



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Teorema de Balian-Low

Victoria Paternostro

Director: Dr. Carlos Cabrelli

Marzo de 2007

*con todo cariño,
a mis abuelas
Mima y Sesé.*

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi director Carlos Cabrelli por su compromiso, su ayuda y por todo lo que pude aprender gracias a él. También, a todos los docentes que colaboraron en mi formación a lo largo de este tiempo.

A Liliana Gysin porque me incentivó en esta elección y por todo lo que me ayudó en el principio de mi carrera.

A mis papás Adriana y Eduardo, que siempre me acompañan en mis decisiones, sin cuestionamientos y con profundo amor. A mi querido hermano Pepe y su inseparable Caro, por hacerme reír tanto. Y nuevamente quiero agradecer a mi papá, por su ayuda con los gráficos de mi tesis.

Porque me apoyan incondicionalmente en todos los aspectos de mi vida y desde hace tantos años, a mis amigos del alma, Ambar, Caro, la gorda, Wuatu, Nalgas y Santuli. Y a la limada y esporádica Fran, en donde esté.

Por compartir esta carrera, haciendo amenas y divertidas las cursadas agradezco enormemente a Magui, Isa, Eguaio, Lean, José Luis, Lau, Juliana y compañía, Pablo, Martin, Rodre, el Roman y demás. En especial quiero volver a agradecer a mi queridísimo amigo Eguaio por todo lo que es y por su ayuda con el Latex y a Magui porque además de haber sido una gran compañera es una excelente amiga.

Y por último a mi mono, Andrés, por su respeto, su amor y por la enorme paciencia que demostró tener, sobre todo en estos últimos días.

Índice general

Introducción	4
1. Preliminares	7
1.1. Plano Tiempo-Frecuencia	7
1.2. Marcos	9
1.3. Sistemas de Gabor	11
2. La Transformada de Zak y Distribuciones	16
2.1. Transformada de Zak	16
2.2. Distribuciones	26
3. Teorema de Balian-Low.	
Demostración sin Teoría de Distribuciones	32
3.1. Lemas Previos	32
3.2. Demostración del Teorema de Balian-Low	44
4. Teorema de Balian-Low.	
Demostración basada en la Teoría de Operadores	47
4.1. Principio de Incertidumbre	47
4.2. Versión débil del Teorema de Balian-Low	51
4.3. Equivalencia entre el Teorema de Balian-Low y su versión débil	55
5. Teorema de Balian-Low.	
Resultados relacionados y extensiones.	63
5.1. Espacios Amalgama	63
5.2. El Teorema de Balian-Low para Bases de Schauder	65
5.3. Comentarios	72
Notaciones	75
Bibliografía	76

Introducción

Una de las principales motivaciones del análisis de señales, consiste en lograr métodos que nos permitan descomponer y reconstruir funciones (señales) en forma estable.

Para ello, y con el objetivo de lograr un estudio más localizado de la función bajo análisis, Gabor propone multiplicarla por una nueva función g , llamada ventana, que esté bien localizada en tiempo y frecuencia. (Para una definición precisa de localización ver Capítulo 1, Sección 1.1 de este trabajo).

Así surge la Transformada de Gabor, definida como

$$G_g(f)(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(s)g(s-t)e^{-2\pi i\omega s} ds,$$

que resulta ser una buena herramienta muy utilizada en el análisis armónico.

Si consideramos la familia $\{g_{\omega,t}(s) = g(s-t)e^{2\pi i\omega s} : t, \omega \in \mathbb{R}\}$ y sólo tenemos en cuenta el caso en que g toma valores reales, la Transformada de Gabor está representada, para cada par $(t, \omega) \in \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$, por la fórmula

$$G_g(f)(t, \omega) = \langle f, g_{\omega,t} \rangle,$$

donde suponemos que tanto f como g son funciones de $L^2(\mathbb{R})$.

Como $\langle f, g_{\omega,t} \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}_{\omega,t} \rangle$ para cada par (t, ω) , se puede pensar que $G_g(f)(t, \omega)$ nos proporciona información sobre las frecuencias próximas a $\omega_0 + \omega$ que intervienen en f en un entorno de $t_0 + t$, donde t_0 y ω_0 están definidos como

$$t_0 = \int_{\mathbb{R}} s \frac{|g(s)|^2}{\|g\|_2^2} ds \quad \text{y} \quad \omega_0 = \int_{\mathbb{R}} \gamma \frac{|\hat{g}(\gamma)|^2}{\|g\|_2^2} d\gamma,$$

y representan los promedios de g y \hat{g} respectivamente (en la Sección 1.1 del primer Capítulo se encuentra un análisis más detallado de este tema).

Este tratamiento puede ser realizado también desde el punto de vista discreto. Es decir, reemplazando los valores de t y ω por an y bm respectivamente, para a y b números reales positivos y $m, n \in \mathbb{Z}$. En este contexto, la

pregunta que surge es bajo que condiciones sobre la ventana g es posible descomponer y reconstruir en forma estable la función f conociendo los valores $\{G_g(f)(na, mb)\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$.

Si consideramos funciones f que estén en $L^2(\mathbb{R})$, una de las posibles condiciones sobre g es pedir que el sistema de Gabor $\{e^{2\pi imbt}g(t - an)\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ forme un marco de $L^2(\mathbb{R})$. (Ver la Sección 1.2 del Capítulo 1, para una definición detallada del concepto de marco).

Una de las primeras ventanas con las cuales se trabajó fue la Gaussiana $g(t) = e^{-\pi t^2}$. Aunque esta función tiene una buena localización en el plano tiempo-frecuencia, debido a que verifica $g = \hat{g}$, el sistema de Gabor que genera no posee buenas propiedades que nos permitan reconstruir funciones como buscamos.

Entonces, teniendo en mente este ejemplo podríamos preguntarnos si es posible encontrar una ventana g bien localizada en tiempo-frecuencia, que además permita reconstruir en forma estable las funciones bajo análisis verificando, por ejemplo, que el sistema de Gabor que genera, constituya un marco de $L^2(\mathbb{R})$.

El *Teorema de Balian-Low* es un resultado clásico en el estudio de estos temas que, desafortunadamente responde la pregunta anterior en forma negativa. Es decir, si un sistema de Gabor forma un marco de $L^2(\mathbb{R})$, la ventana que lo genera no tiene buena localización en tiempo-frecuencia.

Este resultado posee una larga historia. Fue demostrado inicialmente por Balian en 1981 ([Bal81]) e independientemente por Low en 1985 ([Low85]), para el caso en que el sistema de Gabor generado por g es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Ambas pruebas eran similares y tenían un error que consistía en utilizar como cierto que la integrabilidad de los cuadrados de las derivadas parciales de una función aseguraba su continuidad. Unos años más tarde Daubechies, Coifman y Semmes ([Dau90]), manteniendo las ideas originales de las demostraciones dadas por Balian y Low, solucionan este error y durante ese proceso logran extender el resultado al caso de marcos.

En 1988, Battle ([Bat88]), inspirado en el Principio de Incertidumbre, da una prueba simple y elegante del *Teorema de Balian-Low* para bases ortonormales, basada en la teoría de operadores. Aunque los marcos exactos (ver definición en la sección 1.2 del Capítulo 1) son una generalización natural de las bases ortonormales, no resultó trivial adaptar la demostración dada por Battle al caso de marcos exactos. Este trabajo fue realizado por Daubechies y Janssen ([DJ93]). La demostración que realizaron, está cuidadosamente desarrollada en [Dau92].

Debido a la propiedad fundamental de la Transformada de Fourier

$$(\partial g)^\wedge(\gamma) = 2\pi i \gamma \hat{g}(\gamma),$$

es de esperar que la diferenciación juegue un papel importante en la demostración del *Teorema de Balian-Low*. Esta fórmula que relaciona la derivada de una función con su transformada de Fourier, será interpretada en el sentido clásico y distribucional como veremos más adelante.

En este trabajo recorreremos la historia del *Teorema de Balian-Low*, dedicándonos a estudiar básicamente dos de sus demostraciones. La primera, debida a Benedetto, Heil y Walnut ([BHW95]), resulta novedosa con respecto a las demostraciones que había hasta el momento, pues en ella se elude la utilización de herramientas relacionadas con el cálculo distribucional y se trabaja con técnicas conocidas en el análisis armónico. La segunda prueba que analizaremos en detalle es la adaptación que realizaron Daubechies y Janssen ([DJ93]) de la demostración dada por Battle para bases ortonormales. Basándose en la teoría de operadores se prueba una versión débil del *Teorema de Balian-Low* y luego, utilizando como herramienta fundamental el cálculo distribucional, se prueba la equivalencia entre esta versión y la original.

En ambas demostraciones, la transformada de Zak (sección 2.1) nos será de gran utilidad como herramienta de trabajo. Por este motivo estudiamos cómo es posible relacionar las propiedades de completitud, base y marco de un sistema de Gabor con la transformada de Zak de la ventana que lo genera.

Veremos también algunos resultados que se relacionan con el *Teorema de Balian-Low* desde diferentes ópticas, obtenidos en los últimos años. Sobre el trabajo realizado por Benedetto, Heil y Walnut ([BHW95]), comentaremos algunas cuestiones sobre los espacios Amalgama. Estos autores, en el mismo contexto y bajo las mismas hipótesis que en el *Teorema de Balian-Low*, obtienen un nuevo resultado sobre el comportamiento de la ventana generadora del sistema de Gabor, independiente de la mala localización que posee en el plano tiempo-frecuencia.

Expondremos una versión muy interesante del *Teorema de Balian-Low* obtenida por Heil y Powell en el año 2006 ([HP06]) para el caso en que el sistema de Gabor constituye una base de Schauder de $L^2(\mathbb{R})$. La prueba de este resultado, se relaciona directamente con la versión débil del *Teorema de Balian-Low* para marcos exactos que dan Daubechies y Janssen ([DJ93]) y también con el sentido de la convergencia de los desarrollos en serie cuando se trabaja con bases de Schauder.

Finalmente, la Transformada de Zak nos dará la posibilidad de contruir una función ventana de modo tal que el sistema de Gabor que genere sea una base de Schauder de $L^2(\mathbb{R})$ pero no un marco exacto.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, daremos algunas definiciones que usaremos a lo largo de todo este trabajo. También enunciaremos propiedades básicas y conocidas sobre los conceptos que presentamos, para luego enunciar el *Teorema de Balian-Low*. Sólo serán demostrados aquellos resultados que aporten alguna técnica que se considere importante o que no aparezcan en forma explícita en la bibliografía.

1.1. Plano Tiempo-Frecuencia

Nos proponemos como primer paso, dar una definición precisa del concepto de localización, pues este representa una de las principales motivaciones en el estudio del *Teorema de Balian-Low*.

Definición 1.1.1 Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$, tal que $g \neq 0$. Definimos el centro (o valor medio) de g como la cantidad

$$t_0 = t_0(g) = \int_{\mathbb{R}} s \frac{|g(s)|^2}{\|g\|_2^2} ds$$

en el caso en que sea finita y el radio de g , al valor

$$\sigma = \sigma(g) = \left(\int_{\mathbb{R}} (s - t_0)^2 \frac{|g(s)|^2}{\|g\|_2^2} ds \right)^{1/2}.$$

Una vez expuestos los conceptos anteriores podemos definir el *Intervalo de concentración* I_g de g como $I_g = [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$.

El centro y radio de \hat{g} serán notados por ω_0 y $\hat{\sigma}$ respectivamente y así $I_{\hat{g}} = [\omega_0 - \hat{\sigma}, \omega_0 + \hat{\sigma}]$.

Aquí \hat{g} denota la *Transformada de Fourier* de g que está definida como

$$\hat{g}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-2\pi i\gamma t} dt.$$

Si consideramos el producto cartesiano de los intervalos I_g e $I_{\hat{g}}$, queda definido el rectángulo $R_g = I_g \times I_{\hat{g}}$ en el plano tiempo-frecuencia.

Definición 1.1.2 Para una función $g \in L^2(\mathbb{R})$, R_g representa la localización de g en el plano tiempo-frecuencia.

Definición 1.1.3 Se dice que una función $g \in L^2(\mathbb{R})$ está bien localizada en tiempo-frecuencia si el área de R_g es finita.

La localización de una función de $L^2(\mathbb{R})$ no está librada al azar. El *Principio de Incertidumbre* es un resultado que nos proporciona una limitación a cuán bien localizada puede estar una función en tiempo y frecuencia.

Teorema 1.1.4 Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$ y sean σ y $\hat{\sigma}$ sus radios en tiempo y en frecuencia. Entonces,

$$\sigma\hat{\sigma} \geq \frac{1}{4\pi}.$$

Sobre este principio se inspiró Battle, para dar la demostración del *Teorema de Balian-Low* para bases ortonormales, que desarrollaremos más adelante.

Proposición 1.1.5 Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $t_0(g)$ es finito y no nulo. Entonces, la función $f(t) = g(t + t_0)$ verifica:

(a) $\|f\|_2 = \|g\|_2$,

(b) $t_0(f) = 0$.

Demostración. La demostración de parte (a) se sigue inmediatamente de que la integral de Lebesgue es invariante por traslaciones. Veamos entonces que $t_0(f) = 0$.

$$\begin{aligned} t_0(f) &= \int_{\mathbb{R}} t \frac{|g(t + t_0)|^2}{\|g\|_2^2} dt \\ &= \frac{1}{\|g\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} (t - t_0) |g(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{\|g\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} t |g(t)|^2 dt - t_0 = 0, \end{aligned}$$

donde simplemente hemos realizado un cambio de variable. ■

Haciendo un razonamiento similar, si $g \in L^2(\mathbb{R})$ verifica que $\omega_0(g) = t_0(\hat{g})$ es finito y no nulo, considerando la modulación $f(t) = e^{-2\pi\omega_0 t}g(t)$, tenemos que $\|f\|_2 = \|g\|_2$ y $\omega_0(f) = 0$, pues $\hat{f}(\gamma) = \hat{g}(\gamma + \omega_0)$.

Resumiendo, si una función posee centro y radio finitos y no nulos, trasladándola y modulándola adecuadamente, obtenemos otra función cuyo centro es cero, y cuya transformada también posee centro cero.

El sentido de esta discusión será comprendido completamente cuando retomemos el concepto de localización en la Sección 1.3.

1.2. Marcos

Los marcos pueden ser definidos sobre cualquier espacio de Hilbert separable. Dado un espacio de Hilbert H separable, con producto interno $\langle f, g \rangle$ y norma $\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}$, diremos que una sucesión $\{f_k\}_k$ es un *marco* de H si existen constantes $0 < A \leq B$ tales que para toda $f \in H$ se tiene

$$A\|f\|^2 \leq \sum_k |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2. \quad (1.1)$$

Cuando sea $A = B$, diremos que el marco es *ajustado* y el marco será *exacto* si $\{f_k\}_{k \neq l}$ deja de ser un marco para cualquier elección de l .

Si la sucesión $\{f_k\}_k$ verifica únicamente la segunda desigualdad en (1.1) la llamaremos *sucesión de Bessel*.

Lema 1.2.1 *Un marco, es un sistema completo en H .*

Demostración. Recordando que $\{f_k\}_k$ es completo si y sólo si

$$\langle f, f_k \rangle = 0 \quad \text{para todo } k \implies f = 0$$

el resultado se desprende inmediatamente de la fórmula (1.1). ■

Cada marco asigna a los elementos de H un desarrollo en serie. Es decir que para toda $f \in H$ existirán coeficientes $c_k(f)$ de modo que $f = \sum_k c_k(f)f_k$ con convergencia incondicional en la norma de H . Es importante remarcar que estos coeficientes no tienen por que ser únicos, y esta es una de las diferencias que existe entre un marco y una base.

Debido a que el conjunto de combinaciones lineales a coeficientes en \mathbb{Q} de los elementos de un marco resulta ser denso en H , sólo existen marcos en espacios de Hilbert que sean separables.

Dado un marco $\{f_k\}_k$ en un espacio de Hilbert separable H la aplicación $S : H \longrightarrow H$ definida como

$$Sf = \sum_k \langle f, f_k \rangle f_k$$

resulta ser lineal, continua e inversible. A este operador lo llamaremos *Operador Marco*.

La sucesión $\{\tilde{f}_k\}_k$, donde $\tilde{f}_k = S^{-1}(f_k)$ es también un marco en H que suele llamarse *marco dual canónico*. Ahora con el marco dual tenemos los desarrollos en serie:

$$f = \sum_k \langle f, \tilde{f}_k \rangle \tilde{f}_k = \sum_k \langle f, f_k \rangle f_k \quad \forall f \in H.$$

A partir de este momento la notación \tilde{f} para $f \in H$ denotará la función dual de f . Es decir, $\tilde{f} = S^{-1}(f)$ donde S es el operador asociado al marco $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Es importante destacar que a pesar de tener un desarrollo en serie para cada elemento de H en función de un marco y su dual, un marco no tiene por que ser una base. Un marco es una base si y sólo si es un marco exacto. Toda base ortonormal es un marco exacto y por este motivo todo espacio de Hilbert separable posee un marco. Existen marcos que no son exactos y también existen marcos exactos que no son bases ortonormales. Así es claro que marco, marco exacto y base son conceptos distintos. Para un tratamiento más detallado sobre estos temas referimos al lector a [Hei87].

Recordemos las siguientes dos definiciones:

Definición 1.2.2 Una sucesión $\{x_k\}_k$ en un espacio de Banach X se dice *minimal* si $x_n \notin \{\text{combinaciones lineales finitas de } \{x_k\}_{k \neq n}\}$ para cualquier elección de n .

Definición 1.2.3 Sea X un espacio de Banach, X^* su dual y sean también las sucesiones $\{x_k\}_k \subseteq X$ e $\{y_k\}_k \subseteq X^*$. Diremos que $\{x_k\}_k$ es *biortogonal* a $\{y_k\}_k$ o que $\{x_k\}_k$ e $\{y_k\}_k$ son *biortogonales* si $y_n(x_m) = \delta_{nm}$.

Por último enunciamos dos Lemas que utilizaremos en varias oportunidades, especialmente en el capítulo donde estudiamos la Transformada de Zak. Ambas demostraciones se encuentran en [Hei87].

Lema 1.2.4 Sea X un espacio de Banach, y $\{x_k\}_k \subseteq X$. Entonces:

(a) $\exists \{y_k\}_k \subseteq X^*$ biortogonal a $\{x_k\}_k \iff \{x_k\}_k$ es minimal.

(b) \exists una única $\{y_k\}_k \subseteq X^*$ biortogonal a $\{x_k\}_k \iff \{x_k\}_k$ es minimal y completo.

Lema 1.2.5 Sea H un espacio de Hilbert y sea $\{f_k\}_k \subseteq H$ un marco. Son equivalentes :

(i) $\{f_k\}_k$ es un marco exacto.

(ii) $\{f_k\}_k$ y $\{\tilde{f}_k\}_k$ son biortogonales.

1.3. Sistemas de Gabor

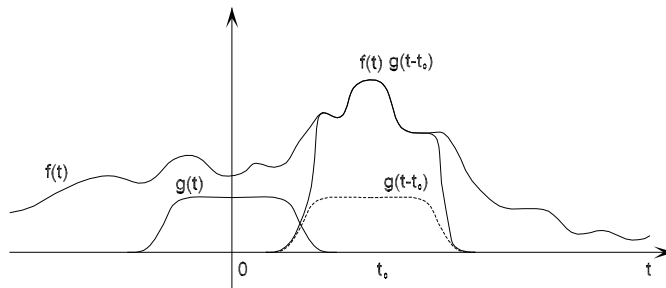
Luego de dar algunos aspectos generales sobre marcos, introducimos ahora un tipo particular de ellos, que se conocen con el nombre de *marcos de Gabor*.

Primero retomemos la motivación dada en la introducción para considerar este tipo de marcos. Dada una función $g \in L^2(\mathbb{R})$, definimos la *Transformada de Gabor continua* como

$$G_g(f)(t_0, \omega_0) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t - t_0)} e^{-2\pi i \omega_0 t} dt$$

para $f \in L^2(\mathbb{R})$. Con esta transformación producimos lo siguiente:

Primero Localizamos la función $f(t)$ bajo estudio en un entorno de t_0 , truncándola con $\overline{g(t - t_0)}$, lo que gráficamente queda representado por:



Segundo Transformamos Fourier la función $f(t) \overline{g(t - t_0)}$ y evaluamos en ω_0 , obteniendo:

$$G_g(f)(t_0, \omega_0) = (f(t) \overline{g(t - t_0)})^\wedge(\omega_0).$$

La aplicación G_g está bien definida de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y resulta ser una isometría inversible sobre su imagen.

Aquí nos interesa el caso discreto de esta herramienta, que definimos con más detalle a continuación.

Definimos la *traslación* $\tau_x f$ y la *modulación* $e_y f$ de una función f como

$$\tau_x f(t) = f(t - x) \quad y \quad e_y f(t) = e^{2\pi i y t} f(t).$$

Para una función $g \in L^2(\mathbb{R})$ y dados $p, q \in \mathbb{R}$ denotamos por $g_{p,q}(t)$ a

$$g_{p,q}(t) = e_p \tau_q g(t) = e^{2\pi i p t} g(t - q).$$

Definición 1.3.1 *Dados $g \in L^2(\mathbb{R})$ y $a, b > 0$ la sucesión $\{g_{mb,na}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ se llama Sistema de Gabor asociado a (g, a, b) .*

Cuando un sistema de Gabor forme un marco, será llamado *Marco de Gabor*. En esta situación tendremos asociado el operador marco S

$$Sf = \sum_{m,n} \langle f, g_{mb,na} \rangle g_{mb,na}$$

y una estructura similar para el marco dual de $\{g_{mb,na}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$. En efecto, gracias a que $S(g_{mb,na}) = (Sg)_{mb,na}$, reemplazando g por $S^{-1}g$, obtenemos la igualdad $S^{-1}(g_{mb,na}) = (S^{-1}g)_{mb,na}$. Luego, el marco dual de $\{g_{mb,na}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ es otro marco de Gabor generado por la función dual $\tilde{g} = S^{-1}g$.

Notar que $G_g(f)(na, mb) = \langle f, g_{mb,na} \rangle$. Por este motivo, siendo el sistema $\{g_{mb,na}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ un marco de $L^2(\mathbb{R})$ y conociendo los valores de $G_g(f)(na, mb)$ para cada par $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ podemos reconstruir f en función del marco $\{g_{mb,na}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ y su dual como vimos en la sección anterior.

Una vez expuesta la definición de marco de Gabor, queremos comprender porqué es útil tener una buena localización de la función ventana que lo genera.

Supongamos que la función $g \in L^2(\mathbb{R})$ verifica $\|g\|_2 = 1$ y además $\int_{\mathbb{R}} t|g(t)|^2 dt = 0$ y $\int_{\mathbb{R}} \gamma |\hat{g}(\gamma)|^2 d\gamma = 0$.

Entonces, para los parámetros $a = b = 1$, $g_{m,n}$ está localizada en un entorno del punto (n, m) del plano tiempo-frecuencia, pues

$$\int_{\mathbb{R}} t|g_{m,n}(t)|^2 dt = n \quad y \quad \int_{\widehat{\mathbb{R}}} \gamma |(g_{m,n})^\wedge(\gamma)|^2 d\gamma = m.$$

Aquí, la elección de los parámetros $a = b = 1$ es únicamente con el fin de simplificar la situación y no representa pérdida de generalidad.

Supongamos también que restringimos nuestro análisis a la reconstrucción de señales (funciones) que verifiquen "esencialmente":

$$\text{sop}(f) \subseteq [-T, T] \quad \text{y} \quad \text{sop}(\hat{f}) \subseteq [-\Omega, \Omega].$$

Hemos utilizado la palabra "esencialmente" pues es sabido que no es posible que una función verifique ambas condiciones simultáneamente. Más formalmente, consideramos funciones que satisfacen:

1. $\|\chi_{[-T, T]}f - f\|_2 \ll \|f\|_2$
2. $\|\chi_{[-\Omega, \Omega]}\hat{f} - \hat{f}\|_2 \ll \|\hat{f}\|_2$

Las condiciones 1. y 2. indican que el rectángulo $[-T, T] \times [-\Omega, \Omega]$ posee mayor información sobre f que otras regiones del plano tiempo-frecuencia.

Por otro lado, asumiendo que el sistema de Gabor $\{g_{m,n}\}$ constituye un marco de $L^2(\mathbb{R})$, con marco dual $\{\tilde{g}_{m,n}\}$, tenemos que

$$f = \sum_{m,n} \langle f, g_{m,n} \rangle \tilde{g}_{m,n}. \quad (1.2)$$

Si la función $g_{m,n}$ está bien localizada en un entorno del punto (n, m) , es de esperar que $\langle f, g_{m,n} \rangle$ sea pequeño si la distancia de (n, m) al rectángulo $[-T, T] \times [-\Omega, \Omega]$ es grande. En otras palabras, es razonable pensar que sólo los valores de m y n para los cuales (n, m) esté dentro o en las cercanías de $[-T, T] \times [-\Omega, \Omega]$, tengan un papel signficante en la reconstrucción de f a través de la fórmula (1.2). Luego, la buena localización de g , o equivalentemente de $g_{m,n}$, podría significar que sólo "algunos" de los valores $\langle f, g_{m,n} \rangle$ tengan real importancia en la reconstrucción de f .

En este momento estamos en condiciones de enunciar el teorema central de este trabajo.

Teorema 1.3.2 (*Teorema de Balian-Low*)

Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$, y sean $a, b > 0$ con $ab = 1$. Si el sistema de Gabor $\{g_{mb,na}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ es un marco exacto de $L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\|tg(t)\|_2 \|\gamma\hat{g}(\gamma)\|_2 = +\infty.$$

Este resultado asegura que si el sistema de Gabor $\{g_{mb,na}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ constituye un marco exacto de $L^2(\mathbb{R})$, permitiendo de este modo descomponer y

reconstruir funciones, la función ventana g que lo genera no tiene buena localización en el plano tiempo-frecuencia. Como vimos en la primera Sección de este Capítulo, es posible obtener, de una función de centro finito, una que posea centro cero, aplicándole una traslación conveniente. Luego, sin ser demasiado restrictivos, podemos suponer que $t_0(g) = 0$ y que $\|g\|_2 = 1$, con lo cual su radio queda representado por la cantidad $\sigma = \|tg(t)\|_2$. Con un razonamiento similar para \hat{g} , resulta $\hat{\sigma} = \|\gamma\hat{g}(\gamma)\|_2$. En estas condiciones queda claro que el teorema (1.3.2) dice exactamente que al menos una de las funciones g o \hat{g} no está bien concentrada. De este modo, y dentro de este contexto queda descartada la posibilidad de lograr "reconstrucción" y "buena localización" simultáneamente como hubiésemos querido.

Observación 1.3.3 *Sea g una función y $h(t) = r^{1/2}g(rt)$ una dilatación de g . Entonces*

$$h_{p,q}(t) = r^{1/2}g_{p/r,qr}(rt).$$

Demostración. Simplemente,

$$\begin{aligned} h_{p,q}(t) &= e^{2\pi ipt}h(t-q) \\ &= e^{2\pi ipt}r^{1/2}g(rt-rq) \\ &= e^{2\pi i\frac{p}{r}rt}r^{1/2}g(rt-rq) \\ &= r^{1/2}g_{p/r,qr}(rt) \end{aligned}$$

como buscábamos. ■

Gracias a esta última observación, el sistema de Gabor $\{h_{mb,na}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ será completo, un marco, o un marco exacto si y sólo si lo mismo vale para el sistema de Gabor $\{g_{mb/r,na}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$.

El teorema de Densidad que enunciamos a continuación nos provee de condiciones necesarias (pero no suficientes) para que $\{g_{mb,na}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ sea completo, un marco o un marco exacto de $L^2(\mathbb{R})$, formuladas únicamente en términos del producto ab .

De aquí y junto con la observación (1.3.3) se desprende la importancia del producto ab por sobre los valores individuales de a y b .

Teorema 1.3.4 (*Teorema de Densidad*)

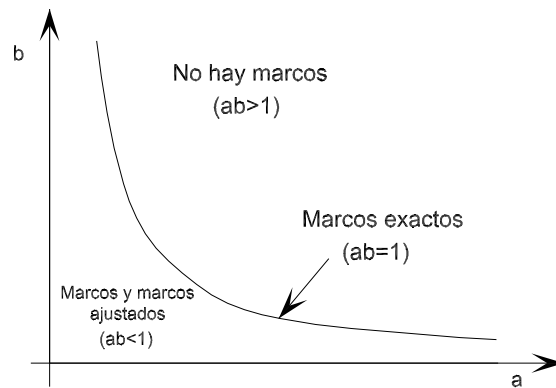
Sean $g \in L^2(\mathbb{R})$, y $a, b > 0$

(a) *Si $\{g_{mb,na}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ es completo en $L^2(\mathbb{R})$, entonces $ab \leq 1$. En particular,*

si $\{g_{mb,na}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ es un marco en $L^2(\mathbb{R})$, entonces $ab \leq 1$.

- (b) Si $\{g_{mb,na}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ es un marco exacto de $L^2(\mathbb{R})$, entonces $ab = 1$.
- (c) Si $\{g_{mb,na}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ es un marco de $L^2(\mathbb{R})$, entonces es exacto si y sólo si $ab = 1$.

Este teorema tiene una larga historia que incluye extensiones a marcos de Gabor sobre retículas irregulares y a marcos de Gabor en dimensiones mayores. El siguiente gráfico esquematiza su contenido:



Cabe aclarar que debido a la parte (c) del teorema de Densidad, las hipótesis $ab = 1$ y *marco exacto* resultan redundantes en el teorema 1.3.2. Alcanzaría simplemente con pedir que $\{g_{mb,na}\}_{m,n}$ sea un marco y que $ab = 1$.

Ya mencionamos la importancia del producto ab por sobre los valores individuales de a y b , y es por este motivo que de ahora en adelante nos reduciremos al caso $a = b = 1$.

Capítulo 2

La Transformada de Zak y Distribuciones

Estudiaremos ahora dos de las herramientas fundamentales que utilizaremos para la demostración de *Teorema de Balian-Low*. La primera sección de este capítulo será dedicada a la Transformada de Zak y en la segunda daremos un breve repaso sobre teoría de distribuciones.

2.1. Transformada de Zak

La *Transformada de Zak* se define formalmente como

$$Zf(t, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t + k) e^{2\pi i k \omega}, \quad (t, \omega) \in \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$$

para una función $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Zf verifica las siguientes relaciones de casi-periodicidad:

$$Zf(t + 1, \omega) = e^{-2\pi i \omega} Zf(t, \omega) \tag{2.1}$$

y

$$Zf(t, \omega + 1) = Zf(t, \omega). \tag{2.2}$$

De este modo, Zf queda unívocamente determinada por los valores que toma sobre el cubo $\mathcal{Q} = [0, 1) \times [0, 1) = [0, 1)^2$.

Una de las utilidades de esta transformada radica en la manera en que esta actúa sobre los sistemas de Gabor construidos sobre el reticulado $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, como muestra la siguiente proposición:

Proposición 2.1.1 Si $g \in L^2(\mathbb{R})$ y $\{g_{m,n}\}$ es el sistema de Gabor generado por g entonces,

$$Z(g_{m,n})(t, \omega) = e_m(t)e_n(\omega)Zg(t, \omega)$$

donde $e_\gamma(t) = e^{2\pi i \gamma t}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} Z(g_{m,n})(t, \omega) &= \sum_k g_{m,n}(t+k)e^{2\pi i \omega k} \\ &= \sum_k e^{2\pi i m(t+k)}g(t+k-n)e^{2\pi i \omega k} \\ &= e^{2\pi i m t} \sum_j e^{2\pi i m(j+n)}g(t+j)e^{2\pi i \omega(j+n)} \\ &= e^{2\pi i m t} e^{2\pi i n \omega} \sum_j g(t+j)e^{2\pi i \omega j} \end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad se hace el cambio de índice $j = k - n$. ■

Teorema 2.1.2 La aplicación $Z : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathcal{Q})$, donde

$$L^2(\mathcal{Q}) = \left\{ F : \|F\|_2 = \left(\iint_{\mathcal{Q}} |F(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

es un isomorfismo isométrico.

Demostración.

- Buena definición:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{Q}} |Zf(t, \omega)|^2 dt d\omega &= \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_k f(t+k)e^{2\pi i \omega k} \right|^2 d\omega dt \\ &= \int_0^1 \sum_k |f(t+k)|^2 dt \\ &= \sum_k \int_0^1 |f(t+k)|^2 dt \\ &= \sum_k \int_k^{k+1} |f(t)|^2 dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Aquí hemos aplicado la Fórmula de Plancherel para series de Fourier en la segunda igualdad y luego el Teorema de Convergencia Monótona. Finalmente obtenemos

$$\|Zf\|_2 = \|f\|_2 \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

y por lo tanto $Zf \in L^2(\mathcal{Q})$.

- Linealidad: Resulta claro de la definición de Zf .
- Continuidad: Al ser lineal, la continuidad se desprende de la igualdad $\|Zf\|_2 = \|f\|_2$. Esto también nos permite concluir que el operador Z es una isometría.
- Isomorfismo: Sea la función $g = \chi_{[0,1]}$, donde

$$\chi_{[0,1]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1) \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1) \end{cases}.$$

Entonces el sistema de Gabor $\{g_{m,n}\}$ resulta ser una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Además,

$$Zg(t, \omega) = \sum_k \chi_{[0,1]}(t+k) e^{2\pi i \omega k} = 1$$

pues $t+k \in [0, 1) \iff k=0$, y por la Proposición (2.1.1)

$$Z(g_{m,n})(t, \omega) = e_m(t) e_n(\omega). \quad (2.3)$$

Por otro lado, veamos que $\{e_m(t) e_n(\omega)\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathcal{Q})$.

$$\begin{aligned} \langle e_m e_n, e_k e_j \rangle &= \iint_{\mathcal{Q}} e_m(t) e_n(\omega) \overline{e_k(t) e_j(\omega)} d\omega dt \\ &= \int_0^1 e_m(t) \overline{e_k(t)} dt \int_0^1 e_n(\omega) \overline{e_j(\omega)} d\omega \\ &= \delta_{mk} \delta_{nj}. \end{aligned}$$

Con lo cual, el sistema es ortonormal en $L^2(\mathcal{Q})$ y sólo resta ver la completitud.

Debido a que $\{e_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un sistema completo en $L^1((0, 1])$ (ver [Duo90], Capítulo 1, Sección 5, página 19), resulta que $\{e_m(t) e_n(\omega)\}$ es completo en $L^1(\mathcal{Q})$.

Así, como $L^2(\mathcal{Q}) \subseteq L^1(\mathcal{Q})$, se desprende de lo anterior la completitud

del sistema $\{e_m(t)e_n(\omega)\}$ en $L^2(\mathcal{Q})$.

Habiendo probado que $\{e_m(t)e_n(\omega)\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathcal{Q})$ y teniendo en cuenta la ecuación (2.3), resulta que Z manda una base en otra.

Luego, Z es un isomorfismo como queríamos probar.

■

Hacemos explícita la siguiente observación debido a que será utilizada reiteradas veces en el resto de todo este trabajo:

Observación 2.1.3 *La transformada de Zak verifica las dos igualdades*

$$\|Zf\|_2 = \|f\|_2$$

$$\langle Zf, Zg \rangle = \langle f, g \rangle$$

para todas $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, por ser una isometría.

Para $g \in L^2(\mathbb{R})$, el estudio de las propiedades de $\{g_{m,n}\}$ será reducido, vía la Transformada de Zak, al estudio del sistema $\{e_m(t)e_n(\omega)Zg\}$, formado por la multiplicación de cada elemento de la base ortonormal $\{e_m(t)e_n(\omega)\}$ con la función Zg . Por este motivo esperamos que el comportamiento de Zg sea crucial en lo que respecta a las propiedades de $\{g_{m,n}\}$.

Teorema 2.1.4 *Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces:*

- (a) $\{g_{m,n}\}$ es completo en $L^2(\mathbb{R}) \iff Zg \neq 0$ a.e $(t, \omega) \in \mathcal{Q}$.
- (b) $\{g_{m,n}\}$ es minimal y completo en $L^2(\mathbb{R}) \iff 1/Zg \in L^2(\mathcal{Q})$.
- (c) $\{g_{m,n}\}$ es una sucesión de Bessel $\iff Zg \in L^\infty(\mathcal{Q})$.
- (d) $\{g_{m,n}\}$ es un marco de $L^2(\mathbb{R})$ con constantes A, B si y sólo si

$$A \leq |Zg(t, \omega)|^2 \leq B \quad \text{a.e } (t, \omega) \in \mathcal{Q}.$$

En este caso $\{g_{m,n}\}$ resulta un marco exacto.

- (e) $\{g_{m,n}\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}) \iff |Zg(t, \omega)|^2 = 1$ en

casi todo punto $(t, \omega) \in \mathcal{Q}$.

Demostración.

(a) \implies) Si $\{g_{m,n}\}$ es un sistema completo en $L^2(\mathbb{R})$ entonces el sistema $\{Z(g_{m,n})\} = \{e_m e_n Zg\}$ lo es en $L^2(\mathcal{Q})$.

Supongamos que $|\{Zg = 0\}| > 0$. Luego, si $A = \{Zg = 0\}$ resulta que la función χ_A es distinta de cero en un conjunto de medida positiva y además $\chi_A \overline{Zg} = 0$ a.e. $(t, \omega) \in \mathcal{Q}$. Por lo tanto

$$\langle \chi_A, e_m e_n Zg \rangle = \iint_{\mathcal{Q}} \chi_A \overline{e_m e_n Zg} dt d\omega = 0$$

para todo m, n . Así, debido a que por hipótesis el sistema $\{e_m e_n Zg\}$ es completo en $L^2(\mathcal{Q})$, $\chi_A = 0$ a.e. $(t, \omega) \in \mathcal{Q}$. Ahora, si $\chi_A = 0$ a.e. debe ser $|A| = 0$ lo cual es una contradicción pues partimos suponiendo que $|A| = |\{Zg = 0\}| > 0$.

\Leftarrow) Supongamos que $Zg \neq 0$ a.e. $(t, \omega) \in \mathcal{Q}$ y consideremos una función $F \in L^2(\mathcal{Q})$ tal que $\langle F, e_m e_n Zg \rangle = 0$ para todos $m, n \in \mathbb{Z}$. Entonces, como $F \overline{Zg} \in L^1(\mathcal{Q})$ y además

$$0 = \langle F, e_m e_n Zg \rangle = \iint_{\mathcal{Q}} F \overline{Zg} e_{-m} e_{-n} dt d\omega = (F \overline{Zg})^\wedge(m, n),$$

debe ser $F \overline{Zg} = 0$ a.e. (Recordemos la propiedad de la Transformada de Fourier que afirma: si $f \in L^1$ y $\hat{f}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, entonces $f = 0$ a.e.) De aquí se desprende que $F = 0$ a.e. $(t, \omega) \in \mathcal{Q}$, puesto que por hipótesis $Zg \neq 0$ a.e. $(t, \omega) \in \mathcal{Q}$. Luego, el sistema $\{e_m e_n Zg\}$ es completo en $L^2(\mathcal{Q})$, y por lo tanto $\{g_{m,n}\}$ lo es en $L^2(\mathbb{R})$.

(b) \implies) Como $\{g_{m,n}\}$ es minimal y completo, $\{e_m e_n Zg\}$ lo es en $L^2(\mathcal{Q})$. Como consecuencia del Lema (1.2.4) parte (b), existe una única sucesión $\{F_{m,n}\} \subseteq L^2(\mathcal{Q})$ biortogonal a $\{e_m e_n Zg\}$. Es decir, existe una única sucesión $\{F_{m,n}\}$ que verifica la igualdad

$$\delta_{mk} \delta_{nj} = \langle F_{m,n}, e_k e_j Zg \rangle = \langle F_{m,n} \overline{Zg}, e_k e_j \rangle \quad (2.4)$$

Por la desigualdad de Hölder, la función $F_{m,n} \overline{Zg} \in L^1(\mathcal{Q})$, para cada par $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Luego, para $m = n = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} (F_{0,0} \overline{Zg})^\wedge(k, l) &= \langle F_{0,0} \overline{Zg}, e_k e_j \rangle \\ &= \iint_{\mathcal{Q}} F_{0,0} \overline{Zg} e_{-k} e_{-j} dt d\omega \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } (k, j) = (0, 0) \\ 0 & \text{si } (k, j) \neq (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces, $(F_{0,0}\overline{Zg})^\wedge = \delta_{(0,0)}$. Por lo tanto, como $H(t, \omega) \equiv 1$ verifica $\widehat{H} = \delta_{(0,0)}$, tenemos que $F_{0,0}\overline{Zg} = 1$ a.e. $(t, \omega) \in \mathcal{Q}$.

Finalmente, $F_{0,0} = \frac{1}{\overline{Zg}}$ y así $\frac{1}{\overline{Zg}} \in L^2(\mathcal{Q})$.

\Leftarrow) Para probar que $\{g_{m,n}\}$ es minimal y completo basta ver que $\{e_m e_n Zg\}$ lo es. Como $\frac{1}{\overline{Zg}} \in L^2(\mathcal{Q})$ entonces $Zg \neq 0$ a.e y la completitud se sigue de la parte (a).

Veamos que $\{e_m e_n Zg\}$ es minimal. Por hipótesis $\frac{1}{\overline{Zg}} \in L^2(\mathcal{Q})$, y como además $|e_k e_j| = 1$, la función $e_k e_j \frac{1}{\overline{Zg}}$ está en $L^2(\mathcal{Q})$ para cada par $(k, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Entonces, $\{e_m e_n Zg\}$ y $\{e_m e_n \frac{1}{\overline{Zg}}\}$ son biortogonales pues

$$\langle e_m e_n Zg, e_k e_j \frac{1}{\overline{Zg}} \rangle = \langle e_m e_n, e_k e_j \rangle = \delta_{mk} \delta_{nj}.$$

Luego, la minimalidad de $\{e_m e_n Zg\}$ es consecuencia del Lema (1.2.4), parte (a).

(c) \implies) Veamos que $|Zg| \leq B^{1/2}$ a.e donde B es la constante de Bessel. Sea $W = \{|Zg| > B^{1/2}\} \subseteq \mathcal{Q}$ y supongamos que $|W| > 0$. Entonces:

$$\sum_{m,n} |\langle g_{m,n}, Z^{-1}(\chi_W) \rangle|^2 \leq B \|Z^{-1}(\chi_W)\|_2^2 = B \|\chi_W\|_2^2 = B|W|$$

y además

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} |\langle g_{m,n}, Z^{-1}(\chi_W) \rangle|^2 &= \sum_{m,n} |\langle e_m e_n Zg, \chi_W \rangle|^2 \\ &= \sum_{m,n} |\langle e_m e_n, \overline{Zg} \chi_W \rangle|^2 \\ &= \|\overline{Zg} \chi_W\|_2^2 \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad vale por que $|\overline{Zg} \chi_W| \leq |\overline{Zg}|$ y $\overline{Zg} \in L^2(\mathcal{Q})$, con lo cual $\overline{Zg} \chi_W \in L^2(\mathcal{Q})$ y la tercera, por que $\{e_m e_n\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathcal{Q})$. Luego $\|\overline{Zg} \chi_W\|_2^2 \leq B|W|$.

Por otro lado

$$\|\overline{Zg} \chi_W\|_2^2 = \iint_W |\overline{Zg}|^2 = \iint_W |Zg|^2 > B|W|.$$

Entonces $B|W| < B|W|$ y $|W| > 0$, absurdo. El absurdo viene de suponer que $|W| > 0$. Así $Zg \in L^\infty(\mathcal{Q})$, como queríamos.

\Leftarrow) Si ahora $Zg \in L^\infty(\mathcal{Q})$, existe $M > 0$ tal que $|Zg| \leq M$ a.e.

Entonces para $f \in L^2(\mathbb{R})$ vale que $\overline{Zg}Zf \in L^2(\mathcal{Q})$ y

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} |\langle g_{m,n}, f \rangle|^2 &= \sum_{m,n} |\langle e_m e_n Zg, Zf \rangle|^2 \\ &= \sum_{m,n} |\langle e_m e_n, \overline{Zg}Zf \rangle|^2 \\ &= \|\overline{Zg}Zf\|_2^2 \leq M^2 \|Zf\|_2^2 = M^2 \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Luego, $\{g_{m,n}\}$ es una sucesión de Bessel con constante M^2 .

(d) \Rightarrow) Asumiendo que $\{g_{m,n}\}$ es un marco en $L^2(\mathbb{R})$ con constantes A, B , tenemos que $\{e_m e_n Zg\}$ es un marco de $L^2(\mathcal{Q})$ también con constantes A, B . Luego,

$$\forall F \in L^2(\mathcal{Q}), \quad A \|F\|_2^2 \leq \sum_{m,n} |\langle e_m e_n Zg, F \rangle|^2 \leq B \|F\|_2^2.$$

Consideremos los conjuntos W_A y W_B , definidos como :

$$W_A = \{|Zg|^2 < A\} \quad \text{y} \quad W_B = \{|Zg|^2 > B\}.$$

Debemos probar que ambos tienen medida nula.

Sea $F = \chi_{W_A} \in L^2(\mathcal{Q})$, entonces

$$\begin{aligned} A|W_A| &= A \|F\|_2^2 \leq \sum_{m,n} |\langle e_m e_n Zg, F \rangle|^2 \\ &= \sum_{m,n} |\langle e_m e_n, \overline{Zg}F \rangle|^2 \\ &= \|\overline{Zg}F\|_2^2 = \iint_{W_A} |\overline{Zg}|^2 \\ &= \iint_{W_A} |Zg|^2 < A |W_A| \end{aligned}$$

y esto únicamente tiene sentido si $|W_A| = 0$.

Análogamente se prueba que $|W_B| = 0$

\Leftarrow) Para probar que $\{g_{m,n}\}$ es un marco de $L^2(\mathbb{R})$, basta ver que $\{e_m e_n Zg\}$ es un marco de $L^2(\mathcal{Q})$.

Sea $F \in L^2(\mathcal{Q})$ entonces como Zg está acotada, la función $F\overline{Zg}$ está en $L^2(\mathcal{Q})$. Como se probó anteriormente,

$$\sum_{m,n} |\langle e_m e_n Zg, F \rangle|^2 = \|\overline{Zg}F\|_2^2. \quad (2.5)$$

Entonces

$$A\|F\|_2^2 = A \iint_{\mathcal{Q}} |F|^2 \leq \iint_{\mathcal{Q}} |\overline{Zg}F|^2 = \|\overline{Zg}F\|_2^2 \quad (2.6)$$

y también

$$\|\overline{Zg}F\|_2^2 = \iint_{\mathcal{Q}} |\overline{Zg}F|^2 \leq B \iint_{\mathcal{Q}} |F|^2 = B\|F\|_2^2. \quad (2.7)$$

Así, juntando las ecuaciones (2.5), (2.6) y (2.7), tenemos

$$A\|F\|_2^2 \leq \sum_{m,n} |\langle e_m e_n Zg, F \rangle|^2 \leq B\|F\|_2^2.$$

El hecho de ser un marco exacto se desprende del Teorema de Densidad, puesto que estamos en el caso $a = b = 1$.

(e) \implies) Una base ortonormal es un marco con constantes $A = B = 1$, por lo tanto esta implicación es consecuencia de la parte (d).

\Leftarrow) Si $|Zg|^2 = 1$, el sistema $\{e_m e_n Zg\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathcal{Q})$ pues es completo y $\langle e_m e_n Zg, e_k e_j Zg \rangle = \langle e_m e_n, e_k e_j \rangle = \delta_{m,k} \delta_{n,j}$. Luego, $\{g_{m,n}\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

■

Inicialmente definimos la *Transformada de Zak* para cualquier punto de la forma (t, ω) en $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$ y luego vimos que quedaba unívocamente determinada por los valores que tomaba sobre el cubo \mathcal{Q} gracias a las relaciones de casi-periodicidad que cumplía. Volviendo a pensar en Zg como una función definida sobre todo $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$, la proposición siguiente relaciona la continuidad de Zg con sus ceros.

Proposición 2.1.5 *Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que Zg es continua en $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$. Entonces Zg tiene un cero.*

Demostración. Supongamos que $Zg = G$ es continua en $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$ y nunca se anula. Entonces existe una función continua φ a valores reales, tal que

$$G(t, \omega) = |G(t, \omega)| e^{i\varphi(t, \omega)}$$

para $(t, \omega) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Por las relaciones de casi-periodicidad,

$$G(t, 1) = G(t, 0) \quad \text{y} \quad G(1, \omega) = G(0, \omega) e^{-2\pi i \omega}.$$

Luego,

$$e^{i\varphi(t,1)} = e^{i\varphi(t,0)}$$

y

$$e^{-2\pi i\omega} e^{i\varphi(0,\omega)} |G(0,\omega)| = |G(1,\omega)| e^{i\varphi(1,\omega)}. \quad (2.8)$$

Como $|G(0,\omega)| = |G(1,\omega)|$, de la ecuación (2.8) se tiene

$$e^{i\varphi(1,\omega)} = e^{i(\varphi(0,\omega) - 2\pi\omega)}.$$

Entonces, para cada t y cada ω existen k_ω y l_t en \mathbb{Z} tales que

$$\varphi(t,1) = \varphi(t,0) + 2\pi l_t$$

y

$$\varphi(1,\omega) = \varphi(0,\omega) - 2\pi\omega + 2\pi k_\omega.$$

Las funciones $\varphi(t,1) - \varphi(t,0)$ y $\varphi(1,\omega) - \varphi(0,\omega) + 2\pi\omega$ son continuas en t y ω respectivamente, por lo tanto $l_t = l \ \forall t \in [0,1]$ y $k_\omega = k \ \forall \omega \in [0,1]$.

Luego,

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(0,0) - \varphi(1,0) + \varphi(1,0) - \varphi(1,1) \\ &+ \varphi(1,1) - \varphi(0,1) + \varphi(0,1) - \varphi(0,0) \\ &= -2\pi k - 2\pi l + 2\pi k - 2\pi + 2\pi l \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. ■

Observación 2.1.6

- Si Zg es continua en $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$, por la proposición anterior tiene un cero en $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$. Entonces, gracias a la casi-periodicidad, Zg tiene un cero en \mathcal{Q} .
- La Proposición (2.1.5), puede ser enunciada en un contexto más general. Esto es: Las funciones definidas sobre $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$ que verifican las relaciones de casi-periodicidad y son continuas, se anulan en algún punto.

Ya estudiamos el comportamiento de la Transformada da Zak con respecto a los sistemas de Gabor y esto nos será de gran utilidad en las demostraciones de *Teorema de Balian-Low* que daremos en los capítulos siguientes. Ahora queremos ver cómo se relacionan Zf y $Z\hat{f}$.

Antes de esto necesitamos lo siguiente:

(a) La clase de Schwartz $S(\mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones definidas sobre \mathbb{R} , infinitamente diferenciables que decaen rápidamente en el infinito.

(b) Para $\varphi \in S(\mathbb{R})$ vale la fórmula de Poisson:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(k)$$

(Ver demostración en [Pin01], pag. 225)

(c) Para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ tenemos que

$$(e_a f)^\wedge = \tau_a \hat{f} \quad y \quad (\tau_a f)^\wedge = e_{-a} \hat{f}$$

Lema 2.1.7 Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces $Zf(t, \omega) = e^{-2\pi i \omega t} Z\hat{f}(-\omega, t)$

Demostración. Veamos primero que el resultado es cierto para funciones de la clase de Schwartz.

Sea $\varphi \in S(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} Z\varphi(t, \omega) &= \sum_k \varphi(t+k) e^{2\pi i \omega k} = \sum_k (\tau_{-t}\varphi)(k) e_\omega(k) \\ &= \sum_k (e_\omega \tau_{-t}\varphi)(k) = \sum_k (e_\omega \tau_{-t}\varphi)^\wedge(k) \\ &= \sum_k (\tau_\omega e_t \hat{\varphi})(k) = \sum_k \tau_\omega (e^{2\pi i t k} \hat{\varphi}(k)) \\ &= \sum_k e^{2\pi i t(k-\omega)} \hat{\varphi}(k-\omega) = e^{-2\pi i t \omega} \sum_k \hat{\varphi}(k-\omega) e^{2\pi i t k} \\ &= e^{-2\pi i t \omega} Z\hat{\varphi}(-\omega, t). \end{aligned}$$

Sólo resta ver que podemos extender esta igualdad a funciones de $L^2(\mathbb{R})$. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Como el conjunto $S(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$, existe una sucesión $\{\varphi_n\}_n \subseteq S(\mathbb{R})$ de modo tal que $\varphi_n \rightarrow f$ y $\hat{\varphi}_n \rightarrow \hat{f}$ en $L^2(\mathbb{R})$. Así, como Z es un operador continuo de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathcal{Q})$, $Z\varphi_n \rightarrow Zf$ y $Z\hat{\varphi}_n \rightarrow Z\hat{f}$ en $L^2(\mathcal{Q})$.

Luego,

$$Zf(t, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} Z\varphi_n(t, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2\pi i t \omega} Z\hat{\varphi}_n(-\omega, t) = e^{-2\pi i t \omega} Z\hat{f}(-\omega, t)$$

como queríamos. ■

2.2. Distribuciones

Hemos comentado ya que en una de las demostraciones del Teorema 1.3.2, se utiliza como herramienta el cálculo distribucional. Por este motivo dedicamos esta sección a estudiar el comportamiento de las derivadas distribucionales y su relación con la transformada de Zak. Para un tratamiento más detallado de la Teoría de Distribuciones ver [Alv05].

Damos a continuación una lista de definiciones y notaciones que usaremos de aquí en adelante.

- A la derivada débil o en sentido distribucional la notaremos como ∂ en \mathbb{R} y como ∂_j , cuando derivemos respecto de la j -ésima variable, en \mathbb{R}^d , para $d > 1$.
- La derivada clásica será notada como D en \mathbb{R} y D_j será la derivada clásica respecto a la variable x_j en \mathbb{R}^d , si $d > 1$.
- El espacio de *Sobolev* $L_1^2(\mathbb{R}^d)$ es el conjunto

$$\{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \partial_j f \in L^2(\mathbb{R}^d), j = 1, \dots, d\}.$$

- Si $x = (t, \omega) \in \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$ y $r > 0$, el cuadrado centrado en x de radio r será $\mathcal{Q}(x; r) = \mathcal{Q}(t, \omega; r)$. Más específicamente

$$\mathcal{Q}(x; r) = [t - r/2, t + r/2) \times [\omega - r/2, \omega + r/2)$$

Para esta nueva notación el cuadrado definido en la sección anterior es $\mathcal{Q} = [0, 1) \times [0, 1) = \mathcal{Q}(1/2, 1/2; 1)$.

- Para $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d \cup \{\vec{0}\}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$.
- Dado $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d \cup \{\vec{0}\}$, D^α será $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$.

Nociones Básicas sobre Teoría de Distribuciones

Definimos primero el conjunto

$$\mathcal{D} = \{f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{C}, \text{ infinitamente diferenciables y de soporte compacto}\}$$

y decimos que una sucesión $\{\varphi_j\}_j$ converge a φ en \mathcal{D} si existe un compacto $K \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $\text{sop}(\varphi), \text{sop}(\varphi_j) \subseteq K$ para todo j y para cada elección de $\alpha \in \mathbb{N}^d \cup \{\vec{0}\}$, $D^\alpha \varphi_j \longrightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente en \mathbb{R}^d . Una vez dada la noción de convergencia en \mathcal{D} , es posible definir una distribución.

Definición 2.2.1 Una función lineal $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ es una distribución si es continua en el siguiente sentido:

$$T(\varphi_j) \rightarrow 0 \quad \text{en } \mathbb{C} \quad \text{cuando } \varphi_j \rightarrow 0 \quad \text{en } \mathcal{D}.$$

Si \mathcal{D}' es el dual topológico de \mathcal{D} , decimos que la sucesión $\{T_j\}_j \subseteq \mathcal{D}'$ converge a T en \mathcal{D}' si para toda $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$T_j(\varphi) \rightarrow T(\varphi) \quad \text{en } \mathbb{C}, \quad \text{cuando } j \rightarrow \infty.$$

A cualquier función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ le podemos asociar una distribución T_f , definida de la siguiente manera :

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx.$$

La distribución asociada a f será notada por T_f o simplemente por f según convenga.

Proposición 2.2.2 El operador $\Phi : L^1_{loc} \rightarrow \mathcal{D}'$, definido como

$$\Phi(f) = T_f$$

es uno a uno.

Demostración. Debemos probar que si

$$\int f(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

entonces f tiene que ser cero en casi todo punto.

Dada la función

$$\rho(x) = e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} \cdot \chi_{\{|x|<1\}},$$

se puede probar que $\rho \in \mathcal{D}$ y además que la sucesión definida como

$$\rho_j(x) = \frac{j^d}{c} \rho(jx), \quad \text{donde } c = \int \rho(x)dx$$

verifica

$$f * \rho_j \rightarrow f \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^d)$$

para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Sea $\varphi \in \mathcal{D}$ y consideremos la función

$$(f\varphi) * \rho_j(x) = \int f(y)\varphi(t)\rho_j(x-y)dy.$$

Para $x \in \mathbb{R}^d$, la aplicación que a cada y le asigna $\varphi(y)\rho_j(x-y)$, está en \mathcal{D} . Por lo tanto, $(f\varphi) * \rho_j(x) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Como la sucesión $\{(f\varphi) * \rho_j\}_j$ converge a $f\varphi$ en $L^1(\mathbb{R}^d)$, se tiene que $f\varphi = 0$ a.e para toda $\varphi \in \mathcal{D}$. Esto nos permite concluir que $f = 0$ a.e como queríamos.

■

Ahora, como $L^2(\mathbb{R}^d) \subseteq L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, toda función de $L^2(\mathbb{R}^d)$ define una distribución.

Usualmente diremos que una distribución T es una función, si existe una $f \in L^1_{loc}$ tal que $T = T_f$.

Una particularidad importante de las distribuciones es la posibilidad de derivarlas. Más precisamente, dada una distribución T su derivada $\partial_j T$ es una nueva distribución que se define como

$$\partial_j T(\varphi) = -T(D_j \varphi)$$

y en general

$$\partial^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi).$$

Ahora bien, si $f \in L^2_1(\mathbb{R})$ la derivada de la distribución T_f es la distribución asociada a la función ∂f , esto es

$$\partial T_f = T_{\partial f}.$$

Esto último vale simplemente por la definición de derivada débil y además, también es cierto el resultado recíproco, i.e: si $f \in L^2(\mathbb{R})$ y existe $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\partial T_f = T_g$ entonces $\partial f = g$.

Lema 2.2.3 *Si $\{T_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de distribuciones tal que $\sum_k \alpha_k T_k$ define una distribución para una sucesión $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\sum_k \alpha_k \partial T_k$ también es una distribución y además, $\sum_k \alpha_k \partial T_k = \partial(\sum_k \alpha_k T_k)$.*

Demostración. Sea $S_n = \sum_{|k| \leq n} \alpha_k \partial T_k$, debemos ver que S_n converge en \mathcal{D}' .

Sea $\varphi \in \mathcal{D}$, entonces

$$S_n(\varphi) = \sum_{|k| \leq n} \alpha_k \partial T_k(\varphi) = - \sum_{|k| \leq n} \alpha_k T_k(D\varphi).$$

Como $\sum_k \alpha_k T_k$ define una distribución, haciendo tender $n \rightarrow \infty$ tenemos

$$S_n(\varphi) \longrightarrow - \sum_k \alpha_k T_k(D\varphi) = \partial(\sum_k \alpha_k T_k)(\varphi).$$

Esto muestra como S_n converge en \mathcal{D}' y también que vale la igualdad

$$\sum_k \alpha_k \partial T_k = \partial \left(\sum_k \alpha_k T_k \right).$$

■

A continuación enunciamos un teorema que nos será de gran utilidad de aquí en más. Su demostración puede encontrarse en [Sch66].

Teorema 2.2.4

- (a) Dada $F \in L^2_1(\mathbb{R}^d)$, existe una función \tilde{F} en \mathbb{R}^d tal que $\tilde{F} = F$ a.e y $\tilde{F} \in AC_{loc}$ en casi todas las líneas paralelas a los ejes coordenados. El gradiente clásico $\nabla \tilde{F}$ de \tilde{F} existe a.e en \mathbb{R}^d y el gradiente distribucional de F es la distribución correspondiente a $\nabla \tilde{F}$.
- (b) Sea $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Si existe una función \tilde{F} en \mathbb{R}^d tal que $\tilde{F} \in AC_{loc}$ en casi todas las líneas paralelas a los ejes coordenados, $F = \tilde{F}$ a.e, y $D_j \tilde{F} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ para $j = 1, \dots, d$, entonces $\partial_j F$ es la distribución asociada a $D_j \tilde{F}$ para $j = 1, \dots, d$ y por lo tanto, $F \in L^2_1(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 2.2.5 Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces

$$\partial g \in L^2(\mathbb{R}) \iff \gamma \hat{g}(\gamma) \in L^2(\hat{\mathbb{R}})$$

En ese caso, $g \in AC_{loc}$, $Dg = \partial g$ a.e, y

$$(\partial g)^\wedge(\gamma) = 2\pi i \gamma \hat{g}(\gamma)$$

Demostración. Primero demostraremos la doble implicación:

\implies) Supongamos que $\partial g \in L^2(\mathbb{R})$ y sea $\varphi \in S(\mathbb{R})$. Entonces

$$|\langle \gamma \hat{g}(\gamma), \varphi(\gamma) \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}} \gamma \hat{g}(\gamma) \overline{\varphi(\gamma)} d\gamma \right| \leq \| \gamma \varphi(\gamma) \|_2 \| \hat{g}(\gamma) \|_2$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Luego $\langle \gamma \hat{g}(\gamma), \varphi(\gamma) \rangle < \infty$ para toda $\varphi \in S(\mathbb{R})$.

Sea ahora $\varphi \in S(\hat{\mathbb{R}})$. Aplicando la identidad de Plancherel y luego la definición de derivada débil tenemos

$$\langle \widehat{\partial g}(\gamma), \varphi(\gamma) \rangle = \langle \partial g(t), \check{\varphi}(t) \rangle = -\langle g(t), D(\check{\varphi})(t) \rangle$$

Como $\check{\varphi}(t) = \hat{\varphi}(-t)$ y $\hat{f}(\gamma) = f(-\gamma)$, nuevamente aplicamos Plancherel para probar que

$$\begin{aligned} -\langle g(t), D(\check{\varphi})(t) \rangle &= -\langle g(t), (-2\pi i \gamma \varphi(-\gamma))^{\wedge}(t) \rangle \\ &= -\langle \hat{g}(\gamma), -2\pi i(-\gamma)\varphi(\gamma) \rangle \\ &= \langle \hat{g}(\gamma) 2\pi i \gamma, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Luego $\widehat{\partial g}$ y $\hat{g}(\gamma) 2\pi i \gamma$ definen la misma distribución y por lo tanto son iguales a.e. Como suponíamos que $\partial g \in L^2(\mathbb{R})$, tenemos que lo mismo vale para $\gamma \hat{g}(\gamma)$.

\Leftarrow) Se prueba análogamente.

Suponiendo ahora que $\partial g \in L^2(\mathbb{R})$, o que $\gamma \hat{g}(\gamma) \in L^2(\widehat{\mathbb{R}})$, la función

$$h(t) = \int_0^t \partial g(u) du$$

resulta absolutamente continua en $[0, 1]$.

Para cada $\varphi \in \mathcal{D}$ con $\text{sop}(\varphi) \subseteq (0, 1)$, vale lo siguiente:

$$\int_0^1 g(t) D\varphi(t) dt = - \int_0^1 \partial g(t) \varphi(t) dt.$$

Como h es absolutamente continua en $[0, 1]$ y $\text{sop}(\varphi) \subseteq (0, 1)$, integrando por partes obtenemos

$$\int_0^1 h(t) D\varphi(t) dt = - \int_0^1 \partial g(t) \varphi(t) dt,$$

y entonces

$$\int_0^1 (g(t) - h(t)) D\varphi(t) dt = 0$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}$ con $\text{sop}(\varphi) \subseteq (0, 1)$ y por lo tanto $g - h$ es constante a.e en $[0, 1]$. Esto nos permite concluir que $g \in AC_{loc}$ y $Dg = \partial g$. ■

Las herramientas que venimos estudiando hasta el momento para la demostración del Teorema 1.3.2, son básicamente la transformada de Zak y las distribuciones. Ambas fueron tratadas independientemente y ahora veremos de que manera se relacionan.

Proposición 2.2.6 Si $g, tg(t) \in L^2(\mathbb{R})$, $\gamma \hat{g}(\gamma) \in L^2(\widehat{\mathbb{R}})$ y $G = Zg$, entonces $\partial_1 G, \partial_2 G \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

Demostración. Como consecuencia del Teorema 2.2.5, $\partial g \in L^2(\mathbb{R})$ y así

$$Z\partial g(t, \omega) = \sum_k \partial g(t+k)e^{2\pi i\omega k} \in L^2(\mathcal{Q}).$$

Consideremos la distribución asociada a la función $\sum_k \partial g(t+k)e^{2\pi i\omega k}$ que, como dijimos anteriormente, llamaremos del mismo modo.

Debido al Lema 2.2.3 las distribuciones $\partial_1 G$ y $\sum_k \partial g(t+k)e^{2\pi i\omega k}$ coinciden. Pero entonces, G admite derivada débil respecto de la primer variable y $\partial_1 G(t, \omega) = \sum_k \partial g(t+k)e^{2\pi i\omega k}$ a.e (t, ω) . Por lo tanto $\partial_1 G \in L^2(\mathcal{Q})$.

Razonando análogamente y teniendo en cuenta que $tg(t) \in L^2(\mathbb{R})$, tenemos

$$\partial_2 G(t, \omega) = 2\pi i Z(tg(t))(t, \omega) - 2\pi i t Zg(t, \omega),$$

donde la igualdad vale en casi todo punto $(t, \omega) \in \mathcal{Q}$. Así, $\partial_2 G \in L^2(\mathcal{Q})$.

El hecho de pertenecer a $L^2(\mathcal{Q})$ implica que $\partial_1 G$ y $\partial_2 G \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$. ■

Supongamos que estamos en las siguientes condiciones:

$$g, tg(t) \in L^2(\mathbb{R}), \quad \gamma \hat{g}(\gamma) \in L^2(\hat{\mathbb{R}}), \quad G = Zg \text{ y } \partial_1^2 G, \partial_2^2 G \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2).$$

Sabemos entonces que $\partial_1 G, \partial_2 G \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ por la Proposición 2.2.6 y como por hipótesis existen $\partial_1^2 G, \partial_2^2 G$, el Lema de Sobolev nos permite afirmar que $\partial_1 G, \partial_2 G$ son en realidad derivadas en sentido clásico.

Luego, existe una función continua \tilde{G} definida sobre \mathbb{R}^2 que coincide con G en casi todo punto de \mathbb{R}^2 y \tilde{G} resulta casi-periódica pues $G = Zg$ lo es.

Por lo tanto, debido a la Proposición 2.1.5, \tilde{G} tiene un cero en \mathcal{Q} .

Veamos que en estas condiciones no pueden existir constantes A, B positivas de modo tal que se verifique la desigualdad $A \leq |Zg|^2 \leq B$ a.e \mathcal{Q} .

Suponiendo que dichas constantes existen, como \tilde{G} es continua y se anula en algún punto de \mathcal{Q} , existe $E \subseteq \mathcal{Q}$ tal que $|E| > 0$ y

$$|\tilde{G}(t, \omega)| < \sqrt{A/2} \quad \text{para todo } (t, \omega) \in E.$$

Pero $G = \tilde{G}$ a.e, luego existe $\tilde{E} \subseteq E$ tal que

$$|\tilde{E}| > 0 \quad \text{y} \quad G = \tilde{G}$$

en todo punto de \tilde{E} . Por lo tanto $|G| = |Zg| < \sqrt{A/2}$ en un conjunto de medida positiva lo que resulta una contradicción.

Este argumento, junto con el Teorema 2.1.4, parte (d), es una demostración del *Teorema de Balian-Low* con hipótesis adicionales, que enunciamos a continuación:

Teorema 2.2.7 *Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$, tal que $\{g_{m,n}\}$ constituye un marco de $L^2(\mathbb{R})$. Si $Zg = G$ cumple $\partial_1^2 G, \partial_2^2 G \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$, entonces*

$$\|tg(t)\|_2 \|\gamma \hat{g}(\gamma)\|_2 = +\infty.$$

Capítulo 3

Teorema de Balian-Low. Demostración sin Teoría de Distribuciones

La prueba que daremos del Teorema 1.3.2 requiere de una serie de lemas previos que enunciamos y demostramos a continuación.

3.1. Lemas Previos

Lema 3.1.1 *Sea $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, tal que $tf(t) \in L^2(\mathbb{R})$ y $\gamma\hat{f}(\gamma) \in L^2(\widehat{\mathbb{R}})$. Llamemos $F = Zf$, tomemos $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in [-3/2, 3/2] \times \widehat{\mathbb{R}}$. Entonces,*

$$\left(\iint_{\mathcal{Q}(x_0;1)} |F(t-\varepsilon, \omega) - F(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \leq 2\pi|\varepsilon| \left(\int_{\widehat{\mathbb{R}}} |\gamma\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma \right)^{1/2} \quad (3.1)$$

y también

$$\left(\iint_{\mathcal{Q}(x_0;1)} |F(t, \omega - \varepsilon) - F(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \leq 2\pi|\varepsilon| \left[\left(\int_{\mathbb{R}} |tf(t)|^2 dt \right)^{1/2} + 2 \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \right] \quad (3.2)$$

Demostración. Primero notemos que

$$F(t - \varepsilon, \omega) = \sum_k f(t - \varepsilon + k) e^{2\pi i \omega k} = Z(\tau_\varepsilon f)(t, \omega).$$

Ahora, teniendo en cuenta que Z es una isometría y aplicando luego la identidad de Plancherel tenemos

$$\begin{aligned}
& \left(\iint_{\mathcal{Q}(x_0;1)} |F(t - \varepsilon, \omega) - F(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\
&= \left(\iint_{\mathcal{Q}(x_0;1)} |Z(\tau_\varepsilon f - f)(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |\tau_\varepsilon f(t) - f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{\widehat{\mathbb{R}}} |e^{-2\pi i \varepsilon \gamma} - 1|^2 |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_{\widehat{\mathbb{R}}} |-2\pi i \gamma \varepsilon|^2 |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma \right)^{1/2} \\
&= 2\pi |\varepsilon| \left(\int_{\widehat{\mathbb{R}}} |\gamma \hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

En la desigualdad hemos utilizado la propiedad : $|e^{i\theta} - 1| \leq |\theta|$, que verifica la función exponencial. Además, es importante tener en cuenta que, por las relaciones de casi-periodicidad, la Transformada de Zak verifica el Teorema 2.1.2 para cualquier cubo $\mathcal{Q}(x_0; 1)$ de radio 1. Por lo tanto, Z cumple con la igualdad $\|Zf\|_{L^2(\mathcal{Q}(x_0;1))} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$, para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Para probar la desigualdad (3.2), observemos que

$$\begin{aligned}
F(t, \omega - \varepsilon) &= \sum_k f(t+k) e^{2\pi i k(\omega - \varepsilon)} \\
&= e^{2\pi i \varepsilon t} \sum_k e^{-2\pi i \varepsilon(t+k)} f(t+k) e^{2\pi i k\omega} \\
&= e^{2\pi i \varepsilon t} Z(e_{-\varepsilon} f)(t, \omega).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
& \left(\iint_{\mathcal{Q}(x_0;1)} |F(t, \omega - \varepsilon) - F(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\
&= \left(\iint_{\mathcal{Q}(x_0;1)} |e^{2\pi i \varepsilon t} Z(e_{-\varepsilon} f)(t, \omega) - Zf(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\iint_{\mathcal{Q}(x_0;1)} |Z(e_{-\varepsilon} f - f)(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\
&+ \left(\iint_{\mathcal{Q}(x_0;1)} |e^{2\pi i \varepsilon t} - 1|^2 |Zf(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

donde, para lograr la desigualdad, sumamos y restamos $e^{2\pi i \varepsilon t} Zf(t, \omega)$ y utilizamos la desigualdad de Minkowsky.

Llamemos

$$I_1 = \left(\iint_{\mathcal{Q}(x_0;1)} |Z(e_{-\varepsilon}f - f)(t, \omega)| dt d\omega \right)^{1/2}$$

e

$$I_2 = \left(\iint_{\mathcal{Q}(x_0;1)} |e^{2\pi i \varepsilon t} - 1|^2 |Zf(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2}.$$

Luego, nuevamente porque Z es una isometría,

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\int_{\mathbb{R}} |e_{-\varepsilon}f(t) - f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |e^{-2\pi i \varepsilon t} - 1|^2 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq 2\pi|\varepsilon| \left(\int_{\mathbb{R}} |tf(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

y también,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2\pi|\varepsilon| \left(\iint_{\mathcal{Q}(x_0;1)} |t|^2 |Zf(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\ &\leq 2\pi|\varepsilon| \left(4 \iint_{\mathcal{Q}(x_0;1)} |Zf(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\ &= 2\pi|\varepsilon| \left(4 \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Aquí la hipótesis $x_0 \in [-3/2, 3/2] \times \widehat{\mathbb{R}}$ nos permite acotar $|t|$ por 2. En efecto, si $x_0 = (t_0, \omega_0)$, entonces $-3/2 \leq t_0 \leq 3/2$ y como $t \in [t_0 - 1/2, t_0 + 1/2]$ resulta que $t \in [-2, 2]$.

Finalmente

$$\begin{aligned} \left(\iint_{\mathcal{Q}(x_0;1)} |F(t, \omega - \varepsilon) - F(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} &\leq I_1 + I_2 \\ &\leq 2\pi|\varepsilon| \left[\left(\int_{\mathbb{R}} |tf(t)|^2 dt \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \right], \end{aligned}$$

como queríamos probar. ■

El siguiente lema es puramente técnico. Lo usaremos para demostrar un resultado similar al anterior donde se busca estimar la oscilación de F pero sobre cubos de radio menor que 1.

Lema 3.1.2 Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Para $s \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, $E(s, r)$ denota el conjunto

$$E(s, r) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [s - \frac{r}{2} + n, s + \frac{r}{2} + n] = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}] + s + n.$$

Entonces:

- (a) $Zf(t, \omega) \cdot \chi_{E(s, r)}(t) = Z(f \cdot \chi_{E(s, r)})(t, \omega)$ para todo $(t, \omega) \in \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$,
- (b) $\lim_{r \rightarrow 0} \|f \cdot \chi_{E(s, r)}\|_2 = 0$ uniformemente en s .

Demostración.

(a) Como

$$Zf(t, \omega) \cdot \chi_{E(s, r)}(t) = \sum_k f(t+k) e^{2\pi i \omega k} \chi_{E(s, r)}(t)$$

y

$$Z(f \cdot \chi_{E(s, r)})(t, \omega) = \sum_k f(t+k) \chi_{E(s, r)}(t+k) e^{2\pi i \omega k},$$

sólo hay que ver que $\chi_{E(s, r)}(t) = \chi_{E(s, r)}(t+k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Esto se sigue inmediatamente de la definición de $E(s, r)$.

- (b) Sea $\varepsilon > 0$. Como $|f|^2$ es un función integrable en \mathbb{R} existe $N > 0$ de modo tal que $\int_{|t| > N} |f(t)|^2 dt \leq \varepsilon/2$ y existe $\delta > 0$ tal que $\int_A |f(t)|^2 dt \leq \varepsilon/2$ para cualquier conjunto medible A que verifique $|A| \leq \delta$.

Dado $s \in \mathbb{R}$, resulta simple comprobar que

$$[s - \frac{r}{2} + n, s + \frac{r}{2} + n] \cap [-N, N] \neq \emptyset \iff n \in [-s - N - \frac{r}{2}, -s + N + \frac{r}{2}].$$

Por lo tanto hay al sumo $2N + r + 1$ números enteros n tales que $[s - \frac{r}{2} + n, s + \frac{r}{2} + n] \cap [-N, N] \neq \emptyset$ y esta cantidad es independiente de s .

Entonces, para $r \leq 1$,

$$|E(s, r) \cap [-N, N]| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |[s - \frac{r}{2} + n, s + \frac{r}{2} + n] \cap [-N, N]| \leq (2N + 2)r.$$

Sea $r_0 \leq \min\{1, \delta/(2N + 2)\}$. Luego, si $r \leq r_0$,

$$\|f \cdot \chi_{E(s,r)}\|_2^2 \leq \int_{|t|>N} |f(t)|^2 dt + \int_{E(s,r) \cap [-N,N]} |f(t)|^2 dt \leq \varepsilon$$

para todo s , pues elegimos N de modo que el primer sumando sea menor que $\varepsilon/2$ y $A = E(s,r) \cap [-N,N]$ tiene medida menor que δ si $r \leq r_0$.

■

Lema 3.1.3 Sean $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $tf(t) \in L^2(\mathbb{R})$ y $\gamma \hat{f}(\gamma) \in L^2(\widehat{\mathbb{R}})$. Tomemos $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $(t_0, \omega_0) \in [-3/2, 3/2] \times \widehat{\mathbb{R}}$ y $0 < r < 1$. Entonces, si $F = Zf$,

$$\left(\iint_{\mathcal{Q}(t_0, \omega_0; r)} |F(t - \varepsilon, \omega) - F(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \leq 2\pi|\varepsilon| \|\gamma \hat{f}(\gamma) \cdot \chi_{E(1-\omega_0, r)}(\gamma)\|_2, \quad (3.3)$$

y

$$\left(\iint_{\mathcal{Q}(t_0, \omega_0; r)} |F(t, \omega - \varepsilon) - F(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \leq 2\pi|\varepsilon| \|tf(t) \cdot \chi_{E(t_0, r)}(t)\|_2 + 4\pi|\varepsilon| \|f \cdot \chi_{E(t_0, r)}\|_2. \quad (3.4)$$

Demostración. Para demostrar la desigualdad (3.3) utilizaremos argumentos similares a los usados en la prueba del Lema 3.1.1.

$$\begin{aligned} & \left(\iint_{\mathcal{Q}(t_0, \omega_0; r)} |F(t - \varepsilon, \omega) - F(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\ &= \left(\iint_{\mathcal{Q}(t_0, \omega_0; r)} |Z(\tau_\varepsilon f - f)(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\ &= \left(\iint_{\mathcal{Q}(t_0, \omega_0; r)} |Z(e_{-\varepsilon} \hat{f} - \hat{f})(-\omega, t)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\ &= \left(\iint_{\mathcal{Q}(t_0, -\omega_0; r)} |Z(e_{-\varepsilon} \hat{f} - \hat{f})(\omega, t)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\ &= \left(\iint_{\mathcal{Q}(t_0, 1-\omega_0; r)} |Z(e_{-\varepsilon} \hat{f} - \hat{f})(\omega, t)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\ &= \left(\iint_{\mathcal{Q}(t_0, 1-\omega_0; r)} |Z(e_{-\varepsilon} \hat{f} - \hat{f})(\omega, t) \cdot \chi_{E(1-\omega_0, r)}(\omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Para obtener estas igualdades hemos utilizado que $|Zf(t, \omega)| = |Z\hat{f}(-\omega, t)|$ (ver capítulo 3, Lema 2.1) y tenido en cuenta las relaciones de casi-periodicidad de Zf . La ultima igualdad se debe a que si $(t, \omega) \in \mathcal{Q}(t_0, \omega_0; r)$, entonces ω verifica $|1 - \omega_0 - \omega| < r/2$ y por lo tanto $\omega \in E(1 - \omega_0, r)$.

Ahora, por la parte (a) del Lema 3.1.2,

$$\begin{aligned}
& \left(\iint_{\mathcal{Q}(t_0, 1-\omega_0; r)} |Z(e_{-\varepsilon}\hat{f} - \hat{f})(\omega, t) \cdot \chi_{E(1-\omega_0, r)}(\omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\
&= \left(\iint_{\mathcal{Q}(t_0, 1-\omega_0; r)} |Z((e_{-\varepsilon}\hat{f} - \hat{f}) \cdot \chi_{E(1-\omega_0, r)})(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\iint_{\mathcal{Q}(t_0, 1-\omega_0; 1)} |Z((e_{-\varepsilon}\hat{f} - \hat{f}) \cdot \chi_{E(1-\omega_0, r)})(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{E(1-\omega_0, r)} |e_{-\varepsilon}\hat{f}(\gamma) - \hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{E(1-\omega_0, r)} |e^{-2\pi i \gamma \varepsilon} - 1|^2 |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma \right)^{1/2} \\
&\leq \left(2\pi|\varepsilon| \left(\int_{E(1-\omega_0, r)} |\gamma \hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma \right) \right)^{1/2} \\
&= 2\pi|\varepsilon| \|\gamma \hat{f}(\gamma) \cdot \chi_{E(1-\omega_0, r)}(\gamma)\|_2
\end{aligned}$$

donde tuvimos que pasar de integrar sobre el cubo $\mathcal{Q}(t_0, 1 - \omega_0; r)$ a integrar sobre el cubo $\mathcal{Q}(t_0, 1 - \omega_0; 1)$ para poder aplicar el Teorema 2.1.2.

Veamos ahora la desigualdad (3.4).

$$\begin{aligned}
& \left(\iint_{\mathcal{Q}(t_0, \omega_0; r)} |F(t, \omega - \varepsilon) - F(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\iint_{\mathcal{Q}(t_0, \omega_0; r)} |Z(e_{-\varepsilon}f - f)(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\
&+ \left(\iint_{\mathcal{Q}(t_0, \omega_0; r)} |e^{2\pi i \varepsilon t} - 1|^2 |Zf(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\iint_{\mathcal{Q}(t_0, \omega_0; r)} |Z(e_{-\varepsilon}f - f)(t, \omega) \cdot \chi_{E(t_0, r)}(t)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\
&+ 2\pi|\varepsilon| \left(\iint_{\mathcal{Q}(t_0, \omega_0; r)} |tZf(t, \omega) \cdot \chi_{E(t_0, r)}(t)|^2 dt d\omega \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\iint_{\mathcal{Q}(t_0, \omega_0; r)} |Z((e_{-\varepsilon}f - f)\chi_{E(t_0, r)})(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\
&+ 4\pi|\varepsilon| \left(\iint_{\mathcal{Q}(t_0, \omega_0; r)} |Z(f \cdot \chi_{E(t_0, r)})(t, \omega)|^2 dt d\omega \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{E(t_0, r)} |e_{-\varepsilon}f(t) - f(t)|^2 dt \right)^{1/2} + 4\pi|\varepsilon| \left(\int_{E(t_0, r)} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\
&\leq 2\pi|\varepsilon| \|tf(t) \cdot \chi_{E(t_0, r)}\|_2 + 4\pi|\varepsilon| \|f\chi_{E(t_0, r)}\|_2.
\end{aligned}$$

Aquí hemos utilizado argumentos similares a los anteriores. ■

Lema 3.1.4 *Consideremos f, ε, r y (t_0, ω_0) como en el Lema 3.1.3 y tomemos $0 < c < 1$. Entonces existen funciones $C_1(r)$ y $C_2(r)$, que dependen únicamente de f y verifican $\lim_{r \rightarrow 0} C_i(r) = 0$ para $i = 1, 2$. Además,*

$$\iint_{\mathcal{Q}(t_0, \omega_0; cr)} |F(t - \varepsilon, \omega) - F(t, \omega - \varepsilon)|^2 dt d\omega \leq cr|\varepsilon|C_1(r) \quad (3.5)$$

$$\iint_{\mathcal{Q}(t_0, \omega_0; cr)} |F(t, \omega - \varepsilon) - F(t, \omega - \varepsilon)|^2 dt d\omega \leq cr|\varepsilon|C_2(r) \quad (3.6)$$

Demostración. Sean

$$C_1(r) = 2\pi \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|\gamma \hat{f}(\gamma) \cdot \chi_{E(\omega, r)}(\gamma)\|_2$$

y

$$C_2(r) = 2\pi \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\|tf(t) \cdot \chi_{E(t, r)}(t)\|_2 + 2\|f \cdot \chi_{E(t, r)}\|_2 \right)$$

Entonces el resultado se desprende del Lema 3.1.3 y de la aplicación directa de la desigualdad de Hölder. La convergencia a 0 de C_i para $i = 1, 2$ es consecuencia del Lema 3.1.2, parte (b). ■

Recordemos lo analizado en el capítulo anterior cuando vimos que la continuidad de Zg nos aseguraba la existencia de un cero y que el sistema $\{g_{m,n}\}$ era un marco con constantes A y B , si y sólo si $A \leq |Zg|^2 \leq B$ en casi todo punto de \mathcal{Q} . Entonces tiene sentido pensar que la construcción de aproximaciones continuas de Zg , puede ser útil para la demostración del Teorema 1.3.2.

Con este fin, consideremos las funciones $\rho_r(t, \omega) = r^{-2}\rho(t/r, \omega/r)$, donde $\rho = \chi_{\mathcal{Q}}$ y $r > 0$. Entonces $\{\rho_r\}_r$ es una aproximación de la identidad en $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$ cuando $r \rightarrow 0$.

Luego, para $Zg = G$, se define la función G_r , como

$$G_r(t, \omega) = \iint_{\mathcal{Q}} G(t - u, \omega - \alpha) \rho_r(u, \alpha) du d\alpha.$$

Algunas de las propiedades importantes que verifican estas funciones, son las que enunciamos en el siguiente teorema:

Teorema 3.1.5 *Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$ la ventana que genera el marco $\{g_{m,n}\}$ con constantes A y B , y sea $G = Zg$. Entonces:*

- (a) $|G_r(t_1, \omega_1) - G_r(t_2, \omega_2)| \leq 2r^{-1}B^{1/2}(|t_1 - t_2| + |\omega_1 - \omega_2|)$.
- (b) $\sup_{(t, \omega) \in \mathcal{Q}} |G_r(t, \omega)| \leq B^{1/2}$.
- (c) $G_r(t, \omega + 1) = G_r(t, \omega)$.
- (d) $G_r(t + 1, \omega) = e^{-2\pi i \omega} G_r(t, \omega) + \psi_r(t, \omega)$,

$$\text{donde } \sup_{(t, \omega) \in \mathcal{Q}} |\psi_r(t, \omega)| \leq 2\pi r B^{1/2}.$$

- (e) *Dados $(u, \alpha), (t, \omega) \in \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$,*

$$|G(u, \alpha) - G(t, \alpha)| \geq A^{1/2} - 2r^{-1}B^{1/2}(|t - u| + |\omega - \alpha|) - |G_r(t, \omega)|$$

y en particular, para $(t, \omega) \in \mathcal{Q}$ y $c < 1$,

$$\inf_{(u, \alpha) \in \mathcal{Q}(t, \omega; cr)} |G(u, \alpha) - G_r(u, \alpha)| \geq A^{1/2} - 2cB^{1/2} - |G_r(t, \omega)|.$$

Observemos primero, que la parte (a) de este resultado nos garantiza la continuidad uniforme de G_r . Debido a la parte (b), G_r resulta acotada independientemente de r y las partes (c) y (d) muestran que G_r no está lejos de ser una función casi-periódica. Todo esto es consistente con la idea que tenemos en mente de aproximar Zg por funciones continuas.

Demostración del Teorema (3.1.5)

- (a) Notemos que

$$\begin{aligned} |G(t_1, \omega_1) - G(t_2, \omega_2)| &= \left| \iint_{\mathcal{Q}} G(t_1 - u, \omega_1 - \alpha) \frac{1}{r^2} \chi_{\mathcal{Q}}(u/r, \alpha/r) du d\alpha \right. \\ &\quad \left. - \iint_{\mathcal{Q}} G(t_2 - u, \omega_2 - \alpha) \frac{1}{r^2} \chi_{\mathcal{Q}}(u/r, \alpha/r) du d\alpha \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^2} \left| \iint_{\mathcal{Q}(r/2, r/2; r)} G(t_1 - u, \omega_1 - \alpha) du d\alpha \right. \\
&\quad \left. - \iint_{\mathcal{Q}(r/2, r/2; r)} G(t_2 - u, \omega_2 - \alpha) du d\alpha \right| \\
&= \frac{1}{r^2} \left| \iint_{\mathcal{Q}(t_1 - r/2, \omega_1 - r/2; r)} G(u, \alpha) du d\alpha \right. \\
&\quad \left. - \iint_{\mathcal{Q}(t_2 - r/2, \omega_2 - r/2; r)} G(u, \alpha) du d\alpha \right| \\
&\leq \frac{1}{r^2} \left| \iint_{\mathcal{Q}(x_1; r) \Delta \mathcal{Q}(x_2; r)} G(u, \alpha) du d\alpha \right| \\
&\leq \frac{B^{1/2}}{r^2} |\mathcal{Q}(x_1; r) \Delta \mathcal{Q}(x_2; r)|,
\end{aligned}$$

donde Δ es la diferencia simétrica entre conjuntos, x_j denota al punto $(t_j - r/2, \omega_j - r/2)$ para $j = 1, 2$ y, para lograr la segunda desigualdad usamos que $|G(u, \alpha)| \leq B^{1/2}$ a.e. por el ítem (d) del Teorema 2.1.4.

Luego, para demostrar (a), basta ver que

$$|\mathcal{Q}(x_1; r) \Delta \mathcal{Q}(x_2; r)| \leq 2r(|t_1 - t_2| + |\omega_1 - \omega_2|).$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad que $t_1 \leq t_2$ y $\omega_1 \leq \omega_2$, y consideremos primero el caso en que

$$\mathcal{Q}(x_1; r) \cap \mathcal{Q}(x_2; r) \neq \emptyset.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(x_1; r) - \mathcal{Q}(x_2; r) &= (t_1 - r/2, t_2 - r/2) \times (\omega_1 - r/2, \omega_1 + r/2) \\
&\cup (t_2 - r/2, t_1 + r/2) \times (\omega_1 - r/2, \omega_2 - r/2)
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$|\mathcal{Q}(x_1; r) - \mathcal{Q}(x_2; r)| = r|t_1 - t_2| + |t_1 - t_2 - r||\omega_2 - \omega_1|.$$

El conjunto $\mathcal{Q}(x_1; r) \cap \mathcal{Q}(x_2; r)$ es no vacío si y sólo si

$$t_2 - r/2 < t_1 + r/2 \quad \text{y} \quad \omega_2 - r/2 < \omega_1 + r/2,$$

o equivalentemente

$$t_2 - t_1 < r \quad \text{y} \quad \omega_2 - \omega_1 < r.$$

Así

$$\begin{aligned}
|\mathcal{Q}(x_1; r) - \mathcal{Q}(x_2; r)| &= r|t_1 - t_2| + |t_1 - t_2 - r||\omega_2 - \omega_1| \\
&= r|t_1 - t_2| + |\omega_1 - \omega_2|(r - (t_2 - t_1)) \\
&\leq r(|t_1 - t_2| + |\omega_1 - \omega_2|).
\end{aligned}$$

Razonando del mismo modo probamos que la misma desigualdad vale para $\mathcal{Q}(x_2; r) - \mathcal{Q}(x_1; r)$ y entonces

$$|\mathcal{Q}(x_1; r) \Delta \mathcal{Q}(x_2; r)| \leq 2r(|t_1 - t_2| + |\omega_1 - \omega_2|)$$

pues

$$\mathcal{Q}(x_1; r) \Delta \mathcal{Q}(x_2; r) = (\mathcal{Q}(x_1; r) - \mathcal{Q}(x_2; r)) \cup (\mathcal{Q}(x_2; r) - \mathcal{Q}(x_1; r)).$$

Ahora sólo nos queda por analizar el caso en que

$$\mathcal{Q}(x_1; r) \cap \mathcal{Q}(x_2; r) = \emptyset.$$

Como los cuadrados $\mathcal{Q}(x_1; r)$ y $\mathcal{Q}(x_2; r)$ tienen intersección vacía, debe ser $t_2 - t_1 > r$ o bien $\omega_2 - \omega_1 > r$.

Luego,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{Q}(x_1; r) \Delta \mathcal{Q}(x_2; r)| &= |\mathcal{Q}(x_1; r)| + |\mathcal{Q}(x_2; r)| \\
&= 2r^2 \leq 2r(|t_1 - t_2| + |\omega_1 - \omega_2|),
\end{aligned}$$

donde hemos acotado r por $|t_1 - t_2| + |\omega_1 - \omega_2|$.

(b) Sea $(t, \omega) \in \mathcal{Q}$ fijo. Entonces, por la parte (d) del Teorema 2.1.4

$$\begin{aligned}
|G_r(t, \omega)| &= \left| \iint_{\mathcal{Q}} G(t - u, \omega - \alpha) \rho_r(u, \alpha) du d\alpha \right| \\
&\leq B^{1/2} \iint_{\mathcal{Q}} \rho_r(u, \alpha) du d\alpha \\
&= B^{1/2}.
\end{aligned}$$

(c) Se sigue inmediatamente de la periodicidad de G en la segunda variable.

(d) Notemos que

$$\begin{aligned}
G_r(t + 1, \omega) &= \iint_{\mathcal{Q}} G(t + 1 - u, \omega - \alpha) \rho_r(u, \alpha) du d\alpha \\
&= \iint_{\mathcal{Q}} e^{-2\pi i(\omega - \alpha)} G(t - u, \omega - \alpha) \rho_r(u, \alpha) du d\alpha \\
&= e^{-2\pi i\omega} \iint_{\mathcal{Q}} G(t - u, \omega - \alpha) \rho_r(u, \alpha) du d\alpha + \psi_r(t, \omega),
\end{aligned}$$

donde

$$\psi_r(t, \omega) = e^{-2\pi i \omega} \iint_{\mathcal{Q}} (e^{2\pi i \alpha} - 1) G(t - u, \omega - \alpha) \rho_r(u, \alpha) du d\alpha.$$

Luego, solo resta estimar $|\psi_r|$.

Sea $(t, \omega) \in \mathcal{Q}$, entonces

$$\begin{aligned} |\psi_r(t, \omega)| &\leq \iint_{\mathcal{Q}} |e^{2\pi i \alpha} - 1| |G(t - u, \omega - \alpha)| \rho_r(u, \alpha) du d\alpha \\ &\leq B^{1/2} \iint_{\mathcal{Q}} |2\pi \alpha| \rho_r(u, \alpha) du d\alpha \\ &\leq B^{1/2} 2\pi r, \end{aligned}$$

pues $\rho_r(u, \alpha) \neq 0$ implica $\alpha \leq r$.

Tomando supremo terminamos la prueba.

(e) Por la parte (a), y debido a que $|G| \leq A^{1/2}$,

$$\begin{aligned} |G(u, \alpha) - G_r(u, \alpha)| &\geq |G(u, \alpha)| - |G_r(u, \alpha) - G_r(t, \omega)| - |G(t, \omega)| \\ &\geq A^{1/2} - \frac{2}{r} B^{1/2} (|t - u| + |\omega - \alpha|) - |G_r(t, \omega)|. \end{aligned}$$

Entonces, dado $(t, \omega) \in \mathcal{Q}$ y $c > 0$, para $(u, \alpha) \in \mathcal{Q}(t, \omega; cr)$ tenemos que $|t - u|$ y $|\omega - \alpha| \leq cr/2$.

Por lo tanto

$$\inf_{(u, \alpha) \in \mathcal{Q}(t, \omega; cr)} |G(u, \alpha) - G_r(u, \alpha)| \geq A^{1/2} - 2cB^{1/2} - |G_r(t, \omega)|.$$

■

Lema 3.1.6 *Supongamos que $g, tg(t) \in L^2(\mathbb{R})$ y $\gamma \hat{g}(\gamma) \in L^2(\widehat{\mathbb{R}})$. Entonces, cualesquiera sean $(t, \omega) \in \mathcal{Q}$, $c > 0$ y $r < 1$, tenemos que*

$$\iint_{\mathcal{Q}(t, \omega; cr)} |G(u, \alpha) - G_r(u, \alpha)| du d\alpha \leq cr^2 C(r),$$

donde $C(r)$ no depende de (t, ω) y $\lim_{r \rightarrow 0} C(r) = 0$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
& \iint_{\mathcal{Q}(t,\omega;cr)} |G(u, \alpha) - G_r(u, \alpha)| \, dud\alpha \\
& \leq \iint_{\mathcal{Q}(t,\omega;cr)} \iint_{\mathcal{Q}} \rho_r(v, \beta) |G(u, \alpha) - G(u - v, \alpha - \beta)| \, du \, d\alpha \, dv \, d\beta \\
& = \iint_{\mathcal{Q}} \rho_r(v, \beta) \iint_{\mathcal{Q}(t,\omega;cr)} |G(u, \alpha) - G(u - v, \alpha - \beta)| \, du \, d\alpha \, dv \, d\beta \\
& \leq \iint_{\mathcal{Q}} \rho_r(v, \beta) \iint_{\mathcal{Q}(t,\omega;cr)} |G(u, \alpha) - G(u - v, \alpha)| \, du \, d\alpha \, dv \, d\beta \\
& + \iint_{\mathcal{Q}} \rho_r(v, \beta) \iint_{\mathcal{Q}(t,\omega;cr)} |G(u - v, \alpha) - G(u - v, \alpha - \beta)| \, du \, d\alpha \, dv \, d\beta \\
& = \iint_{\mathcal{Q}} \rho_r(v, \beta) \iint_{\mathcal{Q}(t,\omega;cr)} |G(u, \alpha) - G(u - v, \alpha)| \, du \, d\alpha \, dv \, d\beta \\
& + \iint_{\mathcal{Q}} \rho_r(v, \beta) \iint_{\mathcal{Q}(t-v,\omega;cr)} |G(s, \alpha) - G(s, \alpha - \beta)| \, ds \, d\alpha \, dv \, d\beta \\
& = I_1 + I_2,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

donde simplemente hemos aplicado la desigualdad triangular y la definición de G_r .

Ahora quisiéramos afirmar, por el Lema 3.1.4 que

$$\iint_{\mathcal{Q}(t,\omega;cr)} |G(u, \alpha) - G(u - v, \alpha)| \, dud\alpha \leq cr|v|C_1(r) \tag{3.8}$$

y

$$\iint_{\mathcal{Q}(t-v,\omega;cr)} |G(s, \alpha) - G(s, \alpha - \beta)| \, dsd\alpha \leq cr|\beta|C_2(r). \tag{3.9}$$

Para esto debemos corroborar que $(t - v)$ esté en el intervalo $[-3/2, 3/2]$. Como la función ρ_r está soportada en $\mathcal{Q}(r/2, r/2; r)$, sólo tiene sentido analizar el caso en que $(v, \beta) \in \mathcal{Q}(r/2, r/2; r)$. Entonces, para $(v, \beta) \in \mathcal{Q}(r/2, r/2; r)$, vale que $0 \leq v \leq r$. Luego, como $r < 1$ y $t \in [0, 1]$, se tiene $t - v \in [-1, 1]$, y claramente, $[-1, 1] \subseteq [-3/2, 3/2]$.

De este modo, las desigualdades (3.8) y (3.9) son ciertas y entonces, es posible acotar $I_1 + I_2$ por

$$\iint_{\mathcal{Q}} \rho_r(v, \beta) cr|v|C_1(r) \, dvd\beta + \iint_{\mathcal{Q}} \rho_r(v, \beta) cr|\beta|C_2(r) \, dvd\beta.$$

A su vez,

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{Q}} \rho_r(v, \beta) cr|v|C_1(r)dv d\beta + \iint_{\mathcal{Q}} \rho_r(v, \beta) cr|\beta|C_2(r)dv d\beta \\
\leq crC_1(r) \iint_{\mathcal{Q}} \rho_r(v, \beta)|v|dv d\beta \\
+ crC_2(r) \iint_{\mathcal{Q}} \rho_r(v, \beta)|\beta|dv d\beta \\
\leq cr^2(C_1(r) + C_2(r))
\end{aligned}$$

pues, como dijimos anteriormente, ρ_r está soportada en $\mathcal{Q}(r/2, r/2; r)$ y entonces $|v|, |\beta| < r$.

Luego, basta tomar

$$C(r) = C_1(r) + C_2(r)$$

para completar la demostración. ■

3.2. Demostración del Teorema de Balian-Low

Recordemos que las hipótesis del *Teorema de Balian-Low* eran $g \in L^2(\mathbb{R})$ y $\{g_{m,n}\}$ un marco exacto.

Esta demostración se hará por reducción al absurdo, por lo que supondremos

$$tg(t) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad \gamma\hat{g}(\gamma) \in L^2(\widehat{\mathbb{R}}).$$

Demostración.

Como primer paso, veamos que $|G_r(t, \omega)| \geq A^{1/2}/2$ para todo $(t, \omega) \in \mathcal{Q}$ y para r suficientemente chico.

Por el Teorema 3.1.5, parte (e) y por el Lema 3.1.6

$$\begin{aligned}
cr^2C(r) &\geq \iint_{\mathcal{Q}(t, \omega; cr)} |G(u, \alpha) - G_r(u, \alpha)| du d\alpha \\
&\geq c^2r^2(A^{1/2} - 2cB^{1/2} - |G_r(t, \omega)|)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

donde c es cualquier número positivo menor que 1 y $C(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$, independientemente de (t, ω) .

Si en los extremos de la inecuación (3.10) dividimos por c^2r^2 y reacomodamos, obtenemos

$$|G_r(t, \omega)| \geq A^{1/2} - 2cB^{1/2} - \frac{C(r)}{c}.$$

Elegimos ahora $c < 1$ tal que $2cB^{1/2} < A^{1/2}/4$. Para ese valor de c fijo, existe $r_0 > 0$ para el cual $C(r)/c < A^{1/2}/4$, si $r < r_0$.

Luego, si $r < r_0$,

$$\begin{aligned} |G_r(t, \omega)| &\geq A^{1/2} - 2cB^{1/2} - \frac{C(r)}{c} \\ &\geq A^{1/2} - A^{1/2}/2 \\ &= A^{1/2}/2, \end{aligned}$$

para todo $(t, \omega) \in \mathcal{Q}$.

Al igual que hicimos en la Proposición 2.1.5, para cada $r > 0$ existe una función φ_r continua a valores reales definida sobre $\overline{\mathcal{Q}} = [0, 1] \times [0, 1]$, tal que

$$G_r(t, \omega) = |G_r(t, \omega)|e^{i\varphi_r(t, \omega)}.$$

Además, como G_r es periódica de período 1 en la segunda variable,

$$\varphi_r(t, 1) = \varphi_r(t, 0) + 2\pi k_r, \quad (3.11)$$

para algún entero k_r independiente de t .

Consideremos ahora la función definida como

$$\mu_r(t, \omega) = 1 + \frac{\psi_r(t, \omega)}{e^{-2\pi i \omega} G_r(t, \omega)},$$

donde $\psi_r(t, \omega)$ es la función que existe gracias al Teorema 3.1.5, ítem (d). Notemos que μ_r resulta continua pues ψ_r lo es y por que $|G_r(t, \omega)| \geq A^{1/2}/2$, si r es suficientemente pequeño. Nuevamente, utilizando el argumento anterior, existe $\theta_r(t, \omega)$ continua y a valores reales de modo que

$$\mu_r(t, \omega) = |\mu_r(t, \omega)|e^{i\theta_r(t, \omega)}.$$

Veamos ahora que μ_r tiende a 1 uniformemente en $\overline{\mathcal{Q}}$ cuando $r \rightarrow 0$. Por el Teorema 3.1.5

$$|\psi_r(t, \omega)| \leq 2\pi r B^{1/2}$$

para todo $(t, \omega) \in \mathcal{Q}$, y por lo tanto,

$$|\psi_r(t, \omega)| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad r \rightarrow 0$$

independientemente de (t, ω) .

Luego, como

$$|\mu_r(t, \omega) - 1| = \left| \frac{\psi_r(t, \omega)}{G_r(t, \omega)} \right| \leq 2 \frac{|\psi_r(t, \omega)|}{A^{1/2}},$$

$\mu_r \longrightarrow 1$ uniformemente en $\overline{\mathcal{Q}}$.

Únicamente por la definición de μ_r ,

$$G_r(t+1, \omega) = e^{-2\pi i \omega} G_r(t, \omega) \mu_r(t, \omega)$$

para todo t y todo ω .

Entonces,

$$\begin{aligned} |G_r(1, \omega)| e^{i\varphi_r(1, \omega)} = G_r(1, \omega) &= e^{-2\pi i \omega} G_r(0, \omega) \mu_r(0, \omega) \\ &= |G_r(0, \omega) \mu_r(0, \omega)| e^{-2\pi i \omega + i\theta_r(0, \omega) + i\varphi_r(0, \omega)} \\ &= |G_r(1, \omega)| e^{-2\pi i \omega + i\theta_r(0, \omega) + i\varphi_r(0, \omega)}. \end{aligned}$$

De este modo, para cada $r > 0$ existe un entero l_r tal que para todo $\omega \in [0, 1]$,

$$\varphi_r(1, \omega) = -2\pi\omega + \theta_r(0, \omega) + \varphi_r(0, \omega) + 2\pi l_r. \quad (3.12)$$

Luego, por las ecuaciones (3.11) y (3.12),

$$\begin{aligned} 0 &= (\varphi_r(0, 0) - \varphi_r(1, 0)) + (\varphi_r(1, 0) - \varphi_r(1, 1)) \\ &\quad + (\varphi_r(1, 1) - \varphi_r(0, 1)) + (\varphi_r(0, 1) - \varphi_r(0, 0)) \\ &= (-\theta_r(0, 0) - 2\pi l_r) + (-2\pi k_r) + (-2\pi + \theta_r(0, 1) + 2\pi l_r) + 2\pi k_r \\ &= -2\pi + \theta_r(0, 1) - \theta_r(0, 0). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Si μ_r tiende uniformemente a 1 en $\overline{\mathcal{Q}}$ cuando $r \rightarrow 0$, entonces θ_r converge uniformemente a un múltiplo de 2π . Luego, haciendo tender r a cero en la ecuación (3.13), encontramos que

$$0 = -2\pi$$

lo cual es una contradicción.

Esta contradicción vino de suponer que era posible tener un marco $\{g_{m,n}\}$ generado por una función $g \in L^2(\mathbb{R})$ que satisface simultáneamente

$$tg(t) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad \gamma \hat{g}(\gamma) \in L^2(\widehat{\mathbb{R}}).$$

■

Esta demostración es debida a Benedetto, Heil y Walnut, y aparece publicada en [BHW95]. Lejos de parecerse a la prueba dada por Battle en 1988, se utilizan en ella métodos clásicos del análisis armónico y se evita como herramienta la teoría de distribuciones.

Capítulo 4

Teorema de Balian-Low. Demostración basada en la Teoría de Operadores

Presentamos aquí una demostración del *Teorema de Balian-Low*, basada en la teoría de operadores.

Esta prueba, está asociada con un resultado clásico en el análisis armónico conocido como *El Principio de Incertidumbre* que, como mencionamos en el primer capítulo de este trabajo, da una limitación a cuán bien localizada puede estar una función de $L^2(\mathbb{R})$ en el plano tiempo-frecuencia. En la primera sección de este capítulo demostraremos este teorema para introducir algunos elementos que utilizaremos en la prueba del *Teorema de Balian-Low*.

4.1. Principio de Incertidumbre

Teorema 4.1.1 *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces vale la desigualdad*

$$\|f\|_2^2 \leq 4\pi \|tf(t)\|_2 \|\hat{\gamma}f(\gamma)\|_2. \quad (4.1)$$

Este resultado tiene muchas versiones distintas entre las cuales hay generalizaciones que involucran distintos pesos y distintas normas a las que aparecen en la formulación que damos aquí.

El *Principio de Incertidumbre* puede ser formulado en cualquier espacio de Hilbert H en el siguiente sentido:

Sea un espacio de Hilbert H con producto interno $\langle f, g \rangle$ y con norma $\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}$. Sean también operadores A y B

$$A : D(A) \mapsto H \quad \text{y} \quad B : D(B) \mapsto H$$

donde $D(A), D(B) \subseteq H$ son los respectivos dominios de A, B . Definimos el *conmutador* de A y B como

$$[A, B] = AB - BA.$$

Si A es un operador autoadjunto, esto es $\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle$ para todas $f, g \in D(A)$, se define la *esperanza* de A

$$E_f(A) = \langle Af, f \rangle$$

para $f \in D(A)$ y la *varianza* de A como

$$\sigma_f^2(A) = E_f(A^2) - (E_f(A))^2.$$

Teorema 4.1.2 Sean dos operadores autoadjuntos A y B en un espacio de Hilbert H . Entonces, para $f \in D(A^2) \cap D(B^2) \cap D(i[A, B])$ con $\|f\| = 1$ se tiene

$$(E_f(i[A, B]))^2 \leq 4\sigma_f^2(A)\sigma_f^2(B).$$

Demostración. Tomemos $f \in D(A^2) \cap D(B^2)$, entonces $f \in D(A) \cap D(B)$. Por ser A y B autoadjuntos

$$\begin{aligned} E_f(i[A, B]) &= i\langle [A, B]f, f \rangle \\ &= i\{\langle ABf, f \rangle - \langle BAf, f \rangle\} \\ &= i\{\langle Bf, Af \rangle - \langle Af, Bf \rangle\} \\ &= i\{\overline{\langle Af, Bf \rangle} - \langle Af, Bf \rangle\} \\ &= 2Im\langle Af, Bf \rangle. \end{aligned}$$

Ahora, como $\|f\| = 1$ y $\langle Af, f \rangle, \langle Bf, f \rangle \in \mathbb{R}$ por ser A y B autoadjuntos, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz tenemos

$$\|(B + iA)f\|^2 - |\langle (B + iA)f, f \rangle|^2 \geq 0. \quad (4.2)$$

Además,

$$|\langle (B + iA)f, f \rangle|^2 = \langle Bf, f \rangle^2 + \langle Af, f \rangle^2, \quad (4.3)$$

y por la definición de norma,

$$\|(B + iA)f\|^2 = \|Bf\|^2 + \|Af\|^2 - 2Im\langle Af, Bf \rangle. \quad (4.4)$$

Si sustituimos las ecuaciones (4.4) y (4.3) en (4.2) obtenemos

$$\|Af\|^2 - \langle Af, f \rangle^2 + \|Bf\|^2 - \langle Bf, f \rangle^2 \geq 2Im\langle Af, Bf \rangle. \quad (4.5)$$

Para cualesquiera $s, r \in \mathbb{R}$, los operadores rA, sB siguen siendo autoadjuntos. Por lo tanto, para estos operadores, la inecuación (4.5) resulta ser

$$r^2(\|Af\|^2 - \langle Af, f \rangle^2) + s^2(\|Bf\|^2 - \langle Bf, f \rangle^2) \geq 2rs \operatorname{Im} \langle Af, Bf \rangle. \quad (4.6)$$

Elijamos ahora

$$r^2 = \|Bf\|^2 - \langle Bf, f \rangle^2 \quad \text{y} \quad s^2 = \|Af\|^2 - \langle Af, f \rangle^2$$

para sustituir en (4.6) y obtener

$$\begin{aligned} (\|Af\|^2 - \langle Af, f \rangle^2)(\|Bf\|^2 - \langle Bf, f \rangle^2) \\ \geq (\|Bf\|^2 - \langle Bf, f \rangle^2)^{1/2} (\|Af\|^2 - \langle Af, f \rangle^2)^{1/2} \operatorname{Im} \langle Af, Bf \rangle. \end{aligned}$$

Si dividimos la desigualdad por $(\|Bf\|^2 - \langle Bf, f \rangle^2)^{1/2} (\|Af\|^2 - \langle Af, f \rangle^2)^{1/2}$ y luego elevamos al cuadrado, resulta

$$(\|Af\|^2 - \langle Af, f \rangle^2)(\|Bf\|^2 - \langle Bf, f \rangle^2) \geq \operatorname{Im} \langle Af, Bf \rangle^2,$$

de donde se sigue inmediatamente que

$$(E_f(i[A, B]))^2 \leq 4\sigma_f^2(A)\sigma_f^2(B).$$

■

Veamos cómo se desprende de este último resultado el *Principio de Incertidumbre*. Sean los operadores

$$Pf(t) = tf(t) \quad \text{y} \quad Mf(t) = (P\hat{f})^\vee(t) = (\gamma\hat{f}(\gamma))^\vee(t).$$

Lo que resulta claro es que los dominios de estos operadores no son todo el espacio $L^2(\mathbb{R})$ pero si que contienen a la clase de Schwartz $S(\mathbb{R})$.

Si consideramos $f, g \in S(\mathbb{R})$, vale lo siguiente:

$$(a) \quad \langle Pf, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} tf(t)\overline{g(t)}dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{tg(t)}dt = \langle f, Pg \rangle.$$

$$(b) \quad \langle Mf, g \rangle = \langle (\gamma\hat{f}(\gamma))^\vee, g \rangle = \langle \gamma\hat{f}(\gamma), \hat{g} \rangle = \langle P\hat{f}, \hat{g} \rangle$$

$$= \langle \hat{f}, P\hat{g} \rangle = \langle f, (P\hat{g})^\vee \rangle = \langle f, Mg \rangle.$$

Luego, como $S(\mathbb{R}) \subseteq D(P), D(M) \subseteq L^2(\mathbb{R})$ y $S(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$, las igualdades (a) y (b) se extienden a $D(P)$ y $D(M)$ respectivamente, resultando ser P y M operadores autoadjuntos.

Además, para $f \in S(\mathbb{R})$, tenemos las relaciones

$$(f')^\vee = 2\pi i P \hat{f} \quad \text{y} \quad f' = 2\pi i M f$$

y por lo tanto, el conmutador entre P y M aplicado a $f \in S(\mathbb{R})$ es

$$\begin{aligned} [P, M]f &= PMf - MPf \\ &= P\left(\frac{1}{2\pi i}f'\right) - M(tf(t)) \\ &= \frac{1}{2\pi i}tf'(t) - \left((tf(t))'\frac{1}{2\pi i}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}tf'(t) - \frac{1}{2\pi i}tf'(t) - \frac{1}{2\pi i}f'(t) \\ &= -\frac{1}{2\pi i}If, \end{aligned}$$

donde I es el operador identidad.

Si tomamos $f \in S(\mathbb{R})$ con $\|f\|_2 = 1$, el Teorema 4.1.2 nos asegura que

$$\left(E_f\left(-\frac{1}{2\pi i}I\right)\right)^2 \leq 4\sigma_f^2(P)\sigma_f^2(M). \quad (4.7)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} E_f(I) &= \langle If, f \rangle = \|f\|_2^2, \\ \sigma_f^2(P) &= E_f(P^2) - (E_f(P))^2 \\ &= \langle P^2f, f \rangle - (\langle Pf, f \rangle)^2 \\ &= \langle Pf, Pf \rangle - (\langle Pf, f \rangle)^2 \\ &\leq \|Pf\|_2^2 = \|tf(t)\|_2^2 \end{aligned}$$

y, análogamente

$$\begin{aligned} \sigma_f^2(M) &= \|Mf\|_2^2 - (\langle Mf, f \rangle)^2 \\ &\leq \|Mf\|_2^2 = \|\gamma \hat{f}(\gamma)\|_2^2 \end{aligned}$$

pues P y M son autoadjuntos y entonces $\langle Pf, f \rangle$ y $\langle Mf, f \rangle$ son números reales.

Si ahora reemplazamos en (4.7), obtenemos

$$\frac{1}{16\pi^2}\|f\|_2^4 \leq \|tf(t)\|_2^2 \|\gamma \hat{f}(\gamma)\|_2^2$$

y queda demostrado el *Principio de Incertidumbre* para funciones $f \in S(\mathbb{R})$ tales que $\|f\|_2 = 1$. Inmediatamente se prueba que vale para toda $f \in S(\mathbb{R})$.

Luego, utilizando argumentos clásicos de densidad, el resultado se extiende a todo $L^2(\mathbb{R})$.

4.2. Versión débil del Teorema de Balian-Low

El siguiente teorema parece ser, a simple vista, una versión más débil del Teorema 1.3.2. Veremos en la sección siguiente que, sorprendentemente, resultan equivalentes.

Teorema 4.2.1 *Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\{g_{m,n}\}$ es un marco exacto de $L^2(\mathbb{R})$. Entonces no puede ocurrir que $Pg, P\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$ y $P\hat{g}, P\hat{\tilde{g}} \in L^2(\widehat{\mathbb{R}})$. Es decir,*

$$\|tg(t)\|_2 \|\gamma\hat{g}(\gamma)\|_2 \|t\tilde{g}(t)\|_2 \|\gamma\hat{\tilde{g}}(\gamma)\|_2 = +\infty,$$

donde, recordemos, \tilde{g} representa la función dual de g .

Para la demostración de este teorema, son necesarios los siguientes dos lemas.

Lema 4.2.2 *Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ son funciones que satisfacen $Pf, Pg \in L^2(\mathbb{R})$ y $P\hat{f}, P\hat{g} \in L^2(\widehat{\mathbb{R}})$, entonces*

$$\langle Pf, Mg \rangle - \langle Mf, Pg \rangle = \frac{1}{2\pi i} \langle f, g \rangle. \quad (4.8)$$

Demostración. Al ser $P\hat{f}, P\hat{g}$ funciones de $L^2(\widehat{\mathbb{R}})$, Mf y Mg están bien definidos. Entonces, podemos elegir sucesiones $\{\varphi_k\}_k$ y $\{\psi_k\}_k$ contenidas en la clase de Schwartz de modo tal que

$$\varphi_k \longrightarrow f, \quad P\varphi_k \longrightarrow Pf, \quad M\varphi_k \longrightarrow Mf$$

y

$$\psi_k \longrightarrow g, \quad P\psi_k \longrightarrow Pg, \quad M\psi_k \longrightarrow Mg,$$

donde la convergencia es en la norma de L^2 .

Como vimos en la prueba del *Principio de Incertidumbre* los operadores P y M eran autoadjuntos sobre sus dominios. Luego, por estar φ_k y ψ_k en $S(\mathbb{R})$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle P\varphi_k, M\psi_k \rangle - \langle M\varphi_k, P\psi_k \rangle &= \langle MP\varphi_k, \psi_k \rangle - \langle PM\varphi_k, \psi_k \rangle \\ &= -\langle [P, M]\varphi_k, \psi_k \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \langle \varphi_k, \psi_k \rangle. \end{aligned}$$

Ahora, por la continuidad del producto interno

$$\langle \varphi_k, \psi_k \rangle \longrightarrow \langle f, g \rangle,$$

$$\langle P\varphi_k, M\psi_k \rangle \longrightarrow \langle Pf, Mg \rangle$$

y

$$\langle M\varphi_k, P\psi_k \rangle \longrightarrow \langle Mf, Pg \rangle$$

y entonces vale la ecuación (4.8). ■

Ahora veremos cómo resulta la expresión del conmutador de P y M con los operadores de traslación τ_n y de modulación e_m que definimos en la sección 1.3 del primer capítulo.

Lema 4.2.3 Si $e_m f(t) = e^{2\pi i m t} f(t)$ y $\tau_n f(t) = f(t - n)$ entonces

$$(a) [e_m \tau_n, P] = e_m \tau_n P - P e_m \tau_n = -n e_m \tau_n.$$

$$(b) [e_m \tau_n, M] = e_m \tau_n M - M e_m \tau_n = -m e_m \tau_n.$$

Demostración. Como ambas partes se prueban similarmente, sólo demostraremos la parte (a).

$$\begin{aligned} [e_m \tau_n, P]f(t) &= (e_m \tau_n P f)(t) - (P e_m \tau_n f)(t) \\ &= e_m(t)(\tau_n P f)(t) - t(e_m \tau_n f)(t) \\ &= e_m(t)(P f)(t - n) - t e_m(t)(\tau_n f)(t) \\ &= e_m(t)(t - n)f(t - n) - t e_m(t)f(t - n) \\ &= -n e_m f(t - n) \\ &= -n e_m(\tau_n f)(t) \\ &= -n(e_m \tau_n f)(t). \end{aligned}$$

■

Ahora estamos en condiciones de demostrar la versión débil del *Teorema de Balian-Low*.

Demostración del Teorema (4.2.1)

Esta demostración se hará por reducción al absurdo. Supongamos entonces, que $g \in L^2(\mathbb{R})$ satisface las hipótesis del teorema 4.2.1 y además verifica $Pg, P\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$ y $P\hat{g}, P\hat{\tilde{g}} \in L^2(\hat{\mathbb{R}})$.

Notemos primero que para todas las funciones $f, h \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle f, h_{m,n} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{h_{m,n}(t)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i m t} \overline{h(t - n)} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} f(s+n)e^{-2\pi im(s+n)}\overline{h(s)}ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(s+n)e^{-2\pi ims}\overline{h(s)}ds \\
&= \langle f_{-m,-n}, h \rangle.
\end{aligned}$$

También, por la parte (a) del Lema 4.2.3,

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad P(f_{m,n}) = (Pf)_{m,n} + nf_{m,n}.$$

Como $\{g_{m,n}\}$ es un marco exacto de $L^2(\mathbb{R})$, $\{g_{m,n}\}$ y $\{\tilde{g}_{m,n}\}$ resultan ser biortogonales (ver Lema 1.2.5, capítulo 1). Además P es un operador, que definido sobre su dominio $D(P) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : tf(t) \in L^2(\mathbb{R})\}$ es autoadjunto y por hipótesis $g \in D(P)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\langle Pg, \tilde{g}_{m,n} \rangle &= \langle g, P(\tilde{g}_{m,n}) \rangle \\
&= \langle g, (P\tilde{g})_{m,n} + n\tilde{g}_{m,n} \rangle \\
&= \langle g, (P\tilde{g})_{m,n} \rangle + n\langle g, \tilde{g}_{m,n} \rangle \\
&= \langle g_{-m,-n}, P\tilde{g} \rangle + n\delta_{m,0}\delta_{n,0} \\
&= \langle g_{-m,-n}, P\tilde{g} \rangle.
\end{aligned}$$

Debido a que $P\hat{g}, P\hat{\tilde{g}} \in L^2(\widehat{\mathbb{R}})$, las funciones Mg y $M\tilde{g}$ existen y están en $L^2(\mathbb{R})$. Así, por la parte (b) del Lema 4.2.3 y razonando en forma similar a la anterior nos queda

$$\begin{aligned}
\langle g_{m,n}, M\tilde{g} \rangle &= \langle M(g_{m,n}), \tilde{g} \rangle \\
&= \langle (Mg)_{m,n} + mg_{m,n}, \tilde{g} \rangle \\
&= \langle (Mg)_{m,n}, \tilde{g} \rangle + m\langle g_{m,n}, \tilde{g} \rangle \\
&= \langle Mg, \tilde{g}_{-m,-n} \rangle + \delta_{m,0}\delta_{n,0} \\
&= \langle Mg, \tilde{g}_{-m,-n} \rangle.
\end{aligned}$$

Para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ tenemos los desarrollos en serie en función del marco $\{g_{m,n}\}$ y su dual

$$f = \sum_{m,n} \langle f, g_{m,n} \rangle \tilde{g}_{m,n} = \sum_{m,n} \langle f, \tilde{g}_{m,n} \rangle g_{m,n},$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\langle Pg, M\tilde{g} \rangle &= \sum_{m,n} \langle Pg, \tilde{g}_{m,n} \rangle \langle g_{m,n}, M\tilde{g} \rangle \\
&= \sum_{m,n} \langle g_{-m,-n}, P\tilde{g} \rangle \langle Mg, \tilde{g}_{-m,-n} \rangle \\
&= \sum_{m,n} \langle Mg, \tilde{g}_{m,n} \rangle \langle g_{m,n}, P\tilde{g} \rangle \\
&= \langle Mg, P\tilde{g} \rangle.
\end{aligned}$$

Entonces, por la biortogonalidad entre $\{g_{m,n}\}$ y $\{\tilde{g}_{m,n}\}$ y el Lema 4.2.2

$$1 = \langle g, \tilde{g} \rangle = 2\pi i (\langle Pg, M\tilde{g} \rangle - \langle Mg, P\tilde{g} \rangle) = 0,$$

lo cual es una contradicción.

Luego no puede ser que $Pg, P\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$ y $P\hat{g}, P\hat{\tilde{g}} \in L^2(\hat{\mathbb{R}})$ y así tenemos

$$\|tg(t)\|_2 \|\gamma\hat{g}(\gamma)\|_2 \|t\tilde{g}(t)\|_2 \|\gamma\hat{\tilde{g}}(\gamma)\|_2 = +\infty,$$

como queríamos. ■

Como consecuencia del Teorema 4.2.1, se deduce facilmente que en el caso de bases ortonormales, esta versión débil resulta equivalente a la *Teorema de Balian-Low*.

Para ello supongamos que el marco de Gabor $\{g_{m,n}\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Entonces, el operador de marco definido en capítulo 1, sección 1.2, resulta ser el operador identidad, pues

$$Sf = \sum_{m,n} \langle f, g_{m,n} \rangle g_{m,n} = f$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$. Por este motivo,

$$\tilde{g} = S^{-1}g = g$$

y así el marco dual de $\{g_{m,n}\}$ es $\{g_{m,n}\}$.

De este modo resulta evidente la equivalencia entre el *Teorema de Balian-Low* y la versión débil que demostramos anteriormente.

Esta prueba fue precisamente la dada por Battle en 1988 para el caso de bases ortonormales. En ella se inspiraron Daubechies y Janssen que, manteniendo las líneas de esta demostración, generalizaron el resultado a marcos exactos, como veremos en la próxima sección.

4.3. Equivalencia entre el Teorema de Balian-Low y su versión débil

Como comentamos anteriormente, el Teorema 1.3.2 y su versión débil resultan equivalentes si pedimos que $\{g_{m,n}\}$ forme una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. A modo de ejemplo, veamos otro caso en el cual la equivalencia es clara.

Ejemplo 4.3.1

Si la función g genera un marco ajustado de $L^2(\mathbb{R})$ con constantes $A = B$, el operador de marco es $S = AI$, donde I es el operador identidad.

En efecto, por la definición de marco ajustado,

$$A\|f\|_2^2 = \sum_{m,n} |\langle f, g_{m,n} \rangle|^2 \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

y así

$$\begin{aligned} \langle Sf, f \rangle &= \sum_{m,n} \langle f, g_{m,n} \rangle \langle g_{m,n}, f \rangle \\ &= \sum_{m,n} |\langle f, g_{m,n} \rangle|^2 \\ &= A\langle f, f \rangle \end{aligned}$$

lo que prueba la igualdad $Sf = Af$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$.

Luego la función que genera el marco dual de $\{g_{m,n}\}$ es

$$\tilde{g} = S^{-1}g = A^{-1}g$$

y entonces es evidente que

$$\|tg(t)\|_2 \|\gamma\hat{g}(\gamma)\|_2 \|t\tilde{g}(t)\|_2 \|\gamma\hat{\tilde{g}}(\gamma)\|_2 = +\infty$$

implica

$$\|tg(t)\|_2 \|\gamma\hat{g}(\gamma)\|_2 = +\infty.$$

■

Si pudiéramos probar que

$$Pg \in L^2(\mathbb{R}), P\hat{g} \in L^2(\hat{\mathbb{R}}) \iff P\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R}), P\hat{\tilde{g}} \in L^2(\hat{\mathbb{R}})$$

cuando $\{g_{m,n}\}$ es un marco exacto de $L^2(\mathbb{R})$ tendríamos la equivalencia que buscamos. Entonces, esto es lo que haremos en el Teorema 4.3.3, pero antes necesitamos obtener la expresión de la transformada de Zak de \tilde{g} .

Proposición 4.3.2 Si $g \in L^2(\mathbb{R})$ y $\{g_{m,n}\}$ es un marco, entonces

$$Z\tilde{g} = 1/\overline{Zg}$$

Demostración. Si $\{g_{m,n}\}$ es un marco de $L^2(\mathbb{R})$ y sus constantes son A y B , por el Teorema 2.1.4, parte (d), se tiene $0 < A \leq |Zg|^2 \leq B$ a.e \mathcal{Q} .

Luego, la función $1/\overline{Zg} \in L^2(\mathcal{Q})$, y así tiene sentido definir $h = Z^{-1}(1/\overline{Zg})$, que además está en $L^2(\mathbb{R})$. Dados $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \langle h, g_{m,n} \rangle &= \langle Zh, Zg_{m,n} \rangle \\ &= \langle 1/\overline{Zg}, e_m(t)e_n(\omega)Zg \rangle \\ &= \langle 1 \cdot e_m(t)e_n(\omega) \rangle \\ &= \delta_{m,0}\delta_{n,0} \\ &= \langle \tilde{g}, g_{m,n} \rangle \end{aligned}$$

por que Z es un operador unitario y por la biortogonalidad de los sistemas $\{g_{m,n}\}$ y $\{\tilde{g}_{m,n}\}$.

Como $\{g_{m,n}\}$ es un sistema completo en $L^2(\mathbb{R})$ debido a que constituye un marco, podemos concluir que $h = \tilde{g}$, pues las funciones $h, \tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$. ■

Ya comentamos en la introducción que estudiaremos con especial cuidado el papel que juega la diferenciación en la demostración del *Teorema de Balian-Low*.

Sabemos que si $g \in L^2(\mathbb{R})$ y es además derivable, vale la fórmula

$$(\partial g)^\wedge(\gamma) = 2\pi i \gamma \hat{g}(\gamma).$$

Si ahora g es cualquier función del espacio $L^2(\mathbb{R})$ nada sabemos sobre la posibilidad de derivarla sin tener hipótesis adicionales.

La idea en este momento es trasladar el problema a un ámbito en el cual podamos derivar sin ningún problema cualquiera sea $g \in L^2(\mathbb{R})$. El ámbito al cual nos referimos es el espacio de las Distribuciones donde, como vimos en el capítulo 2, sección 2.2, derivar está permitido.

Teorema 4.3.3 Si $g \in L^2(\mathbb{R})$ y $\{g_{m,n}\}$ es un marco exacto entonces,

$$Pg \in L^2(\mathbb{R}), P\hat{g} \in L^2(\widehat{\mathbb{R}}) \iff P\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R}), P\hat{\tilde{g}} \in L^2(\widehat{\mathbb{R}}).$$

Demostración. Si tomamos $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $Zf \in L^2(\mathcal{Q})$ y por lo tanto Zf define una distribución.

Ahora, si consideramos la función $tZf(t, \omega)$, su distribución asociada está bien definida pues

$$(tZf(t, \omega))(\varphi(t, \omega)) = \iint_{\mathcal{Q}} tZf(t, \omega)\varphi(t, \omega)dt d\omega = (Zf(t, \omega))(t\varphi(t, \omega))$$

y $t\varphi(t, \omega) \in \mathcal{D}(\mathcal{Q})$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{Q})$.

Por el Lema 2.2.3, que demostramos en el capítulo 2,

$$\begin{aligned} \partial_2\left(\sum_k f(t+k)e^{2\pi i\omega k}\right) &= \sum_k f(t+k)D_2(e^{2\pi i\omega k}) \\ &= \sum_k f(t+k)2\pi i k e^{2\pi i\omega k}, \end{aligned}$$

y entonces

$$\partial_2(Zf)(t, \omega) = \sum_k f(t+k)2\pi i k e^{2\pi i\omega k}$$

donde la igualdad vale pensando a $\partial_2(Zf)(t, \omega)$ y $\sum_k f(t+k)2\pi i k e^{2\pi i\omega k}$ como distribuciones.

Luego,

$$\begin{aligned} tZf(t, \omega) + \frac{1}{2\pi i}\partial_2(Zf)(t, \omega) &= \sum_k t f(t+k)e^{2\pi i\omega k} + \sum_k f(t+k)k e^{2\pi i\omega k} \\ &= \sum_k (t+k)f(t+k)e^{2\pi i\omega k} \\ &= ZPf(t, \omega). \end{aligned}$$

De este modo tenemos que $ZPf(t, \omega)$ define una distribución y además vale la igualdad

$$ZPf(t, \omega) = tZf(t, \omega) + \frac{1}{2\pi i}\partial_2(Zf)(t, \omega) \quad (4.9)$$

únicamente bajo la hipótesis $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Si suponemos que $g, Pg \in L^2(\mathbb{R})$ y $P\hat{g} \in L^2(\widehat{\mathbb{R}})$, Zg admite derivadas débiles como vimos en la Proposición 2.2.6. Luego, por la parte (a) del Teorema 2.2.4, existe una función $G \in AC_{loc}$ en casi todas las líneas paralelas a los ejes coordenados que coincide con Zg en casi todo punto de \mathcal{Q} .

Por otro lado, como $\{g_{m,n}\}$ es un marco de $L^2(\mathbb{R})$, $\frac{1}{Zg} \in L^2(\mathcal{Q})$ y entonces $\frac{1}{Zg}$ define una distribución sobre $\mathcal{D}(\mathcal{Q})$.

Veamos que las distribuciones $\partial_2(\frac{1}{Zg})$ y $-\frac{\partial_2 Zg}{(Zg)^2}$ coinciden.
 Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{Q})$, entonces

$$\begin{aligned}\partial_2\left(\frac{1}{Zg}\right)(\varphi(t, \omega)) &= - \iint_{\mathcal{Q}} \frac{1}{Zg(t, \omega)} D_2\varphi(t, \omega) dt d\omega \\ &= - \iint_{\mathcal{Q}} \frac{1}{G(t, \omega)} D_2\varphi(t, \omega) dt d\omega.\end{aligned}$$

Para cada t_0 fijo, la función $G(t_0, \omega)$ es absolutamente continua en $[0, 1)$ y por lo tanto derivable a.e. en sentido clásico respecto de ω .

Entonces, $\frac{1}{G(t_0, \omega)}$ también es derivable en casi todo ω y vale la igualdad

$$D_2\left(\frac{1}{G(t_0, \omega)}\right) = -\frac{D_2G(t_0, \omega)}{G(t_0, \omega)^2}$$

a.e $\omega \in [0, 1)$. Notar que $\frac{1}{G}$ está bien definida por que $G = Zg$ a.e. y $Zg \neq 0$ en casi todo punto de \mathcal{Q} , debido al Teorema 2.1.4.

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{Q}} \frac{1}{G(t, \omega)} D_2\varphi(t, \omega) dt d\omega &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{1}{G(t, \omega)} D_2\varphi(t, \omega) d\omega \right] dt \\ &= - \int_0^1 \left[\int_0^1 D_2\left(\frac{1}{G(t, \omega)}\right) \varphi(t, \omega) d\omega \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{D_2G(t, \omega)}{G(t, \omega)^2} \varphi(t, \omega) d\omega \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{\partial_2 Zg(t, \omega)}{Zg(t, \omega)^2} \varphi(t, \omega) d\omega \right] dt \\ &= \left(\frac{\partial_2 Zg(t, \omega)}{Zg(t, \omega)^2} \right) (\varphi(t, \omega))\end{aligned}$$

donde primero hemos aplicado el método de integración por partes y luego reemplazado D_2G por $\partial_2 Zg$ pues el Teorema 2.2.4 nos asegura que ambas funciones coinciden en casi todo punto. Como esto ocurre para toda función $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{Q})$, se concluye que

$$\partial_2\left(\frac{1}{Zg}\right) = -\frac{\partial_2 Zg}{(Zg)^2}.$$

Si $g, Pg \in L^2(\mathbb{R})$ y $P\hat{g} \in L^2(\widehat{\mathbb{R}})$, la función $\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$ y entonces, teniendo en cuenta la ecuación (4.9) y la Proposición 4.3.2 obtenemos la siguiente

cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
\overline{ZP\tilde{g}(t, \omega)} &= \overline{tZ\tilde{g}(t, \omega)} + \overline{1/2\pi i\partial_2 Z\tilde{g}(t, \omega)} \\
&= \frac{t}{Zg(t, \omega)} - 1/2\pi i\partial_2\left(\frac{1}{Zg}\right)(t, \omega) \\
&= \frac{t}{Zg(t, \omega)} + \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial_2 Zg(t, \omega)}{(Zg)^2(t, \omega)} \\
&= \frac{tZg(t, \omega) + 1/2\pi i\partial_2 Zg(t, \omega)}{Zg(t, \omega)^2} \\
&= \frac{ZPg(t, \omega)}{Zg(t, \omega)^2}.
\end{aligned}$$

Cabe aclarar que aquí, cada igualdad vale en el sentido de las distribuciones.

Hasta el momento probamos que

$$\overline{ZP\tilde{g}(t, \omega)} = \frac{ZPg(t, \omega)}{Zg(t, \omega)^2}$$

como distribuciones. Para poder concluir que la igualdad anterior vale en casi todo punto $(t, \omega) \in \mathcal{Q}$, deberíamos ver que tanto $\overline{ZP\tilde{g}(t, \omega)}$ como $\frac{ZPg(t, \omega)}{Zg(t, \omega)^2}$ están en $L^1_{loc}(\mathcal{Q})$ (ver Proposición 2.2.2).

La función $\frac{ZPg(t, \omega)}{Zg(t, \omega)^2} \in L^2(\mathcal{Q})$, luego es claro que es localmente integrable sobre \mathcal{Q} .

Para ver que $\overline{ZP\tilde{g}(t, \omega)} \in L^1_{loc}(\mathcal{Q})$ tomemos un compacto $K \subseteq \mathcal{Q}$ y una función $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{Q})$ tal que $K \subseteq \text{sop}(\varphi)$ y $\varphi(t, \omega) = 1$ para todo $(t, \omega) \in K$. Luego,

$$\begin{aligned}
\iint_K |ZP\tilde{g}(t, \omega)| dt d\omega &= \iint_K |\varphi(t, \omega)| |ZP\tilde{g}(t, \omega)| dt d\omega \\
&\leq \iint_{\mathcal{Q}} |\varphi(t, \omega)| |ZP\tilde{g}(t, \omega)| dt d\omega < \infty
\end{aligned}$$

por ser $Z\tilde{g}(t, \omega)$ una distribución.

Ahora estamos en condiciones de afirmar

$$\overline{ZP\tilde{g}(t, \omega)} = \frac{ZPg(t, \omega)}{Zg(t, \omega)^2} \quad \text{a.e.} \quad (t, \omega) \in \mathcal{Q}.$$

Entonces, como $\frac{ZPg(t, \omega)}{Zg(t, \omega)^2} \in L^2(\mathcal{Q})$, $ZP\tilde{g}(t, \omega) \in L^2(\mathcal{Q})$ y así probamos que $P\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$.

Resumiendo, hasta el momento hemos probado

$$Pg \in L^2(\mathbb{R}), P\hat{g} \in L^2(\widehat{\mathbb{R}}) \implies P\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R}). \quad (4.10)$$

Con argumentos similares a los utilizados hasta el momento se justifica lo siguiente:

Si $g, Pg \in L^2(\mathbb{R})$ y $P\hat{g} \in L^2(\widehat{\mathbb{R}})$ entonces

$$\begin{aligned} ZMg(t, \omega) &= e^{-2\pi i\omega} Z(Mg)^\wedge(-\omega, t) = e^{-2\pi i\omega} ZP\hat{g}(-\omega, t) \\ &= e^{-2\pi i\omega} \sum_k P\hat{g}(-\omega + k)e^{2\pi itk} \\ &= e^{-2\pi i\omega} \sum_k (-\omega + k)\hat{g}(-\omega + k)e^{2\pi itk} \\ &= e^{-2\pi i\omega} \sum_k (-\omega)\hat{g}(-\omega + k)e^{2\pi itk} \\ &+ e^{-2\pi i\omega} \sum_k \hat{g}(-\omega + k)ke^{2\pi itk} \\ &= -e^{-2\pi i\omega}\omega Z\hat{g}(-\omega, t) \\ &+ e^{-2\pi i\omega} \sum_k \hat{g}(-\omega + k)\frac{1}{2\pi i}\partial_1(e^{2\pi itk}) \\ &= -\omega e^{-2\pi i\omega} Z\hat{g}(-\omega, t) + \frac{e^{-2\pi i\omega}}{2\pi i}\partial_1(Z\hat{g})(-\omega, t) \\ &= -\omega Zg(t, \omega) + \frac{1}{2\pi i}\partial_1(Zg)(t, \omega). \end{aligned}$$

Usando esto último y la Proposición 4.3.2, tenemos

$$\begin{aligned} \overline{ZM\tilde{g}(t, \omega)} &= \overline{-\omega Z\tilde{g}(t, \omega)} + \overline{1/2\pi i\partial_1 Z\tilde{g}(t, \omega)} \\ &= \frac{-\omega}{Zg(t, \omega)} - \frac{1}{2\pi i}\partial_1\left(\frac{1}{Zg}\right)(t, \omega) \\ &= \frac{-\omega}{Zg(t, \omega)} + \frac{1/2\pi i\partial_1 Zg(t, \omega)}{Zg(t, \omega)^2} \\ &= \frac{-\omega Zg(t, \omega) + \frac{1}{2\pi i}\partial_1(Zg)(t, \omega)}{Zg(t, \omega)^2} \\ &= \frac{ZMg(t, \omega)}{Zg(t, \omega)^2}. \end{aligned}$$

Luego, como $g, Pg \in L^2(\mathbb{R})$ y $P\hat{g} \in L^2(\widehat{\mathbb{R}})$, $Mg \in L^2(\mathbb{R})$ y entonces $ZMg \in L^2(\mathcal{Q})$. Debido a que

$$\overline{ZM\tilde{g}(t, \omega)} = \frac{ZMg(t, \omega)}{Zg(t, \omega)^2}$$

a.e $(t, \omega) \in \mathcal{Q}$, tenemos que $ZM\tilde{g} \in L^2(\mathcal{Q})$ y así $M\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$.

Por lo tanto

$$Pg \in L^2(\mathbb{R}), P\hat{g} \in L^2(\widehat{\mathbb{R}}) \implies P\tilde{g} \in L^2(\widehat{\mathbb{R}}). \quad (4.11)$$

Finalmente, juntando las ecuaciones (4.10) y (4.11), probamos

$$Pg \in L^2(\mathbb{R}), P\hat{g} \in L^2(\widehat{\mathbb{R}}) \implies P\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R}), P\hat{\tilde{g}} \in L^2(\widehat{\mathbb{R}})$$

y esta misma implicación prueba la recíproca si cambiamos g por \tilde{g} , pues $\tilde{\tilde{g}} = g$.

Entonces

$$P\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R}), P\hat{\tilde{g}} \in L^2(\widehat{\mathbb{R}}) \iff Pg \in L^2(\mathbb{R}), P\hat{g} \in L^2(\widehat{\mathbb{R}})$$

como nos habíamos propuesto.

■

La combinación de los Teoremas 4.3.3 y 4.2.1 prueban el *Teorema de Balian-Low*.

Es interesante destacar en esta prueba, que la diferenciación no sólo es necesaria a nivel distribucional. También se requiere de ella en sentido clásico para justificar correctamente, que bajo las hipótesis del Teorema 4.3.3, las distribuciones $\partial_2(\frac{1}{Zg})$ y $-\frac{\partial_2 Zg}{(Zg)^2}$ coinciden.

La pregunta que surge en este momento es:

¿Es posible demostrar el *Teorema de Balian-Low* siguiendo las líneas de la teoría de operadores pero sin utilizar la diferenciación?

Al momento, esta pregunta no ha sido contestada. El siguiente argumento sugiere una posible dirección de trabajo.

Si tenemos en mente la demostración de la Proposición 4.3.2 podríamos intentar probar que $Pg \in L^2(\mathbb{R})$ si y sólo si $P\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$, razonando como a continuación.

Asumamos que $g \in L^2(\mathbb{R})$, $\{g_{m,n}\}$ es un marco exacto y $Pg \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces tenemos que $ZPg \in L^2(\mathcal{Q})$ y $ZPg/(Zg)^2 \in L^2(\mathcal{Q})$, debido a que $A \leq |Zg|^2 \leq B$, donde A y B son las constantes de marco.

Luego, la función h definida como

$$h = Z^{-1}(\overline{ZPg/(Zg)^2})$$

está en $L^2(\mathbb{R})$ y además

$$\begin{aligned}\langle h, g_{m,n} \rangle &= \langle Zh, Zg_{m,n} \rangle \\ &= \langle \overline{ZPg}/(Zg)^2, e_m(t)e_n(\omega)Zg \rangle \\ &= \langle \overline{ZPg}/Zg, e_m(t)e_n(\omega) \rangle,\end{aligned}$$

para todos $m, n \in \mathbb{Z}$.

Como consecuencia del Lema 4.2.3, $Pg_{m,n} = (Pg)_{m,n} + ng_{m,n} \in L^2(\mathbb{R})$ y entonces

$$\begin{aligned}\langle \tilde{g}, Pg_{m,n} \rangle &= \langle \tilde{g}, (Pg)_{m,n} \rangle + n\langle \tilde{g}, g_{m,n} \rangle \\ &= \langle Z\tilde{g}, Z(Pg)_{m,n} \rangle + n\delta_{m,0}\delta_{n,0} \\ &= \langle 1/\overline{Zg}, e_m(t)e_n(\omega)ZPg \rangle \\ &= \langle \overline{ZPg}/(Zg)^2, e_m(t)e_n(\omega)Zg \rangle \\ &= \langle \overline{ZPg}/(Zg)^2, Z(g_{m,n}) \rangle \\ &= \langle h, g_{m,n} \rangle.\end{aligned}$$

A pesar que no hemos supuesto que $P\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$, la integral

$$\int_{\mathbb{R}} P\tilde{g}(t)g_{m,n}(t)dt$$

está bien definida pues

$$\int_{\mathbb{R}} P\tilde{g}(t)g_{m,n}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(t)Pg_{m,n}(t)dt,$$

y esta última es finita ya que $\tilde{g}, Pg \in L^2(\mathbb{R})$.

Entonces,

$$\langle P\tilde{g} - h, g_{m,n} \rangle = \langle P\tilde{g}, g_{m,n} \rangle - \langle h, g_{m,n} \rangle = \langle \tilde{g}, Pg_{m,n} \rangle - \langle h, g_{m,n} \rangle = 0$$

para cualesquiera sean $m, n \in \mathbb{Z}$.

Quisiéramos concluir de aquí que, como $\{g_{m,n}\}$ es un sistema completo en $L^2(\mathbb{R})$, debe ser $P\tilde{g} = h$. Pero para ello, sería necesaria la hipótesis adicional: $P\tilde{g} - h \in L^2(\mathbb{R})$.

La existencia de una demostración del *Teorema de Balian-Low* en términos de la teoría de operadores que no utilice la teoría de distribuciones, es un problema bajo estudio hoy en día. Su importancia radica en la posibilidad de extender el teorema a ámbitos más abstractos.

Capítulo 5

Teorema de Balian-Low. Resultados relacionados y extensiones.

Comentaremos en este capítulo algunos resultados que se relacionan con el Teorema 1.3.2 y también expondremos una extensión de este teorema para el caso de Bases de Schauder.

5.1. Espacios Amalgama

Los *espacios Amalgama de Wiener* nos otorgan información sobre el comportamiento local y global de sus elementos. Para $p, q \in [1, +\infty]$, se definen de la siguiente forma

$$W(L^p, \ell^q) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{W(L^p, \ell^q)} = \left(\sum_k \|f \cdot \chi_{[k, k+1]}\|_p^q \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Es decir, una función f está en el espacio $W(L^p, \ell^q)$ si y sólo si la sucesión $(\|f \cdot \chi_{[k, k+1]}\|_p)_k \in \ell^q(\mathbb{R})$. Para un tratamiento detallado de estos espacios, referirse a [Hei03].

El *espacio Amalgama de Wiener* original, estaba definido como

$$W(C_0, \ell^1) = \{f \in W(L^\infty, \ell^1) : f \text{ es continua}\}$$

y será este el que relacionaremos con el Teorema 1.3.2. Antes de esto, veamos como se comporta la Transformada de Zak sobre estos espacios.

Lema 5.1.1 *La aplicación lineal $Z : W(L^\infty, \ell^1) \longrightarrow L^\infty(\mathcal{Q})$ es continua.*

Demostración. La linealidad de esta aplicación se desprende inmediatamente de la definición de la transformada de Zak. Luego, sólo debemos ver que resulta continua.

Sea $g \in W(L^\infty, \ell^1)$. Entonces,

$$\begin{aligned} |Zg(t, \omega)| &= \left| \sum_k g(t+k)e^{2\pi i\omega k} \right| \\ &\leq \sum_k |g(t+k)| \\ &\leq \sum_k \|g \cdot \chi_{[k, k+1]}\|_\infty = \|g\|_{W(L^\infty, \ell^1)} \end{aligned}$$

a.e $(t, \omega) \in \mathcal{Q}$, por lo tanto

$$\|Zg\|_{L^\infty(\mathcal{Q})} \leq \|g\|_{W(L^\infty, \ell^1)}$$

y así queda demostrado que Z es continua sobre $W(L^\infty, \ell^1)$. ■

Este resultado sobre la Transformada de Zak, nos conduce al siguiente teorema, demostrado por Heil en [Hei90].

Teorema 5.1.2 *Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$ y $a, b > 0$ tales que $ab = 1$. Si el sistema de Gabor $\{g_{mb, na}\}$ forma un marco exacto de $L^2(\mathbb{R})$, entonces*

$$g \notin W(C_0, \ell^1) \quad y \quad \hat{g} \notin W(C_0, \ell^1).$$

Demostración. Como ya discutimos anteriormente en este trabajo, basta considerar el caso $a = b = 1$.

Supongamos que $g \in W(C_0, \ell^1)$, entonces $g(t+k)e^{2\pi i\omega k}$ es una función continua en t y ω , para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Por el Lema 5.1.1, $Zg(t, \omega)$ converge en norma infinito; es decir, uniformemente en \mathcal{Q} . Esto mismo ocurre, si consideramos cualquier otro cubo que resulta ser una traslación de \mathcal{Q} . Luego, al ser Zg límite uniforme de funciones continuas sobre cada traslación de \mathcal{Q} , resulta que Zg es continua en $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$. Por lo tanto, como vimos en la Proposición 2.1.5, Zg debe tener un cero y esto contradice el hecho de que $\{g_{mb, na}\}$ forme un marco exacto de $L^2(\mathbb{R})$ (ver Teorema 2.1.4, capítulo 2). Entonces, $g \notin W(C_0, \ell^1)$.

Si para cada par $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, transformamos Fourier, obtenemos

$$\begin{aligned} (g_{m,n})^\wedge(\omega) &= (e^{2\pi imt}g(t-n))^\wedge(\omega) \\ &= (g(t-n))^\wedge(\omega-m) \\ &= e^{-2\pi in\omega} \hat{g}(\omega-m) \\ &= \hat{g}_{-n,m}(\omega). \end{aligned}$$

Luego, como en sistema de Gabor generado por g es un marco exacto, también lo es el sistema de Gabor generado por \hat{g} . Esto nos permite demostrar del mismo modo que hicimos para g , que $\hat{g} \notin W(C_0, l^1)$. ■

El teorema anterior afirma que si $\{g_{m,n}\}$ es un marco de $L^2(\mathbb{R})$ entonces g no es suave o no tiene buen decaimiento en el infinito. Podríamos preguntarnos de que manera se relacionan este resultado y el *Teorema de Balian-Low*, que bajo las mismas hipótesis asegura la mala localización de la función g en el plano tiempo-frecuencia. Aunque sería bueno que alguno de estos dos teoremas nos dé información sobre el otro, esto no ocurre.

En [BHW95] se exhiben ejemplos de funciones que verifican

$$\|tg(t)\|_2 \|\gamma\hat{g}(\gamma)\|_2 = +\infty \quad \text{y} \quad g, \hat{g} \in W(C_0, l^1)$$

y también de funciones tales que

$$\|tg(t)\|_2 \|\gamma\hat{g}(\gamma)\|_2 < +\infty \quad \text{y} \quad g, \hat{g} \notin W(C_0, l^1)$$

lo cual implica que ambos resultados son independientes.

5.2. El Teorema de Balian-Low para Bases de Schauder

Una *Base de Schauder*, en un espacio de Hilbert H es una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que verifica lo siguiente:

Para toda $f \in H$ existen únicos escalares $\{c_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de modo tal que

$$\sum_{n=1}^N c_n(f) f_n \longrightarrow f, \quad \text{cuando} \quad N \rightarrow \infty.$$

Es importante tener en cuenta que las series asociadas a una base de Schauder no necesariamente convergen incondicionalmente. Es decir, sólo afirmamos que la convergencia de la serie $(\sum_{n=1}^N c_n(f) f_n)_{N \in \mathbb{N}}$ es en el orden de los índices.

Las funciones lineales $c_n : H \longrightarrow \mathbb{C}$, resultan continuas, por lo cual para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\tilde{f}_n \in H$ tal que $c_n(f) = \langle f, \tilde{f}_n \rangle$. Luego, la sucesión $\{\tilde{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es biortogonal a $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Así cada base de Schauder, tiene asociada una sucesión biortogonal.

Dada una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en H que tiene una sucesión biortogonal $\{\tilde{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, podemos definir los operadores $S_N : H \longrightarrow H$ como

$$S_N(f) = \sum_{n=1}^N \langle f, \tilde{f}_n \rangle f_n.$$

El siguiente teorema, caracteriza a las bases de Schauder en relación a estos operadores. Su demostración puede encontrarse en [Hei87].

Teorema 5.2.1 *Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H$, donde H es un espacio de Hilbert. Entonces son equivalentes:*

- (a) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de Schauder.
- (b) Existe una sucesión $\{\tilde{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ biortogonal a $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que los operadores S_N convergen al operador identidad. Esto es,

$$\forall f \in H, \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \tilde{f}_n \rangle f_n.$$

- (c) Existe una sucesión biortogonal $\{\tilde{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que los operadores S_N están uniformemente acotados en la norma de operadores, i.e

$$\sup_N \|S_N\| < \infty.$$

El número $C = \sup_N \|S_N\|$, se llama constante de base para $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y la sucesión biortogonal $\{\tilde{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, resulta ser también una base de Schauder que habitualmente se llama base dual.

Un sistema de Gabor, está naturalmente indexado por $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, pero este conjunto de índices no viene equipado con una enumeración standard. Como la expansión en una base de Schauder depende del orden en la sumatoria, es necesaria la siguiente definición:

Definición 5.2.2 *El sistema de Gabor $\{g_{m_b, n_a}\}$ es una Base de Schauder de $L^2(\mathbb{R})$, si para alguna numeración $\{(m_j, n_j)\}_{j=1}^{\infty}$ del conjunto de índices $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se verifica que para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ existen únicos escalares $c_{m_j, n_j}(f)$ tales que*

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_{m_j, n_j}(f) g_{m_j, n_j} \quad (5.1)$$

con convergencia en norma- L^2 .

Recordemos que cuando el sistema $\{g_{m_b, n_a}\}$ es un marco de $L^2(\mathbb{R})$, la convergencia en (5.1) vale cualquiera sea el orden de la sumatoria. Es decir, la serie $f = \sum_{m, n} c_{m, n}(f) g_{m, n}$ converge incondicionalmente a f . También cabe destacar que, en las bases de Schauder no hay relación alguna entre el tamaño de los coeficientes $c_{m, n}(f)$ y la norma de f . No obstante, se tiene

representación única de cada elemento f , lo que no ocurría en el caso de marcos.

Nos proponemos dar una versión del *Teorema de Balian-Low* para el caso en que el sistema $\{g_{mb,na}\}$ sea una base de Schauder de $L^2(\mathbb{R})$. Para esto, al igual que hicimos para el caso de marcos exactos, nos reduciremos a trabajar con $a = b = 1$, pues tenemos una versión del Teorema de Densidad para bases de Schauder. Referimos al lector a [Hei06], donde se encuentra un detallado estudio del el Teorema de Densidad y extensas referencias a la literatura original.

Teorema 5.2.3 (*Teorema de Densidad para Bases de Schauder*)

Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$ y $a, b > 0$. Si el sistema de Gabor $\{g_{mb,na}\}$ es una base de Schauder de $L^2(\mathbb{R})$, entonces $ab = 1$.

Cuando estudiamos los marcos de Gabor exactos, vimos que su marco dual canónico resultaba ser también un marco exacto. Ahora probaremos que lo mismo sucede para sistemas de Gabor que son bases de Schauder.

Proposición 5.2.4 Si $g \in L^2(\mathbb{R})$ y el sistema $\{g_{m,n}\}$ es minimal y completo en $L^2(\mathbb{R})$ entonces su único sistema biortogonal tiene la forma $\{\tilde{g}_{m,n}\}$, donde la función dual \tilde{g} queda determinada por la condición

$$Z\tilde{g} = 1/\overline{Zg}.$$

En particular, esto muestra que la base dual de un sistema de Gabor que forma una base de Schauder, es también un sistema de Gabor que constituye una base de Schauder.

Demostración. Por el Teorema 2.1.4 la función $G = 1/\overline{Zg} \in L^2(\mathcal{Q})$. Entonces como la transformada de Zak es un isomorfismo entre $L^2(\mathbb{R})$ y $L^2(\mathcal{Q})$, la función definida como $\tilde{g} = Z^{-1}G$ está en $L^2(\mathbb{R})$.

Para (m, n) y (k, j) en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \langle g_{m,n}, \tilde{g}_{k,j} \rangle &= \langle Z(g_{m,n}), Z(\tilde{g}_{k,j}) \rangle \\ &= \langle e_n e_m Zg, e_k e_j Z\tilde{g} \rangle \\ &= \langle e_m e_n, e_k e_j \rangle \\ &= \delta_{mk} \delta_{nj}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{g_{m,n}\}$ y $\{\tilde{g}_{m,n}\}$ son biortogonales. Como en el caso de ser minimal y completo el biortogonal es único, tenemos que $\{\tilde{g}_{m,n}\}$ es el sistema biortogonal a $\{g_{m,n}\}$.

Si en particular $\{g_{m,n}\}$ es una base de Schauder, entonces el sistema $\{g_{m,n}\}$ es minimal y completo. Luego, como acabamos de probar, el único sistema biortogonal a $\{g_{m,n}\}$, es de la forma $\{\tilde{g}_{m,n}\}$, y por lo tanto $\{\tilde{g}_{m,n}\}$ es una bse de Schauder de $L^2(\mathbb{R})$ (ver aclaración final del Teorema 5.2.1). ■

Para la demostración de la versión del *Teorema de Balian-Low* para bases de Schauder, es necesario el siguiente lema, que aparece publicado en [HP06]:

Lema 5.2.5 *Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$. Si el sistema $\{g_{m,n}\}$ es una base de Schauder respecto de la enumeración $\{(m_j, n_j)\}_{j=1}^{\infty}$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, entonces también es base de Schauder para la enumeración $\{(-m_j, -n_j)\}_{j=1}^{\infty}$.*

Equivalentemente, si $\{g_{m_j, n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ es una base de Schauder de $L^2(\mathbb{R})$ con base dual $\{\tilde{g}_{m_j, n_j}\}_{j=1}^{\infty}$, entonces $\{g_{-m_j, -n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ es una base de Schauder con base dual $\{\tilde{g}_{-m_j, -n_j}\}_{j=1}^{\infty}$.

Teorema 5.2.6 *Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$. Si $\{g_{m,n}\}$ es una base de Schauder de $L^2(\mathbb{R})$ con base dual $\{\tilde{g}_{m,n}\}$, entonces*

$$\|tg(t)\|_2 \|\gamma\hat{g}(\gamma)\|_2 \|t\tilde{g}(t)\|_2 \|\gamma\hat{\tilde{g}}(\gamma)\|_2 = +\infty.$$

Este teorema es similar a la versión débil del Teorema 1.3.2. En su demostración se procede de la misma forma que en el Teorema 4.2.1, pero siendo cuidadosos con el sentido de la convergencia que tienen los desarrollos en serie.

Demostración.

Como $\{g_{m,n}\}$ es una base de Schauder de $L^2(\mathbb{R})$, existe una numeración $\{(m_j, n_j)\}_{j=1}^{\infty}$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de modo tal que

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \tilde{g}_{m_j, n_j} \rangle \langle g_{m_j, n_j} \rangle \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Supongamos que $Pg, P\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$ y $P\hat{g}, P\hat{\tilde{g}} \in L^2(\hat{\mathbb{R}})$. Del mismo modo que hicimos en el Teorema 4.2.1, resultan las igualdades

$$\langle Pg, \tilde{g}_{m,n} \rangle = \langle g_{-m, -n}, P\tilde{g} \rangle \quad \text{y} \quad \langle Mg, \tilde{g}_{m,n} \rangle = \langle g_{-m, -n}, M\tilde{g} \rangle.$$

Luego, por el Lema 5.2.5

$$\begin{aligned} \langle Pg, M\tilde{g} \rangle &= \left\langle \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \langle Pg, \tilde{g}_{m_j, n_j} \rangle g_{m_j, n_j}, M\tilde{g} \right\rangle \\ &= \left\langle \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \langle g_{-m_j, -n_j}, P\tilde{g} \rangle g_{m_j, n_j}, M\tilde{g} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \langle g_{-m_j, -n_j}, P\tilde{g} \rangle \langle g_{m_j, n_j}, M\tilde{g} \rangle \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \langle g_{-m_j, -n_j}, P\tilde{g} \rangle \langle Mg, \tilde{g}_{-m_j, -n_j} \rangle \\
&= \left\langle Mg, \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \langle g_{-m_j, -n_j}, P\tilde{g} \rangle, \tilde{g}_{-m_j, -n_j} \right\rangle \\
&= \langle Mg, P\tilde{g} \rangle.
\end{aligned}$$

Como consecuencia del Lema 4.2.2,

$$\frac{1}{2\pi i} \langle g, \tilde{g} \rangle = \langle Pg, M\tilde{g} \rangle - \langle Mg, P\tilde{g} \rangle$$

y así debería ser $0 = \langle g, \tilde{g} \rangle$. Esto no puede ser debido a la biortogonalidad de los sistemas $\{g_{m,n}\}$ y $\{\tilde{g}_{m,n}\}$. ■

Enunciamos a continuación una simple caracterización de los sistemas de Gabor que constituyen bases de Schauder de $L^2(\mathbb{R})$ a través de la Transformada de Zak, pero primero daremos dos definiciones.

Sea $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, el cociente como grupo aditivo y $L^1(\mathbb{T} \times \mathbb{T})$ el conjunto de todas las funciones de \mathbb{R}^2 que son 1-periódicas en cada variable e integrables en $[0, 1]^2$.

Definición 5.2.7 Una función no negativa $\omega \in L^1(\mathbb{T} \times \mathbb{T})$ está en el espacio $\mathcal{A}_2(\mathbb{T} \times \mathbb{T})$ si existe una constante $C > 0$ tal que para todos los intervalos $I, J \subseteq \mathbb{R}$ se tiene

$$\left(\frac{1}{|I||J|} \int_J \int_I \omega(x, y) dx dy \right) \left(\frac{1}{|I||J|} \int_J \int_I \frac{1}{\omega(x, y)} dx dy \right) \leq C.$$

Esta definición es equivalente a pedir que ω satisfaga, para casi todo $x \in \mathbb{T}$ y para todo intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$, la condición

$$\left(\int_J \omega(x, y) dy \right) \left(\int_J \frac{1}{\omega(x, y)} dy \right) \leq C$$

y lo mismo, para la variable y .

Definición 5.2.8 Sea Λ el conjunto de todas las enumeraciones $\{(m_j, n_j)\}_{j=1}^{\infty}$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que están contruidas de la siguiente forma:

(a) Se elige un número entero positivo A . Entonces los términos iniciales de la enumeración son

$$(0, 0), (1, 0), (-1, 0), \dots, (A, 0), (-A, 0).$$

(b) En este segundo paso se elige entre agregar los puntos

$$(A + 1, 0), (-(A + 1), 0)$$

o agregar los puntos

$$(0, 1), (1, 1), (-1, 1), \dots, (A, 1), (-A, 1)$$

y

$$(0, -1), (1, -1), (-1, -1), \dots, (A, -1), (-A, -1).$$

De aquí en más el procedimiento es el mismo. Esto es:

Si se tiene enumerado el rectángulo

$$\{-N, \dots, N\} \times \{-M, \dots, M\},$$

se lo amplía en sentido vertical, agregando los términos superiores e inferiores o en sentido horizontal, agregando los términos correspondientes a los lados derecho e izquierdo.

También se puede empezar eligiendo $B \in \mathbb{N}$ para que los primeros términos sean

$$(0, 0), (0, 1), (0, -1), \dots, (0, B), (0, -B),$$

y continuar del mismo modo completando en sentido vertical y horizontal.

Cabe aclarar que para obtener una enumeración completa de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, se debe elegir completar el rectángulo infinitas veces en sentido vertical e infinitas veces en sentido horizontal.

Teorema 5.2.9 Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces son equivalentes:

(a) El sistema de Gabor $\{g_{m,n}\}$ es una base de Schauder de $L^2(\mathbb{R})$ con respecto a toda enumeración del conjunto Λ .

(b) $|Zg(t, \omega)|^2 \in \mathcal{A}_2(\mathbb{T} \times \mathbb{T})$.

Este teorema afirma que si $|Zg(t, \omega)|^2 \in \mathcal{A}_2(\mathbb{T} \times \mathbb{T})$ entonces $\{g_{m,n}\}$ es una base de Schauder de $L^2(\mathbb{R})$ para las enumeraciones de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que estén en el conjunto Λ . Esto no quiere decir que $\{g_{m,n}\}$ sea un marco exacto pues existen enumeraciones de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que no están consideradas en el conjunto Λ .

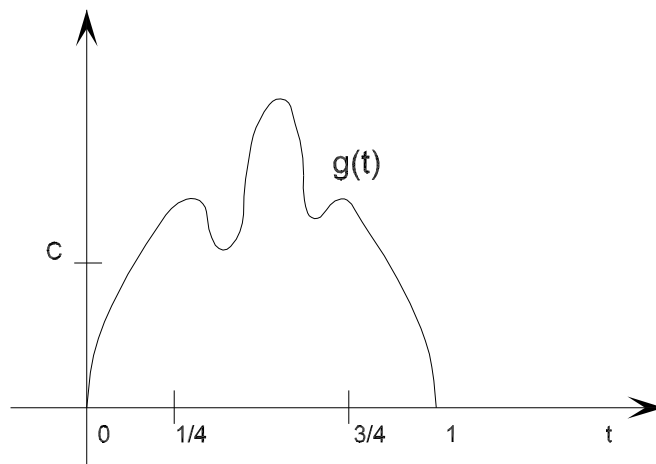
Utilizando este resultado, construiremos a continuación un sistema de Gabor que constituye una base de Schauder de $L^2(\mathbb{R})$ pero no un marco exacto.

Ejemplo 5.2.10

Sea $0 < \alpha < 1/2$. Tomemos la función $g \in L^2(\mathbb{R})$ que satisface las siguientes condiciones:

- (a) g toma valores reales,
- (b) $\text{sop}(g) \subseteq [0, 1]$,
- (c) g es infinitamente diferenciable en $(0, 1)$,
- (d) $g(t) = t^\alpha$ en el intervalo $[0, 1/4]$
- (e) $g(t) = (1 - t)^\alpha$ en el intervalo $[3/4, 1]$,
- (f) $g(t + 1/2)$ es par, es decir simétrica respecto al eje $t = 1/2$,
- (g) $g(t) \geq C > 0$ para todo $t \in (1/4, 3/4)$.

En el siguiente gráfico, aparece representada, a modo de ejemplo, una función g que verifica todas las propiedades enumeradas anteriormente:



Veamos que una función g que verifica todas estas condiciones, genera un sistema de Gabor que es una base de Schauder de $L^2(\mathbb{R})$ pero no un marco exacto.

Como g está soportada en $[0, 1]$, $Zg(t, \omega) = g(t)$. Un calculo casi directo muestra que $|Zg(t, \omega)|^2 = |g(t)|^2 \in \mathcal{A}_2(\mathbb{T} \times \mathbb{T})$. Por lo tanto, debido al Teorema 5.2.9, el sistema de Gabor $\{g_{m,n}\}$ es una base de Schauder de $L^2(\mathbb{R})$ con respecto a toda enumeración del conjunto Λ . Por otro lado, como $Zg(t, \omega) = g(t)$, $|Zg|$ no está acotada inferiormente pues satisface las condiciones (d) y (e). Entonces, por el Teorema 2.1.4, el sistema $\{g_{m,n}\}$ no puede ser un marco de $L^2(\mathbb{R})$.

Con este mismo ejemplo, en [HP06] se muestra como el *Teorema de Balian-Low* deja de ser cierto si se reemplaza la hipótesis de marco exacto por base de Schauder.

5.3. Comentarios

Con el objetivo de generalizar el *Teorema de Balian-Low* a ámbitos más abstractos, este resultado sigue siendo estudiado con rigurosidad, aún hoy en día. Presentamos ahora, a modo de comentario, algunas de las versiones que se han publicado en los últimos años.

Los autores Benedetto, Czaja, Gadziński y Powell ([BCGP02]), han estudiado la posibilidad de cambiar los pesos t^2 y γ^2 en

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 |t|^2 dt \quad \text{y} \quad \int_{\hat{\mathbb{R}}} |\hat{g}(\gamma)|^2 |\gamma|^2 d\gamma$$

por algo menor sin alterar el resultado del *Teorema de Balian-Low* para el caso de bases ortonormales.

Prueban que la potencia 2 es óptima en este sentido, o sea que cambiando t^2 y γ^2 por t^α y γ^α con $\alpha < 2$ no tenemos asegurada la tesis del *Teorema de Balian-Low*.

Apartir de un resultado más general, obtienen de manera constructiva el siguiente Teorema:

Teorema 5.3.1 *Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe una función $g \in L^2(\mathbb{R})$ de modo tal que el sistema de Gabor asociado $\{g_{m,n}\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ y además*

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 \frac{1 + |t|^2}{\log^{1+\varepsilon}(2 + |t|)} dt < \infty \quad (5.2)$$

y

$$\int_{\hat{\mathbb{R}}} |\hat{g}(\gamma)|^2 \frac{1 + |\gamma|^2}{\log^{2+\varepsilon}(2 + |\gamma|)} d\gamma < \infty \quad (5.3)$$

La idea básica de la demostración de este resultado es, para cada $\varepsilon > 0$, construir una función de módulo 1 definida sobre \mathcal{Q} que sea la Transformada de Zak de una $g \in L^2(\mathbb{R})$ que satisfaga las condiciones de decaimiento y regularidad (5.2) y (5.3). El hecho de que esta función tenga módulo 1 nos asegura que el sistema de Gabor asociado a g constituye una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Una versión aún más general de este teorema, es la que aparece publicada en [BP06]:

Teorema 5.3.2 *Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$. Si dados $1 < q < 2 < p < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $0 < \varepsilon < 2 - q$, se verifica que*

$$\int_{\mathbb{R}} |t|^{p+\varepsilon} |g(t)|^2 dt < \infty \quad \text{y} \quad \int_{\widehat{\mathbb{R}}} |\gamma|^{q+\varepsilon} |\hat{g}(\gamma)|^2 d\gamma < \infty,$$

entonces $\{g_{m,n}\}$ no puede ser un marco exacto de $L^2(\mathbb{R})$.

Posteriormente, Benedetto, Czaja y Powell ([BCP06]), construyen una función $g \in L^2(\mathbb{R})$, óptima en el sentido del teorema anterior para $(p, q) = (3/2, 3)$. Más precisamente, la función que construyen verifica que el sistema de Gabor que genera es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ y además

$$\int_{\mathbb{R}} |t|^{3/2+\varepsilon} |g(t)|^2 dt < \infty \quad \text{y} \quad \int_{\widehat{\mathbb{R}}} |\gamma|^{3+\varepsilon} |\hat{g}(\gamma)|^2 d\gamma < \infty,$$

para $\varepsilon \in (0, 3/2)$. Cuando $\varepsilon = 0$, ambas integrales resultan infinitas.

También en relación a este tema, se ha estudiado el caso límite $(p, q) = (1, \infty)$. En [BCPS06], los autores prueban el siguiente teorema:

Teorema 5.3.3 *Si $g \in L^2(\mathbb{R})$ genera un sistema de Gabor $\{g_{m,n}\}$, que constituye un marco exacto de $L^2(\mathbb{R})$, entonces*

$$\left(\sup_{N>0} \int_{\mathbb{R}} |t|^N |g(t)|^2 dt \right) \left(\int_{\widehat{\mathbb{R}}} |\gamma| |\hat{g}(\gamma)|^2 d\gamma \right) = +\infty.$$

Por último, en el trabajo realizado por Gröchenig, Han, Heil y Kutyniok ([GHHK02]), se extiende el *Teorema de Balian-Low* a dimensiones mayores.

Obtienen una versión débil del Teorema 1.3.2, válida para sistemas de Gabor construidos sobre retículas en \mathbb{R}^{2d} , y una versión fuerte si se consideran los reticulados simplécticos, que se definen a continuación:

Definición 5.3.4 *Para $(t_1, \omega_1), (t_2, \omega_2) \in \mathbb{R}^{2d}$, se define el corchete $[,]$ como*

$$[(t_1, \omega_1), (t_2, \omega_2)] = t_2 \omega_1 - t_1 \omega_2.$$

Ahora, podemos definir el grupo $Sp(d)$, como el conjunto de todas las matrices $M \in GL(2d, \mathbb{R})$ que satisfacen:

$$[Mx, My] = [x, y] \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{2d}.$$

Definición 5.3.5 *Un reticulado $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^{2d}$, es un reticulado simpléctico si*

$$\Lambda = \alpha M \mathbb{Z}^{2d},$$

para algún $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $M \in Sp(d)$.

En particular, como $Sp(1) = SL(2, \mathbb{R})$, toda retícula en \mathbb{R}^2 es simpléctica, cosa que no sucede si $d > 1$.

También, estos mismos autores, extienden el *Teorema de Balian-Low* para bases ortonormales, al caso en que los sistemas de Gabor son construidos sobre conjuntos simétricos respecto al origen.

Teorema 5.3.6 *Sea Λ una sucesión numerable en \mathbb{R}^{2d} , tal que $\Lambda = -\Lambda$. Si $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ genera un sistema de Gabor sobre Λ que constituye un base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces*

$$(a) \int_{\mathbb{R}^d} |x_j g(x)|^2 dx = +\infty, \text{ para algún } j = 1, \dots, d, \text{ y}$$

$$(b) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |xg(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\omega \hat{g}(\omega)|^2 d\omega \right) = +\infty$$

Además, generalizaron el Teorema 5.1.2, que probamos en la primera sección de este capítulo, del siguiente modo:

Teorema 5.3.7 *Si $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ genera un sistema de Gabor construido sobre la retícula $\alpha \mathbb{Z}^d \times \frac{1}{\alpha} \mathbb{Z}^d$, que constituye un marco exacto de $L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces $g \notin W(C_0, \ell^1)$ y $\hat{g} \notin W(C_0, \ell^1)$.*

Problemas abiertos

La posibilidad de obtener versiones más generales del *Teorema de Balian-Low*, sigue siendo motivo de estudio en estos días. Algunos de los problemas abiertos que hay en relación a este tema son los siguientes:

- Obtener una demostración del Teorema 1.3.2, basada en la teoría de operadores sin utilizar en ella la teoría de distribuciones. (Ver capítulo 4).
- Extender el *Teorema de Balian-Low* para dimensiones mayores, a reticulados más generales que los simplécticos.
- Lograr una versión del Teorema 5.3.7, sobre reticulados que no sean exclusivamente de la forma $\alpha \mathbb{Z}^d \times \frac{1}{\alpha} \mathbb{Z}^d$.

Notaciones

- \mathbb{R}^d Espacio euclideo d -dimensional.
- \hat{f} La Transformada de Fourier de f .
- $\widehat{\mathbb{R}}^d$ Espacio euclideo d -dimensional donde vive la variable en la cual se evalúa a \hat{f} .
- \tilde{f} Función dual de f .
- $\{a_k\}_k$ Sucesiones indexadas, donde el conjunto de índices se sobre entiende según el contexto.
- \langle , \rangle Producto interno en un espacio de Hilbert.
- X^* El dual de un espacio de Banach X .
- Zf Transformada de Zak de f .
- $\{g_{bm,an}\}$ Sistema de Gabor generado por g sobre la retícula $a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$.
- $\chi_A(x)$ Función característica que vale 1 si $x \in A$ y 0 si no.
- $\delta_{m,n}$ Función delta que vale 1 si $m = n$ y 0 en otro caso.
- $S(\mathbb{R})$ Clase de Schwartz.
- AC_{loc} Funciones que, localmente, son absolutamente continuas.
- $f * g$ Convolución entre f y g definida como
 $(f * g)(t) = \int f(t - s)g(s)ds$.
- $\mathcal{D}(\Omega)$ Funciones definidas sobre Ω infinitamente diferenciables de soporte compacto. En este trabajo, $\Omega = \mathcal{Q}$ o $\Omega = \mathbb{R}^d$.
- $\mathcal{D}'(\Omega)$ Dual topológico de \mathcal{D} .
- T_f Distribución asociada a f .
- ∂ Derivada débil.
- D Derivada clásica.
- $\mathcal{Q}(x; r)$ Cubo de radio r y centro x .
- $L^p(\Omega)$ Funciones definidas sobre Ω tales que $\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$.
 En este trabajo, $\Omega = \mathcal{Q}$ o $\Omega = \mathbb{R}^d$.
- ℓ^p Sucesiones escalares $\{x_k\}_k$ tales que $\sum_k |x_k|^p < \infty$.
- $\| \cdot \|_p$ Norma en el espacio L^p , definida como $(\int |f(x)|^p dx)^{1/p}$.
- $GL(d, \mathbb{R})$ Matrices en $\mathbb{R}^{d \times d}$, de determinante distinto de cero.
- $SL(d, \mathbb{R})$ Matrices en $GL(d, \mathbb{R})$ de determinante 1.

Bibliografía

- [Alv05] L. Alvarez Alonso, *Distribution Theory and Fourier Transform (a user's manual)* Cuadernos de Matemática y Mecánica, CIMEC-IMAL, 2005.
- [Bal81] R. Balian *Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique*, C. R. Acad. Sci. Paris **292** (1981), 1357-1362.
- [Bat88] G. Battle, *Heinseberg proof of the Balian-Low Theorem*, Lett. Math. Phys. **15**(1988), 175-177.
- [Ben94] J.J Benedetto, *Frames decompositions, sampling and uncertainty principle inequalities*, Wavelets: Mathematics and Applications (J.J Benedetto and M: W: Frazier, eds.) CRC Press, Boca Raton, FL, 1993, pp 247-304.
- [BCGP02] J.J Benedetto, W. Czaja, P. Gadziński y A.M. Powell, *The Balian-Low Theorem and Regularity of Gabor Systems*, J. Geom. Anal. **13** (2003), no. 2, pp.239-254.
- [BCP06] J.J Benedetto, W. Czaja y A.M. Powell, *An optimal example for the Balian-Low uncertainty principle*, SIAM J. Math. Anal., **38** (2006), pp. 333-345.
- [BCPS06] J.J Benedetto, W. Czaja, A.M. Powell y J. Sterbenz, *An endpoint $(1, \infty)$ Balian-Low theorem*, Math. Res. Lett., **13** (2006), pp. 467-474.
- [BHW95] J.J Benedetto, C. Heil y D.F. Walnut, *Differentiation and the Balian-Low Theorem*, J. Fourier Anal. Appl. **1**(1995), pp. 355-402.
- [BP06] J.J Benedetto y A.M. Powell, *A (p, q) version of Bourgain's theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., **358**(2006), pp. 2489-2505.

- [Dau90] I. Daubechies *The Wavelet Transform, time-frequency localization and signal analysis*, IEEE Trans. Inform. Theory **36** (1990), 961-1005.
- [Dau92] ———, *Ten Lectures on Wavelets* SIAM Press, Philadelphia, 1992.
- [DJ93] I. Daubechies y A.J.E.M. Janssen, *Two theorems on lattice expansions*, IEEE Trans. Inform. Theory **39**(1993), 3-6.
- [Duo90] J. Douandkoerxea Zuazo, *Análisis de Fourier*, Ediciones de las ciudad autónoma de Madrid, 1990.
- [GHHK02] K. Gröchenig, D. Han, C. Heil y G.Kutyniok, *The Balian-Low Theorem for symplectic lattices in higher dimensions*, Appl. Comput. Harmon. Anal.,**13**(2002), pp.169-176.
- [Hei87] C. Heil, *A basis theory primer*, manuscrito, 93 págs, 1987 revisado 1997.
- [Hei89] ———, *A discret Zak transform*, The MITRE Corporation, Technical Report MTR-89W00128 (1989).
- [Hei90] ———, *Wiener amalgam spaces in generalized harmonic analysis and wavelet theory*, Ph.D thesis, University of Maryland, College Park, MD, 1990.
- [Hei03] ———, *An introduction to weighted Wiener amalgams*, in: "Wavelets and their Applications"(Chennai, January 2002), M. Krishna, R. Radha and S. Thangavelu, eds., Allied Publishers, New Delhi, 2003, pp. 183-216.
- [Hei06] ———, *History and evolution of the Density Theorem for Gabor frames*, preprint (2006).
- [HP06] C. Heil y A.M. Powell, *Gabor Schauder Bases and The Balian-Low Theorem*, J. Math. Phys. **47** (2006), no. 11, 113506, 21pp.
- [HW89] C. Heil y D. Walnut, *Continuous and discret wavelet transform*, SIAM Review **31** (1989), 628-666.
- [Low85] F. Low, *Complete sets of wave packets*, A Passion for Physics-Essays in Honor of Geoffrey Chew (C. DeTar, et al., eds.), Wold Scientific, Singapore, 1985, pp. 17-22.

- [Pin01] M. A. Pinsky, *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets*, 1st.edition, Books/Cole, eds., 2001.
- [Sch66] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1966.