



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

El Proceso de Estacionamiento

Tatiana Piccolomini

Director: Pablo Ferrari

Fecha de Presentación: 2 de Julio de 2012

Agradecimientos

Agradezco a todas las personas que están cerca mío ya sea muchas o pocas veces. En especial a papi y a mami por ayudarme a estar bien este último año. A mis hermanos, por soportarme desde que nací o desde que nacieron. Sobre todo a mi director Pablo por dar tanto, a Sergio y al grupo de probabilidad. Y por último, pero no con menos valor, una mención importante para Mariana, Rocío, Ezequiel, Javi, Moni Okuma y todos los demás amigos o conocidos de la Facu.

Índice general

1. Preliminares	9
1.1. Procesos Estocásticos y Cadenas de Markov	9
1.1.1. Cadenas de Markov en espacio de estados discreto y tiempo discreto.	9
1.1.2. Cadenas de Markov a tiempo continuo	11
1.1.3. Distribuciones estacionarias	15
1.2. Ecuaciones de Kolmogorov	15
1.3. Procesos puntuales en \mathbb{R}^d	19
1.3.1. Proceso Puntual	19
1.3.2. Proceso de Poisson \mathbb{R}^d	21
1.3.3. Proceso de nacimiento	23
2. El proceso de estacionamiento en \mathbb{Z}^d.	25
2.1. Construcción del límite termodinámico	27
2.2. Una ley de convergencia fuerte para la densidad	33
2.2.1. El teorema ergódico multidimensional	33
2.2.2. Convergencia para la densidad	34
2.3. El Proceso de Estacionamiento en espacio discreto a tiempo continuo. .	37
2.3.1. El proceso de estacionamiento continuo en \mathbb{Z}^d	37
2.3.2. El Proceso de Estacionamiento en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$	37
3. Proceso de estacionamiento en \mathbb{R}^d a tiempo continuo	41
3.1. El proceso de Estacionamiento en \mathbb{R}^d	41
3.1.1. Existencia del proceso de estacionamiento.	42
4. Proceso de estacionamiento en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$	49
4.1. Construcción de los procesos	49
4.1.1. Markovianidad	51
4.2. Generadores infinitesimales y Ecuaciones de Kolmogorov	52
4.2.1. Probabilidades infinitesimales	52
4.2.2. Generadores	53
4.2.3. Ecuaciones de Kolmogorov	55

4.3.	El espacio de las Configuraciones	58
4.4.	Desde los procesos discretos hacia el Proceso continuo	60
4.4.1.	Convergencia en volumen finito	60
4.4.2.	Convergencia en volumen infinito	62

Introducción

En esta tesis se hablará del proceso de Estacionamiento. El proceso de estacionamiento surgió como un modelo de absorción de moléculas en superficies de cristal y en la teoría de líquidos, pero sus aplicaciones se expanden a diversas áreas tales como granulometría, cristalización de cadenas de polímeros, condensación y coagulación, así como también en redes de telecomunicaciones.

El proceso de estacionamiento puede ser descrito de manera informal como un proceso en el cual objetos de tamaño y forma arbitraria intentan estacionar secuencialmente en lugares aleatorios en \mathbb{R}^d , estos objetos pueden ser autos, moléculas, celdas entre muchas otras opciones. Los objetos que estacionan se suponen rígidos, de un tamaño y forma determinada (obtenida a través de una norma) la única manera de estacionar es de forma no rampante con respecto a los estacionados hasta ese momento. Si un objeto intenta estacionar y no cumple esta condición simplemente es rechazado y el lugar queda vacío, en cambio si el objeto que intenta estacionar cumple con la condición este estaciona permaneciendo para siempre en el lugar elegido. El proceso continúa hasta que el espacio se considera saturado, esto sucede cuando no hay ningún lugar en donde se pueda estacionar.

En esta tesis se estudiará un aspecto particular del proceso de estacionamiento: el límite termodinámico. Físicamente, el límite termodinámico es el límite en el cual el número de partículas y el volumen se van a infinito, mientras que el radio de las partículas se mantiene constante en un valor finito e incluso el valor de la energía por partícula se mantiene constante. En este límite se estudia el comportamiento de la probabilidad de que cierta función de fase, pudiendo ser esta la energía, tenga un valor en determinado intervalo. Haremos un estudio matemático de este límite para el proceso de estacionamiento.

Durante el primer capítulo se darán herramientas para poder comprender de manera efectiva los capítulos posteriores.

El capítulo 2 está basado en el trabajo de Thomas Ritchie, “Construction of the thermodynamic jamming limit for the parking process and other exclusion schemes on \mathbb{Z}^d ”, en él se describe el proceso de estacionamiento en \mathbb{Z}^d , se construye el límite termodinámico del proceso partiendo de cajas finitas para llegar a todo el espacio, se da un intervalo para el valor de la densidad.

En el capítulo 3 se describirá el proceso de estacionamiento en \mathbb{R}^d a tiempo continuo, se procederá del mismo modo que en el capítulo anterior en el sentido que se construirá el proceso en una caja de volumen finito y luego se definirá el proceso en todo el espacio poniéndolo como límite del proceso en una caja de volumen finito a medida que incremento el volumen de dicha caja.

En el capítulo final se construyen los procesos de estacionamiento en \mathbb{Z}^d pero refinado, $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$, a partir del proceso de nacimiento libre en \mathbb{R}^d . A través de los generadores de los procesos se comprueba que la dinámica de estos es similar a la de los procesos discretos definidos en el capítulo 2.

La última sección del capítulo 4 expresa que el proceso de estacionamiento en el espacio continuo \mathbb{R}^d puede ser obtenido como límite casi seguro de los procesos en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ a medida que m tiende a infinito.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se darán las herramientas necesarias para abordar los capítulos posteriores. El objetivo central será comprender los procesos estocásticos y cadenas de Markov.

1.1. Procesos Estocásticos y Cadenas de Markov

Un proceso estocástico en términos generales es una colección de variables aleatorias $(X_j : j \in J)$ definidas en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , siendo J un conjunto de índices.

Si el proceso estocástico describe la evolución temporal de un sistema aleatorio, el conjunto de índices J discreto o continuo representa el tiempo y estamos frente a la colección $(X_t : t \in \mathbb{T})$ de variables aleatorias.

El proceso toma valores en un espacio \mathcal{X} , que llamaremos espacio de estados.

1.1.1. Cadenas de Markov en espacio de estados discreto y tiempo discreto.

Las cadenas de Markov son procesos estocásticos en espacio de estados numerable con la característica de que lo que ocurrirá a futuro solo depende del presente de la cadena.

Al estar en tiempo discreto, indexaremos las variables correspondientes al proceso con los números naturales es decir el conjunto de índices \mathbb{T} será \mathbb{N} .

Definición. Una matriz P es una matriz estocástica si $(P(x, y))_{x, y \in \mathcal{X}} \geq 0$ tal que $\sum_{y \in \mathcal{X}} P(x, y) = 1$, es decir cada fila representa una distribución sobre el espacio de estados. Si el espacio de estados es finito esta matriz es finita, en el caso contrario la matriz es infinita.

Definición. Un proceso $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una cadena de Markov homogénea con distribución inicial λ_0 y matriz de transición P notandolo como $\text{Markov}(\lambda_0, P)$, si:

1. X_0 tiene distribución inicial λ_0
2. $\forall n \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \dots, X_n = x) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = P(x, y).$$

La segunda propiedad es la llamada Propiedad de Markov, la cual nos indica que en este tipo procesos el siguiente estado de la cadena depende del estado anterior inmediato y no de todo el pasado de la misma. También en la segunda propiedad podemos observar que la matriz de transición P es una matriz estocástica.

Cabe destacar que en esta tesis todas las cadenas de Markov con las que trabajaremos serán homogéneas y nos referiremos a ellas simplemente como cadenas de Markov.

La demostración del siguiente enunciado es trivial y por lo tanto será omitida.

Teorema. Un proceso aleatorio a tiempo discreto $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $0 \leq n \leq N$ es $\text{Markov}(\lambda_0, P)$ si y solo si se cumple lo siguiente:

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \lambda_0 P(x_0, x_1) \dots P(x_{n-1}, x_n).$$

Definición. Dada $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias en un conjunto \mathcal{U} , diremos que τ es un tiempo de parada para $(U_n : n \in \mathbb{N})$ si el evento $\{\tau \leq j\}$ depende solo de los valores de U_1, \dots, U_j . Esto significa que existen eventos $A_j \subseteq \mathcal{U}_j$ tal que:

$$\{\tau \leq j\} = \{(U_1, \dots, U_j) \in A_j\}.$$

Ejemplo. Sean $c \in (0, 1)$, $\mathcal{U} = [0, 1]$, y (U_n) una sucesión de variables aleatorias uniformemente distribuidas en \mathcal{U} y $T :=$ el primer tiempo que U_n es menor que c :

$$T := \min\{n \geq 1 : U_n < c\}$$

Entonces T es un tiempo de parada, y los conjuntos A_j están definidos de la siguiente manera:

$$A_j = \{U_1 > c, \dots, U_{j-1} > c, U_j < c\}$$

y la distribución de T es geométrica con parámetro c :

$$\mathbb{P}(T > n) = (1 - c)^n$$

A continuación mostraremos otra manera equivalente a la anterior de definir una cadena de Markov.

Sea $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión infinita de variables aleatorias independientes con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$.

Como ya se ha dicho las cadenas de Markov tienen la característica de que no tienen memoria de lo que sucedió en el pasado. Definiremos una cadena de Markov en espacio de estados discretos de la siguiente manera constructiva:

Definición. *Un proceso $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que toma valores en un espacio de estados \mathcal{X} , es una cadena de Markov con estado inicial $a \in \mathcal{X}$ si existe una función F definida de la siguiente manera:*

$F : \mathcal{X} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$ tal que :

$$X_0 = a \text{ y } \forall n \geq 1 \ X_n = F(X_{n-1}; U_n)$$

Esta descripción se corresponde con una Cadena de Markov homogénea en el tiempo.

1.1.2. Cadenas de Markov a tiempo continuo

Construiremos una cadena de Markov a tiempo continuo, en un espacio de estados numerable \mathcal{X} . Como \mathcal{X} es numerable, la cadena deberá moverse en saltos, no puede ser de forma continua.

La evolución de la cadena se describe de la siguiente manera:

1. Una porción de tiempo aleatorio la cadena se queda en el estado x .
2. Salta a un nuevo estado elegido aleatoriamente y se queda una porción de tiempo aleatorio.
3. Pasa aleatoriamente a otro estado, y sigue.

Dado un estado inicial, para describir el proceso se necesita:

1. Las distribuciones de probabilidad del tiempo en que la cadena se queda en un determinado estado, para todos los estados $x \in \mathcal{X}$.
2. El mecanismo para elegir el próximo estado cuando el salto ocurre.

Con respecto a la primer condición necesaria, la propiedad de Markov estipula que la distribución del tiempo hasta el próximo salto solo puede depender del estado presente x , no puede depender del tiempo transcurrido en ese estado x .

Esta propiedad de memoria fuerza al tiempo que la cadena permanece en el estado x a

ser exponencial, con media $c(x)^{-1}$. Luego $c(x)$ es la tasa de salto del estado x . Siempre que la cadena este en x , el tiempo de espera T antes del próximo salto tiene cola exponencial $P[T > t] = e^{-c(x)t}$.

Con respecto a la segunda condición, cuando la cadena salta, la propiedad de Markov dictamina que la elección del próximo estado solo depende del estado actual x . Los saltos están descriptos por una matriz estocástica $p(x, y)$ donde $p(x, y)$ es la probabilidad de que el próximo estado después de x sea y .

Esto sugiere que para construir una cadena de Markov continua y homogénea X_t con parámetros $c(x)$ y $p(x, y)$, tomamos una cadena de Markov a tiempo discreto Y_n a la que denominamos como el esqueleto de X_t con matriz de transición $p(x, y)$, y ajustamos los tiempos de espera para producir la correcta distribución exponencial de tiempo con parametro $c(x)^{-1}$.

Sea $x \in \mathcal{X}$ estado inicial de la cadena. Sea $(\Omega, \mathcal{H}, P^x)$ un espacio de probabilidad en el cual esta definida la cadena de Markov a tiempo discreto Y_n con matriz de transición $p(u, v)$ y estado inicial x , e independientemente de (Y_n) , una sucesión exponencialmente distribuida de variables aleatorias $(\tau_j)_{0 \leq j < \infty}$ con media $E(\tau_j) = 1$. Para construir este espacio de probabilidad, sea $(\Omega_1, \mathcal{H}_1, P_1^x)$ un espacio de probabilidad para (Y_n) y $(\Omega_2, \mathcal{H}_2, P_2^x)$ un espacio de probabilidad para (τ_j) , definimos el espacio de probabilidad producto:

$$(\Omega, \mathcal{H}, P^x) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, P_1^x \otimes P_2^x)$$

La sucesión de estados que la cadena X_t visita son $x = Y_0, Y_1, \dots$.

Se definen los tiempos en que la cadena se queda en un estado $\sigma_n = c(Y_n)^{-1}\tau_n$. Dado Y_n , la variable σ_n es independiente de $(\sigma_k, Y_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ y tiene distribución exponencial con parametro $c(Y_n)^{-1}$. Definimos ahora $T_0 = 0$ y $T_n = \sigma_0 + \dots + \sigma_n$ para $n \geq 1$, y luego

$$X_t = Y_n \text{ para } T_n \leq t < T_{n+1}, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots$$

En palabras, X_t permanece en el estado Y_n durante un tiempo σ_n , y luego salta al estado Y_{n+1} . La variable aleatoria X_t esta definida para todos los tiempos $0 \leq t < \infty$ si $T_n \nearrow_n \infty$ cuando $n \nearrow \infty$. Esto pasa casi seguramente si por ejemplo $c(x) \leq C_0 \forall x \in \mathcal{X}$, C_0 constante.

Notamos que al definir X_t se lo hizo de manera que sea continua a derecha.

Esta construcción es similar para cualquier estado inicial x , definiendo las probabilidades de transición, $p_t(x, y) = P^x[X_t \in y]$.

Se puede probar la siguiente propiedad para todos los tiempos $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ y estados $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned} & P^x[X_{t_0} = x_0, X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n] \\ &= p_{t_0}(x, x_0)p_{t_1-t_0}(x_0, x_1) \dots p_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

Esto implica la propiedad de Markov,

$$P^x[X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0] = p_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, x_n) \quad (1.1)$$

siempre que condicionar tenga sentido.

Sea $D_{\mathcal{X}}$ el espacio de funciones ξ de $[0, \infty)$ en \mathcal{X} de modo que para cada $t \in [0, \infty)$, ξ es continua a derecha, y existe el límite por izquierda. De forma mas precisa para cada $t \in [0, \infty)$ existe,

$$\xi(t) = \lim_{s \searrow t} \xi(s), \text{ y el límite } \xi(t-) = \lim_{s \nearrow t} \xi(s)$$

Sea \mathcal{F} la σ -álgebra en $D_{\mathcal{X}}$ generada por $\xi \rightarrow \xi(t)$, $t \geq 0$. Podemos pensar a $X = (X_t : 0 \leq t < \infty)$ como una variable aleatoria valuada en $D_{\mathcal{X}}$ definida en $(\Omega, \mathcal{H}, P^x)$, siendo P^x su distribución. Luego P^x es una medida de probabilidad definida en $(D_{\mathcal{X}}, \mathcal{F})$ definida por:

$$P^x(A) = P^x\{X \in A\}, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Esto define una familia $\{P^x\}$ de medidas de probabilidad en $D_{\mathcal{X}}$, indexada por los estados x , $x \in \mathcal{X}$. E^x es la notación para la esperanza bajo la medida P^x . La probabilidad de transición puede ser definida como:

$$p_t(x, y) = P^x[\xi(t) = y].$$

Queremos expresar la propiedad de Markov simple (1.1) de una manera mas abstracta y precisa.

Sean $\{\theta_t : t \geq 0\}$ el conjunto de las traslaciones de los caminos en $D_{\mathcal{X}}$, definidas por $\theta_t(s) = \theta(t + s)$. Para un evento $A \in \mathcal{F}$, la imagen inversa

$$\theta_t^{-1}A = \{\xi \in D_{\mathcal{X}} : \theta_t \xi \in A\}$$

es el evento "A pasa a partir del tiempo t".

Sea $\mathcal{F}_t = \sigma\{\xi(s) : 0 \leq s \leq t\}$ la σ -álgebra en $D_{\mathcal{X}}$ generada por el proceso hasta tiempo t. Así para todos los eventos $A \in \mathcal{F}$ y $\forall x \in \mathcal{X}$,

$$P^x[\theta_t^{-1}A | \mathcal{F}_t](\xi) = P^{\xi(t)}(A)$$

para casi todo ξ dependiendo de P^x . Esta propiedad expresa la idea que condicionando en todo el pasado y buscando del momento t en adelante el proceso recomienza, con $\xi(t)$ el nuevo estado inicial.

Ahora miraremos el comportamiento infinitesimal de un proceso en un espacio de estados numerable, en donde podemos expresar todo en términos de probabilidades puntuales. Cuando el espacio de estados es no numerable no es factible expresar todo en terminos de las probabilidades puntuales, la alternativa es mirar esperanzas de funciones en el espacio de estados, y eso es lo que haremos ahora.

Definición. Un operador lineal L en las funciones acotadas sobre \mathcal{X} que se define a través de:

$$Lf(x) = c(x) \sum_{y \in \mathcal{X}} p(x, y)[f(y) - f(x)],$$

describe la regla de salto de estado de la cadena.

□

Este operador describe la regla de salto de estado de la cadena, y se lee de la siguiente manera:

Comenzando por el estado x , el próximo salto se produce a tasa $c(x)$, y cuando el salto sucede, el nuevo estado y es elegido con probabilidad $p(x, y)$. Este salto ocasiona que f cambie su valor en $f(y) - f(x)$.

Hablando rigurosamente, $Lf(x)$ representa el cambio infinitesimal esperado en $f(\xi(t))$, en el sentido del siguiente teorema. L se denomina el generador infinitesimal, de la cadena de Markov.

Teorema. Asumiendo $c(x) \leq C_0$ para todo $x \in \mathcal{X}$ y sea f una función acotada en \mathcal{X} .

1. Vale la continuidad fuerte en $t = 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathcal{X}} |E^x[f(\xi(t))] - f(x)| = 0$$

2. La esperanza $E^x[f(\xi(t))]$ puede ser derivada respecto de t a tiempo $t = 0$, uniformemente en $x \in \mathcal{X}$. De forma precisa,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathcal{X}} \left| \frac{E^x[f(\xi(t))] - f(x)}{t} - Lf(x) \right| = 0.$$

Las tasas infinitesimales pueden ser expresadas en términos de la matriz $Q = (q(x, y))_{x, y \in \mathcal{X}}$ definida por:

$$\begin{aligned} q(x, y) &= c(x)p(x, y) \quad \text{para } x \neq y \\ q(x, x) &= - \sum_{y: y \neq x} q(x, y). \end{aligned}$$

Originalmente $p(x, x) > 0$ así el salto de x a x esta permitido, Q ignora esta posibilidad y solo tiene en cuenta los saltos hacia nuevos estados.

El generador puede ser representado por:

$$Lf(x) = \sum_{y \in \mathcal{X}} q(x, y)[f(y) - f(x)].$$

Combinando $c(x)p(x, y)$ en un único factor $q(x, y)$ representa un cambio de interpretación de los cambios de estado del proceso. Hasta ahora cuando la cadena se mueve

entre dos estados: primero el reloj aleatorio suena a tasa $c(x)$, y luego un nuevo estado y es seleccionado con probabilidad $p(x, y)$. Ahora a cada movimiento posible lo podemos describir en una sola instancia como un reloj Poisson a tasa $q(x, y)$, representado por: $x \curvearrowright y$ y ($y \neq x$). Luego de un salto todos los relojes son reiniciados.

Podemos escribir $Lf = Qf$ cuando pensamos a $f = (f(x))_{x \in \mathcal{X}}$ como un vector columna, e interpretamos a Qf como una multiplicación de matrices. En particular, tomando $f = \mathbb{1}_{\{y\}}$ en la segunda proposición del último teorema enunciado obtenemos:

$$\frac{d}{dt} p_t(x, y)|_{t=0} = q(x, y).$$

1.1.3. Distribuciones estacionarias

Definición. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov (λ_0, P) en $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_k\}$, un espacio de estados finito. El vector $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ se dice que es una distribución estacionaria de la cadena si:

1. $\pi \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, k\}$ y $\sum_{i=1}^k \pi_i = 1$.

2. $\pi P = \pi$, es decir, $\sum_{i=1}^k \pi P_{ij} = \pi_j \forall j \in \{1, \dots, k\}$

La primera condición muestra que π es una probabilidad en \mathcal{X} y la segunda implica que si la distribución inicial λ_0 es igual a π entonces la distribución de la cadena a tiempo 1 satisface:

$$\lambda_1 = \lambda_0 P = \pi P = \pi, \text{ de donde } \lambda_n = \pi, \text{ para todo } n.$$

□

1.2. Ecuaciones de Kolmogorov

1. Q denotará la matriz real cuyas entradas son

$$\begin{cases} q(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x)} \text{ si } x \neq y \\ q(x, x) = -q(x) = -\sum_{y \neq x} q(x, y) \end{cases}$$

2. P_t denotará la matriz con entradas

$$p_t(x, y) := P(X_t = y | X_0 = x).$$

Teorema. (Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov). Dados t, s positivos se cumple que:

$$P_{t+s} = P_s P_t.$$

Demostración. Utilizando las definiciones correspondientes y las propiedades de una cadena de Markov de tiempo continuo (homogénea) tenemos que:

$$\begin{aligned}
 p_{t+s}(x, y) &= P(X_{t+s} = y | X_0 = x) & (1.2) \\
 &= \sum_{z \in \mathcal{X}} P(X_{t+s} = y, X_s = z | X_0 = x) \\
 &= \sum_{z \in \mathcal{X}} \frac{P(X_{t+s} = y, X_s = z, X_0 = x)}{P(X_0 = x)} \\
 &= \sum_{z \in \mathcal{X}} P(X_{t+s} = y | X_s = z, X_0 = x) \frac{P(X_s = z, X_0 = x)}{P(X_0 = x)} \\
 &= \sum_{z \in \mathcal{X}} P(X_{t+s} = y | X_s = z) P(X_s = z | X_0 = x) \\
 &= \sum_{z \in \mathcal{X}} p_s(x, z) p_t(z, y)
 \end{aligned}$$

Esto muestra que el elemento de la matriz P_{t+s} que esta en la fila x y columna y se obtiene haciendo el producto de la fila x de la matriz P_s con la columna y de la matriz P_t , con lo cual queda probado que

$$P_{t+s} = P_s P_t$$

■

Observación. Observemos que fijados x e y en \mathcal{X} , podemos considerar la función

$$p_{(\cdot)}(x, y) : R_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$t \longrightarrow p_t(x, y) = P(X_t = y | X_0 = x)$$

Notemos entonces por:

$$p'_t(x, y) = \frac{d}{dt}(p_t(x, y))$$

a su derivada (respecto de t).

En el siguiente teorema daremos dos ecuaciones que vinculan P'_t con P_t donde P'_t indica la matriz de entradas $p'_t(x, y)$. Antes del teorema veamos un lema que nos será de

utilidad.

Lema. *Se cumplen las dos siguientes afirmaciones:*

1. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-p_t(x,x)}{t} = q(x)$.
2. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_t(x,y)}{t} = q(x,y)$ si $x \neq y$.

Demostración.

1. Sabemos que:

$$p_t(x, x) = P(X_t = x | X_0 = x)$$

y

$$\sum_{y \in \mathcal{X}} P(X_t = y | X_0 = x) = 1,$$

entonces

$$P(X_t = x | X_0 = x) = 1 - \sum_{y \neq x} P(X_t = y | X_0 = x).$$

Luego utilizando que $P(X_{t+h} = y | X_t = x) = hq(x, y) + o(h) \forall x \neq y$ tenemos:

$$\begin{aligned} p_t(x, x) &= 1 - \sum_y (tq(x, y) + o(t)) \\ &= 1 - t \sum_y q(x, y) - o(t) \\ &= 1 - tq(x) - o(t) \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - p_t(x, x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} q(x) - \frac{o(t)}{t} = q(x)$$

2. Utilizando nuevamente que $P(X_{t+h} = y | X_t = x) = hq(x, y) + o(h) \forall x \neq y$ tenemos que si $x \neq y$ se cumple:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_t(x, y)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(X_t = y | X_0 = x)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tq(x, y) + o(t)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left(q(x, y) + \frac{o(t)}{t} \right) \\
&= q(x, y)
\end{aligned}$$

■

Teorema. (Ecuaciones de Kolmogorov). Para todo $t \geq 0$ se cumplen

$$P'_t = QP_t \text{ (Ecuación Backward)}$$

$$P'_t = P_tQ \text{ (Ecuación Forward)}$$

Demostración. Probaremos solo la primer igualdad, ya que la segunda es análoga. Utilizando las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov:

$$p_{t+h}(x, y) = \sum_{z \in \mathcal{X}} p_h(x, z)p_t(z, y)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
p_{t+h}(x, y) - p_t(x, y) &= \sum_{z \neq x} p_h(x, z)p_t(z, y) + p_h(x, x)p_t(x, y) - p_t(x, y) \\
&= \sum_{z \neq x} p_h(x, z)p_t(z, y) - p_t(x, y)(1 - p_h(x, x))
\end{aligned}$$

Entonces, si vemos que en las condiciones que estamos podemos intercambiar límite con sumatoria, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{t+h}(x, y) - p_t(x, y)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sum_{z \neq x} \frac{p_h(x, z)}{h} p_t(z, y) - p_t(x, y) \frac{(1 - p_h(x, x))}{h} \right) \\
&= \sum_{z \neq x} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{p_h(x, z)}{h} p_t(z, y) - p_t(x, y) \frac{(1 - p_h(x, x))}{h} \right) \\
&= \sum_{z \neq x} q(x, z)p_t(z, y) - p_t(x, y)q(x) \\
&= \sum_{z \in \mathcal{X}} q(x, z)p_t(z, y)
\end{aligned}$$

■

1.3. Procesos puntuales en \mathbb{R}^d

En esta sección se dará una descripción de lo que es un proceso puntual, una forma de caracterizarlos. También se definirá de manera constructiva un proceso de Poisson y se definirá el proceso de nacimiento puro.

1.3.1. Proceso Puntual

Podríamos entender por Proceso Puntual a un método para acomodar puntos de manera aleatoria en intervalos de la recta real o en hipercubos si estamos en el espacio euclídeo d -dimensional \mathbb{R}^d . En pocas palabras un proceso puntual en \mathbb{R}^d es un conjunto discreto aleatorio S de \mathbb{R}^d .

Un proceso puntual puede ser caracterizado completamente si las funciones de probabilidad son conocidas en los eventos sobre todas las familias de intervalos (o hipercubos) disjuntos.

A continuación se dará una caracterización de proceso puntual en \mathbb{R}^d :

Definición. *Definimos una función que cuenta la cantidad de puntos del proceso puntual S en un conjunto acotado A como:*

$$N_S(A) = |S \cap A|.$$

Se considera el conjunto de las configuraciones de puntos finitas:

$$\mathcal{M} = \{S \subset \mathbb{R}^d : N_S(A) < \infty, \forall A \subset \mathbb{R}^d \text{ acotado}\}$$

Este es el conjunto de los subconjuntos de \mathbb{R}^d sin puntos de acumulación.

Un proceso puntual es caracterizado por la definición de una medida de probabilidad en \mathcal{M} . Como \mathcal{M} es no numerable necesitaremos definir cierto tipo de *eventos* en \mathcal{M} con los cuales se pueda definir la probabilidad sobre cualquier evento de \mathcal{M} .

Los eventos esenciales son:

$$\mathcal{A} = \{S \in \mathcal{M} : N_S(B_i) = b_i, i = 1, \dots, \ell\}$$

para $\ell \in \mathbb{N}$ arbitrario, $b_i \in \mathbb{N}$ y conjuntos Borelianos B_i con medida de Lebesgue finita. A continuación daremos una forma operativa para tratar los eventos de \mathcal{M} a través de $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$. Siendo \mathcal{A}_0 definido por:

$$\mathcal{A}_0 = \{S \in \mathcal{M} : N_S(B) = 0, B \text{ Boreliano}\}$$

Antes de mostrar el teorema de cómo se caracterizan los elementos de \mathcal{M} , escribiremos una definición y un lema que será útil para su demostración.

Definición. Se llama π -sistema a una sub-colección de conjuntos de una σ -álgebra \mathcal{F} , notándolo π y que cumple las siguientes propiedades:

1. $\pi \neq \emptyset$.
2. Si $A, B \in \pi$ entonces $A \cap B \in \pi$.
3. π genera la σ -álgebra \mathcal{F} .

Lema. Sean μ y ν medidas de probabilidad definidas en la σ -álgebra \mathcal{F} . Si ocurre que :

$$\mu|_{\pi} = \nu|_{\pi} \text{ donde } \pi \text{ es un } \pi\text{-sistema}$$

Entonces,

$$\mu = \nu$$

La prueba esta basada en el lema de clases monótonas y fue consultado en [jacod] página 36.

Teorema. Una medida de probabilidad μ en \mathcal{M} esta totalmente determinada por las probabilidades de los eventos en \mathcal{A}_0 .

Demostración. Probaremos que \mathcal{A}_0 es un π -sistema:

1. $\mathcal{A}_0 \neq \emptyset$.
2. Si $S_1, S_2 \in \mathcal{A}_0$ entonces existen A y B en los borelianos tal que:

$$N_{S_1}(A) = 0 \text{ y } N_{S_2}(B) = 0$$

Y como $S_1 \cap S_2$ pertenece a \mathcal{M} y además $N_{S_1 \cap S_2}(A \cap B) = 0$ y por lo tanto pertenece a \mathcal{A}_0 .

3. Necesitamos probar que \mathcal{A}_0 genera la σ -álgebra \mathcal{M} . Supongamos que existe un elemento S de \mathcal{M} para el cual no hubiera un conjunto boreliano con intersección vacía entonces S podría tener un punto de acumulación y esto contradice el hecho de que $S \in \mathcal{M}$.

Si μ es una medida de probabilidad en \mathcal{M} esto es μ es una distribución de un proceso puntual S en \mathcal{M} , entonces llamamos probabilidades vacías de μ a:

$$\mu(S \in \mathcal{M} : N_S(B) = 0).$$

1.3.2. Proceso de Poisson \mathbb{R}^d

Un proceso de Poisson es un proceso puntual particular $S \in \mathbb{R}^d$.

Sea $\lambda > 0$ y

1. Una partición \mathcal{J} de \mathbb{R}^d (sería $\cup_{A \in \mathcal{J}} A = \mathbb{R}^d$ y $A \cap B = \emptyset$ para todo $A, B \in \mathcal{J}$). Asumiremos $A \subset \mathbb{R}^d$ es medible para todo $A \in \mathcal{J}$ y la medida de lebesgue $l(A) < \infty$ para todo $A \in \mathcal{J}$.
2. Consideremos un sucesion de de variables aleatorias con distribución Poisson indexadas por los elementos de la partición $Y_A \sim \text{Poisson}(\lambda l(A))$.
3. Una familia de sucesiones $((U_{A,j}, j \geq 1), A \in \mathcal{J})$, donde $(U_{A,j}, j \geq 1)$ Son variables aleatorias independientes con soporte en A :

$$U_{A,j} \sim \text{Unif}(A)$$

esto es para todo B medible,

$$P(U_{A,j} \in A \cap B) = \frac{l(A \cap B)}{l(A)}$$

4. Se define el proceso de Poisson como el conjunto aleatorio dado por:

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{A \in \mathcal{J}} \bigcup_{j \leq Y_A} \{U_{A,j}\} = \bigcup_{A \in \mathcal{J}} \{U_{A,j} : j \leq Y_A\}$$

El objeto aleatorio así construido se llama *Proceso de Poisson de intensidad λ* .

Lema. Sea S un proceso de Poisson. Entonces, para todo conjunto de Borel B vale que:

$$\mathbb{P}(S \cap B = \emptyset) = e^{-\lambda l(B)}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} P(S \cap B = \emptyset) &= P\left(\bigcap_{A \in \mathcal{J}} \{S \cap B \cap A = \emptyset\}\right) \\ &= \prod_{A \in \mathcal{J}} P(S \cap B \cap A = \emptyset) \end{aligned}$$

Debido a que los eventos $\{S \cap B \cap A = \emptyset\}$ son independientes ya que los conjuntos $A \in \mathcal{J}$ son disjuntos. Ahora, para calcular $P(S \cap B \cap A = \emptyset)$ usamos que $Y_A \sim \text{Poisson}(\lambda l(A))$

y obtenemos:

$$\mathbb{P}(S \cap B \cap A = \emptyset) = \sum_{n=0} P(S \cap B \cap A = \emptyset | Y_A = n) e^{\lambda(A)} \frac{(\lambda(A))^n}{n!}$$

Observemos que:

1. $S \cap A = \{U_{i,1}, \dots, U_{i,Y_A}\}$
2. $Y_A = n \Rightarrow S \cap A = \{U_{i,1}, \dots, U_{i,n}\}$

por ende,

$$\begin{aligned} P(S \cap B \cap A = \emptyset | Y_A = n) &= \frac{P(S \cap B \cap A = \emptyset | Y_A = n)}{P(Y_A = n)} \\ &= \frac{P(\{B \cap \{U_{A,1}, \dots, U_{A,n}\} = \emptyset \cap \{Y_A = n\})}{P(Y_A = n)} \\ &= \frac{P(\{B \cap \{U_{A,1}, \dots, U_{A,n}\} = \emptyset\}) P(Y_A = n)}{P(Y_A = n)} \\ &= P(U_{A,1} \notin B) \dots P(U_{A,n} \notin B) \\ &= \left(\frac{l(A \setminus B)}{l(A)}\right)^n \\ &= \left(\frac{l(A) - l(A \cap B)}{l(A)}\right)^n \end{aligned}$$

Usando esto obtenemos:

$$\sum_n P(S \cap B \cap A = \emptyset | Y_A = n) P(Y_A = n) = e^{-\lambda(A \cap B)}$$

Y entonces:

$$\begin{aligned} P(S \cap B = \emptyset) &= \prod_A P(S \cap B \cap A = \emptyset) = e^{-\sum_A \lambda(A \cap B)} \\ &= e^{-\lambda(B)} \end{aligned}$$

■

Notemos que por la demostración del lema anterior las probabilidades vacías no dependen de la partición utilizada para construir el proceso, como consecuencia tenemos el siguiente:

Corolario. *Se cumple:*

1. Para cualquier conjunto Boreliano acotado B ,

$$P(N(B) = k) = \frac{e^{-\lambda(B)} (\lambda(B))^k}{k!}$$

2. Dado que el numero de puntos $|S \cap B| = n$, la distribución de $S \cap B$ tiene la misma distribución de n puntos independientes distribuidos en B .

1.3.3. Proceso de nacimiento

El proceso de nacimiento es una generalización del proceso de Poisson en el cual la tasa de cambio de estado puede depender del estado en que se encuentra el proceso ó del tiempo.

Sea \tilde{S} un Proceso de Poisson a tasa λ en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$. Suponiendo las primeras d coordenadas espaciales y la $(d + 1)$ -ésima coordenada el tiempo. Se define:

$$S_t = \{(s, t') \in \tilde{S}, t' \in [0, t]\}$$

como el conjunto de puntos en \tilde{S} en los cuales el tiempo es menor o igual a t . Cuando un punto $(s, t) \in S_t$ se dice que un *nacimiento ocurrió a tiempo t en el lugar s* .

Los puntos nacen a tasa espacio-temporal λ y una vez que nacen viven para siempre. Si B es un conjunto con volumen en \mathbb{R}^d igual a $\ell(B) < \infty$, entonces definiremos los siguientes eventos para poder indicar las probabilidades de cambio de estado del proceso en un tiempo infinitesimal:

$$B_1 = \text{"un nacimiento ocurra en } B \text{ durante el intervalo de tiempo } [t, t + h]\text{"}$$

$$B_2 = \text{"más de un nacimiento ocurra en } B \text{ durante el intervalo de tiempo } [t, t + h]\text{"}$$

$$\mathbb{P}(B_1) = h\ell(B) + o(h\ell(B))$$

$$\mathbb{P}(B_2) = o(h\ell(B))$$

Dado esto hay un nacimiento en tiempo t en el conjunto B , luego el lugar de nacimiento es uniformemente distribuido en B :

$$\mathbb{P}(s \in A \cap B \mid (s, t) \in \tilde{S}, s \in B) = \frac{\ell(A \cap B)}{\ell(B)}$$

Si consideramos la función medible $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ con soporte en el conjunto Λ , podemos calcular:

$$\frac{d}{du} \mathbb{E}(f(S_t) \mid S_t = S) = \int_{\Lambda} [f(S \cup \{x\}) - f(S)] dx = \int [f(S \cup \{x\}) - f(S)] dx$$

La segunda identidad $f(S \cup \{x\}) = f(S)$ if $x \notin \Lambda$.

Este proceso también puede ser definido cuando la tasa de nacimiento depende del espacio o del tiempo. El proceso de Poisson \tilde{S} puede tener tasa dada por $\lambda(x) \times \mu(t)$. La distribución de S_t es la de un Proceso de Poisson homogéneo con tasa λt . El conjunto S_t converge casi seguramente a un conjunto denso numerable en \mathbb{R}^d .

Capítulo 2

El proceso de estacionamiento en \mathbb{Z}^d .

En este capítulo se describirá el proceso de estacionamiento en \mathbb{Z}^d a tiempo discreto, se construirá el proceso en la caja $\Lambda_n^{(d)} = \{-n, \dots, 0, \dots, n\}^d$ como un elemento aleatorio en $((0, 1)^{\mathbb{Z}^d}, B_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d}, \lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d})$, luego se definirá el proceso en todo el espacio \mathbb{Z}^d a través del límite termodinámico de los procesos en cajas finitas a medida que aumenta el volumen de las mismas.

En la anteúltima sección se expondrá el límite para la densidad, un intervalo para el valor de la misma.

Finalmente se describirá el proceso de estacionamiento en \mathbb{Z}^d a tiempo continuo.

Definiciones básicas necesarias

Los objetos aleatorios con los que trabajaremos serán definidos en un espacio de probabilidad fundamental (i) y asumiremos valores en un espacio de medida completo y separable (ii).

(i) $((0, 1)^{\mathbb{Z}^d}, B_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d}, \lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d})$, siendo $B_{(0,1)}$ la σ -álgebra de Borel en $(0, 1)$ y $\lambda_{(0,1)}$ la medida de Lebesgue en $(0, 1)$.

(ii) $(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}, B_{\{0,1\}}^{\mathbb{Z}^d})$

Se construirán de manera conjunta elementos aleatorios en este espacio de probabilidad, lo que quiere decir que haremos un acoplamiento.

A continuación se utilizará la letra ν para designar un valor entero positivo, que será el radio del vecindario.

Definición. Denominaremos con la letra ξ a cualquier elemento de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ y lo llamaremos configuración.

Definición. Operador de traslación:

Para $x \in \mathbb{Z}^d$ sea $\theta_x : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$, definida por:

$$\theta_x(y) = x + y$$

Como $\theta_0(x) = x$ y $\theta_x \circ \theta_y = \theta_{x+y}$, tenemos que la composición de funciones hace de $\{\theta_x : x \in \mathbb{Z}^d\}$ un grupo conmutativo.

Se aplicarán traslaciones en el espacio de las configuraciones, para cada $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$

$$\theta_x : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$$

$$(\theta_x \xi)(y) = \xi(x + y), \quad y \in \mathbb{Z}^d$$

Definición. Un camino es una sucesión finita de puntos x_i en \mathbb{Z}^d , $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$, tal que:

$$|x_{i+1} - x_i|_{sup} \leq \nu, \quad 0 \leq i \leq n - 1$$

Definición. Sea $\Lambda_\nu^{(d)} \stackrel{def}{=} \{-\nu, \dots, 0, \dots, \nu\}^d$ una caja de radio ν con centro en el origen. Se dirá que un subconjunto $S_\nu^{(d)} \subset \{0, 1\}^{\Lambda_\nu^{(d)}}$ es una malla de exclusión.

Definición. Dado $\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$, $x(\omega)$ designará el valor que tiene ω en el punto x .

Definición. Un camino $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ es decreciente sujeto a $\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$ si la sucesión $(x_i(\omega))_{0 \leq i \leq n}$ es estrictamente decreciente. Notándolo como $\downarrow (x_i)_{0 \leq i \leq n}$.

Definición. Para $x, y \in \mathbb{Z}^d$ y $\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$, decimos que x es influenciado por y sujeto a ω , si existe un camino decreciente de x a y , tal que $x_0 = x$ y $x_n = y$. Y lo escribimos $y \uparrow_{(\omega)} x$, para cada ω hay una relación de influencia diferente.

Definición. Para una malla de exclusión $S_\nu^{(d)}$ dada que representa la regla para estacionar o no, se define el proceso de exclusión en $\Lambda_n^{(d)}$ con condiciones de frontera nula a través del siguiente algoritmo:

Para cada $\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$ fijo

Paso 1: inicio $P_n(\omega) = 0^{\mathbb{Z}^d}$;

Paso 2: elijo $x \in \Lambda_n^{(d)}$ tal que

$\omega(x) = \inf \{\omega(\xi) : \xi \in \Lambda_n \text{ y } \xi \text{ todavía no elegido}\}$;

Paso 3: Si $\theta_x(P_n(\omega))|_{\Lambda_\nu^{(d)}} \in S_\nu^{(d)}$, entonces $P_n(\omega)(x) \leftarrow 1$;

Paso 4: Si existen puntos en $\Lambda_n^{(d)}$ no elegidos, volver al paso 2, sino parar el algoritmo.

Llamamos a la salida P_n el límite empaquetado del proceso de exclusión, siendo este un elemento aleatorio de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ valuado en $((0, 1)^{\mathbb{Z}^d}, B_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d}, \lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d})$.

□

Observación. Para cualquier conjunto finito $X \subset \mathbb{Z}^d$ se puede generalizar el algoritmo expuesto en la definición anterior y definir un elemento aleatorio P_X con soporte en X .

Definición. Sea X un subconjunto finito de \mathbb{Z}^d . Para una malla de exclusión dada $S_\nu^{(d)}$, se define el proceso de exclusión en X con condiciones de frontera nula ($X S_\nu^{(d)}$) Para cada $\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$ fijo

Paso 1: inicio $P_X(\omega) = 0^{\mathbb{Z}^d}$;

Paso 2: elijo $x \in X$ tal que

$\omega(x) = \inf\{\omega(\xi) : \xi \in X \text{ y } \xi \text{ todavía no elegido}\}$;

Paso 3: Si $\theta_x(P_X(\omega))|_{\Lambda_\nu^{(d)}} \in S_\nu^{(d)}$, entonces $P_X(\omega)(x) \leftarrow 1$;

Paso 4: Si existen puntos en X no elegidos, volver al paso 2, sino parar el algoritmo.

Llamamos a la salida $P_X(\omega)$ el límite empaquetado del proceso de exclusión en X , siendo este un elemento aleatorio $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ valuado en $((0, 1)^{\mathbb{Z}^d}, B_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d}, \lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d})$.

□

Observación. La malla de exclusión utilizada para el proceso de estacionamiento es $S_\nu^{(d)}$, en donde:

1. El origen tiene asignado el valor 1.
2. Si dado el punto $(x_1, \dots, x_d) \in \Lambda_\nu^{(d)}$ existe i tal que $x_i \neq 0$ a ese punto se le asigna el valor 0.

2.1. Construcción del límite termodinámico

Se mostrara que dada una malla de exclusión $S_\nu^{(d)}$ existe una única medida de probabilidad μ asociada a P en $(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}, B_{\{0,1\}}^{\mathbb{Z}^d})$ tal que $\mu_n \implies \mu$, siendo μ_n la medida de probabilidad asociada a P_n , construyendo los elementos aleatorios:

$$P_n : ((0, 1)^{\mathbb{Z}^d}, B_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d}, \lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d}) \rightarrow (\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}, B_{\{0,1\}}^{\mathbb{Z}^d})$$

y

$$P : ((0, 1)^{\mathbb{Z}^d}, B_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d}, \lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d}) \rightarrow (\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}, B_{\{0,1\}}^{\mathbb{Z}^d})$$

tal que $P_n \rightarrow P$ casi seguramente.

Como definiremos el proceso de estacionamiento límite P sobre todos los puntos de \mathbb{Z}^d como el proceso límite de procesos P_n definidos en cajas finitas, necesitaremos mostrar que el conjunto de los puntos que influyen sobre un punto $x \in \mathbb{Z}^d$ es finito, para así poder trabajar sobre un conjunto finito en donde sabemos que el proceso está bien definido.

Definición. Dado un conjunto $X \subset \mathbb{Z}^d$ finito y $\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$, se define el conjunto Armour de X como el subconjunto aleatorio:

$$\mathcal{A}(X)(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : \exists x \in X : y \uparrow_{(\omega)} x\}$$

De la definición anterior es claro que para $X, Y \subset \mathbb{Z}^d$ y $\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$

1. $\mathcal{A}(X)(\omega) \supset X$;
2. $X = \bigsqcup_{i=1}^n X_i \implies \mathcal{A}(X)(\omega) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}(X_i)(\omega)$;
3. $X \subset Y \implies \mathcal{A}(X)(\omega) \subset \mathcal{A}(Y)(\omega)$

Lema. Para todo $X \subset \mathbb{Z}^d$, $\mathcal{A}(X)$ es casi seguramente finito.

Demostración.

Parte (i) Primero se hará la demostración para el conjunto $X = \{0\}$, consideremos el evento:

$$A_n = (\mathcal{A}(X) \not\subseteq \Lambda_{n\nu}^{(d)}), n \in \mathbb{N}$$

A_n ocurre si existe y en $\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_{n\nu}^{(d)}$ tal que $y \uparrow 0$, esto quiere decir que existe un camino decreciente $(x_i)_{0 \leq i \leq m}$, $m > n$, comenzando en 0 y terminando fuera de la caja $\Lambda_{n\nu}^{(d)}$.

Es decir A_n ocurre solo si existe un camino decreciente de tamaño n , $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$, comenzando desde 0.

Ahora observemos que la probabilidad de que un camino arbitrario auto excluyente $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ sea decreciente es: $1/(n+1)!$ y el número total de caminos que empiezan en 0 con longitud n no es más grande que $(2\nu+1)^{d \cdot n}$, concluyendo por subaditividad que:

$$P(A_n) \leq \frac{(2\nu+1)^{d \cdot n}}{(n+1)!} \leq \frac{(2\nu+1)^{d \cdot n}}{n!}$$

Utilizando que:

1. La sucesión $(A_n)_{n \geq 0}$ es decreciente.
2. Haciendo uso de la última desigualdad expuesta obtenemos:

$$P(A_n) \rightarrow 0.$$

3. A través del lema de Borel-Cantelli obtenemos:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

4. Y dado que vale:

$$\{\#\mathcal{A}(X) = \infty\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

concluimos

$$\mathbb{P}(\{\#\mathcal{A}(X) \leq \infty\} = \{\#\mathcal{A}(X) = \infty\}^c) = 1$$

y por ende $\mathcal{A}(\{0\})$ es finito casi seguramente.

Parte (ii) Ahora sea $X = \{x\}$, para cualquier x en \mathbb{Z}^d . En este caso observamos que:

$$\{\#\mathcal{A}(X) < \infty\} = \theta_{-x}(\{\#\mathcal{A}(\{0\}) < \infty\})$$

y haciendo uso de la medida estacionaria producto $\lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d}$ concluimos que

$$\mathbb{P}(\{\#\mathcal{A}(X) < \infty\}) = \mathbb{P}(\{\#\mathcal{A}(\{0\}) < \infty\}) = 1$$

Por la Parte (i), $\mathcal{A}(X)$ es casi seguramente finito para todo $x \in \mathbb{Z}^d$. Podemos observar la siguiente desigualdad entre eventos:

$$\mathcal{A}(X) \not\subseteq B(x, n\nu) = \theta_{-x}(\mathcal{A}(\{0\}) \not\subseteq \Lambda_{n\nu}^{(d)})$$

Haciendo uso de estacionariedad obtenemos

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}(X) \not\subseteq B(x, n\nu)) = \mathbb{P}(\theta_{-x}(\mathcal{A}(\{0\}) \not\subseteq \Lambda_{n\nu}^{(d)})) = \mathbb{P}(\mathcal{A}(\{0\}) \not\subseteq \Lambda_{n\nu}^{(d)})$$

y siguiendo los mismos pasos que en la Parte (i) obtenemos que $\mathcal{A}(\{x\})$ es casi seguro finito.

Parte (iii) Suponiendo que X es un conjunto finito, se puede escribir de la siguiente manera $X = \biguplus_{i=1}^n \{x_i : x_i \in X\}$. Lo anterior sumado a la definición de Armour

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(X) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}(\{x_i\}) &\implies \{\#\mathcal{A}(X) = \infty\} = \bigcup_{i=1}^n \{\#\mathcal{A}(\{x_i\}) = \infty\} \\ &\implies \mathbb{P}(\{\#\mathcal{A}(X) = \infty\}) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\{\#\mathcal{A}(\{x_i\}) = \infty\}) = 0 \end{aligned}$$

por (ii) y por lo tanto $\mathcal{A}(X)$ es casi seguro finito. ■

Definición. El elemento/ algoritmo límite será:

$$P : ((0, 1)^{\mathbb{Z}^d}, B_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d}, \lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d}) \longrightarrow (\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}, B_{\{0,1\}}^{\mathbb{Z}^d})$$

definido por

$$P(\omega)(x) \stackrel{def}{=} P_{\mathcal{A}(\{x\})(\omega)}(\omega)(x), \forall x \in \mathbb{Z}^d$$

Esta definición significa que para cada $\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$ y $x \in \mathbb{Z}^d$ se utiliza el Armour del conjunto $\{x\}$, $\mathcal{A}(\{x\})$ para definir el valor del proceso límite sobre ese punto. Como se demostró que $\mathcal{A}(\{x\})$ es finito se puede aplicar el algoritmo definido para cualquier conjunto finito sobre este, el valor asignado al punto x por este algoritmo es lo que defino como límite de $P_n(\omega)(x)$.

El próximo lema será de utilidad para demostrar la convergencia casi segura hacia el límite recientemente definido, ya que expresa el hecho de que a partir de un n suficientemente grande P_m es idéntico a P_n si $m > n$ en $\mathcal{A}(\{x\})$.

Antes de enunciar el lema se escribirán dos definiciones de utilidad para su demostración:

Definición. Para todo $\nu \geq 1$, la frontera ν interior de $X \subset \mathbb{Z}^d$ es definida como el conjunto

$$\delta_\nu^{(in)}(X) \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{Z}^d : x \in X \text{ y } \exists y \in \mathbb{Z}^d \setminus X \text{ tal que } |x - y|_{sup} \leq \nu\}$$

La frontera exterior es definida de manera análoga:

$$\delta_\nu^{(out)}(X) \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{Z}^d : x \notin X \text{ y } \exists y \in X \text{ tal que } |x - y|_{sup} \leq \nu\}$$

Observación. Una consecuencia inmediata de las definiciones de frontera exterior e interior es que $x(\omega) \leq y(\omega)$, para todos los $x \in \delta_\nu^{(in)}(\mathcal{A}(\{x\}))$, $y \in \delta_\nu^{(out)}(\mathcal{A}(\{x\}))$ y $|x - y|_{sup} \leq \nu$, para todo $X \subset \mathbb{Z}^d$. Esto indica que el Armour tiene la propiedad de que los que distan menos que ν del borde les asigno un valor menor que a los sitios externos que distan menos que ν , porque de otro modo estos sitios externos estarían en el Armour.

Por otro lado cabe destacar y será de suma utilidad para la demostración del lema el hecho de que para $x \in \mathbb{Z}^d$, casi todo $\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$ induce un orden natural \preceq en $\mathcal{A}(\{x\})(\omega) \subset \mathbb{Z}^d$. El sentido de este orden es que para $y, z \in \mathcal{A}(\{x\})$ $y \preceq z$ ó $z \preceq y$ representando $y(\omega) \leq z(\omega)$ ó $z(\omega) \leq y(\omega)$ respectivamente.

Para cada ω , se puede construir una secuencia $(y_i)_{1 \leq i \leq \#\mathcal{A}(\{x\})(\omega)}$ en $\mathcal{A}(\{x\})$ tal que $y_j \preceq y_k$, si $j \geq k$; siendo esta sucesión casi seguramente determinada de manera única.

Lema. Si $\{\Lambda_n \supset \mathcal{A}(\{x\})\}$ entonces vale que:

$$P_n(x) = P_{\mathcal{A}(\{x\})}(x)$$

$$\forall x \in \mathcal{A}(\{x\})$$

Demostración.

La demostración se hará por inducción sobre τ , para ω fijo y un tiempo $\tau \in \{1, 2, \dots, \#\mathcal{A}(\{x\})(\omega)\}$, miraremos los procesos de estacionamiento P_n y $P_{\mathcal{A}(\{x\})}$ a tiempo τ , esto sería inmediatamente antes de un arribo (Paso 2 de los algoritmos) en el lugar y_τ y concluiremos la igualdad entre los algoritmos.

Base de inducción:

A tiempo $\tau = 1$, $P_n|_{\mathcal{A}(\{x\})} = P_{\mathcal{A}(\{x\})}|_{\mathcal{A}(\{x\})} = 0^{\mathcal{A}(\{x\})}$, por el Paso 1 de los correspondientes algoritmos.

Hipótesis inductiva:

Supongo que $P_n|_{\mathcal{A}(\{x\})} = P_{\mathcal{A}(\{x\})}|_{\mathcal{A}(\{x\})}$ a tiempo $\tau \in \{1, 2, \dots, \#\mathcal{A}(\{x\})\}$.

Paso Inductivo:

Si $y_\tau \notin \delta_\nu^{(in)}(\mathcal{A}(\{x\}))$, por la hipótesis inductiva, P_n y $P_{\mathcal{A}(\{x\})}$ son iguales a tiempo τ en el ν -vecindario de y_τ , es decir en $B(y_\tau, \nu) \stackrel{def}{=} \{y \in \mathbb{Z}^d : |y - y_\tau|_{sup} \leq \nu\}$.

Y como $\theta_{y_\tau}(P_n)|_{\Lambda^{(d)}} = \theta_{y_\tau}(P_{\mathcal{A}(\{x\})})|_{\Lambda^{(d)}}$, y por el paso 3 de los algoritmos correspondientes vemos que $P_n|_{\mathcal{A}(\{x\})} = P_{\mathcal{A}(\{x\})}|_{\mathcal{A}(\{x\})}$ a tiempo $\tau + 1$.

Si $y_\tau \in \delta_\nu^{(in)}(\mathcal{A}(\{x\}))$, nuevamente utilizamos la hipótesis inductiva para afirmar que P_n y $P_{\mathcal{A}(\{x\})}$ son iguales en $B(y_\tau, \nu) \cap \mathcal{A}(\{x\})$.

Y como $B(y_\tau, \nu) \cap \mathcal{A}(\{x\})^c \subset \delta_\nu^{(out)}(\mathcal{A}(\{x\}))$, P_n no puede tener arribos en esta región hasta tiempo τ , por lo tanto P_n y $P_{\mathcal{A}(\{x\})}$ deben ser iguales sobre esa región.

Concluyendo que P_n y $P_{\mathcal{A}(\{x\})}$ coinciden nuevamente en toda la bola $B(y_\tau, \nu)$ a tiempo τ , y por la misma razón que antes tenemos $P_n|_{\mathcal{A}(\{x\})} = P_{\mathcal{A}(\{x\})}|_{\mathcal{A}(\{x\})}$ a tiempo $\tau + 1$.

■

Utilizaremos los lemas anteriores para demostrar el teorema que tiene por objetivo demostrar la convergencia casi segura entre los elementos aleatorios sobre cajas finitas P_n y el elemento límite P , con lo cual concluiremos la convergencia débil.

Teorema.

P_n converge casi seguramente al proceso límite P con la medida $\lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d}$.

Demostración. Es suficiente mostrar que para casi todo $\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$ y para todo $m \geq 0$, $P_n(\omega)|_{\Lambda_m^{(d)}} = P(\omega)|_{\Lambda_m^{(d)}}$ para n suficientemente grande.

Dado $m \geq 0$, tomamos n grande de modo que el conjunto Armour de la caja de lado m este incluido en la caja de lado n , $\mathcal{A}(\Lambda_m^{(d)}) \subset \Lambda_n^{(d)}$. Y como para cada $x \in \Lambda_m^{(d)}$, $\mathcal{A}(\{x\}) \subset \mathcal{A}(\Lambda_m^{(d)})$, entonces:

$$P(x) = P_{\mathcal{A}(\{x\})}(x) = P_n(x) \quad \forall x \in \Lambda_m^{(d)}$$

■

Corolario. Si $(\mu_n)_{n \geq 0}$ y μ las medidas de probabilidad asociadas a $(P_n)_{n \geq 0}$ y P respectivamente en $(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}, B_{\{0,1\}}^{\mathbb{Z}^d})$, entonces:

$$\mu_n \Rightarrow \mu$$

2.2. Una ley de convergencia fuerte para la densidad

A continuación se explicarán las herramientas utilizadas para probar la existencia de límite para la densidad de ocupación en el Proceso de Estacionamiento.

2.2.1. El teorema ergódico multidimensional

¹ Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $\Theta = (\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ un grupo de transformaciones de Ω que preservan la medidas μ y satisfacen $\theta_i \circ \theta_j = \theta_{i+j}$. Sea $\mathcal{I} \subset \mathcal{F}$ la σ -álgebra de todos los eventos Θ invariantes.

Para una función medible $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sea:

$$R_n f = \frac{\sum_{x \in \Lambda_n} f \circ \theta_x}{|\Lambda_n|}$$

Se probará la convergencia de $R_n f$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Lema. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert con norma $\|\cdot\|$ y \mathcal{C} un subconjunto convexo cerrado no vacío de \mathcal{H} . Entonces existe $f \in \mathcal{C}$ tal que $\|f\| = \min_{g \in \mathcal{C}} \|g\|$. Y además si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathcal{C} tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = \|f\|$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$.

Teorema. Teorema Ergódico en L^2 Para cada f medible con $\mu(|f|^2) < \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(|R_n f - \mu(f|\mathcal{I})|^2) = 0$$

Corolario. Suponiendo que $\mu(|f|) \leq \infty$. Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(|R_n f - \mu(f|\mathcal{I})|) = 0$$

El objetivo es poder describir el Teorema Ergódico que asegurara la convergencia de $R_n f$.

Lema. Suponiendo que $\mu(|f|) \leq \infty$ y $c > 0$ entonces

$$\mu(|R_n f| > c) \leq \frac{3^d \mu(|f|)}{c}$$

Teorema Ergódico Multidimensional:

Teorema. Para cualquier f medible con $\mu(|f|) \leq \infty$ vale que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n f = \mu(f|\mathcal{I}) \mu - c.s$$

¹Las demostraciones de los resultados expuestos en esta sección se encuentran en [6], Apéndice 14 A

A partir de este momento en esta sección f será $f(\omega) = P(\omega)(0)$ y observamos que $P(\omega)(x) = f(\theta_x(\omega)) \forall x \in \mathbb{Z}^d$.

Observación. Para poder comprender como fue utilizado el Teorema Ergódico multidimensional debemos tener en cuenta que:

1. $P_n(\omega)(0) = P(\omega)(0)$ a partir de un valor de n suficientemente grande.
2. $\mathbb{E}(P(\omega)(0)) = \mathbb{P}(P(\omega)(0) = 1)$, pues $P(\omega)(0)$ vale 0 ó 1.

2.2.2. Convergencia para la densidad

La densidad del proceso de estacionamiento en \mathbb{Z}^d en el espacio de probabilidad $((0, 1)^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d}, \lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d})$ se define de la manera siguiente:

Definición. Para $n \in \mathbb{N}$ la densidad de lugares ocupados en el límite empaquetado P_n como la variable aleatoria:

$$\rho_n(\omega) \stackrel{def}{=} \frac{\sum_{x \in \Lambda_n^{(d)}} P_n(\omega)(x)}{|\Lambda_n^{(d)}|},$$

en $((0, 1)^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d}, \lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d})$.

Estamos interesados en saber la existencia del $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\rho_n)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{x \in \Lambda_n^{(d)}} P(\omega)(x)}{|\Lambda_n^{(d)}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{x \in \Lambda_n^{(d)}} f \circ \theta_x(\omega)}{|\Lambda_n^{(d)}|} = \mathbb{E}(f) \quad \lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d} - c.s$$

En la última igualdad utilizamos el Teorema Ergodico y el segundo item de la última observación, por otro lado sabemos que:

$$\mathbb{E}(f) = \mathbb{E}(f \circ \theta_0) = \mathbb{E}(P(0)) \stackrel{def}{=} \rho$$

En donde por definición $\rho \in [0, 1]$, ya que la Esperanza no es mas que el valor de la medida de probabilidad asociada μ al proceso P de que este valga 1 en el punto 0.

El siguiente lema cuantifica las discrepancias entre $P(\omega)|_{\Lambda_n^{(d)}}$ y $P_n(\omega)|_{\Lambda_n^{(d)}}$

Lema. Si A_n es el evento $\{\mathcal{A}(\Lambda_n^{(d)}) \not\subseteq \Lambda_{n+[\sqrt{n}]\nu}^{(d)}\}$ entonces:

$$P(\lim sup A_n) = 0$$

es decir con probabilidad uno la sucesión $(A_n)_{n \geq 1}$ ocurre finitas veces.

Demostración. Teniendo en cuenta la acotación ya utilizada en la sección anterior, obtenemos

$$P(A_n) \leq (2n+1)^d \frac{(2\nu+1)^{d\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor!} := a_n$$

Utilizando la fórmula de Stirling, $n! \simeq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$,

$$P(A_n) \leq a_n \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(2n+1)^d}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor^{1/2}} \cdot \frac{(2\nu+1)^{d\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}} \cdot e^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} := b_n$$

Como $b_n = o(\frac{1}{n^2})$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$$

La demostración se concluye aplicando el Lema de Borel-Cantelli.

Teorema. Una Ley Fuerte de los grandes números para la densidad de ocupación:

$$\rho_n \rightarrow \rho \quad \lambda_{(0,1)}^{\mathbb{Z}^d} \text{ c.s.}$$

Demostración. Por el último lema probado sabemos que el n más grande para el cual $(A_n)_{n \geq 1}$ sucede es finito, lo llamamos l . Dado $\epsilon > 0$, elijo $i \in [n + \lfloor\sqrt{n}\rfloor\nu, (n+1) + \lfloor\sqrt{n+1}\rfloor\nu]$ para algún $n \geq l$ de forma que

$$\left(\frac{2(m+1) + \lfloor\sqrt{m+1}\rfloor 2\nu + 1}{2m+1} \right)^d - 1 < \epsilon \quad \forall m \geq n$$

Entonces por el teorema probado en la sección anterior, $P|_{\Lambda_n^{(d)}} = P_i|_{\Lambda_n^{(d)}}$ Obtenemos

$$\left| \frac{\sum_{x \in \Lambda_i^{(d)}} P(x) - \sum_{x \in \Lambda_i^{(d)}} P_i(x)}{(2i+1)^d} \right|$$

Esto es

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{x \in \Lambda_i^{(d)}} P(x)}{(2i+1)^d} - \frac{\sum_{x \in \Lambda_i^{(d)}} P_i(x)}{(2i+1)^d} \right) = 0 \text{ c.s.}$$

Como

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\sum_{x \in \Lambda_i^{(d)}} P(x)}{(2i+1)^d} = \rho \text{ c.s. y } \rho_i = \frac{\sum_{x \in \Lambda_i^{(d)}} P_i(x)}{(2i+1)^d} \rightarrow \rho \text{ c.s.}$$

La aplicación del teorema de convergencia acotada garantiza la existencia de $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\rho_n)$.

Cota superior e inferior, dimensión 1

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_i = \rho = \mathbb{E}(P_0) = P(\{P_0 = 1\}) = 1 - P(\{P_0 = 0\})$$

Sean $d = 1$, $\nu = 1$ y $S_1^{(1)} = \{(0, 0, 0)\}$ la dimensión, el tamaño del vecindario y la malla de exclusión respectivamente. Se define a r como el número entero positivo más chico que realiza el mínimo de $(\omega(i))_{i \geq 0}$ esto es:

$$r(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{i \in \mathbb{Z}_+ : \omega_i < \omega_{i+1}\}.$$

De manera similar

$$l(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} -\sup\{i \in \mathbb{Z}_- : \omega_{i-1} > \omega_i\}.$$

Podemos decir que para un elemento ω en $(0, 1)^{\mathbb{Z}^d}$, $r(\omega)$ es el valor positivo más chico para el cual a $i + 1$ ω le asigno un valor mayor. Y $l(\omega)$ es el valor menos i más grande entre los enteros negativos para el cual a $i - 1$ tiene asignado un valor mayor.

Ahora consideremos la partición $\{E_{ij}; i, j \in \mathbb{Z}_+\}$ de $B_{(0,1)}^{\mathbb{Z}}$ definida por:

$$E_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z}} : l(\omega) = i \text{ y } r(\omega) = j\}$$

y sea $p_{ij} = P(E_{ij})$.

Se puede ver que:

$$\{P_0 = 1\} = \{\omega \in (0, 1)^{\mathbb{Z}} : P(\omega)(0) = 1\} = \bigsqcup_{i,j=0}^{\infty} E_{2i,2j}$$

Y como

$$\rho = P(\{P_0 = 1\}) = \sum_{i,j=0}^{\infty} P(E_{2i,2j}) = \sum_{i,j=0}^{\infty} p_{2i,2j}$$

Utilizando combinatoria básica podemos ver que $P(E_{i,j})$:

$$\begin{aligned} &= \frac{ij}{(i+j+3)(i+1)!(j+1)!} + \frac{2}{(i+j+3)(i+j+2)(i+j+1)!j!} \\ &+ \frac{1}{(i+j+3)(i+j+2)} \left(\frac{i}{(i+1)!j!} + \frac{j}{(j+1)!i!} \right) \end{aligned}$$

Se pueden generar cotas inferiores para la densidad ρ sumando las primeras probabilidades de números pares y cotas superiores utilizando las sumas de probabilidad con primer índice impar y segundo índice par. Esto es

$$\begin{aligned} 0,4304 &= \sum_{i,j=0}^2 p_{2i,2j} \leq \rho \\ \rho &\leq 1 - \left(\sum_{0 \leq i \leq 2} \sum_{0 \leq j \leq 1} p_{2i,2j+1} + \sum_{0 \leq i \leq 1} \sum_{0 \leq j \leq 2} p_{2i+1,2j} + \sum_{0 \leq i,j \leq 1} p_{2i+1,2j+1} \right) = 0,4339 \end{aligned}$$

2.3. El Proceso de Estacionamiento en espacio discreto a tiempo continuo.

2.3.1. El proceso de estacionamiento continuo en \mathbb{Z}^d

Se puede pensar a los procesos de estacionamiento P_n , $n \geq 0$, descriptos en la primer sección de este capítulo, o sea el proceso de estacionamiento en \mathbb{Z}^d a tiempo discreto, como esqueletos de sistemas de partículas $(\eta_t^{(n)})_{t \geq 0}$ con condición inicial $\eta_0 = 0^{\mathbb{Z}^d}$ y tasas de salto $c(x, \eta)$ dadas por:

$$c(x, \eta) = 1_{\{x \in \Lambda_n^{(d)}\}} \cdot 1_{\{\theta_x(\eta) | \Lambda_\nu^{(d)} \in S_\nu^{(d)}\}} \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d, \eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$$

Esto es válido si las mallas $S_\nu^{(d)}$ son decrecientes, es decir para $\xi, \xi' \in S_\nu^{(d)}$, si $\xi \preceq \xi'$ entonces si $\xi' \in S_\nu^{(d)} \Rightarrow \xi \in S_\nu^{(d)}$, ya que de otro modo se generan procesos de estacionamiento no markovianos. O sea estamos frente a un Proceso de Markov a tiempo continuo.

Definiremos un sistema de partículas infinitas $(\eta_t)_{t \geq 0}$, por las tasas de salto:

$$c(x, \eta) = 1_{\{\theta_x(\eta) | \Lambda_\nu^{(d)} \in S_\nu^{(d)}\}} \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d, \eta \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$$

y la misma condición inicial $\eta_0 = 0^{\mathbb{Z}^d}$. Es decir construimos los procesos $(\eta_t^{(n)})_{t \geq 0}$, $n > 0$ y $(\eta_t)_{t \geq 0}$ juntos haciendo uso de las mismas marcas Poisson para concluir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_t^{(n)} = \eta_\infty^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \eta_\infty \stackrel{def}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_t \quad \text{casi seguramente}$$

La sucesión $(\eta_\infty^{(n)})_{n \geq 0}$ es probabilísticamente indistinguible de la sucesión de los límites empaquetados $(P_n)_{n \geq 0}$, podemos interpretar η_∞ como P , el límite de los límites empaquetados. Más explícitamente para cualquier n fijo P_n fue construido a través de los algoritmos en la primer sección de este capítulo, cada vez que se recorrió el algoritmo el proceso cambia de estado. Al estar en una caja finita la cantidad de veces que se recorre todo el algoritmo es finita también. Y una vez que la caja fue completamente recorrida obtenemos el límite P_n . Podemos considerar que cada vez que se recorre el algoritmo el proceso salta y esto representa los cambios de estado en el proceso continuo asociado $\eta_\infty^{(n)}$.

2.3.2. El Proceso de Estacionamiento en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$

Espacio discreto Sea \mathbb{Z}^d el reticulado d -dimensional. Para cada m entero positivo denotaremos con $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ a los puntos $\{\dots - \frac{l}{m}, -\frac{l-1}{m}, \dots, 0, \dots, \frac{l-1}{m}, \frac{l}{m}, \dots\}^d$, $l \in \mathbb{Z}$, en palabras $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ son los puntos de \mathbb{Q}^d en los cuales cada una de sus coordenadas puede ser

representada con el denominador igual a m , cada uno de estos sitios será denotado con la letra x .

Del mismo modo que se definieron los algoritmos en \mathbb{Z}^d se definen en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ utilizando como mallas $S_{\nu,m}^d \subseteq \{0,1\}^{\Lambda_{\nu,m}^d}$, donde $\Lambda_{\nu,m}^d = \{-\nu, -\nu - \frac{1}{m} \dots, 0, \dots, \nu - \frac{1}{m}, \nu\}^d$, que servirán de esqueletos para los respectivos sistemas de partículas en los que estamos interesados.

El Proceso de Estacionamiento a tiempo discreto en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ Para una malla de exclusión $S_{\nu,m}^d \subseteq \{0,1\}^{\Lambda_{\nu,m}^d}$, se define el proceso de exclusión en $\Lambda_{\nu,m}^{(d)}$ con condiciones de frontera nula a través del siguiente algoritmo:

Para cada $\omega \in (0,1)^{\frac{\mathbb{Z}^d}{m}}$ fijo

Paso 1: inicio $P_{n,m}(\omega) = 0^{\frac{\mathbb{Z}^d}{m}}$;

Paso 2: elijo $x \in \Lambda_{\nu,m}^{(d)}$ tal que

$\omega(x) = \inf\{\omega(\xi) : \xi \in X \text{ y } \xi \text{ todavía no elegido}\}$;

Paso 3: Si $\theta_x(P_{n,m}(\omega))|_{\Lambda_{\nu,m}^{(d)}} \in S_{\nu,m}^{(d)}$, entonces $P_{n,m}(\omega)(x) \leftarrow 1$;

Paso 4: Si existen puntos en $\Lambda_{\nu,m}^{(d)}$ no elegidos, volver al paso 2, sino parar el algoritmo.

Llamamos a la salida $P_{n,m}$ el límite empaquetado del proceso de exclusión, siendo este un elemento aleatorio de $\{0,1\}^{\frac{\mathbb{Z}^d}{m}}$ valuado en $((0,1)^{\frac{\mathbb{Z}^d}{m}}, B_{(0,1)}^{\frac{\mathbb{Z}^d}{m}}, \lambda_{(0,1)}^{\frac{\mathbb{Z}^d}{m}})$.

□

Observación. El algoritmo anterior se puede reproducir sobre cualquier conjunto $X \subseteq \frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ finito.

Definición. Dado un conjunto $X \subset \frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ finito y $\omega \in (0,1)^{\frac{\mathbb{Z}^d}{m}}$, se define el conjunto Armour de X como el subconjunto aleatorio:

$$\mathcal{A}(X)(\omega) = \{y \in \frac{\mathbb{Z}^d}{m} : \exists x \in X : y \uparrow_{(\omega)} x\}$$

Del mismo modo que se hizo en \mathbb{Z}^d se define el límite termodinámico, como:

Definición. El elemento/algoritmo límite será:

$$P^m : ((0,1)^{\frac{\mathbb{Z}^d}{m}}, B_{(0,1)}^{\frac{\mathbb{Z}^d}{m}}, \lambda_{(0,1)}^{\frac{\mathbb{Z}^d}{m}}) \longrightarrow (\{0,1\}^{\frac{\mathbb{Z}^d}{m}}, B_{\{0,1\}}^{\frac{\mathbb{Z}^d}{m}})$$

definido por

$$P^m(\omega)(x) \stackrel{\text{def}}{=} P_{\mathcal{A}(\{x\}),m}(\omega)(x), \forall x \in \frac{\mathbb{Z}^d}{m}$$

Es importante aclarar que los resultados sobre convergencia hacia el límite definido y los demás resultados expuestos válidos para el proceso de estacionamiento en \mathbb{Z}^d también valen para los elementos construidos en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$.

A continuación describiremos el proceso de estacionamiento en tiempo continuo a tasa λ en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$.

El Proceso de Estacionamiento a tiempo continuo en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ Pensaremos el proceso de estacionamiento en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ a tiempo discreto, como esqueletos de sistemas de partículas $(\eta_t^{(n,m)})_{t \geq 0}$ con condición inicial $\eta_0 = 0^{\mathbb{Z}^d}$ y tasas de salto $c(x, \eta)$ dadas por:

$$c(x, \eta) = \lambda \mathbb{1}_{\{x \in \Lambda_{n,m}^{(d)}\}} \cdot \mathbb{1}_{\{\theta_x(\eta) | \Lambda_{\nu,m}^{(d)} \in S_{\nu,m}^{(d)}\}} \quad \forall x \in \frac{\mathbb{Z}^d}{m}, \eta \in \{0, 1\}^{\frac{\mathbb{Z}^d}{m}}$$

Los procesos se describen de manera similar a como se lo hizo en \mathbb{Z}^d utilizando las tasas de salto descriptas.

Capítulo 3

Proceso de estacionamiento en \mathbb{R}^d a tiempo continuo

En este capítulo se construirá el proceso de estacionamiento en \mathbb{R}^d , primero se hará la construcción en una caja finita, para luego obtener el límite termodinámico.

3.1. El proceso de Estacionamiento en \mathbb{R}^d

El proceso de estacionamiento En el Proceso de estacionamiento en \mathbb{R}^d como en el proceso de nacimiento puro, los autos (representados por puntos en \mathbb{R}^d) estacionan a una tasa espacio temporal λ , pero restringidos a que efectivamente no haya otro auto estacionado en su vecindad. Cada punto espacio tiempo $(s, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ representa un auto que quiere estacionar en s a tiempo t . El auto estaciona si su vecindad, representada por la bola $B(s, \nu)$ tomada con la norma euclidea (de radio ν y centro s), no se interseca con otras bolas que posean autos estacionados. El radio del vecindario será designado por la letra ν , se supondrá fijo y una vez que un auto es estacionado este permanece para siempre.

Diremos que un auto s es compatible con un auto s' si $\|s - s'\| \geq 2\nu$ y escribiremos $s \sim s'$. Los autos que son compatibles pueden ser estacionados simultáneamente. Diremos que $s \sim \eta$ si $s \sim s'$ para todo $s' \in \eta$.

Si η es el conjunto de los autos estacionados a tiempo t , y un auto intenta estacionar en s en el intervalo de tiempo $[t, t + h]$, estaciona si $s \sim \eta$.

Estamos buscando un proceso que para h suficientemente pequeño (dependiendo de η) tal que para los siguientes eventos:

$$B_1 = \text{Un auto estaciona en } B(s, h) \times [t, t + h]$$

$$B_2 = \text{más de un auto estacione en } B(0, h) \times [t, t + h]$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1 | \eta_t = \eta) &= \lambda h \ell(B(0, h)) 1_{\{s \sim \eta\}} + o(h^{d+1}) \\ \mathbb{P}(B_2 | \eta_t = \eta) &= o(h^{d+1})\end{aligned}$$

La ecuación anterior se deduce aplicando el método de aproximación de Taylor a la probabilidad de que haya un nacimiento en un conjunto acotado, en este caso el vecindario de radio h alrededor del punto s . Recordar que al ser un proceso de Poisson a tasa λ , aunque restringiendome a cierta regla, la distribución de los puntos en un conjunto (compatible a tiempo t) es Poisson λ multiplicada por la medida del conjunto.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1 | \eta_t = \eta) &= \mathbb{P}(B_1 | \eta_t = \eta \cap \{s \sim \eta\}) \\ &\quad + \mathbb{P}(B_1 | \eta_t = \eta \cap \{s \not\sim \eta\}) \\ &= \lambda h \ell(B(0, h)) 1_{\{s \sim \eta\}} + o(h^{d+1})\end{aligned}$$

Utilizando que $e^{-\lambda \ell(B(0, h))h} \approx 1 + \lambda \ell(B(0, h))h + \dots$

$$\mathbb{P}(B_2 | \eta_t = \eta) = o(h^{d+1})$$

Cabe también destacar que h^{d+1} es del orden del volumen de $B(0, h)$ por h . Por esto, si calculamos $\mathbb{E}f(S_t)$ para $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas con soporte en Λ , las siguientes identidades son equivalentes:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(f(\eta_h) - f(\eta_0) | \eta_0 = \eta)}{h} = \int \lambda \mathbb{1}_{\{x \sim \eta\}} [f(\eta \cup \{x\}) - f(\eta)] dx$$

La integral depende solo de x en Λ , como f depende solo en $\eta \cap \Lambda$.

Llamaremos el *generador* del proceso η_t al operador $L : C(\mathcal{M}) \rightarrow C(\mathcal{M})$ dado por:

$$Lf(\eta) := \frac{d}{dt} \mathbb{E}[f(\eta_t) | \eta_t = \eta]$$

3.1.1. Existencia del proceso de estacionamiento.

Volumen finito.

Es simple construir el proceso con el generador. La existencia del proceso es fácilmente probada si consideramos autos arribando en una región finita Λ . Se pueden bien ordenar los autos espacio temporales a través de su tiempo de llegada:

Sea $\tau_0 = 0$ y $\tau_k = \inf\{t > \tau_{k-1} \text{ tal que } (s, t) \in \tilde{S}, s \in \Lambda\}$ para $k \geq 1$. Sea s_k la posición espacial asociada a τ_k . Se define inductivamente η_{Λ, τ_k} :

$$\eta_{\Lambda, 0} = \emptyset, \quad \eta_{\Lambda, \tau_k} = \begin{cases} \eta_{\Lambda, \tau_{k-1}} \cup \{s_k\} & \text{if } s_k \sim \eta_{\Lambda, \tau_{k-1}} \\ \eta_{\Lambda, \tau_{k-1}} & \text{si } s_k \not\sim \eta_{\Lambda, \tau_{k-1}} \end{cases}$$

Luego si $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ definimos $\eta_{\Lambda, t} = \eta_{\Lambda, \tau_k}$, $k \geq 0$. Cabe destacar que el proceso $\eta_{\Lambda, t}$ así definido satisface:

$$\mathbb{P}(\text{Un auto estaciona en } B(s, h) \text{ durante } [t, t+h] \mid \eta_{\Lambda, t} = \eta) = \lambda h \ell(B(0, h)) \mathbb{1}_{\{s \sim \eta\}} + o(h^{d+1})$$

$$\mathbb{P}(\text{más de un auto estacione en } B(0, h) \text{ durante } [t, t+h] \mid \eta_{\Lambda, t} = \eta) = o(h^{d+1})$$

Notaremos el proceso en la caja $\Lambda_n = \{-n, \dots, 0, \dots, n\}^d$ a tiempo t como $\eta_{\Lambda_n, t}$. Y si t tiende a ∞ obtenemos η_{Λ_n} .

Volumen infinito.

Los procedimientos utilizados para la construcción del proceso en una caja de volumen finito no pueden ser utilizados para construir el proceso en volumen infinito. Por un lado, la malla propuesta para intervalos de tiempo finita no es aplicable para volumen infinito porque no es posible determinar cual fue la primer marca en el tiempo. Y por otro lado debería seguir infinitamente en el tiempo para poder abarcar todos los puntos del espacio.

Para cada $(s, t) \in \tilde{S}$ que intenta estacionar, con $t > 0$ sea $B(s, \nu) \times [0, t]$ la región que debe estar vacía para poder estacionar en el lugar (s, t) , la llamaremos simplemente la *region* de (s, t) . Si la región de (s, t) no contiene autos estacionados previamente, diremos que (s, t) ha estacionado en $s \in \eta_{t'}$ para todo $t' \geq t$. Con el fin de determinar si la región de (s, t) esta vacía, necesitamos volver en el tiempo y examinar los autos ya estacionados que podrían tener influencia sobre la región (s, t) .

Definición. *Los ancestros de un punto (s, t) se definen de la siguiente manera constructiva:*

Sea $A_1(s, t)$ los puntos $(s', t') \in \tilde{S}$ en la región de (s, t) . Llamamos $A_1(s, t)$ la primer generación de ancestros de (s, t) . Mas precisamente,

$$A_1(s, t) = \tilde{S} \cap (B(s, 2\nu) \times [0, t))$$

inductivamente $A_0(s, t) = \{s, t\}$ y

$$A_n(s, t) := \cup_{(s', t') \in A_{n-1}} A_1(s', t') ; \quad A(s, t) = \cup_{n \geq 0} A_n(s, t)$$

siendo A_n la n -ésima generación de ancestros de (s, t) y A es el conjunto total de ancestros. Si asumimos que $|A(s, t)|$, el numero total de ancestros de (s, t) es finito. Entonces podemos ordenar a los ancestros de (s, t) por su tiempo de arribo, y para cada $(s, t) \in \tilde{S}$ con $t' > 0$,

$$(s, t) \in \eta_t \text{ si } s' \notin \eta_t \text{ for all } (s', t') \in A_1(s, t)$$

Precisamos probar dos cosas:

1. Probar que la cantidad de ancestros es finita para todo t
2. Mostrar que la construcción es acorde al proceso que necesitamos.

Teorema. *Las dos siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *La primer generación de ancestros de un punto (s, t) es una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro $\lambda\ell(B(0, 2\nu))t$.*
2. *El número esperado de ancestros de (s, t) está acotado por $e^{\lambda\ell(B(0, 2\nu))t}$.*

Demostración.

1. *La primer parte de la proposición se visualiza facilmente, como*

$$|A_1(s, t)| = |\tilde{S} \cap [B(s, 2\nu) \times [0, t]]|$$

es el número de puntos de \tilde{S} en la región de (s, t) , que tiene medida de lebesgue $\ell(B(0, 2\nu))t$. De ahí que $|A_1(s, t)|$ es una variable Poisson con media $\lambda\ell(B(0, 2\nu))t$.

2. *Para la segunda parte, sea $u \in [0, t]$ y definimos*

$$n(u) = \mathbb{E}|A(s, t) \cap [\mathbb{R}^d \times [t - u, t]]|$$

El número esperado de ancestros de (s, t) , de todas las generaciones, nacidos en el intervalo de tiempo $[t - u, t]$. Probaremos que,

$$\frac{d}{du}n(u) \leq \lambda\ell(B(0, 2\nu))n(u)$$

Para hacerlo,

$$\begin{aligned} n(u+h) - n(u) &= \mathbb{E}|A(s, t) \cap [\mathbb{R}^d \times [t - u - h, t]]| - \mathbb{E}|A(s, t) \cap [\mathbb{R}^d \times [t - u, t]]| \\ &= \mathbb{E}|A(s, t) \cap [\mathbb{R}^d \times [t - u - h, t - u]]| \end{aligned}$$

Si $(s', t') \in A(s, t) \cap \mathbb{R}^d \times [t - u - h, t - u]$ entonces $(s', t') \in A_1(x, \tau)$ para $(x, \tau) \in \mathbb{R}^d \times [t - u, t]$ ó $(x, \tau) \in \mathbb{R}^d \times [t - u - h, t - u]$. Utilizando la afirmación anterior

obtemos la siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
n(u+h) - n(u) &= \mathbb{E} \left| \bigcup_{(s',t') \in A(s,t), t' > t-u} A_1(s',t') \cap [\mathbb{R}^d \times [t-u-h, t-u]] \right| \\
&+ \mathbb{E} \left| \bigcup_{(s',t') \in A(s,t), t' \in [t-u-h, t-u]} A_1(s',t') \cap [\mathbb{R}^d \times [t-u-h, t-u]] \right| \\
&= \mathbb{E} \left| \bigcup_{(s',t') \in A(s,t), t' > t-u} A_1(s',t') \cap [\mathbb{R}^d \times [t-u-h, t-u]] \right| + o(h) \\
&\leq \mathbb{E} \sum_{(s',t') \in A(s,t), t' > t-u} |A_1(s',t') \cap [\mathbb{R}^d \times [t-u-h, t-u]]| + o(h) \\
&= n(u)\lambda\ell(B(0,2\nu))h + o(h)
\end{aligned}$$

Dividiendo por h y tomando límite, $h \rightarrow 0$, obtenemos:

$$\frac{d}{du}n(u) \leq \lambda\ell(B(0,2\nu))n(u)$$

Resolviendo la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}n(u) &= \lambda\ell(B(0,2\nu))n(u) \\
\frac{dn}{n(u)} &= \lambda\ell(B(0,2\nu))du \\
\Rightarrow \int \frac{dn}{n(u)} &= \int \lambda\ell(B(0,2\nu))du \\
\ln(n(u)) &= \lambda\ell(B(0,2\nu))u + C \\
n(u) &= e^{\lambda\ell(B(0,2\nu))u} K
\end{aligned}$$

La constante C es cero y como las funciones logaritmo y exponencial son crecientes así como también la integral, obtenemos la desigualdad requerida:

$$n(t) \leq e^{\lambda\ell(B(0,2\nu))t}$$

ya que dada la σ -álgebra inducida por $((s,t) \in \tilde{S} : t' \in [t-u, t])$, los procesos $A_1(s',t') \cap [\mathbb{R}^d \times [t-u-h, t-u]]$ son Poisson de media $\lambda\ell(B(0,2\nu))h$.

Por lo tanto,

$$n(t) \leq e^{\lambda\ell(B(0,2\nu))t}$$

■

La proposición anterior muestra que la cantidad de ancestros de cualquier punto (s, t) es finita. Como la relación (s', t') ancestro de (s, t) es una relación transitiva, podemos decidir si el auto (s, t) puede estacionar mirando los ancestros de los ancestros y proceder del mismo modo que en el caso finito.

Ahora usaremos el hecho de que para cualquier punto $(s, t) \in \tilde{S}$, este queda estacionado acorde a si su conjunto de ancestros se lo permite o no.

Podemos afirmar que el momento en que un punto intenta nacer o no es el tiempo de parada, o sea que a partir de ese momento el lugar permanecerá en ese estado, ocupado o vacío para siempre.

Definición. Se define el proceso de estacionamiento en todo \mathbb{R}^d como η

$$\eta_t(x) = \eta_{A(x,t),t}(x)$$

En el siguiente teorema como se hizo en el caso discreto, demostrara la estabilidad del proceso de estacionamiento y será de completa utilidad para poder determinar la convergencia casi segura hacia el límite.

Teorema. La siguiente igualdad es valida,

$$\begin{aligned} \eta_{\Lambda_n,t}(A(x,t))|_{A(x,t)} &= \eta_{A(x,t),t}(A(x,t))|_{(A(x,t))} \\ &\text{en } \{\Lambda_n \times [0, t) \supset (A(x,t))\} \end{aligned}$$

Previamente a exponer la demostración del teorema enunciado arriba, se escribirán algunas definiciones similares a las del capítulo 2 de esta tesis. Es destacable aclarar que la técnica de demostración es similar a la del teorema análogo en \mathbb{Z}^d .

Definición. Para todo $\nu \geq 1$, la frontera ν interior de un conjunto acotado $X \subset \mathbb{R}^d$ es definida como el conjunto

$$\Delta_\nu^{(in)}(X) \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^d : x \in X \text{ y } \exists y \in \mathbb{R}^d \setminus X \text{ tal que } \|x - y\| \leq \nu\}$$

La frontera ν exterior es definida de manera análoga:

$$\Delta_\nu^{(out)}(X) \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^d : x \notin X \text{ y } \exists y \in X \text{ tal que } \|x - y\| \leq \nu\}$$

Demostración.

Observación. Es destacable y de suma utilidad para la demostración del teorema el hecho de que al ser el conjunto de Ancestros finito y el volumen de la caja Λ_n finito,

por ende los puntos de los mismos pueden ser ordenados a través de su tiempo de nacimiento.

Los puntos del conjunto de Ancestros que distan menos que ν de la frontera del conjunto pueden ser influenciados por puntos que distan menos que ν de la frontera del conjunto de Ancestros pero que pertenecen a el complemento del conjunto de Ancestros. Esto quiere decir que si:

Dado $y \in \Delta_\nu^{(out)}(A(x, t))$ puede influenciar a algún $z \in \Delta_\nu^{(in)}(A(x, t))$, pero si esto pasara entonces el punto y pertenecería al conjunto de Ancestros, por lo tanto si $y \in \Delta_\nu^{(out)}(A(x, t))$ entonces el tiempo en que intento nacer es posterior al de cualquier elemento $z \in \Delta_\nu^{(in)}(A(x, t))$.

Ahora estamos en condiciones efectivas de realizar nuestra demostración, comenzaremos numerando los elementos del conjunto de Ancestros según su tiempo de aparición $\tau \in \{1, 2, \dots, \#A(x, t)\}$, miramos los procesos de estacionamiento η_{Λ_n} y $\eta_{A(x, t)}$ a tiempo τ , esto sería inmediatamente antes de un arribo, en el lugar y_τ .

La demostración se hará por inducción sobre τ :

Base de inducción:

A tiempo $\tau = 1$, tomando como configuración inicial la configuración vacía.

$$\eta_{\Lambda_n}(A(x, t)) = \eta_{A(x, t)}(A(x, t)) = 0^{A(x, t)}.$$

Hipotesis Inductiva:

Supongo que $\eta_{\Lambda_n}(A(x, t)) = \eta_{A(x, t)}(A(x, t))$ a tiempo $\tau \in \{1, 2, \dots, \#A(x, t)\}$.

Paso Inductivo:

Veamos que a partir de la hipotesis inductiva, si hasta el tiempo τ los procesos son iguales entonces en el objeto que intenta estacionar en el tiempo τ los procesos también son iguales y por lo tanto hasta el tiempo $\tau + 1$ los procesos serán iguales.

Si $y_\tau \notin \Delta_\nu^{(in)}(A(x, t))$, por la hipotesis inductiva:

$\eta_{\Lambda_n}(y) = \eta_{A(x, t)}(y)$ a tiempo τ para todo y que pertenece al ν -vecindario de y_τ , es decir $y \in B(y_\tau, \nu) \stackrel{def}{=} \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - y_\tau\| \leq \nu\}$.

Pero entonces la decisión de si el lugar y_τ será ocupado o permanecerá vacío será la misma en ambos procesos y por lo tanto los procesos se mantienen iguales hasta el tiempo $\tau + 1$ en donde otro lugar intentara ser ocupado o no.

Si $y_\tau \in \Delta_\nu^{(in)}(A(x, t))$, nuevamente utilizamos la hipótesis inductiva para afirmar que η_{Λ_n} y $\eta_{A(x, t)}$ son iguales en $B(y_\tau, \nu) \cap A(x, t)$.

Pero como $B(y_\tau, \nu) \cap A(x, t)^c \subset \Delta_\nu^{(out)}(A(x, t))$, entonces η_{Λ_n} no puede tener arribos en esta región hasta tiempo τ , por lo explicado en la observación previa a comenzar la demostración y por lo tanto,

$$\eta_{\Lambda_n}(y) = \eta_{A(x, t)}(y) \quad \forall y \in B(y_\tau, \nu) \cap A(x, t)^c.$$

Asi η_{Λ_n} y $\eta_{A(x, t)}$ coinciden nuevamente en toda la bola $B(y_\tau, \nu)$ a tiempo τ , y por la misma razon que antes tenemos $\eta_{\Lambda_n}|A(x, t) = \eta_{A(x, t)}|A(x, t)$ a tiempo $\tau + 1$.



Capítulo 4

Proceso de estacionamiento en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$

En este capítulo se construira el proceso en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ a partir del proceso de estacionamiento en \mathbb{R}^d .

Se mostrara que el generador de cada proceso definido en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ es similar al generador del proceso definido en el capítulo 2, $m \in \mathbb{N}$. Por lo cual se puede concluir que poseen la misma dinámica.

Luego se expondrá la Markovianidad de los procesos y el cumplimiento de las ecuaciones de Kolmogorov (Backward y Forward).

En el final de este capítulo, se mostrara la convergencia de los procesos de estacionamiento en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ hacia el proceso de estacionamiento en \mathbb{R}^d .

4.1. Construcción de los procesos

El espacio de configuraciones. Sea \mathbb{Z}^d el reticulado d -dimensional y para cada m entero positivo $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ como fue definido en el capítulo 2.

Como en el proceso de estacionamiento en \mathbb{Z}^d cada sitio puede tener a lo sumo una partícula, por lo cual el espacio de estados del proceso (también llamado de configuraciones) con el que estamos trabajando es $\mathcal{X}_m = \{0, 1\}^{\frac{\mathbb{Z}^d}{m}}$. Siendo $\mathcal{X} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, para $\xi \in \mathcal{X}$, tenemos que:

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si hay una partícula en } x \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Denotaremos por \mathcal{X}_m^Λ al espacio de las configuraciones restringiendonos a los puntos de $\frac{\mathbb{Z}^d}{m} \cap \Lambda$.

Definición. Diremos que podemos saltar de una configuración ξ a una configuración ξ' en \mathcal{X}_m^Λ si:

$$\xi'(x) \geq \xi(x) \quad \forall x \in \frac{\mathbb{Z}^d}{m} \cap \Lambda$$

Construcción en una caja finita Λ . Describiendo informalmente los procesos de estacionamiento en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m} \cap \Lambda$ definidos a partir del proceso de estacionamiento continuo, es de utilidad comenzar pensando a dichos procesos definidos en dos etapas. La primera etapa consiste en utilizar los puntos del proceso de nacimiento puro en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$, $\tilde{S} \cap \Lambda \times \mathbb{R}_+$, para definir un proceso de nacimiento puro en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m} \cap \Lambda$, al cual denotaremos como $\tilde{S}_m \cap \Lambda \times \mathbb{R}_+$. Como segunda etapa utilizaremos sobre dichos puntos una regla de decisión para asignarles valor 0 ó 1 a cada uno de ellos.

Primera etapa

Se definen las marcas del proceso de nacimiento puro en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m} \times \mathbb{R}_+$ de la siguiente manera: Si (s, t) punto de \tilde{S} entonces $\exists s_m$ de $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ tal que $\|s_m - s\| \leq \frac{1}{2m}$, s_m pertenecerá a \tilde{S}_m .

Segunda etapa

En esta etapa describiremos la dinámica del proceso de estacionamiento en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m} \times \mathbb{R}_+$.

La evolución del proceso puede ser descrita de la siguiente manera:

Damos una configuración inicial $\eta_{\Lambda,0}^m$, pudiendo ser $\eta_{\Lambda,0}^m(x) = 0 \quad \forall x \in \frac{\mathbb{Z}^d}{m} \cap \Lambda$.

En forma independiente respecto de las demás cada sitio tiene asignada una marca exponencial de parámetro λ según la cual una partícula se intenta estacionar en el mismo y permanecer para siempre. Estas marcas son utilizadas por orden de aparición, para denotar los tiempos en que las partículas intentan estacionar en los sitios asociados a las marcas.

La forma en que se decide si la partícula permanece o no, es lo que denominamos la regla de decisión.

Una partícula en el lugar x , $x \in \frac{\mathbb{Z}^d}{m} \cap \Lambda$, decide permanecer para siempre si todo el vecindario de radio ν no esta ocupado.

Más adelante se describirá con mayor detalle la dinámica de los procesos a través de sus generadores infinitesimales.

Denotaremos el proceso en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m} \cap \Lambda$ a tiempo $t + h$ como:

$$\eta_{\Lambda,t+h}^m(x) = \begin{cases} \eta_{\Lambda,t}^m(x) & \text{si } \eta_{\Lambda,t}^m(x) = 1 \\ \mathbb{1}_{\{x \sim \eta_{\Lambda,t}\}}(x) & \text{si } (x, s) \in \tilde{S}_m \cap (\Lambda \times (t, t + h]) \end{cases}$$

Construcción en volumen infinito. La construcción en volumen infinito se hará definiendo el límite termodinámico de la misma forma en que se hizo en el capítulo 2, en

el cual para todo (s, t) se define el límite por lo que vale el proceso en el conjunto Armour de (s, t) en (s, t) . En las secciones siguientes se mostrara la convergencia entre el Armour de los procesos discretos y el conjunto de Ancestros del proceso continuo, para a partir de ello definir el proceso límite. Una aclaración significativa es que el Armour de los procesos discretos definidos en este capítulo se define de la misma manera que en el capítulo 2.

4.1.1. Markovianidad

Veremos que el proceso de estacionamiento en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m} \cap \Lambda$ definido a partir del proceso continuo es Markoviano para todo $m \in \mathbb{N}$.

Definición. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad. Sean $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, σ -álgebras. Se dice que $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ es un filtración, si:

$$\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+s} \subseteq \mathcal{F} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Podemos pensar que \mathcal{F}_t representa toda la información disponible hasta tiempo t . Un proceso estocástico $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ se dice que es adaptado a la filtración $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ si para cada $t \in \mathbb{R}_+$, X_t es \mathcal{F}_t medible. (Notamos, $X_t \in \mathcal{F}_t$)

Para demostrar que para cada m fijo, el proceso definido en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m} \cap \Lambda$ es Markoviano recurriremos al siguiente teorema:

Teorema. Un proceso estocástico cumple con la propiedad de Markov, i.e:

$$\mathbb{P}(X_{t+h} \in A | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X_{t+h} \in A | X_t) \quad (4.1)$$

si y solo si, cumple:

$$\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d),$$

$$\mathbb{E}(f(X_{t+h}) | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(X_{t+h}) | X_t) \quad (4.2)$$

Demostración. Como primer instancia se demostrara 4.1 implica 4.2 de manera constructiva. Al ser f una función continua comenzaremos por probar la implicación para funciones indicadoras, luego para funciones simples, seguido por funciones positivas y por último para funciones continuas.

1. Sea $f = \mathbb{1}_A$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X_{t+h}) | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}(X_{t+h} \in A | \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{P}(X_{t+h} \in A | X_t) \\ &= \mathbb{E}(f(X_{t+h}) | X_t) \end{aligned}$$

2. Si f una función simple, utilizando la linealidad de la integral vale la igualdad.
3. Si f es una función positiva, existe una sucesión de funciones simples que se aproximan a ella, y el resultado sale del teorema de convergencia monótona.
4. Si f es una función continua, f puede escribirse como resta de funciones positivas y nuevamente utilizando la linealidad de la Esperanza condicional se concluye el resultado. ■

Como el proceso en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m} \cap \Lambda$ a tiempo $t + h$ se escribe de la siguiente manera:

$$\eta_{\Lambda, t+h}^m(x) = \begin{cases} \eta_{\Lambda, t}^m(x) & \text{si } \eta_{\Lambda, t}^m(x) = 1 \\ \mathbb{1}_{\{x \sim \eta_{\Lambda, t}\}}(x) & \text{si } (x, s) \in \tilde{S}_m \cap (\Lambda \times (t, t + h]) \end{cases}$$

Podemos pensarlo de la forma $\eta_{\Lambda, t+h}^m = F(\eta_{\Lambda, t}^m, U)$, donde F es una función determinística que depende de la configuración del proceso a tiempo t y del proceso libre en el intervalo temporal $(t, t + h]$, representado por el elemento aleatorio U . Destacando que el proceso de nacimiento puro es completamente independiente de la configuración del proceso de estacionamiento a tiempo t y además Markoviano, podemos concluir que estamos en condiciones de poder probar que los procesos de estacionamiento definidos en este capítulo son Markovianos.

Acudiendo al último teorema enunciado, concluiremos la Markovianidad de los procesos de estacionamiento definidos en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m} \cap \Lambda$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Para ello planteamos la esperanza condicional del proceso a tiempo $t + h$ dada la información del mismo hasta tiempo t , esta información será representada por la σ -álgebra generada por $\eta_{\Lambda, t}^m$ (denotada como \mathcal{F}_t).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(\eta_{\Lambda, t+h}^m) | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(f(F(\eta_{\Lambda, t}^m, U)) | \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(f(F(\eta_{\Lambda, t}^m, U)) | \eta_{\Lambda, t}^m) \\ &= \mathbb{E}(f(\eta_{\Lambda, t+h}^m) | \eta_{\Lambda, t}^m) \end{aligned}$$

La segunda igualdad queda justificada por el hecho de que el elemento U es independiente de la historia del proceso hasta tiempo t .

4.2. Generadores infinitesimales y Ecuaciones de Kolmogorov

4.2.1. Probabilidades infinitesimales

Definiremos las probabilidades infinitesimales del proceso de estacionamiento en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m} \cap \Lambda$, definido a partir del proceso de estacionamiento en \mathbb{R}^d a tiempo continuo, si el

4.2. GENERADORES INFINITESIMALES Y ECUACIONES DE KOLMOGOROV 53

proceso esta definido en base a un proceso de nacimiento puro a tasa λ , las probabilidades infinitesimales de transición serán las siguientes:

1. En el caso de calcular la probabilidad de saltar de una configuración η a otra configuración η' en un intervalo de tiempo h , donde el soporte de η' es similar al soporte de $\eta \cup \{s\}$, $s \in \tilde{S}_m$.

$$P_{\eta\eta'}(h) = h\lambda\mathbb{1}_{\{\eta' \sim \eta\}}\ell(B(s, \frac{1}{2m})) + o(\ell(B(s, \frac{1}{2m}))h)$$

Puede interpretarse, como que la probabilidad de que se estacione un auto en el punto $s \in \tilde{S}_m$ y ocupe su vecindario es equivalente a que en el proceso continuo se estacione un auto en algún punto del entorno de s con radio $\frac{1}{2m}$.

2. En el caso en que el soporte de η' es similar al soporte de η unión $\{s, s', \dots, s^i\}$, $s, \dots, s^i \in \tilde{S}_m, \forall 2 \leq i \leq \#(\tilde{S}_m \cap \Lambda)$.

$$P_{\eta\eta'}(h) = o(h\ell(B(s, \frac{1}{2m})))$$

3. La tercer situación que puede presentarse es que en un tiempo pequeño h la configuración permanezca intacta, siendo la probabilidad de esta situación:

$$P_{\eta\eta}(h) = 1 - \sum_{\eta' \neq \eta} P_{\eta\eta'}(h)$$

Con estas probabilidades de transición infinitesimales podemos definir la matriz de transición estocástica $P(h)$, del proceso de estacionamiento en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m} \cap \Lambda$.

4.2.2. Generadores

En esta sección utilizando las probabilidades infinitesimales descritas en la subsección anterior, escribiremos los generadores de los procesos de estacionamiento discretos obtenidos a partir del proceso continuo. Y los compararemos con los generadores de los procesos discretos descritos en el capítulo 2 y el proceso de estacionamiento continuo. Encontraremos a partir de los generadores la similitud entre las dinámicas de los procesos discretos definidos a partir del proceso continuo y la de los procesos de estacionamiento discretos descritos en el capítulo 2.

En primera instancia definiremos la matriz de tasas asociada a un proceso Markoviano y a partir de ella daremos la definición del generador de dicho proceso.

Algunas definiciones necesarias

Teorema. Siendo $\{P_t : t \geq 0\}$ el semigrupo de matrices de transición asociado a un proceso Markoviano $(X_t)_{t \geq 0}$. Existe una matriz $Q = \{q(x, y) : x, y \in \mathcal{X}, \mathcal{X} \text{ espacio de estados}\}$, llamada matriz de tasas, que verifica:

$$\begin{aligned} P_h(x, y) &= hq(x, y) + o(h) \text{ si } x \neq y \\ P_h(x, x) &= 1 + hq(x, x) + o(h) \end{aligned}$$

La matriz Q verifica

1. $q(x, y) \geq 0$ si $x \neq y$,
2. $q(x, x) = -\sum_{y \in \mathcal{X}, y \neq x} q(x, y) \leq 0$.

Definición. Toda matriz Q verificando estas propiedades se llama matriz de tasas.

La matriz de tasas Q define un operador sobre el espacio de funciones definidas en el espacio de estados \mathcal{X} tomando valores en \mathbb{R} . Para $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, consideramos

$$L[f](x) = \sum_{y \in \mathcal{X}} q(x, y)f(y) = \sum_{y \in \mathcal{X}} q(x, y)[f(y) - f(x)]$$

Ahora si estamos en condiciones de escribir los generadores de los procesos que aparecen en este documento.

Generadores

Comenzamos recordando cómo es explícitamente el generador del proceso de estacionamiento a tasa λ en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ a tiempo continuo, escrito en el capítulo 2.

La matriz de tasas del proceso de estacionamiento en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ es:

$$q(\eta, \eta') = \lambda \mathbb{1}_{\{s \in \Lambda_n^d\} \cap \{\theta_s(\eta)|_{\Lambda_v^d} \in S_v^d\}}(s) p_{\eta\eta'} \text{ si } \eta' = \eta \cup \{s\}$$

Donde $p_{\eta\eta'}$ vale 0 ó 1 debido a lo siguiente:

Una vez que la indicadora vale 1 ya se sabe que el lugar puede ser ocupado exactamente por una partícula y por lo tanto la probabilidad de pasar de la configuración η a la configuración η' es 1; si la indicadora vale cero la configuración η' no es admisible y $p_{\eta\eta'}$

vale 0.

El generador queda definido de la siguiente manera:

$$L_1[f](\eta) = \sum_{\eta' \in \mathcal{X}_m^\Lambda, \eta' = \eta \cup \{s\}} q(\eta, \eta')(f(\eta') - f(\eta))$$

Para cada m el proceso definido en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m} \cap \Lambda$ a partir del proceso continuo utilizando el último teorema expuesto concluimos que su generador está definido por:

$$L_2[f](\eta) = \sum_{\eta' \in \mathcal{X}_m^\Lambda, \eta' = \eta \cup \{s\}} \mathbb{1}_{\{\eta' \sim \eta\}} h \lambda \ell(B(s, \frac{1}{2m})) (f(\eta') - f(\eta))$$

Para verificar que los operadores L_1 y L_2 son iguales nos basta con mostrar que $q(\eta, \eta') = \mathbb{1}_{\{\eta' \sim \eta\}} h \lambda \ell(B(s, \frac{1}{2m}))$.

Efectivamente:

Si miramos el proceso de estacionamiento en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ definido a partir del proceso de estacionamiento continuo y pensamos que en cada punto s de $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$, ponemos un vecindario $B(s, \frac{1}{2m})$ ocurre que ahí dentro hay a lo sumo una exponencial a tasa λ en un tiempo infinitesimal y por lo tanto podemos pensar que cada punto del proceso este tiene asignada una variable exponencial.

Como en el proceso $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ construido en el capítulo 2, cada punto tiene asignada una variable exponencial, podemos concluir que los generadores de ambos procesos son similares.

4.2.3. Ecuaciones de Kolmogorov

Teorema. *Las probabilidades de transición cumplen:*

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\eta\eta'}(t)}{dt} &= \sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda / \eta' = \eta'' \cup \{s\}, s \in \frac{\mathbb{Z}^d}{m}} [\lambda \mathbb{1}_{\{\eta' \sim \eta''\}} \ell(B(s, \frac{1}{2m}))] P_{\eta\eta''}(t) \\ &- \left[\sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda / \eta' = \eta'' \cup \{s\}, s \in \frac{\mathbb{Z}^d}{m}} [\lambda \mathbb{1}_{\{s \sim \eta\}} \ell(B(s, \frac{1}{2m}))] \right] P_{\eta\eta'}(t) \quad (\text{Ecuación Forward}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\eta\eta'}(t)}{dt} &= \sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda / \eta'' = \eta \cup \{s\}, s \in \tilde{S}_m \cap \Lambda} P_{\eta''\eta'}(t) [\lambda \mathbb{1}_{\{\eta'' \sim \eta\}} \ell(B(s, \frac{1}{2m}))] \\ &- P_{\eta\eta'}(t) \left[\sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda / \eta'' = \eta \cup \{s\}, s \in \tilde{S}_m \cap \Lambda} [\lambda \mathbb{1}_{\{s \sim \eta\}} \ell(B(s, \frac{1}{2m}))] \right] \quad (\text{Ecuación Backward}) \end{aligned}$$

Demostración.

Ecuación forward:

A modo de notación, indicaremos que $\eta \sim \eta'$ si el soporte de η , pudiendo leerse como que la configuración η es compatible con la configuración η'

$$\begin{aligned}
P_{\eta\eta'}(t+h) &= P(\eta_{t+h} = \eta' | \eta_0 = \eta) \\
&= \sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda} \frac{P(\eta_{t+h} = \eta' \cap \eta_0 = \eta \cap \eta_t = \eta'')}{P(\eta_0 = \eta)} \\
&= \sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda} \frac{P(\eta_{t+h} = \eta' | \eta_0 = \eta \cap \eta_t = \eta'') P(\eta_0 = \eta \cap \eta_t = \eta'')}{P(\eta_0 = \eta)} \\
&= \sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda} P(\eta_{t+h} = \eta' | \eta_t = \eta'') P(\eta_t = \eta'' | \eta_0 = \eta) \\
&= \sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda / \eta' = \eta'' \cup \{s\}, s \in \frac{\mathbb{Z}^d}{m}} [h\lambda \mathbb{1}_{\{\eta' \sim \eta''\}} \ell(B(s, \frac{1}{2m})) + o(\ell(B(s, \frac{1}{2m}))h)] P_{\eta\eta''}(t) \\
&+ \sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda / d(\eta', \eta'') \geq 2} [o(h)] P_{\eta\eta''}(t) \\
&+ [1 - \sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda / \eta' = \eta'' \cup \{s\}, s \in \frac{\mathbb{Z}^d}{m}} [h\lambda \mathbb{1}_{\{s \sim \eta\}} \ell(B(s, \frac{1}{2m})) + o(\ell(B(s, \frac{1}{2m}))h)]] P_{\eta\eta'}(t)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{P_{\eta\eta'}(t+h) - P_{\eta\eta'}(t)}{h} &= \frac{1}{h} [\sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda / \eta' = \eta'' \cup \{s\}, s \in \frac{\mathbb{Z}^d}{m}} [h\lambda \mathbb{1}_{\{\eta' \sim \eta''\}} \ell(B(s, \frac{1}{2m})) + o(\ell(B(s, \frac{1}{2m}))h)] P_{\eta\eta''}(t) \\
&+ \sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda / d(\eta', \eta'') \geq 2} [o(h)] P_{\eta\eta''}(t) \\
&- \sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda / \eta' = \eta'' \cup \{s\}, s \in \frac{\mathbb{Z}^d}{m}} [h\lambda \mathbb{1}_{\{s \sim \eta\}} \ell(B(s, \frac{1}{2m})) + o(\ell(B(s, \frac{1}{2m}))h)]] P_{\eta\eta'}(t)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{\eta\eta'}(t+h) - P_{\eta\eta'}(t)}{h} &= \sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda / \eta' = \eta'' \cup \{s\}, s \in \frac{\mathbb{Z}^d}{m}} [\lambda \mathbb{1}_{\{\eta' \sim \eta''\}} \ell(B(s, \frac{1}{2m}))] P_{\eta\eta''}(t) \\
&- \sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda / \eta' = \eta'' \cup \{s\}, s \in \frac{\mathbb{Z}^d}{m}} [\lambda \mathbb{1}_{\{s \sim \eta\}} \ell(B(s, \frac{1}{2m}))] P_{\eta\eta'}(t)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

4.2. GENERADORES INFINITESIMALES Y ECUACIONES DE KOLMOGOROV 57

Ecuación Backward:

$$\begin{aligned}
P_{\eta\eta'}(t+h) &= P(\eta_{t+h} = \eta' | \eta_0 = \eta) \\
&= \sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda} \frac{P(\eta_{t+h} = \eta' \cap \eta_0 = \eta \cap \eta_h = \eta'')}{P(\eta_0 = \eta)} \\
&= \sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda} \frac{P(\eta_{t+h} = \eta' | \eta_0 = \eta \cap \eta_h = \eta'') P(\eta_0 = \eta \cap \eta_h = \eta'')}{P(\eta_0 = \eta)} \\
&= \sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda} P(\eta_{t+h} = \eta' | \eta_h = \eta'') P(\eta_h = \eta'' | \eta_0 = \eta) \\
&= \sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda / \eta'' = \eta \cup \{s\}, s \in \tilde{S}_m} P_{\eta''\eta'}(t) [h\lambda \mathbb{1}_{\{\eta'' \sim \eta\}} \ell(B(s, \frac{1}{2m})) + o(\ell(B(s, \frac{1}{2m}))h)] \\
&+ \sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda / d(\eta, \eta'') \geq 2} P_{\eta''\eta'}(t) [o(h)] \\
&+ P_{\eta\eta'}(t) [1 - \sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda / \eta'' = \eta \cup \{s\}, s \in \tilde{S}_m \cap \Lambda} [h\lambda \mathbb{1}_{\{s \sim \eta\}} \ell(B(s, \frac{1}{2m})) + o(\ell(B(s, \frac{1}{2m}))h)]]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{P_{\eta\eta'}(t+h) - P_{\eta\eta'}(t)}{h} &= \frac{1}{h} [\sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda / \eta'' = \eta \cup \{s\}, s \in \tilde{S}_m} P_{\eta''\eta'}(t) [h\lambda \mathbb{1}_{\{\eta'' \sim \eta\}} \ell(B(s, \frac{1}{2m})) + o(\ell(B(s, \frac{1}{2m}))h)] \\
&+ \sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda / d(\eta, \eta'') \geq 2} P_{\eta''\eta'}(t) [o(h)] \\
&- P_{\eta\eta'}(t) [\sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda / \eta'' = \eta \cup \{s\}, s \in \tilde{S}_m \cap \Lambda} [h\lambda \mathbb{1}_{\{s \sim \eta\}} \ell(B(s, \frac{1}{2m})) + o(\ell(B(s, \frac{1}{2m}))h)]]]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{\eta\eta'}(t+h) - P_{\eta\eta'}(t)}{h} &= \sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda / \eta'' = \eta \cup \{s\}, s \in \tilde{S}_m \cap \Lambda} P_{\eta''\eta'}(t) [\lambda \mathbb{1}_{\{\eta'' \sim \eta\}} \ell(B(s, \frac{1}{2m}))] \\
&- P_{\eta\eta'}(t) [\sum_{\eta'' \in \mathcal{X}_m^\Lambda / \eta'' = \eta \cup \{s\}, s \in \tilde{S}_m \cap \Lambda} [\lambda \mathbb{1}_{\{s \sim \eta\}} \ell(B(s, \frac{1}{2m}))]].
\end{aligned} \tag{4.8}$$

■

4.3. El espacio de las Configuraciones

En esta sección se escribirá sobre la convergencia de los procesos de estacionamiento en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ hacia el proceso de estacionamiento en \mathbb{R}^d cuando m tiende a infinito. La idea se basará en el hecho de pensar cuál es la distancia entre los autos estacionados en los procesos discretos y el proceso continuo si se refina cada vez más, es decir la distancia entre los puntos discretos se hace cada vez más pequeña.

Para poder llegar a determinar una distancia entre los procesos de estacionamiento se pensará a las configuraciones como medidas de Radon. Si lo que estoy buscando es la convergencia entre configuraciones, necesitamos determinar que el límite de esta distancia sea cero, es decir que para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $n \geq n_0$, $d(\eta^n, \eta) \leq \epsilon$.

A primera instancia nuestra meta será obtener herramientas para poder definir una distancia entre configuraciones de puntos en \mathbb{R}^d .

Como \mathbb{R}^d es un espacio métrico localmente compacto, separable y completo. Una configuración de partículas consiste en una cantidad numerable de partículas con la condición de que cada conjunto acotado no contiene más que una cantidad finita de partículas. Como ya se nombro en la introducción de la sección veremos a las configuraciones de partículas como medidas de Radon en \mathbb{R}^d , para cada conjunto medible en \mathbb{R}^d , $\xi(B)$ será el número de partículas en B (En los procesos de estacionamiento, solo se admite una partícula en cada lugar).

Estamos interesados en configuraciones de partículas aleatorias, o equivalentemente, en medidas de probabilidad en el espacio de configuraciones de partículas. Si ψ es una medida de Radon en \mathbb{R}^d (por ejemplo la medida de Lebesgue), una configuración aleatoria ξ es Poisson si cumple:

1. Para cada $B \subset \mathbb{R}^d$ acotado la distribución de $\xi(B)$ es Poisson con intensidad $\psi(B)$
2. Para una cantidad de conjuntos disjuntos acotados $B_1, B_2, \dots, B_n \subseteq \mathbb{R}^d$, las variables aleatorias (B_i) son independientes.

Medidas de Radon en \mathbb{R}^d .Una medida de Radon es una medida de Borel que cumple $\mu(C) < \infty$ para todo conjunto compacto $C \subseteq \mathbb{R}^d$. Cada medida de Radon es unívocamente determinada por sus valores en los conjuntos acotados. Una medida de Borel es regular en \mathbb{R}^d si:

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf\{\mu(U) : E \subseteq U, U \text{ abierto}\} \\ &= \sup\{\mu(V) : V \subseteq E, V \text{ compacto}\} \end{aligned}$$

Cada medida de Radon en \mathbb{R}^d es regular. Se deduce del teorema de Ulam, el cual determina que cada medida de Borel finita en un espacio metrico completo separable es regular.

Configuraciones de partículas en \mathbb{R}^d . Una configuración de partículas ξ en \mathbb{R}^d es una medida de Radon tal que $\xi(B) \in \mathbb{N}$ para todo conjunto acotado medible $B \subseteq \mathbb{R}^d$.

Sea $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto numerable tal que para todo compacto $C \subseteq \mathbb{R}^d$, $Q \cap C$ es finito.

Proposición. Sea $n : Q \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la función que cuenta la cantidad de partículas que hay en un elemento de Q , así $\xi \triangleq \sum_{a \in Q} n(a)\delta_a$ es una configuración de partículas en \mathbb{R}^d .

Por otro lado, sea ξ una configuración de partículas en \mathbb{R}^d y para cada $a \in \mathbb{R}^d$, se define $n(a) \triangleq \xi(\{a\})$ y $Q \triangleq \{a : n(a) > 0\}$. Entonces para cada compacto $C \subseteq \mathbb{R}^d$, tenemos $|Q \cap C| \leq \xi(C) \leq \infty$.

Esto implica que Q es numerable, porque \mathbb{R}^d es unión numerable de conjuntos compactos, y queda $\xi = \sum_{a \in Q} n(a)\delta_a$.

Demostración. Sea $B \subseteq \mathbb{R}^d$ acotado y medible. Tenemos que:

$$\xi(B) \geq \sum_{a \in Q} n(a)\delta_a(B)$$

Si $\xi(B) > \sum_{a \in Q} n(a)$ por regularidad de ξ , existe $C_0 \subseteq B \setminus Q$ compacto tal que $\xi(C_0) \geq 1$.

Sean A_1, A_2, \dots, A_m un cubrimiento por abiertos de C_0 con bolas de diámetro a lo sumo 2^{-1} .

Entonces existe i tal que $\xi(A_i \cap C_0) \geq 1$. Nuevamente por regularidad, existe un conjunto compacto $C_1 \subseteq A_i \cap C_0$ con $\xi(C_1) \geq 1$.

Siguiendo con el mismo procedimiento podemos hallar una cadena $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \dots$ de conjuntos compactos C_n con diámetro menor que 2^{-n} y $\xi(C_n) \geq 1$. La intersección $\bigcap_n C_n$ contiene un único punto x con $\xi(\{x\}) \geq 1$, contradiciendo el hecho que $C_0 \cap Q = \emptyset$. Llamaremos a $\xi = \sum_{a \in Q} n(a)\delta_a$ la representación estandar de ξ .

Las medidas de Radon como funcionales lineales Para toda función f continua de soporte compacto y cada medida de Radon en \mathbb{R}^d se define un funcional lineal positivo $f \rightarrow \mu(f) = \int f d\mu$ en $C_c(\mathbb{R}^d)$.

Y cada medida μ esta unívocamente determinada por este funcional.

El espacio de las medidas de Radon Denotaremos con \mathcal{M} al conjunto de las medidas de Radon en \mathbb{R}^d . La topología vaga en \mathcal{M} es la topología más débil que hace todas las observaciones $\mu \rightarrow \mu(f) \forall f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ continuas. En particular, $\mu_i \rightarrow \mu$, es decir la sucesión μ_i converge vagamente a μ si y solo si $\mu_i(f) \rightarrow \mu(f)$ para toda $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$.

Definiremos una metrica para el espacio de las medidas de Radon:

$$\rho(\mu, \nu) = \sum_k \frac{1}{2^k} (1 - e^{-|\mu(h_k) - \nu(h_k)|}).$$

4.4. Desde los procesos discretos hacia el Proceso continuo

Dado que en la sección anterior se mostraron herramientas a través de las cuales se puede definir una distancia entre configuraciones de puntos, en esta sección nos dedicaremos a mostrar que las configuraciones de puntos que corresponden a los procesos definidos en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$, $m \in \mathbb{N}$, convergen de manera casi segura al proceso de estacionamiento definido en \mathbb{R}^d .

4.4.1. Convergencia en volumen finito

Como bien esta expresado en el título, nos ocuparemos de mostrar la convergencia de los procesos en el espacio discreto hacia el proceso en el espacio continuo en una caja de volumen finito a la cual podemos llamar Λ , $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$.

Utilizaremos la siguiente notación para las configuraciones que representan nuestros procesos:

El proceso de estacionamiento en $\mathbb{R}^d \cap \Lambda$ será denominado con la letra η^Λ

El proceso de estacionamiento en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m} \cap \Lambda$ será denominado a través de $\eta^{m,\Lambda}$

En la sección anterior se introdujo una métrica entre medidas de Radon, la utilizaremos para los procesos ya que cada uno estará identificado con una medida de Radon. Utilizando la distancia definida entre dos configuraciones, escribimos la distancia entre el proceso representado por η^Λ y el proceso representado por

4.4. DESDE LOS PROCESOS DISCRETOS HACIA EL PROCESO CONTINUO 61

$\eta^{m,\Lambda}$, $m \in \mathbb{N}$:

$$\rho(\eta^{m,\Lambda}, \eta^\Lambda) = \sum_k \frac{1}{2^k} (1 - e^{-|\eta^{m,\Lambda}(h_k) - \eta^\Lambda(h_k)|})$$

Asociando a cada medida de Radon su respectivo operador lineal:

$$\rho(\eta^{m,\Lambda}, \eta^\Lambda) = \sum_k \frac{1}{2^k} (1 - e^{-|\int h_k d\eta^{m,\Lambda} - \int h_k d\eta^\Lambda|})$$

Notando como Q_m y Q , los dominios de $\eta^{m,\Lambda}$ y η^Λ , respectivamente. Y teniendo en cuenta que en una caja de volumen finito el soporte de $\eta^{m,\Lambda}$ y η^Λ son finitos, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\rho(\eta^{m,\Lambda}, \eta^\Lambda) = \sum_k \frac{1}{2^k} (1 - e^{-|\sum_{Q_m} h_k(x_m)\delta_{x_m} - \sum_Q h_k(x)\delta_x|})$$

En donde δ_x representa la función definida de la siguiente manera:

$$\delta_x = \begin{cases} 1 & \text{si hay una partícula en } x \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Como lo que estamos buscando es convergencia casi segura vamos a buscar a partir de que valor m , suficientemente grande que dependerá de la cantidad de puntos en la caja, para cada $x \in Q$ tal que $\delta_x = 1$ existe $x_m \in Q_m$ tal que $\delta_{x_m} = 1$ y $\|x - x_m\| \leq \frac{1}{2m}$. Esto quiere decir que no quedan puntos sin correspondencia en ninguna de las dos configuraciones.

Para calcular el valor de m a partir del cual la correspondencia es uno a uno entre las configuraciones, en primera instancia tenemos en cuenta el hecho que la cantidad de puntos de los procesos en dicha caja es finita.

Suponiendo que la cantidad de puntos en la caja Λ es l , como estamos en la configuración final del proceso, si x e y pertenecen al proceso entonces $\|x - y\| < 3\nu$, donde ν es el tamaño del vecindario que es ocupado al estacionar. Teniendo en cuenta que el peor de los casos es cuando dos puntos x e y del proceso continuo tienen sus correspondientes puntos x_m e y_m del proceso discreto sobre el vector $x - y$ y por lo tanto necesitamos que: $\frac{1}{m} \leq \min_{x,y \in Q} d(B(x, \nu), B(y, \nu))$.

Volviendo al objetivo de esta sección, podemos escribir la distancia entre las dos configuraciones que representan los procesos como:

$$\rho(\eta^{m,\Lambda}, \eta^\Lambda) = \sum_k \frac{1}{2^k} (1 - e^{-|\sum_{\|x_m - x\| \leq \frac{1}{2m}} (h_k(x_m) - h_k(x))|})$$

Como las funciones $(h_k)_k$ son continuas, entonces para cada k y para todo $\epsilon > 0$ existe δ tal que si $d(x, y) \leq \delta$ entonces $d(h_k(x), h_k(y)) \leq \epsilon$. Debido al teorema

de Arzela-Ascoli una sucesión de funciones continuas en un conjunto acotado, es equicontinua. Por lo tanto para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ que no depende de k tal que si $d(x, y) \leq \delta$ entonces $d(h_k(x), h_k(y)) \leq \epsilon$. Aplicando esto a la distancia entre las configuraciones, obtenemos:

$$\rho(\eta^{m,\Lambda}, \eta^\Lambda) = \sum_k \frac{1}{2^k} (1 - e^{-l\epsilon_m}),$$

siendo l la cantidad de puntos del proceso libre que se encuentran en la caja Λ y que tienen asignados el valor 1.

$$\rho(\eta^{m,\Lambda}, \eta^\Lambda) = (1 - e^{-l\epsilon_m}) \sum_k \frac{1}{2^k}$$

$$\rho(\eta^{m,\Lambda}, \eta^\Lambda) \leq (1 - e^{-l\epsilon_m}) 2$$

Para cada m puedo tomar ϵ_m tan pequeño como sea necesario, tomo $\epsilon_m \leq \frac{1}{m}$, de este modo:

$$\rho(\eta^{m,\Lambda}, \eta^\Lambda) \leq (1 - e^{-l\frac{1}{m}}) 2$$

concluyendo que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\eta^{m,\Lambda}, \eta^\Lambda) = 0$$

Así las configuraciones del proceso de estacionamiento en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ en una caja de volumen finito Λ convergen a las configuraciones del proceso de estacionamiento en \mathbb{R}^d en esa misma caja, a medida que m tiende a infinito.

Dado que el límite del proceso de estacionamiento en todo \mathbb{R}^d queda definido por el valor que tiene el proceso restringiéndonos al conjunto de Ancestros del mismo, para poder determinar la convergencia en volumen infinito precisamos establecer la convergencia entre los conjuntos “ Armour ” (definido en el capítulo 2) de los procesos en los puntos discretos y el conjunto de Ancestros.

4.4.2. Convergencia en volumen infinito

Relación entre Armour de un punto en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ y el conjunto de Ancestros de su punto asociado en \mathbb{R}^d .

Para comenzar con esta sección se describirá una noción informal de como relacionar el conjunto de ancestros de un punto (s, t) del proceso de nacimiento libre con su análogo, en el proceso libre construido en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$.

Al ser el conjunto de ancestros finito al igual que el Armour de un punto en el proceso discreto, podemos pensar lo siguiente:

4.4. DESDE LOS PROCESOS DISCRETOS HACIA EL PROCESO CONTINUO 63

Sea (s, t) un punto del proceso de estacionamiento en \mathbb{R}^d , y sea (s_m, t) el punto más cercano en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$, lo que haremos será mostrar que para un valor de m suficientemente grande el conjunto de ancestros de (s, t) y el Armour de (s_m, t) tienen una correspondencia uno a uno.

Si $y \in A_1(s, t)$, llamando y_m al punto más cercano a y en $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$, podemos afirmar que:

$$\|s_m - y_m\| \leq \|s - y\| + \frac{1}{m}$$

y como $y \in A_1(s, t)$ entonces si $\|s - y\| = 2\nu - a$, siendo $a \leq \nu$ si $\frac{1}{m} < a$, entonces:

$$\|s_m - y_m\| \leq 2\nu \text{ y por lo tanto } y_m \in \mathcal{A}(\{s_m\})$$

Iteradamente se realiza el mismo procedimiento para los ancestros de los ancestros, y así al ser este un conjunto finito podemos elegir el valor de a mínimo.

Siendo que se tomo (s, t) cualquier punto del proceso continuo, concluimos que para cada punto existe un valor de a y como la cantidad de puntos es finita elegimos el mínimo de esos a y por lo tanto tomo el m correspondiente a ese valor de a .

Convergencia hacia el límite

Teniendo en cuenta que habiendo construido los procesos en cajas de volumen finito Λ , hemos definido el proceso límite sobre cada espacio respectivamente $\frac{\mathbb{Z}^d}{m}$ y \mathbb{R}^d de la siguiente manera:

$$\eta^m(s_m, t) = \eta_{\{\mathcal{A}(s_m)\}}^m(s_m, t), \quad s_m \in \tilde{S}_m$$

$$\eta(s, t) = \eta_{A(s,t)}(s), \quad s \in \tilde{S}$$

Y dado el hecho de que los procesos discretos y el proceso continuo son estables y utilizando que la dinámica de los procesos discretos definidos a partir del proceso continuo es similar a la dinámica de los procesos discretos descritos en el capítulo 2. Podemos definir la convergencia casi segura de los procesos en una caja que contenga los Ancestros y el Armour de los procesos discretos.

En la sección precedente se ha demostrado, pensando las configuraciones como medidas de Radon, que en un conjunto de volumen finito las configuraciones que representan los procesos discretos convergen en la topología vaga hacia la configuración que representa el proceso en el espacio continuo \mathbb{R}^d .

Bibliografía

- [1] B. Bollobás. *Random graphs*, volume 73. Cambridge Univ Pr, 2001.
- [2] R. Durrett. An introduction to infinite particle systems. *Stochastic Processes and their Applications*, 11(2):109–150, 1981.
- [3] P. Ferrari. Point processes. *Lecture notes*, 2011.
- [4] P.A. Ferrari, R. Fernández, and N.L. Garcia. Perfect simulation for interacting point processes, loss networks and ising models. *Stochastic Processes and their Applications*, 102(1):63–88, 2002.
- [5] P.A. Ferrari and A. Galves. Construction of stochastic processes, coupling and regeneration. *XIII Escuela Venezolana de Matemática*, 2000.
- [6] H.O. Georgii. *Gibbs measures and phase transitions*, volume 9. Walter de Gruyter, 2011. 1
- [7] R.M. Gray. *Probability, random processes, and ergodic properties*. Springer Verlag, 2009.
- [8] G. Grimmett. *Percolation*, volume 321. Springer Verlag, 1999.
- [9] G.R. Grimmett and D.R. Stirzaker. *Probability and random processes*, volume 80. Oxford university press, 2001.
- [10] J. Jacod and P.E. Protter. *Probability essentials*. Springer Verlag, 2003.
- [11] T.L. Ritchie. Construction of the thermodynamic jamming limit for the parking process and other exclusion schemes on z^d . *Journal of statistical physics*, 122(3):381–398, 2006.
- [12] T. Seppäläinen. Translation invariant exclusion processes. *Lecture notes*, 2008.
- [13] University Utrech. The theory of the thermodynamic limit. <http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/1957294/c8.pdf>.