



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Juegos globales sobre redes

Germán Sergio Gieczewski

Director: Juan Pablo Pinasco

Fecha de Presentación: Julio 2011

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Nociones generales de juegos y adicionales</b>	<b>4</b>
2.1. Introducción . . . . .	4
2.2. Teoría de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern . . . . .	5
2.3. Juegos estáticos . . . . .	6
2.4. Juegos con información incompleta . . . . .	14
2.5. Juegos supermodulares . . . . .	16
2.6. Espacios de probabilidad no unitarios . . . . .	17
<b>3. Juegos globales</b>	<b>20</b>
3.1. Preliminares . . . . .	20
3.2. El modelo . . . . .	22
3.3. Equilibrio . . . . .	23
<b>4. Nociones básicas de redes</b>	<b>27</b>
<b>5. Juegos globales sobre redes</b>	<b>29</b>
5.1. Preliminares . . . . .	29
5.2. El modelo . . . . .	30
5.3. Equilibrios . . . . .	31
<b>6. Juegos globales sobre redes con perturbaciones</b>	<b>47</b>
6.1. Preliminares . . . . .	47
6.2. El modelo . . . . .	47
6.3. Equilibrio . . . . .	49
6.4. Formulaciones alternativas y ejemplos . . . . .	56
6.5. Una conjetura: continuidad en $\tau = 0$ . . . . .	62

# Capítulo 1

## Introducción

La teoría de juegos globales, iniciada por Carlsson and Van Damme (1993), intenta explicar el comportamiento de una población en juegos de coordinación con información imperfecta, donde los jugadores observan señales ruidosas del estado de la naturaleza. Recientemente, estos juegos han sido usados en varios modelos para explicar fenómenos económicos, políticos y sociales, tales como corridas bancarias (Morris and Shin, 2001; Goldstein and Pauzner, 2002) y cambiarias (Morris and Shin, 1998; Corsetti, Dasgupta, Morris, and Shin, 2004; Corsetti, Pesenti, and Roubini, 2002), ciclos de alta y baja actividad e inversión (Chamley, 1999; Heidhues and Melissas, 2006), protestas (Atkeson, 2000) y revoluciones (Edmond, 2007). Un resumen de los desarrollos en el área puede hallarse en Morris and Shin (2003).

En este trabajo presentamos una generalización del modelo estándar de juegos globales, en el siguiente sentido: los jugadores son nodos de una red, y cada jugador comparte su información privada con sus vecinos. Esto permite tener en cuenta que algunos jugadores pueden estar mejor informados que otros, que puede haber grupos de jugadores con información altamente correlacionada, y también permite ver el efecto que tienen los jugadores muy conectados (en una variante de papers como Morris and Shin (2001), Corsetti et al. (2002) y Corsetti et al. (2004)).

El esquema del trabajo es como sigue: en el Capítulo 2, exponemos una reseña muy breve de la teoría de juegos en general. En el Capítulo 3, explicamos el sentido intuitivo de los juegos globales y presentamos el modelo básico creado por Morris and Shin (2003). En el Capítulo 4, establecemos algo de notación para grafos que usaremos en nuestro modelo. En el Capítulo 5 presentamos una primera versión del modelo con jugadores sobre una red, probamos algunos resultados parciales, exhibimos ejemplos, y mostramos algunos defectos teóricos que sugieren una modificación. En el Capítulo 6 hacemos dicha modificación, y probamos para el nuevo modelo un resultado de existencia y unicidad de equilibrio; concluimos con una exposición breve de varias modificaciones y generalizaciones que pueden hacerse a este último modelo. El contenido de los capítulos 5 y 6 es original excepto donde aclaramos lo contrario.

# Capítulo 2

## Nociones generales de juegos y adicionales

### 2.1. Introducción

La teoría de juegos moderna comenzó con la obra de Von Neumann and Morgenstern (1944). En este libro, los autores proveyeron el marco esencial para formular el resto de la teoría (en particular, la teoría de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern), y desarrollaron dos casos en particular: el caso de juegos de suma cero de dos jugadores, y el caso de  $n$  jugadores permitiendo contratos vinculantes (es decir, cooperativos). El primero es elegante y ofrece predicciones muy robustas, pero su valor práctico es limitado, ya que -como nota Schelling (1960)- muchas de las situaciones estratégicas más interesantes involucran una mezcla de conflicto y cooperación, es decir, juegos de suma no constante. El segundo sufre dificultades teóricas, ya que no existe una definición completamente satisfactoria de equilibrio: existen varias, como el conjunto estable, el núcleo, el *kernel*, el nucleolo o el valor de Shapley, pero no queda claro cuál modela mejor lo que se debería esperar que ocurra en un juego real.

Luego del trabajo seminal de Nash (1951), se estableció el equilibrio de Nash (y, eventualmente, varios refinamientos, como el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, el equilibrio bayesiano, el equilibrio secuencial, el *trembling-hand perfect equilibrium*, etc.) como conceptos de equilibrio estándares para juegos de  $n$  jugadores y de suma no constante, en los que no se permitan contratos vinculantes (es decir, juegos no cooperativos). (Nota: incluso en el marco de los juegos no cooperativos se pueden incluir mecanismos contractuales, pero deben aparecer como jugadas en el juego en vez de estar implícitas en el marco teórico). Estos conceptos de equilibrio son convincentes en términos teóricos, pero en muchos juegos resultan ser débiles predictivamente porque existen muchos o aún infinitos equilibrios, con lo que no existe una predicción concreta sobre cuál equilibrio debería ocurrir (ver Harsanyi and Selten (1988) para una teoría de selección de equilibrios).

Existen clases particulares de juegos donde la teoría hace predicciones más robustas. Una de estas clases es la de los juegos globales, que estudiaremos en el siguiente

capítulo. En el resto de este capítulo, haremos una breve reseña de la teoría de juegos no cooperativa.

## 2.2. Teoría de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern

Dado que los agentes en un juego deben elegir entre alternativas, deben tener preferencias bien definidas entre los resultados posibles. Más aún, en muchos casos el resultado de un juego será incierto, por lo que los jugadores deben tener preferencias entre distribuciones de probabilidades sobre resultados posibles. Von Neumann y Morgenstern probaron un teorema que garantiza que dichas preferencias se pueden representar de forma cómoda, siempre que cumplan con una serie de condiciones razonables.

Sea  $X$  un conjunto finito de resultados posibles, que podemos llamar premios. Llamamos  $P$  al conjunto de distribuciones de probabilidad sobre  $X$  (que definimos como funciones saliendo de  $X$  en vez de  $\mathcal{P}(X)$ , ya que  $X$  es finito):

$$P = \{p : X \rightarrow [0, 1] \mid \sum_{x \in X} p(x) = 1\}.$$

Llamamos loterías a los elementos de  $P$ . Notamos que las loterías pueden, a su vez, combinarse: dado  $a \in [0, 1]$  y  $p, p' \in P$ ,  $ap + (1 - a)p'$  es una lotería que asigna probabilidad  $ap(x) + (1 - a)p'(x)$  a cada  $x \in X$ , es decir, es la lotería  $p$  con probabilidad  $a$  y la lotería  $p'$  con probabilidad  $1 - a$ .

Sea  $\preceq$  una relación sobre  $P$ , es decir,  $\preceq \subseteq P \times P$ , tal que:

- (I)  $\preceq$  es completa, es decir, dados  $p, p' \in P$ ,  $p \preceq p'$  o  $p' \preceq p$ .
- (II)  $\preceq$  es transitiva, es decir, si  $p \preceq p'$  y  $p' \preceq p''$ , entonces  $p \preceq p''$ .  
(Nota: de estas dos propiedades, se desprende una relación de equivalencia  $\sim$  dada por  $p \sim p' \Leftrightarrow p \preceq p' \wedge p' \preceq p$ ;  $\preceq$  define una relación de orden sobre  $P \times P / \sim$ , y notamos  $p \prec p'$  si  $p \preceq p'$  y no vale que  $p' \preceq p$ ).
- (III) (Axioma de independencia) Dados  $p, p', p'' \in P$  y  $a \in (0, 1]$ ,  $ap + (1 - a)p'' \prec ap' + (1 - a)p'' \Leftrightarrow p \prec p'$ . Esta condición significa que el orden de preferencias entre dos loterías  $p, p'$  debe preservarse si se agrega una probabilidad  $1 - a$  de que en ambos casos se dé un tercer resultado,  $p''$ .
- (IV) (Axioma de continuidad) Dados  $p, p', p'' \in P$ , si  $p \succ p' \succ p''$ , existen  $a, b \in (0, 1)$  tales que  $ap + (1 - a)p'' \succ p' \succ bp + (1 - b)p''$ . Equivalentemente (suponiendo los axiomas anteriores), dados  $p, p', p'' \in P$ , si  $p \succ p' \succ p''$ , existe  $a \in (0, 1)$  tal que  $ap + (1 - a)p'' \sim p'$ .

Entonces se tiene el siguiente

**Teorema 1** (Von Neumann y Morgenstern, 1944). *Dado un conjunto finito  $X$  de premios y el conjunto  $P$  de loterías asociado, con una relación  $\preceq$  que cumple los axiomas de arriba, existe una función  $U : P \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $p \preceq p' \Leftrightarrow U(p) \leq U(p')$ , y  $U$  puede representarse como  $U(p) = \sum_{x \in X} U(x)p(x)$ , donde  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función.  $u$  se denomina una función de utilidad de Von Neumann-Morgenstern.*

*Demostración.* Presentamos una construcción de  $u$ , y luego vemos que la  $U$  resultante representa las preferencias dadas por  $\preceq$ . Dado que  $X$  es finito, y podemos identificarlo como un subconjunto de  $P$ , tenemos la relación restringida  $\preceq|_X$ . Esta relación induce un orden entre las clases de equivalencia de  $\sim|_X$ , que forman un conjunto finito. Supongamos que hay más de una clase (si no, todo el problema es trivial). Luego, existe una clase mínima y otra máxima con respecto al orden. Tomemos representantes  $x_0$  y  $x_1$  respectivamente, y definamos  $u(x_0) = 0$ ,  $u(x_1) = 1$ . Más en general, definimos  $u(x) = 0$  si  $x \sim x_0$  y  $u(x) = 1$  si  $x \sim x_1$ . Ahora, para cada  $x \in X$  además de ellos, vale  $x_0 \prec x \prec x_1$ . Luego, por el Axioma de continuidad, existe  $a_x \in (0, 1)$  tal que  $a_x x_1 + (1 - a_x)x_0 \sim x$ . Definimos  $u(x) = a_x$ .

Ahora verifiquemos que la  $U$  resultante representa a  $\preceq$ . En primer lugar, es claro que  $u$  representa a  $\preceq|_X$ , ya que si  $u(x) \leq u(x')$ , entonces  $a_x \leq a_{x'}$  y  $x \sim a_x x_1 + (1 - a_x)x_0 \preceq a_{x'} x_1 + (1 - a_{x'})x_0 \sim x' \Rightarrow x \preceq x'$ ; y si  $x \preceq x'$  entonces  $a_x x_1 + (1 - a_x)x_0 \sim x \preceq x' \sim a_{x'} x_1 + (1 - a_{x'})x_0 \Rightarrow a_x \leq a_{x'} \Rightarrow u(x) \leq u(x')$ .

Para terminar observamos que, dado que  $x \sim u(x)x_1 + (1 - u(x))x_0$  para todo  $x \in X$ , en general vale que

$$p = \sum_{x \in X} p(x)x \sim \left( \sum_{x \in X} p(x)u(x) \right) x_1 + \left( \sum_{x \in X} p(x)(1 - u(x)) \right) x_0.$$

Ahora, haciendo uso nuevamente del Axioma de independencia, queda claro que  $p \preceq p'$  si y sólo si  $\sum_{x \in X} p(x)u(x) \leq \sum_{x \in X} p'(x)u(x)$ , es decir,  $U(p) \leq U(p')$ , como queríamos.  $\square$

Gracias a este teorema, en los capítulos que siguen, para cada jugador podremos asignar pagos numéricos a los posibles resultados que recibe, y trabajar con estos números coherentemente: si los pagos provienen de una función de utilidad de Von Neumann-Morgenstern, podremos hallar la utilidad de loterías simplemente calculando utilidades esperadas.

## 2.3. Juegos estáticos

**Definición 2.1.** Un juego estático finito de  $n$  personas  $G$  es un arreglo  $(\mathcal{I}, (S_i)_{i \in \mathcal{I}}, (u_i)_{i \in \mathcal{I}})$ , donde  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$  es el conjunto de jugadores; para cada  $i \in \mathcal{I}$ ,  $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{ik_i}\}$  es un conjunto finito que representa las estrategias puras del jugador  $i$ ; y  $u_i : \prod_{i \in \mathcal{I}} S_i \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de utilidad de Von Neumann-Morgenstern que indica los pagos de  $i$  en función de su estrategia y las de los demás.

*Nota.* Un arreglo  $s = (s_i)_{i \in \mathcal{I}}$ , con  $s_i \in S_i$ , se llama un perfil de estrategias para  $G$ . Llamamos  $S$  al conjunto de perfiles de estrategias.

Observamos que los espacios de estrategias puras  $S_i$  no tienen por qué ser iguales para jugadores diferentes, pero pueden serlo. Cuando los jugadores tienen iguales estrategias y pagos, el juego se llama simétrico:

**Definición 2.2.** Un juego estático finito de  $n$  personas  $G = (\mathcal{I}, (S_i)_{i \in \mathcal{I}}, (u_i)_{i \in \mathcal{I}})$  se dice simétrico si  $S_i = S_{i'}$  para todos los pares  $i, i' \in \mathcal{I}$  y, para toda permutación  $\tau$  de  $\mathcal{I}$  y todo perfil de estrategias  $s$ ,  $u_{\tau(i)}(\tau(s)) = u_i(s)$ , donde  $\tau(s)$  asigna la estrategia  $s_i$  al jugador  $\tau(i)$ .

En esta clase de juegos, los jugadores eligen cada uno una estrategia sin comunicarse con los demás, intentando maximizar su propia utilidad. (Esto no significa que los jugadores sean necesariamente egoístas, ya que su función de utilidad puede incluir el bienestar de otro jugador como una variable más). Interesa, en general, definir un concepto de equilibrio, que haga una predicción sobre qué estrategias deben jugarse si los agentes son racionales.

Un concepto convincente, pero débil, es el de estrategias dominadas. La idea es que un jugador racional no elegirá una estrategia que sea siempre peor que otra.

**Definición 2.3.** Sea  $G$  un juego estático finito de  $n$  personas,  $i \in \mathcal{I}$  y  $s_i \in S_i$ . Decimos que  $s_i$  está estrictamente dominada si existe  $s'_i \in S_i$  tal que, para cualesquiera  $s_j \in S_j, j \neq i$ ,

$$u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s'_i, \dots, s_n).$$

Decimos que  $s_i \in S_i$  está débilmente dominada si existe  $s'_i \in S_i$  tal que, para cualesquiera  $s_j \in S_j, j \neq i$ ,

$$u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n) \leq u_i(s_1, \dots, s'_i, \dots, s_n),$$

y la desigualdad es estricta en al menos un caso.

Es poco discutible que jugadores racionales no jugarán estrategias (estrictamente) dominadas. Si, además, cada jugador sabe que los demás son racionales, cada jugador sabe que los demás saben que los demás son racionales y así sucesivamente, entonces solamente podrán jugarse estrategias que sobrevivan a la eliminación iterativa de estrategias (estrictamente) dominadas (EIEED).

En la Figura 2.1 vemos el Dilema del Prisionero, un ejemplo clásico que se resuelve por eliminación de estrategias dominadas. En este juego dos delincuentes son capturados por la policía, pero no existen suficientes pruebas para condenarlos si no confiesan. Los policías deciden interrogarlos separadamente. En caso de que ninguno confiese, solamente podrán ser condenados por alguna ofensa menor, con pena de un año de cárcel. Si ambos confiesan, reciben una sentencia de 10 años. Si uno confiesa y el otro no, el que confiesa es dejado en libertad y el que no confiesa es sentenciado a 15 años

		Jugador 2	
		Confesar	No confesar
Jugador 1	Confesar	-10, -10	0, -15
	No confesar	-15, 0	-1, -1

Figura 2.1: Dilema del Prisionero

de cárcel. Si bien a ambos jugadores les conviene el resultado de que ninguno confiese (comparado con el resultado de si ambos confiesan), para cada jugador la estrategia de no confesar está estrictamente dominada por confesar, con lo que jugadores racionales elegirán confesar.

		Jugador 2	
		Confesar	No confesar
Jugador 1	Confesar	-10, -10	-100, -15
	No confesar	-15, 0	-1, -1

Figura 2.2: Eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas

En la Figura 2.2, consideramos una variante en la que el jugador 2 tiene amigos fuera de la cárcel, que asesinarán a 1 si éste traiciona a 2, resultando un pago de  $-100$ . En este caso confesar ya no es una estrategia dominante para 1: la prefiere si espera que 2 confiese, pero no si espera que 2 no confiese. Sin embargo, como para 2 confesar sí es dominante, si 1 cree que 2 es racional, debe esperar que confiese y, en consecuencia, confesar. En otras palabras, la estrategia *NC* está dominada para 2 en el juego original, por lo que ambos jugadores pueden eliminarla de la matriz del juego. Una vez hecho eso, queda un juego reducido en el que *NC* está dominada para 1. Esto es un ejemplo sencillo de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas.

		B		
		L	M	R
A	U	0, 4	4, 0	5, 3
	M	4, 0	0, 4	5, 3
	D	3, 5	3, 5	6, 6

Figura 2.3: Un juego sin estrategias dominadas

En la Figura 2.3, vemos un juego que no tiene estrategias dominadas, por lo que este criterio no hace ninguna predicción sobre lo que debe jugarse. En muchos ejemplos importantes, el criterio de estrategias dominadas resulta débil porque a menudo ninguna estrategia es dominada por otras.

Si, además de la racionalidad, suponemos que existe algún mecanismo para coordinar las expectativas, de tal forma que cada jugador espera que los demás hagan lo que efectivamente hacen, entonces en un ‘equilibrio’ ningún jugador debe tener incentivos a cambiar su estrategia, dadas las estrategias de los otros. Entonces, un equilibrio consiste en un perfil de estrategias tal que la estrategia de cada jugador es una respuesta óptima a las estrategias que el perfil asigna a los otros jugadores.

**Definición 2.4.** Sea  $G$  un juego estático finito de  $n$  personas. Un equilibrio de Nash en estrategias puras es un perfil de estrategias  $s^* = (s_i^*)_{i \in \mathcal{I}}$  tal que, para cada  $i \in \mathcal{I}$  y para cada  $s'_i \in S_i$ ,

$$u_i(s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \dots, s'_i, \dots, s_n^*).$$

Notamos que este concepto de equilibrio es más fuerte que el de EIEED, ya que cualquier equilibrio de Nash deberá sobrevivir el proceso de EIEED (sin embargo, pueden existir equilibrios de Nash que usen estrategias débilmente dominadas).

En general, un tal juego  $G$  puede tener uno, varios o ningún equilibrio de Nash en estrategias puras. Un ejemplo del primer caso es el Dilema del Prisionero; ejemplos del segundo son los juegos Halcón-Paloma y Batalla de los Sexos, que mostramos en la figura 2.4; un ejemplo del tercer caso es el juego de *Matching pennies*, que mostramos en la figura 2.5.

		Jugador 2				Beatriz	
		Halcón	Paloma			Fútbol	Teatro
Jugador 1	Halcón	−5, −5	10, 0	Arnaldo	Fútbol	2, 1	0, 0
	Paloma	0, 10	5, 5		Teatro	0, 0	1, 2
		Halcón-Paloma				Batalla de los Sexos	

Figura 2.4:

En el juego Halcón-Paloma, dos jugadores compiten por un premio, y cada uno puede elegir una estrategia agresiva, llamada Halcón, o una pacífica, llamada Paloma. Si ambos eligen Paloma, el premio se reparte sin que haya conflicto; si uno elige Halcón y el otro Paloma, el primero se queda con el premio; pero si ambos eligen Halcón, se enfrentan y terminan perdiendo ambos. Hay dos equilibrios de Nash en estrategias puras: que un jugador juegue Halcón y el otro Paloma, o al revés.

En el juego Batalla de los Sexos, dos jugadores, Arnaldo y Beatriz, deciden si ir a ver un partido de fútbol o una obra de teatro. Los pagos indican que Arnaldo prefiere que vayan al partido y Beatriz que vayan a la obra, pero que un desencuentro es el peor resultado posible, independientemente de a dónde van. En este juego, hay dos equilibrios de Nash puros: que ambos vayan al partido y que ambos vayan a la obra.

En el juego *Matching pennies*, el jugador 2 elige que una moneda esté boca arriba o abajo, y el jugador 1 trata de adivinar la elección de 2. Si 1 adivina bien, gana; si no,

		Jugador 2	
		Cara	Ceca
Jugador 1	Cara	1, -1	-1, 1
	Ceca	-1, 1	1, -1

Figura 2.5: *Matching pennies*

gana 2. En este caso no hay equilibrios de Nash puros, ya que en cualquier situación habrá un jugador que querrá cambiar su estrategia para ganar.

Sin embargo, resulta natural esperar que para todo juego exista algún equilibrio: esto puede requerir algún grado de randomización. En particular, en el juego *Matching pennies*, lo natural sería que los jugadores elijan cada estrategia al azar con probabilidad  $\frac{1}{2}$ , para evitar ser predecibles. Para permitir esto, definimos estrategias mixtas, que son distribuciones de probabilidad sobre el espacio de estrategias puras:

**Definición 2.5.** Sea  $G$  un juego estático finito de  $n$  personas e  $i \in \mathcal{I}$ . Una estrategia mixta  $\sigma_i$  es una función  $\sigma_i : S_i \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  tal que  $\sum_{s_{ij} \in S_i} \sigma_i(s_{ij}) = 1$ . El conjunto de tales estrategias forma el espacio de estrategias mixtas de  $i$ , que notamos  $\Sigma_i$ . Llamamos  $\sigma$  a un perfil de estrategias mixtas y  $\Sigma$  al conjunto de perfiles de estrategias mixtas.

*Nota.* Sea  $k_i$  la cantidad de estrategias puras del jugador  $i$ . Entonces podemos identificar  $\Sigma_i$  con  $\Delta^{k_i-1} = \{(x_1, \dots, x_{k_i}) \in \mathbb{R}^{k_i} / x_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^{k_i} x_i = 1\}$ , el  $(k_i - 1)$ -símplex, vía  $\sigma_i \mapsto (\sigma_i(s_{i1}), \dots, \sigma_i(s_{ik_i}))$ . Además, pensando las estrategias mixtas como elementos de  $\Delta^{k_i-1} \subseteq \mathbb{R}^{k_i}$ , dadas estrategias mixtas  $\sigma_i, \tau_i$  del jugador  $i$  podemos darle un sentido natural a  $p\sigma_i + (1-p)\tau_i$  usando la estructura de espacio vectorial de  $\mathbb{R}^{k_i}$ , y el resultado es la ‘mezcla’ de  $\sigma_i$  y  $\tau_i$  con ponderaciones  $p$  y  $1-p$ .

Cuando los jugadores usan estrategias mixtas propias, se supone que son independientes entre sí. Esto puede resultar natural en algunos casos (cuando cada jugador hace uso del azar para que su estrategia sea impredecible, y por tanto randomiza usando algún mecanismo independiente del de sus rivales), pero limitante o poco realista en otros, donde los jugadores pueden querer coordinar algún resultado aleatorio. Un ejemplo del primer caso es el juego de *Matching pennies*. Para un ejemplo del segundo caso, volvamos al juego Batalla de los Sexos.

En este juego hay dos equilibrios puros, pero no hay razones para pensar que se deba elegir uno en vez de otro. Podríamos pensar que una solución más razonable es que los jugadores tiren una moneda, yendo al partido si sale cara y a la obra si sale ceca. Sin embargo, estas estrategias no son válidas en el marco en que trabajamos, porque no son independientes; sólo permitimos que cada jugador randomice entre sus estrategias puras sin saber lo que piensa hacer el otro. En este juego resulta haber también un equilibrio mixto con estrategias independientes, pero es menos eficiente, ya que hay una probabilidad alta de desencuentro.

Existe un concepto de equilibrio diferente al de Nash, llamado equilibrio correlacionado, que permite coordinar estrategias mixtas bajo ciertas condiciones. Una in-

roducción al tema puede encontrarse en Aumann (1987); nosotros trabajaremos con estrategias mixtas independientes.

*Nota.* Dado que trabajamos con funciones de utilidad de Von Neumann-Morgenstern, los pagos que resultan de un perfil de estrategias mixtas se deducen inmediatamente: dado un perfil de estrategias mixtas  $\sigma = (\sigma_i)_{i \in \mathcal{I}}$ , la utilidad esperada del jugador  $j$  es

$$u_j(\sigma) = \sum_{s \in S} P(s) u_j(s) = \sum_{s \in S} \left( \prod_{i \in \mathcal{I}} \sigma_i(s_i) \right) u_j(s)$$

donde  $P(s)$  es la probabilidad de que los jugadores terminen jugando el perfil  $s$ , dado que eligen sus estrategias según las probabilidades de  $\sigma$ .

De ahora en más, un perfil de estrategias podrá ser, en general, un perfil de estrategias mixtas. Además, identificaremos a la estrategia pura  $s_{ij}$  con la estrategia mixta  $\sigma_{ij}$  dada por  $\sigma_{ij}(s_{ij}) = 1$ . De la misma forma, podemos dar una noción de equilibrio admitiendo estrategias mixtas:

**Definición 2.6.** Sea  $G$  un juego estático finito de  $n$  personas. Un equilibrio de Nash es un perfil de estrategias mixtas  $\sigma^* = (\sigma_i^*)_{i \in \mathcal{I}}$  tal que, para cada  $i \in \mathcal{I}$  y para cada  $\sigma'_i \in \Sigma_i$ ,

$$u_i(\sigma_1^*, \dots, \sigma_i^*, \dots, \sigma_n^*) \geq u_i(\sigma_1^*, \dots, \sigma'_i, \dots, \sigma_n^*).$$

Se tiene entonces el siguiente teorema:

**Teorema 2** (Nash, 1951). *Sea  $G$  un juego estático finito de  $n$  personas. Entonces  $G$  tiene al menos un equilibrio de Nash.*

Existen varias demostraciones de este teorema, aunque todas hacen uso de algún teorema de punto fijo. En el resto de esta sección presentamos dos demostraciones, la primera usando el teorema de Brouwer y la segunda el de Kakutani, junto con una demostración de este último.

*Demostración con el teorema de Brouwer (Nash, 1951).* Dado un perfil de estrategias mixtas  $\sigma$ , un  $j \in \mathcal{I}$  y  $\alpha \in S_j$ , llamamos  $\sigma_{j\alpha} = (\sigma'_i)_{i \in \mathcal{I}}$  dado por  $\sigma'_i = \sigma_i$  si  $i \neq j$  y  $\sigma'_j = \alpha$ , es decir, la estrategia mixta que le da probabilidad 1 a  $\alpha$ . Ahora definimos, para cada par  $j, \alpha$  una función  $\varphi_{j\alpha} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\varphi_{j\alpha}(\sigma) = \max(0, u_j(\sigma_{j\alpha}) - u_j(\sigma)).$$

Esta función mide cuánto el jugador  $j$  aumenta su pago cambiando su estrategia mixta  $\sigma_j$  por  $\alpha$ , valiendo 0 si el cambio baja su utilidad. Notamos que las funciones  $\varphi_{j\alpha}$  son continuas, pensando a  $\Sigma$  como  $\Delta^{k_j-1}$ .

Ahora definimos una aplicación  $T : \Sigma \rightarrow \Sigma$  dada por

$$T(\sigma)_j = \frac{\sigma_j + \sum_{\alpha \in S_j} \varphi_{j\alpha}(\sigma) \alpha}{1 + \sum_{\alpha \in S_j} \varphi_{j\alpha}(\sigma)}.$$

Vemos que  $T$  ajusta las probabilidades que cada jugador le asigna a sus estrategias puras, aumentando más las de las estrategias que pagan más; el denominador sirve para que la suma de las probabilidades se mantenga en 1. Notamos que  $T$  es continua (pensando  $\Sigma$  como  $\prod_{i \in \mathcal{I}} \Delta^{k_i-1} \subseteq \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{R}^{k_i} = \mathbb{R}^{\sum_i k_i}$ ), con dominio y codominio iguales a un subconjunto convexo y compacto de  $\mathbb{R}^{\sum_i k_i}$ . Luego, por el teorema de Brouwer,  $T$  tiene un punto fijo, es decir, existe  $\sigma \in \Sigma$  tal que  $T(\sigma) = \sigma$ .

Ahora bien, esto requiere en particular que  $T$  no reduzca la probabilidad de ninguna estrategia para ningún jugador. Para cada jugador  $j$ , existe al menos una estrategia  $\alpha$  que no paga más que  $\sigma_j$  (dado que el pago de  $\sigma_j$  es un promedio de los pagos de estrategias puras con probabilidad positiva en  $\sigma_j$ , si todas las estrategias puras pagaran más que  $\sigma_j$  tendríamos un absurdo). Luego  $\varphi_{j\alpha}(\sigma) = 0$ , por lo que la probabilidad de  $\alpha$  en  $T(\sigma)_j$  es la misma que en  $T(\sigma)$ , pero dividida por  $1 + \sum_{\alpha \in S_j} \varphi_{j\alpha}(\sigma)$ . Luego, para que sean iguales, debe ser

$$1 + \sum_{\alpha \in S_j} \varphi_{j\alpha}(\sigma) = 1$$

$$\sum_{\alpha \in S_j} \varphi_{j\alpha}(\sigma) = 0,$$

de donde  $\varphi_{j\alpha}(\sigma) = 0$  para todos los pares  $j, \alpha$ . Luego, para todos los jugadores  $j$  y estrategias puras  $\alpha$ ,  $\alpha$  no paga más que  $\sigma_j$ , dado que los demás juegan el resto del perfil  $\sigma$ . Entonces  $\sigma$  es un equilibrio de Nash.  $\square$

Notamos que en esta demostración usamos el teorema de Brouwer, en la siguiente versión:

**Teorema 3** (Brouwer, 1911). *Sea  $K$  un subespacio de  $\mathbb{R}^m$  no vacío, compacto y convexo. Sea  $f : K \rightarrow K$  una función continua. Entonces  $f$  tiene un punto fijo.*

Existen varias demostraciones de este teorema, tanto topológicas como analíticas, e incluso combinatorias (existe una demostración a partir del lema de Sperner, probado en Sperner (1928), y otra que hace uso del juego *Hex*, que puede encontrarse en Gale (1979)).

Para la segunda demostración del Teorema 2, presentamos algunos conceptos previos.

Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , una correspondencia entre  $A$  y  $B$  es una función  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(B)$  tal que para todo  $a \in A$   $f(a) \neq \{\emptyset\}$ . Definimos el gráfico de  $f$  como

$$gr(f) = \{(a, b) / a \in A, b \in f(a)\} \subseteq A \times B$$

y decimos que  $f$  es de gráfico cerrado si  $gr(f)$  es cerrado como subespacio de  $A \times B$  con la topología producto. Un  $a \in A$  se dice punto fijo de  $f$  si  $A = B$  y  $a \in f(a)$ .

El siguiente teorema de punto fijo es usado para probar varios resultados en economía, incluyendo el Teorema 2, como también la existencia de equilibrios perfectos de Nash y otros refinamientos, y la existencia de equilibrios generales en una economía.

**Teorema 4** (Kakutani, 1941). *Sea  $A$  un subespacio de  $\mathbb{R}^m$  no vacío, compacto y convexo. Sea  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  una correspondencia de gráfico cerrado, y tal que  $f(a)$  es convexo para todo  $a \in A$ . Entonces  $f$  tiene un punto fijo.*

Damos la demostración original de Kakutani, basada en el teorema de Brouwer; existe otra que usa el lema de Sperner directamente.

*Demostración.* Supongamos primero que  $A$  es un  $r$ -simplex. Sea  $A^{(n)}$  la  $n$ -ésima descomposición baricéntrica de  $A$ . Para cada vértice  $x^n$  de  $A^{(n)}$  tomamos un elemento cualquiera  $y^n$  de su imagen. Ahora, dado un simplex  $A_k^{(n)}$  de  $A^{(n)}$ , cada vértice de él queda mapeado a un punto en  $A$ ; usando coordenadas baricéntricas, podemos extender esta aplicación linealmente a todo  $A_k^{(n)}$ , y el resultado es una función continua de  $A_k^{(n)}$  a  $A$ . Además, dados dos simples que comparten uno o más vértices, es claro que las funciones así definidas para cada simplex coinciden no solamente en los vértices compartidos sino también en las aristas, caras, etc. que sean compartidas. Luego, para cada  $n$  podemos pegar estas funciones y obtener una función  $f_n : A \rightarrow A$ , que es continua por el lema de pegado para finitos cerrados.

Ahora, como  $A$  es un convexo compacto, por el teorema de Brouwer, para cada  $n$  existe un  $x_n$  tal que  $f_n(x_n) = x_n$ , es decir, un punto fijo de  $x_n$ . Al estar incluida en un compacto, la sucesión  $(x_n)_n$  tiene una subsucesión convergente, digamos  $(x_{n_k})_k$ , con límite  $x_0$ . Probaremos que  $x_0 \in f(x_0)$ .

Para verlo, asociamos primero a cada punto  $x_{n_k}$  el  $r$ -simplex  $\Delta_k$  de la descomposición  $A^{(n_k)}$  al que pertenece  $(x_{n_k})$  (podría estar en la intersección de varios simples de  $A^{(n_k)}$ , en cuyo caso elegimos cualquiera de ellos). Luego, para cada  $k$ , numeramos los vértices de  $\Delta_k$  en algún orden como  $x_{0k}, x_{1k}, \dots, x_{rk}$ . Además, llamamos  $y_{ik} = f_{n_k}(x_{ik})$ . Es claro que, para cada  $i = 0, \dots, r$ , la sucesión  $(x_{ik})_k$  converge a  $x_0$ , ya que  $(x_{n_k})_k$  converge a  $x_0$ , y la distancia entre  $x_k$  y los vértices de  $\Delta_k$  tiende a 0 al crecer  $k$ , dado que los simples son cada vez más chicos.

Por otro lado, las sucesiones  $(y_{ik})_k$  pueden no converger, pero como  $A$  es compacto, podemos tomar una subsucesión  $(y_{ik_m})_m$  tal que esto ocurra para todo  $i = 0, \dots, r$  (tomando primero una subsucesión tal que los  $y_{0k}$  converjan, luego una sub-sucesión tal que los  $y_{1k}$  también lo hagan, y así sucesivamente). Sea  $y_i = \lim_{m \rightarrow \infty} y_{ik_m}$ . Como los  $x_{ik}$  son vértices de  $\Delta_k$ ,  $f_{n_k}(x_{ik}) = f(x_{ik})$ . Luego,  $(x_{ik_m}, y_{ik_m})$  está en el gráfico de  $f$  para todo  $m$ , y esa sucesión converge a  $(x_0, y_i)$ . Como el gráfico de  $f$  es cerrado, esto implica  $y_i \in f(x_0)$  para  $i = 0, \dots, r$ . Como  $f(x_0)$  debe ser convexo, todo el  $r$ -simplex delimitado por los  $y_i$ ,  $\Delta$ , está incluido en  $f(x_0)$ .

Por último, notamos que  $x_0 \in \Delta$ , ya que  $x_0 \in \Delta_{k_m}$  para todo  $m$  por construcción, y los  $y_i$  son límites de las sucesiones de vértices de los  $\Delta_{k_m}$ . Luego  $x_0 \in f(x_0)$ .

En caso de que  $A$  no sea un simplex, colocamos un simplex de dimensión máxima dentro de  $A$ : este simplex se puede construir tomando un punto  $a_0 \in A$ , y después tomando un conjunto de puntos  $b_1, \dots, b_l \in A$  de tamaño máximo tal que el conjunto  $b_1 - a_0, \dots, b_l - a_0$  sea linealmente independiente en el espacio ambiente. Luego  $b_1, \dots, b_l$  son los vértices de un simplex  $S$  de dimensión máxima en  $A$ , que se puede probar

fácilmente que es homeomorfo a  $A$  a través de una  $\phi : S \rightarrow A$ . Luego el resultado se deduce para  $A$  aplicando lo anterior a  $\phi^{-1} \circ f \circ \phi : S \rightarrow S$ .  $\square$

*Demostración con el teorema de Kakutani (Nash, 1950).* Para cada  $\sigma \in \Sigma$  e  $i \in \mathcal{I}$  definimos  $f(\sigma)_i$  como el conjunto de respuestas óptimas de  $i$  al perfil  $\sigma$ , y  $f(\sigma) = \prod_{i \in \mathcal{I}} f(\sigma)_i$ . Notamos que  $f(\sigma)_i$  nunca puede ser vacío, porque de las estrategias puras de  $i$ , al ser finitas, hay una que paga al menos tanto como las demás contra  $\sigma$ , y luego es óptima. Entonces  $f : \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma)$  es una correspondencia. Además, los  $\Sigma_i$  pueden ser pensados como símplices, es decir, subespacios de  $\mathbb{R}^{k_i-1}$  no vacíos, compactos y convexos. Como el producto conserva estas propiedades,  $\Sigma$  es un subespacio de un  $\mathbb{R}^k$  no vacío, compacto y convexo. Además,  $f(\sigma)_i$  es convexo para todo  $\sigma \in \Sigma$  e  $i \in \mathcal{I}$ , ya que si dos estrategias son óptimas, cualquier combinación lineal paga lo mismo y también es óptima. Luego  $f(\sigma)$  es convexo para todo  $\sigma \in \Sigma$ .

Veamos por último que el gráfico de  $f$  es cerrado. Para ello, basta ver que dada cualquier sucesión  $(\sigma_n, \tau_n)$  con  $\tau_n \in f(\sigma_n)$  que converja a un  $(\sigma, \tau)$ , vale que  $\tau \in f(\sigma)$ . Supongamos que no, en cuyo caso existe  $i \in \mathcal{I}$  y  $\tau'_i$  tal que  $u_i(\tau'_i, \sigma_{-i}) > u_i(\tau_i, \sigma_{-i})$ , donde  $\tau_i, \sigma_{-i}$  significa que  $i$  juega  $\tau_i$  y los demás juegan las estrategias que dicta  $\sigma$ . Ahora bien,

$$u_i(\tau'_i, \sigma_{-i}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u_i(\tau'_i, (\sigma_n)_{-i}) \leq u_i((\tau_n)_i, (\sigma_n)_{-i}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u_i(\tau_i, \sigma_{-i}),$$

absurdo. Luego, por el teorema de Kakutani, la correspondencia tiene un punto fijo, que es un equilibrio de Nash del juego.  $\square$

La segunda demostración hace uso de la correspondencia de mejores respuestas, mientras que la primera define una de mejora incremental en respuesta a las estrategias de los demás (que hay que construir con algo de cuidado para que quede continua).

## 2.4. Juegos con información incompleta

Existen situaciones en las que los agentes tienen incertidumbre sobre el juego que se está jugando, los incentivos de los demás jugadores, o el ‘estado de la naturaleza’ que determina la efectividad de ciertas estrategias. Estos casos caen bajo el nombre de juegos de información incompleta. La literatura del tema comienza con los trabajos de Harsanyi (1967, 1968); presentamos un resumen basado en Fudenberg and Tirole (1991).

Un ejemplo sencillo son los juegos Bayesianos, en los que para cada jugador  $i$  hay un conjunto de ‘tipos’  $\theta_i$ . Intuitivamente, el tipo de un jugador determina qué pagos (y, por tanto, qué incentivos) tiene, y también puede o no influir en los pagos de los demás; por ejemplo, si en una variante del juego Batalla de los Sexos un jugador puede tener distintas preferencias según su tipo, esto no debería afectar, en principio, los pagos del otro jugador, pero si en una variante del juego Halcón-Paloma el tipo determinara la capacidad militar de un país, esto afectaría a ambos en caso de una guerra. El tipo que

le toca a cada jugador en cada realización del juego se determina aleatoriamente: cada jugador conoce su tipo, pero no el de los demás.

Más precisamente, para cada jugador  $i$  existe un espacio finito de tipos  $\theta_i \in \Theta_i$ , y hay además un espacio de probabilidad  $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), P)$  dado por una distribución  $p : \Theta \rightarrow [0, 1]$ , donde  $\Theta = \prod_{i \in \mathcal{I}} \Theta_i$ . Así, si  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ , la probabilidad de que el perfil de tipos sea  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  es  $p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ . En particular, las distribuciones de los  $\theta_i$  pueden ser o no independientes. Suponemos que el espacio de acciones  $S_i$  de cada jugador  $i$  es independiente de  $\theta_i$ , pero los pagos dependen de los tipos: en general, para cada  $i$  existirá una función de utilidad  $u_i(s_1, \dots, s_n, \theta_1, \dots, \theta_n)$ , es decir,  $u_i : S \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dada  $p$  y su tipo observado  $i$ , el jugador  $i$  puede calcular la probabilidad condicional de que los tipos de los demás jugadores sigan cierta configuración:

$$P(\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n | \theta_i) = \frac{p(\theta_1, \dots, \theta_n)}{P(\theta_i)},$$

donde  $P(\theta_i) = \sum_{\theta \in \Theta, (\theta)_i = \theta_i} p(\theta)$ .

En general, el jugador  $i$  deberá elegir una acción posiblemente distinta para cada tipo, por lo que una estrategia pura en esta clase de juegos será una función  $t_i : \Theta_i \rightarrow S_i$ . Más en general, podemos tener estrategias mixtas de la forma  $t_i : \Theta_i \rightarrow \Sigma_i$ . Ahora, dado un perfil de estrategias  $(t_i)_{i \in \mathcal{I}}$  podemos, para cada jugador  $i$  y tipo  $\theta_i$ , calcular la utilidad esperada de jugar la estrategia que le corresponde según el perfil,  $t_i(\theta_i)$ , o también de cambiarla por otra  $\sigma'_i$ . Luego, podemos definir un equilibrio bayesiano de Nash como un perfil de estrategias  $t^*$  tal que, para cada  $i$  y  $\theta_i$ ,  $t_i^*(\theta_i)$  maximiza la utilidad esperada de  $i$  dada la distribución de las estrategias y tipos de los demás jugadores, condicional a  $\theta_i$ . La existencia de equilibrios bayesianos de Nash en estrategias mixtas puede probarse de forma análoga al caso sin información incompleta, usando el teorema de Kakutani.

Desde el Capítulo 3 en adelante trabajaremos con una clase de juegos que se asemejan a estos, pero requieren un marco más general. Un tal marco puede ser el siguiente: sea un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y una familia finita de variables aleatorias  $(X_j) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $j \in J = \{1, 2, \dots, k\}$ . Además, para cada  $i \in \mathcal{I}$ , sea  $J_i \subseteq J$ . Cada jugador  $i$  tiene un espacio finito de acciones  $S_i$ , y antes de jugar observa la tira  $(X_j)_{j \in J_i}$ , con lo que una estrategia pura será una función  $t_i : \prod \text{Im}(X_j) \rightarrow S_i$ , una estrategia mixta será una función  $t_i : \prod \text{Im}(X_j) \rightarrow \Sigma_i$  y podemos definir un concepto de equilibrio análogo, requiriendo que cada jugador maximice su utilidad esperada dada la distribución de las  $X_j$  observadas por los demás jugadores, y de sus estrategias, condicional a los valores observados por  $i$ .

Sin embargo, no se puede extender la demostración de existencia hecha antes para este caso, ya que los espacios de estrategias son infinitos. Si bien existen resultados de existencia de equilibrio para juegos con espacios de estrategias infinitos, en general requieren como mínimo que dichos espacios sean además compactos, cosa que en este caso puede no valer (y, en particular, no vale en la clase de juegos que consideramos en el Capítulo 3 y luego).

## 2.5. Juegos supermodulares

Los juegos supermodulares representan situaciones en las que hay una complementariedad estratégica entre jugadores: en otras palabras, el espacio de estrategias de cada jugador tiene un orden, y el incentivo a elegir estrategias más altas aumenta cuando los demás jugadores eligen estrategias altas. De esta propiedad se deducen varios resultados interesantes sobre el conjunto de equilibrios. Mencionamos esta clase de juegos porque tanto la intuición involucrada como los resultados que se obtienen presentan similitudes con los juegos que analizamos en los Capítulos 3 y posteriores. La literatura del tema comienza con Topkis (1979); hacemos un breve resumen basado en Fudenberg and Tirole (1991).

Supongamos que, para cada  $i$ ,  $S_i$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^{k_i}$ . Entonces  $S = \prod_{i \in \mathcal{I}} S_i \subseteq \mathbb{R}^k$ , con  $k = \sum_{i \in \mathcal{I}} k_i$ . El orden en  $\mathbb{R}$  induce un orden parcial en  $S_i$  coordenada a coordenada, es decir,  $s_i \geq s'_i$  si  $s_i - s'_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{k_i}$  y  $s_i > s'_i$  si  $s_i \geq s'_i$  y  $s_i \neq s'_i$ .

Dados  $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ , definimos

$$\begin{aligned} x \vee y &= (\text{máx}(x_1, y_1), \dots, \text{máx}(x_n, y_n)), \\ x \wedge y &= (\text{mín}(x_1, y_1), \dots, \text{mín}(x_n, y_n)). \end{aligned}$$

**Definición 2.7.** Un conjunto parcialmente ordenado  $(X, \leq)$  se dice un *lattice* si para todos  $x, y \in X$  existen  $x \vee y$  y  $x \wedge y$ , el supremo y el ínfimo de  $x$  e  $y$  respectivamente, tales que

- (a)  $x \vee y \geq x$ ,  $x \vee y \geq y$ , y para todo  $z \in X$  tal que  $z \geq x$  y  $z \geq y$ , vale  $z \geq x \vee y$ ;
- (b)  $x \wedge y \leq x$ ,  $x \wedge y \leq y$ , y para todo  $z \in X$  tal que  $z \leq x$  y  $z \leq y$ , vale  $z \leq x \wedge y$ .

Observamos que  $\mathbb{R}^m$  es un *lattice*. Decimos que  $S \subseteq \mathbb{R}^m$  es un *sublattice* de  $\mathbb{R}^m$  si es un *lattice* con la estructura heredada, es decir, dados  $s, s' \in S$ ,  $s \vee s', s \wedge s' \in S$ , donde  $\vee$  y  $\wedge$  son las operaciones definidas para  $\mathbb{R}^m$  restringidas a  $S$ .

Supongamos entonces que  $S_i$  es un *sublattice* de  $\mathbb{R}^{k_i}$  para todo  $i$ . Definimos ahora la noción de complementariedad estratégica: sea  $i \in \mathcal{I}$  y  $s = (s_1, \dots, s_n)$  un perfil de estrategias puras.  $u_i$  tiene diferencias crecientes en  $s$  si para todo  $s' = (s'_1, \dots, s'_n)$  tal que  $s \geq s'$ ,

$$u_i(s) - u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n) \geq u_i(s'_1, \dots, s'_{i-1}, s_i, s'_{i+1}, \dots, s'_n) - u_i(s'),$$

es decir, el cambio de una estrategia  $s'_i$  a una  $s_i$  mayor es relativamente menos ventajoso si los demás juegan estrategias  $s'_j$  más bajas, que si juegan las  $s_j$  más altas. Decimos que  $u_i$  tiene diferencias estrictamente crecientes si la desigualdad es estricta para todos  $s, s'$  tales que  $s_i > s'_i$  y  $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) > (s'_1, \dots, s'_{i-1}, s'_{i+1}, \dots, s'_n)$ .

Además, decimos que  $u_i$  es supermodular en  $i$  si, para todos  $s_1, \dots, s_n$  y  $s'_i$  vale

$$\begin{aligned} u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) + u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n) \leq \\ u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i \wedge s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n) + u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i \vee s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n), \end{aligned}$$

donde usamos la estructura de *lattice* de  $S_i$ . Decimos que  $u_i$  es estrictamente supermodular en  $i$  si la desigualdad es estricta siempre que no valen  $s_i \leq s'_i$  ni  $s'_i \leq s_i$  (es decir, siempre que  $s_i$  y  $s'_i$  no son comparables).

Decimos que un juego de  $n$  jugadores es (estrictamente) supermodular si, para cada  $i \in \mathcal{I}$ , el espacio de estrategias  $S_i$  es un *sublattice* de  $\mathbb{R}^{k_i}$ , y la función de utilidad  $u_i$  tiene diferencias (estrictamente) crecientes para todo  $s \in S$  y es (estrictamente) supermodular en  $i$ .

De estas propiedades, más algunas condiciones técnicas, se obtienen varios resultados convenientes sobre el conjunto de equilibrios del juego. Más precisamente, sea un juego supermodular tal que  $S_i$  es compacto y  $u_i$  es semi-continua superiormente en  $s_i$  para todos  $i$  y  $s = (s_j)_{j \in \mathcal{I}}$ . Entonces el conjunto de equilibrios de Nash puros del juego es no vacío, y tiene un máximo  $\bar{s}$  y un mínimo  $\underline{s}$  (Topkis, 1979). Además, si el juego es estrictamente supermodular, el conjunto de equilibrios de Nash es un *lattice* completo (es decir, el supremo y el ínfimo de cualquier conjunto de equilibrios también son equilibrios) (Vives, 1990). En el primer caso, con algunas condiciones más, resulta que  $\bar{s}$  y  $\underline{s}$  se obtienen como máximo y mínimo del conjunto de perfiles que sobreviven el proceso de EIEED, respectivamente (Milgrom and Roberts, 1990).

No demostramos estos hechos, pero notamos que se deducen esencialmente del comportamiento de las correspondencias de respuestas óptimas: se puede probar que, para un juego supermodular como arriba, dado un  $i$  y un perfil para los otros jugadores  $(s_j)_{j \neq i}$ , el conjunto de respuestas óptimas tiene máximo  $\bar{s}_i((s_j)_j)$  y mínimo  $\underline{s}_i((s_j)_j)$ , y que estos son funciones crecientes en  $(s_j)_j$ . Si el juego tiene además diferencias estrictamente crecientes, todo el conjunto de respuestas óptimas es creciente, es decir: si  $(s_j)_j \geq (s'_j)_j$  y  $s_i, s'_i$  son respuestas óptimas a  $(s_j)_j$  y  $(s'_j)_j$  respectivamente, entonces  $s_i \geq s'_i$ . (Este último resultado es casi inmediato a partir de las definiciones). A su vez, esto permite usar el siguiente teorema para probar los resultados de arriba:

**Teorema 5** (Tarski, 1955). *Si  $S$  es un sublattice de  $\mathbb{R}^m$  compacto y no vacío, y  $f : S \rightarrow S$  es creciente, entonces  $f$  tiene un punto fijo en  $S$ .*

Los juegos que consideramos en los Capítulos 3 y siguientes no caen estrictamente en este marco, porque los espacios de estrategias en ellos son espacios de funciones, es decir, de dimensión infinita, pero ambas clases de juegos comparten la lógica de la complementariedad estratégica.

## 2.6. Espacios de probabilidad no unitarios

En la teoría de probabilidades suele trabajarse con espacios de probabilidad unitarios, es decir, espacios de medida  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  en los que la medida total es 1. Si bien esto tiene sentido, para un desarrollo sencillo de los cálculos en los capítulos siguientes, queremos trabajar en espacios donde existe una variable aleatoria  $\theta$  cuya distribución es uniforme sobre  $\mathbb{R}$ , lo que requiere que la medida total del espacio de probabilidad sea infinita.

Además de ser computacionalmente cómoda, una variable con distribución uniforme sobre  $\mathbb{R}$  es intuitivamente razonable si pensamos que representa un dato sobre el cual los jugadores no tienen ninguna información previa, y este supuesto ha sido usado ya por Morris and Shin (2002, 2003) en el contexto de juegos globales. Notamos que también se usan variables de este tipo como *improper priors* en estadística Bayesiana, para construir estimadores Bayesianos generalizados.

Una exposición detallada de la teoría de espacios de probabilidad con medida infinita puede encontrarse en Hartigan (1983). Para nuestros fines, es suficiente hacer una construcción sencilla: dado  $k \in \mathbb{N}$ , tomemos el espacio de medida  $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), \mu)$  donde  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$  son los borelianos de  $\mathbb{R}^k$  y  $\mu = f\lambda$ . Aquí  $\lambda$  es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^k$  y  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty)$  es una función continua que servirá como densidad para  $\mu$ ; cuando decimos  $\mu = f\lambda$  queremos decir que  $f$  es la derivada de Radon-Nikodym de  $\mu$  con respecto a  $\lambda$ , es decir, para todo  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$  tenemos

$$\mu(B) = \int_B f d\lambda = \int_B f dx.$$

Ahora construir el espacio de probabilidad relevante consistirá en elegir la  $f$  apropiada. Para lo que hacemos en los capítulos siguientes, en los que usamos una variable uniforme  $\theta$  sobre los números reales y  $k - 1$  normales  $(\epsilon_i)_{i=2, \dots, k}$  independientes (entre sí y de  $\theta$ ) de distribución  $N(a_i, \sigma_i^2)$ , debemos tomar

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \prod_{i=2}^k f_i(x_i),$$

donde  $f_i$  es la densidad de una variable con distribución  $N(a_i, \sigma_i^2)$ . Identificamos  $\theta$  con  $x_1$  y  $\epsilon_i$  con  $x_i$  para  $i \geq 2$ . Notamos que la medida resultante no es finita pero sí  $\sigma$ -finita, ya que la medida de cualquier intervalo acotado en  $\mathbb{R}^k$  es finita. Además, dado un subconjunto  $M \subseteq \{2, \dots, k\}$ , y llamando  $\theta_i = \theta + \epsilon_i$ , podemos definir la distribución condicional del vector  $(\theta, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k)$  dado que  $(\theta_i)_{i \in M} = (a_i)_{i \in M}$  como la dada por tomar la función  $f$  restringida al subespacio afín definido por  $S = \{x \in \mathbb{R}^k / (\theta_i)_{i \in M} = (a_i)_{i \in M}\}$  como densidad. Notablemente, para  $M$  no vacío esta distribución resulta propia, es decir, con medida finita; en otras palabras, a pesar de que el espacio de probabilidad tiene medida infinita, si alguien observa uno o más valores de  $\theta_i$ , entonces queda definida para él una probabilidad condicional propia. Esto es claro si miramos la integral

$$\begin{aligned} \int_S f(x_1, x_2, \dots, x_k) dx &= \int_{\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k / (x_1 + x_i)_{i \in M} = (a_i)_{i \in M}\}} f(x_1, x_2, \dots, x_k) dx \\ &= \int_{\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k / (x_1 + x_i)_{i \in M} = (a_i)_{i \in M}\}} f(0, x_2, \dots, x_k) dx \\ &= C \int_{\{(x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k-1} / (x_i - x_j)_{i, j \in M} = (a_i - a_j)_{i, j \in M}\}} \prod_{i=2}^k f_i(x_i) dx, \end{aligned}$$

que resulta finita. (Aquí  $C$  es el determinante del jacobiano del isomorfismo afín que lleva  $\{(x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k-1} / (x_i - x_j)_{i,j \in M} = (a_i - a_j)_{i,j \in M}\}$  a  $\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k / (x_1 + x_i)_{i \in M} = (a_i)_{i \in M}\}$ ). Además, se ve que las distribuciones de  $\theta$  y de los  $\theta_j$  no observados son normales. Haciendo los cálculos se prueba que, en el caso de que todos los  $\epsilon_i$  tengan media 0 y un mismo desvío  $\sigma$ , la distribución condicional de  $\theta$  habiendo observado  $(\theta_i)_{i \in M} = (a_i)_{i \in M}$  es normal  $N\left(\frac{\sum a_i}{|M|}, \frac{\sigma^2}{|M|}\right)$ , y la distribución condicional de un  $\theta_j$  no observado es normal  $N\left(\frac{\sum a_i}{|M|}, \sigma^2 \frac{|M|+1}{|M|}\right)$ . Usaremos estos resultados en los capítulos siguientes.

# Capítulo 3

## Juegos globales

### 3.1. Preliminares

Los juegos globales son una clase de juegos que comparten las siguientes características:

- Existe una población de jugadores que tienen que tomar una decisión, como puede ser invertir o no en la Bolsa o el sistema bancario, correr contra la moneda de su país o no, participar en una protesta o no, etc. Es común que la decisión sea binaria, aunque hay modelos donde no lo es (por ejemplo Morris and Shin (2002), donde las acciones se eligen del conjunto de los números reales). En lo que sigue, para fijar ideas consideramos una decisión binaria, donde hay una opción ‘activa’ (a la que llamaremos genéricamente ‘invertir’) y una opción ‘pasiva’ (a la que llamaremos ‘no invertir’).
- La conveniencia de un curso de acción sobre el otro depende parcialmente de lo que haga el resto de la población, de tal forma que cada agente en general prefiere hacer lo mismo que piensan hacer los demás. Por ejemplo, en el caso de una crisis de moneda, si gran parte de la población corre la moneda se derrumba y los que corrieron ganan, pero si pocos corren, la moneda resiste y los que corrieron sufren pérdidas. En este sentido, las acciones presentan complementariedad estratégica, como en los juegos supermodulares.
- Existe una variable aleatoria,  $\theta$ , que también influye sobre la efectividad de la acción. Cuanto más alto es  $\theta$ , más factible es que la acción pague más que la opción pasiva. Por ejemplo, en el caso de una revolución, el  $\theta$  puede ser una medida inversa de la disposición del gobierno para reprimir protestas, mientras que en una crisis de moneda,  $\theta$  puede ser una medida inversa de las reservas de moneda extranjera de que dispone la autoridad monetaria. En una realización particular del juego,  $\theta$  tiene un valor fijo.
- Los agentes conocen la distribución de  $\theta$ , pero tienen información imperfecta sobre su verdadero valor.

	Invertir	No invertir
Invertir	$\theta_i, \theta_i$	$\theta_i - 1, 0$
No invertir	$0, \theta_i - 1$	$0, 0$

Figura 3.1: Ejemplo con señales iguales

El último ítem es el que genera la robustez de predicciones en esta clase de juegos. Para ver esto consideremos un modelo sencillo, como el presentado al principio de Morris and Shin (2003), en el que se tienen 2 jugadores, una  $\theta$  distribuida uniformemente sobre los números reales y cada jugador  $i$  observa una señal  $\theta_i$ . La utilidad de no invertir es 0 en cualquier caso, mientras que la utilidad de invertir es  $\theta - 1 + l$ , donde  $l$  es la proporción de jugadores que invierten, sin contar al jugador en cuestión (en efecto, en el caso de dos jugadores,  $l = 0$  si el otro jugador no invierte y  $l = 1$  si lo hace).

Supongamos que  $\theta_i = \theta + \epsilon_i$ , donde  $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ . Dado este dato, cada jugador  $i$  puede estimar una distribución condicional para  $\theta$ , que será  $N(\theta_i, \sigma^2)$ . Si ambas señales fueran iguales, o sea, si  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ , los jugadores tendrían la misma información y estarían, entonces, en un juego finito de  $2 \times 2$  que se muestra en la Figura 3.1.

En la tabla, reemplazamos  $\theta$  con  $\theta_i$  porque la utilidad esperada depende de la esperanza condicional de  $\theta$  dado  $\theta_i$ , que es  $\theta_i$ . Ahora bien, en este juego ocurre lo siguiente:

- Si  $\theta_i < 0$ , Invertir está estrictamente dominado por No invertir, por lo que el único equilibrio es  $(NI, NI)$ .
- Si  $\theta_i = 0$ , Invertir domina débilmente a No invertir y hay dos equilibrios de Nash: que ambos inviertan o que ninguno lo haga.
- Si  $0 < \theta_i < 1$ , ninguna estrategia domina a la otra, y hay tres equilibrios de Nash: que ambos inviertan, que ninguno lo haga, o que cada uno invierta con probabilidad  $\theta_i$ .
- Si  $\theta_i = 1$ , No invertir domina débilmente a Invertir y hay dos equilibrios de Nash: que ambos inviertan o que ninguno lo haga.
- Si  $\theta_i > 1$ , No invertir está estrictamente dominado por Invertir, por lo que el único equilibrio es  $(I, I)$ .

Por otro lado, si los agentes no observaran ninguna información sobre  $\theta$  además de su distribución (suponiendo para este caso una distribución bien definida, con esperanza finita entre 0 y 1), se tendría nuevamente un juego de coordinación común con tres equilibrios: todos invierten, nadie invierte, o un equilibrio en estrategias mixtas. Si todos observaran el valor verdadero de  $\theta$ , el juego funcionaría igual que si todos observan el mismo valor ruidoso  $\theta_i$ , pero usando  $\theta$  en vez de  $\theta_i$  para calcular utilidades esperadas.

En resumen, lo que ocurre es que el juego tiene varios equilibrios posibles en caso de que todos los jugadores tengan la misma información. Esto es poco deseable por dos razones: por un lado, dado que dichos equilibrios son potencialmente muy diferentes, la teoría no hace una predicción concreta sobre lo que debe ocurrir en el juego. En particular, esto impide -en un modelo eventualmente más complicado, que tuviera parámetros libres- hacer ejercicios de estática comparativa, es decir, analizar si un cambio en los parámetros del modelo mejora o empeora el bienestar, ya que al mover los parámetros podemos esperar que el juego salte a cualquier otro equilibrio del caso nuevo, y distintos equilibrios ofrecerán distintos pagos. Por otro lado, se permiten equilibrios poco razonables, como por ejemplo que todos los agentes decidan invertir si  $\theta = 0,4$  pero no si  $\theta = 0,6$ , cuando deberíamos esperar que valores más altos de  $\theta$  propicien la coordinación en equilibrios donde más gente invierte.

En contraste con estos ejemplos, lo que se hace en el modelo básico de juegos globales (por ejemplo, en Morris and Shin (2003)) es suponer que cada jugador  $i$  observa una señal ruidosa de  $\theta$  distinta. Esto da lugar a que los jugadores no puedan coordinar perfectamente sus acciones, ya que aún sabiendo las estrategias de los otros, cada jugador no puede saber qué observan exactamente y, por tanto, cómo jugarán; y esa (eventualmente pequeña) incertidumbre sobre lo que harán los demás elimina esencialmente todos los equilibrios del juego salvo uno.

## 3.2. El modelo

Concretamente, se tiene un conjunto  $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$  de  $n$  jugadores, un parámetro  $\theta$  distribuido uniformemente sobre los números reales, y  $n$  variables aleatorias  $\epsilon_i$  para  $i = 1, \dots, n$ , independientes entre sí y de  $\theta$ , con distribución  $N(0, \sigma^2)$ . Cada jugador  $i$  observa una señal de  $\theta$  dada por  $\theta_i = \theta + \epsilon_i$ .

Dado esto, la distribución condicional de  $\theta$  para  $i$  es  $N(\theta_i, \sigma^2)$ , ya que  $\theta = \theta_i - \epsilon_i$ , y las distribuciones condicionales de los  $\theta_j$  desde el punto de vista de  $i$  son  $N(\theta_i, 2\sigma^2)$ , ya que  $\theta_j = \theta_i - \epsilon_i + \epsilon_j$ . (En ambos casos estamos aprovechando que, al ser la distribución de  $\theta$  uniforme sobre  $\mathbb{R}$ , la distribución de  $\epsilon_i$  condicional a  $\theta_i$  es  $N(0, \sigma^2)$ , es decir, conocer  $\theta_i$  no da ninguna información sobre  $\epsilon_i$ , ni tampoco sobre los  $\epsilon_j$ ). Intuitivamente, los  $\epsilon_i$ , al ser independientes, desacoplan la información observada por distintos agentes, aún para valores muy pequeños de  $\sigma$ .

Como antes, cada jugador tiene dos acciones: Invertir o No invertir, que denotaremos 1 y 0 respectivamente, y entonces una estrategia pura será una función  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ , donde  $f_i(\theta_i) = 0$  si  $i$  decide no invertir al ver la señal  $\theta_i$ , y  $f_i(\theta_i) = 1$  en caso contrario. De la misma forma, una estrategia mixta será una función  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , donde  $f_i(\theta_i)$  es la probabilidad de que  $i$  invierta si observa  $\theta_i$ .

También como antes, supondremos que la utilidad de  $i$  es

$$u_i(\theta, f_i, (f_j)_{j \in \mathcal{I}, j \neq i}) = \begin{cases} \theta - 1 + l & \text{si } f_i(\theta_i) = 1, \\ 0 & \text{si } f_i(\theta_i) = 0, \end{cases}$$

donde

$$l = \frac{\sum_{j \neq i} f_j(\theta_j)}{n-1}$$

si el juego tiene  $n$  jugadores, es decir,  $l$  es la proporción de jugadores que eligen invertir sin contar al propio  $i$ . Definimos además  $v_i(\theta_i, (f_j)_{j \in \mathcal{J}, j \neq i}) = \theta_i - 1 + E(l|\theta_i)$ , que mide la utilidad esperada de elegir invertir (en vez de no hacerlo) cuando se observa la señal  $\theta_i$  y se cree que los demás jugadores elegirán las estrategias  $f_j$ .

### 3.3. Equilibrio

Estamos ahora en condiciones de analizar los equilibrios del juego. Se puede probar la siguiente

**Proposición 6.** *En el juego descrito arriba existe esencialmente un único equilibrio de Nash, dado por  $(f_i)_{i \in \mathcal{J}}$ , donde*

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0,5, \\ 0 & \text{si } x < 0,5. \end{cases} \quad (*)$$

*Más aún, todas las demás estrategias desaparecen por eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas. Notamos que, en este contexto, consideramos que  $f_i$  domina estrictamente a  $f'_i$  si  $f_i(x)$  domina débilmente a  $f'_i(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , y estrictamente para al menos un  $x$ .*

Notamos que la condición que imponemos sobre las  $f_i$  no las determina unívocamente, en rigor, dado que  $f_i(0,5)$  podría ser 0, 1 o en general cualquier  $p \in [0, 1]$ . Sin embargo, estas estrategias son equivalentes: cuando los demás jugadores eligen  $f_j$  que cumplen (\*), el jugador  $i$  estará indiferente entre todas las  $f_i$  que cumplen (\*), y dos estrategias que cumplan (\*) son equivalentes en términos de utilidad esperada para los demás jugadores (ya que la probabilidad condicional de que difieran, dado un valor observado de  $\theta_j$ , es 0). Formalizaremos este argumento en un contexto más general, en el Capítulo 6.

*Demostración.* Escribimos una demostración algo diferente de las que existen en la literatura, que se generaliza más fácilmente para los capítulos siguientes.

Antes de hacer la demostración, fijemos algo de notación: llamamos  $s_i^a$  a la estrategia dada por

$$s_i^a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{si } x < a, \end{cases}$$

y  $t_i^a$  a la estrategia dada por

$$t_i^a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > a, \\ 0 & \text{si } x \leq a \end{cases}$$

para el jugador  $i$ . Además, decimos que dos estrategias  $f_i, g_i$  cumplen  $f_i \geq g_i$  si  $f_i$  es mayor o igual que  $g_i$  como función, es decir, punto a punto. Intuitivamente,  $f_i \geq g_i$  significa que  $f_i$  es más optimista que  $g_i$ , es decir, siempre que  $g_i$  invierte,  $f_i$  también. Decimos que  $f_i$  es creciente si lo es como función, es decir, la disposición del jugador a invertir es mayor cuanto mayor es el  $\theta_i$  que observa.

Sea  $1_i$  la función  $1_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  dada por  $1_i(x) = 1$  para todo  $x$  real, que representa la estrategia de invertir siempre para el jugador  $i$ , y  $0_i$  definida análogamente la estrategia de no invertir nunca. Llamamos  $1 = \prod_{i \in \mathcal{J}} 1_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]^n$  al perfil en el que todos los jugadores invierten siempre; definimos análogamente  $0$  y, en general, dada una estrategia  $s_i$  para cada jugador  $i$ , llamamos  $s = \prod_{i \in \mathcal{J}} s_i$ .

Imaginemos que los jugadores comienzan todos con las estrategias  $1_i$  y luego, cada minuto, cambian sus estrategias por las mejores respuestas a las estrategias anteriores de los demás. Es decir, si llamamos  $f_{ki}$  a la estrategia de  $i$  en el minuto  $k$ , entonces  $f_{0i} = 1_i$  y  $f_{ki}$  es respuesta óptima a  $(f_{(k-1)j})_{j \in \mathcal{J}, j \neq i}$ .

Por la simetría del juego, las  $f_{ki}$  resultan iguales para cada  $k$  y distintos  $i$ . Además, por inducción, podemos probar que las  $f_{ki}$  son crecientes. Para  $k = 0$  vale trivialmente; ahora, dado un  $k$ , como  $f_{ki}$  es respuesta óptima a las  $f_{(k-1)j}$  y éstas son crecientes por hipótesis, tenemos que

$$\begin{aligned} v_i(\theta_i, (f_{(k-1)j})_{j \in \mathcal{J}, j \neq i}) &= \theta_i - 1 + E(l((f_{(k-1)j})_{j \in \mathcal{J}, j \neq i}) | \theta_i) \\ &= \theta_i - 1 + E\left(\frac{\sum_{j \neq i} f_{(k-1)j}(\theta_j)}{n-1} \middle| \theta_i\right) \\ &= \theta_i - 1 + \sum_{j \neq i} \frac{E(f_{(k-1)j}(\theta_j) | \theta_i)}{n-1}. \end{aligned}$$

Ahora, si  $a > b$ , la distribución de  $\theta_j | \theta_i = a$ , que es  $N(a, 2\sigma^2)$ , domina estocásticamente a la de  $\theta_j | \theta_i = b$ , que es  $N(b, 2\sigma^2)$ . Y como  $f_{(k-1)j}$  es creciente, se deduce que los términos de la sumatoria no decrecen al aumentar  $\theta_i$ . Por lo tanto, si  $\theta_i$  aumenta en  $\epsilon$ ,  $v_i$  de hecho aumenta en al menos  $\epsilon$ , por el efecto del primer término. Dado que debe valer  $f_{ki}(x) = 1$  si  $v_i(x) > 0$  y  $f_{ki}(x) = 0$  si  $v_i(x) < 0$ , esto prueba que  $f_{ki}$  es creciente, y que de hecho debe ser 0 o 1 excepto en a lo sumo un punto. Suponemos que los jugadores eligen invertir cuando están indiferentes, o sea, cuando  $v_i = 0$ ; luego, cada  $f_{ki}$  en realidad es igual a una  $s_i^a$ , y llamamos  $a_k$  al número tal que  $f_{ki} = s_i^{a_k}$ .

Observamos además que las sucesiones  $(f_{ki})_k$  son decrecientes para cada  $i$ , ya que  $f_{1i} \leq 1_i = f_{0i}$  y luego, inductivamente,  $f_{(k-1)j} \geq f_{kj}$  para todo  $j \neq i$  implica que  $f_{ki} \geq f_{(k+1)i}$ , ya que  $f_{ki}, f_{(k+1)i}$  son respuestas óptimas a las  $f_{(k-1)j}$  y  $f_{kj}$  respectivamente, y  $v_i$  es creciente en las  $f_j$ . Luego  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión creciente. Es claro que  $a_1 = 0$ , y que  $a_k \leq 1$  para todo  $k$ , ya que  $v_i(x, (f_j)_{j \neq i})$  es positivo sin importar cuáles son las  $f_j$  si  $x > 1$ . Luego la sucesión converge a un  $a \in [0, 1]$ .

Argumentamos ahora que, si  $f_i$  sobrevive  $k$  pasos de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas, entonces  $f_i \leq s^{a_k}$ . Probamos esto por inducción:

Para  $k = 1$  es trivial, ya que si  $f_i \not\leq s^0$ , existe  $x_0$  tal que  $f_i(x_0) > s^0(x_0)$ . Luego  $x_0 < 0$ ; dado que el valor esperado de invertir es siempre negativo para  $\theta_i < 0$ , la estrategia  $\tilde{f}_i$  dada por

$$\tilde{f}_i(x) = \begin{cases} f_i(x) & \text{si } x \neq x_0, \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

domina estrictamente a  $f_i$ . Veamos que, si suponemos el resultado para un  $k$ , vale para  $k + 1$ . Dada  $f_i \not\leq s^{a_k}$ , existe  $x_0$  tal que  $f_i(x_0) > s^{a_k}(x_0)$ , de donde  $x_0 < a_k$ . Ahora bien, dado que todas las estrategias que no son menores o iguales a  $s^{a_{k-1}}$  han sido eliminadas,

$$\begin{aligned} v_i(x_0, (f_j)_{j \neq i}) &\leq v_i(x_0, (s^{a_{k-1}})_{j \neq i}) \\ &< v_i(a_k, (s^{a_{k-1}})_{j \neq i}) = 0, \end{aligned}$$

de donde la  $\tilde{f}_i$  resultante de redefinir  $f_i$  como 0 en  $x$  domina estrictamente a la  $f_i$  original.

Hecho todo esto, podemos repetir el argumento definiendo funciones  $f'_{ki}$  que sean mejores respuestas sucesivas, pero comenzando con el perfil 0 y suponiendo que los jugadores no invierten cuando están indiferentes. Resulta de forma análoga que  $f'_{ki} = t^{a'_k}$ , donde  $(a'_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión decreciente y siempre  $\geq 0$ , que tiene luego un límite  $a' \geq 0$ . (Además  $a' \leq a'_1 = 1$ ). Más aún, toda estrategia que sobrevive  $k$  pasos de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas debe ser mayor o igual a  $t^{a'_k}$ .

De aquí resulta que  $a \leq a'$  ya que, de otro modo, el proceso de EIEED eliminaría todas las estrategias del juego después de finitos pasos, lo cual es absurdo. Por la simetría del problema,  $a + a' = 1$ . Afirmamos ahora que  $a = a' = 0,5$ , de donde se desprende la Proposición.

Para probarlo, supongamos  $a < 0,5$ . Calculemos la utilidad esperada de invertir para el jugador  $i$  cuando  $\theta_i = a$  y supone que los demás jugadores elegirán la estrategia  $s^{a_k}$ :

$$\begin{aligned} v_i(a, (s^{a_k})_{j \neq i}) &= a - 1 + \sum_{j \neq i} \frac{E(s^{a_k}(\theta_j) | \theta_i = a)}{n - 1} \\ &= a - 1 + \sum_{j \neq i} \frac{P(\theta_j \geq a_k | \theta_i = a)}{n - 1} \\ &= a - 1 + P(\theta_{j_0} \geq a_k | \theta_i = a). \end{aligned}$$

Dado que la respuesta óptima a que los demás jugadores jueguen  $s^{a_k}$  es jugar  $s^{a_{k+1}}$ , y  $a_{k+1} \leq a$ , esta utilidad esperada debe ser mayor o igual a 0 para todo  $k$ . Sin embargo, como la distribución de  $\theta_j$  condicional a  $\theta_i = a$  es  $N(a, 2\sigma^2)$  y  $a_k \rightarrow a$ ,

$$\begin{aligned}
a - 1 + P(\theta_{j_0} \geq a_k | \theta_i = a) &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} a - 1 + 0,5 \\
&= a - 0,5 < 0,
\end{aligned}$$

una contradicción. Luego  $a = a' = 0,5$  y todas las estrategias que no sean las descritas por (\*) quedan eliminadas en finitos pasos por el proceso de EIEED, con lo cual en particular no pueden formar parte de un equilibrio de Nash. Además, examinando el comportamiento de  $v_i$  se ve fácilmente que cualquier perfil de estrategias dado por (\*) es un equilibrio de Nash.  $\square$

*Nota.* Sea  $P : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  una medida de probabilidad simétrica alrededor de 0 y continua. Entonces, si los  $\epsilon_i$  en el juego de arriba son variables aleatorias i.i.d. con distribución  $F_P$ , sigue valiendo la Proposición 6 sin mayores cambios en la demostración.

# Capítulo 4

## Nociones básicas de redes

En los modelos que consideraremos en los Capítulos 5 y 6, los jugadores formarán una red. Para manejar esto, establecemos algo de notación de grafos.

**Definición 4.1.** Un grafo dirigido es un par  $(\mathcal{S}, E)$ , donde  $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, n\}$  es un conjunto de  $n$  elementos, que llamamos vértices, y  $E \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S}$  es un conjunto de pares de elementos de  $\mathcal{S}$ , que llamamos aristas.

Decimos que  $i$  es amigo o vecino de  $j$ , o que  $i$  conoce a  $j$ , si  $(i, j) \in E$ . Notemos que, así como está dada la definición, puede que un  $i$  sea vecino de sí mismo o no; también puede ocurrir que  $i$  sea vecino de  $j$  pero  $j$  no sea vecino de  $i$ . En nuestro contexto, que  $i$  sea o no vecino de sí mismo no tiene significado, así que supondremos siempre que  $(i, i) \notin E$  para todo  $i \in \mathcal{S}$ . Que un jugador sea vecino de otro pero no a la inversa puede tener sentido, o no, dependiendo del caso: por ejemplo, sería natural suponer que relaciones dadas por conceptos como ‘ $i$  es amigo de  $j$ ’, ‘ $i$  es vecino de  $j$ ’, ‘ $i$  y  $j$  forman una pareja’, ‘ $i$  y  $j$  han escrito conjuntamente un *paper*’, etc. son recíprocas, pero relaciones como ‘ $i$  es padre de  $j$ ’, ‘ $i$  quiere ser amigo de  $j$ ’, ‘ $i$  quiere ser pareja de  $j$ ’, ‘ $i$  transmite información a  $j$ ’, etc. pueden no serlo.

**Definición 4.2.** Sea  $(\mathcal{S}, E)$  un grafo dirigido. Diremos que  $(\mathcal{S}, E)$  es un grafo no dirigido, o grafo a secas, si  $(i, j) \in E \iff (j, i) \in E$ .

Además, usaremos una notación alternativa para las aristas del grafo. Dado un grafo  $(\mathcal{S}, E)$ , podemos representar la información sobre sus aristas como una matriz  $g \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , donde  $g_{ij} = 1$  si  $(i, j) \in E$  y  $g_{ij} = 0$  si  $(i, j) \notin E$ . Nos referiremos a  $g$  como la matriz de adyacencia de  $(\mathcal{S}, E)$ . En particular, un grafo es no dirigido si y sólo si su matriz de adyacencia es simétrica.

**Definición 4.3.** Un camino de longitud  $k$  entre  $i$  y  $j$  es una sucesión  $i_1, \dots, i_k$  de elementos de  $\mathcal{S}$  tal que  $i_1 = i$ ,  $i_k = j$  y  $g_{i_l i_{l+1}} = 1$  para todo  $l = 1, \dots, k - 1$ , y los  $i_l$  son todos distintos.

Dados  $i \neq j \in \mathcal{S}$ , podemos definir la distancia entre ellos,  $d_{ij}$  como el menor  $k$  tal que existe un camino de longitud  $k$  que los une. Si no hay ningún camino que una a  $i$  con  $j$ ,  $d_{ij} = +\infty$ . En un grafo dirigido,  $d_{ij}$  y  $d_{ji}$  pueden ser diferentes.

**Definición 4.4.** La vecindad de  $i$  es el conjunto  $N_i$  de elementos a los que  $i$  está conectado, es decir,

$$N_i = \{j \in \mathcal{S} / g_{ij} = 1\}.$$

Notamos que, dado que suponemos  $g_{ii} = 0$ , el propio  $i$  no está en la vecindad de  $i$ .

El grado de  $i$  es la cantidad de elementos a los que está conectado  $i$ , es decir, el cardinal de su vecindad:  $d_i = |N_i|$ .

Más en general, podemos definir la  $k$ -vecindad de  $i$ , o vecindad de orden  $k$  de  $i$ ,  $N_i^k$ , como el conjunto de todos los elementos de  $\mathcal{S}$  que están a distancia menor o igual que  $k$  de  $i$ , sin incluir a  $i$ .

# Capítulo 5

## Juegos globales sobre redes

### 5.1. Preliminares

Como dijimos en la Introducción, en este Capítulo desarrollamos un modelo algo más general que el modelo básico de juegos globales, dándole al conjunto de jugadores una estructura de red sobre la que se transmite la información privada de los mismos. (El modelo básico corresponde, entonces, al caso particular de una red sin aristas).

Por supuesto, dado que la finalidad última de dichos modelos es que sirvan para explicar fenómenos reales, debe haber alguna razón para pensar que esta complicación es empíricamente relevante. En efecto, lo que ocurre es que, en los eventos concretos que se intenta explicar con juegos globales -ya sean corridas bancarias o cambiarias, protestas, rebeliones, etc.- es intuitivo pensar que los jugadores tienen información imperfecta y distinta sobre los *fundamentals* o parámetros subyacentes de la situación; pero hasta qué punto la información difiere entre los jugadores, o si jugadores más cercanos en algún sentido (por ejemplo de la misma profesión, edad similar, mismo nivel de ingreso, pertenecientes al mismo círculo social, etc.) tienen información más parecida, o si la información de distintos jugadores está correlacionada más allá del efecto que tienen los *fundamentals* sobre las señales privadas, son todas preguntas cuya respuesta depende del mecanismo por el que dichas señales son generadas, que en general no se modela.

Ahora bien, pensando en una situación real, en general la difusión de información tiene tanto componentes públicos, que se difunden por medios masivos, como otros privados que se difunden de boca en boca, o entre grupos pequeños de personas. Por ejemplo, en el contexto de una potencial corrida cambiaria, los anuncios de un jefe de Estado, una autoridad monetaria o un organismo internacional son información que se difunde por medios masivos, mientras que la gente puede al mismo tiempo hablar con sus conocidos e intercambiar opiniones sobre lo que pasará, la fortaleza del sistema, etc.; una persona puede decidir confiar en un pariente que trabaja en el sector bancario antes que en un anuncio público o viceversa. En este ejemplo es importante también notar que constituyen información pública las señales que emiten los mercados: por ejemplo, si las expectativas de los inversores se deterioran por la razón que sea (aún en

base a información privada) y esto causa un hundimiento de la Bolsa, la opinión general del mercado pasa a ser conocida por todos, dado que los precios de las acciones y bonos son públicos. En el contexto de una revolución, también pueden existir anuncios del gobierno y noticias difundidas por los medios de comunicación, al mismo tiempo que la gente coordina manifestaciones con sus conocidos, o en asambleas locales, o más recientemente, mediante el uso de redes sociales como Facebook o Twitter.

En resumen, para entender mejor la estructura que tiene la información de los jugadores en una situación real y qué consecuencias puede tener, debemos modelar estos mecanismos de transmisión. La difusión de información pública combinada con señales privadas que no se transmiten ha sido estudiada, por ejemplo, por Morris and Shin (2002) y Hellwig (2002), pero no se han desarrollado modelos en los que se tenga en cuenta la difusión local de información, a través de una estructura de red. (Notamos que un modelo basado en una red también puede incluir información pública, que sería transmitida por un jugador conectado a todos los demás).

Entonces, suponer que cada jugador recibe un dato privado y luego lo comparte con sus vecinos o conocidos es un paso en la dirección de entender más finamente la estructura de la información local que tienen los jugadores. Dado que en los ejemplos que involucran un mecanismo de mercado (inversiones, corridas, etc.) los propios precios del mercado transmiten información pública muy transparente, la relevancia de este análisis puede ser mayor en los casos que no involucran mercados explícitamente, como las manifestaciones o revoluciones.

En el resto de este Capítulo, presentamos un modelo sencillo de juegos globales sobre redes y lo estudiamos. Si bien encontramos algunos resultados interesantes, hay un problema: la transmisión de información resulta en una multiplicidad de equilibrios que, según el caso, pueden o no ser similares entre sí. Por ello, resulta difícil responder convincentemente preguntas que se nos pueden ocurrir (como, por ejemplo, ¿es mayor el bienestar de un jugador mejor conectado?) dado que la respuesta puede depender del equilibrio que estemos mirando.

## 5.2. El modelo

Sea  $(\mathcal{I}, E)$  un grafo, donde los vértices  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$  son jugadores de un juego. Sea  $\theta$  una variable aleatoria degenerada, distribuida uniformemente sobre los números reales, y sea  $(\epsilon_i)_{i \in \mathcal{I}}$  una familia de variables aleatorias con distribución  $N(0, \sigma^2)$ , independientes entre sí y de  $\theta$ . Llamamos, para cada  $i$ ,  $\theta_i = \theta + \epsilon_i$ .

Ahora suponemos que cada jugador  $i$  observa  $\theta_i$  pero, además, observa  $(\theta_j)_{j \in N_i}$ , es decir, observa todos los datos privados de sus vecinos. Notaremos por  $M_i$  a la vecindad extendida de  $i$ , es decir,  $M_i = N_i \cup i$ , de tal forma que  $i$  observa  $(\theta_j)_{j \in M_i}$ . Dada esta información, cada jugador debe elegir si invertir, no invertir, o invertir con alguna probabilidad  $p$ . Luego, si un jugador  $i$  tiene  $d_i$  vecinos, sus estrategias serán funciones  $f_i : \mathbb{R}^{d_i+1} \rightarrow [0, 1]$ .

Como antes, suponemos que el pago de un jugador  $i$  es 0 si no invierte y  $\theta - 1 + l$

si lo hace, donde  $l$  es la proporción de jugadores que invierten (sin contar al propio  $i$ ). Formalmente,  $i$  tiene una función de utilidad  $u_i$  dada por

$$u_i(\theta, f_i, (f_j)_{j \in \mathcal{S}, j \neq i}, (\theta_j)_{j \in \mathcal{S}}) = \begin{cases} \theta - 1 + l & \text{si } f_i((\theta_j)_{j \in M_i}) = 1 \\ 0 & \text{si } f_i((\theta_j)_{j \in M_i}) = 0, \end{cases}$$

donde

$$l = \frac{\sum_{j \neq i} f_j((\theta_l)_{l \in M_j})}{n - 1},$$

al igual que en el modelo del Capítulo 3. Definimos además

$$v_i((\theta_j)_{j \in M_i}, (f_j)_{j \neq i}) = \frac{\sum_{j \in M_i} \theta_j}{|M_i|} - 1 + E(l | (\theta_j)_{j \in M_i}),$$

que mide la utilidad esperada de elegir invertir (en vez de no hacerlo) cuando se observan las señales  $(\theta_j)_{j \in M_i}$  y se cree que los demás jugadores elegirán las estrategias  $f_j$ . Notamos que  $\frac{\sum_{j \in M_i} \theta_j}{|M_i|}$  es la esperanza condicional de  $\theta$  dados los datos observados; esta expresión sencilla resulta de que los errores  $\epsilon_i$  son normales independientes con media 0 e igual desvío, y  $\theta$  es uniforme sobre  $\mathbb{R}$ . Además

$$E(l | (\theta_j)_{j \in M_i}) = \sum_{j \neq i} \frac{E(f_j((\theta_l)_{l \in M_j}) | (\theta_j)_{j \in M_i})}{n - 1}.$$

Dado esto, podemos considerar los equilibrios de Nash del juego, para una red  $(\mathcal{S}, E)$  dada. Para fijar ideas, supongamos que  $\mathcal{S}$  está fijo con  $|\mathcal{S}| = n$  y variamos  $E$ . En particular, podemos preguntarnos para cuáles  $E$  el juego tiene un único equilibrio, y para cuáles no, o cuánto difieren los diferentes equilibrios entre sí.

### 5.3. Equilibrios

En esta sección analizamos el conjunto de equilibrios para varios grafos particulares, que consideramos ilustrativos. Al final, probamos que para todo grafo existe al menos un equilibrio de Nash; esto no es redundante, ya que el teorema de existencia del Capítulo 2 no se aplica a este modelo.

#### Grafo sin aristas

El caso más sencillo es  $E = \emptyset$ , es decir, cuando nadie conoce a nadie. En esta red no hay transmisión de información, por lo que el juego es equivalente al del Capítulo 3, y así tiene un único equilibrio por la Proposición 6.

## Grafo completo

Por otro lado, si el grafo es completo, todos los jugadores tienen la misma información  $(\theta_i)_{i \in \mathcal{I}}$ . En este caso, es claro que:

- Si  $\frac{\sum_{i \in \mathcal{I}} \theta_i}{n} < 0$ , el pago esperado de invertir es negativo aún si un jugador cree que todos los demás invertirán, es decir, la acción de invertir está estrictamente dominada.
- Si  $\frac{\sum_{i \in \mathcal{I}} \theta_i}{n} > 1$ , el pago esperado de invertir es positivo aún si un jugador cree que todos los demás no invertirán, es decir, la acción de no invertir está estrictamente dominada.
- Si  $0 \leq \frac{\sum_{i \in \mathcal{I}} \theta_i}{n} \leq 1$ , cualquiera de las dos acciones puede ser óptima si hay suficientes otros jugadores que planean jugarla (o, incluso, podría jugarse un equilibrio mixto).

Dado esto, para cada  $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$  tal que  $a(x) = 0$  si  $\sum x_i < 0$  y  $a(x) = 1$  si  $\sum x_i > 1$ , el juego tiene un equilibrio de Nash dado por

$$f_i((\theta_j)_{j \in \mathcal{I}}) = a(\theta_1, \dots, \theta_n)$$

para todo  $i \in \mathcal{I}$ . (Además, hay equilibrios en los que para algunos arreglos de los  $\theta_i$  se elige jugar una estrategia mixta). Está claro que, en este caso, el modelo no tiene mucho poder predictivo.

## Unión de subgrafos completos

Consideremos un grafo formado por  $k$  subgrafos completos disjuntos, cada uno con  $m$  vértices. Más precisamente, sea  $n = mk$ ,  $\mathcal{I} = \{1, \dots, mk\}$  y  $E$  tal que  $\{lm + 1, \dots, lm + m\}$  es un subgrafo completo para cada  $l = 0, \dots, k - 1$  y no hay otras aristas.

Intuitivamente, el hecho de que los  $m$  jugadores de cada subgrafo tengan la misma información hace que puedan coordinarse perfectamente, mientras que no pueden coordinarse con los de los demás subgrafos. Podemos pensar entonces que este caso se parece al del grafo sin aristas, con la diferencia de que cada vértice —desconectado de los demás—, ahora reemplazado por un subgrafo completo, tiene su propio peso. Esto permite que haya múltiples equilibrios, pero la diferencia entre los diferentes equilibrios estará acotada por el tamaño relativo de los subgrafos con respecto a la población.

Más precisamente, podemos enunciar la siguiente

**Proposición 7.** Sean  $s, t : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$  dadas por

$$s(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{m-1}{n-1} \\ 0 & \text{si } \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{m-1}{n-1}, \end{cases}$$

$$t(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{m-1}{n-1} \\ 0 & \text{si } \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{m-1}{n-1}. \end{cases}$$

En el juego descrito arriba, sea  $(f_i)_{i \in \mathcal{I}}$  un equilibrio. Entonces  $t \leq f_i \leq s$  para todo  $i \in \mathcal{I}$ . Más aún, las estrategias que no cumplen esa desigualdad son eliminadas por EIED.

Por otro lado, dado  $a \in \mathbb{R}$ , sean

$$s^a(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m} \geq a \\ 0 & \text{si } \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m} < a, \end{cases}$$

$$t^a(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m} > a \\ 0 & \text{si } \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m} \leq a. \end{cases}$$

Entonces los perfiles  $(f_i)_{i \in \mathcal{I}}$  dados por  $f_i = s^a$  para todo  $i \in \mathcal{I}$  y por  $f_i = t^a$  para todo  $i \in \mathcal{I}$  son equilibrios de Nash para todo  $a \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{m-1}{n-1}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{m-1}{n-1}]$ .

*Demostración.* Omitimos la demostración de la primera parte, ya que es un caso particular de la Proposición 8, que presentamos en el siguiente apartado. La segunda parte se demuestra verificando que  $v_i((\theta_j)_{j \in M_i}, (f_j)_{j \neq i})$  tiene el signo correcto para cada valor posible de  $\frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m}$ .  $\square$

Para terminar, observemos que en principio puede haber otros equilibrios que cumplan  $t \leq f_i \leq s$  para todo  $i \in \mathcal{I}$  pero que no sean los que describimos en la segunda parte de la Proposición: por ejemplo, el caso  $k = 1$  corresponde al de un grafo completo, que tiene muchos otros equilibrios. Para  $k > 1$ , es fácil ver que no cualquier función  $f$  que cumpla  $t \leq f \leq s$  da lugar a un equilibrio  $(f)_{i \in \mathcal{I}}$ , pero en general existen otros que no son los descritos arriba (es decir, existen equilibrios no crecientes). La moraleja es que aún una cantidad pequeña de vértices arruina la unicidad del equilibrio (en particular, si  $m = 2$  el grafo está formado por pares disjuntos y ya tiene múltiples equilibrios), pero si  $m$  es pequeño con respecto a  $n$ , todos los equilibrios son ‘parecidos’ en el sentido de que las estrategias involucradas  $f_i$  deben cumplir  $t \leq f_i \leq s$ , que es una desigualdad restrictiva. Notemos por último que, sin importar los tamaños relativos de  $m$  y  $n$ , los equilibrios más naturales parecen ser los dados por  $t^{\frac{1}{2}}$  o por  $s^{\frac{1}{2}}$ .

A continuación generalizamos la noción de que, si un grafo tiene relativamente pocas aristas, entonces todos sus equilibrios deben ser parecidos en algún sentido.

## Grafos con 2-vecindades pequeñas

Como dijimos arriba, la propiedad de que un grafo formado por subgrafos completos disjuntos pequeños tenga todos sus equilibrios parecidos entre sí es un caso particular de un resultado más general.

Llamemos  $M_i^k$  a la vecindad de orden  $k$  de  $i$  incluyendo a  $i$ , es decir,  $M_i^k = N_i^k \cup \{i\}$ . Consideraremos, en particular, la vecindad de orden 2 incluyendo a  $i$ ,  $M_i^2$ . Notemos

que  $j \in M_i^2$  si y sólo si  $i$  y  $j$  tienen alguna información compartida. Observemos además que, en el caso de un grafo formado por subgrafos completos disjuntos,  $M_i^2$  es simplemente el subgrafo al que pertenece  $i$ .

Tenemos entonces la siguiente

**Proposición 8.** *Sea  $(\mathcal{I}, E)$  un grafo con  $|\mathcal{I}| = n$  y  $E$  tal que, para cada  $i \in \mathcal{I}$ ,  $|M_i^2| \leq m$ . Llamemos  $e_i = |M_i|$ . Sean  $s_i, t_i : \mathbb{R}^{e_i} \rightarrow [0, 1]$  dadas por*

$$s_i(x_1, \dots, x_{e_i}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\sum_{i=1}^{e_i} x_i}{e_i} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{m-1}{n-1} \\ 0 & \text{si } \frac{\sum_{i=1}^{e_i} x_i}{e_i} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{m-1}{n-1}, \end{cases}$$

$$t_i(x_1, \dots, x_{e_i}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\sum_{i=1}^{e_i} x_i}{e_i} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{m-1}{n-1} \\ 0 & \text{si } \frac{\sum_{i=1}^{e_i} x_i}{e_i} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{m-1}{n-1} \end{cases}$$

para cada  $i \in \mathcal{I}$ . En el juego resultante para este grafo, sea  $(f_i)_{i \in \mathcal{I}}$  un equilibrio. Entonces  $t_i \leq f_i \leq s_i$  para todo  $i \in \mathcal{I}$ . Más aún, las estrategias que no cumplen esa desigualdad son eliminadas por EIEED.

*Demostración.* Hacemos un argumento análogo al de la demostración de la Proposición 6. Dado  $x \in \mathbb{R}^l$ , llamamos  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^l x_i}{l}$ . Llamamos  $s_i^a$  a la estrategia dada por

$$s_i^a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\sum_{i=1}^{e_i} x_i}{e_i} = \bar{x} \geq a \\ 0 & \text{si } \frac{\sum_{i=1}^{e_i} x_i}{e_i} = \bar{x} < a, \end{cases}$$

y  $t_i^a$  a la estrategia dada por

$$t_i^a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\sum_{i=1}^{e_i} x_i}{e_i} = \bar{x} > a, \\ 0 & \text{si } \frac{\sum_{i=1}^{e_i} x_i}{e_i} = \bar{x} \leq a \end{cases}$$

para el jugador  $i$ . Como antes, decimos que dos estrategias  $f_i, g_i$  para  $i$  cumplen  $f_i \geq g_i$  si  $f_i$  es mayor o igual que  $g_i$  como función, es decir, punto a punto; y decimos que  $f_i$  es creciente si lo es como función para el orden parcial natural en  $\mathbb{R}^{e_i}$ , es decir, si siempre que  $x, x'$  cumplen  $x_j \leq x'_j$  para todo  $j = 1, \dots, e_i$  vale  $f_i(x) \leq f_i(x')$ .

Sea la función  $1_i : \mathbb{R}^{e_i} \rightarrow [0, 1]$  dada por  $1_i(x) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}^{e_i}$ , y  $0_i$  definida análogamente. Llamamos  $1 = \prod_{i \in \mathcal{I}} 1_i : \mathbb{R}^{e_1 + \dots + e_n} \rightarrow [0, 1]^n$  al perfil en el que todos los jugadores invierten siempre; definimos análogamente  $0$  y, en general, dada una estrategia  $s_i$  para cada jugador  $i$ , llamamos  $s = \prod_{i \in \mathcal{I}} s_i$ .

Igual que en la Proposición 6, imaginemos que los jugadores comienzan todos con las estrategias  $1_i$  y luego, cada minuto, cambian sus estrategias por las mejores respuestas a las estrategias anteriores de los demás. Es decir, si llamamos  $f_{ki}$  a la estrategia de  $i$  en el minuto  $k$ , entonces  $f_{0i} = 1_i$  y  $f_{ki}$  es respuesta óptima a  $(f_{(k-1)j})_{j \in \mathcal{I}, j \neq i}$ .

Dado que el juego ya no es simétrico, las  $f_{ki}$  pueden ser diferentes para igual  $k$  y distintos  $i$ . Sin embargo, por inducción, podemos aún probar que las  $f_{ki}$  son crecientes.

En efecto, para  $k = 0$  vale trivialmente; ahora, dado un  $k$ , como  $f_{ki}$  es respuesta óptima a las  $f_{(k-1)j}$  y éstas son crecientes por hipótesis, tenemos que

$$\begin{aligned} v_i((\theta_j)_{j \in M_i}, (f_{(k-1)j})_{j \in \mathcal{J}, j \neq i}) &= \frac{\sum_{j \in M_i} \theta_j}{|M_i|} - 1 + E(l((f_{(k-1)j})_{j \in \mathcal{J}, j \neq i}) | (\theta_j)_{j \in M_i}) \\ &= \frac{\sum_{j \in M_i} \theta_j}{|M_i|} - 1 + E\left(\frac{\sum_{j \neq i} f_{(k-1)j}((\theta_l)_{l \in M_j})}{n-1} | (\theta_j)_{j \in M_i}\right) \\ &= \frac{\sum_{j \in M_i} \theta_j}{|M_i|} - 1 + \sum_{j \neq i} \frac{E(f_{(k-1)j}((\theta_l)_{l \in M_j}) | (\theta_j)_{j \in M_i})}{n-1}. \end{aligned}$$

Aquí argumentamos que, si  $a_i \geq b_i$  para  $i = 1, \dots, |M_i|$ , entonces la distribución de  $(\theta_l)_{l \in M_j} | (\theta_j)_{j \in M_i} = (a_1, \dots, a_{|M_i|})$  domina estocásticamente a la de  $(\theta_l)_{l \in M_j} | (\theta_j)_{j \in M_i} = (b_1, \dots, b_{|M_i|})$ . (Esto se deduce de que las variables observadas tienen distribuciones condicionales constantemente iguales al valor observado, mientras que  $\theta$  tiene distribución condicional normal con media igual al promedio de los valores observados, y entonces  $(\theta_l)_{l \in M_j - M_i} = (\theta + \epsilon_l)_{l \in M_j - M_i}$ , donde  $(\epsilon_l)_{l \in M_j - M_i}$  tiene distribución condicional igual a su distribución no condicionada, e independiente de  $\theta$ ). Agregando a esto que las  $f_{(k-1)j}$  son crecientes, se deduce que los términos de la sumatoria no decrecen al aumentar cualquiera de los  $\theta_j$  con  $j \in M_i$ . Por lo tanto, si un  $\theta_j$  ( $j \in M_i$ ) aumenta en  $\epsilon$ ,  $v_i$  de hecho aumenta en al menos  $\frac{\epsilon}{|M_i|}$ , por el efecto del primer término. Dado que debe valer  $f_{ki}(x) = 1$  si  $v_i(x) > 0$  y  $f_{ki}(x) = 0$  si  $v_i(x) < 0$ , esto prueba que  $f_{ki}$  es creciente. Podemos argumentar más: sea  $S \subseteq M_i$  con  $|S| = |M_i| - 1$  y fijemos  $\theta_j = a_j$  para  $j \in S$ . Sea  $\{j_0\} = M_i - S$ . Entonces, llamando  $g(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) a  $f_{ki}$  evaluada en  $\theta_j = a_j$  para  $j \neq j_0$  y  $\theta_{j_0} = x$ , existe un único  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = 0$  si  $x < a$  y  $g(x) = 1$  si  $x > a$ . (Esto se deduce de que  $v_i$  crece en al menos  $\frac{\epsilon}{|M_i|}$  si  $x$  aumenta en  $\epsilon$ , de donde  $v_i$  debe ser positiva para  $x$  suficientemente grande y negativa para  $x$  suficientemente chico; luego el supremo de los  $x$  tales que  $v_i(x) < 0$ , igual al ínfimo de los  $x$  tales que  $v_i(x) > 0$ , es el  $a$  que buscamos). Supongamos que los jugadores eligen invertir cuando están indiferentes, o sea, cuando  $v_i = 0$ .

Dados  $k \in \mathbb{N}, i \in \mathcal{J}$ , sea

$$A_{ki} = \{a \in \mathbb{R} / s_i^a \geq f_{ki}\}.$$

Es claro que  $A_{ki}$  es de la forma  $(-\infty, a_0]$ , ya que

- si  $s_i^a \geq f_{ki}$  y  $b \leq a$ ,  $s_i^b \geq s_i^a \geq f_{ki}$ , es decir,  $a \in A_{ki}, b \leq a \implies b \in A_{ki}$ ;
- existe un  $b_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $b_0 \notin A_{ki}$  para  $k \geq 1$ : de hecho, podemos tomar  $b_0 = 0$ , ya que invertir cuando la esperanza de  $\theta$  es negativa es mala idea independientemente de las estrategias de los demás;
- el intervalo queda cerrado por derecha. Para verlo, supongamos que no, y sea  $a_0$  el extremo derecho del intervalo; entonces, como  $s_i^{a_0} \not\geq f_{ki}$ , existe algún  $x \in \mathbb{R}^{e_i}$

tal que  $b = \bar{x} < a_0$  pero  $f_{ki}(x) = 1$ . Tomando  $b' = \frac{b+a_0}{2}$ , tenemos  $b' < a_0$  pero  $s_i^{b'}(x) = 0 \implies s_i^{b'} \not\geq f_{ki} \implies b' \notin A_{ki}$ , absurdo.

Definimos entonces

$$a_{ki} = \sup A_{ki} = \text{máx } A_{ki} = a_0.$$

Observamos además que las sucesiones  $(f_{ki})_k$  son decrecientes para cada  $i$ , ya que  $f_{1i} \leq 1_i = f_{0i}$  y luego, inductivamente,  $f_{(k-1)j} \geq f_{kj}$  para todo  $j \neq i$  implica que  $f_{ki} \geq f_{(k+1)i}$ , ya que  $f_{ki}$ ,  $f_{(k+1)i}$  son respuestas óptimas a las  $f_{(k-1)j}$  y  $f_{kj}$  respectivamente, y  $v_i$  es creciente en las  $f_j$ . Luego  $(a_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión creciente para cada  $i \in \mathcal{I}$ . Es claro que  $a_{1i} = 0$  para todo  $i$ , y que  $a_{ki} \leq 1$  para todo  $k$ , ya que  $v_i(x, (f_j)_{j \neq i})$  es positivo sin importar cuáles son las  $f_j$  si  $x > 1$ . Luego la sucesión converge a un  $a_i \in [0, 1]$ .

Argumentamos ahora que, si  $f_i$  sobrevive  $k$  pasos de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas, entonces  $f_i \leq f_{ki}$ . Probamos esto por inducción:

Para  $k = 1$  es trivial, ya que  $f_{1i} = s_i^0$ , y si  $f_i \not\geq s_i^0$ , existe  $x_0$  tal que  $f_i(x_0) > s_i^0(x_0)$ . Luego  $\bar{x}_0 < 0$ ; dado que el valor esperado de invertir es siempre negativo para  $(\theta_j)_{j \in M_i} < 0$ , la estrategia  $\tilde{f}_i$  dada por

$$\tilde{f}_i(x) = \begin{cases} f_i(x) & \text{si } x \neq x_0, \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

domina estrictamente a  $f_i$ .

Veamos ahora que, si suponemos el resultado para un  $k$ , vale para  $k+1$ . Dada  $f_i \not\geq f_{ki}$ , existe  $x_0 \in \mathbb{R}^{e_i}$  tal que  $f_i(x_0) > f_{ki}(x_0)$ . En particular,  $f_{ki}(x_0) = 0$ . Notemos que, por construcción de las  $f_{ki}$ , si  $f_{ki}(x_0) = 0$  es porque el pago esperado de invertir cuando se observa  $x_0$  y los demás jugadores juegan las estrategias  $f_{(k-1)j}$  es estrictamente negativo, ya que  $f_{ki}$  era definida como 1 cuando  $v_i$  valía 0. Ahora bien, dado que (por hipótesis inductiva) todas las estrategias que no son menores o iguales a  $f_{(k-1)j}$  ya han sido eliminadas para los  $j \neq i$ ,

$$v_i(x_0, (f_j)_{j \neq i}) \leq v_i(x_0, (f_{(k-1)j})_{j \neq i}) < 0,$$

de donde la  $\tilde{f}_i$  resultante de redefinir  $f_i$  como 0 en  $x_0$  domina estrictamente a la  $f_i$  original. Por último observamos que, dado que  $f_{ki} \leq s_i^{a_{ki}}$ , si  $f_i$  sobrevive  $k$  pasos de EIED entonces  $f_i \leq s_i^{a_{ki}}$ .

Hecho todo esto, podemos repetir el argumento definiendo funciones  $f'_{ki}$  que sean mejores respuestas sucesivas, pero comenzando con el perfil 0 y suponiendo que los jugadores no invierten cuando están indiferentes. Definimos de forma análoga sucesiones de estrategias  $t_i^{a'_{ki}}$ , donde  $(a'_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión decreciente y siempre  $\geq 0$ , que tiene luego un límite  $a'_i \geq 0$ , para cada  $i$ . Más aún, toda estrategia que sobrevive  $k$  pasos de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas debe ser mayor o igual a  $f'_{ki}$ , y por lo tanto mayor o igual a  $t_i^{a'_{ki}}$ .

Probaremos, por último, que  $a_i \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{m-1}{n-1} = a^*$  y que  $a'_i \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{m-1}{n-1} = a'^*$  para todo  $i$ , de lo que se deduce la Proposición.

Veamos el primer grupo de desigualdades; el segundo se prueba análogamente, por la simetría del problema. Supongamos  $a_j < a^*$  para algún  $j$ , y sea  $i$  tal que  $a_i$  es mínimo entre los  $a_j$  (en particular,  $a_i < a^*$ ).

Recordemos que  $f_{ki}$  es respuesta óptima a las  $f_{(k-1)j}$ , y  $s_i^{a_{ki}} \geq f_{ki}$  era la menor  $s_i^a$  mayor o igual a  $f_{ki}$ . Luego, para cada  $k$  y para cada  $\epsilon > 0$  existe  $x'_{k\epsilon} \in \mathbb{R}^{e_i}$  tal que  $\overline{x'_{k\epsilon}} \leq a_{ki} + \epsilon \leq a_i + \epsilon$  y  $f_{ki}(x'_{k\epsilon}) = 1$ . Como  $f_{ki}$  es creciente, podemos elegir  $x_{k\epsilon} \geq x'_{k\epsilon}$  tal que  $\overline{x_{k\epsilon}} = a_i + \epsilon$  y  $f_{ki}(x_{k\epsilon}) = 1$ . Además, sean  $x_\epsilon = (a_i + \epsilon)_{j \in M_i}$  y  $x = (a_i)_{j \in M_i}$ , para un  $i$  fijo. Calculemos la utilidad esperada de invertir para el jugador  $i$  cuando  $(\theta_j)_{j \in M_i} = x_{k\epsilon}$  y se supone que los demás jugadores elegirán las estrategias  $f_{(k-1)j}$ :

$$\begin{aligned}
y_{k\epsilon} = v_i(x_{k\epsilon}, (f_{(k-1)j})_{j \neq i}) &= \overline{x_{k\epsilon}} - 1 + \sum_{j \neq i} \frac{E(f_{(k-1)j}((\theta_l)_{l \in M_j}) | (\theta_j)_{j \in M_i} = x_{k\epsilon})}{n-1} \\
&\leq a_i - 1 + \epsilon + \sum_{j \neq i} \frac{E(s_j^{a_{(k-1)j}}((\theta_l)_{l \in M_j}) | (\theta_j)_{j \in M_i} = x_{k\epsilon})}{n-1} \\
&= a_i - 1 + \epsilon + \sum_{j \notin M_i^2} \frac{E(s_j^{a_{(k-1)j}}((\theta_l)_{l \in M_j}) | (\theta_j)_{j \in M_i} = x_{k\epsilon})}{n-1} \\
&\quad + \sum_{j \in N_i^2} \frac{E(s_j^{a_{(k-1)j}}((\theta_l)_{l \in M_j}) | (\theta_j)_{j \in M_i} = x_{k\epsilon})}{n-1} \\
&\leq a_i - 1 + \epsilon + \sum_{j \notin M_i^2} \frac{E(s_j^{a_{(k-1)j}}((\theta_l)_{l \in M_j}) | (\theta_j)_{j \in M_i} = x_{k\epsilon})}{n-1} + \sum_{j \in N_i^2} \frac{1}{n-1} \\
&= a_i - 1 + \epsilon + \frac{m-1}{n-1} + \sum_{j \notin M_i^2} \frac{P(\overline{(\theta_l)_{l \in M_j}} \geq a_{(k-1)j} | (\theta_j)_{j \in M_i} = x_{k\epsilon})}{n-1} \\
&= a_i - 1 + \epsilon + \frac{m-1}{n-1} + \sum_{j \notin M_i^2} \frac{P(\overline{(\theta_l)_{l \in M_j}} \geq a_{(k-1)j} | (\theta_j)_{j \in M_i} = x_\epsilon)}{n-1} \\
&\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} a_i - 1 + \epsilon + \frac{m-1}{n-1} + \sum_{j \notin M_i^2} \frac{P(\overline{(\theta_l)_{l \in M_j}} \geq a_j | (\theta_j)_{j \in M_i} = x_\epsilon)}{n-1} \\
&\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} a_i - 1 + \frac{m-1}{n-1} + \sum_{j \notin M_i^2} \frac{P(\overline{(\theta_l)_{l \in M_j}} \geq a_j | (\theta_j)_{j \in M_i} = x)}{n-1} \\
&\leq a_i - 1 + \frac{m-1}{n-1} + \sum_{j \notin M_i^2} \frac{\frac{1}{2}}{n-1} = a_i - 1 + \frac{m-1}{n-1} + \frac{1}{2} \frac{n-m}{n-1} \\
&= a_i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{m-1}{n-1} = a_i - a^* < 0.
\end{aligned}$$

(Aclaremos que, en la primera desigualdad, usamos  $f_{(k-1)j} \leq s_j^{a_{(k-1)j}}$ ; en la igualdad

siguiente, separamos a los  $j \neq i$  entre los que no pertenecen a la 2-vecindad de  $i$  y los que sí; y en la segunda desigualdad acotamos la probabilidad de que el segundo grupo invierta por 1. Luego, usamos que la distribución condicional de  $(\theta_l)_{l \in M_j}$  no depende de los datos observados  $x_{k\epsilon}$ , sino solamente de su promedio, por lo que da lo mismo tomar  $x_\epsilon$  que  $x_{k\epsilon}$ , gracias a que  $M_i$  y  $M_j$  son disjuntos. Más aún, dicha distribución es normal con media  $\bar{x}_\epsilon = a_i + \epsilon$ . Los pasos al límite son claros, y luego usamos que la probabilidad de que una normal con media  $\bar{x} = a_i$  sea mayor o igual a  $a_j$  es a lo sumo  $\frac{1}{2}$ , por ser  $a_i \leq a_j$ .

Pero  $y_{k\epsilon} \geq 0$  para todos  $k$  y  $\epsilon$  por ser  $f_{ik}(x_{k\epsilon}) = 1$  y por ser  $f_{ik}$  respuesta óptima a las  $f_{(k-1)j}$ , una contradicción.  $\square$

Observamos que la importancia de las 2-vecindades por encima de las vecindades de otros órdenes probablemente no sea un rasgo esencial de la situación que modelamos; más bien, es consecuencia de suponer que la información sólo puede viajar un paso, es decir, que la información de  $i$  puede ser observada por amigos de  $i$  pero no por amigos de amigos, con lo que los jugadores a distancia mayor a 2 están efectivamente desconectados, y así un grafo con 2-vecindades pequeñas respecto del tamaño del grafo es efectivamente ralo para nuestros fines. Esta arbitrariedad es una de las razones por las que parece una buena idea construir un modelo en el que la información viaje una cantidad aleatoria de pasos; esbozamos esto al final del Capítulo 6.

Por último, notamos que la Proposición 8 no afirma nada sobre la existencia de equilibrios; en este caso resulta relevante la Proposición 10.

## Estrella

Consideramos ahora un grafo con un vértice  $x_0$  que está conectado a todos los demás, y  $n$  vértices  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) que sólo están conectados a  $x_0$ . En efecto, este grafo modela una situación en la que los jugadores tienen dos datos, uno privado y uno público (excepto el vértice central, que conoce el dato público y todos los privados). En un grafo grande, el peso de  $x_0$  como jugador es insignificante: lo que nos importa realmente de él no es el efecto de su jugada sobre  $l$  para los demás jugadores, sino cuánto pesa su información.

Por eso, tiene sentido considerar una versión más estilizada del ejemplo, en la que la jugada de  $x_0$  no tiene peso para los demás jugadores. En este caso, desde el punto de vista del resto de la población,  $x_0$  es simplemente una fuente de información pública. Esta situación es estudiada en Morris and Shin (2003, Cap. 2) y en Hellwig (2002). Ambos trabajos notan que la presencia de información pública no rompe la unicidad del equilibrio, siempre que sea suficientemente imprecisa comparada con las señales privadas: es decir, si el dato público tiene un desvío mucho mayor a los datos privados sigue habiendo un único equilibrio, pero en caso contrario se generan equilibrios múltiples. Morris and Shin (2003, Cap. 2) estudian el umbral a partir del cual se rompe la unicidad; Hellwig (2002) caracteriza el conjunto de equilibrios de un juego similar y encuentra que, cuando el dato público tiene suficiente precisión, hay 3 equilibrios

simétricos crecientes (es decir, donde todos usan la misma estrategia creciente). En nuestro modelo sencillo, en que los datos privados tienen la misma precisión que el público, se dará este caso, siempre que  $\sigma$  sea razonablemente pequeño. En el resto de la sección, encontraremos explícitamente los 3 equilibrios y argumentaremos que son muy diferentes entre sí como para que el modelo pueda hacer predicciones fuertes, pero que por otro lado existe un equilibrio entre los 3 que es ‘natural’, y que resulta más convincente que sea elegido.

Formalmente, lo particular de este caso es que, como todos conocen el dato público de  $x_0$ ,  $c$ , el juego efectivamente se convierte en una familia de juegos indexada por  $c$ : es decir, dado un valor  $c_0$  para  $c$ , todos lo observan y saben que se está jugando el caso  $c = c_0$  y no otro, y los distintos casos quedan desacoplados, de tal forma que cada uno puede considerarse como un juego separado  $G_c$ . Además, dado que cada jugador no central  $i$  observa dos datos, sus estrategias en  $G$  son funciones  $F_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ , y sus estrategias en  $G_c$  son funciones  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ . Ignoraremos directamente al jugador central, de forma que llamamos  $\mathcal{J} = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

Usamos los nombres  $s^a$  y  $t^a$  para las estrategias en  $G_c$  dadas por  $s^a = \mathbf{1}_{x \geq a}$  y  $t^a = \mathbf{1}_{x > a}$ . Consideramos solamente los equilibrios simétricos crecientes, es decir, los equilibrios donde todos están jugando las estrategias  $s^a$  o  $t^a$  para un mismo  $a$ .

Tenemos entonces la siguiente

**Proposición 9.** *Sea  $G_c$  el juego correspondiente al grafo descrito arriba cuando el dato público es  $c$ . Sea  $\sigma < \frac{1}{\sqrt{3\pi}}$ . Entonces existen  $c_0 < c_1$  tales que*

1. *Si  $c < c_0$ , el juego tiene esencialmente un único equilibrio creciente, dado por  $(f_i)_{i \in \mathcal{J}}$  con  $f_i = s^a$  o  $f_i = t^a$  para cada  $i$ , donde  $a = a_0(c)$ .*
2. *Si  $c = c_0$ , el juego tiene esencialmente dos equilibrios crecientes, dados por  $(f_i)_{i \in \mathcal{J}}$  con  $f_i = s^a$  o  $f_i = t^a$  para cada  $i$ , donde  $a = a_0(c) = a_1(c)$  o  $a = a_2(c)$  (todos deben usar el mismo  $a$ ) y vale  $a_0(c) = a_1(c) < a_2(c)$ .*
3. *Si  $c_0 < c < c_1$ , el juego tiene esencialmente tres equilibrios crecientes, dados por  $(f_i)_{i \in \mathcal{J}}$  con  $f_i = s^a$  o  $f_i = t^a$  para cada  $i$ , donde  $a = a_0(c)$ ,  $a = a_1(c)$  o  $a = a_2(c)$  (todos deben usar el mismo  $a$ ), y vale  $a_0(c) < a_1(c) < a_2(c)$ .*
4. *Si  $c = c_1$ , el juego tiene esencialmente dos equilibrios crecientes, dados por  $(f_i)_{i \in \mathcal{J}}$  con  $f_i = s^a$  o  $f_i = t^a$  para cada  $i$ , donde  $a = a_0(c)$  o  $a = a_1(c) = a_2(c)$  (todos deben usar el mismo  $a$ ), y vale  $a_0(c) < a_1(c) = a_2(c)$ .*
5. *Si  $c_1 < c$ , el juego tiene esencialmente un único equilibrio creciente, dado por  $(f_i)_{i \in \mathcal{J}}$  con  $f_i = s^a$  o  $f_i = t^a$  para cada  $i$ , donde  $a = a_2(c)$ .*

*Además, las funciones  $a_0(c) : [c_0, +\infty)$ ,  $a_1(c) : [c_0, c_1]$  y  $a_2(c) : (-\infty, c_1]$  son continuas, y  $C^\infty$  en el interior de sus dominios.  $a_0$  y  $a_2$  son decrecientes y  $a_1$  es creciente. Por último, sean  $b_0, b_1, b_2$  dadas por  $b_0(c) = -c$ ,  $b_1(c) = c$ ,  $b_2(c) = 2 - c$  con dominios  $[c_0, +\infty)$ ,  $[c_0, c_1]$  y  $(-\infty, c_1]$  respectivamente. Entonces*

$$\|a_i - b_i\|_\infty \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$$

para  $i = 0, 1, 2$ , y  $c_0 \rightarrow 0$ ,  $c_1 \rightarrow 1$  cuando  $\sigma \rightarrow 0$ .

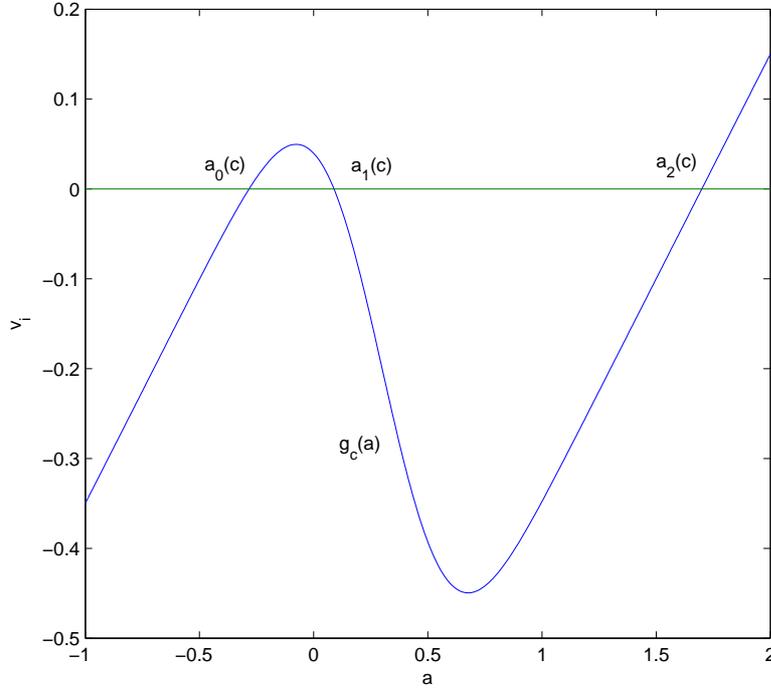


Figura 5.1: Equilibrios para  $c = 0, 3$  y  $\sigma = 0, 1$

*Demostración.* Fijemos para empezar un valor de  $c$ . Observamos que, para un perfil de estrategias creciente  $f$  dado,  $v_i(x, (f_j)_{j \neq i})$  es una función creciente y continua de  $x \in \mathbb{R}$ . Ambas cosas se deducen de que, si el dato público es  $c$  y el dato privado de  $i$  es  $x_i$ , entonces la distribución condicional del dato privado de  $j$  es normal con media  $\frac{c+x_i}{2}$  y desvío  $\sqrt{\frac{3}{2}}\sigma$ .

Llamamos  $S^a = (s^a)_{i \in \mathcal{I}}$ . Notamos que, para un  $c$  dado, si se juega el perfil  $S^a$  pueden pasar tres cosas: que  $v_i(a, (s^a)_{j \neq i}) < 0$ , que  $v_i(a, (s^a)_{j \neq i}) > 0$  o que  $v_i(a, (s^a)_{j \neq i}) = 0$ . En los primeros dos casos  $S^a$  no es equilibrio: en el primero, por la continuidad, existe  $x > a$  tal que  $v_i(x, (s^a)_{j \neq i}) < 0$ , pero  $s^a(x) = 1$  (por ser  $x > a$ ); en el segundo, análogamente, existe  $x < a$  tal que  $v_i(x, (s^a)_{j \neq i}) > 0$ , pero  $s^a(x) = 0$  (por ser  $x < a$ ). En el tercer caso  $S^a$  sí es equilibrio, ya que  $v_i(x) > 0 \Rightarrow x > a \Rightarrow s^a(x) = 1$  y  $v_i(x) \Rightarrow x < a \Rightarrow s^a(x) = 0$ .

Además, notamos que no hace mayor diferencia cambiar  $S^a$  por un perfil  $(f_i)_{i \in \mathcal{I}}$  con  $f_i = s^a$  o  $f_i = t^a$  para cada  $i$ , o sea, un tal  $f_i$  es equilibrio si y sólo si  $S^a$  lo es.

Podemos definir  $g_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g_c(a) = v_i(a, (s^a)_{j \neq i})$ ; entonces los equilibrios

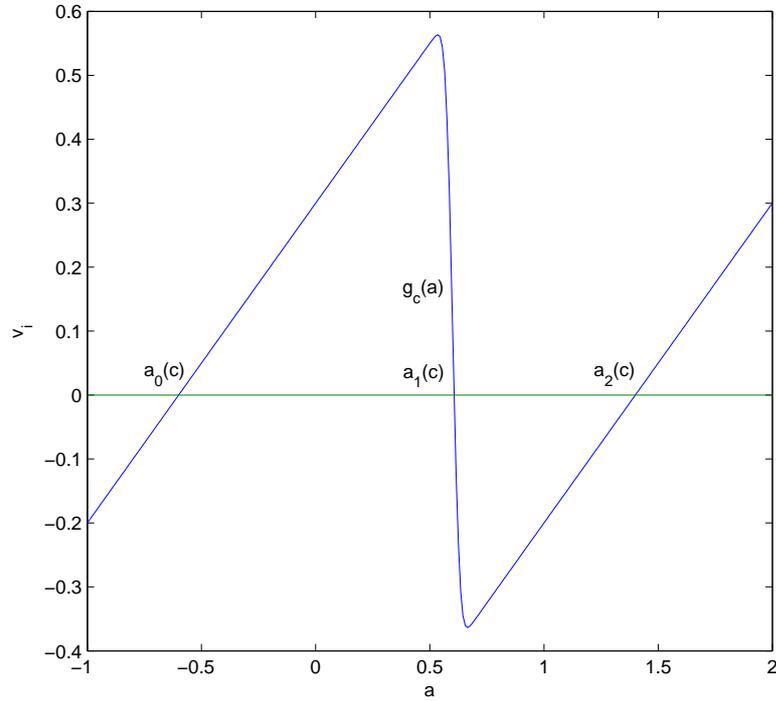


Figura 5.2: Equilibrios para  $c = 0,6$  y  $\sigma = 0,01$

simétricos crecientes de  $G_c$  corresponden a los ceros de  $g_c$ . Ahora bien,

$$\begin{aligned}
 g_c(a) &= v_i(a, (s^a)_{j \neq i}) = \frac{a+c}{2} - 1 + P(\theta_j \geq a | \theta_i = a, \theta_0 = c) \\
 &= \frac{a+c}{2} - P(\theta_j < a | \theta_i = a, \theta_0 = c) = \frac{a+c}{2} - \Phi\left(\frac{a - \frac{a+c}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\sigma}\right) \\
 &= \frac{a+c}{2} - \Phi\left(\frac{a-c}{\sqrt{6}\sigma}\right),
 \end{aligned}$$

donde  $\Phi$  es la función de distribución de una variable  $N(0, 1)$ . Podríamos encontrar los equilibrios del juego  $G_c$  para cada  $c$  estudiando la función  $g_c$  ‘a mano’; en las Figuras 5.1, 5.2 y 5.3 mostramos ejemplos de esto para diferentes valores de  $c$  y  $\sigma$ , con dos casos en los que aparecen tres equilibrios y uno en el que hay un equilibrio. Si bien esto es intuitivo, para entender la forma de las funciones  $a_i$  nos conviene tomar  $c$  también como variable. Definimos entonces  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(c, a) = g_c(a)$ .

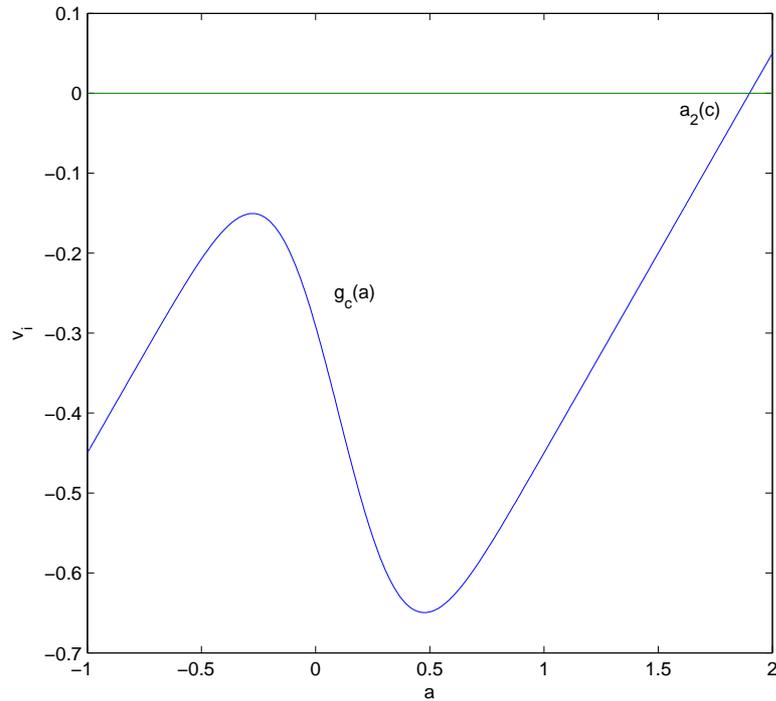


Figura 5.3: Equilibrio para  $c = 0, 1$  y  $\sigma = 0, 1$

Es claro que  $F$  es  $C^\infty$ . Podemos calcular las derivadas parciales de  $F$  como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial c}(c, a) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-c)^2}{2 \cdot 6\sigma^2}} \\ \frac{\partial F}{\partial a}(c, a) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-c)^2}{2 \cdot 6\sigma^2}} = g'_c(a).\end{aligned}$$

Como  $\frac{\partial F}{\partial c} \geq \frac{1}{2}$ ,  $F(\cdot, a)$  es estrictamente creciente para cada  $a \in \mathbb{R}$  fijo, y debe ser negativa para  $c$  suficientemente chico y positiva para  $c$  suficientemente grande. Luego, para cada  $a$  existe un único  $c = C(a)$  tal que  $F(c, a) = 0$ , o sea, tal que  $S^a$  es equilibrio de  $G_c$ . Queda definida entonces una función  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

A la vez, por el Teorema de la Función Implícita, y como siempre  $\frac{\partial F}{\partial c} > 0$ , alrededor de cada punto  $(c_0, a_0)$  del conjunto  $F_0 = \{(c, a) \in \mathbb{R}^2 / F(c, a) = 0\}$  se puede parametrizar dicho conjunto por una función  $C^\infty$ ,  $C_{c_0}$ , definida en un entorno de  $c_0$ . Pero, como  $F_0$  ya está parametrizado globalmente por la función  $C$ , tenemos  $C_{c_0} = C|_{\text{Dom } C_{c_0}}$ . Luego  $C$  es  $C^\infty$ , y podemos usar el Teorema para calcular su derivada:

$$C'(a) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial a}(c, a)}{\frac{\partial F}{\partial c}(c, a)} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-c)^2}{12\sigma^2}}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-c)^2}{12\sigma^2}}},$$

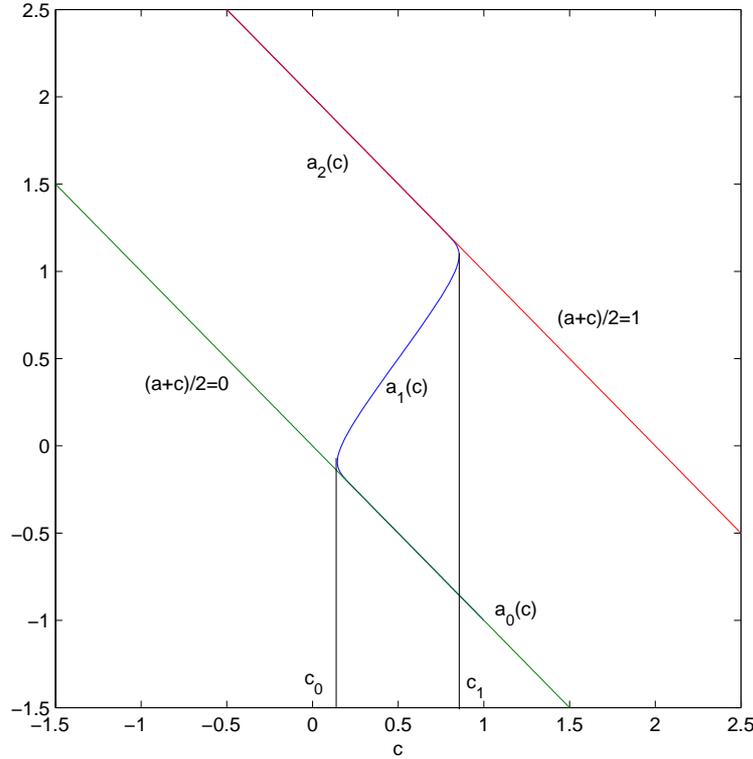


Figura 5.4: Equilibrios para todo  $c$ ;  $\sigma = 0,05$

donde  $c = C(a)$ .

Llamemos  $A = \frac{1}{\sqrt{6\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a-c)^2}{12\sigma^2}}$ , que es una función de  $a$  (ya que  $c = C(a)$ ). Entonces

$$C'(a) = \frac{-\frac{1}{2} + A}{\frac{1}{2} + A} = -1 + \frac{2A}{\frac{1}{2} + A} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2} + A},$$

y

$$C''(a) = \frac{A'}{\left(\frac{1}{2} + A\right)^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{6\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{12\sigma^2} (-2(a-c))(1 - C'(a)) e^{-\frac{(a-c)^2}{12\sigma^2}}}{\left(\frac{1}{2} + A\right)^2}.$$

Como  $A > 0$ ,  $-1 < C'(a) < 1$ . Luego, en particular,  $1 - C'(a) > 0$  y el signo de  $C''(a)$  es el signo de  $-(a - c) = C(a) - a$ . Observamos que  $C(a) - a > 0$  para  $a < 0,5$ ,  $C(a) - a < 0$  para  $a > 0,5$  y  $C(a) - a = 0$  para  $a = 0,5$ . Esto se deduce de calcular  $F(a, a) = a - \Phi(0) = a - \frac{1}{2}$ : si  $a < 0,5$  entonces  $F(a, a)$  es negativo y el  $C(a)$  que hace  $F(C(a), a) = 0$  debe ser mayor que  $a$ , dado que  $F$  es creciente en  $c$ ; si  $a = 0,5$ ,  $F(a, a) = 0$  y  $C(a) = a$ ; si  $a > 0,5$ ,  $F(a, a) > 0$  y el  $C(a)$  tal que  $F(C(a), a) = 0$  es menor a  $a$ .

Entonces  $C$  es convexa en  $(-\infty, \frac{1}{2})$  y cóncava en  $(\frac{1}{2}, +\infty)$ . Además, para  $a = 0,5$ ,  $A = \frac{1}{\sqrt{6}\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > \frac{1}{2}$  porque  $\sigma < \frac{1}{\sqrt{3\pi}}$ , de donde  $C'(\frac{1}{2}) > 0$ .

Por otro lado, para  $a$  suficientemente chico o grande,  $C'(a) < 0$ . Para verlo notemos que siempre  $0 < \frac{a+C(a)}{2} < 1$ , o sea,  $-a < C(a) < 2 - a$ , de donde  $(a - C(a))^2$  tiende a infinito cuando  $a$  se hace arbitrariamente chico o grande, y entonces  $A$  tiende a 0, con lo que en particular a partir de algún momento vale  $A < \frac{1}{2}$  y así  $C'(a) < 0$ . (Notemos que, para  $\sigma > \frac{1}{\sqrt{3\pi}}$ , lo que resulta es que  $C'(a) < 0$  siempre y entonces hay un único valor de equilibrio de  $a$  para cada  $c \in \mathbb{R}$ ).

Luego existen  $a_* < \frac{1}{2} < a^*$  tales que  $C'(a_*) = C'(a^*) = 0$ ;  $C' > 0$  en  $(a_*, a^*)$ ; y  $C' < 0$  en  $(-\infty, a_*) \cup (a^*, +\infty)$ . Definimos  $c_0 = C(a_*)$  y  $c_1 = C(a^*)$ . Ahora podemos tomar  $a_0(c)$  como la inversa de  $C|_{(-\infty, a_*]} \rightarrow [c_0, +\infty)$ ,  $a_1(c)$  como la inversa de  $C|_{[a_*, a^*]} \rightarrow [c_0, c_1]$  y  $a_2(c)$  como la inversa de  $C|_{[a^*, +\infty)} \rightarrow (-\infty, c_1]$ . Por lo hecho hasta acá, queda claro que  $a_0$  y  $a_2$  son decrecientes y  $a_1$  es creciente; que son continuas y  $C^\infty$  en el interior de sus respectivos dominios; que parametrizan el conjunto de equilibrios del juego; y que la pinta de los equilibrios es como la describimos en los items 1 a 5 de la Proposición (y como se ve en la Figura 5.4).

Falta ver lo que ocurre cuando  $\sigma \rightarrow 0$ . Probaremos primero que  $a_*$  y  $c_0$  tienden a 0 cuando  $\sigma \rightarrow 0$ . Para verlo, estimemos los valores de  $a_* - C(a_*)$  y  $a_* + C(a_*)$ . Sabemos que  $C'(a_*) = 0$ , de donde  $A(a_*) = \frac{1}{2}$ . Entonces

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{\sqrt{3\pi}\sigma} e^{-\frac{(a_* - C(a_*))^2}{12\sigma^2}} \\ 0 &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\right) + \ln\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{(a_* - C(a_*))^2}{12\sigma^2} \\ (a_* - C(a_*))^2 &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\right) 12\sigma^2 + \ln\left(\frac{1}{\sigma}\right) 12\sigma^2. \end{aligned}$$

Es fácil probar que el lado derecho tiende a 0 cuando  $\sigma \rightarrow 0$ . Luego  $a_* - C(a_*)$  tiende a 0 cuando  $\sigma \rightarrow 0$ . Por otro lado

$$\frac{(a_* - C(a_*))^2}{\sigma^2} = 12 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3\pi}}\right) + \ln\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

que tiende a  $+\infty$  cuando  $\sigma \rightarrow 0$ . Luego, si miramos

$$F(C(a_*), a_*) = \frac{a_* + C(a_*)}{2} - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \frac{a_* - C(a_*)}{\sigma}\right) = 0,$$

vemos que el segundo término tiende a 0, porque el valor en que se evalúa  $\Phi$  tiende a  $\infty$  en valor absoluto, y es negativo (porque  $a_* < 0,5$  y  $C(a) > a$  en ese caso). Luego  $a_* + C(a_*)$  también tiende a 0 cuando  $\sigma \rightarrow 0$ . Entonces  $a_*$  y  $C(a_*)$  tienden ambos a 0. Análogamente, se puede probar que  $a^*$  y  $C(a^*) = c_1$  tienden ambos a 1.

Por último, para probar que  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  convergen a  $b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$  en norma infinito respectivamente, basta observar que la distancia entre cada par de funciones se maximiza

en  $c_0$ ;  $c_0$  y  $c_1$ ; y  $c_1$ , respectivamente. (Esto se prueba fácilmente usando que  $|a'_i| > 1$  siempre, que a su vez es porque  $|C'| < 1$ ). Y a la vez  $(a_0 - b_0)(c_0) = a_0(c_0) + c_0 = a_* + C(a_*)$ , que ya sabíamos que tiende a 0. Las cuentas son análogas para  $a_1$  y  $a_2$ .  $\square$

Como dijimos al principio, los equilibrios de  $G_c$  para cada  $c$  entre  $c_0$  y  $c_1$  son muy diferentes como para extraer predicciones concretas sobre lo que debería ocurrir en el juego. El conjunto de equilibrios de  $G$  tiene el cardinal de  $2^{\mathbb{R}}$  ya que, para construir un equilibrio de  $G$ , para cada  $c$  en todo un intervalo tenemos para elegir entre tres equilibrios diferentes. Sin embargo, la mayoría de los equilibrios de  $G$  son poco convincentes: en particular, tiene poco sentido que el umbral privado para invertir (es decir,  $a(c)$ ) pueda ser  $a_0(c)$  (o sea, un valor bajo) para  $c = 0,35$  y  $a_2(c)$  (un valor alto) para  $c = 0,4$ . Lo intuitivo sería que los jugadores sean más optimistas (es decir, tengan umbrales privados más bajos) cuanto más alto sea el dato público, o sea, esperaríamos una función  $a(c)$  decreciente. Si además pedimos que el equilibrio sea simétrico queda una sola posibilidad, dada por  $a(c) = a_2(c)$  para  $c < 0,5$ ;  $a(0,5) = a_1(0,5) = 0,5$ ; y  $a(c) = a_0(c)$  para  $c > 0,5$ . Llamamos a esta función  $a_\sigma(c)$ ; volveremos a mencionarla en el Capítulo 6.

## Existencia de equilibrios

Tenemos la siguiente

**Proposición 10.** *Sea  $(\mathcal{J}, E)$  un grafo con  $|\mathcal{J}| = n$ . Entonces el juego resultante para este grafo tiene al menos un equilibrio de Nash  $(f_i)_{i \in \mathcal{J}}$  en estrategias puras y crecientes.*

*Demostración.* Consideremos el conjunto  $F \subseteq S$  de perfiles de estrategias  $f = (f_i)_{i \in \mathcal{J}}$  tales que  $f_i$  es creciente para todo  $i$ , y existe una respuesta óptima  $g = (g_i)_{i \in \mathcal{J}}$  a  $f$  que es mayor o igual a  $f$ , es decir,  $g_i \geq f_i$  para todo  $i$ .

Pensamos a  $F$  como un conjunto parcialmente ordenado con el orden parcial usual  $\leq$ , es decir,  $f \leq g$  si  $f_i \leq g_i$  para todo  $i$ . Por un lado, es claro que  $F$  es no vacío, ya que  $0 \in F$ . Por otro lado, si  $G \subseteq F$  es una cadena en  $F$ , entonces  $G$  tiene una cota superior. Efectivamente, si  $G = \{g^\alpha : \alpha \in A\}$ , podemos tomar  $g \in F$  dada por  $g = \sup_{\alpha \in A} g^\alpha$ , es decir,  $g = (g_i)$  donde  $g_i(x) = \sup_{\alpha \in A} g_i^\alpha(x)$  para todo  $i$  y para todo  $x \in \mathbb{R}^{e_i}$ ; veamos que  $g$  es una cota superior. Que  $g$  es mayor o igual que todos los  $g^\alpha$  es obvio por definición, pero hay que ver que  $g \in F$ . Es claro que  $g$  resulta creciente. En cuanto a la existencia de una respuesta óptima a  $g$  que sea mayor o igual a la propia  $g$ , sea  $h = (h_i)$  dada por

$$h_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i(x, (g_j)_{j \neq i}) \geq 0, \\ 0 & \text{si } v_i(x, (g_j)_{j \neq i}) < 0. \end{cases}$$

Por construcción,  $h$  es respuesta óptima a  $g$ . Ahora, dado  $\alpha \in A$ , sea  $h^\alpha$  una respuesta óptima a  $g^\alpha$  tal que  $h^\alpha \geq g^\alpha$ ; dados  $i$  y  $x \in \mathbb{R}^{e_i}$ , tenemos que si  $h_i(x) < h_i^\alpha(x)$  entonces  $h_i(x) = 0$ , de donde  $v_i(x, (g_j)_{j \neq i}) < 0$ . Por argumentos análogos a los usados para demostrar la Proposición 8, es claro que  $g^\alpha \leq g$  implica  $v_i(x, (g_j^\alpha)_{j \neq i}) \leq v_i(x, (g_j)_{j \neq i}) <$

0; luego, como  $h_i^\alpha$  es respuesta óptima de  $i$  a  $g^\alpha$ ,  $h_i^\alpha(x) = 0$ . Luego  $h_i \geq h_i^\alpha$ . Como esto vale para todo  $i$ ,  $h \geq h^\alpha \geq g^\alpha$ . Como esto vale para todo  $\alpha$ ,  $h \geq g$ , como queríamos.

Luego, por el lema de Zorn, el conjunto  $(F, \leq)$  tiene un elemento maximal  $f_0$ . Sea  $f_1$  una respuesta óptima a  $f_0$  tal que  $f_1 \geq f_0$ . Si fueran distintas, tendríamos  $f_1 > f_0$ ; ahora bien, por ser  $f_0$  creciente,  $f_1$  es creciente, y nuevamente por argumentos similares a los de la Proposición 8,  $f_1$  tiene una respuesta óptima mayor o igual que la propia  $f_1$ , de donde  $f_1 \in F$ . Pero entonces  $f_1 > f_0$  viola la maximalidad de  $f_0$ . Luego  $f_1 = f_0$ , es decir,  $f_0$  es un equilibrio de Nash. Además, si tomamos como  $f_1$  a la mayor respuesta óptima a  $f_0$  (es decir, aquella que recomienda invertir con probabilidad 1 siempre que  $v_i \geq 0$ , y no hacerlo si  $v_i < 0$ ), entonces  $f_1$  es pura y creciente por construcción y también  $f_1 \geq f_0 \Rightarrow f_1 = f_0$ , es decir,  $f_0$  es un equilibrio puro y creciente.  $\square$

# Capítulo 6

## Juegos globales sobre redes con perturbaciones

### 6.1. Preliminares

En el Capítulo 5, hemos visto que aún la presencia de unas pocas aristas genera múltiples equilibrios en nuestro modelo, y que en redes con muchas aristas estos equilibrios pueden ser muy diferentes entre sí, aún cuando hay un único equilibrio que parece ‘natural’ (como en el caso de la estrella, o de un grafo formado por subgrafos completos grandes). Por eso, en este Capítulo introducimos una nueva versión del modelo, en la que toda la información que recibe un jugador (ya sea la suya propia o la que recibe de otros) sufre una perturbación idiosincrática adicional, que puede pensarse que proviene de una imperfección en la comunicación (cuando se aplica a datos que vienen de otros) o de un sesgo que sufre el jugador al leer o interpretar la información.

La función de esta perturbación adicional es romper la correlación perfecta que el modelo anterior permite entre los datos que observan diferentes jugadores: ahora, aún si dos jugadores comparten información, cada uno la percibe de forma ligeramente diferente, por lo que siempre hay un poco de incertidumbre sobre lo que el otro observa (y, por lo tanto, sobre cómo jugará). El resultado principal de este Capítulo es que este cambio resulta en que el juego tenga un único equilibrio, aún cuando el tamaño de las perturbaciones es arbitrariamente pequeño con respecto al desvío de los datos originales.

### 6.2. El modelo

Como en el Capítulo 5, tomamos un grafo  $(\mathcal{J}, E)$ , donde los vértices  $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, n\}$  son los jugadores del juego.  $\theta$  es una variable aleatoria distribuida uniformemente sobre los números reales. Además, tenemos  $(\epsilon_j)_{j \in \mathcal{J}}$  y  $(\delta_i)_{i \in \mathcal{J}}$  familias de variables aleatorias, todas independientes (entre sí y de  $\theta$ ), con distribuciones  $N(0, \sigma^2)$  y  $N(0, \tau^2)$  respectivamente. Llamamos, para cada  $j$ ,  $\theta_j = \theta + \epsilon_j$ ; y, para cada par  $i, j$ ,  $\theta_{ij} = \theta + \delta_i + \epsilon_j$ .

Podemos pensar que  $\theta_j$  es el dato que recibe el jugador  $j$ , y  $\theta_{ij}$  es el dato que recibe el jugador  $j$  visto por  $i$ . Por la estructura de los  $\delta_i$ , que dependen del receptor de la información pero no del emisor, estamos suponiendo que para cada jugador hay un mismo sesgo idiosincrático que afecta toda la información que recibe (incluyendo la que recibe directamente). (En la sección 6.4 mostramos otras estructuras posibles para los  $\delta$  que preservan los resultados del Capítulo). Como el caso que nos importa más es cuando  $\tau$  es pequeño con respecto a  $\sigma$ , pensamos en los  $\delta_i$  como errores de segundo orden.

Como antes, cada jugador  $i$  observa los datos que reciben los  $j \in M_i$ , es decir,  $i$  observa  $(\theta_{ij})_{j \in M_i}$ . Dada esta información,  $i$  debe elegir si invertir, no invertir, o invertir con alguna probabilidad  $p$ . Luego, si  $i$  tiene  $d_i = |N_i|$  vecinos y  $e_i = |M_i| = d_i + 1$ , sus estrategias serán funciones  $f_i : \mathbb{R}^{e_i} \rightarrow [0, 1]$ , como antes.

La función de utilidad es la misma que antes: el pago de  $i$  es 0 si no invierte y  $\theta - 1 + l$  si lo hace, donde  $l$  es la proporción de jugadores que invierte (sin contar al propio  $i$ ). Formalmente,  $i$  tiene una función de utilidad  $u_i$  dada por

$$u_i(\theta, f_i, (f_j)_{j \in \mathcal{J}, j \neq i}, (\theta_{jl})_{j, l \in \mathcal{J}}) = \begin{cases} \theta - 1 + l & \text{si } f_i((\theta_{ij})_{j \in M_i}) = 1 \\ 0 & \text{si } f_i((\theta_{ij})_{j \in M_i}) = 0, \end{cases}$$

donde

$$l = \frac{\sum_{j \neq i} f_j((\theta_{jl})_{l \in M_j})}{n - 1}.$$

Denotamos además el valor esperado de invertir para  $i$  (dados datos observados  $\theta_{ij}$  y suponiendo que los demás jugadores eligen las estrategias  $f_j$ ) como

$$v_i((\theta_{ij})_{j \in M_i}, (f_j)_{j \neq i}) = \frac{\sum_{j \in M_i} \theta_{ij}}{|M_i|} - 1 + E(l | (\theta_{ij})_{j \in M_i}),$$

de tal forma que un jugador que está jugando en equilibrio debe tener una estrategia  $f_i$  que elige invertir si  $v_i > 0$ , no invertir si  $v_i < 0$  y puede hacer cualquier cosa si  $v_i = 0$ . Notamos que  $\frac{\sum_{j \in M_i} \theta_{ij}}{|M_i|}$  es la esperanza condicional de  $\theta$  dados los datos observados; esta expresión sencilla resulta, nuevamente, de que los errores  $\epsilon_j$ ,  $\delta_i$  son normales independientes con igual desvío en cada grupo (de forma tal que cualquier dato  $\theta_{ij}$  termina teniendo el mismo desvío,  $\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ ) y de que  $\theta$  es uniforme sobre  $\mathbb{R}$ . Además

$$E(l | (\theta_{ij})_{j \in M_i}) = \sum_{j \neq i} \frac{E(f_j((\theta_{jl})_{l \in M_j}) | (\theta_{ij})_{j \in M_i})}{n - 1}.$$

Dado esto, podemos considerar los equilibrios de Nash del juego, para una red  $(\mathcal{J}, E)$  dada. Llamemos  $G_{\mathcal{J}, E}(\sigma, \tau)$ , o simplemente  $G(\sigma, \tau)$  al juego dado por dicha red cuando los desvíos de los  $\epsilon_j$  y los  $\delta_i$  son  $\sigma$  y  $\tau$  respectivamente.

### 6.3. Equilibrio

Damos primero algunas definiciones y herramientas adicionales para los argumentos que siguen.

Dada  $f_i \in S_i$  y  $a \in \mathbb{R}$ , definimos  $f_i + a \in S_i$  por

$$(f_i + a)(x_1, \dots, x_{e_i}) = f_i(x_1 - a, \dots, x_{e_i} - a).$$

Notamos que  $f_i + a \leq f_i$  si  $a \geq 0$  y  $f_i$  es creciente. Intuitivamente, sumar  $a$  a una estrategia creciente da una estrategia más pesimista, que requiere que los datos observados sean más altos en la cantidad  $a$  para que  $i$  responda de la misma forma.

Ahora, dadas  $f_i, g_i \in S_i$  crecientes, definimos

$$p(f_i, g_i) = \inf\{a \geq 0 / f_i + a \leq g_i\},$$

es decir,  $p(f_i, g_i)$  dice cuánto hay que sumarle a  $f_i$  para que sea más pesimista que  $g_i$ . Notamos que, si  $f_i, g_i$  son estrategias que podrían llegar a elegirse en un equilibrio (en particular, implican no invertir cuando la esperanza condicional de  $\theta$  es negativa e invertir cuando es mayor a 1), entonces  $0 \leq p(f_i, g_i) \leq 1$ . Además, si  $a > p(f_i, g_i)$  y  $f_i, g_i$  son crecientes, entonces  $f_i + a \leq g_i$ . Por último, ponemos

$$d(f_i, g_i) = p(f_i, g_i) + p(g_i, f_i).$$

*Observación.*  $d$  es una pseudométrica.

En efecto, dadas  $f_i, g_i, h_i \in S_i$  tenemos  $d(f_i, g_i) \geq 0$ ,  $d(f_i, f_i) = 0$ ,  $d(f_i, g_i) = d(g_i, f_i)$ , y  $d(f_i, h_i) \leq d(f_i, g_i) + d(g_i, h_i)$ . Las primeras tres afirmaciones son obvias. Para ver la cuarta, basta ver que  $p(f_i, h_i) \leq p(f_i, g_i) + p(g_i, h_i)$ . Llamando  $a' = p(f_i, h_i)$ ,  $b' = p(f_i, g_i)$  y  $c' = p(g_i, h_i)$ , notamos que dado  $\epsilon > 0$  podemos tomar  $b = b' + \epsilon > b'$ ,  $c = c' + \epsilon > c'$ ; por construcción,  $f_i + b \leq g_i \implies f_i + b + c \leq g_i + c \leq h_i$ , y además  $b + c \geq b' + c' \geq 0$ , de donde  $a' \leq b + c$ . Tomando  $\epsilon \rightarrow 0$ , tenemos  $a' \leq b' + c'$ , como queríamos.

*Observación.* Hay cierta equivalencia entre estrategias crecientes  $f_i, g_i$  con  $d(f_i, g_i) = 0$ . Concretamente, si  $f_i, g_i$  son estrictamente crecientes (o sea, son crecientes y para  $x \leq x'$ ,  $x \neq x'$  tenemos  $f_i(x) = 0$  o  $f_i(x') = 1$ , como ocurre con las mejores respuestas a perfiles crecientes) y  $d(f_i, g_i) = 0$ , entonces  $f_i$  y  $g_i$ , como funciones sobre  $\mathbb{R}^{e_i}$ , deben diferir a lo sumo en un conjunto de medida cero. Esto es porque, dados  $x, x'$  con  $x'$  mayor que  $x$  en todas las coordenadas,  $f_i$  y  $g_i$  no pueden diferir en ambos. (Para ver esto, supongamos que sí difieren en  $x$  y  $x'$ .  $f_i(x) < g_i(x)$  y  $f_i(x') > g_i(x')$  implicaría que tanto  $g_i(x)$  como  $g_i(x')$  están en  $(0, 1)$ , que es absurdo; luego, sin pérdida de generalidad,  $f_i(x) < g_i(x)$  y  $f_i(x') < g_i(x')$ . Esto fuerza  $f_i(x) = 0$ ,  $g_i(x) > 0$ ,  $f_i(x') < 1$ ,  $g_i(x') = 1$ . Pero entonces  $g_i(y) = 1$  para todo  $y > x$ ; si  $\epsilon_0$  es la menor coordenada de  $x' - x$ , entonces  $g_i + \epsilon \not\leq f_i$  para  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ , y luego  $d(f_i, g_i) > 0$ ). En particular se deduce que, a lo largo de cualquier recta de dirección  $v = (1, \dots, 1)$ ,  $f_i$  y  $g_i$  pueden diferir en a lo sumo un punto, y el espacio es una colección de tales rectas. De aquí es claro que  $f_i$  y  $g_i$  difieren en un conjunto de medida cero.

Luego  $f_i$  y  $g_i$  resultan equivalentes a los efectos del juego, en el siguiente sentido: por un lado, cualquier otro jugador  $j \neq i$  está indiferente entre que  $i$  juegue  $f_i$  o  $g_i$ . (Para verlo notemos que, si pensamos  $x = (\theta_{ij})_{j \in M_i} \in \mathbb{R}^{e_i}$  como un vector aleatorio sobre el espacio de probabilidad dado por la condición  $(\theta_{jl} = a_l)_{l \in M_j}$ , esto induce una probabilidad continua sobre  $x$  con dominio  $\mathbb{R}^{e_i}$  (en caso de que  $i$  y  $j$  compartan a lo sumo un dato) o una probabilidad continua sobre  $x$  con dominio  $F = \{y \in \mathbb{R}^{e_i} / (y_l - j_k) = (a_l - a_k), l, k \in M_i \cap M_j\}$  (si  $i$  y  $j$  comparten más de un dato). Como el dominio de  $x$  es, en cualquier caso, una colección de rectas de dirección  $v$ , y  $f_i, g_i$  difieren en a lo sumo un punto sobre cada recta, la medida del conjunto donde difieren las dos estrategias es 0, y luego la probabilidad es también 0). Por otro lado se ve que, dado un perfil  $(f_j)_{j \neq i}$  de estrategias crecientes para los demás jugadores,  $f_i$  es respuesta óptima si y sólo si  $g_i$  lo es, y en ese caso,  $f_i$  y  $g_i$  solamente difieren cuando  $i$  está indiferente entre invertir o no.

Luego, podemos tomar como espacio de ‘estrategias esenciales’ el espacio  $\overline{S}_i = S_i / \sim$ , donde  $f_i \sim g_i$  si  $d(f_i, g_i) = 0$ , que es claramente una relación de equivalencia. También podemos tomar la distancia definida en el cociente como  $\bar{d}(\bar{f}_i, \bar{g}_i) = d(f_i, g_i)$  para algunos representantes  $f_i, g_i$ , y queda bien definida. Aunque formalmente trabajaremos en  $S_i$ , los resultados que probamos más abajo se pueden pensar más intuitivamente en  $\overline{S}_i$ .

Podemos extender estas nociones a perfiles de estrategias. Dado un perfil  $f \in S = \prod_{i \in \mathcal{I}} S_i$ ,  $f = (f_i)_{i \in \mathcal{I}}$  podemos definir análogamente  $f + a = (f_i + a)_{i \in \mathcal{I}}$ . Tenemos también en  $S$  el orden parcial dado por  $f \leq g$  si  $f_i \leq g_i$  para todo  $i \in \mathcal{I}$ , y decimos que  $f = (f_i)_{i \in \mathcal{I}}$  es creciente si las  $f_i$  lo son. Con estas definiciones, es claro que si  $a \geq 0$  y  $f$  es creciente entonces  $f + a \leq f$ . Además, dados perfiles  $f$  y  $g$ , podemos definir  $p(f, g) = \inf\{a \geq 0 / f + a \leq g\}$ , donde  $0 \leq p(f, g) \leq 1$  si  $f, g$  implican no invertir cuando la esperanza condicional de  $\theta$  es negativa e invertir cuando es mayor a 1. Como antes, vale que si  $a > p(f, g)$  y  $f, g$  son crecientes, entonces  $f + a \leq g$ .

Por último, podemos definir  $d(f, g) = p(f, g) + p(g, f)$ , que resulta ser una pseudométrica por los mismos argumentos; tenemos una relación de equivalencia  $\sim$  en  $S$  dada por  $f \sim g$  si  $f_i \sim g_i$  para todo  $i$ ; y  $d$  define una distancia  $\bar{d}$  en el cociente  $\overline{S} = S / \sim$  de perfiles esenciales.

Estamos en condiciones de probar la siguiente

**Proposición 11.** *Sea  $(\mathcal{I}, E)$  un grafo con  $|\mathcal{I}| = n$ ,  $\sigma > 0$  y  $\tau > 0$ . Entonces  $G_{\mathcal{I}, E}(\sigma, \tau)$  tiene esencialmente un único equilibrio de Nash. Más precisamente, si  $(f_i)_{i \in \mathcal{I}}$  es un equilibrio de Nash y  $(g_i)_{i \in \mathcal{I}}$  es un perfil de estrategias, entonces  $(g_i)_{i \in \mathcal{I}}$  es un equilibrio si y sólo si  $f_i \sim g_i$  para todo  $i \in \mathcal{I}$ . Además  $(f_i)$  es creciente y es esencialmente puro (es decir, existe un representante puro del equilibrio).*

*Más aún, todas las demás estrategias son eliminadas por EIEED. Es decir, si  $(f_i)_{i \in \mathcal{I}}$  es un equilibrio de Nash fijo y  $h_i \in S_i$ , entonces  $h_i$  sobrevive al proceso de EIEED si y sólo si  $h_i \sim f_i$ .*

*Demostración.* Probemos primero la existencia de equilibrios. Para esto, al igual que en los Capítulos 3 y 5, consideramos los perfiles  $0 = (0_i)_{i \in \mathcal{I}}$  y  $1 = (1_i)_{i \in \mathcal{I}}$  y definimos

recursivamente  $f_k = (f_{ki})_{i \in \mathcal{I}}$ ,  $g_k = (g_{ki})_{i \in \mathcal{I}}$  como perfiles de respuestas óptimas a  $f_{k-1}$  y  $g_{k-1}$  respectivamente, empezando con  $f_0 = 0$  y  $g_0 = 1$ . Es decir, si notamos por  $q(h)$  al perfil de respuestas óptimas a  $h$ , entonces la sucesión  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  está dada por  $f_0 = 0$  y  $f_k = q(f_{k-1})$ , y  $g$  se define análogamente. (Notamos que, aunque las respuestas óptimas no son únicas en general, cuando  $h$  es creciente todas las respuestas óptimas a  $h$  son equivalentes, o sea, están a distancia 0, por lo que podemos definir  $q(h)$  sin problemas en el cociente. Esto es claro porque  $v_i$  resulta estrictamente creciente para  $h$  creciente, y  $q(h)$  debe valer 1 si  $v_i > 0$  y 0 si  $v_i < 0$ . A su vez, para probar que  $v_i$  es creciente, hay que argumentar que la distribución de  $(\theta_{jl})_{l \in M_j}$  dado que  $(\theta_{ij})_{j \in M_i} = a$  domina estocásticamente a la distribución dado que  $(\theta_{ij})_{j \in M_i} = b$ , si  $a \geq b$ . Esto se deduce de forma similar a lo dicho en el Capítulo anterior).

Como  $0 \leq h \leq 1$  para cualquier perfil  $h$ , en particular  $f_0 \leq f_1$  y  $g_0 \geq g_1$ . Dado que las respuestas óptimas son crecientes en el perfil observado (o sea, si  $h \leq h'$  entonces  $q(h) \leq q(h')$ : esto es claro mirando la expresión de  $v_i$ ) la sucesión  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es creciente y la sucesión  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es decreciente. También se deduce por inducción que  $f_k \leq g_k$  para todo  $k$  (ya que  $f_0 = 0 \leq 1 = g_0$ , y  $f_{k-1} \leq g_{k-1} \implies f_k = q(f_{k-1}) \leq q(g_{k-1}) = g_k$ ).

Ahora argumentamos que los perfiles  $f = (f_i)_{i \in \mathcal{I}}$  y  $g = (g_i)_{i \in \mathcal{I}}$  dados por

$$f_i(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{f_{ki}(x)\} = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_{ki}(x)$$

$$g_i(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \{g_{ki}(x)\} = \lim_{k \rightarrow +\infty} g_{ki}(x),$$

es decir, los límites de estas sucesiones, son equilibrios de Nash del juego, lo que prueba la existencia de equilibrios. Veamos esto:

Fijemos un  $i \in \mathcal{I}$ . Dado que  $f_j \geq f_{kj}$  para todos los  $j \neq i$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , y por la monotonía de  $q$ , tenemos  $q(f)_i \geq f_{(k+1)i}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Luego, tomando supremo en el lado derecho,  $q(f)_i \geq f_i$ . Como esto vale para todo  $i$ ,  $q(f) \geq f$ . Notemos que además, como  $f$  es creciente,  $q(f)$  es respuesta óptima a un perfil creciente, y por tanto es creciente. Para probar que  $q(f) = f$  (o más precisamente, que  $q(f) \sim f$ ), falta ver que  $p(f_i, q(f)_i) = 0$  para todo  $i$ .

Probaremos esto por el absurdo: supongamos que, para algún  $i$ ,  $p(q(f)_i, f_i) = a > 0$ . Entonces  $q(f)_i + \frac{3a}{4} \not\leq f_i$ , de donde existe  $x''$  tal que  $q(f)_i(x'') > 0$  y  $f_i(x'' + \frac{3a}{4}) < 1$  (notamos  $y + b = (y_1 + b, \dots, y_{e_i} + b)$ ). Tomando  $x' = x'' + \frac{a}{8}$ , que cumple  $x' > x''$  (coordenada a coordenada) y  $x' + \frac{a}{2} = x'' + \frac{5a}{8} < x'' + \frac{3a}{4}$ , tenemos  $q(f)_i(x') = 1$  y  $f_i(x' + \frac{a}{2}) = 0$  (ya que  $q(f)_i$  y  $f_i$  son crecientes). Más aún, usando que  $q(f)_i$  es respuesta óptima a  $(f_j)_{j \neq i}$ , tenemos  $v_i(x'', (f_j)_{j \neq i}) \geq 0$  y luego  $v_i(x', (f_j)_{j \neq i}) > 0$ . A la vez, para cualquier  $k$ , como  $f_{(k+1)i} \leq f_i$ ,  $f_{(k+1)i}(x'' + \frac{3a}{4}) < 1$ , de donde  $v_i(x'' + \frac{3a}{4}, (f_{kj})_{j \neq i}) \leq 0$  y luego  $f_{(k+1)i}(x' + \frac{a}{2}) = 0$  y  $v_i(x' + \frac{a}{2}, (f_{kj})_{j \neq i}) < 0$ .

Ahora argumentamos que

$$v_i \left( x' + \frac{a}{2}, (f_{kj})_{j \neq i} \right) \nearrow v_i \left( x' + \frac{a}{2}, (f_j)_{j \neq i} \right)$$

por el teorema de convergencia monótona, de donde  $v_i(x' + \frac{a}{2}, (f_j)_{j \neq i}) \leq 0$ . Pero  $v_i(x', (f_j)_{j \neq i}) > 0$ , contradicción. Esto prueba que  $p(q(f)_i, f_i) = 0$  y, dado que  $f_i \leq$

$q(f)_i$ , ya sabíamos que  $p(f_i, q(f)_i) = 0$ , de donde  $f_i \sim q(f)_i$ . Entonces  $f$  es un equilibrio de Nash, como queríamos. Análogamente  $g$  es también un equilibrio. Además, por construcción,  $f$  y  $g$  son estrictamente crecientes.

Veamos ahora la unicidad. Para ello notemos que, si  $h$  es un equilibrio, entonces por definición  $q(h) = h$ ; dado que  $0 \leq h \leq 1$ , y usando la monotonía de  $q$ , se obtiene que  $f_k \leq h \leq g_k$  para todo  $k$ ; pasando al límite,  $f = \sup f_k \leq h \leq \inf g_k = g$ . En otras palabras, para ver la unicidad basta ver que  $f \sim g$ , ya que entonces se deduce de que  $p(h, f) = p(g, h) = 0$  (por ser  $f \leq h \leq g$ ) y de que  $p(h, g) \leq p(f, g) = 0$ ,  $p(f, h) \leq p(f, g) = 0$  que  $d(f, h) = d(h, g) = 0$  y luego  $f \sim h \sim g$ .

Para probar que  $f \sim g$  supongamos lo contrario, es decir, supongamos que  $d(f, g) > 0$ . Dado que  $f \leq g$ , tenemos  $p(f, g) = 0$ , por lo que esto implica  $p(g, f) > 0$ . Llamemos  $p(g, f) = d(f, g) = a^*$ , con  $0 < a^* \leq 1$ . Notamos que debe existir  $i \in \mathcal{I}$  tal que  $p(g_i, f_i) = d(f_i, g_i) = a^*$ .

Sea  $\epsilon > 0$  y consideremos  $g + a^* + \epsilon \leq f$ . Dado que  $g_i + a^* + \epsilon - 2\epsilon \not\leq f_i$ , existe  $x_\epsilon \in \mathbb{R}^{e_i}$  tal que  $(g + a^* + \epsilon - 2\epsilon)_i(x_\epsilon) > f_i(x_\epsilon) \Leftrightarrow (g + a^* + \epsilon)_i(x_\epsilon + 2\epsilon) > f_i(x_\epsilon)$ . Luego, en particular,  $(g + a^* + \epsilon)_i(x_\epsilon + 2\epsilon) > 0$  y  $f_i(x_\epsilon) < 1$ .

De lo segundo, se deduce  $v_i(x_\epsilon, (f_j)_{j \neq i}) \leq 0$ . De lo primero, que podemos reescribir como  $g_i(x_\epsilon + \epsilon - a^*) > f_i(x_\epsilon)$  y  $g_i(x_\epsilon + \epsilon - a^*) > 0$ , se deduce  $v_i(x_\epsilon + \epsilon - a^*, (g_j)_{j \neq i}) \geq 0$ . Usando que la distribución de  $\theta$  es uniforme en  $\mathbb{R}$ , tenemos

$$v_i(x_\epsilon + 2\epsilon, (g_j + a^* + \epsilon)_{j \neq i}) = v_i(x_\epsilon + \epsilon - a^*, (g_j)_{j \neq i}) + a^* + \epsilon \geq a^* + \epsilon \geq a^*.$$

Ahora bien, dado que  $g + a^* + \epsilon \leq f$ ,

$$a^* \leq v_i(x_\epsilon + 2\epsilon, (g_j + a^* + \epsilon)_{j \neq i}) \leq v_i(x_\epsilon + 2\epsilon, (f_j)_{j \neq i}).$$

Dado que  $v_i(x_\epsilon, (f_j)_{j \neq i}) \leq 0$ , tenemos que

$$a^* \leq v_i(x_\epsilon + 2\epsilon, (f_j)_{j \neq i}) - v_i(x_\epsilon, (f_j)_{j \neq i}).$$

Esto debe valer para todo  $\epsilon > 0$ . Ahora bien

$$\begin{aligned} v_i(x_\epsilon + 2\epsilon, (f_j)_{j \neq i}) - v_i(x_\epsilon, (f_j)_{j \neq i}) &= \overline{x_\epsilon + 2\epsilon} - 1 + E(l|x_\epsilon + 2\epsilon) - \overline{x_\epsilon} + 1 - E(l|x_\epsilon) \\ &= \overline{x_\epsilon} + 2\epsilon - 1 + E(l|x_\epsilon + 2\epsilon) - \overline{x_\epsilon} + 1 - E(l|x_\epsilon) \\ &= 2\epsilon + \sum_{j \neq i} \frac{E(f_j((\theta_{jl})_{l \in M_j})|x_\epsilon + 2\epsilon)}{n-1} - \frac{E(f_j((\theta_{jl})_{l \in M_j})|x_\epsilon)}{n-1} \\ &= 2\epsilon + \sum_{j \neq i} \frac{E(f_j((\theta_{jl})_{l \in M_j})|x_\epsilon + 2\epsilon) - E(f_j((\theta_{jl})_{l \in M_j})|x_\epsilon)}{n-1}. \end{aligned}$$

Argumentamos que esta expresión tiende a 0 cuando  $\epsilon$  tiende a 0, por lo que no puede ser siempre mayor a  $a^*$ . Esto terminará la demostración.

Está claro que  $2\epsilon$  tiende a 0. Lo menos trivial es probar que, para cada  $j \neq i$ ,

$$E(f_j((\theta_{jl})_{l \in M_j})|x_\epsilon + 2\epsilon) - E(f_j((\theta_{jl})_{l \in M_j})|x_\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0. \quad (*)$$

Para hacer esto, notemos que

$$\begin{aligned}
& E(f_j ((\theta_{jl})_{l \in M_j}) | x_\epsilon + 2\epsilon) - E(f_j ((\theta_{jl})_{l \in M_j}) | x_\epsilon) = \\
& E(f_j ((\theta_{jl} + 2\epsilon)_{l \in M_j}) | x_\epsilon) - E(f_j ((\theta_{jl})_{l \in M_j}) | x_\epsilon) = \\
& E((f - 2\epsilon)_j ((\theta_{jl})_{l \in M_j}) | x_\epsilon) - E(f_j ((\theta_{jl})_{l \in M_j}) | x_\epsilon) = \\
& E((f - 2\epsilon)_j ((\theta_{jl})_{l \in M_j}) - f_j ((\theta_{jl})_{l \in M_j}) | x_\epsilon) = \\
& E(((f - 2\epsilon)_j - f_j) ((\theta_{jl})_{l \in M_j}) | x_\epsilon).
\end{aligned}$$

En la primera igualdad, estamos usando que la distribución condicional de  $(\theta_{jl})_{l \in M_j}$  aumenta en  $2\epsilon$  si aumentamos todos los datos observados en  $2\epsilon$ . Esto se puede probar a mano, y esencialmente es una consecuencia de que  $\theta$  tenga distribución uniforme sobre  $\mathbb{R}$ .

Ahora bien, la presencia de  $\delta_j$ , con un desvío fijo  $\tau > 0$ , en la expresión de los  $\theta_{jl}$  resulta en que la distribución de éstos condicional a  $x_\epsilon$  sea siempre un poco difusa. Luego, a medida que  $\epsilon$  tiende a 0 (y, eventualmente, se hace mucho más chico que  $\tau$ ), la probabilidad de que el vector  $(\theta_{jl})_{l \in M_j}$  caiga en la franja donde  $(f - 2\epsilon)_j - f_j$  es no nula tiende a 0 porque el ancho de dicha franja tiende a 0. Concretamente,

$$\begin{aligned}
((\theta_{jl})_{l \in M_j}) | x_\epsilon &= ((\theta_l + \delta_j)_{l \in M_j} | x_\epsilon) \\
&= ((\theta_l)_{l \in M_j} | x_\epsilon) + ((\delta_j)_{l \in M_j} | x_\epsilon),
\end{aligned}$$

donde  $\delta_j$  es independiente de  $\theta$ , de todos los  $\epsilon_j$  y de  $\delta_i$ , y luego  $\delta_j | x_\epsilon$  tiene distribución normal  $N(0, \tau^2)$  independiente de  $((\theta_{jl})_{l \in M_j}) | x_\epsilon$ . (Intuitivamente, conocer los valores de los  $\theta_{ik}$  para  $k \in M_i$  no da ninguna información sobre  $\delta_j$ ). Luego

$$\begin{aligned}
& E(((f - 2\epsilon)_j - f_j) ((\theta_{jl})_{l \in M_j}) | x_\epsilon) = \\
& E(E [((f - 2\epsilon)_j - f_j) ((\theta_{jl})_{l \in M_j}) | (\theta_l)_{l \in M_j}, x_\epsilon] | x_\epsilon) = \\
& E(E [((f - 2\epsilon)_j - f_j) ((\theta_l + \delta_j)_{l \in M_j}) | (\theta_l)_{l \in M_j}, x_\epsilon] | x_\epsilon). \tag{**}
\end{aligned}$$

Entonces alcanzará probar que, dado  $\rho > 0$ , existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que, si  $\epsilon < \epsilon_0$ ,

$$E(((f - 2\epsilon)_j - f_j) ((\theta_l + \delta_j)_{l \in M_j}) | (\theta_l)_{l \in M_j} = (a_l)_{l \in M_j}, x_\epsilon) < \rho$$

para todo  $a = (a_l)_{l \in M_j} \in \mathbb{R}^{\epsilon_j}$ . (Esto implicará que la doble esperanza condicional en (\*\*) es también menor a  $\rho$ , ya que es la esperanza condicional de una variable aleatoria siempre menor a  $\rho$ ; y como además es claramente mayor o igual a 0, vale (\*)). Ahora bien

$$\begin{aligned}
& E(((f - 2\epsilon)_j - f_j) ((\theta_l + \delta_j)_{l \in M_j}) | (\theta_l)_{l \in M_j} = (a_l)_{l \in M_j}, x_\epsilon) = \\
& E(((f - 2\epsilon)_j - f_j) ((a_l + \delta_j)_{l \in M_j}) | (\theta_l)_{l \in M_j} = (a_l)_{l \in M_j}, (\theta_{ij})_{j \in M_i} = x_\epsilon) = \\
& E(((f - 2\epsilon)_j - f_j) ((a_l + \delta_j)_{l \in M_j})),
\end{aligned}$$

ya que  $\delta_j$  es independiente de  $(\theta_l)_{l \in M_j}$  y de  $(\theta_{ij})_{j \in M_i}$  y  $a$  es constante. Llamemos  $((f - 2\epsilon)_j - f_j)((a_l + t)_{l \in M_j}) = p(t)$ , para  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$E(((f - 2\epsilon)_j - f_j)((a_l + \delta_j)_{l \in M_j})) = E(p(\delta_j)).$$

Por último observemos que, por construcción,  $p$  vale 0 fuera de un intervalo de longitud  $2\epsilon$ , y 1 en el interior de dicho intervalo, y recordemos que  $\delta_j$  tiene distribución  $N(0, \tau^2)$ . Luego  $E(p(\delta_j)) \leq P(-\frac{\epsilon}{\tau} < z < \frac{\epsilon}{\tau})$ , para  $z$  una variable de distribución  $N(0, 1)$ . Eligiendo  $\epsilon$  suficientemente chico esto resulta menor a  $\rho$  independientemente de  $a$ , lo que prueba la unicidad.

Que el equilibrio es esencialmente creciente y puro se deduce de que  $f$  y  $g$  son estrictamente crecientes, por lo que existe un representante  $h \sim f \sim g$  puro.

Por último notamos que, si  $h_i$  es una estrategia para  $i$  que sobrevive  $k$  pasos de EIEED, entonces (por argumentos similares a los del Capítulo anterior) debe valer  $f_{ki} \leq h_i \leq g_{ki}$ . Tomando supremo del lado izquierdo e ínfimo del lado derecho, tenemos  $f_i \leq h_i \leq g_i$ ; como  $f_i \sim g_i$ , esto implica  $f_i \sim h_i \sim g_i$ .  $\square$

*Observación.* Además de ser esencialmente único, creciente y puro, el equilibrio es simétrico alrededor de 0 y 1. Más precisamente, si  $f$  es un equilibrio de Nash del juego y llamamos  $g = (g_i)_{i \in \mathcal{I}}$  al perfil dado por  $g_i(x_1, \dots, x_{e_i}) = 1 - f_i(1 - x_1, \dots, 1 - x_{e_i})$ , entonces  $g$  también es un equilibrio de Nash (esto es claro por la simetría del modelo) y por lo tanto  $g \sim f$ . En particular, si  $x \in \mathbb{R}^{e_i}$  cumple  $x_k < 0,5$  para todo  $k$ , entonces  $f_i(x) = 0$ , y si  $x_k > 0,5$  para todo  $k$ , entonces  $f_i(x) = 1$ .

Además, el equilibrio varía de forma continua al variar el valor de  $\tau$ . Es decir

**Proposición 12.** *Sea  $(\mathcal{I}, E)$  un grafo con  $|\mathcal{I}| = n$ ,  $\sigma > 0$  y  $\tau > 0$ . Tomemos  $(\mathcal{I}, E)$  y  $\sigma$  como fijos. Entonces  $F : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow S$  dada por  $F(\tau) = f$ , con  $f$  un equilibrio de Nash de  $G_{\mathcal{I}, E}(\sigma, \tau)$ , es continua en el siguiente sentido: para todo  $\tau > 0$  y todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que, si  $\tau' > 0$  es tal que  $|\tau - \tau'| < \delta$ , entonces  $d(F(\tau), F(\tau')) < \epsilon$ .*

*Demostración.* Alcanza probar que para todo  $\tau > 0$  y todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que, si  $\tau' > 0$  es tal que  $|\tau - \tau'| < \delta$ , entonces  $p(F(\tau), F(\tau')) < \epsilon$  (el resultado para  $p(F(\tau'), F(\tau))$  se prueba análogamente). Para ver esto, tomemos un  $\epsilon_0$  fijo, y un  $\tau_0$  fijo, y llamemos  $\frac{\epsilon_0}{2} = a$ ,  $f = F(\tau_0)$ ,  $g = F(\tau_0) + a = f + a$ .

Por la definición de  $f$  sabemos que, para todo  $i \in \mathcal{I}$ , si  $f_i(x) > 0$  ( $x \in \mathbb{R}^{e_i}$ ) entonces  $v_i(x, (f_j)_{j \neq i}) \geq 0$ . Luego, usando nuevamente que  $\theta$  es uniforme en  $\mathbb{R}$ ,

$$v_i(x + a, (g_j)_{j \neq i}, \tau_0) = v_i(x, (f_j)_{j \neq i}, \tau_0) + a \geq a.$$

En otras palabras, si  $g_i(y) > 0$  entonces  $v_i(y, (g_j)_{j \neq i}, \tau_0) \geq a$ . Aclaremos que  $v_i$  es función de  $\tau$  (y aquí la estamos evaluando en  $\tau_0$ ) en el sentido de que  $\tau$  determina el desvío de los  $\delta_j$  y, por esa vía, la distribución condicional de los  $\theta_{jl}$ . Más precisamente

$$v_i(y, (g_j)_{j \neq i}, \tau) = \bar{y} - 1 + \sum_{j \neq i} \frac{E_{\tau_0}(g_j((\theta_{jl})_{l \in M_j}) | y)}{n - 1},$$

donde  $\tau$  determina la distribución de  $((\theta_{jl})_{l \in M_j})|y$ . Ahora argumentamos que para cada  $j \neq i$  y  $\epsilon' > 0$  existe  $\delta' > 0$  independiente de  $y$  tal que, si  $|\tau_0 - \tau'| < \delta'$ , entonces

$$|E_{\tau_0}(g_j((\theta_{jl})_{l \in M_j})|y) - E_{\tau'}(g_j((\theta_{jl})_{l \in M_j})|y)| < \epsilon'.$$

Esto vale porque, dado que  $g_j$  siempre toma valores entre 0 y 1,

$$|E_{\tau_0}(g_j((\theta_{jl})_{l \in M_j})|y) - E_{\tau'}(g_j((\theta_{jl})_{l \in M_j})|y)| \leq |P_{\tau_0}(\cdot|y) - P_{\tau'}(\cdot|y)|(\Omega),$$

donde  $\Omega$  es el espacio de probabilidad en el que trabajamos y  $P_\tau(\cdot|y)$  es la probabilidad condicional que resulta de observar  $(\theta_{ij})_{j \in M_i} = y$  cuando el desvío de los  $\delta_j$  es  $\tau$ . A su vez, dado  $\epsilon' > 0$  existe  $\delta' > 0$  (independiente de  $y$ ) tal que, si  $|\tau_0 - \tau'| < \delta'$ , entonces  $|P_{\tau_0}(\cdot|y) - P_{\tau'}(\cdot|y)|(\Omega) < \epsilon'$ : esto se puede probar a mano escribiendo las distribuciones condicionales de las variables con las que armamos nuestro espacio de probabilidad, pero omitimos los detalles porque son muy engorrosos.

Usando esto para  $\epsilon' = a$  y para cada  $j$ , existe  $\delta^i > 0$  (que tomamos como el mínimo de los  $\delta'$  que necesitamos arriba para cada  $j$ ) independiente de  $y$  tal que, si  $|\tau_0 - \tau'| < \delta^i$ , entonces

$$|E_{\tau_0}(g_j((\theta_{jl})_{l \in M_j})|y) - E_{\tau'}(g_j((\theta_{jl})_{l \in M_j})|y)| < a$$

para todo  $j$ , de donde

$$|v_i(y, (g_j)_{j \neq i}, \tau_0) - v_i(y, (g_j)_{j \neq i}, \tau')| < a$$

y luego  $v_i(y, (g_j)_{j \neq i}, \tau') > 0$ . Esto vale para todo  $y$  tal que  $g_i(y) > 0$  y para todo  $\tau'$  con  $|\tau_0 - \tau'| < \delta^i$ , y significa que si  $i$  cree que los demás jugadores elegirán las estrategias  $g_j$  y el desvío de los  $\delta_j$  es  $\tau'$ , entonces siempre que  $g_i(y) > 0$  invertir es la acción óptima. Luego, tomando  $\delta$  como el mínimo de los  $\delta^i$  que resultan para cada  $i$ , para todo  $\tau'$  con  $|\tau_0 - \tau'| < \delta$   $g$  cumple que, si todos los jugadores creen que se está jugando el perfil  $g$ , entonces siempre que el perfil indica invertir con probabilidad positiva es efectivamente óptimo invertir.

Sea entonces un  $\tau'$  con  $|\tau_0 - \tau'| < \delta$ . Consideremos la sucesión de perfiles de estrategias  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  dada por  $h_0 = g$  y  $h_{k+1} = q(h_k)$ . Por lo dicho arriba,  $h_1 = q(g) \geq g = h_0$ . Luego, por la monotonía de  $q$ , tendremos  $h_{k+1} \geq h_k$  para todo  $k$ . Entonces  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  converge de forma creciente a un perfil de estrategias  $h$ , que podemos probar (análogamente a como lo hicimos en la demostración de existencia de la Proposición 11) que es un equilibrio de Nash para el juego que estamos considerando,  $G_{\mathcal{J}, E}(\sigma, \tau')$ . Pero entonces  $h = F(\tau')$  (en realidad son equivalentes, pero esto no nos preocupa). Y al mismo tiempo  $h \geq g = f + a$ , es decir,  $f + a \leq h$ , de donde

$$p(F(\tau_0), F(\tau')) = p(f, h) \leq a < \epsilon_0,$$

como queríamos. □

*Observación.* En realidad, con argumentos similares se puede probar que  $F : \mathbb{R}_{>0}^2 \longrightarrow S$  dada por  $F(\sigma, \tau) = f$ , con  $f$  un equilibrio de Nash para  $G_{\mathcal{J}, E}(\sigma, \tau)$ , es continua como función saliendo de  $\mathbb{R}^2$ , es decir, en ambas variables.

## 6.4. Formulaciones alternativas y ejemplos

### Otra estructura de ruidos de segundo orden

Una formulación alternativa del modelo anterior consiste en tomar  $\theta_{ij} = \theta + \epsilon_j + \delta_{ij}$  en vez de  $\theta_{ij} = \theta + \epsilon_j + \delta_i$ ; es decir, el dato original de  $j$ , observado por  $i$ , es ‘ensuciado’ no por un mismo error que sesga de igual forma toda la información recibida por  $i$ , sino por un error propio de la conexión entre  $i$  y  $j$ . (Por supuesto, suponemos que todos los  $\epsilon_j$  y los  $\delta_{ij}$  son independientes, con desvíos  $\sigma > 0$  y  $\tau > 0$ ). En este caso resulta más natural tomar  $\delta_{ii} = 0$ , aunque también podemos no hacerlo. De cualquier forma, valen versiones análogas de las Proposiciones 11 y 12; la única diferencia en la demostración es que cambia la forma en que se prueba que  $E(((f - 2\epsilon)_j - f_j) ((\theta_{jl})_{l \in M_j}) | x_\epsilon)$  tiende a 0 cuando  $\epsilon$  tiende a 0.

### Desvíos heterogéneos

A pesar de que siempre supusimos que todos los  $\epsilon_j$  y los  $\delta_i$  (o, con la formulación de arriba, los  $\delta_{ij}$ ) tenían desvíos iguales a  $\sigma$  y  $\tau$  respectivamente, versiones análogas de las Proposiciones 11 y 12 valen suponiendo que los desvíos son  $\sigma_j$  y  $\tau_i$  (o  $\tau_{ij}$ ) respectivamente. Además de que cambian los detalles técnicos al final de ambas demostraciones, en caso de ser heterogéneos los desvíos, los promedios que calculan los jugadores sobre sus datos para estimar  $\theta$  pasan a quedar ponderados por la precisión de los datos, es decir,

$$E(\theta | (\theta_{ij})_{j \in M_i}) = \sum_{j \in M_i} \frac{1}{\sigma_j^2 + \tau_i^2} \frac{1}{\sum_{l \in M_i} \frac{1}{\sigma_l^2 + \tau_i^2}} \theta_{ij}.$$

### Grafos dirigidos

Aunque planteamos el modelo pensando en grafos no dirigidos, las Proposiciones 11 y 12 se prueban de la misma forma si estamos trabajando con un grafo dirigido. Tomar grafos dirigidos puede tener sentido cuando hay jugadores que comunican su información con muchos otros pero a través de un medio impersonal que no permite que reciban información de todos sus oyentes, como sería el caso de un político hablando en televisión.

### Ejemplo: unión de subgrafos completos

Dijimos en el Capítulo 5 que, en el modelo sin errores de segundo orden, los grafos formados como unión disjunta de subgrafos completos tenían múltiples equilibrios (aunque estaban todos relativamente cerca), pero que uno de ellos era especialmente creíble: el equilibrio donde los jugadores invierten si el promedio de los datos observados es mayor a 0,5 y no invierten si es menor. (En rigor, estamos ignorando lo que ocurre justo en 0,5; hay varias posibilidades).

El modelo de este Capítulo da una idea concreta de que dicho equilibrio sea el más creíble: al introducir los  $\delta_i$  resulta que hay esencialmente un único equilibrio, que es el que acabamos de describir, para todo  $\tau > 0$ . Esto se puede demostrar afinando el argumento que usamos para probar la Proposición 8: ahí acotábamos el comportamiento de los jugadores en la 2-vecindad de  $i$  (que, en este caso, sería el subgrafo completo al que pertenece  $i$ ) sin poder decir nada preciso, porque el hecho de que compartieran información perfectamente les permitía coordinarse y así sostener distintos equilibrios. En este modelo, en cambio, la presencia de los  $\delta_i$  tiene el efecto de desacoplar el comportamiento de los jugadores de un mismo subgrafo completo; introduce algo de incertidumbre sobre lo que observan (y, por tanto, hacen) los demás jugadores del propio subgrafo. Concretamente, cuando  $i$  observa datos con promedio  $a$ , la probabilidad de que un  $j$  en su subgrafo observe datos con promedio mayor o igual a  $a$  ya no es 1 sino  $\frac{1}{2}$ . Esto permite ajustar las cuentas y poner  $a^* = a'^* = \frac{1}{2}$ .

### Ejemplo: grafos con 2-vecindades pequeñas

En el modelo con errores de segundo orden, dado un grafo cualquiera, podemos probar –con el mismo argumento que en la Proposición 8– que todo equilibrio  $f = (f_i)_{i \in \mathcal{I}}$  cumple  $t_i \leq f_i \leq s_i$  para todo  $i \in \mathcal{I}$ , sin importar el valor de  $\tau > 0$ . Es decir, vale la misma cota sobre los equilibrios del juego que en el Capítulo 5. La diferencia en este modelo es que, en realidad, hay un único equilibrio (salvo diferencias de distancia 0), que en particular cumple esta cota.

### Ejemplo: estrella

En el caso de la estrella, la introducción de los  $\delta_i$  hace que distintos jugadores observen de forma diferente el dato público  $c$ . Luego, aunque  $i$  observe  $c$ , sabe que  $j$  puede observar  $c'$ , y entonces resulta relevante la estrategia de  $j$  cuando el dato público es  $c'$ . En otras palabras, ya no podemos pensar  $G$  como una colección de juegos separados  $G_c$ . Sin embargo, si  $\tau$  es chico,  $c'$  debería estar cerca de  $c$  con probabilidad alta, por lo que esperamos que el comportamiento de este modelo se parezca al del Capítulo 5 en algún sentido.

Tal como hicimos en el Capítulo 5, podemos pensar el equilibrio del juego (que ahora será único) como parametrizado por una función  $a(c) = a_{\sigma, \tau}(c)$ . Además, como el equilibrio debe ser simétrico y creciente,  $a(c)$  debe ser simétrica ( $a(1-c) = 1-a(c)$ ) y decreciente. Nos preguntamos en qué se parece este equilibrio a los del juego original. Se ve que, para  $\tau > 0$ ,  $a(c)$  no coincidirá en general con las funciones  $a_i(c)$  que resultan en el modelo original: informalmente, basta pensar en un  $\tau$  muy grande, que hará que la probabilidad condicional de que los demás jugadores inviertan sea cercana a 0,5 casi sin importar lo que observe  $i$ , con lo que la estrategia óptima será algo parecido a invertir si y sólo si  $\frac{a+c}{2} > 0,5$ .

Sin embargo, resulta que  $a_{\sigma, \tau}(c)$  converge a  $a_{\sigma}(c)$  cuando  $\tau \rightarrow 0$ , en el siguiente sentido: en 0,5 siempre coinciden, y para todo  $\delta > 0$ ,  $(a_{\sigma, \tau} - a_{\sigma})|_{\mathbb{R} - (\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta)}$  tiende a

0 en norma infinito. Lo primero es obvio. Bosquejamos un argumento para probar lo segundo: sea  $f$  el equilibrio para el juego sin errores de segundo orden  $G$ , dado por el umbral  $a_\sigma$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Entonces  $f + \epsilon$  y  $f - \epsilon$  pagan  $\epsilon$  y  $-\epsilon$  por invertir sobre los umbrales  $a_\sigma + \epsilon$  y  $a_\sigma - \epsilon$ , respectivamente, en  $G$ . (Esta es la misma idea de la Proposición 12). Luego, para  $\tau$  suficientemente chico,  $f + \epsilon$  y  $f - \epsilon$  pagan positivo y negativo, respectivamente, por invertir sobre dichos umbrales en el juego  $G_\tau$ . (Este es el punto sensible: para probarlo hay que usar que, lejos de 0,5, la función  $a_\sigma$  tiene derivada acotada; luego, si los demás jugadores observan un  $c$  apenas diferente, su umbral para invertir cambiará poco y por tanto la probabilidad de que inviertan cambiará poco, en particular menos de  $\epsilon$ , con respecto al caso en el que observan todos el mismo  $c$ ). Luego, como en la Proposición 12, podemos construir sucesiones monótonas de perfiles, comenzando en  $f + \epsilon$  y  $f - \epsilon$ , que convergen al equilibrio  $f_\tau$  de  $G_\tau$ , de donde  $f + \epsilon \leq f_\tau \leq f - \epsilon$ . La convergencia en norma infinito lejos de 0,5 puede probarse con algunas cuentas más a partir de esto.

## Información con varios saltos

Como dijimos en el Capítulo 5, el hecho de que la información se pueda comunicar a amigos, pero no indirectamente a amigos de amigos, resulta poco realista y hace relativamente poco uso de la estructura de red del juego; de esa propiedad del modelo se desprendía que, en caso de que las 2-vecindades del grafo fueran pequeñas, el juego se parecía en algún sentido al del Capítulo 3, en el sentido de que la difusión de información resultaba insignificante.

Si bien esperamos que un grafo poco conectado presente baja difusión de información, la importancia de las 2-vecindades resulta del mecanismo artificial de difusión que propusimos por simplicidad. Resulta más natural un modelo en el que la información pueda ‘dar varios saltos’.

Por ejemplo, dado un grafo  $(\mathcal{I}, E)$ , podemos querer que el dato de cada jugador dé  $k$  saltos, es decir, que sea observado por todos las personas en su  $k$ -vecindad además de él mismo. Si usamos la estructura original para los  $\delta_i$ , es decir, si elegimos que sólo dependan del receptor (lo que significa que el receptor percibe la información sesgadamente, pero que ésta no se deteriora por la transmisión), esto se puede acomodar de forma inmediata en el modelo que ya tenemos, cambiando el grafo  $(\mathcal{I}, E)$  por otro  $(\mathcal{I}, E^k)$  donde dos personas están conectadas por una arista si y sólo si su distancia en el grafo original es a lo sumo  $k$ . Incluso funciona del mismo modo si queremos que la información del jugador  $i$  dé  $k_i$  pasos con  $k_i \geq 0$ , i.e., permitiendo diferentes longitudes de salto para distintos jugadores.

Si queremos que la información se deteriore con la transmisión, el modelo que resulta no es completamente análogo porque los datos que han dado varios saltos deben sumar varios  $\delta_{ij}$ , y no queda claro cómo modelar el hecho de que un jugador puede recibir el mismo dato por dos caminos diferentes (con dos ruidos diferentes). Sin embargo, si elegimos una forma simple de solucionar este problema (por ejemplo, determinando arbitrariamente para cada par de vértices el camino de menor longitud entre ellos que

funciona como predominante), se pueden probar versiones análogas de las Proposiciones 11 y 12 con pequeños cambios en los detalles.

## Información con saltos aleatorios

De todas formas, todas las extensiones que acabamos de describir resultan también algo irreales, porque estamos fijando de antemano la cantidad de veces que salta cada dato. Sería más realista suponer que cada dato empieza en un jugador y luego tiene una probabilidad  $p$  de ser difundido a sus vecinos, y de ahí nuevamente tiene probabilidad  $p$  de ser difundido a los vecinos de éstos, y así sucesivamente. Aunque este proceso de difusión es aleatorio, una vez que ha terminado producirá una estructura de saltos que podríamos haber modelado determinísticamente con un algún conjunto de aristas fijo  $E$ , como describimos en el apartado anterior; entonces, ¿qué cambia? La diferencia fundamental es que la estructura de difusión resultante es conocida sólo localmente por los jugadores, con lo que cada persona no sabrá, en general, cuánta gente ha recibido cada uno de los datos que le han llegado.

Como siempre, hay muchas formas de modelar los detalles; elegimos una sencilla. Sea  $(\mathcal{J}, E)$  una red fija con  $n$  jugadores, que es de conocimiento público. (Esto tampoco es realista, ya que si una red tiene un millón de nodos no tiene sentido pensar que cada jugador conoce su estructura; pero trabajamos con una red fija ya que, si la hiciéramos aleatoria y conocida sólo localmente por los jugadores, deberíamos fijar un proceso aleatorio para generarla, y no hay un proceso en particular que sea más convincente que cualquier otro en términos de generar redes verosímiles).

Sean  $\theta$  distribuida uniformemente sobre  $\mathbb{R}$  y  $(\epsilon_j)_{j \in \mathcal{J}}$ ,  $(\delta_i)_{i \in \mathcal{J}}$  variables aleatorias con distribución  $N(0, \sigma^2)$  y  $N(0, \tau^2)$  respectivamente, todas independientes entre sí y de  $\theta$ . Llamamos  $\theta_j = \theta + \epsilon_j$  al dato  $j$  y  $\theta_{ij} = \theta + \epsilon_j + \delta_i$  al dato  $j$  observado por  $i$  (estamos suponiendo que los errores de segundo orden dependen del receptor pero no de las aristas).

Sea además una variable  $X$ , independiente de las anteriores, que elige cada permutación  $\alpha \in S_n$  con probabilidad  $\frac{1}{n!}$ . Entonces cada jugador  $i$  recibe inicialmente el dato  $\theta_{\alpha(i)}$ .

En cuanto al proceso de difusión de información suponemos que, para cada dato que recibe un jugador (ya sea el suyo propio o uno que otro jugador le pasa), puede transmitirlo a todos sus amigos o a ninguno. Un caso real donde este supuesto tiene sentido es, por ejemplo, si la red es una red de amistades en un sitio como Facebook o Twitter, y un jugador que tiene en sus manos un dato puede *postearlo* en su muro, en cuyo caso lo ven todos sus amigos. (También podríamos suponer que el jugador puede elegir a quiénes transmitir el dato, sin grandes cambios en lo que sigue). Entonces, para cada dato  $\theta_j$ , existe un proceso de percolación con probabilidad  $p$  y origen en  $i$ . En otras palabras, tenemos  $(X_{ij})_{i \in \mathcal{J}, j \in \mathcal{J}}$  variables aleatorias con distribución Bernoulli de parámetro  $p$ , todas independientes (y también independientes de las variables definidas antes) que determinan si  $i$  comparte el dato  $j$  en caso de recibirlo o no; y decimos que el dato  $\theta_j$  llega a  $k$  si existe un camino  $i_0 i_1 \dots i_m$  con  $i_0 = i$ ,  $i_m = k$ ,  $i_l i_{l+1} \in E$  para

$l = 0, \dots, m - 1$ ,  $\alpha(i) = j$  y  $X_{ij} = 1$  para  $l = 0, \dots, m - 1$ .

Luego, un jugador  $i$  observa lo siguiente:

- su propio dato,  $\theta_{\alpha(i)}$ , sesgado por su error de percepción (es decir, lo observa como  $\theta_{i\alpha(i)}$ );
- los demás datos  $j$  que lleguen a  $i$ , sesgados por el error de percepción de  $i$  (es decir, observa  $\theta_{ij}$ );
- de los datos que tiene, sabe cuáles comparte y cuáles no;
- para cada amigo  $j$  sabe qué datos comparte  $j$ , aunque no sabe si alguno de ellos es el dato original de  $j$  o no, y para los datos  $k$  que  $j$  no comparte, no sabe si es porque la  $X_{jk}$  relevante vale 0 o porque  $j$  no recibe el dato  $k$ .

Aclaremos que, cuando alguien observa un dato, sabe cuál es su índice, pero el índice de un dato no está relacionado con el jugador que lo recibe como dato original: esta es la función de la variable  $X$ . En otras palabras, cuando se recibe un dato, no se sabe en qué jugador se originó (pero los índices sí sirven para darse cuenta si dos piezas de información recibidas por distintos caminos son el mismo dato o no). Podemos codificar la información observada por  $i$  de la siguiente manera: para cada amigo  $j$  observa un conjunto  $K_j \subseteq \{1, \dots, n\}$  de datos que  $j$  comparte; también observa qué datos comparte él mismo, o sea, observa  $K_i$ ; y, llamando  $L_i = \{\alpha(i)\} \cup \bigcup_{j \in N_i} K_j$ , observa los valores de  $\theta_{ij}$  para  $j \in L_i$ . Luego  $i$  observa  $(\alpha(i), (K_j)_{j \in M_i}, (\theta_{ij})_{j \in L_i})$ . Llamamos  $\mathcal{A}_i$  al conjunto de posibles valores de  $(\alpha(i), (K_j)_{j \in M_i})$  y  $l_i = |L_i|$ . Entonces una estrategia  $f_i$  es una función  $f_i : \prod_{A_i \in \mathcal{A}_i} (A, \mathbb{R}^{l_i}) \rightarrow [0, 1]$ , o sea, una colección de funciones  $\mathbb{R}^{l_i} \rightarrow [0, 1]$ , una para cada  $A_i \in \mathcal{A}_i$ . (Como antes, un valor entre 0 y 1 representa una acción mixta para cierto  $A_i$  y valores de  $(\theta_{ij})$ ; además, aclaramos que  $L_i$  y por tanto  $l_i$  son funciones de  $A_i$ ).

Notamos que el vector  $(X, (X_{ij}))$  tiene una cantidad finita de valores posibles, cada uno con probabilidad positiva, que en general es  $\frac{1}{n!} p^a (1-p)^b$ , donde  $a$  es la cantidad de unos en  $(X_{ij})$  y  $b$  es la cantidad de ceros. Podemos definir para cada  $i$  una función  $O_i$  que mande cada valor posible de  $(X, (X_{jk}))$  al  $A_i$  correspondiente (es decir,  $O_i$  indica qué información observa  $i$  sobre el proceso de difusión para cada realización posible del proceso). Una vez que  $i$  observa  $A_i \in \mathcal{A}_i$ , esto define una distribución para  $(X, (X_{jk}))$  condicional a que  $O_i(X, (X_{jk})) = A_i$ .

Nuevamente el pago de un jugador por invertir es  $\theta - 1 + l$ , donde  $l$  es la proporción de jugadores que invierten (sin contar al propio  $i$ ), y el pago por no invertir es 0. Luego, si  $i$  observa  $(A_i, (\theta_{ij})_{j \in L_i})$  y cree que los demás jugadores usan estrategias  $(f_j)_{j \neq i}$ , puede

calcular el pago esperado de invertir como

$$\begin{aligned}
v_i(A_i, (\theta_{ij})_{j \in L_i}, (f_j)_{j \neq i}) &= \frac{\sum_{j \in L_i} \theta_{ij}}{|L_i|} - 1 + E(l | A_i, (\theta_{ij})_{j \in L_i}) \\
&= \frac{\sum_{j \in L_i} \theta_{ij}}{|L_i|} - 1 + \sum_{j \neq i} \frac{E(f_j(O_j(X, (X_{km})), (\theta_{jl})_{l \in L_j(O_j(X, (X_{km})))}) | A_i, (\theta_{ij})_{j \in L_i})}{n-1} \\
&= \frac{\sum_{j \in L_i} \theta_{ij}}{|L_i|} - 1 + \sum_{j \neq i} \sum_{A_j \in \mathcal{A}_j} P(O_j(X, (X_{km})) = A_j | A_i) \frac{E(f_j(A_j, (\theta_{jl})_{l \in L_j(A_j)}) | A_i, (\theta_{ij})_{j \in L_i})}{n-1}.
\end{aligned}$$

Como antes, una estrategia  $f_i$  es mejor respuesta a  $(f_j)_{j \neq i}$  si vale 1 siempre que  $v_i > 0$  y 0 siempre que  $v_i < 0$ . En base a esto podemos definir los equilibrios de Nash del juego de la forma natural. De la misma forma, se extienden otros conceptos que definimos antes: una estrategia  $f_i$  es creciente si sus componentes  $f_i|_{A_i}$  son crecientes para todo  $A_i$ , y un perfil  $f = (f_i)_{i \in \mathcal{I}}$  es creciente si las  $f_i$  lo son. También decimos que  $f_i \leq g_i$  si ocurre punto a punto, y  $f \leq g$  (entre dos perfiles) si la desigualdad vale para todos los jugadores. Tenemos los perfiles 0 y 1 dados por las estrategias de no invertir nunca e invertir siempre, respectivamente. Podemos definir  $f_i + a$  para  $a \in \mathbb{R}$  de la misma forma que en el contexto de información con un salto, y si  $f = (f_i)$ ,  $f + a = (f_i + a)$ . En base a esto, también podemos definir  $p(f_i, g_i)$  y  $p(f, g)$  como antes, y  $d(f_i, g_i) = p(f_i, g_i) + p(g_i, f_i)$ ,  $d(f, g) = p(f, g) + p(g, f)$ . Como antes, dos estrategias a distancia 0 resultan esencialmente equivalentes a los efectos del juego, tanto para el propio jugador como para los demás — las cuentas para verificarlo son más engorrosas, pero del mismo tipo que las originales.

Dado esto, podemos considerar los equilibrios de  $G_{\mathcal{I}, E}(\sigma, \tau)$  para un grafo  $\mathcal{I}$ ,  $E$  fijo y valores  $\sigma > 0$ ,  $\tau > 0$ . Entonces vale la siguiente

**Proposición 13.** *Sea  $(\mathcal{I}, E)$  un grafo con  $|\mathcal{I}| = n$ ,  $\sigma > 0$  y  $\tau > 0$ . Entonces  $G_{\mathcal{I}, E}(\sigma, \tau)$  tiene esencialmente un único equilibrio de Nash. Más precisamente, si  $(f_i)_{i \in \mathcal{I}}$  es un equilibrio de Nash y  $(g_i)_{i \in \mathcal{I}}$  es un perfil de estrategias, entonces  $(g_i)_{i \in \mathcal{I}}$  es un equilibrio si y sólo si  $f_i \sim g_i$  para todo  $i \in \mathcal{I}$ . Además  $(f_i)$  es creciente y es esencialmente puro (es decir, existe un representante puro del equilibrio).*

*Más aún, todas las demás estrategias son eliminadas por EIEED. Es decir, si  $(f_i)_{i \in \mathcal{I}}$  es un equilibrio de Nash fijo y  $h_i \in S_i$ , entonces  $h_i$  sobrevive al proceso de EIEED si y sólo si  $h_i \sim f_i$ .*

Esto también se prueba con argumentos análogos a los de la Proposición 11, aunque los cálculos son más complicados. Intuitivamente, la presencia de los  $\delta_i$  juega el mismo papel en términos de hacer de  $v_i$  una función continua de los datos observados, y esto es lo que hace funcionar la demostración. También se puede probar una versión análoga de la Proposición 12.

## 6.5. Una conjetura: continuidad en $\tau = 0$

Dijimos al principio de este Capítulo que agregar los errores  $\delta_i$  al modelo tenía el efecto de eliminar los múltiples equilibrios que se generaban en el modelo del Capítulo 5, aún para valores arbitrariamente chicos de  $\tau$ . También probamos que el equilibrio del juego resulta continuo como función de  $\tau$ .

Intuitivamente estamos pensando que, para valores de  $\tau$  muy pequeños, el equilibrio del juego  $G(\sigma, \tau)$  se aproxima a alguno de los equilibrios del juego sin los  $\delta_i$ ,  $G(\sigma)$ . En otras palabras, parece natural esperar que, para  $\sigma$  fijo y un grafo fijo, la aplicación  $\tau \mapsto F(\tau)$  no solamente sea continua para todo  $\tau > 0$  (esto es el resultado de la Proposición 12), sino que además exista  $f$  un perfil de estrategias de  $G$  tal que

$$F(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} f,$$

y que además  $f$  sea un equilibrio de  $G(\sigma)$ . Si esto fuera cierto, entonces lo que habremos logrado mediante la introducción de los errores  $\delta_i$  sería esencialmente un método para seleccionar el único equilibrio ‘creíble’ del juego  $G(\sigma)$ . Por lo que vimos, la afirmación es trivial para grafos formados como unión de subgrafos completos, y bosquejamos una demostración para grafos con forma de estrella. Sin embargo, parece ser difícil de probar para un grafo cualquiera, por lo que la dejamos como una conjetura.

# Bibliografía

- G.M. Angeletos, C. Hellwig, and A. Pavan. Dynamic global games of regime change: Learning, multiplicity, and the timing of attacks. *Econometrica*, 75(3):711–756, 2007. ISSN 1468-0262.
- A. Atkeson. Discussion on Morris and Shin. *NBER Macroeconomics Annual*, 162:171, 2000.
- R.J. Aumann. Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 1–18, 1987. ISSN 0012-9682.
- H. Carlsson and E. Van Damme. Global games and equilibrium selection. *Econometrica*, 61(5):989–1018, 1993. ISSN 0012-9682.
- Christophe Chamley. Coordinating regime switches. *The Quarterly Journal of Economics*, 114(3):pp. 869–905, 1999. ISSN 00335533. URL <http://www.jstor.org/stable/2586886>.
- G. Corsetti, P. Pesenti, and N. Roubini. The role of large players in currency crises, 2002.
- G. Corsetti, A. Dasgupta, S. Morris, and H.S. Shin. Does one Soros make a difference? A theory of currency crises with large and small traders. *Review of Economic Studies*, 71(1):87–113, 2004. ISSN 1467-937X.
- C. Edmond. Information manipulation, coordination and regime change. *NYU type-script*, 2007.
- D.M. Frankel, S. Morris, and A. Pauzner. Equilibrium selection in global games with strategic complementarities. *Journal of Economic Theory*, 108(1):1–44, 2003. ISSN 0022-0531.
- D. Fudenberg and J. Tirole. *Game Theory*. MIT Press, 1991.
- D. Gale. The game of hex and the brouwer fixed-point theorem. *The American Mathematical Monthly*, 86(10):818–827, 1979.
- A. Galeotti, S. Goyal, M.O. Jackson, F. VEGA-REDONDO, and L. Yariv. Network games. *Review of Economic Studies*, 77(1):218–244, 2010. ISSN 1467-937X.

- I. Goldstein and A. Pauzner. *Demand deposit contracts and the probability of bank runs*. Tel Aviv University, the Eitan Berglas School of Economics, 2002.
- J.C. Harsanyi. Games with incomplete information played by Bayesian players. *Management Science*, 14(3):159–182, 1967.
- J.C. Harsanyi. Games with incomplete information played by Bayesian players. *Management Science*, 14(5):320–334, 1968. ISSN 0025-1909.
- J.C. Harsanyi and R. Selten. A general theory of equilibrium selection in games. *MIT Press Books*, 1, 1988.
- J.A. Hartigan. *Bayes theory*. Springer, 1983.
- P. Heidhues and N. Melissas. Equilibria in a dynamic global game: the role of cohort effects. *Economic Theory*, 28(3):531–557, 2006.
- C. Hellwig. Public Information, Private Information, and the Multiplicity of Equilibria in Coordination Games\* 1. *Journal of Economic Theory*, 107(2):191–222, 2002. ISSN 0022-0531.
- S. Kakutani. A generalization of brouwers fixed point theorem. *Duke Mathematical Journal*, 8(3):457–459, 1941.
- P. Milgrom and J. Roberts. Rationalizability, learning, and equilibrium in games with strategic complementarities. *Econometrica*, 58(6):1255–1277, 1990.
- S. Morris and H.S. Shin. Global games: theory and applications. In *advances in Economics and Econometrics: theory and applications, Eighth world Congress*, volume 1, pages 56–114, 2003.
- S. Morris and H.S. Shin. Rethinking multiple equilibria in macroeconomic modeling, 2001.
- S. Morris and H.S. Shin. Unique equilibrium in a model of self-fulfilling currency attacks. *The American Economic Review*, 88(3):587–597, 1998. ISSN 0002-8282.
- S. Morris and H.S. Shin. Social value of public information. *The American Economic Review*, 92(5):1521–1534, 2002. ISSN 0002-8282.
- J. Nash. Non-cooperative games. *The Annals of Mathematics*, 54(2):286–295, 1951. ISSN 0003-486X.
- J.F. Nash. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 36(1):48–49, 1950. ISSN 0027-8424.
- T.C. Schelling. *The strategy of conflict*. Harvard Univer. Press, 1960.

- E. Sperner. Neuer beweis fr die invarianz der dimensionszahl und des gebietes. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitt Hamburg*, 6:265–272, 1928. ISSN 0025-5858. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02940617>. 10.1007/BF02940617.
- A. Tarski. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific Journal of Mathematics*, 5(2):285–309, 1955.
- D.M. Topkis. Equilibrium points in nonzero-sum n-person submodular games. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 17:773–787, 1979.
- X. Vives. Nash equilibrium with strategic complementarities. *Journal of Mathematical Economics*, 19(3):305–321, 1990.
- J. VonNeumann and O. Morgenstern. *Theories of games and economic behavior*. Princeton University Press, 1944.