UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Pequeñas perturbaciones aleatorias de sistemas dinámicos

Santiago Juan Saglietti

Director: Pablo Groisman

22 de diciembre de 2009

Índice general

Introducción

Las ecuaciones diferenciales han probado ser de gran utilidad para modelar un gran número de fenómenos físicos, químicos y biológicos. Por ejemplo, una amplia clase de ecuaciones de evolución, que de acuerdo a la terminología usual en ecuaciones en derivadas parciales se clasifican bajo el rubro de ecuaciones parabólicas semilineales, surgen en el estudio de fenómenos tan variados como la difusión de un fluido en un medio poroso, el transporte en un semiconductor, reacciones químicas acopladas con posibilidad de difusión espacial y genética de poblaciones. En todos estos casos, la ecuación representa un modelo aproximado del fenómeno y, por lo tanto, resulta interesante estudiar como la descripción del fenómeno puede cambiar bajo pequeñas perturbaciones estocásticas. Nos interesará en particular considerar ecuaciones de la forma

$$\dot{X}_t = b(X_t)$$

para un campo $b : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ localmente Lipschitz. Bajo esta hipótesis sobre b, dependiendo de la condición inicial podría suceder que las soluciones de la ecuación no se encuentren definidas para todo tiempo. Se produce entonces el fenómeno que se conoce como *explosión* o, según la literatura ingles, *blow-up*. Esto es, existe un tiempo T tal que la solución X se encuentra definida para todo tiempo anterior a T y, además, se verifica que $\lim_{t \to T^-} |X_t| = +\infty$. Agregando una pequeña perturbación aleatoria al sistema obtenemos la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = b(X_t)dt + \varepsilon dW_t$$

donde ε es un parámetro de perturbación positivo pequeño y W es un movimiento Browniano d-dimensional. Nos preguntamos entonces como se adapta el fenómeno de explosión al sistema estocástico y, en particular, nos preguntamos qué propiedades asintóticas posee el tiempo de explosión del sistema cuando ε tiende a cero. Responder este tipo de preguntas será la principal motivación de esta tesis. Antes de poder hacerlo, sin embargo, deberemos entender primero el contexto en el que está situado el problema.

La tesis está apuntada al lector con conocimientos básicos de Teoría de la Medida y Probabilidad. Esta consta de tres partes. La primera es, esencialmente, una presentación de los conocimientos básicos necesarios para poder trabajar con nuestro problema. En la segunda parte estudiamos la dinámica del sistema dado por la ecuación diferencial estocástica que figura arriba en el caso en que b es globalmente Lipschitz y tiene la forma $b = -\nabla U$ para U un potencial de doble pozo. Este modelo presenta algunas características similares a las de nuestro problema, pero su análisis resulta más sencillo debido a la condición de Lipschitz global sobre b. Por esta razón lo incluimos en la tesis previo al estudio de nuestro problema, su mayor simplicidad permitirá al lector poco familiarizado con estos temas comprender más fácilmente las técnicas y argumentos que se utilizan para describir este tipo de dinámicas. Por último, en la tercera parte estudiamos el fenómeno de explosión o *blow-up* en un caso particular. Aquí, el campo b seguirá siendo un gradiente con la diferencia de que sólo verifica una condición de Lipschitz local. Esto introduce algunos cambios en la dinámica estocástica con respecto a la del modelo del potencial de doble pozo que hacen que el estudio de nuestro caso no pueda reducirse al elaborado en la segunda parte.

La primer parte abarca los primeros cuatro capítulos. Estos están basados principalmente en [5] y [7]. En el Capítulo 1 presentamos al movimiento Browniano y detallamos sus propiedades básicas. En el Capítulo 2 se desarrolla la teoría de integración de Itô junto con una breve introducción al cálculo estocástico. El Capítulo 3 trata sobre ecuaciones diferenciales estocásticas. Allí estudiamos los resultados clásicos de existencia y unicidad de soluciones como también analizamos que propiedades poseen estas últimas como procesos estocásticos. Por último, el Capítulo 4 hace una breve introducción a la Teoría de Grandes Desvíos, mostrando como ésta se aplica al estudio de perturbaciones de sistemas dinámicos. Este tipo de aplicaciones fue originalmente presentado en los trabajos de Freidlin y Wentzell y también pueden encontrarse detalladas en [3].

Los Capítulos 5 y 6 constituyen la segunda parte. En el primero estudiaremos las características generales de los sistemas determinístico y estocástico del modelo del potencial de doble pozo y, en el último, describiremos la dinámica del sistema estocástico en intervalos de tiempo grandes para $\varepsilon > 0$ pequeño. En concreto, estudiaremos cómo la presencia de ruido provoca que el sistema se escape de un pozo hacia el otro. Llamaremos *tiempo de salto* al tiempo que tarda en producirse este fenómeno en la dinámica. Estaremos interesados en las propiedades asintóticas de este tiempo: daremos cotas exponenciales para su orden de magnitud y mostraremos que, bajo una normalización apropiada, éste tiende tiende en distribución a una variable aleatoria exponencial de parámetro uno cuando la intensidad de la perturbación ε tiende a cero. Para el estudio del orden de magnitud del tiempo de salto seguiremos fundamentalmente a [7] que, a su vez, basa su exposición en los resultados que se encuentran en [3]. La convergencia en distribución fue probada originalmente en [4] y no nos desviaremos demasiado del análisis que allí figura. No obstante, daremos una presentación más completa y detallada de los resultados que las que aparecen en dichas referencias.

La tercera parte consta de los últimos dos capítulos. En el Capítulo 7 estudiaremos el sistema

$$\begin{cases} u_1' &= \frac{2}{h^2}(-u_1 + u_2) & \\ u_i' &= \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) & \text{si } 2 \leq i \leq d-1 \\ u_d' &= \frac{2}{h^2}(-u_d + u_{d-1} + h(|u_d|^{p-1}u_d - u_d)). & \end{cases}$$

donde $0 < h \leq 1$ y $p > 1$. Este sistema proviene de discretizar espacialmente la ecuación del calor en el intervalo $(0,1)$ con condición de borde de Neumann dada por $u_x(1,t)|u(1,t)|^{p-1}u(1,t), u_x(0,t) = 0$. Tanto la ecuación en derivadas parciales como su discretización poseen soluciones que explotan. Nos basaremos en el análisis provisto en [1] para las soluciones positivas de este sistema. Allí se muestra que, dependiendo de la condición inicial, la solución puede estar globalmente definida y converger a una solución estacionaria del sistema o explotar en tiempo finito. Dado que la presencia de ruido puede alejar a la solución de $\mathbb{R}^d_+$, deberemos estudiar el comportamiento de las soluciones que cambian de signo también. Por lo tanto, extenderemos el análisis realizado en [1] para datos iniciales arbitrarios. El comportamiento para soluciones con datos iniciales que cambian de signo es esencialmente el mismo. A continuación, en el Capítulo 8 describiremos la dinámica estocástica en intervalos de tiempo grandes para $\varepsilon > 0$ pequeño. Mostraremos que para datos iniciales en el dominio de atracción del origen con probabilidad que tiende a uno cuando ε tiende a cero el sistema escapa de este dominio y explota en un tiempo finito. Más aún, daremos acotaciones exponenciales para este tiempo de explosión y su perdida de memoria asintótica. Los resultados que figuran en este capítulo constituyen el aporte original de esta tesis.

Parte I

Capítulo 1

Movimiento Browniano

1.1. Introducción

Movimiento Browniano es el nombre con el que se conoce al movimiento irregular de partículas de polen, suspendidas en agua, observado por el botánico Robert Brown en 1828. Este movimiento aleatorio del polen, debido a los constantes choques con moléculas de agua, resulta en una dispersión o *difusión* de las partículas por el medio. A pesar de que el concepto de movimiento Browniano fue en un comienzo introducido para estudiar el comportamiento de partículas microscópicas en suspensión como en el caso de arriba, su rango de aplicaciones ahora es mucho más amplio y es utilizado para modelar precios de acciones, ruidos térmicos en circuitos eléctricos, ciertos comportamientos límite en sistemas de filas e inventarios y perturbaciones aleatorias en una variedad de otros sistemas físicos, biológicos y económicos.

Comenzamos dando algunas definiciones generales para procesos estocásticos a tiempo continuo.

Definición 1.1.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Un proceso estocástico X definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ se dice *medible* si la aplicación

$$ev_X : ([0, +\infty) \times \Omega, \mathcal{B}([0, +\infty)) \otimes \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

dada por $ev_X(s, \omega) = X_s(\omega)$, es medible.

Esta primera noción de medibilidad para un proceso estocástico resulta ser bastante pobre. Para poder dar nociones más interesantes, deberemos introducir el concepto de *filtración* en un espacio medible.

Definición 1.1.2. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Decimos que una familia $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de σ-álgebras contenidas en $\mathcal{F}$ es una *filtración* si $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ para todo $0 \leq s \leq t$.

Dada una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, definimos

$$\mathcal{F}_\infty := \sigma\Big(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\Big),$$

la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{F}_t$, para todo $t \geq 0$.

La introducción de filtraciones es importante para el estudio de procesos estocásticos: dada una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, podemos pensar que $\mathcal{F}_t$ representa toda la información disponible a tiempo t. Así, una filtración nos permitirá estudiar de manera más profunda cómo evolucionan los procesos estocásticos en la variable temporal.

Dado un proceso estocástico $X = \{X_t : t \geq 0\}$, el ejemplo más común de filtración es la generada por el proceso mismo, dada por

$$\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t),$$

la menor σ-álgebra respecto de la cual $(X_s)_{0\leq s\leq t}$ resulta una familia de funciones medibles.

Definición 1.1.3. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible, equipado con una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Un proceso estocástico X definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ se dice *adaptado a la filtración* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si para cada $t \geq 0$, X_t es $\mathcal{F}_t$-medible.

La idea de la definición es que, si X es un proceso adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, entonces para cada $t \geq 0$, la variable aleatoria X_t depende sólo de la información contenida en $\mathcal{F}_t$. Resulta claro que todo proceso X es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$.

Definición 1.1.4. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible, equipado con una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Un proceso estocástico X definido en $(\Omega, \mathcal{F})$ se dice *progresivamente medible* con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si, para cada $t \geq 0$, la aplicación

$$ev_X : ([\,0, t\,] \times \Omega, \mathcal{B}([\,0, t\,]) \otimes \mathcal{F}_t) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

dada por $ev_X(s, \omega) = X_s(\omega)$, es medible.

Todo proceso progresivamente medible es medible y adaptado. Más aún, la progresiva medibilidad es, en cierto sentido, la combinación de ambos conceptos: el proceso, visto como función de dos variables (t, ω), sólo depende de la información disponible hasta el presente, $\mathcal{B}([\,0, t\,]) \otimes \mathcal{F}_t)$.

Todas las definiciones se pueden dar, de manera análoga, para procesos estocásticos a valores en $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$.

Con estas definiciones, estamos ahora en condiciones de introducir formalmente al movimiento Browniano.

Definición 1.1.5. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtración. Decimos que un proceso estocástico $W = \{W_t : t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano si satisface las siguientes condiciones:

- W tiene trayectorias continuas (i.e. $\forall\ \omega \in \Omega$, $W_\cdot(\omega) : [\,0, +\infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ es función continua en t);
- W es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$;
- $P(\,W_0 = 0\,) = 1$;

- Para $0 \leq s \leq t$, el incremento $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ y tiene distribución normal con media cero y varianza $(t-s)$.

Si W es un movimiento Browniano y $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < +\infty$, entonces de la definición se sigue que los incrementos $(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})_{1 \leq j \leq n}$ son independientes y que la distribución de $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$ sólo depende de la magnitud $(t_j - t_{j-1})$. Decimos entonces que W tiene *incrementos independientes y estacionarios.*

La filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es parte de la definición de movimiento Browniano. Sin embargo, si tenemos un proceso W sin filtración asociada, pero sabemos que W tiene incrementos independientes y estacionarios, y que W_t tiene distribución normal con media cero y varianza t, entonces W resulta un movimiento Browniano con respecto a la filtración generada por el proceso. Esta filtración, que notaremos $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$, viene dada para cada t por $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s : 0 \leq s \leq t)$.

En ocasiones, será interesante e incluso necesario trabajar con una filtración estrictamente mayor que la generada por el proceso. Por ejemplo, ciertas ecuaciones diferenciales estocásticas no tendrán solución a menos que el proceso W involucrado sea un movimiento Browniano con respecto a una filtración estrictamente más grande que $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$. Poder contar con soluciones para ecuaciones diferenciales estocásticas es una motivación importante para permitir que la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ en la definición anterior sea, posiblemente, estrictamente mayor que la generada por el proceso.

Por último, puede mostrarse que la continuidad de las trayectorias y la adaptabilidad implican que W es un proceso estocástico progresivamente medible.

1.2. Construcción del movimiento Browniano

El primer problema que encontramos al estudiar el movimiento Browniano, es probar su existencia. Es decir, mostrar que existe un espacio de probabilidad en donde tengamos construído un proceso W y una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, de forma tal que se verifique la definición dada arriba. La construcción de un movimiento Browniano puede realizarse de diversas maneras, aquí comentaremos sólo una de ellas.

El espacio en donde contruiremos el movimiento Browniano será $C[0,+\infty)$, el espacio de funciones continuas a valores reales definidas en $[0,+\infty)$ con la métrica ϱ dada por

$$\varrho(\omega_1,\omega_2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \max_{0\leq t\leq n} (|\,\omega_1(t) - \omega_2(t)| \wedge 1).$$

Con esta métrica, $C[0,+\infty)$ resulta un espacio métrico completo y separable. Además, $\mathcal{B}(C[0,+\infty))$, la σ-álgebra generada por los abiertos en $C[0,+\infty)$, coincide con la σ-álgebra generada por los cilindros finito-dimensionales

$$C = \big\{\omega \in C[0,+\infty) : \big(\omega(t_1),\ldots,\omega(t_n)\big) \in A\big\}$$

con $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$.

Para entender por qué elegimos este espacio para dar la construcción, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.2.1. *Sea W un movimiento Browniano definido en un cierto espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Consideremos la transformación $T : \Omega \longrightarrow C[\,0, +\infty)$ dada por*

$$T(\omega) = W_\cdot(\omega).$$

Entonces, T resulta una aplicación $\mathcal{F}/\,\mathcal{B}\big(C[\,0,+\infty)\big)$-medible y, así, induce induce una probabilidad P_T en $C[\,0,+\infty)$. Más aún, bajo esta probabilidad P_T, las proyecciones $(\pi_t)_{t\geq 0}$ definidas por

$$\pi_t(f) = f(t) \quad \forall f \in C[\,0,+\infty)$$

constituyen un movimiento Browniano con respecto a $(\mathcal{F}_t^\pi)_{t\geq 0}$, la filtración generada por el proceso.

Demostración. Para verificar que T es medible, basta con ver $T^{-1}(C) \in \mathcal{F}$ para todo C conjunto cilíndrico pues, como observamos arriba, éstos generan $\mathcal{B}(C[\,0,+\infty))$. Más aún, podemos tomar C de la forma

$$C = \big\{f \in C[\,0,+\infty) : f(t_1) \in A_1, \ldots, f(t_n) \in A_n\big\}$$

para $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$.

Pero,

$$T^{-1}(C) = \{\omega \in \Omega : W_{t_1}(\omega) \in A_1, \ldots, W_{t_n}(\omega) \in A_n\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{W_{t_1} \in A_i\}$$

resulta $\mathcal{F}$-medible. Así, T es $\mathcal{F}/\,\mathcal{B}\big(C[\,0,+\infty)\big)$-medible.

De forma similar, podemos ver que el proceso π tiene incrementos independientes, estacionarios y que, para cada $t \geq 0$, π_t tiene distribución normal con media cero y varianza t. Con esto, π resulta un movimiento Browniano con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t^\pi)_{t\geq 0}$. □

Observación 1.2.2. Dado un proceso X con trayectorias continuas, podemos definir la aplicación T dada arriba y, al igual que en la proposición, mostrar que induce una probabilidad P_X en $\big(C[\,0,+\infty), \mathcal{B}\big(C[\,0,+\infty)\big)\big)$. A P_X se la conoce como la *ley* de X. Se tiene que la ley de un proceso de trayectorias continuas está determinada por la distribución sobre los cilindros finito-dimensionales.

La proposición anterior nos dice que de poder construirse el movimiento Browniano en algún espacio de probabilidad, también será posible hacerlo en $C[\,0,+\infty)$. Es por esto que comenzamos buscando una construcción de nuestro proceso directamente en el espacio de funciones continuas. Para poder proceder con esta tarea, necesitaremos de algunas definiciones previas.

Definición 1.2.3. Sea (S,ρ) un espacio métrico con la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(S)$. Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad en $\big(S,\mathcal{B}(S)\big)$ y sea P otra medida en este espacio. Decimos que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge débilmente* a P y notamos $P_n \xrightarrow{w} P$ si

$$\lim_{n\to+\infty}\int_S f\,dP_n = \int_S f\,dP$$

para toda $f: S\longrightarrow\mathbb{R}$ continua y acotada.

De la definición se deduce que el límite débil P es una medida de probabilidad y que es único[1]

Definición 1.2.4. Sea $\{(\Omega_n,\mathcal{F}_n,P_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios de probabilidad, y en cada espacio consideremos una variable aleatoria X_n con valores en el espacio métrico (S,ρ). Sea $(\Omega,\mathcal{F},P)$ otro espacio de probabilidad en el que tenemos definida una variable aleatoria X a valores en (S,ρ). Decimos que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en distribución* a X y notamos $X_n\xrightarrow{D} X$, si $P_{X_n}\xrightarrow{w} P_X$.

Habiendo dado las definiciones necesarias, presentamos a continuación una breve descripción de la construcción del movimiento Browniano en el espacio $C[\,0,+\infty)$. Para más detalles y una demostración rigurosa del Teorema 1.2.5 referimos al $(Karatzas)$.

Consideremos una sucesion de variables aleatorias $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ independientes, identicamente distribuidas con media cero y varianza σ^2, $0<\sigma^2<+\infty$. Tomemos la sucesión de sumas parciales $S_0=0, S_k=\sum_{j=1}^k \xi_j, k\in\mathbb{N}$. Podemos obtener un proceso Y a tiempo continuo mediante interpolación lineal, definiendo

$$Y_t = S_{[t]} + (t-[t])\xi_{[t]+1},\quad t\geq 0.$$

Escalando apropiadamente tanto tiempo como espacio, obtenemos de Y una sucesión de procesos $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$:

$$X_t^n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}Y_{nt},\quad t\geq 0. \tag{1.1}$$

Notemos que para $s=\frac{k}{n}$ y $t=\frac{k+1}{n}$, el incremento $X_t^{(n)}-X_s^{(n)}=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\,\xi_{k+1}$ es independiente de $\mathcal{F}_s^{X^{(n)}}=\sigma(\xi_1,\ldots,\xi_k)$. Más aún, $X_t^{(n)}-X_s^{(n)}$ tiene media cero y varianza $(t-s)$. Esto nos sugiere que los procesos $(X_t^{(n)}: t\geq 0)_{n\in\mathbb{N}}$ son, aproximadamente, un movimiento Browniano. La idea será ver que estos procesos $X^{(n)}$ convergen en distribución a un movimiento Browniano. Este es el contenido del próximo teorema.

Teorema 1.2.5 (Principio de Invariancia de Donsker)**.** *Sea $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espacio de probabilidad en donde se encuentre definida una sucesión $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas con media cero y varianza finita $\sigma^2>0$. Sea $X^{(n)}$ como en (1.1) y sea P_n la medida que induce en $\big(C[\,0,+\infty),\mathcal{B}(C[\,0,+\infty))\big)$. Entonces $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a P_*, la única medida de probabilidad definida en $\big(C[\,0,+\infty),\mathcal{B}(C[\,0,+\infty))\big)$ bajo la cual las proyecciones $(\pi_t)_{t\geq 0}$ constituyen un movimiento Browniano con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t^\pi)_{t\geq 0}$.*

[1] Estudiaremos cómo se desprende la unicidad del límite a partir de la definición en la Proposición 5.4.1.

La única probabilidad P_* bajo la cual el proceso π de las proyecciones en $C[0,+\infty)$ es un movimiento Browniano, se conoce como *medida de Wiener*.

Observación 1.2.6. Aunque hemos dado una construcción del movimiento Browniano en el espacio $C[0,+\infty)$, éste no es el único espacio en donde podemos hacerlo. De hecho, una construcción del movimiento Browniano es posible en cualquier espacio de probabilidad que contenga una familia numerable de variables aleatorias independientes, normalmente distribuidas con media cero y varianza uno. Un ejemplo de un tal espacio es $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\mathcal{L}$, donde $\mathcal{L}$ denota la medida de Lebesgue.

1.3. Propiedades del movimiento Browniano

En esta sección damos algunas propiedades del movimiento Browniano.

1.3.1. Propiedad de Martingala

El movimiento Browniano cae dentro de una familia de procesos conocida como *martingalas a tiempo continuo*, que definimos a continuación.

Definición 1.3.1. Sea $X=\{X_t : t\geq 0\}$ un proceso estocástico definido en un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},P)$ y sea $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtración en dicho espacio. Decimos que X es una *martingala a tiempo continuo* con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si satisface las siguientes condiciones:

- X es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$;
- $\mathbb{E}(|X_t|)<+\infty$ para todo $t\geq 0$;
- Para todo $0\leq s<t$, se tiene $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)=X_s$.

Si en lugar de la tercera condición tenemos,

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)\geq X_s \quad \text{para todo } \ 0\leq s<t,$$

decimos que X es una *submartingala*.

Análogamente, si

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)\leq X_s \quad \text{para todo } \ 0\leq s<t,$$

decimos que X es una *supermaringala*.

A veces, diremos que un proceso X es una $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingala y entenderemos por esto que X es una martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

La idea de la definición de martingala es que, conociendo la historia del proceso hasta un tiempo s, la mejor predicción del “valor futuro” de X en un tiempo t posterior es, simplemente, el “valor actual” X_s. Mostramos ahora que el movimiento Browniano es, en efecto, una martingala.

Proposición 1.3.2. *Sea W un movimiento Browniano con respecto a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Entonces,*

(i) *$(W_t)_{t\geq 0}$ es una martingala respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$;*

(ii) *$(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ es una martingala respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*

Demostración. En ambos casos basta verificar la última condición, pues las dos primeras se cumplen por definición de movimiento Browniano.

(i) La última condición se verifica calculando

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(W_t - W_s + W_s|\mathcal{F}_s)\\ &= \mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) + W_s\\ &= \mathbb{E}(W_t - W_s) + W_s = W_s,\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado que W_s es $\mathcal{F}_s$-medible y, en la tercera igualdad, que $(W_t - W_s)$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ y que $\mathbb{E}(W_t) = 0$ para todo $t \geq 0$.

(ii) Para verificar la última condición en este caso, calculamos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_t^2 - t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}\Big(\big((W_t - W_s) + W_s\big)^2\Big|\mathcal{F}_s\Big)\\ &= \mathbb{E}\big((W_t - W_s)^2 + 2(W_t - W_s)W_s + W_s^2\big|\mathcal{F}_s\big) - t\\ &= \mathbb{E}\big((W_t - W_s)^2\big) + 2\mathbb{E}(W_t - W_s)W_s + W_s^2 - t\\ &= t - s + W_s^2 - t = W_s - s.\end{aligned}$$

□

La proposición anterior da las condiciones que caracterizan al movimiento Browniano entre los procesos con trayectorias continuas, tal como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.3.3 (Lévy)**.** *Sea X un proceso con trayectorias continuas y adaptado a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ tal que*

- *X_t es una martingala a tiempo continuo con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$;*
- *$X_t^2 - t$ es una martingala a tiempo continuo con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*

Entonces, $M = X - X_0$ es un movimiento Browniano con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

La propiedad de martingala es importante en un proceso, porque permite dar estimaciones fuertes sobre su comportamiento. Estas estimaciones nos serán de cierta utilidad más adelante y las resumimos en el siguiente teorema.

Teorema 1.3.4. *Sea X un proceso con trayectorias continuas. Entonces,*

1. *Si X es una submartingala, para $\lambda > 0$, $t \geq 0$ se tiene*
$$P\Big(\max_{0\leq s\leq t} X_s \geq \lambda\Big) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_t^+).$$

2. *Si X es una martingala y $1 < p < +\infty$, para $t \geq 0$ se tiene*
$$\mathbb{E}\Big(\max_{0\leq s\leq t} |X_s|^p\Big) \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \mathbb{E}(|X_t|^p).$$

1.3.2. Propiedad de Markov

El movimiento Browniano posee otra propiedad fundamental, conocida como la propiedad de Markov. Existen diversas maneras de formular dicha propiedad; en la siguiente proposición damos la formulación que adoptaremos en la práctica.

Proposición 1.3.5. *Sea W un movimiento Browniano con respecto a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Para cada función $f : \big(C[0,+\infty), \mathcal{B}(C[0,+\infty))\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ medible y acotada, definimos $\varphi_f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por*
$$\varphi_f(x) = \mathbb{E}\big(f(W_\cdot^x)\big),$$
donde $W_t^x = W_t + x$.

Entonces,

(i) *φ_f es medible Borel;*

(ii) *$\mathbb{E}\big(f(W_{t+\cdot}^x)\big|\mathcal{F}_t\big) = \mathbb{E}\big(f(W_{t+\cdot}^x)\big|W_t^x\big)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$;*

(iii) *$\mathbb{E}\big(f(W_{t+\cdot}^x)\big|W_t^x\big) = \varphi_f(W_t^x)$.*

Decimos que W es un proceso de Markov.

La demostración de la proposición es extensa, por lo que no la incluimos aquí. No obstante, damos un bosquejo de la misma:

1. Comenzamos suponiendo que f es la función indicadora de un cilindro finito-dimensional. Para probar la proposición en este caso, nos valemos de que el movimiento Browniano posee incrementos estacionarios e independientes.

2. Como los cilindros finito-dimensionales generan $\mathcal{B}(C[0,+\infty))$, un argumento de densidad nos permite generalizar la validez de la proposición a todo boreliano en $C[0,+\infty)$.

3. Finalmente, aproximando por combinaciones lineales de funciones características, podemos concluir el resultado para toda f medible y acotada.

La propiedad de Markov nos dice que, para predecir el futuro de nuestro proceso X, conocer sólo el presente X_t nos brinda tanta información como conocer toda la historia del proceso hasta tiempo t. Informalmente, el proceso sólo "sabe" su valor a tiempo t, pero no "recuerda" como llegó hasta allí. Más aún, el tercer item habla de una homogeneidad del proceso en el tiempo: dado el valor del proceso a tiempo t, éste evoluciona de la misma manera que si hubiera comenzado a tiempo 0 en dicho valor.

El movimiento Browniano también verifica una formulación más general de la propiedad de Markov, conocida como *propiedad fuerte de Markov*. Antes de poder enunciarla aquí, son necesarias algunas definiciones previas.

Definición 1.3.6. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible con una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

- Un *tiempo aleatorio* T es una variable aleatoria $\mathcal{F}$-medible, con valores en $[\,0, +\infty\,]$.
- Un tiempo aleatorio τ se dice *tiempo de parada* con respecto a la filtración si $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, para todo $t \geq 0$.
- Si τ es un tiempo de parada con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, definimos la σ-álgebra
$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \text{ para todo } \ t \geq 0\}.$$

Informalmente hablando, los tiempos de parada serían aquellos tiempos aleatorios τ tales que, para poder determinar si ocurren, no se requiere mirar más allá del tiempo τ. Por ejemplo, la primera vez que un movimiento Browniano toma el valor n constituye un tiempo de parada, mientras que la última vez que un movimiento Browniano visita el origen antes de tiempo 1 es un tiempo aleatorio, pero NO un tiempo de parada. A su vez, $\mathcal{F}_\tau$ representa la información disponible hasta τ. Vale que si τ es un tiempo de parada, entonces es $\mathcal{F}_\tau$-medible y que, si W es un movimiento Browniano y τ es finito, la función W_τ definida por $W_\tau(\omega) := W_{\tau(\omega)}(\omega)$ también resulta $\mathcal{F}_\tau$-medible.

Proposición 1.3.7. *Sea W un movimiento Browniano con respecto a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y τ un tiempo de parada. Para cada $f : \big(C[\,0, +\infty), \mathcal{B}(C[\,0, +\infty))\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ medible y acotada, definimos φ_f como en la proposición* (1.3.5). *Entonces*

(*i*) *φ_f es medible Borel;*

(*ii*) $\mathbb{E}\big(f(W^x_{\tau+\cdot})\mathbf{1}_{\{\tau<+\infty\}}\big|\mathcal{F}_\tau\big) = \mathbf{1}_{\{\tau<+\infty\}}\varphi_f(W^x_\tau)$ *para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Decimos que W verifica la propiedad fuerte de Markov.

La propiedad fuerte de Markov es, esencialmente, una extensión de la propiedad de Markov a tiempos de parada. En efecto, basta con tomar $\tau = t$ para recuperar la propiedad original. Cabe aclarar que, en general, no vale el resultado para tiempos aleatorios cualesquiera: es la estructura particular del tiempo de parada la que permite al proceso "resetearse" desde la posición a tiempo τ, olvidándose del pasado.

Como consecuencia de la propiedad fuerte de Markov para el movimiento Browniano, tenemos el Principio de Reflexión, que mostramos a continuación.

Teorema 1.3.8 (Principio de Reflexión). *Sea W un movimiento Browniano con respecto a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Entonces, para $t \geq 0$ y $b > 0$ se tiene*

$$P\Big(\max_{0\leq s\leq t} W_s \geq b\Big) = 2P(W_t \geq b).$$

Demostración. La demostración rigurosa de este resultado requiere de una formulación de la propiedad fuerte de Markov un tanto más general de la que hemos presentado aquí; omitiendo algunos detalles, daremos la idea general de la prueba.

Sea

$$\tau_b = \inf\{t \geq 0 : W_t = b\}.$$

Puede mostrarse que τ_b es un tiempo de parada con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Como $P(W_t = b) = 0$, podemos escribir

$$P\Big(\max_{0\leq s\leq t} W_s \geq b\Big) = P(\tau_b < t) = P(\tau_b < t,\, W_t > b) + P(\tau_b < t,\, W_t < b).$$

Ahora, por continuidad de las trayectorias obtenemos $P(\tau_b < t,\, W_t > b) = P(W_t > b)$. Por otro lado, si $\tau_b < t$ y $W_t < b$, entonces en algún instante anterior a t el movimiento Browniano llegó a b y en el tiempo restante se trasladó desde b hasta un punto $c < b$. Debido a la propiedad fuerte de Markov, al llegar a b el movimiento Browniano se resetea y, debido a la simetría con respecto a b que posee, tenemos que la "probabilidad" de realizar la trayectoria antes descrita es la misma que la "probabilidad" de trasladarse desde b hasta el simétrico de c respecto de b, $2b - c$. La heurística de esto es que, para cada trayectoria que visita b y a tiempo t se encuentra por debajo de b, existe una trayectoria "dual" que se obtiene por *reflexión* respecto de b, que a tiempo t se encuentra por arriba de éste, y que ambas trayectorias tienen la misma "probabilidad". Desde ya que este argumento es sólo heurístico, dado que la probabilidad de cualquier trayectoria particular es cero y que, en principio, no queda claro como se deduce el argumento de reflexión aquí exhibido de la definición de movimiento Browniano. No obstante, esto nos conduce a la ecuación correcta

$$P(\tau_b < t,\, W_t < b) = P(\tau_b < t,\, W_t > b) = P(W_t > b).$$

Así, resulta $P\big(\max_{0\leq s\leq t} W_s \geq b\big) = 2P(W_t \geq b)$ como queríamos ver. Notemos además que en la prueba conseguimos, de hecho, $P(\tau_b < t) = 2P(W_t \geq b)$. Como conocemos explícitamente $P(W_t \geq b)$, derivando a ambos miembros la igualdad, se obtiene una densidad para τ_b, dada por

$$f_{\tau_b}(t) = \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}}\, e^{-\frac{b^2}{2t}},$$

para $t > 0$. Observemos que, en particular, vale $P(\tau_b < +\infty) = 1$ y $\mathbb{E}(\tau_b) = +\infty$. $\square$

1.3.3. Propiedades de las trayectorias Brownianas

Enunciamos aquí algunas propiedades de las trayectorias del movimiento Browniano que serán de relevancia en el próximo capítulo, cuando definamos la integral de Itô.

Definición 1.3.9. Sean $0 < \gamma \leq 1$ y una función $f : [\,0, T\,] \longrightarrow \mathbb{R}$.

(i) Decimos que f es *uniformemente Hölder-γ* si existe una constante K tal que

$$|f(t) - f(s)| \leq K|t - s|^{\gamma} \quad \forall\, s, t \in [\,0, T\,].$$

(ii) Decimos que f es *Hölder-γ en x_0* si existe una constante K tal que

$$|f(t) - f(x_0)| \leq K|t - x_0|^{\gamma} \quad \forall\, t \in [\,0, T\,].$$

Teorema 1.3.10. *Sea W un movimiento Browniano definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Entonces*

(i) *Dados $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ y $T > 0$, existe un conjunto $\mathcal{H}_{\gamma,T} \in \mathcal{F}$ con $P(\mathcal{H}_{\gamma,T}) = 1$ y tal que, para todo $\omega \in \mathcal{H}_{\gamma,T}$, la trayectoria $W.(\omega)$ es uniformemente Hölder-γ en el intervalo $[\,0, T\,]$.*

(ii) *Dado $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$, existe un conjunto $\mathcal{H}^{\emptyset}_{\gamma} \in \mathcal{F}$ con $P(\mathcal{H}^{\emptyset}_{\gamma}) = 1$ y tal que, para todo $\omega \in \mathcal{H}^{\emptyset}_{\gamma}$, la trayectoria $W.(\omega)$ no es Hölder-γ en ningún punto.*

En particular, para todo $\omega \in \mathcal{H}^{\emptyset}_{\gamma}$, la trayectoria $W.(\omega)$ no es diferenciable en ningún punto.

Manteniendo la notación del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado que describe la variación del Browniano.

Teorema 1.3.11 (Variaciones del Browniano). *Sea W un movimiento Browniano definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Entonces*

(i) *Para todo $\omega \in \mathcal{H}^{\emptyset}_{1}$, la trayectoria $W.(\omega)$ es de variación infinita para cada subintervalo de $[\,0, +\infty)$.*

(ii) *Sea $T > 0$ y consideremos $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de particiones del $[\,0, T\,]$ con la propiedad $\lim_{n\to+\infty} |\Pi_n| = 0$. Entonces la variación cuadrática*

$$V^2_T(\Pi_n) := \sum_{k=1}^{m_n} |W_{t^{(n)}_k} - W_{t^{(n)}_{k-1}}|^2$$

de W sobre estas particiones converge, cuando n tiende a infinito, a T en $L^2(\Omega)$. Más aún, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\Pi_n| < +\infty$, la convergencia es en casi todo punto.

1.4. Filtraciones Brownianas

En esta sección, presentamos un caso particular de filtración conocida como *filtración Browniana aumentada*. Esta filtración es de interés por sus buenas propiedades, que utilizaremos con frecuencia en los próximos capítulos.

Sea W un movimiento Browniano y consideremos $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$, la filtración generada por el proceso. Definimos,

$$\mathcal{N} := \{F \subseteq \Omega : \exists\, G \in \mathcal{F}_\infty^W \text{ con } F \subseteq G, P(G) = 0\},$$

la clase de conjuntos P-*nulos* para $\mathcal{F}_\infty^W$.

Definición 1.4.1. Para cada $0 \leq t \leq \infty$, definimos

$$\tilde{\mathcal{F}}_t^W := \sigma(\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N})$$

La filtración $(\tilde{\mathcal{F}}_t^W)_{t\geq 0}$ se conoce como *filtración Browniana aumentada.*

Tenemos una caracterización de la filtración Browniana aumentada, dada por la proposición a continuación.

Proposición 1.4.2. *Para cualquier sub-σ-álgebra $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}_\infty^W$, se tiene que*

$$\tilde{\mathcal{A}} := \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}) = \{F \subseteq \Omega : \exists\, G \in \mathcal{A} \text{ tal que } F \vartriangle G \in \mathcal{N}\}.$$

Más aún, si extendemos P definiendo $P(F) := P(G)$ para $F \in \tilde{\mathcal{A}}$ y $G \in \mathcal{A}$ tal que $F \vartriangle G \in \mathcal{N}$, el espacio de probabilidad $(\Omega, \tilde{\mathcal{A}}, P)$ es completo:

$$F \in \tilde{\mathcal{A}},\ P(F) = 0,\ D \subseteq F \Longrightarrow D \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

En particular, vemos que $\tilde{\mathcal{F}}_0^W$ contiene a la clase de los conjuntos P-nulos para $\tilde{\mathcal{F}}_\infty^W$.

Existe otra propiedad importante que cumple la filtración Browniana aumentada: la *continuidad a derecha.*

Definición 1.4.3. Una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ se dice *continua a derecha* si para todo $t \geq 0$ se tiene

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

Proposición 1.4.4. *La filtración Browniana aumentada es continua a derecha*

Definición 1.4.5. Una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ se dice que satisface las *condiciones usuales* si es continua a derecha y contiene a la clase de los conjuntos P-nulos para $\mathcal{F}_\infty$.

De las proposiciones anteriores se sigue que la filtración Browniana aumentada satisface las condiciones usuales. Necesitaremos de este tipo de filtraciones para construir la integral de Itô y desarrollar la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas en los próximos capítulos.

Por último, vemos que la aumentación preserva el movimiento Browniano.

Teorema 1.4.6. *Sea W un movimiento Browniano con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$. Entonces, con respecto a filtración Browniana aumentada $(\tilde{\mathcal{F}}_t^W)_{t\geq 0}$, W sigue siendo un movimiento Browniano.*

1.5. Brownianos d-dimensionales

Aquí extendemos la definición de movimiento Browniano a procesos estocásticos con valores en $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$.

Definición 1.5.1. Sea $d \in \mathbb{N}$ y μ una medida de probabilidad en $\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big)$. Sea W un proceso estocástico a valores $\mathbb{R}^d$, definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Decimos que W es un *movimiento Browniano d-dimensional con distribución inicial* μ con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si

- W tiene trayectorias continuas;
- W es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$;
- $P(W_0 \in \Gamma) = \mu(\Gamma), \quad \forall\, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$;
- Para $0 \leq s < t$, el incremento $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ y tiene distribución normal multivariada con media cero y matriz de covarianzas $(t-s)I_d$, donde I_d denota la matriz identidad de $(d \times d)$. Equivalentemente, las coordenadas de W constituyen d movimientos Brownianos 1-dimensionales independientes con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Si $\mu = \delta_x$ para algún $x \in \mathbb{R}^d$, diremos que W es un *movimiento Browniano d-dimensional comenzando en* x. Cuando no aclaremos el punto inicial, estaremos pensando en $x = 0$.

La construcción de estos procesos puede realizarse a partir de movimientos Brownianos 1-dimensionales. Las propiedades de Markov estudiadas para el caso 1-dimensional, se adaptan al caso d-dimensional general. Se define también la filtración Browniana aumentada para el caso general de forma análoga, y verifica las mismas propiedades.

Capítulo 2

Integral de Itô

2.1. Introducción

El cálculo estocástico surge de la necesidad de dar un sentido a ecuaciones diferenciales estocásticas de la forma

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t, t)\, dt + \sigma(X_t, t)\, dW_t \\ \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Ahora, como el movimiento Browniano no es diferenciable, entenderemos la ecuación en su formulación integral

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(X, s)\, ds + \int_0^t \sigma(X, s)\, dW \qquad 0 \leq t < +\infty.$$

Pero antes de poder estudiar y resolver tales ecuaciones integrales, debemos primero *definir*

$$\int_0^T G\, dW$$

para una clase amplia de procesos G, de forma tal que el miembro derecho de la ecuación de arriba al menos tenga sentido. Observemos que esto último no es para nada obvio: una primera dificultad yace en que las aplicaciones $t \mapsto W(t, \omega)$ son de variación infinita para casi todo ω, con lo cual no podemos tratar a $\int_0^T G\, dW$ para cada ω como una integral de Lebesgue-Stieltjes. No obstante, será la variación cuadrática finita del movimiento Browniano la que nos permitirá darle un sentido adecuado a este tipo de expresiones. Dicha tarea fue realizada por Itô en 1944. Su noción de integral, aunque no es la única posible, será la que adoptaremos para nuestro trabajo en esta tesis y constituye el objeto de estudio de este capítulo.

2.2. Construcción de la integral de Itô

Consideremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ en donde tengamos definido un movimiento Browniano W, con respecto a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ que satisface las condiciones usuales. En la Sección 1.4 vimos un ejemplo de como construir este tipo de filtraciones para un movimiento Browniano dado. A lo largo de este capítulo, las nociones de medibilidad, adaptabilidad y progresiva medibilidad de procesos serán siempre con respecto a ésta filtración. Introducimos a continuación los espacios con los que vamos a trabajar.

Definición 2.2.1. Sean los siguientes espacios:

- $\mathbb{L}^2$, el espacio de procesos a valores en $\mathbb{R}$ medibles y adaptados G que satisfacen

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T G^2\,dt\right) < +\infty,$$

para todo $T > 0$.

- $\mathbb{M}^2$, el espacio de procesos a valores en $\mathbb{R}$ medibles y adaptados G que satisfacen

$$P\left(\int_0^T G^2\,dt < +\infty\right) = 1,$$

para todo $T > 0$.

- $\mathbb{M}^1$, el espacio de procesos a valores en $\mathbb{R}$ medibles y adaptados F que satisfacen

$$P\left(\int_0^T |F|\,dt < +\infty\right) = 1,$$

para todo $T > 0$.

Comenzaremos por construir, dado un proceso $G \in \mathbb{L}^2$ y $T > 0$, la integral de Itô en el intervalo $[\,0, T\,]$ como objeto en $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$. Luego, pensaremos a la integral como proceso estocástico y estudiaremos algunas de sus propiedades. Por último, extenderemos la integral a la clase más general de integrandos, $\mathbb{M}^2$.

2.2.1. Procesos simples y aproximación

Definición 2.2.2. Un proceso $G \in \mathbb{L}^2$ se dice *proceso simple* si existe una sucesión de tiempos $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ con $t_0 = 0$ y $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$, y una sucesión de variables aleatorias $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ con $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |\xi_k| \leq C$ para alguna constante fija $C < +\infty$, tales que ξ_k es $\mathcal{F}_{t_k}$-medible para cada $k \in \mathbb{N}_0$ y

$$G_t = \xi_0 \mathbf{1}_{\{\,0\}}(\,t\,) + \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \mathbf{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(\,t\,), \qquad 0 \leq t < +\infty.$$

Definición 2.2.3. Sea $G \in \mathbb{L}^2$ un proceso simple. Entonces, se define la *integral estocástica de Itô* de G en el intervalo $[\,0, T\,]$ como

$$\begin{aligned}\int_0^T G\,dW &:= \sum_{k=0}^{m-1} \xi_k\big(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\big) + \xi_m\big(W_T - W_{t_m}\big)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k\big(W_{T\wedge t_{k+1}} - W_{T\wedge t_k}\big),\end{aligned}$$

donde $m \in \mathbb{N}_0$ es el único entero para el cual $t_m \le T < t_{m+1}$. Notar que $\displaystyle\int_0^T G\,dW$ es una variable aleatoria en $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$.

Proposición 2.2.4. ***Propiedades de la integral de Itô para procesos simples*** *Para cualquier $T > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ y $G, H \in \mathbb{L}^2$ procesos simples, se tiene*

(*i*) $\displaystyle\int_0^T (aG + bH)\,dW = a\int_0^T G\,dW + b\int_0^T H\,dW.$

(*ii*) $\displaystyle\mathbb{E}\bigg(\int_0^T G\,dW\bigg) = 0.$

(*iii*) $\displaystyle\mathbb{E}\bigg(\Big(\int_0^T G\,dW\Big)^2\bigg) = \mathbb{E}\bigg(\int_0^T G^2\,dt\bigg).$

Demostración. (*i*) Si G y H son procesos simples con sucesión de tiempos $(t_k^G)_{k\in\mathbb{N}_0}$ y $(t_k^H)_{k\in\mathbb{N}_0}$ respectivamente, luego $aG + bH$ es un proceso simple con sucesión de tiempos dada por el conjunto $P = \{t_k^G : k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{t_k^H : k \in \mathbb{N}_0\}$. De aquí, un cálculo directo muestra el resultado.

(*ii*) Por definición, tenemos

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^T G\,dW\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\big(\,\xi_k(W_{T\wedge t_{k+1}} - W_{T\wedge t_k})\big).$$

Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, ξ_k es $\mathcal{F}_{t_k}$-medible y $W_{T\wedge t_{k+1}} - W_{T\wedge t_k}$ es independiente de $\mathcal{F}_{t_k}$. Luego, vemos que ξ_k es independiente de $W_{T\wedge t_{k+1}} - W_{T\wedge t_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}_0$. Así,

$$\mathbb{E}\big(\,\xi_k(W_{T\wedge t_{k+1}} - W_{T\wedge t_k})\big) = \mathbb{E}(\xi_k)\mathbb{E}(W_{T\wedge t_{k+1}} - W_{T\wedge t_k}) = 0,$$

pues el segundo factor de la derecha es nulo.

(*iii*) Análogamente,

$$\mathbb{E}\bigg(\Big(\int_0^T G\,dW\Big)^2\bigg) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}\big(\,\xi_k\xi_j(W_{T\wedge t_{k+1}} - W_{T\wedge t_k})(W_{T\wedge t_{j+1}} - W_{T\wedge t_j})\big).$$

Ahora, si $j < k$, $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ es independiente de $\xi_k \xi_j (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$, con lo cual tenemos

$$\mathbb{E}\big(\,\xi_k\xi_j(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\big) = \mathbb{E}\big(\,\xi_k\xi_j(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})\big)\mathbb{E}\big(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\big).$$

Como el primer factor de la derecha es finito y el segundo es cero, la expresión se anula para $j < k$. Lo mismo sucede para las variables $W_{T\wedge t_{k+1}} - W_{T\wedge t_k}$ y $W_{T\wedge t_{j+1}} - W_{T\wedge t_j}$. Con esto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T G\,dW\right)^2\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\big(\,\xi_k^2 (W_{T\wedge t_{k+1}} - W_{T\wedge t_k})^2\big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(\,\xi_k^2)\mathbb{E}\big((W_{T\wedge t_{k+1}} - W_{T\wedge t_k})^2\big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(\,\xi_k^2)(T\wedge t_{k+1} - T\wedge t_k) \\
&= \mathbb{E}\Big(\int_0^T G^2\,dt\Big).
\end{aligned}$$

□

Ahora, la idea será definir la integral de Itô para un proceso $G \in \mathbb{L}^2$ cualquiera como límite de integrales de Itô de procesos simples G^n que aproximen a G en algún sentido apropiado. Para ello, serán útiles las propiedades de la integral que vimos para procesos simples y el siguiente teorema.

Teorema 2.2.5. ***[Aproximación por procesos simples]***
Si $G \in \mathbb{L}^2$, dado $T > 0$ existe una sucesión de procesos simples $(G^{n,T})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{L}^2$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\Big(\int_0^T |G - G^{n,T}|^2\,dt\Big) = 0.$$

Una demostración de este teorema puede encontrarse en [5, páginas 132-136]. El argumento consiste en probar primero el teorema para procesos $G \in \mathbb{L}^2$ acotados para después extender el resultado a todo $\mathbb{L}^2$. Para mostrar el teorema si G es un proceso acotado en $\mathbb{L}^2$ se debe proceder por pasos. Primero se supone que G tiene trayectorias continuas. Una vez probado el resultado en este caso, se generaliza a procesos G progresivamente medibles y, en última instancia, se concluye la validez del teorema para G medible y adaptado cualquiera.

2.2.2. Definición y propiedades elementales de la integral

Sea ahora $G \in \mathbb{L}^2$ y, para $T > 0$, tomemos una sucesión $(G^{n,T})_{n\in\mathbb{N}}$ de procesos simples que aproximen a G en el sentido del teorema (2.2.5). Entonces,

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^T G^{n,T}\,dW - \int_0^T G^{m,T}\,dW\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(\int_0^T \big(G^{n,T} - G^{m,T}\big)\,dW\right)^2\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\int_0^T \big|G^{n,T} - G^{m,T}\big|^2\,dt\right)$$

$$\leq C\left(\mathbb{E}\left(\int_0^T \big|G^{n,T} - G\big|^2\,dt\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^T \big|G - G^{m,T}\big|^2\,dt\right)\right),$$

y la última expresión tiende a cero cuando $n, m \to +\infty$ por el teorema. Así, la sucesión $\big(\int_0^T G^{n,T}\,dW\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^2\big(\Omega, \mathcal{F}_T, P\big)$ y, por completitud, tiene límite. Un argumento similar muestra que el límite no depende de la sucesión de procesos simples tomada para aproximar a G.

Definición 2.2.6. Sea $G \in \mathbb{L}^2$. Dado $T > 0$, se define la *integral estocástica de Itô* en el intervalo $[\,0, T\,]$ de G como

$$\int_0^T G\,dW := \lim_{n\to+\infty} \int_0^T G^{n,T}\,dW$$

para cualquier sucesión $(G^{n,T})_{n\in\mathbb{N}}$ de procesos simples que aproximen a G en el sentido del Teorema 2.2.5. El límite es tomado en $L^2\big(\Omega, \mathcal{F}_T, P\big)$.

Proposición 2.2.7. ***[Propiedades de la integral de Itô]***
Para cualquier $T > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ y $G, H \in \mathbb{L}^2$, se tiene

(*i*) $\displaystyle\int_0^T (aG + bH)\,dW = a\int_0^T G\,dW + b\int_0^T H\,dW.$

(*ii*) $\displaystyle\mathbb{E}\left(\int_0^T G\,dW\right) = 0.$

(*iii*) $\displaystyle\mathbb{E}\left(\Big(\int_0^T G\,dW\Big)^2\right) = \mathbb{E}\Big(\int_0^T G^2\,dt\Big).$

Demostración. (*i*) Si $(G^{n,T})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(H^{n,T})_{n\in\mathbb{N}}$ aproximan a G y H respectivamente en el sentido del Teorema 2.2.5, entonces $\big(aG^{n,T} + bH^{n,T}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ aproxima a $aG + bH$ en el mismo sentido. Luego, la primera afirmación se sigue de la linealidad de la integral para procesos simples.

(ii) Recordemos que dada $f \in L^2(\Omega)$, $\|f\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$. Con esto,

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^T G\,dW\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\Big(\int_0^T G^{n,T}\,dW\Big) = 0,$$

pues $\mathbb{E}\Big(\int_0^T G^{n,T}\,dW\Big) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Por un lado, tenemos

$$\mathbb{E}\bigg(\Big(\int_0^T G\,dW\Big)^2\bigg) = \Big\|\int_0^T G\,dW\Big\|^2_{L^2(\Omega)} = \lim_{n\to+\infty} \Big\|\int_0^T G^{n,T}\,dW\Big\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Ahora, por propiedades de la integral para procesos simples, sabemos que

$$\Big\|\int_0^T G^{n,T}\,dW\Big\|^2_{L^2(\Omega)} = \big\|G^{n,T}\big\|^2_{L^2([\,0,T\,]\times\Omega)}.$$

Por último, el teorema de aproximación nos dice que

$$\lim_{n\to+\infty} \big\|G^{n,T}\big\|^2_{L^2([\,0,T\,]\times\Omega)} = \big\|G\big\|^2_{L^2([\,0,T\,]\times\Omega)} = \mathbb{E}\Big(\int_0^T G^2\,dt\Big).$$

Esto demuestra la tercera afirmación. □

2.2.3. Integral de Itô indefinida

Dado $G \in \mathbb{L}^2$, tenemos definida la integral de Itô de G en el intervalo $[\,0,t\,]$, para todo $t \geq 0$. Podemos preguntarnos entonces que propiedades posee el proceso estocástico

$$I_t^G := \int_0^t G\,dW.$$

$(I_t^G)_{t\geq 0}$ recibe el nombre de *integral indefinida* de G.

Proposición 2.2.8. ***Propiedades de la integral de Itô indefinida***
Sea $G \in \mathbb{L}^2$ y sea $(I_t^G)_{t\geq 0}$ su integral indefinida. Entonces,

(i) *$(I_t^G)_{t\geq 0}$ es una $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingala, con $I_0^G = 0$.*

(ii) *$\mathbb{E}\big((I_t^G - I_s^G)^2\big|\mathcal{F}_s\big) = \mathbb{E}\Big(\int_s^t G^2\,du\,\Big|\,\mathcal{F}_s\Big)$. En particular, $\Big((I_t^G)^2 - \int_0^t G^2\,du\Big)_{t\geq 0}$ es una $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingala.*

Demostración. (i) En primer lugar, notemos que $I_t^G \in L^2\big(\Omega, \mathcal{F}_t, P\big)$, por ser límite de procesos en dicho espacio. En particular, para cada $t \geq 0$ se obtiene que I_t^G es integrable y $\mathcal{F}_t$-medible.

Para verificar la tercera condición de la definición de martingala, supongamos primero que G es un proceso simple. En este caso y siguiendo la notación antes introducida, podemos escribir

$$I_t^G = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \big(W_{t\wedge t_{k+1}} - W_{t\wedge t_k}\big)$$

y, así, si $0 \leq s < t$ resulta

$$\mathbb{E}(I_t^G|\mathcal{F}_s) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \big(W_{s\wedge t_{k+1}} - W_{s\wedge t_k}\big) = I_s^G.$$

En efecto, basta verificar que

$$\mathbb{E}\big(\xi_k\big(W_{t\wedge t_{k+1}} - W_{t\wedge t_k}\big)\big|\mathcal{F}_s\big) = \xi_k\big(W_{s\wedge t_{k+1}} - W_{s\wedge t_k}\big)$$

para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

- Si $s \leq t_k$, por la propiedad de torres de la esperanza condicional y la $\mathcal{F}_{t_k}$-medibilidad de ξ_k, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\xi_k\big(W_{t\wedge t_{k+1}} - W_{t\wedge t_k}\big)|\mathcal{F}_s\big) &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\big(\xi_k\big(W_{t\wedge t_{k+1}} - W_{t\wedge t_k}\big)\big|\mathcal{F}_{t_k}\big)\Big|\mathcal{F}_s\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big(\xi_k\mathbb{E}\big(W_{t\wedge t_{k+1}} - W_{t\wedge t_k}\big|\mathcal{F}_{t_k}\big)\Big|\mathcal{F}_s\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big(\xi_k\big(W_{t\wedge t_k} - W_{t\wedge t_k}\big)\Big|\mathcal{F}_s\Big) = 0.\end{aligned}$$

- Si $t_k < s \leq t_{k+1}$,

$$\mathbb{E}\big(\xi_k\big(W_{t\wedge t_{k+1}} - W_{t\wedge t_k}\big)\big|\mathcal{F}_s\big) = \xi_k\mathbb{E}\big(W_{t\wedge t_{k+1}} - W_{t\wedge t_k}\big|\mathcal{F}_s\big) = \xi_k\big(W_s - W_{t_k}\big)$$

- Si $t_{k+1} < s$,

$$\mathbb{E}\big(\xi_k\big(W_{t\wedge t_{k+1}} - W_{t\wedge t_k}\big)\big|\mathcal{F}_s\big) = \xi_k\big(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\big).$$

Ahora, si $G \in \mathbb{L}^2$ es un proceso cualquiera, dados $0 \leq s < t$ tomemos una sucesión de procesos simples $(G^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $0 \leq u \leq t$ sea $I_u^G = \lim_{n\to+\infty} I_t^{G^n}$, donde el límite es en $L^2\big(\Omega\big)$. Si $A \in \mathcal{F}_s$, por la desigualdad de Hölder y la convergencia en L^2, obtenemos

$$\lim_{n\to+\infty}\int_A (I_t^G - I_t^{G^n})\,dP = 0 = \lim_{n\to+\infty}\int_A (I_s^G - I_s^{G^n})\,dP.$$

Como I^{G^n} es una martingala para todo $n \in \mathbb{N}$, $\int_A I_t^{G^n}\,dP = \int_A I_s^{G^n}\,dP$. Se sigue entonces que $\int_A I_t^G\,dP = \int_A I_s^G\,dP$ y, en consecuencia, que I^G es una martingala. Por último, obtenemos $I_0^G = 0$ de la definición.

(ii) Supongamos primero que G es un proceso simple. Luego, G tiene la forma

$$G_t = \xi_0\mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{m-1}\xi_k\mathbf{1}_{(t_k,t_{k+1}]}(t),$$

con $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ y $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ adecuadas. Dados $0 \leq s < t$ podemos tomar i, j tales que $t_{i-1} \leq s < t_i$ y $t_j \leq t < t_{j+1}$. Así, realizando cálculos similares a los del item anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big((I_t^G - I_s^G)^2 \big| \mathcal{F}_s\big) = \\
&\qquad = \mathbb{E}\left(\left(\xi_{i-1}\big(W_{t_i} - W_s\big) + \sum_{k=i}^{j-1} \xi_k\big(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\big) + \xi_j\big(W_t - W_{t_j}\big)\right)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right) \\
&\qquad = \mathbb{E}\left(\xi_{i-1}^2\big(W_{t_i} - W_s\big)^2 + \sum_{k=i}^{j-1} \xi_k^2\big(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\big)^2 + \xi_j^2\big(W_t - W_{t_j}\big)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right) \\
&\qquad = \mathbb{E}\left(\xi_{i-1}^2(t_i - s) + \sum_{k=i}^{j-1} \xi_k^2(t_{k+1} - t_k) + \xi_j^2(t - t_j) \middle| \mathcal{F}_s\right) \\
&\qquad = \mathbb{E}\left(\int_s^t G^2\, du \middle| \mathcal{F}_s\right).
\end{aligned}$$

Notemos que los productos cruzados desaparecen en la segunda igualdad gracias a que si $0 \leq u_1 < v_1 \leq u_2 < v_2$, tenemos

$$\mathbb{E}\Big(\big(W_{v_2} - W_{u_2}\big)\big(W_{v_1} - W_{u_1}\big)\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\big(W_{v_2} - W_{u_2}\big| \mathcal{F}_{u_2}\big)\big(W_{v_1} - W_{u_1}\big)\Big) = 0.$$

Así, queda demostrada la igualdad para el caso en que G es simple. En particular, para G simple vale que

$$\int_A (I_t^G - I_s^G)^2\, dP = \int_A \left(\int_s^t G^2\, du\right) dP$$

para cualquier $A \in \mathcal{F}_s$. Si $G \in \mathbb{L}^2$ es arbitrario, dados $0 \leq s < t$ tomemos una sucesión $(G^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de procesos simples tales que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\Big(\int_0^t |G - G^n|^2\, dt\Big) = 0$. Recordemos que esta condición implica $I_t^G - I_s^G = \lim_{n\to+\infty} I_t^{G^n} - I_s^{G^n}$, donde el límite es tomado en $L^2(\Omega)$. Por la observación de arriba para procesos simples, para $A \in \mathcal{F}_s$ vemos que

$$\begin{aligned}
\int_A (I_t^G - I_s^G)^2\, dP &= \lim_{n\to+\infty} \int_A (I_t^{G^n} - I_s^{G^n})^2\, dP \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_A \left(\int_s^t (G^n)^2\, dt\right) dP \\
&= \int_A \left(\int_s^t G^2\, du\right) dP.
\end{aligned}$$

De aquí se deduce el enunciado para $G \in \mathbb{L}^2$ arbitrario.

Por último, verificamos que $\Big((I_t^G)^2 - \int_0^t G^2\, dt\Big)_{t\geq 0}$ es una $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingala.

- Como $I_t^G \in L^2$ y $G \in \mathbb{L}^2$, se sigue que, para cada $t \geq 0$, $(I_t^G)^2 - \int_0^t G^2\,ds$ es integrable.

- Sabemos por el item anterior que $\big((I_t^G)^2\big)_{t\geq 0}$ es adaptado. Debemos ver entonces que $\big(\int_0^t G^2\,ds\big)_{t\geq 0}$ lo es también. Si G es progresivamente medible, esto es una consecuencia inmediata del teorema de Fubini. Para $G \in \mathbb{L}^2$ arbitrario, deberemos emplear un argumento de aproximación por procesos simples adecuado. Para una demostración más detallada de esto último, ver [5, página 140, Remark 2.11].

- Para verificar la última condición, tenemos por un lado

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big((I_t^G - I_s^G)^2\big|\mathcal{F}_s\big) &= \mathbb{E}\big((I_t^G)^2 - 2I_t^G I_s^G + (I_s^G)^2\big|\mathcal{F}_s\big)\\ &= \mathbb{E}\big((I_t^G)^2\big|\mathcal{F}_s\big) - 2I_s^G\mathbb{E}\big(I_t^G\big|\mathcal{F}_s\big) + (I_s^G)^2\\ &= \mathbb{E}\big((I_t^G)^2\big|\mathcal{F}_s\big) - (I_s^G)^2,\end{aligned}$$

  donde en la última igualdad hemos usado que I^G es $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingala. Ahora, por otro lado,

$$\mathbb{E}\left(\int_s^t G^2\,du\,\middle|\,\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t G^2\,du\,\middle|\,\mathcal{F}_s\right) - \int_0^s G^2\,du.$$

  Como ambas expresiones coinciden por lo demostrado arriba, se deduce que

$$\mathbb{E}\left((I_t^G)^2 - \int_0^t G^2\,du\middle|\,\mathcal{F}_s\right) = (I_s^G)^2 - \int_0^s G^2\,du.$$

□

Notemos que, según la definición que hemos dado de integral de Itô de un proceso G, I_t^G no es una variable aleatoria, sino una *clase* de variables aleatorias en $L^2(\Omega)$. Por este motivo, hablar de la continuidad de las trayectorias de I^G resulta inadecuado en este contexto. Sin embargo, uno espera que, eligiendo cuidadosamente un representante en cada clase, se obtenga un proceso con trayectorias continuas. Esto realmente se cumple, tal como lo afirma el próximo teorema.

Teorema 2.2.9. *Existe un proceso J^G con trayectorias continuas y adaptado tal que $P(\,J_t^G = I_t^G) = 1$ para todo $t \geq 0$. Más aún, si J^G y $\tilde{J}^G$ son dos procesos que cumplen esto, entonces $P(\,J_t^G = \tilde{J}_t^G,\ \forall\, 0 \leq t < +\infty) = 1$.*

Demostración. Haremos la demostración en tres pasos.

1. Dado $T > 0$, construiremos un proceso J^G en $[\,0, T\,]$ con trayectorias continuas y adaptado que satisfaga $P(\,J_t^G = I_t^G) = 1$, para todo $0 \leq t \leq T$. Para ello, observemos en primer lugar que si G es un proceso simple, entonces I^G tiene trayectorias continuas pues el movimiento Browniano es continuo para cada $\omega \in \Omega$ y

$$I_t^G = \sum_{k=0}^{m-1} \xi_k \big(W_{t \wedge t_{k+1}} - W_{t \wedge t_k} \big).$$

Si G es un proceso arbitrario en $\mathbb{L}^2$, podemos tomar una sucesión de procesos escalonados $(G^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\Big(\int_0^T |G - G^n|^2 \, dt \Big) = 0.$$

Como I^{G^n} es una $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$-martingala, aplicando la desigualdad de Jensen puede verse que $|I^{G^n} - I^{G^m}|^2$ es una submartingala con respecto a la misma filtración. El teorema (1.3.4) muestra entonces que

$$\begin{aligned}
P\Big(\sup_{0 \leq t \leq T} |I_t^{G^n} - I_t^{G^m}| > \varepsilon \Big) &= P\Big(\sup_{0 \leq t \leq T} |I_t^{G^n} - I_t^{G^m}|^2 > \varepsilon^2 \Big) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \, \mathbb{E}\big(\, |I_T^{G^n} - I_T^{G^m}|^2 \big) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \, \mathbb{E}\bigg(\int_0^T |G^n - G^m|^2 \, dt \bigg).
\end{aligned}$$

Como el último término tiende a cero cuando $n, m \to +\infty$, podemos tomar una subsucesión tal que

$$P\Big(\sup_{0 \leq t \leq T} |I_t^{G^{n_{k+1}}} - I_t^{G^{n_k}}| > \frac{1}{k} \Big) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Notemos que la continuidad de las trayectorias de cada I^{G^n} nos permite escribir

$$A_k := \Big\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |I_t^{G^{n_{k+1}}} - I_t^{G^{n_k}}| > \frac{1}{k} \Big\} = \bigcup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ t \in \mathbb{Q}}} \Big\{ |I_t^{G^{n_{k+1}}} - I_t^{G^{n_k}}| > \frac{1}{k} \Big\},$$

donde cada conjunto de la unión pertenece a $\mathcal{F}_T$ debido a la $\mathcal{F}_t$-medibilidad de cada $I_t^{G^n}$. Así, $N := \limsup_{k \to +\infty} A_k$ pertenece a $\mathcal{F}_T$. Más aún, el lema de Borel-Cantelli implica que $P(N) = 0$. Como $(I^{G^{n_k}})_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en $[\,0, T\,]$ para cada $\omega \in N^c$, podemos definir el proceso J_t^G dado por

$$J_t^G(\omega) = \begin{cases} \lim_{k \to +\infty} I_t^{G^{n_k}}(\omega) & \text{si } \omega \in N^c \\ \\ 0 & \text{si } \omega \in N, \end{cases}$$

para $0 \leq t \leq T$. La convergencia uniforme en t implica que J^G tiene trayectorias continuas en $[\,0, T\,]$. Además, como $\mathcal{F}_0$ contiene todos los conjuntos P-nulos para $\mathcal{F}_\infty$, se sigue que $N \in \mathcal{F}_0$ y, en consecuencia, que J_t^G es $\mathcal{F}_t$-medible. Concluimos entonces que J^G es adaptado. Por último, como $\lim_{n\to+\infty} I_t^{G^n} = I_t^G$ en L^2 para cada $0 \le t \le T$, vemos también que $P(J_t^G = I_t^G) = 1$ para todo $0 \le t \le T$.

2. Probaremos que si J^G y $\tilde{J}^G$ son dos procesos definidos en $[0, T]$, con trayectorias continuas y adaptados, que satisfacen

$$P(J_t^G = I_t^G) = 1 = P(\tilde{J}_t^G = I_t^G),$$

para todo $0 \le t \le T$, entonces

$$P(\ J_t^G = \tilde{J}_t^G,\ \forall\, 0 \le t < +\infty) = 1.$$

En efecto, en tal caso la continuidad de las trayectorias muestra que

$$\left\{J_t^G = \tilde{J}_t^G,\ \forall\, 0 \le t \le T\right\} = \bigcap_{\substack{0<t<T\\ t\in\mathbb{Q}}} \left\{J_t^G = \tilde{J}_t^G\right\}.$$

Como ambos procesos son adaptados, vemos que tal evento pertenece a $\mathcal{F}_T$ y, además, se tiene

$$P\Big(J_t^G = \tilde{J}_t^G,\ \forall\, 0 \le t \le T\Big) = P\Big(\bigcap_{\substack{0<t<T\\ t\in\mathbb{Q}}} \{J_t^G = \tilde{J}_t^G\}\Big) = 1,$$

pues $P(J_t^G = \tilde{J}_t^G) = 1$ para todo $0 \le t \le T$.

3. Por último, construimos el proceso J^G para todo tiempo. Notemos por $J^{G,n}$ al proceso en $[0, n]$ que definimos en (**1**). La unicidad demostrada en (**2**) nos muestra que $P(J_t^{G,n} = J_t^{G,n+1}\ ,\ \forall\ 0 \le t \le n) = 1$. Esto implica que el conjunto

$$\Omega_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left\{\omega \in \Omega : J_t^{G,n} = J_t^{G,n+k}\ \forall\ 0 \le t \le n\right\}$$

tiene probabilidad uno. Además, Ω_0 pertenece a la σ-álgebra $\mathcal{F}_\infty$ y, como $\mathcal{F}_0$ contiene todos los conjuntos P-nulos para $\mathcal{F}\infty$, se sigue que Ω_0 pertenece a $\mathcal{F}_0$ también. Por último, observemos que si $\omega \in \Omega_0$, $J_t^{G,n}(\omega) = J_t^{G,m}(\omega)$ para todo $0 \le t \le n, m$. Esto nos permite definir

$$I_t^G(\omega) = \begin{cases} I_t^{G_n}(\omega) & \text{si}\ \omega \in \Omega_0\ ,\ 0 \le t \le n \\ \\ 0 & \text{si}\ \omega \in {\Omega_0}^c \end{cases}$$

Así definido, J^G resulta un proceso estocástico de trayectorias continuas y adaptado. Es claro que $P(\ J_t^G = I_t^G) = 1$, para todo $t \ge 0$. Además, si J^G y $\tilde{J}^G$ son dos procesos con trayectorias continuas y adaptados que cumplen esto, entonces por (**2**) vale que $P(\ J_t^G = \tilde{J}_t^G,\ \forall\, 0 \le t \le T) = 1$ para todo $T > 0$. De aquí podemos concluir que $P(\ J_t^G = \tilde{J}_t^G,\ \forall\, 0 \le t < +\infty) = 1$. □

Observación 2.2.10. Para J^G siguen valiendo las propiedades establecidas las Proposiciones 2.2.7 y 2.2.8.

Notación. De aquí en adelante, cada vez que hagamos referencia a la integral indefinida de un proceso G, ésta será la "única" $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$-martingala de trayectorias continuas dada por el teorema. Utilizaremos la notación I^G para referirnos a ésta, en lugar de la notación J^G empleada en el teorema.

2.2.4. La integral de Itô y los tiempos de parada

Nuestro próximo paso será definir la integral de Itô hasta un tiempo de parada. Es decir, dados $G \in \mathbb{L}^2$ y un tiempo de parada τ, darle sentido a la expresión $\int_0^{t\wedge\tau} G\,dW$. En principio, tenemos dos formas de hacerlo:

- $\displaystyle\int_0^{t\wedge\tau} G\,dW := I^G_{t\wedge\tau}$, la integral indefinida del proceso G evaluada en el tiempo de parada acotado $t\wedge\tau$;

- $\displaystyle\int_0^{t\wedge\tau} G\,dW := I^{G^\tau}_t$, la integral en $[\,0,t\,]$ del proceso $G^\tau_s := G_s\,\mathbf{1}_{\{s\leq\tau\}}$.

De ambas formas se obtiene el mismo proceso, como lo afirma la siguiente proposición.

Proposición 2.2.11. *Sean $\tau' \leq \tau$ dos tiempos de parada con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Entonces, para cualquier $t>0$ se tiene*

(i) $\mathbb{E}(\,I^G_{t\wedge\tau}|\mathcal{F}_{\tau'}) = I^G_{t\wedge\tau'}$,

(ii) $P(\,I^G_{t\wedge\tau} = I^{G^\tau}_t\,) = 1$.

La demostración de esta proposición puede encontrarse en [5, páginas 139-140].

2.2.5. Extensión de la integral de Itô a la clase $\mathbb{M}^2$

Para $G \in \mathbb{M}^2$, consideremos la sucesión de tiempos

$$R_n = n \wedge \text{ínf}\left\{0 \leq t < +\infty : \int_0^t G^2\,ds \geq n\right\}.$$

Notemos que la adaptabilidad del proceso $\left(\int_0^t G^2\,ds\right)_{t\geq 0}$ implica que cada R_n es un tiempo de parada. Más aún, $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y, debido a que $G\in\mathbb{M}^2$, se tiene $P(\text{lím}_{n\to+\infty} R_n = +\infty) = 1$. Para $n\in\mathbb{N}$ definimos

$$X^{(n)}_t := G_t\mathbf{1}_{\{R_n\geq t\}}, \qquad 0 \leq t < +\infty.$$

Para cada $n\in\mathbb{N}$ $G^{(n)}\in\mathbb{L}^2$ y, así, $I^{G^{(n)}}$ está definida. La Proposición 2.2.11 implica que para $1\leq n\leq m$,

$$P(I^{G^{(n)}}_{t\wedge R_n} = I^{G^{(m)}}_{t\wedge R_n}, \qquad \forall\;\, 0\leq t\leq n) = 1.$$

Luego, si tomamos el conjunto

$$\Omega_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\big\{I^{G^{(n)}}_{t\wedge R_n} = I^{G^{(n+k)}}_{t\wedge R_n}, \quad \forall\;\, 0\leq t\leq n\big\},$$

éste tiene probabilidad uno. Además, Ω_0 pertenece a la σ-álgebra $\mathcal{F}_\infty$ y, como $\mathcal{F}_0$ contiene todos los conjuntos P-nulos para $\mathcal{F}\infty$, se sigue que Ω_0 pertenece a $\mathcal{F}_0$ también. Por último, observemos que si $\omega \in \Omega_0$ y $\lim_{n\to+\infty} R_n(\omega) > t$, entonces la sucesión $(I^{G^{(n)}}_{t\wedge R_n(\omega)}(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ es constante a partir de un cierto $n_0 = n_0(\omega)$. Esto nos permite definir

$$I_t^G(\omega) = \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} I^{G^{(n)}}_{t\wedge R_n(\omega)}(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega_0 \cap \{\lim_{n\to+\infty} R_n = +\infty\} \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{2.1}$$

$(I_t^G)_{t\geq 0}$ se encuentra bien definido y resulta un proceso estocástico adaptado y con trayectorias continuas.

Definición 2.2.12. Sea $G \in \mathbb{M}^2$. Definimos la *integral de Itô* de G como el proceso estocástico $(I_t^G)_{t\geq 0}$ dado por (2.1).

Si $G \in \mathbb{M}^2$, I^G no cumplirá necesariamente con todas las propiedades de la integral de Itô que vimos para procesos en $\mathbb{L}^2$. Esto se debe a que, informalmente,

$$I_t^G = I_t^{G^{(n)}} \qquad \text{en } \{0 \leq t \leq R_n\}, \tag{2.2}$$

pero $\{0 \leq t \leq R_n\}$ es un conjunto aleatorio. Así, las propiedades que involucren tomar esperanza con respecto a tiempos fijos, no valdrán en general. En particular, $(I_t^G)_{t\geq 0}$ no es necesariamente una martingala. No obstante, (2.2) nos dice que la integral coincide "localmente" con una martingala; se dice que $(I_t^G)_{t\geq 0}$ es una *martingala local*. Otras propiedades, como la linealidad de la integral, siguen valiendo y pueden probarse fácilmente repitiendo el mismo argumento que empleamos para definir I^G.

2.3. Cálculo estocástico

En general, desarrollar una teoría de integración con una generalidad razonable suele ser una tarea muy distinta a la de *calcular* explícitamente la integral en algún caso particular de interés. De la misma forma que se desarrolla el cálculo para la integral de Riemann, que nos provee de las herramientas necesarias para poder efectuar cierto tipo de cómputos, debemos desarrollar un *cálculo estocástico* para la integral de Itô. Ésta es la labor que emprendemos en esta sección.

Definición 2.3.1. Sea X un proceso estocástico y sean $F \in \mathbb{M}^1$, $G \in \mathbb{M}^2$.

Decimos que X tiene *diferencial estocástico*

$$dX = Fdt + GdW$$

si X es adaptado, tiene trayectorias continuas y satisface

$$P\left(X_t = X_0 + \int_0^t F\,ds + \int_0^t G\,dW\,, \quad \forall\ 0 \leq t < +\infty\right) = 1. \tag{2.3}$$

Notar atentamente que los símbolos dX, dt y dW no tienen significado en sí mismos: son meramente notación utilizada para representar (2.3).

Observación 2.3.2. Si $F \in \mathbb{M}^1$, para casi todo ω la aplicación $t \longrightarrow \int_0^t F(\omega)\, ds$ está bien definida y es absolutamente continua. Extendiendo por cero si fuera necesario, el proceso estocástico $\left(\int_0^t F\, ds\right)_{t\geq 0}$ resulta bien definido, adaptado y con trayectorias absolutamente continuas. Así, la definición de diferencial estocástico se encuentra bien formulada.

A continuación, enunciamos la principal herramienta del cálculo estocástico: la regla de la cadena, conocida como fórmula de Itô. Como casi toda trayectoria del movimiento Browniano es de variación infinita, la regla difiere de aquella en el cálculo ordinario en un *término de corrección* cuadrático. Éste viene dado por la variación cuadrática finita del Browniano.

Teorema 2.3.3 (Fórmula de Itô). *Sean $F \in \mathbb{M}^1$, $G \in \mathbb{M}^2$ y X un proceso con diferencial estocástico*

$$dX = Fdt + GdW.$$

Supongamos $u : \mathbb{R}\times[\,0,+\infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y que $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ existen y son continuas. Sea Y el proceso dado por

$$Y_t = u(X_t, t).$$

Entonces Y tiene diferencial estocástico

$$dY = \frac{\partial u}{\partial t}\, dt + \frac{\partial u}{\partial x}\, dX + \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, G^2 dt$$

$$= \Big(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\, F + \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, G^2\Big)\, dt + \frac{\partial u}{\partial x}\, GdW.$$

Esto es, Y es adaptado, tiene trayectorias continuas y satisface

$$P\left(Y_t = Y_0 + \int_0^t \Big(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x}\, F + \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, G^2\Big)\, ds + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}\, GdW,\, \forall\, 0 \leq t \leq T\right) = 1,$$

donde el argumento de $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ en ambas integrales es (X_s, s).

Observación 2.3.4. Como X tiene trayectorias continuas, vemos que las funciones $\frac{\partial u}{\partial t}(X_t, t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(X_t, t)$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_t, t)$ tienen trayectorias continuas también. En consecuencia, la primera integral está bien definida. Por otro lado, para cada $\omega \in \Omega$ y $T > 0$, $X_t(\omega)$ está acotada en $[\,0, T\,]$, con lo que $\frac{\partial u}{\partial x}(X_t, t)$ está también acotada en este intervalo. Se sigue que $(\frac{\partial u}{\partial x}(X_t, t)G_t)_{t\geq 0}$ pertenece a $\mathbb{M}^2$ y, así, la segunda integral está definida como en la sección anterior.

2.4. Integral de Itô multidimensional

Para culminar este capítulo, generalizamos la integral de Itô a más dimensiones. Como en el caso 1-dimensional, fijaremos un movimiento Browniano d-dimensional definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ con la filtración Browniana aumentada correspondiente, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Definición 2.4.1. Sean $G = (G_{ij})_{i,j}$ una matriz de $n \times d$ y $F = (F^1, F^2, \ldots, F^n)$ un vector, con G_{ij} y F^k procesos estocásticos para todo $1 \leq i, k \leq n$, $1 \leq j \leq d$.

Decimos que $G \in \mathbb{L}^2_{n\times d}$ (o, respectivamente, $G \in \mathbb{M}^2_{n\times d}$) si

$$G_{ij} \in \mathbb{L}^2 (G_{ij} \in \mathbb{M}^2) \quad \forall\ 1 \leq i \leq n\,,\, 1 \leq j \leq d.$$

Análogamente, decimos que $F \in \mathbb{L}^1_n (F \in \mathbb{M}^1_n)$ si

$$F^i \in \mathbb{L}^1 (F^i \in \mathbb{M}^1) \quad \forall\ 1 \leq i \leq n.$$

Definición 2.4.2. Sea $G \in \mathbb{M}^2_{n\times d}$. Definimos la integral de Itô

$$\left(\int_0^t G\, dW \right)_{t\geq 0},$$

como el proceso n-dimensional cuya i-ésima coordenada viene dada por

$$\left(\int_0^t G\, dW \right)^i = \sum_{j=1}^d \int_0^t G_{ij}\, dW^j \qquad \forall\ 1 \leq i \leq n.$$

Proposición 2.4.3. ***Propiedades de la Integral de Itô multidimensional***
Para cualquier $T > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ y $G, H \in \mathbb{L}^2_{n\times d}$, se tiene

(i) $\displaystyle\int_0^T (aG + bH)\, dW = a \int_0^T G\, dW + b \int_0^T H\, dW.$

(ii) $\displaystyle\mathbb{E}\Big(\int_0^T G\, dW \Big) = 0.$

(iii) $\displaystyle\mathbb{E}\left(\left| \int_0^T G\, dW \right|^2 \right) = \mathbb{E}\Big(\int_0^T |G|^2\, dt \Big)$, *donde* $|G|^2 := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d G_{ij}^2$.

(iv) $\displaystyle\Big(\int_0^t G\, dW \Big)^i_{t\geq 0}$ *es una* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-martingala para* $1 \leq i \leq n$.

(v) $\displaystyle\left(\Big(\Big(\int_0^t G\, dW \Big)^i \Big)^2 - \sum_{j=1}^d \int_0^t G_{ij}^2\, ds \right)_{t\geq 0}$ *es una* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-martingala para* $1 \leq i \leq n$.

Observación 2.4.4. Para $G \in \mathbb{M}^2_{n\times d}$, de las propiedades anteriores sólo recuperamos la linealidad.

Definición 2.4.5. Sea $X = (X^1, \ldots, X^n)$ un vector de procesos estocásticos y sean $F \in \mathbb{L}^1_n([\,0, T\,])$, $G \in \mathbb{L}^2_{n\times d}([\,0, T\,])$. Decimos que X tiene *diferencial estocástico*

$$dX = F dt + G\, dW$$

si para todo $1 \leq i \leq n$, X^i tiene diferencial estocástico

$$dX^i = F^i dt + \sum_{j=1}^{d} G_{ij}\, dW^j.$$

Teorema 2.4.6 (Fórmula de Itô multidimensional). *Sean $F \in \mathbb{M}^1_n$, $G \in \mathbb{M}^2_{n\times d}$ y $X = (X^1, \ldots, X^n)$ un vector con diferencial estocástico*

$$dX = F dt + G\, dW.$$

Supongamos $u : \mathbb{R}^n \times [\,0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, con derivadas parciales continuas $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $1 \leq i, j \leq n$. Sea Y el proceso dado por

$$Y_t = u(X^1_t, \ldots, X^n_t, t).$$

Entonces Y tiene diferencial estocástico

$$dY = \frac{\partial u}{\partial t}\, dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x}\, dX^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{l=1}^{d} G_{il} G_{jl}\, dt,$$

donde el argumento en todas las derivadas parciales es $(X^1_t, \ldots, X^n_t, t)$.

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales estocásticas

3.1. Introducción

En este capítulo presentaremos a las ecuaciones diferenciales estocásticas. Definiremos el concepto de solución para una ecuación de este tipo y discutiremos las cuestiones de existencia y unicidad de esta última, como también algunas de sus propiedades.

Comencemos tomando funciones medibles Borel

$$b : \mathbb{R}^d \times [\,0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

$$\sigma : \mathbb{R}^d \times [\,0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times r}.$$

Buscamos darle sentido a la *ecuación diferencial estocástica*

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)\, dW_t,$$

que se escribe en coordenadas como

$$dX_t^{(i)} = b_i(X_t, t) + \sum_{j=1}^{r} \sigma_{ij}(X_t, t)\, dW_t^{(j)} \qquad 1 \leq i \leq d,$$

donde W es un movimiento Browniano r-dimensional y la "solución" X es un proceso estocástico a valores en $\mathbb{R}^d$ con trayectorias continuas. El vector b y la matriz σ son los *coeficientes* de la ecuación; b se dice el *drift* y σ la *matriz de dispersión* de la ecuación.

3.2. Tipos de solución

Damos aquí dos nociones distintas de solución para una ecuación diferencial estocástica. Definiremos primero el concepto de solución fuerte, en donde partimos de un espacio de probabilidad, filtración y movimiento Browniano asociado dados. Esta noción de solución es la más común y será con la que trabajaremos más frecuentemente. A continuación, introduciremos la noción de solución débil; aquí, a diferencia de lo anterior, el espacio de probabilidad, la filtración y el movimiento Browniano asociado son parte de la solución, más que el contexto del problema. Aunque esta noción es, como su nombre lo indica, más débil que la primera, resulta de interés por su aplicabilidad a situaciones más generales.

3.2.1. Soluciones fuertes

Para desarrollar la noción de solución fuerte, fijaremos primero un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ en donde tengamos definido un movimiento Browniano r-dimensional W con respecto a la filtración generada $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$. Asumimos que este espacio es lo suficientemente grande como para tener definido además un vector aleatorio ξ a valores en $\mathbb{R}^d$, independiente de $\mathcal{F}_\infty$ y con distribución dada μ. Esto es,

$$P(\xi \in \Gamma) = \mu(\Gamma), \qquad \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Consideramos la filtración $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$, para cada $t \geq 0$ dada por

$$\mathcal{G}_t := \sigma(\xi) \vee \mathcal{F}_t^W = \sigma(\xi, W_s : 0 \leq s \leq t),$$

como así también la clase de los conjuntos P-nulos para $\mathcal{G}_\infty$

$$\mathcal{N} := \{N \subseteq \Omega : \exists\ G \in \mathcal{G}_\infty \text{ con } \mathbb{N} \subseteq G,\ P(G)\},$$

para construir la *filtración aumentada*

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\mathcal{G}_t \cup \mathcal{N}), \quad t \geq 0; \qquad\qquad \mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\right), \tag{3.1}$$

por analogía a lo hecho con la filtración Browniana aumentada. La filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisface las condiciones usuales y, además, W resulta un movimiento Browniano con respecto a esta filtración.

Definición 3.2.1. Una *solución fuerte* de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)\, dW_t,$$

en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, con respecto al movimiento Browniano W y la condición inicial ξ, es un proceso $X = (X_t)_{t\geq 0}$ que satisface las siguientes propiedades:

- X tiene trayectorias continuas;
- X es adaptado a la filtración aumentada $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$;
- $P(X_0 = \xi) = 1$;
- $$P\left(\int_0^t \big(|b_i(X_s, s)| + \sigma_{ij}^2(X_s, s)\big)\, ds < +\infty\right) = 1,$$

  para todo $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq r$ y $0 \leq t < +\infty$;

- $$P\left(X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)\, dW_s, \quad 0 \le t < +\infty\right) = 1,$$
  o equivalentemente, para cada $1 \le i \le d$
  $$P\left(X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t b_i(X_s, s)ds + \sum_{j=1}^{r} \int_0^t \sigma_{ij}(X_s, s)\, dW_s^{(j)}, \quad 0 \le t < +\infty\right) = 1.$$

3.2.2. Soluciones débiles

Definición 3.2.2. Una *solución débil* de la ecuación diferencial estocástica
$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)\, dW_t,$$
es un conjunto $\{(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathcal{F}_t)_{t\ge0}\}$ que verifica

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad, $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ es una filtración de $\mathcal{F}$ que satisface las condiciones usuales;
- X es un proceso a valores en $\mathbb{R}^d$ adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ y con trayectorias continuas;
- W es un movimiento Browniano r-dimensional con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$;
- $$P\left(\int_0^t \big(|b_i(X_s, s)| + \sigma_{ij}^2(X_s, s)\big)\, ds < +\infty\right) = 1,$$
  para todo $1 \le i \le d$, $1 \le j \le r$ y $0 \le t < +\infty$;
- $$P\left(X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)\, dW_s, \quad 0 \le t < +\infty\right) = 1,$$
  o equivalentemente, para cada $1 \le i \le d$
  $$P\left(X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t b_i(X_s, s)ds + \sum_{j=1}^{r} \int_0^t \sigma_{ij}(X_s, s)\, dW_s^{(j)}, \quad 0 \le t < +\infty\right) = 1.$$

La medida de probabilidad $\mu(\Gamma) := P(X_0 \in \Gamma), \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ se dice la *distribución inicial* de la solución.

Notemos que la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ de la definición en principio no tiene por qué coincidir con la filtración aumentada que dimos para la solución fuerte. Por este motivo, la existencia de una solución débil $\{(X, W), (\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathcal{F}_t)_{t\ge0}\}$ no garantiza, para un movimiento Browniano $\tilde{W}$ con respecto a una filtración $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\ge0}$ definido en un espacio de probabilidad $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$, la existencia de un proceso $\tilde{X}$ tal que el conjunto $\{(\tilde{X}, \tilde{W}), (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}), (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\ge0}\}$ sea, nuevamente, solución débil. En particular, la existencia de solución débil no implica la de una solución fuerte. No obstante, toda solución fuerte es también solución débil.

3.3. Unicidad de la solución

Mostramos ahora dos tipos de unicidad para la solución de una ecuación diferencial estocástica.

Definición 3.3.1. Sean b un drift y σ una matriz de dispersión. Decimos que se tiene *unicidad fuerte* para el par (b, σ) si para todo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ en donde tengamos definidos un movimiento Browniano r-dimensional W y un vector aleatorio d-dimensional ξ independiente, dos soluciones fuertes $\hat{X}$ y $\tilde{X}$ cualesquiera de la ecuación

$$dX_t = b(X_t, t)\, dt + \sigma(X_t, t)\, dW_t$$

con condición inicial ξ verifican $P(\hat{X}_t = \tilde{X}_t,\ \forall\ \ 0 \leq t < \infty) = 1$.

Recordemos que para ecuaciones diferenciales ordinarias, la condición Lipschitz es la que garantiza unicidad de la solución. El siguiente teorema muestra que la misma condición asegura la unicidad fuerte de la solución para una ecuación diferencial estocástica.

Teorema 3.3.2. *Supongamos que los coeficientes b y σ son localmente Lipschitz en la variable espacial; i.e., para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una constante $K_n > 0$ tal que para cada $t \geq 0$, $|x| \leq n$ y $|y| \leq n$ se tiene*

$$|b(x,t) - b(y,t)| + |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| \leq K_n |x - y|.$$

Entonces, se tiene unicidad fuerte para el par (b, σ).

Notación. Para cada matriz σ de $(d \times r)$, notamos

$$|\sigma|^2 := \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{r} \sigma_{ij}^2.$$

Antes de proceder con la demostración, recordemos el lema de Gronwall.

Lema 3.3.3. *Sea $T > 0$ y $g : [\,0, T\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Si para todo $0 \leq t \leq T$ se tiene*

$$0 \leq g(t) \leq C + \beta \int_0^t g(s)\, ds,$$

para ciertas constantes no negativas $C, \beta,$ entonces para todo $0 \leq t \leq T$ vale

$$g(t) \leq C\, e^{\beta t}.$$

Demostración del Teorema 3.3.2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad en donde tenemos definidos un movimiento Browniano r-dimensional W y un vector aleatorio d-dimensional ξ independiente y sean dos soluciones fuertes $\hat{X}$ y $\tilde{X}$ definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de la ecuación

$$dX_t = b(X_t, t)\, dt + \sigma(X_t, t)\, dW_t$$

con condición inicial ξ. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos los tiempos de parada

$$\hat{\tau}_n := \text{ínf}\{t \geq 0 : |\hat{X}_t| \geq n\} \qquad \tilde{\tau}_n := \text{ínf}\{t \geq 0 : |\tilde{X}_t| \geq n\},$$

y $S_n := \hat{\tau}_n \wedge \tilde{\tau}_n$. Tenemos que $P(\text{lím}_{n\to+\infty} S_n = +\infty) = 1$, y

$$\hat{X}_{t\wedge S_n} - \tilde{X}_{t\wedge S_n} = \int_0^{t\wedge S_n} \big(b(\hat{X}_u, u) - b(\tilde{X}_u, u)\big) du + \int_0^{t\wedge S_n} \big(\sigma(\hat{X}_u, u) - \sigma(\tilde{X}_u, u)\big)\, dW_u.$$

Usando la desigualdad vectorial $|v_1 + \cdots + v_k|^2 \leq k^2(|v_1|^2 + \cdots + |v_k|^2)$ obtenemos

$$\mathbb{E}(|\hat{X}_{t\wedge S_n} - \tilde{X}_{t\wedge S_n}|^2) \leq 4\mathbb{E}\left(\left|\int_0^{t\wedge S_n} \big(b(\hat{X}_u, u) - b(\tilde{X}_u, u)\big) du\right|^2\right)$$

$$+ 4\mathbb{E}\left(\left|\int_0^{t\wedge S_n} \big(\sigma(\hat{X}_u, u) - \sigma(\tilde{X}_u, u)\big)\, dW_u\right|^2\right).$$

Por la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_0^{t\wedge S_n} \big(b(\hat{X}_u, u) - b(\tilde{X}_u, u)\big) du\right|^2\right) \leq t\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge S_n} \big|b(\hat{X}_u, u) - b(\tilde{X}_u, u)\big|^2 du\right).$$

Por otro lado, como

$$\int_0^{t\wedge S_n} \big(\sigma(\hat{X}_u, u) - \sigma(\tilde{X}_u, u)\big)\, dW_u = \int_0^{t} \big(\sigma(\hat{X}_u, u) - \sigma(\tilde{X}_u, u)\big)\mathbf{1}_{\{u\leq S_n\}}\, dW_u,$$

y $\big(\sigma(\hat{X}_u, u) - \sigma(\tilde{X}_u, u)\big)\mathbf{1}_{\{u\leq S_n\}} \in \mathbb{L}^2_{r\times d}$, por (iii) de la Proposición 2.4.3 se tiene

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_0^{t\wedge S_n} \big(\sigma(\hat{X}_u, u) - \sigma(\tilde{X}_u, u)\big)\, dW_u\right|^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge S_n} \big|\sigma(\hat{X}_u, u) - \sigma(\tilde{X}_u, u)\big|^2\, du\right).$$

Sea ahora $T > 0$. Si $0 \leq t \leq T$, de lo anterior y de la condición de Lipschitz para los coeficientes b y σ, conseguimos

$$\mathbb{E}(|\hat{X}_{t\wedge S_n} - \tilde{X}_{t\wedge S_n}|^2) \leq 4(T+1)K_n^2\mathbb{E}\Big(\int_0^{t\wedge S_n} |\hat{X}_u - \tilde{X}_u|^2\, du\Big)$$

y, por lo tanto,

$$\mathbb{E}(|\hat{X}_{t\wedge S_n} - \tilde{X}_{t\wedge S_n}|^2) \leq 4(T+1)K_n^2 \int_0^t \mathbb{E}(|\hat{X}_{u\wedge S_n} - \tilde{X}_{u\wedge S_n}|^2)\, du.$$

El teorema de convergencia mayorada implica que $g(t) := \mathbb{E}(|\hat{X}_{t\wedge S_n} - \tilde{X}_{t\wedge S_n}|^2)$ es continua en $[\,0, T\,]$ y, por el Lema de Gronwall, vemos que $g \equiv 0$. De esto deducimos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $P(\hat{X}_{t\wedge S_n} = \tilde{X}_{t\wedge S_n}) = 1$ para $0 \leq t \leq T$. Como $T > 0$ es arbitrario, tenemos lo anterior para todo $t \geq 0$. Tomando límite con $n \to +\infty$, concluimos $P(\hat{X}_t = \tilde{X}_t) = 1$ para todo $0 \leq t < +\infty$. El teorema queda entonces demostrado observando que $\hat{X}$ y $\tilde{X}$ tienen trayectorias continuas.

Nos interesa ahora definir una noción de unicidad para soluciones débiles de una ecuación diferencial estocástica. Introducimos a continuación el concepto de *unicidad en ley*.

Definición 3.3.4. Sean b un drift y σ una matriz de dispersión. Decimos que se tiene *unicidad en ley* para el par (b, σ) si para dos soluciones débiles cualesquiera $\{(\hat{X}, \hat{W}), (\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{P}), (\hat{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}\}$ y $\{(\tilde{X}, \tilde{W}), (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}), (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}\}$, con la misma distribución inicial, i.e.,

$$\hat{P}(\hat{X}_0 \in \Gamma) = \tilde{P}(\tilde{X}_0 \in \Gamma) \quad \forall \ \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

los procesos $\hat{X}$ y $\tilde{X}$ tienen la misma ley.

Con respecto a la unicidad en ley, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3.5. *Supongamos que los coeficientes b y σ son localmente Lipschitz en la variable espacial. Entonces se tiene unicidad en ley para el par (b, σ).*

3.4. Existencia de la solución

Exhibimos ahora el principal resultado de existencia para soluciones fuertes de ecuaciones diferenciales estocásticas. Al igual que con las ecuaciones diferenciales ordinarias, una condición de Lipschitz local no será suficiente para garantizar una solución definida globalmente. Imponemos entonces condiciones más fuertes para conseguir el resultado.

Teorema 3.4.1. *Supongamos que los coeficientes b y σ satisfacen las siguientes condiciones*

$$|b(x,t) - b(y,t)| + |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| \leq K|x - y| \tag{3.2}$$

$$|b(x,t)|^2 + |\sigma(x,t)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2), \tag{3.3}$$

para todo $0 \leq t < +\infty$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, donde K es una constante no negativa.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad en donde se encuentren definidos un movimiento Browniano r-dimensional W y un vector aleatorio ξ a valores en $\mathbb{R}^d$ con segundo momento finito,

$$\mathbb{E}(|\xi|^2) < +\infty.$$

Por último, consideremos $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, la filtración aumentada definida en este espacio. Entonces existe un proceso X que es solución fuerte de

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)\, dW_t,$$

con condición inicial ξ. Más aún, para cada $T > 0$, existe una constante C, que depende sólo de K y de T, tal que

$$\mathbb{E}(|X_t|^2) \leq C\big(1 + \mathbb{E}(|\xi|^2)\big)e^{Ct}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Demostración. Describimos los principales argumentos de la demostración. Para una prueba detallada referimos a [5]. La idea será, al igual que para las ecuaciones diferenciales ordinarias, definir recursivamente una sucesión de aproximaciones sucesivas dadas por $X^{(0)} \equiv \xi$ y para $k \geq 0$,

$$X_t^{(k+1)} = \xi + \int_0^t b(X_s^{(k)}, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s^{(k)}, s)\, dW_s, \quad 0 \leq t < +\infty.$$

Estos procesos son adaptados a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y tienen trayectorias continuas. Deseamos ver que la sucesión $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ converge a una solución de la ecuación. El primer paso será ver, utilizando (3.3), que dado $T > 0$ existe una constante C que depende sólo de K y de T tal que para todo $k \in \mathbb{N}_0$ se tiene

$$\mathbb{E}(|X_t^{(k)}|^2) \leq C\big(1 + \mathbb{E}(|\xi|^2)\big)e^{Ct}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Con esto, puede mostrarse que el proceso

$$M_t := \int_0^t \big(\sigma(X_s^{(k)}, s) - \sigma(X_s^{(k-1)}, s)\big)\, dW_s,$$

es una martingala con segundo momento finito para todo $t \geq 0$. Utilizando desigualdades para martingalas, la condición (3.2) y el lema de Borel-Cantelli, se deduce la existencia de un proceso X adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y de trayectorias continuas con la propiedad de que para casi todo $\omega \in \Omega$, las trayectorias $\big(X^{(k)}(\omega)\big)_{k\in\mathbb{N}_0}$ convergen a $X(\omega)$ uniformemente sobre compactos de $[\,0, +\infty)$. Por el lema de Fatou, obtenemos

$$\mathbb{E}(|X_t|^2) \leq C\big(1 + \mathbb{E}(|\xi|^2)\big)e^{Ct}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

con C la misma constante que encontramos para la sucesión $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$. Por último, con todo esto se verifica que X es solución fuerte de la ecuación.

Observación 3.4.2. La condición dada en (3.2), implica la condición en (3.3).

Notemos que, en particular, el resultado anterior nos da condiciones para la existencia de soluciones débiles de ecuaciones diferenciales estocásticas. En la Sección 3.6 mostraremos existencia de soluciones débiles para un cierto tipo de ecuaciones diferenciales estocásticas de interés, con hipótesis más relajadas sobre el coeficiente b.

3.5. Propiedad de Markov

Bajo ciertas hipótesis sobre los coeficientes b y σ, las soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas satisfacen la propiedad fuerte de Markov. Enunciamos a continuación la formulación de la propiedad Markoviana que utilizaremos en nuestro trabajo.

Teorema 3.5.1. *Supongamos que los coeficientes b y σ satisfacen* (3.2) *y* (3.3)*. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad en donde tengamos definido un movimiento Browniano r-dimensional W. Para cada $x \in \mathbb{R}^d$, sea X^x la solución fuerte de la ecuación*

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)\, dW_t$$

con condición inicial x. Consideremos la filtración aumentada $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ definida en este espacio y τ, un tiempo de parada con respecto a esta filtración.

Para cada $f : \big(C[\,0, +\infty), \mathcal{B}(C[\,0, +\infty))\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ medible y acotada, definimos φ_f por la fórmula

$$\varphi_f(x) = \mathbb{E}\big(f(X_\cdot^x)\big).$$

Entonces

(i) φ_f *es medible Borel;*

(ii) $\mathbb{E}\big(f(X^x_{\tau+\cdot})\mathbf{1}_{\{\tau<+\infty\}}\big|\mathcal{F}_\tau\big) = \mathbf{1}_{\{\tau<+\infty\}}\varphi_f(X^x_\tau)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^d$.

Notemos que tomando $\tau = t$ para $t \geq 0$ se recupera, a partir de la propiedad fuerte de Markov que hemos mostrado aquí, la propiedad de Markov original.

3.6. Teorema de Girsanov

El teorema de Girsanov es una herramienta importante del cálculo estocástico: provee una forma de resolver ecuaciones diferenciales estocásticas mediante un cambio en la medida de probabilidad subyacente, de modo tal que el movimiento Browniano asociado a la ecuación se convierta, bajo la nueva medida, en la solución. Nosotros utilizaremos esto en los próximos capítulos para conseguir información sobre la ley de la solución de una cierta familia de ecuaciones diferenciales estocásticas.

Comencemos fijando un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ en donde tengamos definido un movimiento Browniano d-dimensional W con respecto a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ que satisface las condiciones usuales. Sea X un proceso estocástico a valores en $\mathbb{R}^d$, medible y adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ tal que

$$P\left(\int_0^T (X_t^{(i)})^2 dt < +\infty\right) = 1, \quad 1 \leq i \leq d, \quad 0 \leq T < +\infty.$$

Entonces, para cada $1 \leq i \leq d$, la integral de Itô $I^{X^{(i)}}$ está definida. Sea ahora Z^X el proceso dado por

$$Z_t^X := \exp\left(\sum_{i=1}^d \int_0^t X_s^{(i)}\, dW_s^{(i)} - \frac{1}{2}\int_0^t |X_s|^2 ds\right). \tag{3.4}$$

Bajo ciertas condiciones sobre X, que discutiremos después, Z^X resulta una martingala de trayectorias continuas y, así, $\mathbb{E}(Z_t^X) = 1$ para todo $0 \leq t < +\infty$. En este caso podemos definir, para cada $T \geq 0$, una medida de probabilidad $\tilde{P}_T$ en $\mathcal{F}_T$ dada por

$$\tilde{P}_T(A) := \int_A Z_T^X\, dP, \quad A \in \mathcal{F}_T.$$

La propiedad de martingala muestra que la familia $\{\tilde{P}_T : 0 \leq T < +\infty\}$ satisface la condición de consistencia

$$\tilde{P}_T(A) = \tilde{P}_t(A), \quad A \in \mathcal{F}_t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Teorema 3.6.1 (Teorema de Girsanov). *Supongamos que* Z^X *definido como en* (3.4) *es una martingala. Sea* $\tilde{W}$ *el proceso definido por*

$$\tilde{W}_t^{(i)} := W_t^{(i)} - \int_0^t X_s^{(i)} ds, \quad 1 \leq i \leq d, \quad 0 \leq t < +\infty.$$

Para cada $T \geq 0$ *fijo, el proceso* $\tilde{W} = \{\tilde{W}_t : 0 \leq t \leq T\}$ *es un movimiento Browniano* d*-dimensional en* $(\Omega, \mathcal{F}_T, \tilde{P}_T)$.

Observación 3.6.2. Si $\varphi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}^d$ es medible y satisface $\int_0^T |\varphi|^2 ds < +\infty$ para todo $0 \leq T < +\infty$, entonces Z^φ resulta una martingala y, en este caso, el teorema de Girsanov se conoce como la *fórmula de Cameron-Martin*.

Para que el teorema resulte de utilidad, necesitamos encontrar condiciones suficientemente generales bajo las cuales el proceso Z^X definido por (3.4) resulte una martingala. A tal efecto, tenemos lo que se conoce como *condición de Novikov*; detallamos una versión más general de la misma en la próxima proposición.

Proposición 3.6.3. *Sea W un movimiento Browniano d-dimensional con respecto a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ que satisface las condiciones usuales y sea X un proceso estocástico a valores en $\mathbb{R}^d$ medible y adaptado a dicha filtración. Si existe una sucesión de tiempos no negativos $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ con $t_0 = 0$ y $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$, tales que*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n} |X_s|^2 ds \right) \right) < +\infty, \quad n \in \mathbb{N},$$

entonces Z^X definido por (3.4) es una martingala.

Veamos con un ejemplo como podemos usar este resultado para construir soluciones débiles de ecuaciones diferenciales estocásticas.

Proposición 3.6.4. *Consideremos la ecuación diferencial estocástica*

$$dX_t = b(X_t, t)dt + dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.5}$$

donde T es un número fijo positivo, W es un movimiento Browniano d-dimensional y $b : \mathbb{R}^d \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ es una función medible Borel que satisface

$$|b(x,t)| \leq K(1+|x|), \quad 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^d, \tag{3.6}$$

para alguna constante positiva K. Entonces para cualquier medida de probabilidad μ en $\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big)$ la ecuación en (3.5) tiene solución débil con distribución inicial μ.

Demostración. Sea $C([0,+\infty), \mathbb{R}^d)$ el espacio de funciones continuas a valores en $\mathbb{R}^d$, definidas en el intervalo $[0,+\infty)$, y sea $\mathcal{B}\big(C([0,+\infty),\mathbb{R}^d)\big) = \otimes_{i=1}^d \mathcal{B}(C[0,+\infty))$, la σ-algebra producto en este espacio. Sean P_*^i, $1 \leq i \leq d$, d copias de P_*, la medida de Wiener en $\big(C[0,+\infty), \mathcal{B}(C[0,+\infty))\big)$ y tomemos $P_*^0 = P_*^1 \times \dots P_*^d$ la medida producto. Sea X el proceso estocástico definido en $C([0,+\infty),\mathbb{R}^d)$, dado por las proyecciones, i.e.,

$$X_t(f) = f(t), \quad \forall\ f \in C([0,+\infty),\mathbb{R}^d).$$

Bajo P_*, X constituye un movimiento Browniano d-dimensional estándar. Para cada $x \in \mathbb{R}^d$, definimos la medida P^x en $\big(C([0,+\infty),\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(C([0,+\infty),\mathbb{R}^d))\big)$ por

$$P^x(F) = P_*^0(F - x), \quad F \in \mathcal{B}(C([0,+\infty),\mathbb{R}^d)),$$

donde $F - x = \{f \in C([0,+\infty),\mathbb{R}^d) : f + x \in F\}$. Bajo P^x, X es un movimiento Browniano d-dimensional comenzando en x. Más aún, la aplicación $x \mapsto P^x(F)$ es medible Borel para todo $F \in \mathcal{B}(C([0,+\infty),\mathbb{R}^d))$. El par $(X, \{P^x\}_{x\in\mathbb{R}^d})$ se dice una *familia Browniana*.

Utilizando la proposición anterior, puede mostrarse que (3.6) implica que

$$Z_t := \exp\left(\sum_{j=1}^{d} \int_0^t b_j(X_s,s)\, d(X_s^{(j)} - X_0^{(j)}) - \frac{1}{2}\int_0^t |b(X_s,s)|^2 ds \right)$$

es una martingala bajo cada medida P^x. Así, utilizando el teorema de Girsanov, vemos que bajo Q^x definida para cada $A \in \mathcal{B}(C([0,+\infty),\mathbb{R}^d))$ por

$$Q^x(A) = \int_A Z_T\, dP^x,$$

el proceso

$$W_t := X_t - X_0 - \int_0^t b(X_s,s)ds, \quad 0 \le t \le T,$$

es un movimiento Browniano con $Q^x(W_0 = 0) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Reescribiendo la igualdad anterior como

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s,s)ds + W_t, \quad 0 \le t \le T,$$

vemos que bajo la probabilidad Q^μ definida por $Q^\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^d} Q^x(A)d\mu(x)$, el conjunto $\{(X,W), (C([0,+\infty),\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(C([0,+\infty),\mathbb{R}^d)), Q^\mu), (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}\}$ es una solución débil de la ecuación (3.5). □

Observación 3.6.5. De forma análoga puede probarse la existencia de solución débil para la ecuación

$$dX_t = b(X_t,t)dt + \varepsilon dW_t, \quad 0 \le t \le T, \tag{3.7}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Notemos que hemos probado la existencia de solución débil bajo una hipótesis más flexible sobre b que la condición Lipschitz, necesaria para garantizar la existencia de solución fuerte. No obstante, si b fuera Lipschitz en la variable espacial, tenemos unicidad en ley para la solución de ecuaciones de este tipo. En este caso, si μ es una medida de probabilidad en $\mathbb{R}^d$, la proposición nos dice que la solución de (3.7) con distribución inicial μ tiene ley dada por

$$P^\mu(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^d} P^x(\cdot)\, d\mu(x),$$

donde P^x es la ley de la solución de (3.7) con condición inicial fija $x \in \mathbb{R}^d$.

3.7. El caso de coeficientes localmente Lipschitz

Culminando este capítulo, estudiamos la existencia de soluciones fuertes para la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = b(X_t)\, dt + \sigma(X_t)\, dW_t \tag{3.8}$$

donde $b : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ y $\sigma : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ son coeficientes que sólo satisfacen una condición de Lipschitz *local*. Es posible que no existan soluciones fuertes de la ecuación en el sentido de la Definición 3.2.1, pues estas podrían no estar definidas globalmente sino hasta un *tiempo de explosión* τ. Formalizamos la idea de explosión.

Definición 3.7.1. Una *solución fuerte hasta un tiempo de explosión* de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)\, dW_t,$$

en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, con respecto al movimiento Browniano W y la condición inicial ξ, es una familia de procesos $\big(X^{(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ a valores en $\mathbb{R}^d$ que satisfacen las siguientes propiedades:

- $X^{(n)}$ tiene trayectorias continuas para todo $n \in \mathbb{N}$;
- $X^{(n)}$ es adaptado a la filtración aumentada $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- $P(|\xi| \neq \infty) = 1$ y $P(X_0^{(n)} = \xi) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- Si definimos
$$\tau^{(n)} := \text{ínf}\{t \geq 0 : |X_t^{(n)}| \geq n\}$$
entonces para $n \leq m \in \mathbb{N}$ se tiene
$$P\big(X^{(n)}_{t\wedge\tau^{(n)}} = X^{(m)}_{t\wedge\tau^{(n)}} \;\text{ para todo }\; 0 \leq t < +\infty\big) = 1.$$
Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ vale
$$P\left(\int_0^{t\wedge\tau^{(n)}} \big(|b_i(X_s^{(n)})| + \sigma_{ij}^2(X_s^{(n)})\big)\, ds < +\infty\right) = 1,$$
para todo $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq r$ y $0 \leq t < +\infty$
- y
$$P\Bigg(X_{t\wedge\tau^{(n)}} = X_0^{(n)} + \int_0^t b(X_s^{(n)})\mathbf{1}_{\{s\leq\tau^{(n)}\}}\, ds$$
$$+ \int_0^t \sigma(X_s^{(n)})\mathbf{1}_{\{s\leq\tau^{(n)}\}}\, dW_s,\ \forall\, 0 \leq t < +\infty\Bigg) = 1.$$

De las hipótesis se deduce que $(\tau^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente en casi todo punto. Luego, podemos definir

$$\tau = \lim_{n\to+\infty} \tau^{(n)} \tag{3.9}$$

al que llamaremos el *tiempo de explosión de la solución*. La hipótesis de finitud sobre ξ nos dice que $P(\tau > 0) = 1$. Por otro lado, notemos que para $t < \tau$ se encuentra bien definido en casi todo punto $X_t = \lim_{n\to+\infty} X^{(n)}_{t\wedge\tau^{(n)}}$. Abusando de la definición, frecuentemente diremos que el "proceso" $\big(X_t\big)_{0\le t<\tau}$ es la solución de (3.8) hasta el tiempo de explosión τ. Por último, observemos que si $P(\tau = +\infty) = 1$ entonces se recupera la definición original de solución fuerte para el par (b, σ).

Nuestro objetivo ahora es mostrar que una condición de Lipschitz local sobre los coeficientes garantiza la existencia de solución fuerte hasta un tiempo de explosión para el par (b, σ). Nos será necesario el siguiente lema.

Lema 3.7.2. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Supongamos que tenemos coeficientes b y σ globalmente Lipschitz y sea X solución fuerte en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de la ecuación diferencial estocástica*

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t.$$

Sean b' y σ' otro par de coeficientes globalmente Lipschitz y consideremos X' la solución fuerte en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de

$$dX_t = b'\,dt + \sigma'(X_t)\,dW_t.$$

Supongamos además que existe $K > 0$ tal que

$$b(x) = b'(x) \qquad \text{y} \quad \sigma(x) = \sigma'(x) \quad \text{para } |x| \le K.$$

Entonces si definimos el tiempo de parada

$$\tau^K = \inf\big\{t \ge 0 : \max\{X_t, X'_t\} \ge K\big\}$$

se tiene

$$P\Big(X_{t\wedge\tau^K} = X'_{t\wedge\tau^K} \text{ para todo } 0 \le t < +\infty\Big) = 1.$$

Demostración. Se procede al igual que en la prueba del teorema de unicidad de soluciones fuertes para coeficientes localmente Lipschitz (Teorema 3.3.2). □

Aplicando este lema junto con el Teorema 3.4.1 conseguimos el resultado buscado.

Teorema 3.7.3. *Supongamos que b y σ son coeficientes localmente Lipschitz. Luego existe solución fuerte hasta un tiempo de explosión de la ecuación diferencial estocástica*

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $b^{(n)}$ y $\sigma^{(n)}$ aplicaciones globalmente Lipschitz tales que

$$b(x) = b^{(n)}(x) \qquad \text{y} \quad \sigma(x) = \sigma^{(n)}(x) \quad \text{para } |x| \le n.$$

Consideremos $X^{(n)}$ la solución fuerte dada por el Teorema 3.4.1 de la ecuación diferencial estocástica

$$dX^{(n)}_t = b^{(n)}(X^{(n)}_t)\,dt + \sigma^{(n)}(X^{(n)}_t)\,dW_t. \tag{3.10}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ el proceso $X^{(n)}$ tiene trayectorias continuas y es adaptado a la filtración aumentada por ser solución fuerte de una ecuación diferencial estocástica. Además, si definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ el tiempo de parada

$$\tau^{(n)} = \inf\{t \ge 0 : |X^{(n)}| \ge n\}$$

entonces por el lema anterior tenemos que para $n \leq m \in \mathbb{N}$ vale

$$P\Big(X^{(n)}_{t\wedge\tau^{(n)}} = X^{(m)}_{t\wedge\tau^{(n)}} \ \text{ para todo } \ 0 \leq t < +\infty\Big) = 1.$$

Por último, como $b^{(n)}$ coincide con b sobre $B_n(0)$, la Proposición 2.2.11 nos permite verificar las últimas dos condiciones de la Definición 3.7.1. Así, la familia $\big(X^{(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ constituye una solución fuerte hasta un tiempo de explosión de (3.8). □

Observación 3.7.4. De la demostración del Teorema 3.3.2 se desprende la unicidad de la solución fuerte hasta un tiempo de explosión de la ecuación (3.8) para el caso de coeficientes localmente Lipschitz. Es decir, si $\big(X^{(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\big(\tilde{X}^{(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos soluciones hasta un tiempo de explosión de (3.8) entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$P\big(X^{(n)}_{t\wedge \text{mín}\{\tau^{(n)},\tilde{\tau}^{(n)}\}} = \tilde{X}^{(n)}_{t\wedge \text{mín}\{\tau^{(n)},\tilde{\tau}^{(n)}\}} \ \text{ para todo } \ 0 \leq t < +\infty\big) = 1.$$

De aquí se deduce que con probabilidad uno los “procesos” inducidos X y $\tilde{X}$ tienen el mismo tiempo de explosión y sus trayectorias hasta dicho tiempo coinciden.

Capítulo 4

Grandes Desvíos

4.1. Introducción

Antes de presentar formalmente el objeto de estudio de esta sección, nos permitimos comenzar con un ejemplo sencillo que intentará ilustrar los principales propósitos e ideas generales de esta teoría.

Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con esperanza finita. Por la Ley de los Grandes Números, sabemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{cs} \mathbb{E}(X_1).$$

Luego, dado un boreliano $A \subseteq \mathbb{R}$ a una distancia positiva de la media $m = \mathbb{E}(X_1)$, la probabilidad de que los promedios se encuentren en A tenderá a cero cuando n tienda a infinito. Resulta natural preguntarse, entonces, con qué velocidad estas probabilidades decaen a cero. En particular, nos interesará saber si lo hacen de forma exponencial, en el sentido de que existe $I(A) \in (0, +\infty]$ tal que

$$P_{\overline{X}_n}(A) = P\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \in A\Big) \approx e^{-nI(A)}, \tag{4.1}$$

donde $\approx$ denota equivalencia logarítmica. Esto es, $n^{-1}\log P\big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \in A\big) \to -I(A)$ cuando $n \to +\infty$. Notemos que cuanto mayor sea el valor de $I(A)$, más veloz será la convergencia al cero.

Supongamos que (4.1) vale para una cierta clase de conjuntos $\mathcal{C}$ y sean A, B conjuntos disjuntos de $\mathcal{C}$. Como $P_{\overline{X}_n}(A\cup B) = P_{\overline{X}_n}(A) + P_{\overline{X}_n}(B)$, se sigue que $P_{\overline{X}_n}(A\cup B) \approx e^{-n\,\text{mín}\,\{I(A),I(B)\}}$. Esto sugiere que $I(A)$ podría ser de la forma

$$I(A) = \inf_{x\in A} I(x) \tag{4.2}$$

para alguna función $I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que llamaremos función de tasa. Si este es el caso, no podemos esperar que (4.1) valga para todo boreliano. En efecto, supongamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\overline{X}_n$ tiene distribución continua, i.e., $P_{\overline{X}_n}(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si (4.1) valiera para todo conjunto unitario, esto forzaría a I a ser idénticamente $+\infty$. Pero, por otro lado, (4.1) para el caso $A = \mathbb{R}$ implica $\inf_{x\in\mathbb{R}} I(x) = 0$, lo cual es una contradicción. Así, nos interesa analizar también para qué conjuntos (4.1) es válido.

No profundizaremos sobre este ejemplo; sólo lo hemos introducido para intentar motivar el interés por una teoría de Grandes Desvíos, así como también para dar una idea del enfoque de esta misma.

En líneas generales, la teoría de Grandes Desvíos estudia las probabilidades de eventos atípicos en procesos con un comportamiento límite determinístico. En particular, se interesa por la velocidad de convergencia al cero de dichas probabilidades. Para ello, se vale de funciones de tasa encargadas de "penalizar" a nuestro proceso según que tan atípico sea el evento que estemos observando. Estas "penalizaciones" influyen directamente en la velocidad de convergencia antes mencionada.

Esta teoría será una herramienta de gran utilidad para nuestro trabajo en los próximos capítulos, por lo cual es conveniente dar ahora una formulación apropiada de la misma y hacer algunas observaciones que serán de interés más adelante.

4.2. Principio de Grandes Desvíos

Daremos la definición del Principio de Grandes Desvíos en el caso continuo, que será como lo utilizaremos más adelante.

Definición 4.2.1. Una familia $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de medidas de probabilidad definidas en la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(M)$ de un espacio métrico M se dice que cumple un principio de desviaciones grandes, con escale $a_\varepsilon \nearrow +\infty$ y función de tasa I si:

(a) $I : M \longrightarrow [0, +\infty]$ es semicontinua inferiormente (i.e. si $x_\varepsilon \to x$, entonces $\liminf_{\varepsilon\to 0} I(x_\varepsilon) \geq I(x)$)

(b) Para todo abierto $G \subseteq M$, $\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{a_\varepsilon} \log \mu_\varepsilon(G) \geq -\inf_{x\in G} I(x)$

(c) Para todo cerrado $F \subseteq M$, $\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{a_\varepsilon} \log \mu_\varepsilon(F) \leq -\inf_{x\in F} I(x)$.

Conviene hacer algunas aclaraciones en lo que respecta a la definición, que resumimos en las siguientes observaciones.

Observación 4.2.2. La segunda condición implica que, dado G abierto y $\gamma > 0$, existe ε_0 tal que para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ se tiene

$$\mu_\varepsilon(G) \geq e^{-a_\varepsilon(\inf_{x\in G} I(x)+\gamma)},$$

razón por la cual llamaremos a esta condición la *cota inferior*. Análogamente, la tercera condición implica que, dado F cerrado y $\gamma > 0$, existe ε_0 tal que para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ se tiene

$$\mu_\varepsilon(F) \leq e^{-a_\varepsilon(\inf_{x\in F} I(x)-\gamma)}.$$

Llamaremos a esta condición, la *cota superior*.

Observación 4.2.3. En principio, la definición anterior asegura la validez de la cota inferior sobre abiertos de M, como también la de la cota superior sobre cerrados. Así, la validez de dichas cotas en una clase más amplia de conjuntos dependerá de cada caso en particular. Sin embargo, de la definición se desprende que si $A \subseteq M$ es un boreliano cualquiera, entonces

$$-\inf_{x\in A^\circ} I(x) \le \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{a_\varepsilon} \log \mu_\varepsilon(A) \le \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{a_\varepsilon} \log \mu_\varepsilon(A) \le -\inf_{x\in \overline{A}} I(x), \tag{4.3}$$

donde A° y $\overline{A}$ denotan el interior y la clausura de A, respectivamente. En particular,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{a_\varepsilon} \log \mu_\varepsilon(A) = -\inf_{x\in A} I(x), \tag{4.4}$$

cuando sea

$$\inf_{x\in A^\circ} I(x) = \inf_{x\in \overline{A}} I(x). \tag{4.5}$$

De todas formas, notemos que las cotas inferior y superior *no* deberían valer para todo boreliano. En efecto, recordemos la situación del ejemplo: si μ_ε es no-atómica (i.e. $\mu_\varepsilon(\{x\}) = 0$ para todo $x \in M$), entonces la validez de la cota inferior para todo singleton implicaría que $I(x) = +\infty$ para todo x, mientras que la cota superior aplicada a $F = M$ nos dice que $\inf_{x\in M} I(x) = 0$.

Observación 4.2.4. Habiendo fijado el escale $(a_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, la función de tasa queda unívocamente determinada. En efecto, sean I y $\tilde{I}$ dos funciones que satisfacen las condiciones de la definición con el mismo escale $(a_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, y sea $x \in M$. Utilizando la cota superior para I y la inferior para $\tilde{I}$, obtenemos

$$-\tilde{I}(x) \le -\inf_{y\in B_\delta} \tilde{I}(x) \le \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{a_\varepsilon} \log \mu_\varepsilon(B_\delta(x))$$

$$\le \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{a_\varepsilon} \log \mu_\varepsilon(\overline{B}_\delta(x)) \le -\inf_{x\in \overline{B}_\delta(x)} I(x).$$

La semicontinuidad inferior de I implica que el último término de la derecha tiende a $-I(x)$ cuando $\delta \to 0$. Así, $I(x) \le \tilde{I}(x)$. Intercambiando los roles de I e $\tilde{I}$, obtenemos la igualdad. Más aún, conseguimos

$$-I(x) = \lim_{\delta\to 0} \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{a_\varepsilon} \log \mu_\varepsilon\big(B_\delta(x)\big) = \lim_{\delta\to 0} \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{a_\varepsilon} \log \mu_\varepsilon\big(B_\delta(x)\big).$$

Notemos que en la definición de arriba no se excluye el caso $I \equiv 0$. En este caso, no es mucha la información que provee el Principio de Grandes Desvíos: la cota superior se vuelve trivial y, por otro lado, la cota inferior dice que el decaimiento de las probabilidades en cuestión es más lento que cualquier exponencial $e^{-\gamma a_\varepsilon}$ con $\gamma > 0$. Como estamos interesados en los casos en donde la función de tasa I pueda decir algo más sobre el comportamiento de las probabilidades, buscaremos que I cumpla una condición adicional.

Definición 4.2.5. En el contexto del Principio de Grandes Desvíos, decimos que I es una *función de tasa ínf-compacta* si para todo $b < +\infty$ el conjunto de nivel $\mathbb{F}_I(b) := \{x \in M : I(x) \leq b\}$ es compacto.

Observemos que la semicontinuidad inferior es equivalente a que, para todo $b < +\infty$, los conjuntos de nivel $\mathbb{F}_I(b)$ sean cerrados. Luego, la ínf-compacidad es una noción más fuerte que la de semicontinuidad inferior.

Además, la ínf-compacidad garantiza que I tiene mínimo sobre cualquier conjunto cerrado. Como $\inf_{x\in M} I(x) = 0$ por la cota superior, esto implica que existe $x_0 \in M$ tal que $I(x_0) = 0$. Supongamos ahora que I se anula únicamente en x_0. Luego, para todo cerrado F que no contenga a x_0 vale $\inf_{x\in F} I(x) > 0$. Como $\inf_{x\in\overline{G}} I(x) \leq \inf_{x\in G} I(x)$, esto implica que $\inf_{x\in G} I(x) > 0$ para cualquier abierto G a distancia positiva de x_0. En vista de la Observación 4.2.2, esto nos dice que, en el caso de I inf-compacta, las cotas inferior y superior dan un control verdaderamente exponencial sobre la probabilidad de conjuntos a distancia positiva del mínimo de I.

Para el caso de función de tasa I inf-compacta, conviene reformular la validez del Principio de Grandes Desvíos en términos de una estimación inferior *local* y una superior *global*. Así lo hacemos en la siguiente proposición, que dará la formulación del principio que utilizaremos en el próximo capítulo.

Proposición 4.2.6. *Denotemos por ϱ a la métrica en M y para $x \in M$, $A \subseteq M$, sea* $\varrho(x, A) := \inf\{\varrho(x,y) : y \in A\}$.

Consideremos las condiciones:

$(b)'$ $\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{a_\varepsilon} \log \mu_\varepsilon\big(B_\delta(x)\big) \geq -I(x)$, *para cualquier $x \in M$ y $\delta > 0$ arbitrario;*

$(c)'$ $\limsup_{\varepsilon\to 0} \log \mu_\varepsilon\big(\{y \in M : \varrho\big(y, \mathbb{F}_I(b)\big) \geq \delta\}\big) \leq -b$, *para cualquier $b < +\infty$ y $\delta > 0$ arbitrario.*

En relación con las condiciones en la definición del Principio de Grandes Desvíos, tenemos: $(b) \iff (b)'$ y $(c) \implies (c)'$. Si I es ínf-compacta, entonces vale también $(c)' \implies (c)$.

Demostración.

$(b) \implies (b)'$ Tomando $G = B_\delta(x)$ y notando que $\inf_{y\in B_\delta(x)} I(y) \leq I(x)$.

$(b)' \implies (b)$ Sea $G \subseteq M$ abierto, $x \in G$ y $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subseteq G$. Luego,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{a_\varepsilon} \log \mu_\varepsilon(G) \geq \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{a_\varepsilon} \log \mu_\varepsilon\big(B_\delta(x)\big) \geq -I(x).$$

Como $x \in G$ es arbitrario, conseguimos (b).

$(c) \implies (c)'$ Como $\Lambda := \{y \in M : \varrho\big(y, \mathbb{F}_I(b)\big) \geq \delta\}$ es un cerrado, obtenemos

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{a_\varepsilon} \log \mu_\varepsilon\big(\{y \in M : \varrho\big(y, \mathbb{F}_I(b)\big) \geq \delta\}\big) \leq -\inf_{x\in\Lambda} I(x).$$

Pero, por definición, $b \leq \text{ínf}_{x\in\Lambda} I(x)$.

$(c) \Longrightarrow (c)'$ Sea $F \subseteq M$ cerrado. Si $\text{ínf}_{x\in F} I(x) = 0$, entonces la condición (c) se satisface trivialmente. En caso contrario, tomemos $0 < b < \text{ínf}_{x\in F} I(x)$. Como $\text{ínf}_{x\in F} I(x) = 0$ e I es ínf-compacta, el conjunto $\mathbb{F}_I(b)$ es no vacío, compacto y disjunto de F. Luego, existe $\delta > 0$ tal que $F \subseteq \{y \in M : \varrho\big(y, \mathbb{F}_I(b)\big) \geq \delta\}$ con lo cual resulta

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \log \mu_\varepsilon(F) \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \log \mu_\varepsilon\big(\{y \in M : \varrho\big(y, \mathbb{F}_I(b)\big) \geq \delta\}\big) \leq -b.$$

Como esto vale para todo $0 < b < \text{ínf}_{x\in F} I(x)$, obtenemos (c).

4.3. Principio de Contracción

Enunciamos y demostramos aquí el *Principio de Contracción*, un resultado que nos será útil cuando estudiemos en la próxima sección la validez de un Principio de Grandes Desvíos para una clase particular de sistemas dinámicos estocásticos. Éste explica como las transformaciones de medida inducidas por una aplicación continua preservan el Principio de Grandes Desvíos con función de tasa ínf-compacta.

Teorema 4.3.1 (Principio de Contracción). *Sea $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ una familia de medidas de probabilidad definidas sobre los borelianos $\mathcal{B}(M)$ de un espacio métrico (M, ϱ) que satisface un Principio de Grandes Desvíos con función de tasa ínf-compacta I. Sea también $T : M \longrightarrow \tilde{M}$ una aplicación continua a valores en otro espacio métrico $(\tilde{M}, \tilde{\varrho})$ y consideremos las medidas inducidas por T, $\tilde{\mu}_\varepsilon := \mu_\varepsilon \circ T^{-1}$, dadas por $\tilde{\mu}_\varepsilon(A) = \mu_\varepsilon\big(T^{-1}(A)\big)$ para cualquier boreliano $A \in \mathcal{B}(\tilde{M})$. Entonces, la familia $(\tilde{\mu}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ cumple un Principio de Grandes Desvíos con el mismo escale y función de tasa ínf-compacta $\tilde{I}$, dada por*

$$\tilde{I}(y) = \inf_{x\in T^{-1}(\{y\})} I(x) \tag{4.6}$$

Demostración. De la definición de $\tilde{I}$ vemos que $\tilde{I}(y) \in [\,0, +\infty\,]$ y que

$$\inf_{y\in A} \tilde{I}(y) = \inf_{x\in T^{-1}(A)} I(x),$$

para todo boreliano $A \subseteq \tilde{M}$. Además, la continuidad de T nos dice que $T^{-1}(G) \subseteq M$ es abierto para todo $G \subseteq \tilde{M}$ abierto y, respectivamente, que $T^{-1}(F) \subseteq M$ es cerrado para todo $F \subseteq \tilde{M}$ cerrado. De aquí se siguen las condiciones (b) y (c) de la definición.

Para chequear la ínf-compacidad de $\tilde{I}$, notemos que la ínf-compacidad de I implica que para todo y en la imagen de T se realiza el ínfimo en (4.6), pues $T^{-1}(\{y\})$ es cerrado. Se sigue que si $b < +\infty$, entonces $\mathbb{F}_{\tilde{I}}(b) = T\big(\mathbb{F}_I(b)\big)$. Como T es continua y $\mathbb{F}_I(b)$ resulta compacto por la ínf-compacidad de I, obtenemos que $\mathbb{F}_{\tilde{I}}(b)$ es compacto. □

4.4. Perturbaciones aleatorias de sistemas dinámicos

La teoría de Grandes Desvíos nos provee de una herramienta fundamental a la hora de estudiar una amplia gama de sistemas estocásticos. Un caso particular en donde podemos aplicar esta teoría es en el análisis de modelos obtenidos a partir de perturbaciones aleatorias a ciertos sistemas dinámicos. Dicho análisis fue llevado a cabo principalmente por Freidlin y Wentzell en [3] y otros trabajos. Presentamos aquí la teoría de Grandes Desvíos que ellos desarrollaron para el estudio de este tipo de sistemas. Profundizaremos más sobre su trabajo en los siguientes capítulos.

Consideremos el sistema dinámico $X^{x,\varepsilon}$, solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t^{x,\varepsilon} = b(X_t^{x,\varepsilon})dt + \varepsilon\, dW_t, \quad 0 \leq t < +\infty \tag{4.7}$$

con condición inicial $x \in \mathbb{R}^d$, donde W es un movimiento Browniano d-dimensional, ε es un número positivo y $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es globalmente Lipschitz. Bajo estas condiciones, la solución de (4.7) existe para toda distribución inicial y es única tanto en el sentido fuerte como en ley.

Para ε pequeño, el proceso $X^{x,\varepsilon}$ actúa como una pequeña perturbación aleatoria de $X^{x,0}$, la única solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = b(X(t)), \quad 0 \leq t < +\infty \\ \\ X(0) = x. \end{cases} \tag{4.8}$$

La perturbación viene dada en la ecuación por el término $\varepsilon\, dW$, al que llamaremos *ruido* y el parámetro ε representa la intensidad de éste. Formalizamos en la siguiente proposición el significa de pequeña perturbación del sistema (4.8).

Proposición 4.4.1. *Para $T > 0$ definimos en $C([0,T], \mathbb{R}^d)$ la métrica uniforme dada por*

$$\varrho_T(\varphi, \psi) := \sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi(t) - \psi(t)|$$

Entonces dado $\delta > 0$ se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} P(\varrho_T(X^{x,\varepsilon}, X^{x,0}) > \delta) = 0. \tag{4.9}$$

Demostración. Por definición de $X^{x,\varepsilon}$ y $X^{x,0}$, vale que

$$|X_t^{x,\varepsilon} - X_t^{x,0}| \leq \kappa \int_0^t |X_s^{x,\varepsilon} - X_s^{x,0}|\, ds + \varepsilon W_t,$$

donde κ es la constante de Lipschitz de b. Por el Lema de Gronwall obtenemos

$$\varrho_T(X^{x,\varepsilon}, X^{x,0}) \leq \varepsilon e^{\kappa T} \sup_{0 \leq t \leq T} |W_t|.$$

Como $|W_t| \leq \sqrt{d}\, \text{máx}_{1 \leq i \leq d} |W_t^{(i)}|$, podemos usar el Principio de Reflexión para obtener

$$P(\varrho_T(X^{x,\varepsilon}, X^{x,0}) > \delta) \leq P\Big(\sup_{0 \leq t \leq T} |W_t| \geq \frac{\delta}{\varepsilon e^{\kappa T}} \Big)$$

$$\leq 4d \int_\eta^{+\infty} \frac{e^{\frac{-u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, du,$$

para $\eta = \frac{\delta e^{-\kappa T}}{\varepsilon\sqrt{Td}}$. Usando que para $x > 0$ vale

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{\frac{-u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,du \le \frac{1}{x}\frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \tag{4.10}$$

obtenemos que existen constantes C_1, C_2 positivas que dependen únicamente de d, T, κ y δ tales que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} P(\varrho_T(X^{x,\varepsilon}, X^{x,0}) > \delta) \le C_1 e^{-\frac{C_2}{\varepsilon^2}} \tag{4.11}$$

para $0 < \varepsilon \le 1$. Esto demuestra la proposición. □

Observación 4.4.2. En la demostración puede verse que, para cada $T > 0$,

$$P\Big(\lim_{\varepsilon\to 0} \varrho_T(X^{x,\varepsilon}, X^{x,0}) = 0\Big) = 1.$$

Observación 4.4.3. Si $P^{\varepsilon}_{x,T}$ denota la probabilidad inducida en $C([0,T],\mathbb{R}^d)$ por $X^{x,\varepsilon}$, entonces la proposición muestra que P^{ε}_{x} converge débilmente a $\delta_{X^{x,0}}$, la medida de Dirac concentrada en la trayectoria determinística $X^{x,0}$.

La Observación 4.4.3 y (4.11) sugieren la posibilidad de que la familia $(P^{\varepsilon}_{x,T})_{\varepsilon>0}$ cumpla el principio de grandes desvíos con escale $\frac{1}{\varepsilon^2}$ y función de tasa que se anule únicamente en $X^{x,0}$. Esto es lo que probamos a continuación.

Teorema 4.4.4 (Freidlin-Wentzell). *Para cada x, T la familia $(P^{\varepsilon}_{x,T})_{\varepsilon>0}$ cumple el Principio de Grandes Desviaciones en $C([0,T],\mathbb{R}^d)$ con escale $\frac{1}{\varepsilon^2}$ y función de tasa ínf-compacta I^x_T, dada por*

$$I^x_T(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^T |\dot\varphi(s) - b(\varphi(s))|^2\,ds & \textit{si } \varphi \textit{ es absolutamente continua y } \varphi(0) = x \\ \\ +\infty & \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

Demostración. Dividiremos la demostración en dos casos.

Caso $b \equiv 0$, $x = 0$

En este caso, $P^{\varepsilon}_{0,T}$ es la probabilidad inducida en $C([0,T],\mathbb{R}^d)$ por εW, donde W es un movimiento Browniano d-dimensional.

1. *I^0_T es función de tasa ínf-compacta.*

Aquí, tenemos

$$I^0_T(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^T |\dot\varphi(s)|^2\,ds & \text{si } \varphi \text{ es absolutamente continua y } \varphi(0) = 0 \\ \\ +\infty & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Probaremos primero la semicontinuidad inferior, es decir, que los conjuntos de nivel $\mathbb{F}^0_T(c) := \{\varphi : I^0_T(\varphi) \le c\}$ son cerrados. Esto equivale a mostrar que, dada $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} \varrho_T(\varphi_n, \varphi_0) = 0$ para cierta $\varphi_0 \in C([0,T],\mathbb{R}^d)$, se verifica la desigualdad $I^0_T(\varphi_0) \le \liminf_{n\to+\infty} I^0_T(\varphi_n)$.

En primer lugar, podemos suponer que $\liminf_{n\to+\infty} I_T^0(\varphi_n) < +\infty$. Sea

$$H_{0,T}^1 = \{\varphi \in C([0,T],\mathbb{R}^d) : \varphi \text{ es absolutamente continua y } \int_0^T |\dot{\varphi}(s)|^2\, ds < +\infty\}.$$

Un resultado de Riesz asegura que

$$\varphi \in H_{0,T}^1 \iff \sup_{\substack{0\le t_1<\ldots<t_N\le T\\ N\ge 1}} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|^2}{|t_{i+1}-t_i|} < +\infty.$$

Más aún, el supremo coincide con $\int_0^T |\dot{\varphi}(s)|^2\, ds$. Así obtenemos

$$\begin{aligned}
I_T^0(\varphi_0) &= \frac{1}{2} \sup_{\substack{0\le t_1<\ldots<t_N\le T\\ N\ge 1}} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|^2}{|t_{i+1}-t_i|}\\
&= \frac{1}{2} \sup_{\substack{0\le t_1<\ldots<t_N\le T\\ N\ge 1}} \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{|\varphi_n(t_{i+1})-\varphi_n(t_i)|^2}{|t_{i+1}-t_i|}\\
&\le \frac{1}{2} \liminf_{n\to+\infty} \sup_{\substack{0\le t_1<\ldots<t_N\le T\\ N\ge 1}} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{|\varphi_n(t_{i+1})-\varphi_n(t_i)|^2}{|t_{i+1}-t_i|}\\
&= \liminf_{n\to+\infty} I_T^0(\varphi_n).
\end{aligned}$$

Para verificar que I_T^0 es función de tasa ínf-compacta, resta ver que los conjuntos de nivel $\mathbb{F}_T^0(c)$ son compactos. Esto será consecuencia del teorema de Arzelá-Ascoli pues los conjuntos $\mathbb{F}_T^0(c)$ son cerrados, uniformemente acotados y equicontinuos. En efecto, los conjuntos $\mathbb{F}_T^0(c)$ son cerrados pues I_T^0 es semicontinua inferiormente. Además, si $\varphi \in \mathbb{F}_T^0(c)$, φ es absolutamente continua y vale , para $0 \le s \le t \le T$,

$$|\varphi(t)-\varphi(s)| = \left| \int_s^t \dot{\varphi}(u)\, du \right| \le \left((t-s) \int_s^t |\dot{\varphi}(u)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{2(t-s)c}.$$

De aquí se deduce la equicontinuidad y, recordando que $\varphi(0) = 0$ si $\varphi \in \mathbb{F}_T^0(c)$, obtenemos la acotación uniforme.

2. *Cota inferior*

Vamos a verificar la condición $(b)'$ de la Proposición 4.2.6. Concretamente, mostraremos que para toda $\varphi \in C([0,T],\mathbb{R}^d)$ y $\delta > 0$ vale

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log P_{0,T}^\varepsilon\Big(\{\psi : \varrho_T(\psi,\varphi) < \delta\}\Big) \ge -I_T^0(\varphi). \tag{4.12}$$

Sea $\varphi \in C([0,T],\mathbb{R}^d)$. Podemos suponer que $I_T^0(\varphi) < +\infty$, esto es, $\varphi \in H_{0,T}^1$ y $\varphi(0) = 0$. En caso contrario, la desigualdad de arriba se satisface trivialmente.

Como $\varphi(t) = \int_0^t \dot\varphi(s)ds$ y $\int_0^T |\dot\varphi(s)|^2 ds < +\infty$, nos encontramos en las hipótesis de la fórmula de Cameron-Martin. Entonces, podemos definir una medida de probabilidad $\hat P^\varepsilon$ en $(\Omega, \mathcal{A}_T^W)$ dada por $\hat P^\varepsilon(A) = \int_A L_T^\varepsilon \, dP$, donde

$$L_T^\varepsilon = \exp\left\{ -\varepsilon^{-1}\int_0^T \langle \dot\varphi(s),\, dW_s\rangle - \frac{\varepsilon^{-2}}{2}\int_0^T |\dot\varphi(s)|^2 ds\right\}, \tag{4.13}$$

tal que bajo $\hat P^\varepsilon$ el proceso $\hat W_t := W_t + \frac{1}{\varepsilon}\varphi(t)$ para $0 \le t \le T$ es un movimiento Browniano. Así conseguimos

$$\begin{aligned} P(\,\varrho_T(\varepsilon W, \varphi) < \delta) &= \hat P^\varepsilon(\,\varrho_T(\varepsilon \hat W, \varphi) < \delta) \\ &= \hat P^\varepsilon\Big(\sup_{0\le t\le T} |\varepsilon W_t| < \delta\Big) \\ &= \int_{\{\sup_{0\le t\le T}|\varepsilon W_t|<\delta\}} L_T^\varepsilon \, dP \\ &= e^{-\frac{1}{\varepsilon^2} I_T^0(\varphi)} \int_{\{\sup_{0\le t\le T}|\varepsilon W_t|<\delta\}} \exp\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \langle\dot\varphi(s),\, dW_s\rangle\Big)\, dP. \end{aligned}$$

Dado $\delta > 0$, la Proposición anterior muestra que $\lim_{\varepsilon\to 0} P(\sup_{0\le t\le T} \varepsilon|W_t| < \delta) = 1$. Luego, podemos elegir $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para cada $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, se tiene

$$P\left(\sup_{0\le t\le T} \varepsilon|W_t| < \delta\right) \ge \frac{2}{3}. \tag{4.14}$$

Ahora necesitamos dar algún tipo de control sobre el integrando en la expresión de arriba. Para ello, si $I_T^0(\varphi) > 0$ y tomamos $z > 0$, por la desigualdad de Markov tenemos

$$P\left(\int_0^T \langle\dot\varphi(s),\, dW_s\rangle \ge z\sqrt{I_T^0(\varphi)}\right) \le P\left(\Big(\int_0^T \langle\dot\varphi(s),\, dW_s\rangle\Big)^2 \ge z^2 I_T^0(\varphi)\right) \le \frac{2}{z^2},$$

donde en la última desigualdad usamos que $\mathbb{E}\left(\Big(\int_0^T \langle\dot\varphi(s),\, dW_s\rangle\Big)^2\right) = \int_0^T |\dot\varphi(s)|^2 ds$. Si fijamos $z = \sqrt{6}$, con lo anterior conseguimos

$$P\left(\sup_{0\le t\le T} \varepsilon|W_t| < \delta\,,\ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \langle\dot\varphi(s),\, dW_s\rangle \le \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{6 I_T^0(\varphi)}\right) \ge \frac{1}{3}. \tag{4.15}$$

Notemos que por (4.14) la desigualdad de arriba sigue valiendo si $I_T^0(\varphi) = 0$ pues, en este caso, tenemos $\varphi \equiv 0$ y el evento de arriba es simplemente el de (4.14). Luego, dado

$\eta > 0$ podemos tomar $\varepsilon_1 > 0$ tal que si $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$

$$P(\,\varrho_T(\varepsilon W, \varphi) < \delta) \geq \frac{1}{3} \exp\Big\{ -\frac{1}{\varepsilon^2} I_T^0(\varphi) - \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{6 I_T^0(\varphi)}\Big\}$$

$$\geq \exp\Big\{ -\frac{1}{\varepsilon^2}(I_T^0(\varphi) + \eta)\Big\}.$$

Esto es,

$$P_{0,T}^{\varepsilon}\Big(\{\psi : \varrho_T(\psi, \varphi) < \delta\}\Big) \geq \exp\Big\{ -\frac{1}{\varepsilon^2}(I_T^0(\varphi) + \eta)\Big\}.$$

De aquí obtenemos la condición $(b)'$.

Observación. Dados T_0 y c fijos, ε_1 puede ser elegido independientemente de φ, siempre que $\varphi \in \mathbb{F}_T^0(c)$ para $T \leq T_0$. Decimos, entonces, que la condición $(b)'$ se satisface uniformemente en $\mathbb{F}_T^0(c)$ y $T \leq T_0$ para cualquier T_0 y c fijos.

3. *Cota superior*

Mostraremos la condición $(c)'$. Esto es, para todo $a \geq 0$ y $\delta > 0$ vale

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log P_{0,T}^{\varepsilon}\Big(\{\psi : \varrho_T(\psi, \mathbb{F}_T^0(a)) \geq \delta\}\Big) \leq -a \tag{4.16}$$

Sea $m \geq 1$ y consideremos, para cada $\varepsilon > 0$, el proceso estocástico $Y^{\varepsilon,\,m}$, cuyas trayectorias son poligonales que unen los puntos $(\frac{kT}{m}, \varepsilon W_{\frac{kT}{m}})$, $k = 0, 1, \ldots, m$.. Es decir,

$$Y_t^{\varepsilon,\,m} := \varepsilon \frac{m}{T}(W_{\frac{(k+1)T}{m}} - W_{\frac{kT}{m}})(t - \frac{kT}{m}) + \varepsilon W_{\frac{kT}{m}} \tag{4.17}$$

para $t \in [\frac{kT}{m}, \frac{(k+1)T}{m}]$.

Sea $a > 0$ y $\delta > 0$. Para cada $m \geq 1$ vale

$$P_{0,T}^{\varepsilon}\Big(\{\psi : \varrho_T(\psi, \mathbb{F}_T^0(a)) \geq \delta\}\Big) \leq P(I_T^0(Y^{\varepsilon,\,m}) > a) + P(\,\varrho_T(\varepsilon W, Y^{\varepsilon,\,m}) \geq \delta). \tag{4.18}$$

Estimamos, entonces, cada término de la derecha.

$$P(\,\varrho_T(\varepsilon W, Y^{\varepsilon,m}) \geq \delta) \leq P\Big(\max_{1\leq i\leq m}\ \max_{\frac{i-1}{m}T\leq s\leq \frac{i}{m}T} |\varepsilon W_s - Y^{\varepsilon,m}(s)| \geq \delta\Big)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} P\Big(\max_{\frac{i-1}{m}T\leq s\leq \frac{i}{m}T} |\varepsilon W_s - Y^{\varepsilon,m}(s)| \geq \delta\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} P\Big(\max_{\frac{i-1}{m}T\leq s\leq \frac{i}{m}T} \Big|\varepsilon(W_s - W_{\frac{kT}{m}}) - \varepsilon\frac{m}{T}(W_{\frac{(k+1)T}{m}} - W_{\frac{kT}{m}})(s - \frac{kT}{m})\Big| \geq \delta\Big)$$

$$= mP\Big(\max_{0\leq s\leq \frac{T}{m}} \Big|\varepsilon W_s - \varepsilon s\frac{m}{T} W_{\frac{T}{m}}\Big| \geq \delta\Big)$$

$$\leq mP\Big(\max_{0\leq s\leq \frac{T}{m}} |W_s| \geq \frac{\delta}{2\varepsilon}\Big),$$

donde en la segunda igualdad usamos que los procesos $(W_{\frac{(k+1)T}{m}+s} - W_{\frac{kT}{m}} : s \geq 0)$ y $(W_s : s \geq 0)$ tienen la misma ley.

Al igual que en la demostración de la Proposición 4.4.1, conseguimos

$$P\Big(\max_{0\leq s\leq \frac{T}{m}} |W_s| \geq \frac{\delta}{2\varepsilon}\Big) \leq 4d\int_{\eta}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, du,$$

donde $\eta = \frac{\delta}{2\varepsilon}\sqrt{\frac{m}{Td}}$. Si usamos (4.10) nuevamente, obtenemos

$$P(\,\varrho_T(\varepsilon W, Y^{\varepsilon,m}) \geq \delta) \leq \varepsilon\frac{8d}{\delta}\sqrt{\frac{mTd}{2\pi}}\, e^{-\frac{m\delta^2}{8\varepsilon^2 Td}}. \tag{4.19}$$

Dado $a_0 > 0$, fijemos $m \geq \frac{8dTa_0}{\delta^2}$. Habiendo fijado un tal m, podemos tomar ε_0 tal que

$$P(\,\varrho_T(\varepsilon W, Y^{\varepsilon,m}) \geq \delta) \leq \frac{1}{2}\, e^{-\frac{a_0}{\varepsilon^2}}, \tag{4.20}$$

para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Así, conseguimos el control que necesitamos sobre el segundo término de la derecha.

Observación. En particular, hemos probado que para cada $\delta > 0$,

$$\lim_{m\to+\infty}\ \limsup_{\varepsilon\to 0}\ \varepsilon^2 \log P(\,\varrho_T(\varepsilon W, Y^{\varepsilon,m}) \geq \delta) = -\infty. \tag{4.21}$$

Esto nos dice que, en lo que respecta a estimaciones de grandes desvíos, la interpolación $Y^{\varepsilon,m}$ se vuelve indistinguible del proceso original cuando m tiende a infinito.

Para acotar el primer término de la derecha de (4.18), notemos que

$$I_T^0(Y^{\varepsilon,m}) = \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{m}{T}\big|W_{\frac{kT}{m}} - W_{\frac{(k-1)T}{m}}\big|^2. \tag{4.22}$$

Como $\sqrt{\frac{m}{T}}(W_{\frac{kT}{m}} - W_{\frac{(k-1)T}{m}}), 1 \leq k \leq m$ son variables aleatorias i.i.d., distribuidas como una normal d-dimensional con media cero y la identidad como matriz de covarianzas, tenemos que $I_T^0(Y^{\varepsilon,m})$ tiene la misma ley que $\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{i=1}^{dm}|Z_i|^2$ donde $(Z_i)_{1\leq i\leq dm}$ son variables aleatorias i.i.d. normales estándar. Si $0 < \zeta < 1$, definimos

$$C_\zeta = \mathbb{E}(\, e^{\zeta\frac{Z_1^2}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{\zeta-1}{2}x^2}\,dx < +\infty.$$

Aplicando la desigualdad de Markov, obtenemos

$$\begin{aligned} P(\, I_T^0(Y^{\varepsilon,m}) > a) &= P\Big(\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{i=1}^{dm}|Z_i|^2 > a\Big) \\ &= P\Big(\frac{\zeta}{2}\sum_{i=1}^{dm}|Z_i|^2 > \frac{\zeta a}{\varepsilon^2}\Big) \\ &\leq e^{-\frac{\zeta a}{\varepsilon^2}}(C_\zeta)^{dm} \\ &= e^{-\frac{a}{\varepsilon^2}}e^{\frac{1-\zeta}{\varepsilon}a}(C_\zeta)^{dm} \end{aligned}$$

Sea $\gamma > 0$. Si fijamos m como antes, podemos tomar ζ tal que $0 < 1-\zeta < \frac{\gamma}{2a_0}$. Obtenemos, entonces, que para cualquier $0 < a \leq b_0$

$$P(\, I_T^0(Y^{\varepsilon,m}) > a\,) \leq e^{-\frac{b^*}{\varepsilon^2}}e^{\frac{\gamma}{2\varepsilon}}(C_\zeta)^{dm}.$$

Como m ha sido fijado, podemos tomar ε_1 tal que $(C_\zeta)^{dm} \leq \frac{1}{2}\,e^{\frac{\gamma}{2\varepsilon^2}}$ para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$. Luego, si $0 < a \leq a_0$ y $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$, vale

$$P(\, I_T^0(Y^{\varepsilon,m}) > a\,) \leq \frac{1}{2}\,e^{-\frac{a-\gamma}{\varepsilon^2}}. \tag{4.23}$$

Juntando ambas estimaciones, conseguimos

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\log\, P_{0,T}^{\varepsilon}\Big(\{\psi : \varrho_T(\psi,\mathbb{F}_T^0(a)) \geq \delta\}\Big) \leq -a+\gamma \tag{4.24}$$

para todo $0 < a \leq a_0$ y $\gamma > 0$. Como $a_0 > 0$ es arbitrario, obtenemos $(c)'$ para $a > 0$ cualquiera. Por último, notemos que para $a = 0$ la condición $(c)'$ se satisface trivialmente. Esto concluye la demostración en el caso $b \equiv 0$, $x = 0$.

<u>Caso general</u>

Como b es globalmente Lipschitz, podemos definir para cada $x \in \mathbb{R}^d$ una aplicación continua

$$\mathbb{T}_x : C([0,T],\mathbb{R}^d) \longrightarrow C([0,T],\mathbb{R}^d)$$

dada por $\mathbb{T}_x(\varphi) = \psi$ donde ψ es la única solución de

$$\psi(t) = x + \int_0^t b(\psi(s))\,ds + \varphi(t), \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{4.25}$$

La continuidad de $\mathbb{T}_x$ se sigue de aplicar el lema de Gronwall, con el que obtenemos

$$\varrho_T(\,\mathbb{T}_x(\varphi_1), \mathbb{T}_x(\varphi_2)) \leq e^{\kappa T} \varrho_T(\varphi_1, \varphi_2) \tag{4.26}$$

Más aún, $\mathbb{T}_x$ resulta un homeomorfismo y su inversa viene dada por

$$\big(\mathbb{T}_x^{-1}(\psi)\big)(t) = \psi(t) - x - \int_0^t b(\psi(s))\, ds. \tag{4.27}$$

De aquí, se verifica:

- $\psi(0) = x \iff \big(\mathbb{T}_x^{-1}(\psi)\big)(0) = 0$
- ψ absolutamente continua $\iff \mathbb{T}_x^{-1}(\psi)$ absolutamente continua
- $\int_0^T \Big|\dot{\psi}(t) - b(\psi(t))\Big|^2 dt = \int_0^T \Big|\frac{d}{dt}\big(\mathbb{T}_x^{-1}(\psi)\big)(t)\Big|^2 dt.$

Esto implica $I_T^x(\psi) = \tilde{I}_T^0\big(\,\mathbb{T}_x^{-1}(\psi)\big)$, donde

$$\tilde{I}_T^0(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^T |\dot{\varphi}(s)|^2\, ds & \text{si } \varphi \text{ es absolutamente continua y } \varphi(0) = 0 \\ \\ +\infty & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por último, notemos que si $\tilde{P}_{0,T}^{\varepsilon}$ denota la probabilidad inducida por εW en $C([0,T], \mathbb{R}^d)$, entonces $P_{x,T}^{\varepsilon} = \tilde{P}_{0,T}^{\varepsilon} \circ \mathbb{T}_x^{-1}$. En efecto, si $A \in \mathcal{B}\big(C([0,T], \mathbb{R}^d)\big)$

$$\begin{aligned} \big(\tilde{P}_{0,T}^{\varepsilon} \circ \mathbb{T}_x^{-1}\big)(A) &= \tilde{P}_{0,T}^{\varepsilon}(\,\mathbb{T}_x^{-1}(A)) \\ &= P(\,\varepsilon W \in \mathbb{T}_x^{-1}(A)) \\ &= P(\,\mathbb{T}_x(\varepsilon W) \in A) \\ &= P(\,X^{x,\,\varepsilon} \in A) \\ &= P_{x,T}^{\varepsilon}(A) \end{aligned}$$

Con esto, aplicando el Principio de Contracción, queda demostrado el caso general. □

Observemos que la familia $(P_{x,T}^{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ que estudiamos en el teorema depende un parámetro extra, el valor inicial x. Podríamos preguntarnos, entonces, como dependen los resultados del teorema de este parámetro. Esto se resume en el corolario que se encuentra a continuación.

Corolario 4.4.5. *Definimos en* $C([0,T],\mathbb{R}^d)$ *la función de tasa generalizada* I_T*, dada por* $I_T(\varphi) = I_T^{\varphi(0)}(\varphi)$*. También, para* $c \geq 0$,

$$\mathbb{F}_T^x(c) = \{\varphi : \varphi(0) = x,\ I_T(\varphi) \leq c\}.$$

Entonces para T *fijo las estimaciones del teorema anterior valen uniformemente en el siguiente sentido:*

$(a)_u$ $I_T(\cdot)$ *es semicontinua inferiormente y el conjunto* $\cup_{x\in A}\mathbb{F}_T^x(c) = \{\varphi : \varphi(0) \in A,\ I_T(\varphi) \leq c\}$ *es compacto, para cada* $c \geq 0$ *y* $A \subseteq \mathbb{R}^d$ *compacto.*

$(b)'_u$ *Para cada* $c_0 > 0$, $\delta > 0$ *y* $\gamma > 0$, *existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que*

$$P_{x,T}^{\varepsilon}\big(\{\,\psi : \varrho_T(\psi,\varphi) < \delta\,\}\big) \geq e^{-\frac{1}{\varepsilon^2}(I_T(\varphi)+\gamma)}$$

para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $x \in \mathbb{R}^d$ *y* $\varphi \in \mathbb{F}_T^x(c_0)$.

$(c)'_u$ *Para cada* $c_0 > 0$, $\delta > 0$ *y* $\gamma > 0$, *existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que*

$$P_{x,T}^{\varepsilon}\big(\{\,\psi : \varrho_T(\psi,\mathbb{F}_T^x(c)) \geq \delta\,\}\big) \leq e^{-\frac{1}{\varepsilon^2}(c-\gamma)}$$

para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 \leq c \leq c_0$ *y* $x \in \mathbb{R}^d$.

Demostración.

$(a)_u$ Definimos la aplicación

$$\mathbb{T} : \mathbb{R}^d \times \{\varphi \in C([0,T],\mathbb{R}^d) : \varphi(0) = 0\} \longrightarrow C([0,T],\mathbb{R}^d),$$

dada por $\mathbb{T}(x,\varphi) = \mathbb{T}_x(\varphi)$. Aplicando el lema de Gronwall, vemos que

$$\varrho_T(\,\mathbb{T}(x_1,\varphi_1),\mathbb{T}(x_2,\varphi_2)) \leq e^{\kappa T}(\varrho_T(\varphi_1,\varphi_2) + |x_1 - x_2|) \tag{4.28}$$

de donde se sigue que $\mathbb{T}$ es continua. Más aún, $\mathbb{T}$ es un homeomorfismo con inversa $\mathbb{T}^{-1}$ dada por $\mathbb{T}^{-1}(\psi) = (\psi(0), \mathbb{T}^{-1}_{\psi(0)}(\psi))$. Si $\tilde{\mathbb{F}}_T^0(c) = \{\varphi : \tilde{I}_T^0(\varphi) \leq c\}$, observemos que $\mathbb{T}(\{x\}\times\tilde{\mathbb{F}}_T^0(c)) = \mathbb{F}_T^x(c)$. Así conseguimos

$$\mathbb{F}_T(c) = \{\varphi : I_T(\varphi) \leq c\} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbb{F}_T^x(c) = \mathbb{T}(\mathbb{R}^d \times \tilde{\mathbb{F}}_T^0(c)).$$

Como $\mathbb{T}$ es un homeomorfismo y $\tilde{I}_T^0$ es semicontinua inferiormente, se sigue que los conjuntos de nivel $\mathbb{F}_T^x(c)$ son cerrados y, por lo tanto, que I_T es semicontinua inferiormente también. Por último, $\cup_{x\in A}\mathbb{F}_T^x(c) = \mathbb{T}(A\times\tilde{\mathbb{F}}_T^0(c))$ resulta compacto pues $\mathbb{T}$ es un homeomorfismo y $\tilde{I}_T^0$ es función de tasa ínf-compacta.

$(b)'_u$ Sea $c_0 > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ y $\varphi \in \mathbb{F}_T^x(c_0)$. Por (4.26), obtenemos

$$P_{x,T}^{\varepsilon}\big(\{\,\psi : \varrho_T(\psi,\varphi) < \delta\,\}\big) = P_{x,T}^{\varepsilon}\left(\Big\{\,\psi : \varrho_T\big(\psi,\, \mathbb{T}_x \circ \mathbb{T}_x^{-1}(\varphi)\big) < \delta\,\Big\}\right)$$

$$\geq P_{x,T}^{\varepsilon}\left(\mathbb{T}_x\Big(\Big\{\,\psi : \varrho_T\big(\psi,\, \mathbb{T}_x^{-1}(\varphi)\big) < \frac{\delta}{e^{\kappa T}}\,\Big\}\Big)\right)$$

$$= P_{x,T}^{\varepsilon} \circ \mathbb{T}_x\Big(\Big\{\,\psi : \varrho_T\big(\psi,\, \mathbb{T}_x^{-1}(\varphi)\big) < \frac{\delta}{e^{\kappa T}}\,\Big\}\Big)$$

$$= \tilde{P}_{0,T}^{\varepsilon}\Big(\Big\{\,\psi : \varrho_T\big(\psi, \mathbb{T}_x^{-1}(\varphi)\big) < \frac{\delta}{e^{\kappa T}}\,\Big\}\Big)$$

Notando que $I_T(\varphi) = \tilde{I}_T^0\big(\mathbb{T}_x^{-1}(\varphi)\big)$, $(b)'_u$ se sigue de la uniformidad en $\phi \in \tilde{\mathbb{F}}_T^0(c_0)$ del caso $b \equiv 0$, $x = 0$.

$(c)'_u$ Sea $0 \leq c \leq c_0$, $\delta > 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$. Como (4.26) implica que $\varrho_T(\psi_1,\psi_2) \leq e^{\kappa T}\varrho_T\big(\mathbb{T}_x^{-1}(\psi_1),\, \mathbb{T}_x^{-1}(\psi_2)\big)$, obtenemos

$$P_{x,T}^{\varepsilon}\big(\{\,\psi : \varrho_T(\psi, \mathbb{F}_T^x(c)) \geq \delta\,\}\big) = \tilde{P}_{0,T}^{\varepsilon} \circ \mathbb{T}_x^{-1}\Big(\Big\{\,\psi : \varrho_T\big(\psi, \mathbb{F}_T^x(c)\big) \geq \delta\,\Big\}\Big)$$

$$= \tilde{P}_{0,T}^{\varepsilon}\left(\mathbb{T}_x^{-1}\Big(\Big\{\,\psi : \varrho_T\big(\psi, \mathbb{F}_T^x(c)\big) \geq \delta\,\Big\}\Big)\right)$$

$$\leq \tilde{P}_{0,T}^{\varepsilon}\Big(\Big\{\,\psi : \varrho_T\big(\psi, \mathbb{T}_x^{-1}(\,\mathbb{F}_T^x(c))\big) \geq \frac{\delta}{e^{\kappa T}}\,\Big\}\Big)$$

$$= \tilde{P}_{0,T}^{\varepsilon}\Big(\Big\{\,\psi : \varrho_T\big(\psi, \tilde{\mathbb{F}}_T^0(c)\big) \geq \frac{\delta}{e^{\kappa T}}\,\Big\}\Big).$$

Así, se deduce $(c)'_u$ de la uniformidad en $0 < c \leq c_0$ del caso $b \equiv 0$, $x = 0$

Parte II

Capítulo 5

El modelo del potencial de doble pozo

5.1. Introducción

En esta segunda parte ahondaremos en la teoría desarrollada por Freidlin y Wentzell mediante el estudio de un caso concreto: el modelo del potencial de doble pozo. Utilizando las herramientas que provee esta teoría, podremos describir rigurosamente algunos rasgos de la dinámica de este sistema.

Consideremos nuevamente $X^{x,\varepsilon}$, la solución con condición inicial $x \in \mathbb{R}^d$ de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t^{x,\varepsilon} = b(X_t^{x,\varepsilon})dt + \varepsilon\, dW_t, \quad 0 \leq t < +\infty, \tag{5.1}$$

donde W es un movimiento Browniano d-dimensional, $\varepsilon > 0$ y $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es globalmente Lipschitz. En nuestro caso, tendremos $b = -\nabla U$ donde U es un potencial de doble pozo como el que se ilustra en la Figura.

En el capítulo anterior vimos que, fijado un intervalo de tiempo $[0, T]$, para ε pequeño el proceso $\left(X_t^{x,\varepsilon}\right)_{0\leq t\leq T}$ actúa como una pequeña perturbación aleatoria de $X^{x,0}$, la única solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = b(X(t)), \quad 0 \leq t \leq T \\ \\ X(0) = x. \end{cases}$$

Sin embargo, la existencia de ruido, aun siendo pequeño, modifica sustancialmente el comportamiento del sistema estocástico con respecto al del determinístico para intervalos grandes de tiempo. En efecto, comenzando en el pozo más pequeño y para ε suficientemente chico, el proceso evoluciona según la siguiente descripción:

(*a*) Debido a la acción del campo b, el proceso es atraído hacia el fondo del pozo, llamado p; cerca de p, el campo se vuelve despreciable y la presencia de ruido provoca entonces que el proceso sea empujado lejos de p. Una vez que el proceso se encuentra apartado del fondo, la acción de b predomina por sobre el ruido, con lo cual todo se repite nuevamente: se observan así un gran número de intentos por escapar del pozo, seguidos de una fuerte atracción hacia el fondo.

(b) Eventualmente, luego de muchos intentos, el proceso logra superar la barrera de potencial y escapa del pozo más pequeño para alcanzar el pozo más profundo.

(c) Una vez en el pozo más profundo, el proceso se comporta como en (a). La nueva barrera de potencial es más grande, con lo cual el tiempo que tarda en volver el proceso al pozo más pequeño ocurrirá en una escala de tiempo mucho mayor.

Por la propiedad de Markov que posee el proceso, los sucesivos intentos por escapar del pozo serán prácticamente independientes. Por este motivo, se espera que el tiempo que tarda el proceso en pasar de un pozo al otro muestre perdida de memoria asintótica. Nos referiremos a este tiempo como *tiempo de salto*.

Nuestro objetivo en este capítulo será estudiar las características generales de este modelo para poder formalizar las ideas descriptas arriba en el capítulo siguiente. Para ello, nos valdremos de las herramientas que hemos estudiado hasta el momento y de algunas nuevas que presentaremos en este capítulo a lo largo de las distintas secciones. Comenzamos exhibiendo una técnica de acoplamiento que nos será de gran utilidad, debida a Lindvall y Rogers. Volveremos a dedicarnos luego al estudio de nuestro sistema.

5.2. El acoplamiento de Lindvall-Rogers

Un *acoplamiento* de dos procesos estocásticos consiste en dar una construcción conjunta de los mismos; es decir, dados X_1 y X_2 procesos estocásticos, se quiere construir en un mismo espacio de probabilidad dos procesos $\tilde{X}_1$ y $\tilde{X}_2$ con la distribución de X_1 y X_2, respectivamente. Frecuentemente, se busca además que la distribución conjunta de $\tilde{X}_1$ y $\tilde{X}_2$ verifique alguna particularidad. En nuestro caso, buscamos acoplar $X^{x,\varepsilon}$ y $X^{x',\varepsilon}$, dos soluciones de la ecuación diferencial estocástica en (5.1) con condiciones iniciales x y x' respectivamente, de forma tal que con probabilidad uno las trayectorias de ambos procesos se crucen en un tiempo finito, y coincidan de allí en adelante. Esto nos permitiría argumentar que las soluciones de la ecuación en (5.1) para distintas condiciones iniciales tienen la misma distribución asintótica. Un acoplamiento con tales características fue propuesto por Lindvall y Rogers en [6]; describimos su construcción a continuación.

El acoplamiento se basa en el hecho de que si W es un movimiento Browniano d-dimensional y H es una matriz ortogonal de $d \times d$ con entradas reales, entonces el proceso dado por $\tilde{W}_t := H \cdot W_t$ también es un movimiento Browniano en $\mathbb{R}^d$. Para ver como podemos aplicar esto, consideremos primero el caso $b = 0$, $\varepsilon = 1$, y construyamos un acoplamiento de movimientos Brownianos empezando en diferentes puntos.

Fijemos $x \neq x'$ en $\mathbb{R}^d$ y consideremos el hiperplano ortogonal al vector $x - x'$ que pasa por el punto medio $\frac{x+x'}{2}$. Esto es,

$$L_{x,x'} = \{y \in \mathbb{R}^d : \langle\, y - \frac{x+x'}{2}, x - x' \rangle = 0\}.$$

Sea W un movimiento Browniano d-dimensional, $X_t = x + W_t$, y sea $\tilde{X}_t$ la reflexión especular de X_t a través de $L_{x,x}$. Por construcción, ambos procesos X y $\tilde{X}$ se encontrarán por primera vez al alcanzar $L_{x,\hat{x}}$. Ahora, $\tilde{X}$ puede escribirse de la forma

$$\tilde{X}_t = x' + H \cdot W_t$$

donde $H = H(x, x')$ es la matriz

$$H(x, x') = \mathbb{I} - 2(\frac{x - x'}{|x - x'|})(\frac{x - x'}{|x - x'|})^T. \tag{5.2}$$

Para ver esto último, notemos que $H(x, x')(x-x') = -(x-x')$, y que $H(x, x')v = v$, si v es ortogonal a $(x-x')$. Entonces, la matriz $H(x, x')$ representa la reflexión especular a través del hiperplano ortogonal a $(x-x')$ pasando por el origen, con lo que $x' + H \cdot W_t$ es la reflexión especular de $x + H \cdot W_t$, a través de $L_{x,x'}$.

Como $H(x, x')$ es una matriz de $d \times d$ ortogonal, vemos que $\tilde{X}$ es un movimiento Browniano d-dimensional empezando en x'. Si tomamos,

$$T_{x,x'} = \text{ínf}\{t > 0 : X_t \in L_{x,x'}\}$$

y

$$X'_t = \begin{cases} \tilde{X} & \text{si } t \leq T_{x,x'} \\ X_t & \text{si } t > T_{x,x'} \end{cases} \tag{5.3}$$

podemos ver que $P(T_{x,x'} < +\infty) = 1$. En efecto, notemos que $T_{x,x'}$ representa el primer tiempo de llegada al origen de un movimiento Browniano 1-dimensional empezando en $r = \frac{|x-x'|}{2}$, y éste es finito por la observación hecha en la demostración del Principio de Reflexión (ver Proposición 1.3.8).

Para el caso general en que b es globalmente Lipschitz y $\varepsilon > 0$ podemos considerar el siguiente sistema de ecuaciones de Itô:

$$\begin{cases} dX_t^{x,\varepsilon} = b(X_t^{x,\varepsilon})dt + \varepsilon dW_t, & X_0^{x,\varepsilon} = x \\ \\ dX_t^{x',\varepsilon} = b(X_t^{x',\varepsilon})dt + \varepsilon H(X_t^{x,\varepsilon}, X_t^{x',\varepsilon})dW_t, & X_0^{x',\varepsilon} = x' \end{cases} \tag{5.4}$$

con H definida como antes por,

$$H(u, v) = \mathbb{I} - 2(\frac{u - v}{|u - v|})(\frac{u - v}{|u - v|})^T \quad u \neq v$$

que corresponde a una reflexión ortogonal al vector $(u - v)$. Además, tomaremos $H(u, u) = \mathbb{I}$.

Si b es Lipschitz, puede probarse la existencia y unicidad de la solución fuerte $(X_t^{x,\varepsilon}, X_t^{x',\varepsilon})$ de nuestro sistema hasta el primer tiempo de llegada a la diagonal. Si $T_{x,x'}^{\varepsilon} = \text{ínf}\{t > 0 : X_t^{x,\varepsilon} = X_t^{x',\varepsilon}\}$ es finito, entonces después de $T_{x,x'}^{\varepsilon}$ dejamos que ambos procesos se muevan juntos: definimos $X_t^{x',\varepsilon} = X_t^{x,\varepsilon}$, para $t > T_{x,x'}^{\varepsilon}$, donde X^x es la única solución fuerte la primera ecuación del sistema (5.4).

Con el par $(X^{x,\varepsilon}, X^{x',\varepsilon})$ así definido, obtenemos una solución fuerte de (5.4). Éste posee las distribuciones marginales adecuadas, dadas por la ley de la solución de la primera ecuación en (5.4) con dato inicial x y x', respectivamente. Omitimos una demostración de estos últimos hechos.

Debemos garantizar, por último, que $P(T^{\varepsilon}_{x,x'} < +\infty) = 1$. Para ello, siguiendo la notación anterior, consideramos $Y^{\varepsilon}_t := |X^{x,\varepsilon}_t - X^{x',\varepsilon}_t|$. Notemos que,

$$X^{x,\varepsilon}_t - X^{x',\varepsilon}_t = x - x' + \int_0^t (b(X^{x,\varepsilon}_s) - b(X^{x',\varepsilon}_s))ds + \varepsilon \int_0^t (\mathbb{I} - H(X^{x,\varepsilon}_s, X^{x',\varepsilon}_s))dW_s,$$

Usando la fórmula de Itô con $f(u) = |u|$, tras algunos cálculos obtenemos que el proceso 1-dimensional Y^{ε}_t satisface, para $t < T^{\varepsilon}_{x,x'}$:

$$\begin{cases} dY^{\varepsilon}_t = \langle b(X^{x,\varepsilon}_t) - b(X^{x',\varepsilon}_t), \frac{X^{x,\varepsilon}_t - X^{x',\varepsilon}_t}{|X^{x,\varepsilon}_t - X^{x',\varepsilon}_t|}\rangle dt + \varepsilon\langle(\mathbb{I} - H(X^{x,\varepsilon}_t, X^{x',\varepsilon}_t))\frac{X^{x,\varepsilon}_t - X^{x',\varepsilon}_t}{|X^{x,\varepsilon}_t - X^{x',\varepsilon}_t|}, dW_t\rangle \\ \\ Y^{\varepsilon}_0 = |x - \hat{x}|, \end{cases}$$

donde, si $F = (F^1, \ldots, F^d)$, utilizamos la notación

$$\int_0^t \langle F_s, dW_s\rangle = \sum_{i=1}^d \int_0^t F^i_s dW_s.$$

Observación 5.2.1. Como la función $f(u) = |u|$ no es diferenciable en el origen, debemos utilizar una generalización de la fórmula de Itô que hemos visto. Podemos definir los tiempos de parada $\eta_n := \inf\{t \geq 0 : |Y^{\varepsilon}_t| \leq \frac{1}{n}\}$ y verificar la expresión para los procesos detenidos $Y^{\varepsilon}_{t\wedge\eta_n}$, para luego tomar límite con $n \to +\infty$ y conseguir la expresión anterior. Notemos que ésta es válida sólo para $t < T^{\varepsilon}_{x,x'}$ pues, de hecho, el miembro derecho ni siquiera tiene sentido cuando $X^{x,\varepsilon}_t = X^{x',\varepsilon}_t$.

El segundo término de la derecha del diferencial estocástico de Y es

$$2\varepsilon\left\langle \frac{X^{x,\varepsilon}_t - X^{x',\varepsilon}_t}{|X^{x,\varepsilon}_t - X^{x',\varepsilon}_t|}, dW_t\right\rangle$$

que puede ser reescrito como $2\varepsilon dB_t$, para B_t un movimiento Browniano 1-dimensional. En efecto, por las propiedades (iv) y (v) de la Proposición 2.4.3 vemos que si definimos

$$Z^{\varepsilon}_t = \begin{cases} \frac{X^{x,\varepsilon}_t - X^{x',\varepsilon}_t}{|X^{x,\varepsilon}_t - X^{x',\varepsilon}_t|} & t < T_{x,x'} \\ \\ (\frac{1}{\sqrt{d}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{d}}) & t \geq T_{x,x'}, \end{cases}$$

entonces los procesos

$$\left(\int_0^t Z^{\varepsilon}_s\, dW_s\right)_{t\geq 0} \quad \text{y} \quad \left(\left(\int_0^t Z^{\varepsilon}_s\, dW_s\right)^2 - t\right)_{t\geq 0}$$

resultan martingalas. Apelando al Teorema de Lévy 1.3.3, conseguimos la expresión deseada.

Ahora, para controlar el primer término de la derecha en el diferencial estocástico de Y vamos a suponer

$$\langle b(u) - b(v), u - v\rangle \leq 0, \quad \forall\, u \neq v. \tag{5.5}$$

En este caso, $T^{\varepsilon}_{x,x'}$ es acotado superiormente por

$$S^{\varepsilon}_{x,x'} = \text{ínf}\{t > 0 : |x - x'| + 2\varepsilon B_t = 0\},$$

para B un movimiento Browniano 1-dimensional. Tenemos entonces,

$$\begin{aligned} P\Big(S^{\varepsilon}_{x,x'} \leq \frac{1}{\varepsilon^3}\Big) &= P\Big(\inf_{s \leq \frac{1}{\varepsilon^3}} 2\varepsilon B_s \leq -|x - x'|\Big) \\ &= 2P(2\varepsilon B_{\frac{1}{\varepsilon^3}} \leq -|x - x'|) \\ &= 2P\Big(B_1 \geq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}|x - x'|\Big) \\ &\geq 1 - \frac{|x - x'|}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\varepsilon}, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos el Principio de Reflexión. Esto implica, en particular, que $P(T^{\varepsilon}_{x,x'} < +\infty) = 1$.

Observación 5.2.2. En lo que respecta a nuestra situación, es decir, $b = -\nabla U$ con U un potencial de doble pozo, no vamos a poder garantizar la validez de la condición impuesta en (5.5) para todo $u \neq v$. Sin embargo, no nos será necesario. De hecho, alcanzará con que dicha condición valga en un entorno de los mínimos de U. Verificamos que esto último ocurre en la próxima proposición.

Proposición 5.2.3. *Sea $b = -\nabla U$, donde U es de clase C^2 y tal que posee un mínimo hiperbólico p. Entonces, existe $\delta_0 > 0$ tal que*

$$\langle b(u) - b(v), u - v\rangle \leq 0, \quad \forall\, u, v \in B_{\delta_0}(p). \tag{5.6}$$

Demostración. Como p es mínimo hiperbólico de U, la matriz Hessiana $D^2U(p)$ es simétrica y definida positiva. Si $\delta > 0$, por el teorema del valor medio podemos escribir

$$\langle b(u) - b(v), u - v\rangle,$$

para u, $v \in B_\delta(p)$, como $\langle A(u,v)(u - v), u - v\rangle$, donde $A(u,v)$ es una matriz de $d \times d$ con entradas $-\partial^2 U/\partial x_i \partial x_j(\xi(i,j))$ para algunos $\xi(i,j)$ con $\text{máx}_{1\leq k\leq d}|\xi_k(i,j) - p_k| \leq \delta$, de modo que $|\xi(i,j) - p\,| \leq \sqrt{d}\,\delta$. Como U es de clase C^2 y $D^2U(p)$ es simétrica y definida positiva, vemos que si elegimos δ_0 suficientemente chico, vale (5.6). □

5.3. Características del sistema determinístico

En esta sección estudiaremos los rasgos del flujo determinístico dado por la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{X}(t) = b(X(t)), \quad 0 \leq t < +\infty, \tag{5.7}$$

donde $b = -\nabla U$, con U un potencial de doble pozo. Para nuestro modelo asumiremos que U verifica las siguientes hipótesis:

Hipótesis Ψ

1. $U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2.

2. $\liminf_{|x|\to+\infty} \frac{U(x)}{|x|} > 0$.

3. U tiene exactamente tres puntos críticos, que llamaremos p, q y z. Todos ellos son hiperbólicos, i.e., el determinante de la matriz Hessiana de U en estos puntos es distinta de 0. Los puntos p y q son mínimos locales de U y z es un punto de ensilladura.

4. $U(q) < U(p) < U(z)$.

5. b es globalmente Lipschitz.

Bajo estas hipótesis, podemos dar una buena descripción del comportamiento del sistema determinístico $X^{x,0}$, solución de (5.7).

En primer lugar, notemos que la matriz Hessiana $-D^2U(z)$ tiene un único autovalor positivo, cuyo autoespacio es 1-dimensional. Los autovalores de $-D^2U(x)$ para $x = p$, q son todos negativos. Tenemos entonces una descomposición

$$\mathbb{R}^d = \mathcal{W}_p^s \cup \mathcal{W}_q^s \cup \mathcal{W}_z^s,$$

donde $\mathcal{W}_x^s$ denota la variedad estable del punto x. $\mathcal{W}_x^s$ es invariante bajo el flujo determinístico y atraído hacia x, i.e., si $y \in \mathcal{W}_x^s$, entonces $X_t^{y,0} \in \mathcal{W}_x^s$ para todo $t > 0$ y $\lim_{t\to+\infty} X_t^{y,0} = x$. Para $x = p$, q escribiremos $\mathcal{W}_x^s = D_x$ para recordar que, en estos casos, $\mathcal{W}_x^s$ es un dominio abierto de $\mathbb{R}^d$, también llamado el dominio de atracción de x. Tanto p como q son *asintóticamente estables*, i.e., dado un entorno V_p de p existe un entorno $W_p \subseteq V_p$ de p tal que para todo $y \in W_p$ se verifica $X_t^{y,0} \in V_p$ para todo tiempo t y $\lim_{t\to+\infty} X_t^{y,0} = p$ (análogo para q). La separatriz de D_p y D_q es $\mathcal{W}_z^s$, que es una variedad de codimensión uno, bajo las hipótesis Ψ. El punto de ensilladura z también admite una variedad inestable, que denotaremos $\mathcal{W}_x^u$. En este caso, es una variedad 1-dimensional con $\mathcal{W}_z^s \cap \mathcal{W}_z^u = \{z\}$, que une p y q (Ver figura). Para cualquier $y \neq z$ perteneciente a $\mathcal{W}_z^u$, se tiene $X_t^{y,0} \in \mathcal{W}_z^u$ para todo $t > 0$ y, además, $\lim_{t\to+\infty} X_t^{y,0} = p$, si $y \in D_p$, o $\lim_{t\to+\infty} X_t^{y,0} = q$, si $y \in D_q$.

5.4. Características del sistema estocástico

Estudiamos en esta sección algunas propiedades generales de la familia de procesos $(X^{x,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$.

Notación. Con el objetivo de simplificar la notación, en ocasiones eliminaremos el superíndice x en $X^{x,\varepsilon}$ y en otros objetos definidos a partir de la condición inicial del proceso, indicando esta última como subíndice en la medida de probabilidad o en la esperanza, según corresponda.

5.4.1. Adaptabilidad a la filtración Browniana

Recordemos que toda solución fuerte de una ecuación diferencial estocástica es, por definición, un proceso estocástico adaptado a la filtración aumentada definida en el Capítulo 3. En el caso particular de la ecuación (5.1), ocurre que la solución $X^{x,\varepsilon}$ con dato inicial determinístico es, de hecho, adaptada a filtración más pequeña $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$, generada por el movimiento Browniano asociado a la ecuación.

Para ver esto, dado $x \in \mathbb{R}^d$ definimos como antes las aproximaciones sucesivas $X^{(0)} \equiv x$ y para $k \geq 0$,

$$X_t^{(k+1)} = x + \int_0^t b(X_s^{(k)})ds + \varepsilon W_t, \quad 0 \leq t < +\infty.$$

Cada $X^{(k)}$ tiene trayectorias continuas y es adaptado a filtración Browniana $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$. Si fijamos $T > 0$ y definimos $M_t^k := \left|X_t^{(k)} - X_t^{(k-1)}\right|$ para $k \in \mathbb{N}$, entonces obtenemos

$$\begin{aligned} M_t^{k+1} = \left|X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)}\right| &= \left|\int_0^t \left(b(X_s^{(k)}) - b(X_s^{(k-1)})\right) ds\right| \\ &\leq \int_0^t \left|b(X_s^{(k)}) - b(X_s^{(k-1)})\right| ds \\ &\leq K \int_0^t \left|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\right| ds \end{aligned}$$

donde K es la constante de Lipschitz de b. Iterando esta desigualdad, conseguimos

$$M_t^{k+1} \leq C^* \frac{(Kt)^k}{k!}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

donde $C^* = \max_{0\leq t\leq T} |X_t^{(1)} - x| < +\infty$. Se sigue que para todo $\omega \in \Omega$ la sucesión de funciones continuas $(X^{(k)}(\omega))_{k\in\mathbb{N}_0}$ es uniformemente de Cauchy en el intervalo $[\,0, T\,]$. Como $T > 0$ es arbitrario, la sucesión es uniformemente de Cauchy sobre cualquier compacto de $[\,0, +\infty)$. Luego, si definimos $X_t = \lim_{k\to+\infty} X_t^{(k)}$, X resulta un proceso estocástico adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$ y de trayectorias continuas. Más aún, por la continuidad de b para cada $\omega \in \Omega$ se verifican

- $\int_0^t |b_i(X_s(\omega))|\, ds + \varepsilon W_t^{(i)}(\omega) < +\infty, \quad 0 \le t < +\infty,\ 1 \le i \le d$
- $X_t = \int_0^t b(X_s(\omega))\, ds + \varepsilon W_t(\omega), \quad 0 \le t < +\infty.$

Con esto, vemos que X es solución fuerte de (5.1).

5.4.2. Medidas invariantes para la dinámica estocástica

Si $\liminf_{|x|\to+\infty} \frac{U(x)}{|x|} > 0$, para cada $\varepsilon > 0$ la cantidad

$$Z_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon^2}}\, dx,$$

es finita. Luego, podemos definir la medida de probabilidad μ_ε en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ como

$$\mu_\varepsilon(A) := \frac{1}{Z_\varepsilon} \int_A e^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon^2}}\, dx, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \tag{5.8}$$

Para estudiar las propiedades de la familia de medidas $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ necesitamos de algunos resultados generales sobre medidas de probabilidad definidas en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ que resumimos en la siguiente proposición.

Proposición 5.4.1. *Sea P una probabilidad definida sobre $\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big)$. Entonces,*

(i) P es regular, i.e., dados $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ y $\varepsilon > 0$, existen un cerrado F y un abierto G tales que $F \subseteq A \subseteq G$ y $P(G \setminus F) < \varepsilon$.

(ii) Si $\tilde{P}$ es otra probabilidad definida sobre $\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big)$ tal que $P(F) = \tilde{P}(F)$ para todo F cerrado, entonces $P = \tilde{P}$.

(iii) Si $\tilde{P}$ es otra probabilidad definida sobre $\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\, dP = \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\tilde{P}$$

para toda f continua y acotada, entonces $P = \tilde{P}$.

(iv) Si $\mathfrak{F}$ es una clase de funciones que aproxima uniformemente sobre compactos a la clase de funciones continuas y acotadas, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\, dP = \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\tilde{P}$$

para toda $f \in \mathfrak{F}$, entonces $P = \tilde{P}$.

Demostración. **1**. Supongamos que A es cerrado. En este caso, podemos tomar $F = A$ y $G = A_{(\delta)} = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, A) < \delta\}$ para $\delta > 0$ adecuado. En efecto, como los conjuntos $A_{(\delta)}$ decrecen a A cuando δ tiende a cero, tenemos

$$0 = P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{(\frac{1}{n})} \setminus A\Big) = \lim_{n\to+\infty} P(A_{(\frac{1}{n})} \setminus A),$$

con lo cual, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ grande tal que $P(A_{(\frac{1}{N})} \setminus A) < \varepsilon$.

2. Consideremos la clase de borelianos $\mathfrak{G}$ que satisfacen la propiedad de regularidad, es decir, los $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tales que, dado $\varepsilon > 0$, existen F cerrado y G abierto con $F \subseteq A \subseteq G$ y $P(G \setminus F) < \varepsilon$. Ya hemos visto que $\mathfrak{G}$ contiene a la clase de conjuntos cerrados. Si verificamos que además es una σ-álgebra, podremos concluir (i).

Dada una sucesión de conjuntos $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathfrak{G}$, elijamos cerrados F_n y abiertos G_n tales que $F_n \subseteq A_n \subseteq G_n$ y $P(G_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Si $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ y $F = \bigcup_{n=1}^{n_0} F_n$ con $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq G$ y $P(G \setminus F) < \varepsilon$. Así, la clase $\mathfrak{G}$ es cerrada por uniones numerables.

Por otro lado, como $F \subseteq A \subseteq G$ implica que $G^c \subseteq A^c \subseteq F^c$ y $G \setminus F = F^c \setminus G^c$, vemos que $\mathfrak{G}$ es también cerrada por complementos. Así, $\mathfrak{G}$ resulta una σ-álgebra.

3. Sean $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ y $\varepsilon > 0$. Por la regularidad de P y $\tilde{P}$ sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existen F_1, F_2 cerrados y G_1, G_2 abiertos tales que $F_1 \cup F_2 \subseteq A \subseteq G_1 \cap \mathcal{G}_2$ y $P(G_1 \setminus F_1) + \tilde{P}(G_2 \setminus F_2) < \varepsilon$. Luego, descomponiendo $A = (F_1 \cup F_2) \cup \big(A \setminus (F_1 \cup F_2)\big)$, obtenemos

$$\big|P(A) - \tilde{P}(A)\big| \leq P(G_1 \setminus F_1) + \tilde{P}(G_2 \setminus F_2) < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos (ii).

4. Sea F un conjunto cerrado. Dado $\varepsilon > 0$, sea la función $f_\varepsilon(x) = (1 - \frac{d(x,F)}{\varepsilon})^+$, la parte positiva de $1 - \frac{d(\cdot,F)}{\varepsilon}$. Esta función resulta acotada y uniformemente continua pues $|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| \leq \frac{d(x,y)}{\varepsilon}$. Además, $f_\varepsilon(x) = 1$ para $x \in F$ y, si $x \notin F_{(\varepsilon)}$, entonces $d(x, F) \geq \varepsilon$ y, por lo tanto, $f_\varepsilon(x) = 0$. Así, $\mathbf{1}_F \leq f_\varepsilon \leq \mathbf{1}_{F_{(\varepsilon)}}$. Integrando obtenemos

$$P(F) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_F \, dP \leq \int_{\mathbb{R}^d} f_\varepsilon \, dP = \int_{\mathbb{R}^d} f_\varepsilon \, d\tilde{P} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{F_{(\varepsilon)}} \, d\tilde{P} = \tilde{P}(F_{(\varepsilon)}).$$

Tomando límite con ε tendiendo a cero, conseguimos $P(F) \leq \tilde{P}(F)$. Por simetría, vale la otra desigualdad y, así, $P(F) = \tilde{P}(F)$ para todo F cerrado. Por lo probado anteriormente, se sigue (iii).

5. Sea f continua y de soporte compacto. Por hipótesis existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{F}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in sop(f)} |f_n(x) - f(x)| = 0$. En particular, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n \mathbf{1}_{sop(f)}\|_\infty < +\infty$ con lo que, aplicando el teorema de convergencia mayorada, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \, dP = \lim_{n\to+\infty} \int_{sop(f)} f_n \, dP = \lim_{n\to+\infty} \int_{sop(f)} f_n \, d\tilde{P} = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\tilde{P}.$$

Ahora, si $K \subseteq \mathbb{R}^d$ es un compacto, notemos que para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $K_{(\varepsilon)}$ es acotado. Luego, si definimos $f_\varepsilon(x) = (1 - \frac{d(x,K)}{\varepsilon})^+$ como antes, f_ε resulta continua y de soporte compacto con lo cual, por lo que hemos mostrado arriba, $\int f_\varepsilon \, dP = \int f_\varepsilon \, d\tilde{P}$ para todo $\varepsilon > 0$. Procediendo como en el paso anterior concluimos que $P(K) = \tilde{P}(K)$ para todo K compacto. Observando que todo cerrado en $\mathbb{R}^d$ es unión creciente de compactos, conseguimos (iv). □

Ayudados de la proposición anterior, mostramos a continuación las propiedades más importantes de la familia $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$.

Proposición 5.4.2. *Sea la familia de medidas de probabilidad $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ definidas sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Entonces,*

(i) *Para cada $\varepsilon > 0$, μ_ε es la única medida invariante para la dinámica del proceso X^ε; i.e., μ_ε es la única medida tal que si $X^{\mu_\varepsilon,\varepsilon}$ denota la solución de (5.1) con distribución inicial μ_ε, entonces $P(X_t^{\mu_\varepsilon,\varepsilon} \in \Gamma) = \mu_\varepsilon(\Gamma)$, para todo $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $t \geq 0$.*

(ii) *La sucesión de medidas $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge débilmente a δ_q, la medida de Dirac concentrada en q, el fondo del pozo más profundo.*

Demostración.

(i) Las hipótesis de crecimiento en el infinito del potencial U que hemos asumido garantizan la existencia de una única medida invariante para la dinámica. No daremos una demostración de esto. No obstante, mostraremos que μ_ε es medida invariante. Se deduce entonces de la afirmación anterior que es la única. Haremos la demostración en varios pasos. La idea es ver en primer lugar que

$$\frac{d\,\mathbb{E}(f(X_t^{\mu_\varepsilon,\varepsilon}))}{dt} = 0 \quad \forall\, t > 0,$$

para toda f perteneciente a una clase suficientemente amplia de funciones. De aquí se seguirá que μ_ε es una medida invariante.

1. Sea $C_*^2(\mathbb{R}^d)$ el espacio de funciones acotadas de clase C^2 en $\mathbb{R}^d$ con derivadas de primer y segundo orden acotadas. Definimos el operador

$$\mathfrak{L} : C_*^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow C(\mathbb{R}^d)$$

dado por

$$\mathfrak{L}(f) = \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta f - \nabla U \cdot \nabla f.$$

Como $b = -\nabla U$ es globalmente Lipschitz por hipótesis, existe $K > 0$ constante tal que $|b(x)| \leq K(1 + |x|)$, para $x \in \mathbb{R}^d$. Con esto y recordando que $\liminf_{|x|\to+\infty} \frac{U(x)}{|x|} > 0$, un cálculo directo muestra que para toda $f \in C_*^2(\mathbb{R}^d)$, se tiene $\int_{\mathbb{R}^d} |\mathfrak{L}(f)| \, d\mu_\varepsilon < +\infty$. Luego, el teorema de convergencia mayorada implica que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{L}(f) \, d\mu_\varepsilon = \lim_{N\to+\infty} \int_{B_N(0)} \mathfrak{L}(f) \, d\mu_\varepsilon.$$

Ahora

$$\int_{B_N(0)} \mathfrak{L}(f)\, d\mu_\varepsilon = \frac{1}{Z_\varepsilon}\int_{B_N(0)} \big(\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta f - \nabla U \cdot \nabla f\big) e^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon^2}}\, dx.$$

Aplicando la fórmula de Green se tiene

$$\int_{B_N(0)} \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta f e^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon^2}}\, dx = \int_{B_N(0)} \nabla U \cdot \nabla f e^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon^2}}\, dx + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{\partial B_N(0)} e^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon^2}}\big(\nabla f \cdot \frac{x}{|x|}\big)\, dS,$$

de donde se deduce que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{L}(f)\, d\mu_\varepsilon = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{Z_\varepsilon}\int_{\partial B_N(0)} e^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon^2}}\big(\nabla f \cdot \frac{x}{|x|}\big)\, dS.$$

Como $\liminf_{|x|\to+\infty} \frac{U(x)}{|x|} > 0$, existen $\gamma > 0$ y $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^d$ con $|x| \geq N_0$ se tiene $U(x) \geq \gamma|x|$. Luego, si $N \geq N_0$

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\partial B_N(0)} e^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon^2}}\big(\nabla f \cdot \frac{x}{|x|}\big)\, dS\Big| &\leq \int_{\partial B_N(0)} e^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon^2}} \|\nabla f\|_\infty\, dS \\
&\leq \|\nabla f\|_\infty \int_{\partial B_N(0)} e^{-\frac{2\gamma|x|}{\varepsilon^2}}\, dS \\
&\leq d\mathcal{L}\big(B_1(0)\big)\|\nabla f\|_\infty\, e^{-\frac{2\gamma N}{\varepsilon^2}} N^{d-1},
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{L}\big(B_1(0)\big)$ es la medida de Lebesgue de la bola unitaria en $\mathbb{R}^d$. Se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{L}(f)\, d\mu_\varepsilon = 0$$

para toda $f \in C^2_*(\mathbb{R}^d)$.

2. Sea $\mathcal{M}_\mathcal{B}$ el espacio de las funciones borelianas y acotadas definidas sobre $\mathbb{R}^d$. Definimos para cada $t \geq 0$ el operador $S_t : C^2_*(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{M}_\mathcal{B}$ dado por

$$\big(S_t(f)\big)(x) = \mathbb{E}_x\big(f(X^\varepsilon_t)\big).$$

Para $f \in C^2_*(\mathbb{R}^d)$, utilizando la fórmula de Itô conseguimos

$$f(X^{x,\varepsilon}_t) = f(x) + \varepsilon\int_0^t \nabla f(X^{x,\varepsilon}_s)\, dW_s + \int_0^t \mathfrak{L}(f)(X^{x,\varepsilon}_s)\, ds.$$

Con esto se sigue que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} \frac{\mathbb{E}_x\big(f(X^\varepsilon_t)\big) - f(x)}{t} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\varepsilon}{t}\,\mathbb{E}_x\bigg(\int_0^t \nabla f(X^\varepsilon_s)\, dW_s\bigg) + \frac{1}{t}\,\mathbb{E}_x\bigg(\int_0^t \mathfrak{L}(f)(X^\varepsilon_s)\, ds\bigg) \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{E}_x\Big(\mathfrak{L}(f)(X^\varepsilon_s)\Big)\, ds \\
&= \mathfrak{L}(f)(x).
\end{aligned}$$

Utilizando esto y la Observación 3.6.5 podemos calcular

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} \frac{\mathbb{E}\big(f(X_t^{\mu_\varepsilon,\varepsilon})\big) - \mathbb{E}\big(f(X_0^{\mu_\varepsilon,\varepsilon})\big)}{t} &= \lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathbb{E}_x\big(f(X_t^\varepsilon)\big) - f(x)}{t}\, d\mu_\varepsilon(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathbb{E}_x\big(f(X_t^\varepsilon)\big) - f(x)}{t}\, d\mu_\varepsilon(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{L}(f)\, d\mu_\varepsilon = 0.\end{aligned}$$

3. Mostraremos que

$$\frac{d\,\mathbb{E}(f(X_t^{\mu_\varepsilon,\varepsilon}))}{dt} = 0 \quad \forall\, t > 0,$$

para toda $f \in C_*^2(\mathbb{R}^d)$. Notemos primero que la propiedad de Markov implica que para $t, s \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ y $f \in C_*^2(\mathbb{R}^d)$ vale

$$\big(S_{t+s}(f)\big)(x) = \mathbb{E}_x\big(f(X_{t+s}^\varepsilon)\big) = \mathbb{E}_x\Big(\mathbb{E}_{X_s^\varepsilon}\big(f(X_t^\varepsilon)\big)\Big) = \mathbb{E}_x\big(S_t(f)(X_s^\varepsilon)\big) = \big(S_s(S_t(f))\big)(x).$$

Así, si $t, h > 0$ tenemos

$$\mathbb{E}_x\big(f(X_{t+h}^\varepsilon)\big) - \mathbb{E}_x\big(f(X_t^\varepsilon)\big) = \mathbb{E}_x\big(S_t(f)(X_h^\varepsilon)\big) - S_t(f)(x).$$

Luego, como $S_t(f) \in C_*^2(\mathbb{R}^d)$[1], procediendo como en el paso anterior obtenemos

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\mathbb{E}\big(f(X_{t+h}^{\mu_\varepsilon,\varepsilon})\big) - \mathbb{E}\big(f(X_t^{\mu_\varepsilon,\varepsilon})\big)}{h} = 0.$$

Análogamente, si $h < 0$ tenemos

$$\mathbb{E}_x\big(f(X_{t+h}^\varepsilon)\big) - \mathbb{E}_x\big(f(X_t^\varepsilon)\big) = -\Big(\mathbb{E}_x\big(S_{t+h}(f)(X_{-h}^\varepsilon)\big) - S_{t+h}(f)(x)\Big),$$

con lo que concluimos

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\mathbb{E}\big(f(X_{t+h}^{\mu_\varepsilon,\varepsilon})\big) - \mathbb{E}\big(f(X_t^{\mu_\varepsilon,\varepsilon})\big)}{h} = 0.$$

De aquí resulta

$$\frac{d\,\mathbb{E}(f(X_t^{\mu_\varepsilon,\varepsilon}))}{dt} = 0 \quad \forall\, t > 0,$$

para toda $f \in C_*^2(\mathbb{R}^d)$, como queríamos ver. En particular, si $f \in C_*^2(\mathbb{R}^d)$ y $t \geq 0$ tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\, dP_{X_t^{\mu_\varepsilon,\varepsilon}} = \mathbb{E}\big(f(X_t^{\mu_\varepsilon,\varepsilon})\big) = \mathbb{E}\big(f(X_0^{\mu_\varepsilon,\varepsilon})\big) = \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu_\varepsilon.$$

Como la clase $C_*^2(\mathbb{R}^d)$ aproxima a las funciones continuas uniformemente sobre compactos, por la proposición anterior obtenemos que $P_{X_t^{\mu_\varepsilon,\varepsilon}} = \mu_\varepsilon$ para todo $t \geq 0$ y, así, μ_ε resulta medida invariante para el proceso.

[1] Para una demostración de esta afirmación, referimos a [5, páginas 366 y 397]

(ii) Debemos ver que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_\varepsilon = f(q) \tag{5.9}$$

para toda f función continua y acotada. Esto se deducirá del hecho de que para todo $\delta > 0$ se verifica

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon\big(\mathbb{R}^d \setminus B_\delta(q)\big) = 0. \tag{5.10}$$

En efecto, si f es continua y acotada, tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrario y $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(q)| < \varepsilon$ para todo $x \in B_\delta(q)$. Así,

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_\varepsilon - f(q)\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^d}\big(f(x)-f(q)\big)d\mu_\varepsilon\Big| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d}\big|f(x)-f(q)\,\big|d\mu_\varepsilon \\
&= \int_{\mathbb{R}^d\setminus B_\delta(q)}\big|f(x)-f(q)\,\big|d\mu_\varepsilon + \int_{B_\delta(q)}\big|f(x)-f(q)\,\big|d\mu_\varepsilon \\
&\leq 2\,\|f\|_\infty\,\mu_\varepsilon\big(\mathbb{R}^d\setminus B_\delta(q)\big) + \varepsilon
\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado.

Probemos, entonces, la afirmación de arriba. Sea $\delta > 0$. Como q es el mínimo absoluto de U y $\lim_{|x|\to+\infty} U(x) = +\infty$, vale que $\inf_{x\in\mathbb{R}^d\setminus B_\delta(q)} U(x) > U(q)$. Así, podemos tomar $0 < \delta_1 < \delta$ tal que valga la desigualdad

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^d\setminus B_\delta(q)} U(x) > \sup_{x\in B_{\delta_1}(q)} U(x).$$

Por último, observemos que $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\left(U(x)-\sup_{y\in B_{\delta_1}(q)} U(y)\right)}\,dx < +\infty$ pues, por hipótesis,

$$0 < \liminf_{|x|\to+\infty}\frac{U(x)}{|x|} = \liminf_{|x|\to+\infty}\frac{U(x)-\sup_{y\in B_{\delta_1}(q)} U(y)}{|x|}.$$

Esto nos asegura que, dado $\gamma > 0$ arbitrario, podemos tomar $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_k(q)} e^{-2\varepsilon^{-2}\left(U(x)-\sup_{y\in B_{\delta_1}(q)} U(y)\right)}dx < \gamma\,\mathcal{L}\big(B_{\delta_1}(q)\big)$$

para todo $0 < \varepsilon \leq 1$.

Si notamos $\alpha := \inf_{x\in\mathbb{R}^d\setminus B_\delta(q)} U(x) - \sup_{x\in B_{\delta_1}(q)} U(x)$, para $0<\varepsilon\leq 1$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\mu_\varepsilon\big(\,\mathbb{R}^d\setminus B_\delta(q)\big) &= \frac{\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_\delta(q)} e^{\frac{-2U(x)}{\varepsilon^2}}dx}{\int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{-2U(x)}{\varepsilon^2}}dx}\\
&\leq \frac{\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_\delta(q)} e^{\frac{-2U(x)}{\varepsilon^2}}dx}{\int_{B_{\delta_1}(q)} e^{\frac{-2U(x)}{\varepsilon^2}}dx}\\
&\leq \frac{\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_\delta(q)} e^{-2\varepsilon^{-2}\left(U(x)-\sup_{y\in B_{\delta_1}(q)} U(y)\right)}dx}{\mathcal{L}\big(B_{\delta_1}(q)\big)}\\
&\leq \frac{\int_{B_k(q)\setminus B_\delta(q)} e^{-2\varepsilon^{-2}\left(U(x)-\sup_{y\in B_{\delta_1}(q)} U(y)\right)}dx}{\mathcal{L}\big(B_{\delta_1}(q)\big)}+\gamma\\
&\leq \frac{\mathcal{L}\big(B_k(q)\big)}{\mathcal{L}\big(B_{\delta_1}(q)\big)}\,e^{\frac{-2\alpha}{\varepsilon^2}}+\gamma\\
&= \Big(\frac{k}{\delta_1}\Big)^d e^{\frac{-2\alpha}{\varepsilon^2}}+\gamma
\end{aligned}$$

notando que, en la segunda desigualdad, hemos usado la acotación

$$\mathcal{L}\big(B_{\delta_1}(q)\big)\,e^{-2\varepsilon^{-2}\left(\sup_{y\in B_{\delta_1}(q)} U(y)\right)} \leq \int_{B_{\delta_1}(q)} e^{\frac{-2U(x)}{\varepsilon^2}}dx.$$

Como $\gamma>0$ es arbitrario y α es positivo, esto demuestra la afirmación.

5.5. Tiempos de salto

En esta sección introduciremos formalmente los tiempos de salto y probaremos algunas propiedades que nos serán necesarias para el próximo capítulo, donde veremos el carácter exponencial de su distribución asintótica.

Definición 5.5.1. Sea $X^{x,\varepsilon}$ la solución de (5.1) con condición inicial $x\in\mathbb{R}^d$. Dado $\Gamma\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ definimos el *tiempo de llegada* a Γ como

$$\tau_\varepsilon^x = \inf\{t\geq 0 : X_t^{x,\varepsilon}\in\Gamma\},$$

con la convención de que $\inf\emptyset = +\infty$.

Si Γ es un conjunto cerrado, vale que el tiempo de llegada a Γ, $\tau_\varepsilon^x(\Gamma)$, es un tiempo de parada con respecto a la filtración Browniana, para todo $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$.

Fijemos ahora $c > 0$ tal que $\overline{B}_c(p) \subseteq D_p$ y $\overline{B}_c(q) \subseteq D_q$ y consideremos los tiempos de llegada

$$\tau_\varepsilon^x = \tau_\varepsilon^x\big(\bar{B}_c(q)\big) := \inf\{t > 0 : X_t^{x,\varepsilon} \in \bar{B}_c(q)\} \tag{5.11}$$

y

$$\bar{\tau}_\varepsilon^x = \inf\{t > \tau_\varepsilon^x : X_t^{x,\varepsilon} \in \bar{B}_c(p)\}. \tag{5.12}$$

Llamaremos a τ_ε^x y $\bar{\tau}_\varepsilon^x$ los *tiempos de salto*. Tanto τ_ε^x como $\bar{\tau}_\varepsilon^x$ son tiempos de parada con respecto a la filtración Browniana $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$, para todo $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$. Además, se tienen las propiedades que muestra la siguiente proposición.

Proposición 5.5.2. *τ_ε^x y $\bar{\tau}_\varepsilon^x$ son variables aleatorias finitas en casi todo punto. Además, su función de distribución es continua y estrictamente creciente.*

Demostración. Probaremos la proposición para τ_ε^x. Para $\bar{\tau}_\varepsilon^x$ la demostración es análoga.

1. La condición $\liminf_{|x|\to+\infty} \frac{U(x)}{|x|} > 0$ nos asegura que se verifica la siguiente versión de la ley de los grandes números:

$$P_x\left(\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(X_s^\varepsilon)\, ds = \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu_\varepsilon\right) = 1 \tag{5.13}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y cualquier f medible y acotada. Si tomamos $f = \mathbf{1}_{\overline{B}_c(q)}$ y reemplazamos en (5.13), obtenemos

$$P_x\left(\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(X_s^\varepsilon)\, ds = \mu_\varepsilon\big(\overline{B}_c(q)\big)\right) = 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Como $\mu_\varepsilon\big(\overline{B}_c(q)\big) > 0$, se sigue que τ_ε^x es finito en casi todo punto.

2. Dado $x \in D_p$, para ver que la función de distribución de τ_ε^x es continua basta con ver que $P_x(\tau_\varepsilon = t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Notemos que la continuidad de las trayectorias nos da la desigualdad

$$P_x(\tau_\varepsilon = t) \leq P_x\big(X_t^\varepsilon \in \partial B_c(q)\big).$$

Luego, basta con mostrar que el miembro derecho es cero. Supongamos, por simplicidad, que $\varepsilon = 1$. Entonces, por la unicidad en ley y la Proposición 3.6.4, podemos escribir

$$P_x\big(X_t^1 \in \partial B_c(q)\big) = Q^x\big(\tilde{X}_t^1 \in \partial B_c(q)\big) = \int_{\{\tilde{X}_t^1 \in \partial B_c(q)\}} Z_t dP^x, \tag{5.14}$$

donde el proceso $\tilde{X}$ es solución de (5.1) con condición inicial x bajo Q^x y, bajo P^x, es un movimiento Browniano d-dimensional comenzando en x. Teniendo en cuenta esto, vemos que $P^x\big(\tilde{X}_t^1 \in \partial B_c(q)\big) = 0$. En particular, $P_x\big(X_t^1 \in \partial B_c(q)\big) = 0$, pues es una integral sobre un conjunto de medida nula.

3. Para ver que la función de distribución de τ_ε^x es estrictamente creciente para todo $x \in D_p$ comenzaremos por mostrar que, dado $T > 0$ y $\varphi \in C([0,T], \mathbb{R}^d)$ tal que $I_T^x(\varphi) < +\infty$, para todo $\delta > 0$ se tiene

$$P_x\big(\varrho_T(X^\varepsilon, \varphi) < \delta\big) > 0. \tag{5.15}$$

Esto se deduce de la demostración de la cota inferior en el Teorema 4.4.4. En efecto, para el caso $b \equiv 0, x = 0$ que analizamos primero, basta con elegir z suficientemente grande como para garantizar que

$$P\left(\sup_{0\le t\le T} \varepsilon|W_t| < \delta\,,\ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \langle\dot\varphi(s),\, dW_s\rangle \le \frac{1}{\varepsilon} z\sqrt{\tilde I_T^0(\varphi)}\right) > 0.$$

si $\varphi \in C([0,T], \mathbb{R}^d)$ es tal que $\tilde I_T^0(\varphi) < +\infty$, donde $\tilde I_T^0$ es la función de tasa correspondiente. Esto es posible dado que para todo $T > 0$ y $\delta > 0$ vale

$$P\left(\sup_{0\le t\le T} \varepsilon|W_t| < \delta\right) > 0.$$

Siguiendo la demostración en este caso, llegamos a que $P\big(\varrho_T(\varepsilon W, \varphi) < \delta\big) > 0$ si $\tilde I_T^0(\varphi) < +\infty$. Ahora, si $\mathbb{T}_x$ es el homeomorfismo definido para el caso general de (4.4.4), vimos que para toda $\varphi \in C([0,T], \mathbb{R}^d)$ vale

$$P_x\big(\varrho_T(X^\varepsilon, \varphi) < \delta\big) \ge P\Big(\varrho_T\big(\varepsilon W, \mathbb{T}_x^{-1}(\varphi) < \frac{\delta}{e^{\kappa T}}\big)\Big)$$

donde κ es la constante de Lipschitz de b. Recordando que $I_T^x(\varphi) = \tilde I_T^0\big(\mathbb{T}_x^{-1}(\varphi)\big)$, esto prueba (5.15).

4. Por último, mostraremos que para todo $x \in D_p$ se tiene $P_x(a < \tau_\varepsilon < b) > 0$ para $a < b$ números positivos cualesquiera. Esto prueba que la función de distribución de τ_ε^x es estrictamente creciente.

Basta con construir una trayectoria $\varphi^x \in C([0,b], \mathbb{R}^d)$ tal que:

1. φ^x es absolutamente continua y $\varphi^x(0) = x$
2. $d(\varphi^x(b), q) = \frac{c}{2}$
3. $d(\varphi^x(t), q) \ge c + h$, para todo $t \in [0,a]$,

donde $h > 0$ es tal que $\overline{B}_{\frac{3}{2}c}(q) \subseteq D_q$.

Notemos que si $\psi \in C([0,b], \mathbb{R}^d)$ verifica $\varrho_b(\psi, \varphi^x) < \frac{c}{2} \wedge h$, entonces la segunda condición implica que $d(\psi(b), q) < c$ y la tercera que $d(\psi(t), q) > c$ para todo $t \in [0,a]$. Luego,

$$P_x(a < \tau_\varepsilon < b) \ge P_x\left(\varrho_b(X^\varepsilon, \psi) < \frac{c}{2} \wedge h\right) > 0,$$

pues la primera condición implica que $I_b^x(\varphi^x) < +\infty$.

La construcción de una tal φ^x es sencilla: podemos considerar una interpolación lineal entre x y q que ajuste su velocidad de forma tal que se verifiquen las tres condiciones anteriores. □

Capítulo 6

Impredecibilidad del tiempo de salto

6.1. Introducción

En esta sección presentamos los principales resultados con respecto a la distribución asintótica del tiempo de salto.

Sea $c > 0$ tal que $\overline{B}_c(p) \subseteq D_p$ y $\overline{B}_c(q) \subseteq D_q$ y sea τ_ε^x el tiempo de salto definido en (5.11). Para cada $\varepsilon > 0$ sea β_ε definido por la relación

$$P_p(\tau_\varepsilon > \beta_\varepsilon) = e^{-1}. \tag{6.1}$$

Notemos que β_ε se encuentra bien definido debido a la Proposición 5.5.2.

Nuestro primer objetivo en este capítulo será mostrar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log \beta_\varepsilon = \Delta, \tag{6.2}$$

donde $\Delta := 2(U(z) - U(p))$. De hecho, mostraremos un resultado más fuerte: para cada $x \in D_p$ y $\delta > 0$ se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to +\infty} P_x\left(e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}} < \tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}\right) = 1, \tag{6.3}$$

donde la convergencia puede tomarse uniforme en x sobre cualquier compacto $\mathcal{K}$ contenido en D_p. A continuación, estudiaremos la pérdida de memoria asintótica del tiempo de salto. Es decir, mostraremos que para cada $x \in D_p$ y $t > 0$ vale

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P_x(\tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon) = e^{-t} \tag{6.4}$$

donde, nuevamente, la convergencia puede tomarse uniforme sobre compactos de D_p.

Claramente, se tienen resultados análogos para el tiempo de retorno al pozo de fondo p. En concreto, si $\bar{\tau}_\varepsilon^x$ es el tiempo de llegada definido en (5.12) y definimos $\bar{\beta}_\varepsilon$ por la relación $P_q(\tau_\varepsilon(\bar{B}_c(p) > \bar{\beta}_\varepsilon) = e^{-1}$, entonces para cada $x \in D_p$ y cada $\delta > 0$ se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to +\infty} P_x\left(e^{\frac{\bar{\Delta}-\delta}{\varepsilon^2}} < \bar{\tau}_\varepsilon - \tau_\varepsilon < e^{\frac{\bar{\Delta}+\delta}{\varepsilon^2}}\right) = 1 \tag{6.5}$$

donde $\bar{\Delta} := 2(U(z) - U(q))$. Más aún, se verifica

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P_x(\bar{\tau}_\varepsilon - \tau_\varepsilon > t\,\bar{\beta}_\varepsilon) = e^{-t}. \tag{6.6}$$

Demostraremos únicamente estos resultados para τ_ε, la prueba para $\bar{\tau}_\varepsilon$ es completamente análoga.

Comenzaremos con la demostración de (6.3). Notemos que, como dijimos arriba, esto implica (6.2). En efecto, si vale (6.3), dado $\delta > 0$ podemos tomar $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ se tiene

$$P_p\big(e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}} < \tau_\varepsilon\big) > e^{-1}$$
$$P_p\big(\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}\big) > 1 - e^{-1}$$

Teniendo en cuenta la definición de β_ε, de la primera desigualdad obtenemos $e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}} < \beta_\varepsilon$, y de la segunda $\beta_\varepsilon < e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}$. Esto muestra (6.2).

Dividiremos la demostración de (6.3) en dos partes. Probar

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P_x\left(e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}} < \tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}\right) = 1,$$

resulta equivalente a probar

$$(i)\lim_{\varepsilon \to 0} P_x\left(\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\right) = 0 \qquad \text{y} \qquad (ii)\lim_{\varepsilon \to 0} P_x\left(\tau_\varepsilon > e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}\right) = 0.$$

Mostraremos (i) y (ii) por separado y esto probará (6.3). Llamaremos a (i) y (ii) las cotas inferior y superior para el tiempo de salto, respectivamente.

Las cotas inferior y superior para el tiempo de salto fueron desarrolladas en [7]. La pérdida de memoria asintótica fue demostrada originalmente en [4], apoyándose en algunos resultados de la teoría de Freidlin y Wentzell que figuran en [3] y que mostramos aquí.

6.2. Construcción de un dominio auxiliar

El primer paso en la demostración será construir un dominio acotado G que contenga a los puntos críticos de U y que sea invariante bajo la dinámica determinística. Contando con un tal dominio, podremos modificar nuestro problema ligeramente, concentrándonos solamente en lo que ocurre dentro de G.

Tomemos $\theta > U(z)$ y definamos nuestro dominio acotado G como

$$G := \{x \in \mathbb{R}^d : U(x) < \theta\}.$$

Notemos que G verifica:

1. p, q y z pertenecen a G;
2. G tiene frontera ∂G de clase C^2;

3. $\langle b(x), \eta(x)\rangle < 0$ para todo $x \in \partial G$, donde $\eta(x)$ denota la normal exterior unitaria a ∂G en x;

4. $\min_{x\in\partial G} U(x) > U(z)$.

La tercera propiedad implica que $\overline{G}$ es invariante para la dinámica determinística, i.e., si $x \in \overline{G}$ entonces $X_t^{x,0} \in G$ para todo $t > 0$.

Bajo las hipótesis Ψ, la variedad $(d-1)$-dimensional $\mathcal{W}_z^s$ separa D_p de D_q. Así, $\mathcal{W}_z^s \cap G$ divide a G en dos subdominios, $G \cap D_p$ y $G \cap D_q$. Nuestro problema se reducirá a estudiar como el proceso $X^{x,\varepsilon}$ escapa de uno de estos dominios al otro, una vez que mostremos que esto sucede, con probabilidad alta, antes de abandonar G. Para estudiar el problema del escape de un dominio es conveniente que no existan puntos críticos en la frontera del mismo. Por esta razón, incluiremos un pequeño subdominio G_z conteniendo a z, tal como se muestra en la figura, que verifique $G_z \cap \big(B_c(p) \cup B_c(q)\big) = \emptyset$. Llamaremos ∂^p y ∂^q a las porciones de la frontera G_z contenidas en D_p y D_q respectivamente, que *no* son parte de ∂G. Así, podemos descomponer a G como la unión disjunta

$$G = G_p \cup \partial^p \cup G_z \cup \partial^q \cup G_q,$$

donde G_p es un subdominio de G tal que $\overline{B}_c(p) \subseteq G_p \subseteq G \cap D_p$ y, análogamente, G_q es un subdominio de G tal que $\overline{B}_c(q) \subseteq G_q \subseteq G \cap D_q$. Nuevamente, referimos a la figura, dibujada en el caso 2-dimensional, para un esquema más claro de la presente situación. Por último, definimos el subdominio G' de G, dado por

$$G' = G_p \cup \partial^p \cup \partial^q \cup G_z.$$

Notemos que, por construcción de G, se tiene

$$\min_{y\in\partial G'\setminus\partial^q} U(y) = \theta > U(z).$$

6.3. Cota inferior

Mostraremos aquí la cota inferior para el tiempo de salto, es decir

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_x\Big(\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) = 0 \tag{6.7}$$

para cualquier $x \in D_p$ y $\delta > 0$. Haremos la prueba en tres pasos:

(I) Mostraremos la validez de (6.7) en un sentido 'promediado'. Es decir, si el punto inicial x es aleatorio y dado por la medida invariante μ_ε, condicionada a estar en una bola $B = B_\rho(p)$, para ρ suficientemente chico.

(II) Verificaremos (6.7) para cualquier $x \in B_{\rho_1}(p)$, con ρ_1 adecuado. La convergencia será uniforme sobre dicha bola.

(III) Concluiremos (6.7) para todo punto inicial $x \in D_p$.

Aclaración. Dado un conjunto medible $A \subseteq \mathbb{R}^d$ para el cual $\mu_\varepsilon(A) > 0$, con μ_ε la medida invariante para el proceso antes definida, denotamos por $\mu_{\varepsilon,\,A}$ a la medida condicional dada por

$$d\mu_{\varepsilon,\,A} := \frac{1}{\mu_\varepsilon(A)}\mathbf{1}_A d\mu_\varepsilon.$$

6.3.1. Paso I

Como dijimos arriba, buscamos probar (6.7) pero para el proceso $X^{\mu_{\varepsilon,\,B_\rho(p)},\varepsilon}$ solución de (5.1) con distribución inicial $\mu_{\varepsilon,\,B_\rho(p)}$. Es decir,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_{\mu_{\varepsilon,\,B_\rho(p)}}\left(\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\right) = 0.$$

Para ello, dado $\delta > 0$ podemos tomar $\rho > 0$, $\vartheta' > 0$ tales que para cualquier T y ε positivos, vale:

$$\begin{aligned}
P_{\mu_{\varepsilon,\,B_\rho(p)}}(X_T^\varepsilon \in \partial(D_p \cap G)_{(\vartheta')}) &= \int P_x(X_T^\varepsilon \in \partial(D_p \cap G)_{(\vartheta')})\, d\mu_{\varepsilon,\,B_\rho(p)} \\
&= \int \frac{P_x(X_T^\varepsilon \in \partial(D_p \cap G)_{(\vartheta')})}{\mu_\varepsilon(B_\rho(p))}\, \mathbf{1}_{B_\rho(p)}(x)\, d\mu_\varepsilon \\
&\le \frac{P_{\mu_\varepsilon}(X_T^\varepsilon \in \partial(D_p \cap G)_{(\vartheta')})}{\mu_\varepsilon(B_\rho(p))} = \frac{\mu_\varepsilon(\partial(D_p \cap G)_{(\vartheta')})}{\mu_\varepsilon(B_\rho(p))} \\
&\le \frac{e^{-\frac{2}{\varepsilon^2}\inf_{x\in\partial(D_p\cap G)_{(\vartheta')}} U(x)}\, \mathcal{L}(\partial(D_p \cap G)_{(\vartheta')})}{e^{-\frac{2}{\varepsilon^2}\sup_{x\in B_\rho(p)} U(x)}\, \mathcal{L}(B_\rho(p))} \\
&\le \frac{\mathcal{L}(\partial(D_p \cap G)_{(\vartheta')})}{\mathcal{L}(B_\rho(p))}\, e^{-\frac{(\Delta-\frac{\delta}{3})}{\varepsilon^2}} \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

donde $A_{(r)} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x-y| < r$ para algún $y \in A\}$ es el r-entorno de A y $\mathcal{L}$ denota la medida de Lebesgue d-dimensional. Notemos que la expresión integral en la primera igualdad vale por la observación (3.6.5). También hemos usado en la última desigualdad la continuidad de U y el hecho de que $\min_{y\in\partial(D_p\cap G)} U(y) = U(z)$, que se deduce de la construcción de G, ya que $U(y) \ge U(z)$ para $y \in \mathcal{W}_z^s$.

Si llamamos

$$T^- = e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}},$$

sean $N = [\frac{T^-}{\varepsilon^3}]$ la parte entera de $\frac{T^-}{\varepsilon^3}$, $t_i = i\varepsilon^3$, $0 \le i \le N$, y $t_{N+1} = T^-$. Por la independencia de las coordenadas de un movimiento Browniano d-dimensional, la independencia de $\left(|W_t - W_{t_i}|\right)_{t_i\le t\le t_{i+1}}$ y $\left(|W_t - W_{t_j}|\right)_{t_j\le t\le t_{j+1}}$ para $i \ne j$ y el Principio de Reflexión, tenemos

$$P\Big(\max_{0\le i\le N}\sup_{t_i\le t\le t_{i+1}} |W_t - W_{t_i}| \ge 1\Big) \le 2d(N+1)e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon^3}} \qquad (6.9)$$

para alguna constante positiva α.

Observemos que si $t_i \leq t \leq t_{i+1}$,

$$|X_t^{x,\,\varepsilon} - X_{t_i}^{x,\,\varepsilon}| \leq \left| \int_{t_i}^t b(X_s^{x,\,\varepsilon}) ds \right| + \varepsilon |W_t - W_{t_i}|$$

$$\leq \int_{t_i}^t |b(X_s^{x,\,\varepsilon}) - b(X_{t_i}^{x,\,\varepsilon})| ds + |(t-t_i) b(X_{t_i}^{x,\,\varepsilon})| + \varepsilon |W_t - W_{t_i}|.$$

Si llamamos Λ al complemento del evento en (6.9), usando que b es Lipschitz y la desigualdad de Gronwall, vemos que en el evento $\{X_{t_i}^{x,\,\varepsilon} \in \overline{D_p \cap G}\} \cap \Lambda$ se tiene para $t_i \leq t \leq t_{i+1}$

$$|X_t^{x,\,\varepsilon} - X_{t_i}^{x,\,\varepsilon}| \leq e^{\kappa |t-t_i|} (\varepsilon + \varepsilon^3 \sup_{x \in \overline{D_p \cap G}} |b(x)|). \tag{6.10}$$

Ahora, si $x \in B_\rho(p)$ entonces

$$P_x(\{\tau_\varepsilon < T^-\}) \leq P_x(\Lambda^c) + P_x(\{\tau_\varepsilon < T^-\} \cap \Lambda)$$

$$\leq 2d(N+1) e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon^3}} + P_x(\{\tau_\varepsilon < T^-\} \cap \Lambda).$$

Con respecto al segundo término de la derecha, vale que

$$\{\tau_\varepsilon < T^-\} \cap \Lambda \subseteq \bigcup_{i=1}^N \{X_{t_i}^{x,\,\varepsilon} \in \partial(D_p \cap G)_{(\vartheta')}\}.$$

En efecto, $\tau_\varepsilon < T^-$ implica, por continuidad de las trayectorias, que $\tau_\varepsilon(\partial(D_p \cap G)) < T^-$. Si $t_i \leq \tau_\varepsilon(\partial(D_p \cap G)) < t_{i+1}$, la acotación dada en (6.10) muestra que

$$|X_{t_i}^{x,\,\varepsilon} - X_{\tau_\varepsilon(\partial(D_p \cap G))}^{x,\,\varepsilon}| < \vartheta'$$

si ε es lo suficientemente chico. Notemos que pudimos usar (6.10) pues $t_i \leq \tau_\varepsilon(\partial(D_p \cap G))$ implica que $X_{t_i}^{x,\,\varepsilon} \in \overline{D_p \cap G}$ y consideramos únicamente las trayectorias en Λ, en donde la oscilación del Browniano se encuentra controlada.

Esta última desigualdad muestra que $X_{t_i}^{x,\,\varepsilon} \in \partial(D_p \cap G)_{(\vartheta')}$ para algún $i = 0, \ldots, N$. Observando que $X_{t_0}^{x,\,\varepsilon} = X_0^{x,\,\varepsilon} = x \notin \partial(D_p \cap G)_{(\vartheta')}$, vemos que debe ser $i \neq 0$ y, así, concluimos la inclusión de conjuntos de arriba. Resumiendo, para $x \in B_\rho(p)$ tenemos

$$P_x(\, \tau_\varepsilon < T^-) \leq 2d(N+1) e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon^3}} + \sum_{i=1}^N P_x(X_{t_i}^{x,\,\varepsilon} \in \partial(D_p \cap G)_{(\vartheta')}). \tag{6.11}$$

Integrando respecto de la medida $\mu_{\varepsilon,\, B_\rho(p)}$ obtenemos

$$P_{\mu_{\varepsilon,\, B_\rho(p)}}(\, \tau_\varepsilon < T^-) \leq 2d(N+1) e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon^3}} + \sum_{i=1}^N P_{\mu_{\varepsilon,\, B_\rho(p)}}(X_{t_i}^{x,\,\varepsilon} \in \partial(D_p \cap G)_{(\vartheta')}), \tag{6.12}$$

si $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente chico. Teniendo en cuenta la acotación hecha en (6.8), resulta

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_{\mu_{\varepsilon,\,B_\rho(p)}}\Big(\,\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) = 0,$$

como queríamos ver. Esto concluye el primer paso.

6.3.2. Paso II

Ahora verificaremos que la distribución inicial $\mu_{\varepsilon,\,B_\rho(p)}$ puede ser sustituida por cualquier condición inicial determinística $x \in \mathbb{R}^d$ suficientemente cerca de p. Concretamente, lo que buscamos probar es que existe $\rho_1 > 0$, tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in B_{\rho_1}(p)} P_x(\,\tau_\varepsilon < T^-\,) = 0.$$

Esto será consecuencia del paso anterior y de los siguientes dos lemas.

Lema 6.3.1. *Dado $\rho > 0$ tal que $\overline{B}_\rho(p) \subseteq D_p$, existe $0 < \rho_1 < \rho$ y una constante positiva c_1 tales que para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente chico vale*

$$\sup_{y\in B_{\rho_1}(p)} P_y\big(\,\tau_\varepsilon\big(S_\rho(p)\big) \le e^{\frac{c_1}{\varepsilon^2}}\big) \le e^{-\frac{c_1}{\varepsilon^2}}, \tag{6.13}$$

donde $S_\rho(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| = \rho\}$.

Demostración. Dado $\rho > 0$, la estabilidad asintótica de p nos permite tomar $0 < \rho_1 < \frac{\rho}{2}$ tal que para todo $y \in B_{\rho_1}(p)$, $\lim_{t\to+\infty} X_t^{y,\,0} = p$ y la solución nunca escapa $B_{\frac{\rho}{2}}(p)$. De la misma forma, podemos tomar $0 < \rho_2 < \frac{\rho_1}{2}$ tal que las órbitas determinísticas comenzando en $B_{\rho_2}(p)$ nunca dejan $B_{\frac{\rho_1}{2}}(p)$. Ahora, tomamos t_1 finito[1] tal que, para cualquier $y \in B_{\rho_1}(p)$, $X^{y,0}$ alcanza $B_{\rho_2}(p)$ durante $[\,0, t_1\,]$; en particular, $X_{t_1}^{y,\,0} \in B_{\frac{\rho_1}{2}}(p)$. Para $t_i = it_1, i \in \mathbb{N}$, decimos que el intervalo $[\,t_i, t_{i+1}\,]$ es *regular* si $X_t^{y,\,\varepsilon} \in B_{\rho_1}(p)$ para $t = t_i, t_{i+1}$ y la trayectoria no deja $B_\rho(p)$ durante $[t_i, t_{i+1}]$. Entonces, (4.11) implica que

$$\inf_{y\in B_{\rho_1}(p)} P_y(\,[\,0, t_1\,]\text{ es regular}) \ge \inf_{y\in B_{\rho_1}(p)} P_y(\varrho_{t_1}(X^{y,\,\varepsilon}, X^{y,\,0}) \le \frac{r_1}{2}) \ge 1 - e^{-\frac{C}{\varepsilon^2}},$$

para alguna constante C apropiada (dependiendo de ρ_1, t_1, κ y d) y $\varepsilon > 0$ chico.

[1] La existencia de un tal t_1 finito se debe a que la continuidad de la aplicación $(x,t) \mapsto X_t^{x,\,0}$ implica la semicontinuidad superior de $y \mapsto \inf\{t \ge 0 : X_t^{y,\,0} \in B_{\rho_2}(p)\}$, para $y \in B_{\rho_1}(p)$. Más detalles en el paso III.

Si $N = [e^{\frac{C}{2\varepsilon^2}}]$, para $y \in B_{\rho_1}(p)$ tenemos

$$P_y\Big(\bigcap_{i=0}^{N-1}\{[\,t_i, t_{i+1}]\,\text{es regular}\}\Big) = \mathbb{E}_y\bigg(\mathbb{E}_y\Big(\prod_{i=0}^{N-1}\mathbf{1}_{\{\,[\,t_i,t_{i+1}]\text{ es regular}\}}\Big|\mathcal{F}_{N-1})\Big)\bigg)$$

$$= \mathbb{E}_y\bigg(\prod_{i=0}^{N-2}\mathbf{1}_{\{\,[\,t_i,t_{i+1}]\text{ es regular}\}}\,\mathbb{E}_y\Big(\mathbf{1}_{\{\,[\,t_{N-1},t_N]\text{ es regular}\}}\Big|\mathcal{F}_{N-1}\Big)\bigg)$$

$$= \mathbb{E}_y\bigg(\prod_{i=0}^{N-2}\mathbf{1}_{\{\,[\,t_i,t_{i+1}]\text{ es regular}\}}\,P_{X^{\varepsilon}_{N-1}}(\,[\,0,t_1]\text{ es regular})\bigg)$$

$$\geq P_y\Big(\bigcap_{i=0}^{N-2}\{[\,t_i, t_{i+1}]\,\text{es regular}\}\Big)\inf_{y\in B_{\rho_1}(p)} P_y(\,[\,0,t_1\,]\text{ es regular})$$

$$\geq P_y\Big(\bigcap_{i=0}^{N-2}\{[\,t_i, t_{i+1}]\,\text{es regular}\}\Big)(1-e^{-\frac{C}{\varepsilon^2}}),$$

donde en la primera desigualdad utilizamos que $X^{y,\varepsilon}_{N-1} \in B_{\rho_1}(p)$ pues $[\,t_{N-2}, t_{N-1}\,]$ es regular. Como la acotación es uniforme en $y \in B_{\rho_1}(p)$, razonando inductivamente obtenemos

$$\inf_{y\in B_{\rho_1}(p)} P_y\Big(\bigcap_{i=0}^{N-1}\{[\,t_i, t_{i+1}]\,\text{es regular}\}\Big) \geq (1-e^{-\frac{C}{\varepsilon^2}})^N. \tag{6.14}$$

Además, notemos que para $c_1 < \frac{C}{2}$ se tiene

$$(1-e^{-\frac{C}{\varepsilon^2}})^N \geq 1-e^{-\frac{c_1}{\varepsilon^2}}$$

si $\varepsilon > 0$ es suficientemente chico. En efecto, lo anterior es equivalente a mostrar que

$$(1-e^{-\frac{C}{\varepsilon^2}})^{N^2} \geq (1-e^{-\frac{c_1}{\varepsilon^2}})^N.$$

Pero un cálculo directo muestra que el primer término de la desigualdad tiende a e^{-1} con $\varepsilon \to 0$ y el segundo a cero, con lo cual la igualdad se verifica para $\varepsilon > 0$ suficientemente chico. Por último, observemos que para $y \in B_{\rho_1}(p)$

$$P_y\Big(\bigcap_{i=0}^{N-1}\{[\,t_i, t_{i+1}]\,\text{es regular}\}\Big) \leq P_y\big(\,\tau_\varepsilon\big(S_\rho(p)\big) > N\big) \leq P_y\big(\,\tau_\varepsilon\big(S_\rho(p)\big) > e^{\frac{c_1}{\varepsilon^2}}\big),$$

donde la última igualdad vale para $\varepsilon > 0$ pequeño. De aquí se sigue el resultado. □

Lema 6.3.2. *Sea $\delta > 0$ y $T^- := e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}$. Entonces existe $\rho_1 > 0$ tal que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x,\,x'\in B_{\rho_1}(p)} |P_x(\,\tau_\varepsilon < T^-) - P_{x'}(\,\tau_\varepsilon < T^-)| = 0. \tag{6.15}$$

Demostración. Usaremos aquí el método de acoplamiento de Lindvall-Rogers, que detallamos al comienzo de este capítulo.

Por la Proposición 5.2.3, sabemos que existe $\rho > 0$ tal que $\overline{B}_\rho(p) \subseteq D_p$ y la condición en (5.5) vale para todo $u \neq v \in B_\rho(p)$. Por el lema anterior podemos tomar c_1 y $\rho_1 < \rho$ positivos tales que

$$\sup_{y \in B_{\rho_1}(p)} P_y(\tau_\varepsilon(S_\rho(p)) \leq e^{\frac{c_1}{\varepsilon^2}}) \leq e^{-\frac{c_1}{\varepsilon^2}}$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente chico. Con ρ, ρ_1 tales, sean ahora $x, x' \in B_{\rho_1}(p)$. Acoplamos, según el método de Lindvall-Rogers, dos soluciones de (5.1) $X^{x,\varepsilon}$, $X^{x',\varepsilon}$ comenzando en x y x', respectivamente. Para el cálculo que sigue, trabajaremos estos dos procesos definidos en un mismo espacio de probabilidad.

$$\begin{aligned}
|P_x(\tau_\varepsilon < T^-) - P_{x'}(\tau_\varepsilon < T^-)| &= |\,\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^x < T^-\}}) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^{x'} < T^-\}})\,| \\
&\leq \mathbb{E}(\,|\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^x < T^-\}} - \mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^{x'} < T^-\}}\,|\,) \\
&\leq \mathbb{E}(\,\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^x < T_{x,\,x'}\}}) + \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^{x'} < T_{x,\,x'}\}}) \\
&= P_x(\tau_\varepsilon < T_{x,\,x'}) + P_{x'}(\tau_\varepsilon < T_{x,\,x'})
\end{aligned}$$

Ahora, si notamos $\mathcal{R} := \text{mín}\left\{\tau_\varepsilon^x(S_\rho(p))\,,\, \tau_\varepsilon^{x'}(S_\rho(p))\right\}$, entonces

$$\begin{aligned}
P_x(\tau_\varepsilon < T_{x,x'}) &\leq P\Big(\mathcal{R} \leq e^{\frac{c_1}{\varepsilon^2}}\Big) + P\Big(\tau_\varepsilon^x < T_{x,\,x'}\,,\, \mathcal{R} > e^{\frac{c_1}{\varepsilon^2}}\Big) \\
&\leq 2e^{-\frac{c_1}{\varepsilon^2}} + P\Big(\tau_\varepsilon < T_{x,\,x'}\,,\, \mathcal{R} > e^{\frac{c_1}{\varepsilon^2}}\Big)
\end{aligned}$$

Observemos que para ε suficientemente chico vale

$$\Big\{\tau_\varepsilon < T_{x,\,x'}\,,\, \mathcal{R} > e^{\frac{c_1}{\varepsilon^2}}\Big\} \subseteq \Big\{S_{x,\,x'}^\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon^3}\Big\}$$

donde $S_{x,\,x'}^\varepsilon = \text{ínf}\{t > 0 : |x - x'| + 2\varepsilon B_t = 0\}$ para B un movimiento Browniano 1-dimensional. En efecto, si ε es tal que $\frac{1}{\varepsilon^3} < e^{\frac{c_1}{\varepsilon^2}}$, nuestros procesos permanecen en $B_\rho(p)$, en donde vale la condición dada en (5.5), durante el intervalo de tiempo $[0, \frac{1}{\varepsilon^3}]$. Hemos visto, entonces, que en $[0, \frac{1}{\varepsilon^3}]$ la distancia entre ambos procesos puede acotarse superiormente por $|x - x'| + 2\varepsilon B_t$. Por otro lado, que $T_{x,\,x'}$ sea mayor que τ_ε implica, por continuidad de las trayectorias, que es mayor que $e^{\frac{c_1}{\varepsilon^2}}$ y, en particular, que $\frac{1}{\varepsilon^3}$. Se sigue que $S_{x,\,x'}^\varepsilon$ también debe serlo. Con esto,

$$\begin{aligned}
P_x(\tau_\varepsilon < T_{x,x'}) &\leq 2e^{-\frac{c_1}{\varepsilon^2}} + P\Big(S_{x,\,x'}^\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon^3}\Big) \\
&\leq 2e^{-\frac{c_1}{\varepsilon^2}} + \frac{|x - x'|}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\varepsilon} \\
&\leq 2e^{-\frac{c_1}{\varepsilon^2}} + \frac{2\rho_1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Para $P_{x'}(\tau_\varepsilon < T_{x,\,x'})$ el procedimiento es completamente análogo. Como x y x' eran puntos arbitrarios en $B_{\rho_1}(p)$, con lo anterior se obtiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x,\,x'\in B_{\rho_1}(p)} |P_x(\,\tau_\varepsilon < T^-) - P_{x'}(\,\tau_\varepsilon < T^-)| = 0,$$

como queríamos ver. $\square$

Para concluir el Paso II, tomemos ρ_1 dado por el lema anterior suficientemente chico como para garantizar, por el Paso I, que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_{\mu_{\varepsilon,\,B_{\rho_1}(p)}}\Big(\,\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) = 0.$$

Por un lado, tenemos por definición de $P_{\mu_{\varepsilon,\,B_{\rho_1}(p)}}$ que

$$\inf_{x\in B_{\rho_1}(p)} P_x\Big(\,\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) \le P_{\mu_{\varepsilon,\,B_{\rho_1}(p)}}\Big(\,\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big).$$

Por otro lado, dado $\delta > 0$ existe x' que cumple

$$P_{x'}\Big(\,\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) \le \inf_{x\in B_{\rho_1}(p)} P_x\Big(\,\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) + \delta.$$

Luego, se sigue que para todo $x \in B_{\rho_1}(p)$ vale

$$P_x\Big(\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) \le \sup_{x,\,x'\in B_{\rho_1}(p)} \left|P_x\Big(\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) - P_{x'}\Big(\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big)\right| + P_{\mu_{\varepsilon,\,B_{\rho_1}(p)}}\Big(\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) + \delta.$$

De aquí, por el lema previo y la elección de ρ_1, deducimos

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in B_{\rho_1}(p)} P_x\Big(\,\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) \le \delta$$

para $\delta > 0$ arbitrario, lo cual prueba el resultado.

6.3.3. Paso III

Por último, vemos que podemos generalizar el resultado del Paso II para cualquier punto de D_p, tal como lo enuncia el siguiente teorema.

Teorema 6.3.3. *Dado $\delta > 0$, para cualquier $x \in D_p$ se tiene*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_x\Big(\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) = 0.$$

Más aún, la convergencia es uniforme sobre compactos de D_p.

Demostración. Por el paso anterior podemos tomar $\rho_1 > 0$ tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in \overline{B}_{\rho_1}(p)} P_x\Big(\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}} \Big) = 0.$$

De acuerdo a las hipótesis Ψ, para cada $x \in D_p$ el sistema determinístico $X^{x,0}$ visita $B_{\frac{\rho_1}{2}}(p)$ en un tiempo finito T_x, manteniéndose a una distancia positiva d_x de ∂D_p durante el intervalo $[\,0, T_x\,]$. Luego, podemos definir las aplicaciones

$$\begin{aligned} T : D_p &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto T_x := \inf\{t \geq 0 : X_t^{x,0} \in B_{\frac{\rho_1}{2}}(p)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d : D_p &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ x &\longmapsto d_x := \inf\nolimits_{0\leq t\leq T_x} d\big(X_t^{x,0}, \partial D_p\big). \end{aligned}$$

Con esto, si consideramos el evento

$$\Theta_x^\varepsilon = \{X_t^{x,\varepsilon} \in D_p \quad \forall\ 0 \leq t \leq T_x\ ,\ \tau_\varepsilon^x(\overline{B}_{\rho_1}(p)) \leq T_x\},$$

usando la estimación (4.11) tenemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_x(\Theta^{\,\varepsilon}) = 1.$$

Así, notando $T^- :=\ e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}$, obtenemos

$$P_x(\,\tau_\varepsilon < T^-) \leq P_x(\,\Theta^{\,\varepsilon} \cap \{\tau_\varepsilon < T^-\}) + P_x(\,(\Theta^{\,\varepsilon})^c\,).$$

Trabajaremos, ahora, con el primer sumando del miembro derecho de la desigualdad.

Definimos el tiempo de parada $\tau_\varepsilon^* := \begin{cases} \tau_\varepsilon(\overline{B}_{\rho_1}(p)) & \text{si } \tau_\varepsilon(\overline{B}_{\rho_1}(p)) <\ \tau_\varepsilon \\ \\ +\infty & \text{en caso contrario} \end{cases}$

Se tiene

$$\begin{aligned} P_x(\,\Theta^{\,\varepsilon} \cap \{\tau_\varepsilon < T^-\}) &\leq P_x(\,\tau_\varepsilon(\overline{B}_{\rho_1}(p)) < \tau_\varepsilon < T^-) \\ &= \mathbb{E}_x(\,\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon < T^-\}}\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^* < +\infty\}}) \\ &\leq \mathbb{E}_x(\,\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon < T^- +\, \tau_\varepsilon^*\}}\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^* < +\infty\}}) \\ &= \mathbb{E}_x(\,\mathbb{E}_x(\,\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon < T^- + \tau_\varepsilon^*\}}\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^* < +\infty\}} \mid \mathcal{F}_{\tau_\varepsilon^*})), \end{aligned}$$

donde todas las indicadoras se encuentran evaluadas en el proceso $X^{x,\varepsilon}$.

Si $f := \mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon < T^-\}}$, podemos escribir

$$\mathbb{E}_x(\,\mathbb{E}_x(\,\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon < T^- + \tau_\varepsilon^*\}}\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^* < +\infty\}} \mid \mathcal{F}_{\tau_\varepsilon^*})) = \mathbb{E}_x(\,\mathbb{E}_x(\,(f \circ \theta_{\tau_\varepsilon^*})\,\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^* < +\infty\}} \mid \mathcal{F}_{\tau_\varepsilon^*}))$$

donde, $\theta_{\tau_\varepsilon^*}$ es el operador shift definido por

$$X^{x,\,\varepsilon}_{\tau_\varepsilon^*+\,\cdot} = \theta_{\tau_\varepsilon^*}(X^{x,\,\varepsilon}_{\cdot}).$$

Por la propiedad fuerte de Markov

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x(\,\mathbb{E}_x(\,(f\circ\theta_{\tau_\varepsilon^*})\,\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^*<+\infty\}}\mid \mathcal{F}_{\tau_\varepsilon^*})) &= \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^*<+\infty\}}\mathbb{E}_{X^{x,\,\varepsilon}_{\tau_\varepsilon^*}}(\,\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon< T^-\}}))\\
&= \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^*<+\infty\}}P_{X^{x,\,\varepsilon}_{\tau_\varepsilon^*}}(\,\tau_\varepsilon<\,T^-))\\
&\le \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^*<+\infty\}}\sup_{y\in\overline{B}_{\rho_1}(p)}P_y(\,\tau_\varepsilon<\,T^-))\\
&\le \sup_{y\in\overline{B}_{\rho_1}(p)}P_y(\,\tau_\varepsilon<\,T^-)
\end{aligned}$$

notando que, en la anteúltima desigualdad, usamos que $X^{x,\,\varepsilon}_{\tau_\varepsilon^*}\in\overline{B}_{\rho_1}(p)$ si τ_ε^* es finito. Entonces, se obtiene

$$P_x(\tau_\varepsilon<T^-)\le \sup_{y\in\overline{B}_{\rho_1}(p)}P_y(\tau_\varepsilon<T^-)+P_x((\Theta^{\,\varepsilon})^c)$$

Como ambos sumandos del lado derecho de la desigualdad tienden a cero cuando ε tiende a cero, queda demostrado el resultado.

Para probar la convergencia uniforme sobre compactos de D_p, notemos que la continuidad del flujo determinístico $(x,t)\mapsto X_t^{x,\,0}$ implica que la aplicación T es semicontinua superiormente y que d es semicontinua inferiormente. Luego, dado un compacto $\mathcal{K}\subseteq D_p$, existe un tiempo finito $T_{\mathcal{K}}:=\sup_{x\in\mathcal{K}}T_x$ tal que, para todo $x\in\mathcal{K}$, el sistema determinístico $X^{x,\,\varepsilon}$ visita $B_{\frac{\rho_1}{2}(p)}$ antes de tiempo $T_{\mathcal{K}}$ y se mantiene a una distancia positiva $d_{\mathcal{K}}=\operatorname{ínf}_{x\in\mathcal{K}}d_x$ de ∂D_p durante el intervalo $[\,0,T_{\mathcal{K}}\,]$. Así, redefiniendo

$$\Theta_x^{\,\varepsilon}=\{X_t^{x,\,\varepsilon}\in D_p\quad\forall\ 0\le t\le T_{\mathcal{K}}\ \ ,\ \ \tau_\varepsilon^x(\overline{B}_\rho(p))\le T_{\mathcal{K}}\},$$

y usando nuevamente la estimación (4.11), que es uniforme en x, tenemos que

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{x\in\mathcal{K}}P_x(\Theta^{\,\varepsilon})=1.$$

El resto de la demostración se sigue igual. □

6.4. Cota superior

Nos concentramos ahora en probar la cota superior para el tiempo de parada τ_ε. Esto es, para cada $x\in D_p$ y $\delta>0$,

$$\lim_{\varepsilon\to0}P_x\Big(\tau_\varepsilon>e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}\Big)=0.$$

Para la demostración, utilizaremos el hecho de que, dados $T > 0$ y $x \in \mathbb{R}^d$, las medidas inducidas en $C([0,T],\mathbb{R}^d)$ por la familia de soluciones $(X^{x,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ cumplen un Principio de Grandes Desvíos. Necesitaremos de esto para probar el siguiente lema.

Lema 6.4.1. *Dado $\delta > 0$, se tiene*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in G'} P_x\Big(\tau_\varepsilon(\partial G') > e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}\Big) = 0. \tag{6.16}$$

Demostración. Haremos la demostración del lema en dos pasos.

1. Veremos primero que, dado $\delta > 0$, existe un tiempo T tal que para cada $x \in G'$, se tiene un conjunto de trayectorias $\mathcal{E}_{x,T}$ que verifica las siguientes condiciones:

1. $\varphi \in C([0,T],\mathbb{R}^d)$, $\forall \varphi \in \mathcal{E}_{x,T}$
2. Toda trayectoria de $\mathcal{E}_{x,T}$ se escapa de G' antes del tiempo T.
3. Para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente chico vale $\inf_{x\in G'} P(X^{x,\varepsilon} \in \mathcal{E}_{x,T}) \geq \alpha_\varepsilon$, donde $\alpha_\varepsilon := T/e^{\frac{\Delta+\frac{\delta}{2}}{\varepsilon^2}}$.

Aquí es donde entrará en juego la teoría de grandes desvíos. La idea será mostrar que para cada $x \in G'$ existe una trayectoria φ^x que comienza en x, con función de tasa menor a $\Delta + \frac{\delta}{3}$ y tal que no solamente φ^x se escapa de G' antes que T, sino que también cualquier trayectoria lo suficientemente cercana en norma infinito hará lo mismo.

Construiremos φ^x explícitamente para cada x. Nuestra curva φ^x estará partida en tramos de tres tipos:

- φ^x sigue la trayectoria dada por el sistema determinístico
- φ^x sigue el reverso la trayectoria dictada por el determinístico
- φ^x es una interpolación lineal entre dos puntos cercanos de G'.

En vista de este último punto, debemos garantizar que una interpolación lineal entre dos puntos suficientemente cercanos no hace un aporte significativo a la función de tasa de φ^x. En efecto, sea s una interpolación lineal a velocidad uno entre dos puntos de G', x_0 y x_1; es decir, $s : [0, |x_1 - x_0|] \longmapsto \mathbb{R}^d$ definida por

$$s(t) = x_0 + t\frac{(x_1 - x_0)}{|x_1 - x_0|}. \tag{6.17}$$

Como G es un dominio acotado, existe $R > 0$ tal que la imagen de cualquier interpolación lineal s entre puntos de G está contenida en una bola de radio R, que notaremos

B_R. Así,

$$\int_0^{|x_1-x_0|} |\dot{s}(t) - b(s(t))|^2\, dt \leq C \int_0^{|x_1-x_0|} \left(|\dot{s}(t)|^2 + |b(s(t))|^2\right) dt$$

$$\leq C \int_0^{|x_1-x_0|} (1 + \sup_{B_R} |b|^2)\, dt$$

$$\leq \tilde{C}|x_1 - x_0|$$

donde $\tilde{C}$ es una constante que sólo depende de b. Teniendo en cuenta esto, tomemos $r > 0$ lo suficientemente chico como para garantizar que la función de tasa de una interpolación lineal a velocidad uno entre dos puntos x_0, x_1 a distancia menor que $2r$, no sea superior a $\frac{\delta}{9}$. Podemos suponer, además, que $\bar{B}_r(z) \subseteq G_z$ y que $d(q, G') > r$. Definimos también el conjunto,

$$G(z,r) = \{x \in G_z : d(x, \mathcal{W}_z^s) \leq r\}. \tag{6.18}$$

La trayectoria φ^x varía según dónde se encuentre x. La construcción en los distintos casos se realiza de la siguiente manera:

- $x \in G(z,r)$
  1. Elegimos un punto $x_1 \in \mathcal{W}_z^s$ a distancia mínima de x e interpolamos x con x_1.
  2. Desde x_1, seguimos el flujo determinístico hasta llegar a un $x_2 \in \overline{B}_r(z)$.
  3. Una vez en x_2, interpolamos a un $x_3 \in \mathcal{W}_z^u \cap D_q$ a distancia r de z.
  4. Seguimos, nuevamente, el flujo determinístico desde x_3 hasta llegar a un punto $x_4 \in G_q$ a una distancia al menos r de G'.
- Si $x \in D_q \cap \big(G' \setminus G(z,r)\big)$, simplemente seguimos la trayectoria determinística hasta llegar a un punto x_4 como el descripto arriba.
- $x \in D_p \cap \big(G' \setminus G(z,r)\big)$
  1. Seguimos el flujo determinístico hasta alcanzar $\overline{B}_r(p)$.
  2. Desde $\overline{B}_r(p)$, interpolamos a un punto $x_1' \in S_r(p) \cap \mathcal{W}_z^u$.
  3. Una vez sobre la variedad inestable $\mathcal{W}_z^u$, podemos ir con el reverso de la trayectoria determinística hasta un $x_2' \in D_p \cap S_r(z)$.
  4. Continuamos como en el primer caso.

Verifiquemos que la φ^x así construida cumple lo deseado.

Propiedades de φ^x

- *φ^x es una trayectoria absolutamente continua que comienza en x.*

  Esto es consecuencia directa de la construcción, pues cada en cada tramo la trayectoria es absolutamente continua.

- *El tiempo total t_x de la trayectoria φ^x está uniformemente acotado en x.*

  Esto se debe a que los tramos en los que la trayectoria sigue el flujo determinístico (o su reverso) transcurren en un tiempo acotado, pues ésta se mantiene a una distancia positiva de los equilibrios. También se debe a que las interpolaciones lineales duran un tiempo a lo sumo $2r$ cada una.

- *φ^x tiene función de tasa menor a $\Delta + \frac{\delta}{3}$.*

  Además, su función de tasa puede calcularse como la suma de las funciones de tasa de cada tramo. Así, ya hemos visto que cada interpolación lineal tiene función de tasa menor a $\frac{\delta}{9}$ y, como en ningún caso el número de interpolaciones supera a tres, tenemos que el aporte que éstas hacen a la función de tasa de φ^x es menor que $\frac{\delta}{3}$. Por otro lado, los tramos en donde la trayectoria sigue el flujo determinístico tienen función de tasa nula (aquí $\dot{\varphi}^x = b(\varphi^x)$). Por último, si la trayectoria sigue el reverso del flujo determinístico, es decir $\dot{\varphi}^x = -b(\varphi^x)$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} |\dot{\varphi}^x(t) - b(\varphi^x(t))|^2\, dt &= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} |-2b(\varphi^x(t))|^2\, dt \\
&= 2\int_{t_1}^{t_2} |b(\varphi^x(t))|^2\, dt \\
&= 2\int_{t_1}^{t_2} \frac{dU(\varphi^x(t))}{dt}\, dt \\
&= 2(U(\varphi^x(t_2)) - U(\varphi^x(t_1))) \\
&= 2(U(x'_2) - U(x'_1))
\end{aligned}
$$

  donde x'_2, x'_1 son los puntos correspondientes en la construcción anterior y t_2, t_1 son tales que $\varphi^x(t_i) = x'_i$. Recordando que $x'_2, x'_1 \in D_p \cap \mathcal{W}^u_z$, se obtiene que $2(U(x'_2) - U(x'_1)) \leq \Delta$. Con esto, la función de tasa de φ^x resulta a lo sumo $\Delta + \frac{\delta}{3}$, como queríamos ver.

- *Toda trayectoria que diste en norma infinito en menos que r de φ^x se escapa de G' antes que t_x.*

  Nuevamente se deduce de la construcción ya que la trayectoria φ^x se escapa de G' y, antes que t_x, pasa por un punto a distancia al menos r de G'.

Notemos que, para cada $x \in G'$, tenemos construida φ^x en el intervalo $[0, t_x]$. Buscamos que todas las trayectorias estén definidas en un único intervalo $[0, T]$, independiente de x. Para eso, definimos $T := \sup_{x \in G'} t_x < +\infty$ y extendemos a φ^x en el intervalo $[\,t_x, T\,]$ siguiendo el flujo determinístico. Puede verificarse que las trayectorias $(\varphi^x)_{x\in G'}$ así construidas en el intervalo $[\,0, T\,]$ conservan las propiedades antes mencionadas.

Para concluir el primer paso de la demostración tomamos como nuestro conjunto de trayectorias a $\mathcal{E}_{x,T} = \{\psi \in C([\,0,T\,],\mathbb{R}^d) : \varrho_T(\psi,\varphi^x) < r\}$. Así definido, $\mathcal{E}_{x,T}$ verifica las primeras dos condiciones por construcción y la tercera como consecuencia de $(b)'_u$ del Corolario (4.4.5).

2. Si llamamos $T^+ = e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}$, podemos partir el intervalo $[\,0, T^+\,]$ en subintervalos de longitud T y, usando la propiedad de Markov, obtener

$$P_x(\tau_\varepsilon(\partial G') > T^+) \leq P_x\Big(X_t^\varepsilon \in G' \ \forall\, t \in [(k-1)T, kT], \quad k = 1, \ldots, \Big[\frac{T^+}{T}\Big]\Big)$$

$$= \mathbb{E}_x\Big(\prod_{k=1}^{[\frac{T^+}{T}]} \mathbf{1}_{\{X_t^\varepsilon \in G' \,\forall\, t \,\in\, [(k-1)T,kT]\}}\Big)$$

$$= \mathbb{E}_x\Big(\mathbb{E}_x(\prod_{k=1}^{[\frac{T^+}{T}]} \mathbf{1}_{\{X_t^\varepsilon \in G' \,\forall\, t \,\in\, [(k-1)T,kT]\}} \mid \mathcal{F}_{([\frac{T^+}{T}]-1)T})\Big)$$

$$= \mathbb{E}_x\Big(\prod_{k=1}^{[\frac{T^+}{T}]-1} \mathbf{1}_{\{X_t^\varepsilon \in G' \,\forall\, t \,\in\, [(k-1)T,kT]\}} \, \mathbb{E}_{X^\varepsilon_{([\frac{T^+}{T}]-1)T}}(\mathbf{1}_{\{X_t^\varepsilon \in G' \,\forall\, t \,\in\, [0,T]\}})\Big)$$

$$= \mathbb{E}_x\Big(\prod_{k=1}^{[\frac{T^+}{T}]-1} \mathbf{1}_{\{X_t^\varepsilon \in G' \,\forall\, t \,\in\, [(k-1)T,kT]\}} \, P_{X^\varepsilon_{([\frac{T^+}{T}]-1)T}}\big(X_t^\varepsilon \in G' \ \forall\, t \in [\,0,T]\big)\Big)$$

$$\leq \mathbb{E}_x\Big(\prod_{k=1}^{[\frac{T^+}{T}]-1} \mathbf{1}_{\{X_t^\varepsilon \in G' \,\forall\, t \,\in\, [(k-1)T,kT]\}} \, \sup_{x\in G'} P\big(X^{x,\varepsilon} \notin \mathcal{E}_{x,T}\big)\Big)$$

$$\leq P_x\Big(X_t^\varepsilon \in G' \ \forall\, t \in [(k-1)T, kT], \quad k = 1, \ldots, \Big[\frac{T^+}{T} - 1\Big]\Big).(1-\alpha_\varepsilon)$$

Notemos que en la anteúltima desigualdad hemos usado que $X^\varepsilon_{([\frac{T^+}{T}]-1)T} \in G'$ y la inclusión de conjuntos

$$\{\, X_t^{x,\varepsilon} \in G' \ \text{para todo} \ t \in [\,0,T\,]\} \subseteq \{\, X^{x,\varepsilon} \notin \mathcal{E}_{x,T}\} \quad \text{para } x \in G'. \tag{6.19}$$

Recordando la tercera condición que cumplen los conjuntos $\mathcal{E}_{x,T}$, obtenemos la última desigualdad. Por último, utilizando un argumento inductivo obtenemos la acotación

$$P_x(\tau_\varepsilon(\partial G') > T^+) \leq (1-\alpha_\varepsilon)^{\,[\frac{T^+}{T}]}. \tag{6.20}$$

Como la acotación es uniforme en G', tomando límite con ε tendiendo a cero, conseguimos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{x\in G'} P_x(\tau_\varepsilon(\partial G') > T^+) = 0,$$

como queríamos ver. $\square$

Necesitaremos también el siguiente resultado[2].

Lema 6.4.2. *Existe $\delta_0 > 0$ tal que, dado $0 < \delta \leq \delta_0$, existe $\rho_\delta > 0$ que verifica*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{x\in B_{\rho_\delta}(p)} P_x\Big(\tau_\varepsilon(\partial G' \setminus \partial^q) < e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}} < \tau_\varepsilon(\partial^q)\Big) = 0. \tag{6.21}$$

Demostración. La idea será seguir los pasos realizados para la cota inferior.

1. Probaremos el resultado en el caso en que la posición inicial viene dada por la medida invariante del proceso, condicionada a una bola $B_\rho(p)$ de radio ρ adecuado. Es decir, mostraremos que, dado $\delta > 0$, existe $\rho > 0$ tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_{\mu_\varepsilon,\, B_\rho(p)}\Big(\tau_\varepsilon(\partial G' \setminus \partial^q) < e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}} < \tau_\varepsilon(\partial^q)\Big) = 0. \tag{6.22}$$

si $\delta \leq \delta_0$, con un δ_0 apropiado. Al igual que en el primer paso de la cota inferior, por la continuidad de U podemos tomar $\rho, \vartheta' > 0$ dependiendo de δ, tales que para cualquier $T > 0$ se tiene

$$P_{\mu_\varepsilon,\, B_\rho(p)}(\, X_T^\varepsilon \in (\partial G' \setminus \partial^q)_{(\vartheta')}) \leq \frac{\mathcal{L}((\partial G' \setminus \partial^q)_{(\vartheta')})}{\mathcal{L}(B_\rho(p))}\, e^{-\frac{(\widetilde{\Delta}-\delta)}{\varepsilon^2}}, \tag{6.23}$$

donde $\widetilde{\Delta} := 2(\min_{y\in\partial G'\setminus\partial^q} U(y) - U(p)) > 2(U(z) - U(p)) = \Delta$. Si $T^+ := e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}$, sean $N = [\frac{T^+}{\varepsilon^3}]$ la parte entera de $\frac{T^+}{\varepsilon^3}$, $t_i = i\varepsilon^3, 0 \leq i \leq N$, y $t_{N+1} = T^+$. Recordemos que utilizando el Principio de Reflexión podemos obtener

$$P\Big(\max_{0\leq i\leq N}\ \sup_{t_i\leq t\leq t_{i+1}} |W_t - W_{t_i}| \geq 1\Big) \leq 2d(N+1)e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon^3}},$$

para alguna constante positiva α.

Si llamamos Λ al complemento del evento en la desigualdad de arriba, usando nuevamente que b es Lipschitz y el lema de Gronwall, tenemos una estimación similar a la dada en (6.10). En efecto, en el evento $\big(\{X_{t_i}^{x,\,\varepsilon} \in \overline{G'}\} \cap \Lambda\big)$ vale, para $t_i \leq t \leq t_{i+1}$,

$$|X_t^{x,\,\varepsilon} - X_{t_i}^{x,\,\varepsilon}| \leq e^{\kappa|t-t_i|}(\varepsilon + \varepsilon^3 \sup_{x\in\overline{G'}} |b(x)|). \tag{6.24}$$

Así, para $x \in B_\rho(p)$ tenemos

$$\begin{aligned} P_x(\tau_\varepsilon(\partial G' \setminus \partial^q) < T^+ < \tau_\varepsilon(\partial^q)) &\leq P_x(\,\Lambda^c) + P_x(\{\tau_\varepsilon(\partial G' \setminus \partial^q) < T^+ < \tau_\varepsilon(\partial^q)\} \cap \Lambda) \\ &\leq 2d(N+1)e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon^3}} + P_x(\{\tau_\varepsilon(\partial G' \setminus \partial^q) < T^+ < \tau_\varepsilon(\partial^q)\} \cap \Lambda) \end{aligned}$$

[2] El Lema 6.4.2 es consecuencia inmediata del Teorema 6.5.7, que mostraremos más adelante.

donde, además, se verifica la inclusión

$$\{\tau_\varepsilon^x(\partial G' \setminus \partial^q) < T^+ < \tau_\varepsilon^x(\partial^q)\} \,\cap\, \Lambda \,\subseteq\, \bigcup_{i=1}^{N} \{X_{t_i}^{x,\,\varepsilon} \in (\partial G' \setminus \partial^q)_{(\vartheta')}\}. \tag{6.25}$$

En efecto, como $\tau_\varepsilon^x(\partial G' \setminus \partial^q) < T^+$, existe $i = 0, \ldots, N$ tal que $t_i \leq \tau_\varepsilon^x(\partial G' \setminus \partial^q) < t_{i+1}$. Por (6.24), obtenemos

$$|X_{t_i}^{x,\,\varepsilon} - X_{\tau_\varepsilon^x(\partial G' \setminus \partial^q)}^{x,\,\varepsilon}| < \vartheta'$$

si ε es lo suficientemente chico. Observemos que estamos en las condiciones de (6.24) pues $t_i \leq \tau_\varepsilon^x(\partial G' \setminus \partial^q) < \tau_\varepsilon^x(\partial^q)$ implica, para $x \in G'$, que $X_{t_i}^{x,\,\varepsilon} \in \overline{G'}$ y consideramos únicamente las trayectorias en Λ, en donde la oscilación del Browniano se encuentra controlada. Con esta última desigualdad se muestra que $X_{t_i}^{x,\,\varepsilon} \in (\partial G' \setminus \partial^q)_{(\vartheta')}$ para algún $i = 0, \ldots, N$. Observando que $X_{t_0}^{x,\,\varepsilon} = X_0^{x,\,\varepsilon} = x \notin (\partial G' \setminus \partial^q)_{(\vartheta')}$, vemos que debe ser $i \neq 0$ y, así, concluimos la inclusión de conjuntos de arriba. Luego, para $x \in B_\rho(p)$ se tiene

$$P_x\big(\tau_\varepsilon(\partial G' \setminus \partial^q) < T^+ < \tau_\varepsilon(\partial^q)\big) \leq 2d(N+1)e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon^3}} + \sum_{i=1}^{N} P_x(X_{t_i}^{x,\,\varepsilon} \in (\partial G' \setminus \partial^q)_{(\vartheta')}). \tag{6.26}$$

Integrando respecto de la medida $\mu_{\varepsilon,\,B_\rho(p)}$, obtenemos

$$P_{\mu_{\varepsilon,\,B_\rho(p)}}\big(\tau_\varepsilon(\partial G' \setminus \partial^q) < T^+ < \tau_\varepsilon(\partial^q)\big) \leq 2d(N+1)e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon^3}} + \sum_{i=1}^{N} P_{\mu_{\varepsilon,\,B_\rho(p)}}(X_{t_i}^{x,\,\varepsilon} \in \partial(D_p \cap G)_{(\vartheta')}), \tag{6.27}$$

si $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente chico. Teniendo en cuenta la acotación hecha en (6.23), resulta

$$\begin{aligned} P_{\mu_{\varepsilon,\,B_\rho(p)}}\big(\tau_\varepsilon(\partial G' \setminus \partial^q) < T^+ < \tau_\varepsilon(\partial^q)\big) &\leq 2d(N+1)e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon^3}} + \frac{\mathcal{L}((\partial G' \setminus \partial^q)_{(\vartheta')})}{\mathcal{L}(B_\rho(p))}\, N e^{-\frac{(\tilde{\Delta} - \frac{\delta}{3})}{\varepsilon^2}} \\ &\leq 2d(N+1)e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon^3}} + \frac{\mathcal{L}((\partial G' \setminus \partial^q)_{(\vartheta')})}{\mathcal{L}(B_\rho(p))}\, \frac{T^+}{\varepsilon^3} e^{-\frac{(\tilde{\Delta} - \frac{\delta}{3})}{\varepsilon^2}} \\ &= 2d(N+1)e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon^3}} + \frac{\mathcal{L}((\partial G' \setminus \partial^q)_{(\vartheta')})}{\mathcal{L}(B_\rho(p))}\, \frac{e^{-\frac{(\tilde{\Delta} - \Delta) - 2\delta}{\varepsilon^2}}}{\varepsilon^3} \end{aligned}$$

Como $\widetilde{\Delta} - \Delta > 0$, si $\delta \leq \delta_0$ con δ_0 adecuado, se tiene $(\widetilde{\Delta} - \Delta) - 2\delta > 0$ y, por la acotación anterior, obtenemos

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P_{\mu_{\varepsilon,\,B_\rho(p)}}\big(\tau_\varepsilon(\partial G' \setminus \partial^q) < T^+ < \tau_\varepsilon(\partial^q)\big) = 0.$$

2. Para terminar la demostración del lema, al igual que en el Paso II de la cota inferior, bastará con mostrar que existe ρ_δ tal que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x,\,x' \in B_{\rho_\delta}(p)} \Big| P_x\big(\tau_\varepsilon(\partial G' \setminus \partial^q) < T^+ < \tau_\varepsilon(\partial^q)\big) - P_{x'}\big(\tau_\varepsilon(\partial G' \setminus \partial^q) < T^+ < \tau_\varepsilon(\partial^q)\big) \Big| = 0. \tag{6.28}$$

si $\delta \leq \delta_0$, con δ_0 el dado por el paso anterior. Para ello, usaremos nuevamente el acoplamiento de Lindvall-Rogers. Por la Proposición 5.2.3 y el Lema 6.3.1, podemos tomar $\rho_0 > 0$ tal que la condición en (5.5) vale para todo $u \neq v \in B_{\rho_0}(p)$ y $0 < \rho_\delta < \rho_0$ tal que

$$\sup_{y \in B_{\rho_\delta}(p)} P_y(\tau_\varepsilon(S_{\rho_0}(p)) < e^{\frac{c_1}{\varepsilon^2}}) \leq e^{-\frac{c_1}{\varepsilon^2}},$$

donde $S_{\rho_0}(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| = \rho_0\}$ y c_1 es alguna constante positiva.

Sean ahora $x, x' \in B_{\rho_\delta}$ y acoplemos, según el método de Lindvall-Rogers, dos procesos empezando en x y x', respectivamente. Si $\Omega_y := \left\{\tau_\varepsilon^y(\partial G' \setminus \partial^q) < T^+ < \tau_\varepsilon^y(\partial^q)\right\}$ entonces

$$\begin{aligned}
|P_x(\Omega) - P_{x'}(\Omega)| &= |\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\Omega_x} - \mathbf{1}_{\Omega_{x'}})| \\
&\leq \mathbb{E}(|\mathbf{1}_{\Omega_x} - \mathbf{1}_{\Omega_{x'}}|) \\
&\leq \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\text{mín}\,\{\tau_\varepsilon^x(\partial G' \setminus \partial^q),\, \tau_\varepsilon^x(\partial^q)\} < T_{x,\,x'}\}} + \mathbf{1}_{\{\text{mín}\,\{\tau_\varepsilon^{x'}(\partial G' \setminus \partial^q),\, \tau_\varepsilon^{x'}(\partial^q)\} < T_{x,\,x'}\}}) \\
&= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^x(\partial G') < T_{x,\,x'}\}} + \mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^{x'}(\partial G') < T_{x,\,x'}\}}) \\
&= P_x(\tau_\varepsilon(\partial G') \;<\; T_{x,\,x'}) + P_{x'}(\tau_\varepsilon(\partial G') \;<\; T_{x,\,x'})
\end{aligned}$$

El resto de la demostración es similar a la del Paso II de la cota inferior. □

De los Lemas 6.4.1 y 6.4.2 se deduce el siguiente corolario.

Corolario 6.4.3. *Dado $\delta > 0$, existe $\rho_\delta > 0$ tal que*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \overline{B}_{\rho_\delta}(p)} P_x\Big(\tau_\varepsilon(\partial^q) > e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}\Big) = 0. \tag{6.29}$$

Demostración. Podemos suponer que $\delta \leq \delta_0$, donde δ_0 es el del Lema 6.4.2. En efecto, si $\delta > \delta_0$

$$P_x\Big(\tau_\varepsilon(\partial^q) > e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}\Big) \leq P_x\Big(\tau_\varepsilon(\partial^q) > e^{\frac{\Delta+\delta_0}{\varepsilon^2}}\Big)$$

y bastará, entonces, con probar que el término de la derecha tiende a cero. Como $\delta \leq \delta_0$, por el Lema 6.4.2 podemos tomar $\rho_\delta > 0$ tal que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \overline{B}_{\rho_\delta}(p)} P_x(\tau_\varepsilon(\partial G' \setminus \partial^q) < e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}} < \tau_\varepsilon(\partial^q)) = 0.$$

Si $T^+ := e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}$, para $x \in \overline{B}_{\rho_\delta}(p)$ tenemos

$$\begin{aligned}
P_x(\tau_\varepsilon(\partial^q) > T^+) &= P_x(\tau_\varepsilon(\partial G') \geq T^+) + P_x(\tau_\varepsilon(\partial G' \setminus \partial^q) < T^+ < \tau_\varepsilon(\partial^q)) \\
&\leq \sup_{x \in G'} P_x(\tau_\varepsilon(\partial G') \geq T^+) \;+ \sup_{x \in \overline{B}_{\rho_\delta}(p)} P_x(\tau_\varepsilon(\partial G' \setminus \partial^q) < T^+ < \tau_\varepsilon(\partial^q))
\end{aligned}$$

Como $x \in \overline{B}_{\rho_\delta}(p)$ es arbitrario, resulta

$$\sup_{x\in\overline{B}_{\rho_\delta}(p)} P_x(\tau_\varepsilon(\partial^q) > T^+) \leq \sup_{x\in G'} P_x(\tau_\varepsilon(\partial G') \geq T^+) + \sup_{x\in\overline{B}_{\rho_\delta}(p)} P_x(\tau_\varepsilon(\partial G'\backslash\partial^q) < T^+ < \tau_\varepsilon(\partial^q)).$$

Observando que el primer sumando de la derecha tiende a cero por el Lema 6.4.1 y que el segundo lo hace por la elección de ρ_δ, obtenemos el resultado. □

Ahora sí, estamos en condiciones de demostrar el resultado principal de esta sección.

Teorema 6.4.4. *Para cada $x \in D_p$ y $\delta > 0$ se tiene*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_x\Big(\tau_\varepsilon > e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}\Big) = 0. \tag{6.30}$$

Más aún, la convergencia es uniforme sobre compactos de D_p.

Demostración. Haremos la demostración en dos pasos.

1. En primer lugar, probaremos que el resultado vale uniformemente sobre una bola $\overline{B}_{\rho_\delta}(p)$ con ρ_δ adecuado. Esto es, dado $\delta > 0$, existe $\rho_\delta > 0$ tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in\overline{B}_{\rho_\delta}(p)} P_x(\tau_\varepsilon > T^+) = 0. \tag{6.31}$$

Por el corolario anterior, existe $\rho_\delta > 0$ tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in\overline{B}_{\rho_\delta}(p)} P_x\Big(\tau_\varepsilon(\partial^q) > e^{\frac{\Delta+\frac{\delta}{2}}{\varepsilon^2}}\Big) = 0.$$

Si $x \in \overline{B}_{\rho_\delta}(p)$ entonces

$$P_x\big(\tau_\varepsilon > T^+\big) = P_x\bigg(\tau_\varepsilon > T^+ \,, \tau_\varepsilon(\partial^q) > \frac{T^+}{2}\bigg) + P_x\bigg(\tau_\varepsilon > T^+ \,, \tau_\varepsilon(\partial^q) \leq \frac{T^+}{2}\bigg)$$

$$\leq P_x\bigg(\tau_\varepsilon(\partial^q) > \frac{T^+}{2}\bigg) + P_x\bigg(\tau_\varepsilon > T^+ \,, \tau_\varepsilon(\partial^q) \leq \frac{T^+}{2}\bigg)$$

Bastará, entonces, con mostrar que cada sumando de la derecha tiende a cero uniformemente en $\overline{B}_{\rho_\delta}(p)$. Para el primer sumando, tenemos que si ε es suficientemente pequeño entonces

$$P_x\bigg(\tau_\varepsilon(\partial^q) > \frac{T^+}{2}\bigg) = P_x\bigg(\tau_\varepsilon(\partial^q) > \frac{e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}}{2}\bigg)$$

$$\leq P_x\bigg(\tau_\varepsilon(\partial^q) > e^{\frac{\Delta+\frac{\delta}{2}}{\varepsilon^2}}\bigg)$$

$$\leq \sup_{x\in\overline{B}_{\rho_\delta}(p)} P_x\bigg(\tau_\varepsilon(\partial^q) > e^{\frac{\Delta+\frac{\delta}{2}}{\varepsilon^2}}\bigg),$$

donde el último término tiende a cero por el corolario. Como la acotación es independiente de $x \in \overline{B}_{\rho_\delta}(p)$, obtenemos la convergencia uniforme. Ahora, resta trabajar con el segundo término de la derecha.

Definimos el tiempo de parada $\tau_\varepsilon^* := \begin{cases} \tau_\varepsilon(\partial^q) & \text{si } \tau_\varepsilon(\partial^q) \leq \frac{T^+}{2} \\ +\infty & \text{en caso contrario} \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
P_x\left(\tau_\varepsilon > T^+ \,, \tau_\varepsilon(\partial^q) \leq \frac{T^+}{2}\right) &= \mathbb{E}_x\Big(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon > T^+\}} \mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon(\partial^q) \leq \frac{T^+}{2}\}}\Big) \\
&\leq \mathbb{E}_x\Big(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon > \frac{T^+}{2} + \tau_\varepsilon(\partial^q)\}} \mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon(\partial^q) \leq \frac{T^+}{2}\}}\Big) \\
&= \mathbb{E}_x\Big(\mathbb{E}_x\Big(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon > \frac{T^+}{2} + \tau_\varepsilon^*\}} \mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^* < +\infty\}} \mid \mathcal{F}_{\tau_\varepsilon^*}\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

Por la propiedad fuerte de Markov

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\Big(\mathbb{E}_x\Big(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon > \frac{T^+}{2} + \tau_\varepsilon^*\}} \mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^* < +\infty\}} \,\Big|\, \mathcal{F}_{\tau_\varepsilon^*}\Big)\Big) &\leq \mathbb{E}_x\Big(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^* < +\infty\}} \, \mathbb{E}_{X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon^*}}\Big(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon > \frac{T^+}{2}\}}\Big)\Big) \\
&\leq \mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^* < +\infty\}} \sup_{x \in \partial^q} P_x\left(\tau_\varepsilon > \frac{T^+}{2}\right)\right) \\
&\leq \sup_{x \in \partial^q} P_x\left(\tau_\varepsilon > \frac{T^+}{2}\right)\Bigg)
\end{aligned}
$$

donde en la primera desigualdad usamos que $X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon^*} \in \partial^q$ si τ_ε^* es finito.

Notemos que, por la continuidad del flujo $(x,t) \mapsto X_t^{x,0}$, existe un tiempo T tal que, si el sistema determinístico $X^{x,0}$ empieza en ∂^q, entonces éste visita $B_{\frac{c}{2}}(q)$ en $[\,0, T\,]$. Luego, si ε es suficientemente pequeño como para garantizar $T < \frac{T^+}{2}$, obtenemos

$$
\sup_{x \in \partial^q} P_x\left(\tau_\varepsilon > \frac{T^+}{2}\right) \leq \sup_{x \in \partial^q} P\big(\varrho_T(X^{x,\varepsilon},\, X^{x,0}) > \frac{c}{2}\,\big) \leq C_1 e^{-\frac{C_2}{\varepsilon^2}} \tag{6.32}
$$

con C_1, C_2 constantes positivas independientes de ε. Así,

$$
\sup_{x \in \overline{B}_{\rho_\delta}(p)} P_x\Big(\tau_\varepsilon > T^+\Big) \leq \sup_{x \in \overline{B}_{\rho_\delta}(p)} P_x\left(\tau_\varepsilon(\partial^q) > e^{\frac{\Delta + \frac{\delta}{2}}{\varepsilon^2}}\right) \,+\, C_1 e^{-\frac{C_2}{\varepsilon^2}}, \tag{6.33}
$$

de donde se deduce el resultado.

2. Procedemos como en el Paso III de la demostración de la cota inferior. Vimos arriba que dado $\delta > 0$ existe $\rho > 0$ tal que

$$
\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \overline{B}_\rho(p)} P_x\left(\tau_\varepsilon > \frac{T^+}{2}\right) = 0. \tag{6.34}
$$

Sabemos además que para cada $x \in D_p$ existe un tiempo T_x tal que si el sistema determinístico empieza en x, éste alcanza $B_{\frac{\rho}{2}}(p)$ durante el intervalo $[\,0, T_x\,]$. Usando la estimación en (4.11), concluimos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_x\big(\tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) > T_x\big) = 0. \tag{6.35}$$

Así

$$P_x(\,\tau_\varepsilon > T^+) \le P_x(\,\tau_\varepsilon > T^+\,,\,\tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) \le T_x) + P_x(\,\tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) > T_x).$$

Trabajemos con el primer término de la derecha.

Definimos el tiempo de parada $\tau_\varepsilon^* := \begin{cases} \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) & \text{si } \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) < \frac{T^+}{2} \\ +\infty & \text{en caso contrario} \end{cases}$

Si ε es suficientemente pequeño como para garantizar $T_x < \frac{T^+}{2}$ entonces

$$\begin{aligned}
P_x(\,\tau_\varepsilon > T^+\,,\,\tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) \le T_x) &\le P_x\left(\tau_\varepsilon > T^+\,,\,\tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) < \frac{T^+}{2}\right)\\
&\le P_x\left(\tau_\varepsilon > \frac{T^+}{2} + \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p))\,,\,\tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) < \frac{T^+}{2}\right)\\
&= \mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon > \frac{T^+}{2} + \tau_\varepsilon^*\}}\,\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^* < +\infty\}}\right)\\
&= \mathbb{E}_x\left(\mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon > \frac{T^+}{2} + \tau_\varepsilon^*\}}\,\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^* < +\infty\}}\,\Big|\,\mathcal{F}_{\tau_\varepsilon^*}\right)\right)\\
&\le \mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^* < +\infty\}}\,\mathbb{E}_{X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon^*}}\left(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon > \frac{T^+}{2}\}}\right)\right)\\
&\le \mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^* < +\infty\}}\sup_{x\in\overline{B}_\rho(p)} P_x\left(\tau_\varepsilon > \frac{T^+}{2}\right)\right)\\
&\le \sup_{x\in\overline{B}_\rho(p)} P_x\left(\tau_\varepsilon > \frac{T^+}{2}\right)
\end{aligned}$$

Luego, concluimos

$$P_x(\,\tau_\varepsilon > T^+) \le \sup_{x\in\overline{B}_\rho(p)} P_x\left(\tau_\varepsilon > \frac{T^+}{2}\right) + P_x\Big(\tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) > T_x\Big). \tag{6.36}$$

Observando que el miembro derecho de la desigualdad tiende a cero por (6.34) y (6.35), se consigue el resultado.

Por último, veamos la convergencia uniforme sobre compactos de D_p. Por la continuidad del flujo determinístico, sabemos que dado un compacto $\mathcal{K} \subseteq D_p$, existe un tiempo $T_{\mathcal{K}}$ tal que, para todo $x \in \mathcal{K}$, el sistema $X^{x,0}$ alcanza $B_{\frac{\rho}{2}(p)}$ en $[\,0, T_{\mathcal{K}}\,]$. Utilizando nuevamente la estimación (4.11), obtenemos

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathcal{K}} P_x(\tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) > T_{\mathcal{K}}) = 0. \tag{6.37}$$

Con esto nos conseguimos un único $T_{\mathcal{K}}$ que juega el papel de T_x para todo $x \in \mathcal{K}$. La demostración es entonces idéntica a la dada arriba. □

6.5. El escape de G'

Habiendo terminado con las cotas inferior y superior para el tiempo de salto, debemos mostrar ahora el carácter exponencial de la distribución asintótica del tiempo de salto normalizado $\frac{\tau_\varepsilon}{\beta_\varepsilon}$. Más precisamente, nuestro objetivo es ver que para cada $x \in D_p$ se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P_x(\,\tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon) = e^{-t} \quad \forall\, t > 0. \tag{6.38}$$

Para ello, estudiaremos como el proceso escapa de G'. Una vez que mostremos que el tiempo de escape de G' y el tiempo de salto son asintóticamente similares, para ver (6.38) bastará con probar que para $\rho > 0$ suficientemente chico se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \overline{B}_\rho(p)} |P_x(\tau_\varepsilon(\partial G') > t\beta_\varepsilon) - e^{-t}| = 0 \quad \forall\, t > 0. \tag{6.39}$$

Esto reduce nuestro problema original a uno más sencillo: el problema del escape de un dominio acotado.

Para mostrar (6.39), la idea será, esencialmente, ver que la familia $(\tau_\varepsilon^p)_{\varepsilon>0}$ exhibe pérdida de memoria asintótica. Esto es,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big[P_p(\tau_\varepsilon(\partial G') > (t+s)\gamma_\varepsilon) - P_p(\tau_\varepsilon(\partial G') > t\gamma_\varepsilon) P_p(\tau_\varepsilon(\partial G') > s\gamma_\varepsilon) \Big] = 0, \quad \forall\, t, s > 0, \tag{6.40}$$

donde γ_ε es un parámetro de normalización apropiado. Como la exponencial es la única distribución continua con pérdida de memoria, valiéndonos de un resultado adecuado sobre convergencia de medidas, concluiremos el resultado para el caso $x = p$ y con parámetros de normalización γ_ε en lugar de β_ε. Luego, utilizando el acoplamiento de Lindvall-Rogers, seremos capaces de extender esto último uniformemente sobre $\overline{B}_\rho(p)$. Finalmente, veremos que podemos cambiar los parámetros γ_ε por β_ε en lo que hemos probado, obteniendo (6.39).

Nos serán necesarias algunas definiciones previas, que damos a continuación.

Definición 6.5.1. Sea (S, ρ) un espacio métrico y sea Π una familia de medidas de probabilidad definidas en $\big(S, \mathcal{B}(S)\big)$. Decimos que Π es *relativamente compacta* si cada sucesión de elementos de Π contiene un subsucesión débilmente convergente.

Definición 6.5.2. Sea (S, ρ) un espacio métrico y sea Π una familia de medidas de probabilidad definidas en $\big(S, \mathcal{B}(S)\big)$. Decimos que Π es *tight* si dado $\varepsilon > 0$, existe un compacto $\mathcal{K}_\varepsilon \subseteq S$ tal que $P(\mathcal{K}_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$, para cada $P \in \Pi$.

El siguiente teorema, debido a Prohorov, relaciona ambas definiciones.

Teorema 6.5.3 (**Prohorov**). *Sea S un espacio métrico completo y separable y sea Π una familia de medidas de probabilidad definidas en $\big(S, \mathcal{B}(S)\big)$. Entonces*

$$\Pi \text{ relativamente compacta} \Longleftrightarrow \Pi \text{ tight.}$$

Enunciamos y demostramos a continuación el principal resultado sobre la distribución asintótica del tiempo de escape de G'.

Teorema 6.5.4. *Para cada $\varepsilon > 0$ definimos $\gamma_\varepsilon > 0$ por la relación*

$$P_p(\tau_\varepsilon(\partial G') > \gamma_\varepsilon) = e^{-1} \tag{6.41}$$

y para $t \geq 0$ notamos

$$\nu_\varepsilon(t) = P_p(\tau_\varepsilon(\partial G') > t\gamma_\varepsilon). \tag{6.42}$$

Entonces

(i) Existe una familia $(\delta_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$, con $\lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon = 0$, tal que dados $s, t > 0$, se tiene

$$\nu_\varepsilon(s+\delta_\varepsilon)\nu_\varepsilon(t) - \psi_\varepsilon(s,t) \leq \nu_\varepsilon(s+t) \leq \nu_\varepsilon(s)\nu_\varepsilon(t-\delta_\varepsilon) + \psi_\varepsilon(s,t) \tag{6.43}$$

donde $\psi_\varepsilon(s,t)$ es una función tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{s\geq 0,\, t\geq t_0} \psi_\varepsilon(s,t) = 0, \quad \forall\ t_0 > 0 \text{ fijo.} \tag{6.44}$$

(ii) La familia $(\nu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ es asintóticamente tight: para toda sucesión $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\lim_{j\to+\infty} \varepsilon_j = 0$, se tiene que $(\nu_{\varepsilon_j})_{j\in\mathbb{N}}$ es una familia tight.

(iii) Existe $\rho > 0$ tal que, para todo $t \geq 0$, se tiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in \overline{B}_\rho(p)} |P_x(\tau_\varepsilon(\partial G') > t\gamma_\varepsilon) - e^{-t}| = 0.$$

Para la demostración del teorema necesitaremos de dos lemas previos que figuran a continuación.

Lema 6.5.5. *Existe $\rho > 0$ tal que , para todo $t > 0$*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x,\, x'\in \overline{B}_\rho(p)} \sup_{t>0} |P_x(\ \tau_\varepsilon(\partial G') > t\gamma_\varepsilon) - P_{x'}(\ \tau_\varepsilon(\partial G') > t\gamma_\varepsilon)| = 0. \tag{6.45}$$

Demostración. Se prosigue de forma análoga al lema similar en el Paso II de la sección sobre la cota inferior. $\square$

Lema 6.5.6. *Sea* $0 < \alpha < \Delta$ *y definamos* $\eta_\varepsilon := e^{\frac{\alpha}{\varepsilon^2}}$. *Entonces,*

(*i*) $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\eta_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon} = 0$

(*ii*) $\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in G'} P_x(\tau_\varepsilon(\partial G') > \eta_\varepsilon \,,\, \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) > \eta_\varepsilon) = 0$, *donde* $\rho > 0$ *es el del Lema 6.5.5 previo.*

Demostración.

(*i*) Notemos que, de forma análoga a lo hecho para β_ε en la cota inferior, podemos concluir $\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log(\gamma_\varepsilon) \geq \Delta$. Con esto, probamos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, vale la desigualdad $e^{\frac{\Delta+\alpha}{2\varepsilon^2}} < \gamma_\varepsilon$. En particular, $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\eta_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon} = 0$.

(*ii*) La idea para probar (*ii*) es similar a la del Lema 6.4.1 de la cota superior. Debemos mostrar que existe un tiempo T tal que, para cada $x \in G'$, se tiene un conjunto de trayectorias $\mathcal{E}_{x,T}$ que verifica las siguientes condiciones:

1. $\varphi \in C([\,0, T], \mathbb{R}^d)$, $\forall \varphi \in \mathcal{E}_{x,T}$
2. Toda trayectoria de $\mathcal{E}_{x,T}$ alcanza $\big(\partial G' \cup B_\rho(p)\big)$ durante el intervalo $[\,0, T\,]$.
3. $\inf_{x\in G'} P(X^{x,\,\varepsilon} \in \mathcal{E}_{x,T}) \geq \overline{\alpha}_\varepsilon$, donde $\overline{\alpha}_\varepsilon := T/e^{\frac{\alpha/2}{\varepsilon^2}}$.

Para esto, nuevamente la idea será construir para cada $x \in G'$ una trayectoria φ^x comenzando en x, con función de tasa menor a $\frac{\alpha}{3}$ y tal que, durante el intervalo $[\,0, T\,]$, no solamente φ^x alcance $\big(\partial G' \cup B_\rho(p)\big)$, sino que también cualquier trayectoria lo suficientemente cercana en norma infinito haga lo mismo.

Al igual que antes, tomamos $r < \rho$ lo suficientemente chico como para garantizar que la función de tasa de una interpolación lineal a velocidad uno entre dos puntos x_0, x_1 a distancia menor que $2r$, no supere $\frac{\alpha}{6}$. Suponemos, además, que $\overline{B}_r(z) \subseteq G_z$ y que $d(q, G') > r$. Recordemos el conjunto

$$G(z, r) = \{x \in G_z : d(x, \mathcal{W}^s_z) \leq r\} \tag{6.46}$$

y construyamos, según donde se encuentre x, φ^x como sigue:

- $x \in G(z, \vartheta')$
    1. Elegimos un punto $x_1 \in \mathcal{W}^s_z$ a distancia mínima de x e interpolamos x con x_1.
    2. Desde x_1, seguimos el flujo determinístico hasta llegar a un $x_2 \in \overline{B}_r(z)$.
    3. Una vez en x_2, interpolamos a un $x_3 \in \mathcal{W}^u_z \cap D_q$ a distancia r de z.
    4. Seguimos, nuevamente, el flujo determinístico desde x_3 hasta llegar a un punto $x_4 \in G_q$ a una distancia al menos r de G'.
- Si $x \in D_q \cap \big(G' \setminus G(z, r)\big)$, simplemente seguimos la trayectoria determinística hasta llegar a un punto x_4 como el descripto arriba.

- $x \in D_p \cap \big(G' \setminus G(z,r)\big)$
  1. Seguimos el flujo determinístico hasta alcanzar $S_r(p)$.

De manera análoga a lo hecho en la sección anterior, podemos verificar que φ^x cumple las siguientes propiedades:

- *φ^x es una trayectoria absolutamente continua que comienza en x.*
- *El tiempo total t_x de las trayectorias φ^x está acotado en x.*
- *φ^x tiene función de tasa menor a $\frac{\alpha}{3}$.*
- *Toda trayectoria que diste en norma infinito en menos que r de φ^x alcanza $\big(\partial G' \cup B_\rho(p)\big)$ antes que t_x.*

Una vez más, extendemos las trayectorias φ^x hasta el tiempo $T := \sup_{x\in G'} t_x$ siguiendo el flujo determinístico y tomamos $\mathcal{E}_{x,\,T}$ como un entorno de φ^x suficientemente pequeño. Los conjuntos $(\mathcal{E}_{x,\,T})_{x\in G'}$ así construidos verifican, como antes, todo lo pedido. Luego, teniendo en cuenta la inclusión de conjuntos

$$\{X_t^{x,\,\varepsilon} \notin \big(\partial G' \cup \overline{B}_\rho(p)\big) \text{ para todo } t \in [\,0,T\,]\} \subseteq \{X^{x,\,\varepsilon} \notin \mathcal{E}_{x,\,T}\} \tag{6.47}$$

procedemos de manera similar a lo hecho en el Lema 6.4.1 para conseguir

$$P_x\big(\tau_\varepsilon(\partial G') > \eta_\varepsilon \,,\, \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) > \eta_\varepsilon\big) \leq (1-\overline{\alpha}_\varepsilon)^{[\frac{\eta_\varepsilon}{T}]}, \tag{6.48}$$

donde un cálculo directo muestra que el miembro derecho de la desigualdad tiende a cero. Como la acotación es uniforme en $x \in G'$, tomando supremo y limite con ε tendiendo a cero, obtenemos el resultado. □

Ahora sí, estamos en condiciones de demostrar el teorema.

Demostración del Teorema 6.5.4.

(i) Tomemos $s > 0$ y definamos

$$R_\varepsilon^{x,\,s} = \text{ínf}\{u > s\gamma_\varepsilon : X_u^{x,\,\varepsilon} \in \overline{B}_\rho(p)\}$$

donde $\rho > 0$ es el de los Lemas previos 6.5.5 y 6.5.6. Con $R_\varepsilon^{x,\,s}$ así definido, podemos descomponer $\nu_\varepsilon(t+s)$ como

$$\nu_\varepsilon(t+s) = P_p(\tau_\varepsilon(\partial G') > (s+t)\gamma_\varepsilon, R_\varepsilon^s > s\gamma_\varepsilon+\eta_\varepsilon) + P_p(\tau_\varepsilon(\partial G') > (s+t)\gamma_\varepsilon, R_\varepsilon^s \leq s\gamma_\varepsilon+\eta_\varepsilon).$$

Observemos que para $x \in G'$

$$\begin{aligned} P_x(\tau_\varepsilon(\partial G') > s\gamma_\varepsilon+\eta_\varepsilon \,,\, R_\varepsilon^s > s\gamma_\varepsilon+\eta_\varepsilon) &= \mathbb{E}_x\big(\,\mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon(\partial G') > s\gamma_\varepsilon+\eta_\varepsilon \,,\, R_\varepsilon^s > s\gamma_\varepsilon+\eta_\varepsilon\}} | \mathcal{F}_{s\gamma_\varepsilon})\big) \\ &= \mathbb{E}_x\Big(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon(\partial G') > s\gamma_\varepsilon\}} \mathbb{E}_{X_{s\gamma_\varepsilon}^{x,\,\varepsilon}}\big(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon(\partial G') > \eta_\varepsilon \,,\, \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) > \eta_\varepsilon\}}\big)\Big) \\ &\leq \sup_{x\in G'} P_x\big(\tau_\varepsilon(\partial G') > \eta_\varepsilon \,,\, \tau_\varepsilon\big(\overline{B}_\rho(p)\big) > \eta_\varepsilon\big). \end{aligned}$$

Como $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\eta_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}=0$ y la acotación de arriba es uniforme en $x\in G'$, por el Lema 6.5.6 obtenemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{s\geq 0,\, t\geq t_0}\sup_{x\in G'} P_x(\tau_\varepsilon(\partial G')>(s+t)\gamma_\varepsilon\ ,\ R^s_\varepsilon>s\gamma_\varepsilon+\eta_\varepsilon)=0 \quad \forall\ t_0>0 \text{ fijo.} \tag{6.49}$$

Ahora, nuestro objetivo será acotar superior e inferiormente el segundo término de la descomposición. Comenzamos por dar una cota superior.

Definimos el tiempo de parada $\tau^*_\varepsilon := \begin{cases} R^{p,s}_\varepsilon & \text{si } R^{p,s}_\varepsilon\leq s\gamma_\varepsilon-\eta_\varepsilon \\ \\ +\infty & \text{en caso contrario}\end{cases}$

Notemos que podemos escribir

$$P_p(\tau_\varepsilon(\partial G')>(s+t)\gamma_\varepsilon\ ,\ R^s_\varepsilon\leq s\gamma_\varepsilon+\eta_\varepsilon)=\mathbb{E}_p\big(\,\mathbb{E}_p(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon(\partial G')>(s+t)\gamma_\varepsilon\ ,\ R^s_\varepsilon\leq s\gamma_\varepsilon+\eta_\varepsilon\}}|\mathcal{F}_{\tau^*_\varepsilon})\big)$$

y reducirnos así a acotar la esperanza condicional. Luego, podemos calcular

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_p(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon(\partial G')>(s+t)\gamma_\varepsilon\ ,\ R^s_\varepsilon\leq s\gamma_\varepsilon+\eta_\varepsilon\}}|\mathcal{F}_{\tau^*_\varepsilon}) &= \mathbb{E}_p(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon(\partial G')>s\gamma_\varepsilon\}}\ \mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon(\partial G')-s\gamma_\varepsilon>t\gamma_\varepsilon\}}\mathbf{1}_{\{R^s_\varepsilon\leq s\gamma_\varepsilon+\eta_\varepsilon\}}|\mathcal{F}_{\tau^*_\varepsilon})\\
&= \mathbb{E}_p(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon(\partial G')>s\gamma_\varepsilon\}}\ \mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon(\partial G')-s\gamma_\varepsilon>t\gamma_\varepsilon\}}\ \mathbf{1}_{\{\tau^*_\varepsilon<+\infty\}}|\mathcal{F}_{\tau^*_\varepsilon})\\
&\leq \mathbf{1}_{\{\tau^p_\varepsilon(\partial G')>s\gamma_\varepsilon\}}\ \mathbb{E}_p(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon(\partial G')-\tau^*_\varepsilon>t\gamma_\varepsilon-\eta_\varepsilon\}}\ \mathbf{1}_{\{\tau^*_\varepsilon<+\infty\}}|\mathcal{F}_{\tau^*_\varepsilon})
\end{aligned}$$

donde en la última línea hemos usado que $\{\tau^p_\varepsilon(\partial G')>s\gamma_\varepsilon\}\in\mathcal{F}_{\tau^*_\varepsilon}$. Por la propiedad fuerte de Markov

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_p(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon(\partial G')-\tau^*_\varepsilon>t\gamma_\varepsilon-\eta_\varepsilon\}}\ \mathbf{1}_{\{\tau^*_\varepsilon<+\infty\}}|\mathcal{F}_{\tau^*_\varepsilon}) &\leq \mathbf{1}_{\{\tau^*_\varepsilon<+\infty\}}\ \mathbb{E}_{X^{p,\,\varepsilon}_{\tau^*_\varepsilon}}(\tau_\varepsilon(\partial G')>t\gamma_\varepsilon-\eta_\varepsilon)\\
&\leq \sup_{x\in\overline{B}_\rho(p)} P_x(\tau_\varepsilon(\partial G')>t\gamma_\varepsilon-\eta_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Luego, concluimos

$$P_p(\tau_\varepsilon(\partial G')>(s{+}t)\gamma_\varepsilon, R^s_\varepsilon\leq s\gamma_\varepsilon{+}\eta_\varepsilon)\leq P_p(\tau_\varepsilon(\partial G')>s\gamma_\varepsilon)\sup_{x\in\overline{B}_\rho(p)} P_x(\tau_\varepsilon(\partial G')>t\gamma_\varepsilon{-}\eta_\varepsilon). \tag{6.50}$$

Veamos ahora la cota inferior.

Definimos el tiempo de parada $\tau^{**}_\varepsilon := \begin{cases} R^{p,s}_\varepsilon & \text{si } R^{p,s}_\varepsilon\leq s\gamma_\varepsilon+\eta_\varepsilon \\ \\ +\infty & \text{en caso contrario}\end{cases}$

Observemos que por definición de $R^{p,s}_\varepsilon$ vale la desigualdad

$$P_p(\tau_\varepsilon(\partial G')>(s+t)\gamma_\varepsilon\ ,\ R^s_\varepsilon\leq s\gamma_\varepsilon+\eta_\varepsilon)\geq P_p(\tau_\varepsilon(\partial G')>t\gamma_\varepsilon+R^s_\varepsilon\ ,\ R^s_\varepsilon\leq s\gamma_\varepsilon+\eta_\varepsilon).$$

Además

$$P_p(\tau_\varepsilon(\partial G')>t\gamma_\varepsilon+R^s_\varepsilon\ ,\ R^s_\varepsilon\leq s\gamma_\varepsilon+\eta_\varepsilon)=\mathbb{E}_p\big(\,\mathbb{E}_p(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon(\partial G')>t\gamma_\varepsilon+\tau^{**}_\varepsilon\}}\ \mathbf{1}_{\{\tau^{**}_\varepsilon<+\infty\}}|\mathcal{F}_{\tau^{**}_\varepsilon})\big).$$

Por la propiedad fuerte de Markov

$$\mathbb{E}_p(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon(\partial G')>t\gamma_\varepsilon+\tau_\varepsilon^{**}\}}\,\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^{**}<+\infty\}}|\mathcal{F}_{\tau_\varepsilon^{**}}) = \mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^{**}<+\infty\}}\mathbb{E}_{X^{p,\,\varepsilon}_{\tau_\varepsilon^{**}}}(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon(\partial G')>t\gamma_\varepsilon\}})$$

$$\geq \mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon^{**}<+\infty\}} \inf_{x\in\overline{B}_\rho(p)} P_x(\tau_\varepsilon(\partial G') > t\gamma_\varepsilon).$$

Así concluimos

$$P_p(\tau_\varepsilon(\partial G') > t\gamma_\varepsilon + R^s_\varepsilon\,,\ R^s_\varepsilon \leq s\gamma_\varepsilon + \eta_\varepsilon) \geq P_p(R^s_\varepsilon \leq s\gamma_\varepsilon + \eta_\varepsilon) \inf_{x\in\overline{B}_\rho(p)} P_x(\tau_\varepsilon(\partial G') > t\gamma_\varepsilon)$$

$$\geq P_p(R^s_\varepsilon \leq s\gamma_\varepsilon + \eta_\varepsilon < \tau_\varepsilon(\partial G')) \inf_{x\in\overline{B}_\rho(p)} P_x(\tau_\varepsilon(\partial G') > t\gamma_\varepsilon).$$

Si definimos

$$\psi_\varepsilon(s,t) = \sup_{x,\,x'\in\overline{B}_\rho(p)}\ \sup_{t>0} |P_x(\,\tau_\varepsilon(\partial G') > t\gamma_\varepsilon) - P_{x'}(\,\tau_\varepsilon(\partial G') > t\gamma_\varepsilon)|$$

$$+ P_p(\tau_\varepsilon(\partial G') > (s+t)\gamma_\varepsilon\,,\ R^s_\varepsilon > s\gamma_\varepsilon + \eta_\varepsilon)$$

$$+ P_p(\tau_\varepsilon(\partial G') > s\gamma_\varepsilon + \eta_\varepsilon\,,\ R^s_\varepsilon > s\gamma_\varepsilon + \eta_\varepsilon),$$

utilizando el Lema 6.5.5 obtenemos (i).

(ii) Aplicando (6.43) inductivamente, resulta

$$\nu_\varepsilon(2k) \leq [\nu_\varepsilon(2-\delta_\varepsilon)]^k + \sum_{i=1}^{k-1} \psi_\varepsilon(2i,2), \tag{6.51}$$

$$\nu_\varepsilon(1) = e^{-1} \leq [\nu_\varepsilon(\frac{1}{k} - \delta_\varepsilon)]^k + \sum_{i=1}^{k-1} \psi_\varepsilon(\frac{i}{k},\frac{1}{k}). \tag{6.52}$$

Ahora, dado $0<\delta<1$, sea $k\in\mathbb{N}$ tal que $e^{-k} < \frac{\delta}{2}$ y $(1-\delta)^k < (\frac{e^{-1}}{2})$. Habiendo fijado k y teniendo en cuenta (6.44), podemos tomar $\varepsilon_0>0$ tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ se cumpla lo siguiente:

- $\sum_{i=1}^{k-1} \psi_\varepsilon(2i,2) < \frac{\delta}{2}$,
- $\sum_{i=1}^{k-1} \psi_\varepsilon(\frac{i}{k},\frac{1}{k}) < \frac{e^{-1}}{2}$,
- $2-\delta_\varepsilon > 1$,
- $\frac{1}{k} - \delta_\varepsilon > \frac{1}{2k}$.

Bajo estas condiciones, puede verificarse que $\nu_\varepsilon(2k) < \delta$, $\nu_\varepsilon(\frac{1}{2k}) > 1-\delta$ para todo $\varepsilon \le \varepsilon_0$. De aquí se deduce que la familia $(\nu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ es asintóticamente tight.

(iii) La idea será mostrar que toda sucesión de variables aleatorias $(\tau_{\varepsilon_j}{\gamma_{\varepsilon_j}}^{-1})_{j\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{j\to+\infty}\varepsilon_j = 0$ que tenga límite en distribución, converge a una exponencial con media uno. A partir de esto, podremos probar que *toda* la familia $(\tau_\varepsilon{\gamma_\varepsilon}^{-1})_{\varepsilon>0}$ converge en distribución y que el límite es una exponencial con media uno.

Supongamos entonces que $(\varepsilon_j)_{j\in N} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ es tal que $\lim_{j\to+\infty}\varepsilon_j = 0$ y la sucesión $(\tau_{\varepsilon_j}{\gamma_{\varepsilon_j}}^{-1})_{j\in\mathbb{N}}$ tiene límite en distribución. Es decir, existe π una medida de probabilidad definida en los borelianos de $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{j\to+\infty}\nu_\varepsilon(t) = \nu(t)$ para todo t punto de continuidad de ν, donde $\nu(t) = \pi\big((t,+\infty)\big)$. Entonces, se verifica

$$\nu(s+t) = \nu(s)\nu(t) \quad \forall\ t,s>0. \tag{6.53}$$

En efecto, sea $\delta > 0$ y $s,t > 0$ tales que s,t y $s+t$ son puntos de continuidad de ν. Tomemos $q_0 > 0$ tal que $s+q_0$ sea punto de continuidad de ν y $\nu(s+q_0)-\nu(s) > -\delta$. Como $\lim_{\varepsilon\to0}\delta_\varepsilon = 0$, por la primera desigualdad en (6.43) tenemos que para ε suficientemente chico se verifica

$$\nu_\varepsilon(s+q_0)\nu_\varepsilon(t) - \psi_\varepsilon(s,t) \le \nu_\varepsilon(s+t). \tag{6.54}$$

Además, por elección de q_0, vale que

$$\liminf_{j\to+\infty}\nu_\varepsilon(s+q_0) > \nu(s)-\delta.$$

Luego, tomando límite inferior en la desigualdad de arriba, resulta

$$\nu(s)\nu(t)-\delta < \nu(s+t). \tag{6.55}$$

Análogamente, se obtiene

$$\nu(s+t) < \nu(s)\nu(t)+\delta. \tag{6.56}$$

Como tomamos $\delta > 0$ arbitrario, conseguimos

$$\nu(s+t) = \nu(s)\nu(t) \tag{6.57}$$

para $s,t > 0$ tales que s,t y $s+t$ resulten puntos de continuidad de ν. Por la densidad de tales puntos y la continuidad a derecha de ν, se deduce que (6.57) vale para todo $s,t \ge 0$. Luego, $\nu(t) = e^{-at}$ para algún $a \ge 0$. Si recordamos que $\nu_\varepsilon(1) = e^{-1}$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces podemos concluir $a = 1$.

Por último, notemos que como la sucesión $(\varepsilon_j)_{j\in N} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ puede ser cualquiera que tienda a cero, por el teorema de Prohorov se tiene entonces que $\lim_{\varepsilon\to0}\nu_\varepsilon(t) = e^{-t}$ para todo $t \ge 0$. Esto prueba el caso $x = p$. De esto último y el lema (6.5.5), obtenemos

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{x\in\overline{B}_\rho(p)} |P_x(\tau_\varepsilon(\partial G') > t\gamma_\varepsilon) - e^{-t}| = 0$$

donde $B_\rho(p)$ es la dada por el mismo lema.

El teorema anterior es un resultado que caracteriza el *tiempo* en el que el proceso escapa de G'. Sin embargo, no nos dice *por dónde* lo hace. Conocer el lugar por donde el proceso escapa de G' también será de importancia si queremos ver que $\tau_\varepsilon(\partial G')$ es asintóticamente similar al tiempo de salto, τ_ε. Notemos que por construcción de G, el mínimo de U sobre $\partial G'$ se realiza en ∂^q. Luego, tiene sentido pensar que el escape de G' se dará a través de ∂^q, pues es allí donde la barrera de potencial es menor. El siguiente teorema muestra que este es el caso, si el proceso comienza en $D_p \cap G$.

Teorema 6.5.7. *Sea $\mathcal{K}$ un compacto contenido en $D_p \cap G$. Entonces,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathcal{K}} P_x\big(X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon} \notin \partial^q\big) = 0.$$

Demostración. Dividiremos la prueba en dos pasos.

(I) Para cada $r > 0$ tal que $\overline{B}_r(p) \subseteq D_p \cap G$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathcal{K}} P_x\big(\tau_\varepsilon(\partial G') < \tau\big(\overline{B}_r(p)\big)\big) = 0. \tag{6.58}$$

(II) Si tomamos r suficientemente chico

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in S_r(p)} P_x\big(X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\partial G')} \notin \partial^q\big) = 0. \tag{6.59}$$

La demostración se seguirá de estas dos afirmaciones. En efecto, si $x \in \mathcal{K}$

$$P_x\big(X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\partial G')} \notin \partial^q\big) \leq P_x\big(\tau_\varepsilon(\partial G') < \tau_\varepsilon\big(\overline{B}_r(p)\big)\big) + P_x\big(X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\partial G')} \notin \partial^q,\, \tau_\varepsilon(\partial G') \geq \tau_\varepsilon\big(\overline{B}_r(p)\big)\big).$$

Ahora, si definimos el tiempo de parada $\tau^*_\varepsilon := \begin{cases} \tau_\varepsilon\big(\overline{B}_r(p)\big) & \text{si } \tau_\varepsilon\big(\overline{B}_r(p)\big) \leq \tau_\varepsilon(\partial G') \\ +\infty & \text{en caso contrario} \end{cases}$

entonces obtenemos

$$\begin{aligned} P_x\Big(X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\partial G')} \notin \partial^q,\, \tau_\varepsilon(\partial G') \geq \tau_\varepsilon\big(\overline{B}_r(p)\big)\Big) &= \mathbb{E}_x\big(\mathbf{1}_{\{X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\partial G')} \notin \partial^q\}} \mathbf{1}_{\{\tau^*_\varepsilon < +\infty\}}\big) \\ &= \mathbb{E}_x\big(\, \mathbb{E}_x\big(\mathbf{1}_{\{X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\partial G')} \notin \partial^q\}} \mathbf{1}_{\{\tau^*_\varepsilon < +\infty\}} \big| \mathcal{F}_{\tau^*_\varepsilon}\big)\,\big). \end{aligned}$$

Por la propiedad fuerte de Markov vale

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x\big(\, \mathbb{E}_x\big(\mathbf{1}_{\{X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\partial G')} \notin \partial^q\}} \mathbf{1}_{\{\tau^*_\varepsilon < +\infty\}} \big| \mathcal{F}_{\tau^*_\varepsilon}\big)\big) &= \mathbb{E}_x\big(\mathbf{1}_{\{\tau^*_\varepsilon < +\infty\}} \mathbb{E}_{X^\varepsilon_{\tau^*_\varepsilon}}\big(\mathbf{1}_{\{X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\partial G')} \notin \partial^q\}}\big)\big) \\ &\leq \sup_{y \in S_r(p)} P_y\big(X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\partial G')} \notin \partial^q\big), \end{aligned}$$

pues la continuidad de las trayectorias implica que $X^{x,\varepsilon}_{\tau^*_\varepsilon} \in S_r(p)$ si τ^*_ε es finito. Así, para todo $x \in \mathcal{K}$ vale

$$P_x\big(X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\partial G')} \notin \partial^q\big) \leq P_x\Big(\tau_\varepsilon(\partial G') < \tau_\varepsilon\big(\overline{B}_r(p)\big)\Big) + \sup_{y\in S_r(p)} P_y\big(X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\partial G')} \notin \partial^q\big).$$

De aquí concluimos el resultado a partir de (I) y (II).

I. De acuerdo a las hipótesis Ψ, para cada $x \in \overline{B}_\rho(p)$ el sistema determinístico $X^{x,0}$ visita $B_{\frac{r}{2}}(p)$ en un tiempo finito T_x, manteniéndose a una distancia positiva d_x de $(G')^c$ durante el intervalo $[\,0, T_x\,]$. Luego, podemos definir las aplicaciones

$$\begin{aligned} T : D_p &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto T_x := \inf\{t \geq 0 : X^{x,0}_t \in B_{\frac{r}{2}}(p)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d : D_p &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ x &\longmapsto d_x := \inf\nolimits_{0\leq t\leq T_x} d\big(X^{x,0}_t, (G')^c\big). \end{aligned}$$

Además, por la continuidad del flujo determinístico $(x,t) \mapsto X^{x,0}_t$, sabemos que T es semicontinua superiormente y que d es semicontinua inferiormente. Luego, para cada compacto $\mathcal{K} \subseteq D_p \cap G$ podemos tomar las cantidades $T_\mathcal{K} = \sup_{x\in\mathcal{K}} T_x < +\infty$ y $d_\mathcal{K} = \inf_{x\in\mathcal{K}} d_x > 0$. Con esto vemos que para cada $x \in \mathcal{K}$ se tiene

$$P_x\big(\tau_\varepsilon(\partial G') < \tau_\varepsilon\big(B_r(p)\big)\big) \leq P_x\Big(\varrho_{T_x}(X^\varepsilon, X^0) \geq d_x \wedge \frac{r}{2}\Big) \leq P_x\Big(\varrho_{T_\mathcal{K}}(X^\varepsilon, X^0) \geq d_\mathcal{K} \wedge \frac{r}{2}\Big).$$

Como la acotación es uniforme en $\mathcal{K}$, conseguimos (I) aplicando (4.11).

II. Sea $r > 0$ tal que $\overline{B}_{2r}(p) \cup \overline{Q}_{2r}(z) \subseteq G'$ y la unión es disjunta, donde $Q_u(z)$ denota el cubo abierto[3] de centro en z y lado $2u$. Para $u \leq 2r$ escribimos $Q_u = Q_u(z)$ y $S_u = S_u(p)$, y definimos los tiempos de parada η_n como

$$\eta_0 = 0$$

$$\sigma_0 = \inf\{t \geq 0 : X^\varepsilon_t \in S_{2r} \cup \partial Q_{2r}\}$$

e inductivamente

$$\eta_{n+1} = \inf\{t > \sigma_n : X^\varepsilon_t \in S_r \cup \partial Q_r \cup \partial G'\}$$

$$\sigma_{n+1} = \inf\{t > \eta_{n+1} : X^\varepsilon_t \in S_{2r} \cup \partial Q_{2r}\}$$

para $n \geq 0$, con la convención de que $\inf\emptyset = +\infty$. Notemos que la condición[4] $\lim_{|x|\to+\infty} \frac{U(x)}{|x|} > 0$ implica que los tiempos de parada η_i son finitos en casi todo punto. Luego, para cada $x \in S_r$, podemos considerar la cadena de Markov $Z^{x,\varepsilon}_n = X^{x,\varepsilon}_{\eta_n}$, $n \geq 0$, con espacio de estados $S_r \cup \partial Q_r \cup \partial G'$. Si $\nu^x = \min\{n \in \mathbb{N} : Z^{x,\varepsilon}_n \in \partial G'\}$, (6.59) se convierte en

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in S_r} P_x\big(Z^\varepsilon_\nu \notin \partial^q\big) = 0. \tag{6.60}$$

[3]Tomamos entornos cúbicos de z pues facilitaran algunos de los cálculos en esta demostración.
[4]Con referencia al primer item de la demostración de la Proposición 5.5.2.

Verificamos entonces que vale (6.60) para $r > 0$ suficientemente chico.

Como ν^x es finito en casi todo punto y el evento $\{\nu^x \geq n\} = \{Z_j^{x,\varepsilon} \notin \partial G',\ \forall\ j \leq n-1\}$ pertenece a la σ-álgebra generada por $Z_1^{x,\varepsilon}, \ldots, Z_{n-1}^{x,\varepsilon}$, la propiedad de Markov para esta cadena nos brinda, para cada $x \in S_r$

$$
\begin{aligned}
P_x\big(Z_\nu^\varepsilon \in \partial G' \setminus \partial^q\big) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_x\big(Z_\nu^\varepsilon \in \partial G' \setminus \partial^q,\, \nu = n\big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_x\big(\mathbf{1}_{\{\nu \geq n\}} P_{Z_{n-1}^\varepsilon}(Z_1^\varepsilon \in \partial G' \setminus \partial^q)\big) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_x\big(\mathbf{1}_{\{\nu \geq n\}} P_{Z_{n-1}^\varepsilon}(Z_1^\varepsilon \in \partial G')\big) \sup_{z \in S_r \cup \partial Q_r} \frac{P_z(Z_1^\varepsilon \in \partial G' \setminus \partial^q)}{P_z(Z_1^\varepsilon \in \partial G')} \\
&= P_x(Z_\nu^\varepsilon \in \partial G') \sup_{z \in S_r \cup \partial Q_r} \frac{P_z(Z_1^\varepsilon \in \partial G' \setminus \partial^q)}{P_z(Z_1^\varepsilon \in \partial G')} \\
&= \sup_{z \in S_r \cup \partial Q_r} \frac{P_z(Z_1^\varepsilon \in \partial G' \setminus \partial^q)}{P_z(Z_1^\varepsilon \in \partial G')}.
\end{aligned}
$$

Alcanza con probar entonces que este último término tiende a cero si $r < \rho$ se elige adecuadamente. Para esto, si θ es el de la definición de G, sea $\chi := 2\big(\theta - U(z)\big)$, que resulta positivo por construcción. Recordemos que en la prueba de la cota superior vimos que existe una constante $K > 0$ tal que para cualquier ϕ interpolación lineal a velocidad uno entre puntos de x_1, x_2 de G, se tiene $I_{|x_2 - x_1|}(\phi) \leq K|x_2 - x_1|$. Así, si pedimos que $r > 0$ sea tal que la función de tasa de cualquier interpolación lineal entre dos puntos de G a distancia menor que $4\sqrt{d}r$ sea menor a $\frac{\chi}{24}$, podremos probar que para ε suficientemente pequeño

$$
\inf_{x \in S_r} P_x(Z_1^\varepsilon \in \partial G') \geq e^{-\frac{\Delta + \frac{\chi}{3}}{\varepsilon^2}} \qquad \text{y} \qquad \inf_{x \in Q_r} P_x(Z_1^\varepsilon \in \partial G') \geq e^{-\frac{\chi}{3\varepsilon^2}} \tag{6.61}
$$

como también

$$
\sup_{x \in S_r} P_x(Z_1^\varepsilon \in \partial G' \setminus \partial^q) \leq e^{-\frac{\Delta + \frac{2}{3}\chi}{\varepsilon^2}} \qquad \text{y} \qquad \sup_{x \in Q_r} P_x(Z_1^\varepsilon \in \partial G' \setminus \partial^q) \leq e^{-\frac{2\chi}{3\varepsilon^2}}. \tag{6.62}
$$

Esto concluirá la demostración. Mostraremos únicamente las acotaciones sobre S_r, las cotas respectivas sobre Q_r pueden realizarse de forma análoga. Para demostrar la primera desigualdad en (6.61) alcanza con construir, para un T adecuado y cada $x \in S_r$, una trayectoria $\varphi^x \in C([0,T], \mathbb{R}^d)$, con $\varphi^x(0) = x$ y función de tasa menor a $\Delta + \frac{\chi}{4}$, tal que para cualquier $\psi \in C([0,T], \mathbb{R}^d)$ con $\varrho_T(\psi, \varphi^x) < \frac{r}{2}$ se verifica que, después de alcanzar S_{2r} por primera vez, ψ escapa de G' antes de volver a S_r, sin tocar ∂Q_r. En ese caso, aplicando la cota inferior $(b)'_u$ dada en el Corolario 4.4.5 conseguimos (6.61) para ε suficientemente pequeño.

Para obtener φ^x observemos que, procediendo de manera similar a lo hecho en el Lema 6.4.1, podemos construir una trayectoria continua $\tilde{\varphi}^p \in C([0,T_0], \mathbb{R}^d)$ con $\tilde{\varphi}^p(0) = p$ y función de tasa menor a $\Delta + \frac{\chi}{6}$ que se escape de G' sin tocar ∂Q_r y, más aún, que cualquier ψ que cumpla $\varrho_{T_0}(\psi, \tilde{\varphi}^p) < \frac{r}{2}$ haga lo mismo. Sean (t_1, x_1) el tiempo y la posición en que $\tilde{\varphi}^p$ visita S_{2r} por última vez. Para cada $x \in S_r$, φ^x consistirá de una interpolación lineal que una a x con p, seguida de otra que una p con x_1. Desde allí, φ^x continuará la trayectoria descripta por $\tilde{\varphi}^p$ hasta salir de G'. Como la función de tasa de cada interpolación es menor a $\frac{\chi}{24}$, tomando $T = T_0 - t_1 + 3r$ vemos que φ^x así construida verifica todo lo que buscamos. Con esto obtenemos (6.61).

El argumento para mostrar la primera desigualdad en (6.62) es análogo, valiéndonos esta vez de la cota superior $(c)'_u$ del Corolario 4.4.5. Si notamos $\Gamma := S_r \cup \partial Q_r \cup \partial G'$, utilizando la propiedad fuerte de Markov para el tiempo de parada σ_0, la continuidad de las trayectorias de X^ε muestra que

$$\sup_{x \in S_r} P_x\big(Z_1^\varepsilon \in \partial G' \setminus \partial^q\big) \leq \sup_{y \in S_{2r}} P_y\big(X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\Gamma)} \in \partial G' \setminus \partial^q\big).$$

Ahora, dado $T_0^* > 0$, podemos acotar el miembro derecho de la desigualdad por

$$\sup_{y \in S_{2r}} P_y\big(X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\Gamma)} \in \partial G' \setminus \partial^q,\, \tau_\varepsilon(\Gamma) \leq T_0^*\big) + \sup_{y \in S_{2r}} P_y\big(\tau_\varepsilon(\Gamma) > T_0^*\big). \tag{6.63}$$

Para tratar con el primer sumando, tomemos $c_0 = \Delta + \frac{3}{4}\chi$ y observemos que si se define $F := \{\varphi \in C([0,T_0^*], \mathbb{R}^d) : \varphi(0) \in S_{2r},\, I_{T_0^*}(\varphi) \leq c_0\}$ entonces para cada $\varphi \in F$ y $t \in [0, T_0^*]$, $\varphi(t)$ debe estar a distancia al menos r de $\partial G' \setminus \partial^q$. En efecto, si no fuera así tendríamos $t_1^* \leq T_0^*$ y $x_1^* \in \partial G' \setminus \partial^q$ tal que $|\varphi(t_1^*) - x_1^*| < r$, y en ese caso podríamos, luego de interpolar p con $\varphi(0)$, seguir la trayectoria de φ hasta $\varphi(t_1^*)$ y por último interpolar a x_1^*, obtener una función ψ que une p con $\partial G' \setminus \partial^q$ en un tiempo finito y con función de tasa menor a $\Delta + \frac{5}{6}\chi$. Veamos entonces que esto último no puede suceder. Usando la identidad $|u - v|^2 = |u + v|^2 - 4\langle u, v\rangle$ para $u, v \in \mathbb{R}^d$ obtenemos

$$\begin{aligned}
I_T(\psi) &= \frac{1}{2}\int_0^T \big|\dot{\psi}(s) - b\big((\psi(s)\big)\big|^2\, ds \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \big|\dot{\psi}(s) + b\big((\psi(s)\big)\big|^2\, ds - 2\int_0^T \big\langle \dot{\psi}(s), b\big(\psi(s)\big)\big\rangle\, ds \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \big|\dot{\psi}(s) + b\big((\psi(s)\big)\big|^2\, ds + 2\int_0^T \big\langle \dot{\psi}(s), \nabla U\big(\psi(s)\big)\big\rangle\, ds \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \big|\dot{\psi}(s) + b\big((\psi(s)\big)\big|^2\, ds + 2\big(U\big(\psi(T)\big) - U\big(\psi(0)\big)\big) \\
&\geq 2\big(U\big(\psi(T)\big) - U\big(\psi(0)\big)\big).
\end{aligned}$$

Como $\psi(0) = p$ y $\psi(T) \in \partial G' \setminus \partial^q$, vemos que la función de tasa de ψ debe ser mayor a $2\big(\theta - U(p)\big) = \Delta + \chi$, lo cual contradice la construcción de ψ. Luego, obtenemos

$$\sup_{y \in S_{2r}} P_y\big(X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\Gamma)} \in \partial G' \setminus \partial^q,\, \tau_\varepsilon(\Gamma) \leq T_0^*\big) \leq \sup_{y \in S_{2r}} P_y\big(\varrho_{T_0^*}\big(X^\varepsilon, \mathbb{F}^y_{T_0^*}(c_0)\big) \geq r\big). \tag{6.64}$$

Con respecto al segundo sumando en (6.63), la proposición a continuación muestra que podemos elegir T_0^* de forma tal que

$$\sup_{y\in S_{2r}} P_y\big(\tau_\varepsilon(\Gamma) > T_0^*\big) \le e^{-\frac{\Delta+\chi}{\varepsilon^2}}.$$

Con esto y (6.64), aplicando $(c)'_u$ del Corolario 4.4.5 obtenemos (6.62) para ε suficientemente chico. Esto concluye la demostración del teorema. □

Proposición 6.5.8. *Sea $\rho > 0$ tal que $\overline{B}_\rho(p)\cup\overline{Q}_\rho(z) \subseteq G'$. Si $\mathcal{K}_\rho := \overline{G'}\setminus\big(B_\rho(p)\cup Q_\rho(z)\big)$ entonces existen $c > 0$, $T_0 > 0$ tales que para cualquier ε suficientemente chico vale*

$$\sup_{x\in\mathcal{K}_\rho^\circ} P_x\big(\tau_\varepsilon(\partial\mathcal{K}_\rho) > T\big) \le e^{-\frac{c(T-T_0)}{\varepsilon^2}}.$$

Demostración. Tomemos $\delta > 0$ tal que el conjunto $(\mathcal{K}_\rho)_{(\overline{\delta})} = \{y \in \mathbb{R}^d : d(y,\mathcal{K}_\rho) \le \delta\}$ no contenga a ninguno de los tres puntos críticos de U: p, q y z. Como para cualquier condición inicial el sistema determinístico es atraído hacia p, q o z, podemos definir para $x \in (\mathcal{K}_\rho)_{(\overline{\delta})}$ el tiempo $\tau_x = \min\{t \ge 0 : X^{x,0} \notin (\mathcal{K}_\rho)_{(\overline{\delta})}\}$. La aplicación $x \mapsto \tau_x$ es semicontinua superiormente y, por lo tanto, existe $T_0 = \sup_{x\in(\mathcal{K}_\rho)_{(\overline{\delta})}} \tau_x < +\infty$. En consecuencia, el conjunto de trayectorias

$$F = \big\{\varphi \in C([0,T],\mathbb{R}^d) : \varphi(t) \in (\mathcal{K}_\rho)_{(\frac{\overline{\delta}}{2})} \text{ para todo } t \in [0,T_0]\big\}$$

es cerrado y no contiene ninguna trayectoria del sistema determinístico. Con esto y $(a)_u$ del Corolario 4.4.5, concluimos que $A := \inf_{\varphi\in F} I_{T_0}(\varphi) > 0$. En particular, si φ y ψ son tales que $I_{T_0}(\varphi) \le \frac{A}{2}$ y $\psi(t) \in \mathcal{K}_\rho^\circ$ para todo $0 \le t \le T_0$, entonces se tiene $\varrho_{T_0}(\varphi,\psi) \ge \frac{\delta}{2}$. Por $(c)'_u$ del Corolario 4.4.5, dado $\gamma > 0$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$P_x(\tau_\varepsilon(\partial\mathcal{K}_\rho) > T_0) \le P_x\left(\varrho_{T_0}\left(X^\varepsilon, \mathbb{F}^x_{T_0}\left(\frac{A}{2}\right)\right) \ge \frac{\delta}{2}\right) \le e^{-\frac{\frac{A}{2}-\gamma}{\varepsilon^2}},$$

para todo $x \in \mathcal{K}_\rho^\circ$, $\varepsilon \le \varepsilon_0$. Utilizando la propiedad de Markov obtenemos

$$\begin{aligned} P_x(\tau_\varepsilon(\partial\mathcal{K}_\rho) > (n+1)T_0) &= \mathbb{E}_x\big(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon(\partial\mathcal{K}_\rho)>nT_0\}} P_{X^\varepsilon_{nT_0}}(\tau_\varepsilon(\partial\mathcal{K}_\rho) > T_0)\big) \\ &\le P_x(\tau_\varepsilon(\partial\mathcal{K}_\rho) > nT_0) \sup_{y\in\mathcal{K}_\rho^\circ} P_y(\tau_\varepsilon(\partial\mathcal{K}_\rho) > T_0) \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos que $X^{x,\varepsilon}_{nT_0} \in \mathcal{K}_\rho^\circ$ si $x \in \mathcal{K}_\rho^\circ$ y $\tau^x_\varepsilon(\partial\mathcal{K}_\rho) > nT_0$. Así, por inducción conseguimos

$$P_x(\tau_\varepsilon(\partial\mathcal{K}_\rho) > T) \le P_x\left(\tau_\varepsilon(\partial\mathcal{K}_\rho) > \left[\frac{T}{T_0}\right]T_0\right) \le \Big[\sup_{y\in\mathcal{K}_\rho^\circ}(\tau_\varepsilon(\partial\mathcal{K}_\rho) > T_0)\Big]^{[T/T_0]} \le e^{-\frac{(\frac{T}{T_0}-1)(\frac{A}{2}-\gamma)}{\varepsilon^2}}$$

para todo $x \in \mathcal{K}_\rho^\circ$. Tomando $c = \frac{\frac{A}{2}-\gamma}{T_0}$ obtenemos el resultado. □

6.6. Distribución asintótica del tiempo de salto

Para culminar este capítulo, aplicaremos los resultados obtenidos en la sección anterior para el tiempo de escape de G' para caracterizar el límite en distribución del tiempo de salto normalizado $\frac{\tau_\varepsilon}{\beta_\varepsilon}$. Nuestra principal preocupación será mostrar que el tiempo de escape de G' y el tiempo de salto son asintóticamente similares. Una vez que hayamos visto esto, la pérdida de memoria asintótica de este último se seguirá fácilmente.

Claramente, la continuidad de las trayectorias implica $\tau_\varepsilon^x(\partial G') < \tau_\varepsilon^x$ para todo $\varepsilon > 0$ y $x \in G'$. El siguiente lema muestra que, de hecho, la diferencia entre ambos no es importante cuando ε tiende a cero.

Lema 6.6.1. *Existe una constante positiva T_0 tal que, para todo $x \in D_p \cap G$,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P_x(\tau_\varepsilon > \tau_\varepsilon(\partial G') + T_0) = 0. \tag{6.65}$$

Demostración. En la demostración del Teorema 6.4.4 vimos que existe $T_0 > 0$ tal que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{y \in \partial^q} P_y(\tau_\varepsilon > T_0) = 0. \tag{6.66}$$

Por otro lado, el Teorema 6.5.7 muestra que para $x \in D_p \cap G$ se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P_x(X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\partial G')} \notin \partial^q) = 0. \tag{6.67}$$

Con todo esto, si $x \in D_p \cap G$ tenemos

$$\begin{aligned}
P_x(\tau_\varepsilon > \tau_\varepsilon(\partial G') + T_0) &= \mathbb{E}_x\Big(\, \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon > \tau_\varepsilon(\partial G') + T_0\}} | \mathcal{F}_{\tau_\varepsilon(\partial G')})\Big) \\
&= \mathbb{E}_x\Big(\, \mathbb{E}_{X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\partial G')}}(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon > T_0\}})\Big) \\
&= \mathbb{E}_x\Big(\, (\mathbf{1}_{\{X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\partial G')} \in \partial^q\}} + \mathbf{1}_{\{X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\partial G')} \notin \partial^q\}})\, \mathbb{E}_{X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\partial G')}}(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon > T_0\}})\Big) \\
&\leq \sup_{y \in \partial^q} P_y(\tau_\varepsilon > T_0) + P_x(X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\partial G')} \notin \partial^q)
\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. □

Como consecuencia de este lema se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 6.6.2. *Sea $\rho > 0$ dado por el Lema 6.5.5. Entonces*

(i) $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\beta_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon} = 1$,

(ii) $\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \overline{B}_\rho(p)} |P_x(\tau_\varepsilon(\partial G') > t\beta_\varepsilon) - e^{-t}| = 0$.

Demostración. (i) Por continuidad de las trayectorias tenemos

$$P_p(\tau_\varepsilon(\partial G') > \beta_\varepsilon) \leq P_p(\tau_\varepsilon > \beta_\varepsilon) = e^{-1},$$

de donde concluimos $\gamma_\varepsilon \leq \beta_\varepsilon$ y, en particular, que $\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\beta_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon} \leq 1$. Supongamos que $\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\beta_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon} > 1$. Entonces, existe $\lambda_0 > 0$ y una sucesión $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{j\to 0} \varepsilon_j = 0$ tal que $\beta_{\varepsilon_j} > (1+\lambda_0)\gamma_{\varepsilon_j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Luego, si T_0 es la constante del lema anterior, resulta

$$
\begin{aligned}
P_p(\tau_{\varepsilon_j} > \beta_{\varepsilon_j}) &\leq P_p(\tau_{\varepsilon_j} > (1+\lambda_0)\gamma_{\varepsilon_j}) \\
&\leq P_p\big(\tau_{\varepsilon_j} > (1+\lambda_0)\gamma_{\varepsilon_j}\,,\, \tau_{\varepsilon_j} \leq \tau_{\varepsilon_j}(\partial G') + T_0\big) + P_p\big(\tau_{\varepsilon_j} > \tau_{\varepsilon_j}(\partial G') + T_0\big) \\
&\leq P_p\big(\tau_{\varepsilon_j}(\partial G') > (1+\lambda_0)\gamma_{\varepsilon_j} - T_0\,,\, \tau_{\varepsilon_j} \leq \tau_{\varepsilon_j}(\partial G') + T_0\big) + P_p\big(\tau_{\varepsilon_j} > \tau_{\varepsilon_j}(\partial G') + T_0\big) \\
&\leq P_p\left(\tau_{\varepsilon_j}(\partial G') > \left(1+\lambda_0 - \frac{T_0}{\gamma_{\varepsilon_j}}\right)\gamma_{\varepsilon_j}\right) + P_p\big(\tau_{\varepsilon_j} > \tau_{\varepsilon_j}(\partial G') + T_0\big)
\end{aligned}
$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Como $\lim_{j\to+\infty} \varepsilon_j = 0$, para $j \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande vale $1+\lambda_0 - \frac{T_0}{\gamma_{\varepsilon_j}} > 1 + \frac{\lambda_0}{2}$. Así obtenemos

$$e^{-1} = P_p(\tau_{\varepsilon_j} > \beta_{\varepsilon_j}) \leq P_p\left(\tau_{\varepsilon_j}(\partial G') > \left(1+\frac{\lambda_0}{2}\right)\gamma_{\varepsilon_j}\right) + P_p\big(\tau_{\varepsilon_j} > \tau_{\varepsilon_j}(\partial G') + T_0\big), \quad (6.68)$$

para $j \in \mathbb{N}$ es suficientemente grande. Además, por (iii) del Teorema 6.5.4 y el Lema (6.6.1), tenemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_p\left(\tau_\varepsilon(\partial G') > \left(1+\frac{\lambda_0}{2}\right)\gamma_\varepsilon\right) = e^{-(1+\frac{\lambda_0}{2})} \qquad \text{y} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} P_p\big(\tau_\varepsilon > \tau_\varepsilon(\partial G') + T_0\big) = 0.$$

Tomando límite en (6.68) con $j \to +\infty$, arribamos a la contradicción $e^{-1} \leq e^{-(1+\frac{\lambda_0}{2})}$. Luego, $\limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\beta_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon} \leq 1$ y, como $\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\beta_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon} \leq 1$, concluimos $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\beta_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon} = 1$.

(ii) Por el item (iii) del Lema 6.6.1 tenemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_p(\tau_\varepsilon(\partial G') > t\gamma_\varepsilon) = e^{-t}.$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\beta_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon} = 1$, por propiedades de la convergencia en distribución conseguimos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_p(\tau_\varepsilon(\partial G') > t\beta_\varepsilon) = e^{-t}.$$

Puede probarse, análogamente a lo hecho para el Lema 6.5.5, que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x,\, x' \in \overline{B}_\rho(p)} \sup_{t>0} |P_x(\, \tau_\varepsilon(\partial G') > t\beta_\varepsilon) - P_{x'}(\, \tau_\varepsilon(\partial G') > t\beta_\varepsilon)| = 0, \qquad (6.69)$$

de donde se deduce el resultado. $\square$

Contando con el lema y el corolario previos, deducimos en el siguiente teorema la pérdida de memoria asintótica del tiempo de salto τ_ε.

Teorema 6.6.3. *Para cada $x \in D_p$, se tiene*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_x(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon) = e^{-t} \quad \forall\, t > 0. \tag{6.70}$$

Más aún, la convergencia es uniforme sobre compactos de D_p para cada $t > 0$.

Demostración. Haremos la demostración en tres pasos.

1. Verificamos primero que el enunciado es válido en el caso $x = p$. Sean $t > 0$, T_0 la constante positiva del Lema 6.6.1 y $0 < \delta < 1$. Si ε es lo suficientemente chico como para garantizar $T_0 < \frac{t\delta}{2}\beta_\varepsilon$ entonces

$$P_p(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon) \le P_p\big(\tau_\varepsilon(\partial G') > (1-\delta)t\beta_\varepsilon\big) + P_p\big(\tau_\varepsilon(\partial G') \le (1-\delta)t\beta_\varepsilon\, ,\ \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon\big)$$

$$\le P_p\big(\tau_\varepsilon(\partial G') > (1-\delta)t\beta_\varepsilon\big) + P_p\big(\tau_\varepsilon > \tau_\varepsilon(\partial G') + T_0\big).$$

Por el Lema 6.6.1 y el Corolario 6.6.2, concluimos

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} P_p(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon) \le e^{-(1-\delta)t}. \tag{6.71}$$

Ahora, como tomamos $0 < \delta < 1$ arbitrario, vale

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} P_p(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon) \le e^{-t}. \tag{6.72}$$

Por último, notemos que

$$P_p(\tau_\varepsilon(\partial G') > t\beta_\varepsilon) \le P_p(\tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon),$$

de donde obtenemos

$$e^{-t} \le \liminf_{\varepsilon\to 0} P_p(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon). \tag{6.73}$$

Luego, hemos probado

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_p(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon) = e^{-t}. \tag{6.74}$$

2. El próximo paso será ver la convergencia uniforme sobre una bola de centro en p y radio suficientemente pequeño. Esto se deduce del caso $x = p$ y de que existe $\rho > 0$ tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x,\, x' \in \overline{B}_\rho(p)} \sup_{t>0} |P_x(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon) - P_{x'}(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon)| = 0. \tag{6.75}$$

La demostración de (6.75) es análoga a la del Lema 6.5.5. Luego, tenemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{y \in \overline{B}_\rho(p)} |P_y(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon) - e^{-t}| = 0. \tag{6.76}$$

3. Por último, probamos la convergencia uniforme sobre compactos de D_p. Dado un compacto $\mathcal{K} \subseteq D_p$, sabemos que existe un tiempo finito $T_{\mathcal{K}}$ tal que, para todo $x \in \mathcal{K}$ el sistema determinístico $X^{x,0}$ visita $B_{\frac{\varrho}{2}(p)}$ antes de tiempo $T_{\mathcal{K}}$, manteniéndose a una distancia positiva $d_{\mathcal{K}}$ de ∂D_p durante el intervalo $[\,0, T_{\mathcal{K}}\,]$. Luego, la estimación (4.11) implica que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathcal{K}} P_x(\, \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) > T_{\mathcal{K}}) = 0. \tag{6.77}$$

Así, si $x \in \mathcal{K}$ y $t > 0$ tenemos

$$P_x(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon) = P_x(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon\, ,\, \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) \le T_{\mathcal{K}}) + P_x(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon\, ,\, \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) > T_{\mathcal{K}}),$$

donde el segundo término de la derecha tiende a cero uniformemente en $\mathcal{K}$ por (6.77). Veamos que $P_x(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon\, ,\, \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) \le T_{\mathcal{K}})$ tiende uniformemente en $\mathcal{K}$ a e^{-t}. Esto concluirá la demostración.

Tomemos $\varepsilon_0 > 0$ tal que $T_{\mathcal{K}} < t\beta_\varepsilon$ para todo $\varepsilon \le \varepsilon_0$. Luego, para $\varepsilon \le \varepsilon_0$ tenemos por un lado

$$\begin{aligned}
P_x\big(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon\, ,\, \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) \le T_{\mathcal{K}}\big) &\le P_x\big(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon - T_{\mathcal{K}} + \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)\big) \\
&= \mathbb{E}_x\big(\, \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon - T_{\mathcal{K}} + \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p))\}} | \mathcal{F}_{\tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p))})\big) \\
&\le \mathbb{E}_x\big(\, \mathbb{E}_{X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p))}}(\mathbf{1}_{\{\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon - T_{\mathcal{K}}\}})\big) \\
&\le \sup_{y \in \overline{B}_\rho(p)} P_y(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon - T_{\mathcal{K}}).
\end{aligned}$$

Por otro lado, definiendo el tiempo de parada $\tau^*_\varepsilon := \begin{cases} \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) & \text{si } \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) \le T_{\mathcal{K}} \\ +\infty & \text{en caso contrario} \end{cases}$

vemos que para $\varepsilon \le \varepsilon_0$ vale

$$\begin{aligned}
P_x\big(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon\, ,\, \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) \le T_{\mathcal{K}}\big) &\ge P_x\big(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon + \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p))\, ,\, \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) \le T_{\mathcal{K}}\big) \\
&= \mathbb{E}_x\big(\, \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon + \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p))\}} \mathbf{1}_{\{\tau^*_\varepsilon < +\infty\}} | \mathcal{F}_{\tau^*_\varepsilon})\big) \\
&= \mathbb{E}_x\big(\mathbf{1}_{\{\tau^*_\varepsilon < +\infty\}}\, \mathbb{E}_{X^\varepsilon_{\tau^*_\varepsilon}}(\mathbf{1}_{\{\tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon\}})\big) \\
&\ge \inf_{z \in \mathcal{K}} P_z(\, \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(p)) \le T_{\mathcal{K}}) \inf_{y \in \overline{B}_\rho(p)} P_y(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Como ambas acotaciones son uniformes en $\mathcal{K}$, recordando (6.76) y (6.77) concluimos

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \mathcal{K}} |P_x(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon) - e^{-t}| = 0. \tag{6.78}$$

$\square$

Parte III

Capítulo 7

Un modelo con Blow-up

7.1. Introducción

En la segunda parte hemos estudiado el comportamiento del sistema estocástico dado por la ecuación

$$dX_t^{x,\varepsilon} = b(X_t^{x,\varepsilon})dt + \varepsilon\, dW_t, \quad 0 \leq t < +\infty, \tag{7.1}$$

donde b es un campo globalmente Lipschitz de la forma $b = -\nabla U$ con U un potencial de doble pozo. En esta tercera parte modificaremos el sistema dinámico en cuestión cambiando b por un campo que sólo satisfaga una condición de Lipschitz *local*. En concreto, fijados $p > 1$ y $0 < h \leq 1$ consideraremos el sistema

$$dX_t^{\varepsilon} = b(X_t^{\varepsilon})dt + \varepsilon\, dW_t, \tag{7.2}$$

con $b = -\nabla\phi$ para ϕ el potencial dado por

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \frac{2}{h}\Big(\frac{|x_d|^{p+1}}{p+1} - \frac{{x_d}^2}{2}\Big) \tag{7.3}$$

donde A es la matriz

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ viene definida por $g(s) = |s|^{p-1}s - s$, entonces b también puede escribirse como

$$b(x) = -Ax + \frac{2}{h}g(x_d)e_d \tag{7.4}$$

donde e_d es el d-ésimo vector canónico. El sistema

$$\dot{u}(t) = b(u(t)) \tag{7.5}$$

corresponde a una discretización de la ecuación en derivadas parciales

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{en } (0,1)\times[0,T), \\ u_x(1,t) = g(u(1,t)) & \text{en } [0,T), \\ u_x(0,t) = 0 & \text{en } [0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & \text{en } [0,1]. \end{cases} \tag{7.6}$$

La falta de una condición de Lipschitz global modifica el comportamiento del sistema determinístico en (7.5) sustancialmente: la condición local de Lipschitz no es suficiente para garantizar la existencia de soluciones globalmente definidas para cualquier condición inicial. De hecho, como veremos más adelante, para condiciones iniciales apropiadas el sistema determinístico *explota* en un tiempo finito, i.e., la solución X se encuentra definida en un intervalo $[0,\tau)$ con $\tau < +\infty$ y satisface $\lim_{t\to\tau^-} |X_t| = +\infty$. Este fenómeno es conocido como *explosión* o *blow-up*. Al agregar la presencia de ruido, la existencia de blow-up introduce algunos cambios en el comportamiento del sistema estocástico con respecto al caso del potencial de doble pozo. En efecto, comenzando cerca del origen y para ε suficientemente pequeño, el proceso evoluciona de la siguiente manera:

(a) Siendo el origen un equilibrio asintóticamente estable del sistema determinístico, el campo b atrae al proceso hacia él. Una vez cerca del origen, la acción de b se vuelve despreciable con lo cual el proceso resulta alejado del origen por acción del ruido. Encontrándose apartado del origen, el campo b predomina por sobre el ruido y logra que el proceso sea atraído hacia el equilibrio para comenzar todo nuevamente: se observan así numerosos intentos por escapar del dominio de atracción del origen, seguidos de una fuerte atracción hacia este último.

(b) Eventualmente, luego de muchos intentos, el proceso logra escaparse del dominio de atracción del origen para llegar a la región de blow-up.

(c) Una vez en la región de blow-up, el proceso tarda un tiempo finito en explotar.

Al igual que en la segunda parte, se espera que el *tiempo de explosión* para el proceso comenzando en el dominio de atracción del origen muestre pérdida de memoria asintótica. El objetivo en esta última parte será formalizar esta descripción, tal como lo hemos hecho en el caso del potencial de doble pozo, como aplicación de la teoría de Freidlin y Wentzell en un nuevo e interesante contexto: las explosiones en sistemas dinámicos.

Durante este capítulo nos dedicaremos a estudiar algunas características generales de las soluciones de (7.5). El comportamiento de las soluciones no negativas de (7.6) y (7.5) fue estudiado en [1]. Sin embargo, como la presencia de ruido en nuestro modelo impide que el sistema estocástico mantenga siempre todas sus coordenadas no negativas, deberemos analizar también el comportamiento de las soluciones de (7.5) que cambian de signo. Comenzamos por introducir algunas nociones de la teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias que nos serán necesarias para describir el comportamiento del sistema determinístico.

7.2. Flujos y conjuntos límite.

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$\dot{X} = b(X) \tag{7.7}$$

con b globalmente Lipschitz. El teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias nos permite definir la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^{d+1} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ dada por $\varphi(t,x) = X_t^x$, donde X^x es la única solución de la ecuación con condición inicial $X^x(0) = 0$. En capítulos anteriores hemos trabajado con esta aplicación, a la que denominamos *flujo determinístico*, valiéndonos de algunas de sus propiedades. Ahora nos gustaría definir una aplicación similar para el caso en que b sea localmente Lipschitz y las soluciones a (7.7) no estén definidas para todo tiempo. Dicha aplicación puede construirse y es lo que constituye un *flujo* en el sentido de la definición que damos a continuación. Optamos por dar la definición abstracta de flujo pues a partir de ella nos resultará más sencillo probar algunas propiedades del mismo.

Definición 7.2.1. Para cada $x \in \mathbb{R}^d$ sea $J(x) := \big(t^-(x), t^+(x)\big)$ un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ con $0 \in J(x)$. Consideremos además el conjunto

$$\Lambda := \bigcup_{x\in\mathbb{R}^d} J(x) \times \{x\}.$$

Decimos que una aplicación

$$\varphi : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

es un *flujo* si satisface las siguientes propiedades:

(i) Λ es abierto en $\mathbb{R}^{d+1}$

(ii) $\varphi : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^d$ es continua

(iii) $\varphi(0,\cdot) = id_{\mathbb{R}^d}$

(iv) Para cada $x \in \mathbb{R}^d$, $s \in J(x)$ y $t \in J(\varphi(s,x))$ se tiene que $s+t \in J(x)$ y $\varphi(t,\varphi(s,x)) = \varphi(s+t,x)$.

Para cada $x \in \mathbb{R}^d$ llamaremos a $t^-(x)$ y $t^+(x)$ los *tiempos de escape negativo* y *positivo de x*, respectivamente. Si $\Lambda = \mathbb{R}^{d+1}$, es decir, si $t^-(x) = -\infty$ y $t^+(x) = +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$, entonces diremos que φ es un *flujo global*. Si para cada $x \in \mathbb{R}^d$ en vez de tener un intervalo abierto $J(x)$ tenemos un intervalo de la forma $\tilde{J}(x) := [\,0, t^+(x))$ y pedimos que

$$\tilde{\Lambda} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^d} \tilde{J}(x) \times \{x\}$$

sea un abierto en $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^d$, una aplicación

$$\varphi : \tilde{\Lambda} \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

que satisfaga las propiedades anteriores se dice un *semiflujo*.

Notación y aclaraciones.

- Si φ es un flujo, frecuentemente notaremos

$$t \cdot x := \varphi(t,x) \qquad \forall\,(t,x) \in \Lambda.$$

- Para cada $x \in \mathbb{R}^d$, diremos que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_x : J(x) &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ t &\longmapsto t \cdot x \end{aligned}$$

  es la *línea de flujo a través de x*.

- Llamaremos a los conjuntos

$$\gamma^+(x) := \{t \cdot x : 0 \le t < t^+(x)\}$$

$$\gamma^-(x) := \{t \cdot x : t^-(x) < t \le 0\}$$

$$\gamma(x) := \gamma^+(x) \cup \gamma^-(x)$$

  la *semiórbita positiva*, *semiórbita negativa* y la *órbita a través de x*, respectivamente.

El siguiente teorema muestra que toda ecuación diferencial ordinaria de la forma de (7.7) induce un flujo si b es localmente Lipschitz.

Teorema 7.2.2. *Sea b localmente Lipschitz y sea*

$$\Lambda(b) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^d} J_x \times \{x\},$$

donde J_x denota el intervalo maximal de existencia de la solución de la ecuación

$$\dot{X^x} = b(X^x)$$

con condición inicial $X^x(0) = x$. Entonces, la aplicación $\varphi : \Lambda(b) \longrightarrow \mathbb{R}^d$ definida por $\varphi(t,x) = X_t^x$ resulta un flujo.

A continuación mostramos algunas propiedades de los tiempos de escape que nos serán útiles para estudiar el comportamiento de las soluciones de (7.5).

Proposición 7.2.3. *Sea φ un flujo. Entonces las aplicaciones*

$$t^+, -t^- : \mathbb{R}^d \longrightarrow (\,0, +\infty\,]$$

son semicontinuas inferiormente.

Demostración. Sea $(t,x) \in \Lambda$. Como Λ es abierto, existen un entorno U de x y $\varepsilon > 0$ tales que $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \times U \subseteq \Lambda$. Se sigue que $t^-(y) \le t - \varepsilon < t < t + \varepsilon \le^+ (y)$ para todo $y \in U$. En particular, esto muestra que los conjuntos $\{t^+ > \alpha\}$ y $\{t^- < \alpha\}$ son abiertos para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. $\square$

Observación 7.2.4. De la demostración se sigue que si φ es un semiflujo, entonces t^+ es semicontinua inferiormente.

Teorema 7.2.5. *Sea φ un semiflujo en $\mathbb{R}^d$. Si $t^+(x) < +\infty$ entonces para cualquier compacto $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^d$ existe un $t_{\mathcal{K}} \in [\,0, t^+(x))$ tal que $t \cdot x \notin \mathcal{K}$ para todo $t > t_{\mathcal{K}}$.*

Demostración. Supongamos que $t^+(x) < +\infty$ y sea $\mathcal{K}$ un compacto tal que existe una sucesión $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ con $t_j \nearrow t^+(x)$ y $t_j \cdot x \in K$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Luego, la compacidad de $\mathcal{K}$ nos asegura que la sucesión $(t_j \cdot x)_{j\in\mathbb{N}}$ tiene un punto de acumulación $y \in \mathcal{K}$. Por la semicontinuidad inferior de t^+, existen $\delta > 0$ y un entorno V de y tales que $t^+(z) > \delta$ para todo $z \in V$. Además, como y es punto de acumulación de $(t_j \cdot x)_{j\in\mathbb{N}}$ y $t_j \nearrow t^+(x)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $t_k \cdot x \in V$ y $t_k + \delta > t^+(x)$. Por las propiedades del flujo se tiene que

$$t^+(x) \geq t^+(t_k \cdot x) + t_k > \delta + t_k > t^+(x)$$

lo que resulta una contradicción. $\square$

Estamos interesados en describir precisamente el comportamiento asintótico de las soluciones de (7.5). Para ello, nos es necesario introducir las nociones de *conjunto límite* y *conjunto invariante* que figuran a continuación.

Definición 7.2.6. Para cada $x \in \mathbb{R}^d$ definimos el ω-*límite* de x por

$$\omega(x) := \bigcap_{t\geq 0} \overline{\gamma^+(t \cdot x)}, \tag{7.8}$$

con la convención de que $\gamma^+(t \cdot x) = \emptyset$ si $t > t^+(x)$.

Definición 7.2.7. Sea φ un flujo. Decimos que un conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^d$ es *positivamente invariante* si $\gamma^+(M) \subseteq M$, i.e., si $m \in M$ implica que $\gamma^+(m) \subseteq M$. Análogamente, M se dice *negativamente invariante* si $\gamma^-(M) \subseteq M$.

En la proposición y el teorema siguientes se mencionan algunas propiedades generales de los ω-*límites*.

Proposición 7.2.8. *Dado un semiflujo $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *Si $t^+(x) < +\infty$, entonces $\omega(x)$ es vacío.*

(ii) *Para cada $x \in \mathbb{R}^d$ con $t^+(x) = +\infty$ tenemos*

$$\omega(x) = \{z \in \mathbb{R}^d : \text{ existe } (t_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ tal que } t_k \to +\infty \text{ y } t_k \cdot x \to z\}.$$

(iii) *$\omega(x)$ es cerrado y positivamente invariante para todo $x \in \mathbb{R}^d$.*

Demostración. (i) Es inmediato de la definición de $\omega(x)$.

(ii) Si $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es tal que $t_k \to +\infty$ y $t_k \cdot x \to z$, entonces $z \in \overline{\gamma^+(x)}$. Como además $z = \lim_{k\to+\infty}(t_k - t)\cdot(t\cdot x)$, tenemos que $z \in \overline{\gamma^+(t\cdot x)}$ para todo $t \geq 0$. Luego, resulta $z \in \omega(x)$.

Recíprocamente, supongamos que $z \in \omega(x)$. Entonces, $z \in \overline{\gamma^+(t\cdot x)}$ para todo $t \geq 0$ y, así, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $t_k > k$ tal que $t_k \cdot x \in B(z, \frac{1}{k})$. De aquí se sigue que $t_k \to +\infty$ y que $t_k \cdot x \to z$.

(iii) $\omega(x)$ es cerrado por ser intersección de cerrados. Además, por definición tenemos que $\gamma^+(t\cdot x)$ es positivamente invariante para todo $t \geq 0$. Se sigue que $\overline{\gamma^+(t\cdot x)}$ también es positivamente invariante[1] para todo $t \geq 0$ y como intersección de conjuntos positivamente invariantes es positivamente invariante, concluimos la afirmación. □

Teorema 7.2.9. *Si $\gamma^+(x)$ es acotado, entonces $\omega(x)$ es un conjunto no vacío, compacto, conexo y para todo entorno U de $\omega(x)$ existe $t_U \geq 0$ tal que $t\cdot x \in U$ para todo $t \geq t_U$.*

Demostración. Como $\gamma^+(x)$ es acotado, por el Teorema 7.2.5 tenemos que $t^+(x) = +\infty$. En consecuencia, $\gamma^+(t\cdot x) \neq \emptyset$ para todo $t \geq 0$. Como para todo $0 \leq t \leq s$ se tiene que $\gamma^+(s\cdot x) \subseteq \gamma^+(t\cdot x)$, se sigue que $\overline{\gamma^+(t\cdot x)}$ es no vacío y compacto para todo $t \geq 0$. Además, la familia $(\overline{\gamma^+(t\cdot x)}_{t\geq 0}$ tiene la propiedad de intersección finita. Concluimos que $\omega(x) = \bigcap_{t\geq 0}\overline{\gamma^+(t\cdot x)}$ es no vacío y compacto.

Sea ahora U un entorno de $\omega(x)$ y sea $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$ y $t_k \cdot x \notin U$ para todo k. Por la compacidad de $U^c \cap \overline{\gamma^+(x)}$, existe una subsucesión $(t_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ y un $z \in U^c$ tal que $t_{k_j}\cdot x \to z$. Por (ii) de la Proposición 7.2.8, tenemos que $\omega(x) \cap U^c \neq \emptyset$ lo cual es absurdo. Luego, existe $t_U \geq 0$ tal que $t\cdot x \in U$ para todo $t \geq t_U$.

Por último, supongamos que $\omega(x)$ es disconexo. Entonces, tenemos la escritura $\omega(x) = \omega_1 \cup \omega_2$ donde ω_1 y ω_2 son conjuntos cerrados, no vacíos y disjuntos. Como $\omega(x)$ es compacto, se sigue que ω_1 y ω_2 son compactos. Luego, existen abiertos disjuntos U_1 y U_2 tales que $\omega_1 \subseteq U_1$ y $\omega_2 \subseteq U_2$. En particular, $U_1 \cup U_2$ es un entorno de $\omega(x)$ y entonces, por lo que ya hemos probado, sabemos que existe $t \geq 0$ tal que $\gamma^+(t\cdot x) \subseteq U_1 \cup U_2$. Como ω_1 y ω_2 son ambos no vacíos, nuevamente por (ii) de la Proposición 7.2.8 obtenemos que $\gamma^+(t\cdot x) \cap U_i \neq \emptyset$ para $i = 1, 2$. Concluimos que el conjunto $\gamma^+(t\cdot x)$ es disconexo, lo cual es absurdo pues es la imagen del intervalo $[t, +\infty)$ por una función continua. Luego, $\omega(x)$ es conexo. □

[1] De la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias se sabe que si M es un conjunto invariante para un semiflujo φ, entonces $\overline{M}$ también lo es.

7.3. Características del sistema determinístico

En esta sección nos disponemos a estudiar el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{u}(t) = b(u(t)) \tag{7.9}$$

para $b = -\nabla\phi$ con ϕ definida como

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \frac{2}{h}\Big(\frac{|x_d|^{p+1}}{p+1} - \frac{{x_d}^2}{2}\Big). \tag{7.10}$$

El potencial ϕ tiene exactamente tres puntos críticos: $z = (1, \dots, 1)$, $-z = (-1, \dots, -1)$ y el origen. Todos ellos son hiperbólicos. El origen es el único mínimo local del potencial y tanto z como $-z$ son puntos de ensilladura. Llamaremos a los puntos críticos del potencial *soluciones estacionarias* debido a que resuelven el problema

$$b(x) = 0, \tag{7.11}$$

es decir, son las únicas soluciones de (7.9) constantes en el tiempo.

Buscamos dar una descomposición de $\mathbb{R}^d$ como hicimos para el potencial de doble pozo, dividiendo al espacio en regiones con distinto comportamiento asintótico bajo el sistema determinístico. Para poder realizar esta tarea, necesitamos de algunos resultados para soluciones de (7.9) que exponemos en lo que sigue.

Proposición 7.3.1. *Sea $u = (u_1, \dots, u_d)$ solución de*

$$\dot{u} = -Au + \frac{2}{h}g(u_d)e_d$$

Entonces la aplicación

$$\phi\big(u(t)\big) = \frac{1}{2}\langle Au(t),\, u(t)\rangle - \frac{2}{h}\Big(\frac{|u_d(t)|^{p+1}}{p+1} - \frac{u_d(t)^2}{2}\Big) \tag{7.12}$$

es decreciente.

Demostración. Recordando que A es simétrica, un cálculo directo muestra que

$$\frac{d\phi\big(u(t)\big)}{dt} = \langle \dot{u}(t),\, Au(t)\rangle - \frac{2}{h}g\big(u_d(t)\big)\dot{u}_d(t).$$

Como $\dot{u} = -Au + \frac{2}{h}g(u_d)e_d$ y $\dot{u}_d = -\langle e_d, Au\rangle + \frac{2}{h}g(u_d)$, reemplazando en la expresión de arriba obtenemos

$$\frac{d\phi\big(u(t)\big)}{dt} = -|Au(t)|^2 + \frac{4}{h}g\big(u_d(t)\big)\langle e_d,\, Au(t)\rangle - \frac{4}{h^2}g^2\big(u_d(t)\big) = -|\dot{u}(t)|^2 \le 0.$$

$\square$

Teorema 7.3.2. *Sea $u^x = (u_1, \ldots, u_d)$ solución de $\dot{u} = -Au + \frac{2}{h}g(u_d)e_d$ con condición inicial $u^x(0) = x$ y sea ϕ el potencial asociado*

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax,\, x\rangle - \frac{2}{h}\Big(\frac{|x_d|^{p+1}}{p+1} - \frac{{x_d}^2}{2}\Big).$$

Entonces para cada $x \in \mathbb{R}^d$ existe un $\alpha^x \in \mathbb{R}$ tal que $\omega(x) \subseteq \phi^{-1}(\alpha^x)$. En particular,

$$\omega(x) \subseteq \{y \in \mathbb{R}^d : u^y \text{ es solución estacionaria}\}.$$

Demostración. Podemos suponer que $\omega(x) \neq \emptyset$ sin perdida de generalidad. Luego, debe ser $t^+(x) = +\infty$. Por la Proposición 7.3.1 sabemos que la función $\phi\big(u^x(t)\big)$ es decreciente en $\mathbb{R}_{t\geq 0}$ y, por lo tanto, converge cuando $t \to +\infty$ a $\alpha^x := \inf_{t\geq 0} \phi\big(u^x(t)\big)$. Por la continuidad de ϕ, se sigue de (ii) de la Proposición 7.2.8 que $\phi(y) = \alpha_x$ para todo $y \in \omega(x)$ y, en consecuencia, que α^x es finito. Concluimos que $\omega(x) \subseteq \phi^{-1}(\alpha^x)$. Como $\omega(x)$ es positivamente invariante, si $y \in \omega(x)$ entonces $\phi\big(u^y(t)\big) = \alpha^x$ para todo $t \geq 0$. De aquí vemos que $\frac{d\phi(u^y(t))}{dt} = 0$ para todo $y \in \omega(x)$. Pero, por la proposición 7.3.1, esto último coincide con $-|\dot{u}^y(t)|^2$. Luego, u^y es solución estacionaria para todo $y \in \omega(x)$. □

Nuestro siguiente paso será mostrar que las soluciones de (7.9) satisfacen un Principio del Máximo. Para la demostración requerimos del lema que sigue.

Lema 7.3.3. *Sea $u : [\,0, T\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua que satisface*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \geq \alpha u^p(t) & 0 < t < T \\ \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

para $p > 1$, $\alpha > 0$ y condición inicial $u_0 > 0$. Entonces, $T \leq \frac{1}{\alpha(p-1)u_0^{p-1}}$ y, en particular, u no puede estar definida globalmente.

Demostración. Notemos que como la condición inicial u_0 es positiva, la desigualdad que verifica $\dot{u}$ implica que $u(t) > 0$ para todo $0 \leq t \leq T$. Luego, la expresión anterior se transforma en

$$\frac{\dot{u}}{u^p} \geq \alpha$$

en el intervalo $(\,0, T\,)$. Integrando en ambos miembros de la desigualdad obtenemos

$$\frac{u^{-p+1}}{-p+1}\bigg|_0^T = \int_0^T \frac{\dot{u}(t)}{u^p(t)}\, dt \geq \alpha T.$$

Recordando que $p > 1$ y que $u(T) > 0$ se tiene entonces que

$$T \leq \frac{1}{\alpha(p-1)u_0^{p-1}}$$

como queríamos ver. □

Teorema 7.3.4 (Principio del Máximo). *Sea $u = (u_1, \ldots, u_d)$ solución de (7.9). Es decir,*

$$\left\{ \begin{array}{lcll} u_1' & = & \frac{2}{h^2}(-u_1 + u_2) & \\ u_i' & = & \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) & si\ 2 \le i \le d-1 \\ u_d' & = & \frac{2}{h^2}(-u_d + u_{d-1} + hg(u_d)). & \end{array} \right. \tag{7.13}$$

Entonces

$$\max_{k=1,\ldots,d} |u_k(t)| \le \max\{\max_{k=1,\ldots,d} |u_k(0)|, \max_{0\le s\le t} |u_d(s)|\}. \tag{7.14}$$

Demostración. Notemos que siempre se verifica la desigualdad

$$\max_{k=1,\ldots,d} |u_k(t)| \le \max_{k=1,\ldots,d} \Big(\max_{0\le s\le t} |u_k(s)| \Big).$$

Sea $1 \le j \le d$ tal que $\max_{k=1,\ldots,d}(\max_{0\le s\le t} |u_k(s)|) = \max_{0\le s\le t} |u_j(s)|$. Notemos que si $j = d$, entonces (7.14) se verifica inmediatamente. Luego, podemos suponer que $1 \le j < d$.

Sea $t_0 = \min\{\tau \in [\,0, t\,] : \max_{0\le s\le t} |u_j(s)| = |u_j(\tau)|\}$, el primer tiempo en donde se alcanza el máximo. Notemos que entonces $|u_j(t_0)| = \max_{k=1,\ldots,d}(\max_{0\le s\le t} |u_k(s)|)$.

Si $t_0 = 0$, entonces

$$\max_{k=1,\ldots,d} |u_k(0)| \ge |u_j(t_0)| = \max_{k=1,\ldots,d} \Big(\max_{0\le s\le t} |u_k(s)| \Big) \ge \max_{k=1,\ldots,d} |u_k(t)|$$

y el Principio del Máximo queda demostrado.

Si $t_0 > 0$, deberemos analizar dos casos: $u_j(t_0) \ge 0$ y $u_j(t_0) < 0$. Si $u_j(t_0) \ge 0$, entonces por definición de t_0 vale que $u_j(t_0) \ge u_j(s)$ para todo $0 \le s \le t$. De aquí resulta $u_j'(t_0) \ge 0$. Por otro lado, la elección de j nos asegura que $u_j(t_0) \ge u_k(t_0)$ para todo $k = 1, \ldots, d$. Utilizando esto vemos que

$$u_j'(t_0) = \frac{1}{h^2}\big((u_{j+1}(t_0) - u_j(t_0)) + (u_{j-1}(t_0) - u_j(t_0))\big) \le 0 \qquad \text{si } 1 < j < d$$

y

$$u_1'(t_0) = \frac{2}{h^2}(u_2(t_0) - u_1(t_0)) \le 0 \qquad \text{si } j = 1.$$

En cualquier caso concluimos que $u_j'(t_0) = 0$ y, en particular, que $u_{j+1}(t_0) = u_j(t_0)$. Por como tomamos j y t_0, esto último nos dice que $|u_{j+1}(t_0)| = \max_{k=1,\ldots,d}(\max_{0\le s\le t} |u_k(s)|)$ con lo cual nos es posible repetir el mismo argumento empleado arriba para j. Así, se obtiene que $u_{j+2}(t_0) = u_{j+1}(t_0)$ y, razonando inductivamente, que $u_d(t_0) = u_j(t_0)$. De aquí se sigue (7.14), si $u_j(t_0) \ge 0$. El caso $u_j(t_0) < 0$ se demuestra de forma análoga. □

Como consecuencia del Principio del Máximo, tenemos la siguiente caracterización de las soluciones globalmente definidas de (7.9)

Teorema 7.3.5. *Sea $u = (u_1, \ldots, u_d)$ solución de (7.9). Es decir,*

$$\left\{ \begin{array}{lcll} u_1' & = & \frac{2}{h^2}(-u_1 + u_2) & \\ u_i' & = & \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) & si\ 2 \le i \le d-1 \\ u_d' & = & \frac{2}{h^2}(-u_d + u_{d-1} + hg(u_d)). & \end{array} \right. \tag{7.15}$$

Luego, si u está globalmente definida entonces es acotada.

Demostración. Si u no estuviese acotada, por el Principio del Máximo se tiene que $\max_{0\leq s\leq t}|u_d(s)| \to +\infty$ con $t\to+\infty$.

1. Dado $M>0$, sea $t_M := \inf\{t\geq 0 : |u_d(t)|>M\}$. De la definición de t_M se sigue que $|u_d(t_M)|\geq M$ y que $|u_d(t_M)| = \max_{0\leq s\leq t_M}|u_d(s)|$. Si $M>\max_{k=1,\ldots,d}|u_k(0)|$ entonces $t_M>0$ y, además, vale $|u_{d-1}(t_M)|\leq |u_d(t_M)|$ como consecuencia del Principio del Máximo. Podemos suponer además que $u_d(t_M)\geq 0$ pues, de lo contrario, podemos cambiar a u por $\tilde{u}=-u$ que sigue siendo solución de (7.9) y satisface $\tilde{u}_d(t_M) = \max_{0\leq s\leq t_M}|\tilde{u}_d(s)|$. Luego, se tiene

$$
\begin{aligned}
u_d'(t_M) &= \frac{2}{h^2}\big(-u_d(t_M)+u_{d-1}(t_M)+h(|u_d(t_M)|^{p-1}u_d(t_M)-u_d(t_M))\big)\\
&\geq \frac{2}{h^2}\big(-u_d(t_M)-|u_{d-1}(t_M)|+h(u_d^p(t_M)-u_d(t_M))\big)\\
&\geq \frac{2}{h^2}\big(-2u_d(t_M)+h(u_d^p(t_M)-u_d(t_M))\big)\\
&= \frac{2}{h}u_d^p(t_M)-\Big(\frac{4}{h^2}+\frac{2}{h}\Big)u_d(t_M).
\end{aligned}
$$

2. El siguiente paso en la demostración es ver que si $M>0$ es lo suficientemente grande, entonces $u_d : [t_M,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ es creciente. Bastará con mostrar que el conjunto $\{\xi>t_M : u_d'(\xi)<0\}$ es vacío para $M>0$ grande.

En el paso anterior vimos que $u_d'(t_M)\geq \frac{2}{h}u_d^p(t_M)-\big(\frac{4}{h^2}+\frac{2}{h}\big)u_d(t_M)$. Teniendo en cuenta esto y que $u_d(t_M)\geq M$, tomemos M suficientemente grande como para garantizar que $u_d'(t_M)>0$. Sea entonces $\xi_0=\inf\{\xi>t_M : u_d'(\xi)<0\}$. Como $u_d'(t_M)>0$ y u_d' es continua, vale que $\xi_0>t_M$ y $u_d'(t)\geq 0$ para todo $t_M\leq t\leq \xi_0$. Luego, u_d resulta creciente en el intervalo $[\,t_M,\xi_0\,]$ y, por la definición de t_M, se tiene en particular que $u_d(\xi_0)=\max_{0\leq s\leq \xi_0}|u_d(s)|$. Esta condición nos permite repetir el cálculo realizado en el paso anterior cambiando ξ_0 por t_M, de donde obtenemos que $u_d'(\xi_0)\geq \frac{2}{h}u_d^p(\xi_0)-\big(\frac{4}{h^2}+\frac{2}{h}\big)u_d(\xi_0)$. Como $u_d(\xi_0)\geq M$, resulta $u_d'(\xi_0)>0$ si M es grande, llegando así a un absurdo. Luego, $u_d'(\xi)\geq 0$ para todo $\xi>t_M$ y u_d resulta creciente.

3. Por lo probado en el paso anterior y la definición de t_M, para $t\geq t_M$ tenemos que $u_d(t)=\max_{0\leq s\leq t}|u_d(s)|\geq M$ y, en consecuencia, que $u_d'(t)\geq \frac{2}{h}u_d^p(t)-\big(\frac{4}{h^2}+\frac{2}{h}\big)u_d(t)$. Como $\lim_{s\to+\infty}\frac{s}{s^p}=0$, podemos tomar $M>0$ lo suficientemente grande como para garantizar que $u_d'(t)\geq\frac{1}{h}u_d^p(t)$. Por el Lema 7.3.3, u no puede estar globalmente definida.
□

De los Teoremas 7.2.5, 7.3.2 y 7.3.5 se desprende el siguiente corolario.

Corolario 7.3.6. *Sea u solución de* (7.9). *Entonces u explota en tiempo finito o está globalmente definida y converge a una solución estacionaria cuando $t\to+\infty$.*

Por último, nos dedicaremos a estudiar más a fondo el comportamiento de las soluciones de (7.9) con condiciones iniciales de coordenadas no negativas. Nos referiremos a este tipo de condiciones iniciales simplemente como *condiciones iniciales no negativas*. Las soluciones de (7.9) con condición inicial no negativa tienen la particularidad de ser no negativas para todo tiempo en el que se encuentren definidas. Esto es consecuencia del siguiente Principio de Comparación para soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Lema 7.3.7. (***Principio de Comparación***). *Supongamos que J es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y sea $h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitz. Sea además u solución de la ecuación diferencial $\dot{u} = g(u)$. Supongamos que $v : J \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in J$ son tales que*

$$v(\alpha) \leq u(\alpha) \quad y \quad v'(t) \leq h(v(t)) \quad \text{para todo } t \in J \cap [\alpha, +\infty).$$

Entonces $v \leq u$ en $J \cap [\alpha, +\infty)$.

Análogamente, si

$$u(\alpha) \leq v(\alpha) \quad y \quad h(v(t)) \leq v'(t) \quad \text{para todo } t \in J \cap [\alpha, +\infty),$$

entonces $u \leq v$ en $J \cap [\alpha, +\infty)$.

La demostración de este lema puede encontrarse en [2]. A continuación mostramos un resultado sobre el comportamiento asintótico de las soluciones no negativas de (7.9) que figura originalmente en [1]. Este nos ayudará a entender la estructura de la variedad estable de z en la región del espacio $\mathbb{R}^d_+ = \{x \in \mathbb{R}^d : x_i \geq 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq d\}$.

Teorema 7.3.8. *Sea u^0 una condición inicial no negativa. Sea u la solución del sistema (7.9) con $u(0) = u^0$ y supongamos que u está globalmente definida y $\lim_{t\to+\infty} u(t) = z$. Entonces, si v^0 denota otra condición inicial no negativa y v es la solución del sistema con $v(0) = v^0$, se tiene*

- $v^0 \lneq u^0 \Longrightarrow v$ *está globalmente definida y* $\lim_{t\to+\infty} v(t) = 0$.
- $u^0 \lneq v^0 \Longrightarrow v$ *explota en tiempo finito.*

Demostración. Dividimos la demostración en tres pasos.

1. Supongamos primero que $v^0 \lneq u^0$, es decir, $v^0_k \leq u^0_k$ para todo $k = 1, \dots, d$ y $v^0 \neq u^0$. Por el Principio de Comparación tenemos que $0 \leq v \leq u$ de donde se deduce que v está globalmente definida. Por el Corolario 7.3.6, v debe converger a una solución estacionaria cuando t tiende a infinito. Como v es no negativa para todo tiempo, debe ser $\lim_{t\to+\infty} v(t) = 0$ o $\lim_{t\to+\infty} v(t) = z$. Si fuera $\lim_{t\to+\infty} v(t) = z$ entonces, definiendo $w = u - v$, tenemos que $w \gneq 0$ y $\lim_{t\to+\infty} w(t) = 0$. Más aún, w verifica

$$\left\{ \begin{array}{rcl} w_1' &=& \frac{2}{h^2}(-w_1 + w_2) \\ w_i' &=& \frac{1}{h^2}(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) \qquad\qquad \text{si } 2 \leq d-1 \\ w_d' &=& \frac{2}{h^2}(-w_d + w_{d-1} + h(g(u_d) - g(v_d))). \end{array} \right. \tag{7.16}$$

Notemos que el término $g\big(u_d(t)\big) - g\big(v_d(t)\big)$ puede reemplazarse por $g'\big(\eta(t)\big)w_d(t)$, donde $v_d(t) \leq \eta(t) \leq u_d(t)$ para todo $t > 0$. Como v_d y u_d tienden a uno, se sigue que $\lim_{t\to+\infty} \eta(t) = 1$ y, por lo tanto, existen $t_0 > 0$ y $\delta > 0$ tales que $g'\big(\eta(t)\big) > \delta$ para todo $t \geq t_0$.

2. Estudiemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1' &=& \frac{2}{h^2}(-y_1 + y_2) \\ y_i' &=& \frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \quad \text{si } 2 \leq d-1 \\ y_d' &=& \frac{2}{h^2}((\delta h - 1)y_d + y_{d-1}). \end{array}\right. \tag{7.17}$$

Por el Principio de Comparación sabemos que toda solución y satisface $w \geq y \geq 0$ y, por lo tanto, tenemos que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$. Veamos que esto no puede suceder. Sea $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{\phi}(x) = \frac{1}{2}\langle Ax,\, x\rangle - \frac{\delta}{h}x_n^2.$$

Al igual que en la Proposición 7.3.1, se puede ver que $\tilde{\phi}\big(y(t)\big)$ es decreciente para toda y solución del sistema (7.17). Observemos que si $\varepsilon > 0$ y y^ε es solución con condición inicial $y^\varepsilon(0) = (\varepsilon, \dots, \varepsilon)$, entonces $\tilde{\phi}\big(y^\varepsilon(t)\big) \leq \tilde{\phi}\big(y^\varepsilon(0)\big) = -\frac{\delta}{h}\varepsilon^2$ para todo tiempo $t \geq 0$. Como $\tilde{\phi}(0) = 0$ y $\tilde{\phi}(y^\varepsilon)$ es continua, esto nos dice que y^ε no puede converger a cero. Luego, por el Principio de Comparación, basta con mostrar que si y es solución con condición inicial no negativa y distinta de cero, entonces existe un $t_0 > 0$ tal que $\min_{k=1,\dots,d} y_k(t_0) > 0$.

Mostraremos como se puede ver esto con un ejemplo. Como la condición inicial es no negativa y distinta de cero, existe k tal que $y_k(0) > 0$. Supongamos, por simplicidad, que $k = 1$. Los casos en que $1 < k \leq d$ se pueden argumentar de manera similar. Luego, si $y_k(0) > 0$, por la continuidad de la solución existe un t_0 tal que y_1 es positiva en todo el intervalo $[\,0, t_0\,]$. Tenemos ahora dos posibilidades: $y_2(0) > 0$ ó $y_2(0) = 0$. En el primer caso, la continuidad de la solución nos asegura que existe t_1 tal que y_1 es positiva en todo el intervalo $[\,0, t_1\,]$. Si $y_2(0) = 0$, entonces

$$y_2'(0) = \frac{1}{h^2}\big(y_3(0) + y_1(0)\big) > 0,$$

y, así, y_2 será positiva en un intervalo de la forma $(0, \gamma]$ para algún $\gamma > 0$. En cualquier caso, vemos que existe un intervalo $[\,t_2,\, t_3\,]$ tal que tanto y_0 como y_1 son positivas durante este intervalo. Razonando inductivamente obtenemos la existencia de un intervalo $[a, b]$ en donde todas las coordenadas son estrictamente positivas. Concluimos que y no puede tender a cero lo cual implica una contradicción.

Luego, si $v^0 \lneqq u^0$ entonces se tiene que v está globalmente definida y $\lim_{t\to+\infty} v(t) = 0$.

3. Supongamos ahora que $u^0 \lneqq v^0$ y que v está globalmente definida. Nuevamente por el Corolario 7.3.6, v debe converger a una solución estacionaria cuando t tiende a infinito. Como por el Principio de Comparación tenemos $0 \leq u \leq v$ y $\lim_{t\to+\infty} u(t) = z$, debe ser $\lim_{t\to+\infty} v(t) = z$ también. Luego, si $w = v - u$, tenemos que $w \geq 0$, $\lim_{t\to+\infty} w(t) = 0$ y que w es solución del sistema que se obtiene de (7.16) cambiando la última ecuación por

$$w_d' = \frac{2}{h^2}(-w_d + w_{d-1} + h(g(v_d) - g(u_d))). \tag{7.18}$$

Podemos proceder de forma análoga a lo hecho arriba para llegar a una contradicción. Luego, v no puede estar globalmente definida y, así, debe explotar en tiempo finito. □

Continuando con el estudio de las soluciones no negativas de (7.9), buscamos dar una descripción más precisa de la variedad estable de z en la región $\mathbb{R}^d_+$. Con tal objetivo, tomemos u^0 una condición inicial no negativa y para cada $\lambda > 0$ sea u^λ la solución del sistema con condición inicial $u^\lambda(0) = \lambda u^0$. Consideremos los conjuntos

$$\mathcal{A}^0_{u^0} := \{\lambda > 0 : \lim_{t\to+\infty} u^\lambda(t) = 0\}$$

$$\mathcal{A}^\infty_{u^0} := \{\lambda > 0 : u^\lambda \text{ explota en tiempo finito}\}.$$

Notemos que ambos conjuntos son no vacíos. En efecto, para todo $\lambda < \frac{1}{|u^0|}$ positivo vale que $|\lambda u^0| < 1$ y, por el Teorema 7.3.8, se tiene que $\lim_{t\to+\infty} u^\lambda(t) = 0$. Con esto resulta $\mathcal{A}^0_{u^0} \neq \emptyset$. Además, como $\lim_{\lambda\to+\infty} \phi(\lambda u^0) = -\infty$, por la Proposición 7.3.1 se tiene que $u^{\lambda u^0}$ explota en tiempo finito para λ tal que $\phi(\lambda u^0) < \min\{\phi(0), \phi(z)\}$. Así, $\mathcal{A}^\infty_{u^0} \neq \emptyset$ también. Luego, tanto $\lambda_- := \sup \mathcal{A}^0_{u^0}$ como $\lambda^+ := \inf \mathcal{A}^\infty_{u^0}$ se encuentran bien definidos y son finitos. El siguiente teorema, probado originalmente en [1], muestra que $\lambda_- = \lambda^+$.

Teorema 7.3.9. *Sean $\lambda > 0$, u^0 una condición inicial no negativa y u^λ la solución del sistema (7.9) con condición inicial $u^\lambda(0) = \lambda u^0$. Entonces existe $\lambda_c > 0$ tal que*

1. $\lambda < \lambda_c \Longrightarrow u^\lambda$ *está globalmente definida y* $\lim_{t\to+\infty} u^\lambda(t) = 0$
2. $\lambda_c < \lambda \Longrightarrow u^\lambda$ *explota en tiempo finito*
3. $\lambda = \lambda_c \Longrightarrow u^\lambda$ *está globalmente definida y* $\lim_{t\to+\infty} u^\lambda(t) = z$.

Más aún, $\lambda_c = \lambda^+ = \lambda_-$.

Demostración. Basta con mostrar que los conjuntos $\mathcal{A}^0_{u^0}$ y $\mathcal{A}^\infty_{u^0}$ son abiertos. En efecto, de aquí se sigue que u_{λ_-} está globalmente definida y satisface $\lim_{t\to+\infty} u^{\lambda_-}(t) = z$. Luego, el Teorema 7.3.8 implica que $\lim_{t\to+\infty} u^\lambda(t) = 0$ para todo $\lambda < \lambda_-$ positivo y que u^λ explota en tiempo finito para todo $\lambda > \lambda_-$. Concluimos que $\lambda^+ = \lambda_-$ y que dicho valor es el λ_c buscado.

Tomemos entonces $\lambda_0 \in \mathcal{A}^0_{u^0}$. Luego, u^{λ_0} está globalmente definida y se tiene $\lim_{t\to+\infty} u^{\lambda_0}(t) = 0$. En particular, existe $t_0 > 0$ tal que $0 \leq u^{\lambda_0}_k(t_0) \leq \frac{1}{2}$ para todo $k = 1, \ldots, d$. Por continuidad de las soluciones respecto de la condición inicial existe un entorno de λ_0 tal que para todo λ perteneciente a dicho entorno se verifica $0 \leq u^{\lambda_0}_k(t_0) \leq \frac{3}{4} < 1$ para todo $k = 1, \ldots, d$. Por el Teorema 7.3.8 tenemos entonces que u^λ está globalmente definida y satisface $\lim_{t\to+\infty} u^{\lambda u}(t) = 0$. Así $\mathcal{A}^0_{u^0}$ resulta abierto.

Para ver que $\mathcal{A}^\infty_{u^0}$ es abierto utilizamos un argumento similar. Mirando la última ecuación del sistema y recordando que $u_{d-1} \geq 0$ vemos que

$$u'_d \geq \frac{2}{h^2}\big(- u_d + hg(u_d)\big).$$

Por un argumento similar al dado cuando probamos el Principio del Máximo, se puede ver que u^λ no puede estar globalmente definida si existe $t_0 > 0$ tal que $u_d^\lambda(t_0) > M$, donde M es una constante positiva. Luego, si $\lambda_0 \in \mathcal{A}_{u^0}^\infty$, el Principio del Máximo y el hecho de que u_d sea no negativa para todo tiempo nos permiten tomar $t_0 > 0$ tal que $u_d^{\lambda_0}(t_0) > M + 1$. Por continuidad de la solución respecto de la condición inicial existe un entorno de λ_0 tal que para todo λ en dicho entorno se verifica $u_d^\lambda(t_0) > M$. Luego, u^λ explota en tiempo finito para todo λ en un entorno de λ_0 y, así, $\mathcal{A}_{u^0}^\infty$ resulta abierto.

□

Observación 7.3.10. Si S denota la cáscara de la bola unitaria, el Teorema 7.3.9 nos permite considerar la aplicación $\psi : S \cap \mathbb{R}_+^d \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\psi(v) = \lambda_c^v$, donde λ_c^v es el único número real positivo tal que la solución de (7.9) con condición inicial $\lambda_c^v v$ está definida globalmente y tiende a z. Puede probarse de manera similar a la demostración del Teorema 7.3.9 que ψ es continua. En particular, esto nos dice que la porción de la variedad estable de z que se encuentra en $\mathbb{R}_+^d$ está acotada.

A partir de esto podemos dar una buena descripción del comportamiento del sistema determinístico $X^{x,0}$ para las distintas condiciones iniciales $x \in \mathbb{R}^d$. En efecto, tenemos una descomposición

$$\mathbb{R}^d = D_0 \cup \mathcal{W}_z^s \cup \mathcal{W}_{-z}^s \cup D_e \tag{7.19}$$

donde D_0 denota la variedad estable del origen, $\mathcal{W}_z^s$ y $\mathcal{W}_{-z}^s$ las variedades estables de z y $-z$ respectivamente y D_e el dominio de explosión, i.e., si $x \in D_e$ entonces $X^{x,0}$ explota en tiempo finito. Los conjuntos D_0 y D_e son abiertos de $\mathbb{R}^d$. El origen es un equilibrio del sistema asintóticamente estable. Tanto $\mathcal{W}_z^s$ como $\mathcal{W}_{-z}^s$ son variedades de codimension uno y, más aún, vale $\mathcal{W}_z^s = -\mathcal{W}_{-z}^s$. También z admite una variedad inestable de dimensión uno que denotaremos por W_z^u. Ésta se encuentra contenida en $\mathbb{R}_+^d$, su intersección con D_0 y D_e es no vacía y une z con el origen. De la misma forma $-z$ admite su variedad inestable W_{-z}^u y vale $W_{-z}^u = -W_z^u$. Esta descomposición puede verse en la Figura para el caso 2-dimensional.

Capítulo 8

Impredecibilidad del tiempo de explosión

8.1. Introducción

Enunciamos en esta sección los principales resultados con respecto a la distribución asintótica del tiempo de explosión para nuestro modelo

$$dX_t^\varepsilon = b(X_t^\varepsilon)dt + \varepsilon\, dW_t \tag{8.1}$$

donde b está dada por (7.4). Para cada $\varepsilon > 0$ definimos

$$\beta_\varepsilon = \text{ínf}\{t \geq 0 : P_0(\tau_\varepsilon > \beta_\varepsilon) \leq e^{-1}\},$$

con la convención de que $\text{ínf}\,\emptyset = +\infty$. Aquí τ_ε^0 denota el tiempo de explosión de $X^{0,\varepsilon}$ como se definió en el Capítulo 3.

En primer lugar, vamos a mostrar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log \beta_\varepsilon = \Delta \tag{8.2}$$

con $\Delta := 2(\phi(z) - \phi(0))$, donde ϕ es el potencial asociado al sistema. En realidad, al igual que para el modelo del potencial de doble pozo, probaremos un resultado más fuerte: para cada $x \in D_0$ y $\delta > 0$ se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to +\infty} P_x\left(e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}} < \tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}\right) = 1, \tag{8.3}$$

donde la convergencia puede tomarse uniforme en x sobre cualquier compacto $\mathcal{K}$ contenido en D_0. En segundo lugar, veremos la pérdida de memoria asintótica del tiempo de explosión. Es decir, mostraremos que para cada $x \in D_0$ y $t > 0$ vale

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P_x(\tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon) = e^{-t} \tag{8.4}$$

donde, nuevamente, la convergencia puede tomarse uniforme sobre cualquier compacto $\mathcal{K}$ contenido en D_0.

Notemos que los resultados a probar son análogos a los del modelo del potencial de doble pozo. La demostración de los mismos será también similar, debiendo tener algunos cuidados adicionales en este caso.

Mostraremos primero (8.3). Notemos que, nuevamente, probar esto implicará (8.2) a pesar de que la definición de β_ε no sea la misma. En efecto, si vale (8.3), dado $\delta > 0$ podemos tomar $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ valga

$$P_p\big(e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}} < \tau_\varepsilon\big) > e^{-1}$$

$$P_p\big(\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}\big) > 1 - e^{-1}$$

Teniendo en cuenta la definición de β_ε, de la primera desigualdad obtenemos $e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}} < \beta_\varepsilon$, y de la segunda $\beta_\varepsilon \leq e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}$. Esto muestra (8.2).

Al igual que para el modelo del potencial de doble pozo, probaremos por separado las cotas inferior y superior para el tiempo de explosión. Luego nos dedicaremos a probar la pérdida de memoria asintótica. Para ello, estudiaremos primero el problema del escape de un dominio acotado apropiado. Una vez mostrada la impredecibilidad del tiempo de escape de dicho dominio, utilizaremos esto último para probar el resultado para el tiempo de explosión.

8.2. Truncamientos del potencial y localización

Una de las principales diferencias del nuevo modelo con respecto al del potencial de doble pozo es que la falta de una condición de Lipschitz global no nos permite formular un Principio de Grandes Desvíos para el sistema tal como lo habíamos hecho en el caso anterior. Nuestra estrategia para afrontar este problema será considerar procesos auxiliares que aproximen a nuestro sistema en algún sentido apropiado pero que se encuentren definidos para todo tiempo y que valga para estos un Principio de Grandes Desvíos como el que hemos estudiado en el Capítulo 4. Estudiando el comportamiento de estos procesos y aprovechando su similitud con nuestro modelo original, podremos describir la dinámica de este último de manera eficaz. Este tipo de procedimiento se denomina *localización del sistema*. Detallamos a continuación la técnica de localización que utilizaremos en nuestro análisis de la dinámica estocástica a lo largo del capítulo.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $G_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que

$$G_n(x) = \begin{cases} \frac{|x|^{p+1}}{p+1} - \frac{x^2}{2} & \text{si } |x| \leq n \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2n. \end{cases} \tag{8.5}$$

Consideremos entonces la familia $\big(\phi^{(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de potenciales sobre $\mathbb{R}^d$ dados por

$$\phi^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \frac{2}{h}G_n(x_d). \tag{8.6}$$

Esta familia verifica las siguientes propiedades:

(i) Para cada $n \in \mathbb{N}$ el potencial $\phi^{(n)}$ es de clase C^2 y $b^{(n)} = -\nabla\phi^{(n)}$ es globalmente Lipschitz.

(ii) Para $n \leq m \in \mathbb{N}$ se tiene $b^{(n)} \equiv b^{(m)}$ sobre la región $\Pi^n = \{x \in \mathbb{R}^d : |x_d| < n\}$.

(iii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ vale $\liminf_{|x|\to+\infty} \frac{\phi^{(n)}}{|x|} > 0$.

Como $b^{(n)}$ es globalmente Lipschitz entonces para cada $x \in \mathbb{R}^d$ existe una única solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{X}_t^{(n),\,x,\,0} = b^{(n)}(X^{(n),\,x,\,0}) \tag{8.7}$$

con condición inicial x. Ésta se encuentra globalmente definida y describe la misma trayectoria hasta escapar de Π^n que la solución de (7.9) que tiene misma condición inicial. De la misma manera, para cada $x \in \mathbb{R}^d$ y $\varepsilon > 0$ existe solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t^{(n),\,x,\,\varepsilon} = b^{(n)}\big(X_t^{(n),\,x,\,\varepsilon}\big)\,dt + \varepsilon\,dW_t \qquad 0 \leq t < +\infty. \tag{8.8}$$

con condición inicial x. Además, como $b^{(n)}$ coincide con b sobre $B_n(0)$, entonces si

$$\tau_\varepsilon^{(n),\,x} = \inf\{t \geq 0 : |X_t^{(n),\,x,\,\varepsilon}| \geq n\} \tag{8.9}$$

entonces para $t < \tau_\varepsilon^x := \lim_{n\to+\infty} \tau_\varepsilon^{(n),\,x}$ podemos definir $X_t^{x,\,\varepsilon} := \lim_{n\to+\infty} X_t^{(n),\,x,\,\varepsilon}$ solución de

$$dX_t^{x,\,\varepsilon} = b(X_t^{x,\,\varepsilon})\,dt + \varepsilon\,dW_t$$

hasta el tiempo de explosión τ_ε^x con condición inicial x. Más aún, si definimos los tiempos de parada

$$\pi_\varepsilon^{(n),\,x} = \inf\{t \geq 0 : X_t^{(n),\,x,\,\varepsilon} \notin \Pi^n\}, \tag{8.10}$$

puede verse que (ii) implica que

$$\tau_\varepsilon^x = \lim_{n\to+\infty} \pi_\varepsilon^{(n),\,x}$$

y que $X^{x,\,\varepsilon}$ coincide con el proceso $X^{(n),\,x,\,\varepsilon}$ hasta escapar de Π^n.

Por otro lado, (i) garantiza que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}^d$ la familia $\big(X^{(n),\,x,\,\varepsilon}\big)_{\varepsilon>0}$ verifica un Principio de Grandes Desvíos tal como lo formulamos en el Capítulo 4. Por último, de (iii) se sigue que existe una única medida invariante para el sistema $X^{(n),\,\varepsilon}$ para cada $\varepsilon > 0$. Ésta viene dada por la fórmula

$$\mu_\varepsilon^{(n)}(A) := \frac{1}{Z_\varepsilon^{(n)}} \int_A e^{-\frac{2\phi^{(n)}(x)}{\varepsilon^2}}\,dx, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \tag{8.11}$$

donde $Z_\varepsilon^{(n)} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{2\phi^{(n)}(x)}{\varepsilon^2}}\,dx$.

8.3. Construcción de un dominio auxiliar

Al igual que en el modelo del potencial de doble pozo, deberemos definir un dominio auxiliar G que nos permita simplificar el estudio del tiempo de explosión del sistema reduciéndonos a estudiar el escape de dicho dominio. La construcción de un dominio con estas características no es tan sencilla como en el modelo anterior pero, no obstante, se puede verificar que existe un dominio acotado G que cumple las siguientes propiedades:

1. G contiene a z, $-z$ y al origen.

2. La frontera de G puede descomponerse en tres partes: ∂^z, ∂^{-z} y $\partial G \setminus \left(\partial^z \cup \partial^{-z}\right)$. La región de la frontera ∂^z es cerrada y verifica $\partial^z = -\partial^{-z}$. Además, existe $\gamma > 0$ tal que todo $x \in \partial^z$ satisface $x_i > 1 + \gamma$ para $1 \leq i \leq d$.

3. $\min_{x \in \partial G} \phi(x) = \min_{x \in \partial^z} \phi(x) = \min_{x \in \partial^{-z}} \phi(x)$ mientras que
$$\inf_{x \in \partial G \setminus (\partial^z \cup \partial^{-z})} \phi(x) > \min_{x \in \partial G} \phi(x).$$

4. Para todo $y \in \partial^z \cup \partial^{-z}$ el sistema determinístico $X^{y,0}$ explota en tiempo finito.

5. G contiene un entorno del origen $B_c(0)$ tal que para todo $y \in B_c(0)$ el sistema $X^{y,0}$ está definido globalmente y tiende al origen sin escapar de G.

La idea a tener en mente es aquella que ilustra la Figura en el caso 2-dimensional. Para abreviar la notación escribiremos $\partial^z_{-z} = \partial^z \cup \partial^{-z}$.

Al estudiar el comportamiento del sistema estocástico con condición inicial $x \in G$, lo que ocurrirá típicamente para $\varepsilon > 0$ pequeño es que el proceso $X^{x,\varepsilon}$ escapa de G a través de ∂^z_{-z} pues es allí donde la barrera de potencial es menor. Una vez en ∂^z_{-z}, la influencia del ruido se volverá despreciable y seguirá los pasos del sistema determinístico hasta explotar en un tiempo finito. Mostramos esta última afirmación en el siguiente teorema.

Teorema 8.3.1. *Existe $T_0 > 0$ tal que*
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \partial^z_{-z}} P_x(\tau_\varepsilon > T_0) = 0. \tag{8.12}$$

Demostración. Mostraremos únicamente que existe $T_0 > 0$ tal que
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \partial^z} P_x(\tau_\varepsilon > T_0) = 0, \tag{8.13}$$
es decir, si el supremo es tomado sobre ∂^z. La demostración es análoga si el supremo se toma sobre ∂^{-z}. A partir de ambas convergencias podremos concluir (8.12).

Fijemos $M \in \mathbb{N}$ y para cada $\alpha > 0$ definamos el conjunto
$$A^\alpha_M = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d \geq M \, , \, x_j \geq \alpha \text{ para todo } 1 \leq j \leq d-1\}.$$

Si definimos $w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ por $w \equiv (1+\gamma, \ldots, 1+\gamma)$ donde $\gamma > 0$ es el de la segunda propiedad de G listada arriba, entonces un cálculo directo muestra que w es subsolución de (7.9), es decir

$$\dot{w} = 0 \leq -Aw + \frac{2}{h} g(w_d) e_d.$$

Luego, por el Principio de Comparación y el hecho de que cualquier $x \in \partial^z$ tiene todas sus coordenadas mayores a $1+\gamma$, concluimos que el sistema determinístico $X^{x,0}$ comenzando en $x \in \partial^z$ mantiene todas sus coordenadas mayores a $1+\gamma$ mientras se encuentre definido.

Por otro lado, para cada $x \in \partial^z$ sabemos que $X^{x,0}$ explota en tiempo finito. El Principio del Máximo (Teorema 7.3.4) implica entonces que el tiempo $T_x = \text{ínf}\{t \geq 0 : X_t^{x,0} \notin \Pi^{M+1}\}$ es finito. Recordando que $X^{x,0}$ mantiene todas sus coordenadas mayores a $1+\gamma$, vemos entonces que $T_x = \text{ínf}\{t \geq 0 : X_t^{x,0} \in A_{M+1}^{1+\gamma}\}$. Además, como el sistema $X^{(M+2),x,0}$ coincide con $X^{x,0}$ hasta escapar de Π^{M+2}, en particular coincide hasta T_x y, por lo tanto, tenemos que $T_x = \text{ínf}\{t \geq 0 : X_t^{(M+2),x,0} \in A_{M+1}^{1+\gamma}\}$. Es decir, para $x \in \partial^z$ el sistema $X^{(M+2),x,0}$ visita $A_{M+1}^{1+\gamma}$ en un tiempo finito T_x. Por la compacidad de ∂^z podemos tomar $T_M := \sup_{x \in \partial^z} T_x < +\infty$ y concluir que para todo $x \in \partial^z$ el sistema $X^{(M+2),x,0}$ visita $A_{M+1}^{1+\gamma}$ antes de tiempo T_M.

Luego, si notamos $\Gamma := A_M^{1+\frac{\gamma}{2}}$, para $x \in \partial^z$ obtenemos que

$$P_x\big(\tau_\varepsilon(\Gamma) > T_M\big) \leq P_x\big(\text{mín}\{\pi_\varepsilon^{(M+2)}, \tau_\varepsilon(\Gamma)\} > T_M\big) + P_x\big(\pi_\varepsilon^{(M+2)} \leq T_M \,,\, \tau_\varepsilon(\Gamma) > T_M\big)$$

$$\leq P_x\Big(\varrho_{T_M}(X^{(M+2),\varepsilon}, X^{(M+2),0}) > 1 \wedge \frac{\gamma}{2}\Big) + P_x\Big(\varrho_{T_M}(X^{(M+2),\varepsilon}, X^{(M+2),0}) > \frac{\gamma}{2}\Big).$$

Utilizando la estimación en (4.11) concluimos

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \partial^z} P_x\big(\tau_\varepsilon(\Gamma) > T_M\big) = 0. \tag{8.14}$$

Teniendo en cuenta esto, para $n \geq M$ escribimos

$$P_x\big(\tau_\varepsilon^{(n)} > 1 + T_M\big) \leq P_x\big(\tau_\varepsilon(\Gamma) \leq T_M \,,\, \tau_\varepsilon^{(n)} > 1 + T_M\big) + P_x(\tau_\varepsilon(\Gamma) > T_M)$$

$$\leq P_x\big(\tau_\varepsilon(\Gamma) \leq T_M \,,\, \tau_\varepsilon^{(n)} > 1 + T_M\big) + \sup_{y \in \partial^z} P_y(\tau_\varepsilon(\Gamma) > T_M).$$

Como $X^{x,\varepsilon}$ coincide con $X^{(n),x,\varepsilon}$ hasta escapar de $B_n(0)$, vale la igualdad

$$P_x\big(\tau_\varepsilon(\Gamma) \leq T_M \,,\, \tau_\varepsilon^{(n)} > 1 + T_M\big) = P_x\big(\tau_\varepsilon^{(n)}(\Gamma) \leq T_M \,,\, \tau_\varepsilon^{(n)} > 1 + T_M\big)$$

donde $\tau_\varepsilon^{(n),x}(\Gamma) = \text{ínf}\{t \geq 0 : X^{(n),x,\varepsilon} \in \Gamma\}$. Por la propiedad fuerte de Markov para el proceso $X^{(n),x,\varepsilon}$ se obtiene

$$P_x\big(\tau_\varepsilon^{(n)}(\Gamma) \leq T_M \,,\, \tau_\varepsilon^{(n)} > 1 + T_M\big) \leq \sup_{y \in \Gamma} P_y(\tau_\varepsilon^{(n)} > 1) \leq \sup_{y \in \Gamma} P_y(\tau_\varepsilon > 1).$$

Concluimos que para todo $n \geq M$ y $x \in \partial^z$ vale

$$P_x\big(\tau_\varepsilon^{(n)} > 1 + T_M\big) \leq \sup_{y \in \Gamma} P_y(\tau_\varepsilon > 1) + \sup_{y \in \partial^z} P_y(\tau_\varepsilon(\Gamma) > T_M).$$

Tomando límite cuando $n \to +\infty$ y supremo sobre ∂^z obtenemos

$$\sup_{x\in\partial^z} P_x\big(\tau_\varepsilon > 1 + T_M\big) \leq \sup_{y\in\Gamma} P_y(\tau_\varepsilon > 1) + \sup_{y\in\partial^z} P_y(\tau_\varepsilon(\Gamma) > T_M).$$

Recordando (8.14), para demostrar la proposición basta con ver que el primer sumando del miembro derecho tiende a cero cuando $\varepsilon \to 0$ para una elección adecuada de M.

Para ver esto, consideramos para cada $\varepsilon > 0$ e $y \in \Gamma$ el sistema

$$Y^{y,\varepsilon} := X^{y,\varepsilon} - \varepsilon W.$$

Observemos que $X^{y,\varepsilon}$ e $Y^{y,\varepsilon}$ tienen el mismo tiempo de explosión τ_ε^y y la misma condición inicial $y \in \Gamma$. Notemos además que en el diferencial estocástico de $Y^{y,\varepsilon}$

$$dY_t^{y,\varepsilon} = b(Y_t^{y,\varepsilon} + \varepsilon W)\, dt \tag{8.15}$$

no aparece el término con dW. Decimos entonces $Y^{y,\varepsilon}$ resuelve un caso particular de ecuación diferencial estocástica conocido como *ecuación diferencial aleatoria*. En este caso la continuidad de las trayectorias nos permite utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para mostrar que para casi todo ω la trayectoria $Y^{y,\varepsilon}(\omega)$ es solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{Y}_t^{y,\varepsilon}(\omega) = b\big(Y^{y,\varepsilon}(\omega) + \varepsilon W_t(\omega)\big). \tag{8.16}$$

Para cada $y \in \Gamma$ y $\varepsilon > 0$ sea Ω_ε^y un conjunto de probabilidad uno en donde (8.16) vale. Sea además el conjunto

$$\tilde{\Omega}_\varepsilon = \Big\{\omega \in \Omega : \sup_{0\leq t\leq 1} |W_t(\omega)| \leq \frac{\gamma h^2}{16\varepsilon}\Big\}.$$

Notemos que $\lim_{\varepsilon\to 0} P(\tilde{\Omega}_\varepsilon) = 1$. Nuestro objetivo será mostrar que si M es elegido apropiadamente, entonces para cada $y \in \Gamma$ la trayectoria $Y^{y,\varepsilon}(\omega)$ explota antes de tiempo 1 para todo $\omega \in \Omega_\varepsilon^y \cap \tilde{\Omega}_\varepsilon$. De aquí se sigue que la trayectoria $X^{y,\varepsilon}(\omega)$ *también* explota antes de tiempo 1 y, por ende, que $P(\tilde{\Omega}_\varepsilon) = P(\Omega_\varepsilon^y \cap \tilde{\Omega}_\varepsilon) \leq P_y(\tau_\varepsilon \leq 1)$ para todo $y \in \Gamma$ y $\varepsilon > 0$. Como la cota inferior es independiente de $y \in \Gamma$, conseguimos

$$P(\tilde{\Omega}_\varepsilon) \leq \inf_{y\in\Gamma} P_y(\tau_\varepsilon \leq 1).$$

Tomando límite con $\varepsilon \to 0$ se obtiene el resultado el resultado deseado.

Sean entonces $y \in \Gamma$, $\omega \in \Omega_\varepsilon^y \cap \tilde{\Omega}_\varepsilon$ y supongamos que $Y^{y,\varepsilon}(\omega)$ se encuentra definida en el intervalo $[\,0,1\,]$. Si definimos $w : [\,0,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ por $w(t) = (1 + \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{4}t, \ldots, 1 + \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{4}t)$ entonces, recordando que el parámetro h en la ecuación (7.9) satisface $0 < h \leq 1$, puede verificarse que w cumple $\dot{w} = -\frac{\gamma}{4} \leq b\big(w + \varepsilon W(\omega)\big)$. Como y tiene todas sus coordenadas mayores a $1 + \frac{\gamma}{2}$ por pertenecer a Γ, por el Principio de Comparación concluimos que $w(t) \leq Y^{y,\varepsilon}(t,\omega)$ para todo $t \in [\,0,1\,]$. En particular, si $Y_k^{y,\varepsilon}$ denota la k-ésima coordenada del proceso $Y^{y,\varepsilon}$ entonces lo anterior nos dice que $Y_k^{y,\varepsilon}(t,\omega) \geq 0$ para todo $t \in [\,0,T\,]$. De aquí se deduce que $Y_d^{y,\varepsilon}(\omega)$ verifica

$$\dot{Y}_d^{y,\varepsilon}(\omega) \geq -\frac{2}{h^2}\, Y_d^{y,\varepsilon}(\omega) - \frac{\gamma}{4} + \frac{2}{h} g\big(Y_d^{y,\varepsilon}(\omega) - \varepsilon W_d(\omega)\big). \tag{8.17}$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{s\to+\infty} \frac{s^p}{s} = +\infty$, podemos tomar $M \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande como para garantizar que existe una constante $C > 0$ tal que para todo $s \geq M$ vale

$$-\frac{2s}{h^2} - \frac{\gamma}{4} + \frac{2}{h} g\big(s - \varepsilon W_d(\omega)\big) \geq C s^p. \tag{8.18}$$

Si recordamos que $Y^{y,\varepsilon}(0,\omega) \geq M$, lo anterior se traduce en

$$\dot{Y}_d^{y,\varepsilon}(0,\omega) \geq C\Big(Y^{y,\varepsilon}(0,\omega)\Big)^p. \tag{8.19}$$

De aquí se sigue que $Y^{y,\varepsilon}(0,\omega)$ es creciente (ver el segundo paso de la demostración del Teorema 7.3.5) y, por consiguiente, que la desigualdad de arriba vale para todo $t \in [\,0,T\,]$. Si además pedimos que $M \in \mathbb{N}$ sea tal que

$$\frac{1}{C(p-1)M^{p-1}} < 1$$

entonces del Lema 7.3.3 se sigue que $Y^{y,\varepsilon}(0,\omega)$ explota antes de tiempo 1. Llegamos así a una contradicción, de donde se concluye el resultado. $\square$

Observación 8.3.2. En particular, el Teorema muestra que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{x\in\partial^z_{-z}} P_x(\tau_\varepsilon < \infty) = 1.$$

Es decir, para el sistema comenzando en ∂^z_{-z}, la probabilidad de explotar en tiempo finito es alta si ε es pequeño

8.4. Cotas para el tiempo de explosión

Nuestro objetivo en esta sección es probar las cotas inferior y superior para el tiempo de explosión. Concretamente, vamos a mostrar que dado $\delta > 0$, para todo $x \in D_0$ se tienen

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_x\Big(\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) = 0 \tag{8.20}$$

y

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_x\Big(\tau_\varepsilon > e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}\Big) = 0 \tag{8.21}$$

donde la convergencia puede tomarse uniforme sobre compactos de D_0. Seguiremos esencialmente los mismos pasos que para la demostración de las cotas respectivas para el tiempo de salto que figura en el capítulo 6, empleando técnicas de localización cuando sea necesario. Comenzaremos primero con la cota inferior y luego trataremos con la superior.

Teorema 8.4.1. *Para cada $\delta > 0$ y $x \in D_0$ se tiene*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_x\Big(\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) = 0. \tag{8.22}$$

Más aún, la convergencia es uniforme sobre compactos de D_0.

Demostración. Daremos una esquema de la demostración dividido en dos pasos.

1. El primer paso consiste en ver que el resultado vale uniformemente sobre una bola de centro en el origen y radio suficientemente pequeño. Es decir, existe $\rho > 0$ tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in\overline{B}_\rho(0)} P_x\Big(\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) = 0. \tag{8.23}$$

Notemos que si ρ es tal que $\overline{B}_\rho(0) \subseteq G$ entonces la continuidad de las trayectorias implica que

$$\sup_{x\in\overline{B}_\rho(0)} P_x\Big(\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) \leq \sup_{x\in\overline{B}_\rho(0)} P_x\Big(\tau_\varepsilon(\partial G) < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big).$$

Consideremos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{G} \subseteq B_{n_0}(0)$ y sea $X^{(n_0),\,x,\,\varepsilon}$ la solución de

$$dX_t^{(n_0),\,x,\,\varepsilon} = b^{(n_0)}(X_t^{(n_0),\,x,\,\varepsilon})dt + \varepsilon\, dW_t$$

con condición inicial $x \in \overline{B}_\rho(0)$. Tenemos que

$$P\big(X_t^{(n_0),\,x,\,\varepsilon} = X_t^{x,\,\varepsilon} \text{ para todo } t < \tau^{(n_0),\,x}\big) = 1.$$

En particular, ambos procesos coinciden hasta escapar de G. Luego, si definimos

$$\tau_\varepsilon^{(n_0),\,x}(\partial G) = \inf\{t \geq 0 : X_t^{(n_0),\,x,\,\varepsilon} \in \partial G\}$$

resulta $P_x\Big(\tau_\varepsilon(\partial G) < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) = P_x\Big(\tau_\varepsilon^{(n_0)}(\partial G) < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big)$ para todo $x \in \overline{B}_\rho(0)$. Basta entonces con mostrar que existe $\rho > 0$ tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in\overline{B}_\rho(0)} P_x\Big(\tau_\varepsilon^{(n_0)}(\partial G) < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) = 0. \tag{8.24}$$

Pero debido a las propiedades de $b^{(n_0)}$ (con referencia a la discusión en la Sección 8.2) esto puede hacerse de forma análoga a lo que figura en la demostración de la cota inferior para el modelo del potencial de doble pozo.

2. Habiendo probado la convergencia uniforme sobre $\overline{B}_\rho(0)$ para algún $\rho > 0$ adecuado, generalizamos ahora el resultado para cualquier $x \in D_0$.

Sabemos que para cada $x \in D_0$ existe un tiempo T_x tal que el sistema determinístico comenzando en x alcanza $B_{\frac{\varrho}{2}}(0)$ durante el intervalo $[\,0, T_x\,]$. Además, la continuidad de las trayectorias asegura que existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que el sistema se mantiene en $B_{n_x}(0)$ durante todo el intervalo $[\,0, T_x\,]$. Luego, vale que $X^{(n_x),\,x,\,0}$ alcanza $B_{\frac{\varrho}{2}}(0)$ durante el intervalo $[\,0, T_x\,]$, manteniéndose a una distancia positiva δ_x de $\partial B_{n_x}(0)$. Así obtenemos

$$\begin{aligned} P_x\big(\tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(0)) > T_x\big) &\leq P_x\big(\min\{\tau_\varepsilon^{(n)}\,,\,\tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(0))\} > T_x\big) + P_x\big(\tau_\varepsilon^{(n)} \leq T_x\big) \\ &\leq P_x\Big(\varrho_{T_x}(X^{(n_x),\,\varepsilon}, X^{(n_x),\,0}) > \frac{\rho}{2}\Big) + P_x\Big(\varrho_{T_x}(X^{(n_x),\,\varepsilon}, X^{(n_x),\,0}) > \frac{\delta_x}{2}\Big) \end{aligned}$$

Utilizando la estimación en (4.11) para la familia $\big(X^{(n_x),\,x,\,\varepsilon}\big)_{\varepsilon>0}$, concluimos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_x\big(\tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(0)) > T_x\big) = 0. \tag{8.25}$$

Con esto podemos escribir

$$P_x\Big(\tau_\varepsilon^{(n)} < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) \leq P_x\Big(\tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(0)) < \tau_\varepsilon^{(n)} < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) + P_x(\tau_\varepsilon^{(n)} \leq T_x) + P_x(\tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(0)) > T_x).$$

Notemos que los dos últimos sumandos tienden a cero cuando $\varepsilon \to 0$ para $n \geq n_x$ como consecuencia del cálculo hecho arriba. Para acotar el primer sumando, observemos que como los procesos $X^{x,\varepsilon}$ y $X^{(n),x,\varepsilon}$ coinciden hasta $\tau^{(n)}$, vale la igualdad

$$P_x\Big(\tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(0)) < \tau_\varepsilon^{(n)} < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) = P_x\Big(\tau_\varepsilon^{(n)}(\overline{B}_\rho(0)) < \tau_\varepsilon^{(n)} < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big)$$

donde $\tau_\varepsilon^{(n)}(\overline{B}_\rho(0)) = \text{ínf}\{t \geq 0 : X^{(n),x,\varepsilon} \in \overline{B}_\rho(0)\}$. Utilizando la propiedad fuerte de Markov para el proceso $X^{(n),x,\varepsilon}$ conseguimos

$$P_x\Big(\tau_\varepsilon^{(n)}(\overline{B}_\rho(0)) < \tau_\varepsilon^{(n)} < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) \leq \sup_{y\in\overline{B}_\rho(0)} P_y\Big(\tau^{(n)} < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big).$$

Si tomamos $n \geq n_0$ donde n_0 es el del primer paso, entonces

$$\sup_{y\in\overline{B}_\rho(0)} P_y\Big(\tau^{(n)} < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) \leq \sup_{y\in\overline{B}_\rho(0)} P_y\Big(\tau^{(n_0)}(\partial G) < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big)$$

que vimos que tiende a cero por (8.24). Observando que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale la desigualdad

$$P_x\Big(\tau_\varepsilon < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big) \leq P_x\Big(\tau_\varepsilon^{(n)} < e^{\frac{\Delta-\delta}{\varepsilon^2}}\Big)$$

concluimos el resultado para $x \in D_0$. Para ver la convergencia uniforme sobre compactos se procede de manera similar. □

Nos dedicamos ahora a mostrar la cota superior para el tiempo de explosión. Comenzamos por un lema previo.

Lema 8.4.2. *Dado $\delta > 0$ se tiene*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in G} P_x\Big(\tau_\varepsilon(\partial G) > e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}\Big) = 0. \tag{8.26}$$

Demostración. La demostración es similar a la del Lema 6.4.1. Consideremos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{G} \subseteq B_n(0)$ y sea $X^{(n),x,\varepsilon}$ la solución de

$$dX_t^{(n),x,\varepsilon} = b^{(n)}(X_t^{(n),x,\varepsilon})dt + \varepsilon\, dW_t$$

con condición inicial $x \in G$. Tenemos que

$$P(X_t^{(n),x,\varepsilon} = X_t^{x,\varepsilon} \text{ para todo } t < \tau^{(n),x}) = 1.$$

En particular, ambos procesos coinciden hasta escapar de G. Luego, si definimos

$$\tau_\varepsilon^{(n),x}(\partial G) = \text{ínf}\{t \geq 0 : X_t^{(n),x,\varepsilon} \in \partial G\},$$

resulta $P_x(\tau_\varepsilon(\partial G) > e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}) = P_x(\tau_\varepsilon^{(n)}(\partial G) > e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}})$. Basta entonces con mostrar que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in G} P_x\big(\tau_\varepsilon^{(n)}(\partial G) > e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}\big) = 0. \tag{8.27}$$

Para mostrar (8.27), comenzamos por ver que, dado $\delta > 0$, existe un tiempo T tal que para cada $x \in G$ nos es posible construir un conjunto abierto de trayectorias $\mathcal{E}_{x,T}$ que verifique las siguientes condiciones:

1. $\varphi \in C([\,0,T],\mathbb{R}^d)$ para toda $\varphi \in \mathcal{E}_{x,T}$.
2. Toda trayectoria de $\mathcal{E}_{x,T}$ se escapa de G antes de tiempo T.
3. Para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente chico vale $\inf_{x\in D_0} P_x(X^{(n),x,\varepsilon} \in \mathcal{E}_{x,T}) \geq \alpha_\varepsilon$, donde $\alpha_\varepsilon := T/e^{\frac{\Delta+\frac{\delta}{2}}{\varepsilon^2}}$.

Al igual que en el Lema 6.4.1, construiremos para cada $x \in G$ una trayectoria φ^x que comienza en x, con función de tasa menor a $\Delta + \frac{\delta}{3}$ y tal que no solamente φ^x se escape de G antes que T, sino que también cualquier trayectoria lo suficientemente cercana en norma infinito haga lo mismo.

Tomemos $r > 0$ lo suficientemente chico como para garantizar que la función de tasa de una interpolación lineal a velocidad uno entre dos puntos x_0, x_1 a distancia menor que $2r$, no sea superior a $\frac{\delta}{9}$. Podemos suponer, además, que $\bar{B}_r(z)\cup\bar{B}_r(-z) \subseteq G$. Definimos también los conjuntos

$$G(z,r) := \{x \in G : d(x,\mathcal{W}_z^s) \leq r\}$$

$$\text{y } \; G(-z,r) := \{x \in G : d(x,\mathcal{W}_{-z}^s) \leq r\}.$$

Construimos φ^x como sigue:

- $x \in G(z,r)$
  1. Elegimos un punto $x_1 \in \mathcal{W}_z^s$ a distancia mínima de x e interpolamos x con x_1.
  2. Desde x_1, seguimos el flujo determinístico hasta llegar a un $x_2 \in \bar{B}_r(z)$.
  3. Una vez en x_2, interpolamos a un $x_3 \in \mathcal{W}_z^u \cap D_e$ a distancia r de z.
  4. Seguimos, nuevamente, el flujo determinístico desde x_3 hasta llegar a un punto $x_4 \in D_e$ a una distancia al menos r de G.
- Si $x \in G(-z,r)$, la trayectoria se construye de forma análoga al caso anterior.
- Si $x \in D_e \cap \big(G \setminus \big(G(z,r) \cup G(-z,r)\big)\big)$, simplemente seguimos la trayectoria determinística hasta llegar a un punto x_4 como el descripto arriba.
- $x \in D_0 \cap \big(G' \setminus \big(G(z,r) \cup G(-z,r)\big)\big)$

1. Seguimos el flujo determinístico hasta alcanzar $\overline{B}_r(0)$.
2. Desde $\overline{B}_r(0)$, interpolamos a un punto $x'_1 \in S_r(0) \cap \mathcal{W}_z^u$.
3. Una vez sobre la variedad inestable $\mathcal{W}_z^u$, podemos ir con el reverso de la trayectoria determinística hasta un $x'_2 \in D_0 \cap S_r(z)$.
4. Continuamos como en el primer caso.

Extendiendo φ^x de manera que siga el flujo determinístico si fuese necesario, podemos suponer que todas las trayectorias φ^x están definidas en un intervalo de tiempo $[0, T]$, con $T > 0$ independiente de x. Con las φ^x así construidas, el conjunto de trayectorias $\mathcal{E}_{x,T} = \{\psi \in C([0, T], \mathbb{R}^d) : \varrho_T(\psi, \varphi^x) < r\}$ verifica las tres condiciones requeridas. Por último, procediendo como en el Lema 6.4.1, obtenemos

$$P_x(\tau_\varepsilon^{(n)}(\partial G) > T^+) \leq (1 - \alpha_\varepsilon)^{[\frac{T^+}{T}]}, \tag{8.28}$$

donde $T^+ := e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}$. Como la acotación es uniforme en G, tomando límite con ε tendiendo a cero, conseguimos

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in G} P_x\big(\tau_\varepsilon^{(n)}(\partial G) > e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}\big) = 0.$$

$\square$

A partir del lema anterior y del Teorema 8.5.2 que enunciaremos más adelante, se deduce el siguiente corolario.

Corolario 8.4.3. *Si $B_c(0)$ es el entorno del origen que destacamos en la Sección 8.3, entonces para todo $\delta > 0$ se verifica*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \overline{B}_c(0)} P_x\Big(\tau_\varepsilon(\partial^z \cup \partial^{-z}) > e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}\Big) = 0. \tag{8.29}$$

Demostración. Si $x \in \overline{B}_c(0)$ y notamos $T^+ := e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} P_x\big(\tau_\varepsilon(\partial^z_{-z}) > T^+\big) &\leq P_x\big(\tau_\varepsilon(\partial G) \geq T^+\big) + P_x\big(\tau_\varepsilon(\partial G \setminus \partial^z_{-z}) < T^+ < \tau_\varepsilon(\partial^z_{-z})\big) \\ &\leq \sup_{x \in G} P_x(\tau_\varepsilon(\partial G) \geq T^+) + \sup_{x \in \overline{B}_c(0)} P_x\big(X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\partial G)} \notin \partial^z_{-z}\big) \end{aligned}$$

Tomando supremo sobre $x \in \overline{B}_c(0)$, resulta

$$\sup_{x \in \overline{B}_c(0)} P_x\big(\tau_\varepsilon(\partial^z_{-z}) > T^+\big) \leq \sup_{x \in G} P_x(\tau_\varepsilon(\partial G) \geq T^+) + \sup_{x \in \overline{B}_c(0)} P_x\big(X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\partial G)} \notin \partial^z_{-z}\big).$$

Observando que el primer sumando de la derecha tiende a cero por el Lema 8.4.2 y que el segundo lo hace por el Teorema 8.5.2, obtenemos el resultado. $\square$

Contando con el lema y corolario previos, nos encontramos en condiciones de probar la cota superior.

Teorema 8.4.4. *Para cada $\delta > 0$ y $x \in D_0$ se tiene*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P_x\Big(\tau_\varepsilon > e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}\Big) = 0. \tag{8.30}$$

Más aún, la convergencia es uniforme sobre compactos de D_0.

Demostración. Haremos la demostración en dos pasos.

1. En primer lugar, probaremos que el resultado vale uniformemente sobre $\overline{B}_c(0)$. Esto es, dado $\delta > 0$, se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \overline{B}_c(0)} P_x\Big(\tau_\varepsilon > e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}\Big) = 0. \tag{8.31}$$

Para ver esto notemos que si $x \in \overline{B}_c(0)$, entonces

$$P_x\big(\tau_\varepsilon > T^+\big) = P_x\left(\tau_\varepsilon > T^+\,, \tau_\varepsilon(\partial^z_{-z}) > \frac{T^+}{2}\right) + P_x\left(\tau_\varepsilon > T^+\,, \tau_\varepsilon(\partial^z_{-z}) \leq \frac{T^+}{2}\right)$$

$$\leq P_x\left(\tau_\varepsilon(\partial^z_{-z}) > \frac{T^+}{2}\right) + P_x\left(\tau_\varepsilon > T^+\,, \tau_\varepsilon(\partial^z_{-z}) \leq \frac{T^+}{2}\right)$$

donde, al igual que antes, escribimos $T^+ = e^{\frac{\Delta+\delta}{\varepsilon^2}}$. Bastará entonces con mostrar que cada sumando de la derecha tiende a cero uniformemente en $\overline{B}_c(0)$.

Para ε suficientemente chico tenemos la acotación

$$P_x\left(\tau_\varepsilon(\partial^z_{-z}) > \frac{T^+}{2}\right) \leq \sup_{x \in \overline{B}_c(0)} P_x\left(\tau_\varepsilon(\partial^z_{-z}) > e^{\frac{\Delta+\frac{\delta}{2}}{\varepsilon^2}}\right) \tag{8.32}$$

Como la acotación es independiente de $x \in \overline{B}_c(0)$, por el Corolario 8.4.3 obtenemos la convergencia uniforme del primer sumando.

Para ver la convergencia uniforme del segundo sumando, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{G} \subseteq B_{n_0}(0)$. Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, los procesos $X^{(n),\varepsilon}$ verifican la igualdad

$$\tau_\varepsilon^{(n),x} = \inf\{t \geq 0 : |X^{(n),x,\varepsilon}| \geq n\}.$$

Más aún, si $n \geq n_0$ entonces vale la igualdad

$$\tau_\varepsilon^x(\partial^z_{-z}) = \inf\{t \geq 0 : X^{(n),x,\varepsilon} \in \partial^z_{-z}\}.$$

Con esto, utilizando la propiedad fuerte de Markov para $X^{(n),x,\varepsilon}$ en forma análoga a lo hecho en la demostración del Teorema 6.4.4 obtenemos para $n \geq n_0$

$$P_x\left(\tau_\varepsilon^{(n)} > T^+\,, \tau_\varepsilon(\partial^z_{-z}) \leq \frac{T^+}{2}\right) \leq \sup_{x \in \partial^z_{-z}} P_x\left(\tau_\varepsilon^{(n)} > \frac{T^+}{2}\right).$$

Tomando límite con n tendiendo a infinito conseguimos

$$P_x\left(\tau_\varepsilon > T^+\,, \tau_\varepsilon(\partial^z_{-z}) \leq \frac{T^+}{2}\right) \leq \sup_{x \in \partial^z_{-z}} P_x\left(\tau_\varepsilon > \frac{T^+}{2}\right). \tag{8.33}$$

Como la acotación es independiente de $x \in \overline{B}_c(0)$, para ver la convergencia uniforme basta con probar que el miembro derecho de la desigualdad tiende a cero. Por el Teorema 8.3.1 sabemos que existe un tiempo T_0 tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in\partial^z_{-z}} P_x(\,\tau_\varepsilon > T_0) = 0.$$

Luego, si ε es suficientemente pequeño como para garantizar $T_0 < \frac{T^+}{2}$, obtenemos

$$\sup_{x\in\partial^z_{-z}} P_x\left(\,\tau_\varepsilon > \frac{T^+}{2}\right) \leq \sup_{x\in\partial^z_{-z}} P_x(\,\tau_\varepsilon > T_0), \tag{8.34}$$

de donde se concluye el resultado.

2. Habiendo probado la convergencia uniforme sobre $\overline{B}_c(0)$, generalizamos ahora el resultado para cualquier $x \in D_0$.

Sabemos que para cada $x \in D_0$ existe un tiempo T_x tal que el sistema determinístico comenzando en x alcanza $B_{\frac{c}{2}}(0)$ durante el intervalo $[\,0, T_x\,]$. Además, la continuidad de las trayectorias asegura que existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que el sistema se mantiene en $B_{n_x}(0)$ durante todo el intervalo $[\,0, T_x\,]$. Luego, vale que $X^{(n_x),\,x,\,0}$ alcanza $B_{\frac{c}{2}}(0)$ durante el intervalo $[\,0, T_x\,]$, manteniéndose a una distancia positiva δ_x de $\partial B_{n_x}(0)$. Así obtenemos

$$P_x\big(\tau_\varepsilon(\overline{B}_c(0)) > T_x\big) \leq P_x\big(\,\text{mín}\{\tau_\varepsilon(\partial\overline{B}_{n_x}(0))\,,\,\tau_\varepsilon(\overline{B}_c(0))\} > T_x\big) + P_x\big(\tau_\varepsilon(\partial\overline{B}_{n_x}(0)) \leq T_x\big)$$

$$\leq P_x\Big(\varrho_{T_x}(X^{(n_x),\,\varepsilon}, X^{(n_x),\,0}) > \frac{c}{2}\Big) + P_x\Big(\varrho_{T_x}(X^{(n_x),\,\varepsilon}, X^{(n_x),\,0}) > \frac{\delta_x}{2}\Big)bi$$

Utilizando la estimación en (4.11) para la familia $\big(X^{(n_x),\,x,\,\varepsilon}\big)_{\varepsilon>0}$, concluimos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_x\big(\tau_\varepsilon(\overline{B}_c(0)) > T_x\big) = 0. \tag{8.35}$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$P_x(\,\tau^{(n)}_\varepsilon > T^+) \leq P_x(\,\tau^{(n)}_\varepsilon > T^+\,,\,\tau_\varepsilon(\overline{B}_c(0)) \leq T_x) + P_x(\,\tau_\varepsilon(\overline{B}_c(0)) > T_x).$$

Además, si ε es suficientemente pequeño como para garantizar $T_x < \frac{T^+}{2}$ entonces, por la propiedad fuerte de Markov para los procesos $X^{(n),\,\varepsilon}$, tenemos la acotación

$$P_x(\,\tau^{(n)}_\varepsilon > T^+\,,\,\tau_\varepsilon(\overline{B}_c(0)) \leq T_x) \leq \sup_{x\in\overline{B}_c(0)} P_x\left(\tau^{(n)}_\varepsilon > \frac{T^+}{2}\right).$$

Tomando límite cuando n tiende a infinito, concluimos

$$P_x(\,\tau_\varepsilon > T^+) \leq \sup_{x\in\overline{B}_c(0)} P_x\left(\tau_\varepsilon > \frac{T^+}{2}\right) + P_x\Big(\,\tau_\varepsilon(\overline{B}_c(0)) > T_x\Big). \tag{8.36}$$

Observando que el miembro derecho de la desigualdad tiende a cero por (8.31) y (8.35), se consigue el resultado. La convergencia uniforme sobre compactos de D_0 se prueba de manera similar. □

8.5. Distribución asintótica del tiempo de explosión

Habiendo terminado con las cotas inferior y superior para el tiempo de explosión, nos dedicamos a probar la pérdida de memoria asintótica del tiempo de salto normalizado $\frac{\tau_\varepsilon}{\beta_\varepsilon}$. Para ello, una vez más reduciremos el problema a estudiar como el proceso escapa de un dominio acotado. En nuestro caso, este dominio será G. Una vez estudiado el límite en distribución del tiempo de escape de G, procederemos a mostrar que éste y el tiempo de explosión son asintóticamente similares y esto nos permitirá concluir el resultado.

El primer objetivo de esta sección será ver la pérdida de memoria asintótica para el tiempo de escape de G. Notemos que si $n_0 \in \mathbb{N}$ es tal que $\overline{G} \subseteq B_{n_0}(0)$, entonces para todo $x \in G$ el proceso $X^{(n_0),x,\varepsilon}$ coincide con $X^{x,\varepsilon}$ hasta escapar de G. Luego, si $\tau_\varepsilon^{(n_0),x}(\partial G) = \text{ínf}\{t \geq 0 : X^{(n_0),x,\varepsilon} \in \partial G\}$ entonces $\tau_\varepsilon^{(n_0),x}(\partial G) \equiv \tau_\varepsilon^x(\partial G)$ y, por lo tanto, basta con mostrar la pérdida de memoria asintótica del tiempo en que $X^{(n_0),x,\varepsilon}$ escapa de G. Como $b^{(n_0)}$ es globalmente Lipschitz, esto puede hacerse de manera similar a lo probado ya para el modelo del potencial de doble pozo. Se obtienen así los teoremas que figuran a continuación.

Teorema 8.5.1. *Sea $\gamma_\varepsilon > 0$ definido por la relación*

$$P_0(\tau_\varepsilon(\partial G) > \gamma_\varepsilon) = e^{-1}. \tag{8.37}$$

Entonces existe $\rho > 0$ tal que, para todo $t \geq 0$, se tiene

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \overline{B}_\rho(0)} |P_x(\tau_\varepsilon(\partial G) > t\gamma_\varepsilon) - e^{-t}| = 0. \tag{8.38}$$

Teorema 8.5.2. *Si $B_c(0)$ es el entorno del origen que destacamos en la Sección 8.3, entonces se verifica*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in \overline{B}_c(0)} P_x\big(X^\varepsilon_{\tau_\varepsilon(\partial G)} \notin \partial^z_{-z}\big) = 0.$$

Del teorema anterior se deduce la siguiente proposición que muestra que el tiempo de escape de G y el tiempo de explosión son asintóticamente similares.

Proposición 8.5.3. *Existe una constante positiva T_0 tal que, para todo $x \in D_0 \cap G$,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P_x(\tau_\varepsilon > \tau_\varepsilon(\partial G) + T_0) = 0. \tag{8.39}$$

Demostración. Se procede de forma análoga a la demostración del Lema 6.6.1 utilizando los Teoremas 8.3.1 y 8.5.2. □

Corolario 8.5.4. *Sea $\rho > 0$ dado por el Teorema 8.5.1. Entonces*

(*i*) $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\beta_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon} = 1$, *(ii)* $\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x\in\overline{B}_\rho(0)}|P_x(\tau_\varepsilon(\partial G)>t\beta_\varepsilon)-e^{-t}|=0.$

Demostración. (i) Observemos primero que como consecuencia de la cota superior para el tiempo de explosión, podemos suponer que β_ε es finito para todo $\varepsilon>0$. Ahora, la continuidad de las trayectorias implica

$$P_p(\tau_\varepsilon(\partial G)>\beta_\varepsilon)\leq P_p(\tau_\varepsilon>\beta_\varepsilon)\leq e^{-1},$$

de donde concluimos $\gamma_\varepsilon\leq\beta_\varepsilon$ y, en particular, que $\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{\beta_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\leq 1$. Supongamos que $\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\beta_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}>1$. Entonces, existe $\lambda_0>0$ y una sucesión $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{j\to 0}\varepsilon_j=0$ tal que $\beta_{\varepsilon_j}>(1+\lambda_0)\gamma_{\varepsilon_j}$ para todo $j\in\mathbb{N}$. Luego, si T_0 es la constante de la proposición anterior, procediendo como en la demostración del Corolario 6.6.2 obtenemos

$$P_p(\tau_{\varepsilon_j}>\beta_{\varepsilon_j}-\alpha)\leq P_p\left(\tau_{\varepsilon_j}(\partial G')>\left(1+\lambda_0-\frac{T_0-\alpha}{\gamma_{\varepsilon_j}}\right)\gamma_{\varepsilon_j}\right)+P_p\big(\tau_{\varepsilon_j}>\tau_{\varepsilon_j}(\partial G')+T_0\big)$$

para todo $j\in\mathbb{N}$ y $\alpha>0$.

Como $\lim_{j\to+\infty}\varepsilon_j=0$, para $j\in\mathbb{N}$ lo suficientemente grande vale $1+\lambda_0-\frac{T_0-\alpha}{\gamma_{\varepsilon_j}}>1+\frac{\lambda_0}{2}$. Por definición de β_{ε_j} obtenemos

$$e^{-1}<P_p(\tau_{\varepsilon_j}>\beta_{\varepsilon_j}-\alpha)\leq P_p\left(\tau_{\varepsilon_j}(\partial G')>\left(1+\frac{\lambda_0}{2}\right)\gamma_{\varepsilon_j}\right)+P_p\big(\tau_{\varepsilon_j}>\tau_{\varepsilon_j}(\partial G')+T_0\big)$$

para $j\in\mathbb{N}$ es suficientemente grande. Tomando límite en esta expresión con j tendiendo a infinito llegamos a la contradicción $e^{-1}\leq e^{-(1+\frac{\lambda_0}{2})}$. Luego, $\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\beta_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\leq 1$ y, como $\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{\beta_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}\leq 1$, concluimos $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\beta_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon}=1$.

(ii) La demostración es análoga a la del Corolario 6.6.2 debido a que se verifica

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x,\,x'\in\overline{B}_\rho(0)}\sup_{t>0}|P_x(\,\tau_\varepsilon(\partial G)>t\beta_\varepsilon)-P_{x'}(\,\tau_\varepsilon(\partial G)>t\beta_\varepsilon)|=0. \qquad (8.40)$$

Notemos que para probar esto último alcanza con verlo para los procesos $(X^{(n_0),\varepsilon})_{\varepsilon>0}$, donde n_0 es tal que $\overline{G}\subseteq B_{n_0}(0)$. Esto puede hacerse como figura en la cota inferior para el modelo del potencial de doble pozo. □

Llegamos así al principal resultado de la sección: la pérdida de memoria asintótica del tiempo de explosión.

Teorema 8.5.5. *Para cada $x\in D_0$, se tiene*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}P_x(\,\tau_\varepsilon>t\beta_\varepsilon)=e^{-t}\quad\forall\,t>0. \qquad (8.41)$$

Más aún, la convergencia es uniforme sobre compactos de D_0 para cada $t>0$.

Demostración. Haremos la demostración en tres pasos.

1. Verificamos primero que el enunciado es válido en el caso $x = 0$. Esto es análogo al primer paso de la demostración del Teorema 6.6.3.

2. El próximo paso será ver la convergencia uniforme sobre una bola de centro en 0 y radio suficientemente pequeño. Esto se deduce del caso $x = 0$ y de que existe $\rho > 0$ tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x,\, x'\in \overline{B}_\rho(0)} \sup_{t>0} |P_x(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon) - P_{x'}(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon)| = 0. \tag{8.42}$$

Para ver esto, sea $\rho > 0$ tal que $B_\rho(0) \subseteq G$ y tomemos $x,\, x' \in B_\rho(0)$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ acoplemos según el método de Lindvall-Rogers los procesos $X^{(n),\,x,\,\varepsilon}$ y $X^{(n),\,x',\,\varepsilon}$ y denotemos por $T^{(n)}_{x,\,x'}$ al tiempo en que ambos procesos se acoplan. Observemos que si $T^{(n_0)}_{x,\,x'} \leq \min\{\tau_\varepsilon^{(n_0),x},\, \tau_\varepsilon^{(n_0),\,x'}\}$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces $T^{(n)}_{x,\,x'} = T^{(n_0)}_{x,\,x'}$ para todo $n \geq n_0$ y, además, $X^{x,\,\varepsilon}$ y $X^{x',\,\varepsilon}$ se cortan en $T^{(n_0)}_{x,\,x'}$ y a partir de allí describen la misma trayectoria. En particular, explotan al mismo tiempo. Luego, se sigue que

$$|P_x(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon) - P_{x'}(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon)| \leq P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \big\{ \min\{\tau_\varepsilon^{(n),x},\, \tau_\varepsilon^{(n),\,x'}\} < T^{(n)}_{x,\,x'} \big\}\Big).$$

Para mostrar (8.42), basta con ver que si ρ es lo suficientemente chico entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x,\, x'\in B_\rho(0)} P\big(\min\{\tau_\varepsilon^{(n),x},\, \tau_\varepsilon^{(n),\,x'}\} < T^{(n)}_{x,\,x'}\big) = 0.$$

Notando que

$$P\big(\min\{\tau_\varepsilon^{(n),x},\, \tau_\varepsilon^{(n),\,x'}\} < T^{(n)}_{x,\,x'}\big) \leq P_x\big(\tau_\varepsilon^{(n)} < T^{(n)}_{x,\,x'}\big) + P_{x'}\big(\tau_\varepsilon^{(n)} < T^{(n)}_{x,\,x'}\big),$$

la demostración se sigue como en el Lema 6.3.2.

3. Por último, probamos la convergencia uniforme sobre compactos de D_0. Sea $\rho > 0$ tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{y\in \overline{B}_\rho(0)} |P_y(\tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon) - e^{-t}| = 0.$$

Dado un compacto $\mathcal{K} \subseteq D_0$, sabemos que existe un tiempo finito $T_\mathcal{K}$ y $n_\mathcal{K} \in \mathbb{N}$ tales que, para todo $x \in \mathcal{K}$, el sistema determinístico $X^{x,0}$ visita $B_{\frac{\rho}{2}}(0)$ antes de tiempo $T_\mathcal{K}$, manteniéndose durante el intervalo $[\,0, T_\mathcal{K}\,]$ siempre dentro de $B_{n_\mathcal{K}}(0)$ y a una distancia positiva $d_\mathcal{K}$ de $\partial B_{n_\mathcal{K}}(0)$. Se sigue que para todo $n \geq n_\mathcal{K}$ el sistema $X^{(n),\,x,\,0}$ hace lo mismo. Luego, para todo $x \in \mathcal{K}$ y $n \geq n_\mathcal{K}$ tenemos

$$\max\Big\{P_x\big(\tau_\varepsilon(\overline{B}_c(0)) > T_x\big)\,,\, P_x\big(\tau_\varepsilon^{(n)}(\overline{B}_c(0)) > T_x\big)\Big\} \leq P_x\Big(\varrho_{T_\mathcal{K}}(X^{(n_\mathcal{K}),\,\varepsilon}, X^{(n_\mathcal{K}),\,0}) > \frac{\rho}{2}\Big)$$

$$+ P_x\Big(\varrho_{T_\mathcal{K}}(X^{(n_\mathcal{K}),\,\varepsilon}, X^{(n_\mathcal{K}),\,0}) > \frac{\delta_\mathcal{K}}{2}\Big)$$

y, por lo tanto, utilizando la estimación (4.11) obtenemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in\mathcal{K}} P_x(\tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(0)) > T_{\mathcal{K}}) = 0 \tag{8.43}$$

y

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{n\geq n_{\mathcal{K}}} \Big(\sup_{x\in\mathcal{K}} P_x\big(\tau_\varepsilon^{(n)}(\overline{B}_\rho(0)) > T_{\mathcal{K}}\big)\Big) = 0. \tag{8.44}$$

Ahora, para $x \in \mathcal{K}$ y $t > 0$ tenemos

$$P_x(\,\tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon) = P_x(\,\tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon\,,\ \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(0)) \leq T_{\mathcal{K}}) + P_x(\,\tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon\,,\ \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(0)) > T_{\mathcal{K}}),$$

donde el segundo término de la derecha tiende a cero uniformemente en $\mathcal{K}$ por (8.43). Si vemos que $P_x(\tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon, \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(0)) \leq T_{\mathcal{K}})$ tiende uniformemente en $\mathcal{K}$ a e^{-t}, habremos concluido la demostración.

Tomemos $\varepsilon_0 > 0$ tal que $T_{\mathcal{K}} < t\beta_\varepsilon$ para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Por un lado, empleando un argumento de localización obtenemos para $\varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$P_x\big(\,\tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon\,,\ \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(0)) \leq T_{\mathcal{K}}\big) \leq \sup_{y\in\overline{B}_\rho(0)} P_y(\,\tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon - T_{\mathcal{K}}).$$

y, por lo probado en el paso anterior, concluimos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\sup_{x\in\mathcal{K}} P_x\big(\,\tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon\,,\ \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(0))\big) \leq e^{-t}. \tag{8.45}$$

Por otro lado, un argumento de localización similar nos otorga para $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ y $n \geq n_{\mathcal{K}}$

$$P_x\big(\tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon\,, \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(0)) \leq T_{\mathcal{K}}\big) \geq \inf_{z\in\mathcal{K}} P_z(\tau_\varepsilon^{(n)}(\overline{B}_\rho(0)) \leq T_{\mathcal{K}}) \inf_{y\in\overline{B}_\rho(0)} P_y(\tau_\varepsilon^{(n)} > t\beta_\varepsilon)$$

$$\geq \Big[\inf_{n\geq n_{\mathcal{K}}} \Big(\inf_{z\in\mathcal{K}} P_z(\tau_\varepsilon^{(n)}(\overline{B}_\rho(0)) \leq T_{\mathcal{K}})\Big)\Big] \inf_{y\in\overline{B}_\rho(0)} P_y(\tau_\varepsilon^{(n)} > t\beta_\varepsilon). \tag{8.46}$$

Notemos que el primer factor del miembro derecho tiende a uno con $\varepsilon \to 0$ por (8.44). Además, dado $\delta > 0$, para cada $\varepsilon > 0$ podemos tomar $n_\delta^\varepsilon \geq n_{\mathcal{K}}$ tal que

$$P_0(\tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon) - P_0(\tau_\varepsilon^{(n_\delta^\varepsilon)} > t\beta_\varepsilon) < \delta.$$

Con esto conseguimos

$$\inf_{y\in\overline{B}_\rho(0)} P_y(\tau_\varepsilon^{(n_\delta^\varepsilon)} > t\beta_\varepsilon) \geq P_0(\tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon) - \delta - \sup_{y\in\overline{B}_\rho(0)} |P_y(\tau_\varepsilon^{(n_\delta^\varepsilon)} > t\beta_\varepsilon) - P_0(\tau_\varepsilon^{(n_\delta^\varepsilon)} > t\beta_\varepsilon)|$$

$$\geq P_0(\tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon) - \delta - \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sup_{y\in\overline{B}_\rho(0)} |P_y(\tau_\varepsilon^{(n)} > t\beta_\varepsilon) - P_0(\tau_\varepsilon^{(n)} > t\beta_\varepsilon)|\Big).$$

De forma similar a la demostración del Lema 6.3.2, se puede ver que para $\rho > 0$ lo suficientemente chico vale

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sup_{y\in\overline{B}_\rho(0)} |P_y(\,\tau_\varepsilon^{(n_\delta)} > t\beta_\varepsilon) - P_0(\,\tau_\varepsilon^{(n_\delta)} > t\beta_\varepsilon)|\Big) = 0. \tag{8.47}$$

Luego, teniendo en cuenta esto último y (8.46), por lo probado en el primer paso obtenemos

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \inf_{x\in\mathcal{K}} P_x\big(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon \,,\, \tau_\varepsilon(\overline{B}_\rho(0)) \leq T_{\mathcal{K}}\big) \geq e^{-t} - \delta. \tag{8.48}$$

Como $\delta > 0$ es arbitrario, (8.48) sumado a (8.45) nos permite concluir

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in\mathcal{K}} |P_x(\, \tau_\varepsilon > t\beta_\varepsilon) - e^{-t}| = 0. \tag{8.49}$$

□

Bibliografía

[1] Gabriel Acosta, Julián Fernández Bonder, and Julio D. Rossi, *Stable manifold approximation for the heat equation with nonlinear boundary condition*, J. Dynam. Differential Equations **12** (2000), no. 3, 557–578. MR MR1800133 (2001m:65122)

[2] Herbert Amann, *Ordinary differential equations*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 13, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1990, An introduction to nonlinear analysis, Translated from the German by Gerhard Metzen. MR MR1071170 (91e:34001)

[3] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell, *Random perturbations of dynamical systems*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 260, Springer-Verlag, New York, 1998, Translated from the 1979 Russian original by Joseph Szücs. MR MR1652127 (99h:60128)

[4] Antonio Galves, Enzo Olivieri, and Maria Eulália Vares, *Metastability for a class of dynamical systems subject to small random perturbations*, Ann. Probab. **15** (1987), no. 4, 1288–1305. MR MR905332 (89a:60142)

[5] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 113, Springer-Verlag, New York, 1991. MR MR1121940 (92h:60127)

[6] Torgny Lindvall and L. C. G. Rogers, *Coupling of multidimensional diffusions by reflection*, Ann. Probab. **14** (1986), no. 3, 860–872. MR MR841588 (88b:60179)

[7] Enzo Olivieri and Maria Eulália Vares, *Large deviations and metastability*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 100, Cambridge University Press, Cambridge, 2005. MR MR2123364 (2005k:60007)