UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Integrabilidad de álgebras de Lie-Banach

Manuel López Galván

Director: Gabriel Larotonda

Fecha de Presentación

Introducción

Un grupo de Lie G es una variedad diferenciable modelada sobre $\mathbb{R}^n$ que tiene una estructura de grupo tal que las operaciones son C^∞. Algunos ejemplos conocidos son el grupo general lineal $GL_n(k)$, el grupo unitario y el grupo ortogonal. De la misma manera un grupo de Lie-Banach es una variedad diferenciable, modelada ahora sobre un espacio de Banach E, con las operaciones de grupo C^∞. Podemos encontrar como ejemplo de esta estructura al grupo de operadores inversibles de un espacio de Hilbert $GL(\mathcal{H})$, como así tambien el grupo unitario $U(\mathcal{H}) \subset GL(\mathcal{H})$.
Esta tesis está dedicada a estudiar dos de los problemas centrales en la teoría de grupos de Lie-Banach: la existencia de estructura de grupo de Lie en grupos cociente G/N y la integrabilidad de álgebras de Lie-Banach. Un resultado clásico de la teoría de grupos de Lie en dimensión finita es el teorema de Ado, que garantiza que dada cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ existe una representación fiel en $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, el álgebra de Lie del grupo de automorfismos del álgebra; es decir que existe un homomorfismo inyectivo de álgebras de Lie $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Como consecuencia de esto y debido al teorema de Frobenius, existe un grupo de Lie G cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{g}$, o sea que toda álgebra de Lie en dimensión finita es integrable a un grupo de Lie.

El trabajo fundamental de Van Est y Korthagen del año 1964 [EK64], muestra que existen álgebras de Lie-Banach que no son integrables. Allí se prueba el siguiente criterio de integrabilidad: *un álgebra de Lie-Banach* $\mathfrak{g}$ *es integrable si y solo si su grupo de períodos* $\Pi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ *es discreto.*
Un ejemplo de un álgebra de Lie-Banach no integrable, es el cociente

$$\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}/\mathbb{R}i(\mathbf{1}, \sqrt{\mathbf{2}}\mathbf{1})$$

donde $\mathfrak{u}$ es el álgebra de Lie del grupo unitario de un espacio de Hillbert.

Otro resultado clásico en la teoría de grupos de Lie-Banach asegura que el grupo topológico cociente G/N de un grupo de Lie-Banach G por un subgrupo de Lie N normal, el cual parte a G (esto es que $L(H)$ es complementada en $L(G)$) tiene estructura de grupo de Lie-Banach [Bo89]. Se sabe que no todo subespacio cerrado de un espacio de Banach es complementado, por ejemplo en el espacio de sucesiones acotadas l^∞ el subespacio c_0 de sucesiones convergentes a cero es cerrado y no complementado por el teorema de Phillips-Sobsczyk. El trabajo de Helge Glockner y Karl-Hermann Neeb [Ne00c] muestra que la hipótesis de que N parte a G no es necesaria. Debido a esto podremos construir una definición directa del grupo de periodos $\Pi(\mathfrak{g})$, construyendo una extensión central de grupos $Z \hookrightarrow \widehat{G} \to G$ la cual admite una sección local. Luego obtendremos el llamado homomorfismo de grupo de períodos que dará lugar a $\Pi(\mathfrak{g})$ y así arribaremos al criterio de integrabilidad.

Índice general

Capítulo 1

Grupos de Lie-Banach

Diferenciabilidad en espacios de Banach

Sean E, F espacios de Banach y $f : E \to F$ una función. Diremos que f es diferenciable en $v \in E$ si existe un operador lineal acotado $L_v \in \mathcal{B}(E, F)$ tal que

$$\lim_{\| h \| \to 0} \frac{1}{\| h \|} \| f(v+h) - f(v) - L_v h \| = 0$$

En ese caso al operador L_v lo denotamos df_v leído como diferencial de f en v, lo anotaremos tambien como f_{*v}. Si f es diferenciable, tiene sentido preguntarse sobre la continuidad de la función $df : E \to \mathcal{B}(E, F)$ dada por

$$df(v) = df_v.$$

Esta función es usualmente no lineal. Cuando es continua en un abierto $U \subset E$, decimos que f es C^1 en U. Como $\mathcal{B}(E, F)$ es un espacio de Banach, puede suceder que la función $df : E \to \mathcal{B}(E, F)$ sea diferenciable en U. Si lo es diremos que su diferencial $d(df) = d^2 f$ es la diferencial segunda de f. En general, una función que tiene k diferenciales sucesivas en $U \subset E$ y la de orden k es una función continua, es una función C^k en U y lo anotaremos como $f \in C^k(U)$. Una función es C^∞ cuando sus diferenciales de todos los ordenes existen.

Funciones analíticas

Sean E, F espacios de Banach, denotamos $\mathcal{B}^n(E, F)$ al espacio de las funciones multilineales continuas de $E \times .... \times E$ (n veces) en F. Si $c_n \in \mathcal{B}^n(E, F)$, para cada

$x \in E$ definimos $c_n x^n := c_n(x, ..., x)$. Sea $U \subset E$ un abierto, una función $f : U \to F$ se dice analítica si para cada $x_0 \in U$ existe una sucesión $c_1, c_2, ..., c_n, ... \in \mathcal{B}^n(E, F)$ tal que para algún $r > 0$:
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \|c_n\| r^n < \infty$,
b) $f(x_0 + x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, donde $\|x\| < r$.

Observación 1.0.1. *Si $E = \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ y F es un $\mathbb{K}$ espacio de Banach, cada función multilineal $c_n : E^n \to F$ satisface*

$$c_n(z_1, ..., z_n) = z_1 ... z_n c_n(1, ..., 1)$$

con lo cual $c_n(z, ..., z) = z^n c_n(1, ..., 1)$. De aquí que las funciones analítica son representadas de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} z^n a_n$ con $a_n \in F$.

Teorema 1.0.2 (Teorema de identidad para funciones analíticas)**.** *Sea U un entorno conexo y $f, g : U \to F$ funciones analíticas. Si $f = g$ en algún abierto de U, entonces $f = g$ en U.*

Demostración. Ver [LG] □

1.1. Cartas y Atlas

Dado un espacio de Banach fijo E, una variedad topológica M modelada por E es un espacio topológico M provisto de una colección de abiertos U que lo recubren y una colección de mapas (U, φ) llamados cartas que consisten de un homeomorfismo $\varphi : U \to \varphi(U) \subset E$, con $\varphi(U)$ abierto en E, con la condición de compatibilidad: si (V, ϕ) es cualquier otra carta de M, entonces la función de transición $\phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \subset E \to E$ es continua. Un atlas es una colección de cartas compatibles que cubre todo M.

Definición 1.1.1. *Sea (*) alguna de las siguientes categorías: 1. diferenciable,*
2. C^k,
3. C^∞,
4. C^w o analítica.

Diremos que la variedad M es de clase (*) si las funciones de transición son (*). Si N es otra variedad modelada por un espacio de Banach F, diremos que una función $f : M \to N$ entre variedades es (*) si para todo par de cartas $(U, \varphi), (U', \xi)$ de M y N respectivamente, la función $\xi \circ f \circ \varphi^{-1} : E \to F$ es (*) en el abierto $\varphi(U) \subset E$.

1.2. Grupos de Lie

Definición 1.2.1. *Un grupo de Lie-Banach G es una variedad C^1, modelada sobre un espacio de Banach E, tal que las operaciones de producto e inversa son funciones C^1. Esto se puede resumir diciendo que la aplicación $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ es diferenciable como función de $G \times G \to G$.*
Un resultado que probaremos en este capítulo es que todo grupo de Lie-Banach es C^w, es decir es analítico.
Una aplicación $\varphi : G \to H$ es un homomorfismo de grupos de Lie si es diferenciable y es morfismo de grupos.

Denotamos con 1 a la identidad del grupo.

Observación 1.2.2. *Sea G un grupo con estructura de variedad diferenciable. Para g, h, g_0, h_0 en G tenemos que*

$$gh^{-1} = (g_0h_0^{-1})h_0(g_0^{-1}g)(h_0^{-1}h)^{-1}h_0^{-1}$$

De aqui se ve que G es un grupo de Lie-Banach si y solo si se cumplen las siguientes 3 condiciones:

(GL1) *para todo $g_0 \in G$ la aplicación $g \mapsto g_0g$ de G en G es diferenciable.*

(GL2) *para todo $g_0 \in G$ la aplicación $g \mapsto g_0gg_0^{-1}$ de G en G es diferenciable en un entorno abierto de 1.*

(GL3) *la aplicación $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ es diferenciable en un entorno de $(1, 1)$.*

Grupos locales

Definición 1.2.3. *Un grupo de Lie-local es una variedad diferenciable K equipada con un elemento distinguido $1 \in K$ y un entorno abierto V de 1 con dos aplicaciones diferenciables*

$$m : V \times V \to K$$

y

$$i : V \to V$$

(la multiplicación y la inversión respectivamente) que cumplen:
(i) Para cada $x \in V$, $m(x, 1) = m(1, x) = x$.

(ii) Existe un entorno W de 1 en K tal que $m(W \times W) \subset K$ y

$$m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z)$$

cuando $x, y, z \in W$.
(iii) $m(x, i(x)) = m(i(x), x) = 1$ si $x \in V$.

Teorema 1.2.4 (Grupo de Lie local). *Sea G un grupo y sean U, V dos subconjuntos de G que contienen a 1. Supongamos que U tiene estructura de variedad diferenciable que satisface las siguientes condiciones:*

(i) $V = V^{-1}$, $V^2 \subset U$, V abierto en U.

(ii) la aplicación $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ de $V \times V$ en U es diferenciable.

(iii) para cada $g \in G$ existe un entorno abierto V' de e en V tal que $gV'g^{-1} \subset U$ y la aplicación $x \mapsto gxg^{-1}$ de V' en U es diferenciable.

Luego existe una única estructura de variedad diferenciable en G con las siguientes propiedades:

(α) G con esta estructura es un grupo de Lie.

(β) V es abierto en G.

(γ) la estructura de variedad en G y U inducen la misma estructura en V.

Demostración. (a) Sea A entorno abierto de V y $v_0 \in V$ tal que $v_0 A \subset V$, luego se tiene que $v_0 A = \{v \in V : v_0^{-1} v \in A\}$ de aqui se ve que es un subconjunto abierto de V por (ii). Además (ii) implica que las aplicaciones $v \mapsto v_0 v$ $(A \to v_0 A)$, y $v \mapsto v_0^{-1} v$ $(v_0 A \to A)$, son biyecciones diferenciables, una la inversa de la otra y por lo tanto isomorfismos diferenciables.

(b) Tomamos un entorno W de 1 en V tal que $W = W^{-1}$, $W^3 \subset V$ y existe una carta (W, ϕ, E) de la variedad U cuyo dominio es W. Para cada $g \in G$ sea ϕ_g la aplicación $gW \to E$ dada por

$$gW \to W \to E$$

$$h = gw \mapsto g^{-1}h \mapsto \phi(g^{-1}h)$$

Veamos que las cartas ϕ_g son compatibles. Sean g_1 y g_2 elementos de G tales que $g_1 W \cap g_2 W \neq \varnothing$ luego $g_2^{-1} g_1$, $g_1^{-1} g_2 \in W^2$ (pues si $h = g_1 w = g_2 w'$ entonces $g_2^{-1} g_1 = w' w^{-1} \in W^2$) por (a) tomando como v_0 a $g_1^{-1} g_2$ se tiene que $W \cap g_1^{-1} g_2 W$ es un abierto de W. Como $\phi_{g_1}(h) = \phi(g_1^{-1} h) = \phi(g_1^{-1} g_2 w')$ de aquí deducimos que

$$\phi_{g_1}(g_1 W \cap g_2 W) = \phi(W \cap g_1^{-1} g_2 W)$$

es un subconjunto abierto D de E. Para cada $d \in D$, $(\phi_{g_2} \circ \phi_{g_1}^{-1})(d) = \phi(g_2^{-1} g_1 \phi^{-1}(d))$ es diferenciable porque la aplicación del ítem (a) de A en $v_0 A$ es un isomorfismo diferenciable .

(c) Debido a (b) existe $\mathscr{A} = (\phi_g)_{g \in G}$ atlas diferenciable el cual provee a G de estructura de variedad diferenciable. Para cada $g_0 \in G$ la aplicación $g \overset{f}{\mapsto} g_0 g$ $(g \in G)$ es diferenciable. En efecto sean ϕ_g y $\phi'_g \in \mathscr{A}$ tales que $f(g'W) \subset gW$, luego

$$\phi_g \circ f \circ \phi_g'^{-1}(d) = \phi_g(g_0 g' \phi^{-1}(d)) = \phi(g^{-1} g_0 g' \phi^{-1}(d)) = \phi_g \circ \phi_{g_0 g'}^{-1}$$

es diferenciable. De aqui vemos que f es un difeomorfismo con esta estructura de variedad. En particular la condición **(GL1)** se cumple.

(d) Sea $v_0 \in V$. Por (ii) existe un entorno abierto A de 1 en W tal que $v_0 A \subset V$. Esto dice que V es abierto en G. Por (a) la aplicación $v \mapsto v_0 v$ de A en $v_0 A$ es un difeomorfismo con la estructura inducida por U. Por (c) la estructura de variedad en G y U inducen la misma en $v_0 A$ y luego en V.

(e) Por (d) (ii) y (iii) las condiciones **(GL2)** y **(GL3)** se cumplen. Luego G es un grupo de Lie.

(f) Si una estructura de variedad sobre G es compatible con la estructura de grupo de G y es tal que V es una subvariedad abierta de G entonces $(\phi_g)_{g \in G}$ es un atlas de G. De aqui la unicidad de la proposición.

$\square$

Lema 1.2.5. *Sea G un grupo de Lie. Dado $A \subset G$ denotamos $\langle A \rangle \subset G$ al subgrupo generado por los productos finitos de elementos de A y sus inversas. Notaremos G_0 a la componente conexa de la identidad de G. Tenemos que:*

(i) G_0 es un subgrupo invariante, es decir normal.
(ii) Si U es un entorno de 1 en G_0 entonces $G_0 = \langle U \rangle$ (es decir $G_0 = \cup_{n=0}^{\infty} U^n$).

Demostración. (i) Dados $x, y \in G_0$ queremos ver que $xy \in G_0$. Como la multiplicación $m : G \times G \to G$ es continua y $G_0 \times G_0$ es conexo por ser producto de conexos y (1,1 = 1 entonces $m(G_0 \times G_0)$ es conexo y contiene a la identidad luego $m(G_0 \times G_0) \subset G_0$. De manera análoga, como la inversión es continua, $i(G_0)$ es un conexo que contiene a la identidad luego $i(G_0) \subset G_0$.
Veamos ahora que $G_0 \triangleleft G$ es decir que $gG_0 g^{-1} \in G_0 \forall g \in G$. Sea $g \in G$ y $Ad_g : G \to G$

dada por $h \mapsto ghg^{-1}$. Como Ad_g es continua, $Ad_g(G_0)$ es conexo que contiene a la identidad, luego $Ad_g(G_0) \subset G_0$.

(ii) Sea V un entorno abierto de U que contiene a 1 tal que $V = V^{-1}$ por ejemplo podemos tomar $V = U \cap U^{-1}$. Sea

$$H = \cup_{n=0}^{\infty} V^n \subset \cup_{n=0}^{\infty} U^n$$

Luego H es un subgrupo de G y es abierto ya que si $\sigma \in H$ entonces $\sigma V \subset H$. De aquí que cada clase xH es abierta. Como $G \setminus H = \cup_{x \notin H} xH$ es abierto por ser unión de abiertos, se sigue de aqui que H es cerrado. Como $H \subset G_0$ es abierto y cerrado no vacío entonces $H = G_0$; de aqui vemos que $G_0 = H \subset \cup_{n=0}^{\infty} U^n \subset G_0$ entonces $G_0 = \cup_{n=0}^{\infty} U^n$.

□

1.3. Álgebras de Lie-Banach

Definición 1.3.1. *Un álgebra de Lie sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ es un espacio vectorial topoloóico $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{K}$ equipado con una forma bilineal continua, a la que llamaremos corchete,*

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \ (x, y) \mapsto [x, y]$$

tal que $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$, se tiene que

$$[x, y] = -[y, x], \ (antisimetrica)$$

y

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \ (identidad\ deJacobi).$$

Si el espacio vectorial $\mathfrak{g}$ es un espacio de Banach se dice un algebra de Lie-Banach. Como la forma bilineal $[.,.]$ es continua, existe $M > 0$ tal que $\|[x, y]\| \leq M\|x\|\|y\|$. Normalizando, se puede tomar $M = 1$. Si $\mathfrak{h}$ es otra álgebra de Lie, un homomorfismo de algebras de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{h}$ es una aplicación lineal continua $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ tal que $\psi[x, y] = [\psi(x), \psi(y)]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.

Ejemplo 1.3.2. *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra asociativa sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ luego podemos dotar a $\mathcal{A}$ de estructura de álgebra de Lie con el corchete*

$$[x, y] = xy - yx, \ \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

Ejemplo 1.3.3. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, luego*

$$\mathfrak{g} := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : T^* = -T\}$$

es álgebra de Lie con el corchete $[T, S] = TS - ST$.

Definición 1.3.4. *Un subespacio $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es una subálgebra si $[x, y] \in \mathfrak{h}, \forall x, y \in \mathfrak{h}$.*

Definición 1.3.5. *El centro de un álgebra $\mathfrak{g}$,*

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) := \{x \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0 \ \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

es claramente una subálgebra de $\mathfrak{g}$ debido a la bilinealidad y la identidad de Jacobi del corchete.

Definición 1.3.6 (Producto directo)**.** *Dadas $\mathfrak{g}, \mathfrak{l}$ álgebras de Lie, el producto cartesiano $\mathfrak{g} \times \mathfrak{l}$ admite estructura natural de álgebra de Lie, con las operaciones coordenada a coordenada y el corchete*

$$[(x, x'), (y, y')] := ([x, x'], [y, y']) \ x, x' \in \mathfrak{g}, y, y' \in \mathfrak{l}.$$

1.4. Serie de Baker-Campbell-Hausdorff en álgebras de Lie

Si $x, y \in \mathfrak{g}$ definimos la operación

$$x * y := \sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

con

$$z_n := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{p_1+q_1+\ldots+p_k+q_k=n} \frac{1}{p_1!q_1!\ldots.p_k!q_k!} x^{p_1} y^{q_1} \ldots . x^{p_k} y^{q_k},$$

donde $...y^r... := \underbrace{[..., [y, [y..., [y,]]]}_{r \ veces}$ son los corchetes iterados.

Esta operación está bien definida en un entorno de 0. Más precisamente esta serie es absolutamente convergente en el disco

$$V := \{(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} : \|x\| + \|y\| < \log 2\}.$$

Se prueba que este entorno posee estructura local de grupo de Lie con la operación dada por $*$ y la expansión en serie de los primeros términos como

$$x * y = x + y + 1/2[x, y] + 1/12[y, [y, x]] + \ldots.$$

Para mayores referencias de esto se puede ver su demostración en el libro [Bel06].

1.5. Ideales y Cocientes

Definición 1.5.1. *Un ideal de* $\mathfrak{g}$ *es un subespacio* $\mathfrak{I}$ *de* $\mathfrak{g}$ *tal que* $[g,z] \in \mathfrak{I}$ *para todo* $z \in \mathfrak{I}, g \in \mathfrak{g}$*, es decir que* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{I}] \subset \mathfrak{I}$*.*

En teoría de Lie los ideales juegan el rol que los subgrupos normales juegan en teoría de grupos. Es evidente que un ideal es una subálgebra de Lie.

Observación 1.5.2. *El centro de un álgebra* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ *es un ideal. Nuevamente esto se deduce de manera inmediata de la identidad de Jacobi.*

Cocientes

A partir de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se puede construir otra álgebra como un cociente, en efecto si $\mathfrak{I}$ es un ideal del álgebra, se define el **álgebra de Lie cociente** como el espacio vectorial cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{I}$ con la estructura de álgebra de Lie dada por

$$[\bar{x}, \bar{y}] = \overline{[x,y]}$$

Buena definición: supongamos que $\bar{x'} = \bar{x}$ y que $\bar{y'} = \bar{y}$ o sea que existen $u, v \in \mathfrak{I}$ tales que $x' - x = u,\ y' - y = v$ entonces

$$[x', y'] = [x,y] + ([x,v] + [u,y] + [u,v]) \in [x,y] + \mathfrak{I}$$

es decir que $\overline{[x',y']} = \overline{[x,y]}$. En particular obtenemos que la proyección al cociente es un morfismo de álgebras de Lie por construcción.

Ideales y morfismos de álgebras de Lie tienen muchas propiedades en común con ideales y morfismos de anillos. Una de ellas es la construcción de homomorfismos de álgebras de Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{I} \to \mathfrak{h}$ donde $\mathfrak{I}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. Esto es: si $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un homomorfismo tal que $\mathfrak{I} \subset ker\phi$, entonces ϕ se factoriza por la proyección al cociente y definie un morfismo $\mathfrak{g}/\mathfrak{I} \to h$ de álgebras como $\overline{\phi}(\bar{x}) := \phi(x)$.

1.6. El álgebra de Lie de un grupo de Lie

Campos

Un campo vectorial en una variedad M es una función diferenciable $X : M \to TM$ que es una sección en el fibrado en el sentido que $X(p) \in T_pM$ para cada $p \in M$. Resumiendo si $\pi : TM \to M$ es la proyección al punto base, entonces $\pi \circ X = id_M$.

Definición 1.6.1. *Dada M una variedad C^{k+1} y $X, Y : M \to TM$ campos C^k estos permiten definir un nuevo campo C^{k-1} al que llamamos corchete $[X, Y]$ que cumple las siguientes propiedades:*
i) $[X, Y] = -[Y, X]$
ii)$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ *(identidad de Jacobi)*

Usaremos $L_g : G \to G$ y $R_g : G \to G$ para denotar los siguientes isomorfismos

$$L_g : h \mapsto gh \ , R_g : h \mapsto hg$$

Las diferenciales las denotaremos con las mismas letras, es decir $L_g, R_g : TG \to TG$.

Campos invariantes

Si $e = 1$ es la identidad del grupo y $v \in T_eG$, consideramos $(g, v) \in G \times T_eG$ y la función dada por

$$(g, v) \mapsto L_g(v) := X_v(g)$$

define un campo en G, con la siguiente propiedad

$$X_v(hg) = L_{hg}X_v(e) = L_hX_v(g)$$

es decir que $L_hX_v = X_vL_h$. Un campo con esta propiedad se llama *invariante a izquierda* y el conjunto de los campos invariantes a izquierda se identifica con T_eG, mediante la construcción de recién y reciprocamente dado un campo invariante a izquierda $X : G \to TG$ se tiene $X \mapsto X(e) \in T_eG$. Es fácil comprobar que si $X, Y : G \to TG$ son campos invariantes a izquierda entonces $[X, Y] : G \to TG$ es invariante a izquierda. Definimos entonces $\mathfrak{g} := L(G)$ *el álgebra de Lie de un grupo de Lie-Banach* G al espacio tangente T_eG provisto de la estructura de Lie dada por los campos invariantes a izquierda, esto es que dados $v, w \in T_eG$, entonces

$$[v, w] := [X_v, Y_w](e)$$

Definición 1.6.2. *Un grupo a un parámetro de G es una aplicación $f : \mathbb{R} \to G$ tal que $f(s+t) = f(s)f(t)$, es decir f es un homomorfismo de grupo considerando a $\mathbb{R}$ como grupo aditivo con la suma.*

La función exponencial en un grupo de Lie

Si X es un campo de vectores, una curva integral para X es una función $c : I \to G$ diferenciable tal que $X(c(t)) = c'(t)$ para todo t. Sea $\mathfrak{g} = T_eG$; para cada

$v \in T_eG$ sea X el campo definido por

$$X(h) := (L_h)_{*e}(v)$$

es invariante a izquierda y $X(e) = v$. Sea $c(t)$ la única curva integral de X tal que $c(0) = e$ y $c'(0) = v$. Veamos que c tiene como dominio $I = \mathbb{R}$; en efecto veamos primero que $c(t+s) = c(t)c(s)$, si $t, s, t+s \in I$ (o sea que c es un grupo a un parámetro). Sea $t_0 \in I$ fijo y $t, t_0 + t \in I$ para todo $t \in I$ consideramos las curvas

$$\alpha(t) := c(t + to),\ \beta(t) := c(t_0)c(t).$$

Es facil ver que α así definida es curva integral de X pues esta compuesta con una traslación, veamos que tambien β resulta una curva integral para X. En efecto, por ser X invariante a izquierda y por regla de la cadena se tiene que

$$X(\beta(t)) = X(c(t_0)c(t)) = (L_{c(t_0)})_{*c(t)}(X(c(t))) = (L_{c(t_0)})_{*c(t)}(\dot{c}(t)) = \dot{\beta}(t)$$

pues $\beta(t) = L_{c(t_0)} \circ c(t)$. Como $\alpha(0) = \beta(0) = c(t_0)$ por teorema de unicidad de curvas integrales se tiene que $c(t + t_0) = c(t_0)c(t)$ para todo $t \in I$ y $t_0 \in I$. El intervalo de definición I de c ahora se puede extender a $\mathbb{R}$, de la siguiente manera; dado $t \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t/n \in I$, definimos la extensión de c como

$$\bar{c} : \mathbb{R} \to G$$
$$t \mapsto c(t/n)^n.$$

Esta bien definida; pues si $m \in \mathbb{N}$ es tal que $t/m \in I$, como c es un grupo a un parámetro se tiene que

$$c(t/n) = c(t/nm)^m,\ c(t/m) = c(t/nm)^n$$

de aquí que $c(t/n)^n = c(t/m)^m$. Debido a esto queda bien definida la aplicación

$$\exp : \mathfrak{g} \to G$$
$$v \mapsto c(1)$$

Observemos que la curva $t \mapsto \exp(tv)$ es la única curva integral del campo X, es decir que $c(t) = \exp(tv)$. Para chequear esto, consideremos la aplicación $l_{t_0} : s \mapsto t_0 s$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para cada $t_0 \in \mathbb{R}$; como $\dot{c}(0) = v$ se tiene por regla de la cadena que

$$t_0 v = t_0 \dot{c}(0) = (c \circ l_{t_0})'(0).$$

La aplicación l_{t_0} es un homomorfismo de grupos $(\mathbb{R}, +)$, de donde por composición de homomorfismo de grupos se tiene que $c \circ l_{t_0} : \mathbb{R} \to G$ es un grupo a un parámetro, luego por definición de $\exp_G$,

$$\exp_G(t_0 v) = (c \circ l_{t_0})(1) = c(t_0).$$

De aquí se deduce que

$$\exp_{*0}(v) = \frac{d}{dt}\mid_{t=0} (\exp(tv)) = X_v(e) = v$$

y entonces que $\exp_{*0}$ es la identidad de $\mathfrak{g}$, puesto que como $\exp : \mathfrak{g} \to G$ y $\exp(0) = e$, entonces

$$\mathfrak{g} \simeq T_0\mathfrak{g} \overset{\exp_{*0}}{\to} T_eG = \mathfrak{g}.$$

Luego por teorema de la función inversa para espacios de Banach [Bel06] existe un entorno V de $0 \in \mathfrak{g}$ tal que

$$\exp\mid_V : V \to \exp(V) \subset G$$

es un difeomorfismo.

Ejemplo 1.6.3. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $G = GL(\mathcal{H})$ el grupo de operadores inversibles de $\mathcal{H}$ que es un grupo de Lie-Banach cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{g} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, con el corchete dado por el conmutador $[X,Y] = XY - YX$ y la función exponencial es la usual dada por $\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}X^n$.*

Proposición 1.6.4. *Naturalidad de la exponencial:*

Sea $\varphi : H \to G$ un homomorfismo de grupos de Lie Banach, luego el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{d\varphi} & \mathfrak{g} \\ \Big\downarrow \exp & & \Big\downarrow \exp \\ H & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array}$$

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{h}$, la curva $\gamma : t \mapsto \varphi(\underbrace{\exp(tX)}_{\alpha(t)})$ es diferenciable y $\dot{\gamma}(0) = d\varphi_1(\dot{\alpha}(0)) = d\varphi(X(e))$. Luego γ es el grupo a un parámetro de G pues φ es morfismo de grupos. Pero $t \mapsto \exp(t(d\varphi(X)))$ es el único grupo a un parámetro de G cuyo vector tangente en 0 es $(d\varphi(X)(e))$. Luego $\varphi(\exp(tX)) = \exp(t(d\varphi(X)))$. De aqui que $\varphi(\exp X) = \exp(d\varphi(X))$.

$\square$

Nota: A $d\varphi_1$ lo denotamos $L(\varphi)$.

Observación 1.6.5 (Diferencial del producto)**.** *La diferencial de la multiplicación en la identidad es la adición, es decir* $dm_{(e,e)} : T_eG \times T_eG \to T_eG$ *es*

$$dm_{(e,e)}(X, Y) = X + Y.$$

Demostración. Consideramos $(a, b) \in G \times G$ y las aplicaciones $x \overset{r_b}{\mapsto} (x, b)$ y $x \overset{l_a}{\mapsto} (a, x)$ se tiene entonces que $m \circ r_b = R_b$ y también $m \circ l_a = L_a$ luego diferenciando y aplicando la regla de la cadena tenemos que

$$d(R_b)_a(X) = d(m \circ r_b)_a(X) = dm_{(a,b)} \circ dr_b(X) = dm_{(a,b)}(X, 0)$$
$$d(L_a)_b(Y) = d(m \circ l_a)_b(Y) = dm_{(a,b)} \circ dl_a(Y) = dm_{(a,b)}(0, Y).$$

Luego $dm_{(a,b)}(X, Y) = dm_{(a,b)}(X, 0) + dm_{(a,b)}(0, Y) = d_aR_b(X) + d_bL_a(Y)$. En particular si $(a, b) = (e, e)$ $R_e(x) = x$ y $L_e(x) = x$ son la identidad y su diferencial es la identidad se deduce de aqui que $dm_{(e,e)}(X, Y) = X + Y$.

□

El siguiente lema será utilizado en el Capítulo 5 en la construcción de sucesiones exactas.

Lema 1.6.6. *Sea* $f : G \to H$ *homomorfismo de grupos de Lie con* H *conexo tal que* $L(f) : L(G) \to L(H)$ *es sobreyectiva, entonces* f *es sobreyectiva.*

Demostración. Como H es conexo basta ver que existe un entorno de 1 en H que es alcanzado por algún entorno de 1 en G. Veamos esta última afirmación, por naturalidad de la exp tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} L(G) & \xrightarrow{L(f)} & L(H). \\ \downarrow{\scriptstyle \exp} & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array}$$

Tomemos un 0 entorno W de $L(H)$ tal que exp sea difeomorfismo y sea $W' = \exp_H(W)$. Como $L(f)$ es sobreyectiva podemos tomar $Z = L(f)^{-1}(W)$, luego achicando Z para que $\exp_G$ sea difeomorfismo definimos $Z' = \exp_G(Z)$, afirmamos que $f(Z') = W'$. En efecto;

$$W' = \exp_H(W) = \exp_H(L(f)(Z)) = f(\exp_G(Z)) = f(Z').$$

Como W' es entorno de 1 y H es conexo entonces

$$H = \langle W' \rangle = \langle f(Z') \rangle = f(\langle Z' \rangle) \subseteq Imf \subseteq H$$

de aqui que $Imf = H$. □

1.7. Fórmulas de Baker-Campbell-Hausdorff

Como $d\exp_0 = id$, por el teorema de la función inversa existe V un entorno de 0, U entorno de la identidad en G tal que $\exp|_V : V \to U$ es un difeomorfismo. Debido a que la aplicación producto es continua y $ee = e$ podemos tomar un entorno U_1 de e tal $U_1U_1 \subset U$ y como $U_1e \subset U_1U_1$ tenemos que $U_1 \subset U$. Si ponemos $\exp^{-1} U_1 = V_1$ (esta inversa local de la exponencial la llamaremos logaritmo), V_1 es entorno de 0 contenido en V, si $X, Y \in V_1$ luego $\exp X \exp Y \subset U$ y hay un único $Z \in V$ tal que

$$\exp X \exp Y = \exp Z.$$

El elemento Z es función de X e Y y lo escribimos

$$Z = \mu(X, Y) = X * Y := \log(\exp(X)\exp(Y)).$$

Claramente esta función μ es diferenciable por ser composicion de funciones diferenciables, en efecto $\mu = log \circ m \circ (\exp \times \exp)$ donde m es la aplicación producto. Existe una fórmula llamada de Baker-Campbell-Hausdorff la cual establece a $X * Y$ como serie de potencias en X e Y como describimos en 1.4. Estas fórmulas de multiplicación están definidas para entornos de 0 suficientemente pequeños; podemos suponer $B_r(0)$ tal que $\exp(B_r(0))\exp(B_r(0))$ esté contenido en el dominio de la función logaritmo.

Observación 1.7.1. *Notar que si $A * B$ existe para todo $A, B \in B_r(0)$, no necesariamente $A * B \in B_r(0)$.*

Lema 1.7.2. *Sea $\mu : B_r(0) \times B_r(0) \to \mathfrak{g}$ dada por $\mu(A, B) = A * B$. Entonces:*

(i) $A * B = A + B + R(A, B)$ donde

$$\lim_{A,B\to 0} \frac{\|R(A, B)\|}{\|A\| + \|B\|} = 0, \ (\|(A, B)\| = \|A\| + \|B\|).$$

(ii) $\exists 0 \leq s \leq r$ tal que $\|A * B\| \leq 2(\|A\| + \|B\|)$ para $A, B \in B_s(0)$.

Demostración. (i) Como $\mu = log \circ m \circ (\exp \times \exp)$ por la regla de la cadena (y como la derivada de la exponencial en 0 es la identidad) tenemos que

$$d\mu_{(0,0)}(U, V) = Id \circ dm_{(e,e)} \circ (Id \times Id)(U, V) = U + V$$

por la observación 1.6.5 como μ es diferenciable,

$$U * V = U * V - 0 * 0 = d\mu_{(0,0)}(U, V) + R(U, V) = U + V + R(U, V)$$

con

$$\lim_{U,V\to 0} \frac{\|R(U,V)\|}{\|U\|+\|V\|} = 0.$$

(ii) Usando (i) se tiene que

$$\|A*B\| \leq \|A*B-A-B\| + \|A+B\| \leq \|R(A,B)\| + \|A\| + \|B\|$$

, dado $\varepsilon = 1$ $\exists$ $s > 0$ tal que $\frac{\|R(A,B)\|}{\|A\|+\|B\|} < 1$ $\forall A, B \in B_s(0)$. De aqui se ve que $\|A*B\| \leq 2(\|A\|+\|B\|)$ para $A, B \in B_s(0)$. □

Corolario 1.7.3. *Sea V un entorno de 0 donde la fórmula de BCH converge, luego existe una bola centrada en 0, $W \subset V$ tal que $W*W \subset V$. En efecto supongamos que $V = B_r(0)$, por 1.7.2 (ii) existe $B_s(0)$ tal que $B_s(0)*B_s(0) \subset B_{4s}(0)$. Basta considerar $W = B_{\frac{s}{4}}(0) \subset B_s(0) \subset B_r(0) = V$, pues si $w, w' \in B_{\frac{s}{4}}(0)$ entonces $\|w*w'\| \leq 2(\frac{s}{4}+\frac{s}{4}) = s$.*

Proposición 1.7.4. *Fórmulas de Lie-Trotter. Si $v, w \in \mathfrak{g}$ entonces*

$$v + w = \lim_{n\to\infty} n \log(\exp(v/n)\exp(w/n))$$

y

$$\exp[v,w] = \lim_{n\to\infty} (\exp(-v/n)\exp(-w/n)\exp(v/n)\exp(w/n))^{n^2}.$$

Demostración. Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande v/n, w/n estan suficientemente cerca del origen como para usar las fórmulas de BCH.

$$\log(\exp(v/n)\exp(w/n)) = v/n + w/n + R(v/n, w/n)$$

de donde

$$n\log(\exp(v/n)\exp(w/n)) = v + w + nR(v/n, w/n) \ (1)$$

Veamos que $\lim_{n\to\infty} nR(v/n, w/n) = 0$, en efecto

$$\|nR(v/n,w/n)\| = \underbrace{n(\|v/n\|+\|w/n\|)}_{=\|v\|+\|w\|} \underbrace{\frac{\|R(v/n,w/n)\|}{\|v/n\|+\|w/n\|}}_{\to 0} \to 0.$$

Veamos la segunda fórmula: iterando de la ecuación (1) obtenemos

$$\exp(-v/n)\exp(-w/n)\exp(v/n)\exp(w/n) = \exp(A(n))\exp(B(n))$$

donde

$$A(n) = 1/n(v+w) + 1/2n^2[v,w] + o(1/n^3)$$

y
$$B(n) = -1/n(v+w) + 1/2n^2[v,w] + o(1/n^3).$$
Aplicando nuevamente la serie de BCH, tenemos que $log(\exp A \exp B) = 1/n^2[v,w]+ o(1/n^3)$ luego

$$(\exp(-v/n)\exp(-w/n)\exp(v/n)\exp(w/n))^{n^2} =$$

$$= [\exp(1/n^2[v,w] + o(1/n^3)]^{n^2} = \exp([v,w] + o(1/n)).$$

y haciendo tender $n \to \infty$ tenemos la fórmula.

□

En lo siguiente nos concentraremos en probar el siguiente teorema.

Teorema 1.7.5. *Si G es un grupo de Lie-Banach, es decir (C^1), entonces G tiene estructura analítica (C^w).*

Primero probaremos que $\exp_G$ es analítica, para eso alcanza ver que la $d(\exp_G)$ es analítica.

Definición 1.7.6. *Para cada función diferenciable $f : M \to G$ de una variedad M en un grupo de Lie-Banach G, definimos la derivada logaritmica como la función*

$$\delta(f) : TM \to \mathfrak{g}, \;\; \delta(f)(v) := f(m)^{-1}.d_m(f)v$$

para $v \in T_m(M)$.

Lema 1.7.7. *Para las aplicaciones diferenciables $f, h : M \to G$ la derivada logaritmica de la aplicación producto, es decir $fh(m) = f(m).h(m)$ y $fh^{-1}(m) = f(m)h^{-1}(m)$ son dadas por:*
(1) $\delta(fh) = \delta(h) + h^{-1}\delta(f)h$.
(2) $\delta(fh^{-1}) =$Ad$(h)(\delta(f) - \delta(h))$.

Demostración. Escribiendo $fh = m_G \circ (f, h)$, obtenemos por medio de la diferencial del producto
$$d_{(a,b)}(m_G)(v,w) = d_a R_b(v) + d_b L_a(w)$$
para $a, b \in G$ y $v, w \in L(G) \subset TG$ la relación $d(fh) = d(m_G) \circ (df, dh) = df.h + f.dh : T(M) \to T(G)$ donde $f.dh$ y $df.h$ se refieren al producto puntual en el grupo TG. Esto implica de manera inmediata (1);

$$\delta(fh) = (fh)^{-1}.(dfh + fdh) = h^{-1}.(\delta(f).h) + \delta(h).$$

Para $h = f^{-1}$, obtenemos que

$$0 = \delta(ff^{-1}) = f\delta(f)f^{-1} + \delta(f^{-1}),$$

obteniendo así (2). □

Teorema 1.7.8. *La derivada logaritmica de* $\exp_G$ *esta dada por*

$$\delta(\exp_G)(x) = \Phi(adx), \text{ donde } \Phi(z) := \frac{1-e^{-z}}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-z)^{k-1}}{k!}$$

Demostración. Fijados $t, s \in \mathbb{R}$, las funciones diferenciables $f, f_t, f_s : L(G) \to G$ dadas por

$$f(x) := \exp_G((t+s)x),\ f_t(x) = \exp_G(tx), y\ f_s(x) := \exp_G(sx)$$

satisfacen que $f = f_t f_s$ puntualmente en $L(G)$. Por el lema 1.7.7 se tiene que

$$\delta(f) = \delta(f_s) + Ad(f_s)^{-1}\delta(f_t).$$

Definimos la curva $\psi : \mathbb{R} \to L(G)$ como $\psi(t) := \delta(\exp_G)_{tx}(ty)$. Se obtiene aplicando la definición que

$$\psi(t+s) = \delta(f)_x(y) = \delta(f_s)_x(y) + Ad(f_s)^{-1}\delta(f_t)_x(y) = \psi(s) + Ad(\exp_G(-sx))\psi(t).$$

Tenemos que $\psi(0) = 0$ y

$$\psi'(0) = \lim_{t\to 0} \delta(\exp_G)_{tx}(y) = \delta(\exp_G)_0(y) = y$$

luego podemos calcular $\psi'(s)$ como

$$\psi'(s) = \lim_{t\to 0} \frac{\psi(t+s) - \psi(s)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Ad(\exp_G(-sx))\psi(t)}{t} =$$

$$= Ad(\exp_G(-sx))y = e^{-ad(sx)}y.$$

Luego integrando obtenemos que

$$\delta(\exp_G)_x(y) = \psi(1) = \int_0^1 \psi'(s)ds = \int_0^1 e^{-s.ad(x)}yds.$$

Usando la serie exponencial que converge uniformemente e integrando se tiene que

$$\int_0^1 e^{-s.ad(x)}ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-adx)^k}{(k+1)!} = \Phi(adx).$$

□

Sean U entorno de 0 donde la $\exp_G$ es un difeomorfismo y $V \subset U$ tal que $\exp_G V \exp_G V \subset \exp_G U$, como definimos anteriormente tenemos la aplicación $\mu : V \times V \to U$

$$x * y := \log_U(\exp_G x \exp_G y)$$

, que es diferenciable. Veamos ahora que es analítica. Para eso consideremos la curva $F(t) := x * ty \in U$ que satisface $\exp_G F(t) = \exp_G(x)\exp_G(ty)$, luego la derivada logaritmica de esta curva es

$$y = \delta(\exp_G)_F(t)F'(t) = \Phi(adF(t))F'(t). \ (1)$$

Tomando U suficientemente chico tal que la serie de $\Psi(z) = \frac{z \log z}{z-1}$ satisfaga

$$\Psi(e^{ad(z)})\Phi(adz) = id_{\mathfrak{g}},$$

reemplazando z por $F(t)$ y multiplicando por $\Psi(e^{ad(F(t))})$ en la expresión (1) se tiene que

$$F'(t) = \Psi(e^{adF(t)})y.$$

Integrando, como $F(0) = x$ y $\exp(ad(F(t))) = \exp(adx)\exp(ad(ty))$,

$$x * y - x = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(t)dt = \int_0^1 \Psi(\exp(ad(x))\exp(ad(ty)))ydt.$$

Usando ahora la expansión en serie de potencias del logaritmo se tiene que

$$x * y = x + \sum_{p_i+q_i>0,k,m>0} \frac{(-1)^k(adx)^{p_1}(ady)^{q_1}...(adx)^{p_k}(ady)^{q_k}(adx)^m}{(k+1)(q_1+...+q_k+1)p_1!q_1!...p_k!q_k!m!}y.$$

Demostración. del Teorema 1.7.5. Veamos que podemos dotar a G de estructura de variedad C^w usando las cartas exponenciales. Vimos anteriormente que en entornos suficientemente pequeños V de 0 la $\exp_G|_V$ es un difeomorfismo analítico, luego su inversa el logaritmo tambien resulta analítico. Para cada $g \in G$ tenemos la carta $\psi_g^{-1}(v) = g\exp(v)$ definida en algún entorno V de 0 en $L(G)$ tal que la exponencial sea un difeomorfismo analítico, si definimos $U := \exp(V)$ que es abierto de G se tiene claramente que $G = \cup_{g\in G} gU$ es unión de abiertos. Veamos ahora que las operaciones de grupo son analíticas, para eso usamos la carta exponencial en la identidad y de su inversa el logaritmo, la expresión local resulta

$$\log(i(\exp_G(v))) = \log(\exp_G(-v)) = -v$$

lo cual es claramente analítica. Para el producto basta observar que la aplicación local en la carta $\exp_G \times \exp_G$ resulta

$$\log(m(\exp_G(v), \exp_G(w))) = \log(\exp_G v \exp_G w) = v * w,$$

que es justamente la expresión de Baker con lo cual es analítica. Veamos ahora que el mapa de transición de las cartas definidas es C^w, en efecto dadas dos cartas ψ_g, ϕ_h tenemos que

$$\phi_h \circ \psi_g^{-1}(v) = \log(h^{-1} g \exp(v))$$

resulta analítica pues el logaritmo, la exponencial, el producto y la inversión son aplicaciones analíticas. $\square$

Teorema 1.7.9. *(Morfismos continuos) Sea $f : G \to H$ morfismo de grupos de Lie continuo. Luego f es diferenciable.*

Observación 1.7.10. *Para que f sea diferenciable es necesario y suficiente que exista un entorno no vacío U de G tal que $f\,|_U$ sea diferenciable. En efecto, tomamos $x \in U$ luego $W := x^{-1}U$ es un entorno abierto de e y $f\,|_W$ es diferenciable pues $f(x^{-1}u) = f(x^{-1})f(u)$. Como $G = \cup_{x_0 \in G} x_0 W$ y $f(x_0 x) = f(x_0)f(x)$ para cada $x \in W$ se tiene que f es diferenciable en todo G. Análogamente para ver que $f \in C^k$ o C^w.*

Demostración. Existe un entorno abierto de 0 en L(G) que llamamos V donde $\phi = \exp_G$ es un isomorfismo entre la variedades V y $\phi(V)$. Análogamente definimos un entorno W donde $\psi = \exp_H$ es un isomorfismo entre W y $\psi(W)$. Achicando V si es necesario, podemos suponer que $f(\phi(V)) \subset \psi(W)$. Luego $g = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$ es continua de V en W,

$$\begin{array}{ccc} \phi(V) \subset G & \xrightarrow{f} & f(\phi(V)) \subset \psi(W) \\ \uparrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi^{-1}} \\ V \subset L(G) & \xrightarrow{g} & W \subset L(H) \end{array}$$

Veremos que si $x \in V, \lambda \in \mathbb{Q}$ y $\lambda x \in V$ entonces $g(\lambda x) = \lambda g(x)$.
Podemos suponer que $\lambda \neq 0$. Sea $\lambda = r/q$ con $r, q \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Sea $y = \dfrac{r}{q}x$, si ponemos $z = \dfrac{x}{q} = \dfrac{y}{r} \in V$, luego $x = qz$, $y = rz$. Tenemos entonces

$$g(x) = \psi^{-1}(f(\phi(qz))) = \psi^{-1}(f(\phi(z)^q)) = \psi^{-1}(f(\phi(z))^q).$$

Veamos ahora que $\psi^{-1}(f(\phi(z))^q) = q\psi^{-1}(f(\phi(z))) = qg(z)$. Es suficiente probar que si $u \in \psi(W)$ es tal que $u^q \in \psi(W)$, entonces $\psi^{-1}(u^q) = q\psi^{-1}(u)$; si $u = \psi(v)$, $u^q = \psi(v_1)$ luego $v_1/q \in W$ y $(\psi(v_1/q))^q = u^q$ de aquí que $\psi(v_1/q) = u = \psi(v)$ y por la inyectividad $v_1 = qv$. Análogamente se tiene que $g(y) = rg(z)$.
Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ tenemos que $x \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ y $\lambda x \in V$ entonces

$$g(\lambda x) = \lambda g(x) \ (1).$$

Sea $x \in L(G)$ y $\lambda,\lambda' \in \mathbb{R} - \{0\}$ tales que $\lambda x,\lambda' x \in V$. Luego por (1)

$$g(\lambda' x) = g(\frac{\lambda'}{\lambda}\lambda x) = \frac{\lambda'}{\lambda}g(\lambda x)$$

y entonces

$$\frac{1}{\lambda}g(\lambda x) = \frac{1}{\lambda'}g(\lambda' x).$$

Debido a esto queda bien definida una extensión h de g sobre $L(G)$ como $h(x) = \frac{1}{\lambda}g(\lambda x)$ para todo λ tal que $\lambda x \in V$. Claramente h es continua. Veamos que si $x \in L(G), \lambda \in \mathbb{R}$ entonces $h(\lambda x) = \lambda h(x)$.
Sea $\lambda' \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $\lambda' x \in V$ y $\lambda'\lambda x \in V$. Tenemos que

$$h(\lambda x) = \frac{1}{\lambda'}g(\lambda'\lambda x) = \frac{1}{\lambda'}\lambda g(\lambda' x) = \lambda\frac{1}{\lambda'}g(\lambda x) = \lambda h(x).$$

Sean $x,y \in L(G)$, por las fórmulas de Lie-Trotter tenemos que:

$$\begin{aligned} h(x) + h(y) &= \lim_{\lambda\to 0,\lambda\in\mathbb{R}} \lambda^{-1}\psi^{-1}(\psi(\lambda h(x))\psi(\lambda h(y))) \\ &= \lim_{\lambda\to 0,\lambda\in\mathbb{R}} \lambda^{-1}\psi^{-1}(\psi(h(\lambda x))\psi(h(\lambda y))). \end{aligned}$$

Para $|\lambda|$ suficientemente chico, $\lambda x \in V$ y $\lambda y \in V$ esta expresión resulta

$$\begin{aligned} &= \lim_{\lambda\to 0,\lambda\in\mathbb{R}} \lambda^{-1}\psi^{-1}(f(\phi(\lambda x))f(\phi(\lambda y))) \\ &= \lim_{\lambda\to 0,\lambda\in\mathbb{R}} \lambda^{-1}(\psi^{-1}\circ f)(\phi(\lambda x))(\phi(\lambda y)))(\text{pues } f \text{ es morfismo de grupos}) \\ &= \lim_{\lambda\to 0,\lambda\in\mathbb{R}} \lambda^{-1}(g(\phi^{-1}(\phi(\lambda x))(\phi(\lambda y))) \\ &= \lim_{\lambda\to 0,\lambda\in\mathbb{R}} h(\lambda^{-1}(\phi^{-1}(\phi(\lambda x))(\phi(\lambda y))) \\ &= h(\lim_{\lambda\to 0,\lambda\in\mathbb{R}} \lambda^{-1}(\phi^{-1}(\phi(\lambda x))(\phi(\lambda y))) \\ &= h(x+y) \end{aligned}$$

Como h es continua y lineal, entonces $g = h\mid_V$ es diferenciable. Luego f es diferenciable sobre $\phi(V)$ y por lo tanto es diferenciable. Además por naturalidad de exp se tiene que $g = df$. □

Corolario 1.7.11. *Si $G \xrightarrow{f} H$ es un homomorfismo continuo entre grupos de Lie entonces $f \in C^w$.*

Demostración. Como f es diferenciable, en un entorno de la identidad podemos factorizarla mediante la carta exponencial y el logaritmo de manera que

$$f(g) = \exp \circ\, df_1 \circ \log(g),$$

luego como la exponencial, el logaritmo y df_1 son analíticas (esta por ser lineal) se tiene que f es analítica. $\square$

Observación 1.7.12. *Si G es un grupo de Lie de dimensión finita de clase C^0 entonces G tiene estructura de grupo de Lie de clase C^w. Este resultado es el quinto problema de Hilbert, cuya demostracion puede verse en [Zip].*

Capítulo 2

Estructura de Lie-Banach en un grupo cociente

2.1. Subgrupos de Lie

Definición 2.1.1. *Sea G un grupo de Lie-Banach sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.*
(a) Un subgrupo analítico de G es un grupo de Lie-Banach H sobre $\mathbb{K}$ el cual es un subgrupo de G, la inclusión $\varepsilon : H \to G$ es diferenciable y su diferencial $L(\varepsilon) : L(H) \to L(G)$ es un monomorfismo. Vamos a identificar $L(H)$ con su imagen $\mathfrak{h} \subset L(G)$. Luego la función exponencial de H será $\exp_G |_{\mathfrak{h}}$.

(b) Un subgrupo analítico H de G se llama subgrupo de Lie de G si la topología de subgrupo analítico coincide con la inducida de G, es decir la inclusión ε es un embeding.

Teorema 2.1.2. *Sea H un subgrupo de Lie de G según 2.1.1 (ii), luego*

$$L(H) = \{X \in L(G) : \exp_G(\mathbb{R}X) \subset H\}$$

Demostración. Si $X \in L(H)$, supongamos via la identificación que $X \in L(\varepsilon)(\mathfrak{h})$ luego por naturalidad se tiene que $\exp(tX) \in \varepsilon(H) = H$ para todo t. Recíprocamente, si para cada $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tX) \in H$, la aplicación $t \overset{\alpha}{\mapsto} \exp(tX)$ es diferenciable de $\mathbb{R} \to H$. Sea $\widetilde{X}$ el campo invariante a izquierda en H determidado por $\dot{\alpha}(0)$. Luego $L(\varepsilon)(\widetilde{X}) = X$.

□

Observación 2.1.3. *Recíprocamente si H es un subgrupo cerrado de G, luego $\mathfrak{h} := \{X \in L(G) : \exp_G(\mathbb{R}X) \subset H\}$ es una subálgebra cerrada de $L(G)$. En efecto, si*

$x_n \to x \in L(G)$ con $x_n \in \mathfrak{h}$, entonces por continuidad $\exp(tx) = \lim_{n\to\infty} \exp(tx_n) \in H$, para todo $t \in \mathbb{R}$, con lo cual $\mathfrak{h}$ es un subconjunto cerrado. Debido a las fórmulas de Lie-Trotter, la suma y el corchete de elementos de $\mathfrak{h}$ esta en $\mathfrak{h}$ por ser H cerrado. Esta álgebra $\mathfrak{h}$ es el álgebra de Lie asociada al subgrupo H.

Teorema 2.1.4. *Sea $H \subset G$ un subgrupo cerrado y sean $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ las respectivas álgebras de Lie-Banach, luego el subgrupo H tiene una única estructura de grupo de Lie-Banach que lo hace subgrupo de Lie de G con $\mathfrak{h}$ el álgebra de Lie de H si y solo si existe un entorno U de $0 \in \mathfrak{g}$ suficientemente pequeño tal que*

$$\exp(U \cap \mathfrak{h}) = \exp(U) \cap H.$$

Demostración. Primero veamos que si existe un entorno U de $0 \in \mathfrak{g}$ suficientemente pequeño tal que $\exp(U \cap \mathfrak{h}) = \exp(U) \cap H$ entonces H es subgrupo de Lie de G, en efecto como $d\exp_0 = id$ existe un entorno V de 0 tal que $\exp|_V$ es un difeomorfismo. Supongamos entonces que $U \subset V$, la hipótesis implica que tenemos un entorno abierto de $e \in H$ dado por $\exp(U \cap \mathfrak{h})$ pues este se obtiene como intersección de un abierto de G ($\exp(U)$) y H. Esto permite utilizar la exp como carta de local de H, es decir en un entorno de e,

$$\varphi = \exp|_{U\cap\mathfrak{h}} \colon U \cap \mathfrak{h} \to \exp(U) \cap H.$$

Esta carta la trasladamos a todo H usando los difeomorfismos de G dados por $\{l_\sigma\}_{\sigma\in H}$ obteniendo asi la colección

$$\{(H \cap \sigma\exp(U), \varphi^{-1} \circ l_{\sigma^{-1}}) : \sigma \in H\},$$

y de el Teorema 2.1.2 se tiene que el álgebra de Lie de H es $\mathfrak{h}$.
Recíprocamente, supongamos que H es subgrupo de Lie de G, sea U entorno de 0 tal que $\exp|_{U\cap\mathfrak{h}}$ sea un difeomorfismo, luego como $\exp(U \cap \mathfrak{h})$ es abierto en H y H tiene la topología de subespacio se tiene que $\exp(U \cap \mathfrak{h}) = A \cap H$ para $A \subset G$ entorno abierto de e. Luego tomando un entorno U' tal que $\exp(U') \subset A$ con $U' \subset U$ (por ejemplo $U' := \exp^{-1}(A) \cap U$) afirmamos que $\exp(U') \cap H = \exp(U' \cap \mathfrak{h})$. En efecto, siempre se tiene la inclusión $\exp(U') \cap H \supseteq \exp(U' \cap \mathfrak{h})$, veamos que también se cumple la otra; sea $x = \exp(u') \in H$, con $u' \in U'$ luego por construcción de U' $x \in A \cap H = \exp(U \cap \mathfrak{h})$ entonces $x = \exp(u)$ con $u \in U \cap \mathfrak{h}$ luego $\exp(u) = \exp(u')$ y por la inyectividad de la exponencial se tiene que $u = u'$. De aqui que $x \in \exp(U' \cap \mathfrak{h})$. □

Ejemplo 2.1.5. *Sea $G = S^1 \times S^1$ el toro y consideremos la curva*

$$\gamma(t) = (e^{it\pi}, e^{iat\pi})$$

con $a \notin \mathbb{Q}$, sea H=Im γ. Es fácil ver que H posee estructura de subgrupo analítico de G pero no de subgrupo de Lie, usando la caracterización del Lema 2.1.4 y que H es denso en G.

Lema 2.1.6. *Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos de Lie-Banach, luego $S := f^{-1}(T)$ es un subgrupo de Lie de G cuando T es subgrupo de Lie de H.*

Demostración. Sean

$$\mathfrak{g} := L(G)$$

$$\mathfrak{s} := L(S) := \{X \in \mathfrak{g} : \exp_G(\mathbb{R}X) \subset S\}$$

y

$$\mathfrak{t} := L(T).$$

Por la naturalidad de la exponencial se tiene que $\mathfrak{s} = L(f)^{-1}(\mathfrak{t})$, en efecto si $X \in \mathfrak{g}$ es tal que $L(f)(X) \in \mathfrak{t}$ luego $f(\exp_G X) = \exp_G(L(f)(X)) \in T$ entonces $\exp(X) \in f^{-1}(T) = S$. Recíprocamente si $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\exp_G(\mathbb{R}X) \in S$ entonces $\exp(L(f)(X)) = f(\exp(\mathbb{R}X)) \in T$. Supongamos que S no sea un subgrupo de Lie de G, luego por el Teorema 2.1.4 $\forall$ U entorno de 0 de $\mathfrak{g}$ se tiene que $\exp_G(U) \cap S \nsubseteq \exp_G(U \cap \mathfrak{s})$, en particular podemos tomar una sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{s}$ tal que $\exp_G(X_n) \in S$ $\forall n$ y $X_n \to 0$ en $\mathfrak{g}$ cuando $n \to \infty$. Como T es subgrupo de Lie de H, existe V entorno de 0 en $L(H)$ tal que $\exp_H$ es inyectiva en V y además $T \cap \exp_H(V) = \exp(\mathfrak{t} \cap V)$. Sea $U := L(f)^{-1}(V)$ que es un entorno de 0 en $\mathfrak{g}$, luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \in U$ $\forall n \geq n_0$. Luego $\exp_H(L(f)(X_n)) = f(\exp_G(X_n)) \in T$ luego por la inyectividad de exp se tiene que $L(f)(X_n) \in \mathfrak{t}$ para todo $n \geq n_0$, entonces $X_n \in L(f)^{-1}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{s}$, lo cual es una contradicción pues (X_n) esta en $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{s}$.

□

2.2. Teorema del cociente

Teorema 2.2.1. *(Teorema del cociente) Sea G un grupo de Lie-Banach sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, con álgebra de Lie $L(G) = \mathfrak{g}$, y supongamos que N es un subgrupo normal de G. Definimos $\mathfrak{n} := \{X \in \mathfrak{g} : \exp_G(\mathbb{R}X) \subseteq N\}$, y sea $q : G \to G/N$, $Q : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$, las proyecciones a los respectivos cociente. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, suponemos además que $\mathfrak{n}$ es una subálgebra de Lie compleja de $\mathfrak{g}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Existe un homomorfismo $\varphi : G \to H$ en un grupo de Lie-Banach H sobre $\mathbb{K}$ tal que $\ker(\varphi) = N$.
(b) G/N es un grupo de Lie-Banach sobre $\mathbb{K}$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$, tal que

$$q \circ \exp_G = \exp_{G/N} \circ Q.$$

(c) N es subgrupo de Lie de G.

Demostración. Daremos la demostración solo en el caso real; el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se obtiene con el mismo argumento.
(b)⇒(a): Es claro tomando $H := G/N$ y $\varphi := q$.

(a)⇒(c): Por 2.1.6 debido a que $N = \ker(\varphi) = \varphi^{-1}(e)$.

(c)⇒(b): Podemos tomar una norma en $\mathfrak{g}$ compatible con la topología, por ejemplo la inducida por el espacio Banach que modela a G de modo tal que normalizandola obtenemos una estructura de álgebra de Lie normada. El cociente de álgebras de Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ también es normada dotada con la norma cociente, es decir $\|\bar{x}\|_{\mathfrak{g}/\mathfrak{n}} := d(x, \mathfrak{n})$ (la distancia de x a $\mathfrak{n}$). Luego la serie de BCH converge absolutamente sobre $V \times V$ para V una bola suficientemente pequeña centrada en 0 en $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. Por el Corolario 1.7.3 existe una bola abierta $W \subseteq V$ centrada en 0 tal que $W * W \subseteq V$; de aquí que $X * Y * Z$ esta definido para todo $X, Y, Z \in W$. Además, existe una bola abierta U centrada en 0 en $\mathfrak{g}$ tal que la serie de BCH converge absolutamente en U. Achicando U si es necesario y como N es subgrupo de Lie de G podemos suponer que $\exp_G|_U$ es un difeomorfismo en un abierto de G y que $\exp_G(U) \cap N = \exp_G(U \cap \mathfrak{n})$. Hay un entorno conexo simétrico del 0, $A \subseteq U$ en $\mathfrak{g}$ tal que $A * A \subseteq U$ y $Q(A) \subseteq W$; en efecto como antes existe $A' \subseteq U$ tal que $A' * A' \subseteq U$ podemos tomar entonces como A a la componente conexa de 0 del abierto $(Q^{-1}(W) \cap A') \cap (Q^{-1}(W) \cap A')^{-1}$. Luego $\exp_G(X * Y) = \exp_G(X)\exp_G(Y)$ para todo $X, Y \in A$.

Observación 1: Si $X, Y \in A$ y $Q(X) = Q(Y)$, entonces $q(\exp_G(X)) = q(\exp_G(Y))$. En efecto, veamos que si $Q(X) = Q(Y)$ tenemos que $Q(X * (-Y)) = Q(X) * (-Q(Y)) = 0$ es decir que $X * (-Y) \in \mathfrak{n}$. La primera igualdad se tiene del hecho que Q es morfismo de álgebras de Lie y de la naturaleza de la serie de BCH; en efecto si

$$X * (-Y) = X - Y - 1/2[X, Y] + 1/12[Y, [Y, X]] - 1/12[X, [Y, X]] + ...$$

aplicando Q y como la serie es absolutamente convergente se tiene que

$$Q(X * (-Y)) = Q(X) - Q(Y) - 1/2[Q(X), Q(Y)] + 1/12[Q(Y), [Q(Y), Q(X)]]-$$

$$1/12[Q(X), [Q(Y), Q(X)]] + ...$$

es claro entonces que si $Q(X) = Q(Y)$, como $[Q(X), Q(X)] = 0$ se tiene que $Q(X * (-Y)) = Q(X) * (-Q(Y)) = 0$. Luego como $X * (-Y) \in \mathfrak{n}$, tenemos que $e = q(\exp_G(X * (-Y)) = q(\exp_G(X)\exp_G(Y)^{-1}) = q(\exp_G(X))q(\exp_G(Y)^{-1}) =$

$q(\exp_G(X))q(\exp_G(Y))^{-1}$.

Observación 2: Si $X, Y \in A$ y $q(\exp_G(X)) = q(\exp_G(Y))$, entonces $X - Y \in \mathfrak{n}$. En efecto tenemos que $\exp_G(X * (-Y)) = \exp_G(X)\exp_G(Y)^{-1} \in N$, donde $X, -Y \in A$ y luego $X * (-Y) \in U$. Como $\exp_G(U \cap \mathfrak{n}) = \exp_G(U) \cap \mathfrak{n}$ se tiene que $\exp_G(X * (-Y)) \in \exp_G(U \cap \mathfrak{n})$ de donde por la inyectividad de la exponencial se deduce que $X * (-Y) \in \mathfrak{n}$. De aquí que $0 = Q(X * (-Y)) = Q(X) * (-Q(Y))$. Como $Q(X), Q(Y) \in W$ multiplicando por $Q(Y)$ se tiene que $Q(Y) = Q(X)$.

Sea $B := Q(A)$. Por la Observación 1 queda bien definida una aplicación $E : B \to G/N$ dada por $E(Q(X)) := q(\exp_G(X))$ para $X \in A$. La aplicación $Q\mid_A^B : A \to B$ es abierta y suryectiva, como q y $\exp_G\mid_A$ son continuas y abiertas entonces $q \circ \exp_G\mid_A$ es continua y abierta, de aquí que E es continua y abierta pues $E \circ Q\mid_A^B = q \circ \exp_G\mid_A$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\exp|_A"] \arrow[dr, "Q|_A^B"'] & G \arrow[r, "q"] & G/N \\
& Q(A) \arrow[ur, "E"'] &
\end{tikzcd}$$

Por la Observación 2, E es inyectiva. Sea $C_1 \subset A$ un entorno de 0 en $\mathfrak{g}$ tal que $C_1 * C_1 \subset A$ y definamos $C := Q(C_1)$. Luego para cada $X, Y \in C$, supongamos $X = Q(X_1), Y = Q(Y_1)$ con X_1, $Y_1 \in C_1$, luego se tiene

$$E(X * Y) = E(Q(X_1 * Y_1)) = q(\exp_G(X_1 * Y_1)) = q(\exp_G(X_1)\exp_G(Y_1)) =$$

$$= q(\exp_G(X_1))q(\exp_G(Y_1)) = E(X)E(Y).$$

Sea $U := E(C)$, que es entorno de e, tiene estructura de variedad diferenciable dada por la carta $(E(C), E^{-1})$ y además satisface las condiciones (i), (ii), (iii) del teorema 1.2.4. En efecto veamos que se cumplen (ii) y (iii):

(ii) Sea m la aplicación $m : E(C) \times E(C) \to E(C)$, $m(E(X), E(Y)) = E(X)E(Y)^{-1} = E(X * (-Y))$. Tomamos la carta $E \times E$ de $E(C) \times E(C)$, luego

$$E^{-1} \circ m \circ E \times E(X, Y) = E^{-1}(E(X * (-Y)) = X * (-Y)$$

es diferenciable.

$$\begin{tikzcd}
E(C) \times E(C) \arrow[r, "m"] & E(C) \arrow[d, "E^{-1}"] \\
C \times C \arrow[u, "E\times E"] \arrow[r, "X*(-Y)"'] & C
\end{tikzcd}$$

(iii) Análogamente se tiene que la aplicación $E(X) \overset{\gamma}{\mapsto} E(Y)E(X)E(Y)^{-1}$ de $E(C) \to E(C)$ es diferenciable, pues

$$E^{-1} \circ \gamma \circ E(X) = E^{-1}(E(Y * X * -(Y))) = Y * X * (-Y)$$

es diferenciable.

$$\begin{tikzcd} E(C) \arrow[r, "\gamma"] & E(C) \arrow[d, "E^{-1}"] \\ C \arrow[u, "E"] \arrow[r, "Y*X*(-Y)"'] & C \end{tikzcd}$$

Luego por el Teorema 1.2.4 existe una única estructura de grupo de Lie-Banach en

$$\langle E(C)\rangle = \langle E(B)\rangle = (G/N)_0$$

que hace de $E\mid_C^{E(C)}$ un difeomorfismo en la subvariedad abierta $E(C)$. Como $E(C)$ es abierto en G/N y $E\mid_C^{E(C)}$ es un homeomorfismo respecto de la topología en $E(C)$ inducida por G/N, claramente la topología de $(G/N)_0$ es la topología inducida por G/N. Como $(G/N)_0$ es normal en G/N queda bien definido el automorfismo

$$(G/N)_0 \overset{\beta}{\to} (G/N)_0$$
$$\bar{g} \mapsto \bar{x}\bar{g}\bar{x}^{-1}$$

para cada $\bar{x} \in G/N$. Como β es un homomorfismo continuo entre grupos de Lie-Banach, este resulta diferenciable por el Teorema 1.7.9. Luego aplicando nuevamente el Teorema 1.2.4 para el abierto $(G/N)_0$ se tiene que G/N tiene estructura de grupo de Lie-Banach.

Observemos que si λ, λ' son suficientemente chicos se cumple que $E((\lambda + \lambda')Q(X_1)) = E(Q(\lambda X_1))E(Q(\lambda' X_1))(1)$. Extendamos la función E a $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ via

$$\exp_{G/N} : \mathfrak{g}/\mathfrak{n} \to G/N$$

$$\exp_{G/N}(X) := E(\frac{1}{n}X)^n$$

donde $X \in \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n}X \in C$. Veamos que esta bien definida; en efecto si $m \in \mathbb{N}$ es tal que $\frac{1}{m}X \in C$, luego $\frac{1}{nm}X \in C$ y por (1) se tiene que

$$E(\frac{1}{n}X) = (E(\frac{1}{nm}X))^m \ , \ E(\frac{1}{m}X) = (E(\frac{1}{nm}X))^n$$

de aqui que

$$(E(\frac{1}{n}X))^n = (E(\frac{1}{m}X))^m.$$

Luego $\exp_{G/N}$ esta bien definida, es diferenciable y es la aplicación exponencial de G/N. Por construcción de E se tiene que $q \circ \exp_G = \exp_{G/N} \circ Q$. $\square$

Corolario 2.2.2. *Supongamos que G es un grupo de Lie-Banach real y N un subgrupo normal cerrado de G. Luego el grupo topológico G/N tiene estructura de grupo de Lie-Banach real compatible con su topología cociente si y solo si N es subgrupo de Lie de G.*

2.3. Secciones del cociente

Teorema 2.3.1. *Sea N un subgrupo de Lie normal del grupo de Lie-Banach G. De acuerdo al teorema de Michael [Mi59], la aplicación cociente $Q : L(G) \to L(G)/L(N) = L(G/N)$ tiene una sección continua $\sigma : L(G/N) \to L(G)$. Como la exponencial de G/N es un homeomorfismo local, se tiene de aquí que la aplicación cociente $G \to G/N$ tiene secciones locales continuas.*

Demostración. Como la exponencial es un difeomorfismo local, dado $p \in G/N$ sea U entorno de p en G/N, tal que $\exp_{G/N}$ sea difeomorfismo. Veamos que si defimos $\bar{\sigma} : U \to G$ como $\bar{\sigma} := \exp_G \circ \sigma \circ {\exp_{G/N}}^{-1}$ es sección local de Q; por naturalidad se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
L(G) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\exp_G"'] & L(G/N) \arrow[l, bend right, "\sigma"'] \arrow[d, "\exp_{G/N}"'] \\
G \arrow[r, "Q"] & G/N \supseteq U \arrow[u, bend right, "{\exp_{G/N}}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$$Q(\exp_G \circ \sigma \circ {\exp_{G/N}}^{-1}) = \exp_{G/N} \circ q \circ \sigma \circ {\exp_{G/N}}^{-1} = \exp_{G/N} \circ {\exp_{G/N}}^{-1} = id$$

Además $\bar{\sigma}$ es continua por ser composición de funciones continuas. $\square$

Capítulo 3

Grupos de homotopia

En este capítulo desarrollaremos la sucesión exacta larga en los grupos de homotopia de un fibrado, que utilizaremos para la construcción del grupo de periodos y para la integrabilidad de algebras de Lie-Banach. Usaremos en esta sección I para denotar el intervalo $[0, 1]$.

3.1. Fibrados

Definición 3.1.1. *Un fibrado localmente trivial es una cuadrupla (E, B, F, p) donde $p : E \to B$ es una aplicación continua, B se dice espacio de base para el cual existe un recubrimiento por abiertos $\{U_\alpha\}$ y para cada U_α existe un homeomorfismo $\varphi_\alpha : U_\alpha \times F \to p^{-1}(U)$ tal que el siguiente diagrama resulte conmutativo*

$$\begin{tikzcd} & U_\alpha \times F \arrow[dl, "\varphi_\alpha"'] \arrow[d, "pr_1"] \\ p^{-1}(U) \arrow[r, "p"'] & U_\alpha \end{tikzcd}$$

Proposición 3.1.2. *Sea N subgrupo de Lie normal de G grupo de Lie-Banach y sea $p : G \to G/N$ la proyección al cociente, entonces $(G, G/N, N, p)$ es un fibrado localmente trivial.*

Demostración. Vimos en el Teorema 2.3.1 que p admite secciones locales, luego para cada $g \in G/N$ existe U entorno de g tal que $\sigma : U \to G$ es una sección local de p. Definimos

$$\varphi_U : U \times N \to p^{-1}(U)$$
$$(x, y) \mapsto \sigma(x)y$$

que está bien definida pues p es homomorfismo de grupos y $p(y) = 1$, además es continua pues el producto de grupo es continuo. Definamos su inversa

$$\varphi_U{}^{-1} : p^{-1}(U) \to U \times N$$

como la aplicación

$$x \mapsto (p(x), (\sigma(p(x)))^{-1}x).$$

Está bien definida, es decir $(\sigma(p(x)))^{-1}x \in N$, en efecto como p es homomorfismo se tiene que $p((\sigma(p(x)))^{-1}x) = p(\sigma(p(x)))^{-1})p(x) = (p(\sigma(p(x)))^{-1}p(x) = p(x)^{-1}p(x) = 1$, es continua pues las proyeciones $p_1 \circ \varphi_U{}^{-1}$ y $p_2 \circ \varphi_U{}^{-1}$ son funciones continuas. Veamos por último que $\varphi_U \circ \varphi_U{}^{-1} = \varphi_U{}^{-1} \circ \varphi_U = id$

$$x \mapsto (p(x), (\sigma(p(x)))^{-1}x) \mapsto \sigma(p(x))(\sigma(p(x))^{-1}x = x$$

$$(x, y) \mapsto \sigma(x)y \mapsto (p(\sigma(x)y), y) = (x, y).$$

Luego φ_U es un homeomorfismo y se verifica que $p \circ \varphi_U$ es la proyección a la primer coordenada. □

Definición 3.1.3. *Una función continua $p : E \to B$ se dice que tiene la propiedad de levantado homotópico respecto de un espacio X si dadas $f' : X \to E$ y $F : X \times I \to B$ continua tal que $F(x, 0) = pf'(x)$ para $x \in X$, existe $F' : X \times I \to E$ continua tal que $F'(x, 0) = f'(x)$ y $p \circ F' = F$; una función con esta propiedad se llama un fibrado. Una función $p : E \to B$ es un fibrado débil si p tiene la propiedad de levantado homotópico respecto de la colección de cubos $\{I^n\}$. Es claro que un fibrado es en particular un fibrado debil.*

3.2. Homotopia y sucesiones exactas de clases de homotopia

Definición 3.2.1. *Un par topológico es un par (X, A) que consiste en un espacio topológico X y un subespacio $A \subset X$. Un subpar $(X', A') \subset (X, A)$ es un par tal que $X' \subset X$ y $A' \subset A$. Una función $f : (X, A) \to (Y, B)$ entre pares es una función continua $f : X \to Y$ tal que $f(A) \subset B$. Un caso particular importante de parejas de espacios son las parejas de la forma (X, x_0) con $x_0 \in X$ un punto específico llamado punto base. A estas parejas de espacios se les llama espacios punteados.*
Dado un par (X, A), notamos $(X, A) \times I$ al par $(X \times I, A \times I)$. Sea $X' \subset X$ y supongamos que $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ coincidan sobre X' es decir $f_0 \mid_{X'} = f_1 \mid_{X'}$. Luego f_0 es homotopica a f_1 relativa a X', notada como $f_0 \simeq f_1$ rel X' si existe una función

$$F : (X, A) \times I \to (Y, B)$$

tal que $F(x,0) = f_0(x)$ y $F(x,1) = f_1(x)$ para todo $x \in X$ y $F(x,t) = f_0(x)$ para $x \in X'$ y $t \in I$.

Ejemplo 3.2.2. *Sea $X = Y = \mathbb{R}^n$ y definimos $f_0(x) = x$ y $f_1(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R}^n$. Si $F : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ como*

$$F(x,t) = (1-t)x$$

luego $F : f_0 \simeq f_1$ rel $\{0\}$

Teorema 3.2.3. *La homotopia relativa a X' es una relación de equivalencia en el conjunto de funciones de (X,A) en (Y,B).*

Demostración. Reflexividad; para $f : (X,A) \to (Y,B)$ definimos $F : f \simeq f \; relX$ por $F(x,t) = f(x)$. Simetria; dada $F : f_0 \simeq f_1$ definimos $F' : f_1 \simeq f_0 \; relX'$ por $F'(x,t) = F(x, 1-t)$. Transitividad; dada $F : f_0 \simeq f_1 \; relX'$ y $G : f_1 \simeq f_2 \; relX'$ definimos $H : f_0 \simeq f_2 \; relX'$ como

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{si } 0 < x < 1/2, \\ G(x,2t-1) & \text{si } 1/2 < x < 1, \end{cases}$$

□

Esto muestra que el conjunto de aplicaciones de pares es partido en clases de equivalencia por la relación de homotopia relativa a X'. Usaremos la notación $[X,A;Y,B]_{X'}$ para denotar este conjunto de clases de homotopia. Dada $f : (X,A) \to (Y,B)$ usaremos $[f]_{X'}$ para denotar un elemento de $[X,A;Y,B]_{X'}$.

Definición 3.2.4. *Sea Z un espacio topológico con un punto base z_0. Definimos la suspensión de Z, la cual notaremos con SZ, al cociente de $Z \times I$ en el cual $(Z \times 0) \cup (z_0 \times I) \cup (Z \times 1)$ es identificado en un simple punto. Si $(z,t) \in Z \times I$ usaremos $[z,t]$ para denotar el correspondiente punto en SZ por la aplicación cociente $Z \times I \to SZ$. El punto $[z_0, 0] \in SZ$ tambien lo notaremos z_0 y SZ es un espacio punteado con punto base z_0. Si $f : Z \to Z'$, luego $Sf : SZ \to SZ'$ es definida por $Sf([z,t]) = [f(z), t]$.*

Teorema 3.2.5. *Para $n \geqslant 0$, $S(S^n)$ es homeomorfa a S^{n+1}.*

Demostración. Sea $p_0 = (1, 0, ..., 0)$ el punto base de S^n. Pensamos a $\mathbb{R}^{n+1}$ embebido en $\mathbb{R}^{n+2}$ como el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^{n+2}$ el cual su $n+2$-esima coordenada es 0. Luego S^n es embebida como un ecuador en S^{n+1},

$$S^n = \{z \in \mathbb{R}^{n+2} : \|z\| = 1, z_{n+2} = 0\}$$

y E^{n+1} es tambien embebido en E^{n+2}.

$$E^{n+1} = \{z \in \mathbb{R}^{n+2} : \|z\| \leqslant 1, z_{n+2} = 0\}.$$

Sean H_+ y H_- los dos semiesferas de S^{n+1} definidas por el ecuador S^n. Luego

$$H_+ = \{z \in S^{n+1} : z_{n+2} \geqslant 0\},\ H_- = \{z \in S^{n+1} : z_{n+2} \leqslant 0\},$$

$S^{n+1} = H_+ \cup H_-$ y $S^n = H_+ \cap H_-$. Además la proyección de $\mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^{n+1}$ define proyecciones $p_+ : H_+ \to E^{n+1}$ y $p_- : H_- \to E^{n+1}$ las cuales son homeomorfismos. Definimos una función $f : S(S^n) \to S^{n+1}$ por

$$f([z,t]) = \begin{cases} p_-^{-1}(2tz + (1-2t)p_0) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ p_+((2-2t)z + (2t-1)p_0) & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

y se verifica que f es un homeomorfismo. □

Observación 3.2.6. *Si X es un espacio topológico y $x_0 \in X$, el grupo fundamental de X basado en x_0 denotado $\pi_1(X, x_0)$ es definido como el grupo de clases de caminos cerrados con inicio y final en x_0. Una forma alternativa de describir este grupo es mediante clases de homotopia de funciones $(S(S^0), 1) \to (X, x_0)$ donde S^0 consiste en dos puntos, el -1 y el 1 con 1 el punto base. En efecto, sea $\lambda : I \to S(S^0)$ definida por $\lambda(t) = [-1, t]$, luego λ induce una biyección*

$$\lambda^\sharp[g] = [g \circ \lambda],\ g : (S(S^0), 1) = (S^1, 1) \to (X, x_0)$$

Definición 3.2.7. *Definimos el coproducto o suma cuña $X \vee Y$ del espacio punteado $(X \times Y, (x_0, y_0))$ como el subespacio*

$$X \vee Y := \{(x, y) \in X \times Y : x = x_0 \text{ o } y = y_0\}.$$

Es decir $X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$.

Sea X espacio topológico, definimos el cono $CX := X \times I/(X \times 0 \cup x_0 \times I)$, usaremos $[x, t]$ para notar un punto en CX. El espacio X es embebido como un subconjunto cerrado de CX via la aplicación $x \mapsto [x, 1]$. Si (X, A) es un par, luego CA es un subespacio de CX y el $C(X, A) := (CX, CA)$. Definimos el cono C_f de una aplicación $f : X' \to X$ como el espacio cociente de $CX' \vee X$ con la identificación $[x', 1] = f(x')$ para todo $x' \in X'$.
Una sucesión de tres pares y funciones

$$(X', A') \xrightarrow{f} (X, A) \xrightarrow{g} (X'', A'')$$

se dice exacta si para todo par (Y, B) la sucesión asociada

$$[Y, B; X', A'] \xrightarrow{f_\sharp} [Y, B; X, A] \xrightarrow{g_\sharp} [Y, B; X'', A'']$$

es exacta. Análogamente se dice coexacta si

$$[X'', A''; Y, B] \xrightarrow{g^\sharp} [X, A; Y, B] \xrightarrow{f^\sharp} [X', A'; Y, B].$$

Teorema 3.2.8. *Dada una aplicación $f : (X', A') \to (X, A)$ la sucesión*

$$(X', A') \xrightarrow{f} (X, A) \xrightarrow{i} (C_{f'}, C_{f''})$$

es coexacta.

Demostración. Sea (Y, B) un par y consideramos la sucesión

$$[C_{f'}, Cf''; Y, B] \xrightarrow{i^\sharp} [X, A; Y, B] \xrightarrow{f^\sharp} [X', A'; Y, B].$$

La composición $i \circ f$ es equivalente a la composición

$$(X', A') \subset C(X', A') \subset C(X', A') \vee (X, A) \xrightarrow{k} (C_{f'}, C_{f''})$$

donde k es la proyección al cociente. Además la inclusión $(X', A') \subset C(X', A')$ es homotópicamente nula, luego $i \circ f$ tambien lo es y por ello que $im(f^\sharp \circ i^\sharp) = 0$, hemos probado que $im(i^\sharp) \subset \ker f^\sharp$.
Supongamos que $f^\sharp[g] = 0$. Luego extendemos $g \circ f$ a una aplicación $G : C(X', A') \to (Y, B)$. A partir de G, g definimos una aplicación $G' : C(X', A') \vee (X, A) \to (Y, B)$ tal que $G'|C(X', A') = G$ y $G'|(X, A) = g$. Como

$$G'[x', 1] = (g \circ f)[x', 1] = g(f(x')) = G'(f(x'))$$

existe una aplicación $h : (C_{f'}, C_{f''}) \to (Y, B)$ tal que $G' = h \circ k$. Luego $h|(X, A) = g$, esto prueba que $g = h \circ i$ o sea que $[g] = i^\sharp[h]$ □

Usando esto tenemos una sucesión coexacta

$$(X', A') \xrightarrow{f} (X, A) \xrightarrow{i} (C_{f'}, C_{f''}) \xrightarrow{j} (C_{i'}, C_{i''}) \xrightarrow{i} (C_{j'}, C_{j''})$$

Es claro que podemos identificar a la suspensión como $SX = CX/X$. Para un par (X, A) definimos su suspensión como $S(X, A) := (SX, SA)$. Luego para cada aplicación $f : (X', A') \to (X, A)$ tenemos que $(C_{f'}, C_{f''})/X = S(X', A')$ y $k : (C_{f'}, C_{f''}) \to S(X', A')$ la aplicación cociente.

Teorema 3.2.9. *Para una aplicación $f : (X', A') \to (X, A)$ la sucesión*

$$(X', A') \xrightarrow{f} (X, A) \xrightarrow{i} (C_{f'}, C_{f''}) \xrightarrow{k} S(X', A') \xrightarrow{Sf} S(X, A)$$

es coexacta.

Demostración. Usaremos la sucesión coexacta que se dedujo del Teorema 3.2.8 y la existencia de una equivalencia homotópica $(C_{i'}, C_{i''}) \xrightarrow{k'} (C_{f'}, Cf'')/X = S(X', A')$ y la composición $(C_{f'}, C_{f''}) \xrightarrow{j} (C_{i'}, C_{i''}) \xrightarrow{k'} S(X', A')$ la miramos como la aplicación cociente k. Tambien consideraremos la existencia de una equivalencia homotópica $(C_{j'}, C_{j''}) \xrightarrow{k''} (C_{j'}, C_{j''})/CC_{i'} = S(X', A')$. Sea $g : S(X', A') \to S(X, A)$ la aplicación definida por $g([x', t]) = [f(x'), 1-t]$ y $\bar{k} : (C_{i'}, C_{i''}) \to (C_{i'}, C_{i''})/C_{f'} = S(X, A)$, luego $\bar{k}$ y $g \circ k'$ son homotópicos, definiendo la homotopia $H : (C_{i'}, C_{i''}) \times I \to S(X, A)$ como

$$H([x', t], t') = [f(x'), 1 - tt'],\ x' \in X'; t, t' \in I$$

$$H([x, t], t') = [x, (1 - t')t],\ x \in X; t, t' \in I.$$

Luego tenemos diagrama homotópico conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(C_{i'}, C_{i''}) \arrow[r, "l"] \arrow[d, "k'"] & (C_{j'}, C_{j''}) \arrow[d, "k''"] \\
S(X', A') \arrow[r, "g"] & S(X, A)
\end{tikzcd}$$

en el cual k' y k'' son homotópicamente equivalentes, luego por la coexactitud de 3.2.8 se tiene la coexactitud de

$$(X', A') \xrightarrow{f} (X, A) \xrightarrow{i} (C_{f'}, C_{f''}) \xrightarrow{k} S(X', A') \xrightarrow{g} S(X, A).$$

Luego considerando el homeomorfismo $h([x, t]) = [x, 1-t]$, como $Sf = h \circ g$ se tiene el resultado. □

Definimos la n-esima suspensión del par (X, A) de manera inductiva como $S^0(X, A) = (X, A)$, $S^n(X, A) = S(S^{n-1}(X, A))$.

Teorema 3.2.10. *Para cada aplicación $f : (X', A') \to (X, A)$ la sucesión*

$$(X', A') \xrightarrow{f} (X, A) \xrightarrow{i} \ldots\ldots \xrightarrow{S^n f} S^n(X, A) \xrightarrow{S^n i} S^n(C_{f'}, C_{f''}) \xrightarrow{S^n k} S^{n+1}(X'A') \xrightarrow{S^{n+1}} \ldots\ldots$$

es coexacta

Demostración. Se deduce del teorema anterior y usando el hecho que la suspensión preserva la coexactitud. □

3.3. Grupos de homotopia de orden n

Utilizaremos el 0 como punto base de I y $\dot{I} := \{0,1\}$ para el subespacio de I. Sea X un espacio, para $n \geq 1$ el grupo de homotopia $\pi_n(X)$ es el grupo $[S^n(\dot{I}); X]$ pues coincide con la definición usual ya que $S^n \simeq S^n(\dot{I})$. Sea (X,A) un par con punto base x_0, para $n \geq 1$ el n-esimo grupo de homotopia relativa, notado $\pi_n(X,A)$ es $[S^{n-1}(I,\dot{I}); X, A]$. Hay una correspondencia natural entre $[S^{n-1}(I/\dot{I}); X, \{x_0\}]$ y $[S^n(\dot{I}); X]$ la cual establece una correspondencia entre el grupo de homotopia relativa $\pi_n(X,\{x_0\})$ con el grupo de homotopia absoluto $\pi_n(X)$. La inclusion $j : (X, x_0) \hookrightarrow (X, A)$ induce un homomorfismo $j_\sharp : \pi_n(X) \to \pi_n(X, A)$.
Para $n \geq 1$ hay una aplicación (la cual es un homomorfismo si $n \geq 2$)

$$\partial : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)$$

definida por restricción a la segunda coordenada del par, esto es dada $\alpha : S^{n-1}(I,\dot{I}) \to (X, A)$, entonces $\partial[\alpha] = [\alpha | S^{n-1}(\dot{I})]$. Es claro por definición que si $f : (X', A', x_0') \to (X, A, x_0)$ hay un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X', A', x_0') \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_\sharp"] & \pi_{n-1}(A', x_0') \arrow[d, "(f|A')_\sharp"] \\
\pi_n(X, A, x_0) \arrow[r, "\partial"] & \pi_n(A, x_0).
\end{tikzcd}$$

Dado un par (X, A) de espacios punteados, sea $i : A \subset X$ y $j : (X, \{x_0\}) \subset (X, A)$ luego tenemos una sucesión del par (X, A) dada por

$$...... \to \pi_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A) \xrightarrow{i_\sharp} \pi_n(X) \xrightarrow{j_\sharp} \pi_n(X, A) \xrightarrow{\partial} ....$$

Teorema 3.3.1. *La sucesión del par es exacta.*

Demostración. Sea $f : (\dot{I}, \{0\}) \subset (\dot{I}, \dot{I})$ y sea $f' : \dot{I} \subset \dot{I}$ y $f'' : \{0\} \subset \dot{I}$. Por el Teorema 3.2.10 hay una sucesión coexacta

$$(\dot{I}, \{0\}) \xrightarrow{f} (\dot{I}, \dot{I}) \xrightarrow{i} (C_{f'}, C_{f''}) \xrightarrow{k} S(\dot{I}, \{0\}) \xrightarrow{Sf} S(\dot{I}, \dot{I}) \to ......$$

Sea $g : (C_{f'}, C_{f''}) \to (I, \dot{I})$ el homeomorfismo definido por $g([0,t]) = 0$ y $g([1,t]) = t$. Luego la composición $g \circ i$ es la inclusión $i' : (\dot{I}, \dot{I}) \subset (I, \dot{I})$ y $k \circ g^{-1}$ es igual a la composición

$$(I, \dot{I}) \xrightarrow{k'} (I/\dot{I}, \{0\}) \xrightarrow{h} (S(\dot{I}), \{0\}),$$

y h el homomorfismo de la identificación de $\pi_n(X, \{x_0\})$ con $\pi_n(X)$. De aqui que hay una sucesión coexacta

$$(\dot{I}, \{0\}) \xrightarrow{f} (\dot{I}, \dot{I}) \xrightarrow{i'} (I, \dot{I}) \xrightarrow{h \circ k'} S(\dot{I}, \{0\}) \xrightarrow{Sf} ....$$

esto produce una sucesión exacta

$$...... \to \pi_{n+1}(X,A) \overset{S^n i'^\sharp}{\to} \pi_n(A) \overset{S^n f^\sharp}{\to} \pi_n(X) \overset{S^{n-1}(h\circ k')^\sharp}{\to} \pi_n(X,A) \overset{\partial}{\to} ....$$

luego se sigue del hecho que $S^n i'^\sharp = \partial$, $S^n f^\sharp = i_\sharp$, $S^{n-1}(h\circ k')^\sharp = j_\sharp$. □

Teorema 3.3.2. *Sea $p : E \to B$ un fibrado débil y supongamos que $b_0 \in B' \subset B$. Sea $E' = p^{-1}(B')$ y sea $e_0 \in p^{-1}(b_0)$. Entonces p induce una biyección*

$$p_\sharp : \pi_n(E,E',e_0) \approx \pi_n(B,B',b_0)$$

Demostración. Veamos primero que $p_\sharp$ es sobreyectiva para ello sea $\alpha : (I^n, \dot{I}^n, z_0) \to (B,B',b_0)$ un representante de un elemento de $\pi_n(B,B',b_0)$. Como z_0 es retracto por deformación fuerte de I^n, (I^n, z_0) (el par poliedro) y considerando las aplicaciones $g' : \{z_0\} \to E$ y $H' : I^n \to B$ donde $g'(z_0) = e_0$ y $H' = \alpha|I^n$, obtenemos una aplicación $G' : I^n \to E$ tal que $p\circ G' = H'$ y $G'(z_0) = e_0$. Luego

$$G'(\dot{I}^n) \subset p^{-1}(H'(\dot{I}^n)) \subset p^{-1}(B') = E'.$$

Luego G' define una aplicación $\alpha' : (I^n, \dot{I}^n, z_0) \to (E,E',e_0)$ tal que $p\circ\alpha' = \alpha$.
Veamos que $p_\sharp$ es inyectiva; sean $\alpha_0, \alpha_1 : (I^n, \dot{I}^n, z_0) \to (E,E',e_0)$ tal que $p\circ\alpha_0 \simeq p\circ\alpha_1$. Sea $X' = I^n \times I$ y $A' = (I^n \times 0) \cup (z_0 \times I) \cup (I^n \times 1)$. Luego (X',A') es un par poliedro y debido a que X' y A' son contractibles, A' es un retracto por deformación fuerte de X'. Sea $g' : A' \to E$ definida por $g'(z,0) = \alpha_0(z)$, $g'(z_0,t) = e_0$, $g'(z,1) = \alpha_1(z)$ y H' la aplicación que es homotopia de $p\circ\alpha_0$ a $p\circ\alpha_1$. Luego existe una aplicación $G' : X' \to E$ tal que $p\circ G' = H'$ y $G'|A' = g'$; esta aplicación G' es una homotopia de α_0 en α_1. □

Corolario 3.3.3. *Sea $p : E \to B$ un fibrado débil, $b_0 \in B$, y $e_0 \in F = p^{-1}(b_0)$. Luego p induce una biyección*

$$p_\sharp : \pi_n(E,F,e_0) \approx \pi_n(B,b_0).$$

Demostración. Se sigue del teorema anterior tomando $B' = \{b_0\}$ y usando la identificación canonica $\pi_n(B,\{b_0\},b_0) = \pi_n(B,b_0)$. □

Si $p : E \to B$ es un fibrado débil con $F = p^{-1}(b_0)$ y $e_0 \in F$, definimos

$$\bar{\partial} : \pi_n(B,bo) \to \pi_{n-1}(F,e_0)$$

como la composición $\pi_n(B,b_0) \overset{p_\sharp^{-1}}{\to} \pi_n(E,F,e_0) \overset{\partial}{\to} \pi_{n-1}(F,e_0)$ Luego como consecuencia de la exactitud de la sucesion homotópica del par (E,F) se obtiene la sucesion homotopica de un fibrado débil

$$...... \to \pi_n(F,e_0) \overset{i_\sharp}{\to} \pi_n(E,e_0) \overset{p_\sharp}{\to} \pi_n(B,b_0) \overset{\bar{\partial}}{\to} \pi_{n-1}(F,e_0) \to ....$$

Observación 3.3.4. *En nuestro caso, como vimos al principio del capítulo, si N es un subgrupo normal del grupo de Lie-Banach G, $(G, G/N, N, p)$ es un fibrado localmente trivial el cual es un fibrado por ser G/N paracompacto y Hausdorff, en particular es un fibrado débil luego tenemos una suseción exacta*

$$\pi_2(H/N) \to \pi_1(N) \to \pi_1(H) \to \pi_1(H/N).$$

Teorema 3.3.5. *Si G es un grupo de Lie conexo de dimensión finita entonces $\pi_2(G) = 0$.*

Demostración. Como todo grupo de Lie conexo admite un subgrupo maximal compacto H tal que $G \simeq H \times \mathbb{R}^m$, se tiene en particular que G y H tienen el mismo tipo de homotopia, es decir que $\pi_n(G) \simeq \pi_n(H)$. Podemos suponer entonces que G sea compacto, luego G tiene un toro maximal T de manera que el cociente G/T es un fibrado. Como $\pi_2(T) = 0$ se tiene de la suseción exacta

$$0 \to \pi_2(G) \to \pi_2(G/T) \to \pi_1(T)$$

que $\pi_2(G)$ es un grupo de torsión libre, debido a que $\pi_2(G/T) = H_2(G/T)$ es un grupo libre de 2 celdas en G/T. Luego por el teorema de Hopf's como $\pi_2(G)$ es finito se tiene que $\pi_2(G) = 0$. Para mayor referencias este teorema ver [MiL].

□

Capítulo 4

Recubrimientos y extensiones centrales de grupos de Lie

En este capítulo veremos propiedades de recubrimientos, y la estructura del grupo recubridor universal de un grupo de Lie-Banach. Finalmente utilizaremos estas propiedades para dar un teorema de caracterización de extensiones centrales de grupos.

4.1. Grupo recubridor universal

Definición 4.1.1. *Sea $p : E \to B$. Si f es una aplicación continua de algún espacio X en B, un levantamiento de f es una aplicación continua $\tilde{f} : X \to E$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

Definición 4.1.2. *Una aplicación continua y sobreyectiva $p : E \to B$ se dice que es una aplicación recubridora o revestimiento si todo punto $b \in B$ tiene un entorno U tal que $p^{-1}(U)$ puede escribirse como una unión disjunta de conjuntos abiertos V_α de E tales que para cada α, $p\,|_{V_\alpha}$ es un homeomorfismo de V_α en U.*

El siguiente teorema establece condiciones necesarias y suficientes sobre cuando un revestimiento posee un levantamiento, este teorema lo utilizaremos para construir una estructura de grupo de Lie-Banach en el espacio recubridor universal.

Teorema 4.1.3 (Levantamiento general)**.** *Sea $p : E \to B$ una aplicación recubridora y $p(e_0) = b_0$. Sea $f : Y \to B$ una aplicación continua con $f(y_0) = b_0$. Supongamos que Y es conexo por caminos y localmente conexo por caminos. La aplicación f se puede levantar a una aplicación $\tilde{f} : Y \to E$ continua tal que $\tilde{f}(y_0) = e_0$ si y solo si*

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Además, tal levantamiento es único.

Demostración. Ver [Mun] p.540 *Lema del levantamiento general.* □

A continuación daremos una breve demostración sobre existencia de aplicaciones recubridoras en espacios topológicos.

Definición 4.1.4. *Un espacio X se dice que es conexo por caminos o arco-conexo si para cada par de puntos x, y de X existe una aplicación continua $f : [0, 1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.*

Definición 4.1.5. *Un espacio X se dice localmente conexo por caminos en x si para cada entorno U de x existe un entorno V conexo por caminos de x contenido en U.*

Definición 4.1.6. *Un espacio B se dice semilocalmente simplemente conexo si para cada $b \in B$ existe un entorno U de b tal que el homomorfismo $i_* : \pi_1(U, b) \to \pi_1(B, b)$ inducido por la inclusión es trivial.*

Teorema 4.1.7. *Sea B conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Sea $b_0 \in B$, dado un subgrupo H de $\pi_1(B, b_0)$ existe una aplicación recubridora $p : E \to B$ y un punto $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ tales que $p_*(\pi_1(E, e_0)) = H$.*

Demostración. Sea $\mathcal{P} := \{\gamma : [0, 1] \to B : \gamma(0) = b_0\}$, se define una relación de equivalencia en $\mathcal{P}$ poniendo $\alpha \sim \beta$ si α, β terminan en el mismo punto y $[\alpha * \bar{\beta}] \in H$. Definimos $E := \mathcal{P}/\sim$, denotaremos $\alpha^\sharp$ a las clases y definimos $p : E \to B$ como

$$p(\alpha^\sharp) = \alpha(1).$$

Hay que dotar a E de una topología tal que p resulte una aplicación recubridora: si $\alpha \in \mathcal{P}$ y es U un entorno conexo por caminos de $\alpha(1)$ se define

$$B(U, \alpha) = \{(\alpha * \delta)^\sharp : \delta \text{ es un camino en } U \text{ partiendo de } \alpha(1)\},$$

que resulta una base para la topología de E. Probemos que cada punto de B tiene un entorno que esta regularmente cubierto por p. Dado $b_1 \in B$, tomemos U un entorno conexo por caminos de b_1 que satisface la condición adicional que $\pi_1(U, b) \to \pi_1(B, b)$

es trivial, afirmamos que U está regularmente cubierto por p, veamos primero que $p^{-1}(U) = \cup_\alpha B(U,\alpha)$ donde α recorre todos los caminos en B de b_0 a b_1. Es claro que vale $\supseteq$, por otra parte si $\beta^\sharp \in p^{-1}(U)$ entonces $\beta(1) \in U$, escojamos un camino δ en U desde b_1 hasta $\beta(1)$ y sea α el camino $\beta * \bar{\delta}$ de b_0 a b_1, entonces $[\beta] = [\alpha * \delta]$ de manera que $\beta^\sharp = (\alpha * \delta)^\sharp$. Veamos ahora que p define una aplicación biyectiva entre $B(U,\alpha)$ y U. Veamos la inyectividad, supongamos que $p((\alpha * \delta_1)^\sharp) = p((\beta * \delta_2)^\sharp)$, con δ_1, δ_2 caminos en U, entonces $\delta_1(1) = \delta_2(2)$ luego $\delta_1 * \bar{\delta_2}$ es un lazo homotópico al constante (aqui usamos que $\pi_1(U,b) \to \pi_1(B,b)$ es trivial), luego $[\alpha * \delta_1] = [\alpha * \delta_2]$. Para probar que E es arco-conexo, sea α un camino en B partiendo de b_0 y e_0 la clase de equivalencia del camino constante en b_0, para cada $c \in I$, sea $\alpha_c : I \to B$ el camino definido por $\alpha_c(t) = \alpha(tc)$, así podemos definir $\tilde{\alpha}(c) = (\alpha_c)^\sharp$, $\tilde{\alpha} : I \to E$ es continuo comienza en e_0 y acaba en $\alpha^\sharp$. $\square$

Observación 4.1.8. *Si $H = 1$, con las hipótesis anteriores E resulta simplemente conexo.*

Dado un espacio topológico X que cumpla las hipótesis del Teorema 4.1.7 notaremos $\widetilde{X}$ a su espacio recubridor.
Si X tiene estructura de variedad diferenciable, podemos dotar a $\widetilde{X}$ con estructura de variedad diferenciable tal que la aplicación recubridora $p : \widetilde{X} \to X$ resulte C^∞, en efecto sea U entorno en X tal que $p \mid_{p^{-1}(U)}$ sea homeomorfismo y (U,ϕ) carta de X se tiene que $\phi \circ p \mid_{p^{-1}(U)}$ es una carta para $\widetilde{X}$ y por construcción p resulta diferenciable.
Si ahora G es un grupo de Lie, luego este posee un espacio recubridor $\widetilde{G}$, con $\widetilde{G}$ simplemente conexo y con una estructura de variedad diferenciable como hemos visto anteriormente. Ahora probaremos que podemos dotar a $\widetilde{G}$ de una estructura de grupo de Lie que hace de $p : \widetilde{G} \to G$ un homomorfismo de grupos.

Teorema 4.1.9. *Sea G un grupo de Lie-Banach, supongamos que $p : \widetilde{G} \to G$ es la aplicación recubridora universal. Existe una única estructura de grupo de Lie-Banach sobre $\widetilde{G}$ que hace de p un homomorfismo de grupos y además* $\ker p = \pi_1(G)$.

Demostración. Dotamos a $\widetilde{G}$ de estructura de variedad diferenciable como observamos anteriormente con punto de base $b_0 = 1$, tomemos un elemento $\tilde{1} \in p^{-1}(1)$ donde 1 es el elemento identidad en G, si $(g,h) \overset{m}{\mapsto} gh$ es la multiplicación en G defino una aplicación $\psi : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to G$ como $\psi(x,y) = p(x)p(y)$. Esta aplicación es claramente diferenciable pues $\psi = m \circ p \times p$ es compocisión de diferenciables y envía el punto $(\tilde{1},\tilde{1}) \mapsto 1$. Como $\widetilde{G}$ es simplemente conexo entonces $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$ es simplemente conexo, luego por propiedad universal del levantamiento ψ se levanta a una aplicación $\tilde{\psi} : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ tal que $p \circ \tilde{\psi} = \psi$

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{G} \arrow[d, "p"] \\ \widetilde{G} \times \widetilde{G} \arrow[ur, "\tilde{\psi}"] \arrow[r, "\psi"'] & G. \end{tikzcd}$$

Con la estructura de natural de variedad de $\widetilde{G}$ y la propiedad de levantamiento resulta que $\tilde{\psi}$ es diferenciable; en efecto, como ψ es diferenciable podemos elegir U entorno de G tal que $p\mid_{p^{-1}(U)}$ sea homeomorfismo con (U, ϕ) carta de G y (W, f) carta de $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$ tal que $\phi \circ \psi \circ f^{-1} \in C^\infty$. Luego $\phi \circ p\mid_{p^{-1}(U)}$ es carta de $\widetilde{G}$ y

$$(\phi \circ p) \circ \tilde{\psi} \circ f^{-1} = \phi \circ \psi \circ f^{-1} \in C^\infty$$

así que $\tilde{\psi}$ es diferenciable con la estructura natural de variedad.
Análogamente podemos levantar la aplicación diferenciable de $\widetilde{G} \xrightarrow{i} G$ dada por $i(x) = (p(x))^{-1}$ a una aplicación diferenciable $\tilde{i} : \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ tal que conmute

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{G} \arrow[d, "p"] \\ \widetilde{G} \arrow[ur, "\tilde{i}"] \arrow[r, "i"'] & G. \end{tikzcd}$$

Las aplicaciones $\tilde{\psi}$ y $\tilde{i}$ actúan como la multiplicación y la inversión y $\tilde{1}$ como el elemento identidad dotando a $\widetilde{G}$ estructura de grupo. Veamos la condición de inversa, es decir que $\tilde{\psi}(x, \tilde{i}(x)) = \tilde{1}$. En efecto

$$p(\tilde{\psi}(x, \tilde{i}(x)) = \psi(x, \tilde{i}(x)) = p(x)p(\tilde{i}(x)) = p(x)p(x)^{-1} = 1,$$

de aquí vemos que $\tilde{\psi}(x, \tilde{i}(x))$ es un levantado de la aplicación constante $x \mapsto 1$ pero $x \mapsto \tilde{1}$ es un levantado de esta aplicación luego por unicidad del levantamiento se tiene que $\tilde{\psi}(x, \tilde{i}(x)) = \tilde{1}$. De manera análoga se demuestra la asociatividad y la condición de identidad. Por definición de ψ resulta que p es homomorfismo de grupos ya que $p(\tilde{\psi}(x, y)) = \psi(x, y) = p(x)p(y)$. Por construcción se tiene que $\ker p = \pi_1(G)$. □

Observación 4.1.10. $L(p) : L(\widetilde{G}) \to L(G)$ *es un isomorfismo; en efecto como* p *es un recubrimiento resulta que este es un homeomorfismo local luego* $L(p)$ *es un isomorfismo. De esta manera podemos identificar el álgebra de Lie de un grupo de Lie con la de su espacio recubridor universal.*

Lema 4.1.11. *Sea* Γ *un subgrupo discreto de un grupo de Lie conexo* G*, entonces la proyección* $p : G \to G/\Gamma$ *es una aplicación recubridora.*

Demostración. Como Γ es discreto existe U entorno de 1 tal que $U \cap \Gamma = \{1\}$, por continuidad del producto existe V entorno de 1 tal que $V^{-1}V \subset U$ de aquí que $V^{-1}V \cap \Gamma = \{1\}$. Consideramos el conjunto de la forma $Vh \subset G$ para $h \in \Gamma$ que son disjuntos pues si $v_1h_1 = v_2h_2$ entonces $v_2^{-1}v_1 = h_2h_1^{-1} \in V^{-1}V \cap \Gamma = 1$ con lo cual $v_1 = v_2$ y $h_1 = h_2$, además de la misma manera se tiene que $p\mid_{Vh}$ es inyectiva. Para establecer los entornos del recubrimiento usaremos translaciones a izquierda. Dada la clase $g\Gamma$, consideramos los entornos $gV\Gamma := \{gv\Gamma : v \in V\}$ y $p^{-1}(gV\Gamma) = \cup_{h\in\Gamma} gVh$ es una unión disjunta y p restringida a gVh es un difeomorfismo. □

Teorema 4.1.12. *Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos de Lie conexos que es un homeomorfismo local, entonces f es una aplicación recubridora.*

Demostración. Sea $\Gamma := \ker f$, veamos que es discreto. En efecto; dado $g \in \Gamma$, como f es homeo local existe entorno U de g tal que $f\mid_U$ es inyectiva, luego $U \cap \Gamma = g$. Luego f induce el isomorfismo $\tilde{f} : G/\Gamma \to H$ y por el teorema anterior la aplicación $G \to G/\Gamma$ es recubridora luego f resulta recubridora. □

El siguiente lema proporciona una forma de construir homomorfismos de grupos sobre dominios simplemente conexos, el cual usaremos para la construcción del homomorfismo del grupo de periodos.

Lema 4.1.13. *Sea G un grupo topológico simplemente conexo y H un grupo arbitrario. Supongamos que W es un entorno simétrico de $1 \in G$,es decir, $W = W^{-1}$, y $f : W \to H$ una aplicación tal que*

$$f(xy) = f(x)f(y) \ x, y, xy \in W$$

entonces existe un único homomorfismo $\varphi : G \to H$ tal que $\varphi\mid_W = f$.

Demostración. Sea K el gráfico de f, es decir

$$K := \{(g, f(g)) : g \in W\} \subset G \times H$$

y dotamos a K de la única topología que hace de la biyección

$$\beta : W \to K, g \mapsto (g, f(g))$$

un homeomorfismo. Sea $E := \langle K\rangle \subset G \times H$ subgrupo generado por K, podemos dotar a E de estructura de espacio topológico conexo donde K es entorno abierto de 1; para este fin denotemos a $m : G \times G \to G$ como la multiplicación en G. Sea $W_0 := m^{-1}(W) \cap (W \times W)$ que es un conjunto abierto en $W \times W$. Como β es homeomorfismo el conjunto $V_0 := \{(\beta(g_1), \beta(g_2)) : (g_1, g_2) \in W_0 \times W_0\}$ es un abierto y cumple que si $m(V_0) \subset K$ y para cada $x \in K$ $(x, 1), (1, x), (x, x^{-1}) \in V_0$ luego

E posee estructura de grupo topológico. Consideramos la aplicación $\pi : E \to G$ que es la restricción de $pr_1 : G \times H \to G$ (la proyección a la primer coordenada restringida) a E. Notemos que π es homomorfismo de grupos pues pr_1 lo es y además $\pi\mid_K = \beta^{-1} : K \to W$. Como β es un homeomorfismo y K es un entorno abierto de 1 se tiene que π resulta un recubrimiento. Como G es simplemente conexo resulta que π es un homeomorfismo. En particular π es biyectiva y $\pi^{-1} : G \to E$ un isomorfismo de grupos para cada $g \in W$ tenemos que

$$\pi^{-1}(g) = \beta(g) = (g, f(g))$$

luego considerando $pr_2 : G \times H \to H$ la proyección a la segunda coordenada, tenemos que

$$\varphi := pr_2 \circ \pi^{-1} : G \to H$$

es un homomorfismo y $\varphi\mid_W = f$. □

4.2. Extensiones centrales

Definición 4.2.1. *Una extensión de grupos topológicos (resp.de grupos de Lie) es una sucesión exacta corta de homomorfismos continuos (resp. diferenciables)*

$$1 \to A \to \widehat{G} \to G \to 1.$$

La extensión se dice central si $A = Z(\widehat{G})$ el centro de $\widehat{G}$.

El próximo teorema nos permitirá obtener una descripción del término $\widehat{G}$ de una extensión central como un cociente, junto con la existencia de un homomorfismo de grupos el cual utilizaremos en la construcción del grupo de períodos de un álgebra de Lie en el capítulo siguiente.

Teorema 4.2.2. *Sea G un grupo topológico, localmente arco conexo y semilocalmente simplemente conexo y $q_G : \widetilde{G} \to G$ su espacio recubridor universal. Para una extensión central de grupos topológicos $Z \hookrightarrow \widehat{G} \xrightarrow{q} G$, si existe una sección local continua $\sigma_U : U \to \widehat{G}$ tal que $\sigma_U(xy) = \sigma_U(x)\sigma_U(y)$ para $x, y, xy \in U \subset G$ entonces existe un homomorfismo $\gamma : \pi_1(G) \to Z$ y un isomorfismo*

$$\Phi : (\widetilde{G} \times Z)/\Gamma(\gamma^{-1}) \to \widehat{G}, \text{ con } q \circ \Phi([x, 1]) = q_G(x), x \in \widetilde{G}$$

donde $\Gamma(\gamma^{-1})$ es el gráfico de $d \mapsto \gamma(d)^{-1}$.

Demostración. Veamos en primer lugar que existe $\widetilde{\sigma} : U \to \widetilde{G}$ una sección continua del recubrimiento universal q_G donde U es un entorno de 1, conexo y simetrico. En efecto; tomemos un entorno contráctil V en G tal que la inclusión $i_* : \pi_1(V) \to \pi_1(G)$ sea trivial y W abierto de $\widehat{G}$ que contega a $\sigma_U(U)$ y $q(W) \subset V$

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{G} \arrow[dr, "q_G"] & \\
W \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[r, "q|"] & V \arrow[r, hook, "i"] & U \subset G, \arrow[ll, bend left, "\sigma_U"]
\end{tikzcd}$$

luego como

$$(i \circ q \mid)_*(\pi_1(W)) = i_*(q \mid)_*(\pi_1(W)) \subset i_*(\pi_1(V)) = 0 = p_*(\pi_1(\widetilde{G}))$$

por levantamiento universal existe λ tal que el diagrama conmuta. Luego sirve como sección de q_G tomar $\widetilde{\sigma} := \lambda \circ \sigma_U$, que es claramente sección pues por la conmutatividad del diagrama $q_G \circ \widetilde{\sigma} = q_G \circ \lambda \circ \sigma_U = q \mid \circ \sigma_U = id$.
Luego la aplicación

$$\sigma_U \circ q_G \mid_{\widetilde{\sigma}(U)} : \widetilde{\sigma}(U) \to \widehat{G}$$

es un homomorfismo local y por el Lema 4.1.13 este se extiende a un homomorfismo continuo $f : \widetilde{G} \to \widehat{G}$ con $f \circ \widetilde{\sigma} = \sigma_U$. Afirmamos que debido a esto se tiene $q \circ f = q_G$; en efecto si restringimos $q \circ f$ al abierto $\widetilde{\sigma}(U)$, se tiene

$$q \circ f \mid_{\widetilde{\sigma}(U)} = q \circ \sigma_U \circ q_G \mid_{\widetilde{\sigma}(U)} = q_G \mid_{\widetilde{\sigma}(U)}$$

luego como ambos son morfismos y coinciden en un entorno de 1 y $\widetilde{G}$ es conexo, entonces $q \circ f(g) = q_G(g), \forall g \in \widetilde{G}$.
Definimos la aplicación

$$\psi : \widetilde{G} \times Z \to \widehat{G}$$
$$(g, z) \mapsto f(g)z$$

que es un homomorfismo continuo, en efecto como Z es el centro y f es homomorfismo, se tiene

$$\psi((g, z)(g', z')) = \psi(gg', zz') = f(gg')zz' = f(g)f(g')zz' = f(g)zf(g')z' =$$
$$= \psi(g, z)\psi(g', z')$$

y es continuo porque la multiplicación del grupo es continua. Además ψ es un homeomorfismo local, para probar esto basta probar que existe un entorno de 1 tal que sea homeo, luego como ψ es morfismo se puede trasladar a un abierto de cualquier punto de $\widetilde{G} \times Z$. Probaremos entonces que $\psi \mid_{\widetilde{\sigma}(U) \times Z}$ es un homeomorfismo; como

$$\psi(\tilde{\sigma}(x), z) = f(\tilde{\sigma}(x))z = \sigma_U(x)z, \; x \in U, z \in Z$$

basta probar entonces que la aplicación $(x,z) \overset{\beta}{\mapsto} \sigma_U(x)z$ de $U \times Z \to q^{-1}(U)$ es un homeo. En primer lugar está bien definida pues $q(\sigma_U(x)z) = q(\sigma_U(x))q(z) = x \in U$ pues $Z = \ker q$ y σ_U sección local de q. Podemos definir una inversa que resulta continua como

$$q^{-1}(U) \to U \times Z$$
$$x \mapsto (q(x), (\sigma_U(q(x))^{-1}x)$$

que está bien definida, pues

$$q((\sigma_U(q(x)))^{-1}x) = q(\sigma_U(q(x))^{-1})q(x) = q(x)^{-1}q(x) = 1$$

luego se tiene que $(\sigma_U(q(x))^{-1}x \in \ker q = Z$. Por último, ψ resulta sobreyectiva; observemos primero que $q\mid_{im\psi}$ es sobreyectiva, en efecto dado $g \in G$ existe $\tilde{g} \in \widetilde{G}$ tal que $g = q_G(\tilde{g})$ luego como $q \circ f = q_G$ se tiene que $g = q_G(\tilde{g}) = q(f(\tilde{g}))$ y es claro que $f(\tilde{g}) = f(\tilde{g})1 = \psi(\tilde{g}, 1) \in im\psi$. Probaremos ahora que $im\psi = \widehat{G}$, supongamos que existe $x \in \widehat{G}$ tal que $x \notin im\psi$, como $q(x) \in G$ y $G = q\mid_{im\psi}$ se tiene que $q(x) = q(y)$ para algún $y \in im\psi$, como q es homomorfismo tal que $xy^{-1} \in \ker q = Z$ y $Z \subset im\psi$ con lo que $xy^{-1} \in im\psi$, dado que $im\psi$ es un subgrupo e $y \in im\psi$ se tiene que $x \in im\psi$, absurdo pues tomamos $x \notin im\psi$. Como ψ es homeo local y sobreyectiva, resulta una aplicación recubridora. Por los teoremas de isomorfismos tenemos que

$$\widehat{G} \overset{\phi}{\cong} (\widetilde{G} \times Z)/\ker\psi, \quad \ker\psi = \{(g, f(g)^{-1}) : g \in f^{-1}(Z)\}.$$

Es fácil ver que $f^{-1}(Z) = \ker(q \circ f)$, pues $Z = \ker q$ luego tenemos que

$$f^{-1}(Z) = \ker(q \circ f) = \ker q_G = \pi_1(G)$$

con lo cual

$$\ker\psi = \{(d, \gamma(g)^{-1}) : d \in \pi_1(G)\} = \Gamma(\gamma^{-1})\}, \ \gamma := f\mid_{\pi_1(G)}.$$

Por construcción de ϕ se tiene que si denotamos la clase del par $(x,z) \in \widetilde{G} \times Z$ como $[x,z]$, entonces $\phi([x,z]) = \psi(x,z)$ luego

$$\phi([x,1]) = \psi(x,1) = f(x).$$

Aplicando q resulta que

$$q(\phi([x,1])) = q(f(x)) = q_G(x).$$

□

Capítulo 5

Integrabilidad

En este capítulo utilizaremos el teorema del cociente de grupos de Lie-Banach 2.2.1 para dar una definición directa del grupo de períodos $\Pi(\mathfrak{g})$ de un álgebra de Lie-Banach. Para hacer esta nueva construcción utilizaremos el Teorema 4.2.2. De esta manera obtendremos así el teorema de caracterización de álgebras de Lie integrables.

5.1. Integrabilidad de homomorfismos de álgebras de Lie

El principal resultado de esta primer sección permitirá ver cuando un homomorfismo de álgebras de Lie se integra a un homomorfismo de grupos de Lie. Para eso utilizaremos los resultados obtenidos en los capítulos anteriores sobre grupos locales de Lie. Como consecuencia de esto daremos un ejemplo de un álgebra de Lie-Banach no integrable.

Definición 5.1.1. *Un álgebra de Lie-Banach* $\mathfrak{g}$ *se dice integrable si existe un grupo de Lie-Banach* G *cuya álgebra de Lie es* $\mathfrak{g}$*, es decir* $L(G) = \mathfrak{g}$*. Pasando por el grupo recubridor universal* $\widetilde{G}$ *de* G *se tiene que* $L(\widetilde{G}) = L(G) = \mathfrak{g}$ *con lo cual si un álgebra de Lie es integrable siempre podemos suponer que existe* G *simplemente conexo tal que* $L(G) = \mathfrak{g}$*.*

Teorema 5.1.2 (Teorema de Frobenius)**.** *Sea* H *un grupo de Lie-Banach,* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie-Banach y* $\varphi : \mathfrak{g} \to L(H)$ *un homomorfismo inyectivo continuo de álgebras de Lie. Luego existe un grupo de Lie-Banach* G *conexo y un homomorfismo de grupos de Lie* $f : G \to H$ *tal que* $\mathfrak{g} = L(G)$ *y* $\varphi = L(f)$*.*

Demostración. Sea $\mathfrak{h} = L(H)$. Tomemos un entorno abierto V de $1 \in H$ y $R > 0$ tal que $\exp_H |_{B_{\mathfrak{h}}(0,R)}$: $B_{\mathfrak{h}}(0, R) \to V$ sea un difeomorfismo. Como $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es coninua, existe $r > 0$ tal que $\varphi(B_{\mathfrak{g}}(0, r)) \subset B_{\mathfrak{h}}(0, R)$. Definimos

$$G := \langle (\exp_H \circ \varphi)(B_{\mathfrak{g}}(0, r)) \rangle \subseteq H$$

es decir G es el subgrupo de H generado generado por $(\exp_H \circ \varphi)(B_{\mathfrak{g}}(0, r))$. Vamos a equipar a G con una estructura de grupo de Lie-Banach tal que $L(G) = \mathfrak{g}$ y la inclusión $f : G \hookrightarrow H$ satisfaga $L(f) = \varphi$; sea

$$K := (\exp_H \circ \varphi)(B_{\mathfrak{g}}(0, r)).$$

Existe una única estructura de variedad de Banach sobre K tal que la aplicación biyectiva $\theta := \exp_H \circ \varphi |_{B_{\mathfrak{g}}(0,r)}$: $B_{\mathfrak{g}}(0, r) \to K$ es un difeomorfismo. El entorno $B_{\mathfrak{g}}(0, r)$ tiene estructura local de grupo de Lie con la multiplicación definida por la serie de BCH y la inversion dada por $x \mapsto -x$. Luego el difeomorfismo θ nos permite definir una estructura de grupo de Lie local que respeta la multiplicación y la inversión heredada de G. Como el subgrupo G de H es generado por K, este tiene una única topología tal que la inclusión $K \hookrightarrow G$ es un embeding y K es un entorno abierto de $1 \in G$. Como K es conexo (esto es porque $B_{\mathfrak{g}}(0, r)$ es conexa y $\exp_H \circ \varphi$ es un difeomorfismo) luego G es conexo (por ser unión de conexos cuya intersección es no vacía). Hemos visto que K tiene estructura de grupo de Lie local, de aquí que G posee estructura de grupo de Lie modelada por el espacio de Banach $\mathfrak{g}$.
Ahora probaremos que $L(G) = \mathfrak{g}$; tomemos r_0, R_0 tal que $r_0 < r$ y $\varphi(B_{\mathfrak{g}}(0, r_0)) \subseteq B_{\mathfrak{h}}(0, R_0)$. Luego para todo $x, y \in B_{\mathfrak{g}}(0, r_0)$ tenemos que

$$\theta(x * y) = \exp_H(\varphi(x * y)) = \exp_H(\varphi(x) * \varphi(y)) =$$

$$= \exp_H(\varphi(x)) \exp_H(\varphi(y)) = \theta(x)\theta(y).$$

Ahora como $\theta : B_{\mathfrak{g}}(0, r) \to K$ es carta local alrededor de $1 \in G$, el corchete de $\mathfrak{g}$ coincide con el de $L(G)$, esto hace que $L(G) = \mathfrak{g}$. Es fácil ver que $f : G \hookrightarrow H$, la inclusión, es diferenciable en un entorno de $1 \in G$ (por ejemplo $K \subset G$); en efecto basta tomar como carta local de G a θ y de H a $\exp_H^{-1} |_{B_{\mathfrak{h}}(0,R)} : V \to B_{\mathfrak{h}}(0, R)$ se tiene entonces que

$$\exp_H^{-1} \circ f \circ \theta = \varphi \in C^\infty$$

luego como f es homomorfismo de grupos y G, H son grupos de Lie se tiene que f es diferenciable en todo G.
Para terminar basta ver que $L(f) = \varphi$, en efecto sea $x \in B_{\mathfrak{g}}(0, r)$ la curva

$$t \overset{\gamma}{\mapsto} \exp_H(\varphi(tx)),$$

que cumple que $\gamma(t+s) = \gamma(s)\gamma(t)$ luego por unicidad se corresponde con un subgrupo a un parámetro de G, es decir, $\exp_G(x) = \exp_H(\varphi(x))$. Por naturalidad de f se tiene

$$\exp_H(L(f)x) = \exp_G x = \exp_H(\varphi(x))$$

y como $\exp_H$ es inyectiva en este entorno, $L(f)x = \varphi(x)$ para $x \in B_{\mathfrak{g}}(0,r)$, luego deben ser iguales en $\mathfrak{g}$. $\square$

Corolario 5.1.3. *Sea H un grupo de Lie-Banach con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, sea $G \subseteq H$ un subgrupo cerrado y sea*

$$\mathfrak{g} := \{x \in \mathfrak{h} : \exp_H(tx) \in G \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces $\mathfrak{g}$ es subálgebra cerrada de $\mathfrak{h}$ y existe una única topología y estructura de variedad sobre G que lo hace un grupo de Lie-Banach tal que $L(G) = \mathfrak{g}$.

Demostración. Ya hemos probado en capítulos anteriores que $\mathfrak{g}$ asi definida es una subálgebra de $\mathfrak{h}$. Sea $G_0 = \langle \exp_H \mathfrak{g} \rangle$. Sea $\varphi : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{h} = L(H)$ la inclusión luego por el Teorema 5.1.2 existe una estructura de grupo de Lie-Banach conexo sobre G_0 tal que $L(G_0) = \mathfrak{g}$, la inclusión $f : G_0 \hookrightarrow H$ es diferenciable y $L(f) = \varphi$.
Veamos ahora que $G_0 \triangleleft G$; en efecto para cada $g \in G \subset H$ tenemos la aplicación $Ad_g : H \to H$ dada por $x \mapsto gxg^{-1}$ por naturalidad

$$\exp_H(L(Ad_g)x) = Ad_g(\exp_H(x)) = g \exp_H(x) g^{-1}, \forall x \in \mathfrak{h} \ (1)$$

en particular si $x \in \mathfrak{g}$, $t \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\exp_H(t(L(Ad_g)(x))) = \exp_H(L(Ad_g)(tx)) = g \exp_H(tx) g^{-1} \in G$$

de aqui que $L(Ad_g)(x) \in \mathfrak{g}$. Luego de (1) última igualdad muestra que $g \exp_H \mathfrak{g} g^{-1} \subseteq \exp_H \mathfrak{g}$ lo cual implica que $G_0 \triangleleft G$. Para cada $g \in G$ la aplicación $G_0 \to G_0$, $h \mapsto ghg^{-1}$, resulta diferenciable por ser un homomorfismo de grupos de Lie continuo. Luego por el teorema de grupos de Lie locales podemos dotar a G con estructura de grupo de Lie en la cual G_0 resulta abierto y $L(G) = L(G_0) = \mathfrak{g}$ $\square$

Si $dimH < \infty$ hay un resultado clásico de la teoría de grupos de Lie en dimensión finita que asegura que si G es subgrupo cerrado de H, este posee estructura de subgrupo de Lie de H. En grupos de Lie-Banach esto no es cierto. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 5.1.4. *Consideremos el espacio de Hilbert $H := L^2([0,1], \mathbb{R})$ como grupo de Lie-Banach con la suma. Sea $G := L^2([0,1], \mathbb{Z})$ es un subgrupo cerrado. Supongamos que G es subgrupo de Lie de H, luego su álgebra de Lie es*

$$L(G) = \{f \in L(H) : \exp_H(tf) \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Como el grupo a un parámetro de H *es* $\gamma : (\mathbb{R}, +) \to (G, +)$, $\gamma(t) = tf$ *con* $f \in G$ *se tiene entonces que* $\gamma(t) = \exp_H(tf) = tf$ *para cada* $f \in L(H)$. *Entonces si* $f \in L(G)$ *se tiene que* $tf \in G$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *con lo que* $f = 0$ *luego* $L(G) = \{0\}$. *Por el Teorema 2.1.4 se tiene que existe un entorno* V *de* 0 *en* H *tal que*

$$\exp(U \cap L(G)) = V \cap G$$

como $L(G) = 0$ *se tiene entonces que* $V \cap G = 0$, *luego* G *es un subgrupo discreto. Por otro lado el grupo* G *es arco-conexo y además contractible ya que la aplicación* $F : I \times G \to G$ *dada por*

$$F(t, f)(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad 0 \leq x \leq t \\ \\ 0 & si \quad t < x \leq 1 \end{cases}$$

es continua y $F(1, f) = f$ *y* $F(0, f) = 0$ *lo cual es una contradicción.*

Veremos ahora el principal resultado de esta sección. El siguiente teorema estable las condiciones necesarias para que un morfismo de álgebras de Lie resulte integrable.

Teorema 5.1.5 (Teorema de integración de morfismos de álgebras de Lie). *Sean* G *y* H *grupos de Lie-Banach tal que* G *es simplemente conexo. Sea* $\varphi : L(G) \to L(H)$ *un homomorfismo. Existe entonces un único homomorfismo de grupos de Lie* $f : G \to H$ *tal que* $L(f) = \varphi$.

Demostración. El producto $G \times H$ tiene estructura de grupo de Lie-Banach con las operaciones coordenada a coordenada y su álgebra de Lie es $L(G) \oplus L(H)$. Sea $\Gamma(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) : x \in L(G)\}$ (gráfico de φ), define una subálgebra de Lie en $L(G) \oplus L(H)$ con las operaciones coordenada a coordenada. Por el Teorema 5.1.2 existe un homomorfismo inyectivo de grupos de Lie $i : K \to G \times H$ tal que $L(K) = \Gamma(\varphi)$ y $L(i)$ es la inclusión de $\Gamma(\varphi) \hookrightarrow L(G) \oplus L(H)$. Consideramos la aplicación $\pi_1 \circ i : K \to G \times H \to G$ con π_1 proyección a la primer coordenada. Veamos que su diferencial es un isomorfismo. En efecto;

$$L(\pi_1 \circ i)(x, \varphi(x)) = \pi_1(L(i)(x, \varphi(x))) = \pi_1(x, \varphi(x)) = x,$$

luego si consideramos la aplicación

$$L(G) \to \Gamma(\varphi) : x \mapsto (x, \varphi(x))$$

es morfismo de álgebras y es una inversa para $L(\pi_1 \circ i)$. Luego como $L(\pi_1 \circ i)$ es un isomorfismo se tiene que $\pi_1 \circ i : K \to G$ es una aplicación recubridora. Como

G es simplemente conexo esta aplicación define un isomorfismo y de esta manera podemos identificar a K con G. Sea $\pi_2 : G \times H \to H$ la proyección a la segunda coordenada, luego $f := \pi_2 \circ i : G \to H$ es un homomorfismo de grupos de Lie y $L(\pi_2 \circ i)(x) = \pi_2(x, \varphi(x)) = \varphi(x)$. □

Corolario 5.1.6. *Sean G, H dos grupos de Lie-Banach simplemente conexos tales que $L(G) \simeq L(H)$ es decir con álgebras de Lie isomorfas, entonces $G \simeq H$.*

Demostración. Sea $\varphi : L(G) \to L(H)$ un iso de álgebras. Como G es simplemente conexo entonces existe $f : G \to H$ homomorfismo de grupos tal que $L(f) = \varphi$, análogamente como H es simplemente conexo existe $g : H \to G$ tal que $L(g) = \varphi^{-1}$, luego por regla de la cadena

$$L(id) = id = \varphi \circ \varphi^{-1} = L(f) \circ L(g) = L(f \circ g)$$

$$L(id) = id = \varphi^{-1} \circ \varphi = L(g) \circ L(f) = L(g \circ f)$$

con lo cual como coinciden en 1,

$$g \circ f = f \circ g = id.$$

□

5.2. Un álgebra de Lie-Banach no integrable

Daremos ahora un ejemplo de un álgebra de Lie-Banach la cual no resulta integrable.

Ejemplo 5.2.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita sobre $\mathbb{C}$ y $U(\mathcal{H})$ su grupo unitario. Este es un grupo de Lie-Banach cuya álgebra de Lie es*

$$\mathfrak{u} := L(U(\mathcal{H})) = \{X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : X^* = -X\}.$$

Veamos en primer lugar que el centro de esta álgebra es $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) = \mathbb{R}i\mathbf{1}$. Es claro que $\mathbb{R}i\mathbf{1} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$, la otra inclusión se deduce del hecho de que el centro del álgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ son los escalares. En efecto sea $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{u})$ es decir que

$$XY = YX, \ \forall Y \in \mathfrak{u}$$

luego como $(iY)^* = -iY^* = iY$, ie es hermitiana X conmuta con iY también. Como cualquier operador $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se escribe como suma de un hermitiano mas un antihermitiano, tenemos que

$$XY = X(Y_{ah} + Y_h) = XY_{ah} + XY_h = Y_{ah}X + Y_hX = (Y_{ah} + Y_h)X = YX$$

con lo que X conmuta con cualquier elemento de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.
Consideramos el álgebra de Lie-Banach cociente

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}/\mathbb{R}i(\mathbf{1}, \sqrt{\mathbf{2}}\mathbf{1}).$$

Veremos que esta álgebra resulta no integrable. Supongamos que si lo es, luego existe un grupo de Lie-Banach G tal que $L(G) = \mathfrak{g}$. Sea

$$Q : \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u} \to \mathfrak{g}$$

el homomorfismo cociente. De acuerdo al teorema de Kuiper [KU65] el grupo unitario $U(\mathcal{H})$ resulta contractible, en particular simplemente conexo como así también $G_1 := U(\mathcal{H}) \times U(\mathcal{H})$ por ser producto de simplemente conexos. Como

$$\mathfrak{g}_1 := \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u} = L(U(\mathcal{H})) \oplus L(U(\mathcal{H})) = L(U(\mathcal{H}) \times U(\mathcal{H})),$$

q es integrable a un único homomorfismo de grupos

$$q : G_1 \to G,\ L(q) = Q.$$

Por naturalidad tenemos que $\exp_G \circ Q = q \circ \exp_{G_1}$, y en particular que $\exp(\ker Q) \subset \ker q$. Como

$$Z(G_1) = \exp_{G_1}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1)) = \exp_{G_1}(\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) \times \mathfrak{z}(\mathfrak{u})) = \exp(\mathbb{R}i \times \mathbb{R}i) \simeq S^1 \times S^1$$

y $\exp(\ker Q)$ es un subgrupo a un parámetro denso en $Z(G_1)$ por la continuidad de q tenemos que $Z(G_1) \subset \ker q$ con lo cual $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1) \subset \ker L(q) = \ker Q$ lo cual es una contradicción pues $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1) = L(Z(G_1)) = \mathbb{R}^2$ y por otra parte $\ker Q \simeq \mathbb{R}$.

Teorema de Ado

Mencionaremos aquí un resultado que utilizaremos para la demostración de que toda álgebra de dimensión finita es integrable.

Definición 5.2.2. *Una representación de un álgebra de Lie-Banach $\mathfrak{g}$ es un homomorfismo de álgebras $\psi : \mathfrak{g} \to End(V)$ donde V es algún espacio vectorial. Una representación se dice fiel si ψ es un monomorfismo.*

Teorema 5.2.3 (Teorema de Ado)**.** *Si $\mathfrak{g}$ es un algebra de Lie de dimensión finita entonces tiene una representación fiel en $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ para algún n.*

Demostración. Ver [Jac79] p.199. □

Teorema 5.2.4. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión finita entonces es integrable.*

Demostración. Por el Teorema de Ado existe un monomorfismo de álgebras de Lie

$$\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = L(GL_n(\mathbb{R})),$$

luego por el Teorema de Frobenius 5.1.2, existe G un grupo de Lie-Banach tal que $L(G) = \mathfrak{g}$. □

5.3. Álgebra y grupo de caminos

Definición 5.3.1. *Sea G un grupo de Lie-Banach conexo, definimos el grupo de caminos de G, como*

$$P(G) := \{\gamma \in C([0,1], G) : \gamma(0) = 1\}$$

donde la multiplicación es punto a punto, es decir $(\gamma\alpha)(t) = \gamma(t)\alpha(t)$. Este grupo es un grupo de Lie-Banach. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, definimos

$$P(\mathfrak{g}) := \{\gamma \in C([0,1], \mathfrak{g}) : \gamma(0) = 0\}$$

que es un álgebra de Lie donde la operación corchete esta dada por $[f,g](t) := [f(t), g(t)]$. Si $\mathfrak{g} = L(G)$ es el álgebra de Lie de G, entonces el álgebra de Lie de $P(G)$ es $P(\mathfrak{g})$. Es decir vale que $L(P(G)) = P(L(G))$, esto se ve del hecho que la aplicación $P(L(G)) \to P(G)$ dada por $\gamma \mapsto \exp_G \circ \gamma$ es la aplicación exponencial de $P(G)$.
La aplicación evaluación

$$ev_1 : P(G) \to G, \quad \gamma \mapsto \gamma(1)$$

es un morfismo de grupos de Lie, luego su núcleo $\Omega(G) := ker(ev_1)$ es un subgrupo de Lie de $P(G)$ debido al Teorema 2.2.1. Es claro por los teoremas de isomorfismo que como ev_1 es sobreyectiva $G \cong P(G)/\Omega(G)$.

Observación 5.3.2. *$P(G)$ es contractible. Es decir que la aplicación $id_{P(G)}$ es homotópica a una constante. En efecto basta considerar la homotopía $H : I \times P(G) \to P(G)$ dada por $H(s, \gamma(t)) = \gamma(st)$. En particular $P(G)$ es simplemente conexo.*

A partir de ahora supondremos que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie-Banach y $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ su centro y $\mathfrak{g}_{ad} := \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$, el álgebra de Lie cociente.

Probaremos ahora la integrabilidad de distintas álgebras de Lie las cuales serán de utilidad en la construcción del grupo de períodos.

Observación 5.3.3. *$\mathfrak{z}$ es integrable, mas aún toda álgebra abeliana es integrable.*

Demostración. Podemos definir en $\mathfrak{z}$ una estrucutura de grupo de Lie con la operación $x * y := x + y$ y la operación $x^{-1} := -x$ observemos que esta definición coincide con la expansión de la serie de BCH en $\mathfrak{z}$ ya que $\mathfrak{z}$ es abeliana. Veamos que $\mathfrak{z}$ con esta estructura de grupo de Lie induce en su álgebra de Lie la misma estructura, es decir el corchete inducido por $*$ es el nulo. Calculemos los campos invariantes a izquierda, sea $v \in L(\mathfrak{z})$ tal que $X_v(g) = (L_g)_* v$, luego se tiene que su diferencial es $(L_g)_* v = v$ con lo que $X_v(g) = v$ es decir el campo es constante luego el corchete es 0. Luego $L(\mathfrak{z}) \simeq \mathfrak{z}$ son isomorfos como álgebras con la identidad. Veamos que la exponencial es la identidad, en efecto sea $\alpha(t) = tv$ es una curva integral de X_v ya que $X_v(\alpha(t)) = \dot{\alpha}(t)$ luego $\exp(v) = \alpha(1) = v$ es la identidad. $\square$

Lema 5.3.4. *El álgebra de Lie*

$$der(\mathfrak{g}) := \{T \in \mathcal{B}(\mathfrak{g}) : T([X,Y]) = [T(X),Y] + [X,T(Y)]\, \forall X,Y \in \mathfrak{g}\}$$

conocida como las derivaciones, es integrable.

Demostración. Como $Gl(\mathfrak{g})$ es el grupo de unidades del álgebra de Banach $\mathcal{B}(\mathfrak{g})$ se tiene de esta manera que $GL(\mathfrak{g})$ tiene estructura de grupo de Lie Banach con $L(GL(\mathfrak{g})) = \mathcal{B}(\mathfrak{g})$.
Es claro que el grupo $Aut(\mathfrak{g})$ de automorfismos de $\mathfrak{g}$ es subgrupo cerrado. Por el Corolario 5.1.3 $Aut(\mathfrak{g})$ es un grupo de Lie-Banach y además

$$L(Aut(\mathfrak{g})) = \{T \in \mathcal{B}(\mathfrak{g}) : \exp(\mathbb{R}T) \subset Aut(\mathfrak{g})\}.$$

Veamos que $der(\mathfrak{g})$ coincide con este último conjunto. En efecto; sea $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{g})$ tal que $\exp(tT) \in Aut(\mathfrak{g})$ $\forall t \in \mathbb{R}$ queremos ver que T es derivación. Como

$$\exp(tT)\,[x,y] = [\exp(tT)x, \exp(tT)y]$$

derivando ambos miembros (y como la derivada de $t \mapsto \exp(tT)$ es $T\exp(tT) = \exp(tT)T$) se tiene que

$$\exp(tT)(T\,[x,y]) = [T(\exp(tT)x), \exp(tT)y] + [\exp(tT)x, T(\exp(tT)y)]\,.$$

y luego evaluando en $t = 0$ se tiene

$$T\,[x,y] = [Tx,y] + [x,Ty]\,.$$

Reciprocamente sea T una derivación, queremos ver que $\exp(tT) \in Aut(\mathfrak{g}) \forall t \in \mathbb{R}$, consideramos la función

$$v(t) = \exp(tT)([x,y]) - [\exp(tT)x, \exp(tT)y]\,.$$

Como T es derivación

$$T\left[\exp(tT)x, \exp(tT)y\right] = \left[T(\exp(tT)x), \exp(tT)y\right] + \left[\exp(tT)x, T(\exp(tT)y)\right]$$

luego $v(t)' = Tv(t)$ pero $v(0) = 0$, así se tiene que $v(t) = 0$.

□

Teorema 5.3.5. *$\mathfrak{g}_{ad}$ es integrable.*

Demostración. Consideramos la aplicación

$$ad : \mathfrak{g} \to der(\mathfrak{g})$$

$$Z \mapsto (X \overset{D}{\mapsto} [X, Z]).$$

Por la identidad de Jacobi se tiene que la aplicación $D(X) = [X, Z]$ es una derivación, en efecto

$$D([X, Y]) = [[X, Y], Z] = -[[Y, Z], X] - [[Z, X], Y] = [X, [Y, Z]] + [[X, Z], Y]$$

$$= [D(X), Y] + [X, D(Y)].$$

Como ker $ad = \mathfrak{z}$, la aplicación se factoriza a través de un morfismo inyectivo $\mathfrak{g}/\mathfrak{z} \to der(\mathfrak{g})$ y como $der(\mathfrak{g})$ es integrable pues es el álgebra de Lie del grupo de Lie-Banach $Aut(\mathfrak{g})$ se tiene que también $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ es integrable.

□

Ahora nos concentraremos en demostrar que el álgebra de caminos $P(\mathfrak{g})$ es integrable apelando a un resultado de Malcev [Mal65] sobre asociatividad generalizada en grupos locales. La misma será consecuencia de aproximaciones polinómicas en espacios de Banach.

Lema 5.3.6. *Dado E un espacio Banach, para toda función continua $f : I \to E$ y todo $\varepsilon > 0$ existen $a_0, a_1, ...a_n \in E$ tales que*

$$\| f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \| < \varepsilon, \forall t \in I.$$

Demostración. Sea $f : I \to E$ y ε dado. Como f es uniformemente continua podemos tomar una partición $0 = t_0 < t_1 < .... < t_m = 1$ tal que $\| f(t) - f(t_i) \| < \varepsilon/4$ para $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$. Sea $l : I \to E$ la función continua definida por trozos $\{l(t) : t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}\}$ donde para cada i, $l(t)$ es el segmento que une $f(t_i)$ con $f(t_{i+1})$. Es claro que $\|f(t) - l(t)\| < \varepsilon/2$ para todo $t \in I$. Sea $E' \subset E$ el subespacio generado por $l(I)$.

Como $\dim E' \leqslant m \ < \infty$ por el teorema de Weierstrass existen $a_0, a_1, ..., a_n \in E'$ tales que $\| \ l(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \ \| < \varepsilon/2$ para todo $t \in I$. Luego

$$\| \ f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \ \| \leqslant \| \ l(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \ \| + \| \ f(t) - l(t) \ \| < \varepsilon.$$

□

Definición 5.3.7. *Una palabra es una n-ésima operación binaria en un grupo local, la cual definimos por inducción de la siguiente forma:*
a) Existe una operación binaria llamada f^1 la cual es la identidad es decir $f^1(x) = x$
b) Supongamos $n > 1$, y que para $k < n$ tenemos definida la k-ésima operación que es una palabra. Luego f^n será una palabra si y solo si existen números k, l tal que $k + l = n$ y las operaciones f^k, f^l son palabras tales que $f^n(x_1, ..., x_n)$ existe si y solo si $f^k(x_1, ..., x_k), f^l(x_{k+1}, ..., x_n)$ existen y además se cumple que

$$f^n(x_1, ..., x_n) = f^k(x_1, ..., x_k) f^l(x_{k+1}, ..., x_n).$$

Definición 5.3.8. *Un grupo local se dice que satisface la asociatividad general si para todo par de palabras f_1^n, f_2^n y toda n-upla $(x_1, ..., x_n)$ donde exista $f_1^n(x_1, ..., x_n)$ y $f_2^n(x_1, ..., x_n)$ se tiene que*

$$f_1^n(x_1, ..., x_n) = f_2^n(x_1, ..., x_n).$$

Sea V_r entorno de 0 en $\mathfrak{g}$ donde la serie de BCH converge absolutamente, con la multiplicación $X * Y$ se tiene que V_r es un grupo local analítico (ver Sección 1.4). La forma de insertar los corchetes en $X_1....X_n$ es como palabras y las notaremos $w(X_1, ..., X_n)$. Si $X_1, ..., X_n \in V_r$, decimos que $w(X_1, ..., X_n)$ esta definido en el grupo local V_r si el producto $X_1....X_n$ puede ser calculado en V_r cuando insertamos los corchetes, como indicados con w. Definimos

$$\text{dom } w = \{(X_1, ..., X_n) \in V_r \times ... \times V_r : w(X_1, ..., X_n) \text{ está definido } \}.$$

Lema 5.3.9. *Supongamos que $f_1, ..., f_n \in P(\mathfrak{g})$ son tales que $f_1(t), ..., f_n(t) \in V_r$ para todo $t \in I$, y $w_i(X_1, ..., X_n)$ son palabras tales que $w_i(f_1(t), ...f_n(t))$ está definida para todo $t \in I$. Entonces $w_1(f_1(t), ...f_n(t)) = w_2(f_1(t), ...f_n(t))$ para todo $t \in I$.*

Demostración. Tomemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $w_1(X_1, ..., X_n) = w_2(X_1, ..., X_n)$ cuando $\|X_i\| < \varepsilon$ para todo i. Como dom w_i es abierto, por el Teorema 5.3.6 existen polinomios tales que $\|f_j(t) - g_j(t)\| < \varepsilon$ y $(g_1(t), ..., g_n(t)) \in \text{dom } w_1 \cap$ dom w_2 para todo t. Por continuidad de g_j en 0 existe $\eta > 0$ tal que $\|g_j(t)\| < \varepsilon$ para todo $|t| < \eta$. De aquí que

$$w_1(g_1(t), ..., g_n(t)) = w_2(g_1(t), ..., g_n(t)) \ (*)$$

cuando $|t| < \eta$. Ahora como $w_i : \text{dom } w_i \to \mathfrak{g}$ es analítica y también lo es la aplicación $I_\varepsilon \to \text{dom } w_i$ (con I_ε entorno abierto de I) dada por $t \mapsto (g_1(t), ..., g_n(t))$ luego por el Teorema 1.0.2 la igualdad (*) vale para todo $t \in I$.

□

El siguiente resultado cuya prueba el lector puede encontrar en el paper de [Mal65] resultará clave para lo que sigue.

Teorema 5.3.10. *Un grupo local V es embebido en un grupo si y solo si V satisface la condición de asociatividad general.*

Teorema 5.3.11. *$P(\mathfrak{g})$ es integrable.*

Demostración. Para probar el teorema consideraremos el grupo local

$$P(V_r) = \{f \in P(\mathfrak{g}) : \|f\| < r\} = \{f : I \to V_r\}$$

de $P(\mathfrak{g})$. Como el producto en $P(\mathfrak{g})$ es definido puntualmente, lo mismo sucede en $P(V_r)$. Esto muestra que $w_i(f_1, ..., f_n)$ esta definido en $P(V_r)$ si y solo si $w_i(f_1(t), ...f_n(t))$ esta definido en V_r para cada t. Luego por el Teorema 5.3.9 se satisface la propiedad de asociatividad general y por el Teorema 5.3.10; existe un grupo topológico G en el cual $P(V_r) \subset G$ (el cual es un embeding). Ahora utilizando el teorema de grupos locales de Lie se tiene que G tiene estructura de grupo de Lie donde $P(V_r)$ es un abierto y $L(G) = P(\mathfrak{g})$.

□

Teorema 5.3.12. *El funtor $\mathfrak{g} \mapsto P(\mathfrak{g})$ es exacto.*

Demostración. Sea $0 \to N \subset L \xrightarrow{\phi} M \to 0$ una sucesión exacta de álgebras de Lie. Aplicando P uno obtiene de manera evidente una sucesión exacta $0 \to P(N) \subset P(L) \to P(M)$, resta ver que el último morfismo es sobreyectivo. Sea $f \in P(M)$ y sea $P_l(M)$ el subespacio de $P(M)$ de segmentos por trozos continuos. Como vimos antes, $P_l(M)$ es denso en $P(M)$. Luego existe $(f_n)_n \in P_l(M)$ tal que $\text{lím}_n f_n = f$. Podemos suponer que $\| f_n - f_{n-1} \| < 2^{-n}$ (reemplazando por alguna subsucesión). Sea $g_1 = f_1$ y $g_n = f_n - f_{n-1}$, luego $\sum_1^\infty g_n = f$ por ser telescópica. Como $L/N \simeq M$ las normas son equivalentes, luego existe una constante C tal que para cada $X \in M$ tenemos una una preimagen $X' \in L$ tal que $\| X' \| \leq C \| X \|$. Veamos que cada g_n puede ser levantada a una curva $h_n \in P_l(L)$ por medio de la aplicación $L \to M$; en efecto supongamos que nos situamos en algún intervalo de la partición $x = t_i$ y escribamos $g_n(t) = tv_n + w_n, g_{n+1} = tv_{n+1} + w_{n+1}$, de manera que $g_n(x) = g_{n+1}(x)$; de esta condición queda determinado w_n en función de v_n, w_{n+1}, v_{n+1} como

$w_n = x(v_{n+1} - v_n) + w_{n+1}$. Podemos levantar via ϕ estos puntos obteniendo asi $\bar{v_n}, \bar{v_{n+1}}, \bar{w_{n+1}}$ tales que

$$\phi(\bar{v_n}) = v_n, \phi(\bar{v_{n+1}}) = v_{n+1}, \phi(\bar{w_{n+1}}) = w_{n+1}.$$

Así definimos $\bar{w_n} := x(\bar{v_{n+1}} - \bar{v_n}) + \bar{w_{n+1}}$, luego definimos $h_n(t) = t\bar{v_n} + \bar{w_{n+1}}$ y $h_{n+1}(t) = t\bar{v_{n+1}} + \bar{w_{n+1}}$ y vale que $h_n(x) = h_{n+1}(x)$ y $\phi(h_n) = g_n,\ \phi(h_{n+1}) = g_{n+1}$. Además satisfacen que $\| h_n \| \leqslant C2^{-n}$. Tomando como $h := \sum_1^\infty h_n$, h es continua pues la serie converge uniformemente y claramente por linealidad de ϕ su imagen es f.

□

5.4. Grupo períodico de un álgebra de Lie-Banach

Llamaremos G_{ad} al grupo de Lie-Banach simplemente conexo cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{g}_{ad}$.

Tenemos una extensión central de álgebras de Lie dada por la inclusión de $\mathfrak{z}$ en $\mathfrak{g}$ y la proyección al cociente

$$\mathfrak{z} \hookrightarrow \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}_{ad}. \quad (1)$$

Sea

$$\widehat{P}(\mathfrak{g}) := \{(\alpha, x) \in P(\mathfrak{g}_{ad}) \times \mathfrak{g} : \alpha(1) = \bar{x}\}$$

que es subálgebra de Lie de $P(\mathfrak{g}_{ad}) \times \mathfrak{g}$. Consideramos una inclusión de $\mathfrak{z}$ en $\widehat{P}(\mathfrak{g})$ y la proyección Q a la primer coordenada, de la siguiente forma

$$\mathfrak{z} \overset{i}{\hookrightarrow} \widehat{P}(\mathfrak{g}) \overset{Q}{\twoheadrightarrow} P(\mathfrak{g}_{ad}), \qquad (2)$$

donde $i(z) = (\bar{0}, z) \simeq \mathfrak{z}$, $Q(\alpha, x) = \alpha$ y $\bar{0}$ es la curva constantemente cero. Es claro que $\ker Q = i(\mathfrak{z})$, en efecto, sea $(\alpha, x) \in \ker Q$ luego $\alpha(t) = 0$ para todo t en particular $\bar{0} = \alpha(1) = \bar{x}$ luego $x \in \mathfrak{z}$ de aqui que $(\alpha, x) = (0, x) \in i(\mathfrak{z})$. Por definición de i es claro que $i(\mathfrak{z}) \subseteq \ker(Q)$. Luego (2) es una extensión central.
La restricción de esta extensión a $\Omega(\mathfrak{g}_{ad})$ permite obtener una sección continua de Q dada por

$$\sigma : \Omega(\mathfrak{g}_{ad}) \to \widehat{P}(\mathfrak{g}), \quad \alpha \mapsto (\alpha, 0).$$

En síntesis hemos construido el siguiente diagrama conmutativo de extensiones centrales

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{z} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "id"] & \widehat{P}(\mathfrak{g}) \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "\pi_2"] & P(\mathfrak{g}_{ad}) \arrow[d, "ev_1"] \\
\mathfrak{z} \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r] & \mathfrak{g}_{ad}.
\end{tikzcd}$$

En las próximas lineas demostraremos que el álgebra de Lie $\widehat{P}(\mathfrak{g})$ anteriormente definida resulta integrable.

Teorema 5.4.1. $\widehat{P}(\mathfrak{g})$ *es integrable.*

Demostración. Como el funtor $\mathfrak{g} \mapsto P(\mathfrak{g})$ es exacto este induce en la extensión (1) otra extensión exacta de caminos

$$0 \to P(\mathfrak{z}) \xrightarrow{i} P(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\psi} P(\mathfrak{g}_{ad}) \to 0$$

luego por los teoremas de isomorfismo tenemos que $P(\mathfrak{g}_{ad}) \cong P(\mathfrak{g})/P(\mathfrak{z})$. Por definición tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{z} \arrow[r, "i"] & \mathfrak{g} \arrow[r] & \mathfrak{g}_{ad} \\
P(\mathfrak{z}) \arrow[r] \arrow[u, "ev_1"] & P(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[u, "ev_1"] & P(\mathfrak{g}_{ad}). \arrow[u, "ev_1"]
\end{tikzcd}$$

Definimos la aplicación $\eta : P(\mathfrak{g}) \to \widehat{P}(\mathfrak{g})$ como $\alpha \mapsto (\bar{\alpha}, \alpha(1))$ donde $\bar{\alpha}(t) := \overline{\alpha(t)}$. Entonces η es morfismo de álgebras con las operaciones coordenada a coordenada y el $\ker \eta = \Omega(\mathfrak{z})$ luego por los teoremas de isomorfismos $\widehat{P}(\mathfrak{g}) \cong P(\mathfrak{g})/\Omega(\mathfrak{z})$. De aquí que tenemos otra descripción de la sucesión (2) como

$$\mathfrak{z} \cong P(\mathfrak{z})/\Omega(\mathfrak{z}) \to \widehat{P}(\mathfrak{g}) \cong P(\mathfrak{g})/\Omega(\mathfrak{z}) \twoheadrightarrow P(\mathfrak{g}_{ad}).$$

Usando el Teorema 5.3.11 existe un grupo de Lie-Banach simplemente conexo H cuya álgebra de Lie es $P(\mathfrak{g})$, es decir $L(H) = P(\mathfrak{g})$. Como H es simplemente conexo y $P(\mathfrak{g}_{ad}) = P(L(G_{ad})) = L(P(G_{ad}))$ el morfismo de álgebras ψ es integrable, obteniendose un homomorfismo de grupos de Lie $H \xrightarrow{\phi} P(G_{ad})$ el cual es sobreyectivo por el lema 1.6.6
Sea $N := \ker \phi$ que es un subgrupo normal y además es subgrupo de Lie-Banach, su álgebra de Lie es $L(N) = \ker \psi = P(\mathfrak{z})$. Asi obtenemos una descripción $P(G_{ad}) \cong H/N$. Como $H \to H/N$ es un fibrado principal trivial, de aqui existe una sucesión exacta en los grupos de homotopía por la Observación 3.3.4

$$\pi_2(H/N) \to \pi_1(N) \to \pi_1(H) \to \pi_1(H/N) \to 1.$$

Como $P(G_{ad})$ es contractible se tiene que $\pi_2(H/N) = \pi_1(H/N) = \pi_1(P(G_{ad})) = 1$ quedando asi que $\pi_1(N) \cong \pi_1(H) = 1$, luego N es simplemente conexo. Como N y $L(N)$ tienen las mismas álgebras de Lie y ambos son simplemente conexos ($L(N)$ lo es por ser espacio vectorial) se tiene que son isomorfos. De aqui se ve que $\Omega(\mathfrak{z}) \subseteq P(\mathfrak{z})$ es un subgrupo de Lie normal de H. Definimos $\widehat{P}(G) := H/\Omega(\mathfrak{z})$ que es un grupo de Lie-Banach por el Teorema 2.2.1 y se verifica que $L(\widehat{P}(G)) = L(H)/L(\Omega(\mathfrak{z})) = P(\mathfrak{g})/\Omega(\mathfrak{z}) = \widehat{P}(\mathfrak{g})$. Pasando por su grupo universal recubridor podemos suponer entonces que $\widehat{P}(G)$ es simplemente conexo e integra a $\widehat{P}(\mathfrak{g})$. $\square$

Tenemos el morfismo

$$L(\widehat{P}(G)) = \widehat{P}(\mathfrak{g}) \overset{Q}{\twoheadrightarrow} P(\mathfrak{g}_{ad}) = L(P(G_{ad}))$$

que es integrable a un homomorfismo de grupos

$$\widehat{P}(G) \xrightarrow{q} P(G_{ad}).$$

Como asi también la inclusión

$$\mathfrak{z} \hookrightarrow \widehat{P}(\mathfrak{g}) = L(\widehat{P}(G))$$

a un homomorfismo inyectivo de álgebras de Lie. En resumen hemos conseguido integrar la extensión central de álgebras de Lie

$$\mathfrak{z} \overset{i}{\hookrightarrow} \widehat{P}(\mathfrak{g}) \overset{Q}{\twoheadrightarrow} P(\mathfrak{g}_{ad})$$

a una extensión de grupos de Lie

$$\mathfrak{z} \hookrightarrow \widehat{P}(G) \xrightarrow{q} P(G_{ad})$$

la cual veremos que también resulta central.

Teorema 5.4.2. $\mathfrak{z} \overset{i}{\hookrightarrow} \widehat{P}(G) \xrightarrow{q} P(G_{ad})$ *es una extensión central de grupos.*

Demostración. Como $P(G_{ad})$ es conexo y $L(q) = Q$ es sobreyectiva, entonces q es sobreyectiva por el Lema 1.6.6. Veamos ahora que $\ker q = \mathfrak{z}$. En efecto, como q es homomorfismo de grupos de Lie, $\ker q$ es subgrupo de Lie-Banach de $\widehat{P}(G)$ y como la extensión (2) es central

$$L(\ker q) = \ker L(q) = \ker Q = i(\mathfrak{z}) = \bar{0} \times \mathfrak{z} \simeq \mathfrak{z} = L(Z)$$

es decir sus álgebras de Lie coinciden. Si vemos que $\ker q$ es simplemente conexo entonces $\ker q$ es isomorfo a $\mathfrak{z}$. Veamos entonces que $\ker q$ es simplemente conexo; tenemos un fibrado principal trivial

$$\ker q \hookrightarrow \widehat{P}(G) \to \widehat{P}(G)/\ker q \simeq P(G_{ad}),$$

esto induce una sucesión exacta en los grupos de homotopía

$$\pi_2(\widehat{P}(G)/\ker q) \to \pi_1(\ker q) \to \pi_1(\widehat{P}(G)) \to \pi_1(\widehat{P}(G)/\ker q)$$

como $\widehat{P}(G)/\ker q \simeq P(G_{ad})$ es contractible entonces

$$\pi_2(\widehat{P}(G)/\ker q) = \pi_1(\widehat{P}(G)/\ker q) = 1,$$

quedando $\pi_1(\ker q) \simeq \pi_1(\widehat{P}(G)) = 1$.

□

Lema 5.4.3. *Existe $\Sigma : U \to \widehat{P}(G)$ con $U \subset \Omega(G_{ad})$ entorno de la identidad tal que $\Sigma(xy) = \Sigma(x)\Sigma(y)$ para todo $x, y \in U$ y además $q \circ \Sigma = id$, es decir Σ es una sección local para q.*

Demostración. Por naturalidad de la exponencial tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \widehat{P}(\mathfrak{g}) \arrow[r, "Q"'] \arrow[d, "\widehat{\exp}"'] & P(\mathfrak{g}_{ad}) \arrow[l, bend right, "\sigma"'] \arrow[d, "\exp"] \\ \widehat{P}(G) \arrow[r, "q"] & P(G_{ad}) \supseteq U. \end{tikzcd}$$

Como $1 \in \Omega(G_{ad})$ tomemos U un entorno de 1 en $\Omega(G_{ad})$ tal que la exponencial es difeomorfismo, luego para cada $x' \in U$ podemos expresar $x' = \exp x$ de manera única con $x \in \Omega(\mathfrak{g}_{ad})$. Definimos así

$$\Sigma(\exp x) := \widehat{\exp}(\sigma(x)).$$

Veamos que $\Sigma(xy) = \Sigma(x)\Sigma(y)$; en efecto achicando el entorno U si es necesario tal que la serie de BCH resulte convergente se tiene que

$$\Sigma(\exp x \exp y) = \Sigma(\exp(x * y)) = \widehat{\exp}(\sigma(x * y)) = \widehat{\exp}(\sigma(x) * \sigma(y)) =$$
$$= \widehat{\exp}(\sigma(x))\widehat{\exp}(\sigma(y)) = \Sigma(\exp x)\Sigma(\exp y).$$

Veamos por último que $q \circ \Sigma = id$, para ello usamos la conmutatividad del diagrama

$$q \circ \Sigma(\exp x) = q(\widehat{\exp}(\sigma(x))) = \exp(Q(\sigma(x)) = \exp(x)$$

pues σ es sección para Q. □

Observación 5.4.4. $\Omega(G_{ad})$ *es conexo.*
Como $P(G_{ad})/\Omega(G_{ad}) \simeq G_{ad}$ y G_{ad} es simplemente conexo, se tiene de la sucesión exacta en los grupos de homotopía

$$\pi_1(P(G_{ad})) \to \pi_1(G_{ad}) \to \pi_0(\Omega(G_{ad})) \to \pi_0(P(G_{ad})) \to .....$$

que $\pi_0(\Omega(G_{ad})) = 1$ pues $\pi_1(G_{ad}) = \pi_0(P(G_{ad})) = 1$.

Consideremos el homomorfismo $\gamma : \widehat{P}(G) \to G_{ad}$, $\gamma(g) = q(g)(1) = ev_1(q(g))$ (es sobreyectivo por ser composición de morfismos sobreyectivos) y definamos $\widehat{\Omega}(G) :=$

$\ker\gamma$ que es un subgrupo de Lie. Es fácil comprobar que $\Sigma(U) \subset \widehat{\Omega}(G)$, en efecto sea $\lambda \in U$, queremos ver que $\gamma(\Sigma(\lambda)) = 1$ entonces por definición de γ tenemos que $\gamma(\Sigma(\lambda)) = ev_1(q(\Sigma(\lambda))) = ev_1(\lambda) = 1$ pues $q \circ \Sigma = id$ y $\lambda \in U \subset \Omega(G_{ad})$.
Por la regla de la cadena se tiene que $L(\gamma)(\alpha, x) = L(ev_1)L(q)(\alpha, x) = \alpha(1) = \bar{x}$, luego $\ker L(\gamma) = \Omega(\mathfrak{g}_{ad}) \times \mathfrak{z}$.
Por los teoremas del cociente se tiene que $\widehat{P}(G)/\widehat{\Omega}(G) \simeq G_{ad}$; y como G_{ad} es simplemente conexo, por la sucesión exacta en los grupos de homotopía se tiene nuevamente que $\widehat{\Omega}(G)$ es conexo, luego su grupo recubridor universal es $\widetilde{\Omega(G_{ad})} \times \mathfrak{z}$, pues $L(\widehat{\Omega}(G)) = \ker L(\gamma) = \Omega(\mathfrak{g}_{ad}) \times \mathfrak{z}$.

Teorema 5.4.5. *Tenemos una extensión central de grupos inducida por la restricción de q a $\widehat{\Omega}(G)$*

$$\mathfrak{z} \hookrightarrow \widehat{\Omega}(G) \stackrel{q|_{\widehat{\Omega}(G)}}{\longrightarrow} \Omega(G_{ad}).$$

Demostración. Sea $q' := q \mid_{\widehat{\Omega}(G)}$, es claro que $q'(\widehat{\Omega}(G)) \subset \Omega(G_{ad})$ por definición de γ. Debido al Lema 5.4.3 y como $\Sigma(U) \subset \widehat{\Omega}(G)$ se tiene entonces que Σ es una sección local para q' en particular, U entorno de 1 es alcanzado por q'; es decir $q'(\Sigma(U)) = U$. Como $\Omega(G_{ad})$ es conexo se tiene que q' es sobreyectiva.
Resta probar que $\ker q' = \mathfrak{z}$; es claro que $\ker q' \subset \ker q = \mathfrak{z}$. Veamos ahora que $\ker q \subset \ker q'$, sea $g \in \ker q$, luego $\gamma(g) = ev_1(q(g)) = ev_1(1) = 1$ o sea que $g \in \ker\gamma = \widehat{\Omega}(G)$, entonces $q'(g) = q(g) = 1$ es decir $g \in \ker q'$.

□

Observación 5.4.6. $\pi_1(\Omega(G_{ad})) \cong \pi_2(G_{ad})$. *En efecto, tenemos la sucesión exacta en los grupos de homotopia inducida por el fibrado*

$$(P(G_{ad}), P(G_{ad})/\Omega(G_{ad}), \Omega(G_{ad}), p)$$

$$\pi_2(P(G_{ad})) \stackrel{p_*}{\to} \pi_2(P(G_{ad})/\Omega(G_{ad})) \stackrel{\partial}{\to} \pi_1(\Omega(G_{ad})) \stackrel{i_*}{\to} \pi_1(P(G_{ad})).$$

Como $P(G_{ad})$ es contráctil se tiene que $\pi_2(P(G_{ad})) = \pi_1(P(G_{ad})) = 1$, con lo que, como $P(G_{ad})/\Omega(G_{ad}) \cong G_{ad}$

$$\pi_2(G_{ad}) \cong \pi_2(P(G_{ad})/\Omega(G_{ad})) \stackrel{\partial}{\cong} \pi_1(\Omega(G_{ad})).$$

Resumiendo lo visto, hemos conseguido una extensión central de grupos

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{z} \arrow[r, hook] & \widehat{\Omega}(G) \arrow[r, "q'"'] & U \subset \Omega(G_{ad}) \arrow[l, bend right, "\Sigma"'] \end{tikzcd}$$

la cual admite una sección local Σ sobre algún entorno de 1, que es un homomorfismo. Luego por el Teorema 4.2.2 tenemos una representación del grupo $\widehat{\Omega}(G)$ como el cociente

$$(\widetilde{\Omega(G_{ad})} \times \mathfrak{z})/\Gamma(-per_{\mathfrak{g}})$$

donde $per_{\mathfrak{g}} : \pi_1(\Omega(G_{ad})) \cong \pi_2(G_{ad}) \to \mathfrak{z}$ es el homomorfismo dado en el Teorema 4.2.2 y $\Gamma(-per_{\mathfrak{g}})$ es el gráfico de $-per_{\mathfrak{g}}$. Definimos el grupo periódico de $\mathfrak{g}$ como la imagen de $per_{\mathfrak{g}}$, y la notamos $\Pi(\mathfrak{g})$, es decir

$$\Pi(\mathfrak{g}) := Im(per_{\mathfrak{g}}).$$

5.5. Caracterización de álgebras integrables

Lema 5.5.1. *Sea $A \subset \widehat{P}(G)$ el subgrupo conexo analítico correspondiente a la subálgebra de Lie cerrada $\Omega(\mathfrak{g}_{ad}) \subset \widehat{P}(\mathfrak{g})$. Luego $A \cap \mathfrak{z} = \Pi(\mathfrak{g})$, y A es subgrupo de Lie si y solo si $\Pi(\mathfrak{g})$ es subgrupo discreto de $\mathfrak{z}$.*

Demostración. Debido a la identificación de $\widehat{\Omega}(G)$ como el cociente

$$\widetilde{\Omega(G_{ad})} \times \mathfrak{z})/\Gamma(-per_{\mathfrak{g}}),$$

se tiene que $A = \psi(\widetilde{\Omega(G_{ad})} \times \{0\})$ con ψ la aplicación definida en el Teorema 4.2.2; en efecto; por naturalidad se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Omega(\mathfrak{g}_{ad}) \times \mathfrak{z} \arrow[r, "L(\psi)"] \arrow[d, "\exp"] & \Omega(\mathfrak{g}_{ad}) \times \mathfrak{z} \arrow[d, "\exp"] \\
\widetilde{\widehat{\Omega}(G)} = \widetilde{\Omega(G_{ad})} \times \mathfrak{z} \arrow[r, "\psi"] & \widehat{\Omega}(G).
\end{tikzcd}$$

Como $L(A) = \Omega(\mathfrak{g}_{ad})$ y A es conexo $A = \langle \exp x \rangle_{x \in \Omega(\mathfrak{g}_{ad})}$, luego para cada $a \in A$ usando la sobreyectividad de $L(\psi)$ y la conmutatividad del diagrama podemos escribir

$$a = \exp x_1 ...... \exp x_k = \exp(L(\psi)(t_1, 0)) ..... \exp(L(\psi)(t_k, 0)) =$$

$$= \psi(\exp t_1, 0) ...... \psi(\exp t_k, 0) = \psi(\exp t_1 ... \exp t_k, 0).$$

Por la definición de ψ tenemos que si $a \in A$, $a = \psi(x, 0) = f(x)$ con $x \in \widetilde{\Omega(G_{ad})}$ o sea que $A = f(\widetilde{\Omega(G_{ad})})$ con $f : \widetilde{\Omega(G_{ad})} \to \widehat{\Omega}(G)$ definida como en el capítulo anterior. Por definición $f \mid \pi_1(\Omega(G_{ad})) = per_{\mathfrak{g}}$, luego es claro que $\Pi(\mathfrak{g}) \subset A \cap \mathfrak{z}$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\Omega(G_{ad})} \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "q_{\Omega(G_{ad})}"] & \\ A \arrow[r, "q'"] & \Omega(G_{ad}). \end{tikzcd}$$

Sea $a \in A\cap\mathfrak{z}$, luego $a = f(g) \in \mathfrak{z}$ con $g \in \widetilde{\Omega(G_{ad})}$, queremos ver que $g \in \pi_1(\Omega(G_{ad})) = \ker q_{\Omega(G_{ad})}$; en efecto

$$q_{\Omega(G_{ad})}(g) = q' \circ f(g) = q'(a) = 1$$

pues $a \in \mathfrak{z}$ y q' es central ($\ker q' = \mathfrak{z}$), entonces $\Pi(\mathfrak{g}) \supset A \cap \mathfrak{z}$.
Que el subgrupo normal $A \subset \widehat{P}(G)$ es subgrupo de Lie es equivalente a que A sea subgrupo de Lie de $\widehat{\Omega}(G)$.
Veamos ahora que A es subgrupo de Lie si y solo si existe un 0 entorno U en $\mathfrak{z}$ tal que $\exp U \cap A = \{1\}$ es decir $\Pi(\mathfrak{g})$ es subgrupo discreto de $\mathfrak{z}$. Ver que A es subgrupo de Lie es equivalente a ver que existe un entorno V abierto en $\Omega(\mathfrak{g}_{ad}) \times \mathfrak{z}$ (el álgebra de Lie de $\widehat{\Omega}(G)$ que la identificamos como suma directa) tal que

$$\exp(V) \cap A = \exp(V \cap L(A)).$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $V = V_\Omega \times U$ con V_Ω , U abiertos de $\Omega(\mathfrak{g}_{ad})$ y $\mathfrak{z}$ respectivamente y que $V \cap L(A) = V_\Omega \times \{0\}$.
Supongamos primero que existe U entorno de 0 en $\mathfrak{z}$ tal que $\exp U \cap A = \{1\}$. Siempre es válida $\supseteq$, veamos entonces $\subseteq$. Tomemos V_Ω entorno abierto de $L(A)$ tal que exp sea difeomorfismo y sea $V := V_\Omega \times U$ entorno abierto de $\Omega(\mathfrak{g}_{ad}) \times \mathfrak{z}$ sea $a \in A \cap \exp(V)$, luego

$$A \ni a = \exp(v_\Omega + z) = \exp(v_\Omega)\exp(z)$$

pues $z \in \mathfrak{z}$, despejando $\exp(z) = \exp(v_\Omega)^{-1}a \in A$ de aqui que $\exp(z) = 1$ con lo que $a = \exp(v_\Omega) \in \exp(V_\Omega \times 0) = \exp(V \cap L(A))$.
Reciprocamente, si A es subgrupo de Lie existen entornos suficientemente pequeños tales que la exponencial es difeomorfismo y además $\exp(V_\Omega \times U) \cap A = \exp(V_\Omega \times 0)$. Veamos que $\exp(U) \cap A = 1$, sea $a = \exp(z) \in A$ y $z \in U$, entonces $a = \exp(v')$ con $v' \in V_\Omega$ por la inyectividad de exp se tiene que $z = v' \in \Omega(\mathfrak{g}_{ad}) \cap \mathfrak{z}$ con lo que por ser suma directa $z = 0$, luego $a = 1$.

□

Teorema 5.5.2 (Teorema de caracterización de álgebras integrables)**.** *Un álgebra de Lie-Banach* $\mathfrak{g}$ *es integrable si y solo si* $\Pi(\mathfrak{g})$ *es discreto.*

Demostración. Hemos visto en la construccón de $\Pi(\mathfrak{g})$ que existe una extensión de grupos

$$\widehat{\Omega}(G) \hookrightarrow \widehat{P}(G) \twoheadrightarrow G_{ad}$$

donde $\widehat{P}(G)$ es un grupo simplemente conexo cuya álgebra de Lie es $\widehat{P}(\mathfrak{g})$.
Si $\mathfrak{g}$ es integrable y G es su correspondiente grupo simplemente conexo, el hecho de que $\widehat{P}(G)$ sea simplemente conexo permite integrar el homomorfismo proyección a la segunda coordenada

$$L(\widehat{P}(G)) = \widehat{P}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g} = L(G)$$

$$(\alpha, x) \mapsto x$$

a un homomorfismo de grupos de Lie $p : \widehat{P}(G) \to G$, donde $\ker L(p) = \Omega(\mathfrak{g}_{ad})$.
Como G es conexo y $L(p)$ es sobreyectivo se tiene que p es sobreyectivo, luego por el teorema del cociente $G \simeq \widehat{P}(G)/\ker p$, donde $\ker p$ es conexo (esto se ve mirando la sucesión exacta en los grupos de homotopía y usando el hecho que G es simplemente conexo). Luego $\ker p$ coincide con el subgrupo analítico conexo A correspondiente a la subálgebra $\Omega(\mathfrak{g}_{ad})$ de $\widehat{P}(\mathfrak{g})$, luego por el Teorema 5.5.1 $\Pi(\mathfrak{g})$ es discreto.
Reciprocamente si $\Pi(\mathfrak{g})$ es discreto, luego A es un subgrupo de Lie y por el teorema del cociente $\widehat{P}(G)/A$ es un grupo de Lie (A es normal pues su álgebra de Lie que es $\Omega(\mathfrak{g}_{ad})$ es un ideal) cuya álgebra de Lie es

$$L(\widehat{P}(G)/A) = L(\widehat{P}(G))/L(A) = \widehat{P}(\mathfrak{g})/\Omega(\mathfrak{g}_{ad}) \simeq \mathfrak{g}.$$

□

Corolario 5.5.3. *Demostración alternativa del Teorema 5.2.4, sin apelar al teorema de Ado.*

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita, por el Teorema 5.3.5, el álgebra de Lie cociente $\mathfrak{g}_{ad} := \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ es integrable y además es de dimensión finita, luego existe un grupo de Lie de dimensión finita al que llamaremos G_{ad} (como antes) tal que $L(G_{ad}) = \mathfrak{g}_{ad}$. Por el Teorema 3.3.5 se tiene que $\pi_2(G_{ad}) = 0$. Como el homomorfismo de grupos de periodos es definido de $\pi_2(G_{ad})$ en $\mathfrak{z}$ se tiene que su imagen es 0 pues su dominio $\pi_2(G_{ad}) = 0$. Luego el grupo de periodos de $\mathfrak{g}$ es 0 con lo cual claramente discreto y por el Teorema 5.5.2 resulta integrable.

□

Bibliografía

[Bel06] Beltita, D. Smooth homogeneous structures in operator theory. Chapman Hall/CRC 137, 2006.

[Bo89] Bourbaki, N, *Lie groups and Lie Algebras*, Chapter 1-3, Springer-Verlag.

[CA36] Cartan, E. La topologie des groupes de Lie, Paris, Hermann 1936.

[EK64] van Est, W. T.; Korthagen, Th. J., *Non-enlargible Lie algebras.* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 67=Indag. Math. 26 1964 15–31.

[Jac79] Jacobson, N. Lie algebras. Republication of the 1962 original. Dover Publications, Inc., New York, 1979.

[KU65] Kuiper, N. H., *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space.* Topology 3 (1965) 19–30.

[LG] Neeb, K.-H. Lecture notes on Lie-groups. 2010. wwww.mathematik.tu-darmstadt.de/Math-Net/Lehrveranstaltungen/Lehrmaterial/WS2004-2005/LieGruppen/liegrp.ps

[Ne00b] Neeb, K.-H. *Central extensions of Infinite-dimensional Lie groups*, Preprint **2084**,TU Darmstadt.

[Ne00c] Glöckner, H.; Neeb, K.-H., *Banach-Lie quotients, enlargibility, and universal complexifications.* [Banach-Lie quotients, enlargeability, and universal complexifications] J. Reine Angew. Math. 560 (2003), 1–28.

[Ne00d] Neeb, K.-H. Monastir Summer School, *Infinite dimensional Lie groups* (2009).

[Mal65] Malcev, A. I. *Sur les groupes topologiques locaux et complets* Acad.Sci. URSS 32, (1941) 606–608.

[Mi59] Michael, E., *Convex structures and continuos selections*, Can.J. Math **11** (1959),556–575.

[MiL] Milnor, J. Morse theory. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1963.

[Mun] Munkres, J. R. Topology: a first course. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[Spa] Spanier, E. H. Algebraic topology. McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto, Ont.-London 1966.

[Sw71] van Est, W. T.; Swierczkowski, S. *The path functor and faithful representability of Banach Lie algebras.* Collection of articles dedicated to the memory of Hannare Neumann, I. J. Austral. Math. Soc. 16 (1973), 54–69.

[Zip] Montgomery, D.; Zippin, L. Topological transformation groups. Reprint of the 1955 original. Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, N.Y., 1974.