smile \tau')(a_{1,n+m}).$$

Esta es la extensión natural del operador de yuxtaposición de árboles que vimos en (4.4). Extendiendo por bilinealidad obtenemos operadores

$$\smile : T_n(A) \times T_m(A) \to T_{n+m}(A)$$

para cada $n, m \in \mathbb{N}_0$. Es fácil verificar que la diferencial $d$ actúa, para casi todos los grados, como una derivación graduada con respecto a esta operación de yuxtaposición: concretamente, que si $x \in T_n(A)$ e $y \in T_m(A)$ con $n + m > 2$ entonces

$$d(x \smile y) = d(x) \smile y + (-1)^n x \smile d(y). \tag{4.8}$$

Como $T_0(A) = 0$, el único caso no cubierto por esto es aquel en que $n = m = 1$. En ese caso, de hecho, no vale: si $a, b \in A$ son tales que $\mu(a, b) \neq 0$ entonces

$$d(\tau_{\mathrm{tr}}(a) \smile \tau_{\mathrm{tr}}(b)) = \tau_{\mathrm{tr}}(\mu(a, b)) \neq 0 = d(\tau_{\mathrm{tr}}(a)) \smile \tau_{\mathrm{tr}}(b) - \tau_{\mathrm{tr}}(a) \smile d(\tau_{\mathrm{tr}}(b))$$

El hecho de que $d$ sea casi una derivación implica una propiedad similar sobre los operadores adjuntos $\partial$:

**Proposición 4.4.** *Si $n, m \in \mathbb{N}_0$ y $x \in T_n(A)$ e $y \in T_m(A)$*

$$\partial(x \smile y) = \partial(x) \smile y + (-1)^n x \smile \partial(y).$$

Notemos que esta propiedad *sí* vale para todo grado.

*Demostración.* Consideramos solamente el caso en que $n$ y $m$ son ambos no nulos. Basta entonces con verificar que

$$\langle \partial(x \smile y), z \rangle = \langle \partial(x) \smile y + (-1)^n x \smile \partial(y), z \rangle \tag{4.9}$$

para todo $z \in T_{n+m+1}(A)$ de la forma $z = \tau(a_{1,n+m+1})$ con $|\tau| = n + m + 1$. Fijemos un $z$ con esas propiedades y escribamos $z = z_\lambda \smile z_\rho$, con

$$z_\lambda = (\tau/\lambda)(a_{1,l}), \qquad z_\rho = (\tau/\rho)(a_{l+1,n+m+1}).$$

Notemos que esto es posible ya que $n+m+1>2$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\langle \partial(x \smile y), z\rangle &= \langle x \smile y, d(z)\rangle \\ &= \langle x \smile y, d(z_\lambda) \smile z_\rho\rangle + (-1)^l \langle x \smile y, z_\lambda \smile d(z_\rho)\rangle.\end{aligned}$$

Si $n \neq l-1$ y $m \neq n+m-l$, estos dos sumandos se anulan pues las ramas de los árboles involucrados en ambos lados del producto tienen aridades diferentes. En ese caso el lado derecho de (4.9) se anula por el mismo motivo.

Supongamos ahora que $n = l-1$. Entonces $m \neq n+m-l$, por lo que

$$\begin{aligned}\langle \partial(x \smile y), z\rangle &= \langle x \smile y, d(z_\lambda) \smile z_\rho\rangle \\ &= \langle x, d(z_\lambda)\rangle \cdot \langle y, z_\rho\rangle \\ &= \langle \partial(x), z_\lambda\rangle \cdot \langle y, z_\rho\rangle \\ &= \langle \partial(x) \smile y, z\rangle \\ &= \langle \partial(x) \smile y + (-1)^n x \smile \partial(y), z\rangle,\end{aligned}$$

como queríamos, ya que $\langle x \smile \partial(y), z\rangle = 0$. El caso en el que $m = n+m-l$ se establece de forma similar. □

Como consecuencia de esta proposición, obtenemos el siguiente resultado:

**Proposición 4.5.** *Si $x \in T_n(A)$ e $y \in T_m(A)$ con $n+m>2$, entonces*

$$\Delta_{n+m}(x \smile y) = \Delta_n(x) \smile y + x \smile \Delta_m(y).$$

*En particular, los operadores $\Delta_k$ con $k>2$ están completamente determinados por $\Delta_1$ y $\Delta_2$.*

*Demostración.* Esto es una consecuencia puramente formal de (4.8) y de la Proposición 4.4. Para alivianar la notación omitiremos los subíndices de los laplacianos. Tenemos que

$$\begin{aligned}\Delta(x \smile y) &= d\partial(x \smile y) + \partial d(x \smile y) \\ &= d(\partial(x) \smile y + (-1)^n x \smile \partial(y)) + \partial(d(x) \smile y + (-1)^n x \smile d(y)) \\ &= d\partial(x) \smile y + (-1)^{n+1}\partial(x) \smile d(y) + (-1)^n d(x) \smile \partial(y) + (-1)^{n(n+1)} x \smile d\partial(y) \\ &+ \partial d(x) \smile y + (-1)^{n-1} d(x) \smile \partial(y) + (-1)^n \partial(x) \smile d(y) + (-1)^{n(n-1)} x \smile \partial d(y) \\ &= \partial d(x) \smile y + x \smile \partial d(y) \\ &= \Delta(x) \smile y + x \smile \Delta(y).\end{aligned}$$

□

De la Proposición 4.5 deducimos inmediatamente la inclusión

$$\bigoplus_{i=1}^{n-1} (\ker \Delta_i \smile \ker \Delta_{n-i}) \subseteq \ker \Delta_n \tag{4.10}$$

para todo $n \geq 3$. En particular, tenemos el siguiente corolario:

**Corolario 4.6.** *Si $(A, \mu)$ es un magma nilpotente en 2 pasos, tenemos que $H_n(A) \neq 0$ para todo $n$ si y sólo si $H_i(A) \neq 0$ para $i = 1, 2$.* □

Más adelante veremos en el Corolario 4.9 que, obviando el caso en el que $A = 0$, el módulo $H_1(A)$ nunca se anula pero $H_2(A)$ puede hacerlo, y de hecho esto ocurre exactamente cuando $A$ es libre como magma nilpotente en 2 pasos.

En situaciones favorables, el estudio del laplaciano nos provee un criterio sencillo para describir la homología de $A$:

**Proposición 4.7.** *Si el cuerpo de base $\Bbbk$ es $\mathbb{R}$, entonces*

$$\ker \Delta_n = \bigoplus_{i=1}^{n-1} (\ker \Delta_i \smile \ker \Delta_{n-i}).$$

*En particular, en ese caso podemos describir $H_n(A)$ para $n > 2$ completamente en términos de $H_1(A)$ y $H_2(A)$.*

A partir de esta proposición también podemos comprender el crecimiento de la dimensión de $H_n(A)$ con $n$.

*Demostración.* Observamos primero que el laplaciano es un operador semidefinido positivo: en efecto, cualquiera sea $v$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \Delta(v), v \rangle &= \langle (\partial d + d\partial)(v), v \rangle \\ &= \langle \partial d(v), v \rangle + \langle d\partial(v), v \rangle \\ &= \langle d(v), d(v) \rangle + \langle \partial(v), \partial(v) \rangle \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Ahora bien, sabemos que

$$T_n(A) = \bigoplus_{i=1}^{n-1} T_i(A) \smile T_{n-i}(A)$$

y la Proposición 4.5 muestra que el laplaciano preserva esta descomposición. Consideramos entonces bases $B_i$ y $B_{n-i}$ de $T_i(A)$ y $T_{n-i}(A)$ conformadas por autovectores, cosa que es posible dado que $\Delta$ es autoadjunto. Así, $B = \{v \smile w : v \in B_i, w \in B_{n-i}\}$ es una base de autovectores para la restricción de $\Delta_n$ a $T_i(A) \smile T_{n-i}(A)$. Más aún, si $\Delta(v) = \lambda v$ y $\Delta(w) = \rho w$, entonces

$$\Delta(v \smile w) = \Delta(v) \smile w + v \smile \Delta(w) = (\lambda + \mu) v \smile w.$$

En particular, si $v \in B_i$ y $w \in B_{n-i}$, entonces $v \smile w \in \ker \Delta_n$ si y sólo si $v \in \ker \Delta_i$ y $w \in \ker \Delta_{n-i}$, dado que todos los autovalores del laplaciano son no negativos al ser éste un operador semidefinido positivo. Esto prueba la afirmación del enunciado. □

Nos enfocamos ahora entonces en estudiar los primeros módulos de homología de $A$. Observemos que de su definición misma se deduce que $H_0(A) = 0$ y que

$$H_1(A) = A/\mu(A, A).$$

El espacio $H_2(A)$ es más interesante y podemos describirlo mediante la siguiente proposición, cuya validez es independiente de la existencia de una forma bilineal que permita emplear el laplaciano como herramienta de estudio:

**Proposición 4.8.** *Sea $(A, \mu)$ un magma nilpotente en 2 pasos. Sea $W = \mu(A, A)$ y elijamos un complemento $V$ para $W$ en $A$, de modo que sea $A = V \oplus W$. Tenemos que*

$$\dim H_2(A) = (\dim V)^2 - \dim W$$

*y de hecho hay un isomorfismo*

$$(V \otimes V) \cap \ker \mu \cong H_2(A).$$

Notemos que esta última fórmula es reminiscente de la fórmula de Hopf [HS97, §VI.9, (9.2)] para la homología de grupos.

*Demostración.* Usando las identificaciones naturales $\tau : A^{\otimes n} \to T_\tau(A)$, el comienzo del complejo $T_\bullet(A)$ se identifica con

$$\cdots \to A^{\otimes 3} \oplus A^{\otimes 3} \xrightarrow{d} A^{\otimes 2} \xrightarrow{\mu} A \to 0,$$

donde $d = (\mu \otimes \mathrm{id}) \oplus (-\mathrm{id} \otimes \mu)$, y por lo tanto

$$H_2(A) \cong \frac{\ker \mu}{\operatorname{img} d} = \frac{\ker \mu}{W \otimes A + A \otimes W} = \frac{\ker \mu}{(V \otimes W) \oplus (W \otimes V) \oplus (W \otimes W)}.$$

Como $V \otimes V$ es un complemento en $A \otimes A$ para el denominador del último cociente, la inclusión

$$(V \otimes V) \cap \ker \mu \hookrightarrow \ker \mu$$

induce un isomorfismo

$$(V \otimes V) \cap \ker \mu \cong \frac{\ker \mu}{(V \otimes W) \oplus (W \otimes V) \oplus (W \otimes W)} \cong H_2(A),$$

como afirma la proposición.

Por otro lado, el morfismo $\mu : A \otimes A \to W$ es sobreyectivo por definición y la hipótesis de nilpotencia en 2 pasos nos asegura que $\mu$ se anula en el subespacio $(V \otimes W) \oplus (W \otimes V) \oplus (W \otimes W)$, por lo que la restricción $\mu : V \otimes V \to W$ es sobreyectiva. Se sigue de esto que la dimensión de $(V \otimes V) \cap \ker \mu$ es precisamente $(\dim V)^2 - \dim W$, y por lo visto antes, esta es la dimensión de $H_2(A)$. □

Esta proposición nos permite mostrar que la homología detecta a los magmas libres:

**Corolario 4.9.** *Si $(A, \mu)$ un magma nilpotente en 2 pasos no nulo y $H_n(A) = 0$ para algún $n \geq 2$, entonces $A$ es libre como magma nilpotente en 2 pasos.*

*Demostración.* Si escribimos $W = \mu(A, A)$, como $H_1(A) = A/\operatorname{img}\mu = A/W$ y $A \neq 0$, se tiene que $H_1(A) \neq 0$. La inclusión (4.10) implica entonces que $H_n(A) = 0$ para algún $n \geq 2$ sólo si $H_2(A) = 0$. Por la proposición anterior, esto implica que el morfismo $\mu : V \otimes V \to W$ es un isomorfismo. De este modo, $A$ es isomorfa al magma nilpotente en 2 pasos libre en $V$. □

## 4.6 Algunos ejemplos

A lo largo de esta sección el cuerpo base $\Bbbk$ será $\mathbb{R}$. Para alivianar la notación, en esta sección escribimos $x$ para denotar al elemento $\tau_{\mathrm{tr}}(x)$.

### 4.6.1 Magmas nilpotentes en 2 pasos libres

Si $V$ es un espacio vectorial, su magma nilpotente en 2 pasos libre asociado es el magma $F(V) = V \oplus W$, donde $W = V \otimes V$ y el producto $\mu : F(V) \otimes F(V) \to F(V)$ es el único tal que

$$\mu(x \otimes y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in W \text{ o } y \in W, \\ x \otimes y \in W & \text{si } x, y \in V. \end{cases}$$

Elegimos una base $\tilde{\mathcal{B}}$ para $V$ y ponemos sobre este espacio el producto interno con respecto al cual esta base es ortonormal. Esto induce un producto interno sobre $F(V)$ que hace que $V$ y $W$ sean ortogonales y, por lo descripto en la sección anterior, impone productos internos sobre las componentes del complejo $T_\bullet(F(V))$.

Estudiemos ahora los laplacianos correspondientes a este magma. Llamemos $\mathcal{B}$ a la base ortonormal de $T_1(F(V))$ dada por

$$\mathcal{B} = \{x : x \in \tilde{\mathcal{B}}\} \cup \{x \otimes y : x, y \in \tilde{\mathcal{B}}\}.$$

Dado que para todo $c \in \mathcal{B}$

$$\partial^2(c) = \sum_{a,b \in \mathcal{B}} \langle \partial_1(c), a \smile b \rangle a \smile b = \sum_{a,b \in \mathcal{B}} \langle c, d_1(a \smile b) \rangle a \smile b$$

y que $\Delta_1 = d_2\partial^2$, vemos que $\Delta_1|_V = 0$ y $\Delta_1|_W = \mathrm{id}_W$, por lo que $\Delta_1$ es la proyección en $W$.

Determinemos ahora $\Delta_2$. Fijemos $a, b \in \mathcal{B}$. Si $a, b \in V$,

$$\Delta_2(a \smile b) = d\partial(a \smile b) + \partial d(a \smile b) = \partial(a \otimes b) = a \smile b.$$

Si $a \in W$ es de la forma $a = x \otimes y$ con $x, y \in \mathcal{B}$ y $b \in V$ entonces

$$\Delta_2(a \smile b) = d\partial(a \smile b) + \partial d(a \smile b) = d((x \smile y) \smile b) = a \smile b.$$

Una situación simétrica ocurre si $a \in V$ y $b \in W$. Finalmente, si tanto $a$ como $b$ pertenecen a $W$ y los escribimos $a = x \otimes y$, $b = z \otimes w$, tenemos que

$$\Delta_2(a \smile b) = d\partial(a \smile b) + \partial d(a \smile b) = d((x \smile y) \smile b + a \smile (z \smile w)) = 2a \smile b.$$

Por lo tanto, identificando $T_2(F(V))$ con $F(V) \otimes F(V)$, vemos que la restricción de $\Delta_2$ al subespacio $(V \otimes V) \oplus (V \otimes W) \oplus (W \otimes V)$ es la identidad, y que la restricción de $\Delta_2$ al subespacio $W \otimes W$ es el doble de la identidad. Todo esto implica que, en particular,

$$\operatorname{Spec} \Delta_1 = \{0, 1\},$$
$$\operatorname{Spec} \Delta_2 = \{1, 2\}.$$

Como $\Delta_2$ es un isomorfismo, resulta entonces que $H_n(F(V)) = 0$ para todo $n \geq 2$, y $H_1(F(V)) \cong \ker \Delta_1 = V$. Esto demuestra el resultado recíproco al Corolario 4.9, obteniendo entonces:

**Corolario 4.10.** *Sea $(A, \mu)$ un magma nilpotente en 2 pasos no nulo. $A$ es libre si y sólo si $H_n(A) = 0$ para todo $n \geq 2$, y cuando no es ese el caso, se tiene que $H_n(A) \neq 0$ para todo $n$.* □

Este corolario resulta similar al hecho de que la cohomología de grupos se anula para grados mayores o iguales a 2 si el grupo en cuestión es libre (por ejemplo, como consecuencia de la existencia de la resolución libre mencionada en [Bro82, (4.4)]). Más aún, el corolario también da una demostración alternativa del siguiente hecho, que ya conocíamos gracias al análogo al Teorema de Priddy para operads:

**Corolario 4.11.** *La operad $\mathcal{O}_{\mathbf{M}}$ de magmas nilpotentes en 2 pasos es Koszul.*

*Demostración.* En efecto, la condición de Koszul es equivalente a la anulación de $H_n(F)$ para $n \geq 2$ para todo magma nilpotente en 2 pasos libre $F$, en vistas de [GK94, Theorem 4.2.5]. □

### 4.6.2 Álgebras de Heisenberg

Fijemos un número natural $n$. El **álgebra de Heisenberg** $\mathbb{H}_n$ es el álgebra de Lie de dimensión $2n + 1$ con base $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z\}$ en la que $[x_i, y_i] = z$ para todo $1 \leq i \leq n$ y los otros corchetes entre elementos de $\mathcal{B}$ se anulan. Es fácil verificar que $\mathbb{H}_n$ es nilpotente en dos pasos para todo $n$ y por lo tanto podemos considerarlo como magma nilpotente en 2 pasos.

Ponemos sobre $\mathbb{H}_n$ el producto interno que hace ortonormal a la base $\mathcal{B}$ y consideramos los laplacianos asociados en $T_\bullet(\mathbb{H}_n)$. Como el conjunto $\mathcal{B}^{\smile 2} := \{a \smile b : a, b \in \mathcal{B}\}$ es una base de $T_2(\mathbb{H}_n)$, tenemos que

$$\partial^2(c) = \sum_{a,b\in\mathcal{B}} \langle c, d_1(a \smile b)\rangle a \smile b$$

para todo $c \in \mathcal{B}$. Así, si llamamos

$$Z = \partial^2(z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \smile y_i - y_i \smile x_i),$$

obtenemos, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, que

$$\begin{aligned} \Delta_1(x_i) &= 0, & \Delta_1(y_i) &= 0, & \Delta_1(z) &= 2nz, \\ \Delta_2(x_i \smile y_i) &= Z, & \Delta_2(y_i \smile x_i) &= -Z, & \Delta_2(z \smile z) &= 4n(z \smile z). \end{aligned}$$

Además, si $w \in \mathcal{B}$ es distinto de $z$, tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_2(w \smile z) &= 2n(w \smile z), \\ \Delta_2(z \smile w) &= 2n(z \smile w), \end{aligned}$$

y finalmente si $v, w \in \mathcal{B}$ son ambos distintos de $z$ y tales que $[v, w] = 0$ entonces

$$\Delta_2(v, w) = 0.$$

Casi todos los elementos de la base $\mathcal{B}^{\smile 2}$ son entonces autovectores para el laplaciano. Para terminar de producir una base de autovectores, observamos que el laplaciano se restringe a un endomorfismo del subespacio $W$ de dimensión $2n$ generado por los elementos de la forma $x_i \smile y_i$ o $y_i \smile x_i$. Es claro que la imagen de este subespacio por el laplaciano es de rango 1, pues todos estos elementos son transformados en $\pm Z$. Por lo tanto, el núcleo del laplaciano restringido a $W$ es de dimensión $2n - 1$. Finalmente, observamos que $Z \in W$ y que $\Delta_2(Z) = 2nZ$: este es el único autovector en $W$, salvo escalares, de autovalor no nulo. De este análisis deducimos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} \Delta_1 &= \{0, 2n\}, \\ \operatorname{Spec} \Delta_2 &= \{0, 2n, 4n\}, \end{aligned}$$

por lo que podemos aplicar la Proposición 4.7 para describir la homología en tanto magma de $\mathbb{H}_n$. Para cada entero $i$ escribimos $E_i^n$ para denotar al autoespacio del operador $\Delta_n$ asociado al autovalor $i$. La siguiente tabla contiene bases de autovectores para cada

autoespacio de los operadores $\Delta_1$ y $\Delta_2$:

| | |
|---|---|
| $E_0^1$ | $x_i, y_j$ para todo $i, j$ |
| $E_{2n}^1$ | $z$ |
| $E_0^2$ | $v \smile w, (x_1 \smile y_1 - x_i \smile y_i), (x_1 \smile y_1 + y_j \smile x_j)$ para $i > 1$, todo $j$ y $v, w$ básicos distintos de $z$ con $[v, w] = 0$ |
| $E_{2n}^2$ | $Z, w \smile z, z \smile w$ para todo $w$ básico distinto de $z$ |
| $E_{4n}^2$ | $z \smile z$ |

De este modo,

$$\dim H_1(\mathbb{H}_n) = \dim \ker \Delta_1 = 2n,$$
$$\dim H_2(\mathbb{H}_n) = \dim \ker \Delta_2 = (4n^2 - 2n) + (n-1) + n = 4n^2 - 1.$$

Vale la pena destacar que si bien $\mathbb{H}_1$ es libre como álgebra de Lie nilpotente en 2 pasos, no lo es como magma, por lo que este resultado no contradice al Corolario 4.10.

Usando nuestro conocimiento de las dimensiones de $H_1(\mathbb{H}_n)$ y $H_2(\mathbb{H}_n)$ junto con la Proposición 4.7, podemos producir una tabla con los valores de $\dim H_i(\mathbb{H}_n)$ para valores pequeños de $i$:

| $i$ | $\dim H_i(\mathbb{H}_n)$ |
|---|---|
| 2 | $4n^2 - 1$ |
| 3 | $16n^3 - 4n$ |
| 4 | $80n^4 - 24n^2 + 1$ |
| 5 | $448n^5 - 160n^3 + 12n$ |
| 6 | $2688n^6 - 1120n^4 + 120n^2 - 2$ |
| 7 | $16896n^7 - 8064n^5 + 1120n^3 - 40n$ |

Es fácil ver que $\dim H_i(\mathbb{H}_n)$ es un polinomio en $n$ de grado $i$. Todos los grados de los monomios no nulos de este polinomio tienen la misma paridad que $i$ y su coeficiente principal es $2^n C_n$, donde $C_n$ es el enésimo número de Catalan.

### 4.6.3 Magmas tabulares

Describiremos una familia de magmas para las que podemos repetir un análisis similar al de las secciones previas. Si $(A, \mu)$ es un magma nilpotente en 2 pasos, una base $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t\}$ de $A$ es **agradable** si cumple que:

- para todo $i, j$ tenemos $\mu(x_i, x_j) = \lambda_{i,j} y_{\sigma(i,j)}$ para cierto escalar $\lambda_{i,j}$,
- todo producto entre elementos básicos que involucre a algún $y_i$ es cero,

- la imagen de $\mu$ es precisamente $\langle y_1, \dots, y_t \rangle$.

Llamamos **agradables** a los magmas que admiten una base agradable. El magma es **tabular** si es agradable y los escalares $\lambda_{i,j}$ pertenecen al conjunto $\{0, 1\}$. Un álgebra de Lie nilpotente en 2 pasos es **Lie-tabular** si es agradable y los escalares $\lambda_{i,j}$ pertenecen al conjunto $\{0, \pm 1\}$. Notemos que un álgebra de Lie nilpotente en 2 pasos no puede ser tabular (salvo que sea abeliana) debido a la antisimetría del corchete; la noción de Lie-tabularidad es la más cercana posible a la de tabularidad en este contexto.

**Proposición 4.12.** *Sea $A$ un magma tabular o un álgebra Lie-tabular con una base agradable $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_t\}$. Si ponemos sobre $A$ el producto interno que hace ortonormal a $\mathcal{B}$, entonces $\Delta_1$ y $\Delta_2$ tienen espectro entero. Más aún,*

$$\begin{aligned} \dim \ker \Delta_1 &= s, \\ \dim \ker \Delta_2 &= s^2 - t. \end{aligned}$$

Vale la pena destacar que las dimensiones de $\ker \Delta_1$ y $\ker \Delta_2$ pueden deducirse del hecho de que $H_1(A) = A/\mu(A, A)$ y la Proposición 4.8, pero daremos una demostración alternativa determinando explícitamente el espectro de los primeros dos laplacianos.

*Demostración.* Escribimos $\Pi_a$ para el conjunto de pares $(b, c) \in \mathcal{B}^2$ tales que $a$ está en el soporte de $\mu(b, c)$. Observamos que $\Pi_{x_i} = \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, s\}$.

Si $a \in \mathcal{B}$, pensándolo como elemento de $T_1(A)$ tenemos

$$\Delta_1(a) = d_2\partial^2(a) = d_2 \left( \sum_{(x_i, x_j) \in \Pi_a} \lambda_{i,j} x_i \frown x_j \right) = \left( \sum_{(x_i, x_j) \in \Pi_a} \lambda_{i,j}^2 \right) a,$$

por lo que $\mathcal{B}$ es siempre una base de autovectores de $\Delta_1$ para $T_1(A)$. De esta fórmula deducimos que si $A$ es tabular o Lie-tabular tenemos que $\Delta_1(a) = |\Pi_a| a$, por lo que el espectro de $\Delta_1$ es entero. Más aún, $\ker \Delta_1 = \langle x_1, \dots, x_s \rangle$.

Pasemos ahora a estudiar el operador $\Delta_2$. Si $x_i, x_j \in \mathcal{B}$ son tales que $\mu(x_i, x_j) = \lambda y_k$, tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta_2(x_i \frown x_j) &= \partial^2 d_2(x_i \frown x_j) + d_3\partial^3(x_i \frown x_j) \\ &= \lambda \partial^2(y_k) + d_3(\partial^2(x_i) \frown x_j - x_i \frown \partial^2(x_j)) \\ &= \lambda \left( \sum_{(x_i, x_j) \in \Pi_{y_k}} \lambda_{i,j} x_i \frown x_j \right). \end{aligned}$$

Si $A$ es tabular, esta expresión toma una forma más sencilla:

$$\Delta_2(x_i \frown x_j) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{(x_i, x_j) \in \Pi_{y_k}} x_i \frown x_j & \text{si } \lambda \neq 0, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

mientras que si $A$ es Lie-tabular se tiene

$$\Delta_2(x_i \smile x_j) = \begin{cases} \lambda \left( \sum_{(x_i,x_j):\mu(x_i,x_j)=y_k} (x_i \smile x_j - x_j \smile x_i) \right) & \text{si } \lambda = \pm 1, \\ 0 & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$

En ambos casos, $\Delta_2$ se restringe al subespacio $V_k$ generado por los elementos $x_i \smile x_j$ tales que $\mu(x_i, x_j) = \lambda y_k$ para algún $\lambda \neq 0$. Las observaciones previas muestran que existe una base de este subespacio tal que la representación matricial de $\Delta_2$ asociada

- es la matriz $\mathbb{1}$ con todas sus entradas iguales a 1 en el caso tabular,
- es una matriz en bloques de la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

  en el caso Lie-tabular.

En ambos casos es fácil ver que el espectro correspondiente a la restricción de $\Delta_2$ a $V_k$ es $\{0, \dim V_k\}$. En particular, es entero. Además, como en ambos casos la restricción de $\Delta_2$ a $V_k$ tiene rango 1, el autoespacio asociado al autovalor no nulo es de dimensión 1.

Por otro lado, es fácil ver que $\Delta_2(x_i \smile x_j) = 0$ si $\mu(x_i, x_j) = 0$. Esto concluye el análisis del comportamiento de $\Delta_2$ sobre el espacio $\langle x_i \smile x_j \rangle_{i,j \in [\![s]\!]}$. Resta analizar qué ocurre en el resto del espacio $T_2(A)$. Ahora bien, si $a, b \in \mathcal{B}$ con al menos uno de ellos de la forma $y_i$, entonces

$$\begin{aligned} \Delta_2(a \smile b) &= \partial_1 d_2(a \smile b) + d_3 \partial_2(a \smile b) \\ &= d_3(\partial_1(a) \smile b - a \smile \partial_1(b)) \\ &= \left( \sum_{(x_i,x_j) \in \Pi_a} \lambda_{i,j}^2 + \sum_{(x_i,x_j) \in \Pi_b} \lambda_{i,j}^2 \right) a \smile b. \end{aligned}$$

Una vez más, si $A$ es tabular o Lie-tabular esta expresión es más sencilla:

$$\Delta_2(a \smile b) = (|\Pi_a| + |\Pi_b|) a \smile b,$$

Además el escalar $(|\Pi_a| + |\Pi_b|)$ es un entero positivo, dado que o bien $a$ o bien $b$ es de la forma $y_i$.

Estas observaciones prueban que el espectro de $\Delta_2$ es entero. Además, vimos que $\ker \Delta_2$ está contenido en el espacio $S = \langle x_i \smile x_j \rangle_{i,j \in [\![s]\!]}$. Si llamamos $V_0$ al subespacio de $S$ generado por los elementos de la forma $x_i \smile x_j$ con $\mu(x_i, x_j) = 0$, entonces

$$S = \bigoplus_{j=0}^{t} V_j,$$

y además vimos que $\Delta_2$ se restringe a un endomorfismo de cada uno de los subespacios $V_j$. Finalmente, como el rango de $\Delta_2|_{V_j}$ es 1 si $j \neq 0$ y 0 en caso contrario, concluimos que

$$\dim \ker \Delta_2 = \dim \ker \Delta_2|_S = \dim S - \mathrm{rk}(\Delta_2|_S) = s^2 - t,$$

como queríamos. □

En particular, en el contexto de la proposición anterior estamos bajo las hipótesis de la Proposición 4.7, por lo que los valores de $\dim H_i(A)$ pueden determinarse inductivamente a partir de $\dim H_1(A) = s$ y $\dim H_2(A) = s^2 - t$. Los resultados de las dos subsecciones anteriores pueden recuperarse a través de lo establecido en esta subsección.

## 4.7 La categoría Trees de árboles y *flips*

Pasamos ahora a la descripción del complejo que calcula la homología a coeficientes triviales de un álgebra de Lie nilpotente en 2 pasos. Este trabajo es un poco más delicado que el correspondiente al caso de los magmas, debido a que el dual de Koszul de la operad $\mathcal{O}_{\mathbf{L}}$ es libre en una operación binaria *conmutativa*. La presencia de esta simetría adicional introduce ciertas identificaciones en el conjunto de árboles que indexa las bases de los módulos del complejo.

Comenzaremos por describir una categoría cuyo conjunto de objetos será **Trees** y cuyas flechas codifiquen las simetrías de la composición de la operación conmutativa que genera a la operad dual Koszul de $\mathcal{O}_{\mathbf{L}}$.

Recordemos que $M$ denota al monoide libre $\langle \lambda, \rho \rangle$. Si $v \in M$, escribimos $\tilde{v}$ para referirnos al elemento de $M$ dado por

$$\tilde{v} = \begin{cases} w\lambda & \text{si } v = w\rho, \\ w\rho & \text{si } v = w\lambda, \\ \varepsilon & \text{si } v = \varepsilon. \end{cases}$$

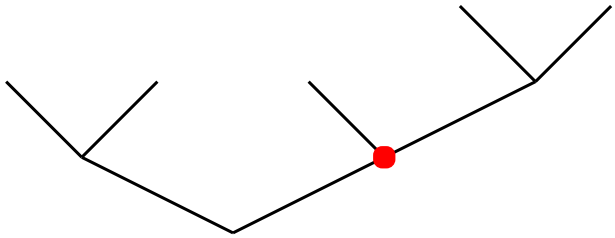
Dado un elemento $v \in M$ podemos definir una función $\mathbf{flip}_v : M \to M$ poniendo

$$\mathbf{flip}_v(w) = \begin{cases} \tilde{z}v & \text{si } w = zv, \\ w & \text{si no.} \end{cases}$$

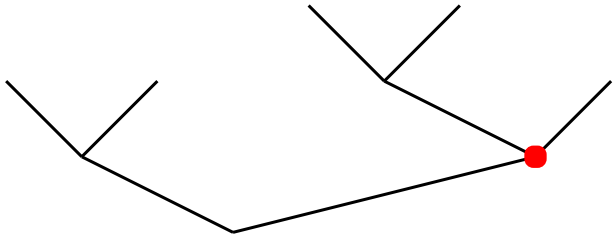
Observemos que si $\tau$ es un árbol que no tiene a $v$ como vértice interno, $\mathbf{flip}_v$ deja fijo a todos sus vértices. La aplicación de $\mathbf{flip}_v$ induce una función $\mathbf{flip}_v : \mathbf{Trees} \to \mathbf{Trees}$ tal que

$$\mathbf{flip}_v(\tau) = \{\mathbf{flip}_v(w) : w \in \tau\}.$$

Por ejemplo, el *flip* del árbol



en el vértice rojo es el árbol



Diremos que un vértice interno $v$ de $\tau$ es un **vértice de simetría** si $\mathbf{flip}_v(\tau) = \tau$. Observamos que $v$ es un vértice de simetría de $\tau/\lambda$ si y sólo si $v\lambda$ es un vértice de simetría de $\tau$.

Consideremos el grafo dirigido $G$ cuyos vértices son los árboles y en el que hay una flecha $(v, \tau) : \tau \to \mathbf{flip}_v(\tau)$ por cada vértice interno $v$ de cada árbol $\tau$. Definimos ahora una categoría a la que, abusando notación, también llamaremos **Trees**, dado que justamente tiene al conjunto de todos los árboles como conjunto de objetos. La categoría **Trees** es el cociente de la categoría libre en $G$ por las relaciones

$$(v, \mathbf{flip}_v(\tau)) \circ (v, \tau) = \mathrm{id}_\tau, \tag{4.11}$$

$$(w, \mathbf{flip}_v(\tau)) \circ (v, \tau) = (v, \mathbf{flip}_w(\tau)) \circ (w, \tau) \text{ si } w \not\rightsquigarrow v \text{ y } v \not\rightsquigarrow w, \tag{4.12}$$

$$(\mathbf{flip}_v(w), \mathbf{flip}_v(\tau)) \circ (v, \tau) = (v, \mathbf{flip}_w(\tau)) \circ (w, \tau) \text{ si } v \rightsquigarrow w, \tag{4.13}$$

donde recordamos que $v \rightsquigarrow w$ si $w$ es un descendiente de $v$, es decir, si $v = zw$ para alguna palabra $z$. Notemos que la relación (4.11) implica que la categoría **Trees** es un grupoide.

La **yuxtaposición** es un bifuntor $\smile : \mathbf{Trees} \times \mathbf{Trees} \to \mathbf{Trees}$ definido en objetos como

$$\tau_1 \smile \tau_2 = \{w\lambda : w \in \tau_1\} \cup \{w\rho : w \in \tau_2\} \cup \{\varepsilon\}.$$

Se tiene

$$|\tau_1 \smile \tau_2| = |\tau_1| + |\tau_2|,$$

y es fácil ver que si $\tau$ es un árbol no trivial y $\tau = \tau_1 \smile \tau_2$, entonces $\tau_1 = \tau/\lambda$ y $\tau_2 = \tau/\rho$. La yuxtaposición se define sobre flechas como

$$(v_1, \tau_1) \smile (v_2, \tau_2) = (v_2\rho, \mathbf{flip}_{v_1}(\tau_1 \smile \tau_2)) \circ (v_1\lambda, \tau_1 \smile \tau_2).$$

Una verificación rutinaria nos asegura que esta definición satisface las relaciones que definen a la categoría **Trees**.

Nos encargaremos ahora de dar una descripción concreta de los grupos de automorfismos en **Trees** de ciertos árboles.

Diremos que un árbol $\tau$ es **regular** si es trivial, o bien $\tau/\lambda = \tau/\rho$ o bien si $\tau/\lambda$ y $\tau/\rho$ no son isomorfos en **Trees**. Un árbol $\tau$ es **recursivamente regular** si $\tau/v$ es regular para todo vértice $v$ de $\tau$. Es fácil verificar que el árbol trivial es recursivamente regular por motivos vacuos y que cada clase de isomorfismo de árboles en **Trees** contiene al menos un árbol recursivamente regular. También vale la pena observar que si $\tau$ es recursivamente regular, lo mismo es cierto de $\tau/v$ para cualquiera de sus vértices internos $v$.

Antes de enunciar la siguiente proposición, recordemos que siempre que $v, w$ son palabras en el monoide libre $M = \langle \lambda, \rho \rangle$, escribimos $v \prec w$ si $v$ es estrictamente menor a $w$ en el orden lexicográfico inverso.

**Proposición 4.13.** *Si $\tau$ es un árbol recursivamente regular, todo morfismo $\varphi \in \mathrm{Aut}(\tau)$ puede escribirse como una composición*

$$\varphi = (v_n, \tau) \circ (v_{n-1}, \tau) \circ \cdots \circ (v_1, \tau),$$

*donde los $v_i$ son vértices de simetría de $\tau$ y $v_i \prec v_j$ si $i < j$.*

Vale la pena destacar que esto no es cierto en general para cualquier árbol. Esto puede ser un poco sorprendente en principio, dado que la categoría es un grupoide y en consecuencia uno esperaría que cualquier propiedad que valga sobre un objeto sea cierta también para cualquier otro objeto isomorfo. Sin embargo la propiedad del enunciado no es una propiedad intrínseca del grupo $\mathrm{Aut}(\tau)$, sino que más bien es sobre la existencia de un sistema de generadores que lo presenta de una manera específica.

Remarcamos también que más adelante veremos que podemos garantizar la unicidad de esta escritura.

*Demostración.* Por cómo se define la categoría **Trees**, sabemos que

$$\varphi = (v_r, \tau_r) \circ \cdots \circ (v_1, \tau_1) \tag{4.14}$$

con $(v_i, \tau_i) : \tau_i \to \tau_{i+1}$ para $1 \leq i \leq r$, $(v_r, \tau_r) : \tau_r \to \tau$ y $\tau_1 = \tau$. Si $\tau = \tau_{\mathrm{tr}}$ el resultado es evidente, por lo que supondremos inductivamente que el resultado que queremos probar vale para todo árbol de aridad menor a la de $\tau$.

Supongamos primero que ninguno de los vértices $v_i$ es la raíz de $\tau$. Observemos que si $v, w$ son vértices de $\tau_i$ con $\lambda \rightsquigarrow v$ y $\rho \rightsquigarrow w$, entonces la relación (4.12) nos asegura que

$$(w, \mathbf{flip}_v(\tau_i)) \circ (v, \tau_i) = (v, \mathbf{flip}_w(\tau_i)) \circ (w, \tau_i),$$

por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que en la factorización (4.14) se tiene que

$$\lambda \rightsquigarrow v_i \text{ si } 1 \leq i \leq j,$$
$$\rho \rightsquigarrow v_k \text{ si } j+1 \leq k \leq r.$$

De este modo

$$(v_j, \tau_j) \circ \cdots \circ (v_1, \tau_1) = \varphi_\lambda \smile \mathrm{id}_{\tau/\rho},$$
$$(v_r, \tau_r) \circ \cdots \circ (v_{j+1}, \tau_{j+1}) = \mathrm{id}_{\tau/\lambda} \smile \varphi_\rho,$$

con $\varphi_\lambda \in \mathrm{Aut}(\tau/\lambda)$ y $\varphi_\rho \in \mathrm{Aut}(\tau/\rho)$. Como tanto $\tau/\lambda$ como $\tau/\rho$ son recursivamente regulares, nuestra hipótesis inductiva nos asegura entonces que

$$(w_{n_\lambda}, \tau/\lambda) \circ \cdots \circ (w_1, \tau/\lambda) = \varphi_\lambda,$$
$$(w'_{n_\rho}, \tau/\rho) \circ \cdots \circ (w'_1, \tau/\rho) = \varphi_\rho,$$

donde los $w_i$ (resp. $w'_j$) son vértices de simetría de $\tau/\lambda$ (resp. $\tau/\rho$) ordenados lexicográficamente. Así, obtenemos

$$\varphi = (w'_{n_\rho}\rho, \tau) \circ \cdots \circ (w'_1\rho, \tau) \circ (w_{n_\lambda}\lambda, \tau) \circ \cdots \circ (w_1\lambda, \tau),$$

que es la factorización que queríamos. Notemos además que ninguno de los vértices de esta factorización es la raíz.

Supongamos entonces que alguno de los vértices $v_i$ es la raíz. Observemos que si $v \neq \varepsilon$ es un vértice de un árbol $\eta$, entonces por la relación (4.13) tenemos

$$(\tilde{v}, \mathbf{flip}_\varepsilon(\eta)) \circ (\varepsilon, \eta) = (\varepsilon, \mathbf{flip}_v(\eta)) \circ (v, \eta).$$

Utilizando esta regla podemos suponer sin pérdida de generalidad que en la factorización (4.14) se tiene que $v_i = \varepsilon$ si y sólo si $1 \leq i \leq k$. Más aún, aplicando la relación (4.11) vemos que

$$\varphi = (v_r, \tau_r) \circ \cdots \circ (v_{k+1}, \tau_{k+1}) \circ (\varepsilon, \tau)^\delta,$$

donde $\delta \in \{0, 1\}$. Si $\delta = 0$, entonces ninguno de los $v_i$ con $k+1 \leq i \leq r$ es una raíz y concluimos por lo analizado en el caso anterior. En caso contrario, usando la relación (4.12) del mismo modo que en la discusión del caso anterior, podemos reordenar los vértices $v_i$ con $i > k$ de modo que

$$\varphi = (\mathrm{id}_{\tau/\rho} \smile \varphi_\lambda) \circ (\varphi_\rho \smile \mathrm{id}_{\tau/\lambda}) \circ (\varepsilon, \tau)$$

con $\varphi_\lambda : \tau/\lambda \to \tau/\rho$ y $\varphi_\rho : \tau/\rho \to \tau/\lambda$. Tanto $\varphi_\lambda$ como $\varphi_\rho$ son isomorfismos, por lo que debe ser $\tau/\lambda = \tau/\rho$ ya que $\tau$ es recursivamente regular. En otras palabras, la raíz $\varepsilon$ resulta

ser un vértice de simetría para $\tau$, y como ahora sabemos que $\varphi_\lambda$ y $\varphi_\rho$ son automorfismos, la hipótesis inductiva nos provee, como en el caso anterior, factorizaciones

$$(w_{n_\lambda}, \tau/\lambda) \circ \cdots \circ (w_1, \tau/\lambda) = \varphi_\lambda,$$
$$(w'_{n_\rho}, \tau/\rho) \circ \cdots \circ (w'_1, \tau/\rho) = \varphi_\rho,$$

donde los $w_i$ (resp. $w'_j$) son vértices de simetría de $\tau/\lambda$ (resp. $\tau/\rho$) ordenados lexicográficamente. De esta forma,

$$\varphi = (w_{n_\lambda}\rho, \tau) \circ \cdots \circ (w_1\rho, \tau) \circ (w'_{n_\rho}\lambda, \tau) \circ \cdots \circ (w'_1\lambda, \tau) \circ (\varepsilon, \tau)$$

que es la factorización que buscábamos. □

Tenemos un funtor $\mathbf{leaves} : \mathbf{Trees} \to \mathbf{Set}$ que le asigna a cada árbol su conjunto de hojas y que actúa en flechas como

$$\mathbf{leaves}(v, \tau) = \mathbf{flip}_v|_{\mathbf{leaves}(\tau)}.$$

**Proposición 4.14.** *El funtor* **leaves** *es fiel e inyectivo en objetos.*

*Demostración.* La inyectividad en objetos es evidente. Si $f, g : \tau \to \tau'$ son flechas en **Trees** tales que $\mathbf{leaves}(f) = \mathbf{leaves}(g)$ entonces $\mathbf{leaves}(g^{-1}f) = \mathrm{id}_{\mathbf{leaves}(\tau)}$, por lo que para ver que es fiel basta con probar que el morfismo de grupos $\mathbf{leaves} : \mathrm{Aut}(\tau) \to S(\mathbf{leaves}(\tau))$ es inyectivo para todo árbol $\tau$. De hecho, nos basta con probar este hecho para al menos un árbol en cada clase de isomorfismo de la categoría **Trees**, por lo que lo probaremos sólo para árboles recursivamente regulares.

Fijemos entonces un árbol $\tau$ recursivamente regular y consideremos $f \in \mathrm{Aut}(\tau)$. Usando la Proposición 4.13 sabemos que

$$f = (v_r, \tau) \circ \cdots \circ (v_1, \tau)$$

con los $v_i$ vértices de simetría de $\tau$ y $v_i \prec v_j$ si $i < j$, y podemos elegir una tal factorización que minimice $r$. Si $f$ es la identidad la afirmación que queremos probar es evidente, por lo que supondremos que no lo es. En ese caso la minimalidad de $r$ implica que $r \geq 1$. Consideremos entonces una hoja de $\tau$ de la forma $w\lambda v_1$. Tenemos que

$$\mathbf{leaves}(v_1, \tau)(w\lambda v_1) = \mathbf{flip}_{v_1}(w\lambda v_1) = w\rho v_1,$$

y si $v_1 \prec v$,

$$\mathbf{flip}_v(w\rho v_1) = w'\rho v_1$$

para cierta palabra $w' \in M$. Por lo tanto,

$$\mathbf{leaves}(f)(w\lambda v_1) = w'\rho v_1 \neq w\lambda v_1,$$

probando la inyectividad de $\mathbf{leaves} : \mathrm{Aut}(\tau) \to S(\mathbf{leaves}(\tau))$. □

Usando una idea similar a la de la demostración anterior, podemos dar una descripción más precisa de $\mathrm{Aut}(\tau)$ en el caso en que $\tau$ es recursivamente regular.

**Proposición 4.15.** *Si $\tau$ es un árbol recursivamente regular, todo morfismo $\varphi \in \mathrm{Aut}(\tau)$ se escribe* de forma única *como una composición*

$$\varphi = (v_n, \tau) \circ (v_{n-1}, \tau) \circ \cdots \circ (v_1, \tau),$$

*donde los $v_i$ son vértices de simetría de $\tau$ y $v_i \prec v_j$ si $i < j$.*

*Demostración.* Supongamos que

$$\varphi = (v_n, \tau) \circ \cdots \circ (v_1, \tau) = (w_m, \tau) \circ \cdots \circ (w_1, \tau)$$

son dos factorizaciones como las del enunciado. Si fuese $v_1 \prec w_1$, entonces para toda hoja de $\tau$ de la forma $w\lambda v_1$ tendríamos

$$\begin{aligned}\mathbf{leaves}(\varphi)(w\lambda v_1) &= \mathbf{leaves}((v_n, \tau) \circ \cdots \circ (v_1, \tau))(w\lambda v_1) = w'\rho v_1,\\ \mathbf{leaves}(\varphi)(w\lambda v_1) &= \mathbf{leaves}((w_m, \tau) \circ \cdots \circ (w_1, \tau))(w\lambda v_1) = w''\lambda v_1,\end{aligned}$$

lo cual es absurdo. Simétricamente tampoco puede ser $w_1 \prec v_1$, por lo que $v_1 = w_1$ y el resultado se sigue por inducción en el largo de la factorización. □

Gracias a este último resultado podemos dar una descripción del tipo de isomorfismo de $\mathrm{Aut}(\tau)$. Antes de ello, caracterizamos explícitamente los grupos de automorfismos de árboles de aridad pequeña:

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(\tau_{\mathrm{tr}}) &= \{\mathrm{id}\}\\ \mathrm{Aut}(\mathbf{V}) &\cong \mathbb{Z}_2\\ \mathrm{Aut}(\tau_{\mathrm{tr}} \smile \mathbf{V}) &\cong \mathbb{Z}_2\\ \mathrm{Aut}(\tau_{\mathrm{tr}} \smile \tau_{\mathrm{tr}} \smile \mathbf{V}) &\cong \mathbb{Z}_2\\ \mathrm{Aut}(\mathbf{V} \smile \mathbf{V}) &\cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2,\end{aligned}$$

donde en el último caso el grupo $\mathbb{Z}_2$ que aparece del lado derecho del producto semidirecto actúa permutando los factores del producto $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Para el caso general disponemos del siguiente resultado:

**Corolario 4.16.** *Si $\tau$ es un árbol recursivamente regular con al menos 3 hojas, entonces*

$$\mathrm{Aut}(\tau) \cong \begin{cases}\mathrm{Aut}(\tau/\lambda) \times \mathrm{Aut}(\tau/\rho) & \text{si } \varepsilon \text{ es un vértice de simetría de } \tau,\\ (\mathrm{Aut}(\tau/\lambda) \times \mathrm{Aut}(\tau/\rho)) \rtimes \langle(\varepsilon, \tau)\rangle & \text{si no,}\end{cases}$$

*donde $(\varepsilon, \tau)$ actúa sobre $\mathrm{Aut}(\tau/\lambda) \times \mathrm{Aut}(\tau/\rho)$ permutando los factores del producto.*

Vale la pena observar que obviamente, si $\tau \cong \tau'$ entonces $\mathrm{Aut}(\tau) \cong \mathrm{Aut}(\tau')$, por lo que este corolario permite describir el grupo de automorfismos de árboles arbitrarios: si $\tau$ no es recursivamente regular, basta con tomar cualquier árbol $\tau'$ que sí lo sea y esté en su clase de isomorfismo. Notamos también que en la situación del corolario, el grupo $\mathrm{Aut}(\tau/\lambda) \times \mathrm{Aut}(\tau/\rho)) \rtimes \langle(\varepsilon, \tau)\rangle$ es isomorfo al producto ***wreath*** $\mathrm{Aut}(\tau/\lambda) \wr \mathbb{Z}_2$.

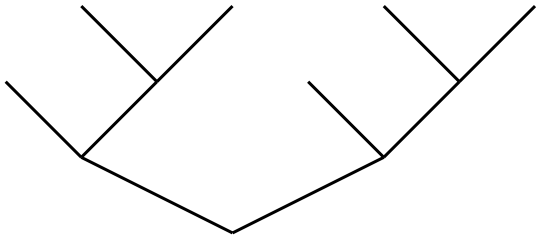
*Demostración.* La afirmación es evidente en el caso en que $\varepsilon$ no es un vértice de simetría de $\tau$, dado que los flips en vértices que no son raíces generan al grupo y los flips en vértices de ramas diferentes del árbol conmutan entre sí.

Si $\varepsilon$ es un vértice de simetría, los árboles $\tau/\lambda$ y $\tau/\rho$ son el mismo dado que $\tau$ es recursivamente regular. Escribimos $G_\lambda$ y $G_\rho$ para los subgrupos de $\mathrm{Aut}(\tau)$ generados por los flips en vértices de simetría de las ramas izquierda y derecha, respectivamente. Es fácil ver que el subgrupo de $\mathrm{Aut}(\tau)$ generado por todos los flips salvo el flip de la raíz es isomorfo a $G_\lambda \times G_\rho$, de nuevo por las relaciones de conmutación. Además, si $v$ es un vértice de simetría de $\tau/\lambda$ vale la identidad

$$(\varepsilon, \tau) \circ (v\lambda, \tau) \circ (\varepsilon, \tau) = (v\rho, \tau)$$

en $\mathrm{Aut}(\tau)$, por lo que vemos que $(\varepsilon, \tau)$ actúa por conjugación intercambiando los elementos de $G_\lambda \cong \mathrm{Aut}(\tau/\lambda)$ y $G_\rho \cong \mathrm{Aut}(\tau/\rho)$. □

Esta observación, junto con los hechos de que $\mathrm{Aut}(\tau_{\mathrm{tr}}) = \{\mathrm{id}\}$ y $\mathrm{Aut}(\mathbf{V}) \cong \mathbb{Z}_2$ establecen que el grupo de automorfismos de todo árbol es isomorfo a un producto *wreath* iterado de productos de $\mathbb{Z}_2$. Por ejemplo, el grupo de automorfismos del árbol $\tau$ de la figura



es isomorfo a

$$(\mathrm{Aut}(\tau_{\mathrm{tr}} \frown \mathbf{V}) \times \mathrm{Aut}(\tau_{\mathrm{tr}} \frown \mathbf{V})) \rtimes \mathbb{Z}_2,$$

y como

$$\mathrm{Aut}(\tau_{\mathrm{tr}} \frown \mathbf{V}) \cong \mathrm{Aut}(\tau_{\mathrm{tr}}) \times \mathrm{Aut}(\mathbf{V}) \cong \mathbb{Z}_2,$$

es

$$\mathrm{Aut}(\tau) \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2.$$

## 4.8 Grupoides y coinvariantes

Precisamos un último preliminar técnico: el del espacio de coinvariantes respecto a un grupoide. En esta sección presentamos esta idea y la relacionamos con la construcción más familiar de coinvariantes respecto a la acción de un grupo.

Si $G$ es un grupo y $V \in \mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ es una representación de $G$, notamos $R_G(V)$ al $\Bbbk$-subespacio de $V$ generado por el conjunto

$$\{v - g(v) : g \in G, v \in V\}.$$

El **espacio de coinvariantes** $V_G$ es el cociente

$$V_G = V/R_G(V).$$

Más generalmente, si $\mathbf{X}$ es un grupoide, $F : \mathbf{X} \to \mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ un funtor y $X \in \mathrm{obj}(\mathbf{X})$, notamos

$$O(X) = \bigoplus_{Y \cong X} F(Y)$$

a la órbita de $X$ y llamamos $R_{\mathbf{X}}(X)$ al $\Bbbk$-subespacio de $O(X)$ generado por el conjunto

$$\{w - F(f)(w) : f \in \mathrm{Hom}(Y, Y'), Y \cong Y' \cong X, w \in F(Y)\},$$

o alternativamente por el conjunto

$$\{F(f)(w) - F(g)(w) : f, g \in \mathrm{Hom}(Y, Y'), Y \cong Y' \cong X, w \in F(Y)\}.$$

El **espacio de coinvariantes** $F_{\mathbf{X}}(X)$ es el cociente

$$F_{\mathbf{X}}(X) = O(X)/R_{\mathbf{X}}(X).$$

Observamos que esta construcción generaliza a la anterior si pensamos a una representación de $G$ como un funtor $F : G \to \mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ donde pensamos a $G$ como una categoría con un único objeto. Vale la pena destacar también que si $X \cong Y$ en $\mathbf{X}$, entonces $F_{\mathbf{X}}(X) = F_{\mathbf{X}}(Y)$.

**Proposición 4.17.** *Sea* $\mathbf{X}$ *un grupoide,* $F : \mathbf{X} \to \mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ *un funtor y* $X \in \mathrm{obj}(\mathbf{X})$ *y veamos a* $F(X)$ *como una representación del grupo* $\mathrm{Aut}_{\mathbf{X}}(X)$ *gracias a* $F$*. La inclusión*

$$F(X) \hookrightarrow O(X)$$

*induce un isomorfismo*

$$F_{\mathrm{Aut}_{\mathbf{X}}(X)}(X) \cong F_{\mathbf{X}}(X).$$

*Demostración.* La inclusión $\mathrm{inc} : F(X) \hookrightarrow O(X)$ induce un epimorfismo $F(X) \twoheadrightarrow F_{\mathbf{X}}(X)$. En efecto, si $w \in F(Y)$ entonces existen $v \in F(X)$ y una flecha $f : X \to Y$ en $\mathbf{X}$ con $F(f)(v) = w$, por lo que $\mathrm{inc}(v) = w$ en $F_{\mathbf{X}}(X)$. Es claro además que, como $v = F(f)(v)$

en $F_{\mathbf{X}}(X)$ para todo $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{X}}(X)$, este epimorfismo se factoriza por el espacio de coinvariantes por $\mathrm{Aut}_{\mathbf{X}}(X)$, dando lugar a un epimorfismo

$$F_{\mathrm{Aut}_{\mathbf{X}}(X)}(X) \twoheadrightarrow F_{\mathbf{X}}(X).$$

Veamos que además es un monomorfismo. Para ello basta ver que un $v \in F(X)$ cuya imagen en $F_{\mathbf{X}}(X)$ es nula pertenece a $R_{\mathrm{Aut}_{\mathbf{X}}(X)}(F(X))$. Un tal $v$ puede escribirse de la forma

$$v = \sum_{i=1}^{n} (F(f_i) - F(g_i))(y_i), \tag{4.15}$$

donde $f_i, g_i : Y_i \to Y_i'$ son flechas en $\mathbf{X}$, $X \cong Y_i \cong Y_i'$ en $\mathbf{X}$ e $y_i \in F(Y_i)$. Como $X \cong Y_i$ en $\mathbf{X}$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que para todo $i$ el dominio de $f_i$ y $g_i$ es $X$. Esto se debe a que, si $\theta : X \to Y_i'$ es un isomorfismo, entonces

$$\Big(F(f_i) - F(g_i)\Big)(y_i) = \Big(F(f_i\theta) - F(g_i\theta)\Big)\Big(F(\theta^{-1})(y_i)\Big).$$

Elijamos ahora para cada $Y_i' \cong X$ distinto de $X$ un isomorfismo $h_i : Y_i' \to X$ en $\mathbf{X}$ y definamos $h : O(X) \to O(X)$ como

$$h = \mathrm{id}_{F(X)} + \sum_{Y_i' \neq X} F(h_i).$$

En particular, $h$ se restringe a la identidad sobre $F(X)$ y es tal que si $g : X \to Y_i$ es una flecha en $\mathbf{X}$, entonces $hF(g) = F(h_i)F(g) = F(h_i g)$ donde $h_i g \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{X}}(X)$. Luego, aplicando $h$ a ambos lados en (4.15) obtenemos

$$v = \sum_{i=1}^{n} (F(h_i f_i) - F(h_i g_i))(y_i),$$

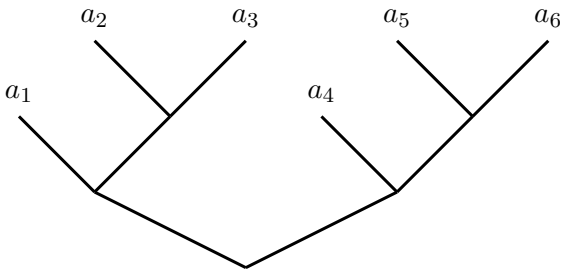
por lo que $v \in R_{\mathrm{Aut}_{\mathbf{X}}(X)}(F(X))$ como queríamos. □

## 4.9 El funtor $\underline{A}$

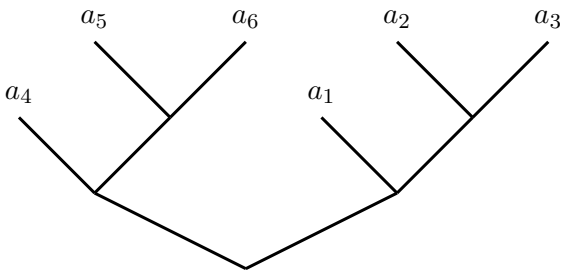
En esta sección extenderemos la función $\underline{A} : \mathbf{Trees} \to \mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ definida sobre objetos en la ecuación (4.5) a un funtor. Para poder definir $\underline{A}$ sobre las flechas precisamos algo más de notación. Si $\tau$ es un árbol de aridad $n$, $l = |\tau/\lambda|$, $r = |\tau/\rho|$ y $v$ es uno de sus vértices internos de $\tau$, tenemos un morfismo lineal $\mathbf{flip}_{(v,\tau)} : \underline{A}(\tau) \to \underline{A}(\mathbf{flip}_v(\tau))$ definido del siguiente modo:

$$\mathbf{flip}_{(v,\tau)}(\tau(a_{1,n})) = \begin{cases} \mathrm{id} & \text{si } \tau = \tau_{\mathrm{tr}}, \\ (-1)^{lr}\mathbf{flip}_{\varepsilon}(\tau)(a_{l+1,n} \otimes a_{1,l}) & \text{si } v = \varepsilon \text{ y } \tau \neq \tau_{\mathrm{tr}}, \\ \mathbf{flip}_{(w,\tau/\lambda)}(\tau/\lambda(a_{1,l})) \otimes \tau/\rho(a_{l+1,n}) & \text{si } v = w\lambda, \\ \tau/\lambda(a_{1,l}) \otimes \mathbf{flip}_{(w,\tau/\rho)}(\tau/\rho(a_{l+1,n})) & \text{si } v = w\rho. \end{cases}$$

Por ejemplo, consideremos al elemento $\tau(a_{1,6})$ de la siguiente figura:




En ese caso, el *flip* del elemento $\tau(a_{1,6})$ en la raíz es el *inverso aditivo* del elemento




Después de estos preliminares podemos describir la acción en flechas del funtor $\underline{A}$, que está dada sobre los generadores por

$$\underline{A}(v,\tau) = \mathbf{flip}_{(v,\tau)} : \underline{A}(\tau) \to \underline{A}(\mathbf{flip}_v(\tau)).$$

Una verificación que omitimos prueba que el funtor $\underline{A}$ es compatible con las identidades que definen la categoría **Trees**.

Daremos finalmente una descripción del espacio de coinvariantes $\underline{A}(\tau)_{\mathbf{Trees}}$ construido en la sección anterior en términos de la identificación canónica $\tau : A^{\otimes|\tau|} \to \underline{A}(\tau)$. Recordamos que un árbol no trivial $\tau$ es regular si o bien $\tau/\lambda = \tau/\rho$ o bien si $\tau/\lambda$ y $\tau/\rho$ no son isomorfos en **Trees**, y que es recursivamente regular si $\tau/v$ es regular para todo vértice $v$ de $\tau$.

**Proposición 4.18.** *Para cada árbol recursivamente regular $\tau$, definimos al funtor $\Gamma_\tau$ como*

$$\Gamma_\tau = \begin{cases} \mathrm{id} & \text{si } \tau = \tau_{tr}, \\ \Gamma_{\tau/\lambda} \otimes \Gamma_{\tau/\rho} & \text{si } |\tau| > 1 \text{ y } \tau/\lambda \neq \tau/\rho, \\ S^2(\Gamma_{\tau/\lambda}) & \text{si } |\tau| > 1,\ \tau/\lambda = \tau/\rho \text{ y } |\tau/\lambda| \text{ es par}, \\ \Lambda^2(\Gamma_{\tau/\lambda}) & \text{si } |\tau| > 1,\ \tau/\lambda = \tau/\rho \text{ y } |\tau/\lambda| \text{ es impar}. \end{cases}$$

*Para cada tal $\tau$, la aplicación $\tau : A^{\otimes|\tau|} \to \underline{A}(\tau)$ induce un isomorfismo*

$$\Gamma_\tau(A) \to \underline{A}_{\mathrm{Aut}(\tau)}(\tau) \cong \underline{A}_{\mathbf{Trees}}(\tau).$$

*Demostración.* Si $\tau$ es trivial, $\mathrm{Aut}(\tau)$ también lo es y el resultado es obvio. Supongamos ahora que el resultado es válido para todo árbol $\eta$ con $|\eta| < |\tau| = n$ y que la raíz no es un vértice de simetría de $\tau$. En ese caso, gracias al Corolario 4.16 sabemos que $\mathrm{Aut}(\tau) = G_\lambda \times G_\rho$, donde $G_\lambda$ y $G_\rho$ son los subgrupos generados por los *flips* en vértices de simetría que son descendientes de $\lambda$ y de $\rho$ respectivamente. Observemos que hay un isomorfismo $f_\lambda : G_\lambda \to \mathrm{Aut}(\tau/\lambda)$ y que $G_\lambda$ actúa en $\tau(A^{\otimes n})$ de modo que

$$g \cdot \tau(a_{1,n}) = (f_\lambda(g) \cdot \tau/\lambda(a_{1,|\tau/\lambda|})) \otimes \tau/\rho(a_{|\tau/\lambda|+1,n})$$

y un hecho similar vale para $G_\rho$. De este modo, el grupo $G_\tau = G_\lambda \times G_\rho$ actúa diagonalmente en $\tau(A^{\otimes n}) = \tau/\lambda(A^{\otimes|\tau/\lambda|}) \otimes \tau/\rho(A^{\otimes|\tau/\rho|})$. Así, por inducción obtenemos que

$$\tau(A^{\otimes n})_{\mathrm{Aut}(\tau)} \cong \tau/\lambda(A^{\otimes|\tau/\lambda|})_{G_\lambda} \otimes \tau/\rho(A^{\otimes|\tau/\rho|})_{G_\rho} \cong \Gamma_{\tau/\lambda}(A) \otimes \Gamma_{\tau/\rho}(A).$$

Supongamos ahora que la raíz sí es un vértice de simetría de $\tau$. Llamemos $G_\varepsilon$ al subgrupo generado por el *flip* en la raíz; en ese caso $\mathrm{Aut}(\tau) = (G_\lambda \times G_\rho) \rtimes G_\varepsilon$, de nuevo por el Corolario 4.16. Razonando de forma similar al caso anterior y usando que $\tau/\lambda = \tau/\rho$, tenemos que

$$\tau(A^{\otimes n})_{\mathrm{Aut}(\tau)} \cong \left(\tau/\lambda(A^{\otimes|\tau/\lambda|})_{G_\lambda} \otimes \tau/\rho(A^{\otimes|\tau/\rho|})_{G_\rho}\right)_{G_\varepsilon} \cong \left(\Gamma_{\tau/\lambda}(A) \otimes \Gamma_{\tau/\lambda}(A)\right)_{G_\varepsilon}.$$

El grupo $G_\varepsilon$ actúa en el último término de esta cadena de isomorfismos intercambiando los factores del producto tensorial e introduciendo el signo $(-1)^{|\tau/\lambda|^2}$, por lo que podemos concluir que $\tau(A^{\otimes n})_{\mathrm{Aut}(\tau)}$ es isomorfo a $S^2(\Gamma_{\tau/\lambda})(A)$ cuando $|\tau/\lambda|$ es par y a $\Lambda^2(\Gamma_{\tau/\lambda})(A)$ cuando es impar. □

A modo de ejemplo, si $\tau$ es el árbol de 6 hojas de la figura de la página anterior, el funtor $\Gamma_\tau$ es $\Lambda^2(- \otimes S^2(-))$.

## 4.10 El complejo $C_\bullet(A)$

Para cada número natural $n$ definimos $R_n(A)$ como el subespacio de $T_n(A)$ generado por todas las diferencias de la forma $x - \mathbf{flip}_{(v,\tau)}(x)$, donde $\tau$ es un árbol de aridad $n$, $v$ un vértice interior de $\tau$ y $x$ un elemento de $\underline{A}(\tau)$. Llamamos $C_n(A)$ al cociente

$$C_n(A) = T_n(A)/R_n(A).$$

Los subespacios $R_n(A)$ funcionan como un ideal:

**Proposición 4.19.** *Si $x \in R_n(A)$ e $y \in T_k(A)$, entonces $x \otimes y$ e $y \otimes x$ están en $R_{n+k}(A)$.*

*Demostración.* Si $\tau$ es un árbol de aridad $n$, $a \in A^{\otimes n}$ un tensor elemental, $v$ un vértice interior de $\tau$ y $z \in \underline{A}(\tau')$ con $|\tau'| = k$, entonces

$$\begin{aligned}(\tau(a) - \mathbf{flip}_{(v,\tau)}(\tau(a))) \otimes z &= \tau(a) \otimes z - \mathbf{flip}_{(v,\tau)}(\tau(a)) \otimes z \\ &= \tau(a) \otimes z - \mathbf{flip}_{(v\lambda, \tau \frown \tau')}(\tau(a) \otimes z) \in R_{n+k}(A).\end{aligned}$$

Del mismo modo se prueba que $y \otimes x \in R_{n+k}(A)$. □

Gracias a este resultado podemos probar que la diferencial del complejo $T_\bullet$ desciende al complejo $C_\bullet$:

**Teorema 4.20.** *Si $(A, \mu)$ es un álgebra de Lie nilpotente en 2 pasos, la diferencial $d_n : T_n(A) \to T_{n-1}(A)$ es tal que $d_n(R_n(A)) \subseteq R_{n-1}(A)$ y, en consecuencia, induce una diferencial $d : C_\bullet(A) \to C_\bullet(A)$.*

*Demostración.* Veamos primero que la diferencial $d : T_2(A) \to T_1(A)$ es tal que envía $R_2(A)$ en $R_1(A)$. El único árbol $\tau_{\mathrm{tr}}$ de aridad 1 no posee vértices internos, por lo que $R_1(A) = 0$. Por otro lado el único árbol de aridad 2, al que notamos $\mathbf{V}$, posee un único vértice interno, la raíz, de manera que

$$\begin{aligned}R_2(A) &= \langle \mathbf{V}(a_1 \otimes a_2) - \mathbf{flip}_{(\varepsilon, \mathbf{V})}(\mathbf{V}(a_1 \otimes a_2)) : a_1, a_2 \in A \rangle \\ &= \langle \mathbf{V}(a_1 \otimes a_2 + a_2 \otimes a_1) \rangle.\end{aligned}$$

La antisimetría de $\mu$ implica entonces que $d(R_2(A)) = 0 = R_1(A)$, como queríamos.

Sea ahora $n > 2$ y procedamos inductivamente. Sean $\tau$ un árbol de aridad $n$, $a_{1,n} \in A^{\otimes n}$ un tensor elemental y $v$ un vértice interno de $\tau$ y escribamos $l = |\tau/\lambda|$ y $r = |\tau/\rho|$. Consideremos el elemento

$$\tau(a_{1,n}) - \mathbf{flip}_{(v,\tau)}(\tau(a_{1,n})) \in R_n(A).$$

Veremos que la imagen de este elemento por $d$ pertenece a $R_{n-1}(A)$. Supongamos primero que $v = w\lambda$. Usando nuestra hipótesis inductiva vemos que

$$\begin{aligned}&d\left(\tau(a_{1,n}) - \mathbf{flip}_{(v,\tau)}(\tau(a_{1,n}))\right) \\ &\quad= d\left(\tau/\lambda(a_{1,l}) \otimes \tau/\rho(a_{l+1,n}) - \mathbf{flip}_{(v,\tau)}\left(\tau/\lambda(a_{1,l}) \otimes \tau/\rho(a_{l+1,n})\right)\right) \\ &\quad= d\left(\tau/\lambda(a_{1,l}) \otimes \tau/\rho(a_{l+1,n}) - \mathbf{flip}_{(w,\tau/\lambda)}(\tau/\lambda(a_{1,l})) \otimes \tau/\rho(a_{l+1,n})\right) \\ &\quad= d\left(\left(\tau/\lambda(a_{1,l}) - \mathbf{flip}_{(w,\tau/\lambda)}(\tau/\lambda(a_{1,l})) \otimes \tau/\rho(a_{l+1,n})\right)\right). \\ &\quad= \underbrace{d\left(\tau/\lambda(a_{1,l}) - \mathbf{flip}_{(w,\tau/\lambda)}(\tau/\lambda(a_{1,l}))\right)}_{\in R_{l-1}(A)} \otimes \tau/\rho(a_{l+1,n}) \\ &\qquad+ (-1)^l \underbrace{\left(\tau/\lambda(a_{1,l}) - \mathbf{flip}_{(w,\tau/\lambda)}(\tau/\lambda(a_{1,l}))\right)}_{\in R_l(A)} \otimes d(\tau/\rho(a_{l+1,n})),\end{aligned}$$

y vemos que esto es un elemento de $R_{n-1}(A)$ gracias a la Proposición 4.19. La demostración para el caso en que $v = w\rho$ es análoga.

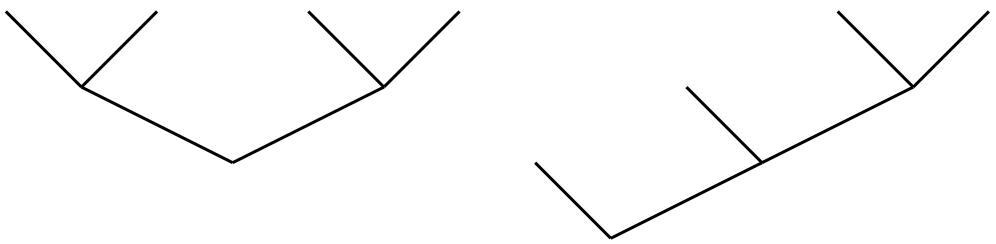
Nos queda analizar el caso en el que $v$ es la raíz de $\tau$. En ese caso,

$$\begin{aligned}
&d\left(\tau(a_{1,n}) - \mathbf{flip}_{(\varepsilon,\tau)}(\tau(a_{1,n}))\right)\\
&\quad= d\left(\tau/\lambda(a_{1,l}) \otimes \tau/\rho(a_{l+1,n}) - \mathbf{flip}_{(\varepsilon,\tau)}(\tau/\lambda(a_{1,l}) \otimes \tau/\rho(a_{l+1,n}))\right)\\
&\quad= d\left(\tau/\lambda(a_{1,l}) \otimes \tau/\rho(a_{l+1,n}) - (-1)^{lr}\tau/\rho(a_{l+1,n}) \otimes \tau/\lambda(a_{1,l})\right)\\
&\quad= \underbrace{d\left(\tau/\lambda(a_{1,l})\right) \otimes \tau/\rho(a_{l+1,n}) - (-1)^{(l-1)r}\tau/\rho(a_{l+1,n}) \otimes d(\tau/\lambda(a_{1,l}))}_{\in R_{n-1}(A)}\\
&\qquad- (-1)^l \underbrace{\left(\tau/\lambda(a_{1,l}) \otimes d(\tau/\rho(a_{l+1,n}) - (-1)^{l(r-1)}d(\tau/\rho(a_{l+1,n})) \otimes \tau/\lambda(a_{1,l}))\right)}_{\in R_{n-1}(A)},
\end{aligned}$$

completando la demostración. □

Definimos de forma inductiva un orden total $\prec$ sobre el conjunto de árboles. Si $|\tau| < |\tau'|$, diremos que $\tau \prec \tau'$. Si $|\tau| = |\tau'|$, diremos que $\tau \prec \tau'$ si $\tau/\lambda \prec \tau'/\lambda$ o bien si $\tau/\lambda = \tau'/\lambda$ y $\tau/\rho \prec \tau'/\rho$.

Diremos que dos árboles $\tau_1$ y $\tau_2$ de la misma aridad son ***flip*-equivalentes** si $\tau_1 \cong \tau_2$ en **Trees**. En cada clase de equivalencia módulo *flips* existe un único árbol minimal para el orden mencionado en el párrafo anterior. Llamaremos a estos árboles distinguidos **árboles de Otter**, dado que Otter estudió en detalle el problema de enumeración de este tipo de árboles en su artículo [Ott48]. Notaremos $\mathrm{Ott}(n)$ al conjunto de árboles de Otter de aridad $n$. Los siguientes son los dos árboles de Otter de aridad 4:



La siguiente tabla contiene los primeros valores de la sucesión $|\mathrm{Ott}(n)|$ que cuenta la cantidad de árboles de Otter de cada cardinal, de acuerdo a [OFI24b]:

| $n$ | $\lvert \mathrm{Ott}(n) \rvert$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 1 |
| 4 | 2 |
| 5 | 3 |
| 6 | 6 |
| 7 | 11 |
| 8 | 23 |
| 9 | 47 |

Observemos que si $\eta$ es un árbol de Otter no trivial, entonces $\eta/\lambda$ y $\eta/\rho$ también son árboles de Otter. También vale la pena destacar que los árboles de Otter son recursivamente regulares. Para ver esto, supongamos que $\tau$ es un árbol de Otter no recursivamente regular. Existe entonces un vértice interno $v$ de $\tau$ tal que $\tau_1 = (\tau/v)/\lambda$ y $\tau_2 = (\tau/v)/\rho$ son isomorfos en **Trees** pero no iguales. Suponiendo sin pérdida de generalidad que $\tau_1 \prec \tau_2$, si reemplazamos $\tau_2$ por $\tau_1$ en $\tau$ obtenemos un árbol isomorfo a $\tau$ pero más pequeño respecto al orden $\prec$, contradiciendo la minimalidad de $\tau$.

Observamos que tenemos una descomposición para $T_n(A)$ dada por

$$T_n(A) = \bigoplus_{\eta \in \mathrm{Ott}(n)} \left( \bigoplus_{\tau \cong \eta} \underline{A}(\tau) \right).$$

Si $R_\eta(A)$ es el $\Bbbk$-subespacio de $R_n(A)$ generado por el conjunto

$$\{x - \mathbf{flip}_v(x) : \tau \cong \eta, v \text{ vértice interno de } \tau, x \in \underline{A}(\tau)\},$$

tenemos una descomposición similar para $R_n(A)$, dada por

$$R_n(A) = \bigoplus_{\eta \in \mathrm{Ott}(n)} R_\eta(A).$$

Para cada árbol de Otter $\eta$ definimos

$$C_\eta(A) = \left( \bigoplus_{\tau \cong \eta} \underline{A}(\tau) \right) / R_\eta(A).$$

Siguiendo la notación de la Sección 4.8 este espacio es simplemente $\underline{A}_{\mathbf{Trees}}(\eta)$. Gracias a la Proposición 4.18 tenemos entonces que

$$C_n(A) \cong \bigoplus_{\eta \in \mathrm{Ott}(n)} \Gamma_\eta(A).$$

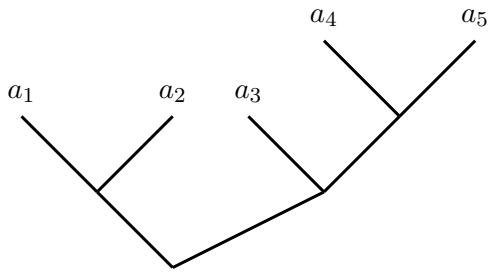
Bajo esta identificación, podemos dar una presentación útil para el cómputo explícito de los primeros grados del complejo $C_\bullet(A)$:

$$\ldots \xrightarrow{d_6} \begin{array}{c} A\otimes A\otimes A\otimes\Lambda^2(A) \\ \oplus \\ A\otimes S^2(\Lambda^2(A)) \\ \oplus \\ \Lambda^2(A)\otimes A\otimes\Lambda^2(A) \end{array} \xrightarrow{d_5} \begin{array}{c} A\otimes A\otimes\Lambda^2(A) \\ \oplus \\ S^2(\Lambda^2(A)) \end{array} \xrightarrow{d_4} A\otimes\Lambda^2(A) \xrightarrow{d_3} \Lambda^2(A) \xrightarrow{d_2} A \to 0$$

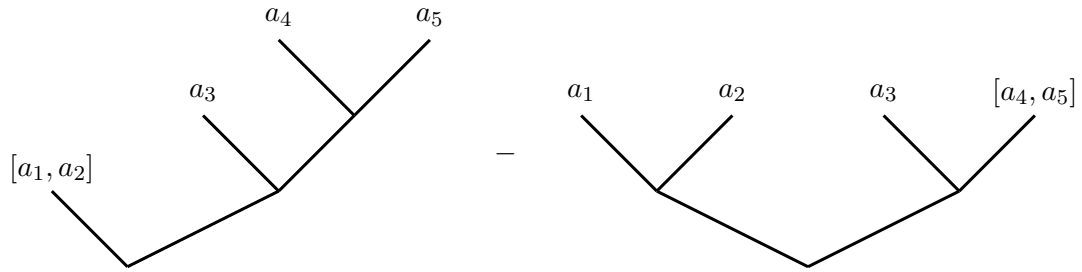
Brindamos también fórmulas explícitas para la diferencial en estos grados, escribiendo $[-,-]$ para el corchete del álgebra de Lie $A$:

| Grado | Sumando | Elemento básico genérico | Imagen por la diferencial |
|---|---|---|---|
| 2 | $\Lambda^2(A)$ | $a_1 \wedge a_2$ | $[a_1, a_2]$ |
| 3 | $A \otimes \Lambda^2(A)$ | $a_1 \otimes (a_2 \wedge a_3)$ | $-a_1 \wedge [a_2, a_3]$ |
| 4 | $A \otimes A \otimes \Lambda^2(A)$ | $a_1 \otimes a_2 \otimes (a_3 \wedge a_4)$ | $a_1 \otimes (a_2 \wedge [a_3, a_4])$ |
| 4 | $S^2(\Lambda^2(A))$ | $(a_1 \wedge a_2) \cdot (a_3 \wedge a_4)$ | $[a_1, a_2] \otimes (a_3 \wedge a_4) + [a_3, a_4] \otimes (a_1 \wedge a_2)$ |
| 5 | $A \otimes A \otimes A \otimes \Lambda^2(A)$ | $a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes (a_4 \wedge a_5)$ | $-a_1 \otimes a_2 \otimes (a_3 \wedge [a_4, a_5])$ |
| 5 | $A \otimes S^2(\Lambda^2(A))$ | $a_1 \otimes ((a_2 \wedge a_3) \cdot (a_4 \wedge a_5))$ | $-a_1 \otimes [a_2, a_3] \otimes (a_4 \wedge a_5)$<br>$-a_1 \otimes [a_4, a_5] \otimes (a_2 \wedge a_3)$ |
| 5 | $\Lambda^2(A) \otimes A \otimes \Lambda^2(A)$ | $(a_1 \wedge a_2) \otimes a_3 \otimes (a_4 \wedge a_5)$ | $[a_1, a_2] \otimes a_3 \otimes (a_4 \wedge a_5)$<br>$-(a_1 \wedge a_2) \cdot (a_3 \wedge [a_4, a_5])$ |

A modo de ejemplo, un elemento típico del sumando $\Lambda^2(A) \otimes A \otimes \Lambda^2(A) \subseteq C_5(A)$ puede representarse como




y su imagen por la diferencial $d_5$ es




donde el primer término pertenece al sumando $A \otimes A \otimes \Lambda^2(A)$ y el segundo al sumando $S^2(\Lambda^2(A))$ de $C_4(A)$.

Como podemos ver, incluso en el caso relativamente sencillo de la homología a coeficientes triviales, el complejo de Koszul resulta ser complicado de describir. A modo

de comparación, Brega, Cagliero y Chaves-Ochoa definen en [BCCO17, (2.3)] el segundo espacio de cohomología de un álgebra de Lie nilpotente en 2 pasos $(A, \mu)$ como

$$H^2(A) = \frac{\ker(d^2) \cap \ker(d)}{\operatorname{img}(d^1)},$$

donde $d^1$ y $d^2$ son los diferenciales del complejo de Chevalley–Eilenberg para la acción adjunta de $A$ y $d : \Lambda^2(A^*) \otimes A \to (A^*)^{\otimes 3} \otimes A$ es tal que

$$d(\sigma)(x, y, z) = \mu(\sigma(x, y), z) + \sigma(\mu(x, y), z)$$

para todo $\sigma \in \Lambda^2(A^*) \otimes A$ y para cualquier elección de $x, y, z \in A$. Si escribimos $R = \Lambda^2(A^*) \otimes A$, el motivo por el cual $d$ se define de esta forma es que $\sigma$ pertenece al núcleo de $d$ precisamente cuando $\mu + t\sigma \in R[t]/(t^2)$ da lugar a una estructura de álgebra de Lie sobre $A$ que resulta nilpotente en 2 pasos. De esta forma, los elementos de $H^2(A)$ son deformaciones de $\mu$ en el sentido de Gerstenhaber dentro de la variedad de álgebras de Lie nilpotentes en 2 pasos.

En contraste, la teoría de operads nos da una manera sistemática para poder describir los espacios de cohomología y poder emplear las herramientas del álgebra homológica para el cómputo explícito en ejemplos concretos.

# Apéndice A

# Código para la determinación de los caracteres de §2.7

El siguiente código de `SageMath` [Dev24] permite determinar los caracteres correspondientes a los módulos de la página $E_1$ de la sucesión espectral asociada a la especie $L$:

```
import itertools
from sage.combinat.subset import SubsetsSorted

def basis(n, deg):
    """La base standard para L^{\otimes deg+1}([n]) = E_0^{n, deg-n+1}.
    Este metodo tiene sentido para 1 <= n, 0 <= deg <= n-1."""
    b = []
    for comp in Compositions(n, length=1 + deg):
        for perm in Permutations(n):
            cur = []
            ind = 0
            for i in range(1 + deg):
                cur.append(perm[ind : ind + comp[i]])
                ind += comp[i]
            b.append(cur)
    return b


def comult(elt):
    """Comultiplica un elemento basico de L([n]), representado como una
    lista de numeros sin repeticiones."""
    res = []
    n = len(elt)
    r = range(n)
    for sset in sage.combinat.subset.SubsetsSorted(r):
        if len(sset) != 0 and len(sset) != n:
            comp = [i for i in r if i not in sset]
            res.append([
                [elt[i] for i in sset],
                [elt[i] for i in comp]
            ])
    return res
```

```
def complex(n):
    """El espacio vectorial graduado \Sigma^n_{\bullet}
    = L^{\otimes \bullet}([n]), presentado como una lista ordenada de bases.
    Este metodo tiene sentido para 1 <= n."""
    return [basis(n, i) for i in range(n)]


def differentiate(elt, codomain_basis=[]):
    """Si elt es un elemento basico de L^{\otimes k}([n]), este metodo
    devuelve las coordenadas de la aplicacion de la diferencial sobre elt
    en terminos de la base standard. La base del codominio puede pasarse
    como parametro opcional, para ahorrar tiempo de ejecucion si van a
    calcularse muchos valores de la diferencial."""
    k = len(elt)
    if not codomain_basis:
        n = max([item for sublist in elt for item in sublist])
        codomain_basis = basis(n, k)
    res = [0 for _ in range(len(codomain_basis))]
    sign = 1
    for i in range(k):
        if len(elt[i]) != 1:
            for term in comult(elt[i]):
                cur = elt[:i] + term + elt[i + 1:]
                res[codomain_basis.index(cur)] += sign
        sign *= -1
    return res


def differential(n, deg):
    """La diferencial E_0^{n, deg-n} -> E_0^{n, deg-n+1}, como matriz."""
    rows = []
    domain_basis = basis(n, deg-1)
    codomain_basis = basis(n, deg)
    for basic_elt in domain_basis:
        rows.append(differentiate(basic_elt, codomain_basis))
    return matrix(QQ, rows).transpose()


class Formal_combination:
    """Una clase para representar e imprimir combinaciones lineales de
    forma practica."""

    def __init__(self, basis, coords):
        self.basis = basis
        self.coords = coords

    def __repr__(self):
        rep = ''
        for (i, coord) in enumerate(self.coords):
            if coord != 0:
                if coord != 1:
                    rep += str(coord) + ' * '
                rep += str(self.basis[i]) + ' + '
        if rep != '':
            return rep[:-3]
        return rep
```

```
    def permute(self, permutation):
        """Aplica una permutacion (presentada como lista de valores) a una
        combinacion formal de elementos basicos."""
        new_coords = [0 for _ in range(len(self.coords))]
        for (i, coord) in enumerate(self.coords):
            if coord != 0:
                permuted_basic_elt = []
                for part in self.basis[i]:
                    permuted_basic_elt.append([
                        permutation[i-1] for i in part
                    ])
                new_coords[self.basis.index(permuted_basic_elt)] = coord
        return Formal_combination(self.basis, new_coords)


def get_homology_basis(n, deg):
    """Devuelve una base de E_1^{n, -deg} como objetos de tipo
    Formal_combination."""
    k = n-1-deg
    ch = ChainComplex([differential(n, i) for i in range(1, n)])
    return [
        Formal_combination(basis(n, k), chain[1].vector(k))
        for chain in ch.homology(generators=True)[k]
    ]


def eval_top_character(n, permutation):
    """Calcula el valor del caracter de E_1^{n,-n+1} en una permutacion
    especifica."""
    top_basis = get_homology_basis(n, n - 1)
    return matrix([
        elt.permute(permutation).coords[:factorial(n - 1)]
        for elt in top_basis
    ]).trace()


def get_top_character(n):
    """Devuelve el valor del caracter de E_1^{n,-n+1}. La logica para este
    caso esta separada de los demas, dado que este espacio es simplemente
    un subespacio y no un subcociente."""
    G = SymmetricGroup(n)
    conjugacy_classes = [
        perm.representative().tuple()
        for perm in G.conjugacy_classes()
    ]
    return ClassFunction(
        G,
        [eval_top_character(n, perm) for perm in conjugacy_classes]
    )


def get_character(n, deg):
    """Calcula el caracter del Sn-modulo E_1^{n, -deg} si 0 <= deg <= n-1.
    Este valor se devuelve como un objeto ClassFunction de SageMath."""
    deg = n-1-deg
    if deg == 0:
        return get_top_character(n)
```

```
    G = SymmetricGroup(n)
    conjugacy_classes = [
        perm.representative().tuple()
        for perm in G.conjugacy_classes()
    ]

    cycles = differential(n, deg + 1).transpose().kernel().basis()
    boundaries = differential(n, deg).transpose().image().basis()
    boundaries_followed_by_cycles = list(boundaries)
    for v in cycles:
        if v not in span(boundaries_followed_by_cycles):
            boundaries_followed_by_cycles.append(v)
    homology_basis = boundaries_followed_by_cycles[len(boundaries):]

    def act_by_perm(coords, perm):
        """Calcula la accion permutacion de perm sobre un elemento de la
        base standard expresado en coordenadas."""

        # Primero obtenemos las coordenadas del elemento permutado en la
        # base standard

        formal_elt = Formal_combination(basis(n, deg), coords)
        permuted_coords = formal_elt.permute(perm).coords

        # El resultado sigue perteneciendo al espacio de ciclos, pero lo
        # podemos escribir como una suma entre un borde y una combinacion
        # lineal de nuestra base para la homologia. Para obtener las
        # coordenadas del elemento en la homologia, basta con obtener las
        # coordenadas de su representante en una base del espacio de ciclos
        # conformada por una base del espacio de bordes seguido de nuestra
        # base para la homologia y simplemente olvidarnos de las primeras
        # coordenadas.

        V = QQ ^ (len(homology_basis[0]))

        coords_in_cycles = V.subspace_with_basis(
            boundaries_followed_by_cycles
        ).coordinate_vector(permuted_coords)
        coords_in_homology = coords_in_cycles[len(boundaries):]

        return coords_in_homology

    def char_value(perm):
        """Calcula el valor del caracter correspondiente en una
        permutacion dada."""
        mtx = []
        for elt in homology_basis:
            mtx.append(act_by_perm(elt, perm))
        return matrix(mtx).trace()

    return ClassFunction(
        G,
        [char_value(perm) for perm in conjugacy_classes]
    )
```

El método principal del código es `get_character()`. A modo de ejemplo, veamos cómo obtener los caracteres de las componentes irreducibles de $E_1^{4,-2}(L)$:

```
>>> [irrep.values() for irrep in get_character(4,2).irreducible_constituents()]

[[2, 0, 2, -1, 0], [3, -1, -1, 0, 1], [3, 1, -1, 0, -1]]
```

Como vemos, esto sólo nos devuelve los caracteres irreducibles presentes, pero no su multiplicidad. Para calcular la multiplicidad basta con calcular el producto interno entre los caracteres irreducibles y el caracter original:

```
def get_multiplicity(char, irred_char, n):
    G = SymmetricGroup(n)
    classes = G.conjugacy_classes()
    return sum([
      char[i] * irred_char[i] * len(classes[i])
      for i in range(len(char))
    ]) / factorial(n)
```

De este modo obtenemos las siguientes multiplicidades (comparar con la Tabla 2.7):

```
>>> irreps = [
  irrep.values() for irrep in get_character(4,2).irreducible_constituents()
]

>>> [
  get_multiplicity(get_character(4,2).values(), irrep, 4)
  for irrep in irreps
]

[1, 2, 1]
```

# Glosario


álgebra de Heisenberg, 120
álgebra de Lie nilpotente en $k$ pasos, 105
álgebra de Malvenuto-Reutenauer, 98
árbol, 108
    contracción, 111
    de Otter, 137
    *flip*-equivalencia, 137
    inducido, 108
    recursivamente regular, 127
    regular, 127
    trivial, 108
    vértice, 108
      de simetría, 126
      posición, 111
      superficial, 111
    yuxtaposición, 126
arreglo de hiperplanos, 52
    arreglo de trenzas, 54
    cara, 53
    complejificación, 52
    cámara, 52
    producto de Tits, 53
    restricción, 53
    reticulado de intersecciones, 53
automorfismo interior, 94

bandera, 2
    base adaptada a, 3
    completa, 2
    estándar, 3
    función de distancia, 16
    longitud, 2
    proyección a un subespacio, 3
    refinamiento, 3
    restricción a un subespacio, 2
    tipo, 2
    variedad de, 20
base agradable, 122
bicomódulo
    formas torcidas, 91
    inversible, 90

celda de Schubert, 21
complejo de Salvetti, 56
composición, 1
    longitud, 1
    refinamiento, 1
comódulo
    libre, 8
construcción cobar reducida, 11
convolución, 7
coálgebra
    conexa, 86
    trivial, 86

**e**-bicomódulo, 9
    cohomología, 11
    trivial, 11
especie, 4
    concentrada en dimensión $n$, 7
    de banderas, 32
    de banderas completas, 32

de órdenes lineales, 48
exponencial, 9
exponencial reducida, 11
relativamente proyectiva, 7
estandardización, 77

forma bilineal simétrica, 112
adjunta, 112
complemento ortogonal respecto a, 112
libre de isotropía, 112
no degenerada, 112

grupo de Picard, 93

laplaciano, 113

magma
agradable, 123
Lie-tabular, 123
tabular, 123
módulo de Lie, 74
módulo de Steinberg, 14

números de Stirling de primera especie
sin signo, 65

*order complex*, 14

palabra
multilineal, 76
partición ordenada, 1
estándar, 2
longitud, 1
tipo, 1
permutación
conexa, 101
permutación de Jordan-Hölder, 16
polinomio de Lie, 74
polinomios de Gauss, 23
producto cotensorial, 86
producto de Cauchy, 4
proyección de Tits, 33

shuffle, 3
subcomódulo de coinvariantes, 87
subgrupo de Young, 2
subgrupo estándar de Borel, 15
subgrupo parabólico, 18
rango, 20
tipo, 20

# Notación


$\Bbbk$, 1
$\mathbb{F}$, 1
$\ell$, 1
$[\![n]\!]$, 1
$[\![m,n]\!]$, 1
$k \vDash n$, 1
$\preceq$, 1, 3
$\mathcal{F}$, 2
$\mathrm{Fl}(V)$, 2
$\mathbf{Fin}_K$, 4
$\mathbf{Fin}_K^\times$, 4
**Sp**, 4
$\mathcal{F} * \mathcal{G}$, 7
**e**, 9
Hilb, 9
St, 14
d, 16
Stab, 18
$\Pi_k$, 20
$[n]_\hbar$, 23
$\binom{n}{i}_\hbar$, 23
**L**, 32
$\mathfrak{dim}$, 34
sch, 35
$\mathfrak{sch}$, 35
$\mathrm{Fin}^\times$, 47
L, 48
$\mathcal{L}(\mathcal{A})$, 53
$\mathcal{F}(\mathcal{A})$, 53
$\prec$, 53
$\mathcal{B}_n$, 54
$D(F, C)$, 57
$\mathrm{sgn}(F_i; F_{i+1})$, 57
$\mathbf{D}_k^{\mathrm{cell}}$, 57
$\mathbf{D}_k^{\mathrm{simp}}$, 57
$\mathrm{Conf}(n, \mathbb{C})$, 64
$A_n$, 74
$\odot$, 76
$\mathbf{std}(\sigma)$, 77
**inc**, 77
$\mathrm{Pic}(X)$, 85
$\square$, 86
$\mathcal{S}\mathrm{Sym}$, 98
$\mathcal{O}_{\mathbf{M}}$, 107
$\mathcal{O}_{\mathbf{L}}$, 107
$T_\bullet(A)$, 108
$\rightsquigarrow$, 108
$\underline{A}$, 109
$\mathbf{Mag}_2$, 110
**supf**, 111
**pos**, 111
**Trees**, 125
**flip**, 125
**leaves**, 129

# Bibliografía


[Abe91] H. Abels, *The gallery distance of flags*, Order **8** (1991), no. 1, 77–92, DOI 10.1007/BF00385816. MR1129616 ↑17, 37

[AB08] P. Abramenko and K. S. Brown, *Buildings*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 248, Springer, New York, 2008. Theory and applications. MR2439729 ↑16, 33, 38

[AM10] M. Aguiar and S. Mahajan, *Monoidal functors, species and Hopf algebras*, CRM Monograph Series, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. With forewords by Kenneth Brown and Stephen Chase and André Joyal. MR2724388 ↑i, ii, 35, 37, 38, 54

[AM17] ———, *Topics in hyperplane arrangements*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 226, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017. MR3726871 ↑53

[AS05] M. Aguiar and F. Sottile, *Structure of the Malvenuto-Reutenauer Hopf algebra of permutations*, Adv. Math. **191** (2005), no. 2, 225–275, DOI 10.1016/j.aim.2004.03.007. MR2103213 ↑98

[Arn69] V. I. Arnol′d, *The cohomology ring of the group of dyed braids*, Mat. Zametki **5** (1969), 227–231 (Russian). MR242196 ↑65

[BMT21] J. C. Baez, J. Moeller, and T. Trimble, *Schur functors and categorified plethysm* (2021), available at `arXiv:2106.00190[math.RT]`. ↑i

[Bar11] J. A. Barmak, *Algebraic topology of finite topological spaces and applications*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2032, Springer, Heidelberg, 2011. MR3024764 ↑14

[BLS05] G. Belitskii, R. Lipyanski, and V. Sergeichuk, *Problems of classifying associative or Lie algebras and triples of symmetric or skew-symmetric matrices are wild*, Linear Algebra Appl. **407** (2005), 249–262, DOI 10.1016/j.laa.2005.05.007. MR2161930 ↑105

[Ben98] D. J. Benson, *Representations and cohomology. II*, 2nd ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 31, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Cohomology of groups and modules. MR1634407 ↑14

[BCCO17] A. Brega, L. Cagliero, and A. Chaves-Ochoa, *The Nash-Moser theorem of Hamilton and rigidity of finite dimensional nilpotent Lie algebras*, J. Pure Appl. Algebra **221** (2017), no. 9, 2250–2265, DOI 10.1016/j.jpaa.2016.12.007. MR3631716 ↑iv, 105, 140

[BD16] M. R. Bremner and V. Dotsenko, *Algebraic operads*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2016. An algorithmic companion. MR3642294 ↑106

[Bro82] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. MR0672956 ↑120

[Bro04] ———, *Semigroup and ring theoretical methods in probability*, Representations of finite dimensional algebras and related topics in Lie theory and geometry, Fields Inst. Commun., vol. 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 3–26. MR2057147 ↑53

[BW03] T. Brzezinski and R. Wisbauer, *Corings and comodules*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 309, Cambridge University Press, Cambridge, 2003. MR2012570 ↑86

[CEF15] T. Church, J. S. Ellenberg, and B. Farb, *FI-modules and stability for representations of symmetric groups*, Duke Math. J. **164** (2015), no. 9, 1833–1910, DOI 10.1215/00127094-3120274. MR3357185 ↑i

[CF13] T. Church and B. Farb, *Representation theory and homological stability*, Adv. Math. **245** (2013), 250–314, DOI 10.1016/j.aim.2013.06.016. MR3084430 ↑73

[Coh04] H. Cohn, *Projective geometry over $\mathbb{F}_1$ and the Gaussian binomial coefficients*, Amer. Math. Monthly **111** (2004), no. 6, 487–495, DOI 10.2307/4145067. MR2076581 ↑ii

[CGRT00] J. Cuadra, J. R. García Rozas, and B. Torrecillas, *Outer automorphisms and Picard groups of coalgebras*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **45** (2000), no. 5, 775–788 (2001). MR1865994 ↑iv, 85

[Cur66] C. W. Curtis, *The Steinberg character of a finite group with a $(B, N)$-pair*, J. Algebra **4** (1966), 433–441, DOI 10.1016/0021-8693(66)90033-0. MR201524 ↑26

[DK01] J. F. Davis and P. Kirk, *Lecture notes in algebraic topology*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 35, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. MR1841974 ↑15

[Dev24] T. S. Developers, *Sagemath, the Sage Mathematics Software System (Version 10.2)*, 2024. `https://www.sagemath.org`. ↑141

[EM66] S. Eilenberg and J. C. Moore, *Homology and fibrations. I. Coalgebras, cotensor product and its derived functors*, Comment. Math. Helv. **40** (1966), 199–236, DOI 10.1007/BF02564371. MR203730 ↑86

[EGH+11] P. Etingof, O. Golberg, S. Hensel, T. Liu, A. Schwendner, D. Vaintrob, and E. Yudovina, *Introduction to representation theory*, Student Mathematical Library, vol. 59, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. With historical interludes by Slava Gerovitch. MR2808160 ↑26

[FN62] E. Fadell and L. Neuwirth, *Configuration spaces*, Math. Scand. **10** (1962), 111-118, DOI 10.7146/math.scand.a-10517. MR141126 ↑64

[FH91] W. Fulton and J. Harris, *Representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991. A first course; Readings in Mathematics. MR1153249 ↑27

[Ger64] M. Gerstenhaber, *On the deformation of rings and algebras*, Ann. of Math. (2) **79** (1964), 59–103, DOI 10.2307/1970484. MR171807 ↑105

[GK94] V. Ginzburg and M. Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke Math. J. **76** (1994), no. 1, 203–272, DOI 10.1215/S0012-7094-94-07608-4. MR1301191 ↑106, 120

[HS97] P. J. Hilton and U. Stammbach, *A course in homological algebra*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 4, Springer-Verlag, New York, 1997. MR1438546 ↑118

[Hum87] J. E. Humphreys, *The Steinberg representation*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **16** (1987), no. 2, 247–263, DOI 10.1090/S0273-0979-1987-15512-1. MR876960 ↑14, 26, 27

[Igu] K. Igusa, *Parabolic subgroups*, available at http://people.brandeis.edu/~igusa/Math131b/parabolic.pdf. ↑19

[Joy81] A. Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. in Math. **42** (1981), no. 1, 1–82, DOI 10.1016/0001-8708(81)90052-9 (French, with English summary). MR633783 ↑i

[JS95] A. Joyal and R. Street, *The category of representations of the general linear groups over a finite field*, J. Algebra **176** (1995), no. 3, 908–946, DOI 10.1006/jabr.1995.1278. MR1351369 ↑4, 6

[KC02] V. Kac and P. Cheung, *Quantum calculus*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002. MR1865777 ↑9

[Kas95] C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 155, Springer-Verlag, New York, 1995. MR1321145 ↑23

[Kos61] B. Kostant, *Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem*, Ann. of Math. (2) **74** (1961), 329–387, DOI 10.2307/1970237. MR142696 ↑v, 112

[Krä] U. Krähmer, *Notes on Koszul algebras*, available at https://www.uta.edu/math/faculty/vancliff/T/F14/koszul.pdf. ↑87

[Lan02] S. Lang, *Algebra*, 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer-Verlag, New York, 2002. MR1878556 ↑16

[LV12] J.-L. Loday and B. Vallette, *Algebraic operads*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 346, Springer, Heidelberg, 2012. MR2954392 ↑106

[Lüc89] W. Lück, *Transformation groups and algebraic $K$-theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1408, Springer-Verlag, Berlin, 1989. Mathematica Gottingensis. MR1027600 ↑ii

[Mac67] S. MacLane, *Homology*, 1st ed., Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 114, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967. MR0349792 ↑87

[Mac71] ———, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5. MR0354798 ↑6

[MWZ99] P. Magyar, J. Weyman, and A. Zelevinsky, *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. Math. **141** (1999), no. 1, 97–118, DOI 10.1006/aima.1998.1776. MR1667147 ↑18

[MR95] C. Malvenuto and C. Reutenauer, *Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra*, J. Algebra **177** (1995), no. 3, 967–982, DOI 10.1006/jabr.1995.1336. MR1358493 ↑98

[Mar22] F. D. Martin, *Representaciones irreducibles de la página E1*, 2022. Disponible en https://github.com/fmartin92/e1-page-irreps. ↑73

[McC85] J. McCleary, *User's guide to spectral sequences*, Mathematics Lecture Series, vol. 12, Publish or Perish, Inc., Wilmington, DE, 1985. MR820463 ↑50

[MS74] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974. Annals of Mathematics Studies, No. 76. MR0440554 ↑66

[Mit65] B. Mitchell, *Theory of categories*, Pure and Applied Mathematics, vol. Vol. XVII, Academic Press, New York-London, 1965. MR0202787 ↑4

[Mun75] J. R. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975. MR0464128 ↑103

[NR67] A. Nijenhuis and R. W. Richardson Jr., *Deformations of Lie algebra structures*, J. Math. Mech. **17** (1967), 89–105, DOI 10.1512/iumj.1968.17.17005. MR0214636 ↑105

[OFI24a] OEIS Foundation Inc., *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (2024), available at https://oeis.org/A000254. ↑65

[OFI24b] ———, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (2024), available at https://oeis.org/A000055. ↑137

[OT92] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of hyperplanes*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 300, Springer-Verlag, Berlin, 1992. MR1217488 ↑52, 53, 56, 61

[Ott48] R. Otter, *The number of trees*, Ann. of Math. (2) **49** (1948), 583–599, DOI 10.2307/1969046. MR25715 ↑137

[Pie82] R. S. Pierce, *Associative algebras*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 88, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. Studies in the History of Modern Science, 9. MR674652 ↑36

[PR95] S. Poirier and C. Reutenauer, *Algèbres de Hopf de tableaux*, Ann. Sci. Math. Québec **19** (1995), no. 1, 79–90 (French, with English and French summaries). MR1334836 ↑101

[Qui73] D. Quillen, *Finite generation of the groups $K_i$ of rings of algebraic integers*, Algebraic $K$-theory, I: Higher $K$-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Springer, Berlin, 1973, pp. 179–198. Lecture Notes in Math., Vol. 341. MR0349812 ↑14

[Reu93] C. Reutenauer, *Free Lie algebras*, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 7, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993. Oxford Science Publications. MR1231799 ↑73, 75

[Sal87] M. Salvetti, *Topology of the complement of real hyperplanes in $\mathbf{C}^N$*, Invent. Math. **88** (1987), no. 3, 603–618, DOI 10.1007/BF01391833. MR884802 ↑55, 61

[Sol66] L. Solomon, *The orders of the finite Chevalley groups*, J. Algebra **3** (1966), 376–393, DOI 10.1016/0021-8693(66)90007-X. MR199275 ↑25

[Sol69] ———, *The Steinberg character of a finite group with $BN$-pair*, Theory of Finite Groups (Symposium, Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1968), Benjamin, New York, 1969, pp. 213–221. MR0246951 ↑14

[Sta12] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Volume 1*, 2nd ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 2012. MR2868112 ↑23, 65

[Ste51] R. Steinberg, *A geometric approach to the representations of the full linear group over a Galois field*, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), 274–282, DOI 10.2307/1990691. MR0043784 ↑iii

[SA04] M. Suarez-Alvarez, *The Hilton-Heckmann argument for the anti-commutativity of cup products*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 8, 2241–2246, DOI 10.1090/S0002-9939-04-07409-X. MR2052399 ↑13

[Tak77] M. Takeuchi, *Morita theorems for categories of comodules*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **24** (1977), no. 3, 629–644, available at https://repository.dl.itc.u-tokyo.ac.jp/?action=repository_uri&item_id=39699&file_id=19&file_no=1. MR472967 ↑iv, 85

[Tam17] P. Tamaroff, *Cohomología de Especies Combinatorias*, Universidad de Buenos Aires, 2017, http://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/2017/Tamaroff.pdf. ↑ii, 30, 33, 34, 44, 47, 52, 98

[TZ96] B. Torrecillas and Y. H. Zhang, *The Picard groups of coalgebras*, Comm. Algebra **24** (1996), no. 7, 2235–2247, DOI 10.1080/00927879608825697. MR1390371 ↑iv, 85, 92, 94, 96

[Wei94] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. MR1269324 ↑11, 12, 30, 45, 66