

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Tesis de Licenciatura

**Versiones combinatorias
de la dualidad de Alexander**

Jorge Tomás Rodríguez
Director: Gabriel Minian

Marzo de 2010

Índice general

1. Complejos simpliciales y la dualidad de Alexander	4
1.1. Complejos simpliciales	5
1.2. Join, link y star	9
1.3. Subdivisiones	12
1.4. Homología y Cohomología simplicial	15
1.5. Dualidad de Alexander	18
1.6. π_1 de un complejo simplicial y su relación con el dual	23
1.7. Colapsos, expansiones y nervios	24
1.8. Relación entre el dual y los colapsos	28
2. Espacios topológicos finitos y posets	30
2.1. Relación entre los espacios topológicos finitos y los posets	30
2.2. Funciones entre espacios topológicos finitos T_0 conti- nuas y homotópicas	32
2.3. Las funciones \mathcal{K} y \mathcal{X} de <i>McCord</i>	35
3. Métodos de reducción de puntos para posets	41
3.1. Beat points	41
3.2. Weak beat points y γ -points	45
4. Lattices reducidos y dualidad de Alexander versión posets	48
4.1. Lattices reducidos	48
4.2. Las aplicaciones i y s	50
4.3. Complejo simplicial asociado a un lattice reducido y su dual	52
4.4. Homología de lattices reducidos	58
4.5. Posets graduados y homogéneos	59
4.6. Métodos de reducción aplicados a duales	62
4.7. Esferas homológicas	62
4.8. Esferas homotópicas	63
4.9. Métodos de reducción aplicados a lattices reducidos	64

Introducción

El objetivo principal de esta tesis es el estudio de la dualidad de Alexander. Comenzaremos analizando la versión simplicial de la dualidad y formularemos nuevas versiones combinatorias de la misma. La versión original, topológica, de la dualidad de Alexander relaciona los grupos de homología de un subconjunto de una esfera con los grupos de cohomología del complemento. La versión simplicial es equivalente, pero está formulada en término de complejos simpliciales. Dado un complejo simplicial K , se define su dual de Alexander K^* y la dualidad, en éste caso, se expresa relacionando los grupos de homología de K con los de cohomología de K^* . La dualidad simplicial fue investigada recientemente y en forma independiente por Barr [Bar02] y Björner y Tancer [BT08]. De hecho, Barr aparentemente no se percató que su resultado de dualidad era el equivalente a la dualidad de Alexander. Björner y Tancer afirman en su trabajo que esta versión combinatoria de la dualidad es equivalente a la versión topológica original pero no lo demuestran explícitamente. En esta tesis damos una demostración explícita y original de este hecho.

La formulación de nuevas versiones combinatorias de la dualidad de Alexander se hace aquí en el contexto de los posets finitos, o equivalentemente, de los espacios topológicos finitos T_0 . Los espacios finitos T_0 y los complejos simpliciales tienen una fuerte relación, que fue estudiada originalmente por M.C.McCord [McC66]. A cada espacio finito X se le asocia un complejo simplicial $\mathcal{K}(X)$ que es débilmente equivalente a X , en particular ambos tienen los mismos grupos de homotopía y homología. Recíprocamente, a cada complejo simplicial K se le asocia un espacio topológico finito $T_0 \mathcal{X}(K)$, que se corresponde con el poset de símplices de K . También en este caso, K y $\mathcal{X}(K)$ son débilmente equivalentes. Utilizando los funtores \mathcal{X} y \mathcal{K} , y a partir de una nueva construcción, introducida por Barmak y Minian, que a cada poset finito X se le asocia un complejo simplicial $T(X)$, definimos el dual de Alexander para una vasta clase de espacios finitos y extendemos la versión simplicial de la dualidad a una nueva versión combinatoria.

En el contexto de los posets finitos, encontramos una definición alternativa para el dual y de esta manera obtenemos otra versión de la dualidad. También estudiamos aquí la relación entre duales y colapsos y algunos métodos de reducción aplicados a duales.

La tesis está organizada de la siguiente manera.

En el primer capítulo repasamos los elementos básicos de los complejos simpliciales, los grupos de homología, la construcción del nervio de un complejo y las herramientas más elementales de la teoría de homotopía simple. También analizamos la dualidad de Alexander combinatoria y topológica y damos una demostración original de la relación entre ambas. Motivados por la relación entre un complejo simplicial y su dual a nivel

homología, estudiamos si hay alguna relación a nivel del grupo fundamental.

En el segundo capítulo repasamos las nociones básicas sobre espacios topológicos finitos T_0 y su correspondencia con los posets. Además estudiamos las funciones de McCord que relacionan los complejos simpliciales con los espacios finitos.

En el tercer capítulo repasamos los métodos de reducción de un punto, introducidos recientemente por Barmak y Minian. Básicamente estos métodos analizan el comportamiento homotópico de un espacio finito al eliminar un punto del mismo que cumpla ciertas propiedades.

En el capítulo final estudiamos con más detalle a los lattices reducidos, que forman una clase particular de posets. Estudiamos con detalle las construcciones i y s que son aplicables a lattices reducidos y que fueron introducidas por Barmak [Bar09]. Introducimos aquí las dos versiones de dual en este contexto y probamos dos versiones de la dualidad de Alexander, extendiendo la versión simplicial. En las últimas secciones de la tesis mostramos algunas aplicaciones para el estudio de esferas homológicas y homotópicas.

Capítulo 1

Complejos simpliciales y la dualidad de Alexander

En este capítulo repasaremos los conceptos básicos sobre complejos simpliciales. Los complejos simpliciales son objetos de naturaleza combinatoria y geométrica y sirven para modelar y estudiar más fácilmente distintos espacios topológicos. Los complejos simpliciales se obtienen “pegando” puntos, segmentos, triángulos, tetraedros y conjuntos análogos de mayores dimensiones. Diremos que un espacio topológico X es modelado por un complejo simplicial K si existe un homeomorfismo entre X y el complejo simplicial. Por ejemplo S^1 está modelado por el perímetro de un triángulo (tres segmentos unidos por sus vértices). La clase de espacios topológicos que se pueden estudiar mediante complejos simpliciales incluye entre otros a las variedades diferenciables, como el toro o la cinta de Moebius.

Los complejos simpliciales dan información combinatoria del espacio al que modelan mediante la cual se pueden estudiar propiedades topológicas y geométricas (como la homología y homotopía) del espacio.

En las primeras tres secciones daremos la definición de complejo simplicial y las nociones básicas relacionadas con los mismos. En las secciones cuatro y cinco repasaremos los conceptos de homología simplicial y cohomología simplicial de un complejo simplicial (las cuales coinciden con la homología singular y cohomología singular del espacio al que modelan) y el complejo dual. En el capítulo cinco estudiaremos la relación entre la homología de un complejo simplicial y la cohomología de su complejo dual usando el teorema principal de este capítulo, la dualidad de Alexander. En la sexta sección caracterizaremos el grupo fundamental de un complejo simplicial. En la parte final del capítulo definiremos el nervio de un complejo simplicial. Veremos como modificar los complejos simpliciales para obtener estructuras combinatorias más simples mediante los llamados movimientos fundamentales sin perder el tipo homotópico del complejo simplicial y finalizaremos la sección dando una relación entre el nervio de un complejo simplicial y los movimientos fundamentales.

Las principales referencias para este capítulo son [Gla70], [Mun84] y [Spa66] para las primeras secciones y los papers [Bar02], [BT08] para las secciones referentes a duales de complejos simpliciales.

1.1. Complejos simpliciales

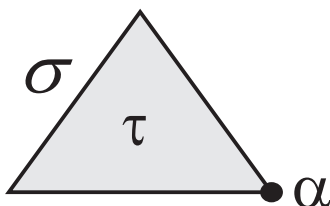
Definición 1.1.1. Un n -simplex geométrico τ (o simplex de dimensión n) es la cápsula convexa de $n + 1$ puntos $\{p_0, \dots, p_n\}$ afinmente independientes en algún espacio euclídeo \mathbb{R}^m . Los puntos p_i son los vértices y $\dim \tau = n$ es su dimensión.

Básicamente los símplexes son puntos, segmentos, triángulos, tetraedros etc.

Observación 1.1.2. Un simplex σ queda determinado por sus vértices, y, recíprocamente, los vértices quedan unívocamente determinados por el simplex, por lo que a un simplex de vértices p_0, \dots, p_n lo notaremos $\{p_0, \dots, p_n\}$.

Definición 1.1.3. Dado un n -simplex $\sigma = \{p_0, \dots, p_n\}$, cualquier subconjunto de vértices también genera un simplex. Los símplexes generados por subconjuntos de vértices de σ se llaman caras de σ . Si el subconjunto es propio se llama cara propia, si la cara tiene n vértices se dice cara inmediata.

Ejemplo 1.1.4. Consideremos el siguiente simplex τ .



En este caso σ es cara inmediata de τ y α es cara (no inmediata) de τ pero no es cara de σ .

Notación 1.1.5. Notaremos $\sigma \leq \tau$ si σ es cara de τ y si es cara inmediata lo notaremos $\sigma \prec \tau$.

Definición 1.1.6. Un complejo simplicial (geométrico) K es un conjunto de símplexes en \mathbb{R}^m que satisface:

(i) $\sigma \in K, \tau \leq \sigma \implies \tau \in K$.

(ii) $\sigma, \alpha \in K$ tal que $\sigma \cap \alpha \neq \emptyset \implies \sigma \cap \alpha \leq \sigma$ y $\sigma \cap \alpha \leq \alpha$.

En otras palabras un complejo simplicial K es un conjunto de símplexes cerrado por caras (es la condición i) y tal que si dos de sus símplexes se intersecan, lo hacen en alguna cara (la condición ii).

Ejemplo 1.1.7. En la figura 1.1 K y L son complejos simpliciales, pero T no pues $\sigma \cap \tau$ no es un simplex.

Definición 1.1.8. Se define la dimensión de un complejo simplicial K como el máximo (si existe) de las dimensiones de sus símplexes, y se nota $\dim K$. En caso de no existir tal máximo se dice que la dimensión de K es infinita.

Definición 1.1.9. Si K es un complejo simplicial, $\tau, \sigma \in K$ son tales que σ es el único simplex que contiene a τ , decimos que τ es una cara libre de σ .

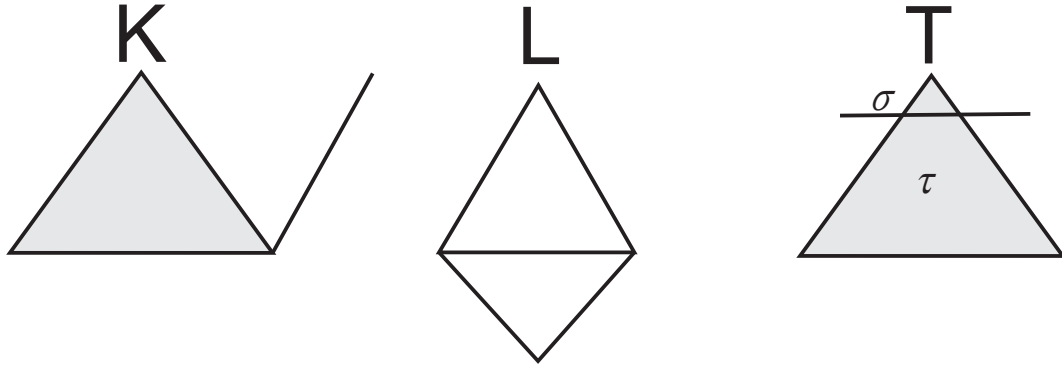


Figura 1.1: Ejemplos (y contraejemplo) de complejos simpliciales

Notación 1.1.10. Dado un σ simplex notaremos $\dot{\sigma}$ al complejo simplicial formado por las caras propias de σ .

Ejemplo 1.1.11. En la figura 1.2 τ es cara libre de σ pero no es cara libre de ningún simplex de $\dot{\sigma}$.

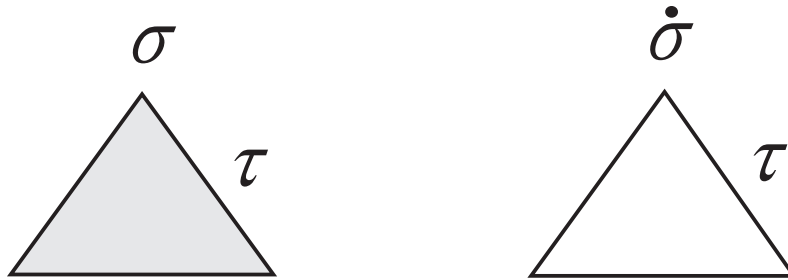


Figura 1.2: Borde de un complejo simplicial

Definición 1.1.12. La realización geométrica de un complejo simplicial K es el conjunto $|K| \subseteq \mathbb{R}^m$ de los puntos de los simplicios de K , dotado de la topología tal que un subconjunto $U \subseteq |K|$ es abierto sii para todo $\sigma \in K$ la intersección $U \cap \sigma$ es abierto de σ .

Observación 1.1.13. Es fácil ver que si K es finito, la topología de $|K|$ coincide con la que induce \mathbb{R}^m . Cuando K es infinito, sin embargo, estas dos topologías pueden ser distintas.

Observación 1.1.14. Una función $f : |K| \rightarrow X$ es continua sii lo es restringida a cada uno de los simplicios de K .

Definición 1.1.15. Sea σ un σ simplex. Llamamos interior de σ al conjunto $\sigma^\circ = |\sigma| \setminus |\dot{\sigma}|$.

Observación 1.1.16. Notemos que $\sigma^\circ = \{ \sum_{v \in \sigma} \alpha_v v : \alpha_v > 0 \text{ y } \sum_{v \in \sigma} \alpha_v = 1 \}$. Es decir, los elementos de σ° son las combinaciones convexas de vértices de σ con coeficientes no nulos.

Definición 1.1.17. Dado un complejo simplicial K , se define el n -esqueleto de K como

$$K^{(n)} = \{\tau \in K : \dim \tau \leq n\}$$

A los elementos del 0-esqueleto se los llama vértices de K .

Ejemplo 1.1.18. En la figura 1.3 aparece un complejo simplicial K de dimensión 2, su 1-esqueleto y su 0-esqueleto.

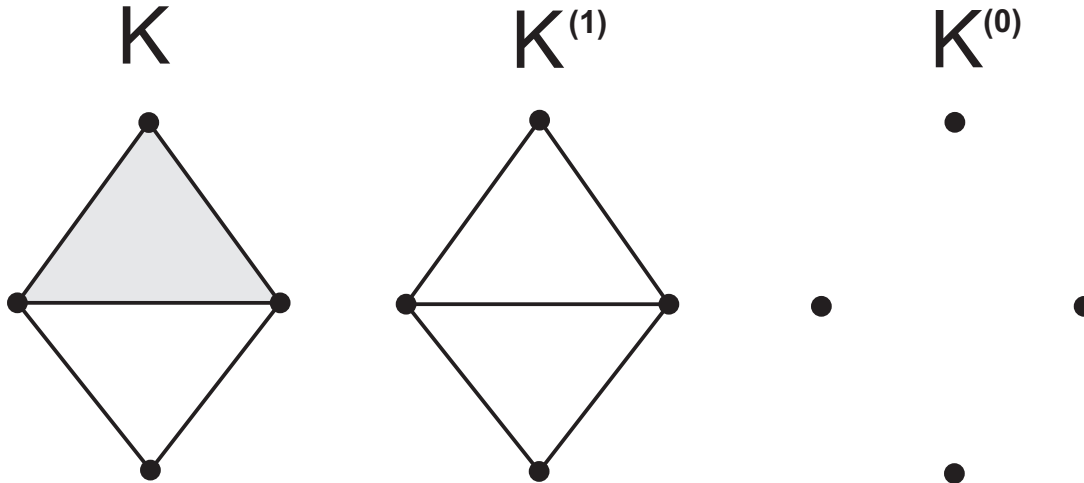


Figura 1.3: Complejo simplicial y sus esqueletos

Definición 1.1.19. Si K y L son dos complejos simpliciales, un morfismo simplicial $f : K \rightarrow L$ es una función de conjuntos $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ que cumple que para todo $\sigma \in K$, $f(\sigma) \in L$.

Observación 1.1.20. En este caso, f induce una función continua $|f|$ entre $|K|$ y $|L|$ extendiendo a f linealmente en cada símplex.

Ejemplo 1.1.21. Si K y L son los complejos simpliciales de la figura 1.4, la función $id : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ no es un morfismo simplicial, pero en cambio $id : L^{(0)} \rightarrow K^{(0)}$ sí lo es.

Definición 1.1.22. Un morfismo simplicial $f : K \rightarrow L$ es un isomorfismo simplicial si $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ es una biyección y f^{-1} es simplicial.

Un complejo simplicial, además del espacio topológico asociado, tiene una estructura combinatoria, cuántos vértices tiene y qué subconjuntos de vértices forman símplices. El siguiente resultado nos dice que la estructura combinatoria de un complejo simplicial determina cuál es el espacio topológico dado por la realización a menos de un homeomorfismo.

Proposición 1.1.23. Si f un isomorfismo simplicial, entonces $|f|$ es un homeomorfismo.

Demostración. Es claro que $|f|^{-1}$ es inversa de $|f|$ y es continua por ser f^{-1} simplicial. \square

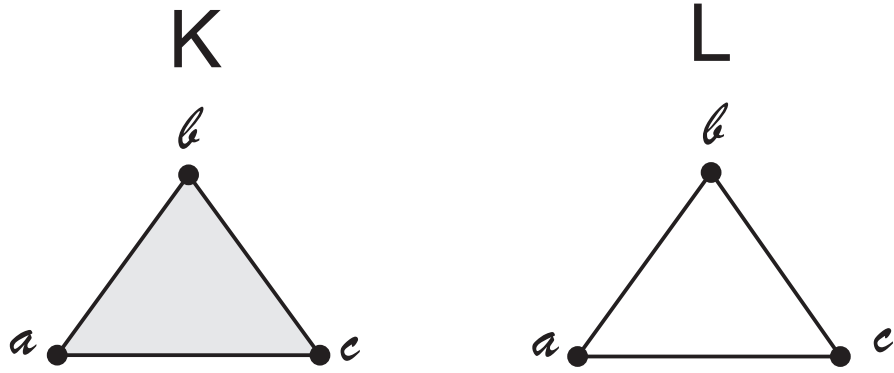


Figura 1.4: Morfismos simpliciales

Por este resultado es que prestaremos especial atención a la estructura combinatoria de un complejo simplicial y no tanto a la topología de su realización, ya que esta queda determinada por la estructura combinatoria. Ahora estudiaremos la noción de complejo simplicial abstracto, que, esencialmente es la estructura combinatoria subyacente de un complejo simplicial, olvidándonos del espacio topológico dado por su realización.

Definición 1.1.24. Un complejo simplicial (abstracto) K con vértices V es un subconjunto de partes de V que cumple lo siguiente:

- (i) $\sigma \subseteq \tau$ y $\tau \in K \implies \sigma \in K$
- (ii) Para todo $v \in V$, $\{v\} \in K$.

A los elementos de un complejo simplicial abstracto se los llama *símplices*.

Notación 1.1.25. Dado un *símplex* σ , también notaremos σ al complejo simplicial $\mathcal{P}(\sigma^{(0)})$, es decir, al complejo simplicial cuyos *símplices* son todas las caras de σ . Notaremos $\hat{\sigma}$ al complejo simplicial cuyos *símplices* son las caras propias de σ .

Observación 1.1.26. Dado un complejo simplicial geométrico K , el conjunto $\{\sigma \subseteq \mathcal{P}(K^{(0)}) : \sigma \text{ es un simplex de } K\} \subseteq \mathcal{P}(K^{(0)})$ es un complejo simplicial abstracto con la misma estructura combinatoria de K .

Recíprocamente, dado un complejo simplicial abstracto L nos podemos construir un complejo simplicial geométrico con la misma estructura combinatoria de L (si bien se puede realizar para complejos simpliciales no necesariamente finitos lo haremos solamente para complejos simpliciales finitos ya que en esta tesis no trabajaremos con complejos simpliciales infinitos). Consideremos el espacio euclídeo \mathbb{R}^m con $m = \#L^{(0)}$. Tomemos B la base canónica de \mathbb{R}^m y sea una biyección $g : L^{(0)} \rightarrow B$. Definamos el complejo simplicial geométrico K cuyos vértices son los elementos de B y sus *símplices* son los subconjuntos $V \subseteq B$ tal que $g^{-1}(V)$ es un *símplex* de L (observemos que este complejo simplicial está bien definido ya que B es una base por lo que cualquier subconjunto de B está formado por elementos linealmente independientes).

Como los complejos simpliciales geométricos, a los complejos simpliciales abstractos también se les puede asociar un espacio topológico asociado llamado *realización* (que va a ser única salvo homeomorfismos).

Definición 1.1.27. Si L un complejo simplicial abstracto y K un complejo simplicial geométrico, decimos que L y K tienen la misma estructura combinatoria de L si existe una biyección $g : L^{(0)} \rightarrow K^{(0)}$ tal que cada σ de $L^{(0)}$ se tiene que

$$\sigma \in L \iff g(\sigma) \in K.$$

Cuando ése es el caso, decimos que la realización geométrica $|L|$ de L es el espacio $|K|$.

Observación 1.1.28. La realización de un complejo simplicial K es única salvo homeomorfismos. En efecto, si L_1 y L_2 son complejos simpliciales abstractos que tienen la misma estructura combinatoria que K , y si $g_1 : L_1^{(0)} \rightarrow K$ y $g_2 : L_2^{(0)} \rightarrow K$ son biyecciones como en la definición, entonces es claro que la función $f = g_2^{-1}g_1 : L_1 \rightarrow L_2$ es un isomorfismo simplicial y, en consecuencia, $|f| : |L_1| \rightarrow |L_2|$.

Notación 1.1.29. Por las observaciones 1.1.26 y 1.1.28, de ahora en más no haremos distinción entre un complejo simplicial abstracto y uno geométrico. Cuando se necesite, pensaremos que el complejo simplicial tiene una realización fijada.

Definición 1.1.30. Dado un complejo simplicial K , un subcomplejo es un subconjunto de simplices de K que es un complejo simplicial.

Notación 1.1.31. Notaremos $L \leq K$ si L es un subcomplejo de K .

Definición 1.1.32. Sea K un complejo simplicial y $L \leq K$. Decimos que L es pleno si cumple:

$$\tau \in K \text{ y } \tau^{(0)} \subseteq L^{(0)} \implies \tau \in L$$

Es decir, si un simplex $\sigma \in K$ tiene todos sus vértices en L , entonces $\sigma \in L$.

Ejemplo 1.1.33. En la figura 1.5 el complejo simplicial L es un subcomplejo pleno de K , pero T no lo es ya que $\{1, 2, 3\} \in K$, $\{1, 2, 3\} \subseteq T^{(0)}$ pero $\{1, 2, 3\} \notin T$.

Definición 1.1.34. Un espacio topológico X es un poliedro si existe un complejo simplicial K cuya realización geométrica es homeomorfa a X . K se llama una triangulación de X .

Una extensa clase de espacios topológicos son modelados por los complejos simpliciales, en el sentido que son homeomorfos a la realización geométrica de algún complejo simplicial. Esta clase incluye, por ejemplo, a las variedades diferenciables. Cuando se tiene una triangulación de un espacio X por un complejo simplicial K , se pueden calcular los invariantes topológicos de X , como por ejemplo la homología o el grupo fundamental, a partir de la combinatoria de K .

Para un estudio más detallado de los complejos simpliciales se puede consultar [Mun84] y [Spa66].

1.2. Join, link y star

Estudiaremos la noción de join y daremos dos construcciones de subcomplejos de un complejo simplicial K , el link y el star. Estos subcomplejos son muy utilizados para estudiar propiedades locales de los complejos simpliciales.

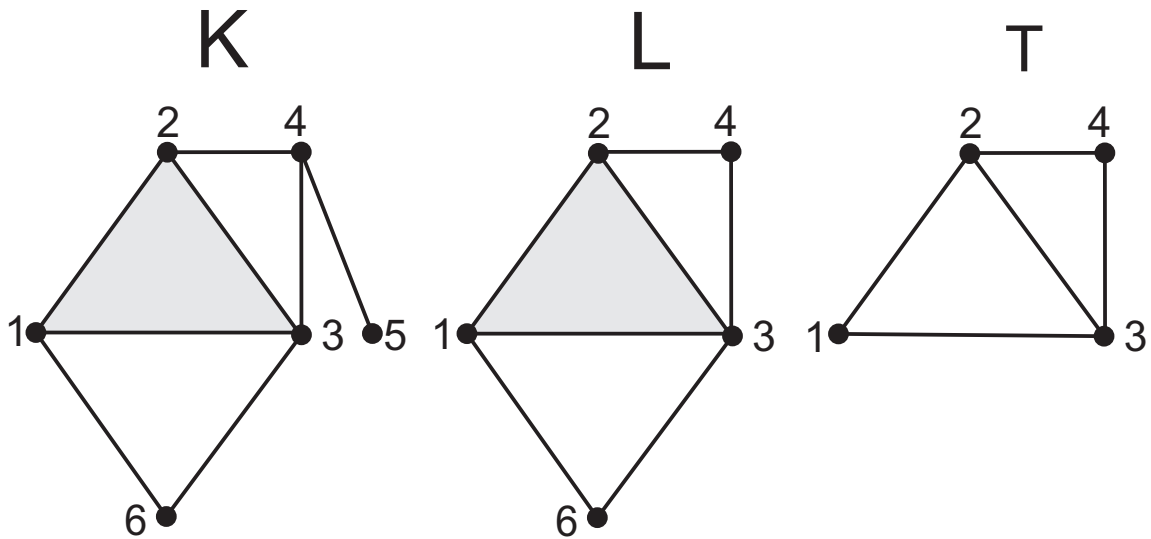


Figura 1.5: Subcomplejos

Definición 1.2.1. Dados dos símplexes abstractos σ y τ disjuntos, se define el join de σ con τ como el símplex cuyo conjunto de vértices es $\sigma^{(0)} \cup \tau^{(0)}$ y lo notamos $\sigma\tau$. Es decir, si $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ y $\tau = \{w_0, \dots, w_m\}$ se tiene que $\sigma\tau = \{v_0, \dots, v_n, w_0, \dots, w_m\}$.

Si los símplexes σ y τ están realizados en \mathbb{R}^n , para definir el join $\sigma\tau$ se pide que la unión de los puntos tenga cardinal menor o igual a $n+1$ y sean afinmente independiente (es decir, que los puntos estén en posición general).

Definición 1.2.2. Dados dos complejos simpliciales abstractos K y L cuya intersección es vacía, se define el join de K con L de la siguiente manera:

$$KL = \{\sigma\tau : \sigma \in K \text{ y } \tau \in L\} \cup K \cup L$$

Observación 1.2.3. Notemos que si L es vacío entonces $KL = K$.

Ejemplo 1.2.4. En la figura 1.6 aparecen ejemplos de joins entre dos complejos simpliciales.



Figura 1.6: Joins

Definición 1.2.5. Sea K un complejo simplicial abstracto y sea $\sigma \in K$. El link $lk(\sigma, K)$ de σ en K es el subcomplejo

$$lk(\sigma, K) = \{\tau \in K \mid \tau \cap \sigma \neq \emptyset \text{ y } \tau \sigma \in K\}.$$

Definición 1.2.6. Sea K un complejo simplicial y sea $\sigma \in K$. El star $st(\sigma, K)$ de σ en K es el subcomplejo de K cuyos elementos son los símplices τ tales que existe un elemento en K que contiene a τ y a σ . Es decir

$$st(\sigma, K) = \{\tau \in K \mid \exists \alpha \in K : \sigma \leq \alpha \wedge \tau \leq \alpha\}$$

Notación 1.2.7. Cuando K este claro por el contexto, notaremos $lk(\sigma)$ al link de σ en K y $st(\sigma)$ al star de σ .

Ejemplo 1.2.8. En la figura 1.7 aparece un complejo simplicial K y los links y joins de 2 de sus símplices.

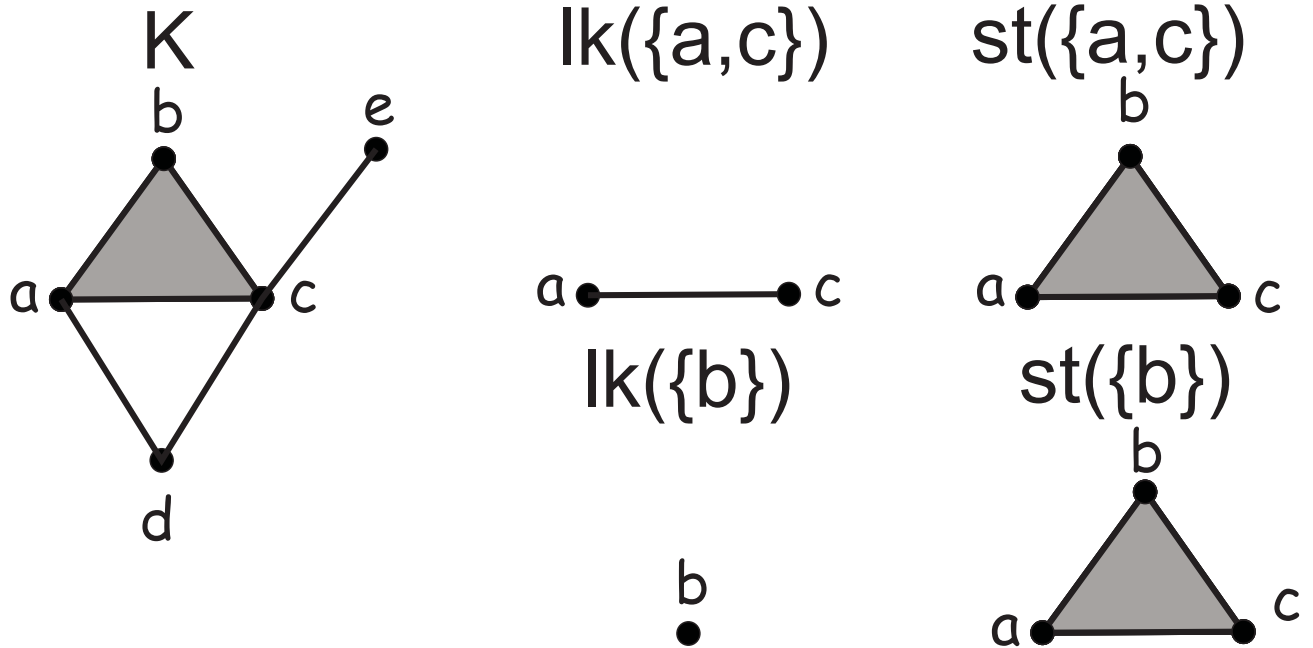


Figura 1.7: Links y stars

Observemos que el link de σ siempre esta contenido en su star. La siguiente proposición describe la relación entre el link y el star.

Proposición 1.2.9. Dado un complejo simplicial K y un elemento $\sigma \in K$ se tiene que $lk(\sigma)\sigma = st(\sigma)$.

La demostración de la proposición es trivial por doble contención.

1.3. Subdivisiones

Dado un poliedro con una triangulación ya fijada, si tomamos un punto que no sea un vértice de la triangulación es fácil encontrar un entorno del punto que no contenga a ningún símplex de la triangulación. Como consecuencia de esto, una sola triangulación no basta para estudiar a un poliedro localmente, y hace para ello necesario tomar triangulaciones cada vez mas "chicas" o "finas". Las subdivisiones nos permitirán triangular a un poliedro con un complejo simplicial cuyos símplexes son tan pequeños como uno lo desee. Las referencias para esta sección son [Gla70] y [Mun84].

Definición 1.3.1. Sean K un complejo simplicial con realización $|K|$. Un complejo simplicial L es una subdivisión de K si:

(i) $|K| = |L|$.

(ii) Para todo $\sigma \in L$ existe $\tau \in K$ tal que $|\sigma| \subseteq |\tau|$.

Básicamente las subdivisiones son una forma de darle a un espacio topológico triangulado otra triangulación más fina, es decir, cada símplex de la nueva triangulación cae en uno de la anterior.

Ejemplo 1.3.2. En la figura 1.8 los complejos L y S son subdivisiones de K y T es una subdivisión de H

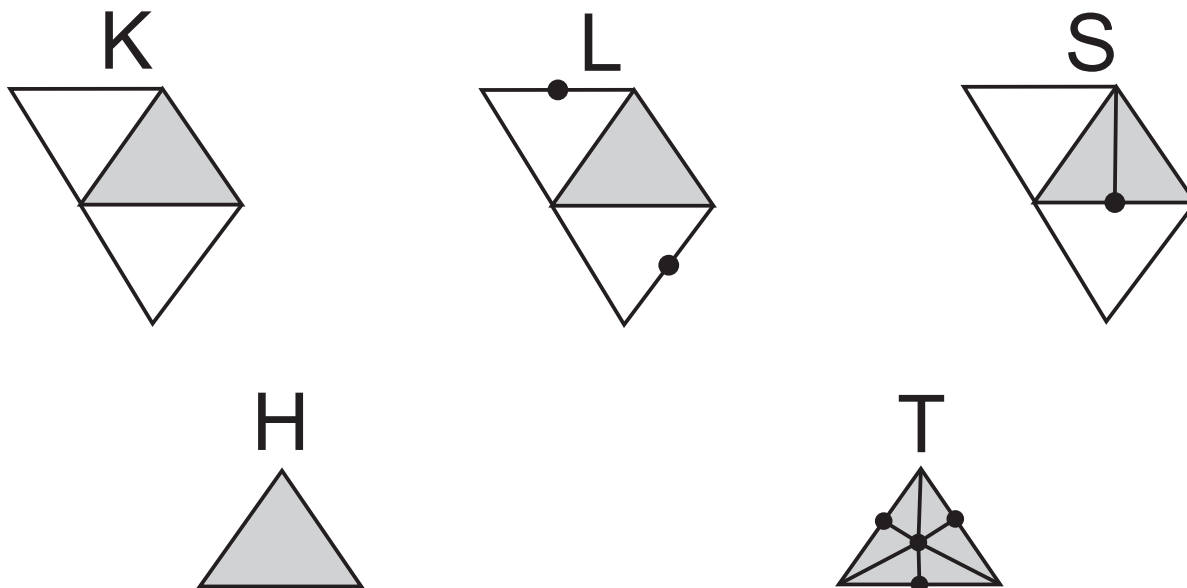


Figura 1.8: Subdivisiones

Probaremos a continuación una serie de lemas necesarios para estudiar con más detalle el concepto de subdivisión.

Lema 1.3.3. Sea un complejo simplicial K y sean $\tau, \sigma \in K$ tales que $\tau^\circ \cap |\sigma| \neq \emptyset$. Entonces $\tau \leq \sigma$.

Demostración. La intersección $\sigma \cap \tau$ es cara de τ y, como $|\sigma \cap \tau| \cap \tau^\circ \neq \emptyset$ por hipótesis, no es propia. Entonces $\sigma \cap \tau = \tau$ y, en consecuencia, τ es una cara de σ . \square

Lema 1.3.4. Sea K un complejo simplicial, $x \in |K|$, entonces existe un único simplex $\sigma \in K$ tal que $x \in \sigma^\circ$.

Demostración. Sea $\sigma \in K$ de dimensión mínima tal que $x \in |\sigma|$, entonces $x \in \sigma^\circ$ ya que no pertenece a ninguna de las caras propias de σ (por ser σ de dimensión mínima que contiene a x).

Veamos que σ es el único simplex con esta propiedad. Sea $\tau \in K$ tal que $x \in \tau^\circ$. Entonces $\tau = \sigma$. Entonces $\tau \cap \sigma$ no es vacío, por lo que $\tau \cap \sigma$ es una cara tanto de τ como de σ . Como $x \in |\tau \cap \sigma|$ y $x \in \sigma^\circ$, por el lema anterior, tenemos que $\sigma \leq \tau \cap \sigma$. Luego $\sigma = \tau \cap \sigma$. Análogamente, como $x \in \tau \cap \sigma$ y $x \in \tau^\circ$ tenemos que $\tau \cap \sigma = \tau$. Entonces $\sigma = \tau$. \square

Lema 1.3.5. Sea K un complejo simplicial, L una subdivisión de K y $\sigma \in K$. Si $\tau \in L$ es tal que $|\sigma| \subseteq |\tau|$ y es minimal con respecto a esta propiedad, entonces $\sigma^\circ \subseteq \tau^\circ$.

Demostración. Sea $\{v_0, \dots, v_n\} = \sigma$ y $\{w_0, \dots, w_m\} = \tau$. Como $|\sigma| \subseteq |\tau|$, todo vértice de σ es combinación convexa de los de τ , es decir $v_i = \sum_{j=0}^m b_{ij} w_j$ con $b_{ij} \geq 0$ y $\sum_{j=0}^m b_{ij} = 1$.

Sea $x \in \sigma^\circ$. Entonces $x = \sum_{i=0}^n a_i v_i$ con $a_i > 0$ y $\sum_{i=0}^n a_i = 1$.

Entonces $x = \sum_{i=0}^n a_i v_i = \sum_{j=0}^m (\sum_{i=0}^n a_i b_{ij}) w_j \in \tau^\circ$ ya que $\sum_{i=0}^n a_i b_{ij} > 0$ porque los $a_i > 0$ y existe i_0 tal que $b_{i_0 j} > 0$. \square

Proposición 1.3.6. Sea K un complejo simplicial, L una subdivisión de K y $\sigma \in K$, entonces existe un conjunto de símplexes $V \subseteq L$ tal que $|\sigma| = \bigcup_{\tau \in V} |\tau|$.

Demostración. Sea $x \in |\sigma|$. Basta ver que existe $\tau \in L$ tal que $x \in |\tau|$ y $|\tau| \subseteq |\sigma|$.

Sea $\tau \in L$ tal que $x \in \tau^\circ$ y sea $\beta \in K$ minimal tal que $|\tau| \subseteq |\beta|$. Entonces $x \in \tau^\circ \subseteq \beta^\circ$ de manera que $x \in \beta^\circ \cap |\sigma|$, luego β es cara de σ por lo que $|\tau| \subseteq |\sigma|$. \square

Ahora estudiaremos una subdivisión en particular que nos será de utilidad más adelante, la subdivisión baricéntrica.

Definición 1.3.7. Dado un complejo simplicial K con realización $|K|$, $\sigma \in K$ un n -símplex, el baricentro de σ es

$$b(\sigma) = \sum_{v \in \sigma^{(0)}} \frac{1}{n+1} v \in \sigma^\circ \subseteq |K|$$

La subdivisión baricéntrica de K , notada $sd(K)$, es el complejo simplicial con vértices los baricentros de los símplexes de K y símplexes los conjuntos de baricentros $\{b(\tau_0), \dots, b(\tau_n)\}$ tal que $\tau_i < \tau_{i+1}$.

Ejemplo 1.3.8. En la figura 1.9 el complejo T es la subdivisión baricéntrica de K .

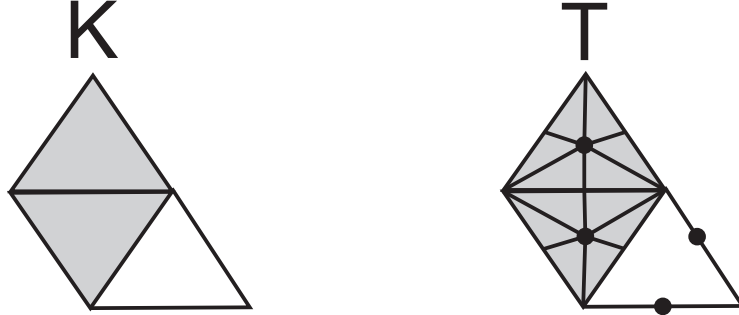


Figura 1.9: Subdivisión baricéntrica

Notemos que la estructura combinatoria de la subdivisión baricéntrica es la de un complejo simplicial L cuyos vértices son los símplexes de K y que un subconjunto de símplexes $V \subseteq K$ es un símplex L si $V = \{\tau_0, \dots, \tau_n\}$ con $\tau_i < \tau_{i+1}$ para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Un morfismo simplicial $f : K \rightarrow L$ induce un morfismo simplicial

$$sd(f) : sd(K) \rightarrow sd(L)$$

$$sd(f)(b(\tau)) = b(f(\tau))$$

Como $|K| = |sd(K)|$ y $|L| = |sd(L)|$ una pregunta natural es si existe alguna relación entre $|f|$ y $|sd(f)|$, la siguiente proposición responde esta pregunta.

Proposición 1.3.9. *Dado un morfismo simplicial $f : K \rightarrow L$ entonces las funciones $|f|$ y $|sd(f)|$ son homotópicas.*

Demostración. Dado $x \in |\{b(\tau_0), \dots, b(\tau_n)\}|$ donde $\{b(\tau_0), \dots, b(\tau_n)\} \in sd(K)$ y $\tau_i < \tau_{i+1}$, entonces $b(\tau_i) \in |\tau_i| \subseteq |\tau_n|$. En particular se tiene $x \in \tau_n$ y $|f|(x) \in |f(\tau_n)|$. Análogamente, como $|sd(f)|(x) \in |\{b(f(\tau_0)), \dots, b(f(\tau_n))\}|$ tenemos que $|sd(f)|(x) \in |f(\tau_n)|$. Como probamos que $|f|(x)$ y $|sd(f)|(x)$ caen en un mismo símplex, la homotopía

$$H : |K| \times I \rightarrow |K|$$

$$H(x, t) = (1-t)|f|(x) + t|sd(f)|(x)$$

esta bien definida (ya que los símplexes son convexos). □

1.4. Homología y Cohomología simplicial

En esta sección repasaremos los conceptos de homología y cohomología simplicial. Dado un complejo simplicial K , utilizando los grupos libres generados por n -símplices construiremos un complejo de cadenas para definir la homología y cohomología simplicial. Estos grupos de homología coinciden con los grupos de homología singular, por lo que son de gran utilidad a la hora de estudiar el tipo homológico de un espacio topológico X modelado por un complejo simplicial.

Definición 1.4.1. Sea $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ un n -símplex. Una orientación en σ es un orden total en sus vértices. Diremos que dos orientaciones de un símplex son equivalentes si difieren en una permutación par. Notemos que si $\dim \sigma > 0$, hay 2 posibles clases de equivalencias orientación en σ .

Un símplex orientado es un símplex junto con una clase de orientación.

Notación 1.4.2. Notaremos con $[v_0, \dots, v_n]$ al símplex $\{v_0, \dots, v_n\}$ con la clase de orientación dada por $v_0 < v_1 < \dots < v_n$

Definición 1.4.3. Sea K un complejo simplicial. Notamos $C_n(K)$ grupo abeliano libre generado por los n -símplices orientados de K , identificando $[v_0, \dots, v_n]$ con $-[v_{p(0)}, \dots, v_{p(n)}]$ si p es un permutación impar. De esta manera en $C_n(K)$ tenemos que $[v_{p(0)}, \dots, v_{p(n)}] = \text{sgn}(p)[v_0, \dots, v_n]$.

Definición 1.4.4. Sea K un complejo simplicial con un orden total en sus vértices. Un símplex orientado es un símplex con una orientación cuyo orden en sus vértices es equivalente al inducido por el orden de los vértices de K . Es decir, $[v_0, \dots, v_n]$ es un símplex orientado sii $v_{p(0)} < \dots < v_{p(n)}$ con p una permutación par.

Ahora definiremos el complejo de cadenas $(C_*(K), d)$ tomando d de la siguiente manera:

$$d_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$$

$$d_n([v_0, \dots, v_n]) = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i c_i \sigma$$

donde $c_i \sigma = [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ es la cara i -ésima de σ . Cuando no sea necesario especificar el n , lo notaremos simplemente d .

Para ver que esto efectivamente define un complejo de cadenas, tenemos que mostrar que $d^2 = 0$, pero calculando vemos que

$$d^2(\sigma) = d\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i c_i \sigma\right) = \sum_{i < j}^{i=n} (-1)^{i+j} c_j c_i \sigma + \sum_{i > j}^{i=n} (-1)^{i+j-1} c_i c_j \sigma$$

estas dos sumas se cancelan por lo que $d^2 = 0$. Esto dice que efectivamente, es un complejo de cadenas.

Definición 1.4.5. La homología simplicial de un complejo simplicial K es la homología del complejo de cadenas

$$C_*(K) = \dots \rightarrow C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K) \rightarrow \dots \rightarrow C_2(K) \rightarrow C_1(K) \rightarrow C_0(K) \rightarrow 0$$

$$H_n(K) = \frac{\ker(d_n)}{\operatorname{im}(d_{n+1})}$$

Definición 1.4.6. La homología (simplicial) reducida de un complejo simplicial K es la homología del complejo de cadenas

$$\dots \rightarrow C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K) \rightarrow \dots \rightarrow C_2(K) \rightarrow C_1(K) \rightarrow C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

$$\tilde{H}_n(K) = \frac{\ker(d_n)}{\operatorname{im}(d_{n+1})}$$

donde $d_0 : C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ es el morfismo "de aumentación", definido en la base mencionada como $d_0(\sigma) = 1$ para todo σ 0-símplex.

Observación 1.4.7. Notemos que si $n > 0$ entonces $\tilde{H}_n(K) = H_n(K)$ y que $\tilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z} \cong H_0(K)$, pero el isomorfismo no es canónico.

Ejemplo 1.4.8. Calculemos la homología en grado 1 del complejo simplicial de la figura 1.10. Ordenemos los vértices alfabéticamente. El complejo simplicial L tiene los siguientes símplexes orientados $\{[a], [b], [c], [d], [a, b], [a, c], [b, c], [c, d]\}$. Supongamos que

$$0 = d_1(\alpha[a, b] + \beta[b, c] + \gamma[a, c] + \delta[b, d]) = (\alpha - \beta - \delta)[b] + (-\alpha - \gamma)[a] + (\beta + \gamma)[c] + \delta[d]$$

, luego

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta - \delta) &= 0 \\ (-\alpha - \gamma) &= 0 \\ \beta + \gamma &= 0 \\ \delta &= 0 \end{aligned}$$

. Entonces $\ker(d_1)$ es el grupo abeliano libre generado por $[a, b] + [b, c] - [a, c]$. Como $C_2(L) = 0$ concluimos que $\operatorname{im}(d_2) = 0$ y por lo tanto $H_1(L) = \ker(d_1) = \mathbb{Z}$.

Ahora haremos un trabajo análogo para definir la cohomología simplicial y la cohomología simplicial reducida.

Definición 1.4.9. Dado un complejo simplicial K definimos $C^n(K) = \operatorname{Hom}(C_n(K), \mathbb{Z})$.

Si suponemos que K es finito, entonces, identificando al símplex orientado σ con la función $f_\sigma : C_n \rightarrow \mathbb{Z}$ definida sobre la base de $B = \{\sigma \in K : \sigma \text{ es un } n\text{-símplex orientado}\}$ de $C_n(K)$ como $f(\tau) = \delta_{\sigma\tau}$, se tiene que $C^n(K) \cong C_n(K)$. Definimos el complejo simplicial de cocadenas como $(C^n(K), d^*)$, donde $d^*(f) = fd$.

Con la identificación $C^n(K) \cong C_n(K)$ se tiene que $d^*(\sigma) = \sum_{\tau > \sigma} \epsilon_\tau \tau$ donde ϵ_τ es el número de incidencia de σ en τ . Concretamente $\epsilon_\tau = 1$ si σ es la cara i -ésima de τ con i par (i.e. σ y τ tienen la misma orientación) y $\epsilon_\tau = -1$ si σ es la cara i -ésima de τ con i impar (i.e. σ y τ tienen orientaciones opuestas).

Recordemos que a los símplexes siempre los estamos considerando con una orientación.

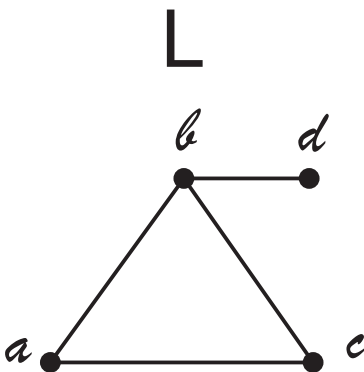


Figura 1.10:

Definición 1.4.10. La cohomología de un complejo simplicial K es la cohomología del complejo $(C^n(K), d^*)$, es decir

$$H^n(K) = \frac{\ker(d_n^*)}{\text{im}(d_{n-1}^*)}$$

Definición 1.4.11. La cohomología reducida de un complejo simplicial K es la cohomología del complejo $(C^n(K), d^*)$

$$\tilde{H}^n(K) = \frac{\ker(d_n^*)}{\text{im}(d_{n-1}^*)}$$

donde $d_0 : C_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ es tal que $d_0(\sigma) = 1$ para cada 0-simplex σ .

Ejemplo 1.4.12. Calculemos la cohomología en grado 0 del complejo simplicial de la figura 1.10. Supongamos que

$$0 = d^*(\alpha[a] + \beta[b] + \gamma[c] + \delta[d]) = (-\alpha + \beta)[a, b] + (-\alpha + \gamma)[a, c] + (-\beta + \gamma)[b, c] + (-\beta + \delta)[b, d]$$

, entonces $H_0(L) = \ker(d_0)$ es el grupo abeliano libre generado por $[a] + [b] + [c] + [d]$, es decir $H_0(L) = \mathbb{Z}$.

El siguiente teorema, cuya demostración aparece en el capítulo 4 del libro [Mun84], relaciona los conceptos de homología simplicial y homología singular.

Teorema 1.4.13. *Sea K un complejo simplicial. Existe un morfismo de complejos de cadenas $\psi : C_n(K) \rightarrow S_n(|K|)$ que induce un isomorfismo $\psi_* : H_n(K) \rightarrow H_n(|K|)$ donde $H_n(|K|)$ es la homología singular del espacio topológico $|K|$.*

La idea de la demostración consiste en considerar la función ψ definida sobre una base de $C_n(K)$ que a cada simplex τ lo envía a la inclusión $i : |\tau| \rightarrow |K|$ considerada como un simplex singular en $|K|$ y probar, utilizando la sucesión exacta de Mayer-Vietoris, que el siguiente diagrama conmutativo tiene filas exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & C_*(\dot{\tau}) & \longrightarrow & C_*(\tau) \oplus C_*(K \setminus \{\tau\}) & \longrightarrow & C_*(K) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow i\psi & & \downarrow \psi \oplus j\psi & & \downarrow \psi \\
0 & \longrightarrow & S_*(|\tau| \setminus \{b(\tau)\}) & \longrightarrow & S_*(|\tau|) \oplus S_*(|K| \setminus \{b(\tau)\}) & \longrightarrow & S_*(|K|) \longrightarrow 0
\end{array}$$

donde i y j son las funciones inducidas por los retracts por deformación fuerte $|\dot{\tau}| \subseteq |\tau| \setminus \{b(\tau)\}$ y $|K \setminus \{\tau\}| \subseteq |K| \setminus \{b(\tau)\}$ respectivamente. Luego, utilizando el lema de los 5 e inducción en el siguiente diagrama (que es inducido por el anterior)

$$\begin{array}{ccccccc}
H_n(\dot{\tau}) & \longrightarrow & H_n(\tau) \oplus H_n(K \setminus \{\tau\}) & \longrightarrow & H_n(K) & \longrightarrow & \dots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \psi & & \\
H_n(|\tau| \setminus \{b(\tau)\}) & \longrightarrow & H_n(|\tau|) \oplus H_n(|K| \setminus \{b(\tau)\}) & \longrightarrow & H_n(|K|) & \longrightarrow & \dots \\
\vdots & \longrightarrow & H_{n-1}(\dot{\tau}) & \longrightarrow & H_{n-1}(\tau) \oplus H_{n-1}(K \setminus \{\tau\}) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\vdots & \longrightarrow & H_{n-1}(|\tau| \setminus \{b(\tau)\}) & \longrightarrow & H_{n-1}(\tau) \oplus H_{n-1}(K \setminus \{\tau\}) & &
\end{array}$$

se tiene que ψ es un isomorfismo.

1.5. Dualidad de Alexander

En esta sección definiremos el dual de un complejo simplicial. Esta construcción aparece en los artículos [Bar02] y [BT08]. Demostraremos el teorema central de éste capítulo, la dualidad de Alexander. Relacionaremos la homología de un complejo simplicial con la cohomología de su complejo dual utilizando sus estructuras combinatorias. La dualidad de Alexander para complejos simpliciales es la versión combinatoria de la dualidad de Alexander topológica que aparece en [Hat02].

Definición 1.5.1. Sea K un complejo simplicial que no es un símplex. Sea $V = K^{(0)}$ el conjunto de vértices de K . El complejo simplicial dual de K es:

$$K^* = \{\sigma \subseteq V \mid \sigma^c \notin K\}$$

Donde $\sigma^c = V \setminus \sigma^{(0)}$.

Como $\sigma^c \subseteq \tau^c$ siempre que $\tau \subseteq \sigma$ y K es un complejo simplicial, es claro que K^* también lo es.

Utilizaremos el complejo simplicial dual K^* para calcular la homología reducida de K utilizando la cohomología reducida de K^* . Si K es un símplex es contráctil, por lo que no vale la pena estudiar éste caso.

Observación 1.5.2. Notemos que $K^{**} = K$.

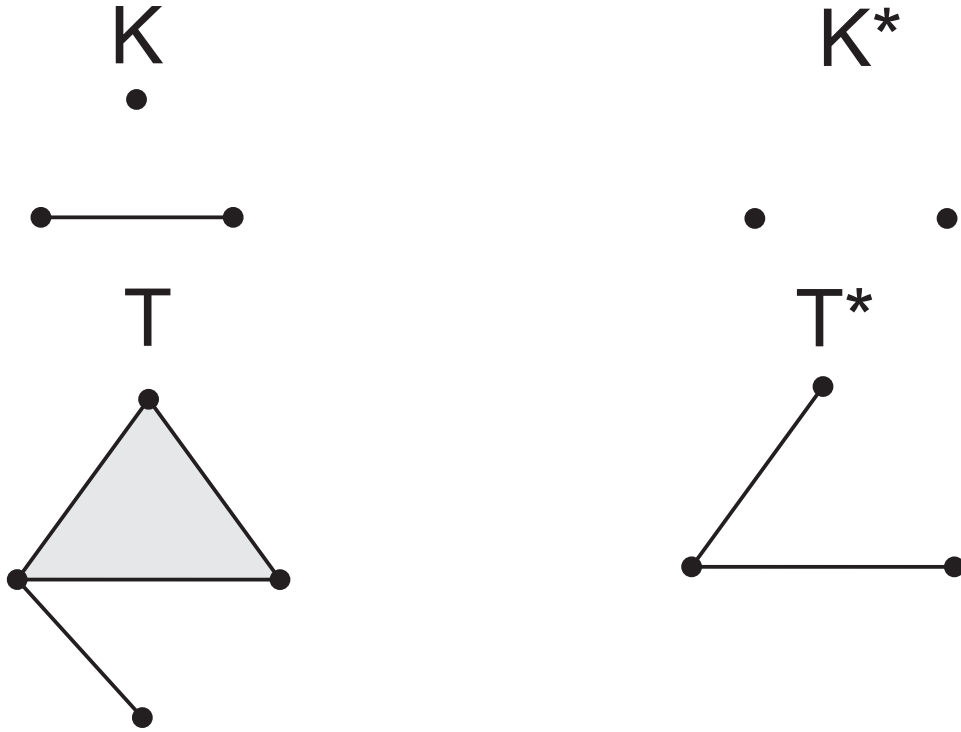


Figura 1.11: Complejos Duales

Ejemplo 1.5.3. En la figura 1.11 aparecen dos ejemplos de complejos duales.

Proposición 1.5.4. Si \$K\$ es un complejo simplicial con vértices \$V\$ tal que \$\#V = N + 1\$, entonces para todo \$n \in \mathbb{Z}\$ hay una sucesión exacta corta.

$$0 \rightarrow C_n(K^*) \rightarrow C^{N-1-n}(\mathcal{P}(V)) \rightarrow C^{N-1-n}(K) \rightarrow 0$$

Donde \$\mathcal{P}(V)\$ lo vemos como un \$N\$-simplex y la función \$C^{N-1-n}(\mathcal{P}(V)) \rightarrow C^{N-1-n}(K)\$ es la restricción.

Demostración. Si \$n < 0\$ o \$n > N - 1\$ es claro que la sucesión es

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

por lo que basta considerar el caso \$0 \leq n \leq N - 1\$.

Una base de \$C^{N-1-n}(\mathcal{P}(V))\$ es el conjunto de las funciones \$f_\sigma\$ con \$\sigma \in \mathcal{P}(V)\$. Es claro que la restricción de \$f_\sigma\$ a \$K\$ no es nula sii \$\sigma \in K\$.

Para definir \$j : C_n(K^*) \rightarrow C^{N-1-n}(\mathcal{P}(V))\$ fijemos un orden en los vértices de \$K\$ \$[v_0, \dots, v_N]\$, y definamos \$j(\sigma)(\tau) = 1\$ si la concatenación de vértices de \$\sigma\$ y \$\tau\$ es igual a \$[v_0, \dots, v_N]\$ y 0 si la concatenación repite algún vértice. Es decir, si \$\sigma = [a_0, \dots, a_n]\$, \$\tau = [b_0, \dots, b_{N-1-n}]\$ y \$p\$ una permutación entonces:

$$j(\sigma)(\tau) = \text{sgn}(p) \text{ si } [a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_{N-1-n}] = [v_{p0}, \dots, v_{pN}]$$

$$j(\sigma)(\tau) = 0 \text{ si } \sigma \cap \tau \neq \phi$$

En otras palabras $j(\sigma) = f_{\sigma^c}$ donde el orden de los vértices de σ^c viene inducido por el orden de σ y el de $K^{(0)}$.

Se tiene que $f_{\sigma^c}(\tau) = 0 \Leftrightarrow \sigma^{c(0)} \neq \tau^{(0)}$. Luego $f_{\sigma^c}(\tau) \neq 0$ para todo $\tau \in K$ sii $\sigma^c \notin K$ (es decir, f_{σ^c} restringida a K es nula), pero esta es justamente la definición de que $\sigma \in K^*$, con lo que resulta que la sucesión es exacta. \square

Proposición 1.5.5. *Dados un n -símplex $\sigma = [a_0, \dots, a_n]$ y un $(N - n - 1)$ -símplex $\tau = [b_0, \dots, b_m]$, se tiene que*

$$j(d(\sigma))(\tau) = (-1)^n j(\sigma)(d(\tau)) = (-1)^n d^* j(\sigma)(\tau)$$

Demostración. Para que $j(d(\sigma))(\tau)$ sea distinto de cero, necesitamos que alguna de las caras de σ sea disjunta de τ , lo que pasa si tienen exactamente un vértice en común (observemos que siempre tienen al menos un vértice en común). Para que $j(\sigma)(d(\tau))$ no sea cero necesitamos que alguna de las caras de τ sea disjunta de σ , lo que pasa si tienen exactamente un vértice en común. Por lo que el caso en que tengan dos o más vértices en común es trivial.

Supongamos entonces que tienen un solo vértice en común $a_i = b_j$.

Para calcular $j(d(\sigma))(\tau)$ necesitamos concatenar todas las caras de σ (multiplicadas por $(-1)^k$ si es la cara k -ésima) con τ . Pero la única que no va a tener vértices repetidos es la i -ésima, así que $j(d(\sigma))(\tau)$ es igual a $(-1)^i [a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m]$. Análogamente $j(\sigma)(d(\tau))$ depende de $(-1)^j [a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, \hat{b}_j, \dots, b_m]$. El símplex ordenado $[a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, \hat{b}_j, \dots, b_m]$ se puede obtener de $[a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m]$ aplicando $n-i+j$ transposiciones, de manera que

$$(-1)^i [a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m] = (-1)^n (-1)^j [a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, \hat{b}_j, \dots, b_m]$$

con lo que el resultado queda probado. \square

Es inmediato entonces que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_n(K) & \xrightarrow{j} & C^{N-n-1}(\mathcal{P}(V)) \\ \downarrow d & & \downarrow d^* \\ C_{n-1} & \xrightarrow{j} & C^{N-n}(\mathcal{P}(V)) \end{array}$$

conmuta o anticonmuta.

Corolario 1.5.6. *En las condiciones de la proposición 1.5.4 existe una sucesión exacta de complejos:*

$$0 \rightarrow C_*(K^*) \rightarrow C^{N-1-*}(\mathcal{P}(V)) \rightarrow C^{N-1-*}(K) \rightarrow 0$$

Teorema 1.5.7. *Si K es un complejo simplicial con un conjunto de vértices V y $M = \#V$ que no es un símplex, entonces hay un isomorfismo $\tilde{H}_n(K^*) \cong \tilde{H}^{M-n-3}(K)$ para todo $n = 0, \dots, M - 1$.*

Demostración. Por el corolario anterior tenemos la siguiente sucesión exacta corta de complejos

$$0 \rightarrow C_*(K^*) \rightarrow C^{M-2-*}(\mathcal{P}(V)) \rightarrow C^{M-2-*}(K) \rightarrow 0$$

Ya que $M = N+1$. Esta sucesión induce la siguiente sucesión exacta en las homología:

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(K^*) \rightarrow \tilde{H}^{M-n-3}(\mathcal{P}(V)) \rightarrow \tilde{H}^{M-n-3}(K) \rightarrow \tilde{H}_n(K^*) \rightarrow \tilde{H}^{M-n-2}(\mathcal{P}(V)) \rightarrow \dots$$

Como $\tilde{H}^k(\mathcal{P}(V)) = 0$ para todo k por ser contráctil y por la exactitud de la sucesión se obtiene el resultado deseado. \square

A continuación estudiaremos la relación entre la dualidad de Alexander simplicial y la topológica. El primer paso va a ser enunciar la dualidad de Alexander topológica.

Teorema 1.5.8. *Sea A un subconjunto propio no vacío triangulable de S^n . Entonces existe un isomorfismo.*

$$\tilde{H}_k(A) \cong \tilde{H}^{n-k-1}(S^n \setminus A)$$

La demostración de este teorema puede encontrarse en el capítulo 8 de [Mun84].

Notemos que si σ es un n -simplex, entonces $|\dot{\sigma}|$ es homeomorfo a S^{n-1} . Entonces dado un subcomplejo K de $\dot{\sigma}$ si probamos que $|K^*|$ tiene el mismo tipo homotópico (débil) que $|\dot{\sigma}| \setminus |K|$ la dualidad de Alexander topológica y la simplicial son equivalentes en complejos simpliciales.

Este es un resultado conocido y aparece enunciado en el paper [BT08], pero no aparece una demostración de este hecho por eso a continuación haremos una prueba de esto. Para ello tendremos que trabajar con nervios de cubrimientos y algunos resultados sobre los mismos.

Definición 1.5.9. Dado un espacio topológico X y un cubrimiento \mathcal{U} , el nervio $N(\mathcal{U})$ de \mathcal{U} es el complejo simplicial cuyos vértices son los elementos de \mathcal{U} y $\{U_0, \dots, U_n\}$ es un simplex si $\bigcap U_i \neq \phi$.

Notación 1.5.10. Sea K un complejo simplicial y sea \mathcal{U} el cubrimiento dado por las realizaciones de los simplices maximales de K , es decir $\mathcal{U} = \{|\tau| : \tau \in K \text{ y } \tau \text{ es maximal}\}$. Al nervio de \mathcal{U} lo llamaremos nervio de K y lo notaremos $N(K)$.

Ejemplo 1.5.11. En la figura 1.12 los complejos simpliciales L y M son los nervios de K y T respectivamente.

Teorema 1.5.12. *Sea X un espacio topológico y sea \mathcal{U} un cubrimiento por abiertos tal que:*

(i) *Para todo $x \in X$ existen finitos $U \in \mathcal{U}$ con $x \in U$*

(ii) *Sea $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, \mathcal{V} finito, entonces $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V = \phi$ o $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V$ es homotópicamente trivial.*

Entonces $|N(\mathcal{U})|$ y X tienen el mismo tipo homotópico débil. En particular, si X es un poliedro, X y $N(X)$ son homotópicamente equivalentes por el teorema de Whitehead (ver [Hat02])

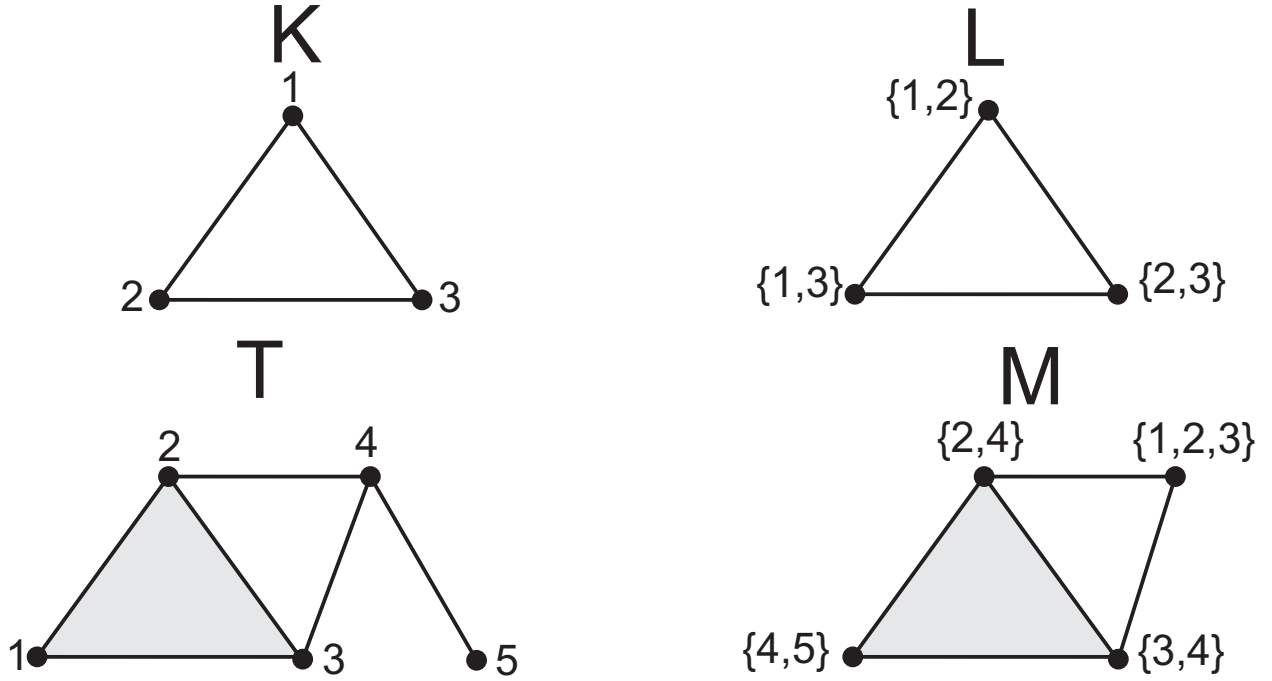


Figura 1.12: Nervios

La demostración de este teorema aparece en el artículo [McC67].

También necesitaremos el siguiente resultado sobre el nervio de un complejo simplicial.

Teorema 1.5.13. *Sea K un complejo simplicial de dimensión finita, entonces $|K|$ y $|N(K)|$ son homotópicamente equivalentes.*

La demostración de este teorema puede encontrarse en [Bar06] y [Bar09].

Ahora probaremos el resultado buscado para relacionar la dualidad de Alexander topológica con la combinatoria.

Teorema 1.5.14. *Si σ es un n -símplex y K un subcomplejo de $X = \dot{\sigma}$, entonces $|K^*|$ tiene el mismo tipo homotópico (débil) que $|X| \setminus |K|$.*

Demostración. $|K^*|$ tiene el mismo tipo homotópico de $|N(K^*)|$, por lo que basta encontrar un cubrimiento \mathcal{U} de $|X| \setminus |K|$ en las condiciones del teorema 1.5.12 tal que $N(\mathcal{U}) = N(K^*)$.

Sea $x \in |X| \setminus |K|$ y sea $\tau \in X$ tal que $x \in \tau^\circ$. Entonces $\tau \notin K$ de manera que $\tau^c \in K^*$ y $\tau^\circ \subseteq |X| \setminus |K|$. Definimos $U_{\tau^c} = \{ \sum_{v \in X^{(0)}} t_i v_i : \sum_{v \in X^{(0)}} t_i = 1, t_i > 0 \text{ si } v_i \in \tau \text{ y } \exists j \text{ tal que } t_j = 0 \} \subseteq |X|$. Si τ es cara de β en X entonces $\beta^c \in K^*$ (ya que β^c es cara τ^c) por lo que $\beta^\circ \subseteq |X| \setminus |K|$, luego, notando que $U_\tau = \bigcup_{\tau \leq \beta} \beta^\circ$ tenemos que $U_\tau^c \subseteq |X| \setminus |K|$.

Entonces U_τ^c es un subconjunto de $|X| \setminus |K|$ que contiene a x . Por lo que $\mathcal{U}_0 = \{U_\tau : \tau \in K^*\}$ es un cubrimiento de $|X| \setminus |K|$.

Es claro, por verificación directa que $U_\tau \cap U_\gamma = U_{\tau \cap \gamma}$ si $\tau \cap \gamma \neq \phi$ y $U_\tau \cap U_\gamma = \phi$ si $\tau \cap \gamma = \phi$. Entonces $\mathcal{U} = \{U_\tau : \tau \in K^*, \tau \text{ maximal}\}$ es un cubrimiento de $|X| \setminus |K|$ tal que $N(\mathcal{U}) = N(K^*)$ que cumple las condiciones (i) y (ii) del teorema 1.5.12 ya que es un cubrimiento finito y el conjunto U_τ es contráctil para todo τ por lo que en particular es homotópicamente trivial. Resta ver que es un cubrimiento por abiertos.

Dado que $|X| \setminus |K|$ es un abierto de $|X|$ basta ver que U_τ es abierto en $|X|$. Por la topología de $|X|$ se tiene U_τ es abierto sii $U_\tau \cap |\gamma|$ es abierto en $|\gamma|$ para todo $\gamma \in X$. Como $U_\tau = \bigcup_{\tau^c \leq \beta} \beta^o$, si $\gamma \cap U_\tau \neq \phi \exists \beta \geq \tau$ tal que $\beta^o \cap |\gamma| \neq \phi$, luego β es cara de γ por lo

que τ^c es cara de γ . Además como $\gamma \in X$ se tiene que $\gamma^{(0)} \subsetneq X^{(0)}$ ya que $X = \dot{\sigma}$, luego $U_\tau \cap |\gamma| = \left\{ \sum_{v \in \gamma^{(0)}} t_i v_i : \sum_{v \in X^{(0)}} t_i = 1, t_i > 0 \text{ si } v_i \in \tau^c \right\}$ que claramente es abierto en γ . □

1.6. π_1 de un complejo simplicial y su relación con el dual

Caracterizaremos ahora el grupo fundamental de un complejo simplicial para poder compararlo con el grupo fundamental del complejo simplicial dual.

En la sección anterior probamos la dualidad de Alexander que relaciona los grupos de homología de un complejo simplicial con los grupos de cohomología de su dual. Motivados por este resultado decidimos estudiar si el complejo dual nos da alguna otra información sobre el complejo original, como por ejemplo, sobre su grupo fundamental. En esta sección probaremos que no se puede encontrar relación alguna entre el grupo fundamental de un complejo simplicial y el de su dual.

Definición 1.6.1. Dado un complejo simplicial K , una arista de K es un 1-símplex orientado. Es decir, una arista $e = (v_0, v_1)$ con $\{v_0, v_1\} \in K$. A $i(e) = v_0$ lo llamamos inicio de e y a $f(e) = v_1$ final.

Definición 1.6.2. Un camino de K es una sucesión de aristas e_0, \dots, e_n tal que $f(e_j) = i(e_{j+1})$ para cada $j = 0, \dots, n-1$. Si $f(e_n) = i(e_0) = v_0$ diremos que es un camino cerrado en v_0 .

Definición 1.6.3. Dados dos caminos $\alpha = e_0, \dots, e_k$ y $\beta = d_0, \dots, d_l$ se define la concatenación de α y β como el camino $e_0, \dots, e_k, d_0, \dots, d_l$ y lo notaremos $\alpha\beta$.

Ahora definiremos una relación de equivalencia en los caminos cerrados en v_0 y conjunto con la operación concatenación para caracterizar el grupo $\pi_1(K, v_0)$.

Diremos que dos caminos en K α y α' son elementalmente equivalentes si existen caminos β y β' tal que $\alpha = \beta(v_0, v_1)(v_1, v_2)\beta'$ y $\alpha' = \beta(v_0, v_2)\beta'$ y $\{v_0, v_1, v_2\} \in K$.

Definiremos ahora la relación de equivalencia \sim en el conjunto de caminos cerrados en v_0 . Dos caminos cerrados α, α' son equivalentes si existe una sucesión de caminos cerrados $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tal que $\alpha = \alpha_0, \alpha' = \alpha_n$ y α_i es elementalmente equivalente con α_{i+1} .

Denotaremos $E(K, v_0)$ al conjunto de caminos cerrados en v_0 cocientado por \sim .

En el capítulo 3 del libro de Spanier [Spa66] se demuestra que en $E(K, v_0)$ el producto $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$ es un producto bien definido y que $E(K, v_0)$ con este producto resulta

isomorfo a $\pi_1(|K|, v_0)$. Esto nos dice que en particular que el grupo fundamental de un complejo simplicial depende solamente de su 2-esqueleto.

Proposición 1.6.4. *Dado un conjunto V de cardinal n , con n mayor que 6, se tiene que para todo complejo simplicial K con vértices V existe un complejo L con los mismos vértices tal que:*

$$\pi_1(K, v_0) \cong \pi_1(L, v_0)$$

y tal que $\pi_1(L^*, v_0) = \{0\}$.

Notemos que esta proposición dice que si un complejo simplicial tiene más de 6 vértices no podemos esperar encontrar alguna relación entre su π_1 y el π_1 del dual.

Demostración. Considero $L = K^{(2)}$. En particular L no tiene símplexes de dimensión 3 o mayor. Luego si $\dim \sigma \leq 2 \implies \dim \sigma^c \geq n - 4 > 2 \implies \sigma^c \notin L \implies \sigma \in L^*$. Es decir, todo 2 símplex esta en L^* . Entonces tenemos:

$$\pi_1(K, v_0) = \pi_1(K^{(2)}, v_0) = \pi_1(L, v_0)$$

$$\pi_1(L^*, v_0) = \pi_1(\mathcal{P}(V), v_0) = \{0\}$$

Ya que $\mathcal{P}(V)$ es un $(n - 1)$ -símplex, por lo que es contráctil. □

1.7. Colapsos, expansiones y nervios

Introduciremos ahora la teoría de homotopía simple de J.H.C. Whitehead. Esta teoría se puede pensar como un análogo a la teoría de homotopía en espacios topológicos. Así como en la teoría de homotopía uno estudia cuando se puede llegar de un espacio topológico a través de "deformaciones" a otro espacio topológico, en la teoría de homotopía simple se estudia cuando se puede llegar de un complejo simplicial a otro por medio de los llamados movimientos fundamentales (colapsos y expansiones). Una de las razones para el estudio de estos movimientos es que si se puede llegar de un complejo simplicial a otro aplicando los movimientos fundamentales implica que son homotópicos.

También estudiaremos la relación del nervio de un complejo simplicial con estos movimientos.

Definición 1.7.1. Sea K un complejo simplicial y sean $\sigma, \tau \in K$ dos símplexes. Decimos que τ es cara libre de σ si es una cara propia de σ y no es cara propia de ningún otro símplex de K .

Observación 1.7.2. Notemos que si τ es cara libre de σ entonces σ es un símplex maximal de K , y por lo tanto el conjunto de símplexes $L = K \setminus \{\sigma, \tau\}$ es un complejo simplicial.

Definición 1.7.3. Diremos que un símplex K colapsa elementalmente a un complejo simplicial L y notaremos $K \searrow L$ si existen dos símplexes σ y τ tal que τ es una cara libre de σ en K y $L = K \setminus \{\sigma, \tau\}$. En este caso, también diremos que L se expande elementalmente a K y lo notaremos $L \nearrow K$.

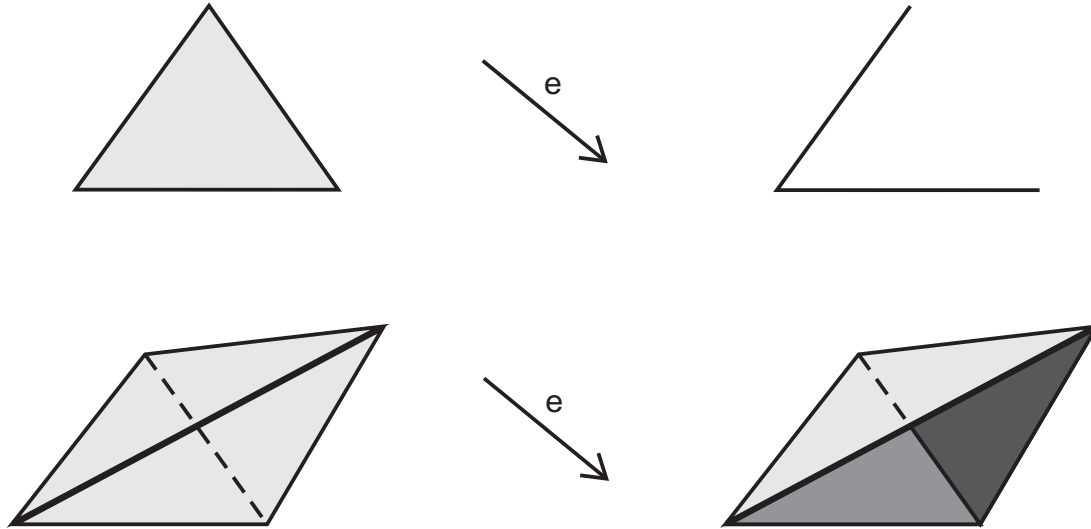


Figura 1.13: Colapsos elementales

Ejemplo 1.7.4. En la figura 1.13 aparecen ejemplos de colapsos elementales.

Observación 1.7.5. Sean σ y τ dos símlices con $\tau < \sigma$. Notemos que $L = K \setminus \{\sigma, \tau\}$ sii $K = L \cup \{\sigma, \tau\}$ y $\sigma, \tau \notin L$

Definición 1.7.6. Diremos que un complejo simplicial K colapsa en otro complejo simplicial L si existe una sucesión de colapsos elementales que transforma a K en L y en este caso escribiremos $K \searrow L$. En este mismo caso diremos que L se expande a K y se nota $L \nearrow K$.

Dos complejos simpliciales K y L tienen el mismo tipo de homotopía simple si existe una sucesión de complejos simpliciales $K = K_1, \dots, K_n = L$ tal que $K_i \searrow K_{i+1}$ o $K_i \nearrow K_{i+1}$ y se nota $K \frown L$.

Recordemos que dados dos espacios topológicos X e Y decimos que Y es un *rdf* de X si existen dos funciones $r : X \rightarrow Y$, $j : Y \rightarrow X$ tal que $rj = id_Y$ y $jr \simeq id_X$.

Observación 1.7.7. Dado un complejo simplicial K es claro que a partir de un colapso elemental se obtiene un complejo simplicial cuya realización es un retracts por deformación fuerte (*rdf*) de $|K|$.

Por esta razón es que mismo tipo homotópico simple implica mismo tipo homotópico.

Observación 1.7.8. Whitehead originalmente introdujo la noción de tipo homotópico simple para estudiar combinatoriamente la topología de un complejo simplicial. Si bien dos complejos simpliciales K y L con el mismo tipo homotópico no tienen necesariamente el mismo tipo homotópico simple, Whitehead definió el ahora llamado *grupo de Whitehead* de un complejo simplicial y demostró que este grupo es trivial sii para ese complejo simplicial las nociones de tipo homotópico coincide con la de tipo homotópico simple. El grupo de Whitehead de K depende del grupo fundamental $\pi_1(K)$. Por ejemplo, si $\pi_1(K) = 0$ ó \mathbb{Z} el grupo de Whitehead es trivial. En esos casos, las nociones de homotopía simple

y homotopía son equivalentes. En particular, si K es un complejo simplicial que es homotópicamente equivalente (como espacios topológicos) al borde de un simplex $\dot{\sigma}$, entonces $K \searrow \dot{\sigma}$.

Recordemos que dado un complejo simplicial K , se define el nervio de K como el complejo simplicial cuyos vértices son los símplexes maximales de K y sus símplexes son los conjuntos de símplexes de K que se intersecan. Es decir

$$N(K) = \{\{\tau_0, \dots, \tau_n\} : \tau_i \in K \text{ maximal y } \bigcap \tau_i \neq \emptyset\}$$

Una noción importante, que sirve para relacionar el nervio de un complejo simplicial con los colapsos es la siguiente. Esta noción fue introducida por Barmak y Minian en [BM09] (ver también [Bar09]).

Definición 1.7.9. Dado un complejo simplicial K y un vértice v , notamos $K \setminus v$ al subcomplejo pleno con conjunto de vértices $K^{(0)} \setminus \{v\}$. Si $lk(v, K)$ es un cono simplicial, es decir $lk(v, K) = wL$ para algún vértice w , decimos que hay un colapso elemental fuerte de K a $K \setminus v$ y lo notamos $K \searrow_{\text{e}} K \setminus v$. En este caso, se dice que v está dominado por w . Si un complejo simplicial T se obtiene a partir de aplicar sucesivos colapsos elementales fuertes a K se dice que K y T tienen al mismo tipo homotópico fuerte y lo notamos $K \searrow T$.

Observación 1.7.10. Observemos que si $v \in K$ entonces $K = st(v)(K \setminus v)$ y $st(v) \cap (K \setminus v) = lk(v)$.

Definición 1.7.11. Decimos que un complejo simplicial K es colapsable si colapsa a alguno de sus vértices.

Ahora repasaremos algunos resultados que nos servirán para relacionar los colapsos con los colapsos fuertes.

Lema 1.7.12. Si K es un cono simplicial aL , con L un complejo simplicial finito, entonces K es colapsable.

Demostración. La demostración será por inducción en la cantidad de símplexes de L .

Si L tiene un solo simplex entonces aL es un 1-simplex, por lo que el resultado es trivial.

Veamos el paso inductivo ahora. Sea τ una cara maximal de L , entonces $a\tau$ es cara maximal de aL y τ cara libre de $a\tau$ por lo que $aL \searrow aL \setminus \{a\tau, \tau\} = a(L \setminus \{\tau\})$. Aplicando la hipótesis inductiva a $L \setminus \{\tau\}$ se tiene el resultado. \square

Lema 1.7.13. Si K y L son subcomplejos de un complejo simplicial finito, entonces $K \cup L \searrow K$ sii $L \searrow K \cap L$.

Demostración. Lo haremos por inducción en la cantidad de símplexes de $L \setminus K$. Si $\#(L \setminus K) = 0$ no hay nada que probar pues $L \subseteq K$.

Supongamos que $L \setminus K \neq \emptyset$.

Si $L \searrow L \cap K$, existe una sucesión de colapsos elementales $L = L_0 \searrow_{\text{e}} L_1 \searrow_{\text{e}} \dots \searrow_{\text{e}} L_n = L \cap K$. Supongamos que $L_1 = L \setminus \{\sigma, \tau\}$ (con τ simplex maximal de L y σ una cara libre)

entonces en particular $\tau, \sigma \notin K$ por lo que se tiene que $L \cup K \searrow L \cup K \setminus \{\sigma, \tau\} = (L \setminus \{\sigma, \tau\}) \cup K = L_1 \cup K$. Como $L_1 \searrow L \cap K = L_1 \cap K$ aplicando la hipótesis inductiva a L_1 se tiene $L \cup K \searrow L_1 \cup K \searrow K$.

Análogamente, si $L \cup K \searrow K$ es porque existe una sucesión de colapsos elementales $L \cup K \searrow L_1 \cup K \searrow \dots \searrow L_{n-1} \cup K \searrow L_n \cup K = K$ con $L_n = K \cap L$, y con un razonamiento inductivo como el de recién, deducimos que $L \searrow L_n$. \square

Lema 1.7.14. *Si aK es un cono simplicial de un complejo simplicial finito K , entonces aK colapsa a un vértice sii $aK \searrow K$.*

Demostración. $K \searrow K_1$ con $K_1 = K \setminus \{\sigma, \tau\}$ sii τ es cara libre de σ en K sii $a\tau$ es cara libre de $a\sigma$ en aK sii $aK \searrow K \setminus \{a\sigma, a\tau\} = aK_1 \cup K$. Análogamente, si K_i y K_{i+1} son subcomplejos de K tenemos que $K_i \searrow K_{i+1}$ sii $aK_i \searrow aK_{i+1}$, pero como $a\alpha \notin K$ para todo $\alpha \in K$ tenemos que $aK_i \searrow aK_{i+1}$ sii $aK_i \cup K \searrow aK_{i+1} \cup K$.

Entonces $K \searrow K_1 \searrow \dots \searrow K_n$ con K_n un vértice de K sii $aK \searrow aK_1 \cup K \searrow \dots \searrow aK_n \cup K$ sii $aK \searrow aK_1 \cup K \searrow \dots \searrow aK_n \cup K \searrow K$ ya que K_n es cara libre de aK_n en $aK_n \cup K$. \square

Lema 1.7.15. *Sea K un complejo simplicial y $v \in K^{(0)}$. Entonces $lk(v)$ colapsa a un vértice sii $K \searrow (K \setminus v)$.*

Demostración. Por el lema 1.7.14, $lk(v)$ colapsa a un vértice sii $st(v) = vlk(v) \searrow lk(v) = st(v) \cap (K \setminus v)$, por el lema 1.7.13, esto pasa sii $K = st(v) \cup (K \setminus v) \searrow (K \setminus v)$. \square

Notemos que el lema 1.7.15 nos dice en particular un colapso elemental fuerte implica un colapso en complejos simpliciales finitos ya que $lk(v)$, al ser un cono, colapsa a un vértice por lema 1.7.12.

Recordemos ahora algunos resultados sobre colapsos fuertes que aparecen en [Bar09] y [BM09]

Proposición 1.7.16. *Sea L un subcomplejo pleno de K tal que todo vértice de K que no está en L está dominado por algún vértice de L , entonces $K \searrow L$.*

Demostración. Haremos la demostración por inducción en la cantidad de vértices de K . Sea $v \in K^{(0)} \setminus L^{(0)}$, entonces v está dominado por algún vértice de L , por lo que $K \searrow K \setminus v$. Veamos que $K \setminus v$ cae en las hipótesis de la proposición, con lo cual, por hipótesis inductiva, tendremos que $K \setminus v \searrow L$.

Sea w un vértice en $K \setminus v$ que no está en L . Entonces v esta dominado (como vértice de K) por algún vértice z de L , es decir $lk(w, K) = zT$. Pero entonces $lk(w, K \setminus v) = z(T \setminus v)$, por lo que w esta dominado (como vértice de $K \setminus v$) por z . \square

Teorema 1.7.17. *Dado un complejo simplicial finito K existe un subcomplejo L isomorfo a $N^2(K)$ tal que $K \searrow L$.*

La demostración de este teorema aparece en [Bar09] y en [BM09]. La misma consiste, a grandes rasgos, en considerar la función simplicial $f : N^2(K)^{(0)} \rightarrow K^{(0)}$ tal que $f(\Sigma) \in \bigcap \tau_i$, probar que es un isomorfismo simplicial y luego probar que el subcomplejo $L = f(N^2(K))$ de K cae en las hipótesis de la proposición anterior, por lo que $K \searrow L$.

Corolario 1.7.18. *Dado un complejo simplicial finito K existe un subcomplejo L isomorfo a $N^2(K)$ tal que $K \searrow L$.*

Proposición 1.7.19. *Un complejo simplicial finito K no admite colapsos fuertes sii K es isomorfo a $N^2(K)$.*

Demostración. Si no admite colapsos fuertes entonces K y $N^2(K)$ son isomorfos por el teorema.

Si admite algún colapso fuerte quiere decir que existe un vértice v dominado por un vértice w . En particular, todo símplex maximal que contiene a v contiene a w , por lo que se puede definir la misma f que en la demostración del teorema de manera que v no este en su imagen. Entonces $N^2(K)$ es isomorfo a un subcomplejo de K con menos vértices, por lo que no puede ser isomorfo a K . \square

El nervio termina siendo una herramienta importante porque da un método que sirve para encontrar colapsos de un complejo simplicial.

Un estudio más detallado del nervio, colapsos, expansiones y colapsos fuertes puede encontrarse en [Bar09], [BM09].

1.8. Relación entre el dual y los colapsos

Tanto los colapsos cómo el dual son métodos que sirven para calcular la homología de un complejo simplicial, por lo que es importante estudiar como se relacionan. En esta sección aplicaremos primero un colapso y luego tomaremos dual para relacionarlo con el dual original.

Notación 1.8.1. Dado un complejo simplicial K y un conjunto V tal que $K^{(0)} \subseteq V$, notaremos K^{*V} al dual de K como subcomplejo de $\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(V) \setminus \{V\}$. Dado un símplex τ notaremos τ^{cV} al símplex de $\mathcal{P}(V)$ cuyos conjunto de vértices es $V \setminus \tau^{(0)}$. Cuando $V = K^{(0)}$, como antes, notaremos simplemente K^* y τ^c .

Proposición 1.8.2. *Sea K un complejo simplicial, $K^{(0)} \subseteq V$, $\sigma, \tau \in K$ con σ cara de τ . Entonces $K \searrow K \setminus \{\sigma, \tau\}$ sii $K^{*V} \nearrow K^{*V} \cup \{\tau^{cV}, \sigma^{cV}\}$.*

Demostración. $K \searrow K \setminus \{\sigma, \tau\}$ sii $\sigma, \tau \in K$ y $\gamma \in K$ tal que $\sigma \subsetneq \gamma \implies \gamma = \tau$ sii $\sigma^{cV}, \tau^{cV} \notin K^{*V}$ y $\gamma^{cV} \in K$ tal que $\gamma^{cV} \subsetneq \sigma \implies \gamma^{cV} = \tau^{cV}$ sii $K^{*V} \nearrow K^{*V} \cup \{\tau^{cV}, \sigma^{cV}\}$. \square

Corolario 1.8.3. *Sean K y L dos complejos simpliciales tal que existe una sucesión de complejos simpliciales $K = K_0, K_1, \dots, K_n = L$ tal que $K_i \searrow K_{i+1}$ o $K_i \nearrow K_{i+1}$ (i.e. $K \frown L$), y sea V un conjunto tal que $K_i^{(0)} \subseteq V$. Entonces $K^{*V} \frown L^{*V}$.*

Demostración. Por la proposición anterior, tenemos que $K_i \searrow K_{i+1}$ sii $K_i^{*V} \nearrow K_{i+1}^{*V}$ y $K_i \nearrow K_{i+1}$ sii $K_i^{*V} \nearrow K_{i+1}^{*V}$ con lo cual el resultado es inmediato. \square

Corolario 1.8.4. *Sean K y L dos complejos simpliciales tal que $K \searrow L$. Entonces $K^* \nearrow L^{K^{(0)}}$.*

Proposición 1.8.5. *Sea σ un símplex y sea V un conjunto tal que $\sigma^{(0)} \subsetneq V$. Entonces $\sigma^{*V} \frown \dot{\tau}$ donde τ es un símplex.*

Demostración. Sea γ un símplex con vértices $V \setminus \sigma^{(0)}$. Supongamos γ es un 0-símplex. Entonces $\beta \in \dot{\sigma}^{*V} \Leftrightarrow \beta^{cV} \notin \dot{\sigma}$ sii $\gamma \subseteq \beta^{cV}$ o $\sigma \subseteq \beta^{cV} \Leftrightarrow \beta \subseteq \gamma^{cV} = \sigma$ o $\beta \subseteq \sigma^{cV} = \gamma \Leftrightarrow \beta \in \gamma \cup \sigma$. Esto prueba que en el caso γ un 0-símplex $\dot{\sigma}^{*V} = \gamma \cup \sigma$ y como σ es un símplex colapsa a un punto, es decir $\gamma \cup \sigma$ colapsa a $\dot{\tau}$ con τ un 0-símplex.

Supongamos $\#\gamma^{(0)} > 1$, entonces $\beta \in \dot{\sigma}^{*V} \Leftrightarrow \beta^{cV} \notin \dot{\sigma} \Leftrightarrow \gamma^{(0)} \cap (\beta^{cV})^{(0)} \neq \emptyset$ o $\sigma \subseteq \beta^{cV} \Leftrightarrow \beta^{(0)} \cup (\gamma^{cV})^{(0)} \neq V$ (recordemos que $\gamma^{cV} = \sigma$) o $\beta \subseteq \sigma^{*V} = \gamma \Leftrightarrow \beta \in \dot{\sigma} \cup \sigma$. Esto demuestra que $\dot{\sigma}^{*V} = \dot{\sigma} \cup \sigma$ que es homotópico al borde de un $(n+1)$ -símplex con n la dimensión de σ y como mencionamos en la observación 1.7.8 esto es equivalente a que tenga el mismo tipo homotópico simple del borde de un $(n+1)$ -símplex. \square

Corolario 1.8.6. *Sea K un complejo simplicial y τ un símplex tal que $K \searrow \dot{\tau}$ entonces $K^* \searrow \dot{\sigma}$ donde σ es un símplex.*

Demostración. Como $K \searrow \dot{\tau}$ entonces K no es contráctil, por lo que no es un símplex. Dado que τ visto como complejo simplicial es el único complejo simplicial con más símplexes que $\dot{\tau}$ y con los mismos vértices, se tiene que $\tau^{(0)} \subsetneq K^{(0)}$. Por el corolario 1.8.4 tenemos que $K^* \xrightarrow{e} \dot{\tau}^{*K^{(0)}}$ y por la proposición 1.8.5 $\dot{\tau}^{*K^{(0)}} \searrow \dot{\sigma}$ con σ un símplex. \square

Capítulo 2

Espacios topológicos finitos y posets

En este capítulo repasaremos la teoría de los espacios topológicos finitos (*etf*) T_0 y su relación con los conjuntos parcialmente ordenados (posets). Empezaremos el capítulo con una sección donde se dará una relación entre los espacios topológicos finitos y los posets, mas concretamente mostraremos que existe una correspondencia 1-1 entre los espacios topológicos finitos y los posets. En la sección dos estudiaremos las funciones continuas entre espacios topológicos finitos T_0 y caracterizaremos las funciones homotópicas. Finalmente, en la ultima sección, repasaremos dos aplicaciones que nos permitirán relacionar a los espacios topológicos finitos con los complejos simpliciales, con lo cual, podremos utilizar las herramientas estudiadas en el capítulo anterior (como la dualidad de Alexander) en los espacios topológicos finitos.

Las principales referencias para este capítulo son [Bar09], [BM08a], [BM08b], [McC66] y [Sto66].

2.1. Relación entre los espacios topológicos finitos y los posets

En esta sección daremos una breve descripción de los *etf* y las llamadas bases de abiertos minimales, con lo cual podremos encontrar una relación entre los *etf* T_0 y los posets. Esta relación es de vital importancia porque nos va a permitir, utilizando herramientas que presentaremos en la última sección de este capítulo, estudiar los *etf* mediante complejos simpliciales finitos y utilizar los resultados conocidos para los mismos para encontrar resultados análogos en *etf*.

Definición 2.1.1. Dado un espacio topológico finito X , para cada $x \in X$ se define U_x como el menor abierto que contiene a x , es decir $U_x = \bigcap_{\substack{V \text{ abierto} \\ x \in V}} V$.

Observemos que estos conjuntos efectivamente son abiertos dado que al ser X un *etf* es un A -espacio, es decir, la intersección arbitraria de abiertos es abierto.

Notación 2.1.2. Si queremos especificar el espacio ambiente notaremos U_x^X al abierto minimal de x en X .

Observación 2.1.3. Notemos que el conjunto de los abiertos minimales son base de la topología ya que dado un punto $x \in X$ y un entorno abierto V del punto x , por definición $U_x \subseteq V$.

Proposición 2.1.4. *La única base minimal (en el sentido de la inclusión) de un etf es la dada por los abiertos minimales.*

Demostración. Sea X es etf . Como posee finitos abiertos, es claro que su topología admite una base minimal \mathcal{V} . Como sabemos que $\{U_x : x \in X\}$ es una base de X , para probar el lema bastará probar mostrar que $U_x \in \mathcal{V}$ cualquiera sea $x \in X$.

Sea $x \in X$. Como el abierto U_x contiene a x , existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V \subseteq U_x$, y como U_x es el abierto minimal de X que contiene a x debe ser, de hecho $U_x = V$. Así $U_x \in \mathcal{V}$ como queríamos. \square

Definición 2.1.5. Dado un conjunto X , un orden en X es una relación antisimétrica, reflexiva y transitiva.

Definición 2.1.6. Un conjunto con un orden es un poset.

Un poset suele representarse gráficamente con un digrafo, llamado su diagrama de Hasse, donde los vértices son los elementos del poset y las aristas los pares ordenados (x, y) tales que $x < y$ y no existe z que cumpla $x < z < y$.

Recordemos que un digrafo se puede graficar con flechas para indicar las direcciones de las aristas o simplemente con líneas si todas las direcciones son ascendentes. Es decir, si y esta por encima de x la arista será (x, y) y no al contrario (i.e. $x < y$).

Ejemplo 2.1.7. En la figura 2.1 aparece el diagrama de Hasse del poset $\{2, 3, 4, 6, 12, 24\}$, donde $a < b$ sii a divide a b .

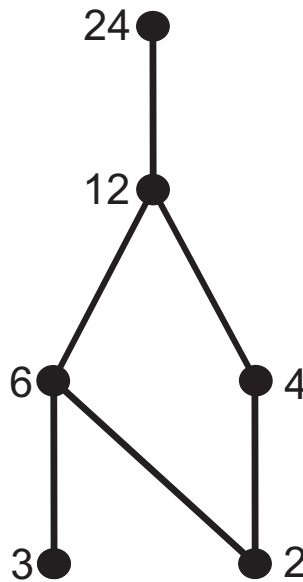


Figura 2.1: Diagramas de Hasse

Definición 2.1.8. Un subposet V de un poset X es una cadena si el orden de X restringido a V es un orden total en V , es decir, si todos los elementos de V son comparables.

Notación 2.1.9. Dado un poset X notamos X^{op} al poset cuyos elementos son los elementos de X y $x < y$ en X^{op} sii $x > y$ en X .

Observación 2.1.10. Notemos que $V \subseteq X$ es una cadena sii es una cadena con el orden opuesto, es decir, sii es una cadena en X^{op} .

El siguiente teorema nos da la relación que buscamos entre los *etf* T_0 y los posets finitos.

Teorema 2.1.11. *Dado un conjunto finito X , las topologías T_0 sobre X están en correspondencia 1-1 con los órdenes en X .*

La demostración completa se encuentra en [Bar06]. A un orden \leq en X se le hace corresponder la topología cuyos abiertos minimales son $U_x = \{y \in X : y \leq x\}$. Recíprocamente, dada una topología se define el orden $x \leq y$ sii $U_x \subseteq U_y$ o, equivalentemente, $x \in U_y$.

Observación 2.1.12. Si X es un *etf* e $Y \subseteq X$ esta dotado con la topología de subespacio, entonces $U_x^Y = U_x^X \cap Y$. En otras palabras, el orden inducido por una topología subespacio coincide con el orden como subposet.

Observación 2.1.13. Sean X e Y *etf*, entonces si $x \in X$ se tiene que $U_x^X \amalg Y = U_x^X$.

Corolario 2.1.14. *El orden inducido en $X \amalg Y$ es el siguiente:*

Los elementos de X no son comparables con los de Y .

El orden restringido a X coincide con el inducido por la topología de X .

El orden restringido a Y coincide con el inducido por la topología de Y .

Observación 2.1.15. En la topología producto $U_{(x,y)} = U_x \times U_y$ o equivalentemente un elemento es menor que (x,y) sii su primer coordenada es menor que x y su segunda coordenada es menor que y . Es decir $(x,y) \leq (w,z)$ sii $x \leq w$ con el orden inducido por la topología de X e $y \leq z$ con el orden inducido por la topología de Y .

2.2. Funciones entre espacios topológicos finitos T_0 continuas y homotópicas

En esta sección daremos condiciones necesarias y suficientes para que una función $f : X \rightarrow Y$, con X e Y posets finitos, sea continua. Los resultados de esta sección nos serán de utilidad para encontrar, a partir de un poset finito, otro con el mismo tipo homotópico débil, con el que nos sea más fácil trabajar.

Proposición 2.2.1. *Una función $f : X \rightarrow Y$ entre posets es continua sii f preserva orden.*

Demostración. Para probar la necesidad de la condición, sean $x, v \in X$ tales que $x \leq v$, mostraremos que $f(x) \leq f(v)$. Como $v \in f^{-1}(U_{f(v)})$ y $f^{-1}(U_{f(v)})$ es abierto (porque f

es continua), se tiene $x \in U_v \subseteq f^{-1}(U_{f(v)})$, de manera que, $f(x) \in U_{f(v)}$ y, entonces $f(x) \leq f(v)$.

Recíprocamente, supongamos que f preserva el orden, sea $x \in X$ y veamos que f es continua en x ; para ello basta mostrar que $f(U_x) \subseteq U_{f(x)}$ ya que $\{U_{f(x)}\}$ es una base de entornos de $f(x)$.

Si $z \leq x$, la hipótesis hecha sobre f implica que $f(z) \leq f(x)$ y, entonces, que $f(z) \in U_{f(x)}$. Así $f(U_x) \subseteq U_{f(x)}$. □

Corolario 2.2.2. $f : X \rightarrow Y$ es continua sii $f : X^{op} \rightarrow Y^{op}$ lo es.

Ahora veremos condiciones necesarias y suficientes para que dos funciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$, donde X e Y son posets finitos, sean homotópicas.

Recordemos que dos funciones $f, g : X \rightarrow Y$ son homotópicas, si existe una función continua (llamada homotopía) $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Definición 2.2.3. Dados dos espacios topológicos X e Y , se define el espacio $\mathcal{C}(X, Y)$ como el espacio de funciones continuas con dominio X y codominio Y . La topología usual de este espacio es la compacto-abierta, que esta dada por la base cuyos elementos son de la forma $\{f \in \mathcal{C}(X, Y) : f(K) \subseteq V\}$ donde K es un compacto de X fijo y V es un abierto de Y fijo.

Definición 2.2.4. Dados dos espacios topológicos X e Y , se dice que $\mathcal{C}(X, Y)$ cumple la ley exponencial bajo una topología τ si para todo espacio topológico Z se tiene que

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{C}(Z \times X, Y) &\rightarrow \mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X, Y)) \\ \psi(g)(z)(X) &= g(z, x) \\ \varphi : \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(X, Y)) &\rightarrow \mathcal{C}(Z \times X, Y) \\ \varphi(h)(z, x) &= h(z)(x) \end{aligned}$$

son una inversa de la otra.

Observación 2.2.5. Observemos que si $\mathcal{C}(X, Y)$ cumple la ley exponencial, que dos funciones $f, g : X \rightarrow Y$ sean homotópicas es equivalente a que exista una función $\alpha : I \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ continua tal que $\alpha(0) = f$ y $\alpha(1) = g$. Ya que dada H una homotopía entre f y g se tiene que $\alpha = \psi(H)$ cumple $\alpha(0) = f$ y $\alpha(1) = g$. Recíprocamente, dada α con esta propiedad, si considero $H = \varphi(\alpha)$ obtengo una homotopía entre f y g . En otras palabras, f y g son homotópicas sii estan en la misma componente arcoconexa de $\mathcal{C}(X, Y)$.

Una condición suficiente para que $\mathcal{C}(X, Y)$ cumpla la ley exponencial bajo la topología compacto-abierta es que cada punto de X tenga una base de entornos compactos. En consecuencia, y dado que en un espacio topológico finito cualquier subespacio es compacto (en particular los abiertos lo son), se tiene que $\mathcal{C}(X, Y)$ cumple la ley exponencial para X e Y etf.

Para estudiar las homotopías necesitaremos primero estudiar el espacio de funciones continuas de dominio X y codominio Y , donde X e Y son posets finitos.

Recordemos que una base para la topología compacto-abierta es la dada por los conjuntos de la forma $S(K, V) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) : f(K) \subseteq V\}$ donde K es un compacto de X y V es un abierto de Y .

Observación 2.2.6. Notemos que $\mathcal{C}(X, Y)$ es un *etf* y que la topología compacto-abierta lo hace un espacio T_0 . En efecto, si $f \neq g$ entonces el abierto $\bigcap_{x \in X} S(\{x\}, U_{g(X)})$ no contiene a

f o el abierto $\bigcap_{x \in X} S(\{x\}, U_{f(X)})$ no contiene a g ya que $f \in \bigcap_{x \in X} S(\{x\}, U_{g(X)}) \implies f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$ y $g \in \bigcap_{x \in X} S(\{x\}, U_{f(X)}) \implies g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$.

Proposición 2.2.7. Sean X e Y posets finitos. El orden inducido por la topología compacto-abierta en $\mathcal{C}(X, Y)$ es el siguiente

$$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$$

Demostración. Supongamos que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, entonces $f(x) \in U_{g(x)}$ por lo que $f \in S(\{x\}, U_{g(X)})$ para todo $x \in X \implies f \in \bigcap_{x \in X} S(\{x\}, U_{g(X)})$. Afirmamos que

$$\bigcap_{x \in X} S(\{x\}, U_{g(X)}) = U_g^{\mathcal{C}(X, Y)} \text{ con lo cual } f \leq g.$$

Dados $K \subseteq X$ compacto y $V \subseteq Y$ abierto tal que $g \in S(K, V)$ consideremos el abierto $\bigcap_{x \in K} S(\{x\}, U_{g(X)})$. Como V es abierto, $g(x) \in V$ y $U_{g(x)}$ es un abierto minimal, se

tiene que $U_{g(x)} \subseteq V$ por lo que $\bigcap_{x \in K} S(\{x\}, U_{g(X)}) \subseteq S(K, V)$. Pero $\bigcap_{x \in X} S(\{x\}, U_{g(X)}) \subseteq$

$\bigcap_{x \in K} S(\{x\}, U_{g(X)})$, con lo cual mostramos que todos los abiertos de la base que contienen

a g contienen a $\bigcap_{x \in X} S(\{x\}, U_{g(X)})$ por lo que es el abierto minimal de g .

Veamos ahora que si $f \leq g$ entonces $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$.

Si $f \leq g$ entonces $f \in U_g^{\mathcal{C}(X, Y)} = \bigcap_{x \in X} S(\{x\}, U_{g(X)})$, en particular $f(x) \in U_{g(X)}$ para todo $x \in X$ o equivalentemente $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$. □

Demostraremos ahora dos lemas que aparecen en [Bar06] necesarios para demostrar la caracterización de funciones homotópicas.

Lema 2.2.8. Sea X un poset finito y sean $x, y \in X$ tales que $x \leq y$. Entonces la función

$$f : I \rightarrow X$$

$$f(t) = \begin{cases} x & \text{si } t < 1 \\ y & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

es continua. En particular x e y están en la misma componente arcoconexa.

Demostración. Veamos que la preimagen de un abierto es abierto. Sea $U \subseteq X$ abierto.

Si $x, y \notin U$ entonces $f^{-1}(U) = \emptyset$.

Si $x, y \in U$ entonces $f^{-1}(U) = I$.

Si $y \in U$ entonces $x \in U_y \subseteq U$ por lo que falta ver el caso $x \in U, y \notin U$. En este caso $f^{-1}(U) = [0, 1)$. \square

Lema 2.2.9. *Sean $x, y \in X$ con X un poset finito, entonces x e y están en la misma componente arcoconexa sii existe una sucesión $x = w_1, \dots, w_n = y$ con w_i y w_{i+1} comparables. En otras palabras, las componentes arcoconexas de un poset coinciden con las componentes arcoconexas de su diagrama de Hasse.*

Demostración. Supongamos existe una tal sucesión. Por el lema 2.2.8, w_i está en la misma componente arcoconexa que w_{i+1} , luego x está en la misma componente arcoconexa que y .

Supongamos ahora x e y están en la misma componente arcoconexa. Sea A el conjunto de los $z \in X$ que conjunto con x cumplen la proposición del lema, lo que quiero ver es que $y \in A$. Como x e y están en la misma componente arcoconexa, en particular están en la misma componente conexa y basta ver que A es abierto, cerrado y no vacío, entonces, al estar contenido en la componente conexa de x (por la primer parte de la demostración) coincide con ella y, en particular, $y \in A$.

Dado que $x \in A$, A no es vacío.

Si $z \in A$ por el lema 2.2.8 $U_z \subseteq A$, por lo que A es abierto. Análogamente si $z \in A$ entonces $\{w \in X : z \leq w\} \subseteq A$, es decir, A es abierto en X^{op} , o equivalentemente, es cerrado en X . Por lo que sigue el resultado deseado. \square

Teorema 2.2.10. *Dos funciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ son homotópicas sii existe una sucesión de funciones $h_1, \dots, h_n : X \rightarrow Y$ tal que h_i y h_{i+1} son comparables con la topología compacto-abierta (equivalentemente, una es mayor que la otra puntualmente), $f = h_1$ y $g = h_n$.*

Demostración. Queremos probar que existe una función continua $\alpha : I \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$, tal que $\alpha(0) = f$ y $\alpha(1) = g$. Esto es equivalente a decir que f y g están en la misma componente arcoconexa de $\mathcal{C}(X, Y)$, pero por lema 2.2.8 esto sucede sii existe la sucesión deseada. \square

Corolario 2.2.11. *Un poset con máximo, entonces es contráctil.*

Demostración. Por el teorema tenemos que $\max(X) \subseteq X$ es un *rdf*, por lo que el resultado vale. \square

2.3. Las funciones \mathcal{K} y \mathcal{X} de McCord

En esta sección daremos dos aplicaciones, \mathcal{K} y \mathcal{X} introducidas por McCord en el paper [McC66]. Estas aplicaciones son de mucha utilidad para relacionar posets finitos con complejos simpliciales finitos conservando el tipo homotópico débil, en particular conservando la homología, con lo cual podremos traducir y utilizar resultados de los complejos simpliciales, como la dualidad de Alexander, en posets finitos.

Recordemos que una función entre espacios topológicos $f : X \rightarrow Y$ se dice una equivalencia homotópica débil si induce isomorfismos $f_* : \pi_k(X, x) \rightarrow \pi_k(Y, f(x))$ entre los k grupos de homotopía para todo $k \geq 0$ y para todo $x \in X$. Dos espacios topológicos X e Y tienen el mismo tipo homotópico débil si existe una sucesión de espacios topológicos $X = X_1, \dots, X_n = Y$ tal que para todo $i \leq n - 1$ existe una equivalencia homotópica débil $f : X_i \rightarrow X_{i+1}$ o existe una equivalencia homotópica débil $f : X_{i+1} \rightarrow X_i$.

Definición 2.3.1. Dado un poset finito X , definimos el complejo simplicial $\mathcal{K}(X)$ asociado a X como el complejo simplicial cuyos símlices son las cadenas de X .

Ejemplo 2.3.2. Sean el poset X y complejo simplicial K los de la figura 2.2. Es inmediato que $K = \mathcal{K}(X)$.

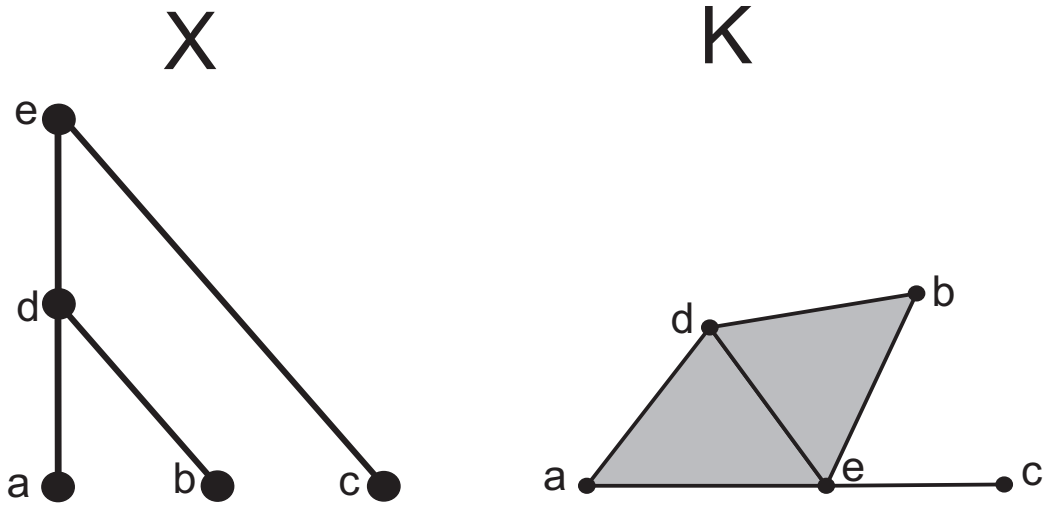


Figura 2.2: $\mathcal{K}(X)$

Definición 2.3.3. Dada una función entre posets finitos $f : X \rightarrow Y$ que preserve el orden se define el morfismo simplicial

$$\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$$

$$\mathcal{K}(f)(x) = f(x)$$

Efectivamente es simplicial, ya que al preservar el orden f envía cadenas (símlices) en cadenas (símlices).

Dado un poset ya le asociamos un complejo simplicial. Definiremos ahora una equivalencia homotopía débil entre ambos para así poder trabajar con los grupos de homotopía de uno u otro indistintamente.

Definición 2.3.4. Dado un poset finito se define la función \mathcal{K} de *McCord* de la siguiente manera

$$\mu_X : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow X$$

$$\mu(s) = x_0$$

Donde si $s = \sum_{x \in V} t_{sx}x$ con V un símplex de $\mathcal{K}(X)$, $\sum t_{sx} = 1$ y $0 < t_{sx}$ definimos $\mu(s) = \min\{x : x \in V\}$. A la cadena V se la llama el soporte de s y se lo nota $\text{sop}(s)$.

Para probar que la función \mathcal{K} de *McCord* es la equivalencia homotópica débil que buscamos se utiliza el siguiente teorema cuya demostración aparece en [McC67].

Teorema 2.3.5. *Sean una función continua $f : X \rightarrow Y$, sea \mathcal{U} un cubrimiento de Y tal que la intersección de dos elementos de \mathcal{U} es la unión de elementos de \mathcal{U} y supongamos que las funciones*

$$f : f^{-1}(U) \rightarrow U$$

son equivalencias homotópicas débiles para todo $U \in \mathcal{U}$, entonces $f : X \rightarrow Y$ también lo es.

Teorema 2.3.6. *Dado un poset finito la función \mathcal{K} de *McCord* es una equivalencia homotópica débil.*

La demostración consiste en considerar el cubrimiento de X formado por los abiertos minimales U_x que, por el corolario 2.2.11, son contráctiles ya que tienen máximo. Después ver que $\mu_X^{-1}(U_x)$ son abiertos contráctiles con lo cual μ_X será continua y la función $\mu_X : \mu_X^{-1}(U_x) \rightarrow U_x$ será una equivalencia homotópica débil para todo $x \in X$, entonces, por el teorema 2.3.5, $\mu_X : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow X$ también lo será. La demostración detallada aparece en [Bar09].

Corolario 2.3.7. *Dado un poset X , el poset con el orden opuesto X^{op} tiene el mismo tipo homotópico débil.*

Demostración. Como $\mathcal{K}(X)$ es el conjunto de los subconjuntos de X que son cadenas (en X) se tiene que $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X^{op})$, pero, por el teorema anterior, el tipo homotópico débil de $\mathcal{K}(X)$ es el de X y el de $\mathcal{K}(X^{op})$ es el de X^{op} . \square

Dada una función continua $f : X \rightarrow Y$ con X e Y posets finitos, induce una función f_* a nivel homología. Análogamente, la función continua $\mathcal{K}(f)$ induce una función a nivel homología. Como los grupos de homología de X son los de $\mathcal{K}(X)$ y los de Y son los de $\mathcal{K}(Y)$ una pregunta natural es si hay relación entre f_* y $|\mathcal{K}(f)|_*$. La siguiente proposición da respuesta a esta pregunta.

Proposición 2.3.8. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua con X e Y posets, entonces $\mu_Y |\mathcal{K}(f)| = f \mu_X$, es decir, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{K}(X)| & \xrightarrow{|\mathcal{K}(f)|} & |\mathcal{K}(Y)| \\ \downarrow \mu_X & & \downarrow \mu_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Al ser μ_X y μ_Y equivalencias homotópicas débiles, la proposición anterior en particular dice que las función $|\mathcal{K}(f)|_*$ es la función f_* compuesta con isomorfismos.

Demostración. Como f es continua preserva orden, por lo que se tiene que

$$f\mu_X(x) = f(\min(\text{sop}(x))) = \min(f(\text{sop}(x))) = \min(\text{sop}(|\mathcal{K}(f)|)(x)) = \mu_Y|\mathcal{K}(f)|(x)$$

□

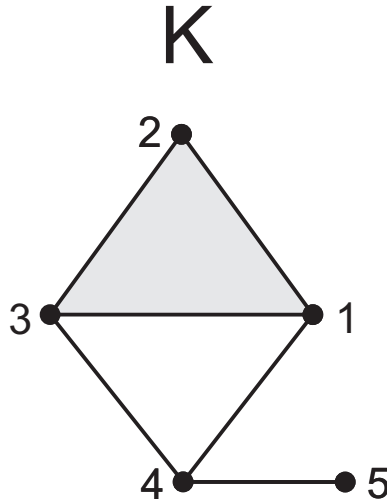
Corolario 2.3.9. Si $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica débil entre posets finitos, entonces $|\mathcal{K}(f)| : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow |\mathcal{K}(Y)|$ también lo es.

Observemos que como $\mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{K}(Y)$ son CW-complejos, $|\mathcal{K}(f)|$ es una equivalencia homotópica por el teorema de Whitehead (ver [Hat02]).

Dado un poset finito encontramos una forma de asociarle un complejo simplicial. Ahora veamos como a un complejo simplicial asociarle un poset vía la función \mathcal{X} y estudiemos esta función.

Definición 2.3.10. Dado un complejo simplicial finito K se define el poset asociado $\mathcal{X}(K)$ como el poset cuyos elementos son los símlices de K y el orden parcial es el inducido por la inclusión, es decir $\sigma \leq \tau$ si $\sigma \subseteq \tau$.

Ejemplo 2.3.11. En la figura 2.3, el diagrama de Hasse del poset X corresponde al del poset asociado al complejo simplicial K .



Observemos que dado un complejo simplicial K , entonces el complejo simplicial $\mathcal{K}\mathcal{X}(K)$ tiene como vértices los símlices de K y sus símlices son cadenas de símlices ordenados totalmente por la inclusión, en otras palabras, es la subdivisión baricéntrica de K . De manera análoga, dado un poset X , se define su subdivisión baricéntrica como el poset cuyos elementos son cadenas de X y el orden es el inducido por la inclusión (i.e. $\mathcal{X}\mathcal{K}(X)$).

Definición 2.3.12. Identificando a $|\mathcal{K}\mathcal{X}(K)|$ con $|K|$ definimos la \mathcal{X} función de *McCord* de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mu_K : |K| &\rightarrow \mathcal{X}(K) \\ \mu_K &= \mu_{\mathcal{X}(K)} \end{aligned}$$

X

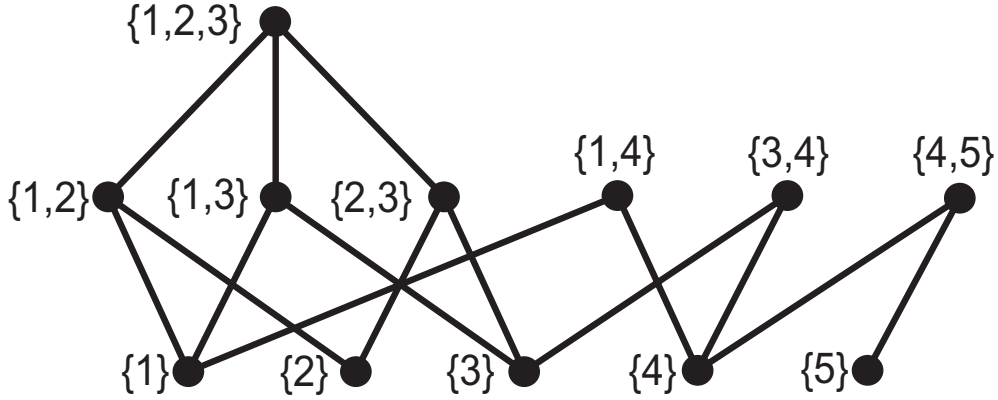


Figura 2.3: $\mathcal{X}(K)$

Por el teorema 2.3.6 sabemos que $\mu_{\mathcal{X}(K)}$ es una equivalencia homotópica débil, por lo que la función \mathcal{K} de *McCord* también lo es.

Definición 2.3.13. Dada una función simplicial $f : K \rightarrow L$ definimos la función

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(f) : \mathcal{X}(K) &\rightarrow \mathcal{X}(L) \\ \mathcal{X}(f)(\tau) &= f(\tau) \end{aligned}$$

La proposición 1.3.9 nos dice que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} |K| & \xrightarrow{|f|} & |L| \\ \downarrow id & & \downarrow id \\ |sd(K)| & \xrightarrow{|sd(f)|} & |sd(L)| \end{array}$$

conmuta salvo homotopía y por la proposición tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{K}\mathcal{X}(K)| & \xrightarrow{|\mathcal{K}\mathcal{X}(f)|} & |\mathcal{K}\mathcal{X}(L)| \\ \downarrow \mu_{\mathcal{X}(K)} & & \downarrow \mu_{\mathcal{X}(L)} \\ \mathcal{X}(K) & \xrightarrow{\mathcal{X}(f)} & \mathcal{X}(L) \end{array}$$

conmuta. Como $|\mathcal{K}\mathcal{X}(K)| = |sd(K)|$, $|\mathcal{K}\mathcal{X}(L)| = |sd(L)|$, $\mathcal{K}\mathcal{X}(f) = |sd(f)|$ obtenemos que el diagrama.

$$\begin{array}{ccc} |K| & \xrightarrow{|f|} & |L| \\ \downarrow \mu_{\mathcal{X}(K)} & & \downarrow \mu_{\mathcal{X}(L)} \\ \mathcal{X}(K) & \xrightarrow{\mathcal{X}(f)} & \mathcal{X}(L) \end{array}$$

conmuta salvo homotopía.

Corolario 2.3.14. *Dada una función simplicial $f : K \rightarrow L$ si $|f| : |K| \rightarrow |L|$ es una equivalencia homotópica (débil), entonces $\mathcal{X}(f)$ también es equivalencia homotópica débil.*

Capítulo 3

Métodos de reducción de puntos para posets

En este capítulo estudiaremos tres clases de puntos particulares de los posets, los beat points, los weak beat points y γ -points. Veremos la relación que hay entre un poset y el subposet que se obtiene a partir de sacar un punto de alguna de esta clase. El capítulo esta dividido en dos secciones, una de beat points y otra de weak beat points y γ -points.

Las principales referencias para este capítulo son [Bar06], [Bar09], [BM08a], [BM08b] y [Sto66].

3.1. Beat points

Esta primer sección del capítulo esta dedicada al estudio de los beat points. Los beat points fueron un concepto originalmente introducidos por Stong en [Sto66]. También estudiaremos la relación entre el core de un poset y el poset original.

Notación 3.1.1. Si X es un poset y $x, y \in X$, notamos $x \prec y$ si $x < y$ y no existe z tal que $x < z < y$.

Definición 3.1.2. Dado un poset X y $x \in X$ se dice que x es un up beat point (*ubp*) si existe un único $y \in X$ tal que $x \prec y$. Análogamente, si $\exists! z \in X$ tal que $z \prec x$ se dice un down beat point (*dwb*). Si x es un *ubp* o un *dwb* diremos que x es un beat point (*bp*).

Ejemplo 3.1.3. Consiremos los posets X e Y de la figura 3.1. Claramente X no tiene *bp* mientras que en Y , z es tanto *ubp* como *dwb* y w es un *ubp* (y no son los únicos).

Es muy fácil detectar en un diagrama de Hasse los *bp*: x es un *ubp* si tiene solamente un vértice inmediatamente arriba (es decir, una sola arista sale de x hacia arriba) y es un *dwb* si tiene un solo vértice inmediatamente abajo (una sola arista sale de x hacia abajo).

Definición 3.1.4. Un poset X se dice minimal si no tiene *bp*.

Definición 3.1.5. Dado dos posets X e Y , Y se dice un core de X si es un *rdf* de X y es minimal.

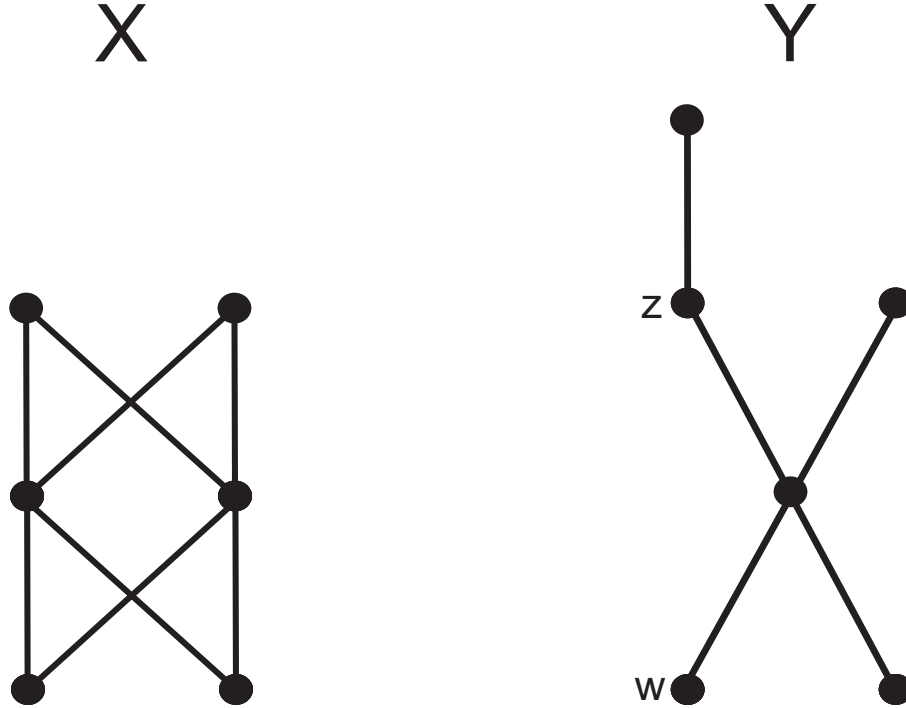


Figura 3.1: Beat points

Los siguiente resultados sobre cores y espacios minimales son citados de [Bar06].

Lema 3.1.6. *Sea X un poset y $x \in X$ un dbt, entonces $Y = X \setminus \{x\} \subseteq X$ es un rdf.*

Demostración. Sea z el único elemento tal que $z \prec x$. Definimos la retracción

$$r : X \rightarrow Y$$

$$r(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \neq x \\ z & \text{si } y = x \end{cases}$$

Veamos que r es continua, es decir, que preserva el orden. Supongamos que $v < w$. Si $v \neq x \neq w$ entonces $r(v) = v < w = r(w)$. Si $v = x$ entonces $x = v < w$ por lo que $r(v) = z < x < w = r(w)$. Si $w = x$ entonces $v < x$ por lo que $r(v) = v \leq z = r(w)$.

Es claro que $ri = id_Y$ donde $i : Y \rightarrow X$ es la inclusión. Además, como $r(y) \leq y$ (vale el igual si $y \neq x$ y el menor estricto en otro caso) tenemos que $ir(y) = r(y) \leq y = id_X(y)$, entonces, por el teorema 2.2, tenemos que $ir \simeq id_X$, con lo cual r es efectivamente el retracts buscado. \square

Lema 3.1.7. *Sea X un poset y $x \in X$ un ubt, entonces $Y = X \setminus \{x\} \subseteq X$ es un rdf.*

Demostración. Consideremos la función r de la demostración anterior. Solo necesitamos ver que es continua ($ir \simeq id_X$ ya fue probado en la demostración anterior). Pero la función

$r : X \rightarrow Y$ es continua sii $r : X^{op} \rightarrow Y^{op}$ lo es. Pero $x \in X$ es un *ubt* sii $x \in X^{op}$ es un *dbp*. En otras palabras, considerando el orden opuesto estamos en las condiciones del lema anterior, por lo que r es continua. \square

Los lemas 3.1.6 y 3.1.7 nos dicen que si $x \in X$ es un *bp*, entonces $X \setminus \{x\} \subseteq X$ es un *rdf*. En particular se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.1.8. *Todo poset finito tiene un core.*

Demostración. Haremos la demostración por inducción en el cardinal de X . Si $\#X = 1$ entonces X no tiene *bp* por lo que X es un core de X .

Mostraremos ahora el paso inductivo. Si X no tiene *bp* entonces X es el core de X . Supongamos que $x \in X$ es un *bp*, luego por los lemas anteriores $X \setminus \{x\}$ es un *rdf* de X . Por hipótesis inductiva existe Y un *rdf* de $X \setminus \{x\}$ sin *bp* (i.e. Y es core de $X \setminus \{x\}$). Pero $X \setminus \{x\}$ es *rdf* de X , luego Y es *rdf* de X , por lo que Y es un core de X . \square

Ahora que tenemos el resultado de existencia de core, veremos que es único salvo homeomorfismo.

Teorema 3.1.9. *Dada una función continua $f : X \rightarrow X$ con X un poset finito minimal. Entonces $f \simeq id \Leftrightarrow f = id$.*

Demostración. Como $f \simeq id$ sii existe una cadena de funciones $f = h_0, \dots, h_n = id$ con h_i y h_{i+1} comparables, basta considerar el caso f e id comparables.

Supongamos $f \leq id$ (el otro caso es análogo). Dado $x \in X$ veamos que $f(x) = x$. Si x es minimal, es decir, no existen elementos menores a él en X , tenemos $f(x) \leq x$ así que $f(x) = x$. Supongamos ahora que $f(y) = y$ para todo $y < x$ y supongamos que $x \neq f(x)$, entonces se tiene $y = f(y) \leq f(x) < x$ para todo $y < x$ por lo que x será un *dbp*, absurdo. \square

Corolario 3.1.10. *Sea $g : X \rightarrow Y$ una función entre posets finitos minimales. Entonces g es una equivalencia homotópica sii g es un homeomorfismo.*

Demostración. g es una equivalencia homotópica sii existe $f : Y \rightarrow X$ continua tal que $fg \simeq id$ y $gf \simeq id$, pero, por el teorema 3.1.9, esto sucede sii $fg = id$ y $gf = id$. \square

Corolario 3.1.11. *El core de un poset finito es único salvo homeomorfismos.*

Demostración. Dos cores distintos son homotópicamente equivalente al espacio original por ser *rdf*, luego son homotópicamente equivalentes entre si. \square

Corolario 3.1.12. *Dos posets finitos son homotópicamente equivalente sii sus cores son homeomorfos.*

Demostración. Dos posets finitos son homotópicamente equivalentes sii sus cores lo son (ya que son *rdf* de los mismos), pero, por el corolario anterior, esto sucede sii sus cores son homeomorfos. \square

Definición 3.1.13. Dados dos posets finitos X e Y se define el poset $X \oplus Y$ como el poset cuyo conjunto subyacente es la unión disjunta de los conjuntos X e Y y cuyo orden restringido a X y a Y son los ordenes originales de X e Y y tal que $x < y$ para todo $x \in X, y \in Y$. Si se piensa como espacios topológicos, la topología de $X \oplus Y$ tiene como abiertos a los abiertos de X y a los conjuntos de la forma $V \cup X$ con V un abierto de Y .

Ejemplo 3.1.14. En la figura 3.2 aparece un ejemplo de $X \oplus Y$.

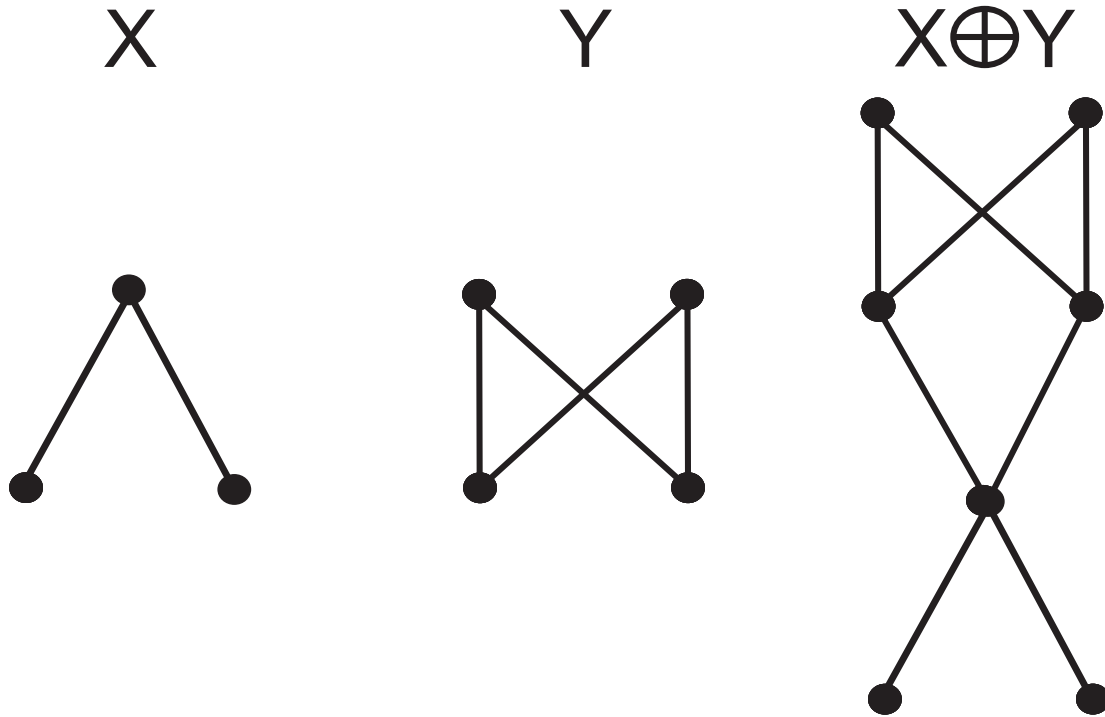


Figura 3.2: $X \oplus Y$

Proposición 3.1.15. *Dados dos posets finitos X e Y entonces $X \oplus Y$ es contráctil sii X es contráctil o Y es contráctil.*

Demostración. Haremos la demostración por inducción en $\#(X \oplus Y)$. Si $\#(X \oplus Y) = 2$ tenemos que $X \oplus Y, X$ e Y son contráctiles por lo que no hay nada que demostrar.

Probemos ahora el paso inductivo. Supongamos $X \oplus Y$ es contráctil. Entonces existe $x \in X \oplus Y$ un bp . Probemos que X o Y son contráctiles. Supongamos que X no tiene máximo ni Y tiene mínimo (si alguno tuviera son contráctiles por lo que no hay nada que probar en este caso). Luego x es bp de X o es bp de Y (por ser bp de $X \oplus Y$ y por X no tener máximo e Y no tener mínimo). Supongamos que x es bp de X (el caso x bp de Y es idéntico). Como $X \oplus Y$ es contráctil, $X \oplus Y \setminus \{x\} = (X \setminus \{x\}) \oplus Y$ es contráctil. Luego, por hipótesis inductiva, $X \setminus \{x\}$ es contráctil o Y es contráctil, pero si $X \setminus \{x\}$ es contráctil X lo es.

Supongamos ahora que X es contráctil. Entonces $\exists x \in X$ *bp*. Luego $X \setminus \{x\}$ es contráctil. Por la hipótesis inductiva $(X \setminus \{x\}) \oplus Y = X \oplus Y \setminus \{x\}$ es contráctil. Como x es *bp* de X también es *bp* de $X \oplus Y$ y como $X \oplus Y \setminus \{x\}$ es contráctil, concluimos que $X \oplus Y$ es contráctil.

En el caso en el que Y es contráctil, se prueba de manera análoga que $X \oplus Y$ lo es. \square

3.2. Weak beat points y γ -points

En esta sección repasaremos las nociones de weak beat points y de γ -points. Los weak beat points son una clase de puntos que, como sugiere su nombre, incluye a la de los beat points. Y a su vez, los γ -points son una clase de puntos que incluye a la de los weak beat points. Como sucede con los beat point, si x es un weak beat points o un γ -points de X , tendremos una estrecha relación entre X y $X \setminus \{x\}$. Estos dos conceptos fueron introducidos e investigados en [Bar09], [BM08a] y [BM08b].

Definición 3.2.1. Dado un poset X y un punto $x \in X$, definimos los conjuntos

$$U_x = \{y \in X : y \leq x\}$$

$$\hat{U}_x = U_x \setminus \{x\}$$

$$F_x = \{y \in X : x \leq y\}$$

$$\hat{F}_x = F_x \setminus \{x\}$$

Notemos que la definición de beat point es equivalente a pedir que \hat{U}_x tenga máximo o \hat{F}_x tenga mínimo. Si sucede esto, en particular se tiene que alguno de estos conjuntos es contráctil (recordemos que un poset con máximo o con mínimo, por el corolario 2.2.11, es contráctil). Por este hecho es que esta motivada la siguiente definición.

Definición 3.2.2. Sea X un poset y sea $x \in X$. El elemento x se dice up weak beat point (*uwp*) o weak point si \hat{F}_x es contráctil y down weak beat point (*dwp*) o down weak point si \hat{U}_x es contráctil. En estos dos casos, a x en particular se lo llama weak beat point o weak point (*wp*).

Proposición 3.2.3. Sea X un poset finito y $x \in X$. Si \hat{C}_x es el conjunto de los elementos comparables con x distintos de x , entonces x es un *wp* sii \hat{C}_x es contráctil.

Demostración. $\hat{C}_x = \hat{U}_x \oplus \hat{F}_x$ y por la proposición 3.1.15 \hat{C}_x es contráctil sii \hat{F}_x es contráctil (i.e. x es *uwp*) o \hat{U}_x es contráctil (i.e. x es *dwp*). \square

En la sección anterior vimos que si x es un *bp* entonces $X \setminus \{x\} \subseteq X$ es un *rdf*. Un resultado similar, aunque algo más débil, es verdadero si pedimos solamente que x sea un *wp*.

Proposición 3.2.4. Dado un poset finito X . Sea $x \in X$ un *wp*, entonces $X \setminus \{x\}$ tiene el mismo tipo homotópico débil que X .

Demostración. Supongamos que x es un down weak point. Consideremos la inclusión $i : X \setminus \{x\} \rightarrow X$ y veamos que es una equivalencia homotópica débil. Si $y \neq x$ tenemos $i^{-1}(U_y) = U_y \setminus \{x\}$ que tiene máximo por lo que es contráctil. Además tenemos que $i^{-1}(U_x) = U_x \setminus \{x\}$ que es contráctil por ser x un down weak point. Entonces, de acuerdo al teorema 2.3.5, i es una equivalencia homotópica débil.

Si x es un up weak point consideramos X^{op} y seguimos la misma demostración ya que x es un down beat point en X^{op} y, por el corolario 2.3.7, X^{op} y X tienen el mismo tipo homotópico débil. \square

Ejemplo 3.2.5. Una aplicación de los beat points y los weak points es probar que el poset *The Wallet* tiene el tipo homotópico débil de un punto pero no es contráctil. El diagrama de Hasse de *The Wallet* aparece en la figura 3.3.

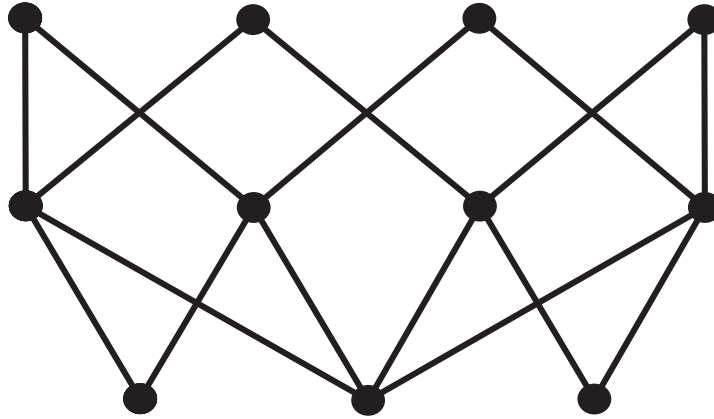


Figura 3.3: The Wallet

Claramente *The Wallet* no tiene bp por lo que no es contráctil. Sin embargo, removiendo wp como se indica en la figura 3.4, se prueba que tiene el tipo homotópico débil de un punto (observemos que todos los puntos removidos, a excepción del primero, son bp).

Ahora introduciremos la noción de γ -points, una clase de puntos más amplia que la de los bp y los wp . Recordemos que en un poset X un elemento x es un wp sii \hat{C}_x es contráctil. Debilitando la hipótesis sobre \hat{C}_x se obtiene la definición de los γ -points.

Definición 3.2.6. Sea X un poset finito y $x \in X$. Se dice que x es un γ -point si \hat{C}_x es acíclico.

Las demostraciones de los siguientes resultados se encuentran en [BM08a].

Proposición 3.2.7. Sea X un poset finito y $x \in X$ un γ -point. Entonces la inclusión $i : X \setminus \{x\} \rightarrow X$ es una equivalencia homotópica débil.

Proposición 3.2.8. Sea X un poset finito y $x \in X$ un elemento que no es maximal ni minimal. Entonces la inclusión $i : X \setminus \{x\} \rightarrow X$ es una equivalencia homotópica débil sii x es un γ -point.

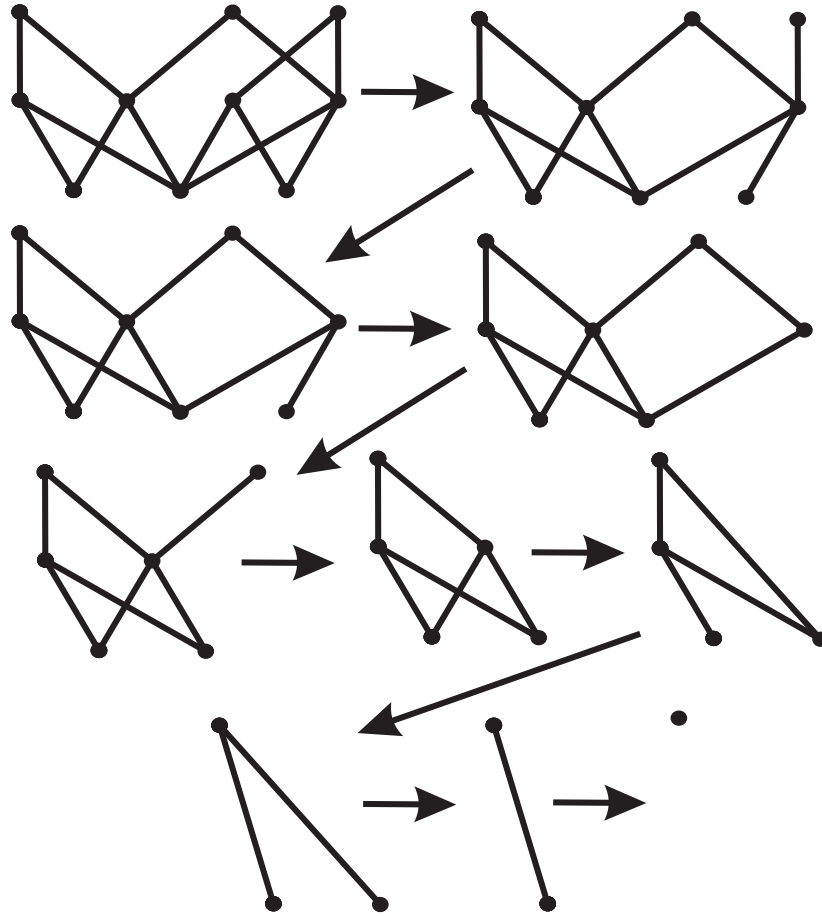


Figura 3.4: Reducción de The Wallet

En vista de la proposición 3.2.7, podemos afirmar que sacando γ -points no alteramos el tipo homotópico débil del poset, por lo que al estudiar los grupos de homología de un poset podemos sacar estos puntos para reducir el cardinal del poset.

La proposición 3.2.8 dice básicamente que estos puntos son una clase bastante buena, en el sentido de ser una de las más amplias, cuando uno quiere saber que puntos puede sacar sin perder el tipo homológico débil.

Si bien los γ -points son una clase de puntos que incluye a los wp , la desventaja es que son considerablemente más difícil de detectarlos. Para ver si un punto x es un wp nos basta con calcular el core de \hat{C}_x y ver si es un punto o no.

Capítulo 4

Lattices reducidos y dualidad de Alexander versión posets

En el segundo capítulo vimos cómo a un complejo simplicial asociarle un poset y viceversa, preservando siempre el tipo homotópico débil. Gracias a esta relación, podremos extender la dualidad de Alexander a los espacios finitos. Para esto nos vamos a centrar en una clase de espacios finitos que son los lattices reducidos. Esta clase de espacios finitos es muy amplia y contiene, por ejemplo, a todos los posets de la forma $\mathcal{X}(K)$. Es por esto que, al demostrar la dualidad de Alexander para lattices reducidos estaremos extendiendo la dualidad simplicial. La ventaja de trabajar con lattices reducidos es que podemos asociarles otro complejo simplicial diferente al definido por McCord y que notaremos $T(X)$, que será también débilmente equivalente al lattice reducido X .

Comenzaremos el capítulo repasando la teoría básica de lattices reducidos, luego exhibiremos la aplicación T , que fue introducida por Barmak y Minian. En la sección 3 introducimos el dual de Alexander en este contexto y probamos la dualidad. En la sección cuatro mostraremos cómo calcular la homología de lattices reducidos de manera sencilla utilizando la construcción T . En las últimas secciones mostraremos algunas aplicaciones al estudio de esferas homológicas y homotópicas

4.1. Lattices reducidos

En esta primer sección del capítulo introduciremos a los lattices reducidos, una clase particular de posets. Estos tienen varias ventajas sobre los posets en general, entre otras la existencia de la ya mencionada aplicación T y la existencia de un algoritmo para encontrar *cores*.

Varias de las construcciones de esta sección aparecen en [Bar09].

Definición 4.1.1. Un lattice es un poset tal que todo subconjunto de dos elementos tiene supremo e ínfimo. Llamaremos lattice reducido (y abreviaremos rl) a un poset finito tal que todo subconjunto de dos elementos acotado superiormente tiene supremo.

Ejemplo 4.1.2. En la figura 4.1 el poset X es un rl mientras que el poset Y no lo es ya que el conjunto $\{w, z\}$ no tiene supremo.



Figura 4.1:

Proposición 4.1.3. *Sea X un etf . Son equivalentes.*

- 1) X es un rl .
- 2) Todo subconjunto de dos elementos acotado inferiormente tiene ínfimo.
- 3) Todos subconjunto A acotado superiormente tiene supremo.
- 4) Todo subconjunto A acotado interiormente tiene ínfimo.

Demostración. Son inmediatas las implicaciones $3 \implies 1$, $4 \implies 2$, por lo que basta demostrar $1 \iff 2$, $1 \implies 3$ y $2 \implies 4$.

$1 \implies 2$) Sea $\{x, y\} \subseteq X$ acotado inferiormente y sean w y z cotas inferiores maximales. Queremos ver que $w = z$.

Si son distintos tenemos $\{w, z\} \subseteq X$ que está acotado superiormente (x e y son cotas superiores), entonces tenemos un supremo v . Ahora, por ser el supremo la menor de las cotas superiores vale que $v \leq x$ y $v \leq y$. Como w y z son cotas inferiores maximales de $\{x, y\}$ se tiene que $v \leq w$ y $v \leq z$. Por lo tanto $w = v = z$. Luego son iguales.

$2 \implies 1$) es análogo.

Observemos que hasta el momento no se utilizó la hipótesis de finitud sobre X

$1 \implies 3$) Vamos a hacer inducción en el cardinal de A ya que como X es finito A también lo es.

El caso $\#A = 2$ vale por hipótesis.

Haremos ahora el paso inductivo. Sea $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ acotado superiormente. Consideremos $B = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Por la hipótesis inductiva existe $\{sup B\}$.

Sea $C = sup B \cup \{x_n\}$. Es inmediato que la cotas superiores de A son las mismas que las cotas superiores de C , por lo que A tiene supremo sii C tiene supremo. Pero C tiene supremo por hipótesis.

$4 \implies 2$) es análogo.

□

Puede parecer que trabajar con rls es algo muy restrictivo, sin embargo dado un complejo simplicial K , el poset $\mathcal{X}(K)$ es un rl con el mismo tipo homotópico de K . En particular dado un etf , $\mathcal{XK}(X)$ es un rl con el mismo tipo homotópico de X . Es decir,

no solo los lattices reducidos son una clase de posets suficientemente grande como para estudiar el tipo homotópico débil de cualquier complejo simplicial (que es la razón principal por la trabajamos con la homología de un poset) sino que con esta clase se puede estudiar el tipo homotópico débil de cualquier poset.

Proposición 4.1.4. *Sea $S \subseteq X$, con X un rl y S con la propiedad de que si $x \in S$, $y \in S$, $x \leq z \leq y \implies z \in S$ se tiene que S es un rl .*

Demostración. Sea $A = \{x, y\} \subseteq S$ acotado superiormente en S y sea v una cota superior en S . En particular, está acotado en X , por lo que tiene un supremo w en X . Pero $x \leq w \leq v$ de manera que $w \in S$. Como w es supremo de A en X y $S \subseteq X$ también es supremo de A en S . \square

Observemos que la propiedad pedida a S en la proposición anterior es equivalente a la condición de que S sea igual a la intersección del menor cerrado que lo contiene (es decir, su clausura) con el menor abierto que lo contiene (su clausura con el orden opuesto).

Los subconjuntos S son fáciles de reconocer en el diagrama de Hasse: son aquéllos que dado dos puntos, están todos los puntos que caen en algún camino creciente de uno de los dos puntos a otro.

Corolario 4.1.5. *Un poset finito X es un rl sii $S \subseteq X$ es rl para todo S con la propiedad de que si $x \in S$, $y \in S$, $x \leq z \leq y \implies z \in S$.*

Demostración. Tomando $S = X$ queda probada una de las implicaciones. Notemos que la otra implicación es la proposición anterior. \square

4.2. Las aplicaciones i y s

En esta sección construiremos a partir de un rl X dos rls $i(X)$ y $s(X)$ que son retractos por deformación fuerte (rdf) de X . Estas construcciones, que son muy útiles para calcular el core de X y para la construcción de $T(X)$ fueron introducidas por Barmak y Minian y aparecen en [Bar09].

Notación 4.2.1. Sea X un poset finito. Notamos $m(X)$ al conjunto de minimales de X y $M(X)$ al conjunto de maximales.

Definición 4.2.2. Dado un rl X definimos el subposet $s(X) = \{\sup A \mid A \subseteq m(X) \text{ y } A \text{ está acotado superiormente en } X\}$. De manera dual se define el subposet $i(X) = \{\inf A \mid A \subseteq M(X) \text{ y } A \text{ está acotado inferiormente en } X\}$.

Ejemplo 4.2.3. En la figura 4.2 aparecen un poset Y y sus posets asociados $i(Y)$ y $s(Y)$.

Proposición 4.2.4. *Sea X un poset. Entonces $i(X)$ y $s(X)$ son rdf de X .*

Demostración. Veamos que $i(X)$ es rdf . Consideremos las funciones

$$r : X \rightarrow i(X)$$

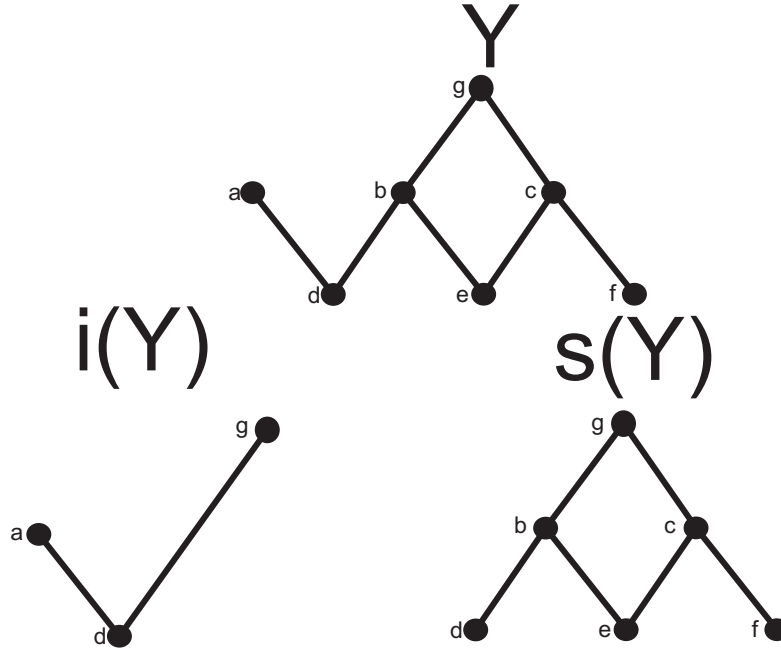


Figura 4.2: Posets s e i

$$r(x) = \inf\{y \in M(X) | y \geq x\}$$

Notemos que $r(X)$ está bien definido y que es continua (ya que preserva orden).

Sea $j : i(X) \rightarrow X$ la inclusión. Observemos que $rj = id_{i(X)}$ ya que, si $y \in X$ es el ínfimo de un subconjunto $A \subseteq M(X)$ también es el ínfimo de todos los maximales mayores a y .

Resta ver que $jr \simeq id$. Pero $jr(x) = j(\inf\{y \in M(X) | y \geq x\}) = \inf\{y \in M(X) | y \geq x\} \geq x = id(x)$ por lo que $jr \geq id$, entonces, por el teorema 2.2, $jr \simeq id$.

De manera similar se prueba que $s(X)$ es un rdf de X , tomando supremo en lugar de ínfimo y cambiando las desigualdades. \square

Ahora veremos como calcular el core de X a partir de las aplicaciones i y s .

Proposición 4.2.5. *Si X es un rl entonces*

$$X \text{ no tiene up beat points} \iff i(X) = X$$

Demostración. \Leftarrow) Supongamos que hay up beat points y lleguemos a un absurdo.

Sea x un up beat point y sea y el único elemento en X tal que $y \succ x$. Entonces $\{z \in M(X) | z \geq x\} = \{z \in M(X) | z \geq y\}$, de manera que, $x \notin i(X)$ lo que es un absurdo.

\Rightarrow) Supongamos que existe $z \in X$ $z \notin i(X)$ y lleguemos a un absurdo.

Sea x un elemento maximal de $X \setminus i(X)$. Consideremos ahora $y = \inf\{w \in M(X) | w \geq x\}$. El elemento y es distinto de x porque $y \in i(X)$. Veamos que cualquier elemento $z \in X$ mayor que x es mayor que y , por lo que x es un up beat point, lo que contradice la hipótesis.

Dado un elemento z mayor que x , tenemos que $z \in i(X)$ ya que x es un elemento maximal de los que no pertenecen a $i(X)$.

Esto nos dice que $z = \sup\{w \in M(X) | w \geq z\}$, pero $z \geq x$ por lo tanto

$$\{w \in M(X) | w \geq z\} \subseteq \{w \in M(X) | w \geq x\}$$

entonces

$$z = \inf\{w \in M(X) | w \geq z\} \geq \inf\{w \in M(X) | w \geq x\} = y$$

.

□

Proposición 4.2.6. *Si X un rl entonces*

$$X \text{ no tiene down beat points} \iff s(X) = X$$

.

La demostración es análoga a la hecha en la proposición anterior.

Corolario 4.2.7. *Sea X un rl. Son equivalentes:*

(i).- X es un espacio finito minimal.

(ii).- $i(X) = s(X) = X$

Demostración. X es un espacio finito minimal sii no tiene up beat points ni down beat points sii $i(X) = X$ y $s(X) = X$. □

Esto nos da una forma de calcular el core de X : aplicando alternadamente las funciones s e i se va bajando la cantidad de puntos y por finitud se termina estabilizando en un espacio Y . Por el corolario anterior Y es el core de X .

4.3. Complejo simplicial asociado a un lattice reducido y su dual

Motivados por la forma de asociar un complejo simplicial a un poset X mediante la aplicación \mathcal{K} uno podría definir el dual de un poset X como $\mathcal{X}(\mathcal{K}(X)^*)$. Dado que \mathcal{K} y \mathcal{X} preservan el tipo homotópico débil podría traducirse la dualidad de Alexander a posets. El problema de esta construcción del dual es que la cantidad de puntos de $\mathcal{X}(\mathcal{K}(X)^*)$ suele ser muy grande: por cada subconjunto $V \subseteq X$ tal que V^c no es una cadena tengo un punto. Con un ejemplo puede verse claramente este problema.

Ejemplo 4.3.1. Consideremos el poset Y de 5 puntos con solamente 4 relaciones que aparece en la figura 4.3.

Si consideramos la posible construcción de dual presentada anteriormente, a partir del poset Y obtendríamos el poset de la figura 4.4, que contiene 20 puntos y 35 relaciones.

En esta sección construiremos la aplicación T que a un lattice reducido le asigna un complejo simplicial y probaremos que mantiene el tipo homotópico débil y tendremos así una alternativa para la construcción del dual de un lattice reducido.

Esta construcción fue introducida por Barmak y Minian y aparecen en [BM08b].

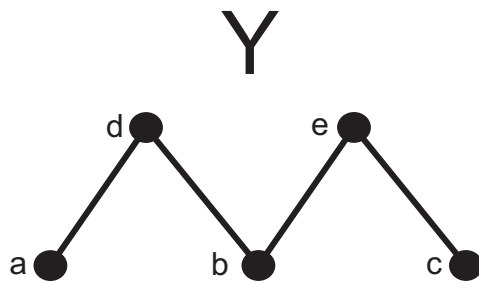


Figura 4.3:

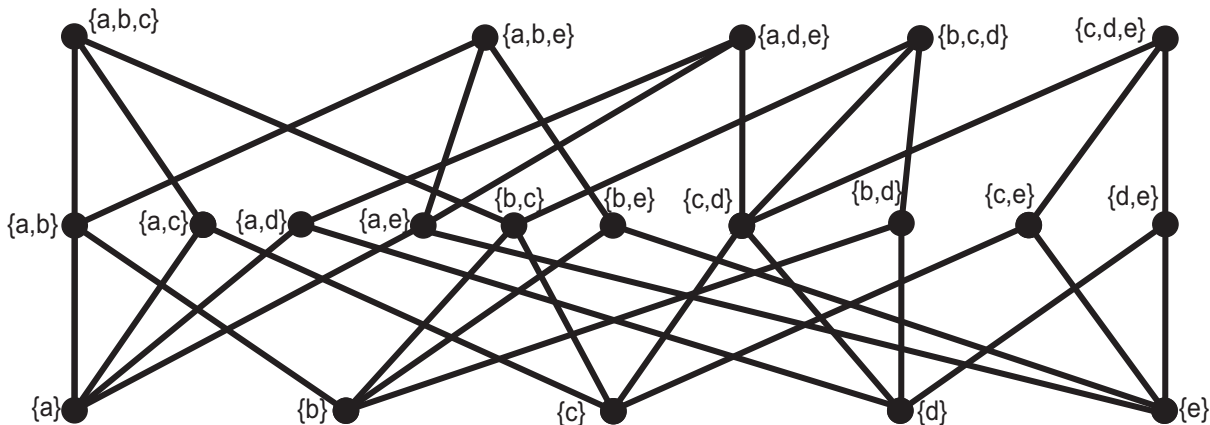


Figura 4.4:

Definición 4.3.2. Dado un rl X , definimos el complejo simplicial $T(X) = \{A \subseteq m(X) \mid A \text{ esta acotado en } X\}$.

Proposición 4.3.3. Sea X un rl , entonces X tiene el mismo tipo homotópico débil de $T(X)$.

Demostración. Consideremos las funciones:

$$f : X \rightarrow T(X)$$

$$f(x) = \{y \in m(X) : y \leq x\}$$

$$g : T(X) \rightarrow X$$

$$g(S) = \sup(S)$$

Como $s \leq \sup(S)$ para todo $s \in S$ tenemos que $S \subseteq f(\sup(S)) = f(g(S))$. Es decir $fg \geq id$, lo que implica que $fg \simeq id_{T(X)}$. Además, como $x \geq \sup\{y \in m(X) : y \leq x\} = g(f(x))$ tenemos que $gf \leq id$, por lo que $gf \simeq id_X$. \square

La aplicación T nos da un método más simple para calcular la homología de un rl que considerar el complejo simplicial $\mathcal{K}(X)$. Estudiaremos esto con mas detalle en la siguiente sección.

Definición 4.3.4. Dado un lattice reducido X se define el dual de X como $X^* = \mathcal{X}(T(X)^*)$.

Más concretamente, X^* es el subposet de $\mathcal{P}(m(X))$ (considerándolo como poset con el orden inducido por la inclusión) cuyos elementos son los subconjuntos de $m(X)$ tales que su complemento no pertenece a $T(X)$, es decir, su complemento no está acotado en X .

Ejemplo 4.3.5. En la figura 4.5 tomamos el poset Y presentado en el ejemplo 4.3.16 y calculemos su dual.

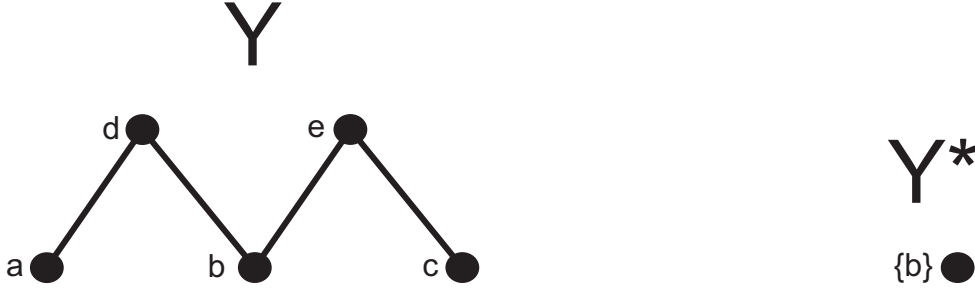


Figura 4.5:

Observación 4.3.6. Sea X un rl , entonces $T(X)^* = T(X^*)$ porque los dos son los complejos simpliciales cuyos simplices son los subconjuntos de minimales de X tal que el complemento no está acotado en X .

Recordemos que el nervio de un complejo simplicial K es el nervio del cubrimiento dado por las realizaciones de simplices maximales y se nota $N(K)$.

Proposición 4.3.7. Dado un rl X tal que existe un complejo simplicial K que cumple $\mathcal{X}(K)^{op} = X$, entonces $T(i(X)^{op}) = N(K)$.

Demostración. Un elemento minimal de $i(X)^{op}$ es un elemento maximal de X que a su vez es un simplex maximal de K . Un conjunto de elementos minimales $A = \{\tau_0, \dots, \tau_n\}$ de $i(X)^{op}$ está acotado superiormente en $i(X)^{op}$ sii está acotado inferiormente en $i(X)$ sii está acotado inferiormente en X sii $\bigcup_{i=0}^{i=n} \tau_i \neq \phi$. Entonces $T(i(X)^{op})$ es el complejo simplicial que tiene un vértice por cada simplex maximal de K y un conjunto de simplex maximales de K conforman un simplex de $T(i(X)^{op})$ si su intersección es no vacía, pero esto es justamente la definición de $N(K)$. \square

Definición 4.3.8. Dado un rl X , decimos que X tiene máximos relativos si existe $x \in X$ tal que $\mathcal{X} \geq m$ para todo $m \in m(X)$.

Ejemplo 4.3.9. Sean X e Y los posets de la la figura 4.6. El poset X tiene máximos relativos mientras que el poset Y no.

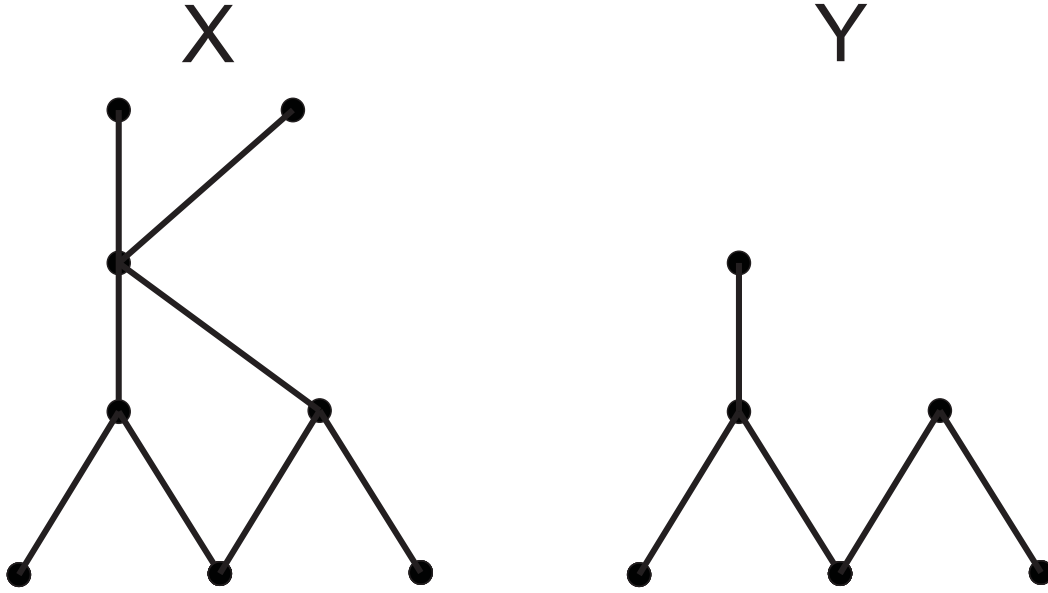


Figura 4.6: Ejemplos (y contraejemplo) de complejos simpliciales

Observación 4.3.10. Observemos que pedir que X tenga máximos relativos es equivalente a pedir que $T(X)$ sea un simplex, por lo que X es acíclico si tiene máximos relativos.

Ahora podemos demostrar la dualidad de Alexander para lattices reducidos.

Teorema 4.3.11. *Sea X un rl sin máximos relativos, entonces $\tilde{H}_k(X) = \tilde{H}^{N-k-3}(X^*)$, donde $N = \#m(X)$.*

Demostración. Dado que X no tiene máximos relativos $T(X)$ no es un simplex, por lo que vale la dualidad de Alexander simplicial. Como $N = \#m(X) = \#T(X)^{(0)}$, entonces por la dualidad de Alexander tenemos

$$\tilde{H}_k(X) = \tilde{H}_k(T(X)) = \tilde{H}^{N-k-3}(T(X)^*) = \tilde{H}^{N-k-3}\mathcal{X}(T(X)^*) = \tilde{H}^{N-k-3}(X^*)$$

□

Definiremos ahora un dual alternativo para lattices reducidos sin máximos relativos, que nos servirá para dar otra versión de la dualidad de Alexander.

Definición 4.3.12. Dado un rl X sin máximos relativos, definimos $d(X)$ como el subposet de $\mathcal{P}(m(X))$ cuyos elementos son los subconjuntos maximales tal que el complemento no este acotado (es decir, los elementos maximales de X^*) y las intersecciones no vacías de los mismos, con el orden inverso al inducido por la inclusión.

Dados A_1, \dots, A_n elementos maximales de X^* con intersección B no vacía, se tiene que $B \in X^*$ y además $B = \min\{A_1, \dots, A_n\}$. En otras palabras $d(X) = i(X^*)^{op}$.

Observación 4.3.13. Como $X^* = \mathcal{X}(T(X))$, por la proposición 4.3.7, se tiene que $N(T(X)^*) = T(i(X^*)^{op}) = T(d(X))$.

Otra forma de construir $d(X)$ es, en lugar de considerar los subconjuntos maximales de $m(X)$ cuyo complemento no está acotado en X y sus intersecciones no vacías es tomar el complemento de estos conjuntos. Es decir, los subconjuntos minimales de $m(X)$ no acotados y las uniones de los mismos que no den $m(X)$ (recordemos que antes pedíamos intersecciones no vacías y el complemento de una intersección no vacía es una unión propia) y el orden opuesto al inducido por la inclusión (ya que tomar complementos invierte las inclusiones).

Haremos ahora una formulación alternativa de la dualidad de Alexander utilizando $d(X)$ en lugar de X^* .

Teorema 4.3.14. *Sea X un rl sin máximos relativos, entonces $\tilde{H}_k(X) = \tilde{H}^{N-k-3}(d(X))$, donde $N = \#m(X)$.*

Demostración. $d(X) = i(X^*)^{op}$ tiene el mismo tipo homotópico débil que X^* entonces, por el teorema 4.3.11, el resultado vale. \square

Dado que a un poset finito X , se obtiene un lattice reducido con el mismo tipo homotópico débil considerando $sd(X)$ (la subdivisión baricéntrica de X). Por lo que es de utilidad caracterizar el poset $d(sd(X))$ ya que cumple la dualidad de Alexander con X .

Los elementos minimales de $sd(X)$ son las cadenas de X que no incluyen a ninguna otra cadena, es decir, son las cadenas de 1 elemento, por lo que $m(sd(X)) = X$ como conjunto. Supongamos que $A \subseteq m(sd(X)) = X$ es un conjunto no acotado minimal en $sd(X)$ (es decir, no existe cadena de X que contenga a A o equivalentemente A no es cadena). Como A no es cadena tenemos que $\#A > 1$. Supongamos que $\#A > 2$. Como A no es cadena, existen dos elementos $x, y \in A$ no comparables. Sea $z \in A \setminus \{x, y\}$. Como A es minimal entonces $A \setminus \{z\}$ es cadena. Luego x e y son comparables, lo que es un absurdo, por lo que concluimos que $\#A = 2$.

Hemos probado entonces el siguiente resultado.

Proposición 4.3.15. *$d(sd(X))$ es el poset cuyos elementos son los conjuntos de dos elementos no comparables de X y las uniones de estos conjuntos que no dan $m(sd(X)) = X$.*

Ejemplo 4.3.16. Consideremos el espacio finito X cuyos elementos son $\{a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n\}$ donde a_i y b_i no son comparables, $a_i < b_j$ y $b_i < a_j$ si $i < j$. El diagrama de Hasse de este poset es el de la figura 4.7.

Los conjunto de dos elementos no comparables de X son de la forma $\{a_i, b_i\}$. Entonces $d(sd(X))$ es el poset cuyos elementos son las uniones propias de estos conjuntos, en otras palabras son los conjuntos de la forma

$$\bigcup_{i \in N} \{a_i, b_i\}$$

donde N es algún subconjunto propio de $\{0, \dots, n\}$.

Consideremos ahora el n -simplex $\sigma = \{0, \dots, n\}$ y el complejo simplicial $\dot{\sigma}$. Identificando a $\bigcup_{i \in N} \{a_i, b_i\}$ con $N \in [\mathcal{P}(\{0, \dots, n\}) \setminus \{0, \dots, n\}]$ se tiene que $d(sd(X)) = \mathcal{X}(\dot{\sigma})$, luego $d(sd(X))$ tiene el tipo homotópico débil de $\dot{\sigma}$. Entonces mediante la dualidad de Alexander

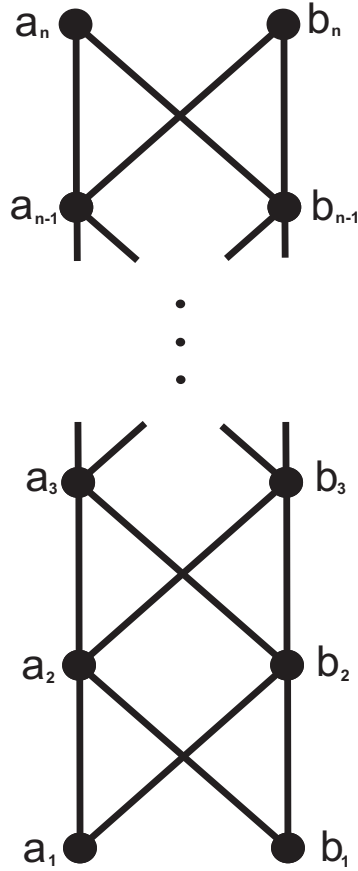


Figura 4.7:

y utilizando que $\#m(sd(X)) = \#X = 2n + 2$ podemos calcular los grupos de homología reducida de X .

$$\tilde{H}_k(X) = \tilde{H}_k(sd(X)) = \tilde{H}^{2n+2-k-3}(d(sd(X))) = \tilde{H}^{2n+2-k-3}(\dot{\sigma}) = \tilde{H}^{2n-k-1}(\dot{\sigma})$$

Como $\dot{\sigma}$ es homeomorfo a S^{n-1} tenemos que

$$\tilde{H}^l(\dot{\sigma}) = \tilde{H}^l(S^{n-1})$$

$$\tilde{H}^l(\dot{\sigma}) = \tilde{H}^l(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } l = n - 1 \\ 0 & \text{si } l \neq n - 1 \end{cases}$$

Por lo tanto obtenemos que $\tilde{H}_k(X) = \tilde{H}^{2n-k-1}(\dot{\sigma})$ que vale \mathbb{Z} si $2n - k - 1 = n - 1$, o equivalentemente si $n = k$, y 0 en otro caso.

4.4. Homología de lattices reducidos

En esta sección daremos un método para calcular la homología de posets distinto al usual. Utilizando las herramientas estudiadas en las secciones anteriores calcularemos la homología de los posets utilizando solamente los conjuntos de minimales en lugar de usar las cadenas del poset.

Recordemos que dado un poset X la homología del complejo simplicial $\mathcal{K}(X)$. Concretamente X es la del complejo de cadenas (C_*, d) donde C_n es el grupo abeliano libre generado por las n -cadenas de X , es decir las cadenas de $n+1$ elementos de X , y la función d es la siguiente:

$$d_n(\{v_0, \dots, v_n\}) = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n\}$$

donde $\{v_0, \dots, v_n\}$ es una n -cadena con $v_i < v_{i+1}$.

Para definir la homología de un lattice reducido haremos exactamente lo mismo sólo que en lugar de considerar el poset $\mathcal{K}(X)$ consideraremos el poset $T(X)$, que sabemos es débilmente equivalente a X (y por lo tanto tienen la misma homología). Más concretamente:

Definición 4.4.1. Dado un rl X se le da un orden total arbitrario al conjunto de sus minimales $m(X)$, y definimos $R_n(X)$ como el grupo abeliano libre generado por los subconjuntos acotados de $n+1$ elementos de $m(X)$.

Se define el complejo de cadenas $(R_*(X), d)$ definiendo d de la siguiente manera:

$$d_n : R_n(X) \rightarrow R_{n-1}(X)$$

$$d_n(\{v_0, \dots, v_n\}) = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n\}$$

donde $\{v_0, \dots, v_n\} \subseteq m(X)$ con $v_i < v_{i+1}$ (con el orden dado al conjunto de minimales de X).

Definición 4.4.2. Se define la homología de un lattice reducido X como la homología del complejo de cadenas $(R_*(X), d)$.

Notemos que esta definición de homología consiste en calcular la homología de $T(X)$ y como este complejo simplicial y $\mathcal{K}(X)$ tienen el mismo tipo homotópico esta definición de homología para lattices reducidos necesariamente coincide con la noción de homología usual para posets.

Ejemplo 4.4.3. Sea Y el poset de la figura 4.8.

Ordenemos los minimales de X de la siguiente manera: $a < b < c$. En este ejemplo $R_0(X)$ es el grupo abeliano libre generado por $\{a\}$, $\{b\}$ y $\{c\}$, $R_1(X)$ es el grupo abeliano libre generado por $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ y $\{b, c\}$, $R_2(X)$ es el grupo abeliano libre generado por $\{a, b, c\}$ y $R_n(X) = 0$ si $n > 2$. Por calculo directo obtenemos $H_0(X) = \mathbb{Z}$ y $H_n(X) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Y

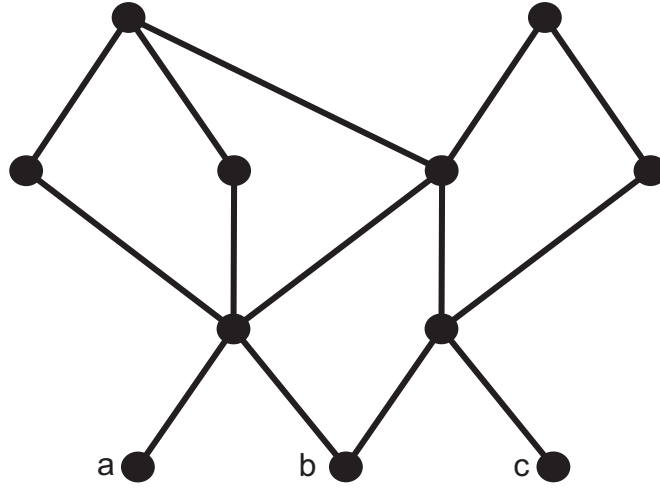


Figura 4.8:

Teorema 4.4.4. Sea X un rl , $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$ tal que todo subconjunto $V \subseteq m(X)$ con $\#V \leq m + 1$ está acotado. Entonces $H_n(X) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq m - 1$ y $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

Demostración. Por hipótesis, el complejo simplicial $T(X)$ tiene el mismo m -esqueleto que $\mathcal{P}(m(X))$. Entonces $C_n(T(X)) = C_n(\mathcal{P}(m(X)))$ si $n \leq m$. Como $H_n(X)$ depende de $C_{n+1}(T(X)) = C_n(\mathcal{P}(m(X)))$ y $C_n(T(X)) = C_n(\mathcal{P}(m(X)))$ tenemos que $H_n(T(X)) = H_n(\mathcal{P}(m(X))) = 0$ (si $n \neq 0$) y $H_0(X) = H_0(\mathcal{P}(m(X))) = \mathbb{Z}$ (si $n = 0$). \square

Ejemplo 4.4.5. Sea Y el poset de la figura 4.9. Como todo subconjunto de $m(X)$ de 3 elementos o menos está acotado el teorema anterior nos dice que $H_0(Y) = \mathbb{Z}$ y $H_1(Y) = 0$.

4.5. Posets graduados y homogéneos

En esta sección introduciremos la noción de poset graduado y veremos una aplicación del grado de un poset al cálculo de la homología.

Definición 4.5.1. Un poset X se dice graduado si existe una función $deg : X \rightarrow \mathbb{N}$ tal que si $x \prec y$ entonces $deg(x) + 1 = deg(y)$ y $deg(m) = 0$ para todo $m \in m(X)$. La función deg se llama la función de grado de X .

Ejemplo 4.5.2. Consideremos los posets X e Y de la figura 4.10.

En este caso X es graduado mientras que Y no lo es ya que si Y fuera graduado entonces $deg(w) = 1$ porque $m \prec w$ pero a su vez $n \prec z \prec w$ por lo que $deg(w) = 2$.

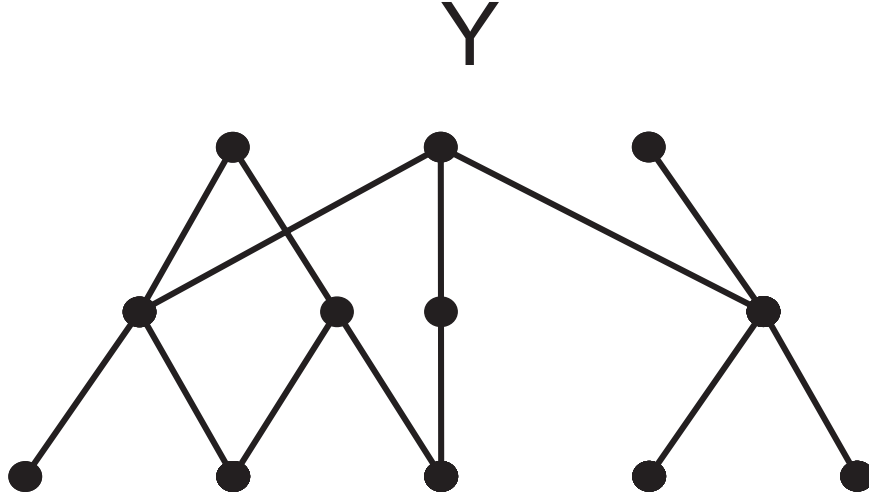


Figura 4.9:

Observación 4.5.3. Un poset X es graduado sii para todo $x \in X$ toda cadena maximal con máximo x tiene el mismo cardinal. Además $d(x) = \#V - 1$ donde V es una cadena maximal con máximo x .

Observación 4.5.4. Como se puede observar en el ejemplo 4.5.2 que X sea graduado no implica que X^{op} lo sea (ya que en ese ejemplo $Y = X^{op}$). La siguiente es una definición que caracteriza aquellos posets que son, junto con su opuesto, graduados.

Definición 4.5.5. Un poset X se dice homogéneo si toda cadena maximal de X tiene el mismo cardinal.

Proposición 4.5.6. Un poset X conexo es homogéneo sii X y X^{op} son graduados.

Demostración. \implies) Sea $x \in X$ y sean V y W dos cadenas con máximo x maximales, veamos que tienen el mismo cardinal. Sea S una cadena maximal tal que $V \subseteq S$. Consideremos la cadena $T = (S \setminus V) \cup W$. Claramente T es una cadena maximal (de poder agregarle algún elemento menor a x W no sería maximal y de poder agregarle un elemento mayor a x S no sería maximal). Luego, por hipótesis, tenemos que $\#(S \setminus V) + \#V = \#S = \#T = \#(S \setminus V) + \#W$. Entonces $\#W = \#V$. De manera análoga se prueba lo mismo para cadenas maximales con mínimo x .

\impliedby) Sean S y T dos cadenas maximales en X con intersección no vacía y sea $x \in X$ tal que $x \in S$ y $x \in T$, veamos que S y T tienen el mismo cardinal. Las cadenas $S_x = \{y \in S : y \leq x\}$ y $T_x = \{y \in T : y \leq x\}$ son cadenas maximales con máximo x por lo que tienen el mismo cardinal por hipótesis. Análogamente $S^x = \{y \in S : y \geq x\}$ y $T^x = \{y \in T : y \geq x\}$ tienen el mismo cardinal. Luego como $\#T = \#T_x + \#T^x - 1$ y $\#S = \#S_x + \#S^x - 1$ el resultado queda probado para cadenas que se intersecan.

Consideremos ahora dos cadenas maximales V y W . Por ser el poset conexo existen cadenas maximales R_1, \dots, R_n tales que $R_i \cap R_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $i = 1, \dots, n-1$, $R_1 \cap V \neq \emptyset$ y $R_n \cap W \neq \emptyset$. Por el paso anterior $\#V = \#R_1 = \dots = R_n = \#W$. \square

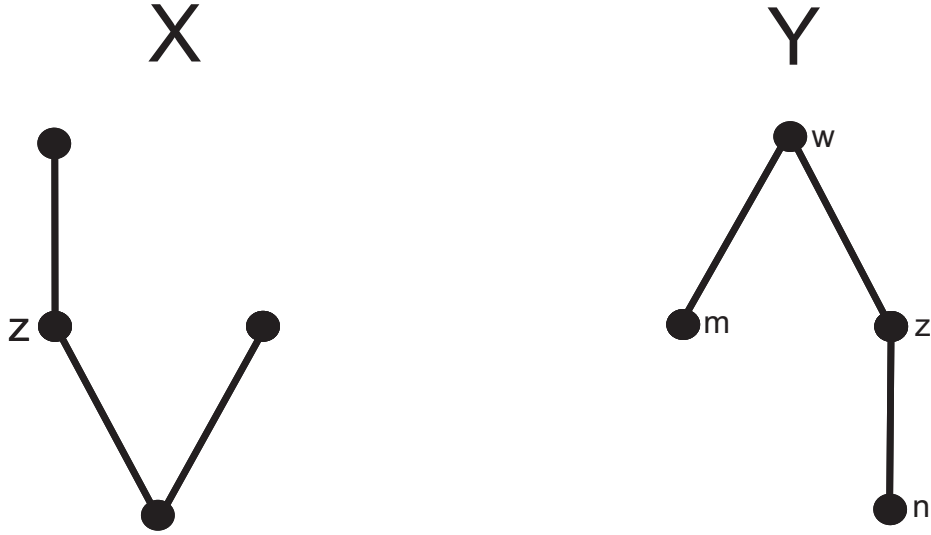


Figura 4.10:

Observación 4.5.7. Observemos que si X es un poset graduado, entonces $\hat{0} \oplus X \oplus \hat{1}$ es un poset graduado. En este caso a la función de grado de $\hat{0} \oplus X \oplus \hat{1}$ la notaremos gr para distinguirla de deg (que es la función de grado de X). Notemos que si $x \in X$ entonces $deg(x) + 1 = gr(x)$.

Teorema 4.5.8. *Sea X un lattice reducido graduado tal que $gr(\hat{1}) > 2$ y para todo $x, y \in X$ $gr(\sup\{x, y\}) + gr(\inf\{x, y\}) \leq gr(x) + gr(y)$ (donde los máximos son como subconjuntos de lattice $\hat{0} \oplus X \oplus \hat{1}$). Entonces $H_q(X) = 0$ para todo $q \in \mathbb{N}$, $q \leq gr(\hat{1}) - 2$ y $H_0(X) = \mathbb{Z}$.*

Demostración. Como X es una lattice reducido $\hat{0} \oplus X \oplus \hat{1}$ es un lattice. Por el teorema 4.4.4 nos basta probar que todo subconjunto de minimal de X de cardinal menor que $gr(\hat{1})$ está acotado.

Probaremos por inducción en j que si $A \subseteq m(X)$ de cardinal j entonces $gr(\max(A)) \leq j$, con lo cual si $j < gr(\hat{1})$ el máximo de A no es $\hat{1}$ por lo que A está acotado en X .

$j = 1$) Sea $x \in m(X)$, luego $gr(x) = 1$ pues $x > 0$.

$j - 1 \implies j$) Sea $A \subseteq m(X)$ de cardinal j , con $j > 1$, y sea $x \in A$. Entonces

$$gr(\max(A)) = gr(\max\{\max(A \setminus \{x\}), x\})$$

$$gr(\max\{\max(A \setminus \{x\}), x\}) \leq gr(\max(A \setminus \{x\})) + gr(x) - gr(\min\{\max(A \setminus \{x\}), x\})$$

$$gr(\max(A \setminus \{x\})) + gr(x) - gr(\min\{\max(A \setminus \{x\}), x\}) \leq (j - 1) + 1 - 0 = j$$

□

Este resultado aparece en [Wal81].

4.6. Métodos de reducción aplicados a duales

Las herramientas que hemos construido para estudiar a los *rls* hasta ahora son los duales y los métodos de reducción. Uno puede preguntarse cómo se comportan estos dos métodos combinados o si hay alguna forma de aplicar los métodos de reducción al dual de un poset.

Como $X^* = \mathcal{X}(T(X)^*)$, un dato que tenemos sobre X^* es que se obtiene aplicando \mathcal{X} a un complejo simplicial.

Notemos que si $X = \mathcal{K}(X)$ con K un complejo simplicial, se tiene que para todo $\sigma \in K$ $\hat{U}_\sigma = \{\tau \in X : \tau < \sigma\} = \mathcal{X}(\hat{\sigma})$ y por lo tanto los posets de la forma $\mathcal{X}(K)$ no tienen down weak-points. En particular, el dual X^* de un *rl* X tiene down weak-points por ser de la forma $\mathcal{X}(T(X)^*)$.

De manera análoga lo hecho recién se puede caracterizar a \hat{F}_σ para saber cuando σ es un up beat-point, un up weak-point o un up weak-point.

$$\hat{F}_\sigma = \{\tau \in T(X) : \sigma \subsetneq \tau\} = st(\sigma) \setminus lk(\sigma) \setminus \hat{\sigma}$$

Ahora veremos cuándo la aplicación d optimiza al dual en el sentido de cantidad de puntos. Como $d(X^*) = i(X^*)^{op}$ sabemos que es un poset con el orden opuesto al de un *rd* de X^* pues $d(X^*)^{op} = i(X^*)$, por lo que $\#d(X) \leq \#X^*$. ¿Cuándo podemos afirmar que $d(X)$ tiene efectivamente menos puntos? Respondemos a esta pregunta en la siguiente proposición.

Proposición 4.6.1. *Dado un *rl* X entonces X^* tiene up beat-points sii $\#d(X) < \#X^*$.*

Demostración. $\#d(X) < \#X^*$ sii $\#i(X^*) = \#d(X)^{op} < \#X^*$ sii $i(X^*) \neq X^*$ y por la proposición 4.2.5 esto sucede sii X^* no tiene up beat-points. \square

4.7. Esferas homológicas

En esta sección estudiaremos otras aplicaciones a partir de la construcción d además de la vista en el ejemplo 4.3.16. Estudiaremos condiciones suficientes para que el complejo simplicial $T(X)$ asociado a un poset tenga el tipo homológico de una esfera.

Definición 4.7.1. Un espacio topológico Y se dice una n -esfera homológica si sus grupos de homología son los de S^n .

Observación 4.7.2. Por el teorema de coeficientes universales (ver [Hat02]), un espacio es una n -esfera homológica si y sólo si sus grupos de cohomología coinciden con los de S^n .

Teorema 4.7.3. *Si X es un lattice reducido tal que $d^n(X)$ es una esfera homológica entonces X también lo es.*

Demostración. Lo demostraremos por inducción en n .

$n = 1$) Como es una esfera homológica, entonces existe k tal que

$$\tilde{H}^l(d(X)) = \tilde{H}^l(S^k) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } l = k \\ 0 & \text{si } l \neq k \end{cases}$$

Por el teorema 4.3.14

$$\tilde{H}_l(X) = \tilde{H}^{\#m(X)-l-3}(d(X)) = \tilde{H}^{\#m(X)-l-3}(S^k)$$

que vale \mathbb{Z} si $\#m(X) - l - 3 = k$ (i.e. si $l = k + 3 - \#m(X)$) y 0 en otro caso, entonces por la observación 4.7.2, X es una esfera homológica.

$n - 1 \implies n$) Como $d^n(X) = d^{n-1}(d(X))$ es una esfera homológica. Entonces por hipótesis inductiva $d(X)$ es una esfera homológica, luego por el paso $n=1$ se tiene que X es una esfera homológica. \square

4.8. Esferas homotópicas

En esta sección haremos un estudio parecido al de la sección anterior. Estudiaremos condiciones suficientes para que el complejo simplicial $T(X)$ asociado a un poset tenga el tipo homotópico de una esfera.

Proposición 4.8.1. *Sea X un rl. Entonces $d(X) = \phi \Leftrightarrow T(X) = \dot{\sigma}$ donde σ es un simplex.*

Demostración. El poset $i(X^*)^{op} = d(X) = \phi$ sii el poset $i(X^*) = \phi$. Pero esto pasa solamente si $X^* = \phi$ (porque $i(X^*)$ es un $rd\dot{f}$ de X^*). Pero $X^* = \phi$ sii $T(X)^* = \phi$ y esto pasa cuando $T(X)$ es el borde de un simplex, es decir si $T(X) = \dot{\sigma}$ con σ el simplex con vértices el conjunto $T(X)^{(0)}$. \square

Corolario 4.8.2. *Sea X un rl tal que $d^n(X) = \phi$, entonces X es una esfera homológica.*

Demostración. Por la proposición anterior $d^{n-1}(X) = \dot{\sigma}$ donde σ es un simplex, en particular $d^{n-1}(X)$ es una esfera homológica, entonces, por el teorema 4.7.3, X es una esfera homológica. \square

Con este corolario podemos demostrar los siguientes teoremas que nos dan información cuando al aplicar sucesivas veces d llegamos a un poset vacío.

Teorema 4.8.3. *Sea X un rl tal que $d^2(X) = \phi$ entonces $T(X) \wedge_{\downarrow} \dot{\sigma}$ donde σ es un simplex.*

Demostración. Como $\phi = d^2(X) = d(d(X))$, por la proposición 4.8.1, $T(d(X)) = \dot{\tau}$ con τ un simplex. Por la observación 4.3.13, $N(T(X)^*) = T(d(X)) = \dot{\tau}$. Entonces $N^2(T(X)^*) = N(T(d(X))) = N(\dot{\tau}) = \dot{\tau}$, por el teorema 1.7.17, se tiene que $T(X)^* \searrow_{\downarrow} \dot{\tau}$, en particular $T(X)^* \searrow_{\downarrow} \dot{\tau}$ y, por el corolario 1.8.6, $T(X) = (T(X)^*)^* \wedge_{\downarrow} \dot{\sigma}$ donde σ es un simplex. \square

Teorema 4.8.4. *Sea X un rl tal que $d^n(X) = \phi$ entonces $T(d^{n-1}(X))^* \wedge_{\downarrow} \dot{\sigma}$ donde σ es un simplex.*

Demostración. Análogamente a lo hecho en la demostración del teorema anterior, por la observación 4.3.13, $N(T(d^{n-1}(X))^*) = T(d(d^{n-1}(X))) = \dot{\sigma}$. Además, por el teorema 1.5.13, sabemos que $T(d^{n-1}(X))^* \simeq N(T(d^{n-1}(X))^*) \simeq \dot{\sigma}$, pero por la observación 1.7.8 tenemos que $T(d^{n-1}(X))^* \wedge_{\downarrow} \dot{\sigma}$. \square

Corolario 4.8.5. *Sea X un rl tal que $d^3(X) = \phi$ entonces $T(X)^* \wedge_{\downarrow} \dot{\sigma}$ con σ un simplex.*

4.9. Métodos de reducción aplicados a lattices reducidos

En esta sección estudiaremos los métodos de reducción del capítulo 3 aplicados a los lattices reducidos.

Teorema 4.9.1. *Dado un rl X y un elemento $x \in X$ entonces $X \setminus \{x\}$ es un rl sii x es un bp.*

Demostración. \Leftarrow) Supongamos x es un ubp; el caso x dbp es análogo. Basta ver que todo par de puntos $z, y \in X \setminus \{x\}$ acotados inferiormente en $X \setminus \{x\}$ posee un ínfimo en $X \setminus \{x\}$. Tienen un ínfimo $w \in X$, si $w \neq x$ también va a ser ínfimo en $X \setminus \{x\}$. Como x es ubp existe $s \in X$ tal que si $r > x$ entonces $r \geq s$, luego, como $z, y \in X \setminus \{x\}$ tenemos que $w \neq x$ (ya que todo elemento mayor que x también es mayor que s).

\Rightarrow) Veamos que si x no es bp entonces $X \setminus \{x\}$ no es un rl. Si x no es bp entonces existen y_1, y_2, z_1, z_2 cuatro puntos distintos tal que $x \prec y_i$ y $x \succ z_i$ con $i = 1, 2$, luego en $X \setminus \{x\}$ tenemos que $y_i \succ z_j$ para $i = 1, 2$ y $j = 1, 2$. Es decir, se tiene la siguiente situación graficada en la figura 4.11

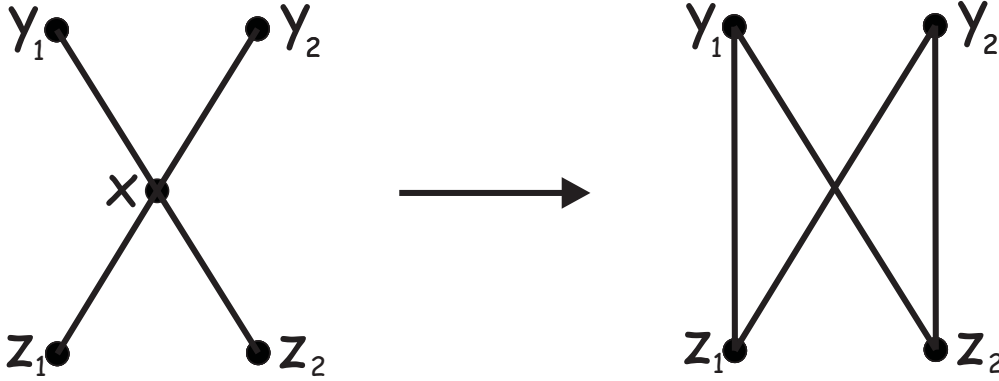


Figura 4.11:

Luego $X \setminus \{x\}$ no es rl pues $\{z_1, z_2\}$ no tiene supremo pero está acotado superiormente. \square

A efectos de calcular el dual de un rl, ya que quitar beat points no hace que los conjuntos acotados superiormente dejen de estarlo, la única manera que quitar beat points para cambiar el dual es quitando beat points que sean minimales de X .

El siguiente teorema caracteriza como afecta quitar un bp que es un elemento minimal al dual de un rl.

Teorema 4.9.2. *Sea X un rl, y sea $x \in m(X)$ un bp, entonces $T(X) \Downarrow T(X \setminus \{x\})$ o $T(X) = T(X \setminus \{x\})$.*

Demostración. Sea $z \succ x$ en X . Supongamos $z \notin m(X \setminus \{x\})$, luego los vértices de $T(X \setminus \{x\})$ es el conjunto $m(X \setminus \{x\}) = m(X) \setminus \{x\}$ y $A \subseteq m(X \setminus \{x\})$ está acotado en $X \setminus \{x\}$ sii está acotado en X . Por lo tanto $T(X \setminus \{x\})$ es el subcomplejo pleno de $T(X)$ con vértices $m(X) \setminus \{x\}$. Entonces $T(X) \Downarrow T(X \setminus \{x\})$.

Supongamos $z \in m(X \setminus \{x\})$, en este caso $m(X \setminus \{x\}) = m(X) \setminus \{x\} \cup \{z\}$. Si un conjunto $A \subseteq m(X) \setminus \{x\}$ tenemos que A está acotado en X sii A está acotado en $X \setminus \{x\}$ y $A \cup \{x\}$ está acotado en X sii $A \cup \{z\}$ está acotado en $X \setminus \{x\}$, luego, renombrando al vértices z de $T(X \setminus \{x\})$ como x tenemos que $T(X) = T(X \setminus \{x\})$. \square

Bibliografía

- [Bar06] J. A. Barmak. *Espacios Topológicos Finitos*. Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires (2006).
- [Bar09] J. A. Barmak. *Topología Algebraica de Espacios Topológicos Finitos y Aplicaciones*. Tesis Doctoral, Universidad de Buenos Aires (2009).
- [BM08a] J. A. Barmak y G. Minian. *One-point reductions of finite spaces, h-regular CW-complexes and collapsibility*. *Algebr. Geom. Topol.* 8 (2008), 1763-1780.
- [BM08b] J. A. Barmak y G. Minian. *Simple homotopy types and finite spaces*. *Adv. Math.* 218 (2008), Issue 1, 87-104.
- [BM09] J. A. Barmak y G. Minian. *Strong homotopy types, nerves and collapses*. Preprint 2009.
- [Bar02] M. Barr. *A Duality On Simplicial Complexes*. *Georgian Mathematical Journal*, Volumen 9 (2002), Numero 4, 601-605.
- [BT08] A. Björner y M. Tancer. *Combinatorial Alexander Duality - A Short And Elementary Proof*. <http://arxiv.org/abs/0710.1172v3> (2008).
- [Gla70] L. Glaser. *Geometrical combinatorial topology I*. Van Nostrand Reinhold, NY (1970).
- [Hat02] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press (2002).
- [McC67] M.C. McCord. *Homotopy type comparison of a space with complexes associated with its open covers*. *Proc. Amer. Math. Soc.* 18 (1967), 705-708.
- [McC66] M.C. McCord. *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces*. *Duke Mathematical Journal* 33(1966), 465-474.
- [Mun84] J. Munkres. *Elements Of Algebraic Topology*. (1984).
- [Spa66] E. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer (1966).
- [Sto66] R.E. Stong. *Finite topological spaces*. *Trans. Amer. Math. Soc.* 123 (1966), 325-340.
- [Wal81] J.W. Walker. *Topology and combinatorics of ordered sets*. Tesis Doctoral. M.I.T. (mayo 1981).