



**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
**Departamento de Matemática**

**Tesis de Licenciatura**

**Clasificación de álgebras de Leavitt**

**Diego Montero**

**Director: Guillermo H. Cortiñas**

Fecha de Presentación: Marzo 2014



# Agradecimientos

A mis viejos por toda la ayuda durante estos años.

A Willie por la paciencia, la dedicación y los consejos durante todo el trabajo de la tesis.

Al Jurado por tomarse el trabajo de leer la tesis.

A Sofía por ser mi asesora burocrática y organizadora de viajes.

A Mati por ayudarme a pensar los problemas que no me salían y guiarme en mis primeras incursiones en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

A mis compañeros de cursada y amigos: Dani, Euge, Eze, Marce, Maxi, Panchito, Facu, Di, Jaz, Nati, Mari, Rafa, Fede M., Fede L., Bruno, Juan, Mariano J., Luli, Aye, Quimey, Lucho, Lara, Xime, Pablo H., Mati D., Kari, Santi, Yami, Ivan, Juanma, Maca, Tomás, los Julianes. En especial a los primeros tres por ser mis ayudantes de segunda personales y al cuarto por los consejos y correcciones sobre la tesis.

A todos mis amigos de “Que la sigan pipeteando” y sus botiner@s: Jero, Nacho, Fabri, Javi, Santi, Alexis, Nati, Cami, Vale, Meli, etc.

A mis ayudantes, profesores y compañeros de trabajo: Mariano, Nico B., Joni, Román, Chris, Vendra, Andrea, Sandra, Gabriela, Malena, Mariela, Magalí.

A mis profesores del secundario Rosana Bollella y Rodolfo Giménez.

A Eugenia por bancarse las exposiciones sobre algunos temas de la tesis.

A Belén, aunque todavía no sé porqué.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. <math>K_0</math> de un anillo</b>	<b>9</b>
1.1. Definición . . . . .	9
1.2. $K_0$ mediante idempotentes . . . . .	11
1.3. Colímites filtrantes . . . . .	13
1.4. $K$ -teoría graduada . . . . .	16
<b>2. Álgebras de camino de Leavitt</b>	<b>19</b>
2.1. Definición y ejemplos . . . . .	19
2.2. Estructura graduada . . . . .	23
2.3. $K_0$ de álgebras de Leavitt . . . . .	26
<b>3. Invariantes de flujo</b>	<b>29</b>
3.1. Condiciones suficientes para garantizar equivalencia Morita . . . . .	29
3.2. Condiciones suficientes para garantizar isomorfismo . . . . .	39
3.3. Condiciones necesarias y el empalme de Cuntz . . . . .	46
<b>4. Hacia una caracterización graduada</b>	<b>51</b>
4.1. Caracterización de isomorfismos graduados . . . . .	52
4.2. Levantando el diagrama . . . . .	62
4.2.1. Levantando el primer diagrama . . . . .	63
4.2.2. Levantando el segundo diagrama . . . . .	66
4.2.3. Levantando el tercer diagrama . . . . .	68
4.2.4. El paso inductivo . . . . .	70
<b>A. Dinámica simbólica</b>	<b>73</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>



# Introducción

En los primeros cursos de estructuras algebraicas uno estudia anillos como  $\mathbb{Z}$ , los cuerpos, anillos de polinomios o matrices sobre un cuerpo o, más generalmente, anillos conmutativos o noetherianos. Todos estos ejemplos satisfacen la propiedad de tener “un número de base invariante” (I.B.N.). Esto significa que si  ${}_R R^n \cong {}_R R^m$  con  $n, m \in \mathbb{N}$  entonces  $n = m$ . Sea  $k$  un cuerpo. En 1962 Leavitt [18] introduce una clase de  $k$ -álgebras, hoy en día denotadas por  $L(n, m) = L_k(n, m)$ , que cumplen  $L(n, m)^n \cong L(n, m)^m$  como módulos libres, y son universales con esta propiedad. Más de una década después, con otra motivación y en forma independiente del trabajo de Leavitt, Cuntz [9] construye e investiga las  $C^*$ -álgebras  $\mathcal{O}_n$ , llamadas álgebras de Cuntz. El álgebra  $\mathcal{O}_n$  es la completación, en una norma adecuada, de la  $\mathbb{C}$  álgebra  $L_{\mathbb{C}}(1, n)$ . Poco más tarde de la aparición de las álgebras de Cuntz, Cuntz y Krieger [10] generalizan esta noción a las álgebras  $C^*(E)$  de un grafo finito  $E$  que hoy en día se conocen justamente como las álgebras de Cuntz-Krieger. Luego se amplía esta noción a las álgebras de grafos  $C^*(E)$  para cualquier grafo dirigido  $E$  en [17]. Las  $C^*$ -álgebras de grafo han sido objeto de estudio de muchos investigadores en los años recientes, tanto desde el punto de vista analítico como desde el punto de vista algebraico. En [2] Abrams y Aranda Pino introducen el álgebra de caminos de Leavitt  $L(E) = L_k(E)$ . Completando  $L_{\mathbb{C}}(E)$ , en una norma adecuada, se obtiene el álgebra  $C^*(E)$ .

Se han encontrado muchas similitudes entre las álgebras de Leavitt y las  $C^*$  álgebras de grafos. Por ejemplo, para determinar cuándo  $L_k(E)$  o  $C^*(E)$  es simple o puramente infinita basta pedir la misma condición en el grafo  $E$  en cualquiera de los casos. También, el estudio de las álgebras de Leavitt ha servido para probar ciertos resultados en el caso analítico, por ejemplo, ver que las álgebras  $C^*(E)$  cumplen la propiedad de cancelación estable débil o para construir isomorfismos explícitos entre  $M_d(\mathcal{O}_n)$  y  $\mathcal{O}_n$  cuando  $\gcd(d, n) = 1$ . Por otro lado, muchos de los resultados obtenidos en el caso  $C^*$  han servido de guía para el estudio de las álgebras  $L_k(E)$ . Por ejemplo, la clasificación de las álgebras  $C^*(E)$  vía sus grupos de  $K$ -teoría ha motivado una clasificación similar para el caso  $L(E)$ . Nosotros nos concentraremos en el estudio de esta clasificación en el presente trabajo.

En [1] Abrams, Louly, Pardo y Smith estudian el problema de clasificar las álgebras de Leavitt unitales simples puramente infinitas. En este artículo intentan responder la siguiente pregunta: *Dados  $E$  y  $F$  grafos finitos tales que  $L(E)$  y  $L(F)$  son simples puramente infinitas, si  $K_0(L(E)) \cong K_0(L(F))$  vía un isomorfismo  $\varphi$  tal que  $\varphi([L(E)]) = [L(F)]$ , entonces ¿Son  $L(E)$  y  $L(F)$  isomorfos?* En el contexto  $C^*$  la respuesta a esta pregunta es afirmativa. Esto se sigue del Teorema de Kirchberg-Phillips([16],[23]). Para atacar este problema estudian cómo se comportan las álgebras de Leavitt bajo ciertas operaciones en los grafos introducidas en el contexto de la dinámica simbólica, más concretamente en la teoría de subshifts finitos. Lamentablemente no logran resolver el problema. Si  $K_0(L(E)) \cong K_0(L(F))$  y  $A_E$  y  $A_F$  son las matrices de incidencia entonces

$|\det(I_n - A_E^t)| = |\det(I_m - A_F^t)|$ . En [1] se demuestra que agregando como hipótesis adicional  $\det(I_n - A_E^t) = \det(I_m - A_F^t)$  donde  $A_E$  y  $A_F$  son las matrices de adyacencia de los grafos  $E$  y  $F$  respectivamente, llegan a probar el isomorfismo deseado. Queda abierta la cuestión sobre la necesidad de la igualdad del signo, aunque ofrecen ciertas herramientas para evadir ese problema.

La estructura graduada de las álgebras de Leavitt ha sido de gran utilidad en su estudio. En [13] R. Hazrat conjetura: *Dados dos grafos  $E$  y  $F$  finitos por fila, tenemos  $L(E) \cong_{gr} L(F)$  si y sólo si existe un isomorfismo  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ -módulos ordenados  $(K_0^{gr}(L(E)), [1_{L(E)}]) \cong (K_0^{gr}(L(F)), [1_{L(F)}])$ .* Además prueba la conjetura para un tipo particular de grafos. En [7] Ara y Pardo prueban una versión más débil de la conjetura para el caso de grafos finitos sin pozos ni fuentes. Más específicamente, prueban que la condición de Hazrat en los grupos de  $K$ -teoría equivale a tener un isomorfismo graduado entre el álgebra  $L(F)$  y el álgebra  $L^g(E)$ , donde esta última es una deformación del álgebra  $L(E)$ . Todavía no se sabe en qué casos se pueden garantizar isomorfismos graduados entre  $L(E)$  y  $L^g(E)$ .

Este trabajo se organiza de la siguiente manera: En el primer capítulo introduciremos la herramienta principal para el estudio de la clasificación de las álgebras de Leavitt, el grupo de Grothendieck  $K_0$ . En el segundo capítulo definiremos el objeto a estudiar, las álgebras de Leavitt, y veremos algunas de sus propiedades básicas. En el tercer capítulo veremos los resultados más importantes de [1]. En el cuarto capítulo veremos los resultados más importantes de [7]. En el apéndice recordamos las nociones básicas de dinámica simbólica que se utilizan en el trabajo.



# Capítulo 1

## $K_0$ de un anillo

### 1.1. Definición

Antes de pasar a la definición del  $K_0$  empezaremos con algunos preliminares.

Dado un anillo con unidad  $R$ , denotamos  $R\text{-Mod}$  a la categoría de  $R$ -módulos a izquierda.

**Definición 1.1.** *Dados un objeto  $P$  en  $R\text{-Mod}$ , decimos que  $P$  es proyectivo si para todo epimorfismo  $f : M \twoheadrightarrow N$  y todo morfismo  $g : P \rightarrow N$  existe un morfismo  $h : P \rightarrow M$  tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow \exists h & \downarrow g & & \\ M & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Existen algunas nociones equivalentes que serán de utilidad.

**Teorema 1.2.** *Sean  $R$  anillo con unidad,  $P$  un  $R$ -módulo, entonces son equivalentes:*

1.  $P$  es proyectivo
2.  $P$  es sumando directo de un módulo libre
3.  $\text{Hom}_R(P, -)$  es un funtor exacto
4. Todo epimorfismo  $f : M \twoheadrightarrow P$  se parte (ie. existe  $g : P \rightarrow M$  tal que  $f \circ g = \text{id}_P$ )

*Demostración.* Ver [26, Section 7.4.]. □

Denotaremos  $\mathcal{V}(R)$  al conjunto de clases de isomorfismos de módulos proyectivos finitamente generados<sup>1</sup>. Notemos que de hecho  $\mathcal{V}(R)$  es un monoide abeliano definiendo  $[P] + [Q] = [P \oplus Q]$ .

En general, dado un monoide abeliano  $M$ , se puede construir un grupo abeliano de manera universal, comúnmente llamado el *grupo de Grothendieck* de  $M$ . Este proceso generaliza la construcción de  $\mathbb{Z}$  a partir de  $\mathbb{N}_0$ . Concretamente:

<sup>1</sup>Notar que podemos hablar de conjunto, pues todo módulo proyectivo f.g. es sumando directo de  $R^n$  para algún  $n$ .

**Lema 1.3.** *Sea  $M$  un monoide abeliano. Entonces existen  $G(M)$  un grupo abeliano y  $\varphi : M \rightarrow G(M)$  un morfismo de monoïdes que verifica la siguiente propiedad universal: Para todo grupo abeliano  $H$  y todo morfismo de monoïdes  $\psi : M \rightarrow H$  existe un único morfismo de grupos  $\bar{\psi} : G(M) \rightarrow H$  tal que el siguiente diagrama conmute:*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi} & H \\ \downarrow \varphi & \nearrow \exists \bar{\psi} & \\ G(M) & & \end{array}$$

*Demostración.* Consideremos el grupo abeliano libre  $\mathbb{Z}^{(M)}$  generado por  $M$  y  $\mathcal{R}$  el subgrupo generado por las relaciones  $e_m + e_n - e_{mn}$  donde  $e_k$  es el  $k$ -ésimo vector canónico.

Definimos  $G(M) := \mathbb{Z}^{(M)}/\mathcal{R}$  y  $M \xrightarrow{\varphi} G(M)$  vía  $m \mapsto [m]$ .

Es fácil ver que esto cumple la propiedad universal deseada.  $\square$

**Observación 1.4.** *Notar que todo elemento  $m \in G(M)$  se puede escribir de la forma  $m = [p] - [q]$  donde  $p$  y  $q$  son elementos en  $M$ .*

**Observación 1.5.** *Sean  $M$  y  $N$  monoïdes abelianos. Sean  $\pi_M : M \times N \rightarrow M$  la proyección e  $\iota_M : M \rightarrow M \times N$  la inclusión. Estos morfismos inducen  $G(\pi_M) : G(M \times N) \rightarrow G(M)$  y  $G(\iota_M) : G(M) \rightarrow G(M \times N)$ . Análogamente con  $N$ . Por último podemos construir morfismos  $\pi : G(M \times N) \rightarrow G(M) \times G(N)$  y  $\iota : G(M) \times G(N) \rightarrow G(M \times N)$ . Es fácil ver que estos son isomorfismos inversos, por lo cual tenemos  $G(M \times N) \cong G(M) \times G(N)$ .*

Ahora estamos en condiciones de dar la definición buscada.

**Definición 1.6.** *Sea  $R$  un anillo con unidad. El grupo abeliano  $K_0(R)$  es el grupo de Grothendieck de  $\mathcal{V}(R)$ , el monoïde abeliano de clases de isomorfismo de módulos proyectivos f.g.*

Un morfismo de anillos unitales  $f : R \rightarrow S$  induce un morfismo  $\mathcal{V}(f) : \mathcal{V}(R) \rightarrow \mathcal{V}(S)$  vía  $[P] \mapsto [S \otimes_R P]$  donde la estructura de  $R$ -mod de  $S$  es la inducida por  $f$ . A su vez, esto induce un morfismo  $K_0(f) : K_0(R) \rightarrow K_0(S)$  vía la propiedad universal del grupo de Grothendieck

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{V}(R) & \xrightarrow{\mathcal{V}(f)} & \mathcal{V}(S) & \longrightarrow & K_0(S) \\ \downarrow & & & \nearrow K_0(f) & \\ K_0(R) & & & & \end{array}$$

Y esta aplicación es funtorial, es decir:

1.  $K_0(f \circ g) = K_0(f) \circ K_0(g)$
2.  $K_0(id_R) = id_{K_0(R)}$

Por lo tanto,  $K_0 : \mathcal{A}ss_1 \rightarrow \mathcal{A}b$  es un funtor de la categoría de anillos unitales en la categoría de grupos abelianos. Notar que  $\mathcal{V} : \mathcal{A}ss_1 \rightarrow \mathcal{M}on\mathcal{A}b$  también es un funtor de la categoría de anillos unitales en la categoría de monoides abelianos.

**Ejemplo 1.7.** Si  $R$  es un cuerpo, un anillo de división o un dominio de ideales principales, entonces todo módulo proyectivo f.g. es libre. Además, para un tal  $R$ , si  $R^n \cong R^m$  entonces  $n = m$ . Así tenemos un monomorfismo de monoides  $\phi : \mathcal{V}(R) \rightarrow \mathbb{N}_0$  vía  $[P] \mapsto \text{rg}(P)$ . Claramente  $\phi$  es sobreyectiva, por lo cual  $\mathcal{V}(R) \cong \mathbb{N}_0$  como monoides abelianos. Se sigue que  $K_0(R) = \mathbb{Z}$ .

## 1.2. $K_0$ mediante idempotentes

En esta sección vamos a dar una definición equivalente de  $K_0$  pensando a los módulos proyectivos como imagenes de endomorfismos idempotentes de módulos libres de rango finito, es decir, como espacios de columna de matrices idempotentes con coeficientes en el anillo.

Si  $P$  es un módulo proyectivo f.g. existen  $n \in \mathbb{N}$  y un epimorfismo  $\pi : R^n \twoheadrightarrow P$  y además este epimorfismo se parte, es decir, existe  $s : R^n \rightarrow P$  tal que  $\pi \circ s = id_P$ . Si definimos  $e = s \circ \pi$  tenemos  $e^2 = e$  e  $Im(e) = Im(s \circ \pi) = Im(s) = s(P) \cong P$  donde este último isomorfismo se sigue de la inyectividad de  $s$ . En conclusión todo módulo proyectivo f.g. es isomorfo a  $R^n e$  con  $e$  un endomorfismo idempotente.

**Lema 1.8.** Sean  $p \in M_n(R)$  y  $q \in M_m(R)$  matrices idempotentes, entonces son equivalentes:

1.  $Im(p) \cong Im(q)$
2. Existe  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \geq n, m$  tal que las matrices

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son conjugadas en  $M_\ell(R)$ .

*Demostración.*  $\Leftarrow$ ) Definamos  $p_1 = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , análogamente con  $q$ . Sea  $u \in GL_\ell(R)$  tal que  $p_1 = u q_1 u^{-1}$ . Luego la multiplicación a izquierda por  $u$  induce los isomorfismos deseados.

$\Rightarrow$ ) El isomorfismo  $Im(p) \cong Im(q)$  induce un morfismo  $\alpha : R^n \xrightarrow{a} R^m$  extendiendo el isomorfismo por 0 en  $R^n(1-p)$  e incluyendo  $R^m q$  en  $R^m$ . Análogamente su inversa induce un morfismo  $\beta : R^m \xrightarrow{b} R^n$ . Suponiendo que estos morfismos están dados por la multiplicación por matrices  $a$  y  $b$  respectivamente, es cuestión de rutina verificar que:

- $a \cdot b = p$
- $b \cdot a = q$
- $b = q \cdot b = b \cdot p$
- $a = p \cdot a = a \cdot q$

Luego podemos ver que:

$$\begin{pmatrix} 1-p & a \\ b & 1-q \end{pmatrix}^2 = Id_{n+m}$$

y

$$\begin{pmatrix} 1-p & a \\ b & 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-p & a \\ b & 1-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto basta tomar  $\ell = n + m$  pues esta última matriz es conjugada a la que queríamos.  $\square$

Notemos que  $M_n(R) \subseteq M_{n+1}(R)$  vía  $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

De esta forma podemos considerar

$$M_\infty(R) := \bigcup_{i=1}^{\infty} M_n(R)$$

que tiene estructura de anillo no unital. Llamaremos  $\text{Idem}_\infty(R) \subseteq M_\infty(R)$  al subconjunto de idempotentes de  $M_\infty(R)$ .

De manera similar  $GL_n(R) \subseteq GL_{n+1}(R)$  vía

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad GL_\infty(R) := \bigcup_{i=1}^{\infty} GL_n(R)$$

tiene estructura de grupo. Observemos que  $GL_\infty(R)$  actúa sobre  $\text{Idem}_\infty(R)$  por conjugación.

Con este nuevo lenguaje, podemos reescribir el Lema 1.8 de la siguiente forma:

**Teorema 1.9.** *Para todo anillo  $R$  hay una biyección entre  $\mathcal{V}(R)$  y las órbitas de  $\text{Idem}_\infty(R)$  bajo la acción de  $GL(R)$ .*

**Observación 1.10.** *Bajo la identificación del Teorema 1.9 podemos darle una estructura de monoide abeliano al conjunto de clases de conjugación de  $\text{Idem}_\infty(R)$  y ésta se corresponde con*

$$[p] + [q] = \left[ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \right].$$

*Notemos también que esto convierte la biyección en un isomorfismo de monoides y por ende nos da un isomorfismo entre sus grupos de Grothendieck, teniendo así una definición equivalente para  $K_0(R)$ .*

**Observación 1.11.** *Un morfismo de anillos  $f : R \rightarrow S$  induce un morfismo de anillos no unitarios  $M_\infty(f) : M_\infty(R) \rightarrow M_\infty(S)$  aplicando  $f$  en cada coeficiente de la matriz, a su vez esto induce un morfismo  $K_0(f) : K_0(R) \rightarrow K_0(S)$ . Es cuestión de rutina ver que esta definición de  $K_0(f)$  coincide con la anterior bajo las identificaciones del Teorema 1.9.*

Una aplicación sencilla del Teorema 1.9 es la siguiente:

**Teorema 1.12.** *Para todo anillo  $R$  y todo  $n \in \mathbb{N}$  existe un isomorfismo natural*

$$K_0(M_n(R)) \cong K_0(R).$$

*Demostración.* Bajo las identificaciones usuales de  $M_m(M_n(R)) = M_{mn}(R)$  tenemos que  $M_\infty(M_n(R)) = M_\infty(R)$  y  $GL_\infty(M_n(R)) = GL_\infty(R)$  y por lo tanto sus clases de conjugación son las mismas.  $\square$

Para terminar la sección daremos algunos ejemplos más.

**Ejemplo 1.13.** *Sean  $R$  y  $S$  anillos unitales. Como*

$$M_n(R \times S) \cong M_n(R) \times M_n(S) \quad \text{y} \quad GL_n(R \times S) \cong GL_n(R) \times GL_n(S)$$

*se sigue que*

$$\text{Idem}_\infty(R \times S) \cong \text{Idem}_\infty(R) \times \text{Idem}_\infty(S) \quad \text{y} \quad GL_\infty(R \times S) \cong GL_\infty(R) \times GL_\infty(S).$$

*Así,*

$$\mathcal{V}(R \times S) = \frac{\text{Idem}_\infty(R \times S)}{\sim} = \frac{\text{Idem}_\infty(R)}{\sim} \times \frac{\text{Idem}_\infty(S)}{\sim} = \mathcal{V}(R) \times \mathcal{V}(S),$$

*que induce  $K_0(R \times S) \cong K_0(R) \times K_0(S)$ .*

**Ejemplo 1.14.** *Si  $R$  es un anillo semisimple, por Wedderburn*

$$R \cong \prod_{i=1}^n M_{n_i}(D_i) \text{ como anillos, con } D_i \text{ anillo de división.}$$

*Luego*

$$K_0(R) = K_0\left(\prod_{i=1}^n M_{n_i}(D_i)\right) = \prod_{i=1}^n K_0(M_{n_i}(D_i)) = \prod_{i=1}^n K_0(D_i) = \prod_{i=1}^n \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n$$

*donde la anteúltima igualdad se sigue del Ejemplo 1.7.*

### 1.3. Colímites filtrantes

En esta sección mostraremos que  $K_0$  es un funtor que conmuta con colímites filtrantes.

Decimos que un conjunto ordenado  $(I, \leq)$  es *filtrante* si para todo  $x, y \in I$  existe  $z \in I$  tal que  $z \geq x, y$ .

Un *sistema filtrante* en una categoría  $\mathcal{C}$  consiste de:

1. Un conjunto filtrante  $(I, \leq)$ .
2. Una familia  $\{A_i : i \in I\}$  de objetos de  $\mathcal{C}$ .
3. Para cada  $i \leq j$  un morfismo  $A_i \xrightarrow{\sigma_{i,j}} A_j$ .

Notemos que podemos considerar al conjunto filtrante  $(I, \leq)$  como la categoría en la cual cada elemento  $i \in I$  es un objeto y,  $\text{Hom}_{(I, \leq)}(i, j)$  es no vacío si y sólo si  $i \leq j$ ; en cuyo caso existe un solo morfismo de  $i$  en  $j$ . Entonces tener un sistema filtrante equivale a tener un funtor de  $(I, \leq)$  en  $\mathcal{C}$ .

Abusaremos de notación usando  $\sigma$  en vez de  $\sigma_{i,j}$  cuando este claro el contexto.

Un *colímite* o *límite directo* del sistema filtrante  $\{A_i, \sigma\}$  consiste de un objeto  $A$  en  $\mathcal{C}$  y morfismos  $f_i : A_i \rightarrow A$  tales que:

1. Para todo  $i \leq j$  el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & \nearrow f_i & \uparrow f_j \\ A_i & \xrightarrow{\sigma} & A_j \end{array}$$

2. Si  $B$  es un objeto en  $\mathcal{C}$  y  $g_i : A_i \rightarrow B$  una familia de morfismos tal que para todo  $i \leq j$   $g_j = g_i \circ \sigma_{i,j}$  entonces existe único  $g : A \rightarrow B$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ g_i \nearrow & \uparrow \exists! g & \nwarrow g_j \\ A_i & \xrightarrow{\quad} & A_j \\ f_i \searrow & \downarrow & \swarrow f_j \\ & A & \end{array}$$

En caso de existir, el colímite es único salvo isomorfismos. Notaremos un tal colímite como  $\varinjlim A_i$ .

Diremos que un funtor  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  *conmuta con colímites filtrantes* si para todo sistema filtrante en  $\mathfrak{A}$  existe  $\varinjlim F(A_i)$  en  $\mathfrak{B}$  y el morfismo canónico  $\varinjlim F(A_i) \rightarrow F(\varinjlim A_i)$  es un isomorfismo.

**Observación 1.15.** Las categorías  $\text{MonAb}$ ,  $\text{Ab}$  y  $\text{Ass}_1$  tienen colímites filtrantes y es el mismo que en  $\text{Sets}$ . Es decir, todo sistema filtrante tiene colímite. Por ejemplo, dado un sistema filtrante  $A_i$  en  $\text{Sets}$  definimos

$$A = \bigsqcup_{i \in I} A_i / \sim \text{ donde } a_i \sim a_j \text{ si existe } k \geq i, j \text{ tal que } \sigma_{i,k}(a_i) = \sigma_{j,k}(a_j) \text{ y}$$

$$f_i : A_i \rightarrow A \text{ vía } a_i \mapsto [a_i]$$

Si, por ejemplo,  $\{A_i, \sigma\}$  está en  $\text{MonAb}$ , entonces  $A$  tiene estructura de monoide (abeliano) definiendo  $[a_i] + [a_j] = [\sigma_{i,k}(a_i) + \sigma_{j,k}(a_j)]$  para algún  $k \geq i, j$ .

**Teorema 1.16.** El funtor  $\mathcal{V} : \text{Ass}_1 \rightarrow \text{MonAb}$  conmuta con colímites filtrantes.

*Demostración.* Sean  $\{R_i, \sigma\}$  un sistema filtrante,  $R = \varinjlim R_i$  y  $f_i : R_i \rightarrow R$  y  $h_i : \mathcal{V}(R_i) \rightarrow \varinjlim \mathcal{V}(R_k)$  las aplicaciones estructurales. Entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{V}(R) = \mathcal{V}(\varinjlim R_i) & \\
 \mathcal{V}(f_i) \nearrow & \uparrow g & \nwarrow \mathcal{V}(f_j) \\
 \mathcal{V}(R_i) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{V}(R_j) \\
 \searrow h_i & & \swarrow h_j \\
 & \varinjlim \mathcal{V}(R_i) & 
 \end{array}$$

Notar que por la Observación 1.15 tenemos  $R = \cup f_i(R_i)$  y  $\varinjlim \mathcal{V}(R_i) = \cup h_i(\mathcal{V}(R_i))$ . Queremos ver que  $g$  es un isomorfismo:

- $g$  es sobre: Sea  $x \in \mathcal{V}(R)$ , luego existe  $n \in \mathbb{N}, e \in \text{Idem}_n(R)$  tal que  $x = \bar{e}$ .

Como  $R = \varinjlim R_i$ ,  $e = f_i(e_i)$  para algún  $e_i \in M_n(R_i)$ . Además

$$f_i(e_i^2 - e_i) = e^2 - e = 0 \text{ en } \text{Idem}_n(R)$$

por lo tanto existe  $j \geq i$  tal que  $\sigma_{i,j}(e_i)^2 = \sigma_{i,j}(e_i)$ . Así

$$g(h_j(\overline{\sigma_{i,j}(e_i)})) = \bar{e}.$$

- $g$  es inyectiva: Sean  $x, y \in \varinjlim \mathcal{V}(R_i)$  tales que  $g(x) = g(y)$ .

Supongamos que  $x = h_i(\bar{e}_1)$  y  $y = h_j(\bar{e}_2)$  con  $e_1 \in \text{Idem}_n(R_i)$  y  $e_2 \in \text{Idem}_m(R_j)$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $n = m$ . Como el sistema es filtrante podemos suponer que  $i=j$ , además como  $g(x) = g(y)$  tenemos que

$$\mathcal{V}(f_i)(\bar{e}_1) = \mathcal{V}(f_i)(\bar{e}_2)$$

o equivalentemente, existen  $k \geq n$  y  $q \in GL_k(R)$  tal que

$$qf_i(e_1)q^{-1} = f_i(e_2) \text{ en } M_k(R).$$

Así podemos tomar  $q_\ell$  y  $q_\ell^* \in M_k(R_\ell)$  con  $\ell \geq i$  tales que  $f_\ell(q_\ell) = q$  y  $f_\ell(q_\ell^*) = q^{-1}$ . Como  $qq^{-1} - 1 = q^{-1}q - 1 = 0$  existe  $\ell' \geq \ell$  tal que  $\sigma(q_\ell)\sigma(q_\ell^*) = \sigma(q_\ell^*)\sigma(q_\ell) = 1$  y  $\sigma(q_\ell)\sigma(e_1)\sigma(q_\ell^*) = \sigma(e_2)$ , o sea  $x = h_{\ell'}(\sigma(e_1)) = h_{\ell'}(\sigma(e_2)) = y$ .

□

**Teorema 1.17.** *El functor  $K_0 : \mathfrak{A}ss_{\mathbb{1}} \rightarrow \mathfrak{A}b$  conmuta con colímites filtrantes.*

*Demostración.* Por el Teorema 1.16 basta ver que el functor

$$\begin{array}{l}
 \mathfrak{Mon}\mathfrak{A}b \rightarrow \mathfrak{A}b \\
 M \mapsto G(M)
 \end{array}$$

conmuta con colímites filtrantes.

Sea  $M_i$  un sistema filtrante en  $\mathfrak{MonAb}$ , esto induce un sistema filtrante  $G(M_i)$  en  $\mathfrak{Ab}$ , así

$$\begin{array}{ccc}
 & \varinjlim M_i & \\
 M_i & \xrightarrow{\quad} & M_j \\
 \downarrow & \text{\scriptsize } g \text{\scriptsize } \downarrow & \downarrow \\
 G(M_i) & \xrightarrow{\quad} & G(M_j) \\
 & \varinjlim G(M_i) & 
 \end{array}$$

Y a su vez  $g$  induce un morfismo  $G(g) : G(\varinjlim M_i) \rightarrow \varinjlim G(M_i)$ .

Por otro lado, cada morfismo  $M_i \rightarrow \varinjlim M_i \rightarrow G(\varinjlim M_i)$  se levanta a un morfismo  $G(M_i) \rightarrow G(\varinjlim M_i)$  para cada  $i$ . Luego estos inducen un morfismo  $h : \varinjlim G(M_i) \rightarrow G(\varinjlim M_i)$ .

Es cuestión de rutina verificar que  $h$  y  $g^+$  son morfismos inversos.  $\square$

**Ejemplo 1.18.** Sean  $k$  un cuerpo  $n \geq 0$ . Consideremos el morfismo  $\phi_n : M_{2^n}(k) \rightarrow M_{2^{n+1}}(k)$

$$\phi_n(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Definimos  $M_{2^\infty}(k) := \varinjlim (M_2(k) \xrightarrow{\phi_1} M_4(k) \xrightarrow{\phi_2} M_8(k) \dots)$ .

Bajo la identificación  $K_0(M_{2^n}(k)) \cong \mathbb{Z}$ ,  $\phi_n$  induce la multiplicación por 2. Luego

$$K_0(M_{2^\infty}(k)) = \varinjlim (\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \dots) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}].$$

## 1.4. $K$ -teoría graduada

En esta sección definiremos el grupo de  $K$ -teoría de módulos graduados  $K_0^{gr}(R)$ .

Un *anillo  $\Gamma$ -graduado* es un anillo  $R$  junto con un grupo  $\Gamma$  y una descomposición

$$R = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma$$

como grupos abelianos, tal que  $R_\gamma R_\delta \subseteq R_{\gamma\delta}$  para todo  $\gamma, \delta \in \Gamma$ . Los elementos de  $R_\gamma$  serán los *elementos homogéneos de grado  $\gamma$*  y notaremos  $\deg(r) = \gamma$  si  $r \in R_\gamma$ . Un morfismo entre anillos  $\Gamma$ -graduados  $f : R \rightarrow S$  es un morfismo de anillos tal que  $f(R_\gamma) \subseteq S_\gamma$  para todo  $\gamma \in \Gamma$ . Dos anillos  $\Gamma$ -graduados son isomorfos si existe un isomorfismo de anillos graduados  $f : R \rightarrow S$ . En esta situación notaremos  $R \cong_{gr} S$ . Diremos que  $R$  es *fuertemente graduado* si además vale que  $R_\gamma R_\delta = R_{\gamma\delta}$  para todo  $\gamma, \delta \in \Gamma$ . Dado  $R$  un anillo  $\Gamma$ -graduado, un  *$R$ -módulo graduado*  $M$  es un  $R$ -módulo con una descomposición

$$M = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma$$



donde cada  $M_\gamma$  es un subgrupo aditivo de  $M$  tal que  $R_\gamma M_\delta \subseteq M_{\gamma\delta}$  para todo  $\gamma, \delta \in \Gamma$ . Dados dos  $R$ -módulos graduados  $M$  y  $N$ , un *morfismo de  $R$ -módulos graduados de grado  $\delta$*  es un morfismo de  $R$ -módulos  $f : M \rightarrow N$  tal que  $f(M_\gamma) \subseteq N_{\gamma\delta}$  para todo  $\gamma \in \Gamma$ . Por un *morfismo de  $R$ -módulos graduados* nos referimos a un morfismo graduado de grado 1. Denotaremos  $Gr-R$  la categoría de  $R$ -módulos graduados y morfismos graduados.

Dados  $\delta \in \Gamma$  y un módulo graduado  $M$ , definimos la  $\delta$ -suspensión  $M(\delta)$  como

$$M(\delta) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} M(\delta)_\gamma.$$

Aquí  $M(\delta)_\gamma = M_{\gamma\delta}$ . A su vez, esto define el *functor de  $\delta$ -suspensión*  $\mathcal{T}_\delta : Gr-R \rightarrow Gr-R$  tal que  $M \mapsto M(\delta)$ . Notar que  $\mathcal{T}_\delta \circ \mathcal{T}_\gamma = \mathcal{T}_{\delta\gamma}$ , en particular esto nos dice que  $\mathcal{T}_\delta^{-1} = \mathcal{T}_{\delta^{-1}}$ .

Un objeto  $F \in Gr-R$  se dirá *libre* si tiene una  $R$ -base formada por elementos homogéneos. Notar que  $F$  es libre si y sólo si  $F \cong \bigoplus_{i \in I} R(\alpha_i)$  donde los  $\alpha_i$  son elementos en  $\Gamma$ .

Análogamente a la definición 1.1, diremos que un objeto  $P$  en  $Gr-R$  es *proyectivo* si para todo epimorfismo  $f : M \rightarrow N$  y todo morfismo  $g : P \rightarrow N$  existe un morfismo  $h : P \rightarrow M$  tal que  $f \circ h = g$ . También se puede ver con la misma demostración que en el caso no graduado que esta noción es equivalente a pedir que el functor  $Hom_{Gr-R}(P, -)$  sea exacto o pedir que exista un módulo graduado  $Q$  tal que

$$P \oplus Q \cong \bigoplus_{i \in I} R(\alpha_i)$$

donde los  $\alpha_i$  son elementos en  $\Gamma$ .

Denotaremos  $(\mathcal{V}^{gr}(R), \oplus)$  al monoide abeliano de clases de isomorfismo de módulos graduados, proyectivos y finitamente generados y  $K_0^{gr}(R) := G(\mathcal{V}^{gr}(R))$ .

Notar que el functor  $\mathcal{T}_\delta$  se restringe a un endofunctor de la categoría de módulos graduados, proyectivos y finitamente generados. Por lo tanto induce una estructura de  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -módulo en  $K_0^{gr}(R)$  vía  $\delta[P] = [\mathcal{T}_\delta(P)]$ . Por último vamos a dar una relación entre  $K_0(R)$  y  $K_0^{gr}(R)$  para anillos fuertemente graduados, pero para eso necesitaremos algunos resultados. Sean  $e$  la unidad de  $\Gamma$  y  $(-)_\sigma : Gr-R \rightarrow R_e\text{-Mod}$  el functor aditivo que manda  $M \mapsto M_\sigma$  y  $R \otimes_{R_e} - : R_e\text{-Mod} \rightarrow Gr-R$  donde  $(R \otimes_{R_e} M)_\sigma = R_\sigma \otimes_{R_e} M$ .

**Teorema 1.19** (Teorema de Dade). *Sea  $R$  un anillo  $\Gamma$ -graduado, entonces son equivalentes:*

1.  $R$  es fuertemente graduado.
2. El functor  $R \otimes_{R_e} - : R_e\text{-Mod} \rightarrow Gr-R$  es una equivalencia categórica.
3. El functor  $(-)_e : Gr-R \rightarrow R_e\text{-Mod}$  es una equivalencia categórica.
4. Para todo  $\sigma \in \Gamma$  el functor  $(-)_\sigma : Gr-R \rightarrow R_e\text{-Mod}$  es una equivalencia categórica.

*Demostración.* Ver [20, Theorem 3.1.1.]. □

**Corolario 1.20.** *Si  $R$  es fuertemente graduado, entonces para todo  $\sigma, \tau \in \Gamma$  tenemos  $R_\sigma \otimes_{R_e} R_\tau \cong R_{\sigma\tau}$ . Más aún,  $R_\sigma \otimes_{R_e} M_\tau \cong M_{\sigma\tau}$  para todo  $M \in Gr-R$ .*

*Demostración.* Es claro que  $(-)_e \circ (R \otimes_{R_e} (-)) \cong Id_{R_e\text{-Mod}}$ , luego por Teorema 1.19 tenemos que  $R \otimes_{R_e} \circ (-)_e \cong Id_{Gr-R}$ . Por lo tanto  $M(\tau) \cong R \otimes_{R_e} (M(\tau))_e = R \otimes_{R_e} M_\tau$ ; volviendo a usar el Teorema 1.19 y aplicando  $(-)_\sigma$  tenemos  $M_{\sigma\tau} \cong R_\sigma \otimes_{R_e} M_\tau$ . □

También podemos definir los funtores  $\mathcal{T}_\sigma : R_e\text{-Mod} \rightarrow R_e\text{-Mod}$  dados por  $M \mapsto R_\sigma \otimes_{R_e} M$ . El Corolario 1.20 nos dice que  $\mathcal{T}_\sigma \circ \mathcal{T}_\tau = \mathcal{T}_{\sigma\tau}$  dándole a  $K_0(R_e)$  una estructura de  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -módulo. Por el corolario 1.20 el siguiente diagrama conmuta a menos de un isomorfismo natural:

$$\begin{array}{ccc}
 Gr\text{-}R & \xrightarrow{\mathcal{T}_\sigma} & Gr\text{-}R \\
 (-)_e \downarrow & & \downarrow (-)_e \\
 R_e\text{-Mod} & \xrightarrow{\mathcal{T}_\sigma} & R_e\text{-Mod}
 \end{array}$$

Por tanto se tiene un isomorfismo  $K_0(R_e) \cong K_0^{gr}(R)$  de  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -módulos.

## Capítulo 2

# Álgebras de camino de Leavitt

### 2.1. Definición y ejemplos

Empezaremos fijando la notación necesaria.

Un grafo (dirigido)  $E = (E^0, E^1, r_E, s_E)$  consiste de conjuntos  $E^0$  y  $E^1$  y funciones  $r, s : E^1 \rightarrow E^0$ . Los elementos de  $E^0$  se llaman *vértices* y los elementos de  $E^1$  son las *aristas*. Las funciones  $s$  y  $r$  indican el *comienzo* y el *destino* de cada arista  $e \in E^1$ , respectivamente. Si  $s^{-1}(v)$  es finito para todo  $v \in E^0$ , decimos que el grafo  $E$  es *finito por filas*. Un vértice  $v \in E^0$  se dice *pozo* si  $s^{-1}(v) = \emptyset$ . Un vértice  $w \in E^0$  se dice *fuentes* si  $r^{-1}(w) = \emptyset$ . El grafo se dice *finito* si  $E^0$  y  $E^1$  son finitos. Un grafo  $F$  es un *subgrafo* de  $E$  si  $F^0 \subseteq E^0$ ,  $F^1 \subseteq E^1$  y  $r_F, s_F$  son las restricciones de  $r_E, s_E$ . Un subgrafo  $F$  de un grafo  $E$  se dice *completo* si  $s_F^{-1}(v) = s_E^{-1}(v)$  para todo vértice  $v \in F^0$  que no sea un pozo en  $F$ . Un morfismo de grafos  $f : E \rightarrow G$  consiste de dos funciones  $f^0 : E^0 \rightarrow G^0$  y  $f^1 : E^1 \rightarrow G^1$  tales que  $f^0 \circ r_E = r_G \circ f^1$  y  $f^0 \circ s_E = s_G \circ f^1$ .

Un *camino*  $\mu$  en un grafo  $E$  consiste de una sucesión de aristas  $\mu = e_1 e_2 \dots e_n$  tal que  $r(e_i) = s(e_{i+1})$  si  $1 \leq i \leq n - 1$ . Notaremos  $s(\mu) = s(e_1)$  el comienzo del camino,  $r(\mu) = r(e_n)$  el objetivo o destino del camino y  $|\mu| = n$  el tamaño. Pensaremos a los vértices como caminos de tamaño 0. Notaremos  $P_n(E)$  al conjunto de caminos de tamaño  $n$  en  $E$  y  $P_\infty(E)$  al conjunto de caminos en  $E$  de cualquier tamaño. Una arista  $e$  es una *salida* de un camino  $\mu = e_1 \dots e_n$  si existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $s(e_i) = s(e)$  y  $e_i \neq e$ . Un camino  $\mu$  se dice *cerrado* si  $s(\mu) = r(\mu)$ . Un camino cerrado  $\mu = e_1 \dots e_n$  se dice *ciclo* si  $s(e_i) \neq s(e_j)$  para todo  $i \neq j$ .

Dado  $E$  un grafo, diremos que  $E$  es:

- *irreducible* si dados dos vértices  $v$  y  $w$  en  $E$ , existe un camino de  $v$  a  $w$ .
- *esencial* si  $E$  no contiene ni pozos, ni fuentes.
- *trivial* si  $E$  consiste de un ciclo, sin ningún otro vértice o arista.

Notar que la conducción de irreducibilidad en un grafo  $E$  es equivalente a la condición: para todo par de vértices  $v$  y  $w$ , existe un camino de  $v$  a  $w$  y uno de  $w$  a  $v$ .

Dada una matriz  $A \in M_n(\mathbb{N}_0)$  podemos definir un grafo finito  $E_A$  de vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y poniendo  $a_{ij}$  aristas de  $v_i$  a  $v_j$ . Inversamente, dado un grafo finito  $E$  con vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  podemos definir una matriz  $A_E \in M_n(\mathbb{N}_0)$  donde  $(A_E)_{ij}$  es la cantidad de aristas que van de  $v_i$  a  $v_j$ , ésta será la *matriz de adyacencia* del grafo  $E$ .

**Definición 2.1.** Sean  $E$  un grafo finito por filas,  $k$  un cuerpo. El álgebra de Leavitt del grafo  $E$  con coeficientes en  $k$ ,  $L_k(E)$ , es la  $k$ -álgebra (no unital) generada por  $\{v \mid v \in E^0\} \cup \{e, e^* \mid e \in E^1\}$  módulo las relaciones:

$$(1) \quad v \cdot w = \delta_{v,w} v \text{ para todo } v, w \in E^0.$$

$$(2) \quad s(e) \cdot e = e \cdot r(e) = e \text{ para todo } e \in E^1.$$

$$(3) \quad r(e) \cdot e^* = e^* \cdot s(e) = e^* \text{ para todo } e \in E^1.$$

$$(CK1) \quad e^* \cdot f = \delta_{e,f} r(e) \text{ para todo } e, f \in E^1.$$

$$(CK2) \quad v = \sum_{\{e \in E^1 \mid s(e)=v\}} e \cdot e^* \text{ para todo } v \in E^0 \text{ tal que } s^{-1}(v) \neq \emptyset.$$

Las relaciones CK1 y CK2 se le suelen ser denominadas como las condiciones de Cuntz-Krieger.

Si no hay ambigüedad sobre el cuerpo  $k$ , notaremos  $L(E)$  en vez de  $L_k(E)$ .

**Observación 2.2.** Notar que pedir que el grafo  $E$  sea finito por filas es necesario para definir la relación CK2. Si el grafo no es finito por filas, la relación CK2 sólo se pide para los vértices que emiten finitas aristas. Nosotros sólo trabajaremos con el caso finito por filas.

**Observación 2.3.** Dado un grafo  $E$ , definimos el grafo extendido

$$\widehat{E} = (E^0, E^1 \cup (E^1)^*, r_{\widehat{E}}, s_{\widehat{E}})$$

donde  $(E^1)^* = \{e^* \mid e \in E^1\}$ ,  $r_{\widehat{E}}(e) = r_E(e)$ ,  $r_{\widehat{E}}(e^*) = s(e)$ ,  $s_{\widehat{E}}(e) = s_E(e)$  y  $s_{\widehat{E}}(e^*) = r(e)$ . De esta manera, podemos observar que las primeras tres relaciones que definen el álgebra  $L(E)$  nos definen el álgebra de caminos (en el sentido de Gabriel) del grafo  $\widehat{E}$ . Es decir, el álgebra  $L(E)$  es el cociente del álgebra de caminos de  $\widehat{E}$  por las relaciones CK1 y CK2.

**Observación 2.4.** Todo elemento de  $L(E)$  es un una combinación lineal de palabras en  $\{v \mid v \in E^0\} \cup \{e, e^* \mid e \in E^1\}$ . La relación (CK1) nos dice que podemos pensar directamente que los elementos son combinaciones lineales de palabras de la forma  $\mu\nu^*$  donde  $\mu$  y  $\nu$  son caminos en  $E$  y, si  $\nu = \nu_1 \dots \nu_\ell$ , entonces  $\nu^* = \nu_\ell^* \dots \nu_1^*$  (si  $\nu = v \in E^0$ , entonces  $\nu^* = v$ ). En conclusión

$$L(E) = \left\{ \sum_i c_i \mu_i \nu_i^* : \mu_i, \nu_i \text{ son caminos en } E \text{ y } c_i \in k \text{ para todo } i \right\}.$$

**Observación 2.5.** Notar que  $L(E)$  es un álgebra unital si y sólo si el grafo  $E$  es finito, en cuyo caso la unidad es  $1_{L(E)} = \sum_{v \in E^0} v$ . En caso en el que  $E$  es un grafo infinito  $L(E)$  sólo posee unidades locales. Es decir, para todo conjunto finito  $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq L(E)$  existe un idempotente  $e \in L(E)$  tal que  $x_i e = e x_i = x_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ ; dicho  $e$  se llama una unidad local.

Dada una  $k$ -álgebra  $A$  que contiene una familia de elementos que cumplan las relaciones descritas arriba, existe un único morfismo de  $k$ -álgebras de  $L(E)$  en  $A$ . A dicha familia la llamaremos una  $E$ -familia. Por ejemplo, si tenemos un subgrafo completo  $F$  del grafo  $E$ , la propiedad universal de  $L(F)$  nos da un morfismo  $L(F) \rightarrow L(E)$ .

**Ejemplo 2.6.** Sea  $A_n$  el grafo

$$\bullet v_1 \xrightarrow{e_1} \bullet v_2 \xrightarrow{e_2} \bullet v_3 \dots \bullet v_{n-1} \xrightarrow{e_{n-1}} \bullet v_n .$$

Consideremos  $\{e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$  la base canónica de  $M_n(k)$ , entonces la familia  $\{e_{ii} \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{e_{i,i+1}, e_{i+1,i} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$  es una  $A_n$ -familia y por lo tanto existe un morfismo

$$\begin{aligned} L(A_n) &\rightarrow M_n(k) \\ v_i &\mapsto e_{ii} \\ f_i &\mapsto e_{i,i+1} \\ f_i^* &\mapsto e_{i+1,i}. \end{aligned}$$

De hecho podemos ver que este es un isomorfismo, y así  $L(A_n) \cong M_n(K)$ .

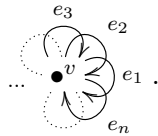
**Ejemplo 2.7.** Sea  $R_1$  el grafo

$$\bullet^v \curvearrowright e$$

hay un isomorfismo

$$\begin{aligned} L(R_1) &\rightarrow k[x, x^{-1}] \\ v &\mapsto 1 \\ e &\mapsto x \\ e^* &\mapsto x^{-1}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.8.** Sea  $n \geq 2$  y sea  $R_n$  el grafo



Entonces  $L(R_n) = L(1, n)$  el álgebra definida por Leavitt [18]

Un tipo particular de álgebras de Leavitt que ha tenido mucho interés es el de las simples puramente infinitas. Éstas están relacionadas con la teoría de subshifts de tipo finito, como veremos más adelante. Introduciremos definiciones y conceptos básicos para el lector que no esté familiarizado con ellos.

Dado  $R$  un anillo unital, se dice que  $R$  es *simple* si tiene exactamente dos ideales biláteros. Dos idempotentes  $f$  y  $g$  en  $R$  se dicen ortogonales si  $f \cdot g = g \cdot f = 0$ . Un idempotente  $e$  no nulo en  $R$  se dice *infinito* si existen  $f, g \in R$  idempotentes ortogonales no nulos tales que  $e = f + g$  y  $Re \cong Rf$  como  $R$ -módulos a izquierda. En otras palabras,  $e$  se dice infinito en el caso en que el ideal a izquierda  $Re$  contenga un sumando directo propio isomorfo a él mismo. Un anillo unital simple  $R$  se dice *puramente infinito* si todo ideal a izquierda, no nulo, contiene un idempotente infinito.

Las siguientes caracterizaciones de un álgebra de Leavitt unital, simple y puramente infinita en términos del grafo que la define nos serán de utilidad.

**Teorema 2.9.** *Sea  $E$  un grafo finito, entonces  $L(E)$  es simple si y sólo si se cumplen simultáneamente las siguientes propiedades:*

1. *Todo ciclo en  $E$  tiene una salida.*
2. *Dado cualquier vértice y cualquier ciclo o cualquier pozo en  $E$ , existe un camino que va desde el vértice a dicho ciclo o pozo.*

*Demostración.* Ver [2, Theorem 3.11.]. □

**Teorema 2.10.** *Sea  $E$  un grafo finito, entonces  $L(E)$  es simple puramente infinita si y sólo si  $L(E)$  es simple y  $E$  contiene un ciclo.*

*Demostración.* Ver [3, Theorem 11.]. □

Los grafos que son simultáneamente irreducibles, esenciales y no triviales son de suma importancia en la teoría de subshifts de tipo finito. Una primera conexión entre esta teoría y las álgebras de Leavitt es el siguiente lema:

**Lema 2.11.** *Sea  $E$  un grafo finito, entonces son equivalentes:*

1.  *$E$  es un grafo irreducible, esencial y no trivial.*
2.  *$E$  no tiene fuentes y  $L(E)$  es simple puramente infinito.*

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2)  $E$  no tiene fuentes, pues es esencial.

Para ver que  $L(E)$  es simple puramente infinito, vamos a usar los Teoremas 2.9 y 2.10. Es decir, tenemos que ver las siguientes condiciones:

- (a) Todo ciclo en  $E$  tiene una salida.
- (b) Dado cualquier vértice y cualquier ciclo o cualquier pozo, existe un camino que va desde el vértice a dicho ciclo o pozo.
- (c)  $E$  contiene un ciclo.

Dado un ciclo cualquiera, como  $E$  es no trivial, existe algún vértice o alguna arista que no pertenece al ciclo. En el primer caso hay un camino que va desde el ciclo a el vértice pues el grafo es irreducible. Este camino sirve de salida y por lo tanto se satisface la condición (a), en el segundo se cumple trivialmente la condición (a) pues, como todos los vértices están en el ciclo, la arista que no pertenece al ciclo tiene que salir de un vértice que sí esté en el ciclo.

El item (b) se sigue de la irreducibilidad.

Dado un vértice cualquiera existe una arista  $e_1$  que sale de él, pues el grafo es esencial. A su vez  $r(e_1)$  no es un pozo, y por lo tanto hay otra arista  $e_2$  que sale de  $r(e_1)$ . Inductivamente construimos un camino de largo  $n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $E$  es un grafo finito, en algún punto del recorrido se repite algún vértice. Así obtenemos un camino cerrado en  $E$ , y del camino cerrado podemos extraer un ciclo. Por tanto se cumple la condición (c).

(2)  $\Rightarrow$  (1) Ahora podemos asumir que se cumplen las condiciones (a), (b), (c) y adicionalmente la condición de que  $E$  no tiene fuentes. Veamos que  $E$  es irreducible, esencial y no trivial.

$E$  es no trivial por la condición (a). Como la condición (c) nos asegura que hay un ciclo, por (b) dado un vértice cualquiera, existe un camino del vértice al ciclo. Por lo tanto  $E$  no contiene pozos, luego  $E$  es esencial. Veamos ahora que todo vértice pertenece a un ciclo. Sea  $v$  un vértice, como  $v$  no es una fuente, existe una arista  $e_1$  tal que  $r(e_1) = v$ . Nuevamente  $s(e_1)$  no es una fuente, por lo tanto existe  $e_2$  arista tal que  $r(e_2) = s(e_1)$ . Seguimos inductivamente hasta que se repita algún vértice por primera vez. Así conseguimos un camino  $\mu = e_n e_{n-1} \dots e_1$ ; si  $s(e_n) = r(e_1) = v$  tenemos el ciclo, si no supongamos que  $s(e_n) = r(e_k)$ . De esta forma podemos escribir  $\mu = \nu\eta$  donde  $\nu = e_n \dots e_k$  y  $\eta = e_{k-1} \dots e_1$ . El camino  $\nu = e_n \dots e_k$  es un ciclo, por (b) existe un camino  $\gamma = f_1 \dots f_m$  de  $v$  al ciclo. Además podemos asumir que  $\gamma$  sólo se corta con el ciclo en  $r(\gamma)$  (de otra forma acortamos el camino  $\gamma$ ). Por último, si  $r(f_j) \neq r(e_\ell)$  para todo  $j$  y todo  $\ell \in \{1, \dots, k\}$  hacemos el camino  $\gamma$ , llegamos al ciclo y volvemos por el mismo a  $v$  tenemos el ciclo que queremos. Si no, tomamos  $j_0$  como el mínimo de los  $j$  que satisfacen  $r(f_j) = r(e_{\ell_0})$  para algún  $\ell_0 \in \{1, \dots, k\}$  y, en este caso, consideramos el ciclo  $f_1 \dots f_{j_0} e_{\ell_0} \dots e_n$  que empieza y termina en  $v$ .

Ahora tenemos dos vértices  $v$  y  $w$  en  $E$ . Queremos ver que existe un camino de  $v$  a  $w$  para asegurar la irreducibilidad. Como  $w$  está contenido en un ciclo, la condición (b) nos da un camino de  $v$  al ciclo, y por lo tanto un camino a  $w$ .

□

## 2.2. Estructura graduada

Sea  $E$  un grafo finito por filas. Podemos asignarle una estructura de anillo  $\mathbb{Z}$ -graduado al álgebra de Leavitt declarando:

$$\deg(v) = 0 \text{ si } v \in E^0 \quad \deg(e) = 1 \text{ y } \deg(e^*) = -1 \text{ si } e \in E^1.$$

En efecto, podemos hacer esto en la  $k$ -álgebra libre generada por los elementos  $\{v, e, e^* \mid v \in E^0, e \in E^1\}$  y luego podemos pasar al cociente por las relaciones (1) - (5) porque son todas homogéneas.

Recordar que la Observación 2.4 nos decía que

$$L(E) = \left\{ \sum_i k_i \mu_i \nu_i^* : \mu_i, \nu_i \in P_\infty(E) \text{ y } k_i \in k \text{ para todo } i \right\}.$$

Por lo tanto, ahora podemos deducir que, para la graduación que acabamos de definir, la parte homogénea de grado  $n$  de  $L(E)$  es

$$L(E)_n = \left\{ \sum_i k_i \mu_i \nu_i^* : \mu_i, \nu_i \in P_\infty(E), |\mu_i| - |\nu_i| = n \text{ y } k_i \in k \text{ para todo } i \right\}.$$

Un resultado que nos será de utilidad es el siguiente:

**Teorema 2.12.** *Sea  $E$  un grafo finito, entonces son equivalentes:*

- $L_k(E)$  es fuertemente  $\mathbb{Z}$ -graduado.
- $E$  no tiene pozos.

*Demostración.* Ver [13, Theorem 4.1].

□

Ahora construiremos un análogo algebraico al producto cruzado por un endomorfismo de  $C^*$ -álgebras introducido por Paschke [22]. De hecho, el producto cruzado de Paschke es la completación en una norma conveniente del objeto algebraico. Esta construcción se debe a Ara, González-Barroso, Goodearl y Pardo (ver [4]).

Sean  $R$  un anillo unital,  $\phi : R \rightarrow R$  un morfismo de anillos no necesariamente unital y  $e = \phi(1_R)$ . Como  $\phi(R) = \phi(1_R R 1_R) = e\phi(R)e \subseteq eRe$  podemos pensar  $\phi : R \rightarrow eRe$ . Decimos que  $\phi$  es un *isomorfismo de esquina* si  $\phi : R \rightarrow eRe$  es un isomorfismo de anillos. En este caso podemos definir  $R[t_+, t_-; \phi]$  como el cociente del anillo  $R\{t_+, t_-\}$  de polinomios en variables no conmutativas, que no conmuta con los coeficientes de  $R$ , módulo las relaciones:

- (1)  $t_- t_+ = 1$ .
- (2)  $t_+ a = \phi(a) t_+$
- (3)  $a t_- = t_- \phi(a)$

Se puede ver fácilmente que todo elemento  $x \in R[t_+, t_-; \phi]$  se puede escribir de la forma  $x = a_n t_+^n + \cdots + a_1 t_+ + a_0 + t_- a_{-1} + \cdots + t_-^m a_{-m}$ .

**Lema 2.13.** [4, Lema 2.4] *Sea  $S = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} S_n$  anillo unital  $\mathbb{Z}$ -graduado. Supongamos que existen  $s_+ \in S_1$  y  $s_- \in S_{-1}$  tal que  $s_- s_+ = 1$ . Consideremos  $R := S_0$  y  $\phi : R \rightarrow R$  el morfismo que manda  $x \mapsto s_+ x s_-$ . Entonces  $\phi$  es isomorfismo de esquina y  $S \cong R[t_+, t_-; \phi]$ .*

*Demostración.* Veamos primero que  $\phi$  es isomorfismo de esquina. Sea  $r \in R$  tal que  $\phi(r) = 0$ , luego  $r = s_- s_+ r s_- s_+ = s_- \phi(r) s_+ = 0$ . Por lo tanto  $\phi$  es mono. Además  $eRe = s_+ s_- R s_+ s_- = \phi(s_- R s_+) \subseteq \phi(R)$  y la otra inclusión vimos que siempre valía. Es decir,  $\phi$  es isomorfismo de esquina. Ahora veamos que

$$S_i = \begin{cases} R & \text{si } i = 0 \\ R s_+^n & \text{si } i > 0 \\ s_-^n R & \text{si } i < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Para  $i = 0$  no hay nada que hacer. Haremos el caso  $i > 0$ , el otro es análogo. Claramente  $R s_+^n \subseteq S_n$ . Si  $x \in S_n$  entonces  $x s_-^n \in S_0 = R$ , luego  $x = (x s_-^n) s_+^n \in R s_+^n$ . Como  $R[t_+, t_-; \phi]$  también es un anillo  $\mathbb{Z}$ -graduado, pues podemos definir la graduación en  $R\{t_+, t_-\}$  declarando

$$\deg(t_+) = 1 \quad \deg(t_-) = -1 \quad \deg(r) = 0 \text{ para todo } r \in R$$

y pasar al cociente por las relaciones necesarias. Así podemos ver análogamente que

$$R[t_+, t_-; \phi] = R \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R t_+^n \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} t_-^n R.$$

Ahora consideremos el morfismo

$$\begin{array}{c} R[t_+, t_-; \phi] \xrightarrow{\psi} S \\ t_+ \mapsto s_+ \\ t_- \mapsto s_- \\ r \mapsto r \end{array}.$$



Queremos ver que  $\psi$  es un isomorfismo. Para esto basta ver que es un isomorfismo en cada componente graduada. En la componente de grado 0 lo es trivialmente. Veámoslo para el caso  $i > 0$ , el otro es análogo. Si  $rt_+^i \in Rt_+^i$  cumple que  $0 = \psi(rt_+^i) = rs_+^i$ , entonces  $0 = rs_+^i s_-^i = \psi(rt_+^i t_-^i)$  en  $R$  donde sabemos que  $\psi$  es mono, por lo tanto  $rt_+^i t_-^i = 0$ . Así concluimos que  $0 = rt_+^i t_-^i rt_+^i = rt_+^i$ . Ya vimos que es sobreyectivo pues, si  $x \in S_n$ , entonces  $x = (xs_-^n)s_+^n \in Rs_+^n$ .  $\square$

Supongamos que  $E$  es un grafo finito sin fuentes y  $E^0 = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Para cada  $1 \leq i \leq n$  tomamos  $e_i \in E^1$  tal que  $r(e_i) = v_i$  y definimos

$$t_+ := \sum_{i=1}^n e_i \in L_k(E)_1 \quad t_- := \sum_{i=1}^n e_i^* \in L_k(E)_{-1}.$$

Es fácil ver que  $t_- t_+ = 1$  y por el Lema 2.13 tenemos que  $L(E) = L(E)_0[t_+, t_-, \alpha]$  donde  $\alpha$  es el isomorfismo de esquina definido por  $\alpha(a) = t_+ a t_-$ . En particular, por (2.1) del lema podemos observar que:

$$L(E)_n = L(E)_0 t_+^n \quad \text{si } n > 0 \quad L(E)_n = t_-^n L(E)_0 \quad \text{si } n < 0.$$

Recordemos que un idempotente  $e$  en un anillo  $R$  se dice *pleno* si  $ReR = R$ .

**Lema 2.14.** *Sea  $E$  un grafo finito sin fuentes, entonces  $p := t_+ t_-$  es un idempotente pleno en  $L(E)_0$  si y sólo si  $E$  no tiene pozos.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Supongamos que existe  $v \in E^0$  pozo. El hecho de que  $p$  sea pleno nos dice que  $L(E)_0 p L(E)_0 = L(E)_0$  y por lo tanto existen  $x_j, y_j \in L(E)_0$  tales que  $v = \sum_{j=1}^m x_j \cdot p \cdot y_j$ . Sabemos que cada  $x_j$  es de la forma

$$x_j = \sum_{i=1}^{m_j} k_{i,j} \mu_{i,j} \nu_{i,j}^* \quad \text{con } |\mu_{i,j}| = |\nu_{i,j}| \text{ para todo } i \text{ y } k_{i,j} \in k.$$

Ahora

$$v x_j = \sum_{i=1}^{m_j} k_{i,j} (v \mu_{i,j}) \nu_{i,j}^*$$

pero si  $|\mu_{i,j}| \geq 1$ , es decir  $\mu_{i,j}$  no es un vértice, entonces

$$v \mu_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } s(\mu_{i,j}) \neq v \\ \mu_{i,j} & \text{si } s(\mu_{i,j}) = v. \end{cases}$$

Como  $v$  es un pozo (i.e.  $s^{-1}(v) = \emptyset$ ), sólo sobreviven los  $i$  tales que  $\mu_{i,j} = v$ . Además, sin pérdida de generalidad,  $\nu_{i,j} = v$  para esos mismos  $i$ , pues  $0 = |\mu_{i,j}| = |\nu_{i,j}|$ . Por lo tanto  $v x_j = k^j v$  para algún  $k^j$ .

Por otro lado  $v \cdot p = 0$ , pues  $p = \sum_{i=1}^n e_i e_i^*$  y  $v$  es un pozo.

En conclusión  $v = v^2 = v \cdot (\sum_{j=1}^m x_j \cdot p \cdot y_j) = \sum_{j=1}^m (v x_j) \cdot p \cdot y_j = \sum_{j=1}^m k^j (v \cdot p) \cdot y_j = 0$ , lo cual es una contradicción.

$\Leftarrow$ ) Tenemos que ver que  $L(E)_0 \subseteq L(E)_0 p L(E)_0$ . Basta verlo para los elementos de la forma  $\mu\nu^*$  tales que  $|\mu| = |\nu| =: n$  y  $r(\mu) = r(\nu)$ .

Si  $n \geq 1$ , entonces  $\mu = at_+^n \in L(E)_0 t_+^n = L(E)_n$  y  $\nu^* = t_-^n b \in t_-^n L(E)_0 = L(E)_{-n}$ . Por tanto tenemos la descomposición

$$\mu\nu^* = (at_+^n)(t_-^n b) = (at_+^n t_-^n)pb \in L(E)_0 p L(E)_0$$

Si  $n = 0$ , es decir  $\mu = \nu = r(\mu) =: w$  es un vértice, como no hay pozos tenemos que

$$w = \sum_{e \in s^{-1}(w)} ee^*$$

y aplicamos el caso  $n = 1$ . □

Determinar, en general, cuándo un morfismo de álgebras es inyectivo puede ser sumamente difícil. El siguiente lema podrá facilitarnos las cosas cuando estemos considerando morfismos graduados.

**Lema 2.15.** *Sean  $E$  un grafo finito por filas,  $A$  un  $k$ -álgebra  $\mathbb{Z}$ -graduada y  $f : L(E) \rightarrow A$  un morfismo graduado de  $k$ -álgebras. Si  $f(v) \neq 0$  para todo vértice  $v \in E^0$ , entonces  $f$  es inyectivo.*

*Demostración.* Como  $f$  es un morfismo graduado,  $\ker(f)$  es un ideal graduado de  $L(E)$ . Luego por [6, Theorem 5.3.] existe un subconjunto  $X$  de  $E^0$  tal que  $\ker(f) = \langle X \rangle$ . Como  $f(v) \neq 0$  para todo vértice, tenemos que  $X = \emptyset$ . Por tanto  $\ker(f) = 0$ . □

### 2.3. $K_0$ de álgebras de Leavitt

Una de las principales herramientas para la clasificación de álgebras de Leavitt es el grupo  $K_0$ .

Dado un grafo finito por filas  $E$ , el monoide de  $E$ , al que notaremos  $M_E$ , es el monoide generado por el conjunto de vértices  $E^0$  bajo ciertas relaciones. Más concretamente:

$$M_E = \langle a_v, v \in E^0 \mid a_v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} a_{r(e)} \text{ si } s^{-1}(v) \neq \emptyset \rangle.$$

En [6, Theorem 2.5.] se demuestra que hay un isomorfismo natural  $\mathcal{V}(L(E)) \cong M_E$  para todo grafo finito por filas  $E$ . En particular  $K_0(L(E)) \cong G(M_E)$  es el grupo de Grothendieck.

A partir de ahora asumiremos que  $E$  es un grafo finito. Como  $M_E$  es finitamente generado, existe un epimorfismo  $\pi_{\mathbb{N}_0} : \mathbb{N}_0^n \rightarrow M_E$  donde  $n = |E^0|$ . Además, esto induce un epimorfismo  $\pi_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}^n \rightarrow G(M_E)$ . Llamemos  $\psi : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  y  $\varphi : M_E \rightarrow G(M_E)$  a los morfismos canónicos. Notemos que  $\pi_{\mathbb{Z}}$  es un epimorfismo. En efecto, si  $G$  es un grupo abeliano y  $f : G(M_E) \rightarrow G$  es tal que  $f \circ \pi_{\mathbb{Z}} = 0$ , entonces  $0 = f \circ \pi_{\mathbb{Z}} \circ \psi = f \circ \varphi \circ \pi_{\mathbb{N}_0}$ . Luego, como  $\pi_{\mathbb{N}_0}$  es epimorfismo tenemos que  $f \circ \varphi = 0$  y por lo tanto  $f = 0$ , pues el morfismo nulo es el único que extiende al morfismo nulo.

Veremos que  $\ker(\pi_{\mathbb{Z}}) = \text{Im}(I - A_E^t)$  donde  $I - A_E^t : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  es la multiplicación por dicha matriz. Así obtendremos que

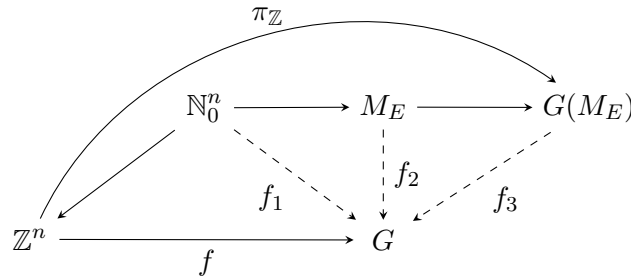
$$K_0(L(E)) \cong G(M_E) \cong \mathbb{Z}^n / \text{Im}(I - A_E^t) = \text{Coker}(I - A_E^t).$$

Para probar esto, vamos a ver que  $\pi_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}^n \twoheadrightarrow G(M_E)$  cumple la propiedad universal del cociente.

Sea  $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow G$  morfismo de grupos tal que  $\text{Im}(I - A_E^t) \subseteq \ker(f)$ . Por tanto se tiene un morfismo

$$f_1 : \mathbb{N}_0^n \rightarrow G \text{ tal que } \text{Im} \left( \mathbb{N}_0^n \xrightarrow{I - A_E^t} \mathbb{N}_0^n \right) \subseteq \ker(f_1),$$

por la propiedad universal del grupo de Grothendieck. A su vez, la existencia de este morfismo  $f_1$  equivale a tener un morfismo  $f_2 : M_E \rightarrow G$  por la propiedad universal del cociente. Por último, la existencia del morfismo  $f_2$  equivale a tener un morfismo  $f_3 : G(M_E) \rightarrow G$ . En conclusión, dado un morfismo de grupos  $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow G$  existe único  $f_3 : G(M_E) \rightarrow G$  tal que el siguiente diagrama conmuta:



como queríamos.

Observemos que, para todo anillo  $R$ , el monoide  $\mathcal{V}(R)$  es *cónico*, es decir,  $x + y = 0$  en  $\mathcal{V}(R)$  sii  $x = y = 0$  en  $\mathcal{V}(R)$ . Esto nos indica que el subconjunto  $\mathcal{V}(R)^* := \mathcal{V}(R) \setminus \{0\}$  es cerrado bajo la operación de suma. Más aún, si  $R$  es un anillo simple puramente infinito se demuestra en [5, Proposition 2.2.] que  $\mathcal{V}(R)^*$  es un grupo abeliano.

Otro resultado de suma utilidad es el siguiente:

**Teorema 2.16.** *Sea  $R$  un anillo simple puramente infinito. Entonces la restricción  $\phi^* : \mathcal{V}(R)^* \rightarrow K_0(R)$  del morfismo canónico, es un isomorfismo de grupos.*

*Demostración.* Ver [5, Corollary 2.3.]. □

**Observación 2.17.** *De este análisis podemos deducir que si  $R$  es un anillo simple puramente infinito y  $M$  y  $N$  dos módulos proyectivos f.g. no nulos tales que  $[M] = [N]$  en  $K_0(R)$ , entonces  $[M] = [N]$  en  $\mathcal{V}(R)^*$ . En particular  $M \cong N$  como  $R$ -módulos.*



## Capítulo 3

# Invariantes de flujo

En este capítulo trataremos el tema de la clasificación de álgebras de Leavitt simples puramente infinitas. Los resultados principales de este capítulo provienen de [1].

### 3.1. Condiciones suficientes para garantizar equivalencia Morita

Empezaremos esta sección viendo que ciertas operaciones en los grafos preservan la equivalencia Morita en sus álgebras de Leavitt asociadas.

Notemos que una equivalencia Morita  $\Phi : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$  induce un isomorfismo de grupos  $\Phi_{\mathcal{V}} : K_0(R) \rightarrow K_0(S)$  que manda  $[R] \mapsto [\Phi(R)]$ . Bajo esta observación estamos en condiciones de dar el siguiente lema auxiliar que nos será de gran utilidad en esta sección.

**Lema 3.1.** *Sean  $R, S$  anillos unitales simples,  $\pi : R \rightarrow S$  un morfismo de anillos (no necesariamente unital) no nulo. Consideremos  $g := \pi(1_R)$ .*

*Si  $gSg = \pi(R)$ , entonces existe  $\Phi : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$  equivalencia Morita.*

*Más aún  $\Phi_{\mathcal{V}} : K_0(R) \rightarrow K_0(S)$  definida como*

$$\Phi_{\mathcal{V}}([Re]) = [S\pi(e)]$$

para todo idempotente  $e \in R$ .

*Demostración.* Como  $R$  es simple y  $\pi \neq 0$  tenemos que  $R \cong \pi(R) = gSg$ , por lo tanto  $\pi$  induce una equivalencia Morita  $\Pi : R\text{-Mod} \rightarrow gSg\text{-Mod}$  mandando cada  $R$ -módulo  $M$  en el  $gSg$ -módulo  $M^g$  donde la acción está dada por  $gsg \cdot m := \pi^{-1}(gsg)m$ .

Como  $g \neq 0$  y  $S$  es simple tenemos que  $SgS = S$ . Esto nos dice que el módulo proyectivo f.g.  $gSg$  es un generador de la categoría  $\text{Mod-}S$  de  $S$  módulos a derecha, ya que

$$\text{Tr}(gS) := \sum_{h \in \text{Hom}_S(gS, S)} \text{Im}(h) \supseteq \sum_{s' \in S} s'gS = SgS = S.$$

Por lo tanto, el teorema de Morita nos dice que hay una equivalencia  $\widehat{\Psi} : \text{Mod-}gSg \rightarrow \text{Mod-}S$  de módulos a derecha que manda  $N \mapsto N \otimes_{gSg} gS$  con inversa categórica  $\widehat{\Psi}^{-1} : \text{Mod-}S \rightarrow \text{Mod-}gSg$  dada por  $M \mapsto M \otimes_S Sg$ , pues  $\text{End}_S(gS) \cong gSg$  y  $\text{Hom}_S(gS, S) = Sg$ . Luego tenemos la equivalencia  $\Psi : gSg\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$  vía  $N \mapsto Sg \otimes_{gSg} N$ .

Podemos definir la equivalencia buscada  $\Phi := \Psi \circ \Pi$ .

Sólo falta ver la última afirmación del lema, pero esto se sigue fácilmente de que

$$\begin{aligned} Sg \otimes_{gSg} (Re)^g &\cong S\pi(e) \\ sg \otimes re &\mapsto s\pi(re) \\ sg \otimes e &\mapsto s\pi(e) \end{aligned}$$

es un isomorfismo. La vuelta está bien definida pues, si  $s\pi(e) = t\pi(e)$  entonces  $sg\pi(e) = tg\pi(e)$  por ser  $g = \pi(1)$ , luego  $sg \otimes e = sg \otimes e^2 = sg\pi(e) \otimes e = tg\pi(e) \otimes e = tg \otimes e$ .  $\square$

Ahora empezaremos a definir los movimientos de grafos y estudiar su comportamiento.

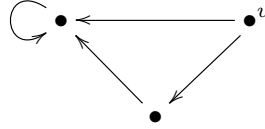
**Definición 3.2.** Sean  $E$  un grafo con al menos dos vértices,  $v \in E^0$  una fuente. El grafo de eliminación de fuente  $E_{\setminus v}$  es el grafo con vértices y aristas:

$$E_{\setminus v}^0 = E^0 \setminus \{v\} \quad E_{\setminus v}^1 = E^1 \setminus \{s^{-1}(v)\}$$

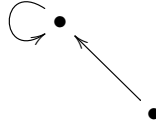
y donde  $s_{E_{\setminus v}}$  y  $r_{E_{\setminus v}}$  son las restricciones de  $s_E$  y  $r_E$ .

Notemos que la condición de tener al menos dos vértices sólo está para garantizar que  $E_{\setminus v}$  no sea vacío.

**Ejemplo 3.3.** Si  $E$  es el grafo



luego  $E_{\setminus v}$  es



**Proposición 3.4.** Sean  $E$  grafo finito con al menos 2 vértices tal que  $L(E)$  es simple y sea  $v \in E^0$ . Entonces existe

$$\Phi^{elim} : L(E_{\setminus v})\text{-Mod} \rightarrow L(E)\text{-Mod}$$

equivalencia Morita tal que  $\Phi_{\mathcal{V}}^{elim}([L(E_{\setminus v})w]) = [L(E)w]$  para todo vértice  $w \in E^0 \setminus v$ .

*Demostración.* Para demostrar la Proposición veremos que hay un morfismo de  $L(E_{\setminus v})$  en  $L(E)$  satisfaciendo las hipótesis del Lema 3.1. Para esto, primero veremos que si  $L(E)$  es simple, entonces  $L(E_{\setminus v})$  lo es. Luego veremos la existencia del morfismo.

Veamos que si  $L(E)$  es simple entonces  $L(E_{\setminus v})$  lo es. Por el Teorema 2.9 basta ver que todo ciclo en  $E_{\setminus v}$  tiene una salida y, dado un vértice y un ciclo o un pozo, existe un camino del vértice al ciclo o el pozo. Dado un ciclo en  $E_{\setminus v}$ , podemos pensar que este ciclo está en  $E$ , pues ninguna fuente puede pertenecer a un ciclo. Luego este ciclo tiene una salida en  $E$  que, a su vez, es una salida en  $E_{\setminus v}$  ya que esta salida no puede llegar a la fuente. Ahora tomemos un vértice  $w \in E_{\setminus v}^0$  y un ciclo o un pozo. Como vimos anteriormente, un ciclo en  $E_{\setminus v}$  está en el grafo  $E$ , además, un pozo también sigue siendo pozo en  $E$ . Por tanto existe un camino en  $E$  de  $w$  al objetivo deseado, pero este camino no puede pasar por  $v$  porque

### 3.1. CONDICIONES SUFICIENTES PARA GARANTIZAR EQUIVALENCIA MORITA 31

la única opción sería que empiece en él, con lo que tendríamos  $v = w \in E_{\setminus v}$  lo que es una contradicción.

Para terminar la demostración vamos a construirnos un morfismo que satisface las hipótesis del Lema 3.1 para poder aplicarlo.

Como  $E_{\setminus v}$  es un subgrafo completo de  $E$  existe un morfismo

$$\begin{aligned} \pi : L(E_{\setminus v}) &\rightarrow L(E) \\ w &\mapsto w \\ e &\mapsto e \\ e^* &\mapsto e^*. \end{aligned}$$

Veamos que  $\pi(L(E_{\setminus v})) = \pi(1_{L(E_{\setminus v})}) L(E) \pi(1_{L(E_{\setminus v})})$ .

$\subseteq$ ) Se sigue del hecho de que  $\pi(L(E_{\setminus v})) \subseteq L(E)$ .

$\supseteq$ ) Notar que  $1_{L(E_{\setminus v})} = \sum_{w \in E_{\setminus v}^0} w$ , por ende  $\pi(1_{L(E_{\setminus v})}) = \sum_{w \in E^0 \setminus \{v\}} w$ , luego por Observación 2.4 los elementos de  $\pi(1_{L(E_{\setminus v})}) L(E) \pi(1_{L(E_{\setminus v})})$  son combinaciones lineales de elementos de la forma  $\mu_1 \mu_2^*$  donde  $s(\mu_1), s(\mu_2) \in E^0 \setminus \{v\}$ .

Sea  $\mu_1 \mu_2^* \in \pi(1_{L(E_{\setminus v})}) L(E) \pi(1_{L(E_{\setminus v})})$ . Por la observación anterior, ninguno de los caminos  $\mu_1, \mu_2$  empieza en  $v$  y, como  $v$  es una fuente, no pasa por  $v$  en ningún momento. Luego  $\mu_1 \mu_2^* = \pi(\mu_1 \mu_2^*) \in \pi(L(E_{\setminus v}))$ .

Por Lema 3.1 tenemos el resultado deseado. □

**Observación 3.5.** *Para demostrar la afirmación “ $L(E)$  simple entonces  $L(E_{\setminus v})$  lo es” sólo usamos cómo pasar de caminos de un grafo a caminos del otro o cómo pasar de un ciclo de un grafo a un ciclo del otro. En casos posteriores sólo vamos a analizar cómo pasar de un camino o un ciclo de un grafo al otro y luego el resto de la demostración será sólo cuestión de rellenar los detalles.*

**Corolario 3.6.** *Sea  $E$  un grafo finito tal que  $L(E)$  es simple puramente infinita. Entonces existen un grafo  $E'$  que no contiene fuentes y*

$$\Phi^{ELIM} : L(E')\text{-Mod} \rightarrow L(E)\text{-Mod}$$

*equivalencia Morita tal que  $\Phi_{\mathcal{V}}^{ELIM}([L(E')w]) = [L(E)w]$  para todo vértice  $w \in E'$ .*

*Demostración.* Aplicando inductivamente la eliminación de fuentes llegaremos a un grafo  $E'$  sin fuentes. Tendríamos que probar que  $E'$  es no vacío. Por Teorema 2.10 sabemos que  $E$  contiene un ciclo, y el proceso de eliminación de fuentes no altera este ciclo, por lo cual  $E'$  no puede ser vacío. □

Ahora empezaremos con el segundo movimiento.

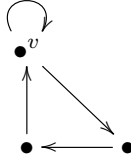
**Definición 3.7.** *Sean  $E$  grafo,  $v \in E^0$ ,  $v^*$  y  $f$  símbolos que no están en  $E^0 \cup E^1$ . Definimos*

el grafo de expansión  $E_v$  de  $E$  como:

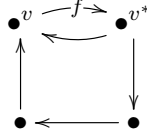
$$\begin{aligned} E_v^0 &= E^0 \cup \{v^*\} \\ E_v^1 &= E^1 \cup \{f\} \\ s_{E_v}(e) &= \begin{cases} v & \text{si } e = f \\ v^* & \text{si } s_E(e) = v \\ s_E(e) & \text{caso contrario} \end{cases} \\ r_{E_v}(e) &= \begin{cases} v^* & \text{si } e = f \\ r_E(e) & \text{caso contrario} \end{cases} \end{aligned}$$

El grafo  $E$  será la contracción de  $E_v$ .

**Ejemplo 3.8.** Sea  $E$  el grafo:



El grafo de expansión  $E_v$  es



**Proposición 3.9.** Sean  $E$  un grafo finito tal que  $L(E)$  es simple y  $v \in E^0$ . Entonces existe una equivalencia

$$\Phi^{exp} : L(E)\text{-Mod} \rightarrow L(E_v)\text{-Mod}$$

tal que  $\Phi_v^{exp}([L(E)w]) = [L(E_v)w]$  para todo vértice  $w \in E^0$ .

*Demostración.*  $L(E)$  es simple si y sólo si  $L(E_v)$  lo es. Por lo discutido en la Observación 3.5 sólo vamos a ver como pasar caminos o ciclos de un grafo al otro. Tomemos un camino  $\mu = \mu_1 \dots \mu_n$  en  $E$ ; si el camino no pasa por  $v$  podemos pensar el mismo camino en  $E_v$ . Si no podemos considerar el camino  $\hat{\mu}$  en  $L(E_v)$  que consiste en agregar la arista  $f$  después de cada arista  $\mu_i$  tal que  $r_E(\mu_i) = v$ . Si el camino original era un ciclo, el nuevo camino también lo será. En la dirección contraria, si tenemos un camino  $\mu$  en  $E_v$ , consideremos el camino  $\tilde{\mu}$  en  $E$  que consiste en eliminar todas las aristas  $f$  que aparecen en  $\mu$  y obtenemos el camino deseado.

Para cada  $w \in E$  definamos  $Q_w := w$  en  $L(E_v)$ . Para cada  $e \in E^1$  definimos  $T_e := fe$  y  $T_{e^*} := e^*f^*$  en  $L(E_v)$  si  $e \in s^{-1}(v)$ , si no  $T_e := e$  y  $T_{e^*} := e^*$ . Es cuestión de rutina verificar que  $\{Q_w, T_e, T_{e^*} : w \in E^0, e \in E^1\}$  es una  $E$ -familia, por lo tanto existe un morfismo

$$\begin{aligned} \pi : L(E) &\rightarrow L(E_v) \\ w &\mapsto Q_w \\ e &\mapsto T_e \\ e^* &\mapsto T_{e^*}. \end{aligned}$$



### 3.1. CONDICIONES SUFICIENTES PARA GARANTIZAR EQUIVALENCIA MORITA33

Veamos que  $\pi(L(E)) = \pi(1_{L(E)}) L(E_v) \pi(1_{L(E)})$ . Nuevamente la inclusión  $\pi(L(E)) \subseteq \pi(1_{L(E)}) L(E_v) \pi(1_{L(E)})$  es inmediata. Supongamos que  $0 \neq \mu_1 \mu_2^* \in \pi(1_{L(E)}) L(E_v) \pi(1_{L(E)})$ . Entonces  $\mu_1, \mu_2$  son caminos tales que  $s(\mu_1), s(\mu_2) \neq v^*$ , pues  $\pi(1_{L(E)}) = \sum_{w \in E^0} w$ , y  $r(\mu_1) = r(\mu_2)$ . Afirmamos que existen  $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$  caminos en  $E$  tales que  $\pi(\tilde{\mu}_1 \tilde{\mu}_2^*) = \mu_1 \mu_2^*$ . Consideremos los siguientes casos:

- Si  $r(\mu_1) \neq v^* \neq r(\mu_2)$ , luego  $\mu_1 = \pi(\mu_1)$  y  $\mu_2^* = \pi(\mu_2^*)$ .
- Si no  $r(\mu_1) = v^* = r(\mu_2)$  y, como  $s(\mu_1), s(\mu_2) \neq v^*$ , entonces  $\mu_1 = \nu_1 f$  y  $\mu_2 = \nu_2 f$  con  $r(\nu_1) = v = r(\nu_2)$ . Luego  $\pi(\nu_1 \nu_2^*) = \nu_1 \nu_2^* = \nu_1 f f^* \nu_2^* = \mu_1 \mu_2^*$ .

Por Lema 3.1 tenemos el resultado deseado.  $\square$

Notaremos  $\Phi^{cont} = (\Phi^{exp})^{-1}$ .

El tercer movimiento es un poco más complicado que los anteriores.

**Definición 3.10.** Sea  $E$  un grafo y sea, para cada  $v \in E^0$  tal que  $r^{-1}(v) \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1^v, \dots, \mathcal{E}_{m(v)}^v\}$  una partición de  $r^{-1}(v)$ . Si  $v$  es una fuente declaramos que  $m(v) = 0$ . Denotemos  $\mathcal{P}$  la partición de  $E^1$  definida por la unión de todas las particiones anteriores. Definimos el grafo in-split  $E_r(\mathcal{P})$  como:

$$E_r(\mathcal{P})^0 = \{v_i \mid v \in E^0, 1 \leq i \leq m(v)\} \cup \{v \mid m(v) = 0\}$$

$$E_r(\mathcal{P})^1 = \{e_j \mid e \in E^1, 1 \leq j \leq m(s(e))\} \cup \{e \mid m(s(e)) = 0\}$$

además definimos

$$s_{E_r(\mathcal{P})}(e_j) = s(e)_j \text{ si } s(e) \text{ no es una fuente}$$

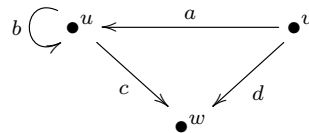
$$s_{E_r(\mathcal{P})}(e) = s(e) \text{ si } s(e) \text{ es una fuente}$$

$$r_{E_r(\mathcal{P})}(e_j) = r(e)_i \text{ si } s(e) \in \mathcal{E}_i^{r(e)} \text{ y no es una fuente}$$

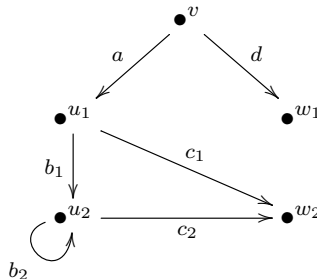
$$r_{E_r(\mathcal{P})}(e) = r(e)_i \text{ si } s(e) \in \mathcal{E}_i^{r(e)} \text{ y es una fuente.}$$

El grafo  $E$  será el grafo in-amalgamation de  $E_r(\mathcal{P})$ .

**Ejemplo 3.11.** Si  $E$  es el grafo



y  $\mathcal{P}$  es la partición en la cual cada miembro tiene un solo elemento, entonces  $E_r(\mathcal{P})$  es



**Proposición 3.12.** *Sea  $E$  un grafo finito sin fuentes ni pozos y tal que  $L(E)$  es simple. Si  $\mathcal{P}$  es una partición de  $E^1$  como en la definición anterior, entonces existe una equivalencia*

$$\Phi^{ins} : L(E)\text{-Mod} \rightarrow L(E_r(\mathcal{P}))\text{-Mod}$$

tal que  $\Phi_{\mathcal{Y}}^{ins}([L(E)w]) = [L(E_r(\mathcal{P}))w]$  para todo vértice  $w \in E^0$ .

*Demostración.* Tomemos una arista  $e \in E^1$ . Si  $s(e)$  es una fuente, podemos considerar la arista  $e \in E_r(\mathcal{P})$ . En cambio, si  $s(e)$  no es una fuente, podemos asignarle cualquiera de las aristas  $e_j$  en  $E_r(\mathcal{P})$  con  $1 \leq j \leq m(s(e))$ . En cada una de estas elecciones sólo tenemos que elegir el vértice de salida de nuestra nueva arista. Así es como cada camino  $\mu = \mu_1 \dots \mu_n$  en  $E$  se puede identificar con  $m(s(\mu))$  caminos de  $E_r(\mathcal{P})$ . Si el camino original es un ciclo, hay una única elección para que el camino levantado en  $E_r(\mathcal{P})$  siga siendo un ciclo. En la dirección contraria, dado un camino  $\mu$  en  $E_r(\mathcal{P})$  podemos construir un camino  $\check{\mu}$  en  $E$  reemplazando cada vértice  $v_k$  por el vértice  $v$  y cada arista  $e_\ell$  por la arista  $e$ . Es decir, eliminamos los subíndices. De esta forma, por el argumento de la Observación 3.5, podemos ver que:

- $L(E)$  es simple si y sólo si  $L(E_r(\mathcal{P}))$  lo es.
- $E$  tiene fuentes (pozos) si y sólo si  $E_r(\mathcal{P})$  tiene fuentes (pozos).

Para cada vértice  $v \in E^1$  definimos  $Q_v := v_1$  en  $E_r(\mathcal{P})$ . Notar que este vértice siempre existe porque asumimos que  $E$  no tiene fuentes. Para cada arista  $e \in \mathcal{E}_i^v$  definimos  $T_e := \sum_{f \in s^{-1}(v)} e_1 f_i f_1^*$  y  $T_{e^*} := \sum_{f \in s^{-1}(v)} f_1 f_i^* e_1^*$ . Es cuestión de rutina ver que  $\{Q_v, T_e, T_{e^*} \mid v \in E^0, e \in E^1\}$  es una  $E$ -familia. Luego existe un morfismo

$$\begin{aligned} \pi : L(E) &\rightarrow L(E_r(\mathcal{P})) \\ v &\mapsto Q_v \\ e &\mapsto T_e \\ e^* &\mapsto T_{e^*}. \end{aligned}$$

Notar que  $\pi(\nu^*) = \pi(\nu)^*$  para todo camino  $\nu$  en  $E$ , pues esto se cumple en los generadores.

Veamos que  $\pi(L(E)) = \pi(1_{L(E)}) L(E_r(\mathcal{P})) \pi(1_{L(E)})$ . Tenemos  $\pi(1_{L(E)}) = \sum_{v \in E^0} v_1$ .

Al igual que en los casos anteriores, la inclusión  $\pi(L(E)) \subseteq \pi(1_{L(E)}) L(E_r(\mathcal{P})) \pi(1_{L(E)})$  es trivial. Dado un elemento  $\mu_1 \mu_2^* \in \pi(1_{L(E)}) L(E_r(\mathcal{P})) \pi(1_{L(E)})$ , tenemos que  $s(\mu_1) = v_1$  y  $s(\mu_2) = w_1$  donde  $v, w \in E^0$  y  $r(\mu_1) = r(\mu_2)$ .

Vamos a ver que para todo camino  $\mu$  en  $E_r(\mathcal{P})$  tal que  $r(\mu) = w_k$ , se cumple

$$\pi(\check{\mu}) = \mu \left( \sum_{f \in s^{-1}(w)} f_k f_1^* \right) \in \text{Im}(\pi). \quad (3.1)$$

Aquí  $\check{\mu}$  es como en la definición de arriba. Procederemos por inducción en  $|\mu|$ . Si  $|\mu| = 0$ , entonces  $\mu = v_1 = w_k$ . De la relación CK2 deducimos

$$v_1 = \sum_{f \in s^{-1}(v_1)} f f^* = \sum_{f \in s^{-1}(v)} f_1 f_1^*.$$

### 3.1. CONDICIONES SUFICIENTES PARA GARANTIZAR EQUIVALENCIA MORITA35

Luego, como  $\check{v}_1 = v$ , tenemos

$$\pi(\check{v}_1) = v_1 = v_1 \left( \sum_{f \in s^{-1}(v)} f_1 f_1^* \right)$$

como queríamos. Si  $|\mu| \geq 1$ , podemos escribir  $\mu = \nu e_j$  donde  $e \in E$ ,  $r(\nu) = u_j$ ,  $s(e) = u$  y  $u \in E^0$ . Por lo tanto, tenemos  $\pi(\check{\mu}) = \pi(\check{\nu}e) = \pi(\check{\nu})\pi(e)$  y, por hipótesis inductiva,

$$\pi(\check{\mu}) = \nu \left( \sum_{f \in s^{-1}(u)} f_j f_1^* \right) \left( \sum_{g \in s^{-1}(w)} e_1 g_k g_1^* \right).$$

Usando que  $r(e_1) = w_k$  y la relación CK1 en el último miembro de la igualdad anterior obtenemos

$$\pi(\check{\mu}) = \nu e_j \left( \sum_{g \in s^{-1}(w)} g_k g_1^* \right) = \mu \left( \sum_{g \in s^{-1}(w)} g_k g_1^* \right)$$

como queríamos.

Ahora estamos en condiciones de probar la inclusión restante. De la igualdad (3.1) se sigue que

$$\pi(\check{\mu}_1 \check{\mu}_2^*) = \mu_1 \left( \sum_{f \in s^{-1}(w)} f_k f_1^* \right) \left[ \mu_2 \left( \sum_{g \in s^{-1}(w)} g_k g_1^* \right) \right]^* = \mu_1 \mu_2^*$$

Así  $\pi(1_{L(E)})L(E_r(\mathcal{P}))\pi(1_{L(E)}) \subseteq \pi(L(E))$ .

Por último del Lema 3.1 tenemos el resultado deseado.  $\square$

Notaremos  $\Phi^{inam} := (\Phi^{ins})^{-1}$ .

Si bien se pueden relajar las hipótesis de no tener fuentes ni pozos, la versión dada nos será suficiente para nuestro objetivo.

El último movimiento es la noción dual a la de grafo in-split.

**Definición 3.13.** Sean  $E$  un grafo y sea, para cada  $v \in E^0$  tal que  $s^{-1}(v) \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{E}_v = \{\mathcal{E}_v^1, \dots, \mathcal{E}_v^{m(v)}\}$  una partición de  $s^{-1}(v)$ . Si  $v$  es un pozo declaramos que  $m(v) = 0$ . Denotemos  $\mathcal{P}$  la partición de  $E^1$  definida por la unión de todas las particiones anteriores. Definimos el grafo out-split  $E_s(\mathcal{P})$  como:

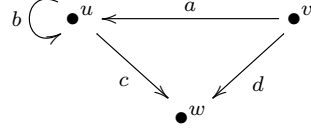
$$\begin{aligned} E_s(\mathcal{P})^0 &= \{v^i \mid v \in E^0, 1 \leq i \leq m(v)\} \cup \{v \mid m(v) = 0\} \\ E_s(\mathcal{P})^1 &= \{e^j \mid e \in E^1, 1 \leq j \leq m(r(e))\} \cup \{e \mid m(r(e)) = 0\} \end{aligned}$$

además definimos

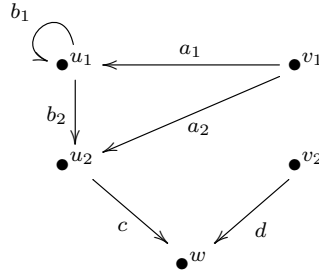
$$\begin{aligned} s_{E_s(\mathcal{P})}(e^j) &= s(e)^i \text{ si } r(e) \in \mathcal{E}_{s(e)}^i \text{ y no es un pozo} \\ s_{E_s(\mathcal{P})}(e) &= s(e)^i \text{ si } r(e) \in \mathcal{E}_{s(e)}^i \text{ y es un pozo} \\ r_{E_s(\mathcal{P})}(e^j) &= r(e)^j \text{ si } r(e) \text{ no es un pozo} \\ r_{E_s(\mathcal{P})}(e) &= r(e) \text{ si } r(e) \text{ es un pozo.} \end{aligned}$$

El grafo  $E$  será el grafo out-amalgamation de  $E_s(\mathcal{P})$ .

**Ejemplo 3.14.** Nuevamente consideremos  $E$  el grafo



y  $\mathcal{P}$  la partición en la cual cada miembro tiene un solo elemento, entonces  $E_s(\mathcal{P})$  es



**Proposición 3.15.** Sea  $E$  un grafo finito. Si  $\mathcal{P}$  es una partición de  $E^1$  como en la definición anterior, entonces existe un isomorfismo  $\pi : L(E) \rightarrow L(E_s(\mathcal{P}))$  tal que  $\pi(w) = \sum_{i=1}^{m(w)} w^i$  para todo vértice  $w \in E^0$ . Este isomorfismo induce una equivalencia

$$\Phi^{outs} : L(E)\text{-Mod} \rightarrow L(E_s(\mathcal{P}))\text{-Mod}.$$

*Demostración.* Definimos  $Q_v := \sum_{i=1}^{m(v)} v^i$  para cada  $v \in E^0$  que no sea un pozo y  $Q_v := v$  si lo es,  $T_e := \sum_{j=1}^{m(r(e))} e^j$  y  $T_{e^*} := \sum_{j=1}^{m(r(e))} (e^j)^*$  para cada  $e \in E^1$ . Es fácil ver esto es una  $E$ -familia, por lo tanto induce un morfismo

$$\begin{aligned} \pi : L(E) &\rightarrow L(E_s(\mathcal{P})) \\ v &\mapsto Q_v \\ e &\mapsto T_e \\ e^* &\mapsto T_{e^*} \end{aligned}$$

Notar que el morfismo es  $\mathbb{Z}$ -graduado, pues manda los vértices a elementos de grado 0 y las aristas a elementos de grado 1.

Como  $Q_v \neq 0$  para todo  $v \in E^0$ , el Lema 2.15 nos dice que  $\pi$  es inyectivo.

Veamos que  $\pi$  es sobreyectivo. Para esto basta que ver todos los vértices y todas las aristas de  $E_s(\mathcal{P})$  están en la imagen de  $\pi$ , ya que estos elementos generan  $L(E_s(\mathcal{P}))$ .

Tomemos  $w \in E_s(\mathcal{P})^0$ . Si  $w$  es un pozo, entonces  $Q_w = w$  y no hay nada que hacer. Si no,  $w = v^j$  para algún  $v \in E$ . Como

$$\{f \in E_s(\mathcal{P}) \mid s_{E_s(\mathcal{P})}(f) = v^j\} = \bigcup_{e \in \mathcal{E}_v^j} \{e^k \mid 1 \leq k \leq m(r(e))\},$$

tenemos que

$$v^j = \left( \sum_{\{f \in E_s(\mathcal{P}) \mid s_{E_s(\mathcal{P})}(f) = v^j\}} f f^* \right) = \sum_{\{e \in \mathcal{E}_v^j\}} \left( \sum_{\{1 \leq k \leq m(r(e))\}} e^k (e^k)^* \right) = \sum_{\{e \in \mathcal{E}_v^j\}} T_e T_{e^*}.$$

### 3.1. CONDICIONES SUFICIENTES PARA GARANTIZAR EQUIVALENCIA MORITA37

Si  $f \in E_s(\mathcal{P})^1$  es tal que  $m(r(f)) = 0$ , entonces  $\pi(f) = T_f = f$ . Si no,  $f = e^j$  para algún  $e \in E^1$ . Como vimos que  $r(e)^j \in \pi(L(E))$ , tenemos que  $e^j = \pi(e)r(e)^j \in \pi(L(E))$ . Por lo tanto  $\pi$  es un isomorfismo e induce la equivalencia deseada.  $\square$

Notaremos  $\Phi^{outam} := (\Phi^{outs})^{-1}$ .

Como habíamos mencionado, las teorías de subshifts finitos y de álgebras de Leavitt están relacionadas. Por eso, procederemos a enunciar ciertos hechos de la teoría de subshifts que nos serán de utilidad para establecer el resultado principal de esta sección. En el apéndice A podrán encontrar una breve reseña de estos temas. Para el lector interesado en un análisis más profundo de estos temas, dejamos como referencia [19].

Recordemos que hay una relación biunívoca entre los grafos finitos y las matrices cuadradas finitas con coeficientes en  $\mathbb{N}_0$ , asociando a cada grafo  $E$  su matriz de adyacencia  $A_E$ .

**Definición 3.16.** *A una transformación de grafos la llamaremos estándar si es uno de los seis movimientos vistos hasta el momento: in-splitting, out-splitting, expansión y sus inversos (in-amalgamation, out-amalgamation y contracción, respectivamente). Análogamente, diremos que una función que transforma matrices cuadradas con coeficientes en  $\mathbb{N}_0$  en matrices cuadradas con coeficientes en  $\mathbb{N}_0$ , es estándar si la transformación asociada a su grafo correspondiente es estándar.*

**Definición 3.17.** *Sean  $E$  y  $F$  grafos. Una equivalencia de flujo de  $E$  en  $F$  es una sucesión de grafos  $E = E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_n = F$  donde cada transformación es estándar. Es decir, la equivalencia de flujo es la relación de equivalencia generada por las transformaciones estándar.*

*En caso de existir tal equivalencia diremos que  $E$  y  $F$  son equivalentes de flujo. Dos matrices son equivalentes de flujo si sus respectivos grafos lo son.*

Las transformaciones in-splitting, out-splitting y sus inversos generan la relación de equivalencia shift fuerte definida en el apéndice A. En [21] Parry y Sullivan muestran que esta definición de equivalencia de flujo está generada por la equivalencia shift fuerte (definida en el Apéndice A) más las transformaciones de contracción y expansión. A su vez, prueban que esta equivalencia de flujo es equivalente a la de la Definición A.17 dada en el apéndice.

**Teorema 3.18** (Teorema de Franks). *Sean  $A \in M_n(\mathbb{N}_0)$  y  $B \in M_m(\mathbb{N}_0)$  simultáneamente irreducibles y no triviales. Entonces las matrices  $A$  y  $B$  son equivalentes de flujo si y sólo si:*

$$\det(I_n - A) = \det(I_m - B) \quad \text{y} \quad \mathbb{Z}^n / (I_n - A)\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^m / (I_m - B)\mathbb{Z}^m.$$

*Demostración.* Ver [11].  $\square$

**Corolario 3.19.** *Sean  $G$  y  $H$  grafos finitos sin fuentes tales que sus álgebras de Leavitt asociadas son simples y puramente infinitas. Sean  $n = |G^0|$  y  $m = |H^0|$ . Si*

$$\det(I_n - A_G^t) = \det(I_m - A_H^t) \quad \text{y} \quad K_0(L(G)) \cong K_0(L(H)),$$

*entonces existe una equivalencia de flujo de  $G$  en  $H$ .*

*Demostración.* Si  $D$  es la forma normal de Smith de  $(I - A_E^t)$  para un grafo finito  $E$ , entonces existen  $P$  y  $Q$  matrices inversibles con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  tales que  $D = P(I - A_E^t)Q$ . Entonces que  $D = Q^t(I - A_E)P^t$ . Es decir,  $(I - A_E^t)$  y  $(I - A_E)$  tienen la misma forma normal de Smith. De aquí se deduce

$$\text{Coker}(I - A_E) \cong \text{Coker}(I - A_E^t).$$

Por lo visto en la Sección 2.3

$$\text{Coker}(I - A_E^t) \cong K_0(L(E))$$

para todo grafo finito  $E$ . Por lo tanto, si aplicamos esto a los grafos  $G$  y  $H$  tenemos

$$\mathbb{Z}^n / (I_n - A_G)\mathbb{Z}^n \cong K_0(L(G)) \cong K_0(L(H)) \cong \mathbb{Z}^m / (I_m - A_H)\mathbb{Z}^m.$$

Por otro lado, usando que  $\det(A^t) = \det(A)$  para toda matriz  $A$ , tenemos

$$\det(I - A_G) = \det(I - A_G^t) = \det(I - A_H^t) = \det(I - A_H).$$

Luego, por el Teorema de Franks existe una equivalencia de flujo de  $G$  a  $H$ .  $\square$

Nos será de utilidad la siguiente notación:

**Definición 3.20.** Sea  $E$  un grafo finito. El par determinante de Franks será el par ordenado

$$\mathcal{F}_{\det}(E) := (K_0(L(E)), \det(I_n - A_E^t))$$

que consiste del grupo abeliano  $K_0(L(E))$  y el número entero  $\det(I_n - A_E^t)$ . Dado otro grafo finito  $F$ , diremos que son equivalentes y escribiremos

$$\mathcal{F}_{\det}(E) \equiv \mathcal{F}_{\det}(F)$$

si  $K_0(L(E)) \cong K_0(L(F))$  y  $\det(I_n - A_E^t) = \det(I_m - A_F^t)$ . Notemos que  $\equiv$  es una relación de equivalencia.

**Lema 3.21.** Sean  $E$  un grafo finito tal que  $L(E)$  es simple y  $v \in E^0$  fuente. Entonces  $\mathcal{F}_{\det}(E) \equiv \mathcal{F}_{\det}(E_{\setminus v})$ .

*Demostración.* Por Proposición 3.4 las álgebras  $L(E)$  y  $L(E_{\setminus v})$  son equivalentes Morita, por lo tanto sus grupos  $K_0$  son isomorfos. Como  $v$  es una fuente, la matriz  $A_E$  tiene una columna de ceros. Luego, podemos ver que  $\det(I_n - A_E^t) = \det(I_{n-1} - A_{E_{\setminus v}}^t)$  desarrollando por cofactores en la fila correspondiente a  $v$ .  $\square$

Ahora estamos en condiciones de establecer el teorema principal de esta sección.

**Teorema 3.22.** Sean  $E$  y  $F$  grafos finitos tales que sus álgebras de Leavitt asociadas son simples y puramente infinitas. Si  $\mathcal{F}_{\det}(E) \equiv \mathcal{F}_{\det}(F)$ , entonces hay una equivalencia Morita  $L(E) \sim_M L(F)$ .

*Demostración.* El Corolario 3.6 nos provee de grafos  $E'$  y  $F'$  simples, sin fuentes, tales que  $L(E) \smile_M L(E')$  y  $L(F) \smile_M L(F')$ . Además, como la clase de álgebras puramente infinitas es cerrada por equivalencia Morita (ver [5, Corollary 1.7.]),  $L(E')$  y  $L(F')$  son puramente infinitas.

Aplicando el Lema 3.21 en cada paso del proceso de eliminación de fuentes tenemos que

$$\det(I - A_{E'}^t) = \det(I - A_E^t) = \det(I - A_F^t) = \det(I - A_{F'}^t)$$

y que

$$K_0(L(E')) \cong K_0(L(E)) \cong K_0(L(F)) \cong K_0(L(F')).$$

Por lo tanto, el Corolario 3.19 nos provee una equivalencia de flujo de  $E'$  a  $F'$ . Aplicando los resultados mostrados en las Proposiciones 3.9, 3.12 y 3.15 en cada paso de la equivalencia de flujo, obtenemos  $L(E') \smile_M L(F')$  y por último

$$L(E) \smile_M L(E') \smile_M L(F') \smile_M L(F).$$

□

### 3.2. Condiciones suficientes para garantizar isomorfismo

Sea  $E$  un grafo finito. Definimos el *par unital de Franks* como el par ordenado

$$\mathcal{F}_{[1]}(E) := (K_0(L(E)), [1_{L(E)}]).$$

Aquí  $[1_{L(E)}]$  es la clase de equivalencia de  $L(E)$  en  $K_0(L(E))$ , a quien llamaremos la *unidad de orden*. Escribimos que

$$\mathcal{F}_{[1]}(E) \equiv \mathcal{F}_{[1]}(G)$$

si existe un isomorfismo de grupos  $\varphi : K_0(L(E)) \rightarrow K_0(L(G))$  tal que  $\varphi([1_{L(E)}]) = [1_{L(G)}]$ . Claramente  $\equiv$  es una relación de equivalencia.

En esta sección probaremos que si dos álgebras de Leavitt  $L(E)$  y  $L(F)$  unitales simples puramente infinitas son equivalentes Morita y  $\mathcal{F}_{[1]}(E) \equiv \mathcal{F}_{[1]}(G)$ , entonces  $L(E)$  y  $L(F)$  son isomorfos.

Llamemos  $\tau_G : G \rightarrow G^t$  a la transformación que asigna al grafo  $G$  su grafo transpuesto  $G^t$ .

**Lema 3.23.** *Si  $m : G^t \rightarrow H^t$  es una transformación estándar, entonces  $m' := \tau_H^{-1} \circ m \circ \tau_G : G \rightarrow H$  es una transformación estándar.*

*Más aún*

- (1) *Si  $m$  es una expansión (respectivamente una contracción) entonces  $m'$  es una expansión (respectivamente una contracción).*
- (2) *Si  $m$  es un in-splitting (respectivamente un out-splitting) entonces  $m'$  es un out-splitting (respectivamente un in-splitting).*
- (3) *Si  $m$  es una in-amalgamation (respectivamente una out-amalgamation) entonces  $m'$  es una out-amalgamation (respectivamente una in-amalgamation).*

*Demostración.* (1) Supongamos que  $m$  es la expansión en el vértice  $v$ . Veamos qué sucede cuando aplicamos la transformación  $m'$ . Primero tenemos que transponer los elementos de  $G^0$  y  $G^1$ . A cada vértice en  $G^t$  lo llamaremos  $w^t$  donde  $w \in G^0$ , análogamente las aristas en  $G^t$  serán  $e^t$ . Luego aplicamos la expansión en el vértice  $v^t$ , para lo cual tendremos que agregar un vértice  $(v^t)^*$  y una arista  $f^t$  que va de  $v^t$  en  $(v^t)^*$ . Por último volvemos a transponer el grafo, usando la misma regla de agregar el supraíndice  $t$  a los vértices y a las aristas. Por otro lado podemos aplicar la expansión al vértice  $v$  en  $G$ , teniendo que agregar un vértice  $v^*$  y una arista  $f$  de  $v$  en  $v^*$ .

Es fácil ver que la función  $G_v \rightarrow ((G^t)_{v^t})^t = m'(G)$  tal que  $w \mapsto (w^t)^t$  si  $w \in G^0 \setminus \{v\}$ ,  $v \mapsto ((v^t)^*)^t$ ,  $v^* \mapsto (v^t)^t$  y  $e \mapsto (e^t)^t$  para todo  $e \in G^1$  es un isomorfismo de grafos. Como todas estas transformaciones son inversibles, el caso de la contracción también queda demostrado.

(2) Notar que tener una partición  $\mathcal{P}$  de  $G^0$  como en la Definición 3.13 es lo mismo que tener una partición de  $G^t$  como en la Definición 3.10. Nuevamente veamos qué sucede al aplicarle  $m'$  a  $G$ . Primero tenemos que transponer los elementos de  $G^0$  y  $G^1$ . Como en el caso anterior, a cada vértice en  $G^t$  lo llamaremos  $w^t$  donde  $w \in G^0$ , análogamente las aristas en  $G^t$  serán  $e^t$ . Luego aplicamos  $m$ , donde cada vértice  $w^t \in (G^t)^0$  se partirá en una familia de vértices de la forma  $(w^t)_i$  o seguirán siendo de la forma  $w^t$  dependiendo de si son fuentes o no. Usaremos el mismo criterio para las aristas. Por último volvemos a transponer el grafo, usando la misma regla de agregar el supraíndice  $t$  a los vértices y las aristas. Por otro lado podemos aplicar la transformación out-splitting al grafo  $G$ .

Consideremos la función  $G_s(\mathcal{P}) \rightarrow ((G^t)_r(\mathcal{P}))^t = m'(G)$  tal que  $w^i \mapsto ((w^t)_i)^t$  si  $w \in G^0$  no es un pozo y  $w \mapsto (w^t)^t$  si lo es,  $e \mapsto (e^t)^t$  si  $e \in G^1$  es tal que  $r(e)$  es un pozo, si no  $e^i \mapsto ((e^t)_i)^t$ . Es fácil ver que esta función es un isomorfismo de grafos. Nuevamente el caso en que  $m$  es una in-amalgamation queda demostrado.

(3) Este caso es análogo al caso (2). □

Sean  $G$  un grafo,  $\mathcal{P}$  una partición de  $G^1$  como en la Definición 3.13 y sea  $H$  el grafo out-split.

Definimos las matrices  $E^G \in \mathbb{Z}^{H^0 \times G^0}$  y  $D^G \in \mathbb{Z}^{G^0 \times H^0}$  como

$$(E^G)_{v,w} := \begin{cases} |\{f \in \mathcal{E}_u^k : r(f) = w\}| & \text{si } v = u^k \text{ con } k \in \mathbb{N}, u \in G^0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$(D^G)_{v,w} := \begin{cases} 1 & \text{si } w = v^k \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } w = v \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Luego se puede verificar que

$$A_G = D^G E^G \quad \text{y} \quad A_H = E^G D^G.$$

Si en cambio  $H$  es el grafo in-split de  $G$ , por el Lema 3.23, tenemos que  $H^t$  es el grafo out-split de  $G^t$ . Por tanto tenemos  $A_{G^t} = D^{G^t} E^{G^t}$  y  $A_{H^t} = E^{G^t} D^{G^t}$ . De esto se deduce que

$$A_G = (E^{G^t})^t (D^{G^t})^t \quad \text{y} \quad A_H = (D^{G^t})^t (E^{G^t})^t$$



En otras palabras, un grafo  $G$  y cualquiera de las transformaciones in-split, out-split, in-amalgamation o out-amalgamation del grafo  $G$  están en la misma clase de equivalencia shift fuerte (definida en el Apéndice A), como habíamos afirmado anteriormente.

Ahora supongamos que tenemos matrices  $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ ,  $R \in \mathbb{Z}^{n \times m}$  y  $S \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  tales que

$$A = RS \quad \text{y} \quad B = SR.$$

Se deducen las siguientes igualdades:

$$R(I - B) = R - RSR = (I - A)R \quad (3.2)$$

$$S(I - A) = S - SRS = (I - B)S. \quad (3.3)$$

Por tanto tenemos morfismos de grupos bien definidos

$$\mathbb{Z}^n / (I - A)\mathbb{Z}^n \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_S} \\ \xleftarrow{\delta_R} \end{array} \mathbb{Z}^m / (I - B)\mathbb{Z}^m$$

inducidos por la multiplicación por  $S$  y  $R$  respectivamente.

Además estos morfismos son inversos, ya que

$$\delta_R \circ \delta_S([x]) = [RSx] = [Ax] = [x]$$

donde la última igualdad se sigue de  $[(A - I)x] = 0$ . Análogamente

$$\delta_S \circ \delta_R([x]) = [SRx] = [Bx] = [x].$$

Por lo tanto una transformación  $m : G \rightarrow H$  del tipo out-split, in-split, out-amalgamation o in-amalgamation induce un isomorfismo

$$\varphi_m : \mathbb{Z}^n / (I - A_G)\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m / (I - A_H)\mathbb{Z}^m$$

del cual tenemos una expresión explícita.

Supongamos ahora que  $m : G \rightarrow H$  es una expansión. Si la matriz de adyacencia de  $G$  es

$$A_G = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{1,n} \\ g_{2,1} & g_{2,2} & \cdots & g_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n,1} & g_{n,2} & \cdots & g_{n,n} \end{pmatrix}$$

podemos suponer sin pérdida de generalidad (de otra forma, reordenamos los vértices) que la matriz de adyacencia de  $H$  es

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{1,n} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{2,1} & g_{2,2} & \cdots & g_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & g_{n,1} & g_{n,2} & \cdots & g_{n,n} \end{pmatrix}$$

Definimos las matrices  $P, Q \in \mathbb{Z}^{n+1 \times n}$  y  $P', Q' \in \mathbb{Z}^{n \times n+1}$  como

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad Q' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

y las igualdades:

$$P(I - A_G) = (I - A_H)Q \quad (3.4)$$

$$P'(I - A_H) = (I - A_G)Q' \quad (3.5)$$

nos dicen que existen morfismos de grupos bien definidos

$$\mathbb{Z}^n / (I - A_G)\mathbb{Z}^n \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi_m} \\ \xleftarrow{\varphi_{m^{-1}}} \end{array} \mathbb{Z}^m / (I - A_H)\mathbb{Z}^m$$

inducidos por la multiplicación por  $P$  y  $P'$  respectivamente.

Además las igualdades

$$P'P = I_n \quad (3.6)$$

$$PP' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

nos dicen que

$$\varphi_{m^{-1}} \circ \varphi_m = Id$$

por (3.6) y

$$\varphi_m \circ \varphi_{m^{-1}} = Id$$

pues por (3.7) tenemos que  $PP'(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (x_2, -x_2, 0, \dots, 0) = (I - A_H)(x_2, 0, \dots, 0)$ .

### En conclusión:

Una transformación estándar  $m : G \rightarrow H$  induce un isomorfismo

$$\varphi_m : \mathbb{Z}^n / (I - A_G)\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m / (I - A_H)\mathbb{Z}^m$$

del cual tenemos una descripción explícita.

Más en general, una equivalencia de flujo  $G = G_0 \rightarrow G_1 \rightarrow \cdots \rightarrow G_k = H$  induce un isomorfismo

$$\Psi : \mathbb{Z}^n / (I - A_G)\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m / (I - A_H)\mathbb{Z}^m$$

componiendo el levantado de cada una de las transformaciones estándar.

Otro resultado de la teoría de subshifts finitos que vamos a necesitar es el siguiente:

**Teorema 3.24.** [Huang] Sean  $A \in M_n(\mathbb{N}_0)$  irreducible y no trivial y  $\alpha : \mathbb{Z}^n/(I - A)\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n/(I - A)\mathbb{Z}^n$  un automorfismo de grupos. Entonces existe una equivalencia de flujo  $m : A \rightarrow A$  que induce el morfismo  $\alpha$ .

*Demostración.* Ver [15, Theorem 1.1.] □

La siguiente proposición conectará los isomorfismos introducidos en esta sección con los morfismos introducidos en la sección anterior. Esto nos será de utilidad para poder aplicar el Teorema de Huang.

**Proposición 3.25.** Sean  $G$  y  $H$  grafos finitos tales que  $L(G)$  es simple puramente infinita,  $G$  no tiene fuentes y  $m : G^t \rightarrow H^t$  una transformación estándar. Consideremos el isomorfismo  $\varphi_m : \text{Coker}(I - A_{G^t}) \rightarrow \text{Coker}(I - A_{H^t})$  inducido por  $m$ ,  $m' : G \rightarrow H$  la transformación estándar definida en el Lema 3.23 y  $\Phi^m : L(G)\text{-Mod} \rightarrow L(H)\text{-Mod}$  la equivalencia Morita descrita en la Sección 3.1. Entonces, bajo la identificación  $K_0(L(G)) \cong \text{Coker}(I - A_{G^t})$  y  $K_0(L(H)) \cong \text{Coker}(I - A_{H^t})$ , tenemos

$$\Phi_{\mathcal{V}}^m = \varphi_m.$$

*Demostración.* Recordemos que el isomorfismo

$$\mathbb{Z}^n/(I - A_{E^t})\mathbb{Z}^n = \text{Coker}(I - A_{E^t}) \cong K_0(L(G))$$

asocia a la clase del  $i$ -ésimo vector canónico en  $\mathbb{Z}^n$  la clase  $[L(E)v_i] \in K_0(L(E))$  para una ordenación de los vértices fijada.

Observemos que la descripción de  $M_E$  dada en la Sección 2.3 nos dice que  $K_0(L(E))$  está generado por los elementos de la forma  $[L(E)v]$  con  $v \in E^0$ . Por lo tanto basta ver la conmutatividad en estos elementos.

Veamos cada caso por separado:

- Si  $m$  es una expansión: Recordemos que podemos suponer

$$A_G = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{1,n} \\ g_{2,1} & g_{2,2} & \cdots & g_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n,1} & g_{n,2} & \cdots & g_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_H = \begin{pmatrix} 0 & g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{1,n} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{2,1} & g_{2,2} & \cdots & g_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & g_{n,1} & g_{n,2} & \cdots & g_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Además sabemos que el morfismo  $\varphi_m$  es el inducido por la multiplicación por la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

y, teniendo en cuenta que en  $E_{v_1}$  la ordenación de los vértices es  $\{v_1, (v_1)^*, v_2, \dots, v_n\}$ , tenemos

$$\Phi_{\mathcal{V}}^m([L(E)v_i]) = \begin{cases} [L(E_{v_1})v_1] & \text{si } i = 1 \\ [L(E_{v_1})v_{i+1}] & \text{si } i \geq 2 \end{cases}.$$

Como

$$Pe_i = \begin{cases} e_1 & \text{si } i = 1 \\ e_{i+1} & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$$

tenemos lo que queremos.

- Si  $m$  es in-split: En este caso el morfismo  $\varphi_m$  es inducido por la multiplicación por la matriz

$$(D^G)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde la cantidad de 1's en la  $\mu$ -ésima columna es  $m(\mu)$ . Aquí  $\{u, v, \dots, w\}$  es la base de salida y  $\{u^1, \dots, u^{m(u)}, v^1, \dots, v^{m(v)}, \dots, w^{m(w)}\}$  es la base de llegada. Por lo tanto, tenemos

$$\varphi_m([e_v]) = [(D^G)^t e_v] = \left[ \sum_{i=1}^{m(v)} e_{v^i} \right].$$

Bajo la identificación necesaria  $\varphi$  coincide con  $\Phi_{\mathcal{V}}^{m'}$ , que manda  $[L(G)v] \mapsto [L(H) \left( \sum^{m(v)} v^i \right)]$ .

- Si  $m$  es out-split: En este caso  $\varphi_m$  es inducido por la multiplicación por la matriz  $E^{G^t}$ . Los coeficientes de  $E^{G^t}$  son de la forma  $|\{f \in \mathcal{E}_v^k : s(f) = v \text{ y } r(f) = w\}|$ , pero tener una partición de  $(G^t)^0$  como en la Definición 3.13 es lo mismo que tener una partición de  $G^0$  como en la Definición 3.10, por lo tanto  $|\{f \in \mathcal{E}_v^k : s(f) = v \text{ y } r(f) = w\}| = |\{f \in \mathcal{E}_k^v : s(f) = w \text{ y } r(f) = v\}|$ . Además es fácil ver que  $|\{f \in \mathcal{E}_k^v : s(f) = w \text{ y } r(f) = v\}| = |f \in H^0 : s(f) = v_1 \text{ y } r(f) = w_k|$ . En conclusión

$$(E^{G^t})_{w^k, v} = |f \in H^0 : s(f) = v_1 \text{ y } r(f) = w_k|.$$

De esto deducimos que

$$\varphi_m([e_v]) = [E^{G^t} e_v] = \left[ \sum_{w \in G^0} \sum_{k=1}^{m(w)} |\{f \in H^0 : s(f) = v_1 \text{ y } r(f) = w_k\}| e_{w^k} \right],$$

luego

$$\varphi_m([e_v]) = \sum_{f \in s^{-1}(v_1)} e_{r(f)}.$$

Por otro lado  $\Phi_{\mathcal{V}}^{m'}([L(G)v]) = [L(H)v_1]$ , por lo cual tendríamos que ver que vale la siguiente igualdad

$$[L(H)v_1] = \sum_{f \in s^{-1}(v_1)} [L(H)r(f)].$$

Pero ésta es una de las relaciones que define al monoide  $\mathcal{V}(L(H))$  y por lo tanto sigue valiendo en  $K_0(L(H))$ .

- Si  $m$  no es ninguno de los casos anteriores, es una de sus inversas. Como todos los morfismos involucrados son isomorfismos, este último caso se sigue de los anteriores.

□

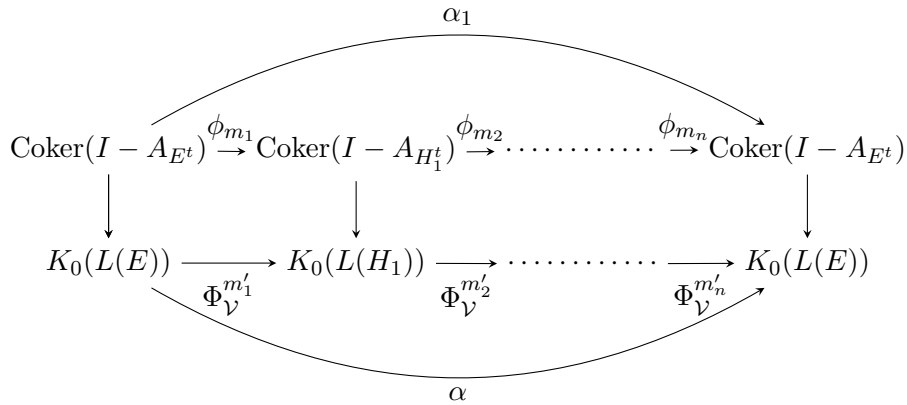
**Proposición 3.26.** *Sean  $E$  un grafo finito tal que  $L(E)$  es simple y puramente infinita y  $\alpha$  automorfismo de  $K_0(L(E))$ . Entonces existe*

$$\Phi : L(E)\text{-Mod} \rightarrow L(E)\text{-Mod}$$

equivalencia Morita tal que  $\Phi_{\mathcal{V}} = \alpha$ .

*Demostración.* Si  $E$  tiene fuentes, podemos considerar  $E'$  grafo sin fuentes y  $\Phi^{ELIM} : L(E')\text{-Mod} \rightarrow L(E)\text{-Mod}$  la equivalencia Morita dados por Corolario 3.6. Si  $\Upsilon : L(E')\text{-Mod} \rightarrow L(E)\text{-Mod}$  es una equivalencia Morita tal que  $\Upsilon_{\mathcal{V}} = (\Phi_{\mathcal{V}}^{ELIM})^{-1} \circ \alpha \circ \Phi_{\mathcal{V}}^{ELIM}$ , entonces  $\Phi^{ELIM} \circ \Upsilon \circ (\Phi^{ELIM})^{-1}$  es la equivalencia buscada. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $E$  no tiene fuentes.

Por Lema 2.11  $E$  es irreducible, esencial y no trivial. Entonces, como mencionamos con anterioridad, estas tres propiedades también la satisface  $E^t$ . Sea  $\alpha_1$  el automorfismo  $\alpha$  bajo la identificación  $\text{Coker}(I - A_{E^t}) \cong K_0(L(E))$ ; por el Teorema 3.24 tenemos una equivalencia de flujo  $E^t = H_0^t \xrightarrow{m_1} H_1^t \xrightarrow{m_2} \dots \xrightarrow{m_n} H_n^t = E^t$  tal que induce el morfismo  $\alpha_1$ . Luego tenemos



Es decir, podemos tomar  $\Phi := \Phi_{\mathcal{V}}^{m'_n} \circ \Phi_{\mathcal{V}}^{m'_{n-1}} \circ \dots \circ \Phi_{\mathcal{V}}^{m'_1} : L(E)\text{-Mod} \rightarrow L(E)\text{-Mod}$ . □

Ahora estamos en condiciones de dar el resultado principal de esta sección.

**Teorema 3.27.** [Abrams, Louly, Pardo y Smith] *Sean  $E$  y  $G$  grafos finitos tal que sus álgebras de Leavitt son simples puramente infinitas, equivalente Morita entre sí y*

$$\mathcal{F}_{[1]}(E) \cong \mathcal{F}_{[1]}(F).$$

Entonces existe un isomorfismo

$$L(E) \cong L(F).$$

*Demostración.* Supongamos que  $\varphi$  es el isomorfismo entre  $K_0(E)$  y  $K_0(F)$  que manda  $[1_{L(E)}]$  en  $[1_{L(F)}]$  y  $\Gamma : L(E)\text{-Mod} \rightarrow L(F)\text{-Mod}$  una equivalencia Morita.

Consideremos el automorfismo  $\varphi \circ \Gamma_{\mathcal{V}}^{-1}$  de  $K_0(L(F))$ . Por Proposición 3.26 existe  $\Phi : L(F)\text{-Mod} \rightarrow L(F)\text{-Mod}$  equivalencia Morita tal que

$$\Phi_{\mathcal{V}} = \varphi \circ \Gamma_{\mathcal{V}}^{-1}.$$

Luego

$$H := \Phi \circ \Gamma : L(E)\text{-Mod} \rightarrow L(F)\text{-Mod}$$

es equivalencia Morita con  $H_{\mathcal{V}} = \Phi_{\mathcal{V}} \circ \Gamma_{\mathcal{V}} = \varphi$ .

Como  $[H(L(E))] = H_{\mathcal{V}}([L(E)]) = \varphi([L(E)]) = [L(F)]$ , la Observación 2.17 nos dice que  $L(F) \cong H(L(E))$  como  $L(F)$ -módulos. Luego

$$L(E)^{op} \cong \text{End}_{L(E)}(L(E)) \cong \text{End}_{L(F)}(H(L(E))) \cong \text{End}_{L(F)}(L(F)) \cong L(F)^{op} \quad (3.8)$$

donde la segunda identidad se sigue de que la equivalencia Morita preserva endomorfismos. Por último, el isomorfismo (3.8) nos dice que  $L(E) \cong L(F)$ .  $\square$

Para unificar este resultado con el Teorema 3.22 de la sección anterior, vamos a integrar los conceptos de  $\mathcal{F}_{det}$  y  $\mathcal{F}_{[1]}$  en la siguiente definición:

**Definición 3.28.** Dado  $E$  grafo finito, definimos la 3-upla de Franks como

$$\mathcal{F}_3(E) := (K_0(L(E)), [1_{L(E)}], \det(I - A_E^t)).$$

Sea  $F$  es otro grafo finito diremos que

$$\mathcal{F}_3(E) \equiv \mathcal{F}_3(F)$$

si  $\det(I - A_E^t) = \det(I - A_F^t)$  y existe un isomorfismo de  $K_0(L(E))$  en  $K_0(L(F))$  que manda  $[1_{L(E)}]$  en  $[1_{L(F)}]$ .

**Corolario 3.29.** Sean  $E$  y  $F$  grafos finitos tales que sus álgebras de Leavitt son simples puramente infinitas. Si

$$\mathcal{F}_3(E) \equiv \mathcal{F}_3(F)$$

entonces existe un isomorfismo de anillos

$$L(E) \cong L(F).$$

*Demostración.* Como  $\mathcal{F}_3(E) \equiv \mathcal{F}_3(F)$ , en particular tenemos  $\mathcal{F}_{det}(E) \equiv \mathcal{F}_{det}(F)$ . Luego por el Teorema 3.22 sabemos que  $L(E)$  es equivalente Morita a  $L(F)$ . Además también tenemos que  $\mathcal{F}_{[1]}(E) \equiv \mathcal{F}_{[1]}(F)$ , luego por el Teorema 3.27 llegamos al isomorfismo deseado.  $\square$

### 3.3. Condiciones necesarias y el empalme de Cuntz

En la sección anterior vimos que, dentro de la clase de álgebras de Leavitt unitales simples puramente infinitas, la condición de equivalencia de  $\mathcal{F}_3$  es suficiente para garantizar isomorfismo. En esta sección vamos a analizar si es suficiente pedir la equivalencia de  $\mathcal{F}_{[1]}$  para garantizar isomorfismo y, a su vez, ver si esa condición es necesaria. Si bien todavía no está resuelto este problema, vamos a estudiar ciertas técnicas que podrían servir para resolverlo. Una de estas técnicas será un nuevo movimiento en los grafos, llamado el empalme de Cuntz.

**Observación 3.30.** Sean  $E$  y  $F$  grafos finitos tales que sus álgebras de Leavitt asociadas son simples y puramente infinitas y  $K_0(L(E)) \cong K_0(L(F))$ . Entonces  $\text{Coker}(I - A_E^t) \cong \text{Coker}(I - A_F^t)$ . Además, si  $D$  y  $D'$  son las formas normales de Smith asociadas a  $I - A_E^t$  y  $I - A_F^t$  respectivamente, tenemos

$$\text{Coker}(D) \cong \text{Coker}(I - A_E^t) \cong \text{Coker}(I - A_F^t) \cong \text{Coker}(D').$$

Luego, por el teorema de estructura, si  $\text{Coker}(D)$  y  $\text{Coker}(D')$  son de torsión tenemos

$$|\det(I - A_E^t)| = |\det(D)| = |\text{Coker}(D)| = |\text{Coker}(D')| = |\det(D')| = |\det(I - A_F^t)|.$$

Si no

$$|\det(I - A_E^t)| = |\det(D)| = 0 = |\det(D')| = |\det(I - A_F^t)|.$$

Es decir, en ambos casos  $|\det(I - A_E^t)| = |\det(I - A_F^t)|$

La Observación 3.30 nos permite simplificar el problema planteado en esta sección sobre la suficiencia de  $\mathcal{F}_{[1]}$  para garantizar isomorfismo, en determinar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- (A) Dos álgebras de Leavitt unitales simples puramente infinitas, cuyos  $\mathcal{F}_{[1]}$  son equivalentes, son isomorfas.
- (B) Existen dos álgebras de Leavitt  $L(E)$  y  $L(F)$  isomorfas tales que  $\det(I - A_E^t) \neq \det(I - A_F^t)$ .

Como dijimos, este problema no está resuelto aún. Pero, por ejemplo, se puede resolver en el siguiente caso particular.

**Proposición 3.31.** Sean  $E$  y  $F$  grafos finitos tales que sus álgebras de Leavitt asociadas son simples puramente infinitas y sus grupos de Grothendieck  $K_0$  son infinitos. Si  $\mathcal{F}_{[1]}(E) \equiv \mathcal{F}_{[1]}(F)$ , entonces  $L(E) \cong L(F)$ .

*Demostración.* Por el mismo argumento de la Observación 3.30, que el grupo de Grothendieck  $K_0(L(E))$  sea infinito, quiere decir que la forma normal de Smith  $D$  de la matriz  $I - A_E^t$  tiene un cero en la diagonal y, por ende,  $0 = \det(D) = \det(I - A_E^t)$ . Con el mismo argumento  $\det(I - A_F^t) = 0$ . Por lo tanto tenemos  $\mathcal{F}_3(E) \equiv \mathcal{F}_3(F)$  y por Corolario 3.29  $L(E) \cong L(F)$ .  $\square$

Notemos que los movimientos introducidos hasta el momento no nos van a servir para poder resolver este problema, ya que todos ellos preservan el determinante (por estar en la misma clase de equivalencia de flujo). Por eso es que vamos a introducir este nuevo movimiento que preserva el módulo del determinante, pero cambia el signo.

**Definición 3.32.** Sea  $E$  un grafo finito tal que  $L(E)$  es simple y puramente infinita. Supongamos que  $E^0 = \{v_1, \dots, v_n\}$  y que  $v_n$  pertenece a un ciclo. Definimos el empalme de Cuntz  $E_-$  como

$$\begin{aligned} E_-^0 &= \{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, v_{n+2}\} \\ E_-^1 &= E^1 \cup \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\} \end{aligned}$$

donde  $s_{E_-}$  y  $r_{E_-}$  extienden a  $s_E$  y  $r_E$  respectivamente y, además,

$$\begin{aligned} s_{E_-}(f_1) &= v_n, s_{E_-}(f_2) = v_{n+1}, s_{E_-}(f_3) = v_{n+1}, \\ s_{E_-}(f_4) &= v_{n+2}, s_{E_-}(f_5) = v_{n+1}, s_{E_-}(f_6) = v_{n+2} \end{aligned}$$

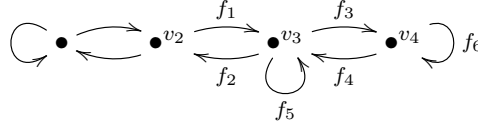
y

$$\begin{aligned} r_{E_-}(f_1) &= v_{n+1}, r_{E_-}(f_2) = v_n, r_{E_-}(f_3) = v_{n+2}, \\ r_{E_-}(f_4) &= v_{n+1}, r_{E_-}(f_5) = v_{n+1}, r_{E_-}(f_6) = v_{n+2} \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.33.** Si  $E$  es



$E_-$  en  $v_2$  es



Es fácil ver, mediante el argumento utilizado en la Proposición 3.4, que si  $L(E)$  es unital simple puramente infinita entonces  $L(E_-)$  es unital simple puramente infinita.

**Proposición 3.34.** Sean  $E$  un grafo finito tal que  $L(E)$  es simple puramente infinito y  $E_-$  el grafo definido anteriormente. Entonces

$$K_0(L(E)) \cong K_0(L(E_-)) \quad \text{y} \quad \det(I - A_E^t) = -\det(I - A_{E_-}^t).$$

*Demostración.* Teniendo en cuenta que

$$A_{E_-} = \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & A_E & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es fácil ver que  $\det(I - A_E^t) = -\det(I - A_{E_-}^t)$  desarrollando por cofactores por la última columna y luego por la última fila.

Por lo visto en la Sección 2.3 tenemos que el monoide  $\mathcal{V}(L(E_-))$  está generado por los elementos  $v_1, v_2, \dots, v_{n+2}$  bajo las relaciones

$$v_i = \sum_{j=1}^n (A_E)_{i,j} v_j \quad \text{si } 1 \leq i \leq n-1$$

junto con las tres relaciones

$$v_n = v_{n+1} + \sum_{j=1}^n (A_E)_{i,j} v_j, \quad v_{n+1} = v_n + v_{n+1} + v_{n+2}, \quad \text{y} \quad v_{n+2} = v_{n+1} + v_{n+2}.$$

Además, sabemos por lo visto en la misma Sección que  $K_0(L(E_-)) \cong \mathcal{V}(L(E_-))^*$ . Por lo tanto, tenemos un morfismo  $K_0(L(E)) \rightarrow K_0(L(E_-))$  que manda  $[v_i] \mapsto [v_i]$  y un morfismo  $K_0(L(E_-)) \rightarrow K_0(L(E))$  que manda  $[v_i] \mapsto [v_i]$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  (notar que basta definir el morfismo en estos elementos pues  $[v_{n+1}] = 0$  y  $[v_{n+2}] = -[v_n]$ ). Además estos morfismos son isomorfismos inversos.  $\square$



Como habíamos mencionado, el empalme de Cuntz tiene la ventaja de cambiar el signo del determinante. Notar que el isomorfismo en el  $K_0$  de la proposición anterior no tiene porqué mandar  $[1_{L(E)}] \mapsto [1_{L(E_-)}]$ , por eso nos será útil esta otra definición:

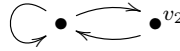
**Definición 3.35.** *Sea  $E$  un grafo finito tal que  $L(E)$  es simplepuramente infinito. Supongamos que  $E^0 = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $v_n$  pertenece a un ciclo. Definimos  $E_{1-}$  como*

$$E_-^0 = \{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+3}\}$$

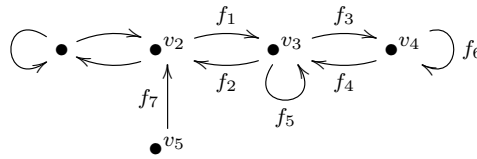
$$E_-^1 = E^1 \cup \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$$

donde  $s_{E_{1-}}$  y  $r_{E_{1-}}$  se comportan igual que en la Definición 3.32 en las aristas pertenecientes a  $E^1 \cup \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$  y, además,  $s_{E_{1-}}(f_7) = v_{n+3}$  y  $r_{E_{1-}}(f_7) = v_n$ .

**Ejemplo 3.36.** *Si  $E$  es*



$E_{1-}$  en  $v_2$  es



Observemos que  $E_- = (E_{1-}) \setminus v_{n+3}$ . Nuevamente es fácil ver, mediante el argumento utilizado en la Sección 3.1, que si  $L(E)$  es unital simple puramente infinita entonces  $L(E_-)$  es unital simple puramente infinita.

**Proposición 3.37.** *Sean  $E$  un grafo finito tal que  $L(E)$  es simple puramente infinito y  $E_{1-}$  el grafo definido anteriormente. Entonces*

$$\mathcal{F}_{[1]}(E) \equiv \mathcal{F}_{[1]}(E_{1-}) \quad y \quad \det(I - A_E^t) = -\det(I - A_{E_-}^t).$$

*Demostración.* Como  $E_- = (E_{1-}) \setminus v_{n+3}$  el Lema 3.21 nos dice que  $\det(I - A_{E_-}^t) = \det(I - A_{E_-}^t) = -\det(I - A_E^t)$ . Por el mismo argumento que en la Proposición 3.34 tenemos que  $K_0(L(E_{1-}))$  está generado por los elementos  $[v_1], [v_2], \dots, [v_{n+3}]$  bajo las relaciones  $[v_i] = \sum_{j=1}^n (A_E)_{i,j} [v_j]$  si  $1 \leq i \leq n$ ,  $[v_{n+1}] = 0$ ,  $[v_{n+2}] = -[v_n]$  y  $[v_{n+3}] = [v_n]$ . Por lo tanto, usando el argumento que la Proposición 3.34, tenemos nuevamente isomorfismos inversos  $K_0(L(E)) \rightarrow K_0(L(E_{1-}))$  y  $K_0(L(E_{1-})) \rightarrow K_0(L(E))$ . Notar que en este caso, el isomorfismo manda  $\sum_{j=1}^n [v_j] \mapsto \sum_{j=1}^{n+3} [v_j]$   $\square$

Para terminar el capítulo vamos a ver que, si para todo grafo finito  $E$  tal que  $L(E)$  es simple puramente infinito vale que  $L(E)$  es equivalente Morita a  $L(E_-)$ , entonces la afirmación (A) es verdadera.

Para simplificar la escritura, a la afirmación “para todo grafo finito  $E$  tal que  $L(E)$  es simple puramente infinito vale que  $L(E)$  es equivalente Morita a  $L(E_-)$ ” le diremos la afirmación (CS).

**Proposición 3.38.** *Si la afirmación (CS) es verdadera, entonces  $K_0$  clasifica las álgebras de Leavitt uniales simples puramente infinitas bajo equivalencia Morita.*

*Demostración.* Sean  $E$  y  $F$  grafos finitos tales que  $K_0(L(E)) \cong K_0(L(F))$ . Por Observación 3.30  $|\det(I - A_E^t)| = |\det(I - A_F^t)|$ .

Si tienen el mismo signo, entonces  $\mathcal{F}_{\det}(E) \equiv \mathcal{F}_{\det}(F)$  y por el Teorema 3.22  $L(E) \smile_M L(F)$ . Si tienen distinto signo, entonces  $\mathcal{F}_{\det}(E_-) \equiv \mathcal{F}_{\det}(F)$  y por el Teorema 3.22 tenemos  $L(F) \smile_M L(E_-) \smile_M L(E)$ .

Recíprocamente, una equivalencia Morita  $\Psi$  induce un isomorfismo  $\Psi_\gamma$  en los grupos  $K_0$ .  $\square$

**Lema 3.39.** *Sea  $E$  grafo finito tal que  $L(E)$  es simple puramente infinita. Si la afirmación (CS) es verdadera, entonces  $L(E) \cong L(E_{1-})$*

*Demostración.* Como  $E_- = (E_{1-}) \setminus v_{n+3}$ , luego por Proposición 3.4  $L(E_{1-}) \smile_M L(E_-) \smile_M L(E)$ . Además, como la Proposición 3.37 nos dice que  $\mathcal{F}_{[1]}(E) \equiv \mathcal{F}_{[1]}(E_{1-})$ , tenemos  $L(E) \cong L(E_{1-})$  por el Teorema 3.27.  $\square$

**Proposición 3.40.** *Si la afirmación (CS) es verdadera, entonces  $\mathcal{F}_{[1]}$  clasifica las álgebras de Leavitt uniales simples puramente infinitas módulo isomorfismo.*

*Demostración.* Si  $\mathcal{F}_{[1]}(E) \equiv \mathcal{F}_{[1]}(F)$ , por Observación 3.30  $|\det(I - A_E^t)| = |\det(I - A_F^t)|$ .

Si tienen el mismo signo, entonces  $\mathcal{F}_3(E) \equiv \mathcal{F}_3(F)$  y por lo tanto son isomorfos. Si tienen signos opuestos tenemos  $\mathcal{F}_3(E_{1-}) \equiv \mathcal{F}_3(F)$  y por lo tanto  $L(E) \cong L(E_{1-}) \cong L(F)$  por Lema 3.39.

Recíprocamente, si  $L(E) \cong_\varphi L(F)$ , entonces tenemos un isomorfismo  $\hat{\varphi} : K_0(L(E)) \rightarrow K_0(L(F))$  que manda  $[M] \mapsto [L(E) \otimes_{L(E)} M]$ . En particular  $[L(E)] \mapsto [L(F)]$ .  $\square$

**Observación 3.41.** *Para el caso  $C^*$  Cuntz demostró que el empalme de Cuntz no cambia la clase de equivalencia Morita, por lo que es cierto el análogo a la Proposición 3.38. Por tanto el problema está resuelto en el caso analítico (ver [24]).*

## Capítulo 4

# Hacia una caracterización graduada

Un *grupo pre-parcialmente ordenado* es un grupo abeliano  $G$  junto con una relación  $\leq$  reflexiva y transitiva que respeta la estructura de  $G$ , es decir, tal que si  $a \leq b$  entonces  $a + c \leq b + c$  para todo  $a, b, c \in G$ . Definimos el *cono* de  $G$  como el subconjunto  $G^+ \subseteq G$  de los elementos  $g \in G$  tales que  $g \geq 0$ . Observemos que  $G^+$  es un submonoide de  $G$ . Decimos que un morfismo  $f : G \rightarrow H$  es un *morfismo de orden* si es un morfismo de grupos tal que  $f(G^+) \subseteq H^+$ . Notemos que dado un cono  $G^+$  en  $G$  podemos definir la relación  $a \prec b$  si y sólo si existe  $c \in G^+$  tal que  $a + c = b$ . De hecho, se puede ver que  $\prec$  coincide con  $\leq$ , es decir, dar un cono en  $G$  es lo mismo que dar la relación  $\leq$ . Además, si hay una acción de un grupo  $\Gamma$  en  $G$ , podemos definir en  $G$  una estructura de *grupo  $\Gamma$ -pre-parcialmente ordenado* donde  $G$  es un grupo pre-parcialmente ordenado tal que si  $a \leq b$  entonces  $\gamma a \leq \gamma b$  para todo  $a, b \in G$  y  $\gamma \in \Gamma$ . Un *morfismo de grupos  $\Gamma$ -grupos pre-parcialmente ordenados* es un morfismo de orden  $\Gamma$ -equivariante.

**Ejemplo 4.1.** Sea  $R$  un anillo con unidad, entonces  $K_0(R)$  es un grupo pre-parcialmente ordenado donde  $K_0^+(R)$  es la imagen de  $\mathcal{V}(R)$  vía la proyección canónica.

Recordemos que, por lo visto en la Sección 1.4, dado un grafo  $E$  tenemos una acción de  $\mathbb{Z}$  en  $K_0^{gr}(L(E))$  inducida por el funtor de suspensión. A su vez, esta acción le da una estructura de  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ -módulo en  $K_0^{gr}(L(E))$  o, equivalentemente, de  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ -módulo.

**Ejemplo 4.2.** Sea  $R$  un anillo. El grupo abeliano  $K_0^{gr}(L(E))$  es un grupo  $\mathbb{Z}$ -pre-parcialmente ordenado donde  $(K_0^{gr}(R))^+$  es la imagen de  $\mathcal{V}^{gr}(R)$  vía la proyección canónica.

En [13] Hazrat propone la siguiente conjetura:

**Conjetura 1.** Sean  $E$  y  $F$  grafos finitos por fila. Entonces son equivalentes:

- (1)  $L(E) \cong_{gr} L(F)$ .
- (2) Existe un isomorfismo de orden de  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ -módulos

$$(K_0^{gr}(L(E)), [1_{L(E)}]) \cong (K_0^{gr}(L(F)), [1_{L(F)}]).$$

Sean  $E$  y  $F$  grafos finitos sin pozos ni fuentes. En este capítulo definiremos el álgebra graduada  $L^g(E)$  y veremos que la condición (2) de Hazrat es equivalente a que exista un

isomorfismo graduado entre  $L(F)$  y  $L^g(E)$ . Por el Teorema 2.12 podemos suponer que las álgebras de Leavitt de grafo son fuertemente  $\mathbb{Z}$ -graduadas. Además, por el argumento visto en la Sección 2.2, la restricción a grafos sin fuentes nos dice que  $L(E) = L(E)_0[t_+, t_-, \alpha]$  con

$$t_+ := \sum_{i=1}^n e_i \in L_k(E)_1 \quad t_- := \sum_{i=1}^n e_i \in L_k(E)_{-1}$$

donde  $r(e_i) = v_i$  y  $\alpha(a) = t_+ a t_-$ .

En la primera sección de este capítulo enunciaremos el teorema principal (que fue enunciado en el párrafo anterior) y fijaremos la estrategia para demostrarlo. En la segunda sección terminaremos la demostración.

Este capítulo se basa en el trabajo realizado en [7] por Ara y Pardo.

## 4.1. Caracterización de isomorfismos graduados

Vimos en la Sección 1.4 que  $K_0^{gr}(L(E)) \cong K_0(L(E)_0)$ . Por lo tanto, nos será de utilidad estudiar el álgebra  $L(E)_0$ . Dado  $M$  un  $L(E)_0$ -módulo podemos definir  $M^\alpha$  el  $L(E)_0$ -módulo dado por  $M^\alpha := pM$  como grupo abeliano donde  $p := t_+ t_-$  y con la acción

$$\begin{aligned} L(E)_0 \times M^\alpha &\rightarrow M^\alpha \\ (a, m) &\mapsto a * m := \alpha(a)m \end{aligned}$$

Notar que está bien definido, pues  $a * pm = \alpha(a)pm = \alpha(a)\alpha(1)m = \alpha(1)\alpha(a)m = p\alpha(a)m$ .

**Lema 4.3.** *Los módulos  $M^\alpha$  y  $t_- L(E)_0 \otimes_{L(E)_0} M$  son isomorfos.*

*Demostración.* Consideremos los morfismos de grupos abelianos

$$\begin{aligned} t_- L(E)_0 \otimes_{L(E)_0} M &\xrightarrow{f} M^\alpha \\ t_- x \otimes m &\mapsto t_+ t_- x m = p x m \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} M^\alpha &\xrightarrow{g} t_- L(E)_0 \otimes_{L(E)_0} M \\ p m &\mapsto t_- \otimes p m. \end{aligned}$$

Notar que son isomorfismos inversos, pues  $f(g(pm)) = t_+ t_- pm = p^2 m = pm$  y  $g(f(t_- x \otimes m)) = t_- \otimes t_+ t_- x m = t_- t_+ t_- x \otimes m = t_- x \otimes m$ . Además,  $f$  es un morfismo de  $L(E)_0$ -módulos (notar que  $t_- L(E)_0 = L(E)_{-1}$ , por tanto es  $L(E)_0$ -módulo) pues

$$f(a(t_- x \otimes m)) = t_+ a t_- x m = \alpha(a) t_+ t_- x m = a * t_+ t_- x m = a * f(t_- x \otimes m).$$

□

Sean  $\mathcal{T} := \mathcal{T}_1 : L(E)_0\text{-Mod} \rightarrow L(E)_0\text{-Mod}$  el functor de 1-suspensión y  $\mathcal{T}^{-1} := \mathcal{T}_{-1} : L(E)_0\text{-Mod} \rightarrow L(E)_0\text{-Mod}$  el functor de (-1)-suspensión definidos en la Sección 1.4. Por Lema 4.3 tenemos que el isomorfismo inducido  $(\mathcal{T}^{-1})_* = (\mathcal{T}_*)^{-1} : K_0(L(E)_0) \rightarrow K_0(L(E)_0)$  está dado por la regla  $[P] \mapsto [P^\alpha]$ .

**Definición 4.4.** Sea  $k$  un cuerpo. Decimos que una  $k$ -álgebra  $R$  es matricial si es un producto directo de álgebras de matrices sobre  $k$ . Diremos que  $R$  es ultramatricial si es un colímite de álgebras matriciales.

Veremos que  $L(E)_0$  es un álgebra ultramatricial: Supongamos que  $E$  es un grafo finito sin pozos. Consideremos  $L(E)_{0,n}$  como el subespacio de  $L(E)_0$  que consiste de las combinaciones lineales de elementos de la forma  $\mu\nu^*$  donde  $r(\mu) = r(\nu)$  y  $|\mu| = |\nu| \leq n$ . Notar que en realidad  $L(E)_{0,n}$  es una subálgebra de  $L(E)_0$ , más aún, estas subálgebras forman una filtración de  $L(E)_0$ . Es decir,  $L(E)_{0,n} \subseteq L(E)_{0,n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $L(E)_0 = \cup_{i \in \mathbb{N}_0} L(E)_{0,i}$ . Tomemos un elemento de la forma  $\mu\nu^* \in L(E)_0$  con  $|\mu| = |\nu| = n$  y  $r(\mu) = r(\nu) = v$ . Como  $v$  no es un pozo puedo usar la relación CK2 para obtener

$$\mu\nu^* = \mu\nu\nu^* = \sum_{e \in s^{-1}(v)} (\mu e)(\nu e)^* \quad (4.1)$$

es decir, podemos escribir al elemento  $\mu\nu^*$  como combinación lineal de elementos de la forma  $\mu'(\nu')^*$  con  $|\mu'| = |\nu'| = n + 1$ . Haciendo inducción en el tamaño de los caminos, podemos ver que

$$L(E)_{0,n} = \left\{ \sum_i c_i \mu_i \nu_i^* : c_i \in k, |\mu_i| = |\nu_i^*| = n \text{ para todo } i \right\}.$$

Sea  $P(n, v)$  el conjunto de caminos de tamaño  $n$  que terminan en  $v$ , tenemos un isomorfismo

$$L(E)_{0,n} \cong \prod_{v \in E^0} M_{|P(n,v)|}(k). \quad (4.2)$$

Este isomorfismo manda cada elemento  $\mu\nu^* \in L(E)_{0,n}$  en la matriz canónica  $e_{\mu,\nu}$ . Bajo esta identificación, los morfismos de transición  $L(E)_{0,n} \hookrightarrow L(E)_{0,n+1}$  se visualizan fácilmente usando la ecuación (4.1). Este argumento nos muestra que el álgebra  $L(E)_0$  es un álgebra ultramatricial.

**Observación 4.5.** Si  $R$  es un álgebra matricial entonces  $R$  es semisimple. Como todo módulo simple es isomorfo a un ideal simple, y todo ideal simple en un anillo semisimple está generado por un elemento idempotente de  $R$ , tenemos que todo  $R$ -módulo es una suma directa de módulos de la forma  $Re$  con  $e \in R$  idempotente. En particular,  $K_0(R)$  está generado por elementos de la forma  $[Re]$  con  $e \in R$  idempotente. Se sigue del hecho de que  $K_0$  conmuta con colímites filtrantes que el  $K_0$  de toda álgebra ultramatricial está generado por elementos idempotentes del álgebra.

**Lema 4.6.** Sea  $E$  un grafo finito sin pozos ni fuentes. Sea  $\alpha_* = K_0(\alpha)$ . Entonces los morfismos inducidos  $\alpha_*, \mathcal{T}_*^{-1} : K_0(L(E)_0) \rightarrow K_0(L(E)_0)$  son isomorfismos inversos. Es decir,  $\alpha_* = \mathcal{T}_*$ .

*Demostración.* Como  $\mathcal{T}_*^{-1}$  es un isomorfismo, basta ver que  $\mathcal{T}_*^{-1} \circ \alpha_* = Id_{K_0(L(E)_0)}$ .

Por Observación 4.5 basta ver que es la identidad sobre los elementos de la forma  $[L(E)_0 e]$  con  $e \in L(E)_0$  idempotente.

$$(\mathcal{T}_*^{-1} \circ \alpha_*)([L(E)_0 e]) = \mathcal{T}_*^{-1}([L(E)_0 \alpha(e)]) = [(L(E)_0 \alpha(e))^\alpha].$$

Para terminar el argumento, veamos que

$$\begin{array}{ccc} L(E)_0 e & \xrightarrow{f} & (L(E)_0 \alpha(e))^\alpha \\ x & \longmapsto & \alpha(x) \end{array}$$

es un isomorfismo. Claramente está bien definido. Como  $\alpha$  es isomorfismo de esquina es aditivo e inyectivo. Es lineal, pues para todo  $r \in L(E)_0$  y  $x \in L(E)_0 e$  tenemos

$$f(rx) = \alpha(r)\alpha(x) = r * \alpha(x).$$

Por último, dado  $y \in (L(E)_0 \alpha(e))^\alpha$  tenemos  $y = pr\alpha(e)$  con  $r \in L(E)_0$ . Además  $prp \in pL(E)_0 p = \alpha(L(E)_0)$ , por lo que  $prp = \alpha(s)$  para algún  $s$ . De esta forma

$$y = pr\alpha(e) = prp\alpha(e) = \alpha(se)$$

ya que  $p = \alpha(1)$ . Por tanto  $f$  es sobreyectiva y, en consecuencia, es un isomorfismo.  $\square$

**Teorema 4.7.** *Sean  $E$  y  $F$  grafos finitos sin pozos ni fuentes y  $\alpha$  y  $\beta$  los isomorfismos de esquina correspondientes. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) *Existe un isomorfismo  $\Psi : (K_0(L(E)_0), K_0^+(L(E)_0)) \rightarrow (K_0(L(F)_0), K_0^+(L(F)_0))$  tal que  $\Psi \circ (\mathcal{T}_E)_* = (\mathcal{T}_F)_* \circ \Psi$ .*
- (2) *Existe un isomorfismo  $\Psi : (K_0(L(E)_0), K_0^+(L(E)_0)) \rightarrow (K_0(L(F)_0), K_0^+(L(F)_0))$  tal que  $\Psi \circ \alpha_* = \beta_* \circ \Psi$ .*
- (3) *Existe un isomorfismo de  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ -módulos ordenados  $K_0^{gr}(L(E)) \cong K_0^{gr}(L(F))$ .*

Por comodidad notaremos la condición (1) como

$$(K_0(L(E)_0), K_0^+(L(E)_0)) \cong_{\mathbb{Z}[x, x^{-1}]} (K_0(L(F)_0), K_0^+(L(F)_0))$$

y la condición (2) como

$$(K_0(L(E)_0), K_0^+(L(E)_0), \alpha_*) \cong (K_0(L(F)_0), K_0^+(L(F)_0), \beta_*)$$

*Demostración.* Por Lema 4.6 tenemos que  $\alpha_* = \mathcal{T}$  de donde se sigue la equivalencia entre (1) y (2). Como  $\mathbb{Z}$  está generado por 1, la condición de que el morfismo  $\Psi$  conmute con los morfismos  $\mathcal{T}_E$  y  $\mathcal{T}_F$  equivale a pedir que  $\Psi$  sea un morfismo de  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ -módulos. Además  $K_0(L(E)_0) \cong K_0^{gr}(L(E))$  como  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ -módulos como se explica en la Sección 1.4. De esto se sigue la equivalencia entre (1) y (3).  $\square$

**Observación 4.8.** *Recordemos que*

$$L(E)_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} L(E)_{0,n}.$$

Llamemos  $\iota_{n,n+1} : L(E)_{0,n} \hookrightarrow L(E)_{0,n+1}$  al morfismo de transición y  $\iota_{n,\infty} : L(E)_{0,n} \hookrightarrow L(E)_0$  a la inclusión. También sabíamos que

$$L(E)_{0,n} \cong \prod_{v \in E^0} M_{|P(n,v)|}(k).$$

Como  $K_0$  conmuta con colímites filtrantes tenemos que

$$K_0(L(E)_0) = \varinjlim (K_0(L(E)_{0,n}), K_0(\iota_{n,n+1})).$$

Del Teorema 1.12 y el Ejemplo 1.7 se sigue que  $K_0(L(E)_{0,n}) = \mathbb{Z}^N$  donde  $N = |E^0|$ . Además, debido a la relación CK2 tenemos la igualdad

$$\mu\nu^* = \sum_{e \in s^{-1}(r(\mu))} (\mu e)(\nu e)^*.$$

Luego es fácil ver que bajo las identificaciones

$$\mathcal{V}(\prod_{v \in E^0} M_{|P(n,v)|}(k)) \cong \prod_{v \in E^0} \mathbb{N} = \mathbb{N}^N$$

el morfismo  $K_0(\iota_{n,n+1})$  es la multiplicación por  $A_E^t$ . Así

$$K_0(L(E)_0) = \varinjlim (\mathbb{Z}^N, A_E^t).$$

Por comodidad notemos  $G = K_0(L(E)_0)$  y  $G_m = K_0(L(E)_{0,m})$ . Luego, la multiplicación por  $A_E^t$  induce un morfismo  $\delta_{A_E^t} : G \rightarrow G$ .

$$\begin{array}{ccccccccc} G_0 & \xrightarrow{A_E^t} & G_1 & \xrightarrow{A_E^t} & G_2 & \xrightarrow{A_E^t} & G_3 & \cdots & G \\ A_E^t \downarrow & & A_E^t \downarrow & & A_E^t \downarrow & & A_E^t \downarrow & & \delta_{A_E^t} \downarrow \\ G_0 & \xrightarrow{A_E^t} & G_1 & \xrightarrow{A_E^t} & G_2 & \xrightarrow{A_E^t} & G_3 & \cdots & G \end{array}$$

**Lema 4.9.** Sea  $E$  un grafo finito sin pozos ni fuentes. Entonces los isomorfismos  $\alpha_*$  y  $\delta_{A_E^t}$  son mutuamente inversos.

*Demostración.* Como

$$\alpha(\mu\nu^*) = t_+\mu\nu^*t_- = e_i\mu(e_j\nu)^*$$

donde  $r(e_i) = s(\mu)$  y  $r(e_j) = s(\nu)$ , es cuestión de rutina chequear, usando el mismo argumento que en la Observación 4.8, que el morfismo  $\alpha_*$  se restringe a  $Id : G_n \rightarrow G_{n+1}$ . De esta forma tenemos

$$\begin{array}{ccccccccc} G_0 & \xrightarrow{A_E^t} & G_1 & \xrightarrow{A_E^t} & G_2 & \xrightarrow{A_E^t} & G_3 & \cdots & G \\ A_E^t \downarrow & \nearrow Id & A_E^t \downarrow & \nearrow Id & A_E^t \downarrow & \nearrow Id & A_E^t \downarrow & & \alpha_* \updownarrow \\ G_0 & \xrightarrow{A_E^t} & G_1 & \xrightarrow{A_E^t} & G_2 & \xrightarrow{A_E^t} & G_3 & \cdots & G \\ & & & & & & & & \delta_{A_E^t} \downarrow \end{array}$$

luego tenemos

$$\delta_{A_E^t} \circ \alpha_*(\iota_{n,\infty}(g)) = \delta_{A_E^t}(\iota_{n+1,\infty}(g)) = \iota_{n+1,\infty}(A_E^t g) = \iota_{n+1,\infty}(\iota_{n,n+1}(g)) = \iota_{n,\infty}(g)$$

es decir,  $\delta_{A_E^t} \circ \alpha_* = Id_G$ . Como  $\alpha_*$  es un automorfismo por el Lema 4.6, la demostración queda terminada.  $\square$

De ahora en más notaremos  $A := A_E^t$ . Recordemos que por Observación 1.15 tenemos que

$$G = \varinjlim (G_n, A) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}_0} G_n / \sim = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}_0} (\mathbb{Z}^N)_n / \sim$$

donde el subíndice indica la copia de  $\mathbb{Z}^N$  a la cual nos referimos y, si notamos  $(a)_n$  al elemento  $a \in \mathbb{Z}^N$  que se encuentra en la  $n$ -ésima copia,  $(a)_n \sim (b)_m$  si y sólo si existe  $\ell \geq m, n$  tal que  $A^{\ell-n}a = A^{\ell-m}b$ . Podemos definir el cono positivo de  $G$  como  $G^+ = \{[(a)_n] \in G : a \in \mathbb{N}_0^N\}$ .

Por otro lado, recordemos del apéndice A que el *rango eventual de A*  $\mathcal{R}_A := A^N \mathbb{Q}^N$  es el máximo subespacio de  $\mathbb{Q}^N$  donde la multiplicación por la matriz  $A$  es inversible y que el *grupo dimensión de A* es

$$\Delta_A = \{v \in \mathcal{R}_A \mid A^k v \in \mathbb{Z}^N \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}.$$

El *cono positivo del grupo dimensión* es

$$\Delta_A^+ = \{v \in \mathcal{R}_A \mid A^k v \in (\mathbb{N}_0)^N \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}$$

y el *automorfismo dimensión* es el automorfismo

$$\delta_A : \Delta_A \rightarrow \Delta_A$$

que manda  $v \mapsto Av$  (ver Apéndice A para más detalle). Luego el morfismo

$$\phi : (\Delta_A, \Delta_A^+, \delta_A) \rightarrow (G, G^+, \delta_A) \quad (4.3)$$

$$v \mapsto [(A^k v)_k]$$

donde  $A^k v \in \mathbb{Z}$ , está bien definido. Además es inyectivo pues si  $v, w \in \mathcal{R}_A$  y  $[(A^k v)_k] = \phi(v) = \phi(w) = [(A^{k'} w)_{k'}]$  entonces existe  $\ell \geq k, k'$  tal que  $A^\ell v = A^\ell w$  y como  $A$  es inversible en  $\mathcal{R}_A$  tenemos  $v = w$ . También es sobreyectivo, pues si tomamos un  $[(a)_n] \in G$ , sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $a \in \mathcal{R}_A$ , si no reemplazamos  $a$  por  $A^N$  y  $n$  por  $n + N$  ya que  $[(a)_n] = [(A^N a)_{n+N}]$ . Luego, como  $a \in \mathcal{R}_A$  y  $\mathcal{R}_A$  es el máximo subespacio de  $\mathbb{Q}^N$  donde  $A$  es inversible, existe  $b \in \mathcal{R}_A$  tal que  $A^n b = a$ . Notar que esto último nos dice que  $b \in \Delta_A$  pues  $A^n b = a \in \mathbb{Z}^N$ . Luego  $\phi(b) = [(A^n b)_n] = [(a)_n]$ . Por tanto,  $\phi$  es un isomorfismo, es decir,  $\phi : \Delta_A \rightarrow G$  es un isomorfismo de grupos tal que  $\phi(\Delta_A^+) = G^+$  y  $\phi \circ \delta_A = \delta_A \circ \phi$ .

También recordemos la Definición A.11: Dos matrices  $A$  y  $B$  cuadradas con coeficientes en  $\mathbb{N}_0$  son *shift equivalentes* con lag  $\ell \in \mathbb{N}$  si existe un par  $(R, S)$  de matrices rectangulares con coeficientes en  $\mathbb{N}_0$  tal que

$$AR = RB \quad SA = BS \quad A^\ell = RS \quad B^\ell = SR.$$

En esta situación escribiremos  $A \sim_{SE} B$ .

**Teorema 4.10.** *Sean  $E$  y  $F$  grafos finitos sin pozos ni fuentes y  $\alpha$  y  $\beta$  los isomorfismo de esquina correspondientes. Sean  $A = A_E^t$  y  $B = A_F^t$ . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*



- (1)  $A \sim_{SE} B$
- (2)  $(K_0(L(E)_0), K_0^+(L(E)_0)) \cong_{\mathbb{Z}[x, x^{-1}]} (K_0(L(F)_0), K_0^+(L(F)_0))$
- (3)  $(K_0(L(E)_0), K_0^+(L(E)_0), \alpha_*) \cong (K_0(L(F)_0), K_0^+(L(F)_0), \beta_*)$
- (4)  $(K_0(L(E)_0), K_0^+(L(E)_0), \delta_A) \cong (K_0(L(F)_0), K_0^+(L(F)_0), \delta_B)$
- (5) Existe un isomorfismo ordenado de  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ -módulos  $K_0^{gr}(L(E)) \cong K_0^{gr}(L(F))$ .

*Demostración.* En el Teorema 4.7 vimos la equivalencia de (2), (3) y (5). La equivalencia entre (4) y (3) se sigue del Lema 4.9. La equivalencia entre (1) y (4) se sigue del Teorema A.13 y la observación anterior al teorema.  $\square$

**Definición 4.11.** Sean  $A$  un álgebra y  $g$  un automorfismo de  $A$ . Decimos que  $g$  es localmente interior si para cada conjunto finito  $a_1, a_2, \dots, a_n$  de elementos de  $A$  existe  $h$  un automorfismo interior de  $A$  tal que  $g(a_i) = h(a_i)$  para  $i = 1, \dots, n$ .

**Proposición 4.12.** Sean  $A$  un álgebra ultramatricial y  $g$  un automorfismo de  $A$ . Si  $K_0(g) = Id$ , entonces  $g$  es localmente interior.

*Demostración.* Supongamos que  $A = \varinjlim A_i$  donde cada  $A_i$  es un álgebra matricial y  $\iota_i : A_i \rightarrow A$  es el morfismo canónico. Sea  $\{[x_1], \dots, [x_n]\} \subseteq A$  un subconjunto finito de elementos de  $A$ . Consideremos  $i_0$  suficientemente grande tal que  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq A_{i_0}$ . Luego

$$K_0(g \circ \iota_i) = K_0(g) \circ K_0(\iota_i) = K_0(\iota_i).$$

Por [14, Theorem 3.3.1.] existe un automorfismo interior  $\theta \in \text{Aut}(A)$  tal que  $\theta \circ \iota_i = g \circ \iota_i$ . Evaluando en los  $x_i$  tenemos

$$\theta([x_i]) = g([x_i])$$

para  $i = 1, \dots, n$ , como queríamos.  $\square$

Sea  $E$  un grafo finito sin pozos ni fuentes y escribamos  $L(E) = L(E)_0[t_+, t_-, \alpha]$  como en la Sección 2.2. Sea  $g$  un automorfismo localmente interior de  $L(E)$ ; definimos

$$L^g(E) = L(E)_0[t_+, t_-, g \circ \alpha].$$

Ahora estamos en condiciones de enunciar el teorema principal de este capítulo.

**Teorema 4.13** (Ara y Pardo). Sean  $E$  y  $F$  grafos finitos sin pozos ni fuentes. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1)  $(K_0(L(E)_0), K_0^+(L(E)_0), [1_{L(E)_0}]) \cong_{\mathbb{Z}[x, x^{-1}]} (K_0(L(F)_0), K_0^+(L(F)_0), [1_{L(F)_0}])$ .
- (2) Existe  $g$  un automorfismo localmente interior de  $L(E)_0$  tal que  $L^g(E) \cong_{gr} L(F)$ .

La demostración del Teorema ocupará todo lo que queda del capítulo.

*Demostración:* (2)  $\Rightarrow$  (1). Como  $L^g(E) \cong_{gr} L(F)$ , tenemos

$$(K_0(L^g(E)_0), K_0^+(L^g(E)_0), [1_{L^g(E)_0}]) \cong_{\mathbb{Z}[x, x^{-1}]} (K_0(L(F)_0), K_0^+(L(F)_0), [1_{L(F)_0}])$$

donde cada uno de estos isomorfismos son isomorfismos de  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ -módulos ordenados que preservan la unidad de orden. Además

$$K_0^{gr}(L^g(E)) = K_0(L^g(E)_0) = K_0(L(E)_0) = K_0^{gr}(L(E)).$$

Por lo tanto

$$(K_0(L(E)_0), K_0^+(L(E)_0), [1_{L(E)_0}]) \cong_{\mathbb{Z}[x, x^{-1}]} (K_0(L(F)_0), K_0^+(L(F)_0), [1_{L(F)_0}])$$

como queríamos.

(1)  $\Rightarrow$  (2). Por comodidad notaremos  $N := |E^0|$ ,  $M := |F^0|$ ,  $A = A_E^t$ ,  $B = A_F^t$ ,  $\delta_A : K_0(L(E)_0) \rightarrow K_0(L(E)_0)$  y  $\delta_B : K_0(L(F)_0) \rightarrow K_0(L(F)_0)$  los morfismos inducidos por la multiplicación por  $A$  y  $B$ , respectivamente. Pensaremos  $L(E)_0[t_+, t_-, \alpha]$  y  $L(F)_0[s_+, s_-, \beta]$  como en la demostración del Lema 2.13. También notaremos  $\iota_{n,m}^E : L(E)_{0,n} \hookrightarrow L(E)_{0,m}$  y  $\iota_{n,m}^F : L(F)_{0,n} \hookrightarrow L(F)_{0,m}$  los morfismos de transición,  $\mathcal{L}_n^E := L(E)_{0,n}$  si  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $\mathcal{L}^E := L(E)_0$ ,  $\mathcal{L}_n^F := L(F)_{0,n}$  si  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $\mathcal{L}^F := L(F)_0$ ,  $G := K_0(L(E)_0)$ ,  $H := K_0(L(F)_0)$ ,  $G_n := K_0(L(E)_{0,n}) \cong \mathbb{Z}^N$ ,  $H_n := K_0(L(F)_{0,n}) \cong \mathbb{Z}^M$ ,  $id_t := id_{\mathbb{Z}^N} : G_t \rightarrow G_{t+1}$  y  $id'_t := id_{\mathbb{Z}^M} : H_t \rightarrow H_{t+1}$ .

Por hipótesis, tenemos un isomorfismo  $\Phi$  tal que

$$(K_0(\mathcal{L}^E), K_0^+(L(E)_0), [1_{L(E)_0}]) \cong_{\mathbb{Z}[x, x^{-1}]} (K_0(\mathcal{L}^F), K_0^+(L(F)_0), [1_{L(F)_0}])$$

luego, el Teorema 4.10 nos dice que  $A \sim_{SE} B$ , es decir, existen matrices  $R \in M_{N \times M}(\mathbb{N}_0)$  y  $S \in M_{M \times N}(\mathbb{N}_0)$  y  $\ell \in \mathbb{Z}$  tales que

$$(1) \text{ (i) } AR = RB; \text{ (ii) } SA = BS.$$

$$(2) \text{ (i) } A^\ell = RS; \text{ (ii) } B^\ell = SR.$$

Por la demostración del Teorema A.13, si pensamos al morfismo  $\Phi : \Delta_A \rightarrow \Delta_B$ , tenemos que el morfismo  $\delta_B^k \circ \Phi \circ \delta_A^N = \Phi \circ \delta_A^{N+k}$  es la multiplicación a izquierda por  $S$  para algún  $k$  suficientemente grande. Por lo que es rutina chequear que, bajo las identificaciones de (4.3), el morfismo  $\Phi : G \rightarrow H$  manda  $\Phi([(a)_d]) = [(Sa)_{d+N+k}]$ . De esta forma, el morfismo  $\Phi$  es el inducido por los morfismos  $S : G_d \rightarrow H_{d+N+k}$  para  $d \in \mathbb{N}_0$ .

Pensando a los elementos del grupo abeliano  $K_0$  como diferencias de clases de idempotentes es fácil ver que un morfismo unital preserva la unidad de orden. Por tanto los morfismos  $K_0(\iota_{0,\infty}^E)$ ,  $K_0(\iota_{N+k,\infty}^F)$ ,  $A^M : G_d \rightarrow G_{d+M}$  y  $B^M : H_d \rightarrow H_{d+M}$  preservan la unidad de orden. Además, por hipótesis, el morfismo  $\Phi$  también lo hace. Como el diagrama

$$\begin{array}{ccc} K_0(L(E)_{0,d}) & \xrightarrow{S \cdot} & K_0(L(F)_{0,d+N+k}) \\ \downarrow A^M \cdot & & \downarrow B^M \cdot \\ K_0(L(E)_{0,d+M}) & \xrightarrow{S \cdot} & K_0(L(F)_{0,d+N+M+k}) \\ \downarrow K_0(\iota_{d+M,\infty}^E) & & \downarrow K_0(\iota_{d+N+M+k,\infty}^F) \\ K_0(L(E)_0) & \xrightarrow{\Phi} & K_0(L(F)_0) \end{array}$$

conmuta y

$$\Phi(K_0(\iota_{d+M,\infty}^E)(A^M \cdot ([L(E)_{0,d}])) = [L(F)_0],$$

tenemos

$$K_0(\iota_{d+N+M+k,\infty}^F)(B^M \cdot (S \cdot ([L(E)_{0,d}])) = [L(F)_0].$$

Por la descripción (4.3), es fácil ver que  $K_0(\iota_{d+N+M+k,\infty}^F)$  es inyectivo sobre la imagen de  $B^M$ . Por lo tanto

$$B^M \cdot (S \cdot ([L(E)_{0,d}])) = [L(F)_{0,d+N+M+k}].$$

De esta forma, el morfismo

$$G_d \xrightarrow{S} H_{d+N+k} \xrightarrow{B^M} H_{d+N+M+k}$$

preserva la unidad de orden. Además  $B^M \circ S = (B^M S) = (SA^M)$ .

Notemos que si  $A \sim_{SE} B$  con lag  $\ell$  y matrices  $R$  y  $S$  que cumplen las relaciones mencionadas, entonces las matrices  $R$  y  $SA^t$  dan la misma equivalencia shift con lag  $\ell + t$ . Luego, podemos suponer que  $\ell + M$  es  $\ell$  y  $SA^M$  es  $S$ .

En conclusión, los morfismos  $S \cdot : G_d \rightarrow G_{d+N+M+k}$  inducen el morfismo  $\Phi : G \rightarrow H$  y, además, estos preservan la unidad de orden. Usando el mismo argumento podemos suponer que la multiplicación a izquierda por  $R$  induce el morfismo  $\Phi^{-1}$  y preserva la unidad de orden.

**Lema 4.14.** Sean  $A, B, R, S$  matrices donde  $A$  y  $B$  son cuadradas y se cumplen las relaciones

$$(1) \text{ (i) } AR = RB; \text{ (ii) } SA = BS.$$

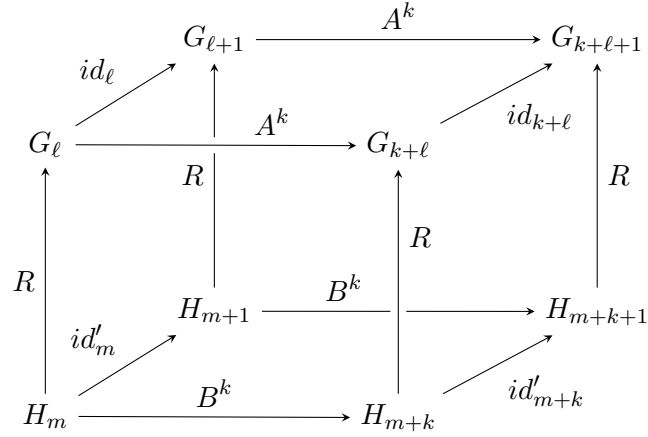
$$(2) \text{ (i) } A^\ell = RS; \text{ (ii) } B^\ell = SR.$$

Entonces para todo  $\ell, k, m \geq 1$  existen diagramas conmutativos:

a)

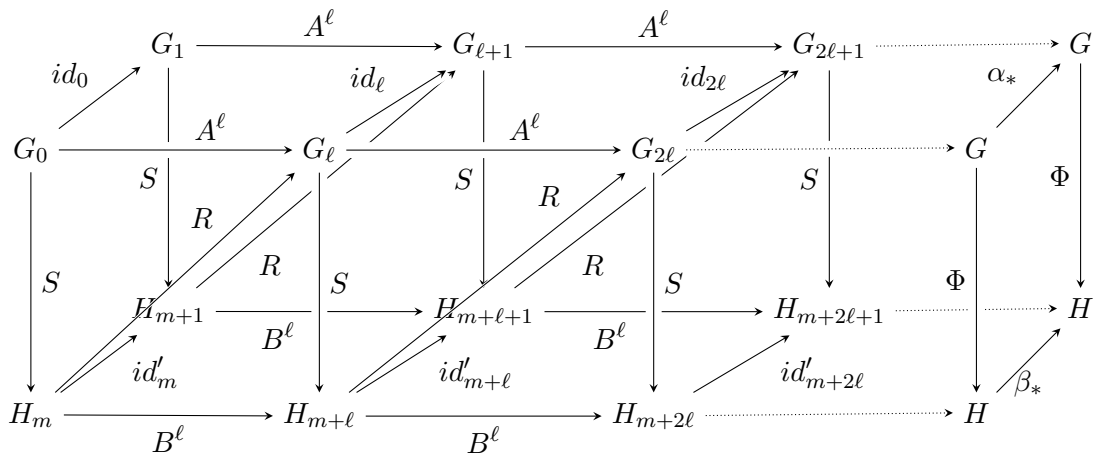
$$\begin{array}{ccccc}
 & & G_{\ell+1} & \xrightarrow{A^k} & G_{k+\ell+1} \\
 & \nearrow id_\ell & \downarrow & & \nearrow id_{k+\ell} \\
 G_\ell & \xrightarrow{A^k} & G_{k+\ell} & & \\
 \downarrow S & & \downarrow S & & \downarrow S \\
 & \nearrow id'_m & H_{m+1} & \xrightarrow{B^k} & H_{m+k+1} \\
 H_m & \xrightarrow{B^k} & H_{m+k} & & \nearrow id'_{m+k}
 \end{array}$$

b)



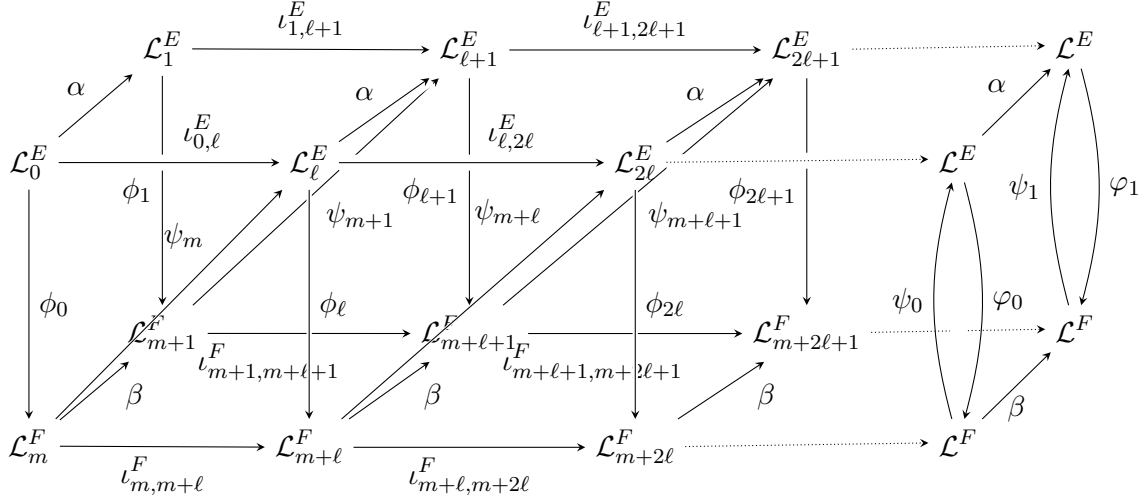
*Demostración.* La conmutatividad de ambos diagramas se sigue fácilmente de aplicar inductivamente las relaciones  $AR = RB$  y  $SA = BS$ .  $\square$

En conclusión, tenemos un diagrama conmutativo



donde los morfismos  $S$ ,  $R$  y  $A^\ell$  preservan la unidad de orden, la multiplicación por  $S$  induce el morfismo  $\Phi$ , los morfismos  $\{id_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  y  $\{id'_k\}_{k \in m + \ell \mathbb{N}_0}$  inducen los morfismos  $\alpha_*$  y  $\beta_*$ , respectivamente, por el argumento de la demostración del Lema 4.9.

El objetivo de la siguiente sección será levantar este diagrama conmutativo de grupos abelianos en el siguiente diagrama conmutativo de álgebras



Terminemos la demostración del teorema asumiendo que tenemos este último diagrama.

Por la conmutatividad de la parte de adelante y de atrás del diagrama tenemos morfismos

$$\varphi_0, \varphi_1 : \mathcal{L}^E \rightarrow \mathcal{L}^F$$

definidos por

$$\varphi_\epsilon(\iota_{kl+\epsilon, \infty}^E(x)) = \iota_{kl+m+\epsilon, \infty}^F(\phi_{kl+\epsilon}(x))$$

para todo  $x \in \mathcal{L}_{kl+\epsilon}^E$  y  $\epsilon = 0, 1$ . Análogamente, usando la conmutatividad de los cuadrados puestos en diagonal, tenemos morfismos  $\psi_\epsilon : \mathcal{L}^F \rightarrow \mathcal{L}^E$  para  $\epsilon = 0, 1$ . Notar que las identidades

$$\psi_{m+kl+\epsilon} \circ \phi_{kl+\epsilon} = \iota_{kl+\epsilon, (k+1)l+\epsilon}^E \quad \phi_{(k+1)l+\epsilon} \circ \psi_{m+kl+\epsilon} = \iota_{m+kl+\epsilon, m+(k+1)l+\epsilon}^F$$

nos dicen que los morfismos  $\phi_\epsilon$  y  $\psi_\epsilon$  son isomorfismos inversos. Además, la identidad  $\beta \circ \phi_{kl} = \phi_{kl+1} \circ \alpha$  nos dice que

$$\beta \circ \varphi_0 = \varphi_1 \circ \alpha. \quad (4.4)$$

Análogamente

$$\beta \circ \varphi_1 = \psi_0 \circ \alpha. \quad (4.5)$$

**Lema 4.15.** Si definimos, bajo la notación anterior,  $g = \psi_0 \circ \varphi_1 \in \text{Aut}(\mathcal{L}^E)$ . Entonces  $g$  es un automorfismo localmente interior.

*Demostración.* Por la Proposición 4.12 basta ver que  $K_0(g) = id$ . Para ver esto, es suficiente ver que para todo  $k \in \mathbb{N}$  tenemos

$$K_0(\psi_{m+(k+1)l} \circ \iota_{m+kl+1, m+(k+1)l}^F \circ \phi_{kl+1}) = K_0(\iota_{kl+1, (k+2)l}^E)$$

pues inducen los morfismos  $K_0(g)$  e  $id$ , respectivamente. Pero

$$K_0(\psi_{m+(k+1)l} \circ \iota_{m+kl+1, m+(k+1)l}^F \circ \phi_{kl+1}) = RB^{\ell-1}S = A^{\ell-1}RS = A^{2\ell-1}.$$

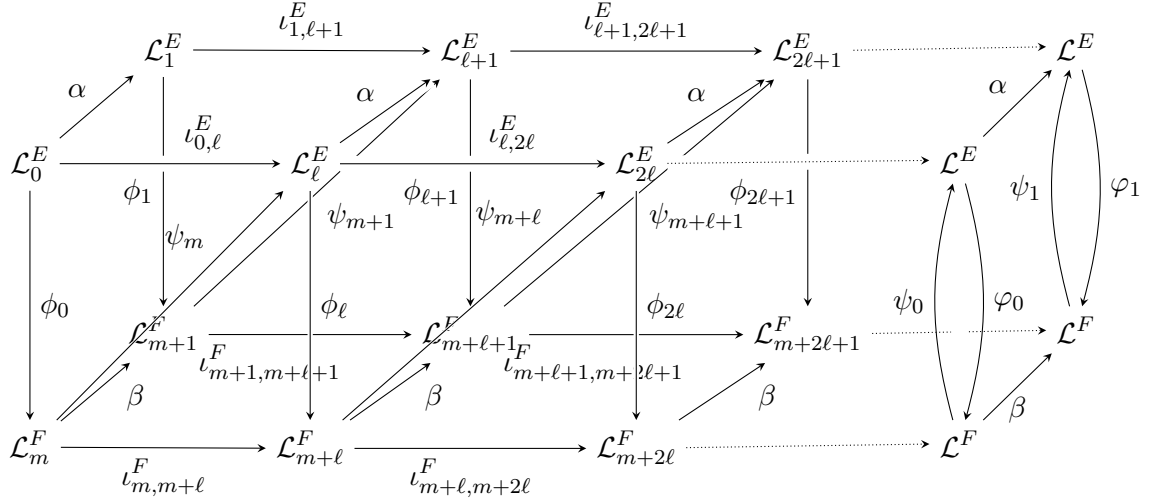
Y por otro lado

$$K_0(\iota_{kl+1, (k+2)l}^E) = A^{2\ell-1}$$

terminando la demostración.  $\square$



en el siguiente diagrama conmutativo de álgebras



Para facilitar la construcción notaremos:  $E^0 = \{v_1, \dots, v_N\}$ ,  $F^0 = \{w_1, \dots, w_M\}$ . Si  $\gamma$  es un camino en  $E$  de longitud  $t$  y  $d \geq 1$  y notaremos  $\gamma E^d$  al conjunto de los caminos  $\lambda \in E$  de longitud  $d+t$  tales que el segmento inicial de longitud  $t$  de  $\lambda$  coincide con  $\gamma$ . Análogamente  $E^d \gamma$  consistirá los caminos de longitud  $d+t$  terminados en  $\gamma$ . También notaremos  $\gamma E^d \delta = \gamma E^{d+|\delta|} \cap E^{d+|\gamma|} \delta$ . Aplicaremos la misma notación para  $F$ .

Recordar que los morfismos  $\alpha$  y  $\beta$  se obtienen fijando aristas  $e_i \in r^{-1}(v_i)$  y  $f_j \in r^{-1}(w_j)$  para cada  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, M$ . Luego definimos

$$t_+ := \sum_{i=1}^N e_i \quad \text{y} \quad t_- := \sum_{i=1}^N e_i^*.$$

$$s_+ := \sum_{j=1}^M f_j \quad \text{y} \quad s_- := \sum_{j=1}^M f_j^*.$$

Luego los morfismos quedan definidos como  $\alpha(a) = t_+ a t_-$  y  $\beta(b) = s_+ b s_-$ .

Dado un camino  $\gamma \in E^d$  notaremos  $\hat{\gamma}$  al camino  $e_i \gamma \in e_i E^d \subseteq E^{d+1}$  donde  $s(\gamma) = v_i$ . Observemos que si  $\gamma_1, \gamma_2 \in E^d$ , entonces  $\alpha(\gamma_1 \gamma_2^*) = \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2^*$ . Lo mismo vale para  $F$ . Las matrices  $A$  y  $B$  serán las matrices transpuestas de las matrices de adyacencia de  $E$  y  $F$  respectivamente. Las matrices  $S$  y  $R$  tendrán coeficientes  $s_{ji}$  y  $r_{ij}$  respectivamente. Usaremos constantemente el índice  $i$  para los elementos en  $\{1, \dots, N\}$  y  $j$  para los elementos en  $\{1, \dots, M\}$ .

Para demostrar lo que queremos primero levantaremos los primeros tres cuadrados conmutativos y luego daremos un paso inductivo que determinara la construcción del diagrama.

#### 4.2.1. Levantando el primer diagrama

Empezaremos levantando el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}^N & \xrightarrow{id_0} & \mathbb{Z}^N \\
S \downarrow & & \downarrow S \\
\mathbb{Z}^M & \xrightarrow{id'_m} & \mathbb{Z}^M
\end{array}$$

al diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{L}_0^E & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{L}_1^E \\
\phi_0 \downarrow & & \downarrow \phi_1 \\
\mathcal{L}_m^F & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{L}_{m+1}^F
\end{array}$$

donde  $\phi_0, \phi_1$  son morfismos unitales. Pensando al grupo abeliano  $K_0$  en términos de idempotentes es fácil ver que la unidad de orden en  $K_0(\mathcal{L}_0^E)$  es el elemento  $(|P(0, v_1)|, \dots, |P(0, v_N)|) = (1, \dots, 1)$  y en  $K_0(\mathcal{L}_m^F)$  es  $(|P(m, w_1)|, \dots, |P(m, w_M)|)$ . Como  $S : K_0(\mathcal{L}_0^E) \rightarrow K_0(\mathcal{L}_m^F)$  preserva la unidad de orden tenemos  $|F^m w_j| = \sum_{i=1}^N s_{ji}$ . De esta forma, podemos considerar una partición

$$F^m w_j = \bigsqcup_{i=1}^N \Lambda_j^{m, v_i}$$

donde  $|\Lambda_j^{m, v_i}| = s_{ji}$  para todo  $j, i$ . Escribiremos

$$\Lambda_j^{m, v_i} = \{\lambda_{j1}^0(v_i), \dots, \lambda_{js_{ji}}^0(v_i)\}.$$

Definimos el morfismo  $\phi_0 : \mathcal{L}_0^E \rightarrow \mathcal{L}_m^F$  como

$$\phi_0(v_i) = \sum_{j=1}^M \sum_{\lambda \in \Lambda_j^{m, v_i}} \lambda \lambda^*.$$

Observemos que este morfismo está bien definido pues los  $v_i$  forman una base. Además  $[\lambda \lambda^*] = e_j \in \mathbb{Z}^M$ , el  $j$ -ésimo vector canónico, para todo  $\lambda \in F^m w_j$ . Por lo tanto,  $[\sum_{\lambda \in \Lambda_j^{m, v_i}} \lambda \lambda^*] = s_{ji} e_j$ . Entonces tenemos que

$$K_0(\phi_0)([v_i]) = (s_{1i}, s_{2i}, \dots, s_{Mi})$$

es decir,  $\phi_0$  induce la multiplicación por  $S$ .

Como  $1 = \sum_{i=1}^N v_i$  y  $F^m = \bigsqcup_{j=1}^M F^m w_j$  tenemos

$$\phi_0(1) = \sum_{i=1}^N \phi_0(v_i) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{\lambda \in \Lambda_j^{m, v_i}} \lambda \lambda^* = \sum_{\lambda \in F^m} \lambda \lambda^* = 1$$



donde la última igualdad se sigue de aplicar la relación CK2 y el hecho que  $F$  no tiene pozos. Luego  $\phi_0$  es un morfismo unital.

Ahora vamos a definir  $\phi_1$ . Como dar un camino  $\mu \in F^{m+1}w_j$  es lo mismo que dar un camino  $\nu \in F^m w_k$  y una arista  $f$  de  $w_k$  en  $w_j$  ( es decir,  $\mu = \nu f$ ) tenemos

$$|F^{m+1}w_j| = \sum_{k=1}^M |F^m w_k| b_{jk} = \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N b_{jk} s_{ki} = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{k=1}^N s_{jk} a_{ki} \right)$$

donde la última igualdad se sigue de  $SA = BS$ . Además,  $a_{ik} = |v_i E^1 v_k|$ , por lo que podemos considerar una partición

$$F^{m+1}w_j = \bigsqcup_{i=1}^N \bigsqcup_{k=1}^N \bigsqcup_{e \in v_i E^1 v_k} \Lambda_j^{m+1,e} \quad (4.6)$$

con  $|\Lambda_j^{m+1,e}| = s_{jk}$  para todo  $e \in v_i E^1 v_k$ . Ordenaremos los elementos

$$\Lambda_j^{m+1,e} = \{\lambda_{j1}^1(e), \dots, \lambda_{js_{jk}}^1(e)\}.$$

Más aún, podemos elegir la partición (4.6) de forma tal que

$$\Lambda_j^{m+1,\widehat{v}_i} = \Lambda_j^{m+1,e_i} = \{\widehat{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda_j^{m+1,v_i}\} \quad (4.7)$$

pues cada  $\Lambda_j^{m+1,v_i}$  es una familia de elementos de  $s_{ji}$  caminos de longitud  $m+1$  que terminan en  $w_j$ . De hecho, podemos fijar que

$$\lambda_{jt}^1(e_k) = \widehat{\lambda_{jt}^0(v_k)} \quad (\text{Ex 1})$$

para todos los posibles valores de  $j, t, k$ . Ahora, dados  $e, f \in E^1$  tales que  $r(e) = v_k = r(f)$ , definimos  $\phi_1 : \mathcal{L}_1^E \rightarrow \mathcal{L}_{m+1}^E$  como

$$\phi_1(e f^*) = \sum_{j=1}^M \sum_{p=1}^{s_{jk}} \lambda_{jp}^1(e) \lambda_{jp}^1(f)^*.$$

Es fácil ver que este es un morfismo bien definido y unital con el mismo argumento que usamos para  $\phi_0$ . Con esta definición tenemos

$$\phi_1(\alpha(v_i)) = \phi_1(e_i e_i^*) = \sum_{j=1}^M \sum_{\lambda \in \Lambda_j^{m+1,e_i}} \lambda \lambda^* = \sum_{j=1}^M \sum_{\lambda \in \Lambda_j^{m,v_i}} \widehat{\lambda} \widehat{\lambda}^* = \beta(\phi_0(v_i))$$

donde usamos (4.7) en la tercera igualdad. Es decir, probamos que  $\phi_1 \circ \alpha = \beta \circ \phi_0$ . Sólo nos falta ver que  $K_0(\phi_1) = S$ , pero

$$K_0(\phi_1) = K_0(\phi_1) \circ K_0(\alpha) = K_0(\beta) \circ K_0(\phi_0) = K_0(\phi_0) = S.$$

### 4.2.2. Levantando el segundo diagrama

En este caso tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^N & \xrightarrow{id_\ell} & \mathbb{Z}^N \\ R \downarrow & & \uparrow R \\ \mathbb{Z}^M & \xrightarrow{id'_m} & \mathbb{Z}^M \end{array}$$

y queremos levantarlo al diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_\ell^E & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{L}_{\ell+1}^E \\ \psi_m \uparrow & & \uparrow \psi_{m+1} \\ \mathcal{L}_m^F & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{L}_{m+1}^F \end{array}$$

donde  $\psi_m$  y  $\psi_{m+1}$  son morfismos unitales tales que  $\psi_m \circ \phi_0 = \iota_{0,\ell}^E$  y  $\psi_{m+1} \circ \phi_1 = \iota_{1,\ell+1}^E$ .

Como  $|v_k E^\ell v_i| = (A^\ell)_{ik} = \sum_{j=1}^M r_{ij} s_{jk}$  y  $|\Lambda_j^{m,v_k}| = s_{jk}$ , podemos considerar una partición de la forma

$$v_k E^\ell v_i = \bigsqcup_{j=1}^M \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda_j^{m,v_k}} \Gamma_i^{\ell,\lambda} \quad (4.8)$$

donde  $|\Gamma_i^{\ell,\lambda}| = r_{ij}$  para todo  $\lambda \in \Lambda_j^{m,v_k}$ . Más aún, tenemos

$$E^\ell v_i = \bigsqcup_{k=1}^N \bigsqcup_{j=1}^M \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda_j^{m,v_k}} \Gamma_i^{\ell,\lambda} \quad (4.9)$$

$$v_k E^\ell = \bigsqcup_{i=1}^N \bigsqcup_{j=1}^M \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda_j^{m,v_k}} \Gamma_i^{\ell,\lambda}. \quad (4.10)$$

En particular, si tomamos  $\lambda = \lambda_{jt}^0(v_k) \in F^m w_j$ , notaremos

$$\Gamma_i^{\ell,\lambda} = \Gamma_i^{\ell,\lambda_{jt}^0(v_k)} = \{\gamma_{i1}^m(\lambda_{jt}^0(v_k)), \dots, \gamma_{ir_{ij}}^m(\lambda_{jt}^0(v_k))\} \subseteq v_k E^\ell v_i.$$

Bajo esta notación, definiremos  $\psi_m : \mathcal{L}_m^F \rightarrow \mathcal{L}_\ell^E$  como

$$\psi_m(\lambda_1 \lambda_2^*) = \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^{r_{ij}} \gamma_{ip}^m(\lambda_1) \gamma_{ip}^m(\lambda_2)^*$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2 \in F^m w_j$ .

De la misma manera que vimos en el caso anterior, es fácil ver que  $\psi_m$  es un morfismo unital tal que  $K_0(\psi_m) = R$ . Además

$$\psi_m \circ \phi_0(v_k) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \sum_{\lambda \in \Lambda_j^{m, v_k}} \sum_{\gamma \in \Gamma_i^{\ell, \lambda}} \gamma \gamma^* = \sum_{\gamma \in v_k E^\ell} \gamma \gamma^* = \iota_{0, \ell}^E(v_k) \quad (4.11)$$

donde usamos (4.10) en la segunda igualdad.

Para definir  $\psi_{m+1}$  observemos primero que, dado  $e \in E^1 v_k$ , tenemos

$$|e E^\ell v_i| = |e(v_k E^\ell v_i)| = \sum_{j=1}^M r_{ij} s_{jk},$$

por lo que podemos considerar una partición de la forma

$$e E^\ell v_i = \bigsqcup_{j=1}^M \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda_j^{m+1, e}} \Gamma_i^{\ell+1, \lambda} \quad (4.12)$$

con  $|\Gamma_i^{\ell+1, \lambda}| = r_{ij}$  para  $\lambda \in \Lambda_j^{m+1, e}$ . Dado  $\lambda \in F^{m+1} w_j$  escribiremos

$$\Gamma_i^{\ell+1, \lambda} = \{\gamma_{i1}^{m+1}(\lambda), \dots, \gamma_{ir_{ij}}^{m+1}(\lambda)\}.$$

Dado  $e \in E^1 v_k$ , la multiplicación a izquierda en (4.8) nos dice

$$e E^\ell v_i = e(v_k E^\ell v_i) = \bigsqcup_{j=1}^M \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda_j^{m, v_k}} e \Gamma_i^{\ell, \lambda}. \quad (4.13)$$

Dado que, por otro lado, hay una biyección entre  $\Lambda_j^{m, v_k}$  y  $\Lambda_j^{m+1, e}$  asignando  $\lambda_{jt}^0(v_k) \leftrightarrow \lambda_{jt}^1(e)$ , podemos tomar

$$\gamma_{ip}^{m+1}(\lambda_{jt}^1(e)) := e \gamma_{ip}^m(\lambda_{jt}^0(v_k)) \quad (4.14)$$

que es coherente con (4.12).

De esta forma, definiremos  $\psi_{m+1} : \mathcal{L}_{m+1}^F \rightarrow \mathcal{L}_{\ell+1}^E$  como

$$\psi_{m+1}(\lambda_1 \lambda_2^*) = \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^{r_{ij}} \gamma_{ip}^{m+1}(\lambda_1) \gamma_{ip}^{m+1}(\lambda_2)^*$$

para  $\lambda_1, \lambda_2 \in F^{m+1} w_j$ . Como en el caso anterior, es fácil ver que este es un morfismo unital. Dados  $e, f \in E^1 v_k$ , tenemos

$$\psi_{m+1}(\phi_1(e f^*)) = \sum_{j=1}^M \sum_{p=1}^{s_{jk}} \psi_{m+1}(\lambda_{jp}^1(e) \lambda_{jp}^1(f)^*) = e \iota_{0, \ell}^E(v_k) f^* = \iota_{0, \ell}^E(e f^*)$$

donde usamos (4.11) y (4.14) en la segunda igualdad. Observemos que

$$e_k \gamma_{ip}^m(\lambda_{jt}^0(v_k)) = \gamma_{ip}^{m+1}(\lambda_{jt}^1(e_k)) = \gamma_{ip}^{m+1}(\widehat{\lambda_{jt}^0(v_k)})$$

donde usamos (4.14) en la primer igualdad y (Ex 1) en la segunda. Es decir, acabamos de probar que

$$\widehat{\gamma_{ip}^m(\lambda)} = \gamma_{ip}^{m+1}(\widehat{\lambda}). \quad (\text{Ex 2})$$

Ahora, dados  $\lambda_1 \in \Lambda_j^{m, v_{k_1}}$  y  $\lambda_2 \in \Lambda_j^{m, v_{k_2}}$ , podemos ver que

$$\begin{aligned} \alpha(\psi_m(\lambda_1 \lambda_2^*)) &= \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^{r_{ij}} \widehat{\gamma_{ip}^m(\lambda_1)} \widehat{\gamma_{ip}^m(\lambda_2)}^* = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^{r_{ij}} \gamma_{ip}^{m+1}(\widehat{\lambda_1}) \gamma_{ip}^{m+1}(\widehat{\lambda_2})^* = \psi_{m+1}(\beta(\lambda_1 \lambda_2^*)). \end{aligned}$$

Es decir,  $\alpha \circ \psi_m = \psi_{m+1} \circ \beta$ . Como en el caso anterior, se sigue de la última igualdad que  $K_0(\psi_{m+1}) = R$ .

### 4.2.3. Levantando el tercer diagrama

En este caso levantaremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^N & \xrightarrow{id_\ell} & \mathbb{Z}^N \\ S \downarrow & & \downarrow S \\ \mathbb{Z}^M & \xrightarrow{id'_{m+\ell}} & \mathbb{Z}^M \end{array}$$

al diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_\ell^E & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{L}_{\ell+1}^E \\ \phi_\ell \downarrow & & \downarrow \phi_{\ell+1} \\ \mathcal{L}_{m+\ell}^F & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{L}_{m+\ell+1}^F \end{array}$$

donde  $\phi_\ell$  y  $\phi_{\ell+1}$  son morfismos unitales tales que  $\phi_\ell \circ \psi_m = \iota_{m, m+\ell}^F$  y  $\phi_{\ell+1} \circ \psi_{m+1} = \iota_{m+1, m+\ell+1}^F$ .

Como  $(B^\ell)_{jk} = \sum_{i=1}^n s_{ji} r_{ik}$  podemos usar el mismo argumento que utilizamos en los casos anteriores para ver que, para cada  $\lambda \in F^{m+1} w_k$ , tenemos una partición

$$\lambda F^\ell w_j = \bigsqcup_{i=1}^N \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma_i^{\ell, \lambda}} \Lambda_j^{m+\ell, \gamma} \quad (4.15)$$

donde  $|\Lambda_j^{m+\ell, \gamma}| = s_{ji}$ . Dado cualquier  $\gamma \in \Gamma_i^{\ell, \lambda}$  podemos escribir

$$\Lambda_j^{m+\ell, \gamma} = \{\lambda_{jq}^\ell(\gamma) \mid 1 \leq q \leq s_{ji}\}.$$

Más aún, como  $(B^\ell)_{jk} = \sum_{i=1}^n s_{ji} r_{ik}$ , podemos considerar la siguiente numeración

$$w_k F^\ell w_j = \{\lambda_{ipq}^{jk} \mid 1 \leq i \leq N, 1 \leq p \leq r_{ik}, 1 \leq q \leq s_{ji}\}. \quad (4.16)$$

De hecho, como  $r(\lambda_{kt}^0(v_d)) = w_k$  para todo  $d, k$ , podemos definir

$$\lambda_{jq}^\ell(\gamma_{ip}^m(\lambda_{kt}^0(v_d))) := \lambda_{kt}^0(v_d) \lambda_{ipq}^{jk}. \quad (4.17)$$

De esta forma definimos  $\phi_\ell : \mathcal{L}_\ell^E \rightarrow \mathcal{L}_{m+\ell}^F$  como

$$\phi_\ell(\gamma_1 \gamma_2^*) = \sum_{j=1}^M \sum_{q=1}^{s_{ji}} \lambda_{jq}^\ell(\gamma_1) \lambda_{jq}^\ell(\gamma_2)^*$$

donde  $\gamma_1, \gamma_2 \in E^\ell v_i$ . El mismo argumento que usamos en los diagramas anteriores muestra que  $\phi_\ell$  es un morfismo unital y  $K_0(\phi_\ell) = S$ .

Dados  $\lambda_1, \lambda_2 \in F^m w_k$  podemos ver que

$$\begin{aligned} \phi_\ell(\psi_m(\lambda_1 \lambda_2^*)) &= \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^{r_{ik}} \phi_\ell(\gamma_{ip}^m(\lambda_1) \gamma_{ip}^m(\lambda_2)^*) = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{p=1}^{r_{ik}} \sum_{q=1}^{s_{ji}} \lambda_{jq}^\ell(\gamma_{ip}^m(\lambda_1)) \lambda_{jq}^\ell(\gamma_{ip}^m(\lambda_2))^*. \end{aligned}$$

Por la elección (4.17) es lo mismo que

$$\lambda_1 \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{p=1}^{r_{ik}} \sum_{q=1}^{s_{ji}} \lambda_{ipq}^{jk} (\lambda_{ipq}^{jk})^* \right) \lambda_2^*$$

donde la suma recorre el conjunto

$$\bigsqcup_{j=1}^M (w_k F^\ell w_j) = w_k F^\ell.$$

Por tanto la suma de arriba es igual a  $\iota_{m, m+\ell}^F(\lambda_1 \lambda_2^*)$ , como queríamos.

Análogamente al caso anterior, para cada  $\lambda \in F^{m+1} w_k$  podemos considerar una partición

$$\lambda F^{\ell+1} = \bigsqcup_{i=1}^N \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma_i^{\ell+1, \lambda}} \Lambda_j^{m+\ell+1, \gamma} \quad (4.18)$$

donde  $|\Lambda_j^{m+\ell+1, \gamma}| = s_{ji}$ . Para cada  $\gamma \in \Gamma_i^{\ell+1, \lambda}$  notaremos

$$\Lambda_j^{m+\ell+1, \gamma} = \{\lambda_{js}^{\ell+1}(\gamma) \mid 1 \leq s \leq s_{ji}\}.$$

Al igual que en el caso (4.17) podemos definir, para cada  $\lambda \in F^{m+1} w_k$ ,

$$\lambda_{js}^{\ell+1}(\gamma_{ip}^{m+1}(\lambda)) := \lambda \lambda_{ips}^{jk}. \quad (4.19)$$

Con esta notación definiremos  $\phi_{\ell+1} : \mathcal{L}_{\ell+1}^E \rightarrow \mathcal{L}_{m+\ell+1}^F$  como

$$\phi_{\ell+1}(\gamma_1 \gamma_2^*) = \sum_{j=1}^M \sum_{s=1}^{s_{ji}} \lambda_{js}^{\ell+1}(\gamma_1) \lambda_{js}^{\ell+1}(\gamma_2)^*.$$

De la misma manera que lo hicimos con  $\phi_\ell$  se puede ver que este es un morfismo unital que satisface las relaciones  $\phi_{\ell+1} \circ \psi_{m+1} = \iota_{m+1, m+\ell+1}^F$  y  $K_0(\phi_{\ell+1}) = S$ .

En este caso también tenemos, usando las relaciones (Ex 2), (4.17) y (4.19), que para todo  $\lambda \in F^m w_k$

$$\lambda_{js}^{\ell+1}(\widehat{\gamma_{ip}^m(\lambda)}) = \lambda_{js}^{\ell+1}(\gamma_{ip}^{m+1}(\widehat{\lambda})) = \widehat{\lambda} \lambda_{ips}^{jk} = \widehat{\lambda} \lambda_{ips}^{jk} = \lambda_{js}^\ell(\widehat{\gamma_{ip}^m(\lambda)}).$$

Por lo tanto, para todo  $\gamma \in \Gamma_i^{\ell, \lambda}$ , tenemos

$$\lambda_{js}^{\ell+1}(\widehat{\gamma}) = \widehat{\lambda}_{js}^\ell(\gamma). \quad (\text{Ex 3})$$

Esta última igualdad implica, al igual que en el caso del segundo diagrama, que  $\phi_{\ell+1} \circ \alpha = \beta \circ \phi_\ell$ .

#### 4.2.4. El paso inductivo

Sean  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\epsilon = 0, 1$  y supongamos que tenemos construidos para todo  $k \leq n$ :

(1) Particiones:

(a) Dado  $\gamma \in E^{(k-1)\ell+\epsilon}$  y  $1 \leq i \leq N$  tenemos

$$\gamma E^\ell v_i = \bigsqcup_{j=1}^M \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda_j^{m+(k-1)\ell+\epsilon, \gamma}} \Gamma_i^{k\ell+\epsilon, \lambda}$$

con  $|\Gamma_i^{k\ell+\epsilon, \lambda}| = r_{ij}$ . Los elementos de  $\Gamma_i^{k\ell+\epsilon, \lambda}$  son notados

$$\Gamma_i^{k\ell+\epsilon, \lambda} = \{\gamma_{ir}^{(k-1)\ell+m+\epsilon}(\lambda) \mid 1 \leq r \leq r_{ij}\}$$

donde  $\lambda = \lambda_{jq}^{(k-1)\ell+\epsilon}(\gamma)$  y

$$\gamma_{ir}^{(k-1)\ell+m+\epsilon}(\lambda_{jq}^{(k-1)\ell+\epsilon}(\gamma)) := \gamma \gamma_{ir}^m(\lambda_{jq}^0(r(\gamma))). \quad (4.20)$$

(b) Dado  $\lambda \in F^{(k-1)\ell+m+\epsilon} w_t$  y  $1 \leq i \leq M$  tenemos

$$\lambda F^\ell w_j = \bigsqcup_{i=1}^N \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma_i^{k\ell+\epsilon, \lambda}} \Lambda_j^{k\ell+m+\epsilon, \gamma}$$

con  $|\Lambda_j^{k\ell+m+\epsilon, \gamma}| = s_{ji}$ . Los elementos de  $\Lambda_j^{k\ell+m+\epsilon, \gamma}$  son notados

$$\Lambda_j^{k\ell+m+\epsilon, \gamma} = \{\lambda_{jq}^{k\ell+\epsilon}(\gamma) \mid 1 \leq q \leq s_{ji}\}$$

donde  $\gamma = \gamma_{ip}^{(k-1)\ell+m+\epsilon}(\lambda)$  y

$$\lambda_{jq}^{k\ell+\epsilon}(\gamma_{ip}^{(k-1)\ell+m+\epsilon}(\lambda)) := \lambda \lambda_{ipq}^{jt}. \quad (4.21)$$

(2) Identidades de intercambio:

(a) Dado  $\lambda \in \Lambda_j^{m+(k-1)\ell, \gamma}$  tenemos

$$\gamma_{ir}^{m+(k-1)\ell+1(\widehat{\lambda})} = \gamma_{ir}^{m+(k-1)\ell}(\widehat{\lambda}). \quad (\text{Ex 2k+1})$$

(b) Dado  $\gamma \in \Gamma_i^{k\ell, \lambda}$  tenemos

$$\lambda_{js}^{k\ell+1(\widehat{\gamma})} = \lambda_{js}^{k\ell}(\widehat{\gamma}). \quad (\text{Ex 2k})$$

(3) Morfismos unitales:

(a)  $\psi_{m+(k-1)\ell+\epsilon} : \mathcal{L}_{m+(k-1)\ell+\epsilon}^F \rightarrow \mathcal{L}_{k\ell+\epsilon}^E$  dados por

$$\psi_{m+(k-1)\ell+\epsilon}(\lambda_1 \lambda_2^*) = \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^{r_{ij}} \gamma_{ir}^{m+(k-1)\ell+\epsilon}(\lambda_1) \gamma_{ir}^{m+(k-1)\ell+\epsilon}(\lambda_2)^*$$

donde  $r(\lambda_1) = r(\lambda_2) = w_j$ .

(b)  $\phi_{k\ell+\epsilon} : \mathcal{L}_{k\ell+\epsilon}^E \rightarrow \mathcal{L}_{m+k\ell+\epsilon}^F$  dados por

$$\phi_{k\ell+\epsilon}(\gamma_1 \gamma_2^*) = \sum_{j=1}^M \sum_{q=1}^{s_{ji}} \lambda_{jq}^{k\ell+\epsilon}(\gamma_1) \lambda_{jq}^{k\ell+\epsilon}(\gamma_2)^*$$

donde  $r(\gamma_1) = r(\gamma_2) = v_i$ .

que satisfacen

- $K_0(\psi_{m+(k-1)\ell+\epsilon}) = R$  y  $K_0(\phi_{k\ell+\epsilon}) = S$ .
- $\psi_{m+(k-1)\ell+\epsilon} \circ \phi_{(k-1)\ell+\epsilon} = \iota_{(k-1)\ell+\epsilon, k\ell+\epsilon}^E$ .
- $\phi_{k\ell+\epsilon} \circ \psi_{m+(k-1)\ell+\epsilon} = \iota_{m+(k-1)\ell+\epsilon, m+k\ell+\epsilon}^F$ .
- $\alpha \circ \psi_{m+(k-1)\ell} = \psi_{m+(k-1)\ell+1} \circ \beta$ .
- $\phi_{k\ell+1} \circ \alpha = \beta \circ \phi_{k\ell}$ .

Ahora vamos a ver que lo mismo sucede para  $k = n + 1$ . Empecemos considerando el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^N & \xrightarrow{id_{(n+1)\ell}} & \mathbb{Z}^N \\ R \downarrow & & \uparrow R \\ \mathbb{Z}^M & \xrightarrow{id'_{m+n\ell}} & \mathbb{Z}^M \end{array}$$

y lo levantaremos al diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{L}_{(n+1)\ell}^E & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{L}_{(n+1)\ell+1}^E \\
 \psi_{m+n\ell} \uparrow & & \uparrow \psi_{m+n\ell+1} \\
 \mathcal{L}_{m+n\ell}^F & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{L}_{m+n\ell+1}^F
 \end{array}$$

Para  $\gamma \in E^{n\ell+\epsilon} v_k$  podemos tomar una partición

$$\gamma E^\ell v_i = \bigsqcup_{j=1}^M \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda_j^{m+n\ell+\epsilon, \lambda}} \Gamma_i^{(n+1)\ell+\epsilon, \lambda} \quad (4.22)$$

donde  $|\Gamma_i^{(n+1)\ell+\epsilon, \lambda}| = r_{ij}$ . Dado  $\lambda = \lambda_{jq}^{n\ell+\epsilon}(\gamma) \in \Gamma_j^{m+n\ell+\epsilon, \gamma}$  notamos

$$\Gamma_i^{(n+1)\ell+\epsilon, \lambda} = \{\gamma_{ir}^{m+n\ell+\epsilon}(\lambda) \mid 1 \leq r \leq r_{ij}\}.$$

Nuevamente podemos pensar que la partición está dada de forma tal que

$$\gamma_{ir}^{m+n\ell+\epsilon}(\lambda_{jq}^{n\ell+\epsilon}(\gamma)) := \gamma \gamma_{ir}^m(\lambda_{jq}^0(r(\gamma))). \quad (4.23)$$

Usando Ex 2n y (4.23) tenemos

$$\gamma_{ir}^{m+n\ell+1}(\widehat{\lambda_{jq}^{n\ell}(\gamma)}) = \gamma_{ir}^{m+n\ell}(\widehat{\lambda_{jq}^{n\ell}(\gamma)})$$

para todo  $\gamma \in E^{n\ell} v_k$ . Esto nos da, para todo  $\lambda \in \Lambda_j^{m+n\ell, \gamma}$

$$\gamma_{ir}^{m+n\ell+1}(\widehat{\lambda}) = \gamma_{ir}^{m+n\ell}(\widehat{\lambda}). \quad (\text{Ex 2n+1})$$

Al igual que en los casos anteriores definimos

$$\psi_{m+n\ell+\epsilon}(\lambda_1 \lambda_2^*) = \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^{r_{ij}} \gamma_{ir}^{m+n\ell+\epsilon}(\lambda_1) \gamma_{ir}^{m+n\ell+\epsilon}(\lambda_2^*).$$

Es fácil ver que  $\psi_{m+n\ell+\epsilon}$  es un morfismo unital tal que  $K_0(\psi_{m+n\ell+\epsilon}) = R$ . Además, usando (4.23) y (4.10), tenemos

$$\psi_{m+n\ell+\epsilon} \circ \phi_{n\ell+\epsilon}(\gamma_1 \gamma_2^*) = \gamma_1 \left( \sum_{\gamma \in r(\gamma_1) E^\ell} \gamma \gamma^* \right) \gamma_2^* = \iota_{n\ell+\epsilon, (n+1)\ell+\epsilon}^E(\gamma_1 \gamma_2^*).$$

Por último la relación (Ex 2n+1) nos da  $\psi_{m+n\ell+1} \circ \beta = \alpha \circ \psi_{m+n\ell}$ .

Análogamente podemos definir las particiones  $\Gamma_j^{m+(n+1)\ell+\epsilon, \gamma}$  y los morfismos  $\phi_{(n+1)\ell+\epsilon}$ , que satisfacen las condiciones necesarias, de manera análoga al caso  $n = 0$  que ya hicimos en detalle.  $\square$

**Observación 4.16.** *Aún no se sabe bajo que condiciones existe un isomorfismo graduado entre  $L(E)$  y  $L^g(E)$ .*



# Apéndice A

## Dinámica simbólica

Veremos las nociones básicas de la dinámica simbólica que son necesarias para este trabajo. El lector interesado en un análisis más profundo del tema puede consultar [19].

En esta sección, a un conjunto finito  $\mathcal{A}$  lo llamaremos *alfabeto*. Sus elementos serán las *letras*.

**Definición A.1.** *Sea  $\mathcal{A}$  un alfabeto finito. El  $\mathcal{A}$ -shift pleno será la colección de sucesiones bi-infinitas de elementos de  $\mathcal{A}$ . Es decir, el  $\mathcal{A}$ -shift pleno es*

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} := \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_i \in \mathcal{A} \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}\}.$$

Un *bloque* o una *palabra* sobre  $\mathcal{A}$  es una sucesión finita de elementos de  $\mathcal{A}$ . Por ejemplo, si  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  e  $i, j \in \mathbb{Z}$  son tales que  $i \leq j$ , podemos considerar el bloque

$$x_{[i,j]} := x_i x_{i+1} \dots x_j.$$

El *tamaño del bloque* será la cantidad de elementos (con repetición) que tiene la sucesión.

Dados  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  y  $w$  un bloque sobre  $\mathcal{A}$ , diremos que  $w$  *ocurre* en  $x$  si existen  $i \leq j$  tales que  $w = x_{[i,j]}$ . Para cada colección  $\mathcal{F}$  de bloques sobre  $\mathcal{A}$ , definimos  $X_{\mathcal{F}}$  como el subconjunto de elementos de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  que no contiene ningún bloque en  $\mathcal{F}$ .

**Definición A.2.** *Un espacio shift (o simplemente un shift) es un subconjunto  $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  tal que  $X = X_{\mathcal{F}}$  para alguna colección de bloques  $\mathcal{F}$ . Los elementos de  $\mathcal{F}$  se llaman los bloques prohibidos por  $X$ .*

*Diremos que un espacio shift  $X$  es de tipo finito, si existe una colección finita  $\mathcal{F}$  tal que  $X = X_{\mathcal{F}}$ .*

**Definición A.3.** *La función shift  $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  asigna:*

$$(\sigma(x))_i = x_{i+1}.$$

Notar que la función shift es biyectiva y que se restringe bien a los espacios shift de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ . Si  $X$  es un espacio shift de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  notaremos  $\sigma_X = \sigma|_X : X \rightarrow X$ .

Sea  $X$  un espacio shift sobre un alfabeto  $\mathcal{A}$ . Denotemos  $\mathcal{B}_N(X)$  al conjunto de todos los bloques de tamaño  $N$  *permitidos*, es decir, todos los bloques  $w$  sobre  $\mathcal{A}$  de tamaño  $N$  que ocurren en  $X$ .

**Definición A.4.** Sean  $X$  un espacio shift sobre  $\mathcal{A}$ ,  $\mathfrak{A}$  un alfabeto,  $m, n$  enteros tales que  $-m \leq n$  y  $\Phi : \mathcal{B}_{m+n+1}(X) \rightarrow \mathfrak{A}$  una función. Definimos la función  $\phi : X \rightarrow \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$  como

$$\phi(x)_i = \Phi(x_{[i-m, i+n]}).$$

A una función de esta forma la llamaremos código de corrimiento de bloque.

Si  $Y \subseteq \mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$  es un espacio shift la notación  $\phi : X \rightarrow Y$  indica que  $\phi(X) \subseteq Y$ .

**Definición A.5.** Un código de corrimiento de bloque  $\phi : X \rightarrow Y$  se llama conjugación si es inversible. Dos espacios shift  $X$  e  $Y$  se dirán conjugados si existe una conjugación de  $X$  en  $Y$ .

Si hay una conjugación de  $X$  en  $Y$  podemos pensar que  $Y$  es una recodificación de  $X$ , compartiendo todas sus propiedades.

Un resultado que nos será de utilidad es el siguiente:

**Proposición A.6** ([19, Theorem 2.1.10.]). *La clase de shifts de tipo finito es cerrada por conjugación.*

**Ejemplo A.7.** Sean  $E$  un grafo finito y  $A = A_E$  su matriz de adyacencia. El edge shift  $X_E$  o  $X_{A_E}$  es el espacio shift de tipo finito, sobre el alfabeto  $E^1$ , dado por

$$X_E = \{\xi \in (E^1)^{\mathbb{Z}} : r(\xi_i) = s(\xi_{i+1}) \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}\}.$$

Notar que  $X_E$  es el espacio shift que tiene como bloques prohibidos a la familia  $\mathcal{F}$  de pares de aristas tal que el final de la primera no coincide con el comienzo de la segunda.

Acorde a esta definición, los elementos en  $X_E$  se corresponden con los caminos infinitos en  $E$ .

Los edge shift son muy importantes en la teoría de subshifts de tipo finito como podemos ver en la siguiente proposición.

**Proposición A.8** ([19, Section 2.3.]). *Todo espacio shift de tipo finito es conjugado a un edge shift para algún grafo  $E$ .*

Supongamos que queremos clasificar los espacios shift de tipo finito módulo conjugación. Por lo visto en la Proposición A.8, es suficiente responder la siguiente pregunta:

Dados grafos  $E$  y  $F$  ¿Cuándo son  $X_E$  y  $X_F$  conjugados?.

La ventaja de esta última formulación, es que ahora podemos usar herramientas de álgebra lineal sobre las matrices de adyacencia de los grafos.

**Definición A.9.** Sean matrices cuadradas  $A$  y  $B$  con coeficientes en  $\mathbb{N}_0$ .

- Una equivalencia elemental de  $A$  en  $B$  es un par  $(R, S)$  de matrices rectangulares con coeficientes en  $\mathbb{N}_0$  que satisfacen  $A = RS$  y  $B = SR$ .
- $A$  y  $B$  son fuertemente shift equivalentes si hay una sucesión de matrices  $A = A_0, A_1, \dots, A_\ell = B$  en la que cada matriz es elementalmente equivalente a la anterior. En este caso, notaremos  $A \approx B$ .

Es fácil ver que la equivalencia fuerte es una relación de equivalencia.

**Teorema A.10** (Teorema de Clasificación). *Los edge shift  $X_A$  y  $X_B$  son conjugados si y sólo si las matrices  $A$  y  $B$  son fuertemente shift equivalentes.*

*Demostración.* Ver [19, Theorem 7.2.7.]. □

Observemos que puede resultar muy difícil decidir cuándo dos matrices son fuertemente shift equivalentes. Esto motiva el estudio de la siguiente relación de equivalencia.

**Definición A.11.** *Sean  $A$  y  $B$  matrices cuadradas con coeficientes en  $\mathbb{N}_0$  y  $\ell \in \mathbb{N}$ . Decimos que  $A$  y  $B$  son shift equivalentes con lag  $\ell$  si existe un par  $(R, S)$  de matrices rectangulares con coeficientes en  $\mathbb{N}_0$  tal que*

$$AR = RB \quad SA = BS \quad A^\ell = RS \quad B^\ell = SR.$$

*Esta situación la notaremos  $A \sim B$ .*

La equivalencia shift es una relación más débil que la equivalencia shift fuerte, por lo tanto cualquier invariante para la equivalencia shift lo es para la equivalencia shift fuerte. A continuación introduciremos uno de estos invariantes.

Dada una matriz  $A \in M_r(\mathbb{Z})$ , definimos el rango eventual de  $A$  como el subespacio de  $\mathbb{Q}^r$

$$\mathcal{R}_A := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A^k \mathbb{Q}^r.$$

Como

$$\mathbb{Q}^r \supseteq A\mathbb{Q}^r \supseteq A^2\mathbb{Q}^r \supseteq \dots \supseteq A^r\mathbb{Q}^r \supseteq \dots$$

un simple argumento de dimensión muestra que  $\mathcal{R}_A = A^r\mathbb{Q}^r$ . Observemos que esta última igualdad nos dice que el rango eventual es el máximo subespacio de  $\mathbb{Q}^r$  donde la matriz  $A$  es inversible.

**Definición A.12.** *Sea una matriz  $A \in M_r(\mathbb{Z})$ . El grupo dimensión de  $A$  es*

$$\Delta_A = \{v \in \mathcal{R}_A \mid A^k v \in \mathbb{Z}^r \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}.$$

*También definimos el cono positivo del grupo dimensión como*

$$\Delta_A^+ = \{v \in \mathcal{R}_A \mid A^k v \in (\mathbb{N}_0)^r \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}$$

*y el automorfismo dimensión*

$$\delta_A : \Delta_A \rightarrow \Delta_A$$

*que manda  $v \mapsto Av$ .*

*Por último, definimos la triple dimensión como la 3-upla  $(\Delta_A, \Delta_A^+, \delta_A)$ .*

Un morfismo  $\varphi : (\Delta_A, \Delta_A^+, \delta_A) \rightarrow (\Delta_B, \Delta_B^+, \delta_B)$  es un morfismo de grupos  $\varphi : \Delta_A \rightarrow \Delta_B$  tal que  $\varphi(\Delta_A^+) \subseteq \Delta_B^+$  y  $\varphi \circ \delta_A = \delta_B \circ \varphi$ . Diremos que  $\varphi : (\Delta_A, \Delta_A^+, \delta_A) \rightarrow (\Delta_B, \Delta_B^+, \delta_B)$  es un isomorfismo si  $\varphi : \Delta_A \rightarrow \Delta_B$  es un isomorfismo de grupos abelianos.

El grupo dimensión es un invariante para la equivalencia shift. Más aún, es un invariante completo. Es decir,

**Teorema A.13.** *Sean  $A$  y  $B$  matrices cuadradas con coeficientes en  $\mathbb{N}_0$ . Entonces  $A \sim B$  si y sólo si existe un isomorfismo  $\varphi : (\Delta_A, \Delta_A^+, \delta_A) \rightarrow (\Delta_B, \Delta_B^+, \delta_B)$ .*

*Demostración.* Sólo daremos una idea de como construir los isomorfismos y las matrices, respectivamente. Para más detalles en la demostración nos referimos a [19, Theorem 7.5.8.].

Como  $A \sim B$  tenemos matrices  $R$  y  $S$  que cumplen las relaciones de la Definición A.11. Luego la multiplicación a izquierda por las matrices  $S$  y  $R$  dan los isomorfismos deseados.

Supongamos que  $A \in M_n(\mathbb{N}_0)$  y  $B \in M_m(\mathbb{N}_0)$ . Como  $A^n e_i \in \Delta_A^+$  para todo  $1 \leq i \leq n$ , tenemos que  $\phi(A^n e_i) \in \Delta_B^+$ . Por tanto existe  $k$  suficientemente grande tal que  $B^k \phi(A^n e_i) \in \mathbb{N}_0^m$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Definimos la matriz  $S$  como la matriz que en la  $i$ -ésima columna tiene al vector  $B^k \phi(A^n e_i)$ . Análogamente, definimos la matriz  $R$  como la matriz que tienen en su  $j$ -ésima columna al vector  $A^\ell \phi^{-1}(e_j B^m)$  para un  $\ell$  suficientemente grande. Estas dos matrices cumplen las relaciones necesarias.  $\square$

**Definición A.14.** Un sistema dinámico  $(M, \phi)$  consiste de un espacio métrico compacto  $M$  junto con una función continua  $\phi : M \rightarrow M$ .

Un morfismo de sistemas dinámicos  $\theta : (M, \phi) \rightarrow (N, \psi)$  es una función continua  $\theta : M \rightarrow N$  tal que  $\theta \circ \phi = \psi \circ \theta$ .

Un morfismo de sistemas dinámicos  $\theta : (M, \phi) \rightarrow (N, \psi)$  es una conjugación topológica si  $\theta$  es un homeomorfismo.

**Ejemplo A.15.** Sean  $X$  un espacio shift y  $\sigma_X$  su función shift, podemos definir una métrica en  $X$  declarando

$$d((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}, (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = \begin{cases} 2^{-k} & \text{si } x \neq y \text{ y } k = \max\{n \in \mathbb{N}_0 \mid x_{[-n, n]} = y_{[-n, n]}\} \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Con esta estructura de espacio métrico tenemos que  $(X, \sigma_X)$  es un sistema dinámico.

**Teorema A.16** ([19, Theorem 6.2.9.]). Sean  $X$  e  $Y$  edge shift,  $\theta : X \rightarrow Y$  una función (no necesariamente continua). Entonces  $\theta$  es un código de corrimiento de bloque si y sólo si  $\theta$  es un morfismo de sistemas dinámicos. En particular, la noción de conjugación y conjugación topológica coinciden para edge shifts.

Por último introduciremos la noción de equivalencia de flujo.

Sea  $(M, \phi)$  un sistema dinámico. Llamaremos *flujo continuo* en  $M$  a una familia de homeomorfismos  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}} : M \rightarrow M$  tal que:

1.  $\phi_t(x)$  es continuo en la variable  $(t, x)$ .
2.  $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$ .

La *órbita* de un punto  $m \in M$  bajo el flujo  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  es el conjunto  $\{\{\phi_t\}(m) \mid t \in \mathbb{R}\}$ .

Una *equivalencia* entre dos flujos  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}} : M \rightarrow M$  y  $\{\psi_t\}_{t \in \mathbb{R}} : N \rightarrow N$  es un homeomorfismo  $\pi : M \rightarrow N$  tal que manda órbitas de  $\{\phi_t\}$  en órbitas de  $\{\psi_t\}$  preservando la orientación. Es decir, para todo  $m \in M$  existe una función monótonamente creciente  $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\pi(\phi_t(x)) = \psi_{f_m(t)}(\pi(x))$ . Dos flujos son equivalentes si existe una equivalencia de uno en el otro.

La suspensión  $S_M$  de  $M$  es el espacio resultante de tomar el producto  $M \times \mathbb{R}$  y dividir por la relación de equivalencia generada por  $(x, s+1) \sim (\phi(x), s)$  para todo  $x \in M, s \in \mathbb{R}$ . Hay una manera natural de darle a  $S_M$  una estructura de espacio métrico (ver [8]).

Si definimos  $\phi_t : X \rightarrow X$  como

$$\phi_t([(x, s)]) = [(x \cdot s + t)]$$

obtenemos un flujo continuo en  $S_M$ . Este será la *suspensión de flujo* sobre  $(M, \phi)$ .

**Definición A.17.** Sean  $(M, \phi)$  y  $(N, \psi)$  sistemas dinámicos. Decimos que son equivalentes de flujo si sus suspensiones de flujo son equivalentes.

*Notar que podemos restringir esta relación de equivalencia a los edge shift.*

Un teorema muy importante para la teoría de subshifts de tipo finito es el siguiente.

**Teorema A.18** (Teorema de Franks). Sean  $A \in M_n(\mathbb{N}_0)$  y  $B \in M_m(\mathbb{N}_0)$  simultáneamente irreducibles y no triviales. Entonces las matrices  $A$  y  $B$  son equivalentes de flujo si y sólo si:

$$\det(I_n - A) = \det(I_m - B) \quad \text{y} \quad \mathbb{Z}^n / (I_n - A)\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^m / (I_m - B)\mathbb{Z}^m.$$

*Demostración.* Ver [11].

□



# Bibliografía

- [1] G. ABRAMS, P. N. ÁNH, A. LOULY, E. PARDO, *Flow invariants in the classification of Leavitt algebras*, J. Algebra 333 (2011), 202-231.
- [2] G. ABRAMS, G. ARANDA PINO, *The Leavitt path algebra of a graph*, J. Algebra 293 (2005), 319-334.
- [3] G. ABRAMS, G. ARANDA PINO, *Purely infinite simple Leavitt path algebras*, J. Pure Appl. Algebra, 207 (2006), 553-563.
- [4] P. ARA, M.A. GONZÁLEZ-BARROSO, K.R. GOODEARL, E. PARDO, *Fractional skew monoid rings*, J. Algebra 278 (2004), no. 1, 104-126.
- [5] P. ARA, K. R. GOODEARL, E. PARDO,  *$K_0$  of purely infinite simple regular rings*, K-Theory, 26 (2002), 69-100.
- [6] P. ARA, M.A. MORENO, E. PARDO, *Nonstable  $K$ -Theory for graph algebras*, Algebra Rep. Th. 10 (2007), 157-178.
- [7] P. ARA, E. PARDO, *Towards a  $K$ -theoretic characterization of graded isomorphisms between Leavitt path algebras*, preprint, <http://arxiv.org/abs/1210.3127>.
- [8] R. BOWEN AND P. WALTERS, *Expansive one-parameter flows*, J. Diff. Eqn. 12 (1972), 180-193.
- [9] J. CUNTZ, *Simple  $C^*$ -algebras generated by isometries*, Comm. Math. Phys. 57 (1977) 173-185.
- [10] J. CUNTZ, W. KRIEGER, *A class of  $C^*$ -algebras and topological Markov chains*, Invent. Math. 63 (1981) 25-40.
- [11] J. FRANKS, *Flow equivalence of subshifts of finite type*, Ergodic Theory Dynam. Systems 4 (1984), 53-66.
- [12] R. HAZRAT, *The dynamics of Leavitt path algebras*, Journal of Algebra, 384 (2013) 242-266.
- [13] R. HAZRAT, *The graded Grothendieck group and the classification of Leavitt path algebras*, Math. Annalen 355 (2013), 273-325.
- [14] HOAN DUONG, *An invariant for locally finite dimensional semisimple algebras*, Ph.D. thesis. University of Ottawa, Canada, 1995.

- [15] D. HUANG, *Automorphisms of Bowen-Franks groups of shifts of finite type*, Ergodic Theory Dynam. Systems 21 (2001), 1113-1137.
- [16] E. KIRCHBERG, *The classification of purely infinite  $C^*$ -algebras using Kasparov theory*, preprint.
- [17] A. KUMJIAN, D. PASK, I. RAEBURN, *Cuntz-Krieger algebras of directed graphs*, Pacific J. Math. 184 (1) (1998) 161-174.
- [18] W.G. LEAVITT, *The module type of a ring*, Trans. Amer. Math. Soc. 42 (1962) 113-130.
- [19] D. LIND, B. MARCUS, *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, Reprinted 1999 (with corrections). ISBN 0-521-55900-6.
- [20] NĂSTĂSESCU, F. VAN OYSTAEYEN, *Methods of graded rings*, Lecture Notes in Mathematics, 1836, Springer Verlag, Berlin, 2004.
- [21] W. PARRY AND D. SULLIVAN, *A topological invariant for flows on one-dimensional spaces*, Topology 14 (1975), 297-299.
- [22] W.L. PASCHKE, *The crossed product of a  $C^*$ -algebra by an endomorphism*, Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980), 113-118.
- [23] N.C. PHILLIPS, *A classification theorem for nuclear purely infinite simple  $C^*$ -algebras*, Doc. Math. 5 (2000) 49-114.
- [24] M. RØRDAM, *Classification of Cuntz-Krieger algebras*, K-Theory 9 (1995), 31-58.
- [25] J. ROSENBERG, *Algebraic K-Theory and Its Applications*, Springer 1994, ISBN 0387942483.
- [26] JOSEPH J. ROTMAN, *Advanced Modern Algebra*, American Mathematical Soc., Prentice Hall 2010, ISBN 0821884204.