Índice General

Introducción

Dada $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva compleja de dimensión $n-1$, puede hallarse siempre un polinomio $F \in K[x_0, \dots, x_n]$ tal que su ideal $I(X) = \langle F \rangle$. Sin embargo, no es cierto que dada cualquier variedad X de dimensión s existan $F_1, \dots, F_s \in K[x_0, \dots, x_n]$ que alcancen para genererar el ideal de X. Se dice que una variedad es una *intersección completa* cuando estos polinomios sí existen.

Algunos resultados conocidos desde los '70 sugieren que es dificil hallar ejemplos de variedades con codimensiones mucho menores que su dimensión que no sean intersecciones completas. Concretamente, se tiene la conjetura de R.Hartshorne,

Conjetura sobre Intersecciones Completas. *Si $X \subset \mathbb{P}^m$ es una variedad proyectiva suave tal que*

$$\dim(X) > 2.\mathrm{codim}(X),$$

entonces X es una intersección completa.

Las intersecciones completas tienen una propiedad llamada *linealidad normal*, que significa que la inmersión $X \subset \mathbb{P}^m$ no puede obtenerse de manera no trivial como la proyección de una inmersión $X \subset \mathbb{P}^{m+1}$. Basándose en su conjetura sobre intersecciones completas, Hartshorne propuso también que una variedad $X \subset \mathbb{P}^r$ de dimensión n debe ser linealmente normal si $3n > 2(r-1)$. Esta última conjetura fue demostrada por F.L.Zak en 1979 con el siguiente resultado:

Teorema de Linealidad Normal de Zak. *Dada una variedad suave $X \subset \mathbb{P}^m$ de dimensión n no contenida en ningún hiperplano tal que $3n > 2(m-2)$, entonces la proyección por un punto $p \in \mathbb{P}^m$ nunca resulta una inmersión.*

Surge de este resultado la pregunta siguiente, ¿qué pasa con las variedades tales que $3n = 2(m-2)$? La respuesta encontrada por Zak a este interrogante es que existen exactamente cuatro variedades proyectivas que siguen verificando el Teorema de Linealidad Normal, a las que llamó Variedades de Severi. Es decir, se tiene el siguiente resultado,

Teorema de Clasificación de Zak. *Existen exactamente cuatro variedades de Severi salvo equivalencia proyectiva. Estas son*

- *de dimensión $n = 2$, $X = V \subset \mathbb{P}^5$ la superficie de Veronese,*

- *de dimensión* $n = 4$ *,* $X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$ *la variedad de Segre,*

- *de dimensión* $n = 8$ *,* $X = \mathbb{G}(1,5) \subset \mathbb{P}^{14}$ *, la inmersión de Plücker de la grassmaniana,*

- *de dimensión* $n = 16$ *,* $X = E \subset \mathbb{P}^{26}$ *, la variedad '*E_6*'.*

En el primer capítulo del presente seminario se hace un análisis de estas cuatro variedades, demostrándose que son efectivamente variedades de Severi. En el segundo se enuncian y demuestran resultados sobre las familias de espacios lineales contenidos en una cuádrica suave, que se usarán en los capítulos 3 y 4. En el tercer capítulo se presenta una construcción alternativa de las cuatro variedades standard, exhibiéndose morfismos birracionales entre cada una de ellas y un espacio proyectivo de la dimensión correspondiente. Esta construcción resulta necesaria para la demostración de la unicidad planteada en el teorema. Analizando la dimensión de los espacios lineales contenidos en las cuádricas secantes a una variedad de Severi, se demuestra en el cuarto capítulo que las variedades de Severi solo pueden tener dimensión 2, 4, 8 ó 16. (Se precisan para ello algunos resultados sobre espacios lineales maximales en cuádricas, que se tratan en el capítulo 2.) El quinto capítulo consiste en una síntesis de los razonamientos que se usan para demostrar que todad variedad de Severi es birracionalmente equivalente con una de las presentadas en el primer capítulo.

Este trabajo está basado en el libro 'Topics in the Geometry of Projective Space, Recent Works of F.L.Zak' escrito por R.Lazarsfeld y A.Van de Ven en 1984; en el que enuncian y esbozan una demostración del Teorema de Calsificación de Zak, que no había sido publicado aún. Posteriormente, Zak publicó este y otros resultados en el libro 'Tangents and Secants of Algebraic Varieties' (A.M.S., 1993).

Capítulo 1

Las cuatro variedades standard

En este capítulo daremos una presentación de las variedades de Severi de dimensiones 2, 4, 8 y 16, y demostraremos que son efectivamente variedades de Severi.

Antes de pasar a esta presentación, analicemos un poco la definición de variedades de Severi dada en la introducción.

Definición 1.1. *Una variedad proyectiva suave no degenerada* $X \subset \mathbb{P}^m$ *de dimensión* n *se dice Variedad de Severi si* $n = \frac{2}{3}(m-2)$ *y la proyección* π_p *desde un punto genérico* $p \in \mathbb{P}^m \setminus X$ *es una inmersión.*

Dada $X \subset \mathbb{P}^m$ una variedad proyectiva se define la *variedad secante asociada a* X $\mathrm{Sec}(X) \subset \mathbb{P}^m$ como la unión de las rectas secantes y rectas tangentes a X.

Precisaremos el siguiente resultado sobre proyecciones

Teorema 1.2. *Dado un punto* $p \in \mathbb{P}^m$*, la proyección* π_p *es una inmersión si y sólo si* $p \notin \mathrm{Sec}(X)$.

La demostración de este hecho puede encontrarse en [Ha], prop. 3.4, pág.309.

Usando este resultado, probemos la siguiente equivalencia para la definición 1.1:

Proposición 1.3. $X \subset \mathbb{P}^m$ *es una variedad de Severi si y sólo si* $m = \frac{3}{2}n + 2$ *y dim* $\mathrm{Sec}(X) = m - 1$.

Demostración: Es claro por el teorema 1.2 que X es una variedad de Severi si y sólo si $m = \frac{3}{2}n + 2$ y dim $\mathrm{Sec}(X) \leq m - 1$. Falta ver que si X es de Severi, entonces dim $\mathrm{Sec}(X) = m - 1$. Si fuese $\mathrm{Sec}(X) \leq m - 2$ y $m = \frac{3}{2}n + 2$, podría proyectarse a X por un punto $p \notin \mathrm{Sec}(X)$ obteniéndose una variedad

$X' \subset \mathbb{P}^{m-1}$ que verifica

$$\dim \operatorname{Sec}(X') = m - 2 \quad \text{y} \quad \dim X' = n.$$

Como $m - 1 < \frac{3}{2}n + 2$, el teorema de linealidad normal de Zak asegura que no existe ningún punto q tal que la proyección π_q sea una inmersión, pero esto se contradice con la hipótesis dim $\operatorname{Sec}(X') \leq m - 2$. ■

Pasemos ahora a analizar las variedades 'standard', es decir, la presentación de las Variedades de Severi que aparece en el enunciado del Teorema de Clasificación de Zak

Teorema 1.4 (Teorema de Clasificación de Zak). *Existen exactamente cuatro variedades de Severi salvo equivalencia proyectiva. Estas son:*

$n = 2$, $X = V$, *la superficie de Veronese*
$n = 4$, $X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subseteq \mathbb{P}^8$ *la variedad de Segre*
$n = 8$, $X = \mathbb{G}(1,5) \subseteq \mathbb{P}^{14}$ *la inmersión de Plücker de* $\mathbb{G}(1,5)$
$n = 16$, $X = E \subseteq \mathbb{P}^{26}$ *la variedad '*E_6'.

1.1 La superficie de Veronese

La superficie de Veronese está definida como imagen del siguiente morfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{v_2} & \mathbb{P}^5 \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \longmapsto & (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2) \end{array}$$

Identificando a $\mathbb{P}^5$ con la proyectivización del espacio de matrices simétricas de 3×3, podemos interpretar a v_2 como este morfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{v_2} & \mathbb{P}(Sim(3 \times 3, \mathbb{C})) \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \longmapsto & (x_0, x_1, x_2)^t.(x_0, x_1, x_2) \end{array}$$

Con esta descripción de $V = \operatorname{im}(v_2)$, es evidente que V se identifica con las matrices simétricas de rango 1. Por lo tanto, las ecuaciones de los menores de tamaño 2×2 de una matriz simétrica genérica describen a V. Además puede demostrarse que estas ecuaciones generan el ideal de V.

Nos interesa también saber que v_2 es una aplicación birracional con su imagen. En efecto, si consideramos el conjunto abierto en $\mathbb{P}^5$ determinado por vectores cuya primera coordenada es no nula, entonces la aplicación $s : \mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ dada por proyectar en las primeras tres coordenadas es una inversa local para v_2.

Por ser v_2 una aplicación birracional, se deduce que $\dim(V) = \dim(\mathbb{P}^2) = 2$, y por lo tanto,

$$\dim(\mathbb{P}^5) = 5 = \frac{3}{2}\dim(V) + 2.$$

Para verificar que V es efectivamente una variedad de Severi, solo queda por demostrar que la variedad secante asociada a V es una hipersuperficie en $\mathbb{P}^5$.

La forma más sencilla de demostrar este hecho es volviendo a interpretar los puntos de V como clases de equivalencia de matrices simétricas de rango 1. Así un punto perteneciente a una recta secante a V se identifica con una combinación lineal de matrices de rango 1, por lo tanto tiene rango menor o igual a 2. De aquí se deduce que

$$\mathrm{Sec}(V) \subseteq \{A \in \mathbb{P}(Sim(3 \times 3)) : \det A = 0\}.$$

Veamos que es cierta la igualdad.

Sea A una matriz simétrica tal que $\det(A) = 1$. Si $\mathrm{rg}(A) = 1$, es claro que $A \in \mathrm{Sec}(V)$. Si $\mathrm{rg}(A) = 2$, A puede descomponerse como

$$A = P^t.A.P$$

donde P es una matriz inversible y B una matriz diagonal de rango 2. Es decir,

$$B = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sean

$$B_1 = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$A = P^t(B_1 + B_2)P = P^t.B_1.P + P^t.B_2.P$$

y $P^t.B_1.P$, $P^t.B_2.P$ son matricas simétricas de rango 1.

Esto demuestra que $\mathrm{Sec}(V)$ es igual a la hipersuperficie cúbica en $\mathbb{P}^5$ de ecuación det(A)=0; con lo cual $\dim(\mathrm{Sec}(V)) = 4$ y V es una Variedad de Severi.

Observación 1.5. *Los argumentos anteriores son válidos para aplicaciones de Veronese más generales. Si consideramos la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n & \xrightarrow{v_{2,n}} & \mathbb{P}^{(n+1)(n+2)/2-1} \\ (x_0 : \ldots : x_n) & \longmapsto & (\ldots : X^I : \ldots) \end{array}$$

donde X^I recorre todos los monomios de grado 2 en variables $x_0, \ldots x_n$, entonces podemos representar su imagen como los ceros comunes de los menores de tamaño 2×2 de la matriz simétrica de $(n+1) \times (n+1)$ con coeficiente $Z_{i-1,j-1}$ en su coordenada (i,j) para $i \leq j$.

Podemos calcular también la dimensión de la variedad secante asociada a $V_n = v_{2,n}(\mathbb{P}^n)$ para cada n como la dimensión del espacio de matrices simétricas de rango menor o igual que dos. Es decir, $\mathrm{Sec}(V_n)$ está determinada por las ecuaciones de los menores de tamaño 3×3 de la matriz $(Z_{i,j})$. Luego $\dim(\mathrm{Sec}(V_n)) = 2n$.

1.2 La variedad de Segre

La variedad de Segre se define como la imagen del siguiente morfismo:

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}^8 \\ ((x_0 : x_1 : x_2), (y_0 : y_1 : y_2)) & \longmapsto & (x_0y_0 : x_0y_1 : x_0y_2 : x_1y_0 : x_1y_1 : \\ & & \quad x_1y_2 : x_2y_0 : x_2y_1 : x_2y_2) \end{array}$$

La variedad de Segre $S = \sigma(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$ resulta ser también una variedad determinantal, es decir, una variedad cuyas ecuaciones toman la forma de los menores de una matriz.

En este caso puede identificarse a $\mathbb{P}^8$ con el espacio proyectivo de matrices de tamaño 3×3, y la aplicación de Segre puede interpretarse como el siguiente morfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}(M(3 \times 3, \mathbb{C})) \\ ((x_0 : x_1 : x_2), (y_0 : y_1 : y_2)) & \longmapsto & (x_0, x_1, x_2)^t.(y_0, y_1, y_2) \end{array}$$

La imagen de esta aplicación son las matrices de rango 1, luego S queda determinada por los ceros comunes de los menores de tamaño 2×2 de una matriz genérica de tamaño 3×3. Puede demostrarse además que las ecuaciones de estos menores generan el ideal de S.

La aplicación σ también resulta birracional. Por ejemplo, si consideramos nuevamente el abierto en $\mathbb{P}^8$ donde la primera coordenada es no nula, la aplicación

$$\begin{array}{cccc} \tau : & \mathbb{P}^8 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \\ & (z_0 : \ldots : z_8) & \mapsto & ((z_0 : z_3 : z_6), (z_0 : z_1 : z_2)) \end{array}$$

es inversa local para σ.

Calculemos ahora la dimensión de S. Consideremos el abierto distinguido $U_0 = \{(z_0 : \ldots : z_8) : z_0 \neq 0\}$. La intersección $U_0 \cap S$ es un abierto en S en el cual la coordenada $x_0y_0 \neq 0$. Por lo tanto ni x_0 ni y_0 se anulan en este abierto, y puede construirse un isomorfismo entre $U_0 \cap S$ y un abierto afín en $\mathbb{P}^4$ de la siguiente manera

$$(1 : y_1 : y_2 : x_1 : x_1y_1 : x_1y_2 : x_2 : x_2y_1 : x_2y_2) \mapsto (x_1 : x_2 : y_1 : y_2)$$

Este argumento puede repetirse para los abiertos U_i con $i = 1, \ldots, 8$, que conforman un cubrimiento de S. Se deduce entonces que $\dim(S) = 4$. Por lo tanto,

$$\dim(\mathbb{P}^8) = 8 = \frac{3}{2}4 + 2 = \frac{3}{2}\dim(S) + 2.$$

Luego para ver que S es una variedad de Severi basta con probar que $\mathrm{Sec}(S)$ es una hipersuperficie en $\mathbb{P}^8$. Recordemos que S se identificaba con el espacio de matrices de 3×3.

Identificando a un elemento de $\mathrm{Sec}(S)$ con una combinación lineal de dos matrices de rango 1, es claro que

$$\mathrm{Sec}(S) \subseteq \{A : \det(A) = 0\}$$

ya que una combinación lineal de matrices de rango 1 tiene necesariamente rango menor o igual que 2. Para demostrar la igualdad, solo resta probar que toda matriz de tamaño 3×3 de rango menor o igual a 2 puede descomponerse como suma de dos matrices de rango 1. Esto es trivial para una matriz de rango 1.

Sea A una matriz de rango 2. Existe una descomposición de A

$$A = P^{-1}AP$$

donde P es una matriz inversible, y B es la forma de Jordan asociada a la matriz A. Como $\mathrm{rg}(A) = 2 = \mathrm{rg}(B)$, B tiene la forma

$$B = \begin{pmatrix} x & t & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $x, y, t \in \mathbb{C}$, $t = 1$ ó 0.

Sean

$$B_1 = \begin{pmatrix} x & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B = B_1 + B_2$, entonces,

$$A = P^{-1}(B_1 + B_2)P = P^{-1}B_1P + P^{-1}B_2P$$

y tanto $P^{-1}B_1P$ como $P^{-1}B_2P$ tienen rango 1. Por lo tanto,

$$\dim(\mathrm{Sec}(S)) = \dim(\{A : \det(A) = 0\}) = 7.$$

Luego S es una variedad de Severi.

Observación 1.6. *La importancia de las variedades de Segre.*
El producto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ no tiene definida a priori una estructura de variedad algebraica. Sin embargo la inmersión de Segre

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m & \xrightarrow{\sigma_{n,m}} & \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1} \\ ((x_0 : \ldots : x_n), (y_0 : \ldots : y_m)) & \longmapsto & (\ldots : x_i y_j : \ldots) \end{array}$$

le da una, la cual se adopta como definición del producto como variedad. Del mismo modo, si $X \subset \mathbb{P}^n$ y $Y \subset \mathbb{P}^m$ son localmente cerrados, se define $X \times Y$ como la imagen $\sigma(X \times Y) \subset \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$, que es un conjunto localmente cerrado. (Se puede hallar una explicación más detallada de esta definición en [H],pág.28.)

Observación 1.7. *Los argumentos usados para hallar ecuaciones para la variedad de Segre pueden ser aplicados al caso general. Es más, las cuádricas determinanadas por los menores de tamaño 2×2 de una matriz de $(n+1)\times(m+1)$ generan el ideal de la variedad $\Sigma_{n,m} = \sigma_{n,m}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$.*

1.3 La inmersión de Plücker de la Grassmaniana $\mathbb{G}(1,5)$

Denotaremos con $\mathbb{G}(k,n)$ al conjunto de k-planos en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$. A veces será conveniente identificar a este conjunto con el cociente

$$M(k,n)/Gl(k).$$

Las Grassmanianas pueden ser descritas como un subconjunto de un espacio proyectivo de la siguiente manera: dado $W \subset \mathbb{P}^n$ un subespacio lineal k-dimensional generado por los vectores $v_1,\dots v_{k+1}$, podemos asociar a W el multivector

$$\lambda = v_1 \wedge \dots \wedge v_{k+1} \quad \in \wedge^{k+1}(V)$$

Esta aplicación

$$p : \mathbb{G}(k,n) \longrightarrow \mathbb{P}(\wedge^{k+1}\mathbb{C}^{n+1})$$

resulta ser una inmersión, llamada *inmersión de Plücker.*

Vamos a analizar esta aplicación en el caso $k=1$ y $n=5$. Consideremos entonces

$$\begin{array}{rcl} p : \mathbb{G}(1,5) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\wedge^2\mathbb{C}^6) \\ < v_1, v_2 > & \longmapsto & v_1 \wedge v_2 \end{array}$$

Veamos primero que esta aplicación está bien definida sobre el espacio $\mathbb{G}(1,5)$.

Dados $w_1, w_2 \in \mathbb{C}^6$ tales que $< w_1, w_2 >=< v_1, v_2 >$, debemos ver que $w_1 \wedge w_2 = v_1 \wedge v_2$ en $\mathbb{P}(\wedge^2(\mathbb{C}^6))$. Como $< w_1, w_2 >=< v_1, v_2 >$, existen $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ tales que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} w_1 & = & av_1 + bv_2 \\ w_2 & = & cv_1 + dv_2 \end{array} \right.$$

y tales que $ad - cb \neq 0$. Entonces

$$w_1 \wedge w_2 = (ad-bc)(v_1 \wedge v_2)$$

y como $ad - bc \neq 0$, $v_1 \wedge v_2 = (ad-bc)(v_1 \wedge v_2)$ en $\mathbb{P}(\wedge^2(\mathbb{C}^6))$. Luego p está bien definida.

Nos interesa analizar la imagen de p. La imagen de p en $\mathbb{P}(\wedge^2(\mathbb{C}^6))$ está compuesta por los multivectores que se descomponen totalmente, es decir, que admiten una escritura de la forma $v \wedge w$.

Además, la inmersión de Plücker es inyectiva. Para demostrarlo necesitaremos probar el siguiente resultado:

Lema 1.8. $\{w : v_1 \wedge v_2 \wedge w = 0\} =< v_1, v_2 >$

Demostración: Si $w = av_1 + bv_2$, se verifica trivialmente que $v_1 \wedge v_2 \wedge w = 0$.

Veamos la otra inclusión: Completamos $\{v_1, v_2\}$ a una base $\{v_i\}_{1 \leq i \leq 6}$ de $\mathbb{C}^6$. w admite una escritura en esta base:

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \sum_{i=3}^{6} a_i v_i.$$

Si $v_1 \wedge v_2 \wedge w = 0$, entonces

$$0 = v_1 \wedge v_2 \wedge (a_1 v_1 + a_2 v_2 + \sum_{i=3}^{6} a_i v_i) = \sum_{i=3}^{6} a_i (v_1 \wedge v_2 \wedge v_i)$$

y como $\{v_1 \wedge v_2 \wedge v_i\}_{i=3,4,5,6}$ son linealmente independientes, esto implica que $a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$, con lo cual $w = av_1 + bv_2 \in < v_1, v_2 >$. ■

Podemos demostrar ahora la siguiente proposición

Proposición 1.9. *p es inyectiva.*

Demostración: Basta con ver que si $v_1 \wedge v_2 = \lambda w_1 \wedge w_2$, entonces $< v_1, v_2 > = < w_1, w_2 >$.

Pero $v_1 \wedge v_2 = \lambda w_1 \wedge w_2$ implica

$$v_1 \wedge v_2 \wedge w_1 = 0 \quad \text{y} \quad v_1 \wedge v_2 \wedge w_2 = 0$$

Usando el lema anterior, se deduce que $w_1, w_2 \in < v_1, v_2 >$. Análogamente, se demuestra que $v_1, v_2 \in < w_1, w_2 >$, y por lo tanto $< v_1, v_2 > = < w_1, w_2 >$. ■

Fijando una base $\{e_1, \ldots, e_6\}$ de $\mathbb{C}^6$, podemos definir un morfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\wedge^2(\mathbb{C}^6)) & \longrightarrow & \mathbb{P}^{14} \\ \sum_{1 \leq i < j \leq 6} a_{i,j} \, e_i \wedge e_j & \mapsto & (a_{1,2} : a_{1,3} : \ldots : a_{1,6} : a_{2,3} : \ldots : a_{5,6}) \end{array}$$

Para analizar $G = p(\mathbb{G}(1,5)) \subset \mathbb{P}^{14}$, precisaremos identificar $\mathbb{P}^{14}$ con la proyectivización del espacio de matrices antisimétricas $\mathbb{P}(A(6,\mathbb{C}))$.

Proposición 1.10. *La imagen de la inmersión de Plücker en $\mathbb{P}(A(6,\mathbb{C}))$ está dada por las matrices de rango 2.*

Demostración: Dada una matriz $A \in \mathbb{P}A(6,\mathbb{C})$ tal que $\mathrm{rg}(A) = 2$, existe una matriz inversible $P \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ de columnas $\{v_1, \ldots, v_6\}$ que verifica:

$$A = P^t \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \bar{0} \\ -1 & 0 & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right) P$$

Luego

$$(A)_{i,j} = v_1^i v_2^j - v_2^i v_1^j \quad \text{si } i < j.$$

Veamos que la matriz A se identifica con el multivector $w = v_1 \wedge v_2 \in \mathbb{P}(\wedge^2(\mathbb{C}^6))$.

$$v_1 = \sum_{i=1}^{6} v_1^i e_i \quad \text{y} \quad v_2 = \sum_{i=1}^{6} v_2^i e_i$$

luego

$$v_1 \wedge v_2 = (\sum_{i=1}^{6} v_1^i e_i) \wedge (\sum_{j=1}^{6} v_2^j e_j) =$$

$$\sum_{i,j=1}^{6} v_1^i v_2^j (e_i \wedge e_j) = \sum_{1 \leq i < j \leq 6} (v_1^i v_2^j - v_2^i v_1^j)(e_i \wedge e_j)$$

Recíprocamente, dado un multivector que se descompone totalmente $v_1 \wedge v_2$, si completamos $\{v_1, v_2\}$ a una base $\{v_i\}_{1 \leq i \leq 6}$ de $\mathbb{C}^6$ y llamamos P a la matriz que tiene por columnas a los vectores de esta base, se verifica

$$A = P^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & \bar{0} \\ -1 & 0 & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} P,$$

donde A es la matriz asociada al multivector $v_1 \wedge v_2$. Como P es inversible, esto demuestra que A tiene rango 2. ∎

Este cálculo nos permite deducir ecuaciones para G: las ecuaciones de los menores de tamaño 3×3 de una matriz genérica. (Necesitamos usar el hecho que una matriz antisimétrica tiene necesariamente rango par, por lo cual una matriz antisimétrica tiene rango menor o igual a 2 si y solo si tiene rango 2. Esto se deduce de la forma standard de las matrices antisimétricas. Puede hallarse una justificación de este hecho en [L], p.587.)

Observación 1.11. *Estas ecuaciones no son las usuales para definir la variedad G. Generalmente se utilizan las ecuaciones que se deducen de la condición "$w \wedge w = 0$", que además son generadores del ideal de G.*

Para demostrar que G es una variedad de Severi necesitamos calcular su dimensión. Con este fin construiremos un cubrimiento de G por abiertos afines de dimensión 8.

Sea A una matriz antisimétrica tal que el menor $\begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} \\ -a_{2,1} & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Puede considerarse directamente el representante que tiene $a_{1,2} = 1$ y $a_{2,1} = -1$. Dado que la matriz A es antisimétrica y de rango 2, A queda determinada por los coeficientes $a_{1,3}, a_{1,4}, a_{1,5}, a_{1,6}, a_{2,3}, a_{2,4}, a_{2,5}, a_{2,6}$, ya que

$$a_{i,j} = a_{1,i}a_{2,j} - a_{2,i}a_{1,j} \quad \text{si } i < j, \quad \text{y}$$

$$a_{i,j} = -a_{1,i}a_{2,j} - a_{2,i}a_{1,j} \quad \text{si } i > j.$$

Luego queda definido un morfismo birracional, entre $\mathbb{C}^8$ y el abierto $U \subset \mathbb{G}(1,5)$ de las matrices cuyo menor principal de tamaño 2×2 es no nulo. Notar que este abierto puede también describirse como las matrices cuyo coeficiente $a_{1,2} \neq 0$.

En general, dada una matriz A antisimétrica de rango 2 cualquiera, existe un coeficiente $a_{i,j}$, $i < j$ no nulo. Entonces el menor $\begin{vmatrix} 0 & a_{i,j} \\ -a_{j,i} & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, y eligiendo el representante de A tal que $a_{i,j} = 1$, A queda unívocamente determinada por los coeficientes de sus filas i y j distintos de $a_{i,i}, a_{i,j}, a_{j,i}, a_{j,j}$. Por lo tanto puedo definir un morfismo birracional entre $\mathbb{C}^8$ y $\left\{\begin{vmatrix} 0 & a_{i,j} \\ -a_{j,i} & 0 \end{vmatrix} \neq 0\right\} = \{A : a_{i,j} \neq 0\}$.

Esto demuestra que $\dim(G) = 8$, con lo cual G verifica la condición

$$\dim \mathbb{P}^{14} = 14 = \frac{3}{2}8 + 2 = \frac{3}{2}\dim(G) + 2.$$

Para demostrar que G es una variedad de Severi falta demostrar que la variedad secante asociada a G es una hipersuperficie.

Dado que los elementos de G se corresponden con matrices de rango 2, los elementos de la variedad secante asociada a G se corresponderan con matrices de rango menor o igual a 4. Queremos ver que $\mathrm{Sec}(G)$ está determinada por la ecuación $\det(A) = 0$ (y por lo tanto, es una hipersuperficie en $\mathbb{P}^{14}$).

Dadas A, B matrices antisimétricas de rango 2, una combinación lineal de ellas tendrá rango menor o igual a 4, y por lo tanto su determinante será nulo. Luego, $\mathrm{Sec}(G) \subset \{A : \det A = 0\}$.

Sea ahora una matriz antisimétrica A tal que $\det(A) = 0$. Luego, A tiene rango menor o igual a 5; pero como las matrices antisimétricas tienen necesariamente rango par, debe ser $\mathrm{rg}(A) = 2$ ó 4. Quiero ver entonces que dada una matriz antisimétrica A de rango 2 ó 4, existen B, C de rango 2 tales que $A = B + C$. Existe una matriz inversible P tal que,

$$A = P^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & \bar{0} \\ -1 & 0 & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} P \quad \text{si } \mathrm{rg}(A) = 2, \quad \text{y}$$

$$A = P^t \begin{pmatrix} \bar{0} & I_2 & \bar{0} \\ -I_2 & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} P \quad \text{si } \mathrm{rg}(A) = 4.$$

Entonces, en el primer caso puede escribirse

$$A = P^t \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \bar{0} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} P + P^t \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \bar{0} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} P,$$

y en el segundo,

$$A = P^t \begin{pmatrix} \bar{0} & I_2 & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} P + P^t \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ -I_2 & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} P$$

Luego, $\mathrm{Sec}(G) = \{A : \det A = 0\}$; por lo tanto $\dim(\mathrm{Sec}(G)) = 13$ y G es una variedad de Severi.

Observación 1.12. *Los argumentos expuestos en esta sección pueden generalizarse* $\mathbb{G}(1,n)$ *para cualquier* n. *Por lo tanto* $\mathbb{G}(1,n)$ *y* $\mathrm{Sec}(\mathbb{G}(1,n))$ *son variedades determinantales. Puede calcularse con el mismo método utilizado anteriormente que* $\dim(\mathbb{G}(1,n)) = 2(n-1)$ *y* $\dim(\mathrm{Sec}(\mathbb{G}(1,n))) = 4n - 7$.

1.4 La variedad 'E_6'

La variedad E='E_6' puede construirse explícitamente usando herramientas de teoría de representaciones. Dado G un grupo algebraico simplemente conexo de tipo E_6, y V la representación irreducible cuyo peso máximo es el primer peso fundamental ω_1. E se construye como la proyectivización de la órbita de un vector de V de peso máximo.

En el capítulo tres se dará otra construcción de la variedad E, como imagen del morfismo determinado por un sistema de cuádricas.

Capítulo 2

Espacios lineales en cuádricas

Dada Q una cuádrica en un espacio proyectivo de dimensión impar $\mathbb{P}^{2k+1}$, nos interesa estudiar los espacios lineales incluídos en Q, es decir, s-planos Λ tales que

$$Q|_{\Lambda\times\Lambda} \equiv 0.$$

Queremos demostrar el siguiente teorema,

Teorema 2.1. *Dada una hipersuperficie cuádrica suave* $Q \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ *de dimensión* $2n$*, se verifican*

(1) Los espacios lineales incluídos en Q *de dimensión maximal tienen dimensión* n*.*

(2) Existen dos familias disjuntas de n*-planos contenidas en* Q*, cada una parametrizada variedad proyectiva suave irreducible* S_n *de dimensión* $\frac{n(n+1)}{2}$*.*

Dos de estos n*-planos,* $\Lambda,\ \Lambda' \subset Q$ *pertenecen a la misma familia si y solo si dim(*$\Lambda \cap \Lambda'$*)*$\equiv n$ *(mod 2).*

Esta variedad S_n *se llama variedad Spinorial.*

Vamos a demostrarlo analizando el caso afín. Las proposiciones que están a continuación siguen el orden propuesto por [ACGH], p.100-103.

Sea V un espacio vectorial m-dimensional sobre $\mathbb{C}$, sea $Q : V\times V \to \mathbb{C}$ una forma bilineal simétrica no degenerada y sea $\tilde{Q} : V \to V^*$ el isomorfismo determinado por Q. Esto es,

$$\tilde{Q}(v)(w) = Q(v,w).$$

Definición 2.2. *Un* k*-plano* Λ *se dice isotrópico si* $Q|_{\Lambda\times\Lambda} = 0$

Notaremos con G_k a la grassmaniana de k-planos en V $G(k,V)$, y con $\Sigma_k \subset G_k$ a la variedad de subespacios isotrópicos de dimensión k.

Proposición 2.3. Σ_k *es vacío si* $k > \frac{m}{2}$ *, y no vacío si* $k = [\frac{m}{2}]$ *.*

Además si $k' < k \leq [\frac{m}{2}]$ *, todo espacio isotrópico* k' *-dimensional está contenido en uno* k *-dimensional.*

Demostración: Sea $\Lambda \in \Sigma_k$. Como $\tilde{Q}$ es isomorfismo, $\dim \tilde{Q}(\Lambda) = k$. Para todo $v \in \Lambda$, $\tilde{Q}(v)(\Lambda) = 0$, luego Λ está incluído en el preanulador de $\tilde{Q}(\Lambda)$, al que notaremos $^\circ(\tilde{Q}(\Lambda))$. Entonces se deduce que

$$m = \dim(V) = \dim(\tilde{Q}(\Lambda)) + \dim\ ^\circ(\tilde{Q}(\Lambda)) \geq k + \dim \Lambda = 2k.$$

Luego $\frac{m}{2} \geq k$, lo que implica que Σ_k es vacío si $k > \frac{m}{2}$.

Quiero construir ahora un subespacio $\Lambda \subset \Sigma_k$ en el caso $k = [\frac{m}{2}]$. Elijo $v \in V$ que verifique $Q(v,v) = 0$.

(Un tal v existe : dados v, w linealmente independientes tales que $Q(v,v) \neq 0$ y $Q(w,w) \neq 0$, considero $\alpha v + \beta w \in V$. Como $Q(\alpha v + \beta w) = \alpha^2 Q(v,v) + 2\alpha\beta Q(v,w) + \beta^2 Q(w,w)$, tomando $A = Q(v,v)$, $B = Q(v,w)$, $C = Q(w,w)$ y $\alpha = 1$, se obtiene la ecuación $A + 2\beta B + \beta^2 C = 0$, que tiene solución para $\beta \in \mathbb{C}$).

Sea $v_1 \in V$ tal que $Q(v_1, v_1) = 0$. Consideremos el subespacio

$$v_1^\perp = \ker(\tilde{Q}(v_1)) \subset V.$$

La dimensión de $v_1^\perp$ es m-1.

Si $m - 1 \geq 3$, existen $v, w \in v_1^\perp$ tales que $\{v, w, v_1\}$ es linealmente independiente. Entonces podemos construir $v_2 \in v_1^\perp$ tal que $Q(v_2, v_2) = 0$ y $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente. Además, como $v, w \in ker\tilde{Q}(v_1)$, $Q(v_1, v_2) = 0$, es decir, $\{v_1, v_2\} \in \Sigma_2$.

Considero $\{v_1, v_2\}^\perp = \ker \tilde{Q}(v_1) \cap \ker \tilde{Q}(v_2)$, $\dim(\{v_1, v_2\}^\perp) \geq m - 2$.

Si $m - 2 \geq 4$, existen $v, w \in \{v_1, v_2\}^\perp$ tales que $\{v, w, v_1, v_2\}$ es linealmente independiente, y puedo construir $v_3 \in \{v_1, v_2\}^\perp$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\} \in \Sigma_3$.

En general, si $m - s \geq s+1$, puedo construir v_{s+1} tal que $\Lambda = \{v_1, \dots, v_{s+1}\} \in \Sigma_{s+1}$.

Este procedimiento puede repetirse hasta que $m - s < s + 1$, es decir, hasta que $s > \frac{m-1}{2}$. De esto se deduce que si $s \leq [\frac{m}{2}]$, Σ_s es no vacío.

Es claro por la construcción anterior que todo espacio isotrópico de dimensión $k' < k$ está incluído en uno de dimensión k . ∎

Proposición 2.4. *Si* $k \leq [\frac{m}{2}]$ *,* Σ_k *es suave de codimensión* $\binom{k+1}{2}$ *.*

Además si se identifica $T_\Lambda(G_k) \cong \mathrm{Hom}(\Lambda, V/\Lambda)$ *, el espacio tangente a* Σ_k *en* Λ *está dado por*

$$T_\Lambda(\Sigma_k) \cong \{\phi \in \mathrm{Hom}(\Lambda, V/\Lambda) : Q(\phi.v, w) + Q(v, \phi.w) = 0 \ \forall\ v, w \in \Lambda\}.$$

Demostración: La identificación

$$T_\Lambda(G_k) \cong \mathrm{Hom}(\Lambda, V/\Lambda)$$

surge de considerar un cubrimiento de las grassmanianas por los abiertos afines que U_Λ definiremos a continuación.

Dado $\Lambda \subset V$ un subespacio de dimensión k, fijemos una base para $V \cong \mathbb{C}^m$ de manera tal que Λ está generado por los primeros k vectores $e_1, \dots, e_k \in \mathbb{C}^m$. Entonces U_Λ es el subconjunto de espacios Γ dados por matrices M_Γ cuyo primer menor de tamaño $k \times k$ es no nulo. Es claro entonces que todo $\Gamma \in U_\Lambda$ tiene una única representación como el espacio generado por las columnas de una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ 0 & 1 & 0 & .. & 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & .. & 0 & 1 & a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,m} \end{pmatrix}$$

Este subespacio Γ puede identificarse de manera biunívoca con un morfismo de Λ en V/Λ, $\varphi_\Gamma(e_i) = (0, \dots, 1, \dots, 0, a_{i,1}, \dots, a_{i,k}) =$ el i-ésimo vector fila de la matriz M_Γ.

Este isomorfismo $U_\Lambda = \mathrm{Hom}(\Lambda, V/\Lambda)$, induce un isomorfismo entre los espacios tangentes.

$$T_\Lambda(G_k) = \mathrm{Hom}(\Lambda, V/\Lambda)$$

Otra forma de pensar esta identificación es describiéndola en términos de vectores tangentes a arcos en G_k. Supongamos que $\{\Lambda(t)\} \subset G_k$ es un arco holomórfico en G_k (esto es, una familia de planos parametrizados con t en una curva suave y $\Lambda(0) = \Lambda$), y sea $v \in \Lambda$ un vector cualquiera. Elegimos cualquier arco holomórfico $\{v(t)\} \in \mathbb{C}^m$ con $v(t) \in \Lambda(t)$, y asociamos a $v(0) = v$ el vector

$$\varphi(v) = v'(0) = \frac{\partial}{\partial t} |_{t=0} \ v(t).$$

Como podría elegirse otro arco holomórfico $w(t)$ tal que $w(t) \in \Lambda(t)$ para cada t y $w(0) = v$,la asignación $v \mapsto \varphi(v)$ no es única, pero $\varphi(v)$ está bien definida como elemento del cociente $\mathbb{C}^m/\Lambda$ (pues como $v(0) = w(0)$, vale $w(t) - v(t) = t.u(t)$ con $u(t) \in \Lambda$). Así el arco $\{\Lambda(t)\}$ determina una aplicación lineal $\varphi : \Lambda \to \mathbb{C}^m/\Lambda$, que es justamente el vector tangente al arco.

En este caso en particular, dados $v, w \in \Lambda$, tomamos dos arcos holomórficos

$$\begin{array}{ll} v(t) \in \Lambda(t) & v(0) = v, \\ w(t) \in \Lambda(t) & w(0) = w \end{array}$$

y debe valer para cada t que $Q(v(t), w(t)) = 0$. Derivando con respecto a t, obtenemos

$$Q(v'(t), w(t)) + Q(v(t), w'(t)) = 0.$$

Evaluando en $t = 0$, y recordando que se definía $\varphi(v) = v'(0)$ y $\varphi(w) = w'(0)$,

$$Q(\varphi(v), w) + Q(v, \varphi(w)) = 0 \quad \forall \, v, w \in \Lambda. \ (*)$$

Además, dada $\varphi : \Lambda \to \mathbb{C}^m/\Lambda$ que verifique $(*)$, puede obtenerse φ a partir del arco holomórfico

$$\Lambda(t) =< v_i + t\varphi(v_i) >, \quad \text{donde } \Lambda =< v_i >_{1\leq i\leq k} .$$

Por lo tanto, es claro que $T_\Lambda(\Sigma_k) \cong \{\phi \in \mathrm{Hom}(\Lambda, V/\Lambda) : Q(\phi.v, w) + Q(v, \phi.w) = 0 \,\forall\, v, w \in \Lambda\}$.

Calculemos ahora la dimensión de

$$T = \{\phi \in \mathrm{Hom}(\Lambda, V/\Lambda) : Q(\phi.v, w) + Q(v, \phi.w) = 0\}.$$

Sea $\{v_1, \dots, v_k\}$ base de Λ, sea $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{n-k}\}$ base de V/Λ. Las ecuaciones que definen a T pueden reescribirse de la siguiente manera:

$$Q(\phi.v_i, v_j) + Q(v_i, \phi.v_j) = 0 \;\text{ para }\; i, j = 1, \dots, k;\; i \leq j \qquad (**)$$

Estas $\frac{k^2-k}{2} + k = \binom{k+1}{2}$ ecuaciones determinan T, y de ser linealmente independientes la codimensión de T sería $\binom{k+1}{2}$. Luego basta con demostrar que estas ecuaciones son linealmente independientes.

Consideremos $w_1, \dots, w_{n-k} \in V$ que verifiquen $\pi(\bar{w}_1) = w_1, \dots, \pi(\bar{w}_{n-k}) = w_{n-k}$. Entonces $B = \{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}\}$ es base de V. Escribiendo las ecuaciones de $(**)$ en esta base se obtiene:

$$\phi(v_i) = \sum_{l=1}^{n-k} a_l^i w_l,$$

donde $([\phi]_{\{v_j\}\{\bar{w}_r\}})_{st} = a_t^s$.

Si $([Q]_B)_{i,j} = q_{i,j}$, obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^{n-k} a_l^i q_{k+l,j} + \sum_{l=1}^{n-k} a_l^j q_{k+l,i} = \sum_{l=1}^{n-k} (a_l^i q_{k+l,j} + a_l^j q_{k+l,i}) = 0 & si \;\; i < j \\ \sum_{l=1}^{n-k} a_l^i q_{l+ki} = 0 & si \;\; i = j \end{cases}$$

a las que corresponde un sistema de la forma:

$$\begin{pmatrix} C & * & \dots & * \\ 0 & C^{(1)} & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

donde $(C)_{i,j} = q_{i+k,j}$, y $C^{(i)}$ es la matriz de $(n-k-i) \times k$ formado por las últimas $n-k-i$ filas de la matriz C.

Pero la matriz de Q en base B tiene la forma: $\begin{pmatrix} 0 & C^t \\ C & * \end{pmatrix}$

y como Q es no degenerada, $rg(Q) = n$, lo que implica que C tiene rango máximo. Luego $C, C^{(1)}, \dots, C^{(k-1)}$ tienen rango máximo, y las ecuaciones de A son linealmente independientes.

Por lo tanto Σ_k es suave (pues los espacios tangentes a todos sus puntos tienen la misma dimensión) y de codimensión $\binom{k+1}{2}$. ∎

Proposición 2.5. *Si* $k < \frac{m}{2}$, Σ_k *es irreducible.*

Para demostrar esta proposición precisaremos el siguiente resultado

Lema 2.6. *Dado* $v \in V$ *tal que* $Q(v,v) = 0$ *definimos*

$$W = \tilde{Q}(v)^{\perp}/\mathbb{C}.v,$$

entonces Q *induce una forma no degenerada* Q_W *en* W *tal que*

$$\Sigma_{k-1}(Q_W) \cong \{\Lambda \in \Sigma_k : v \in \Lambda\}.$$

Demostración: : Sea $Q_W : W \times W \to \mathbb{C}$, definida por

$$Q_W(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = Q(v_1, v_2).$$

Veamos que Q_W está bien definida:
Si $\bar{v}_1 \sim \bar{v}_1'$, entonces $v_1 - v_1' = \lambda v$. Sea $\bar{w} \in W$. Entonces

$$Q_W(\bar{v}_1 - \bar{v}_1', \bar{w}) = Q(\lambda v, w) = \lambda Q(v, w) = 0$$

ya que $w \in \tilde{Q}(v)^{\perp} = \ker \tilde{Q}(v)$. Luego $Q_W(\bar{v}_1, \bar{w}) = Q_W(\bar{v}_1', \bar{w})$.

Veamos que Q_W es no degenerada:
Queremos ver que si $Q_W(\bar{w}, \bar{w}') = 0 \ \forall \ \bar{w}' \in W$, entonces $w \in \mathbb{C}.v$. Consideremos $\tilde{Q}(w) : V \to \mathbb{C}$.

$$\tilde{Q}(w)(w') = Q(w, w') = Q_W(\bar{w}, \bar{w}') = 0 \ \ \forall \ w' \in \ker \tilde{Q}(v),$$

lo que implica que $\ker \tilde{Q}(v) \subseteq \ker \tilde{Q}(w)$.

Ahora existe $v_1 \in V$ tal que $V = \ker \tilde{Q}(v) \oplus < v_1 >$. Sea $v' \in V, \ v' = s + \lambda v_1, \ s \in \ker \tilde{Q}(v)$.

$$\tilde{Q}(v)(v') = Q(v, s + \lambda v_1) = Q(v, s) + \lambda Q(v, v_1) = \lambda Q(v, v_1)$$

Por otro lado,

$$\tilde{Q}(w)(v') = Q(w, s + \lambda v_1) = Q(w, s) + Q(w, v_1) = \lambda Q(w, v_1)$$

Entonces $\tilde{Q}(w)(v') = \tilde{Q}(v)(v').\frac{Q(w,v)}{Q(v,v_1)}$. Sea $\mu = \frac{Q(w,v)}{Q(v,v_1)}$. $\tilde{Q}(w) = \mu \tilde{Q}(v)$, luego $\tilde{Q}(w - \mu v) = 0$ y como $\tilde{Q}$ es un isomorfismo se deduce $w = \mu w = \bar{0}$.

Veamos ahora que $\Sigma_{k-1}(Q_W) \cong \{\Lambda \in \Sigma_k : v \in \Lambda\}$:
Consideremos

$$\tilde{\pi} : \{\Lambda \in \Sigma_k : v \in \Lambda\} \to \Sigma_{k-1}(Q_W)$$

$$\Lambda =< v, v_1, \ldots, v_{k-1} > \mapsto < \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{k-1} > = \bar{\Lambda}$$

$\bar{\Lambda} \in \Sigma_{k-1}(Q_W)$: $Q_W(\bar{v}_i, \bar{v}_k) = Q(v_i, v_k) = 0$, pues $v_i, v_k \in \Lambda \in \Sigma_k$ (y $Q|_{\Lambda\times\Lambda} = 0$).

Tengo recíprocamente la aplicación

$$\Sigma_{k-1} \to \{\Lambda \in \Sigma_k : v \in \Lambda\}$$

$$\bar{\Lambda} =< \{v, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{k-1}\} >\mapsto< v, v_1, \ldots, v_{k-1} >= \Lambda$$

$\Lambda \in \Sigma_k$: $Q(v_i, v_j) = Q_W(\bar{v}_i, \bar{v}_j) = 0$

y $Q(v_i, v_j) = \tilde{Q}(v)(v_i) = 0$ pues $v_i \in \ker \tilde{Q}(v)$.

Además las aplicaciones no dependen de la elección de las bases $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ y $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{k-1}\}$ de Λ y $\tilde{\Lambda}$ ya que π preserva combinaciones lineales. ■

Pasemos ahora a la demostración de la proposición 2.5.

Veremos que si $k < \frac{m}{2}$, Σ_k es irreducible usando inducción en k:

Caso $k = 1$: Consideremos $\Sigma_1 \subset \mathbb{P}(V)$, $\Sigma_1 =< Q(v, v) = 0 >$

Vía un cambio de coordenadas, basta ver que $< \sum_{i=1}^m x_i^2 >$ es irreducible. (Notar que $m > 2k$, por lo tanto $m \geq 3$)

Para ver que el polinomio $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2$ es irreducible, supongo que puede escribirse como producto de 2 polinomios de multigrado 1.

$x_1^2 + \ldots + x_m^2 = (ax_1 + bx_2 + cx_3 + \ldots + k)(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \ldots + s)$

En particular, como $m \geq 3$ deben verificarse las ecuaciones:

$$\begin{cases} a\alpha &= 1 \\ b\beta &= 1 \\ c\gamma &= 1 \\ a\beta + b\alpha &= 0 \Rightarrow \beta + b\alpha^2 = 0 \Rightarrow \beta^2 + \alpha^2 = 0 \\ a\gamma + c\alpha &= 0 \Rightarrow \gamma + c\alpha^2 = 0 \Rightarrow \gamma^2 + \alpha^2 = 0 \\ b\gamma + c\beta &= 0 \Rightarrow \gamma + \beta^2 = 0 \Rightarrow \gamma^2 + \beta^2 = 0 \end{cases}$$

Luego $\alpha^2 = -\beta^2 = \gamma^2 = -\alpha^2$; por lo tanto $\alpha = 0$ lo que se contradice con la ecuación $a\alpha = 1$.

Paso inductivo: Consideremos el conjunto

$A = \{(v, \Lambda) : v \in \Lambda \in \Sigma_k\} \subset \mathbb{P}(V) \times G_k$.

Sea $\pi_1 : A \to \mathbb{P}(V)$ la proyección a la primera coordenada. La fibra $\pi_1^{-1}(v) = \{(v, \Lambda) : v \in \Lambda\} \cong \{\Lambda \in \Sigma_k : v \in \Lambda\}$ es isomorfo a $\Sigma_{k-1}(Q_W)$. Luego para cada $v \in \mathbb{P}(V)$, $\pi_1^{-1}(v)$ es irreducible de dimensión $\dim(\pi_1^{-1}(v)) = \dim(\Sigma_{k-1}(Q_W))$ (que es suave de codimensión $(\frac{k+1}{2})$). Por lo tanto, A es irreducible.

Considero ahora $\pi_2 : A \to \Sigma_k$. π_2 es suryectiva (dado $\Lambda \in \Sigma_k, \exists v \in \Lambda \Rightarrow \Lambda = \pi_2(v,\Lambda)$) y A es irreducible. Por lo tanto Σ_k es irreducible. ■

Proposición 2.7. *Denotemos el grupo de automorfismos de* Q *con*

$$\mathrm{Aut}(Q) = \{A \in GL(V) : Q(Av, Aw) = Q(v,w)\ \forall\ v,w \in V\}.$$

$\mathrm{Aut}(Q)$ *actúa sobre* Σ_k *, y esta acción es transitiva.*

(Es decir, para $\Lambda, \Lambda' \in \Sigma_k$ *existe un* $A \in \mathrm{Aut}(Q)$ *tal que* $A\Lambda = \Lambda'$ *)*

Demostración: Sean $\Lambda, \Lambda' \in \Sigma_k$, queremos demostrar que $\exists \sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$ tal que $\sigma(\Lambda) = \Lambda'$.

Si $\Lambda = \Lambda'$, entonces $\sigma = id$ verifica lo pedido.

Si $\Lambda \neq \Lambda'$, lo demostraremos por inducción en k:

Veamos el caso $k = 1$: Sean $\Lambda =< v_1 >$, y $\Lambda' =< v_1' >$. Luego $Q(v_1, v_1) = Q(v_2', v_2') = 0$ y $< v_1, v_1' >$ tiene dimensión 2.

Si $< v_1, v_1' >$ es no degenerado (i.e., si $Q(v_1, v_1') \neq 0$), entonces $v_1, v_1' \notin (< v_1, v_1' >)^\perp$. Entonces $V =< v_1, v_1' > \perp (< v_1, v_1' >)^\perp$.

Podemos definir entonces $\sigma : V \to V$ por $\sigma(v_1) = v_1'$, $\sigma(v_1') = v_1$, $\sigma(v) = v\ \forall\ v \in (< v_1, v_1' >)^\perp$; y $\sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$.

Por otro lado, si $< v_1, v_1' >$ es degenerado, entonces $Q|_{<v_1,v_1'> \times <v_1,v_1'>} = 0$.

Como $< v_1' > \subsetneq < v_1, v_1' >$, entonces $< v_1' >^\perp \supsetneq < v_1, v_1' >^\perp$.

Existe entonces un elemento $w \in V$ tal que $Q(w, v_1') = 0$ y $Q(w, v_1) \neq 0$. Consideremos el subespacio $< v_1, w >$. Se pueden elegir $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \beta \neq 0$ tales que $w_1 = \alpha v_1 + \beta w$ verifica $Q(w_1, v_1) = 1$ y $Q(w_1, w_1) = 0$. Además $< v_1, w_1 >=< v_1, w >$ y es no degenerado.

Necesitamos hallar ahora $w_1' \in < v_1, w_1 >^\perp$ tal que $Q(w_1', v_1') = 1$ y $Q(w_1', w_1') = 0$. Como Q es no degenerada, $\exists u_1 \in V$ tal que $Q(u_1, v_1') \neq 0$.

Sea $u_2 = av_1 + bw_1 + wu_1$.

$Q(u_2, v_1) = a.0 + bQ(w_1, v_1) + Q(u_1, v_1)$, si $Q(u_1, v_1) \neq 0$, elijo $b = \frac{-Q(u_1,v_1)}{Q(w_1,v_1)} = -Q(u_1, v_1)$.

$Q(u_2, w) = aQ(v_1, w_1) + b.0 + Q(u_1, w_1)$, si $Q(u_1, w_1) \neq 0$, tomo $a = -Q(u_1, w_1)$.

Sea $u_3 = u_2 / Q(u_2, v_1')$ (así $Q(u_3, v_1) = 1$).

Sea $w_1' = u_3 + \lambda v_1'$. Eligiendo $\lambda = -Q(u_3, u_3)/2$ queda $w_1' \in < v_1, w_1 >^\perp$, $Q(w_1', w_1') = 0$ y $Q(v_1', w_1') = 1$.

Se define entonces

$\sigma : V =< v_1, w_1 > \perp < v_1', w_1' > \perp V_2 \longrightarrow < v_1, w_1 > \perp < v_1', w_1' > \perp V_2$, por

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \sigma(\alpha v_1 + \beta w_1) & = & \alpha v_1' + \beta w_1' \\ \sigma(\gamma v_1' + \delta w_1') & = & \gamma v_1 + \delta w_1 \\ \sigma(v) & = & v, \ \forall\, v \in V \end{array} \right.$$

σ es una isometría, ya que $\sigma|_{V_2} : V_2 \to V_2$, $\sigma|_{<v_1,w_1>} :< v_1, w_1 > \to < v_1', w_1' >$ y $\sigma|_{<v_1',w_1'>} :< v_1', w_1' > \to < v_1, w_1 >$ lo son.

Paso inductivo: Sean $\Lambda, \Lambda' \in \Sigma_k$, $\Lambda =< v_1, \dots, v_k >$, $\Lambda' =< v_1', \dots, \Lambda_k' >$.

Con un razonamiento análogo al del paso $k = 1$, se deduce que existe un elemento $w \in < v_2, \dots, v_k >^{\perp}$ que verifica $Q(v_1, w) = 1$, $Q(w, w) = 0$, y existe un elemento $w' \in < v_2', \dots, v_k' >^{\perp}$ tal que $Q(v_1', w') = 1$ y $Q(w', w') = 0$. Como $< v_1, w >$ y $< v_1', w' >$ no son degenerados, V admite dos descomposiciones

$$V =< v_1, w > \perp < v_1, w >^{\perp}$$

$$V =< v_1', w' > \perp < v_1', w' >$$

Considero los espacios vectoriales $V_1 =< v_1, w >^{\perp}$ y $V_2 =< v_2, w' >^{\perp}$. Eligiendo una base ortogonal de V_1 y V_2 , pueden definirse isometrías

$$f_1 : (V_1, Q|_{V_1 \times V_1}) \to (\mathbb{C}^{m-2}, \langle \ , \ \rangle)$$

$$f_2 : (V_2, Q|_{V_2 \times V_2}) \to (\mathbb{C}^{m-2}, \langle \ , \ \rangle)$$

donde $\langle \ , \ \rangle$ denota el producto interno usual en $\mathbb{C}^{m-2}$.

Los subespacios $< f_1(v_2), \dots, f_1(v_k) >$ y $< f_2(v_2'), \dots, f_2(v_k')) >$ son subespacios isotrópicos de dimensión $k-1$ en $\mathbb{C}^{m-2}$. Por hipótesis inductiva, se sabe que existe una isometría

$$\bar{\sigma} : \mathbb{C}^{m-2} \to \mathbb{C}^{m-2}$$

tal que $\bar{\sigma}(< f_1(v_2), \dots, f_1(v_k) >) =< f_2(v_2'), \dots, f_2(v_k') >$.

Definimos $\sigma : V =< v_1, w > \perp < v_1, w >^{\perp} \to < v_1', w' > \perp < v_1', w' >^{\perp}$,

$$\sigma(av_1 + bw + x) = av_1' + bw' + f_2^{-1} \circ \bar{\sigma} \circ f_1(x)$$

Esta aplicación $\sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$, lo que concluye la demostración. ■

Proposición 2.8. *Si $m = 2n$ y $k = n$, se verifica lo siguiente: dados dos n -planos Λ, Λ' , y dado $\sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$ tal que $\sigma(\Lambda) = \Lambda'$, entonces*

$$\dim(\Lambda \cap \Lambda') \equiv n \ (mod\ 2) \quad \Leftrightarrow \det(A) = +1.$$

Por lo tanto, si $m = 2n$, entonces Σ_n tiene dos componentes irreducibles Γ_1 y Γ_2 determinadas por la condición

$$\Lambda, \Lambda' \ \textit{pertenecen a la misma componente} \ \Gamma_i \Leftrightarrow \dim(\Lambda \cap \Lambda') \equiv n \ (mod\ 2).$$

Demostración: Consideremos primero el caso $\Lambda = \Lambda'$. Tenemos entonces $\sigma(\Lambda) = \Lambda,\ Q(\sigma(v), \sigma(w)) = Q(v, w)\ \forall\, v, w \in V$.

Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de Λ. Queremos asignar a cada v_i un elemento $w_i \in V$ tal que

$$Q(v_i, w_i) = 1,\ Q(w_i, w_i) = 0,\ Q(w_i, v_j) = 0 \text{ si } i \neq j$$

Veamos como definir estos $\{w_j\}$. Completamos $\{v_1, \dots, v_n\}$ a una base de V .Como

$$< v_1, v_2, \dots, v_n > \supsetneq < v_2, \dots, v_n >,$$

entonces $< v_1, v_2, \dots, v_n >^{\perp} \subsetneq < v_1, \dots, v_n >^{\perp}$.

Luego existe $w \in V$ tal que $Q(w, v_1) \neq 0$ y $Q(w, v_i) = 0\ \forall\, i \neq 1$. Tomando $w_1 = \alpha w + \beta v_1$, y eligiendo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ de forma conveniente se obtiene w_1 que verifica $Q(w_1, w_1) = 0,\ Q(w_1, v_1) = 1$ y $Q(w_1, v_i) = 0$ si $i \neq 1$.

Luego $V =< v_1, w_1 > \perp < v_1, w_1 >^{\perp}$, donde $W =< v_1, w_1 >^{\perp}$ verifica $\{v_2, \dots, v_n\} \subset W$ y $Q|_{W \times W}$ es no degenerada.

Considero ahora $< v_2, \dots, v_n >_W \subsetneq < v_3, \dots, v_n >_W$. Iterando el razonamiento anterior, se obtienen $\{w_j\}_{1 \leq j \leq n}$ que verifican lo pedido.

$B = \{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots w_n\}$ es base de V (pues $V =< v_1, w_1 > \perp \dots \perp < v_n, w_n >$),y la matriz de Q en base B es de la forma

$$[Q]_B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\sigma(\Lambda) \subset \Lambda$, la matriz $[\sigma]_B$ tiene la forma

$$[\sigma]_B = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Escribiendo la condición $Q(\sigma(v), \sigma(w)) = Q(v, w)$ en términos de matrices,

$$\begin{pmatrix} A^t & 0 \\ B^t & C^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Se deducen las ecuaciones

$$\begin{cases} A^t C & = & I \\ C^t A & = & I \\ C^t A + C^t B & = & 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación se deduce que $\det(A)\det(C) = \det(A^t C) = 1$

$\Rightarrow \det(\sigma) = \det(A)\det(C) - \det(B).0 = \det(AC) = 1$

Consideremos ahora el caso $\Lambda \neq \Lambda'$.

Veamos que basta con hallar *una* isometría $\sigma : V \to V$ tal que $\sigma(\Lambda) = \Lambda'$ y tal que $\dim(\Lambda \cap \Lambda') \equiv n (mod\, 2) \Leftrightarrow \det(\sigma) = 1$:

Sea σ_2 otra isometría tal que $\sigma_2(\Lambda) = \Lambda'$. Entonces $\sigma_2^{-1} \circ \sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$, y

$$(\sigma_2^{-1} \circ \sigma)(\Lambda) = \Lambda'$$

$$\Rightarrow \det(\sigma_2^{-1} \circ \sigma) = 1 \;\Rightarrow\; \det(\sigma_2^{-1})\det(\sigma) = 1 \Rightarrow \det(\sigma_2^{-1}) = \det(\sigma).$$

Veamos que en el caso $\Lambda \cap \Lambda' = \{0\}$, existe $\sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$ tal que $\sigma(\Lambda) = \Lambda'$ y $\det(\sigma) = (-1)^n$.

Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de Λ, y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ una base de Λ'.

Considero el elemento $v_1 \in \Lambda$. Usando el razonamiento mostrado en 2.7 , puede construirse un elemento $w \in V$ tal que $Q(v_1, v_1) = 1$, $Q(w, w) = 0$ y $Q(w, v_i) = 0 \; \forall \; v_i \neq v_1$.

Como $V = \Lambda \oplus \Lambda'$, w admite una descomposición $w = v + w'$, donde $v \in \Lambda$, $w' \in \Lambda'$. Veamos que w' también verifica las condiciones buscadas:

$Q(w', w') = 0$, pues $w' \in \Lambda'$,

$Q(w', v) = Q(w, v) - Q(v, v) = 0$, y (pues $Q(w, w) = 2Q(v, w') = 0$), y

$Q(w', v_i) = Q(w, v_i) - Q(v, v_i) = 0$.

Definimos $w_1' = w'$. Entonces

$$V =< v_1, w_1' > \perp W_1,$$

con $W_1 =< v_1, w_1' >^{\perp} \supseteq < v_2, \ldots, v_n >$.

Repitiendo este procedimiento $n-1$ veces, se obtiene

$$V =< v_1, w_1' > \perp < v_2, w_2' > \perp \ldots \perp < v_n, w_n' >$$

Definimos entonces σ sobre la base $B = \{v_1, \ldots, v_n, w_1' \ldots, w_n'\}$ de la siguiente forma

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \sigma(v_i) & = & w_i' \\ \sigma(w_j') & = & v_j \end{array} \right.$$

σ es isometría, ya que

$$[Q]_B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \; [\sigma]_B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

y por lo tanto se verifica

$$[\sigma]_B^t [Q]_B [\sigma]_B = [Q]_B.$$

Calculemos el determinante de σ en esta base:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = (-1)^n$$

Como $n \equiv (-1)^n \ (mod\, 2)$, σ verifica lo pedido.

Veamos finalmente que $\dim(\Lambda \cap \Lambda') = s \equiv n (mod\, 2) \Leftrightarrow \exists \sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$ tal que $\sigma(\Lambda) = \Lambda'$ y $\det(\sigma) = 1$.

Lo demostraremos por inducción en n (donde $2n = m = \dim(V)$).

Caso n=1. Hay dos posibilidades, $\Lambda = \Lambda'$ y $\Lambda \cap \Lambda' = \{0\}$, y ambas fueron analizadas con anterioridad.

Paso inductivo.

Sean $\Lambda, \Lambda' \in \Sigma_n$. Si $\Lambda \cap \Lambda' = \{0\}$, ya está demostrado. En caso contrario, sean

$E = \{e_1, \ldots, e_s\}$ base de $\Lambda \cap \Lambda'$,

$B = \{v_{s+1}, \ldots, v_n\}$ conjunto que completa E a una base de Λ, y

$B' = \{w_{s+1}, \ldots, w_n\}$ conjunto que completa E a una base de Λ'.

Como $< e_1, e_2, \ldots, e_s, w_{s+1}, \ldots, w_n >^{\perp} \subsetneq < e_2, \ldots, e_s, w_{s+1}, \ldots, w_n >^{\perp}$, podemos tomar $b \in < e_2, \ldots, e_s, w_{s+1}, \ldots, w_n >^{\perp} \setminus < e_1, \ldots, e_s, w_{s+1}, \ldots, w_n >^{\perp}$.

Sea $b' = \alpha b + \beta e_1$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $Q(b', b') = 0$ y $Q(b', e_1) = 1$.

$$V = < e_1, b' > \perp < e_1, b' >^{\perp} = < e_1, b' > \perp V_2$$

y $\{e_2, \ldots, e_s, vs+1, \ldots, v_n, ws+1, \ldots, w_n\} \subset V_2$.

Sean $\Lambda_2 = < e_2, \ldots, e_s, v_{s+1}, \ldots, s_n >$ y $\Lambda_2' = < e_2, \ldots, e_s, w_{s+1}, \ldots, w_n >$.

Como Λ_2, $\Lambda_2' \in \Sigma_{n-1}(Q|_{V_2 \times V_2})$ y $Q|_{V_2 \times V_2}$ es no degenerada sobre $V_2 \times V_2$, puede asegurarse por hipótesis inductiva que existe una isometría

$$\sigma_2 \in \mathrm{Aut}(Q|_{V_2 \times V_2})$$

que verifica

$$\det(\sigma_2) = 1 \Leftrightarrow \dim(\Lambda_2 \cap \Lambda_2') \equiv n - 1 (mod\, 2).$$

Sea $F = \{f_1, \ldots, f_{2n-2}\}$ una base de $V_2 = < e_1, b' >^{\perp}$. Entonces $E = \{e_1, b', f_1, \ldots, f_{2n-2}\}$ es una base de V. Defino $\sigma : V \to V$ como la aplicación cuya matriz en base E es la siguiente matriz en bloques,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & [\sigma_2]_F \end{pmatrix}$$

Entonces $\det(\sigma) = \det(\sigma_2)$, y esto implica

$$\det(\sigma) = 1 \ \Leftrightarrow \ \dim(\Lambda_2 \cap \Lambda_2') = \dim(\Lambda \cap \Lambda') - 1 \equiv n - 1(mod\, 2)$$

$$\Leftrightarrow \ \dim(\Lambda \cap \Lambda') \equiv n(mod\, 2)$$

lo que concluye la demostración.

Veamos que de esta propiedad se deduce que Σ_n tiene dos componentes irreducibles Γ_1 y Γ_2 determinadas por la propiedad " Λ pertenece a la misma componente que Λ' si y sólo si $\dim(\Lambda \cap \Lambda') \equiv n(mod\, 2)$ ".

Considero el subgrupo de $\mathrm{Aut}(Q)$ formado por las matrices de determinante 1, $S\mathrm{Aut}(Q)$. Este subgrupo actúa sobre Σ_n. Además, dado un subespacio $\Lambda \in \Sigma_n$, el conjunto $\mathrm{SAut}(Q) \cdot (\Lambda)$ es irreducible ya que $\mathrm{SAut}(Q)$ lo es.

Por otro lado, tomando $\sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$ tal que $\det(\sigma) = -1$ y definiendo $\Lambda' = \sigma(\Lambda)$, se obtiene otra componente irreducible de Σ_n , $\mathrm{SAut}(Q) \cdot (\Lambda')$; y es claro que $\mathrm{SAut}(Q) \cdot (\Lambda) \cup \mathrm{SAut}(Q) \cdot (\Lambda') = \Sigma_n$. ■

Esto concluye la demostración del teorema 2.1.

Observación 2.9. *Además se la inmersión en* $\mathbb{P}^{\binom{2n+2}{n+1}-1}$ *proveniente de la inclusión en la grassmaniana* $\mathbb{G}(n, 2n+1)$ *, la variedad Spinorial* S_n *admite una inmersión en el espacio proyectivo* $\mathbb{P}^{2^n-1}$.

En el próximo capítulo analizaremos esta última inmersión, que nos será necesaria en el caso $n = 4$.

Observación 2.10. *Analicemos ahora el caso de una cuádrica* Q *que posea puntos singulares.*

Toda cuádrica en un espacio vectorial V *puede escribirse, eligiendo una base apropiada del espacio, de la forma*

$$Q(x) = x_0^2 + \ldots + x_k^2.$$

Si consideramos una cuádrica que no sea suave, entonces $k < \dim(V)$ *. Es claro que en este caso puede considerarse la proyección de la cuádrica* Q *a un espacio de dimensión apropiada (en este caso, k+1) de forma que la imagen de* Q *sea suave. Por lo tanto, la imagen de* Q *verificará el teorema 2.1, y los espacios lineales maximales contenidos en ella serán de dimensión* $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ *. Luego dado un espacio lineal* L *contenido en* Q *de dimensión mayor que* $\left[\frac{\dim V}{2}\right]$ *, podemos deducir que* $\dim(\mathrm{Sing}Q \cap L) \geq \dim(L) - \left[\frac{\dim V}{2}\right]$.

Capítulo 3

Otra construcción de las variedades de Severi

Es posible construir una equivalencia birracional explícita entre cada una de las variedades standard de Severi y un espacio proyectivo de su misma dimensión.

Concretamente, se tiene el siguiente resultado

Teorema 3.1. *En cada uno de los casos* $n = 2, 4, 8, 16$ *existe una variedad suave* $Y \subset \mathbb{P}^n$ *tal que el sistema lineal de cuádricas en* $\mathbb{P}^n$ *por* Y *definen una aplicación racional*

$$\varphi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{\frac{3}{2}n+2}$$

que aplica a $\mathbb{P}^n$ *birracionalmente en la variedad standard de Severi de dimensión* n *.*

En cada caso ($n = 2, 4, 8, 16$) puede construirse el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi = bl_Y"'] & X \subset \mathbb{P}^{\frac{3}{2}n+2} \\ Y \subset \mathbb{P}^{n-1} \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^n & \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

donde $\tilde{X}$ denota el blowing-up de $\mathbb{P}^n$ a lo largo de Y . Para demostrar que una variedad de Severi de dimensión 2, 4, 8 ó 16 debe ser birracionalmente equivalente a la variedad standard correspondiente, R.Lazarsfeld y A.Van de Ven (siguiendo las ideas de F.L.Zak) reconstruyen este diagrama y prueban que $\tilde{X}$ es de hecho el blowing-up de X a lo largo de una cuádrica contenida en X . (concretamente, de una de las cuádricas Q_p definidas en el capítulo 3). (Puede encontrarse una demostración de este hecho en [LV], o en [Z]).

Para demostrar el teorema 2.1, construiremos la aplicación φ y el diagrama 3.1 para cada uno de los casos anteriormente mencionados.

Precisaremos el siguiente resultado de geometría algebraica

Proposición 3.2. *Dada una aplicación racional* $f : X \to \mathbb{P}^n$ *regular sobre* $U \subset X$ *, y denotando con* $\tilde{X}$ *al blowing-up de* X *a lo largo de* $X \setminus U$ *, entonces* f *se extiende a un morfismo* $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbb{P}^n$ *.*

(Puede hallarse una demostración en [Ha], Example 7.17.3, p.168).

- La variedad de Veronese

  La subvariedad Y mencionada en el teorema 2.1 es en este caso el conjunto vacío. Es más, la aplicación birracional φ existente es en realidad una aplicación regular: la misma aplicación de Veronese. Así el diagrama 3.1 se verifica trivialmente.

- La variedad de Segre

  En este caso, la variedad Y es la unión de dos rectas disjuntas, $Y = \mathbb{P}^1 \amalg \mathbb{P}^1$.

  Para exhibir la aplicación racional φ, es preciso calcular una base del espacio lineal de cuádricas en $\mathbb{P}^4$ que se anulan sobre la unión de dos rectas.

  Consideremos las siguientes rectas, $L_1 = \langle (x_0 : x_1 : 0 : 0 : 0) \rangle$ y $L_2 = \langle (0 : 0 : x_2 : x_3 : 0) \rangle$.

  Sea Q una cuádrica suave, $Q = \sum_{i \leq j,\ i,j=0}^{4} a_{ij} x_i x_j$.

  Para que Q se anule sobre L_1 , debe anularse sobre los puntos

  $$(1 : 0 : 0 : 0 : 0),\ (0 : 1 : 0 : 0 : 0) \text{ y } (1 : 1 : 0 : 0 : 0),$$

  de donde se obtienen las condiciones

  $$a_{00} = a_{11} = a_{01} = 0$$

  Análogamente, de imponer la condición $Q\,|_{L_2} = 0$, se obtienen las condiciones

  $$a_{22} = a_{33} = a_{23} = 0$$

  Obtuvimos entonces un subespacio de cuádricas generado por

  $$\{x_0x_2, x_0x_3, x_0x_4, x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_4, x_3x_4, x_4^2\}$$

  y como todas ellas se anulan sobre L_1 y L_2 , este es exactamente el subespacio buscado.

  Este sistema lineal de cuádricas determina una aplicación racional (definida fuera de $L_1 \amalg L_2$):

  $$\mathbb{P}^4 \overset{\varphi}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^8$$

  dada por

  $$(x_0 : \ldots : x_4) \dashrightarrow (x_0x_2 : x_0x_3 : x_0x_4 : x_1x_2 : x_1x_3 : x_1x_4 : \ldots : x_4^2)$$

Consideremos ahora la siguiente aplicación racional:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^4 & \overset{(\pi_1,\pi_2)}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \\ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) & \longmapsto & ((x_2 : x_3 : x_4), (x_0 : x_1 : x_4)) \end{array}$$

Observemos que $\overline{\mathrm{im}(\pi_1, \pi_2)} = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, ya que $(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \setminus \mathrm{im}(\pi_1, \pi_2)$ está incluído en la unión de cerrados

$$\{(y, z) : y_2 = 0\} \ \cup \ \{(y, z) : z_2 = 0\},$$

por lo tanto, tiene sentido componer (π_1, π_2) con la aplicación de Segre σ. Además, el siguiente diagrama de aplicaciones racionales conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^4 \arrow[rr, dashed, "(\pi_1,\pi_2)"] \arrow[dr, dashed, "\varphi"'] & & \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \arrow[dl, "\sigma"] \\ & \mathbb{P}^8 & \end{tikzcd}$$

En particular, puede deducirse que $\overline{\mathrm{im}(\varphi)} = \mathrm{im}(\sigma) = S$. Usando la propiedad 3.2, podemos construir a partir de φ el siguiente diagrama (donde $\tilde{X}$ denota el blowing-up de $\mathbb{P}^4$ a lo largo de $L_1 \amalg L_2$):

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \arrow[d, "\sigma"] & \\ \mathbb{P}^1 \amalg \mathbb{P}^1 \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^4 \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & S \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^8 \end{tikzcd}$$

Veamos finalmente que φ es birracional (así S sería efectivamente birracionalmente equivalente a $\mathbb{P}^4$), y por lo tanto ψ lo es también.

Consideremos el abierto $U \subset \mathbb{P}^8$ definido por $\{(z_0 : \ldots : z_8) : z_8 \neq 0\}$, y sea γ la aplicación racional $\mathbb{P}^8 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$ con dominio en U determinada por $(z_0 : \ldots : z_8) \dashrightarrow (z_2 : z_5 : z_6 : z_7 : z_8)$. Entonces γ es la inversa de φ, y por lo tanto φ es birracional.

- La Grassmaniana $\mathbb{G}(1, 5)$

  En este caso es preciso calcular el sistema lineal de cuádricas que se anulan en $Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^7 \subset \mathbb{P}^8$.

  Como $Y \subset \mathbb{P}^7 = \{(z_0 : \ldots : z_8) : z_8 = 0\}$, cualquier monomio que involucre a la variable z_8 se anulará sobre Y. Luego una cuádrica

$$Q = \sum_{i \leq j,\, i,j=0}^{8} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=0}^{8} a_{i8} x_i x_8 + \sum_{i \leq j,\, i,j=0}^{7} a_{ij} x_i x_j = Q_1 + Q_2$$

  se anula sobre Y si y sólo si Q_2 se anula sobre Y. Por lo tanto las cuádricas buscadas son las generadas por los monomios $\{z_0 z_8, \ldots, z_7 z_8, z_8^2\}$

y por las cuádricas en variables $\{z_0, \ldots, z_7\}$ (es decir, por las cuádricas en $\mathbb{P}^7$) que se anulan sobre Y . Estas últimas pueden calcularse como los menores de tamaño 2×2 de la matriz $\left(\begin{smallmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 & z_7 \end{smallmatrix}\right)$. (Ver la observación 1.7).

Por lo tanto, las cuádricas en $\mathbb{P}^8$ que se anulan sobre Y tienen por base al cojunto

$$\{z_0z_5 - z_1z_4, z_0z_6 - z_2z_4, z_0z_7 - z_3z_4, z_1z_6 - z_2z_5, z_1z_7 - z_3z_5, z_2z_7 - z_3z_6\} \\ \cup \{z_0z_8, \ldots, z_8^2\}.$$

Consideremos la aplicación racional $\varphi : \mathbb{P}^8 \dashrightarrow \mathbb{P}^{14}$ determinada por este sistema, que tiene por dominio a $\mathbb{P}^8 \setminus (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3)$, y sea $f : \mathbb{P}^8 \dashrightarrow \mathbb{G}(1,5)$ la aplicación racional determinada por

$$(z_0 : \ldots : z_8) \dashrightarrow < (z_8, 0, z_0, z_1, z_2, z_3), (0, z_8, z_4, z_5, z_6, z_7) > .$$

Notar que los puntos en los cuales no está definida f son aquellos en los que los vectores no determinan un subespacio de dimensión 2, es decir, en los que se anulan los menores de tamaño 2×2 de la matriz

$$\begin{pmatrix} z_8 & 0 & z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & z_8 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 \end{pmatrix}.$$

Estos son exactamente los puntos sobre los que no está definida la aplicación φ .

Además, se afirma que $\overline{\mathrm{im}(f)} = \mathbb{G}(1,5)$. Para probar esta afirmación, basta ver que $\mathbb{G}(1,5) \setminus \mathrm{im}(f)$ está contenido en el cerrado

$$\{S =< v_1, v_2 >: \text{ el primer menor 2x2 de la matriz } \left(\begin{smallmatrix} -v_1- \\ -v_2- \end{smallmatrix}\right) \text{ es nulo}\}.$$

Esto es cierto, ya que dada una matriz A de tamaño 2×6 cuyo menor principal sea no nulo se la puede llevar vía un cambio de base a la forma $(I_2 : A')$. Entonces los vectores fila de esta matriz generan el mismo subespacio que los de la matriz A , y están claramente incluídos en $\mathrm{im}(\varphi)$.

Entonces puede considerarse el siguiente diagrama de aplicaciones racionales:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^8 \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, dashed, "\varphi"'] & & \mathbb{G}(1,5) \arrow[dl, "p"] \\ & \mathbb{P}^{14} & \end{tikzcd}$$

Donde p es la inmersión de Plücker.

En particular, $\overline{\mathrm{im}(\varphi)} = X = \mathrm{im}(p)$.

Aplicando el resultado citado en el caso 3.2, se puede construir el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} & Bl_Y(\mathbb{P}^4) \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\psi"] & \mathbb{G}(1,5) \arrow[d, "p"] & \\ Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^8 \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & X \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^{14} \end{tikzcd}$$

Resta verificar que la aplicación φ es birracional. Consideremos en $\mathbb{P}^{14}$ el abierto

$$V = \{(z_0 : \ldots : z_{14}) : z_{14} \neq 0\}.$$

Sea $\beta : \mathbb{P}^{14} \dashrightarrow \mathbb{P}^8$ la aplicación racional con dominio en V determinada por

$$(z_0 : \ldots : z_{14}) \dashrightarrow (z_7 : z_8 : z_9 : z_{10} : z_{11} : z_{12} : z_{13} : z_{14}).$$

β es la inversa de φ, luego φ es birracional.

- La variedad 'E_6'

  La variedad Y en este caso es $S = S_4$, la variedad Spinorial 10-dimensional que parametriza una de las dos familias de 4-planos contenidos en una cuádrica suave de dimensión 8.

  Para poder construir el diagrama 3.1 en este caso, necesitamos entender la inmersión de S en $\mathbb{P}^{15}$. Una vez definida esta inmersión, la variedad 'E_6' es la imágen de la aplicación racional determinada por el sistema lineal de cuádricas que se anulan en $S \subset \mathbb{P}^{15}$.

  Precisaremos para ello algunas definiciones.

  Definición 3.3. *Dada Q una forma bilineal simétrica no degenerada en un espacio vectorial V de dimensión $m = 2n$, se define el álgebra de Clifford $C = C(Q)$ como el cociente*

  $$C = T(V)/I(V)$$

  del álgebra tensorial $T(V)$ por el ideal bilátero $I(V)$ generado por los elementos de la forma $v \otimes v - Q(v,v) \cdot 1$.

  El álgebra de Clifford puede ser definida también como el álgebra universal con la siguiente propiedad: dada E un álgebra asociativa y $j : V \to E$ una aplicación lineal que verifica que $j(v)^2 = Q(v,v) \cdot 1$ para todo $v \in V$, entonces existe un único morfismo de álgebras $\tilde{j} : C(Q) \to E$ que extiende a j.

  Como el ideal $I(Q) \subset T(V)$ está generado por elementos de grado par, el álgebra de Clifford hereda una graduación sobre $\mathbb{Z}_2$:

  $$C = C^{par} \oplus C^{impar} = C^+ \oplus C^-,$$

  y C^+ es una subálgebra generada por los productos de cantidades pares de elementos de V.

  Como C es asociativa, $(C, [\quad])$ es un álgebra de Lie con el corchete definido por $[a,b] = a \cdot b - b \cdot a$.

  Como se vio en el capítulo 2, V puede descomponerse como suma de dos espacios isotrópicos maximales,

  $$V = W \oplus W'.$$

  Veamos que esta descomposición determina un isomorfismo de álgebras

  $$C \cong \mathrm{End}(\wedge W).$$

Por la propiedad universal de C, para determinar un morfismo entre C y $\mathrm{End}(\wedge W)$, necesitamos definir uno entre $V = W \oplus W'$ y $\mathrm{End}(\wedge W)$.

Consideremos los siguientes morfismos:

$$l : W \to \mathrm{End}(\wedge W) \quad l(w)(\xi) = w \wedge \xi$$

y

$$l' : W' \to \mathrm{End}(\wedge W) \quad l'(w') = D_\theta,$$

donde D_θ es la derivación determinada por $D_\theta(1) = 0$ y $D_\theta(w_1 \wedge \ldots \wedge w_r) = \sum(-1)^{i-1}\theta(w_i)(w_1 \wedge \ldots \wedge \hat{w_i} \wedge \ldots \wedge w_r)$, con $\theta(w) = 2Q(w', w)$.

Sea ahora

$$W \oplus W' \xrightarrow{l \oplus l'} \mathrm{End}(\wedge W).$$

La extensión de este morfismo a C es el isomorfismo buscado. (Los detalles pueden hallarse en [FH], pág. 304-305).

Tenemos entonces una acción de C en $\wedge W$ definida por $c * (\xi) = (l \oplus l'(c)(\xi))$. Puede verse que la subálgebra C^+ actúa sobre la potencia exterior par

$$\wedge^+ W = \wedge^0 W \oplus \wedge^2 W \oplus \ldots \wedge^{2k} W$$

y sobre la impar

$$\wedge^- W = \wedge^1 W \oplus \ldots \wedge^{2k+1} W.$$

C tiene una operación llamada la *anti-involución*, determinada por $x \mapsto x^*$ con $(v_1 \cdot \ldots \cdot v_r)^* = (-1)^r v_r \cdot \ldots \cdot v_1$.

Se define

Definición 3.4. *Se llama grupo Spin al subgrupo (cerrado) de las unidades de* C^+

$$\mathrm{Spin}(Q) = \{x \in C^+ : \ x \cdot x^* = 1 \ y \ x \cdot V \cdot x^* \subset V\}.$$

Cada elemento x en $\mathrm{Spin}(Q)$ determina un endomorfismo de V

$$\rho_x(v) = x \cdot v \cdot x^*, \quad v \in V.$$

Este morfismo preserva Q y es inversible. De hecho, vale el siguiente resultado:

Proposición 3.5. *Dado* $x \in \mathrm{Spin}(Q)$, $\rho_x \in \mathrm{SO}(Q)$. *La aplicación*

$$\rho : \mathrm{Spin}(Q) \to \mathrm{SO}(Q)$$

es un homomorfismo que hace de $\mathrm{Spin}(Q)$ *un cubrimiento conexo 2 a 1 de* $\mathrm{SO}(Q)$*; y su núcleo es el conjunto* $\{1, -1\}$.

Demostración: Dado $x \in \mathrm{Spin}(Q)$, ρ_x es inversible por ser x inversible. Como $x \cdot x^* = 1$, ρ_x tiene determinante 1.

Veamos que $\rho_x \in \mathrm{Aut}(Q)$, es decir, que preserva a Q

$2Q(\rho_x(v), \rho_x(w)) = 2Q(x{\cdot}v{\cdot}x^*, x{\cdot}w{\cdot}x^*) = x{\cdot}v{\cdot}x^*{\cdot}x{\cdot}w{\cdot}x^* + x{\cdot}w{\cdot}x{\cdot}x^*{\cdot}v{\cdot}x^* =$

$$x \cdot v \cdot w \cdot x^* + x \cdot w \cdot v \cdot x^* = x \cdot (v \cdot w + w \cdot v) \cdot x^* = 2Q(v, w).$$

El hecho de que ρ es suryectiva y que $\ker(\rho) = \{1, -1\}$ pueden hallarse en [FH], pág. 308-309.

Puede darse otra definición equivalente del grupo $\mathrm{Spin}(Q)$, que es la siguiente:

$$\mathrm{Spin}(Q) = \{\pm w_1 \cdot \ldots \cdot w_{2k} : w_i \in V,\ Q(w_i, w_i) = -1\}.$$

Nos interesa analizar la órbita del elemento $1 \in \wedge^0 W \subseteq \wedge^+ W$ por la acción del grupo $\mathrm{Spin}(Q)$.

Proposición 3.6. *La órbita del elemento 1 por la acción del grupo Spin es isomorfa a la variedad Spinorial* S_{n-1}.

Demostración: Sea s un elemento de la órbita del 1, $s = x * 1$, $x \in \mathrm{Spin}(Q)$.

Definamos $\Lambda_x = \{v \in V : v * s = 0\}$. Veamos primero que Λ_x es un espacio isotrópico:

Dado $v \in \Lambda_x$, $0 = v * (v * s) = (v \cdot v) * s = Q(v, v) * s$, luego $Q(v, v) = 0$. Además, $0 = (v+w)*((v+w)*s) = 2Q(v, w)*s$, por lo tanto $Q(v, w) = 0$. Entonces Λ_x es isotrópico.

Veamos ahora que Λ_x tiene dimensión maximal, es decir, tiene dimensión n. Notemos primero que $\Lambda_1 = \{v \in V : v * s = 0\} = W'$, ya que dado $v \in V$, v se descompone como suma de un elemento de W y uno de W',

$$v = w + w'.$$

Entonces $v * 1 = (w + w') * 1 = w$ (pues $w' * 1 = 0$), luego

$$v * 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad v \in W'.$$

En particular, $\dim(\Lambda_1) = n$.

Consideremos ahora un elemento $x \in \mathrm{Spin}$ cualquiera, queremos probar que $\Lambda_x = x \cdot W' \cdot x^*$. Como Λ_x es isotrópico y W' es un espacio isotrópico maximal, basta con ver que $x \cdot W' \cdot x^* \subseteq \Lambda_x$.

Dado $w' \in W'$,

$$(x \cdot w' \cdot x^*) * s = (x \cdot w' \cdot x^*) * (x * 1) =$$

$$= (x \cdot w') * (x^* \cdot x) * 1 = x * (w' * 1) = 0.$$

Tenemos entonces una correspondencia entre la órbita del elemento 1 por el grupo Spin y la familia de planos isotrópicos de dimensión n que cortan a W en dimensión par:

$$\begin{array}{rcl} s = x * 1 & \longrightarrow & \Lambda_x \\ s \text{ tal que } v * s = 0\ \forall v \in V & \longleftarrow & \Lambda \end{array}$$

Una forma de hallar, dado un n-plano Λ isotrópico, un elemento s en la órbita del 1 que se corresponda con Λ es la siguiente:

El grupo $\mathrm{Aut}(Q)$ actúa transitivamente sobre la variedad de n-planos isotrópicos Σ_n (proposición 2.7), y la proposición 2.8 asegura que el subgrupo $\mathrm{SAut}(Q) = \mathrm{SO}(Q)$ actúa transitivamente sobre cada una de las dos familias. Por lo tanto, existe una aplicación $\sigma \in \mathrm{SO}(Q)$ tal que $\sigma(W') = \Lambda$. Como el grupo $\mathrm{Spin}(Q)$ es un revestimiento de $\mathrm{SO}(Q)$, existe un elemento $x \in \mathrm{Spin}$ tal que $\sigma(v) = x \cdot v \cdot x^*$ para todo $v \in V$. Entonces $\Lambda = \{v \in V : v * s = 0\}$, donde $s = x * 1$ perteneciente a la órbita del 1. También puede tomarse $s' = (-x) * 1$, pero la correspondencia es biunívoca considerada en el espacio proyectivo.

Esta correspondencia determina una inmersión de la variedad Spinorial en un espacio proyectivo $\mathbb{P}(\wedge^0 W \oplus \wedge^2(W) \oplus \ldots \oplus \wedge^n W)$, asignando a un plano $\Lambda = \Lambda_x$ el elemento $x \in \mathbb{P}(\mathrm{Spin}(Q)) \subset \mathbb{P}(C^+)$.

El caso que nos interesa analizar es el de la variedad S_4 que parametriza a una de las dos familias de 4-planos incluídos en una cuádrica de dimensión 8 en $\mathbb{P}^9$ (o equivalentemente, una de las familias de 5-planos incluídos en una cuádrica de dimensión 9 en $\mathbb{C}^{10}$). Podemos construir entonces, dado W espacio isotrópico de dimensión 5, una inmersión

$$S_4 \longrightarrow \mathbb{P}(\wedge^0 W \oplus \wedge^2 W \oplus \wedge^4 W),$$

y $\mathbb{P}(\wedge^0 W \oplus \wedge^2 W \oplus \wedge^4 W)$ es un espacio proyectivo de dimensión $(\binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4}) - 1 = 15$. Esta es la inmersión que buscábamos.

Capítulo 4

Dimensión de las variedades de Severi

En este capítulo demostraremos que dada una variedad de Severi desconocida, es decir, una variedad $X \subset \mathbb{P}^m$ de dimensión $n = \frac{2}{3}(m-2)$ y tal que $\mathrm{Sec}(X)$ es una hipersuperficie, esta debe tener necesariamente dimensión 2,4,8 ó 16.

Para dar esta demostración tomaremos por ciertos algunos resultados sobre las 'cuádricas secantes' Q_p en una variedad de Severi. Las demostraciones de estos resultados pueden hallarse en [LV].

Necesitaremos primero la siguiente definición:

Definición 4.1. *Sea $X \subset \mathbb{P}^m$, $m = \frac{3}{2}n + 2$, una variedad de Severi. Dado un punto $p \in \mathrm{Sec}(X) \setminus X$, definimos*

$$Q_p = \{x \in X : \overline{xp} \text{ es una recta secante o tangente a } X\},$$

$$\Sigma_p = \{r \in \mathbb{P}^m : r \in \overline{xp}, \text{ con } x \in Q_p\}.$$

Entonces Σ_p es un cono sobre Q_p con vértice p.

Enunciaremos ahora los resultados que precisaremos en nuestra demostración:

Teorema 4.2. *Dado un punto $p \in \mathrm{Sec}(X) \setminus X$, se verifican*

a) Q_p es una cuádrica suave de dimensión $\frac{n}{2}$, y Σ_p es un espacio lineal de dimensión $\frac{n}{2} + 1$.

b) $\Sigma_p \cap X = Q_p$.

c) Dado $p' \in \mathrm{Sec}(X) \setminus X$, se tiene $Q_p = Q_{p'}$ si y solo si $p' \in \Sigma_p$.

Proposición 4.3. *Sea p un punto genérico en $\mathrm{Sec}(X \setminus X)$, y sea $Q = Q_p$. Entonces $\mathrm{Sec}(X) = S(Q, X)$, donde $S(Q, X)$ denota el join de Q y X.*

Corolario 4.4. *Para casi todos los puntos* $p, p' \in \mathrm{Sec}(X) \backslash X$ *,* $Q_p \cap Q_{p'}$ *consiste de un solo punto.*

Corolario 4.5. *Dados dos puntos* $p, p' \in \mathrm{Sec}(X) \setminus X$ *, la intersección* $Q_p \cap Q_{p'}$ *es un espacio lineal salvo el caso en que* $Q_p = Q_{p'}$ *.*

Observación 4.6. *Fijado un punto* $x \in X$ *, el conjunto de las cuádricas secantes* Q_p $(p \in \mathrm{Sec}(X) \setminus X)$ *que pasan por* x *se parametriza naturalmente por una cuádrica suave* Q' *de dimensión* $\frac{n}{2}$ *.*

Concretamente, puede tomarse cualquier $Q' = Q_{p'}$ *con* p' *tal que* $x \notin T_{p'}(\mathrm{Sec}(X))$ *. Dada una cuádrica* Q_p *tal que* $x \in Q_p$ *, entonces* $Q_p \cap Q' = \{y\}$ *;y se asocia* Q_p *con* y *. A la inversa, dado* $z \in Q'$ *se elije cualquier* $r \in \overline{xz} \setminus X$ *y se asocia* z *a la cuádrica* Q_r *.*

Pasemos ahora a la demostración del teorema:

Teorema 4.7. *Sea* $X \subset \mathbb{P}^m$ *una variedad de Severi de dimensión* n *. Entonces* $n = 2, 4, 8$ *ó* 16 *.*

Sea $X \subset \mathbb{P}^m$ una variedad de Severi de dimensión n, con $n \geq 4$. Sea x un punto en X; y consideremos dos cuádricas secantes $Q_1 = Q_{p_1}$, $Q_2 = Q_{p_2}$ que tengan como intersección exactamente a x ($p_1, p_2 \in \mathrm{Sec}(X) \setminus X$).

Para calcular las posibles dimensiones de X, buscamos estimar de dos maneras distintas la dimensión de la familia de cuádricas secantes Q_p que pasen por x y que corten tanto a Q_1 como a Q_2 con dimensión positiva.

Queremos construir entonces cuádricas secantes que corten tanto a Q_1 como a Q_2 con dimensión positiva. Con este objetivo definimos

$$C_i = T_x(Q_i) \cap Q_i \quad \text{con } i = 1, 2.$$

Observación 4.8. *Cada* C_i *es un cono con vértice* x *sobre una cuádrica de dimensión* $\frac{n}{2} - 2$ *:*

Demostración: Para ver que C_i es un cono, basta con comprobar que dado un punto $y \in C_i$, toda la recta $\overline{yx}$ está incluida en C_i. Consideremos entonces un punto $y \in T_x(Q_i) \cap Q_i$. Entonces si $Q_i = \langle F = 0 \rangle = \langle \sum_{i=1}^m x_i^2 \rangle$, y debe verificar $F(y) = 0$ y $\sum_{i=0}^m F_{x_i}(x).y_i$. Sea $z \in \overline{yx} = 0$, $z = x + \lambda y$. Como $T_x(Q_i)$ es un espacio lineal, $z \in T_x(Q_i)$. Además,

$F(z) = \sum x_i^2 + \sum \lambda^2 y_i^2 + 2. \sum \lambda x_i y_i = F(x) + F(\lambda y) + 2. \sum \lambda x_i y_i = 0 + \lambda \sum y_i F_{x_i}(x) = \lambda \langle y, \nabla F(x) \rangle = 0$

Luego $z \in C_i$.

La cuádrica que se menciona en el enunciado se obtiene como intersección entre Q_i y un $(\frac{n}{2} - 1)$-plano incluido en T_xQ_i que no contenga a x. ■

Consideremos ahora $S(C_1, C_2) = Join(C_1, C_2)$.

Observación 4.9. *Para cada $p \in S(C_1, C_2)$, $p \notin X$, se tiene que*

$$\dim(Q_p \cap Q_i) \geq 1.$$

(recordar que $Q_p \cap Q_i$ es un espacio lineal - corolario 4.5), y además,

$$\dim S(C_1, C_2) = 2\left(\frac{n}{2} - 1\right) = n - 2,$$

y $S(C_1, C_2)$ es irreducible si cada C_i lo es (i.e.,si $n \geq 6$).

En general, la dimensión esperada para el join de dos variedades V_1 y V_2 de dimensión d_1 y d_2 respectivamente es

$$d_1 + d_2 + 1$$

donde el uno corresponde al parámetro de las rectas que unen un punto de V_1 con uno de V_2. En este caso, sin embargo, la dimensión es menor. Esto se debe a que $S(C_1, C_2)$ puede construirse como el cono sobre $S(R_1, R_2)$ con vértice x, donde R_i es la cuádrica de dimensión $\frac{n}{2} - 2$ mencionada en la observación anterior para $i = 1$ y 2. Como R_1, R_2 son cuádricas disjuntas, $\dim(S(C_1, C_2)) = \dim(S(R_1, R_2)) + 1 = (\dim Q_1 + \dim Q_2 + 1) + 1 = n - 2$.

Lema 4.10. *Sean $p, p' \in S(C_1, C_2) \setminus X$ y $L_i = Q_p \cap Q_i$ para $i = 1, 2$.*

Entonces $Q_{p'} = Q_p$ si y solo si $p' \in S(L_1, L_2)$.

Demostración: : Si $p' \in S(L_1, L_2)$, entonces $p' \in \Sigma_p$ (pertenece a una recta $\overline{ab}$ tal que $a \in L_1$, $b \in L_2$; luego $a, b \in Q_p$). Luego por teorema 4.2, $Q'_p = Q_p$.

Recíprocamente, si $p' \in \overline{y_1, y_2}$ con $y_i \in C_i$ y $Q_{p'} = Q_p$, entonces $y_i \in Q_i \cap Q_{p'} = Q_i \cap Q_p$ ($y_i \in Q_{p'}$ pues la recta $\overline{y_i p'}$ es secante a X, ya que interseca tanto en y_1 como en y_2). Luego $y_i \in L_i$. ■

Lema 4.11. *La familia de todas las cuádricas por x que cortan a Q_1 y a Q_2 con dimensión positiva tiene dimensión menor o igual a $\frac{n}{2} - 2$.*

Demostración: La dimensión de $\{Q_p : x \in Q_p\} = \frac{n}{2}$ (ver observación 4.6) y una cuádrica secante genérica Q_p a través de x corta a cada Q_i solo en x. Luego uno espera que se deduzcan por lo menos dos condiciones de pedir que Q_p corte tanto a Q_1 como a Q_2 con dimensión positiva.

Proposición 4.12. *Asumiendo que* $n = \dim(X) \geq 6$ *, se verifica que*

$$n \equiv 0(mod 4)$$

y

$$\dim(Q_p \cap Q_i) = \frac{n}{4}$$

para todo $p \in S(C_1, C_2) \setminus X$ *.*

Demostración: Como $n \geq 6$, $S(C_1, C_2)$ es irreducible (pues C_1 y C_2 lo son). Llamamos

$$\alpha_i = \dim(Q_p \cap Q_i) \quad (i = 1, 2)$$

para un punto p genérico en $S(C_1, C_2) \setminus X$. Entonces para cada p genérico el join $S(L_1, L_2)$ definido en el lema 4.10 , tiene dimensión $\alpha_1 + \alpha_2$.

Luego la familia Γ de cuádricas Q_p que se obtiene al variar p sobre $S(C_1, C_2) \setminus X$ tiene dimensión $(n-2)-(\alpha_1+\alpha_2)$. Esto puede verse considerando la siguiente correspondencia de incidencia:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \Psi = \{(Q_p, p') : Q_p = Q_{p'}\} \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \Gamma & & S(C_1, C_2) \setminus X \end{tikzcd}$$

Dado $p \in S(C_1, C_2) \setminus X$, su fibra $\pi_2^{-1}(p)$ está dada por un único punto en Γ : el punto Q_p . Por lo tanto, podemos deducir que $\dim(S(C_1, C_2) \setminus X) = \dim \Psi$.

Por otra parte, dada una cuádrica $Q_p \in \Gamma$, la fibra $\pi_1^{-1}(Q_p)$ está dada por lel conjunto de puntos $p' \in S(C_1, C_2) \setminus X$ que verifican $Q_p = Q_{p'}$. Pero el lema 4.10 asegura que este conjunto es exactamente $S(L_1, L_2)$, por lo cual $\dim(\pi_1^{-1}(Q_p)) = \alpha_1 + \alpha_2$.

Luego $\dim(S(C_1, C_2) \setminus X) = \dim(\Psi) = \dim(\Gamma) + \alpha_1 + \alpha_2$, y por lo tanto $\dim(S(C_1, C_2) \setminus X) = (n - 2) - (\alpha_1 + \alpha_2)$.

Usando el lema 4.11, puede deducirse entonces la siguiente desigualdad,

$$(n - 2) - (\alpha_1 + \alpha_2) \leq \frac{n}{2} - 2,$$

o equivalentemente,

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq \frac{n}{2} \qquad (*)$$

Si $n = 4k+2$, entonces $\alpha_i \leq k$ para $i = 1, 2$, ya que un espacio lineal contenido en una cuádrica de dimensión $2k + 1$ tiene a lo sumo dimensión k . (Recordar la proposición 2.3.) De esto se deduce,

$$2k + 1 \overset{(*)}{\leq} \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2k$$

Lo que resulta en una contradicción.

Luego debe valer $n = 4k$, y por lo tanto,

$$\begin{cases} (*) \quad \alpha_1 + \alpha_2 & \geq & 2k \\ \qquad\qquad \alpha_i & \leq & k \qquad \text{para } i = 1 \text{ y } 2 \end{cases}$$

Luego $\alpha_1 = \alpha_2 = k$.

Finalmente, como $\dim(Q_p \cap Q_i) \leq k$, se deduce de la semicontinuidad que $\dim(Q_p \cap Q_i) = k$ para todo $p \in S(C_1, C_2) \setminus X$. ■

Observación 4.13. *La desigualdad del lema 4.11 es una igualdad si* $n > 4$.

Por otro lado, volviendo a la parametrización mencionada en la observación 4.6, consideremos $y_1,\ y_2 \in Q'$ puntos que parametrizan las cuádricas fijas $Q_1,\ Q_2$. Se ve que si $y \in Q'$ corresponde a la cuádrica secante Q_p, entonces

$$\dim(Q_p \cap Q_i) > 0 \text{ para } i = 1 \text{ y } 2 \text{ si y solo si } y \in T_{y_1}Q' \cap T_{y_2}Q'.$$

Luego fijando y_1 y variando y_2, se deduce que

$$\dim(Q_p \cap Q_i) > 0 \text{ si y solo si } y \in T_{y_i}Q'.$$

En particular, el conjunto de estos Q_p es irreducible si $n > 4$.

Corolario 4.14. *Si* $n \geq 8$, *entonces* $n \equiv 0(mod. 8)$.

Demostración: Fijemos una cuádrica Q_p que corte tanto a Q_1 como a Q_2 en un espacio lineal de dimensión $\frac{n}{4}$. Entonces el corolario 4.4 dice que $L_1 \cap L_2 = \{x\}$.

Veamos que usando los resultados de cuádricas expuestos en el capítulo 2, basta ver que L_1 y L_2 pertenecen a la misma familia de $\frac{n}{4}$-planos contenidos en Q_p.

Consideremos $Q_p \subset \Sigma_p \simeq \mathbb{P}^{\frac{n}{2}+1}$, $\dim Q_p = \frac{n}{2}$. Entonces $L_1,\ L_2$ pertenecen a la misma familia de $\frac{n}{4}$-planos en Q_p si y solo si $\dim(L_1 \cap L_2) \equiv \frac{n}{4} (\text{mod } 2)$. Luego $\frac{n}{4} \equiv 0(mod\ 2)$, es decir, $n \equiv 0(mod\ 8)$.

L_1 y L_2 pertenecen a la misma familia porque por la propiedad 4.12 y la observación anterior se sabe que la familia de cuádricas secantes

$$\mathcal{F} = \left\{ Q_{p'} :\ x \in Q_{p'} \text{ y } Q_{p'} \cap Q_p \text{ es un } \frac{n}{4}\text{-plano} \right\}$$

es irreducible si $n > 4$. Por lo tanto, si consideramos

$$\theta : \mathcal{F} \to \Pi = \{\frac{n}{4}\text{-planos contenidos en } Q_p\},$$

L_1 y L_2 pertenecen a la imagen de θ, y por lo tanto están en la misma componente irreducible de Π. ■

Definición 4.15. *Supogamos* $n \geq 8$ *, sean*

$\mathcal{F}(Q_1)$ *la familia de* $\frac{n}{4}$ *-planos en* Q_1 *que contiene las intersecciones*

$$\{Q_1 \cap Q_p\}_{p \in S(C_1,C_2) \setminus X},$$

y sea $\mathcal{F}'(Q_1)$ *la otra familia de* $\frac{n}{4}$ *-planos contenidos en* Q_1 *.*

Denotaremos $\mathcal{F}_x(Q_1)$ *y* ${\mathcal{F}'}_x(Q_1)$ *a los* $\frac{n}{4}$ *-planos de cada familia que pasan por* x *.*

De aquí en adelante, asumiremos $n \geq 8$.

Proposición 4.16. *Para todo* $\frac{n}{4}$ *-plano* $\Lambda \subset Q_1$ *que se corresponda con un punto* $[\Lambda] \in \mathcal{F}_x(Q_1)$ *, existe un punto* $p \in S(C_1, C_2) \setminus X$ *tal que* $Q_p \cap Q_1 = \Lambda$ *.*

Veamos que la proposición 4.16 implica el teorema 4.7

En primer lugar, notemos que vale que

$$\dim \mathcal{F}_x(Q_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n}{4} - 1\right).$$

Queremos calcular para ello la dimensión del conjunto $\mathcal{F}_x(Q_1)$. Pero

$$\mathcal{F}_x(Q_1) = \left\{\frac{n}{4}\text{-planos por x incluidos en } T_xQ_1 \cap Q_1\right\},$$

y vimos que $Q_1 \cap T_xQ_1$ es un cono con vértice x sobre una cuádrica suave $\tilde{Q} \subset \mathbb{P}^{\frac{n}{2}-1}$ de dimensión $\frac{n}{2} - 2$. Por lo tanto, el conjunto de $\frac{n}{4}-$ planos por x en $T_xQ_1 \cap Q_1$ se corresponde con el conjunto de $(\frac{n}{4} - 1)$ -planos incluidos en $\tilde{Q}$, cuya dimensión conocemos.

Usando la proposición y el lema 4.11, podemos deducir que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n}{4} - 1\right) \leq \frac{n}{2} - 2$$

y por lo tanto,

$$(n-4)(n-16) \leq 0$$

lo que implica $n \leq 16$. ■

Precisaremos el siguiente resultado elemental:

Observación 4.17. *Si* $M, N \subset X$ *son dos espacios lineales de dimensión* d *, y si* $\dim(M \cap N) = d - 1$ *, entonces para todo* $p \in \langle M, N\rangle \setminus X$ *se verifica* $M, N \subseteq Q_p$ *.*

Es más, si $m \in M$ es un punto cualquiera, la recta $\overline{mp}$ corta necesariamente a N.

Demostremos ahora la proposición 4.16.

Fijemos un punto $p \in S(C_1, C_2) \setminus X$, y sean

$$\begin{aligned} &\Lambda_i = Q_p \cap Q_i \qquad (i = 1, 2) \\ &L = \Lambda_1 \cap \Lambda \\ &\alpha = \dim L. \end{aligned}$$

Podemos suponer que $\alpha < \frac{n}{4}$ (de lo contrario valdría $L = \Lambda = \Lambda_1$ y $p = p_1$ verificaría la proposición 4.16); y argumentando por inducción en α basta con construir un punto $p' \in S(C_1, C_2) \setminus X$ tal que

$$\dim(\Lambda \cap Q_{p'}) > \alpha.$$

Fijemos un punto $x_0 \in \Lambda \setminus L$. Entonces vale

$$\text{Existe un punto } y_0 \in \Lambda_2 \text{ tal que } < y_0, L > \subset X \text{ y } \overline{x_0 y_0} \not\subseteq X. \tag{4.1}$$

Si aceptamos (4.1) y consideramos un $p' \in \overline{x_0 y_0} \setminus X$, entonces $p' \in S(C_1, C_2)$, y por la observación 4.17 tomando $M =< y_0, L >$ y $N =< x_0, L >$, se tiene que $N \subset Q_{p'}$. Luego $\dim(Q_{p'} \cap \Lambda) > \alpha$. Por lo tanto basta con probar (4.1).

Consideremos el siguiente resultado:

Proposición 4.18. $A(x_0) = \{y \in Q_p : \overline{x_0 y} \subset X\}$ *es un subespacio lineal en* Q_p.

Demostración: dados $y, y' \in A(x_0)$, supongamos que existe $p' \in \overline{yy'}$, $p' \notin Q_p$. Entonces $p' \notin X$, dado que $p' \in \Sigma_p$ (Σ_p es lineal, $y, y' \in \Sigma_p$). Pero las dos rectas $\overline{x_0 y}$ y $\overline{x_0 y'}$ están incluídas en X, luego por la observación 4.17 deben estar incluídas en $Q_{p'}$. Pero $Q_{p'} = Q_p$ (por 4.2, ya que $p' \in \Sigma_p$), y $x_0 \notin Q_p$, y esto es contradictorio. ■

Notemos que como Λ pertenece a la familia $\mathcal{F}(Q_1)$ y $\frac{n}{4} \equiv 0 (\text{mod } 2)$, tenemos

$$\alpha = \dim(\Lambda \cap \Lambda_1) \equiv 0 (\text{mod } 2).$$

Luego, como $\alpha < \frac{n}{4}$, debe valer $\frac{n}{4} - \alpha \geq 2$.

Pero esto implica que

$$\begin{aligned} &\text{Existe un espacio lineal } L_2 \subset \Lambda_2 \text{ de dimensión mayor o igual que 2} \\ &\text{tal que } < L_2, L > \subset Q_p. \end{aligned} \tag{4.2}$$

De hecho, si Q es una cuádrica suave de dimensión $2k$, y si L y Λ son espacios lineales en Q de dimensiones $\alpha \leq k - 2$ y k respectivamente con $L \cap \Lambda = \{x\}$, existe $L_2 \subset \Lambda$ de dimensión mayor o igual que 2 tal que $< L_2, L > \subset Q$. (Si consideramos $\tilde{Q} = Q \cap < L, \Lambda >$, entonces $\tilde{Q}$ es una cuádrica en un espacio de dimensión $k + \alpha \leq k + (k-2) = 2k - 2$, y Λ es un espacio isotrópico de dimensión k. Pero esto implica -ver la observación 2.10 de cuádricas- que $\dim(\mathrm{Sing}\tilde{Q} \cap \Lambda) \geq 2)$.

Análogamente, podemos ver que si Q es una cuádrica suave de dimensión $2k$, y si L y Λ son espacios lineales en Q tales que

$$\dim(L) \leq k - s \text{ y } \dim(\Lambda) = k,$$

entonces existe $L_2 \subset \Lambda$, $\dim(L_2) \geq s$ tal que $< L_2, L > \subset Q$.

Con este resultado, tomando $L =< x_0 >$, de dimensión $1 = \frac{n}{4} - \left(\frac{n}{4} - 1\right)$, y $\Lambda = \Lambda_1$ de dimensión $\frac{n}{4}$, podemos afirmar que

$$\text{Existe un } \left(\frac{n}{4} - 1\right)\text{-plano } L_1 \subset \Lambda_1 \text{ tal que } < L_1, x_0 > \subset Q_1 \subset X. \tag{4.3}$$

Ahora podemos deducir (4.1). Como Q_p es suave, el espacio lineal $A(x_0)$ tiene dimensión menor o igual que $\frac{n}{4}$. Por otro lado, $\dim(A(x_0 \cap \Lambda_1)) \geq \frac{n}{4} - 1$ por (4.3), luego $\dim(A(x_0) \cap \Lambda_2) \leq 1$. En particular, $L_2 \not\subseteq A(x_0)$, luego podemos elegir cualquier punto $y_0 \in L_2 \setminus A(x_0)$. ∎

Esto completa la demostración de la proposición 4.1, y por lo tanto del teorema 4.7.

Capítulo 5

Conclusión de la demostración

Hasta ahora hemos probado que si una variedad es de Severi, entonces tiene cuatro dimensiones posibles, 2, 4, 8 ó 16. Para demostrar el Teorema de Clasificación de Zak nos faltaría demostrar que dada una variedad de Severi arbitraria X de dimensión $n = 2, 4, 8$ ó 16, entonces X es birracionalmente equivalente a la variedad standard de dimensión n.

Sea entonces X una variedad de Severi de dimensión n, y sea Q_p una de las cuádricas secantes definidas en 4.1 contenida en el $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-plano $\Sigma = \Sigma_p$. Sea $\tilde{X}$ el blowing-up de X a lo largo de Q. Se tiene entonces un morfismo natural $\tilde{X} \to \mathbb{P}^n$, que es la extensión a $\tilde{X}$ de la proyección de $\mathbb{P}^{\frac{3}{2}n+2}$ por Σ_p. Puede construirse el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{f=bl_Q} & X \subseteq \mathbb{P}^{\frac{3}{2}n+2} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \\ \mathbb{P}^n & & \end{array} \tag{5.1}$$

La idea es demostrar que este diagrama es el mismo que se construyó en el capítulo 2 y que f es la extensión de la aplicación determinada por el sistema lineal de cuádricas que se anulan en la variedad Y mencionada. Es decir, se quiere demostrar lo siguiente

Teorema 5.1. *La proyección π realiza a X como el blowing-up de $\mathbb{P}^n$ a lo largo de una copia de la subvariedad Y correspondiente (definida como en el capítulo 2).*

Para demostrar este teorema se precisa un resultado de A.Aeppli, que es el siguiente:

Teorema 5.2. *Si $\pi : \tilde{X} \to P$ es un morfismo birracional propio entre variedades suaves tal que tanto el 'fundamental locus' $Z \subseteq P$ de π como el conjunto excepcional $F = \pi^{-1}(Z) \subseteq \tilde{X}$ son suaves, entonces π es el blowing-up de P a lo largo de Z.*

Para demostrar que Z y F son suaves en nuestro caso, Lazarsfeld y Van de Ven analizan la variedad Spinor S que parametriza los $\left(\frac{n}{4}\right)$-planos $\Lambda \in \mathcal{F}'(Q)$ para $n = 2, 4, 8, 16$. Luego, tomando

$$H = T_p\mathrm{Sec}(X),$$

$$\text{y} \quad Z = T_{x^*}X \cap X \cap H \quad \text{con } x^* \in X \setminus H,$$

consideran el conjunto

$$W = \{(y, [\Lambda] : S(y, \Lambda) \subseteq X)\} \subseteq Z \times S$$

y sus proyecciones

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ Z & & S \end{tikzcd}$$

Estas proyecciones resultan tener las siguientes propiedades:

i) p es biyectivo,

ii) Las fibras de q son subespacios lineales de X,

iii) En los casos n=4, 8 y 16, p es un isomorfismo.

Además q es isomorfismo en los casos $n = 4$ y $n = 16$; y para $n = 8$, q es la proyección $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{P}^3$.

Deducen entonces que el 'fundamental locus' de π es exactamente la subvariedad suave $Y \subseteq \mathbb{P}^n$; y que π^{-1} es el fibrado de dimensión $\mathbb{P}^{\frac{n}{4}+1}$ sobre Y con fibra sobre cada y dada por $M_y = S(y, \Lambda_y) \subseteq X$, donde Λ_y denota el $\frac{n}{4}$-plano en Q que corresponde a tomar $q(p^{-1}(y)) \in S$.

Aplicando ahora el teorema 5.2, basta mostrar que la aplicación racional $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{\frac{3}{2}n+2}$ que se deduce del diagrama 5.1 está definido por el sistema lineal de cuádricas por Y.

Como π es el blowing-up de Y, la aplicación $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{\frac{3}{2}n+2}$ está definida por un sistema lineal de hipersuperficies de grado k que cortan r veces a Y. Basta entonces con probar que $k = 2$, es decir, que la imagen de una recta $L \subseteq \mathbb{P}^n$ disjunta con Y es una cónica en $\mathbb{P}^{\frac{3}{2}+2}$.

Pero esto es claro, ya que dado $x \in Q$ se elige una curva cónica $C \subset X$ que corte a Q exactamente en x y tal que $T_x(X) \cap C = \{x\}$. Entonces $\pi(C) = L$. Y esto concluye la demostración.

Bibliografía

[ACGH] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P. y Harris, J. *Geometry of Algebraic Curves,* Springer-Verlag.

[FH] Fulton, William y Harris, Joe. *Representation Theory, A First Course,* Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag (1991).

[H] Harris, Joe. *Algebraic Geometry,* Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag (1995).

[Ha] Hartshorne, Robin. *Algebraic Geometry,* Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag (1977).

[L] Lang, Serge. *Algebra,* Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1993).

[LV] Lazarsfeld, R. y Van de Ven, A. *Topics in the Geometry of Projective Space,* DMV Seminar Band 4, Birkhäuser Verlag Basel (1984).

[Z] Zak, F.L. *Tangents and Secants of Algebraic Varieties,* Translations of Mathematical Monographs, vol. 127, American Mathematical Society (1993).