UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Modelos Matemáticos para la Valuación de Derivados Financieros

Manuel Maurette

Director: Dr. Pablo Amster

Diciembre de 2006

A Lucy...

Agradecimientos

A mi mamá y a mi papá por su apoyo constante durante toda la carrera.

A mi familia cercana: Pablo, Lion, Dalmi y Dolores y a los gatos.

A los de adentro: los Nico, Ignacio, Javier, Chechu y Magui con quienes transcurrí estos años en el Pabellón I.

A los de afuera: Sebi, Santi, Juli, Fer y Titi. Con quienes transcurrí estos años fuera del Pabellón I.

A Fabio y a Susana por hacerme, con sus materias motivadoras, amigar con la matemática.

A Pablo por confiar en mi, hacerme conocer el mundo de la matemática financiera y por todo lo que viene.

A todos los que me conocen!

Índice

Resumen

La idea del trabajo es mostrar y desarrollar diversos modelos matemáticos que se usan a la hora de valuar derivados financieros. El primer capítulo es una introducción para aquellos que no están familiarizados con los términos económicos con los que se trabajará a lo largo del trabajo. A continuación se estudia el primer modelo el discreto uno que supone que el valor de un activo puede variar solamente a tiempo final. Este modelo, aunque parezca lejano a la realidad, ayuda a entender el problema de valuación. Luego se hace una generalización del modelo suponiendo que el precio del activo puede cambiar un número finito de veces. Este modelo obviamente es más cercano a la realidad y sigue siendo fácil de entender. Luego se estudia el modelo en el límite y se llega a la fórmula de Black-Scholes para valuar una opción call europea. A partir de aquí, se cambia el enfoque y se estudia el modelo continuo, que aunque no sea intuitivo fue el primero que se estudió en el problema de valuación. Aquí se introducen los básicos de la teoría de Procesos Estocásticos y del Cálculo Estocástico, herramientas claves en el modelo. El capítulo termina al llegar a la ecuación de Black-Scholes, que rige el valor de un derivado y es hoy en día el más utilizado. Luego procedemos a resolver la ecuación en el caso de una call europea y llegamos también a la fórmula de Black-Scholes. El trabajo termina con un modelo numérico para la valuación de un derivado dejando de lado la hipótesis de ausencia de costos de transacción. Aquí se estudia el modelo de diferencias finitas. He tomado como referencia principal al libro de Wilmott, Howison y Dewynne [16], al de Avellaneda [3] y a las notas del curso de Introducción a Finanzas [1], dictado en el primer cuatrimestre de 2002.

1. Introducción financiera

1.1. Nociones básicas y glosario

Se introducirán aquí algunas definiciones financieras necesarias para la comprensión del trabajo, en el que se analizarán modelos para **mercados financieros**, los **activos** que se negocian en ellos y en particular, los **derivados financieros**. Para más detalle en las definiciones así como ejemplos enriquecedores ver [11] y [15]. Veamos qué es cada una de estas cosas:

Hay muchos tipos de mercados financieros, se diferencian en lo que se negocia en ellos. Por ejemplo el *Mercado de Acciones*, como el Merval de Buenos Aires, o Wall Street en Nueva York; El *Mercado de Bonos*; El *Mercado de Commodities* donde se negocia materia prima, como aceite crudo, oro, etc.; o El *Mercado de Derivados*, en donde se negocian los productos que se analizarán en éste trabajo y serán definidos en la Sección 1.3.

Llamaremos *activo* a cualquier posesión que pueda producir beneficios económicos. Un *portfolio* es un conjunto de activos, que pueden ser acciones, derivados, bonos, etc. Los grandes inversores poseen portfolios con varios activos tanto para especular con más ganancias como para respaldarse ante la eventual baja de alguno de ellos. Otros ejemplos de activos son los índices de los mercados, por ejemplo el índice Merval, o el Nasdaq 100. Otros tipos de activo son las monedas extranjeras.

Algunos activos pagan periódicamente *dividendos*, que en general están relacionados con las ganancias de las empresas. El precio de un derivado sobre un activo que pague dividendos se verá afectado por estos pagos (el precio tiende a bajar, ya que los dividendos se capitalizan). Hay muchos tipos de estructura de pagos de dividendos que tienen que ver con cada cuanto se paga, si el pago es constante o no, etc.

En la realidad existen en general costos para realizar operaciones financieras. Estos *costos de transacción* pueden depender de si se trata de una transacción de un activo subyacente o un derivado, de si se trata de una compra o de una venta, de la cantidad, del inversor, etc. En general trabajaremos sin estos costos para facilitar cuentas. En el último capítulo estudiaremos un modelo que introduce costos de transacción.

Se dice que en una inversión se toma una posición *long* cuando se compra y se dice que se toma una posición *short* cuando se vende, aún cuando no se tenga posesión del activo, lo cual no es intuitivo, pero totalmente válido en el mercado. También se usará la llamada *tasa de interés libre de riesgo* que es aquella de una inversión "segura", libre de riesgo. Esto en la práctica no es del todo errado, ya que si se analizan activos y derivados en cortos períodos de tiempo (por ejemplo trimestres), entonces un bono del estado a veinte años resulta una inversión "segura", y hasta es razonable suponer constante la tasa de ese bono en el corto plazo.

Se llama *rentabilidad* a la ganancia relativa de una inversión, es decir, si llamamos

S_0 a la inversión inicial, y S_T a lo que se obtiene a un tiempo T, la rentabilidad R es:

$$R = \frac{S_T - S_0}{S_0}$$

1.2. Hipótesis sobre los mercados

Los modelos que se usarán aquí, asumen la *Arbitrage Pricing Theory o A.P.T.* Ésta dice que no se puede hacer dinero sin riesgo[1]. Es decir, no existe la posibilidad de realizar una inversión sin riesgo y ganar dinero (o por lo menos no más que invirtiendo con la tasa libre de riesgo). De no ser así, existiría claramente una forma de hacer infinito dinero, y es esta hipótesis la que en mayor parte permite la buena modelización de los mercados. Otra de las hipótesis que usaremos es aquella de que tratamos con un mercado *eficiente*, es decir que todos los participantes poseen la misma información al mismo tiempo. También se va a suponer que se puede tanto comprar (adoptar una posición long) como vender (short) cualquier cantidad de cualquier activo, esto dice que el mercado es *completo*. Hay que aclarar aquí que esta hipótesis no es tan realista, ya que en la práctica no hay un continuo de precios para los activos, sin embargo en un mercado "ideal", sí sería correcta. La hipótesis de arbitraje también esta algo alejada de la realidad. Existen en el mercado los llamados *arbitrageurs* o arbitradores quienes constantemente buscan falencias en el sistema y ganan dinero con portfolios libres de riesgo. A pesar de esto el mercado naturalmente tiende a equilibrarse. Estas ventanas de irregularidades son muy cortas en el tiempo, ya que otros inversionistas las detectan rápidamente. Hay también algunos principios importantes que ayudan a entender más al mercado:

- 1$ hoy vale más que 1$ mañana.

  Esto es algo que no es intuitivo, pero más allá de las devaluaciones de las monedas, no es difícil de entender. Está detrás del concepto de *precio actual y precio futuro*:

  $$V(0) = V(T)F_{des} \tag{1}$$

  Donde $V(0)$ es el valor actual, $V(T)$ es el valor en un futuro tiempo T y F_{des} es un factor de descuento. Está intrínsicamente ligado a la existencia a la tasa de interés libre de riesgo. Depende del tipo de interés de un bono libre de riesgo. Por ejemplo, si tiene capitalización anual será $F_{des} = \frac{1}{1+r}$. Si en cambio tiene capitalización continua será $F_{des} = e^{-r}$:

  El e^{-r} sale de la fórmula de interés compuesto continuo: Si uno tiene un capital C y lo invierte en un bono de tasa r con capitalización anual (es decir, los intereses se pagan anualmente), entonces al cabo de un año tendrá $C(1 + r)$. Si la capitalización fuera semestral, al cabo de seis meses se tendrá $C(1 + \frac{r}{2})$ y

[1] La expresión en inglés es: *There's no such thing as a free lunch*

seis meses más tarde, como se capitaliza respecto al total, $(C(1+\frac{r}{2}))\cdot(1+\frac{r}{2})$, es decir: $C(1+\frac{r}{2})^2$. Con el mismo razonamiento, si fuera mensual se tendrá $C(1+\frac{r}{12})^{12}$. Si se capitalizara continuamente entonces se tendría:

$$\lim_{n\to\infty} C(1+\frac{r}{n})^n = Ce^r.$$

En nuestro caso sería entonces $V(T) = V(0).e^{rT}$, que es equivalente a lo anterior.

Por ejemplo, si $r = 0{,}8$, es decir la tasa de interés libre de riesgo es un 8 % anual, y se sabe que en 2 años se tendrán 100\$, el valor de esos 100\$ hoy será:

$$V(0) = 100.e^{-0{,}08\cdot 2} = 85{,}21\$$$

Esto dice que 85,21\$ de hoy serán equivalentes a 100\$ en dos años. No es tan exacto esto, pero ilustra el principio.

Otro principio fundamental es el siguiente:

- 1\$ sin riesgo vale más que 1\$ con riesgo

  Éste si que es intuitivo. Está claro que si uno guarda el dinero en un caja fuerte en un banco, la cantidad no cambia. Sin embargo si lo invierte, además de poder generar más ganancia, hay una posibilidad de pérdida, y eso es lo que le quita valor.

En cuanto a los *traders* o jugadores (negociadores) del mercado se pueden caracterizar en tres grupos.

- *Hedgers*: Los Hedgers, replicadores o cobertores son aquellos que intentan reducir el riesgo al mínimo y tratan de no exponerse a los cambios adversos de los valores de los activos. En general conforman portfolios con activos en una posición (long o short) y algún derivado sobre estos en la otra. Así, si el precio del activo se mueve de manera muy desfavorable, está la opción, por ejemplo, que amortigua la pérdida.

- *Especuladores*: A diferencia de los hedgers, estos intentan asumir una posición firme en el mercado. Apuestan tanto a la suba como a la baja del precio.

- *Arbitradores*: Son quienes, como se ha marcado antes, buscan fallas en el sistema. En general involucra hacer transacciones en más de un mercado, pues en la práctica no es instantánea la información. Un arbitrador, por ejemplo, podría comprar acciones de una empresa en Nueva York e inmediatamente venderlas en Londres y ganar con la tasa de cambio.

1.3. Derivados

Un *derivado financiero* o producto derivado, o simplemente derivado es un instrumento financiero cuyo valor depende de otros activos, como por ejemplo una acción, un commodity, o hasta de otro derivado. Se usan para **transferir riesgo**. Los futures y las opciones se negocian activamente hoy en día en muchos mercados. Otros derivados como los forwards y algunos tipos de opciones se negocian en cambio *over-the-counter* o sobre el escritorio, es decir directamente entre instituciones financieras, corporaciones y particulares. Se llama *payoff* de un derivado o de un activo o portfolio a el resultado final de la inversión. Aquí los derivados más usados:

- Un contrato *forward* es un acuerdo para comprar o vender un activo específico de precio S en un cierto tiempo T llamado tiempo de maduración o de expiración por un precio K, llamado precio de ejercicio o strike price. Normalmente estos contratos no se realizan en los mercados financieros, sino over-the-counter, como por ejemplo un banco con alguno de sus clientes importantes. Una parte asume una posición *long* acordando comprar el activo, la otra una posición *short* acordando venderlo en un tiempo T a un precio K sin costo inicial. El payoff en este caso es $S_T - K$ para la posición long y $K - S_T$ para la short, donde S_T es el valor del activo a tiempo T. Es decir en este caso hay una de las partes que gana y otra que pierde la misma cantidad. Los contratos forward son usados comúnmente sobre monedas extranjeras para cubrirse de los riesgos de grandes subas o bajas como en el siguiente ejemplo: Una compañía aérea argentina tiene un contrato para comprar un avión brasilero por una cantidad fija de Reales (moneda brasilera) a pagar en un año. Tomando una posición long en un contrato forward sobre la moneda brasilera (a pagar en Pesos) se puede eliminar el riesgo de una suba del Real.[2]

- Un contrato *future* es análogo al forward con la diferencia que el future se negocia en el mercado, con los tecnicismos que esto representa. Por ejemplo hay cotas para el tamaño del contrato, tiempos predeterminados de entrega. Otra diferencia es que el future tiene un depósito o prima que el comprador tiene que hacer.

- Una *opción* es un contrato que le da al dueño el **derecho**, pero no la obligación, de negociar un activo predeterminado, llamado también el *activo subyacente* por un precio determinado K llamado el *strike price* o precio de ejercicio en un tiempo en el futuro T, llamada la *fecha de expiración*. Una opción *call* da al dueño el derecho a comprar y una *put*, el derecho a vender. La opción se llama *Europea* si sólo puede ser ejercida a tiempo T. Se llama *Americana* si puede ser ejercida a cualquier tiempo hasta la fecha de expiración. El *payoff*, de una call es $\max\{S_T - K, 0\}$ ya que si $S_T > K$ se ejerce a K y se vende a S_T, lo que da una ganancia de $S_T - K$. En el otro caso la opción no se ejerce y el payoff es 0.

[2]notas del master

El de una put, análogamente es $\max\{K - S_T, 0\}$. El hecho de que uno tenga el derecho y no la obligación es lo que hace difícil la valuación de una opción. Las opciones recién definidas se denominan *vanilla* y son las más simples. Existen además muchos tipos de opciones, aquí algunas otras:

- *Opciones barrera*: Dependen de que el activo alcance una cotización determinada. Pueden haber barreras inferiores, superiores o ambas. Opciones que sólo tengan validez si las barreras son superadas (las *Knock-in*) o, que a la inversa, pierdan su validez cuando las barreras se superan (las *Knock-out*). Un ejemplo es la *CAP* que funciona igual que una Europea, pero debe ejercerse si se supera una barrera.
- *Opciones Asiáticas*: Su precio depende de algún tipo de promedio, ya sea discreto o continuo, del activo subyacente.
- *Opciones Lookback*: El payoff no depende directamente del valor del activo sino del máximo o el mínimo del activo en el período de vida de la opción.
- Existen muchos más tipos de opciones, constantemente inversionistas inventan nuevos tipos de contratos, algunos de los más usados son las *opciones compuestas* que son opciones donde el activo subyacente es otra opción; las *opciones basket*, que son opciones que dependen de más de un activo, es decir que tienen un portfolio subyacente. En las *swap* u opciones de intercambio, la opción es la de intercambiar o no activos entre dos partes. También hay opciones cuyos activos subyacentes son índices del mercado.

1.4. Un ejemplo para fijar ideas

Veamos un ejemplo sencillo que servirá para fijar las nociones recién explicadas. En éste y otros ejemplos se obviará el uso de alguna moneda en particular, haremos el análisis sin unidades. Sea un portfolio Π que consiste en Π^1 acciones cuyo valor actual es 10 y Π^2 bonos con tasa de interés r cuyo valor actual es $\frac{1}{1+r}$.

$$\Pi = \left\{ \begin{array}{c} \Pi^1 \text{ acciones} \\ \Pi^2 \text{ bonos} \end{array} \right.$$

En un tiempo futuro T, la acción puede tomar sólo dos valores o bien 12 o bien 9 y el bono sólo puede tomar el valor 1 (Tiene una única capitalización en T). Este modelo se llama *binomial* y será estudiado en el siguiente capitulo. Matemáticamente, se puede notar de la siguiente manera:

$$\Pi(0) = \begin{pmatrix} 10 & \frac{1}{1+r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Pi^1 \\ \Pi^2 \end{pmatrix} \qquad \Pi(T) = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Pi^1 \\ \Pi^2 \end{pmatrix}$$

Donde cada componente de $\Pi(T)$ es un posible valor del portfolio a tiempo T. Si $\Pi^i > 0 \quad (\Pi^i < 0)$ querrá decir que se toma una posición long (short) sobre Π^i. Está claro que el valor actual de Π es $\Pi(0) = \Pi^1 \cdot 10 + \Pi^2 \cdot \frac{1}{1+r}$; y los posibles valores futuros de Π son: $\Pi_u(T) = \Pi^1 \cdot 12 + \Pi^2 \cdot 1$ si sube y $\Pi_d(T) = \Pi^1 \cdot 9 + \Pi^2 \cdot 1$ si baja.

Veamos en este contexto como funciona la hipótesis de arbitraje: Supongamos que la tasa r fuera de 0,3, que representa un 30 % anual y pongamos por ejemplo $\Pi^1 = -1$ y $\Pi^2 = 13$. Es decir:

$$\Pi = \begin{cases} 1 \text{ acción short} \\ 13 \text{ bonos long} \end{cases}$$

El valor actual es $\Pi(0) = -1 \cdot 10 + 13 \cdot \frac{1}{1+0{,}3} = 0$. Es decir el portfolio es gratis, no cuesta nada. Sin embargo los valores futuros serían:

$$\begin{array}{rccc} \Pi_u(T) = & -1 \cdot 12 + 13 \cdot 1 & = 1 & > 0 \\ \Pi_d(T) = & -1 \cdot 9 + 13 \cdot 1 & = 4 & > 0 \end{array}$$

Ambos son mayores a cero, quiere decir que de todas maneras se va a generar alguna ganancia habiendo pagado nada por el portfolio. Son esta clase de cosas las que la hipótesis de arbitraje no permite. Se generó arbitraje ya que se le dio a r un valor muy alto. En general, el porfolio generará arbitraje si se tiene simultáneamente:

$$\begin{cases} \Pi(0) \leq 0 & \\ \Pi_u(T) \geq 0 & \text{con alguno} \neq 0 \\ \Pi_d(T) \geq 0 & \end{cases} \tag{2}$$

Equivalentemente, el portfolio generará arbitraje si la intersección de los semiespacios que generan las ecuaciones de (2)en el plano $\mathbb{R}^2$ (se trata de dos activos), es no nula.

Veamos en este caso, qué valores de r hubieran sido correctos.

$$\begin{cases} 10 \cdot \Pi^1 + \frac{1}{1+r} \cdot \Pi^2 \leq 0 \\ 12 \cdot \Pi^1 + 1 \cdot \Pi^2 \geq 0 \\ 9 \cdot \Pi^1 + 1 \cdot \Pi^2 \geq 0 \end{cases}$$

Está claro aquí (no hay más que despejar) que la intersección será nula si $-0{,}1 \leq r \leq 0{,}2$. Es decir, ya que no hablamos de tasas de interés negativas, si $0 < r \leq 0{,}2$.

Fijemos entonces $r = 0{,}1$. Por el análisis anterior, no hay posibilidad de arbitraje. Lo que también vale aquí, y que resulta fundamental para la teoría, es que van a existir dos números $p_1, p_2 > 0$ tales que:

$$\begin{cases} 10 & = & 12 \cdot p_1 + 9 \cdot p_2 \\ \frac{1}{1+0{,}1} & = & p_1 + p_2 \end{cases}$$

La prueba en este caso es trivial, y son $p_1 = \frac{20}{33}$ y $p_2 = \frac{10}{33}$ que normalizados son $\hat{p}_1 = \frac{p_1}{p_1+p_2} = \frac{2}{3}$ y $\hat{p}_2 = \frac{p_2}{p_1+p_2} = \frac{1}{3}$ respectivamente. Lo que nos da una idea de probabilidad. Nos estaría diciendo que bajo las hipótesis que hemos planteado, y poniendo ese valor en r, la acción debería comportarse de esa manera. Lo que representa p se verá en el siguiente capítulo.

Sea ahora C el valor de una call europea basada en un activo de precio S con precio de ejercicio $K = 11$ y tiempo de expiración T. Sólo convendrá ejercer la opción si la acción sube a 12, entonces el payoff será de 1 (12-11), de no ser así no habrá ganancia. Esto se puede resumir en la función de payoff que en este caso será $\max\{S(T) - K, 0\}$. El siguiente es un diagrama de los posibles valores que pueden adoptar tanto el precio de la acción como el de la opción a tiempo 0 y tiempo T:

$$\begin{tikzcd} & (12,1) \\ (10,C) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & (9,0) \end{tikzcd}$$

¿Cuál sería el precio justo para C si la tasa de interés libre de riesgo fuera $r = 0{,}1$? Veamos dos caminos distintos para valuar la opción:

- Por un lado, usaremos una estrategia que se basa en el análisis anterior, que nos brindó una función de probabilidad puntual asociada al comportamiento del precio de la acción. Calculemos la esperanza matemática del valor de la opción a tiempo T, es decir, el payoff.

  $$VE(C(T)) = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{2}{3}$$

  y, por lo que se vio anteriormente en (1) el valor actual y el futuro está en la relación, $C(0) = \frac{1}{1+r} VE(C(T))$, es decir $C = \frac{1}{1{,}1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{33}$

- Usemos por otro lado la estrategia de *hedging*. Ésta se basa en armar un portfolio Π comprando un número Δ de acciones (long) y tomando una posición short en una opción, es decir:

  $$\Pi = \begin{cases} \Delta \text{ acciones (long)} \\ 1 \text{ opción call (short)} \end{cases}$$

  $$\Pi = \Delta \cdot 10 - 1 \cdot C$$

Si llamamos Π_u y Π_d al valor del portfolio en el caso en que la acción suba y baje respectivamente, entonces tenemos:

$$\Pi_u = \Delta \cdot 12 - 1 \cdot 1$$

$$\Pi_d = \Delta \cdot 9 - 1 \cdot 0$$

La estrategia es igualar Π_u a Π_d. Es decir, los dos posibles valores del portfolio:

$$\Delta \cdot 12 - 1 = \Delta \cdot 9 \Rightarrow \Delta = \frac{1}{3}$$

Entonces resulta $\Pi = \frac{1}{3}10 - C$. Sea $r = 0{,}1$ el retorno libre de riesgo y con capitalización anual (de ahí el $(1 + r)$ en vez del e^r). El valor esperado del portfolio a tiempo T será entonces, por la hipótesis de no arbitraje:

$$VE(\Pi(T)) = (1 + r)\Pi(0)$$

pero también, ya que fueron igualados Π_u y Π_d, el valor esperado no es otra cosa que:

$$VE(\Pi(T)) = 12\frac{1}{3} - 1 = 9\frac{1}{3} - 0 = 3$$

Entonces, $\Pi(0)(1+r) = 3$ y $r = 0{,}1$, es decir $\Pi(0) = \frac{3}{1{,}1}$. Como $\Pi(0) = \frac{1}{3}10 - C$, Nos queda finalmente que $C = \frac{10}{3} - \frac{3}{1{,}1} = \frac{20}{33}$

Como era de esperar, ambos caminos nos dieron el mismo valor para C. De no existir la hipótesis de arbitraje, el precio de las opciones no sería único. La estrategia de hedging o Δ-*hedging* es encontrar un Δ tal que el portfolio tenga riesgo 0. Esta va a ser la base del análisis en el caso continuo, es decir cuando no sean dos los posibles estados de la opción, sino que sea un continuo de posibles estados. Notemos que al igualar Π_u a Π_d se llega a

$$\Delta \cdot S_u - C_u = \Delta \cdot S_d - C_d$$

es decir

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} = \frac{\delta C}{\delta S} \tag{3}$$

En el caso continuo esto se convertirá en $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$. Esto se verá en la sección (4.6).

Hagamos ahora un segundo análisis de la opción para comprender cuál es su verdadera función comparando una inversión directa de la acción con una de una opción. Si uno especula con que la acción suba a 12, comprando a 10, de hacerlo, la ganancia será de 2, o sea un **20 %**. Comprando una call, en cambio, la inversión habría sido de $\frac{20}{33} \simeq 0{,}606$, el payoff sería de 1\$ y la ganancia, entonces, de 0,394, un **65 %**. Si en cambio la acción bajara a 9 en el primer caso, la pérdida habría sido de 1, un

10 % y en el segundo, la pérdida habría sido total, ya que no se ejercería la opción, es decir de un **100 %**. Éste simple análisis muestra el hecho que fue comentado cuando se introdujeron los derivados, que sirven para transferir el riesgo. En el caso de una opción, se podría ganar mucho, eso sí, con gran riesgo. Es por eso que se usa tener portfolios en los que se incluyan o acciones en posición long y opciones put sobre esa misma acción , o bien acciones en posición short y opciones calls sobre ella (hay otras dos posibilidades). Esto se llama *replicar* un portfolio. Las cantidades de cada una depende claro está del inversor.

2. Valuación de Derivados: Modelo Discreto

2.1. Contrato forward

Supongamos, para facilitar las cuentas que el activo subyacente al forward no paga dividendos y que tomamos la tasa de interés libre de riesgo compuesta, es decir S cantidad de dinero en un futuro T cuesta hoy e^{-rTS}. Sean F el precio de un contrato forward sobre una acción cuyo precio inicial es S_0 con tiempo de expiración (madurez) T y strike price K cuyo payoff es $S_T - K$ y B el precio un bono cuyo valor en T es K. Sean ahora los portfolios Π^1 y Π^2:

$$\Pi^1 = 1 \text{ contrato forward (long)}$$

$$\Pi^2 = \begin{cases} 1 \text{ accion (long)} \\ 1 \text{ bono (short)} \end{cases}$$

Estos dos portfolios tienen el mismo payoff, en efecto

$$\Pi^1(T) = S_T - K = \Pi^2(T)$$

Por la hipótesis de no arbitraje, si tienen mismo valor futuro, deben tener mismo valor actual.

$$F = \Pi^1(0) = \Pi^2(0) = S_0 - Ke^{-rT} \Rightarrow F = S_0 - Ke^{-rT}$$

Si el precio "real" (es decir, el de mercado) del forward fuera diferente al calculado anteriormente, querría decir que habría oportunidad de arbitraje. Si el forward estuviera sobrevaluado (subvaluado) se podría vender (comprar) Π^1 y comprar (vender)Π^2 con costo 0 y obtener ganancia sin riesgo. En cualquier caso, el mercado abastece en exceso compradores o vendedores que ajustan el precio del forward a (aproximadamente) su valor verdadero (aquel que no da lugar a arbitraje).

2.2. Paridad Put-Call

En general, a la hora de valuar opciones solamente estudiaremos las call, ya que existe una correspondencia entre el precio de una call y el de una put, ambas sobre el mismo activo, con el mismo strike price y tiempo de expiración, por supuesto. Ésta es la *paridad put-call*:

Sean C, P, y F respectivamente los precios de una call, una put y un forward sobre el mismo activo subyacente, con tiempo de expiración T y strike price K. Construyamos el siguiente portfolio:

$$\Pi = \begin{cases} \text{1 call (long)} \\ \text{1 put (short)} \\ \text{1 contrato forward (short)} \end{cases}$$

Ya vimos anteriormente que el payoff de un forward es $S_T - K$. También vimos los payoff tanto de las call como de las puts: $\text{máx}\{S_T - K, 0\}$ y $\text{máx}\{K - S_T, 0\}$ respectivamente. Entonces, el payoff del portfolio es

$$\Pi(T) = \text{máx}\{S_T - K, 0\} - \text{máx}\{K - S_T, 0\} - (S_T - K) = (S_T - K) - (S_T - K) = 0$$

Por argumentos de no arbitraje, el precio actual también debe ser nulo.

$$\Pi(0) = 0 \Rightarrow 0 = C - P - F$$

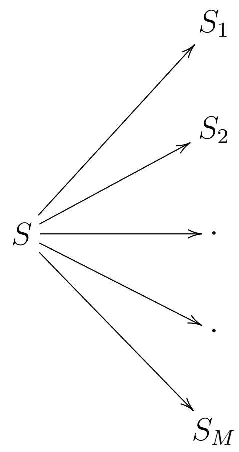
Lo que nos da ya de por sí un resultado muy interesante, a decir $F = C - P$. Si además usamos que ya sabemos el precio de un forward, nos queda la **paridad put-call**:

$$P = C - S_0 + Ke^{-rT} \tag{4}$$

2.3. El modelo de Arrow-Debreu

Comenzaremos en esta sección a modelar el comportamiento de los activos, lo que nos llevará a modelos de valuación de derivados.

Empezaremos con el modelo de Arrow-Debreu para el comportamiento de un activo que, para fijar ideas, se tratará de una acción. El modelo supone que en un tiempo futuro T, el activo puede tomar M posibles valores.



Sea $\Pi \in \mathbb{R}^N$ un portfolio de N activos, y el vector de precios $S = (S^1, S^2, \ldots, S^N)$.En el ejemplo del capítulo anterior ya trabajamos con el caso $M = 2$ y $N = 2$ (S^1 era el valor de una acción y S^2 era el de un bono)

Siguiendo este modelo, a tiempo T definimos la matriz de *cash-flow*, es decir el flujo de efectivo:

$$\mathbf{S}(T) = \begin{pmatrix} S_1^1 & S_2^1 & \cdots & S_M^1 \\ S_1^2 & S_2^2 & \cdots & S_M^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1^N & S_2^N & \cdots & S_M^N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times M}$$

Donde $S_j = S_j(T) \in \mathbb{R}^N \qquad 1 \leq j \leq M$ son los posibles valores de S a tiempo T. Entonces el valor del portfolio en T en el estado j ($\Pi(T) \in \mathbb{R}^M$)será:

$$\Pi_j(T) = \Pi \cdot S_j(T)$$

Mientras que el valor actual de Π está dado por:

$$\Pi(0) = \Pi \cdot S$$

Habrá arbitraje se existe un portfolio Π tal que

$$\begin{cases} \Pi(0) \leq 0 \\ \Pi_j(T) \geq 0 \end{cases} (1 \leq j \leq M), \text{ con alguno} \neq 0$$

es decir, si existe $\Pi \in \mathbb{R}^N$ tal que:

$$\begin{cases} \Pi \cdot S \leq 0 \\ \Pi \cdot S_j(T) \geq 0 \end{cases} (1 \leq j \leq M), \text{ con alguno} \neq 0$$

Veamos ahora una caracterización de esto, el **Teorema de arbitraje**:

Teorema 1 *La ausencia de arbitraje es equivalente a decir:*

$$\exists p \in \mathbb{R}^M, p = (p_1, p_2, ..., p_M), p_j > 0 \text{ tal que } S = \boldsymbol{S}(T) \cdot p$$

es decir, que

$$S^i = \sum_{j=1}^{M} S^i_j p_j \qquad \forall (1 \leq i \leq N)$$

Demostración:

$\Leftarrow$ Supongamos que existe el p que satisface $S = \mathbf{S}(T) \cdot p$. Sea Π tal que $\Pi \cdot S \leq 0$. Para ver que no hay posibilidad de arbitraje bastan dos posibilidades. Encontrar un j tal que $\Pi \cdot S_j(T) < 0$ o bien que sean todos 0. Veamos que esto ocurre:

$$0 \geq \Pi \cdot S = \Pi \cdot [\mathbf{S}(T) \cdot p] = [\Pi \cdot \mathbf{S}(T)] \cdot p$$

Entonces, como los $p_j > 0 (\forall j)$, $(\exists j)$ tal que $[\Pi \cdot \mathbf{S}(T)]_j < 0$ o bien los p_j son todos cero. Lo primero es equivalente a que para ese j $\Pi \cdot S_j < 0$. Por lo cual no hay posibilidad de arbitraje.

$\Rightarrow$ Supongamos ahora que no hay posibilidad de arbitraje. Quisiéramos ver que existe el vector p que satisface $S = \mathbf{S}(T) \cdot p$. Llamamos *cono* a un conjunto $C \in \mathbb{R}^q$ si, dado cualquier $X \in C$ y cualquier número real no negativo λ, vale que $\lambda X \in C$. Sea el cono cerrado convexo:

$$\mathbb{R}^{M+1}_+ = \{x \in \mathbb{R}^{M+1} : x_0 \geq 0, ..., x_M \geq 0\}$$

Sea ahora, para algún $\Pi \in \mathbb{R}^N$ el subespacio lineal $L \in \mathbb{R}^{M+1}$ definido como

$$L = \{x \in \mathbb{R}^{M+1} : x_0 = -\Pi \cdot S, x_1 = \Pi \cdot S_1(T), ..., x_M = \Pi \cdot S_M(T)\}$$

es decir,

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^{M+1} : x = \Pi \cdot \begin{pmatrix} -S^1 & S^1_1(T) & \cdots & S^1_M(T) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -S^N & S^N_1(T) & \cdots & S^N_M(T) \end{pmatrix} \right\}$$

Veamos que el hecho de que no haya arbitraje implica que

$$\mathbb{R}^{M+1}_+ \cap L = 0$$

Sea $x \in \mathbb{R}_+^{M+1} \cap L$ Entonces vale que

$$-\Pi \cdot S \geq 0$$
$$\Pi \cdot S_j(T) \geq 0 \qquad (1 \leq j \leq M$$

o, equivalentemente:

$$\Pi \cdot S \leq 0$$
$$\Pi \cdot S_j(T) \geq 0 \qquad (1 \leq j \leq M)$$

Y la ausencia de arbitraje dice que todos deben ser 0. Entonces $x = 0$, es decir, la intersección es solamente el origen. Existe entonces por la versión geométrica del **Teorema de Hahn Banach**, un hiperplano H que separa a ambos espacios.[3]

Podemos describir a H como el ortogonal a un vector v:

$$H =< v >^{\perp}$$

Y vale lo siguiente, por cómo fue construido H:

$$z \cdot v > y \cdot v \qquad \forall z \in \mathbb{R}_+^{M+1} \backslash \{0\}, \forall 0 \neq y \in L$$

Lo que implica que $y \cdot v = 0$ para todo $y \in L$, es decir, $L \subset H$. Además vale que

$$z \cdot v > 0 \qquad \forall z \in \mathbb{R}_+^{M+1} \backslash \{0\} \Rightarrow v_j > 0 \qquad \forall j$$

Sea entonces un $\Pi \in \mathbb{R}^N$ y sea $x \in \mathbb{R}^{M+1}$ definido como:

$$x_0 = -\Pi \cdot S \qquad , \qquad x_j = \Pi \cdot S_j(T) \qquad 1 \leq j \leq M$$

Entonces $x \in L$ y por lo que vimos recién, $x \cdot v = 0$. Entonces, como todas las coordenadas son nulas, podemos escribir:

$$\Pi \cdot S v_0 = \sum_{j=1}^{M} \Pi \cdot S_j(T) v_j$$

Como esto vale para todo Π, entonces vale:

$$S v_0 = \sum_{j=1}^{M} S_j(T) v_j$$

Pasando el $v_0 \neq 0$, nos queda finalmente

[3]Para una demostración del teorema ver algún libro de Análisis Funcional, como por ejemplo [6]

$$S = \sum_{j=1}^{M} S_j(T) \frac{v_j}{v_0}$$

El teorema queda demostrado llamando $p_j = \frac{v_j}{v_0} > 0$:

$$S = \mathbf{S}(T) \cdot p$$

$\blacksquare$

Las p_j normalizadas son las llamadas **probabilidades de riesgo neutral** (risk-neutral):

$$\hat{p}_j = \frac{p_j}{\sum_{i=1}^{M} p_i}$$

Con estas nociones también podemos tener una definición más formal de lo que representa un mercado completo. Diremos que el mercado es completo sí y solo sí para todo $y \in \mathbb{R}^M$ existe un Π tal que $\Pi \cdot \mathbf{S}(T) = y$. Es decir, si se puede realizar cualquier operación.

Se puede ver también que si no hay posibilidad de arbitraje entonces el mercado es completo sí y solo sí la p del teorema de arbitraje es única.

2.4. Modelo Binomial para la valuación de una Call

Trabajaremos en esta sección con el Modelo de Arrow-Debreu para el caso más simple, el que $M = 2$, es decir el activo, o el portfolio de activos, puede tomar sólo 2 posibles valores en un tiempo futuro T. Es decir, supondremos que en T el precio de un activo o bien sube o baja. Claro está que este modelo es muy básico, pero servirá para entender el modelo continuo mejor. Trataremos también aquí de comenzar a estudiar la valuación de derivados, en este caso, trabajaremos con un call europea.

Sea S el precio de una acción y C el de una opción call europea sobre ésta con strike price K y tiempo de expiración T y la tasa libre de riesgo es r. Supongamos que S puede o bien subir a S_u o bajar a S_d en T. Habrá entonces una C_u y una C_d que serán los valores de la call europea que corresponden a la suba o baja de la acción respectivamente:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (S_u,C_u) \\
(S,C) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & (S_d,C_d)
\end{tikzcd}
$$

Armemos el portfolio Π como hicimos en el ejemplo (1.4) del capítulo anterior, con una opción short y Δ acciones long. Recordar que esta estrategia se denomina Δ-hedging y el objetivo es cubrirse ante un cambio en el precio de la acción.

$$\Pi = \begin{cases} \Delta \text{ acciones long} \\ 1 \text{ opción short} \end{cases}$$

Como se vio en el ejemplo, $\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$. Ahora, como el valor esperado $E(\Pi(T))$[4] de Π es tanto Π_u como Π_d:

$$\Pi_d(T) = \Pi_u(T) = E(\Pi(T)) = \Pi(1+r) \Rightarrow \Pi = \frac{1}{1+r}\Pi_u$$

entonces:

$$\Delta S - C = \frac{1}{1+r}(\Delta S_u - C_u)$$

Despejando C, nos queda:

$$C = \frac{1}{1+r}((1+r)\Delta S - \Delta S_u + C_u)$$

De aquí se desprende que $E(C(T)) = (1+r)\Delta S - \Delta S_u + C_u$. Remplazando a Δ por la expresión vista en el ejemplo (3) anterior, nos queda:

$$C = \frac{1}{1+r}((1+r)\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}S - \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}S_u + C_u)$$

$$C = \frac{1}{1+r}(C_u\frac{S(1+r) - S_d}{S_u - S_d} + C_d\frac{S_u - S(1+r)}{S_u - S_d})$$

Podemos escribir entonces al valor de la opción de la siguiente manera:

[4] Se usará indistintamente para valor esperado tanto E como VE

$$C = \frac{1}{1+r}(C_u p + C_d(1-p)) \text{ con } p = \frac{S(1+r) - S_d}{S_u - S_d} \tag{5}$$

Es decir, como una combinación convexa de C_u y C_d multiplicada por el factor de descuento. En este caso el vector p del teorema de arbitraje es $(p, (1-p))$. Veamos de hecho que p es una medida de probabilidad:

- Empecemos por ver si $0 \leq p \leq 1$:

  $$0 \leq p \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{S(1+r) - S_d}{S_u - S_d} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq S(1+r) - S_d \leq S_u - S_d$$

  Es decir, sí y sólo sí $S_d \leq S(1+r) \leq S_u$. Veamos que esto ocurre sí y sólo sí no hay posibilidad de arbitraje. Supongamos por ejemplo que $S_u < S(1+r)$. Construyendo el portfolio π de la siguiente manera

  $$\pi = \begin{cases} x \text{ bonos long} \\ 1 \text{ acción short} \end{cases}$$

  y haciendo $x = S(1+r)$ entonces

  $$\begin{aligned} \pi(0) &= x\frac{1}{1+r} - S = 0 \\ \pi_u(T) &= x - S_u > 0 \\ \pi_d(T) &= x - S_d > 0 \end{aligned}$$

  Es decir, hay posibilidad de arbitraje. Análogo sería suponer $S_d > S(1+r)$. Entonces sí, tenemos que $0 \leq p \leq 1$.

- Se puede ver también que esta p es la normalizada de una $\hat{p}$ de la misma naturaleza que aquella del ejemplo (1.4), que cumplía simultáneamente:

  $$\begin{cases} S &= S_u\hat{p} + S_d(1-\hat{p}) \\ \frac{1}{1+r} &= \hat{p} + (1-\hat{p}) \end{cases}$$

  En este caso $\hat{p} = (1+r)p$.

Este hecho se debe a la hipótesis del mercado completo, que fue mencionada en la introducción. Se prueba que el mercado es completo sí y solo sí existe una única p como la anterior. Esta p representa una medida de probabilidad que, como se explicó anteriormente, no representa la probabilidad de que el activo suba, sino la de *riesgo neutral*, que es la que está regida por las hipótesis de no arbitraje y la completitud del mercado.

3. El camino al modelo continuo: Árbol Binomial

La idea ahora es que el precio de la acción pueda subir o bajar no sólo una vez, sino un número finito m de veces en el intervalo [0,T] cada Δt con $T = m\Delta t$. Este modelo es lo suficientemente simple como para trabajar explícitamente pero es también muy enriquecedor para comprender la valuación de derivados y aproximar problemas más realistas.

El método se basa en construir un árbol con los posibles valores del activo, dado un valor inicial de este. Luego, analizar los posibles precios a tiempo T y determinar la probabilidad de riesgo neutral. Finalmente yendo para atrás por el árbol y, a partir de la relación anterior, se calculan los valores en cada nodo. Aquí el árbol:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \cdots \\
 & & S_{uu} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & S_u \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
S \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_{ud} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & S_d \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
 & & S_{dd} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & \cdots
\end{tikzcd}$$

Se toma en este modelo $S_u = \mathfrak{u}S$ y $S_d = \mathfrak{d}S$ con $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$ fijos. Adoptaremos de aquí en más la siguiente notación:

$$S_n^j = S_{\underbrace{uu...u}_{j}\underbrace{dd...d}_{n-j}} = S\mathfrak{u}^j\mathfrak{d}^{n-j} \qquad 0 \leq n \leq m \qquad 0 \leq j \leq n$$

El árbol entonces resulta:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \cdots \\
 & & \mathfrak{u}^2 S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \mathfrak{u}S \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
S \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathfrak{u}\mathfrak{d}S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \mathfrak{d}S \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
 & & \mathfrak{d}^2 S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & \cdots
\end{tikzcd}
$$

También en este caso dejamos de lado la capitalización única del bono libre de riesgo para una continua, es decir pasamos de $\frac{1}{1+r}$ a $e^{-r\Delta t}$. Como suponemos que $S_u = \mathfrak{u}S$ y $S_d = \mathfrak{d}S$, la condición de arbitraje $S_d < S(1+r) < S_u$ será entonces $\mathfrak{u} < e^{r\Delta t} < \mathfrak{d}$ y finalmente usando el mismo argumento, $p = \frac{S(1+r)-S_d}{S_u-S_d}$ será

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - \mathfrak{d}}{\mathfrak{u} - \mathfrak{d}}$$

Notar que p no depende de S, es decir, no depende del precio del activo sino que es intrínseco al activo, lo que es más cercano a la realidad.

Veamos que este modelo es consistente con las hipótesis que nos planteamos. Luego de m pasos, a tiempo T, el sistema puede tomar m estados posibles:

$$S_m^j = S\mathfrak{u}^j\mathfrak{d}^{m-j} \qquad 0 \leq j \leq m$$

La variable aleatoria que representa este comportamiento es la *Binomial*, de aquí el nombre del método. En efecto,

$$P(S_m(T) = S_m^j(T)) = \binom{m}{j} p^j(1-p)^{m-j} \qquad 0 \leq j \leq m$$

Con esta probabilidad, podemos obtener el valor esperado de $S(T)$, tomando esperanza:

$$E(S(T)) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} S\mathfrak{u}^k \mathfrak{d}^{m-k}$$

que no es otra cosa que

$$E(S(T)) = S(p\mathfrak{u} + (1-p)\mathfrak{d})^m = S(p(\mathfrak{u}-\mathfrak{d}) + \mathfrak{d})^n$$

Si remplazamos $p = \frac{e^{r\Delta t} - \mathfrak{d}}{\mathfrak{u}-\mathfrak{d}}$, obtenemos:

$$E(S(T)) = Se^{r\Delta tm} = Se^{rT}$$

Que es exactamente lo que queríamos que pasara, es decir, se satisface la relación entre el precio actual y el futuro visto en (1).

3.1. Un método recursivo para valuar derivados

Veamos un método recursivo para valuar cualquier derivado V estilo europeo (solamente se puede ejercer a tiempo T) usando este modelo.

Usemos la siguiente notación:

$$\begin{array}{lll} V_n^j = V_n(S_n^j) & 0 \le j \le n & 0 \le n \le m-1 \\ V_m^j = F(S_m^j) & 0 \le j \le n & 0 \le n \le m-1 \end{array}$$

Donde $F(S_m^j)$ es el la función de payoff del derivado cuando el valor del activo es S_m^j. Debe verificarse entonces que

$$\begin{cases} V_n = e^{-r\Delta t} E(V_{n+1}) & 0 \le n \le m-1 \\ V_m = F(S_m) \end{cases}$$

es decir

$$\begin{cases} V_n^j = e^{-r\Delta t}(pV_{n+1}^{j+1} + (1-p)V_{n+1}^j) & 0 \le n \le m-1 \qquad 0 \le j \le n \\ V_m^j = F(S_m^j) \qquad 0 \le j \le m \end{cases} \tag{6}$$

Notar que la anterior es una relación de recurrencia. Conociendo el Payoff, yendo para atrás en el árbol se pueden conocer todas los valores del derivado, para llegar al $V_0^0 = V$, el valor del contrato a tiempo inicial. En este punto ya tenemos un método para valuar derivados haciendo un algoritmo recursivo. También aquí se ve que este método es muy valioso también cuando hay posibilidad de ejercicio previo a T (opciones americanas, por ejemplo) ya que en cada instante se tendrá el precio del derivado y con todos los datos se podrá elegir el momento conveniente de ejercer. También si hubiera barreras (opciones barrera), lo que significaría que el árbol no tendría ramas a partir de un punto.

Veamos que se puede llegar a una fórmula cerrada a partir de la recurrencia. Para esto, veamos al precio libre de arbitraje como el descuento esperado del derivado: El tiempo que separa el instante m del n es $(m-n)\Delta t$, así que queda.

$$V_n^j = e^{-r\Delta t(m-n)} E(F(S_m)|S_n = S_n^j)$$

Desarrollando la esperanza condicional, contando todas los posibles casos:

$$V_n^j = e^{-r\Delta t(m-n)} \sum_{k=0}^{m} P(S_m = S_m^k|S_n = S_n^j) F(S_m^k)$$

Calculemos ahora las probabilidades condicionales $P(S_m = S_m^k|S_n = S_n^j)$

Esto significa contar el número de caminos que van de S_n^j a S_m^k. Notar que, como el precio del subyacente sube siempre con la misma probabilidad, no importa en qué momento lo hace, sino la cantidad de veces (análogamente con las bajas). En esencia, entonces, la cantidad de caminos es el número de combinaciones de $k-j$ elementos en un conjunto de $m-n$ elementos. (Necesito $k-j$ subas en $m-n$ pasos). Esto no es otra cosa que $\binom{m-n}{k-j}$. La probabilidad buscada es aquella de una variable *multinomial*, cuya función de probabilidad puntual es:

$$P(S_m = S_m^k|S_n = S_n^j) = \binom{m-n}{k-j} p^{k-j}(1-p)^{(m-n)-(j-k)}$$

Juntando todo, llegamos a la siguiente fórmula cerrada para V_n^j.

$$V_n^j = e^{-r\Delta t(m-n)} \sum_{k=j}^{m} \binom{m-n+j}{k-j} p^{k-j}(1-p)^{(m-n)-(j-k)} F(S_m^k)$$

En particular, de aquí podemos sacar el valor inicial del derivado:

$$V = V_0^0 = e^{-r\Delta t m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} F(S_m^k) \tag{7}$$

3.2. Valuación de una Call mediante el Árbol Binomial

Consideremos ahora una opción call europea sobre el activo S con strike price K y tiempo de expiración T. Recordar que el payoff en este caso es

$$F(S_m) = \max\{S_m - K, 0\}$$

que $S_0^0 = S$, y notamos $C = V$. Entonces, usando (7), el resultado anterior:

$$C = e^{-r\Delta tm} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \max\{S_m^k - K, 0\}$$

$$C = e^{-r\Delta tm} \sum_{k=k_0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} (S\mathfrak{u}^k \mathfrak{d}^{m-k} - K)$$

En donde k_0 es el mínimo k tal que $S\mathfrak{u}^k\mathfrak{d}^{m-k} > K$, ya que S_m^k es creciente en k. Observar que k_0 es el mínimo entero positivo k que sea mayor o igual a

$$\frac{\ln(\frac{K}{S\mathfrak{d}^m})}{\ln(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{d}})}$$

Reordenando se llega a una fórmula cerrada para la valuación de una call europea:

$$C = S \sum_{k=k_0}^{m} \binom{m}{k} (p\mathfrak{u})^j ((1-p)\mathfrak{d})^{m-j} - Ke^{-rT} \sum_{k=k_0}^{m} \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j} \tag{8}$$

La evaluación numérica de los precios de las call europeas es posible a partir de las tablas de la distribución multinomial usando (8). En algunos casos sin embargo, es más fácil calcular la recursión (6) numéricamente. Veamos ahora un análisis en el límite para llegar la *fórmula de Black-Scholes*.

3.3. Variación de crecimiento

Definamos la *variación de crecimiento* en el precio de un activo como:

$$Y = \frac{1}{T} \ln(\frac{S_m}{S_0})$$

donde S_m es el precio de la acción a tiempo T y S_0 es el precio inicial. Observar que si se trata de un bono libre de riesgo con interés r entonces, $Y = r$. Notemos también que Y depende de m y que:

$$\frac{S_m}{S_0} = \frac{S_m S_{m-1} ... S_1}{S_{m-1} S_{m-2} ... S_0}$$

Por lo cual podemos escribir la variación de crecimiento de la siguiente manera:

$$Y = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{m} \ln(\frac{S_j}{S_{j-1}})$$

También, por cómo construimos el modelo, tenemos que

$$S_j = S_{j-1} H_j \Rightarrow \frac{S_j}{S_{j-1}} = H_j \qquad (1 \leq j \leq m)$$

con

$$H_j = \begin{cases} \mathfrak{u} \text{ con probabilidad } p \\ \mathfrak{d} \text{ con probabilidad } (1-p) \end{cases}$$

Calculemos ahora el valor esperado de Y, es decir, la variación de crecimiento esperada del precio del activo. Como las H_j son independientes, la esperanza de la suma es la suma de las esperanzas:

$$\mu = E(Y) = E(\frac{1}{T} \sum_{j=1}^{m} \ln(H_j)) = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{m} E(\ln(H_j))$$

Además están idénticamente distribuidas:

$$\mu = \frac{1}{T} m[\ln(\mathfrak{u})p + \ln(\mathfrak{d})(1-p)]$$

Finalmente notar que como $T = m\Delta t$, $\frac{1}{T}m = \frac{1}{\Delta t}$, y podemos escribir:

$$\mu = \frac{1}{\Delta t}[\ln(\mathfrak{u})p + \ln(\mathfrak{d})(1-p)] = E(Y) \tag{9}$$

Calculemos ahora la varianza de Y.

$$Var(Y) = Var(\frac{1}{T} \sum_{j=1}^{m} \ln(H_j)) = \frac{1}{T^2} m Var(H_1)$$

$$Var(Y) = \frac{1}{T\Delta t}[(\ln^2(\mathfrak{u})p + \ln^2(\mathfrak{d})(1-p)) - (\ln(\mathfrak{u})p + \ln(\mathfrak{d})(1-p))^2]$$

$$Var(Y) = \frac{1}{T\Delta t} \ln^2(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{d}})p(1-p) \tag{10}$$

3.4. Volatilidad

Aquí vale la pena definir formalmente la *volatilidad* del activo. La volatilidad σ es la desviación estándar de la variación de crecimiento del precio anualizada (es decir, cuando $T = 1$):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\Delta t} \ln^2(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{d}})p(1-p)} \tag{11}$$

Determinemos ahora, dada una volatilidad σ fija, los parámetros $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$. Para esto hacemos:

$$\begin{cases} \mathfrak{u} = \mathfrak{u}' e^{r\Delta t} \\ \mathfrak{d} = \mathfrak{d}' e^{r\Delta t} \end{cases}$$

La hipótesis de no arbitraje es entonces:

$$\mathfrak{u}'p + \mathfrak{d}'(1-p) = 1$$

Definimos también un parámetro no negativo ρ haciendo:

$$\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{u}'}{\mathfrak{d}'} = e^{2\rho\sqrt{\Delta t}}$$

Usando lo anterior y que p es una probabilidad (la de riesgo neutral) obtenemos

$$p(1-p) = \frac{\sigma^2}{4\rho^2}$$

Esta ecuación tiene sentido sólo cuando $\rho \geq \sigma$. Queda entonces:

$$p = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}}\right)$$

Para obtener los valores de $\mathfrak{u}'$ y de $\mathfrak{d}'$ usamos:

$$p = \frac{1-\mathfrak{d}'}{\mathfrak{u}'-\mathfrak{d}'}$$

Juntando todo, fijado un ρ llegamos a:

$$\mathfrak{u}' = \frac{e^{\rho\Delta t}}{(1-p)e^{-\rho\sqrt{\Delta t}} + pe^{\rho\sqrt{\Delta t}}}$$

y

$$\mathfrak{d}' = \frac{e^{-\rho\sqrt{\Delta t}}}{(1-p)e^{-\rho\sqrt{\Delta t}} + pe^{\rho\sqrt{\Delta t}}}$$

Volviendo para atrás, obtenemos los valores de $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$:

$$\mathfrak{u} = \frac{e^{\rho\sqrt{\Delta t}+r\Delta t}}{(1-p)e^{-\rho\sqrt{\Delta t}} + pe^{\rho\sqrt{\Delta t}}} \qquad \mathfrak{d} = \frac{e^{-\rho\sqrt{\Delta t}+r\Delta t}}{(1-p)e^{-\rho\sqrt{\Delta t}} + pe^{\rho\sqrt{\Delta t}}} \tag{12}$$

Dados Δt y σ, dependiendo del parámetro ρ obtenemos distintas probabilidades consistentes con el modelo. Al cambiar ρ lo que hacemos es generar árboles con distintas pendientes para las ramas.

Las elecciones más comunes en la implementación del método binomial para $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$ y para ρ son:

1. Una de las más usadas es la simétrica $\rho = \sigma$ Por lo cual $p = \frac{1}{2}$ y, usando (12) los respectivos valores de $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$.

2. Otra es cuando $\mathfrak{u} = \frac{1}{\mathfrak{d}}$ Esta elección da como resultado un árbol binomial con una pendiente distinta a la elección anterior.

3. Finalmente, otra elección popular es, dado un parámetro ν:

$$\mathfrak{u} = e^{\sigma\sqrt{dt}+\nu dt}, \qquad \mathfrak{d} = e^{-\sigma\sqrt{dt}+\nu dt}$$

   Una explicación posible de esta elección es que se puede interpretar a ν como un retorno esperado “subjetivo”(asumiendo la probabilidad “subjetiva” $p = \frac{1}{2}$.

3.5. El paso al límite

Ahora que conocemos los valores de $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$, estudiemos ahora la variación de crecimiento esperada nuevamente. Reemplazando (12) en la ecuación para la esperanza de la variación de crecimiento (9) obtenemos:

$$E(Y) = \mu = r + \frac{\rho}{\sqrt{\Delta t}}(p - (1-p)) - \frac{1}{\Delta t} \ln \left[pe^{\rho\sqrt{\Delta t}} + (1-p)e^{-\rho\sqrt{\Delta t}} \right]$$

μ depende de la elección de ρ, sin embargo, el efecto de ρ disminuye al refinar el árbol, es decir cuando $\Delta t \to 0$. De hecho, usando que $2p-1 = \pm\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}}$ obtenemos:

$$\mu = r - \frac{1}{2}\sigma + \mathcal{O}((2p-1)\rho^3\sqrt{\Delta t})$$

Lo que dice que, en el límite, cuando $\Delta t \ll T$ tenemos:

$$\mu \approx r - \frac{1}{2}\sigma^2 \tag{13}$$

Veamos ahora el comportamiento en el límite, es decir al refinar el árbol. Recordemos que la variación de crecimiento es suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas:

$$Y = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m} \ln H_j$$

Ajustando los parámetros y sabiendo que tomamos $\Delta t \ll T$, tenemos la esperanza y la varianza de Y:

$$E(Y) = r - \frac{1}{2}\sigma^2 \qquad , \qquad Var(Y) = \frac{\sigma^2}{T}$$

Podemos afirmar, por el **Teorema Central del Límite** que, cuando $\Delta t \longrightarrow 0$, es decir $m \longrightarrow \infty$, Y tiende en distribución a una variable aleatoria Normal con media $r - \frac{\sigma^2}{2}$ y varianza $\frac{\sigma^2}{T}$. Es decir:

$$Y \longrightarrow^{\mathcal{D}} N(r - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T})$$

Recordemos cómo definimos a Y:

$$Y = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{S_m}{S_0}\right)$$

Si operamos un poco con este resultado:

$$e^Y = \left(\frac{S_m}{S_0}\right)^{\frac{1}{T}} \Rightarrow e^{TY} = \frac{S_m}{S_0} \Rightarrow S_m = S_0 e^{TY}$$

donde Y tiende a una distribución normal con parámetros $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ y $\frac{\sigma^2}{T}$. Desarrollando en el límite la variable Y y reemplazando S_T por S_m como S a tiempo T, nos queda:

$$S_T = S_0 e^{T\left[\sqrt{\frac{\sigma^2}{T}}Z + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]} \qquad Z \sim N(0,1)$$

Notar que el análisis previo puede hacerse para cualquier $t \in (0, T]$, con lo cual el precio del activo subyacente a tiempo t tiene distribución *log-normal*, y se escribe:

$$S_t = S_0 e^{\sigma\sqrt{t}Z + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t} \qquad Z \sim N(0,1) \tag{14}$$

Ahora sea un derivado V del tipo europeo con función de payoff $F(S)$ como vimos en repetidas ocasiones podemos decir que

$$V = e^{-rT}E(F(S_m))$$

Aplicando el valor del activo (14), por el Teorema central del Límite (simplemente hay que pedirle al payoff que sea linealmente creciente)se tiene:

$$\lim_{\Delta t \to 0} V = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(Se^{z\sigma\sqrt{T} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T})e^{-\frac{z^2}{2}}dz \tag{15}$$

Donde $S = S_0$ es el precio inicial del activo y se usó explícitamente la función de distribución de la normal.

3.6. La fórmula de Black-Scholes

Apliquemos el resultado anterior (15) a una call europea. Supongamos una tasa de interés r, una volatilidad σ, un tiempo de expiración T y un strike price K. La aproximación log-normal resulta:

$$C = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \max(Se^{z\sigma\sqrt{T} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} - K, 0)e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$C = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty} Se^{z\sigma\sqrt{T} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}e^{-\frac{z^2}{2}}dz - Ke^{-rT}\int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

En dónde $-d_2$ es el z tal que $e^{\sigma\sqrt{T}z + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} = K$, es decir, a partir de cuando deja de ser nulo el integrando. Se puede obtener explícitamente:

$$-d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{Se^{rT}}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

Haciendo el cambio de variables $u = z - \sigma\sqrt{T}$ en la primera integral y, usando propiedades de la normal obtenemos[5]:

$$C = S\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{u^2}{2}} du - Ke^{-rT} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Que podemos escribirla como la **fórmula de Black-Scholes**:

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(-d_2) \tag{16}$$

en donde:

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{Se^{rT}}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \qquad d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{Se^{rT}}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \tag{17}$$

Observemos también que fácilmente, con la paridad put-call (4) y el hecho de que $N(-d) = 1 - N(d)$, obtenemos la valuación de una put:

$$P = Ke^{-rT}N(-d_2) - SN(d_1)$$

Aquí vamos a dejar el camino discreto y tomaremos otro, aquel continuo, para llegar a valuar derivados.

[5]Más adelante en el texto se resolverá esta integral más detalladamente

4. Modelo Continuo

Estudiaremos ahora otro modelo para la valuación de derivados, uno que usa herramientas del cálculo estocástico. Aunque no parezca intuitivo, fue este modelo el primero que se usó en el análisis para la valuación de derivados, el modelo discreto fue posterior. El modelo se basa en el cálculo estocástico, con lo cual estudiaremos en este capítulo a los procesos estocásticos e introduciremos los rudimentos del cálculo. Comencemos entonces a introducir estas nociones no sin antes hacer un breve repaso de la teoría de variables aleatorias.

4.1. Procesos Estocásticos

Recordemos primero algunas definiciones de la teoría de probabilidades, para más detalles y propiedades se puede consultar cualquier texto básico de probabilidades como por ejemplo [12].

Una terna $(\Omega,\mathcal{U},P)$ se llama un *espacio de probabilidad* si Ω es un conjunto cualquiera, $\mathcal{U}$ una σ-álgebra de conjuntos de Ω y P es una medida de probabilidad en $\mathcal{U}$.

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{U},P)$ una función $\mathbf{X}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ se llama una *variable aleatoria n-dimensional* si para todo $B\in\mathcal{B}$, donde $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ se tiene

$$\mathbf{X}^{-1}(B)\in\mathcal{U}$$

Se dice también que $\mathbf{X}$ es $\mathcal{U}$-medible. Aquí algunos ejemplos de estas:

1. Lanzar una moneda n veces y observar la secuencia de caras (c) y cecas (s) obtenidas. Los resultados posibles son tiras de n caras y cecas y se puede definir

   $$\Omega=\{\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n):\omega_i=c,s\quad i=1,\ldots,n\}$$

   El número de caras obtenidas es un número que depende de la secuencia de caras y cecas. Definimos entonces $\mathbf{X}$=número de caras obtenidas, o bien:

   $$\mathbf{X}(\omega)=\#\{w_i=c,\quad i=1,\ldots,n\}$$

2. Elegir un punto al azar en el intervalo [0,1], elevarlo al cuadrado y sumarle π. Tenemos entonces:

   $$\Omega=[0,1]\qquad\mathbf{X}(\omega)=\omega^2+\pi$$

3. Observar el precio de una acción (suponiéndola totalmente aleatoria) sabiendo que sólo puede ser un valor entre S_d y S_u. En este caso tendríamos

$$\Omega = [S_d, S_u] \qquad \mathbf{X}(\omega) = \omega$$

Las variables aleatorias tienen asociada una importante función:

Dada una variable aleatoria $\mathbf{X}$, se llama *función de distribución* a la función F_X o simplemente F definida por[6]:

$$F_X(x) = P(\mathbf{X} \leq x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Una variable aleatoria es *discreta* si toma un número a lo sumo numerable de valores, es decir, existe un conjunto a lo sumo numerable $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{X}(\Omega) \subset \{x_1, x_2, \ldots\}$. En este caso se define la *función de probabilidad puntual* p_X como

$$p_X(x_i) = P(X = x_i) \quad i = 1, 2, \ldots$$

Una variable aleatoria es *(absolutamente) continua* si existe una función $f_X \geq 0$ llamada *función de densidad de probabilidad* tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Está claro que no todas las variables aleatorias son o discretas o continuas, pero se puede demostrar que cualquiera es una suma de una continua y una discreta.

Introduzcamos ahora un nuevo concepto, el de un **conjunto** de variables aleatorias que dependen de un parámetro, por ejemplo el tiempo:

Una colección $\{\mathbf{X}(t) | t > 0\}$ de variables aleatorias se llama un *proceso estocástico*

Veamos algunos ejemplos de estos procesos:

1. Consideremos el número de llamadas que entran a una central telefónica. Contamos el número de llamadas que entran hasta un tiempo t para $t \geq 0$, es decir, definimos $\mathbf{X}_t$ =número de llamadas recibidas hasta el tiempo t. Los tiempos t pueden ser un número finito o bien un continuo, eso da lugar a dos procesos distintos. Estos procesos se llaman *Procesos de Poisson.*

2. Volviendo al ámbito financiero, podríamos observar el precio de una acción (suponiéndola totalmente aleatoria) en tiempos $t_0, t_1, \ldots, t_n$ sabiendo que sólo pueden ser valores entre S_d y S_u. En este caso tendíamos

$$\Omega_t = [S_d, S_u] \qquad \mathbf{X}_t(\omega) = \omega_t \qquad t = t_0, t_1, \ldots, t_n$$

[6]Algunos autores la definen como $F_X(x) = P(\mathbf{X} < x)$

3. Consideremos una partícula en el origen de la recta. Cada segundo se mueve una unidad a la derecha o a la izquierda con la misma probabilidad. Es decir, pasa del estado (x, t) a $(x+1, t+1)$ o al $(x-1, t+1)$. Este es un ejemplo de un *paseo al azar*. El espacio sería:

   $\Omega_n = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) : w_i \in \{-n, -(n-1), ..., 0, ...(n-1), n\}\}$ Podemos definir por ejemplo el proceso $\mathbf{X}_n$ como el número de veces que la partícula vuelve al origen a tiempo t:

$$\mathbf{X}_n = \#\{i : w_i = 0\}$$

A partir de la definición de proceso estocástico, es natural definir la siguiente σ-álgebra:

Si $\{\mathbf{X}(t)|t > 0\}$ es un proceso estocástico, la σ-álgebra

$$\mathcal{U}(s) := \mathcal{U}(\mathbf{X}(r)|0 \leq r \leq s)$$

se llama la *historia del proceso* hasta el tiempo s. La historia retiene la información de $\mathbf{X}$ hasta el tiempo s.

Una característica muy importante de algunos procesos estocásticos es la de "no tener memoria", es decir que lo que ocurra en un tiempo t, no depende de lo ocurrido antes de ese tiempo:

Un proceso estocástico $\mathbf{X}(\cdot)$ se llama un *proceso de Markov* si:

$$P(\mathbf{X}(t) \in B|\mathcal{U}(s)) = P(\mathbf{X}(t) \in B|\mathbf{X}(s))c.s.^{7}(0 \leq s \leq t), B \in \mathcal{B}$$

Es decir que sólo depende del último dato, y no de la historia de la variable.

4.2. Movimiento Browniano

Un proceso clave para nuestro análisis de derivados financieros es el *movimiento browniano*, que lleva su nombre por el botánico escocés Robert Brown, quien en 1828 observó que los granos de polen suspendidos en un líquido seguían un movimiento irregular. El movimiento fue luego explicado por las colisiones aleatorias con las moléculas del líquido. Para modelar este comportamiento es natural emplear el concepto de proceso estocástico. La primera explicación de este movimiento fue dada por Albert Einstein en 1905, que mostró matemáticamente que el movimiento Browniano podía ser explicado asumiendo que las partículas de polen estuvieran siendo continuamente bombardeadas por las moléculas del medio. Una definición concisa y una serie de propiedades de este proceso fueron dadas por el matemático americano Norbert Wiener en una serie de papers a partir de 1918:

Un proceso estocástico a valores reales $Z(\cdot)$ se llama un *Movimiento Browniano* o *Proceso de Wiener* si:

[7]Recordar que c.s. es que ocurre siempre salvo en un conjunto de probabilidad cero

1. $Z(0) = 0$ c.s.

2. $\forall t > 0, \forall a > 0; \big(Z(t+a) - Z(t)\big) \sim N(0, a)$ Es decir, las diferencias tienen distribución normal con media 0 y varianza a

3. $\forall t > 0, \forall a > 0; \big(Z(t+a) - Z(t)\big)$ son independientes de $\{Z(s)|0 \leq s \leq t\}$. Es decir, son independientes de la historia.

Hay algunas cosas que podemos decir acerca de estos procesos. Las demostraciones no son para nada triviales pero no aportan al objetivo del trabajo, en [9] están hechas todas las cuentas pertinentes:

- Z está bien definida. Existen procesos con esas propiedades.

- Z es continuo con probabilidad 1.

- Z no es diferenciable en $[t, t+a]$, para todo t y para todo $a > 0$ con probabilidad 1.

- Es *auto similar*. Si se cambia de escala al proceso, sigue siendo un movimiento browniano:

  Si Z es un movimiento browniano en $[0, T]$ entonces

  $$W(t) = Z(\lambda t)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

  es un movimiento browniano en $[0, \frac{T}{\lambda}]$.

Curiosamente, el movimiento Browniano fue introducido independientemente en 1900 por el matemático francés Bachelier, que lo usó en su tesis de doctorado para modelar los movimientos de los precios de las acciones en el mercado. Es decir que fue Bachelier el primero que introdujo los procesos estocásticos a las finanzas.

4.3. Un modelo simple para el precio de un activo

Una de las hipótesis de mercado que usamos, es que trabajamos en el ámbito de un mercado eficiente. Esto puede describirse mediante dos conceptos:

- Toda la información del activo está reflejada en el precio actual.

- Los mercados responden inmediatamente a cualquier información nueva acerca de un activo.

Teniendo en cuenta lo anterior, modelar el precio de un activo es modelar la llegada de nueva información que afecte el precio. Si vemos al precio de un activo como una variable aleatoria, más precisamente como un proceso estocástico, teniendo en cuenta los dos ítems anteriores podemos afirmar que se trata de un proceso de Markov.

También podemos notar que el cambio absoluto en el precio de activo no es significativo *per se*, sin embargo sí lo es el *retorno*, que como hemos ya visto, es el cambio sobre el precio original:

$$R = \frac{S_t - S}{S}$$

Supongamos ahora que en un tiempo t, el precio de un activo es S. Consideremos un tiempo posterior $t + dt$, en el cual S cambia a $S + dS$ (donde d indica un cambio pequeño, eventualmente infinitesimal). El retorno del activo será entonces $\frac{dS}{S}$. El modelo más común para modelar este retorno, lo descompone en dos partes:

Una parte, es un predecible y determinista retorno similar al retorno libre de riesgo. Esta contribución la podemos plantear de la siguiente manera:

$$\mu dt$$

Donde μ es una medida del cambio de crecimiento promedio del precio del activo, también llamado *drift* (deriva). En modelos sencillos se toma μ constante, pero en otros μ puede bien ser una función de S y de t, por ejemplo cuando se modelan tasas de cambio.

La otra parte modela la aleatoriedad en el cambio del precio de S en respuesta a los efectos externos, como por ejemplo noticias inesperadas. Se representa como un muestreo aleatorio sacado de una distribución normal con media cero y agrega al retorno, el término

$$\sigma dX$$

Donde σ es la llamada *volatilidad* (la misma que se definió en (3.4)), que mide la desviación estándar de los retornos. La cantidad dX es un movimiento browniano y lo analizaremos en la sección siguiente.

Juntando los dos términos, obtenemos la **ecuación diferencial estocástica**

$$\frac{dS}{S} = \sigma dX + \mu dt \tag{18}$$

que representa nuestro modelo para generar el precio del activo y es una expresión que tiene sentido en su forma integral. Estudiaremos su significado en (4.5).

Notar que de no existir el primer término tendríamos la simple ecuación

$$\frac{dS}{S} = \mu dt \qquad \frac{dS}{dt} = \mu S$$

que da como solución el crecimiento exponencial en el valor del activo:

$$S = S_0 e^{\mu(t-t_0)}$$

con t_0 el tiempo inicial, y S_0 el precio inicial. Es decir, si $\sigma = 0$ el precio de la acción es totalmente determinista y se puede predecir el precio futuro con certeza, teniendo en cuenta la hipótesis de no arbitraje.

Hay que notar que la ecuación (18) es un claro ejemplo de un **paseo al azar**. Es decir, no se puede resolver en el sentido determinístico, pero sí puede aportar información valiosa acerca del comportamiento de S en un sentido probabilístico. Veamos esto un poco más en detalle:

4.4. Análisis de dX

Estudiemos el término desconocido dX que aparece en (18). Lo que sabemos de dX es que es un paseo al azar. Supongamos que tiene esta forma:

$$X_{k+1} = X_k \pm \Phi(dt) \qquad X_0 = 0$$

Por lo cual, para alguna $\Phi(dt)$,

$$dX_k = \pm\Phi(dt)$$

Calculémosle la esperanza y la varianza:

$$E(dX_k) = 0 \qquad , \qquad Var(dX_k) = \Phi(dt)^2$$

Además sabemos que $E(X(T)) = 0$ y la varianza:

$$Var(X(T)) = \sum_{j=0}^{n-1} Var(dX_k) = \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(dt)^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Phi(dt)^2}{dt} dt$$

Ahora miremos lo siguiente:

Si $\frac{\Phi(dt)^2}{dt} \to 0$, entonces Var($X(T)$)=0 y no sería estocástico, sería determinísitco.

Si $\frac{\Phi(dt)^2}{dt} \to +\infty$, entonces Var($X(T)$) $= +\infty$ y tampoco es un caso interesante.

Es razonable pedir entonces que $\frac{\Phi(dt)^2}{dt} \to C > 0$ O, lo que es análogo:

$$\frac{\Phi(dt)}{\sqrt{dt}} \to \sqrt{C} > 0 \tag{19}$$

Con lo cual, la $\Phi(dt)$ es del orden de $\sqrt{dt}$. Cosa que va a ser esencial en todo el análisis que sigue.

Otra forma de escribir a dX es:

$$dX = \phi\sqrt{dt}$$

donde ϕ es una variable aleatoria cuya distribución es la de una normal estándar. Es decir:

$$P(\phi \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$
$$E(\phi) = 0 \qquad , \qquad Var(\phi) = 1$$

La razón de por qué dX es del orden de $\sqrt{dt}$ es que, como vimos en (19), cualquier otra elección para la magnitud de dX llevaría a un problema o bien sin sentido, o bien trivial al ver el comportamiento en el límite $dt \to 0$. Este modelo es razonable económicamente, ha sido corroborado por series de tiempo de datos reales y se ha comportado bien. Sin embargo hay otros modelos que hacen a dX y a dt funciones de S y/o de t, depende de cual es el activo y de las preferencias del que modela.

4.5. Integrales estocásticas

De acuerdo al modelo que planteamos, hemos llegado a la ecuación (18). Ya vimos la solución al término determinístico. Intentemos ahora encontrar una solución al estocástico, es decir resolver la ecuación:

$$dS = S\sigma dX$$

Uno, con las nociones de cálculo que posee estaría tentado a “integrar de ambos lados” para resolver la ecuación. ¿Pero que significa esto? La igualdad anterior es en el fondo una igualdad integral. Definamos entonces la noción de Integral Estocástica:

Sean $f(t, Z)$ una función suave en t, $Z(t)$ un movimiento browniano y $\Pi = \{t_1, ...t_n\}$ una partición del $[0, T]$. Si la suma

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, Z(t_k)).\Delta Z_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, Z(t_k)).(Z(t_{k+1}) - Z(t_k))$$

converge al refinar la partición (y esto ocurre para todas las particiones), se define la *integral estocástica* o de *Îto* como:

$$\int_0^T f(t, Z(t))dZ = \lim_{\|\Pi\|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k, Z(t_k)).\Delta Z_k$$

Con $\Delta Z_k = (Z(t_{k+1}) - Z(t_k))$Notar que la definición es similar a la de la integral de Riemann-Stiljes del análisis clásico. Veamos algunos ejemplos:

1. Sea $f(t, Z(t)) \equiv 1$. Entonces:

$$\int_0^T 1dZ = \lim_{\|\Pi\|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (Z(t_{k+1}) - Z(t_k))$$

   La última suma es una telescópica y $Z(0) = 0$, entonces resulta:

$$\int_0^T 1dZ = Z(T) - Z(0) = Z(T)$$

   Y podríamos decir que vale la regla de Barrow en este caso.

2. Sea ahora $f(t, Z(t)) = Z(t)$ y llamo $Z_k = Z(t_k)$:

$$\int_0^T ZdZ = \lim_{\|\Pi\|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} Z_k(Z_{k+1} - Z_k) =$$

   Usemos lo siguiente:

   - En principio, podemos escribir:

$$Z_k(Z_{k+1} - Z_k) = \frac{(Z_{k+1}^2 - Z_k^2) - (Z_{k+1} - Z_k)^2}{2}$$

   - $$\lim_{\|\Pi\|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (Z_{k+1} - Z_k)^2 = Var(Z) = T \tag{20}$$

   - $$\lim_{\|\Pi\|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (Z_{k+1}^2 - Z_k^2) = Z^2(T) - Z^2(0) = Z^2(T)$$

Juntando todo llegamos a

$$\int_0^T ZdZ = \frac{Z^2(T)}{2} - \frac{T}{2} \tag{21}$$

Cuyo primer término era previsible, pero que también tiene un término adicional $-\frac{T}{2}$, que proviene de la variación cuadrática en (20) $\sum(dZ_k)^2$.

Vimos que no vale lo que en el análisis clásicos se llama el Teorema Fundamental del Cálculo. Veamos sin embargo qué es lo que vale en estos casos:

Sea $F(t, Z(t)) = F(Z)$, es decir, sólo depende del Movimiento Browniano. Desarrollando por Taylor, obtenemos:

$$dF = F(Z + \Delta Z) - F(Z) = F'(Z)\Delta Z + \frac{1}{2}F''(Z)\Delta Z^2 + R$$

Donde R es un resto de orden mayor a ΔZ^2. Por lo anterior, entonces vale que:

$$F(Z(T)) - F(Z(0)) = \sum_{j=0}^{j=n-1} F(Z_{j+1}) - F(Z_j) = \sum_{j=0}^{j=n-1} F'(Z_j)\Delta Z_j + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{j=n-1} F''(Z_j)\Delta Z_j^2 + \mathbf{R}$$

Al tomar límite cuando $\max \Delta t \to 0$ el resto $\mathbf{R}$ va a cero. Como además $dZ^2 \approx dt$, queda:

$$F(Z(T)) - F(Z(0)) = \int_0^T F'(Z)dZ + \frac{1}{2}\int_0^T F''(Z)dt$$

Donde la primera es una integral estocástica y la segunda clásica. Por lo cual, el análogo a la **Regla de Barrow** en este caso sería:

$$\int_0^T F'(Z)dZ = F(Z(T)) - F(Z(0)) - \frac{1}{2}\int_0^T F''(Z)dt$$

Observar que si $F(Z) = Z$, llegamos al resultados del ejemplo (21).

El teorema fundamental del cálculo estocástico es el **Lema de Îto**, o fórmula de Îto. También en [9] hay una demostración más general y correcta. Veamos una versión sencilla apropiada a la aplicación que necesitamos:

Teorema 4.1 *Supongamos que S cumple la siguiente ecuación diferencial estocástica*

$$dS = S\mu dt + S\sigma dZ$$

donde $Z(t)$ es un movimiento Browniano. Sea ahora $V(S,t)$ suave (pedimos que sea continua y que $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial S}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ existan y sean continuas). Entonces se satisface lo siguiente:

$$dV = \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dZ\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt \tag{22}$$

El primer término es claramente estocástico y el segundo determinístico.

No veremos la demostración en detalle, sin embargo sí se puede hacer una heurística con la idea:

Demostración

$$dV = V(S + dS, t + dt) - V(S,t)$$

Desarrollando por Taylor se tiene que:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial S} dS dt + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(dt)^2\right) + R \tag{23}$$

En donde R es el resto de Taylor de órdenes $(dS)^3, (dS)^2 dt, dS(dt)^2, (dt)^3$.

Usando el hecho que $(dZ)^2$ es del orden de dt, por lo visto en (4.4) y que $dS = \mu S dt + \sigma S dX$, tenemos que:

$$(dS)^2 = \mu^2 S^2 (dt)^2 + 2\sigma S^2 \mu dt dZ + \sigma^2 S^2 (dZ)^2$$

resulta que $dS = \mathcal{O}(dX) = (\sqrt{dt})$. Por lo cual, en (23), los términos en los que aparecen $dSdt$ y $(dt)^2$ los podemos mandar al nuevo resto $\mathbf{R}$:

$$V(S + dS, t + dt) - V(S,t) = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2 + \mathbf{R}$$

Reemplazando dS y haciendo tender dt a cero, llegamos al resultado:

$$dV = \sigma \frac{\partial V}{\partial S} dZ + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt$$

■

Veamos alguna aplicación del Lema.

Sea $V(S,t) = \ln(S)$, vale entonces que:

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{1}{S}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Aplicando el lema (22), resulta que:

$$dV = S\sigma \frac{1}{S} dZ + \left(0 + \mu S \frac{1}{S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{1}{S^2}\right) dt$$

simplificando las S:

$$dV = \sigma dZ + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt =$$

y además, por como es V:

$$dV = \ln(S_{t+dt}) - \ln(S_t) = \ln\left(\frac{S_{t+dt}}{S_t}\right)$$

Con lo cual :

$$\ln\left(\frac{S_{t+dt}}{S_t}\right) = \sigma dZ + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt$$

Lo que dice que el incremento del logaritmo se comporta normalmente, como habíamos visto en (3.5):

$$\ln\left(\frac{S_{t+dt}}{S_t}\right) \sim N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt, \sigma^2 dt)$$

4.6. La Ecuación de Black-Scholes

En esta sección veremos la ecuación que modela cualquier derivado financiero en la forma continua. El resultado que veremos al final de esta sección fue la primera solución exitosa al problema de la valuación de derivados. Los americanos Fisher Black y Myron Scholes en 1973 en el paper pionero de la teoría de valuación de derivados [4] usaron análisis estocástico y argumentos de no arbitraje para computar el valor teórico del precio de una call europea. El resultado representó un triunfo para los modelos matemáticos en finanzas, ya que el valor teórico concordaba bien con los precios que ya habían sido establecidos en el mercado. La ecuación se ha convertido en una herramienta indispensable en el intercambio de opciones y otros derivados financieros. En el año 1997 Myron Scholes y Robert Merton fueron galardonados con el Premio Nóbel en Economía por su trabajo relacionado a la famosa fórmula. (Fisher Black murió en 1995). Estudiemos entonces el modelo.

Volvamos a enumerar los supuestos con los que trabajamos:

- **El precio de un activo sigue un paseo al azar log-normal**:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ$$

  Existen otros modelos pero raramente se obtienen fórmulas explícitas, por lo general se estudian numéricamente.

- **La tasa de interés libre de riesgo r y la volatilidad σ del activo son funciones conocidas a lo largo del tiempo**. Es posible modelar tanto a r como a σ como procesos estocásticos, pero no tomaremos ese camino.

- **No hay costos de transacción asociados al *hedging* del portfolio**. Al final del trabajo dejaremos de lado esta hipótesis y analizaremos algún modelo con costos de transacción.

- **El activo subyacente no paga dividendos durante la vida de la opción**. En general, cuando se conocen de antemano los dividendos, existen variantes a Black-Scholes que introducen saltos en los instantes de pago de dividendos.

- **No hay posibilidad de arbitraje**. La ausencia de arbitraje significa que todos los portfolios libres de riesgo deben tener el mismo retorno.

- **La compra y venta del activo puede tomar lugar continuamente**. Está claro que es una idealización y vamos a replantearnos esta hipótesis cuando trabajemos con costos de transacción.

- **La venta short es permitida y los activos son divisibles**. Asumimos que podemos comprar y vender cualquier número (no necesariamente entero) del activo subyacente y que está permitido vender aunque no tengamos posesión. Es decir, que se trata de un mercado completo.

Sea $V(S,t)$ el valor de un derivado estilo europeo (es decir que sólo se puede ejercer en la fecha de expiración) en el instante t cuando el precio del activo subyacente es S. Haciendo la misma estrategia de Δ-hedging que hicimos cuando estudiamos el modelo binomial en (2.4), nos construimos el portfolio Π libre de riesgo:

$$\Pi = \begin{cases} \Delta \text{ unidades del activo (long)} \\ 1 \text{ derivado (short)} \end{cases}$$

Es decir, $\Pi = \Delta S - V$, con lo cual

$$d\Pi = \Delta dS - dV = \Delta(\mu S dt + \sigma S dZ) - dV$$

Y usando el Lema de Îto (suponemos también que la V cumple las hipótesis), tenemos una expresión para dV de (22):

$$dV = \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dZ\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt$$

Por lo cual:

$$d\Pi = \Delta\mu S dt + \Delta\sigma S dZ - \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dZ\right) - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt$$

Separemos la parte determinística de la estocástica:

$$d\Pi = \left(\Delta\sigma S - \sigma S \frac{\partial V}{\partial S}\right) dZ + \left(\Delta\mu S - \frac{\partial V}{\partial t} - \mu S \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt$$

Si, elegimos $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ (Recordar que en (2.4), al hacer Δ-hedging en el modelo binomial, la Δ era $\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$) nos queda puramente determinística:

$$d\Pi = -\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt \tag{24}$$

Además, por la hipótesis de no arbitraje, como Π es un portfolio libre de riesgo tenemos que su retorno es el mismo del de un bono de tasa r.

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = r dt \Rightarrow d\Pi = \Pi r dt \tag{25}$$

Igualando (24) y (25), llegamos a:

$$\Pi r dt = -\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt$$

Simplificando el dt y reemplazando $\Pi = \Delta S - V = \frac{\partial V}{\partial S} S - V$, nos queda

$$\frac{\partial V}{\partial S}Sr - Vr = -\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

Finalmente, despejando rV, llegamos a la famosa **ecuación de Black-Scholes**:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} = rV \tag{26}$$

La *delta*, dada por

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

es la variación de cambio del valor del derivado con respecto a S. Es de fundamental importancia tanto en la teoría como en la práctica. Es una medida de correlación entre los movimientos del derivado y los del activo subyacente. La ecuación (26) es una **Ecuación en derivadas parciales de segundo grado parabólica**

Las ecuaciones parabólicas son las más frecuentes en los problemas financieros. Si los signos de la segunda derivada con respecto al espacio, y la primera con respecto al tiempo tienen el mismo signo cuando aparecen del mismo lado de la igualdad, la ecuación se dice *parabólica backward*, es decir, que va para atrás en el tiempo. Si los signos son distintos, se llama *parabólica forward*, como por ejemplo la ecuación del calor. Otra observación es el hecho de que se buscarán resultados de unicidad de soluciones, por lo cual habrá que tener cuidad con las condiciones de contorno e iniciales (o finales), dependiendo de la función V. Es importante diferenciar una ecuación parabólica forward de una backward antes de empezar a tratar de resolverla. Una forward, para exigir unicidad de soluciones, requerirá una condición inicial, en cambio una backward requerirá una condición final.

5. Solución de la ecuación de Black-Scholes

5.1. Valuación de una Call Europea

Busquemos una solución de la ecuación para una call europea sobre un activo de precio S con strike price K y tiempo de expiración T. En este caso llamamos $V = C$, la ecuación (26) resulta:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

con las condiciones de borde

$$C(0,t) = 0, \qquad C(S,t) \sim S, \quad si \quad S \to \infty$$

ya que cuando el precio del activo es nulo, también debe serlo el de la opción (está claro que no se va a ejercer). Y cuando el precio tiende a infinito, claro está también que $S - K$ se va a aproximar a S, y lo mismo ocurrirá con el precio de la opción. Un análisis más preciso dice que en el infinito $C(S,t) \sim S - Ke^{-r(T-t)}$, pero a nuestras pretensiones, no hace falta tanto detalle. También recordemos la condición final, es decir, el payoff de la opción:

$$C(S,T) = \text{máx}\{S - K, 0\}$$

Juntando las tres cosas podemos describir la ecuación de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 & S \in (0,+\infty), t \in [0,T) \\ C(S,T) = \text{máx}\{S-K,0\} & S \in (0,+\infty) \\ C(0,t) = 0 & t \in [0,T) \\ C(S,t) \sim S \qquad (S \to +\infty) & t \in [0,T) \end{array} \right. \tag{27}$$

Nos concentraremos en las dos primeras ecuaciones de (27ya que veremos que las últimas dos, las que describen el comportamiento de C en los bordes se van a satisfacer de todos modos. Tenemos entonces una ecuación de segundo orden parabólica del tipo *backward*, es decir, estaría bien planteada si se tuviera una condición final, que es nuestro caso:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 & S \in (0,+\infty), t \in [0,T) \\ C(S,T) = \text{máx}\{S-K,0\} & S \in (0,+\infty) \end{array} \right. \tag{28}$$

Resolvamos ahora la ecuación. Hagamos primero los siguientes cambios de variables:

$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right), \qquad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \qquad v(x,\tau) = \frac{C(S,t)}{K}$$

Es decir:

$$S = Ke^x, \qquad t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \qquad C(S,t) = Kv(x,\tau)$$

Reemplazando, las derivadas parciales quedan:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -K\frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{1}{2}\sigma^2; \qquad \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{K}{S}\frac{\partial v}{\partial x}; \qquad \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{K}{S^2}(-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2})$$

Como $\tau(T) = 0$, también tenemos una condición inicial para v a partir de la condición final de C:

$$C(S,T) = Kv(x,0) = \text{máx}\{Ke^x - K, 0\} \Rightarrow v(x,0) = \text{máx}\{e^x - 1, 0\}$$

Que resulta una condición inicial. La ecuación (28) queda entonces:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{1}{2}\sigma^2 = -\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial v^2} + r\frac{\partial v}{\partial x} - rv & x \in \mathbb{R}, \tau \in (0, T\frac{\sigma^2}{2}] \\ v(x,0) = \text{máx}\{e^x - 1, 0\} & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Si llamamos $k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$, entonces tenemos:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv & x \in \mathbb{R}, \tau \in (0, T\frac{\sigma^2}{2}] \\ v(x,0) = \text{máx}\{e^x - 1, 0\} & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{29}$$

Hagamos un último cambio de variables. Proponemos

$$v(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x,\tau)$$

Con α y β dos parámetros a determinar. Las derivadas parciales de v resultan:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u + e^{\alpha x + \beta \tau}\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial \tau} = \beta e^{\alpha x + \beta \tau} u + e^{\alpha x + \beta \tau}\frac{\partial u}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} u + 2\alpha e^{\alpha x + \beta \tau}\frac{\partial u}{\partial x} + e^{\alpha x + \beta \tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Reemplazando en la primera ecuación de (29) y simplificando el $e^{\alpha x + \beta \tau}$ que aparece en todos los términos llegamos a:

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1)(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}) + ku$$

Ahora elegimos α y β para que se anulen los coeficientes que multiplican a u y a $\frac{\partial u}{\partial x}$, es decir

$$\beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k \qquad y \qquad 0 = 2\alpha + (k-1)$$

De la segunda ecuación anterior resulta que $\alpha = -\frac{1}{2}(k-1)$. Usando ese α en la primera, resulta $\beta = \frac{1}{4}(k+1)^2$. Con esta elección de los parámetros la ecuación (29)queda:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

La condición inicial resulta además:

$$u(x,0) = v(x,0)e^{\frac{1}{2}(k-1)x} = \text{máx}\{e^x - 1, 0\}e^{\frac{1}{2}(k-1)x} = \text{máx}\{e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\}$$

Con lo cual, finalmente, mediante a cambios de variable, pasamos de (28) a la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}, \tau \in (0, T\frac{\sigma^2}{2}] \\ u(x,0) = u_0(x) = \text{máx}\{e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\} & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{30}$$

Esta es la famosa ecuación del calor, que tiene varias formas conocidas de resolución[8]. La solución está dada por:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)e^{-\frac{x-s}{4r}}\, ds \tag{31}$$

Que es una convolución entre la condición inicial y la solución fundamental de la ecuación del calor, también llamada, *Núcleo de Poisson*.

Evaluemos esta integral haciendo el cambio $x' = \frac{(s-x)}{\sqrt{2\tau}}$, $(s = x'\sqrt{2\tau} + x)$ queda entonces:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x'\sqrt{2\tau} + x)e^{-\frac{1}{2}x'}\, dx'$$

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{máx}\{e^{\frac{1}{2}(k+1)(x'\sqrt{2\tau}+x)} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(x'\sqrt{2\tau}+x)}, 0\}e^{-\frac{1}{2}x'}\, dx'$$

Ahora nos deshacemos del máximo usando que:

[8]Ver [10]

$$e^{\frac{1}{2}(k+1)s} - e^{\frac{1}{2}(k-1)s} \geq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}(k+1)s} \geq e^{\frac{1}{2}(k-1)s} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(k+1)s \geq \frac{1}{2}(k-1)s \Leftrightarrow s \geq -s$$

Es decir, en nuestro caso, sí y solo sí $s \geq 0$. Por lo cual el integrando no va a ser nulo cuando $x'\sqrt{2\tau} + x \geq 0$, es decir, si $x' \geq \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}$. La solución queda entonces:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'} dx' - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'} dx'$$

Una resta de dos integrales:

$$u(x,\tau) = I_1 - I_2$$

Calculemos finalmente cada una de estas por separado. Empecemos por I_1 (El cálculo de I_2 será análogo). Primero sacamos del integrando el término que no depende de x' y juntamos las dos exponenciales:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'} dx' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(k+1)x} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x'\sqrt{2\tau}) - \frac{1}{2}x'} dx'$$

Completando cuadrado en el exponente tenemos:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(k+1)x} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau - \frac{1}{2}(x' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2} dx'$$

Ahora, sacamos también el término que no depende de x' y llamamos

$$\rho = x' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$

con lo cual, haciendo el cambio de variable nos queda:

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho$$

Llamando

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$

resulta:

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho = e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1)$$

En donde $N(\cdot)$ es la función de probabilidad de la distribución Normal:

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

El cálculo de I_2 es idéntico a aquel de I_1, reemplazando $(k+1)$ por $(k-1)$ en todo el análisis. Es decir, resulta:

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2)$$

$$d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}$$

Tenemos entonces una fórmula explícita para $u(x,\tau)$:

$$u(x,\tau) = e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2) \tag{32}$$

Ahora habrá que volver a cambiar las variables para llegar a una expresión para $C(S,t)$. En primer lugar, teníamos que

$$v(x,\tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k-1)^2\tau} u(x,\tau)$$

Es decir, nos queda una expresión para $v(x,\tau)$:

$$v(x,\tau) = e^{x} N(d_1) - e^{-k\tau} N(d_2)$$

Ahora usamos que

$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right), \qquad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \qquad v(x,\tau) = \frac{C(S,t)}{K} \qquad k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

entonces llegamos a:

$$\frac{C(S,t)}{K} = e^{\ln\left(\frac{S}{K}\right)} N(d_1) - e^{-\frac{r}{\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)}\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} N(d_2)$$

Que, arreglándola un poco se transforma en la **fórmula de Black-Scholes**:

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{33}$$

Con:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{34}$$

Notar que es la misma fórmula a la que habíamos llegado en (3.6), lo que era de suponer. Además también notar que teniendo como datos la volatilidad σ y la tasa libre de riesgo r, el valor de C queda totalmente determinado:

$$C(S,t) = S\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\left(\frac{\ln(\frac{S}{K})+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2}ds - Ke^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\left(\frac{\ln(\frac{S}{K})+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2}ds$$

5.2. Análisis de la fórmula de Black-Scholes

Estudiemos un poco la fórmula (33). Empecemos corroborando que valen las dos últimas ecuaciones de Black-Scholes, aquellas que describían el comportamiento en el borde.

1. La primera era el comportamiento de C cuando S era 0:

   $$C(0,t) = 0 \quad t \in [0,T)$$

   Notemos que, como en la fórmula (34) en d_1 y d_2 aparece el $\ln\left(\frac{S}{K}\right)$, habría que ver el comportamiento en el límite de $S \to 0$. Un sencillo análisis nos dice que:

   $$S \to 0 \Rightarrow d_1, d_2 \to -\infty \Rightarrow N(d_1), N(d_2) \to 0$$

   con lo cual efectivamente resulta que $C(S,t) \to 0$ cuando $S \to 0$.

2. La segunda era el comportamiento de C cuando S tendía a infinito:

   $$C(S,t) \sim S \qquad (S \to +\infty), t \in [0,T)$$

   Un análisis similar al anterior nos dice que:

   $$S \to +\infty \Rightarrow d_1, d_2 \to +\infty \Rightarrow N(d_1), N(d_2) \to 1$$

   con lo cual resulta que en el infinito, $C(S,t) \sim S - Ke^{-r(T-t)} \sim S$

Comprobamos entonces que se cumplen todas las ecuaciones que modelaban la call europea.

Recordemos, por otra parte, que se llegó a la fórmula mediante una estrategia llamada el Δ-hedging y, como vimos en (4.5), el Δ es de suma importancia para neutralizar el riesgo del portfolio. Veamos en el caso de una call europea quién es. Recordemos primero que $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$. Derivando respecto de S en (33) obtenemos:

$$\Delta = N(d_1) + S\frac{\partial}{\partial S}N(d_1) - Ke^{-(T-t)}\frac{\partial}{\partial S}N(d_2) =$$

$$= N(d_1) + SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - Ke^{-(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S}$$

A partir de (34) obtenemos:

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

Por lo cual:

$$\Delta = N(d_1) + \frac{SN'(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)}{S\sigma\sqrt{T-t}} \tag{35}$$

Y afirmamos que

$$SN'(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N'(d_2) = 0$$

En efecto, pasando sumando el segundo término y dividiendo a ambos por $N'(d_2)$, habría que ver si:

$$\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = \frac{K}{S}e^{-r(T-t)}$$

Notemos primero que

$$N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_1^2} \qquad N'(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_2^2}$$

Entonces

$$\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_1^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_2^2}} = e^{-\frac{1}{2}(d_1^2-d_2^2)} \tag{36}$$

Además vale, por una parte:

$$d_1 - d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_1 - d_2 = \frac{\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \sigma\sqrt{T-t} \tag{37}$$

y por otra parte:

$$d_1 + d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_1 + d_2 = \frac{2\ln(\frac{S}{K}) + 2r(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = 2\frac{\ln(\frac{S}{K})}{\sigma\sqrt{T-t}} + 2\frac{r}{\sigma}\sqrt{T-t} \tag{38}$$

Finalmente, juntando (37) y (38) tenemos que

$$(d_1^2 - d_2^2) = (d_1 - d_2)(d_1 + d_2) = (\sigma\sqrt{T-t})\left(2\frac{\ln(\frac{S}{K})}{\sigma\sqrt{T-t}} + 2\frac{r}{\sigma}\sqrt{T-t}\right)$$

$$(d_1^2 - d_2^2) = 2\ln(\frac{S}{K}) + 2r(T-t)$$

Usando esto en (36) llegamos a:

$$\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = e^{-\frac{1}{2}\left(2\ln(\frac{S}{K})+2r(T-t)\right)} = e^{-\ln(\frac{S}{K})-r(T-t)} = \frac{K}{S}e^{-r(T-t)}$$

Que era lo que queríamos probar en (35). Finalmente, nos queda:

$$\Delta = N(d_1)$$

En otro orden de cosas, mediante la fórmula de Black-Scholes y la paridad put-call, podemos obtener sin hacer nuevamente todo el análisis, una fórmula para la valuación de una put europea. La paridad (4) nos dice que:

$$P(S,t) = C(S,t) - S + Ke^{-r(T-t)}$$

Entonces, usando (33) obtenemos:

$$P(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) - S + Ke^{-r(T-t)} = Ke^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)) - S(1 - N(d_1))$$

Finalmente, usando la propiedad de la normal, como $(1-N(d)) = N(-d)$, llegamos a una fórmula para valuar una put europea:

$$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

Haciendo un análisis análogo al de una call, obtenemos el Δ:

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) - 1$$

Está claro que podríamos haber hecho el análisis del precio de una put y, junto con el de una call llegar a la paridad put call.

5.3. Valuación de un bono y un contrato Forward

- **Bono**

  Empecemos suponiendo que V es un bono con tasa r. Como no depende de S, las derivadas parciales de V con respecto a S son nulas y la ecuación (26) resulta:

  $$\frac{\partial V}{\partial t} = rV$$

  Que se puede resolver e manera simple y resulta, como ya lo habíamos visto en el primer capítulo :

  $$V(t) = e^{-r(T-t)}V(T)$$

- **Contrato Forward**

  El análisis para otros derivados con payoffs simples es análogo al de una call hasta llegar a resolver la ecuación del calor (30) modificando la condición final (en T) de acuerdo al payoff, cuya solución estará dada también por (31). Veamos el caso de un contrato forward $F(S,t)$ sobre el activo S, con strike price K y tiempo de ejercicio T.

  Haciendo exactamente los mismos cambios de variables que en el caso de la call (aquí $F(S,t) = Kv(x,\tau)$) y, teniendo en cuenta que el payoff de un contrato forward es $S_T - K$, llegamos a la ecuación:

  $$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}, \tau \in (0, T\frac{\sigma^2}{2}] \\ u(x,0) = u_0(x) = e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x} & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Cuya solución viene dada por:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{2}(k+1)s} - e^{\frac{1}{2}(k-1)s}\right) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds$$

que la podemos separar en dos integrales:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)s} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds - \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)s} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds = I_3 - I_4$$

Resolvamos I_3 haciendo el mismo cambio de variables que en el caso de la call ($x' = \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}$) nos queda:

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(k-1)(x+x'\sqrt{2\tau})-\frac{1}{2}x'^2} dx'$$

También análogo al análisis anterior sacando fuera de la integral el término que no depende de x', completando cuadrado y cambiando de variable queda:

$$I_3 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho = e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}$$

Como se trata de una función distribución, la integral del segundo término es 1. Por lo tanto llegamos a el valor de I_3 y análogamente al de I_4:

$$I_3 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \qquad I_4 = e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}$$

Siempre haciendo lo mismo que con la call, volviendo por los cambios de variable obtenemos:

$$F(S,t) = S - Ke^{-r(T-t)}$$

El mismo precio al que habíamos llegado por argumentos de no arbitraje en el primer capítulo.

5.4. Variaciones y Continuaciones de Black-Scholes

A partir de aquí se pueden tomar muchos caminos. casi todos tienen en [16] una introducción. Algunos de ellos son:

1. **Opciones Americanas** Valuar opciones Americanas presenta una gran dificultad, el hecho de que sea posible ejercer antes del tiempo de expiración. Esto matemáticamente se traduce como un problema de frontera libre y en general es un problema abierto.

2. **Dividendos** La incorporación de dividendos en general introduce saltos en el valor del derivado. La teoría con dividendos periódicos y conocidos fue desarrollada por Merton.

3. **Opciones Exóticas** En el primer capítulo, en (1.3) fueron comentados varios tipos de derivados como también las llamadas opciones exóticas (es decir las que no son vanilla). Cuando se valúan estas opciones se llegan en general a modificaciones de Black-Scholes, siendo más complejas aquellas que dependen del camino, como por ejemplo las asiáticas.

4. r **y/o** σ **no constantes** Modelos más ambiciosos dejan de lado las constantes y los plantean como funciones del tiempo y/o el precio del activo. También existen modelos estocásticos para σ.

5. **Volatilidad Implícita** Este es el problema inverso y de gran importancia. El mismo supone que el mercado conoce el valor de la opción $C(K,T) = C(S,t,K,T)$ y de aquí se trata de encontrar la volatilidad σ. También es un problema abierto. Para estudiar estos temas ver [5].

6. Modelo numérico y un caso particular: Opciones con costos de transacción

En este capítulo dejaremos de lado la hipótesis de que no haya costos de transacción, es decir, cada vez que se realiza una operación esta tiene un costo. En general cuando uno deja de trabajar con opciones vainilla o suprime alguna de las hipótesis del análisis original de Black-Scholes se encuentra con dificultades. En muchos casos se llega a formulas cerradas simplemente modificando la ecuación apropiadamente. En otros sin embargo, la ecuación requiere de una solución con algún método numérico.

6.1. Hedging discreto

Uno de los supuestos clave del análisis de Black-Scholes es que el portfolio es replicado continuamente (Δ-hedging continuo): se toma el límite $dt \to 0$. Si el costo asociado con el hedging es independiente a la escala temporal, entonces la infinita cantidad de transacciones necesarias para mantener el portfolio libre de riesgo hasta el tiempo de expiración llevaría a costos de transacción infinitos. Como el análisis de Black-Scholes se basa en el hedging del portfolio, las consecuencias de costos de transacción significativos asociados son importantes. Algo muy interesante acerca de los costos es que en la práctica en general dos inversores distintos tienen distintos niveles de costos, que es una regla general de las economías de escala. Por ejemplo una multinacional tendrá distintos costos cuando se trata de una acción de una compañía propia que un inversor particular. Esto llevaría a distintos valores de opciones sobre un mismo activo por ejemplo. El valor de la misma entonces dependerá del inversor.

Leland en [13] propuso una simple modificación al modelo de Black-Scholes para calls y puts vainilla, que puede ser extendida a portfolios de opciones, que introduce una revisión discreta del portfolio así como costos de transacción. El esquema de costos que propone Leland es uno proporcional al valor monetario de la transacción, es decir, si se compran ν acciones ($\nu > 0$) o se venden ν acciones ($\nu < 0$) a un precio S, el costo de transacción asociado es:

$$aS|\nu|$$

donde a es una constante que depende del inversor. Nosotros, sin embargo trabajaremos con un modelo un tanto más complejo. Introduciremos una función de costos lineal en ν no creciente. Es decir, a mayor cantidad de acciones negociadas, menor el costo relativo de cada operación, el costo entonces será:

$$(a - b|\nu|)S|\nu| = aS|\nu| - bS\nu^2 \tag{39}$$

Este modelo fue estudiado por Amster y otros en un paper [2]. En el trabajo se prueban resultados de existencia de soluciones. Sin embargo, el propósito de esta sección es el de mostrar otra forma de valuar derivados, aquel de la resolución numérica de la ecuación resultante luego de hacer el análisis análogo al que hicieron Black y Scholes para el caso de una call europea con todos lo supuestos pertinentes (ver (4.6)).

Empecemos entonces a ver cuales serán nuestros supuestos en este caso. En general serán los mismos de (4.6) con las siguientes alteraciones:

- El portfolio es revisado cada δt, donde ahora δt no es infinitesimal, sino un intervalo de tiempo fijo (no lo haremos tender a 0). Un ejemplo sería que el porfolio fuera revisado todos los días a las 10:00 de la mañana, o dos veces por día, etc.
- Hay costos de transacción involucrados y siguen el modelo (39) en donde a y b dependen del inversor.
- El portfolio replicado (haciendo hedging) tiene un retorno esperado igual al de un bono con interés libre de riesgo.

Para llegar a un modelo de valuación de una call europea con costos simplemente podemos seguir el análisis de Black-Scholes hasta que en (24) debemos introducir los costos de transacción. Si Π denota el valor del portolio revisado y $\delta\Pi$ el cambio en el portfolio en un tiempo δt, luego tenemos que restar el costo de cualquier transacción del lado derecho de la ecuación para $\delta\Pi$:

$$\delta\Pi = \sigma\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right)\phi\sqrt{\delta t} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\phi^2 + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu\Delta S\right)\delta t - (a - b|\nu|)S|\nu|$$

Aquí solamente hemos restado los costos de transacción (que son siempre positivos, de ahí los módulos). Notar también que como no hemos hecho el pasaje al límite no podemos reemplazar a ϕ por su valor esperado 1. Sigamos entonces la misma estrategia de Δ-hedging y elijamos otra vez $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}(S,t)$.Después de un tiempo δt y haciendo nuevamente el hedging, el número de acciones a comprar para el hedging será:

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S + \delta S, t + \delta t)$$

Restando $\frac{\partial V}{\partial S}(S + \delta S, t + \delta t) - \frac{\partial V}{\partial S}(S,t)$ obtenemos la cantidad de acciones que fueron intercambiadas para mantener la posición *hedged*:

$$\nu = \frac{\partial V}{\partial S}(S + \delta S, t + \delta t) - \frac{\partial V}{\partial S}(S,t)$$

Desarrollando Taylor en el primer término de la derecha de la igualdad para δt y δS chicos tenemos:

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S+\delta S, t+\delta t) = \frac{\partial V}{\partial S}(S,t) + \delta S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \delta t \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t} + ...$$

Como $\delta S = \sigma S \sqrt{\delta t} + \mathcal{O}(\sqrt{\delta t})$, por el Lema de $\hat{I}$to (4.5), el término dominante es aquel proporcional a δS, es decir, encontramos el número de acciones necesarias para mantener el equilibrio del portfolio:

$$\nu \approx \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t)\delta S \approx \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t)\sigma S \phi \sqrt{\delta t}$$

Calculemos ahora la esperanza de la función de costos:

$$E\big((a - b|\nu|)S|\nu|\big) = E\big(aS|\nu| - bS\nu^2)\big)$$

Que, por la linealidad de la esperanza y, recordando que a y b son constantes, resulta:

$$E\big((a - b|\nu|)S|\nu|\big) = aE\left(S\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t)\sigma S \phi \sqrt{\delta t}\right|\right) - bE\left(S\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t)\sigma S \phi \sqrt{\delta t}\right|^2\right)$$

y, sacando de la esperanza los términos deterministas llegamos a:

$$E\big((a - b|\nu|)S|\nu|\big) = aS^2\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t)\right|E(|\phi|)\sigma\sqrt{\delta t} - bS^3\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)^2(S,t)E(|\phi|^2)\sigma^2\delta t$$

usando que $\phi \sim N(0,1)$ llegamos finalmente a:

$$E\big((a - b|\nu|)S|\nu|\big) = a\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|\sigma S^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\delta t} - bS^3\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)^2\sigma^2\delta t$$

Siguiendo el análisis de Black-Scholes, usando que el retorno esperado de un portfolio equilibrado es aquel de un bono libre de riesgo, llegamos a la ecuación que modela el valor de una call europea con costos:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - a\sigma S^2\sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right| + bS^3\sigma^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)^2 + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (40)$$

Los nuevos términos son aquellos que involucran a $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$. Vale en este momento definir un concepto financiero nuevo. Así como la $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ medía la variación de cambio del valor del portfolio con respecto a los cambios del activo subyacente (ver (2.4) o (4.6)), la *gamma*, $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ es una medida del grado de falla en el hedging. Con lo cual es lógico que en (40) aparezcan varios términos de la gamma, ya que usamos hedging discreto. La ecuación también es parabólica pero no lineal, y esto último es lo que la hace difícil de resolver.

Hay resultados teóricos en [2] en los que se demuestran teoremas de existencia y unicidad de soluciones, pero no es el objetivo del trabajo. Trataremos de encontrar soluciones numéricamente, es decir, discretizando la ecuación con el método de **Diferencias Finitas**. Volveremos a la ecuación (40) luego de un pequeño repaso del método.

6.2. Diferencias Finitas

Volvamos por un momento a la ecuación de Black-Scholes sin costos de transacción:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{41}$$

La idea del método es discretizar las derivadas parciales de (41) basándonos en la expansión en la serie de Taylor cerca de los puntos de interés. Como se trata de una ecuación backward, para aproximar la derivada con respecto al tiempo usaremos *diferencias backward*:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S,t) = \frac{V(S,t) - V(S,t-dt)}{dt} + \mathcal{O}(dt) \tag{42}$$

Para las derivadas con respecto a S usaremos en ambos casos diferencias centradas. Para la primera:

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S,t) = \frac{V(S+dS,t) - V(S-dS,t)}{2dS} + \mathcal{O}((dS)^2) \tag{43}$$

Para la segunda:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t) = \frac{V(S+dS,t) - 2V(S,t) + V(S-dS,t)}{(dS)^2} + \mathcal{O}((dS)^2) \tag{44}$$

Observar que, como vimos en (4.4) $\mathcal{O}((dS)^2) = \mathcal{O}(dt)$, con lo cual las tres aproximaciones son del mismo orden.

El siguiente paso del método es discretizar el espacio $[0, +\infty) \times [0, T]$. Para eso, primero fijamos un S_f grande ya que no podremos discretizar el infinito y dividimos el eje se las S uniformemente en nodos que distan dS entre sí. Lo mismo hacemos con el eje de las t, lo dividimos uniformemente en nodos que distan dt entre sí. Esto divide al plano (S,t) en una *grilla* uniforme con puntos de la forma (ndS, mdt). Nos concentramos entonces en el valor de $V(S,t)$ sólo en los puntos de la grilla. Escribimos:

$$V_n^m \simeq V(ndS, mdt) : 0 \leq n \leq N, 0 \leq m \leq M \tag{45}$$

Donde dS y dt es la distancia entre los nodos y tal que $dSN = S_f$ y $dtM = T$.

Como en el caso continuo, aquí también necesitaremos condiciones de contorno y finales (ya que se trata de una backward). Las de contorno serán:

$$V_0^m = V_0(mdt) \qquad V_N^m = V_{inf}(mdt)$$

Donde $V_0(t)$ es lo que vale la función en el 0 y $V_{inf}(t)$ es lo que vale en el límite en infinito. La condición final será:

$$V_n^M = F(ndS)$$

Donde $F(S)$ es el payoff del derivado.

Con todo lo anterior no queda más que reemplazar en (41) cada cosa por lo que es:

$$\frac{V_n^m - V_n^{m-1}}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 (ndS)^2 + \frac{V_{n+1}^m - 2V_n^m + V_{n-1}^m}{(dS)^2} + r(ndS)\frac{V_{n+1}^m - V_{n-1}^m}{2dS} - rV_n^m + \mathcal{O}(dt) = 0$$

Ahora nos olvidamos del error y trabajamos con aproximaciones. Despejamos además V_n^{m-1} y simplificamos los dS:

$$V_n^{m-1} = V_n^m + dt\frac{1}{2}\sigma^2 n^2 (V_{n+1}^m - 2V_n^m + V_{n-1}^m) + dt\frac{rn}{2}(V_{n+1}^m - V_{n-1}^m) - dtrV_n^m$$

Agrupando los términos llegamos finalmente al esquema de diferencias finitas:

$$V_n^{m-1} = V_{n-1}^m\Big(\frac{1}{2}\sigma^2 n^2 - \frac{1}{2}rn\Big)dt + V_n^m\Big(1 - (\sigma^2 n^2 + r)dt\Big) + V_{n+1}^m\Big(\frac{1}{2}\sigma^2 n^2 + \frac{1}{2}rn\Big)dt \tag{46}$$

La ecuación (46) vale para $1 \leq n \leq N-1$ y para $1 \leq m \leq M$. Para V_0^m y V_N^m tenemos las condiciones de contorno y para V_n^M tenemos el payoff. El esquema propuesto es un esquema explícito, ya que sólo involucra variables conocidas, es decir, que al momento de invocarlas en el algoritmo ya tienen asignado un valor.

La idea entonces es, conocido V_n^M (porque el payoff es dato) para todo n buscar con la ecuación (46) y con los datos de borde, V_n^{M-1} para todo n. Así sucesivamente hasta llegar a $m = 0$. No estudiaremos ni la consistencia, ni la convergencia ni la estabilidad del método, no es el objetivo del trabajo.[9] El esquema es el siguiente:

$$\begin{array}{ccc} & & \bullet V_{n+1}^{m} \\ & & | \\ V_n^{m-1}\bullet & \longleftarrow & \bullet V_n^{m} \\ & & | \\ & & \bullet V_{n-1}^{m} \end{array}$$

Una observación importante para hacer aquí es que si hiciéramos primero los cambios de variable que hicimos en (5.1) para resolver la ecuación de Black-Scholes y después la discretización, al llegar a la ecuación del calor (30) se vería claramente que el método de diferencias finitas es análogo al método Binomial de (2.4). Esto está hecho en [16].

Usemos estos conceptos para valuar un derivado con el modelo de costos de transacción que vimos en la sección anterior.

6.3. Un algoritmo para la valuación con costos

La idea de esta sección es aplicar las ideas de (6.2) al modelo visto en (6.1). Es decir, discretizar la ecuación (40):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - a\sigma S^2 \sqrt{\frac{2}{\pi \delta t}} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| + bS^3\sigma^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^2 + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Usando las aproximaciones (42), (43), (44) y (45), la ecuación anterior resulta:

$$\frac{V_n^m - V_n^{m-1}}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 (ndS)^2 \frac{V_{n+1}^m - 2V_n^m + V_{n-1}^m}{(dS)^2} - a\sigma(ndS)^2 \sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}} \left| \frac{V_{n+1}^m - 2V_n^m + V_{n-1}^m}{dS^2} \right| + \ldots$$

$$\ldots + b(ndS)^3\sigma^2 \left(\frac{V_{n+1}^m - 2V_n^m + V_{n-1}^m}{dS^2} \right)^2 + r(ndS)\frac{V_{n+1}^m - V_{n-1}^m}{2dS} - rV_n^m = 0$$

[9]Para este tipo de análisis ver [14]

Como antes, simplifico los dS y despejo V_n^{m-1}:

$$V_n^{m-1} = V_n^m + \Big(\frac{1}{2}\sigma^2 n^2 (V_{n+1}^m - 2V_n^m + V_{n-1}^m) - a\sigma n^2 \sqrt{\frac{2}{\pi \delta t}} |V_{n+1}^m - 2V_n^m + V_{n-1}^m| + \dots$$

$$\dots + bn^3\sigma^2 \frac{(V_{n+1}^m - 2V_n^m + V_{n-1}^m)^2}{dS} + \frac{rn}{2}(V_{n+1}^m - V_{n-1}^m) - rV_n^m\Big) dt$$

Notar lo siguiente:

- Como aparece $|V_{n+1}^m - 2V_n^m + V_{n-1}^m|$, dependiendo el signo de lo de adentro del módulo, serán resultados distintos. En el esquema aparecerá el símbolo $\mp$ lo que significa que si lo de adentro del módulo es positivo se usará $-$ y si es negativo $+$.

- También en la ecuación aparece $(V_{n+1}^m - 2V_n^m + V_{n-1}^m)^2$, lo que resultará en un esquema no lineal (esta propiedad se hereda de la ecuación original) por lo cual el esquema será distinto.

Ahora, también como antes agrupo:

$$V_n^{m-1} = V_{n-1}^m \Big(\frac{1}{2}\sigma^2 n^2 \mp a\sigma n^2 \sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}} + \frac{bn^3\sigma^2}{dS}(V_{n-1}^m - 2V_n^m + V_{n+1}^m) - \frac{rn}{2}\Big) dt +$$

$$+V_n^m \Big(1 - \big(\sigma^2 n^2 \mp a\sigma n^2 \sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}} 2 - \frac{bn^3\sigma^2}{dS} 2(V_{n-1}^m - 2V_n^m + V_{n+1}^m) + r\big) dt\Big) + \tag{47}$$

$$+V_{n+1}^m \Big(\frac{1}{2}\sigma^2 n^2 \mp a\sigma n^2 \sqrt{\frac{2}{\pi\delta t}} + \frac{bn^3\sigma^2}{dS}(V_{n-1}^m - 2V_n^m + V_{n+1}^m) + \frac{rn}{2}\Big) dt$$

Estudiar estabilidad, convergencia y consistencia de esta ecuación está por demás decir fuera del alcance de este trabajo.

FIN

Referencias

[1] Amster P. (2002) *Notas del Curso Introducción a Finanzas.*

[2] Amster P. Averbuj C.G. Mariani M.C. & Rial D. (2005) *A Black-Scholes option pricing model with transaction costs , J. Math. Anal. Appl. 303, pp. 688-695*

[3] Avellaneda M. (2000) *Quantitative modeling of derivative securities*, Chapman & Hall/CRC.

[4] Black F. & Scholes M. (1973) *The pricing of options and corporate liabilities, J. Political Econ. 81, pp. 637-659*

[5] Bouchouev I. & Isakov V. (1999) *Uniqueness, stability and numerical methods for the inverse problem that arises in financial markets. Inverse Problems, 15 pp. R95-R116.*

[6] Conway J.B. *Functional Analysis. Graduate Texts in Math. 96*, Springer, New York.

[7] Cox J.C. & Rubinstein M. (1985) *Options Market*, Prentice Hall, Inc.

[8] Elliott J.R. & Kopp P.E. (1998) *Mathematics of Finantial Markets*, Springer Finance.

[9] Evans L. C. *An introduction to stochastic differential equations*, Department of Mathematics, UC Berkeley.

[10] Evans L.C. (1998) *Partial Differential equations, Graduate Studies in Mathematics; V. 19*, American Mathematical Society.

[11] Hull J. C. (1997) *Options, Futures, and other Derivatives*, Prentice - Hall, Inc.

[12] James,R.B. (1981) *Probabilidade: Um Curso em Nivel Intermediário*, IMPA, Rio de Janeiro.

[13] Leland H. E. (1995)*Option Pricing and replication with Transaction Cost, The Journal of Finance, 40:1283-1301.*

[14] Morton K.W. & Mayers D.F. (1981) *Numerical Solutions of Partial Diferential Equations. an introduction*, Cambridge University Press, Cambridge.

[15] Ross, M.C. (1999) *An Introduction to Mathematical Finance, Options and other topics*, Cambridge University Press.

[16] Wilmott P. Dewynne J. & Howison S. (1993) *Option Pricing*, Oxford Financial Press, Oxford.