UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Teoremas de isomorfismos para clases de operadores

María Eugenia Di Iorio y Lucero

Director: Dr. Esteban Andruchow

Marzo de 2007

Para ellos, obvio.

Índice general

Introducción

En relación a cualquier estructura, la importancia del estudio de automorfismos no necesita justificación. En este trabajo estudiaremos automorfismos de conjuntos los cuales fueron dotados de diversas relaciones, tal es el caso del conjunto de los operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert dotado con la relación de orden usual para dichos operadores y el conjunto de las isometrías parciales, dotado de una relación de orden y ortogonalidad. También, se estudiará una noción relativamente nueva de automorfismos sobre una estructura algebraica: los automorfismos 2-locales. Se intentará responder la pregunta sobre cuándo un automorfismo 2-local de una cierta estructura es un automorfismo.

En la formulación matemática rigurosa de la mecánica cuántica, desarrollada por Dirac y von Neumann, los sistemas cuánticos son descriptos por operadores y vectores en un espacio de Hilbert separable (llamado el *espacio de estados*). La naturaleza de este espacio depende del sistema; por ejemplo, el espacio de estados para los estados de posición y momento es el espacio de funciones de cuadrado integrable.

Los posibles estados de un sistema cuántico están representados por vectores unitarios de dicho espacio de Hilbert. Dos vectores corresponden al mismo estado si y sólo si difieren en un número complejo de módulo uno. Un observable es toda propiedad del estado de un sistema que puede ser determinada ("observada") por alguna secuencia de operaciones fsicas. Algunos observables posibles sobre un sistema dado son la energía, posición, momento y momento angular.

Los observables de un sistema están representados por operadores lineales y autoadjuntos. Si H es el espacio de Hilbert subyacente, entonces estos operadores forman un conjunto en el cual varias operaciones y relaciones son consideradas. Los automorfismos de este conjunto con respecto a esas operaciones y/o relaciones son de gran importancia.

Si se considera al conjunto de los operadores autoadjuntos como un álgebra de Jordan, se puede leer en [1] que los correspondientes automorfismos son implementados por operadores unitarios o antiunitarios.

Una consideración también interesante es dotar a dicho conjunto con la relación de orden. En la mecánica cuántica un observable A se dice que es menor o igual que un observable B si el valor esperado de A en cualquier estado es menor o igual al valor esperado de B. Sin duda la relación de orden es de gran importancia entre los observables. Sería interesante poder determinar la forma de los automorfismos del conjunto de los operadores autoadjuntos visto como un conjunto parcialmente ordenado.

Además de los operadores autoadjuntos, el conjunto de las proyecciones en un espacio de Hilbert, denotado por $P(H)$, juega un rol fundamental en los fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica. $P(H)$ dotado del orden parcial usual y la ortogonalidad representa el aspecto probabilístico de dicha teoría y el conjunto de las proyecciones de rango uno, denotado por $P_1(H)$, con la noción de probabilidad de transición es el objeto del teorema de Wigner.

Dos de los resultados más importantes sobre estas estructuras, $P(H)$ y $P_1(H)$, son: el que establece la forma de todas las transformaciones biyectivas de $P(H)$ las cuales preservan el orden y la ortogonalidad en ambas direcciones, y el teorema de Wigner, el cual determina todas las transformaciones biyectivas de $P_1(H)$ que preservan las probabilidades de transición. Ambos resultados, se pueden encontrar en [1] y en las referencias allí mencionadas.

Debido al hecho de que las proyecciones pueden ser caracterizadas como isometrías parciales positivas, cabe hacerse la pregunta si se pueden encontrar teoremas análogos a los recién enunciados que involucren a las isometrías parciales.

Teniendo presente el conjunto de las proyecciones visto como un conjunto parcialmente ordenado ortomodular, en [2] se probó que todo automorfismo 2-local, esto es un mapa que coincide con un automorfismo en cada par de puntos, es un autmorfismo.

En una serie de trabajos ([3], [4] y las referencias allí mencionadas) , se investigó el sorprendente hecho de cuándo los automorfismos locales de un álgebra de Banach son automorfismos. Debido a que las estructuras ahí estudiadas fueron meramente C^*-álgebras, nos preguntamos sobre qué otras estructuras podremos obtener resultados positivos.

Dedicaremos los siguientes capítulos a intentar responder las preguntas antes mencionadas. Es por esto que a continuación detallaremos cómo está organizado nuestro trabajo.

El primer capítulo está dedicado a dar un breve paseo por los conocimientos previos que se requieren para entender estas notas.

En el segundo capítulo nos dedicaremos a estudiar los mapas biyectivos del conjunto parcialmente ordenado de los operadores autoadjuntos y acotados. Basándonos principalemente en [5], estudiaremos la forma de estos mapas. En primer lugar nos restringiremos a trabajar con los operadores positivos (Teorema 2.2.3), y veremos que los automorfismos del conjunto de los operadores positivos que respetan el orden en ambos sentidos son implementados por operadores inversibles, acotados, lineales o conjugados lineales. De este hecho, deduciremos la forma de los mapas biyectivos del conjunto de los operadores autoadjuntos que respetan el orden en ambas direcciones (Teorema 2.2.4). Finalemente, repasaremos una serie de corolarios interesantes que se deducen de este último teorema.

En el tercer capítulo consideraremos al conjunto de las isometrías parciales provisto de un orden parcial y de una relación de ortogonalidad. Siguiendo la misma línea y basándonos en [6], estudiaremos los mapas biyectivos del conjunto de las isometrías parciales que respetan la relación de ortogonalidad y el orden en ambas direcciones y que cumplen con la hipótesis de ser continuas en un punto distinto de cero. Además, estudiaremos la forma de los mapas biyectivos del conjunto de las isometrías parciales de rango uno que preservan las probabilidades de transición (Teorema 3.3.2). Este teorema nos brinda afirmaciones análogas a las que brinda el teorema de Wigner para el conjunto de las proyecciones de rango uno.

El cuarto y último capítulo, es a mi criterio el más interesante. En él nos ocuparemos de los automorfismos locales, más precisamente los automorfismos 2-locales. La noción de localidad fue introducida en un pricipio por Kadison ([7]) y Larson y Sourour ([8]), quienes se preguntaron cuándo vale que un automorfismo local, esto es una transformación lineal que punto a punto coincide con un automorfismo, es un automorfismo. Debido a que la condición de linealidad es bastante rígida, se introdujo una nueva noción, la 2-localidad. Basándonos en [9] y [10] probaremos que los automorfismo 2-locales del álgebra de los operadores acotados en un espacio de Hilbert, del grupo de los operadores unitarios (visto como un grupo topológico) y del grupo general lineal, son automorfismos. De esto podremos deducir que las acciones locales del grupo de automorfismos de dichas estructuras determinan el grupo por completo.

Agradecimientos:

Quiero agradacer a cada persona a la que conocí en mi vida,

De cada uno de ellos pude aprender cosas

Cosas, que sin duda, me ayudaron a llegar hasta donde estoy hoy,

A cada uno de ellos,

Gracias...

Totales.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo haremos un repaso sobre conceptos propios del análisis funcional con el objetivo de fijar la notación que será usada y brindar los requisitos previos para entender el resto de los capítulos. Se prescindirá de la mayoría las demostraciones ya que escapan de nuestro objetivo, y además, a estas se las puede encontrar en cualquier libro de análisis funcional. No olvidar que *el que empieza, no debe desalentarse si descubre que no tiene los prerrequisitos para leer los prerrequisitos.*

1.1 Definiciones básicas

Comencemos fijando un poco de notación. A lo largo de todo el trabajo, H denotará un espacio de Hilbert complejo y separable, y $B(H)$ denotará el álgebra de todos los operadores lineales y acotados en H.

Diremos que un mapa $A : H \to H$ es **aditivo** si $A(x + y) = A(x) + A(y)$. El conjunto de los mapas aditivos en H será denotado por $A(H)$.

Diremos que un mapa A es **conjugado lineal** si es aditivo y $A(\lambda x) = \overline{\lambda} A(x)$

Si A es un operador lineal acotado, $\operatorname{Img} A$ denotará su imagen. El rango de A es, por definición, la dimensión algebraica de $\operatorname{Img} A$ y es denotada por $\operatorname{rg} A$.

En la mayaría de los resultados que expondremos a lo largo del trabajo los operadores unitarios y los antiunitarios jugaran un papel fundamental. Tengamos presente la definición de dichos operadores.

Definición 1.1.1 *Un* ***operador unitario*** *es una biyección lineal de H que preserva normas. Mientras que un* ***operador antiunitario*** *es una biyección conjugada lineal de H que preserva normas.*

Notaremos con $U(H)$ al grupo multiplicativo de los operadores unitarios en H.

Diremos que un operador $A \in B(H)$ es **positivo** si $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in H$. Observar que si un operador es positivo, entonces es autoadjunto. Notar que esto es falso si consideramos un espacio de Hilbert real, ya que no se puede recuperar $\langle Ax, y\rangle$ conociendo $\langle Ax, x\rangle$ para todo x.

Para cualquier operador positivo $A \in B(H)$, $\sqrt{A}$ denotará el único operador lineal positivo cuyo cuadrado es A.

Observar que como para todo $A \in B(H)$ $A^*A \geq 0$, tenemos definido al operador $\sqrt{A^*A}$. Luego, dado $A \in B(H)$, definimos $|A| := \sqrt{A^*A}$

A continuación definiremos un operador con el que trabajaremos en el tercer capítulo. Más allá de que estos operadores juegan un rol importante en el análisis funcional, ahora lo utilizaremos en un resultado tan importante como conocido (del cual obviaremos su interesante demostración) que tiene también muchísimas aplicaciones, en el cual estos operadores juegan un papel fundamental.

Definición 1.1.2 *Sean H_1 y H_2 dos espacios de Hilbert. Un mapa lineal y continuo $U : H_1 \to H_2$ es una **isometría parcial** si U actúa como isometría en $\operatorname{Ker} U^{\perp}$. Es decir, si $\|U(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in \operatorname{Ker} U^{\perp}$.*

Llamaremos **espacio inicial** de U a $\operatorname{Ker} U^{\perp}$ y **espacio final** de U a la imagen de U.

De la misma manera que podemos escribir a un número complejo como el producto entre un unitario, es decir un número de módulo uno, y un número no negativo, el último teorema de esta sección nos dice que podemos hacer algo similar con los operadores.

Teorema 1.1.3 Descomposición Polar. *Sea A un operador lineal y continuo en un espacio de Hilbert H. Entonces existe una isometría parcial $U \in B(H)$ con $\operatorname{Ker} A^{\perp}$ como espacio inicial y $\overline{\operatorname{Img} A}$ como espacio final tal que*

$$A = U\,|A|$$

Más aún, $U^*A = |A|$. Además, si $A = WP$ con $P \geq 0$ y W una isometría parcial con $\operatorname{Ker} W = \operatorname{Ker} P$, entonces $P = |A|$ y $W = U$.

1.2 Operadores de rango finito

Si H es un espacio de Hilbert, notaremos con $F(H)$ al conjunto de los operadores de rango finito de $B(H)$.

Comenzaremos con una definición que nos será de gran utilidad.

Definición 1.2.1 *Sea H un espacio de Hilbert y sean x e y dos elementos en H. Se define el operador $x \otimes y$: $H \to H$ como*

$$(x \otimes y)(z) = \langle z, y \rangle \, x.$$

Este operador cumple con una serie de propiedades cuyas demostraciones no daremos ya que se siguen de la definición, pero debido a que serán utilizadas a lo largo de todo el trabajo, es conveniente presentarlas.

Proposición 1.2.2 *Sea H un espacio de Hilbert y sean x e y dos elementos en H. Se tiene que*

(a). $\|x \otimes y\| = \|x\| \, \|y\|$

(b). *El rango de $x \otimes y$ es uno si x e y son no nulos.*

(c). *Si $x, x', y, y' \in H$ y $U \in B(H)$ se tiene que:*

  (i) $(x \otimes x')\,(y \otimes y') = \langle y, x' \rangle \,(x \otimes y')$

  (ii) $(x \otimes y)^* = y \otimes x$

  (iii) $U(x \otimes y) = U(x) \otimes y$

  (iv) $(x \otimes y)U = x \otimes U^*(y)$

(d). *El operador $x \otimes x$ es una proyección de rango uno si y sólo si $\|x\| = 1$*

(e). *Toda proyección de rango uno es de la forma $x \otimes x$ para algún vector de norma uno.*

Supongamos que tenemos un operador de rango uno $U \in B(H)$. Elijamos un elemento no nulo de su imagen, digamos x. Si $h \in H$, se tiene que $U(h) = l(h)x$ para algún escalar $l(h) \in \mathbb{C}$. Observar que el mapa $l : H \to \mathbb{C}$ dado por $h \mapsto l(h)$ es un funcional lineal acotado. Luego por el teorema de Representación de Riesz, existe un $y \in H$ tal que $l(h) = \langle h, y \rangle$ para todo $h \in H$, o sea, $U(h) = \langle h, y \rangle \, x$ para todo $h \in H$, es decir, $U = x \otimes y$. Luego tenemos la siguiente

Observación 1.2.3 *Si* $U \in B(H)$ *es un operador de rango uno, entonces* U *es de la forma* $x \otimes y$*, donde* x *es un elemento no nulo de su imagen e* $y \in H$*.*

A continuación veremos un teorema que nos dice que si tenemos un operador de rango finito, entonces lo podemos escribir como una combinación lineal de proyecciones de rango uno. En su demostración usaremos el siguiente resultado conocido del cual no daré demostración.

Proposición 1.2.4 *Si* $T \in B(H)$ *es un operador autoadjunto, entonces existen únicos* $A, B \in B(H)$ *positivos tales que* $T = A - B$ *y* $AB = BA = 0$*.*

Los operadores A y B del lema anterior serán denotados, respectivamente, por T^+ y T^-.

Si $A \in B(H)$, entonces A se puede escribir como combinación lineal de dos operadores autoadjuntos. Más específicamente, $A = B + iC$, donde $B = (A + A^*)/2$ y $C = (A - A^*)/2i$. Los operadores B y C se llaman las partes real e imaginaria de A , respectivamente.

Teorema 1.2.5 *Si* H *un espacio de Hilbert, entonces* $F(H)$ *está linealmente generado por las proyecciones de rango uno.*

Demostración. Tomemos un $U \in F(H)$ y veamos que lo podemos escribir como una combinación lineal de proyecciones de rango uno. U puede ser escrito como $U = A + Bi$, donde A y B son las partes real e imaginarias, y como U es de rango finito entonces U^* es de rango finito. Además como $U^* = A - Bi$ y $F(H)$ es lineal se tiene que $\frac{U+U^*}{2}$ y $\frac{U-U^*}{2}$ son de rango finito, luego A y B son de rango finito. Por lo tanto, ya que A y B son de rango finito y autoadjuntos, se puede suponer que U es autoadjunto. Ahora U se puede escribir como $U = U^+ - U^-$ con U^+ y U^- positivos, y por la descomposición polar $|U|$ está en $F(H)$, luego U^+ y U^- también lo están. Por lo tanto podemos suponer que $U \geq 0$. La imagen de U es de dimensión finita, luego es un espacio de Hilbert con una base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$. Sea $P = \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes e_j$, o sea, P es la proyección de H en $\operatorname{Img} U$. Entonces $U = PU = U^{1/2} P U^{1/2}$, de lo que se deduce que $U = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes x_j$ donde $x_j = U^{1/2} e_j$. Ahora $x_j = \lambda_j f_j$ para algún escalar λ_j y algún vector f_j con $\|f_j\| = 1$, luego $U = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 f_j \otimes f_j$, y como los operadores $f_j \otimes f_j$ son proyecciones de rango uno, tenemos lo que necesitábamos. $\square$

1.3 Teorema espectral

Esta sección está dedicada a hacer un breve repaso sobre el teorema espectral para operadores normales y algunas de sus aplicaciones, las cuales serán utilizadas en los siguientes capítulos.

Definición 1.3.1 *Sea X un conjunto, Ω una σ-álgebra de subconjuntos de X, y H un espacio de Hilbert. Una* ***medida espectral*** *para (X, Ω, H) es una función $E : \Omega \to B(H)$ tal que:*

(a). *para cada Δ en Ω, $E(\Delta)$ es una proyección;*

(b). *$E(\emptyset) = 0$ y $E(X) = 1$;*

(c). *$E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$ para Δ_1 y Δ_2 en Ω;*

(d). *si $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una colección de conjuntos disjuntos dos a dos de Ω, entonces*

$$E(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n).$$

Veamos un poco el ítem (d) de la definición anterior. Sabemos que si $\{E_n\}$ es una sucesión de proyecciones ortogonales dos a dos en H, entonces para cada $h \in H$ la $\sum_{n=1}^{\infty} E_n(h)$ converge en H a $E(h)$, donde E es la proyección ortogonal de H sobre el subespacio cerrado generado por $\{E_n(H) : n \geq 1\}$. Ahora si $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ entonces, por (b) y (c) se tiene que $E(\Delta_1)$ y $E(\Delta_2)$ tienen imágenes ortogonales. Luego si $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos en Ω, se tiene que las imágenes $\{E(\Delta_n)\}$ son disjuntos dos a dos. Por lo tanto la ecuación $E(\bigcup_1^{\infty} \Delta_n) = \sum_1^{\infty} E(\Delta_n)$ en (d) tiene el sentido antes discutido.

Sea $M \subseteq H$ definimos por $\bigvee M$ a la intersección de todos los subespacios cerrados de H que contienen a M. Llamaremos a $\bigvee M$ el subespacio cerrado generado por M. Observar que $\bigvee M$ es el subespacio cerrado más chico de H que contienen a M, más aún, $\bigvee M$ es la clausura de $\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k : n \geq 1, \alpha_k \in \mathbb{C}, f_k \in M\}$.

Luego en el párrafo anterior, E es la proyección ortogonal de H sobre $\bigvee \{E_n(H) : n \geq 1\}$.

Veamos algunos ejemplos de medidas espectrales para fijar ideas.

Ejemplo 1.3.2 Sea X un compacto, tomemos como Ω a los borelianos de X, como μ a una medida en Ω y H a $L^2(\mu)$. Para cada Δ en Ω definamos, $E(\Delta)$ como la multiplicación por χ_Δ, la función característica de Δ. Entonces E es una medida espectral para (X, Ω, H).

Ejemplo 1.3.3 Sea X un conjunto, Ω los subconjuntos de X y H un espacio de Hilbert separable. Fijemos una sucesión $\{x_n\}$ en X. Si $\{e_1, e_2, \ldots\}$ es una base ortonormal de H, definir $E(\Delta)$ como la proyección sobre $\bigvee \{e_n : x_n \in \Delta\}$. Entonces E es una medida espectral para (X, Ω, H).

El siguiente lema es de gran utilidad al estudiar las medidas espectrales ya que nos permite probar afirmaciones sobre las medidas espectrales usando resultados conocidos de las medidas complejas.

Lema 1.3.4 *Si E es una medida espectral para (X, Ω, H) y $g, h \in H$ entonces*

$$E_{g,h}(\Delta) := \langle E(\Delta)g, h\rangle$$

define una medida numerablemente aditiva en Ω con variación total $\leq \|g\|\,\|h\|$.

La siguiente proposición nos dice como integrar con respecto a una medida espectral.

Proposición 1.3.5 *Si E es una medida espectral para (X, Ω, H) y $\phi : X \to \mathbb{C}$ es una función Ω-medible y acotada, entonces existe un único operador $A \in B(H)$ tal que si $\varepsilon > 0$ y $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ es una Ω-partición de X con $\sup\{|\phi(x) - \phi(y)| : x, y \in \Delta_k\} < \varepsilon$ para $1 \leq k \leq n$, entonces para cualquier x_k en Δ_k,*

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n} \phi(x_k) E(\Delta_k) \right\| < \varepsilon.$$

El operador A obtenido en la proposición anterior se llama la **integral de ϕ respecto a E** y se denota por

$$\int \phi \; dE.$$

Luego si $g, h \in H$ y ϕ es una es una función Ω-medible y acotada en X, la proposición anterior implica que

$$\left\langle \left(\int \phi \; dE \right) g, h \right\rangle = \int \phi \; dE_{g,h}. \tag{1.1}$$

Ya estamos en condiciones de enunciar el teorema espectral en sí. Este teorema es de extrema importancia en la teoría de los operadores en un espacio de Hilbert. Entre otras cosas nos permite responder la mayoría de las preguntas sobre la naturaleza y la estructura de los operadores normales, es por esto, que dichos operadores forman una de las más estudiadas y entendidas clases de operadores.

Recordemos que el teorema espectral para operadores normales en un espacio de Hilbert de dimensión finita, digamos d, dice que un operador normal N es diagonalizable. Esto es, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ son sus autovalores repetidos con multiplicidad, entonces sus correspondientes autovectores forman una base ortonormal para H. Como en dimensión infinita un operador normal puede no tener autovalores, habría que intentar generalizar la afirmación anterior.

Observar que si N es un operador normal en H de dimensión $d < \infty$ con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sus autovalores distintos, si consideramos E_k la proyección ortogonal de H en $\ker(N - \lambda_k)$, $1 \leq k \leq n$, entonces el teorema espectral nos dice que

$$N = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_k.$$

Viéndolo de esta forma es posible generalizarlo cambiando un poco las cosas. En vez de usar proyecciones ortogonales sobre autoespacios, usaremos medidas espectrales; y en vez de usar la suma usaremos la integral.

Teorema 1.3.6 Teorema Espectral para operadores normales. *Sea $N \in B(H)$ un operador normal. Entonces existe una única medida espectral E en los borelianos de $\sigma(N)$ tal que:*

(a). $N = \int_{\sigma(N)} z dE(z)$;

(b). *si G es un abierto relativo no vacío de $\sigma(N)$, entonces $E(G) \neq 0$;*

(c). *si $A \in B(H)$, entonces $AN = NA$ y $AN^* = N^*A$ si y sólo si $AE(\Delta) = E(\Delta)A$ para todo Δ.*

La única medida espectral E que nos da el teorema espectral se llama **medida espectral para N**.

En general, cuando digamos, "Sea $N = \int \lambda \, dE(\lambda)$ la descomposición espectral de N", vamos a estar haciendo referencia al teorema espectral.

Observar que el teorema espectral para dimensión finita, se puede deducir como corolario del teorema recién enunciado.

Denotemos con $\mathscr{B}(X, \Omega)$ al conjunto de todas las funciones $\phi : X \to \mathbb{C}$, Ω-medibles y acotadas; y sea $\|\phi\| = \sup\{|\phi(x)| : x \in X\}$.

Si ϕ es una función boreliana acotada en $\sigma(N)$, definir $\phi(N)$ como

$$\phi(N) := \int \phi \, dE,$$

donde E es la medida espectral para N.

Observar que (1.1), puede ser reescrito como

$$\langle \phi(N)g, h\rangle = \int \phi \, dE_{g,h} \tag{1.2}$$

para ϕ en $\mathscr{B}(\sigma(N))$ y $g, h \in H$. Si $\phi \in \mathscr{B}(\mathbb{C})$, entonces la restricción de ϕ a $\sigma(N)$ pertenece a $\mathscr{B}(\sigma(N))$. Como el soporte de cada medida $E_{g,h}$ está contenido en $\sigma(N)$, se tiene que (1.2) vale para toda función boreliana y acotada ϕ en $\mathbb{C}$.

Observar que $\phi \mapsto \phi(N) = \int \phi \, dE$ es un *-homorfismo de $\mathscr{B}(\mathbb{C})$ en $B(H)$. Luego se tiene que $\left(\int \phi \, dE\right)\left(\int \psi \, dE\right) = \int \phi\psi \, dE$ y $\left\|\int \phi \, dE\right\| \leq \sup\{|\phi(z)| : z \in \sigma(N)\}$, si $\phi, \psi \in \mathscr{B}(\mathbb{C})$.

Proposición 1.3.7 *Si N es un operador normal y $N = \int z \, dE(z)$, entonces N es compacto si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, $E(\{z : |z| > \varepsilon\})$ tiene rango finito.*

Observación 1.3.8 *Si $N = \int z \, dE(z)$ y $\varepsilon > 0$, se tiene que $\operatorname{Img} E(\{z : |z| > \varepsilon\}) \subseteq \operatorname{Img} N$. Luego se deduce que si N es un operador normal no compacto, existe una proyección P de rango infinito tal que $\operatorname{Img} P \subseteq \operatorname{Img} N$.*

Veamos a continuación algunos resultados sobre el espectro de un operador normal los cuales se deducen a partir teorema espectral.

Observar que si N es un operador normal, λ es un autovalor de N si y sólo si $E(\{\lambda\}) \neq 0$. Más aún, si λ es un autovalor de N entonces $E(\{\lambda\})$ es la proyección ortogonal sobre $\operatorname{Ker}(N - \lambda)$.

Observación 1.3.9 *Sea $N \in B(H)$ un operador normal. Si $\lambda \in \sigma(N)$ es un punto aislado, entonces λ es un autovalor de N.*

Demostración. Sea $N = \int z dE(z)$ la descomposición espectral de N. Como λ es un punto aislado, existe un entorno A deλ tal que $A \cap \sigma(N) = \{\lambda\}$. Luego, $\{\lambda\}$ es un abierto relativo de $\sigma(N)$, con lo cual $E(\{\lambda\})(H) \neq 0$. Esto nos dice que $\operatorname{Ker}(N - \lambda I) \neq 0$, o sea, λ es un autovalor de N. □

Lema 1.3.10 *Sea $N \in B(H)$ un operador normal. Si $\lambda \in \sigma(N)$ no es un autovalor de N, entonces existe una sucesión (x_n) de vectores ortonormales en H tales que $\langle Nx_n, x_n\rangle \to \lambda$.*

Demostración. Sea $N = \int z dE(z)$ la descomposición espectral de N. Como λ no es un autovalor, entonces no es un punto aislado. Luego hay una sucesión (r_n) de números reales positivos estrictamente decreciente tal que $r_n \to 0$ y tal que el conjunto definido por $R_n = \{z \in \mathbb{C} : \ r_{n+1} < |\lambda - z| < r_n\}$ tiene intersección no vacía con $\sigma(N)$. Considerar $A_n = R_n \cap \sigma(N)$, luego $E(A_n)(H) \neq 0$. Elegir $x_n \in E(A_n)(H)$ tal que $\|x_n\| = 1$. Como

$$\|Nx_n - \lambda x_n\|^2 = \|(N - \lambda I)x_n\|^2 = \int_{A_n} \|z - \lambda\|^2 dE_{x_n,x_n}(z) \leq r_n^2 \to 0$$

Se tiene que

$$|\langle Nx_n, x_n\rangle - \lambda| = |\langle Nx_n - \lambda x_n, x_n\rangle| \leq \|Nx_n - \lambda x_n\| \to 0$$

O sea, $\langle Nx_n, x_n\rangle \to \lambda$.

Además, observar que los x_n son ortogonales dos a dos ya que $A_n \cap A_m = \emptyset$. □

La demostración anterior nos da pie a definir

Definición 1.3.11 *Si $N \in B(H)$, se define el* ***espectro puntual aproximado*** *de N, denotado por $\sigma_{ap}(N)$, como el conjunto formado por los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales hay una sucesión $(x_n) \in H$ tal que $\|x_n\| = 1$ para todo n y $\|(N - \lambda)x_n\| \to 0$.*

Una manera equivalente de definir al espectro puntual aproximado, es decir que es el conjunto de los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $N - \lambda$ no es acotado inferiormente.

Observar que el conjunto de autovalores de N está contenido en $\sigma_{ap}(N)$. Y si N es normal se tiene,

Observación 1.3.12 *Si $N \in B(H)$ es un operador normal, entonces $\sigma(N) = \sigma_{ap}(N)$.*

Demostración. Observar que como λ está en $\sigma_{ap}(N)$ entonces $(N - \lambda)$ no es acotado inferiormente. De esto se deduce que $\sigma_{ap}(N) \subseteq \sigma(N)$. Veamos la otra contención. Si $\lambda \in \sigma(N)$ es un autovalor, entonces λ está en $\sigma_{ap}(N)$, y si $\lambda \in \sigma(N)$ no es un autovalor, en la demostración del Lema 1.3.10, se ve que está en $\sigma_{ap}(N)$. □

De la misma manera que sucede para dimensión finita se tiene que,

Teorema 1.3.13 *Sea $N \in B(H)$ un operador normal, entonces se tiene que*

(a). *N es autoadjunto si y sólo si $\sigma(N) \subseteq \mathbb{R}$*

(b). *N es positivo si y sólo si $\sigma(N) \subseteq [0, \infty)$*

(c). *N es unitario sy y sólo si $\sigma(N)$ está contenido en el círculo unidad*

Hasta aquí fueron los preliminares. Esperamos haber cumplido con el objetivo de repasar de manera clara y no abrumadora todos los resultados que se necesitan para el desarrollo de los futuros capítulos.

Capítulo 2

Automorfismos del conjunto de los operadores autoadjuntos

En este capítulo, describiremos la forma de todos los mapas biyectivos, no necesariamente lineales o continuos, del conjunto de los operadores lineales, acotados y autoadjuntos de H, los cuales preservan el orden $\leq$ en ambas direcciones.

Sea H un espacio de Hilbert, denotemos por $B_S(H)$ al conjunto de los operadores lineales, acotados, y autoadjuntos de H. Dotemos a $B_S(H)$ con el orden usual entre operadores autoadjuntos. Este es, para cuales quiera $A, B \in B_S(H)$ escribimos $A \leq B$ si $0 \leq B - A$, lo que es equivalente a decir que $\langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle$ vale para todo $x \in H$.

Recordar que como $B(H)$ es una C^*-álgebra, entonces $B(H)^+$ es un cono cerrado. Denotaremos con $B(H)^+$ al cono de todos los operadores positivos en H.

Nota: En lo que sigue vamos a considerar a $B_S(H)$ como un conjunto parcialmente ordenado con la relación $\leq$.

2.1 Operadores positivos.

A lo largo de toda esta sección enunciaremos resultados auxiliares propios de los operadores positivos que nos serán de gran utilidad en la siguiente sección.

Observar que si A y B son operadores positivos tales que el $A \leq B$ y el rango de B es finito, entonces $\operatorname{Img} A \subseteq \operatorname{Img} B$. En el siguiente lema, vemos una especie de recíproco.

Lema 2.1.1 *Sean* $A, B \in B(H)^+$ *tales que* $\operatorname{rg} A = 1$, $\operatorname{rg} B < \infty$. *Tenemos que* $\lambda A \leq B$ *para algún escalar positivo* λ *si y sólo si* $\operatorname{Img} A \subseteq \operatorname{Img} B$.

Demostración. Recordemos el siguiente resultado de Busch y Gudder [11, Teorema 3]: Si $B \in B(H)^+$, $x \in H$, y $P = x \otimes x$, entonces $\lambda P \leq B$ para algún escalar positivo λ si y sólo si x está en la imagen de $\sqrt{B}$. Como A es positivo y de rango uno, existe un $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ y un $x \in H$ tal que $A = \alpha\ x \otimes x$. Si vemos que el $\operatorname{Img} B = \operatorname{Img} \sqrt{B}$ habremos terminado, pero como B es un operador de rango finito se deduce del teorema espectral que vale la igualdad. □

Lema 2.1.2 *Sea* $A \in B(H)^+$ *y* $n \in \mathbb{N}$. *Se tiene que el* $\operatorname{rg} A > n + 1$ *si y sólo si hay operadores* $E, F \in B(H)^+$ *tales que* $E, F \leq A$, $\operatorname{rg} E = n$, $\operatorname{rg} F > 1$ *y no hay un* $G \in B(H)^+$ *de rango uno con* $G \leq E, F$.

Demostración. Veamos primero que existe un operador de rango finito $A' \in B(H)^+$ tal que $A' \leq A$ y $\operatorname{rg} A' > n + 1$. Si A es de rango finito, no hay nada que hacer. Si A es compacto y de rango infinito podemos usar el teorema espectral para operadores compactos y autoadjuntos para garantizar la existencia es A'. Por último, si A no es compacto entonces el teorema espectral para operadores normales nos dice que podemos encontrar un proyección P en H de rango infinito y un escalar positivo λ tal que $\lambda P \leq A$, luego, la existencia de A' está garantizada. Observar que A' puede ser escrita como la suma finita $\sum_k \lambda_k P_k$ donde los λ_k's son escalares positivos y las P_k's son proyecciones de rango uno ortogonales dos a dos. Llamar E a la suma de los primeros n terminos de esa suma y F a la suma de los restantes. Con esto se tiene que E, F cumplen con lo que queremos y la no existencia de G la podemos deducir del Lema 2.1.1, ya que si existiese G, la imagen de G estaría en la imagen de E y en la imagen de F, cosa que no puede suceder.

Veamos la vuelta. Si el rango de A es infinito, no hay nada que probar. Supongamos que el rango de A es finito y consideremos $E, F \in B(H)^+$ con las propiedades del enunciado. Como $E, F \leq A$ se deduce que $\operatorname{Img} E, \operatorname{Img} F \subset \operatorname{Img} A$ y que E, F son de rango finito. Como no hay un operador positivo de rango uno con $G \leq E, F$, se deduce usando el lema 2.1.1 que $\operatorname{Img} E \cap \operatorname{Img} F = \{0\}$. Luego la imagen de A contiene dos subespacios con intersección trivial, y la suma de sus dimensiones es más grande que $n + 1$, luego el $\operatorname{rg} A > n + 1$. Con esto tenemos el lema probado. □

Observación 2.1.3 *Un operador no nulo $A \in B(H)^+$ es de rango uno si y sólo si el intervalo de operadores $[0, A]$ dos elementos cualesquiera son comparables bajo el orden $\leq$.*

Durante la demostración del Teorema 2.2.3 haremos referencia a un resultado clásico del análisis funcional, cuya demostración se puede leer de [12, Teorema 4.1.1].

Este resultado pone en evidencia una de las ventajas que tiene la topología fuerte de operadores, ya que establece la "completitud del orden" en dicha topología, la cual es propia de $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1.4 (Vigier) *Sea $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red de operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert H. Entonces $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge en la topología fuerte de operadores si es creciente y acotada superiormente, o si es decreciente y acotada inferiormente.*

El siguiente lema establece que $B(H)^+$ es la clausura en norma del subespacio generado por las proyecciones en $B(H)^+$.

Lema 2.1.5 *Si $A \in B(H)^+$ entonces A es el límite en norma de una sucesión monótona creciente de operadores de la forma $\sum_i \lambda_i P_i$ donde la suma es finita, los λ_i's son números positivos y las P_i's son proyecciones.*

Demostración. Sea (α, β) un intervalo abierto que contiene a $\sigma(A)$ Si $\varepsilon > 0$, entonces hay una partición $\{\alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta\}$ tal que $\left|t - \sum_{k=1}^n t_k \chi_{[t_{k-1};t_k)}(t)\right| < \varepsilon$ para $t \in \sigma(A)$. Luego, por el teorema espectral

$$\left\|A - \sum_{k=1}^n t_k E\left[t_{k-1}; t_k\right)\right\| < \varepsilon.$$

Si llamo $S_\varepsilon = \sum_{k=1}^n t_k E\left[t_{k-1}; t_k\right)$ los S_ε son de la forma deseada. Dado $m \in \mathbb{N}$, tomando $\varepsilon_m = 1/m$, se tiene que $\|A - S_m\| < 1/m$. Además observar que como la partición que corresponde a ε_{m-1} está contenida (o es igual) en la que corresponde a ε_m, luego se tiene que $S_{m-1} \leq S_m$. Luego tenemos una sucesión creciente de elementos del tipo deseado $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tales que $S_m \to A$ en norma pues, si $\eta > 0$, entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \eta$ entonces si $n \geq n_0$ se tiene que $\|A - S_n\| \leq 1/n \leq 1/n_0 < \eta$. □

Para terminar esta sección enunciaremos el siguiente resultado conocido, cuya demostración puede leerse en [13, Corolario 5] y será utilizado para el caso particular en donde la C^*-álgebra es $B(H)$.

Teorema 2.1.6 (Kadison) *Un isomorfismo lineal que respeta el orden en ambas direcciones entre dos C^*-álgebras y que manda la identidad de una en la identidad de la otra, es un C^*-isomorfismo.*

2.2 Automorfismos de orden

Como ya se mencionó en la introducción, $B_S(H)$ con respecto a la suma usual, la multiplicación por un escalar y el producto de Jordan

$$A \cdot B = \frac{AB + BA}{2} \quad (A, B \in B_S(H))$$

forma un álgebra conmutativa, más específicamente un álgebra de Jordan.

Se puede leer en [1] que los automorfismos de $B_S(H)$, si se lo considera equipado con las operaciones recién mencionadas, son implementados por un operador unitario o antiunitario de H.

Nuestro objetivo principal es determinar todos los automorfismos de $B_S(H)$ visto como un conjunto parcialmente ordenado.

Empezaremos primero estudiando algunas propiedades que tienen los automorfismos de $B(H)^+$ para luego sacar consecuencias sobre su forma.

En primer lugar veamos que un mapa biyectivo de $B(H)^+$ que respeta el orden en ambas direcciones, también tiene que preservar los rangos de los operadores.

Lema 2.2.1 *Sea $\phi : B(H)^+ \to B(H)^+$ un mapa biyectivo con la propiedad que*

$$A \leq B \Longleftrightarrow \phi(A) \leq \phi(B)$$

vale siempre que $A, B \in B(H)^+$. Entonces ϕ preserva el rango de los operadores.

Demostración. Veamos que

$$\operatorname{rg} A = k \Longleftrightarrow \operatorname{rg} \phi(A) = k$$

$(k = 1, \ldots, n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

El caso $n = 1$ se deduce de que si el rango de A es 1 entonces el intervalo $[0, A]$ es total, y como ϕ preserva el orden esto implica que el intervalo $[0, \phi(A)]$ es total, luego el $\operatorname{rg} \phi(A) = 1$. Como ϕ^{-1} tiene las mismas propiedades que ϕ, vemos que vale la vuelta.

Supongamos que nuestra hipótesis vale para $n \in \mathbb{N}$ y veamos que vale para $n+1$. Sea $A \in B(H)^+$ de rango $n+1$. Por la hipótesis inductiva se tiene que $\operatorname{rg} \phi(A) \geq n+1$. Suponer que $\operatorname{rg} \phi(A) > n+1$. Usando el Lema 2.1.2 y el hecho de que ϕ preserva el orden, se deduce que $\operatorname{rg} A > n+1$ lo que es una contradicción. Luego se tiene que $\operatorname{rg} \phi(A) = n+1$. Una vez más, como ϕ^{-1} tiene las mismas propiedades que ϕ, vemos que vale la vuelta. □

Sean $S_1, \ldots, S_n$ subespacios de dimensión 1 en H. Decimos que los $\{S_i\}_{i=1}^n$ son **linealmente independiente** si no pueden ser incluídos en un subespacio de dimensión $(n-1)$.

Veamos que si ϕ es una biyección de $B(H)^+$ que respeta el orden en ambas direcciones, entonces ϕ respeta la independencia lineal de las imágenes de los operadores positivos de rango uno en ambas direcciones. Más precisamente,

Lema 2.2.2 *Sea $\phi : B(H)^+ \to B(H)^+$ un mapa biyectivo que respeta el orden en ambas direcciones y sean $A_1, \ldots, A_n \in B(H)^+$ operadores de rango uno. Entonces sus imágenes son linealmente independientes si y sólo si lo son las imágenes de $\phi(A_1), \ldots, \phi(A_n)$.*

Demostración. Hagamos inducción en n. En el caso $n = 1$ no hay nada que hacer. Supongamos que vale para n y probemos que vale para $n+1$. Sean $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ operadores de rango uno con imágenes linealmente independientes y supongamos que las imágenes de $\phi(A_1), \ldots, \phi(A_n), \phi(A_{n+1})$ no lo son. Entonces estas imágenes pueden ser incluídos en un subespacio de dimensión a lo sumo n, luego hay un operador $B \in B(H)^+$ de $\operatorname{rg} n$ tal que $\phi(A_1), \ldots, \phi(A_n), \phi(A_{n+1}) \leq B$. Como ϕ preserva el orden en ambos sentidos, se tiene que $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1} \leq \phi^{-1}(B)$. Por el Lema 2.1.1, esto implica que $\operatorname{Img} A_1, \ldots, \operatorname{Img} A_n, \operatorname{Img} A_{n+1} \subseteq \operatorname{Img} \phi^{-1}(B)$. Como $\operatorname{rg} \phi^{-1}(B) = n$, se tiene que las imágenes de $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ pueden ser incluídas en un subespacio de H de dimensión n, lo que es una contradicción. La vuelta se deduce del hecho de que ϕ^{-1} tiene las mismas propiedades que ϕ. Luego, tenemos el lema probado. □

Determinemos, a continuación de todos los mapas biyectivos en $B(H)^+$ que preservan el orden $\leq$ en ambas direcciones (L. Molnar, [5, Teorema 1]).

Teorema 2.2.3 *Sea H un espacio de Hilbert con* $\dim H > 1$. *Sea $\phi : B(H)^+ \to B(H)^+$ un mapa biyectivo con la propiedad que*

$$A \leq B \Longleftrightarrow \phi(A) \leq \phi(B)$$

vale siempre que $A, B \in B(H)^+$. Entonces existe un operador acotado inversible lineal o conjugado lineal $T : H \to H$ tal que ϕ es de la forma

$$\phi(A) = TAT^* \qquad (A \in B(H)^+).$$

Recíprocamente, si una biyección de $B(H)^+$ es de la forma recién mencionada, entonces preserva el orden en ambas direcciones.

Demostración. La demostración se basa en el conocido resultado de Rothaus [14] sobre la automática linealidad de los mapas biyectivos entre conos convexos cerrados en espacios normados que preservan el orden en ambas direcciones. En ese paper ese resultado fue alcanzado bajo hipótesis bastante restrictivas. Sin embargo, cuando el espacio normado en cuestión es un álgebra de operadores, estas hipótesis se cumplen cuando el espacio de Hilbert H subyacente es de dimensión finita. Por lo tanto, la parte central de la demostración será reducir nuestro problema al caso de dimensión finita. Primero observar que $\phi(0) = 0$ y que por los lemas 2.2.1 y 2.2.2, ϕ preserva el rango de los operadores y si $A_1, \ldots, A_n \in B(H)^+$ son operadores de rango uno, sus imágenes son linealmente independientes si y sólo si lo son las imágenes de $\phi(A_1), \ldots, \phi(A_n)$.

Fijemos ahora operadores de rango uno $A_1, \ldots, A_n \in B(H)^+$ con imágenes linealmente independientes que generan un subespacio H_n de H de dimensión n. Denotemos por H_n' al subespacio n-dimensional de H generado por las imágenes de $\phi(A_1), \ldots, \phi(A_n)$. Observar que un operador positivo de rango finito T actúa en H_n si y sólo si para todo operador de rango uno A para el cual las imágenes de $A_1, \ldots, A_n, A$ son linealmente independientes se tiene que $A \nleq T$.

En efecto, suponer que T actúa en H_n. Si $A \leq T$ se tiene que $\operatorname{Img} A \subseteq \operatorname{Img} T \subseteq H_n$ lo que implica que las imágenes de $A_1, \ldots, A_n, A$ no pueden ser linealmente independientes. Veamos la vuelta, supongamos que T no actúa en H_n, entonces existe un vector de norma uno x en la imagen de T que no está en H_n. Por otro lado, como $x \in \operatorname{Img} T$, por el Lema 2.1.1, sabemos que existe un λ tal que $\lambda x \otimes x \leq T$. Es decir, encontramos un operador A de rango uno que cumple que las imágenes de $A_1, \ldots, A_n, A$ son linealmente independientes y que $A \leq T$. Luego tenemos probada nuestra observación.

De esta observación se deduce que un operador $T \in B(H)^+$ actúa en H_n si y sólo si $\phi(T)$ actúa en H_n'.

Luego, para cualquier subespacio n-dimensional H_n de H, existe un subespacio n-dimensional H'_n de H tal que para todo $T \in B(H)^+$, T actúa en H_n si y sólo si $\phi(T)$ actúa en H'_n. Esto induce una transformación biyectiva ψ en el cono $M_n(\mathbb{C})^+$ de todas las matrices complejas de $n \times n$ positivas que preserva el orden en ambas direcciones. Cabe aclarar que la "positividad" está usada en el sentido de operadores, luego nuestro concepto de positividad es el mismo que el de semidefinida positiva en la teoría de matrices.

Como ϕ preserva el rango, se tiene que ψ preserva las matrices de rango n en ambas direcciones. Por otro lado, el conjunto de esas matrices es justo el interior de $M_n(\mathbb{C})^+$ en el espacio real normado de las matrices de $n \times n$ hermitianas. Luego, ψ es respeta el orden en ambas direcciones en el interior de $M_n(\mathbb{C})^+$, por lo tanto, aplicando el resultado antes mencionado sobre la linealidad de los mapas biyectivos entre conos convexos [14, Proposición 2],se tiene que ψ es lineal en el conjunto de las matrices de rango n de $M_n(\mathbb{C})^+$.

Ahora veamos que ψ es lineal en todo $M_n(\mathbb{C})^+$. Elegir $A, B \in M_n(\mathbb{C})^+$. Sabemos que existen (A_k) y (B_k) dos sucesiones de elementos de rango n en $M_n(\mathbb{C})^+$ monótonas decrecientes con respecto al orden $\leq$, tales que $A_k \to A, B_k \to B$. Observar que $A = \inf_k A_k$, $B = \inf_k B_k$ y $A + B = \inf_k (A_k + B_k)$. Debido a que ψ preserva el orden, se tiene que $\psi(A) = \inf_k \psi(A_k)$, $\psi(B) = \inf_k \psi(B_k)$ y $\psi(A+B) = \inf_k \psi(A_k + B_k)$. Las sucesiones $\psi(A_k)$, $\psi(B_k)$ y $\psi(A_k + B_k)$ son monótonas decrecientes y acotadas inferiomente, luego por el teorema de Vigier sabemos que convergen en la topología fuerte a su ínfimo. Además, por lo visto antes, sabemos que $\psi(A_k + B_k) = \psi(A_k) + \psi(B_k)$. Luego tenemos que,

$$\psi(A+B) = \lim_k \psi(A_k + B_k) = \lim_k \psi(A_k) + \lim_k \psi(B_k) = \psi(A) + \psi(B)$$

Luego, ψ es aditiva en $M_n(\mathbb{C})^+$ y, análogamente, se ve que saca escalares positivos afuera. Como todo par de elementos en $B(H)^+$ de rango finito puede ser mirado en un espacio matricial $M_n(\mathbb{C})^+$, se deduce que

$$\phi(\lambda A + B) = \lambda\phi(A) + \phi(B)$$

Con A y B elementos de $B(H)^+$ de rango finito y $\lambda > 0$. Veamos que esto vale para todo $A, B \in B(H)^+$

Por el Lema 2.1.5, sabemos que todo operador en $B(H)^+$ es el límite en norma de una suceción monótona creciente de operadores de la forma $\sum_i \lambda_i P_i$, donde los λ_i's son números positivos y las P_i's son proyecciones. Como toda suma finita $\sum_i \lambda_i P_i$ donde los λ_i's son números positivos y los P_i's son proyecciones de rango no necesariamente finito, es el límite fuerte de una red monótona creciente de elementos de rango finito de $B(H)^+$, uno puede probar de la misma manera que antes que ϕ es aditiva y saca escalares positivos afuera en el conjunto de tales sumas finitas. Ahora haciendo lo mismo que antes, se obtiene que ϕ separa sumas en sumas y saca escalares positivos afuera en todo $B(H)^+$.

A continuación extendamos ϕ de $B(H)^+$ a $B(H)_S$. Por el Lema 1.2.4, sabemos que dado $T \in B(H)_S$ existen únicos $A, B \in B(H)^+$ tales que $T = A - B$, luego defininamos $\tilde{\phi}(T) = \phi(A) - \phi(B)$, para todo $T \in B(H)_S$ con $T = A - B$, $A, B \in B(H)^+$. Observar que $\tilde{\phi}$ es una transformación lineal. Además, $\tilde{\phi}$ respeta el orden en ambas direcciones.

En efecto, como $\tilde{\phi}$ es lineal, sólo basta ver que $0 \leq T \Leftrightarrow 0 \leq \tilde{\phi}(T)$. La ida es fácil ya que si $0 \leq T$ entonces $\tilde{\phi}(T) = \phi(T)$. Ahora supongamos que $T \in B(H)_S$, con $T = A - B$, $A, B \in B(H)^+$ son tales que $0 \leq \tilde{\phi}(T) = \phi(A) - \phi(B)$, esto implica que $\phi(B) \leq \phi(A)$ y como ϕ preserva el orden se tiene que $B \leq A$, lo que nos da que $0 \leq A - B = T$.

Por lo tanto tenemos que $\tilde{\phi}$ respeta el orden en ambas direcciones. De esto se deduce que $\tilde{\phi}$ es inyectiva. Además, también es suryectiva ya que $B(H)^+$ está incluído en su imagen. Luego, $\tilde{\phi}$ es biyectiva.

Extendamos ahora $\tilde{\phi}$ de $B(H)_S$ a $B(H)$. Sabemos que dado $A \in B(H)$ existen únicos $B, C \in B(H)_S$ tales $A = B + iC$, luego definamos $\tilde{\tilde{\phi}}(A) = \tilde{\phi}(B) + i\tilde{\phi}(C)$. Observar que $\tilde{\tilde{\phi}}$ es una transformación lineal biyectiva de la C^*-álgebra $B(H)$ que preserva el orden en ambas direcciones. Considerar la transformación lineal

$$A \longmapsto \sqrt{\phi(I)}^{-1} \tilde{\tilde{\phi}}(A) \sqrt{\phi(I)}^{-1}$$

Por el teorema de Kadison esta transformación es un C^*-automorfismo de $B(H)$. Este tipo de transformaciones de $B(H)$ son implementadas por operadores unitarios o antiunitarios (ver por ejemplo [1]), es decir, existe un operador $U \in B(H)$ unitario o antiunitario tal que,

$$\sqrt{\phi(I)}^{-1} \tilde{\tilde{\phi}}(A) \sqrt{\phi(I)}^{-1} = UAU^*$$

para $A \in B(H)$. Como si $A \in B(H)^+$ se tiene que $\tilde{\tilde{\phi}}(A) = \phi(A)$, entonces se deduce que $\phi(A) = TAT^*$, donde $T = \sqrt{\phi(I)}U$.

Por lo tanto, tenemos teorema probado. □

Finalmente veamos el resultado más importante del capítulo, el cual establece la forma de los mapas biyectivos de $B_S(H)$ que preservan el orden en ambas direcciones (L. Molnar, [5, Teorema 2]).

Teorema 2.2.4 *Sea H un espacio de Hilbert con $\dim H > 1$. Sea $\phi : B_S(H) \to B_S(H)$ un mapa biyectivo con la propiedad que*

$$A \leq B \Longleftrightarrow \phi(A) \leq \phi(B)$$

vale siempre que $A, B \in B_S(H)$. Entonces existe un operador $X \in B_S(H)$ y un operador acotado inversible lineal o conjugado lineal $T : H \to H$ tal que ϕ es de la forma

$$\phi(A) = TAT^* + X \qquad (A \in B_S(H)).$$

Recíprocamente, si una biyección de $B_S(H)$ es de la forma recién mencionada, entonces preserva el orden en ambas direcciones.

Demostración. Empecemos reduciendo nuestro problema a las condiciones del teorema anterior. Llamemos $X = \phi(0)$ y consideremos la transformación

$$\psi : A \mapsto \phi(A) - X.$$

Observar que como ψ es una biyección de $B_S(H)$ que preserva el orden en ambas direcciones, se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\phi(0) = 0$. Ahora, al ser $\phi(0) = 0$, si restringimos ϕ a $B(H)^+$ tenemos una biyección de $B(H)^+$ que preserva el orden en ambas direcciones. Luego podemos aplicar el Teorema 2.2.3, del cual deducimos que existe un operador acotado inversible lineal o conjugado lineal $T : H \to H$ tal que

$$\phi(A) = TAT^* \qquad (A \in B(H)^+). \tag{2.1}$$

Luego para terminar la demostración solamente tenemos que probar que esta igualdad vale para todo $A \in B_S(H)$. Con este fin, fijemos un $B \in B_S(H)$ arbitrario y veamos que $\phi(B) = TBT^*$. Consideremos la constante $K = -\|B\| \in \mathbb{R}$. Observar que como B es autoadjunto se tiene que $KI \leq B$. Consideremos la transformación

$$\psi_B : A \mapsto \phi(A + K) - \phi(K)$$

en $B(H)^+$. Observar que ψ_B es una transformación biyectiva en $B(H)^+$ que preserva el orden en ambas direcciones, luego existe un operador acotado inversible lineal o conjugado lineal $S = S(B) : H \to H$ tal que

$$\phi(A + K) - \phi(K) = SAS^* \qquad (A \in B(H)^+). \tag{2.2}$$

Si $A \geq -K, 0$, entonces por (2.1) se tiene

$$T(A+K)T^* - \phi(K) = SAS^* \tag{2.3}$$

Considerando esta igualdad para otro operador A' con $A' \geq -K, 0$, se ve que

$$T(A - A')T^* = S(A - A')S^*.$$

Ahora si C es un operador autoadjunto cualquiera, tomando $A \geq -K, 0, C - K$ y $A' = A - C$, se ve que $TCT^* = SCS^*$. Luego, se deduce de (2.3) que

$$T(A+K)T^* - \phi(K) = SAS^* = TAT^*$$

donde $A \in B_S(H), A \geq -K, 0$. Esto nos dice que

$$\phi(K) = TKT^*.$$

Deducimos de (2.2) que

$$\phi(A+K) = SAS^* + \phi(K) = TAT^* + TKT^* = T(A+K)T^*$$

vale para todo $A \in B(H)^+$. Tomando $A = B - K \geq 0$, tenemos que

$$\phi(B) = TBT^*.$$

que es lo que se quería ver. □

2.3 Ciertos tipos de automorfismos de orden

El Teorema 2.2.4, más allá de la importancia que en sí mismo tiene, tiene algunas consecuencias interesantes que merecen ser mencionados.

Además del orden $\leq$ entre dos operadores, en $B_S(H)$ se pueden definir otras relaciones. En esta sección nos dedicaremos a estudiar mapas biyectivos de $B_S(H)$ que preservan el orden y una cierta relación en ambas direcciones. Del Teorema 2.2.4 podremos deducir, a manera de corolario, la forma de dichos mapas.

Empecemos suponiendo que en $B_S(H)$ tenemos definido, además de la relación de orden, la relación de conmutatividad. Nuestro primer resultado determina la forma de todas las transformaciones biyectivas en $B_S(H)$ que preservan el orden y la relación de conmutatividad en ambas direcciones. Donde preservar la conmutatividad en ambas direcciones quiere decir que, $AB = BA$ si y sólo si $\phi(A)\phi(B) = \phi(B)\phi(A)$.

Corolario 2.3.1 *Sea H un espacio de Hilbert con* $\dim H > 1$. *Sea* $\phi : B_S(H) \to B_S(H)$ *un mapa biyectivo que preserva el orden y la conmutatividad en ambas direcciones. Entonces existen un operador unitario o antiunitario $U : H \to H$ y números reales λ y μ, con λ positivo, tales que ϕ es de la forma*

$$\phi(A) = \lambda UAU^* + \mu I \qquad (A \in B_S(H)).$$

Recíprocamente, si una biyección de $B_S(H)$ es de la forma recién mencionada, entonces preserva el orden y la conmutatividad en ambas direcciones.

Demostración. Por el Teorema 2.2.4, sabemos que hay un operador inversible lineal o conjugado lineal T en H tal que ϕ es de la forma

$$\phi(A) = TAT^* + \phi(0) \qquad (A \in B_S(H)).$$

Como el operador 0 conmuta con todo $A \in B_S(H)$, lo mismo le pasa a $\phi(0)$, luego hay un operador $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(0) = \mu I$. Lo mismo sucede con la identidad, luego como $\phi(I) = TT^* + \phi(0)$ tenemos un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $TT^* = \phi(I) - \phi(0) = \lambda I$. Como TT^* es positivo, λ tiene que ser positivo. Tomando $U = T/\sqrt{\lambda}$ tenemos el operador unitario o antiunitario del enunciado. Finalmente como $TAT^* + \phi(0) = \lambda UAU^* + \mu I$, se llegó a la forma de ϕ que se quería. $\square$

Antes de seguir adelante con los resultados, hagamos una breve definición.

Diremos que dos operadores autoadjuntos son **complementarios** si la imagen de una proyección no trivial de la imagen de la medida espectral del primer autoadjunto tiene intersección cero con la imagen de cualquier proyección no trivial de la imagen de la medida espectral del segundo observable.

Nuestro siguiente corolario describe la forma de todos los mapas biyectivos en $B_S(H)$ que preservan el orden y la omplementariedad en ambas direcciones.

Corolario 2.3.2 *Sea H un espacio de Hilbert con* $\dim H > 1$. *Sea* $\phi : B_S(H) \to B_S(H)$ *un mapa biyectivo que preserva el orden y la complementariedad en ambas direcciones. Entonces existen un operador unitario o antiunitario $U : H \to H$ y números reales λ y μ, con λ positivo, tales que ϕ es de la forma*

$$\phi(A) = \lambda UAU^* + \mu I \qquad (A \in B_S(H)).$$

Recíprocamente, si una biyección de $B_S(H)$ es de la forma recién mencionada, entonces preserva el orden y la complementariedad en ambas direcciones.

Demostración. Primero observar que un operador $A \in B_S(H)$ es complementario con todo $B \in B_S(H)$ si y sólo si hay un $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $A = \mu I$. Si ahora seguimos de la misma manera que en la demostración del Corolario 2.3.1 llegaremos a la forma de ϕ deseada. □

Como último resultado, describiremos la forma de todos los mapas biyectivos en $B_S(H)$ que preservan el orden y la ortogonalidad en ambas direcciones, donde dos operadores autoadjuntos son **ortogonales** si $AB = 0$ lo que es equivalente a decir que las imágenes de A y B son mutuamente ortogonales.

Corolario 2.3.3 *Sea H un espacio de Hilbert con $\dim H > 1$. Sea $\phi : B_S(H) \to B_S(H)$ un mapa biyectivo que preserva el orden y la ortogonalidad en ambas direcciones. Entonces existen un operador unitario o antiunitario $U : H \to H$ y un número real positivo λ tal que ϕ es de la forma*

$$\phi(A) = \lambda UAU^* \qquad (A \in B_S(H)).$$

Recíprocamente, si una biyección de $B_S(H)$ es de la forma recién mencionada, entonces preserva el orden y la ortogonalidad en ambas direcciones.

Observar que de esto se deduce que si ϕ es un mapa biyectivo que preserva el orden y la ortogonalidad en ambas direcciones, entonces también va a preservar la conmutatividad en ambas direcciones.

Demostración. Por el Teorema 2.2.4, sabemos que hay un operador invertible lineal o conjugado lineal T en H tal que ϕ es de la forma

$$\phi(A) = TAT^* + \phi(0) \qquad (A \in B_S(H)).$$

Como el operador 0 es ortogonal a todo $A \in B_S(H)$, lo mismo le pasa a $\phi(0)$, y como el operador 0 es el único operador en $B_S(H)$ que es ortogonal a todo operador, se deduce que $\phi(0) = 0$. Luego $\phi(A) = TAT^*$ vale para todo $A \in B_S(H)$. Supongamos que T es lineal. La demostración para T conjugada lineal se puede hacer de la misma manera. Sean x, y vectores no nulos y ortogonales en H, considerar los operadores autoadjuntos $A = x \otimes x$ y $B = y \otimes y$. Como A y B son ortogonales, se tiene que $\phi(A)\phi(B) = 0$ lo que implica que $AT^*TB = 0$. Luego

$$0 = AT^*TB = (x \otimes x)T^*T(y \otimes y) = x \otimes Tx \cdot Ty \otimes y = \langle Ty, Tx\rangle\, x \otimes y$$

Lo que nos dice que $\langle Ty, Tx\rangle = 0$. Es decir, tenemos que $\langle T^*Tx, y\rangle = 0$ si $\langle x, y\rangle = 0$. Lo que implica que para cada $x \in H$ hay un $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tal que $T^*Tx = \lambda_x x$. De esto podemos deducir que existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T^*T = \lambda I$. Por las mismas razones que antes, λ tiene que ser positivo y tomando $U = T/\sqrt{\lambda}$, se termina la demostración. $\square$

Capítulo 3

Automorfismos del conjunto de las isometrías parciales

En este capítulo estudiaremos la forma de todas las biyecciones del conjunto de las isometrías parciales en un espacio de Hilbert, las cuales preservan el orden y la ortogonalidad en ambas direcciones y son continuas en un sólo punto. Además, daremos un teorema que involucra las isometrías parciales de rango uno, el cual es el análogo al famoso teorema de la mecánica cuántica de Wigner.

3.1 Isometrías Parciales

En el Capítulo 1 introdujimos a las isometrías parciales motivados por la necesidad presentar un resultado para operadores continuos análogo al de la descomposición polar de los números complejos. Más allá de que se mencionó el hecho de que estos operadores son de gran importancia y utilidad, es en este capítulo donde se les dará un uso más relevante.

Esta sección la dedicaremos a fijar notaciones y estudiar algunas propiedades de estos operadores.

El conjunto de las isometrías parciales en H será denotado por $PI(H)$ y el de las isometrías parciales de rango uno por $PI_1(H)$. El conjunto de los números complejos de módulo 1 será denotado por $\mathbb{T}$ y la funcional traza usual definida en la clase de los operadores traza se denotará por tr.

Recordar que $P(H)$ denota el conjunto de las proyecciones en un espacio de Hilbert y $P_1(H)$ denota el conjunto de las proyecciones de rango uno.

Dotaremos a $PI(H)$ del siguiente orden parcial: dadas dos $P, Q \in PI(H)$ decimos que $P \leq Q$ si $I_P \subset I_Q$, $F_P \subset F_Q$ y $P_{|I_P} = Q_{|I_P}$

También le daremos una relación de ortogonalidad: decimos que $P \in PI(H)$ es ortogonal a $Q \in PI(H)$ si $P^*Q = PQ^* = 0$. Es decir, si los espacios iniciales son ortogonales entre sí y los espacios finales son ortogonales entre sí.

Observar que si P es una proyección, entonces P es una isometría parcial con $I_P = F_P$. Caber resaltar que la relación de ortogonalidad y el orden parcial introducidos en $PI(H)$, cuando se los restringe a $P(H)$, coinciden con el orden y la relación de ortogonalidad usuales de este conjunto.

Supongamos que P es una proyección. Como $I_P = F_P$, se tiene que $P_{|I_P} = I_{|I_P}$, o sea $P \leq I$. Y si P es una isometría parcial con $P \leq I$, se tiene que $P(x) = x$ para todo $x \in I_P$, luego P es una proyección. Por lo tanto podemos observar que

Observación 3.1.1 *Una isometría parcial P es una proyección si y sólo si $P \leq I$.*

La siguiente observación nos será de gran utilidad ya que nos va a permitir usar las propiedades ya conocidas de las proyecciones a la hora de probar resultados sobre las isometrías parciales.

Observación 3.1.2 *Sea $R \in B(H)$. Son equivalentes,*

(a). *R es un isometría parcial;*

(b). *R^* es un isometría parcial;*

(c). *R^*R es una proyección;*

(d). *RR^* es una proyección;*

(e). *$RR^*R = R$;*

(f). *$R^*RR^* = R^*$*

Más aún, si R es una isometría parcial, entonces R^*R es la proyección sobre el espacio inicial de R y RR^* es la proyección sobre el espacio final de R.

Consideremos A un operador de rango finito, por la descomposición polar $A = W\,|A|$, donde W es una isometría parcial con $(\ker A)^{\perp}$ como espacio inicial y $\overline{\operatorname{Img} A}$ como espacio final. Como $|A|$ es compacto y normal, por el teorema espectral podemos escribir a $|A|$ como una suma finita $|A| = \sum_k \lambda_k Q_k$, donde los Q_k's son las proyecciones en

$\operatorname{Ker}(|A| - \lambda_k I)$. Luego, $A = \sum_k \lambda_k W Q_k$. Observar que WQ_k es una isometría parcial. En efecto, $\operatorname{Ker} W = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} |A| \subseteq \operatorname{Ker} Q_k \subseteq \operatorname{Ker}(WQ_k)$. Luego si consideramos $x \in (\operatorname{Ker}(WQ_k))^{\perp}$, tenemos que $Q_k x = x$ y $\|Wx\| = \|x\|$, luego $\|WQ_k x\| = \|Wx\| = \|x\|$, luego WQ_k es una isometría parcial de rango finito, más aún son ortogales dos a dos. Es decir, escribimos a A como una combinación lineal de isometrías parciales ortogonales dos a dos.

En el Capítulo 1, Teorema 1.2.5, vimos que si U es un operador de rango finito, entonces lo podemos escribir como una combinación lineal de proyecciones de rango uno. Debido a que las proyecciones son isometrías parciales, podríamos haber obviado el comentario anterior y simplemente reescribir el Teorema 1.2.5 diciendo que,

Observación 3.1.3 *Sea $A \in F(H)$ un operador de rango finito. Entonces A puede ser escrito como una suma finita*

$$A = \sum_k \lambda_k P_k$$

donde los P_k's son isometrías parciales de rango finito ortogonales dos a dos y los λ_k's son escalares.

Sea $P_n \in P(H)$ un conjunto de proyecciones ortogonales dos a dos. Considerar P la proyección sobre $\bigvee \{P_n H : n \in \mathbb{N}\}$. Se mencionó en el capítulo uno que si $h \in H$, entonces $\sum_n P_n h$ converge en H a Ph. Es decir, $\sum_n P_n$ converge en la topología fuerte de operadores (SOT) a la proyección P. Veamos que para las isometrías parciales pasa lo mismo.

Lema 3.1.4 *Si $R_n \in PI(H)$ es un conjunto de isometrías parciales ortogonales dos a dos, se tiene que la serie $\sum_n R_n$ es convergente en la topología fuerte de operadores y su suma R es una isometría parcial.*

Demostración. Como $R_n \in PI(H)$, se tiene que $R_n^* R_n$ es una proyección. Más aún, el hecho de que las R_n sean ortogonales dos a dos implica que las proyecciones $R_n^* R_n$ son ortogonales dos a dos. Luego, $\sum_{k=1}^n R_k^* R_k$ es una proyección. Considerar $P_n = \sum_{k=1}^n R_k$. P_n es una isometría parcial ya que $P_n^* P_n = \sum_{k=1}^n R_k^* R_k$ es una proyección. Más aún, $(P_n)_n$ es un conjunto de isometrías parciales que cumplen que $P_n \leq P_{n+1}$, luego existe una isometría parcial R tal que P_n converge SOT a R. Lo que es equivalente a decir que, $\sum_{k=1}^n R_k$ converge SOT a R. □

3.2 Automorfismos de $PI(H)$ continuos en un punto

En el capítulo introductorio se hizo referencia a la importancia que tiene el conjunto de las proyecciones en un espacio de Hilbert, $P(H)$, en la mecánica cuántica. También se mencionaron los resultados más importantes sobre $P(H)$ y el conjunto de las proyecciones de rango uno, denotado $P_1(H)$.

En esta sección y en la siguiente nos dedicaremos a dar resultados análogos para el conjunto de las isometrías parciales y el de las isometrías parciales de rango uno.

El teorema principal de esta sección describe la forma de todas las biyecciones de $PI(H)$ las cuales preservan el orden y la ortogonalidad en ambas direcciones y son continuas en un punto.

Antes de dedicarnos a la demostración de dicho teorema, veamos un interesante resultado que se utilizará allí.

Considerar $\mathscr{A}$ una subálgebra de $B(H)$. Decimos que $\mathscr{A}$ es **autoadjunta** si $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$, donde $\mathscr{A}^* = \{A^* : A \in \mathscr{A}\}$. Decimos que una subálgebra autoadjunta $\mathscr{A}$ es un álgebra de operadores **estándar** si contiene a $F(H)$.

Definición 3.2.1 *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{A}'$ dos álgebras de operadores estándar. Una biyección lineal $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ se llama **isomorfismo triple** si satisface*

$$\Phi(AB^*A) = \Phi(A)\Phi(B)^*\Phi(A) \qquad (A, B \in \mathscr{A}).$$

El siguiente teorema, cuya demostración no será dada y que se puede leer en [15], nos da la forma general de los isomorfismos triples entre álgebras de operadores estándar.

Teorema 3.2.2 *Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{A}'$ dos álgebras de operadores estándar en H. Si $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ es un isomorfismo triple, entonces o bien hay operadores unitarios U, V en H tales que Φ es de la forma*

$$\Phi(A) = UAV \qquad (A \in \mathscr{A})$$

o bien hay operadores antiunitarios U', V' en H tales que Φ es de la forma

$$\Phi(A) = U'AV' \qquad (A \in \mathscr{A}).$$

Veamos dos propiedades que cumplen las biyecciones de $PI(H)$ que preservan el orden y la ortogonalidad en ambas direcciones.

Lema 3.2.3 *Sea H un espacio de Hilbert con* $\dim H \geq 3$. *Sea $\phi : PI(H) \to PI(H)$ una transformación biyectiva que preserva el orden parcial y la ortogonalidad entre isometrías parciales en ambas direcciones. Entonces ϕ es completamente ortoaditiva y respeta el rango de los operadores, es decir, cumple que $P \in PI(H)$ es una isometría parcial de rango n si y sólo si $\phi(P)$ lo es.*

Demostración. Veamos primero que una isometría parcial P tiene rango n si y sólo si $\phi(P)$ tiene rango n. Para esto, hagamos inducción en n. Para $n = 0$ no hay nada que hacer ya que como ϕ preserva el orden en ambas direcciones $\phi(0) = 0$.

Supongamos que vale para $k = 0, \ldots, n$ y veamos que vale para $k = n+1$. Para esto, observar que $P \in PI(H)$ tiene rango $n+1$ si y sólo si para toda $Q \in PI(H)$ con $Q \neq P$, $Q \leq P$ se tiene que el rango de Q es menor o igual que n y hay una de estas cuyo rango es n. Usando esto más la hipótesis inductiva, se ve que rango de P es $n+1$ si y sólo si, lo es el de $\phi(P)$.

Ahora veamos que ϕ es completamente ortoaditiva. Sea $R_\alpha \in PI(H)$ un conjunto de isometrías parciales ortogonales dos a dos. Por una lado, la serie $\sum_\alpha R_\alpha$ es convergente en la topología fuerte de operadores a una isometría parcial R, además la suma $\sum_\alpha \phi(R_\alpha)$ es también otra isometría parcial, entonces por la biyectividad de la ϕ sabemos que hay una $Q \in PI(H)$ tal que

$$\sum_\alpha \phi(R_\alpha) = \phi(Q)$$

Observar que como $R_\alpha \leq R$ para todo α y como ϕ preserva el orden se tiene que $\phi(Q) = \sum_\alpha \phi(R_\alpha) \leq \phi(R)$. Por otro lado, como $\phi(R_\alpha) \leq \phi(Q)$ y ϕ preserva el orden en ambas direcciones se tiene que $R_\alpha \leq Q$ para todo α y por lo tanto, $R = \sum_\alpha R_\alpha \leq Q$. Esto nos da que $\phi(R) \leq \phi(Q)$, luego

$$\phi(\sum_\alpha R_\alpha) = \sum_\alpha \phi(R_\alpha)$$

Lo que nos dice que ϕ es completamente ortoaditiva. $\square$

En nuestro siguiente teorema, el principal de esta sección, bajo la hipótesis de continuidad en un sólo punto describiremos la forma de las biyecciones de $PI(H)$ las cuales preservan el orden y la ortogonalidad en ambas direcciones (L. Molnar, [6, Teorema 1]).

Teorema 3.2.4 *Sea H un espacio de Hilbert,* $\dim H \geq 3$. *Sea $\phi : PI(H) \to PI(H)$ una transformación biyectiva que preserva el orden parcial y la ortogonalidad entre isometrías parciales en ambas direcciones. Si ϕ es continua en norma de operadores en un único elemento de $PI(H)$ no nulo, entonces ϕ puede ser escrita en alguna de las siguientes maneras:*

(i). hay operadores unitarios U, V en H tales que

$$\phi(R) = URV \qquad (R \in PI(H));$$

(ii). hay operadores antiunitarios U, V en H tales que

$$\phi(R) = URV \qquad (R \in PI(H));$$

(iii). hay operadores unitarios U, V en H tales que

$$\phi(R) = UR^*V \qquad (R \in PI(H));$$

(iv). hay operadores antiunitarios U, V en H tales que

$$\phi(R) = UR^*V \qquad (R \in PI(H)).$$

Demostración. Primero observar que por el lema anterior sabemos que ϕ es completamente ortoaditiva y que $P \in PI(H)$ es una isometría parcial de rango n si y sólo si $\phi(P)$ lo es.

Sea ahora $\lambda \in \mathbb{T}$ y $R \in PI(H)$ de rango uno, entonces $\phi(\lambda R)$ es un múltiplo escalar de $\phi(R)$, con el escalar de módulo uno.

En efecto, como ϕ preserva la ortogonalidad en ambas direcciones, se tiene que una isometría parcial es ortogonal a $\phi(\lambda R)$ si y sólo si es ortogonal a $\phi(R)$. Como además, λR es una isometría parcial de rango uno, se tiene que $\phi(\lambda R)$, $\phi(R)$ son ambas de rango uno. De esto se deduce que $\phi(\lambda R) = \alpha\phi(R)$, con $|\alpha| = 1$ ya que $\alpha\phi(R)$ es isometría parcial.

Sea $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$. Sean M, N subespacios n-dimensionales de H. Denotemos con $PI(M, N)$ el conjunto de todos las isometrías en H cuyo espacio inicial está contenido en M y cuyo espacio final está contenido en N. Sea P una isometría parcial en H cuyo espacio inicial es M y cuyo espacio final es N. Entonces $\phi(P)$ es una isometría parcial de rango n. Sean $M' = I_{\phi(P)}$ y $N' = F_{\phi(P)}$. Observar que $Q \in PI(H)$ está en $PI(M, N)$ si y sólo si para toda $R \in PI(H)$ que es ortogonal a P se tiene que es ortogonal a Q. Luego, como ϕ preserva la ortogonalidad, se tiene que ϕ mapea $PI(M, N)$ en $PI(M', N')$.

Por lo tanto ϕ induce una transformación ψ en el espacio $PI(H_n)$ de todas las isometrías parciales en un espacio de Hilbert n-dimensional H_n, ya que $PI(M,N)$ y $PI(M',N')$ son isomorfos a $PI(H_n)$. Observar que ψ tiene las mismas propiedades que ϕ y que $\psi(I)$ es unitario. Además, multiplicando ψ por un unitario fijo de $B(H_n)$, se puede suponer que $\psi(I) = I$. Esto junto con el hecho de que ψ preserva el orden en ambas direcciones nos dice que ψ manda proyecciones en proyecciones. Entonces tenemos que ψ es una transformacioón biyectiva del conjunto de todas las proyecciones en $B(H_n)$ que preserva el orden y la ortogonalidad en ambas direcciones. La forma de esas transformaciones es conocida, por ejemplo de [1] se sigue que existe un operador unitario o antiunitario U en H_n tal que

$$\psi(P) = UPU^* \tag{3.1}$$

para toda proyección P en $B(H_n)$.

Veamos ahora que si $\lambda \in \mathbb{T}$ entonces $\psi(\lambda I)$ es un múltiplo escalar de la identidad. Para esto primero observar que una isometría parcial $A \in PI(H_n)$ es igual a la identidad multiplicada por un escalar de $\mathbb{T}$ si y sólo sí para toda proyección P de rango uno se tiene que $\lambda P \leq A$ para algún $\lambda \in \mathbb{T}$. Luego sabiendo esto y que $\phi(\lambda P)$ es un múltiplo escalar de $\phi(P)$ para toda P proyección de rango uno se deduce lo que queríamos ver. Luego, existe una función $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ tal que

$$\psi(\lambda I) = f(\lambda)I.$$

Sabemos que si $P \in B(H_n)$ es una proyección de rango uno y $\lambda \in \mathbb{T}$, existe un $\mu \in \mathbb{T}$ tal que $\psi(\lambda P) = \mu\psi(P)$, veamos que $\mu = f(\lambda)$. Como ψ preserva el orden parcial se tiene que $\psi(\lambda P) \leq \psi(\lambda I)$, o sea, $\mu\psi(P) \leq f(\lambda)I$, lo que nos dice que $\mu = f(\lambda)$. Luego tenemos,

$$\psi(\lambda P) = f(\lambda)\psi(P)$$

para toda $P \in B(H_n)$ proyección de rango uno y $\lambda \in \mathbb{T}$. Pero como ψ es ortoaditiva, ya que ϕ lo es, se deduce que esto vale para toda $P \in B(H_n)$ proyección.

Ahora veamos qué pasa con las isometrías parciales. Sea $R \in PI(H_n)$, entonces hay un unitario U y una proyección P tal que $R = UP$.

En efecto como R es isometría parcial, se tiene que R^*R es proyección. Luego, defino P como R^*R. Ahora definamos U de a trozos.

Primero defino a U en el espacio inicial de R. Si w está en I_R, defino $Uw = Rw$. Observar que como $I_R = \text{Img}(P)$ se tiene que $Rw = Uw = UPw$. Con esta definición, U es lineal en donde está definida. Ahora defino a U en el $\text{Ker}(R)$. Como

$$\dim(\text{Ker}\, R) + \dim(\text{Img}\, R) = n = \dim((\text{Img}\, R)^{\perp}) + \dim(\text{Img}\, R),$$

se tiene que $\dim(\operatorname{Ker} R) = \dim((\operatorname{Img} R)^{\perp})$. Luego hay un isomorfismo isométrico $U_0 : \operatorname{Ker} R \to (\operatorname{Img} R)^{\perp}$. Defino U en $\operatorname{Ker}(R)$ como U_0. O sea, si $h \in H_n$ entonces $h = w + v$ con $w \in I_R$ y $v \in \operatorname{Ker} R$ defino entonces $Uh = Rw + U_0 v$. U es lineal. Además es unitaria ya que

$$\langle Uh, Uh\rangle = \langle Rw + U_0 v, Rw + U_0 v\rangle = \langle Rw, Rw\rangle + \langle U_0 v, U_0 v\rangle =$$

$$\langle w, w\rangle + \langle v, v\rangle = \langle h, h\rangle$$

Luego U es unitaria y se tiene que $Rh = UPh$.

Observar que si U es unitario y Q es una isometría parcial, entonces $\psi(U)$ es unitario y UQ es isometría parcial.

Dado $R \in PI(H_n)$ con $R = UP$, U unitario y P proyección, considerar la transformación ψ_R en $PI(H_n)$, donde $\psi_R(Q) = \psi(U)^*\psi(UQ)$. Como ψ_R cumple con lo mismo que ψ, aplicando lo que vimos antes, se ve que hay una $f_R : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ tal que $\psi_R(\lambda P) = f_R(\lambda)\psi_R(P)$ de lo que se deduce que $\psi(\lambda R) = f_R(\lambda)\psi(R)$.

La función f_R depende de R ya que la función f de arriba depende de ψ. De todas maneras, veamos que $f_R = f$ para toda isometría parcial $R \in PI(H_n)$.

Sea $R \in PI(H_n)$ una isometría parcial de rango uno y sea $P \in B(H_n)$ una proyección de rango uno ortogonal a R. Por la ortoaditividad de ψ, para cualquier $\lambda \in \mathbb{T}$ se tiene,

$$\psi(\lambda R + \lambda P) = f_{R+P}(\lambda)\psi(R + P) = f_{R+P}(\lambda)(\psi(R) + \psi(P))$$

Por otro lado,

$$\psi(\lambda R + \lambda P) = \psi(\lambda R) + \psi(\lambda P) = f_R(\lambda)\psi(R) + f(\lambda)\psi(P)$$

Lo que nos dice que $f_{R+P} = f_R = f$. Por lo tanto tenemos,

$$\psi(\lambda R) = f(\lambda)\psi(R) \qquad (\lambda \in \mathbb{T}) \tag{3.2}$$

para toda $R \in PI(H_n)$ isometría parcial de rango uno.

Como toda isometría parcial es la suma de isometrías parciales de rango 1 ortogonales dos a dos, por la ortoaditividad de la ψ se tiene que la igualdad anterior vale para cualquier isometría parcial $R \in PI(H_n)$.

Como para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$ se tiene que

$$f(\lambda\mu)I = \psi((\lambda\mu)I) = \psi(\lambda(\mu I)) = f(\lambda)f(\mu)I,$$

se deduce que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ es una biyección multiplicativa. Veamos que es continua.

Por hipótesis ϕ es continua en un punto $R \in PI(H)$ con $R \neq 0$. Sean R_α isometrías parciales de rango 1 ortogonales dos a dos tales que $\sum_\alpha R_\alpha = R$. Por la ortoaditividad de la ϕ tenemos que

$$\sum_\alpha \phi(\lambda R_\alpha) = \phi(\lambda R)$$

Sabemos que $\phi(\lambda R_\alpha)$ es un multiplo escalar de $\phi(R_\alpha)$ para todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Sea λ_n una sucesión en $\mathbb{T}$ que converge a 1. Esto implica que $\phi(\lambda_n R)$ converge a $\phi(R)$. Como $\sum_\alpha \phi(\lambda_n R_\alpha) = \phi(\lambda_n R)$ se tiene que $\phi(\lambda_n R_\alpha) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi(R_\alpha)$ para todo α.

Veamos que f es continua. Elegir un α_0 y suponer que $R_{\alpha_0} \in PI(M,N)$. Sea $R_0 \in PI(H_n)$ el que le corresponde a $R_{\alpha_0} \in PI(M,N)$. Sea λ_n una sucesión en $\mathbb{T}$ que converge a 1, por lo que se vio de recién para ϕ, tenemos que $\psi(\lambda_n R_0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi(R_0)$ y por (3.2), se tiene que $\psi(\lambda_n R_0) = f(\lambda_n)\psi(R_0)$ y $\psi(R_0) = f(1)\psi(R_0)$, luego $f(\lambda_n) \longrightarrow f(1)$, o sea, f es continua en 1. Como f es multiplicativa, se deduce que f es un caracter continuo de $\mathbb{T}$. Como los caracteres continuos de $\mathbb{T}$ son las funciones $z \mapsto z^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ y f es biyectiva, se deduce que f es o bien la identidad, o bien la conjugación.

Supongamos que el operador U en (3.1) es unitario y supongamos que f es la conjugación en $\mathbb{T}$.

Sea $R \in B(H_n)$ un operador unitario. Por el teorema espectral, R puede ser escrito como $R = \sum_n \lambda_n P_n$, con λ_n los autovalores de R y P_n las proyecciones sobre el $\mathrm{Ker}(R - \lambda_n)$. Luego como ψ es ortoaditiva, de (3.2) se obtiene que

$$\psi(R) = \sum_n \psi(\lambda_n P_n) = \sum_n f(\lambda_n)\psi(P_n) =$$

$$\sum_n \overline{\lambda_n} U P_n U^* = U R^* U^*$$

Si $R \in PI(H_n)$, sabemos que existe una isometría parcial Q en H_n que es ortogonal a R y tal que $R + \lambda Q$ es unitario para todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Observar que como R es ortogonal a Q se tiene que $R \leq R + \lambda Q$. Luego se tiene,

$$\psi(R) \leq \psi(R + \lambda Q) = U(R + \lambda Q)^* U^* = U R^* U^* + \overline{\lambda} U Q^* U^*$$

para todo $\lambda \in \mathbb{T}$. Esto implica que $\psi(R) \leq U R^* U^*$. Como $\mathrm{rg}\,\psi(R) = \mathrm{rg}\,R = \mathrm{rg}\,U R^* U^*$ se tiene que $\psi(R) = U R^* U^*$. Resumiendo, si U es unitario y f es la conjugación en $\mathbb{T}$, se tiene que $\psi(R) = U R^* U^*$.

Viendo que pasa con el resto de las posibles elecciones entre U y f y siguiendo los mismos pasos, vemos que si el operador U en (3.1) es unitario y f es la identidad en $\mathbb{T}$ entonces $\psi(R) = U R U^*$. Si el operador U en (3.1) es antiunitario y f es la conjugación en $\mathbb{T}$ entonces $\psi(R) = U R U^*$. Si el operador U en (3.1) es antiunitario y f es la identidad en $\mathbb{T}$ entonces $\psi(R) = U R^* U^*$.

Resumiendo, ψ es de alguna de las siguientes maneras.

$(i1)$. Existe un operador U unitario en H_n tal que

$$\psi(R) = URU^* \qquad (R \in PI(H_n));$$

$(ii1)$. Existe un operador U unitario en H_n tal que

$$\psi(R) = UR^*U^* \qquad (R \in PI(H_n));$$

$(iii1)$. Existe un operador U antiunitario en H_n tal que

$$\psi(R) = URU^* \qquad (R \in PI(H_n));$$

$(iv1)$. Existe un operador U antiunitario en H_n tal que

$$\psi(R) = UR^*U^* \qquad (R \in PI(H_n)).$$

Volviendo a nuestro mapa original ϕ, vemos que en $PI(M,N)$ ϕ tiene que ser de alguna de las siguientes formas:

$(i2)$. Existen operadores U, V unitarios en H tales que

$$\phi(R) = URV \qquad (R \in PI(M,N));$$

$(ii2)$. Existen operadores U, V unitarios en H tales que

$$\phi(R) = UR^*V \qquad (R \in PI(M,N));$$

$(iii2)$. Existen operadores U, V antiunitarios en H tales que

$$\phi(R) = URV \qquad (R \in PI(M,N));$$

$(iv2)$. Existen operadores U, V antiunitarios en H tales que

$$\phi(R) = UR^*V \qquad (R \in PI(M,N)).$$

Veamos que esto lo podemos extender a todo $PI(H)$. Con este fin, elijamos ahora dos vectores ortonormales $x, y \in H$ y consideremos las isometrías parciales $R_1 = x \otimes x$, $R_2 = ix \otimes x$ y $R_3 = x \otimes y$. Notemos con $[x, y]$ el subespacio generado por x e y. En $PI([x,y], [x,y])$ ϕ es de alguna de las formas de arriba. Supongamos que es de la forma $(ii2)$. Se sigue que

$$\phi(R_2) = UR_2^*V = -i\ UR_1^*V = -i\ \phi(R_1);$$

$$\phi(R_3)^*\phi(R_1) = (UR_3^*V)^*UR_1^*V = V^*(x \otimes y)(x \otimes x)V = 0;$$

y por último,

$$\phi(R_3)\phi(R_1)^* = U(x \otimes y)^* V(U(x \otimes x)^* V)^* =$$

$$U(y \otimes x)(x \otimes x)U^* = U(y \otimes x)U^* \neq 0.$$

Consideremos el subespacio de dimensión finita H_0 de H que contiene todos los subespacios iniciales y finales de R_{α_0}, R_1, R_2 y R_3. Mirando las relaciones entre $\phi(R_1)$, $\phi(R_2)$ y $\phi(R_3)$ vemos que en $PI(H_0, H_0)$ ϕ tiene que ser de la forma (ii2).

En efecto, si ϕ fuese de la forma (i2) se tendría que $\phi(R_3)^*\phi(R_1) \neq 0$; si ϕ fuese de la forma (iii2) se tendría que $\phi(R_3)\phi(R_1)^* = 0$; y si ϕ fuese de la forma (iv2) se tendría que $\phi(R_2) = i\phi(R_1)$. Luego en $PI(H_0, H_0)$ ϕ tiene que ser de la forma (ii2).

Tomemos un operador de rango finito $A \in F(H)$.Por la Observación 3.1.3, A puede ser escrito como una suma finita

$$A = \sum_k \lambda_k P_k \tag{3.3}$$

donde los P_k's son isometrías parciales de rango finito y los λ_k's son escalares. Definimos

$$\Phi(A) = \sum_k \overline{\lambda_k}\phi(P_k).$$

Veamos que Φ está bien definida. Sea $A = \sum_l \mu_l Q_l$ otra escritura de A similar a la que si dio en (3.3). Sea H_1 un subespacio de dimensión finita de H que contiene los espacios iniciales y finales de todas las P_k, Q_l y a H_0. Se sigue que en $PI(H_1, H_1)$ ϕ tiene que ser de la forma (ii2). Luego, podemos escribir

$$\sum_k \overline{\lambda_k}\phi(P_k) = \sum_k \overline{\lambda_k} U P_k V = UA^*V = \sum_l \overline{\mu_l} U Q_l V = \sum_l \overline{\mu_l}\phi(Q_l)$$

Lo que nos dice que Φ está bien definida.

Observar que $\Phi : F(H) \to F(H)$ es una transformación conjugada lineal que extiende la restricción de ϕ en el conjunto de las isometrías parciales de rango finito. Usando la forma local (ii2) de ϕ vemos que $\Phi(AB^*A) = \Phi(A)\Phi(B)^*\Phi(A)$ (A,$B \in F(H)$), o sea Φ es un isomorfismo triple conjugado lineal. Como toda isometría parcial de rango finito está en la imagen de Φ, se sigue que Φ es suryectiva. Si $A \neq 0$ entonces A puede ser escrita en la forma (3.3) donde las P_k's son isometrías parciales de rango finito ortogonales dos a dos. Como ϕ preserva la ortogonalidad tenemos que $\Phi(A) \neq 0$. Luego, la transformación $A \mapsto \Phi(A^*)$ es un automorfismo triple lineal de $F(H)$. Aplicando el Teorema 3.2.2 obtenemos que en el conjunto de las isometrías parciales de rango finito, ϕ es de una de las formas (ii2) o (iii2). Sabiendo que ϕ es completamente ortoaditiva, deducimos que esto vale para todo el conjunto $PI(H)$.

La última parte de la demostración se inición suponiendo que ϕ es de la forma (ii2) en un cierto subconjunto $PI(H_0, H_0)$ del conjunto de las isometrías parciales. Si ϕ es de alguna de las otras formas, trabajando de manera análoga, se llega al resultado deseado. $\square$

Observación 3.2.5 *Si por hipótesis, ϕ fuese continua solamente en 0, esto no nos diría nada ya que 0 es un punto aislado de $PI(H)$. Recalcamos que sería interesante demostrar (si es que es verdad) que el resultado recién probado sigue valiendo sin la hipótesis de continuidad.*

3.3 P-automorfismos de $P_1(H)$

El teorema de Wigner puede ser formulado de varias maneras, en la ref [1] se puede encontrar la versión que describe la forma de los P-automorfismos.

Más precisamente, supongamos que dotamos a $P_1(H)$ de una probabilidad de transición, esto es:

$$\begin{array}{rcl} P_1(H) \times P_1(H) & \longrightarrow & [0,1] \\ (P_1, P_2) & \longmapsto & \operatorname{tr} P_1 P_2 \end{array}$$

y consideramos las funciones biyectivas $\phi : P_1(H) \to P_1(H)$ que preservan las probabilidades de transición, esto es las ϕ's que cumplen

$$\operatorname{tr} \phi(P)\phi(Q) = \operatorname{tr} PQ \qquad (P, Q \in P_1(H)),$$

Estas ϕ's son llamadas P-automorfismos, y el conjunto de los P-automorfismos forma un grupo. El teorema de Wigner establece que

Teorema 3.3.1 ***Wigner.*** *Si ϕ es un P-automorfismo. Entonces existe un operador unitario o antiunitario U en H tal que ϕ es de la forma*

$$\phi(P) = UPU^* \qquad (P \in P_1(H)).$$

A lo largo de las referencias [16] y [17], se pueden encontrar resultados de este estilo que involucran otras estructuras.

Por ejemplo, en [17] se obtiene un resultado análogo al teorema anterior para espacios de Banach, el cual establece que si X es un espacio de Banach e $I_1(X)$ denota el conjunto formado por los idempotentes en X de rango uno y $\phi : I_1(X) \to I_1(X)$ es una biyección tal que $\operatorname{tr}\phi(P)\phi(Q) = \operatorname{tr} PQ$ $(P, Q \in I_1(X))$. Entonces o bien existe un $A \in B(X)$ biyectivo tal que $\phi(P) = APA^{-1}$ $(P \in I_1(X))$, o bien existe un $C : X' \to X$ (donde X' denota el dual de X) tal que $\phi(P) = CP'C^{-1}$ $(P \in I_1(X))$

En nuestro siguiente resultado haremos una afirmación similar al caso de $P_1(H)$ que involucra al conjunto de las isometrías parciales de rango uno (L. Molnar, [6, Teorema 2]).

Teorema 3.3.2 *Sea $\phi : PI_1(H) \to PI_1(H)$ una función biyectiva con la siguiente propiedad*

$$\operatorname{tr}\phi(P)^*\phi(Q) = \operatorname{tr} P^*Q \qquad (P, Q \in PI_1(H)) \tag{3.4}$$

entonces ϕ es de una de las siguientes formas:

(a). *existen unitarios U, V en H tales que*

$$\phi(R) = URV \qquad (R \in PI_1(H));$$

(b). *existen antiunitarios U, V en H tales que*

$$\phi(R) = UR^*V \qquad (R \in PI_1(H)).$$

Demostración. Como vimos antes, si $A \in F(H)$, entonces A puede ser escrito como una suma finita $A = \sum_k \lambda_k P_k$ donde los P_k's son isometrías parciales de rango uno y los λ_k's son escalares. Definimos

$$\Phi(A) = \sum_k \lambda_k \phi(P_k).$$

Observar que $\Phi(A)$ está bien definida. En efecto, si $A = \sum_l \mu_l Q_l$ otra escritura de A similar a la que si dio antes, entonces

$$\operatorname{tr}\phi(R)^*(\sum_k \lambda_k \phi(P_k)) = \sum_k \lambda_k \operatorname{tr}\phi(R)^*\phi(P_k) =$$

$$\sum_k \lambda_k \operatorname{tr} R^*P_k = \operatorname{tr} R^*(\sum_k \lambda_k P_k) = \operatorname{tr} R^*A$$

y análogamente

$$\operatorname{tr}\phi(R)^*(\sum_l \mu_l \phi(Q_l)) = \operatorname{tr} R^*A$$

Luego, se tiene

$$\operatorname{tr}\phi(R)^*(\sum_k \lambda_k \phi(P_k)) = \operatorname{tr}\phi(R)^*(\sum_l \mu_l \phi(Q_l))$$

para todo $R \in PI_1(H)$. Como ϕ es suryectiva, se deduce que

$$\sum_k \lambda_k \phi(P_k) = \sum_l \mu_l \phi(Q_l)$$

Luego, Φ está bien definida.

Observar que Φ es una transformación lineal en $F(H)$. Como la imagen de Φ contiene todas las isometrías parciales de rango uno, se deduce que Φ es suryectiva. Debido a que un operador $A \in F(H)$ tiene rango uno si y sólo si es un múltiplo escalar no nulo de una isometría parcial, se tiene que Φ preserva operadores de rango uno en ambas direcciones. La forma de esas transformaciones es conocida, en [18, Teorema 3.3] se probó que o bien existen operadores biyectivos $U, V \in H$ lineales tales que

$$\Phi(x \otimes y) = Ux \otimes Vy \qquad (x, y \in H)$$

o bien, existen operadores biyectivos $U, V \in H$ conjugados lineales tales que

$$\Phi(x \otimes y) = Uy \otimes Vx \qquad (x, y \in H)$$

Suponer que Φ es de la primera forma. Sean $x, y, w, t \in H$, tales que $\|x\| \, \|y\| = 1$ y $\|w\| \, \|t\| = 1$. Usando (3.4) para los operadores $P = x \otimes y$ y $Q = w \otimes t$, y teniendo en cuenta que para dichos operadores $\operatorname{tr} \Phi(P)^*\Phi(Q) = \operatorname{tr} P^*Q$, $\operatorname{tr} P^*Q = \langle w, x\rangle \operatorname{tr}(y \otimes t)$ y $\operatorname{tr} \Phi(P)^*\Phi(Q) = \langle Uw, Ux\rangle \operatorname{tr}(Vy \otimes Vt)$, se obtiene

$$\langle Uw, Ux\rangle \operatorname{tr}(Vy \otimes Vt) = \langle w, x\rangle \operatorname{tr}(y \otimes t) \tag{3.5}$$

Observar que $\langle w, x\rangle = 0$ si y sólo si $\langle Uw, Ux\rangle$. Lo que implica que para cada $x \in H$ existe un $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tal que $U^*Ux = \lambda_x x$. De esto deducimos que hay un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $U^*Ux = \lambda x$. Observar que esto nos dice que $\lambda > 0$ y $U/\sqrt{\lambda}$ es unitario. Luego, $U = \sqrt{\lambda} U_0$, con U_0 unitario. Usando esto en (3.5), vemos que también $\langle y, t\rangle = 0$ si y sólo si $\langle Vy, Vt\rangle$. De lo cual, de la misma manera que antes, deducimos que existe $\beta > 0$ tal que $V = \sqrt{\beta} V_0$ con V_0 unitario. Además, mirando (3.5), deducimos que $\lambda\beta = 1$. Luego tenemos que,

$$\Phi(x \otimes y) = Uy \otimes Vx = U_0(x \otimes y)V_0^*$$

con U_0 y V_0 unitarios. Esto nos dice que $\phi(R) = SRT$ para $R \in PI_1(H)$, con $S = U_0$ y $T = V_0^*$.

Ahora, si suponemos que Φ es de la segunda forma, trabajando de manera similar, vemos que $\phi(R) = SR^*T$ con $R \in PI_1(H)$ y S y T antiunitarios. $\square$

Capítulo 4

Automorfismos locales

En este capítulo probaremos que todo automorfismo 2-local de $B(H)$ o del grupo unitario o del grupo general lineal de un espacio de Hilbert complejo separable de dimensión infinita es un automorfismo. De esto se deduce que este tipo de transformaciones quedan determinadas por sus acciones locales en los subconjuntos de dos puntos de los grupos en cuestión.

4.1 Motivación

Considerar un automorfismo local, esto es, una transformación lineal la cual punto a punto coincide con un automorfismo (el automorfismo puede ser diferente en cada punto). Más precisamente, un automorfismo local es una transformación $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ de una estructura algebraica $\mathscr{A}$ tal que para todo $x \in \mathscr{A}$, hay un automorfismo ϕ_x de $\mathscr{A}$ tal que $\phi(x) = \phi_x(x)$. Esta noción, junto con la de derivación local, fueron introducidas por Kadison [7] y por Larson y Sourour [8]. De hecho, sus definiciones erán más rígidas, ya que asumían que esos mapas eran lineales.

La condición de linealidad es bastante estricta, y si se la quita, la afirmación puede ya no ser válida.

Larson y Sourour probaron en [8] que toda derivación local de $B(X)$, el álgebra de los operadores lineales y acotados en un espacio de Banach X, es una derivación, y si X es de dimensión infinita, entonces todo automorfismo local lineal y suryectivo de $B(X)$ es un automorfismo. Bresar y Semrl probaron en [19] que la condición de suryectividad puede ser omitida si X es un espacio de Hilbert separable.

Como se puede leer en [20] si θ es un funcional lineal en una álgebra de Banach $\mathscr{A}$ con unidad tal que $\theta(e) = 1$ y tal que para todo $a \in \mathscr{A}$ existe un homeomorfismo de álgebras $\theta_a : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ con la propiedad que $\theta(a) = \theta_a(a)$, entonces θ es multiplicativa. Luego, si un funcional lineal se comporta como un caracter localmente en cada punto, entonces el funcional es un caracter. Una extensión interesante de esto fue obtenida por Kowalski y Slodkowsi [21], la cual muestra que a costa de pedir que se comporte como caracter localmente en cada par de puntos, se puede prescindir de la condición de linealidad [20, Corolario 3.7]. Más precisamente si $\theta : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ es una función que tiene la propiedad que para todos $a, b \in \mathscr{A}$ existe un funcional lineal multiplicativo $\theta_{a,b}$ en $\mathscr{A}$ tal que $\theta(a) = \theta_{a,b}(a)$ y $\theta(b) = \theta_{a,b}(b)$, entonces θ es lineal y multiplicativa.

Motivados por esto, afirmamos que podemos dejar de lado linealidad y la localidad, si tenemos encuenta otra condición: la 2-localidad.

Definición 4.1.1 *Un mapa $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ es un* ***automorfismo 2-local*** *de $\mathscr{A}$ si para cada $x, y \in \mathscr{A}$ hay un automorfismo $\phi_{x,y}$ de $\mathscr{A}$, que depende de x e y, tal que $\phi(x) = \phi_{x,y}(x)$ y $\phi(y) = \phi_{x,y}(y)$.*

Observar que la condición de 2-localidad es de una gran ventaja, ya que al no necesitar tener en cuenta la linealidad, la pregunta sobre cuándo un automorfismo 2-local es un automorfismo, puede ser hecha en cualquier estructura algebraica. Tal es el caso del grupo unitario y del grupo general lineal. Estudiaremos que pasa con los automorfismos 2-locales de esas estructuras en las dos últimas secciones, pero para comenzar, veremos que los automorfismos 2-locales de $B(H)$ son automorfismos.

4.2 Automorfismos locales de *B(H)*

Fue probado en [22] que todo automorfismo de $B(H)$ es interior. Es decir, si ϕ es un automorfismo de $B(H)$, entonces existe un $S \in B(H)$ invertible tal que $\phi(A) = SAS^{-1}$ para todo $A \in B(H)$.

En esta sección demostraremos que todo automorfismo 2-local ψ de $B(H)$, ni linealidad, suryectividad ni continuidad de ψ son asumidas, es un automorfismo (P. Semrl, [9, Teorema 1]).

Teorema 4.2.1 *Sea H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Entonces todo automorfismo 2-local $\psi : B(H) \to B(H)$ es un automorfismo de $B(H)$.*

Demostración. En primer lugar fijemos una base ortonormal $\{e_n : n = 1, 2, \ldots\}$ en H. Ahora definamos dos operadores $A \in B(H)$ como

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} e_n \otimes e_n$$

y $N \in B(H)$ como

$$\begin{aligned} Ne_1 &= 0 \\ Ne_n &= e_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Observar que $T \in B(H)$ conmuta con A si y sólo si es diagonal con respecto a la base $\{e_1, e_2, \ldots\}$. Más precisamente, para cualquier sucesión acotada de números complejos $\Lambda = (\lambda_n)$, definimos $D_\Lambda \in B(H)$ como $D_\Lambda e_n = \lambda_n e_n$, $n \in \mathbb{N}$. Luego T conmuta con A si y sólo si T es de la forma $T = D_\Lambda$ para alguna sucesión acotada Λ.

Afirmamos que $T \in B(H)$ conmuta con N si y sólo si existe una sucesión acotada de números complejos $\Gamma = (\gamma_n)$ tal que T es de la forma $T = U_\Gamma$, donde U_Γ está definido por

$$U_\Gamma e_n = \gamma_n e_1 + \gamma_{n-1} e_2 + \ldots + \gamma_1 e_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

En efecto, observar que si T es de la forma U_Γ, entonces T conmuta con N. Para ver la ida, asumamos que T conmuta con N. Entonces tenemos que $0 = TNe_1 = NTe_1$, lo que implica que tenemos un número complejo γ_1 tal que $Te_1 = \gamma_1 e_1$. Aplicando un argumento inductivo, encontramos una sucesión $\Gamma = (\gamma_n)$ tal que $T = U_\Gamma$.

Como todo automorfismo de $B(H)$ es interior y ψ es un automorfismo 2-local, va a existir un operador inversible $S \in B(H)$, que depende de A y de N, tal que $\psi(A) = SAS^{-1}$ y $\psi(N) = SNS^{-1}$. Reemplazando ψ por el mapa $T \mapsto S^{-1}\psi(T)S$, si fuese necesario, se puede asumir sin pérdida de generalidad que $\psi(A) = A$ y $\psi(N) = N$.

Sea P_n la proyección ortogonal sobre $\bigvee\{e_1, \ldots, e_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Considerar $T \in B(H)$ un operador de rango n que satisfaga $P_n T P_n = T$. Por hipótesis, sabemos que existe un operador $R \in B(H)$ tal que $\psi(A) = RAR^{-1}$ y $\psi(T) = RTR^{-1}$. Pero como $\psi(A) = A$, se tiene que R conmuta con A. Luego R es de la forma D_Λ para alguna sucesión acotada de números complejos Λ, lo cual a su vez implica que

$$P_n \psi(T) P_n = \psi(T). \tag{4.1}$$

Si ahora consideramos los operadores N y T llegamos, de la misma manera, a que $\psi(T) = U_\Gamma T U_\Gamma^{-1}$ para alguna sucesión acotada de números complejos $\Gamma = (\gamma_n)$. El operador U_Γ^{-1}, también conmuta con N, y por ende, tiene que ser de la forma U_Δ para alguna sucesión acotada de números complejos $\Delta = (\delta_n)$. Aplicando (4.1), se obtiene que

$$P_n U_\Gamma T U_\Delta (I - P_n) = P_n U_\Gamma P_n T P_n U_\Delta (I - P_n) = 0$$

Pero como $\mathrm{rg}(P_n U_\Gamma P_n T) = n$ se tiene que $P_n U_\Delta (I - P_n) = 0$. Esto nos dice que $\delta_k = 0$ para todo $k > 1$. Luego tenemos que $U_\Gamma = \gamma_1 I$. Como consecuencia se obtiene que

$$\psi(T) = T$$

para toda T de rango n que satisface $P_n T P_n = T$.

En el siguiente paso, vamos a probar que $\psi(P) = P$ para todo operador P idempotente de rango uno que satisfaga $P_n P P_n = P$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Un operador así tiene que ser de la forma $x \otimes y$ con $P_n x = x$, $P_n y = y$ y $\langle x, y \rangle = 1$. Observar que $\psi(P)$ es idempotente de rango uno, lo que implica que existen $u, v \in H$ tales que $\psi(P) = u \otimes v$ con $\langle u, v \rangle = 1$. Ahora bien, podemos encontrar un operador $B \in B(H)$ de rango n tal que $P_n B P_n = B$, $Bx = x$ y la dimensión del núcleo de $B - I$ sea uno. Como $BP = P$, se tiene

$$\psi(P) = \psi_{B,P}(P) = \psi_{B,P}(BP) = \psi_{B,P}(B)\psi_{B,P}(P) = B\psi(P),$$

lo que nos dice que $Bu = u$. Pero como la dimensión del núcleo de $B - I$ es uno, y sabemos que $Bx = x$, se tiene que $u = \lambda x$ para algún número complejo λ. Similarmente, se obtiene que $v = \mu y$ para algún $\mu \in \mathbb{C}$. Luego, $1 = \langle u, v \rangle = \langle \lambda x, \mu y \rangle = \lambda \overline{\mu}$, de lo que se sigue que $\psi(P) = P$.

Sea ahora T un operador cualquiera en $B(H)$. Elijamos dos vectores x, y cualesquiera en $\bigvee \{e_1, \ldots, e_n\}$ que satisfagan $\langle x, y \rangle = 1$ o $\langle x, y \rangle = 0$. Como en los párrafos anteriores probamos que $\psi(x \otimes y) = x \otimes y$, obtenemos que

$$\langle \psi(T)x, y \rangle \, x \otimes y = x \otimes y \; \psi(T) \; x \otimes y =$$

$$\psi(x \otimes y) \; \psi(T) \; \psi(x \otimes y) = \psi_{T, x\otimes y}(x \otimes y) \; \psi_{T, x\otimes y}(T) \; \psi_{T, x\otimes y}(x \otimes y) =$$

$$\langle Tx, y \rangle \, \psi_{T, x\otimes y}(x \otimes y) = \langle Tx, y \rangle \, \psi(x \otimes y) = \langle Tx, y \rangle \, x \otimes y.$$

De lo que se deduce que $P_n \psi(T) P_n = P_n T P_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $\psi(T) = T$ para todo $T \in B(H)$, que es lo que queríamos probar. $\square$

Comentario Interesante. Cuando se publicó [9] en 1997 el autor, P. Semrl, dejó en claro que el teorema anterior valía también para el caso en el que H sea de dimensión finita. Pero debido a que sólo pudo dar una demostración larga que incluía *cálculos tediosos*, prefirió no incluirla en dicha publicación y sugirió que sería interesante encontrar una prueba más corta.

Fue recién en el año 2002, que L. Molnar dio una demostración en [23] más corta para el caso de dimensión finita. Más aún, extendió el resultado de Semrl, ya que obtuvo conclusiones para espacios de Banach con una base de Schauder, y debido a que la mayoría de los espacios de Banach separables tienen bases de Schauder, la generalización allí probada es de una significativa importancia.

En esa publicación ([23]) se probó en primer lugar que, todo automorfismo 2-local de $M_n(\mathbb{R})$ es un automorfismo [23, Proposición 2]. Los argumentos dados en la demostración de ese resultado llevan a una extensión del Teorema 4.2.1 para el caso de ciertas subálgebras del álgebra $B(X)$, donde X es un espacio de Banach con una base de Schauder. Y finalmente se probó en [23, Teorema 4] que, si X es un espacio de Banach real o complejo con una base de Schauder, y si $\mathscr{A}$ es una subálgebra de $B(X)$ que contiene al ideal de los operadores compactos de X, entonces todo automorfismo 2-local de $\mathscr{A}$ es un automorfismo de $\mathscr{A}$.

4.3 Automorfismos locales del grupo unitario

Fue probado por Sakai [24] que todo isomorfismo uniformemente continuo de grupos entre dos AW^*-álgebras es implementado por un *-isomorfismo lineal o conjugado lineal. Como caso particular, si consideramos a $B(H)$ podemos deducir el siguiente resultado.

Teorema 4.3.1 *Sea $\phi : U(H) \to U(H)$ un automorfismo uniformemente continuo. Entonces existe un operador unitario o antiunitario U en H tal que*

$$\phi(V) = UVU^* \qquad (V \in U(H)). \tag{4.2}$$

Por esta razón, a lo largo de esta sección, $U(H)$ será considerado como un grupo topológico y a un automorfismo de $U(H)$ como un automorfismo de grupos uniformemente continuo. Observar que un mapa $\phi : U(H) \to U(H)$ es un **automorfismo 2-local de** $U(H)$ si para cada $X, Y \in U(H)$ hay un automorfismo $\phi_{X,Y}$ de $U(H)$ (en el sentido recién mencionado), tal que $\phi_{X,Y}(X) = \phi(X)$ y $\phi_{X,Y}(Y) = \phi(Y)$.

En esta sección demostraremos que todo automorfismo 2-local de $U(H)$ es un automorfismo.

Antes de pasar a la demostración de nuestro teorema principal, hagamos un breve repaso sobre un resultado que se puede leer en [2] y que usaremos en nuestra demostración.

En dicho trabajo, se considera el conjunto de los operadores idempotentes, denotado por $SP(H)$, y al de las proyecciones. Teniendo en cuenta las relaciones usuales de orden y ortogonalidad, esto es, $P \leq Q$ si $PQ = QP = P$, y P y Q son ortogonales si $PQ = QP = 0$, $SP(H)$ es visto como un conjunto parcialmente ordenado con la relación $\leq$ y, agregando el mapa $P \mapsto I - P$ de ortocomplementación, $P(H)$ es visto como un conjunto parcialmente ordenado (POSET) ortomodular.

Como resultado principal en [2] se establece que si H es un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita. Entonces todo automorfismo 2-local del POSET $SP(H)$ es un automorfismo.

Siguiendo la demostración de ese teorema, se obtiene un resultado análogo para el POSET ortomodular $P(H)$ que es el que usaremos en nuestra demostración. Este resultado establece que todo automorfismo 2-local del POSET ortomodular $P(H)$ es un automorfismo.

Además, teniendo en cuenta que un automorfismo de $P(H)$ visto como un POSET no es necesariamente un automorfismo de $P(H)$ visto como un poset ortomodular, se obtienen conclusiones sobre la forma de los automorfismos de $P(H)$ visto como un POSET ortomodular. Más precisamente, si $\psi : P(H) \to P(H)$ es una biyección que preserva el orden $\leq$ y la ortocomplementación $P \mapsto I - P$ en ambas direcciones, entonces ψ es, o de la forma $\psi(P) = UPU^*$ con U un operador unitario, o bien de la forma $\psi(P) = VPV^*$ con V un operador antiunitario.

Resumiendo, tenemos que si ψ es un automorfismo 2-local del POSET ortomodular $P(H)$, entonces ψ es un automorfismo y es de la forma

$$\psi(P) = UPU^*$$

o de la forma:

$$\psi(P) = VPV^*$$

donde U es un operador unitario y V es un operador antiunitario en H.

Sabemos que si H es un espacio de Hilbert complejo y $A \in B(H)$ es un operador tal que $\langle Ah, h \rangle = 0$ para todo $h \in H$, entonces $A = 0$. El siguiente lema, que usaremos también en la demostración del teorema principal de esta sección, extiende esta observación para dos operadores.

Lema 4.3.2 *Sean $A, B \in B(H)$. Suponer que para todo $x \in H$ tenemos $\langle Ax, x \rangle = 0$, o $\langle Bx, x \rangle = 0$. Entonces $A = 0$ o $B = 0$.*

Demostración. Los conjuntos $\{x \in H : \langle Ax, x \rangle = 0\}$ y $\{x \in H : \langle Bx, x \rangle = 0\}$ son cerrados y su unión es H. Luego, por el teorema de Baire, alguno de estos dos conjuntos tiene interior no vacío. Suponer sin pérdida de generalidad que es el primero. Luego, existe un $x_0 \in H$ y un $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\langle A(x_0 + \epsilon x), x_0 + \epsilon x \rangle = 0$$

para todo $x \in H$ de norma uno y $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$. Esto nos da que

$$\langle Ax_0, x \rangle + \langle Ax, x_0 \rangle + \epsilon \langle Ax, x \rangle = 0$$

Y como ϵ era arbitrario, se obtiene que $\langle Ax, x \rangle = 0$ para todo $x \in H$ de norma uno. Luego, como H es un espacio de hilbert complejo, se tiene que $A = 0$. $\square$

A continuación, se demostrará el teorema central de esta sección (L. Molnar y P. Semrl, [10, Teorema 2.2]).

Teorema 4.3.3 *Todo automorfismo 2-local de $U(H)$ es un automorfismo.*

Demostración. Sea $\phi : U(H) \to U(H)$ un automorfismo 2-local. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\phi(I - 2P) = I - 2P$ para toda proyección P.

En efecto, observar en primer lugar que para cada proyección $P \in B(H)$, el operador $I - 2P$ es unitario. Además, el operador $((I - \phi(I - 2P))/2$ es una proyección, ya que como ϕ es localmente de la forma (4.2), dada una proyección $P \in B(H)$ (fija) se obtiene que $\phi(I - 2P) = I - 2P'$ para alguna proyección P' (porque si $U \in U(H)$ y P es proyección, entonces UPU^* es proyección). Ahora considerar la transformación

$$P \xmapsto{\psi} (I - \phi(I - 2P))/2$$

Observar que como ϕ es un automorfismo 2-local, ψ también lo es. Más aún, ψ es un automorfismo 2-local del conjunto parcialmente ordenado ortomodular de todas las proyecciones en H. Luego, por lo antes mencionado, ψ es un automorfismo y hay un operador unitario o antiunitario U en H tal que ψ es de la forma:

$$\psi(P) = UPU^*$$

Por lo tanto se tiene que $UPU^* = (I - \phi(I - 2P))/2$ y entonces, $\phi(I - 2P) = U(I - 2P)U^*$ para toda proyección P. Ahora si transformamos nuestra ϕ con este operador U, se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\phi(I - 2P) = I - 2P$ para toda proyección P.

Sea $V \in U(H)$. En primer lugar, probaremos que $\phi(V) = V$ o $\phi(V) = V^*$. Para eso, elegimos $x \in H$ un vector de norma uno y consideramos la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por x, es decir, $P = x \otimes x$. Por la propiedad local de ϕ, sabemos que hay un operador unitario o antiunitario $U_{V,P}$ tal que

$$\phi(V) = U_{V,P} V U_{V,P}^* \quad y \quad \phi(I - 2P) = U_{V,P}(I - 2P)U_{V,P}^*.$$

Como $\phi(I - 2P) = I - 2P$, se tiene que $P = U_{V,P} P U_{V,P}^*$. Observar que

$$\langle \phi(V), x \rangle \, x \otimes x = x \otimes x \cdot \phi(V) \cdot x \otimes x =$$

$$U_{V,P} P U_{V,P}^* U_{V,P} V U_{V,P}^* U_{V,P} P U_{V,P}^* =$$

$$U_{V,P} P V P U_{V,P}^* = U_{V,P} \cdot \langle Vx, x \rangle \, x \otimes x \cdot U_{V,P}^*$$

Como $U_{V,P}$ es lineal o lineal-conjugada, se tiene que o bien

$$\langle \phi(V)x, x \rangle \, x \otimes x = \langle Vx, x \rangle \, U_{V,P} x \otimes U_{V,P} x$$

o bien

$$\langle \phi(V)x, x \rangle \, x \otimes x = \overline{\langle Vx, x \rangle} U_{V,P} x \otimes U_{V,P} x$$

Como $P = U_{V,P} P U_{V,P}^*$ se deduce que:

$$\langle \phi(V)x, x \rangle = \langle Vx, x \rangle$$

o bien

$$\langle \phi(V)x, x \rangle = \overline{\langle Vx, x \rangle} = \langle V^* x, x \rangle$$

Como x era arbitrario, se deduce que, para todo $x \in H$ vale que

$$\langle \phi(V)x, x \rangle = \langle Vx, x \rangle$$

o bien

$$\langle \phi(V)x, x \rangle = \langle V^* x, x \rangle$$

Usando el Lema 4.3.2 se ve que esto implica que o bien, $\phi(V) = V$ o $\phi(V) = V^*$.

Ahora vamos a mostrar que o bien, $\phi(V) = V$ para todo $V \in U(H)$, o bien, $\phi(V) = V^*$ para todo $V \in U(H)$.

Para ver esto, observar que $\phi(iI)$ es, o bien iI, o bien $-iI$.

Asumir primero que $\phi(iI) = iI$ y veamos que en ese caso tenemos $\phi(V) = V$ $(V \in U(H))$.

Supongamos que no. Luego, existe un operador V unitario (no autoadjunto) tal que $\phi(V) = V^*$. Sea $\lambda \in \sigma(V)$. Si λ es un autovalor entonces existe un x_1 de norma uno tal que $\langle Vx_1, x_1 \rangle = \lambda$. Si λ no es un autovalor, por el Lema 1.3.10, existe (x_n) sucesión ortonormal tal que $\langle Vx_n, x_n \rangle \to \lambda$. Cualquiera sea el caso, extender, ya sea x_1 o (x_n), a una base $(x_n^{'})$ en H. Elegir números complejos λ_n, distintos entre sí y de módulo uno tales que la parte imaginaria de λ_n sea positiva y considerar el operador unitario $W = \sum_n \lambda_n x_n^{'} \otimes x_n^{'}$. Por la propiedad local de ϕ sabemos que hay un operador unitario o antiunitario $U_{i,W}$ tal que

$$\phi(iI) = U_{i,W} iIU_{i,W}^* \quad y \quad \phi(W) = U_{i,W} W U_{i,W}^*$$

Como $\phi(iI) = iI$, se tiene que $U_{i,W}$ es unitario. Sabemos que $\phi(W) = W$ o $\phi(W) = W^*$ y que $\phi(W) = \sum_n \lambda_n U_{i,W} x_n^{'} \otimes U_{i,W} x_n^{'}$, esto último ya que $U_{i,W}$ es unitario. Ahora, si miramos el conjunto de los autovalores de cada uno y tenemos en cuenta que los λ_n están en el semiplano superior, deducimos que $\phi(W) = W$. Una vez más, por la propiedad local de ϕ, sabemos que hay un operador $U_{W,V}$ unitario o antiunitario tal que

$$\phi(W) = U_{W,V} W U_{W,V}^* \quad y \quad \phi(V) = U_{W,V} V U_{W,V}^*$$

Como $\phi(W) = W$ se sigue que $U_{W,V}$ es unitario, con lo cual

$$\phi(W) = \sum_n \lambda_n U_{W,V} x_n^{'} \otimes U_{W,V} x_n^{'}$$

Entonces se tiene que

$$\sum_n \lambda_n x_n^{'} \otimes x_n^{'} = W = \phi(W) = \sum_n \lambda_n U_{W,V} x_n^{'} \otimes U_{W,V} x_n^{'}$$

De lo cual se deduce que $U_{W,V}$ es diagonalizable respecto a $(x_n^{'})$. Más específicamente, $U_{W,V} x_n^{'} = \alpha_n x_n^{'}$, con α_n números complejos de módulo uno.

Ahora bien, si λ no es un punto aislado, se tiene que

$$\langle x_n, V x_n \rangle = \langle V^* x_n, x_n \rangle = \langle \phi(V) x_n, x_n \rangle =$$

$$\left\langle U_{W,V} V U_{W,V}^* x_n, x_n \right\rangle = \left\langle V U_{W,V}^* x_n, U_{W,V}^* x_n \right\rangle = \langle V x_n, x_n \rangle$$

Haciendo tender n a infinito, vemos que $\lambda = \overline{\lambda}$. Y si λ es un punto aislado, haciendo la misma cuenta, tenemos que $\langle x_1, V x_1 \rangle = \langle V x_1, x_1 \rangle$, con lo cual $\lambda = \overline{\lambda}$. Luego, en cualquiera de los dos casos, $\lambda = \overline{\lambda}$. Como λ era un elemento arbirtario de $\sigma(V)$ se tiene que $\sigma(V) \subseteq \mathbb{R}$ lo que, por el Teorema 1.3.13, implica que $V = V^*$, lo cual es una contradicción, que provino de suponer que existía un operador unitario no autoadjunto tal que $\phi(V) = V^*$. Luego, se tiene que $\phi(V) = V$ para todo $V \in U(H)$.

Consideramos ahora el caso en el que $\phi(iI) = -iI$ y tratemos de llegar a una contradicción. De la misma manera que recién se prueba que $\phi(V) = V^*$ para todo $V \in U(H)$. Ahora bien, por la propiedad local de ϕ se sigue que para todo $V, V^{'} \in U(H)$ existe un operador unitario o antiunitario U tal que $\phi(V) = UVU^*$ y $\phi(V^{'}) = UV^{'}U^*$. Por lo tanto, $V^* = UVU^*$ y $V^{'*} = UV^{'}U^*$.

Considerar el operador $V = \sum_n \lambda_n e_n \otimes e_n$, con λ_n números complejos distintos entre sí y de módulo uno tales que la parte imaginaria de λ_n sea positiva para todo n y $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de H. Y considerar $V^{'}$ el operador unitario definido por:

$$\begin{aligned} V^{'}e_1 &= e_3 \\ V^{'}e_2 &= e_1 \\ V^{'}e_3 &= e_2 \\ V^{'}e_k &= e_k \qquad k \geq 4 \end{aligned}$$

Como $V^* = UVU^*$ y la parte imaginaria de los λ_n es positiva, se tiene que U es antiunitario. De la misma manera que antes se ve que, U es diagonal con respecto a la base $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, es decir, existen α_n números complejos tales que $Ue_n = \alpha_n e_n$ para todo n. Observar que $V^{'*}e_1 = e_2$, luego

$$e_2 = V^{'*}e_1 = UV^{'}U^*e_1 = \alpha_1 UV^{'}e_1 = \alpha_1 Ue_3 = \alpha_1\alpha_3 e_3$$

lo cual es una contradicción.

Luego $\phi(V) = V$ para todo $V \in U(H)$, con lo cual ϕ es un automorfismo de $U(H)$.
$\square$

4.4 Automorfismos locales del grupo general lineal

Nuestra última sección está dedicada a probar que todo automorfismo 2-local del grupo general lineal, el cual denotaremos con $GL(H)$, es un automorfismo (L. Molnar y P. Semrl, [10, Teorema 3.2]).

A diferencia de las dos secciones anteriores, en las cuales ya conocíamos la forma de los automorfismos de las estructuras tratadas, en ésta probaremos un resultado que nos muestra la forma general de todos los automorfismos de $GL(H)$.

Consideremos un anillo primo $\mathscr{R}$, no necesariamente con identidad, que contenga un idempotente $e \neq 0, 1$. Se puede leer en [25], que todo mapa multiplicativo y biyectivo de $\mathscr{R}$ en un anillo arbitrario $\mathscr{S}$, es aditivo.

Observar que por el teorema de Hahn-Banach, $B(H)$ es una anillo primo. Luego, usando el hecho que todo automorfismo de $B(H)$ es interior y lo mencionado anteriormente se tiene la siguiente observación.

Observación 4.4.1 *Sea $\psi : B(H) \to B(H)$ un mapa multiplicativo y biyectivo, entonces ψ es de la forma*

$$\psi(A) = SAS^{-1}$$

donde $S : H \to H$ es un mapa biyectivo, acotado, lineal o conjugado lineal.

Cabe mencionar que Semrl probó en [26] que los mapas aproximadamente multiplicativos son de la forma anterior. Más precisamente, se probó el siguiente teorema.

Teorema 4.4.2 *Sean X e Y dos espacios de Banach, con $\dim X = \infty$, y $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ dos álgebras de operadores estándar en X e Y respectivamente. Sea $\varepsilon > 0$, y $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un mapa biyectivo que satisface que $\|\phi(AB) - \phi(A)\phi(B)\| \leq \varepsilon$ para todo $A, B \in \mathscr{A}$. Entonces ϕ es de la forma $\phi(A) = TAT^{-1}$, $A \in \mathscr{A}$, donde $T : X \to Y$ es un operador acotado, biyectivo, lineal o conjugado lineal.*

Antes de probar el teorema central de esta sección, que establece que todo automorfismo 2-local de $GL(H)$ es un automorfismo, estudiemos la forma de los automorfismos de $GL(H)$.

Teorema 4.4.3 *Sea $\phi : GL(H) \to GL(H)$ un automorfismo de $GL(H)$. Entonces ϕ es de alguna de las siguientes formas:*

(i). existe un operador lineal acotado inversible $T : H \to H$ tal que

$$\phi(X) = TXT^{-1} \qquad (X \in GL(H)),$$

(ii). existe un operador conjugado lineal acotado inversible $T : H \to H$ tal que

$$\phi(X) = TXT^{-1} \qquad (X \in GL(H)),$$

(iii). existe un operador lineal acotado inversible $T : H \to H$ tal que

$$\phi(X) = (TX^{-1}T^{-1})^* \qquad (X \in GL(H)),$$

(iv). existe un operador conjugado lineal acotado inversible $T : H \to H$ tal que

$$\phi(X) = (TX^{-1}T^{-1})^* \qquad (X \in GL(H)).$$

Demostración. Sea $\phi : GL(H) \to GL(H)$ un automorfismo. Debido a los teoremas 5.1 y I de Rickart en [27] y [28], respectivamente, podemos deducir que ϕ tiene que ser de la forma

$$\phi(X) = \tau(X)TXT^{-1}$$

o de la forma

$$\phi(X) = \tau(X)(TX^{-1}T^{-1})^*$$

donde $\tau : GL(H) \to \mathbb{C}$ es un mapa multiplicativo y $T : H \to H$ es un mapa aditivo y biyectivo tal que $T(\lambda x) = f(\lambda)Tx, \lambda \in \mathbb{C}, x \in H$ para algún automorfismo de anillos f de $\mathbb{C}$.

Veamos primero que $\tau(X) \equiv 1$. Como τ es multiplicativa, se tiene que $\tau(I) = 1$. Luego $\tau(S) \in \{-1, 1\}$ para cualquier involución $S \in GL(H)$, o sea, para cualquier S que cumpla $S^2 = I$. Es un hecho conocido que todo elemento de $GL(H)$ se puede escribir como producto de involuciones. Debido a eso, se tiene que la imagen de τ está contenido en $\{-1, 1\}$. Dada S una involución arbitraria, considerar el operador idempotente $P = (I - S)/2$. Observar que $S = (I - P) - P = (I - P)^2 - P^2 = ((I - P) + iP)^2$, luego si llamo $R = (I-P)+iP$, se tiene que $R \in GL(H)$ y $\tau(S) = \tau(R)^2$, y como $\tau(R) = \pm 1$, se deduce que $\tau(S) = 1$. Luego, utilizando de nuevo el hecho que todo elemento de $GL(H)$ se puede escribir como el producto de involuciones, se deduce que $\tau \equiv 1$.

Luego se tiene que $\phi(X) = TXT^{-1}$ o bien $\phi(X) = (TX^{-1}T^{-1})^*$. En el segundo caso se puede componer ϕ con $X \mapsto (X^*)^{-1}$ para concluir que en ambos casos $X \mapsto TXT^{-1}$ es un automorfismo de $GL(H)$. Luego, hay que probar que $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ es o bien la identidad, o bien la conjugación y que T es acotado.

Asumamos que $\phi(X) = TXT^{-1}$ es un automorfismo de $GL(H)$. Observar que $\phi^{-1}(X) = T^{-1}XT$. Ahora definamos los mapas aditivos $\psi, \varphi : B(H) \to A(H)$ como $\psi(X) = TXT^{-1}$ y $\varphi(X) = T^{-1}XT, X \in B(H)$.

Si $|\lambda| > \|X\|$ se tiene que $X - \lambda I$ está en $GL(H)$, ya que $\left\| \frac{X-\lambda I}{-\lambda} - I \right\| < 1$. Luego $\psi(X - \lambda I) \in GL(H)$ ya que en $GL(H)$ coincide con ϕ. Por lo tanto se tiene que $\psi(X) = \psi(X - \lambda I) + \psi(\lambda I) \in GL(H) + GL(H) \subset B(H)$. De la misma manera, se tiene que $\varphi : B(H) \to B(H)$. Luego ψ es un mapa multiplicativo de $B(H)$ en $B(H)$ que además es biyectivo ya que φ es su inversa. Debido a la Observación 4.4.1, sabemos que existe un mapa $S : H \to H$ acotado, biyectivo, lineal o conjugado lineal tal que $TXT^{-1} = SXS^{-1}$ para todo $X \in B(H)$. Lo que es equivalentemente a decir que, el mapa aditivo $S^{-1}T$ conmuta con todo $X \in B(H)$. Luego T es un multiplo escalar de S, lo que nos dice que T es acotado y f es o bien la identidad, o la conjugación.

Por lo tanto, todo automorfismo ϕ de $GL(H)$ tiene alguna de las formas antes enunciadas. $\square$

Observación 4.4.4 *Si ϕ es del tipo (i), (ii), (iii), (iv), entonces para todo $X \in GL(H)$ se tiene $\sigma(\phi(X)) = \sigma(X)$, $\sigma(\phi(X)) = \overline{\sigma(X)}$, $\sigma(\phi(X)) = (\overline{\sigma(X)})^{-1}$ y $\sigma(\phi(X)) = \sigma(X)^{-1}$ respectivamente.*

En la demostración del teorema sobre los automorfismos 2-locales del grupo general lineal, se necesita el siguiente lema para el cual se utiliza la siguiente notación.

Notación 4.4.5 Sea K un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$ y λ un número complejo, entonces: $K - \lambda = \{\mu - \lambda : \mu \in K\}$, $\overline{K} = \{\overline{\mu} : \mu \in K\}$ y $r(K) = \sup\{|\mu| : \mu \in K\}$. Además si $0 \notin K$, entonces escribimos $K^{-1} = \left\{\mu^{-1} : \mu \in K\right\}$.

Lema 4.4.6 *Sea K un compacto no vacío de $\mathbb{C}$ y λ un número complejo tal que $\mathrm{Im}(\lambda) > r(K) + 1$. Entonces $0 \notin K - \lambda$, $K - \lambda \neq (K - \lambda)^{-1}$, $K - \lambda \neq (\overline{K - \lambda})^{-1}$ y $K - \lambda \neq \overline{K - \lambda}$.*

Demostración. Como $\mathrm{Im}(\lambda) > r(K) + 1$ se deduce que $|\lambda| > r(K) + 1$. Esto nos dice que $0 \notin K - \lambda$, y como $r(K - \lambda) \geq |\lambda| - r(K)$ se tiene que $r(K - \lambda) > 1$. Por otro lado sabemos que existe un $\lambda_0 \in K$ tal que $r((K - \lambda)^{-1}) = \frac{1}{|\lambda - \lambda_0|}$. Como

$$\frac{1}{|\lambda - \lambda_0|} \leq \frac{1}{|\lambda| - |\lambda_0|} \leq \frac{1}{|\lambda| - r(K)} < 1,$$

se tiene que $r(K - \lambda) > r((K - \lambda)^{-1}) = r((\overline{K - \lambda})^{-1})$, con lo cual $K - \lambda \neq (K - \lambda)^{-1}$ y $K - \lambda \neq (\overline{K - \lambda})^{-1}$. Por último, la hipótesis de que $\mathrm{Im}(\lambda) > r(K) + 1$ nos dice que $-1 > r(K) - \mathrm{Im}(\lambda) \geq \mathrm{Im}(\mu - \lambda)$, para todo $\mu \in K$, lo que implica que $K - \lambda$ está en el semiplano abierto inferior de $\mathbb{C}$, por lo tanto, $K - \lambda$ y $\overline{K - \lambda}$ no pueden coincidir. $\square$

Teorema 4.4.7 *Todo automorfismo 2-local de $GL(H)$ es un automorfismo.*

Demostración. Sea ϕ un automorfismo 2-local de $GL(H)$. Si componemos ϕ con un automorfismo de $GL(H)$, se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\phi(2iI) = 2iI$. Luego $\phi_{X,2iI}$ tiene que ser de la forma *(i)* para todo $X \in GL(H)$. En particular, $\phi(\lambda I) = \lambda I$ $(\lambda \in \mathbb{C})$, y por la observación anterior, se tiene que $\sigma(\phi(X)) = \sigma(X)$ $(X \in GL(H))$.

Sea S el conjunto de todos los operadores $X \in GL(H)$ que satisfacen $\sigma(X) \neq \overline{\sigma(X)}$ y $\sigma(X) \neq \sigma(X)^{-1}$, $\sigma(X) \neq (\overline{\sigma(X)})^{-1}$. Observar que si $X \in S$ e $Y \in GL(H)$ entonces $\phi_{X,Y}$ tiene que ser del tipo *(i)*. En particular $\phi_{X,Y}(\lambda I) = \lambda I$ $(\lambda \in \mathbb{C})$.

Sea $X \in B(H)$ un operador acotado cualquiera. Sea L_X el conjunto de los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $X - \lambda I$ es inversible y está contenido en S. Observar que por el Lema 4.4.6, L_X es no vacío para todo $X \in B(H)$. Ahora defino $\psi : B(H) \mapsto B(H)$ como

$$\psi(X) = \phi(X - \lambda I) + \lambda I$$

donde $\lambda \in L_X$.

Veamos la buena definición de ψ. Para eso, tomemos un μ en L_X y veamos que $\phi(X-\lambda I)+\lambda I = \phi(X-\mu I)+\mu I$. Como $\phi_{X-\lambda I, X-\mu I}$ es del tipo *(i)*, hay un $T_{\lambda,\mu} : H \to H$ acotado lineal e inversible tal que $\phi_{X-\lambda I, X-\mu I}(Y) = T_{\lambda,\mu} Y T_{\lambda,\mu}^{-1}$ para $Y \in GL(H)$, luego se tiene que

$$\phi_{X-\lambda I, X-\mu I}(X-\lambda I) + \lambda I = T_{\lambda,\mu}(X-\lambda I)T_{\lambda,\mu}^{-1} + \lambda I =$$

$$T_{\lambda,\mu}(X-\mu I)T_{\lambda,\mu}^{-1} + \mu I = \phi_{X-\lambda I, X-\mu I}(X-\mu I) + \mu I$$

luego,

$$\phi(X-\lambda I) + \lambda I = \phi_{X-\lambda I, X-\mu I}(X-\lambda I) + \lambda I =$$

$$\phi_{X-\lambda I, X-\mu I}(X-\mu I) + \mu I = \phi(X-\mu I) + \mu I.$$

Por lo tanto, ψ está bien definida.

Veamos ahora que la restricción de ψ a $GL(H)$ coincide con ϕ. Observar primero que si $\rho : GL(H) \to GL(H)$ es un autmorfismo cualquiera del tipo *(i)* y si X, Y son dos elementos de $GL(H)$ tales que $X + Y \in GL(H)$ entonces $\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y)$. Entonces si $X \in GL(H)$ y $\lambda \in L_X \setminus \{0\}$ se tiene que

$$\psi(X) = \phi(X-\lambda I) + \lambda I = \phi_{X, X-\lambda I}(X-\lambda I) + \lambda I =$$

$$\phi_{X, X-\lambda I}(X) + \phi_{X, X-\lambda I}(-\lambda I) + \lambda I = \phi_{X, X-\lambda I}(X) = \phi(X).$$

Veamos ahora que ψ es un automorfismo 2-local de $B(H)$, o sea, que para todo par $X, Y \in B(H)$ hay un automorfismo de $B(H)$ que coincide en esos dos puntos con ψ. Como todo automorfismo de $B(H)$ es interior, para ver que ψ es un automorfismo 2-local de $B(H)$ basta ver que para todo par $X, Y \in B(H)$ existe un operador lineal, acotado e inversible $S : H \to H$, que depende de X e Y, tal que $\psi(X) = SXS^{-1}$ y $\psi(Y) = SYS^{-1}$.

Sean $X, Y \in B(H)$. Por el Lema 4.4.6 sabemos que existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda \in L_X \cap L_Y$. El automorfismo $\phi_{X-\lambda I, Y-\lambda I}$ es del tipo *(i)*, luego hay un operador lineal, acotado e inversible S tal que

$$\phi_{X-\lambda I, Y-\lambda I}(X-\lambda I) = S(X-\lambda I)S^{-1} \quad y \quad \phi_{X-\lambda I, Y-\lambda I}(Y-\lambda I) = S(Y-\lambda I)S^{-1}$$

luego

$$\psi(X) = \phi(X-\lambda I) + \lambda I = \phi_{X-\lambda I, Y-\lambda I}(X-\lambda I) + \lambda I =$$

$$S(X-\lambda I)S^{-1} + \lambda I = SXS^{-1}$$

Análogamente,

$$\psi(Y) = SYS^{-1}$$

Luego ψ es un automorfismo 2-local de $B(H)$. Entonces, por el Teorema 4.2.1 ψ es un automorfismo de $B(H)$ y por lo tanto, existe un operador $T : H \to H$ lineal, acotado e inversible tal que $\psi(X) = TXT^{-1}$ para todo $X \in B(H)$.

En consecuencia, $\phi(X) = TXT^{-1}$ para todo $X \in GL(H)$. $\square$

Paz y Amor.

Bibliografía

[1] G. Cassinelli, E. De Vito, P.J. Lahti y A. Levrero, *Symmetry groups in quantum mechanics and the theorem of Wigner on the symmetry transformations*, Rev. Math. Phys. 9, 921–941 (1997).

[2] L. Molnar, *Local automorphisms of some quantum mechanical structures*, preprint.

[3] L. Molnar, *The set of automorphisms of B(H) is topologically reflexive in B(B(H))*, Studia Math. 122 (1997), 183–193.

[4] L. Molnar and M. Gyory, *Reflexivity of the automorphism and isometry groups of the suspension of B(H)*, J. Funct. Anal. 159 (1998), 568–586.

[5] L. Molnar, *Order-automorphisms of the set of bounded observables*, J. Math. Phys. 42 (2001), 5904–5909.

[6] L. Molnar, *On certain automorphisms of sets of partial isometries*, Arch. Math. 78 (2002), 43–50.

[7] R. V. Kadison, *Local derivations*, J. Algebra 130 (1990), 494–509 MR 91f:46092.

[8] D.R. Larson and A.R. Sourour, *Local derivations and local automorphisms of B(X)*, Proc. Sympos. Pure Math. 51, Part 2, Providence, Rhode Island 1990, pp. 187–194. MR 91k:47106.

[9] P. Semrl, *Local automorphisms and derivations on B(H)*, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 2677–2680.

[10] L. Molnar y P. Semrl, *Local automorphisms of the unitary group and the general linear group on a Hilbert space*, Expo. Math. 18 (2000), 231–238.

[11] P. Busch y S.P. Gudder, *Effects as functions on projective Hilbert spaces*, Lett. Math. Phys. 47, 329–337 (1999).

[12] G.J. Murphy, *C^*-algebras and Operator Theory*, (Academic Press, 1990).

[13] R.V. Kadison, *A generalized Schwarz inequality and algebraic invariants for operators algebras*, Ann. of Math. 56, 494–503(1952).

[14] O.S. Rothaus, *Order isomorphisms of cones*, Proc. Amer. Math. Soc. 17, 1284–1288 (1966).

[15] L. Molnar and P. Semrl, *Order isomorphisms and triple isomorphisms of operator ideals and their reflexivity*, Arch. Math. 69 (1997), 497–506.

[16] L. Molnar, *Generalization of Wigners unitary-antiunitary theorem for indefinite inner product spaces*, Commun. Math. Phys. 201 (2000), 785–791.

[17] L. Molnar, *A Wigner-type theorem on symmetry transformations in Banach spaces*, Publ. Math. (Debrecen) 58 (2000), 231–239.

[18] M. Omladic and P. Semrl, *Additive mappings preserving operators of rank one*, Linear Algebra Appl. 182 (1993), 239–256.

[19] M. Bresar and P. Semrl, *On local automorphisms and mappings that preserve idempotents*, Studia Math. 113 (1995), 101–108. MR 96i:47058.

[20] C. Badea, *The Gleason-Kahane-Zelazko theorem and Gelfand theory without multiplication*, preprint.

[21] S. Kowalski and Z. Slodkowski, *A characterization of multiplicative linear functionals in Banach algebras*, Studia Math. 67 (1980), 215–223. MR 82d:46070.

[22] M. Eidelheit, *On isomorphisms of rings of linear operators*, Studia Math. 9 (1940), 97–105. MR 3:51e.

[23] L. Molnar, *Local automorphisms of operator algebras on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), 1867–1874.

[24] S. Sakai, *On the group isomorphisms of unitary groups in $AW^\star$-algebras*, Tohoku Math. J. 7 (1955), 87–95.

[25] W.S. Martindale III, *When are multiplicative mappings additive?*, Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969), 695–698.

[26] P. Semrl, *Isomorphisms of standard operator algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 1851–1855.

[27] C.E. Rickart, *Isomorphic groups of linear transformations*, Amer. J. Math. 72 (1950), 451–464.

[28] C.E. Rickart, *Isomorphisms of infinite-dimensional analogues of the classical groups*, Bull. Amer. Math. Soc. 57 (1951), 435–448.