

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Tesis de Licenciatura

# **Espacios Topológicos Finitos**

Jonathan Ariel Barmak  
Director: Gabriel Minian

Febrero de 2006

# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Espacios finitos y preórdenes</b>   | <b>6</b>  |
| 1.1. Introducción al problema de enumeración . . . . .                                  | 6         |
| 1.2. Bases minimales y la correspondencia . . . . .                                     | 8         |
| 1.3. Axiomas de separación débiles . . . . .  | 11        |
| 1.4. Funciones continuas . . . . .  | 15        |
| 1.5. Clasificación por homeomorfismo . . . . .  | 17        |
| 1.6. Conexión y Arcoconexión . . . . .  | 20        |
| 1.7. Digrafos y espacios $T_0$ . . . . .  | 21        |
| 1.8. Dimensión binaria . . . . .  | 22        |
| 1.9. Familias finales y familias irreducibles . . . . .                                 | 30        |
| <b>2. Homotopías en espacios finitos</b>  | <b>35</b> |
| 2.1. Espacios de funciones . . . . .  | 35        |
| 2.2. Clasificación por tipo de homotopía: la maravillosa idea de Stong . . . . .        | 38        |
| 2.3. Sucesiones graduales . . . . .   | 45        |
| 2.4. Un poco más sobre dimensión binaria . . . . .                                      | 48        |
| <b>3. Complejos simpliciales y espacios finitos</b>                                     | <b>50</b> |
| 3.1. Introducción básica a los complejos simpliciales y equivalencias débiles . . . . . | 50        |
| 3.2. Complejos simpliciales asociados a espacios finitos . . . . .                      | 54        |
| 3.3. Función de Möbius y característica de Euler . . . . .                              | 57        |
| 3.4. El grupo de paseos y el $\pi_1$ . . . . .  | 63        |
| <b>4. Modelos finitos minimales</b>   | <b>68</b> |
| 4.1. Funciones entre espacios finitos y espacios $T_1$ . . . . .                        | 68        |
| 4.2. Modelos finitos de las esferas . . . . .   | 70        |
| 4.3. Los teoremas de Hardie-Vermeulen y la pregunta de May . . . . .                    | 72        |
| 4.4. Modelos finitos minimales . . . . .  | 76        |

# Introducción

El objetivo principal de esta Tesis es el estudio detallado de los espacios topológicos finitos y sus invariantes más relevantes. Exponemos aquí los resultados más significativos del tema, desde su introducción en la década del 30 por Alexandroff [1] hasta los resultados más novedosos descubiertos en los últimos años [8, 11, 12, 13, 16] y desarrollamos nuevos métodos y herramientas, obteniendo resultados novedosos en relación a la clasificación de estos espacios y a su aplicación para el estudio de espacios topológicos en general.

Muchos de los resultados que aquí exponemos son originales y aparecerán en un trabajo [2], actualmente en preparación.

En un artículo de 1937 ([1]), Alexandroff ya había notado la correspondencia que existe entre espacios finitos y conjuntos preordenados. El tema parece haber quedado en las sombras hasta 1966, año en el cual surgieron dos de los artículos más importantes sobre este tema. Uno de esos papers es de R.E.Stong ([21]). En este trabajo, Stong exhibe una clasificación por tipo de homotopía particularmente original; además extiende el trabajo de Alexandroff y estudia a fondo la correspondencia entre espacios finitos y preórdenes. El otro artículo importante de ese año es de M.C.McCord ([14]). Este trabajo tiene un enfoque muy distinto al de Stong y se ocupa de asociarle a cada espacio finito  $X$  un complejo simplicial  $\mathcal{K}(X)$  y una equivalencia débil entre  $|\mathcal{K}(X)|$  y  $X$  (recordamos que una equivalencia débil es una función continua que induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía). Recíprocamente, a cada complejo simplicial  $K$  le asocia un espacio finito  $T_0$ , denotado  $\mathcal{X}(K)$ , y una equivalencia débil entre  $|K|$  y  $\mathcal{X}(K)$ . De esta manera prueba que los tipos homotópicos débiles de los espacios finitos coinciden con los de los poliedros compactos. Mediante estos resultados McCord encuentra *modelos finitos* para las esferas (espacios finitos débilmente equivalentes a las esferas).

En los últimos años ha surgido un renovado interés en el estudio de los espacios finitos, en gran medida debido a sus aplicaciones al procesamiento digital de imágenes. Sin embargo creemos que las aplicaciones matemáticas de esta teoría son aún más interesantes y ricas que las aplicaciones tecnológicas y es con ese enfoque que nosotros nos ocupamos aquí de este tema.

Destacamos de estos últimos años, los trabajos de T. Osaki [16] y especialmente la serie de tres artículos de J.P. May [11, 12, 13]. Osaki propone en [16] un *método de reducción* que permite, bajo cierta hipótesis, encontrar a partir de un espacio finito dado, otro espacio finito con menos puntos pero con el mismo tipo de homotopía débil (en particular, con los mismos grupos de homotopía) y deja como pregunta abierta (o conjetura) si su método es realmente efectivo en el siguiente sentido: dado un espacio finito, ¿es posible

llegar al mínimo espacio con los mismos grupos de homotopía que el original, aplicando sucesivamente el método de reducción?. Nosotros probamos aquí que ese método no es efectivo, exhibiendo como contraejemplo dos espacios finitos de 5 y 6 puntos, débilmente equivalentes a la figura 8 (unión en un punto de dos esferas unidimensionales) tales que el más grande de ellos no puede ser reducido por el método anterior.

Por otra parte, J.P. May formula en sus tres artículos algunas preguntas/conjeturas a las que les dimos especial importancia, logrando responder exitosamente algunas de ellas. Especialmente destacamos la solución a la conjetura de los modelos finitos minimales de las esferas: como es sabido, uno de los problemas abiertos más importantes de la topología algebraica es el de calcular completamente todos los grupos de homotopía de las esferas. En su trabajo de 1966, McCord había hallado modelos finitos de las esferas (espacios finitos que notaremos  $S^n D_2$  y que son débilmente equivalentes a  $S^n$ ), pero aún se desconocía si estos espacios, que tienen  $2n + 2$  puntos, eran los de mínimo cardinal con esa propiedad. May conjetura en [12] que esos espacios son los de mínimo cardinal. Nosotros probamos acá un resultado aún más fuerte que lo conjeturado por May: probamos por un lado que los  $S^n D_2$  son *modelos finitos minimales* (los modelos finitos de mínimo cardinal) de las esferas y probamos también que estos espacios son los únicos (salvo homeomorfismos) con esta propiedad.

Mucho se ha estudiado de espacios finitos desde el punto de vista combinatorio. No se conoce aún una fórmula cerrada ni recursiva que exprese la cantidad de topologías diferentes que se le puede asignar a un conjunto de  $n$  puntos. Existen algunas fórmulas que relacionan la cantidad de topologías  $T_0$  en determinado conjunto en función de las cantidades de topologías en general y viceversa. Se conocen también algunas cotas asintóticas y fórmulas que dependen de otros coeficientes igualmente desconocidos. Diremos algo sobre este problema de enumeración al principio del primer capítulo, pero no es este el enfoque que decidimos darle a nuestro trabajo. Como ya expresamos, estamos mucho más interesados en los aspectos topológicos, como los descriptos anteriormente.

Entre otras cosas estudiaremos las propiedades de las funciones continuas entre espacios finitos, propiedades de conexión y arcoconexión, axiomas de separación, homotopías, tipos homotópicos y grupos de homotopía y métodos efectivos para el cálculo de invariantes clásicos como el grupo fundamental y la característica de Euler.

Definimos también aquí el concepto de *dimensión binaria*, que es un invariante por homeomorfismo y analizamos varias de sus propiedades. Hemos descubierto más tarde que este concepto ya era conocido (se conoce en el contexto de los posets con el nombre de 2-dimensión) pero nuestro enfoque puramente topológico permite la obtención de nuevos resultados (como por ejemplo las cotas efectivas a la dimensión descriptas en los capítulos 1 y 2) que anteriormente se desconocían.

La Tesis está diagramada de la siguiente manera:

En el primer capítulo estudiaremos las nociones básicas sobre espacios finitos. Estudiaremos la correspondencia entre topologías y preórdenes y el comportamiento de las funciones continuas. Estudiaremos los axiomas de separación y mostraremos la clasificación por homeomorfismo de Stong por medio de matrices. También mostraremos como asociar a cada espacio finito  $T_0$  un digrafo que nos permitirá visualizar fácilmente la

topología. Finalizaremos el capítulo definiendo la dimensión binaria y probando algunas de sus propiedades básicas y daremos una clasificación original de clases de homeomorfismo de espacios finitos  $T_0$  por medio de familias *irreducibles* de funciones.

En el segundo capítulo estudiaremos los espacios de funciones entre espacios finitos y las ideas de Stong para clasificar los tipos de homotopía de espacios finitos por medio de espacios finitos minimales. Ampliamos esta teoría estudiando las homotopías por medio de sucesiones graduales y demostramos algunas propiedades más sobre la dimensión binaria que nos fueron sugeridas por la teoría de Stong.

En el tercer capítulo comenzaremos recordando algunas nociones básicas sobre complejos simpliciales y sobre equivalencias débiles, imprescindibles para comprender el trabajo de McCord. Mostraremos cuáles son los complejos asociados a cada espacio y las equivalencias débiles correspondientes. Relacionaremos la función de Möbius del preorden ampliado de un espacio finito con su característica de Euler y daremos una demostración fácil y original sobre la invariancia homotópica de este invariante. Finalmente describiremos al grupo fundamental de un espacio finito por medio del grupo de paseos y veremos cómo calcularlo gráficamente en algunos casos simples.

En el último capítulo demostraremos y ampliaremos algunos de los problemas y conjeturas propuestas por May y por Osaki (que hemos detallado anteriormente). Entre ellos, el problemas de los modelos finitos minimales de las esferas.

## Agradecimientos

A Gabriel Minian, director de esta tesis, por encontrar un tema a mi medida, por darme el empuje para lograr todo lo que hice en el último año, por estar siempre para cada uno de sus alumnos y por seguir transmitiéndome esa energía y gusto por la matemática.

A Màrtin el amigo, siempre dispuesto a escuchar y ayudar; el compañero, que te levanta hasta quedar a tu lado; el maestro, por mostrarme una porción de La matemática, que sólo él crea y modela a voluntad.

A Mig, por su constante amistad y compañía en los últimos seis años. Por sus incontables consejos, sus enseñanzas, por marcarme el camino que debía transitar. Gracias especialmente por toda la ayuda que me brindaste para que pudiera hacer este trabajo.

A Mor, mi vida. Gracias por creer en mí, por respetar e interesarte en mi trabajo, por ayudarme a seguir adelante. Por ser exáctamente como sos.

A Ann, por estar siempre a mi lado, por tus consejos, por confiar en mí.

A mi familia, mis padres y hermano. A mis amigos.

A Flora, Patricia y la OMA por despertar mi interés en la matemática. A ORT, por darme el lugar para hacerlo. A Matilde, mi entrenadora. A Nico Ojeda, por una ayuda de categoría. A Mati, por darme su punto de vista.

A Juan Sabia, Alicia Dickenstein y Carlos Sánchez, por su apoyo y recomendaciones en más de una ocasión. Al Instituto Weizmann, la ANCEF, la familia Mastronardi, la

Fundación Houssay.

A J.L. Romero, Cucu, Leandro Lombardi, Martín Szyld, Nico Botbol, Mariel Roseblatt, Ezequiel Martín, Daniel Perrucci, Analía Bergé, Ariel Lombardi, Leandro del Pezzo, Arturo, Sandra, Martín, Mirta, Lili, Graciela, Lemp y toda la gente que me olvido, que puso su grano de arena.

A los profesores, compañeros y alumnos que me dejaron algo.

A quienes creyeron en mí.

*Jonathan A. Barmak*

# Capítulo 1

## Espacios finitos y preórdenes

### 1.1. Introducción al problema de enumeración

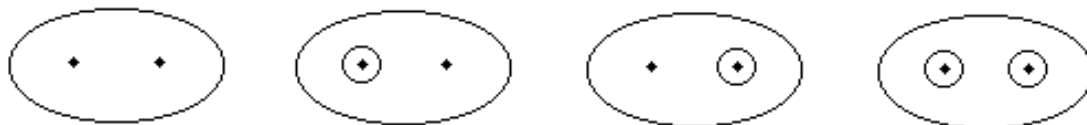
Cuando tratamos de describir a los espacios finitos, una primera pregunta podría ser: ¿Cuántos espacios hay con  $n$  puntos?. Pero esta pregunta es poco clara. ¿Nos interesa saber cuántas topologías diferentes puede tener un conjunto de  $n$  puntos, o cuántos espacios no homeomorfos de  $n$  puntos hay?. Ambas preguntas son difíciles de responder. No se conoce ninguna fórmula cerrada ni recursiva que dé una solución al problema.

No es este el enfoque que daremos a nuestro trabajo. Estaremos más interesados en los aspectos puramente topológicos de los espacios finitos. Sin embargo, no queremos dejar de mencionar lo que se sabe sobre el problema de enumeración.

Llamemos  $A_n$  a la cantidad de topologías que se le pueden dar a un conjunto de  $n$  puntos.

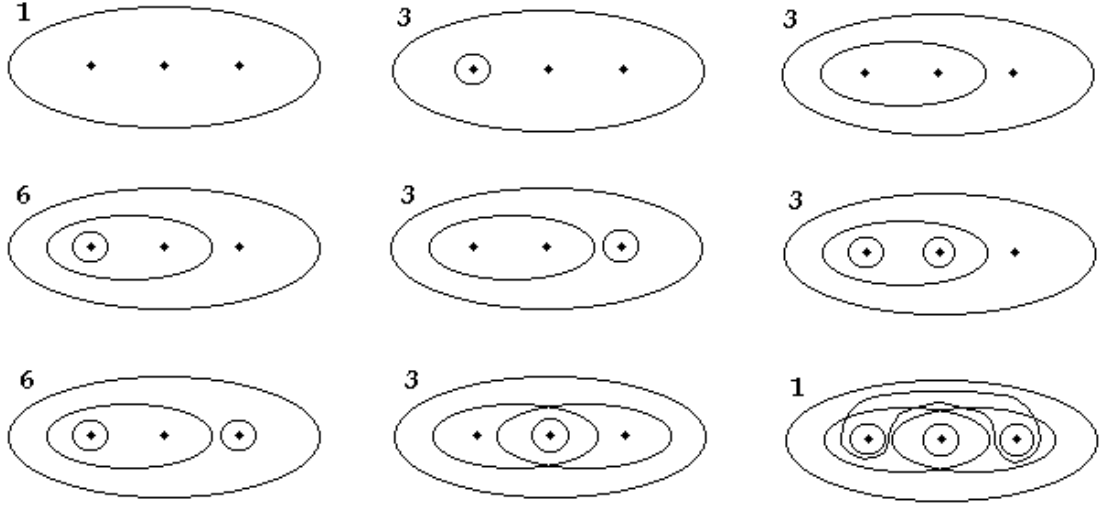
Tratemos de hallar los primeros valores de  $A_n$  y veremos que el problema no es sencillo.

Un conjunto de un sólo punto tiene una única topología posible. Un conjunto de dos puntos tiene cuatro topologías posibles. De esos cuatro espacios posibles, 3 son conexos y 3 son  $T_0$ .



Pero los dos espacios del medio son homeomorfos, luego existen sólo tres clases de homeomorfismo de espacios con dos puntos.

Un conjunto con tres puntos tiene 29 topologías posibles, pero sólo 9 clases de homeomorfismo. Graficamos las 9 clases de homeomorfismo indicando cuantos espacios hay en cada clase.



Notemos que, de estos 29 espacios, 19 son conexos y 19 son  $T_0$ . Sin embargo no es cierto que para todo conjunto  $X$  la cantidad de topologías en  $X$  que hacen de  $X$  un espacio conexo coincida con la cantidad de topologías en  $X$  que hacen de  $X$  un espacio  $T_0$ . En un conjunto de 4 elementos hay 233 topologías que hacen del conjunto un espacio conexo y 219 que hacen del conjunto un espacio  $T_0$  ([5], [4] [18]).

Aparentemente se está muy lejos de encontrar una solución a este problema. Uno de los últimos valores de  $A_n$  hallados, fue para  $n = 14$  ( $A_{14} = 115617051977054267807460$ , [5]). Se demostró que  $A_n$  se comporta asintóticamente como  $2^{n^2/4}$  ([10]).

Llamemos  $A_n^0$  a la cantidad de topologías  $T_0$  en un conjunto de  $n$  puntos. En la próxima sección demostraremos que este número coincide con la cantidad de órdenes que se le pueden dar a un conjunto de  $n$  elementos y  $A_n$  coincide con la cantidad de preórdenes.

Existe una relación entre los  $A_n$ 's y los  $A_k^0$ 's expresada por medio de los números de Stirling de segunda especie,

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$

$$A_n = \sum_{k=1}^n S(n, k) A_k^0.$$

Esta identidad se deduce del hecho de que el número  $S(n, k)$  es la cantidad de particiones de un conjunto de  $n$  elementos en  $k$  subconjuntos no vacíos y de que los preórdenes en un conjunto de  $n$  puntos están en biyección con los órdenes en las particiones del conjunto.

Sí se conocen fórmulas explícitas (y divertidas), pero poco aplicables, para  $A_n^0$ .

$$A_n^0 = \sum_{r=0}^{2^{n^2}-1} \prod_{i=0}^{n-1} b_{ni+i}^r \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} (1 - b_{ni+j}^r b_{nj+i}^r) \prod_{k=0}^{n-1} (1 - b_{ni+j}^r b_{nj+k}^r (1 - b_{ni+k}^r))$$



Donde  $b_i^r = [2^{-i}r] - 2[2^{-i-1}r]$  es el  $i$ -ésimo dígito en la escritura binaria de  $r$ . Los números  $0 \leq r < 2^{n^2} - 1$  representan todas las relaciones posibles en el conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ , de manera tal que  $i$  está relacionado con  $j$  si y sólo si  $b_{ni+j}^r = 1$ . En la expresión de arriba, la primera productoria da 1 si  $r$  es una relación reflexiva y 0 en otro caso. La segunda productoria es 1 si y sólo si  $r$  es antisimétrica y la tercera si y sólo si  $r$  es transitiva. De esta forma, la suma sobre todas las relaciones, da el total de relaciones de orden en el conjunto.

Otro interrogante que preocupa es el siguiente: ¿cuántos abiertos puede tener una topología  $T_0$  en un conjunto de  $n$  puntos?. Stanley ([20]) estudió este problema y da una respuesta parcial. Se demostró que el cardinal promedio de una topología  $T_0$  en un conjunto de  $n$  puntos,  $c_0 = \frac{1}{A_n^0} \sum |\tau|$ , se comporta asintóticamente como  $\frac{n}{2}$  ([4]).

De aquí en adelante, dejaremos de lado el problema de conteo y estudiaremos con más detalle las características topológicas de los espacios finitos.

## 1.2. Bases minimales y la correspondencia

Uno de los primeros matemáticos en estudiar a los espacios finitos fue Alexandroff ([1]). El en realidad estudió una clase más amplia de espacios topológicos que hoy día llamamos *A-espacios*.

**Definición 1.2.1.** Un *espacio de Alexandroff* o *A-espacio* es un espacio topológico con la propiedad adicional de que la intersección arbitraria de abiertos es abierto.

Notamos entonces que todo espacio finito es un *A-espacio*.

Una subclase de los *A-espacios* que contiene a los espacios finitos es la clase de los espacios topológicos localmente finitos (recordemos que un espacio es localmente finito si todo punto del espacio tiene un entorno finito). Esto ocurre porque si tenemos una familia arbitraria de abiertos  $\{U_i\}_{i \in I}$  en un espacio finito y  $x$  es un punto en la intersección,  $x \in \bigcap U_i$ , entonces, como  $x$  tiene un entorno  $U$  finito,  $x \in \bigcap U_i \cap U$  una intersección finita de abiertos y por lo tanto un entorno de  $x$  en  $\bigcap U_i$ .

Además las inclusiones entre la clase de espacios finitos, la clase de espacios localmente finitos y la clase de *A-espacios* son estrictas. Para probar que la primera de las inclusiones es estricta basta considerar un espacio infinito discreto y para la segunda considerar el espacio cuyo conjunto subyacente es  $\mathbb{Z}$  y que tiene como abiertos a los intervalos infinitos a derecha.

Este trabajo se ocupará principalmente de estudiar los espacios finitos, aunque muchas de las propiedades valen más generalmente para *A-espacios*.

*Notación 1.2.2.* De aquí en más notaremos con la sigla *etf* a los espacios topológicos finitos.

Un concepto de suma importancia es el de *base minimal* de un espacio finito.

**Definición 1.2.3.** Sea  $X$  un *etf*. Una *base minimal* de  $X$  es una base del espacio topológico que es minimal en el sentido de la inclusión.

**Proposición 1.2.4.** Sea  $X$  un espacio finito, entonces existe una única base minimal.

*Demostración.* Para cada  $x \in X$ , notamos  $U_x$  a la intersección de todos los abiertos que contienen a  $x$ . Es claro que estos conjuntos forman una base para la topología. Además si  $\mathcal{V}$  es otra base y  $x \in X$ , como  $U_x$  abierto, entonces existe  $V \in \mathcal{V}$  tal que  $x \in V \subseteq U_x$ , pero por definición de  $U_x$  resulta  $U_x \subseteq V$ , de donde  $U_x = V \in \mathcal{V}$ .  $\square$

**Definición 1.2.5.** Sea  $X$  un *etf* y sea  $x \in X$ . Al abierto  $U_x = \bigcap_{\substack{x \in V \\ V \text{ ab}}} V$  de la proposición

anterior, lo llamaremos *abierto minimal de  $x$* .

Sólo cuando resulte confuso, notaremos  $U_x^X$  al abierto minimal de  $x$ . Esta notación será necesaria en el caso en que  $x$  esté en dos espacios distintos.

*Observación 1.2.6.*  $x \in U_y$  si y sólo si  $y \in \overline{\{x\}}$

De la definición de base minimal, se deducen inmediatamente las siguientes dos proposiciones.

**Proposición 1.2.7.** Sea  $X$  un *etf* y sea  $Y \subseteq X$  un subespacio. Si  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  son las bases minimales de  $X$  e  $Y$  respectivamente, entonces  $\mathcal{V} = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{U}\}$ . Más específicamente, si  $y \in Y$ , entonces  $U_y^Y = U_y^X \cap Y$ .

**Proposición 1.2.8.** Sean  $X$  e  $Y$  *etf* con bases minimales  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$ , entonces valen las siguientes:

1. La base minimal de  $X \times Y$  es  $\{U \times V \mid U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$ . Más específicamente, si  $x \in X$ ,  $y \in Y$ , entonces  $U_{(x,y)} = U_x \times U_y$ .
2. La base minimal de  $X \amalg Y$  es  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ . Más específicamente, si  $x \in X$ , entonces  $U_x^{X \amalg Y} = U_x^X$  y si  $y \in Y$ , entonces  $U_y^{X \amalg Y} = U_y^Y$ .

Recordamos los axiomas de separación para espacios topológicos en general.

Un espacio topológico  $X$  se dice  $T_0$  si dados dos puntos cualesquiera en  $X$  existe un abierto que contiene a uno y no al otro. Un espacio se dice  $T_1$  si dados dos puntos cualesquiera existe un entorno de cada uno que no contiene al otro punto, o, equivalentemente, si los puntos son cerrados.

**Proposición 1.2.9.** Si  $X$  es un espacio finito  $T_1$ , entonces es discreto.

*Demostración.* Todo subconjunto de  $X$  es unión finita de puntos y, por lo tanto, cerrado.  $\square$

Si bien este resultado sugiere que los axiomas de separación de orden superior son innecesarios al trabajar con espacios finitos, volveremos sobre ellos más adelante.

Dado un conjunto  $X$ , un *preorden (parcial)* en  $X$  es una relación reflexiva y transitiva. Un *orden (parcial)* en  $X$  es un preorden que además es una relación antisimétrica y un poset es un conjunto con un orden.

En general notaremos con el símbolo  $\leq$  a los preórdenes. Notaremos además  $x < y$  si  $x \leq y$  y  $x \neq y$ .

Sólo cuando sea estrictamente necesario notaremos  $x \leq_X y$  para indicar sobre qué conjunto estamos considerando la relación  $\leq$ .

El resultado más importante de esta sección es, sin duda, la siguiente caracterización de los espacios finitos.

**Teorema 1.2.10.** *Dado un conjunto finito  $X$ , las topologías en  $X$  están en correspondencia biunívoca con los preórdenes en  $X$ . Además las topologías  $T_0$  corresponden a los órdenes.*

*Demostración.* Dada una topología en  $X$ , definimos el preorden asociado  $\leq$  de la siguiente manera:

$$x \leq y \text{ si } x \in U_y \text{ (o equivalentemente si } U_x \subseteq U_y).$$

Claramente  $\leq$  resulta transitiva y reflexiva.

Recíprocamente, si  $\leq$  es un preorden en  $X$ , definimos para cada  $x \in X$

$$U_x = \{y \in X \mid y \leq x\}.$$

Los subconjuntos  $U_x$  son base de una topología en  $X$  porque cubren  $X$  (ya que  $\leq$  es reflexiva) y si  $z \in U_x \cap U_y$ , entonces  $z \leq x$  y  $z \leq y$  y, por lo tanto, se tiene que  $z \in U_z \subseteq U_x \cap U_y$  (la pertenencia vale por la reflexividad de  $\leq$  y la inclusión por la transitividad).

Es claro que estas aplicaciones son mutuamente recíprocas.

Supongamos ahora que  $X$  es  $T_0$  y  $\leq$  es el preorden asociado. Si  $x \leq y$  e  $y \leq x$ , entonces  $U_x = U_y$ . Luego, todo abierto que contiene a  $x$ , contiene a  $U_x = U_y$  y, por lo tanto a  $y$ . Análogamente, todo abierto que contiene a  $y$ , contiene a  $x$ . Como  $X$  es  $T_0$ ,  $x$  e  $y$  resultan iguales. Esto es,  $\leq$  es antisimétrica, luego, un orden.

Finalmente, sea  $\leq$  un orden en  $X$  y sean  $x, y \in X$ . Supongamos que, para la topología asociada, se tiene que cada abierto que contiene a  $x$  contiene también a  $y$  y viceversa. Entonces, en particular,  $y \in U_x$  y  $x \in U_y$ . Se tiene entonces que  $y \leq x$  y  $x \leq y$ , lo que implica que  $x = y$ . Por lo tanto,  $X$  es  $T_0$ , como queríamos ver.  $\square$

Notar que  $X$  es  $T_0$  si y sólo si se cumple lo siguiente:  $\forall x, y \in X, x \neq y \Leftrightarrow U_x \neq U_y$ .

*Observación 1.2.11.* Si  $X$  es un espacio finito y  $\leq$  es el orden asociado, entonces  $x \in \overline{\{y\}}$  sii  $y \leq x$ , por 1.2.6.

De aquí en más tendremos presente esta dualidad entre topologías y preórdenes en un conjunto finito. Cuando hablemos de un espacio finito  $X$ , estaremos refiriéndonos al mismo tiempo al conjunto preordenado  $(X, \leq)$  con el preorden asociado a la topología de  $X$ .

Si  $X$  e  $Y$  son espacios finitos, entonces  $X \times Y$  y  $X \amalg Y$  también lo son. Por lo tanto estos dos espacios van a tener también preórdenes asociados.

**Proposición 1.2.12.** *Sea  $X$  un etf y sea  $Y \subseteq X$  un subespacio. Entonces el preorden  $\leq_Y$  asociado a  $Y$  es la restricción del orden  $\leq_X$  asociado a  $X$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $y, y' \in Y$ , entonces por 1.2.7 vale  $y \leq_Y y'$  sii  $y \in U_{y'}^Y$  sii  $y \in U_{y'}^X \cap Y$  sii  $y \leq_X y'$ .  $\square$

**Proposición 1.2.13.** Sean  $X$  e  $Y$  etf.

1. Sean  $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ . Entonces  $(x, y) \leq (x', y')$  sii  $x \leq x'$  e  $y \leq y'$ .
2. Sean  $z, z' \in X \amalg Y$ . Si  $z \in X$  y  $z' \in Y$ , entonces son incomparables. El orden de  $X \amalg Y$  restringido a  $X$  coincide con el orden de  $X$  y el orden restringido a  $Y$  coincide con el orden de  $Y$ .

*Demostración.* 1. Por 1.2.8 tenemos que  $(x, y) \leq (x', y')$  sii  $(x, y) \in U_{(x', y')}$  sii  $(x, y) \in U_{x'} \times U_{y'}$  sii  $x \in U_{x'}$  e  $y \in U_{y'}$  sii  $x \leq x'$  e  $y \leq y'$ .

2. También por 1.2.8 vale que  $z \leq_{X \amalg Y} z'$  sii  $z \in U_{z'}^{X \amalg Y}$  sii  $z, z' \in X$  y  $z \in U_{z'}$  ó  $z, z' \in Y$  y  $z \in U_{z'}$  sii  $z, z' \in X$  y  $z \leq z'$  ó  $z, z' \in Y$  y  $z \leq z'$ .  $\square$

*Observación 1.2.14.* A diferencia de lo que ocurre con una topología en general, en los  $A$ -espacios, los abiertos y los cerrados cumplen las mismas propiedades. Es decir que si en un  $A$ -espacio cambiamos abiertos por cerrados, obtendremos una nueva estructura de  $A$ -espacio en el mismo conjunto.

**Definición 1.2.15.** Dado  $X = (X, \tau)$  un espacio finito, definimos el *espacio opuesto*,  $X^{op} = (X, \tau^{op})$ , como el espacio topológico que tiene como abiertos a los cerrados de  $X$ .

*Observación 1.2.16.*  $(X^{op})^{op} = X$

Si  $\{U_x\}$  es la base minimal de  $X$ , entonces  $U_x = \overline{\{x\}}^{X^{op}}$ , ya que el miembro izquierdo es la intersección de todos los abiertos de  $X$  que contienen a  $x$  y el derecho la intersección de todos los cerrados de  $X^{op}$  que contienen a  $x$ .

**Proposición 1.2.17.** Si  $\leq$  es el preorden asociado a  $X$  y  $\leq_{op}$  el preorden asociado a  $X^{op}$ , entonces  $\leq_{op}$  coincide con  $\geq$  ( $x \leq_{op} y$  sii  $y \leq x$ ).

*Demostración.* Por 1.2.11 se tiene que  $x \leq_{op} y \Leftrightarrow y \in \overline{\{x\}}^{X^{op}} = U_x \Leftrightarrow y \leq x$ .  $\square$

El espacio  $X^{op}$  nos permitirá agilizar demostraciones y conseguir algunos ejemplos y contraejemplos.

### 1.3. Axiomas de separación débiles

Si bien los resultados de esta sección se pueden encontrar en su mayoría en [5], las demostraciones que presentamos acá son originales.

Notaremos con  $I$  al intervalo real cerrado  $[0, 1]$  con la topología usual.

Recordemos que un espacio topológico  $X$  se dice

- $T_2$  o Hausdorff si separa puntos, es decir que  $\forall x \neq y \in X, \exists U, V$  entornos disjuntos de  $x$  e  $y$  respectivamente.
- $T_3$  o regular si es  $T_1$  y separa puntos de cerrados, es decir que  $\forall x \in X, F \subseteq X$  cerrado, tales que  $x \notin F, \exists U, V$  entornos disjuntos de  $x$  y  $F$  respectivamente.
- $T_4$  o completamente regular si es  $T_1$  y separa puntos de cerrados con funciones continuas, es decir que  $\forall x \in X, F \subseteq X$  cerrado, tales que  $x \notin F, \exists f : X \rightarrow I$  continua tal que  $f(x) = 0$  y  $f(F) = \{1\}$ .
- $T_5$  o normal si es  $T_1$  y separa cerrados de cerrados.
- $T_{5'}$  o Completamente normal si cada subespacio de  $X$  es normal.

*Observación 1.3.1.* En un curso regular de Topología se estudia que las siguientes implicaciones son estrictas

$$T_{5'} \Rightarrow T_5 \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

Además es fácil ver que  $T_{5'}$  es equivalente a que sea  $T_1$  y separe *conjuntos separados*, es decir: si  $A, B \subseteq X, A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$ , entonces  $\exists U, V$  entornos disjuntos de  $A$  y  $B$  respectivamente.

Estos axiomas de separación no son muy útiles al trabajar con espacios finitos porque  $T_1$  ya equivale a que el espacio sea discreto. Veamos qué sucede si quitamos la hipótesis de que los espacios sean  $T_1$ .

**Definición 1.3.2.** Definimos  $WT_3, WT_4$  y  $WT_5$  de la misma manera que  $T_3, T_4$  y  $T_5$  respectivamente, pero sin la hipótesis de que los espacios sean  $T_1$ . Un espacio es  $WT_{5'}$  si separa conjuntos separados (sin pedir  $T_1$ ).

A diferencia de lo que uno podría llegar a creer, no valen las mismas implicaciones que con las definiciones originales. ¡De hecho, algunas valen al revés!

**Proposición 1.3.3.** *Para espacios finitos vale*

$$T_1 = T_2 \Rightarrow WT_3 = WT_4 \Rightarrow WT_{5'} \Rightarrow WT_5$$

Antes de probar esta proposición, veamos qué tipo de preorden tiene asociado cada axioma de separación. Eso permitirá demostrar fácilmente el resultado enunciado.

Primero unas definiciones básicas de relaciones y preórdenes.

**Definición 1.3.4.** Las *componentes* de una relación  $\mathcal{R}$ , son las clases de equivalencia de la clausura de  $\mathcal{R}$  (la intersección de todas las clases de equivalencia que contienen a  $\mathcal{R}$ ). En otras palabras,  $x$  e  $y$  están en la misma componente de  $\mathcal{R}$  si existe  $n \in \mathbb{N}$  y  $z_1, z_2, \dots, z_n$  tales que  $z_1 = x, z_n = y$  y  $z_i$  y  $z_{i+1}$  son comparables para todo  $1 \leq i \leq n - 1$ .

**Definición 1.3.5.** (1) Un preorden  $\mathcal{R}$  es *dirigido (hacia arriba)* si  $\forall x, y, \exists z$  tal que  $x\mathcal{R}z, y\mathcal{R}z$ .

(2) Un preorden  $\mathcal{R}$  es un *bosque* si  $\forall x, y$  incomparables,  $\nexists z$  tal que  $z\mathcal{R}x, z\mathcal{R}y$ .

(3) Un *árbol* es una bosque con una única componente.

**Lema 1.3.6.** *La restricción de la identificación entre espacios finitos y preórdenes identificados*

- (i)  $T_0 \leftrightarrow \text{orden}$ .
- (ii)  $T_1 = T_2 = \text{espacio discreto} \leftrightarrow \text{relación identidad}$ .
- (iii)  $WT_3 = WT_4 \leftrightarrow \text{relación de equivalencia}$ .
- (iv)  $WT_5 \leftrightarrow \text{preorden dirigido por componente}$ .
- (v)  $WT_{5'} \leftrightarrow \text{bosque}$ .

*Demostración.* (i) Ya lo vimos.

- (ii)  $X$  es discreto sii  $U_x = \{x\} \forall x \in X$  sii  $y \leq x$  implica  $y = x$  sii  $\leq$  es la identidad.
- (iii) La implicación  $WT_4 \Rightarrow WT_3$  sale igual que  $T_4 \Rightarrow T_3$ .

Para probar que un espacio  $WT_3$  es una relación de equivalencia sólo falta ver la simetría. Supongamos que  $x \leq y$ . Si  $y \not\leq x$ , entonces  $x \notin \overline{\{y\}}$ , luego, existen  $U$  y  $V$  abiertos disjuntos tales que  $x \in U$ ,  $\overline{\{y\}} \subseteq V$ , pero  $x \in U_y \subseteq V$ . Esto es absurdo pues  $U$  y  $V$  eran disjuntos.

Si  $X$  es relación de equivalencia, queremos ver que entonces es  $WT_4$ . Supongamos que  $F$  es cerrado y que  $x \notin F$ , entonces definimos  $f : X \rightarrow I$

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in [x], \text{ la clase de } x \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La preimagen de un subconjunto de  $I$  es una unión de clases de equivalencia de  $X$  ( $f^{-1}(0) = [x]$ ,  $f^{-1}(1)$  es el complemento  $[x]$  que es la unión de las otras clases). Pero las clases son abiertas ya que si  $y \in C$ , una clase, entonces  $U_y \subseteq C$ . Luego  $f$  es continua.

Además  $f(x) = 0$  y  $f(F) = \{1\}$ . En caso contrario existiría  $y \in F \cap [x]$ , entonces  $y \leq x$  y, por lo tanto  $x \in \overline{\{y\}} \subseteq F$ , que es absurdo.

Así tenemos  $WT_4 \Leftrightarrow WT_3 \Leftrightarrow \text{relación de equivalencia}$ .

- (iv) Supongamos que  $X$  es  $WT_5$  y  $x \in X$ . Definimos  $A = \{y \in X \mid \exists z, x \leq z, y \leq z\}$ . Para demostrar que  $X$  es un preorden dirigido por componente, queremos ver que  $A$  coincide con toda la componente de  $x$ . Para esto alcanza ver que, si  $y \in A$ , entonces (a)  $y' \leq y$  implica  $y' \in A$  y (b)  $y \leq y'$  implica  $y' \in A$ .

(a) Trivial.

(b) Sea  $y \in A$ , entonces  $\exists z, x \leq z, y \leq z$ . Supongamos  $\nexists z'$  tal que  $z \leq z', y' \leq z'$ , entonces  $\overline{\{z\}}$  y  $\overline{\{y'\}}$  son cerrados disjuntos (por 1.2.11). Luego existen abiertos que los separan, pero esto es absurdo, pues un abierto que contiene a  $z$ , contiene también a  $y \leq z$ , y un abierto que contiene  $y'$ , contiene también a  $y \leq y'$  (es decir que los abiertos que separan no son disjuntos).

Por lo tanto sí existe  $z'$  como arriba. Finalmente  $x \leq z \leq z', y' \leq z'$  y, por lo tanto  $y' \in A$ , como queríamos demostrar.

Para ver la recíproca supongamos que  $F, F'$  son dos cerrados disjuntos en  $X$ . Entonces están en uniones de componentes distintas dos a dos, pues si  $x \in F$  y  $x' \in F'$  están en la misma componente, como  $\leq$  es dirigido,  $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y'\}} \neq \emptyset$  por 1.2.11, luego  $F \cap F' \neq \emptyset$ , que es una contradicción. Como las componentes son abiertas, existen abiertos que separan a los dos cerrados.

(v) Sea  $X$  un *etf*  $WT_{5'}$  y sean  $x$  e  $y$  incomparables, entonces  $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \emptyset$ , luego  $\{x\}$  y  $\{y\}$  están separados y entonces  $\exists U$  y  $V$  abiertos que los separan. Pero entonces  $U_x \subseteq U$  y  $U_y \subseteq V$  son disjuntos, luego  $\nexists z$  tal que  $z \leq x, z \leq y$ . Esto prueba que  $X$  es un bosque.

Veamos la recóproca. Sean  $A$  y  $B$  separados. Definimos  $U = \bigcup_{x \in A} U_x, V = \bigcup_{y \in B} U_y$ . Pero si  $x \in A, y \in B$ , entonces  $\{x\}$  y  $\{y\}$  están separados, luego  $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \{x\} \cap \overline{\{y\}} = \emptyset$ . Esto quiere decir que  $x \not\leq y$  e  $y \not\leq x$ , o sea  $x$  e  $y$  son incomparables y, como  $X$  es bosque, resulta  $U_x \cap U_y = \emptyset$ . Luego  $U$  y  $V$  separan a  $A$  y  $B$ . □

*Demostración.* 1.3.3 La relación identidad es de equivalencia, luego  $T_1 \Rightarrow WT_3$ .

Una relación de equivalencia es un bosque, luego  $WT_3 \Rightarrow WT_{5'}$ .

Dos cerrados disjuntos son conjuntos separados, luego  $WT_{5'} \Rightarrow WT_5$ . □

**Corolario 1.3.7.** *Si  $X$  es  $WT_3$  entonces es unión disjunta de espacios indiscretos.*

*Demostración.* Como  $(X, \tau)$  es  $WT_3$  entonces es una relación de equivalencia. Sean  $C_1, \dots, C_n$  las clases de equivalencia. Consideramos  $(X, \tau') = \coprod_{1 \leq i \leq n} C_i$ . El preorden asociado a  $(X, \tau')$  es el mismo que el asociado a  $(X, \tau)$ , luego ambas topologías coinciden. Resta ver que las clases de equivalencia son indiscretas. Pero esto vale pues si  $x \in C_i$ , entonces  $U_x = C_i$ . □

Si un espacio indiscreto (no vacío) es  $T_0$ , entonces consta de un sólo punto. Luego obtenemos

**Corolario 1.3.8.**  $T_0 + WT_3 = \text{discreto}$ .

No es cierto que todo espacio  $T_0 + WT_{5'}$  sea discreto, como es el caso de  $\mathfrak{S}$ , el espacio de Sierpinski, cuyo conjunto subyacente es  $\{0, 1\}$  y cuyo único abierto propio es  $\{0\}$ .

Después de todo el trabajo que llevó el lema 1.3.6, curiosamente llegamos al siguiente resultado sobre preórdenes cuya demostración fue topológica (el último renglón de la demostración de 1.3.3).

**Corolario 1.3.9.** *Bosque implica preorden dirigido por componente.*

*Observación 1.3.10.* Es fácil ver que no valen las recíprocas de las implicaciones de la proposición.

Si bien las definiciones de los axiomas de separación débiles pueden usarse para espacios topológicos no necesariamente finitos, la proposición no vale. Más específicamente:

1.  $T_1 \neq T_2$ .
2.  $T_2 \not\Rightarrow WT_3$  porque  $T_2 \Rightarrow T_1$ ,  $T_3 = T_1 + WT_3$  y  $T_2 \not\Rightarrow T_3$ .
3.  $WT_3 \not\Rightarrow WT_4$  pues  $T_3 \Rightarrow T_1$ ,  $T_4 = T_1 + WT_4$  y  $T_3 \not\Rightarrow T_4$ . Aunque sí vale la vuelta.
4.  $WT_4 \not\Rightarrow WT_{5'}$  pues  $T_4 \not\Rightarrow T_{5'}$ .
5. Sí vale  $WT_{5'} \Rightarrow WT_5$ .

## 1.4. Funciones continuas

El próximo paso será estudiar las funciones continuas entre espacios finitos viendo sus características como funciones entre dos conjuntos preordenados. Recordemos que si  $(X, \leq)$  e  $(Y, \leq)$  son dos preórdenes, un morfismo de orden entre  $X$  e  $Y$  es una función  $f : X \rightarrow Y$  tal que para todo  $x \leq x'$  se tiene  $f(x) \leq f(x')$ .

Todos los resultados de esta sección, exceptuando los primeros tres (1.4.1, 1.4.3, 1.4.4), son originales.

**Proposición 1.4.1.** *Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios finitos.  $f : X \rightarrow Y$  es continua si y sólo si es morfismo de orden.*

*Demostración.* Sean  $x \leq x'$ . Como  $U_{f(x')}$  es abierto y  $f$  es continua, entonces  $f^{-1}(U_{f(x')})$  es abierto. Pero  $x' \in f^{-1}(U_{f(x')})$ , luego  $U_{x'} \subseteq f^{-1}(U_{f(x')}) \Rightarrow x \in f^{-1}(U_{f(x')}) \Rightarrow f(x) \in U_{f(x')} \Rightarrow f(x) \leq f(x')$ .

Recíprocamente sea  $U \subseteq Y$  un abierto y sea  $x \in f^{-1}(U)$ . Si  $x' \leq x$ , entonces  $f(x') \leq f(x) \Rightarrow f(x') \in U_{f(x)} \subseteq U \Rightarrow x' \in f^{-1}(U)$ . Luego  $U_x$  es un entorno de  $x$  en  $f^{-1}(U)$ .  $\square$

*Observación 1.4.2.*  $f : X \rightarrow Y$  es continua sii  $f : X^{op} \rightarrow Y^{op}$  lo es.

**Corolario 1.4.3.** *La identificación entre espacios finitos y preórdenes finitos es un isomorfismo categórico.*

**Proposición 1.4.4.** *Sea  $X$  un espacio finito y  $f : X \rightarrow X$  una función continua. Si  $f$  es inyectiva o sobreyectiva, entonces es un homeomorfismo.*

*Demostración.* Como  $X$  finito, si  $f$  es inyectiva o sobreyectiva, entonces es biyectiva. Sea

$$F : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

es la función inducida por  $f$  sobre los subconjuntos de  $X$ . Notar que  $F$  resulta también biyectiva. Pero  $f$  es continua, entonces  $F^{-1}(\tau) \subseteq \tau$  ( $\tau$  la topología de  $X$ ). Como  $F^{-1} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  es inyectiva y  $\tau$  es un conjunto finito,  $F^{-1}|_{\tau} : \tau \rightarrow \tau$  biyectiva, luego  $F(\tau) \subseteq \tau$ , es decir que  $f$  es abierta y, por lo tanto resulta homeomorfismo.  $\square$



Recordemos algunas definiciones y propiedades de topología general. Dados dos espacios  $X, Y$  y una función  $f : X \rightarrow Y$ , decimos que  $f$  es *inicial* o que  $X$  tiene la *topología inicial respecto de  $f$* , si la topología de  $X$  es la menos fina que hace a  $f$  continua. Son equivalentes:

- (i)  $f$  es inicial
- (ii)  $\{f^{-1}(U) \mid U \text{ abierto de } Y\}$  es subbase de la topología de  $X$
- (iii) Para todo espacio  $Z$  y toda función  $g : Z \rightarrow X$ ,  $g$  continua sii  $fg$  lo es.

Decimos que  $f$  es *subespacio* si es inyectiva e inicial.

Notar que  $f$  subespacio sii es homeomorfismo con la imagen.

Veamos ahora como se comporta una función inicial entre espacios finitos vista como morfismo de orden y qué podemos agregar a la equivalencia anterior.

**Proposición 1.4.5.** Sean  $X, Y$  et  $f$  e  $i : X \rightarrow Y$  una función. Son equivalentes:

- (i)  $i$  es inicial
- (ii)  $\forall x, x' \in X$  vale que  $x \leq x' \Leftrightarrow i(x) \leq i(x')$ .

*Demostración.* Supongamos que  $i$  es inicial, entonces es continua, y por lo tanto respeta el orden, es decir  $x \leq x' \Rightarrow i(x) \leq i(x')$ .

Como  $i$  es inicial, para  $x \in X$  vale que

$$U_x = \bigcap_{\substack{x \in i^{-1}(U) \\ U \text{ ab de } Y}} i^{-1}(U)$$

dado que  $\{i^{-1}(U) \mid U \subseteq Y \text{ abierto}\}$  es subbase de la topología de  $X$ .

Ahora supongamos que  $i(x) \leq i(x')$  para ciertos  $x, x' \in X$ . Queremos ver que  $x \leq x'$ . Pero si  $U$  es un abierto de  $Y$  y  $x' \in i^{-1}(U)$ , entonces  $i(x') \in U$  y, por lo tanto  $i(x) \in U$ . Así,  $x \in \bigcap_{\substack{x' \in i^{-1}(U) \\ U \text{ ab de } Y}} i^{-1}(U) = U_{x'}$ . Esto es,  $x \leq x'$ .

Supongamos ahora que  $i$  cumple (ii). Dados  $x, x' \in X$ ,  $x' \in U_x \Leftrightarrow x' \leq x \Leftrightarrow i(x') \leq i(x) \Leftrightarrow i(x') \in U_{i(x)} \Leftrightarrow x' \in i^{-1}(U_{i(x)})$ . Luego,  $U_x = i^{-1}(U_{i(x)})$ . Entonces la topología de  $X$  es menos fina que la inicial (los abiertos de la base de  $X$  son algunos de los de la subbase de la topología inicial), pero hace continua a  $i$ , entonces debe ser la inicial. □

La caracterización de recién de las funciones iniciales, resulta muy útil y cómoda y es usada repetidas veces en el resto del trabajo.

**Proposición 1.4.6.** Sean  $X$  e  $Y$  et  $f$  y sea  $i : X \rightarrow Y$  una función. Entonces son equivalentes:

- (i)  $i$  es inicial

(ii) Para todo etf  $Z$  y toda función  $f : Z \rightarrow X$ , vale que  $f$  continua sii  $f$  lo es.

Notar que la única diferencia con la proposición citada anteriormente es que basta verificarlo para espacios finitos.

*Demostración.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) vale en general. Veamos la recíproca. Sea  $\tau$  la topología de  $X$ . Si  $\tau'$  es otra topología en  $X$ , vale que  $i : (X, \tau') \rightarrow Y$  continua sii  $1_X : (X, \tau') \rightarrow (X, \tau)$  continua sii  $\tau \subseteq \tau'$ . Luego  $\tau$  es la topología más fina que hace a  $i$  continua, i.e.,  $i$  es inicial.  $\square$

**Corolario 1.4.7.** Sean  $X, Y$  etf tales que  $X$  es  $T_0$  y supongamos que  $i : X \rightarrow Y$  inicial. Entonces  $i$  resulta inyectiva y, por lo tanto, subsespacio.

*Demostración.* Si  $ix = ix'$ , entonces  $ix \leq ix'$  e  $ix' \leq ix$ , luego, por la proposición anterior,  $x \leq x'$  y  $x' \leq x$ . Como  $X$  es  $T_0$ , resulta que  $x = x'$ .  $\square$

*Observación 1.4.8.* En realidad este resultado vale también cuando  $X$  e  $Y$  no son finitos ya que si  $U$  es un abierto de  $Y$  y  $x, x' \in X$  son tales que  $ix = ix'$ , entonces  $i^{-1}(U)$  contiene a  $x$  y a  $x'$  a la vez o no contiene a ninguno. Luego, los abiertos de la subbase de  $X$  no separan a  $x$  y a  $x'$ , y como  $X$  es  $T_0$ , se tiene que  $x = x'$ .

**Proposición 1.4.9.** Sea  $q : X \rightarrow Y$  una función cociente y abierta entre espacios finitos y sea  $x \in X$ , entonces  $U_{qx} = q(U_x)$ .

*Demostración.* Como  $qx \in q(U_x)$ , que es abierto, entonces  $U_{qx} \subseteq q(U_x)$ . Como  $x \in q^{-1}U_{qx}$ , que es abierto, entonces  $U_x \subseteq q^{-1}U_{qx}$  y por lo tanto  $q(U_x) \subseteq U_{qx}$ .  $\square$

## 1.5. Clasificación por homeomorfismo

En esta sección ampliamos la demostración de un teorema de Stong ([21]) sobre la clasificación por homeomorfismo de espacios finitos por medio de matrices cuadradas.

**Lema 1.5.1.** Sea  $X$  un conjunto finito y sea  $\mathcal{V}$  una colección de subconjuntos no vacíos de  $X$ . Entonces  $\mathcal{V}$  es base minimal para una topología en  $X$  si y sólo si valen las siguientes afirmaciones:

(i) Los elementos de  $\mathcal{V}$  cubren  $X$ .

(ii) Dados  $U, V \in \mathcal{V}$  y  $x \in U \cap V$ , existe  $W \in \mathcal{V}$  tal que  $x \in W \subseteq U \cap V$ .

(iii) Si  $\bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{V}$  para ciertos  $V_i \in \mathcal{V}$ , entonces  $\exists j \in I$  tal que  $\bigcup_{i \in I} V_i = V_j$ .

*Demostración.* La base minimal de una topología cumple (i) y (ii) por ser base y si  $\bigcup_{i \in I} U_{x_i} = U_x$ , entonces  $\exists i \in I$  tal que  $x \in U_{x_i}$ , luego  $U_x \subseteq U_{x_i}$  y entonces debe valer  $U_x = U_{x_i}$ .

Que  $\mathcal{V}$  cumpla (i) y (ii) quiere decir que  $\mathcal{V}$  es base de una topología en  $X$ . Un elemento  $V$  de  $\mathcal{V}$  es abierto no vacío y, por lo tanto, unión no vacía de abiertos minimales, por (iii)  $V$  coincide con uno de ellos. Es decir que  $\mathcal{V}$  está contenida en la base minimal, luego coincide con esta.  $\square$

**Definición 1.5.2.** Sea  $M$  el conjunto de las matrices cuadradas  $(a_{ij})$  tales que:

1.  $a_{ii} \in \mathbb{N} \forall i$ .
2.  $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\} \forall i \neq j$ .
3.  $a_{ij} = -a_{ji} \forall i \neq j$ .
4.  $a_{ij} = 0$  si existe una sucesión  $i_1, i_2, \dots, i_n$  tal que  $i_1 = i$ ,  $i_n = j$  y  $a_{i_k i_{k+1}} = 1 \forall 1 \leq k < n$ .

Sea  $\mathcal{M}$  el cociente de  $M$  por la relación de equivalencia  $A \equiv B$  si tienen el mismo tamaño y existe una matriz de permutación  $P$  tal que  $PAP^{-1} = B$ .

**Teorema 1.5.3** (Clasificación de Espacios Finitos por Homeomorfismo). *Las clases de homeomorfismo de espacios finitos están en correspondencia biunívoca con  $\mathcal{M}$ .*

*Demostración.* A la clase de homeomorfismo de un espacio finito  $X$  con base minimal  $\{V_1, \dots, V_n\}$  le asociamos la clase de una matriz  $A = (a_{ij})$  de  $n \times n$  tal que:

$$\begin{cases} a_{ii} \text{ es la cantidad de } x \in X \text{ tales que } U_x = V_i. \\ a_{ij} = -a_{ji} = 1 \text{ si } V_i \subsetneq V_j \text{ y no existe } k \text{ tal que } V_i \subsetneq V_k \subsetneq V_j. \\ a_{ij} = 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

1. La aplicación está bien definida:

- Claramente  $A \in M$ .
- Una reordenación de la base minimal tiene asociada una permutación de  $A$ .
- Si  $f : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo, entonces la base minimal de  $Y$  es  $\{f(V_1), \dots, f(V_n)\}$ ,  $\#f(V_i) = \#V_i$  y  $f(V_i) \subsetneq f(V_j)$  sii  $V_i \subsetneq V_j$ . Luego da lugar a la misma matriz.

2. La aplicación es inyectiva:

Supongamos que  $X$  e  $Y$  con bases minimales  $\{V_1, \dots, V_n\}$  y  $\{W_1, \dots, W_n\}$  dan lugar al mismo elemento de  $\mathcal{M}$ . Podemos suponer reordenando las bases que dan lugar a la misma matriz en  $M$ . Sea  $V'_i = \{x \in X \mid U_x = V_i\}$  y  $W'_i = \{y \in Y \mid U_y = W_i\}$ . Como estos dos conjuntos tienen igual cardinal, podemos definir  $f_i : V'_i \rightarrow W'_i$  una biyección. Afirmamos que  $f : X \rightarrow Y$  definida por  $f|_{V'_i} = f_i$  es un homeomorfismo:

Está bien definida y es biyectiva porque los conjuntos  $V'_i$  y los  $W'_i$  son particiones de  $X$  y de  $Y$ .

Supongamos  $x \in V'_i$  y  $x' \in V'_j$ , entonces  $fx \in W'_i$  y  $fx' \in W'_j$ , luego vale que  $x \leq x' \Leftrightarrow U_x \subseteq U_{x'} \Leftrightarrow V_i \subseteq V_j \Leftrightarrow \exists i = i_1, \dots, i_m = j \mid a_{i_k i_{k+1}} = 1 \forall 1 \leq k < m \Leftrightarrow W_i \subseteq W_j \Leftrightarrow U_{fx} \subseteq U_{fx'} \Leftrightarrow fx \leq fx'$ . Es decir que  $f$  es inicial y, por lo tanto, homeomorfismo.

3. La aplicación es sobreyectiva:

Sea  $A = (a_{ij}) \in M$  de  $n \times n$ . Si  $1 \leq i, j \leq n$  decimos que existe una cadena de  $i$  a  $j$  si  $\exists i = i_1, \dots, i_m = j$  con  $a_{i_k i_{k+1}} = 1 \forall 1 \leq k < m$ . Definimos el conjunto  $X = \{(u, v) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq u \leq n, 1 \leq v \leq a_{uu}\}$  y, para cada  $1 \leq i \leq n$  los subconjuntos  $V_i = \{(u, v) \mid \exists \text{ cadena de } u \text{ a } i\}$ .

Observamos primero que valen:

- (a) Si hay una cadena de  $i$  a  $j$  y una de  $j$  a  $k$ , entonces hay una de  $i$  a  $k$ .
- (b)  $V_i \subseteq V_j$  sii hay una cadena de  $i$  a  $j$ . Si  $V_i \subseteq V_j$ , entonces  $(i, 1) \in V_i \subseteq V_j$  luego hay una cadena de  $i$  a  $j$  por definición de  $V_j$ . Recíprocamente si hay una cadena de  $i$  a  $j$  y  $(u, v) \in V_i$ , entonces hay una cadena de  $u$  a  $i$  y por (a) hay una cadena de  $u$  a  $j$ , luego  $(u, v) \in V_j$ .

$\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_n\}$  es base minimal de una topología en  $X$ . Basta ver que se cumplen las condiciones del lema anterior:

- (i) Los elementos de  $\mathcal{V}$  cubren  $X$  ya que  $(u, v) \in V_u$ .
- (ii) Dados  $V_i, V_j \in \mathcal{V}$  y  $(u, v) \in V_i \cap V_j$ ,  $(u, v) \in V_u \subseteq V_i \cap V_j$ , por (b).
- (iii) Si  $\bigcup_{i \in I} V_i = V_j$ , entonces  $\exists i \in I$  tal que  $(j, 1) \in V_i$ . Pero entonces  $V_j \subseteq V_i$ , por (b). Luego  $V_j = V_i$ .

Si  $X$  con la topología inducida por  $\mathcal{V}$  tiene asociada la matriz  $B = (b_{ij})$ , vale que  $B = A$ :

$U_{(u,v)} \subseteq V_u$  pues  $(u, v) \in V_u$ . Para demostrar la otra inclusión basta ver que todo abierto de la base  $\mathcal{V}$  que contiene a  $(u, v)$ , contiene también a  $V_u$ . Pero si  $(u, v) \in V_j$ , entonces  $V_u \subseteq V_j$  por (b).

Luego  $\{x \in X \mid U_x = V_i\} = \{(u, v) \in X \mid u = i\}$  y, en particular resulta que  $b_{ii} = a_{ii}$ .

Si  $i \neq j$ ,  $b_{ij} = 1 \Leftrightarrow V_i \subseteq V_j$  y  $\nexists k \mid V_i \subsetneq V_k \subsetneq V_j \Leftrightarrow$  hay una cadena de  $i$  a  $j$  y  $\nexists i \neq k \neq j$  tal que hay una cadena de  $i$  a  $k$  y otra de  $k$  a  $j \Leftrightarrow a_{ij} = 1$ .

$b_{ij} = -1 \Leftrightarrow b_{ji} = 1 \Leftrightarrow a_{ji} = 1 \Leftrightarrow a_{ij} = -1$ .

$b_{ij} = 0 \Leftrightarrow -1 \neq b_{ij} \neq 1 \Leftrightarrow -1 \neq a_{ij} \neq 1 \Leftrightarrow a_{ij} = 0$ .

□

Para concluir la sección, observamos las siguientes relaciones entre topologías y matrices.

1. El cardinal de la base minimal es el orden de la matriz correspondiente.
2. El cardinal del espacio es la traza de la matriz.
3. El espacio es  $T_0$  si y sólo si la diagonal consta sólo de unos.

## 1.6. Conexión y Arcoconexión

**Lema 1.6.1.** *Sea  $X$  un etf y sea  $x \in X$ , entonces  $U_x$  es conexo.*

*Demostración.* Sean  $U$  y  $V$  abiertos disjuntos tales que  $U \cup V = U_x$ , entonces  $x \in U$  ó  $x \in V$ , luego  $U_x \subseteq U$  ó  $U_x \subseteq V$ .  $\square$

*Observación 1.6.2.* Los espacios finitos son localmente conexos. Las componentes conexas son abiertas y por lo tanto todo espacio finito es unión disjunta de sus componentes conexas.

**Lema 1.6.3.** *Sea  $X$  un etf y sean  $x, y \in X$  tales que  $x \leq y$ . Entonces existe  $f : I \rightarrow X$  continua tal que  $f(0) = x$  y  $f(1) = y$ .*

*Demostración.* Definimos

$$f(t) = \begin{cases} x & \text{si } t \neq 1 \\ y & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Veamos que  $f$  es continua. Sea  $U$  abierto de  $X$  tal que  $y \in U$ , entonces  $x \in U$  y, por lo tanto,  $f^{-1}(U) = I$ , abierto. Si  $y \notin U$ , entonces  $f^{-1}(U) = [0, 1)$  o  $f^{-1}(U) = \emptyset$ , que son abiertos.  $\square$

*Observación 1.6.4.*  $U_x$  es arcoconexo pues todo elemento de  $U_x$  está en la misma componente arcoconexa que  $x$  por el lema anterior.

**Proposición 1.6.5.** *Los espacios finitos son localmente arcoconexos.*

**Corolario 1.6.6.** *Un espacio finito es conexo si y sólo si es arcoconexo.*

**Proposición 1.6.7.** *Sea  $X$  un etf conexo. Entonces  $\forall x, y \in X, \exists n \in \mathbb{N}$  y  $z_1, z_2, \dots, z_n$  tales que  $z_1 = x, z_n = y$  y  $z_i$  y  $z_{i+1}$  son comparables para todo  $1 \leq i \leq n - 1$ .*

*Demostración.* Definimos  $A$  como el subconjunto de  $X$  formado por los elementos  $v \in X$  tales que  $x$  y  $v$  tienen la propiedad del enunciado. Notar que  $A$  es no vacío pues  $x \in A$ . Es abierto pues si  $v \in A$  y  $w \leq v$ , como existe una sucesión de elementos consecutivos comparables de  $x$  hasta  $v$  entonces existe una desde  $x$  hasta  $w$ . Por lo tanto  $U_v \subseteq A$ .  $A$  es cerrado en  $X$  porque es abierto en  $X^{op}$  por lo que acabamos de ver (dos elementos son comparables en  $X$  si y sólo si lo son en  $X^{op}$ ).  $\square$

Recíprocamente, si  $\forall x, y \in X, \exists n \in \mathbb{N}$  y  $z_1, z_2, \dots, z_n$  tales que  $z_1 = x, z_n = y$  y  $z_i$  y  $z_{i+1}$  son comparables para todo  $1 \leq i \leq n - 1$  entonces  $X$  es conexo, pues dos elementos comparables están en la misma componente conexa.

Por lo tanto hemos probado el siguiente resultado:

**Proposición 1.6.8.** *Las componentes conexas de un espacio finito coinciden con las arcoconexas y con las componentes del orden asociado.*

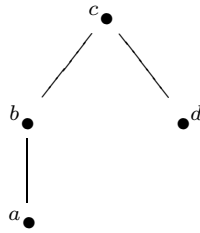
## 1.7. Digrafos y espacios $T_0$

Entenderemos por *digrafo* o *grafo dirigido* a un par  $(V, A)$ , donde  $V$  es un conjunto y  $A$  es un subconjunto de  $V \times V$ . Los elementos de  $V$  se llaman *vértices* del digrafo y los elementos de  $A$ , las *aristas* del digrafo.

Si  $P$  es un poset finito, existe una manera natural de asociarle un digrafo. Los vértices del digrafo serán los elementos de  $P$  y las aristas serán los pares ordenados  $(x, y)$  tales que  $x < y$  y no existe  $z$  con  $x < z < y$ . Este digrafo se puede graficar con flechas que indican la orientación de las aristas o simplemente colocando a  $y$  por encima de  $x$  si  $(x, y)$  es una arista.

A un tal digrafo se lo suele llamar el *diagrama de Hasse del poset*. Lo notaremos  $\mathcal{H}(P)$ . Como cada espacio finito  $T_0$  tiene asociado un poset, llamaremos *diagrama de Hasse del espacio topológico* al diagrama del poset correspondiente.

**Ejemplo 1.7.1.** Consideremos el espacio  $X = \{a, b, c, d\}$  cuyos abiertos propios son  $\{a\}$ ,  $\{a, b\}$ ,  $\{d\}$ ,  $\{a, d\}$ ,  $\{a, b, d\}$ . El diagrama de Hasse de  $X$  es



Recíprocamente, dado el diagrama de un poset finito, tenemos un espacio  $T_0$  asociado. Notar que los abiertos de la topología asociada son los subconjuntos  $U$  que cumplen: si  $x$  está en  $U$ , entonces todos los de “abajo” de  $x$  también están en  $U$ .

En la sección correspondiente a Familias finales y familias irreducibles se verá cuáles son las características que debe cumplir un digrafo en un conjunto finito  $X$  para ser el diagrama de Hasse de una topología. A estos digrafos los llamaremos *digrafos irreducibles* y demostraremos que la aplicación que a cada topología  $T_0$  le asigna su diagrama de Hasse es una biyección entre las posibles topologías  $T_0$  de  $X$  y los digrafos irreducibles en  $X$ .

Una *anticadena* en un preorden es un subconjunto del preorden cuyos elementos son no comparables dos a dos. Notar que con esta definición el conjunto vacío es una anticadena en todo preorden. El resultado siguiente se puede encontrar en [4].

**Proposición 1.7.2.** *Sea  $X$  un  $etf$   $T_0$ . Existe una biyección entre los abiertos de  $X$  y las anticadenas de  $X$ .*

*Demostración.* A un abierto  $U$  de  $X$  le asignamos la anticadena  $\mathcal{A}(U)$  de los elementos maximales de  $U$ . Recíprocamente, a una anticadena  $A$  le asignamos los elementos “abajo” de  $A$ , esto es  $\mathcal{U}(A) = \{x \in X \mid \exists a \in A \text{ con } x \leq a\}$ .

Notemos que  $\mathcal{A}$  está bien definida ya que dos elementos maximales en  $U$  que además son comparables, deben coincidir. También  $\mathcal{U}$  está bien definida pues si  $x \in \mathcal{U}(A)$  entonces

$U_x \subseteq \mathcal{U}(A)$ . Es decir que  $\mathcal{U}(A)$  es abierto.

Si  $A$  es una anticadena, veamos que  $\mathcal{AU}(A)$ , el conjunto de elementos maximales de  $\{x \in X \mid \exists a \in A, x \leq a\}$ , coincide con  $A$ :

Supongamos que  $y \in \mathcal{AU}(A)$ , entonces, en particular,  $y \in \{x \in X \mid \exists a \in A, x \leq a\}$ , luego existe  $b \in A$  tal que  $y \leq b$ . Pero  $b$  también está en el conjunto  $\{x \in X \mid \exists a \in A, x \leq a\}$  y como  $y$  es maximal en ese conjunto,  $y = b \in A$ .

Para ver la otra inclusión consideremos  $b \in A \subseteq \{x \in X \mid \exists a \in A, x \leq a\}$ . Queremos ver que  $b$  es maximal en este conjunto. Supongamos entonces que  $y \in \{x \in X \mid \exists a \in A, x \leq a\}$  y que  $b \leq y$ . Como existe  $a \in A$  tal que  $y \leq a$ , se tiene que  $b \leq x \leq a$ . Pero  $A$  era una anticadena, luego  $b = a$  y, por lo tanto  $b = x$ .

Veamos ahora que si  $U$  es un abierto de  $X$ , entonces  $\mathcal{UA}(U) = \{x \in X \mid \exists a \text{ maximal de } U \text{ con } x \leq a\}$  coincide con  $U$ :

Si  $y \in \mathcal{UA}(U)$ , en particular existe  $a \in U$  tal que  $y \leq a$ . Pero como  $U$  es abierto  $U_a \subseteq U$ , luego  $y \in U$ .

La otra inclusión es todavía más sencilla pues todo elemento en un conjunto preordenado es comparable con alguno de los elementos maximales de ese conjunto.  $\square$

En el ejemplo anterior, las anticadenas de  $X$  son:  $\emptyset$ ,  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{c\}$ ,  $\{d\}$ ,  $\{a, d\}$  y  $\{b, d\}$ . Por lo tanto,  $X$  tiene siete abiertos, los correspondientes a las anticadenas anteriores. Son  $\emptyset$ ,  $\{a\}$ ,  $\{a, b\}$ ,  $\{a, b, c, d\}$ ,  $\{d\}$ ,  $\{a, d\}$  y  $\{a, b, d\}$  respectivamente.

## 1.8. Dimensión binaria

Notaremos con el símbolo  $\mathfrak{S}$  al *espacio de Sierpinski*, es decir al espacio cuyo conjunto subyacente es  $\{0, 1\}$  y cuyo único abierto propio es  $\{0\}$ .

Es sabido que un espacio topológico es  $T_0$  si y sólo si es subespacio de un producto de copias de  $\mathfrak{S}$ . Más precisamente, si  $X$  es  $T_0$ , la función

$$i : X \rightarrow \prod_{\{h: X \rightarrow \mathfrak{S} \text{ cont}\}} \mathfrak{S}$$

definida por  $i(x) = (h(x))_h$  es subespacio.

Notar que si  $X$ , además de ser  $T_0$ , es finito, entonces es subespacio de un producto de finitas copias de  $\mathfrak{S}$ .

**Definición 1.8.1.** La *dimensión binaria* de un espacio finito  $T_0$   $X$ , es el mínimo  $n \in \mathbb{N}_0$  tal que  $X$  es subespacio de  $\mathfrak{S}^n$ . La notaremos  $d(X)$  ó  $dX$ .

*Observación 1.8.2.* La dimensión binaria es invariante por homeomorfismo.

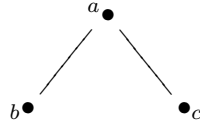
El orden de  $\mathfrak{S}$  es el usual de  $\{0, 1\}$ . Un elemento de  $\mathfrak{S}^n$  es una tira de *ceros* y *unos* de longitud  $n$  y si  $x, y \in \mathfrak{S}^n$  entonces  $x \leq y$  si y sólo si cada cifra de  $x$  es menor a la correspondiente cifra de  $y$ .  $\mathfrak{S}^n$  es nada más y nada menos que el álgebra de boole de  $2^n$

elementos, isomorfa al conjunto de partes de un conjunto de  $n$  elementos, ordenado por la inclusión.

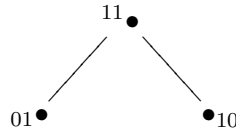
$X$  es subespacio de  $\mathfrak{S}^n$  si y sólo si podemos asignarle a cada elemento  $x$  de  $X$  una tira distinta de *ceros* y *unos* de longitud  $n$ , correspondiente a  $ix \in \mathfrak{S}^n$ , de modo tal que  $x \leq y \Leftrightarrow ix \leq iy$  (esta asignación es exactamente una función inyectiva e inicial según lo visto el capítulo anterior y, por lo tanto, subespacio).

**Ejemplos 1.8.3.** 1.  $d(\emptyset) = d(*) = 0$  pues  $\emptyset$  y  $*$  son subespacios de  $\mathfrak{S}^0 = *$ , el singleton.

2. Sea  $X$  el espacio cuyo diagrama de Hasse viene dado por



$X$  no es subespacio de  $\mathfrak{S}^1$  ya que  $\#X = 3 > 2 = \#\mathfrak{S}^1$ . Sin embargo, el subespacio  $\{11, 01, 10\}$  de  $\mathfrak{S}^2$  tiene el mismo diagrama de Hasse que  $X$



Por lo tanto es homeomorfo a  $X$ . Luego  $d(X) = 2$ . Claramente, no hace falta ver que  $X$  no es subespacio de  $\mathfrak{S}^0$  porque no lo es de  $\mathfrak{S}^1$ .

**Proposición 1.8.4.** *Sea  $X$  un etf  $T_0$  no vacío. Entonces se tiene que  $\lceil \log_2 |X| \rceil \leq d(X) \leq |X|$ . Además las cotas son buenas en el sentido de que si  $n \geq 2$ , entonces existen  $X$  y  $X'$  de cardinal  $n$  tales que  $\lceil \log_2 n \rceil = d(X)$  y  $d(X') = n$ .*

*Demostración.* Por ahora demostraremos sólo la primera parte del enunciado.

$X \subseteq \mathfrak{S}^{dX}$ , luego  $|X| \leq 2^{dX}$  y entonces  $\log_2 |X| \leq dX$ . Como  $dX \in \mathbb{Z}$ , se tiene la primera desigualdad.

Definimos

$$h : X \rightarrow \prod_{x \in X} \mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{|X|}, \quad h(y) = (\chi_{U_x^c}(y))_{x \in X}$$

donde  $\chi_{U_x^c}$  es la función característica de  $U_x^c$ . Es decir que vale 0 si  $y \leq x$  y 1 en otro caso.

Afirmamos que  $h$  es subespacio.

Es continua porque  $p_x h = \chi_{U_x^c}$  lo es.

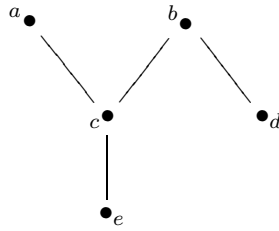
Si  $U$  es abierto de  $X$ ,  $U = \bigcup_{x \in X} U_x = \bigcup_{x \in X} \chi_{U_x^c}^{-1}(\{0\}) = \bigcup_{x \in X} h^{-1}(p_x^{-1}(\{0\}))$ . Y como  $p_x^{-1}(\{0\})$  es abierto de  $\mathfrak{S}^{|X|}$ ,  $U$  es unión de abiertos de la subbase de la topología inicial. Esto dice que  $h$  es inicial.

Para probar la inyectividad, supongamos que  $hx = hy$ , entonces  $0 = \chi_{U_x^c}(x) = (hx)_x = (hy)_x = \chi_{U_x^c}(y)$ , luego  $y \notin U_x^c$ , entonces  $y \in U_x$  e  $y \leq x$ . Análogamente,  $x \leq y$ , de donde  $x = y$ .  $\square$

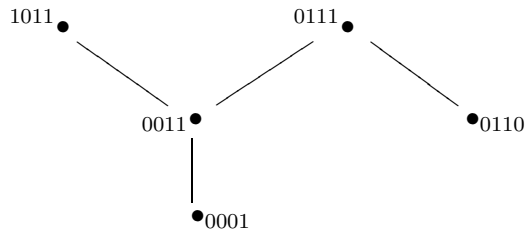
Antes de ver que las cotas son buena, familiaricémonos más con esta herramienta.



**Ejemplo 1.8.5.** Sea  $X$  con diagrama

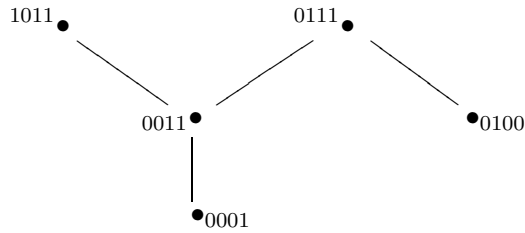


Por la proposición anterior  $3 \leq dX \leq 5$ . Supongamos  $X \subseteq \mathfrak{S}^3$ . Como  $a$  no es máximo de  $X$ , entonces  $a \neq 111$ , luego tiene al menos un *ceros* en su escritura. Como  $c < a$ , entonces  $c$  tiene por lo menos dos *ceros* en su escritura, luego, como  $e < c$ ,  $e$  tiene por lo menos tres *ceros* en su escritura, es decir que  $e = 000$  es mínimo de  $X$ , absurdo, pues  $e \not\leq d$ . Tenemos entonces que la dimensión de  $X$  es 4 ó 5.



es un subespacio  $Y$  de  $\mathfrak{S}^4$  con mismo diagrama que  $X$ , entonces homeomorfo a  $X$ . Por lo tanto  $dX = 4$ .

Es claro que una permutación en las cifras de los elementos de  $Y$  da otro subespacio de  $\mathfrak{S}^4$  homeomorfo a  $Y$ , sin embargo no es cierto que todo subespacio de  $\mathfrak{S}^4$  homeomorfo a  $Y$  sea una permutación de las cifras de  $Y$ . Más precisamente, sea  $Y'$  con diagrama

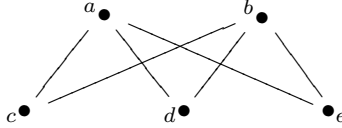


$Y'$  es homeomorfo a  $Y$ , sin embargo no es la imagen de  $Y$  vía una permutación en las cifras (la cantidad de *unos* usada para escribir los elementos de  $Y$  es once, mientras que para  $Y'$  es diez).

Los subespacios de  $\mathfrak{S}^{dX}$  homeomorfos a  $X$  se llamarán *representaciones* de  $X$ . El ejemplo anterior muestra que dos representaciones de  $X$  pueden no diferir en una permutación de cifras. Ni siquiera si  $X$  es un espacio minimal (ver definición 2.2.6), como se ve en el siguiente ejemplo.

**Ejemplos 1.8.6.** (1) Sea  $X = D_3$  el espacio discreto de tres puntos. Entonces  $\{001, 010, 100\}$  y  $\{011, 101, 110\}$  son dos representaciones de  $X$  ( $dX \geq 3$  porque dados tres elementos de  $\mathfrak{S}^2$  hay dos comparables).

(2) Sea  $X = \mathbb{S}D_3$  es decir



Por la proposición,  $dX \leq 5$ . Supongamos que  $X \subseteq \mathfrak{S}^4$ . Como  $a$  no es máximo, tiene por lo menos un 0 en su escritura, digamos en la cifra  $i$ -ésima. Con  $b$  pasa lo mismo, tiene un 0 en la cifra  $j$ -ésima. Podemos suponer  $i \neq j$  porque si todos los ceros de  $a$  son también ceros de  $b$ , entonces  $b \leq a$ .

Notemos que  $c$ ,  $d$  y  $e$  son menores que  $a$  y  $b$ , luego tienen ceros en las cifras  $i$  y  $j$ . Pero en el conjunto de los cuatro valores que quedan para  $c$ ,  $d$  y  $e$ , en todo subconjunto de tres elementos hay dos comparables, que resulta un absurdo. Luego  $dX = 5$ .

Introducimos ahora dos construcciones: el cono y la suspensión no-Hausdorff, que serán utilizadas principalmente en el capítulo cuatro.

**Definición 1.8.7.** Dado  $(X, \tau)$  un espacio topológico, definimos  $\mathbb{C}X$ , el cono no-Hausdorff de  $X$ , como el espacio topológico  $(X \cup \{+\}, \tau')$  donde  $\tau' = \tau \cup \{X \cup \{+\}\}$ .

**Definición 1.8.8.** Definimos  $\mathbb{S}X$ , la suspensión no-Hausdorff de  $X$ , como el espacio  $(X \cup \{+, -\}, \tau'')$  donde  $\tau'' = \tau \cup \{X \cup \{+\}, X \cup \{-\}, X \cup \{+, -\}\}$ .

Para  $n \in \mathbb{N}_0$ , definimos recursivamente  $\mathbb{S}^n X$ , la suspensión de orden  $n$  de  $X$ , de la siguiente manera:  $\mathbb{S}^0 X = X$ ,  $\mathbb{S}^{n+1} X = \mathbb{S}\mathbb{S}^n X$ .

**Observación 1.8.9.** 1. Si denotamos con  $\leq$  al preorden de un *etf*  $X$ , con  $\preceq$  al preorden de  $\mathbb{C}X$  y con  $\preceq$  al de  $\mathbb{S}X$ , entonces vale lo siguiente

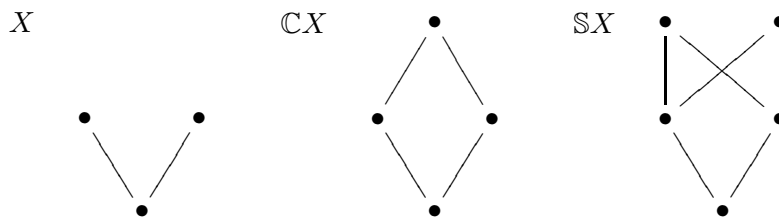
$\forall x, y \in X, x \preceq y \Leftrightarrow x \preceq y \Leftrightarrow x \leq y, x \preceq +, + \not\preceq x, x \preceq +, + \not\preceq x, x \preceq -, - \not\preceq x$   
 $y + y -$  son incomparables.

2.  $X \subseteq \mathbb{C}X \subseteq \mathbb{S}X$  son inclusiones de subespacios.

3.  $X$  es  $T_0$  si y sólo si  $\mathbb{C}X$  es  $T_0$  si y sólo si  $\mathbb{S}X$  es  $T_0$ .

Si  $X$  es  $T_0$ , el diagrama de Hasse de  $\mathbb{C}X$  es el de  $X$  con un punto sobre los maximales. El de  $\mathbb{S}X$  es el de  $X$  con dos puntos sobre los maximales, pero incomparables entre sí.

**Ejemplo 1.8.10.** Si  $X = \mathbb{S}^*$ , los diagramas de Hasse de  $X$ ,  $\mathbb{C}X$  y  $\mathbb{S}X$  son los siguientes



Notemos que  $\mathbb{C}X$  tiene máximo  $+$ . En el capítulo siguiente veremos que un *etf* con máximo es contráctil y, por lo tanto,  $\mathbb{C}X$  es contráctil.

En los últimos ejemplos vimos que las dimensiones de  $D_3$  y de su suspensión diferían en dos. Esto pasa en general con cualquier espacio.

**Lema 1.8.11.** *Sea  $X$  un *etf*  $T_0$ , entonces  $d(\mathbb{S}X) = dX + 2$ .*

*Demostración.* Sea  $i : \mathbb{S}X \hookrightarrow \mathfrak{S}^{d\mathbb{S}X}$  subespacio. Como  $+$  no es máximo en  $\mathbb{S}X$ ,  $i(+)$  no es máximo en  $i(\mathbb{S}X)$ , luego tiene un 0 en su escritura, digamos en la  $j$ -ésima cifra. Como  $+$   $\not\leq -$ , entonces  $i(+)$   $\not\leq i(-)$ , de donde  $i(-)$  tiene un 0 en una cifra  $k$  distinta de  $j$ . Ahora, si  $x \in X$ , entonces  $x \leq +$  y  $x \leq -$ , luego  $ix \leq i(+)$  e  $ix \leq i(-)$ . Se deduce entonces que  $ix$  tiene un 0 en las cifras  $j$  y  $k$ . Definimos entonces la función  $\alpha : iX \rightarrow \mathfrak{S}^{d\mathbb{S}X-2}$  donde  $\alpha(t)$  es retirar las cifras  $j$  y  $k$  de  $t$ . Claramente  $\alpha$  es homeomorfismo con la imagen y entonces subespacio. Luego  $d(\mathbb{S}X) - 2 \geq dX$ .

Sea  $i : X \hookrightarrow \mathfrak{S}^{dX}$  subespacio. Definimos  $i' : \mathbb{S}X \rightarrow \mathfrak{S}^{dX+2}$

$$i'(t) = \begin{cases} 00i(x) & \text{si } x \in X \\ 1011 \dots 1 & \text{si } x = + \\ 0111 \dots 1 & \text{si } x = - \end{cases}$$

$i'$  es homeomorfismo con la imagen pues  $i'$  y su inversa preservan el orden ya que  $i$  es isomorfismo de orden con la imagen. Luego  $d(\mathbb{S}X) \leq dX + 2$  y entonces se tiene la igualdad buscada.  $\square$

Ahora sí, veamos que las cotas de la proposición son buenas.

*Demostración.* Sea  $n \geq 2$ .

- $|\mathfrak{S}^{\lceil \log_2 n \rceil}| \geq n$ . Tomamos  $X \subseteq \mathfrak{S}^{\lceil \log_2 n \rceil}$ , cualquier subespacio de cardinal  $n$ . Entonces  $dX \leq \lceil \log_2 |X| \rceil$  y, por la primera parte de la proposición, vale la igualdad.
- $dD_2 = 2$  ( $D_2$ , el espacio discreto de dos puntos, no es subespacio de  $\mathfrak{S}$  porque no es homeomorfo a  $\mathfrak{S}$ ). Inductivamente se tiene  $d(\mathbb{S}^n D_2) = 2(n+1) \forall n \in \mathbb{N}_0$  por el lema anterior. Pero  $|\mathbb{S}^n D_2| = 2(n+1)$ . Luego la cota a derecha es buena  $\forall n \geq 2$  par.

$dD_3 = 3$  lo vimos en un ejemplo anterior, razonando igual que recién se tiene el resultado  $\forall n \geq 2$  impar.

$\square$

$dD_3 = 3$  implica que en  $\mathfrak{S}^3$  hay tres elementos no comparables dos a dos, es decir una anticadena de tres elementos. ¿Cuántos elementos tiene como máximo una anticadena en  $\mathfrak{S}^3$ ? Si definimos  $A = \{000, 001, 011, 111\}$ ,  $B = \{010, 110\}$  y  $C = \{100, 101\}$ , tenemos que  $A \cup B \cup C = \mathfrak{S}^3$  y cada uno de los tres conjuntos es una cadena, por lo tanto una anticadena en  $\mathfrak{S}^3$  sólo puede tener un elemento de cada conjunto, de donde a lo sumo podemos tomar una anticadena de tres elementos.

En general, ¿cuántos elementos tiene como máximo una anticadena en  $\mathfrak{S}^n$ ? Si logramos partir  $\mathfrak{S}^n$  en  $k$  cadenas, entonces  $k$  es una cota superior para el cardinal máximo de una anticadena.

**Definición 1.8.12.** Sea  $X$  un conjunto ordenado finito (es decir un *etf*  $T_0$ ), definimos el *ancho* de  $X$ ,  $w(X)$ , como el cardinal máximo de una anticadena de  $X$  y la *altura* de  $X$ ,  $h(X)$ , como el cardinal máximo de una cadena de  $X$ .

**Proposición 1.8.13.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $w(\mathfrak{S}^n) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ .

Si notamos  $D_n$  al espacio discreto de  $n$  puntos, se tiene el siguiente

**Corolario 1.8.14.**  $dD_n = \min\{m \in \mathbb{N}_0 \mid n \leq \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}\}$ .

Para demostrar la proposición vamos a ver que podemos partir  $\mathfrak{S}^n$  en  $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  cadenas y mostraremos que existe una anticadena con ese cardinal. Para eso utilizaremos el teorema de Hall de grafos bipartitos.

Si  $I$  y  $D$  son conjuntos disjuntos, un *grafo bipartito*  $G = I \cup D$ , es un grafo cuyo conjunto de vértices es  $I \cup D$  y cuyas aristas son de la forma  $\{x, y\}$ , con  $x \in I$ ,  $y \in D$ .

**Definición 1.8.15.** Sea  $G = I \cup D$  un grafo bipartito. Un *matching completo* es un conjunto de  $|I|$  aristas de  $G$  disjuntas por vértices.

Si  $S$  es un subconjunto de vértices en un grafo, notamos  $\Gamma(S)$  al conjunto de vértices adyacente a algún elemento de  $S$ . Usaremos en la demostración el siguiente

**Teorema 1.8.16** (Hall). *Un grafo bipartito  $G = I \cup D$  tiene un matching completo si y sólo si  $|\Gamma(S)| \geq |S| \forall S \subseteq I$ .*

*Notación 1.8.17.* Notaremos con  $\mathfrak{S}_j^n$  a los elementos de  $\mathfrak{S}^n$  que utilizan exactamente  $j$  unos en su escritura.

*Demostración proposición 1.8.13.* Para  $j \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  definimos el grafo bipartito  $G_j = (\mathfrak{S}_j^n \cup \mathfrak{S}_{j+1}^n, A_j)$  donde  $(t, t') \in A_j$  si  $t \leq t'$ . Veamos que  $G_j$  cumple la condición de Hall: Sea  $S \subseteq \mathfrak{S}_j^n$ . Cada  $t \in S$  tiene  $n - j$  adyacentes (los  $t'$  que coinciden con  $t$  en todas las cifras salvo una en la que  $t$  tiene un 0 y  $t'$  un 1). La unión de estos  $|S|$  conjuntos tiene cardinal menor a  $(n - j)|S|$ , porque algunos elementos de  $\mathfrak{S}_{j+1}^n$  pueden ser adyacentes a varios de  $S$ . Pero a lo sumo son adyacentes a  $j + 1$  (los adyacentes son los que resultan de cambiar un 1 por un 0 y además están en  $S$ ). Luego  $|\Gamma(S)| \geq \frac{(n-j)|S|}{j+1} \geq |S|$  ( $j \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \Rightarrow j \leq \frac{n-1}{2} \Rightarrow j + 1 \leq n - j$ ). Luego existe un matching completo en  $G_j$ .

Análogamente, para  $j \geq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$  existe un matching completo en  $G_j = (\mathfrak{S}_{j+1}^n \cup \mathfrak{S}_j^n, A_j)$  donde  $(t, t') \in A_j$  si  $t' \leq t$ .

La unión de los matchings de los  $G_j$ ,  $1 \leq j \leq n - 1$  tiene como componentes conexas cadenas de  $\mathfrak{S}^n$ . Por construcción cada una de estas cadenas contiene un elemento de  $\mathfrak{S}_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}^n$ . Luego una anticadena tiene cardinal no mayor que  $|\mathfrak{S}_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}^n| = \binom{n}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  ( $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = n$ ).

Pero además  $\mathfrak{S}_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}^n$  es una anticadena, entonces la cota se alcanza.  $\square$

La proposición 1.8.13 se conoce con el nombre de Lema de Sperner.

Es claro que si  $X \subseteq Y$  entonces  $dX \leq dY$ .

Veamos cómo se comporta la dimensión binaria con respecto a los productos y uniones disjuntas.

**Proposición 1.8.18.** Sean  $X$  e  $Y$  etf  $T_0$ , entonces valen las siguientes afirmaciones:

1.  $d(X \times Y) \leq dX + dY$ .
2.
  - Si  $dX, dY \geq 2$ , entonces  $d(X \amalg Y) \leq dX + dY$ ,
  - Si  $dX, dY \geq 1$ , entonces  $d(X \amalg Y) \leq dX + dY + 1$ ,
  - Si  $dX = 0$  ó  $dY = 0$ , entonces  $d(X \amalg Y) \leq dX + dY + 2$

*Demostración.* Sean  $i : X \hookrightarrow \mathfrak{S}^{dX}$ ,  $j : Y \hookrightarrow \mathfrak{S}^{dY}$  subespacio.

1.  $X$  es subespacio de  $\mathfrak{S}^{dX}$  e  $Y$  es subespacio de  $\mathfrak{S}^{dY}$ , entonces  $X \times Y$  es subespacio de  $\mathfrak{S}^{dX} \times \mathfrak{S}^{dY} = \mathfrak{S}^{dX+dY}$  ( $(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow x \leq x', y \leq y' \Leftrightarrow ix \leq ix', jy \leq jy' \Leftrightarrow (ix, jy) \leq (ix', jy')$ , es decir que  $(i, j)$  es inicial. Como además es inyectiva, resulta subespacio).
2.
  - Definimos  $h : X \amalg Y \rightarrow \mathfrak{S}^{dX+dY}$

$$h(z) = \begin{cases} i(z)00 \dots 001 & \text{si } z \in X \\ j(z)11 \dots 110 & \text{si } z \in Y \end{cases}$$

Es inyectiva e inicial porque  $i$  y  $j$  lo son (que la dimensión de ambos sea por lo menos dos se usa para ver  $hz \leq hz' \Rightarrow z \leq z'$ , porque  $hx$  y  $hy$  no son nunca comparables si  $x \in X$ ,  $y \in Y$  por como son las últimas dos cifras).

- En este caso, para poder seguir usando la idea de antes agregamos una cifra adelante. Definimos  $h : X \amalg Y \rightarrow \mathfrak{S}^{dX+dY+1}$

$$h(z) = \begin{cases} 1i(z)00 \dots 0 & \text{si } z \in X \\ 0j(z)11 \dots 1 & \text{si } z \in Y \end{cases}$$

que resulta también subespacio.

- Misma idea con dos cifras adelante,  $h : X \amalg Y \rightarrow \mathfrak{S}^{dX+dY+2}$

$$h(z) = \begin{cases} 10i(z)00 \dots 0 & \text{si } z \in X \\ 01j(z)11 \dots 1 & \text{si } z \in Y \end{cases}$$

□

*Observación 1.8.19.* 1. En general no vale  $d(X \times Y) = dX + dY$ .

Consideremos  $X = D_2$  e  $Y = D_3$ . Entonces  $dX = 2$ ,  $dY = 3$ , pero  $d(X \times Y) = dD_6 = \min\{m \mid 6 \leq \binom{m}{2}\} = 4$ .

2. No vale en general  $d(X \amalg Y) \leq dX + dY$ .

Consideremos  $X = Y = \mathfrak{S}$ . Entonces  $d(X \amalg Y) = 3 > 2 = dX + dY$ .

3. Si  $X$  tiene  $n$  componentes conexas, entonces  $D_n \subseteq X$ , luego,  $dX \geq dD_n = \min\{m \mid n \leq \binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}\}$ .

**Proposición 1.8.20.** *Sea  $X$  un etf  $T_0$ , entonces  $dX = d(X^{op})$ .*

*Demostración.* Sea  $i : X \hookrightarrow \mathfrak{S}^{dX}$  subespacio. Definimos  $i^{op} : X^{op} \rightarrow \mathfrak{S}^{dX}$ ,  $i^{op}(x) = \overline{i(x)}$ , el complemento de  $ix$  en el álgebra de boole  $\mathfrak{S}^{dX}$ . Es inyectiva por ser composición de inyectivas, además  $x \leq_{op} y \Leftrightarrow y \leq x \Leftrightarrow iy \leq ix \Leftrightarrow \overline{ix} \leq \overline{iy}$ , luego es inicial. Entonces  $d(X^{op}) \leq dX$ . Reemplazando  $X$  por  $X^{op}$  se tiene el resultado.  $\square$

Estudiaremos ahora cómo se modifica la dimensión de un espacio al agregar o quitar puntos.

**Proposición 1.8.21.** *Sea  $X$  un etf  $T_0$  y  $x \in X$ , entonces  $d(X \setminus \{x\}) \geq dX - 2$ .*

*Demostración.* Caso 1: Si  $x$  es incomparable con todos los demás elementos de  $X$ .

En este caso se tiene  $dX = d((X \setminus \{x\}) \amalg \{x\}) \leq d(X \setminus \{x\}) + 0 + 2$  por la proposición 1.8.18.

Caso 2: Si existe  $y \in X$  tal que  $y < x$ .

Sea  $i : X \setminus \{x\} \hookrightarrow \mathfrak{S}^{d(X \setminus \{x\})}$  subespacio. Como  $\mathfrak{S}^{d(X \setminus \{x\})}$  es un reticulado, está bien definido  $a = \bigvee_{y < x} iy$ . Sea  $i' : X \rightarrow \mathfrak{S}^{d(X \setminus \{x\})+2}$

$$i'(z) = \begin{cases} a01 & \text{si } z = x \\ i(z)00 & \text{si } z < x \\ i(z)11 & \text{si } z > x \\ i(z)10 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Veamos que  $i'$  es continua. Sean  $z < z'$ . Queremos ver que  $i'z \leq i'z'$ . Separemos en los posibles casos:

- Si  $z = x$ . Como  $z' > w \forall w < x$  e  $i$  es continua, entonces  $iz' \geq iw \forall w < x \Rightarrow iz' \geq \bigvee_{w < x} iw = a \Rightarrow iz'11 \geq a01 \Rightarrow i'z' \geq i'z$ .
- Si  $z' = x$ .  $z < x \Rightarrow iz \leq a \Rightarrow iz00 \leq a01 \Rightarrow i'z \leq i'z'$ .
- Si  $z \neq x \neq z'$ . Como  $i$  continua  $iz \leq iz'$ .  
Si  $z > x \Rightarrow z' > x \Rightarrow i'z = iz11 \leq iz'11 = i'z'$ .  
Si  $z' < x \Rightarrow z < x \Rightarrow i'z = iz00 \leq iz'00 = i'z'$ .  
En otro caso  $i'z = iz00$  ó  $iz10$  e  $i'z' = iz'10$  ó  $iz'11$ , luego  $i'z \leq i'z'$ .

Ahora probemos la inyectividad de  $i'$ . Supongamos que  $i'z = i'z'$

- Si  $z = x$ , entonces  $i'z$  termina en 01, entonces  $i'z'$  también, luego  $z' = x$ .
- Si  $z' = x$  lo mismo.
- Si  $z \neq x \neq z'$ ,  $iz = iz'$ , pero  $i$  inyectiva, luego  $z = z'$ .

$i'$  es inicial. Supongamos que  $i'z < i'z'$

- Si  $z = x$ , entonces  $i'z$  termina en 01, entonces  $i'z'$  termina en 11 y, por lo tanto  $z > x$ .
- Si  $z' = x$ , entonces  $i'z'$  termina en 01, entonces  $i'z$  termina en 00, luego  $z < x$ .
- Si  $z \neq x \neq z'$ , entonces  $iz \leq iz'$  y como  $i$  inicial,  $z \leq z'$ .

Caso 3: Si existe  $y \in X$  tal que  $y > x$ .

Por el caso anterior se tiene que  $dX = d(X^{op}) \leq d(X^{op} \setminus \{x\}) + 2 = d((X \setminus \{x\})^{op}) + 2 = d(X \setminus \{x\}) + 2$ .  $\square$

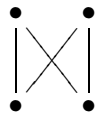
*Observación 1.8.22.* Según la proposición, si  $X$  es un *etf*  $T_0$  y  $x \in X$ , entonces  $dX \geq d(X \setminus \{x\}) \geq dX - 2$ . Luego  $d(X \setminus \{x\}) = dX, dX - 1$  ó  $dX - 2$ . Los tres casos pueden darse como muestran los ejemplos siguientes:

1.  $\mathfrak{S}^2$  tiene dimensión 2 y si le quitamos cualquier punto sigue teniendo la misma dimensión.
2.  $d\mathbb{C}\mathbb{C}^* = 2$



y al quitarle un punto tiene dimensión 1.

3.  $d\mathbb{S}D_2 = 4$



y al quitarle cualquier punto tiene dimensión 2.

En el próximo capítulo daremos un enunciado más preciso de la proposición anterior. Veremos cómo se modifica la dimensión de un espacio al quitar un punto que cumple determinadas características.

## 1.9. Familias finales y familias irreducibles

Dado un espacio  $X$ , una familia de espacios  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  y una familia de funciones  $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X_\alpha \rightarrow X\}_{\alpha \in \Lambda}$ , decimos que  $X$  tiene la *topología final* respecto de  $\mathcal{F}$  o que  $\mathcal{F}$  es una *familia final*, si la topología de  $X$  es la más fina que hace continuas a las funciones de  $\mathcal{F}$ .

Es fácil ver que valen las siguientes equivalencias

- $\mathcal{F}$  es una familia final.

- $U \subseteq X$  es abierto si y sólo si  $f_\alpha^{-1}(U) \subseteq X_\alpha$  es abierto para todo  $\alpha \in \Lambda$ .
- Para todo espacio  $Z$  y para toda función  $f : X \rightarrow Z$  ocurre que  $f$  es continua si y sólo si  $f f_\alpha$  es continua  $\forall \alpha \in \Lambda$ .

De esta forma, se puede definir la topología unión de  $X \amalg Y$ , la unión disjunta de dos espacios topológicos, como la topología final respecto de las inclusiones  $i_X : X \rightarrow X \amalg Y$ ,  $i_Y : Y \rightarrow X \amalg Y$ .

Una función  $q : X \rightarrow Y$  entre espacios topológicos es cociente si es final y sobreyectiva. Si  $\sim$  es una relación de equivalencia en el conjunto subyacente de un espacio  $X$ , le podemos dar a  $X/\sim$  la *topología cociente* respecto de  $q : X \rightarrow X/\sim$ , es decir la topología final respecto de  $q$ . De hecho puede demostrarse que si  $q : X \rightarrow Y$  es cociente, entonces existe una relación de equivalencia  $\sim$  tal que  $Y$  es homeomorfo a  $X/\sim$ .

Si  $Y$  es un subespacio de  $X$ , notaremos por  $X/Y$  al espacio  $X/\sim$  donde  $\sim$  es la relación que identifica a todos los puntos de  $Y$ . Usaremos esta notación al ver las reducciones de Osaki en el último capítulo.

En esta sección estudiaremos familias de funciones  $\mathfrak{S} \rightarrow X$  y las utilizaremos para dar una clasificación de las clases de homeomorfismo de espacios finitos  $T_0$  y para describir a sus diagramas de Hasse.

Recordemos que  $\mathfrak{S}$  denota al espacio de Sierpinski.

**Definición 1.9.1.** Sea  $X$  un conjunto finito y sea  $\mathcal{F} = \{f_i : \mathfrak{S} \rightarrow X\}_{i \in I}$  una familia de funciones. Si  $x, y \in X$ , una *cadena* en  $\mathcal{F}$  de longitud  $n$  de  $x$  a  $y$  es una sucesión  $f_{i_1}, \dots, f_{i_n} \in \mathcal{F}$  tal que  $f_{i_1}(0) = x$ ,  $f_{i_n}(1) = y$  y  $f_{i_j}(1) = f_{i_{j+1}}(0) \forall 1 \leq j < n$ . También decimos que  $\emptyset$  es una cadena de longitud 0 de  $x$  a  $x \forall x \in X$ .

**Proposición 1.9.2.** Sea  $X$  un conjunto finito y  $\mathcal{F} = \{f_i : \mathfrak{S} \rightarrow X\}_{i \in I}$ . La topología final en  $X$  respecto de  $\mathcal{F}$  tiene como abiertos minimales a  $V_x = \{y \in X \mid \text{existe una cadena de } y \text{ a } x\}$ .

*Demostración.* Supongamos que  $1 \in f_i^{-1}(V_x)$ , entonces hay una cadena de  $f_i(1)$  a  $x$ . Pero  $f_i$  es una cadena de  $f_i(0)$  a  $f_i(1)$ . Luego la concatenación es una cadena de  $f_i(0)$  a  $x$ . Entonces  $0 \in f_i^{-1}(V_x)$ . Por lo tanto  $f_i^{-1}(V_x)$  es abierto  $\forall i \in I$ ,  $x \in X$  (el único subconjunto de  $\mathfrak{S}$  no abierto es  $\{1\}$ ). Entonces  $V_x$  es un abierto de la topología final que contiene a  $x$ .

Para demostrar que  $V_x$  es el mínimo abierto que contiene a  $x$ , basta probar lo siguiente: Si  $U$  es un abierto de la topología final que contiene a  $x$ , entonces contiene a todo  $V_x$ .

Para cada  $y \in V_x$  veremos que  $y \in U$  por inducción en la mínima longitud de una cadena de  $y$  a  $x$ . Si la longitud es 0 no hay nada que probar. Si vale para  $n$  y  $f_{i_1}, \dots, f_{i_{n+1}}$  es una cadena de longitud mínima de  $y$  a  $x$ , entonces  $f_{i_2}, \dots, f_{i_{n+1}}$  es una cadena de longitud mínima de  $f_{i_1}(1)$  a  $x$ . Por hipótesis inductiva  $f_{i_1}(1) \in U$ . Como  $U$  abierto, entonces  $1 \in f_{i_1}^{-1}(U)$  que es un abierto, luego debe ocurrir que  $0 \in f_{i_1}^{-1}(U)$  y, entonces,  $y = f_{i_1}(0) \in U$ .  $\square$



**Definición 1.9.3.** Sea  $(V, E)$  un digrafo. Definimos la *familia asociada a  $(V, E)$* ,  $\mathcal{F}_{(V,E)}$ , como la familia  $\{f_a\}_{a \in E}$  donde  $f_{(u,v)} : \mathfrak{S} \rightarrow V$  está definida por  $f_{(u,v)}(0) = u$  y  $f_{(u,v)}(1) = v$ .

Recordemos que el diagrama de Hasse de un espacio  $T_0$  es un digrafo que tiene como aristas a los pares  $(x, y)$  tales que  $x < y$  y  $\nexists z \mid x < z < y$ .

Dado  $X$ , un *etf*  $T_0$ , definimos  $\mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)}$ , la familia asociada al diagrama de Hasse de  $X$ .

**Proposición 1.9.4.** Sea  $X$  un *etf*  $T_0$ , entonces el conjunto de familias finales de dominio  $\mathfrak{S}$  (es decir el conjunto de familias  $\{f_i : \mathfrak{S} \rightarrow X\}_{i \in I}$  tales que  $X$  tiene la topología final respecto de cada una) es no vacío y tiene como mínimo respecto de la inclusión a la familia  $\mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)}$ .

*Demostración.* Afirmamos que  $\mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)}$  es familia final por la proposición anterior ya que  $y \in U_x \Leftrightarrow y \leq x \Leftrightarrow \exists y = z_1 < \dots < z_n = x \mid (z_i, z_{i+1})$  arista en el diagrama de Hasse  $\Leftrightarrow$  existe una cadena de  $y$  a  $x$ .

Veamos que si  $\mathcal{F}$  es otra familia final de dominio  $\mathfrak{S}$ , entonces vale  $\mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)} \subseteq \mathcal{F}$ . Sea  $a = (x, y)$  una arista del diagrama de Hasse, entonces  $x \in U_y$ , luego existe una cadena en  $\mathcal{F}$  de  $x$  a  $y$  (no vacía) por la proposición anterior, digamos  $f_{i_1}, \dots, f_{i_n}$ . Pero como  $f_{i_j}$  es una cadena para todo  $j$ , otra vez por la proposición anterior se tiene  $x \leq f_{i_1}(1) \leq f_{i_2}(1) \leq \dots \leq f_{i_n}(1) = y$ . Dado que no hay elementos entre  $x$  e  $y$ , se tiene que existe  $1 \leq k \leq n$  tal que  $f_{i_j}(1) = x$  para  $j < k$  y  $f_{i_j}(1) = y$  para  $j \geq k$ . Luego  $f_{i_k}(0) = x$  y  $f_{i_k}(1) = y$ , de donde  $f_a = f_{i_k} \in \mathcal{F}$ .  $\square$

*Observación 1.9.5.* La hipótesis de finitud de  $X$  es necesaria porque vale lo siguiente: Si  $X$  es un espacio totalmente desconexo no discreto, no existe una familia final en  $X$  de dominios conexos. Supongamos que  $\{f_i : X_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  es familia final y los espacios  $X_i$  son conexos, entonces  $f_i(X_i)$  es conexo, luego un punto  $\forall i$ . Si  $U$  es cualquier subconjunto de  $X$ ,  $f_i^{-1}(U) = \emptyset$  ó  $X_i$  (dependiendo de si el punto correspondiente está o no en  $U$ ) que son abiertos  $\forall i$ , entonces  $U$  es abierto. Por lo tanto  $X$  discreto, que es una contradicción.

Por ejemplo, si tomamos  $X = \mathbb{Q}$  con la topología usual, no existe una familia final en  $X$  de dominio  $\mathfrak{S}$ .

**Definición 1.9.6.** Sea  $X$  un conjunto y sea  $\mathcal{F} = \{f_i : \mathfrak{S} \rightarrow X\}_{i \in I}$  una familia de funciones. Decimos que  $\mathcal{F}$  es *irreducible* si cumple lo siguiente: Dados  $x, y \in X$ , si existe una cadena de longitud 0 ó 1 de  $x$  a  $y$ , entonces no hay otra cadena (de cualquier longitud) de  $x$  a  $y$ .

**Definición 1.9.7.** Dados un *etf*  $X$  y una familia  $\{X_i\}_{i \in I}$  de espacios, una familia de funciones  $\{f_i : X_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  se llamará *familia minimal* si

1.  $X$  tiene la topología final respecto de la familia.
2. Si  $J \subseteq I$  y  $X$  tiene la topología final respecto de  $\{f_j\}_{j \in J}$ , entonces  $J = I$ .

*Observación 1.9.8.* La proposición 1.9.4 muestra que  $\mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)}$  es una familia minimal.

**Lema 1.9.9.** Sea  $X$  un espacio y sean  $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_3$  familias de funciones de codominio  $X$ . Si  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_3$  son finales, entonces  $\mathcal{F}_2$  lo es.

*Demostración.* La topología de  $X$ ,  $\tau$ , hace continuas a las funciones de  $\mathcal{F}_3$ , luego a las de  $\mathcal{F}_2$ . Si una topología en  $X$ ,  $\tau'$ , hace continuas a las funciones de  $\mathcal{F}_2$ , entonces a las de  $\mathcal{F}_1$ , entonces es menos fina que  $\tau$ .  $\square$

**Proposición 1.9.10.** *Sea  $X$  un etf  $T_0$  y sea  $\mathcal{F} = \{f_i : \mathfrak{S} \rightarrow X\}_{i \in I}$  una familia final. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i)  $\mathcal{F}$  es minimal.
- (ii)  $\mathcal{F}$  es irreducible.

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{F}$  no es irreducible, entonces existe una cadena de longitud 0 que no es la única con esos extremos o existe una cadena de longitud 1 que no es la única con esos extremos.

Caso (1) Si hay una cadena de  $x$  a  $x$  distinta de  $\emptyset$ ,  $f_{i_1}, \dots, f_{i_n}$ , por 1.9.2  $x \leq f_{i_j}(1) \leq x \forall 1 \leq j \leq n$ . Como  $X$  es  $T_0$ ,  $f_{i_j}(1) = x \forall 1 \leq j \leq n$ , en particular  $f_{i_1}$  es una cadena de longitud 1 de  $x$  a  $x$ . Pero  $\emptyset$  es otra cadena con los mismos extremos. Entonces este caso se reduce al siguiente.

Caso (2) Existe  $f_i$ , una cadena de longitud 1 de  $x$  a  $y$  tal que hay otra cadena de  $x$  a  $y$ . Por 1.9.2,  $\mathcal{F} \setminus \{f_i\}$  sigue siendo final (los abiertos minimales son los mismos porque si antes había una cadena de  $u$  a  $v$ , ahora también). Es decir que  $\mathcal{F}$  no es minimal.

Recíprocamente, si  $\mathcal{F}$  no es minimal, por el lema anterior, existe  $i \in I$  tal que  $\mathcal{F} \setminus \{f_i\}$  es final. Pero  $f_i$  es una cadena de  $f_i(0)$  a  $f_i(1)$ , entonces, por 1.9.2,  $f_i(0) \leq f_i(1)$ . Luego existe una cadena en  $\mathcal{F} \setminus \{f_i\}$  de  $f_i(0)$  a  $f_i(1)$ , que es distinta de  $f_i$ . Entonces  $\mathcal{F}$  no es irreducible, como queríamos probar.  $\square$

*Notación 1.9.11.* Notamos  $\llbracket 1, n \rrbracket$  al conjunto de números naturales entre 1 y  $n$ . Es vacío si  $n = 0$ .

**Teorema 1.9.12.** *Sea  $n \in \mathbb{N}_0$ . Existe una biyección entre el conjunto de clases de homeomorfismo de espacios topológicos  $T_0$  de  $n$  elementos (que notaremos  $A_n$ ) y el conjunto de familias  $\{f_i : \mathfrak{S} \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket\}_{i \in I}$  irreducibles, cocientado por la relación  $\{f_i\}_{i \in I} \sim \{g_j\}_{j \in J}$  si existe  $\sigma \in S_n$  tal que  $\{\sigma f_i\}_{i \in I} = \{g_j\}_{j \in J}$  (que notaremos  $B_n$ ).*

*Demostración.* Definimos  $\varphi : A_n \rightarrow B_n$  de la siguiente manera: Si  $X$  es un etf  $T_0$  de  $n$  elementos, sea  $h : X \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$  una biyección cualquiera, entonces  $\varphi([X]) = [\{hf \mid f \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)}\}]$ . Donde  $[X]$  denota a la clase (de homeomorfismo) de  $X$  y  $[\{hf\}]$  denota a la clase de  $\{hf\}$  en  $B_n$ .

Probemos que  $\varphi$  está bien definida.

- $h\mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)} = \{hf \mid f \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)}\}$  es irreducible:  $\mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)}$  minimal, luego irreducible, entonces  $h\mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)}$  también lo es por definición ya que  $h$  es biyectiva.
- Si  $h' : X \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$  es otra biyección, entonces  $[h'\mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)}] = [h\mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)}]$  ya que  $h'\mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)} = h'h^{-1}(h\mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)})$  con  $h'h^{-1} \in S_n$ .

- La definición no depende del representante de la clase de homeomorfismo: Si  $f : X \rightarrow Y$  homeomorfismo y  $\mathcal{F}$  es una familia de funciones de dominio  $\mathfrak{S}$  y codominio  $X$ , entonces  $\mathcal{F}$  es final sii  $f\mathcal{F}$  es final. Además  $\mathcal{F}$  es minimal sii  $f\mathcal{F}$  es minimal. Luego  $f\mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)} = \mathcal{F}_{\mathcal{H}(Y)}$ . Si  $h : X \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$  biyección,  $hf^{-1} : Y \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$  también lo es. Por lo tanto  $hf^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{H}(Y)} = hf^{-1}f\mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)} = h\mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)}$ , como queríamos ver.

Sean  $h_1 : X \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $h_2 : Y \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$  biyecciones y sea  $\sigma \in S_n$  tales que  $\sigma h_1 \mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)} = h_2 \mathcal{F}_{\mathcal{H}(Y)}$ , entonces  $h_2^{-1} \sigma h_1 : X \rightarrow Y$  es continua sii  $h_2^{-1} \sigma h_1 f$  continua  $\forall f \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)}$  sii  $h_2^{-1} h_2 g$  continua  $\forall g \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}(Y)}$ , cosa que es cierta. Análogamente,  $h_1^{-1} \sigma^{-1} h_2 : X \rightarrow Y$  es continua, de donde  $h_2^{-1} \sigma h_1$  es homeomorfismo. Esto prueba la inyectividad de  $\varphi$ .

Para ver la sobreyectividad de  $\varphi$  tomamos  $[\mathcal{F}] \in B_n$ . Definimos  $X = \llbracket 1, n \rrbracket$  con la topología final respecto de  $\mathcal{F}$ .  $X$  es  $T_0$ : Supongamos que  $x \neq y$ ,  $x \leq y$ ,  $y \leq x$ , por 1.9.2 hay una cadena de  $x$  a  $y$  y de  $y$  a  $x$ , que son de longitud no nula pues  $x \neq y$ . Entonces la concatenación es una cadena de  $x$  a  $x$  distinta de  $\emptyset$ , lo cual contradice la irreducibilidad de  $\mathcal{F}$ .

Como  $\mathcal{F}$  irreducible y  $X$   $T_0$ ,  $\mathcal{F}$  minimal. Luego  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)}$ . Tomamos  $h : X \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$  la identidad, entonces  $\varphi([X]) = [h\mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)}] = [\mathcal{F}]$ , como queríamos.  $\square$

**Definición 1.9.13.** Diremos que un digrafo  $(V, E)$  es *irreducible* si la familia  $\mathcal{F}_{(V, E)}$  lo es.

**Corolario 1.9.14.** *Sea  $X$  un conjunto finito. Entonces la aplicación  $\mathcal{H}$  que a cada espacio le asigna su diagrama de Hasse es una biyección entre las topologías  $T_0$  en  $X$  y los digrafos irreducibles en  $X$ .*

*Demostración.* La aplicación está bien definida porque  $\mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)}$  es minimal y luego irreducible. Si dos topologías tienen el mismo diagrama de Hasse, entonces tienen el mismo orden. Luego la aplicación es inyectiva. Para ver la sobreyectividad procedemos como en el teorema. Si  $(X, E)$  es un digrafo irreducible, entonces  $\mathcal{F}_{(X, E)}$  es irreducible y la topología final de  $X$  respecto de  $\mathcal{F}_{(X, E)}$  es  $T_0$ . Como  $\mathcal{F}_{(X, E)}$  es irreducible y  $X$  es  $T_0$ ,  $\mathcal{F}_{(X, E)}$  resulta minimal. Luego  $\mathcal{F}_{(X, E)} = \mathcal{F}_{\mathcal{H}(X)}$  y entonces  $(X, E) = \mathcal{H}(X)$ .  $\square$

## Capítulo 2

# Homotopías en espacios finitos

Dados dos espacios finitos  $X$  e  $Y$ , al conjunto de funciones continuas entre  $X$  e  $Y$  se le puede dar una topología, resultando así un nuevo espacio finito. Estudiaremos cuál es el orden asociado a esta espacio y esto nos permitirá dar una sencilla descripción sobre cómo son los homotopías entre espacios finitos. Con la introducción de las *sucesiones graduales de funciones* podremos describir a las homotopías todavía más detalladamente en el caso en que los espacios involucrados sean  $T_0$ .

Demostremos que todo espacio finito es homotópicamente equivalente a un espacio finito  $T_0$ . De esta forma, al estudiar los tipos de homotopía de espacios finitos, bastará considerar a los espacios  $T_0$ . Sin embargo, los espacios  $T_0$  no forman un sistema completo de representantes de los tipos de homotopía de espacios finitos, porque existen espacios  $T_0$  no homeomorfos, pero del mismo tipo homotópico. Stong estudió este problema y encontró un sistema completo de representantes: los *espacios finitos minimales*. Además, encontró un algoritmo que permite decidir cuándo dos espacios finitos son homotópicamente equivalentes, problema que, en principio, no es nada sencillo.

Aplicaremos la teoría de Stong para profundizar nuestros conocimientos sobre la dimensión binaria. En el capítulo siguiente la utilizaremos al trabajar con la característica de Euler de un espacio finito y en el último capítulo será imprescindible para comprender a las equivalencias débiles entre espacios finitos y para demostrar un lema que nos conducirá a los modelos finitos minimales de las esferas.

### 2.1. Espacios de funciones

Dados  $X$  e  $Y$  et, al conjunto  $Y^X = \mathcal{C}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ continua}\}$  se le puede dar varias topologías. La *topología de la convergencia puntual* (TCP) es la que tiene como subbase a  $\{S(x, U) \mid x \in X, U \subseteq Y \text{ abierto}\}$ , donde  $S(x, U)$  es el conjunto de funciones continuas tales que  $f(x) \in U$ . Esta es la topología subespacio de  $\prod_{x \in X} Y$  visto con la topología producto. Además, la TCP es la topología menos fina que hace a todas las evaluaciones continuas.

La *topología compacto-abierta* (TCA) es la que tiene como subbase a  $\{W(K, U) \mid K \subseteq$

$X$ , compacto y  $U \subseteq Y$  abierto}, donde  $W(K, U)$  es el conjunto de funciones continuas tales que  $f(K) \subseteq U$ .

Como los conjuntos unipuntuales son compactos, en general TCA es más fina que TCP.

**Proposición 2.1.1.** Sean  $X$  e  $Y$  *etf*, entonces la topología de la convergencia puntual en  $Y^X$  coincide con la topología compacto-abierta.

*Demostración.*

$$W(K, U) = \bigcap_{x \in K} S(x, U)$$

Es abierto en TCP pues  $K$  es finito. Luego TCP es más fina que TCA.  $\square$

*Observación 2.1.2.* En realidad sólo se usó que  $X$  fuera finito.

*Nota 2.1.3.* Salvo que digamos lo contrario, cada vez que  $X$  e  $Y$  sean *etf*, consideraremos  $Y^X$  con esta topología.

Las demás ideas de esta sección aparecen en ambos trabajos ([21], [11]). Los enunciados de las proposiciones y sus demostraciones son tratados aquí con más detalle.

**Definición 2.1.4.** Sean  $X$  e  $Y$  *etf*. El *preorden puntual* en  $Y^X$  se define por:  $f \leq g$  si  $f(x) \leq g(x) \forall x \in X$ .

**Proposición 2.1.5.** Sean  $X, Y$  *etf*, entonces  $Y^X$  es un *etf* y el preorden asociado es el preorden puntual.

*Demostración.* Sólo hay que ver que si  $f \in Y^X$ , entonces  $U_f = \{g \in Y^X \mid g \leq f\}$ .

Sea  $g \in U_f$  y  $x \in X$ . Como  $f \in S(x, U_{f(x)})$ , entonces  $U_f \subseteq S(x, U_{f(x)}) \Rightarrow g \in S(x, U_{f(x)}) \Rightarrow g(x) \in U_{f(x)} \Rightarrow g(x) \leq f(x)$ .

Recíprocamente, sea  $g \leq f$ . Si  $f \in S(x, U)$  entonces  $f(x) \in U$ , luego  $U_{f(x)} \subseteq U$ , y resulta que  $g(x) \in U$ , es decir que  $g \in S(x, U)$ . Por lo tanto  $g$  está en cada abierto de la subbase que contiene a  $f$ , entonces en todo abierto que contiene a  $f$ , o sea que  $g \in U_f$ .  $\square$

**Proposición 2.1.6.** Sean  $X, Y$  *etf* tales que  $Y$  es  $T_0$ , entonces  $Y^X$  es  $T_0$ .

*Demostración.* Sólo hay que chequear que el preorden puntual es antisimétrico. Pero si  $f \leq g$  y  $g \leq f$ , entonces  $f(x) \leq g(x)$  y  $g(x) \leq f(x)$  para todo  $x$ , luego  $f(x) = g(x) \forall x$ .  $\square$

*Observación 2.1.7.* En realidad esta proposición vale más generalmente con espacios no necesariamente finitos, considerando la TCP. Pues  $Y^X$  es subespacio de producto de espacios  $T_0$ .

Dados  $X, Y$  dos espacios topológicos, decimos que una topología en  $\mathcal{C}(X, Y)$  cumple la *ley exponencial*, si para todo espacio  $Z$

$$\varphi : \{f : Z \times X \rightarrow Y \mid f \text{ continua}\} \rightarrow \{g : Z \rightarrow \mathcal{C}(X, Y) \mid g \text{ continua}\}$$

$$\psi : \{g : Z \rightarrow \mathcal{C}(X, Y) \mid g \text{ continua}\} \rightarrow \{f : Z \times X \rightarrow Y \mid f \text{ continua}\}$$

definidas por  $\varphi(f)(z)(x) = f(z, x)$  y  $\psi(g)(z, x) = g(z)(x)$ , son mutuamente recíprocas.

Si TCA hace continua a la evaluación,  $\mathcal{E}v : \mathcal{C}(X, Y) \times X \rightarrow Y$ , entonces es *exponencial* (cumple la ley exponencial). Esto ocurre por ejemplo si  $X$  es localmente compacto y Hausdorff.

Si bien todo espacio finito es localmente compacto (es compacto), pedir que sea  $T_2$ , es pedir que sea discreto, así que necesitamos otra proposición.

**Proposición 2.1.8.** *Sea  $X$  un etf y sea  $Y$  un espacio topológico. Entonces la TCA en  $\mathcal{C}(X, Y)$  es exponencial.*

*Demostración.* Basta ver que la evaluación es continua.

Sea  $U \subseteq Y$  abierto y  $(f, x) \in \mathcal{E}v^{-1}(U)$ , entonces  $x \in f^{-1}(U)$  que es un abierto de  $X$  y compacto, luego  $V = W(f^{-1}(U), U) \times f^{-1}(U)$  es un abierto en  $\mathcal{C}(X, Y) \times X$ , que contiene a  $(f, x)$  y está contenido en  $\mathcal{E}v^{-1}(U)$ .  $\square$

**Corolario 2.1.9.**  *$\{f : I \times X \rightarrow Y \mid f \text{ continua}\}$  y  $\{g : I \rightarrow \mathcal{C}(X, Y) \mid g \text{ continua}\}$  están en biyección. Esto es, las clases de homotopía de funciones continuas de  $X$  a  $Y$  están en correspondencia canónica con las componentes arcoconexas de  $Y^X$ .*

Para enunciar el próximo corolario, recordemos la definición de *homotopía relativa* que cobrará importancia en la próxima sección.

**Definición 2.1.10.** Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  dos funciones continuas entre espacios topológicos y sea  $A \subseteq X$  un conjunto en el que coinciden  $f$  y  $g$ . Decimos que la homotopía  $H : X \times I \rightarrow Y$  entre  $f$  y  $g$  es una *homotopía relativa* a  $A$  si  $H(x, t) = f(x) = g(x) \forall x \in A, t \in I$ . En este caso, notamos  $H : f \simeq g \text{ rel } A$ .

**Corolario 2.1.11.** *Sean  $X, Y$  etf y sean  $f, g : X \rightarrow Y$  funciones continuas tales que  $f \leq g$ , entonces  $f \simeq g \text{ rel } \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ .*

*Demostración.* Como  $f \leq g$ , por 1.6.3,  $\exists \alpha : I \rightarrow Y^X$  continua tal que  $\alpha(0) = f$ ,  $\alpha(1) = g$ . Este camino corresponde a una homotopía entre  $f$  y  $g$ . Resta ver que la homotopía es relativa a  $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ .

Tomemos el camino que da 1.6.3,  $\alpha : I \rightarrow Y^X$

$$\alpha(t) = \begin{cases} f & \text{si } t \neq 1 \\ g & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Entonces  $H = \psi(\alpha) : I \times X \rightarrow Y$  es continua,  $H(0, x) = \alpha(0)(x) = f(x)$ ,  $H(1, x) = \alpha(1)(x) = g(x)$  y si  $y \in \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ ,  $t \in I$ , entonces  $H(t, x) = \alpha(t)(x) = f(x)$ .  $\square$

**Corolario 2.1.12.** *Si  $X, Y$  son etf y  $f, g : X \rightarrow Y$  son funciones continuas tales que  $f \leq g$ , entonces  $\exists n \in \mathbb{N}$  y  $h_1, h_2, \dots, h_n$  tales que  $h_1 = f$ ,  $h_n = g$  y  $h_i$  y  $h_{i+1}$  son comparables para todo  $1 \leq i \leq n - 1$ .*

*Demostración.*  $f \leq g$  significa que  $f$  y  $g$  están en la misma componente arcoconexa de  $Y^X$ . Pero por 1.6.8 las componentes arcoconexas coinciden con las componentes del preorden asociado y esto da exactamente la tesis del teorema.  $\square$

Antes de terminar con esta sección, queremos ver como se comporta la correspondencia de 2.1.9 con las homotopías relativas.

*Notación 2.1.13.* Si  $X, Y$  son *et*,  $A \subseteq X$  un subespacio y  $f : X \rightarrow Y$  una función continua, notamos  $A_f$  al subespacio de funciones continuas de  $X$  a  $Y$  que coincide con  $f$  en  $A$ .

*Observación 2.1.14.* Si  $f, g : X \rightarrow Y$  continuas,  $H : f \simeq g \text{ rel } A$ , entonces  $\varphi(H)$  es un camino en  $A_f$  pues  $\forall a \in A, \varphi(H)(t)(a) = H(t, a) = f(a) \forall t \in I$ . Esto es,  $f$  y  $g$  están en la misma componente arcoconexa de  $A_f$  y, por lo tanto existen  $h_1, h_2, \dots, h_n$  en  $A_f$  tales que  $h_1 = f, h_n = g$  y  $h_i$  y  $h_{i+1}$  son comparables para todo  $i$ .

## 2.2. Clasificación por tipo de homotopía: la maravillosa idea de Stong

Sea  $(X, \leq)$  un preorden. Si identificamos (tomando cociente) todos los puntos  $x, y \in X$  tales que  $x \leq y$ , e  $y \leq x$ , obtenemos un orden. Este orden resulta isomorfo al subpreorden que resulta de tomar un representante de cada clase en el preorden inicial. Partiendo de esa idea, McCord ([14]) formuló el siguiente

**Teorema 2.2.1.** *Para todo *etf*  $X$ , existe un *etf*  $T_0 X_0$  y  $q_X : X \rightarrow X_0$  cociente y equivalencia homotópica. Además, para toda función continua  $f : X \rightarrow Y$  entre *etf*, existe una única función continua  $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$  tal que  $q_Y f = f_0 q_X$ .*

*Demostración.* Sea  $X_0 = X / \sim$ , donde  $x \sim y$  si  $x \leq y, y \leq x$  y sea  $q_X = q : X \rightarrow X_0$ , la aplicación cociente (de conjuntos). Le damos a  $X_0$  la topología cociente inducida por  $q$ .

Si  $y \in X$ , entonces es claro que  $q^{-1}(q(U_y)) \supseteq U_y$ . Veamos la otra inclusión. Sea  $v \in q^{-1}(q(U_y))$ , esto quiere decir que existe  $v' \in U_y$  tal que  $q(v) = q(v')$ , luego  $v \leq v' \leq y$ , es decir que  $v \in U_y$ , como queríamos ver. Se tiene entonces que  $q^{-1}(q(U_y)) = U_y$  y, por lo tanto,  $q$  es cociente y abierta.

Por 1.4.9, vale que  $U_{qy} = q(U_y)$  y entonces  $q^{-1}(U_{qy}) = q^{-1}(q(U_y)) = U_y$ .

Ahora, supongamos que  $qx \leq qy$ , entonces  $qx \in U_{qy}$ . Por lo visto recién, se tiene que  $x \in q^{-1}(U_{qy}) = U_y$  y, por lo tanto,  $x \leq y$ .

Veamos que  $X_0$  es  $T_0$ . Si  $qx \leq qy$  y  $qy \leq qx$ , entonces  $x \leq y, y \leq x$ , luego  $qx = qy$ .

Sea  $i : X_0 \rightarrow X$  cualquier función tal que  $qi = 1_{X_0}$  ( $i$  es elegir un representante de la clase en  $\sim$ ). Claramente  $i$  es continua pues  $qx \leq qy$  implica  $qiqx \leq qi qy$  y luego  $iqx \leq iqy$ . Como  $q(iqx) = qx \forall x \in X$ , se tiene en particular que  $iqx \leq x \forall x \in X$ , es decir que  $iq \leq 1_X$  y por 2.1.11, resulta  $iq \simeq 1_X \text{ rel } \{x \in X \mid iq(x) = x\}$ . Entonces  $q$  es equivalencia homotópica con inversa  $i$ . Notar que  $\{x \in X \mid iq(x) = x\} = i(X_0)$ .

La última parte del teorema sale inmediatamente de la propiedad universal del cociente. Basta verificar que si  $q_X(x) = q_X(x')$  entonces  $q_Y f(x) = q_Y f(x')$ . Pero  $q_X(x) = q_X(x') \Rightarrow x \leq x', x' \leq x \Rightarrow fx \leq fx', fx' \leq fx \Rightarrow q_Y f(x) = q_Y f(x')$ .  $\square$

*Observación 2.2.2.* En la demostración se usa que  $x \leq y$  si y sólo si  $qx \leq qy$ , luego, por 1.4.5,  $q$  es inicial.

Más importante aún es que  $i$  es inicial:  $i(qx) \leq i(qy) \Rightarrow qi(qx) \leq qi(qy) \Rightarrow qx \leq qy$ . Como además es inyectiva, es subespacio (no es necesario que los espacios sean finitos para asegurar esto: vale en general por el hecho de que  $i$  es una sección).

*Observación 2.2.3.*  $i : X_0 \hookrightarrow X$  es un retracto por deformación fuerte.

$i(X_0)$  es un subespacio de  $X$  que es un retracto por deformación fuerte y es  $T_0$ . Además, dado  $p \in X$ , podemos exigir que  $p$  esté en  $i(X_0)$ , eligiendo  $i$  adecuadamente.

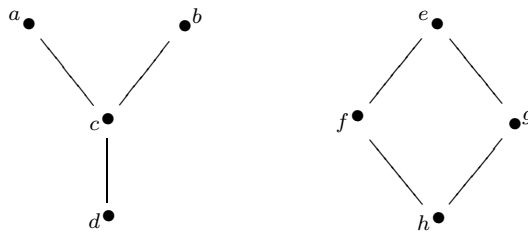
Este teorema nos dice que todo espacio finito es homotópicamente equivalente a un espacio finito  $T_0$ .

Las ideas que mencionamos desde aquí hasta el 2.2.19, aparecieron por primera vez en [21].

**Definición 2.2.4.** Sea  $X$  un *etf*  $T_0$  y sea  $x \in X$ . Decimos que  $x$  es un

- *upbeat point (ubp)* si existe  $y \in X$  con  $x < y$  tal que para todo  $z \in X$  con  $x < z$ , se tiene que  $y \leq z$ .
- *downbeat point (dbp)* si es ubp en  $X^{op}$ , es decir si existe  $y \in X$  con  $y < x$  tal que para todo  $z \in X$  con  $z < x$ , se tiene que  $z \leq y$ .
- *beat point (bp)* si es ubp o dbp.

**Ejemplo 2.2.5.** Sean  $X$  e  $Y$  *etf*  $T_0$  cuyos diagramas de Hasse son respectivamente



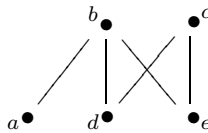
El punto  $a$  es un dbp de  $X$  porque  $c < a$  y si  $x < a$  entonces  $x \leq c$ . El punto  $c$  también es un dbp, pero  $d$  no lo es. Sin embargo  $d$  es un ubp y  $c$  no.

El punto  $e$  no es ni ubp ni dbp en  $Y$ , lo mismo ocurre con  $h$ . Pero  $f$  y  $g$  son ambas cosas: los dos son ubp y dbp a la vez.

Un punto  $x$  es ubp si en el diagrama de Hasse de  $x$  sale una única arista hacia “arriba” y es un dbp si de  $x$  sale una única arista hacia “abajo”.

**Definición 2.2.6.**  $X$  es un *etf minimal* si es  $T_0$  y no tiene bp. Decimos que  $(X, p)$  es un *etf punteado minimal* si es  $T_0$  y no tiene bp, salvo, quizás,  $p$ .

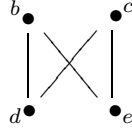
**Ejemplo 2.2.7.** Sea  $X$  el espacio con diagrama



$X$  no es minimal pues  $a$  es ubp. Sin embargo, es el único bp de  $X$ . Por lo tanto el espacio punteado  $(X, a)$  sí es un espacio punteado minimal. Si  $x \in X$  y  $x \neq a$  entonces  $(X, x)$  no es un espacio punteado minimal porque  $a$  es bp.



Si retiramos el punto  $a$  del espacio anterior, resulta



que sí es minimal. Entonces también vale que  $(X \setminus \{a\}, x)$  es un espacio punteado minimal para todo  $x \in X \setminus \{a\}$ .

**Definición 2.2.8.** Un *core* de un *etf*  $X$  es un subespacio,  $Y$ , que es un espacio finito minimal y un retracto por deformación fuerte (rdf) de  $X$ . Análogamente, un *core* de un *etf* punteado  $(X, p)$  es un subespacio con el mismo punto base,  $(Y, p)$ , que es un espacio punteado minimal y un retracto por deformación fuerte de  $(X, p)$ .

**Teorema 2.2.9.** *Todo etf  $X$  tiene un core. De la misma forma todo etf punteado  $(X, p)$  tiene un core.*

*Demostración.* Si  $X$  es un *etf*, por 2.2.3, sabemos que existe  $X_0 \subseteq X$  que es un retracto por deformación fuerte y además es  $T_0$ . Como composición de rdf es rdf, basta ver que vale el teorema para espacios  $T_0$ . Sea entonces  $X$  un *etf*  $T_0$ .

Veamos que vale el teorema por inducción en el cardinal de  $X$ .

Si  $X = *$ , es minimal y no hay nada que hacer.

Si  $X$  no tiene bp, ya tenemos el core deseado. Si  $x \in X$  es ubp, entonces existe  $y \in X$ ,  $x < y$  tal que  $x < z$  implica  $y \leq z$ . Definimos  $Y = X \setminus \{x\} \subseteq X$  y  $r : X \rightarrow Y$

$$r(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \neq x \\ y & \text{si } z = x \end{cases}$$

Para probar que  $r$  es continua, veremos que preserva el orden. Sean  $z < v$ .

1. si  $z \neq x \neq v$ , entonces  $rz = z \leq v = rv$ .
2. si  $v = x$ , entonces  $rz = z \leq x \leq y = rv$ .
3. si  $z = x$ , como  $x < v$ , entonces  $y \leq v$ , luego  $rz = y \leq v = rv$ .

$ri = 1_Y$ ,  $1_X \leq ir$ , luego  $1_X \simeq ir \text{ rel } \{z \in X \mid z = irz\}$ , entonces  $1_X \simeq ir \text{ rel } Y$ . Es decir que  $Y$  es rdf de  $X$ . Por hipótesis inductiva  $Y$  tiene un core, que entonces es core de  $X$ .

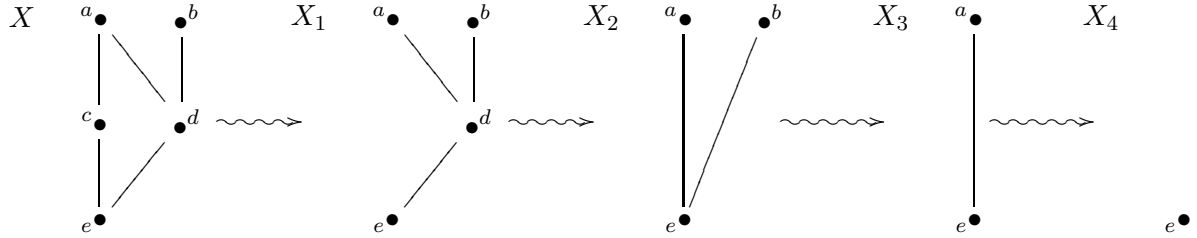
Si  $x$  fuera dbp, la demostración sería similar.

La demostración para espacios punteados es esencialmente la misma. Recordemos que por 2.2.3, podemos exigir que  $p \in X_0$ . □

*Nota 2.2.10.* El paso inductivo en la demostración del teorema sugiere un algoritmo que en cada paso retira un bp del último espacio hasta llegar a un espacio minimal. Nos referiremos a este algoritmo como *algoritmo de reducción*.

Dado un *et*  $T_0$ , en general, no hay una única manera de realizar el algoritmo, ya que en cada paso hay que “elegir” el bp a retirar.

**Ejemplo 2.2.11.** Si  $X$  tiene por diagrama de Hasse a la primera figura de abajo,  $c$  es un dbp de  $X$  (también es ubp), luego  $X_1 = X \setminus \{c\}$  es rdf de  $X$ . De la misma forma,  $d$  es dbp de  $X_1$  (aunque no dbp), entonces  $X_2$  rdf de  $X_1$ .



Siguiendo con el algoritmo de reducción, se llega a un core de  $X$ , el espacio  $\{e\}$ . En particular  $X$  es contráctil.

A continuación enunciamos el teorema que da sentido a la definición de espacios minimales que tiene como consecuencia el Teorema de Representación de Espacios Finitos por Tipo de Homotopía.

**Teorema 2.2.12.** *Sea  $X$  un etf minimal y sea  $f : X \rightarrow X$  una función continua homotópica a la identidad, entonces  $f$  es la identidad. De la misma forma, si  $(X, p)$  es un etf punteado minimal y  $f : (X, p) \rightarrow (X, p)$  es una función continua homotópica a la identidad relativa al punto base, entonces  $f$  es la identidad.*

*Demostración.* Demostremos la primera parte del teorema.

Supongamos primero que  $f \leq 1_X$ .

1. Si  $x$  es minimal en  $X$ , como  $f(x) \leq x$ , entonces  $f(x) = x$ .
2. Si  $x$  es tal que  $\forall y < x, f(y) = y$ , entonces  $f(x) = x$ . En caso contrario  $x$  sería dbp pues  $y < x$  implica  $y = f(y) \leq f(x) < x$ , absurdo porque  $X$  es un espacio minimal.

Inductivamente se tiene  $f(x) = x \forall x \in X$ .

Si  $1_X \leq f$  la demostración es similar.

Ahora bien, en el caso general,  $1_X \simeq f$ , entonces por 2.1.12  $\exists n \in \mathbb{N}$  y  $h_1, h_2, \dots, h_n$  tales que  $h_1 = 1_x, h_n = f$  y  $h_i$  y  $h_{i+1}$  son comparables para todo  $1 \leq i \leq n - 1$ . Pero la primera parte de la demostración nos da el paso inductivo para ver que  $h_i = 1_X \forall 1 \leq i \leq n$ . En particular  $f = 1_X$ .

En el caso en que el espacio sea punteado, la demostración es similar. Para la primera parte de la demostración sigue valiendo que si  $x$  es tal que  $\forall y < x, f(y) = y$ , entonces  $f(x) = x$ . Si  $x = p$ , entonces esto vale porque  $f$  preserva el punto base. Si  $x \neq p$  vale la demostración como en el caso de espacios no punteados.

Para la segunda parte de la demostración, si  $1_X \simeq f \text{ rel}\{p\}$ , por 2.1.14  $h_i \in \{p\}_{1_X}$ , es decir  $h_i(p) = p \forall i$  y entonces estamos en condiciones de utilizar la primera parte como en el caso de espacios no punteados.  $\square$

**Corolario 2.2.13.** *Si  $X, Y$  son  $etf$  minimales y  $f : X \rightarrow Y$  equivalencia homotópica, entonces  $f$  es un homeomorfismo. De igual forma, si  $(X, p), (Y, q)$  son  $etf$  punteados minimales y  $f : (X, p) \rightarrow (Y, q)$  es una equivalencia homotópica relativa a los puntos base, entonces  $f$  es un homeomorfismo.*

*Demostración.* Si  $g : Y \rightarrow X$  es una inversa homotópica, entonces  $gf \simeq 1_X$  y  $fg \simeq 1_Y$ , luego, por el teorema,  $gf = 1_X$ ,  $fg = 1_Y$ . En el caso de los espacios punteados la demostración es la misma, teniendo en cuenta que las homotopías son relativas a los puntos base.  $\square$

**Corolario 2.2.14.** *Dos cores de un  $etf$  son homeomorfos. Análogamente, dos cores de un  $etf$  punteado son homeomorfos.*

*Demostración.* Si el espacio es no punteado los dos cores son homotópicamente equivalentes al espacio original, luego son homotópicamente equivalentes entre sí y minimales, entonces son homeomorfos por el corolario anterior.

Si el espacio es punteado las homotopías son relativas a los puntos base y también se aplica el corolario anterior.  $\square$

*Nota 2.2.15.* De aquí en más hablaremos de **el** core de un espacio finito refiriéndonos a cualquier espacio homeomorfo a **un** core de ese espacio. El core está bien definido salvo homeomorfismo. Notaremos al core de  $X$  como  $X_c$ .

Como todo  $etf$  es homotópicamente equivalente a su core, se tiene el siguiente

**Corolario 2.2.16.** *Dos  $etf$  son homotópicamente equivalentes si y sólo si tienen cores homeomorfos. De la misma forma dos  $etf$  punteados son homotópicamente equivalentes relativo a los puntos base si y sólo si tienen cores homeomorfos.*

**Teorema 2.2.17** (Representación de Espacios Finitos por Tipo de Homotopía). *El conjunto de espacios minimales es un sistema completo de representantes de los tipos de homotopía de espacios finitos. Es decir, todo espacio finito es homotópicamente equivalente a un espacio minimal y si dos espacios finitos son del mismo tipo homotópico, entonces sus representantes son homeomorfos.*

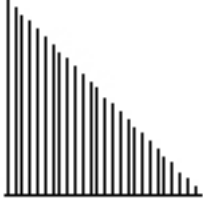
*Observación 2.2.18.* Dado un  $etf$   $X$ , la clase de espacios homotópicamente equivalentes a  $X$  tiene un elemento de cardinal mínimo, digamos  $X_0$ . Afirmamos que  $X_0$  es el core de  $X$ .

El espacio  $X_0$  es minimal porque, si no, el core de  $X_0$  sería del mismo tipo homotópico que  $X$  y de cardinal menor que el de  $X_0$ . Luego, como  $X_0$  es homotópicamente equivalente a  $X_c$ , entonces debe ser homeomorfo a  $X_c$ .

**Corolario 2.2.19.** *Sea  $X$  un  $etf$ , entonces  $X$  es contráctil si y sólo si existe  $x \in X$  tal que  $\{x\}$   $rd$  de  $X$ .*

*Demostración.* Si  $X$  es contráctil, por la observación anterior, el core de  $X$  consta de un solo punto.  $\square$

*Observación 2.2.20.* Esto no sucede con espacios topológicos en general. Si pegamos infinitas copias del peine



que tiene una cerda por cada coordenada racional,



obtenemos un subespacio de  $\mathbb{R}^2$  contráctil, tal que ninguno de sus puntos es un retracto por deformación fuerte.

Un interrogante que deja el último corolario es: ¿es cierto que si un *etf*  $X$  es contráctil, entonces **todo** punto es rdf de  $X$ ? Para contestar esta pregunta, teniendo en cuenta el algoritmo de reducción de Stong, probamos el siguiente resultado y encontramos el contraejemplo 2.2.22.

**Proposición 2.2.21.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

- (a) *Existe un etf contráctil  $X$  y un punto  $x \in X$  tal que  $\{x\}$  no es rdf de  $X$ .*
- (b) *Existe un etf contráctil y  $T_0$  con un solo beat point.*

*Demostración.* Supongamos que vale (a). Sea  $X$  un espacio que cumple la propiedad de (a) con cardinal mínimo y sea  $x \in X$  tal que  $x$  no es rdf de  $X$ . Entonces  $X$  es  $T_0$ . De lo contrario podemos conseguir  $X_0 \subsetneq X$  un subespacio propio  $T_0$  tal que  $x \in X_0$  y  $X_0$  es rdf de  $X$ . Pero como  $\#X_0 < \#X$  y  $X_0$  contráctil, entonces debe suceder que  $\{x\}$  es rdf de  $X_0$ , luego  $\{x\}$  rdf  $X$ , que es una contradicción.

Si  $X$  no tiene bp, entonces es minimal y  $X = X_c = *$ , luego no cumple la propiedad de (a), contradicción.

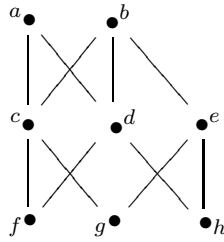
Si  $X$  tiene al menos dos bp, entonces existe  $y \neq x$  bp de  $X$ , por lo tanto  $X \setminus \{y\}$  es rdf de  $X$  es un espacio contráctil, de cardinal menor al de  $X$  y tal que  $x$  no es rdf, contradiciendo la minimalidad de  $X$ .

Concluimos entonces que  $X$  debe tener uno y sólo un beat point.

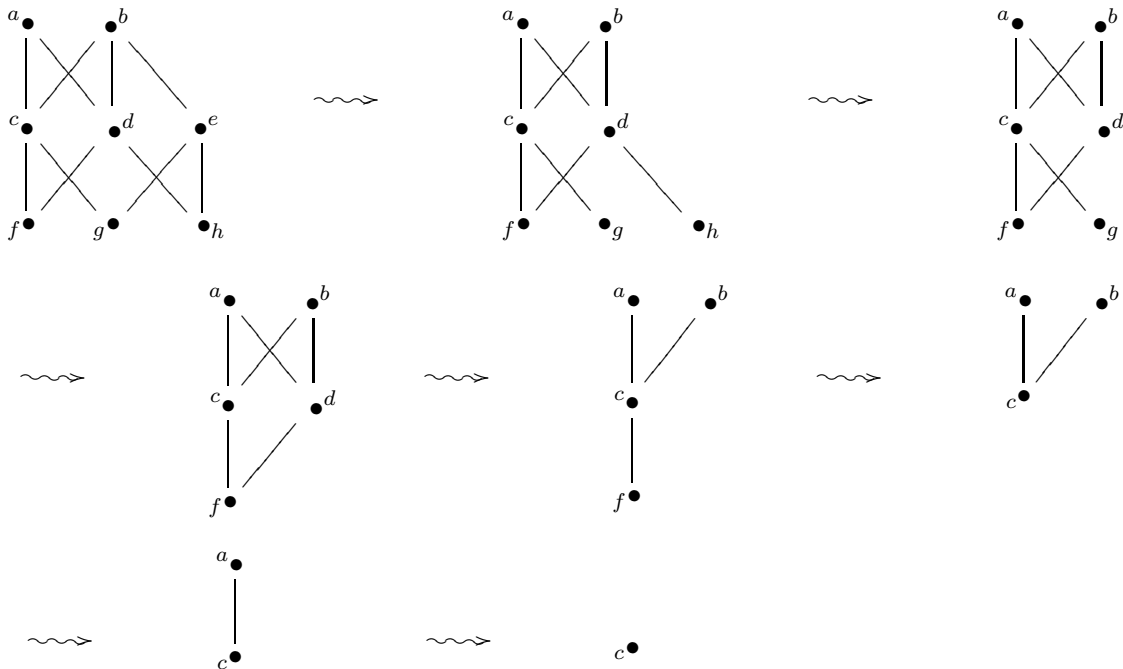
Recíprocamente, sea  $X$  un *etf*  $T_0$  y sea  $p$  su único bp. Entonces  $(X, p)$  es un espacio punteado minimal. Si  $p$  fuera rdf de  $X$ , entonces  $i : \{p\} \hookrightarrow X$  sería una equivalencia homotópica relativa a los puntos base entre espacios punteados minimales y, por lo tanto, un homeomorfismo. Luego debe ocurrir que  $X = \{p\}$ , que no tiene bp, y esto es una contradicción.  $\square$

Por lo tanto, para ver que  $X$  *etf* contráctil  $\not\Rightarrow$  todo punto es rdf de  $X$ , basta encontrar un espacio contráctil y  $T_0$  con un solo bp. Notemos que en el ejemplo 2.2.7 ya habíamos visto que existía un espacio con un solo bp, pero ese espacio no era contráctil.

**Ejemplo 2.2.22** (Espacio del Gato Tuerto).



es un espacio finito  $T_0$  con un único bp,  $e$ . El algoritmo de reducción demuestra que es contráctil:



y de la demostración del lema anterior se deduce que  $e$  no es rdf del espacio.

Pensando en el diagrama de Hasse de un  $etf T_0$  y en el algoritmo de reducción notamos lo siguiente: si un espacio tiene mínimo  $m$ , entonces los puntos inmediatamente arriba de  $m$  son dbp. Si quitamos uno de ellos, el espacio resultante seguirá teniendo a  $m$  como mínimo.

**Proposición 2.2.23.** *Sea  $X$  un  $etf$  y  $m \in X$  mínimo o máximo. Entonces  $m$  es rdf de  $X$ . En particular  $X$  es contráctil.*

*Demostración.* Sea  $i : \{m\} \hookrightarrow X$  la inclusión y sea  $r$  la única retracción de  $i$ , entonces  $ir \leq 1_X$  ó  $1_X \leq ir$ , luego  $ir \simeq 1_X \text{ rel}\{m\}$ . □

**Corolario 2.2.24.** *Los abiertos minimales de un  $etf$ ,  $U_x$ , tienen máximo y por lo tanto son contráctiles. En particular todo espacio finito es localmente contráctil.*

**Corolario 2.2.25.** *Todo espacio finito conexo tiene un revestimiento universal.*

## 2.3. Sucesiones graduales

**Definición 2.3.1.** Una sucesión de funciones  $f_0, \dots, f_n$  en  $Y^X$  se dirá *gradual* si para todo  $0 \leq i \leq n-1$  existe  $x_i \in X$  tal que  $f_i|_{X \setminus \{x_i\}} = f_{i+1}|_{X \setminus \{x_i\}}$  y  $(f_i(x_i), f_{i+1}(x_i)) \in \mathcal{H}(Y)$  o bien  $(f_{i+1}(x_i), f_i(x_i)) \in \mathcal{H}(Y)$ .

En otras palabras, dos funciones consecutivas de la sucesión coinciden en todo  $X$  salvo en un punto, en el que las imágenes de ambas funciones son comparables y no hay otro punto entre ellas.

**Teorema 2.3.2.** *Sean  $X, Y$   $etf$   $T_0$  y sean  $f, g : X \rightarrow Y$  funciones continuas. Entonces  $f \simeq g$  si y sólo si existe una sucesión gradual que empieza en  $f$  y termina en  $g$ .*

Intuitivamente, la idea es que si hay una homotopía entre  $f$  y  $g$ , entonces existe una cadena de pequeñas homotopías intermedias que en cada paso se mueven sólo en un punto y sólo un lugar.

En realidad ya vimos que dadas dos funciones homotópicas  $f$  y  $g$ , hay una sucesión de funciones continuas que empieza en  $f$  y termina en  $g$  donde dos consecutivas son comparables. Bastará entonces ver que entre dos funciones comparables hay una sucesión gradual para probar el teorema. Uno podría creer que esto es trivial afirmando: si  $f \leq g$ , para definir una sucesión gradual de  $f$  hasta  $g$  basta elegir un punto cualquiera  $x \in X$  y “subir”  $f(x)$  un lugar. Repetir esto hasta llegar a  $g$ . El problema está en que al “subir”  $f(x)$  un lugar, la función resultante puede no ser continua. Todo se reduce entonces a ver que podemos elegir un  $x \in X$  de tal modo que al construir la siguiente función, esta siga siendo continua.

Si bien este problema no es demasiado complicado, definiremos una especie de distancia entre elementos de  $Y^X$  para hacer prolijamente la inducción y luego concluiremos algunos resultados con respecto a  $\mathcal{H}(Y^X)$ , el diagrama de Hasse de  $Y^X$ .

**Ejemplo 2.3.3.** Si  $X = Y = \mathfrak{S}$  y  $f, g : X \rightarrow Y$  son las funciones  $f \equiv 0$ ,  $g \equiv 1$ , entonces  $f$  y  $g$  son homotópicas pues  $X$  contráctil. Luego debe existir una sucesión gradual  $f = f_0, \dots, f_n = g$ . Notemos que  $n$  no puede ser 1 porque no es cierto que  $f$  y  $g$  “coinciden en todo  $X$  salvo en un punto”. ¿Quién puede ser  $f_1$  entonces?. Si  $f$  y  $f_1$  coincidieran en 1, entonces  $f_1(0) = 1$ , pero, de esta forma,  $f_1$  no sería continua. Si coinciden en 0,  $f_1(1) = 1$ , es decir que  $f_1 = 1_{\mathfrak{S}}$ , que sí es una función continua y vale que  $f, 1_{\mathfrak{S}}, g$  es sucesión gradual.

**Definición 2.3.4.** Dado un  $etf$   $T_0$   $X$ , definimos  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  de la siguiente manera:

$$d(x, y) = \infty \text{ si } x \text{ e } y \text{ no son comparables.}$$

$$d(x, y) = 0 \text{ si } x = y.$$

$$d(x, y) = d(y, x) = \text{máx}\{n \in \mathbb{N} \mid \exists x_0, \dots, x_n \text{ con } x = x_0 < \dots < x_n = y\} \text{ si } x < y.$$

No debe confundirse con la noción de distancia en un grafo (esto sería cambiar la palabra *máx* por *mín*).

**Definición 2.3.5.** Dados  $X$  e  $Y$  etf  $T_0$ , definimos  $\tilde{d} : Y^X \times Y^X \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ,  $\tilde{d}(f, g) = \sum_{x \in X} d(f(x), g(x))$ .

*Observación 2.3.6.* En general  $d$  y  $\tilde{d}$  no son distancias. En lugar de la desigualdad triangular, tenemos que  $\forall x, x', x'' \in X$  tales que  $x \leq x' \leq x''$ , vale que  $d(x, x'') \geq d(x, x') + d(x', x'')$ .

Notemos que si  $f \leq g$ , entonces  $\tilde{d}(f, g) < \infty$ .

*Observación 2.3.7.* Sea  $X$  un etf  $T_0$  y sean  $x, x' \in X$ . Entonces vale que  $d(x, x') = 1$  si y sólo si  $(x, x') \in \mathcal{H}(X)$  ó  $(x', x) \in \mathcal{H}(X)$ .

**Lema 2.3.8.** Sean  $X, Y$  etf  $T_0$ . Sean  $f, g \in Y^X$  tales que  $f \leq g$  y sea  $n = \tilde{d}(f, g)$ . Entonces existe una sucesión gradual  $f = f_0 \leq \dots \leq f_n = g$ .

*Demostración.* Por inducción en  $n$ .

Para  $n = 0$ ,

$$0 = \tilde{d}(f, g) = \sum_{x \in X} d(f(x), g(x)) \Rightarrow d(f(x), g(x)) = 0 \forall x \in X$$

entonces  $f = f_0 = g$  es una sucesión gradual.

Supongamos que vale para  $n$  y que  $\tilde{d}(f, g) = n + 1$ .

Sea  $S = \{x \in X \mid fx \neq gx\}$ .  $S \neq \emptyset$  pues  $f \neq g$  ya que  $\tilde{d}(f, g) \geq 1$ . Consideramos  $s$  un elemento maximal en  $S$ . Como  $f(s) < g(s)$ ,  $m = d(f(s), g(s)) \geq 1$  y existen  $f(s) = y_0 < \dots < y_m = g(s)$ . Definimos  $f_1 : X \rightarrow Y$ ,  $f_1|_{X \setminus \{s\}} = f|_{X \setminus \{s\}}$ ,  $f_1(s) = y_1$ . Veamos que  $f_1$  es continua. Sean  $x < x' \in X$

- $x \neq s \neq x' \Rightarrow f_1(x) = f(x) \leq f(x') = f_1(x')$ .
- $x' = s \Rightarrow f_1(x) = f(x) \leq f(x') = f(s) < y_1 = f_1(x')$ .
- $x = s \Rightarrow s < x'$ . Pero  $s$  era maximal en  $S$ , luego  $x' \notin S$  y, entonces,  $f(x') = g(x')$ . Así,  $f_1(x) = y_1 \leq g(s) \leq g(x') = f(x') = f_1(x')$ .

Es claro que  $d(f(s), y_1) + d(y_1, g(s)) \geq 1 + m - 1 = m$ , pues  $f(s) < y_1 < \dots < y_m = g(s)$ . Pero  $d(f(s), y_1) + d(y_1, g(s)) \leq m$  por 2.3.6. Luego  $d(f(s), y_1) = 1$  y  $d(y_1, g(s)) = m - 1$ . Entonces tenemos que  $d(f_1(s), g(s)) = m - 1 = d(f(s), g(s)) - 1$ .

Vale que  $f_1 \leq g$  porque para  $x \neq s$   $f_1(x) = f(x) \leq g(x)$  y  $f_1(s) = y_1 \leq g(s)$ .

Además

$$\tilde{d}(f_1, g) = \sum_{x \in X} d(f_1(x), g(x)) = \sum_{x \neq s} d(f_1(x), g(x)) + d(f_1(s), g(s)) =$$

$$\sum_{x \neq s} d(f(x), g(x)) + d(f(s), g(s)) - 1 = \tilde{d}(f, g) - 1 = n + 1 - 1 = n.$$

Por hipótesis inductiva, existe  $f_1 = h_0 \leq \dots \leq h_n = g$  una sucesión gradual. Pero  $f, f_1$  es una sucesión gradual pues  $d(f(s), f_1(s)) = 1$  y  $f(s) < f_1(s)$ , de donde  $(f(s), f_1(s)) \in \mathcal{H}(Y)$ . Entonces la yuxtaposición de ambas sucesiones es la sucesión gradual buscada.  $\square$

Ahora ya estamos en condiciones de demostrar el teorema.

*Demostración Teorema 2.3.2.* En una sucesión gradual, dos funciones consecutivas son comparables, luego homotópicas. Por la transitividad de  $\simeq$ , los extremos de una sucesión gradual son funciones homotópicas. Recíprocamente, si  $f \simeq g$ , entonces existe una sucesión  $f = h_0, \dots, h_n = g$  de funciones continuas tales que dos consecutivas son comparables. Pero entre dos comparables hay una sucesión gradual por el lema anterior (si  $h_i \geq h_{i+1}$  hay una sucesión gradual que empieza en  $h_{i+1}$  y termina en  $h_i$ , la inversa es una suc. gradual que empieza en  $h_i$  y termina en  $h_{i+1}$ ) y la concatenación de sucesiones graduales es también una sucesión gradual.  $\square$

**Lema 2.3.9.**  $f \leq g < h \Rightarrow \tilde{d}(f, h) \geq \tilde{d}(f, g) + 1$ .

*Demostración.* Como  $g \neq h$ , entonces  $\tilde{d}(g, h) \geq 1$ . Entonces, por 2.3.6, vale que

$$\begin{aligned} \tilde{d}(f, h) &= \sum_{x \in X} d(f(x), h(x)) \geq \sum_{x \in X} d(f(x), g(x)) + \sum_{x \in X} d(g(x), h(x)) \geq \\ &\geq \tilde{d}(f, g) + \tilde{d}(g, h) = \tilde{d}(f, g) + 1. \end{aligned}$$

$\square$

Como  $Y^X$  es un *etf*  $T_0$ , está bien definida  $d : Y^X \times Y^X \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  y vale el siguiente

**Corolario 2.3.10.** Si  $d(f, g) < \infty$ , entonces  $\tilde{d}(f, g) = d(f, g)$ .

*Demostración.* De 2.3.8 se deduce que  $d(f, g) \geq \tilde{d}(f, g)$  ya que dos funciones consecutivas en una sucesión gradual son distintas.

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $f \leq g$ .

Si  $f = f_0 < \dots < f_n = g$ , por el lema anterior, inductivamente, tenemos  $\tilde{d}(f, f_i) \geq i \forall 0 \leq i \leq n$ , en particular  $\tilde{d}(f, g) \geq n$ . Tomando supremo obtenemos  $\tilde{d}(f, g) \geq d(f, g)$ .  $\square$

*Observación 2.3.11.* Podría ocurrir que  $d(f, g) = \infty$  y  $\tilde{d}(f, g) < \infty$ .

**Proposición 2.3.12.** Sean  $X, Y$  *etf*  $T_0$ . Entonces valen las siguientes afirmaciones

1.  $((x, y), (x', y')) \in \mathcal{H}(X \times Y) \Leftrightarrow x = x', (y, y') \in \mathcal{H}(Y)$  ó  $(x, x') \in \mathcal{H}(X), y = y'$ .
2.  $(z, z') \in \mathcal{H}(X \amalg Y) \Leftrightarrow (z, z') \in \mathcal{H}(X)$  ó  $(z, z') \in \mathcal{H}(Y)$ .
3.  $(f, g) \in \mathcal{H}(Y^X) \Leftrightarrow f \leq g$  y  $f, g$  es una sucesión gradual.

*Demostración.* Las dos primeras salen de cómo es el orden del producto y de la unión disjunta de dos órdenes.

Para probar la última notemos que por 2.3.7, vale que  $(f, g) \in \mathcal{H}(Y^X) \Leftrightarrow f \leq g$  y  $d(f, g) = 1 \Leftrightarrow f \leq g$  y  $\tilde{d}(f, g) = 1$ . Pero por 2.3.8, esto sucede si y sólo si  $f \leq g$  y  $f, g$  es una sucesión gradual.  $\square$



## 2.4. Un poco más sobre dimensión binaria

Recordemos que en capítulo anterior habíamos probado que para un *etf*  $T_0$ ,  $X \neq \emptyset$ , vale que  $\lceil \log_2 |X| \rceil \leq d(X) \leq |X|$ . Vimos también que estas cotas se alcanzaban.

Además, habíamos probado que al quitar un punto de un espacio finito  $T_0$ , la dimensión se mantenía, disminuía en uno o disminuía en dos. Vamos a mejorar esta proposición para el caso en el que el punto sacado sea un beat point y esto nos ayudará a decir algo más sobre las cotas recién mencionadas.

**Proposición 2.4.1.** *Sea  $X$  un *etf*  $T_0$  y sea  $x$  un *bp* de  $X$ , entonces  $d(X \setminus \{x\}) \geq dX - 1$ .*

*Demostración.* Esta demostración es técnica, similar a la de la proposición del caso general. Si  $x$  es *ubp* de  $X$ , entonces  $\exists y > x$  tal que  $z > x \Rightarrow z \geq y$ . Sea  $i : X \setminus \{x\} \hookrightarrow \mathfrak{S}^{d(X \setminus \{x\})}$  subespacio. Definimos  $i' : X \rightarrow \mathfrak{S}^{d(X \setminus \{x\})+1}$

$$i'(z) = \begin{cases} i(y)0 & \text{si } z = x \\ i(z)0 & \text{si } z < x \\ i(z)1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Veamos que  $i'$  es continua. Supongamos  $z < z'$

- $z = x \Rightarrow z' > x \Rightarrow z' \geq y \Rightarrow iz' \geq iy \Rightarrow iz'1 \geq iy0 \Rightarrow i'z' \geq i'z$ .
- $z' = x \Rightarrow z < x < y \Rightarrow iz \leq iy \Rightarrow iz0 \leq iy0 \Rightarrow i'z \leq i'z'$ .
- $z \neq x \neq z'$ .  
Si  $z' < x$ ,  $iz \leq iz' \Rightarrow iz0 \leq iz'0 \Rightarrow i'z \leq i'z'$ .

En otro caso  $i'z' = iz'1$  e  $i'z = iz0$  ó  $iz1$ . Como  $iz' \geq iz$ , de cualquiera de las dos formas se tiene  $i'z' \geq i'z$ .

Supongamos que  $i'z = i'z'$

- Si  $z = x$ , pero  $z' \neq x$ , como  $i'x$  termina en 0, entonces  $i'z'$  también. Luego  $z' < x$  e  $iy0 = iz'0 \Rightarrow iy = iz' \Rightarrow z' = y \Rightarrow y < x$ , absurdo.
- Si  $z' = x$ , por simetría  $z$  debe ser también igual a  $x$ .
- Si  $z \neq x \neq z'$ , entonces  $iz = iz' \Rightarrow z = z'$ .

Esto demuestra que  $i'$  es inyectiva. Para ver que  $i'$  es inicial, supongamos que  $i'z < i'z'$

- $z = x \Rightarrow iy0 < i'z' \Rightarrow iy \leq iz' \Rightarrow y \leq z' \Rightarrow z \leq z'$ .
- $z' = x \Rightarrow i'z'$  termina en 0  $\Rightarrow i'z$  también  $\Rightarrow z \leq z'$ .
- $z \neq x \neq z' \Rightarrow iz \leq iz' \Rightarrow z \leq z'$ .

Así se tiene que  $i'$  es subespacio y  $dX \leq d(X \setminus \{x\}) + 1$ .

Si  $x$  es *dbp* de  $X$ , entonces es *ubp* de  $X^{op}$ . Luego  $dX = d(X^{op}) \leq d(X^{op} \setminus \{x\}) + 1 = d((X \setminus \{x\})^{op}) + 1 = d(X \setminus \{x\}) + 1$ .

□

*Observación 2.4.2.* Los primeros dos ejemplos de 1.8.22 muestran que puede ocurrir  $d(X \setminus \{x\}) = dX$  y  $d(X \setminus \{x\}) = dX - 1$ .

**Corolario 2.4.3.** *Si  $X$  es un etf  $T_0$  contráctil, entonces  $dX \leq |X| - 1$ .*

*Demostración.* Por inducción en  $n = |X| \in \mathbb{N}$  ( $\emptyset$  no es contráctil).

Para  $n = 1$  vale. Si vale para  $n$  y  $|X| = n + 1$ , como  $X$  no es minimal (si lo fuera, como es homotópicamente equivalente a  $*$ , sería homeomorfo, pero  $n + 1 > 1$ , absurdo), tiene un bp  $x$ .  $X \setminus \{x\}$  es del mismo tipo homotópico que  $X$ , luego contráctil. Además es  $T_0$ . Por hipótesis inductiva  $d(X \setminus \{x\}) \leq |X \setminus \{x\}| - 1 = |X| - 2$ . Y por la proposición anterior  $dX \leq d(X \setminus \{x\}) + 1 \leq |X| - 1$ , como queríamos ver.  $\square$

De esta forma, obtenemos un resultado más fuerte que el de 1.8.4.

**Corolario 2.4.4.** *Dados  $n, m \in \mathbb{N}$  tales que  $n \geq 2$  y  $\lceil \log_2 n \rceil \leq m \leq n$ , existe un etf  $T_0$ ,  $X$ , tal que  $|X| = n$  y  $dX = m$ . Además si  $m \neq n$ ,  $X$  se puede tomar contráctil.*

*Demostración.* Sea  $X_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$  un subespacio de  $\mathfrak{S}^{\lceil \log_2 n \rceil}$  de  $n$  puntos tal que  $u_1$  es el máximo de  $\mathfrak{S}^{\lceil \log_2 n \rceil}$ . Definimos recursivamente  $X_{i+1} = \mathbb{C}(X_i \setminus \{u_{i+1}\})$  y al máximo de  $X_i$  lo notaremos  $u'_i$ . Es decir, los espacios se van obteniendo sacando un punto del anterior y “poniéndolo arriba de todo”.

Notemos que  $u'_i$  es dbp de  $X_i \forall 2 \leq i \leq n$  ( $x < u'_i \Rightarrow x \leq u'_{i-1}$ ), luego si  $j \geq 1$ ,  $d(X_{j+1} \setminus \{u'_{j+1}\}) \geq dX_{j+1} - 1$ . Pero  $X_{j+1} \setminus \{u'_{j+1}\} = X_j \setminus \{u_{j+1}\}$  es subespacio de  $X_j$ , entonces  $dX_j \geq d(X_{j+1} \setminus \{u'_{j+1}\}) \geq dX_{j+1} - 1$ . Luego

$$dX_{j+1} \leq dX_j + 1 \quad (1)$$

Todos los espacios de la sucesión tienen máximo y, luego, son contráctiles.

Ahora,

$$dX_1 = \lceil \log_2 n \rceil \text{ y } dX_n = n - 1 \quad (2)$$

La primera igualdad la vimos cuando probamos que las cotas eran buenas. Para probar la segunda, notemos que  $X_n$  es una cadena  $u'_1 < \dots < u'_n$ , pero en  $n$  elementos de  $\mathfrak{S}^{n-2}$  hay dos con la misma cantidad de *unos* en su escritura y, por lo tanto, incomparables. Luego  $dX_n \geq n - 1$ . La otra desigualdad vale por el último corolario.

De (1) y (2) se deduce que la sucesión  $dX_i$   $1 \leq i \leq n$  recorre todos los valores entre  $\lceil \log_2 n \rceil$  y  $n - 1$ . Si alguno no se alcanza, consideramos el mínimo que no se alcance  $m_0$  e, inductivamente, sale por (1) que  $dX_i < m_0$  para todo  $i$ . Pero  $dX_n = n - 1 \geq m_0$ , que es una contradicción.

El caso  $m = n$  lo vimos cuando vimos que las cotas eran buenas.  $\square$

## Capítulo 3

# Complejos simpliciales y espacios finitos

Las principales ideas de este capítulo fueron introducidas por Alexandroff ([1]) y más tarde ampliadas por McCord ([14]).

Veremos que a cada espacio finito  $X$  se le puede asociar un complejo simplicial  $\mathcal{K}(X)$  con una equivalencia débil  $\varphi_X : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow X$ . En particular los grupos de homotopía de  $X$  serán isomorfos a los de  $|\mathcal{K}(X)|$ . Recíprocamente, para cada complejo simplicial finito  $K$ , veremos que existe un espacio finito  $T_0$ , que notaremos  $\mathcal{X}(K)$ , débilmente equivalente a  $|K|$ .

Trabajaremos con el álgebra de incidencia de un poset para poder definir la función de Möbius y relacionarla con la característica de Euler del espacio finito asociado. Por la teoría de McCord, quedará claro que la característica de Euler de un espacio finito es la misma que la de la realización del complejo simplicial asociado. Fusionaremos esta idea con la teoría de Stong para dar una demostración puramente combinatoria del hecho de que dos espacios finitos  $T_0$  homotópicamente equivalentes tienen la misma característica de Euler.

Finalmente definiremos el grupo de paseos de un espacio finito  $T_0$  y demostraremos que es isomorfo al grupo fundamental del espacio. El grupo de paseos tiene como elementos caminos cerrados sobre las aristas del diagrama de Hasse del espacio. Esto permitirá lograr un cálculo del grupo fundamental de un espacio finito de forma gráfica, utilizando su diagrama de Hasse.

### 3.1. Introducción básica a los complejos simpliciales y equivalencias débiles

En esta sección recordaremos algunas nociones básicas sobre complejos simpliciales y equivalencias débiles que nos serán imprescindibles en el resto del capítulo y en el capítulo siguiente.

Una *equivalencia (homotópica) débil* entre dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$ , es una función continua  $f : X \rightarrow Y$  que induce isomorfismos en los grupos de homotopía. Es decir que para todo punto base  $x \in X$ , se tiene que  $f_* : \pi_i(X, x) \rightarrow \pi_i(Y, f(x))$  es un isomorfismo de grupos para todo  $i \geq 1$  y una función biyectiva para  $i = 0$ .

En general decimos que dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$  son *débilmente equivalentes* si existe una cadena finita de espacios  $X = X_1, X_2, \dots, X_n = Y$  y equivalencias débiles  $X_i \rightarrow X_{i+1}$  o viceversa, para cada  $i$ . En realidad, un resultado conocido de topología algebraica nos asegura que, en este caso, existe un CW-complejo  $Z$  y equivalencias débiles  $Z \rightarrow X, Z \rightarrow Y$ .

Recordamos también el siguiente teorema de Whitehead.

**Teorema 3.1.1.** (*Whitehead*) *Una función entre CW-complejos  $f : X \rightarrow Y$  es una equivalencia débil si y sólo si es una equivalencia homotópica.*

Notar que las equivalencias homotópicas son siempre equivalencias débiles. Este teorema nos asegura que, para CW-complejos, vale la recíproca. En particular el teorema vale para *poliedros* (ver definición más abajo) dado que los poliedros son casos particulares de CW-complejos.

Para una exposición detallada sobre complejos simpliciales, recomendamos [19].

Un *complejo simplicial*  $K$  consiste en un conjunto  $V_K$ , cuyos elementos se llaman *vértices*, junto con una colección de subconjuntos no vacíos de  $V_K$ , llamados *símplices* que cumplen lo siguiente:

- (a) Los subconjuntos que contienen sólo un vértice son símplices y
- (b) Todo subconjunto no vacío de un simplex es un simplex.

Si  $s$  es un simplex de  $K$ , escribiremos  $s \in K$ .

Por ejemplo podemos definir un complejo simplicial  $K$ , cuyo conjunto de vértices es  $\{a, b, c\}$  y cuyos símplices son  $\{a\}, \{b\}, \{c\}$  y  $\{a, b\}$ .

Existe un complejo simplicial cuyo conjunto de vértices es  $\mathbb{Z}$  y cuyo conjunto de símplices es  $\{\{n\} \text{ tal que } n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{n, n+1\} \text{ tal que } n \in \mathbb{Z}\}$ .

La *dimensión* de un simplex  $s$  es  $q = \#s - 1$ . En este caso diremos que  $s$  es un *q-simplex*. La *dimensión* de un complejo simplicial  $K$  es el supremo de las dimensiones de los símplices de  $K$ .

Si  $K$  y  $L$  son complejos simpliciales, se define el complejo  $K * L$  cuyos símplices son los símplices de  $K$ , los símplices de  $L$  y las uniones de un simplex de  $K$  y uno de  $L$ .

Por ejemplo si  $K = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}\}$  como antes y  $L = \{\{d\}\}$ , entonces  $K * L = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}\}$ .

Dados  $K$  y  $L$  complejos, un *morfismo simplicial*  $\varphi : K \rightarrow L$  es una función  $\varphi : V_K \rightarrow V_L$  entre los conjuntos de vértices que manda simplices en simplices.

Un *subcomplejo* de un complejo simplicial  $K$ , es un complejo simplicial  $L$  cuyos simplices son simplices de  $K$ . Un subcomplejo se dirá *pleno* si para todo  $s \in K$  tal que  $s \subseteq V_L$ , vale que  $s \in L$ .

Si  $s \in K$ , entonces el complejo  $\bar{s}$  que tiene como simplices a todos los subconjuntos no vacíos de  $s$  es un subcomplejo pleno de  $K$ . Sin embargo el complejo  $\dot{s}$  que tiene como simplices a los subconjuntos propios de  $s$  es un subcomplejo de  $K$  que no es pleno.

**Definición 3.1.2.** Dado un complejo  $K$ , se define  $|K|$  la *realización geométrica* de  $K$  como el conjunto de funciones de  $\alpha : V_K \rightarrow I$  tales que

(i) El soporte de  $\alpha$  es un simplex de  $K$  y

(ii)  $\sum_{v \in V_K} \alpha(v) = 1$ .

A este conjunto puede asignársele una métrica, definiendo

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{v \in V_K} (\alpha(v) - \beta(v))^2}.$$

A este espacio métrico se lo suele notar  $|K|_d$ .

Si  $s \in K$ , el *simplex cerrado*  $|s|$  es el subespacio de  $|K|_d$  formado por las funciones cuyo soporte está incluido en  $s$  y el *simplex abierto*  $\langle s \rangle$  es el subespacio de las funciones cuyo soporte coincide con  $s$ . Si  $s$  es un  $q$ -simplex, entonces  $|s|$  es homeomorfo a  $\{x \in \mathbb{R}^{q+1} \mid 0 \leq x_i \leq 1 \text{ y } \sum x_i = 1\}$ .

La topología que convenientemente se le da a  $|K|$  no es la topología métrica (aunque coincide con esta cuando  $K$  es finito). Le daremos a  $|K|$  la topología final respecto de la familia  $\{i : |s| \hookrightarrow |K| \text{ tal que } s \in K\}$ . Concretamente, un subconjunto de  $|K|$  es cerrado si al intersecarlo con todos los simplices cerrados es cerrado. Cuando hablemos del espacio topológico  $|K|$  nos referiremos al conjunto con esa topología.

Sea  $K$  un complejo simplicial y sea  $X$  un espacio topológico. Una función  $H : |K| \times I \rightarrow X$  es continua si y sólo si  $H|_{|s| \times I}$  es continua para todo  $s \in K$ .

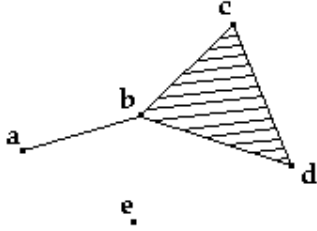
La topología de  $|s|$  como subespacio de  $|K|$  es la misma que la topología inducida por la métrica de  $|K|_d$ .

Pensando a los vértices de  $K$  como elementos de  $|K|$ , donde  $v(v') = \delta_{vv'}$ , podemos escribir para  $\alpha \in |K|$ ,  $\alpha = \sum_{v \in V_K} \alpha(v)v$ .

Sea  $X$  un espacio topológico que es un subconjunto de un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Una función  $f : |K| \rightarrow X$  se dice lineal si  $f(\alpha) = \sum_{v \in V_K} \alpha(v)f(v)$ .

Si  $K$  es un complejo finito, entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  y una función  $f : |K| \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineal y subespacio.

Por ejemplo, si  $K = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$ , podemos ver a  $|K|$  como subespacio de  $\mathbb{R}^2$



Una *triangulación* de un espacio topológico  $X$ , es un complejo simplicial  $K$  junto con un homeomorfismo  $f : |K| \rightarrow X$ . Diremos que  $X$  es un *poliedro* si admite alguna triangulación.

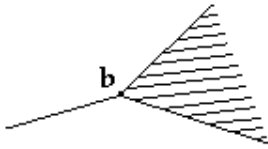
Por ejemplo, si  $s$  es un  $(q + 1)$ -simplex, entonces  $|\dot{s}|$  es homeomorfo a  $S^q$ . Luego  $S^q$  es un poliedro.

Si  $\varphi : K \rightarrow L$  es un morfismo simplicial, se define  $|\varphi| : |K| \rightarrow |L|$

$$|\varphi|(\alpha)(v') = \sum_{\varphi(v)=v'} \alpha(v)$$

para  $v' \in V_L$ . De esta forma  $|\varphi|$  resulta lineal y, por lo tanto, continua.

Dado  $v \in V_K$  se define la estrella de  $v$  como el abierto  $st(v) = \{\alpha \in |K| \mid \alpha(v) \neq 0\}$ . En el ejemplo anterior  $st(b)$  es el subconjunto



**Observación 3.1.3.** Una combinación convexa de puntos de  $|K|$  está bien definida si y sólo si los puntos se encuentran en un mismo simplex cerrado.

Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $K$  un complejo simplicial. Dos funciones continuas  $f, g : X \rightarrow |K|$  son *simplicialmente cercanas* si  $f(x)$  y  $g(x)$  caen en un mismo simplex cerrado para todo  $x \in X$ . En este caso la homotopía lineal  $H : X \times I \rightarrow |K|$ ,  $H(x, t) = tf(x) + (1 - t)g(x)$ , está bien definida y resulta continua. Luego  $f \simeq g$ .

Si  $K$  es un complejo y  $L$  es un complejo que consta de un único vértice  $v$ , entonces  $K * L$  se llama un *cono* y se nota  $K * v$ . Notar que  $|K * v|$  es un espacio contráctil.

**Definición 3.1.4.** Sea  $K$  un complejo y sea  $s \in K$  un  $q$ -simplex. Definimos el *baricentro* de  $s$  como

$$b(s) = \sum_{v \in s} \frac{1}{q+1} v \in |K|.$$

Definimos  $K'$ , la (primera) subdivisión baricéntrica de  $K$ , como el complejo cuyos símlices son los conjuntos  $\{b(s_1), \dots, b(s_n)\}$  tales que  $s_1 \subseteq \dots \subseteq s_n$ .

Recursivamente se definen las subdivisiones baricéntricas de orden superior,  $K^{(n+1)} = (K^{(n)})'$

La función lineal  $i_K : |K'| \rightarrow |K|$  que manda cada vértice de  $K'$  en el punto correspondiente de  $|K|$  es un homeomorfismo.

Sean  $K$  y  $L$  dos complejos y sea  $f : |K| \rightarrow |L|$  una función continua. Un morfismo simplicial  $\varphi : K \rightarrow L$  se dice una *aproximación simplicial* de  $f$  si  $|\varphi|$  y  $f$  son simplicialmente cercanas. En este caso  $|\varphi| \simeq f$ .

El resultado más importante de esta teoría es el teorema de aproximación simplicial, que establece que si  $f : |K| \rightarrow |L|$  es una función continua, entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$  existe  $\psi : K^{(n)} \rightarrow L$  una aproximación simplicial de  $f$ .

### 3.2. Complejos simpliciales asociados a espacios finitos

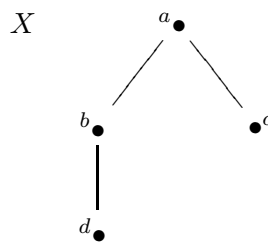
**Definición 3.2.1.** Un cubrimiento abierto  $\mathcal{U}$  de un espacio topológico  $X$ , se dice *tipo base* si para todo  $U, V \in \mathcal{U}$  y para todo  $x \in U \cap V$ , existe  $W \in \mathcal{U}$  tal que  $x \in W \subseteq U \cap V$ .

El siguiente teorema, cuya demostración no daremos, puede encontrarse en [14] y se deduce del teorema clásico de quasifibraciones de Dold y Thom [3].

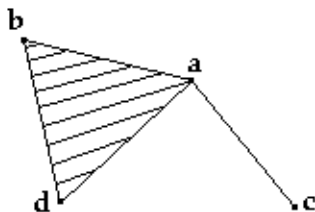
**Teorema 3.2.2.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios, sea  $\mathcal{U}$  un cubrimiento tipo base de  $Y$  y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua tal que  $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$  es una equivalencia débil para todo  $U \in \mathcal{U}$ . Entonces  $f$  es una equivalencia débil.

**Definición 3.2.3.** Sea  $X$  un *et*  $T_0$ . Definimos el *complejo simplicial asociado a  $X$* ,  $\mathcal{K}(X)$ , como el complejo cuyos vértices son los puntos de  $X$  y cuyos símlices son las cadenas no vacías de  $X$ .

**Ejemplo 3.2.4.** Sea



Entonces  $\mathcal{K}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}\}$ ,  $|\mathcal{K}(X)| \subseteq \mathbb{R}^2$



*Observación 3.2.5.*  $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X^{op})$ .

*Observación 3.2.6.* Notemos que si  $Y$  es un subespacio de  $X$ , entonces  $\mathcal{K}(Y)$  es un subcomplejo pleno de  $\mathcal{K}(X)$ . Si consideramos  $N$  el máximo subcomplejo de  $\mathcal{K}(X)$  cuyos vértices son disjuntos con  $\mathcal{K}(Y)$ , por la demostración de [19] (pág. 124), se puede probar que  $|\mathcal{K}(Y)|$  es un rdf de  $|\mathcal{K}(X)| \setminus |N|$ .

Notaremos con  $(x_1, \dots, x_n)$  al simplex abierto  $\langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle$  de  $\mathcal{K}(X)$ , donde  $x_1 < \dots < x_n$ .

**Definición 3.2.7.** Sea  $X$  un *etf*  $T_0$ . Definimos  $\varphi_X : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow X$  de la siguiente manera: si  $\alpha \in (x_1, \dots, x_n)$ , entonces  $\varphi_X(\alpha) = x_1$ , o, equivalentemente,  $\varphi_X(\alpha) = \min(\text{sop}\alpha)$ .

**Lema 3.2.8.** Sea  $X$  un *etf*  $T_0$ , sea  $U$  un abierto de  $X$  y sea  $N$  el máximo subcomplejo de  $\mathcal{K}(X)$  cuyos vértices son disjuntos con  $\mathcal{K}(U)$ . Entonces

$$\bigcap_{x \in U} st(x) = \varphi_X^{-1}(U) = |\mathcal{K}(X)| \setminus |N|.$$

*Demostración.* Sea  $\alpha \in (x_1, \dots, x_n)$ , entonces  $\alpha \in \varphi_X^{-1}(U)$  sii  $x_1 \in U$  sii  $x_i \in U$  para algún  $1 \leq i \leq n$  sii  $\text{sop}(\alpha) \cap U \neq \emptyset$  sii  $\alpha \in st(x)$  para algún  $x \in U$ . Con esto probamos la primera igualdad. Para probar la segunda, notemos que, como  $N$  es un subcomplejo pleno de  $\mathcal{K}(X)$ , entonces  $\alpha \in |\mathcal{K}(X)| \setminus |N|$  sii  $\text{sop}(\alpha) \not\subseteq N$  sii  $\text{sop}(\alpha) \cap \mathcal{K}(U) \neq \emptyset$ , que es una de las equivalencias de la primera parte de la demostración.  $\square$

Como  $st(x)$  es abierto para todo  $x \in X$ , de la primera igualdad del lema se deduce el siguiente

**Corolario 3.2.9.**  $\varphi_X$  es continua.

De 3.2.6 y la segunda igualdad del lema se deduce el siguiente

**Corolario 3.2.10.** Si  $U$  abierto de  $X$ , entonces  $|\mathcal{K}(U)|$  es un rdf de  $\varphi_X^{-1}(U)$ .

**Lema 3.2.11.** Sea  $x \in X$ . Entonces  $\varphi_X^{-1}(U_x)$  es contráctil.

*Demostración.* Por el corolario anterior, basta ver que  $|\mathcal{K}(U_x)|$  es contráctil. Para probar esto, veremos que  $\mathcal{K}(U_x) = (\mathcal{K}(U_x) \setminus \{x\}) * x$ , un cono. La inclusión del complejo de la izquierda en el cono es trivial. Recíprocamente, si  $s \in \mathcal{K}(U_x) \setminus \{x\} \in \mathcal{K}(U_x)$ , entonces  $s$  es una cadena en  $U_x$ . Pero  $x$  es máximo en  $U_x$ , luego  $s \cup \{x\}$  es una cadena en  $U_x$  y, entonces, un simplex en  $\mathcal{K}(U_x)$ .  $\square$

*Observación 3.2.12.* Una función continua entre *etf*  $T_0$ ,  $f : X \rightarrow Y$ , preserva el orden y, entonces manda cadenas en cadenas. Luego  $f : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$  es un morfismo simplicial. Por lo tanto  $\mathcal{K}$  resulta un funtor covariante de la categoría de espacios topológico finitos  $T_0$  a la categoría de complejos simpliciales finitos.

**Teorema 3.2.13.** Sea  $X$  *etf*  $T_0$ , entonces  $\varphi_X : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow X$  es una equivalencia débil. Además, si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua entre *etf*  $T_0$ , entonces  $f\varphi_X = \varphi_Y|f|$ . Es decir que el siguiente diagrama conmuta



$$\begin{array}{ccc}
|\mathcal{K}(X)| & \xrightarrow{|f|} & |\mathcal{K}(Y)| \\
\downarrow \varphi_X & & \downarrow \varphi_Y \\
X & \xrightarrow{f} & Y
\end{array}$$

*Demostración.* Los abiertos minimales de  $X$  son un cubrimiento tipo base,  $\varphi_X$  es continua y  $\varphi_X|_{\varphi^{-1}(U_x)} : \varphi^{-1}(U_x) \rightarrow U_x$  es una equivalencia homotópica para todo  $x \in X$  porque  $\varphi^{-1}(U_x)$  y  $U_x$  son contráctiles para todo  $x \in X$ . Luego estamos en condiciones de aplicar 3.2.2, de donde  $\varphi_X$  resulta una equivalencia débil.

Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua entre *etf*  $T_0$  y  $\alpha \in |\mathcal{K}(X)|$ , entonces, como  $f$  preserva el orden,  $f\varphi_X(\alpha) = f(\text{mín}(\text{sop}\alpha)) = \text{mín}(f(\text{sop}\alpha)) = \text{mín}(\text{sop}(|f|(\alpha))) = \varphi_Y|f|(\alpha)$ .  $\square$

**Corolario 3.2.14.** *Sea  $X$  un *etf*. Entonces existe un complejo simplicial finito  $\mathcal{K}(X)$  y una equivalencia débil  $\varphi : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow X$ .*

*Demostración.* Existe un *etf*  $T_0$ ,  $X_0 \subseteq X$  tal que  $i : X_0 \hookrightarrow X$  es una equivalencia homotópica. Luego  $i\varphi_{X_0} : |\mathcal{K}(X_0)| \rightarrow X$  es una equivalencia débil.  $\square$

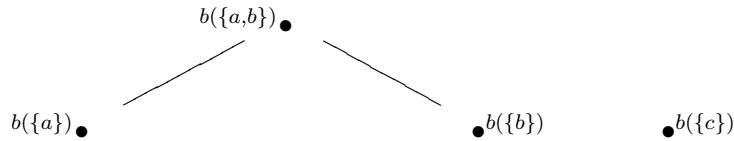
Ahora le asociaremos a cada complejo simplicial finito un espacio finito. Recordemos que dar una topología en un conjunto es lo mismo que dar un preorden en ese conjunto.

Recordemos también que dado un complejo simplicial  $K$ , notábamos con  $K'$  a la subdivisión baricéntrica de  $K$ .

**Definición 3.2.15.** Sea  $K$  un complejo simplicial finito. Definimos  $\mathcal{X}(K)$ , el *etf asociado a  $K$*  como el conjunto cuyos puntos son los vértices de  $K'$  (es decir los baricentros de los símplexes de  $K$ ) con el orden siguiente:  $b(s) \leq b(s')$  si  $s \subseteq s'$ .

Notemos que  $\mathcal{X}(K)$  es  $T_0$  porque el preorden definido es en realidad un orden.

**Ejemplo 3.2.16.** Si  $K = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}\}$ , entonces  $\mathcal{X}(K)$  tiene el siguiente diagrama de Hasse



*Observación 3.2.17.* Si  $K$  es un complejo simplicial finito, entonces  $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) = K'$ .

**Definición 3.2.18.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales finitos y sea  $\psi : K \rightarrow L$  un morfismo simplicial. Definimos la *función continua asociada a  $\psi$* , como  $\psi' : \mathcal{X}(K) \rightarrow \mathcal{X}(L)$ ,  $\psi'(b(s)) = b(\psi(s))$ .

Notar que  $\psi'$  es efectivamente continua porque si  $b(s_1) \leq b(s_2)$ , entonces  $s_1 \subseteq s_2$ , luego  $\psi(s_1) \subseteq \psi(s_2)$  y  $b(\psi(s_1)) \leq b(\psi(s_2))$ .

Luego,  $\mathcal{X}$  es un funtor covariante que va de la categoría de complejos simpliciales finitos a la categoría de espacios topológico finitos  $T_0$ , definido en los morfismos como  $\mathcal{X}(\psi) = \psi'$ .

**Lema 3.2.19.** *Sea  $K$  un complejo y sea  $\xi : K' \rightarrow K$  tal que  $\xi(b(s)) \in s$  para todo  $s \in K$ . Entonces  $\xi$  es una aproximación simplicial de  $i_K$ .*

*Demostración.* Sea  $s = \{b(s_1), \dots, b(s_m)\} \in K'$ , donde  $s_1 \subseteq \dots \subseteq s_m$ . Entonces  $\xi(s) = \{\xi(b(s_1)), \dots, \xi(b(s_m))\} \subseteq s_m$  y, por lo tanto  $\xi(s) \in K$ .

Supongamos ahora que  $\alpha \in |s|$ , entonces  $\alpha$  es una combinación convexa de  $b(s_1), \dots, b(s_m)$ , luego  $i_K(\alpha)$  es combinación convexa de  $i_K(b(s_1)), \dots, i_K(b(s_m))$ . Pero  $i_K(b(s_j)) \in |s_j| \subseteq |s_m| \forall 1 \leq j \leq m$ , por lo tanto  $i_K(\alpha) \in |s_m|$ . Queremos ver que  $|\xi|(\alpha)$  también cae en  $|s_m|$ , pero  $|\xi|(\alpha) \in |\{\xi(b(s_1)), \dots, \xi(b(s_m))\}|$  (puede haber repeticiones) y  $\xi(b(s_j)) \in s_j \subseteq s_m \forall j$ , luego  $|\xi|(\alpha) \in |s_m|$ , como queríamos probar.  $\square$

**Lema 3.2.20.** *Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales finitos y sea  $\psi : K \rightarrow L$  un morfismo simplicial, entonces  $i_L|\psi| \simeq |\psi|i_K$ .*

*Demostración.* Basta demostrar que  $i_L|\psi|$  y  $|\psi|i_K$  son simplicialmente cercanas, es decir que  $\forall \alpha \in |K'|$ ,  $i_L|\psi|(\alpha)$  y  $|\psi|i_K(\alpha)$  caen en el mismo simplex cerrado. Supongamos que  $\alpha \in |\{b(s_1), \dots, b(s_n)\}|$  donde  $s_1 \subseteq \dots \subseteq s_n$  son símlices de  $K$ , entonces  $i_K(\alpha) \in |s_n|$  y, por lo tanto  $|\psi|i_K(\alpha) \in |\psi(s_n)|$ . Por otro lado,  $|\psi|(\alpha) \in |\{\psi(b(s_1)), \dots, \psi(b(s_n))\}| = |\{b(\psi(s_1)), \dots, b(\psi(s_n))\}|$  y, entonces,  $i_L|\psi|(\alpha) \in |\psi(s_n)|$ . Luego  $i_L|\psi|(\alpha)$  y  $|\psi|i_K(\alpha)$  sí caen en el mismo simplex cerrado,  $|\psi(s_n)|$ .  $\square$

**Teorema 3.2.21.** *Sea  $K$  un complejo simplicial finito, entonces existe una equivalencia débil  $\varphi_K : |K| \rightarrow \mathcal{X}(K)$ . Además, si  $\psi : K \rightarrow L$  es un morfismo simplicial entre complejos simpliciales finitos, entonces  $\psi'\varphi_K \simeq \varphi_L|\psi|$ .*

*Demostración.* Ya sabemos por el teorema anterior que  $\varphi_{\mathcal{X}(K)} : |\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))| \rightarrow \mathcal{X}(K)$  es una equivalencia débil, pero  $i_K : |K'| \rightarrow |K|$  es un homeomorfismo, luego  $\varphi_K = \varphi_{\mathcal{X}(K)}i_K^{-1} : |K| \rightarrow \mathcal{X}(K)$  es también una equivalencia débil.

Por definición de  $\varphi_K$  se tiene que  $\psi'\varphi_K = \psi'\varphi_{\mathcal{X}(K)}i_K^{-1}$ . Por el teorema anterior sabemos que  $\psi'\varphi_{\mathcal{X}(K)}i_K^{-1} = \varphi_{\mathcal{X}(L)}|\psi'|i_K^{-1}$  y por el lema anterior se tiene que  $\varphi_{\mathcal{X}(L)}|\psi'|i_K^{-1} \simeq \varphi_{\mathcal{X}(L)}i_L^{-1}|\psi|$ , que es igual a  $\varphi_L|\psi|$  por definición de  $\varphi_L$ . Por lo tanto  $\psi'\varphi_K \simeq \varphi_L|\psi|$ , que era lo que queríamos demostrar.  $\square$

### 3.3. Función de Möbius y característica de Euler

En esta sección definiremos  $\mu$ , la función de Möbius de un poset  $P$ , que es un elemento del álgebra de incidencia de  $P$  y generaliza a la función homónima clásica de teoría de números.

Un teorema de P. Hall nos permitirá dar un significado combinatorio de  $\mu(x, y)$  y de esta forma estableceremos una relación entre la función de Möbius del poset ampliado  $\widehat{P}$  y la característica de Euler del espacio finito  $P$ .

Demostraremos que la característica de Euler de un espacio finito es invariante por equivalencia homotópica desde un enfoque completamente distinto al usual y concluiremos con una caracterización de los espacios minimales sugerida por la teoría utilizada.

**Definición 3.3.1.** Sea  $P$  un poset finito. Definimos  $\mathfrak{A}(P)$ , el *álgebra de incidencia de  $P$*  como el conjunto de funciones  $f : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(x, y) = 0$  si  $x \not\leq y$ . El producto escalar y la suma son los usuales y

$$fg(x, y) = \sum_{z \in P} f(x, z)g(z, y).$$

Notemos que si  $f, g \in \mathfrak{A}(P)$  entonces  $fg \in \mathfrak{A}(P)$ . La función  $I(x, y) = \delta_{xy}$  es el neutro para el producto de  $\mathfrak{A}(P)$ . Es fácil ver que  $\mathfrak{A}(P)$  es efectivamente una  $\mathbb{R}$ -álgebra.

**Proposición 3.3.2.** Sea  $P$  un poset finito. Es posible renombrar a los elementos de  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  de manera tal que  $p_i \leq p_j$  implica  $i \leq j$ .

*Demostración.* Lo demostraremos por inducción en  $n = |P|$ .

Si  $n = 1$  no hay nada que probar.

Supongamos que vale para  $n$  y que  $|P| = n + 1$ . Sea  $x \in P$ . Por hipótesis inductiva  $P \setminus \{x\} = \{p'_1, p'_2, \dots, p'_n\}$  y  $p'_i \leq p'_j$  implica  $i \leq j$ .

Si  $x$  es mínimo en  $P$ , entonces llamamos  $p_1 = x$  y  $p_i = p'_{i-1} \forall 2 \leq i \leq n + 1$ . Ese nombramiento funciona.

Si  $x$  no es mínimo, definimos  $m = \text{máx}\{i \mid p'_i \leq x\}$ . Llamamos  $p_i = p'_i \forall 1 \leq i \leq m$ ,  $p_{m+1} = x$  y  $p_i = p'_{i-1} \forall m + 1 \leq i \leq n + 1$ . Ese nombramiento funciona.  $\square$

De aquí en más, cuando hablemos de un poset finito, estaremos refiriéndonos a un poset con un nombramiento de sus elementos con las características de la proposición 3.3.2.

**Definición 3.3.3.** Sea  $P$  un poset finito. Diremos que  $M \in Mn(\mathbb{R})$  es *compatible* con  $P$  si  $p_i \not\leq p_j$  implica  $M_{ij} = 0$ . Llamaremos  $\mathfrak{B}(P)$  al conjunto de matrices compatibles con  $P$ .

**Proposición 3.3.4.** Sea  $\varphi : \mathfrak{A}(P) \rightarrow Mn(\mathbb{R})$  definido por  $\varphi(f)_{ij} = f(p_i, p_j)$ . Entonces  $\varphi$  es un monomorfismo de álgebras cuya imagen coincide con  $\mathfrak{B}(P)$ . Luego  $\mathfrak{A}(P)$  y  $\mathfrak{B}(P)$  son álgebras isomorfas.

*Demostración.* Es claro que  $\varphi$  es inyectiva, que  $\text{Im}(\varphi) = \mathfrak{B}(P)$  y que si  $f, g \in \mathfrak{A}(P)$  y  $k \in \mathbb{R}$ , entonces  $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$  y  $\varphi(kf) = k\varphi(f)$ . Además  $\varphi(fg)_{ij} = fg(p_i, p_j) = \sum_k f(p_i, p_k)g(p_k, p_j) = \sum_k \varphi(f)_{ik}\varphi(g)_{kj} = (\varphi(f)\varphi(g))_{ij}$ .  $\square$

De aquí en adelante tendremos en cuenta esta dualidad, pensando a un elemento de  $\mathfrak{A}(P)$  como función o como matriz, según sea conveniente. Como la definición de  $\mathfrak{A}(P)$  no depende del nombramiento de los elementos (a diferencia de la definición de  $\mathfrak{B}(P)$ ), entonces, en particular,  $\mathfrak{B}(P)$  no depende del nombramiento salvo isomorfismo.

**Lema 3.3.5.** Sea  $f \in \mathfrak{A}(P)$  inversible en  $Mn(\mathbb{R})$ . Entonces  $f^{-1} \in \mathfrak{A}(P)$ .

*Demostración.* Sea  $R$  el polinomio característico de  $f$ . Como  $f$  es inversible, entonces  $R(0) \neq 0$ . Luego  $R(X) = Q(X)X + r$  para cierto  $Q \in \mathbb{R}[X]$  y cierto  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Por el teorema de Hamilton-Cayley, se tiene que  $0 = R(f) = Q(f)f + rI$ , luego  $I = -\frac{Q(f)}{r}f$ , de donde  $f^{-1} = -\frac{Q(f)}{r} \in \mathfrak{A}(P)$ .  $\square$

*Observación 3.3.6.* Si  $f \in \mathfrak{A}(P)$ , entonces es una matriz triangular superior pues  $i > j \Rightarrow i \not\leq j \Rightarrow p_i \not\leq p_j \Rightarrow f_{ij} = 0$ . Luego,  $f \in \mathfrak{A}(P)$  es inversible si y sólo si los elementos de la diagonal son no nulos.

**Definición 3.3.7.** Definimos  $\zeta_P \in \mathfrak{A}(P)$ , como

$$\zeta_P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por la observación anterior  $\zeta_P$  es inversible. Definimos  $\mu_P \in \mathfrak{A}(P)$  la *función de Möbius* como el inverso de  $\zeta_P$ .

Por último definimos  $\nu_P = \zeta_P - I$ . Es decir  $\nu_P(x, y)$  es 1 si  $x < y$  y 0 en otro caso.

Si se sobreentiende que estamos hablando del poset  $P$ , escribiremos  $\zeta_P = \zeta$ ,  $\mu_P = \mu$  y  $\nu_P = \nu$  por simplicidad de notación.

Si  $P$  es el poset de subconjuntos de un conjunto finito dado, ordenado por la inclusión, puede demostrarse que  $\mu(A, B) = (-1)^{|A \setminus B|}$ .

Si consideramos  $P = \llbracket 1, n \rrbracket$ , ordenado por la divisibilidad de enteros, entonces  $\mu_P(a, b) = \mu\left(\frac{b}{a}\right)$  donde  $\mu$  es la función de Möbius clásica de teoría de números ([6]).

**Lema 3.3.8.** Sea  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  un poset finito. Entonces  $(\nu^k)_{ij}$  es la cantidad de cadenas de  $P$  de longitud  $k + 1$  con mínimo  $p_i$  y máximo  $p_j$ .

*Demostración.* Lo demostraremos por inducción en  $k$ .

Para  $k = 1$ . Si  $p_i < p_j$  existe una única cadena de longitud 2 con mínimo  $p_i$  y máximo  $p_j$ . En otro caso no existe ninguna cadena con esas características. Luego vale el lema para  $k = 1$ .

Supongamos que vale para  $k$ . Tenemos que  $(\nu^{k+1})_{ij} = (\nu^k \nu)_{ij} = \sum_l (\nu^k)_{il} \nu_{lj}$  que, por hipótesis inductiva, es la suma sobre  $l$  de la cantidad de cadenas de longitud  $k + 1$  de  $p_i$  a  $p_l$  por la cantidad de cadenas de longitud 2 de  $p_l$  a  $p_j$ . Pero el conjunto de cadenas de longitud  $k + 1$  con mínimo  $p_i$  y máximo menor a  $p_j$  está en biyección con el conjunto de cadenas de longitud  $k + 2$  con mínimo  $p_i$  y máximo  $p_j$ . Luego vale el lema para  $k + 1$ .  $\square$

*Notación 3.3.9.* Denotaremos con  $\mathcal{CP}$  al conjunto de cadenas del poset  $P$ .

**Teorema 3.3.10.** (Hall) Sea  $P$  un poset finito y sean  $x, y \in P$ . Entonces

$$\mu(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (-1)^n |\{C \in \mathcal{CP} \mid |C| = n + 1, \min(C) = x, \max(C) = y\}|.$$

*Demostración.* Notemos que como  $\nu$  es triangular superior y tiene la diagonal nula, entonces es nilpotente, luego

$$\mu = \zeta^{-1} = (\nu + I)^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} (-1)^k \nu^k.$$

Evaluando en  $(x, y)$ , por el lema, se tiene el teorema.  $\square$

**Teorema 3.3.11.** (*Inversión de Möbius*) Sea  $P$  un poset finito y sean  $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces

$$g(x) = \sum_{y \leq x} f(y) \text{ si y sólo si } f(x) = \sum_{y \leq x} \mu(y, x) f(y).$$

Análogamente

$$g(x) = \sum_{y \geq x} f(y) \text{ si y sólo si } f(x) = \sum_{y \geq x} \mu(x, y) f(y).$$

*Demostración.* Definimos  $P' = P \cup \{0\}$  donde  $0 < p \forall p \in P$ . Sea  $F, G \in \mathfrak{A}(P')$  definidas por

$$F(x, y) = \begin{cases} f(y) & \text{si } x = 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad G(x, y) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x = 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces  $g(x) = \sum_{0 \neq y \leq x} f(y)$  sii  $G(0, x) = (F\zeta_{P'})(0, x) \forall x \neq 0$  sii  $G = F\zeta_{P'}$  sii  $G\mu_{P'} = F$  sii  $(G\mu_{P'})(0, x) = F(0, x) \forall x \neq 0$  sii  $f(x) = \sum_{0 \neq y \leq x} \mu_{P'}(y, x) f(y)$ . Pero por el teorema de Hall, esto ocurre sii  $f(x) = \sum_{0 \neq y \leq x} \mu_P(y, x) f(y)$ .

La segunda parte sale directamente considerando  $P^{op}$ , el orden opuesto, ya que  $\mu_P(x, y) = \mu_{P'}(y, x)$  por el teorema de Hall.  $\square$

Considerando subórdenes finitos del orden de los enteros dado por la divisibilidad se consigue el resultado clásico de inversión de Möbius de teoría de números. Considerando el poset de subconjuntos de un conjunto dado, se obtiene una forma general del principio de inclusión/exclusión ([6]).

**Definición 3.3.12.** Dado un poset finito  $P$ , se define  $\widehat{P} = P \cup \{0, 1\}$  el poset que resulta de adjuntarle a  $P$  un mínimo 0 y un máximo 1.

Es sabido que la *característica de Euler* depende solamente de los grupos de homología de los espacios ([9]) y, por lo tanto es invariante por equivalencias homotópicas.

La característica de Euler de un poliedro  $|K|$  es

$$\chi(|K|) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (-1)^n \alpha_n = \sum_{s \in K} (-1)^{|s|+1},$$

donde  $\alpha_n$  es la cantidad de  $n$ -símplices en  $K$ . Por lo dicho recién, es claro que no depende de la triangulación.

Dado un poset finito  $P$  (es decir un *etf*  $T_0$ ), sabemos que existe una equivalencia débil entre  $|K(P)|$  y  $P$ . En particular,  $P$  y  $|K(P)|$  tienen los mismos grupos de homología y, entonces,  $\chi(P)$ , la característica de Euler del espacio finito  $P$ , coincide con  $\chi(|K(P)|)$ .

**Proposición 3.3.13.**  $\chi(P) = \mu_{\widehat{P}}(0, 1) + 1$ .

*Demostración.* Para  $n \geq 2$ , existe una biyección

$$\varphi_n : \{C \in \mathcal{C}\widehat{P} \mid |C| = n + 1, \min(C) = 0, \max(C) = 1\} \rightarrow \{C \in \mathcal{C}P \mid |C| = n - 1\},$$

donde  $\varphi_n(C) = C \setminus \{0, 1\}$ .

Luego, por el teorema de Hall,

$$1 + \mu_{\widehat{P}}(0, 1) = 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n |\{C \in \mathcal{C}\widehat{P} \mid |C| = n + 1, \min(C) = 0, \max(C) = 1\}| =$$

$$1 - |\{C \in \mathcal{C}\widehat{P} \mid |C| = 2, \min(C) = 0, \max(C) = 1\}| + \sum_{n \geq 2} (-1)^n |\{C \in \mathcal{C}P \mid |C| = n - 1\}| =$$

$$1 - 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (-1)^n |\{s \in \mathcal{K}(P) \mid |s| = n + 1\}| = \chi(|\mathcal{K}(P)|) = \chi(P),$$

como queríamos demostrar.  $\square$

*Observación 3.3.14.* Sea  $X$  un *etf*  $T_0$  y sea  $x$  un ubp de  $X$ . Por definición,  $\exists y > x$  tal que  $z > x \Rightarrow z \geq y$ . Si  $z$  es tal que  $z > x$ , entonces  $z \geq y$ . Si  $z$  es tal que  $z \leq x$ , entonces  $z \leq y$ . Luego vale la siguiente afirmación: Si  $z$  es comparable con  $x$ , entonces es comparable con  $y$ .

Análogamente, si  $x$  dbp de  $X$ ,  $\exists y$  tal que  $z$  comparable con  $x$  implica  $z$  comparable con  $y$ .

A continuación utilizaremos la teoría de Stong para dar una demostración original y sencilla del hecho de que la característica de Euler de un espacio finito  $T_0$  es invariante por equivalencias homotópicas.

**Teorema 3.3.15.** Sean  $X, Y$  *etf*  $T_0$  del mismo tipo homotópico, entonces  $\chi(X) = \chi(Y)$ .

*Demostración.* Existen sucesiones de *etf*  $T_0$   $X = X_0 \supseteq \dots \supseteq X_n = X_c$  e  $Y = Y_0 \supseteq \dots \supseteq Y_m = Y_c$  donde  $X_{i+1}$  resulta de quitarle un bp a  $X_i$  y lo mismo ocurre con  $Y_{i+1}$  e  $Y_i$ . Como  $X \simeq Y$ ,  $X_c$  e  $Y_c$  son homeomorfos y, por lo tanto  $\chi(X_c) = \chi(Y_c)$ . Luego, para probar el teorema, alcanza ver que la característica de Euler no cambia al quitar un beat point.

Sea  $P$  un poset y  $p \in P$  un bp. Por la observación 3.3.14, existe  $q \in P$  tal que  $r$  comparable con  $p$  implica  $r$  comparable con  $q$ .

Definimos

$$\varphi : \{C \in \mathcal{C}P \mid p \in C, q \notin C\} \longrightarrow \{C \in \mathcal{C}P \mid p \in C, q \in C\}$$

$$C \longmapsto C \cup \{q\}$$

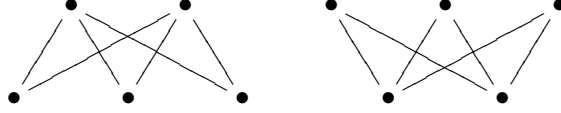
Está bien definida y es biyectiva. Luego tenemos que

$$\chi(P \setminus \{p\}) - \chi(P) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n |\{C \in \mathcal{C}P \mid p \in C, |C| = n\}| = \sum_{p \in C \in \mathcal{C}P} (-1)^{|C|} =$$

$$\sum_{q \notin C} (-1)^{|C|} + \sum_{q \in C} (-1)^{|C|} = \sum_{q \notin C} (-1)^{|C|} + \sum_{q \notin C} (-1)^{|\varphi(C)|} = \sum_{q \notin C} (-1)^{|C|} + \sum_{q \notin C} (-1)^{|C|+1} = 0.$$

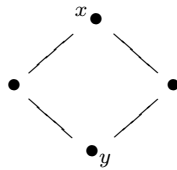
$\square$

*Observación 3.3.16.* Como  $\chi(X) = \chi(X^{op})$  es fácil ver que no vale la recíproca del teorema. Por ejemplo



tienen la misma característica de Euler, pero no son homotópicamente equivalentes por ser minimales no homeomorfos.

Observemos que no vale la recíproca de 3.3.14, es decir: Si existen  $x$  e  $y$  tales que  $z$  comparable con  $x \Rightarrow z$  comparable con  $y$ , esto no significa que  $x$  sea necesariamente un bp. Por ejemplo esto ocurre en



Sin embargo veremos que vale un resultado un poco más débil en la próxima proposición.

**Definición 3.3.17.** Sea  $P$  es un preorden y sea  $p \in P$ . Definimos  $C_p$ , el subconjunto de elementos en  $P$  comparables con  $p$ . Sólo cuando sea estrictamente necesario, notaremos  $C_p^P$  para enfatizar el preorden en el que estamos trabajando.

*Observación 3.3.18.* Si  $X$  es un *etf*, entonces  $C_x = U_x \cup \overline{\{x\}}$ .

$(\{C_x\}_{x \in X}, \subseteq)$  es un preorden. Se tiene la siguiente caracterización de los espacios finitos minimales.

**Proposición 3.3.19.** *Sea  $X$  un etf. Entonces  $X$  es minimal si y sólo si los subconjuntos  $C_x$  son incomparables dos a dos.*

*Demostración.* Si  $X$  no es minimal, entonces no es  $T_0$  o bien es  $T_0$  pero tiene un bp. Si  $X$  no es  $T_0$  entonces existen dos elementos  $x \neq x' \in X$  tales que  $C_x = C_{x'}$ . Si  $X$  es  $T_0$ , pero tiene un bp, entonces, por 3.3.14, existe  $y \in X$ ,  $y \neq x$  tal que  $C_y \subseteq C_x$ .

Recíprocamente, supongamos que existen  $x \neq y \in X$  tales que  $C_x \subseteq C_y$ . Si  $X$  no es  $T_0$ , entonces no es minimal y no hay nada que probar. Analicemos entonces el caso en el que  $X$  es  $T_0$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $x < y$ . El conjunto  $\{z \in X \mid z < y, C_z \subseteq C_y\}$  es no vacío y tiene, por lo tanto, un elemento maximal  $x'$ . Afirmamos que  $z > x'$  implica  $z \geq y$ , es decir que  $x'$  es un ubp. En caso contrario, existiría  $z > x'$  tal que  $z \not\geq y$ . Pero  $C_{x'} \subseteq C_y$ , luego debería ocurrir que  $z < y$ . Por definición de  $x'$  se tiene que  $C_z \not\subseteq C_y$ , luego  $\exists w \in C_z \setminus C_y$  y, como  $z < y$ , se deduce que  $w \geq z$ . Pero entonces  $w \in C_{x'} \setminus C_y$ , que es una contradicción.

Como  $X$  tiene un bp, no es minimal. □

*Observación 3.3.20.* En la demostración de recién se probó que si  $X$  es un *etf*  $T_0$  y existen  $x, y \in X$  tales que  $C_x \subseteq C_y$ , entonces  $X$  tiene un bp distinto de  $y$ .

**Corolario 3.3.21.** *Sea  $X$  un  $etf$  y sea  $x \in X$ , entonces  $C_x$  es contráctil.*

*Demostración.* El conjunto  $A = \{Y \subseteq C_x \mid x \in Y \text{ y además } Y \text{ es rdf de } C_x\}$  es no vacío. Sea  $Y \in A$  con la mínima cantidad de puntos, luego  $Y$  es  $T_0$ . Si  $Y \neq \{x\}$ , entonces  $\exists y \in Y$  tal que  $y \neq x$ . Pero  $C_x^Y = Y$ , luego  $C_y^Y \subseteq C_x^Y$  y, por la observación anterior se tiene que existe un bp  $z \in Y$  distinto de  $x$ . Luego  $Y \setminus \{z\} \in A$ , que contradice la minimalidad de  $Y$ . Por lo tanto  $Y = \{x\}$  es homotópicamente equivalente a  $C_x$ , entonces  $C_x$  es contráctil.  $\square$

### 3.4. El grupo de paseos y el $\pi_1$

Dado un complejo simplicial  $K$ , una *arista*  $e$  de  $K$  es un par  $e = (v, v')$  de vértices que están en un mismo simplex. A  $i(e) = v$  lo llamamos el *inicio* de la arista  $e$  y a  $f(e) = v'$ , el *final*. Un *camino* en  $K$  es una sucesión de aristas  $e_1, \dots, e_n$  tal que  $f(e_j) = i(e_{j+1}) \forall 1 \leq j < n$ . Notaremos  $C(K)$  al conjunto de caminos en  $K$ . Dado  $v_0 \in K$ , un *camino cerrado* en  $v_0$  es un camino  $e_1, \dots, e_n$  tal que  $i(e_1) = f(e_n) = v_0$ . Diremos que dos caminos cerrados en  $v_0$ ,  $\xi$  y  $\xi'$ , son *simplemente equivalentes* si existe un simplex  $\{v, v', v''\} \in K$  tal que el conjunto  $\{\xi, \xi'\}$  coincide con  $\{\xi_1(v, v')(v', v'')\xi_2, \xi_1(v, v'')\xi_2\}$  para ciertos  $\xi_1, \xi_2 \in C(K) \cup \{\emptyset\}$ .

Diremos que dos caminos cerrados en  $v_0$ ,  $\xi$  y  $\xi'$ , son *equivalentes* y lo notaremos  $[\xi] = [\xi']$  si existe una sucesión de caminos cerrados en  $v_0$ ,  $\xi = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m = \xi'$  donde dos consecutivos son simplemente equivalentes.

Notaremos  $E(K, v_0)$  al conjunto de caminos cerrados en  $v_0$  cocientado por la relación de equivalencia recién definida. Se puede demostrar que el producto  $[\xi][\xi'] = [\xi\xi']$  está bien definido y hace de  $E(K, v_0)$  un grupo con neutro  $[(v_0, v_0)]$ . Además  $E(K, v_0)$  y  $\pi_1(|K|, v_0)$  resultan grupos isomorfos. Una demostración detallada se puede encontrar en [19].

Nuestro objetivo será describir el grupo fundamental de un espacio finito sin pasar por el complejo simplicial asociado. Trataremos de calcularlo en algunos casos utilizando solamente el diagrama de Hasse del espacio.

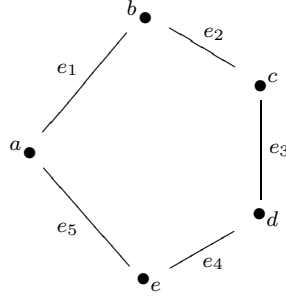
Sea  $X$  un  $etf$   $T_0$ . Una *arista* de  $X$  es un par  $(x, x')$  tal que  $(x, x') \in \mathcal{H}(X)$  ó  $(x', x) \in \mathcal{H}(X)$ . Si  $e = (x, x')$  es una arista de  $X$ , definimos  $e^{-1} = (x', x)$  la *arista inversa* de  $e$ . Al igual que antes se definen el *inicio* y *final* de una arista. Un *camino* en  $X$  se define igual que antes, pero aquí consideramos a  $\emptyset$  también. Si  $\xi = e_1 \dots e_n$  es un camino no vacío decimos que  $\xi$  *empieza* en  $i(\xi) = i(e_1)$  y termina en  $f(\xi) = f(e_n)$ . Decimos que  $\emptyset$  empieza y termina en  $x \forall x \in X$ . Diremos que un camino  $\xi = e_1 \dots e_n$  es *monótono* si  $e_i \in \mathcal{H}(X) \forall i$  ó  $e_i^{-1} \in \mathcal{H}(X) \forall i$ . Si  $\xi = e_1 \dots e_n$ , notaremos  $\xi^{-1} = e_n^{-1} \dots e_1^{-1}$ .

Sea  $x_0 \in X$ . Un *paseo* desde  $x_0$  es un camino en  $X$  que empieza y termina en  $x_0$ .

Diremos que dos paseos  $\xi$  y  $\xi'$  desde  $x_0$  son *cercanos* si existen caminos  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  tales que  $\xi_2$  y  $\xi_3$  son ambos monótonos, tienen sentido las composiciones  $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4, \xi_1\xi_4$  y el conjunto  $\{\xi, \xi'\}$  coincide con  $\{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4, \xi_1\xi_4\}$ .



**Ejemplo 3.4.1.** Sea  $X = \{a, b, c, d, e\}$  el espacio cuyo diagrama de Hasse es



Sus aristas son entonces  $e_1 = (a, b)$ ,  $e_2 = (c, b)$ ,  $e_3 = (d, c)$ ,  $e_4 = (e, c)$ ,  $e_5 = (e, a)$  y sus inversos.

El camino  $\xi = e_1 e_2^{-1} e_3^{-1} e_4^{-1} e_5$  es un paseo desde  $a$ . Si tomamos  $\xi_1 = e_1$ ,  $\xi_2 = e_1^{-1} e_5$ ,  $\xi_3 = e_5 e_1$  y  $\xi_4 = e_2^{-1} e_3^{-1} e_4^{-1} e_5$ , entonces tienen sentido las composiciones de la definición anterior y  $\xi_2$  y  $\xi_3$  son monótonos. Luego  $\xi$  es cercano al paseo  $e_1 e_1^{-1} e_5^{-1} e_5 e_1 e_2^{-1} e_3^{-1} e_4^{-1} e_5$ . Este último es cercano a  $e_1 e_1^{-1} e_5^{-1} e_5$  ya que  $e_5 e_1$  y  $e_2^{-1} e_3^{-1} e_4^{-1}$  son monótonos. El paseo  $e_1 e_1^{-1} e_5^{-1} e_5$  es cercano a  $e_5^{-1} e_5$  (tomando  $\xi_1 = \emptyset$ ) que es cercano al paseo  $\emptyset$ .

Diremos que dos paseos  $\xi$  y  $\xi'$  desde  $x_0$  son equivalentes, y lo notaremos  $(\xi) = (\xi')$ , si existe una sucesión de caminos desde  $x_0$  que empieza en  $\xi$  y termina en  $\xi'$  donde dos consecutivos son cercanos.

Definimos  $P(X, x_0)$  conjunto de paseos desde  $x_0$  cocientado por la relación de equivalencia definida recién.

**Proposición 3.4.2.** La operación  $\cdot : P(X, x_0) \times P(X, x_0) \rightarrow P(X, x_0)$  definida por  $(\xi) \cdot (\xi') = (\xi\xi')$  está bien definida y hace de  $P(X, x_0)$  un grupo.

*Demostración.* Si  $(\xi') = (\xi'')$ , entonces existe una sucesión  $\xi' = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n = \xi''$  donde dos consecutivos son cercanos. Luego  $\xi\xi' = \xi\xi_1, \xi\xi_2, \dots, \xi\xi_n = \xi\xi''$  cumple la misma propiedad y entonces  $(\xi\xi') = (\xi\xi'')$ . El otro caso es análogo. Esto demuestra que la operación está bien definida.

Claramente es asociativa.

La clase del camino vacío,  $(\emptyset)$ , es el neutro.

Sea  $\xi = e_1 \dots e_n$  un paseo desde  $x_0$ . Demostraremos por inducción en  $n$  que  $(\xi^{-1}) = (e_n^{-1} \dots e_1^{-1})$  es el inverso de  $(e_1 \dots e_n)$ . Si  $n = 0$  no hay nada que hacer. Supongamos que vale para  $n - 1$ . Notemos que

$$(e_1 \dots e_n)(e_n^{-1} \dots e_1^{-1}) = (e_1 \dots e_{n-1} e_n e_n^{-1} e_{n-1} \dots e_1^{-1}) = (e_1 \dots e_{n-1} e_{n-1} \dots e_1^{-1})$$

porque  $e_n$  y  $e_n^{-1}$  son monótonos. Pero

$$(e_1 \dots e_{n-1} e_{n-1} \dots e_1^{-1}) = (e_1 \dots e_{n-1})(e_{n-1} \dots e_1^{-1}) = 1$$

por hipótesis inductiva. Análogamente sale que  $(e_n^{-1} \dots e_1^{-1})(e_1 \dots e_n) = 1$ .

□

*Observación 3.4.3.* Si  $\xi_1\xi_2\xi_4$  y  $\xi_1\xi_3\xi_4$  son paseos desde  $x_0$  tales que  $\xi_2$  y  $\xi_3$  son monótonos, entonces  $(\xi_1\xi_2\xi_4) = (\xi_1\xi_2\xi_3^{-1}\xi_3\xi_4)$  pues  $\xi_3^{-1}$  también es monótono. Pero  $(\xi_1\xi_2\xi_3^{-1}\xi_3\xi_4) = (\xi_1\xi_3\xi_4)$ . Entonces  $\xi_1\xi_2\xi_4$  y  $\xi_1\xi_3\xi_4$  son equivalentes como paseos.

**Ejemplo 3.4.4.** Si en el ejemplo 3.4.1, tomamos  $\xi_1 = e_1$ ,  $\xi_2 = e_1^{-1}e_5^{-1}$ ,  $\xi_3 = e_2^{-1}e_3^{-1}e_4^{-1}$  y  $\xi_4 = e_5$ , la observación nos dice que  $e_1e_1^{-1}e_5^{-1}e_5$  y  $e_1e_2^{-1}e_3^{-1}e_4^{-1}e_5$  son equivalentes.

*Observación 3.4.5.* Si  $e = (x, x')$  es una arista de  $X$ , entonces  $x$  y  $x'$  son comparables, luego están en un mismo simplex de  $\mathcal{K}(X)$ . Así,  $e$  resulta también una arista del complejo  $\mathcal{K}(X)$ . Por lo tanto, si  $\xi \neq \emptyset$  es un paseo desde  $x_0$  en  $X$ , también es un camino cerrado en  $x_0$  en  $\mathcal{K}(X)$ .

**Lema 3.4.6.** *Sea  $\xi_1\xi_2\xi_3$  un paseo desde  $x_0$  tal que  $\xi_2 = e_1 \dots e_n$  es monótono. Entonces  $\xi_1\xi_2\xi_3$  y  $\xi_1(i(e_1), f(e_n))\xi_3$  son caminos cerrados en  $x_0$  y son equivalentes.*

*Demostración.* Como  $\xi_2$  es monótono, entonces los inicios y finales de las aristas  $e_j$  forman una cadena y entonces un simplex en  $\mathcal{K}(X)$ . Luego  $\xi_1(i(e_1), f(e_{j-1}))e_je_{j+1} \dots e_n\xi_3$  es simplemente equivalente a  $\xi_1(i(e_1), f(e_j))e_{j+1} \dots e_n\xi_3$  para todo  $2 \leq j \leq n+1$ . Inductivamente se tiene el lema. □

**Teorema 3.4.7.** *La función*

$$\eta : P(X, x_0) \rightarrow E(\mathcal{K}(X), x_0)$$

*definida por  $\eta([\xi]) = [\xi]$  si  $\xi \neq \emptyset$  y por  $[(x_0, x_0)]$  en  $\emptyset$ , está bien definida y es un isomorfismo de grupos.*

*Demostración.* Supongamos que  $\xi = \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$  y  $\xi' = \xi_1\xi_4$  son cercanos, con  $\xi_2$  y  $\xi_3$  monótonos. Aplicando dos veces el lema, se tiene que  $[\xi] = [\xi_1(i(\xi_2), f(\xi_2))(i(\xi_3), f(\xi_3))\xi_4]$ . Pero  $f(\xi_2) = i(\xi_3)$  e  $i(\xi_2) = f(\xi_1) = i(\xi_4) = f(\xi_3)$ , luego  $[\xi_1(i(\xi_2), f(\xi_2))(i(\xi_3), f(\xi_3))\xi_4] = [\xi_1(i(\xi_2), f(\xi_2))(f(\xi_2), i(\xi_2))\xi_4] = [\xi_1(i(\xi_2), i(\xi_2))\xi_4] = [\xi_1\xi_4]$ . Esto demuestra que  $\eta$  está bien definida.

Es claro que  $\eta$  es morfismo de grupos.

Dado un camino cerrado en  $x_0$ ,  $e_1 \dots e_n$ , podemos encontrar para cada arista  $e_j$  un camino monótono en  $X$ ,  $m(e_j)$ , con los mismos extremos. Definimos

$$\theta : E(\mathcal{K}(X), x_0) \rightarrow P(X, x_0)$$

como  $\theta([e_1 \dots e_n]) = (m(e_1) \dots m(e_n))$  y  $\theta([(x_0, x_0)]) = (\emptyset)$ .

Veamos que  $\theta$  está bien definida.

Para empezar,  $\theta([e_1 \dots e_n])$  no depende de la elección de los  $m(e_j)$  por 3.4.3.

Supongamos ahora que  $\xi = e_1 \dots e_n(x, x')(x', x'')e'_1 \dots e'_m$  y  $\xi' = e_1 \dots e_n(x, x'')e'_1 \dots e'_m$  son simplemente equivalentes, donde  $\{x, x', x''\} \in \mathcal{K}(X)$ .

Si  $x'$  está entre  $x$  y  $x''$ , entonces tomamos  $m((x, x'')) = m((x, x'))m((x', x''))$  y entonces  $\theta([\xi]) = \theta([\xi'])$ .

Si es  $x$  el que está entre  $x'$  y  $x''$ , entonces, definidos  $m((x, x'))$  y  $m((x, x''))$ , definimos  $m((x', x'')) = m((x, x'))^{-1}m((x, x''))$ . Así

$$\begin{aligned}\theta([\xi]) &= (m(e_1) \dots m(e_n)m((x, x'))m((x', x''))m(e'_1) \dots m(e'_m)) = \\ &= (m(e_1) \dots m(e_n)m((x, x'))m((x, x'))^{-1}m((x, x''))m(e'_1) \dots m(e'_m)) = \\ &= (m(e_1) \dots m(e_n)m((x, x''))m(e'_1) \dots m(e'_m)) = \theta([\xi']).\end{aligned}$$

Si  $x''$  está entre  $x$  y  $x'$ , se demuestra similarmente al caso anterior.

Es fácil ver que  $\theta\eta = Id$  pues para  $e_1 \dots e_n \in E(\mathcal{K}(X), x_0)$  donde los  $e_j$  son aristas de  $X$ , podemos tomar  $m(e_j) = e_j$ .

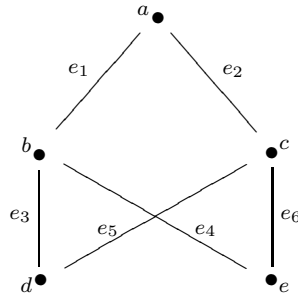
Por el lema vale que  $\eta\theta = Id$ . Luego  $\eta$  es un isomorfismo como queríamos demostrar.  $\square$

Como  $E(\mathcal{K}(X), x_0) \simeq \pi_1(|\mathcal{K}(X)|, x_0)$  y  $|\mathcal{K}(X)|$  y  $X$  son débilmente equivalentes, se tiene el siguiente

**Corolario 3.4.8.**  $P(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_0)$ .

Recordemos que dado  $X$  un *etf*  $T_0$  y un punto  $x_0 \in X$ , existe  $x_0 \in X_0 \subseteq X$   $T_0$  y homotópicamente equivalente a  $X$ . Luego  $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X_0, x_0) \simeq P(X, x_0)$ .

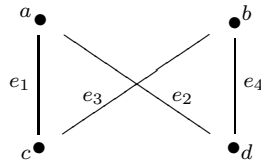
**Ejemplos 3.4.9.** (1) Sea  $X = \mathbb{C}SD_2 = \{a, b, c, d, e\}$ , con aristas  $e_1 = (b, a)$ ,  $e_2 = (c, a)$ ,  $e_3 = (d, b)$ ,  $e_4 = (e, b)$ ,  $e_5 = (d, c)$ ,  $e_6 = (e, c)$  y sus inversos.



El paseo desde  $e$ ,  $e_6e_2e_1^{-1}e_4^{-1}$  es cercano al paseo  $\emptyset$  porque  $\xi = e_6e_2$  y  $\xi' = e_1^{-1}e_4^{-1}$  son caminos monótonos. Luego  $(e_6e_2e_1^{-1}e_4^{-1}) = (\emptyset)$ , que es el neutro de  $P(X, e)$ .

El paseo  $e_6e_5^{-1}e_3e_4^{-1}$  es cercano a  $e_6e_5^{-1}e_5e_2e_1^{-1}e_3^{-1}e_3e_4^{-1}$  pues  $e_5e_2$  y  $e_1^{-1}e_3^{-1}$  son monótonos. Pero este es cercano a  $e_6e_2e_1^{-1}e_3^{-1}e_3e_4^{-1}$  que es cercano a  $e_6e_2e_1^{-1}e_4^{-1}$  que ya vimos es igual a 1. Luego  $(e_6e_5^{-1}e_3e_4^{-1}) = 1$  también. Esto va a pasar con cada paseo que elijamos ya que  $P(X, e) \simeq \pi_1(X, e) = 0$  porque  $X$  es contráctil.

(2) Sea  $X = \mathbb{S}D_2 = \{a, b, c, d\}$  con aristas  $e_1 = (c, a)$ ,  $e_2 = (d, a)$ ,  $e_3 = (c, b)$ ,  $e_4 = (d, c)$  y sus inversos



El elemento  $(\xi) = (e_1 e_2^{-1} e_4 e_3^{-1})$  no es el neutro de  $P(X, c)$  porque el único paseo cercano a  $\xi$  es  $\xi$ . De la misma forma  $(\xi)^n \neq 1 \forall n \neq 0$ . Además todo paseo desde  $c$  es una potencia de  $\xi$ . Luego  $P(X, c)$  es el grupo libre generado por un elemento. Es decir que  $P(X, c) = \mathbb{Z}$ . Este hecho no debe sorprender ya que  $P(X, c) = \pi_1(X, c) = \pi_1(|\mathcal{K}(X)|, c) = \pi_1(S^1, x_0)$ .

## Capítulo 4

# Modelos finitos minimales

Muchos de los espacios con los que se suele trabajar son Hausdorff, como por ejemplo las esferas, los poliedros (en general, los CW-complejos) y los espacios métricos. En este capítulo veremos que muy pocos de estos espacios son homotópicamente equivalentes a un espacio finito. Por esta razón, buscaremos que los espacios finitos modelen a estos espacios clásicos de un modo más débil. Una noción que ya trabajamos en el capítulo anterior es la de equivalencia débil. Muchos espacios resultan débilmente equivalentes a espacios finitos y por lo tanto esta va a ser la definición que adoptaremos para el *modelo finito* de un espacio  $X$ : un espacio finito, débilmente equivalente a  $X$ .

De esta manera, una forma de estudiar los grupos de homotopía de los espacios será estudiar los correspondientes grupos de homotopía de su modelo finito. Notemos que dar una función de un espacio  $X$  a un espacio finito  $Y$  de  $n$  puntos, es lo mismo que dar  $n$  subconjuntos disjuntos, ordenados, de  $X$ , cuya unión sea  $X$ . Por lo tanto las funciones de codominio finito son fáciles de describir y esta puede ser una buena forma de comenzar a estudiar varios problemas.

Si queremos considerar los modelos finitos de las esferas, la teoría del capítulo anterior nos sugiere que busquemos una triangulación  $(K, f)$  de la esfera  $S^n$ , y el espacio finito asociado  $\mathcal{X}(K)$  resultará débilmente equivalente a  $|K| = S^n$ . Pero esto puede dar como resultado un modelo con más puntos de los necesarios.

Por ejemplo, si  $s$  es un  $(n + 1)$ -simplex, entonces  $|\dot{s}|$  es homeomorfo a  $S^n$ . El cardinal de  $\mathcal{X}(\dot{s})$  es la cantidad de símlices de  $\dot{s}$ , es decir, la cantidad de subconjuntos propios  $V_s$ , que es  $2^{n+2} - 2$ . Por lo tanto ya sabemos que la  $n$ -esfera tiene un modelo finito de  $2^{n+2} - 2$  puntos. McCord encontró un modelo mucho más chico, con sólo  $2n + 2$  puntos.

May conjeturó que no hay modelos de las esferas más chicos que los que encontró McCord. Nosotros demostramos que la conjetura de May era cierta y que estos modelos finitos minimales son únicos salvo homeomorfismos.

### 4.1. Funciones entre espacios finitos y espacios $T_1$

Vimos que los espacios minimales son un sistema completo de representantes de los tipos de homotopía de espacios finitos. ¿Serán representantes de los tipos de homotopía

de todos los espacios topológicos?.

**Proposición 4.1.1.** *Sea  $X$  un etf, sea  $Y$  un espacio  $T_1$  y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Entonces  $f$  manda conexos no vacíos en puntos.*

*Demostración.* Sea  $C \subseteq X$  un subespacio conexo no vacío. Entonces  $f(C)$  es un subespacio de  $Y$  que es finito,  $T_1$  y conexo, luego  $f(C)$  es discreto y conexo. Por lo tanto  $f(C)$  debe ser un punto.  $\square$

Si las componentes conexas de un espacio finito son puntos, entonces el espacio es discreto. Luego, de la proposición anterior se deduce inmediatamente el siguiente

**Lema 4.1.2.** *Sea  $X$  un etf, sea  $Y$  un espacio  $T_1$  y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua e inyectiva. Entonces  $X$  es discreto.*

Si notamos con  $\simeq$  a la relación “es homotópicamente equivalente a”, vale para espacios topológicos no necesariamente finitos que:  $X_1 \simeq Y_1, X_2 \simeq Y_2 \Rightarrow X_1 \amalg X_2 \simeq Y_1 \amalg Y_2$ .

**Lema 4.1.3.** *Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos,  $f : X \rightarrow Y$  una equivalencia homotópica,  $x, x' \in X$ . Notamos con  $[x]$  a la componente conexa de  $x$ . Entonces  $[x] = [x']$  si y sólo si  $[fx] = [fx']$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $[x] = [x']$ , entonces  $\exists C$  conexo que contiene a  $x$  y  $x'$ . Como  $f$  continua, entonces  $f(C)$  es un conexo que contiene a  $fx$  y  $fx'$ .

Recíprocamente, si  $g$  es una inversa homotópica de  $f$ , por la primera parte,  $[fx] = [fx']$  implica que  $[gfx] = [gfx']$ . Pero existe una homotopía  $H : gf \simeq 1_X$ , luego para todo  $z \in X$  vale que  $H(\{z\} \times I)$  es un conexo que contiene a  $gf(z)$  y a  $z$ . En particular  $[x] = [gfx] = [gfx'] = [x']$ .  $\square$

**Lema 4.1.4.** *Sea  $X$  un etf. Si  $X_c$  es discreto, entonces  $X$  es unión disjunta de espacios contráctiles.*

*Demostración.*  $X$  es unión disjunta de sus componentes conexas (no sólo como conjuntos sino como espacios topológicos),  $X = \amalg X_i$ . Pero  $X_i \simeq X_{i_c}$ , luego por la última observación  $X \simeq \amalg X_{i_c}$  y entonces  $X_c \simeq \amalg X_{i_c}$ . Pero  $X_c$  y  $\amalg X_{i_c}$  son minimales, entonces homeomorfos y  $\amalg X_{i_c}$  resulta discreto. Ahora, como las componentes conexas de  $X$  son conexas, por el lema anterior, sus cores también los son. Luego  $X_{i_c}$  es discreto y conexo para todo  $i$ , entonces es un punto. Esto es, los  $X_i$  son contráctiles.  $\square$

**Proposición 4.1.5.** *Sea  $X$  un etf y sea  $Y$  un espacio  $T_1$  tales que  $X$  e  $Y$  son homotópicamente equivalentes. Entonces  $X$  es unión disjunta de espacios contráctiles.*

*Demostración.* Supongamos que  $X \simeq Y$ , entonces  $X_c \simeq Y$ . Sea  $f : X_c \rightarrow Y$  con inversa homotópica  $g$ . Entonces  $gf \simeq 1_{X_c}$ . Pero  $X_c$  minimal, luego  $gf = 1_{X_c}$ . En particular  $f$  es inyectiva y se aplica el lema 4.1.2, resultando que  $X_c$  es discreto. Por el lema anterior se tiene la tesis.  $\square$

**Corolario 4.1.6.** *Si  $X$  es un etf,  $Y$  es un espacio  $T_1$  conexo y  $X \simeq Y$ , entonces  $X$  e  $Y$  contráctiles.*

*Demostración.* Por la proposición anterior  $X$  es unión disjunta de contráctiles. Pero, por 4.1.3,  $Y$  conexo implica  $X$  conexo. Entonces  $X$  contráctil y, por lo tanto,  $Y$  también.  $\square$

*Observación 4.1.7.* Existen espacios topológicos que no tienen el tipo homotópico de ningún espacio finito. Basta tomar cualquier espacio  $T_1$  conexo y no contráctil, como por ejemplo las esferas.

## 4.2. Modelos finitos de las esferas

Recordemos que la suspensión (no reducida) de un espacio topológico  $X \neq \emptyset$  es el espacio

$$\Sigma X = X \times [-1, 1] / \sim$$

que resulta de identificar en  $X \times [-1, 1]$  a todos los puntos de la forma  $(x, 1)$  por un lado y a todos los puntos de la forma  $(x, -1)$  por el otro. Definimos  $\Sigma\emptyset = D_2 = \{0, 1\}$ , el espacio discreto de dos puntos ( $D_2 = S^0$ ). Recursivamente se define la suspensión de orden  $n$  de la siguiente manera:  $\Sigma^0 X = X$ ,  $\Sigma^{n+1} X = \Sigma \Sigma^n X$ .

La demostración del siguiente lema es clara y por lo tanto la omitimos.

**Lema 4.2.1.** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios homeomorfos. Entonces  $\Sigma X \simeq \Sigma Y$ .

**Proposición 4.2.2.** El espacio  $\Sigma^n D_2$  es homeomorfo a la esfera  $S^n$ .

*Demostración.* Lo probaremos por inducción en  $n$ . Si  $n = 0$ , entonces  $\Sigma^0 D_2 = D_2 = S^0$ .

Supongamos que  $\Sigma^n D_2 \simeq S^n$ . Por el lema vale que  $\Sigma^{n+1} D_2 = \Sigma \Sigma^n D_2 \simeq \Sigma S^n$ . Así que basta probar que  $\Sigma S^n \simeq S^{n+1}$ .

Definimos

$$f : \Sigma S^n \longrightarrow S^{n+1}$$

$$\overline{(x, t)} \longmapsto (x\sqrt{1-t^2}, t).$$

Está bien definida, es continua y biyectiva. Como  $S^n$  e  $I$  son compactos, entonces  $\Sigma S^n = q_{S^n}(S^n \times I)$  es compacto. Además  $S^{n+1}$  es  $T_2$ . Luego  $f$  es un homeomorfismo.  $\square$

Recordemos que en el capítulo anterior definimos la suspensión no-Hausdorff  $\mathbb{S}X$  de un espacio  $X$ . Relacionamos la suspensión usual  $\Sigma$  con la suspensión no-Hausdorff  $\mathbb{S}$ .

**Definición 4.2.3.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Definimos  $T(f) : \Sigma X \rightarrow \mathbb{S}Y$  de la siguiente forma. Para  $X \neq \emptyset$

$$T(f)(\overline{(x, t)}) = \begin{cases} f(x) & \text{si } -1 < t < 1 \\ + & \text{si } t = 1 \\ - & \text{si } t = -1 \end{cases}$$

Para  $X = \emptyset$ , definimos  $T(f)(0) = -$ ,  $T(f)(1) = +$ .

**Lema 4.2.4.** En las condiciones de la definición,  $T(f)$  resulta continua.

*Demostración.* Si  $X = \emptyset$  el resultado es trivial. Supongamos  $X \neq \emptyset$ . Sea  $U \in \mathbb{S}Y$  un abierto, entonces vale alguna de las siguientes afirmaciones

1.  $U$  es un abierto de  $Y$ .
2.  $U = Y \cup \{+\}$ .
3.  $U = Y \cup \{-\}$ .
4.  $U = \mathbb{S}Y$ .

Llamemos  $q : X \times [-1, 1] \rightarrow \Sigma X$  a la aplicación cociente. En el primer caso,  $(x, t) \in q^{-1}T(f)^{-1}(U)$  sii  $T(f)((x, t)) \in U$  sii  $f(x) \in U$  y  $-1 < t < 1$  sii  $(x, t) \in f^{-1}(U) \times (-1, 1)$ . Luego  $q^{-1}T(f)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \times (-1, 1)$  que es abierto porque  $f$  es continua. Por lo tanto  $T(f)^{-1}(U)$  es abierto.

En el segundo caso  $q^{-1}T(f)^{-1}(U) = X \times (-1, 1]$ , que es un abierto y luego  $T(f)^{-1}(U)$  lo es.

El tercer caso es similar al anterior y en el cuarto caso  $T(f)^{-1}(U) = \Sigma X$ .  $\square$

Las demostraciones de los siguientes dos lemas son fáciles y por eso las omitiremos.

**Lema 4.2.5.** *Sea  $X$  un espacio y  $q : X \times [-1, 1] \rightarrow \Sigma X$  la aplicación cociente. Entonces  $q(X \times (-1, 1])$  y  $q(X \times [-1, 1))$  son contráctiles.*

**Lema 4.2.6.** *Sea  $X$  un espacio y sea  $p : X \times (-1, 1) \rightarrow X$  la proyección. Entonces  $p$  es una equivalencia homotópica.*

**Proposición 4.2.7.** *Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $x \in X$  tal que el único abierto que contiene a  $x$  es  $X$ . Entonces  $X$  es contráctil.*

En el caso en que  $X$  sea finito esto quiere decir que  $x$  es máximo y, entonces, ya sabemos que  $X$  es contráctil.

*Demostración.* Definimos  $H : X \times I \rightarrow X$

$$H(y, t) = \begin{cases} y & \text{si } t < 1 \\ x & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Si  $U$  es un abierto propio de  $X$ , entonces no contiene a  $x$ , por lo tanto  $H^{-1}(U) = U \times [0, 1)$  que es abierto. Luego  $H : 1_X \simeq c_x$ .  $\square$

**Teorema 4.2.8.** *Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y sea  $f : X \rightarrow Y$  una equivalencia débil. Entonces  $T(f) : \Sigma X \rightarrow \mathbb{S}Y$  es también una equivalencia débil.*

*Demostración.* Notemos que  $\{Y \cup \{+\}, Y \cup \{-\}, Y\}$  es un cubrimiento tipo base de  $\mathbb{S}Y$ .

Tenemos que  $\{Y \cup \{+\}\}$  es contráctil por el lema anterior. Cuando probamos la continuidad de  $T(f)$ , mostramos que  $q^{-1}T(f)^{-1}(Y \cup \{+\}) = X \times (-1, 1]$ , luego  $T(f)^{-1}(Y \cup \{+\}) = q(X \times (-1, 1])$ , que es contráctil por 4.2.5. Por lo tanto,  $T(f)|_{T(f)^{-1}(Y \cup \{+\})} : T(f)^{-1}(Y \cup \{+\}) \rightarrow Y \cup \{+\}$  es una equivalencia homotópica.

Análogamente  $T(f)|_{T(f)^{-1}(Y \cup \{-\})} : T(f)^{-1}(Y \cup \{-\}) \rightarrow Y \cup \{-\}$  resulta una equivalencia homotópica.

Como  $T(f)^{-1}(Y) = X \times (-1, 1)$ , por 4.2.6 vale que  $T(f)|_{T(f)^{-1}(Y)} = fp : T(f)^{-1}(Y) \rightarrow Y$  es equivalencia débil por ser composición de equivalencias débiles.

Estamos en condiciones de aplicar 3.2.2, y esto concluye la demostración.  $\square$



Inductivamente, se tiene

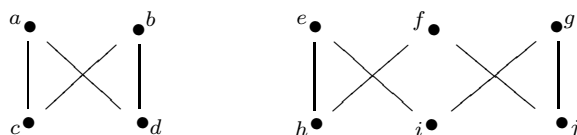
**Corolario 4.2.9.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y sea  $f : X \rightarrow Y$  una equivalencia débil. Entonces  $T^n(f) : \Sigma^n X \rightarrow \mathbb{S}^n Y$  es una equivalencia débil para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

En particular, para  $X = Y = D_2$  y  $f = 1_X$ , se tiene que  $T^n(1_{D_2}) : \Sigma^n D_2 \rightarrow \mathbb{S}^n D_2$  es una equivalencia débil. Es decir que existe una equivalencia débil entre  $S^n$  y  $\mathbb{S}^n D_2$ . Conseguimos entonces ejemplos de equivalencias débiles que no son equivalencias homotópicas, puesto que para  $n \geq 1$ ,  $T^n(1_{D_2})$  no puede ser una equivalencia homotópica por 4.1.7.

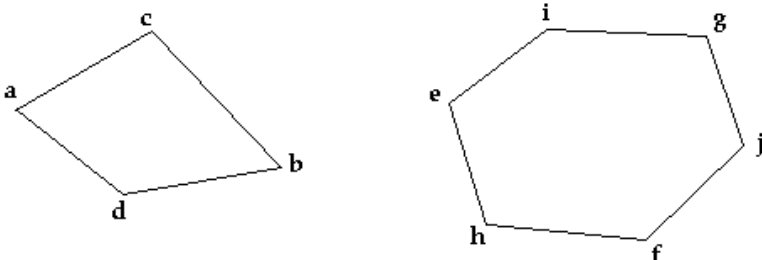
En la próxima sección veremos más ejemplos de equivalencias débiles que no son equivalencias homotópicas, pero serán exclusivamente entre espacios finitos.

### 4.3. Los teoremas de Hardie-Vermeulen y la pregunta de May

Osaki ([16]) da un ejemplo de dos espacios finitos que son débilmente equivalentes, pero no son del mismo tipo homotópico. Sean  $X$  e  $Y$  con diagramas de Hasse



Los complejos asociados son  $\mathcal{K}(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{c, a\}, \{c, b\}, \{d, a\}, \{d, b\}\}$  y  $\mathcal{K}(Y) = \{\{e\}, \{f\}, \{g\}, \{h\}, \{i\}, \{j\}, \{h, e\}, \{h, f\}, \{i, e\}, \{i, g\}, \{j, f\}, \{j, g\}\}$ , que tienen realizaciones homeomorfas a  $S^1$ ,  $|\mathcal{K}(X)|$  y  $|\mathcal{K}(Y)|$



Entonces,  $|\mathcal{K}(X)|$  y  $|\mathcal{K}(Y)|$  son homeomorfos. Luego  $X$  e  $Y$  son débilmente equivalentes, pues se tiene la cadena

$$X \xrightarrow{\varphi_X} |\mathcal{K}(X)| \xrightarrow{\sim} |\mathcal{K}(Y)| \xrightarrow{\varphi_Y} Y.$$

Sin embargo  $X$  e  $Y$  no son del mismo tipo homotópico por ser minimales no homeomorfos.

*Observación 4.3.1.* Que dos espacios sean débilmente equivalentes no implica que haya una equivalencia débil entre ambos.

Una pregunta natural que surge entonces es la que plantea May en el problema 2.7. de [12]. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una equivalencia débil entre espacios finitos minimales. ¿Es  $f$

necesariamente una equivalencia homotópica y por lo tanto un homeomorfismo?.

Consideremos el ejemplo anterior. En principio, dijimos, no tendría porque existir una equivalencia débil entre  $X$  e  $Y$ . Sin embargo  $\epsilon : Y \rightarrow X$  definida por  $\epsilon(e) = \epsilon(f) = \epsilon(h) = a$ ,  $\epsilon(g) = b$ ,  $\epsilon(i) = c$ ,  $\epsilon(j) = d$  sí es una equivalencia homotópica débil. Es continua porque preserva el orden. Para demostrar que es una equivalencia débil utilizaremos el teorema 3.2.2.

Notemos que  $\{\{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{c, d\}\}$  es un cubrimiento tipo base de  $X$ . Además  $U_1 = \{a, c, d\}$  es contráctil y  $\epsilon^{-1}(U_1) = \{e, f, h, i, j\}$  también lo es. Luego  $\epsilon|_{\epsilon^{-1}(U_1)} : \epsilon^{-1}(U_1) \rightarrow U_1$  es una equivalencia homotópica. Si  $U_2 = \{b, c, d\}$  y  $U_3 = \{c, d\}$ ,  $\epsilon|_{\epsilon^{-1}(U_i)} : \epsilon^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$  no sólo es una equivalencia débil para  $i = 2$  e  $i = 3$ , sino que además es un homeomorfismo.

Por lo tanto  $\epsilon : Y \rightarrow X$  es una equivalencia homotópica débil entre espacios finitos minimales que no es una equivalencia homotópica.

El mismo Osaki, vuelve más adelante a este ejemplo y deduce que existe una equivalencia débil entre  $X$  e  $Y$  de una demostración mucho más general que la que exhibimos recientemente.

Volveremos en un rato a este tema para dar otro ejemplo, similar al anterior, pero construido de forma muy diferente.

Las definiciones siguientes y los próximos dos teoremas que veremos, fueron formulados por K.A.Hardie y J.J.C.Vermeulen en [7, 8] y son la continuación del trabajo de McCord.

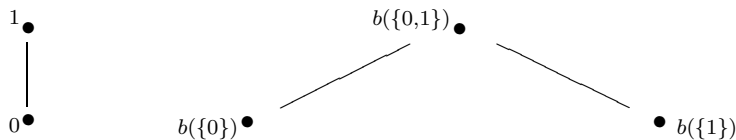
**Definición 4.3.2.** Sea  $X$  un *etf*  $T_0$ . Definimos  $X' = \mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$ , la (primera) subdivisión baricéntrica de  $X$ . Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua entre *etf*  $T_0$ . Definimos  $f' : X' \rightarrow Y'$ ,  $f' = \mathcal{X}(f)$ .

Recursivamente se definen las subdivisiones baricéntricas de orden superior,  $X^{(n+1)} = (X^{(n)})'$

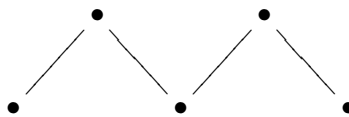
Los puntos de  $X'$  son entonces los baricentros de los símlices de  $\mathcal{K}(X)$ , es decir los baricentros de las cadenas no vacías de  $X$ .

*Observación 4.3.3.* Como  $\mathcal{K}(X^{(n+1)}) = \mathcal{K}\mathcal{X}\mathcal{K}(X^{(n)}) = \mathcal{K}(X^n)'$ , inductivamente se prueba que  $\mathcal{K}(X^{(n)}) = \mathcal{K}(X)^{(n)}$ .

**Ejemplo 4.3.4.** Los diagramas de  $\mathfrak{S}$  y  $\mathfrak{S}'$  son



El diagrama de  $\mathfrak{S}''$  es



**Definición 4.3.5.** Sea  $X$  un  $etf$   $T_0$ . Definimos  $\xi_X : X' \rightarrow X$ ,  $\xi_X(b(s)) = \text{máx}(s)$ .

**Teorema 4.3.6.** Sea  $X$  un  $etf$   $T_0$ . Entonces  $\xi_X : X' \rightarrow X$  es una equivalencia débil. Además para toda función continua entre  $etf$   $T_0$   $f : X \rightarrow Y$ , vale que  $\xi_Y f' = f \xi_X$ .

*Demostración.* Es fácil ver que  $\xi_X$  es continua porque si  $b(s_1) \leq b(s_2)$ , entonces  $s_1 \subseteq s_2$  y por lo tanto  $\xi_X(b(s_1)) = \text{máx}(s_1) \leq \text{máx}(s_2) = \xi_X(b(s_2))$ .

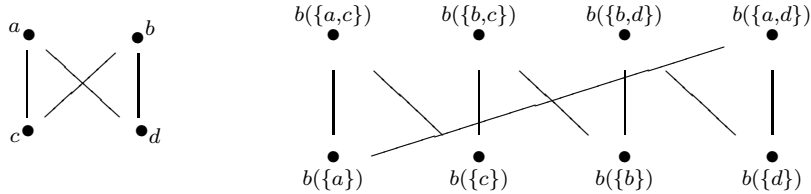
Por 3.2.13, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{K}(X')| & \xrightarrow{|\xi_X|} & |\mathcal{K}(X)| \\ \downarrow \varphi_{X'} & & \downarrow \varphi_X \\ X' & \xrightarrow{\xi_X} & X \end{array}$$

Pero  $\mathcal{K}(X') = \mathcal{K}\mathcal{X}\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X)'$  y  $\xi_X(b(s)) = \text{máx}(s) \in s$ , luego, por 3.2.19,  $\xi_X : \mathcal{K}(X)' \rightarrow \mathcal{K}(X)$  es una aproximación simplicial de  $i_{\mathcal{K}(X)}$ . Entonces  $|\xi_X| \simeq i_{\mathcal{K}(X)}$  que es un homeomorfismo, luego  $|\xi_X|$  es una equivalencia homotópica. Como además  $\varphi_{X'}$  y  $\varphi_X$  son equivalencias débiles, entonces  $\xi_X$  es una equivalencia débil, como queríamos demostrar.

Para demostrar la segunda parte del teorema, notemos que si  $s$  es una cadena en  $X$ , como  $f$  preserva el orden, se tiene que  $\xi_Y f'(b(s)) = \xi_Y(b(f(s))) = \text{máx}(f(s)) = f(\text{máx}(s)) = f \xi_X(b(s))$ . Luego  $\xi_Y f' = f \xi_X$ .  $\square$

**Ejemplo 4.3.7.** Si  $X = \mathbb{S}D_2$ , entonces  $X$  y  $X'$  tienen los siguientes diagramas de Hasse



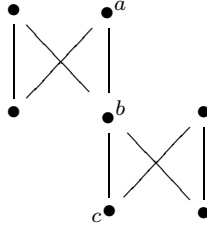
Por el teorema, existe una equivalencia débil  $\xi_X : X' \rightarrow X$ . Además  $X$  y  $X'$  son espacios minimales no homeomorfos, por lo que  $\xi_X$  no es una equivalencia homotópica. Esto provee un nuevo ejemplo que responde negativamente al interrogante planteado por May.

Podemos decir todavía algo más sobre este problema.

No podemos construir un ejemplo como el anterior para cada espacio minimal porque no siempre ocurre que  $X'$  es minimal.

Sí es cierto que  $X'$  nunca tiene dbp. Supongamos que  $b(s)$  es dbp de  $X'$  para cierta cadena  $s$  de  $X$ . Luego existe  $s'$  otra cadena tal que  $b(s') < b(s)$  y si  $b(r) < b(s)$  entonces  $b(r) \leq b(s')$ . Pero entonces  $s$  tiene por lo menos dos elementos ( $\emptyset \neq s' \subsetneq s$ ), digamos  $x \neq y \in s$ . Luego  $b(s \setminus \{x\}) < b(s)$  y  $b(s \setminus \{y\}) < b(s)$ . Por lo tanto  $b(s \setminus \{x\}) \leq b(s')$  y  $b(s \setminus \{y\}) \leq b(s')$ , es decir  $s \setminus \{x\} \subseteq s'$  y  $s \setminus \{y\} \subseteq s'$ . Pero entonces  $s = (s \setminus \{x\}) \cup (s \setminus \{y\}) \subseteq s'$ , que es una contradicción.

Pero puede ocurrir para  $X$  minimal que  $X'$  no sea minimal, como es el caso de  $X$  con diagrama



en el que  $b(\{a, c\})$  es ubp de  $X'$  porque si una cadena de  $X$  contiene propiamente a  $\{a, c\}$ , entonces debe ser  $\{a, b, c\}$ .

Sin embargo, para el caso particular en el que  $X = \mathbb{S}^n D_2$  para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X'$  no tiene ubp y, por lo tanto es minimal. Además, como  $X$  no es discreto,  $X'$  tiene cardinal estrictamente mayor al de  $X$  y entonces  $X$  y  $X'$  son no homeomorfos.

De esta forma encontramos, para cada número natural, un ejemplo distinto de equivalencia débil entre espacios minimales que no es equivalencia homotópica .

El siguiente teorema es una versión para espacios finitos  $T_0$  del teorema clásico de aproximación simplicial.

**Teorema 4.3.8.** (*Aproximación simplicial para espacios finitos*) Sean  $X$  e  $Y$  etf  $T_0$  y sea  $f : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow |\mathcal{K}(Y)|$  una función continua. Entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq N$ , entonces existe  $g : X^{(n)} \rightarrow Y$  de forma tal que  $|g| \simeq f$ .

*Demostración.* Por el teorema de aproximación simplicial existe un número  $N$  tal que si  $n \geq N$  existe  $\psi : \mathcal{K}(X^{(n-1)}) = \mathcal{K}(X)^{(n-1)} \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ , una aproximación simplicial de  $f$ . Sea  $g = \xi_Y \psi'$ . Por el lema 3.2.20,  $i_{\mathcal{K}(Y)}|\psi'| \simeq |\psi| i_{\mathcal{K}(X^{(n-1)})}$ , luego  $|g| = |\xi_Y| |\psi'| \simeq i_{\mathcal{K}(Y)}|\psi'| \simeq |\psi| i_{\mathcal{K}(X^{(n-1)})} \simeq f$ .  $\square$

**Teorema 4.3.9.** Sean  $X$  e  $Y$  etf débilmente equivalentes. Entonces existe un espacio finito  $Z$  y equivalencias débiles  $Z \rightarrow X$ ,  $Z \rightarrow Y$ .

*Demostración.* Podemos suponer que  $X$  e  $Y$  son  $T_0$  porque son homotópicamente equivalentes a espacios etf  $T_0$ .

Como  $X$  y  $|\mathcal{K}(X)|$  son débilmente equivalentes y lo mismo ocurre con  $Y$  y  $|\mathcal{K}(Y)|$ , entonces  $\mathcal{K}(X)$  y  $\mathcal{K}(Y)$  también son débilmente equivalentes. Luego existe un CW-complejo  $W$  y equivalencias débiles  $W \rightarrow |\mathcal{K}(X)|$ ,  $W \rightarrow |\mathcal{K}(Y)|$ . Por el teorema de Whitehead, estas dos últimas son equivalencias homotópicas, de donde  $|\mathcal{K}(X)|$  y  $|\mathcal{K}(Y)|$  son homotópicamente equivalentes. Sea  $f : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow |\mathcal{K}(Y)|$  una equivalencia homotópica.

Por el teorema de aproximación simplicial para espacios finitos, existe  $n$  suficientemente grande y  $g : X^{(n)} \rightarrow Y$  tal que  $|g| \simeq f$ . Como  $\varphi_{X^{(n)}}$ ,  $\varphi_Y$  y  $|g|$  son equivalencias débiles y además  $g\varphi_{X^{(n)}} = \varphi_Y|g|$ , entonces  $g$  es una equivalencia débil.

Como  $\xi_X : X' \rightarrow X$  es una equivalencia débil, inductivamente se tiene una equivalencia débil de  $X^{(m)}$  a  $X$  para todo  $m$ . En particular, para  $m = n$ .  $\square$

Volvamos una vez más al problema que había planteado May, sobre si una equivalencia débil entre espacios finitos minimales, debía ser necesariamente una equivalencia homotópica.

Dados  $X$  e  $Y$  *etf* minimales y débilmente equivalentes, por el teorema de recién, existe  $Z$  *etf* y equivalencias débiles  $f : Z \rightarrow X$ ,  $g : Z \rightarrow Y$ . Como  $Z$  es homotópicamente equivalente a su core, podemos suponer que  $Z$  es minimal. Si la respuesta a la pregunta de May fuera afirmativa, entonces  $f$  y  $g$  deberían ser ambas equivalencias homotópicas, luego  $X$  e  $Y$  serían del mismo tipo homotópico y minimales, entonces homeomorfos. Pero claramente esto no ocurre porque existen espacios finitos minimales débilmente equivalentes y no homeomorfos, como vimos en el ejemplo de Osaki.

#### 4.4. Modelos finitos minimales

Dado un espacio  $X$ , quisiéramos encontrar un espacio finito que modele a  $X$  en algún sentido. De esta forma, para estudiar ciertas propiedades de  $X$ , podríamos trabajar con el modelo, que es más sencillo por el hecho de ser finito. Muchos de los espacios topológicos que nos interesa estudiar, como por ejemplo las esferas, son espacios infinitos y  $T_1$ . No podemos entonces pedir que el modelo de  $X$  sea homeomorfo a  $X$ . Si  $X$  además es conexo y no contráctil tampoco podemos pedir que el modelo sea del mismo tipo homotópico que  $X$ .

**Definición 4.4.1.** Sea  $X$  un espacio. Un *modelo finito* de  $X$  es un espacio finito que es débilmente equivalente a  $X$ .

De 3.2.21 se desprende que todo poliedro que tenga una triangulación finita (es decir, compacto) tiene un modelo finito.

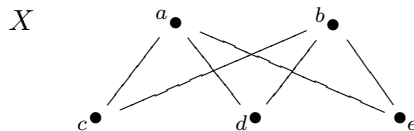
**Lema 4.4.2.** Si  $Y$  es un modelo finito de un poliedro (o un CW-complejo)  $X$ , entonces  $|\mathcal{K}(Y)|$  es homotópicamente equivalente a  $X$ . En particular, existe una equivalencia débil de  $X$  a  $Y$ .

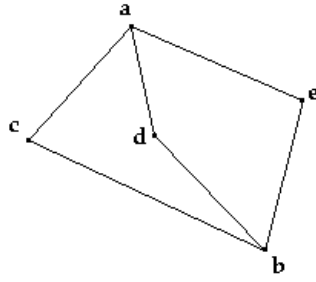
*Demostración.* Como  $X$  e  $Y$  son débilmente equivalentes, entonces  $X$  y  $|\mathcal{K}(Y)|$  también lo son, luego existe  $W$  un CW-complejo y  $f : W \rightarrow X$ ,  $g : W \rightarrow |\mathcal{K}(Y)|$  equivalencias débiles. Por el teorema de Whitehead  $f$  y  $g$  son equivalencias homotópicas y entonces  $X$  y  $|\mathcal{K}(Y)|$  resultan homotópicamente equivalentes.  $\square$

**Definición 4.4.3.** Un *modelo finito minimal* de un espacio  $X$ , es un modelo finito de  $X$  de cardinal mínimo.

**Ejemplos 4.4.4.** (1) Todo espacio contráctil tiene un único modelo finito minimal que es el singleton.

(2) Sea  $X = S^1 \vee S^1$ , el ocho. El espacio  $Y = \mathbb{S}D_3$  es débilmente equivalente a  $|\mathcal{K}(Y)|$  que es homeomorfo a  $X$ .





$$|\mathcal{K}(Y)| \subseteq \mathbb{R}^2$$

Luego,  $Y$  es un modelo finito de  $X$ . Además es un modelo finito minimal de  $X$  porque los espacios de menos de cinco puntos son de alguna de las siguientes formas:

- Contráctiles,
- No conexos o
- Débilmente equivalentes a  $S^1$ .

Y un espacio de esos no puede ser débilmente equivalente a  $X$ .

Sin embargo no existe un único modelo finito minimal del ocho porque  $Y^{op}$  es otro no homeomorfo a  $Y$ .

Como todo espacio finito es homotópicamente equivalente a su core, se tiene la siguiente

**Proposición 4.4.5.** *Un modelo finito minimal es un espacio minimal.*

Notemos que existen espacios que no tienen modelos finitos, como es el caso de los espacios con infinitas componentes arcoconexas.

En contraste, hay espacios que tienen infinitos modelos finitos que además son espacios minimales, como por ejemplo  $S^1$ . Si consideramos para  $n \geq 2$  el espacio finito  $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\}$  de  $2n$  puntos tal que  $x_1 > x_2 < x_3 > x_4 < \dots < x_{2n-1} > x_{2n} < x_1$ , entonces  $\mathcal{K}(X_n)$  es una triangulación de  $S^1$ . Luego  $X_n$  es un modelo finito de  $S^1$  que además es un espacio minimal para todo  $n \geq 2$ .

Sin embargo, todo espacio tiene un número finito (quizás cero) de modelos finitos minimales.

Notemos también, como vimos en el ejemplo anterior, que si  $X$  es un modelo finito minimal de un espacio  $Y$ , entonces  $X^{op}$  también lo es ya que  $X$  y  $X^{op}$  son débilmente equivalentes por tener complejos asociados iguales.

Osaki ([16]) propone un método de reducción mediante el cual, bajo determinadas circunstancias, puede encontrar un espacio de cardinal menor que el de un espacio finito  $X$  y débilmente equivalente a  $X$ . En su paper, Osaki se pregunta si siempre es posible aplicar reiteradas veces esta reducción hasta llegar a un espacio con los mismos grupos de homotopía que el espacio original, con la mínima cantidad de puntos. Veremos que la respuesta a este interrogante es negativa, por lo que deberemos buscar otro camino para hallar los modelos finitos minimales de las esferas.

**Teorema 4.4.6.** *Sea  $X$  un etf y sea  $x \in X$  tal que  $U_x \cap U_y$  es arcoconexo y  $\pi_i(U_x \cap U_y) = 0$  para todo  $y \in X$ . Entonces la aplicación cociente  $q : X \rightarrow X/U_x$ , que identifica todos los puntos de  $U_x$ , es una equivalencia débil.*

*Demostración.* Como  $\{U_{qy} \mid y \in X\}$  es un cubrimiento tipo base de  $X/U_x$ , bastará demostrar que  $q|_{q^{-1}(U_{qy})} : q^{-1}(U_{qy}) \rightarrow U_{qy}$  es una equivalencia débil para todo  $y \in X$ .

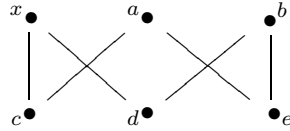
Si  $U_x \cap U_y = \emptyset$ , entonces  $q^{-1}(q(U_y)) = U_y$  que es abierto. Si  $U_x \cap U_y \neq \emptyset$ , entonces  $q^{-1}(q(U_y)) = U_x \cup U_y$  que es abierto también. Esto prueba que  $q$  es abierta. Luego, por 1.4.9 se tiene que  $U_{qy} = q(U_y)$ .

Si  $U_x \cap U_y = \emptyset$ , entonces  $q^{-1}(U_{qy}) = q^{-1}(q(U_y)) = U_y$ . Por lo tanto, en este caso,  $q|_{q^{-1}(U_{qy})} : q^{-1}(U_{qy}) = U_y \rightarrow U_{qy} = qq^{-1}(U_{qy}) = q(U_y)$  es biyectiva, continua y abierta, luego un homeomorfismo y, por la tanto, una equivalencia débil.

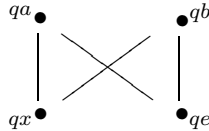
Si  $U_x \cap U_y \neq \emptyset$ , entonces  $q^{-1}(U_{qy}) = q^{-1}(q(U_y)) = U_x \cup U_y$ . Como  $U_x \cup U_y$  es arcoconexo y  $U_{qy}$  es contráctil, para demostrar que  $q|_{q^{-1}(U_{qy})} : q^{-1}(U_{qy}) \rightarrow U_{qy}$  es una equivalencia débil, basta probar que  $\pi_i(U_x \cup U_y) = 0 \forall i \in \mathbb{N}$ .

Como  $U_x, U_y$  son contráctiles y  $U_x \cap U_y$  es arcoconexo por hipótesis, entonces, por el teorema de Van Kampen, se tiene que  $\pi_1(U_x \cup U_y) = 0$ . Por Mayer-Vietoris  $H_i(U_x \cup U_y) = 0 \forall i \in \mathbb{N}$ . Por el teorema de Hurewicz,  $\pi_i(U_x \cup U_y) = 0 \forall i \in \mathbb{N}$ , como queríamos demostrar.  $\square$

**Ejemplo 4.4.7.** Sea  $X$  el espacio finito  $T_0$  con diagrama de Hasse



Si  $y \in X$ , entonces  $U_x \cap U_y = U_x, *$  ó  $\emptyset$ . Luego, estamos en las condiciones del teorema. La aplicación  $q : X \rightarrow X/U_x$  resulta entonces una equivalencia débil. Notemos que por 1.4.9,  $U_{qa} = q(U_a) = \{qa, qx, qe\}$ ,  $U_{qb} = q(U_b) = \{qb, qx, qe\}$ ,  $U_{qe} = q(U_e) = \{qe\}$  y  $U_{qx} = q(U_x) = \{qx\}$ . Luego, el diagrama de Hasse de  $X/U_x$  es



y entonces existe una equivalencia débil entre  $X$  y  $\mathbb{S}D_2$ , cosa que ya habíamos visto en el primer ejemplo que usamos para responder a la pregunta de May del problema 2.7.

**Lema 4.4.8.** Sea  $X$  un etf y sea  $A \subseteq X$ . Entonces  $(X/A)^{op} = X^{op}/A$ .

*Demostración.* Sean  $q : X \rightarrow X/A$  y  $p : X^{op} \rightarrow X^{op}/A$  las aplicaciones cocientes. Entonces  $q$  y  $p$  coinciden como funciones de conjuntos. Luego,  $U \subseteq (X/A)^{op}$  es abierto sii  $U \subseteq X/A$  es cerrado sii  $q^{-1}(U) \subseteq X$  es cerrado sii  $p^{-1}(U) \subseteq X^{op}$  es abierto sii  $U \subseteq X^{op}/A$  es abierto.  $\square$

**Lema 4.4.9.** Sea  $X$  un etf  $T_0$  y sea  $x \in X$ . Entonces  $X^{op}/\overline{\{x\}}^X$  y  $X/\overline{\{x\}}^X$  son espacios  $T_0$ .

*Demostración.* Notemos que  $X^{op}/\overline{\{x\}}^X = X^{op}/U_x^{X^{op}}$ . Sea  $p : X^{op} \rightarrow X^{op}/U_x^{X^{op}}$  la aplicación cociente y sean  $y, z \in X$  tales que  $U_{py} = U_{pz}$ . Por la demostración del último teorema, se tiene que  $p$  es abierta y, entonces  $p(U_y^{X^{op}}) = p(U_z^{X^{op}})$ .

Si  $U_x^{X^{op}} \cap U_y^{X^{op}} = \emptyset$ , entonces  $p^{-1}(p(U_y^{X^{op}})) = U_y^{X^{op}}$ , luego, también debe ocurrir que  $U_x^{X^{op}} \cap U_z^{X^{op}} = \emptyset$  porque, de otro modo,  $U_y^{X^{op}} = p^{-1}(p(U_y^{X^{op}})) = p^{-1}(p(U_z^{X^{op}})) = U_z^{X^{op}} \cup U_x^{X^{op}}$ , que es un absurdo. Entonces  $U_z^{X^{op}} = p^{-1}(p(U_z^{X^{op}})) = p^{-1}(p(U_y^{X^{op}})) = U_y^{X^{op}}$ , de donde  $y = z$  y, entonces  $py = pz$ .

Si  $U_x^{X^{op}} \cap U_y^{X^{op}} \neq \emptyset$ , entonces  $U_x^{X^{op}} \cap U_z^{X^{op}} \neq \emptyset$  por lo mismo de recién. Luego  $U_x^{X^{op}} \cup U_z^{X^{op}} = p^{-1}(p(U_z^{X^{op}})) = p^{-1}(p(U_y^{X^{op}})) = U_x^{X^{op}} \cup U_y^{X^{op}}$ , de donde  $z \geq x$  ó  $z \geq y$ , por un lado, e  $y \geq x$  ó  $y \geq z$ , por el otro. Si  $z \geq x$  entonces, en cualquiera de los dos casos,  $y \geq x$  ó  $y \geq z$ , resulta que  $y \geq x$ , luego  $py = pz$ . Si  $y \geq x$ , al demostración es simétrica. Si  $z \geq y$  e  $y \geq z$ , entonces  $y = z$  y, por lo tanto  $py = pz$ .

La segunda parte del enunciado es inmediata por el lema anterior, ya que  $(X/\overline{\{x\}}^X)^{op} = X^{op}/\overline{\{x\}}^X$ , que es  $T_0$ .  $\square$

Tenemos un análogo al último teorema.

**Teorema 4.4.10.** *Sea  $X$  un etf  $T_0$  y sea  $x \in X$  tal que  $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$  es arcoconexo y  $\pi_i(\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}) = 0$  para todo  $y \in X$ . Entonces la aplicación cociente  $q : X \rightarrow X/\overline{\{x\}}$ , que identifica todos los puntos de  $\overline{\{x\}}$ , es una equivalencia débil.*

*Demostración.* Como el conjunto subyacente de  $\overline{\{x\}}^X \cap \overline{\{y\}}^X$  coincide con el de  $U_x^{X^{op}} \cap U_y^{X^{op}}$  y los órdenes son los opuestos, entonces son débilmente equivalentes pues los complejos simpliciales asociados son homeomorfos. Luego  $U_x^{X^{op}} \cap U_y^{X^{op}}$  es arcoconexo y  $\pi_i(U_x^{X^{op}} \cap U_y^{X^{op}}) = 0 \forall i \in \mathbb{N}$ , para todo  $y \in X$ . Entonces estamos en condiciones de aplicar el teorema 4.4.6 para  $X^{op}$ . Por lo tanto, la aplicación cociente  $p : X^{op} \rightarrow X^{op}/U_x^{X^{op}} = X^{op}/\overline{\{x\}}^X$  es una equivalencia débil.

Por el lema 4.4.8,  $X^{op}/\overline{\{x\}}^X = (X/\overline{\{x\}}^X)^{op}$ , luego  $\mathcal{K}(X^{op}/\overline{\{x\}}^X) = \mathcal{K}(X/\overline{\{x\}}^X)$  y se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 X^{op} & \xrightarrow{p} & X^{op}/\overline{\{x\}}^X & & \\
 \uparrow \varphi_1 & & \uparrow \varphi_2 & & \\
 |\mathcal{K}(X^{op})| & \equiv & |\mathcal{K}(X)| & \xrightarrow{|p|=|q|} & |\mathcal{K}(X/\overline{\{x\}}^X)| & \equiv & |\mathcal{K}(X^{op}/\overline{\{x\}}^X)| \\
 \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \\
 X & \xrightarrow{q} & X/\overline{\{x\}}^X & & 
 \end{array}$$

Como  $\varphi_1$ ,  $p$  y  $\varphi_2$  son equivalencias débiles, entonces  $|p| = |q|$  lo es. Como además  $\varphi_3$  y  $\varphi_4$  son equivalencias débiles, entonces  $q$  lo es, como queríamos demostrar.  $\square$

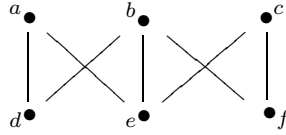
Notemos que si  $X$  es  $T_0$  y  $x \in X$ , entonces aplicando el último lema a  $X^{op}$ , obtenemos que  $X/\overline{\{x\}}^X = X/U_x^X$  es  $T_0$ . En conclusión: al aplicar cualquiera de las dos reducciones a un espacio  $T_0$ , se obtiene otro espacio  $T_0$ .

Osaki afirma que desconoce si, por medio de una iteración de las reducciones de ambos teoremas, es siempre posible llevar a  $X$ , un espacio finito  $T_0$ , al espacio más chico con los

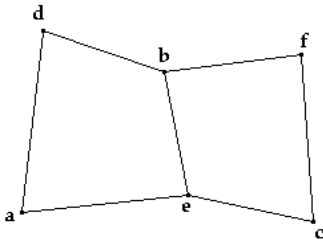


mismos grupos de homotopía de  $X$ .

Consideremos al espacio  $X$



$$|\mathcal{K}(X)| \subseteq \mathbb{R}^2$$



De donde  $\mathcal{K}(X)$  es una triangulación del ocho y entonces  $X$  resulta débilmente equivalente al ocho.

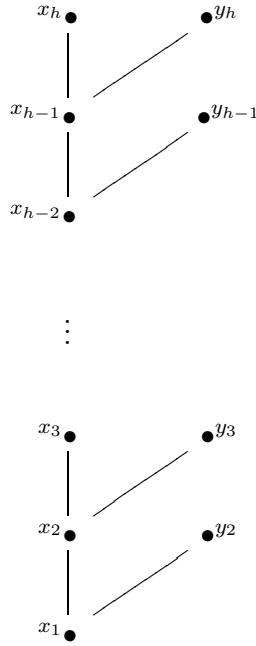
El espacio  $X$  no es reducible por ninguno de los dos métodos de Osaki. Notemos que  $U_a \cap U_b = \{d, e\}$  que no es arcoconexo, luego, para utilizar la primera reducción no podemos tomar  $x = a$  ni  $x = b$ . Simétricamente, no podemos tomar  $x = c$ . Si usamos alguno de los otros tres puntos, el espacio permanece igual al hacer la reducción pues los abiertos minimales de  $d$ ,  $e$  y  $f$  tienen un solo punto. Como  $X$  es homeomorfo a  $X^{op}$ , es fácil ver que tampoco se puede usar la segunda reducción.

Sin embargo vimos que un modelo finito minimal del ocho tiene 5 puntos. Por lo tanto el método de Osaki no es efectivo.

Antes de enunciar el próximo resultado, recordemos que la altura de un  $etf$   $X$  se define como el máximo cardinal de una cadena de  $X$ .

**Lema 4.4.11.** *Sea  $X \neq *$  un espacio minimal. Entonces  $\mathbb{S}^{h(X)-1}D_2$  es subespacio de  $X$ .*

*Demostración.* Sea  $x_1 < x_2 < \dots < x_h$  una cadena en  $X$  de longitud  $h = h(X)$ . Como  $X$  es minimal,  $x_i$  no es ubp  $\forall 1 \leq i < h$ , entonces  $\forall 1 \leq i < h \exists y_{i+1} \in X$  tal que  $y_{i+1} > x_i$ , pero  $y_{i+1} \not\leq x_{i+1}$ . Afirmamos que los puntos  $y_i$ ,  $1 < i \leq h$ , son todos distintos entre sí y distintos de los  $x_j$ ,  $1 \leq j \leq h$ .



Como  $y_{i+1} > x_i$ , entonces  $y_{i+1} \neq x_j \forall j \leq i$ . Pero  $y_{i+1} \neq x_j \forall j > i$  pues  $y_{i+1} \not\leq x_{i+1}$ .  
 Supongamos que  $y_{i+1} = y_{j+1}$  con  $i < j$ , entonces  $y_{i+1} = y_{j+1} \geq x_j \geq x_{i+1}$ , que es absurdo.

Pero  $X \neq *$  y minimal, entonces no tiene mínimo, luego existe  $y_1 \in X$  tal que  $y_1 \not\leq x_1$ .  
 Entonces  $y_1$  es distinto de los otros  $2h + 1$  puntos.

Por la maximalidad de la cadena  $x_1 < \dots < x_h$  resulta que  $x_i$  e  $y_i$  son incomparables para todo  $i$ .

Demostraremos que  $y_j < x_i, y_j < y_i \forall j < i$  por inducción en  $i$ .  
 Para  $i = 1$  no hay nada que probar.

Supongamos que vale para  $i \leq k$ . Como  $x_{k+1}$  no es dbp, entonces existe  $z \in X$  tal que  $z < x_{k+1}$ , pero  $z \not\leq x_k$ . Como  $x_{k+1}$  e  $y_{k+1}$  son incomparables, entonces  $z \neq y_{k+1}$ . Por hipótesis inductiva, se tiene que, a excepción de  $y_k$  e  $y_{k+1}$ , todos los puntos son mayores a  $x_{k+1}$  o menores a  $x_k$ . Luego  $z = y_k$ . Entonces  $y_k < x_{k+1}$ .

Análogamente,  $y_{k+1}$  no es dbp, luego existe  $z \in X$  tal que  $z < y_{k+1}$ , pero  $z \not\leq x_k$ . Por hipótesis inductiva y porque  $y_{k+1} \not\leq x_k$ , se tiene que  $z$  debe ser  $y_k$ . Entonces  $y_k < y_{k+1}$ .

Además, si  $j < k$ , por hipótesis inductiva  $y_j < x_k < x_{k+1}$  e  $y_j < x_k < y_{k+1}$ .

Finalmente tenemos que

- $y_i < x_j$  si  $i < j$ .
- $y_i < y_j$  si  $i < j$ .
- $x_i < x_j$  si  $i < j$ .

- $x_i < y_j$  si  $i < j$ .
- $x_i$  e  $y_i$  son incomparables para todo  $1 \leq i \leq h$ .

Que es el orden de  $\mathbb{S}^{h-1}D_2$ . Luego  $\mathbb{S}^{h-1}D_2$  es subespacio de  $X$ . □

Ya vimos que  $\mathbb{S}^n D_2$  es un modelo de la esfera  $S^n$ . Veamos que son modelos minimales y que son únicos (salvo homeomorfismo).

**Teorema 4.4.12.** *La esfera  $S^n$  tiene un único modelo finito minimal y consta de  $2n + 2$  puntos.*

*Demostración.* Sea  $X$  un modelo finito minimal de  $S^n$ . Queremos ver que  $X$  tiene por lo menos  $2n + 2$  puntos.

Como  $S^n$  es un poliedro, por 4.4.2 se tiene que  $S^n$  es homotópicamente equivalente a  $|\mathcal{K}(X)|$ .

Supongamos que  $\dim(\mathcal{K}(X)) \leq n - 1$ .

Sea  $s$  un  $(n + 1)$ -simplex y sea  $f : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow |\dot{s}|$  una función continua. Por el teorema de aproximación simplicial existe  $m \in \mathbb{N}$  y un morfismo simplicial  $\varphi : \mathcal{K}(X)^{(m)} \rightarrow \dot{s}$  tal que  $|\varphi| \simeq f$ . Pero  $\dim(\mathcal{K}(X)^{(m)}) \leq n - 1 < n = \dim(\dot{s})$ , luego  $|\varphi|$  no es sobreyectiva. Sea  $\alpha \in |\dot{s}|$  tal que  $\alpha \notin \text{Im}(|\varphi|)$ . Como  $|\dot{s}|$  es homeomorfo a  $S^n$ , entonces  $|\dot{s}| \setminus \{\alpha\}$  es contráctil y  $|\varphi| : |\mathcal{K}(X)^{(m)}| \rightarrow |\dot{s}| \setminus \{\alpha\}$  resulta null homotópica. Luego  $|\varphi| : |\mathcal{K}(X)^{(m)}| \rightarrow |\dot{s}|$  es null homotópica y por lo tanto  $f$  también lo es.

Como  $|\mathcal{K}(X)|$  es homotópicamente equivalente a  $S^n$  y  $|\dot{s}|$  es homeomorfo a  $S^n$ , acabamos de probar que toda función continua de  $S^n$  a  $S^n$  es null homotópica, que es un absurdo.

Por lo tanto  $\dim(\mathcal{K}(X)) \geq n$ , entonces la altura de  $X$ ,  $h(X) \geq n + 1$ .

Como  $n \leq h(X) - 1$ , se tiene que  $\mathbb{S}^n D_2$  es subespacio de  $\mathbb{S}^{h(X)-1}D_2$  y, por el lema anterior, resulta subespacio de  $X$ . Luego,  $X$  tiene por lo menos  $2n + 2$  puntos. Además, si tiene exáctamente ese cardinal, entonces es homeomorfo a  $\mathbb{S}^n D_2$ . □

# Bibliografía

- [1] P.S. Alexandroff. *Diskrete Räume*. *Mathematicheskii Sbornik* (N.S.) 2(1937), 501-518.
- [2] J.A. Barmak, E.G. Minian. *Minimal finite models and the binary dimension*. En preparación.
- [3] A. Dold und R. Thom. *Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte*. *Annals of Mathematics* (2), vol. 67(1958), 239-281.
- [4] M. Ern . *On the cardinalities of finite topologies and the number of antichains in partially ordered sets*. *Discrete Mathematics* 35(1981), 119-133.
- [5] M. Ern  and K. Stege. *Counting Finite Posets and Topologies*. *Order* 8(1991), 247-265.
- [6] R.L. Graham. *Handbook of Combinatorics*. MIT Press(1996).
- [7] K.A. Hardie and J.J.C. Vermeulen. *Homotopy theory of finite and locally finite  $T_0$ -spaces*. *Expositiones Math.* 11(1993), 331-341.
- [8] K.A. Hardie, J.J.C. Vermeulen and P.J. Witbooi. *A nontrivial pairing of finite  $T_0$ -spaces*. *Topology and its Applications* 125(2002), 533-542.
- [9] D. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press (2002).
- [10] D. Kleitman and B. Rothschild. *The number of finite topologies*. *Proc. AMS.* 25(1970), 276-282.
- [11] J.P. May. *Finite topological spaces*. Notes for REU (2003).
- [12] J.P. May. *Finite spaces and simplicial complexes*. Notes for REU (2003).
- [13] J.P. May. *Finite groups and finite spaces*. Notes for REU (2003).
- [14] M.C. McCord. *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces*. *Duke Mathematical Journal* 33(1966), 465-474.
- [15] E.G. Minian. *Notas de Topología Algebraica*. (Curso dictado en Elena II, Vaquer as). Universidad Nacional de Córdoba, Fa.M.A.F. (2004).
- [16] T. Osaki. *Reduction of finite topological spaces*. *Interdisciplinary Information Sciences* 5(1999), 149-155.

- [17] D. Quillen. *Homotopy properties of the poset of nontrivial  $p$ -subgroups of a group.* Advances in Mathematics 28(1978), 101-128.
- [18] P. Renteln. *Geometrical Approaches to the Enumeration of Finite Posets: An Introductory Survey.* Nieuw Archief voor Wiskunde 14(1996), 349-371.
- [19] E. Spanier. *Algebraic Topology.* Springer (1966).
- [20] R.P. Stanley. *On the number of open sets of finite topologies.* J. Combin. Theory (Ser. A) 10(1971), 74-79.
- [21] R.E. Stong. *Finite topological spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 123(1966), 325-340.