



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

**COHOMOLOGÍA DE HOCHSCHILD DE ARREGLOS DE
HIPERPLANOS**

Pablo Mauricio Zadunaisky-Bustillos

Director: Andrea Solotar
Codirector: Mariano Suárez-Alvarez

27 de marzo de 2009

*Para Gaby y Gaby
Mauricio y Jaime
Iván y Nilda.*

Agradecimientos

Es un gran placer tomarme un minuto para denunciar a todos los culpables de que esto esté siendo posible. *Esto* obviamente, no está ni por asomo terminado: este es un proceso, y este trabajo es solo un instante en ese proceso. Toda la gente aquí mencionada ayudó y va a seguir ayudando a que este proceso siga ocurriendo, siga siendo satisfactorio, gratificante. Si algo tienen en común todas estas personas es que pude aprender de ellos, de su trabajo, sus esfuerzos y su compañía.

Mis padres, y mi familia en general, son los principales responsables: antes de aprender matemáticas aprendí a ser paciente y trabajar duro de todos ellos. Gracias a mi mamá y a mi papá, entre todas las cosas que tengo que agradecerles, de ustedes aprendí la satisfacción de hacer un buen trabajo. A mis dos abuelos, Mauricio y Jaime, las dos personas más bellas que conozco. A mi familia, toda, por el cariño y el tiempo, los cuentos y los rompecraneos, el fútbol y el basquet, los téis, los viajes, los chicharrones, la música, los libros, el teatro, el nutella, la política, las pastas, los platos rotos y las tardes al sol.

Tanto en el colegio secundario como en la facultad tuve la gran suerte de estar rodeado de profesores que me ofrecieron todo para despertar mi entusiasmo, y me obligaron a esforzarme para lograr un poco más. Iván, Ruth y Nilda allá; Andrea, Mariano, Pablo, Gabriel aquí.

En la facultad pude ver con mis propios ojos por primera vez a gente que marcaba el camino a seguir. Miguel, José Luis, Jonathan, Matías, Nicos, con las horas de consultas y charlas y divague y su no tan interminable paciencia siempre estuvieron dispuestos a dar una mano.

Perdí la cuenta de la cantidad de veces que me declaré cansado, harto, molesto, dispuesto a olvidarme de todo; cada vez que pasó eso estuve rodeado de personas que me ayudaron, y mucho. Mari, Marco, Julian, Quimey, Nina (sí, ese es su nombre), desde el principio. Con el tiempo, y en el mejor momento, aparecieron Gabriel, Maxi, Charly, Vero, Marcos, Chris, Fede, Fran, Pablo, Guille, Martina, Fede... Todos ellos me devolvieron algo que no sabía que había perdido, y ayudaron a que tras las prisas, las rabias, los problemas copados, los exámenes interminables, los dolores de cabeza, los problemas de espalda, los viajes en bici, los lunes a la mañana, las clases interminables, las aulas calurosas, los cuartos viciados, las noches sin dormir estos sean días placenteros, felices.

Me detuve un minuto. Ahora sigo.

Índice general

Agradecimientos	iii
Introducción	1
0.1 Antecedentes históricos	2
0.2 Convenciones y notación	4
0.3 Esquema del documento	5
1 Homología de Hochschild	7
1.1 Definiciones y notación	7
1.2 Homología y cohomología de Hochschild	8
1.2.1 Homología	8
1.2.2 Cohomología	9
1.2.3 Los funtores de homología y cohomología	11
1.2.4 $H_*(-)$ y $H^*(-)$ como funtores derivados	14
1.2.5 Varia	16
1.3 Interpretación de los grupos de cohomología	16
1.3.1 Preliminares	17
1.3.2 Automorfismos de A	18
1.3.3 Deformaciones Triviales de A	20
1.3.4 Deformaciones uniparamétricas	21
1.3.5 Equivalencia de deformaciones	22
1.3.6 Las obstrucciones son cociclos	23
2 Resoluciones Proyectivas de Álgebras de Polinomios	27
2.1 Construcción explícita de una resolución	27
2.2 Resolución proyectiva del álgebra $k[X]$	32
2.2.1 Complejos de Koszul	32
2.2.2 Una resolución libre para $k[X]$	34
2.2.3 Una contracción del complejo de Koszul de $k[X]$	35
2.3 Una resolución para $k[X]/(f)$	38
2.3.1 Una resolución para $k[x]/(x^n)$	38
2.3.2 Construcción de la resolución general	41
2.4 Morfismo de comparación	46

2.4.1	Preliminares	46
2.4.2	Fórmulas explícitas para los morfismos de levantamiento	47
3	Cohomología de arreglos de hiperplanos	53
3.1	Arreglos de hiperplanos	53
3.1.1	Generalidades sobre la cohomología de Hochschild de arreglos . . .	55
3.2	Ejemplos	59
3.2.1	$\mathcal{Q} = x(x - 1)$	60
3.2.2	$\mathcal{Q} = xy$	60
3.2.3	$\mathcal{Q} = xy(x - y)$	62
3.2.4	$\mathcal{Q} = xy(x + y - 1)$	64
3.2.5	$\mathcal{Q} = xyz$	65
3.3	Observaciones	66
.1	Cálculo con <i>Macaulay2</i> de la cohomología de un álgebra	68

Introducción

Este trabajo está dedicado a estudiar la homología de Hochschild de cierto tipo de variedades algebraicas, los *arreglos de hiperplanos*. Como el nombre lo indica, un arreglo de hiperplanos es un conjunto de variedades k -lineales (donde k es un cuerpo arbitrario) de codimensión 1 en el espacio afín o proyectivo.

El principal motivo por el que nos interesa calcular la homología de un arreglo de hiperplanos es el siguiente. Dada una variedad algebraica en el espacio afín \mathbb{A}^n definida por un polinomio $f \in k[x_1, \dots, x_n]$, podemos tomar el álgebra de funciones racionales de esta variedad, $A = k[x_1, \dots, x_n]/(f)$. La homología de la variedad se calcula en términos de dicha álgebra y proporciona información geométrica sobre la curva.

La teoría es relativamente sencilla cuando la variedad es *regular*. La noción intuitiva de regularidad es que la curva es "plana" en un entorno del punto p . Más formalmente, una variedad se dice regular en un punto p cuando el espacio tangente a la variedad tiene dimensión como k espacio vectorial igual a la de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, donde \mathfrak{m} es el ideal maximal del anillo de funciones regulares localizado en el punto p .

Sin embargo, este no es el caso más general; un posible problema que se presenta es el de una curva que posea autointersecciones, como en la figura en esta página.

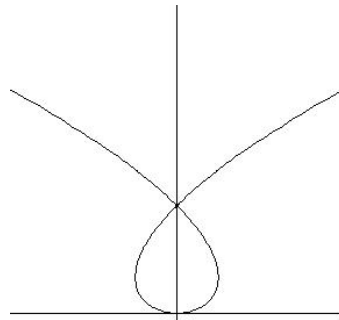


Figura 1: Curva con autointersecciones

Por ejemplo, si nos centramos únicamente en el punto de intersección, la variedad anterior no es regular en este punto, ya que localmente presenta una singularidad similar a la de dos rectas que se cortan transversalmente en un punto.

El interés en los arreglos de hiperplanos radica en que estos pueden utilizarse como modelos linealizados de variedades no regulares. Estudiamos los arreglos de hiperplanos

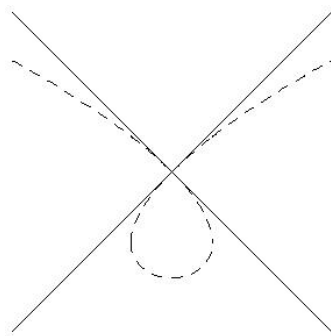


Figura 2: Modelo lineal de la intersección

con la esperanza de que el comportamiento local de las curvas que definen en estos puntos sea similar al de la variedad sin linealizar. Este es por supuesto un argumento local: no podemos esperar que el comportamiento global sea parecido, ya que hay otras curvas con singularidades similares a las de la curva anterior, pero características globales distintas.

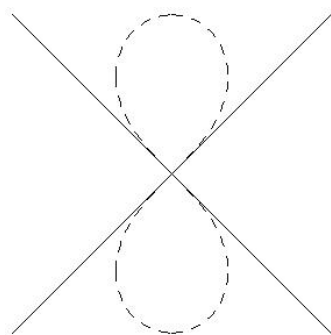


Figura 3: Otra curva singular de comportamiento local similar

Los grupos de cohomología son un invariante importante de las álgebras, y a lo largo de la historia distintos resultados de regularidad han sido enunciados en términos de estos grupos. A continuación presentamos una breve reseña histórica del tema. La principal fuente para esta Sección es [15].

0.1 Antecedentes históricos

Nuestro interés se centra en las álgebras A sobre un cuerpo k (eventualmente de característica 0), y el estudio de sus grupos de homología y cohomología, a definirse más adelante.

El primero en definir y estudiar estos grupos en el contexto de la teoría general de homología fue Hochschild, pero los orígenes de este trabajo están en el artículo de 1937 de N. Jacobson [11], donde se estudia sistemáticamente las derivaciones y las derivaciones interiores de álgebras sobre un cuerpo k . En [9] Hochschild trabaja sobre las derivaciones

de álgebras asociativas y de Lie, demostrando por métodos homológicos rudimentarios (para los estándares de hoy) que toda derivación de un álgebra es interior si y solo si el álgebra $A_\ell = A \otimes_k \ell$ es semisimple para toda extensión de cuerpos $\ell|k$. En el mismo trabajo presenta una condición necesaria para que un álgebra sobre un cuerpo de característica 0 sea semisimple.

Tras estudiar el trabajo de Cartan y Eilenberg sobre álgebra homológica [2], Hochschild reformula sus resultados previos ([10]) en términos de resoluciones proyectivas del álgebra y de grupos de cohomología con valores en un A -bimódulo arbitrario. En este nuevo lenguaje, los dos resultados principales del trabajo anterior pueden expresarse de la siguiente manera: un álgebra es separable si y solo si el primer grupo de cohomología del álgebra sobre cualquier bimódulo es nulo, y una condición necesaria para que un álgebra sea semisimple sobre un cuerpo de característica 0 es que su segundo grupo de cohomología (con coeficientes en sí misma) sea nulo. En ese mismo trabajo, Hochschild da una interpretación del segundo grupo de cohomología en términos de las extensiones del álgebra A . Una segunda interpretación de los grupos de cohomología puede encontrarse en [6], donde Gerstenhaber estudia las deformaciones de un álgebra.

Para comprender la idea de una deformación, consideremos primero el álgebra de funciones regulares de una curva \mathcal{C}_t , que depende de un parámetro $t \in k$. A medida que deformamos la curva variando el parámetro, la multiplicación en el álgebra se modifica para reflejar este cambio geométrico. Una variante de esta idea es estudiar el $k[[t]]$ -bimódulo $A[[t]]$ de series de potencias con coeficientes en A , y darle una multiplicación $k[[t]]$ -bilineal, de forma que su restricción al álgebra A coincida con la original. Gerstenhaber llama a esta nueva estructura una *familia uniparamétrica de deformaciones* del álgebra A , donde moralmente el parámetro t espera ser evaluado en algún elemento del cuerpo k . Por supuesto, este no es necesariamente el caso, y existen deformaciones para las cuales *ningún* valor de t en la clausura algebraica de k da lugar a una multiplicación en el álgebra A .

En el trabajo citado, Gerstenhaber demostró que a toda deformación le corresponde un 2-cociclo del complejo de cocadenas de A , al que llamó el generador infinitesimal de la deformación, y estudió el problema de levantamiento correspondiente: ¿cuándo un 2-cociclo es el generador infinitesimal de una deformación? En ese mismo trabajo se demuestra que la obstrucción a este levantamiento es un elemento del tercer grupo de cohomología de A , con lo cual un álgebra es *rígida* (es decir, no tiene deformaciones no triviales) si y solo si su tercer grupo de cohomología es nulo. En el Capítulo 1 resumimos esta interpretación y demostramos los resultados más importantes.

Como señalábamos en el párrafo anterior, uno de los principales ejemplos de álgebras asociativas es el álgebra de funciones regulares sobre una variedad algebraica. En este caso, los grupos de (co)homología de la variedad, es decir, del álgebra asociada, tienen una interpretación geométrica en términos de singularidades, suavidad, etc. En [8] se calcula la homología y cohomología de Hochschild de una hipersuperficie. Apoyándonos en estos resultados, dedicamos la Sección final al análisis de la cohomología de ciertos ejemplos de hipersuperficies no irreducibles, los arreglos de hiperplanos.

Un arreglo de hiperplanos es obviamente una variedad algebraica, el conjunto de

ceros de un polinomio dado por el producto de formas lineales cada una correspondiente a uno de los hiperplanos. Así, la factorización del polinomio, y por tanto la estructura algebraica del álgebra de funciones regulares, no es demasiado complicada a pesar de que el conjunto de singularidades es altamente complejo, lo que los hace un interesante caso de estudio. Como ya mencionamos, este conjunto puede servir como modelo lineal de ciertas singularidades de variedades algebraicas.

0.2 Convenciones y notación

En todo este documento, k es un anillo conmutativo y A es una k -álgebra (en la mayor parte de los casos estaremos interesados en el caso en k es un cuerpo). Para abreviar la notación, escribimos \otimes por \otimes_k . Si el producto tensorial se realiza sobre algún otro anillo, éste figurará explícitamente.

La potencia exterior $\Lambda^p V$ de un k -módulo libre de base $\{x_1, \dots, x_n\}$ es el k -módulo libre generado por $\{e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_p} : j_1 < j_2 < \dots < j_p\}$. El producto en el álgebra exterior $\Lambda V = (\oplus_{p \geq 0} \Lambda^p V, \wedge)$ es simplemente el inducido por el de $T(V)$, el álgebra tensorial.

Sea $J(p) = \{(j_1, j_2, \dots, j_p) : 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n\}$. Si notamos $e_J = e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_p}$, $\Lambda^p V$ resulta un k -módulo libre de base $\{e_J : J \in J(p)\}$.

Sea $A = k[x_1, \dots, x_n]$ la k -álgebra libre sobre el conjunto de generadores de V , $\{x_1, \dots, x_n\}$. Por abuso de notación escribimos $\Lambda^p A = A \otimes \Lambda^p V \otimes A$.

En muchos casos, elementos de la forma $x^n \otimes 1 + x^{n-1} \otimes x + \dots + 1 \otimes x^n$ aparecen en nuestros cálculos. La notación $\int_n a^s b c^t$ se usa para abreviar

$$\sum_{\substack{s+t+1=n \\ s,t \geq 0}} a^s b c^t,$$

donde a y c son elementos de un anillo, y b un elemento de un bimódulo sobre dicho anillo.

El anillo de polinomios en n variables $k[x_1, \dots, x_n]$ se nota como $k[X]$. Si $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ es un multiíndice, notamos $X^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$.

En muchas construcciones está implícita la elección de un orden monomial en el álgebra $k[X]$; a lo largo de todo el documento mantenemos la elección del orden lexicográfico, es decir $X^\alpha < X^\beta$, si y solo si $\alpha_i = \beta_i$ para $i = 1, \dots, j-1$, y $\alpha_j < \beta_j$. Dado un polinomio $p \in k[X] \setminus \{0\}$, el *exponente principal* es el mayor (según algún orden monomial prefijado) exponente que aparece en p , al que notamos por $le(p)$. El coeficiente que acompaña al único monomio con dicho exponente es el *coeficiente principal*, al que notamos $lc(p)$. El *término principal* es $lt(p) = lc(p)X^{le(p)}$.

Recordamos un resultado básico de la teoría de ecuaciones polinomiales.

Teorema 0.2.1 ([3], Proposición 2.6.1). *Dados dos polinomios f, g , y un orden monomial prefijado, existen únicos polinomios q, r de forma que $f = qg + r$, y $lt(g)$ no divide a ningún monomio de r .*

La demostración de este hecho y una introducción general a la teoría de ecuaciones polinomiales puede encontrarse en [3]. Hacemos una observación más, de demostración evidente.

Proposición 0.2.2. *Si $f \in k[X]$, entonces una base de $B = k[X]/(f)$ está dada por la imagen en el cociente del conjunto $\{X^\alpha : \alpha < \text{le}(f)\}$.*

Este resultado será de vital importancia cuando busquemos ejemplos explícitos de deformaciones del álgebra B .

0.3 Esquema del documento

En el Capítulo 1 desarrollamos la teoría de grupos de homología y cohomología de un álgebra, y damos la interpretación de Gerstenhaber acerca de los grupos de homología en grados bajos.

En el Capítulo 2 hacemos las construcciones algebraicas necesarias para poder calcular explícitamente estos grupos de homología e interpretar estos resultados de acuerdo a la teoría desarrollada en 1.

Finalmente, el Capítulo 3 introduce los arreglos de hiperplanos y procede a calcular los grupos de homología de algunos ejemplos, analizando la relación entre estos grupos y la geometría del arreglo. En esta Sección utilizamos el programa Macaulay2 [7], desarrollado para cálculos relacionados con geometría algebraica.

Capítulo 1

Homología de Hochschild

En este Capítulo desarrollamos las nociones básicas acerca de la homología y cohomología de Hochschild de un bimódulo sobre una k -álgebra. La (co)homología de Hochschild se puede definir en general en el caso de que k es un anillo conmutativo y A una k -álgebra. En este trabajo nos concentraremos en el caso particular en que k es un cuerpo, pero la Sección 1.2 está desarrollada bajo las hipótesis más generales. Si k es un anillo conmutativo cualquiera, muchos resultados se generalizan al caso en que A es una k -álgebra proyectiva.

1.1 Definiciones y notación

A lo largo de todo este Capítulo, k será un anillo conmutativo y A una k -álgebra asociativa con unidad.

Definición: 1.1.1. Un *bimódulo* sobre el álgebra A es un k -módulo M , dotado de acciones a derecha e izquierda de A , tales que

$$(a \cdot m) \cdot a' = a \cdot (m \cdot a') \quad \forall m \in M \quad a, a' \in A.$$

y la acciones de k inducidas a izquierda y derecha coinciden.

Dados M y N dos A -bimódulos, un morfismo de bimódulos es una transformación $f : M \rightarrow N$ A -lineal tanto a derecha como a izquierda.

Definición: 1.1.2. Se llama *álgebra envolvente* de A al álgebra $A^e = A \otimes A^{\text{op}}$, donde A^{op} denota el álgebra opuesta de A , es decir el álgebra cuyo espacio vectorial subyacente es el mismo, con la multiplicación dada por $a *_{\text{op}} b = ba$.

El principal motivo por el que se introduce esta definición es que un módulo a izquierda M sobre A^e no es otra cosa que un bimódulo sobre A , donde la acción está dada por $a \otimes a' \cdot m = ama'$; de la misma forma, los módulos a derecha sobre A^e se identifican con los bimódulos sobre A , y la acción está dada por $m \cdot a \otimes a' = a'ma$. Esto permite identificar la categoría de bimódulos sobre A con la categoría de módulos a izquierda o a

derecha sobre A^e , en la cual se pueden aplicar todos los resultados conocidos del álgebra homológica.

Nos interesa una construcción en particular, que utilizamos más adelante.

Lema 1.1.3. *Si A y A' son dos k -álgebras, y M y M' son respectivos bimódulos, entonces el producto $M \times M'$ es un $A \times A'$ bimódulo. Si N y N' son otro par de bimódulos, entonces $\text{Hom}_{A \times A'}(M \times M', N \times N') \cong \text{Hom}_A(M, N) \oplus \text{Hom}_{A'}(M', N')$ y $(M \times M') \otimes_{(A \times A')^e} (N \times N') \cong (M \otimes_{A^e} N) \oplus (M' \otimes_{A'^e} N')$. Estos isomorfismos son naturales.*

Demostración. La estructura de bimódulo está dada por

$$(a, a') \cdot (m, m') \cdot (b, b') = (amb, a'm'b') \quad \forall a, b \in A; a'b' \in A'.$$

La comprobación del resto de las afirmaciones es una cuenta de rutina. \square

1.2 Homología y cohomología de Hochschild

1.2.1 Homología

Sea k un anillo conmutativo, y A un álgebra asociativa sobre k . Dado un bimódulo sobre A , M , construimos un complejo de cadenas al que notamos $M \otimes A^{\otimes *}$. La componente de grado n -ésimo del complejo es $(M \otimes A^{\otimes *})_n = M \otimes A^{\otimes n}$ para $n \geq 0$ (por definición, $A^{\otimes 0} = k$) y 0 para $n < 0$.

Si definimos para cada $n \geq 1$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\partial_i^n : M \otimes A^{\otimes n} \longrightarrow M \otimes A^{\otimes n-1}$$

$$\partial_i^n(m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = \begin{cases} ma_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_n, & i = 0; \\ m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n, & 0 < i < n; \\ a_n m \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1}, & i = n; \end{cases}$$

los morfismos de borde del complejo son

$$d_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i^n : M \otimes A^{\otimes n} \rightarrow M \otimes A^{\otimes n-1}.$$

El complejo que obtenemos es

$$\dots \xrightarrow{d_2} M \otimes A \otimes A \xrightarrow{d_1} M \otimes A \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0 \quad (M \otimes A^{\otimes *})$$

donde hemos identificado el término $M \otimes k$ con M de manera estándar.

Observación: 1.2.1. La sucesión $M \otimes A^{\otimes *}$ es efectivamente un complejo. Para comprobar esto, debemos ver que $d^2 = 0$. Una observación inicial es que vale la igualdad

$$\partial_i^n \partial_j^{n+1} = \partial_{j-1}^n \partial_i^{n+1}; \quad \forall i < j.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
d_n d_{n+1} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{i+j} \partial_i^n \partial_j^{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} \partial_i^n \partial_j^{n+1} + \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^{i+j} \partial_i^n \partial_j^{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} \partial_i^n \partial_j^{n+1} + \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^{i+j} \partial_{j-1}^n \partial_i^{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} \partial_i^n \partial_j^{n+1} + \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k (-1)^{k+l-1} \partial_k^n \partial_l^{n+1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Definición: 1.2.2. Se define la *homología de Hochschild* de A con coeficientes en M como la homología del complejo $M \otimes A^{\otimes*}$. La notamos por $H_*(A, M)$, de forma que

$$H_*(A, M) := H(M \otimes A^{\otimes*}).$$

Si queremos enfatizar el cuerpo de base k , escribiremos $H_*^k(A, M)$. En el caso particular en que $M = A$ escribimos $HH_*(A)$ en lugar de $H_*(A, A)$.

Como el morfismo d_0 está dado por la fórmula

$$m \otimes a \mapsto m \cdot a - a \cdot m,$$

se deduce que $H_0(M) = M/[M, A]$, el llamado *módulo de coinvariantes de M* . Veremos más adelante que la asignación

$$\begin{aligned}
(-)_A : A^e \text{ Mod} &\rightarrow_k \text{Vect} \\
M &\mapsto (M)_A := M/[M, A]
\end{aligned}$$

es un funtor exacto a derecha, y que los grupos de homología de Hochschild pueden calcularse como los funtores derivados a izquierda de esta asignación.

1.2.2 Cohomología

En las mismas condiciones que en la Sección anterior, definimos un nuevo complejo $\text{Hom}_k(A^{\otimes*}, M)$. La componente de grado n -ésimo de este complejo es $\text{Hom}_k(A^{\otimes*}, M)_n = \text{Hom}_k(A^{\otimes n}, M)$ para $n \geq 0$, es decir el espacio de las funciones k -multilineales de A en M , y 0 en otro caso.

Definiendo para $n \geq 0$ e $i \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ los morfismos

$$\partial_n^i : \text{Hom}_k(A^{\otimes n}, M) \rightarrow \text{Hom}_k(A^{\otimes n+1}, M)$$

$$\partial_n^i(f)(a_0, \dots, a_n) = \begin{cases} a_0 f(a_1, \dots, a_n), & i = 0; \\ f(a_0, \dots, a_{i-1} a_i, \dots, a_n), & 0 < i < n+1; \\ f(a_0, \dots, a_{n-1}) a_n, & i = n+1, \end{cases}$$

los morfismos de borde están dados por

$$d^n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_n^i : \text{Hom}_k(A^{\otimes n}, M) \rightarrow \text{Hom}_k(A^{\otimes n+1}, M)$$

Obtenemos así un complejo al que llamamos $\text{Hom}_k(A^{\otimes*}, M)$, dado por

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d^0} \text{Hom}_k(A, M) \xrightarrow{d^1} \text{Hom}_k(A \otimes A, M) \xrightarrow{d^2} \dots \quad (\text{Hom}_k(A^{\otimes*}, M))$$

donde hemos identificado $\text{Hom}_k(k, M)$ con M de manera estándar.

Observación: 1.2.3. Los morfismos ∂_n^i cumplen con la relación

$$\partial_{n+1}^j \partial_n^i = \partial_{n+1}^i \partial_n^{j-1}; \quad \forall i < j.$$

La comprobación de que $d^i d^{i-1} = 0$ se puede hacer de forma análoga a la hecha en 1.2.1.

Definición: 1.2.4. Se define la *cohomología de Hochschild* de A con valores en M como la homología de este complejo, y la notamos $H^*(A, M)$ de forma que

$$H^*(A, M) = H(\text{Hom}(A^{\otimes*}, M)).$$

Si queremos enfatizar el cuerpo de base k , escribiremos $H_k^*(A, M)$. En el caso particular en que $M = A$, notamos $HH^*(A)$ en lugar de $H^*(A, A)$.

Observemos que el morfismo d^0 del complejo $\text{Hom}_k(A^{\otimes*}, M)$ está dado por $d^0(m)(a) = a \cdot m - m \cdot a$. El núcleo de este morfismo es el submódulo $M^A \subset M$ formado por los elementos para los cuales la acción a izquierda coincide con la acción a derecha, el *submódulo de invariantes*. La asignación

$$\begin{aligned} (-)^A : {}_A \text{Mod} &\rightarrow_k \text{Vect} \\ M &\mapsto M^A \end{aligned}$$

es un funtor exacto a izquierda, y la cohomología se podrá calcular en términos de sus funtores derivados a derecha.

1.2.3 Los funtores de homología y cohomología

En esta Sección presentamos una manera efectiva de calcular tanto la homología como la cohomología de Hochschild de un álgebra dada. El resultado principal ya fue anunciado en la Sección anterior: tanto la homología como la cohomología pueden considerarse familias de funtores derivados (y por lo tanto son δ -funtores universales). Con este resultado, el cálculo se reduce a encontrar una resolución proyectiva de M como bimódulo y aplicar la maquinaria estándar del álgebra homológica.

Lema 1.2.5. *Consideremos el siguiente complejo de A^e -módulos:*

$$\cdots \longrightarrow A \otimes A \otimes A \xrightarrow{d} A \otimes A \xrightarrow{d} A \longrightarrow 0 \quad (\beta(A))$$

donde d está dada por

$$d(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n.$$

El complejo $\beta(A)$ es acíclico, y por lo tanto es una resolución de A como A^e -módulo, conocida como la resolución bar de A . Por convención, $\beta(A)_p = A \otimes A^p \otimes A$, con $\beta(A)_{-1} = A$.

Demostración. Es costumbre, cuando se trabaja con la resolución bar, reemplazar los términos de la forma $a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ por $a_0|a_1| \cdots |a_n$ para ahorrar espacio.

En primer lugar notamos que si definimos

$$\begin{aligned} \gamma_i^n &: A^{\otimes n+2} \rightarrow A^{\otimes n+1} \\ a_0|a_1| \cdots |a_{n+1} &\mapsto a_0|a_1| \cdots |a_i a_{i+1}| \cdots |a_n \end{aligned}$$

el diferencial de este complejo puede escribirse como

$$d = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \gamma_i^n : A^{\otimes n+1} \rightarrow A^{\otimes n}.$$

donde además los morfismos γ_i^n cumplen con la relación

$$\gamma_i^n \gamma_j^{n+1} = \gamma_{j-1}^n \gamma_i^{n+1}; \quad \forall i < j.$$

Esta condición es idéntica a la que cumplen los morfismos de la resolución $M \otimes A^{\otimes *}$, y por lo tanto comprobar que $d^2 = 0$ en este complejo es formalmente idéntico a la cuenta hecha en 1.2.1

Para ver que el complejo es acíclico, damos una contracción k -lineal del mismo. Sea

$$\begin{aligned} s_i &: A^{\otimes i+1} \rightarrow A^{\otimes i+2} \\ s_i(a_1|a_2| \cdots |a_{i+1}) &= (-1)^i a_1|a_2| \cdots |a_{i+1}|1. \end{aligned}$$

Si calculamos explícitamente, en el caso $i = -1$, tenemos que

$$ds_{-1}(a) = d(a|1) = a.$$

Para $i \geq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} & (s_{i-1}d + ds_i)(a_0|a_1|\dots|a_i) \\ &= s_{i-1} \left(\sum_j (-1)^j a_0|\dots|a_j a_{j+1}|\dots|a_i \right) + d((-1)^i a_0|a_1|\dots|a_i|1) \\ &= (-1)^{i-1} \sum_j (-1)^j a_0|\dots|a_j a_{j+1}|\dots|a_i|1 \\ &\quad - (-1)^i \sum_j (-1)^j a_0|\dots|a_j a_{j+1}|\dots|a_i|1 + a_0|a_1|\dots|a_i \\ &= a_0|a_1|\dots|a_i. \end{aligned}$$

Así, $s_{i-1}d + ds_i = \text{Id}$. Esto implica que la homología es nula y el complejo exacto. \square

Esta resolución nos permitirá calcular tanto la homología como la cohomología de Hochschild de cualquier A -bimódulo M . La demostración de este hecho depende del siguiente:

Lema 1.2.6. *Se tiene la siguiente relación entre k -módulos proyectivos y el producto tensorial.*

- Si P y Q son dos k -módulos proyectivos, entonces $P \otimes Q$ también lo es.
- Si P es un módulo proyectivo sobre k y A es un álgebra sobre k , entonces $A \otimes P$ es un módulo proyectivo sobre A .

Demostración. Para verificar la primera afirmación, basta ver que el funtor $\text{Hom}_k(P \otimes Q, -)$ es exacto. Tenemos la identificación natural

$$\text{Hom}_k(P \otimes Q, -) \cong \text{Hom}_k(Q, \text{Hom}_k(P, -))$$

Al ser naturalmente equivalente a una composición de funtores exactos, $\text{Hom}_k(P \otimes Q, -)$ resulta exacto. La segunda afirmación resulta de la identificación

$$\text{Hom}_A(A \otimes P, -) \cong \text{Hom}_k(P, \text{Hom}_A(A, -)) \cong \text{Hom}_k(P, -)$$

y de un argumento similar. \square

Teorema 1.2.7. *Si A es un álgebra proyectiva sobre k , es decir, si además de ser una k -álgebra es proyectiva como k -módulo, entonces $\beta(A)$ es una resolución proyectiva de A como k -módulo.*

Demostración. El resultado se sigue de los dos lemas anteriores. \square

Lema 1.2.8. *Fijemos un A -bimódulo M . Los funtores*

$$\varphi, \psi : {}_k \text{Vect} \rightarrow {}_k \text{Vect}$$

dados por $\varphi(V) = M \otimes_{A^e} (A \otimes V \otimes A)$ y $\psi(V) = M \otimes V$ son naturalmente isomorfos. Llamamos Γ a este isomorfismo.

Demostración. Dado un k -espacio vectorial V , tenemos la identificación

$$\begin{aligned} M \otimes_{A^e} (A \otimes V \otimes A) &\cong M \otimes V \\ m \otimes_{A^e} (a \otimes v \otimes a') &\mapsto a' m a \otimes v \\ , m \otimes_{A^e} (1 \otimes v \otimes 1) &\leftarrow m \otimes v. \end{aligned}$$

Si W es otro k -espacio vectorial, y $f : V \rightarrow W$ es una transformación k -lineal, se puede comprobar directamente que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_{A^e} (A \otimes V \otimes A) & \xrightarrow{\cong} & M \otimes V \\ \varphi(f) \downarrow & & \downarrow \psi(f) \\ M \otimes_{A^e} (A \otimes W \otimes A) & \xrightarrow{\cong} & M \otimes V \end{array}$$

es conmutativo \square

Corolario 1.2.9. *Si A es k -proyectiva, la resolución bar es una resolución proyectiva de A como A^e -módulo.*

Demostración. Los morfismos de borde de la resolución bar son A^e -lineales, por lo que basta ver que las componentes de $\beta(A)$ son proyectivas. La componente de grado n -ésimo de la resolución bar es $\beta(A)_n = A \otimes A^{\otimes n} \otimes A$ si $n \geq 0$. Si tomamos $M = A^e$ en el lema 1.2.8, $\beta_n(A) \cong A^e \otimes A^{\otimes n-1}$. Como $A^{\otimes n-1}$ es k -proyectivo y A^e es una k -álgebra, por el lema 1.2.6 $A^e \otimes A^{\otimes n-1}$ es A^e -proyectivo. \square

Estamos en condiciones de enunciar el teorema central de esta Sección

Teorema 1.2.10 (Caracterización de la (co)homología de Hochschild). *Sea A una k -álgebra proyectiva (en caso de que k sea un cuerpo, esta condición se cumple trivialmente). Entonces $H^*(A, M) \cong \text{Ext}_{A^e}^*(A, M)$ y $H_*(A, M) \cong \text{Tor}_{A^e}^*(M, A)$.*

Demostración. Si aplicamos el funtor $M \otimes_{A^e} -$ a la resolución bar de A , obtenemos:

$$\cdots \longrightarrow M \otimes_{A^e} (A \otimes A \otimes A) \xrightarrow{\text{Id} \otimes_{A^e} d} M \otimes_{A^e} (A \otimes A) \xrightarrow{\text{Id} \otimes_{A^e} d} M \otimes_{A^e} A \longrightarrow 0.$$

Por 1.2.9, la resolución bar de A es una resolución A^e -proyectiva de A , y por lo tanto la homología de este complejo (eliminando la componente de grado 0) es exactamente $\text{Tor}_{A^e}(A, M)$.

A continuación aplicamos la identificación descrita en el lema 1.2.8. El complejo se transforma en

$$\cdots \longrightarrow M \otimes A \xrightarrow{d'} M \xrightarrow{d'} M \otimes_{A^e} A \longrightarrow 0.$$

Los morfismos d' vienen dados por la transformación natural, por lo que

$$d' = \Gamma(d) = \sum_{i=0}^n \Gamma(\gamma_i^n).$$

Un cálculo sencillo muestra que $\Gamma(\gamma_i^n) = \partial_i^n$, por lo que este complejo es precisamente $M \otimes A^{\otimes*}$, con lo cual su homología es la homología de Hochschild de M . Esto nos dice que $H_*(A, M) \cong \text{Tor}_*^{A^e}(A, M)$

Análogamente, aplicando el functor $\text{Hom}_{A^e}(-, M)$ a la misma resolución y eliminando el término de grado 0 se obtiene la resolución $\text{Hom}_k(A^{\otimes*}, M)$, y que $H^*(A, M) \cong \text{Ext}_{A^e}^*(A, M)$. \square

1.2.4 $H_*(-)$ y $H^*(-)$ como funtores derivados

En la Sección 1.2 definimos dos aplicaciones

$$(-)_A, (-)^A : {}_{A^e} \text{Mod} \rightarrow_k \text{Vect}$$

que asignan a cada A -bimódulo su módulo de coinvariantes e invariantes respectivamente; afirmamos que eran funtores y que la homología y cohomología eran sus respectivos funtores derivados. En esta Sección demostramos esas afirmaciones.

Lema 1.2.11. *Las asignaciones $(-)_A$ y $(-)^A$ son funtores, y existen isomorfismos naturales $(-)_A \cong - \otimes_{A^e} A$ y $(-)^A \cong \text{Hom}_{A^e}(A, -)$.*

Demostración. Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo de A^e -módulos. Afirmamos que induce un morfismo $f_A : M_A = M/[A, M] \rightarrow N_A = N/[A, N]$. Para ver esto, basta ver que $f([A, M]) \subset [A, N]$. El submódulo $[A, M]$ está generado por elementos de la forma $am - ma$, cuya imagen por f es $af(m) - f(m)a \in [A, N]$. Esto nos da la inclusión que necesitamos.

Definimos ahora para cada M un morfismo dado por

$$\begin{aligned} \varphi : M/[A, M] &\rightarrow M \otimes_{A^e} A \\ \overline{m} &\mapsto m \otimes_{A^e} 1. \end{aligned}$$

La asignación está bien definida porque si $\overline{m} = \overline{m}'$, existe $n \in M$ tal que $m - m' = an - na$, y por lo tanto

$$m \otimes_{A^e} 1 - m' \otimes_{A^e} 1 = (an - na) \otimes_{A^e} 1 = n \otimes_{A^e} a - n \otimes_{A^e} a = 0.$$

φ tiene una inversa dada por

$$m \otimes_{A^e} a \mapsto \overline{am}.$$

Con estos isomorfismos, resta únicamente comprobar que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_A & \xrightarrow{\varphi} & M \otimes_{A^e} A \\ f_A \downarrow & & \downarrow Id \otimes_{A^e} f \\ N_A & \xrightarrow{\varphi} & N \otimes_{A^e} A \end{array}$$

conmuta.

En el otro caso, para ver que $(-)^A$ es un funtor debemos ver que induce una función $f^A : M^A \rightarrow N^A$. Si $m \in M^A$, entonces para todo $a \in A$ se tiene que $am - ma = 0$. Entonces $af(m) - f(m)a = f(am - ma) = 0$ para todo $a \in A$, y $f(m) \in N^A$.

Definimos ahora un morfismo

$$\begin{aligned} \psi : M^A &\rightarrow \text{Hom}_{A^e}(A, M) \\ m &\mapsto f_m, \end{aligned}$$

donde f_m es la única función A^e -lineal tal que $f_m(1) = m$. La buena definición es consecuencia precisamente de que $m \in M^A$. El morfismo inverso es

$$f \in \text{Hom}_{A^e}(A, M) \mapsto f(1) \in M^A,$$

el cual está bien definido ya que

$$am - ma = af(1) - f(1)a = f(a) - f(a) = 0.$$

Resta entonces ver que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M^A & \xrightarrow{\psi} & \text{Hom}_{A^e}(A, M) \\ f^A \downarrow & & \downarrow f^* \\ N^A & \xrightarrow{\psi} & \text{Hom}_{A^e}(A, N) \end{array}$$

conmuta. □

Corolario 1.2.12. *Los funtores $(-)^A$ $(-)_A$ son exactos a izquierda y derecha, respectivamente. Además, existen isomorfismos naturales $H_*(A, -) \cong \mathcal{L}^*(-)_A$ y $H_*(A, -) \cong \mathcal{R}^*(-)^A$, donde $\mathcal{L}^*(-)_A$ y $\mathcal{R}^*(-)^A$ son los funtores derivados a izquierda y derecha de $(-)_A$ y $(-)^A$, respectivamente.*

Demostración. La exactitud de ambos funtores se deduce del lema anterior y de la exactitud de los funtores $\text{Hom}_{A^e}(A, -)$ y $- \otimes_{A^e} A$. Por ser $H_* \cong \text{Tor}_*^{A^e}(A, -)$, sabemos que $\{H_*\}_{* \in \mathbb{N}_0}$ es un δ -funtor universal. Lo mismo vale para $\mathcal{L}^*(-)_A$, ya que toda familia de funtores derivados es un δ -funtor universal. Como además $H_0(A, -) \cong (-)_A$, tenemos dos δ -funtores universales y un isomorfismo natural en grado 0. Esto implica que ambos son naturalmente isomorfos. Un razonamiento similar vale para $H^*(A, -)$ y $\mathcal{R}^*(-)^A$. □

1.2.5 Varia

En esta Sección establecemos algunos resultados que serán necesarios más adelante.

Teorema 1.2.13. *Sea A una k -álgebra, ℓ un anillo conmutativo y sea $\pi : k \rightarrow \ell$ un morfismo de anillos. Si notamos por $A_\ell = \ell \otimes_k A$, tenemos que para todo A_ℓ -bimódulo M existe un isomorfismo natural*

$$H_*^k(A, M) \cong H_*^\ell(A_\ell, M) \quad y \quad H_k^*(A, M) \cong H_\ell^*(A_\ell, M).$$

donde consideramos en M la estructura de k -módulo inducida por el morfismo π .

Demostración. Dado M un A_ℓ -bimódulo y N un A -bimódulo, sea $N_\ell = \ell \otimes_k N$. Existen isomorfismos naturales

$$M \otimes_\ell N_\ell \cong M \otimes_\ell \ell \otimes_k N \cong M \otimes_k N$$

y

$$\mathrm{Hom}_\ell(N_\ell, M) \cong \mathrm{Hom}_\ell(\ell \otimes_k N, M) \cong \mathrm{Hom}_k(N, \mathrm{Hom}_\ell(\ell, M)) \cong \mathrm{Hom}_k(N, M).$$

Estos inducen un isomorfismo en la homología. □

Teorema 1.2.14. *Sean A y A' dos k -álgebras, y sean M y M' bimódulos sobre cada una respectivamente. Se tienen entonces isomorfismos naturales*

$$\begin{aligned} H_*(A \times A', M \times M') &\cong H_*(A, M) \oplus H_*(A', M') \\ &y \\ H^*(A \times A', M \times M') &\cong H^*(A, M) \oplus H^*(A', M'). \end{aligned}$$

Demostración. Los isomorfismos definidos en el lema 1.1.3 inducen un isomorfismo en la homología. □

1.3 Interpretación de los grupos de cohomología

Los grupos de cohomología en grados bajos juegan un rol fundamental en la teoría de deformación de álgebras, desarrollada en [6] y trabajos subsiguientes. Esta interpretación, que resumimos en la Sección actual, relaciona los grupos de homología con ciertas familias de automorfismos del álgebra A , trazando una analogía con los grupos de homología de variedades analíticas. Si bien es necesario solo para facilitar la demostración del resultado final de esta Sección, a partir de ahora consideraremos $\mathrm{char}(k) = 0$ salvo que se mencione explícitamente otra posibilidad.

1.3.1 Preliminares

Sea A una k -álgebra y sea $K = k[[t]]$, el anillo de series de potencias sobre k . Las siguientes construcciones son válidas si V es un k -espacio vectorial cualquiera, pero en general pensamos en V como el espacio subyacente de A .

K es un anillo local graduado cuyo ideal maximal es $\mathfrak{m} = Kt$, y donde $\deg \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ es el menor i tal que $a_i \neq 0$. Notar que al ser el ideal \mathfrak{m} el único maximal, su complemento, es decir las series de potencia con término independiente no nulo, son las unidades del anillo K . La inversa de estos elementos está dada por

$$\left(a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i \right)^{-1} = a_0^{-1} - \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i \right) + \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i \right)^3 + \dots$$

Para facilitar el trabajo con esta estructura, se introduce en K una topología, donde el conjunto $\{\mathfrak{m}^n = Kt^n : n \in \mathbb{N}\}$ es la familia de entornos del 0. Esta topología es inducida por una ultramétrica, dada por $d(a, b) = e^{-\deg(b-a)}$. De esto se deduce fácilmente que la convergencia definida por esta topología es la convergencia de series de potencias “coeficiente a coeficiente”, es decir, una sucesión de series de potencias $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a una serie de potencias a si y solo si para todo $t \in \mathbb{N}$, el t -ésimo coeficiente de las series a_n se estabiliza eventualmente, y es igual al t -ésimo coeficiente de a .

Llamemos $V_K := K \otimes_k V$ (si V es el espacio subyacente de A , V_K es el espacio subyacente del álgebra $A_K = K \otimes_k A$). El K -módulo V_K hereda una topología del anillo, donde los entornos del 0 están dados por $\{\mathfrak{m}^n V : n \in \mathbb{N}\}$. Notar que todo elemento de V_K puede representarse como una serie de potencias con coeficientes en V ; de esta forma, la topología induce una vez más la convergencia coeficiente a coeficiente, y está dada por una ultramétrica similar a la del caso anterior.

No pretendemos profundizar en esta teoría, pero nos interesa hacer la siguiente observación. Existe una inclusión natural $1 \otimes_K - : V \rightarrow V_K$. La función $\text{ev}_0 : A_K \rightarrow A$ que dada una serie de potencias, devuelve el término independiente es una retracción para esta función (notar que si dotamos a A de la topología discreta, esta función es la única extensión continua de la función evaluar en 0, definida sobre los polinomios). Dado un morfismo $\varphi : V \rightarrow V$ k -lineal, existe una única función continua $\hat{\varphi} : V_K \rightarrow V_K$ K -lineal, dada por

$$\hat{\varphi} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(a_i) t^i.$$

tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_K & \xrightarrow{\text{ev}_0} & V \\ \hat{\varphi} \downarrow & & \downarrow \varphi \\ V_K & \xrightarrow{\text{ev}_0} & V \end{array}$$

Dada $\psi : V_K \rightarrow V_K$, si existe $\varphi : V \rightarrow V$ tal que $\psi = \hat{\varphi}$, decimos que ψ está *definida sobre k* .

La siguiente noción nos será útil más adelante

Definición: 1.3.1. Una transformación lineal $\varphi : V_K \rightarrow V_K$ se dice *homogénea de grado n* si $\varphi(t^m V_K) \subset t^{n+m} V_K$.

Observación: 1.3.2. Toda función homogénea es continua trivialmente. Una función de la forma $t^n \hat{\varphi}$ es homogénea de grado n .

1.3.2 Automorfismos de A

De ahora en adelante V será siempre el espacio vectorial subyacente a A . Tenemos entonces una inmersión canónica $\text{End}(V) \hookrightarrow \overline{\text{End}(V_K)}$. Consideremos el conjunto $F = \bigoplus_{i \geq 0} t^i \text{End}(V)$. La clausura de este conjunto, \overline{F} tiene como elementos los morfismos de V_K de la forma

$$\Phi = \phi_0 + t\phi_1 + t^2\phi_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \phi_i \quad (1.1)$$

donde $\{\phi_i\}_{i \geq 0}$ es una familia de funciones definidas sobre k . En particular, las unidades de este conjunto, es decir, los automorfismos de V_K que se pueden construir como series de potencias con coeficientes en $\text{End}(V)$, son de la forma (1.1), con $\phi_0 \in \text{End}(V)^\times$.

Definición: 1.3.3. Un automorfismo de la forma (1.1) se dirá *trivial* si $\phi_0 = \text{Id}$.

Tomemos un morfismo trivial

$$\Phi = \text{Id} + t\phi_1 + t^2\phi_2 + \dots = \text{Id} + \sum_{i=1}^{\infty} t^i \phi_i. \quad (1.2)$$

El morfismo ϕ_1 se llama, por analogía con el caso de funciones analíticas definidas sobre variedades complejas, el diferencial del morfismo Φ . Añadimos que la inversa de Φ está dada por

$$\Phi_t^{-1}(a) = a - \left(\sum_{i=1}^{\infty} t^i \phi_i(a) \right) + \left(\sum_{i=1}^{\infty} t^i \phi_i(a) \right)^2 - \dots$$

Consideremos ahora el caso en que el morfismo trivial Φ_t es además un automorfismo del álgebra A_K . Esto es equivalente a pedir que Φ_t sea, además de un automorfismo lineal, una función multiplicativa. La condición explícita es que se cumpla la igualdad

$$\Phi_t(ab) = ab + t\phi_1(ab) + t^2\phi_2(ab) + \dots \quad (1.3)$$

$$= \Phi_t(a)\Phi_t(b) = ab + t(a\phi_1(b) + \phi_1(a)b) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \sum_{j+k=i} \phi_j(a)\phi_k(b). \quad (1.4)$$

de donde deducimos

$$\phi_n(ab) = \sum_{j+k=n} \phi_j(a)\phi_k(b),$$

o equivalentemente

$$-d\phi_n(a, b) = \sum_{\substack{j+k=n \\ j, k > 0}} \phi_j(a)\phi_k(b). \quad (1.4_n)$$

Luego, la multiplicatividad de Φ_t depende de que se cumpla la condición $(1.4)_n$ para todo n . En particular, tomando $n = 1$, se tiene que $\phi_1(ab) = a\phi_1(b) + \phi_1(a)b$, es decir, ϕ_1 debe ser una derivación de A en sí misma, y por lo tanto un 1-cociclo del complejo $\text{Hom}_k(A^*, A)$.

Consideremos ahora el problema inverso. Dado un 1-cociclo φ , ¿existe un automorfismo trivial Φ_t tal que $\phi_1 = \varphi$? En otras palabras, ¿es toda derivación el diferencial de un automorfismo trivial?

Definición: 1.3.4. Diremos que ϕ_1 es *integrable* si es el diferencial de un automorfismo trivial.

Para que ϕ_1 sea integrable, es condición necesaria y suficiente que se cumplan todas las igualdades 1.4_n . Si $n = 2$, se tiene

$$-d\phi_2(a, b) = \phi_1(a)\phi_1(b),$$

es decir que que la función de dos variables de la derecha debe ser un coborde. Esta condición es la primera obstrucción para que ϕ_1 se pueda extender a un automorfismo. Si la característica del cuerpo de base es distinta de 2, podemos tomar $\phi_2 = \frac{1}{2}\phi_1^2$, y la primera obstrucción no representa ningún problema. En general, el término de la derecha de la ecuación 1.4_i es la i -ésima obstrucción a la integrabilidad de ϕ_1 . Si definimos el elemento $\phi_i = -(i!)^{-1}\phi_1^i$, este cumple con todas las ecuaciones; en particular toda derivación es integrable en un cuerpo de característica 0.

Si el cuerpo de base es de característica p , entonces podemos usar la fórmula anterior para $i = 2, \dots, p-1$. Esta fórmula deja de valer en cuanto $i \geq p$. La p -ésima obstrucción

$$\sum_{\substack{j+k=p \\ j, k > 0}} \phi_j(a)\phi_k(b)$$

es llamada la *obstrucción primaria* para la integrabilidad de ϕ_1 . Esta induce un morfismo de grupos abelianos

$$\text{Sq}_p : HH^1(A) \rightarrow HH^2(A).$$

Volveremos sobre las obstrucciones en las secciones siguientes.

1.3.3 Deformaciones Triviales de A

La noción alrededor de la cual centramos nuestra interpretación de los grupos de cohomología es la de una *deformación* del álgebra A . De ahora en adelante V será siempre el espacio vectorial subyacente a A .

Análogamente a la construcción hecha en la Sección anterior, es posible extender al producto tensorial de $V_K \otimes_K V_K$ funciones bilineales "definidas sobre k ", como por ejemplo la multiplicación $\mu : V \otimes V \rightarrow V$ que define la estructura de álgebra de A . La teoría en este caso es bastante más complicada y la topología del anillo de series de potencias entra en juego de manera mucho más sutil. En lo que sigue todas las funciones que aparecen estarán siempre bien definidas, por lo que no enunciaremos estos resultados con total generalidad. El lector interesado en el tema puede referirse a [12], Capítulo XVI.

Una posible extensión de la multiplicación μ es la multiplicación inducida $\hat{\mu} : V_K \otimes_K V_K \rightarrow V_K$, que hace de A_K una K -álgebra. Podemos ver que con dicha multiplicación, $A_K \cong A[[t]]$. De ahora en más notamos el producto $\hat{\mu}$ en el álgebra A_K por yuxtaposición, salvo que sea necesario hacerlo explícito.

Tomemos un morfismo trivial Φ_t de la forma (1.2). Podemos definir una nueva función bilineal sobre V_K , $g_t : V_K \otimes V_K \rightarrow V_K$,

$$g_t(a, b) = \Phi_t^{-1}(\Phi_t(a)\Phi_t(b)).$$

Esta función bilineal es un candidato a una nueva multiplicación. La explicación por la que el subíndice t aparece en la notación se puede entender estudiando el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A_K \otimes A_K & \xrightarrow{\text{ev}_0 \otimes \text{ev}_0} & A \otimes A \\ \hat{\mu} \downarrow & & \downarrow \mu \\ A_K & \xrightarrow{\text{ev}_0} & A. \end{array}$$

Si cambiamos $\hat{\mu}$ por alguna otra multiplicación, por ejemplo g_t , podemos estudiar el efecto de este cambio en A en función del parámetro t . Si pensamos en el morfismo ev_0 como la evaluación de t en 0, podemos intentar evaluar t en algún otro valor de A . En general, el morfismo ev_a está bien definido sobre los polinomios, pero puede no tener una extensión continua $K[[t]]$. Sin embargo, dependiendo del morfismo Φ , puede tener sentido evaluar t en ciertos valores de A , por ejemplo si casi todos los morfismos ϕ_i son nulos.

Definición: 1.3.5. Sea A una k -álgebra y sea V . Una *deformación trivial uniparamétrica* de A_K es una función bilineal $f_t : V_K \otimes_K V_K \rightarrow V_K$ tal que existe un morfismo trivial Φ de forma que $f_t(a \otimes b) = \Phi^{-1}(\Phi(a)\Phi(b))$.

1.3.4 Deformaciones uniparamétricas

Más en general, podemos definir extensiones del producto μ , tomando transformaciones bilineales de la forma

$$f_t(a, b) = ab + tF_1(a, b) + t^2F_2(a, b) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} t^i F_i(a, b) \quad (1.5)$$

donde cada $F_i : V_K \otimes V_K \rightarrow V_K$ es una función bilineal definida sobre k , y $F_0 = \hat{\mu}$. El álgebra A_t cuyo espacio vectorial subyacente es V_K y cuya multiplicación está dada por (1.5) puede considerarse como el elemento genérico de una familia de deformaciones de A , indexadas por el parámetro t . Dependiendo de las funciones F_i (y eventualmente de la noción de convergencia que tenga el álgebra A), evaluando t en algún elemento del cuerpo k obtenemos un álgebra cuyo espacio vectorial subyacente es V y cuya multiplicación es f_t .

Definición: 1.3.6. Un álgebra A_t cuyo espacio vectorial subyacente esté dado por V_K y su multiplicación por una fórmula como (1.5) se llamará una *familia de deformaciones* de A . Llamamos a f_t la *multiplicación asociada* a la familia de deformaciones.

Ejemplo(s). Consideremos el polinomio $f_t(x, y) = y^3 + ty - x^2$, donde t es un parámetro real. Si tomamos $A = \mathbb{R}[x, y]/(f_0)$, obtenemos el álgebra de funciones racionales sobre la curva $y^3 - x^2$. Si variamos el parámetro t , el álgebra $A_t = \mathbb{R}[x, y]/(f_t)$ tiene en todos los casos como base sobre \mathbb{R} el conjunto de monomios $\{x^i, y, xy, y^2, xy^2; i \in \mathbb{N}_0\}$, por lo que el espacio vectorial subyacente es isomorfo. Es fácil comprobar que la multiplicación de A_t puede expresarse como una deformación de la de A . En ese sentido, las deformaciones del álgebra se corresponde con la deformación geométrica que sufre la curva al variar el parámetro t .

Por supuesto, nuestro interés se restringe a cierto tipo de deformaciones. Si A era originalmente un álgebra asociativa, nos interesaremos en deformaciones asociativas. Esto nos dará una condición de cociclo que deberán cumplir las funciones F_i . Condiciones similares se obtienen si lo que se considera son deformaciones de álgebras de Lie, o de álgebras conmutativas, etc.

Si buscamos deformaciones asociativas del álgebra, entonces debemos exigir que f_t cumpla la condición

$$f_t(f_t(a, b), c) = f_t(a, f_t(b, c)) \quad \forall a, b, c \in V,$$

que al escribirse explícitamente se traduce en

$$\sum_j \sum_i t^{i+j} F_j(F_i(a, b), c) = \sum_j \sum_i t^{i+j} F_j(a, F_i(b, c)),$$

de donde se obtiene, finalmente

$$\sum_{i+j=k} F_i(F_j(a, b), c) - \sum_{i+j=k} F_i(a, F_j(b, c)) = 0. \quad (1.6)$$

Si tomamos $k = 1$ en 1.6, obtenemos la condición

$$aF_1(b, c) - F_1(ab, c) + F_1(a, bc) - F_1(a, b)c = 0.$$

En particular, si tomamos la restricción de F_1 a $V \subset V_K$, esta debe ser un 2-cociclo en el complejo $\text{Hom}_k(A^*, A)$ con el cual definimos la cohomología de Hochschild de A con valores en A . Más en general, la ecuación 1.6 se puede expresar grado a grado como

$$\mathcal{O}_n(F_1, \dots, F_{n-1}) \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} F_i(F_j(a, b), c) - F_i(a, F_j(b, c)) = dF_n(a, b, c) \quad (1.6_n)$$

Esto implica que si existe una multiplicación f_t asociativa tal que F_1 es su primer término, entonces las sucesivas funciones F_i deben cumplir una serie de condiciones dadas por (1.6_n).

Definición: 1.3.7. Dada una deformación de A , con multiplicación dada por la fórmula 1.5, el término F_1 se denomina el *diferencial* de la deformación.

Definición: 1.3.8. Dada una transformación bilineal G tal que su restricción a V es un 2-cociclo, decimos que es *integrable* si existe una familia de deformaciones f_t como se definió en 1.5 de forma que G sea el diferencial de f_t .

El término a la izquierda de la ecuación (1.6_n) es la *obstrucción n-ésima* para la integrabilidad de F_1 . Veremos más adelante que esta expresión es siempre un 3-cociclo, por lo que la ecuación (1.6_n) es equivalente a pedir que la clase de homología de esta expresión sea nula.

1.3.5 Equivalencia de deformaciones

Definición: 1.3.9. Diremos que una multiplicación g_t es *equivalente* a otra multiplicación f_t si existe un automorfismo Φ_t como antes tal que

$$g_t(a, b) = \Phi_t^{-1}(f_t(\Phi_t a \Phi_t b)).$$

Observamos en particular que una deformación trivial es una deformación equivalente a la generada por $\Phi_t = \text{Id}$.

Si escribimos a f_t y g_t en términos de las funciones F_i y G_i , tenemos que $G_1 = F_1 + d\phi_1$. De esto se deduce que la integrabilidad de un cociclo F depende únicamente de su clase de cohomología. En efecto, si F_1 es integrable a una multiplicación f_t , entonces tomando $\Phi_t(a) = a + \phi(a)$, tenemos que $g_t(a, b) = \Phi_t^{-1}(f_t(\Phi_t a \Phi_t b))$ es una multiplicación con diferencial $G_1 = F_1 + d\phi_1$, a la que llamamos la conjugada de f_t por Φ_t . Podemos entonces interpretar el grupo de cohomología $HH^2(A)$ como el conjunto de los diferenciales de deformaciones, módulo las deformaciones triviales.

Proposición 1.3.10. *Sea f_t una familia de deformaciones no trivial. Entonces existe una familia de deformaciones equivalente g_t de la forma*

$$g_t(a, b) = ab + t^n F_n(a, b) + t^{n+1} F_{n+1}(a, b) + \dots$$

tal que la primera función no nula F_n es un cociclo no cohomólogo a 0.

Demostración. Supongamos que f_t es de la forma (1.5) con $F_1 = F_2 = \dots = F_{k-1} = 0$. Entonces, por (1.6), tenemos que $dF_k = 0$, por lo que es un cociclo. Si además resulta ser un coborde, tenemos que $F_k = d\phi_k$. Tomando $\Phi_t^k(a) = a - t\phi_k(a)$ y g_t la conjugada de f_t por esta función, se tiene que

$$f_t'(a, b) = ab + F_{k+1}(a, b) + F_{k+2}(a, b) + \dots$$

Afirmamos que eventualmente F_{k+1} no es un coborde.

Si todas las funciones F_k son cohomólogas a cero, podemos considerar la sucesión $\{\Psi_k = \Phi_t^1 \circ \Phi_t^2 \circ \dots \circ \phi_t^k\}$. Esta sucesión converge puntualmente en la topología de $k[[t]]$ a un morfismo Ψ . Por continuidad, se tiene que al conjugar por este morfismo, f_t es equivalente a μ , y por lo tanto es trivial, lo que contradice nuestra hipótesis. \square

1.3.6 Las obstrucciones son cociclos

Concluimos nuestro análisis de los grupos de cohomología demostrando que las condiciones de integrabilidad encontradas en la Sección anterior se pueden interpretar como elementos de los grupos de cohomología.

Empecemos con la integrabilidad de derivaciones. Para mayor comodidad, damos la siguiente definición:

Definición: 1.3.11. El *producto cup* de dos funciones $\phi : A^{\otimes n} \rightarrow A$, $\psi : A^{\otimes m} \rightarrow A$ es $\psi \smile \phi : A^{\otimes n+m} \rightarrow A$, dado por

$$\psi \smile \phi(b_1 | \dots | b_m | a_1 | \dots | a_n) = \psi(b_1 | \dots | b_m) \phi(a_1 | \dots | a_n).$$

Observación: 1.3.12. Notamos que $d(\phi \smile \psi) = d\phi \smile \psi + (-1)^{nm} \phi \smile d\psi$, con lo que el complejo $\text{Hom}_k(A^{\otimes *}, A)$ es un *álgebra diferencial graduada*. En particular, el producto cup define un producto a nivel de la cohomología, y esta un *álgebra graduada*. Estos conceptos están definidos más adelante en 2.2.2

Para que una derivación ϕ_1 sea integrable, se debe cumplir la condición (1.4_n) para todo n . Veremos que si se tiene una familia de funciones $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ que cumplen con la relación (1.4_i) para todo $i = 1, \dots, n-1$, entonces la n -ésima obstrucción a la integrabilidad $\text{denb}\phi_1$ es un 2-cociclo, con lo cual la condición de la integrabilidad de ϕ_1 se reducirá a que todas las obstrucciones sean cohomólogas a cero.

Proposición 1.3.13. Si $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ cumplen con la condición

$$-d\phi_i = \sum_{\substack{j+k=i \\ j,k>0}} \phi_j \smile \phi_k.$$

para todo $i = 1, \dots, n-1$, entonces la expresión

$$F = \sum_{\substack{j+k=n \\ j,k>0}} \phi_j \smile \phi_k$$

es un 2-cociclo.

Demostración. Por la Observación 1.3.12, se tiene que

$$\begin{aligned}
dF &= \sum_{\substack{j+k=n \\ j,k>0}} d\phi_j \smile \phi_k - \phi_j \smile d\phi_k \\
&= \sum_{\substack{j+k=n \\ j,k>0}} \left(- \sum_{\substack{l+m=j \\ l,m>0}} \phi_l \smile \phi_m \right) \smile \phi_k - \sum_{\substack{j+k=n \\ j,k>0}} \phi_j \smile \left(- \sum_{\substack{l+m=k \\ l,m>0}} \phi_l \smile \phi_m \right) \\
&= - \sum_{\substack{j+k+l=n \\ j,k,l>0}} (\phi_j \smile \phi_k) \smile \phi_l + \sum_{\substack{j+k+l=n \\ j,k,l>0}} \phi_j \smile (\phi_k \smile \phi_l)
\end{aligned}$$

La asociatividad del producto cup nos permite afirmar que esta última expresión es igual a 0. \square

Pasamos ahora a comprobar que la obstrucción para la integrabilidad de un 2-cociclo es un 3-cociclo. Para ello damos una definición previa

Definición 1.3.14. Dadas dos funciones $F_1 : A^{\otimes n} \rightarrow A$, y $F_2 : A^{\otimes m} \rightarrow A$, definimos su *asociador*, $F_1 \circ F_2 : A^{\otimes n+m-1} \rightarrow A$ como

$$F_1 \circ F_2(a_0 | \dots | a_{n+m-2}) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i F_1(a_0 | \dots | F_2(a_i | \dots | a_{i+m}) | a_{i+m+1} | \dots | a_{n+m-2})$$

Entonces, la condición 1.6 puede expresarse como

$$\sum_{\substack{j+k=n \\ j,k>0}} F_j \circ F_k = dF_n.$$

Proposición 1.3.15. Sean F_1, \dots, F_{k-1} tales que se cumple la ecuación anterior para todo $n = 1, \dots, k-1$. Supongamos además que $2^{-1} \in A$. Entonces la expresión

$$G = \sum_{\substack{j+k=n \\ j,k>0}} F_j \circ F_k$$

es un 3-cociclo, es decir, $dG = 0$.

Lema 1.3.16. Se tienen los siguientes resultados

- $d(F_1 \circ F_2) = F_1 \circ dF_2 - dF_1 \circ F_2 + (F_1 \smile F_2 - F_2 \smile F_1)$
- $(F_1 \circ F_2) \circ F_2 = F_1 \circ (F_2 \circ F_2)$

Si bien el resultado general es correcto, solo utilizaremos el caso en que F_1 y F_2 son 2-cociclos, el cual puede comprobarse directamente.

Demostración. Demostración de la proposición Calculando dG , reemplazando por la relación y aplicando el lema anterior,

$$\begin{aligned}
dG &= \sum_{\substack{j+k=n \\ j,k>0}} d(F_j \circ F_k) = \sum_{\substack{j+k=n \\ j,k>0}} F_j \circ dF_k - dF_j \circ F_j + (F_j \smile F_k - F_k \smile F_j) \\
&= \sum_{\substack{j+k=n \\ j,k>0}} \left\{ F_j \circ \left(\sum_{\substack{l+m=k \\ l,m>0}} F_l \circ F_m \right) - \left(\sum_{\substack{l+m=j \\ l,m>0}} F_l \circ F_m \right) \circ F_k + (F_j \smile F_k - F_k \smile F_j) \right\} \\
&= \sum_{\substack{j+l+m=n \\ j,l,m>0}} F_j \circ (F_l \circ F_m) - (F_j \circ F_l) \circ F_m.
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}
2dG &= \sum_{\substack{j+l+m=n \\ j,l,m>0}} F_j \circ (F_l \circ F_m) + F_j \circ (F_m \circ F_l) - (F_j \circ F_l) \circ F_m - (F_j \circ F_m) \circ F_l \\
&= \sum_{\substack{j+l+m=n \\ j,l,m>0}} F_j \circ ((F_l + F_m) \circ (F_l + F_m)) - (F_j \circ (F_l + F_m)) \circ (F_l + F_m) = 0.
\end{aligned}$$

□

En el Capítulo siguiente construiremos resoluciones proyectivas que permitan calcular explícitamente la cohomología del álgebra de cualquier hipersuperficie de manera más eficiente que el cálculo directo en base al complejo de Hochschild. Esto nos permitirá encontrar las deformaciones del álgebra correspondiente a un arreglo de hiperplanos, e investigar su relación con la geometría del arreglo.

Capítulo 2

Resoluciones Projectivas de Álgebras de Polinomios

En este Capítulo presentamos explícitamente una resolución libre del álgebra de polinomios $k[X]$ como bimódulo sobre sí misma. Si bien la construcción final es simplemente la aplicación de un resultado estándar sobre complejos de Koszul, empezamos desarrollando un método que puede emplearse para resolver estas y otras álgebras. Con este método obtendremos junto con la resolución, una retracción para la misma que adaptaremos al caso general y que no se deduce del resultado citado.

2.1 Construcción explícita de una resolución

En esta Sección construiremos una resolución para el álgebra $A = k[x, y]$, empleando una técnica general para construir resoluciones libres de álgebras como bimódulos sobre sí mismas. Partimos de la siguiente observación, válida para cualquier anillo: cualquier bimódulo M sobre el álgebra A es un módulo a izquierda (resp. a derecha) sobre el álgebra A^e . Si $a, a' \in A$ y $m \in M$, definimos la acción de A^e sobre M como

$$a \otimes a' \cdot_{A^e} m = a \cdot_A m \cdot_A a' \quad (\text{resp. })m \cdot_A a \otimes a' = a' \cdot_A m \cdot_A a)$$

De la misma forma, cualquier módulo (a derecha o a izquierda) sobre A^e es un bimódulo sobre A , invirtiendo la relaciones anteriores. En particular, la propia álgebra A es un módulo sobre A^e , y como tal tendrá una resolución libre como A^e -módulo, es decir, una resolución formada por A -bimódulos libres y morfismos de A -bimódulos.

Una primera observación es que el álgebra viene dotada de una multiplicación, es decir, un morfismo $\mu : A \otimes A \rightarrow A$, dado por $\mu(a \otimes a') = a \cdot a'$; el hecho de que el álgebra tenga unidad garantiza que este morfismo es sobreyectivo. Podemos entonces suponer que la resolución libre buscada es de la forma

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow A^e \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0 \quad (*)$$

Nos interesa encontrar explícitamente los módulos $\{P_i\}_{i \geq 1}$. El siguiente resultado sugiere el método que emplearemos más adelante:

Lema 2.1.1. *Sea M un módulo proyectivo sobre A^e . Entonces M es proyectivo como A -módulo a derecha (resp. a izquierda).*

Demostración. Al ser M un A^e -módulo proyectivo, es sumando directo de un A^e -módulo libre, es decir, existe un A^e -módulo N tal que $M \oplus N \cong (A^e)^n$. Basta ver entonces que A^e es un A -módulo proyectivo, y por lo tanto sumando directo de un A -módulo libre, de lo que se sigue que M es proyectivo.

La proyectividad de A^e se deduce fácilmente de que

$$\mathrm{Hom}_A(A^e, -) = \mathrm{Hom}_A(A \otimes_k A, -) \cong \mathrm{Hom}_k(A, \mathrm{Hom}_A(A, -)) \cong \mathrm{Hom}_k(A, -).$$

Al ser A proyectivo sobre k , el funtor de la derecha es exacto; la demostración para módulos a izquierda es análoga. Notar que la misma demostración se aplica en el caso en que k es un anillo conmutativo cualquiera, y A es proyectivo sobre k . \square

Del lema se deduce que la resolución (*) puede considerarse como una resolución proyectiva de A como A -módulo a derecha. Es sabido que toda resolución proyectiva tal posee una contracción, es decir que existe una familia de morfismos $\{s_i\}_{i \geq -1}$, A -lineales a derecha como en el siguiente diagrama,

$$\cdots \quad P_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{f_2} \\ \xleftarrow{s_1} \end{array} P_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \xleftarrow{s_0} \end{array} A^e \begin{array}{c} \xrightarrow{\mu} \\ \xleftarrow{s_{-1}} \end{array} A \longrightarrow 0 \quad (**)$$

donde los morfismos f_i son de A -bimódulos y los morfismos s_i son A -lineales a derecha. Si llamamos $A^e = P_0$ y $\mu = f_0$, se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} \mu s_{-1} &= \mathrm{Id}_A, \\ f_{i+1} s_i + s_{i-1} f_i &= \mathrm{Id}_{P_i}. \end{aligned}$$

Ahora construiremos una resolución explícita de A como A -bimódulo aplicando el siguiente procedimiento: empezando por el morfismo μ , construimos el morfismo de contracción correspondiente. Como la teoría garantiza la existencia de un módulo P_1 que permite continuar la resolución, y la de un morfismo de contracción s_0 , buscamos un módulo y un morfismo que permitan realizar la construcción de manera minimal, es decir, eligiendo el A -bimódulo libre con el menor número de generadores posible que pueda ocupar ese lugar en la resolución. Esta última afirmación se hace más clara en el ejemplo concreto.

1. En el primer lugar, s_{-1} debe cumplir que $\mu s_{-1} = \mathrm{Id}_A$. Buscamos entonces un tal s_{-1} . Como A está generada como módulo a derecha por 1, debe ser $\mu(s_{-1}(1)) = 1$. Claramente, $s_{-1}(1) = 1|1$ cumple con lo pedido. Al ser A -lineal a derecha, debe ser

$$s_{-1}(p) = s_{-1}(1)p = 1|p.$$

2. Ahora veamos el segundo lugar. El módulo P_1 es un módulo libre en un cierto número de generadores. Tomemos una base de A^e como A -módulo a derecha, por ejemplo, la dada por $\mathcal{B} = \{x^n y^m | 1\}_{n,m \in \mathbb{N}_0}$. Entonces la ecuación funcional que buscamos que se cumpla es

$$(f_1 s_0 + s_{-1} \mu)(x^n y^m | 1) = x^n y^m | 1.$$

Reemplazando y despejando,

$$f_1 s_0(x^n y^m | 1) = x^n y^m | 1 - s_{-1} \mu(x^n y^m | 1) = x^n y^m | 1 - 1 | x^n y^m. \quad (1)$$

En primer lugar, si tomamos $n = 1, m = 0$, debe ser $f_1 s_0(x | 1) = x | 1 - 1 | x$. Esto nos puede llevar a concluir la existencia de un elemento en P_1 , al que denominaremos $1 | e_x | 1$, tal que

$$s_0(x | 1) = 1 | e_x | 1 \quad \text{y} \quad f_1(1 | e_x | 1) = x | 1 - 1 | x.$$

Si ahora n es arbitrario, pero de todas maneras $m = 0$, podemos vernos tentados de afirmar la existencia de elementos análogos $1 | e_{x^n} | 1$. Sin embargo, hacemos la siguiente observación:

$$\begin{aligned} x^n | 1 - 1 | x^n &= \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-i} | x^i - x^{n-(i+1)} | x^{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-(i+1)} (x | 1 - 1 | x) x^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-(i+1)} f_1(1 | e_x | 1) x^i = f_i \left(\int_n x^s | e_x | x^t \right), \end{aligned}$$

donde el último paso está justificado porque las f_i son morfismos A -lineales a ambos lados. Podemos entonces considerar

$$s_0(x^n | 1) = \int_n x^s | e_x | x^t$$

y para cualquier monomio de la forma $x^n | 1$ se cumple la ecuación (1).

Observación: 2.1.2. Ningún elemento de la forma $y^m | 1$ puede ser imagen de un múltiplo de $1 | e_x | 1$, con lo cual un análisis similar nos lleva a concluir que es necesario que exista un elemento $1 | e_y | 1$ tal que $s_0(y | 1) = 1 | e_y | 1$; $f_1(1 | y | 1) = y | 1 - 1 | y$, y en general

$$s_0(y^m | 1) = \int_m y^s | e_y | y^t.$$

Tomemos ahora un elemento de la forma $x^n y^m | 1$, con $n \neq 0 \neq m$, y veamos que con lo ya construido nos basta. En efecto,

$$\begin{aligned} x^n y^m | 1 - 1 | x^n y^m &= x^n y^m | 1 - x^n | y^m + x^n | y^m - 1 | x^n y^m \\ &= x^n (y^m | 1 - 1 | y^m) + (x^n | 1 - 1 | x^n) y^m \\ &= x^n f_1 \left(\int_m y^s | e_y | y^t \right) + f_1 \left(\int_n x^s | e_x | x^t \right) y^m. \end{aligned}$$

Basta entonces tomar

$$s_0(x^n y^m | 1) = x^n \left(\int_m y^s | e_y | y^t \right) + \left(\int_n x^s | e_x | x^t \right) y^m. \quad (s_0)$$

Podemos entonces elegir el módulo P_1 como el A^e -módulo libre con base $\mathcal{B}_1 = \{1|e_x|1, 1|e_y|1\}$. Por la Observación 2.1.2, sabemos que el módulo debe tener al menos rango 2, y que con estos dos generadores basta para continuar la resolución.

3. Veamos ahora el siguiente término. Buscamos un morfismo s_1 tal que $f_2 s_1 + s_0 f_1 = \text{Id}_{P_1}$. Una vez más, las s_i serán A -lineales a derecha, con lo cual basta tomar una base en P_1 como A -módulo a derecha, por ejemplo $\{x^n y^m | e_x | 1; x^n y^m | e_y | 1 : n, m \in \mathbb{N}_0\}$. Reemplazando y despejando, vemos que debe ser

$$f_2 s_1(x^n y^m | e_x | 1) = x^n y^m | e_x | 1 - s_0 f_1(x^n y^m | e_x | 1).$$

Analizamos aparte el término

$$\begin{aligned} s_0 f_1(x^n y^m | x | 1) &= s_0(x^n y^m(x|1 - 1|x)) \\ &= s_0(x^{n+1} y^m | 1) - s_0(x^n y^m | 1)x \\ &= x^{n+1} \int_m y^s | e_y | y^t + \left(\int_{n+1} x^s | e_x | x^t \right) y^m \\ &\quad - x^n \left(\int_m y^s | e_y | y^t \right) x - \left(\int_n x^s | e_x | x^{t+1} \right) y^m \\ &= x^n \left(\int_m y^s(x|e_y|1 - 1|e_y|x)y^t \right) + x^n | e_x | y^m. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} f_2 s_1(x^n y^m | e_x | 1) &= x^n y^m | e_x | 1 - x^n \left(\int_m y^s(x|e_y|1 - 1|e_y|x)y^t \right) - x^n | e_x | y^m \\ &= x^n \int_m (y^{s+1} | e_x | y^t - y^s | e_x | y^{t+1}) \\ &\quad - x^n \left(\int_m y^s(x|e_y|1 - 1|e_y|x)y^t \right) \\ &= x^n \int_m y^s(y|e_x|1 - 1|e_x|y - x|e_y|1 + 1|e_y|x)y^t. \end{aligned}$$

Nuevamente, tomando $n = 0, m = 1$, esto muestra que debe existir un elemento en P_2 al que llamaremos $1|e_x \wedge e_y|1$, tal que

$$\begin{aligned} s_1(x^n y^m | e_x | 1) &= x^n \int_m y^s(1|e_x \wedge e_y|1)y^t \\ f_1(1|e_x \wedge e_y|1) &= y|e_x|1 - 1|e_x|y - x|e_y|1 + 1|e_y|x. \end{aligned}$$

En el caso restante,

$$f_2 s_1(x^n y^m | e_y | 1) = x^n y^m | e_y | 1 - s_0 f_1(x^n y^m | e_y | 1).$$

Usando las definiciones de s_0 y de f_1 , vemos que

$$\begin{aligned} s_0 f_1(x^n y^m | e_y | 1) &= s_0(x^n y^{m+1} | 1 - x^n y^m | y) = s_0(x^n y^{m+1} | 1 - x^n y^m | y) \\ &= x^n \left(\int_{m+1} y^s | e_y | y^t \right) + \left(\int_n x^s | e_x | x^t \right) y^{m+1} \\ &\quad - x^n \left(\int_m y^s | e_y | y^{t+1} \right) - \left(\int_n x^s | e_x | x^t \right) y^{m+1} \\ &= x^n y^m | e_y | 1. \end{aligned}$$

Es decir que $s_1(x^n y^m | e_y | 1) = 0$ hace que se cumpla la ecuación.

Resumiendo, podemos elegir P_2 como el módulo libre con base $\mathcal{B}_2 = \{1 | e_x \wedge e_y | 1\}$, y tenemos que

$$\begin{aligned} s_1(x^n y^m | e_x | 1) &= x^n \int_m y^s | e_x \wedge e_y | y^t, \\ s_1(x^n y^m | e_y | 1) &= 0, \\ f_2(1 | e_x \wedge e_y | 1) &= y | e_x | 1 - 1 | e_x | y - x | e_y | 1 + 1 | e_y | x. \end{aligned} \tag{s1}$$

4. En el próximo lugar, debe ser $s_1 f_2 + f_3 s_2 = \text{Id}_{P_2}$. Como en los pasos anteriores, empezamos tomando una base de P_2 como módulo a derecha, $\{x^n y^m | e_x \wedge e_y | 1 : n, m \in \mathbb{N}_0\}$, y al analizar este caso, tenemos que

$$\begin{aligned} s_1 f_2(x^n y^m | e_x \wedge e_y | 1) &= s_1(x^n y^m (y | e_x | 1 - 1 | e_x | y - x | e_y | 1 + 1 | e_y | x)) \\ &= s_1(x^n y^m (y | e_x | 1 - 1 | e_x | y)) \\ &= x^n \int_{m+1} y^s | e_x \wedge e_y | y^t - x^n \int_m y^s | e_x \wedge e_y | y^{t+1} \\ &= x^n y^m | e_x \wedge e_y | 1 \end{aligned}$$

y de esto se deduce que, al tener una Sección, la función f_2 es inyectiva y la resolución puede darse por terminada.

En Resumen:

Si notamos V al k -espacio vectorial con dos generadores, e_x, e_y , y dado $n \in \mathbb{N}$ $\Lambda^n V$ es la componente de grado n de la k -álgebra exterior de V , la resolución proyectiva construida en esta Sección está dada por:

$$P(A) : \quad 0 \longrightarrow A \otimes \Lambda^2 V \otimes A \xrightleftharpoons[s_1]{d_2} A \otimes V \otimes A \xrightleftharpoons[s_0]{d_1} A^e \xrightleftharpoons[s_{-1}]{\mu} A \longrightarrow 0$$

Los morfismos s_i son A -lineales a derecha. El resto es A -lineal a ambos lados.

$$\begin{aligned}
\mu(1|1) &= 1 \\
d_1(1|e_x|1) &= x|1 - 1|x \\
d_1(1|e_y|1) &= y|1 - 1|y \\
d_2(1|e_x \wedge e_y|1) &= y|e_x|1 - 1|e_x|y - x|e_y|1 + 1|e_x|y \\
s_{-1}(1) &= 1|1 \\
s_0(x^n y^m|1) &= x^n \left(\int_m y^s |e_y| y^t \right) + \left(\int_n x^s |e_x| x^t \right) y^m \\
s_1(x^n y^m|e_x|1) &= x^n \left(\int_m y^s |e_x \wedge e_y| y^t \right) \\
s_1(x^n y^m|e_y|1) &= 0.
\end{aligned}$$

2.2 Resolución proyectiva del álgebra $k[X]$

Si bien la técnica presentada en la Sección anterior sirve, en teoría, para construir resoluciones libres de la k -álgebra $k[X]$ con un número finito arbitrario de variables, en la práctica resulta tediosa, y ya el caso $n = 3$ el procedimiento es bastante más largo. En esta Sección utilizamos el material desarrollado en [16], Sección 4.5, para encontrar una resolución que generalice dicha construcción. La desventaja de este método es que no se obtiene una retracción de la resolución. Sin embargo, al ser el resultado completamente análogo al anterior, es posible conjeturar una fórmula que generaliza la contracción anterior, y que funciona para las nuevas resoluciones.

2.2.1 Complejos de Koszul

Citamos algunas definiciones y resultados que se encuentran en la referencia mencionada. En toda esta Sección R es un anillo conmutativo.

Definición: 2.2.1 (Complejo de Koszul). Sea $x \in R$. Notamos por $K(x)$ al complejo de R -módulos a izquierda

$$0 \longrightarrow Re_x \xrightarrow{x} R \longrightarrow 0 \quad (K(x))$$

donde Re_x denota el R -módulo libre a izquierda con base $\{e_x\}$.

Si $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es una sucesión finita de elementos centrales de R , se define $K(\mathbf{x})$ como el complejo total del producto tensorial $K(x_1) \otimes_R K(x_2) \otimes_R \dots \otimes_R K(x_n)$. Este complejo se denomina *complejo de Koszul* asociado a \mathbf{x} . Llamamos $K_p(\mathbf{x})$ a la componente de grado p de este complejo. En particular, notamos que $K_0(\mathbf{x}) = R$.

Notación. La componente de grado p de la resolución de Koszul $K_p(\mathbf{x})$ tiene como base los elementos de la forma $1 \otimes_R 1 \otimes_R \dots \otimes_R e_{i_1} \otimes_R \dots \otimes_R e_{i_p} \otimes_R \dots \otimes_R 1$, donde $i_1 < i_2 < \dots < i_p$.

Notamos este símbolo formalmente como $= e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$. Con esta notación, el diferencial del complejo está dado por

$$d_p : K_p(\mathbf{x}) \rightarrow K_{p-1}(\mathbf{x})$$

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \mapsto \sum_{l=1}^p (-1)^{l+1} x_{i_l} e_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{i_l} \wedge \dots \wedge e_{i_p}.$$

La notación, similar a la del álgebra exterior del módulo generado por los símbolos $\{x_1, \dots, x_n\}$, está justificada por la Definición 2.2.2.

Explícitamente, en el caso de dos y tres elementos centrales, el complejo resulta ser

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}} A^2 \xrightarrow{(x_1, x_2)} A \longrightarrow 0$$

base: $\{e_{x_1} \wedge e_{x_2}\}$ $\{e_{x_1}, e_{x_2}\}$ $\{1\}$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_3 \\ -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}} A^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -x_2 & -x_3 & 0 \\ x_1 & 0 & -x_3 \\ 0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}} A^3 \xrightarrow{(x_1 \ x_2 \ x_3)} A \longrightarrow 0$$

base: $\{e_{x_1} \wedge e_{x_2} \wedge e_{x_3}\}$ $\{e_{x_1} \wedge e_{x_2}, e_{x_1} \wedge e_{x_3}, e_{x_2} \wedge e_{x_3}\}$ $\{e_{x_1}, e_{x_2}, e_{x_3}\}$ $\{1\}$

Definición: 2.2.2. Supongamos ahora que R es conmutativo. Una R -álgebra graduada es una familia de R -módulos $\{K_p, p \geq 0\}$ junto con productos bilineales $K_p \otimes_R K_q \rightarrow K_{p+q}$, y un elemento $1 \in K_0$ tal que $K_0, \bigoplus_{p \geq 0} K_p$ son R -álgebras asociativas con unidad. Los elementos de K_p se dicen *homogéneos de grado p* . El álgebra se dirá conmutativa en el sentido graduado si dados a y b elementos homogéneos de grados p y q respectivamente, $a \cdot b = (-1)^{pq} b \cdot a$. Finalmente, el álgebra se dice *diferencial graduada* (ADG o DGA) si además de ser un álgebra graduada, existe un morfismo $d : K_p \rightarrow K_{p-1}$, $p \geq 1$ que satisface $d^2 = 0$ y que cumple la *Regla de Leibnitz*:

$$d(a \cdot b) = d(a) \cdot b + (-1)^p a \cdot d(b).$$

Si consideramos el complejo de Koszul definido en 2.2.1, y aceptamos la identificación de la componente p -ésima con la p -ésima k -álgebra exterior con generadores $\{x_1, \dots, x_n\}$, el diferencial de dicho complejo cumple con la Regla de Leibnitz, y el álgebra exterior es un ADG.

Definición: 2.2.3. Una sucesión de elementos de R $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se dice regular en R si x_i no es un divisor de cero en el módulo $R/R(x_1, \dots, x_{i-1})$ para todo $i = 1, \dots, n$, es decir, si $a \in R$ es tal que $ax_i \in (x_1, \dots, x_{i-1})$, entonces $a \in (x_1, \dots, x_{i-1})$. Notamos en particular que si cada cociente $R/R(x_1, \dots, x_i)$ es un dominio íntegro, entonces la sucesión \mathbf{x} es regular.

Teorema 2.2.4 ([16], Corolario 4.5.5). Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2 \dots x_n)$ es una sucesión regular en R , entonces $K(\mathbf{x})$ es una resolución libre de R/I , donde $I = R\mathbf{x}$. Explícitamente:

$$0 \longrightarrow \Lambda^n R^n \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda^2 R^n \xrightarrow{d} R^n \xrightarrow{\mathbf{x}} R \xrightarrow{\pi} R/I \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de R -módulos, todos libres salvo R/I .

2.2.2 Una resolución libre para $k[X]$

Antes de utilizar las herramientas citadas en la Sección anterior, haremos algunas observaciones e identificaciones pertinentes.

Dado que queremos trabajar en la categoría de bimódulos sobre $k[X]$, nos interesa encontrar una resolución libre de este anillo como $k[X] \otimes k[X]$ módulo. Notemos que $k[X] \otimes k[X] \cong k[X, Y] = k[x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_n]$ con la identificación

$$X^\alpha \otimes X^\beta \mapsto X^\alpha Y^\beta.$$

En particular, un módulo a izquierda sobre $k[X, Y]$ se corresponde con un bimódulo sobre $k[X]$. La correspondencia está dada de la siguiente manera: la acción de x_i a izquierda es igual en ambos casos, y la acción de y_i a izquierda se corresponde con la acción a derecha de x_i .

Consideremos ahora sí el anillo conmutativo $R = k[X, Y]$, y en él la sucesión regular $\mathbf{z} = (z_1, z_2 \dots z_n)$, con $z_i = x_i - y_i$. Para comprobar que esta es efectivamente regular, notamos el cociente $R/(z_1, \dots z_n)$ se identifica con el anillo de polinomios $k[X, y_{i+1}, \dots y_n]$, el cual es un dominio íntegro.

El cociente $R/R\mathbf{z}$ es isomorfo al anillo de polinomios $A = k[X]$, y la proyección viene dada por

$$\begin{aligned} \pi : k[X, Y] &\rightarrow k[X] \\ X^\alpha Y^\beta &\mapsto X^\alpha \cdot X^\beta \end{aligned}$$

Si identificamos $k[X, Y]$ con $k[X] \otimes k[X]$ como señalamos antes, vemos que esta proyección se identifica con el producto del álgebra de polinomios.

En consecuencia, el siguiente complejo es una resolución libre de $R/\mathbf{z}R \cong k[X]$ como R -módulo:

$$0 \longrightarrow \Lambda^n R^n \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^2 R^n \longrightarrow R^n \xrightarrow{\mathbf{z}} R \longrightarrow R/I = A \longrightarrow 0 \quad (P(A))$$

Si escribimos e_i por e_{z_i} , sabemos que el diferencial está dado por la fórmula

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \mapsto \sum_{k=0}^p (-1)^{k+1} z_{i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{i_k} \wedge \dots \wedge e_{i_p}.$$

Recordemos que la componente p -ésima de $P(A)$ es el módulo libre sobre $k[X, Y]$ con generadores $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$, con $i_1 < i_2 < \dots < i_p$. Si hacemos nuevamente

la identificación de $K[X, Y]$ con $k[X] \otimes k[X]$, observamos que en el p -ésimo lugar se encuentra el módulo libre sobre $k[X] \otimes k[X]$ con base $\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p}, i_1 < i_2 < \dots < i_p\}$, o lo que es lo mismo, el A -bimódulo libre en esos generadores. El diferencial pasa entonces a ser

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \mapsto \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} [x_{i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{i_k} \wedge \dots \wedge e_{i_p} - e_{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{i_k} \wedge \dots \wedge e_{i_p} x_{i_k}].$$

Notamos que en el caso del álgebra $k[x_1, x_2]$, esta resolución coincide con la que construimos en la primera Sección.

2.2.3 Una contracción del complejo de Koszul de $k[X]$

Definición: 2.2.5. Definimos la función

$$\begin{aligned} \Delta^i : k[X] &\rightarrow k[X] \otimes k[X] \\ X^\alpha &\mapsto \prod_{k=1}^{i-1} x_k^{\alpha_k} \int_{\alpha_i} x_i^s | x_i^t \prod_{k=i+1}^n x_k^{\alpha_k}. \end{aligned}$$

notemos por ejemplo que la expresión

$$\Delta^2(x_1^n x_2^m) \cdot 1 | e_1 \wedge e_2 | 1 = x_1^n \int_m x_2^s | e_1 \wedge e_2 | x_2^t$$

aparece varias veces en el cálculo de la resolución del álgebra $k[x, y]$. Esta expresión se repite en numerosas fórmulas. Por comodidad, notamos $\Delta^i(X^\alpha) e_J := \Delta^i(X^\alpha) \cdot 1 | e_J | 1$.

Siempre tomando como referencia el ejemplo desarrollado en la primera Sección, enunciamos el siguiente lema:

Lema 2.2.6. *Sea $A = k[X] = k[x_1, \dots, x_n]$. La familia de morfismos A -lineales a derecha $\{s_p : P(A)_p \rightarrow P(A)_{p+1}\}_{-1 \leq p \leq n}$ dada por:*

$$\begin{aligned} s_p(X^\alpha) &= 1 | X^\alpha, & \text{si } p = -1; \\ s_p(X^\alpha | e_J | 1) &= (-1)^p \sum_{i > j_p} \Delta^i(X^\alpha) e_J \wedge e_i, & \text{si } 0 \leq p \leq n. \end{aligned}$$

donde $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, es una contracción A -lineal a derecha de la resolución $P(A)$.

Corolario 2.2.7. *El complejo $P(k[X])$ es una resolución libre de $k[X]$ como bimódulo sobre sí misma.*

Si bien nos inspiramos en la teoría de complejos de Koszul para obtener la resolución de $k[X]$, con este resultado tenemos una demostración independiente de que ésta es exacta.

Demostración del Lema 2.2.6. Fijemos notación para esta demostración. Dado un multiíndice $J = (j_1, j_2, \dots, j_p)$, escribimos $J_l = (j_1, j_2, \dots, \hat{j}_l, \dots, j_p)$, $1 \leq l \leq p$. Llamamos $m(J) = j_p$, el último término de J . Convenimos en que si $J = ()$, entonces $X^\alpha|e_J|1 = X^\alpha|1$.

Es trivial ver que $\pi s_1 = Id_A$. Buscamos entonces demostrar que para todo p , con $0 \leq p \leq n$

$$\Lambda^{p+1}A \begin{array}{c} \xrightarrow{d} \\ \xleftarrow{s_p} \end{array} \Lambda^p A \begin{array}{c} \xrightarrow{s_{p-1}} \\ \xleftarrow{s_{p-1}} \end{array} \Lambda^{p-1}A$$

vale la fórmula

$$ds_{p-1} + s_p d = Id_p$$

El conjunto $\mathcal{B} = \{X^\alpha|e_J|1, \alpha \in \mathbb{N}^n, J = (j_1, \dots, j_p) : j_1 < \dots < j_p\}$ es una base de $\Lambda^p A$ como A -módulo a derecha. Veamos que este morfismo actúa como la identidad sobre ella.

En primer lugar

$$\begin{aligned} X^\alpha|e_J|1 &\xrightarrow{d} \sum_{l=1}^p (-1)^{l+1} (X^\alpha x_{j_l}|e_{J_l}|1 - X^\alpha|e_{J_l}|x_{j_l}) \\ &\xrightarrow{s_{p-1}} \sum_{l=1}^p (-1)^{p+l} \left(\sum_{i>m(J_l)} \Delta^i(X^\alpha x_{j_l})(e_{J_l} \wedge e_i) - \Delta^i(X^\alpha)x_{j_l}(e_{J_l} \wedge e_i) \right) \\ &= \sum_{l=1}^{p-1} (-1)^{p+l} \left(\sum_{i>j_p} \Delta^i(X^\alpha x_{j_l})(e_{J_l} \wedge e_i) - \Delta^i(X^\alpha)x_{j_l}(e_{J_l} \wedge e_i) \right) \\ &\quad + \sum_{i>j_{p-1}} (\Delta^i(X^\alpha x_{j_p})(e_{J_p} \wedge e_i) - \Delta^i(X^\alpha)x_{j_p}(e_{J_p} \wedge e_i)). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$X^\alpha|e_J|1 \xrightarrow{s_p} (-1)^p \sum_{i>j_p} \Delta^i(X^\alpha)(e_J \wedge e_i) \xrightarrow{d} (-1)^p \sum_{i>j_p} d(\Delta^i(X^\alpha)e_J \wedge e_i).$$

Un cálculo simple muestra que

$$\begin{aligned} d(\Delta^i(X^\alpha)(e_J \wedge e_i)) &= \sum_{l=1}^p (-1)^{l+1} (\Delta^i(X^\alpha x_{j_l})(e_{J_l} \wedge e_i) - \Delta^i(X^\alpha)x_{j_l}(e_{J_l} \wedge e_i)) \\ &\quad + (-1)^{p+2} \prod_{k=1}^i x_k^{\alpha_k} |e_J| \prod_{k=i+1}^n x_k^{\alpha_k} \end{aligned}$$

Combinando con lo visto anteriormente, se tiene que

$$\begin{aligned}
X^\alpha|e_J|1 &\xrightarrow{ds_p} \sum_{l=1}^p (-1)^{p+l+1} \left(\sum_{i>j_p} \Delta^i(X^\alpha x_{j_l})(e_{J_l} \wedge e_i) - \Delta^i(X^\alpha)x_{j_l}(e_{J_l} \wedge e_i) \right) \\
&\quad + \sum_{l=1}^p (-1)^{p+p+2} \left(X^\alpha|e_J|1 - \prod_{k=1}^{j_p} x_k^{\alpha_k}|e_J| \prod_{k=j_p+1}^n x_k^{\alpha_k} \right) \\
&= - \sum_{l=1}^p (-1)^{p+l} \left(\sum_{i>j_p} \Delta^i(X^\alpha x_{j_l})(e_{J_l} \wedge e_i) - \Delta^i(X^\alpha)x_{j_l}(e_{J_l} \wedge e_i) \right) \\
&\quad + \left(X^\alpha|e_J|1 - \prod_{k=1}^{j_p} x_k^{\alpha_k}|e_J| \prod_{k=j_p+1}^n x_k^{\alpha_k} \right).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
X^\alpha|e_J|1 &\xrightarrow{ds_p+s_{p-1}d} - \sum_{i>j_p} (\Delta^i(X^\alpha x_{j_p})(e_{J_p} \wedge e_i) - \Delta^i(X^\alpha)x_{j_p}(e_{J_p} \wedge e_i)) \\
&\quad + \sum_{i>j_{p-1}} (\Delta^i(X^\alpha x_{j_p})(e_{J_p} \wedge e_i) - \Delta^i(X^\alpha)x_{j_p}(e_{J_p} \wedge e_i)) \\
&\quad + \left(X^\alpha|e_J|1 - \prod_{k=1}^{j_p} x_k^{\alpha_k}|e_J| \prod_{k=j_p+1}^n x_k^{\alpha_k} \right) \\
&= X^\alpha|e_J|1 + \sum_{j_p \geq i > j_{p-1}} (\Delta^i(X^\alpha x_{j_p})(e_{J_p} \wedge e_i) - \Delta^i(X^\alpha)x_{j_p}(e_{J_p} \wedge e_i)) \\
&\quad - \prod_{k=1}^{j_p} x_k^{\alpha_k}|e_J| \prod_{k=j_p+1}^n x_k^{\alpha_k}.
\end{aligned}$$

Ahora, si $j_p > i > j_{p-1}$,

$$\Delta^i(X^\alpha x_{j_p})(e_{J_p} \wedge e_i) - \Delta^i(X^\alpha)x_{j_p}(e_{J_p} \wedge e_i) = 0$$

En cambio,

$$\begin{aligned}
&\Delta^{j_p}(X^\alpha x_{j_p})(e_{J_p} \wedge e_i) - \Delta^{j_p}(X^\alpha)x_{j_p}(e_{J_p} \wedge e_i) = \\
&\prod_{k=1}^{j_p-1} x_k^{\alpha_k} \int_{\alpha_{p+1}} x_p^s |e_{J_p} \wedge e_{j_p}| x_p^t \prod_{k=j_p}^n x_k^{\alpha_k} - \prod_{k=1}^{j_p-1} x_k^{\alpha_k} \int_{\alpha_p} x_p^s |e_{J_p} \wedge e_{j_p}| x_p^{t+1} \prod_{k=j_p}^n x_k^{\alpha_k} = \\
&\prod_{k=1}^{j_p} x_k^{\alpha_k} |e_J| \prod_{k=j_p+1}^n x_k^{\alpha_k}
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

2.3 Una resolución para $k[X]/(f)$

Nuestro principal interés en este trabajo es estudiar álgebras de la forma $k[X]/(f)$ con $f \in k[X]$. En esta Sección utilizamos el Corolario 2.2.7 para construir una resolución de este cociente. Como en la Sección anterior, empezamos calculando explícitamente un ejemplo, y posteriormente generalizamos la construcción hecha en este caso. A lo largo de esta Sección, seguimos notando $A = k[X]$ y fijamos $f \in k[X]$. Notamos $B = A/(f)$.

2.3.1 Una resolución para $k[x]/(x^n)$

Motivamos la construcción hecha más adelante con un caso sencillo que fue estudiado en [1]

Consideremos el álgebra de polinomios en una variable, y tomemos $f = x^n$. Inspirados en el caso anterior, podemos plantear una resolución similar a la de $k[x]$ con los diferenciales definidos con las mismas fórmulas, es decir

$$0 \longrightarrow B^e e_x \xrightarrow{d} B^e \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 0, \quad (P_0(k[x]/x^n))$$

donde

$$d(e_x) = x|1 - 1|x.$$

Sin embargo, es evidente que este complejo no es exacto. El término $x^{n-1}|e_x|x^{n-1}$ tiene imagen nula por d , lo que implica que por lo menos d tiene núcleo no trivial. Calcular directamente la homología de este complejo puede ser trabajoso, particularmente en el caso general. Otra manera de encontrarla es la siguiente. El complejo que acabamos de plantear se obtiene aplicando sucesivamente los tensores $-\otimes_A B$ y $B \otimes_A -$ a la resolución $P(A)$. Si aplicamos solamente el primer funtor, obtenemos el siguiente complejo

$$0 \longrightarrow A \otimes k e_x \otimes B \xrightarrow{d} A \otimes B \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 0.$$

Observación: 2.3.1. Este complejo *sí* es exacto, lo que se puede demostrar de la siguiente manera: al ser $P(A)$ una resolución proyectiva de A , la homología del complejo $P(A) \otimes_A B$ es exactamente $\text{Tor}_*^A(A, B)$. Al ser A un A -módulo proyectivo, la homología es nula, salvo en grado cero, donde $\text{Tor}_0^A(A, B) = A \otimes_A B = B$; esto implica que $P(A) \otimes_A B$ es un complejo exacto. Notar que este argumento es completamente general y no depende de las álgebras A o B , sino simplemente de las propiedades del complejo $P(A)$.

Una segunda observación es que ésta sigue siendo una resolución A -proyectiva de B , si simplemente tomamos en cuenta la estructura de módulos a izquierda. La proyectividad de los módulos de la resolución se deduce de 1.2.6, pero es muy sencilla de ver en este caso: el módulo $A \otimes B$ es A -libre, con base $\{1 \otimes x^j : 0 \leq j \leq n-1\}$.

Tenemos otra resolución proyectiva de B como A -módulo a izquierda, que está dada por su estructura cociente:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{x^n} A \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0.$$

Sabemos que dadas dos resoluciones proyectivas de un A -módulo, debe existir un levantamiento de la identidad entre ambas, de la forma

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{x^n} & A & \xrightarrow{\pi} & B \longrightarrow 0 \\
& & \phi_2 \downarrow & & \phi_1 \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & A \otimes ke_x \otimes B & \xrightarrow{d} & A \otimes B & \xrightarrow{\mu} & B \longrightarrow 0
\end{array} \tag{2.1}$$

La conmutatividad del cuadrado de la derecha sugiere tomar $\phi_1(1) = 1|1$. Para ϕ_2 , nuestro único dato es que $d\phi_2(1) = x^n|1$, por lo que buscamos alguna preimagen de $x^n|1$ por d . Como el segundo término está en el álgebra cociente B , tenemos que $x^n|1 = x^n|1 - 1|x^n$. Ya observamos en un contexto más general (cf. 2.2.6) que $d(\int_n x^s|e_x|x^t) = x^n|1 - 1|x^n$. Tomamos entonces $\phi_2(1) = \int_n x^s|x^t = \Delta^1(x^n)$.

Es fácil comprobar que las funciones

$$\phi_1(1) = 1|1 \qquad \phi_2(1) = \int_n x^s|x^t$$

son efectivamente un levantamiento de la identidad, y por lo tanto un cuasi-isomorfismo. Esta observación puede parecer trivial en este caso, en que la homología de ambos complejos es nula, pero al aplicar ahora el funtor $B \otimes_A -$ al diagrama 2.1, obtenemos

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{0} & B & \xrightarrow{\text{Id}} & B \longrightarrow 0 \\
& & \phi'_2 \downarrow & & \phi'_1 \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & B \otimes ke_x \otimes B & \xrightarrow{d} & B \otimes B & \xrightarrow{\mu} & B \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Es trivial calcular la homología de la fila superior, mientras que la fila inferior es exactamente el complejo $P_0(B)$ que habíamos propuesto originalmente. La ventaja es que ahora contamos con los morfismos de comparación inducidos, que siguen siendo un cuasi-isomorfismo (esto se deduce de la exactitud a derecha del funtor $B \otimes_A -$: si las cuasi inversas de ϕ_i eran ψ_i , las cuasi inversas de ϕ'_i están dadas por $\psi'_i = B \otimes_A (\psi_i)$).

En la fila superior, la homología en primer grado es nula, lo que nos dice que ocurre lo mismo en la fila inferior. En cambio, la homología en segundo grado es exactamente B , y está generada por el elemento 1. De esto deducimos que la homología del complejo inferior debe estar concentrada en el segundo grado, y está generada por $\phi_2(1) = \int_n x^s|x^t$. Inspirados en este resultado, proponemos entonces una construcción de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc}
& & B \otimes B \xrightarrow{d} B \otimes B \\
& & \uparrow \rho \\
& B \otimes B \xrightarrow{d} B \otimes B \\
& \uparrow \rho \\
B \otimes B \xrightarrow{d} B \otimes B
\end{array}$$

donde $\rho(1) = \int_n x^s | x^t$. La lógica detrás de esta elección es que buscamos construir un complejo exacto, por lo que debemos agregar algún morfismo que tenga a este elemento en su imagen. Lo que hicimos fue utilizar un B -bimódulo libre y el morfismo ρ para ello, y continuar la resolución cíclicamente.

Más adelante usamos la maquinaria de las sucesiones espectrales para demostrar que este complejo es exacto, pero en este caso particular podemos demostrarlo directamente. Es claro que las composiciones $d\rho$ y ρd son nulas. Para ver que el complejo es exacto, basta considerar la contracción $\{s_i : B^e \rightarrow B^e\}_{i \geq 0}$ B -lineal a derecha definida por

$$s_i(x^j | 1) = \int_j x^s | x^t, \quad \text{si } i \text{ es par;}$$

$$s_i(x^j | 1) = \begin{cases} 0, & j < n - 1 \\ 1, & j = n \end{cases} \quad \text{si } i \text{ es impar.}$$

Comprobar que ésta es efectivamente una contracción es un cálculo directo.

Finalmente podemos afirmar que el complejo

$$\dots \longrightarrow B^e \xrightarrow{d} B^e \xrightarrow{\rho} B^e \xrightarrow{d} B \longrightarrow 0 \quad (P(k[x]/x^n))$$

es una resolución B^e -proyectiva de B .

Por los resultados vistos en el Capítulo 1, la homología de esta álgebra puede calcularse mediante los funtores derivados de $B \otimes_{B^e} -$ y $\text{Hom}_{B^e}(-, B)$.

Si aplicamos $B \otimes_{B^e} -$ al complejo $P(k[x]/x^n)$, eliminamos el término de grado 0 y hacemos la identificación descrita en 1.2.8, obtenemos el complejo cíclico

$$\dots \longrightarrow B \xrightarrow{0} B \xrightarrow{nx^{n-1}} B \xrightarrow{0} B \longrightarrow 0. \quad (B \otimes_{B^e} P(k[x]/x^n))$$

En este caso entra en juego la característica del anillo. Si la característica de k divide a n , entonces todos los morfismos son nulos y la homología es igual a B en todos los grados. Si no, la homología de B sigue un patrón cíclico, dado por

$$HH_i(B) = \begin{cases} B, & i = 0; \\ B/(nx^{n-1}) & \text{si } i \text{ es impar;} \\ \text{ann}_B(nx^{n-1}) & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

En particular, si n es inversible en k (por ejemplo, si k es un cuerpo de característica coprima con n), todos estos módulos son isomorfos.

Para el caso de la cohomología, aplicamos el funtor $\text{Hom}_{B^e}(-, B)$ y hacemos las identificaciones estándar, obteniendo el complejo

$$\dots \longrightarrow B \xrightarrow{0} B \xrightarrow{nx^{n-1}} B \xrightarrow{0} B \longrightarrow 0. \quad (\text{Hom}_{B^e}(P(k[x]/x^n), B))$$

Este es completamente análogo al anterior, por lo que en este caso, la homología y cohomología coinciden grado a grado, y tenemos

$$HH^i(B) = \begin{cases} B, & i = 0; \\ B/(nx^{n-1}) & \text{si } i \text{ es impar;} \\ \text{ann}_B(nx^{n-1}) & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

Obviamente, las mismas observaciones hechas anteriormente sobre la característica del anillo k se aplican en este caso.

2.3.2 Construcción de la resolución general

Retomamos ahora el objetivo de encontrar una resolución para $B = A/(f)$, con $f \in A = k[X]$ un polinomio cualquiera. El procedimiento por el que construiremos esta nueva resolución está motivado por el trabajo hecho en la Sección previa y es análogo a este.

Comenzamos entonces con el complejo $P(A)$

$$\cdots \longrightarrow \Lambda^p A \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Lambda A \xrightarrow{d} A^e \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0.$$

y le aplicamos el funtor $- \otimes_A B$. Obtenemos así un nuevo complejo,

$$\cdots \longrightarrow A \otimes \Lambda^p V \otimes B \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} A \otimes \Lambda V \otimes B \xrightarrow{d} A \otimes B \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 0.$$

donde V es el k -espacio vectorial generado por las indeterminadas $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Lema 2.3.2. *El complejo $P(A) \otimes_A B$ es una resolución proyectiva de B como A -módulo a izquierda.*

Demostración. La proyectividad de $A \otimes \Lambda^p V \otimes B$ se deduce del Lema 1.2.6. Un razonamiento análogo al de la Observación 2.3.1 muestra que si eliminamos el término de grado 0 de este complejo, su homología es $\text{Tor}_*^A(A, B)$, que es nula en grados positivos. Por lo tanto, el complejo es exacto. \square

Al igual que en la Sección anterior, tenemos otra resolución A -proyectiva de B dada por su estructura cociente:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0 \quad (P'(B))$$

y un morfismo de comparación A -lineal a izquierda $\phi : B \otimes_A P(A) \rightarrow P'(B)$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{\pi} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_1 & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A \otimes \Lambda^2 V \otimes B & \xrightarrow{d} & A \otimes \Lambda V \otimes B & \xrightarrow{d} & A \otimes B & \xrightarrow{\mu} & B & \longrightarrow & 0. \end{array} \quad (2.2)$$

A continuación describimos explícitamente estos morfismos.

Como en el caso anterior, la función ϕ_1 es la única función A -lineal a izquierda tal que $\phi_1(1) = 1|1$.

Para hallar ϕ_2 planteamos la condición

$$d\phi_2(1) = f|1.$$

Recordemos que

$$d\left(\sum_{i=1}^n \Delta^i(X^\alpha)e_i\right) = X^\alpha|1 - 1|X^\alpha,$$

(esto está implícito en la demostración del Lema 2.2.6). En nuestro nuevo complejo, la fórmula del diferencial es formalmente idéntica, de lo que obtenemos

$$d\left(\sum_{i=1}^n \Delta^i(f)e_i\right) = f|1 - 1|f = 1|f,$$

dado que $f = 0$ en B . De ahí que podemos tomar $\phi_2(1) = \sum_{i=1}^n \Delta^i(f)e_i$ y extender por linealidad. Enunciamos este resultado en un lema para futuras referencias.

Lema 2.3.3. *El morfismo de complejos de cadenas $\phi : P'(B) \rightarrow P(A) \otimes_A B$ determinado por los datos*

$$\begin{aligned} \phi_0(1) &= 1, \\ \phi_1(1) &= 1|1, \\ \phi_2(1) &= \sum_{i=1}^n \Delta^i(f)e_i; \end{aligned}$$

es un morfismo de comparación entre ambas resoluciones.

A continuación aplicamos el funtor $B \otimes_A -$ al diagrama 2.2 y las identificaciones usuales, con lo que obtenemos

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{0} & B & \xrightarrow{\text{Id}} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \phi'_2 \downarrow & & \phi'_1 \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & B \otimes \Lambda^2 V \otimes B & \xrightarrow{d} & B \otimes \Lambda V \otimes B & \xrightarrow{d} & B^e & \xrightarrow{\mu} & B & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Lema 2.3.4. *Los morfismos $\phi_i : P(A) \otimes_A B \rightarrow P'(A)$ y $\phi'_i = \text{Id}_B \otimes_A \phi_i$ son cuasi isomorfismos*

Demostración. Consideremos nuevamente el diagrama 2.2. Al ser $P(A) \otimes B$ y $P'(B)$ resoluciones A -libres a izquierda de B , debe existir un morfismo de complejos de cadenas

$\psi : P(A) \otimes_A B \rightarrow P'(B)$ tal que $\psi_0 = \text{Id}_B$, haciendo que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A \otimes \Lambda^2 V \otimes B & \xrightarrow{d} & A \otimes \Lambda V \otimes B & \xrightarrow{d} & A \otimes B & \xrightarrow{\mu} & B & \longrightarrow & 0. \\ & & & & & & \psi_2 \downarrow & & \psi_1 \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{\pi} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

conmute. En particular la composición $\phi_i \psi_i : P(A) \otimes_A B \rightarrow P(A) \otimes_A B$ es un levantamiento de la identidad. Esto implica la existencia de morfismos $\{s_i\}_{i \geq 0}$ como en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A \otimes \Lambda^2 V \otimes B & \xrightarrow{d} & A \otimes \Lambda V \otimes B & \xrightarrow{d} & A \otimes B & \xrightarrow{\mu} & B & \longrightarrow & 0. \\ & & & & \downarrow 0 & \swarrow s_2 & \downarrow \phi_2 \psi_2 & \swarrow s_1 & \downarrow \phi_1 \psi_1 & \swarrow s_0 & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & A \otimes \Lambda^2 V \otimes B & \xrightarrow{d} & A \otimes \Lambda V \otimes B & \xrightarrow{d} & A \otimes B & \xrightarrow{\mu} & B & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

tales que

$$\phi_i \psi_i - \text{Id}_i = ds_i + s_{i+1}d.$$

En particular el morfismo inducido por $\phi_i \psi_i$ en la homología es igual a la identidad. Un razonamiento análogo muestra que lo mismo ocurre con $\psi \phi : P'(B) \rightarrow P'(B)$, de donde se deduce que ϕ es un cuasi isomorfismo, y ψ es su cuasi inversa.

Notemos $\psi'_i = \text{Id}_B \otimes_A \psi_i$. Para ver que ϕ'_i también es un cuasi isomorfismo, basta aplicar el funtor $B \otimes_A -$ a la igualdad anterior, obteniendo así

$$\begin{aligned} \text{Id}_B \otimes_A \phi_i \circ \text{Id}_B \otimes_A \psi_i - \text{Id}_B \otimes_A \text{Id}_i &= \text{Id}_B \otimes_A (\phi_i \psi_i) = \text{Id}_B \otimes_A (ds_i + s_{i+1}d) \\ &= d(\text{Id}_B \otimes_A s_i) + (\text{Id}_B \otimes_A s_{i+1})d. \end{aligned}$$

Es decir que $\text{Id}_B \otimes_A s_i$ es una homotopía entre la composición $\phi'_i \psi'_i$ y el morfismo $\text{Id}_B \otimes \text{Id}_{P(A) \otimes_A B} = \text{Id}_{P_0(B)}$. Un razonamiento análogo muestra la existencia de una homotopía entre $\phi'_i \psi'_i$ e $\text{Id}_{B \otimes_A P'(B)}$. Por lo tanto, ψ' y ϕ' son cuasi isomorfismos, y uno es el cuasi inverso del otro. Esto completa la demostración. \square

En particular, la homología del complejo

$$\cdots \quad \Lambda^{p+1} B \xrightarrow{d} \Lambda^p B \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Lambda B \xrightarrow{d} B^e \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 0. \quad (P_0(B))$$

está concentrada en la componente de segundo grado, y es igual a la imagen del morfismo ϕ'_2 . Recordemos que

$$\phi_2(1) = \sum_{i=1}^n \Delta^i(f) e_i,$$

por lo que

$$\phi'_2(1) = \sum_{i=1}^n \overline{\Delta^i(f) e_i}^B = \omega_1.$$

Por lo tanto el complejo $P_0(B)$ es un complejo de módulos B^e -libres, cuya homología está concentrada en la componente de grado 2. Sabemos además que la clase del elemento ω es un generador de la homología. Si nos guiamos por el caso anterior, debemos continuar la resolución cíclicamente. En este caso, debemos agregar no solamente un morfismo $\rho_1 : B^e \rightarrow \Lambda B$, sino una familia de morfismos $\{\rho_i\}_{1 \leq i \leq p}$, de forma tal que el complejo doble

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \cdots & \xrightarrow{d} & \Lambda^3 B & \xrightarrow{d} & \Lambda^2 B & \xrightarrow{d} & \Lambda B & \xrightarrow{d} & B^e & \longrightarrow & 0 & (P(B)) \\
 & & & & & \uparrow \rho_3 & & \uparrow \rho_2 & & \uparrow \rho_1 & & & & & \\
 & & & \cdots & \xrightarrow{d} & \Lambda^3 B & \xrightarrow{d} & \Lambda^2 B & \xrightarrow{d} & \Lambda B & \xrightarrow{d} & B^e & & & \\
 & & & & & \uparrow \rho_3 & & \uparrow \rho_2 & & \uparrow \rho_1 & & & & & \\
 \cdots & \xrightarrow{d} & \Lambda^3 B & \xrightarrow{d} & \Lambda^2 B & \xrightarrow{d} & \Lambda B & \xrightarrow{d} & B^e & & & & & &
 \end{array}$$

resulte conmutativo.

La existencia de tales morfismos ρ_i se deduce de la proyectividad de los módulos. No es necesario dar una fórmula explícita para comprobar que el complejo total obtenido de este complejo doble es exacto, pero dado que los morfismos ρ_2 y ρ_3 juegan un rol importante en la interpretación de los grupos de homología y cohomología, enunciamos el siguiente resultado.

Lema 2.3.5. *Los morfismos*

$$\begin{aligned}
 \rho_j : \Lambda^{j-1} B &\rightarrow \Lambda^j B \\
 e_J &\mapsto \sum_{i=1}^n \Delta^i(f)(e_J \wedge e_i).
 \end{aligned}$$

hacen conmutar el diagrama $P(B)$. Además, $\rho_{i+1}\rho_i = 0$.

Podemos entonces proceder a la demostración de

Teorema 2.3.6. *El complejo total del complejo doble $P(B)$ es una resolución proyectiva de B como B^e -bimódulo.*

Demostración. En la demostración utilizamos la teoría de sucesiones espectrales. Todo el material necesario está cubierto en la Sección 5 de [16].

Empezamos dando una filtración para el complejo $\text{Tot } P(B)$. Es claro que $P(B)_{(p,q)} = \Lambda^{q-p} B$. De esto deducimos que

$$\text{Tot } P(B)_n = \bigoplus_{q+p=n} \Lambda^{q-p} B = \bigoplus_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \Lambda^{n-2p} B.$$

Dotamos a este complejo de la filtración por filas, dada por

$$F_r(\text{Tot } P(B)_n) = \bigoplus_{p=0}^r \Lambda^{n-2p} B.$$

Esto induce una sucesión espectral $E_{(p,q)}^*$, donde $E_{p,q}^0 = P(B)_{(p,q)}$, y los morfismos d^0 están inducidos por los morfismos *horizontales* de $P(B)$, es decir

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{d} & \Lambda^3 B & \xrightarrow{d} & \Lambda^2 B & \xrightarrow{d} & \Lambda B & \xrightarrow{d} & B^e \\ \cdots & \xrightarrow{d} & \Lambda^3 B & \xrightarrow{d} & \Lambda^2 B & \xrightarrow{d} & \Lambda B & \xrightarrow{d} & B^e \\ \cdots & \xrightarrow{d} & \Lambda^3 B & \xrightarrow{d} & \Lambda^2 B & \xrightarrow{d} & \Lambda B & \xrightarrow{d} & B^e \end{array} \quad (E^0(\text{Tot } P(B)))$$

En el siguiente paso de la sucesión espectral, E^1 , tenemos que

$$E_{p,q}^1 = H(E_{p,q}^0) = \begin{cases} B, & \text{si } p - q = 0; \\ B\omega, & \text{si } p - q = 1; \\ 0, & \text{si no;} \end{cases}$$

y los morfismos están inducidos por los morfismos *verticales* de $P(B)$

$$\begin{array}{cccccccc} & & \cdots & & 0 & & 0 & & B\omega & & B & & (E^1(\text{Tot } P(B))) \\ & & & & \rho_3 \uparrow & & \rho_2 \uparrow & & \rho_1 \uparrow & & & & \\ \cdots & & & & 0 & & 0 & & B\omega & & B & & \\ & & \rho_3 \uparrow & & \rho_2 \uparrow & & \rho_1 \uparrow & & & & & & \\ \cdots & & 0 & & 0 & & B\omega & & B & & & & \end{array}$$

El morfismo ρ_1 es el único morfismo B -lineal tal que $\rho_1(1) = \omega$, por lo que en esta sucesión induce un isomorfismo. Es evidente que el resto de los morfismos inducidos son nulos.

Finalmente, en el segundo paso de la sucesión espectral, resulta

$$E_{p,q}^2 = \begin{cases} B, & \text{si } p = q = 0, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

obteniendo así.

$$\begin{array}{cccccccc} & & \cdots & & 0 & & 0 & & 0 & & B & & (E^2(\text{Tot } P(B))) \\ & & & & \nearrow & & \nearrow & & & & & & \\ \cdots & & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & & & \nearrow & & \nearrow & & & & & & \\ \cdots & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

En consecuencia $E_{p,q}^2 = E_{p,q}^\infty$.

Por la teoría desarrollada en [16], por ejemplo, $\text{Tot } E_{p,q}^\infty$ converge a la homología del complejo total. En este caso particular, este resultado nos permite concluir que $H^0(\text{Tot } P(B)) \cong B$, y $H^p(\text{Tot } P(B)) = 0$ en grados positivos. \square

Corolario 2.3.7. *La homología de Hochschild de B con coeficientes en M está dada por $H_*(M \otimes \text{Tot } P(B))$, y la cohomología de Hochschild con valores en M está dada por $H^*(\text{Hom}(P(B), M))$.*

2.4 Morfismo de comparación

En el Capítulo 1 dimos una interpretación de los grupos de homología de Hochschild en términos de la resolución $\text{Hom}_k(A^{\otimes*}, M)$, que según vimos se identifica con la resolución $\text{Hom}_*(\beta(A), M)$, interpretando los elementos de $HH^n(A)$ como clases de funciones n -lineales. En el mismo Capítulo desarrollamos herramientas para el cálculo explícito de dichos grupos utilizando la resolución $P(B)$; esto facilita el cálculo de los grupos de homología, pero no nos permite interpretar directamente sus elementos como en 1. Para esto, debemos encontrar un morfismo de comparación entre ambas resoluciones, que induzca un isomorfismo en la homología, y nos permita así establecer una correspondencia entre los elementos del grupo de cohomología y las clases de funciones multilineales descritas en la Sección mencionada.

El morfismo de comparación presentado en esta Sección es una leve modificación del construido en [8].

2.4.1 Preliminares

Notación. Recordamos que en todo este trabajo, las fórmulas explícitas que involucran polinomios están dadas según el orden lexicográfico descrito en el Capítulo . Como en capítulos anteriores, fijamos un polinomio $f \in k[X]$, y notamos $B = k[X]/f$. Notamos $q(p)$, $r(p)$ a los únicos polinomios tales que $p = q(p)f + r(p)$ como en el teorema 0.2.1.

Definición: 2.4.1. Reescribamos el complejo $P(B)$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{d} & \Lambda^3 B & \xrightarrow{d} & \Lambda^2 B & \xrightarrow{d} & \Lambda B & \xrightarrow{d} & B^e & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \rho_3 \uparrow & & \rho_2 \uparrow & & \rho_1 \uparrow & & \\
 \dots & \xrightarrow{d} & \Lambda^3 Bt & \xrightarrow{d} & \Lambda^2 Bt & \xrightarrow{d} & \Lambda Bt & \xrightarrow{d} & B^e t & & \\
 & & \rho_3 \uparrow & & \rho_2 \uparrow & & \rho_1 \uparrow & & & & \\
 \dots & \xrightarrow{d} & \Lambda^3 Bt^2 & \xrightarrow{d} & \Lambda^2 Bt^2 & \xrightarrow{d} & \Lambda Bt^2 & \xrightarrow{d} & B^e t^2 & & \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & (P(B)t)
 \end{array}$$

de forma tal que los generadores de la componente $(p, p+q)$ se escriban como $e_J t^p$, con $J = (j_1, \dots, j_q)$.

Observamos que con esta notación se puede introducir en el complejo $\text{Tot } P(B)$ una estructura de álgebra diferencial graduada, donde la multiplicación está definida a nivel de generadores como

$$e_J t^i \cdot e_{J'} t^j = \binom{i+j}{j} e_J \wedge e_{J'} t^{i+j}$$

y extendida B -bilinealmente. Por abuso de notación, notamos $P(B)t$ al complejo total con dicha estructura, y $(P(B)t)_i$ a su componente i -ésima.

A continuación definimos notación y demostramos un par de resultados que aligeran la demostración de que estos morfismos efectivamente funcionan, la cual se encuentra en la siguiente Sección

Definición: 2.4.2. Definimos los morfismos k -lineales $L_i : A \rightarrow A^e$, mediante $L_i(X^\alpha) = x_1^{\alpha_1} \dots x_i^{\alpha_i} \otimes x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \dots x_n^{\alpha_n}$. Por abuso de notación, llamamos también L_i a los morfismos inducidos $L_i : B \rightarrow B^e$.

Lema 2.4.3. (*Generalidades acerca de las derivaciones*) *Dadps* $p, q \in B$,

1. $d(\Delta^i(p)e_i) = L_i(p) - L_{i-1}(p)$.
2. $\sum_{i=1}^n d\Delta^i(p) = p \otimes 1 - 1 \otimes p$.
3. $\Delta^i(pq) = \Delta^i(p)L_i(q) + L_{i-1}(p)\Delta^i(q)$.
4. $d\left(\sum_{i < j} \Delta^i(p)\Delta^j(q)\right) = \sum_{j=2}^n \Delta^j(q)(L_{j-1}(p) - 1 \otimes p) - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta^i(p)(q \otimes 1 - L_i(q))$.

Demostración. Los dos primeros resultados los habíamos obtenido en la demostración del Lema 2.2.6. Los otros dos se obtienen a partir de un cálculo directo. \square

2.4.2 Fórmulas explícitas para los morfismos de levantamiento

En esta Sección presentamos explícitamente los morfismos de levantamiento y demostramos que efectivamente funcionan, al menos hasta cierto grado.

Lema 2.4.4. *Las siguientes fórmulas*

$$\begin{aligned} \psi(e_J) &= \sum_{\sigma \in S_p} 1|x_{j_{\sigma^{-1}(1)}}| \dots |x_{j_{\sigma^{-1}(p)}}| 1 \text{ si } J \in J(p), \\ \psi(t) &= 1 \otimes \left(\sum_{i=1}^n \Delta^i(f) 1|x_i| 1 \right), \\ \psi(e_j t) &= \sum_{i=1}^n 1 \otimes x_j \otimes \Delta^i(f)(1|x_i| 1) - 1 \otimes \Delta^i(f)(1|x_j|x_i| 1) + 1 \otimes \Delta^i(f)(1|x_i|x_j| 1), \end{aligned}$$

definen morfismos $\psi_i : (P(B)t)_i \rightarrow \beta(B)_i$, para $i = 1, 2, 3$. Con estos morfismos, el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{d} & B^{\otimes 5} & \xrightarrow{d} & B^{\otimes 4} & \xrightarrow{d} & B^{\otimes 3} \xrightarrow{d} B^e \\ & & \uparrow \psi_3 & & \uparrow \psi_2 & & \uparrow \psi_1 \\ \cdots & \xrightarrow{d} & (P(B)t)_3 & \xrightarrow{d} & (P(B)t)_2 & \xrightarrow{d} & (P(B)t)_1 \xrightarrow{d} B^e \end{array}$$

conmuta, es decir, las funciones ψ_i son las primeras tres componentes de un levantamiento de la identidad.

Lema 2.4.5. *Los morfismos*

$$\begin{aligned} \phi_i &: \beta(A)_i \rightarrow P(B)t_i, \quad i = 1, 2 \\ \phi_1(1|X^\alpha|1) &= \sum_{i=1}^n \Delta^i(X^\alpha)e_i \\ \phi_2(1|X^\alpha|X^\beta|1)t &= q(X^{\alpha+\beta})|1 - \sum_{i<j} \Delta^j(X^\alpha)\Delta^i(X^\beta)e_i \wedge e_j \\ &\quad + \sum_{i<j} \Delta^j(q(X^\beta X^\alpha))\Delta^i(f)e_i \wedge e_j \end{aligned}$$

hacen conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{d} & B^{\otimes 4} & \xrightarrow{d} & B^{\otimes 3} & \xrightarrow{d} & B^e \\ & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_1 & & \parallel \\ \cdots & \xrightarrow{d} & (P(B)t)_2 & \xrightarrow{d} & (P(B)t)_1 & \xrightarrow{d} & B^e \end{array}$$

es decir, ϕ_1 y ϕ_2 son las primeras dos componentes de un levantamiento de la identidad.

Estos dos lemas nos proveen de todos los morfismos de comparación necesarios para llevar adelante nuestro trabajo. Demostraremos que ψ es un levantamiento de la identidad hasta grado 3. En [8] se puede encontrar la demostración de que el morfismo ψ (levemente modificado) es un levantamiento de la identidad, así como la construcción completa de un morfismo de comparación ϕ en el sentido opuesto.

Demostración. 2.4.4 Debemos ver que $d\psi_1(e_i) = d(e_i)$. Esto es fácil de comprobar, pues

$$d\psi_1(e_i) = d(1|x_i|1) = x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i = d(e_i).$$

Ahora veamos que $d\psi_2 = \psi_1 d$. El conjunto $\mathcal{B}_1 = \{e_i \wedge e_j, t : 1 \leq i < j \leq n\}$ es una base de $(P(B)t)_1$, así que basta estudiar la conmutatividad sobre esta base. En primer

lugar,

$$\begin{aligned}
d\psi_2(e_i \wedge e_j) &= d(1|x_i|x_j|1 - 1|x_j|x_i|1) \\
&= x_i|x_j|1 - 1|x_i|x_j|1 + 1|x_i|x_j - x_j|x_i|1 + 1|x_j|x_i|1 - 1|x_j|x_i \\
&= x_i|x_j|1 - 1|x_j|x_i - x_j|x_i|1 + 1|x_i|x_j \\
&= \psi_1(x_i e_j - e_j x_i - x_j e_i + e_i x_j) = \psi_1 d(e_i \wedge e_j).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
d\psi_2(t) &= d\left(1 \otimes \left(\sum_{i=1}^n \Delta^i(f)1|x_i|1\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \Delta^i(f)1|x_i|1 - \sum_{i=1}^n 1 \otimes L_i(f) + \sum_{i=1}^n 1 \otimes L_{i-1}(f) \\
&= \sum_{i=1}^n \Delta^i(f)1|x_i|1 + 1 \otimes L_0(f) - 1 \otimes L_n(f) = \sum_{i=1}^n \Delta^i(f)1|x_i|1 \\
&= \sum_{i=1}^n \Delta^i(f)\psi_1(e_i) = \psi_1(d(t)).
\end{aligned}$$

Finalmente, en grado 3 tenemos la base $\mathcal{B}_3 = \{e_{(i,j,k)} : 1 \leq i < j < k \leq n; e_i t\}$.
Tomamos

$$\begin{aligned}
d\psi_3(e_i \wedge e_j \wedge e_k) &= d(1|x_i|x_j|x_k|1 - 1|x_i|x_k|x_j|1 + 1|x_j|x_k|x_i|1 \\
&\quad - 1|x_j|x_i|x_k|1 + 1|x_k|x_i|x_j|1 - 1|x_k|x_j|x_i|1) \\
&= x_i|x_j|x_k|1 - 1|x_i|x_j|x_k|1 + 1|x_i|x_j|x_k|1 - 1|x_i|x_j|x_k \\
&\quad - x_i|x_k|x_j|1 + 1|x_i|x_k|x_j|1 - 1|x_i|x_k|x_j|1 + 1|x_i|x_k|x_j \\
&\quad + x_j|x_k|x_i|1 - 1|x_j|x_k|x_i|1 + 1|x_j|x_k|x_i|1 - 1|x_j|x_k|x_i \\
&\quad - x_j|x_i|x_k|1 + 1|x_j|x_i|x_k|1 - 1|x_j|x_i|x_k|1 + 1|x_j|x_i|x_k \\
&\quad + x_k|x_i|x_j|1 - 1|x_k|x_i|x_j|1 + 1|x_k|x_i|x_j|1 - 1|x_k|x_i|x_j \\
&\quad - x_k|x_j|x_i|1 + 1|x_k|x_j|x_i|1 - 1|x_k|x_j|x_i|1 + 1|x_k|x_j|x_i \\
&= x_i(1|x_j|x_k|1 - 1|x_k|x_j|1) - (1|x_j|x_k|1 - 1|x_k|x_j|1)x_i \\
&\quad - x_j(1|x_i|x_k|1 - 1|x_k|x_i|1) - (1|x_i|x_k|1 - 1|x_k|x_i|1)x_j \\
&\quad + x_k(1|x_i|x_j|1 - 1|x_j|x_i|1) - (1|x_i|x_j|1 - 1|x_j|x_i|1)x_k \\
&= x_i(\psi_2(e_j \wedge e_k)) - (\psi_2(e_j \wedge e_k))x_i \\
&\quad - x_j(\psi_2(e_i \wedge e_k)) - (\psi_2(e_i \wedge e_k))x_j \\
&\quad + x_k(\psi_2(e_i \wedge e_j)) - (\psi_2(e_j \wedge e_k))x_k \\
&= \psi_2(d(e_i \wedge e_j \wedge e_k)).
\end{aligned}$$

Para terminar, debemos analizar

$$\begin{aligned}
d\psi_3(e_j t) &= \sum_{i=1}^n d(1 \otimes x_j \otimes (\Delta^i(f)1|x_i|1) - 1 \otimes (\Delta^i(f)1|x_j|x_i|1) \\
&\quad + 1 \otimes (\Delta^i(f)1|x_i|x_j|1)) \\
&= \sum_{i=1}^n (x_j \otimes \Delta^i(f)(1|x_i|1) - 1 \otimes x_j \Delta^i(f)(1|x_i|1) + 1 \otimes x_j \otimes \Delta^i(f)(x_i|1) \\
&\quad - 1 \otimes x_j \otimes \Delta^i(f)(1|x_i) - \Delta^i(f)(1|x_i|x_j|1) + 1 \otimes x_j \Delta^i(f)(1|x_i|1) \\
&\quad - 1 \otimes \Delta^i(f)(1|x_i x_j|1) + 1 \otimes \Delta^i(f) x_j (1|x_i|1) + \Delta^i(f)(1|x_j|x_i|1) \\
&\quad - 1 \otimes x_i \Delta^i(f)(1|x_j|1) + 1 \otimes \Delta^i(f)(1|x_j x_i|1) - 1 \otimes \Delta^i(f) x_i (1|x_j|1)) \\
&= \sum_{i=1}^n (x_j \otimes \Delta^i(f)(1|x_i|1) - \Delta^i(f)(1|x_i|x_j|1) + 1 \otimes \Delta^i(f) x_j (1|x_i|1) \\
&\quad + \Delta^i(f)(1|x_j|x_i|1) - 1 \otimes x_i \Delta^i(f)(1|x_j|1) - 1 \otimes \Delta^i(f) x_i (1|x_j|1)) \\
&= (x_j \otimes 1 - 1 \otimes x_j)(1 \otimes \sum_{i=1}^n \Delta^i(f)1|x_i|1) + \sum_{i=1}^n \Delta^i(f)(1|x_i|x_j|1 - 1|x_j|x_i|1) \\
&= \psi_2(d(e_j t)).
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. \square

Demostración. 2.4.5 En el primer paso, debemos ver que $d\phi_1 = \text{Id } d$. Utilizando el lema 4, tenemos que

$$d\phi_1(1|X^\alpha|1) = d\left(\sum_{i=1}^n \Delta^i(X^\alpha)e_i\right) = X^\alpha|1 - 1|X^\alpha = d(1|X^\alpha|1).$$

Para ver que $d\phi_2 = \phi_1 d$, notamos por q y r a $q(X^{\alpha+\beta})$ y $r(X^{\alpha+\beta})$ respectivamente, y calculamos

$$\begin{aligned}
d\phi_2(1|X^\alpha|X^\beta|1) &= d\left((q|1)t - \sum_{i<j} \Delta^j(X^\alpha)\Delta^i(X^\beta)e_i \wedge e_j + \sum_{i<j} \Delta^j(q)\Delta^i(f)e_i \wedge e_j\right) \\
&= q \sum_{i=1}^n \Delta^i(f)e_i - \sum_{j=2}^n \Delta^j(X^\alpha)(L_{j-1}(X^\beta) - 1 \otimes X^\beta)e_j \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta^i(X^\beta)(X^\alpha \otimes 1 - L_i(X^\alpha))e_i \\
&\quad + \sum_{j=2}^n \Delta^j(q)(L_{j-1}(f) - 1 \otimes f)e_j - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta^i(f)(q \otimes 1 - L_i(q))e_i \\
&= - \sum_{j=2}^n \Delta^j(X^\alpha)(L_{j-1}(X^\beta) - 1 \otimes X^\beta)e_j \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta^i(X^\beta)(X^\alpha \otimes 1 - L_i(X^\alpha))e_i \\
&\quad - \sum_{j=2}^n \Delta^j(q)L_{j-1}(f)e_j + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta^i(f)L_i(q)e_i.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\phi_1 d(1|X^\alpha|X^\beta|1) &= \phi_1(X^\alpha|X^\beta|1 - 1|(X^\alpha X^\beta - qf)|1 + 1|X^\alpha|X^\beta) \\
&= X^\alpha \sum_{i=1}^n \Delta^i(X^\beta)e_i - \sum_{i=1}^n \Delta^i(X^\alpha X^\beta - qf)e_i + \sum_{i=1}^n \Delta^i(X^\alpha)X^\beta e_i \\
&= \sum_{i=1}^n \Delta^i(X^\beta)(X^\alpha|1 - L_i(X^\alpha))e_i \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \Delta^i(X^\alpha)(1|X^\beta - L_{i-1}(X^\beta))e_i \\
&\quad + \sum_{i=1}^n (\Delta^i(f)L_i(q) - L_{i-1}(f)\Delta^i(q))e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \Delta^i(X^\beta)(X^\alpha|1 - L_i(X^\alpha))e_i \\
&\quad + \sum_{j=2}^n \Delta^j(X^\alpha)(1|X^\beta - L_{j-1}(X^\beta))e_j \\
&\quad + \sum_{i=1}^n (\Delta^i(f)L_i(q) - L_{i-1}(f)\Delta^i(q))e_i.
\end{aligned}$$

Ambos resultados coinciden. Esto termina la demostración. □

Capítulo 3

Cohomología de arreglos de hiperplanos

En este Capítulo introducimos nuestro objeto de estudio, los arreglos de hiperplanos. Tal como su nombre lo indica un arreglo de hiperplanos es un conjunto de hiperplanos ubicados en el espacio afín o proyectivo. Orlik y Terao en [14] citan el siguiente problema como el "humilde origen" del tema:

Demostrar que n cortes dividen una torta en a lo sumo $\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$ partes.

Problema E 554, *American Mathematical Monthly* 50. (1943)

Propuesto por J. L. Woodbridge.

En la resolución de este problema se aprecian los condimentos geométricos y combinatorios que aparecen en todo el estudio de los arreglos de hiperplanos. Si bien un hiperplano es una variedad algebraica muy sencilla, un arreglo de hiperplanos tiene un conjunto de singularidades cuya geometría es muy complicada, y para estudiarlo es necesario utilizar técnicas avanzadas de geometría algebraica. Por otro lado, es claro que gran parte de la información de un arreglo de hiperplanos está contenida en la combinatoria de las intersecciones de los hiperplanos, y de hecho el problema planteado arriba puede resolverse por medios puramente combinatorios. Citamos [14] como referencia general para la teoría de arreglos de hiperplanos.

3.1 Arreglos de hiperplanos

Definición: 3.1.1. Sea k un cuerpo, y sea V un k -espacio vectorial de dimensión n . Un *hiperplano* es una subvariedad afín $H \subset V$ de codimensión 1. Un *arreglo de hiperplanos* \mathcal{A} es un conjunto finito de hiperplanos de V . Si queremos enfatizar la dimensión del espacio ambiente, diremos que \mathcal{A} es un n -arreglo. Notamos por $|\mathcal{A}|$ a la cardinalidad de \mathcal{A} .

Notación. Notamos por \emptyset_n el n -arreglo vacío. Obviamente, $|\emptyset| = 0$.

Sea V^* el espacio dual de V , y sea S su álgebra simétrica. Si fijamos una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V , podemos tomar su base dual $\{x_1, \dots, x_n\}$, de forma que $x_i(e_j) = \delta_{ij}$. Identificamos entonces S con el álgebra de polinomios $k[x_1, \dots, x_n]$. Cada hiperplano H es el núcleo de una transformación lineal afín α_H , definida a menos de una constante.

Definición: 3.1.2. Dado un arreglo \mathcal{A} , un *polinomio de definición* de \mathcal{A} es

$$\mathcal{Q}(\mathcal{A}) = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H.$$

Por supuesto existen varios polinomios de definición para un cierto arreglo, todos ellos múltiplos escalares entre sí. En particular, $\deg \mathcal{Q}(\mathcal{A}) = |\mathcal{A}|$. En la Sección sobre polinomios sentamos los criterios a usar durante el resto del documento para fijar un polinomio de definición.

Definición: 3.1.3. Si $T = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H \neq \emptyset$, decimos que el arreglo es *centrado* con centro T . Si la intersección es vacía, el arreglo se dice *descentrado*. El arreglo se dice *central* si $0 \in T$. Cuando queramos enfatizar que un arreglo puede o no ser central, decimos que es un *arreglo afín*.

Definición: 3.1.4. La *variedad* o *soporte* de \mathcal{A} es el conjunto

$$N(\mathcal{A}) = \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H;$$

el *complemento* de \mathcal{A} es

$$M(\mathcal{A}) = V \setminus N(\mathcal{A}).$$

Ejemplo(s). A continuación damos algunos ejemplos de arreglos.

- Si $\dim V = 1$, el único arreglo central es el 0. Un arreglo afín es una colección finita de puntos. Notar que, dependiendo del cuerpo, el complemento de este arreglo puede ser conexo, como en el caso complejo, o disconexo, como el caso real.
- Si $\dim V = 2$, un arreglo central es un conjunto de rectas que pasan por el origen.
- Si $k = \mathbb{R}$, consideremos \mathcal{A} como el conjunto de hiperplanos definidos por $x_i = \pm 1$. Claramente, $|\mathcal{A}| = 2n$. La única componente conexa acotada del complemento es el conjunto $(-1, 1)^n$.
- Podemos tomar un arreglo *dual* al anterior, y elegir los planos de simetría de un hipercubo. En particular, en dimensión 2 tenemos que el arreglo \mathcal{A} está definido por $\mathcal{Q}(\mathcal{A}) = xy(x-y)(x+y)$. En dimensión 3, $\mathcal{Q}(\mathcal{A}) = xyz(x-y)(x+y)(x-z)(x+z)(y-z)(y+z)$. Se tiene que $|\mathcal{A}| = n^2$.
- En general, el *n-arreglo booleano* se define como el conjunto de los planos coordenados de un espacio real de dimensión n , ie $\mathcal{Q}(\mathcal{A}) = x_1 x_2 \dots x_n$.

- El arreglo de trenzas del espacio V es el definido por el polinomio

$$\mathcal{Q}(\mathcal{A}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

En este caso, $|\mathcal{A}| = \frac{n(n-1)}{2}$

- Si \mathbb{F}_q es el cuerpo finito de cardinal q , y $V = \mathbb{F}_q^n$, podemos considerar el arreglo de todos los hiperplanos de V . El cardinal de este conjunto es $\frac{q^n-1}{q-1}$.

Enunciamos a continuación algunas definiciones que será útiles más adelante.

Definición: 3.1.5. Dos arreglos se dicen *afinmente equivalentes* si y solo si existe una transformación lineal afín que transforma uno en otro.

Definición: 3.1.6. Sea \mathcal{A} un n -arreglo de hiperplanos sobre el cuerpo k , y sea \mathcal{Q} un polinomio de definición. El *álgebra de funciones regulares* de $N(\mathcal{A})$ es el álgebra $k[x_1, \dots, x_n]/(\mathcal{Q})$.

Este es el principal invariante geométrico-algebraico de cualquier variedad algebraica. Enunciamos un resultado importante que utilizamos más adelante.

Teorema 3.1.7. Si dos arreglos de hiperplanos \mathcal{A} y \mathcal{B} son afinmente equivalentes, entonces sus álgebras de funciones regulares son isomorfas.

Demostración. Si $f : k^n \rightarrow k^n$ es el isomorfismo afín, este induce un isomorfismo de álgebras $f^* : S(V^*) \rightarrow S(V^*)$. Si $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$ es un polinomio de definición de \mathcal{A} , entonces $f^*(\mathcal{Q}_{\mathcal{A}})$ será un polinomio de definición de \mathcal{B} . Esto muestra que f^* induce un isomorfismo $f^*k[X]/(\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}) \rightarrow k[X]/(\mathcal{Q}_{\mathcal{B}})$. \square

3.1.1 Generalidades sobre la cohomología de Hochschild de arreglos

En capítulos anteriores trabajamos con álgebras de la forma $B = K[X]/(f)$, y construimos una resolución proyectiva para estas; por conveniencia, recordamos aquí la resolución $P(B)t$ que construimos para ella.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{d} & \Lambda^4 B & \xrightarrow{d} & \Lambda^3 B & \xrightarrow{d} & \Lambda^2 B & \xrightarrow{d} & \Lambda B & \xrightarrow{d} & B^e & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \uparrow \rho_3 & & \uparrow \rho_2 & & \uparrow \rho_1 & & & & \\ & & \cdots & \xrightarrow{d} & \Lambda^2 Bt & \xrightarrow{d} & \Lambda Bt & \xrightarrow{d} & B^e t & & & & \\ & & & & & & \uparrow \rho_1 & & & & & & \\ & & & & \cdots & \xrightarrow{d} & B^e t^2 & & & & & & \end{array}$$

A continuación analizamos la acción del functor $\text{Hom}_{B^e}(-, B)$ cuando se aplica a esta resolución.

Recordemos que si $J = (j_1, \dots, j_p)$, entonces $J_l = (j_1, \dots, \widehat{j_l}, \dots, j_p)$. Con esta notación, el morfismo d está dado por

$$d(e_J t^i) = \sum_{i=1}^k (-1)^{k+1} (x_k e_{J_k} t^i - e_{J_k} t^i x_k),$$

mientras que los morfismos ρ están dados por

$$\rho(e_J t^n) = \sum_{i=1}^n \Delta^i(f) e_i \wedge e_J t^{n-1}$$

Si ahora notamos por δ_J a la función $\delta_J : \Lambda^p B \rightarrow B$ definida por

$$\delta_J^k(e_I t^k) = \begin{cases} 1 & \text{si } I = J; \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

el conjunto $\mathcal{B}_p = \{\delta_J : J \in J(p)\}$ es una base de $\text{Hom}_{B^e}(\Lambda^p B, B)$ como B bimódulo. Analicemos los morfismos $d^* = \text{Hom}_{B^e}(f, B)$ y $\rho^* = \text{Hom}_{B^e}(\rho, B)$ en términos de su acción sobre estas bases.

En primer lugar,

$$\begin{aligned} d^*(\delta_J^i)(e_I t^i) &= \delta_J^i(d(e_I t^i)) = \delta_J \left(\sum_{i=1}^k (-1)^{k+1} (x_k e_{I_k} t^i - e_{I_k} t^i x_k) \right) \\ &= \begin{cases} x_k \cdot 1 - 1 \cdot x_k = 0 & \text{si } J = I_k; \\ 0 & \text{si no.} \end{cases} \end{aligned}$$

En cualquier caso, $d^* = 0$. Dado que el morfismo δ^1 figura muchas veces en el resto de este trabajo, obviaremos el superíndice y lo notaremos por δ .

En el caso de ρ^* ,

$$\begin{aligned} \rho^*(\delta_J)(e_I t^i) &= \delta_J(\rho(e_I t^i)) = \delta_J \left(\sum_{i=1}^n \Delta^i(f) e_i \wedge e_I t^{n-1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \Delta^{j_k}(f) \cdot 1 = \sum_k (-1)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_{j_k}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el cálculo de la cohomología de estas álgebras se reduce a calcular la homología total del complejo

$$\begin{array}{ccc} \cdots & \text{Hom}_{B^e}(\Lambda^2 B, B) \xleftarrow{0} \text{Hom}_{B^e}(\Lambda B, B) \xleftarrow{0} \text{Hom}_{B^e}(B^e, B) & \\ & \downarrow \rho_2^* & \downarrow \rho_1^* \\ \cdots & \text{Hom}_{B^e}(\Lambda B t, B) \xleftarrow{0} \text{Hom}_{B^e}(B^e t, B) & \\ & \downarrow \rho_1^* & \\ \cdots & \text{Hom}_{B^e}(B^e t^2, B) & \end{array}$$

De esto deducimos que $HH^0(B) \cong \text{Hom}_{B^e}(B^e, B) \cong B$, lo cual es lógico en vista de que B es conmutativa y de la interpretación que dimos del primer grupo de cohomología en el Capítulo 1.

Finalmente, analicemos la acción del morfismo de comparación ϕ , que nos permite interpretar los elementos de la homología de este complejo como clases de homología del complejo de Hochschild.

El morfismo $\phi_1 : P(B)t_1 \rightarrow \text{Hom}_{B^e}(B^{\otimes 3}, B) \cong \text{Hom}_k(B, B)$ está dado por

$$\phi_1(X^\alpha) = \sum_{i=1}^n \Delta^i(X^\alpha) e_i.$$

Entonces,

$$\phi_1^*(\delta_j)(X^\alpha) = \delta_j \left(\sum_{i=1}^n \Delta^i(X^\alpha) e_i \right) = \Delta^j(X^\alpha) \cdot 1 = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x_j}.$$

En el caso de ϕ_2^* , tenemos

$$\begin{aligned} \phi_2(1|X^\alpha|X^\beta|1) &= q(X^{\alpha+\beta}) \otimes 1 \cdot t - \sum_{i < j} \Delta^i(X^\beta) \Delta^j(X^\alpha) e_i \wedge e_j \\ &\quad + \sum_{i < j} \Delta^i(f) \Delta^j(q(X^{\alpha+\beta})) e_i \wedge e_j. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \phi_2^*(\delta_{(k,l)})(1|X^\alpha|X^\beta|1) &= \delta_{(k,l)} \left(q(X^{\alpha+\beta}) \otimes 1t - \sum_{i < j} \Delta^i(X^\beta) \Delta^j(X^\alpha) e_i \wedge e_j \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i < j} \Delta^i(f) \Delta^j(q(X^{\alpha+\beta})) e_i \wedge e_j \right) \\ &= \Delta^k(X^\alpha) \Delta^l(X^\beta) \cdot 1 + \Delta^k(f) \Delta^l(q(X^{\alpha+\beta})) \cdot 1 \\ &= \frac{\partial X^\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial X^\beta}{\partial x_l} + \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial q(X^{\alpha+\beta})}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\phi_2^*(\delta)(1|X^\alpha|X^\beta|1) = q(X^{\alpha+\beta}).$$

En la siguiente Sección calcularemos la cohomología de varios arreglos de hiperplanos. Aprovecharemos fuertemente el hecho de que un cambio de coordenadas afín induce un isomorfismo en el álgebra de funciones regulares, y por lo tanto en la cohomología de dos álgebras. Esto nos permite calcular los grupos de cohomología de una *clase afín* de arreglos.

En los casos de dos o tres variables, notamos $x = x_1$, $e_x = e_1$ y $\delta_x = \delta_1$, y análogamente para y y z . Abreviamos además $[-, -] := \text{Hom}_{B^e}(-, -)$. La mayoría de los casos estudiados son arreglos en el plano por lo que analizamos este caso particular en detalle.

En el caso de un arreglo plano, el complejo a estudiar es

$$\begin{array}{ccccc}
& & B^e \delta_{x \wedge y} & \xleftarrow{0} & B^e \delta_x \oplus B^e \delta_y & \xleftarrow{0} & B^e \delta \\
& & \left(\begin{array}{c} f_y \\ -f_x \end{array} \right) \downarrow & & (f_x \ f_y) \downarrow & & \\
B \delta_{x \wedge y} & \xleftarrow{0} & B^e \delta_x \oplus B^e \delta_y & \xleftarrow{0} & B^e \delta & & \\
& & (f_x, f_y) \downarrow & & & & \\
\vdots & & B^e \delta & & & &
\end{array}$$

donde los morfismos ρ están representados en el diagrama por sus matrices en las bases correspondientes.

Observamos que

$$HH^1(B) = \ker (f_x \ f_y) : B^e \delta_x \oplus B^e \delta_y \rightarrow B^e \delta$$

es decir, el conjunto $\{\alpha \delta_x + \beta \delta_y : \alpha \partial_x f + \beta \partial_y f = 0\}$. Recordemos que al ser B un álgebra conmutativa, el primer grupo de cohomología es exactamente el grupo de las derivaciones de B en B . Sabemos que las derivaciones de $A = k[x, y]$ son simplemente combinaciones A -lineales de las derivaciones ∂_x y ∂_y . La condición de que $\alpha \partial_x f + \beta \partial_y f = 0$ en B nos dice que si tomamos representantes de α y β en A , entonces $\alpha \partial_x f + \beta \partial_y f \in (f)$. Es evidente que para que una derivación de A pase al cociente B , la derivada del polinomio f debe anularse en el cociente. El cálculo que acabamos de hacer nos dice que esta condición no solo es necesaria, sino también suficiente. Por supuesto, este resultado no depende del número de variables.

Analícemos ahora el segundo grupo de cohomología. Este tiene una graduación natural, que proviene del complejo a partir del cual lo calculamos.

$$HH^2(B) = \ker \left(\begin{array}{c} f_y \\ -f_x \end{array} \right) : B^e \delta_{x \wedge y} \rightarrow B^e \delta_x \oplus B^e \delta_y \oplus \text{coker} \left((f_x \ f_y) : B^e \delta_x \oplus B^e \delta_y \rightarrow B^e \delta \right).$$

En primer lugar,

$$\ker \left(\begin{array}{c} f_y \\ -f_x \end{array} \right) = \{\alpha \delta_{x \wedge y} : \alpha f_y = 0 = -\alpha f_x\}.$$

Una vez más, esto quiere decir que si tomamos un representante de α en A , $\alpha f_y \in (f)$ y $\alpha f_x \in (f)$. Se define el *conductor* de un ideal I en un ideal J como el conjunto

$$(I : J) = \{\alpha \in A : \alpha I \subset J\}.$$

Con esta notación, se tiene que

$$\ker \left(\begin{array}{c} f_y \\ -f_x \end{array} \right) = ((f_x : f) \cap (f_y : f)) / (f).$$

Los primeros cálculos explícitos mostraron que esta componente era nula en todos los casos. En la Sección 3.3 damos una demostración de que esto ocurre en general en el caso de dos dimensiones.

La otra componente de HH^2 es

$$\frac{B^e \delta}{\text{Im } \rho_1^*} = \left(\frac{B^e}{(f_x, f_y)} \right) \delta \cong (k[x, y]/(f, f_x, f_y)) \delta.$$

Recordemos que por el morfismo de comparación, δ corresponde al morfismo B^e -bilineal $Q(p, q)$, que calcula el cociente de pq por \mathcal{Q} . Este morfismo es simétrico, de lo que deducimos que toda deformación de un álgebra de arreglos de rectas tiene un generador diferencial conmutativo.

¿Es integrable este generador diferencial? Para averiguar esto debemos calcular las obstrucciones del cociclo Q . Recordemos que

$$\mathcal{O}_1(Q)(a, b, c) = Q(Q(a, b), c) - Q(a, Q(b, c)).$$

Notemos por $r(g)$ el resto de la división de g por \mathcal{Q} . Como $ab = Q(a, b)\mathcal{Q} + r(ab)$ y $bc = Q(b, c)\mathcal{Q} + r(bc)$, tenemos que $Q(a, b)c\mathcal{Q} + r(ab)c = aQ(b, c)\mathcal{Q} + ar(bc)$. De esto se deduce que

$$Q(Q(a, b)c - aQ(b, c)) = Q\left(\frac{r(ab)c - ar(bc)}{\mathcal{Q}}\right).$$

Ahora, si $a, b, c \in B^e$, podemos elegir representantes en A de forma que $le(a) < le(\mathcal{Q})$, y lo mismo con b y c . Esto garantiza que $le(r(ab)c) < 2le(\mathcal{Q})$. Luego, $le(r(ab)c - ar(bc)) < le(\mathcal{Q})$. Esto implica que $le\left(\frac{r(ab)c - ar(bc)}{\mathcal{Q}}\right) < le\mathcal{Q}$, y por lo tanto el cociente de este polinomio por \mathcal{Q} es 0 (notar que en esta cuenta no interviene el número de variables, por lo que la obstrucción primaria de este morfismo es nula *siempre*).

Esto no garantiza, por supuesto, que el morfismo sea integrable. En la siguiente Sección analizamos algunos casos particulares y resolvemos la cuestión de la integrabilidad de δ . En la Sección 3.3 se demuestra que todo morfismo de la segunda componente del segundo grupo de homología es integrable a una deformación.

3.2 Ejemplos

En esta Sección calculamos explícitamente la cohomología de ciertos arreglos de hiperplanos. Para realizar los cálculos de esta Sección empleamos el programa *Macaulay2* [7].

Comenzamos estudiando los arreglos de dos y tres rectas. Notamos que dadas dos rectas que se cortan, existe siempre un isomorfismo lineal afín que transforma dicha configuración en el arreglo booleano, y dadas dos rectas que no se cortan, existe un isomorfismo afín que las transforma en las rectas $x = 0$ y $x = 1$, con lo cual este cálculo agota las clases afines de arreglos de cardinal dos.

Para los arreglos de tres rectas existe tres posibilidades: las tres rectas son paralelas, las rectas son concurrentes, o se encuentran en posición general. El primer caso es completamente análogo al de dos rectas paralelas. Analizamos los otros dos en detalle más adelante.

3.2.1 $\mathcal{Q} = x(x - 1)$

Este es el caso de dos rectas paralelas. Si calculamos el cociente $k[x, y]/(x(x - 1)) \cong k[x, y]/(x) \times k[x, y]/(x - 1) \cong k[y] \times k[y]$. Por lo visto en la Sección 2 la homología de este producto es la suma directa de las homologías de cada anillo. Como $HH^1(B) \cong \text{Der}(B, B)$, se tiene que $HH^1(B) = \text{Der}(k[y]) \oplus \text{Der}(k[y]) = k[y]\partial_y \oplus k[y]\partial_y$.

Finalmente, como el álgebra $k[y]$ tiene dimensión global 1, sus grupos de cohomología en grados superiores se anulan, por lo que $HH^2(B) = HH^3(B) = 0$.

El caso de m rectas paralelas es completamente análogo.

3.2.2 $\mathcal{Q} = xy$

Calculamos ahora la cohomología del álgebra $B = k[x, y]/(xy)$. Este es el arreglo booleano de hiperplanos en dimensión dos. Como siempre, $HH^0(B) = B$. Tenemos que

$$HH^1(B) = \ker \rho_1 : [\Lambda B, B] \rightarrow [B^e t, B]$$

En este caso, $\rho^*(\delta_x) = \mathcal{Q}_x \delta_t = y \delta_t$, y $\rho^*(\delta_y) = x \delta_t$. Se tiene entonces que $HH^1(B) = \ker \rho_1^* = xB\delta_x \oplus yB\delta_y$. Empleando el morfismo de comparación ϕ_1 , vemos que el módulo de derivaciones de B es $xB\delta_x \oplus yB\delta_y$.

Ahora

$$HH^2(B) = \ker \rho_2^* \oplus \text{coker } \rho_1^*$$

Como observamos en la Sección anterior, $\ker \rho_2^* = 0$; además, $\text{coker } \rho_1^* = B\delta/(x\delta, y\delta) \cong k\delta$. Por lo tanto el segundo grupo de cohomología de B tiene dimensión 1. Esto nos dice que existe a lo sumo una única deformación no trivial del álgebra B , que será la asociada al morfismo δ .

Completemos el cálculo de los grupos de homología. En este caso,

$$HH^3(B) = \ker \rho_1 / \text{Im } \rho_2 = (xB\delta_x \oplus yB\delta_y) / (-x\delta_x + y\delta_y) \cong xB\delta_x.$$

En la Sección anterior encontramos que la primera obstrucción a la integrabilidad de δ es 0. El morfismo δ se corresponde en el complejo de Hochschild con el morfismo B -bilineal Q . ¿Existen deformaciones del álgebra B que tengan a éste como generador diferencial?

Podemos responder a esta pregunta de manera empírica. Dar una deformación B_t de B es dar una estructura multiplicativa en el espacio vectorial $B[[t]]$; supongamos dada esta estructura, y llamemos $*$ a dicha multiplicación. Si esta deformación tiene por generador infinitesimal a Q , tendremos en particular que $x * y = xy + Q(x, y)t + o(t^2) = t + o(t^2)$.

Esto inspira la siguiente construcción: tomemos el álgebra $A[[t]]/(xy - t)$. Como espacio vectorial es isomorfa a $B[[t]]$, ya que en ambos casos tenemos una base dada por $B = \{1, x^i t^j, y^i t^j : i, j \in \mathbb{N}\}$. Además posee una multiplicación B -bilineal, la cual queda definida por los valores que toma en pares de elementos de la base. Esto es

$$\begin{aligned} x^i t^j * x^k t^l &= x^{i+k} t^{j+l} \\ y^i t^j * y^k t^l &= y^{i+k} t^{j+l} \\ x^i t^j * y^k t^l &= \begin{cases} y^{k-i} t^{i+j+l} & \text{si } i < k; \\ x^{i-k} t^{k+j+l} & \text{si } k \leq i. \end{cases} \end{aligned}$$

Sabemos que podemos recuperar el generador diferencial de esta multiplicación restringiendo la multiplicación a los elementos de $B \subset B[[t]]$ y estudiando la componente de grado 1. Si escribimos $a * b = ab + \varphi_1(a, b)t + o(t^2)$, podemos ver que

$$\begin{aligned} \varphi_1(x^i, x^j) &= \varphi_1(y^i, y^j) = 0 && \text{si } i \geq 0, j \geq 0; \\ \varphi_1(x^i, y^j) &= \begin{cases} y^{j-1} & \text{si } i = 1, j \geq 1; \\ x^{i-1} & \text{si } j = 1, i \geq 1; \\ 0 & \text{si } i > 1, j > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Esto define un 2-cociclo de B , y por extensión un elemento de $HH^2(B)$. Para ver que esta deformación es la correspondiente al morfismo δ , bastará ver que las clases de homología de ambos coinciden. Para ello empleamos el morfismo de comparación ψ_2 . Como ya vimos que la componente de $\delta_{x \wedge y}$ es nula, bastará estudiar la acción de $\psi_2^*(\varphi_1)$ sobre t .

$$\psi_2^*(\varphi_1)(t) = \varphi_1(\psi_2(t)) = \varphi_1(1|x)y + \varphi_1(x|y) = 1.$$

Es decir que $\psi_2^*(\varphi_1) = \delta$. Tenemos entonces que la familia uniparamétrica de deformaciones dada por $B_t = A[[t]]/(xy - t)$ es la única deformación no trivial del álgebra B .

Concluimos con la siguiente observación. Cuando definimos las deformaciones de un álgebra, dijimos explícitamente que nuestra primera intención era buscar valores de t en k para los cuales estas deformaciones se realizaran, es decir, para los cuales aplicando el morfismo ev_t a la deformación B_t obtuviéramos una nueva multiplicación en el álgebra B . En este caso particular podemos tomar $t = 1$, lo cual reduce nuestra deformación al álgebra $k[x, y]/(xy - 1)$. En el caso real, esto se corresponde con una hipérbola de dos ramas, como se ve en la figura en la página siguiente. Por supuesto, cualquier $t \neq 0$ nos da un resultado similar, con lo que esta “curva de deformaciones” es en realidad “discreta”

Ya consideramos los dos posibles casos de arreglos de dos rectas. En el caso de tres rectas, hay solamente tres clases afines de arreglos. El caso de tres rectas paralelas es análogo al de dos rectas paralelas y no será desarrollado aquí. Los otros dos casos son el arreglo central de tres rectas que pasan por el origen y un arreglo de tres rectas en posición general. Comenzamos analizando el primero de estos casos.

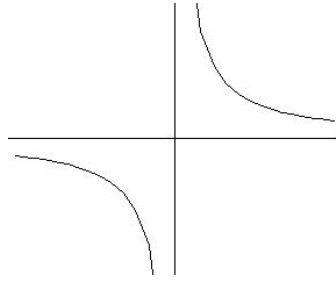


Figura 3.1: La curva $xy - 1 = 0$

3.2.3 $\mathcal{Q} = xy(x - y)$

El arreglo central de tres rectas se puede observar en la figura en esta página.

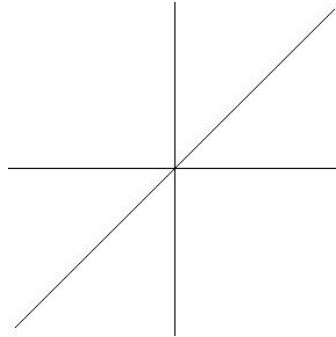


Figura 3.2: El arreglo $xy(x - y) = 0$

Las derivadas del polinomio son

$$\mathcal{Q}_x = -y^2 + 2xy \quad \mathcal{Q}_y = x^2 - 2xy,$$

de donde obtenemos los morfismos

$$\rho_1^* = (-y^2 + 2xy \quad x^2 - 2xy) \quad \rho_2^* = \begin{pmatrix} x^2 - 2xy \\ y^2 - 2xy \end{pmatrix}$$

Obtenemos en este caso que

$$HH^1(B) = \ker \rho_1^* = \langle (x, y), (0, xy + y^2) \rangle_B.$$

Analicemos con un poco más de detalle el módulo de derivaciones de B . Este no es un B -módulo libre, ya que el segundo generador es un elemento de torsión; vemos que $x(xy + y^2) = x^2y + y^2x = 0$. *Macaulay2* nos permite obtener la siguiente resolución libre del módulo:

$$\dots \longrightarrow (B^e)^2 \xrightarrow{d_1} (B^e)^2 \xrightarrow{d_2} (B^e)^2 \xrightarrow{d_1} (B^e)^2 \longrightarrow 0,$$

donde

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 & -y^2+xy \\ x & -y \end{pmatrix} \quad d_2 = \begin{pmatrix} y & -y^2+xy \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos entonces que la resolución de este módulo es periódica de período 2.

Pasando al segundo módulo de cohomología, se tiene que la primera componente es nula, como calculamos antes, mientras que la otra es el conúcleo de ρ_1^* .

$$HH^2(B) = \ker \rho_2^* \oplus \operatorname{coker} \rho_1^* = 0 \oplus \langle \delta, x\delta, y\delta, y^2\delta \rangle_k.$$

Como observamos en la Sección anterior, la obstrucción a la integrabilidad de δ se anula siempre. Estudiemos la integrabilidad de los otros morfismos.

En primer lugar, $x\delta$ se corresponde con el 2-cociclo $xQ \in \operatorname{Hom}_{B^e}(B^{\otimes 4}, B)$, donde una vez más $Q(a, b)$ es el cociente de ab por f . La obstrucción de este cociclo es

$$\mathcal{O}(xQ)(a, b, c) = xQ(xQ(a, b), c) - xQ(a, xQ(b, c)).$$

La teoría desarrollada en el Capítulo 1 nos dice que esto es un cociclo, y que su clase de homología se debe anular para que xQ tenga alguna chance de ser integrable. Por supuesto, es complicado estudiar la clase de cohomología de este elemento el complejo de Hochschild, por lo que procedemos como en la Sección anterior, y lo identificamos a través de ψ_3^* con un elemento del complejo $\operatorname{Hom}_{B^e}(P(B)t, B)$.

Por lo ya visto, la clase de cohomología del elemento $\psi_3^*(\mathcal{O}(xQ))$ queda determinada por el valor que toma en $e_x t$ y $e_y t$. Veamos primero cómo actúa ψ_3 sobre los elementos $e_i t$.

$$\begin{aligned} \psi_3(e_x t) &= \frac{1|x|x|x|y + 1|x|1|x|xy - 1|x|1|x|y^2}{+ \frac{1|x^2|x|y|1 - 1|x|xy|y|1 - 1|x|xy|y|1}{- \frac{1|x^2|x|y|1 + 1|xy|x|y|1 + 1|x|x|y|y}{1|x^2|y|x|1 - 1|xy|y|x|1 - +1|x|y|x|y}}. \\ \psi_3(e_y t) &= \frac{1|y|x|x|y + 1|y|1|x|xy - 1|y|1|x|y^2}{- \frac{1|x|y|x|y - 1|1|y|x|xy + 1|1|y|x|y^2}{\frac{1|x|x|y|y + 1|1|x|y|xy - 1|1|x|y|y^2}{1|y|x^2|y|1 - 1|y|xy|y|1 - 1|y|x|y|y}}. \end{aligned}$$

Los términos de la forma $\overline{s|a|b|c|t}$ suman cero y los de la forma $\underline{s|a|b|c|t}$ cumplen $Q(a, b) = 0 = Q(b, c)$.

Podemos entonces aplicar la obstrucción a los términos restantes, y es sencillo ver que cualquier morfismo de la forma $\mathcal{O}(pQ(-, -))$ se anulará en ellos si $p \in \{1, x, y, y^2\}$. Nos queda entonces la tarea de investigar la existencia de deformaciones en estos cuatro casos.

Inspirándonos en el caso anterior, podemos proponer deformaciones de la forma $A[[t]]/(f - pt)$, pero la multiplicación en esta álgebra es bastante complicada. Una solución más sencilla, que de todas formas sigue el modelo anterior, es $B_t = A[[t]]/(\operatorname{lt}(f) - pt)$.

Como consecuencia de la observación hecha en la introducción y repetida más arriba, tanto $B[[t]]$ como esta nueva B_t tienen la misma base como k -espacio vectorial: los elementos de la forma $\{X^{\alpha t^i} : \alpha < le(f)\}$. Al final de esta Sección demostramos que *todo* morfismo de esta forma es integrable. A partir de aquí nos limitamos a calcular los grupos de cohomología y presentar las deformaciones del álgebra. En este caso, una vez más evaluando $t = 1$, obtenemos distintas realizaciones geométricas de estas deformaciones.

El tercer módulo de cohomología nos interesaba porque las obstrucciones a la integrabilidad de diferenciales eran elementos de este grupo. Al demostrar que son todos integrables, al menos en este caso, simplemente presentamos el módulo junto con una base de este como k -espacio vectorial sin analizar su estructura.

$$HH^3(B) = \frac{\ker \rho_1^*}{\text{Im } \rho_2^*} = \langle \delta_x^1, y\delta_x^1, \delta_y^1, y\delta_y^1 \rangle_k$$

La figura en esta página muestra representaciones en el plano real de algunas deformaciones correspondientes a este álgebra.

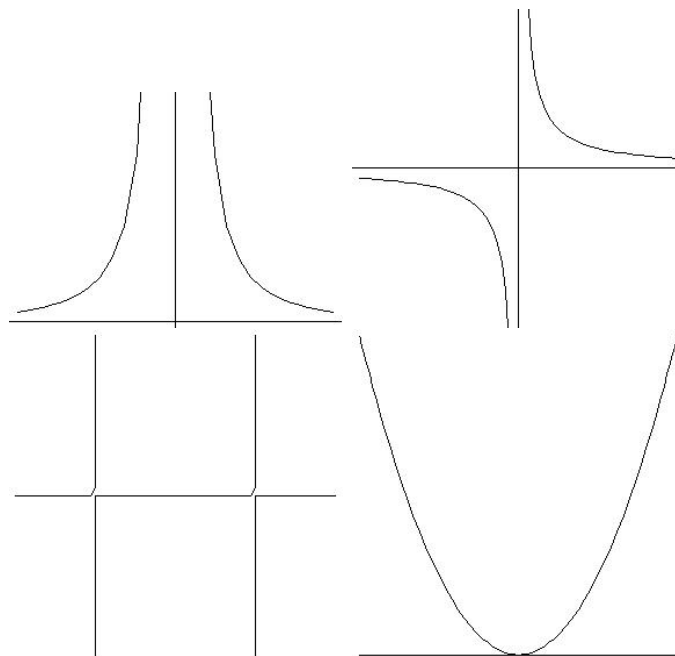


Figura 3.3: Algunas deformaciones del álgebra B

3.2.4 $\mathcal{Q} = xy(x + y - 1)$

Este es un representante de la otra clase afín de arreglos de tres rectas. En el Apéndice utilizamos este ejemplo para ilustrar el trabajo hecho con el programa *Macaulay2*.

Su primer módulo de cohomología está dado por.

$$HH^1(B) = \ker \rho_1^* = \langle (xy, y^2 - y); (x^2 - x, xy) \rangle$$

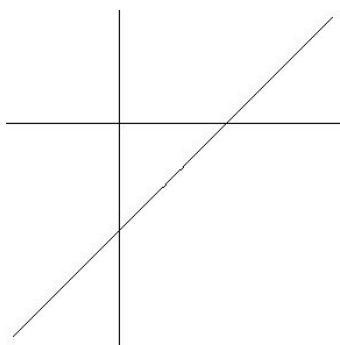


Figura 3.4: El arreglo $xy(x + y + 1) = 0$

Estos generadores *no* son libres; de hecho las relaciones entre los generadores de este grupo son bastante complicadas. En el Apéndice mostramos cómo obtener una resolución libre de este módulo, donde se observará más claramente esta complejidad.

Se tiene también que

$$HH^2(B) = \ker \rho_2^* \oplus \text{coker } \rho_1^* = 0 \oplus \langle 1, x, y \rangle_k.$$

Este arreglo es entonces bastante más rígido que el anterior, teniendo un segundo grupo de cohomología de dimensión dos. En la figura se ven dos deformaciones de este álgebra.

Los cálculos muestran también que el tercer grupo de cohomología es

$$HH^3(B) = \frac{\ker \rho_1^*}{\text{Im } \rho_2^*} = \frac{(xy, -y^2 + 2y); (x^2 - x, xy)}{(x^2 + 2xy - 2x, y^2 + 2xy - y)} = \langle \delta_x; y\delta_x; \delta_y \rangle.$$

A continuación, y con el único propósito de destruir toda esperanza de que el caso general sea igual de amable, analizamos un arreglo de planos en tres dimensiones.

3.2.5 $\mathcal{Q} = xyz$

Consideremos ahora el arreglo definido por el polinomio xyz , el arreglo central booleano en el espacio afín de tres dimensiones.

En este caso la resolución será periódica de período 3, y podemos calcular su homología a partir del siguiente complejo doble

$$\begin{array}{ccccc}
 [\Lambda^3 B, B] & \xleftarrow{0} & [\Lambda^2 B, B] & \xleftarrow{0} & [\Lambda B, B] & \xleftarrow{0} & [B^e, B] \\
 \rho_3^* \downarrow & & \rho_2^* \downarrow & & \rho_1^* \downarrow & & \\
 [\Lambda^2 Bt, B] & \xleftarrow{0} & [\Lambda Bt, B] & \xleftarrow{0} & [B^e t, B] & & \\
 & & \rho_1^* \downarrow & & & & \\
 \vdots & & [B^e t^2, B] & & & &
 \end{array}$$

donde los morfismos ρ_i^* están dados por

$$\rho_1^* = (yz \ xz \ xy) \quad \rho_2^* = \begin{pmatrix} xz & xy & 0 \\ -yz & 0 & xy \\ 0 & -yz & -xz \end{pmatrix} \quad \rho_3^* = \begin{pmatrix} xy \\ -xz \\ yz \end{pmatrix}$$

en la base de las funciones δ_j^k . Dado que $\rho_2 \circ \rho_3 = 0$ y ρ_3 no es nula, ρ_2 no es inyectiva como en el caso anterior, y la primera componente del segundo grupo de cohomología no es trivial.

De todas formas tenemos la descomposición usual de la homología, de forma que

$$HH^1(B) = \ker \rho_1^* = xB\delta_x + yB\delta_y + zB\delta_z.$$

Para el segundo módulo de cohomología, vemos que la primera componente es no nula:

$$HH^2(B) = \ker \rho_2^* \oplus \operatorname{coker} \rho_1^* = (xyB\delta_{x\wedge y} + xzB\delta_{x\wedge z} + yzB\delta_{y\wedge z}) \oplus \frac{B}{(xy, yz, xz)}\delta,$$

mientras que en el tercero,

$$HH^3(B) = \ker \rho_3^* \oplus \frac{\ker \rho_1^*}{\operatorname{Im} \rho_2^*}.$$

El núcleo del morfismo ρ_3^* es 0 por una cuenta muy similar a la hecha en el caso anterior para mostrar que $\ker \rho_2^* = 0$ en el caso de dos variables, por lo que muy probablemente este sea el caso para un arreglo general de plano en tres dimensiones. El módulo $\frac{\ker \rho_1^*}{\operatorname{Im} \rho_2^*}$ está generado sobre k por elementos de la forma

$$\{x^n \delta_x, y^m \delta_x, z^k \delta_x, y^m \delta_y, z^k \delta_y, x^n \delta_z\}.$$

3.3 Observaciones

Los ejemplos calculados inspiraron los siguientes teoremas, cuyos resultados fueron anunciados en la Sección 3.1.1

Teorema 3.3.1. *Sea \mathcal{A} un arreglo de rectas en k^2 . Entonces la primera componente del segundo grupo de cohomología es nula.*

Demostración. Sea $\mathcal{Q} = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H$ un polinomio de definición del arreglo. Como calculamos explícitamente el caso de una recta, nos restringimos al caso de dos o más rectas.

Supongamos primero que no todas las rectas son paralelas. Entonces podemos suponer que tras un cambio de coordenadas afín, el polinomio \mathcal{Q} puede escribirse de la forma $\mathcal{Q} = xy\alpha_1 \dots \alpha_k$, con $\alpha_i = x + \beta_i y + \gamma_i$, con β_i o γ_i no nulos.

De esto se obtiene

$$\mathcal{Q}_x = y(\alpha_1 \dots \alpha_k + x\alpha_2 \dots \alpha_k + \dots + x\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}).$$

Recordemos que $k[x, y]$ es un dominio de factorización única, con lo cual un elemento es primo si y sólo si es irreducible. En particular cualquier forma lineal es irreducible, por lo que conocemos la escritura de \mathcal{Q} como producto de irreducibles. Si existe un polinomio p tal que $p\mathcal{Q}_x \in (\mathcal{Q})$, en particular $x \mid p\mathcal{Q}_x$. Como claramente $x \nmid \mathcal{Q}_x$, resulta $x \mid p$. Un razonamiento similar vale para α_i . Deducimos así que p es divisible por $x\alpha_1 \dots \alpha_k$. Si además $p\mathcal{Q}_y \in (\mathcal{Q})$, el mismo argumento demuestra que p también debe ser divisible por y , con lo cual se obtiene que $\mathcal{Q} = xy\alpha_1 \dots \alpha_k \mid p$, y $((\mathcal{Q}_x : \mathcal{Q}) \cap (\mathcal{Q}_y : \mathcal{Q})) / (\mathcal{Q}) = 0$.

Si todas las rectas son paralelas, tras un cambio de coordenadas afín podemos suponer que $\mathcal{Q} = \prod_i (x - \beta_i)$, con $\beta_1 = 0$ y todos los β_j distintos entre sí. Esto nos dice que $\mathcal{Q}_y = 0$, y una vez más resulta $(\mathcal{Q}_x : \mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$. Concluimos entonces que para un arreglo de rectas en el plano, esta componente de HH^2 es nula. \square

Teorema 3.3.2. *Todo morfismo de la forma $p\delta \in HH^2(B)$ es integrable, y un modelo de la deformación es $B_t = A[[t]]/(lt(f) - pt)$.*

Demostración. Como ya mencionamos, $\mathcal{B} = \{X^\alpha : \alpha < le(f)\}$ es una base de B . Analicemos la acción de la multiplicación de B_t sobre esta base. Sabemos que $X^\alpha X^\beta = X^\gamma X^{n\epsilon(f)}$ para cierto $n \in N_0$ y γ multiíndice. En ese caso,

$$X^\alpha X^\beta = X^\gamma p^n t^n.$$

Esto implica que el generador diferencial de la multiplicación cumple que

$$\varphi_1(X^\alpha, X^\beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha + \beta < le(f) \\ X^{\alpha+\beta-le(f)} & \text{si } le(f) \leq \alpha + \beta < 2le(f) \\ 0 & \text{si } 2le(f) \leq \alpha + \beta \end{cases}$$

Debemos estudiar entonces su clase de cohomología en $HH^2(B)$. Para ello utilizamos el morfismo de comparación ψ_2 . Recordemos que la función k -bilineal φ_1 se corresponde con un elemento de $\text{Hom}_{B^e}(B^{\otimes 4}, B)$. El elemento $\psi_2^*(\varphi_1)$ está caracterizado por

$$\psi_2^*(\varphi_1)(t) = \varphi_1(\psi_2(t)) = \varphi_1 \left(1 \otimes \left(\sum_{i=1}^n \Delta^i(f) 1|x_i|1 \right) \right).$$

Explícitamente

$$\Delta^i(f)(1|x_i|1) = \int_{\alpha_i} x_1^{\alpha_1} \dots x_i^s |x_i| x_i^t \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Entonces

$$\varphi_1(\Delta^i(f)(1|x_i|1)) = \int_{\alpha_i} \varphi_1(x_1^{\alpha_1} \dots x_i^s, x_i) x_i^t \dots x_n^{\alpha_n}$$

Este elemento es claramente nulo si $i < n$. Ahora, si $i = n$, el único caso en el que la suma de los exponentes de los dos términos en los que se evalúa φ_1 alcanza $le(f)$ es cuando $s = \alpha_n - 1, t = 0$, y esto ocurre una sola vez. Se deduce que

$$\psi_2^*(\varphi_1)(t) = p,$$

es decir que $\psi_2^*(\varphi_1) = p\delta$. Esto completa la demostración. \square

Corolario 3.3.3. *Todo diferencial de un arreglo de rectas en el plano es integrable. Todas estas deformaciones son equivalentes a una deformación conmutativa*

Demostración. Se deduce de los dos teoremas anteriores. El resultado de conmutatividad se deduce de la demostración del segundo teorema. \square

1 Cálculo con *Macaulay2* de la cohomología de un álgebra

En esta Sección presentamos el cálculo hecho con *Macaulay2* para encontrar los grupos de cohomología del álgebra $\mathbb{Q}[x, y]/(xy(x+y-1))$. La homología está calculada sobre \mathbb{Q} . Dado que todo lo hecho en este Capítulo fue considerando k un cuerpo de característica cero, con $\mathbb{Q} \subset k$, podemos suponer que estas cuentas fueron hechas en el cuerpo k , y que simplemente en ningún momento se emplearon elementos de k además de los de \mathbb{Q} .

```

/*Definimos el anillo de base sobre el cual trabajamos.*/
/* Es muy importante escribir x*y y no xy */
i1 : R = QQ[x,y]/(x*y*(x+y-1))

o1 = R

o1 : QuotientRing

/*Definimos nuestros dos morfismos como matrices, usando las bases prefijadas*/
i2 : rho1 = matrix({{2*x*y+y^2-y,2*x*y+x^2-x}})

o2 = | 2xy+y^2-y x^2+2xy-x |

          1      2
o2 : Matrix R <--- R

i3 : rho2=matrix({{2*x*y+x^2-x},{-2*x*y-y^2+y}})

o3 = | x^2+2xy-x |
      | -2xy-y^2+y |

          2      1
o3 : Matrix R <--- R

/*Comprobamos que la composición de ambos es nula*/
i4 : rho1*rho2

o4 = 0

          1      1
o4 : Matrix R <--- R

```

```

/*Analizamos el núcleo de rho1*/
i5 : krho1 = ker rho1

o5 = image {2} | -2xy      -2x2-xy+2x |
           {2} | -2y2+2y  -2xy-y2+y  |

o5 : R-module, submodule of R2

/*La dimensión de Krull del módulo es 1.*/
i6 : dim krho1

o6 = 1

/*Esta es una familia de generadores minimales*/
i7 : mingens krho1

o7 = {2} | xy      0      x2-x |
      {2} | y2-y  xy+y2-y  xy  |

o7 : Matrix R 2  $\longleftarrow$  R3

/*Eso no aporta demasiado... */
/*Buscamos una resolución del núcleo y estudiamos sus diferenciales*/
i8 : K = res krho1

o8 = R 2  $\longleftarrow$  R3  $\longleftarrow$  R3  $\longleftarrow$  R3
      0      1      2      3

o8 : ChainComplex

i9 : K.dd

o9 = 0 : R 2  $\longleftarrow$   $\xrightarrow{\begin{matrix} \{4\} & | & xy+1/2y^2-1/2y & -1/4y^2+1/4y & x^2-1/4y^2-x+1/4y & | \\ \{4\} & | & -y^2+y & xy+1/2y^2-1/2y & -xy+1/2y^2-1/2y & | \end{matrix}}$  R3 : 1

1 : R 3  $\longleftarrow$   $\xrightarrow{\begin{matrix} \{6\} & | & x+1/2y-1/2 & 1/4y-1/4 & y & | \\ \{6\} & | & y-1 & x+1/2y-1/2 & y & | \\ \{6\} & | & 0 & 0 & y & | \end{matrix}}$  R3 : 2

2 : R 3  $\longleftarrow$   $\xrightarrow{\begin{matrix} \{7\} & | & xy+1/2y^2-1/2y & -1/4y^2+1/4y & 0 & | \\ \{7\} & | & -y^2+y & xy+1/2y^2-1/2y & 0 & | \\ \{7\} & | & 0 & 0 & x^2+xy-x & | \end{matrix}}$  R3 : 3

o9 : ChainComplexMap

/*Prolongamos la definición.*/
/*Tomamos la última matriz de la resolución anterior y resolvemos su núcleo*/
i10 : M=K.dd_3

```

$$o10 = \begin{array}{l|l} \{7\} & xy+1/2y^2-1/2y \quad -1/4y^2+1/4y \quad 0 \\ \{7\} & -y^2+y \quad xy+1/2y^2-1/2y \quad 0 \\ \{7\} & 0 \quad 0 \quad x^2+xy-x \end{array}$$

o10 : Matrix $R \xleftarrow{3} R$

i11 : $kM = \ker M$

$$o11 = \text{image} \begin{array}{l|l} \{9\} & x+1/2y-1/2 \quad 1/4y-1/4 \quad 0 \\ \{9\} & y-1 \quad x+1/2y-1/2 \quad 0 \\ \{9\} & 0 \quad 0 \quad y \end{array}$$

o11 : R -module, submodule of R

i12 : $K2 = \text{res } kM$

$$o12 = R \xleftarrow{3} R \xleftarrow{3} R \xleftarrow{3} R$$

0 1 2 3

o12 : ChainComplex

i13 : $K2.dd$

$$o13 = 0 : R \xleftarrow{3} \begin{array}{l|l} \{10\} & xy+1/2y^2-1/2y \quad -1/4y^2+1/4y \quad 0 \\ \{10\} & -y^2+y \quad xy+1/2y^2-1/2y \quad 0 \\ \{10\} & 0 \quad 0 \quad x^2+xy-x \end{array} R : 1$$

$$1 : R \xleftarrow{3} \begin{array}{l|l} \{12\} & x+1/2y-1/2 \quad 1/4y-1/4 \quad 0 \\ \{12\} & y-1 \quad x+1/2y-1/2 \quad 0 \\ \{12\} & 0 \quad 0 \quad y \end{array} R : 2$$

$$2 : R \xleftarrow{3} \begin{array}{l|l} \{13\} & xy+1/2y^2-1/2y \quad -1/4y^2+1/4y \quad 0 \\ \{13\} & -y^2+y \quad xy+1/2y^2-1/2y \quad 0 \\ \{13\} & 0 \quad 0 \quad x^2+xy-x \end{array} R : 3$$

o13 : ChainComplexMap

*/*Después de 3 pasos la resolución se estabiliza y adopta un patrón cíclico.*/*

*/*Pasemos ahora a estudiar el segundo grupo de cohomología*/*

i14 : $\ker \rho_2 = \ker \rho_2$

o14 = image 0

1

o14 : R -module, submodule of R

*/*La primera componente es nula, como demostramos en el texto.*/*

```

/* Estudiamos la segunda*/
i15 : crho1 = coker rho1
o15 = cokernel | 2xy+y2-y x2+2xy-x |
o15 : R-module, quotient of R1
i16 : dim crho1
o16 = 0
/*Su dimensión de Krull es 0*/
i17 : basis crho1
o17 = | 1 x y |
o17 : Matrix
/*Si le pedimos a Macaulay una base, nos da una sobre*/
/* el cuerpo en el que estamos trabajando*/
/*Armamos un complejo de cadena con las funciones rho1 y rho2*/
i18 : H = chainComplex{rho1, rho2}
o18 = R1 ← R2 ← R1
      0      1      2
o18 : ChainComplex
/*El tercer grupo es la homología de este complejo en grado 1*/
i19 : C = HH.1(H)
o19 = subquotient ( {2} | -2xy -2x2-xy+2x |, {2} | x2+2xy-x | )
                  {2} | -2y2+2y -2xy-y2+y | {2} | -2xy-y2+y |
o19 : R-module, subquotient of R2
/*Su dimensión es 0*/
i20 : dim C
o20 = 0
/*Buscamos una base como Q espacio vectorial*/
i21 : basis C
o21 = {4} | 1 y 0 |
      {4} | 0 0 1 |
o21 : Matrix

```


Bibliografía

- [1] Buenos Aires Cyclic Homology Group, *Cyclic homology of Algebras with one generator*, K-Theory 5 (1991), no. 1, págs. 51-69
- [2] Henri Cartan y Samuel Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, Junio de 1956.
- [3] David A. Cox, John B. Little, Donald O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, 2da edición, Springer, 1997.
- [4] Christian Fronsdal, con un apéndice escrito por Maxim Kontsevich, *Quantization on Curves*, Lett. Math. Phys. (2007) Vol. 79, págs. 109-129.
- [5] Murray Gerstenhaber, *The Cohomology Structure of an Associative Ring*, Ann. of Math. (2), Vol. 78, No. 2 (Septiembre, 1963), págs. 267-288.
- [6] Murray Gerstenhaber, *On the Deformation of Rings and Algebras*, Ann. of Math. (2), Vol. 79, No. 1 (Enero, 1964), págs. 59-103.
- [7] Daniel R. Grayson y Michael E. Stillman, *Macaulay 2, a software system for research in algebraic geometry*. Disponible en <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>.
- [8] Jorge Alberto Guccione, Juan José Guccione, Maria Julia Redondo y Orlando Eugenio Villamayor, *Hochschild and Cyclic Homology of Hypersurfaces*, Adv. Math., Vol. 95, No. 1 (Septiembre, 1992), págs 18-60.
- [9] Gerhard Hochschild, *Semisimple algebras and generalized derivations*, Amer. J. Math., Vol. 64 (1942), págs 677-694.
- [10] Gerhard Hochschild, *On the cohomology groups of an associative algebra*, Ann. Math., Vol. 46 (1945), págs 58-67.
- [11] Nathan Jacobson, *Abstract derivation and Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 42 (1937), págs. 206-224.
- [12] Christian Kassel, *Quantum Groups*, Springer-Verlag, GTM 155, 1995, .

- [13] Saunders Mac Lane, *Homology*, Springer-Verlag, 1995, reimpresión de la 1ra edición.
- [14] Peter Orlik y Hiroaki Terao, *Arrangement of Hyperplanes*, Springer-Verlag, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, vol. 300, 1992.
- [15] Charles A. Weibel, *History of Homological Algebra*, Department of Mathematics, Rutgers University.
- [16] Charles A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1994, 2da edición.