UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

ULTRAPRODUCTOS DE ESTRUCTURAS FINITAS

Tomás Ibarlucía

Director: Santiago Figueira
Codirector: Rafael Grimson

28 de marzo de 2012

A Joaquín, mi hermano menor.
A Diego Rosende, como a un hermano mayor.

Agradezco

A mis padres, Miguel y Ana, por su infinito amor y generosidad, por enseñarme tanto; a ellos sobre todo. A mis abuelos Mamama y Cacho, que me cobijaron cuatro años bajo su techo y su afecto.

A mis muchos y muy queridos amigos de la vida y de la facu, y especialmente: a Sergio y Javi, mis grandes compañeros de estudio; a Charly, Chris y Maxi, por su interés y su valiosa ayuda en esta tesis; a Mike, que transformó profundamente mi visión de la matemática.

A Santi, por su generosidad, por ser tan buen director y tan buen amigo. A Rafa, por su atención, su ayuda y su amistad. A los profesores Andrea, Gabriel, Alejandro y Román, que me ofrecieron su apoyo y sus consejos. A los jurados, Mariano y Guillermo, por su lectura y sus sugerencias.

A la Universidad de Buenos Aires y a la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, por su apoyo.

A Terry Tao y a todos los matemáticos que comparten su sabiduría en la red.

A Wolfie, por la música que impregnó estos años de mi vida.

A Exactas y a su gente, con mucho cariño.

Índice general

Introducción y preliminares

> "On the banks of the Rhine a beautiful castle had been standing for centuries. In the cellar of the castle an intricate network of webbing had been constructed by the industrious spiders who lived there. One day a great wind sprang up and destroyed the webs. Frantically the spiders worked to repair the damage. For you see, they thought it was their webbing that was holding up the castle."
> Thirty years ago, this charming tale was regularly told to students specializing in logic, to leave them in no doubt as to how their field was regarded by their fellow mathematicians. [... N]owadays the 'spiders' are to be found all over the castle. Far from being obsessively concerned with providing a 'secure' foundation for mathematics, logicians freely use whatever mathematics they need.
>
> Martin Davis, 1977, reseñando el libro *Mathematical Logic* de Monk.

En este trabajo estudiamos algunas ideas matemáticas muy versátiles que tuvieron origen en la lógica matemática. La herramienta principal es una construcción algebraica —los ultraproductos— con propiedades que la vuelven de especial interés para los lógicos. Su naturaleza es sin embargo sumamente general y puede ser aplicada a toda clase de objetos matemáticos. La idea se basa en la noción conjuntista de ultrafiltro y es en verdad muy simple: identificar las secuencias de objetos que coincidan en la mayoría de sus términos.

Las dos áreas provenientes de la lógica que más interactúan con ramas clásicas de la matemática son posiblemente el análisis no-estándar y la teoría de modelos, y los ultraproductos son un instrumento importante para ambas. Tras presentar la teoría de dicha construcción estudiaremos ejemplos de aplicación de estas dos áreas por separado. Así, los ultraproductos nos servirán de puente con temas de teoría de la medida, por una parte, y de álgebra y en especial teoría de cuerpos, por la otra. Esta elección es arbitraria, por cuanto muchos otros temas de aplicación son posibles; está motivada sin embargo por una idea común, como se verá, que es el otro propósito general de este trabajo: el estudio mediante métodos lógicos de la interacción entre objetos matemáticos finitos e infinitos.

En el primer capítulo exponemos entonces la teoría de los *ultralímites* —nombre general para referirnos a las construcciones basadas en ultrafiltros. Los temas tratados son clásicos y pueden encontrarse por ejemplo en los libros de Bell y Slomson [4] o de Chang y Keisler [5]. El análisis no-estándar y la teoría de modelos enfocan las mismas herramientas de maneras distintas (el primero de modo más conjuntista, la segunda con énfasis en el lenguaje de primer orden), y hemos tratado de lograr una exposición que compagine ambos enfoques.

El segundo capítulo estudia la medida de Loeb, que es un espacio de probabilidad estándar construido con métodos no-estándar. Como caso particular, un ultralímite de espacios finitos —sucesivamente más grandes— con la medida de contar da lugar a un espacio de probabilidad infinito que todavía identifica la idea de 'medir' con la de 'contar'. Reseñamos su relación con la medida de Lebesgue e investigamos por nuestra cuenta ideas de desintegración de medidas aplicadas a este espacio. Contamos por último una aplicación sencilla que vincula resultados de teoría ergódica con resultados de densidad sobre los enteros. Las referencias se dan en el texto; asumimos sin embargo conocimientos de teoría de la medida, por ejemplo como pueden encontrarse en [35].

El tercer capítulo, independiente del anterior, estudia estructuras algebraicas infinitas indistinguibles en primer orden de las estructuras finitas. Analizamos las posibilidades de caracterizarlas axiomáticamente y consideramos distintos casos particulares, el más notable siendo el de los cuerpos pseudofinitos. Asumimos familiaridad con las definiciones y propiedades básicas de las estructuras algebraicas más comunes (entre ellas las álgebras de Boole, ver por ejemplo [11]), y especialmente con la teoría de extensiones de cuerpos, como puede leerse en [20]. Otras referencias más específicas se dan en el texto.

Esperamos que el todo sea una invitación agradable y estimulante a estudiar lógica como una herramienta básica del quehacer matemático. Muchos otros desarrollos matemáticos vinculados quedan en el tintero, o mucho antes de eso —por aprender. En particular ideas de medidas en teoría de modelos, que habrían servido para conectar los distintos temas abordados, y que tienen una notable actualidad (ver [15, 21]). Otros trabajos recientes utilizan ultraproductos en áreas hasta el momento insospechadas. Referimos algunos de ellos al final del Capítulo 2. Mencionemos también los últimos desarrollos sobre subgrupos aproximados [30], que dieron un giro inesperado tras la introducción de ultraproductos por parte de Hrushovski. En [25] se emplean ultraproductos en álgebra conmutativa, como puente entre resultados en característica p y sus análogos en característica cero. Entre los temas clásicos, nos ha quedado pendiente comentar las ideas básicas de topología no-estándar, como pueden verse en [14].

En la sección siguiente repasamos los conceptos básicos de la lógica de primer orden y su semántica, en la forma en que los emplearemos luego. Puesto que —esperamos— algunos de los temas de esta tesis pueden interesar a personas no familiarizadas con la lógica, creemos que el resumen es útil.

Sentido y referencia

Para compensar el carácter expeditivo de este apartado empezamos recordando el antiguo análisis de los dos componentes del *significado*, que en los populares términos de Frege son: la *referencia*, es decir el objeto denotado, y el *sentido*, que es el modo en que nos referimos a él. Cumplimos con la obligación de citar su ejemplo de 'el lucero matutino' y 'el lucero vespertino', que tienen dos sentidos distintos y una misma referencia: Venus.

En lógica de primer orden limitamos el sentido al de aquellas expresiones que podemos construir con los símbolos lógicos

$$\forall, \exists, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, (,), x, y, z, \ldots, =,$$

interpretados de la manera usual, y un conjunto distinguido de símbolos no lógicos que denominamos la *signatura* del lenguaje. La signatura la notaremos invariablemente con la letra σ. Está conformada por *símbolos* (o *letras*) *de relación* y *de función*, cada uno con una aridad determinada. Las letras de función de aridad cero se llaman *constantes* y acostumbramos nombrarlas por separado; las letras de relación de aridad cero se llaman *letras proposicionales*, y acostumbramos omitirlas (su estudio aislado es el objeto de la lógica proposicional). Usamos por ejemplo $\sigma = \{<\}$ (una relación binaria) para hablar de conjuntos ordenados, o bien $\sigma = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ (tres funciones binarias y dos constantes) para tratar anillos y cuerpos.

Los *términos* son las expresiones adecuadamente construidas usando variables, constantes y letras de función, como '$(x + 1) \cdot y$'. A partir de ellos y utilizando los cuantificadores, conectivas, el símbolo de igualdad y los de relación se construyen las *fórmulas*. Las fórmulas *atómicas* son las que se obtienen igualando dos términos o aplicando una letra de relación a una cantidad adecuada de términos, por ejemplo '$x < y$'. Las *variables libres* de una fórmula son las que figuran sin estar cuantificadas, y las *sentencias* o *enunciados* son las fórmulas que no tienen variables libres. Una fórmula *libre de cuantificadores* es exactamente lo que el nombre indica.

Las σ*-estructuras* son los objetos de donde las expresiones formales (construidas a partir de una signatura σ) toman su referencia. Una σ-estructura $\mathcal{M}$ consiste en un conjunto M, el *dominio*, acompañado por relaciones, funciones y elementos distinguidos para interpretar los símbolos de σ. Más precisamente, debemos destacar:

- para cada letra de relación $R \in \sigma$ de aridad n, una relación $R^{\mathcal{M}} \subset M^n$,
- para cada letra de función $f \in \sigma$ de aridad n, una función $f^{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow M$,
- para cada letra de constante $c \in \sigma$, un elemento $c^{\mathcal{M}} \in M$,
- para cada letra proposicional $p \in \sigma$, un valor de verdad $p^{\mathcal{M}} \in \{0, 1\}$.

Las fórmulas cobran significado mediante la noción de *satisfacción*. Dadas una σ-fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_m)$ en las variables libres $x_1, \ldots, x_m$, una σ-estructura $\mathcal{M}$ y elementos $a_1, \ldots, a_m$ en su dominio, se dice que $\mathcal{M}$ satisface la fórmula ϕ interpretando x_i por a_i, y se nota

$$\mathcal{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_m),$$

cuando (hablando informalmente) aquello que se afirma con $\phi(a_1, \ldots, a_m)$ es verdadero en $\mathcal{M}$. Los cuantificadores $\forall x$, $\exists x$ se deben interpretar como 'para todo x en M', 'existe x en M', y los símbolos de σ como si se refirieran a las relaciones, funciones y elementos destacados de $\mathcal{M}$. Como es sabido, el término *primer orden* alude a la restricción de los cuantificadores a los *elementos* del dominio (por oposición a sus subconjuntos o relaciones).

Las fórmulas con variables libres se pueden leer como propiedades o relaciones sobre los elementos de las estructuras. El conjunto o relación definido por ϕ en $\mathcal{M}$ es

$$\phi(\mathcal{M}) = \{(a_1, \ldots, a_m) \in M^m : \mathcal{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_m)\},$$

es decir su referencia en la estructura considerada (generalizando así la interpretación de los símbolos de la signatura). Las sentencias en cambio se pueden leer como propiedades de las estructuras mismas. Se dice que $\mathcal{M}$ es un *modelo* de una sentencia ϕ precisamente cuando $\mathcal{M} \models \phi$. En uno u otro caso es común usar el término *elemental* para referirse a las propiedades (de los elementos o de las estructuras) expresables de esta forma —es decir como sinónimo de *primer orden*.

Frege entendía la referencia de las sentencias como su valor de verdad, lo que condice y generaliza la interpretación de las letras proposicionales. Pensándolas sin embargo como propiedades de las estructuras, podemos concebir la referencia de una sentencia como la clase de sus modelos. Siguiendo esta idea se define, para un conjunto T de sentencias,

$$\mathrm{Mod}(T) = \{\mathcal{M} : \mathcal{M} \models T\}$$

(lo último queriendo decir que $\mathcal{M} \models \phi$ para toda $\phi \in T$). Se dice que una clase $\mathcal{K}$ de σ-estructuras es *elemental* cuando existe un conjunto T de σ-sentencias que la determina, i.e. tal que $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(T)$. Decimos que la clase es *definible* cuando T se puede elegir finito, o lo que es lo mismo si $\mathcal{K}$ se puede determinar con una sola sentencia. Las clases de los grafos, los órdenes parciales o totales, las álgebras de Boole, los anillos o los cuerpos son todas definibles (sobre las signaturas apropiadas); basta listar sus axiomas usuales. La clase de las estructuras infinitas, la de los anillos de característica cero o la de los cuerpos algebraicamente cerrados son elementales, pero no definibles.

Una *teoría* es un conjunto de sentencias. Normalmente queremos que las teorías sean *consistentes*, es decir que no lleven formalmente a contradicción (aplicando las reglas de inferencia y axiomas básicos de la lógica). El teorema de completitud de Gödel establece que una teoría es consistente si y sólo si tiene un modelo, relacionando así la deducibilidad formal con la semántica. Implica a su vez que las consecuencias formales de una teoría T coinciden con sus consecuencias semánticas: se dice que una teoría T *implica semánticamente* una sentencia ϕ, y se nota

$$T \models \phi,$$

si ϕ vale en todos los modelos de T (es decir si $\mathcal{M} \models \phi$ cada vez que $\mathcal{M} \models T$). Al conjunto de consecuencias semánticas de T se lo nota a veces $\mathrm{Con}(T)$.

La teoría de una estructura $\mathcal{M}$, notada $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$, es el conjunto de sentencias que valen en $\mathcal{M}$; la teoría $\mathrm{Th}(\mathcal{K})$ de una clase de modelos $\mathcal{K}$ es el conjunto de las sentencias que valen en todos los miembros de la clase. Una teoría se dice *completa* si implica a ϕ o a $\neg\phi$ para cada sentencia ϕ, lo que es siempre el caso para teorías de la forma $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$. Una teoría T se dice *decidible* si se puede determinar algorítmicamente si una sentencia es o no es consecuencia de T, i.e. si $\mathrm{Con}(T)$ es *computable* (en el sentido, por ejemplo, de las máquinas de Turing). Una condición más débil es que T sea *recursivamente axiomatizable*, es decir que exista un conjunto computable A de sentencias que sirvan de axiomas de T, i.e. tal que $\mathrm{Con}(T) = \mathrm{Con}(A)$. Del teorema de completitud de Gödel se deduce que, si T es recursivamente axiomatizable (y la signatura es computable), entonces $\mathrm{Con}(T)$ es *computablemente enumerable*, es decir hay un algoritmo que va listando en algún orden los miembros de $\mathrm{Con}(T)$. Si las consecuencias de una teoría son computablemente enumerables y la teoría es además completa, se desprende fácilmente que la teoría es de hecho decidible.

Muchas de estas nociones no serán necesarias sino hasta el Capítulo 3. Sí utilizaremos antes el concepto de *equivalencia elemental*, que se da entre dos estructuras $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ cuando $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$, y se nota $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. También el de *inmersión elemental*, que se aplica a las funciones $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ entre σ-estructuras que preservan las propiedades de primer orden, o en símbolos:

$$\mathcal{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_m) \text{ si y sólo si } \mathcal{N} \models \phi(f(a_1), \ldots, f(a_m))$$

para toda σ-fórmula ϕ en cualquier número m de variables libres y todos $a_1, \ldots, a_m \in M$. Considerando en particular las sentencias se tiene en dicho caso $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

Más conceptos relacionados y resultados de la teoría de los modelos se listarán en la última sección del Capítulo 1.

Notación

Si el dominio de $\mathcal{M}$ es M, el de $\mathcal{N}$ será seguramente N. El número 2 denota a veces el conjunto $\{0, 1\}$, como quería von Neumann y celebraba Halmos. El conjunto de los números naturales puede ser ω ó $\mathbb{N}$, según la filosofía del caso (vale notar que el primero contiene al cero, mientras que, en el caso del segundo, no estamos seguros). El lector distinguirá dónde el prefijo 'σ-' hace referencia a la signatura y dónde a la propiedad de ser cerrado por uniones numerables. Si algo se puede hacer *de manera elemental*, es porque es básico o fundamental, como siempre. Por lo demás la notación es estándar, y las excepciones son introducidas y explicadas en el texto.

Capítulo 1

Ultralímites

Un concepto fundamental en matemáticas es el de *límite*: la idea de que una sucesión o un conjunto de objetos se puede aproximar a otro objeto, que viene a representar un estado terminal de la sucesión o el conjunto. La geometría —y más en general la topología— es desde ya el contexto natural para que aparezca la idea de límite, porque en ella se tiene una noción precisa de proximidad entre elementos. Estamos habituados también a otro tipo de límites, los categóricos, que suelen aparecer cuando se tiene una familia de espacios o estructuras conectadas mediante morfismos adecuados; la noción de proximidad del espacio límite toma la forma de una propiedad universal.

Hay un tercer tipo de límite, que es de naturaleza lógica, y que puede tomarse de un conjunto de elementos o estructuras sin necesidad de disponer de una topología o de morfismos que los conecten y dirijan. Supongamos dada $\{o_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos indexados por un conjunto infinito I. Formaremos a partir de ellos un nuevo objeto u de manera que sus propiedades *elementales* sean precisamente aquellas que valgan en *casi todo* objeto o_i. Así, el límite u estará cerca de los o_i en el sentido de poseer aquellas propiedades comunes a la mayoría de ellos. La noción de proximidad dependerá entonces del modo de determinar tales *mayorías*. Esto será formalizado considerando ultrafiltros no principales sobre el conjunto I de índices.

1.1. Ultrafiltros

Dado un conjunto infinito I, queremos formalizar la idea de que una propiedad $P(i)$ valga para casi todo $i \in I$. Es natural considerar entonces una medida de probabilidad 2-valuada, finitamente aditiva, sobre el conjunto de subconjuntos de I,

$$D : \mathcal{P}(I) \to 2,$$

y convenir que P vale para casi todo i precisamente cuando $D(\{i : P(i)\}) = 1$. La condición de ser 2-valuada asegura que P o su negación valga para casi todo i.

Para ser fieles a nuestra motivación es necesario exigir además que la medida no esté concentrada en ningún punto, i.e. $D(\{i\}) = 0$ para todo $i \in I$. En particular, si I es numerable, entonces no D podrá ser σ-aditiva. Por otra parte, si $|I| > \aleph_0$, la pregunta de si existen medidas σ-aditivas sobre el conjunto de partes $\mathcal{P}(I)$ es un problema famoso de la teoría de conjuntos (el problema de la existencia de *cardinales medibles*; es consistente relativo a la teoría *ZFC* que de hecho no existan). Esto explica que nos conformemos con medidas finitamente aditivas.

Para proceder a construir los ultralímites debemos asegurar entonces la existencia de una tal medida D. Observemos que la misma queda totalmente determinada por la familia $U = \{A \subset I : D(A) = 1\}$, que a su vez tiene las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \notin U$, $I \in U$;

2. si $A, B \in U$, entonces $A \cap B \in U$;

3. si $A \in U$ y $A \subset B \subset I$, entonces $B \in U$;

4. para cada $A \subset I$ se tiene $A \in U$ o bien $I \setminus A \in U$;

5. $\mathcal{F} \subset U$, donde $\mathcal{F} = \{A \subset I : I \setminus A \text{ es finito}\}$.

Una familia U de subconjuntos de I que satisfaga las propiedades (1), (2) y (3) se denomina un *filtro propio* sobre I (o un filtro propio del álgebra $\mathcal{P}(I)$), y un ejemplo importante sobre cualquier conjunto infinito I es el filtro de Fréchet $\mathcal{F}$ dado en (5). A la familia $\mathcal{P}(I)$ la llamamos a veces el *filtro impropio*. Un filtro propio que cumpla la condición (4) se denomina un *ultrafiltro*.

Por otra parte, decimos que una familia F de subconjuntos de I tiene la *propiedad de intersección finita (fip)* si la intersección de una cantidad finita de sus miembros es siempre no vacía.

Lema 1.1.1. *Toda familia de subconjuntos de I con la fip está contenida en un filtro propio.*

Demostración. Sea F una familia con la fip y sea

$$E = \{A \subset I : A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k, \text{ donde para cada } k \text{ es } B_k \subset A_k \subset I \text{ para algún } B_k \in F\}$$

la familia de intersecciones finitas de subconjuntos de I mayores que algún miembro de F. Es claro que $I \in E$, y además $\emptyset \notin E$ precisamente porque F tiene la fip. Es inmediato verificar para E la condición (2) de arriba, y si por otra parte $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \subset B$ con $B_k \subset A_k \subset I$, $B_k \in F$, entonces $B = \bigcap_{k=1}^{n}(A_k \cup B)$ con $B_k \subset A_k \cup B \subset I$, por lo que $B \in E$. Concluimos que E es un filtro propio que contiene a F. □

Proposición 1.1.2. *Un filtro U sobre I es un ultrafiltro si y sólo si es un filtro propio maximal (respecto de la inclusión).*

Demostración. Si un ultrafiltro U está estrictamente contenido en otro filtro V, sea $A \in V \setminus U$. Como $A \notin U$, por (4) se tiene $I \setminus A \in U \subset V$. Por cuanto V es un filtro, resulta $\emptyset = A \cap (I \setminus A) \in V$, es decir $V = \mathcal{P}(I)$ es el filtro impropio.

A la inversa, si U es un filtro propio maximal, sea $A \notin U$. Entonces $U \cup \{I \setminus A\}$ tiene la fip: si fuera $(I \setminus A) \cap B = \emptyset$ para algún $B \in U$, se tendría $B \subset A$ y luego $A \in U$. Existe entonces un filtro propio que contiene a $U \cup \{I \setminus A\}$, y por maximalidad se tiene que $I \setminus A \in U$. Por tanto U verifica (4). □

Teorema 1.1.3. *Todo filtro propio está contenido en un ultrafiltro.*

Demostración. Usamos el lema de Zorn. Como la unión de una cadena arbitraria de filtros propios sobre I que contienen a uno dado es de vuelta un filtro propio sobre I que contiene al original, existe un filtro maximal que lo contiene. Conforme la proposición anterior, el mismo resulta un ultrafiltro. □

Este resultado no es otra cosa que el teorema del ideal primo: observemos que U es un ultrafiltro si y sólo si $\{I \setminus A : A \in U\}$ es un ideal primo del álgebra $\mathcal{P}(I)$. Notemos por otra parte que toda familia con la fip está contenida en un ultrafiltro.

Un filtro F está *generado* por un conjunto A cuando $F = \{B \subset I : A \subset B\}$, y en tal caso decimos que F es *principal*. Observemos que un ultrafiltro U es principal si y sólo si está generado por un singleton $\{i\}$, o equivalentemente si y sólo si contiene algún subconjunto finito. La condición (5) de arriba equivale a pedir que U no contenga conjuntos finitos, y por tanto a pedir que U sea *no principal*.

Corolario 1.1.4. *Si I es infinito, existe un ultrafiltro no principal sobre I.*

Demostración. El filtro de Fréchet se puede extender a un ultrafiltro. □

Volvemos ahora a las medidas finitamente aditivas sobre los subconjuntos de I. Dado un ultrafiltro no principal U, podemos definir D por $D(A) = 1$ si y sólo si $A \in U$, y $D(A) = 0$ en otro caso. La función $D : \mathcal{P}(I) \to 2$ así definida resulta una medida de probabilidad finitamente aditiva, 2-valuada y no concentrada en ningún punto sobre los subconjuntos de I. En efecto, si $A \cap B = \emptyset$, entonces no pueden ser ambos A y B miembros de U debido a las condiciones (1) y (2), y tenemos esencialmente dos casos. Si $D(A) = 1$ y $D(B) = 0$, entonces $D(A \cup B) = 1$ por ser $A \subset A \cup B$ y $A \in U$. Si en cambio $D(A) = D(B) = 0$, entonces por (4) es $I \setminus A \in U$ y $I \setminus B \in U$, y luego $I \setminus (A \cup B) = (I \setminus A) \cap (I \setminus B) \in U$, de donde $D(A \cup B) = 0$. De (5) es claro que D no puede estar concentrada en ningún punto.

Esta construcción es la inversa de la que hicimos arriba para obtener un ultrafiltro U a partir de una medida D, por lo que tenemos una biyección natural entre tales medidas y los ultrafiltros no principales sobre I. De ahora en más identificaremos las unas con los otros.

Nota. Los ultrafiltros son un objeto matemático sumamente ubicuo y se pueden entender de muchas otras maneras equivalentes. Entre ellas, los podemos considerar: como 2-homomorfismos del álgebra de Boole $\mathcal{P}(I)$ (la más inmediata); como los elementos de la compactificación de Stone–Cech del espacio discreto I (precisamente el espacio de Stone del álgebra $\mathcal{P}(I)$); cuando $I = \mathbb{N}$, como límites de Banach (extensiones lineales *-multiplicativas del funcional lineal $\text{lím} : c \to \mathbb{C}$ a todo $l^\infty(\mathbb{N})$); incluso como métodos de elección social para un conjunto de votantes I (sirviendo la existencia de ultrafiltros no principales como refutación del Teorema de Arrow en el caso infinito). Mirar por ejemplo las amenas exposiciones de [28, 29].

1.2. Ultraproductos

Sea D un ultrafiltro no principal sobre I. Cuando sean dadas para cada i una propiedad o un enunciado $P(i)$, notaremos

$$P(i)\ D\text{-}a.e.(i)$$

para indicar que $\{i \in I : P(i) \text{ es verdadero}\} \in D$, i.e. que $P(i)$ vale para casi todo i según la medida D. Esta notación no es estándar pero es práctica y es fiel a nuestra motivación.

Observación 1.2.1. La notación anterior permite utilizar intuitivamente las propiedades de D como filtro: si dos propiedades valen para casi todo i, lo mismo se puede decir de su conjunción o de cualquier otra propiedad implicada por alguna de ellas. El hecho de que D sea además un ultrafiltro queda capturado por la siguiente observación:

$$\neg(P(i)\ D\text{-}a.e.(i)) \implies (\neg P(i)\ D\text{-}a.e.(i)),$$

es decir, si no es cierto que una propiedad vale para casi todo i, entonces su negación vale para casi todo i. La implicación recíproca también vale, pues D es propio. La condición de que D sea no principal legitima la intuición de que si una propiedad vale para todo i salvo quizás finitos, entonces vale para casi todo i.

Fijemos ahora una signatura σ para un lenguaje de primer orden y consideremos $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ una familia de σ-estructuras; como antes, D es un ultrafiltro no principal sobre I. Dados $x = \{x_i\}_{i\in I}, y = \{y_i\}_{i\in I}$ en el producto cartesiano $\prod_{i\in I} M_i = \{z : I \to \bigcup M_i : z_i \in M_i \text{ para cada } i\}$, diremos que x e y son equivalentes respecto de D, y escribiremos $x \sim y$, cuando

$$x_i = y_i\ D\text{-}a.e.(i),$$

es decir cuando $\{i \in I : x_i = y_i\} \in D$. Del hecho de que D sea un filtro es inmediato deducir que $\sim$ es efectivamente una relación de equivalencia. Por ejemplo, si los conjuntos $\{i \in I : x_i = y_i\}$ y $\{i \in I : y_i = z_i\}$ están en D, estarán también en D su intersección y el conjunto $\{i \in I : x_i = z_i\}$, que la contiene.

A la clase de equivalencia de x la notaremos indistintamente:

$$x/D = \operatorname*{ulím}_{i,D} x_i = \{y \in \prod_{i\in I} M_i : x \sim y\},$$

y la llamaremos el *ultralímite* de la familia $\{x_i\}_{i\in I}$.

Nota. En la literatura el término *ultralímite* denota más usualmente otras construcciones que se realizan a partir de ultraproductos. Seguimos aquí a Terence Tao [26, 29] en usar el término de forma amplia para referirnos a clases de equivalencias en el espíritu de las recién definidas y a otros objetos afines. La notación '$\text{ulím}_{i,D}\, x_i$' tampoco es estándar, pero nos gusta; una similar se usa en [25]. A veces omitiremos los subíndices.

Definición 1.2.2. Sea $M = \prod_{i\in I} M_i/D$ el conjunto de ultralímites de familias de elementos de los conjuntos M_i. El *ultraproducto* $\mathcal{M} = \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/D$ de las σ-estructuras $\mathcal{M}_i$ es la σ-estructura que tiene por dominio a M y que interpreta la signatura de la siguiente manera. Dados $x^1/D, \ldots, x^n/D$ ultralímites en M con $x^k/D = \text{ulím}_{i,D}\, x_i^k$, definimos:

1. para cada letra de relación n-aria $R \in \sigma$,

$$(x^1/D, \ldots, x^n/D) \in R^{\mathcal{M}} \text{ si y sólo si } (x_i^1, \ldots, x_i^n) \in R^{\mathcal{M}_i} \ D\text{-}a.e.(i)$$

2. para cada letra de función n-aria $f \in \sigma$,

$$f^{\mathcal{M}}(x^1/D, \ldots, x^n/D) = \underset{i,D}{\text{ulím}}\, f^{\mathcal{M}_i}(x_i^1, \ldots, x_i^n)$$

3. para cada letra de constante $c \in \sigma$,

$$c^{\mathcal{M}} = \underset{i,D}{\text{ulím}}\, c^{\mathcal{M}_i}.$$

Probemos la buena definición. Supongamos $x^k/D = y^k/D$ para $k = 1, \ldots, n$. Si se tiene $(x_i^1, \ldots, x_i^n) \in R^{\mathcal{M}_i}$ D-*a.e.*(i), entonces para casi todo i valen, todas a la vez, las condiciones

$$x_i^1 = y_i^1, \ldots, x_i^n = y_i^n, (x_i^1, \ldots, x_i^n) \in R^{\mathcal{M}_i},$$

y para esos i también es $(y_i^1, \ldots, y_i^n) \in R^{\mathcal{M}_i}$. Es decir, $(y_i^1, \ldots, y_i^n) \in R^{\mathcal{M}_i}$ D-*a.e.*(i). Para los i para los que $x_i^1 = y_i^1, \ldots, x_i^n = y_i^n$, se tendrá además

$$f^{\mathcal{M}_i}(x_i^1, \ldots, x_i^n) = f^{\mathcal{M}_i}(y_i^1, \ldots, y_i^n),$$

y por tanto las expresiones a cada lado del igual coinciden para casi todo i. Es decir, $\text{ulím}_{i,D}\, f^{\mathcal{M}_i}(x_i^1, \ldots, x_i^n) = \text{ulím}_{i,D}\, f^{\mathcal{M}_i}(y_i^1, \ldots, y_i^n)$. Este manejo intuitivo está justificado por las propiedades (2) y (3) de la definición de filtro de la sección anterior.

Nótese que la construcción puede hacerse a partir de un ultrafiltro principal, digamos generado por un singleton $\{i_0\}$, pero en ese caso $x \sim y$ si y sólo si $x_{i_0} = y_{i_0}$, y de hecho $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}_{i_0}$. Por ello a veces hablaremos de *ultraproductos no principales*, queriendo remarcar que la construcción se hizo a partir de un ultrafiltro no principal.

Definición 1.2.3 (*Objetos internos*, aproximación informal)**.** En verdad no hay por qué restringirse a las relaciones y funciones destacadas por la signatura. La naturaleza tan general de la construcción hace posible que formemos 'ultraproductos' o 'ultralímites' a partir de casi cualquier cosa. Por ejemplo, si tenemos funciones $g_i : \mathcal{M}_i \to \mathcal{N}_i$ entre estructuras, podemos considerar el ultralímite $g = \text{ulím}\, g_i : \prod \mathcal{M}_i/D \to \prod \mathcal{N}_i/D$ dado por $g(\text{ulím}\, x_i) = \text{ulím}\, g_i(x_i)$, que resulta bien definido; decimos que g es una *función interna* entre los ultraproductos considerados. También, si tenemos subconjuntos $A_i \subset M_i$ para cada i, podemos formar el ultraproducto $\prod A_i/D$, que se identifica naturalmente con un subconjunto de $\prod M_i/D$; lo llamamos un *subconjunto interno* del ultraproducto $\mathcal{M} = \prod \mathcal{M}_i/D$. Más adelante en este trabajo consideraremos ultralímites de σ-álgebras y medidas.

Observación 1.2.4. Como subconjunto de M, el ultraproducto $\prod A_i/D$ es la imagen del ultralímite de las inclusiones $A_i \hookrightarrow M_i$. Está caracterizado por la condición

$$\underset{i,D}{\text{ulím}}\, x_i \in \prod_{i\in I} A_i/D \iff x_i \in A_i \ D\text{-}a.e.(i).$$

Observación 1.2.5. Si A_i, B_i son subconjuntos de M_i tales que $A_i = B_i$ D-*a.e.*(i), entonces $\prod A_i/D = \prod B_i/D$ como subconjuntos de M. Y recíprocamente, si $A_i \neq B_i$ D-*a.e.*(i) (ver la Observación 1.2.1), sea $x_i \in A_i \Delta B_i$ para aquellos i en los que tenga sentido; si $x_i \in A_i$ D-*a.e.*(i), entonces $x_i \notin B_i$ D-*a.e.*(i), y si $x_i \in B_i$ D-*a.e.*(i), entonces $x_i \notin A_i$ D-*a.e.*(i); en cualquier caso $\prod A_i/D \neq \prod B_i/D$. Concluimos que

$$A_i = B_i \ D\text{-}a.e.(i) \iff \prod_{i\in I} A_i/D = \prod_{i\in I} B_i/D.$$

Tiene sentido entonces utilizar también la notación $\text{ulím}_{i,D} A_i$ para referirse al ultraproducto $\prod A_i/D$.

Proposición 1.2.6. *Los subconjuntos internos de un ultraproducto $\mathcal{M}$ forman una subálgebra del álgebra de subconjuntos de M, y valen las igualdades:*

1. $\text{ulím}\, A_i \cap \text{ulím}\, B_i = \text{ulím}(A_i \cap B_i)$;
2. $\text{ulím}\, A_i \cup \text{ulím}\, B_i = \text{ulím}(A_i \cup B_i)$;
3. $M \setminus \text{ulím}\, A_i = \text{ulím}(M_i \setminus A_i)$.

Demostración. Basta probar (1) y (3). Se tiene $\text{ulím}\, x_i \in \text{ulím}\, A_i \cap \text{ulím}\, B_i$ si y sólo si $x_i \in A_i$ D-*a.e.*(i) y $x_i \in B_i$ D-*a.e.*(i), lo que a su vez ocurre siempre y cuando $x_i \in A_i \cap B_i$ D-*a.e.*(i); esto prueba (1). El punto (3) se sigue inmediatamente de la Observación 1.2.1 cuando $P(i)$ es la fórmula '$x_i \in A_i$': es falso que $x_i \in A_i$ D-*a.e.*(i) si y sólo si es el caso que $x_i \notin A_i$ D-*a.e.*(i). □

Observación 1.2.7. El álgebra de subconjuntos internos del ultraproducto $\mathcal{M}$ se puede identificar con el cociente del álgebra producto $\prod_{i\in I} \mathcal{P}(M_i)$ por el ideal $\{(A_i)_{i\in I} : A_i = \emptyset \ D\text{-}a.e.(i)\}$, precisamente porque $\text{ulím}_{i,D} A_i = \text{ulím}_{i,D} B_i$ si y sólo si $A_i \Delta B_i = \emptyset$ D-*a.e.*(i). Podemos notarla $\prod_{i\in I} \mathcal{P}(M_i)/D$ o incluso $\text{ulím}_{i,D} \mathcal{P}(M_i)$.

Observación 1.2.8. De manera análoga a lo observado en 1.2.4, dados $S_i \subset M_i{}^n$ podemos identificar el ultraproducto $\text{ulím}_{i,D} S_i$ con un subconjunto de M^n mediante:

$$(\underset{i,D}{\text{ulím}}\, x_i^1, \ldots, \underset{i,D}{\text{ulím}}\, x_i^n) \in \underset{i,D}{\text{ulím}}\, S_i \iff (x_i^1, \ldots, x_i^n) \in S_i \ D\text{-}a.e.(i).$$

Es inmediato verificar entonces la igualdad: $\text{ulím}(A_i \times B_i) = (\text{ulím}\, A_i) \times (\text{ulím}\, B_i)$. Las *relaciones internas* de $\mathcal{M}$ se definen como ultralímites de relaciones sobre los dominios M_i.

La siguiente proposición es evidente.

Proposición 1.2.9. *Sea $\mathcal{M}$ un ultraproducto como arriba, y para $n < \omega$ consideremos la proyección*

$$\pi^n : M \times M^n \to M^n, \ \pi^n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Convenimos en que $M^0 = 1$ y $\pi^0(x_0) = 0$ para todo x_0. Sean $\pi_i^n : M_i \times M_i{}^n \to M_i{}^n$ las correspondientes proyecciones para cada $\mathcal{M}_i$. Entonces $\pi^n = \text{ulím}_{i,D}\, \pi_i^n$.

Los ultraproductos constituyen el *límite lógico* prometido al principio de este capítulo. A continuación exponemos el teorema fundamental de los ultraproductos, que explica su importancia y utilidad, su relación con la lógica y el sentido en el cual satisfacen las propiedades mencionadas al comienzo.

1.3. El teorema de Łoś

Una clase muy importante de subconjuntos de una σ-estructura $\mathcal{M}$ es la clase de sus subconjuntos *definibles*. Recordemos que, dada una σ-fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ en las variables libres $x_1, \ldots, x_n$, el subconjunto definido por ϕ en M^n es $\phi(\mathcal{M}) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in M^n : \mathcal{M} \models \phi(a_1, \ldots, a_n)\}$. El teorema fundamental que probamos a continuación muestra que en un ultraproducto $\mathcal{M}$ los subconjuntos definibles de M^n son internos, y que de hecho $\phi(\mathcal{M}) = \text{ulím}_{i,D}\, \phi(\mathcal{M}_i)$.

Teorema 1.3.1 (Teorema de Łoś)**.** *Sea $\mathcal{M} = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i / D$. Dados $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ una σ-fórmula y elementos $a^k/D = \text{ulím}_{i,D}\, a_i^k \in \mathcal{M}$, $k = 1, \ldots, n$, se tiene*

$$\mathcal{M} \models \phi(a^1/D, \ldots, a^n/D) \iff \mathcal{M}_i \models \phi(a_i^1, \ldots, a_i^n) \ D\text{-}a.e.(i). \tag{1.1}$$

Demostración. Por simplicidad notemos $\bar{a} = (a^1, \ldots, a^n)$, $\bar{a}/D = (a^1/D, \ldots, a^n/D)$, y análogamente para otras n-tuplas. En primer lugar observemos que para todo término $t(x_1, \ldots, x_n)$ en el lenguaje generado por σ se tiene

$$t^{\mathcal{M}}(\bar{a}/D) = \underset{i,D}{\text{ulím}}\, t^{\mathcal{M}_i}(\bar{a}_i).$$

Esto vale por definición si t es una variable o un símbolo de constante, e inductivamente, si t es $f(t_1(\bar{x}), \ldots, t_m(\bar{x}))$ para $f \in \sigma$ y términos t_j para los que vale la hipótesis, tenemos

$$\begin{aligned} t^{\mathcal{M}}(\bar{a}/D) &= f^{\mathcal{M}}(\ldots t_j^{\mathcal{M}}(\bar{a}/D) \ldots) \\ &= f^{\mathcal{M}}(\ldots \operatorname*{ulím}_{i,D} t_j^{\mathcal{M}_i}(\bar{a}_i) \ldots) \\ &= \operatorname*{ulím}_{i,D} f^{\mathcal{M}_i}(\ldots t_j^{\mathcal{M}_i}(\bar{a}_i) \ldots) \\ &= \operatorname*{ulím}_{i,D} t^{\mathcal{M}_i}(\bar{a}_i), \end{aligned}$$

como queríamos.

Sea ahora ϕ una fórmula atómica. Si tiene la forma $R(t_1(\bar{x}), \ldots, t_m(\bar{x}))$ para un símbolo de relación R, entonces, de la definición de $R^{\mathcal{M}}$ y usando lo probado para términos:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \phi(\bar{a}/D) \quad &\text{sii} \quad (\ldots t_j^{\mathcal{M}}(\bar{a}/D) \ldots) \in R^{\mathcal{M}}, \\ &\text{sii} \quad (\ldots \operatorname*{ulím}_{i,D} t_j^{\mathcal{M}_i}(\bar{a}_i) \ldots) \in R^{\mathcal{M}}, \\ &\text{sii} \quad (\ldots t_j^{\mathcal{M}_i}(\bar{a}_i) \ldots) \in R^{\mathcal{M}_i} \ D\text{-}a.e.(i), \\ &\text{sii} \quad \mathcal{M}_i \models \phi(\bar{a}_i) \ D\text{-}a.e.(i). \end{aligned}$$

Hay otro caso, cuando ϕ es $t_1(\bar{b}) = t_2(\bar{x})$, que es inmediato a partir de la definición del dominio de $\mathcal{M}$. Por tanto el teorema vale para fórmulas atómicas, y seguimos por inducción en la cantidad de conectivas y cuantificadores.

A partir de la Observación 1.2.8 es fácil ver que la condición (1.1) del teorema (cuantificada sobre $\bar{a}/D$) es equivalente a la igualdad $\phi(\mathcal{M}) = \operatorname{ulím}_{i,D} \phi(\mathcal{M}_i)$. Si ϕ es una sentencia, basta definir $\phi(\mathcal{M}) = 1$ cuando $\mathcal{M} \models \phi$, $\phi(\mathcal{M}) = 0$ en caso contrario; recordemos para lo que sigue que $0 = \emptyset$ y $1 = \{\emptyset\}$. Si ϕ es $\psi \wedge \chi$, y para ψ y χ vale la hipótesis, agregando de ser necesario variables mudas a estas últimas se tiene

$$(\psi \wedge \chi)(\mathcal{M}) = \psi(\mathcal{M}) \cap \chi(\mathcal{M}),$$

y por tanto $\phi(\mathcal{M}) = \operatorname{ulím}_{i,D} \phi(\mathcal{M}_i)$ a partir de la hipótesis inductiva y la Proposición 1.2.6 —o su análogo para subconjuntos de M^n. Si ϕ es $\neg\psi$, entonces

$$\phi(\mathcal{M}) = M^n \setminus \psi(\mathcal{M}),$$

y volvemos a aplicar 1.2.6. Si por último ϕ es $\exists x_0 \psi(x_0, \bar{x})$, usando la Proposición 1.2.9 y su notación tenemos

$$\phi(\mathcal{M}) = \pi^n(\psi(\mathcal{M})) = (\operatorname*{ulím}_{i,D} \pi_i^n)(\operatorname*{ulím}_{i,D} \psi(\mathcal{M}_i)) = \operatorname*{ulím}_{i,D} \pi_i^n(\psi(\mathcal{M}_i)) = \operatorname*{ulím}_{i,D} \phi(\mathcal{M}_i),$$

lo que completa la inducción. □

Como caso particular del teorema, observemos que una sentencia vale en el ultraproducto $\mathcal{M}$ si y sólo si vale en casi todos los factores $\mathcal{M}_i$, i.e. las propiedades elementales se conservan por ultraproductos. Por ejemplo, un ultraproducto de grupos será un grupo, un ultraproducto de órdenes lineales densos será un orden lineal denso y un ultraproducto de cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero será también un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, por cuanto estas clases de estructuras están caracterizadas por axiomas de primer orden (eventualmente infinitos, como en el último caso).

Otra consecuencia de la misma observación es la siguiente. Si tenemos $\mathcal{M} = \prod_{n<\omega} \mathcal{M}_n/D$ donde las $\mathcal{M}_n$ son estructuras finitas pero cuyas cardinalidades tienden a infinito con n, entonces (asumiendo desde ya que D es no principal) $\mathcal{M}$ será infinita. En efecto, el enunciado *existen al menos k elementos* se formaliza en primer orden mediante la sentencia $\phi_k = \exists x_1 \ldots \exists x_k \bigwedge_{i<j} x_i \neq x_j$. Como $|M_n| \to \infty$, existe n_k tal que $\mathcal{M}_n \models \phi_k$ para todo $n \geq n_k$. Por cuanto $\omega_{\geq n_k} \in D$, se sigue que $\mathcal{M} \models \phi_k$, es decir que $\mathcal{M}$ tiene más de k elementos; y esto para cualquier $k < \omega$. Este argumento muestra que la clase de las estructuras finitas no es elemental. De modo parecido podemos ver que la clase de los cuerpos de característica cero no es definible: en un cuerpo formado como un ultraproducto no principal $F = \prod_{p \text{ primo}} \mathbb{F}_p/D$ de los cuerpos finitos $\mathbb{F}_p$ se tiene $1 + \cdots + 1 \neq 0$ para cualquier cantidad de sumandos. Esto muestra que *tener característica positiva* no es expresable en primer orden —ni siquiera mediante infinitos axiomas—, y en particular que su negación no se puede escribir con una sola sentencia.

El teorema de Łoś permite dar una demostración muy sencilla del teorema de compacidad para la lógica de primer orden. La exponemos aquí para ilustrar no sólo la potencia del teorema, sino la técnica mediante la cual es posible emplearlo para construir modelos a partir de condiciones puramente existenciales.

Teorema 1.3.2 (Teorema de compacidad)**.** *Si todo subconjunto finito de un conjunto de sentencias Γ tiene un modelo, entonces Γ tiene un modelo.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad asumimos que Γ es infinito y cerrado por conjunciones. Para cada $\phi \in \Gamma$, sea $\mathcal{M}_\phi$ un modelo de ϕ, y definamos $J_\phi = \{\psi \in \Gamma : \mathcal{M}_\psi \models \phi\}$. Como $\phi \wedge \psi \in J_\phi \cap J_\psi$, y en general $\bigwedge_{i=1}^n \phi_i \in \bigcap_{i=1}^n J_{\phi_i}$, la familia $\{J_\phi\}_{\phi\in\Gamma}$ de subconjuntos de Γ tiene la propiedad de intersección finita. Existe por tanto un ultrafiltro D sobre Γ que la extiende. Sea

$$\mathcal{M} = \prod_{\psi\in\Gamma} \mathcal{M}_\psi/D.$$

Dada $\phi \in \Gamma$ se tiene que $\mathcal{M}_\psi \models \phi$ D-*a.e.*(ψ), precisamente porque $J_\phi \in D$. Por el teorema de Łoś, $\mathcal{M} \models \phi$ para toda $\phi \in \Gamma$. □

A continuación enunciamos una pequeña generalización del teorema de Łoś para un fragmento de segundo orden. Recordemos que una fórmula ϕ es Σ^1_1 si es equivalente a una de la forma $\exists R_1 \ldots \exists R_n \exists f_1 \ldots \exists f_m \psi$ con ψ una fórmula de primer orden sobre la signatura extendida $\sigma' = \sigma \cup \{R_1, \ldots, R_n, f_1, \ldots, f_m\}$. Tales fórmulas se interpretan de la manera natural.

Proposición 1.3.3. *Bajo la notación del Teorema 1.3.1, si ϕ es una fórmula Σ^1_1 y se tiene $\mathcal{M}_i \models \phi(\bar{a}_i)$ D-a.e.(i), entonces $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}/D)$.*

Podemos argumentar esta generalización informalmente de la siguiente manera. La fórmula ψ de primer orden de arriba se puede leer como una propiedad *predicada de las relaciones y funciones* representadas por R_j, f_k (junto a los elementos representados por las variables x_l). Si en casi todas las estructuras $\mathcal{M}_i$ existen relaciones $R_j^{\mathcal{M}_i}$ y funciones $f_k^{\mathcal{M}_i}$ con la propiedad $\psi^{\mathcal{M}_i}(\bar{a}_i)$, entonces sus ultralímites $\text{ulím}_{i,D} R_j^{\mathcal{M}_i}$ y $\text{ulím}_{i,D} f_k^{\mathcal{M}_i}$ darán lugar a relaciones y funciones (internas) correspondientes para $\mathcal{M}$, que por el teorema de Łoś (aplicado sobre la signatura extendida σ') tendrán la propiedad $\psi^{\mathcal{M}}(\bar{a}/D)$. Vale la pena destacar este hecho:

Observación 1.3.4. El teorema de Łoś nos autoriza a trasladar de los factores al ultraproducto —y viceversa— propiedades de primer orden predicadas de relaciones y funciones *internas*. Esto se enunciará con más precisión en el marco de los *universos no-estándar* más adelante.

La implicación recíproca de la Proposición 1.3.3 no vale en general precisamente porque no toda relación ni toda función es interna. Por ejemplo, la fórmula Σ_1^1 que afirma que existe una función inyectiva no sobreyectiva será cierta en un ultraproducto infinito de estructuras finitas, pero falsa en todos sus factores; tal función no puede ser interna. Observemos sin embargo que la contrarrecíproca de la proposición anterior se puede parafrasear diciendo que toda fórmula Π_1^1 (es decir con cuantificadores universales sobre R_j, f_k en lugar de existenciales) verdadera en el ultraproducto vale necesariamente en casi todos los factores. Como corolario se puede decir que el teorema de Łoś vale de hecho para fórmulas en $\Delta_1^1 = \Sigma_1^1 \cap \Pi_1^1$, es decir las que se pueden escribir tanto en forma puramente existencial como puramente universal de segundo orden.

Nota sobre la cardinalidad de los ultraproductos

Vimos antes que un ultraproducto de estructuras finitas pero cada vez más grandes será infinito. Surge la pregunta de determinar la cardinalidad de un ultraproducto en términos de sus factores, del conjunto de índices y del ultrafiltro. Nótese que de los factores sólo su cardinalidad es relevante —y no ningún otro dato de su estructura—, ya que la cardinalidad del ultraproducto depende únicamente de su dominio.

El análisis minucioso de este problema resulta bastante sutil, y cuando el conjunto de índices es no numerable se hace necesario un estudio y clasificación de los distintos tipos de ultrafiltros más agudo que la sencilla distinción entre principales y no principales; las conclusiones además pueden depender de la Hipótesis del Continuo. Aquí nos limitamos a establecer algunas observaciones básicas y a dar una respuesta completa en el caso de ultraproductos de numerables factores finitos. Por lo dicho arriba, asumiremos que los factores son meramente cardinales. Como antes, abreviamos $\text{ulím}\,\alpha_i = \prod_{i\in I} \alpha_i/D$. Para cada $i \in I$, α_i y β_i denotarán cardinales.

Proposición 1.3.5. *Si $\alpha_i \leq \beta_i$ D-a.e.(i), entonces* $|\,\text{ulím}\,\alpha_i| \leq |\,\text{ulím}\,\beta_i|$.

Demostración. Para casi todo i tenemos funciones inyectivas $f_i : \alpha_i \to \beta_i$. El ultralímite $\text{ulím}\, f_i$ es una función inyectiva de $\text{ulím}\,\alpha_i$ en $\text{ulím}\,\beta_i$: si $\text{ulím}\, f_i(x_i) = \text{ulím}\, f_i(y_i)$ entonces

$f_i(x_i) = f_i(y_i)$ para casi todo i, y luego $x_i = y_i$ para casi todo i también. O bien, siguiendo la Observación 1.3.4: porque $\operatorname{ulím} f_i$ es interna y la inyectividad es expresable en primer orden. □

Proposición 1.3.6. *Si para algún $n < \omega$ se tiene $\alpha_i = n$ D-a.e.(i), entonces $|\operatorname{ulím} \alpha_i| = n$.*

Demostración. Usamos el teorema de Łoś: la sentencia de primer orden que afirma que hay exactamente n elementos es cierta en casi todos los factores, y por tanto en el ultraproducto. □

Cuando todos los factores $\alpha_i = \alpha$ son iguales, notamos $\operatorname{ulím} \alpha_i = \alpha^I/D$.

Corolario 1.3.7. *Si α es finito, entonces $|\alpha^I/D| = \alpha$.*

Lema 1.3.8. *Sea $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ una familia de cardinales finitos acotados módulo D, es decir tales que $\alpha_i \leq n$ D-a.e.(i) para cierto $n < \omega$. Entonces $|\operatorname{ulím} \alpha_i|$ es finito.*

Demostración. Casi todos los factores verifican tener a lo sumo n elementos, y el resultado se sigue nuevamente de Łoś y de la expresabilidad de esta condición. □

Lema 1.3.9. *Sea $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ una familia de cardinales finitos no acotados módulo D, es decir tales que $\alpha_i > n$ D-a.e.(i) para todo $n < \omega$. Entonces $2^{\aleph_0} \leq |\operatorname{ulím} \alpha_i|$.*

Demostración. Dado $i \in I$ definamos $n(i)$ como el único $n < \omega$ tal que $2^n \leq \alpha_i < 2^{n+1}$, y tomemos $\{a_{i,k}\}_{k<2^{n(i)}}$ una secuencia de elementos distintos de α_i. Observemos que la sucesión $\{n(i)\}_{i\in I}$ no puede estar acotada módulo D.

Para cada función $f \in 2^\omega$ tomemos $\hat{f} \in \omega^\omega$ dada por

$$\hat{f}(m) = \sum_{k<m} f(k)2^k.$$

Definamos luego $h_f \in \prod \alpha_i$ por

$$h_f(i) = a_{i,\hat{f}(n(i))}.$$

Como $\hat{f}(n(i)) < 2^{n(i)}$, el elemento h_f está bien definido. Supongamos ahora que $h_f/D = h_g/D$ para $f, g \in 2^\omega$. Entonces para casi todo i se tiene $a_{i,\hat{f}(n(i))} = a_{i,\hat{g}(n(i))}$, y por tanto $\hat{f}(n(i)) = \hat{g}(n(i))$ D-a.e.(i). Esto implica que $\hat{f}$ y $\hat{g}$ coinciden para infinitos valores de n, pues $\{n(i)\}$ es no acotada módulo D. De la definición es inmediato ver que entonces $f = g$. Concluimos que $\{h_f/D\}_{f\in 2^\omega}$ es un subconjunto del ultraproducto $\operatorname{ulím} \alpha_i$ de cardinal $2^{\aleph_0}$. □

Teorema 1.3.10. *Un ultraproducto de una familia numerable de estructuras finitas es finito o de cardinal $2^{\aleph_0}$.*

Demostración. Se sigue de los dos lemas anteriores (recordemos la Observación 1.2.1), observando que

$$|\prod_{n<\omega} \alpha_n/D| \leq |\prod_{n<\omega} \alpha_n| \leq {\aleph_0}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

□

Corolario 1.3.11. *Si* $\aleph_0 \leq \alpha \leq 2^{\aleph_0}$ *y* D *es no principal sobre* ω*, entonces* $|\alpha^\omega/D| = 2^{\aleph_0}$.

Demostración. Por cuanto $n < \alpha$ para todo cardinal finito n, del Lema 1.3.9 y la Proposición 1.3.5 se tiene $2^{\aleph_0} \leq |\operatorname{ulím} n| \leq |\alpha^\omega/D|$. Por el otro lado es

$$|\alpha^\omega/D| \leq \alpha^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

□

1.4. Ultrapotencias y universos no-estándar

Ya hemos utilizado la notación $\mathcal{M}^I/D$ para designar un ultraproducto con todos sus factores iguales. Llamamos a $\mathcal{M}^I/D$ una *ultrapotencia* de $\mathcal{M}$, y en ciertos casos la notaremos también ${}^*\mathcal{M}$. La aplicación

$$d : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^I/D,\ d(x) = \operatorname*{ulím}_{i,D} x,$$

que hace corresponder a cada x en $\mathcal{M}$ la clase de la función constantemente x en la ultrapotencia, se denomina la *inmersión canónica* de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}^I/D$. El teorema de Łoś prueba que d es una inmersión elemental:

$$\mathcal{M} \models \phi(a^1, \ldots, a^m) \text{ sii } \mathcal{M}^I/D \models \phi(d(a^1), \ldots, d(a^m))$$

para toda σ-fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_m)$ y elementos $a^1, \ldots, a^m \in \mathcal{M}$, ya que en la condición

$$\mathcal{M} \models \phi(a^1, \ldots, a^m)\ D\text{-}a.e.(i)$$

del teorema la referencia 'D-*a.e.*(i)' es superflua. En particular, $\mathcal{M}^I/D$ es elementalmente equivalente a $\mathcal{M}$.

Observemos que si $\mathcal{M}$ es finita, entonces la inmersión canónica, que es siempre inyectiva, es también suryectiva —por el Corolario 1.3.7—, y por tanto un isomorfismo. Consideremos ahora el caso en que $\mathcal{M}$ es infinita, $I = \omega$ y D es un ultrafiltro no principal. En ese caso la inmersión canónica no es suryectiva, pues por ejemplo s/D no está en la imagen de d para ninguna $s : \omega \to \mathcal{M}$ inyectiva. Si $|M| = 2^{\aleph_0}$, entonces por 1.3.11 es $|M^\omega/D| = 2^{\aleph_0}$, y por tanto la ultrapotencia es una extensión elemental y propia de $\mathcal{M}$ de igual cardinal.

Por ejemplo, ${}^*\mathbb{C} = \mathbb{C}^\omega/D$ es una extensión propia y algebraicamente cerrada de $\mathbb{C}$. Esto es porque son elementalmente equivalentes y porque la condición de ser algebraicamente cerrado se expresa en primer orden mediante las (infinitas) sentencias

$$\forall x_0, \ldots \forall x_{n-1} \exists y\ 0 = x_0 + x_1 y + \ldots + y^n\ (n \geq 1).$$

El teorema de Steinitz afirma que hay un único cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero de cada cardinal no numerable, y por tanto es ${}^*\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$. Como nota al margen, este mismo hecho puede usarse para deducir que $\operatorname{ulím}_{p,D} \widetilde{\mathbb{F}_p} \simeq \mathbb{C}$, es decir: un ultraproducto no principal de las clausuras algebraicas de los cuerpos finitos $\mathbb{F}_p$, p primo, tiene que ser isomorfo a $\mathbb{C}$, pues es también un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero con la potencia del continuo.

Un caso completamente distinto ocurre al considerar ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^\omega/D$. El resultado son los números *hiperreales* (o una versión de los mismos: el cociente por diferentes ultrafiltros podría dar lugar a versiones no isomorfas; salvo que asumamos la Hipótesis del Continuo, como observaremos al final del capítulo). Forman un cuerpo totalmente ordenado de cardinal $2^{\aleph_0}$ que extiende elementalmente a $\mathbb{R}$, pero que goza de una forma de *completitud lógica*, en un sentido que precisaremos más adelante. Observemos por lo pronto que, si $\{a_n\}_{n<\omega} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión no acotada superiormente, entonces el ultralímite $\text{ulím}_{n,D}\, a_n \in {}^*\mathbb{R}$ será mayor que todo número entero $n \in \mathbb{Z} \subset {}^*\mathbb{R}$. Esto dice que ${}^*\mathbb{R}$ es no arquimediano y por tanto no isomorfo a $\mathbb{R}$.

Los números hiperreales cumplirán un rol más adelante, por lo que introducimos algunas nociones relacionadas con ellos. Sea R_1 el conjunto de los hiperreales *finitos*, i.e.

$$R_1 = \{z \in {}^*\mathbb{R} : {}^*|z| < n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\},$$

donde ${}^*|\cdot| : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}_{\geq 0}$ denota el ultralímite de la función módulo $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Es sencillo verificar que R_1 es de hecho un subanillo de ${}^*\mathbb{R}$. Notemos que $\mathbb{R} \subset R_1$, donde desde ya identificamos a $\mathbb{R}$ con su imagen por la inmersión canónica; sus elementos son llamados *reales estándar*.

Sea por otra parte R_0 el conjunto de los números *infinitesimales* de ${}^*\mathbb{R}$, es decir

$$R_0 = \{z \in {}^*\mathbb{R} : {}^*|z| < 1/n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Los números infinitesimales son menores en módulo que cualquier real positivo estándar $r \in \mathbb{R}_{>0}$, precisamente porque $\mathbb{R}$ es arquimediano. Desde ya, $R_0 \subset R_1$. De hecho, los infinitesimales forman un ideal dentro de los hiperreales finitos. Para $x, y \in R_1$, decimos que x está *infinitesimalmente cerca* de y, y abreviamos $x \approx y$, si la clase de x en el cociente R_1/R_0 coincide con la de y, esto es si su diferencia es infinitesimal. Toda clase $[x]$ en este cociente contiene exactamente un número real estándar $\text{st}(x)$, al que llamamos la *parte estándar* de x. Equivalentemente, podemos definir $\text{st} : R_1 \to \mathbb{R}$ por

$$\text{st}(x) = \sup \mathbb{R}_{<x},$$

es decir como el supremo (en $\mathbb{R}$) de los reales estándar que son menores que el hiperreal finito x. Obsérvese que $\text{st}(x+y) = \text{st}(x)+\text{st}(y)$ y que $\text{st}(xy) = \text{st}(x)\text{st}(y)$ para todos $x, y \in R_1$: si $x \approx r$, $y \approx s$, $r, s \in \mathbb{R}$, entonces $x+y \approx r+s$ y $xy \approx rs$, pues los infinitesimales forman un ideal de R_1. Por otra parte, si $l^\infty(\mathbb{N})$ denota el espacio de sucesiones acotadas de números reales estándar, es fácil ver que la aplicación

$$\text{st} \circ \text{ulím} : l^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$$

es una extensión lineal (y multiplicativa) del funcional $\text{lím} : c \to \mathbb{R}$ definido sobre las sucesiones convergentes. Además se tiene

$$\liminf_{n\to\infty} r_n \leq \text{st}\,\underset{n,D}{\text{ulím}}\, r_n \leq \limsup_{n\to\infty} r_n$$

para toda sucesión acotada $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Notemos que ${}^*\mathbb{R}$ contiene como subconjuntos internos a las ultrapotencias ${}^*\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^\omega/D$ y ${}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}^\omega/D$, que son las versiones no-estándar de los subconjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$ de $\mathbb{R}$. También $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$ están contenidos en ${}^*\mathbb{R}$ (por medio de la inmersión canónica) pero, como veremos, estos subconjuntos no son internos. Sobre las versiones no-estándar de estas estructuras conocidas podemos definir versiones no-estándar de todas las operaciones y relaciones usuales. Podemos por ejemplo calcular el factorial de un número hipernatural $N \in {}^*\mathbb{N}$, como antes calculamos el módulo de un número hiperreal; o podemos definir cuándo un número hipernatural divide a otro. A veces se justifica este hecho mediante el artificio de incluir en la signatura de la estructura original símbolos para *todas* sus funciones y relaciones —o las que sean necesarias; las versiones no-estándar son entonces las interpretaciones de tales símbolos en la ultrapotencia. Como ya hemos dicho y practicado, podemos en cambio hablar simplemente de ultralímites de las funciones y relaciones pertinentes, de la manera que definimos antes. En lo que sigue damos un marco más amplio para este enfoque.

Introdujimos anteriormente el concepto de *subconjunto interno* (y *relación interna*) de un ultraproducto, y también el de *función interna* entre dos ultraproductos. Estas ideas admiten un tratamiento mucho más general, y también útil. Esbozamos a continuación la construcción de los *universos no-estándar*. Ofrecemos una exposición intermedia en cuanto al nivel de detalles incluidos, en relación a las que encontramos en la literatura; para una presentación más pormenorizada consultar por ejemplo [5].

En lugar de trabajar en un único ultraproducto, queremos considerar todo un universo de ultralímites de elementos, conjuntos, funciones, familias de conjuntos, y así siguiendo. Partimos de un conjunto base B, que contendrá los elementos 'estándar' de nuestro universo, suficientemente rico para la matemática que queramos desarrollar; por ejemplo $B = \mathbb{R}$. Lo importante es considerar a los elementos de B como *individuos* o *urelementos*, es decir no como conjuntos. Formamos el universo a partir de ellos. Preliminarmente definimos

$$\mathbb{V}_0(B) = B,\ \mathbb{V}_{k+1}(B) = \mathbb{V}_k(B) \cup \mathcal{P}(\mathbb{V}_k(B))$$

inductivamente en $k < \omega$, y luego

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}(B) = \bigcup_{k<\omega} \mathbb{V}_k(B).$$

Pero lo que deseamos es una ampliación ${}^*\mathbb{V}$ de esta *superestructura*, compuesta por ultralímites de los objetos de $\mathbb{V}$, y una función ${}^* : \mathbb{V} \to {}^*\mathbb{V}$ que asigne a cada objeto o del universo estándar $\mathbb{V}$ su versión no-estándar ${}^*o$.

Podemos estar tentados a definir ${}^*\mathbb{V}$ como una ultrapotencia no principal $\mathbb{V}^\omega/D$ de $\mathbb{V}$, considerando a $\mathbb{V}$ como una estructura sobre la signatura $\sigma = \{\in\}$ con un símbolo para la relación de pertenencia. La función ${}^* : \mathbb{V} \to {}^*\mathbb{V}$ sería precisamente la inclusión canónica. El primer problema es que tal ultrapotencia no conservará la 'estratificación' que posee $\mathbb{V} = \bigcup_{k<\omega} \mathbb{V}_k$. Por ejemplo, si cada $a_n \in \mathbb{V}$ es una familia de *rango* n, i.e. $a_n \in \mathbb{V}_n \setminus \mathbb{V}_{n-1}$, no podremos asignarle un rango al ultralímite $\operatorname{ulím} a_n$, al menos no un rango finito. Si miramos las inclusiones $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{V}_1 \subset \ldots$ como una torre, podemos decir que queremos expandirla horizontal pero no verticalmente.

Una solución a este problema es formar $^*\mathbb{V}$ como una ultrapotencia *acotada* de $\mathbb{V}$: partimos de numerables copias de $\mathbb{V}$ junto con un ultrafiltro no principal D, pero la construcción difiere de la usual en que el dominio está compuesto únicamente por ultralímites $\text{ulím}\, a_n$ para sucesiones $\{a_n\}$ con rango acotado módulo D. Para tales sucesiones es claro que existirá k tal que $a_n \in \mathbb{V}_k \setminus \mathbb{V}_{k-1}$ D-*a.e.*(n), y éste será el rango de $\text{ulím}\, a_n$. El conjunto de los elementos de rango cero es precisamente la ultrapotencia usual $^*B = B^\omega/D$, y los de rango mayor se *interpretan* como conjuntos o familias de conjuntos a partir de estos elementos. Pero no son realmente conjuntos o familias de conjuntos, ni la interpretación para $\in$ es exactamente la relación de pertenencia. Nos gustaría que lo fueran. Así, por ejemplo, querríamos que $^*\mathbb{V}_0 = \text{ulím}\, \mathbb{V}_0$ fuera efectivamente el conjunto de los elementos de rango cero, i.e. $^*\mathbb{V}_0 = {}^*B$.

En otras palabras, nos gustaría que $^*\mathbb{V}(B) \subset \mathbb{V}(^*B)$. Redefiniremos pues las clases de equivalencia $a/D = \text{ulím}_{n,D}\, a_n$ como elementos de $\mathbb{V}(^*B)$, en el espíritu de la Observación 1.2.4. Esto se logra por inducción en el rango de $\text{ulím}\, a_n$. Llamemos

$$W_k = \{a \in \mathbb{V}^\omega : a_n \in \mathbb{V}_k \ D\text{-}a.e.(n)\},$$

de forma que la unión $W = \bigcup_{k<\omega} W_k$ contenga a todas las sucesiones de rango acotado módulo D. Los ultralímites de rango cero ya son elementos de $^*B \subset \mathbb{V}(^*B)$. Para $a \in W_k \setminus W_{k-1}$, $k \geq 1$, redefinimos inductivamente

$$a/D = \underset{n,D}{\text{ulím}}\, a_n = \{b/D \in \mathbb{V}(^*B) : b_n \in a_n \ D\text{-}a.e.(n)\},$$

que es correcto pues si $b_n \in a_n$ D-*a.e.*(n), entonces $b \in W_{k-1}$. Aunque sea redundante repitamos que, de este modo, si $b_n \in a_n$ para casi todo n, entonces $\text{ulím}\, b_n \in \text{ulím}\, a_n$ en el sentido usual de la pertenencia de conjuntos.

Se define la aplicación $^* : \mathbb{V}(B) \to \mathbb{V}(^*B)$ por $^*o = \text{ulím}_{n,D}\, o$, en el nuevo sentido de este ultralímite; resulta una inmersión de la primera superestructura en la segunda: $o \in p$ si y sólo si $^*o \in {}^*p$. Notemos que $^*\mathbb{V}_0 = {}^*B$ y que, en general,

$$^*\mathbb{V}_k = \{\underset{n,D}{\text{ulím}}\, a_n \in \mathbb{V}(^*B) : a_n \in \mathbb{V}_k \ D\text{-}a.e.(n)\}.$$

El universo no-estándar es la colección de todos los ultralímites así construidos,

$$^*\mathbb{V} = \bigcup_{k<\omega} {}^*\mathbb{V}_k,$$

o equivalentemente

$$^*\mathbb{V} = \{u \in \mathbb{V}(^*B) : u \in {}^*o \text{ para algún } o \in \mathbb{V}\}.$$

En efecto, los elementos de la unión de arriba son miembros de algún elemento en la imagen de *, a saber algún $^*\mathbb{V}_k$, y recíprocamente si $u \in {}^*o$ y $o \in \mathbb{V}_k$ entonces $u \in {}^*\mathbb{V}_k$.

Observación 1.4.1. Desde ya, la imagen de * está contenida en $^*\mathbb{V}$; pero no coincide con $^*\mathbb{V}$ si la base B es infinita. No alcanza por ejemplo a todos los elementos de rango cero, pues la restricción de * a $\mathbb{V}_0 = B$ es la inclusión canónica de B en $^*\mathbb{V}_0 = {}^*B$, que no es suryectiva, como vimos antes. No todo ultralímite es la versión no-estándar de un objeto estándar, por lo que $^*\mathbb{V}$ es efectivamente una ampliación del universo $\mathbb{V}$.

Nota. Construimos el universo no-estándar utilizando un ultrafiltro no principal sobre $I = \omega$. Se puede bien construir a partir de ultrafiltros sobre conjuntos I arbitrarios; la condición de ser no principal se debe cambiar por otra más estricta para asegurar que $^*\mathbb{V}$ extienda propiamente a $\mathbb{V}$, i.e. que $^* : \mathbb{V} \to {}^*\mathbb{V}$ no sea un isomorfismo.

Definición 1.4.2. Los objetos $u \in \mathbb{V}({}^*B)$ que están en $^*\mathbb{V}$ son llamados *internos.* Los que no, *externos.*

Esto generaliza nuestras nociones de conjuntos, funciones y relaciones internas. En efecto, un ultraproducto sobre factores $M_n \subset B$ se puede considerar como un conjunto interno $M = \operatorname{ulím} M_n \in {}^*\mathbb{V}_1$, y sus subconjuntos internos son los elementos de $\mathcal{P}(M) \cap {}^*\mathbb{V}_1$. En el caso de una ultrapotencia $M = {}^*N$, el álgebra de sus subconjuntos internos es precisamente $^*\mathcal{P}(N)$. El producto cartesiano de dos conjuntos internos $u, v \in {}^*\mathbb{V}_k$, $k \geq 1$, es de vuelta un conjunto interno, $u \times v \in {}^*\mathbb{V}_{k+3}$, como se verifica fácilmente a partir de la definición conjuntista de pares ordenados. Una relación interna es un subconjunto interno de un tal producto, y lo mismo una función interna entre dos conjuntos internos.

La propiedad fundamental del universo no-estándar $^*\mathbb{V}$ es un *principio de transferencia*, y no es otra cosa que una versión del teorema de Łoś adecuada para esta construcción. Decimos que una fórmula sobre la signatura $\sigma_\in = \{\in\}$ tiene *cuantificadores acotados* si es equivalente a una en la que todos los cuantificadores aparecen en la forma $\forall x \in y$ ó $\exists x \in y$. Formalmente, $\forall x \in y\ \phi(x, y)$ abrevia la fórmula $\forall x(x \in y \to \phi(x, y))$, mientras que $\exists x \in y\ \phi(x, y)$ abrevia $\exists x(x \in y \wedge \phi(x, y))$. Notemos que $\neg \forall x \in y\ \phi(x, y)$ equivale efectivamente a $\exists x \in y\ \neg\phi(x, y)$.

Teorema 1.4.3. *Sea $\phi(x_1, \ldots, x_m)$ una $\sigma_\in$-fórmula con cuantificadores acotados y sean $a^k \in W$, $k = 1, \ldots, m$, sucesiones de rango acotado módulo D. Se tiene*

$$^*\mathbb{V} \models \phi(a^1/D, \ldots, a^m/D) \iff \mathbb{V} \models \phi(a^1_n, \ldots, a^m_n)\ D\text{-}a.e.(n).$$

Demostración. Por inducción en la complejidad de ϕ. Cuando ϕ es de la forma $x_1 \in x_2$ ó $x_1 = x_2$, se sigue inmediatamente de la construcción. En el paso inductivo, los casos $\phi = \psi \wedge \chi$ y $\phi = \neg\psi$ salen de las propiedades de ultrafiltro de D. Si $\phi = \exists x_0 \in x_k\ \psi(x_0, \bar{x})$, tenemos

$$\begin{aligned}
^*\mathbb{V} \models \phi(\bar{a}/D) \quad & \text{sii} \quad \text{existe } a^0 \in W \text{ con } a^0/D \in a^k/D \text{ y } {}^*\mathbb{V} \models \psi(a^0/D, \bar{a}/D), \\
& \text{sii} \quad \text{existe } a^0 \in W \text{ tal que } [a^0_n \in a^k_n \text{ y } \mathbb{V} \models \psi(a^0_n, \bar{a}_n)]\ D\text{-}a.e.(n), \\
& \text{sii} \quad [\text{existe } a^0_n \in a^k_n \text{ tal que } \mathbb{V} \models \psi(a^0_n, \bar{a}_n)]\ D\text{-}a.e.(n), \\
& \text{sii} \quad \mathbb{V} \models \phi(\bar{a}_n)\ D\text{-}a.e.(n).
\end{aligned}$$

Es crucial que los cuantificadores estén acotados: si para casi todo n tuviéramos $a_n^0 \in \mathbb{V}$ con $\mathbb{V} \models \psi(a_n^0, \bar{a}_n)$, la sucesión $a^0 = \{a_n^0\}_{n<\omega}$ podría no tener rango acotado módulo D, y no podríamos asegurar que ${}^*\mathbb{V}$ satisfaga el existencial de ϕ. La condición $a_n^0 \in a_n^k$ D-*a.e.*(n) con $a^k \in W$ lo asegura. $\square$

El primer corolario es inmediato.

Corolario 1.4.4 (Principio de transferencia)**.** *La aplicación* ${}^* : \mathbb{V} \to {}^*\mathbb{V}$ *es una inmersión elemental acotada, es decir:*

$$\mathbb{V} \models \phi(o^1, \ldots, o^m) \iff {}^*\mathbb{V} \models \phi({}^*o^1, \ldots, {}^*o^m)$$

para toda $\sigma_\in$*-fórmula* $\phi(x_1, \ldots, x_m)$ *con cuantificadores acotados y elementos* $o^1, \ldots, o^m \in \mathbb{V}$.

Corolario 1.4.5. *La aplicación* ${}^* : \mathbb{V}(B) \to \mathbb{V}({}^*B)$ *es una inmersión elemental acotada.*

Demostración. Por el corolario anterior, basta probar que la inclusión

$$i : {}^*\mathbb{V}(B) \to \mathbb{V}({}^*B)$$

es una inmersión elemental acotada.

Observemos que ${}^*\mathbb{V}(B)$ es un submodelo *transitivo* de $\mathbb{V}({}^*B)$, es decir: si $u \in v$ y $v \in {}^*\mathbb{V}(B)$, entonces $u \in {}^*\mathbb{V}(B)$. Esto es claro a partir de la construcción de los elementos de ${}^*\mathbb{V}(B)$.

Ahora la prueba procede por inducción en la complejidad de las fórmulas con cuantificadores acotados, del modo usual. Baste notar que, si $\mathbb{V}({}^*B) \models \exists x \in v\ \psi$ para $v \in {}^*\mathbb{V}(B)$, y si $u \in \mathbb{V}({}^*B)$ es un elemento que realiza el existencial, se tiene entonces $u \in v$, y por transitividad $u \in {}^*\mathbb{V}(B)$; usando la hipótesis inductiva se deduce que ${}^*\mathbb{V}(B) \models \exists x \in u\ \psi$. $\square$

Observación 1.4.6. Los resultados anteriores siguen valiendo si consideramos una signatura σ' que extienda a $\sigma_\in$. Por simplicidad comentemos únicamente el caso en que las interpretaciones de los nuevos símbolos de σ' en $\mathbb{V}$ son de hecho elementos de $\mathbb{V}$. Por ejemplo, si incluimos símbolos para la relación de orden o la suma en $\mathbb{R}$, sus interpretaciones $<$, $+$ son conjuntos en la superestructura $\mathbb{V}(\mathbb{R})$. En el universo no-estándar ${}^*\mathbb{V}(\mathbb{R})$, las interpretaciones de dichos símbolos han de ser precisamente los conjuntos ${}^*<$ y ${}^*+$. Definiendo las fórmulas con cuantificadores acotados del mismo modo que antes e interpretando los nuevos símbolos de este modo, el principio de transferencia sigue siendo válido. Esto se puede pensar como una consecuencia del mismo principio 1.4.4 (ó 1.4.5), leyendo los nuevos símbolos como objetos de $\mathbb{V}$ y reescribiendo las fórmulas para utilizar únicamente la relación $\in$.

Como una aplicación del principio de transferencia mostremos que la inclusión ${}^*\mathbb{V}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{V}({}^*\mathbb{R})$ es estricta. El enunciado *todo subconjunto acotado de* $\mathbb{R}$ *tiene supremo* se escribe fácilmente como una propiedad con cuantificadores acotados, y el principio asegura entonces que, en el universo no-estándar ${}^*\mathbb{V}(\mathbb{R})$ (o en $\mathbb{V}({}^*\mathbb{R})$), todo subconjunto (interno) de ${}^*\mathbb{R}$ tiene supremo. En particular, como $\mathbb{N} \subset {}^*\mathbb{R}$ está acotado (por cualquier hiperreal infinito y positivo $x \notin R_1$) pero no tiene supremo (restar 1 a cualquier cota superior da una cota superior menor), se concluye que $\mathbb{N}$ es de hecho un subconjunto externo de ${}^*\mathbb{R}$. De modo similar podemos probar la misma conclusión respecto de los subconjuntos R_1, R_0, $\mathbb{Q}$ ó ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

A continuación deducimos un principio útil para probar que ciertos subconjuntos son internos.

Teorema 1.4.7 (Principio de definición interna)**.** *Sean $v, u^1, \ldots, u^m \in {}^*\mathbb{V}$ objetos internos y sea $\phi(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ una fórmula con cuantificadores acotados. El conjunto*

$$w = \{u \in v : {}^*\mathbb{V} \models \phi(u, u^1, \ldots, u^m)\}$$

es interno.

Demostración. Consideremos $n < \omega$ tal que $v, u^1, \ldots, u^m$ sean todos elementos de ${}^*\mathbb{V}_n$. La fórmula con cuantificadores acotados

$$\forall z, x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{V}_n \exists y \in \mathbb{V}_n \forall x \in \mathbb{V}_{n-1}(x \in y \iff (x \in z \wedge \phi(x, x_1, \ldots, x_m)))$$

vale en $\mathbb{V}$. Aplicando el principio de transferencia y tomando u^k por x_k y v por z, se tiene que

$$\exists y \in {}^*\mathbb{V}_n \forall x \in {}^*\mathbb{V}_{n-1}(x \in y \iff (x \in v \wedge \phi(x, u^1, \ldots, u^m))).$$

Tal y es sin duda el w del enunciado, de donde $w \in {}^*\mathbb{V}_n \subset {}^*\mathbb{V}$ es interno. □

Tomando el principio de transferencia como característica definitoria, es posible dar una definición abstracta de *universo no-estándar*. Se dice que cualquier inmersión elemental acotada

$${}^* : \mathbb{V}(X) \to \mathbb{V}(Y)$$

entre dos superestructuras sobre bases infinitas X, Y, induce un universo no-estándar sobre X,

$${}^*\mathbb{V}(X) = \{u \in \mathbb{V}(Y) : u \in {}^*o \text{ para algún } o \in \mathbb{V}(X)\}.$$

Se pide en realidad una condición adicional: que $\{{}^*a : a \in A\}$ sea un subconjunto propio de ${}^*A$ para todo $A \subset X$ infinito, de modo que en particular la inmersión * no sea suryectiva. Observemos que ${}^*\mathbb{V}(X)$ se puede escribir, igual que antes, como la unión $\bigcup_{n<\omega} {}^*\mathbb{V}_n(X)$. Usando las ideas de la demostración de 1.4.5 se puede ver que la restricción

$${}^* : \mathbb{V}(X) \to {}^*\mathbb{V}(X)$$

es también una inmersión elemental acotada, y por tanto los universos no-estándar así definidos gozan de un principio de transferencia.

En la próxima sección analizaremos una propiedad adicional —fundamental para el desarrollo del capítulo siguiente— que es usual pedir a un universo no-estándar, y que puede pensarse indistintamente como una forma de saturación o de compacidad.

1.5. Compacidad numerable

Introdujimos los ultraproductos como una forma de límite lógico de estructuras. Al considerar ultrapotencias, es decir ultraproductos con todos sus factores iguales, vimos sin embargo que el resultado puede ser una estructura distinta y más rica que la original, como en el caso de $\mathbb{R}$ y $^*\mathbb{R}$. Esto sugiere que nuestra intuición de los ultraproductos como un límite es insuficiente. Hay otro fenómeno a explicar, y consiste en que los ultraproductos suelen aumentar y *completar* las estructuras consideradas.

Restringiéndonos al caso de ultraproductos $\mathcal{M} = \prod_{n<\omega} \mathcal{M}_n/D$ con numerables factores, veremos a continuación que, cuando D es no principal, estos gozan de una forma de *compacidad numerable* respecto de sus subconjuntos internos.

Teorema 1.5.1. *Si $\{A_k\}_{k<\omega}$ es una familia numerable de subconjuntos (o relaciones) internos del ultraproducto $\mathcal{M}$ con la propiedad de intersección finita, entonces $\bigcap_{k<\omega} A_k \neq \emptyset$.*

Demostración. Escribamos $A_k = \operatorname{ulím}_{n,D} A_{k,n}$ para ciertos subconjuntos $A_{k,n} \subset M_n$ (ó ${M_n}^d$). Entonces para todo $m < \omega$ es $\emptyset \neq \bigcap_{k=1}^m A_k = \operatorname{ulím}_{n,D} \bigcap_{k=1}^m A_{k,n}$. Por tanto

$$\emptyset \neq \bigcap_{k=1}^{m} A_{k,n} \ D\text{-}a.e.(n).$$

Consideremos los conjuntos $E_m = \{n < \omega : \emptyset \neq \bigcap_{k=1}^m A_{k,n}\}$, que están todos en D. Por cuanto $\bigcap_{k=1}^{m+1} A_{k,n} \subset \bigcap_{k=1}^m A_{k,n}$, se tiene $E_{m+1} \subset E_m$ para todo m. Dado $n \in E_1$, sea $m(n)$ el mayor número natural $m \leq n$ tal que $n \in E_m$. Elijamos elementos $x_n \in \bigcap_{k=1}^{m(n)} A_{k,n}$.

Si $n \in E_m \cap \omega_{\geq m}$, entonces $m \leq m(n)$ y por tanto $x_n \in \bigcap_{k=1}^m A_{k,n}$. Como D es no principal, el conjunto $\omega_{\geq m}$ está en D. El conjunto de los n tales que $x_n \in \bigcap_{k=1}^m A_{k,n}$ contiene por tanto a $E_m \cap \omega_{\geq m} \in D$, y concluimos que

$$x_n \in \bigcap_{k=1}^{m} A_{k,n} \ D\text{-}a.e.(n),$$

de donde $\operatorname{ulím}_{n,D} x_n \in \operatorname{ulím}_{n,D} \bigcap_{k=1}^m A_{k,n} = \bigcap_{k=1}^m A_k$ para todo m. □

Equivalentemente, si A es un subconjunto interno de $\mathcal{M}$ cubierto por numerables subconjuntos internos A_k, entonces A es cubierto por una subfamilia finita de los mismos: la intersección $\bigcap_{k<\omega}(A \setminus A_k)$ es vacía, luego alguna intersección finita también lo es.

Cuando un universo no-estándar $^*\mathbb{V}$ satisface el resultado anterior, es decir cuando toda familia numerable de conjuntos internos con la fip tiene intersección no vacía, decimos que $^*\mathbb{V}$ es $\aleph_1$-*saturado*. El universo no-estándar $^*\mathbb{V}(B)$ dado por la construcción de la sección anterior es $\aleph_1$-saturado: la prueba puede calcarse de la anterior cambiando '$A_{k,n} \subset M_n$' por '$A_{k,n} \in \mathbb{V}(B)$'.

Si la propiedad expresada en 1.5.1 evoca una forma de compacidad, la expresada por la siguiente equivalencia corresponde a la idea de saturación. Diremos que una relación binaria $R \subset A \times C$ es *satisfacible sobre $E \subset A$ (en C)* si existe $b \in C$ tal que $(a, b) \in R$ para todo $a \in E$; diremos que es *finitamente satisfacible sobre E (en C)* si es satisfacible (en C) sobre todo subconjunto finito de E.

Teorema 1.5.2. *Un universo no-estándar* $^*\mathbb{V}$ *es* $\aleph_1$*-saturado si y sólo si toda relación binaria interna* $R \in {}^*\mathbb{V}$ *finitamente satisfacible sobre un subconjunto numerable* E *(posiblemente externo) de su dominio es satisfacible sobre* E.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sean R una relación binaria interna y E un subconjunto numerable de su dominio. Consideremos las secciones

$$R_a = \{b : (a, b) \in R\}.$$

Usando 1.4.7 es claro que los conjuntos R_a son internos. Si R es finitamente satisfacible sobre E, entonces la familia numerable $\{R_a\}_{a\in E}$ tiene la propiedad de intersección finita: dado $F \subset E$ finito, existe b tal que $(a, b) \in R$ para todo $a \in F$, esto es $b \in \bigcap_{a\in F} R_a$. Por hipótesis existe entonces $b \in \bigcap_{a\in E} R_a$; se tiene $(a, b) \in R$ para todo $a \in E$.

($\Leftarrow$) Sea $\{A_k\}_{k<\omega}$ una familia numerable de conjuntos internos con la propiedad de intersección finita; podemos suponer $A_k \subset A_1$ para todo k. Definimos la relación

$$R = \{(A, x) : x \in A \in {}^*\mathcal{P}(A_1)\}.$$

A partir de 1.4.7 es fácil verificar que R es interna. La familia $\{A_k\}_{k<\omega}$ es un subconjunto numerable de $^*\mathcal{P}(A_1)$. Además, dados $A_{k_1}, \ldots, A_{k_n}$ y $x \in \bigcap_{j=1}^n A_{k_j}$, se tiene $(A_{k_j}, x) \in R$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Es decir, R es finitamente satisfacible sobre $\{A_k\}_{k<\omega}$. Se sigue por hipótesis que existe x con $(A_k, x) \in R$ para todo k, es decir $x \in \bigcap_{k<\omega} A_k$. $\square$

Observación 1.5.3. Notemos que la equivalencia sigue valiendo si en lugar de pedir que R sea interna pedimos meramente que las secciones R_a sean conjuntos internos.

En este contexto es útil pensar las relaciones como conjuntos de condiciones o propiedades, y viceversa. Decir que R es satisfacible sobre E en C se puede parafrasear diciendo que las condiciones $\{(a, x) \in R\}_{a\in E}$ en la variable x son satisfacibles en simultáneo por un elemento de C. Si ahora tenemos un conjunto interno C y un conjunto $\{\phi_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ de numerables condiciones dadas por fórmulas $\phi_k(x)$ con parámetros internos (es decir, con constantes para elementos de $^*\mathbb{V}$), podemos considerar la relación $R = \{(k, b) \in \mathbb{N} \times C : {}^*\mathbb{V} \models \phi_k(b)\}$. Si las fórmulas tienen cuantificadores acotados, las secciones R_k serán conjuntos internos, por 1.4.7. Así, un universo es $\aleph_1$-saturado si y sólo si todo conjunto numerable de condiciones con cuantificadores acotados en una variable (o más) que sea finitamente satisfacible en un conjunto interno C es de hecho satisfacible en C.

Corolario 1.5.4. *Sea* $^*\mathbb{V}(B) \subset \mathbb{V}(^*B)$ *un universo* $\aleph_1$*-saturado. Si* $C \in \mathbb{V}(^*B)$ *es infinito numerable, entonces es externo.*

Demostración. Supongamos que $C = \{b_k\}_{k<\omega}$ es interno. El conjunto numerable de condiciones $x \neq b_k$ es finitamente satisfacible en C, porque C es infinito. Por saturación existe $b \in C$ distinto de todo elemento de C, lo que es absurdo. $\square$

Volvamos a considerar σ-estructuras. La propiedad del Teorema 1.5.1 sólo tiene sentido en ultraproductos, pues habla de subconjuntos internos; podemos preguntarnos si es posible dar un análogo basado en los subconjuntos definibles. Reseñando brevemente la bonita exposición de Tao en [26], podemos convertir la propiedad de compacidad numerable en una forma de completitud lógica. Supongamos dada una σ-estructura $\mathcal{M}$. Una σ-fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_m)$ en m variables libres se puede pensar como una función

$$\phi^{\mathcal{M}} : M^m \to 2$$

que vale 1 en $\bar{a} = (a^1, \ldots, a^m) \in M^n$ si y sólo si $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$. Podemos decir que una sucesión $\{\bar{a}_n\}_{n<\omega}$ de m-tuplas de M es *elementalmente de Cauchy en* $\mathcal{M}$ si, para toda σ-fórmula ϕ en m variables libres, el valor de $\phi^{\mathcal{M}}(\bar{a}_n)$ es constante a partir de cierto de n. Si $\bar{a}$ es otra m-tupla, diremos además que $\bar{a}_n$ *converge elementalmente* a $\bar{a}$ cuando, para toda σ-fórmula ϕ en m variables libres,

$$\lim_{n\to\infty} \phi^{\mathcal{M}}(\bar{a}_n) = \phi^{\mathcal{M}}(\bar{a}).$$

Por último, la σ-estructura $\mathcal{M}$ se dirá *elementalmente completa* cuando toda sucesión elementalmente de Cauchy en $\mathcal{M}$ sea elementalmente convergente en $\mathcal{M}$.

Proposición 1.5.5. *Sea $\mathcal{M}$ una estructura sobre una signatura numerable. Toda sucesión $\{\bar{a}_n\}_{n<\omega}$ de m-tuplas en $\mathcal{M}$ tiene una subsucesión elementalmente de Cauchy.*

Demostración. Podemos enumerar las fórmulas en m variables libres: $\phi_1, \phi_2, \ldots$. El valor de $\phi_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}_{n_j^1})$ es constante para alguna subsucesión $\{\bar{a}_{n_j^1}\}_{j<\omega}$ de $\{\bar{a}_n\}_{n<\omega}$. Una sub-subsucesión $\{\bar{a}_{n_j^2}\}_{j<\omega}$ hace que $\phi_2^{\mathcal{M}}(\bar{a}_{n_j^2})$ sea también constante. Continuamos extrayendo subsucesiones $\{\bar{a}_{n_j^k}\}_{j<\omega}$ de este modo; la diagonal $\{\bar{a}_{n_k^k}\}_{k<\omega}$ resulta elementalmente de Cauchy. □

Teorema 1.5.6. *Si la signatura es numerable y $\mathcal{M}$ es un ultraproducto no principal sobre numerables factores, entonces $\mathcal{M}$ es elementalmente completo.*

Demostración. Sea $\{\bar{a}_n\}_{n<\omega}$ una sucesión elementalmente de Cauchy de m-tuplas de M. Tomemos $\{\phi_k\}_{k<\omega}$ una enumeración de todas las σ-fórmulas $\phi(\bar{x})$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \phi^{\mathcal{M}}(\bar{a}_n) = 1.$$

Para cada $k < \omega$ sea $A_k = \phi_k(\mathcal{M}) = \{\bar{a} \in M^m : \mathcal{M} \models \phi_k(\bar{a})\}$, que es un subconjunto o relación interna de $\mathcal{M}$, por el teorema de Łoś.

La familia $\{A_k\}_{k<\omega}$ tiene la propiedad de intersección finita: como $\{\bar{a}_n\}_{k<\omega}$ es elementalmente de Cauchy, para cada k existe n_k tal que $\bar{a}_n \in A_k$ para todo $n \geq n_k$; considerados finitos k, basta tomar el mayor de los naturales n_k y luego $\bar{a}_{n_k}$ estará en la intersección de los finitos A_k en cuestión.

Por compacidad numerable existe $\bar{a} \in \bigcap_{k<\omega} A_k$. Si ϕ es una σ-fórmula en m variables libres, entonces para algún k es $\phi = \phi_k$ o bien $\phi = \neg\phi_k$. Respectivamente se tendrá $\phi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = 1$ ó $\phi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = 0$, pues $\bar{a} \in A_k$, pero en cualquier caso

$$\phi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \lim_{n\to\infty} \phi^{\mathcal{M}}(\bar{a}_n),$$

como queríamos. □

En particular, una ultrapotencia ${}^*\mathcal{N}$ de una estructura $\mathcal{N}$ se puede pensar como una *completación lógica* de $\mathcal{N}$. Sobre el lenguaje de los cuerpos ordenados, por ejemplo, la estructura $\mathbb{R}$ es incompleta: la sucesión $\{1/n\}$ tiene una subsucesión de Cauchy, por 1.5.5; pero dicha subsucesión no puede ser elementalmente convergente, pues el límite debería ser positivo y menor que todo real de la forma $1/n$ (tales propiedades son expresables en la signatura). La extensión ${}^*\mathbb{R}$ es en cambio completa, por 1.5.6.

Observemos que estas nociones de convergencia dependen fuertemente de lo que sea expresable mediante la signatura σ: se restringen al aspecto lógico de las estructuras consideradas. Así, la completitud elemental es moralmente más débil que la compacidad numerable en el sentido de más arriba. En su lugar, es equivalente (bajo una signatura numerable) a que toda familia numerable de conjuntos *definibles* con la propiedad de intersección finita tenga intersección no vacía. Una implicación se prueba como en 1.5.6. Para la otra, podemos suponer que tenemos una sucesión decreciente de conjuntos definibles no vacíos; tomamos un elemento de cada uno y extraemos una subsucesión elementalmente de Cauchy, por 1.5.5; la misma es convergente, por hipótesis, y el límite está en cada uno de los conjuntos considerados.

Si nos restringimos a sucesiones de m-tuplas para un m fijo, la noción de convergencia elemental es de hecho la inducida por la topología generada en M^m por los subconjuntos definibles. Cuando la signatura es numerable, la completitud elemental equivale a afirmar que M^m es compacto bajo dicha topología para todo m. Queríamos establecer un análogo de la propiedad 1.5.1 para estructuras, y el que hemos expuesto puede pensarse entonces como una forma de compacidad topológica. Con todo, debemos decir que existe otra noción análoga, sutilmente más fuerte que la de completitud elemental, y que es la que verdaderamente se usa. Es la idea de *saturación* para modelos, y se expone al final de la sección siguiente.

1.6. Herramientas de teoría de modelos

En esta sección final enumeramos concisamente varios conceptos y resultados de la teoría de modelos que usaremos en el Capítulo 3. Los detalles y las demostraciones ausentes se pueden encontrar en [19, 4, 5].

Subestructuras, extensiones y morfismos

Dadas dos σ-estructuras $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, se dice que la primera es una *subestructura* de la segunda, o que la segunda es una *extensión* de la primera, cuando $M \subset N$ y además: $R^{\mathcal{M}} \subset R^{\mathcal{N}}$ y $f^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{N}}|_{\mathcal{M}}$ para cada letra de relación o de función $R, f \in \sigma$, y $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}}$ para cada letra de constante $c \in \sigma$. Esto equivale a afirmar que la inclusión $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$ sea una *inmersión*, es decir una función η que respete las fórmulas atómicas ϕ:

$$\mathcal{M} \models \phi(a_1, \dots, a_m) \text{ si y sólo si } \mathcal{N} \models \phi(\eta(a_1), \dots, \eta(a_m))$$

para todos $a_1, \ldots, a_m \in M$. Si se tiene sólo una inmersión (no necesariamente una inclusión de conjuntos) podemos decir que $\mathcal{M}$ es *embebible* en $\mathcal{N}$. Nótese que toda inmersión η es inyectiva y verifica $\eta(f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_m)) = f^{\mathcal{N}}(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_m))$, $\eta(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$. El 'si y sólo si' de arriba se extiende automáticamente a fórmulas libres de cuantificadores. Cuando vale para fórmulas arbitrarias se dice que η es una inmersión elemental, como ya hemos dicho antes. Si la inclusión $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$ es elemental se habla de una subestructura (o extensión) elemental, y se nota $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$. Observemos que en dicho caso se tiene $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Un *isomorfismo* es, desde ya, una inmersión biyectiva, y resulta siempre elemental.

Dada una cadena de extensiones $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \ldots$, la unión de todas las relaciones y funciones induce una σ-estructura sobre la unión de los dominios de las $\mathcal{M}_k$, que denotamos por la unión $\mathcal{M}_\omega = \bigcup_{k<\omega} \mathcal{M}_k$; lo mismo cambiando ω por otro ordinal α. Los siguientes hechos se verifican fácilmente.

Proposición 1.6.1. *Sea $\{\mathcal{M}_k\}_{k<\alpha}$ una familia de σ-estructuras.*

- *Si $M_0 \subset M_1$ y $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$, entonces $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1$.*
- *Si las estructuras forman una cadena elemental $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1 \prec \ldots$, la unión $\mathcal{M}_\alpha$ verifica $\mathcal{M}_k \prec \mathcal{M}_\alpha$ para todo k. Si además es $\mathcal{M}_k \prec \mathcal{N}$ para otra σ-estructura $\mathcal{N}$ y para todo $k < \alpha$, entonces $\mathcal{M}_\alpha \prec \mathcal{N}$.*

Enunciamos a continuación una consecuencia clásica del teorema de compacidad.

Teorema 1.6.2 (Löwenheim–Skolem)**.** *Sea $\mathcal{M}$ una σ-estructura infinita.*

- *(Descendente) Si $A \subset M$ es un subconjunto, existe una subestructura elemental $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ con $A \subset N$ y de cardinal menor o igual a $|A| + |\sigma| + \aleph_0$.*
- *(Ascendente) Si κ es un cardinal mayor o igual a $|M| + |\sigma| + \aleph_0$, existe una extensión elemental $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ de cardinal κ.*

La noción de equivalencia elemental, que se define en términos lógicos, tiene un equivalente puramente algebraico, que enunciamos a continuación. Una implicación es trivial, la otra requiere trabajo y asume la Hipótesis Generalizada del Continuo.

Teorema 1.6.3 (Keisler–Shelah)**.** *Dos σ-estructuras $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son elementalmente equivalentes si y sólo si existen un conjunto de índices I, un ultrafiltro D sobre I y un σ-isomorfismo $\mathcal{M}^I/D \simeq \mathcal{N}^I/D$.*

Eliminación de cuantificadores

Algunas teorías de primer orden tienen un atributo privilegiado: cualquier propiedad definible en sus modelos se puede escribir sin usar cuantificadores. En otras palabras, T *elimina cuantificadores* si para toda fórmula $\phi(\bar{x})$ existe una fórmula libre de cuantificadores $\psi(\bar{x})$ en las mismas variables libres de manera que

$$T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})).$$

Los ejemplos paradigmáticos de eliminación de cuantificadores son la teoría de los órdenes lineales densos sin extremos y la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados. También la teoría de $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, \leq, 0, 1)$, donde por ejemplo la fórmula $\exists x\ x^2 + yx + z = 0$ en las variables libres y, z es equivalente a $0 \leq y^2 - 4z$.

Observación 1.6.4. Si T elimina cuantificadores y $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ son modelos de T, $\mathcal{M}$ una subestructura de $\mathcal{N}$, entonces $\mathcal{M}$ es automáticamente una subestructura elemental de $\mathcal{N}$. En efecto, si $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ entonces ambos modelos verifican las mismas fórmulas libres de cuantificadores con parámetros de $\mathcal{M}$. Como toda fórmula es equivalente a una libre de cuantificadores, entonces $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$. Por lo mismo toda inmersión entre modelos de T es elemental.

El siguiente criterio no trivial nos será útil más adelante:

Teorema 1.6.5. *Sea T una teoría con la siguiente propiedad: cada vez que se tienen $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ dos modelos de T, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}, \mathcal{N}$ una subestructura común, $\bar{a}$ una tupla en $\mathcal{A}$ y $\phi(\bar{x}, y)$ una fórmula libre de cuantificadores con $\mathcal{M} \models \exists y \phi(\bar{a}, y)$, entonces también $\mathcal{N} \models \exists y \phi(\bar{a}, y)$. Luego T elimina cuantificadores.*

Tipos y modelos saturados

Un elemento o una tupla en un modelo no siempre queda determinado por una fórmula de primer orden, posiblemente ni siquiera por el conjunto de todas las fórmulas que satisface. Inversamente hay conjuntos de fórmulas que, pudiendo 'moralmente' ser satisfechos por algún elemento o tupla, no lo son. A veces estos elementos 'posibles' son más importantes que los reales. Un *n-tipo* p sobre un subconjunto $A \subset M$ en una σ-estructura $\mathcal{M}$ es un conjunto de σ_A-fórmulas en las variables libres $x_1, \ldots, x_n$ que es *consistente* con $\mathrm{Th}_A(\mathcal{M})$. Aquí σ_A denota la signatura σ aumentada con constantes para cada uno de los elementos de A, y $\mathrm{Th}_A(\mathcal{M})$ denota la teoría de la σ_A-estructura $\mathcal{M}$, interpretando las nuevas constantes de la manera obvia. Pedir que el conjunto de fórmulas $p \cup \mathrm{Th}_A(\mathcal{M})$ sea consistente equivale a que p sea finitamente satisfacible en $\mathcal{M}$: que para todo $\Delta \subset p$ finito exista una tupla $\bar{a}$ en $\mathcal{M}$ con $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ para todo $\phi \in \Delta$. Usando compacidad se sigue que para todo tipo p existen una extensión elemental $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ y una tupla $\bar{b}$ en su dominio que satisfacen simultáneamente todas las fórmulas de p. Se dice que $\bar{b}$ *realiza* a p en $\mathcal{N}$.

Un n-tipo p sobre A en $\mathcal{M}$ se dice *completo* si $\phi \in p$ o bien $\neg\phi \in p$ para cada $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \sigma_A$. Al espacio de todos los n-tipos completos se lo nota $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ (pues es el espacio de Stone del álgebra de Lindenbaum de $\mathrm{Th}_A(\mathcal{M})$ en n variables libres). Todo tipo está contenido en un tipo completo (como todo filtro en un ultrafiltro). Dada una tupla $\bar{a}$ en $\mathcal{M}$, el conjunto $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) = \{\phi(\bar{x}) \in \sigma_A : \mathcal{M} \models \phi(\bar{a})\}$ es obviamente un tipo completo y realizado por $\bar{a}$.

Un modelo $\mathcal{M}$ se dice *κ-saturado* para un cardinal infinito κ si, para todo $A \subset M$ con $|A| < \kappa$ y todo $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$, p se realiza en $\mathcal{M}$. Basta chequearlo para $n = 1$. Equivalentemente, todo conjunto de condiciones finitamente satisfacible en $\mathcal{M}$ con parámetros en un subconjunto de cardinal menor a κ es de hecho satisfacible en $\mathcal{M}$. En el contexto de un modelo κ-saturado, es usual denominar *pequeños* a los subconjuntos $A \subset M$ de cardinal menor a κ, es decir aquellos bajo la hipótesis de la propiedad de saturación. Un modelo $\mathcal{M}$ se dice *saturado* si es $|M|$-saturado.

Observación 1.6.6. Como los subconjuntos de un ultraproducto definidos por fórmulas con parámetros son internos, el Teorema 1.5.1 implica que todo ultraproducto no principal sobre numerables factores es $\aleph_1$-saturado. Notemos también que un modelo $\mathcal{M}$ es $\aleph_1$-saturado si y sólo si es elementalmente completo como σ_A-estructura para todo $A \subset M$ numerable. En cuanto a los universos no-estándar, si se los entiende como (super)estructuras sobre una signatura con el símbolo para la pertenencia, la noción de $\aleph_1$-saturación no es exactamente la de esta sección: hay que restringir las fórmulas a aquellas con cuantificadores acotados y variables libres acotadas.

Los modelos saturados quedan caracterizados por su tamaño y sus propiedades elementales.

Teorema 1.6.7. *Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ modelos saturados de igual cardinalidad. Si $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, entonces $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$.*

Observación 1.6.8. Si asumimos la Hipótesis del Continuo, el Teorema 1.6.7 completa nuestra intuición de que los ultraproductos son *exactamente* un límite lógico saturado de sus factores, al menos para el caso de numerables factores de cardinal menor o igual a $\aleph_1$ y un ultrafiltro no principal. En efecto, sabemos que un tal ultraproducto resulta entonces saturado y que tiene por teoría a la 'D-intersección' de las teorías de sus factores (i.e. el teorema de Łoś restringido a sentencias); el teorema afirma que dichas propiedades lo caracterizan completamente en tanto σ-estructura (salvo cardinalidad). De la Hipótesis $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ y el teorema anterior se sigue también que el cuerpo de los reales no estándar ${}^*\mathbb{R}$ queda definido con independencia del ultrafiltro no principal elegido para la ultrapotencia.

Podemos asegurar una provisión abundante de modelos saturados. Por comodidad asumimos la Hipótesis Generalizada del Continuo.

Teorema 1.6.9. *Sea $\mathcal{M}$ una σ-estructura infinita y sea κ un cardinal con $|\sigma| \leq \kappa$, $|M| \leq 2^\kappa$. Entonces existe una extensión elemental saturada $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ de cardinal 2^κ.*

Capítulo 2

La medida de Loeb

Presentamos una aplicación de la teoría de ultralímites (o más en general de la teoría de los universos no-estándar) en la teoría de la medida. En las Secciones 2.1, 2.3 y el primer apartado de 2.4 seguimos de cerca la clara y ágil exposición de Cutland [7], completando algunos de los detalles que allí se omiten. Trabajamos implícitamente bajo una signatura adecuada para un universo no-estándar suficientemente rico; no nos interesarán otras propiedades algebraicas de los objetos estudiados, por lo que los tratamos como conjuntos y no como estructuras.

2.1. El espacio de Loeb

Sea M un ultraproducto no principal sobre numerables factores, o más en general un conjunto interno en un universo no-estándar $\aleph_1$-saturado, por ejemplo construido como en la Sección 1.4. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra interna de subconjuntos de M junto con una medida interna μ finitamente aditiva sobre $\mathcal{A}$; asumamos además que μ es finita, o incluso normalizada. En otras palabras, sean dados $(M_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ espacios de medida finitamente aditiva con $\mu_n(M_n) = 1$, y consideremos $M = \operatorname{ulím}_{n,D} M_n$ y $\mathcal{A} = \operatorname{ulím}_{n,D} \mathcal{A}_n$ junto con la medida no-estándar

$$\mu = \operatorname*{ulím}_{n,D} \mu_n : \mathcal{A} \to {}^*[0,1].$$

Si $A = \operatorname{ulím} A_n, B = \operatorname{ulím} B_n$ en $\mathcal{A}$ son disjuntos, entonces en efecto

$$\mu(A \cup B) = \operatorname*{ulím}_{n,D} \mu_n(A_n \cup B_n) = \operatorname*{ulím}_{n,D}(\mu_n(A_n) + \mu_n(B_n)) = \mu(A) + \mu(B),$$

ya que $A_n \cap B_n = \emptyset$ D-*a.e.*(n): si tuviéramos $x_n \in A_n \cap B_n$ para casi todo n, el ultralímite $\operatorname{ulím} x_n$ sería un elemento de $A \cap B$. Alternativamente, usando el Teorema 1.4.3: la aditividad (finita) se expresa en primer orden, por lo que μ hereda esta propiedad de las μ_n. Además, $\mu(M) = \operatorname{ulím} \mu_n(M_n) = 1$.

Definimos ahora $\hat{\mu} : \mathcal{A} \to [0,1]$ tomando la parte estándar de μ,

$$\hat{\mu}(A) = \operatorname{st}(\mu(A)).$$

Recordemos que $\mathrm{st}(x+y) = \mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(y)$ para todos $x, y \in {}^*[0,1]$. Obtenemos así un espacio de medida finitamente aditiva en el sentido estándar, $(M, \mathcal{A}, \hat{\mu})$. El álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ no será en general una σ-álgebra, salvo que sea finita (pensar en el Corolario 1.5.4). Observemos sin embargo que si $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una colección numerable de subconjuntos disjuntos de $\mathcal{A}$ con la propiedad de que

$$E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathcal{A},$$

entonces por la compacidad numerable tiene que haber un subcubrimiento finito de E; como los E_k son disjuntos, se sigue que $E_k = \emptyset$ salvo para finitos k. Pero entonces

$$\hat{\mu}(E) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \hat{\mu}(E_k),$$

ya que se trata de una unión finita. Esto dice que $(M, \mathcal{A}, \hat{\mu})$ satisface las hipótesis del teorema de Hahn–Kolmogorov (o de Carathéodory), que caracteriza cuándo una medida finitamente aditiva se puede extender a una medida σ-aditiva sobre la σ-álgebra generada. Existe por tanto un (único) espacio de probabilidad $(M, \sigma(\mathcal{A}), \hat{\mu}')$ con una medida $\hat{\mu}'$ que extiende a $\hat{\mu}$. A la completación $(M, L(\mathcal{A}, \mu), \mu_L)$ de este espacio lo llamaremos el *espacio de Loeb* formado a partir de $(M, \mathcal{A}, \mu)$, y a su medida la *medida de Loeb* del mismo. Fue introducida por Peter A. Loeb en [13].

Hemos apelado al teorema de Hanh–Kolmogorov para formar la medida de Loeb sobre un ultraproducto de espacios de medida; podemos sin embargo construirla más artesanalmente, y eso es lo que haremos a continuación.

Definición 2.1.1. Un subconjunto arbitrario $X \subset M$ se denominará un *subconjunto nulo* cuando para todo real estándar $\epsilon > 0$ exista un subconjunto interno $A_\epsilon \in \mathcal{A}$ tal que $X \subset A_\epsilon$ y $\hat{\mu}(A_\epsilon) \leq \epsilon$.

El primer paso será probar que $\mathcal{A}$ es casi una σ-álgebra, en el sentido de que toda unión numerable de elementos de $\mathcal{A}$ difiere de un elemento de $\mathcal{A}$ por un subconjunto nulo.

Lema 2.1.2. *Sea $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ una familia creciente, $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Entonces existe $B \in \mathcal{A}$ tal que*

- *$A \subset B$;*
- *$\hat{\mu}(B) = \lim_{k\to\infty} \hat{\mu}(A_k)$;*
- *$B \setminus A$ es nulo.*

Demostración. Sea $t = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\mu(A_k) \leq \hat{\mu}(A_k) + \frac{1}{k} \leq t + \frac{1}{k}.$$

El conjunto numerable de condiciones

$$\{A_k \subset x \wedge \mu(x) \leq t + \frac{1}{k}\}_{k\in\mathbb{N}}$$

es finitamente satisfacible en $\mathcal{A}$: basta tomar $x = A_k$ con k el máximo de los finitos índices considerados. Por saturación existe $B \in \mathcal{A}$ tal que

$$A_k \subset B,\ \mu(B) \leq t + \frac{1}{k}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego $A \subset B$, y además $\hat{\mu}(A_k) \leq \hat{\mu}(B) \leq t + \frac{1}{k}$ para todo k, de donde $\hat{\mu}(B) = t$. Por último, $B \setminus A \subset B \setminus A_k$, y como $\hat{\mu}(B \setminus A_k) = t - \hat{\mu}(A_k)$ es arbitrariamente pequeña, la diferencia $B \setminus A$ es un subconjunto nulo. □

Lema 2.1.3. *El conjunto de los subconjuntos nulos de M es un σ-ideal del álgebra de subconjuntos de M, es decir:*

- *si $X \subset Y$ con Y nulo, entonces X es nulo;*
- *si X_k es nulo para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces la unión $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ es nula.*

Demostración. El primer ítem es claro. Dados X_k como en el segundo, sean $A_k \in \mathcal{A}$ tales que $X_k \subset A_k$, $\hat{\mu}(A_k) \leq \epsilon/2^k$. Por el lema anterior, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \subset A$, $\hat{\mu}(A) \leq \text{lím}_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \hat{\mu}(A_j) \leq \epsilon$. □

Definición 2.1.4. Diremos que dos subconjuntos $E, F \subset M$ son congruentes, $E \equiv F$, si $E \Delta F$ es nulo. Un subconjunto $E \subset M$ se dirá *medible Loeb* cuando exista $B \in \mathcal{A}$ congruente a E. A la familia de subconjuntos medibles de M la notaremos $L(\mathcal{A}, \mu)$, o simplemente $L(\mathcal{A})$. La aplicación

$$\mu_L : L(\mathcal{A}) \to [0,1],\ \mu_L(E) = \hat{\mu}(B) \text{ si } B \equiv E,$$

es la medida de Loeb sobre $L(\mathcal{A})$.

Teorema 2.1.5. $(M, L(\mathcal{A}), \mu_L)$ *es un espacio de probabilidad completo.*

Demostración. Veamos que $L(\mathcal{A})$ es una σ-álgebra y que μ_L resulta σ-aditiva. Si $E \equiv A$, $F \equiv B$, con $A, B \in \mathcal{A}$, entonces del hecho de que los subconjuntos nulos forman un ideal se sigue que $E \cap F \equiv A \cap B \in \mathcal{A}$ y que $E \cup F \equiv A \cup B \in \mathcal{A}$. Es claro también que $E^c \equiv A^c \in \mathcal{A}$. Esto prueba que $L(\mathcal{A})$ es un álgebra de conjuntos. Además, si $A \equiv B$, $A, B \in \mathcal{A}$, entonces es fácil ver que $\hat{\mu}(A) = \hat{\mu}(B)$, lo que asegura la buena definición de μ_L. Si $E, F \in L(\mathcal{A})$ son disjuntos, $E \equiv A \in \mathcal{A}$, $F \equiv B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cap B \equiv E \cap F = \emptyset$, por lo que $\hat{\mu}(A \cap B) = 0$; luego $\mu_L(E \cup F) = \hat{\mu}(A \cup B) = \hat{\mu}(A) + \hat{\mu}(B) = \mu_L(E) + \mu_L(F)$.

Sea $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L(\mathcal{A})$ una familia de subconjuntos disjuntos, $E_k \equiv A_k \in \mathcal{A}$. Entonces

$$(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k)\Delta(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \Delta A_k,$$

y como los subconjuntos nulos forman un σ-ideal se tiene que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \equiv \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Por el Lema 2.1.2, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \equiv A$ y con la propiedad de que

$$\lim_{m\to\infty} \hat{\mu}(\bigcup_{k=1}^{m} A_k) = \hat{\mu}(A).$$

En particular la unión de los E_k está en $L(\mathcal{A})$. Además, como $\bigcup_{k=1}^{m} E_k \equiv \bigcup_{k=1}^{m} A_k$ y dichas uniones tienen por tanto igual medida, concluimos que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_L(E_k) = \hat{\mu}(A) = \mu_L(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k).$$

La completitud del espacio se sigue fácilmente de la construcción. $\square$

Los conjuntos medibles Loeb se pueden caracterizar también de la siguiente manera.

Proposición 2.1.6. *Sea $E \subset M$. Entonces $E \in L(\mathcal{A})$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existen $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $A \subset E \subset B$ y $\hat{\mu}(B \setminus A) \leq \epsilon$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $F \in \mathcal{A}$ tal que $E \equiv F$. Dado $\epsilon > 0$ existe $D \in \mathcal{A}$ con $\hat{\mu}(D) \leq \epsilon$ y $E\Delta F \subset D$, porque $E\Delta F$ es nulo. Sean $A = F \setminus D$, $B = F \cup D$. Entonces $A \subset E \subset B$ y $\hat{\mu}(B \setminus A) = \hat{\mu}(D) \leq \epsilon$.

($\Leftarrow$) Sean $A_n, B_n \in \mathcal{A}$ tales que $A_n \subset E \subset B_n$, $\hat{\mu}(B_n \setminus A_n) \leq 1/n$. Por saturación existe $F \in \mathcal{A}$ con $A_n \subset F \subset B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego para cada n es $E\Delta F \subset B_n \setminus A_n$, lo que muestra que $E \equiv F$. $\square$

2.2. Ultraproductos de espacios finitos: la medida de contar de Loeb

Un caso que nos interesará especialmente es el que se obtiene al tomar un ultraproducto de espacios M_n finitos con la medida de contar. En el contexto de un universo no-estándar construido como en el Capítulo 1, los ultralímites de conjuntos finitos se denominan *hiperfinitos*. Así, por ejemplo, el conjunto de los números hipernaturales menores que un $N \in {}^*\mathbb{N}$ fijo es un conjunto hiperfinito.

Recordemos que la medida de contar (normalizada) μ_n en un conjunto finito M_n se define sobre el álgebra $\mathcal{A}_n = \mathcal{P}(M_n)$ de subconjuntos de M_n mediante

$$\mu_n(A) = \frac{|A|}{|M_n|},$$

donde $|X|$ denota la cantidad de elementos de X.

La medida μ_L construida como en la sección anterior a partir de los espacios finitos $(M_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ se denomina la *medida de contar de Loeb* sobre el ultraproducto $M =$

$\text{ulím}_{n,D} M_n$. Es claro que para subconjuntos internos $A \in \mathcal{A} = \text{ulím}_{n,D} \mathcal{A}_n$ de M vale de hecho

$$\mu_L(A) = \text{st}\frac{|A|}{|M|},$$

donde $|\cdot| : \mathcal{A} \to {}^*\mathbb{N}$ es el ultralímite de las correspondientes funciones $|\cdot| : \mathcal{A}_n \to \mathbb{N}$.

Observación 2.2.1. Si el ultraproducto M es infinito, la medida de contar de Loeb no tiene átomos, es decir todo subconjunto de medida positiva admite un subconjunto de medida estrictamente menor y positiva. Como todo subconjunto medible Loeb es congruente a un subconjunto interno, basta ver que todo subconjunto interno $A = \text{ulím}\, A_n$ de medida positiva se puede partir en dos subconjuntos internos de medida positiva. Por ejemplo, podemos partir cada A_n en dos subconjuntos B_n, C_n tales que $|B_n| = |C_n|$ ó $|B_n| = |C_n|+1$. Como M es infinito se tiene $\text{st}(1/|M|) = 0$, y por tanto $\mu_L(\text{ulím}\, B_n) = \mu_L(\text{ulím}\, C_n) = \mu_L(A)/2$.

Un rasgo característico de la medida de contar en espacios finitos es que se preserva por biyecciones, lo que desde ya no es cierto para espacios de medida arbitrarios. En el caso del espacio de Loeb, sin embargo, observamos que la medida se preserva por *biyecciones internas*. En efecto, si $f = \text{ulím}\, f_n$ es biyectiva es porque las funciones f_n son biyectivas para casi todo n. Luego $\mu_n(A_n) = \mu_n(f_n(A_n))$ D-*a.e.*(n) y por tanto $\mu_L(A) = \mu_L(f(A))$ para todo subconjunto interno A. Esto se extiende inmediatamente a todo subconjunto medible Loeb. Veamos ahora que esta propiedad caracteriza completamente a la medida de Loeb sobre espacios hiperfinitos.

Teorema 2.2.2. *La medida de contar de Loeb es la única medida de probabilidad sobre* $(M, L(\mathcal{A}))$ *que es invariante por biyecciones internas. Más aún, su restricción al álgebra* $\mathcal{A}$ *es la única medida de probabilidad finitamente aditiva sobre* $\mathcal{A}$ *que es invariante por biyecciones internas.*

Demostración. Asumimos que M es infinito. Sea S el grupo de biyecciones internas de M y sea ν otra medida de probabilidad finitamente aditiva sobre $\mathcal{A}$ invariante bajo S. Probaremos que $\nu(A) \leq \mu_L(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Tomando complementos se obtiene luego $\nu = \mu_L$.

Supongamos que $\mu_L(A) < 1/m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Luego la medida no-estándar verifica $\mu(A) < 1/m$. Usando el principio de transferencia, podemos afirmar que existen biyecciones internas $s_i \in S$, $i = 1, \ldots, m$, tales que $s_i(A) \cap s_j(A) = \emptyset$ para $i \neq j$. Como ν es S-invariante, se tiene entonces

$$\nu(\bigcup_{i=1}^{m} s_i(A)) = \sum_{i=1}^{m} \nu(s_i(A)) = m\nu(A),$$

de donde $\nu(A) \leq 1/m$. Si en cambio sabemos que $\mu_L(A) < n/m$, $n, m \in \mathbb{N}$, entonces, razonando como en el final de la Observación 2.2.1, se ve que A se puede partir en n conjuntos A_j, cada uno de medida μ_L menor que $1/m$. Luego

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{n} \nu(A_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m} = \frac{n}{m}.$$

Así queda probado que $\nu(A) \leq q$ cada vez que $\mu_L(A) < q$, si $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Se sigue que $\nu \leq \mu_L$, como queríamos. □

Observación 2.2.3. Dada una familia de grupos finitos G_n, la medida de contar de Loeb sobre un ultraproducto $G = \text{ulím}\, G_n$ es evidentemente invariante por traslaciones, lo que nos recuerda a la medida de Haar de grupos. Sin embargo, no tenemos en principio una estructura natural de grupo topológico para G. (Fijada una signatura numerable, la topología lógica generada por los subconjuntos definibles de G lo convierte —por saturación— en un espacio topológico compacto; pero dicha topología no hace de G un grupo topológico —basta notar que $\{1\}$ es abierto).

2.3. Funciones medibles e integración

En un espacio de Loeb $(M, L(\mathcal{A}), \mu_L)$ conviven dos nociones distintas de *funciones medibles*. Las funciones $f : M \to \mathbb{R}$ medibles respecto de $L(\mathcal{A})$ en el sentido habitual se llaman *medibles Loeb*. Por otro lado están las funciones internas $F : M \to {}^*\mathbb{R}$ que son ultralímites de funciones medibles estándar; son aquellas que verifican $F^{-1}([\alpha, \beta]) \in \mathcal{A}$ para todos $\alpha, \beta \in {}^*\mathbb{R}$. Es natural denominarlas **medibles*.

Dadas $f : M \to \mathbb{R}$ y $F : M \to {}^*\mathbb{R}$ interna, decimos que F es un *levantado de* f si

$$f = \text{st}F \ \ \mu_L\text{-}a.e.,$$

o lo que es lo mismo, si f está infinitesimalmente cerca de F en casi todo punto respecto de la medida de Loeb.

Teorema 2.3.1. *Una función $f : M \to \mathbb{R}$ es medible Loeb si y sólo si tiene un levantado *medible. Se puede asumir incluso que el rango del levantado es hiperfinito.*

Demostración. ($\Rightarrow$) El resultado es inmediato si f es simple (i.e. de rango finito). Asumimos ahora que f es acotada. Tomemos funciones simples f_k tales que $|f - f_k| < 1/2^{k+1}$ en todo punto; sean F_k sus levantados *medibles. Notemos que $|F_k - F_j| < 1/2^k$ en casi todo punto si $k \leq j$. Así, el conjunto de condiciones

$$\{\mu(A) > 1 - 1/2^k \wedge \forall x \in A \ |F_k(x) - F(x)| < 1/2^k\}$$

en el par de variables (A, F) es finitamente satisfacible en el producto del álgebra interna $\mathcal{A}$ por el conjunto interno de las funciones *medibles. Usando saturación se obtienen $A \in \mathcal{A}$ de medida total y F *medible tales que $|F_k - F| < 1/2^k$ en A para todo k. Luego $f = \text{st}F$ en casi todo punto. Para el caso general, sean A_m conjuntos internos y crecientes con $\text{lím}_{m\to\infty} \mu_L(A_m) = 1$ y tales que $|f| < m$ en A_m. Sean F_m *medibles con $f = \text{st}F_m$ en casi todo punto de A_m. Como $|F_m - F_n| < 1/2^m$ en casi todo punto de A_m si $m \leq n$, por saturación se obtienen F *medible y un conjunto de medida total donde $f = \text{st}F$. En cada uso de saturación podíamos pedir que el rango de F fuera hiperfinito.

($\Leftarrow$) Como la medida de Loeb es completa, basta ver que $\text{st}F$ es medible para toda F *medible. Esto es claro si se nota que $\text{st}^{-1}([a, b]) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}}[a - 1/k, b + 1/k] \subset {}^*\mathbb{R}$. □

En un espacio de Loeb hay que considerar también dos integrales distintas. Las funciones $f : M \to \mathbb{R}$ integrables respecto de μ_L en el sentido convencional se llaman *integrables Loeb*, y su integral

$$\int f d\mu_L$$

se define de la manera usual. Las funciones internas $F : M \to {}^*\mathbb{R}$ que son ultralímites de funciones integrables estándar se denominan **integrables*. Si μ denota, como antes, la medida ultralímite, la integral interna

$$\int F d\mu$$

se define por el ultralímite de las integrales estándar correspondientes. En particular, si el espacio es un ultraproducto de espacios M_n finitos con la medida de contar y $F = \operatorname{ulím} F_n$, entonces

$$\int F d\mu = \operatorname*{ulím}_{n,D} \frac{1}{|M_n|} \sum_{x \in M_n} F_n(x) = \frac{1}{|M|} \sum_{x \in M} F(x). \tag{2.1}$$

Digamos que una función $F : M \to {}^*\mathbb{R}$ es *finitamente acotada* si $|F| \leq d$ para algún hiperreal finito $d \in R_1$.

Teorema 2.3.2. *Sea $F : M \to {}^*\mathbb{R}$ una función *medible. Si F es finitamente acotada, entonces*

$$\int \mathrm{st} F d\mu_L = \mathrm{st} \int F d\mu.$$

Corolario 2.3.3. *Una función medible $f : M \to \mathbb{R}$ es esencialmente acotada, $f \in L^\infty(\mu_L)$, si y sólo si admite un levantado F finitamente acotado. En dicho caso se tiene*

$$\int f d\mu_L = \mathrm{st} \int F d\mu.$$

La función parte estándar se puede extender a los hiperreales infinitos de la manera obvia si en el codominio admitimos los reales extendidos $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. La caracterización 2.3.1 sigue siendo válida para funciones $f : M \to \bar{\mathbb{R}}$, pero la igualdad de 2.3.2 puede fallar si F no es acotada. Por ejemplo, sea $K \in {}^*\mathbb{R}$ un hiperreal infinito y definamos $F : {}^*[0,1] \to {}^*\mathbb{R}$ por $F(x) = K$ si $x \leq 1/K$, $F(x) = 0$ en otro caso. Luego $\int F d\mu = 1$, pero como $\mathrm{st} F(x) = 0$ para casi todo x se tiene $\int \mathrm{st} F d\mu_L = 0$. No obstante vale la siguiente desigualdad.

Proposición 2.3.4. *Si $F : M \to {}^*\mathbb{R}$ es *medible y no negativa, entonces*

$$\int \mathrm{st} F d\mu_L \leq \mathrm{st} \int F d\mu.$$

Para conseguir que valga la igualdad se define una nueva noción de integrabilidad respecto de μ, que excluye las funciones que son grandes en conjuntos infinitesimalmente chicos. Más precisamente, se dice que una función *medible F es *S-integrable* si es *integrable y, además,

$$\int_A F d\mu \approx 0$$

para todo $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) \approx 0$. Para una tal función F vale la pretendida igualdad; más aún se consigue el siguiente resultado.

Teorema 2.3.5. *Una función medible $f : M \to \mathbb{R}$ es integrable Loeb si y sólo si tiene un levantado S-integrable $F : M \to {}^*\mathbb{R}$. En tal caso*

$$\int f d\mu_L = \mathrm{st} \int F d\mu.$$

Las demostraciones omitidas se pueden ver en [14].

2.4. Aplicaciones

La medida de Lebesgue

La medida de contar de Loeb se puede utilizar para construir fácilmente otras medidas estándar conocidas, favoreciendo la intuición de que medir es una generalización de la idea de contar. Mostramos cómo construir la medida de Lebesgue en el intervalo $[0, 1]$.

Sea $N \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ un hipernatural infinito. El infinitesimal $\Delta t = 1/N$ será la unidad de la llamada *línea temporal hiperfinita* con la que aproximaremos al intervalo $[0, 1]$:

$$\mathbf{T} = \{k\Delta t\}_{0 \leq k < N} = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, 1 - \Delta t\} \subset {}^*[0, 1],$$

que es un subconjunto interno e hiperfinito de $^*[0, 1]$. Sean μ_L la medida de contar de Loeb sobre $\mathbf{T}$, $\sigma(\mathcal{A}_\mathbf{T})$ la σ-álgebra generada por los subconjuntos internos de $\mathbf{T}$ y $L(\mathcal{A}_\mathbf{T})$ el espacio completo de Loeb. La restricción

$$\mathrm{st}_\mathbf{T} : \mathbf{T} \to [0, 1]$$

de la función parte estándar $\mathrm{st} : {}^*[0, 1] \to [0, 1]$ resulta ser suryectiva. En efecto, si $r \in [0, 1]$ y escribimos $N = \mathrm{ulím}\, N_n$, tomemos por ejemplo $k_n = \lfloor rN_n \rfloor \in \mathbb{N}$ la parte entera de rN_n. Para cada real $\epsilon > 0$ se tiene entonces $|r - k_n/N_n| < \epsilon$ *D-a.e.*(n), de donde $r \approx k\Delta t$ para $k = \mathrm{ulím}\, k_n < N$ (separar el caso $r = 1$).

Antes de seguir observemos que la medida del conjunto de puntos de $\mathbf{T}$ contenidos entre dos $s, t \in \mathbf{T}$ es

$$\mu_L(\mathbf{T} \cap [s, t]) = \mathrm{st} \frac{tN - sN + 1}{N} = \mathrm{st}(t) - \mathrm{st}(s).$$

Definamos ahora el álgebra $\mathcal{M} = \{E \subset [0, 1] : {\mathrm{st}_\mathbf{T}}^{-1}(E) \in L(\mathcal{A}_\mathbf{T})\}$ y la función

$$\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{R},\ \lambda(E) = \mu_L({\mathrm{st}_\mathbf{T}}^{-1}(E)).$$

A continuación mostramos que $\mathcal{M}$ resulta ser el álgebra de conjuntos medibles Lebesgue del intervalo, y λ la medida de Lebesgue.

Es claro que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y que λ es una medida completa sobre $\mathcal{M}$. Más aún, la inclusión $\mathbf{T} \hookrightarrow {}^*\mathbb{R}$ es un levantado de la función $\mathrm{st}_{\mathbf{T}}$, lo que dice que ésta es medible Loeb. Por tanto $\mathcal{M}$ contiene al álgebra de Borel de $[0,1]$ y a su completación.

La medida λ es invariante por traslaciones: si $E \in \mathcal{M}$ y $E + a \in \mathcal{M}$, sea $s \in \mathbf{T}$ tal que $\mathrm{st}(s) = a$; luego

$$\lambda(E + a) = \mu_L({\mathrm{st}_{\mathbf{T}}}^{-1}(E + a)) = \mu_L({\mathrm{st}_{\mathbf{T}}}^{-1}(E) + s) = \mu_L({\mathrm{st}_{\mathbf{T}}}^{-1}(E)) = \lambda(E),$$

pues sumar s (módulo 1) es una biyección interna de $\mathbf{T}$. Además, $\lambda([a,b]) = b-a$. Para verlo, tomemos $\epsilon > 0$ suficientemente chico; sean $s, t \in \mathbf{T}$ tales que $\mathrm{st}(s) = a + \epsilon$, $\mathrm{st}(t) = b - \epsilon$. El conjunto interno $\mathbf{T} \cap [s,t]$ está contenido en ${\mathrm{st}_{\mathbf{T}}}^{-1}([a,b])$, y su medida de Loeb es $b - a - 2\epsilon$. Luego

$$b - a - 2\epsilon \leq \lambda([a,b]).$$

Análogamente se prueba la desigualdad en el otro sentido. Estamos autorizados a concluir que λ extiende a la medida de Lebesgue.

Para ver que todo conjunto en $\mathcal{M}$ es medible Lebesgue nos apoyamos en el siguiente resultado.

Lema 2.4.1. *Si $A \in \mathcal{A}_{\mathbf{T}}$ es un subconjunto interno de $\mathbf{T}$, el conjunto* $\mathrm{st}(A) \subset [0,1]$ *es cerrado.*

Demostración. Sea $\{s_n\}_{n<\omega}$ una sucesión de elementos de A y supongamos que $\mathrm{st}(s_n)$ converge a un real $a \in [0,1]$. Para cada k se tiene entonces

$$|a - s_n| < 1/k$$

a partir de cierto n. Por $\aleph_1$-saturación, existe $s \in A$ con $|s - s_n| < 1/k$ para todo k. Luego $s \approx a$. Por tanto

$$a = \mathrm{st}(a) = \mathrm{st}(s) \in \mathrm{st}(A),$$

lo que muestra que toda sucesión convergente de elementos de $\mathrm{st}(A)$ converge en $\mathrm{st}(A)$. □

Sea ahora $E \in \mathcal{M}$. Puesto que ${\mathrm{st}_{\mathbf{T}}}^{-1}(E)$ es medible Loeb, sea $A \subset {\mathrm{st}_{\mathbf{T}}}^{-1}(E)$ un subconjunto interno de $\mathbf{T}$ tal que $\mu_L({\mathrm{st}_{\mathbf{T}}}^{-1}(E) \setminus A) \leq \epsilon$, como lo garantiza la Proposición 2.1.6. Entonces $\mathrm{st}_{\mathbf{T}}(A) \subset E$ es un subconjunto cerrado, por el lema anterior. Además

$$\lambda(E \setminus \mathrm{st}_{\mathbf{T}}(A)) = \mu_L({\mathrm{st}_{\mathbf{T}}}^{-1}(E) \setminus {\mathrm{st}_{\mathbf{T}}}^{-1}(\mathrm{st}_{\mathbf{T}}(A))) \leq \mu_L({\mathrm{st}_{\mathbf{T}}}^{-1}(E) \setminus A) \leq \epsilon.$$

Esto muestra que podemos aproximar E por subconjuntos cerrados de $[0,1]$, lo que implica que E es medible Lebesgue.

Hemos probado que ${\mathrm{st}_{\mathbf{T}}}^{-1}(E)$ es medible Loeb si y sólo si E es medible Lebesgue. Dada $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ podemos definir $\hat{f} : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$ por $\hat{f} = f \circ \mathrm{st}_{\mathbf{T}}$. Se sigue que f es medible

Lebesgue si y sólo si $\hat{f}$ es medible Loeb; luego f es medible Lebesgue si y sólo si existe $F : \mathbf{T} \to {}^*\mathbb{R}$ interna con

$$f(\mathrm{st}(s)) = \mathrm{st}(F(s)).$$

Se deduce además que f es integrable Lebesgue si y sólo si $\hat{f}$ es integrable Loeb, o bien si y sólo si existe F S-integrable como arriba. En cualquier caso

$$\int_0^1 f d\lambda = \int_{\mathbf{T}} \hat{f} d\mu_L = \mathrm{st} \sum_{s \in \mathbf{T}} F(s)\Delta t.$$

Queda visto cómo representar la medida de Lebesgue mediante ultraproductos de la medida de contar. Lo anterior se generaliza con facilidad para la medida de Lebesgue en varias dimensiones; ver [14]. Más aún, un teorema general de Anderson [1] prueba que cualquier medida de Radon sobre un espacio topológico Hausdorff, como lo son la mayoría las medidas que aparecen en el análisis, puede ser representada mediante una medida de contar de Loeb.

Desintegración de la medida de contar de Loeb

En este apartado desarrollamos un análogo —para el espacio de contar de Loeb— del teorema de desintegración de medidas de Rokhlin para espacios de Lebesgue. No hemos hallado este análogo en la literatura, a pesar de que surge naturalmente al considerar el problema de la probabilidad condicional para la medida de contar de Loeb, que se responde fácilmente. Fueron de hecho estas consideraciones las que nos llevaron al teorema clásico de Rokhlin, que repasamos al final. Dejamos planteada la pregunta: ¿puede usarse el resultado que probamos aquí para dar una prueba no-estándar del resultado clásico para espacios de Lebesgue? Por lo demás, el desarrollo sirve como un ejemplo interesante de aplicación del principio de transferencia desde los espacios finitos al espacio de Loeb.

Dados un espacio de probabilidad arbitrario con medida ν y un subconjunto medible E de medida positiva, siempre es posible inducir una *probabilidad condicional* ν_E sobre los subconjuntos medibles de E, de la manera obvia: $\nu_E(A) = \nu(A)/\nu(E)$. Cuando E tiene medida nula en general no hay una manera natural de hacer esto.

En un espacio de contar de Loeb, sin embargo, los subconjuntos internos $B \in \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$ admiten de manera natural una medida de probabilidad, incluso cuando $\mu_L(B) = 0$. Se trata de la medida de contar de Loeb $\mu_L^B = (\mu^B)_L$ inducida por el ultralímite

$$\mu^B(A) = \frac{|A|}{|B|},\ A \subset B \text{ subconjunto interno.}$$

Notando $B \cap \Sigma = \{B \cap A : A \in \Sigma\} \subset \mathcal{P}(B)$, observemos que el álgebra de Loeb $L(B \cap \mathcal{A})$ donde está definida la medida μ_L^B puede estar estrictamente contenida en la restricción $B \cap L(\mathcal{A})$ del álgebra del espacio original. De hecho, si $\mu_L(B) = 0$, se tiene $B \cap L(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(B)$. Para evitar este problema trabajaremos con el espacio $(M, \sigma(\mathcal{A}), \mu_L)$, es decir restringiéndonos a la σ-álgebra generada por los subconjuntos internos de M, y lo mismo al considerar la medida de contar de Loeb inducida en subconjuntos internos. Nótese que $\sigma(B \cap \mathcal{A}) = B \cap \sigma(\mathcal{A})$.

Si ahora consideramos una partición de M en subconjuntos internos B_i, posiblemente de medida nula, se nos ocurre naturalmente preguntar si la medida μ_L puede recuperarse a partir de las probabilidades condicionales $\mu_L^{B_i}$. Consideremos una unión disjunta

$$M = \bigsqcup_{i \in I} B_i$$

para cierto conjunto de índices I, que supondremos interno. Notemos $\mu_L^i = \mu_L^{B_i}$. Nos preguntamos si podemos dar una medida de probabilidad ν_* sobre el conjunto de índices I de manera que

$$\mu_L(E) = \int_I \mu_L^i(E \cap B_i) d\nu_* \tag{2.2}$$

para todo $E \in \sigma(\mathcal{A})$. O en una formulación más general,

$$\int_M f d\mu_L = \int_I \int_{B_i} f d\mu_L^i d\nu_* \tag{2.3}$$

para toda $f : M \to \mathbb{R}$ $\sigma(\mathcal{A})$-medible e integrable. Notemos por ejemplo que si la partición es la conformada por los singletons de elementos de M, entonces I se puede identificar con M y se tiene $\mu_L^x(E \cap \{x\}) = \chi_E(x)$; poniendo $\nu_* = \mu_L$, la fórmula (2.2) se transforma simplemente en $\mu_L(E) = \int_M \chi_E(x) d\mu_L$.

En general, la medida correcta sobre I será la 'empujada' por la proyección $\pi : M \to I$, $\pi(x) = i$ sii $x \in B_i$. Más precisamente, digamos que un subconjunto $J \subset I$ es medible si y sólo si

$$\pi^{-1}(J) = \bigcup_{i \in J} B_i \in L(\mathcal{A}),$$

y en ese caso definamos $\nu_*(J) = \mu_L(\pi^{-1}(J))$. Nótese que hemos considerado la σ-álgebra completa $L(\mathcal{A})$ para determinar los subconjuntos medibles de I. Podemos llamar a ν_* la *medida cociente* de la partición.

Asumamos ahora que la partición $\{B_i\}_{i \in I}$ es *interna*. El principio de transferencia nos da la igualdad con la suma hiperfinita

$$|A| = \sum_{i \in I} |A \cap B_i|$$

para todo $A \subset M$ interno. Luego

$$\mu(A) = \frac{|A|}{|M|} = \sum_{i \in I} \frac{|A \cap B_i|}{|B_i|} \frac{|B_i|}{|M|} = \sum_{i \in I} \mu^i(A \cap B_i) \frac{|B_i|}{|M|}. \tag{2.4}$$

La intuición indica que al tomar la parte estándar podremos cambiar la suma por una integral y el cociente $\frac{|B_i|}{|M|}$ por el diferencial $d\nu_*$. En efecto, en este contexto la medida ν_*

recién definida es esencialmente la medida de Loeb de la partición $\{B_i\}_{i\in I}$ construida a partir de la medida no estándar que toma los conjuntos B_i por átomos de medida $\frac{|B_i|}{|M|}$. Para ser más explícitos, supongamos que tenemos escrita la partición $\{B_i\}_{i\in I}$ como un ultralímite de particiones $\{B_i^n\}_{i\in I_n}$ de conjuntos finitos M_n; si definimos $\nu_n : \mathcal{P}(I_n) \to \mathbb{R}$ por $\nu_n(J_n) = |\bigcup_{i\in J_n} B_i^n|/|M_n|$ y consideramos $\nu = \text{ulím}_{n,D}\,\nu_n$, entonces por definición tenemos, como en la igualdad (2.1) de la sección sobre integrabilidad,

$$\int_I F d\nu = \sum_{i\in I} F(i)\frac{|B_i|}{|M|}$$

para toda $F : I \to {}^*\mathbb{R}$ interna. Pero además $\nu_* = \nu_L$. Observando que la función $\mu^i(A\cap B_i) : I \to {}^*[0,1] \subset {}^*\mathbb{R}$ es interna y finitamente acotada, de la igualdad (2.4) y el Teorema 2.3.2 deducimos

$$\mu_L(A) = \int_I \mu_L^i(A\cap B_i)d\nu_* \tag{2.5}$$

para todo $A \in \mathcal{A}$. Es rutina extenderlo a todo $E \in \sigma(\mathcal{A})$ o a toda $f : M \to \mathbb{R}$ integrable, en el sentido de (2.3).

Ahora nos gustaría evadirnos de requerir que la familia $\{B_i\}_{i\in I}$ sea interna, o incluso de pedir que los conjuntos B_i sean internos. Proponemos la siguiente definición.

Definición 2.4.2. Digamos que una partición $\{E_i\}_{i\in I}$ de M por conjuntos $E_i \in \sigma(\mathcal{A})$ es *medible Loeb* si existe una partición interna $\{B_i\}_{i\in I}$ de M tal que la unión

$$\bigcup_{i\in I} E_i \Delta B_i$$

sea μ_L-nula. Podemos decir que bajo dicha condición las particiones $\{E_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ son *congruentes*, y notar $\{E_i\}_{i\in I} \equiv \{B_i\}_{i\in I}$.

Observación 2.4.3. Dos particiones congruentes $\{E_i\}_{i\in I} \equiv \{B_i\}_{i\in I}$ inducen la misma medida cociente ν_* sobre I. Si por ejemplo $\bigcup_{i\in J} E_i \in L(\mathcal{A})$, entonces, como

$$(\bigcup_{i\in J} E_i)\Delta(\bigcup_{i\in J} B_i) \subset \bigcup_{i\in I} E_i \Delta B_i$$

y el conjunto de la derecha es nulo, tenemos $\bigcup_{i\in J} E_i \equiv \bigcup_{i\in J} B_i$; por tanto $\bigcup_{i\in J} B_i \in L(\mathcal{A})$ y $\mu_L(\bigcup_{i\in J} E_i) = \mu_L(\bigcup_{i\in J} B_i)$. Se ve así que las particiones inducen la misma σ-álgebra y la misma medida cociente sobre I.

Teorema 2.4.4 (Desintegración del espacio de contar de Loeb)**.** *Dada una partición medible Loeb $\{E_i\}_{i\in I}$ del espacio $(M, \sigma(\mathcal{A}), \mu_L)$, existe una familia $\{\mu_i\}_{i\in I}$ de medidas de probabilidad sobre $(M, \sigma(\mathcal{A}))$ tales que*

1. $\mu_i(E_i) = 1$ *para casi todo i respecto de ν_*,*

2. *para toda $f : M \to \mathbb{R}$ $\sigma(\mathcal{A})$-medible e integrable, la aplicación $i \mapsto \int f d\mu_i$ es medible respecto de la σ-álgebra cociente sobre I, y vale $\int f d\mu_L = \int_I \int f d\mu_i d\nu_*$,*

donde ν_* denota la medida cociente de la partición. Además, si $\{\nu_i\}_{i\in I}$ es otra familia de medidas de probabilidad con las mismas dos propiedades, entonces para todo $E \in \sigma(\mathcal{A})$ se tendrá $\nu_i(E) = \mu_i(E)$ ν_*-a.e.(i).

Nótese que, puesto que para casi todo i es $\mu_i(E_i) = 1$, las medidas de probabilidad μ_i pueden considerarse probabilidades condicionales sobre los subespacios $(E_i, \sigma(E_i \cap \mathcal{A}))$.

Demostración. Sea $\{B_i\}_{i\in I}$ una partición interna congruente con $\{E_i\}_{i\in I}$, y sean μ_L^i las medidas de Loeb de los conjuntos internos B_i. Definimos las medidas de probabilidad μ_i por $\mu_i(E) = \mu_L^i(E \cap B_i)$. En virtud de la Observación 2.4.3 y por lo obtenido antes para particiones internas, sabemos ya que $i \mapsto \int f d\mu_i$ es medible y vale

$$\int f d\mu_L = \int_I \int f d\mu_i d\nu_*$$

para toda f $\sigma(\mathcal{A})$-medible e integrable, con lo cual la segunda condición se verifica.

Queremos probar la primera condición. Como $\bigcup_{i\in I} E_i \Delta B_i$ es μ_L-nulo, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $A_k \in \mathcal{A}$ con $\bigcup_{i\in I} E_i \Delta B_i \subset A_k$ y $\mu_L(A_k) < 1/k$. Definimos $\varphi_k : I \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi_k(i) = \mu_L^i(A_k \cap B_i).$$

Como cada A_k es interno, las funciones φ_k se obtienen como la parte estándar de las funciones internas $\mu^i(A_k \cap B_i) : I \to {}^*\mathbb{R}$, y son por tanto medibles. Por otra parte definimos $\varphi : I \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(i) = \mu_L^i(B_i \setminus E_i).$$

No sabemos en principio que φ sea medible, pero lo probaremos a continuación; más aún veremos que φ se anula en casi todo i, de donde $\mu_i(E_i) = 1$ ν_*-*a.e.*, como queremos.

Notemos que $B_i \setminus E_i \subset A_k \cap B_i$, de donde $0 \le \varphi \le \varphi_k$ para todo k. Por otra parte, de (2.5) resulta

$$\int_I \varphi_k d\nu_* = \mu_L(A_k) < \frac{1}{k}.$$

Luego, dado $\epsilon > 0$, se tiene $\{i \in I : \varphi(i) \ge \epsilon\} \subset \{i \in I : \varphi_k(i) \ge \epsilon\}$ y

$$\nu_*(\{i \in I : \varphi_k(i) \ge \epsilon\}) \le \frac{1}{\epsilon} \int_I \varphi_k d\nu_* < \frac{1}{\epsilon k}$$

para todo k, lo que muestra que $\{i \in I : \varphi(i) \ge \epsilon\}$ es un subconjunto nulo de I. Como la medida ν_* es completa por construcción y ϵ es arbitrario, deducimos a la vez que φ es medible y nula en casi todo punto.

Sea ahora $\{\nu_i\}_{i\in I}$ otra familia con las propiedades de $\{\mu_i\}_{i\in I}$. Recordemos que $\pi : M \to I$ denota la proyección inducida por la partición, $\pi(x) = i$ sii $x \in E_i$. Dado $J \subset I$ medible, por la condición 1 se tiene, para casi todo i, $\chi_{\pi^{-1}(J)} = \chi_{\pi^{-1}(J)\cap E_i}$ ν_i-*a.e.* Dado $E \in \sigma(\mathcal{A})$, usando la condición 2 tenemos luego

$$\mu_L(\pi^{-1}(J) \cap E) = \int \chi_{\pi^{-1}(J)}\chi_E d\mu_L = \int_I \int \chi_{\pi^{-1}(J)\cap E_i}\chi_E d\nu_i d\nu_*,$$

y lo mismo cambiando ν_i por μ_i. Como $\chi_{\pi^{-1}(J)\cap E_i}(x) = \chi_J(i)\chi_{E_i}(x)$, obtenemos

$$\mu_L(\pi^{-1}(J) \cap E) = \int_J \int \chi_{E_i}\chi_E d\nu_i d\nu_* = \int_J \nu_i(E) d\nu_*,$$

y lo mismo para con las medidas μ_i. Igualando tenemos

$$\int_J \mu_i(E) d\nu_* = \int_J \nu_i(E) d\nu_*$$

para todo $J \subset I$ medible, lo que muestra que $\nu_i(E) = \mu_i(E)$ ν_*-*a.e.*(i). □

Observación 2.4.5. No podemos de lo anterior concluir que $\nu_i = \mu_i$ para casi todo i, puesto que el conjunto de índices i donde $\nu_i(E) = \mu_i(E)$ puede cambiar con E. Podríamos deducir esta forma fuerte de unicidad a partir de lo anterior si el espacio de medida fuera *separable*, pero el de Loeb no lo es.

El enunciado del Teorema 2.4.4 emula el del teorema de Rokhlin para espacios de Lebesgue; ver [24, 8, 32]. Un espacio de probabilidad se dice *de Lebesgue* si es separable y completo módulo cero respecto de su base. A la postre resulta que un espacio es de Lebesgue si y sólo si es isomorfo módulo cero al intervalo $[0, 1]$ con la medida de Lebesgue. Rokhlin llama a una partición $\mathcal{P}$ de un tal espacio *medible* si coincide con la partición generada por una familia numerable $\{A_n\}_{n<\omega}$ de conjuntos medibles, es decir si

$$\mathcal{P} = \{\bigcap_{n<\omega} A_{n,\sigma(n)} : \sigma \in 2^\omega\},$$

donde usamos $A_{n,0}$ para denotar A_n y $A_{n,1}$ para denotar A_n^c, su complemento. Luego prueba que toda partición medible $\mathcal{P} = \{E_i\}_{i\in I}$ de un espacio de Lebesgue admite un sistema $\{\mu_i\}_{i\in I}$ de medidas satisfaciendo las mismas dos condiciones del teorema de desintegración que probamos arriba (con las adaptaciones mínimas necesarias; la medida cociente es, como arriba, la empujada por la proyección). Más aún vale la unicidad, y en el sentido fuerte de la Observación 2.4.5, puesto que los espacios de Lebesgue son separables. La demostración de la unicidad se puede calcar de la que dimos en nuestro teorema, agregando el argumento de separabilidad.

La prueba de la existencia del sistema de medidas condicionales es en cambio más complicada en el caso clásico de espacios de Lebesgue. En [8] por ejemplo se prueba primero para el intervalo $[0, 1]$ y se apela después a la caracterización de los espacios de Lebesgue mencionada arriba. En el caso del intervalo (o de un espacio métrico compacto, como en [32]) se puede aprovechar el teorema de Riesz de representación de medidas borealianas en términos de funcionales lineales sobre el espacio de funciones continuas. La construcción del funcional lineal no es en absoluto trivial.

Sería interesante saber si la existencia en el caso clásico (que se reduce al del intervalo $[0,1]$) puede ser obtenida a partir del Teorema 2.4.4 usando la representación de la medida de Lebesgue del intervalo mediante la medida de contar de Loeb (véase el apartado anterior). En particular podemos preguntarnos: dada una partición $\mathcal{P}$ del [0,1] *medible* en el sentido de Rokhlin, ¿es cierto que la partición

$$\mathrm{st}_{\mathbf{T}}{}^{-1}(\mathcal{P}) = \{\mathrm{st}_{\mathbf{T}}{}^{-1}(P) : P \in \mathcal{P}\}$$

de la línea hiperfinita $\mathbf{T}$ resulta *medible Loeb* en el sentido de la Definición 2.4.2? La respuesta es negativa: la medida cociente inducida en el conjunto de índices I tiene que ser separable para una partición medible Rokhlin, mientras que esto es falso para particiones medibles Loeb. Nos gustaría saber si alguna variante de este enfoque es conducente, de manera de hacer posible una demostración 'intuitiva' del teorema de desintegración de Rokhlin, o al menos basada directamente en la intuición expresada por la fórmula de contar (2.4).

El principio de correspondencia de Furstenberg

La siguiente aplicación está basada de las estimulantes exposiciones de [27, 26]. El principio de correspondencia de Furstenberg es un puente que conecta resultados de teoría ergódica con temas de teoría de números combinatoria. A esta última área pertenece el celebrado *teorema de Szemerédi*, que establece que todo subconjunto $A \subset \mathbb{Z}$ de *densidad (superior) positiva*, es decir con

$$d(A) = \limsup_{N\to\infty} \frac{|A \cap [-N,N]|}{2N+1} > 0,$$

debe poseer sucesiones aritméticas arbitrariamente largas. El resultado había sido conjeturado por Erdős y Turán en 1936 y fue finalmente establecido por Szemerédi en 1975.

Dos años más tarde Furstenberg consiguió una prueba alternativa al demostrar un resultado de teoría ergódica que probó además ser equivalente al teorema de Szemerédi. Antes de enunciarlo recordemos que un *sistema que preserva la medida (mps)* es un espacio de probabilidad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ junto con una transformación $T : X \to X$ medible, biyectiva, con inversa medible e invariante para μ, es decir tal que $\mu(T^{-1}(E)) = \mu(E)$ para todo $E \in \mathcal{B}$ (o lo que en este caso es equivalente: $\mu(T(E)) = \mu(E)$ para todo $E \in \mathcal{B}$). El *teorema de recurrencia de Furstenberg* afirma que para todo mps $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, todo $k \geq 1$ y todo $E \in \mathcal{B}$ de medida positiva se puede hallar un entero positivo r tal que

$$0 < \mu(E \cap T^r E \cap \cdots \cap T^{(k-1)r} E). \tag{2.6}$$

Aunque referidos a objetos muy distintos, se prueba sin mucha dificultad que el teorema de Szemerédi implica el teorema de recurrencia de Furstenberg; ver [27]. Deducir el teorema de Szemerédi a partir del de Furstenberg requiere una construcción menos elemental, mal que le pese a la intuición: si la función de densidad d fuera una medida sobre $\mathbb{Z}$, bastaría aplicar el teorema de recurrencia a la transformación invariante $n \mapsto n+1$. Obviamente, d no es una medida de probabilidad, y ésta es la dificultad que subsana el principio de correspondencia de Furstenberg, que enunciamos a continuación.

Teorema 2.4.6. *Dado $A \subset \mathbb{Z}$ de densidad positiva, existen un mps $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ y un subconjunto $E \in \mathcal{B}$ con $\mu(E) = d(A)$, tales que, para todos $n_0, \ldots, n_{k-1} \in \mathbb{Z}$,*

$$\mu(T^{n_0}E \cap \cdots \cap T^{n_{k-1}}E) \leq d((A+n_0) \cap \cdots \cap (A+n_{k-1})).$$

La medida de contar de Loeb permite dar una demostración sencilla de este principio, distinta de la original de Furstenberg.

Demostración. Elijamos una sucesión estrictamente creciente $\{N_n\}_{n<\omega} \subset \mathbb{N}$ que verifique

$$0 < d(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [-N_n, N_n]|}{2N_n + 1}.$$

Llamemos $E_n = A \cap [-N_n, N_n]$, $X_n = \mathbb{Z} \cap [-N_n, N_n]$, y consideremos las funciones biyectivas $T_n : X_n \to X_n$ dadas por $T_n(m) = m+1$, salvo $T_n(N_n) = -N_n$. Tomaremos X como un ultraproducto no principal de los conjuntos X_n, y el sistema $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ será el espacio de contar de Loeb correspondiente junto con la transformación interna distinguida $T = \operatorname{ulím} T_n$. Es inmediato verificar que el sistema así definido es un mps. Definimos $E = \operatorname{ulím} E_n$, y se tiene claramente

$$\mu(E) = \operatorname{st} \operatorname*{ulím}_{n,D} \frac{|E_n|}{|X_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|E_n|}{|X_n|} = d(A).$$

Por otra parte, dados $n_0, \ldots, n_{k-1} \in \mathbb{Z}$, vale

$$\mu(T^{n_0}E \cap \cdots \cap T^{n_{k-1}}E) = \operatorname{st} \operatorname*{ulím}_{n,D} \frac{|(E_n + n_0) \cap \cdots \cap (E_n + n_{k-1}) \cap X_n|}{|X_n|},$$

ya que $T^{n_j}(m) = m + n_j$ en casi todo m. El último término es menor o igual que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|(A+n_0) \cap \cdots \cap (A+n_{k-1}) \cap [-N_n, N_n]|}{|X_n|} \leq d((A+n_0) \cap \cdots \cap (A+n_{k-1})),$$

lo que completa la prueba. □

Sean ahora $k \geq 1$ y $A \subset \mathbb{Z}$ de densidad positiva. Concatenando el principio de correspondencia y el teorema de recurrencia obtenemos r tal que

$$0 < d(A \cap (A+r) \cap \cdots \cap (A+(k-1)r)),$$

lo que en particular muestra que la intersección es no vacía. Esto es equivalente a que exista una sucesión aritmética en A de razón r y longitud k.

Otras

El libro de Cutland [7] usa la teoría de la medida de Loeb como paradigma para abordar temas de mecánica de fluidos estocástica, ecuaciones diferenciales estocásticas y matemática financiera.

Referimos otras aplicaciones diversas y recientes que hemos encontrado. El trabajo [9] de Elek y Szegedy emplea la medida de contar de Loeb para dar nuevas pruebas del Lema de regularidad de hipergrafos y otros resultados afines. En [6] se estudian ultraproductos de acciones de grupos en espacios de medida, con aplicaciones a combinatoria de grafos. Las ideas de la construcción de la medida de Lebesgue mediante la de Loeb se pueden utilizar para la medida y dimensión de Hausdorff, como se muestra en [23].

En [14] se exponen detalladamente más desarrollos del análisis no-estándar.

Capítulo 3

Estructuras pseudofinitas

En el capítulo anterior consideramos varias veces ultraproductos de espacios finitos, pero desde el punto de vista del análisis. En este capítulo tornaremos hacia el álgebra, y por consiguiente los estudiaremos en tanto σ-estructuras. Sabemos que, pudiendo ser infinitos, tales ultraproductos heredan sin embargo características propias de los modelos finitos. Desde el punto de vista de la lógica de primer orden: un tal ultraproducto $\mathcal{M} = \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/D$ debe satisfacer todas las σ-sentencias comunes a todas las estructuras finitas, es decir

$$\mathcal{M} \models \mathbf{Fin},$$

donde $\mathbf{Fin} = \bigcap_{|N|<\omega} \mathrm{Th}(\mathcal{N})$. Esto es consecuencia del teorema de Łoś, puesto que $\mathcal{M}_i \models \mathbf{Fin}$ para todo i, por ser finitas. Aunque la intersección sea sobre *todas* las σ-estructuras finitas, el conjunto $\mathbf{Fin}$ no es en absoluto trivial. Si, por ejemplo, $\mathbf{Fin}_{\mathcal{K}} = \bigcap_{\mathcal{N}\models\phi,|N|<\omega} \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ es la teoría común a todas las σ-estructuras finitas de una clase definible $\mathcal{K} = \{\mathcal{M} : \mathcal{M} \models \phi\}$, entonces $\mathbf{Fin} \subset \mathbf{Fin}_{\mathcal{K}}$. Pero $\mathbf{Fin}$ contiene a todas las sentencias de la forma $\phi \to \psi$ para $\psi \in \mathbf{Fin}_{\mathcal{K}}$, con cual la contención 'se invierte': $\mathbf{Fin}$ guarda una copia de la teoría común a las estructuras finitas de cualquier clase definible.

Por otra parte, sabemos que el cardinal de un ultraproducto infinito $\mathcal{M}$ de estructuras finitas es mayor o igual que $2^{\aleph_0}$ (Lema 1.3.9). Asumiendo que la signatura es a lo sumo numerable, debe existir una subestructura elemental $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ de cardinal $\aleph_0$, por el teorema descendente de Löwenheim–Skolem. Se tiene $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$, y por tanto $\mathcal{N} \models \mathbf{Fin}$, pero $\mathcal{N}$ no puede ser (isomorfo a) un ultraproducto de modelos finitos, por ser infinita numerable. Esto muestra que hay modelos de $\mathbf{Fin}$ que no se obtienen como ultraproductos de estructuras finitas.

Definición 3.0.7. Llamamos *hiperfinitas* a las estructuras isomorfas a ultraproductos de modelos finitos, y *pseudofinitas* a aquellas que son modelos infinitos de $\mathbf{Fin}$. Se dice por otra parte que una estructura $\mathcal{M}$ tiene la *propiedad de modelo finito* si toda sentencia verdadera en $\mathcal{M}$ tiene un modelo finito.

Nota. En [34] se incluye a las estructuras finitas dentro de las pseudofinitas. En la literatura de cuerpos y grupos pseudofinitos se las excluye, y aquí seguimos esta convención.

Proposición 3.0.8. *Sea $\mathcal{M}$ una estructura infinita. Son equivalentes:*

1. *$\mathcal{M}$ es pseudofinita;*
2. *$\mathcal{M}$ tiene la propiedad de modelo finito;*
3. *$\mathcal{M}$ es elementalmente equivalente a una estructura hiperfinita;*
4. *$\mathcal{M}$ tiene una ultrapotencia hiperfinita.*

Demostración. (1)⇒(2): Si ϕ es una sentencia sin modelos finitos, entonces $\neg\phi$ vale en toda estructura finita. Luego $\neg\phi \in \mathbf{Fin}$ y por tanto ϕ es falsa en $\mathcal{M}$.

(2)⇒(3): Procedemos como en la demostración del teorema de compacidad mediante ultraproductos. Para cada $\phi \in \mathrm{Th}(\mathcal{M})$, sea $\mathcal{M}_\phi$ un modelo finito de ϕ. Consideremos $J_\phi = \{\psi \in \mathrm{Th}(\mathcal{M}) : \mathcal{M}_\psi \models \phi\}$. Como $\bigwedge_{i=1}^n \phi_i \in \bigcap_{i=1}^n J_{\phi_i}$, la familia $\{J_\phi\}_{\phi\in\mathrm{Th}(\mathcal{M})}$ tiene la propiedad de intersección finita y existe un ultrafiltro D sobre $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ que la extiende. Sea

$$\mathcal{N} = \prod_{\psi\in\mathrm{Th}(\mathcal{M})} \mathcal{M}_\psi / D.$$

Se tiene que $\mathcal{M}_\psi \models \phi$ D-*a.e.*(ψ) para toda $\phi \in \mathrm{Th}(\mathcal{M})$, pues $J_\phi \in D$. Del teorema de Łoś concluimos que $\mathcal{N} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M})$, i.e. $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$.

(3)⇔(4): Notemos que las ultrapotencias de estructuras hiperfinitas son hiperfinitas. Más en general se tiene $\mathrm{ulím}_{i,D}(\mathrm{ulím}_{j,F}\, \mathcal{M}_{ij}) \simeq \mathrm{ulím}_{(i,j),F\otimes D}\, \mathcal{M}_{ij}$, donde

$$F \otimes D = \{C \subset I \times J : ((i,j) \in C \ F\text{-}a.e.(j))\ D\text{-}a.e.(i)\}$$

es el *ultrafiltro producto*. La equivalencia se infiere del teorema de Keisler–Shelah.

(3)⇒(1): Se sigue inmediatamente pues, como ya señalamos, toda estructura hiperfinita es modelo de **Fin**. □

Nótese que la condición (4) brinda una caracterización puramente algebraica de las estructuras pseudofinitas.

Observación 3.0.9. Por compacidad (o bien: por la equivalencia (3) de arriba y el teorema de Łoś), una sentencia ϕ tiene un modelo pseudofinito si y sólo si tiene modelos finitos arbitrariamente grandes.

Un ejemplo interesante de un modelo pseudofinito numerable lo da *el grafo aleatorio*, o *grafo de Rado*, que se obtiene (con probabilidad 1) si se conectan numerables nodos al azar, cada par de ellos con probabilidad 1/2. El mismo se puede caracterizar como el único grafo numerable R —salvo isomorfismo— con la siguiente propiedad de *extensión*: dados dos subconjuntos finitos y disjuntos U, V de vértices de R, existe un vértice x en R conectado con todo punto de U y con ninguno de V. La misma condición, pero restringida a subconjuntos disjuntos U, V de cardinal menor o igual a cierto $n < \omega$, es fácilmente expresable en primer orden, digamos mediante una fórmula ψ_n (sobre la signatura con un símbolo para la relación de adyacencia del grafo). Debido a la unicidad del grafo de Rado, la teoría Th(R) queda determinada por los infinitos axiomas ψ_n, junto con los axiomas de grafos (irreflexividad y simetría de la relación de adyacencia) y axiomas para la existencia de infinitos elementos. Para ver que R tiene la propiedad de modelo finito basta ver entonces que cada una de las sentencias ψ_n se verifica en grafos finitos arbitrariamente grandes (notemos que ψ_n implica ψ_m para $m < n$). Pero un conocido argumento probabilístico muestra más aún que la proporción de grafos de tamaño k que satisfacen ψ_n tiende a 1 cuando k aumenta (*Ley cero–uno de grafos*). Las demostraciones de estos hechos se pueden ver en [19, 33].

3.1. El teorema de Trakhtenbrot

En las secciones siguientes de este capítulo nos propondremos estudiar distintas *clases* de estructuras pseudofinitas. Notemos que toda clase *elemental* que posea modelos finitos arbitrariamente grandes debe poseer también modelos pseudofinitos. Dada una clase elemental $\mathcal{K}$, nos gustaría por ejemplo caracterizar axiomáticamente los modelos pseudofinitos en $\mathcal{K}$. Desde ya, bastaría en principio listar los axiomas que definen a la clase $\mathcal{K}$ junto con los enunciados *existen al menos* n *elementos* para cada $n < \omega$, y añadir como axiomas los enunciados de **Fin**. ¿Pero cuáles son los enunciados contenidos en **Fin**? El teorema de Trakhtenbrot, que enunciamos a continuación, muestra que no podemos responder satisfactoriamente a esta pregunta. Adaptamos el argumento para extender la conclusión a la teoría **Psfin** de las estructuras pseudofinitas, es decir las consecuencias de sumar a **Fin** los axiomas *existen al menos* n *elementos* para cada $n < \omega$.

Observación 3.1.1. **Psfin** es el conjunto de los enunciados que valen en toda estructura finita suficientemente grande. Si la signatura es finita, estos son los enunciados que valen en casi toda estructura finita (todas salvo finitas).

Teorema 3.1.2. *Si la signatura contiene al menos un símbolo de relación binario, entonces* **Fin** *no es recursivamente axiomatizable. La teoría* **Psfin** *tampoco lo es.*

Demostración (esbozo). Se prueba de hecho que **Fin** y **Psfin** no son computablemente enumerables. Para el caso de **Fin** se construye una aplicación recursiva que asigna a cada máquina de Turing T una sentencia ϕ_T de manera que

$$T \text{ se detiene si y sólo si } \phi_T \text{ tiene un modelo finito,}$$

o lo que es lo mismo,

$$T \text{ no se detiene si y sólo si } \neg\phi_T \in \mathbf{Fin}.$$

Esto reduce el *complemento* de **Halt** (el problema de la detención) a **Fin**; del tipo de reducción se ve que, como el primero no es computablemente enumerable, el segundo tampoco. La construcción de la aplicación es posible, heurísticamente, porque decir que una máquina T se detiene es afirmar que existe un *cómputo finito* para T; la fórmula ϕ_T

permite interpretar cualquier modelo suyo como un cómputo para T. Los detalles se pueden encontrar en [33, 31].

Para adaptar la prueba a **Psfin** recordemos que una sentencia tiene un modelo pseudofinito si y sólo si tiene modelos finitos arbitrariamente grandes. Si podemos construir la aplicación de arriba de manera que

$$T \text{ se detiene si y sólo si } \phi_T \text{ tiene modelos finitos arbitrariamente grandes,}$$

tendremos entonces que

$$T \text{ no se detiene si y sólo si } \neg\phi_T \in \mathbf{Psfin},$$

completando el teorema. Esto se puede lograr de muchas maneras. Una forma natural es adoptar la convención inocua de que las máquinas de Turing no frenan: llegadas al estado 'final' q_f, reescriben lo mismo que leen y 'pasan' al estado q_f. El problema de la detención consiste en decidir si el cómputo de la máquina llega eventualmente al estado q_f. La construcción de ϕ_T se puede adaptar fácilmente para que sus modelos finitos sean cómputos truncados para T terminados en el estado q_f. Por la convención adoptada, si ϕ_T admite un modelo finito, admitirá modelos finitos arbitrariamente grandes. □

Del teorema anterior debemos inferir que no siempre podremos *exhibir* axiomas para los modelos pseudofinitos de una clase elemental dada. Mostramos arriba un ejemplo de un grafo pseudofinito; no podemos sin embargo describir las propiedades comunes a todos los grafos pseudofinitos. Esto se debe a que los grafos son suficientemente laxos como para *interpretar* a cualquier otra estructura. Más precisamente se tiene (ver [12]):

Teorema 3.1.3. *Sea σ una signatura finita y sea σ_G la signatura de los grafos, es decir con un único símbolo de relación, binario. Existe una aplicación* recursiva *que asigna a cada σ-sentencia ϕ una σ_G-sentencia ϕ_G y existe una manera de asociar a cada σ-estructura $\mathcal{M}$ un grafo $\mathcal{M}_G$ de modo tal que, para todas ϕ y $\mathcal{M}$,*

$$\mathcal{M} \models \phi \text{ si y sólo si } \mathcal{M}_G \models \phi_G.$$

El grafo $\mathcal{M}_G$ es finito si y sólo si $\mathcal{M}$ lo es. Además, existe una σ_G-sentencia χ tal que $\mathcal{M}_G \models \chi$ para toda $\mathcal{M}$ y tal que para todo grafo $\mathcal{N} \models \chi$ existe una σ-estructura $\mathcal{M}$ con $\mathcal{M}_G \simeq \mathcal{N}$. Por último, para cada σ_G-sentencia ψ existe una σ-sentencia ϕ tal que $\chi \models \psi \leftrightarrow \phi_G$.

Así, para decidir si $\phi \in \mathbf{Fin}$ basta verificar si $\chi \to \phi_G$ vale en todo grafo finito. Se desprende que la teoría de los grafos finitos es tan difícil como **Fin**, y por tanto no puede ser axiomatizada recursivamente. Para extender la conclusión a la teoría de los grafos pseudofinitos notemos que, bajo la notación del teorema, $\mathcal{M}_G$ resulta pseudofinito si y sólo si $\mathcal{M}$ lo es. Prueba (mediante la propiedad de modelo finito): ($\Rightarrow$) Si $\mathcal{M} \models \phi$ entonces $\mathcal{M}_G \models \phi_G \wedge \chi$, y por tanto ϕ_G tiene un modelo finito $\mathcal{N}$ que verifica χ (y los axiomas de grafo). Sea $\mathcal{M}'$ con $\mathcal{M}'_G \simeq \mathcal{N}$. Entonces $\mathcal{M}'$ es un modelo finito de ϕ. ($\Leftarrow$) Supongamos que $\mathcal{M}_G \models \psi$. Si ϕ es tal que $\chi \models \psi \leftrightarrow \phi_G$, entonces $\mathcal{M} \models \phi$. Luego ϕ tiene un modelo finito $\mathcal{M}'$, y $\mathcal{M}'_G$ es un modelo finito para ψ.

Se sigue que $\phi \in$ **Psfin** si y sólo si $\chi \to \phi_G$ vale en todo grafo pseudofinito, y que la teoría de estos últimos tampoco es recursivamente axiomatizable. Lo que dijimos para los grafos ocurre también con la clase de los retículos (lattices).

En la sección siguiente estudiaremos dos clases cuyos modelos pseudofinitos sí pueden ser caracterizados con facilidad, a saber los órdenes lineales y las álgebras de Boole. Estos casos son especialmente rígidos: las teorías involucradas resultan ser completas. Aunque sencillo, su estudio permite ver en acción varias de las herramientas fundamentales de la teoría de modelos.

En la sección que le sigue analizaremos otro caso con respuesta positiva, pero de complejidad mucho mayor: el de los cuerpos pseudofinitos. Desde el trabajo fundacional de Ax [2], el estudio de estos cuerpos ha demostrado ser sumamente fértil y ha dado lugar a conexiones insospechadas entre álgebra, lógica, geometría algebraica y teoría de números; una exposición exhaustiva de estas conexiones se puede encontrar en [10].

Aunque no los analizaremos en este trabajo, mencionemos por último que distintas subclases de grupos pseudofinitos también han sido estudiadas; ver [16, 17].

3.2. Órdenes lineales y álgebras de Boole

Consideremos la signatura $\sigma = \{<\}$. Todo orden lineal finito verifica las siguientes condiciones, que se expresan en primer orden:

- es acotado, es decir tiene un mínimo y un máximo;
- es discreto, en el sentido de que todo elemento distinto del mínimo tiene un predecesor inmediato y todo elemento distinto del máximo tiene un sucesor inmediato.

Estas condiciones son entonces necesarias para todo orden lineal pseudofinito. También son suficientes —asumiendo que el orden es infinito—, como veremos ahora. Ocurre más aún que la teoría de primer orden T de los órdenes lineales infinitos, acotados y discretos es de hecho *completa*. Así, todos los órdenes lineales con estas propiedades son elementalmente equivalentes a algún —cualquier— orden lineal pseudofinito (recordemos que existe alguno), y son por tanto pseudofinitos también. La completitud de T se puede probar de manera elemental, por ejemplo usando juegos de Ehrenfeucht–Fraïssé. Damos una prueba que en cambio aprovecha los resultados sobre modelos saturados enunciados en el Capítulo 1.

Empecemos por notar que todo modelo de T tiene que ser isomorfo a

$$\omega + L \cdot \zeta + \omega^*$$

para algún conjunto totalmente ordenado L, posiblemente vacío. Aquí $L \cdot \zeta$ denota el producto cartesiano $L \times \mathbb{Z}$ con el orden lexicográfico, y ω^* denota el orden de los enteros negativos. Sean ahora $\mathcal{M}$ un modelo de T y $\mathcal{M}_0 = \omega+\omega^*$. Consideremos $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{N}_0$

extensiones elementales *saturadas* con $|N| = |N_0| > \aleph_0$ (ver 1.6.9). Como $\mathcal{N}, \mathcal{N}_0 \models T$, sean L, L_0 órdenes lineales tales que $\mathcal{N} \simeq \omega + L \cdot \zeta + \omega^*$ y $\mathcal{N}_0 \simeq \omega + L_0 \cdot \zeta + \omega^*$. Nótese que $|L| = |L_0|$.

Como consecuencia de la saturación, es fácil convencerse de que L y L_0 deben ser no vacíos, densos y sin extremos. La teoría de los órdenes lineales densos sin extremos es conocida por ser completa y eliminar cuantificadores (ver [19]). Como es completa podemos afirmar que $L \equiv L_0$. Como elimina cuantificadores deducimos que L y L_0 son también órdenes saturados: en efecto, si $A \subset L$ es pequeño y $p \in S_1^L(A)$, entonces —por eliminación de cuantificadores— p queda determinado por las fórmulas de la forma $a < x$ y $x < a$ ($a \in A$) que están en p (salvo que p se realice en A, en cuyo caso no hay nada que hacer); del hecho de que p es finitamente satisfacible en L se ve que el conjunto de fórmulas

$$\{(a,n) < x\}_{(a<x)\in p, n\in\mathbb{Z}} \cup \{x < (a,n)\}_{(x<a)\in p, n\in\mathbb{Z}}$$

con parámetros de $A \times \mathbb{Z} \subset \omega + L \cdot \zeta + \omega^*$ es finitamente satisfacible en $\omega + L \cdot \zeta + \omega^*$; es por tanto satisfacible en $\omega + L \cdot \zeta + \omega^*$, por saturación, y el elemento que lo realiza induce fácilmente un elemento en L que realiza p. Del mismo modo se ve que L_0 es saturado. Pero entonces L y L_0 son dos modelos saturados elementalmente equivalentes de igual cardinalidad: del Teorema 1.6.7 se sigue que $L \simeq L_0$. Luego $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N} \simeq \mathcal{N}_0 \equiv \mathcal{M}_0$, y concluimos que:

Teorema 3.2.1. *Todos los órdenes lineales infinitos, acotados y discretos son elementalmente equivalentes a $\omega + \omega^*$. La teoría T de dichos órdenes coincide entonces con la teoría de los ordenes lineales pseudofinitos. Puesto que es recursivamente axiomatizable y completa, T es además decidible.*

Como aplicación podemos observar que si una σ-sentencia ϕ es verdadera para órdenes lineales finitos arbitrariamente grandes, entonces debe valer en todo orden lineal finito de cardinal mayor que algún $k < \omega$. Caso contrario sean $\{\mathcal{M}_n\}$ y $\{\mathcal{N}_n\}$ sucesiones de órdenes lineales finitos que sean modelos de ϕ y de $\neg\phi$, respectivamente, de cardinal estrictamente creciente. Los ultraproductos no principales $\prod \mathcal{M}_n/D$ y $\prod \mathcal{N}_n/D$ son órdenes lineales pseudofinitos, y por tanto elementalmente equivalentes. Esto es absurdo, pues el primero satisface ϕ y el segundo no. Así, por ejemplo, no hay ningún enunciado de primer orden que separe a los conjuntos ordenados de cardinalidad par de los de cardinalidad impar.

Se puede de hecho concluir que el álgebra de Lindenbaum de la teoría de los órdenes lineales acotados y discretos es isomorfa al álgebra de partes finitas y cofinitas de $\mathbb{N}$; los átomos son los enunciados que afirman que hay exactamente k elementos, para cada $k < \omega$.

Un caso similar es el de la teoría de las álgebras de Boole. Las álgebras de Boole finitas son obviamente atómicas, y ésta es una propiedad expresable en primer orden. Ocurre que la teoría de las álgebras de Boole atómicas e infinitas es completa. Así se concluye que las álgebras de Boole pseudofinitas son exactamente las infinitas y atómicas, y que son todas elementalmente equivalentes entre sí. Los posets $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subset)$ y $(\mathcal{P}_{\text{fin-cofin}}(\mathbb{N}), \subset)$, por ejemplo, no se pueden distinguir en primer orden.

Probemos que la teoría de las álgebras de Boole infinitas y atómicas es completa. Nuestra prueba es una adaptación de la que se encuentra en [22]. Aunque las álgebras de Boole se puedan pensar como conjuntos ordenados, trabajaremos con la signatura usual de estas estructuras. En realidad, consideraremos una ampliación de esta signatura, $\sigma = \{\wedge, \vee, ', 0, 1, A_m\}_{m<\omega}$, enriquecida con predicados unarios $A_m(x)$ para abreviar las propiedades definibles: *x domina al menos m átomos*. (Decimos que *x domina* a y cuando x es mayor o igual que y, i.e. cuando $y = y \wedge x$). Mostraremos a continuación que, bajo esta signatura, la teoría T de las álgebras de Boole infinitas y atómicas —con axiomas para la interpretación correcta de los predicados A_m—, admite eliminación de cuantificadores. Por otra parte, es fácil convencerse de que el álgebra $\mathcal{M}_0$ de las partes finitas y cofinitas de $\mathbb{N}$ es embebible en cualquier álgebra de Boole infinita y atómica. De estos dos hechos se sigue que todas las álgebras de este tipo son elementalmente equivalentes a $\mathcal{M}_0$ (recordemos la Observación 1.6.4).

Usamos el criterio 1.6.5. Sean $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ modelos de T, $\mathcal{A}$ una σ-subestructura común. Sean $\phi(\bar{x}, y)$ una σ-fórmula libre de cuantificadores, $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ una tupla en $\mathcal{A}$, y supongamos que $\mathcal{M} \models \exists y \phi(\bar{a}, y)$. Queremos ver que $\mathcal{N} \models \exists y \phi(\bar{a}, y)$. Sea $\mathcal{N} \prec \mathcal{N}'$ una extensión elemental $\aleph_0$-saturada. Basta ver que $\mathcal{N}' \models \exists y \phi(\bar{a}, y)$.

Sea $b \in \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}, b)$. Usaremos la notación $\epsilon\bar{a} = \epsilon_1 a_1 \wedge \cdots \wedge \epsilon_n a_n$, donde $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in 2^n$ es una tupla binaria y $\epsilon_i a_i$ es bien a_i o bien a_i', según el valor de ϵ_i. Notemos además $b_\epsilon = b \wedge \epsilon\bar{a}$, ${b'}_\epsilon = b' \wedge \epsilon\bar{a}$. Para cada tupla binaria ϵ definiremos elementos $c_\epsilon, {c'}_\epsilon \in \mathcal{N}'$, considerando tres casos:

- Si $\epsilon\bar{a}$ domina exactamente m átomos en $\mathcal{M}$, también domina exactamente m átomos en $\mathcal{N}'$, pues tal propiedad se expresa mediante la fórmula atómica $A_m(\epsilon\bar{a}) \wedge \neg A_{m+1}(\epsilon\bar{a})$, que vale en la subestructura común $\mathcal{A}$. Para ciertos p, q con $p + q = m$ se tiene que b_ϵ y ${b'}_\epsilon$ dominan exactamente p y q átomos, respectivamente. Definimos $c_\epsilon \in \mathcal{N}'$ como el supremo de cualesquiera p átomos bajo $\epsilon\bar{a}$ en $\mathcal{N}'$, y ${c'}_\epsilon$ como el supremo de los restantes q.

- Si $\epsilon\bar{a}$ domina una cantidad infinita de átomos en $\mathcal{M}$ (de donde $\mathcal{A} \models A_m(\epsilon\bar{a})$ para todo m) mientras que b_ϵ domina sólo p átomos en $\mathcal{M}$, tomamos $c_\epsilon \in \mathcal{N}'$ como el supremo de cualesquiera p átomos bajo $\epsilon\bar{a}$ en $\mathcal{N}'$ (pues $\mathcal{N}' \models A_p(\epsilon\bar{a})$), y ${c'}_\epsilon \in \mathcal{N}'$ como el complemento de c_ϵ relativo a $\epsilon\bar{a}$. Los definimos a la inversa si es ${b'}_\epsilon$ el que domina una cantidad finita de átomos.

- Si $\epsilon\bar{a}$, b_ϵ y ${b'}_\epsilon$ dominan una cantidad infinita de átomos en $\mathcal{M}$, elegimos c_ϵ y ${c'}_\epsilon$ en $\mathcal{N}'$, $c_\epsilon \wedge {c'}_\epsilon = 0$, $c_\epsilon \vee {c'}_\epsilon = \epsilon\bar{a}$, de manera que ambos dominen una cantidad infinita de átomos en $\mathcal{N}'$. Esto es posible por la $\aleph_0$-saturación: las condiciones

$$\{A_m(x \wedge \epsilon\bar{a}), A_m(x' \wedge \epsilon\bar{a})\}_{m<\omega}$$

  son finitamente satisfacibles en $\mathcal{N}'$, gracias a que $\epsilon\bar{a}$ domina una cantidad infinita de átomos en $\mathcal{N}'$.

Por construcción se tiene, para todo m,

$$\mathcal{M} \models A_m(b_\epsilon) \text{ sii } \mathcal{N}' \models A_m(c_\epsilon), \tag{3.1}$$

y lo mismo con ${b'}_\epsilon$ y ${c'}_\epsilon$. La condición de que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}'$ sean atómicas asegura que

$$b_\epsilon = 0 \text{ sii } c_\epsilon = 0 \tag{3.2}$$

(y lo mismo para ${b'}_\epsilon$ y ${c'}_\epsilon$), ya que en tales álgebras un elemento es nulo si y sólo si no domina ningún átomo.

Finalmente definimos $c = \bigvee c_\epsilon$ como el supremo en $\mathcal{N}'$ de los elementos c_ϵ definidos para cada ϵ. La construcción fue hecha para que la subálgebra generada por $\{\bar{a}, b\}$ en $\mathcal{M}$ sea isomorfa a la subálgebra generada por $\{\bar{a}, c\}$ en $\mathcal{N}'$ (como σ-subestructuras). Estas subálgebras son finitas y sus conjuntos de átomos son $\{b_\epsilon, {b'}_\epsilon\}_\epsilon$ y $\{c_\epsilon, {c'}_\epsilon\}_\epsilon$, respectivamente. A partir de (3.1) y (3.2) es fácil verificar que la aplicación $b_\epsilon \mapsto c_\epsilon$, ${b'}_\epsilon \mapsto {c'}_\epsilon$ induce efectivamente un σ-isomorfismo. Como la σ-fórmula ϕ es libre de cuantificadores, $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}, b)$ y las subálgebras son σ-isomorfas, deducimos que $\mathcal{N}' \models \phi(\bar{a}, c)$, como queríamos.

Queda probada la siguiente proposición.

Teorema 3.2.2. *Un álgebra de Boole es pseudofinita si y sólo si es infinita y atómica, y la teoría T de dichas álgebras es completa: coincide con la teoría del álgebra de partes finitas y cofinitas de $\mathbb{N}$. Por ser recursivamente axiomatizable y completa, T es decidible.*

3.3. Cuerpos pseudofinitos

Los cuerpos pseudofinitos fueron caracterizados por Ax en [2], utilizando la Hipótesis de Riemann para curvas sobre cuerpos finitos (Teorema de Weil) y el Teorema de densidad de Chebotarev. Su trabajo contenía por primera vez la respuesta (positiva) a la vieja pregunta de Tarski sobre la decidibilidad de la teoría de los cuerpos finitos. Para conseguirla fue crucial su análisis de los ultraproductos de cuerpos finitos, que inauguró el área de las estructuras pseudofinitas. El estudio en profundidad de toda la matemática implicada en la investigación de estos cuerpos supera ampliamente los límites de este trabajo, y referimos para ello al fascinante libro de Fried y Jarden [10]. Procuraremos sin embargo analizar con bastante detalle la prueba de su caracterización algebraica y axiomática. Nos basamos principalmente en las dos fuentes citadas.

Trabajamos con la signatura de los anillos, $\sigma = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$. Un cuerpo K resulta ser pseudofinito si y sólo si posee las siguientes propiedades:

- es perfecto;
- tiene exactamente una extensión de grado n para cada $n \in \mathbb{N}$ (en una clausura algebraica $\widetilde{K}$ fija);
- es *pseudo algebraicamente cerrado*, i.e. toda variedad absolutamente irreducible sobre K admite un punto K-racional.

Recordemos que la condición de ser perfecto es equivalente a pedir que $char K = 0$ o bien $char K = p > 0$ y $K^p = K$ (que todo elemento de K sea una potencia p-ésima). Es decir que se la puede expresar mediante las infinitas fórmulas, una para cada primo $p \in \mathbb{N}$:

$$0 = 1 + \ldots + 1 \rightarrow \forall x \exists y \; x = y \cdot \ldots \cdot y,$$

donde la cantidad de sumandos 1 y de factores y es p. Todo cuerpo finito es perfecto.

Los cuerpos finitos cumplen además la segunda condición, y ésta también se puede codificar en primer orden. Para nuestros propósitos, basta dar un conjunto de fórmulas que distinga a los cuerpos *perfectos* que la satisfacen de los cuerpos perfectos que no. Toda extensión finita de un cuerpo perfecto es simple (monógena), y queda determinada —salvo isomorfismo— por el polinomio minimal de un generador; el grado del minimal es el grado de la extensión. Recíprocamente, todo polinomio irreducible de grado d con coeficientes en K induce una extensión de grado d. Así, dado $d \geq 2$, pedir que exista una extensión de grado d equivale a pedir que exista un polinomio irreducible de grado d, y esto se puede escribir en términos de los coeficientes de la siguiente manera:

$$\exists a_0 \ldots \exists a_d (a_d \neq 0 \wedge \bigwedge_{m=1}^{d-1} \neg \exists b_0 \ldots \exists b_m \exists c_0 \ldots \exists c_{d-m} \bigwedge_{k=0}^{d} (a_k = \sum_{i+j=k} b_i c_j)),$$

lo que es —salvo notación— un enunciado de primer orden.

Lo anterior formaliza la parte de la *existencia* de la segunda condición. Para formalizar la *unicidad* empecemos por notar el siguiente hecho, que también será útil más adelante.

Lema 3.3.1. *Sea K un cuerpo perfecto. Son equivalentes:*

1. *K tiene a lo sumo una extensión finita de cada grado;*
2. *toda extensión finita de K es normal y cualesquiera dos extensiones finitas de igual grado son isomorfas;*
3. *toda extensión finita de K es cíclica.*

Demostración. (1)⇒(2): Sea $K[\alpha]$ una extensión finita de K y sea β otra raíz del polinomio minimal de α. La extensión $K[\beta]$ tiene el mismo grado que $K[\alpha]$, y son por tanto iguales. En particular $\beta \in K[\alpha]$. Concluimos que la extensión es normal.

(2)⇒(3): Una extensión normal de grado n es cíclica si y sólo si admite exactamente una subextensión de cada grado posible, es decir de cada grado d con $d \mid n$. Dada una extensión F/K finita (luego normal) de grado n y dado p un divisor primo de n, usando la correspondencia de Galois y el teorema de Cauchy obtenemos una subextensión L/K de grado n' para $n = n'p$, que también es normal. Inductivamente obtenemos subextensiones de todos los grados posibles. Para ver que son únicas probamos directamente (1). Si $\sigma : K[\alpha] \rightarrow K[\beta]$ es un isomorfismo entre dos extensiones finitas y normales de K, entonces α es raíz del mismo polinomio minimal que $\sigma(\alpha) \in K[\beta]$. Como $K[\beta]$ es normal se sigue que $\alpha \in K[\beta]$, y se concluye que las extensiones son iguales.

(3)⇒(1): Sean F/K, L/K extensiones finitas de igual grado d. La composición FL/K admite una sola subextensión de grado d, por hipótesis. □

Usaremos la caracterización (2) del lema anterior. Para que dos extensiones de K determinadas por polinomios irreducibles $p, q \in K[X]$ de grado d sean isomorfas, es necesario y suficiente que p tenga una raíz en la extensión determinada por q. Esta última es isomorfa a la extensión $K[X]/(q)$ de K. Dado $r \in K[X]$, la condición $p(r/(q)) = 0$ se traduce en que $p \circ r$ sea divisible por q. Así, la unicidad salvo isomorfismo (para grado d) es equivalente a que para todos $p, q \in K[X]$ irreducibles de grado d existan $r, s \in K[X]$ de grado menor a d, d^2 respectivamente tales que la composición $p \circ r$ sea igual al producto qs. Esto se puede escribir en primer orden cuantificando sobre los coeficientes, de manera similar —pero menos sencilla— a lo hecho para la condición de existencia.

Resta formalizar que toda extensión finita sea normal. Sea $K[Z]/(p)$ la extensión determinada por un polinomio mónico irreducible p de grado d. Tenemos que expresar que $p(X)$ se factoriza linealmente en $(K[Z]/(p))[X]$, es decir que existen $r_j \in K[Z]$ de grado menor a d, $j = 0, \ldots, d-1$, tales que

$$p(X) = \prod_{j=0}^{d-1}(X - r_j/(p)).$$

Si a_k es el coeficiente de $p(X)$ correspondiente a X^{d-k}, lo anterior equivale a que para cada k exista $s_k \in K[Z]$ de grado menor a d tal que

$$a_k = s_k(Z)p(Z) + \sum_{j_1<\ldots<j_k} r_{j_1}(Z) \cdot \ldots \cdot r_{j_k}(Z) \text{ en } K[Z].$$

A partir de allí se puede expresar la condición en términos de los coeficientes de los polinomios p, r_j, s_k. Esto termina de expresar elementalmente la segunda condición de la caracterización de los cuerpos pseudofinitos.

Como adelantamos arriba, un cuerpo K se dice *pseudo algebraicamente cerrado (PAC)* cuando toda variedad absolutamente irreducible definida sobre K tiene un punto K-racional. Una formulación algebraica equivalente y conveniente de esta condición geométrica es la siguiente (véase [10]):

> Todo polinomio absolutamente irreducible $f \in K[X, Y]$ admite un cero (x, y) en $K \times K$.

Tales ceros se llaman *K-racionales*. Recordemos que un polinomio en varias variables es *absolutamente irreducible* sobre un cuerpo K cuando es irreducible sobre su clausura algebraica $\widetilde{K}$. Los cuerpos algebraicamente cerrados satisfacen evidentemente esta condición, mientras que ningún cuerpo finito puede verificarla: en $\mathbb{F}_q$, basta considerar el polinomio $(X^q - X)(Y^q - Y) + 1$. Sin embargo, si partimos la condición en las numerables cláusulas:

> ψ_d: todo polinomio absolutamente irreducible $f \in K[X, Y]$ de grado menor o igual a d admite al menos un cero K-racional,

resulta venturosamente que

- las condiciones ψ_d son de primer orden,
- para todo d existe q_0 tal que $\mathbb{F}_q \models \psi_d$ para todo $q \geq q_0$.

La segunda afirmación se desprende de la Hipótesis de Riemann para curvas sobre cuerpos finitos. La formulamos a continuación de la siguiente manera:

Teorema 3.3.2 (Weil)**.** *Sea $f \in \mathbb{F}_q[X, Y]$ un polinomio absolutamente irreducible de grado d, y sea N_q la cantidad de ceros de f en $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$. Entonces $|N_q - (q+1)| \leq (d-1)(d-2)q^{1/2} + d$.*

Con la notación del teorema, tenemos luego

$$q + 1 - (d-1)(d-2)q^{1/2} - d \leq N_q$$

para cualquier tal polinomio, y una condición suficiente para que $\mathbb{F}_q \models \psi_d$ es entonces que

$$1 \leq q + 1 - (d-1)(d-2)q^{1/2} - d.$$

La existencia de q_0 tal que $\mathbb{F}_q \models \psi_d$ para $q \geq q_0$ se sigue inmediatamente.

Para ver que ψ_d se puede escribir en primer orden basta ver que podemos expresar el predicado

$$\textit{abs-irr}_d(a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{dd})$$

que afirma que el polinomio

$$f = \sum_{k=0}^{d} \sum_{i+j=k} a_{ij} X^i Y^j$$

es absolutamente irreducible. A veces escribiremos simplemente $\textit{abs-irr}_d(f)$. Luego ψ_d será equivalente a

$$\forall a_{00} \ldots \forall a_{dd} (\deg_{XY}(f) \leq d \wedge \textit{abs-irr}_d(f) \rightarrow \exists x \exists y \sum_{k=0}^{d} \sum_{i+j=k} a_{ij} x^i y^j = 0)),$$

donde f es como arriba y $\deg_{XY}(f) \leq d$ expresa la condición elemental de que el grado total de f sea menor o igual a d.

Decir que $f \in K[X, Y]$ es absolutamente irreducible es afirmar que no existen $g, h \in \widetilde{K}[X, Y]$ de grado mayor o igual a 1 tales que $f = gh$. Normalmente traducimos enunciados sobre polinomios (de grado menor o igual a cierto número fijo) como enunciados sobre sus coeficientes, pero en este caso los coeficientes de los factores g, h no están en K sino en la clausura $\widetilde{K}$. No obstante, basta lograr expresar que no hay factores de f con coeficientes en ninguna extensión finita de K. Mejor aún se tiene el siguiente lema crucial.

Lema 3.3.3. *Si un polinomio $f \in K[X, Y]$ de grados $\deg_X(f)$ y $\deg_Y(f)$ estrictamente menores a d se factoriza en $\widetilde{K}$, entonces se factoriza en una extensión finita de K de grado menor o igual a $(d^2 - 1)!$.*

Demostración. La *sustitución de Kronecker* —para polinomios en dos variables de grado menor a d en cada variable— es la aplicación S_d que toma $f = \sum_{0 \leq i,j < d} a_{ij} X^i Y^j \in \widetilde{K}[X,Y]$ y devuelve el polinomio de una sola variable

$$S_d(f) = \sum_{0 \leq i,j < d} a_{ij} Z^{i+jd} \in \widetilde{K}[Z].$$

Si $g, h \in \widetilde{K}[X,Y]$ tienen grado menor a d en cada variable y lo mismo le ocurre al producto $f = gh$, entonces

$$S_d(f) = S_d(g) S_d(h),$$

como es fácil verificar.

Supongamos ahora que tenemos un polinomio $f \in K[X,Y]$ de grado menor a d que se factoriza en dos polinomios $g, h \in \widetilde{K}[X,Y]$. Podemos asumir que f, g y h son mónicos. Efectuando la sustitución de Kronecker obtenemos la igualdad de polinomios de una variable $S_d(f) = S_d(g)S_d(h)$. Pero los coeficientes de $S_d(f)$ están en K: son los mismos que los de f. Las raíces de $S_d(g)$ y de $S_d(h)$ anulan entonces a un polinomio de grado menor a d^2 con coeficientes en K, a saber $S_d(f)$, y por tanto están todas en una extensión finita de K de grado menor o igual a $(d^2-1)!$ (el cuerpo de descomposición de $S_d(f)$). Lo mismo por tanto sus coeficientes, pues asumimos que los polinomios eran mónicos; dichos coeficientes son los mismos que los de g y h. □

Queríamos probar que el predicado $\textit{abs-irr}_d(f)$ es elemental. Por simplicidad asumimos, como hicimos antes, que K es perfecto, lo que para nuestros propósitos es inocuo. Toda extensión finita de K es isomorfa a $K[Z]/(q)$ para algún polinomio irreducible $q \in K[Z]$. El polinomio f se factoriza en $(K[Z]/(q))[X,Y]$ si y sólo si se da la siguiente condición:

> Existen $g, h \in K[X,Y,Z]$ con grados $\deg_{XY}(g)$ y $\deg_{XY}(h)$ mayores o iguales a 1 y existe $s \in K[X,Y,Z]$ tales que
>
> $$f(X,Y) - g(X,Y,Z)h(X,Y,Z) = q(Z)s(X,Y,Z) \text{ en } K[X,Y,Z];$$
>
> además, si el grado de f en cada variable es menor o igual a d, podemos pedir que los grados de g, h y s sean menores o iguales a d en las variables X e Y y acotados por $2\deg_Z(q)$ en la variable Z.

Negando lo anterior y cuantificando sobre todos los polinomios irreducibles q de grado menor a $((d+1)^2-1)!$ obtenemos —gracias al Lema 3.3.3— una formulación de $\textit{abs-irr}_d(f)$ que es fácilmente traducible al lenguaje de primer orden. Esto termina de probar que los enunciados ψ_d son elementales.

Teorema 3.3.4. *Todo cuerpo pseudofinito es perfecto, pseudo algebraicamente cerrado y tiene exactamente una extensión de cada grado.*

Demostración. Vimos que la clase de los cuerpos perfectos que tienen una y sólo una extensión de cada grado es elemental y contiene a los cuerpos finitos. Por tanto contiene a los cuerpos pseudofinitos. Vimos que para todo d existe q_0 tal que el enunciado de primer orden *si existen al menos q_0 elementos y valen los (finitos) axiomas de cuerpo, entonces vale ψ_d*

está en **Fin**. Como todo cuerpo pseudofinito verifica el antecedente, todo cuerpo pseudofinito verifica ψ_d. Concluimos que todo cuerpo pseudofinito es PAC. $\square$

En lo que sigue estudiaremos la implicación recíproca del teorema anterior. Va a resultar práctico dar un nombre temporal a los cuerpos perfectos y pseudo algebraicamente cerrados que admiten exactamente una extensión de cada grado finito. En la literatura se emplea por definición el término *pseudofinitos* (así fueron introducidos por Ax), lo que no podemos hacer; llamémoslos *cuerpos pseudofinitos algebraicamente definidos (pad)*.

Ax descubrió que la teoría de primer orden de un cuerpo pad F queda determinada por el cuerpo de sus *números absolutos*, es decir por

$$F \cap \widetilde{K} = \{\alpha \in F : \alpha \text{ es algebraico sobre el cuerpo primo } K \text{ de } F\}.$$

Más precisamente:

Teorema 3.3.5 (Equivalencia elemental para cuerpos pad)**.** *Sean E y F cuerpos pad de igual característica, K su cuerpo primo. Luego $E \equiv F$ si y sólo si $E \cap \widetilde{K} \simeq F \cap \widetilde{K}$.*

Aplazamos la idea de la demostración de este resultado a un apartado posterior. Antes lo utilizaremos para deducir —con la ayuda de una versión del Teorema de densidad de Chebotarev— que todo cuerpo pad es pseudofinito. El plan consiste en mostrar que el cuerpo de números absolutos de un cuerpo pad cualquiera se puede obtener como el cuerpo de números absolutos de algún cuerpo hiperfinito, lo que permitirá aplicar el teorema a nuestro fin.

Observación 3.3.6. Si $L = F \cap \widetilde{K}$ es el cuerpo de números absolutos de un cuerpo F y $L[\alpha]$ es una extensión de L de grado finito d, en particular α es algebraico sobre $\widetilde{K}$, y por tanto $\alpha \in \widetilde{K}$. Más aún, si f y f' son los polinomios minimales de α sobre F y sobre L, respectivamente, entonces $f \mid f'$, y en particular las raíces de f se anulan en un polinomio con coeficientes en $\widetilde{K}$. Dichas raíces están luego en $\widetilde{K}$, y lo mismo entonces los coeficientes de f. Por tanto $f = f'$: las extensiones $L[\alpha]/L$ y $F[\alpha]/F$ tienen igual grado. Supongamos que tenemos $L[\beta]$ otra extensión de L de grado d, $L[\alpha, \beta] = L[\gamma]$, y que F admite a lo sumo una extensión de cada grado, por ejemplo que F es pad. Por lo anterior y por la hipótesis sobre F tenemos $F[\alpha] = F[\beta]$, que a su vez debe coincidir con $F[\gamma]$. El grado de $L[\gamma]/L$ es entonces d, de donde $L[\alpha] = L[\beta]$. Conclusión: el cuerpo de números absolutos de un cuerpo pad admite a lo sumo una extensión finita de cada grado.

Proposición 3.3.7. *Sea L una extensión algebraica de un cuerpo finito K. Denotemos por K_n a la única extensión de K de grado n. Existe un ultraproducto no principal $H = \prod K_n/D$ de las extensiones K_n tal que $L = H \cap \widetilde{K}$.*

Demostración. Para cada entero positivo d sea $A_d = \{n \in \mathbb{N} : K_n \cap K_d = L \cap K_d\}$. Recordando las propiedades de extensiones algebraicas de cuerpos finitos es fácil verificar que cada A_d es infinito y que $A_{d'} \subset A_d$ cada vez que $d \mid d'$. Entonces $A_{dd'} \subset A_d \cap A_{d'}$ para cualesquiera d, d', lo que muestra que la familia de los conjuntos A_d tiene la propiedad de intersección finita. Como los conjuntos A_d son infinitos, podemos unir el filtro de Fréchet a la familia y la fip se conserva. Extendemos la familia resultante a un ultrafiltro no principal D sobre $\mathbb{N}$ y formamos $H = \prod K_n/D$, que se interpreta naturalmente como una extensión de K.

Veamos que, para cada d, $K_d \subset L$ si y sólo si $K_d \subset H$, lo que completa la prueba. Consideremos α tal que $K_d = K[\alpha]$ y sea f el polinomio minimal de α sobre K. Si $K_d \subset L$ entonces $K_d \subset K_n$ para cada $n \in A_d$, por lo que f tiene una raíz en todo K_n con $n \in A_d$. Pero entonces

$$K_n \models \exists x\ f(x) = 0\ D\text{-}a.e.(n),$$

y por tanto H tiene una raíz de f. Luego $K_d \subset H$, pues cualquier raíz de f genera K_d sobre K. Si en cambio K_d no está contenido en L, entonces $K_n \cap K_d$ está estrictamente contenido en K_d para cada $n \in A_d$. En ese caso f no tiene raíces en ningún K_n con $n \in A_d$. Por el teorema de Łoś, H tampoco las tiene y por tanto tampoco contiene a K_d. □

Para demostrar la proposición análoga en característica cero necesitaremos el siguiente lema, que además demuestra la implicación fácil del Teorema 3.3.5. Fue observado por Ax en [3]; donde allí se apela a un límite proyectivo de un sistema de conjuntos finitos hemos preferido usar el teorema de compacidad de la lógica proposicional.

Lema 3.3.8. *Sean E y F dos extensiones algebraicas de su (mismo) cuerpo primo K, y supongamos que, para todo polinomio $f \in K[X]$, f tiene una raíz en E si sólo si tiene una raíz en F. Entonces $E \simeq F$.*

Demostración. Para una extensión algebraica L de K, es natural usar el término *L-normales* para denominar a las subextensiones $H \subset L$ con la siguiente propiedad: si $H \simeq H' \subset L$, entonces $H = H'$. Toda extensión $H \subset L$ está contenida en una subextensión L-normal minimal de grado finito sobre K: la composición $\hat{H}$ de las subextensiones $H' \subset L$ isomorfas a H.

Bajo las hipótesis del enunciado resulta que cada subextensión E-normal H de grado finito es isomorfa a una (única) subextensión F-normal J de grado finito. En efecto, si $H = K[\alpha]$ es E-normal y β es una raíz en F del polinomio minimal de α, entonces $H \simeq J = K[\beta]$, y basta ver que J es F-normal. Sea β' un generador de la mínima extensión F-normal de J, $\hat{J} = K[\beta']$, y sea α' una raíz en E del polinomio minimal de β'. Consideremos $\tau : K[\beta'] \to K[\alpha']$ el isomorfismo que aplica β' en α'. Las subextensiones J' de $K[\beta']$ isomorfas a J generan $K[\beta']$. Las subextensiones $\tau(J')$ son isomorfas a H y generan $K[\alpha']$. Como H es E-normal, $H = K[\alpha']$ y por tanto $J = K[\beta'] = \hat{J}$, como queríamos.

Sea N el conjunto de subextensiones E-normales de grado finito. Dadas $H \in N$ y J su correspondiente isomorfa F-normal, denotemos por Σ_H al conjunto (finito) de isomorfismos de H en J. Dadas $H \subset H'$ en N y $\sigma \in \Sigma_{H'}$, la restricción $\sigma|_H$ pertenece a Σ_H. Para definir un isomorfismo de E en F basta elegir un σ_H de cada Σ_H de modo que

$$\sigma_H = \sigma_{H'}|_H \tag{3.3}$$

cada vez que $H \subset H'$. Sea $\Sigma = \bigcup_{H \in N} \Sigma_H$. Elegir los morfismos σ_H de cada Σ_H con la condición deseada equivale a hallar una valuación binaria de los símbolos proposicionales $\{p_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ que satisfaga el conjunto de fórmulas proposicionales:

$$\{\bigoplus_{\sigma \in \Sigma_H} p_\sigma\}_{H \in N} \cup \{p_{\sigma'} \to p_\sigma\}_{\sigma \subset \sigma' \in \Sigma}. \tag{3.4}$$

Desde ya, interpretamos p_σ como que hemos elegido al morfismo σ. El símbolo $\oplus$ denota el 'o' exclusivo, de manera que el primer conjunto reúne las condiciones: *elegir uno y sólo un morfismo de cada conjunto (finito)* Σ_H. El segundo bloque expresa las condiciones dadas por (3.3). Como cualquier subconjunto finito de N tiene una cota superior en N respecto de la inclusión, se deduce que el conjunto (3.4) es finitamente satisfacible. Por el teorema de compacidad, la elección coherente de los isomorfismos σ_H es posible. □

Observación 3.3.9. Cuando $K = \mathbb{Q}$, basta chequear la condición del lema para polinomios $f \in \mathbb{Z}[X]$ mónicos, pues toda extensión finita está generada por un elemento con un polinomio minimal de este tipo, como es fácil ver.

Necesitaremos además un par de resultados de la teoría de números algebraica, que enunciamos a continuación de manera elemental; consultar por ejemplo [18, 10]. Dada una extensión finita y normal N de $\mathbb{Q}$, el anillo de los *enteros algebraicos* de N es el conjunto $\mathcal{O}_N$ de los elementos de N cuyo polinomio minimal (por definición mónico) tiene coeficientes en $\mathbb{Z}$. Dados $p \in \mathbb{Z}$ primo y $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_N$ un ideal primo, se dice que $\mathfrak{p}$ está *sobre* p simplemente cuando $\mathfrak{p}$ contiene a p. Si nos es dado un automorfismo σ en el grupo de Galois de $N/\mathbb{Q}$, diremos que N tiene el *tipo de* σ *módulo* p si, para algún ideal primo $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_N$ sobre p, resulta

$$\sigma(x) \equiv x^p \pmod{\mathfrak{p}}$$

para todo $x \in \mathcal{O}_N$. Un teorema fundamental de la teoría de números afirma que:

Teorema 3.3.10 (Chebotarev)**.** *Si* $N/\mathbb{Q}$ *es normal y* $\sigma \in \mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q})$*, existen infinitos primos* p *tales que* N *tiene el tipo de* σ *módulo* p*.*

El teorema nos será útil a través del siguiente hecho.

Lema 3.3.11. *Sean* $N/\mathbb{Q}$ *una extensión normal,* $p \in \mathbb{N}$ *un primo,* $\sigma \in \mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q})$ *un morfismo y* $f \in \mathbb{Z}[X]$ *un polinomio mónico con discriminante coprimo con* p *y con todas sus raíces en* N*. Supongamos que* N *tiene el tipo de* σ *módulo* p*. Entonces,* f *tiene una raíz fija por* σ *si y sólo si* f *tiene una raíz módulo* p *(es decir en* $\mathbb{F}_p$*).*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si α es una raíz de f, notemos que $\alpha \in \mathcal{O}_N$. Si α está fija por σ, entonces por hipótesis

$$\alpha \equiv \alpha^p \pmod{\mathfrak{p}}$$

para algún primo $\mathfrak{p}$ sobre p. Las clases de $\mathcal{O}_N$ módulo $\mathfrak{p}$ forman un cuerpo finito de característica p, y lo anterior dice que la clase de α está fija por el automorfismo de Frobenius de la extensión. Es decir que su clase está de hecho en $\mathbb{F}_p$ —y es una raíz de la proyección de f a $\mathbb{F}_p[X]$.

($\Leftarrow$) Las raíces de f inducen raíces de la proyección $\bar{f} \in \mathbb{F}_p[X]$, y es posible ver, bajo la condición sobre el discriminante de f, que esta asignación es inyectiva (y por tanto biyectiva). Si α es una raíz de f cuya clase módulo $\mathfrak{p}$ está en $\mathbb{F}_p$, entonces $\alpha^p \equiv \alpha \mod (\mathfrak{p})$ y por la hipótesis sobre la extensión tenemos

$$\sigma(\alpha) \equiv \alpha \mod (\mathfrak{p}).$$

Como $\sigma(\alpha)$ es una raíz de f tiene que ser $\sigma(\alpha) = \alpha$. □

Finalmente podemos establecer la siguiente proposición.

Proposición 3.3.12. *Sea L una extensión algebraica de $\mathbb{Q}$, y supongamos que L posee a lo sumo una extensión finita de cada grado. Existe un ultrafiltro no principal D sobre el conjunto de los números primos de tal manera que el ultraproducto $H = \prod \mathbb{F}_p/D$ verifica $L \simeq H \cap \widetilde{\mathbb{Q}}$.*

Demostración. Denotemos por $P \subset \mathbb{N}$ al conjunto de los números primos; dado $h \in \mathbb{Z}[X]$ mónico, denotemos además

$$P_h = \{p \in P : \mathbb{F}_p \models \exists x\ h(x) = 0\},$$

$$Q_h = P \setminus P_h = \{p \in P : \mathbb{F}_p \models \neg\exists x\ h(x) = 0\}.$$

Es decir que P_h reúne a los primos p para lo que h tiene una raíz módulo p y Q_h reúne a aquellos para los que no. Si $\mathbb{Z}^1[X]$ denota al conjunto de polinomios mónicos con coeficientes enteros, sean

$$A = \{h \in \mathbb{Z}^1[X] : h \text{ tiene una raíz en } L\},$$

$$B = \mathbb{Z}^1[X] \setminus A.$$

Supongamos que hallamos un ultrafiltro no principal D sobre P de forma tal que $P_f \in D$ cada vez que $f \in A$, y $Q_g \in D$ para cada $g \in B$. En dicho caso el ultraproducto $H = \prod \mathbb{F}_p/D$ tendrá una raíz de $h \in \mathbb{Z}^1[X]$ siempre y cuando h tenga una raíz en L, por el teorema de Łoś. Aplicando el Lema 3.3.8 (y la Observación 3.3.9) se tendrá entonces $L \simeq H \cap \widetilde{\mathbb{Q}}$, como queremos.

Para conseguir un tal ultrafiltro basta ver que la familia

$$\{P_f\}_{f \in A} \cup \{Q_g\}_{g \in B} \cup \mathcal{F}$$

tiene la propiedad de intersección finita, donde $\mathcal{F}$ es el filtro de Fréchet. Notemos en primer lugar que, dados $g_1, g_2 \in B$, se tiene $g_1 g_2 \in B$ y $Q_{g_1} \cap Q_{g_2} = Q_{g_1 g_2}$. Es inmediato ver que la propiedad de intersección finita queda garantizada si mostramos además que:

1. para todos $f_1, f_2 \in A$ existen $f \in A$ y $\Delta \subset P$ finito con $P_f \setminus \Delta \subset P_{f_1} \cap P_{f_2}$;
2. dados $f \in A$, $g \in B$, el conjunto $P_f \cap Q_g$ es infinito.

Sean f_1, f_2 como en el primer ítem, y sean α_1, α_2 raíces en L de dichos polinomios, respectivamente. Sea $\alpha \in L$ de manera que $\mathbb{Q}[\alpha_1, \alpha_2] = \mathbb{Q}[\alpha]$; podemos elegir α para que sea un entero algebraico, es decir que su polinomio minimal f esté en $\mathbb{Z}^1[X]$ y por tanto en A. Existen $p_1, p_2 \in \mathbb{Q}[X]$ con $p_i(\alpha) = \alpha_i$; como las composiciones $f_i \circ p_i$ anulan a α, existen además $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}[X]$ con

$$f_i \circ p_i = f q_i.$$

Si Δ reúne a los finitos primos involucrados en los denominadores de los coeficientes de p_1, p_2, q_1, q_2, y p es un primo afuera de Δ, la igualdad anterior se puede proyectar a $\mathbb{F}_p[X]$ (transformar $1/k$ en el inverso de k módulo p). Luego si $p \in P_f \setminus \Delta$ y β es una raíz de f módulo p, entonces $p_i(\beta)$ es una raíz de f_i módulo p, mostrando que $p \in P_{f_1} \cap P_{f_2}$.

Para el segundo ítem sean $f \in A$, $g \in B$, α una raíz de f en L, y M el cuerpo de descomposición de g sobre $\mathbb{Q}$. Asumimos sin pérdida que los discriminantes de f y g son no nulos (i.e. que no tienen raíces múltiples). Por la hipótesis sobre L y recordando el Lema 3.3.1, la extensión LM/L es cíclica. Sea $\sigma \in \mathrm{Gal}(LM/L)$ un generador del grupo de automorfismos de la extensión. Notemos que, mientras que $\sigma(\alpha) = \alpha$, ninguna de las raíces de g es fijada por σ, caso contrario estarían en L. Sea N una extensión finita y normal de $\mathbb{Q}$ que contenga a $M[\alpha]$; en particular N contiene todas las raíces de f y de g. La restricción de σ a $M[\alpha]$ se extiende a un autormofismo de N, que denotaremos también σ. Definimos

$$R = \{p \in P : N \text{ tiene el tipo de } \sigma \text{ módulo } p\}.$$

Por el teorema de Chebotarev, R es infinito. Como f tiene una raíz fija por σ y g no tiene ninguna, por el Lema 3.3.11 se tiene

$$R \subset P_f \cup \Delta, \; R \subset Q_g \cup \Delta,$$

donde Δ reúne a los divisores primos de los discriminantes de f y g. Pero Δ es finito. La intersección $P_f \cap Q_g$ tiene que ser infinita, como queríamos. □

Teorema 3.3.13. *Todo cuerpo perfecto, pseudo algebraicamente cerrado con exactamente una extensión finita de cada grado es pseudofinito.*

Demostración. Sea F un cuerpo pad y sea K su cuerpo primo. El cuerpo $L = F \cap \widetilde{K}$ de números absolutos de F está bajo las hipótesis de alguna de las Proposiciones 3.3.7 ó 3.3.12, según la característica de F (en el caso $K = \mathbb{Q}$, recordemos la conclusión de la Observación 3.3.6). En uno u otro caso podemos concluir que existe un cuerpo hiperfinito e infinito (y por tanto pseudofinito) H tal que $F \cap \widetilde{K} = H \cap \widetilde{K}$. Por el Teorema 3.3.4, H es un cuerpo pad. Aplicando el Teorema 3.3.5 obtenemos $F \equiv H$, y por tanto que F es pseudofinito. □

Prueba del teorema de equivalencia elemental

Dos cuerpos pad son elementalmente equivalentes si y sólo si tienen cuerpos de números absolutos isomorfos. Según el propio Ax [2], su prueba original de este hecho es "desafortunadamente bastante complicada". Contamos algunos de los detalles de la prueba ofrecida en el libro de Fried y Jarden [10] —donde en verdad se demuestra una versión mucho más general del Teorema 3.3.5.

Una implicación se sigue inmediatamente del Lema 3.3.8: dos cuerpos elementalmente equivalentes anulan exactamente los mismos polinomios con coeficientes en el cuerpo primo. En ella no se usa siquiera que los cuerpos sean pad. De hecho, en la deducción del Teorema 3.3.13 a partir del 3.3.5 no se usa en ningún sitio la condición de que los cuerpos sean PAC. Esta propiedad, crucial entonces para la implicación que nos falta, se aprovecha mediante el siguiente caso particular del Lema de inmersión para cuerpos PAC.

Recordemos antes que el *grupo de Galois absoluto* de un cuerpo K, notado $\mathrm{Gal}(K)$, es el grupo de automorfismos de la *clausura separable* de K que fijan los elementos de K; desde ya, cuando K es perfecto éste es el grupo de automorfismos de $\widetilde{K}$ sobre K, y es el único caso que necesitaremos. Es un grupo profinito de manera natural. Dada una extensión E/K, siempre podemos definir el morfismo restricción $\mathrm{res}_{E/K} : \mathrm{Gal}(E) \to \mathrm{Gal}(K)$. Por otro lado, si E y F son perfectos, toda inmersión $\Phi : \widetilde{E} \to \widetilde{F}$ con $\Phi(E) \subset F$ induce un morfismo $\varphi : \mathrm{Gal}(F) \to \mathrm{Gal}(E)$ dado por $\varphi(\sigma)(x) = \Phi^{-1}(\sigma(\Phi(x)))$. Si Φ es un isomorfismo con $\Phi(E) = F$ entonces φ es un isomorfismo a su vez.

Lema 3.3.14 (Lema de inmersión)**.** *Sean E/K, F/L extensiones de cuerpos perfectos, con E numerable y F un cuerpo PAC $\aleph_1$-saturado. Supongamos que tenemos un isomorfismo $\Phi_0 : \widetilde{K} \to \widetilde{L}$ con $\Phi_0(K) = L$ y un diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(E) & \xleftarrow{\varphi} & \mathrm{Gal}(F) \\ \big\downarrow \text{res} & & \big\downarrow \text{res} \\ \mathrm{Gal}(K) & \xleftarrow{\varphi_0} & \mathrm{Gal}(L) \end{array}$$

donde φ_0 es el isomorfismo inducido por Φ_0. Entonces existe una inmersión $\Phi : \widetilde{E} \to \widetilde{F}$ con $\Phi(E) \subset F$ que extiende a Φ_0 y que induce φ.

La demostración del Lema de inmersión se basa en nociones de variedades absolutamente irreducibles y extensiones regulares de cuerpos. Como justificación parcial e intuitiva —y como explicación del significado de la propiedad PAC—, mencionemos que un cuerpo F es pseudo algebraicamente cerrado cuando todo sistema de ecuaciones polinomiales

$$\{f(\bar{x}) = 0 : f \in I\}$$

dado por un ideal absolutamente primo $I \subset F[\bar{X}]$ es finitamente satisfacible en F. Si F es además $\aleph_1$-saturado, esto permite —bajo ciertas condiciones— copiar los elementos de un cuerpo numerable E que extienda a un subcuerpo de F.

Retomando la prueba del Teorema 3.3.5, notemos ahora que si dos cuerpos E, F tienen, cada uno, exactamente una extensión de cada grado, entonces $\mathrm{Gal}(E) \simeq \hat{\mathbb{Z}} \simeq \mathrm{Gal}(F)$, donde $\hat{\mathbb{Z}}$ es el límite inverso de los grupos topológicos finitos $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con las proyecciones naturales. Recordando las nociones básicas de grupos profinitos se consigue sin dificultad el siguiente lema. (Nótese que la restricción $\mathrm{res}_{E/E\cap\widetilde{K}}$ del grupo de Galois absoluto de un cuerpo al grupo de Galois absoluto del cuerpo de sus números absolutos es siempre suryectiva).

Lema 3.3.15. *Sean E, F cuerpos perfectos de igual característica con exactamente una extensión de cada grado, K su cuerpo primo. Sean $L_E = E \cap \widetilde{K}$, $L_F = F \cap \widetilde{K}$, y supongamos que $L_E \simeq L_F$. Consideremos una extensión del isomorfismo a un automorfismo de $\widetilde{K}$. Existe un isomorfismo $\varphi : \mathrm{Gal}(F) \to \mathrm{Gal}(E)$ que hace conmutar el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(E) & \xleftarrow{\varphi} & \mathrm{Gal}(F) \\ \big\downarrow \mathrm{res} & & \big\downarrow \mathrm{res} \\ \mathrm{Gal}(L_E) & \xleftarrow{\varphi_0} & \mathrm{Gal}(L_F) \end{array}$$

donde φ_0 es el isomorfismo inducido por el automorfismo de $\widetilde{K}$.

Consideremos E, F cuerpos pad tales que sus cuerpos de números absolutos sean isomorfos. Tomemos extensiones $\aleph_1$-saturadas $E \prec {}^*E$, $F \prec {}^*F$, por ejemplo ultrapotencias no principales de E y F. Es fácil ver que $L_E = E \cap \widetilde{K} = {}^*E \cap \widetilde{K}$, y lo mismo para F y ${}^*F$. Del lema anterior extraemos isomorfismos $\varphi : \mathrm{Gal}({}^*F) \to \mathrm{Gal}({}^*E)$ y $\varphi_0 : \mathrm{Gal}(L_E) \to \mathrm{Gal}(F_E)$ con $\mathrm{res}_{{}^*E/L_E} \circ \varphi = \varphi_0 \circ \mathrm{res}_{{}^*F/L_F}$, el segundo inducido por un automorfismo de $\widetilde{K}$.

Probaremos que ${}^*E \equiv {}^*F$ con el siguiente argumento de *back and forth* basado en el Lema de inmersión. Los cuerpos ${}^*E$ y ${}^*F$ son pad y $\aleph_1$-saturados. Por el teorema descendente de Löwenheim–Skolem existe una subextensión elemental y numerable $E_0 \prec {}^*E$ que contiene a L_E. Se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(E_0) & \xleftarrow{\mathrm{res}_{{}^*E/E_0} \circ \varphi} & \mathrm{Gal}({}^*F) \\ \big\downarrow \mathrm{res} & & \big\downarrow \mathrm{res} \\ \mathrm{Gal}(L_E) & \xleftarrow{\varphi_0} & \mathrm{Gal}(L_F) \end{array}$$

Por 3.3.14 existe una inmersión $\Phi_0 : \widetilde{E_0} \to \widetilde{{}^*F}$ con $\Phi_0(E_0) \subset {}^*F$ que induce $\mathrm{res}_{{}^*E/E_0} \circ \varphi$. Si $L_0 = \Phi_0(E_0)$ y ψ_0 es el isomorfismo inducido por $\Phi_0^{-1} : \widetilde{L_0} \to \widetilde{E_0}$, entonces también es conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}({}^*E) & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & \mathrm{Gal}({}^*F) \\ \big\downarrow \mathrm{res} & & \big\downarrow \mathrm{res} \\ \mathrm{Gal}(E_0) & \xrightarrow{\psi_0} & \mathrm{Gal}(L_0) \end{array}$$

ya que $\psi_0^{-1} \circ \mathrm{res}_{{}^*F/L_0}$ es el morfismo inducido por Φ_0. Nótese que E_0 y L_0 son perfectos. Ahora podemos tomar una subestructura elemental y numerable $F_0 \prec {}^*F$ que contenga a L_0 y repetir el argumento en el sentido opuesto. La inmersión $\Psi_0 : \widetilde{F_0} \to \widetilde{{}^*E}$ que obtenemos extiende a Φ_0^{-1}.

Seguimos indefinidamente para construir cadenas

$$E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset {}^*E, \quad F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset {}^*F$$

con $E_k \prec {}^*E$, $F_k \prec {}^*F$ para todo $k < \omega$, e inmersiones $\Phi_k : \widetilde{E}_k \to \widetilde{F}_k$, $\Psi_k : \widetilde{F}_k \to \widetilde{E}_{k+1}$ con $\Phi(E_k) \subset F_k$, $\Psi(F_k) \subset E_{k+1}$ y

$$\Phi_k^{-1} \subset \Psi_k,\ \Psi_k^{-1} \subset \Phi_{k+1}$$

para todo $k < \omega$. Notemos que por la Proposición 1.6.1 es $E_k \prec E_{k+1}$, y la unión $E_\omega = \bigcup_{k<\omega} E_k$ es una subestructura elemental de ${}^*E$. Lo mismo para $F_\omega = \bigcup_{k<\omega} F_k$ y ${}^*F$. Además, la unión de las restricciones $\Phi = \bigcup_{k<\omega} \Phi_k|_{E_k}$ es un isomorfismo de E_ω en F_ω —su inversa es la unión de las restricciones $\Psi_k|_{F_k}$. Finalmente:

$$E \equiv {}^*E \equiv E_\omega \simeq F_\omega \equiv {}^*F \equiv F.$$

Observaciones y comentarios

Hemos mostrado una axiomatización recursiva para la teoría de los cuerpos pseudofinitos. Puede verse que la teoría es de hecho decidible, y lo mismo la teoría de los cuerpos finitos. Como dijimos al comienzo, este último problema fue la motivación del trabajo fundacional de Ax.

Por lo demás, dado un cuerpo pseudofinito F fijo, el Teorema 3.3.5 junto con la Proposición 3.3.8 afirman que su teoría particular queda determinada por los axiomas de cuerpo pseudofinito, su característica y el conjunto de los enunciados

$$\{\exists x\ f(x) = 0,\ \forall x\ g(x) \neq 0\}$$

para los $f \in \mathbb{Z}[X]$ con una raíz en F y los $g \in \mathbb{Z}[X]$ sin raíces en F.

Digamos por último que los cuerpos pseudofinitos existen en abundancia. Entre las extensiones algebraicas de un cuerpo finito K, son pseudofinitas exactamente aquellas F que, siendo infinitas, verifican sin embargo $\sup\{m : K_{p^m} \subset F\} < \infty$ para cada primo p, donde K_q denota la única extensión finita de K de grado q. Entre las extensiones algebraicas de $\mathbb{Q}$, son pseudofinitas *casi todas* las de las forma $\widetilde{\mathbb{Q}}(\sigma)$ con $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q})$. Aquí, $\widetilde{\mathbb{Q}}(\sigma)$ denota el cuerpo fijo por σ en $\widetilde{\mathbb{Q}}$, y el término *casi todas* debe entenderse en referencia a la medida de Haar del grupo de Galois absoluto. De hecho ocurre que la medida del conjunto de los $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q})$ para los que $\widetilde{\mathbb{Q}}(\sigma) \models \phi$ (para un enunciado de primer orden ϕ dado) coincide con la proporción (en el sentido de la densidad de Dirichlet) de los primos p tales que $\mathbb{F}_p \models \phi$. Todo esto se puede leer en [10], junto otros resultados deslumbrantes.

Bibliografía

[1] R.M. Anderson. Star-finite representations of measure spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 271(2):667–687, 1982.

[2] J. Ax. The elementary theory of finite fields. *Annals of Mathematics*, 88(2):239–271, 1968.

[3] J. Ax. Solving diophantine problems modulo every prime. *Annals of Mathematics*, 85(2):161–183, 1968.

[4] J.L. Bell y A.B. Slomson. *Models and Ultraproducts: An Introduction.* Dover Publications, 2006.

[5] C.C. Chang y H.J. Keisler. *Model theory.* Studies in logic and the foundations of mathematics. North-Holland, 1990.

[6] C.T. Conley, A.S. Kechris, y R.D. Tucker-Drob. Ultraproducts of measure preserving actions and graph combinatorics. `http://www.its.caltech.edu/~rtuckerd/Conley-Kechris-Tucker_Drob.pdf`.

[7] N. Cutland. *Loeb measures in practice: recent advances.* Lecture notes in mathematics. European Mathematical Society. Springer, 2000.

[8] C. di Fiore. Bases de densidad y desintegración de medidas para sistemas dinámicos parcialmente hiperbólicos. Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires, 2010.

[9] G. Elek y B. Szegedy. Limits of hypergraphs, removal and regularity lemmas. A non-standard approach. arXiv:0705.2179v1, 2008.

[10] M.D. Fried y M. Jarden. *Field arithmetic.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer, 2008.

[11] S.R. Givant y P.R. Halmos. *Introduction to Boolean algebras.* Undergraduate texts in mathematics. Springer, 2009.

[12] W. Hodges. *Model theory.* Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge University Press, 1993.

[13] P.A. Loeb. Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications in probability theory. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1975.

[14] P.A. Loeb y M.P.H. Wolff. *Nonstandard analysis for the working mathematician*. Mathematics and its applications. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[15] D. Macpherson y R. Elwes. A survey of asymptotic classes and measurable structures. *Model Theory with Applications to Algebra and Analysis*, 2, 2008.

[16] D. Macpherson y K. Tent. Stable pseudofinite groups. *Journal of Algebra*, 312:550–561, 2007.

[17] D. Macpherson y K. Tent. Pseudofinite groups with NIP theory and definability in finite simple groups. `http://wwwmath.uni-muenster.de/u/tent/NIP_rosy.pdf`, 2011.

[18] D.A. Marcus. *Number fields*. Universitext. Springer-Verlag, 1977.

[19] D. Marker. *Model theory: an introduction*. Graduate texts in mathematics. Springer, 2002.

[20] J. Milne. Fields and galois theory. `http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/FT.pdf`, 2011.

[21] A. Pillay. Measures in model theory. `http://www1.maths.leeds.ac.uk/~pillay/chennai.august10.pdf`, 2010.

[22] B. Poizat. *A course in model theory: an introduction to contemporary mathematical logic*. Universitext Series. Springer, 2000.

[23] P. Potgieter. Nonstandard analysis, fractal properties and Brownian motion. arXiv:math/0701640v2, 2010.

[24] V.A. Rokhlin. On the fundamental ideas of measure theory (translation). *American Mathematical Society*, 1952.

[25] H. Schoutens. *The Use of Ultraproducts in Commutative Algebra*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2010.

[26] T. Tao. Compactness and contradiction. `http://terrytao.files.wordpress.com/2011/06/blog-book.pdf`.

[27] T. Tao. Poincaré's legacies: pages from year two of a mathematical blog. `http://terrytao.files.wordpress.com/2009/01/whatsnew.pdf`.

[28] T. Tao. Ultrafilters, nonstandard analysis, and epsilon management. `http://terrytao.wordpress.com/2007/06/25/ultrafilters-nonstandard-analysis-and-epsilon-management/`, 2007.

[29] T. Tao. 254a, Notes 6: Ultraproducts as a bridge between hard analysis and soft analysis. `http://terrytao.wordpress.com/2011/10/15/254a-notes-6-ultraproducts-as-a-bridge-between-hard-analysis-and-soft-analysis/`, 2011.

[30] T. Tao. The structure of approximate groups. `http://terrytao.wordpress.com/2011/10/24/the-structure-of-approximate-groups/`, 2011.

[31] R.L. Vaugh. Sentences true in all constructive models. *The Journal of Symbolic Logic*, 25(1):39–53, 1960.

[32] M. Viana. Disintegration into conditional measures: Rokhlin's theorem. `http://w3.impa.br/~viana/out/rokhlin.pdf`.

[33] J. Väänänen. A short course on finite model theory. `http://www.math.helsinki.fi/logic/people/jouko.vaananen/shortcourse.pdf`.

[34] J. Väänänen. Pseudo-finite model theory. *Matematica Contemporanea*, 24:169–183, 2003.

[35] R.L. Wheeden y A. Zygmund. *Measure and integral: an introduction to real analysis.* Pure and applied mathematics. M. Dekker, 1977.