

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

**ANÁLISIS DE TÉCNICAS DE INSPECCIÓN NO
DESTRUCTIVA EN TUBOS DE ACERO**

Abigail Stein

Director: Javier Etcheverry

Noviembre 2013

Agradecimientos

Gracias infinitas a René por la ayuda, paciencia y apoyo día a día, por hacer que no baje los brazos. Gracias a mis papás por la confianza y entusiasmo y la educación que me dieron, a mi hermano por su asistencia computacional y su aliento. A mi tía por su contención constante. Gracias a la familia de René que siempre está deseándome lo mejor.

Muchísimas gracias a Javier por estar siempre para guiarme pese a sus ocupaciones, transmitiéndome siempre mucho entusiasmo. Agradezco a la gente del Centro de Investigaciones Industriales (CINI) del Grupo Techint que me ayudaron y enseñaron durante mi pasantía en dicho centro para hacer este trabajo. Gracias a los jurados Gabriel Acosta y Ariel Lombardi por tomarse el tiempo para leer la tesis y hacer comentarios realmente muy útiles.

Gracias a mis amigos por bancarme y gracias a todos los que formaron parte de este camino.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Inspección no destructiva. Método MFL.	1
1.2. Problemas inversos	2
1.3. Problemas mal planteados	5
1.4. Regularización	8
2. Fundamentos matemáticos	11
2.1. Inversa generalizada de Moore-Penrose	11
2.2. Descomposición en valores singulares	15
2.3. Descomposición en valores singulares para dimensión finita	18
2.4. Descomposición en valores singulares generalizado	20
2.5. Regularización	21
2.6. Regularización de Tikhonov	27
2.7. Curva-L	32
3. Problemas Electromagnéticos	35
3.1. Ecuaciones de Maxwell magnetostáticas	35
3.2. Determinación del campo en la superficie	36
3.2.1. Caso dos dimensiones	36
3.2.2. Caso de tres dimensiones	39
3.2.3. Caso de tres dimensiones para un tubo	41
3.3. Detección de fallas en el espesor de un tubo	43
3.4. Regularización	45
4. Resultados	47
4.1. Problema en dos dimensiones	47
4.1.1. Caso con datos sintéticos	47
4.1.2. Caso con datos experimentales	51
4.2. Problema en tres dimensiones. Plano	58
4.3. Problema en tres dimensiones. Cilindro.	58
4.4. Problema del espesor.	62

5. Conclusiones
*

65

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo se modelan sistemas para identificar y caracterizar defectos en tubos y planchas de acero. En particular analizaremos técnicas de inspección no destructivas, es decir que estudiaremos al tubo conservando su integridad. Emplearemos aquí el método de dispersión del flujo magnético (MFL por sus iniciales en inglés), que consiste en magnetizar un material ferromagnético y leer, con detectores, el campo magnético expulsado ([7], [8]). La intención es poder sacar conclusiones sobre el estado del tubo a partir del campo obtenido.

La formulación matemática de este problema nos lleva en general a lo que llamamos un problema mal planteado, es decir un problema que no tiene solución, o que tiene infinitas, o que no depende de manera continua de los datos (el campo detectado por los sensores). Además tenemos que tener en cuenta que las mediciones tienen errores, y no queremos que los mismos nos impidan obtener una buena descripción del material estudiado. Para esto lo que hicimos fue regularizar el problema, o sea que incorporamos alguna condición extra (a partir de conocimientos a priori del problema) que debe tener la solución, y mediante un replanteo «adecuado» del problema obtener la «mejor» solución. Utilizaremos el llamado «método de regularización de Tikhonov»([5], [9]).

1.1. Inspección no destructiva. Método MFL.

Uno de los métodos más usados en ensayos no destructivos para materiales ferromagnéticos es el método de dispersión de flujo magnético (en inglés: magnetic flux leakage, abreviadamente: MFL). Esta es una de las técnicas más antiguas para la inspección de tanques, tuberías y gasoductos en búsqueda de pérdidas de material, fisuras y defectos.

Este método se basa en el hecho de que un material ferromagnético tiene una permeabilidad magnética alta. La permeabilidad es lo que caracteriza el comportamiento de un material frente a un campo magnético, si la permeabilidad es alta el

campo de inducción se concentra en el interior del mismo. Llamaremos defecto de un objeto a una región del mismo con una permeabilidad distinta. En nuestro caso el material será estudiado solamente en contacto con el aire y por lo tanto de existir un defecto la permeabilidad encontrada será la del aire que es mucho más chica que la del objeto. Luego, las líneas del campo de inducción se configuran de tal modo que un número pequeño de ellas son expulsadas en la zona del defecto, mientras que la mayoría de las líneas intentan esquivar la discontinuidad. Esta expulsión provoca la aparición de dipolos magnéticos locales que distorsionan el campo en cercanías del mismo ([7], [8]).

Su principio de operación se basa en la aplicación de un campo magnético intenso al material a examinar y se coloca algún detector (sensor Hall, bobinas, etc) a una pequeña distancia de la superficie que medirá la dispersión del campo. Después se recorre la superficie del material, puede ser tanto moviendo el detector o moviendo el material. Cuando el detector pasa por la discontinuidad la señal que recibe el detector muestra una variación abrupta.

En la figura (1.1) se pueden observar las expulsiones que generan los defectos en la parte superior e inferior del objeto. Además podemos ver la señal que produce el transductor. Así es como ésta señal tiene mucha información de los defectos del material, tanto de su ubicación como su tamaño y geometría.

Por todo esto es que es muy importante para la industria caracterizar apropiadamente el fenómeno y mejorar las posibles debilidades del modelo.

1.2. Problemas inversos

Cuando usamos el término problemas inversos uno inmediatamente se pregunta ¿inverso a qué? Se podría decir que dos problemas son inversos uno del otro si la formulación de uno implica al otro.

Por diversos motivos se llama a uno de estos dos problemas (generalmente el más simple o el que fue estudiado antes) el problema directo y al otro el problema inverso. De todas maneras, si existe un mundo de problemas reales detrás del problema matemático estudiado, hay una distinción muy natural entre el problema directo y el inverso. Por ejemplo, si quisiéramos predecir el comportamiento futuro de un sistema físico conociendo su estado presente y las leyes físicas, podríamos decir que este es un problema directo. Mientras que determinar el estado presente de un sistema a partir de observaciones futuras (es decir calcular la evolución de un sistema hacia atrás en el tiempo) o identificar parámetros físicos a partir de observaciones en la evolución del sistema son problemas inversos [5].

Desde el punto de vista de las aplicaciones existen dos diferentes motivaciones para estudiar problemas inversos. Uno es querer saber estados pasados o parámetros de un sistema físico, el otro es encontrar cómo influir en un sistema mediante su

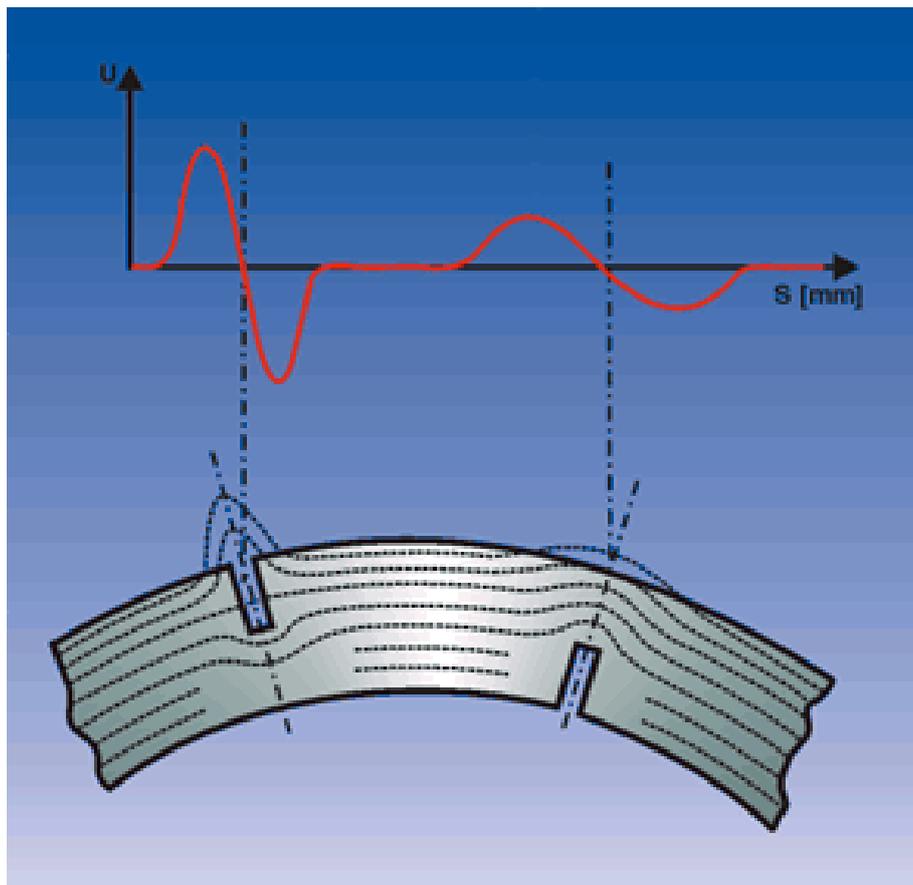


Figura 1.1: Las líneas del campo se mantienen en el interior del objeto cuando no hay defectos, mientras que donde hay falla éstas son expulsadas de manera distinta si la misma es interna o externa.

estado presente en orden de poder dirigirlo a un estado deseado en el futuro.

Este tipo de problemas pueden no tener solución en el sentido estricto, o tal vez las soluciones no son únicas y/o no dependen en forma continua de los datos. Problemas matemáticos con este tipo de propiedades no deseadas se llaman problemas mal planteados y poseen muchas dificultades numéricas (en especial por la dependencia discontinua). Una cuestión importante al trabajar con problemas inversos es hallar una manera de forzar al mismo para que tenga una solución única, decidir qué información adicional hay que solicitar o qué hipótesis nueva debemos asumir.

La siguiente lista de problemas inversos nos da una buena idea de la gran variedad de aplicaciones que tiene esta teoría:

- Problema inverso de la inducción geomagnética.
- Tomografía por rayos X, tomografía por ultrasonido, tomografía laser.

- Dispersión acústica.
- Análisis de imágenes.
- Locación de grietas o minas por prospección magnética.
- Exploración sísmica.
- Deconvolución, reconstrucción de señales truncadas.
- Determinar la volatilidad en modelos financieros.
- Evolución hacia atrás en el tiempo, conducción inversa del calor.
- El problema inverso de la teoría del potencial.

Supongamos que tenemos un modelo matemático de un proceso físico. Nosotros asumimos que este modelo nos da una descripción del sistema detrás del proceso, de las condiciones con las que opera y que explica las principales cantidades del modelo: la entrada, el sistema de parámetros y la salida. En la mayoría de los casos la descripción del sistema viene dada en términos de un conjunto de ecuaciones que contienen ciertos parámetros. El análisis del proceso físico dado vía un modelo matemático puede ser separado en tres distintos tipos de problemas:

1. **El problema directo.** Dada la entrada y el sistema de parámetros encontrar la salida del modelo.
2. **Reconstrucción del problema.** Dado el sistema de parámetros y la salida hallar qué entrada nos ha llevado a esta salida.
3. **Identificación del problema.** Dada la salida y la entrada determinar el sistema de parámetros que están de acuerdo con la relación entre la entrada y la salida.

Decimos que un problema del tipo 1 es directo ya que el problema está orientado hacia una secuencia causa-efecto. En este sentido los problemas 2 y 3 se llaman inversos porque son problemas de hallar causas no conocidas a partir de consecuencias conocidas. Es claro que la solución de uno de estos problemas involucra también el tratamiento del otro.

1.3. Problemas mal planteados

Los modelos inversos involucran la estimación de la solución de una ecuación a partir de un conjunto de datos observados. La teoría se divide en dos partes bien diferenciadas. Una trata con el caso ideal en el que el dato se conoce de manera perfecta. El otro trata con problemas prácticos que son creados por datos imprecisos e incompletos. Resulta ser que en los problemas inversos la solución obtenida por la fórmula analítica es muy sensible a los errores que pueda tener el dato. Por esto es que decimos que los problemas inversos tienen como característica ser problemas mal planteados, para ello utilizamos la definición de Hadamard:

Definición 1.3.1. *Se dice que un problema matemático basado en un fenómeno físico está bien planteado si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Existencia de solución.*
2. *La solución es única.*
3. *El comportamiento de la solución cambia poco cuando se modifica ligeramente el dato inicial.*

Si el problema no tiene solución única entonces sabemos que aún conociendo el dato perfectamente, éste no contiene información suficiente para reconstruir la cantidad física que debemos estimar. En la cuestión de la estabilidad debemos decidir si la solución depende de forma continua del dato. La estabilidad es necesaria si queremos estar seguros que una pequeña variación en el dato dado nos da un pequeño cambio en la solución obtenida [5].

Cuando resolvemos numéricamente un problema mal planteado debemos esperar ciertas dificultades, puesto que cualquier error actúa como una perturbación en la ecuación original y puede causar grandes variaciones en la solución. Los errores en las observaciones tienen el mismo efecto. Como los errores no pueden ser completamente evitados, encontraremos un conjunto de soluciones posibles, y la idea es encontrar la que sea más razonable en algún sentido determinado.

Ejemplo 1.3.2 (La diferenciación como un problema inverso). Sean $f \in C^1[0, 1]$ una función cualquiera, $\delta \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$) un número arbitrario y definamos

$$f_n^\delta := f(x) + \delta \sin\left(\frac{nx}{\delta}\right), \quad x \in [0, 1].$$

Entonces

$$(f_n^\delta)'(x) = f'(x) + n \cos\left(\frac{nx}{\delta}\right), \quad x \in [0, 1].$$

Considerando las normas infinito tenemos que

$$\|f - f_n^\delta\|_\infty = \delta,$$

pero

$$\|f' - (f_n^\delta)'\|_\infty = n.$$

Si consideramos a f y f_n^δ como el dato exacto y el perturbado respectivamente, entonces para un error pequeño en el dato, el error en el resultado, la derivada, puede ser arbitrariamente grande, luego la derivada no depende de forma continua en el dato con respecto a la norma infinito.

Notemos que f' soluciona la ecuación integral:

$$(Kx)(s) := \int_0^s x(t)dt = f(s) - f(0),$$

que es solucionable en $C^1[0, 1]$ solamente si $f \in C[0, 1]$. El correspondiente problema directo sería calcular f a partir de x , i.e. integración, que es un proceso estable en $C[0, 1]$. Observemos que la integración es un proceso suavizante. O sea errores en x de altas oscilaciones quedan amortiguadas y tiene un efecto muy pequeño en el dato para el problema inverso. En general, siempre que el problema directo tenga propiedades suavizantes, uno debe esperar oscilaciones provenientes de pequeñas perturbaciones en el dato en la solución del problema inverso. Este efecto es más pronunciado cuanto más suavizante sea el problema directo.

Ejemplo 1.3.3. [Ecuación integral de Fredholm]

Un ejemplo típico de problema mal planteado es la ecuación integral de Fredholm de tipo 1 con núcleo en L_2 .

Consideremos

$$\int_a^b K(s, t)f(t)dt = g(s), \quad c \leq s \leq d. \quad (1.1)$$

donde las funciones g y K son datos y la función f es la solución buscada. A la función K se la llama el núcleo de la ecuación.

Podemos reescribir la ecuación (1.1) de la siguiente manera:

$$\tilde{K}f = g$$

donde \tilde{K} es un operador lineal. Entonces luego la idea es investigar si este operador es inversible, es decir ¿existe un operador, que denotaremos como \tilde{K}^{-1} , tal que

$$f = \tilde{K}^{-1}g?$$

Pero no solamente nos importa si el operador es inversible, sino que también suponiendo que el operador fuese inversible debemos decidir si el operador inverso es acotado o no lo es. En la práctica este tipo de ecuaciones surgen constantemente y tienen propiedades muy poco deseables, son problemas mal planteados. Veamos que por ejemplo no cumple la condición de continuidad respecto del dato.

Si perturbamos la solución por:

$$\Delta f(t) = \epsilon \sin(2\pi pt), \quad p = 1, 2, \dots, \quad \epsilon = \text{constante}$$

donde ϵ puede ser eventualmente un número muy grande. Entonces la correspondiente perturbación en la función g esta dada por:

$$\Delta g(s) = \epsilon \int_a^b K(s, t) \sin(2\pi pt) dt, \quad p = 1, 2, \dots$$

Mediante el lema de Riemann-Lebesgue obtenemos que $\Delta g \rightarrow 0$ cuando $p \rightarrow \infty$. De este modo tenemos que el cociente $\frac{\|\Delta f\|}{\|\Delta g\|}$ puede ser arbitrariamente grande eligiendo p entero suficientemente grande. Es decir que el problema inverso está mal planteado pues no cumple la condición 3.

En particular este ejemplo muestra que las ecuaciones integrales de Fredholm de primer tipo con núcleo de cuadrado integrable son extremadamente sensibles a perturbaciones de altas frecuencias.

Si hablamos de manera estricta los problemas mal planteados deben estar en dimensión infinita, de lo contrario el cociente $\frac{\|\Delta f\|}{\|\Delta g\|}$ se mantendrá acotado aunque puede ser muy grande. Sin embargo algunos problemas de dimensión finita tienen propiedades muy similares a los problemas mal planteados, tales como ser muy sensibles a perturbaciones con altas frecuencias; y entonces es natural asociar el término problemas discretos mal planteados con estos problemas. En el capítulo 2 intentaremos analizar cuáles son las características que hacen a un sistema de ecuaciones lineales:

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

y al problema de cuadrados mínimos asociado a ese sistema:

$$\arg \min \|Ax - b\|_2, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m > n$$

un problema mal planteado. Vale observar que los típicos problemas mal planteados discretos son sistemas de ecuaciones lineales y sus respectivos problemas de cuadrados mínimos que provienen de la discretización de problemas mal planteados de dimensión infinita, como el que trabajaremos en nuestro problema en particular.

Las condiciones (1) y (2) de Hadamard son equivalentes a decir que el operador A tiene una inversa bien definida y que el dominio de A^{-1} es todo el espacio de datos. El requerimiento de la condición (3) de dependencia continua de la solución respecto del dato es una condición necesaria pero no suficiente para la estabilidad de la solución. La propagación del error relativo está controlado por la condición de la matriz:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

donde

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \quad \text{y} \quad \|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Entonces nos gustaría que la $\text{cond}(A)$ sea chica. Si $\text{cond}(A)$ no es muy grande el problema $Ax = b$ está bien condicionado y la solución es estable cuando hay poca variación en el dato. De otra forma se dice que el problema está mal condicionado.

Un aspecto importante de los problemas discretos mal planteados es que para poder calcular una solución no se pueden aplicar métodos directos sino que como vimos se deben aplicar métodos más sofisticados en orden de asegurar el cálculo de una solución que tenga sentido. Este es el objetivo esencial de los métodos regularizantes.

1.4. Regularización

La mayor dificultad de los problemas mal planteados es que son esencialmente indeterminados. Por lo tanto es necesario incorporar más información sobre la solución esperada, para estabilizar el problema y encontrar una solución útil y estable. Este es el propósito de la regularización [9].

Supongamos que estamos en el caso finito (todos estos resultados pueden ser generalizados a dimensión infinita):

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

En principio se puede agregar distintos tipos de información a la solución buscada, un requerimiento muy usual es el de pedirle que su norma-2 no sea muy grande. Más en general, se puede exigir que la solución minimice cierta cantidad

$$\Omega(x) = \|L(x)\|_2.$$

Si además conocemos un estimador inicial de la solución x^* , éste puede ser incluido en la parte de las restricciones:

$$\Omega(x) = \|L(x - x^*)\|_2.$$

Típicamente el operador L es la identidad o el operador de derivación. De esta manera la restricción Ω controla la suavidad de la solución regularizada.

Al introducir la restricción $\Omega(x)$ lo que se empieza a buscar no es ya una solución del sistema $Ax = b$ sino una solución que proporcione un equilibrio «justo» entre la minimización de $\Omega(x)$ y la minimización de la norma residual $\|Ax - b\|_2$. La idea subyacente es que la solución regularizada con seminorma chica y norma residual también pequeña no esté demasiado lejos de la solución deseada y desconocida del problema no perturbado.

Ejemplo 1.4.1 (Tikhonov). *El método más común y conocido de regularización es el de Tikhonov, la idea es definir la solución regularizada x_λ de la siguiente manera:*

$$x_\lambda = \arg \min \{ \|Ax - b\|_2^2 + \lambda^2 \|L(x - x^*)\|_2^2 \},$$

donde λ , el parámetro de regularización, controla el peso que se le da a minimizar la restricción en relación con la minimización de la norma residual. Claramente cuando λ es grande la solución regularizada obtenida tendrá una seminorma pequeña a expensas de una norma residual grande, mientras que si el valor de λ es chico el efecto será el opuesto. De este modo se ve que el parámetro λ es un valor importante que controla las propiedades de la solución regularizada, por ende debe ser elegido cuidadosamente.

Capítulo 2

Fundamentos matemáticos

En este capítulo expondremos la teoría matemática que hay detrás de los problemas inversos. Para ello seguimos principalmente el libro [5] que tiene un enfoque muy generalizado del tema. Incluimos también teoría de dimensión finita de [9] que nos será útil para la resolución de nuestros problemas.

2.1. Inversa generalizada de Moore-Penrose

Consideremos la ecuación:

$$Tx = y \tag{2.1}$$

donde T es un operador lineal y acotado entre los espacios de Hilbert X e Y . Si $y \in R(T)$ entonces existe solución de (2.1). Si además $N(T) = \{0\}$ la solución es única y además existe T^{-1} sobre $R(T)$. La continuidad de T^{-1} es equivalente a que la solución dependa de manera continua del dato. Pero en los problemas mal planteados estas condiciones no se cumplen (al menos no todas).

Supongamos que $y \notin R(T)$ o bien que $N(T) \neq \{0\}$ aún así queremos encontrar una solución en un sentido generalizado de (2.1), es decir buscar un elemento que solucione (2.1) en un sentido aproximado. Esta noción generalizada de solución es la que nos brinda la inversa generalizada de Moore-Penrose. El tema de la continuidad sobre el dato lo veremos más adelante en este capítulo.

Definición 2.1.1. *Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado, X e Y espacios de Hilbert.*

1. $x \in X$ se llama solución de mínimos cuadrados de $Tx = y$ si

$$\|Tx - y\| = \inf\{\|Tz - y\| : z \in X\}$$

2. $x \in X$ se llama la mejor aproximación a la solución de $Tx = y$ si x es una solución de mínimos cuadrados de $Tx = y$

$$\|x\| = \inf\{\|z\|/z \text{ es una solución de mínimos cuadrados de } Tx = y\}$$

Definición 2.1.2. Dado un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, la inversa generalizada de Moore-Penrose de T , que se nota T^\dagger , se define como la única extensión lineal de \tilde{T}^{-1} al conjunto $D(T^\dagger) := R(T) \dot{+} R(T)^\perp$ con $N(T^\dagger) = R(T)^\perp$ y donde

$$\tilde{T} := T|_{N(T)^\perp} : N(T)^\perp \rightarrow R(T).$$

Observación 2.1.3. T^\dagger está bien definida, pues $N(\tilde{T}) = \{0\}$ y $R(\tilde{T}) = R(T) \Rightarrow \exists \tilde{T}^{-1}$. Por el requerimiento de que $N(T^\dagger) = R(T)^\perp$ y de que T^\dagger es lineal \Rightarrow si $y \in D(T^\dagger)$ con representación única $y = y_1 + y_2$ donde $y_1 \in R(T)$ e $y_2 \in R(T)^\perp$, entonces $T^\dagger(y) = T^\dagger(y_1) + T^\dagger(y_2) = T^\dagger(y_1) = \tilde{T}^{-1}(y_1)$

Proposición 2.1.4. Sea $P : X \rightarrow N(T)$ y sea $Q : Y \rightarrow \overline{R(T)}$ proyectores ortogonales. Entonces $R(T^\dagger) = N(T)^\perp$ y se cumplen las siguientes ecuaciones de Moore-Penrose:

1. $TT^\dagger T = T$
2. $T^\dagger TT^\dagger = T^\dagger$
3. $T^\dagger T = I - P$
4. $TT^\dagger = Q|_{D(T^\dagger)}$

Demostración 2.1.5. Debido a la definición de T^\dagger para todo $y \in D(T^\dagger)$ vale que:

$$T^\dagger(y) = \tilde{T}^{-1}Q(y) = T^\dagger Q(y) \quad (2.2)$$

entonces queda que $T^\dagger(y) \in R(\tilde{T}^{-1}) = N(T)^\perp$. Para todo $x \in N(T)^\perp$ se tiene $T^\dagger T(x) = \tilde{T}^{-1}\tilde{T}(x) = x$. Esto demuestra que $R(T^\dagger) = N(T)^\perp$. Para $y \in D(T^\dagger)$, por la ecuación (2.2), tenemos que

$$TT^\dagger(y) = TT^\dagger Q(y) = T\tilde{T}^{-1}Q(y) = \tilde{T}\tilde{T}^{-1}Q(y) = Q(y),$$

ya que $\tilde{T}^{-1}Q(y) \in N(T)^\perp$. Así tenemos que vale la ecuación 4. Por la definición de T^\dagger tenemos que, para todo $x \in X$,

$$T^\dagger T(x) = \tilde{T}^{-1}T[P(x) + (I - P)(x)] = \tilde{T}^{-1}TP(x) + \tilde{T}^{-1}\tilde{T}(I - P)(x) = (I - P)(x)$$

lo cual implica la ecuación 3. Así mismo, la ecuación 3 implica que

$$TT^\dagger T = T(I - P) = T - TP = T.$$

Con esto obtenemos la ecuación 1. Por las ecuaciones (2.2) y 4 obtenemos la ecuación 2.

Proposición 2.1.6. *La inversa generalizada de Moore-Penrose, T^\dagger , tiene gráfico cerrado. Más aún, T^\dagger es acotado (i.e continuo) $\Leftrightarrow R(T)$ es cerrado.*

Demostración 2.1.7. *Primero veamos que*

$$\{(y_1, \tilde{T}^{-1}(y_1))/y_1 \in R(T)\} = \{(T(x), x)/x \in X\} \cap (Y \times N(T)^\perp). \quad (2.3)$$

Sean $y_1 \in R(T)$, $x := \tilde{T}^{-1}(y_1)$. Por la definición de \tilde{T} tenemos que $x \in N(T)^\perp$, y por la ecuación 4, $T(x) = T\tilde{T}^{-1}(y_1) = y_1$. Por lo tanto

$$(y_1, \tilde{T}^{-1}(y_1)) = (T(x), x) \in Y \times N(T)^\perp.$$

Si $x \in N(T)^\perp$, $y_1 := T(x)$ (aquí $y_1 \in R(T)$), entonces $\tilde{T}^{-1}(y_1) = T^\dagger T(x) = x$, luego

$$(y_1, \tilde{T}^{-1}(y_1)) = (T(x), x),$$

resultando válida la ecuación (2.3). Por definición de T^\dagger , tenemos que

$$\begin{aligned} gr(T^\dagger) &= \{(y, T^\dagger(y))/y \in D(T^\dagger)\} \\ &= \{(y_1 + y_2, \tilde{T}^{-1}(y_1))/y_1 \in R(T), y_2 \in R(T)^\perp\} \\ &= \{(y_1, \tilde{T}^{-1}(y_1))/y_1 \in R(T)\} + (R(T)^\perp \times 0), \end{aligned} \quad (2.4)$$

lo cual, junto a la igualdad (2.3), implica que

$$gr(T^\dagger) = [\{(T(x), x)/x \in X\} \cap (Y \times N(T)^\perp)] + [R(T)^\perp \times 0]. \quad (2.5)$$

Los espacios en el lado derecho de(2.5) son cerrados y ortogonales entre sí en $X \times Y$, luego su suma, el $gr(T^\dagger)$, es cerrada.

Veamos ahora que vale la segunda parte de la proposición. Para la vuelta, suponemos que $R(T)$ es cerrado, entonces $D(T^\dagger) = Y$. Por el teorema del gráfico cerrado vale que T^\dagger es acotada. Para la ida, sea T^\dagger acotada, luego T^\dagger tiene una única extensión continua $\overline{T^\dagger}$ a Y . Por la ecuación 4 y la continuidad de $\overline{T^\dagger}$, podemos concluir que $\overline{T^\dagger} = Q$. Así, para $y \in \overline{R(T)}$, $y = Q(y) = \overline{T^\dagger}(y) \in R(T)$, por lo que resulta que $R(T)$ es cerrado.

El siguiente teorema muestra la relación entre la solución de mínimos cuadrados y la inversa de Moore-Penrose.

Teorema 2.1.8. *Sea $y \in D(T^\dagger)$. Entonces $T(x) = y$ tiene una única mejor aproximación a la solución, que viene dada por $x^\dagger := T^\dagger(y)$. El conjunto de todas las soluciones de mínimos cuadrados es $x^\dagger + N(T)$.*

Demostración 2.1.9. Sea $S := \{z \in X / Tz = Qy\}$. $S \neq \emptyset$, ya que como

$$y \in D(T^\dagger) = R(T) + R(T)^\perp,$$

resulta $Qy \in R(T)$. Como el proyector ortogonal Q es también un proyector métrico, tenemos que para todo $z \in S$ y $x \in X$: $\|Tz - y\| = \|Qy - y\| \leq \|Tx - y\|$. Por lo tanto tenemos que todos los elementos de S son soluciones de mínimos cuadrados de $Tx = y$.

A la inversa, sea z una solución de cuadrados mínimos de la ecuación $Tx = y$, entonces $\|Qy - y\| \leq \|Tz - y\| = \inf \|u - y\| / u \in R(T) = \|Qy - y\|$, luego Tz es el elemento más cercano a y en $R(T)$, o sea $Tz = Qy$. De ésta manera hemos mostrado que

$$S = \{x \in X / x \text{ es solución de cuadrados mínimos de } Tx = y\} \neq \emptyset.$$

Tomemos ahora a \bar{z} , el elemento de mínima norma en el cerrado $S = T^{-1}(\{Qy\})$. Como $S = \bar{z} + N(T)$, es suficiente mostrar que

$$\bar{z} = T^\dagger y. \quad (2.6)$$

Como $\bar{z} \in N(T)^\perp$, vale que

$$\bar{z} = (I - P)\bar{z} = T^\dagger T\bar{z} = T^\dagger Qy = T^\dagger T T^\dagger y = T^\dagger y,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Teorema 2.1.10. Sea $y \in D(T^\dagger)$. Entonces $x \in X$ es una solución de mínimos cuadrados de $Tx = y$ si y solo si se cumple la siguiente ecuación:

$$T^*Tx = T^*y. \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) se llama ecuación normal.

Demostración 2.1.11. x es una solución de mínimos cuadrados de $Tx = y$ si y solo si Tx es el elemento más cercano a y en $R(T)$, lo que es equivalente a decir que $Tx - y \in R(T)^\perp = N(T^*)$, o sea $T^*(Tx - y) = 0$, y por lo tanto a (2.7).

Observación 2.1.12. $T^\dagger y$ es la solución de la ecuación (2.7) de mínima norma, i.e $T^\dagger = (T^*T)^\dagger T^*$.

Por todo esto es que la inversa generalizada de Moore-Penrose sirve para calcular la mejor aproximación (en el sentido de mínimos cuadrados) de la solución de un sistema lineal de ecuaciones que carece de solución única. También se utiliza para hallar la solución de mínima norma de un sistema de ecuaciones lineales con múltiples soluciones. La inversa de Moore-Penrose se puede calcular usando la descomposición en valores singulares.

2.2. Descomposición en valores singulares

En lo que sigue supongamos que el operador K es un operador lineal y compacto, consideremos también que es un operador autoadjunto. De esta manera tenemos un conjunto de autovalores (λ_n) distintos de cero y sus correspondientes autovectores (v_n) que forman una base ortogonal. Con estos conjuntos el operador K puede ser diagonalizado de la siguiente manera:

$$Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n$$

para todo $x \in X$. Si K no es autoadjunto no tienen por qué existir autovalores. La idea es construir un sistema sustituto para operadores no autoadjuntos que llamaremos sistema singular.

Definición 2.2.1. Sea $K : X \rightarrow Y$ un operador lineal y compacto. Se define el sistema singular $(\sigma_n; v_n, u_n)$ de K del siguiente modo:

si $K^* : Y \rightarrow X$ es el operador adjunto de K , entonces $\{\sigma_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ son los autovalores distintos de cero del operador autoadjunto y compacto K^*K escritos en orden decreciente con multiplicidad, $\sigma_n > 0$, $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es el correspondiente sistema completo y ortonormal de autovectores de K^*K , y los $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se definen como $u_n = \frac{Kv_n}{\|Kv_n\|}$.

Observación 2.2.2. Valen las siguientes afirmaciones:

- Los u_n están bien definidos, pues $\|Kv_n\| = \sigma_n \neq 0$.
- Los $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ generan $\overline{R(K^*K)} = \overline{R(K^*)}$.
- Los $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son una base ortonormal de autovectores de KK^* y generan $\overline{R(KK^*)} = \overline{R(K)}$. Que los u_n son autovectores ortonormales de KK^* sale sencillamente haciendo las cuentas y usando la definición de los u_n . Veamos que es un conjunto completo de autovectores de $\overline{R(KK^*)}$. Sea w autovector de KK^* asociado a un autovalor $\lambda \neq 0$, por lo tanto tenemos que $KK^*w = \lambda w \Rightarrow K^*KK^*w = \lambda K^*w \Rightarrow K^*w$ es autovector de K^*K de un autovalor $\neq 0$. Así, $K^*w = v_n \Rightarrow Kv_n = KK^*w = \lambda w \Rightarrow w = \frac{Kv_n}{\lambda}$. Como $\|w\| = 1 \Rightarrow \lambda = \|Kv_n\| \Rightarrow w = u_n$ para algún n .

Proposición 2.2.3. Sean K un operador lineal y compacto, $(\sigma_n; v_n, u_n)$ su sistema singular. Entonces valen las siguientes igualdades:

1. $Kv_n = \sigma_n u_n$
2. $K^*u_n = \sigma_n v_n$
3. $Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \langle x, v_n \rangle u_n$

$$4. K^*y = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \langle y, u_n \rangle v_n$$

donde estas series infinitas convergen en los espacios de Hilbert X e Y en sus respectivas normas. Los ítems (3) y (4) se denominan expansión en valores singulares.

Demostración 2.2.4. Probemos que son verdaderas las fórmulas de la proposición:

1. Sale usando que $\|Kv_n\| = \sigma_n$.
2. Sale fácilmente de la definición de u_n y del ítem anterior.
3. Dada la base de autovectores v_n de K^*K asociados a los autovalores $\sigma_n^2 \neq 0$, extendiendo a una base de autovectores del espacio X agregando los autovectores w_n asociados al autovalor 0. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \|Kx - \sum_{n=1}^N \sigma_n \langle x, v_n \rangle u_n\| &\leq \|Kx - K \sum_{n=1}^N \langle x, v_n \rangle v_n - K \sum_{n=1}^N \langle x, w_n \rangle w_n\| \\ &\quad + \|K \sum_{n=1}^N \langle x, w_n \rangle w_n\| \end{aligned}$$

Como vale que $\|Kw_n\|^2 = \langle Kw_n, Kw_n \rangle = \langle w_n, K^*Kw_n \rangle = 0$, entonces el segundo término del sumando es cero mientras que el primero tiende a cero cuando $N \rightarrow \infty$.

4. Sale con las mismas ideas que el ítem anterior.

Observación 2.2.5. K tiene rango de dimensión finita si y solo si K tiene finitos valores singulares. En ese caso todas las series infinitas que involucran valores singulares se transforman en sumas finitas.

Proposición 2.2.6. Sea $K : X \rightarrow Y$ un operador compacto, $\dim R(K) = \infty$. Entonces K^\dagger es un operador densamente definido, lineal, no acotado y con gráfico cerrado.

Demostración 2.2.7. Veamos primero que si $R(K)$ es cerrado esto implica que $\dim R(K) < \infty$. Como $R(K)$ es cerrado entonces es completo y por el teorema de la aplicación abierta [2] tenemos que

$$K|_{N(K)^\perp} : N(K)^\perp \rightarrow R(K)$$

tiene inversa continua. Además vale que

$$K(K|_{N(K)^\perp})^{-1} = I_{R(K)}$$

y como K es compacto y $(K|_{N(K)^\perp})^{-1}$ es continua, resulta que $I_{R(K)}$ es compacto y luego $\dim R(K) < \infty$, que es lo que queríamos ver. Como por hipótesis $\dim R(K) = \infty$, obtenemos que $R(K)$ no es cerrado, y por la proposición (2.1.6), K^\dagger no es acotado. Por la misma proposición K^\dagger tiene gráfico cerrado.

Observación 2.2.8. *Este resultado nos dice que para un operador lineal, compacto y con $\dim R(K) = \infty$, la mejor solución aproximada de $Kx = y$ no depende de forma continua de y , y por ello representa un problema mal planteado.*

Utilizando el sistema singular se puede encontrar una serie que representa la inversa de Moore-Penrose para un operador compacto.

Teorema 2.2.9. *Sea $(\sigma_n; v_n, u_n)$ un sistema singular para el operador lineal y compacto K , $y \in Y$. Entonces vale que:*

1.

$$y \in D(K^\dagger) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle y, u_n \rangle|^2}{\sigma_n^2} < \infty \quad (2.8)$$

2. Si $y \in D(K^\dagger)$ entonces,

$$K^\dagger y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y, u_n \rangle}{\sigma_n} v_n.$$

Demostación 2.2.10. *Sea $y \in D(K^\dagger)$, o sea $Qy \in R(K)$. El proyector ortogonal Q en $\overline{R(K)}$ puede ser escrito de la siguiente forma:*

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \cdot, u_n \rangle u_n,$$

puesto que u_n genera $\overline{R(K)}$. Como $Qy \in R(K)$, existe $x \in X$ tal que $Kx = Qy$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x \in N(K)^\perp$.

Ya que v_n genera $\overline{R(K^*)} = N(K)^\perp$, vale que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, v_n \rangle v_n$ y así resulta

$$Qy = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, u_n \rangle u_n = Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, v_n \rangle K v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \langle x, v_n \rangle u_n.$$

En consecuencia, para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que:

$$\langle y, u_n \rangle = \sigma_n \langle x, v_n \rangle. \quad (2.9)$$

Tenemos que $(\langle x, v_n \rangle) \in \ell^2$ pues es una sucesión de coeficientes de Fourier, y así por (2.9) también $(\langle y, u_n \rangle / \sigma_n) \in \ell^2$.

Contrariamente, asumiendo que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle y, u_n \rangle|^2}{\sigma_n^2} < \infty,$$

definimos

$$x := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y, u_n \rangle}{\sigma_n} v_n.$$

Entonces, por el teorema de Riesz-Fischer, vale que $x \in X$.

Se tiene entonces que

$$Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y, u_n \rangle}{\sigma_n} K v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, u_n \rangle u_n = Qy.$$

Como $Qy \in R(K)$ nos queda que $y \in D(K^\dagger)$. Así queda demostrado el primer resultado del teorema.

Sabemos que v_n genera $N(K)^\perp$, entonces $x \in N(K)^\perp$. Habíamos visto en la demostración del teorema (2.1.8) que $\{z \in X \mid Kz = Qy\} = K^\dagger y + N(K)$. Como x está en estos dos conjuntos, así como también está en $N(K)^\perp$, x es el elemento de mínima norma en este conjunto, es decir, $x = K^\perp Qy = K^\dagger y$, lo cual prueba el segundo resultado del teorema.

Observación 2.2.11. La primera condición del teorema (2.2.9) para la existencia de una mejor aproximación a la solución, es conocida como «el criterio de Picard». Esta dice que que la mejor aproximación a la solución de $Kx = y$ existe solo si los coeficientes de Fourier $(\langle y, u_n \rangle)$ decaen suficientemente más rápido que los valores singulares σ_n .

Observación 2.2.12. El ítem (2) del teorema (2.2.9) muestra cómo los errores en y afectan al resultado $K^\dagger y$. Los componentes del error que corresponden a valores singulares grandes son inofensivos, mientras que los componentes del error correspondientes a valores singulares chicos, σ_n , son amplificadas por el factor $1/\sigma_n$, de modo que estos valores son peligrosos. Si $\dim R(K) < \infty$ entonces hay sólo una cantidad finita de valores singulares, y por lo tanto los factores de amplificación están al menos acotados, sin embargo pueden ser demasiado grandes. Si $\dim R(K) = \infty$ entonces vale que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$ y por ende los errores en el dato de un tamaño fijo pueden ser amplificadas arbitrariamente, esto es por el factor $1/\sigma_n$, que crece sin límite.

2.3. Descomposición en valores singulares para dimensión finita

Para lo que sigue nos importará analizar el caso de dimensión finita.

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz, supongamos $m \geq n$. Entonces podemos pensar a A como un operador lineal y acotado de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y como estamos en dimensión finita

2.3. DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES PARA DIMENSIÓN FINITA 19

es un operador compacto. Entonces usando la definición de sistema singular existe un sistema $(\sigma_i; v_i, u_i)$ tal que $Ax = \sum_{i=1}^s \sigma_i \langle x, v_i \rangle u_i$ y donde $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_s > 0$. Es decir σ_s^2 es el autovalor más chico de $A^\top A$ pero distinto de cero. Luego se puede extender al conjunto ortonormal $(v_i)_{1 \leq i \leq s}$ de autovectores de $A^\top A$ a una base ortonormal de \mathbb{R}^n con los autovectores asociados al autovalor nulo de $A^\top A$. Así mismo se puede extender al conjunto ortonormal $(u_i)_{1 \leq i \leq s}$ de autovectores de AA^\top a un conjunto ortonormal $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ con elementos del núcleo de AA^\top . Y entonces seguirá valiendo que

$$Ax = \sum_{i=1}^n \sigma_i \langle x, v_i \rangle u_i, \quad (2.10)$$

donde $\sigma_i = 0 \forall s + 1 \leq i \leq n$. Si definimos a las matrices U y V como las matrices cuyas columnas son los vectores (u_1, \dots, u_n) y (v_1, \dots, v_n) respectivamente. Y la matriz Σ es la matriz diagonal que tiene a los $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ obtenemos que:

$$A = U\Sigma V^\top = \sum_{i=1}^n u_i \sigma_i v_i^\top. \quad (2.11)$$

Los elementos σ_i son los valores singulares de A , mientras que los vectores u_i y v_i son los vectores singulares a izquierda y a derecha respectivamente. Y la ecuación (2.11) representa la descomposición en valores singulares de A abreviadamente se nota SVD (singular value decomposition).

Observación 2.3.1. *La condición de la matriz A es igual a σ_1/σ_n .*

En relación a problemas discretos mal planteados hay dos rasgos característicos de la descomposición en valores singulares que se encuentran muy a menudo, sin embargo son muy difíciles, o quizás imposible de demostrar en general. Estas son:

- Los valores singulares σ_i decrecen gradualmente a cero sin una brecha en particular en el espectro. Un crecimiento en las dimensiones de A generará un incremento en la cantidad de valores singulares.
- Los vectores singulares a izquierda y a derecha tienden a tener más cambios de signo en sus elementos a medida que σ_i decrece.

A partir de la ecuación (2.11) se desprenden las siguientes dos relaciones:

$$\begin{cases} Av_i = \sigma_i u_i \\ \|Av_i\|_2 = \sigma_i \end{cases}$$

Así podemos ver que si σ_i es un valor chico esto implica que A tiene rango casi deficiente y que los vectores v_i asociados a valores σ_i pequeños son numéricamente vectores del núcleo de A (es decir que una computadora podría registrar para estos valores pequeños σ_i que la ecuación es $Av_i = 0$). Por este motivo y por las características previamente enunciadas podemos concluir que la matriz A de un problema

discreto mal planteado está muy mal condicionada y que su espacio numéricamente nulo está generado por vectores con muchos cambios de signo. El SVD nos permite analizar otro aspecto muy importante de los problemas discretos mal planteados y tiene que ver con el efecto suavizante típicamente asociado a los núcleos en L^2 .

Notemos que a medida que los σ_i decrecen los vectores singulares u_i y v_i son cada vez más oscilatorios. Usando la ecuación (2.10) se observa claramente que debido a la multiplicación con los σ_i las componentes de alta frecuencia de x están más amortiguadas en Ax que las frecuencias bajas. Es así que el problema inverso, es decir aquel que calcula el valor de x a partir de $Ax = b$ con b conocido debe tener el efecto opuesto, o sea que amplifica las oscilaciones de alta frecuencia del lado derecho b .

2.4. Descomposición en valores singulares generalizado

La descomposición en valores singulares generalizada (GSVD, generalized singular value decomposition) para un par de matrices (A, L) es una generalización del SVD para A en el sentido de que los valores singulares generales de (A, L) son las raíces cuadradas de los autovalores del par de matrices $(A^\top A, L^\top L)$. Supondremos que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$ satisfaciendo que $m \geq n \geq p$, puesto que es lo que sucede generalmente en el caso de los problemas discretos mal planteados. Luego la GSVD es una descomposición de las matrices A y L de la forma:

$$A = U \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} X^{-1},$$

$$L = V(M, 0)X^{-1},$$

donde las columnas de $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $V \in \mathbb{R}^{p \times p}$ son ortonormales, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz inversible y las matrices Σ y M son matrices diagonales de $p \times p$ tales que la diagonal de Σ es $(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ y la de M es (μ_1, \dots, μ_p) . Más aún los elementos de las diagonales de Σ y de M son no negativos y están ordenados de la siguiente manera:

$$0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_p \leq 1, \quad 1 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_p > 0,$$

y están normalizados de manera tal que

$$\sigma_i^2 + \mu_i^2 = 1, \quad i = 1 \dots p.$$

Los valores singulares generalizados de (A, L) se definen como los

$$\gamma_i = \sigma_i / \mu_i, \quad i = 1 \dots p,$$

que son una secuencia no decreciente. Por razones históricas el orden en el que aparecen los valores singulares generalizados es el opuesto que en caso del SVD. Debe tenerse cuidado respecto de la notación, pues las matrices Σ , V y U simbolizan distintas cosas en cada caso.

Cuando L es la matriz identidad I_n entonces las matrices U y V de la descomposición GSVD son idénticas a las matrices U y V de la descomposición SVD, y los valores singulares generalizados de (A, I_n) coinciden con los valores singulares de A , exceptuando por el orden en el que aparecen los valores singulares y los vectores singulares.

Para los casos en que se utiliza la GSVD en relación a problemas discretos mal planteados la matriz L es generalmente una matriz bien condicionada. Cuando sucede esto se puede ver a partir de la definición de L que la matriz X también está bien condicionada. Por lo tanto la diagonal de Σ debe provocar el mal condicionamiento de A . Como $\gamma_i = \sigma_i(1 - \sigma_i^2)^{-1/2}$ para valores σ_i pequeños vale que $\gamma_i \approx \sigma_i$, así los γ_i decaen a cero al igual que los valores singulares ordinarios.

En el caso discreto la condición de Picard (2.2.9) pierde sentido pues la serie de (2.8) está siempre acotada. Por lo tanto introduciremos la condición discreta de Picard de la siguiente manera:

Definición 2.4.1. *Sea y_0 el dato sin perturbaciones y L la matriz de regularización entonces para que se satisfaga la condición discreta de Picard debe cumplirse que los coeficientes de Fourier $\langle u_i^\perp, y_0 \rangle$ decaigan a cero más rápido que los valores singulares generalizados γ_i , esto es lo que dice la observación (2.2.11)*

En lo que sigue analizaremos cómo solucionar el problema de la discontinuidad del problema inverso mencionado en el comienzo del capítulo. Una de las herramientas que nos será útil para este fin es la descomposición en valores singulares generalizados recién estudiada.

2.5. Regularización

Hasta aquí hemos visto que si la ecuación $Tx = y$ representa un problema mal planteado y si $y \in D(T^\dagger)$ entonces la mejor aproximación y única es de la forma $x^\dagger = T^\dagger y$. Si además T es compacto usando el sistema singular nos queda por el teorema (2.2.9) que $x^\dagger = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y, u_n \rangle}{\sigma_n} v_n$. Pero en la mayoría de los problemas reales con los que uno se encuentra y en particular con los que trabajamos aquí el dato no es exacto, sino que viene con algún error. Luego nuestra ecuación pasa a ser $Tx = y^\delta$ donde y^δ es el dato observado con ruido. Como habíamos comentado los problemas mal planteados no son continuos respecto del dato. Por lo tanto habiendo modificado el dato puede ocurrirnos que $y^\delta \notin D(T^\dagger)$ o bien que la solución de la ecuación $Tx = y^\delta$ esté lejos de la buscada. Por lo tanto será necesario regularizar. Pero, ¿qué es regularizar?

La regularización es la aproximación de un problema mal planteado mediante una familia de problemas bien definidos cercanos al problema original. Queremos arribarnos a la mejor solución aproximada $x^\dagger = T^\dagger y$ de la ecuación

$$Tx = y \quad (2.12)$$

para un dato exacto y que no se conoce en forma precisa, sino que sólo se conoce una aproximación de este valor notado por y^δ y sabiendo que

$$\|y^\delta - y\| \leq \delta.$$

Llamaremos a y^δ el dato con ruido y a δ el nivel de ruido.

Cuando nos encontramos en un problema mal planteado $T^\dagger y^\delta$ no es una buena aproximación de $T^\dagger y$ debido a la discontinuidad de T^\dagger . Estamos entonces buscando una aproximación de x^\dagger , llamémosla x_α^δ , tal que por un lado dependa de forma continua del dato con ruido y^δ para que así pueda ser calculada de manera estable y que por el otro lado tenga la propiedad de que a medida que el nivel de ruido δ tiende a cero y el parámetro de regularización α es elegido apropiadamente obtengamos que x_α^δ tienda a x^\dagger .

Así pues tiene más sentido no solo observar la ecuación (2.12) para un valor específico y , sino considerar la ecuación (2.12) como una colección de ecuaciones para todo $y \in R(T)$ o para todo $y \in D(T^\dagger)$. Luego la idea de regularizar una ecuación pasa a ser la de regularizar al operador T^\dagger , y la regularización de T^\dagger debe reemplazar al operador T^\dagger no acotado por una familia de operadores continuos $\{R_\alpha\}$ que dependen del parámetro α . Entonces tomamos como una aproximación de x^\dagger a

$$x_\alpha^\delta = R_\alpha y^\delta$$

que puede ser calculada de una manera estable. Un requerimiento para el parámetro α es que si el nivel de ruido δ tiende a cero entonces la solución regularizada x_α^δ debe tender a x^\dagger . Es por esto que el parámetro α tendrá que relacionarse de alguna manera con δ y/o con y^δ y tal vez con otra información sobre T o sobre y . En lo que sigue veremos que las reglas de elección del parámetro α estarán conectadas con y^δ o con alguna información a priori sobre el dato exacto y .

Definición 2.5.1. Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal y acotado entre los espacios de Hilbert X e Y . Sea $\alpha_0 \in (0, +\infty]$. Para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$ definimos

$$R_\alpha : Y \rightarrow X$$

un operador continuo (no necesariamente lineal). La familia $\{R_\alpha\}$ se llama regularización del operador T^\dagger si para todo $y \in D(T^\dagger)$ existe una regla de elección de parámetro $\alpha = \alpha(\delta, y^\delta)$ tal que se cumple:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup \{ \|R_{\alpha(\delta, y^\delta)} y^\delta - T^\dagger y\| / \|y^\delta - y\| \leq \delta \} = 0 \quad (2.13)$$

Donde

$$\alpha : \mathbb{R}^+ \times Y \rightarrow (0, \alpha_0)$$

es tal que

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \{\alpha(\delta, y^\delta) / y^\delta \in Y, \|y^\delta - y\| \leq \delta\} = 0. \quad (2.14)$$

Para un $y \in D(T^\dagger)$ específico el par (R_α, α) se llama método de regularización convergente para resolver $Tx = y$ si se cumplen las condiciones (2.13) y (2.14).

Luego un método de regularización consiste en una regularización del operador y en una regla de elección de parámetro que sea convergente en el sentido de que si el parámetro de regularización es elegido de acuerdo a esa regla entonces la solución regularizada converja en norma a medida que el nivel de ruido tiende a cero.

Se puede extender la definición anterior al incluir no sólo perturbaciones en el dato y^δ sino también perturbaciones en el operador T . En este caso suponemos que en lugar de conocer al operador T únicamente conocemos alguna aproximación T_η tal que:

$$T - T_\eta \leq \eta,$$

y así la regla de elección del parámetro dependerá de δ, η, y^δ y de T_η . En este caso el requerimiento natural para que el método de regularización sea convergente será que el límite superior de la condición en (2.13) valga cuando $\delta, \eta \rightarrow 0$. Aquí nos restringiremos a trabajar en el caso en el que el operador T es conocido exactamente.

Si a los operadores R_α les pedimos que sean lineales entonces su correspondiente método de regularización se llamará método de regularización lineal y a la familia $\{R_\alpha\}$ operadores lineales de regularización. De todos modos tiene sentido considerar métodos regularizantes no lineales para resolver problemas lineales, como por ejemplo el método del gradiente conjugado [5].

Definición 2.5.2. Sea α una regla de elección de parámetro conforme con la definición (2.5.1). Si α depende solamente de δ y no de y^δ entonces diremos que α es una regla de elección del parámetro a-priori y la notaremos $\alpha = \alpha(\delta)$. De otra manera diremos que α es una regla de elección de parámetro a-posteriori.

Así una regla de elección de parámetro a-priori depende solamente del nivel de ruido y no del dato actual, no depende de los resultados obtenidos a partir del cálculo residual $\|Tx_\alpha^\delta - y^\delta\|$ donde $x_\alpha^\delta = R_\alpha y^\delta$ es la solución regularizada. Tal regla puede ser concebida antes del cálculo por eso es que se llama regla de elección de parámetro a-priori.

Teorema 2.5.3. Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal y acotado y supongamos que existe una regularización $\{R_\alpha\}$ para T^\dagger con una regla de elección de parámetro α que depende solamente de y^δ y no de δ tal que el método de regularización (R_α, α) es convergente para todo $y \in D(T^\dagger)$. Luego T^\dagger es acotado.

Demostración 2.5.4. Si α es independiente de δ , o sea $\alpha = \alpha(y^\delta)$ y a partir de la ecuación (2.13) se tiene que:

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \{ \|R_{\alpha(y^\delta)}y^\delta - T^\dagger y\| / y^\delta \in Y, \|y^\delta - y\| \leq \delta \} = 0 \quad (2.15)$$

en particular se tiene que $R_{\alpha(y)}y = T^\dagger y$ para todo $y \in D(T^\dagger)$. Dada una sucesión $y_n \in D(T^\dagger)$ que converge a $y \in D(T^\dagger)$ por (2.15) vale que $T^\dagger y_n = R_{\alpha(y_n)}y_n \rightarrow T^\dagger y$ de modo que T^\dagger es continua en $D(T^\dagger)$ y por (2.1.6) $R(T)$ es cerrado y así $D(T^\dagger) = Y$.

Luego si T^\dagger no es acotado no hay ninguna estrategia de selección de parámetro independiente del nivel de ruido que pueda producir un método de regularización convergente.

Aparecen entonces las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se pueden construir operadores regularizantes?
- ¿Cómo se pueden construir reglas de elección de parámetros que den lugar a métodos de regularización convergentes?
- ¿Cómo se pueden realizar estos pasos de algún modo «óptimo»?

El siguiente resultado ayuda a contestar la primera pregunta:

Proposición 2.5.5. Sea T un operador lineal, y sea R_α un operador continuo para todo $\alpha > 0$. Entonces la familia $\{R_\alpha\}$ es una regularización de T^\dagger si

$$R_\alpha y \rightarrow T^\dagger y \quad \forall y \in D(T^\dagger) \quad \text{cuando } \alpha \rightarrow 0. \quad (2.16)$$

En este caso para cada $y \in D(T^\dagger)$ existe una regla de elección de parámetro a-priori α tal que (R_α, α) es un método de regularización convergente para resolver $Tx = y$.

Demostración 2.5.6. Fijemos un $y \in D(T^\dagger)$ cualquiera. Por suposición existe una función monótona $\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ donde $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sigma(\epsilon) = 0$ tal que para todo $\epsilon > 0$,

$$\|R_{\sigma(\epsilon)}y - T^\dagger y\| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Como cada $R_{\sigma(\epsilon)}$ es continua para todo $\epsilon > 0$ existe un $\rho(\epsilon)$ tal que si $\|z - y\| \leq \rho(\epsilon)$ entonces

$$\|R_{\sigma(\epsilon)}z - R_{\sigma(\epsilon)}y\| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Esto define una función $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ que se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que es estrictamente monótona, continua y que tiene la propiedad de que

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \rho(\epsilon) = 0$. Por ende existe la función inversa ρ^{-1} en el rango de ρ , es estrictamente monótona, continua y cumple que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho^{-1}(\delta) = 0$. Se puede extender la función ρ^{-1} a todo \mathbb{R}^+ y así definir

$$\begin{aligned} \alpha &: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \delta &\mapsto \sigma(\rho^{-1}(\delta)) \end{aligned}$$

La función α es monótona y tiene la propiedad de que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0$. Más aún, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, llamémoslo $\delta := \rho(\epsilon)$ tal que si $\|y^\delta - y\| \leq \delta$ entonces

$$\|R_{\alpha(\delta)}y^\delta - T^\dagger y\| \leq \|R_{\alpha(\delta)}y^\delta - R_{\alpha(\delta)}y\| + \|R_{\alpha(\delta)}y - T^\dagger y\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

puesto que $\alpha(\delta) = \sigma(\epsilon)$. Luego para el método (R_α, α) se verifican las condiciones (2.13) y (2.14). Así la función α define una regla de elección de parámetro a-priori.

Observación 2.5.7. La inversa de la proposición anterior se cumple en el siguiente sentido:

Si (R_α, α) es un método de regularización convergente entonces por (2.14) se tiene que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} R_{\alpha(\delta, y)}y = T^\dagger y$$

para todo $y \in D(T^\dagger)$. Si α es continua en δ esto implica que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} R_\sigma y = T^\dagger y,$$

si no, esto vale únicamente sobre el conjunto de valores σ que están en el rango de parámetro de estrategia de elección α .

Así se observa que las regularizaciones son aproximaciones puntuales de la inversa de Moore-Penrose de T . Si $\{R_\alpha\}$ está uniformemente acotado, es lineal y además $R(T)$ es no cerrado entonces la convergencia en (2.16) no puede ser en la norma del operador, pues si no T^\dagger tendría que ser acotado. Además, debido al teorema de Banach-Steinhaus [2], si $R(T)$ no es cerrado,

$$\|R_\alpha\| \rightarrow +\infty, \text{ cuando } \alpha \rightarrow 0 \quad (2.17)$$

Por el Principio de Acotación Uniforme [2], (2.17) implica que debe existir $y \in Y$ tal que

$$\|R_\alpha y\| \rightarrow +\infty, \text{ cuando } \alpha \rightarrow 0. \quad (2.18)$$

De hecho (2.18) se cumple para todo $y \in Y - M$ donde M es un conjunto de Baire de primera categoría. Por otro lado

$$x_\alpha := R_\alpha y \quad (2.19)$$

converge a $T^\dagger y$ en el conjunto denso $D(T^\dagger)$ debido a (2.16). Resulta que bajo condiciones adicionales razonables el conjunto donde se cumple (2.18) es precisamente el complemento de $D(T^\dagger)$:

Proposición 2.5.8. *Sea $\{R_\alpha\}$ una regularización lineal, x_α definida como (2.19) para todo $y \in Y$. Luego si $y \in D(T^\dagger)$ entonces:*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_\alpha = T^\dagger y \quad (2.20)$$

Y si

$$\sup_{\alpha > 0} \{\|TR_\alpha\|/\alpha > 0\} < \infty, \quad (2.21)$$

entonces

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|x_\alpha\| = +\infty \text{ para } y \notin D(T^\dagger). \quad (2.22)$$

Demostración 2.5.9. *Que se cumple la ecuación (2.20) sigue como en la observación 2.5.7. A partir de la misma observación se puede concluir que $R_\alpha \rightarrow T^\dagger$ puntualmente en $D(T^\dagger)$ (en el sentido descrito allí), entonces como $TT^\dagger = Q|_{D(T^\dagger)}$, $TR_\alpha \rightarrow Q$ puntualmente en el conjunto denso $D(T^\dagger)$. Como por hipótesis $\|TR_\alpha\|$ esta uniformemente acotado, $TR_\alpha \rightarrow Q$ puntualmente en todo Y .*

Ahora supongamos que existe una sucesión $\alpha_n \rightarrow 0$ tal que $\|x_{\alpha_n}\|$ está acotada, entonces $\|x_{\alpha_n}\|$ tiene una subsucesión (notada nuevamente por $\|x_{\alpha_n}\|$) que converge débilmente a un $x \in X$. Como T es débilmente secuencialmente continuo $Tx_{\alpha_n} \rightarrow Tx$. Por otro lado $Tx_{\alpha_n} = TR_{\alpha_n}y \rightarrow Qy$, por lo tanto $Tx = Qy$. De aquí que $y \in D(T^\dagger)$. Luego si $y \notin D(T^\dagger)$ no puede existir ninguna sucesión acotada $\|x_{\alpha_n}\|$ (donde α_n es de la forma $\alpha_n(\delta_n, y) \rightarrow 0$), entonces se cumple (2.22).

En la siguiente proposición veremos como puede ser caracterizada una regla de elección de parámetro a-priori.

Proposición 2.5.10. *Sea $\{R_\alpha\}$ una regularización lineal, para todo $y \in D(T^\dagger)$ sea $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una regla de elección de parámetro a-priori. Entonces (R_α, α) es un método de regularización convergente si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \quad (2.23)$$

y

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \|R_{\alpha(\delta)}\| = 0 \quad (2.24)$$

Demostración 2.5.11. *Supongamos ciertas las condiciones (2.23) y (2.24). Usando la notación (2.19) tenemos que para todo $y^\delta \in Y$ tal que $\|y^\delta - y\| \leq \delta$,*

$$\begin{aligned} \|R_{\alpha(\delta)}y^\delta - T^\dagger y\| &\leq \|x_{\alpha(\delta)} - T^\dagger y\| + \|x_{\alpha(\delta)} - R_{\alpha(\delta)}y^\delta\| \\ &\leq \|x_{\alpha(\delta)} - T^\dagger y\| + \|R_{\alpha(\delta)}\|\delta. \end{aligned}$$

Usando (2.20), (2.23) y (2.24) se obtiene (2.13).

Para la inversa estamos considerando que α es una regla de elección de parámetro a-priori luego por definición se cumple (2.23). Supongamos que no se cumple (2.24),

luego existe una sucesión $\delta_n \rightarrow 0$ tal que $\|\delta_n R_{\alpha(\delta_n)}\| \geq C > 0$. Entonces existe una sucesión z_n en Y tal que $\|z_n\| = 1$ y $\|\delta_n R_{\alpha(\delta_n)} z_n\| \geq C/2$. Luego para cualquier $y \in D(T^\dagger)$ e $y_n := y + \delta_n z_n$,

$$R_{\alpha(\delta_n)} y_n - T^\dagger y = (R_{\alpha(\delta_n)} y - T^\dagger y) + \delta_n R_{\alpha(\delta_n)} z_n$$

no converge a cero puesto que el primer término converge a cero y el segundo no.

2.6. Regularización de Tikhonov

El método de regularización de Tikhonov es el más popular de los métodos. Para poder definirla necesitamos antes algunos resultados. Sea E_λ una familia espectral para T^*T [5]. Si T^*T es continuamente inversible entonces $(T^*T)^{-1} = \int \frac{1}{\lambda} dE_\lambda$. Como la mejor aproximación a la solución de $Tx = y$ es $x^\dagger = T^\dagger y$ esta puede ser caracterizada usando la ecuación normal 2.7 de la siguiente manera:

$$x^\dagger = \int \frac{1}{\lambda} dE_\lambda T^* y. \quad (2.25)$$

Pero si $R(T)$ es no cerrado e $y \notin D(T^\dagger)$ es decir $Tx = y$ esta mal planteado, entonces la integral (2.25) no existe puesto que el integrando $\frac{1}{\lambda}$ tiene un polo en 0 que pertenece al espectro de T^*T . Entonces la idea es reemplazar el integrando $\frac{1}{\lambda}$ por una familia de funciones $g_\alpha(\lambda)$ que dependen del parámetro α que sean continuas a trozos en $[0, \|T\|^2]$ (o sea en un conjunto que contiene al espectro de T^*T) y que, por conveniencia, sean continuas a la derecha en los puntos de discontinuidad. Así reemplazamos la ecuación (2.25) por

$$x_\alpha := \int g_\alpha(\lambda) dE_\lambda T^* y \quad (2.26)$$

Por construcción el operador definido en (2.26) es continuo en y . Entonces para un dato con ruido y^δ donde $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ se puede acotar el error entre x_α y

$$x_\alpha^\delta := \int g_\alpha(\lambda) dE_\lambda T^* y^\delta, \quad (2.27)$$

como veremos proximately en el teorema 2.6.3.

Con estas funciones g_α se puede construir una familia de operadores del siguiente modo:

$$R_\alpha := \int g_\alpha(\lambda) dE_\lambda T^* \quad (2.28)$$

La idea es entonces que esta familia de operadores R_α sea una regularización del operador T^\dagger ¿cuáles son las condiciones que debemos pedir? y ¿cómo construimos

la regla de elección de parámetro? En principio se puede observar que con el fin de obtener convergencia de x_α a x^\dagger cuando $\alpha \rightarrow 0$ tenemos que tomar funciones g_α tales que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.

Si x_α se define como en (2.26) entonces por (2.1.10) vale que:

$$x^\dagger - x_\alpha = x^\dagger - g_\alpha(T^*T)T^*y = (I - g_\alpha(T^*T)T^*T)x^\dagger = \int (1 - \lambda g_\alpha(\lambda))dE_\lambda x^\dagger.$$

Definimos:

$$r_\alpha(\lambda) := 1 - \lambda g_\alpha(\lambda)$$

para todo (α, λ) donde está definida $g_\alpha(\lambda)$, y luego

$$r_\alpha(0) = 1,$$

entonces nos queda que

$$x^\dagger - x_\alpha = r_\alpha(T^*T)x^\dagger. \quad (2.29)$$

El teorema que viene a continuación nos dice cuales son las características de la función g_α para poder obtener convergencia en las soluciones regularizadas para un dato exacto.

Teorema 2.6.1. *Sea, para todo $\alpha > 0$ y un $\epsilon > 0$, $g_\alpha : [0, \|T\|^2] \rightarrow \mathbb{R}$ una función que cumple las siguientes suposiciones: g_α es continua a trozos y existe un $C > 0$ tal que:*

$$|\lambda g_\alpha(\lambda)| \leq C \quad (2.30)$$

y

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \quad (2.31)$$

para todo $\lambda \in (0, \|T\|^2]$. Entonces para todo $y \in D(T^\dagger)$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} g_\alpha(T^*T)T^*y = x^\dagger \quad (2.32)$$

donde $x^\dagger = T^\dagger y$. Si $y \notin D(T^\dagger)$ entonces $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|g_\alpha(T^*T)T^*y\| = +\infty$.

Demostración 2.6.2.

$$\|x^\dagger - x_\alpha\|^2 = \int_0^{\|T\|^2+} r_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda x^\dagger\|^2$$

Esto vale usando (2.26) y (2.29) y además vale que la integral esta acotada por la constante $(C + 1)^2$, la cual es integrable respecto de la medida $d\|E_\lambda x^\dagger\|^2$. Luego por el Teorema de Convergencia Dominada:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\|T\|^2+} r_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda x^\dagger\|^2 = \int_0^{\|T\|^2+} \lim_{\alpha \rightarrow 0} r_\alpha^2(\lambda) d\|E_\lambda x^\dagger\|^2$$

Por (2.31) y como $r_\alpha(0) = 1$ entonces: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} r_\alpha^2(\lambda) = 0$ para $\lambda > 0$ y además $\lim_{\alpha \rightarrow 0} r_\alpha^2(0) = 1$. Además $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \|E_\lambda x^\dagger\|^2 - \|E_0 x^\dagger\|^2 = \|Px^\dagger\|^2$ donde P es el proyector ortogonal sobre $N(T)$. Como $x^\dagger \in N(T)^\perp$, $Px^\dagger = 0$ así se obtiene que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|x^\dagger - x_\alpha\|^2 = 0$. Lo cual demuestra (2.32).

El hecho de que $\|x_\alpha\| \rightarrow +\infty$ cuando $\alpha \rightarrow 0$ si $y \notin D(T^\dagger)$ se sigue de la proposición 2.5.8. Sea $R_\alpha = g_\alpha(T^*T)T^*$ y resulta por (2.30) que $\|TR_\alpha\| = \|TT^*g_\alpha(TT^*)\| \leq C$ y por lo tanto se cumple (2.21) para poder usar el resultado de la proposición antes mencionada.

Ahora veremos la cuestión de la estabilidad para estos métodos.

Teorema 2.6.3. Sean g_α y C como en el teorema anterior. Y sean x_α y x_α^δ definidas como en (2.26) y (2.27) respectivamente. Para $\alpha > 0$ sea

$$G_\alpha := \sup\{|g_\alpha(\lambda)| / \lambda \in [0, \|T\|^2]\}.$$

Entonces se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\|Tx_\alpha - Tx_\alpha^\delta\| \leq C\delta \quad (2.33)$$

y

$$\|x_\alpha - x_\alpha^\delta\| \leq \delta\sqrt{CG_\alpha}.$$

Demostración 2.6.4. Sabiendo que

$$g_\alpha(T^*T)T^* = T^*g_\alpha(TT^*), \quad (2.34)$$

podemos acotar:

$$\|Tx_\alpha - Tx_\alpha^\delta\| = \|Tg_\alpha(T^*T)T^*(y - y^\delta)\| \leq \|TT^*g_\alpha(TT^*)\| \|y - y^\delta\|,$$

entonces:

$$\|Tx_\alpha - Tx_\alpha^\delta\| \leq \delta \|TT^*g_\alpha(TT^*)\|$$

Sea F_λ una familia espectral para TT^* . Luego para todo $y \in Y$ donde $\|y\| = 1$ vale que:

$$\begin{aligned} \|TT^*g_\alpha(TT^*)(y)\|^2 &= \int_0^{\|T\|^2+\epsilon} (\lambda g_\alpha(\lambda))^2 d\|F_\lambda y\|^2 \\ &\leq \int_0^{\|T\|^2+\epsilon} C^2 d\|F_\lambda y\|^2 = C^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|TT^*g_\alpha(TT^*)\|^2 \leq C^2.$$

Y finalmente:

$$\|Tx_\alpha - Tx_\alpha^\delta\| \leq \delta C.$$

Análogamente se puede probar que

$$\|g_\alpha(TT^*)\| \leq G_\alpha. \quad (2.35)$$

Las expresiones (2.33), (2.34) y (2.35) implican que:

$$\begin{aligned} \|x_\alpha - x_\alpha^\delta\|^2 &= \langle x_\alpha - x_\alpha^\delta, T^* g_\alpha(TT^*)(y - y^\delta) \rangle \\ &= \langle Tx_\alpha - Tx_\alpha^\delta, g_\alpha(TT^*)(y - y^\delta) \rangle \\ &\leq \|Tx_\alpha - Tx_\alpha^\delta\| \|g_\alpha(TT^*)\| \delta \\ &\leq C\delta^2 \|g_\alpha(TT^*)\| \leq C\delta^2 G_\alpha. \end{aligned}$$

Se podría elegir como posible función g_α a la función:

$$g_\alpha(\lambda) := \frac{1}{\lambda + \alpha} \quad (2.36)$$

Esta función cumple todas las condiciones del teorema (2.6.1) con $C = 1$. Así usando (2.27) obtenemos que:

$$x_\alpha^\delta = (T^*T + \alpha I)^{-1} T^* y^\delta \quad (2.37)$$

o sea

$$T^*T x_\alpha^\delta + \alpha x_\alpha^\delta = T^* y^\delta$$

que puede ser pensado como una forma regularizada de la ecuación normal (2.7). Si consideramos la ecuación pero reemplazando el dato con ruido por el dato exacto obtenemos:

$$x_\alpha = (T^*T + \alpha I)^{-1} T^* y.$$

Este método es el método de regularización de Tikhonov. Como

$$(T^*T + \alpha I)^{-1} T^* = T^* (TT^* + \alpha I)^{-1}$$

Se puede calcular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} TT^* z_\alpha^\delta + \alpha z_\alpha^\delta &= y^\delta, \\ x_\alpha^\delta &= T^* z_\alpha^\delta \end{aligned}$$

Para un operador compacto K con sistema singular $(\sigma_n; v_n, u_n)$ queda que

$$x_\alpha^\delta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha} \langle y^\delta, u_n \rangle v_n$$

Si comparamos esta expresión con la obtenida en (2.2.9) se puede ver cuanto más estable es esta solución a perturbaciones en el dato. Los errores en $\langle y, u_n \rangle$ no se propagan con un factor $1/\sigma_n$ sino que lo hacen con un factor $\sigma_n/(\sigma_n^2 + \alpha)$ y estos factores se mantienen acotados cuando $n \rightarrow \infty$

Teorema 2.6.5. *Sea x_α^δ como en (2.37). Entonces x_α^δ es la única que minimiza el funcional de Tikhonov*

$$x \mapsto \|Tx - y^\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2. \quad (2.38)$$

Demostración 2.6.6. *Notemos con $f_\alpha(x)$ al funcional definido en (2.38). Para $\alpha > 0$, f_α es estrictamente convexo, $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = +\infty$. Luego f_α tiene un único mínimo y debe cumplir que*

$$f'_\alpha(x)h = 0 \quad \forall h \in X.$$

$$\begin{aligned} f'_\alpha(x)h &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(x + \theta)h - f_\alpha(x)}{\theta} = 2(\langle Tx - y^\delta, Th \rangle + \alpha \langle x, h \rangle) = \\ &= 2(\langle T^*Tx - T^*y^\delta + \alpha x, h \rangle) = 0. \end{aligned}$$

Entonces el mínimo del operador es el x_α^δ definido en (2.37).

Minimizar (2.38) es un compromiso entre minimizar la norma residual mientras se mantiene chico el término de penalización $\|x\|$, forzando así la estabilidad por lo visto en (2.6.3). El método de Tikhonov puede ser generalizado en el sentido de que en lugar de querer minimizar el funcional (2.38) podemos querer minimizar:

$$g(x) := \|Tx - y^\delta\|^2 + \alpha\|Bx\|^2$$

aquí B es un operador cerrado tal que el hecho de controlar $\|Bx\|$ es una restricción de manera que la solución obtenida pertenezca a un subconjunto $S \subseteq X$ donde S representa cierta información a-priori que debe tener la solución x . Observemos que si $B = I$ estamos en lo que llamamos el método clásico de Tikhonov.

En este caso la solución que minimiza al funcional $g(x)$ debe cumplir la ecuación:

$$(T^*T + \alpha B^*B)x_\alpha^\delta = T^*y^\delta$$

Para llegar a este resultado hay que hacer la misma cuenta que se hizo para probar que (2.37) es la solución del método clásico de Tikhonov.

Proposición 2.6.7. *Si hacemos la siguiente suposición*

$$\exists c > 0 \text{ tal que } c\|x\|^2 \leq \|Tx\|^2 + \|Bx\|^2 \quad \forall x \in X \quad (2.39)$$

Entonces para todo $\alpha > 0$ existe una única solución x_α^δ que es solución del método generalizado de Tikhonov. Y además esta solución cumple para todo $\alpha > 0$:

$$\|x_\alpha^\delta - x_0\| \leq \left(\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} + \|Bx_0\| \right) \nu(\sqrt{\alpha}, B) \quad (2.40)$$

donde $\nu(\tau, B) := \sup\{\|x\|/x \in X, \|Tx\| \leq \tau, \|Bx\| \leq 1\}$.

Si estamos en dimensión finita es decir T es una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y B una matriz $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$, usando la descomposición en valores singulares y (2.37) obtenemos que la solución regularizada para el método de Tikhonov clásico es de la forma:

$$x_\alpha^\delta = \sum_{i=1}^n f_i \frac{u_i^\top y^\delta}{\sigma_i} v_i \quad (2.41)$$

Mientras que para el método generalizado es:

$$x_\alpha^\delta = \sum_{i=1}^p f_i \frac{u_i^\top y^\delta}{\sigma_i} x_i + \sum_{i=p+1}^n \langle u_i^\top, y^\delta \rangle x_i \quad (2.42)$$

Los números f_i se llaman factores de filtro y en el caso del método de Tikhonov son:

$$f_i = \frac{\sigma_i^2}{(\sigma_i^2 + \alpha)} \text{ si } L = I_n$$

y

$$f_i = \frac{\gamma_i^2}{(\gamma_i^2 + \alpha)} \text{ si } L \neq I_n.$$

Los factores de filtro tienen la importante propiedad de que a medida que los σ_i decrecen los correspondientes f_i tienden a cero de tal modo que las contribuciones $(\frac{u_i^\top b}{\sigma_i} x_i)$ a la solución cuando σ_i es chico son efectivamente filtrados. La diferencia entre distintos métodos de regularización radica esencialmente en como se definen los factores de filtro.

2.7. Curva-L

Tal vez una de las herramientas gráficas más útiles para el análisis de problemas mal planteados es la llamada curva-L, la cual es un gráfico, para todos los parámetros de regularización válidos, de la (semi)norma $\|Bx_\alpha^\delta\|$ de la solución regularizada versus la correspondiente norma residual $\|Tx_\alpha^\delta - y\|$. En este sentido la curva-L muestra claramente el compromiso entre la minimización de estas dos cantidades, que es la cuestión en los métodos de regularización.

Cuando el α es grande en pos de poder minimizar el funcional de Tikhonov el término $\|Bx_\alpha^\delta\|$ debe ser chico. De esta manera para parámetros de regularización grandes obtengo soluciones regularizadas que pueden estar lejos de solucionar mi problema pero que cumplen fuertemente con la condición a-priori. Es decir se está penalizando mucho. Mientras que si el α es chico pasa exactamente lo contrario, es decir el término $\|Tx_\alpha^\delta - y\|$ es chico mientras que el término de la (semi)norma pierde importancia. En este caso la solución regularizada tendrá una norma residual

pequeña pero no tiene por qué cumplir la restricción que se le plantea. Decimos entonces que se está penalizando poco.

La curva-L grafica en escala logarítmica estas dos cantidades para ciertos valores de α . La idea es que el α que corresponde a la esquina de este gráfico es el mejor parámetro de regularización que se puede pedir, ya que es el que hace más pequeños a la norma residual y a la semi-norma simultáneamente.

Luego una vez que tenemos el parámetro de regularización que mejor se adapta a nuestro problema podemos construir la solución regularizada que depende de él usando las expresiones (2.41) y (2.42). En el capítulo 4 se pueden ver varias figuras con la curva L de los distintos problemas, como por ejemplo la imagen (4.4).

Capítulo 3

Problemas Electromagnéticos

Siendo el problema de MFL muy complicado por la no linealidad del material ferromagnético, intentaremos primero simplificarlo concentrándonos en el problema en el aire. De este modo, intentaremos revertir el efecto suavizante del alejamiento respecto de la superficie a inspeccionar tratando de calcular el campo justo en la superficie a partir de la medición del campo a una distancia conocida de la misma.

Este estudio se realizará en dos geometrías de interés: planchas y tubos (superficies planas y cilíndricas respectivamente).

Por último estudiaremos un problema mucho más complejo (y más realista): tratar de determinar perturbaciones desconocidas del borde de una región con la forma de corona circular (tubo) conocidas las perturbaciones en el campo magnético expulsado.

3.1. Ecuaciones de Maxwell magnetostáticas

Las ecuaciones de Maxwell que describen el problema magnético en el caso independiente del tiempo son:

1. $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
2. $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$

donde \vec{B} es el vector de inducción magnética, \vec{H} el campo magnético y \vec{J} la densidad de corriente ([13]). Estas ecuaciones deben resolverse junto con una relación constitutiva que vincula \vec{B} con \vec{H} . En el caso más sencillo se supone una relación lineal

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \tag{3.1}$$

donde μ es la permeabilidad magnética.

En ausencia de corrientes externas $\vec{J} \equiv 0$ y por lo tanto $\nabla \times \vec{H} = 0$. En estas condiciones es conveniente introducir el potencial escalar magnético ϕ tal que:

$$\vec{H} = -\nabla\phi. \quad (3.2)$$

Si usamos (3.2) y (3.1) en la primera ecuación de nuestro sistema obtenemos que:

$$\nabla \cdot (\mu \nabla \phi) = 0$$

Con condición asintótica $-\nabla\phi \rightarrow H_{ext}$ en infinito.

Además si $\phi \in \mathcal{C}^2$ en cada dominio se satisface automáticamente la segunda ecuación del sistema.

Si μ es constante dentro del material, o sea

$$\mu = \begin{cases} \mu_0 & \text{en el aire;} \\ \tilde{\mu} & \text{en el material.} \end{cases}$$

Entonces vale que $\Delta\phi = 0$ en cada dominio pero con las condiciones de interface correctas:

1. Continuidad de la componente tangencial de \vec{H} y por lo tanto ϕ es continua.
2. Continuidad de la componente normal de B, entonces

$$-\tilde{\mu} \nabla \phi|_{acero} \cdot \hat{n} = -\mu_0 \nabla \phi|_{aire} \cdot \hat{n}.$$

3.2. Determinación del campo en la superficie

3.2.1. Caso dos dimensiones

Este caso idealizado corresponde a un problema con simetría de traslación en la dirección perpendicular a x e y .

Tenemos entonces una función $\phi(x, y)$ que es el potencial que corresponde al campo \vec{H} . Cuando $y = 0$ estamos sobre la superficie del material que queremos inspeccionar. Mientras que si $y = d$ estamos a una distancia d de la superficie. Aplicando el método del MFL podemos conseguir el campo magnético expulsado a la distancia d que es la distancia a la cual está el sensor del material, es decir que nuestro dato es la función $\phi(x, d)$ donde x es la dirección a lo largo de la superficie (ver figura 3.1).

Podemos resumir las ecuaciones de nuestro problema del siguiente modo:

$$\begin{cases} \Delta\phi(x, y) = 0 \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x) \\ \phi_x(x, y) \rightarrow -H_t \text{ cuando } \|(x, y)\| \rightarrow +\infty \end{cases}$$

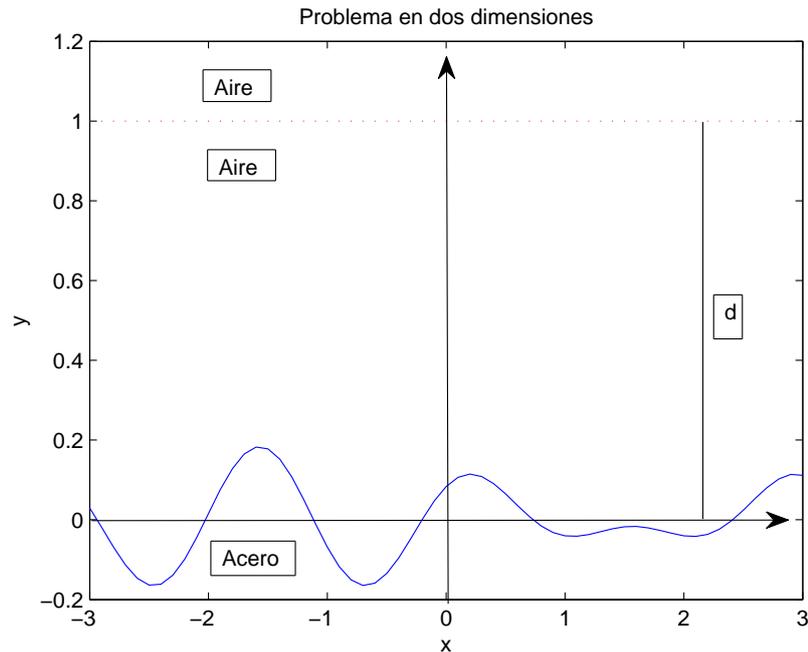


Figura 3.1: Gráfico ilustrativo

Tomando la función ψ tal que $\psi(x, y) = \phi(x, y) - H_t x$ nos queda:

$$\begin{cases} \Delta\psi(x, y) = 0 \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x) \\ \psi_x(x, y) \rightarrow 0 \text{ cuando } \|(x, y)\| \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (3.3)$$

A la función ψ se la llama potencial escalar magnético reducido.

Usando la fórmula de Green [6] obtenemos:

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int \frac{y}{(x-s)^2 + y^2} \psi_0(s) ds$$

en particular:

$$\psi_d(x) = \frac{1}{\pi} \int \frac{d}{(x-s)^2 + d^2} \psi_0(s) ds \quad (3.4)$$

donde $\psi_d(x) = \psi(x, d)$. La ecuación (3.4) es una ecuación de Fredholm de primer tipo donde el núcleo de la ecuación es la función:

$$K_d(x, s) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{(x-s)^2 + d^2}.$$

Como vimos en (1.3.3) en este tipo de ecuaciones tanto la función núcleo como la función $\psi_d(x)$ son datos conocidos mientras que la función $\psi_0(x)$ es la función que estamos buscando.

Podemos reescribir la ecuación (3.4) de la siguiente manera:

$$\psi_d = K\psi_0 = \int K_d(\cdot, s)\psi_0(s)ds. \quad (3.5)$$

En una aplicación real la función ψ_d representa un dato experimental solamente obtenido en un conjunto finito de puntos x_i . Usualmente estos puntos son pocos y contienen cierto error de medición. Para poder resolver el problema numéricamente y computacionalmente es que debemos discretizarlo, de forma de transformar la ecuación integral (3.5) en una ecuación matricial:

$$A\widetilde{\psi}_0 = \widetilde{\psi}_d.$$

Donde $\widetilde{\psi}_0$ y $\widetilde{\psi}_d$ son vectores de dimensiones m y n respectivamente y A es una matriz de $n \times m$. Explícitamente,

$$\widetilde{\psi}_{di} = \sum_{j=1}^n a_{ij}\widetilde{\psi}_{0j}, \quad i = 1 \dots m.$$

En lo que sigue veremos cómo nuestro problema inverso que como vimos está mal planteado se encuentra asociado a un problema discreto también mal planteado.

Discretización del problema

Consideremos el conjunto de funciones $\{\varphi_j(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ donde

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_{j-1} \\ \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} & \text{si } x_{j-1} < x \leq x_j \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} & \text{si } x_j < x \leq x_{j+1} \\ 0 & \text{si } x > x_{j+1} \end{cases} \quad (3.6)$$

que es una base para funciones continuas y lineales a trozos. Entonces como las funciones ψ_0 y ψ_d son continuas tenemos que:

$$\psi_0(x) \approx \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_0(x_j)\varphi_j(x) \quad \text{y} \quad \psi_d(x) \approx \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_d(x_j)\varphi_j(x).$$

Luego por (3.4) obtenemos:

$$\psi_d(x) \approx \frac{d}{\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_0(x_j) \int \frac{\varphi_j(s)}{(x-s)^2 + d^2} ds.$$

Usando la expresión de φ_j calculamos la integral.

Por hipótesis ψ_0 tiene soporte compacto. Entonces:

$$\psi_d(x) \approx \frac{d}{\pi} \sum_{j=1}^{j=N} \{\psi_0(x_j) \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{\varphi_j(s)}{(x-s)^2 + d^2} ds + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\varphi_j(s)}{(x-s)^2 + d^2} ds \right)\}. \quad (3.7)$$

Luego la matriz del problema discreto asociado A está definida como:

$$a_{i,j} = \frac{d}{\pi}(F_d(x_i, x_j) - F_d(x_i, x_{j-1}) + G(x_i, x_{j+1}) - G(x_i, x_j)) \quad (3.8)$$

donde las funciones F y G son las primitivas de las integrales que aparecen en el miembro derecho de (3.7) respectivamente y $1 \leq i, j \leq N$.

Por la forma de estas primitivas se puede ver que cuando la malla se afina esta matriz es «casi singular», luego los valores singulares de A tienden a cero a medida que la malla se afina y además el cociente entre el valor singular más grande y el valor singular más chico es muy grande, o sea la matriz está mal condicionada y por estos motivos es que el problema está mal planteado y tendremos que regularizar como explicamos en el capítulo anterior.

3.2.2. Caso de tres dimensiones

Procediendo como se hizo anteriormente y utilizando al potencial escalar magnético reducido ψ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \Delta\psi(x, y, z) = 0 & \text{si } z > 0 \\ \psi(x, y, 0) = \psi_0(x, y) & \text{si } z = 0 \\ \psi_x(x, y, z) \rightarrow 0 \text{ cuando } \|(x, y, z)\| \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Usando la fórmula de Green [6] obtenemos una relación entre la funciones ψ_d y ψ_0 que es la siguiente:

$$\psi(x_0, y_0, z_0) = \frac{2z_0}{3\alpha(3)} \int_{\partial R_+^3} \frac{\psi_0(x, y)}{\|(x_0, y_0, z_0) - (x, y, 0)\|^3} dx dy$$

donde $\alpha(3)$ es el volumen de la bola unitaria $B(0, 1)$ en \mathbb{R}^3 que es igual a $\frac{4}{3}\pi$. Así si llamamos d a la distancia de la chapa al sensor nos queda:

$$\psi_d(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{\|(x-s, y-t, d)\|^3} \psi_0(s, t) ds dt \quad (3.9)$$

Notamos con

$$K_d(x, s, y, t) = \frac{d}{\|(x-s, y-t, d)\|^3}$$

Esta función es el núcleo de la integral y tiende a cero cuando s y t tienden a infinito.

Bases de Fourier Este método se basa en expandir una función en una serie. Empecemos haciendo una separación de variables:

$$\psi(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$$

Supongamos que ψ es periódica en las variables x e y y de período T . Consideremos a las funciones $\rho_n(x) = \exp(iw_n x)$ donde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$ que forman una base ortonormal. Entonces podemos escribir:

$$\psi(x, y, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{nm} \rho_n(x) \rho_m(y) h(z)$$

Como ψ debe cumplir la ecuación de Laplace:

$$h(z) = \exp(-\sqrt{w_n^2 + w_m^2} z)$$

Por lo cual:

$$\psi(x, y, z) = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \alpha_{nm} \rho_n(x) \rho_m(y) \exp(-\sqrt{w_n^2 + w_m^2} z) \quad (3.10)$$

Nuestro dato es ψ constante en z , que representa la distancia del sensor a la superficie de objeto (notemosla d) y buscamos conocer a ψ cuando $z = 0$. Usando (3.10) tenemos que:

$$\psi_d(x, y) = \psi(x, y, d) = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \alpha_{nm} \rho_n(x) \rho_m(y) \exp(-\sqrt{w_n^2 + w_m^2} d)$$

y

$$\psi_0(x, y) = \psi(x, y, 0) = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \alpha_{nm} \rho_n(x) \rho_m(y).$$

De este modo obtenemos una relación entre los coeficientes del dato y los coeficientes de la función incognita.

$$\beta_{nm} = \alpha_{nm} \exp(-\sqrt{w_n^2 + w_m^2} d) \quad (3.11)$$

donde los β_{nm} son los coeficientes de $\psi_d(x, y)$.

Truncando las sumatorias con un N suficientemente grande:

$$\psi_d(x, y) \approx \sum_{n, m = -N}^N \beta_{nm} \rho_n(x) \rho_m(y)$$

y

$$\psi_0(x, y) \approx \sum_{n, m = -N}^N \alpha_{nm} \rho_n(x) \rho_m(y).$$

Llegamos a una ecuación matricial $A = KB$, donde A es el vector compuesto por los coeficientes $\{\alpha_{nm}\}_{(-N \leq n, m \leq N)}$ y B tiene a los coeficientes $\{\beta_{nm}\}_{(-N \leq n, m \leq N)}$. La matriz K de este sistema es una matriz diagonal. Y los elementos de la diagonal tienden a cero a medida que $N \rightarrow \infty$, por lo tanto estamos ante una matriz mal condicionada y un problema mal planteado. En orden de encontrar una «buena» solución será necesario regularizar.

3.2.3. Caso de tres dimensiones para un tubo

En el caso de simetría cilíndrica el potencial escalar magnético reducido en el exterior de un tubo escrito en coordenadas cilíndricas obedece al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \Delta\psi(r, \theta, z) = 0 \\ \psi(r, \theta, h) = 0 \\ \psi(r, \theta, 0) = 0 \\ \psi(b, \theta, z) = 0 \\ \psi(a, \theta, z) = \psi_0(\theta, z) \end{cases} \quad (3.12)$$

El radio del tubo es a y b es un número lo suficientemente grande donde sabemos que ya no hay campo electromagnético, por lo que ψ es igual a cero. Con esta notación $r - a$ es la distancia del lector del MFL al tubo, por lo que para nosotros r será un número conocido (tal vez con cierto error de medición) entre a y b . θ es la variable angular y verifica que $0 \leq \theta \leq 2\pi$; consideramos que los extremos del tubo se encuentran entre los planos $Z = 0$ y $Z = h$ y la variable z representa la altura que toma valores entre estos extremos. Entonces al rotar y trasladar el tubo tenemos la lectura del campo magnético expulsado para todos los valores de θ y z a una distancia $(r - a)$ del tubo, con esta información queremos reconstruir el campo sobre el tubo (es decir cuando el radio es exactamente a). Luego nuestra incógnita es la función ψ_0 mientras que nuestro dato es la función $\psi_r = \psi(r, \theta, z)$ para un valor de r dado.

Para resolver este problema utilizamos la idea de una expansión en serie como en el caso anterior pero aquí dada la geometría en cuestión no se tomaron como base a las funciones de Fourier. Estudiemos cómo encontrar las funciones que representan una base para las posibles soluciones buscadas de este caso. ([1],[12])

Sabiendo que ψ cumple la ecuación de Laplace y tomando en cuenta que estamos trabajando con coordenadas cilíndricas tenemos que:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (3.13)$$

Separando variables,

$$\psi(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$$

usando la ecuación (3.13) y las condiciones de contorno obtenemos la siguiente representación de la función ψ :

$$\psi(r, \theta, z) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}, m,n \neq 0} \gamma_{mn} \left(Y_m(\lambda_n r i) - \frac{Y_m(\lambda_n b i) J_m(\lambda_n r i)}{J_m(\lambda_n b i)} \right) e^{im\theta} \sin(\lambda_n z) \quad (3.14)$$

Donde $\lambda_n = \frac{n\pi}{h}$, y donde J_m e Y_m son las funciones de Bessel de m-ésimo orden de primera y segunda especie respectivamente. Truncando la ecuación (3.14) para N

grande nos queda:

$$\psi(r, \theta, z) = \sum_{m,n=-N, m,n \neq 0}^N \gamma_{mn} \left(Y_m(\lambda_n r i) - \frac{Y_m(i\lambda_n b i) J_m(\lambda_n r i)}{J_m(\lambda_n b i)} \right) e^{im\theta} \sin(\lambda_n z) \quad (3.15)$$

Mediante el método de MFL conseguimos como dato a la función $\psi_r(\theta, z)$ y de esta manera podemos conocer los valores de las proyecciones en esta base, a las cuales notaremos con β_{mn} :

$$\beta_{mn} = \langle \psi_r(\theta, z), e^{im\theta} \sin \lambda_n z \rangle = \gamma_{mn} \left(Y_m(\lambda_n r i) - \frac{Y_m(i\lambda_n b i) J_m(\lambda_n r i)}{J_m(\lambda_n b i)} \right)$$

Discretizando la integral que define a los β_{mn} utilizando el método de trapecios para θ y z obtenemos:

$$\beta_{mn} = \frac{h2\pi}{k^2} \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \psi_r(\theta_i, z_j) e^{-im\theta_i} \sin(\lambda_n z_j) \quad (3.16)$$

Además tenemos la siguiente relación:

$$\alpha_{mn} \left(Y_m(\lambda_n r i) - \frac{Y_m(\lambda_n b i) J_m(\lambda_n r i)}{J_m(\lambda_n b i)} \right) = \beta_{mn} \left(Y_m(\lambda_n a i) - \frac{Y_m(\lambda_n b i) J_m(\lambda_n a i)}{J_m(\lambda_n b i)} \right) \quad (3.17)$$

Aquí los α_{mn} son los coeficientes de la función ψ_a en la expansión con las funciones de base $e^{im\theta} \sin(i\lambda_n z)$. Así pues una vez obtenidos los coeficientes β_{mn} a partir de la ecuación (3.17) tenemos a los α_{mn} y con ellos la reconstrucción de la función ψ_a . En este caso el problema inverso se plantea entonces en el hecho de despejar los α_{mn} una vez conocidos los β_{mn} . Observemos que en este caso la matriz que relaciona el dato con la incógnita es una matriz diagonal de $(N^2 \times N^2)$:

$$A\beta = \alpha \quad (3.18)$$

Donde los elementos de la matriz A son de la forma:

$$\frac{\left(Y_m(\lambda_n r i) - \frac{Y_m(i\lambda_n b i) J_m(\lambda_n r i)}{J_m(\lambda_n b i)} \right)}{\left(Y_m(\lambda_n a i) - \frac{Y_m(i\lambda_n b i) J_m(\lambda_n a i)}{J_m(\lambda_n b i)} \right)}$$

en la diagonal y cero fuera de ella. La ecuación definida en (3.18) representa una problema discreto mal planteado, ya que a medida que crece la dimensión de la matriz la condición de la matriz es cada vez más grande. Y esto sucede porque a medida que crece N y por lo tanto también lo hace el orden de las funciones de Bessel

m , tenemos que Y_m es muy grande mientras que J_m tiende a cero, es por esto que el cociente

$$\frac{Y_m(i\lambda_n b)}{J_m(\lambda_n b)} \rightarrow \infty$$

cuando $m \rightarrow \infty$. Luego la ecuación (3.18) es un problema mal planteado y para resolverlo se deberá regularizar.

3.3. Detección de fallas en el espesor de un tubo

En este caso se inspeccionarán posibles deformaciones en el espesor de un tubo suponiendo que la forma externa del tubo es una circunferencia, o sea analizaremos si hay cambios en el radio interno del objeto. Se sumerge el objeto en un campo magnético uniforme en infinito que forma un ángulo θ con el eje x y se mide el campo expulsado a una pequeña distancia del mismo. A partir de esta medición para todo θ en $[0, 2\pi]$ buscamos reconstruir el radio interior $r(\phi)$ para ϕ en $[0, 2\pi]$ (ver figura 3.2).

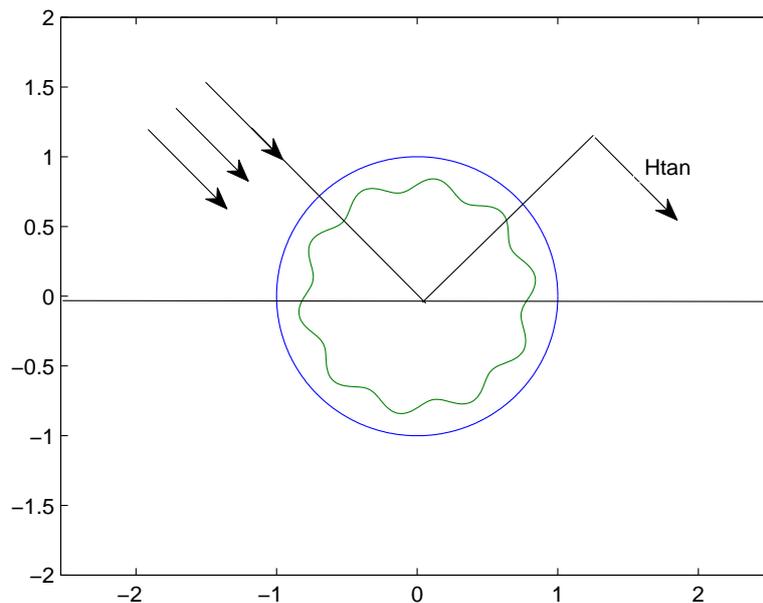


Figura 3.2: Imagen del tubo

Este caso es más complicado que el anterior, puesto que aquí el operador en cuestión que es el que relaciona el radio interno con el campo tangencial expulsado,

o sea:

$$T : r(\phi) \rightarrow H_{tan}(\theta)$$

no es un operador lineal.

Notemos con r_0 al radio interno de un tubo cuando éste no tiene perturbaciones en el espesor (en particular r_0 no depende del ángulo ϕ) y con H_{r_0} al campo tangencial expulsado para ese radio constante. Entonces lo que vamos a hacer es suponer que si hay pequeñas perturbaciones en el espesor éstas generan pequeñas variaciones en el campo tangencial expulsado. O sea que:

$$T : r_0 + \varepsilon\delta(\phi) \rightarrow H_{r_0} + \varepsilon H_{tan}(\theta)$$

donde ε y δ son números pequeños. De este modo nos interesa estudiar la aplicación que manda a $\delta(\phi)$ en $H_{tan}(\theta)$.

Consideremos una base de perturbaciones $\{1, \{\sin(k\theta), \cos(k\theta)\}_{k \in N}\}$ y luego truncemos esta base para conseguir un conjunto finito tomando un k_0 fijo:

$$C = \{1, \sin(\theta), \cos(\theta), \dots, \sin(k_0\theta), \cos(k_0\theta)\} \quad (3.19)$$

Aplicando el método de MFL sobre las perturbaciones del conjunto (3.19) obtenemos como dato al campo tangencial H_{tan} para cada perturbación y para toda rotación θ .

Representando el campo expulsado en la base de Fourier hasta el orden máximo l se tiene una matriz A de $\mathbb{R}^{(2l_0+1) \times (2k_0+1)}$ donde donde la columna j -ésima corresponde a los coeficientes de Fourier de la medición del campo tangencial expulsado (medido en A/m) para la k -ésima perturbación del conjunto (3.19).

Nos queda así una ecuación matricial:

$$Ax = y$$

donde el vector x tiene los correspondientes coeficientes de Fourier de la perturbación en el espesor e y los coeficientes de Fourier del campo tangencial. Nuestro dato es el vector y y lo que buscamos es al vector x .

Como el valor de H_{tan} depende de un promedio de la perturbación en el radio interior, mediado por la solución de la ecuación de Laplace en cada subdominio, resulta suavizado respecto de la perturbación. Esto hace que el problema inverso sea mal planteado. Una comprobación directa surge de calcular el cociente de los valores singulares:

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$$

(σ_{max} representa el valor singular más grande mientras que σ_{min} el más chico), y observar que este cociente es un número muy grande.

Por lo tanto para poder encontrar una solución «posible» para este problema deberemos regularizar.

3.4. Regularización

Como vimos los problemas recientemente expuestos son problemas que deben ser regularizados. Con este fin es que utilizamos el método de Tikhonov clásico:

$$x_\lambda = \underset{x}{\text{mín}}(\|Ax - b\|^2 + \lambda^2\|x\|^2), \quad (3.20)$$

donde el quid de la cuestión es hallar cuál es el λ apropiado. Para decidir cuál era el parámetro que nos da la solución que más se aproxima a la buscada utilizamos la ya mencionada esquina de la curva-L y escribimos la descomposición de la matriz A en sus valores singulares. Claramente para cada uno de los casos la matriz A de la ecuación (3.20) es diferente y es la que describe el problema discreto. Usamos este método debido a que la norma de la solución buscada no es muy grande.

También usamos el método de Tikhonov generalizado:

$$x_\lambda = \underset{x}{\text{mín}}(\|Ax - b\|^2 + \lambda^2\|Lx\|^2) \quad (3.21)$$

Se utilizó como operador L a una discretización del gradiente; elegimos a L de este modo puesto que por la física del problema sabemos que la solución buscada es una función suave sin muchas oscilaciones. Para el método generalizado se siguieron los mismos pasos que para el caso clásico, haciendo la descomposición (ahora generalizada) en valores singulares del par (A, L) y buscando la esquina de la curva-L que aquí es la que grafica para un conjunto de parámetros λ la norma de Lx_λ de la solución regularizada versus la correspondiente norma residual $\|Ax_\lambda - b\|$.

En el próximo capítulo expondremos los resultados obtenidos de los problemas que se han analizado aquí.

Capítulo 4

Resultados

Los problemas expuestos en el capítulo anterior fueron desarrollados utilizando algunos métodos mencionados y armando para ellos programas en MATLAB. En los mismos usamos el toolbox para MATLAB de regularización [9], y de este paquete en particular trabajamos con los programas: `fil_fac`, `l_curve`, `l_corner`, `picard`, `plot_lc`, `tikhonov`. Ahora veremos algunas soluciones obtenidas.

4.1. Problema en dos dimensiones

4.1.1. Caso con datos sintéticos

Para el caso de dos dimensiones consideremos al potencial escalar magnético reducido ψ de la forma:

$$\psi(x, y) = \frac{y + 0,8}{x^2 + (y + 0,8)^2}$$

el cual cumple con el sistema de ecuaciones (3.3). Hacemos la discretización (3.8) donde tomamos el valor N igual a 100, la distancia al sensor d es 1 y la cantidad de particiones del intervalo es $n = 1000$. Con estos parámetros se obtiene la figura 4.1 para el gráfico del potencial expulsado a distancia d de la superficie del objeto.

Mientras que en la figura 4.2 se puede ver cómo sería la reconstrucción del potencial expulsado sobre el objeto si resolviéramos el sistema directamente.

Aquí se puede ver cómo el sistema representa un problema mal condicionado, pues como habíamos comentado anteriormente a partir del teorema (2.2.9) cuando los valores singulares son muy pequeños se amplifican los errores en el problema inverso. En este caso el cociente $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = 3,1897e + 014$. Luego estamos ante un problema mal planteado y por ende la solución obtenida de manera directa no es la solución buscada.

En la realidad suele haber errores en las mediciones y por lo tanto en el dato, por ejemplo en lo que respecta a nuestro ensayo podemos suponer que hubo errores en la

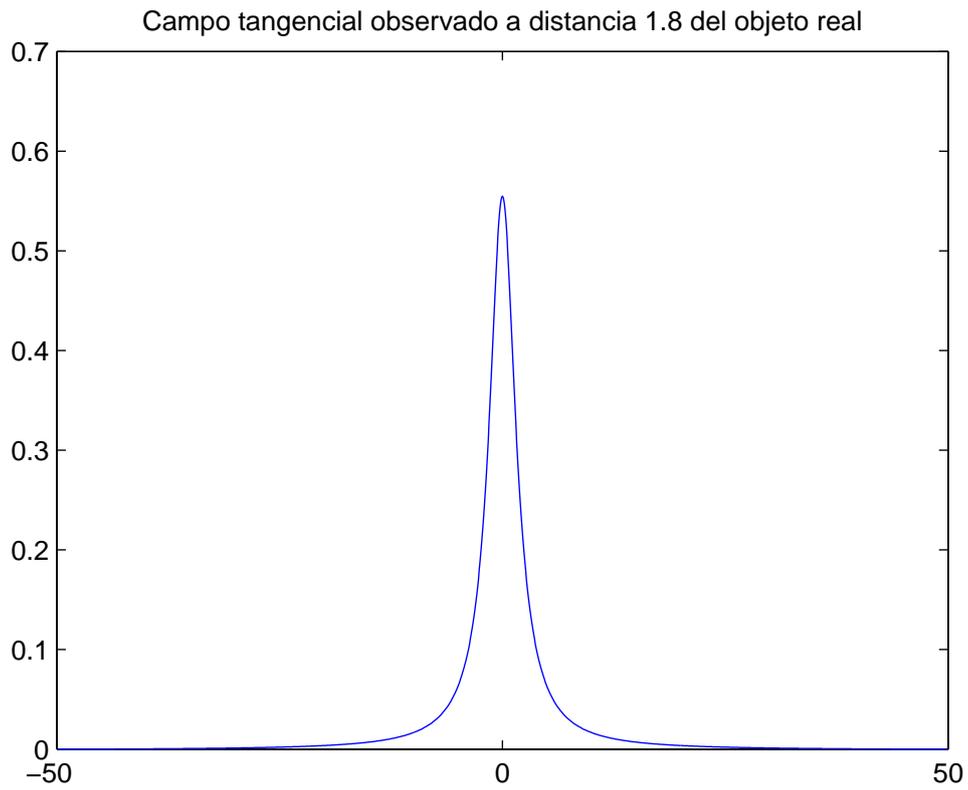


Figura 4.1: Gráfico de la función $\psi(x, 1)$ para el caso con datos sintéticos.

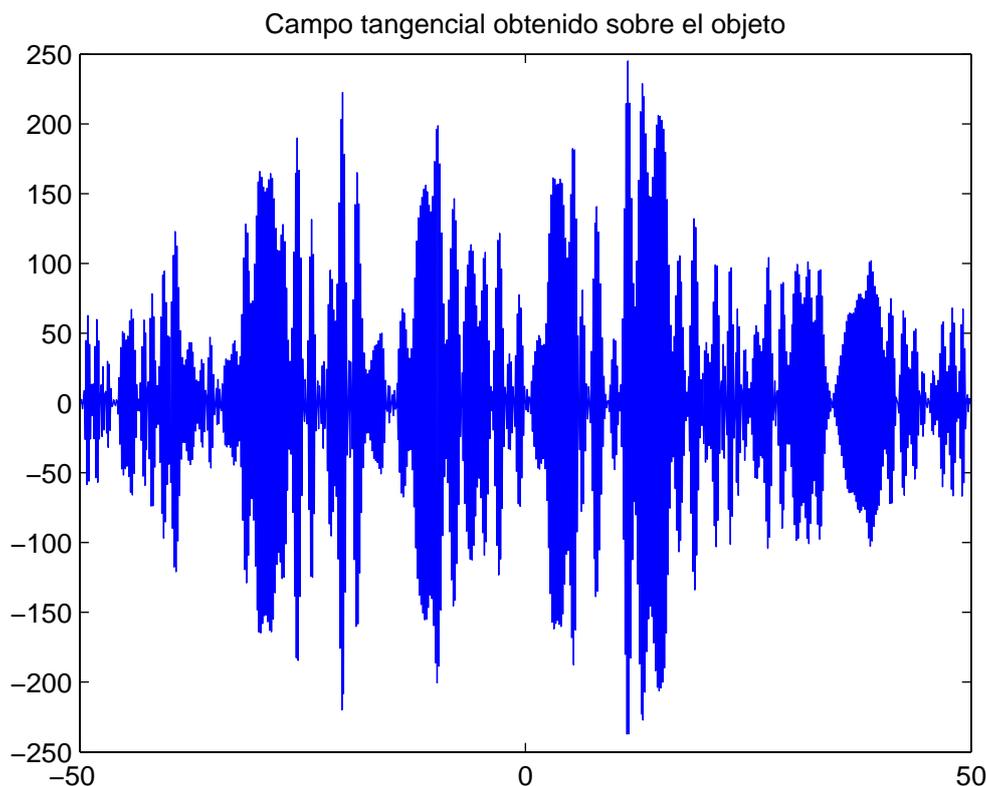


Figura 4.2: Gráfico de la solución obtenida sin regularizar en el caso de datos sintéticos.

lectura del dato, y el potencial expulsado a cierta distancia del objeto contenga errores de medición. Analicemos cómo responde el modelo si sucede esto. Consideramos que el ruido que se le agrega al dato es una variable aleatoria con distribución normal cuya media es igual a cero y su desvío igual a $0,05$. En el gráfico 4.3 se puede ver que en el caso del dato sin ruido la mayoría de los coeficientes de Fourier satisfacen la condición discreta de Fourier (2.4.1). Para el problema con ruido esto no sucede pues los coeficientes de Fourier están por arriba de los valores singulares.

La curva-L de este problema para el dato con ruido se puede ver en el gráfico 4.4. Y donde la esquina es $0,1898$.

Como en este caso la función ψ es una construcción artificial, conocemos el verdadero valor del potencial sobre el objeto (lo cual no sucede en la realidad) y así podemos ver cuán bien se aproxima la solución obtenida mediante el método de regularización a la verdadera. En la figura 4.5 se puede ver en el gráfico a) cómo es la verdadera solución de este problema, mientras que en b) se encuentra el gráfico de la solución regularizada con el método de Tikhonov donde el parámetro es la esquina

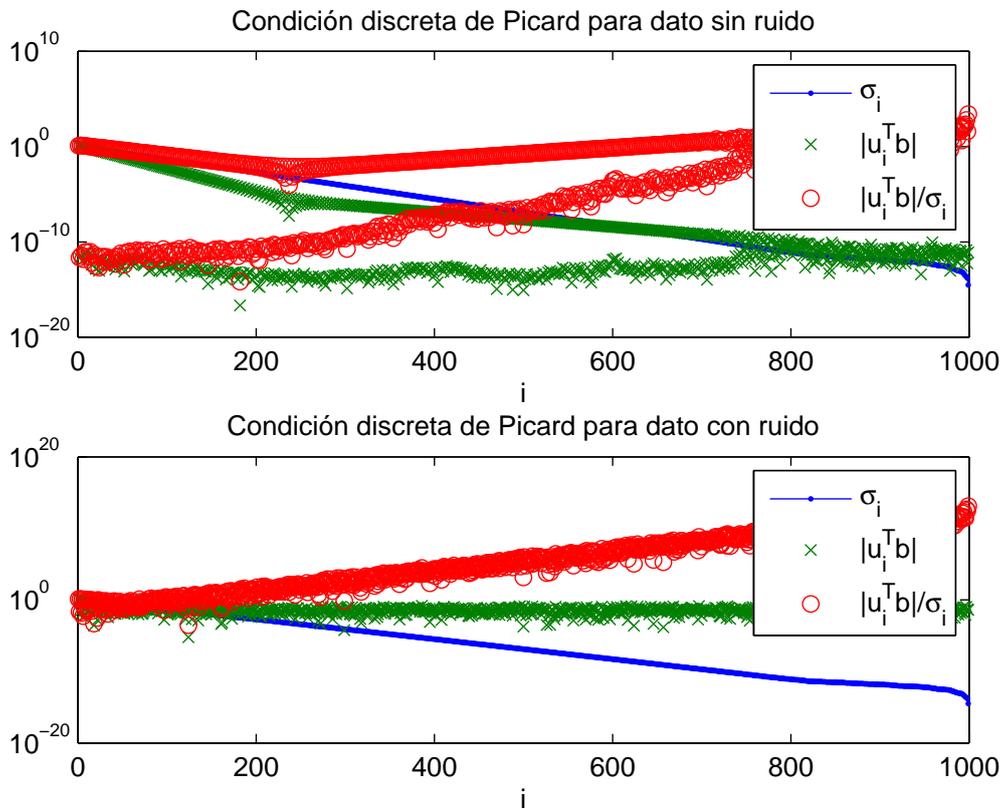


Figura 4.3: Criterio de Picard para dato sin ruido y con ruido en caso de datos sintéticos.

de la curva-L.

Además podemos observar que el valor máximo que toma la solución verdadera es 1,2497, el de la solución sin regularizar es 245,0182 y el de la regularizada es 0,8316. Lo cual muestra que la solución regularizada está más cerca de la solución buscada que la que se obtiene resolviendo directamente el sistema.

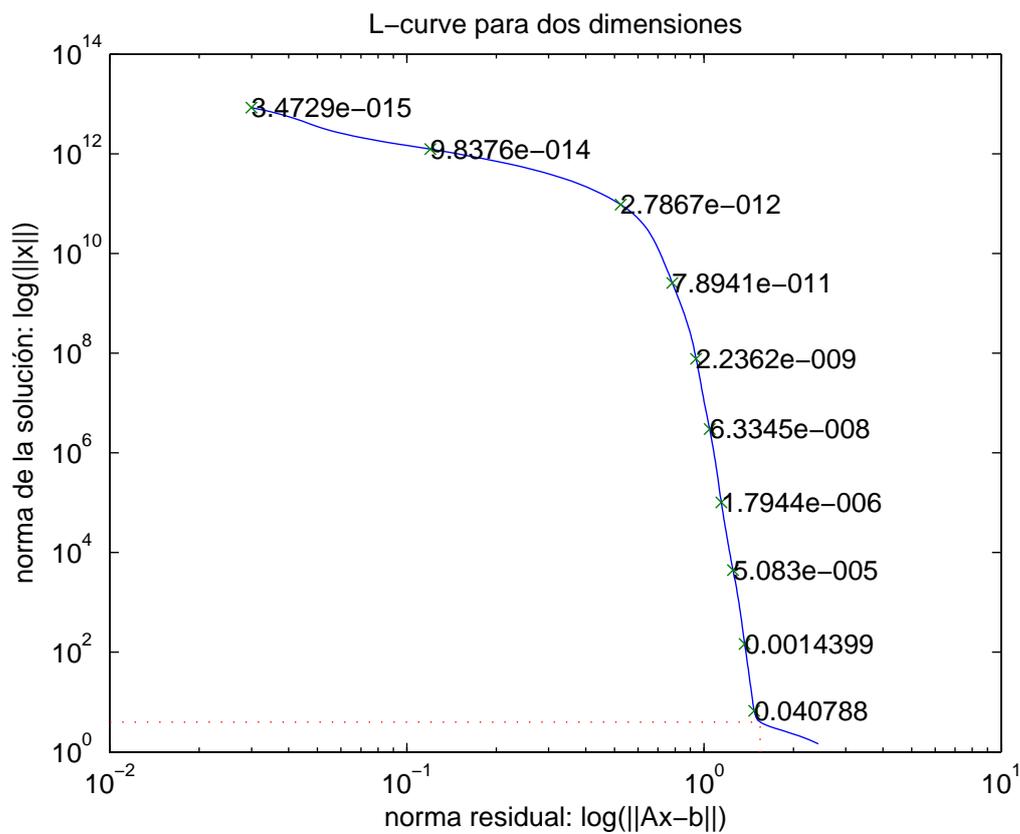


Figura 4.4: Curva L para el problema de datos sintéticos.

4.1.2. Caso con datos experimentales

Veamos ahora los resultados obtenidos también para el problema de dos dimensiones, pero considerando una medición realista. Para eso trabajamos a partir de mediciones del campo magnético expulsado realizadas sobre placas de acero rectangulares con ranuras maquinadas [4]. En este caso usamos las mediciones donde el liftoff (la distancia del sensor al objeto) es de 2.7 mm y calculamos el campo que se obtendría a 1.7 mm de distancia del objeto. Como en [4] se hicieron mediciones a 2.7 y a 1.7 mm, se pueden utilizar los resultados observados a 1.7 mm de distancia para verificar las soluciones obtenidas y considerarla como la solución verdadera.

Aquí nuevamente utilizamos la ecuación (3.8), con los valores: $N = 100$, $d = 1$ y $n = 1000$. Así pues el problema es nuevamente mal planteado pues la matriz del sistema es la misma que en el caso anterior. Con este dato obtenemos la figura 4.6 en la cual podemos ver en a) el gráfico del dato, en b) la solución real, en c) la solución del sistema sin regularizar y en d) la solución regularizada con el método de Tikhonov usando como parámetro de regularización la esquina de la curva-L. El gráfico de esta

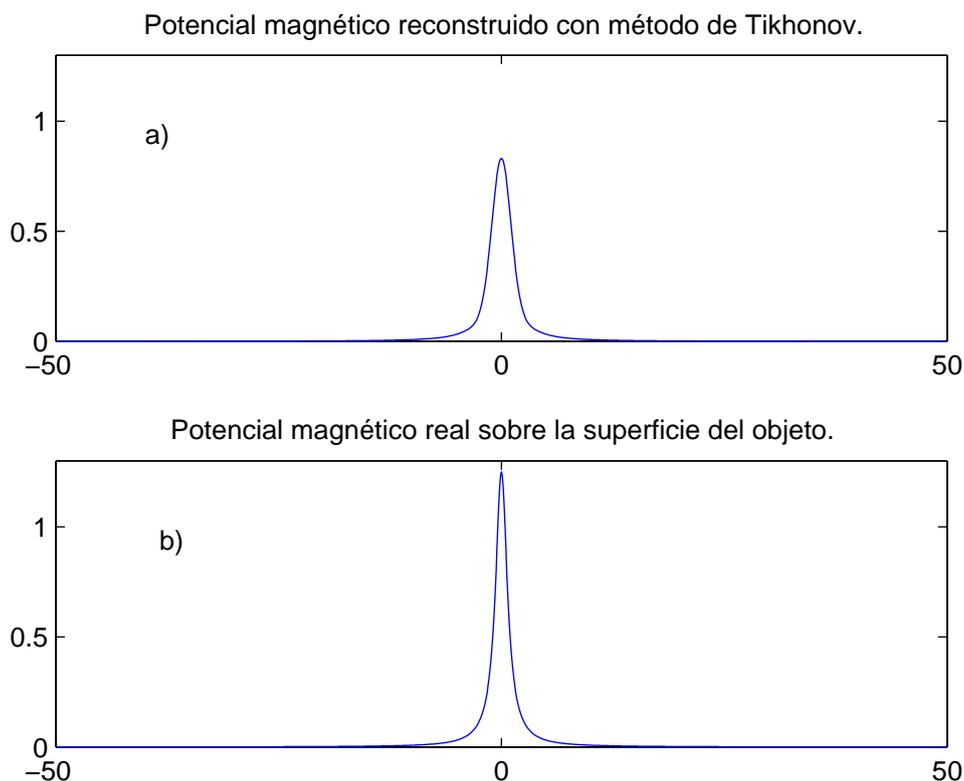


Figura 4.5: a) Gráfico de la $\psi(x, 0)$ que es la solución verdadera del sistema. b) Solución regularizada con método de Tikhonov. Caso con datos sintéticos.

última está en la figura 4.7. Se puede observar que la solución regularizada es mejor que la que se obtiene si invertimos el problema.

Otra forma de que aparezcan errores es si la distancia real del sensor al objeto no es la supuesta. Claramente esto afecta a la solución buscada y, como habíamos comentado previamente, en los problemas inversos suele ocurrir que la solución del sistema no es continua respecto del dato dado. En el gráfico 4.8 vemos en a) cómo es la solución regularizada si la medición de la distancia del objeto al sensor es correcta, usamos como parámetro de regularización al 0,0492 (la esquina de la curva-L). En b) se ve la solución regularizada si hubiese un error (consideramos que el error sumado es una variable aleatoria uniforme $[-0,01, 0,09]$), aquí el parámetro de regularización es la esquina de la curva-L para este problema (0,0438). Se puede ver cómo con un pequeño error en la distancia la solución obtenida cambia mucho. Este era otro aspecto de los problemas mal planteados, los cuales no eran continuos a pequeñas modificaciones en el dato.

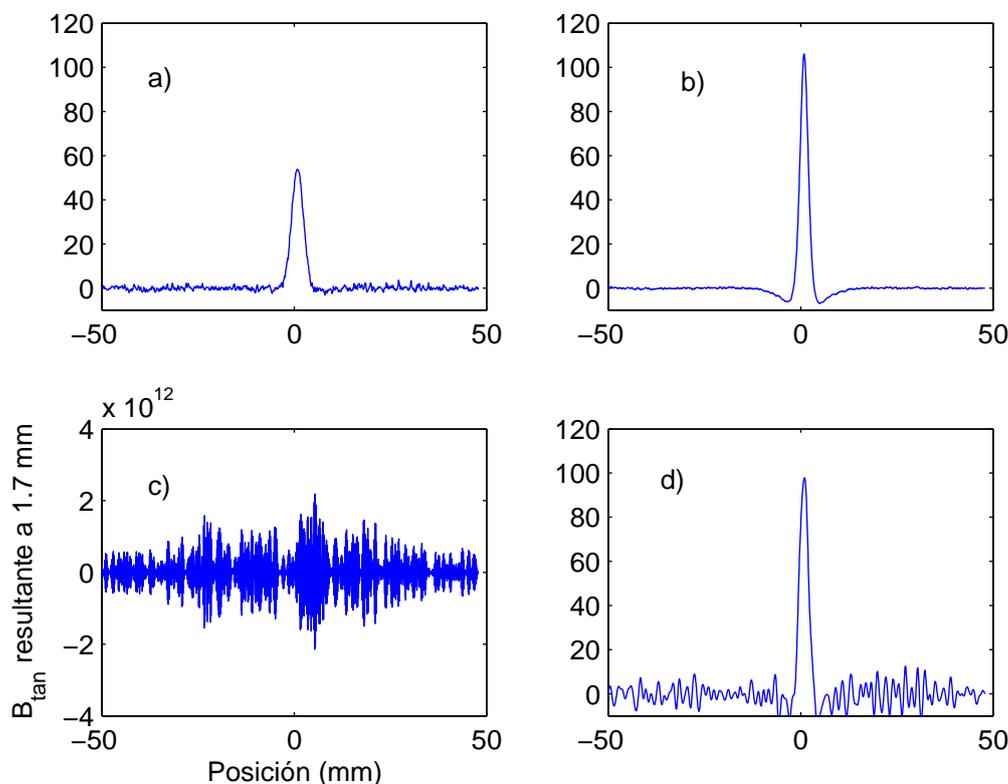


Figura 4.6: El gráfico a) corresponde a la medición obtenida a 2.7 mm del objeto, el b) es la medición observada a 1.7 mm, el c) es la solución que se obtiene si se invierte el sistema y el d) es la solución regularizada con la esquina de la curva. Caso bidimensional con datos experimentales.

En este mismo ejemplo veamos cómo sería la solución regularizada si utilizáramos el método de Tikhonov generalizado, es decir que en lugar de buscar una solución con norma chica buscamos una solución cuyo gradiente sea chico. En este caso la matriz L del método generalizado (3.21) es como habíamos comentado una discretización del gradiente y la curva-L se ve en el gráfico 4.9. Como en los casos anteriores se tomó como parámetro de regularización a la esquina de la curva.

En el gráfico (4.10) podemos comparar las soluciones regularizadas que se obtienen si utilizamos el método de Tikhonov clásico y si lo hacemos con el generalizado. Los parámetros de regularización que se usaron fueron las esquinas de las curvas-L de cada caso, 0,0492 y 0,0633 para el caso clásico y el generalizado respectivamente. Se puede ver que son soluciones parecidas y esto se puede reafirmar observando que en ambos casos las esquinas de las curvas-L son números pequeños.

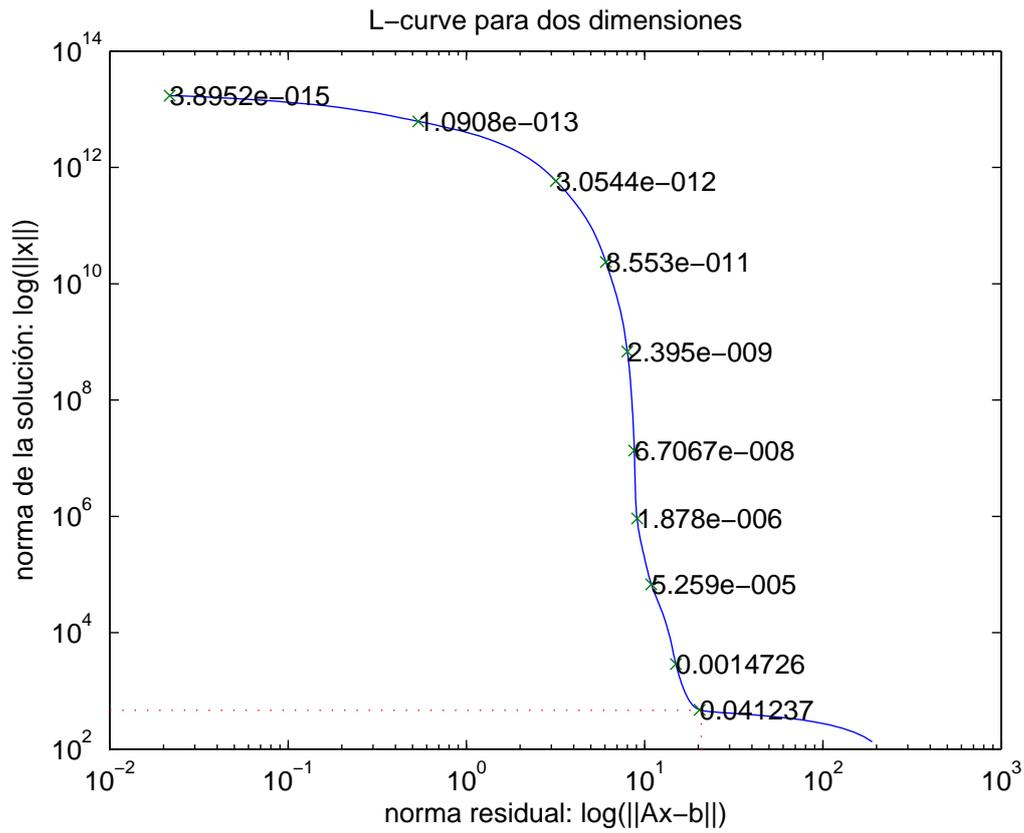


Figura 4.7: Curva-L para el caso con datos experimentales en dos dimensiones. La esquina de la curva es 0.0492

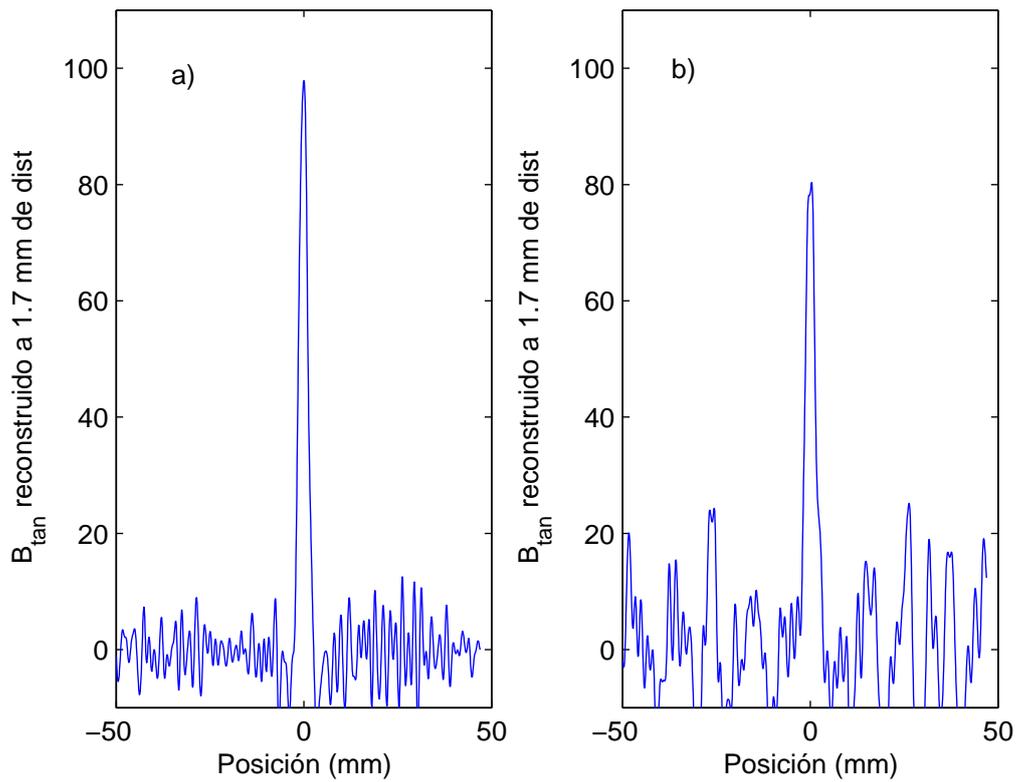


Figura 4.8: a) Solución regularizada cuando no hay error en la medición de la distancia del objeto al sensor. b) Solución regularizada cuando hay error. Caso dos dimensiones con datos experimentales.

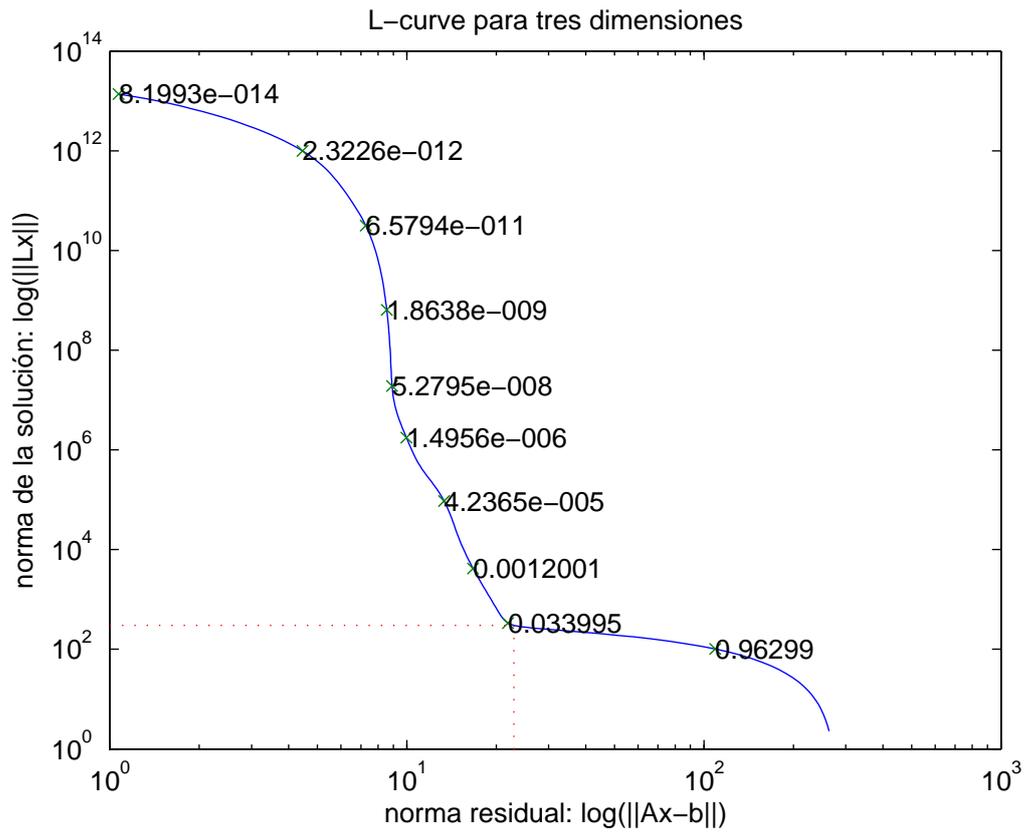


Figura 4.9: Curva-L para caso generalizado. Problema en dos dimensiones. Datos experimentales.

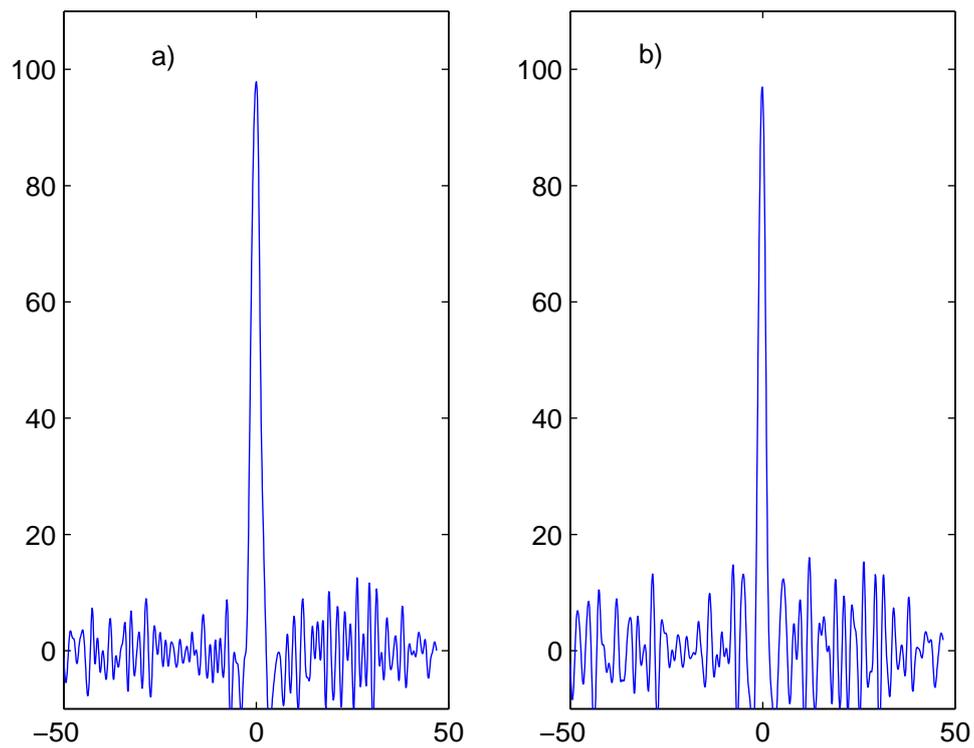


Figura 4.10: a) Solución regularizada con método clásico de Tikhonov. b) Solución regularizada con método generalizado de Tikhonov. Caso bidimensional, datos experimentales.

4.2. Problema en tres dimensiones. Plano

En lo que sigue analizaremos los resultados obtenidos al trabajar en tres dimensiones. Para esto trabajaremos con el método de las bases de Fourier (3.11).

Nuevamente utilizamos las mediciones realizadas en [4]. El dato se tomó a partir de la medición con un liftoff de 2,7 mm y se buscó reproducir cómo sería el campo a 1,7 mm de distancia.

Elegimos este método porque el programa Matlab calcula eficiente y rápidamente los coeficientes de Fourier de una función y así mismo a partir de los coeficientes de Fourier nos devuelve la función asociada a los mismos. Para esto supusimos que las funciones involucradas son periódicas, esta hipótesis se puede imponer tomando al período como un número lo suficientemente grande. El problema matricial relaciona los coeficientes de Fourier de la función dato y la función buscada (3.11). Aquí consideramos que el período de la función es $T = 45$ y la cantidad de modos de Fourier es $N = 71$. Se puede observar que este problema está mal planteado, pues el valor singular más pequeño es $9,9661e - 004$, más aún $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = 1,0034e + 003$.

La figura 4.11 en a) vemos el dato conseguido a partir de las mediciones a 2,7 mm por [4]. En b) esta la solución del sistema sin regularizar, en c) la solución regularizada con el método clásico de Tikhonov. Y en d) está el gráfico de la medición a 1,7 mm. Nuevamente podemos ver que la solución regularizada es una mejor solución del problema que la que se consigue sin regularizar.

La solución regularizada se obtuvo utilizando como parámetro las esquina 0,0414 de la curva-L (4.12).

4.3. Problema en tres dimensiones. Cilindro.

Estudiemos las soluciones que encontramos para el caso tridimensional donde el objeto de estudio es un tubo. Tomamos como potencial magnético reducido a la función:

$$\psi(r, \theta, z) = [Y_1(\lambda_1 r i) - \frac{Y_1(i\lambda_1 b i) J_1(\lambda_1 r i)}{J_1(\lambda_1 b i)}] e^{i\theta} \sin(\lambda_1 z) \quad (4.1)$$

donde $\lambda_n = \frac{n\pi}{h}$. Esta función cumple con las ecuaciones del sistema (3.12). Consideramos que la distancia del sensor a la superficie del objeto es 0,02, es decir que $r = 0,02$. Luego podemos calcular los β_{mn} como en la ecuación (3.16)

El gráfico de la función dato se puede ver en la figura 4.13.

En este caso la matriz del problema expuesto es una matriz diagonal y compleja, su valor singular más pequeño es $3.4793e-007$ y la condición de la matriz es $2.0363e+006$. Estamos nuevamente ante un problema mal planteado y si hacemos crecer la distancia del sensor al objeto o si tomamos más términos en la sumatoria el problema empeora aún más.

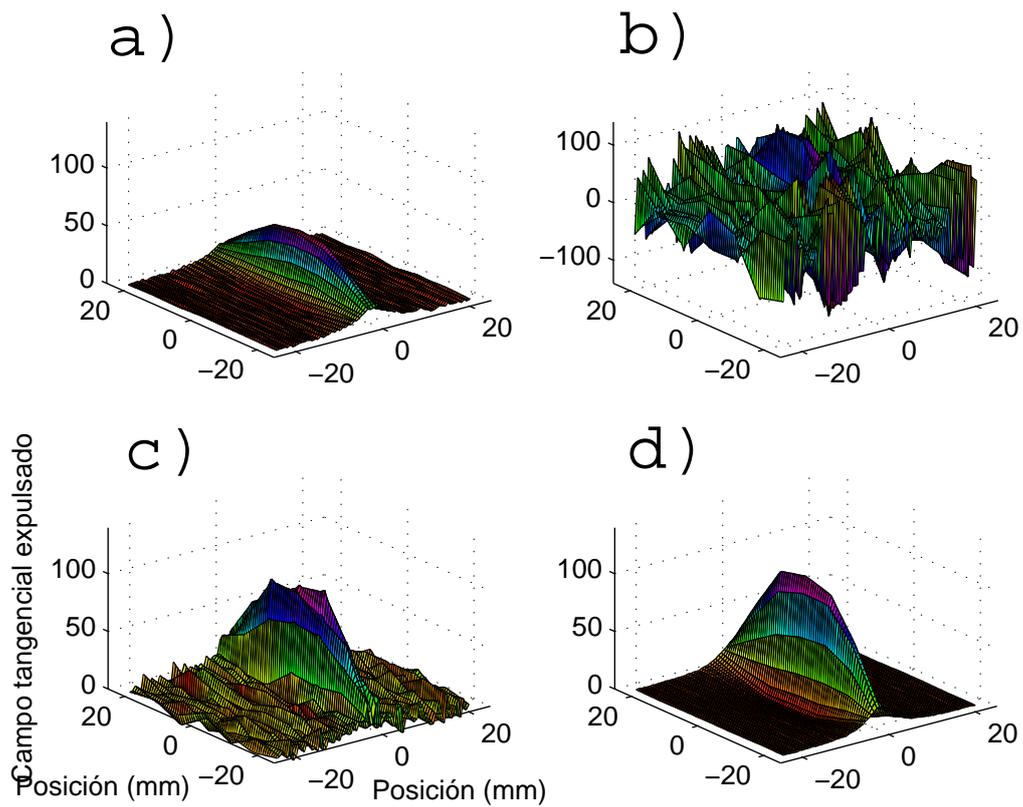


Figura 4.11: a) Solución sin regularizar b) Solución regularizada. Caso tres dimensiones. Geometría plana. Usando base de Fourier.

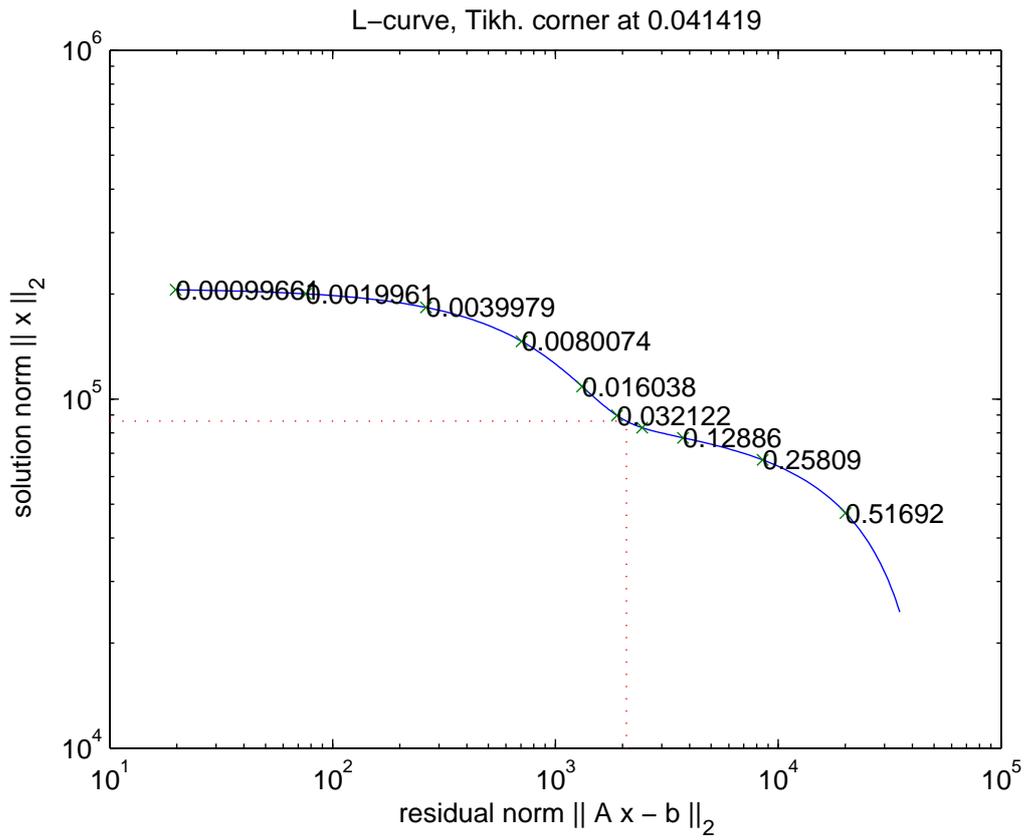


Figura 4.12: Curva-L del problema en tres dimensiones. Geometría plana. Usando base de Fourier.

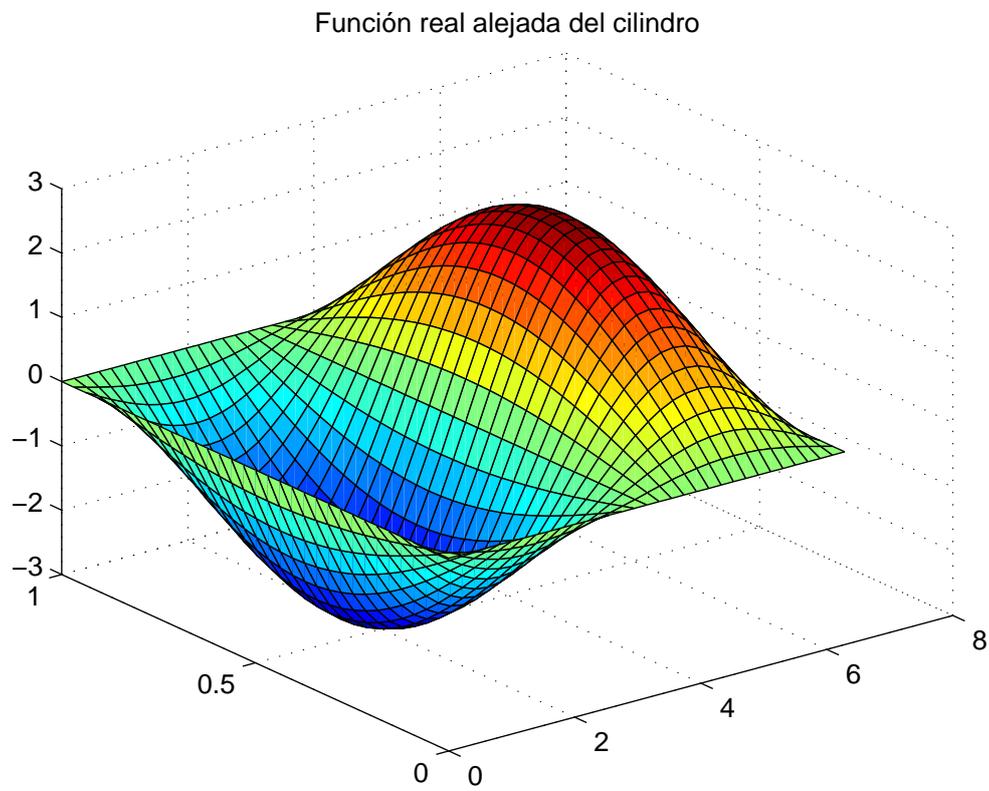


Figura 4.13: Campo expulsado del cilindro

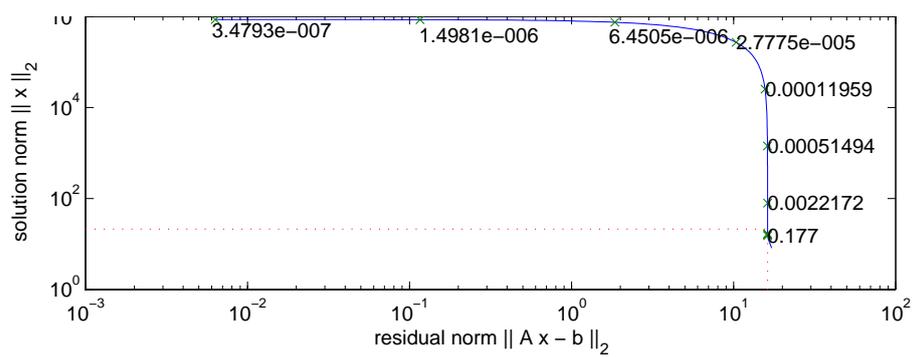


Figura 4.14: Curva L para el método clásico. Problema del cilindro con datos sintéticos.

En el gráfico 4.14 la curva L no tiene la forma habitual esto se debe a que se necesita un rango más grande de valores singulares para que la tenga y para esto es necesario tomar mayor cantidad de elementos en la sumatoria lo cual implica mayor memoria de la máquina. Aquí tomamos $N = 42$ donde N es la cantidad de sumandos, y nos quedó que la esquina de la curva es 0.0053 y la solución regularizada es más parecida a la real que la que obtenemos del sistema si invertimos.

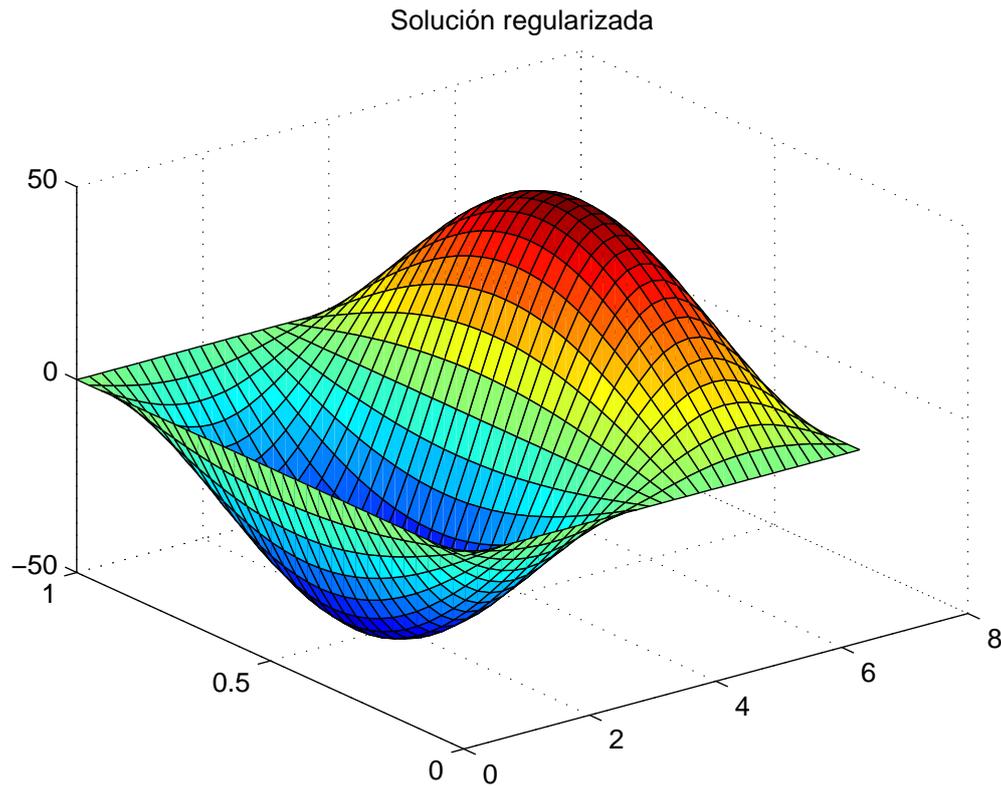


Figura 4.15: Solución regularizada

4.4. Problema del espesor.

Para el caso del problema del espesor trabajamos como dato con los coeficientes de Fourier de una posible perturbación creada de manera sintética. La matriz que relaciona los coeficientes de Fourier genera un problema mal planteado, pues $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = \frac{8,2163e+004}{0,0023}$ es un número muy grande. En la figura 4.16 se puede ver la curva-L para el problema de regularización clásico de Tikhonov que nos da como parámetro de

regularización su esquina (0,1474). La solución regularizada que se obtuvo con este parámetro junto con la verdadera perturbación se encuentran en el gráfico 4.17.

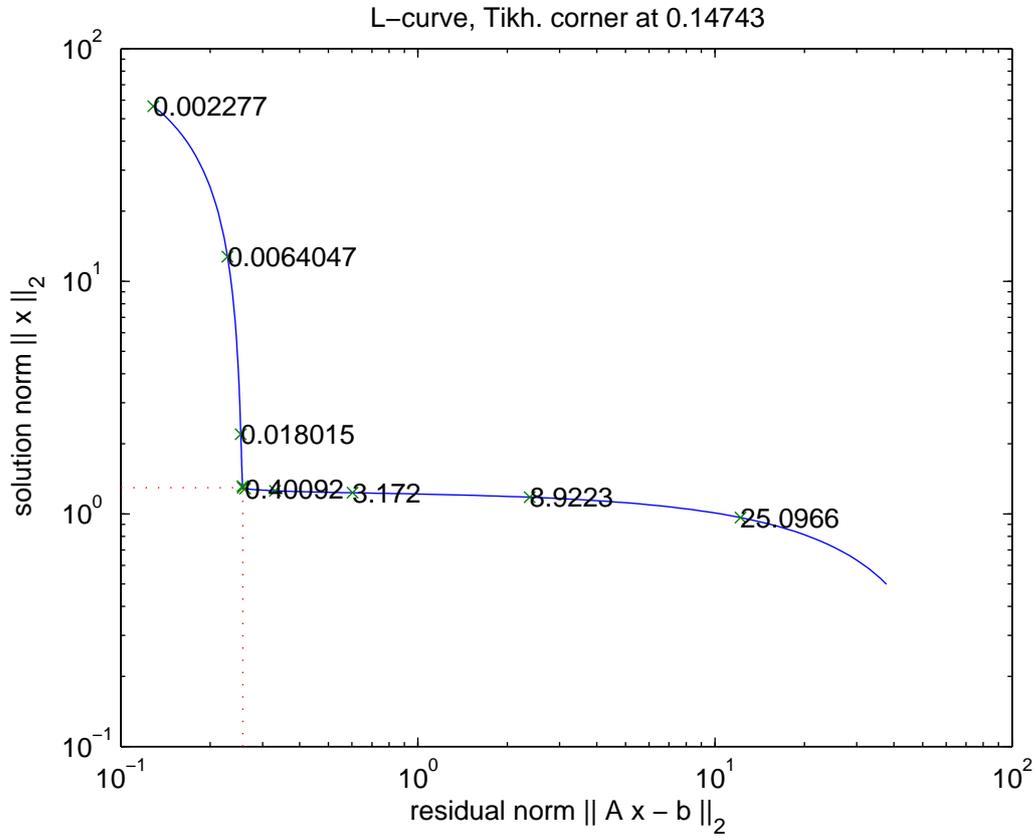


Figura 4.16: Curva de Tikhonov para el problema del espesor en un tubo.

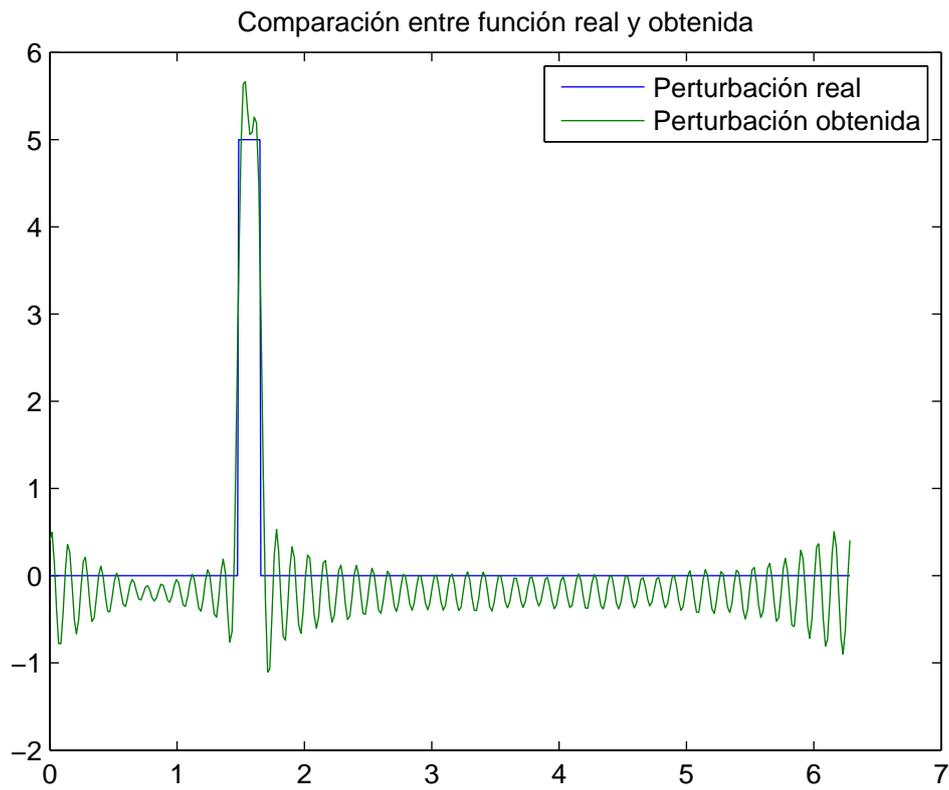


Figura 4.17: Comparación de resultado para el problema del espesor del tubo.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se plantearon problemas inversos en electromagnetismo relevantes para el estudio de ensayos no destructivos. Debido a que estos problemas se encuentran mal planteados, se estudiaron técnicas de regularización para resolverlos.

Con este fin se desarrollaron modelos numéricos ejecutados con el programa MATLAB utilizando diversas técnicas y considerando distintas fuentes de errores típicas del campo experimental. Además se conformaron dos modalidades para aproximar el problema a uno discreto. Una fue la de representar a la función del potencial escalar en una base adecuada para el problema dado (como por ejemplo con la separación de variables), la otra fue el uso de una base más general pero con la cual la convolución sea más fácil de calcular (como en el caso de dos dimensiones). Con ambos enfoques se encontraron soluciones comparables, aunque con el primer método los cálculos se simplifican mucho ya que la matriz del sistema es diagonal. Se analizaron posibles soluciones de los problemas (regularizando de distintos modos) y se observaron cuáles de ellas estaban más próximas de las soluciones reales. En general se puede decir que las soluciones obtenidas son satisfactorias.

Por último se investigó la detección de alteraciones en el espesor de un tubo de acero, el cual no es un problema estándar. Estos cambios son típicamente causados por corrosión, el deterioro propio del paso del tiempo y agentes externos a los cuales puede estar expuesto el material, y son un inconveniente frecuente en la industria petrolera, entre otras. Si bien este es un problema intrínsecamente no lineal, se consideró la posibilidad interesante de simplificarlo mediante una linealización local. El resultado obtenido nos permite describir con bastante precisión posibles perturbaciones en los bordes.

Bibliografía

- [1] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55, 1970.
- [2] H. Brézis, *Análisis funcional Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, 1984.
- [3] William L. Briggs, Van Emden Henson, *The DFT An Owner's Manual for the Discrete Fourier Transform*, SIAM, Philadelphia, 1995.
- [4] J.I. Etcheverry, G.A. Sánchez and N. Bonadeo, *Magnetic Flux Leakage: A Benchmark Problem*, Review of Progress in Quantitative Non-Destructive Evaluation, Vol.30B, pp.1785-1791.
- [5] Heinz W. Engl, Martin Hanke and Andreas Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [6] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1991.
- [7] Friedrich Förster, *On the Way from the «Know-how» to «Know-why» in the magnetic Leakage Field Method of Nondestructive Testing (Part One)*, Materials Evaluation 43, Septiembre 1985, pp. 1154-1161.
- [8] Friedrich Förster, *On the Way from the «Know-how» to «Know-why» in the magnetic Leakage Field Method of Nondestructive Testing (Part Two)*, Materials Evaluation 43, Octubre 1985, pp. 1398-1402.
- [9] Per Christian Hansen, *Regularization Tools*, Department of Mathematical Modelling Building 305, Technical University of Denmark, Denmark, 2001.
- [10] Claes Johnson, *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element*, Cambridge University Press, 1992.
- [11] Arnold Neumaier, *Solving ill-conditioned and singular linear systems: A tutorial on regularization*, SIAM Review 40, 1998, pp. 636-666.

- [12] Philip M. Morse, Herman Feshbach, *Methods of theoretical physics*, 2 volumes. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1953.
- [13] A. Tikhonov, A. Samarsky, *Ecuaciones de la Física Matemática*, Editorial Mir, Moscú, 1983.
- [14] G. Milton Wing, *A Primer on Integral Equations of the First Kind: The Problem of Deconvolution and Unfolding*, SIAM, Philadelphia, 1991.