UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Teoría de homotopía para poliedros

Autor: Marina Valdora
Director: Gabriel Minian

Tesis de Licenciatura
en Ciencias Matemáticas

Buenos Aires, Mayo del 2005

Índice

Introducción

El objetivo principal de esta tesis es el estudio de la teoría de homotopía de los complejos simpliciales y su relación con la teoría de homotopía clásica para espacios topológicos.

Los complejos simpliciales son objetos combinatorios que se utilizan para modelar y analizar los espacios topológicos llamados poliedros. Un poliedro es justamente un espacio que admite una triangulación por un complejo simplicial. Esta clase de espacios es muy vasta e incluye, entre otros, a las variedades. Las propiedades combinatorias de los complejos simpliciales determinan las propiedades topológicas de los poliedros asociados. Es sabido, por ejemplo, que la homología (simplicial) de los complejos simpliciales coincide con la homología (singular) de sus poliedros, o que morfismos simpliciales contiguos inducen funciones continuas homotópicas (ver sección 1.6).

Por lo tanto, resulta muy conveniente desarrollar herramientas que permitan, mediante el cálculo combinatorio, facilitar el cálculo de los invariantes topológicos de los poliedros.

Las primeras nociones claras de complejos simpliciales aparecieron en un paper de 1925 de Alexandroff [Ale], pero el desarrollo más importante de los métodos simpliciales comenzó a partir de las décadas del 40 y del 50. Una de las ideas que se desarrollaron es la noción de morfismos contiguos y que equivale, en este contexto, al concepto clásico de homotopía.

En el artículo [Min1] se introduce una teoría de homotopía abstracta para categorías provistas de una familia de cilindros naturales. Esta teoría generaliza la teoría de homotopía clásica (para un solo cilindro natural, como es el caso de los espacios topológicos) y es aplicable en diversos contextos como son las categorías pequeñas, las acciones globales y los complejos simpliciales.

Siguiendo el enfoque sugerido en ese artículo, desarrollamos en esta tesis la teoría de homotopía para complejos simpliciales, utilizando una familia numerable de cilindros (modelos combinatorios del intervalo real I) y analizando las relaciones entre los cilindros de distintos tamaños. La noción de homotopía que definimos coincide con la noción de contigüidad pero, dada la forma en que es definida y utilizada, se puede comparar más fácilmente con la homotopía topológica de los poliedros asociados y permite el desarrollo de nuevas técnicas combinatorias para el cálculo.

La tesis está diagramada de la siguiente manera. En el primer capítulo repasamos las definiciones y resultados clásicos de los complejos simpliciales. Estudiamos las nociones de triangulación, subdivisión, contigüidad y aproximación simplicial. También analizamos algunos ejemplos y construcciones originales (como la del complejo simplicial $C(K)$ cuya realización coincide con $|K| \times I$) y hacemos un análisis de los límites y colímites de complejos simpliciales. Veremos, entre otras cosas, que la realización de un complejo simplicial no preserva, en general, límites ni colímites. Para remediar este hecho, se realizan construcciones alternativas, como la del complejo $C(K)$ que nombramos arriba.

En el segundo capítulo desarrollamos la teoría de homotopía en este contexto, utilizando la familia de modelos combinatorios del intervalo topológico y en el último capítulo, ejemplificamos cómo pueden ser utilizadas estas herramientas para calcular algunos grupos fundamentales.

Quiero agradecer a todos las personas de la facultad que me ayudaron, como docentes o como compañeros, a llegar hasta aquí.
Especialmente quiero agradecer a Gabriel Minian por su tiempo, su dedicación y su contagioso entusiasmo.

Capítulo 1

Complejos simpliciales y poliedros

En este capítulo repasaremos las propiedades básicas de los complejos simpliciales.
Un complejo simplicial consiste de un esquema abstracto de vértices y símplices.
A cada complejo simplicial se le asocia un espacio topológico, llamado poliedro, que se construye pegando convexos de $\mathbb{R}^n$ de distintas dimensiones (según indican los símplices del complejo).

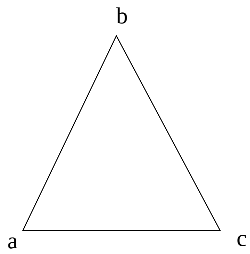
Como veremos, las propiedades topológicas de los poliedros quedan determinadas por las propiedades de los complejos simpliciales y por esta razón el estudio de estos objetos es una de las herramientas más potentes de la topología algebraica.

En este capítulo, estudiaremos las construcciones más conocidas y veremos varios ejemplos para ilustrar las ideas más importantes. Entre otras cosas, estudiamos los conceptos de triangulación y subdivisión y los teoremas de aproximación simplicial.

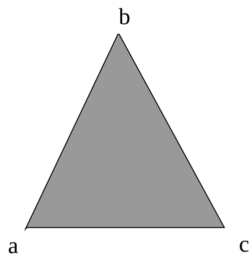
Muchos de los resultados que exponemos aquí se pueden encontrar en [Spa] y en [Min2]. Sin embargo, mostramos aquí varias construcciones novedosas, como por ejemplo la del complejo simplicial $C(K)$, cuyo espacio topológico asociado es $|K| \times I$ (ver páginas 26 a 30). También incluimos en este capítulo un estudio sobre los límites y colímites en la categoría de complejos simpliciales y la relación que existe entre éstos y los límites y colímites de los poliedros correspondientes en la categoría de espacios topológicos, dado que no hemos hallado un estudio similar en la literatura convencional.

1.1 Complejos simpliciales

Los complejos simpliciales se utilizan para modelar ciertos espacios topológicos llamados poliedros. Por ejemplo, la circunferencia S^1, como espacio topológico, es homeomorfa al borde del triángulo.



Podemos describir combinatoriamente a S^1 como el espacio que queda determinado por tres vértices a, b, c y por los segmentos (o aristas) $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ y $\overline{ac}$.
El disco D^2, que es homeomorfo al triángulo lleno,



se describe como el espacio determinado por los vértices a, b, c, las aristas $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ y $\overline{ac}$ y el '2-simplex' $\overset{\triangle}{abc}$.
En general podemos describir a los poliedros determinando sus vértices, sus aristas (que serán los 1-símplices), y sus n-símplices para todo $n \in \mathbb{N}$.
Esta descripción combinatoria de los espacios topológicos se corresponde con la noción de *complejo simplicial.*

Definición 1.1.1. Un complejo simplicial K consiste de un conjunto de vértices que notaremos V_K y un conjunto S_K de subconjuntos finitos no vacíos de V_K que llamaremos símplices tal que

(a) Todo subconjunto que consiste de un vértice es un símplex.

(b) Todo subconjunto no vacío de un símplex es un símplex.

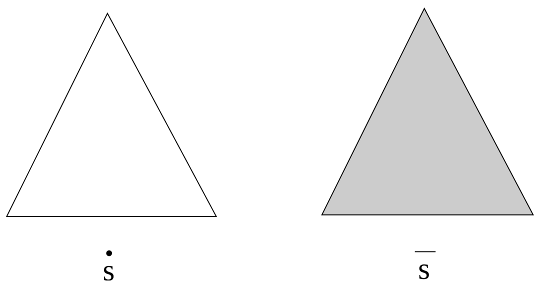
Notaremos con las letras v, w a los vértices y con la letra s a los símplices de un complejo simplicial.
Decimos que la dimensión de s es n si s tiene exactamente $n + 1$ vértices. En ese caso, decimos también que s es un n-simplex.
Si s' es un subconjunto de s se llama una cara de s. Si s' es un subconjunto propio de s se llama una cara propia de s y si es un m-simplex se llama una m-cara.
Como los vértices se corresponden biunívocamente con los 0-símplices, entonces un complejo simplicial puede pensarse como el conjunto de sus símplices. Por abuso de notación,

escribimos $v \in K$ si v es un vértice de K y $s \in K$ si s es un simplex de K.
Se define la dimensión del complejo simplicial K como el máximo de las dimensiones de los símplices de K, si este máximo existe. Si K es vacío definimos $\dim K = -1$ y si K contiene n-símplices para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $\dim K = \infty$.
Por la condición (b) de la definición 1.1.1, si K tiene dimensión n entonces K tiene símplices de dimensión m, para todo $m \leq n$.
Se dice que K es finito si contiene sólo un número finito de símplices o, lo que es lo mismo, si contiene sólo un número finito de vértices.

Ejemplos 1.1.2.

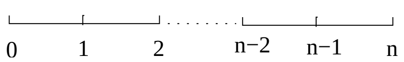
(a) Para cualquier conjunto no vacío A se tiene un complejo simplicial cuyos vértices son los elementos de A y sus símplices son todos los subconjuntos finitos no vacíos de A.

(b) Si s es un simplex de un complejo simplicial K, el conjunto de todas las caras de s es un complejo simplicial que se notará $\overline{s}$ y el conjunto de todas las caras propias de s es un complejo simplicial que se notará $\dot{s}$. Los vértices de $\overline{s}$ y de $\dot{s}$ son los vértices de s. La dimensión de $\overline{s}$ es igual a la dimensión de s y la de $\dot{s}$ es la dimensión de s menos 1.
Por ejemplo, si s es el 2-simplex, entonces



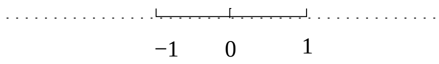
(c) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene un complejo simplicial de dimensión uno que notaremos I_n cuyos vértices son $0, 1, 2, \ldots, n$ y cuyo conjunto de símplices es

$$\{\{k\}\,/k = 0, 1, 2, \cdots, n\} \cup \{\{k, k+1\}\,/k = 0, 1, 2, \cdots, n-1\}$$

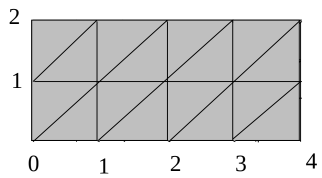


(d) Otro complejo simplicial de dimensión uno pero con infinitos vértices es el que tiene como vértices a todos los números enteros y como conjunto de símplices a

$$\{\{k\}\,/k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{k, k+1\}\,/k \in \mathbb{Z}\}$$



(e) Hay un complejo simplicial de dimensión 2 que notamos C_{rk} cuyos vértices son los pares ordenados (i, j), con $0 \leq i \leq r$ y $0 \leq j \leq k$ y cuyos símplices son los conjuntos de la forma $\{(i, j), (i', j'), (i'', j'')\}$ con $i \leq i' \leq i''$, $j \leq j' \leq j''$, $i'' - i = 0$ ó 1 y $j'' - j = 0$ ó 1.



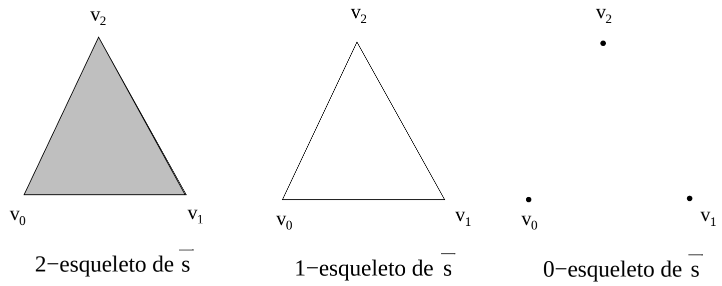
C 42

(f) Dado $n \geq 1$ definimos el siguiente orden parcial en $\mathbb{Z}^n$: $x \leq y$ si, para todo $0 \leq i \leq n$, $x_i \leq y_i$. Hay un complejo simplicial cuyo conjunto de vértices es $\mathbb{Z}^n$ y sus símplices son los subconjuntos finitos totalmente ordenados $\{x^0, \ldots, x^q\}$ de $\mathbb{Z}^n$ tales que, para todo $0 \leq i \leq n$, $x_i^q - x_i^0 = 0$ ó 1.

En los ejemplos anteriores los dibujos corresponden a los espacios topológicos modelados por los correspondientes complejos simpliciales. Más adelante formalizaremos esto.

Definición 1.1.3. Si K es un complejo simplicial, su esqueleto q-dimensional K^q se define como el complejo simplicial que consiste de todos los símplices de K de dimensión menor o igual a q.

Ejemplo 1.1.4. Si s es un 2-simplex, el 2-esqueleto de $\overline{s}$ es el mismo $\overline{s}$; su 1-esqueleto es $\dot{s}$ y su 0-esqueleto es el complejo simplicial cuyos únicos símplices son los vértices de s.



Observación 1.1.5. Si K es finito entonces $\dim K < \infty$; sin embargo, $\dim K < \infty$ no implica que K sea finito.

Los complejos simpliciales definidos en 1.1.2 (d) y (f) son ejemplos de complejos simpliciales infinitos pero con dimensión finita.

Definición 1.1.6. Un morfismo simplicial $\varphi : K_1 \to K_2$ es una función del conjunto de vértices de K_1 en el de K_2 tal que la imagen de todo simplex de K_1 es un simplex de K_2.

Dados dos morfismos simpliciales, su composición se define como la composición de las correspondientes funciones de vértices. Para todo complejo simplicial K hay un morfismo simplicial identidad. Se tiene entonces una categoría, que notaremos $\mathcal{CS}$, cuyos objetos son los complejos simpliciales y sus flechas los morfismos simpliciales.

Un subcomplejo L de un complejo simplicial K es un complejo simplicial tal que $S_L \subset S_K$ (en particular, los vértices de L son vértices de K). Si L es un subcomplejo de K, notamos $L \subset K$.

Observación 1.1.7. Si $L \subset K$ entonces la inclusión $i : L \to K$ es un morfismo simplicial.

Ejemplos 1.1.8.

(a) Para todo $s \in K$ $\overline{s}$ y $\dot{s}$ son subcomplejos de K.

(b) El esqueleto q-dimensional K^q es un subcomplejo de K y, si $p \leq q$, K^p es un subcomplejo de K^q.

(c) Si $\{L_i\}_{i \in I}$ es una familia de subcomplejos de K entonces $\cap L_i$ y $\cup L_i$ son subcomplejos de K (donde la unión y la intersección de complejos simpliciales es la unión y la intersección de sus conjuntos de símplices).

Un par simplicial (K, L) consiste de un complejo simplicial K y un subcomplejo $L \subset K$, posiblemente vacío. Un morfismo de pares simpliciales $\varphi : (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ es un morfismo simplicial tal que $\varphi(L_1) \subset \varphi(L_2)$. Se tiene una categoría de pares simpliciales y morfismos de pares simpliciales.
Un complejo simplicial punteado (K, v_0) es un complejo simplicial con un vértice distinguido v_0 llamado vértice base. Se tiene una categoría de complejos simpliciales punteados y morfismos simpliciales que preservan vértices base.

La categoría de complejos simpliciales punteados es una subcategoría plena de la categoría de pares simpliciales.

Un isomorfismo simplicial es un morfismo simplicial que es un isomorfismo en la categoría de los complejos simpliciales, es decir, un morfimo simplicial que tiene un morfismo simplicial inverso. Observar que un morfismo simplicial que es biyectivo en los vértices no necesariamente es un isomorfismo. Por ejemplo la inclusión de $\dot{s}$ en $\overline{s}$ es un morfismo simplicial biyectivo en los vértices pero no es un isomorfismo.
Un morfismo simplicial es un isomorfismo si y sólo si es biyectivo en los vértices y en los símplices.

Observación 1.1.9. Si existe un morfismo simplicial de K en L, inyectivo en los vértices, entonces es fácil ver que $\dim K \leq \dim L$. En consecuencia, dos complejos simpliciales isomorfos tienen la misma dimensión.

Como expusimos anteriormente, los complejos simpliciales se utilizan para modelar espacios topológicos. Formalizaremos ahora estas ideas.
Para ello, definimos un funtor covariante de la categoría de complejos simpliciales a la categoría de espacios topológicos. Este funtor se define de manera de asignarle a cada n-simplex de un complejo simplicial, el n-simplex topológico.
Recordemos primero la definición de los símplices topológicos.

Definición 1.1.10. Dado $n \geq 0$, el n-simplex topológico es el conjunto

$$\triangle^n = \left\{(t_0, t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / t_i \geq 0 \forall i, \sum t_i = 1\right\}$$

con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$.

$\triangle^0$ $\triangle^1$ $\triangle^2$

Notar que $\triangle^n$ puede ser descripto como el conjunto de las funciones

$$\alpha : \{0, 1, \ldots, n\} \to I$$

tales que $\sum_{i=0}^n \alpha(i) = 1$, donde I es el intervalo $[0, 1]$.

Definición 1.1.11. Sea K un complejo simplicial no vacío. Definimos $|K|$ como el conjunto de las funciones $\alpha : V_K \to I$ tales que:

(a) $\{v \in K / \alpha(v) \neq 0\}$ es un simplex de K.

(b) $\sum_{v\in K}\alpha(v)=1$

Si $K=\phi$ se define $|K|=\phi$.
En $|K|$ se define la siguiente métrica

$$d(\alpha,\beta)=\sqrt{\sum_{v\in K}[\alpha(v)-\beta(v)]^2}$$

Esta métrica define una topología en $|K|$. El conjunto $|K|$ con esta topología se nota $|K|_d$. En realidad, le daremos otra topología a $|K|$, definida de la siguiente forma.
Si s es un simplex de K se define el simplex cerrado $|s|\subset|K|$ como

$$|s|=\{\alpha\in|K|\,/si\,v\notin s\Rightarrow\alpha(v)=0\}$$

El conjunto $|s|$ con la topología métrica que hereda como subespacio de $|K|_d$ es un espacio métrico que notaremos $|s|_d$. Si $\dim s=n$ entonces $|s|_d$ es homeomorfo al n-simplex topológico pues, la función $|s|_d\to\triangle^n$ definida por $\alpha\mapsto(\alpha(v_0),\ldots,\alpha(v_n))$ es un homeomorfismo.
Le daremos a $|K|$ la topología coherente con todos sus símplices cerrados. Es decir, un subconjunto A de $|K|$ será abierto (o cerrado) en $|K|$ si y sólo si $A\cap|s|_d$ es abierto (o cerrado) en $|s|_d$ para todo $s\in K$.
Denotamos también con $|K|$ al conjunto $|K|$ con esta topología y lo llamamos el espacio asociado al complejo simplicial K.

Observación 1.1.12. Si s es un n-simplex $|\overline{s}|_d=|\overline{s}|=|s|_d$. El espacio $|\overline{s}|$ también se notará $|s|$ y el complejo simplicial $\overline{s}$ también se notará s.

Observación 1.1.13. Si K es un complejo simplicial finito entonces $|K|_d=|K|$. En general, la topología coherente es más fina que la topología métrica. Se deduce que el espacio de un complejo simplicial es un espacio Hausdorff.

Observación 1.1.14. Todo simplex cerrado es un subconjunto cerrado de $|K|$.

Teorema 1.1.15. *Una función $f:|K|\to X$ es continua si y sólo si $f|_{|s|}:|s|\to X$ es continua para todo $s\in K$*

Demostración. Es inmediato a partir de la definición de la topología de $|K|$.

□

Si $\varphi:K_1\to K_2$ es un morfismo simplicial, se define $|\varphi|:|K_1|\to|K_2|$ por la fórmula

$$|\varphi|(\alpha)(v\prime)=\sum_{\varphi(v)=v\prime}\alpha(v)$$

Si $v\prime$ no está en la imagen de φ se define $|\varphi|(\alpha)(v\prime)=0$.

Ejemplo 1.1.16. Sea s_1 el 1-simplex con vértices v_0 y v_1 y sea s_2 el 2-simplex con vértices w_0, w_1 y w_2. Sea $\varphi : s_2 \to s_1$ el morfismo simplicial definido por $\varphi(w_0) = v_0$, $\varphi(w_1) = v_1$, $\varphi(w_2) = v_1$. Entonces, si $\alpha \in |s_2|$, $|\varphi|(\alpha)$ es el punto de $|s_1|$ definido por $|\varphi|(\alpha)(v_0) = \alpha(w_0)$, $|\varphi|(\alpha)(v_1) = \alpha(w_1) + \alpha(w_2)$.
Recordando el homeomorfismo entre un n-simplex y el n-simplex topológico podemos pensar a $|\varphi|$ como la función $\triangle^2 \to \triangle^1$ dada por

$$|\varphi|(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + x_3).$$

Observemos que para todo morfismo simplicial φ la función $|\varphi|$ resulta continua. Para ver esto, sea $s = \{v_0, \ldots, v_n\}$ un simplex de K_1 y sea $\varphi(s) = \{w_0, \ldots, w_m\}$. La restricción de $|\varphi|$ a $|s|$ se puede pensar como la función de $\triangle^n$ en $\triangle^m$ definida por

$$|\varphi|\,|_{|s|}\,(\alpha(v_0), \ldots, \alpha(v_n)) = (\sum_{\varphi(v)=w_0} \alpha(v), \ldots, \sum_{\varphi(v)=w_m} \alpha(v))$$

Entonces $|\varphi|_{|\,|s|}$ es continua para todo $s \in K$. Luego, por el teorema 1.1.15, $|\varphi|$ es continua.

De esta forma, hemos definido un funtor covariante

$$|\ \ | : \mathcal{CS} \to \mathcal{T}op$$

de la categoría de complejos simpliciales a la categoría de espacios topológicos que le asigna, a cada complejo simplicial K, el espacio $|K|$ y, a cada morfismo simplicial $\varphi : K \to L$ la función continua $|\varphi| : |K| \to |L|$.

Si $L \subset K$, entonces la función continua inducida por la inclusión es la función

$$|i| : |L| \to |K|$$

que a cada $\alpha \in |L|$ le asigna la función $\overline{\alpha} \in |K|$ que coincide con α en los vértices de L y vale cero en los vértices de K que no son vértices de L.

Proposición 1.1.17. *Sea L un subcomplejo de K. La inclusión $|i| : |L| \to |K|$ es cerrada y, por lo tanto $|L|$ es un subespacio cerrado de $|K|$.*

Demostración. Sea F un subconjunto cerrado de $|L|$. Veamos que F es cerrado en $|K|$. Para ello, notemos primero que dado s un simplex de K se tiene

$$|L| \cap |s| = \bigcup_{\substack{s' \subset s \\ s' \text{ simplex de } L}} |s\prime|\,.$$

Por lo tanto, para todo simplex s de K, se tiene

$$F \cap |s| = F \cap |L| \cap |s| = \bigcup_{\substack{s' \subset s \\ s' \text{ simplex de } L}} F \cap |s\prime|\,,$$

que resulta cerrado en $|s|$ por ser unión finita de cerrados de $|s|$. De esto se deduce que F es cerrado en $|K|$. $\square$

Definición 1.1.18. Una triangulación de un espacio topológico X es un par (K, f), con K un complejo simplicial y $f : |K| \to X$ un homeomorfismo. Si X admite una triangulación se llama un poliedro. Una triangulación de un par topológico (X, A) es un par simplicial $((K, L), f)$ tal que $f : (|K|, |L|) \to (X, A)$ es un homeomorfismo de pares. Si (X, A) admite una triangulación se llama un par poliédrico.

Ejemplos 1.1.19.

(a) Sea $n \geq 1$ y s un $(n+1)$-simplex. El par topológico (D^{n+1}, S^n) es homeomorfo a $(|s|, |\dot{s}|)$. Entonces (D^{n+1}, S^n) es un par poliédrico.

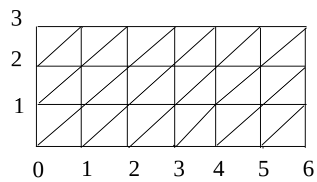
(b) El intervalo $[0, 1]$ es un poliedro pues es homeomorfo al 1-simplex. Otra triangulación de $[0, 1]$ es (I_r, f) donde r es un número natural y $f : |I_r| \to [0, 1]$ se define de manera que $f(i) = i$ y $f|_{|\{i,i+1\}|}$ es un homeomorfismo entre $|\{i, i+1\}|$ y $[\frac{i}{r}, \frac{i+1}{r}]$. Claramente cualquier intervalo cerrado es un poliedro.

(c) Sea K el complejo simplicial definido en el ejemplo 1.1.2(c). Se define $f : |K| \to \mathbb{R}$ de manera que $f(i) = i$ y $f|_{|\{i,i+1\}|}$ es un homeomorfismo entre $|\{i, i+1\}|$ y $[i, i+1]$. Entonces (K, f) es una triangulación de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ es un poliedro.

(d) El espacio topológico $I \times I$ es un poliedro pues $f : |C_{11}| \to I \times I$ definida por $f(\alpha) = \alpha(0,1).(0,1) + \alpha(1,0).(1,0) + \alpha(1,1).(1,1)$ es un homeomorfismo. Hay otras triangulaciones de $I \times I$. Sean r, k números naturales; si definimos $f : |C_{rk}| \to [0, r] \times [0, k]$ por

$$f(\alpha) = \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{k} \alpha(i,j).(i,j)$$

entonces para cada 2-simplex $s = \{(i,j), (i',j'), (i'',j'')\}$ de C_{rk}, $f|_{|s|}$ es un homeomorfismo entre $|s|$ y el triángulo determinado por los puntos (i,j), (i',j') y (i'',j'') en $\mathbb{R}^2$.



[0,6] x [0,3]

Observar que cada punto de $[0,r]\times[0,k]$ pertenece a uno de esos triángulos. Entonces f es un homeomorfismo entre C_{rk} y $[0,r]\times[0,k]$.
Si h un homeomorfismo entre $[0,r]\times[0,k]$ e $I\times I$, entonces $(C_{rk}, h\circ f)$ es una triangulación de $I\times I$.
Obviamente, cualquier rectágulo $[a,b]\times[c,d]$ es también un poliedro.

(e) Sea K el complejo simplicial definido en el ejemplo 1.1.2 (f) y $f:|K|\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(\alpha)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^n}\alpha(x)x$. (K,f) es una triangulación de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^n$ es un poliedro.

(f) Sea K el complejo simplicial con

$$S_K=\{\{k\},k\in\mathbb{N}_0\}\cup\{\{k,k+1\},k\in\mathbb{N}_0\}$$

y sea

$$f:|K|\to[0,1)\subset\mathbb{R}$$

definida de manera que $f(k)=\frac{k}{k+1}$ y $f|_{|\{k,k+1\}|}$ es un homeomorfismo entre $|\{k,k+1\}|$ y $[\frac{k}{k+1},\frac{k+1}{k+2}]$. Entonces (K,f) es una triangulación de $[0,1)$.

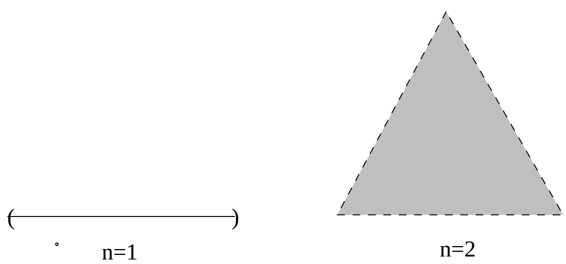
Observación importante 1.1.20. *Notar que un poliedro admite triangulaciones cuyos complejos simpliciales subyacentes no son isomorfos entre sí (ver items (b) y (d) del ejemplo anterior).*

Para cada $s\in K$ definimos el simplex abierto $\langle s\rangle\in K$ como

$$\langle s\rangle=\{\alpha\in K/\alpha(v)\neq 0\Leftrightarrow v\in s\}$$

Observar que si s es un n- simplex entonces $\langle s\rangle$ es homeomorfo al siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$\{x\in\mathbb{R}^{n+1}/0<x_i<1,\sum x_i=1\}$$



Observación importante 1.1.21. *Un simplex abierto no necesariamente es un subconjunto abierto en $|K|$. Por ejemplo, si s es un n-simplex y s_1 es una cara propia de s entonces $\langle s_1\rangle$ no es abierto en $|s|$. Sin embargo, el simplex abierto $\langle s\rangle$ es abierto en $|s|$ pues $\langle s\rangle=|s|-|\dot{s}|$.*

Si $\alpha \in |K|$, el conjunto $s = \{v \in K / \alpha(v) \neq 0\}$ es un simplex de K (por definición de $|K|$). Es más, s es el único simplex de K tal que $\alpha \in \langle s \rangle$. Entonces cada $\alpha \in |K|$ pertenece a un único simplex abierto y la colección de símplices abiertos de K constituye una partición de $|K|$. Teniendo esto en cuenta se prueba fácilmente el siguiente lema.

Lema 1.1.22. *Todo subconjunto A de $|K|$ contiene un conjunto discreto que consiste de un punto de cada simplex abierto de K que interseca a A.*

Notar que, si K es finito, entonces su espacio asociado $|K|$ es compacto. Como un conjunto compacto no puede tener un subconjunto discreto e infinito, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.1.23. *Un subconjunto compacto de $|K|$ está contenido en la unión de finitos símplices. En particular $|K|$ es compacto si y sólo si K es finito.*

Teorema 1.1.24. *Una función $F : |K| \times I \to X$ es continua si y sólo si $F|_{(|s| \times I)}$ es continua para todo $s \in K$.*

Demostración. Una función $F : |K| \times I \to X$ es continua si y sólo si

$$\widetilde{F} : |K| \to X^I$$

es continua, donde $\widetilde{F}(\alpha)(t) = F(\alpha, t)$ (por la ley exponencial, ya que I es localmente compacto y Haussdorff).
Por el teorema 1.1.15, $\widetilde{F}$ es continua si y sólo si

$$\widetilde{F}|_{|s|} : |s| \to X^I$$

es continua para todo $s \in K$. Nuevamente por ley exponencial ésto es equivalente a que $F : |s| \times I \to X$ sea continua para todo $s \in K$ $\square$

1.2 Linealidad

El espacio asociado a un complejo simplicial tiene cierta estructura lineal. Para cada n-simplex s de K, el subespacio $|s|$ de $|K|$ puede identificarse con un convexo de $\mathbb{R}^n$ asignándole, al conjunto de vértices de s, un conjunto de $n+1$ puntos afinmente independientes en $\mathbb{R}^n$ (ver 1.2.3).

Lema 1.2.1. *Una combinación convexa de puntos de $|K|$, $\alpha = \sum t_i \alpha_i$, con $t_i \neq 0$ es un punto de $|K|$ si y sólo si todos los α_i pertenecen a un mismo simplex cerrado.*

Demostración. Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son puntos de un simplex cerrado $|s|$ y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son tales que $0 < t_i < 1$ para $i = 1, 2 \ldots, n$ y $\sum t_i = 1$, entonces la función $\alpha = \sum t_i \alpha_i$ es también un elemento de $|s|$.
Recíprocamente, si $\alpha = \sum t_i \alpha_i$ es un elemento de $|K|$ entonces hay un simplex s de K tal que $\alpha \in < s >$. Como $t_i \neq 0$ para todo $0 \leq i \leq n$ entonces cada $\alpha_i \in |s|$. $\square$

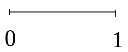
Definición 1.2.2. Si v es un vértice de K, se define la función característica de v, que se nota también v por:

$$v(v') = \begin{cases} 0 & si \quad v \neq v' \\ 1 & si \quad v = v' \end{cases}$$

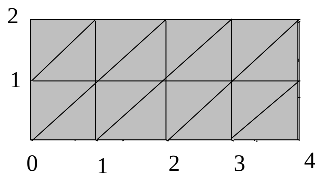
Observación importante 1.2.3. *Si $\alpha \in |K|$, podemos escribir a α como una combinación convexa de funciones caraterísticas.*

$$\alpha = \sum_{v \in K} \alpha(v)v.$$

De esta manera, identificamos los vértices de K con los correspondientes puntos de $|K|$. Por ejemplo,



I_1



C_{42}

Definición 1.2.4. Una función $f : |K_1| \to |K_2|$ se dice lineal si, para todo $\alpha \in |K_1|$, $\sum_{v \in K_1} \alpha(v)f(v)$ es un punto de $|K_2|$ y $f(\alpha) = \sum_{v \in K_1} \alpha(v)f(v)$.

Claramente, una función lineal queda determinada por sus valores en los vértices de K. Notar que, si $\varphi : K_1 \to K_2$ es simplicial entonces,

$$|\varphi|(\alpha) = \sum_{v \in K_1} \alpha(v)\varphi(v)$$

y por lo tanto $|\varphi|$ es lineal.

Definición 1.2.5. Un complejo simplicial K se dice localmente finito si cada vértice de K pertenece sólo a finitos símplices de K.

Es obvio que un complejo simplicial finito es localmente finito. Los complejos simpliciales definidos en 1.1.2(d) y (f) son ejemplos de complejos simpliciales infinitos y localmente finitos .

Definición 1.2.6. Una realización de un complejo simplicial K en $\mathbb{R}^n$ es una inmersión lineal de $|K|$ en $\mathbb{R}^n$.

Por ejemplo, si s es un n-simplex entonces, la función de $|s|$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ definida por $\alpha \to (\alpha(v_0), \ldots, \alpha(v_n))$ es una realización del complejo simplicial $\overline{s}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Veremos ahora que un complejo simplicial numerable, localmente finito y con dimensión menor o igual que n tiene una realización en $\mathbb{R}^{2n+1}$.
Se tiene el siguiente resultado (cf. [Spa]).

Lema 1.2.7. *Una función lineal $f : |s| \to \mathbb{R}^n$ es una inmersión si y sólo si la imagen del conjunto de vértices de s es un conjunto afinmente independiente en $\mathbb{R}^n$.*

Para probar este resultado, observemos primero que existe en $\mathbb{R}^{2n+1}$ una sucesión $\{p_i\}$ que cumple lo siguiente:

(a) Todo conjunto de $2n+2$ de los p_i es afinmente independiente.

(b) Para todo conjunto compacto $C \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ existe j_0 tal que C es disjunto del conjunto convexo generado por $\{p_i, i \geq j_0\}$.

Por ejemplo, tomemos los conjuntos $H_i = \{x \in \mathbb{R}^{2n+1} / x_1 \geq i\}$. Supongamos p_i definidos para $i < q$. Sea p_q un punto de H_q que no pertenezca a ninguna de las (finitas) variedades afines determinadas por $2n+1$ puntos del conjunto $\{p_i / 1 \leq p_i \leq q-1\}$. (Un tal punto existe porque una variedad afín determinada por $2n+1$ puntos tiene dimensión $2n$ y la unión finita de variedades afines de dimensión $2n$ no puede dar todo $\mathbb{R}^{2n+1}$).

Teorema 1.2.8. *Si K es numerable y localmente finito y $\dim K \leq n$ entonces K tiene una realización en $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Para demostrar esto se toma una sucesión $\{p_i\} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ que cumpla las condiciones (a) y (b) escritas más arriba, se numeran los vértices de K, $\{v_1, v_2, \ldots\}$ y se define la función $f : |K| \to \mathbb{R}^{2n+1}$ como la función lineal que cumple $f(v_i) = p_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Esta función resulta ser una inmersión de $|K|$ como un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^{2n+1}$. Los detalles de esta demostración pueden encontrarse en [Spa].

1.3 Límites y colímites de complejos simpliciales

En esta sección estudiaremos la construcción de algunos límites y colímites en la categoría $\mathcal{CS}$ y sus relaciones con los límites y colímites en la categoría de espacios topológicos.
Como veremos, el funtor

$$| \ | : \mathcal{CS} \to \mathcal{T}op$$

no preserva productos y, por la tanto, debemos hacer una construcción alternativa para mostrar que $| \ |$ preserva homotopías. Con este fin, definimos, para todo complejo simplicial K, un complejo simplicial $C(K)$ cuyo espacio asociado es $|K| \times I$ (Teorema 1.3.20).

Definición 1.3.1. Sean K_1 y K_2 complejos simpliciales, se define $K_1 \times K_2$ como el complejo simplicial cuyos vértices son los pares (v, w) con $v \in K_1$ y $w \in K_2$ y cuyos símplices son los conjuntos $\{(v_0, w_0), (v_1, w_1), \ldots, (v_n, w_n)\}$ tales que $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ es un simplex de K_1 y $\{w_0, w_1, \ldots, w_n\}$ es un simplex de K_2.

Notar que, en la definición anterior, los conjuntos $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ y $\{w_0, w_1, \ldots, w_n\}$ no deben ser necesariamente n-símplices. Es decir, que los v_i y los w_j pueden repetirse.

Observación 1.3.2. Si $p_1 : K_1 \times K_2 \to K_1$ y $p_2 : K_1 \times K_2 \to K_2$ son las proyecciones, la definición de $K_1 \times K_2$ dice que

$$s \in K_1 \times K_2 \Leftrightarrow p_1(s) \in K_1 \ y \ p_2(s) \in K_2$$

Observación 1.3.3. En general $|K_1 \times K_2|$ no es homeomorfo a $|K_1| \times |K_2|$.

Ejemplo 1.3.4. $I_1 \times I_1$ tiene como conjunto de vértices a

$$\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

y todo conjunto de vértices es un simplex. Por lo tanto $|I_1 \times I_1|$ es el 3-simplex. En cambio, $|I_1| \times |I_1|$ es homeomorfo a $I \times I$.

Proposición 1.3.5 (Propiedad universal del producto)**.** *Existen morfismos simpliciales $p_1 : K_1 \times K_2 \to K_1$ y $p_2 : K_1 \times K_2 \to K_2$ y $K_1 \times K_2$ es universal con respecto a esta propiedad. Es decir, para todo complejo simplicial W y para todo par de morfismos simpliciales $h_1 : W \to K_1$ y $h_2 : W \to K_2$ existe un único morfismo simplicial $h : W \to K_1 \times K_2$ tal que $p_1 \circ h = h_1$ y $p_2 \circ h = h_2$.*

$$\begin{tikzcd}
K_1 & K_1 \times K_2 \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & K_2 \\
 & W \arrow[ul, "h_1"] \arrow[u, "h"'] \arrow[ur, "h_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Es claro que la única forma de definir h para que el diagrama conmute es $h(w) = (h_1(w), h_2(w))$. Para ver que h es simplicial, sea s un simplex de W y veamos que $h(s)$ es un simplex de $K_1 \times K_2$. Como h_1 y h_2 son simpliciales entonces $p_1(h(s))$ y $p_2(h(s))$ son símplices de K_1 y K_2 respectivamente. Luego, por la observación 1.3.2, $h(s)$ es un simplex de $K_1 \times K_2$. $\square$

Proposición 1.3.6. *Si K_1 y K_2 tienen dimensión finita, entonces*

$$\dim(K_1 \times K_2) = (\dim K_1 + 1)(\dim K_2 + 1) - 1.$$

Demostración. Sea $n = \dim K_1$ y $m = \dim K_2$. Si s es simplex de $K_1 \times K_2$ entonces $p_1(s)$ tiene a lo sumo $n+1$ vértices y $p_2(s)$ tiene a lo sumo $m+1$ vértices. Por lo tanto s tiene a lo sumo $(n+1)(m+1)$ vértices. Esto prueba que $\dim K_1 \times K_2 \leq (\dim K_1 + 1)(\dim K_2 + 1) - 1$. Para ver que vale la igualdad, sea s_1 un simplex de K_1 con $n+1$ vértices y s_2 un simplex de K_2 con $m+1$ vértices. Entonces $s_1 \times s_2$ es un simplex de $K_1 \times K_2$ y tiene $(n+1)(m+1)$ vértices. $\square$

La siguiente proposición se deduce de la observación 1.3.2.

Proposición 1.3.7. *Si $\varphi_1 : K_1 \to L_1$ y $\varphi_2 : K_2 \to L_2$ son morfismos simpliciales y $\varphi_1 \times \varphi_2 : K_1 \times K_2 \to L_1 \times L_2$ es la aplicación definida por $\varphi_1 \times \varphi_2(v_1, v_2) = (\varphi_1(v_1), \varphi_2(v_2))$ entonces $\varphi_1 \times \varphi_2$ es un morfismo simplicial.*

Mostraremos ahora construcciones para pullbacks, coproductos y pushouts. Empezamos construyendo los pullbacks.
Dados complejos simpliciales K, L_1, L_2 y morfismos simpliciales $f : L_1 \to K$ y $g : L_2 \to K$

$$\begin{tikzcd} & L_1 \arrow[d, "f"] \\ L_2 \arrow[r, "g"'] & K \end{tikzcd}$$

definimos P como el complejo simplicial cuyo conjunto de vértices es

$$V_P = \{(v, w)/v \in L_1, w \in L_2 \text{ y } f(v) = g(w)\}$$

y su conjunto de símplices es

$$\{\{(v_1, w_1), \ldots, (v_n, w_n)\} \subset V_P / \{v_1, \ldots, v_n\} \in L_1 \text{ y } \{w_1, \ldots, w_n\} \in L_2\}.$$

Observar que P es un subcomplejo de $L_1 \times L_2$.
Veamos que P es el pullback del diagrama anterior.

Proposición 1.3.8. *Sean K, L_1, L_2 y P como antes. Existen morfismos simpliciales $p_1 : P \to L_1$, $p_2 : P \to L_2$ tales que $f \circ p_1 = g \circ p_2$.*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & L_1 \arrow[d, "f"] \\ L_2 \arrow[r, "g"'] & K \end{tikzcd}$$

y P es universal con respecto a esta propiedad. Es decir, para todo complejo simplicial W y todo par de morfismos simpliciales $h_1 : W \to L_1$, $h_2 : W \to L_2$ tales que $f \circ h_1 = g \circ h_2$ existe un único morfismo simplicial $h : W \to P$ tal que $p_1 \circ h = h_1$ y $p_2 \circ h = h_2$.

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "h_1"] \arrow[ddr, bend right, "h_2"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & L_1 \arrow[d, "f"] \\
& L_2 \arrow[r, "g"'] & K
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Sean $p_1 : P \to L_1$ y $p_2 : P \to L_2$ las proyecciones. Por definición de P, p_1 y p_2 son morfismos simpliciales y $f \circ p_1 = g \circ p_2$.
Sea W un complejo simplicial y sean $h_1 : W \to L_1$ y $h_2 : W \to L_2$ morfismos simpliciales tales que $f \circ h_1 = g \circ h_2$. Definimos $h : W \to P$ por $h(w) = (h_1(w), h_2(w))$. Claramente $p_1 \circ h = h_1$ y $p_2 \circ h = h_2$ y h es única.
Para ver que h es simplicial, sea s un simplex de W. Como h_1 y h_2 son simpliciales entonces $p_1 \circ h(s)$ y $p_2 \circ h(s)$ son símplices de L_1 y L_2 respectivamente. Por definición de P esto implica que $h(s)$ es un simplex de P. $\square$

Ejemplos 1.3.9. Pullbacks en $\mathcal{CS}$

1) El producto $K \times L$ puede verse como el siguiente pullback.

$$
\begin{tikzcd}
 & K \arrow[d] \\
L \arrow[r] & *
\end{tikzcd}
$$

2) Sea $L_1 = I_2$, L_2 el 2-simplex s con vértices $\{v_0, v_1, v_2\}$ y $K = I_1$. Sea $f : I_2 \to I_1$ dado por $f(0) = f(1) = 0$, $f(2) = 1$ y $g : s \to I_1$ dado por $g(v_0) = g(v_1) = 0$, $g(v_2) = 1$. El pullback resulta ser el complejo simplicial con vértices

$$V_P = \{(v_0, 0), (v_1, 0), (v_0, 1), (v_1, 1), (v_2, 2)\}$$

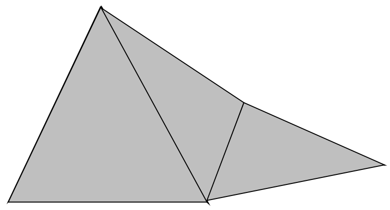
y símplices todos los subconjuntos de V_P salvo los que contienen a $\{(v_0, 0), (v_2, 2)\}$ ó a $\{(v_1, 0), (v_2, 2)\}$.
Es decir, P consiste de un 3-simplex

$$s = \{(v_0, 0), (v_1, 0), (v_0, 1), (v_1, 1)\},$$

cinco 2-símplices dados por todas las 2-caras de s junto con

$$s' = \{(v_0, 1), (v_1, 1), (v_2, 2)\}$$

y ocho 1-símplices dados por todas las 1-caras de s y de s'.



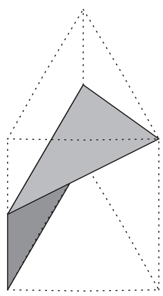
Notar que el espacio asociado al pullback no es en general homeomorfo al pullback de los espacios asociados. Esto ya fue visto antes, al observar que el funtor $|\;|$ no conmuta con $\times$. Veamos que lo mismo sucede en este ejemplo.
Observemos que $|I_2| = |I_1| = I$, $|s| = \triangle^2$ y $|f| : I \to I$ está dada por

$$|f|(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & si \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

y $|g| : \triangle^2 \to I$ está dada por $|g|(x_1, x_2, x_3) = x_3$.
El pullback resulta ser el espacio topológico

$$X = \{(x, t)/x \in \triangle^2, t \in I, x_3 = 0 \ y \ t \leq \frac{1}{2} \ o \ x_3 = 2t - 1 \ y \ t \geq \frac{1}{2}\}$$

con la topología que hereda como subespacio de $\triangle^2 \times I$. Geométricamente, X es un rectángulo cerrado pegado a un triángulo por una de sus aristas.



Evidentemente X no es homeomorfo a $|C|$.

Definición 1.3.10. Dados dos complejos simpliciales K_1 y K_2 definimos $K_1 \coprod K_2$ como el complejo simplicial cuyo conjunto de vértices es la unión disjunta de los conjuntos de vértices de K_1 y K_2 y su conjunto de símplices es la unión disjunta de los conjuntos de símplices de K_1 y K_2.

Es claro que $K_1 \coprod K_2$ verifica la propiedad universal del coproducto.

Proposición 1.3.11. *Existen morfismos simpliciales $i_1 : K_1 \to K_1 \coprod K_2$ e $i_2 : K_2 \to K_1 \coprod K_2$ y $K_1 \coprod K_2$ es universal con respecto a esta propiedad. Es decir, para todo complejo simplicial W y para todo par de morfismos simpliciales $h_1 : K_1 \to W$ y $h_2 : K_2 \to W$ existe un único morfismo simplicial $h : K_1 \coprod K_2 \to W$ tal que $h \circ i_1 = h_1$ y $h \circ i_2 = h_2$.*

$$\begin{tikzcd}
K_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "h_1"'] & K_1 \coprod K_2 \arrow[d, "h"] & K_2 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "h_2"] \\
 & W &
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.3.12. *Dados K_1 y $K_2 \in \mathcal{CS}$, se tiene $|K_1 \coprod K_2| = |K_1| \coprod |K_2|$*

Definición 1.3.13. Dado un diagrama de complejos simpliciales

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & L_1 \\
L_2 &
\end{tikzcd}$$

definimos C como el complejo simplicial cuyo conjunto de vértices es

$$V_{L_1} \coprod V_{L_2} / \sim$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por

$$f(v) \sim g(v)$$

y un subconjunto $\{w_0, \ldots, w_n\}$ de V_C es un simplex si y sólo si existe un simplex $\{v_0, \ldots, v_n\}$ de L_1 o de L_2 tal que $w_i = [v_i]$, para $0 \leq i \leq n$, donde denotamos $[v]$ a la clase del vértice v.

Veamos que C es el pushout del diagrama anterior.

Proposición 1.3.14. *Existen $i_1 : L_1 \to C$, $i_2 : L_2 \to C$ morfismos simpliciales tales que $i_1 \circ f = i_2 \circ g$.*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & L_1 \arrow[d, "i_1"] \\ L_2 \arrow[r, "i_2"'] & C \end{tikzcd}$$

y C es universal con respecto a esta propiedad. Es decir, para todo complejo simplicial W y todo par de morfismos simpliciales $h_1 : L_1 \to W$, $h_2 : L_2 \to W$ tales que $h_1 \circ f = h_2 \circ g$ existe un único morfismo simplicial $h : C \to W$ tal que $h \circ i_1 = h_1$ y $h \circ i_2 = h_2$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & L_1 \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "h_1"] & \\ L_2 \arrow[r, "i_2"'] \arrow[drr, bend right, "h_2"'] & C \arrow[dr, dotted, "h"] & \\ & & W \end{tikzcd}$$

Demostración. Definimos $i_1 : L_1 \to C$ por $i_1(v) = [v]$ e $i_2 : L_2 \to C$ por $i_2(v) = [v]$. Por definición de C, i_1 e i_2 son simpliciales y además $i_1 \circ f = i_2 \circ g$.
Sea W un complejo simplicial y sean $h_1 : L_1 \to W$ y $h_2 : L_2 \to W$ morfismos simpliciales. Para que el diagrama conmute debemos definir $h : C \to W$ por $h(w) = h_1(v)$, si $w = [v]$, con $v \in K_1$ y $h(w) = h_2(v)$, si $w = [v]$, con $v \in K_2$.
Veamos que h está bien definida. Para ello, sean v y v' vértices de $L_1 \coprod L_2$ tales que $v \sim v'$. Esto implica que existen $v_0, \ldots, v_n$ vértices de $L_1 \coprod L_2$ tales que $v = v_0$, $v' = v_n$ y, para cada i existe $z_i \in K$ tal que $v_i = f(z_i)$ y $v_{i+1} = g(z_i)$ ó $v_i = g(z_i)$ y $v_{i+1} = f(z_i)$. Como $h_1 \circ f = h_2 \circ g$, esto implica que $h_1(v_i) = h_2(v_{i+1})$ en el primer caso y que $h_2(v_i) = h_1(v_{i+1})$ en el segundo. En cualquiera de los dos casos se concluye que $h([v_i]) = h([v_{i+1}])$ y por lo tanto $h([v]) = h([v'])$.
Es claro que $h \circ i_1 = h_1$, $h \circ i_2 = h_2$ y que h es única.

Para ver que h es simplicial, sea s un simplex de C. Por definición de C es $s = i_1(s_1)$ para algún $s_1 \in L_1$ o bien $s = i_2(s_2)$ para algún $s_2 \in L_2$. En el primer caso

$$h(s) = h \circ i_1(s_1) = h_1(s)$$

y en el segundo

$$h(s) = h \circ i_2(s_2) = h_2(s).$$

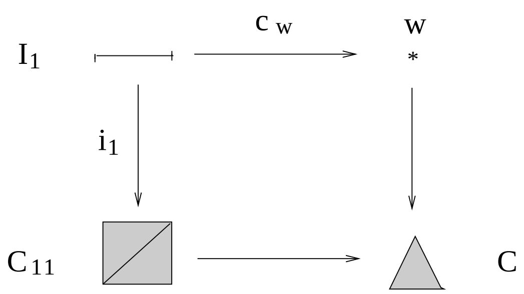
Como h_1 y h_2 son simpliciales resulta que $h(s)$ es un simplex de W. □

Dado $L \subset K$ podemos definir el complejo simplicial cociente K/L como el pushout del diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "c"] \arrow[d, "i"'] & * \\ K & \end{tikzcd}$$

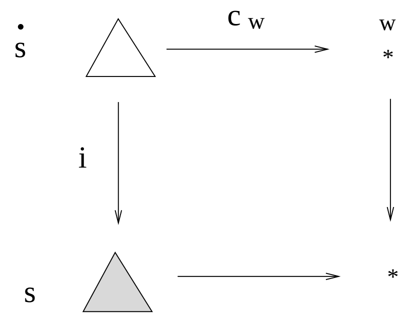
Ejemplos 1.3.15. Cocientes en $\mathcal{CS}$

1) Sea $c_w : I_1 \to \{w\}$ el morfismo constante y sea $i_1 : I_1 \to C_{11}$ la inclusión $i_1(0) = (0,1)$, $i_1(1) = (1,1)$. Se tiene el siguiente pushout.



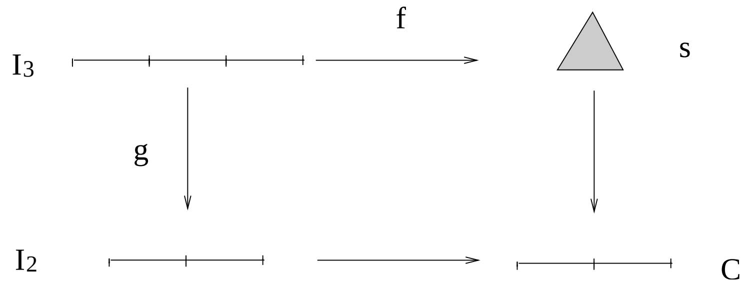
C es el complejo simplicial con vértices $[(0,0)]$, $[(1,0)]$ y $[w] = [(0,1)] = [(1,1)]$. Todo conjunto de vértices es un simplex. Por lo tanto C es el 2-simplex.
Comparemos con el pushout de los espacios topológicos asociados.
Recordemos que $|s| = I$ y $|C_{11}| = I \times I$. $|\{w\}|$ es el espacio topológico con un solo punto. $|i_1| = I \to I \times I$ es la inclusión $|i_1|(x) = (x,1)$ y $|c_w|$ es el morfismo constante $|c_w|(x) \equiv w$. El pushout resulta ser el espacio topolgíco $X = I \times I/\sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia que identifica todos lo puntos de $(s,1) \in I \times I$. Por lo tanto X es homeomorfo al 2-simplex y $X = |C|$.

2) Sea $c_w : \dot{s} \to \{w\}$ el morfismo constante y sea $i : \dot{s} \to s$ la inclusión. Se tiene el siguiente pushout.



C es el complejo simplicial con un solo vértice $[w] = [v_0] = [v_1] = [v_2]$, es decir, C es el 0-simplex.
Comparemos con el pushout de los espacios topológicos asociados.
Observemos que $|c_w| : |\dot{s}| \to \{w\}$ es el morfismo constante y $|i| : |\dot{s}| \to |s|$ es la inclusión. El pushout resulta ser el espacio topológico $X = |s|/\sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia que identifica todos los puntos del borde de $|s|$. Por lo tanto X es la esfera S^2.
Con este ejemplo vimos que el funtor $|\ |$ no preserva cocientes.

Ejemplo 1.3.16. Sea s el 2-simplex con vértices $\{v_0, v_1, v_2\}$, sea $f : I_3 \to s$ el morfismo simplicial con $f(0) = f(3) = v_0$, $f(1) = v_1$, $f(2) = v_2$ y $g : I_3 \to I_2$ dado por $g(0) = 0$, $g(1) = g(3) = 1$, $g(2) = 2$. El pushout resulta ser el 1-simplex con vértices $[v_0] = [v_1] = [0] = [1]$ y $[v_2] = [2]$.



Para calcular el pushout de los espacios topológicos asociados, observemos que $|f| : |I_3| \to |s|$ es la función

$$|f|(t) = \begin{cases} tv_1 + (1-t)v_0 & si \quad t \in [0,1] \\ (t-1)(v_2) + (2-t)v_1 & si \quad t \in [1,2] \\ (t-2)(v_0) + (3-t)v_2 & si \quad t \in [2,3] \end{cases}$$

y $|g| : |I_3| \to |I_2|$ es la función

$$|g|(t) = \begin{cases} t & si \quad t \in [0,2] \\ 4-t & si \quad t \in [2,3] \end{cases} .$$

El pushout es el espacio topológico

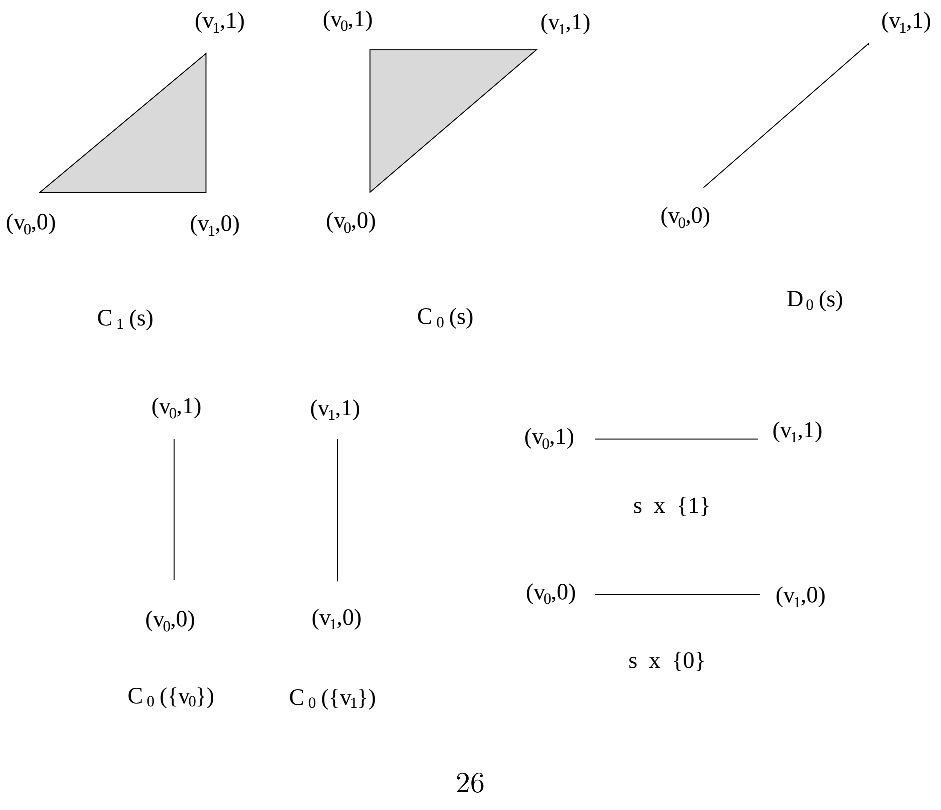
$$X = |s| \coprod [0,2]/\sim,$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por $|f|(t) = |g|(t)$. Observar que el segmento $[0,1]$ se identifica con $|\{v_0, v_1\}|$ y el segmento $[1,2]$ se identifica con $|\{v_1, v_2\}|$ y con $|\{v_0, v_2\}|$. El pushout resulta ser D^2.

En lo que sigue, definiremos, para cada complejo simplicial K, un complejo simplicial $C(K)$ de tal forma que el espacio $|C(K)|$ es homeomorfo a $|K| \times I$.
Veamos primero un caso particular.

Ejemplo 1.3.17. Sea s el 1-simplex con vértices v_0 y v_1. El complejo simplicial $C(s)$ tiene como conjunto de vértices al conjunto $\{v_0, v_1\} \times \{0,1\}$ y los símplices (además de los 0-símplices) son:

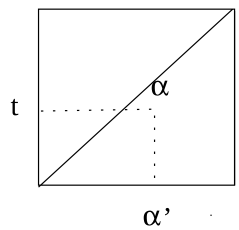
$$\begin{array}{ll} C_0(s) = \{(v_0,0),(v_0,1),(v_1,1)\} & C_1(s) = \{(v_0,0),(v_1,0),(v_1,1)\} \\ C_0(\{v_0\}) = \{(v_0,0),(v_0,1)\} & C_1(\{v_1\}) = \{(v_1,0),(v_1,1)\} \\ s \times \{0\} = \{(v_0,0),(v_1,0)\} & s \times \{1\} = \{(v_0,1),(v_1,1)\} \\ D_0(s) = \{(v_0,0),(v_1,1)\} & \end{array}$$



Observar que $|C(s)| = |C_0(s)| \cup |C_1(s)|$.
Es claro que $|C(s)|$ es homeomorfo a $|s| \times I$, pero de todas formas, veamos como definir un homeomorfismo pues esto nos dará un idea del caso general.
Sea $\alpha \in |C(s)|$ y supongamos que $\alpha \in |C_0(s)|$. Entonces

$$\alpha = \alpha(v_0, 0).(v_0, 0) + \alpha(v_0, 1).(v_0, 1) + \alpha(v_1, 1).(v_1, 1).$$

La idea es escribir a α como (α', t), con $\alpha' \in |s|$ y $t \in I$.



Es decir, queremos hallar a, b, $t \in I$ tales que

$$\alpha(v_0, 0).(v_0, 0) + \alpha(v_0, 1).(v_0, 1) + \alpha(v_1, 1).(v_1, 1) = (a.v_0 + b.v_1, t).$$

Debe ser entonces

$$\begin{aligned} t &= \alpha(v_0, 1) + \alpha(v_1, 1) \\ a &= \alpha(v_0, 0) + \alpha(v_0, 1) \\ b &= \alpha(v_1, 1) \end{aligned}$$

Definimos entonces $\alpha' = (\alpha(v_0, 0) + \alpha(v_0, 1)).v_0 + \alpha(v_1, 1).v_1$.
Inversamente, dado $\alpha' \in |s|$, $t \in I$, queremos ver a (α', t) como un elemento α de $|C(s)|$.
Buscamos entonces a', b', $c' \in I$ tal que

$$(\alpha'(v_0).v_0 + \alpha'(v_1).v_1, t) = a'.(v_0, 0) + b'.(v_0, 1) + c'.(v_1, 1).$$

Entonces debe ser

$$\begin{aligned} c' &= \alpha'(v_1) \\ b' &= t - \alpha'(v_1) \\ a' &= \alpha'(v_0) + \alpha'(v_1) - t \end{aligned}$$

Definimos entonces

$$\alpha = (\alpha'(v_0) + \alpha'(v_1) - t).(v_0, 0) + (t - \alpha'(v_1)).(v_0, 1) + \alpha'(v_1).(v_1, 1).$$

La función que, a cada $\alpha \in |C(K)|$, le asigna (α', t) resulta un homeomorfismo entre $|C(s)|$ y $|s| \times I$.

Definición 1.3.18. Sea K un complejo simplicial. Definimos $C(K)$ de la siguiente manera.
El conjunto de vértices de $C(K)$ es el conjunto $K \times I$. Ahora, ordenamos los vértices de

K. Para cada simplex $s = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ de K, con $v_0 < v_1 < \dots < v_n$, para cada k, con $0 \leq k \leq n$ y para cada j, con $0 \leq k \leq n-1$, sea

$$\begin{aligned}
&C_k(s) = \{(v_0,0), \dots, (v_k,0), (v_k,1), (v_{k+1},1), \dots, (v_n,1)\} \\
&D_j(s) = \{(v_0,0), \dots, (v_j,0), (v_{j+1},1), \dots, (v_n,1)\} \\
&s \times \{0\} = \{(v_0,0), \dots, (v_n,0)\} \\
&s \times \{1\} = \{(v_0,1), \dots, (v_n,1)\}
\end{aligned}$$

El conjunto de símplices de K es el conjunto formado por todos los $s \times \{0\}$, $s \times \{1\}$, $C_k(s)$ y $D_j(s)$.

Observar que, si $s = \{v_0, \dots, v_n\}$ y $0 \leq k \leq n-1$, entonces $D_k(s)$ está contenido en $C_k(s)$ y $s \times \{0\}$ y $s \times \{1\}$ están contenidos en $C_n(s)$. Notar además que todo subconjunto de $C_k(s)$ es un simplex de $C(K)$. Por lo tanto $C(K)$ es un complejo simplicial y se verifica que $\dim C(K) = \dim K + 1$.

Observación 1.3.19. Si K es un complejo simplicial entonces $C(K)$ es un subcomplejo de $K \times I$.

Definimos ahora un homeomorfismo entre $|C(K)|$ y $|K| \times I$.
Sea $\alpha \in |C(K)|$. Existe $0 \leq k \leq n$ tal que $\alpha \in |C_k(s)|$. Supongamos que $s = \{v_0, \dots, v_n\}$. Entonces

$$\alpha = \sum_{i=0}^{k} \alpha(v_i,0).(v_i,0) + \sum_{i=k}^{n} \alpha(v_i,1).(v_i,1).$$

Queremos escribir a α como (α', t) con

$$\alpha' = \sum_{i=0}^{n} \alpha'(v_i).v_i.$$

Debe ser entonces

$$\alpha'(v_i) = \begin{cases} \alpha(v_i,0) & si \quad i < k \\ \alpha(v_i,1) & si \quad i > k \\ \alpha(v_k,0) + \alpha(v_k,1) & si \quad i = k \end{cases}$$

y $t = \sum_{i=k}^{n} \alpha(v_i,1)$.
Se tiene entonces una aplicación $f : |C(K)| \to |K| \times I$ que, a cada $\alpha \in |C(K)|$, le asigna $(\alpha', t) \in |K| \times I$. Para ver que f está bien definida supongamos que $\alpha \in |C_k(s)| \cap |C_{k'}(s)|$ con $k < k'$ y sean

$$\alpha'(v_i) = \begin{cases} \alpha(v_i,0) & si \quad i < k \\ \alpha(v_i,1) & si \quad i > k \\ \alpha(v_k,0) + \alpha(v_k,1) & si \quad i = k \end{cases}$$

y

$$\alpha''(v_i) = \begin{cases} \alpha(v_i,0) & si \quad i < k' \\ \alpha(v_i,1) & si \quad i > k' \\ \alpha(v_{k'},0) + \alpha(v_{k'},1) & si \quad i = k' \end{cases}$$

Como $\alpha \in |C_k(s)|$ entonces $\alpha(v_i, 0) = 0$ para todo $i > k$. Por otro lado, como $\alpha \in |C_{k'}(s)|$ entonces $\alpha(v_i, 1) = 0$ para todo $i < k'$. Entonces

$$\alpha'(v_i) = \begin{cases} \alpha(v_i, 0) & si \quad i \leq k \\ \alpha(v_i, 1) & si \quad i \geq k' \end{cases}$$

y

$$\alpha''(v_i) = \begin{cases} \alpha(v_i, 0) & si \quad i \leq k \\ \alpha(v_i, 1) & si \quad i \geq k' \end{cases}.$$

Entonces $\alpha' = \alpha''$ y f está bien definida. Observar que f resulta continua pues, para todo $s \in |K|$, $f\,|_{|C(s)|}$ lo es.
Sea ahora $\alpha' \in |K|$, $t \in I$ y supongamos que $\alpha' \in < s >$, con $s = \{v_0, \ldots, v_n\}$. Queremos escribir a $(\alpha', t) = (\sum_{i=0}^{n} \alpha'(v_i).v_i, t)$ como un elemento de algún $C_k(s)$. Es decir, como

$$\alpha = \sum_{i=0}^{k} \alpha(v_i, 0).(v_i, 0) + \sum_{i=k}^{n} \alpha(v_i, 1).(v_i, 1) = (\sum_{i=0}^{k} \alpha(v_i, 0).v_i + \sum_{i=k}^{n} \alpha(v_i, 1).v_i, \sum_{i=k}^{n} \alpha(v_i, 1))$$

para algún $0 \leq k \leq n$.
Debe ser entonces

$$\alpha(v_i, 0) = \alpha'(v_i) \; si \; i < k,$$

$$\alpha(v_i, 1) = \alpha'(v_i) \; si \; i > k$$

y

$$\alpha(v_k, 0) + \alpha(v_k, 1) = \alpha'(v_k).$$

Como además debe ser $t = \sum_{i=k}^{n} \alpha(v_i, 1)$, elijo k tal que $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha'(v_i) < t$ y $\sum_{i=k}^{n} \alpha'(v_i) \geq t$.
Luego definimos

$$\alpha(v_k, 1) = t - \sum_{i=k+1}^{n} \alpha'(v_i)$$

$$\alpha(v_k, 0) = \sum_{i=k}^{n} \alpha'(v_i) - t$$

Se tiene una función

$$g : |K| \times I \to |C(K)|$$

que asigna, a cada (α', t), con $\alpha' \in |K|$, $t \in I$ el punto α de $|C(K)|$. Se verifica que g está bien definida y es continua y que f y g son inversas.
Se probó el siguiente resultado.

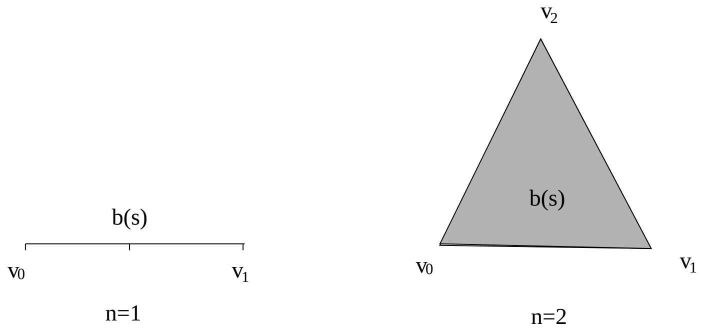
Teorema 1.3.20. *Si X es un poliedro y K es un complejo simplicial tal que $X = |K|$ entonces $X \times I$ es un poliedro con $X \times I = |C(K)|$*

1.4 Subdivisión baricéntrica

En esta sección describiremos diferentes triangulaciones de un mismo poliedro y las relaciones entre ellas. Se probará que un poliedro se puede triangular por un complejo simplicial con símplices arbitrariamente 'pequeños'.

Definición 1.4.1. El baricentro de un simplex $s = \{v_0, v_1, \dots v_n\}$ se define como

$$b(s) = \sum_{0 \leq i \leq n} \frac{1}{n+1} v_i \in |K|$$



Claramente $b(s) \in \langle s \rangle$.

Definición 1.4.2. Dado un complejo simplicial definimos la subdivisión baricéntrica de K, que notamos $sd\ K$, como el complejo simplicial cuyos vértices son los baricentros de los símplices de K y cuyos símplices son los conjuntos $\{b(s_0), \dots, b(s_n)\}$ tales que s_{i-1} es una cara de s_i para $i = 1, 2, \dots, n$.

Es claro que $sd\ K$ es un complejo simplicial y que si L es un subcomplejo de K entonces $sd\ L$ es un subcomplejo de $sd\ K$.
Los vértices de $sd\ K$ son puntos de $|K|$ y, si s' es un simplex de $sd\ K$ entonces existe un simplex s de K tal que $s' \subset |s|$ (si $s' = \{b(s_0), \dots, b(s_n)\}$ basta tomar $s = s_n$).

Proposición 1.4.3. *Sea $h : |sd\ K| \to |K|$ la función lineal que asigna, a cada vértice de $sd\ K$ el correspondiente punto de $|K|$. Entonces h es un homeomorfismo.*

Demostración. Para ver que es sobreyectiva, sea $\alpha \in |K|$ y sea s el simplex de K tal que $\alpha \in < s >$. Supongamos que $v_0, \dots, v_n$ son los vértices de s, entonces $\alpha = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i$. Ordenemos los coeficientes α_i de mayor a menor: $\alpha_{i_0} \geq \alpha_{i_1} \geq \dots \alpha_{i_n}$. Para cada $0 \leq k \leq n$ sea s_k la cara de s con vértices $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_k}\}$. Se verifica fácilmente que

$$\alpha = \sum_{j=0}^{n} \alpha'_j b(s_j)$$

con $\alpha'_j = (j+1)(\alpha_{i_j} - \alpha_{i_{j+1}})$ si $0 \leq j \leq n-1$ y $\alpha'_n = (n+1)\alpha_{i_n}$.

Se verifica que $0 \leq \alpha_i' \leq 1$ para todo $0 \leq i \leq 1$ y que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i' = 1$. Como $\{b(s_0), \ldots, b(s_n)\}$ es un simplex de $sd\ K$, entonces $\alpha \in |sd\ K|$.
Es claro que h es inyectiva y que es continua. Para ver que h es un homeomorfismo definimos el siguiente subcomplejo de $sd\ K$:

$$K'(s) = \{s' \in sd\ K / h(< s' >) \subset < s_1 > para\, algun\, s_1\, cara\, de\, s\}$$

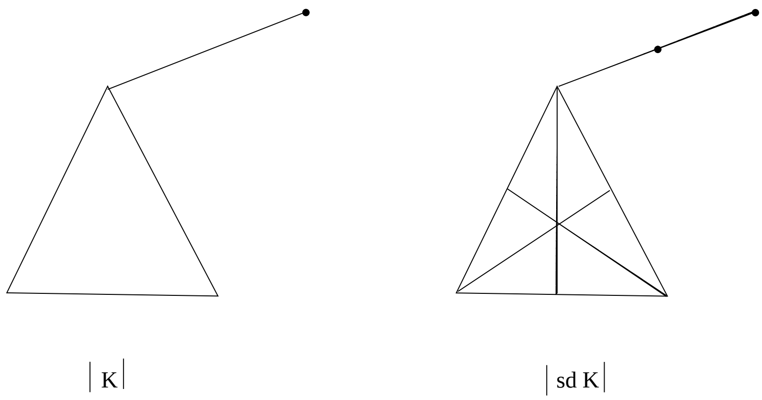
Sea h_s la restricción de h a $K'(s)$. Como un simplex tiene finitas caras entonces $K'(s)$ es un subcomplejo finito de $sd\ K$ y por lo tanto $|K'(s)|$ es un espacio compacto.
Es fácil verificar que h_s es una biyección entre $|K'(s)|$ y $|s|$. Como $|K'(s)|$ es compacto resulta que $h_s : |K'(s)| \to |s|$ es un homeomorfismo.
Se tiene entonces una función continua $g : |K| \to |sd\ K|$ tal que $g\,|_{|s|} = h_s^{-1}$. Como g es la inversa de h se concluye que g es un homoeomorfismo.

□

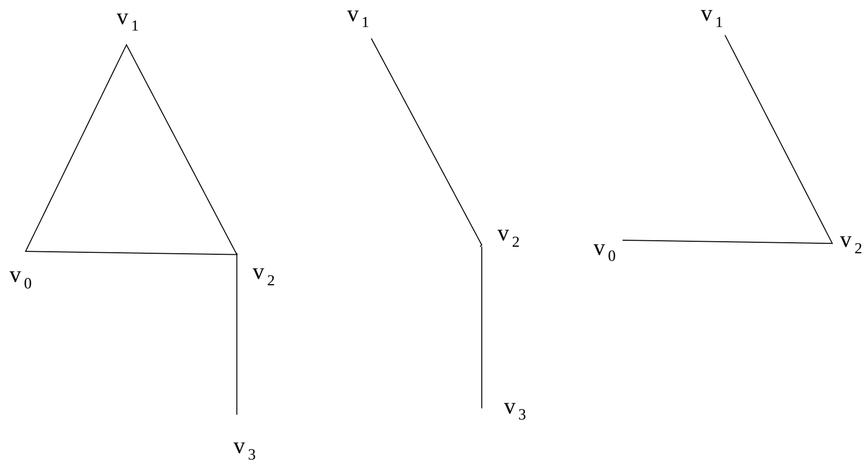
Ejemplo 1.4.4. Si I_r es el complejo simplicial definido en 1.1.2(c) entonces $sd\ I_r$ es el complejo simplicial de dimensión 1 que tiene como vértices a los números racionales $\frac{i}{2}$ con $0 \leq i \leq 2r$ y como 1-símplices a los conjuntos de la forma $\{\frac{i}{2}, \frac{i+1}{2}\}$, con $0 \leq i \leq r-1$. Observar que $sd\ I_r$ es isomorfo a I_{2r}.

Las subdivisiones baricéntricas iteradas se definen recursivamente por

$$sd^0(K) = K$$
$$sd^n(K) = sd(sd^{n-1}\ K)$$



Definición 1.4.5. Un subcomplejo L de K se dice pleno si todo simplex de K que tiene todos sus vértices en L es un simplex de L.



Hay un subcomplejo N de K cuyos símplices son los símplices de K que no tienen ningún vértice de L. Claramente N es el mayor subcomplejo de K que es disjunto con L.
Por ejemplo, si K y L son los complejos simpliciales de la figura entonces el mayor subcomplejo de K que es disjunto con L es el subcomplejo $\{v_0\}$.
Observar que todos los vértices de K que no son vértices de L son vértices de N pero puede haber símplices de K que no sean símplices de L ni de N. Si $s = \{v_0, v_1, ..., v_n\}$ es un tal simplex entonces sus vértices se pueden ordenar de manera que $v_i \in L$ para $i \leq m$ y $v_i \in N$ para $i \geq m$. Si L es pleno se tiene el siguiente resultado:

Lema 1.4.6. *Si L es un subcomplejo pleno de K y N es el mayor subcomplejo de K disjunto con L entonces para cada simplex de K se cumple una y sólo una de las siguientes posibilidades*

a) *s es un simplex de L*

b) *s es un simplex de K*

c) *$s = s\prime \cup s\prime\prime$ para algún $s\prime \in L$ y $s\prime\prime \in N$*

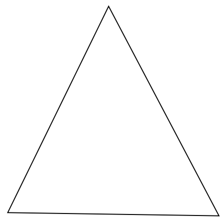
Ejemplos 1.4.7. :

(a) $\dot{s}$ es un subcomplejo no pleno de $\bar{s}$

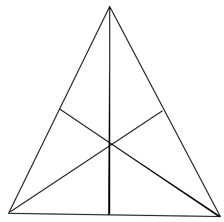
(b) Si s_1 es una cara de s entonces $\bar{s_1}$ es un subcomplejo pleno de $\bar{s}$.

El siguiente resultado se deduce fácilmente de la definición de $sd\ K$

Proposición 1.4.8. *Si L es un subcomplejo de K entonces $sd\ L$ es un subcomplejo pleno de $sd\ K$*



$\dot{s}$ no es un subcomplejo pleno de s



sd $\dot{s}$ es un subcomplejo pleno de sd s

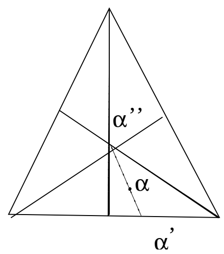
Observación 1.4.9. Si (X, A) es un par poliédrico entonces, podemos suponer que $(X, A) = (|K|, |L|)$ donde L es un subcomplejo pleno de K pues, si es necesario, podemos reemplazar K por $sd\ K$ y L por $sd\ L$.

Proposición 1.4.10. *Sea (X, A) un par poliédrico. Entonces A es un retracto por deformación fuerte de algún entorno de A en X.*

La demostración de este resultado se puede encontrar en [Spa]. La idea es tomar una triangulación del par (X, A) por un par $(|K|, |L|)$ tal que L es pleno y usar el lema 1.4.6 para escribir cada $\alpha \in |K| - (|N| \cup |L|)$ como $a\alpha' + (1-a)\alpha''$ donde $0 < a < 1$, $\alpha' \in |L|$, $\alpha'' \in |N|$ y N es el mayor subcomplejo de K que es disjunto con L. Luego se prueba que la función

$$H(\alpha, t) = \begin{cases} \alpha & \alpha \in |L| \\ t\alpha' + (1-t)\alpha & \alpha \notin |L| \end{cases}$$

es la retracción buscada.
En la figura se ilustra esta retracción para el caso en que $(X, A) = (B^2, S^1)$.



Definición 1.4.11. Una métrica en $|K|$ se dice lineal si coincide con la métrica inducida por una realización de K en $\mathbb{R}^n$.

Un complejo simplicial localmente finito tiene una métrica lineal y una métrica lineal en $|K|$ también es lineal en $|sd\ K|$. Dado un complejo simplicial K, una métrica d lineal en $|K|$ y $s = \{v_0, \ldots, v_n\}$ un simplex de K se verifica fácilmente que

$$diam\ |s| = \max_{i,j} d(v_i, v_j)$$

Por ejemplo, si consideramos al 2-simplex s con la métrica inducida por la inmersión usual de $|s|$ en $\mathbb{R}^3$ (como el 2-simplex topológico) entonces $diam\ |s| = \sqrt{2}$ y si s' es un simplex de $sd\ K$ entonces $diam\ |s'| = \frac{\sqrt{2}}{2}$
El siguiente lema da una relación entre el diámetro de un simplex de K y el de un simplex de $sd\ K$.

Lema 1.4.12. *Dada una métrica lineal en un n-simplex s entonces para todo $s' \in sd\ s$*

$$diam\ |s'| \leq \frac{n}{n+1} diam\ |s|$$

Dada un métrica en $|K|$ definimos

$$mesh(K) = \sup\{diam\ |s|, s \in K\}$$

Los siguiente resultados son consecuencias directas del lema 1.4.12.

Corolario 1.4.13. *Si K es un complejo simplicial m-dimensional y $|K|$ tiene una métrica lineal entonces*

$$mesh(sd\ K) \leq \frac{m}{m+1} mesh(K)$$

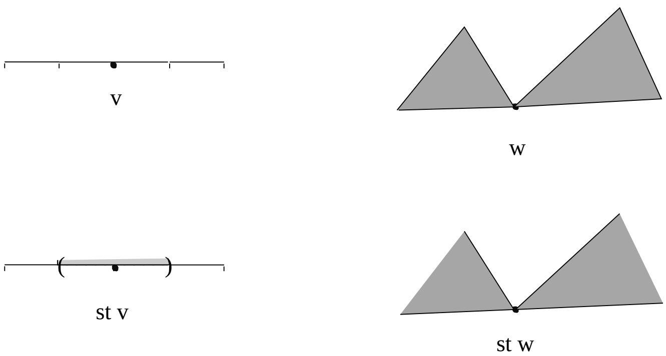
.

Corolario 1.4.14. $\lim_{n\to\infty} mesh(sd^n\ K) = 0$

Estos resultados serán usados más adelante para probar varios resultados conocidos sobre aproximación simplicial y contigüidad.

Dado un vértice $v \in K$ se define su estrella como:

$$st\ v = \{\alpha \in |K| \,/ \alpha(v) \neq 0\}$$



La aplicación $g_v : |K| \to I$ definida por $g(\alpha) = \alpha(v)$ es una función continua pues su restricción a cada simplex cerrado lo es. Por lo tanto $st\ v$ es un subconjunto abierto de $|K|$.

De la definición de $st\ v$ se deduce inmediatamente que si v es un vértice de s, entonces $\alpha \in st\ v$ si y sólo si el simplex abierto que contiene a α tiene a v como vértice. Como los símplices abiertos forman una partición de $|K|$ se tiene que:

$$st\ v = \bigcup_{v \in s} \langle s \rangle$$

y se prueba fácilmente el siguiente resultado:

Lema 1.4.15. *Sean $v_0, v_1, \ldots, v_n$ vértices de K. Entonces $v_0, v_1, \ldots, v_n$ son vértices de un mismo simplex de K si y sólo si*

$$\bigcap_{0 \leq i \leq n} st\ v_i \neq 0$$

Sea K un complejo simplicial y $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de $|K|$. Se dice que K es más fino que $\mathcal{U}$ si para todo vértice v de K existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $st\ v \subset U$.

Teorema 1.4.16. *Sea K un complejo simplicial finito y $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de $|K|$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $sd^n K$ es más fino que $\mathcal{U}$ para todo $n \geq n_0$.*

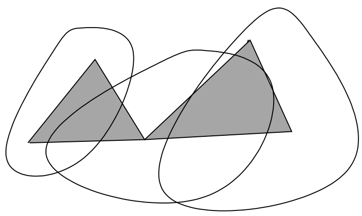
Demostración. Como K es finito existe una métrica lineal en $|K|$. Sea $\epsilon > 0$ un número de Lebesgue para el cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de $|K|$ (este número existe porque $|K|$ es compacto). Es decir, ϵ es tal que si un subconjunto A de $|K|$ tiene diámetro menor o igual que ϵ entonces $A \subset U$ para algún $U \in \mathcal{U}$.
Si v es un vértice de K, y $\alpha \in st\ v$ entonces existe un simplex $s \in K$ que tiene a v como vértice y tal que $\alpha \in < s >$. Por lo tanto , si $\alpha, \beta \in st\ v$, entonces

$$d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, v) + d(\beta, v) \leq 2mesh(K)$$

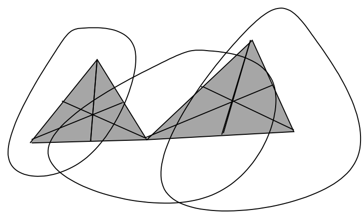
y $diam(st\ v) \leq 2mesh(K)$.
Esto implica que, si $v \in sd^n\ K$, entonces

$$diam(st\ v) \leq 2\frac{n}{n+1}mesh(K)$$

Existe entonces $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si v es un vértice de $sd^n\ K$ y $n \geq n_0$ entonces $diam(st\ v) \leq \epsilon$. Por lo tanto $st\ v \subset U$ para algún $U \in \mathcal{U}$ y $sd^n K$ es más fino que $\mathcal{U}$ para todo $n \geq n_0$ $\square$



K no es más fino que el cubrimiento



sd K es más fino que el cubrimiento

1.5 Aproximación simplicial

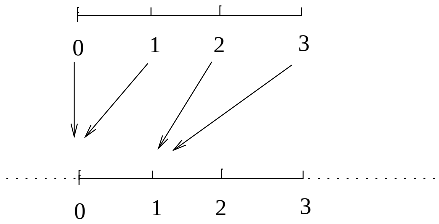
En la sección 1 vimos que todo morfismo simplicial $\varphi : K_1 \to K_2$ induce una función continua $|\varphi| : |K_1| \to |K_2|$ que es lineal y verifica que $|\varphi|(v) = \varphi(v)$ para todo vértice $v \in K$.
Es claro que no toda función continua entre poliedros proviene de un morfismo simplicial. Sin embargo veremos que toda función continua puede aproximarse convenientemente por un morfismo simplicial.

Definición 1.5.1. Sea $f : |K_1| \to |K_2|$ una función continua. Una aproximación simplicial a f es un morfismo simplicial $\varphi : K_1 \to K_2$ tal que para todo $\alpha \in |K_1|$ y $s \in K_2$ se verifica

$$f(\alpha) \in \langle s \rangle \Rightarrow |\varphi|\,(\alpha) \in |s|$$

Notar que si v es un vértice de K_1 tal que $f(v)$ es un vértice de K_2 entonces $\varphi(v) = f(v)$. Esto implica que si φ es un morfismo simplicial entonces la única aproximación simplicial a $|\varphi|$ es la misma φ.

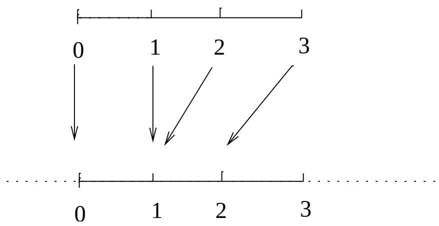
Ejemplo 1.5.2. Sea $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{2}$. Sean I_3 y K los complejos simpliciales definidos en 1.1.2 cuyos espacios asociados son homeomorfos al intervalo $[0,3]$ y a $\mathbb{R}$ respectivamente.
Si φ es una aproximación simplicial a f entonces debe ser $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 0$ ó 1, $\varphi(2) = 1$ y $\varphi(3) = 1$ ó 2. Hay por lo tanto 4 aproximaciones simpliciales distintas a f.
Por ejemplo, si φ es el morfismo



entonces

$$|\varphi|(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \in [0,1] \\ t-1 & si \quad t \in [1,2] \\ 1 & si \quad t \in [2,3] \end{cases}$$

Si φ' es el morfismo



entonces

$$|\varphi'|(t) = \begin{cases} t & si \quad t \in [0,1] \\ 1 & si \quad t \in [1,2] \\ t-1 & si \quad t \in [2,3] \end{cases}$$

Ejemplo 1.5.3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{x+y}{2}$. Sean K_1 y K_2 los complejos simpliciales definidos en 1.1.2 cuyos espacios son homeomorfos a $\mathbb{R}^2$ y a $\mathbb{R}$ respectivamente. La aplicación $\varphi : K_2 \to K_1$ definida por $\varphi(i,j) = [\frac{i+j}{2}]$ (la parte entera de $\frac{i+j}{2}$) es una aproximación simplicial a f.

De la definición 1.5.1 se deduce que si φ es una aproximación simplicial a f entonces, para todo $\alpha \in |K_1|$, $f(\alpha)$ y $|\varphi|(\alpha)$ están en un mismo simplex cerrado. Por lo tanto el segmento que une $f(\alpha)$ y $|\varphi|(\alpha)$ está contenido en $|K_2|$. Con esto se prueba fácilmente el siguiente resultado.

Proposición 1.5.4. *Si φ es una aproximacón simplicial a $f : |K_1| \to |K_2|$ entonces $|\varphi|$ y f son funciones homotópicas.*
Más aún, si A es un subconjunto de $|K_1|$ tal que $|\varphi|\,|_A = f\,|_A$ entonces $|\varphi|$ y f son homotópicas relativas a A.

Demostración. La función $F(\alpha,t) = tf(\alpha) + (1-t)(|\varphi|(\alpha))$ es una homotopía entre $|\varphi|$ y f relativa a A. □

Teorema 1.5.5. *Una función $\varphi : V_{K_1} \to V_{K_2}$ es una aproximación simplicial a $f : |K_1| \to |K_2|$ si y sólo si $f(st\ v) \subset st\ \varphi(v)$ para todo $v \in K_1$.*

Demostración. Sea φ una aproximación simplicial a f, sea $\alpha \in st\ v$. Veamos que $f(\alpha) \in st\ \varphi(v)$.
Como $\alpha(v) \neq 0$ y $|\varphi|(\alpha)(\varphi(v)) = \sum_{\varphi(w)=\varphi(v)} \alpha(w)$ entonces $|\varphi|(\alpha)(\varphi(v)) \neq 0$.
Sea $s_2 \in K_2$ tal que $f(\alpha) \in < s_2 >$. Como φ es una aproximación simplicial a f, entonces $|\varphi|(\alpha) \in |s_2|$. Por lo tanto $\varphi(v)$ es un vértice de s_2. Como $f(\alpha) \in < s_2 >$ entonces $f(\alpha)(\varphi(v)) \neq 0$ y $f(\alpha) \in st\ \varphi(v)$.
Reciprocamente, supongamos $f(st\ v) \subset st\ \varphi(v)$ para todo $v \in K_1$. Veamos primero que φ es simplicial.
Sean $v_0, \dots, v_n$ vértices de un simplex de K_1. Por el lema 1.4.15, $\cap st\ v_i \neq 0$. Entonces

$$\emptyset \neq f(\cap st\ v_i) \subset \cap f(st\ v_i) \subset \cap st\ \varphi(v_i).$$

Nuevamente por el lema 1.4.15, se puede concluir que $\{\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_n)\}$ es un simplex de K_2.
Para ver que φ es una aproximación simplicial a f, supongamos que $\alpha \in < s_1 >$ y $f(\alpha) \in < s_2 >$ y veamos que $|\varphi|(\alpha) \in |s_2|$.
Sea $v \in s_1$, entonces $\alpha \in st\ v$. Por hipótesis, se tiene que $f(\alpha) \in st\ (\varphi(v))$. Entonces $\varphi(v)$ es un vértice de s_2. Por lo tanto, $|\varphi|(|s_1|) \subset |s_2|$ y $|\varphi|(\alpha) \in |s_2|$. □

Corolario 1.5.6. *Sean, (K_1, L_1) y (K_2, L_2) pares simpliciales. Sea $f : |K_1| \to |K_2|$ una función continua tal que $f(|L_1|) \subset |L_2|$, y sea $\varphi : K_1 \to K_2$ una aproximación simplicial a f. Entonces $\varphi(L_1) \subset L_2$ y $\varphi\,|_{L_1}$ es una aproximación simplicial a $f\,|_{|L_1|}$.*

Demostración. Si v es un vértice de L_1 entonces, como $f(|L_1|) \subset |L_2|$, existe un simplex $s \in L_2$ tal que $f(v) \in < s >$. Como f es una aproximación simplicial a φ, entonces $|\varphi|(v) \in |s|$ y por lo tanto $\varphi(v)$ es un vértice de L_2. Para ver que $\varphi\,|_{L_1}$ es una aproximación simplicial a $f\,|_{|L_1|}$ observemos que, para todo $v \in L_1$

$$f(st_{L_1} v) \subset f(st_{K_1} v) \cap |L_2| \subset st_{K_2} \varphi(v) \cap |L_2| = st_{L_2} \varphi(v)$$

Por lo tanto

$$f\,|_{|L_1|}\,(st_{L_1}v) \subset st_{L_2}\varphi\,|_{L_1}\,(v)$$

y $\varphi\,|_{L_1}$ es una aproximación simplicial a $f\,|_{|L_1|}$. $\square$

El siguiente resultado se demuestra fácilmente usando el teorema 1.5.5:

Corolario 1.5.7. *La composición de aproximaciones simplicales a dos funciones continuas es una aproximación simplicial a la composición de dichas funciones.*

Corolario 1.5.8. *Existen aproximaciones simpliciales $sd\ K \to |K|$ a la identidad $|sd\ K| \to |K|$.*

Demostración. Por el teorema 1.5.5 basta probar que para todo vértice $w_0 \in sd\ K$ existe un vértice $v_0 \in K$ tal que $st_{sdK}w_0 \subset st_K v_0$ ($st_{sdK}w_0$ es la estrella de w_0 en $|sd\ K|$ y $st_K v_0$ es la estrella de v_0 en $|K|$) .
Sea entonces $w_0 \in sd\ K$ y $\alpha \in st_{sdK}w_0$. Como $\{st_K v, v \in K\}$ es un cubrimiento de $|sd\ K|$ entonces existe un vértice $v_0 \in K$ tal que $w_0 \in st\ v_0$. Como $\alpha \in |sd\ K|$ entonces

$$\alpha(v_0) = \sum_{w \in sdK} \alpha(w)w(v_0).$$

Como $\alpha(w_0)w_0(v_0) \neq 0$ entonces $\alpha(v_0) \neq 0$ y $\alpha \in st_K v_0$. $\square$

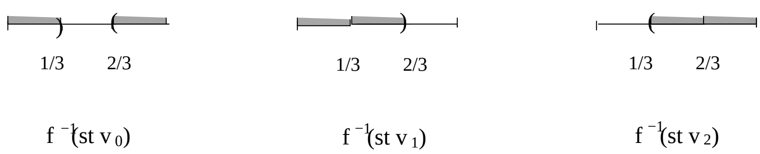
Combinando el los teoremas 1.4.16 y 1.5.5 se obtiene el siguiente teorema de aproximación simplicial:

Teorema 1.5.9. *Sea K_1 un complejo simplicial finito y $f : |K_1| \to |K_2|$ una función continua. Entonces existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ existe $\varphi_n : sd^n K_1 \to K_2$ que aproxima a f.*

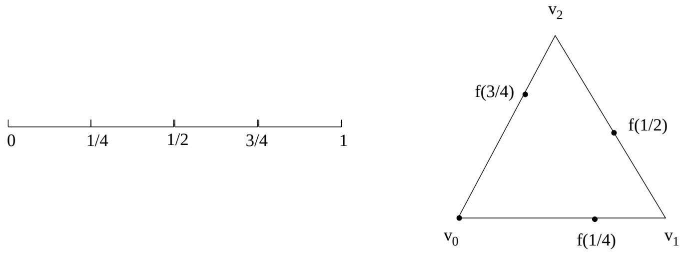
Ejemplo 1.5.10. Sea $f : |I_1| = I \to |\dot{s}|$ la función continua que 'enrolla' el intervalo I alrededor de $\dot{s}$. Es decir:

$$f(t) = \begin{cases} 3tv_1 + (1-3t)v_0 & si \quad t \in [0, \frac{1}{3}] \\ (3t-1)v_2 + (2-3t)v_1 & si \quad t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ (3t-2)v_0 + (3-3t)v_2 & si \quad t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Claramente I_1 no es más fino que el cubrimento $\{f^{-1}(st\ v), v \in s\}$. Por lo tanto no existe $\varphi : I_1 \to \dot{s}$ que aproxime a f. Por la misma razón no hay aproximaciones simpliciales a f de $sd\ I_1$ a $\dot{s}$.



En cambio, f tiene 6 aproximaciones simpliciales $\varphi : sd^2 I_1 \to \dot{s}$. Una tal φ debe cumplir $\varphi(0) = \varphi(1) = v_0$, $\varphi(\frac{1}{4}) = v_0$ ó v_1, $\varphi(\frac{1}{2}) = v_1$ ó v_2 y $\varphi(\frac{3}{4}) = v_2$ ó v_0.



Observemos que es necesario contar con todas las subdivisiones para poder aproximar todas las funciones continuas entre dos poliedros. Por ejemplo, si $f_n : |I_1| \to |\dot{s}|$ es la función que 'enrolla' el intervalo I alrededor de $\dot{s}$ n veces entonces para tener aproximaciones simpliciales a f_n será necesario subdividir a I_1 una cantidad m de veces tal que $2^m > 3n$.

1.6 Morfismos contiguos

La noción de contigüidad entre morfismos simpliciales es análoga a la de homotopía entre funciones continuas. En esta sección veremos la teoría clásica de contigüidad.
En el segundo capítulo de esta tesis mostaremos un nuevo enfoque a esta teoría.

Definición 1.6.1. Sean (K_1, L_1) y (K_2, L_2) pares simpliciales y

$$\varphi, \varphi' : (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$$

morfismos simpliciales. Los morfismos φ y φ' se dicen elementalmente contiguos si dado un simplex $s \in K_1$ (o $s \in L_1$), $\varphi(s) \cup \varphi'(s)$ es un simplex de K_2 (o de L_2).

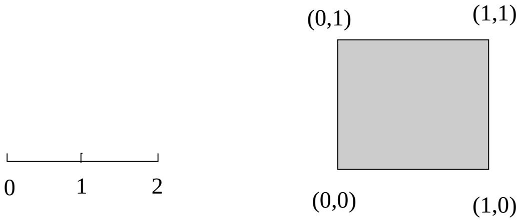
Esta relación es reflexiva y simétrica pero no es transitiva.

Definición 1.6.2. Decimos que dos morfismos simpliciales

$$\varphi, \varphi' : (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$$

son contiguos si existe una sucesión finita $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ de morfismos simpliciales de (K_1, L_1) en (K_2, L_2) tal que $\varphi = \varphi_0$, $\varphi' = \varphi_n$ y , para $i = 1, 2, \ldots, n$, los morfismos φ_{i-1} y φ_i son elementalmente contiguos.

Ejemplo 1.6.3. Sean I_2 y C_{11} los complejos simpliciales definidos en 1.1.2.



Sean $\varphi, \varphi' : I_2 \to C_{11}$ los morfismos simpliciales definidos por:

$$\begin{array}{lll} \varphi(0) = (0,0) & \varphi(1) = (1,0) & \varphi(2) = (1,1) \\ \varphi'(0) = (0,0) & \varphi'(1) = (0,1) & \varphi'(2) = (1,1) \end{array}$$

φ y φ' no son elementalmente contiguos porque $\varphi(\{0,1\}) \cup \varphi'(\{0,1\})$ no es un simplex de C_{11} (tampoco $\varphi(\{1,2\}) \cup \varphi'(\{1,2\})$). Sin embargo, φ y φ' son contiguos pues si definimos φ_1 por $\varphi_1(0) = (0,0)$, $\varphi_1(1) = \varphi_1(2) = (1,1)$ entonces φ y φ_1 son elementalmente contiguos y también lo son φ_1 y φ'.

La contigüidad es una relación de equivalencia. El conjunto de clases de equivalencia de morfismos simpliciales $(K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ se nota $[K_1, L_1; K_2, L_2]$ y la clase de φ se nota $[\varphi]$.
Es fácil ver que la relación de contigüidad se lleva bien con la composición. Explícitamente, si $\varphi, \varphi' : (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ y $\psi, \psi' : (K_2, L_2) \to (K_3, L_3)$ son morfismos simpliciales contiguos entonces $\psi\varphi$ y $\psi'\varphi'$ también lo son.
Por lo tanto, si $(K_1, L_1) \xrightarrow{\varphi} (K_2, L_2) \xrightarrow{\psi} (K_3, L_3)$, está bien definida la composición de clases de contigüidad por $[\varphi] \circ [\psi] = [\varphi\psi]$.

Sean $\varphi, \varphi' : K_1 \to K_2$ morfismos simpliciales contiguos. Si s es un simplex de K_1 entonces $s' = \varphi(s) \cup \varphi'(s)$ es un simplex de K_2. Si α es un punto de $|s|$ entonces $|\varphi|(\alpha)$ y $|\varphi'|(\alpha)$ son puntos de $|s'|$. Por lo tanto el segmento en $|K_2|$ que une $|\varphi|(\alpha)$ y $|\varphi'|(\alpha)$ está contenido en $|K_2|$. Es decir que, para todo $\alpha \in |K_1|$ y $t \in I$

$$(1-t)|\varphi|(\alpha) + t|\varphi'|(\alpha) \in |K_2|.$$

Se tiene entonces el siguiente resultado.

Proposición 1.6.4. *Si $\varphi, \varphi' : (K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ son morfismos simpliciales contiguos entonces $|\varphi|$ y $|\varphi'|$ son funciones homotópicas relativas a $|L_1|$.*

Notar que queda definida una categoría $[\mathcal{CS}]$ cuyos objetos son los complejos simpliciales y cuyas flechas son las clases de contigüidad de morfismos simpliciales.
También se tiene un funtor

$$|\ | : [\mathcal{CS}] \to [\mathcal{T}op]$$

que a cada complejo simplicial K le asigna su espacio asociado $|K|$ y a cada clase de contigüidad $[\varphi]$ le asigna la clase de homotopía $[|\varphi|]$.
Estos funtores también se pueden definir en la categoría de pares.

El siguiente resultado se puede probar fácilmente usando el lema 1.4.15 y el teorema 1.5.5.

Proposición 1.6.5. *Dos aproximaciones simpliciales $(K_1, L_1) \to (K_2, L_2)$ a la misma función continua son elementalmente contiguas.*

La recíproca de la proposición 1.6.4 no es cierta, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6.6. Sea $\dot{s}$ el borde del 2-simplex con vértices $\{v_0, v_1, v_2\}$ y $C(\dot{s})$ el complejo simplicial definido en 1.3.18. Notar que $|C(\dot{s})|$ es homeomorfo al cilindro $S^1 \times I$.
Sea L_0 el subcomplejo de I_3 de dimensión 0 con vértices 0 y 3 y sea L_1 el subcomplejo de $C(\dot{s})$ de dimensión 1 con vértices $(v_0, 0)$ y $(v_0, 1)$.
Sean φ y φ' los morfismos simpliciales de $(I_3, L_0) \to (C(\dot{s}), L_1)$ definidos respectivamente por:

$$\begin{array}{lll} \varphi(0) = \varphi(3) = (v_0, 0) & \varphi(1) = (v_1, 0) & \varphi(2) = (v_2, 0) \\ \varphi'(0) = \varphi'(3) = (v_0, 1) & \varphi'(1) = (v_1, 1) & \varphi'(2) = (v_2, 1) \end{array}$$

Claramente

$$|\varphi|, |\varphi'| : (|I_3|, |L_0|) \to (|C(\dot{s})|, |L_1|)$$

son funciones homotópicas. Sin embargo, φ y φ' no son morfismos contiguos. Para probar esto, supongamos que

$$\psi : (I_3, L_0) \to (C(\dot{s}), L_1)$$

es tal que φ y ψ son elementalmente contiguos y consideremos el simplex $\{0, 1\}$ de I_3. El conjunto

$$s = \varphi(\{0, 1\}) \cup \psi(\{0, 1\})$$

es un simplex de $C(\dot{s})$ que tiene entre sus vértices a $(v_0, 0)$ y a $(v_1, 0)$. Por definición de $C(\dot{s})$ los únicos símplices que contienen a dichos vértices son $\{(v_0, 0), (v_1, 0), (v_1, 1)\}$ y $\{(v_0, 0), (v_1, 0)\}$. Por lo tanto $\psi(0) = (v_0, 0)$ y $\psi(1) = (v_0, 0)$ ó $(v_1, 0)$ ó $(v_1, 1)$. Considerando el simplex $\{1, 2\}$ de I_3 y repitiendo el razonamiento anterior se llega a que $\psi(1) = (v_1, 0)$ ó $(v_2, 0)$ ó $(v_2, 1)$. Con esto se concluye que $\psi(1) = (v_1, 0)$. De manera análoga se prueba que $\psi(2) = (v_2, 0)$ y que $\psi(1) = (v_0, 0)$. Por lo tanto $\varphi = \psi$. Esto implica que el único morfismo simplicial $(I_3, L_0) \to (C(\dot{s}), L_1)$ contiguo a φ es el mismo φ.

El siguiente teorema muestra la relación entre contigüidad y homotopía.

Teorema 1.6.7. *Sea K_1 un complejo simplicial finito y sean*

$$f, f' : (|K_1|, |L_1|) \to (|K_2|, |L_2|)$$

funciones homotópicas. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que f y f' tienen, respectivamente, aproximaciones simpliciales

$$\varphi, \varphi' : (sd^n K_1, sd^n L_1) \to (K_2, L_2)$$

tales que φ y φ' son contiguos.

Para demostrar este teorema se toma una homotopía

$$F : (|K_1)| \times I, |L_1| \times I) \to (|K_2|, |L_2|)$$

entre f y f'.Podemos tomar una partición $0 = t_0, t_1, \ldots, t_n = 1$ del intervalo I tal que las funciones $f_i(\alpha) = F(\alpha, t_i)$ verifican que la colección

$$\mathcal{U} = \{f_i^{-1}(st\ v) \cap f_{i-1}^{-1}(st\ v), v \in K_2\}$$

es un cubrimiento abierto de $|K_1|$. Luego se toma $n \in \mathbb{N}$ tal que $sd^n K_1$ es más fino que $\mathcal{U}$ y se prueba que existen morfismos simpliciales

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n : (sd^n K_1, sd^n L_1) \to (K_2, L_2)$$

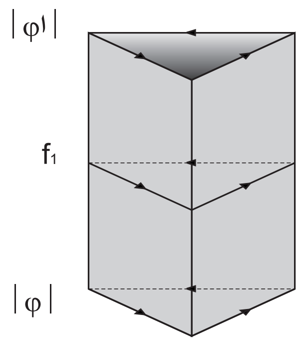
tales que cada φ_i es una aproximación simplicial a f_i y a f_{i-1}. Se concluye entonces que φ_i y φ_{i+1} son morfismos contiguos (pues ambos son aproximaciones simpliciales a f_i). Por lo tanto φ_1 y φ_n con contiguos. Como φ_1 es una aproximación simplicial a $f_0 = f$ y φ_n es una aproximación simplicial a $f_n = f'$ se llega al resultado deseado.

Ejemplo 1.6.8. Sean $\varphi, \varphi' : (I_3, L_0) \to (C(\dot{s}), L_1)$ los morfismos simpliciales definidos en el ejemplo 1.6.6. La función

$$F : (|I_3| \times I, |L_0| \times I) \to (|C(\dot{s})|, |L_1|)$$

dada por $F(\alpha, t) = t|\varphi'|(\alpha) + (1-t)|\varphi|(\alpha)$ es una homotopía entre $|\varphi|$ y $|\varphi'|$.
Sea

$$f_1(\alpha) = F(\alpha, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}|\varphi'|(\alpha) + \frac{1}{2}|\varphi|(\alpha).$$



Sean

$$\varphi_1, \varphi_2 : (sd\, I_3, L_0) \to (C(\dot{s}), L_1)$$

dados por

$$\begin{array}{llll} \varphi_1(0) = (v_0, 0) & \varphi_1(\frac{1}{2}) = (v_0, 0) & \varphi_1(1) = (v_1, 0) & \varphi_1(\frac{3}{2}) = (v_1, 0) \\ \varphi_1(2) = (v_2, 0) & \varphi_1(\frac{5}{2}) = (v_0, 0) & \varphi_1(3) = (v_0, 0) & \\ \varphi_2(0) = (v_0, 1) & \varphi_2(\frac{1}{2}) = (v_1, 1) & \varphi_2(1) = (v_1, 1) & \varphi_2(\frac{3}{2}) = (v_2, 1) \\ \varphi_2(2) = (v_2, 1) & \varphi_2(\frac{5}{2}) = (v_2, 1) & \varphi_2(3) = (v_0, 1) & \end{array}.$$

φ_1 es aproximación simplicial a $|\varphi|$ y a f_1 y φ_2 es aproximación simplicial a f_1 y a $|\varphi'|$. Entonces φ_1 y φ_2 con contiguos y son aproximaciones simpliciales a $|\varphi|$ y a $|\varphi'|$ respectivamente.

El siguiente corolario se usará en el capítulo 2.

Corolario 1.6.9. *Si $\varphi, \varphi' : K_1 \to K_2$ son morfismos simpliciales tales que $|\varphi|$ y $|\varphi'|$ son funciónes homotópicas entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $\lambda : sd^n K_1 \to K_1$ es una aproximación simplicial a $id : |sd^n K_1| \to |K_1|$ entonces $\varphi \circ \lambda$ y $\varphi' \circ \lambda$ son contiguos.*

Demostración. Por el teorema anterior existe $n \in \mathbb{N}$ y $\psi, \psi' : sd^n K_1 \to K_2$ aproximaciones simpliciales a $|\varphi|$ y a $|\varphi'|$ respectivamente que son contiguas entre sí.
Sea $\lambda : sd^n K_1 \to K_1$ una aproximación simplicial a $id : |sd^n K_1| \to |K_1|$. Entonces, por el corolario 1.5.7 $\varphi \circ \lambda$ es aproximación simplicial a φ y $\varphi' \circ \lambda$ es aproximación simplicial a φ'. Entonces ψ y $\varphi \circ \lambda$ son dos aproximaciones simpliciales a la misma función continua. Por la proposición 1.6.5 se concluye que ψ y $\varphi \circ \lambda$ son contiguos. Por la misma razón ψ' y $\varphi' \circ \lambda$ son contiguos y, por lo tanto, $\varphi \circ \lambda$ y $\varphi' \circ \lambda$ son contiguos. $\square$

El siguiente teorema muestra que si K_1 es finito, el conjunto de clases de homotopía $[|K_1|, |L_1|; |K_2|, |L_2|]$ es el límite directo de la familia de conjuntos de clases de contigüidad

$$[sd^n K_1, sd^n L_1; K_2, L_2].$$

Por el corolario 1.5.8 existen aproximaciones $(sd\ K_1, sd\ K_2) \to (K_1, L_1)$ a

$$id : (|sd\ K_1|, |sd\ K_2|) \to (|K_1|, |L_1|)$$

y por la proposición 1.6.4 todas ellas son contiguas. Tenemos entonces una aplicación

$$sd : [K_1, L_1; K_2, L_2] \to [sd\ K_1, sd\ L_1; K_2, L_2]$$

bien definida por $sd[\varphi] = [\varphi\lambda]$, donde

$$\lambda : (sd\ K_1, sd\ L_1) \to (K_1, L_1)$$

es cualquier aproximación simplicial a $id : (|sd\ K_1|, |sd\ K_2|) \to (|K_1|, |L_1|)$.
Si $n \leq m$ queda definida una aplicación

$$sd^n_m : [sd^n K_1, sd^n L_1; K_2, L_2] \to [sd^m K_1, sd^m L_1; K_2, L_2]$$

como la composición de las sd.
La familia $\{[sd^n K_1, sd^n L_1; K_2, L_2], sd^n_m\}$ es un sistema dirigido de conjuntos.
El límite directo

$$\varinjlim\{[sd^n K_1, sd^n L_1; K_2, L_2]\}$$

es un funtor contravariante en (K_1, L_1) y covariante en (K_2, L_2).
En el libro de Spanier se puede encontrar la demostración del siguiente resultado.

Teorema 1.6.10. *Si K_1 es un complejo simplicial finito hay un isomorfismo natural entre $\varinjlim\{[sd^n K_1, sd^n L_1; K_2, L_2]\}$ y $[|K_1|, |L_1|; |K_2|, |L_2|]$.*

En el capítulo 2 veremos cómo se prueba un resultado similar a este usando las técnicas de homotopía que desarrollaremos.

Capítulo 2

Homotopía simplicial

La teoría clásica de homotopía para espacios topológicos se basa en la existencia de un cilindro natural. Más precisamente, para cada espacio topológico X se puede construir un cilindro $X \times I$ y definir una homotopía entre dos funciones $f, g : X \to Y$ como una función que sale del cilindro y cuyas restricciónes a cada tapa del cilindro son, respectivamente, f y g.

Una de las propiedades que tiene el cilindro topológico es su flexibilidad. Por ejemplo, podemos componer verticalmente dos homotopías (yendo al doble de velocidad en cada una de ellas) y obtener una nueva homotopía. Esto se usa, por ejemplo, para probar que la homotopía es una relación de equivalencia.

En [Bau], Baues define la noción de I-categoría o categoría con un cilindro natural. Una I- categoría es una categoría $\mathcal{C}$, junto con una clase $\mathcal{C}of$ de morfismos, llamados cofibraciones, y un funtor $I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ llamado funtor cilindro, que cumple ciertos axiomas similares a las propiedades del cilindro de espacios topológicos.
En una I-categoría se puede desarrollar completamente una teoría de homotopía (suspensión, espacios de lazos, grupos de homotopía, sucesiones exactas). Una de las ventajas de esta teoría es que puede aplicarse en varios contextos y sirve para comparar distintas teorías homotópicas.
Los complejos simpliciales no son una I- categoría. El problema es que no existe un único cilindro natural en $\mathcal{CS}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos un modelo simplicial I_n del intervalo I. Como I_n es finito, pierde la flexibilidad del intervalo topológico antes mencionado. Por ejemplo, para componer dos homotopías (y de esta forma probar que la homotopía es una relación transitiva), necesitaríamos 'agrandar' el n. Por lo tanto, para desarrollar la teoría de homotopía de complejos simpliciales, tenemos que valernos de toda la familia $\{I_n, n \in \mathbb{N}\}$.
En [Min1], Gabriel Minian desarrolló una teoría de homotopía para categorías provistas de una familia arbitraria de cilindros naturales. Los cilindros de esta familia cumplen ciertas relaciones entre sí. Para desarrollar una teoría de homotopía se necesitan todos los cilindros de esta familia y las relaciones entre ellos.

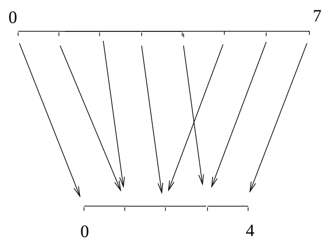
En este capítulo desarrollamos la teoría de homotopía para complejos simpliciales (que coincide con la noción de contigüidad) pero con el enfoque sugerido en [Min1]. De esta forma, podemos comparar más fácilmente la teoría de homotopía de complejos simpliciales y la teoría de homotopía clásica y desarrollar herramientas que permiten un cálculo más simple de los grupos de homotopía de poliedros.

2.1 Caminos

Comenzamos desarrollando las relaciones entre los distintos cilindros.
Recordemos que I_r es el complejo simplicial que tiene como vértices a los números enteros $0, 1, 2, \dots, r$ y como símplices (además de los vértices) a los conjuntos de la forma $\{i, i+1\}$ con $0 \leq i \leq r-1$.
Recordemos también que $|I_r| = I$ para todo $r \in \mathbb{N}$.

Definición 2.1.1. Un camino de 0 a r en s pasos es un morfismo simplicial $\gamma_{sr} : I_s \to I_r$ tal que $\gamma_{sr}(0) = 0$ y $\gamma_{sr}(s) = r$.

Por ejemplo, $\gamma_{74} : I_7 \to I_4$ definido por $\gamma_{74}(0) = 0$, $\gamma_{74}(1) = \gamma_{74}(2) = 1$, $\gamma_{74}(3) = \gamma_{74}(5) = 2$, $\gamma_{74}(4) = \gamma_{74}(6) = 3$, $\gamma_{74}(7) = 4$ es un camino de 0 a 4 en 7 pasos. En la figura se ve una representación grafica de γ_{74}.



Observación 2.1.2.

(a) $\gamma_{sr}(i) - \gamma_{sr}(i-1) = 0,\ 1,$ ó -1, para $1 \leq i \leq s$.

(b) $\sum_{i=1}^{s} \gamma_{sr}(i) - \gamma_{sr}(i-1) = r$.

Por lo tanto γ_{sr} puede representarse como una $(s+1)$-upla $(k_0\, k_1\, \dots\, k_s)$ de números enteros entre 0 y r tales que $k_0 = 0$, $k_s = r$ y $k_i - k_{i-1} = 0,\ 1$ ó -1.
También puede representarse como la s-upla $[p_1, \dots, p_s]$ de 0, 1 y -1 que indica, a cada paso i, si $\gamma_{sr}(i) - \gamma_{sr}(i-1) = 0,\ 1,$ ó -1. Notar que $\sum p_i = r$. Por ejemplo, el camino γ_{74} definido más arriba se representa como la 8-upla $(0\,1\,1\,2\,3\,2\,3\,4)$ y también como la 7-upla $[1, 0, 1, 1, -1, 1, 1]$.

Proposición 2.1.3. *Todo γ_{sr} es sobreyectivo como función de vértices. En particular $r \leq s$.*

Demostración. Sea i un vértice de I_r y supongamos que no existe ningún vértice de I_s cuya imagen sea i. Probaremos, por inducción en j, que $\gamma_{sr}(j) < i$ para todo $0 \leq j \leq s$. Con esto quedará demostrada la proposición, pues se habrá llegado a una contradicción con el hecho de que $\gamma_{sr}(s) = r$.
Como $\gamma_{sr}(0) = 0$ debe ser $i \geq 1$. Entonces se tiene $\gamma_{sr}(0) < i$. Sea j tal que $0 \leq j \leq s$ y supongamos $\gamma_{sr}(j-1) < i$. Por la observación 2.1.2 se tiene $\gamma_{sr}(j) \leq \gamma_{sr}(j-1)+1$. Esto, junto con la hipótesis inductiva implica que $\gamma_{sr}(j) < i+1$. Como $\gamma_{sr}(j) \neq i$ debe ser $\gamma_{sr}(j) < i$. □

Definición 2.1.4.

(a) Decimos que γ_{sr} repite el lugar i si existe un vértice j de I_s tal que

$$\gamma_{sr}(j) = \gamma_{sr}(j+1) = i.$$

(b) γ_{sr} es creciente si, para to $1 \leq i \leq s$, se tiene que $\gamma_{sr}(i) - \gamma_{sr}(i-1) = 0$ ó 1. Es decir $\gamma_{sr} = [p_1, \ldots, p_s]$ con $p_i = 0$ ó 1.

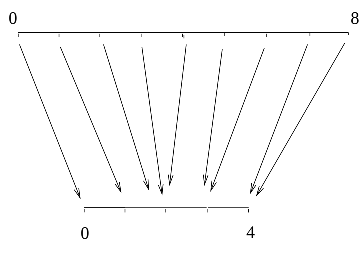
Observación 2.1.5. Si γ_{sr} es creciente entonces γ_{sr} repite lugares $(s-r)$ veces. En particular, todo $\gamma_{r+1\,r} : I_{r+1} \to I_r$ repite exactamente un lugar una vez.

Observación 2.1.6. Si un camino $\gamma_{sr} = (k_0\, k_1\, \ldots\, k_s)$ es creciente entonces

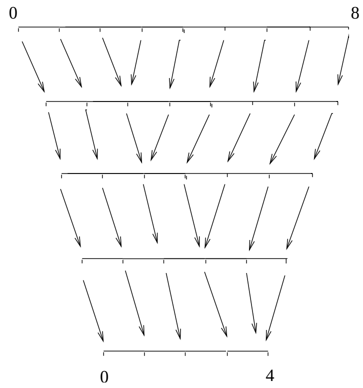
$$k_0 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_s.$$

Entonces γ_{sr} queda determinado por la cantidad de veces que aparece cada número entre 0 y r en la s-upla $(k_0\, k_1\, \ldots\, k_s)$. Como además γ_{sr} es sobreyectivo resulta que γ_{sr} queda determinado por los lugares que repite junto con la cantidad de veces que repite cada uno.

Ejemplo 2.1.7. Sea $\gamma_{84} : I_8 \to I_4$ dado por $\gamma_{84} = (0\,1\,2\,2\,2\,3\,3\,4\,4)$.



γ_{84} es creciente y repite dos veces el lugar 2, 1 vez el lugar 3 y 1 vez el lugar 4. Veamos que γ_{84} es composición de cuatro γ_{ij} , cada uno de los cuales repite exactamente un lugar una vez. Si γ_{87} y γ_{76} repiten el lugar 2, γ_{65} repite el lugar 3 y γ_{54} repite el lugar 4 entonces se verifica $\gamma_{87}\gamma_{76}\gamma_{65}\gamma_{54} = \gamma_{84}$. Gráficamente,



Observación 2.1.8. Si $\gamma_{r+1\,r}$ repite el lugar i y $\gamma_{r\,r-1}$ repite el lugar j, con $j > i$, entonces $\gamma_{r\,r-1} \circ \gamma_{r+1\,r}$ repite los lugares i y j. Si $i = j$ entonces $\gamma_{r\,r-1} \circ \gamma_{r+1\,r}$ repite dos veces el lugar i.

Proposición 2.1.9. *Si γ_{sr} es creciente entonces hay una sucesión de caminos*

$$\gamma_{r+1\,r}, \gamma_{r+2\,r+1}, \ldots, \gamma_{s\,s-1}$$

tal que $\gamma_{sr} = \gamma_{r+1\,r}\gamma_{r+2\,r+1} \cdots \gamma_{s\,s-1}$.

Demostración. Sabemos que γ_{sr} repite lugares $s - r$ veces. Supongamos que

$$i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_{s-r}$$

son esos lugares, cada una escrito tantas veces como γ_{sr} lo repite. Para cada $r \leq k \leq s-1$, sea $\gamma_{k+1\,k}$ el camino que repite el lugar i_{s-k}. Las observaciones 2.1.6 y 2.1.8 implican que

$$\gamma_{sr} = \gamma_{r+1\,r}\gamma_{r+2\,r+1} \cdots \gamma_{s\,s-1}.$$

□

2.2 Homotopía de morfismos simpliciales

En lo que sigue definiremos la noción de homotopía de morfismos simpliciales, utilizando los distintos cilindros I_ny los caminos $\gamma_{rs} : I_r \to I_s$. Probaremos luego que es equivalente a la noción clásica de contigüidad definida en el capítulo 1.

Definición 2.2.1. Dos morfismos simpliciales $\varphi, \varphi' : K \to L$ se dicen elementalmente homotópicos si la función $H : K \times I_1 \to L$ definida por $H(v, 0) = \varphi(v)$, $H(v, 1) = \varphi'(v)$ es un morfismo simplicial.

Proposición 2.2.2. *Dos morfismos simpliciales son elementalmente homotópicos si y sólo si son elementalmente contiguos.*

Demostración. Sean $\varphi, \varphi' : K \to L$ morfismos simpliciales elementalmente homotópicos y sea $H : K \times I_1 \to L$ una homotopía entre ellos. Para todo $s \in K$, $H(s \times \{0,1\})$ es un simplex de L. Como $H(s \times \{0,1\}) = \varphi(s) \cup \varphi'(s)$ entonces φ y φ' son contiguos. Reciprocamente, supongamos que para todo $s_1 \in K$ $\varphi(s_1) \cup \varphi'(s_1) \in L$ y veamos que φ y φ' son elementalmente homotópicos. Sea s un simplex de $K \times I_1$. Como $p_2(s)$ es un simplex de I_1 y I_1 tiene exactamente tres símplices, se tienen tres casos: $p_2(s) = \{0\}$, $p_2(s) = \{1\}$ y $p_2(s) = \{0,1\}$. En el primer caso, $H(s) = \varphi(p_1(s))$, en el segundo caso $H(s) = \varphi'(p_1(s))$. En ambos casos se deduce que $H(s) \in L$ por ser φ y φ' simpliciales. En el tercer caso, se tiene $s = \{(v_0,0),(v_1,0),\ldots,(v_n,0),(w_0,1),(w_1,1),\ldots,(w_m,1)\}$ y entonces $H(s) = \varphi(\{v_0,v_1,\ldots,v_n\}) \cup \varphi'(\{w_0,w_1,\ldots,w_m\}) \subset \varphi(p_1(s)) \cup \varphi'(p_1(s))$. Como φ y φ' son contiguos entonces $H(s) \in L$. □

Definición 2.2.3. Dos morfismos simpliciales $\varphi, \varphi' : K \to L$ se dicen homotópicos si existen $k \in \mathbb{N}$ y un morfismo simplicial $H : K \times I_k \to L$ tal que $H(v,0) = \varphi(v)$ y $H(v,k) = \varphi'(v)$ para todo v vértice de K.

Proposición 2.2.4. *Dos morfismos simpliciales son homotópicos si y sólo si son contiguos.*

Demostración. Si $\varphi, \varphi' : K \to L$ son morfismos simpliciales homotópicos y $H : K \times I_k \to L$ es una homotopía entre ellos, definimos, para $0 \leq i \leq k$, $\varphi_i : K \to L$ por $\varphi_i(v) = H(v,i)$. Es claro que $\varphi_0 = \varphi$ y $\varphi_k = \varphi'$. Además φ_i es simplicial pues si s es un simplex de K entonces $\varphi_i(s) = H(s \times \{i\})$ y H es simplicial. Por último, φ_i y φ_{i+1} son elementalmente contiguos ya que si $s \in K$ $\varphi_i(s) \cup \varphi_{i+1}(s) = H(s \times \{i, i+1\})$.
Reciprocamente, supongamos que φ y φ' son contiguos y veamos que son homotópicos. Existen morfismos simpliciales $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k : K \to L$ tales que $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_k = \varphi'$ y, para $1 \leq i \leq k$, φ_i y φ_{i+1} son elementalmente contiguos.
Definimos $H : K \times I_k \to L$ por $H(v,i) = \varphi_i(v)$. Veamos que H es simplicial. Dado $s \in K \times I_k$ se tienen dos casos: $p_2(s) = \{i\}$ ó $p_2(s) = \{i, i+1\}$.
En el primer caso $s = p_1(s) \times \{i\}$ y por lo tanto $H(s) = \varphi_i(p_1(s))$.
En el segundo caso

$$s = \{(v_0,i),(v_1,i),\ldots,(v_n,i),(w_0,i+1),(w_1,i+1),\ldots,(w_m,i+1)\}$$

y

$$H(s) = \varphi_i(\{v_0,v_1,\ldots,v_n\}) \cup \varphi_{i+1}(w_0,w_1,\ldots,w_m) \subset \varphi_i(p_1(s)) \cup \varphi_{i+1}(p_1(s))$$

En ambos casos $H(s) \in L$. □

Los siguientes resultados se deducen inmediatamente de los resultados análogos para contigüidad.

Corolario 2.2.5.

(a) La homotopía es una relación de equivalencia.

(b) Composiciones de morfismos simpliciales homotópicos son homotópicos.

(c) Si φ y φ' son morfismos simpliciales homotópicos entonces las funciones continuas $|\varphi|$ y $|\varphi'|$ inducidas por ellos son homotópicas.

Sin embargo, veremos como probar estos resultados directamente usando nuestra definición de homotopía.
Para probar (a) definimos la composición de homotopías y la homotopía inversa.
Sean $\varphi, \varphi', \varphi'' : K \to L$ morfismos simpliciales, sea $H : K \times I_r \to L$ una homotopía entre φ y φ' y sea $G : K \times I_s \to L$ una homotopía entre φ' y φ''. Definimos $H * G : K \times I_{r+s} \to L$ como

$$H * G(v, j) = \begin{cases} H(v, j) & si \quad 0 \leq j \leq r \\ G(v, j - r) & si \quad r \leq j \leq r + s \end{cases}$$

$H * G$ está bien definida pues $H(v, r) = G(v, 0) = \varphi'(v)$ y es simplicial pues, si s es un simplex de K y $1 \leq j \leq r + s$, entonces

$$H * G(s \times \{j - 1, j\}) = \begin{cases} H(s \times \{j - 1, j\}) & si \quad j \leq r \\ G(s \times \{j - 1, j\}) & si \quad j > r \end{cases}$$

Además se verifica que

$$\begin{array}{l} H * G(v, 0) = H(v, 0) = \varphi(v) \\ H * G(v, r + s) = G(v, s) = \varphi''(v) \end{array}.$$

Se tiene entonces que la homotopía es una relación transitiva.
Para probar la simetría definimos $\overline{H} : K \times I_r \to L$ por $\overline{H}(v, j) = H(v, r - j)$. Es claro que, si H es una homotopía entre φ y φ' entonces $\overline{H}$ es una homotopía entre φ' y φ.
La reflexividad es inmediata pues la función $H(v, j) = \varphi(v)$ es una homotopía entre φ y φ.

Para probar (b), supongamos que $\varphi, \varphi' : K \to L$ y $\psi, \psi' : L \to T$ son morfismos simpliciales homotópicos. Sea $H : K \times I_r \to L$ una homotopía entre φ y φ' y sea $G : L \times I_s \to T$ una homotopía entre ψ y ψ'.
Sea $F_1 : K \times I \to T$ definida por $F_1(v, j) = G(\varphi(v), j)$. Es claro que F_1 es simplicial y que es una homotopía entre $\psi\varphi$ y $\psi'\varphi$. De manera similar definimos una homotopía entre $\psi'\varphi$ y $\psi'\varphi'$ por $F_2(v, j) = \psi'(H(v, j))$.
La composición $F_1 * F_2$ es una homotopía entre $\psi\varphi$ y $\psi'\varphi'$.

Para demostrar (c) supongamos que φ y φ' son morfismos simpliciales de K en L elementalmente homotópicos y sea $F : K \times I_1 \to L$ una homotopía entre ellos. Sea $C(K)$ el complejo simplicial definido en 1.3.18. Recordemos que $C(K)$ es un subcomplejo de $K \times I_1$. Por lo tanto hay un morfismo simplicial inclusión

$$i : C(K) \to K \times I_1.$$

Como $|C(K)|$ es homeomorfo a $|K| \times I$ entonces se tiene una función continua

$$G = |F \circ i| : |K| \times I \to |L|.$$

Veamos que G es una homotopía entre $|\varphi|$ y $|\varphi'|$.
Sea $(\alpha, t) \in |K| \times I$ con $\alpha = \sum_{i=0}^{n} \alpha(v_i)v_i$. Recordando el homeomorfismo definido en la demostración de la proposición 1.3.20 entre $|C(K)|$ y $|K| \times I$ podemos escribir

$$G(\alpha, t) = |F|(\textstyle\sum_{i=0}^{k-1} \alpha(v_i)(v_i, 0) + (1 - t - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha(v_i))(v_k, 0) +$$

$$+(t - \textstyle\sum_{i=k+1}^{n} \alpha(v_i))(v_k, 1) + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha(v_i)(v_i, 1))$$

con k tal que $\sum_{i=0}^{k-1} \alpha'(v_i) \leq 1 - t$ y $\sum_{i=0}^{k} \alpha'(v_i) > 1 - t$.

Se verifica fácilmente que

$$G(\alpha, 0) = \sum_{i=0}^{n} \alpha(v_i)F(v_i, 0)$$

y

$$G(\alpha, 1) = \sum_{i=0}^{n} \alpha(v_i)F(v_i, 1).$$

Como $F(v_i, 0) = \varphi(v_i)$ y $F(v_i, 1) = \varphi'(v_i)$, podemos concluir que $G(\alpha, 0) = |\varphi|(\alpha)$ y $G(\alpha, 1) = |\varphi|'(\alpha)$. Por lo tanto G es una homotopía entre $|\varphi|$ y $|\varphi'|$.

Ejemplo 2.2.6. Sea s un n-simplex. Como todo subconjunto de s es un simplex, toda función $f : K \times I_r \to s$ es simplicial y por lo tanto todos los morfismos $\varphi : K \to s$ son homotópicos entre sí.

Observación 2.2.7. Una homotopía entre dos morfismos simpliciales

$$\varphi, \varphi' : I_r \to K$$

se puede escribir como una matriz de $(k + 1) \times (r + 1)$

$$H = \begin{bmatrix} H(0,0) & H(1,0) & \dots & H(r,0) \\ H(0,1) & H(1,1) & \dots & H(r,1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H(0,k) & H(1,k) & \dots & H(r,k) \end{bmatrix}$$

tal que

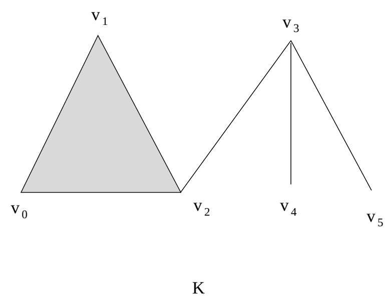
(a) La primera fila de H es $(\varphi_0\, \varphi_1, \dots \varphi_r)$ y la última fila de H es $(\varphi'_0\, \varphi'_1\, \dots\, \varphi'_r)$.

(b) Los coeficientes de cada submatriz de H de 2×2 son vértices de un mismo simplex de K.

Reciprocamente, cualquier matriz que cumpla (a) y (b) define una homotopía entre φ y φ'.

Una matriz con coeficientes en el conjunto de vértices de K que cumpla la condición (b) de la observación anterior se dirá simplicial.

Ejemplo 2.2.8. Sea K el complejo simplicial



Sea $\varphi : I_9 \to K$ el morfismo simplicial dado por

$$(v_0\, v_1\, v_2\, v_3\, v_4\, v_3\, v_5\, v_3\, v_2\, v_0).$$

φ es homotópico al morfismo constante v_0.
La matriz

$$H = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_3 & v_5 & v_3 & v_2 & v_0 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_3 & v_3 & v_3 & v_3 & v_2 & v_0 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_2 & v_2 & v_2 & v_2 & v_2 & v_2 & v_0 \\ v_0 & v_0 & v_0 & v_0 & v_0 & v_0 & v_0 & v_0 & v_0 & v_0 \end{bmatrix}$$

es una homotopía entre ellos.

El siguiente ejemplo es un caso particular de la proposición que se demuestra a continuación. En él se ilustra la idea que se utilizará en la demostración de dicha proposición.

Ejemplo 2.2.9. Sea $\gamma_{10\,4}$ dado por $(0\ 1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 3\ 4)$. $\gamma_{10\,4}$ es homotópico a $(0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4)$.
Se puede construir una matriz de homotopía H de 5 filas y 11 columnas de la siguiente manera.
La fila 1 es $(0\ 1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 3\ 4)$. La fila 2 de H se construye reemplazando todos los ceros que aparecen en la fila 1, salvo el primero, por unos. La fila 3 se construye reemplazando todos los unos que aparecen en la fila 2, salvo el primero, por el número dos. Y así se sigue hasta que en la fila 5 se llega a $(0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4)$.
La matriz H es:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Notar que la homotopía deja fijos los extremos en cada paso.

Proposición 2.2.10. *Todos los caminos de 0 a r en s pasos son homotópicos entre sí con una homotopía que deja fijos los extremos en cada paso.*

Demostración. Probaremos que todo γ_{sr} es homotópico al morfismo dado por $(0\ 1\ 2\ \ldots\ r-1\ r\ \ldots\ r)$. Para ello construimos una homotopía $H = (v_{ij})$ inductivamente con la misma idea que en el ejemplo 2.2.9.
La fila 1 de H es $(\gamma_{sr}(0)\ \gamma_{sr}(1)\ \ldots\ \gamma_{sr}(s))$. La fila 2 se define como

$$v_{ij} = \begin{cases} v_{ij} & si \quad v_{ij} \neq 0 \quad o \quad j = 1 \\ 1 & si \quad v_{ij} = 0 \quad y \quad j \neq 1 \end{cases}$$

En la fila 2 hay un solo cero, el correspondiente a la columna 1. Si había más ceros en la fila 1, éstos fueron reemplazados por unos.
Si suponemos definida la fila i, definimos la fila $i+1$ como

$$v_{ij} = \begin{cases} v_{i-1\,j} & si \quad v_{i-1\,j} \neq i-2 \quad o \quad j = i-1 \\ i-1 & si \quad v_{i-1\,j} = i-2 \quad y \quad j \neq i-1 \end{cases}$$

Así la fila i verifica que $v_{ij} = j-1$ para todo $j \leq i$ y $v_{ij} \geq i-2$ para $j \geq i$.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & v_{12} & v_{13} & \ldots & v_{1\,i-1} & v_{1i} & v_{1\,i+1} & \ldots & v_{1\,r+1} & \ldots & v_{1\,s+1} \\ 0 & 1 & v_{23} & \ldots & v_{2\,i-1} & v_{2i} & v_{2\,i+1} & \ldots & v_{2\,r+1} & \ldots & v_{2\,s+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & i-2 & v_{i-1\,i} & v_{i-1\,i+1} & \ldots & v_{i-1\,r+1} & \ldots & v_{i-1\,s+1} \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & i-2 & i-1 & v_{i\,i+1} & \ldots & v_{i\,r+1} & \ldots & v_{i\,s+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & i-2 & i-1 & i & \ldots & r & \ldots & r \end{bmatrix}$$

Para ver que H es una homotopía, consideremos una submatriz de H de 2×2

$$S = \begin{bmatrix} v_{i-1\,j} & v_{i-1\,j+1} \\ v_{i\,j} & v_{i\,j+1} \end{bmatrix}.$$

Si $j \leq i-2$ entonces $S = \begin{bmatrix} j-2 & j-1 \\ j-2 & j-1 \end{bmatrix}$. Si $j \geq i-1$ entonces $v_{ij} \geq i-2$ y tenemos los siguientes tres casos:

Caso 1 $v_{i-1\,j} = i-2$. En este caso $S = \begin{bmatrix} i-2 & i-2 \\ i-1 & i-1 \end{bmatrix}$ ó $S = \begin{bmatrix} i-2 & i-1 \\ i-1 & i-1 \end{bmatrix}$.

Caso 2 $v_{i-1\,j} > i-2$ y $v_{i-1\,j+1} = i-2$. Ahora $S = \begin{bmatrix} i-1 & i-2 \\ i-1 & i-1 \end{bmatrix}$.

Caso 3 $v_{i-1\,j} > i-2$ y $v_{i-1\,j+1} > i-2$. En este caso las dos filas de S son iguales.

En los tres casos los coeficientes de S son vértices de un mismo simplex de I_r y por lo tanto H es una homotopía. □

2.3 El grupo fundamental de un complejo simplicial

Definimos ahora el grupo fundamental de un complejo simplicial y probamos que es naturalmente isomorfo al grupo fundamental de su espacio asociado.

Definición 2.3.1. Sean $\varphi, \varphi' : I_r \to K$ morfismos simpliciales tales que $\varphi(0) = \varphi'(0) = v_0$ y $\varphi(r) = \varphi'(r) = v_0'$, donde v_0 y v_0' son vértices de K. Decimos que φ y φ' son homotópicos con extremos fijos si son homotópicos relativos al subcomplejo 0-dimensional de I_r con vértices 0 y r.

Como ya hemos notado, la homotopía definida en la demostración de la proposición 2.2.10 es una homotopía con extremos fijos.

Observación 2.3.2. La homotopía con extremos fijos es una relación de equivalencia.

De ahora en más trabajaremos con complejos simpliciales punteados (K, v_0), donde v_0 es un vértice fijo de K.
Notaremos $[I_r, K]_{v_0}$ al conjunto de clases de homotopía con extremos fijos de morfismos simpliciales $\varphi_r : (I_r, \{0, r\}) \to (K, v_0)$. Notamos $[\varphi]_r$ a la clase de φ en $[I_r, K]_{v_0}$.
Como todos los caminos de 0 a r en s pasos son homotópicos con extremos fijos, se tiene, para todo par $s \geq r$, una aplicación

$$f_s^r : [I_r, K]_{v_0} \to [I_s, K]_{v_0}$$

bien definida por

$$f_s^r([\varphi_r]_r) = [\varphi_r \gamma_{sr}]_s,$$

donde γ_{sr} es *cualquier* camino de 0 a r en s pasos.
La familia $\{[I_r, K]_{v_0}, f_s^r\}$ forma un sistema dirigido de conjuntos. El límite directo de esta familia es el conjunto de clases de equivalencia de $\bigcup_{r \geq 0} [I_r, K]_{v_0}$ respecto de la relación de equivalencia

$$[\varphi_r]_r \sim [\varphi_s]_s \Leftrightarrow \exists m \geq r, s / [\varphi_r \gamma_{mr}]_m = [\varphi_s \gamma_{ms}]_m$$

Notamos $[\varphi_r]$ a la clase de $[\varphi_r]_r$ en el colímite $\varinjlim [I_r, K]_{v_0} = \bigcup_{r \geq 0} [I_r, K]_{v_0} / \sim$.

Definimos ahora una operación en $\varinjlim [I_r, K]_{v_0}$ que define una estructura de grupo.

Dado $\varphi_r : (I_r, \{0, r\}) \to (K, v_0)$ y $\varphi_s : (I_s, \{0, s\}) \to (K, v_0)$ se define

$$\varphi_r * \varphi_s : (I_{r+s}, \{0, r+s\}) \to (K, v_0)$$

por

$$\varphi_r * \varphi_s = (\varphi_r(0) \, \ldots \, \varphi_r(r) \, \varphi_s(1) \, \ldots \, \varphi_s(s))$$

si $s \geq 1$ y $\varphi_r * \varphi_s = \varphi_r$ si $s = 0$. Definimos $[\varphi_r] * [\varphi_s] = [\varphi_r * \varphi_s]$.
Para ver que esta operación está bien definida supongamos que $[\varphi_r] = [\varphi_m]$ y probemos que $[\varphi_r * \varphi_s] = [\varphi_m * \varphi_s]$.

Si $[\varphi_r] = [\varphi_m]$ entonces existe $n \geq r, m$ y caminos γ_{nr} y γ_{nm} tal que $[\varphi_m \gamma_{nm}]_n = [\varphi_r \gamma_{nr}]_n$. Sean

$$\gamma_{n+s\,r+s} = (\gamma_{nr}(0)\ \dots\ \gamma_{nr}(n)\ r+1\ \dots\ r+s)$$

y

$$\gamma_{n+m\,m+s} = (\gamma_{nm}(0)\ \dots\ \gamma_{nm}(n)\ m+1\ \dots\ m+s)$$

entonces

$$(\varphi_r * \varphi_s) \circ \gamma_{n+s\,r+s} = (\varphi_r \gamma_{nr}(0)\ \dots\ \varphi_r \gamma_{nr}(n)\ \varphi_s(1)\ \dots\ \varphi_s(s))$$

y

$$\varphi_m * \varphi_s \circ \gamma_{n+s\,m+s} = (\varphi_m \gamma_{nm}(0)\ \dots\ \varphi_m \gamma_{nm}(n)\ \varphi_s(1)\ \dots\ \varphi_s(s))$$

Ahora si $H = (v_{ij})$ es una homotopía con extremos fijos entre $\varphi_m \gamma_{nm}$ y $\varphi_r \gamma_{nr}$ entonces

$$F = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1m+1} & \varphi_s(1) & \dots & \varphi_s(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{k+11} & \dots & v_{k+1m+1} & \varphi_s(1) & \dots & \varphi_s(s) \end{bmatrix}$$

es una homotopía entre $\varphi_m * \varphi_s \circ \gamma_{n+s\,m+s}$ y $\varphi_r * \varphi_s \circ \gamma_{n+s\,r+s}$. Tenemos entonces que $[\varphi_r * \varphi_s] = [\varphi_r * \varphi_m]$.
Es inmediato verificar que $(\varphi_r * \varphi_s) * \varphi_m = \varphi_r * (\varphi_s * \varphi_m)$ y se deduce que el producto en $\underrightarrow{\lim}[I_r, K]_{v_0}$ es asociativo.
Notamos $\varphi^k = \varphi * \dots * \varphi$.
Sea $e_0 : I_0 \to K$ el morfismo definido por $e_0(0) = v_0$. Es claro que

$$\varphi_r * e_0 = e_0 * \varphi_r = \varphi_r$$

y $[e_0]$ es el elemento neutro para esta operación. Si $r > 0$ notamos e_r al morfismo constante de I_r en K. Se tiene $[e_r] = [e_0]$ para todo $r \in \mathbb{N}$.
Veamos, por último, que todo elemento de $\underrightarrow{\lim}[I_r, K]_{v_0}$ tiene inverso.
Definimos, para cada $\varphi_r : (I_r, \{0, r\}) \to (K, v_0)$, el morfismo $\overline{\varphi_r} : (I_r, \{0, r\}) \to (K, v_0)$ por $\overline{\varphi_r}(i) = \varphi_r(r - i)$.
Para probar que $[\varphi_r * \overline{\varphi_r}] = [e_0]$, consideremos la siguiente matriz

$$H = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & \dots & v_k & v_{k+1} & \dots & v_{r-1} & v_r & v_{r-1} & \dots & v_{k+1} & v_k & \dots & v_1 & v_0 \\ v_0 & v_1 & \dots & v_k & v_{k+1} & \dots & v_{r-1} & v_{r-1} & v_{r-1} & \dots & v_{k+1} & v_k & \dots & v_1 & v_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_0 & v_1 & \dots & v_k & v_{k+1} & \dots & v_{k+1} & v_{k+1} & v_{k+1} & \dots & v_{k+1} & v_k & \dots & v_1 & v_0 \\ v_0 & v_1 & \dots & v_k & v_k & \dots & v_k & v_k & v_k & \dots & v_k & v_k & \dots & v_1 & v_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_0 & v_1 & \dots & v_1 & v_1 & \dots & v_1 & v_1 & v_1 & \dots & v_1 & v_1 & \dots & v_1 & v_0 \\ v_0 & v_0 & \dots & v_0 & v_0 & \dots & v_0 & v_0 & v_0 & \dots & v_0 & v_0 & \dots & v_0 & v_0 \end{bmatrix}$$

Como φ_r es simplicial el conjunto $\{v_i, v_{i+1}\}$ es un simplex de K para todo $0 \leq i \leq r$. Cada submatriz de H de 2×2 tiene todos sus coeficientes en algún $\{v_i, v_{i+1}\}$. Por lo tanto H es una homotopía entre $\varphi_r * \overline{\varphi_r}$ y e_{2r}.
Definimos $\varphi^{-k} = \overline{\varphi}^k$ y $\varphi^0 = e_0$ y así, queda definido φ^k para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Observación 2.3.3. $[\varphi^k] = [\varphi]^k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$

El grupo $\varinjlim [I_r, K]_{v_0}$ es el grupo fundamental del complejo simplicial punteado (K, v_0) y se lo denota $\Pi_1(K, v_0)$.

Ejemplos 2.3.4.

(a) De lo visto en el ejemplo 2.2.6 se deduce que si s es un n-simplex y v_0 es un vértice de s entonces $\Pi_1(s, v_0) = 0$.

(b) Si K es el complejo simplicial definido en el ejemplo 2.2.8 entonces $\Pi_1(K, v_0) = 0$.

Probamos ahora que el grupo fundamental de un complejo simplicial es naturalmente isomorfo al grupo fundamental de su espacio asociado.

Teorema 2.3.5. *Hay un isomorfismo natural entre* $\Pi_1(K, v_0)$ *y* $\Pi_1(|K|, v_0)$ *definido en la categoría de los complejos simpliciales punteados.*

Demostración. Definimos

$$\Theta_r : [I_r, K]_{v_0} \longrightarrow \Pi_1(|K|, v_0)$$

por

$$\Theta_r([\varphi_r]_r) = [|\varphi_r|],$$

donde $[|\varphi_r|]$ denota la clase en $\Pi_1(|K|, v_0)$ de la función continua asociada a φ_r. Por el corolario 2.2.5, Θ_r está bien definida.
Veamos que, si $s \geq r$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
{[I_r, K]_{v_0}} \arrow[dr, "\Theta_r"] \arrow[dd, "f_r^s"'] & \\
& \Pi_1(|K|, v_0) \\
{[I_s, K]_{v_0}} \arrow[ur, "\Theta_s"'] &
\end{tikzcd}$$

Recordemos que $\Theta_s f_r^s([\varphi_r]_r) = [|\varphi_r \gamma_{sr}|]$.
Sea $F : I \times I \longrightarrow |K|$ definida por

$$F(x, t) = |\varphi_r| \left(t \, |\gamma_{sr}| (x) + (1 - t)x\right).$$

Es claro que F está bien definida y que es continua. Además, se verifica fácilmente que $F(x, 0) = |\varphi_r| (x)$ y $F(x, 1) = |\varphi_r \gamma_{sr}| (x)$. Por lo tanto F es una homotopía entre $|\varphi_r|$ y $|\varphi_r \gamma_{sr}|$ y $\Theta_s f_r^s([\varphi_r]) = \Theta_r([\varphi_r])$.
Por la propiedad universal del límite directo existe una única aplicación

$$\Theta : \Pi_1(K, v_0) \longrightarrow \Pi_1(|K|, v_0)$$

que coincide con Θ_r en cada $[I_r, K]_{v_0}$.
Veamos que Θ es sobreyectiva. Para ello, sea $\omega : I \to |K|$ una curva cerrada en v_0. Por el teorema de aproximación simplicial existe $n \in \mathbb{N}$ y existe $\phi : sd^n I_1 \to K$ aproximación simplicial a ω. Como $sd^n I_1 = I_{2^n}$, podemos pensar a $\phi : I_{2^n} \to K$ y se tiene $\Theta([\phi]) = [|\phi|] = [\omega]$.
Para ver que Θ es inyectiva supongamos que $\varphi_r : (I_r, \{0, r\}) \to (K, v_0)$ y $\varphi_s : (I_s, \{0, s\}) \to (K, v_0)$ son tales que $|\varphi_r|$ es homotópica a $|\varphi_s|$ y supongamos que $s \geq r$. Por la buena definición de Θ tenemos que $|\varphi_r \gamma_{sr}| \sim |\varphi_r|$ para todo camino γ_{sr} y por lo tanto $|\varphi_r \gamma_{sr}| \sim |\varphi_s|$. Por el corolario 1.5.8 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $\lambda : sd^n I_s \to I_s$ es una aproximación simplicial a $id : |sd^n I_s| \to |I_s|$ entonces $\varphi_r \gamma_{sr} \lambda \sim \varphi_s \lambda$. Como $sd^n I_s = I_{s.2^n}$ se tiene que $\lambda : I_k \to I_s$, donde $k = s.2^n$. Como $\lambda(0) = 0$ y $\lambda(k) = s$ entonces λ es un camino de 0 a s en k pasos y $\gamma_{sr}\lambda$ es un camino de 0 a r en k pasos. Por la definición de $\Pi_1(K, v_0)$ resulta que $[\varphi_r] = [\varphi_s]$.
La naturalidad de Θ se verifica fácilmente.

$\square$

2.4 Caminos de aristas

En esta sección recordamos las definiciones básicas de caminos de aristas y probamos que el grupo de caminos de aristas de un complejo simplicial punteado es naturalmente isomorfo a su grupo fundamental. De esta manera, ejemplificamos la relación entre nuestro enfoque y el enfoque clásico.

Una arista de un complejo simplicial K es un par ordenado de vértices (v, v') tal que $\{v, v'\}$ es un simplex de K (notar que puede ser $v = v'$). El vértice v se llama el origen de la arista y v' el fin. Un camino de aristas de K es una sucesión finita $e_1\ e_2\ \ldots\ e_r$ de aristas de K tal que $\operatorname{fin} e_j = \operatorname{orig} e_{j+1}$ para $1 \leq i \leq r-1$. Se define $\operatorname{orig} \zeta = \operatorname{orig} e_1$ y $\operatorname{fin} \zeta = \operatorname{fin} e_r$. Un camino de aristas cerrado en $v_0 \in K$ es un camino de aristas de K que tiene a v_0 como origen y fin.
Si ζ_1 y ζ_2 son dos caminos de aristas de K tales que $\operatorname{fin} \zeta_1 = \operatorname{orig} \zeta_2$, se define el producto $\zeta_1 \cdot \zeta_2$ como la sucesión de aristas de ζ_1 seguida por la la sucesión de aristas de ζ_2. Es claro que $\operatorname{orig} \zeta_1 \cdot \zeta_2 = \operatorname{orig} \zeta_1$ y $\operatorname{fin} \zeta_1 \cdot \zeta_2 = \operatorname{fin} \zeta_2$ y que el producto es asociativo.

Definición 2.4.1. Dos caminos de aristas ζ y ζ' se dicen simplemente equi valentes si existen vértices v, v', v'' de K que pertenecen a un mismo simplex de K tales que $\{\zeta, \zeta'\}$ es igual a alguno de los siguientes conjuntos.

(a) $\{(v, v''), (v, v')(v', v'')\}$.

(b) $\{\zeta_1(v, v''), \zeta_1(v, v')(v', v'')\}$ para algún camino de aristas ζ_1 con $\operatorname{fin} \zeta_1 = v$.

(c) $\{\zeta_1(v, v'')\zeta_2, \zeta_1(v, v')(v', v'')\zeta_2\}$ para dos caminos de aristas ζ_1 y ζ_2 en K con $\operatorname{fin} \zeta_1 = v$ y $\operatorname{orig} \zeta_2 = v''$.

Dos caminos de aristas ζ y ζ' se dicen equivalentes y se nota $\zeta \sim \zeta'$ si hay una sucesión finita de caminos de aristas $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ tal que $\zeta = \zeta_0$, $\zeta' = \zeta_n$ y ζ_{i-1} y ζ_i son simplemente equivalentes para $i = 1, 2, \dots, n$.
La equivalencia de caminos de aristas es una relación de equivalencia y notamos $[\zeta]$ a la clase de ζ.

Observación 2.4.2.

1- Si $\zeta \sim \zeta'$ entonces ζ y ζ' tienen el mismo origen y el mismo fin.

2- Si $\zeta_1 \sim \zeta_1'$, $\zeta_2 \sim \zeta_2'$ y $\operatorname{fin} \zeta_1 = \operatorname{orig} \zeta_2$ entonces $\zeta_1 \cdot \zeta_2 \sim \zeta_1' \cdot \zeta_2'$.

3- Si $\operatorname{orig} \zeta = v_1$ y $\operatorname{fin} \zeta = v_2$ entonces $(v_1, v_1)\zeta \sim \zeta \sim \zeta(v_2, v_2)$.

Si $e = (v, v')$ es una arista de K definimos $e^{-1} = (v', v)$ y si $\zeta = e_1 \dots e_r$ es un camino de aristas en K definimos $\zeta^{-1} = e_1^{-1} \dots e_r^{-1}$.

Observación 2.4.3.

1- $\operatorname{orig} \zeta^{-1} = \operatorname{fin} \zeta$ y $\operatorname{fin} \zeta^{-1} = \operatorname{orig} \zeta$.

2- Si $\zeta_1 \sim \zeta_2$ entonces $\zeta_1^{-1} \sim \zeta_2^{-1}$.

3- Si $\operatorname{orig} \zeta = v_1$ y $\operatorname{fin} \zeta = v_2$ entonces $\zeta\zeta^{-1} \sim (v_1, v_1)$ y $\zeta^{-1}\zeta \sim (v_2, v_2)$.

De las observaciones anteriores se deduce que si K es un complejo simplicial y v_0 es un vértice de K el conjunto de los caminos de aristas en K cerrados en v_0 con el producto definido por $[\zeta_1][\zeta_2] = [\zeta_1\zeta_2]$ es un grupo.
Este grupo se llama el grupo de caminos de aristas de K con vértice base v_0 y se nota $E(K, v_0)$.
Si (K_1, v_1) y (K_2, v_2) son dos pares simpliciales y $\varphi : (K_1, v_1) \to (K_2, v_2)$ es un morfismo de pares queda definida una aplicación

$$\varphi^* : E(K_1, v_1) \to E(K_2, v_2)$$

por $\varphi^*([\zeta]) = [\varphi(\zeta)]$ donde, si $\zeta = (v_1, v_2) \dots (v_r, v_{r+1})$,

$$\varphi(\zeta) = (\varphi(v_1), \varphi(v_2)) \dots (\varphi(v_r), \varphi(v_{r+1})).$$

Para ver que φ^* está bien definida observemos que, si v, v' y v'' son vértices de un simplex de K_1 entonces $\varphi(v)$, $\varphi(v')$ y $\varphi(v'')$ son vértices de un simplex de K_2. Esto implica que si ζ y ζ' son caminos de aristas en K_1 cerrados en v_1 tales que ζ y ζ' son simplemente equivalentes entonces $\varphi(\zeta)$ y $\varphi(\zeta')$ son caminos de aristas simplemente equivalentes en K_2.
Es fácil verificar que φ^* es un morfismo de grupos.
Se tiene entonces que $E(K, v_0)$ es un funtor covariante de la categoría de los complejos simpliciales punteados en la categoría de grupos.
Probaremos que hay un isomorfismo natural entre el grupo caminos de aristas y el grupo fundamental de un complejo simplicial punteado. Para ello necesitamos una definición y un lema previo.

Definición 2.4.4. Dado un complejo simplicial punteado (K, v_0) y un morfismo de pares simpliciales $\varphi : (I_r, \{0, r\}) \to (K, v_0)$ definimos el camino de aristas ζ_φ por

$$\zeta_\varphi = (\varphi(0), \varphi(1))(\varphi(1), \varphi(2)) \dots (\varphi(r-1), \varphi(r)).$$

Lema 2.4.5. *Sean $\varphi, \varphi' : (I_r, \{0, r\}) \to (K, v_0)$ morfismos de pares simpliciales. Si φ y φ' son homotópicos, entonces ζ_φ y $\zeta_{\varphi'}$ son equivalentes.*

Demostración. Por transitividad, basta probarlo para φ y φ' elementalmente homotópicos. Para cada i, con $1 \leq i \leq r$, sea $e_i = (\varphi(i-1), \varphi(i))$, $e'_i = (\varphi'(i-1), \varphi'(i))$ y $\overline{e}_i = (\varphi(i), \varphi'(i))$. Notar que $\overline{e}_i$ es una arista de K porque φ y φ' son homotópicos. Por la definición 2.4.4, $\zeta_\varphi = e_1 \dots e_r$ y $\zeta_{\varphi'} = e'_1 \dots e'_r$ y por la definición de equivalencia

$$e_1 e_2 \dots e_r \sim e_1 \overline{e_1} \overline{e_1}^{-1} e_2 \dots \overline{e_{r-1}}^{-1} e_r.$$

Observemos que , como $\varphi(0) = \varphi'(0)$ entonces

$$e_1 \overline{e_1} = (\varphi(0), \varphi(1))(\varphi(1), \varphi'(1)) = (\varphi'(0), \varphi'(1)) = e'_1$$

y, como como $\varphi(r) = \varphi'(r)$ entonces

$$\overline{e_{r-1}}^{-1} e_r = (\varphi'(r-1), \varphi(r-1))(\varphi(r-1), \varphi(r)) = (\varphi'(r-1), \varphi'(r)) = e'_r.$$

Además, como $\varphi \sim \varphi'$ entonces el conjunto $\{\varphi(i-1), \varphi(i), \varphi'(i-1), \varphi'(i)\}$ es un simplex de K para todo i con $1 \leq i \leq r$. Por lo tanto, si $1 \leq i \leq r$ se tiene

$$\overline{e_{i-1}}^{-1} e_i \overline{e_i} = (\varphi'(i-1), \varphi(i-1))(\varphi(i-1), \varphi(i))(\varphi(i), \varphi'(i)) \sim (\varphi'(i-1), \varphi'(i)) = e'_i.$$

Luego

$$\zeta \sim e_1 \overline{e_1} \overline{e_1}^{-1} \dots \overline{e_{r-1}} \overline{e_{r-1}}^{-1} e_r \sim e'_1 e'_2 \dots e'_r = \zeta'.$$

□

Teorema 2.4.6. *Hay un isomorfismo natural entre $E(K, v_0)$ y $\Pi_1(K, v_0)$.*

Demostración. Para cada $r \in \mathbb{N}_0$ definimos

$$\Gamma_r : [I_r, K]_{v_0} \to E(K, v_0)$$

por

$$\Gamma_r([\varphi_r]_r) = \zeta_{\varphi_r}.$$

Por el lema anterior, esta aplicación está bien definida.
Veamos que la familia $\{\Gamma_r\}_{r \geq 0}$ define una función

$$\Gamma : \lim_{\rightarrow} [I_r, v_0] \to E(K, v_0).$$

Para ello debemos probar que si $s \geq r$ y $f_r^s : [I_r, K]_{v_0} \to [I_s, K]_{v_0}$ es la función definida por $f_r^s([\varphi_r]_r) = [\varphi_r \gamma_{sr}]_s$ entonces $\Gamma_s f_r^s([\varphi_r]_r) = \Gamma_r([\varphi_r]_r)$ para todo $\varphi_r : (I_r, \{0, r\}) \to (K, v_0)$.

Es decir, que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
{[I_r, K]_{v_0}} \arrow[dd, "f_r^s"'] \arrow[dr, "\Gamma_r"] & \\
& E(K, v_0) \\
{[I_s, K]_{v_0}} \arrow[ur, "\Gamma_s"'] &
\end{tikzcd}$$

Sea $s \geq r$ y $\gamma_{sr} = (0\ 1\ \ldots\ r-1\ r\ \ldots\ r)$. Entonces

$$\zeta_{\varphi_r \gamma_{sr}} = (\varphi_r(0), \varphi_r(1)) \ldots (\varphi_r(r-1), \varphi_r(r)) \ldots (\varphi_r(r), \varphi_r(r)) \sim \zeta_{\varphi_r}$$

Como $\Gamma_s f_r^s([\varphi_r]_r) = \Gamma_s([\varphi_r \gamma_{sr}]_s) = [\zeta_{\varphi_r \gamma_{sr}}]$ y $\Gamma_r([\varphi_r]_r) = [\zeta_{\varphi_r}]$ se concluye que $\Gamma_s f_r^s([\varphi_r]_r) = \Gamma_r([\varphi_r]_r)$.
Por la propiedad universal del límite directo hay una aplicación

$$\Gamma : \varinjlim [I_r, v_0] \to E(K, v_0)$$

que verifica $\Gamma([\varphi_r]) = \Gamma_r([\varphi_r]_r)$. Veamos que Γ es un isomorfismo de grupos.
Observemos que

$$\Gamma_{r+s}([\varphi_r * \varphi_s]_{r+s}) = \zeta_{\varphi_r * \varphi_s} = \zeta_{\varphi_r} \zeta_{\varphi_s} = \Gamma_r([\varphi_r]_r) \Gamma_s([\varphi_s]_s)$$

Por lo tanto $\Gamma([\varphi_r * \varphi_s]) = \Gamma([\varphi_r]) \Gamma([\varphi_s])$ y Γ es un morfismo de grupos.
Es fácil ver que Γ es sobreyectiva pues si $\zeta = e_1 \ldots e_r$ es un camino de aristas en K cerrado en v_0 con $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ para $1 \leq i \leq r$ entonces la función definida en el conjunto de vértices de I_r por $\varphi(i) = v_i$ es un morfismo simplicial, $\varphi(0) = \varphi(r) = v_0$ y $\Gamma([\varphi]) = [\zeta]$.
Ahora veamos que Γ es inyectiva. Sean φ_r y φ_s tales que ζ_{φ_r} y ζ_{φ_s} son equivalentes y veamos que $[\varphi_r] = [\varphi_s]$.
Supongamos primero que ζ_{φ_r} y ζ_{φ_s} son simplemente equivalentes y supongamos que $s \geq r$ (notar que debe ser $s = r+1$). Entonces el conjunto $\{\zeta_{\varphi_r}, \zeta_{\varphi_s}\}$ es igual a alguno de los siguientes:

(a) $\{(v_0, v_0), (v_0, v)(v, v_0)\}$

(b) $\{e_1 \ldots e_{r-1}(v_{r-1}, v_0), e_1 \ldots e_{r-1}(v_{r-1}, v)(v, v_0)\}$

(c) $\{e_1 \ldots e_{k-1}(v_{k-1}, v_k)e_{k+1} \ldots e_r, e_1 \ldots e_{k-1}(v_{k-1}, v)(v, v_k)e_{k+1} \ldots e_r\}$

Analizemos el caso (c). Los casos (a) y (b) son similares.
Por la definición 2.4.4 es $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, con $\varphi_r(i) = v_i$ y

$$\varphi_s(i) = \begin{cases} v_i & si \quad 1 \leq i \leq k-1 \\ v & si \quad i = k \\ v_{i-1} & si \quad k+1 \leq i \leq s \end{cases}$$

y por lo tanto es

$$\varphi_s(i) = \begin{cases} \varphi_r(i) & si \quad 1 \leq i \leq k-1 \\ v & si \quad i = k \\ \varphi_r(i-1) & si \quad k+1 \leq i \leq s \end{cases}$$

Se tiene

$$\varphi_s = (\varphi_r(0) \, \dots \, \varphi_r(k-1) \, v \, \varphi_r(k) \, \dots \, \varphi_r(r))$$

Por la definición de equivalencia y teniendo en cuenta que $v_{k-1} = \varphi_r(k-1)$ y $v_k = \varphi_r(k)$ se tiene que $\{\varphi_r(k-1), v, \varphi_r(k)\}$ es un simplex de K.
Sea γ_{sr} el camino que repite el lugar $k-1$ y sea

$$H = \left[\begin{array}{cccccc} \varphi_r(0) & \dots & \varphi_r(k-1) & \varphi_r(k-1) & \varphi_r(k) & \dots & \varphi_r(r) \\ \varphi_r(0) & \dots & \varphi_r(k-1) & v & \varphi_r(k) & \dots & \varphi_r(r) \end{array} \right]$$

Claramente H es una homotopía entre $\varphi_r \gamma_{sr}$ y φ_s.
En el caso general se tiene que ζ_{φ_r} y ζ_{φ_s} son equivalentes entonces existe una sucesión finita de caminos de aristas $\zeta_0, \dots, \zeta_k$ cerrados en v_0 tal que $\zeta_{\varphi_r} = \zeta_0$, $\zeta_{\varphi_s} = \zeta_k$ y, para todo $0 \leq i \leq k-1$, ζ_i y ζ_{i+1} son simplemente equivalentes. Por la sobreyectividad de Γ, para cada i, con $0 \leq i \leq k-1$ existe un morfismo simplicial

$$\varphi_i : (I_{r_i}, \{0, r_i\}) \to (K, v_0)$$

tal que $\zeta_i = \zeta_{\varphi_i}$. Entonces para cada $i = 0, 1, \dots, k-1$ $[\varphi_i] = [\varphi_{i+1}]$ y, por la transitividad es $[\varphi_r] = [\varphi_s]$.
La naturalidad de Γ se verifica fácilmente. $\square$

Capítulo 3

Cálculo de grupos fundamentales por métodos combinatorios

En este capítulo damos una demostración original de que el grupo fundamental de S^1 es isomorfo a $\mathbb{Z}$ y calculamos el grupo fundamental de la unión en un punto de varias copias de S^1, siguiendo el enfoque introducido en el capítulo 2.

3.1 Preliminares

Empezamos probando algunos resultados preliminares.
Sea $\varphi_r : I_r \to K$ un morfismo simplicial. Podemos representarlo como una $(r+1)$-upla $(v_0 \ldots v_r)$ de vértices de K.

Definición 3.1.1. Decimos que φ_r es reducible si existe $s < r$ y un morfismo simplicial $\varphi_s : I_s \to K$ tal que $[\varphi_r] = [\varphi_s]$. Es decir, si existe $m \geq r, s$ y caminos γ_{mr}, γ_{ms} tales que $\varphi_r \gamma_{mr}$ y $\varphi_s \gamma_{ms}$ son homotópicos con extremos fijos.

Esto significa que un morfismo es reducible si es equivalente a un camino de menor longitud.

Definición 3.1.2. Decimos que φ_r contiene una *secuencia elemental* si existe i, con $0 \leq i \leq r-1$ tal que $v_i = v_{i+1}$ ó $v_{i-1} = v_{i+1}$. Si $v_i = v_{i+1}$ decimos que $(v_i \ v_{i+1})$ es una secuencia elemental de tipo $(v\ v)$. Si $v_{i-1} = v_{i+1} \neq v_i$ decimos que $(v_{i-1}\ v_i\ v_{i+1})$ es una secuencia elemental de tipo $(v\ v'\ v)$.

Proposición 3.1.3. *Si φ_r contiene una secuencia elemental entonces φ_r es reducible.*

Demostración. Supongamos que existe $0 \leq i \leq r-1$ tal que $\varphi_r(i) = \varphi_r(i+1)$ y sea $\gamma_{r\,r-1}$ el camino que repite el lugar i. Sea

$$\varphi_{r-1} = (\varphi_r(0)\ \ldots\ \varphi_r(i-1)\ \varphi_r(i+1)\ \ldots\ \varphi_r(r)) \tag{3.1}$$

entonces φ_{r-1} es un morfismo simplicial y $\varphi_r = \varphi_{r-1}\gamma_{r\,r-1}$. Por lo tanto $[\varphi_r] = [\varphi_{r-1}]$ y φ_r es reducible.

Supongamos ahora que existe $1 \leq i \leq r-1$ tal que $\varphi_r(i-1) = \varphi_r(i+1)$. Sea

$$\varphi'_r = (\varphi_r(0) \ \dots \ \varphi_r(i-1) \ \varphi_r(i+1) \ \varphi_r(i+1) \ \dots \ \varphi_r(r)).$$

Entonces φ'_r es simplicial, $\varphi'_r \sim \varphi_r$ y $\varphi'_r(i) = \varphi'_r(i+1)$. Entonces, si de nuevo definimos φ_{r-1} por la ecuación 3.1 se tiene $[\varphi_r] = [\varphi'_r] = [\varphi_{r-1}]$ y φ_r es reducible. □

Se probó que si φ_r contiene una secuencia elemental de tipo $(v \ v)$, entonces $[\varphi_r] = [\varphi_{r-1}]$, donde φ_{r-1} es el morfismo definido por la $(r-1)$-upla que resulta de eliminar v de la secuencia $(v \ v)$ y que, si φ_r contiene una secuencia elemental de tipo $(v \ v' \ v)$, entonces $[\varphi_r] = [\varphi_{r-1}]$, donde φ_{r-1} es el morfismo definido por la $(r-1)$-upla que resulta de eliminar v' de la secuencia $(v \ v' \ v)$.
Por esta razón decimos que v y v' son los elementos reducibles de las secuencias $(v \ v)$ y $(v \ v' \ v)$ respectivamente.

La recíproca de esta proposición no es cierta en general. Por ejemplo, si s es el 2-simplex, entonces el morfismo $I_3 \to s$ dado por $(v_0 \, v_1 \, v_2 \, v_0)$ es reducible pues $[\varphi] = [e_0]$. Sin embargo, φ no contiene secuencias elementales.

Probaremos que la recíproca de la proposición 3.1.3 sí es cierta para complejos simpliciales de dimensión 1. Para probar esto necesitamos un lema previo.

Lema 3.1.4. *Sea (K, v_0) un complejo simplicial punteado. Si $\varphi : (I_r, \{0, r\}) \to (K, v_0)$ es un morfismo simplicial reducible no constante, entonces existe un morfismo simplicial $\varphi' : (I_r, \{0, r\}) \to (K, v_0)$ distinto de φ y elementalmente homotópico a φ.*

Demostración. Supongamos que el único morfismo simplicial homotópico a φ es el mismo φ y que φ es reducible y llegaremos a una contradicción.
Como φ es reducible, entonces existe $s < r$, existe un morfismo simplicial

$$\psi : (I_s, \{0, s\}) \to (K, v_0)$$

y un camino γ_{rs} tal que φ es homotópico a $\psi\gamma_{rs}$. Entonces debe ser $\varphi = \psi\gamma_{rs}$. Podemos suponer que γ_{rs} repite al menos un lugar y por lo tanto φ repite al menos un lugar. Entonces, o bien existe $1 \leq i \leq r-1$ tal que $\varphi(i) = \varphi(i+1)$ y $\varphi(i) \neq \varphi(i-1)$, o bien existe $1 \leq j \leq r-1$ tal que $\varphi(j-1) = \varphi(j)$ y $\varphi(j) \neq \varphi(j+1)$. Sea $v_i = \varphi(i)$. Entonces

$$\varphi = (v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_i, v_{i+1}, \dots, v_r)$$

Pero es claro que, en el primer caso, el morfismo

$$\varphi' = (v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_r)$$

es homotópico a φ y es distinto de φ.
Análogamente, en el segundo caso, el morfismo

$$\varphi'' = (v_0, v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, v_{j+1}, \dots, v_r)$$

es homotópico a φ y es distinto de φ.
Se llega así a una contradicción y el lema queda probado. □

Proposición 3.1.5. *Sea* (K, v_0) *un complejo simplicial punteado de dimensión 1 , sea* $\varphi : (I_r, \{0, r\}) \to (K, v_0)$ *un morfismo simplicial. Si* φ *no contiene ninguna secuencia elemental entonces el único morfismo simplicial homotópico a* φ *con extremos fijos es el mismo* φ*.*

Demostración. Basta probar que, si $\varphi : (I_r, 0, r) \to (K, v_0)$ es un morfismo simplicial elementalmente homotópico a φ, entonces $\varphi' = \varphi$.
Supongamos que

$$H = \begin{bmatrix} \varphi(0) & \varphi(1) & \dots & \varphi(r) \\ \varphi'(0) & \varphi'(1) & \dots & \varphi'(r) \end{bmatrix}$$

es una homotopía y veamos que ambas filas son iguales.
Sea $v_i = \varphi(i)$ y $v'_i = \varphi'(i)$. Como φ no contiene ninguna secuencia elemental entonces $v_i \neq v_{i+1}$ para $0 \leq i \leq r-1$ y $v_{i-1} \neq v_{i+1}$ para $1 \leq i \leq r-1$.

$$H = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & \dots \\ v_0 & v'_1 & v'_2 & v'_3 & \dots \end{bmatrix}$$

En cada submatriz de 2×2 de H aparecen a lo sumo dos vértices de K. En particular esto vale para $\begin{bmatrix} v_0 & v_1 \\ v_0 & v'_1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{bmatrix}$. Como $v_0 \neq v_1$, $v_1 \neq v_2$ y $v_0 \neq v_2$ se deduce que $v'_1 = v_1$.
Repitiendo este razonamiento para las submatrices $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} v_2 & v_0 \\ v'_2 & v'_3 \end{bmatrix}$ se deduce que $v'_2 = v_2$.
Repitiendo este razonamiento hasta llegar a la última columna de H se concluye que $\varphi' = \varphi$. □

Combinando los dos resultados anteriores se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.1.6. *Si* (K, v_0) *es un complejo simplicial punteado de dimensión 1 y* $\varphi : (I_r, \{0, r\}) \to (K, v_0)$ *es un morfismo simplicial reducible entonces* φ *contiene al menos una secuencia elemental.*

En general, dos morfismos simpliciales $\varphi, \varphi' : I_r \to K$ que están en en la misma clase en $\Pi_1(K, v_0)$ no son necesariamente homotópicos. Sin embargo, veremos que si K tiene dimensión 1 y $\varphi_r : I_r \to K$ es tal que $[\varphi_r] = [e_r]$ entonces φ_r y e_r son morfismos homotópicos. Para probar esto necesitamos un lema previo.

Lema 3.1.7. *Sea* (K, v_0) *un complejo simplicial punteado de dimensión 1. Sea* $e_r : I_r \to K$ *el morfismo constante. Sea* $\varphi_r : I_r \to K$ *un morfismo simplicial con* $\varphi_r(0) = \varphi_r(r) = v_0$*. Entonces* φ_r *y* e_r *son homotópicos con extremos fijos si y sólo si existe* $\gamma_{r+1\,r}$ *tal que* $\varphi_r \gamma_{r+1\,r}$ *y* e_{r+1} *son homotópicos con extremos fijos.*

Demostración. Si $\varphi_r \sim e_r$ y $\gamma_{r+1\,r}$ es cualquier camino entonces

$$\varphi_r \gamma_{r+1\,r} \sim e_r \gamma_{r+1\,r} \sim e_{r+1}.$$

Reciprocamente, veamos que si $\varphi_r \gamma_{r+1\,r} \sim e_{r+1}$ entonces $\varphi_r \sim e_r$.

Sea $H : I_{r+1} \times I_s \to K$ una homotopía con extremos fijos entre $\varphi_r \gamma_{r+1\,r}$ y e_{r+1}. H se representa como una matriz de $s+1$ filas y $r+2$ columnas. Construiremos recursivamente una matriz G de $s+1$ filas y $r+1$ columnas eliminando, de cada fila de H, un elemento reducible de una secuencia elemental elegida de manera que G resulte una homotopía entre φ_r y e_r.

En la demostración de este lema notaremos H_k a la submatriz de H que consiste de las filas k y $k+1$ de H.

Sabemos que en la fila 1 de H hay una secuencia elemental de tipo $(v\ v)$ porque $\gamma_{r+1\,r}$ repite un lugar. Para construir la fila 1 de G eliminamos uno de los elementos de dicha secuencia.

Supongamos que ya fue construida la fila k de G eliminando un elemento reducible de una secuencia elemental.

Supongamos primero que de la fila k eliminamos v' de una secuencia elemental de tipo $(v\ v'\ v)$. Entonces

$$H_k = \begin{bmatrix} \dots & v & v' & v & \dots \\ \dots & x & y & z & \dots \end{bmatrix}.$$

Como $v' \neq v$ y H es simplicial entonces x, y, y z pueden ser iguales a v ó v'. Se tienen 8 secuencias posibles para $(x\ y\ z)$. En todas ellas y es un elemento reducible de una secuencia elemental.

La fila $k+1$ de G se construye eliminando y de la fila $k+1$ de H. Se tiene entonces

$$G_k = \begin{bmatrix} \dots & v & v & \dots \\ \dots & x & z & \dots \end{bmatrix}.$$

Una submatriz de G_k de 2×2 es, o bien una submatriz de H, o bien $\begin{bmatrix} v & v \\ x & z \end{bmatrix}$. Es claro que en ambos casos entre sus coeficientes hay a lo sumo dos vértices de K.

Supongamos ahora que el elemento eliminado en la fila k pertenecía a una secuencia elemental de tipo $(v\,v)$. Se tienen cuatro casos:

Caso 1 La secuencia $(v\,v)$ se encuentra entre dos vértices v' y v'' de K tales que $v' \neq v''$. Entonces

$$H_k = \begin{bmatrix} \dots & v' & v & v & v'' & \dots \\ \dots & x & y & z & w & \dots \end{bmatrix}.$$

Caso 2 A la derecha y a la izquierda de la secuencia $(v\,v)$ aparece el mismo vértice v' de K y $v' \neq v$. En este caso

$$H_k = \begin{bmatrix} \dots & v' & v & v & v' & \dots \\ \dots & x & y & z & w & \dots \end{bmatrix}.$$

Caso 3 A la derecha y a la izquierda de la secuencia $(v\,v)$ aparece nuevamente v. Entonces

$$H_k = \begin{bmatrix} \dots & v & v & v & v & \dots \\ \dots & x & y & z & w & \dots \end{bmatrix}.$$

Caso 4 La secuencia $(v\,v)$ está en un extremo de la fila k de H. Es decir, $H_k = \begin{bmatrix} v & v & v' & \dots \\ x & y & z & \dots \end{bmatrix}$ ó $H_k = \begin{bmatrix} \dots & v' & v & v \\ \dots & x & y & z \end{bmatrix}$.

Analizemos el caso 1.

Supongamos primero que $v' \neq v$ y $v'' \neq v$. Como H es simplicial, debe ser $x = v$ ó $x = v'$, $y = v$ ó $y = v'$, $z = v$ ó $z = v''$ y $w = v$ ó $w = v''$. Además, no puede ser simultaneamente $y = v'$ y $z = v''$. Es decir, debe ser $y = v$ ó $z = v$. Se tienen entonces 12 secuencias posibles para $(x\ y\ z\ w)$. Construímos la fila $k+1$ de G eliminando y si $y \neq v$ y z si $y = v$. En todos los casos se habrá eliminado un elemento reducible de una secuencia elemental. De esta manera,

$$G_k = \begin{bmatrix} \dots & v' & v & v'' & \dots \\ \dots & x & v & w & \dots \end{bmatrix}.$$

Cualquier submatriz de G_k es, o bien una submatriz de H, o bien una submatriz de

$$\begin{bmatrix} v' & v & v'' \\ x & v & w \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto toda submatriz de 2×2 de G_k es simplicial.

Si $v' = v$ puede ser $x = v$ ó $x = \overline{v}$ donde $\overline{v}$ es cualquier vértice de K tal que $\{v, \overline{v}\}$ es un simplex de K. Algo similar ocurre si $v'' = v$. En ambos casos se verifica, igual que antes, que $y = v$ ó $z = v$. La fila $k+1$ de G se construye nuevamente eliminando y si $y \neq v$ y z si $y = v$. En todos los casos se habrá eliminado un elemento reducible de una secuencia elemental y se verifica que toda submatriz de 2×2 de G_k es simplicial.
En el caso 2 la secuencia $(x\,y\,z\,w)$ puede ser cualquier secuencia formada con los vértices v y v'. Se tienen 16 secuencias posibles y se verifica que en todas ellas y y z son elementos reducibles de una secuencia elemental. La fila $k+1$ de G se construye eliminando indistintamente y ó z. Supongamos que eliminamos y, entonces

$$G_k = \begin{bmatrix} \dots & v' & v & v' & \dots \\ \dots & x & z & w & \dots \end{bmatrix}.$$

Es claro que cualquier submatriz de 2×2 de G_k es simplicial.
En el caso 3 puede suceder que en la secuencia $(x\,y\,z\,w)$ aparezcan 1,2, ó 3 vértices distintos de K. Si aparecen a lo sumo 2 vértices de K la fila $k+1$ de G se construye como en el caso 2 , eliminando indistintamente y ó z. Si, en cambio, aparecen 3 vértices distintos de K entonces, como en el caso 1 necesariamente es $y = v$ ó $z = v$. La fila $k+1$ de G se construye como en el caso 1, eliminando y, si $y \neq v$ y z si $y = v$. De la misma forma que en los casos 1 y 2 se verifica que el elemento eliminado es una elemento reducible de una secuencia elemental y que toda submatriz contenida en G_k es simplicial.
Finalmente, en el caso 4 observemos que, como H es una homotopía con extremos fijos entonces la secuencia $(x\,y\,z)$ consiste de a lo sumo 2 vértices de K. La fila $k+1$ de G se construye eliminando y de esta secuencia. Nuevamente se verifica que toda submatriz de 2×2 de G_k es simplicial y que y es un elemento reducible de una secuencia elemental.

De esta manera queda definida inductivamente una matriz G cuya primera fila es la $(r+1)$-upla correspondiente a φ_r y cuya última fila es la $(r+1)$-upla $(v_0 \dots v_0)$. Como cada submatriz de 2×2 de G es a su vez submatriz de G_k para algún k y se probó que, para todo $0 \leq k \leq s$, G_k es simplicial entonces queda demostrado que G es simplicial. Por lo tanto G es una homotopía entre φ_r y e_r.

□

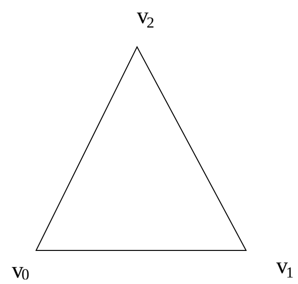
Corolario 3.1.8. *Sea K un complejo simplicial de dimensión 1, sea $v_0 \in K$. Sea $\varphi_r : I_r \to K$ un morfismo simplicial con $\varphi_r(0) = \varphi_r(r) = v_0$. Entonces φ_r y e_r son homotópicos con extremos fijos si y sólo si existe $s > r$ y $\gamma_{s\,r}$ tal que $\varphi_r\gamma_{s\,r}$ y e_s son homotópicos con extremos fijos.*

Demostración. Podemos suponer que $\gamma_{s\,r}$ es creciente por la proposición 2.2.10. Entonces por la proposición 2.1.9 se tiene $\varphi_r\gamma_{s\,r} = \varphi_r\gamma_{r+1\,r}\dots\gamma_{s\,s-1}$ y aplicando varias veces el lema anterior se tiene una implicación.
La otra implicación es inmediata. □

Corolario 3.1.9. *Sea K un complejo simplicial de dimensión 1, sea $v_0 \in K$. Sea $\varphi_r : I_r \to K$ un morfismo simplicial con $\varphi_r(0) = \varphi_r(r) = v_0$. Si $[\varphi_r] = [e_0]$ entonces φ_r es homotópico a e_r con extremos fijos.*

3.2 El grupo fundamental del borde del 2-simplex

Calculamos ahora el grupo fundamental de $\dot{s}$ con punto base v_0, donde $\dot{s}$ es el borde del 2-simplex.



Llamamos g al morfismo simplicial de I_3 en $\dot{s}$ dado por $g = (v_0\ v_1\ v_2\ v_0)$. Recordemos que $g^k = g * g * \dots * g = (v_0\ v_1\ v_2\ v_0\ v_1\ v_2\ v_0\ \dots\ v_0\ v_1\ v_2\ v_0)$. Notar que g^k no contiene secuencias elementales y por lo tanto no es reducible.

Proposición 3.2.1. *Dado un morfismo simplicial $\varphi_r : (I_r, \{0, r\}) \to (\dot{s}, v_0)$ existe un único $k \in \mathbb{Z}$ tal que $[\varphi_r] = [g^k]$.*

Demostración. Sea M el siguiente subconjunto de $\mathbb{N}_0$.

$$M = \{j \in \mathbb{N}_0 / \exists \varphi_j : (I_j, \{0, j\}) \to (K, v_0) / [\varphi_j] = [\varphi_r]\}$$

Observar que $M \neq \emptyset$ pues $r \in M$. Sea $m = \min M$. Existe entonces un morfismo simplicial $\varphi_m : (I_m, \{0, m\}) \to (K, v_0)$ que verifica $[\varphi_m] = [\varphi_r]$. Como m es mínimo, entonces φ_m no es reducible. Por lo tanto, φ_m no puede contener ninguna secuencia elemental. Se probará la siguiente afirmación: si $\varphi_m(1) = v_1$ entonces $\varphi_m = g^{m/3}$ y, si $\varphi_m(1) = v_2$ entonces $\varphi_m = g^{-m/3}$.
Supongamos que $\varphi_m(1) = v_1$. Como φ_m no contiene ninguna secuencia elemental entonces no puede ser $\varphi_m(2) = v_1$ y no puede ser $\varphi_m(2) = v_0$. Entonces debe ser $\varphi_m(2) = v_2$. Por la misma razón debe ser $\varphi_m(3) = v_0$.
De la misma manera se prueba que, si $\varphi_m(3(k-1)) = v_0$, $\varphi_m(3(k-1)+1) = v_1$ y $\varphi_m(3(k-1)+2) = v_2$, entonces $\varphi_m(3k) = v_0$, $\varphi_m(3k+1) = v_1$ y $\varphi_m(3k+2) = v_2$.
Por último observamos que, como $\varphi_m(m) = v_0$, entonces $m = 3k$ y $\varphi_m = g^k$.
Probemos ahora la unicidad de k; es decir que, si $[g^k] = [g^l]$ entonces $k = l$. Observar que, como $\Pi_1(\dot{s}, v_0)$ es un grupo, basta probar que, si $[g^k] = [e_{3k}]$, entonces $k = 0$.
Si $[g^k] = [e_{3k}]$, entonces, por el corolario 3.1.9, $g^k \sim e_{3k}$ y de la proposición 3.1.5 se deduce que $e_{3k} = g^k$. Claramente esta igualdad sólo es cierta para $k = 0$.

□

Para cada morfismo simplicial $\varphi_r : (I_r, \{0, r\}) \to (\dot{s}, v_0)$ llamamos el grado de φ_r y notamos $\operatorname{gr} \varphi_r$ al único número entero k que verifica $[\varphi_r] = [g^k]$.

Teorema 3.2.2. *Sea $\dot{s}$ el borde del 2-simplex y v_0 un vértice de s. Entonces $\Pi_1(\dot{s}, v_0) = Z$.*

Demostración. Se tiene una aplicación

$$\Phi : \Pi_1(\dot{s}, v_0) \to \mathbb{Z}$$

bien definida por

$$\Phi([\varphi_r]) = \operatorname{gr} \varphi_r.$$

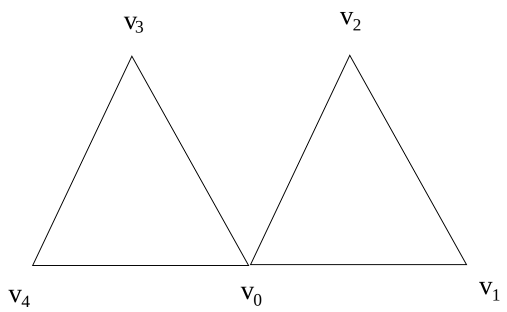
Φ es un morfismo de grupos pues, si $\operatorname{gr} \varphi = k$ y $\operatorname{gr} \varphi' = l$, entonces

$$[\varphi * \varphi'] = [\varphi] * [\varphi'] = [g]^k * [g]^l = [g]^{k+l}$$

Esto implica que $\operatorname{gr}(\varphi * \varphi') = \operatorname{gr} \varphi + \operatorname{gr} \varphi'$.
Φ es biyectiva pues para todo $k \in \mathbb{Z}$ el morfismo simplicial g^k verifica $\Phi([g^k]) = k$ y si $\operatorname{gr} \varphi = \operatorname{gr} \varphi' = k$ entonces $[\varphi] = [g^k] = [\varphi']$ □

3.3 El grupo fundamental de la unión de esferas

Sea K el siguiente complejo simplicial.



Notar que $\dim K = 1$ y $|K|$ es la figura 8.
Llamamos g_1 y g_2 a los morfismos simpliciales de I_3 en K definidos respectivamente por las 4-uplas $(v_0\, v_1\, v_2\, v_0)$ y $(v_0\, v_3\, v_4\, v_0)$.

Proposición 3.3.1. *Dado un morfismo simplicial* $\varphi_r : (I_r, \{0, r\}) \to (K, v_0)$ *existen únicos* i_1, $j_s \in \mathbb{Z}$, i_2, i_3, $\ldots$, i_s, j_1, j_2, $\ldots$, $j_{s-1} \in \mathbb{Z} - \{0\}$ *tales que*

$$[\varphi_r] = [g_1^{i_1} * g_2^{j_1} * g_1^{i_2} * \ldots * g_1^{i_s} * g_2^{i_s}].$$

Demostración. Sea

$$M = \{j \in \mathbb{N}_0 / \exists \varphi_j : (I_j, \{0, j\}) \to (K, v_0) \text{ con } [\varphi_j] = [\varphi_r]\}$$

y sea $m = \min M$.
Observar que $M \neq \emptyset$ pues $\varphi_r \in M$. Sea $\varphi_m : (I_m, \{0, m\}) \to (K, v_0)$ tal que $[\varphi_m] = [\varphi_r]$. Observar que φ_m no es reducible y por lo tanto φ_m no contiene ninguna secuencia elemental.
Probaremos por inducción que para todo $0 \leq n < m$ múltiplo de 3

$$(\varphi_m(n)\, \varphi_m(n+1)\, \varphi_m(n+2)\, \varphi_m(n+3)) = g_a^b \tag{3.2}$$

con $a = 1$ ó 2 y $b = 1$ ó -1.
Consideremos primero el caso $n = 0$. Supongamos que $\varphi_m(1) = v_i$, $\varphi_m(2) = v_j$ y $\varphi_m(3) = v_p$. Como φ_m no contiene ninguna secuencia elemental y $\varphi_m(0) = v_0$ por hipótesis, entonces v_0, v_i y v_j deben ser 3 vértices distintos de K. Como φ_m es simplicial, $\{v_i, v_j\}$ es un simplex de K y por lo tanto $\{v_i, v_j\}$ es igual a $\{v_1, v_2\}$ o a $\{v_3, v_4\}$. Observemos ahora que $\{v_j, v_p\}$ es un simplex de K y $v_p \neq v_j$ y $v_p \neq v_i$. Esto implica que $v_p = v_0$ y queda probado 3.2 para $n = 0$.
Sea ahora $3 \leq n < m$; por hipótesis inductiva tenemos

$$(\varphi_m(n-3)\, \varphi_m(n-2)\, \varphi_m(n-1)\, \varphi_m(n)) = g_c^d = (v_0\, v_s\, v_l\, v_0).$$

Es decir que φ_m se puede representar como una $(m+1)$-upla de la forma

$$(v_0\, \ldots\, v_0\, v_s\, v_l\, v_0\, v_i\, v_j\, v_p\, \ldots\, v_0).$$

En particular $\{v_s, v_l\}$ es un simplex de K. Como φ_m no contiene ninguna secuencia elemental entonces $v_i \neq v_0$, $v_i \neq v_l$, $v_j \neq v_0$, $v_j \neq v_i$, $v_p \neq v_i$ y $v_p \neq v_j$. Como φ_m es simplicial $\{v_i, v_j\}$ y $\{v_j, v_p\}$ son símplices de K. Esto implica que $v_p = v_0$ y que

$$(\varphi_m(n)\, \varphi_m(n+1)\, \varphi_m(n+2)\, \varphi_m(n+3)) = (v_0\, v_i\, v_j\, v_0) = g_a^b.$$

Por último, observar que, como $v_i \neq v_l$ entonces, si $c = a$ debe ser $b \neq -d$. Esto quiere decir que φ_m es un producto de morfismos g_a^b en el cual g_1 y g_2 aparecen alternados. Es decir

$$\varphi_m = g_1^{i_1} * g_2^{j_1} * g_1^{i_2} * \ldots * g_1^{i_s} * g_2^{i_s}$$

como queríamos demostrar.
Para probar la unicidad basta observar que un morfismo de la forma

$$g_1^{i_1} * g_2^{j_1} * g_1^{i_2} * \ldots * g_1^{i_s} * g_2^{i_s}$$

con i_1, $j_s \in \mathbb{Z}$, i_2, i_3, ..., i_s, j_1, j_2, ..., $j_{s-1} \in \mathbb{Z} - \{0\}$ no contiene secuencias elementales y luego aplicar la proposición 3.1.5.

$\square$

Corolario 3.3.2. $\Pi_1(K, v_0)$ *es el grupo libre generado por* g_1 *y* g_2*.*

Recordemos que la figura 8 es la unión en un punto de dos copias de S^1, que se nota $S^1 \vee S^1$.
En realidad, este resultado se puede generalizar fácilmente para la unión en un punto de una cantidad arbitraria de copias de S^1.
Es sabido que

$$\Pi_1(\vee_{\alpha\in\Lambda} S^1, [x_0]) = *_{\alpha\in\Lambda}\mathbb{Z},$$

donde $*_{\alpha\in\Lambda}\mathbb{Z}$ denota el producto libre de tantas copias de $\mathbb{Z}$ como copias de S^1 tengamos ([Hat]).
Para demostrar este resultado con nuestros métodos, sólo basta probar la siguiente proposición, análoga a la proposición 3.3.1.
Tomando K un complejo simplicial que triangula a $\vee_{\alpha\in\Lambda} S^1$ (podemos tomar, por ejemplo, la unión en un punto de varias copias de $\dot{s}$) se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 3.3.3. *Dado un morfismo simplicial* $\varphi_r : (I_r, \{0, r\}) \to (K, v_0)$ *existen únicos* i_1*,* i_2*,* i_3*, ...,* $i_n \in \mathbb{Z} - \{0\}$*,* α_1*,* α_2*, ...,* $\alpha_n \in \Lambda$*, con* $\alpha_i \neq \alpha_j$ *tales que* $[\varphi_r] = [g_{\alpha_1}^{i_1} * \ldots * g_{\alpha_n}^{i_n}]$*.*

De esta proposición se deduce inmediatamente el resultado deseado, siguiendo los pasos descriptos arriba.

Bibliografía

[Ale] P.S. Alexandroff. *Zur Begruendung der n-dimensionalen Topologie*. Math. Ann. 94 (1925) 296–308.

[Bau] H.J.Baues. *Algebraic Homotopy*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 15. Cambridge University Press (1989)

[Hat] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press (2002).

[Min1] G.Minian. *Generalized cofibration categories and global actions*. K-Theory 20 (2000), 37–95.

[Min2] G.Minian *Notas de topología algebraica*. Notas del II Encuentro Nacional de Álgebra (Vaquerías, Córdoba). Publicación de la FAMAF, Univarsidad Nacional de Córdoba(2004).

[Spa] E.Spanier. *Algebraic Topology*. Springer (1966).