



**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
**Departamento de Matemática**

**Tesis de Licenciatura**

**Redes de reacciones bioquímicas y familias playas**

**Magalí Giaroli**

**Directora:** Dra. Alicia Dickenstein

Marzo de 2014



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. Redes de reacciones bioquímicas</b>	<b>9</b>
1.1. Redes de reacciones químicas . . . . .	9
1.2. Sistema de reacciones químicas . . . . .	10
1.3. Subespacio estequiométrico y clases de estequiometría . . . . .	13
1.4. Estados de equilibrio . . . . .	15
1.5. Ejemplos de redes . . . . .	16
<b>2. Subredes y redes embebidas</b>	<b>19</b>
2.1. Algunas definiciones . . . . .	19
2.2. Levantando multiestacionariedad de subredes . . . . .	20
2.3. Levantando multiestacionariedad de redes embebidas . . . . .	24
<b>3. Comparando redes y multiestacionariedad</b>	<b>29</b>
3.1. Enunciado general . . . . .	29
3.2. Subredes . . . . .	31
3.3. Reacciones inflows y outflows . . . . .	32
3.4. Intermediarios . . . . .	35
<b>4. Módulos y morfismos playos</b>	<b>41</b>
4.1. Módulos playos . . . . .	41
4.2. Playitud y Tor . . . . .	43
4.3. Playitud y Localización . . . . .	46
4.4. Ideales de Fitting y flat locus . . . . .	50
4.5. Playitud y syzygies . . . . .	53
4.6. Ejemplos geométricos y familias playas . . . . .	54
4.7. Playitud y dimensión de las fibras . . . . .	59
<b>5. Redes bioquímicas y familias playas</b>	<b>63</b>
5.1. Playitud en ceros no degenerados . . . . .	64
5.2. Como chequear playitud . . . . .	66
5.3. Redes bioquímicas y playitud . . . . .	75
<b>Bibliografía</b>	<b>80</b>



# Introducción

La teoría de Redes de Reacciones Químicas ha sido desarrollada a lo largo de los últimos 40 años a partir de los trabajos seminales de Feinberg [Fei72, Fei77, FH77, Fei79, Fei89, Fei95a, Fei95b], Horn y Jackson [Hor72, HJ72, Hor73, Hor74] y Vol'pert (en ruso) [VK75]. Estos sistemas tienen un amplio rango de aplicaciones en las ciencias físicas y juegan un rol importante en la biología de sistemas.

La introducción de métodos algebraicos es relativamente nueva. Gatermann introdujo la conexión entre cinética de acción de masas y el álgebra computacional por medio de varios trabajos entre 2001 y 2005 [Gat01, GH02, GW05]. Gunawardena y coautores también comenzaron a abordar estos resultados de Teoría de Redes de Reacciones Químicas con herramientas algebraicas [Gun03, Gun07, Gun12, MG08, TG09a, TG09b]). Desde ese entonces, se han introducido herramientas algebraicas en trabajos de diferentes autores como por ejemplo Craciun, Dickenstein, Pérez Millán, Shiu, Sturmfels, y coautores ([CDSS09, MDSC12, KPMD<sup>+</sup>12, DPM11, CNP13, KPMD<sup>+</sup>12, PGRC14, SS10] y Feliu, Wiuf y coautores ([FW12a, FW12b, FW13b, FKA12, HFWS13, KFW12])). Aún así la mayoría de las herramientas algebraicas que se utilizan son todavía básicas.

Las no linealidades presentes en las redes moleculares han conducido tradicionalmente a estudiar su comportamiento por medio de simulaciones numéricas. Esto conlleva en general la dificultad (o imposibilidad) de estimar los parámetros. Sin embargo, las redes moleculares con cinética de acción de masas dan lugar a sistemas dinámicos polinomiales, cuyos equilibrios son por lo tanto los ceros de un sistema polinomial. Estas ecuaciones pueden ser analizadas por métodos algebraicos, en los cuales los parámetros son tratados como expresiones simbólicas sin conocer sus valores numéricos. En muchos casos de interés, este abordaje permite predecir el comportamiento de las soluciones, por ejemplo en el caso de redes biológicas enzimáticas.

Típicamente, las redes bioquímicas son muy complejas y por lo tanto, el estudio se restringe a subredes de las que se espera extrapolar el comportamiento dinámico de la red total. En este sentido, U. Alon y colaboradores introdujeron la noción de “motif”, que corresponde a subredes que se observan en redes reales con mucha mayor probabilidad que en redes aleatorias [SOMMA02]. Esta idea fue también desarrollada por ejemplo en [FW12a] donde determinan condiciones para la existencia de multiestacionariedad en pequeños motifs sin feedback que ocurren recurrentemente en redes enzimáticas, como paso previo al estudio de la multiestacionariedad en redes generales. Un concepto similar es el de “átomos de multiestacionariedad” introducido en [JS13]. En todos los casos, se espera extrapolar a la red total las características cualitativas fundamentales que son posibles de ser estudiadas en subredes más pequeñas (ver también [CFRS07]), en particular la posible

ocurrencia de multiestacionariedad.

Con las notaciones del Capítulo 1, una red de reacciones (bio)químicas da lugar a un sistema dinámico  $\dot{x} = f(x)$ ; más precisamente, si  $x_i(t)$  es la concentración de la especie  $X_i$  en el instante  $t$ , tenemos:

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i(x)$$

Si consideramos a la red con cinética de acción de masas, las funciones  $f_i$  son polinomios en las variables  $x_j$ , y en las variables  $k_l$ , donde  $k$  es el vector de las constantes de reacción.

Variando las constantes de reacción nos queda una familia de polinomios  $f_i(x, k)$ . Nos interesa ver qué pasa con los ceros de estos polinomios a medida que variamos las constantes  $k$ . Para esto consideramos el ideal  $I$  generado por los  $f_i(x, k)$ , y consideramos la variedad  $V(I) \subset \mathbb{C}^{s+r}$  ( $s$  es el número de especies de la red, y  $r$  es el número de reacciones, o en otros casos, si tenemos fijas algunas constantes, el número de constantes de reacción que varían). Consideramos la proyección

$$\begin{aligned} \pi: V(I) \subset \mathbb{C}^{s+r} &\rightarrow \mathbb{C}^r \\ (x, k) &\mapsto k \end{aligned}$$

Veremos en el Capítulo 5 que la noción de familia playa que introducimos en el Capítulo 4, generaliza la condición de existencia de ceros no degenerados, para la que vale el teorema de funciones implícitas. Esta es la herramienta que está en la base de los trabajos [JS13] y [FW13a] que presentamos en los Capítulos 2 y 3, donde se definen las nociones de subred y de red embebida. Lo que nos interesa entonces es ver cuándo el morfismo  $\pi$  es playa. Notemos que en general los estados de equilibrio de una subred pueden verse como la fibra de una proyección sobre un punto donde las constantes de reacciones que no pertenecen a la subred se igualan a 0. Similarmente, los estados de equilibrio de una red embebida pueden verse como la fibra de una proyección sobre las variables dinámicas representando las concentraciones que se omiten y las constantes de reacción, donde se igualan a 1 estas variables omitidas y se igualan a 0 las constantes de las reacciones removidas, y las que salgan de complejos que solo envuelvan estas especies.

La noción de playitud, introducida por Serre y llevada a su madurez por Grothendieck, es de alguna manera la contraparte algebraica de la noción de continuidad para estas familias ([Eis95], [Har77]).

A continuación resumimos el contenido de la tesis.

En el Capítulo 1 introducimos las notaciones y los conceptos básicos de la teoría de redes de reacciones bioquímicas.

En los Capítulos 2 y 3, como ya mencionamos, mostramos algunos resultados que se conocen relacionados con la extrapolación de multiestacionariedad de una red más pequeña a una red más grande. En el capítulo 2 mostramos un resultado de Joshi y Shi ( [JS13], que dice que si una subred admite múltiples estados de equilibrio no degenerados, estos pueden levantarse a la red más grande, bajo ciertas hipótesis. También mostramos un resultado análogo para redes embebidas, que son redes más pequeñas que se obtienen removiendo especies. En el capítulo 3 presentamos los resultados de Feliu y Wiuf [FW13a],

que muestran un resultado análogo al de Joshi y Shiu, de levantamiento de multiestacionariedad de subredes, aunque con otra prueba. También muestran que, bajo ciertas hipótesis, una red que admite multiestacionariedad la sigue manteniendo al agregarle reacciones de flujo o intermediarios.

En el Capítulo 4 presentamos la teoría de módulos y morfismos playos. Primero daremos una presentación totalmente algebraica de módulos playos y las propiedades más importantes; también introducimos herramientas teóricas como el funtor Tor e ideales de Fitting, que nos servirán luego para los cálculos computacionales. Finalmente mostraremos ejemplos geométricos e introduciremos la noción de familias playas, y la relación que tiene la playitud con la dimensión de las fibras. Los resultados presentados en este capítulo están basados principalmente en los libros [Eis95], [BGL<sup>+</sup>07], [DL06] y [AM69].

Finalmente, en el Capítulo 5, utilizamos las herramientas teóricas desarrolladas en el Capítulo 4, para mostrar como chequear computacionalmente la playitud. Utilizaremos el programa SINGULAR ([Dec12]). Luego aplicamos estas herramientas a ejemplos concretos con redes de reacciones bioquímicas. Las fuentes consultadas en este capítulo incluyen los libros [BGL<sup>+</sup>07], [DL06], y los artículos [Ass94], [RT13], y [BM93].

El objetivo a largo plazo de este trabajo es aplicar el concepto de familias playas para el estudio teórico y computacional de redes bioquímicas. Como conclusión del estudio realizado en esta tesis, queda delineado el trabajo futuro a realizar: el desarrollo de teoremas sobre redes bioquímicas para redes playas relevantes en las aplicaciones en casos de ceros degenerados (en particular, de ceros reales positivos) y el desarrollo de herramientas computacionales adaptadas a estas redes.





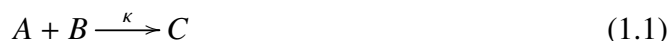
# Capítulo 1

## Redes de reacciones bioquímicas

En este capítulo daremos una introducción a la Teoría de Redes de Reacciones Bioquímicas, presentando las notaciones y los conceptos básicos.

### 1.1. Redes de reacciones químicas

Primero veamos un ejemplo de cómo una red de reacciones químicas da lugar a un sistema dinámico.



Éste es un ejemplo de una *reacción química*. En esta reacción una unidad de la *especie*  $A$  y una unidad de la especie  $B$  reaccionan, a una velocidad de reacción  $\kappa$ , para formar una unidad de la especie  $C$ . El *reactante*  $A + B$  y el *producto*  $C$  son llamados *complejos*. Las concentraciones molares<sup>1</sup> de las especies  $A$ ,  $B$  y  $C$ , que notamos respectivamente  $x_A$ ,  $x_B$  y  $x_C$ , cambian mientras la reacción ocurre. Bajo *cinética de acción de masas*, las especies  $A$  y  $B$  reaccionan a una velocidad proporcional al producto de sus concentraciones, donde la constante de proporcionalidad es la constante  $\kappa$ . Nos queda el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_A &= \dot{x}_A = -\kappa x_A x_B \\ \frac{d}{dt}x_B &= \dot{x}_B = -\kappa x_A x_B \\ \frac{d}{dt}x_C &= \dot{x}_C = \kappa x_A x_B \end{aligned}$$

En este ejemplo observamos que  $\dot{x}_A + \dot{x}_C = 0$  y que  $\dot{x}_B + \dot{x}_C = 0$ . Luego  $x_A + x_C = C_1$  y  $x_B + x_C = C_2$ , donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes, que dependen de las condiciones iniciales ( $C_1 = x_A(0) + x_C(0)$  y  $C_2 = x_B(0) + x_C(0)$ ). Es decir el vector concentración  $(x_A(t), x_B(t), x_C(t))$  está contenido en la variedad afín  $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = C_1, y + z =$

---

<sup>1</sup>La concentración molar, digamos  $x_A$ , especifica el número de moléculas  $A$  por unidad de volumen de mezcla. Más precisamente,  $x_A$  es el número de moléculas  $A$  por unidad de volumen, dividido por el número de Avogadro,  $6,023 \times 10^{23}$ .

$C_2$ ). El subespacio  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0, y + z = 0\}$  se llama el *subespacio estequiométrico* o de *estequiometría* de la red.

Una *red de reacciones químicas* es un grafo dirigido en cuyos vértices están etiquetados los complejos, y cuyas aristas representan reacciones. Al grafo lo notamos  $G = (V, A)$ , donde  $V$  es el conjunto de vértices, con cardinal  $\#V = n$ , donde  $n$  es el número de complejos y  $A$  es el conjunto de aristas,  $A \subseteq V \times V$ , con cardinal  $\#A = r$ , donde  $r$  es el número de reacciones.

Al vértice  $i$  del grafo, que representa al  $i$ -ésimo complejo de la red, le asociamos el monomio:

$$x^{y_i} = x_1^{(y_i)_1} x_2^{(y_i)_2} \dots x_s^{(y_i)_s},$$

donde  $s$  denota el número de especies. Más precisamente, si el  $i$ -ésimo complejo es de la forma  $(y_i)_1 A + (y_i)_2 B + \dots$ , entonces le asociamos el monomio:  $x^{y_i} = x_A^{(y_i)_1} x_B^{(y_i)_2} \dots$ .

Por ejemplo, en la red (1.1) al complejo  $A + B$  le asociamos el monomio  $x_A x_B$ , que determina el vector  $y_1 = (1, 1, 0)$  y al complejo  $C$  le asociamos el monomio  $x_C$ , que determina el vector  $y_2 = (0, 0, 1)$ . Nos referiremos a  $y_1, \dots, y_n$  como los complejos de la red.

Una red de reacciones químicas consiste entonces de tres conjuntos:

- Un conjunto finito de *especies*  $S = \{X_1, X_2, \dots, X_s\}$ .
- Un conjunto finito de vectores  $C = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , con  $y_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^s$ , que representan a los complejos de la red. Cumplen que para cada especie  $X_i \in S$ , existe un complejo  $y \in C$  que contiene a la especie  $X_i$ .
- Un conjunto de reacciones  $\mathcal{R} \subset C \times C$ , que cumplen:
  - $(y, y) \notin \mathcal{R}$  para todo  $y \in C$ , o sea, ningún complejo reacciona con sí mismo.
  - Para cada complejo  $y \in C$  existe  $y' \in C$  tal que  $(y, y') \in \mathcal{R}$  o  $(y', y) \in \mathcal{R}$ , es decir, existe una reacción en  $\mathcal{R}$  para la cual  $y$  es el complejo reactante o el complejo producto.

$(y, y') \in \mathcal{R}$  indica que el complejo  $y$  reacciona al complejo  $y'$ ; en general escribiremos  $y \rightarrow y'$ .

A una red  $G$  con un conjunto de especies  $S$ , con un conjunto de complejos  $C$  y con un conjunto de reacciones  $\mathcal{R}$  la notamos  $G = \{S, C, \mathcal{R}\}$ .

## 1.2. Sistema de reacciones químicas

El vector concentración

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_s(t))$$

representa la concentración  $x_i(t)$  de la especie  $i$  en el instante  $t$ . Como vimos al principio de este capítulo, una red de reacciones químicas define un sistema dinámico por medio

de una *función de velocidad* para cada reacción. Es decir a cada reacción  $y_k \rightarrow y'_k$  le asignamos una función  $C^1$ ,  $R_k(\cdot) = R_{y_k \rightarrow y'_k}(\cdot)$ , que satisface las siguientes propiedades:

1.  $R_{y_k \rightarrow y'_k}(\cdot)$  depende explícitamente de  $x_i$  sólo si  $(y_k)_i \neq 0$
2.  $\frac{\partial}{\partial x_i} R_{y_k \rightarrow y'_k}(x) \geq 0$  para los  $x_i$  con  $(y_k)_i \neq 0$ , y la igualdad puede valer sólo si al menos una coordenada de  $x$  es cero.
3.  $R_{y_k \rightarrow y'_k}(x) = 0$  si  $x_i = 0$  para algún  $i$  con  $(y_k)_i \neq 0$ .
4. Si  $1 \leq (y_k)_i < (y_\ell)_i$ , entonces  $\lim_{x_i \rightarrow 0} \frac{R_\ell(x)}{R_k(x)} = 0$ , donde todas las demás  $x_j > 0$  están fijas en el límite.

El punto 4. simplemente señala que si la reacción  $\ell$  demanda más moléculas de la especie  $X_i$  como entrada que la reacción  $k$ , entonces la velocidad de la reacción  $\ell$  decrece a 0 más rápido que la reacción  $k$ , cuando  $x_i \rightarrow 0$ .

**Definición 1.2.1.** Una *cinética*  $K$  para una red de reacciones químicas  $G = \{\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R}\}$  es la asignación a cada reacción  $y_k \rightarrow y'_k \in \mathcal{R}$  de una función de velocidad  $R_k(\cdot) = R_{y_k \rightarrow y'_k}(\cdot)$ , que satisface las propiedades anteriores.

**Definición 1.2.2.** Un *sistema de reacciones químicas*  $G = \{\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R}, K\}$  es una red de reacciones químicas  $G = \{\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R}\}$  con cinética  $K$ .

Dada una red de reacciones químicas  $G = \{\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R}\}$  y una cinética  $K$ , tenemos el siguiente sistema dinámico asociado a la red:

$$f(x(t)) := \dot{x}(t) = \sum_{y_k \rightarrow y'_k \in \mathcal{R}} R_k(x(t))(y'_k - y_k) \quad (1.2)$$

A la función  $f$  la llamamos *función de velocidad de formación de especies*. Observamos que para cada especie  $X_i$ ,  $f_i(x)$  nos da la tasa instantánea de generación de la especie  $X_i$  mientras ocurren simultáneamente todas las reacciones de  $\mathcal{R}$ . Nos queda

$$f_i(x(t)) = \dot{x}_i(t) = \sum_{y_k \rightarrow y'_k \in \mathcal{R}} R_k(x(t))((y'_k)_i - (y_k)_i),$$

luego  $f_i(x)$  se obtiene sumando todas las funciones de velocidad, cada una multiplicada por el número neto de moléculas de  $X_i$  producidas en la reacción correspondiente.

Un ejemplo importante de cinética, y que es la que usaremos mayormente en este trabajo, es la cinética de acción de masas. Como vimos en el ejemplo de la red (1.1), con esta cinética las especies reaccionan a una velocidad proporcional al producto de sus concentraciones.

**Definición 1.2.3.** Decimos que un sistema de reacciones químicas tiene *cinética de acción de masas* si todas las funciones  $R_k$  tienen la forma:

$$R_k(x) = \kappa_k x_1^{(y_k)_1} x_2^{(y_k)_2} \dots x_s^{(y_k)_s} =: \kappa_k x^{y_k}$$

para algún vector positivo de constantes de reacción  $(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_r) \in \mathbb{R}_{>0}^r$ , con la convención de que  $0^0 = 1$ .

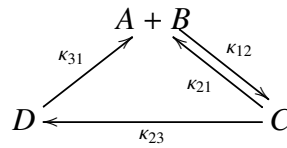
Es fácil chequear que dichas  $R_k$  cumplen las propiedades de las funciones de velocidad que mencionamos anteriormente.

Por (1.2), la función de velocidad de formación de especies de una red de reacciones con cinética de acción de masas nos queda así:

$$f(x(t)) := \dot{x}(t) = \sum_{y_k \rightarrow y'_k \in \mathcal{R}} \kappa_k x(t)^{y_k} (y'_k - y_k) \quad (1.3)$$

Se puede ver que el sistema dinámico asociado a la red (1.1) nos quedó igual al que definimos recién.

**Ejemplo 1.2.4.** Consideremos el modelo de transducción de señales de células o linfocitos T, propuesto por el inmunologista McKeithan [Mck95]. Los receptores de los linfocitos T se unen tanto a antígenos propios como a antígenos extraños y las características dinámicas de este modelo dan una posible explicación de cómo los linfocitos T pueden reconocer unos de otros. Un estudio matemático de la dinámica de este modelo fue hecho por Sontag [Son01]. En el caso más simple la red de reacciones es así:



$A$  denota al receptor del linfocito T,  $B$  denota el complejo mayor de histocompatibilidad (CMH) del antígeno propio,  $C$  denota a la especie  $A$  unida con la especie  $B$ , y  $D$  denota la forma activada (fosforilada) de  $C$ . La unión de  $A$  y  $B$  para formar  $C$  desencadena una señal de alerta de  $D$ . El mecanismo general propuesto por McKeithan incluye varias formas activadas de  $C$ , hasta que se obtiene una forma final (activa) que desencadena el ataque. En este ejemplo la red tiene 4 reacciones, 4 especies:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , y 3 complejos:  $A + B$ ,  $C$  y  $D$ . Las ecuaciones diferenciales que nos quedan con cinética de acción de masas son:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_A}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_D}{dt} \end{pmatrix} = \kappa_{12} x_A x_B \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \kappa_{21} x_C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \kappa_{23} x_C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \kappa_{31} x_D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es decir

$$\begin{cases} \frac{dx_A}{dt} = -\kappa_{12}x_Ax_B + \kappa_{21}x_C + \kappa_{31}x_D \\ \frac{dx_B}{dt} = -\kappa_{12}x_Ax_B + \kappa_{21}x_C + \kappa_{31}x_D \\ \frac{dx_C}{dt} = \kappa_{12}x_Ax_B - \kappa_{21}x_C - \kappa_{23}x_C \\ \frac{dx_D}{dt} = \kappa_{23}x_C - \kappa_{31}x_D \end{cases}$$

Observamos que una red de reacciones químicas da lugar a una familia de cinéticas de acción de masas, parametrizada por la elección de una constante de reacción  $\kappa \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  para cada reacción y todas las reacciones que no están en la red pueden ser vistas como si tuvieran una constante de reacción igual a 0. Ahora generalizamos este concepto de familias parametrizadas para otras cinéticas.

**Definición 1.2.5.** Una *familia parametrizada de cinéticas* para redes de reacciones químicas con especies  $\mathcal{S}$  es una asignación para cada posible reacción  $y_k \rightarrow y'_k$  (que involucre solo especies de  $\mathcal{S}$ ) de una función suave

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^s &\rightarrow \mathbb{R}^s \\ (\kappa_k, x) &\mapsto R_k^{\kappa_k}(x) \end{aligned}$$

tal que

- para  $\kappa_k > 0$ , la función  $R_k^{\kappa_k}(x)$  es una función de velocidad para la reacción  $y_k \rightarrow y'_k$ ,
- si  $\kappa_k = 0$ , entonces  $R_k^{\kappa_k}(x)$  es la función cero.

### 1.3. Subespacio estequiométrico y clases de estequiometría

La idea fundamental de esta sección, es que la estructura de la red, sin tener en cuenta la cinética, impone restricciones a las trayectorias. En particular, una trayectoria que pasa por  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^s$ , eventualmente puede pasar por  $x' \in \mathbb{R}_{\geq 0}^s$  sólo si son compatibles bajo ciertas condiciones “estequiométricas”. Por ejemplo para la red (1.1), vimos que las trayectorias  $(x_A(t), x_B(t), x_C(t))$  estaban contenidas en una variedad afín. Veamos algunas definiciones:

**Definición 1.3.1.** El *subespacio estequiométrico* de la red de reacciones químicas  $G = \{\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{R}\}$  es el subespacio generado por todos los vectores  $y'_k - y_k$  si  $y_k \rightarrow y'_k \in \mathcal{R}$ . Denotaremos a este subespacio  $S$ :

$$S := \langle y'_1 - y_1, \dots, y'_r - y_r \rangle \subset \mathbb{R}^s$$

Calculemos el subespacio estequiométrico  $S$  para la red del ejemplo 1.2.4. En este caso los complejos son:  $y_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $y_2 = (0, 0, 1, 0)$ ,  $y_3 = (0, 0, 0, 1)$ . Y las reacciones que aparecen son  $y_1 \rightarrow y_2$ ,  $y_2 \rightarrow y_1$ ,  $y_2 \rightarrow y_3$ ,  $y_3 \rightarrow y_1$ . Luego

$$S = \langle (-1, -1, 1, 0), (1, 1, -1, 0), (0, 0, -1, 1), (1, 1, 0, -1) \rangle.$$

Entonces nos queda  $S = \langle (1, 1, -1, 0), (0, 0, -1, 1) \rangle$ .

En el ejemplo (1.1) observamos que la trayectoria  $x(t)$ , que empieza en un vector positivo  $x(0) = C_0 \in \mathbb{R}_{>0}^s$  se mantiene en  $S + C_0$ . De hecho, integrando (1.2) nos queda que:

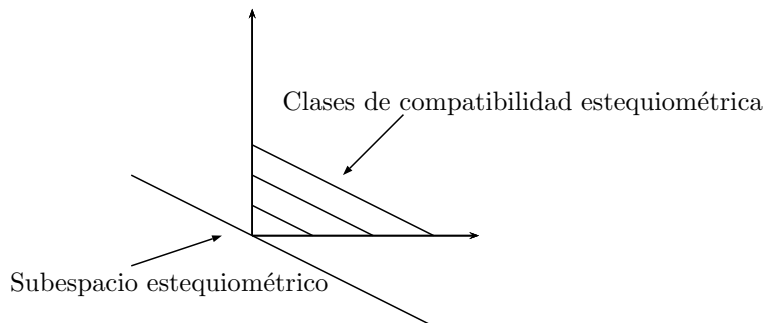
$$x(t) = x(0) + \sum_{y_k \rightarrow y'_k \in \mathcal{R}} \left( \int_0^t R_k(x(s)) ds \right) (y'_k - y_k)$$

Luego la trayectoria  $x(t)$ , empezando en un vector positivo  $x(0) = C_0 \in \mathbb{R}_{>0}^s$ , permanece en  $S + C_0$  para todo  $t \geq 0$ . Las ecuaciones (lineales) de  $x(0) + S$  son llamadas *leyes o relaciones de conservación*.

**Definición 1.3.2.** Sea  $G = \{S, C, \mathcal{R}\}$  una red de reacciones químicas y  $S$  su subespacio estequiométrico. Para cada  $C_0 \in \mathbb{R}_{>0}^s$  definimos una *clase de compatibilidad estequiométrica* o *clase de estequiometría*:

$$\mathcal{P} := (C_0 + S) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^s$$

Decimos que  $x, x' \in \mathbb{R}_{\geq 0}^s$  son *compatibles estequiometricamente* si están en la misma clase de compatibilidad estequiométrica, o sea, si  $x - x' \in S$ .



En el ejemplo 1.2.4,  $x, x' \in \mathbb{R}_{\geq 0}^4$  son compatibles estequiometricamente si  $x - x' \in S = \langle (1, 1, -1, 0), (0, 0, -1, 1) \rangle$ . Además si tenemos una condición inicial  $x(0) = C$ , entonces la trayectoria  $x(t)$  está contenida en  $S + C$ .

Ahora una definición que nos permite escribir a la función de velocidad de formación de especies de otra manera.

**Definición 1.3.3.** Si tenemos una red de reacciones químicas  $G = (S, C, \mathcal{R})$ , definimos la *matriz de estequiometría* de  $G$ , que notamos  $N$ , a la matriz que tiene por columnas los vectores  $y'_k - y_k$ , donde  $y_k \rightarrow y'_k$  es una reacción en  $\mathcal{R}$ .

Por ejemplo, la matriz de estequiometría de la red del ejemplo 1.2.4 nos queda:

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Observamos que la imagen de la matriz de estequiometría es el subespacio estequiométrico, es decir  $\text{Im}(N) = S$ . Además también vemos que la matriz de estequiometría sólo depende de la estructura de la red, y no de la cinética asociada al sistema.

Una cinética asociada a una red la podemos pensar como una función  $K: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$ , con  $K(x) = (R_1(x), \dots, R_r(x))$ , con  $R_i$  una función de velocidad para la reacción  $i$ . Con esta notación, la función de velocidad de formación de especies nos queda:

$$f(x(t)) = NK(x)$$

$N$  refleja la estructura de la red, y  $K$  la dinámica.

## 1.4. Estados de equilibrio

Dado un sistema de reacciones químicas, estamos interesados en conocer sus puntos o estados de equilibrio. Un estado de equilibrio de un sistema de reacciones es un vector de concentración que es un cero de la función de velocidad de formación de especies  $f$ . Más formalmente:

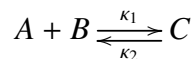
**Definición 1.4.1.** Un vector de concentración  $\bar{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^s$  es un *estado de equilibrio* del sistema (1.2) si  $f(\bar{x}) = 0$  y  $\bar{x}$  es un estado de equilibrio positivo si es un estado de equilibrio y  $\bar{x} \in \mathbb{R}_{> 0}^s$ .

Algunas redes no admiten estados de equilibrio positivos. Por ejemplo en la red (1.1), con cinética de acción de masas, los estados de equilibrio cumplen:

$$\kappa x_A x_B = 0$$

Luego la red no admite estados de equilibrio positivos para ninguna elección positiva de la constante  $\kappa$ . En este caso los estados de equilibrio que aparecen están caracterizados por la extinción de alguna especie.

Ahora consideramos la red (1.1), pero agregándole una reacción que haga a la red reversible



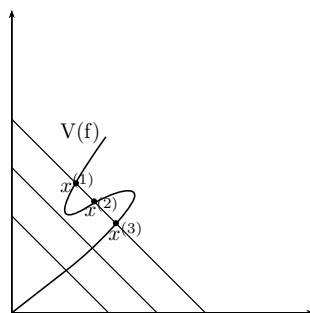
En este caso, con cinética de acción de masas, se puede ver que la red sí admite estados de equilibrio positivos en cada una de las clases de compatibilidad estequiométrica, para cualquier valor positivo que tomen las constantes de reacción.

Aunque sea fácil determinar si existen o no estados de equilibrio en estas redes pequeñas, esto no es cierto en redes más complejas. Nos quedan sistemas, a veces enormes, de ecuaciones polinomiales en varias variables, y además con parámetros desconocidos.

Una pregunta de interés es si las ecuaciones diferenciales de un sistema de reacciones químicas admiten múltiples estados de equilibrio en cierta clase de compatibilidad estequiométrica.

**Definición 1.4.2.** Sea  $G$  una red de reacciones químicas, y sea  $\mathcal{K}$  una familia de cinéticas parametrizadas en  $\mathcal{S}$  especies. Decimos que  $G$  admite múltiples  $\mathcal{K}$ -estados de equilibrio o admite  $\mathcal{K}$ -multiestacionariedad si existe una cinética  $(K(x))_k = R_k^{\kappa_k}$  proveniente de  $\mathcal{K}$  y una clase de compatibilidad estequiométrica  $P$  tal que el sistema dinámico (1.2) tiene dos o más estados de equilibrio en  $P$ .

La siguiente figura ilustra la intersección de la variedad de los estados de equilibrio  $V(f)$  de cierto sistema de redes bioquímicas, con las diferentes clases de compatibilidad estequiométrica. En una de ellas hay 3 estados de equilibrio distintos,  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$  y  $x^{(3)}$ . Luego la red admite multiestacionariedad.



Como dijimos, un ejemplo importante de familia de cinéticas es la familia de cinéticas de acción de masas. En este caso, la red  $G$  admite múltiples estados de equilibrios con cinética de acción de masas si existen constantes de reacción  $\kappa_k \in \mathbb{R}_{>0}$  y una clase de compatibilidad estequiométrica  $P$  tal que el sistema (1.3) admite al menos dos estados de equilibrio positivos en  $P$ .

La multiestacionariedad es la base de la riqueza de los comportamientos biológicos, por oposición a redes químicas donde es importante la monoestacionariedad.

## 1.5. Ejemplos de redes

En esta sección mostraremos algunos ejemplos más de redes de reacciones que modelan ciertos fenómenos biológicos.

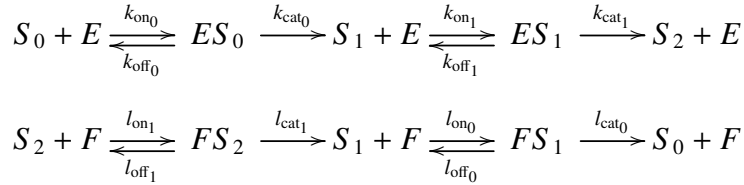
**Ejemplo 1.5.1.** Los procesos de fosforilación/desfosforilación consisten en la modificación de proteínas mediante enzimas, proteínas particulares que añaden o quitan un grupo fosfato en un lugar específico, induciendo un cambio estructural que permite/impide, que la proteína pueda llevar a cabo su función. Edmond H. Fischer y Edwin G. Krebs recibieron el Premio Nobel en Fisiología o Medicina en 1992 por su descubrimiento de que la fosforilación reversible de proteínas es un importante mecanismo biológico de regulación celular. El bloque estándar de construcción en la señalización celular es el siguiente mecanismo enzimático:





Esta red involucra 4 especies: el sustrato  $S_0$ , el sustrato fosforilado  $S_1$ , la enzima  $E$  y la especie intermedia  $ES_0$ , con constantes de reacción  $k_{on}$ ,  $k_{off}$ ,  $k_{cat}$ .

Ahora mostramos una red que corresponde al caso en el que ocurren 2 fosforilaciones secuenciales:



En esta red tenemos 9 especies: los sustratos con 0, 1 y 2 lugares fosforilados  $S_0, S_1, S_2$ , las especies intermedias:  $ES_0, ES_1, FS_1, FS_2$  y dos enzimas  $E, F$  ( $E$  se llama kinasa y  $F$  fosfatasa), y tenemos 10 complejos:  $S_0 + E, S_1 + E, S_2 + E, ES_0, ES_1, S_0 + F, S_1 + F, S_2 + F, FS_1, FS_2$ . Renombrando a las especies y a los complejos siguiendo el orden anterior, obtenemos el siguiente sistema dinámico para las concentraciones bajo cinética de acción de masas:

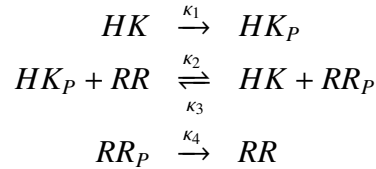
$$\begin{array}{ll}
 \frac{dx_1}{dt} = -\kappa_{14}x_1x_8 + \kappa_{41}x_4 + \kappa_{96}x_6 & \frac{dx_6}{dt} = \kappa_{79}x_2x_9 - (\kappa_{96} + \kappa_{97})x_6 \\
 \frac{dx_2}{dt} = -\kappa_{25}x_2x_8 + \kappa_{42}x_4 + \kappa_{52}x_5 & \frac{dx_7}{dt} = \kappa_{8,10}x_3x_9 - (\kappa_{10,7} + \kappa_{10,8})x_7 \\
 -\kappa_{79}x_2x_9 + \kappa_{97}x_6 + \kappa_{10,7}x_7 & \frac{dx_8}{dt} = -\kappa_{14}x_1x_8 - \kappa_{25}x_2x_8 + (\kappa_{41} + \kappa_{42})x_4 \\
 & + (\kappa_{52} + \kappa_{53})x_5 \\
 \frac{dx_3}{dt} = \kappa_{53}x_5 - \kappa_{8,10}x_3x_9 + \kappa_{10,8}x_7 & \\
 \frac{dx_4}{dt} = \kappa_{14}x_1x_8 - (\kappa_{41} + \kappa_{42})x_4 & \frac{dx_9}{dt} = -\kappa_{79}x_2x_9 - \kappa_{8,10}x_3x_9 + (\kappa_{96} + \kappa_{97})x_6 \\
 \frac{dx_5}{dt} = \kappa_{25}x_2x_8 - (\kappa_{52} + \kappa_{53})x_5 & + (\kappa_{10,7} + \kappa_{10,8})x_7
 \end{array}$$

El subespacio estequiométrico  $S$  tiene dimensión 6, luego hay  $9 - 6 = 3$  leyes de conservación (linealmente independientes), que por lo general se toman como el sustrato total, y los totales de enzimas  $E$  y  $F$ :

$$\begin{array}{l}
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = S_{tot} \\
 x_4 + x_5 + x_8 = E_{tot} \\
 x_6 + x_7 + x_9 = F_{tot}
 \end{array}$$

Las constantes  $S_{tot}, E_{tot}, F_{tot}$  están determinadas por las condiciones iniciales.

**Ejemplo 1.5.2.** Los sistemas reguladores de dos componentes se encuentran de forma natural en bacterias como sistemas de sensores del medio ambiente y de respuesta. Estos sistemas son sistemas biológicos de señalización en los que una proteína histidina quinasa ( $HK$ ), en respuesta a un estímulo, se autofosforila para después transferir esa señal química a otra proteína llamada proteína reguladora de respuesta ( $RR$ ). La red es la siguiente (las P indican las formas fosforiladas de las proteínas):



En esta red tenemos 4 reacciones, 4 especies:  $HK$ ,  $RR$ ,  $HK_P$  y  $RR_P$ , y 6 complejos:  $HK$ ,  $RR$ ,  $HK_P$ ,  $RR_P$ ,  $HK_P + RR$  y  $HK + RR_P$ . Si renombramos las especies:  $X_1 = HK$ ,  $X_2 = HK_P$ ,  $X_3 = RR$  y  $X_4 = RR_P$ , el sistema dinámico asociado a la red con cinética de acción de masas nos queda:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= -\kappa_1 x_1 + \kappa_2 x_2 x_3 - \kappa_3 x_1 x_4 \\
 \frac{dx_2}{dt} &= \kappa_1 x_1 - \kappa_2 x_2 x_3 + \kappa_3 x_1 x_4 \\
 \frac{dx_3}{dt} &= -\kappa_2 x_2 x_3 + \kappa_3 x_1 x_4 + \kappa_4 x_4 \\
 \frac{dx_4}{dt} &= \kappa_2 x_2 x_3 - \kappa_3 x_1 x_4 - \kappa_4 x_4
 \end{aligned}$$

La matriz de estequiometría nos queda en este caso:

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego  $S = \text{Im } N = \langle (-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1) \rangle$ , y tenemos 2 leyes de conservación:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &= HK_{tot} \\
 x_3 + x_4 &= RR_{tot}
 \end{aligned}$$

Se puede ver, por ejemplo, que con cinética de acción de masas, esta red no admite múltiples estados de equilibrio en alguna clase de estequiometría para ninguna elección de constantes de reacción positivas.

# Capítulo 2

## Subredes y redes embebidas

En este capítulo veremos que si una subred admite múltiples estados de equilibrio no degenerados, estos pueden levantarse a la red más grande, bajo la hipótesis de que las dos redes compartan el mismo subespacio estequiométrico. También mostraremos un resultado análogo para una red embebida, informalmente, esto es cuando una red es obtenida de otra más grande removiendo reacciones y “removiendo especies”. Los resultados presentados en este capítulo pertenecen a B. Joshi y A. Shiu, trabajo que se puede consultar en [JS13].

### 2.1. Algunas definiciones

**Definición 2.1.1.** Sea  $G = \{\mathcal{S}, C, \mathcal{R}\}$  una red de reacciones químicas, donde  $\mathcal{S}, C$  y  $\mathcal{R}$  denotan el conjunto de especies  $\{X_i\}$ , el conjunto de complejos  $\{y\}$ , y el conjunto de reacciones  $\{y \rightarrow y'\}$  respectivamente.

1. Consideremos un subconjunto de especies  $S \subset \mathcal{S}$ , un subconjunto de complejos  $C \subset C$  y un subconjunto de reacciones  $R \subset \mathcal{R}$ .
  - La *restricción de  $R$  a  $S$* , notada  $R|_S$ , es el conjunto de reacciones que se obtiene tomando las reacciones en  $R$  y removiendo de los complejos todas las especies que no están en  $S$ . Si se obtiene una reacción trivial en este proceso (una reacción en la que el complejo reactante y el complejo producto son el mismo), entonces se remueve. También se remueven las copias extra de las reacciones repetidas.
  - La *restricción de  $C$  a  $R$* , notada  $C|_R$ , es el conjunto de complejos (reactantes y productos) de las reacciones en  $R$ .
  - La *restricción de  $S$  a  $C$* , notada  $S|_C$ , es el conjunto de especies que están en los complejos en  $C$ .
2. La red obtenida de  $G$  removiendo un subconjunto de especies  $X_i \subset \mathcal{S}$  es la red

$$\{\mathcal{S} \setminus X_i, C|_{\mathcal{R}|_{\mathcal{S} \setminus X_i}}, \mathcal{R}|_{\mathcal{S} \setminus X_i}\}$$

3. Un subconjunto de reacciones  $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$  define la *subred*  $\{\mathcal{S}|_{\mathcal{C}|\mathcal{R}'}, \mathcal{C}|\mathcal{R}', \mathcal{R}'\}$ .
4. Una *red embebida* de  $G$ , que está definida por un subconjunto de especies  $\mathcal{S} = \{X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}\} \subset \mathcal{S}$ , y un subconjunto de reacciones,  $\mathcal{R} = \{R_{j_1}, R_{j_2}, \dots, R_{j_\ell}\} \subset \mathcal{R}$ , que involucran a especies de  $\mathcal{S}$ , es la red  $\{\mathcal{S}, \mathcal{C}|_{\mathcal{R}|\mathcal{S}}, \mathcal{R}|\mathcal{S}\}$ , que consiste de las reacciones  $\mathcal{R}|\mathcal{S}$ .

**Observación 2.1.2.** Una red es también una subred y una red embebida de sí misma.

Cualquier subred  $\{\mathcal{S}|_{\mathcal{C}|\mathcal{R}'}, \mathcal{C}|\mathcal{R}', \mathcal{R}'\}$  es una red embebida definida por el subconjunto de especies  $\mathcal{S}|_{\mathcal{C}|\mathcal{R}'}$  y el subconjunto de reacciones  $\mathcal{R}'$ .

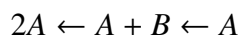
**Ejemplo 2.1.3.** Consideremos la siguiente red de reacciones químicas:



La siguiente subred se obtiene de la red anterior removiendo dos reacciones:



Y ahora obtenemos la siguiente red embebida removiendo la especie  $C$ :



**Definición 2.1.4.** Una reacción *de flujo* contiene solo una molécula  $X_i$ ; y puede ser una reacción *inflow* si es de la forma  $0 \rightarrow X_i$  (representa el flujo de la especie  $X_i$  desde el exterior), o una reacción *outflow* si es de la forma  $X_i \rightarrow 0$  (representa la eliminación o degradación de la especie  $X_i$ ).

Recordemos que un vector de concentración  $\bar{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^s$  es un estado de equilibrio del sistema (1.2) si  $f(\bar{x}) = 0$ . Ahora mostramos dos definiciones que necesitaremos en los teoremas que siguen:

**Definición 2.1.5.** Un estado de equilibrio  $\bar{x} \in \mathbb{R}_{> 0}^s$  es *no degenerado* si  $\text{Im } df(\bar{x}) = S$ , donde  $S$  es el subespacio estequiométrico de la red, y donde  $df(\bar{x})$  es la matriz diferencial de  $f$  en  $\bar{x}$ : es la matriz de tamaño  $s \times s$  cuyo lugar  $(i, j)$  es igual a  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x})$ .

**Definición 2.1.6.** Un estado de equilibrio no degenerado  $\bar{x}$  es *exponencialmente estable* si cada uno de los  $\dim(S)$  autovalores distintos de cero de  $df(\bar{x})$  tiene parte real negativa.

## 2.2. Levantando multiestacionariedad de subredes

Si una subred  $N$  de una red  $G$  admite múltiples estados de equilibrios positivos, ¿entonces  $G$  también? El siguiente teorema nos dice que la respuesta es sí, bajo la hipótesis de que los estados de equilibrio son no degenerados y que las dos redes comparten el mismo subespacio estequiométrico (observamos que el subespacio estequiométrico de una subred siempre está contenido en el subespacio estequiométrico de la red más grande). La prueba levanta cada estado de equilibrio  $x^*$  de  $N$  a un estado de equilibrio “cercano” de  $G$ .

**Teorema 2.2.1.** *Sea  $N$  una subred de una red de reacciones químicas  $G$  tal que compartan el mismo subespacio estequiométrico:  $S_N = S_G$ . Sea  $\mathcal{K}$  una familia parametrizada de cinéticas en las especies de  $G$ . Entonces vale lo siguiente:*

- *Si  $N$  admite múltiples  $\mathcal{K}$ - estados de equilibrios no degenerados positivos, entonces  $G$  también. Además, si  $N$  admite finitos de esos estados de equilibrio, entonces  $G$  admite al menos esa cantidad.*
- *Por otra parte, si  $N$  admite múltiples estados de equilibrio positivos exponencialmente estables, entonces  $G$  también. Además, si  $N$  admite finitos de esos estados de equilibrio, entonces  $G$  admite al menos esa cantidad.*

La prueba del teorema utiliza el siguiente resultado de homotopía, cuya demostración puede consultarse en [CHW08].

**Lema 2.2.2.** *Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$  un subespacio vectorial, sea  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  un poliedro contenido en una traslación afín de  $S$  y sea  $\Omega \subset \text{int}(\mathcal{P})$  un dominio acotado en el interior relativo de  $\mathcal{P}$ . Supongamos que  $g_\lambda: \overline{\Omega} \rightarrow S$  es una familia de funciones suaves que varían continuamente tal que*

1. *para todo  $\lambda \in [0, 1]$   $g_\lambda$  no tiene ceros en la frontera de  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$  y*
2. *para  $\lambda = 0$  y  $\lambda = 1$ ,  $\text{Im } dg_\lambda(x) = S$  para todo  $x \in \Omega$ .*

*Entonces el número de ceros de  $g_0$  en  $\Omega$  es igual al número de ceros de  $g_1$  en  $\Omega$ .*

Usando el lema, ahora demostramos el teorema.

*Demostración del Teorema 2.2.1.* Como  $G$  y  $N$  comparten el mismo subespacio estequiométrico, llamémoslo  $S$ , entonces tienen que tener el mismo conjunto de especies  $S$ .

Sean  $\mathcal{R}_G$  y  $\mathcal{R}_N$  el conjunto de reacciones de  $G$  y  $N$  respectivamente, y sea  $\mathcal{R}'$  el conjunto de reacciones que están en  $G$  pero no están en  $N$ , luego  $\mathcal{R}_G = \mathcal{R}_N \sqcup \mathcal{R}'$ .

Supongamos ahora que la subred  $N$  admite múltiples estados de equilibrio no degenerados positivos; esto es, existen constantes  $\kappa_1^*, \kappa_2^*, \dots, \kappa_{|\mathcal{R}_N|}^* \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que existen dos estados de equilibrio no degenerados positivos distintos,  $x^*$  y  $x^{**}$ , del sistema dinámico  $f_N$  asociado a la red  $N$  y a las constantes  $\kappa_i^*$  derivado de la familia de cinéticas  $\mathcal{K}$ , en una misma clase de compatibilidad estequiométrica, que llamamos  $\mathcal{P}$ .

Como  $x^*$  es un estado de equilibrio no degenerado, existe un entorno abierto relativo  $\Omega$  de  $x^*$  en el interior de  $\mathcal{P}$  tal que: (1)  $x^*$  es el único estado de equilibrio, cero de  $f_N$ , en  $\Omega$  y (2)  $\text{Im } df_N(x) = S$  para todo  $x \in \Omega$ , pues que el determinante no sea cero es una condición abierta, y la matriz  $df_N(x)$  varía continuamente en  $x$ .

Para cualquier vector de constantes  $\kappa \in \mathbb{R}_{>0}^{|\mathcal{R}'|}$ , definimos la siguiente familia de funciones para  $0 \leq \lambda \leq 1$ :

$$g_\lambda^\kappa(x) := f_N(x) + \sum_{y_k \rightarrow y'_k \in \mathcal{R}'} (y'_k - y_k) R_k^{\lambda \kappa}(x)$$

Observamos que  $g_\lambda^\kappa(x)$  nos da las ecuaciones diferenciales del sistema dinámico asociado a la red  $G$  derivado de la familia de cinéticas  $\mathcal{K}$ , y de las constantes:

$$(\kappa^*, \lambda\kappa) := (k_1^*, k_2^*, \dots, k_{|\mathcal{R}_N|}^*, \lambda\kappa_1, \lambda\kappa_2, \dots, \lambda\kappa_{|\mathcal{R}'|}) \in \mathbb{R}_{>0}^{|\mathcal{R}_G|}.$$

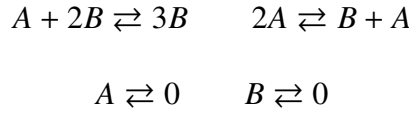
Además  $g_0^\kappa(x) = f_N(x)$ . Luego por la continuidad en  $\kappa$  y la compacidad de la frontera  $\partial\Omega$ , existe un vector de constantes  $\tilde{\kappa} \in \mathbb{R}_{>0}^{|\mathcal{R}'|}$ , tal que para todo  $0 \leq \lambda$ , la función  $g_\lambda^{\tilde{\kappa}}(x)$  no tiene ceros en  $\partial\Omega$ . Por continuidad en  $\lambda$ , y achicando  $\tilde{\kappa}$  si fuera necesario, también podemos asumir que  $\text{Im } d_x g_\lambda^{\tilde{\kappa}}(x) = S$  para todo  $x \in \Omega$ . Luego, por el Lema 2.2.2, el sistema dinámico asociado a  $G$  y a las constantes  $(\kappa^*, \lambda\tilde{\kappa})$ , tiene un estado de equilibrio no degenerado en  $\Omega$  para todo  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Repetimos el argumento para  $x^{**}$ , teniendo en cuenta en este caso que el abierto relativo  $\Omega'$  alrededor de  $x^{**}$  no interseque a  $\Omega$ . Achicamos  $\tilde{\kappa}$  si es necesario. Luego  $G$  con las constantes  $(\kappa^*, \lambda\tilde{\kappa})$  tiene al menos dos estados de equilibrio no degenerados. Lo mismo en el caso de que haya tres o más estados de equilibrio no degenerados.

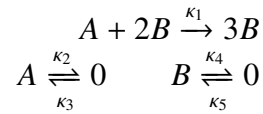
Para la parte de estabilidad, simplemente observamos que los autovalores de una matriz varían continuamente bajo perturbaciones continuas.  $\square$

Veamos un ejemplo de aplicación del teorema:

**Ejemplo 2.2.3.** Consideremos la red



La siguiente es una subred que tiene el mismo subespacio estequiométrico (todo  $\mathbb{R}^2$ )



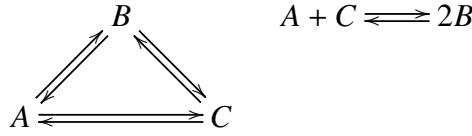
Esta subred, con cinética de acción de masas, tiene el siguiente sistema dinámico asociado:

$$\begin{aligned} \frac{dx_A}{dt} &= -\kappa_1 x_A x_B^2 - \kappa_2 x_A + \kappa_3 \\ \frac{dx_B}{dt} &= \kappa_1 x_A x_B^2 + \kappa_4 x_B + \kappa_5 \end{aligned}$$

Tomando las constantes  $\kappa_1 = 1/11$ ,  $\kappa_2 = 1$ ,  $\kappa_3 = 60$ ,  $\kappa_4 = 11$  y  $\kappa_5 = 6$ , esta subred admite 3 estados de equilibrio no degenerados en cada clase de compatibilidad estequiométrica: (55, 1), (44, 2) y (66, 3). Luego, por el Teorema 2.2.1, la red original admite múltiples estados de equilibrio.

Ahora, veamos un ejemplo en el que no vale el teorema, y muestra la necesidad de la hipótesis de no degeneración de los estados de equilibrio.

**Ejemplo 2.2.4.** Consideremos la siguiente red:



Se puede ver que esta red no admite multiestacionariedad con cinética de acción de masas, pero la siguiente subred admite múltiples estados de equilibrio positivos degenerados:



Nos quedan las ecuaciones:

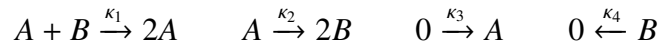
$$\begin{aligned}
 \frac{dx_A}{dt} &= \kappa_1 x_B - \kappa_3 x_A x_C \\
 \frac{dx_B}{dt} &= -\kappa_1 x_B - \kappa_2 x_B + \kappa_3 x_A x_C \\
 \frac{dx_C}{dt} &= \kappa_2 x_B - \kappa_3 x_A x_C
 \end{aligned}$$

Observamos que para que haya algún estado de equilibrio necesariamente  $\kappa_1 = \kappa_2$ , y en este caso las clases de compatibilidad estequiométrica (de dimensión 2) contienen infinitos estados de equilibrio degenerados.

Una manera de que una red y una subred de esta compartan el mismo subespacio estequiométrico es obtener la red a partir de la subred haciendo reversibles algunas reacciones que antes eran irreversibles. Luego, el Teorema 2.2.1 nos da el siguiente corolario:

**Corolario 2.2.5.** *Sea  $N$  una red de reacciones químicas, y sea  $\mathcal{K}$  una familia parametrizada de cinéticas en las especies de  $N$ . Sea  $G$  una red obtenida a partir de  $N$  haciendo algunas reacciones irreversibles de  $N$ , reversibles. Entonces si  $N$  admite múltiples  $\mathcal{K}$ -estados de equilibrio no degenerados positivos, entonces  $G$  también.*

**Ejemplo 2.2.6.** Consideremos la red con cinética de acción de masas



Nos quedan las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_A}{dt} &= \kappa_1 x_A x_B - \kappa_2 x_A + \kappa_3 \\
 \frac{dx_B}{dt} &= -\kappa_1 x_A x_B + 2\kappa_2 x_A - \kappa_4 x_B
 \end{aligned}$$

Esta red admite multiestacionariedad. Si elegimos estas constantes de reacción  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2 = 6$ ,  $\kappa_3 = 6$  y  $\kappa_4 = 6$ , la red tiene 2 estados de equilibrio positivos y no degenerados en cada clase de compatibilidad estequiométrica (que en este caso es una sola, todo el cuadrante positivo, pues  $S = \mathbb{R}^2$ ),  $(2, 5)$  y  $(3, 7)$ . Además esta red es una subred de:



que se obtiene haciendo reversible las reacciones de la subred que eran irreversibles. Luego, por el Corolario 2.2.5, esta última red admite multiestacionariedad.

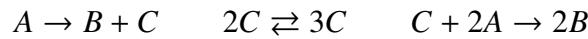
### 2.3. Levantando multiestacionariedad de redes embebidas

En esta sección mostraremos un resultado análogo al visto para subredes, para redes embebidas con cinética de acción de masas. Antes una definición:

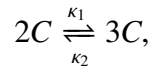
**Definición 2.3.1.** Una subred de *tipo de flujo* con acción de masas para una especie  $X_i$  de una red  $G$  es una subred  $N$  no vacía de  $G$  tal que:

1. Las reacciones en  $N$  solo involucran a la especie  $X_i$ .
2. Existe una elección de las constantes de reacción  $\kappa_r^*$  para las reacciones  $r \in \mathcal{R}_N$  de  $N$ , tal que  $\bar{x}_i = 1$  es un estado de equilibrio no degenerado para el sistema dinámico asociado a esta subred  $N$  con cinética de acción de masas.

**Ejemplo 2.3.2.** Si tenemos la red  $G$



Entonces la subred  $N$ :



es una subred de  $G$  de tipo de flujo con acción de masas para la especie  $C$ , ya que las reacciones en  $N$  sólo involucran a la especie  $C$ , y como la ecuación diferencial que nos queda en este caso es:

$$\frac{dx_C}{dt} = \kappa_1 x_C^2 - \kappa_2 x_C^3,$$

tomando por ejemplo  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ ,  $\bar{x}_C = 1$  es un estado de equilibrio no degenerado para la subred  $N$ .

El siguiente teorema es análogo al teorema de la sección anterior.

**Teorema 2.3.3.** *Sea  $N$  una red embebida de la red  $G$  tal que:*

1. *El subespacio estequiométrico de  $N$  es  $S_N = \mathbb{R}^{|S_N|}$*
2. *Para cada especie  $X_i$  que esté en  $G$  pero no en  $N$ , existe una subred de  $G$  de tipo de flujo de acción de masas para  $X_i$ .*

Entonces vale lo siguiente:

- *Si  $N$  admite múltiples estados de equilibrios no degenerados positivos bajo cinética de acción de masas, entonces  $G$  también. Además, si  $N$  admite finitos de esos estados de equilibrio, entonces  $G$  admite al menos esa cantidad.*
- *Por otra parte, si  $N$  admite múltiples estados de equilibrio positivos exponencialmente estables bajo cinética de acción de masas, entonces  $G$  también. Además, si  $N$  admite finitos de esos estados de equilibrio, entonces  $G$  admite al menos esa cantidad.*



La prueba requiere el siguiente lema, que establece que si una red embebida se obtiene removiendo una sola especie, cada estado de equilibrio no degenerado  $u$ , puede ser levantado a un estado de equilibrio de la red más grande, cercano a  $(u, 1)$ .

**Lema 2.3.4.** *Sea  $G$  una red de reacciones químicas con cinética de acción de masas, con  $s$  especies  $X_1, \dots, X_s$  y sea  $N$  una red embebida, también con cinética de acción de masas, con  $s - 1$  especies  $X_1, \dots, X_{s-1}$  tal que el subespacio estequiométrico de  $N$ ,  $S_N$ , es  $\mathbb{R}^{s-1}$ . Supongamos que las reacciones de  $G$  y las reacciones de  $N$  pueden ser escritas, respectivamente, como  $\mathcal{R}_G = \{\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2, \dots, \widetilde{R}_m, R_{m+1}, \dots, R_{m+n}\}$  y  $\mathcal{R}_N = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}$  tal que:*

1. *para  $i = 1, 2, \dots, m$ , la reacción  $R_i$  de  $N$  se obtiene de la correspondiente reacción  $\widetilde{R}_i$  de  $G$  removiendo la especie  $X_s$  y*
2. *todas las reacciones restantes de  $G$ ,  $\{R_{m+1}, R_{m+2}, \dots, R_{m+n}\}$ , forman una subred de tipo de flujo de acción de masas para la especie  $X_s$ .*

*Para una elección de las constantes de reacción  $k_1^*, k_2^*, \dots, k_m^* > 0$ ,  $\Sigma(N, \{k_1^*, k_2^*, \dots, k_m^*\})$  denota un conjunto finito de estados de equilibrio no degenerados positivos del sistema obtenido de  $N$  y los  $k_i^*$ . Entonces, para un  $\epsilon > 0$  suficientemente chico, existen constantes de reacción  $k_{m+1}^*, k_{m+2}^*, \dots, k_{m+n}^* > 0$  para la subred de tipo de flujo de  $G$  tal que para todo  $u \in \Sigma(N, \{k_1^*, k_2^*, \dots, k_m^*\})$  existe un estado de equilibrio  $\tilde{u}$  no degenerado positivo del sistema obtenido de  $G$  y  $k_1^*, k_2^*, \dots, k_{m+n}^*$ , con  $|\tilde{u} - (u, 1)| < \epsilon$ . Además, si  $u$  es exponencialmente estable,  $\tilde{u}$  también.*

*Demostración.* Fijemos una elección de las constantes de reacción  $k_1^*, k_2^*, \dots, k_m^*$ , y sea  $\Sigma := \Sigma(N, \{k_1^*, k_2^*, \dots, k_m^*\})$  como en el enunciado del lema.

Pensamos a  $G$  como una unión disjunta de 2 subredes:  $G = \widetilde{N} \sqcup M$ , donde  $\widetilde{N}$  es la subred que consiste de las reacciones  $\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2, \dots, \widetilde{R}_m$  y  $M$  es la subred que consiste de las reacciones restantes:  $R_{m+1}, R_{m+2}, \dots, R_{m+n}$ . Como  $M$  es una subred de tipo de flujo de acción de masas para  $X_s$ , existen constantes de reacción  $\overline{k}_{m+1}, \overline{k}_{m+2}, \dots, \overline{k}_{m+n} > 0$  tal que la función de velocidad de formación de especies de la subred con cinética de acción de masas, que denotamos  $f_M(x_s)$ , tiene un estado de equilibrio no degenerado en  $\overline{x}_s = 1$ .

Denotamos  $f_{\widetilde{N}}$  a la función de velocidad de formación de especies en  $N$  con constantes de reacción  $k_1^*, k_2^*, \dots, k_m^*$ .

Consideramos la siguiente función de  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^s$  a  $\mathbb{R}^s$ :

$$f_G(k, x) := (f_{\widetilde{N},1}(x), f_{\widetilde{N},2}(x), \dots, f_{\widetilde{N},s-1}(x), f_{\widetilde{N},s}(x) + kf_M(x_s))$$

donde  $f_{\widetilde{N},i}$  denota la  $i$ -ésima función coordenada de  $f_{\widetilde{N}}$ . Luego  $f_G(k, x)$  es la función de velocidad de formación de especies de  $G$  con cinética de acción de masas y con constantes de reacción:

$$k_1^*, k_2^*, \dots, k_m^*, \overline{kk}_{m+1}, \overline{kk}_{m+2}, \dots, \overline{kk}_{m+n}$$

Reescalamos la última coordenada de  $f_G(k, x)$  por  $1/k$  y hacemos la sustitución  $\delta = 1/k$  para obtener:

$$\begin{aligned} F_G(\delta, x) &:= (f_{\widetilde{N},1}(x), f_{\widetilde{N},2}(x), \dots, f_{\widetilde{N},s-1}(x), \delta f_{\widetilde{N},s}(x) + f_M(x_s)) \\ &= (f_{\widetilde{N},1}(x), f_{\widetilde{N},2}(x), \dots, f_{\widetilde{N},s-1}(x), f_M(x_s)) + (0, 0, \dots, 0, \delta f_{\widetilde{N},s}(x)) \\ &=: h(x) + \delta(0, 0, \dots, 0, f_{\widetilde{N},s}(x)), \end{aligned}$$

donde  $h$  está definida por la última igualdad.

Luego es suficiente probar que para un  $\epsilon > 0$  suficientemente chico, y para todo  $u \in \Sigma$ , existe  $\delta > 0$  tal que existe un cero  $\tilde{u}$  no degenerado de  $F_G(\delta, x)$  con  $|\tilde{u} - (u, 1)| < \epsilon$ .

Fijemos  $u \in \Sigma$ . Veamos que  $h$  tiene un cero no degenerado en  $(u, 1)$ .

La última coordenada de  $h$  satisface  $h_s(u, 1) = f_M(1) = 0$  por construcción. Para las coordenadas restantes  $i = 1, 2, \dots, s-1$  tenemos:

$$h_i(u, 1) = f_{\tilde{N}_i}(u, 1) = f_N(u) = 0$$

Esta última igualdad vale por lo siguiente: Cuando la reacción  $\tilde{R}_j$  en  $\tilde{N}$  es  $\tilde{y}_j \rightarrow \tilde{y}'_j$ , entonces la reacción  $R_j$  dada por  $y_j \rightarrow y'_j$  es tal que la proyección de  $\tilde{y}_j$  en las primeras  $s-1$  coordenadas es  $y_j$ , análogamente para  $\tilde{y}'_j$ . Entonces el vector  $\tilde{y}'_j - \tilde{y}_j$  se proyecta en el vector  $y'_j - y_j$  y  $(u_1, u_2, \dots, u_{s-1}, 1)^{\tilde{y}_j} = (u_1, u_2, \dots, u_{s-1})^{y_j}$ .

Además  $(u, 1)$  es no degenerado porque

$$dh(u, 1) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & * & & \\ & & & * & & \\ & & & * & & \\ df_N(u) & & & & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & \frac{df_M}{dx_s}(1) & & \end{array} \right) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$$

con  $df_N(u) \in \mathbb{R}^{s-1} \times \mathbb{R}^{s-1}$  no singular, y  $\frac{df_M}{dx_s}(1) \neq 0$  por hipótesis. Luego  $dh(u, 1)$  es no singular.

Como  $(u, 1)$  es no degenerado, existe una constante  $\epsilon(u) > 0$  tal que la bola  $\Omega = B(u, \epsilon(u))$  cumple que: (1)  $\Omega$  está en el octante positivo  $\mathbb{R}_{>0}^s$ , (2)  $(u, 1)$  es el único cero de  $h$  en  $\Omega$  y (3)  $dh(x)$  es no singular para todo  $x \in \Omega$ .

Consideremos de nuevo la función  $F_G(\delta, x)$ . Observamos que  $F_G(0, x) = h(x)$ .

Por la continuidad en  $\delta$  y la compacidad de la frontera de  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$ , existe  $\delta(u) > 0$  tal que para todo  $0 \leq \delta \leq \delta(u)$ , la función  $F_G(\delta, x)$  no tiene ceros en  $\partial\Omega$ . De nuevo, por continuidad, y achicando  $\delta(u)$  si fuera necesario, podemos asumir que  $dF(\delta, x)$  es no singular para todo  $0 \leq \delta \leq \delta(u)$ , para todo  $x \in \Omega$ . Luego, por el Lema 2.2.2, concluimos que  $F_G(\delta, x)$  tiene un único cero no degenerado  $\tilde{u} \in \Omega$  (y esto es  $|\tilde{u} - (u, 1)| < \epsilon(u)$ ) para todo  $0 \leq \delta \leq \delta(u)$ .

Sea  $\epsilon^* = \min_{u \in \Sigma} \epsilon(u)$ . Además, si fuera necesario, achicamos  $\epsilon^*$  para que las bolas  $B(u, \epsilon)$  no se intersequen. Ahora dado cualquier  $0 \leq \epsilon \leq \epsilon^*$ , los argumentos para cada  $u$  siguen valiendo, usando  $\epsilon$  en lugar de  $\epsilon(u)$ . Tomando el mínimo de los  $\delta(u)$  resultantes, que notamos  $\delta^*$ , obtenemos un cero  $\tilde{u}$  no degenerado de  $F_G(\delta^*, x)$  tal que  $|\tilde{u} - (u, 1)| < \epsilon$ .

Para el resultado de estabilidad, basta observar que los autovalores de una matriz varían continuamente bajo perturbaciones continuas.  $\square$

Ahora probamos el teorema:

*Demostración del Teorema 2.3.3.* Nos reducimos al caso en el que  $G$  tiene solo una especie que  $N$  no: si  $G$  tiene más de una especie adicional podemos levantar la multiestacionariedad “una vez por especie”.

Llamemos entonces  $X_1, X_2, \dots, X_{s-1}$  a las especies de  $N$  y  $X_1, X_2, \dots, X_s$  a las especies de  $G$ . Y sean  $y_1 \rightarrow y'_1, y_2 \rightarrow y'_2, \dots, y_m \rightarrow y'_m$  las reacciones de  $N$ ,  $y_i, y'_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{s-1}$ .

Como  $N$  es una red embebida de  $G$ , podemos describir las reacciones de  $G$  como:  $\mathcal{R}_G = \{\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2, \dots, \widetilde{R}_m, R_{m+1}, R_{m+2}, \dots, R_{m+n}, R_{m+n+1}, R_{m+n+2}, \dots, R_{m+n+p}\}$  tal que:

1. para  $i = 1, 2, \dots, m$  la reacción  $R_i$  de  $N$  es obtenida de las correspondientes reacciones  $\widetilde{R}_i$  de  $G$  removiendo la especie  $X_s$  y
2. las reacciones  $\{R_{m+1}, R_{m+2}, \dots, R_{m+n}\}$  forman una subred de tipo de flujo de acción de masas para  $X_s$ .

Sea  $G'$  la subred de  $G$  que consiste de las reacciones  $\widetilde{R}_1, \dots, \widetilde{R}_m, R_{m+1}, \dots, R_{m+n}$ . Luego, el Lema 2.3.4 se aplica a  $G'$  y su red embebida  $N$ , y por lo tanto  $G'$  admite al menos tantos estados de equilibrio no degenerados positivos como  $N$  (y vale lo mismo para estados de equilibrio exponencialmente estables).

Como  $G'$  es una subred de  $G$  tal que  $S_{G'} = S_G = \mathbb{R}^s$ , entonces podemos aplicar el Teorema 2.2.1, por lo que  $G$  admite al menos tantos estados de equilibrio no degenerados positivos como  $G'$  (y lo mismo para estados de equilibrio exponencialmente estables). Esto completa la prueba.  $\square$

**Ejemplo 2.3.5.** Consideramos la siguiente red de reacciones  $G$ :



Y consideremos la red embebida  $N$  que se obtiene removiendo la especie  $B$ :

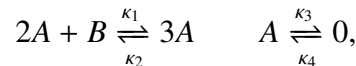


Nos queda la ecuación

$$\frac{dx_A}{dt} = -\kappa_2 x_A^3 + \kappa_1 x_A^2 - \kappa_3 x_A + \kappa_4$$

Tomando las constantes  $\kappa_1 = 6$ ,  $\kappa_2 = 1$ ,  $\kappa_3 = 11$  y  $\kappa_4 = 6$ ,  $x_A = 1, 2$  y  $3$  son estados de equilibrio no degenerados. Como  $S_N = \mathbb{R}$  y existe una subred de  $G$  de tipo de flujo para  $B$  (la subred  $B \rightleftharpoons 0$ ), entonces estamos en las condiciones del Teorema 2.3.3, y por lo tanto  $G$  admite multiestacionariedad.

Por otra parte, si consideramos la red  $G'$



se puede ver que esta admite un único estado de equilibrio positivo:  $(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}, \frac{\kappa_4 \kappa_2}{\kappa_3 \kappa_1})$ .  $N$  también es una red embebida de  $G'$ , que se obtiene removiendo la especie  $B$ , pero en este caso no se puede extender la multiestacionariedad de  $N$  a  $G'$ , ya que  $G'$  no tiene una subred de tipo de flujo para la especie  $B$ , y por lo tanto no podemos aplicar el Teorema 2.3.3.

Observamos que una manera de que una red tenga como subespacio estequiométrico todo el espacio, es teniendo al menos una reacción de flujo para cada especie. Además, si una red tiene como subred a  $0 \rightleftharpoons X_i$ , entonces esta subred es de tipo de flujo con acción de masas para la especie  $X_i$  de la red. Luego, tenemos un corolario para el Teorema 2.3.3:

**Corolario 2.3.6.** *Sea  $G$  una red que contiene todas las reacciones  $0 \rightleftharpoons X_i$  para cada especie  $X_i$  de  $G$ . Sea  $N$  una red embebida que contiene al menos una reacción inflow o outflow para cada una de sus especies. Entonces, si  $N$  con cinética de acción de masas admite múltiples estados de equilibrio no degenerados positivos,  $G$  también.*

*Demostración.* Es consecuencia inmediata del Teorema 2.3.3; la condición 1. del teorema se cumple porque  $S_N$  es todo el espacio, y la condición 2. está garantizada porque  $G$  contiene todas las reacciones  $0 \rightleftharpoons X_i$ . □

# Capítulo 3

## Comparando redes y multiestacionariedad

En este capítulo presentamos los resultados de E. Feliu y C. Wiuf [FW13a]. Primero mostraremos un resultado general para extender la multiestacionariedad de una red a otra a partir la existencia de cierta función. En este teorema los equilibrios se suponen no degenerados, y la prueba es consecuencia directa del Teorema de la Función Implícita. Luego usaremos este Teorema general para aplicarlo a los casos de subredes (que es un resultado análogo al de Joshi y Shiu, mostrado en el capítulo anterior), a las redes que se obtienen agregando reacciones de flujo, y a las redes que se obtienen agregando intermediarios.

### 3.1. Enunciado general

Recordemos la formulación del Teorema de la Función Implícita:

Sea  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función  $C^1$ . Sea  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  tal que  $f(x_0, y_0) = c \in \mathbb{R}^n$  y tal que la matriz con las derivadas parciales respecto de  $x$ ,  $\partial_x f(x_0, y_0)$ , es no singular. Entonces existe un abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  con  $y_0 \in U$ , un abierto  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  con  $x_0 \in V$  y una función  $C^1$   $\varphi : U \rightarrow V$  tal que

$$f(x, y) = c \Leftrightarrow \varphi(y) = x$$

para todo  $(x, y) \in U \times V$ .

Ahora aplicamos el teorema para probar el siguiente resultado:

**Teorema 3.1.1.** *Sean  $G_1, G_2$  dos redes de reacciones con  $s$  especies, y sea  $S_1$  el subespacio estequiométrico de  $G_1$ . Fijemos una cinética  $C^1$  y una clase de compatibilidad estequiométrica para  $G_1$  y sea  $f$  la función de velocidad de formación de especies correspondiente. Sea  $\mathcal{K}_2$  una familia de cinéticas  $C^1$  para  $G_2$ . Supongamos que existe una función  $C^1$*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}_+^s \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}^s \\ (x, \theta) &\mapsto F^\theta(x) \end{aligned}$$

tal que

1. Los estados de equilibrio de  $G_1$  en la clase de compatibilidad estequiométrica satisfacen  $F^0(x) = 0$ .
2. Si  $\text{Im} df(x^*) = S_1$  y  $f(x^*) = 0$  (es decir,  $x^*$  es un cero no degenerado de  $G_1$ ), entonces  $\partial_x F(x^*, 0)$  es no singular, para todo  $x^* \in \mathbb{R}^n$ .
3. Para todo  $\theta > 0$ , existe una clase de compatibilidad estequiométrica y una elección de cinéticas en  $\mathcal{K}_2$  tal que las soluciones de  $F^\theta(x) = 0$  son estados de equilibrio de  $G_2$  en la clase de compatibilidad estequiométrica.

Si  $G_1$  tiene  $m$  estados de equilibrios no degenerados en la clase de compatibilidad estequiométrica, entonces  $G_2$  tiene al menos  $m$  estados de equilibrio no degenerados en alguna clase de compatibilidad estequiométrica y para alguna cinética en  $\mathcal{K}_2$ .

*Demostración.* Sean  $z_1, \dots, z_m$   $m$  estados de equilibrio no degenerados en la clase de compatibilidad estequiométrica de  $G_1$ . Por la hipótesis (i),  $F^0(z_i) = 0$  para todo  $i = 1, \dots, m$ , esto es,  $F(z_i, 0) = 0$ . Como los estados de equilibrio son no degenerados, por la hipótesis (ii),  $\partial_x F^0(z_i)$  es no singular.

Entonces podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita en el punto  $(z_i, 0) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}$  y en la función  $F^\theta$ ; luego existe un intervalo abierto  $I_i \subseteq \mathbb{R}$ , con  $0 \in I_i$ , un abierto  $U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ , con  $z_i \in U_i$  y una función

$$\varphi_i: I_i \rightarrow U_i$$

tal que para todo  $\theta \in I_i$ ,  $F(\varphi_i(\theta), \theta) = 0$ . Como los  $z_i$  son distintos entre sí, podemos encontrar  $V_i$ , con  $z_i \in V_i$  tal que  $V_i \cap V_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$ . Definimos  $J_i = \varphi_i^{-1}(U_i \cap V_i)$ ; observamos que  $0 \in J_i$  para todo  $i$ . Además las imágenes  $\varphi_i(J_i)$  son disjuntas.

Como para todo  $i = 1, \dots, m$  el intervalo  $J_i$  contiene al 0, el abierto  $J = \bigcap_{i=1}^m J_i$  es no vacío, y  $\varphi_i$  está definida en  $J$  para todo  $i$ . Elegimos  $\theta \in J$ . Entonces nos queda

$$F(\varphi_i(\theta), \theta) = F^\theta(\varphi_i(\theta)) = 0$$

para todo  $i$  y los  $\varphi_i(\theta)$  son todos diferentes. Por la hipótesis (iii),  $\varphi_i(\theta)$  son  $m$  estados de equilibrio de  $G_2$  en una clase de estequiometría para alguna cinética en  $\mathcal{K}_2$ .  $\square$

Para construir la función  $F^\theta$  del teorema anterior en los casos que siguen, usaremos bastante la siguiente observación. Sea  $G$  una red de reacciones químicas con  $s$  especies, y sea  $S$  el subespacio estequiométrico de  $G$ . Supongamos que  $\dim S = \sigma$ . Si  $f$  es la función de velocidad de formación de especies de  $G$ , podemos quedarnos con  $\sigma$  de las ecuaciones  $f_i$  de  $f$  que sean linealmente independientes. Llamemos  $\tilde{f}(x)$  a la función que se obtiene al considerar estas  $\sigma$  ecuaciones linealmente independientes.

Sea  $W \in \mathbb{R}^{(s-\sigma) \times s}$  una matriz cuyas filas formen una base de  $S^\perp$ . Ahora, para cada  $C \in \mathbb{R}^{(s-\sigma)}$ , tenemos una clase de compatibilidad estequiométrica definida por  $Wx = C$ . Entonces, los estados de equilibrio de  $G$  en la clase estequiométrica dada por  $C$  los podemos ver como las soluciones de

$$\tilde{f}(x) = 0, \quad Wx = C.$$

Ahora, si definimos

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}_+^s &\rightarrow \mathbb{R}^{s-\sigma} \times \mathbb{R}^\sigma \\ x &\mapsto (Wx - C, \tilde{f}(x)), \end{aligned} \quad (3.1)$$

los estados de equilibrio de  $G$  en la clase estequiométrica definida por  $C$  son las soluciones de  $g(x) = 0$ .

Ahora un pequeño lema:

**Lema 3.1.2.** *Un estado de equilibrio  $x$  es no degenerado si y sólo si la matriz jacobiana  $dg(x)$  es no singular, con  $g$  como en (3.1).*

*Demostración.* Observamos que  $\text{Im } df(x) = S$  si y sólo si  $\ker(df(x)) \cap S = \{0\}$ . Como  $\ker(df(x)) = \ker(d\tilde{f}(x))$ , entonces  $x$  es no degenerado si y sólo si  $\ker(d\tilde{f}(x)) \cap S = \{0\}$ . Pero esto pasa si y sólo si no existe un vector  $v \in S$  (o sea,  $Wv = 0$ ) tal que  $d\tilde{f}(x)v = 0$ . Esto es equivalente a que  $\ker dg(x) = \{0\}$ , o sea,  $dg(x)$  no singular.  $\square$

En las secciones que siguen veremos como extender la multiestacionariedad para casos particulares, construyendo la función  $F$  del teorema anterior.

## 3.2. Subredes

En esta sección volveremos a probar el resultado que teníamos para subredes (Teorema 2.2.1), pero aplicando el Teorema 3.1.1. Recordemos que si tenemos dos redes de reacciones,  $G_1$  y  $G_2$ ,  $G_1$  es una subred de  $G_2$  si toda reacción de  $G_1$  es también una reacción de  $G_2$ .

**Teorema 3.2.1.** *Sean  $G_1, G_2$  2 redes de reacciones químicas tal que  $G_1$  es una subred de  $G_2$  y tal que  $S_1 = S_2$ , es decir, los subespacios estequiométricos de las 2 redes coinciden. En particular tienen las mismas  $s$  especies. Asumimos que las reacciones de  $G_2$  están ordenadas de tal manera que las primeras  $r_1$  reacciones son las reacciones de  $G_1$ . Sea  $K_1: \mathbb{R}_+^s \rightarrow \mathbb{R}^{r_1}$  una cinética  $C^1$  para  $G_1$ . Sean  $g_j: \mathbb{R}_+^s \rightarrow \mathbb{R}$  funciones  $C^1$  para  $j = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2$ . Consideramos la familia de cinéticas para  $G_2$ ,  $\mathcal{K}_2$  tal que  $K_2 \in \mathcal{K}_2$  si y sólo si*

$$K_{2,j}(x) = \begin{cases} K_{1,j}(x) & j = 1, \dots, r_1 \\ \kappa_j g_j(x), \kappa_j \in \mathbb{R}_+, & j = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2. \end{cases}$$

*Si  $G_1$  tiene  $m$  estados de equilibrio no degenerados en una clase de estequiometría para  $K_1$ , entonces  $G_2$  tiene al menos  $m$  estados de equilibrio en una clase de estequiometría para  $\mathcal{K}_2$ .*

*Demostración.* Ya observamos que como  $S_1 = S_2$ , entonces las dos redes comparten el mismo conjunto de especies. En particular, podemos escribir a la matriz de estequiometría de  $G_2$ ,  $N_2$  como

$$N_2 = (N_1|P),$$

donde  $N_1$  es la matriz de estequiometría de  $G_1$  y  $P$  es alguna otra matriz que tiene en sus columnas las reacciones de  $G_2$  que no están en  $G_1$ .

Sea  $W$  una matriz cuyas filas forman una base de  $S_1^\perp = S_2^\perp$ . Reordenando las especies si fuera necesario, podemos asumir que las últimas  $\dim S_1 = \dim S_2 = \sigma$  filas de  $N_1, N_2$  son linealmente independientes. Llamamos  $N'_1, N'_2$  y  $P'$  a las matrices formadas por las últimas  $\sigma$  filas de  $N_1, N_2$  y  $P$  respectivamente.

Sea  $C \in \mathbb{R}^{s-\sigma}$ , tal que la clase de estequiometría de  $G_1$ ,  $Wx = C$ , tiene  $m$  estados de equilibrio. Entonces, como ya observamos anteriormente, los estados de equilibrio de  $G_1$  en la clase de estequiometría son soluciones de

$$Wx - C = 0, \quad N'_1 K_1(x) = 0$$

y los estados de equilibrio de  $G_2$  en la clase definida por  $C$ , para algún  $K_2 \in \mathcal{K}_2$  son soluciones de

$$Wx - C = 0, \quad N'_1 K_1(x) + P' \text{diag}(\kappa)g(x) = 0$$

para  $\kappa \in \mathbb{R}_+^{r_2}$ , con  $\text{diag}(\kappa) = \kappa \text{Id}_{r_2 \times r_2}$  y donde  $g = (g_{r_1+1}, \dots, g_{r_1+r_2})$ . Definimos

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}_+^s \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}^s \\ (x, \theta) &\mapsto F^\theta(x) \end{aligned}$$

por

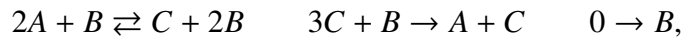
$$F^\theta(x) = \begin{pmatrix} Wx - C \\ N'_1 K_1(x) + \theta P' g(x) \end{pmatrix}$$

donde  $\theta \in \mathbb{R}_+$  multiplica cada fila de  $P'g(x)$ . Esta  $F$  claramente cumple las condiciones 1. y 3. del Teorema 3.1.1. Y como  $dg(x) = \partial_x F(x, 0)$ , con  $g$  definida como en 3.1, luego por el Lema anterior, la condición 2. también se cumple, podemos aplicar el Teorema 3.1.1, y por lo tanto vale el resultado.  $\square$

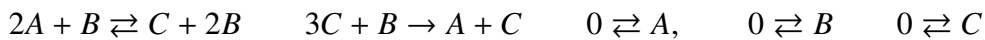
### 3.3. Reacciones inflows y outflows

Consideremos una red de reacciones químicas  $G$  y sea  $G^o$  la red que se obtiene agregándole a  $G$  todas las reacciones inflows y outflows que no estén en  $G$ ; o sea a  $G$  le agregamos las reacciones que faltan del tipo  $0 \rightarrow X_i$  y  $X_i \rightarrow 0$ .

Por ejemplo si  $G$  es la red:



entonces  $G^o$  es la red:



Observamos que el subespacio estequiométrico de  $G^o$  es  $\mathbb{R}^s$ , con  $s$  el número de especies de  $G$ , porque el subespacio contiene todos los vectores canónicos de  $\mathbb{R}^s$ .

Asumamos que las reacciones de  $G^o$  están ordenadas tal que las primeras  $r_1$  reacciones sean las de  $G$ , las siguientes  $r_2$  sean las reacciones outflow agregadas, y las últimas  $r_3$  sean las reacciones inflow agregadas.



Sea  $K: \mathbb{R}_+^s \rightarrow \mathbb{R}^{r_1}$  una cinética para  $G$  y consideremos la familia  $\mathcal{K}^o$  de cinéticas para  $G^o$  tal que  $K^o \in \mathcal{K}^o$  si y sólo si  $K_j^o(x) = K_j(x)$  para  $j = 1, \dots, r_1$ , y las reacciones inflow y outflow tengan la cinética de acción de masas, esto es, la reacción outflow  $X_i \rightarrow 0$  tiene la cinética  $\kappa x_i$  y la reacción inflow  $0 \rightarrow X_i$ ,  $\kappa$ .

**Teorema 3.3.1.** *Sean  $G$  y  $G^o$  como arriba. Sea  $K: \mathbb{R}_+^s \rightarrow \mathbb{R}^{r_1}$  una cinética  $C^1$  para  $G$ . Si  $G$  tiene  $m$  estados de equilibrios no degenerados en una clase de compatibilidad estequiométrica para la cinética  $K$ , entonces  $G^o$  tiene al menos  $m$  estados de equilibrio para una cinética en  $\mathcal{K}^o$ .*

*Demostración.* Sea  $N$  la matriz de estequiometría de  $G$  y sea  $\sigma$  la dimensión del subespacio estequiométrico  $S$  de  $G$ . Es decir el rango de  $N$  es igual a  $\sigma$ . Supongamos que el conjunto de especies está ordenado tal que las últimas  $\sigma$  filas de  $N$  sean linealmente independientes. Sea  $N'$  la matriz formada por esas últimas  $\sigma$  filas. Además podemos ordenar las especies de forma tal que exista una matriz  $W$  cuyas filas son base de  $S^\perp$  y tal que es de la forma

$$\left( I_{s-\sigma} \mid W' \right)$$

con  $W' \in \mathbb{R}^{(s-\sigma) \times \sigma}$ .

Sea  $C \in \mathbb{R}^{s-\sigma}$  tal que la clase de compatibilidad estequiométrica de  $G$ ,  $Wx = C$ , tiene  $m$  estados de equilibrio. Entonces los estados de equilibrio de  $G$  en dicha clase, son soluciones del sistema:

$$Wx - C = 0, \quad N'K(x) = 0.$$

Sea  $E_1$  la matriz de  $s \times s$  que tiene un 1 en el lugar  $(i, i)$  si y sólo si agregamos la reacción outflow  $X_i \rightarrow 0$  (es decir,  $G^o$  tiene la reacción pero  $G$  no), y tiene ceros en los otros lugares, y análogamente, sea  $E_2$  la matriz de  $s \times s$  que tiene un 1 en el lugar  $(i, i)$  si y sólo si se agregó la reacción inflow  $0 \rightarrow X_i$ , y ceros en los otros lugares. Entonces los estados de equilibrio de  $G^o$  para alguna cinética en  $\mathcal{K}^o$  son soluciones de

$$NK(x) + E_1 \text{diag}(\kappa \circ x) - E_2 \text{diag}(\eta) = 0, \quad (3.2)$$

para algún  $\eta, \kappa \in \mathbb{R}_+^s$ .

Hacemos 2 observaciones importantes:

1. Si una reacción inflow o outflow de la especie  $X_i$  está en  $G$ , entonces no puede haber ningún vector  $\omega \in S^\perp$  con el lugar  $i$  distinto de cero. Luego, los lugares de las diagonales  $(i, i)$  de las matrices  $E_1, E_2$  son distintos de cero si la columna  $i$  de  $W$  no es cero.
2. Consideremos la matriz

$$P = \begin{pmatrix} W & \\ 0 \mid I_\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{s-\sigma} \mid & W' \\ 0 \mid & I_\sigma \end{pmatrix}$$

que es claramente inversible. Luego la ecuación (3.2) es equivalente a

$$PNK(x) + PE_1 \text{diag}(\kappa \circ x) - PE_2 \text{diag}(\eta) = 0.$$

Las primeras  $s - \sigma$  filas de  $P$  son precisamente  $W$ , que forman una base de  $S^\perp$ . Luego

$$PNK(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ N'K(x) \end{pmatrix}$$

Por la observación 1,  $WE_1 = W$  y  $WE_2 = W$ . Sean  $E'_1, E'_2$  las últimas  $\sigma$  filas de  $E_1, E_2$  respectivamente. Entonces, la ecuación (3.2) es equivalente a

$$N'K(x) + E'_1 \text{diag}(\kappa \circ x) - E'_2 \text{diag}(\eta) = 0, \quad \text{y} \quad W \text{diag}(\kappa \circ x) - W \text{diag}(\eta) = 0$$

Sea  $x^*$  un estado de equilibrio de  $G$  en la clase de estequiometría dada por  $C$ . Definimos

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}_+^s \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}^s \\ (x, \theta) &\mapsto F^\theta(x) \end{aligned}$$

por

$$F^\theta(x) = \begin{pmatrix} Wx - C \\ N'K(x) + \theta E'_1 x - \theta E'_2 x^* \end{pmatrix}$$

donde  $\theta \in \mathbb{R}_+$  multiplica cada fila.  $F$  claramente cumple la condición 1. del Teorema 3.1.1. También cumple la condición 3. definiendo  $\kappa_j = \theta$  and  $\eta_j = \theta x_j^*$ . En efecto, supongamos  $F^\theta(x) = 0$ , esto es

$$Wx - C = 0, \quad N'K(x) + \theta E'_1 x - \theta E'_2 x^* = 0.$$

Con las definiciones

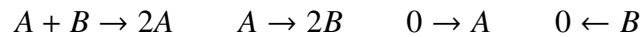
$$0 = W \text{diag}(\kappa \circ x) - W \text{diag}(\eta) = \theta Wx - \theta Wx^* = \theta(Wx - C)$$

que vale si y sólo si  $Wx - C = 0$ . Más aún:

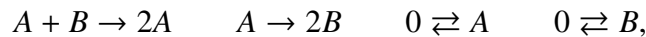
$$0 = N'K(x) + E'_1 \text{diag}(\kappa \circ x) - E'_2 \text{diag}(\eta) = N'K_1(x) + \theta E'_1 x - \theta E'_2 x^*.$$

Finalmente  $dg(x) = \partial_x F(x, 0)$ , con  $g$  definida como en 3.1, luego vale 2., y se cumplen las hipótesis del resultado general. Por lo tanto  $G^\theta$  tiene  $m$  equilibrios para una elección de constantes  $\kappa, \eta$ .  $\square$

**Ejemplo 3.3.2.** Recordemos la red  $G$  del Ejemplo 2.2.6



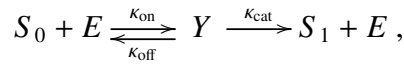
Vimos que esta red, con cinética de acción de masas, admite multiestacionariedad. Luego, por el teorema anterior, la red  $G^\theta$ :



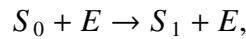
también admite multiestacionariedad.

### 3.4. Intermediarios

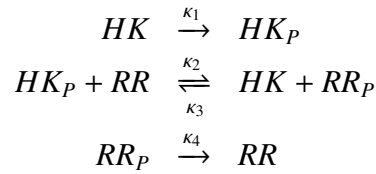
Dos modelos de un mismo sistema biológico, que pueden tener distinto número de especies y reacciones distintas, podrían tener diferentes propiedades cualitativas, y las conclusiones que se obtengan podrían ser fuertemente dependientes del modelo. Por lo tanto la validez de estas conclusiones serían cuestionadas. Es importante entender entonces las consecuencias de la elección del modelo. Los intermediarios son a menudo ignorados en los modelos o agrupados en un único o pocos componentes, ya sea por razones de simplicidad o por falta de conocimiento. Por ejemplo, los modelos de los sistemas de fosforilación múltiple varían considerablemente en los detalles de productos intermedios; en el ejemplo más simple (Ejemplo 1.5.1), nosotros teníamos:



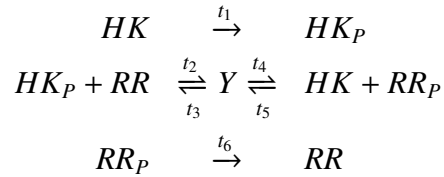
con  $Y$  el complejo intermedio  $ES_0$ . Pero en otros modelos tenemos:



sin el intermediario. También teníamos el ejemplo de los sistemas de dos componentes (Ejemplo 1.5.2).



Nos preguntamos como cambiarían las características cualitativas de la red si agregamos un intermediario  $Y$  en el modelo anterior



En esta sección mostraremos que si una red  $G$  admite multiestacionariedad, entonces si otra red se obtiene de  $G$  agregando intermediarios, bajo ciertas hipótesis, la red nueva también admitirá multiestacionariedad.

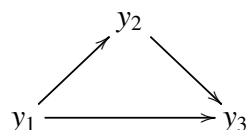
Empecemos con la definición formal de intermediario.

**Definición 3.4.1.** Sea  $G$  una red con especies  $\mathcal{S}_G = X = \{X_1, X_2, \dots, X_s\}$ . Sea  $G_Y$  otra red con especies  $\mathcal{S}_{G_Y} = X \cup Y$  con  $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_t\}$ . Decimos que  $G_Y$  se obtiene de  $G$  agregando intermediarios si

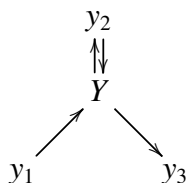
1. Para todo  $Y_i \in Y$ , el único complejo que involucra  $Y_i$  es  $Y_i$
2. Para todo  $Y_i \in Y$ , existe una secuencia de reacciones  $y_\ell \rightarrow \dots \rightarrow Y_i \rightarrow \dots \rightarrow y_k$ , con  $y_\ell, y_k$  complejos de  $G$ .

3. El conjunto de reacciones de  $G$  se obtiene del conjunto de reacciones de  $G_Y$  colapsando las secuencias  $y_\ell \rightarrow Y_{i_1} \rightarrow \dots \rightarrow Y_{i_j} \rightarrow y_k$ , a la reacción  $y_\ell \rightarrow y_k$ , donde  $y_\ell, y_k$  son complejos de  $G$ ,  $Y_{i_h} \in Y$ .

Por ejemplo si tenemos la red  $G$ , con complejos  $y_1, y_2$  e  $y_3$ :



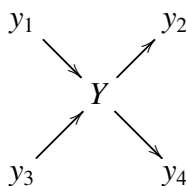
Entonces la siguiente red:



se obtiene de  $G$  agregando el intermediario  $Y$ . Por otra parte si tenemos la red  $G'$ , con complejos  $y_1, y_2, y_3$  e  $y_4$



entonces la red:



no se obtiene agregando intermediarios a  $G'$  ya que en este caso a  $G$  le faltarían las reacciones  $y_1 \rightarrow y_4, y_3 \rightarrow y_2$ .

**Teorema 3.4.2.** *Sea  $G$  una red de reacciones químicas y sea  $G_Y$  una red que se obtiene de  $G$  agregando intermediarios. Supongamos que para las dos redes consideramos la cinética de acción de masas. Si una condición técnica extra se satisface, y  $G$  tiene  $m$  estados de equilibrio no degenerados en una clase de compatibilidad estequiométrica para alguna elección de las constantes de reacción, entonces  $G_Y$  tiene al menos  $m$  estados de equilibrio en una clase de compatibilidad estequiométrica, para alguna elección de las constantes de reacción.*

Probaremos el teorema construyendo una  $F$  y usando el Teorema 3.1.1. Para esto necesitamos los siguientes tres lemas técnicos, cuya demostración puede consultarse en [FW13a].

**Lema 3.4.3** (Leyes de conservación). *Las leyes de conservación de  $G$  y  $G_Y$  están en correspondencia uno a uno. Si  $\{w_1, \dots, w_d\}$  es una base de  $S^\perp$ , donde  $S$  es el subespacio estequiométrico de  $G$ , entonces existe  $\{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_d\}$  una base de  $S_Y^\perp$  de la forma  $\tilde{w}_i = w_i + \underbrace{(0, \dots, 0)}_s, \lambda_1, \dots, \lambda_t$ , donde  $S_Y$  es el subespacio estequiométrico de  $G_Y$ .*

**Lema 3.4.4** (Eliminación). *Sea  $u_i$  el vector concentración de  $Y_i$  para  $i = 1, \dots, t$ . El sistema de ecuaciones  $\dot{u}_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, t$  (de  $G_Y$ ) es lineal en  $u$ 's, y tiene solución única, que está dada por*

$$u_i = \sum_{y \in C_G} \mu_{i,y}(\kappa) x^y$$

Además  $u_{i,y} = \frac{\alpha(\kappa)}{\beta(\kappa)}$ , con  $\alpha(\kappa)$ ,  $\beta(\kappa)$  polinomios homogéneos en  $\kappa$  de grado  $q$  con todos los coeficientes positivos:

$$\alpha(\kappa) = \sum_{finita} \left( \prod_{j=1}^q \kappa_{y_{i_j} \rightarrow z_j} \right) \kappa_{z_q \rightarrow y_{i_q}},$$

y

$$\beta(\kappa) = \sum_{finita} \prod_{j=1}^q \kappa_{y_{i_j} \rightarrow z_j}$$

con  $z_j$  complejo de  $G_Y$ .

Denotamos  $\tau_{y \rightarrow y'}$  a las constantes de reacción de  $G$  y  $\kappa_{y \rightarrow y'}$  a las constantes de reacción de  $G_Y$ .

**Lema 3.4.5** (Sustitución). *Después de sustituir las expresiones  $u_i = \sum_y \mu_{i,y} x^y$  en las ecuaciones diferenciales  $\dot{x}_i$  de  $G_Y$ , se obtiene un sistema dinámico con cinética de acción de masas de  $G$  con constantes de reacción derivadas de las reacciones que conectan los complejos en  $G_Y$ . En particular, las constantes de reacciones  $\tau_{y \rightarrow y'}$  están dadas por funciones racionales en  $\kappa$ , con coeficientes positivos:*

$$\tau_{y \rightarrow y'} = \varphi_{y \rightarrow y'}(\kappa) = \kappa_{y \rightarrow y'} + \sum_{\ell=1}^m \kappa_{Y_\ell \rightarrow y'} \mu_{\ell,y} = \kappa_{y \rightarrow y'} + \sum_{\ell=1}^m \kappa_{Y_\ell \rightarrow y'} \psi_{\ell,y}(\kappa).$$

La condición extra que necesitamos en el teorema, es que para las constantes de reacción de  $G$  para las cuales hay multiestacionariedad,  $\tau$ , exista  $\kappa \in \mathbb{R}_+^{r'}$  tal que  $\tau = \varphi(\kappa)$ . Asumiendo esa hipótesis, podemos demostrar el teorema.

*Demostración del teorema 3.4.2.* Sea  $\tau \in \mathbb{R}_+^{r'}$  tal que  $G$  admite multiestacionariedad, y sea  $\kappa \in \mathbb{R}_+^{r'}$  tal que  $\tau = \varphi(\kappa)$ . Sea  $\sigma = \dim(S) = \dim(S_Y) - t$  y  $d = \dim(S^\perp) = \dim(S_Y^\perp)$ , por el Lema 3.4.4.

Sea  $W \in \mathbb{R}^{d \times n}$  la matriz cuyas filas forman una base de  $S^\perp$  y sea  $C \in \mathbb{R}^d$  tal que define la clase de compatibilidad estequiométrica donde ocurre la multiestacionariedad. Sea  $N \in \mathbb{R}^{\sigma \times r}$  la matriz de estequiometría de  $G$  y sea  $N' \in \mathbb{R}^{\sigma \times r}$  tal que  $\text{Im}(N'^\perp) = \text{Im}(N^\perp)$ .

Sea  $B \in \mathbb{R}^{r \times n}$  la matriz con los exponentes de cinética de acción de masas para  $G$ . Los estados de equilibrio de  $G$  en la clase de compatibilidad estequiométrica dada por  $C$ , son soluciones de:

$$Wx - C = 0, \quad N' \text{diag}(\tau)x^B = 0.$$

que es equivalente a

$$Wx - C = 0, \quad N' \text{diag}(\tau)x^B = 0, \quad u = 0.$$

Sea  $N_Y \in \mathbb{R}^{(s+t) \times r'}$  la matriz de estequiometría de  $G_Y$ . Por el Lema 3.4.4 podemos escribir a la matriz con filas que forman una base de  $S_Y^\perp$ :

$$W_Y = (W \mid W')$$

con  $W' \in \mathbb{R}^{d \times t}$ . Sea  $B' \in \mathbb{R}^{r' \times s+t}$  la matriz con los exponentes de cinética de acción de masas para  $G_Y$ . Entonces los estados de equilibrio de  $G_Y$  en la clase de compatibilidad estequiométrica definida por  $C$  son soluciones de:

$$W_Y x'^{B'} - C = 0, \quad N_Y \text{diag}(\kappa)x'^{B'} = 0,$$

donde  $x' = (x, u)^t$ .

Escribimos la expresión

$$u_i = \sum_y \mu_{iy} x^y = \sum_j \mu_{ij} x^{b_j}$$

en forma matricial

$$u = Qx^B$$

donde  $(Q)_{ij} = \mu_{ij}$ . Luego  $N_Y' \text{diag}(\kappa)x'^{B'} = 0$ , por los lemas 3.4.4 y 3.4.4 esto es equivalente a

$$N \text{diag}(\tau)x^B, \quad u - Qx^B = 0.$$

Luego los estados de equilibrio de  $G_Y$  en la clase de compatibilidad estequiométrica definida por  $C$  son soluciones de

$$Wx + W'Qx^B - C = 0, \quad N' \text{diag}(\tau)x^B = 0, \quad u - Qx^B = 0.$$

Definimos

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R}_+^{n+m} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+m} \\ (x, u, \theta) &\mapsto F^\theta(x, u) \end{aligned}$$

por

$$F^\theta(x) = (Wx + \theta W'Qx^B - C, N' \text{diag}(\tau)x^B, u - \theta Qx^B),$$

donde  $\theta \in \mathbb{R}_+$  multiplica cada fila de  $Q$ . Es claro que para  $\theta = 0$ , si  $x^*$  es un estado de equilibrio de  $G$  en la clase de compatibilidad estequiométrica, entonces:  $F^0(x^*, 0, 0) = 0$ .

También tenemos que

$$\partial_{(x,u)}(F^\theta) = \begin{pmatrix} dF^0(x^*, 0) + \theta(*) & 0 \\ \theta(*) & Id_t \end{pmatrix}$$

Luego, si el estado de equilibrio  $x^*$  es no degenerado, entonces  $dF^0(x^*, 0)$  es no singular y  $\partial_{(x^*, 0)}(F^\theta)$  es no singular en  $\theta = 0$ .

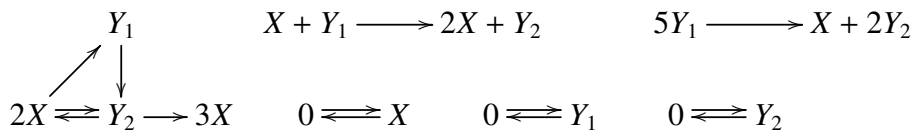
Finalmente, tenemos que chequear que para  $\theta > 0$ ,  $F^\theta = 0$  nos da los estados de equilibrio de  $G_Y$  en una clase de compatibilidad estequiométrica. Para  $\theta \neq 0$ , definimos  $\kappa_j^\theta = \kappa_j$  si la  $j$ -ésima reacción no tiene un intermediario como complejo reactante, y  $\kappa_j^\theta = \kappa_j/\theta$  si no. Entonces

$$\mu_{ij}^\theta = \mu_{ij}\theta, \quad \tau_j^\theta = \tau_j$$

y luego los estados de equilibrios para esta elección satisfacen  $F^\theta = 0$  ya que la  $Q$  correspondiente es  $\theta Q$  y  $\tau$  es invariante.  $\square$

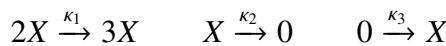
Aunque en los teoremas que probamos no vimos que se podía mantener la no degeneración de los estados de equilibrio, esto en realidad se puede. Ya que la degeneración es que un determinante sea cero, y si es distinto de cero para  $\theta = 0$ , podemos asegurar que para un  $\theta$  suficientemente chico también será distinto de 0. Usando esto veamos un ejemplo en el que usamos todos los resultados vistos en esta sección.

**Ejemplo 3.4.6.** Veamos que la red  $G$



con cinética de acción de masas, tiene múltiples equilibrios no degenerados en alguna clase de estequiometría para alguna elección de las constantes de reacción.

Primero consideremos la siguiente red  $G'$ :

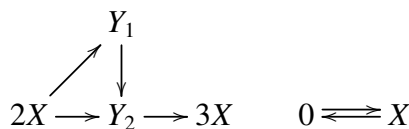


La cinética asociada a la red con cinética de acción de masas es:

$$\frac{dx}{dt} = \kappa_1 x^2 - \kappa_2 x + \kappa_3$$

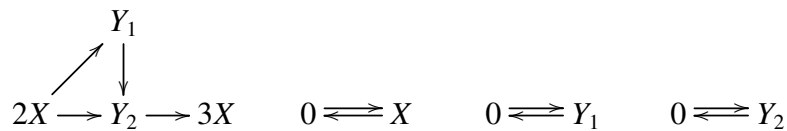
Tomando por ejemplo  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2 = 3$  y  $\kappa_3 = 2$ , tenemos 2 puntos de equilibrio  $x = 1$  y  $x = 2$  no degenerados, en la única clase de compatibilidad estequiométrica (el subespacio estequiométrico en este caso es todo  $\mathbb{R}$ ).

Ahora consideramos la red  $(G')_Y$ :



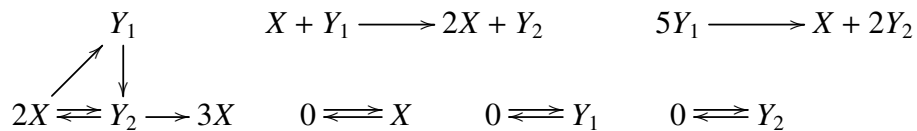
Esta red se obtiene de la red  $G'$  agregando intermediarios. Es fácil chequear que la  $G'_Y$  cumple la condición técnica necesaria para aplicar el Teorema 3.4.2. Luego, como la red  $G'$  tiene múltiples equilibrios no degenerados en una clase de estequiometría para alguna elección de las constantes de reacción, entonces  $G'_Y$  también.

La red  $(G'_Y)^o$ :



se obtiene de la red  $G_Y$  agregando las reacciones inflow y outflow  $0 \rightleftharpoons Y_1$ ,  $0 \rightleftharpoons Y_2$ . Como  $G_Y$  tiene múltiples equilibrios no degenerados para alguna elección de las constantes de reacción en una clase de estequiometría, por el Teorema 3.3.1,  $(G_Y)^o$  también.

Finalmente, la red  $G$



se obtiene de la red  $(G'_Y)^o$  agregando las reacciones  $X + Y_1 \rightarrow 2X + Y_2$ ,  $5Y_1 \rightarrow X + 2Y_2$  y  $2X \leftarrow Y_2$ . Es decir  $(G'_Y)^o$  es una subred de  $G$ , y además tienen el mismo subespacio estequiométrico (que es igual a  $\mathbb{R}^3$ ). Luego, se cumplen las hipótesis del Teorema 3.2.1, y como  $(G'_Y)^o$  tienen múltiples equilibrios no degenerados en alguna clase de estequiometría para alguna elección de las constantes de reacción, entonces  $G$  también, que era lo que queríamos mostrar.



# Capítulo 4

## Módulos y morfismos playos

En esta sección recordamos las definiciones puramente algebraicas de playitud, y algunas propiedades importantes. Además introducimos la noción de familias playas. Lo que sigue está basado principalmente en [Eis95], [BGL<sup>+</sup>07], [DL06] y [AM69]. Las demostraciones no incluidas pueden consultarse en esas fuentes. En lo que sigue, los anillos serán conmutativos y con unidad.

### 4.1. Módulos playos

**Definición 4.1.1.** Sea  $A$  un anillo. Un  $A$  módulo  $M$  se dice *playo* si para toda sucesión exacta corta de  $A$  módulos

$$0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow P \rightarrow 0$$

la sucesión que se obtiene al tensorizar contra  $M$

$$0 \rightarrow N \otimes_A M \rightarrow L \otimes_A M \rightarrow P \otimes_A M \rightarrow 0$$

también es exacta.

**Observación 4.1.2.** Recordemos que tensorizar siempre preserva la exactitud a derecha. Luego un  $A$  módulo  $M$  es playo si y sólo si para todo homomorfismo inyectivo  $i: N \rightarrow L$ , el morfismo inducido  $N \otimes_A M \xrightarrow{i \otimes Id_M} L \otimes_A M$  es también inyectivo.

Veamos algunos ejemplos:

**Ejemplo 4.1.3.** Si  $A$  es un cuerpo, todo  $A$ -módulo, esto es, todo  $A$ -espacio vectorial, es playo.

Más en general, tenemos la proposición:

**Proposición 4.1.4.** *Los módulos libres son playos.*

*Demostración.* Sea  $M$  un  $A$ -módulo libre. Podemos escribir entonces  $M = \bigoplus_{i \in I} A$ . Sea  $\ell: N \rightarrow L$  un morfismo de  $A$ -módulos inyectivo.

Observamos que  $N \otimes_A M = \bigoplus_{i \in I} N \otimes_A A = \bigoplus_{i \in I} N$ . Luego el morfismo inducido

$$N \otimes_A M \xrightarrow{\ell \otimes Id_M} L \otimes_A M$$

es el mismo que

$$\bigoplus_{i \in I} N \xrightarrow{\bigoplus_{i \in I} \ell} \bigoplus_{i \in I} L,$$

y el morfismo  $\bigoplus_{i \in I} \ell$  es inyectivo si  $\ell$  es inyectivo. □

De la proposición anterior tenemos dos ejemplos interesantes de módulos playos:

**Ejemplo 4.1.5.** El anillo de polinomios  $A[x_1, \dots, x_n]$  es un módulo libre sobre  $A$ . Luego, por la proposición anterior  $A[x_1, \dots, x_n]$  es playo como  $A$ -módulo.

**Ejemplo 4.1.6.** Los módulos proyectivos son playos. Todo  $A$ -módulo proyectivo  $P$  es sumando directo de un módulo libre  $F$ . Supongamos  $F = P \oplus P'$ , luego si tenemos un morfismo inyectivo  $i: N \rightarrow L$ , entonces, como  $F$  es libre, el morfismo inducido  $N \otimes_A F \rightarrow L \otimes_A F$  es inyectivo. Pero  $N \otimes_A F = N \otimes_A (P \oplus P') = (N \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P')$ , y  $L \otimes_A F = (L \otimes_A P) \oplus (L \otimes_A P')$ , es decir, el morfismo  $(N \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P') \rightarrow (L \otimes_A P) \oplus (L \otimes_A P')$  es inyectivo, y como además el morfismo se parte sobre la suma directa, entonces  $P$  es playo como  $A$ -módulo.

Veamos un ejemplo de un módulo que no sea playo:

**Ejemplo 4.1.7.** Consideremos el  $\mathbb{Z}$ -módulo  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . El morfismo  $\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}$ , que consiste en multiplicar por 2, es inyectivo. Veamos que el morfismo inducido

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{2 \otimes Id} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

no es inyectivo. Sea  $(x \otimes y) \in \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Luego tenemos:

$$(2 \otimes 1)(x \otimes y) = (2x \otimes y) = (x \otimes 2y) = x \otimes 0 = 0.$$

Y como  $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq 0$ , el morfismo no es inyectivo, y por lo tanto  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  no es playo como  $\mathbb{Z}$ -módulo.

Notemos que la definición de módulo playo *no* dice que la sucesión

$$0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow P \rightarrow 0$$

es exacta si y sólo si

$$0 \rightarrow N \otimes_A M \rightarrow L \otimes_A M \rightarrow P \otimes_A M \rightarrow 0$$

lo es. Esto nos da otra definición:

**Definición 4.1.8.** Sea  $A$  un anillo y  $M$  un  $A$ -módulo.  $M$  se dice *fielmente playo*, si para toda sucesión de  $A$ -módulos

$$0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow P \rightarrow 0$$

la sucesión

$$0 \rightarrow N \otimes_A M \rightarrow L \otimes_A M \rightarrow P \otimes_A M \rightarrow 0$$

es exacta *si y sólo si* la anterior lo era.

Queda claro que un módulo fielmente playo es en particular, playo.

## 4.2. Playitud y Tor

El producto tensorial es exacto a derecha pero, como vimos en el Ejemplo 4.1.7, en general no es exacto. Vamos a mostrar un criterio para la exactitud en términos de homología. Estas herramientas además nos darán criterios para chequear playitud.

Sea  $\cdots \rightarrow F_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} F_i \xrightarrow{\varphi_i} \cdots \rightarrow F_0 \xrightarrow{\varphi_0} N \rightarrow 0$  una resolución libre del  $A$  módulo  $N$ , esto es, la secuencia es exacta y los  $F_i$  son  $A$ -módulos libres. Entonces, si  $M$  es un  $A$ -módulo, la secuencia inducida de  $A$ -módulos y homomorfismos

$$\cdots \rightarrow M \otimes_A F_{i+1} \xrightarrow{Id_M \otimes_A \varphi_{i+1}} M \otimes_A F_i \xrightarrow{Id_M \otimes_A \varphi_i} \cdots \rightarrow M \otimes_A F_0 \rightarrow 0$$

define un complejo  $M \otimes_A F_\bullet$ .

**Definición 4.2.1.** Introducimos los  $A$ -módulos  $\text{Tor}_i^A(M, N)$ , que son llamados módulos Tor:

1.  $\text{Tor}_0^A(M, N) := M \otimes_A N$ ;
2.  $\text{Tor}_i^A(M, N) := \frac{\ker(Id_M \otimes_A \varphi_i)}{\text{Im}(Id_M \otimes_A \varphi_{i+1})}$

Esta definición es independiente de la resolución libre elegida de  $N$ , y para todo  $i$ ,  $\text{Tor}_i^A(M, N) \cong \text{Tor}_i^A(N, M)$ .

**Observación 4.2.2.** Si  $M$  o  $N$  son módulos libres, entonces  $\text{Tor}_i^A(M, N) = 0$  para todo  $i > 0$ .

Veamos un ejemplo útil de como calcular Tor. Sea  $A$  un anillo, y  $a \in A$  no divisor de 0. Sea  $M$  un  $A$ -módulo. Queremos calcular  $\text{Tor}_i^A(A/\langle a \rangle, M) = 0$ . La sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{a} A \xrightarrow{\pi} A/\langle a \rangle \rightarrow 0$$

es una resolución libre del módulo  $A/\langle a \rangle$ , donde  $\cdot a$  es el morfismo multiplicar por  $a$ . Luego, nos queda el complejo:

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{a} M \rightarrow 0$$

Y por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_0^A(A/\langle a \rangle, M) &= M \otimes_A (A/\langle a \rangle) = M/aM \\ \mathrm{Tor}_1^A(A/\langle a \rangle, M) &= (0 :_M a) = \{m \in M \mid am = 0\} \\ \mathrm{Tor}_i^A(A/\langle a \rangle, M) &= 0 \text{ para todo } i > 1\end{aligned}\tag{4.1}$$

**Proposición 4.2.3.** *Sea  $0 \rightarrow M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\pi} P \rightarrow 0$  una sucesión exacta corta de  $A$  módulos y sea  $L$  un  $A$ -módulo. Entonces, con los morfismos canónicos inducidos, la secuencia*

$$\begin{aligned}\dots \rightarrow \mathrm{Tor}_2^A(P, L) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M, L) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^A(N, L) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^A(P, L) \\ \rightarrow M \otimes_A L \rightarrow N \otimes_A L \rightarrow P \otimes_A L \rightarrow 0\end{aligned}$$

es exacta.

*Demostración.* Ver [BGL<sup>+</sup>07]. □

Aplicando la proposición anterior obtenemos el siguiente resultado:

**Proposición 4.2.4.** *Si  $0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow 0$  es una sucesión exacta corta de  $A$ -módulos y  $M$  y  $M''$  son playos, entonces  $M'$  también es playo.*

Por definición, para cualquier  $A$ -módulo playo  $M$  tenemos que  $\mathrm{Tor}_i^A(M, N) = 0$ , para todo  $i > 0$ , para todo  $A$ -módulo  $N$ . Se puede ver que  $M$  es playo si y sólo si  $\mathrm{Tor}_1^A(M, N) = 0$  para todo  $A$ -módulo  $N$ .

El siguiente teorema nos da una caracterización de playitud usando Tor:

**Teorema 4.2.5.** *Sea  $A$  un anillo y sea  $M$  un  $A$ -módulo. Entonces  $M$  es playo si y sólo si  $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$  para todo ideal finitamente generado  $I \subset A$ .*

*Demostración.* Consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$$

Usando la Proposición 4.2.3 obtenemos la sucesión exacta larga:

$$0 = \mathrm{Tor}_1^A(A, M) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) \rightarrow I \otimes_A M \rightarrow A \otimes_A M = M$$

Por la Observación 4.2.2 el término de la izquierda es 0. Si  $M$  es playo, entonces  $I \otimes_A M \rightarrow M$  es inyectiva, y luego  $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$ .

Ahora supongamos que  $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$  para todos los ideales finitamente generados  $I \subset A$ . Queremos ver que para todo morfismo inyectivo  $N \rightarrow L$ , el morfismo inducido  $N \otimes_A M \rightarrow L \otimes_A M$  es inyectivo.

Consideremos primero el caso con  $N = I$ ,  $L = A$  e  $I \subset A$  un ideal (no necesariamente finitamente generado). Si  $I \otimes_A M \rightarrow M$  no es inyectiva, entonces existe  $\sum_{v=1}^r a_v \otimes m_v \in I \otimes_A M$  distinto de cero, con  $\sum_{v=1}^r a_v m_v = 0$ . Sea  $I_0 = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$ , luego  $\sum_{v=1}^r a_v \otimes m_v \in I_0 \otimes_A M$ , y por hipótesis ( $I_0$  es finitamente generado), tiene que ser

igual a cero. En particular, su imagen en  $I \otimes_A M$  tiene que ser también cero. Esto implica que el morfismo  $I \otimes_A M \rightarrow M$  es inyectivo para todos los ideales  $I \subset A$ . Similarmente, como el hecho de que un elemento de  $N \otimes_A M$  vaya a 0 en  $L \otimes_A M$  involucra solo finitos elementos en  $L$ , podemos asumir que  $L$  es finitamente generado. Luego podemos encontrar una cadena de  $A$ -submódulos

$$N = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_r = L$$

tal que cada cociente  $N_{i+1}/N_i$  es un módulo cíclico. Luego, alcanza con ver que para todo  $i$ , el morfismo  $N_i \otimes_A M \rightarrow N_{i+1} \otimes_A M$  es inyectivo. Por lo que podemos reducirnos al caso en el que  $L/N$  es un módulo cíclico,  $L/N \cong A/I$  (un módulo cíclico es un cociente de  $A$  por un ideal  $I$ ).

De la sucesión exacta corta  $0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow L/N \rightarrow 0$ , por la Proposición 4.2.3 obtenemos la sucesión:

$$\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = \mathrm{Tor}_1^A(L/N, M) \rightarrow N \otimes_A M \rightarrow L \otimes_A M$$

Por hipótesis  $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$ , lo que implica que  $N \otimes_A M \rightarrow L \otimes_A M$  es inyectivo, como queríamos.  $\square$

**Observación 4.2.6.** La condición  $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$  es equivalente a la condición de que el morfismo inducido por la inclusión  $I \subset A$ ,  $I \otimes_A M \rightarrow M$  es inyectivo.

Como una aplicación al teorema anterior, veremos una caracterización de los módulos playos sobre anillos que sean dominio de ideales principales. Observamos que un módulo playo  $M$  sobre un dominio íntegro  $A$  tiene que ser libre de torsión: si  $a$  es un elemento del anillo, entonces la multiplicación por  $a$  es un morfismo inyectivo de  $A \rightarrow A$ , y como  $M$  es playo, multiplicar por  $a$  tiene que ser inyectivo de  $M \rightarrow M$ . Luego  $M$  tiene que ser libre de torsión. En el caso de dominios de ideales principales esta condición también es suficiente.

**Corolario 4.2.7.** Si  $A$  es un dominio de ideales principales, entonces  $M$  es playo como  $A$ -módulo si y sólo si  $M$  es libre de torsión.

*Demostración.* Si  $M$  es playo, ya vimos que  $M$  es libre de torsión. Sea ahora  $M$  libre de torsión y  $I$  un ideal de  $A$ . Como  $A$  es un dominio de ideales principales,  $I = \langle a \rangle$  para algún  $a \in A$ . Si  $I = 0$ ,  $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$  trivialmente. Si  $I \neq 0$ , entonces  $I = \langle a \rangle$ , con  $a \in A$  no divisor de 0, y por la igualdad (4.1), tenemos  $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$ , ya que  $M$  es libre de torsión. Luego por el Teorema 4.2.5,  $M$  es playo.  $\square$

Mostraremos otro criterio para playitud, pero antes necesitaremos el siguiente lema:

**Lema 4.2.8.** Sea  $A$  un anillo, y sean  $M$  y  $N$  dos  $A$  módulos,  $m_i \in M$ ,  $i \in I$  y  $N = \langle n_i \mid i \in I \rangle$ . Entonces  $\sum_{i \in I} m_i \otimes n_i = 0 \in M \otimes_A N$  si y sólo si existen  $a_{ij} \in A$ ,  $\tilde{m}_j \in M$ , para  $i \in I$ ,  $j \in J$ , tal que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} a_{ij} \tilde{m}_j &= m_i \quad \forall i \in I \\ \sum_{i \in I} a_{ij} n_i &= 0 \quad \forall j \in J. \end{aligned}$$

*Demostración.* Ver [Eis95] o [BGL<sup>+</sup>07]. □

Ahora, usando el Teorema 4.2.5 y el lema anterior, tenemos otro criterio para playitud, en términos de ecuaciones en  $M$ .

**Proposición 4.2.9** (Criterio ecuacional para playitud). *Sea  $A$  un anillo, y sea  $M$  un  $A$ -módulo. Entonces  $M$  es playo si y sólo si vale la siguiente condición: Cada vez que  $\sum_{i=1}^r a_i m_i = 0$ , con  $a_i \in A$ ,  $m_i \in M$ , entonces existen  $a_{ij} \in A$ ,  $\tilde{m}_j \in M$  tal que:*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^s a_{ij} \tilde{m}_j &= m_i \quad \forall i = 1, \dots, r, \\ \sum_{i=1}^r a_{ij} a_i &= 0 \quad \forall j = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

*Demostración.* Supongamos que  $M$  es playo, y sea  $\sum_{i=1}^r a_i m_i = 0$ , con  $a_i \in A$ ,  $m_i \in M$ . Consideremos el ideal  $I = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$ . Como  $M$  es playo, el morfismo inducido por la inclusión  $I \hookrightarrow A$ ,  $I \otimes_A M \rightarrow M$  es inyectivo. Luego  $\sum_{i=1}^r a_i \otimes m_i = 0$ , y el resultado sigue por el lema anterior.

Ahora, supongamos que la condición se satisface. Queremos ver que  $M$  es playo. Por el Teorema 4.2.5, alcanza con ver que para todo ideal  $I \subset A$  finitamente generado  $\text{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$ , o, equivalentemente, que el morfismo  $I \otimes_A M \rightarrow M$  es inyectivo. Sea entonces  $I \subset A$  un ideal finitamente generado, y sea  $\sum_{i=1}^r a_i \otimes m_i \in I \otimes_A M$  tal que  $\sum_i a_i m_i = 0$ . Usando la condición obtenemos que existen  $a_{ij} \in A$ ,  $\tilde{m}_j \in M$  tal que  $\sum_{j=1}^s a_{ij} \tilde{m}_j = m_i \quad \forall i$  y  $\sum_{i=1}^r a_{ij} a_i = 0 \quad \forall j$ , luego  $\sum_{i=1}^r a_i \otimes m_i = \sum_j (\sum_i a_{ij} a_i) \otimes \tilde{m}_j = 0$ , y por lo tanto el morfismo  $I \otimes_A M \rightarrow M$  es inyectivo. □

### 4.3. Playitud y Localización

En esta sección daremos un criterio para playitud sobre anillos locales. Las propiedades que usamos sobre localización y producto tensorial pueden consultarse en el capítulo 3 de [AM69].

Primero otro ejemplo importante de módulos playos:

**Ejemplo 4.3.1.** Si  $S$  es un conjunto multiplicativo en  $A$ , entonces la localización  $S^{-1}A$  es un  $A$ -módulo playo. En efecto, si tenemos la sucesión exacta  $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow 0$ , queremos ver que la sucesión que se obtiene al tensorizar contra  $S^{-1}A$  también es exacta. Pero como vale que  $S^{-1}A \otimes_A M = S^{-1}M$ , entonces tenemos que ver que la sucesión  $0 \rightarrow S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N \rightarrow S^{-1}L \rightarrow 0$  es exacta, pero esto es cierto, pues localizar preserva la exactitud.

Si  $A$  es un anillo, y  $P$  es un ideal primo de  $A$ , entonces  $A \setminus P$  es un conjunto multiplicativamente cerrado. Vamos a notar  $A_P$  a la localización de  $A$  con respecto al conjunto  $A \setminus P$ .

Si  $M$  es un  $A$ -módulo, y  $S$  es un conjunto multiplicativamente cerrado de  $A$  entonces naturalmente se le puede dar al conjunto  $S^{-1}M$  una estructura de  $S^{-1}A$ -módulo. Si tenemos  $S = A \setminus P$ , con  $P$  un ideal primo de  $A$ , entonces notamos  $M_P$  al  $A_P$ -módulo  $S^{-1}M$ .

**Proposición 4.3.2.** *Sea  $\phi: M \rightarrow N$  un homomorfismo de  $A$  módulos. Son equivalentes:*

1.  $\phi$  es inyectivo
2.  $\phi_P: M_P \rightarrow N_P$  es inyectivo para todo ideal primo  $P \in A$
3.  $\phi_{\mathfrak{m}}: M_{\mathfrak{m}} \rightarrow N_{\mathfrak{m}}$  es inyectivo para todo ideal maximal  $\mathfrak{m} \in A$

*Demostración.* Ver [AM69]. □

La playitud es una propiedad local:

**Proposición 4.3.3.** *Sea  $M$  un  $A$ -módulo. Son equivalentes:*

1.  $M$  es playo como  $A$ -módulo.
2.  $M_P$  es playo como  $A_P$ -módulo para todos los ideales primos  $P$  de  $A$ .
3.  $M_{\mathfrak{m}}$  es playo como  $A_{\mathfrak{m}}$ -módulo para todos los ideales maximales  $\mathfrak{m}$  de  $A$ .

*Demostración.* Si  $M$  es un  $A$ -módulo playo, veamos que  $M_P$  es un  $A_P$  módulo playo. Supongamos que tenemos un morfismo inyectivo de  $A_P$  módulos:  $N \rightarrow L$ . Tenemos el isomorfismo canónico  $N \otimes_A M \cong N \otimes_{A_P} M_P$ . Luego, como  $N \otimes_A M \rightarrow L \otimes_A M$  es inyectivo, entonces  $N \otimes_{A_P} M_P \rightarrow L \otimes_{A_P} M_P$  es inyectivo. Luego 1. implica 2.

2. implica 3. es obvio, pues todo ideal maximal es, en particular, primo.

Resta ver que 3. implica 1. Sea  $N \rightarrow L$  un morfismo inyectivo de  $A$ -módulos. Luego, por la Proposición 4.3.2,  $N_{\mathfrak{m}} \rightarrow L_{\mathfrak{m}}$  es inyectivo para todo ideal maximal  $\mathfrak{m} \in A$ . Como  $M_{\mathfrak{m}}$  es playo como  $A_{\mathfrak{m}}$ -módulo para todo maximal  $\mathfrak{m}$ , entonces  $N_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} \rightarrow L_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}}$  es inyectivo para todo  $\mathfrak{m}$ . Como  $N_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} = (N \otimes_A M)_{\mathfrak{m}}$  y  $L_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} = (L \otimes_A M)_{\mathfrak{m}}$ , el morfismo  $(N \otimes_A M)_{\mathfrak{m}} \rightarrow (L \otimes_A M)_{\mathfrak{m}}$  es inyectivo para todo ideal maximal  $\mathfrak{m}$ . Usando de nuevo la Proposición 4.3.2, nos queda que  $N \otimes_A M \rightarrow L \otimes_A M$  es inyectivo, y por lo tanto  $M$  es playo. □

También tenemos una proposición más fuerte, de la que la Proposición 4.3.3 es un caso particular.

**Proposición 4.3.4.** *Sea  $\varphi: A \rightarrow B$  un homomorfismo de anillos. Y sea  $M$  un  $B$ -módulo. Son equivalentes:*

1.  $M$  es playo como  $A$ -módulo.
2.  $M_Q$  es playo como  $A_P$ -módulo para todos los ideales primos  $Q$  de  $B$ , con  $P = \varphi^{-1}(Q)$ .
3.  $M_{\mathfrak{m}}$  es playo como  $A_P$ -módulo para todos los ideales maximales  $\mathfrak{m}$  de  $B$ , con  $P = \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ .

*Demostración.* Supongamos que  $M$  es playo como  $A$ -módulo. Sea  $Q$  un ideal primo de  $B$ , y sea  $P = \varphi^{-1}(Q)$ . Sea  $I \subset A_P$  un ideal. Queremos ver que el morfismo  $I \otimes_{A_P} M_Q \rightarrow M_Q$  es inyectivo. Podemos escribir a  $I = J_P$ , con  $J$  un ideal de  $A$ . Entonces el morfismo  $I \otimes_{A_P} M_Q \rightarrow M_Q$  es igual a  $(J \otimes_A M)_Q \rightarrow M_Q$ . Como  $(J \otimes_A M) \rightarrow M$  es inyectivo y localizar es exacto, entonces  $(J \otimes_A M)_Q \rightarrow M_Q$  es inyectivo. Esto prueba que 1. implica 2. 2. implica 3. es obvio.

Ahora supongamos que  $M_{\mathfrak{m}}$  es playo como  $A_P$ -módulo para todos los ideales maximales  $\mathfrak{m}$  de  $B$ , con  $P = \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ . Sea  $I$  un ideal de  $A$ , queremos ver que  $I \otimes_A M \rightarrow M$  es inyectivo. Por hipótesis la localización  $(I \otimes_A M)_{\mathfrak{m}} \rightarrow M_{\mathfrak{m}}$  es inyectiva para todo maximal  $\mathfrak{m}$  porque  $(I \otimes_A M)_{\mathfrak{m}} = I_P \otimes_{A_P} M_{\mathfrak{m}}$ . Pero entonces, por la Proposición 4.3.2  $I \otimes_A M \rightarrow M$  es inyectivo, como queríamos. Luego 3. implica 1.  $\square$

Ahora queremos ver qué significa para un módulo  $M$  ser playo sobre un anillo local  $A$ . Vamos a mostrar una caracterización muy completa de los módulos playos finitamente generados.

**Proposición 4.3.5.** *Sea  $A$  un anillo local, con ideal maximal  $\mathfrak{m}$ , y sea  $M$  un  $A$ -módulo playo. Sean  $m_1, \dots, m_k \in M$  tal que las clases  $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_k$  en  $M/\mathfrak{m}M$  son linealmente independientes. Entonces  $m_1, \dots, m_k$  son linealmente independientes en  $M$ .*

*En particular un módulo finitamente generado sobre un anillo local es playo si y sólo si es libre.*

*Demostración.* Hacemos inducción en  $k$ . Si  $k = 1$ , supongamos que  $am_1 = 0$  para algún  $a \in A$ . Luego, por la Proposición 4.2.9, existen  $\tilde{m}_j \in M$ ,  $a_j \in A$  tal que  $\sum_j a_j \tilde{m}_j = m_1$ , y  $aa_j = 0 \forall j$ . Pero  $m_1 \notin \mathfrak{m}M$ , luego  $a_j \notin \mathfrak{m}$  para algún  $j$  (y por lo tanto es una unidad), con lo que  $a = 0$ . Ahora supongamos que la proposición vale para  $k - 1$ , y sea  $\sum_{j=1}^k a_j m_j = 0$ . De nuevo por la Proposición 4.2.9, existen  $\tilde{m}_j \in M$ ,  $a_{ij} \in A$  tal que  $\sum_j a_{ij} \tilde{m}_j = m_i \forall i = 1, \dots, k$  y  $\sum_i a_{ij} a_i = 0 \forall j = 1, \dots, k$ . Como  $m_k \notin \mathfrak{m}M$ , tenemos que  $a_{kj} \notin \mathfrak{m}$  (y luego, una unidad) para algún  $j$ . Esto implica que  $a_k$  es una combinación lineal de  $a_1, \dots, a_{k-1}$ , nos queda  $a_k = \sum_{l=1}^{k-1} b_l a_l$ , con  $b_l = -a_{lj} a_{kj}^{-1}$ . Entonces tenemos

$$\sum_{l=1}^{k-1} a_l (m_l + b_l m_k) = a_k m_k + \sum_{l=1}^{k-1} a_l m_l.$$

Por hipótesis inductiva,  $a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$  y luego  $a_k = 0$ .  $\square$

Ahora mostraremos un criterio para playitud similar al que mostramos en el Teorema 4.2.5, pero en el caso de anillos locales, vamos a ver que podemos debilitar la condición  $\text{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$ , para todo ideal  $I$  finitamente generado, a la condición  $\text{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m}, M) = 0$ , con  $\mathfrak{m}$  el ideal maximal de  $A$ .

**Teorema 4.3.6** (Criterio local para playitud). *Sea  $A$  un anillo local noetheriano y sea  $\mathfrak{m}$  su ideal maximal. Sea  $B$  una  $A$ -álgebra local noetheriana, con ideal maximal  $\mathfrak{n}$  tal que  $\mathfrak{m}B \subset \mathfrak{n}$ . Si  $M$  es un  $B$  módulo finitamente generado, entonces  $M$  es playo como  $A$ -módulo si y sólo si  $\text{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m}, M) = 0$ .*



El teorema se aplica usualmente con  $M = B$ , para establecer la playitud de  $B$ . También es interesante el caso  $A = B$  para chequear la playitud de un módulo finitamente generado.

Para la demostración usaremos el siguiente lema. Recordemos que un módulo  $M$  es de longitud finita si  $M = 0$ , o si existe una cadena de submódulos

$$0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_k = M,$$

y los cocientes  $N_i/N_{i+1}$  son simples.  $k$  es la longitud de la cadena.

**Lema 4.3.7.** *Sea  $A$  un anillo local y  $\mathfrak{m}$  su ideal maximal. Sea  $M$  un  $A$ -módulo tal que  $\text{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m}, M) = 0$ . Entonces  $\text{Tor}_1^A(P, M) = 0$  para todos los  $A$  módulos  $P$  de longitud finita.*

*Demostración.* Probaremos esto por inducción en la longitud: Si la longitud de  $P$  es 1,  $P$  es isomorfo a  $A/\mathfrak{m}$ , luego vale por hipótesis. Si  $P$  tiene longitud finita  $n$ , con  $n$  mayor que 1, sea  $N$  el anteúltimo submódulo de una cadena de  $P$ . Luego  $P/N$  tiene longitud 1 y  $N$  tiene longitud  $n - 1$ . Tenemos la sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow P/N \rightarrow 0.$$

Luego por la Proposición 4.2.3 nos queda

$$\text{Tor}_1^A(N, M) \rightarrow \text{Tor}_1^A(P, M) \rightarrow \text{Tor}_1^A(P/N, M)$$

Por hipótesis inductiva,  $\text{Tor}_1^A(N, M) = 0$  y  $\text{Tor}_1^A(P/N, M) = 0$ , luego  $\text{Tor}_1^A(P, M) = 0$ .  $\square$

Y para la demostración también utilizaremos estos dos resultados clásicos:

**Lema 4.3.8** (Lema de Artin-Rees). *Sea  $A$  un anillo noetheriano,  $I \subset A$  un ideal,  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado, y  $N \subset M$  un submódulo de  $M$ . Entonces existe un entero  $k \geq 1$  tal que para todo  $n \geq k$*

$$I^n M \cap N = I^{n-k}((I^k M) \cap N)$$

*Demostración.* Ver [Eis95].  $\square$

**Teorema 4.3.9** (Teorema de intersección de Krull). *Sea  $A$  un anillo noetheriano, y sea  $I \subset A$  un ideal. Si  $M$  es un  $A$ -módulo finitamente generado, entonces existe un elemento  $r \in I$  tal que  $(1 - r)(\bigcap_{j=1}^{\infty} I^j M) = 0$ . Si  $A$  es un dominio íntegro o un anillo local, e  $I$  es un ideal propio, entonces*

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} I^j = 0$$

*Demostración.* Es consecuencia del Lema de Artin-Rees. Ver [Eis95].  $\square$

Ahora sí probamos el teorema:

*Demostración del teorema 4.3.6.* Si  $M$  es playo, por el teorema 4.2.5,  $\text{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m}, M) = 0$ . Ahora, supongamos que  $\text{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m}, M) = 0$ . Queremos ver que  $M$  es playo como  $A$ -módulo. Basta ver que el morfismo  $I \otimes_A M \rightarrow M$  es inyectivo, para  $I$  ideal de  $A$ .

Primero veamos que  $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n \cdot (I \otimes_A M) = 0$ . Si consideramos a  $I \otimes_A M$  como un  $B$ -módulo vía la estructura de  $B$ -módulo de  $M$ , es finitamente generado y luego por el Teorema de Intersección de Krull (Teorema 4.3.9),  $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n \cdot (I \otimes_A M) = 0$ . Pero como teníamos que  $\mathfrak{m}B \subset \mathfrak{n}$  entonces vale que  $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n \cdot (I \otimes_A M) = 0$ .

Sea ahora  $x \in \ker(I \otimes_A M \rightarrow M)$ . Veamos que  $x \in \mathfrak{m}^n \cdot (I \otimes_A M)$  para todo  $n$ . Y luego tendremos  $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n \cdot (I \otimes_A M) = 0$ , de donde  $x = 0$ , como queríamos. Para ver que  $x \in \mathfrak{m}^n \cdot (I \otimes_A M)$ , consideramos el morfismo:

$$(\mathfrak{m}^n I) \otimes_A M \rightarrow I \otimes_A M.$$

La imagen de este morfismo es  $\mathfrak{m}^n \cdot (I \otimes_A M)$ . Aplicando el Lema de Artin-Rees (Lema 4.3.8), obtenemos un entero  $s$  tal que  $\mathfrak{m}^s \cap I \subset \mathfrak{m}^n I$ . Luego, es suficiente probar que  $x$  está en la imagen de  $(\mathfrak{m}^n \cap I) \otimes_A M \rightarrow I \otimes_A M$  para todo  $n$ . De la sucesión exacta

$$(\mathfrak{m}^n \cap I) \otimes_A M \rightarrow I \otimes_A M \rightarrow (I/\mathfrak{m}^n \cap I) \otimes_A M \rightarrow 0$$

es suficiente ver que  $x$  está en el núcleo de  $I \otimes_A M \rightarrow (I/\mathfrak{m}^n \cap I) \otimes_A M$ .

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} I \otimes_A M & \xrightarrow{\gamma} & (I/\mathfrak{m}^n \cap I) \otimes_A M \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\beta} & (A/\mathfrak{m}^n) \otimes_A M \end{array}$$

Tenemos que  $\alpha(x) = 0$ , luego  $\pi \circ \gamma(x) = 0$ . Veamos que  $\pi$  es inyectiva, y luego tendremos que  $x \in \ker(\gamma)$ , como queríamos. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow I/(\mathfrak{m}^n \cap I) \rightarrow A/\mathfrak{m}^n \rightarrow A/(I + \mathfrak{m}^n) \rightarrow 0$$

que por la Proposición 4.2.3 induce la sucesión:

$$\text{Tor}_1^A(A/(I + \mathfrak{m}^n), M) \rightarrow I/(\mathfrak{m}^n \cap I) \otimes_A M \xrightarrow{\pi} A/\mathfrak{m}^n \otimes_A M$$

Para ver que  $\pi$  es inyectiva, es suficiente probar que  $\text{Tor}_1^A(A/(I + \mathfrak{m}^n), M) = 0$ , pero esto vale por el Lema 4.3.7, ya que  $A/(I + \mathfrak{m}^n)$  es un  $A$ -módulo de longitud finita.  $\square$

## 4.4. Ideales de Fitting y flat locus

En esta sección veremos una caracterización de playitud en términos de ideales de Fitting. Si un  $A$ -módulo  $M$  está dado por una presentación finita, entonces el  $k$ -ideal de Fitting  $F_k(M)$  es el ideal generado por los menores de tamaño  $n - k$  de la matriz de presentación, donde  $n$  es el número de filas de la matriz.

Primero introducimos la noción de rango a módulos arbitrarios.

El conjunto  $S$  de los elementos no divisores de 0 en  $A$  es un conjunto multiplicativamente cerrado. La localización  $S^{-1}A$  se denomina el anillo total de fracciones de  $A$  y lo denotamos  $Q(A)$ . Si  $A$  es un dominio íntegro,  $Q(A)$  es simplemente el cuerpo de fracciones de  $A$ .

**Definición 4.4.1.** Sea  $A$  un anillo, y sea  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado. Decimos que  $M$  tiene *rango constante*  $r$ , o simplemente que tiene *rango*  $r$ , si  $M \otimes_A Q(A)$  es un  $Q(A)$ -módulo libre de rango  $r$ , donde  $Q(A)$  denota el anillo total de fracciones de  $A$ .

**Ejemplo 4.4.2.** Si  $A$  es un dominio íntegro,  $Q(A)$  es un cuerpo, luego cada módulo  $M$  finitamente generado sobre  $A$  tiene un rango:

$$\text{rango}(M) = \dim_{Q(A)} M \otimes_A Q(A)$$

**Ejemplo 4.4.3.** Si  $A = K[x, y]/\langle xy \rangle$ , el ideal generado por  $x$  en  $A$  no es un  $A$ -módulo de rango constante.

**Lema 4.4.4.** Sea  $A$  un anillo noetheriano y sea  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado. Son equivalentes:

1.  $M$  tiene rango  $r$ .
2. La localización  $M_P$  es un  $A_P$ -módulo libre de rango  $r$  para todos los ideales primos  $P$  de  $A$ .

*Demostración.* Ver [BGL<sup>+</sup>07]. □

**Definición 4.4.5.** Sea  $A$  un anillo y sea  $M$  un  $A$ -módulo con presentación  $A^m \xrightarrow{\phi} A^n \rightarrow M \rightarrow 0$ . Supongamos que  $\phi$  está definida por la matriz  $S$  para alguna elección de bases en  $A^m$  y  $A^n$ . Para todo  $k$ , sea  $F_k(M) = F_k^A(M) \subset A$  el ideal generado por los menores de tamaño  $n - k$  de la matriz  $S$ , que llamamos el *k-ideal de Fitting* de  $M$ . Usamos la convención de que  $F_k(M) = 0$  si  $n - k > \min\{n, m\}$  y  $F_k(M) = A$  si  $k \geq n$ .

**Observación 4.4.6.**  $F_i(M)$  solo depende de  $M$  (Ver [BGL<sup>+</sup>07]).

**Teorema 4.4.7.** Sea  $A$  un anillo local y  $M$  un  $A$ -módulo de presentación finita. Son equivalentes:

1.  $M$  es un módulo libre de rango  $r$ ;
2.  $F_r(M) = A$  y  $F_{r-1}(M) = 0$

*Demostración.* Que 1. implica 2. es consecuencia de la definición 4.4.5: tenemos una presentación para  $M$ ,  $A^m \rightarrow A^n \rightarrow M \rightarrow 0$ , con  $n = r$ , y con matriz de presentación  $S = 0$ , luego, por definición  $F_r(M) = A$ , pues  $r = n$  y  $F_{r-1}(M) = 0$ . Para ver que 2. implica 1., consideramos una presentación  $A^m \rightarrow A^n \rightarrow M \rightarrow 0$ , con matriz de presentación  $S$  (con respecto a algunas bases de  $A^m$  y  $A^n$ ). Como  $F_r(M) = A$  y  $F_{r-1}(M) = 0$ , entonces  $n = r$  y

$S$  es la matriz  $0$ , o  $n > r$ , un menor de tamaño  $n - r$  de  $S$  es una unidad ( $A$  es un anillo local) y todos los menores de tamaño  $(n - r + 1)$  son  $0$ . Si  $n = r$  y  $S$  es la matriz  $0$ , entonces claramente  $M$  es libre de rango  $r$ . En el otro caso, uno de los menores de tamaño  $n - r$  es una unidad, luego podemos elegir nuevas bases de  $A^m$  y  $A^n$  tal que la matriz de presentación es del tipo

$$\begin{pmatrix} E_{n-r} & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

con  $E_{n-r}$  la matrix de tamaño  $n - r$  cuyo determinante es una unidad. Como todos los  $n - r + 1$  menores son cero también obtenemos que  $C = 0$ . Esto implica que  $M$  es libre y es isomorfo al submódulo de  $A^n$  generado por los vectores  $e_{n-r+1}, \dots, e_n$ , que tiene rango  $r$ .  $\square$

**Corolario 4.4.8.** *Sea  $A$  un anillo y  $M$  un  $A$ -módulo de presentación finita. Son equivalentes:*

1.  $M_P$  es un  $A_P$ -módulo libre de rango  $r$  para todo ideal primo  $P \subset A$
2.  $F_r(M) = A$  y  $F_{r-1}(M) = 0$

*Demostración.* Observamos que para todo ideal primo  $P \subset A$ ,  $F_k^{A_P}(M_P) = (F_k^A(M))_P$ . Luego, el resultado vale por el Teorema 4.4.7  $\square$

**Teorema 4.4.9.** *Sea  $A$  un anillo noetheriano y sea  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado. Son equivalentes:*

1.  $M$  es playo y tiene rango constante  $r$ .
2.  $F_r(M) = A$  y  $F_{r-1} = 0$

*Demostración.* Si  $M$  es playo y tiene rango constante  $r$ , entonces, por la Proposición 4.3.3  $M_P$  es playo como  $A_P$  módulo para todo ideal primo  $P \subset A$ . Por la Proposición 4.3.5, los módulos  $M_P$  son libres y de rango constante  $r$  (Lema 4.4.4). Y por el corolario 4.4.8 tenemos  $F_r(M) = A$  y  $F_{r-1} = 0$ . La vuelta es análoga usando los mismos resultados.  $\square$

Dado un  $A$ -módulo  $M$ , no necesariamente playo, nos interesa saber para que ideales primos  $P \subset A$  la localización  $M_P$  es playo como  $A_P$ -módulo. El conjunto de los  $P$  tales que  $M_P$  es  $A_P$ -playo se conoce como el *flat locus* (o lugar de playitud, en castellano) de  $M$ , que describiremos a continuación.

**Proposición 4.4.10** (Flat locus es abierto). *Sea  $A$  un anillo,  $M$  un  $A$ -módulo de presentación finita y*

$$F(M) := \langle \cup_k \{a \in F_k(M) \mid a.F_{k-1}(M) = 0\} \rangle \subset A$$

*Entonces:*

1.  $M$  es playo si y sólo si  $F(M) = A$ ;
2. Sea  $P \subset A$  un ideal primo, entonces  $M_P$  es playo si y sólo si  $P \not\subset F(M)$

*Demostración.* Por la proposición 4.3.3, 1. es un caso particular de 2.

Probemos 2. Sea  $P \subset A$  un ideal primo. Por la Proposición 4.4.8,  $M_P$  es un  $A_P$ -módulo libre de rango  $r$  si y sólo si  $F_r(M_P) = F_r(M)_P = A_P$  y  $F_{r-1}(M_P) = F_{r-1}(M)_P = 0$ . Ahora  $F_{r-1}(M)_P = 0$  si y sólo si  $\exists a \notin P$  tal que  $aF_{r-1}(M) = 0$ . Esto implica que  $M_P$  es un  $A_P$  módulo libre de rango  $r$  si y sólo si  $P \not\supset \{a \in F_r(M) / a.F_{r-1}(M) = 0\}$ . Entonces si  $M_P$  es libre como  $A_P$  módulo,  $P \not\supset F(M)$ . Ahora, si  $P \not\supset F(M)$ , entonces existe  $r$  tal que  $P \not\supset \{a \in F_r(M) / a.F_{r-1}(M) = 0\}$ . Esto implica que  $M_P$  es libre como  $A_P$ -módulo  $\square$

## 4.5. Playitud y syzygies

Sean  $f_1, \dots, f_s$ . Una syzygy, o sicigia en castellano, en los  $f_1, \dots, f_s$  es una  $s$ -upla  $(g_1, \dots, g_s)$  tal que

$$\sum_{i=1}^s g_i f_i = 0$$

Daremos una caracterización de playitud para anillos locales en términos de syzygies.

**Teorema 4.5.1.** *Sea  $A$  un anillo local con ideal maximal  $\mathfrak{m}$  y sea  $K = A/\mathfrak{m}$ . Sea  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  un ideal de  $A[x]_{\langle x \rangle}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , y sean  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r \in K[x]_{\langle x \rangle}$  las reducciones de  $f_1, \dots, f_r \pmod{\mathfrak{m}}$ . O sea,  $\bar{f}_i$  es la imagen de  $f_i$  de la proyección  $\pi: A[x]_{\langle x \rangle} \rightarrow K[x]_{\langle x \rangle}$ . Son equivalentes:*

1.  $A[x]_{\langle x \rangle}/I$  es playo como  $A$  módulo.
2. Las syzygies de  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r$  están generadas por las reducciones mod  $\mathfrak{m}$  de las syzygies de  $f_1, \dots, f_r$ . O lo que es lo mismo, toda relación en  $K[x]_{\langle x \rangle}$ ,  $\sum_{i=1}^r g_i \bar{f}_i = 0$ , puede ser levantada a una relación  $\sum_{i=1}^r \tilde{g}_i f_i = 0$  en  $A[x]_{\langle x \rangle}$ .

*Demostración.* Por el Criterio local para playitud (Teorema 4.3.6), el  $A$ -módulo  $B := A[x]_{\langle x \rangle}/I$  es playo si y sólo si  $\text{Tor}_1^A(K, B) = 0$ . Consideremos la sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow I \rightarrow A[x]_{\langle x \rangle} \rightarrow B \rightarrow 0$$

y tensorizamos con  $K$ . Nos queda la sucesión exacta:

$$0 = \text{Tor}_1^A(A[x]_{\langle x \rangle}, K) \rightarrow \text{Tor}_1^A(B, K) \rightarrow I \otimes_A K \rightarrow A[x]_{\langle x \rangle} \otimes_A K \rightarrow B \otimes_A K \rightarrow 0$$

O lo que es lo mismo

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1^A(B, K) \rightarrow I \otimes_A K \rightarrow K[x]_{\langle x \rangle} \rightarrow K[x]_{\langle x \rangle}/I \rightarrow 0$$

Luego  $B$  es playo como  $A$ -módulo si y sólo si  $I \otimes_A K \rightarrow K[x]_{\langle x \rangle}$  es inyectivo. Tenemos que

$$I \otimes_A K = \langle f_1, \dots, f_r \rangle \otimes_A K = \left\{ \left( \sum_{i=1}^r g_i f_i \right) \otimes_A 1 / g_i \in A[x]_{\langle x \rangle} \right\}$$

Luego, por el Lema 4.2.8,  $(\sum_{i=1}^r g_i f_i) \otimes_A 1 = 0$  si y sólo si  $\sum_{i=1}^r g_i f_i = \sum_{j=1}^s b_j m_j$ , para algunos  $b_j \in A$ ,  $m_j \in I$  que cumplen  $b_j 1 = 0$  en  $K$ , esto es,  $b_j \in \mathfrak{m}$ , y luego  $(\sum_{i=1}^r g_i f_i) \otimes_A 1 = 0$  si y sólo si  $\sum_{i=1}^r g_i f_i = \sum_{i=1}^r k_i f_i$ , para adecuados  $k_i \in \mathfrak{m}A[x]_{\langle x \rangle}$ .

Entonces si tenemos que  $(\sum_{i=1}^r g_i f_i) \otimes_A 1 \in I \otimes_A K$  y su imagen es 0 en  $K[x]_{\langle x \rangle}$ , tenemos  $(\sum_{i=1}^r \bar{g}_i \bar{f}_i) = 0$ , con  $(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_r)$  una syzygy de  $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r$ . Si  $I \otimes_A K \rightarrow K[x]_{\langle x \rangle}$  es inyectivo (esto es,  $B$  es playo), entonces  $(\sum_{i=1}^r g_i f_i) \otimes_A 1 = 0$ , y por lo que dijimos anteriormente,  $\sum_{i=1}^r g_i f_i = \sum_{i=1}^r k_i f_i$ , para adecuados  $k_i \in \mathfrak{m}A[x]_{\langle x \rangle}$ . En este caso tomamos  $\tilde{g}_i = g_i - k_i$  para todo  $i$ , que es una syzygy de los  $f_1, \dots, f_r$  en  $A[x]_{\langle x \rangle}$ . Por otra parte si toda syzygy se puede levantar, cada vez que tenemos  $(\sum_{i=1}^r g_i f_i) \otimes_A 1 \in I \otimes_A K$ , con  $(\sum_{i=1}^r \bar{g}_i \bar{f}_i) = 0$ , existen  $\tilde{g}_i$  (pues las syzygies se pueden levantar) tal que  $(\sum_{i=1}^r \tilde{g}_i f_i = 0$ , con  $\tilde{g}_i = \bar{g}_i + h_i$ , con  $h_i \in \mathfrak{m}A[x]_{\langle x \rangle}$ , y como  $\bar{g}_i$  es la clase de  $g_i$  en  $K[x]_{\langle x \rangle}$ , existen,  $k_i \in \mathfrak{m}A[x]_{\langle x \rangle}$  tal que  $\tilde{g}_i = g_i + k_i$ . Pero entonces  $(\sum_{i=1}^r g_i f_i = \sum -k_i f_i$ , y esto, por lo dicho anteriormente, es equivalente a que  $(\sum_{i=1}^r g_i f_i) \otimes_A 1 = 0$ , y por lo tanto, el morfismo  $I \otimes_A K \rightarrow K[x]_{\langle x \rangle}$  es inyectivo, y por ende,  $B$  es playo como  $A$ -módulo, como queríamos.  $\square$

**Observación 4.5.2.** Si en el teorema anterior reemplazamos  $A[x]_{\langle x \rangle}$  por  $A[x]$ , vale que 1. implica 2. pero no vale la vuelta. Vale sólo si le pedimos a  $A$  algunas condiciones más. 2. implica 1. también vale en los casos en los que

1.  $A$  es dominio de ideales principales. Por ejemplo si  $A = K[k]_{\langle k \rangle}$ . Se puede ver una prueba en [Eis95].
2.  $A$  es artiniiano. Para una prueba, consultar [AST76].

Veamos algunos ejemplos de como aplicar este resultado.

**Ejemplo 4.5.3.** Consideremos el anillo  $A = \mathbb{C}[k]$ , y el  $A$ -módulo  $M = \mathbb{C}[x, y, k]/I$ , donde  $I \subset A$  es el ideal generado por el polinomio  $x^2 - ky$ . Reduciendo módulo  $k$ , obtenemos el polinomio  $x^2$ , que no admite una syzygy distinta de 0 sobre  $\mathbb{C}[x, y]$ . Luego, la localización de  $M$  en  $\langle k \rangle$ ,  $(\mathbb{C}[x, y, k]/I)_{\langle k \rangle}$  es playo como  $\mathbb{C}[k]_{\langle k \rangle}$ -módulo, por la Observación 4.5.2 item 1.. Podemos aplicar el mismo argumento a cualquier otro ideal maximal de  $\mathbb{C}[k]$  en lugar de  $\langle k \rangle$ . Luego, por la Proposición 4.3.3,  $M$  es playo como  $A$ -módulo.

**Ejemplo 4.5.4.** Sea  $A = \mathbb{C}[k]$ , y consideremos el  $A$ -módulo  $M = \mathbb{C}[x, k]/\langle kx \rangle$ . Observamos que la localización  $M_{\langle k \rangle}$  no es playo como  $A_{\langle k \rangle}$ -módulo, ya que  $kx$  se reduce a 0 módulo  $k$ . Luego, nuevamente por la Proposición 4.3.3,  $M$  no es playo como  $A$  módulo.

## 4.6. Ejemplos geométricos y familias playas

En esta sección introduciremos la noción de familias playas, y daremos algunos ejemplos geométricos. Primero comencemos con algunos nociones y definiciones básicas de la geometría algebraica.

En lo que sigue  $K$  es un cuerpo y  $K[\mathbf{x}] = K[x_1, \dots, x_n]$  es el anillo de los polinomios en  $n$  variables con coeficientes en  $K$ .

**Definición 4.6.1** (Variedades algebraicas afines).

- Llamamos a  $\mathbb{A}_K^n = K^n = \{(a_1, \dots, a_n) / a_i \in K\}$  el *n-espacio afín*.
- Para cualquier subconjunto  $M \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$  definimos  $V(M)$  como

$$V(M) = \{p \in \mathbb{A}_K^n / f(p) = 0 \forall f \in M\}$$

- Un subconjunto  $X \subseteq \mathbb{A}_K^n$  es una *variedad algebraica afín* si  $X = V(M)$  para algún conjunto de polinomios  $M$  en  $K[x_1, \dots, x_n]$

Como  $V(M) = V(\langle M \rangle)$  para todo  $M \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ , entonces toda variedad algebraica afín es  $V(I)$ , para algún  $I$  ideal de  $K[\mathbf{x}]$ . El Teorema de la base de Hilbert (ver por ejemplo [CLO07]), que establece que si  $K$  es un cuerpo,  $K[\mathbf{x}]$  es noetheriano, nos dice que cualquier variedad algebraica afín es el conjunto de ceros de finitos polinomios.

**Definición 4.6.2.** Para cualquier subconjunto  $X \subseteq \mathbb{A}_K^n$ , definimos el *ideal de  $X$*  como el ideal

$$I(X) = \{f \in K[x_1, \dots, x_n] / f(p) = 0 \forall p \in X\}$$

Es fácil chequear que  $V(I(X)) = X$  para cualquier variedad algebraica  $X$ . Pero en general no es cierto que  $I(V(I)) = I$  con  $I \subset K[\mathbf{x}]$ . Por ejemplo, en  $K[x, y]$ , si  $I = \langle x^2, y^2 \rangle$ ,  $V(I) = (0, 0)$  y nos queda  $I(V(I)) = \langle x, y \rangle \neq I$ . Sin embargo, si  $K$  es algebraicamente cerrado existe una relación simple entre  $I$  y  $I(V(I))$ . Antes necesitaremos unas definiciones:

**Definición 4.6.3.** Sea  $I \subset K[\mathbf{x}]$  un ideal. Decimos que  $I$  es un *ideal radical* si para todo  $f \in K[\mathbf{x}]$  tal que existe  $m \in \mathbb{N}$  con  $f^m \in I$ , entonces  $f \in I$ .

**Definición 4.6.4.** Sea  $I \subset K[\mathbf{x}]$  un ideal. Definimos el *radical de  $I$* ,  $\sqrt{I}$  como

$$\sqrt{I} = \{f \in K[\mathbf{x}] / f^m \in I \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\},$$

que resulta ser un ideal radical.

Ahora enunciamos el Teorema de los Ceros de Hilbert o Nullstellensatz (el nombre original en alemán), que muestra la relación entre un ideal  $I$  con  $I(V(I))$ , en el caso en el que  $K$  sea algebraicamente cerrado:

**Teorema 4.6.5 (Nullstellensatz).** Sea  $K$  un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces, para todo ideal  $I \subset K[\mathbf{x}]$  vale

$$I(V(I)) = \sqrt{I}.$$

Para una demostración consultar [CLO07]. El teorema anterior nos muestra que hay una correspondencia entre las variedades algebraicas afines y los ideales radicales.

**Definición 4.6.6.** Sea  $X \subseteq \mathbb{A}_K^n$  una variedad algebraica afín. El *anillo coordinado de  $X$*  es el anillo  $K[X] = K[\mathbf{x}]/I(X)$

**Observación 4.6.7.** Si  $X = V(I)$ , con  $I$  un ideal de  $K[\mathbf{x}]$ , entonces por el Nullstellensatz (Teorema 4.6.5) tenemos que  $I(V(I)) = \sqrt{I}$ . Luego, el anillo coordinado de  $V(I)$  es  $K[X] = K[\mathbf{x}]/\sqrt{I}$ .

### Ejemplos geométricos

Geoméricamente, la playitud entra en juego cuando estudiamos familias de variedades algebraicas afines (también llamados conjuntos algebraicos). Pensamos a dicha familia como una colección de objetos dependientes de algunos parámetros. Los parámetros típicamente varían en una variedad algebraica afín, y es natural preguntarse si los objetos dependientes de los parámetros “varían continuamente” con los parámetros. Un intento de hacer esta idea precisa es definir una familia de conjuntos algebraicos como una variedad algebraica afín  $X \subset T \times \mathbb{A}^n$ . Estamos suponiendo que  $T$  es una variedad algebraica afín, y pensamos a las fibras de la proyección  $\pi: X \rightarrow T$  como los miembros de la familia.

Antes de definir formalmente que es un morfismo playo, veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 4.6.8.** Consideremos la familia

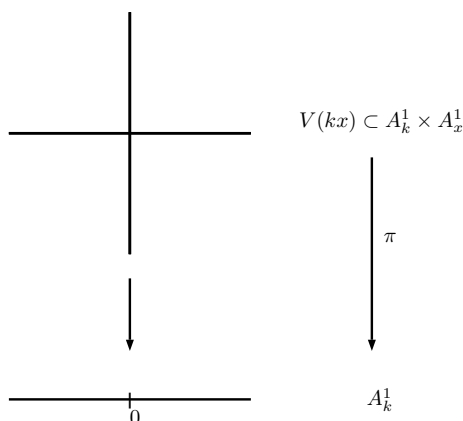
$$V(x^2 - yk) \subset \mathbb{A}^3 = \mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{A}_{xy}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}_k^1$$

Para  $k \neq 0$ , la fibra sobre  $k$  es una parábola. Sobre  $k = 0$ , tenemos la línea doble  $V(x^2)$ . No hay nada de malo con eso: mientras consideremos a la fibra sobre 0 con su doble estructura, podemos pensarla con una cónica que es el límite de sus fibras vecinas.

Sin poner condiciones para la proyección algunas fibras pueden tener poco que ver entre sí. De hecho, puede ocurrir que una fibra particular es más grande que sus fibras vecinas, como muestran los siguientes ejemplos:

**Ejemplo 4.6.9.** Consideremos la familia:

$$V(kx) \subset \mathbb{A}^2 = \mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{A}_x^1 \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}_k^1$$

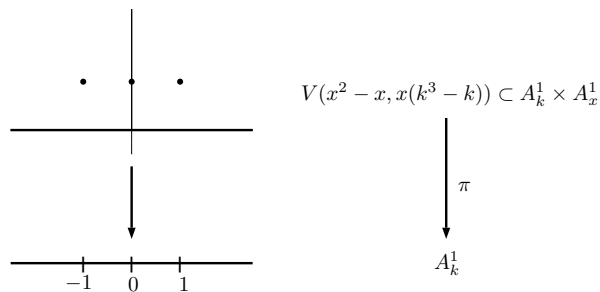


En este caso, la dimensión de la fibra sobre  $k = 0$  excede la dimensión de las fibras vecinas.

**Ejemplo 4.6.10.** Tenemos la familia

$$V(x^2 - x, x(k^3 - k)) \subset \mathbb{A}^2 = \mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{A}_x^1 \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}_k^1$$





En este ejemplo todas las fibras son finitas, pero las fibras sobre  $k = 0, 1$  y  $-1$  consisten de más puntos que en sus fibras vecinas.

Veremos que la condición de playitud previene los comportamientos patológicos de las fibras como en los ejemplos anteriores.

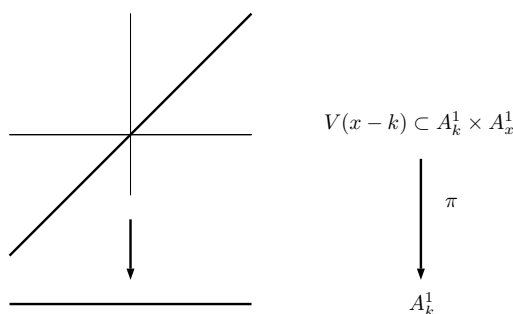
### Morfismos playos

**Definición 4.6.11.** Si  $\varphi: A \rightarrow B$  es un homomorfismo de anillos, decimos que  $\varphi$  es *playo*, o que  $B$  es playo sobre  $A$ , si  $B$  visto como un  $A$ -módulo vía  $\varphi$  es playo.

**Definición 4.6.12.** Un morfismo  $\pi: X \rightarrow Y$  de variedades algebraicas afines es *playo* si el morfismo inducido de anillos coordenados es playo.

Es decir la proyección  $\pi: X \rightarrow Y$  es playo si  $K[X]$  es playo como  $K[Y]$ -módulo. Si tenemos  $I$  un ideal en  $K[\mathbf{x}, \mathbf{k}] = K[x_1, \dots, x_n, k_1, \dots, k_m]$  y consideramos la proyección  $\pi: V(I) \subset \mathbb{A}^{n+m} = \mathbb{A}_x^n \times \mathbb{A}_k^m \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}_k^m$ ,  $\pi(x, k) = k$ , por definición la proyección es playo si el anillo coordenado  $K[x, k]/I(V(I)) = K[x, k]/\sqrt{I}$  es playo como  $K[k]$ -módulo. Observamos que tenemos que considerar al radical de  $I$ , en lugar de  $I$ , pero si trabajamos con esquemas afines en lugar de variedades afines, podemos trabajar con  $I$  (no hace falta pensar en el radical). Igualmente en la mayor parte de los ejemplos con los que trabajamos, que son ideales con coeficientes genéricos, los ideales que nos aparecen son radicales.

**Ejemplo 4.6.13.** La proyección  $V(x - k) \subset \mathbb{A}^2 = \mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{A}_x^1 \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}_k^1$  es playo.



El módulo  $K[x, k]/\langle x - k \rangle$  es isomorfo a  $K[k]$ . Como  $K[k] \otimes_{K[k]} N = N$  para cualquier  $K[k]$  módulo  $N$ , entonces  $K[x, k]/\langle x - k \rangle \cong K[k]$  es playo como  $K[k]$  módulo.

**Ejemplo 4.6.14.** La proyección en el Ejemplo 4.6.9 no es playa. De hecho el módulo  $M = K[x, t]/\langle tx \rangle$  no es playo sobre  $K[t]$ .

Para ver esto, consideramos la inclusión  $i: \langle t \rangle \rightarrow K[x, t]$ , y observamos que el morfismo inducido

$$i \otimes Id_M: \langle t \rangle \otimes_{K[t]} K[x, t]/\langle tx \rangle \rightarrow K[x, t] \otimes_{K[t]} K[x, t]/\langle tx \rangle$$

no es inyectivo:  $0 \neq t \otimes x \mapsto t \otimes x = 1 \otimes tx = 0$ .

También podemos extender la definición de playitud en cada punto. Antes unas definiciones:

**Definición 4.6.15.** Sea  $X \subset \mathbb{A}_K^n$  una variedad algebraica afín y sea  $p \in X$ . Definimos el *anillo local*

$$\mathcal{O}_{X,p} = \left\{ \frac{f}{g}, f, g \in K[X], g(p) \neq 0 \right\} = K[X]_p,$$

donde la localización  $K[X]_p$  en el punto  $p$  es la localización de  $K[X]$  en el ideal maximal  $\mathfrak{M}_p = \langle x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n \rangle$ .

**Definición 4.6.16.** Decimos que un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  de variedades algebraicas afines es *playo en  $x$* , si el anillo local  $\mathcal{O}_{X,x}$  es playo sobre  $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ .

Y una definición de morfismo playo equivalente:

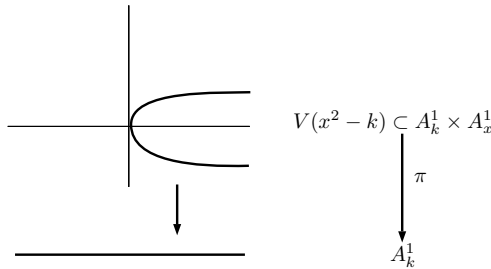
**Definición 4.6.17.** Decimos que un morfismo  $f: X \rightarrow Y$  es *playo* si es playo en  $x$  para todo  $x \in X$ .

Esta definición es equivalente a la que dimos antes por la Proposición 4.3.4.

Nos referiremos a cada morfismo playo como una *familia playa*.

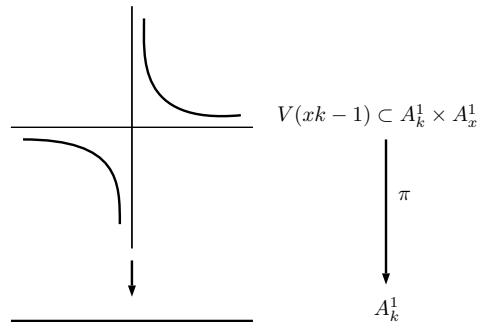
Antes de terminar esta sección veamos algunos ejemplos más de morfismos playos:

**Ejemplo 4.6.18.** Consideremos la familia:  $V(x^2 - k) \subset \mathbb{A}^2 = \mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{A}_x^1 \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}_k^1$



En este caso la proyección es playa porque el módulo  $K[x, k]/(x^2 - k)$  es libre como  $K[k]$ -módulo; las clases del 1 y de  $x$  son una base.

**Ejemplo 4.6.19.** Sea la familia  $V(xk - 1) \subset \mathbb{A}^2 = \mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{A}_x^1 \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}_k^1$



La proyección es playita ya que  $K[x, k]/\langle xk - 1 \rangle$  es isomorfo a  $K[k, k^{-1}]$ , que es  $K[k]$  localizado en el conjunto multiplicativo  $\{1, k, k^2, \dots\}$ , y luego, es playito sobre  $K[k]$ . En este caso, vemos que  $K[x, k]/\langle xk - 1 \rangle$  no es libre sobre  $K[k]$ , pero esto no es ninguna contradicción ya que no es finitamente generado sobre  $K[k]$ . Observamos que la fibra sobre 0 es vacía.

### 4.7. Playitud y dimensión de las fibras

En los ejemplos anteriores vimos que la playitud estaba relacionada con el comportamiento de las fibras. En esta sección veremos un teorema que relaciona la playitud con la dimensión de las fibras.

Empezaremos definiendo los conceptos de dimensión de un anillo.

**Definición 4.7.1.** Sea  $A$  un anillo. Una cadena de ideales primos de  $A$  es una sucesión finita estrictamente creciente de ideales primos. Si

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_r$$

es una tal cadena, diremos que su longitud es  $r$ .

Llamamos *dimensión de Krull* de  $A$ , o simplemente *dimensión*, al supremo de las longitudes de las cadenas de ideales primos de  $A$ , y usaremos la notación  $\dim A$ .

Para probar el teorema sobre dimensiones usaremos lo siguiente:

**Definición 4.7.2.** Sea  $A$  un anillo, y sea  $I$  un ideal de  $A$ . Un ideal primo  $P$  de  $A$  se dice *primo minimal sobre  $I$*  si es minimal entre todos los ideales primos que contienen a  $I$ . Un ideal primo se dice *primo minimal* si es un ideal primo minimal sobre el ideal 0.

**Teorema 4.7.3** (Teorema del ideal principal). *Sea  $A$  un anillo noetheriano. Sean  $x_1, \dots, x_c$  elementos de  $A$  y supongamos que  $P$  es un primo minimal de  $A$  sobre  $\langle x_1, \dots, x_c \rangle$ . Entonces  $\dim(A_P) \leq c$ . Recíprocamente, si  $P$  es un ideal primo con  $\dim(A_P) = c$ , entonces  $P$  es minimal sobre algún ideal generado por  $c$  elementos.*

*Demostración.* Ver [Eis95]. □

Ahora sí, el teorema que relaciona playitud con dimensión de las fibras:

**Teorema 4.7.4.** Sean  $A$  y  $B$  dos anillos locales con  $\mathfrak{m}$  y  $\mathfrak{n}$  los ideales maximales de  $A$  y  $B$  respectivamente, y sea  $\varphi: A \rightarrow B$  un homomorfismo de anillos locales (esto es  $\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$ ). Entonces:  $\dim(B) \leq \dim(A) + \dim(B/\varphi(\mathfrak{m})B)$ . Y vale la igualdad si  $B$  es playo como  $A$ -módulo.

Para la demostración utilizaremos el siguiente lema, que es consecuencia del Teorema del Ideal Principal 4.7.3. Para más detalles consultar [Eis95].

**Lema 4.7.5.** Sea  $A$  un anillo local, con ideal maximal  $\mathfrak{m}$ . Entonces  $\dim A$  es el menor  $d$  tal que existen  $d$  elementos  $x_1, \dots, x_d \in \mathfrak{m}$  con  $\mathfrak{m}^n \subset (x_1, \dots, x_d) \subset \mathfrak{m}$  para algún  $n$  suficientemente grande.

*Demostración del Teorema 4.7.4.* Sea  $d = \dim(A)$ , y sea  $e = \dim(B/\varphi(\mathfrak{m})B)$ . Por el lema anterior, existen  $x_1, \dots, x_d$  tal que  $\mathfrak{m}^s \subset (x_1, \dots, x_d)$  para algún  $s \gg 0$ , y  $y_1, \dots, y_e$  tal que  $\mathfrak{n}^t \subset \varphi(\mathfrak{m})B + (y_1, \dots, y_e)$ . Luego

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}^{st} &\subset (\varphi(\mathfrak{m})B + (y_1, \dots, y_e))^s \\ &\subset (\varphi(\mathfrak{m}^s)B + (y_1, \dots, y_e)) \\ &\subset (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_d))B + (y_1, \dots, y_e) \\ &\subset (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_d), y_1, \dots, y_e)B \end{aligned}$$

Y entonces, de nuevo por el lema 4.7.5,  $\dim B \leq d + e$ .

Ahora, supongamos que  $B$  es playo como  $A$  módulo. Queremos que valga la igualdad, es decir, queremos probar que  $\dim(B) \geq \dim(A) + \dim(B/\varphi(\mathfrak{m})B)$ . Sea  $Q$  un ideal primo de  $B$  minimal sobre  $\varphi(\mathfrak{m})B$  tal que  $\dim(B/Q) = \dim(B/\varphi(\mathfrak{m})B)$ . Luego, como siempre vale la siguiente desigualdad:

$$\dim(B) \geq \dim(B/Q) + \dim(B_Q),$$

es suficiente probar que  $\dim(B_Q) \geq \dim(A)$ . Tenemos que  $\varphi^{-1}(Q) = \mathfrak{m}$ . Luego, alcanza con ver que dada una cadena de primos de  $A$  descendientes  $\mathfrak{m} \supseteq P_1 \supseteq \dots$  existe una cadena de primos de  $B$   $Q \supseteq Q_1 \supseteq \dots$  con  $\varphi^{-1}(Q_i) = P_i$ . Pero esto es consecuencia del siguiente lema, que completa la demostración.  $\square$

**Lema 4.7.6.** Sea  $\varphi: A \rightarrow B$  un homomorfismo de anillos tal que  $B$ , con la estructura de  $A$ -módulo inducida por  $\varphi$ , es playo. Supongamos que  $P \supset P'$  son dos ideales primos de  $A$ . Si  $Q$  es un ideal primo de  $B$ , tal que  $\varphi^{-1}(Q) = P$ , entonces existe un ideal primo  $Q'$  de  $B$  tal que  $\varphi^{-1}(Q') = P'$

*Demostración.* Ver [Eis95].  $\square$

Si en el Teorema 4.7.4, agregamos la hipótesis de que  $A$  sea un anillo local Cohen-Macaulay, entonces vale la vuelta. Es decir, si tenemos  $\varphi: A \rightarrow B$  un homomorfismo de anillos locales, con  $\mathfrak{m}$  y  $\mathfrak{n}$  los ideales maximales de  $A$  y  $B$  respectivamente, y  $A$  es Cohen-Macaulay, entonces  $B$  es playo sobre  $A$  si y sólo si  $\dim(B) = \dim(A) + \dim(B/\varphi(\mathfrak{m})B)$ . En particular, anillos regulares o localizaciones del cociente de un anillo de polinomios por

un ideal generado por una sucesión regular, son Cohen-Macaulay. Referimos al Capítulo 18 en [Eis95] o al libro [BH93] para las nociones de sucesiones regulares y de anillo Cohen-Macaulay y sus propiedades.

Queremos un resultado análogo al Teorema 4.7.4, pero en términos de morfismos de variedades algebraicas. Antes introducimos las siguientes definiciones:

**Definición 4.7.7.** Una variedad algebraica afín  $X$  es *irreducible* si dadas  $X_1$  y  $X_2$  variedades algebraicas afines tales que  $X = X_1 \cup X_2$ , entonces  $X_1 = X$  o  $X_2 = X$ .

**Proposición 4.7.8.** *Toda variedad algebraica afín se descompone de manera única como una unión*

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_s$$

*de variedades afines algebraicas irreducibles, ninguna de las cuáles es redundante. Llamamos a estas variedades las componentes irreducibles de  $X$ .*

*Demostración.* Ver [CLO07]. □

Por ejemplo, la variedad afín definida por  $xz = yz = 0$  se descompone como la unión de estas variedades irreducibles: el plano  $xy$  y el eje  $z$ , es decir:  $V(xz, yz) = V(z) \cup V(x, y)$ .

**Definición 4.7.9.** Sea  $X \subset \mathbb{A}_K^n$  una variedad algebraica afín. Definimos la *dimensión* de  $X$  como

$$\dim(X) = \text{máx}\{d \mid X \supset X_0 \supseteq X_1 \supseteq \dots \supseteq X_d, \text{ con } X_i \text{ variedad irreducible}\}.$$

**Proposición 4.7.10.** *Si  $X$  es una variedad algebraica afín y  $K$  es algebraicamente cerrado, entonces  $\dim(X) = \dim(K[X])$ , donde  $\dim(K[X])$  es la dimensión de Krull del anillo coordenado de  $X$ .*

*Demostración.* Ver [Mar10]. □

También podemos definir la dimensión local de una variedad en un punto:

**Definición 4.7.11.** Sea  $X$  una variedad algebraica afín con componentes irreducibles  $X_1, \dots, X_s$  y sea  $p \in X$ . Definimos la dimensión local de  $X$  en  $p$  como

$$\dim(X, p) = \{\text{máx } \dim(X_i) \mid p \in X_i\}$$

el máximo de las dimensiones de las componentes irreducibles de  $X$  que contienen a  $p$ .

**Proposición 4.7.12.** *Si  $X$  es una variedad algebraica afín sobre  $K$  con  $K$  algebraicamente cerrado, y  $p \in K$ , entonces:*

$$\dim(X, p) = \dim \mathcal{O}_{X,p} = \dim K[X]_p,$$

*es decir, la dimensión local de  $X$  en  $p$  es la dimensión de Krull del anillo local de  $X$  en  $p$ .*

*Demostración.* Ver [Mar10]. □

Ahora sí, podemos enunciar la proposición que relaciona playitud con dimensión de las fibras.

**Proposición 4.7.13.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo de variedades algebraicas afines. Sea  $x \in X$  un punto e  $y = f(x)$  su imagen en  $Y$ . Sea  $X_y$  la fibra de  $y$  en  $X$  por  $f$ .*

1. *Tenemos la desigualdad  $\dim(X_y, x) + \dim(Y, y) \geq \dim(X, x)$ .*
2. *Si  $f$  es playo en  $x$ , la desigualdad de arriba es una igualdad.*
3. *Si  $Y$  es regular en  $y$  y  $X$  es Cohen-Macaulay en  $x$ , entonces 2. es un si y sólo si.*

*Demostración.* Es consecuencia inmediata del Teorema 4.7.4. □

# Capítulo 5

## Redes bioquímicas y familias playas

Como vimos en el capítulo 1, una red de reacciones químicas da lugar a un sistema dinámico  $\dot{x} = f(x)$ ; más precisamente, si  $x_i(t)$  es la concentración de la especie  $X_i$  en el instante  $t$ , tenemos:

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i(x)$$

Si consideramos a la red con cinética de acción de masas, las funciones  $f_i$  son polinomios en las variables  $x_j$ , y en las variables  $k_l$ , donde  $k$  es el vector de las constantes de reacción.

Variando las constantes de reacción nos queda una familia de polinomios  $f_i(x, k)$ . Nos interesa ver qué pasa con los ceros de estos polinomios a medida que variamos las constantes  $k$ . Para esto consideramos el ideal  $I$  generado por los  $f_i(x, k)$ , y consideramos la variedad  $V(I) \subset \mathbb{C}^{s+r}$  ( $s$  es el número de especies de la red, y  $r$  es el número de reacciones, o en otros casos, si tenemos fijas algunas constantes, el número de constantes de reacción que varían). Consideramos la proyección

$$\begin{aligned} \pi: V(I) \subset \mathbb{C}^{s+r} &\rightarrow \mathbb{C}^r \\ (x, k) &\mapsto k \end{aligned} \tag{5.1}$$

Veremos en la sección 5.1 que la noción de familia playa que hemos introducido en el Capítulo 4, generaliza la condición de existencia de ceros no degenerados, para la que vale el teorema de funciones implícitas. Esta es la herramienta que está en la base de los trabajos [JS13] y [FW13a] presentados en los Capítulos 2 y 3. Nos interesa entonces ver cuándo el morfismo  $\pi$  es playo. Tenemos una familia parametrizada por las constantes de reacción  $k$ , y queremos ver para qué valores de  $k$  dicho morfismo es playo, y en ese caso podremos garantizar, moviéndonos cerca de  $k$ , cierta continuidad de las fibras.

En la sección 5.2 mostraremos cómo chequear con herramientas computacionales si un módulo o morfismo es playo, y en caso que no lo sea, calcular puntos en los que sí sea playo (por ejemplo calculando el *flat locus*). Las herramientas utilizadas fueron consultadas en [BGL<sup>+</sup>07] y [DL06].

En la última sección aplicaremos dichas herramientas en ejemplos con redes bioquímicas, mostraremos las dificultades que aparecen, y los cálculos que se pueden realizar. En los puntos en los que la proyección sí sea playa, garantizamos continuidad de las soluciones en  $\mathbb{C}$ .

## 5.1. Playitud en ceros no degenerados

En los capítulos 2 y 3 vimos que bajo ciertas hipótesis se podían extrapolar los ceros no degenerados de una subred a la red mayor. Vamos a ver que si el cero es no degenerado, entonces ahí vale la playitud. El objetivo de esta sección es mostrar las ideas principales, dado que una demostración completa conllevaría la introducción de muchas herramientas teóricas. En nuestros argumentos tendremos que movernos de la categoría algebraica a la categoría analítica compleja (y volver). Es interesante que este pasaje está justificado por el resultado de Serre en [Ser56] de que en una variedad algebraica  $X$  sobre  $\mathbb{C}$  puede considerarse también como una variedad analítica  $X^{an}$ , el anillo local analítico  $\mathcal{O}_{X^{an},p}^{an}$  en un punto es un módulo fielmente playo sobre el anillo local algebraico  $\mathcal{O}_{X,p}$ . De hecho, es en este trabajo de Serre donde se introduce por primera vez la noción de playitud.

Comenzamos con un lema básico.

**Lema 5.1.1.** *La proyección lineal  $\pi: \mathbb{C}^{\ell+r} \rightarrow \mathbb{C}^r$ ,*

$$\pi(y_1, \dots, y_\ell, k_1, \dots, k_r) = (k_1, \dots, k_r)$$

*es playa, para todo  $r, \ell \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Podemos considerar la proyección en la categoría algebraica o analítica. Para no introducir nueva notación, consideramos la estructura algebraica. El morfismo  $\pi$  es playo si y sólo si  $\mathbb{C}[y_1, \dots, y_\ell, k_1, \dots, k_r] = \mathbb{C}[k_1, \dots, k_r][y_1, \dots, y_\ell]$  es playo como  $\mathbb{C}[k_1, \dots, k_r]$ -módulo, pero esto es cierto por ser un módulo libre por la Proposición 4.1.4.  $\square$

Veamos ahora que si restringimos la proyección  $\pi$  a una variedad algebraica  $V(I) \subset \mathbb{C}^{s+r}$  como en (5.1), en las condiciones del teorema de la función implícita, resulta un morfismo playo. Haremos esta demostración en el contexto de la geometría analítica compleja, donde lo que sucede es transparente: la condición de rango máximo en un punto  $p$  implica que  $V(I)$  es una variedad diferenciable compleja en un entorno de  $p$  (es decir, una variedad  $C^\infty$  en la cual los cambios de coordenadas son funciones analíticas complejas) y compuesta con una carta coordenada apropiada,  $\pi$  resulta ser (localmente) una proyección lineal para la que vale el Lema 5.1.1.

**Proposición 5.1.2.** *Sean  $f_1, \dots, f_\sigma \in C[x_1, \dots, x_s, k_1, \dots, k_r]$ ,  $1 \leq \sigma \leq s$  y sea  $I = \langle f_1, \dots, f_\sigma \rangle$  Supongamos que la matriz*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_s} \end{pmatrix}$$

*evaluada en  $(x_0, k_0) \in V(I)$  tiene rango máximo (igual a  $\sigma$ ). Entonces la proyección  $\pi: V(I) \subset \mathbb{C}^{s+r} \rightarrow \mathbb{C}^r$ ,  $\pi(x, k) = k$ , es playa en  $(x_0, k_0)$ .*



*Demostración.* Consideramos la aplicación  $f = (f_1, \dots, f_\sigma): \mathbb{C}^{s+r} \rightarrow \mathbb{C}^\sigma$ ,  $f(x, k) = (f_1(x, k), \dots, f_\sigma(x, k))$ . Sean las matrices

$$J_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_s} \end{pmatrix} \text{ y } J_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial k_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial k_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\sigma}{\partial k_1} & \cdots & \frac{\partial f_\sigma}{\partial k_r} \end{pmatrix}.$$

Luego la matriz diferencial  $df(x, t)$  nos queda:

$$df(x, t) = \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \end{pmatrix}$$

Por hipótesis tenemos que en  $(x_0, k_0)$ ,  $J_1$  tiene rango  $\sigma$ , luego la matriz  $df(x, k)$  también tiene rango  $\sigma$ . Entonces existe un menor de tamaño  $\sigma \times \sigma$  de la matriz  $J_1$  que es distinto de 0. Supongamos sin pérdida de generalidad (si no, reordenamos las variables  $x_i$ ) que, evaluado en  $(x_0, k_0)$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_\sigma} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_\sigma} \end{pmatrix} \neq 0$$

Notemos  $\ell = s - \sigma$ ,  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_\sigma)$ ,  $y = (x_{\sigma+1}, \dots, x_s)$ ,  $k = (k_1, \dots, k_r)$ . Por el Teorema de la Función Implícita para variables complejas (ver por ejemplo [GH11]), existen entornos  $U \subset \mathbb{C}^{\ell+r}$ , con  $(y_0, k_0) \in U$ , y  $V \subset \mathbb{C}^\sigma$  con  $\tilde{x}_0 \in V$  y una función analítica  $\varphi: U \rightarrow V$  tal que

$$\{(\tilde{x}, y, k) \in V \times U / f(\tilde{x}, y, k) = 0\} = \{(\varphi(y, k), y, k) / (y, k) \in U\}.$$

Luego, pensamos a  $(V \times U) \cap V(I) =: X$  como una variedad compleja con la parametrización de  $U$  a  $X$ ,

$$(y, k) \mapsto (\varphi(y, k), y, k),$$

o sea,  $X$  es una variedad compleja con carta:  $(X, \psi)$ ,  $\psi(\tilde{x}, y, k) = (y, k)$ . Si miramos  $\pi: X \rightarrow \mathbb{C}^r$  compuesta con la carta tenemos  $\pi' = \pi \circ \psi: U \rightarrow \mathbb{C}^r$ ,  $\pi'(y, k) = k$ , una proyección de un abierto de  $\mathbb{C}^{r+\ell}$  a  $\mathbb{C}^r$ . Por el Lema 5.1.1 y la Proposición 4.3.3,  $\pi'$  es playita en cada punto de este abierto.  $\square$

La proposición anterior nos dice que si tenemos un estado de equilibrio no degenerado de un sistema de reacciones bioquímicas entonces podemos asegurar playitud en ese punto. Más precisamente, supongamos que tenemos una red de reacciones químicas  $G$ , con cinética de acción de masas. Supongamos que el subespacio estequiométrico  $S$  de la red tiene dimensión  $\sigma$ . Entonces de los polinomios que definen el sistema dinámico asociado a la red, sólo nos quedamos con  $\sigma$ ,  $f_1, \dots, f_\sigma$  (los que sean linealmente independientes, que a lo sumo son  $\sigma$ ; si no hay esa cantidad de linealmente independientes el cero será degenerado), y consideramos el ideal  $I = \langle f_1, \dots, f_\sigma \rangle$ . Ahora supongamos que para ciertas constantes de reacción  $k_0$  tenemos un estado de equilibrio  $x_0$  no degenerado. Esto significa que  $df(x_0, k_0)$  tiene rango  $\sigma$  igual a la dimensión de  $S$ . Luego estamos en las hipótesis de la proposición anterior, y por lo tanto la proyección  $\pi: V(I): \mathbb{C}^{r+s} \rightarrow \mathbb{C}^r$ ,  $\pi(x, k) = k$  es playita en  $(x_0, k_0)$ .

En [Mum88], se puede encontrar una demostración totalmente algebraica de este resultado en las páginas 220-221. En particular, en el contexto algebraico tenemos la siguiente proposición de [Sha94]:

**Proposición 5.1.3.** *Si  $X$  y  $S$  son variedades no singulares y  $f: X \rightarrow S$  es un morfismo tal que  $df: T_{X,x} \rightarrow T_{S,f(x)}$  es suryectivo para todo  $x$  en  $X$  entonces  $f$  es playo.*

## 5.2. Como chequear playitud

Usando las herramientas teóricas desarrolladas en el capítulo 4, mostraremos cómo chequear playitud de manera computacional. Para los cálculos utilizamos el programa de software libre SINGULAR [Dec12].

### Usando Tor

En el capítulo 1 vimos que un  $A$  módulo  $M$  es playo si y sólo si  $\text{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$  para todo ideal finitamente generado  $I \subset A$  (Teorema 4.2.5). Podemos calcular Tor de módulos finitamente presentados, a partir de una matriz de presentación. Veamos con un ejemplo sencillo como calcular Tor con SINGULAR. Para esto utilizaremos el comando Tor de la librería "homolog.lib".

**Ejemplo 5.2.1.** Sea  $A = \mathbb{Q}[x, y]$ , y consideremos los  $A$ -módulos  $M = \mathbb{Q}[x, y]/\langle x^2, y \rangle$  y  $N = \mathbb{Q}[x, y]/\langle x \rangle$ . Tenemos las presentaciones:

$$A \xrightarrow{(x^2 \ y)} A^2 \rightarrow M \rightarrow 0$$

$$A \xrightarrow{(x)} A \rightarrow N \rightarrow 0$$

En SINGULAR

```
> LIB "homolog.lib";
> ring A=0, (x,y), dp;
> matrix PM[1][2]=x2,y;
> matrix PN[1][1]=x;
```

Calculemos por ejemplo  $\text{Tor}_1^A(M, N)$

```
> Tor(1, PM, PN);
_[1]=gen(1)
_[2]=y*gen(2)
_[3]=x*gen(2)
```

De la salida, obtenemos que  $\text{Tor}_1^A(M, N) = A^2/(Ae_1 + \langle x, y \rangle e_2) \cong A/\langle x, y \rangle \cong \mathbb{Q}$ .  
Y calculemos  $\text{Tor}_0^A(M, N)$  y  $\text{Tor}_2^A(M, N)$

```

> Tor(0, PM, PN);
_[1]=x*gen(1)
_[2]=x2*gen(1)
_[3]=y*gen(1)
> Tor(2, PM, PN);
_[1]=gen(1)

```

Luego  $\text{Tor}_0^A(M, N) = \mathbb{Q}$  y  $\text{Tor}_2^A(M, N) = 0$ .

Usando Tor podemos ver si un módulo  $M$  es playo o no.

**Ejemplo 5.2.2.** Sea  $A = \mathbb{Q}[k]$  y sea el  $A$ -módulo  $M = \mathbb{Q}[x, k]/\langle x^2 - x, x(k^3 - k) \rangle$ . Por el Teorema 4.2.5,  $M$  es playo como  $A$ -módulo si y sólo si  $\text{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$  para todo ideal finitamente generado  $I \subset A$ . Tomemos por ejemplo  $I = \langle k \rangle$ . Para poder calcular Tor usando SINGULAR necesitamos que los módulos sean finitamente presentados y una matriz de presentación.  $M$  está generado por las clases de 1 y de  $x$ . Nos queda la presentación :

$$A \xrightarrow{(0 \ k^3 - k)} A^2 \rightarrow M \rightarrow 0$$

También necesitamos una presentación de  $A/I$ :

$$A \xrightarrow{(k)} A \rightarrow M \rightarrow 0$$

Nos queda:

```

> ring A=0,k,dp;
> matrix PM[1][2]=0,k^3-k;
> matrix PI[1][1]=k;
> Tor(1, PM, PI);
_[1]=k*gen(1)

```

Luego, para  $I = \langle k \rangle$ ,  $\text{Tor}_1^A(A/I, M) \neq 0$ , y por lo tanto  $M$  no es playo como  $A$  módulo.

## Usando Syzygies

En el capítulo 4 vimos que podíamos chequear playitud a partir de las syzygies (Teorema 4.5.1). Veamos con un ejemplo como podemos chequear si cierto módulo es playo.

**Ejemplo 5.2.3.** Sea  $I \subset \mathbb{Q}[x, y, z, k]$  el ideal generado por los polinomios:

$$f_1 = x^2 - k^{27}yz, \quad f_2 = xz - k^{13}y, \quad f_3 = x - k^{14}z^2$$

Veamos que  $M := \mathbb{Q}[x, y, z, k]/I$  no es playo como  $\mathbb{Q}[k]$ -módulo. Por la Proposición 4.3.3 es suficiente mostrar que la localización de  $M$  por el ideal maximal  $\langle k \rangle$  no es playo como  $\mathbb{Q}_{\langle k \rangle}$ -módulo. Usamos el Teorema 4.5.1. Tenemos que calcular las syzygies de las reducciones de  $f_1, f_2$  y  $f_3$  módulo  $\langle k \rangle$ . Llamemos  $A = \mathbb{Q}[k]_{\langle k \rangle}$ . Trabajamos en el anillo  $\mathbb{Q}[k]_{\langle k \rangle}[x, y, z] = A[x, y, z]$

```
> ring Axyz=0, (x,y,z,k), (dp(3), ds(1));
```

Observamos que el orden que pusimos es un orden mixto (es monomial en las 3 primeras variables y local en la otra). Calculemos las syzygies de  $f_1, f_2, f_3$  sobre  $A[x, y, z]$  y luego comparémoslas con sus reducciones módulo  $\langle k \rangle$ , con las syzygies en  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ , donde  $\bar{f}_i$  es la reducción de  $f_i$  módulo  $\langle k \rangle$ , es decir:

$$\bar{f}_1 = x^2, \bar{f}_2 = xz, \bar{f}_3 = x \in \mathbb{Q}[x, y, z]$$

```
> poly f1=x^2-k^27*y*z;
```

```
> poly f2=x*z-k^13*y;
```

```
> poly f3=x-k^14*z^2;
```

```
> ideal I=f1,f2,f3;
```

```
> module M=syz(I);
```

```
> print(M);
```

```
-1, -z,
```

```
zk14,x,
```

```
x, yk13
```

Luego las syzygies de  $I$  están generadas por los vectores columna  $(-1, zk^{14}, x)^t$  y  $(-z, x, yk^{13})^t$ . Las reducciones módulo  $\langle k \rangle$  de las syzygies son  $(-1, 0, x)^t$  y  $(-z, x, 0)^t$ . Ahora calculemos las syzygies de  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$

```
> ring r1=0, (x,y,z), dp;
```

```
> poly F1=x^2;
```

```
> poly F2=xz;
```

```
> poly F3=x;
```

```
> ideal I1=F1,F2,F3;
```

```
> module M1=syz(I1);
```

```
> print(M1);
```

```
0, -1,
```

```
-1, 0,
```

```
z, x
```

Queremos ver si las reducciones de las syzygies de  $f_1, f_2, f_3$  generan las syzygies de  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ . Para esto utilizaremos el comando `reduce(M,N)`, con  $M$  y  $N$  módulos, que devuelve 0 si y sólo si  $M$  es un submódulo de  $N$ . Las reducciones de las syzygies son  $(-1, 0, x)^t$  y  $(-z, x, 0)^t$ :

```
> module M2=-1*gen(1)+x*gen(3), -z*gen(1)+x*gen(2);
```

```
> M2=std(M2); //necesitamos que este representado en una
base standard para usar reduce;
```

Ahora usamos el comando `reduce(M,N)`:

```
> reduce(M1,M2);
```

```
_[1]=z*gen(3)-gen(2)
```

```
_[2]=0
```

No es 0, así que las syzygies de los  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$  no están generadas por las reducciones de las syzygies de  $f_1, f_2, f_3$ , por lo que  $M := \mathbb{Q}[x, y, z, k]/I$  no es playo como  $\mathbb{Q}[k]$ -módulo.

## Usando ideales de Fitting

Podemos chequear playitud para módulos finitamente generados usando ideales de Fitting. El procedimiento `isFlat` de SINGULAR de la librería "homolog.lib" está basado en el Teorema 4.4.9 del capítulo 4. Devuelve 1 si el módulo es playo, y 0 si no. Veamos algunos ejemplos:

**Ejemplo 5.2.4.** Sea  $A = \mathbb{Q}[k]$  y sea de nuevo el módulo  $M = \mathbb{Q}[x, k]/\langle x^2 - x, x(k^3 - k) \rangle$  sobre  $A$ . Está generado por las clases de 1 y de  $x$  y tiene la presentación:

$$A \xrightarrow{(0 \ k^3-k)} A^2 \rightarrow M \rightarrow 0$$

Ahora podemos usar `isFlat` para chequear (otra vez) que  $M$  no es playo:

```
> LIB "homolog.lib";
> ring A=0,k,dp;
> module PM=gen(2)*(k3-k);
> isFlat(PM);
0
```

Como  $M$  no es playo, podemos calcular el flat locus de  $M$ , es decir, el conjunto de los ideales primos  $P$  de  $A$  tal que  $M_P$  es playo como  $A_P$  módulo. El procedimiento `flatLocus` de `homolog.lib` nos permite determinar este flat locus de  $M$ . Si  $PM$  es una matriz de presentación de  $M$ , entonces `flatLocus(PM)` nos devuelve el ideal

$$F(M) := \langle \cup_k \{a \in F_k(M) / a.F_{k-1}(M) = 0\} \rangle \subset A$$

Como vimos en el capítulo 4 (Proposición 4.4.10)

$$M_P \text{ es playo como } A_P\text{-módulo} \iff P \not\subset F(M)$$

Calculemos el flat locus en este ejemplo:

```
> flatLocus(PM);
_[1]=k3-k
```

El resultado refleja el hecho de que las fibras de la proyección  $\pi$  sobre  $k = 0, 1$  y  $-1$  son muy grandes. Sobre  $\mathbb{A}^1 \setminus \{0, 1, -1\}$  la familia es playo.

Veamos otro ejemplo:

**Ejemplo 5.2.5.** Sea  $I = \langle x^2 - k_1, xk_1 - k_2, xk_2 - k_1^2 \rangle \subset \mathbb{Q}[x, k_1, k_2]$  y consideremos la proyección  $\pi: V(I) \subset \mathbb{A}_{k_1, k_2}^2 \times \mathbb{A}_x^1 \rightarrow \mathbb{A}_{k_1, k_2}^2$

Sea  $A = \mathbb{Q}[k_1, k_2]$ . El  $A$ -módulo  $M = \mathbb{Q}[x, k_1, k_2]/I$  está generado por las clases de 1 y de  $x$ . Para poder chequear si es playo con el procedimiento `isFlat`, tenemos que tener una presentación para  $M$ . Para esto necesitamos un conjunto de generadores de las syzygies de los generadores de  $M$ . Calculemos una base de Gröbner (explicaremos que es una base de Gröbner en la próxima sección)

```

> LIB "homolog.lib";
> ring S=0, (x,k1,k2), (dp(1), dp(2));
> ideal I=x^2-k1, x*k1-k2, x*k2-k1^2;
> std(I);
_[1]=k1^3-k2^2
_[2]=x*k2-k1^2
_[3]=x*k1-k(2)
_[4]=x^2-k1

```

De la base de Gröbner que calculamos, obtenemos la presentación

$$A \xrightarrow{\begin{pmatrix} k_1^3-k_2^2 & 0 & -k_1^2 & -k_2 \\ 0 & k_1^3-k_2^2 & k_2 & k_1 \end{pmatrix}} A^2 \rightarrow M \rightarrow 0$$

Ahora chequeamos si es playo, y si no, también calculamos el flat locus:

```

> LIB "homolog.lib";
> ring A=0, t(1..2), dp;
> module PM=gen(1)*(k1^3-k2^2),
. gen(2)*(k1^3-k2^2),
. gen(2)*k2-gen(1)*k1^2,
. gen(2)*k1-gen(1)*k2;
> isFlat(PM);
0
> flatLocus(PM);
_[1]=k1^3-k2^2

```

Esperábamos esta respuesta ya que  $V(k_1^3 - k_2^2) \subset \mathbb{A}^2$  es la imagen de  $\pi$ . Así que en realidad vamos a considerar a  $\pi$  como el morfismo de  $V(I) \rightarrow V(k_1^3 - k_2^2)$ . Este morfismo será playo si  $\mathbb{Q}[x, k_1, k_2]/I$  es playo como  $\mathbb{Q}[k_1, k_2]/\langle k_1^3 - k_2^2 \rangle$ -módulo. Utilizamos `qring` para trabajar en el anillo cociente  $\mathbb{Q}[x, k_1, k_2]/I$ .

```

> qring Q=std(k1^3-k2^2);
> module PM=imap(A, PM);
> isFlat(PM);
0
> flatLocus(PM);
_[1]=k2
_[2]=k1

```

El resultado refleja el hecho de que la fibra de  $\pi$  sobre  $k_1 = k_2 = 0$  es el punto doble  $V(x^2, k_1, k_2)$  mientras cada una de las otras fibras sobre  $V(k_1^3 - k_2^2)$  consisten de un punto reducido.

## Usando bases de Gröebner

Primero veamos algunas definiciones. Trabajaremos en el anillo de polinomios  $K[x] = K[x_1, \dots, x_n]$ , con  $K$  cuerpo. Si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , usamos la notación  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ .

**Definición 5.2.6.** Un *orden monomial*  $<$  en  $K[x]$  es un orden total en el conjunto de todos los monomios (mónicos)  $x^\alpha$  en  $K[x]$  que satisface que:

- Si  $x^\alpha < x^\beta$ , entonces  $x^\alpha x^\gamma < x^\beta x^\gamma$ , para todo  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  en  $\mathbb{N}_0^n$ .
- $1 < x^\alpha$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n - \{0\}$ .

**Definición 5.2.7.** Dado  $f \in K[x]$ , con  $f$  no nulo, y con  $<$  un orden monomial fijo, podemos escribir:

$$f = cx^\alpha + g,$$

con  $c \in K, c \neq 0$  y  $x^{\alpha'} < x^\alpha$  para todo término no nulo  $c'x^{\alpha'}$  de  $g$  con  $\alpha' \neq \alpha$ . Definimos:

$$\begin{aligned} Lt(f) &= cx^\alpha, \text{ el término principal de } f \\ Lm(f) &= x^\alpha, \text{ el monomio principal de } f \\ Lc(f) &= c, \text{ el coeficiente principal de } f \\ multideg(f) &= \alpha, \text{ el multigrado de } f \end{aligned}$$

Observamos que las definiciones anteriores dependen del orden  $<$  fijado.

**Definición 5.2.8.** Sea  $I \subset K[x]$  un ideal distinto de 0. Denotamos por  $In(I)$  al ideal generado por los términos principales de elementos de  $I$ :

$$In(I) = \langle cx^\alpha \mid \text{existe } f \in I \text{ con } Lt(f) = cx^\alpha \rangle$$

$In(I)$  es el *ideal inicial* de  $I$ .

**Definición 5.2.9.** Un subconjunto finito  $G = \{g_1, \dots, g_s\}$  de un ideal  $I \subset K[x]$  es una *base de Gröebner* para  $I$  con respecto al orden monomial  $<$  si  $\langle Lt(g_1), \dots, Lt(g_s) \rangle = In(I)$ .

**Teorema 5.2.10.** Sea  $I \subset K[x]$  un ideal, y sea  $<$  un orden monomial fijo. Entonces existe  $G = \{g_1, \dots, g_s\}$  una base de Gröebner para  $I$  con respecto al orden  $<$ . Además  $G$  es un conjunto de generadores para  $I$ .

*Demostración.* Ver [CLO07]. □

Además se puede calcular una base de Gröebner de un ideal a partir de cualquier conjunto de generadores, mediante el algoritmo de Buchberger, que puede verse por ejemplo en [CLO07].

En general, la base de Gröebner de un ideal no es única, aún cuando el orden está fijo. Sin embargo, bajo ciertas hipótesis, si se puede obtener la unicidad.

**Definición 5.2.11.** Sea  $I \subset k[x]$  un ideal, y sea  $<$  un orden monomial. Un subconjunto finito  $G$  de  $I$  es una base de Gröebner *reducida* si:

- $G$  es una base de Gröbner.
- $Lc(g) = 1$  para todo  $g \in G$ .
- Para todo  $g \in G$  ninguno de sus monomios está en  $In(G - g)$ .

Se puede probar si  $I \subset k[x]$  es un ideal y  $<$  es un orden monomial fijo, entonces  $I$  admite una única base de Gröbner reducida (ver [CLO07]).

Ahora dejamos un sencillo lema que utilizaremos en la demostración de la proposición que sigue:

**Lema 5.2.12.** *Sea  $I = \langle x^\alpha / \alpha \in A \rangle$  un ideal monomial. Entonces el monomio  $x^\beta \in I$  si y sólo si  $x^\beta$  es divisible por  $x^\alpha$ , para algún  $\alpha \in A$ .*

Veamos como las bases de Gröbner nos permiten calcular para qué puntos cierto morfismo es playo. Estamos interesados en ver cuándo la proyección  $\pi: V(I) \rightarrow \mathbb{C}^r$ , con  $I \subset \mathbb{C}[x, k]$  un ideal, es playo en cierto punto  $(x_0, k_0)$ . Para esto vamos a encontrar un conjunto de valores de  $k \in \mathbb{C}^r$  donde para esos  $k$  podemos asegurar playitud. La prueba que sigue está basada en una proposición análoga presentada en el artículo [Ass94], aunque en este caso el autor trabaja con bases de Gröbner sobre anillos. En [RT13] y [BGS92] también se muestran resultados similares.

**Proposición 5.2.13.** *Sea  $I$  un ideal en  $\mathbb{C}[x, k]$ , tal que  $I \cap \mathbb{C}[k] = (0)$  y sea  $X = V(I)$ . Consideremos un orden monomial  $<_1$  en  $\mathbb{C}[x]$ , y  $<_2$  un orden monomial en  $\mathbb{C}[k]$ , y consideremos el orden producto  $<$  en  $\mathbb{C}[x, k]$ , es decir,  $x^\alpha k^\beta < x^{\alpha'} k^{\beta'}$  si y sólo si  $x^\alpha <_1 x^{\alpha'}$  o  $x^\alpha = x^{\alpha'}$  y  $k^\beta <_2 k^{\beta'}$ .*

*Sea  $G = \{f_1(x, k), \dots, f_r(x, k)\}$  una base de Gröbner del ideal  $I$  con respecto al orden  $<$ . Para cada  $i$  tenemos  $Lm(f_i) = x^{\alpha_i} k^{\beta_i}$ , luego podemos escribir a cada  $f_i$  en la forma  $f_i = c_i(k)x^{\alpha_i} + g_i$ , donde cada monomio  $x^{\alpha_i'} k^{\beta_i'}$  que aparece en  $g_i$  es tal que  $x^{\alpha_i'} <_1 x^{\alpha_i}$ .*

*Sea  $c(k) = \prod_{i=1}^r c_i(k)$ . Si  $k_0 \in \mathbb{C}^r$  es tal que  $c(k_0) \neq 0$  entonces la proyección  $\pi: V(I) \rightarrow \mathbb{C}^r$  es playo en  $k_0$ . O sea,  $(\mathbb{C}[x, k]/I)_{(k_0)}$  es playo como  $\mathbb{C}[k]_{(k_0)}$ -módulo.*

*Demostración.* Probaremos que el módulo  $(\mathbb{C}[x, k]/I)_{(k_0)}$  es libre como  $\mathbb{C}[k]_{(k_0)}$ -módulo, y por lo tanto playo.

Consideremos el ideal monomial  $M = \langle x^{\alpha_i} / Lm(f_i) = x^{\alpha_i} k^{\beta_i} \rangle$  en  $\mathbb{C}[x]$ . Ahora consideremos el conjunto  $\Gamma = \{x^\alpha / x^\alpha \notin M\}$ . Como  $I \cap \mathbb{C}[k] = (0)$ ,  $\Gamma \neq \emptyset$ . Veamos que  $\Gamma$  es base de  $(\mathbb{C}[x, k]/I)_{(k_0)}$  como  $\mathbb{C}[k]_{(k_0)}$ -módulo. Primero veamos que el conjunto  $\Gamma$  es linealmente independiente. Tenemos que  $(\mathbb{C}[x, k]/I)_{(k_0)} = \mathbb{C}[x, k]_{(k_0)}/I_{(k_0)}$ . Luego, supongamos que tenemos  $x^{\gamma_1}, \dots, x^{\gamma_s} \in \Gamma$  tal que

$$\frac{p_1(k)}{q_1(k)} x^{\gamma_1} + \dots + \frac{p_s(k)}{q_s(k)} x^{\gamma_s} = 0 \quad (5.2)$$

en  $\mathbb{C}[x, k]_{(k_0)}/I_{(k_0)}$ , para ciertos  $p_i \in \mathbb{C}[k]$ ,  $q_i \in \mathbb{C}[k]$ , con  $q_i(k_0) \neq 0 \forall i$ . De (5.2),  $\frac{p_1(k)}{q_1(k)} x^{\gamma_1} + \dots + \frac{p_s(k)}{q_s(k)} x^{\gamma_s} \in I_{(k_0)}$ . Es decir, existen  $g_1, \dots, g_r \in \mathbb{C}[x, k]$ , y  $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{C}[k]$ , con  $h_i(k_0) \neq 0$  para todo  $i$  tal que:

$$\frac{p_1(k)}{q_1(k)} x^{\gamma_1} + \dots + \frac{p_s(k)}{q_s(k)} x^{\gamma_s} = \frac{g_1(x, k)}{h_1(k)} f_1(x, k) + \dots + \frac{g_r(x, k)}{h_r(x, k)} f_r(x, k)$$



Multiplicando por el mínimo común múltiplo de los denominadores (que no se anula en  $k_0$ ) nos queda:

$$\tilde{p}_1(k)x^{\gamma_1} + \cdots + \tilde{p}_s(k)x^{\gamma_s} = \tilde{g}_1(x, k)f_1(x, k) + \cdots + \tilde{g}_r(x, k)f_r(x, k) \in I,$$

para ciertos polinomios  $\tilde{p}_i(k) \in \mathbb{C}[k]$  y  $\tilde{g}_i \in C[x, k]$ . Luego, el polinomio  $h := \tilde{p}_1(k)x^{\gamma_1} + \cdots + \tilde{p}_s(k)x^{\gamma_s} \in I$ , y para algún  $i$ ,  $Lm(h) = x^{\gamma_i}k^{\eta}$ , para cierto  $k^{\eta}$ . Por lo tanto existe algún  $j$  tal que  $Lm(f_j) = x^{\alpha_j}k^{\beta_j}$  divide a  $x^{\gamma_i}k^{\eta}$ . Pero entonces  $x^{\alpha_j}$  divide a  $x^{\gamma_i}$ , y por lo tanto  $x^{\gamma_i} \in M$ , absurdo, ya que  $x^{\gamma_i} \in \Gamma$ . Luego, el conjunto  $\Gamma$  es linealmente independiente.

Ahora veamos que generan a  $(\mathbb{C}[x, k]/I)_{\langle k_0 \rangle}$  como  $\mathbb{C}[k]_{\langle k_0 \rangle}$ -módulo. Para esto alcanza con ver que podemos generar todos los monomios  $x^\gamma$  (las clases) para todo  $\gamma$ . Si  $x^\gamma \in \Gamma$  listo. Si no  $x^\gamma \in M$ , luego existe un  $i$  tal que  $x^{\alpha_i}$  divide a  $x^\gamma$ , con  $Lt(f_i) = x^{\alpha_i}k^{\beta_i}$ . Tenemos entonces que:

$$x^\gamma = x^{\gamma-\alpha_i}x^{\alpha_i}$$

Teníamos que  $f_i = c_i(k)x^{\alpha_i} + g_i$ . Multiplicando por  $c_i(k)$  (que no se anula en  $k_0$ ) de ambos lados nos queda que:

$$c_i(k)x^\gamma = x^{\gamma-\alpha_i}c_i(k)x^{\alpha_i}$$

Luego, como  $c_i(k)x^{\alpha_i} = f_i - g_i$ :

$$c_i(k)x^\gamma = x^{\gamma-\alpha_i}(f_i - g_i) = x^{\gamma-\alpha_i}f_i - g_ix^{\gamma-\alpha_i}$$

$x^{\gamma-\alpha_i}f_i \in I$ , y  $c_i(k_0) \neq 0$ , luego en  $(\mathbb{C}[x, k]/I)_{\langle k_0 \rangle}$  nos queda,  $x^\gamma = \frac{1}{c_i(k)}h$ , con  $h = -g_ix^{\gamma-\alpha_i}$ .

Observamos que todos los monomios  $x^{\eta_j}k^{\nu_j}$  que aparecen en  $h$  tienen orden menor que  $x^\gamma$ , ya que los monomios que aparecen en  $g_i$  son menores que  $x^{\alpha_i}$ . Ahora, si para todo monomio  $x^{\eta_j}k^{\nu_j}$  de  $h$ , cada  $x^{\eta_j} \in \Gamma$ , listo. Si no, volvemos a empezar con el monomio  $x^\eta$ , donde  $Lm(h) = x^\eta k^\nu$ , que sabemos que  $x^\eta < x^\gamma$ . Y así siguiendo. Como en cada paso estamos considerando monomios en  $x$  de menor orden que los anteriores, este proceso termina en finitos pasos. Luego, el conjunto  $\Gamma$  genera. Y por lo tanto,  $(\mathbb{C}[x, k]/I)_{\langle k_0 \rangle}$  es libre como  $\mathbb{C}[k]_{\langle k_0 \rangle}$ -módulo, como queríamos.  $\square$

Veamos un ejemplo

**Ejemplo 5.2.14.** Consideremos el ideal  $I = \langle k_1x^2y + k_2x + k_3, y^2 + k_1x \rangle \in \mathbb{C}[x, k]$ . Calculemos una base de Gröbner para  $I$  con un orden producto.

```
> ring r=0, (x,y,k1,k2,k3), (lp(2),lp(3));
> poly f1=k1*x^2*y+k2*x+k3;
> poly f2=y^2+k1*x;
> ideal I=f1,f2;
> std(I);
_[1]=y^5-y^2*k2+k1*k3
_[2]=x*k1+y^2
_[3]=x*y^3-x*k2-k3
```

En este caso tenemos que una base de Gröbner para  $I$  es  $\{y^5 - y^2k_2 + k_1k_3, xk_1 + y^2, xy^3 - xk_2 - k_3\}$  Luego, si  $((k_1)_0, (k_2)_0, (k_3)_0)$  no se anula en  $1.k_1.1$ , es decir,  $(k_1)_0 \neq 0$ , por la Proposición 5.2.13, la proyección  $\pi: V(I) \subset \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^3$  es playita en  $(x, y, (k_1)_0, (k_2)_0, (k_3)_0)$  si  $(x, y, (k_1)_0, (k_2)_0, (k_3)_0) \in V(I)$ .

## Calculando dimensiones

Una manera de ver si cierto morfismo es playo es calculando dimensiones. Si tenemos un morfismo de variedades  $f: X \rightarrow Y$ , vimos que  $\dim(X)_x + \dim(Y)_y \geq \dim(X)_x$ , con  $f(x) = y$  y si  $f$  es playo en  $(x, y)$  vale la igualdad. Veamos un ejemplo:

**Ejemplo 5.2.15.** Sea  $I \subset \mathbb{C}[x, y, z, k]$  el ideal generado por los polinomios:

$$f_1 = x^2 - k^5yz, f_2 = xz - k^2y, f_3 = x - k^3z^2$$

Veamos si  $\pi: V(I) \subset \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\pi(x, y, z, k) = k$  es playo en ciertos puntos calculando dimensiones. Por ejemplo veamos si la proyección es playo en  $(0, 0, 0, 0)$ . En este caso nos queda:

```
> ring r=0, (x,y,z,k), ds;
> ideal I=x2-k5yz,xz-k2y,x-k3z2;
> dim(std(I));
2
> ideal J=I,k;
> dim(std(J));
2
```

Luego la dimensión local de  $(V(I))$  en  $(0, 0, 0, 0)$  es 2 y la dimensión de la fibra es 2. Como  $\dim(\mathbb{C}) = 1$ , nos queda que

$$\begin{aligned} \dim(\pi^{-1}(0), 0) + \dim(\mathbb{C}, 0) &> \dim(V(I), 0) \\ 2 + 1 &> 2 \end{aligned}$$

Como no vale la igualdad,  $f$  no es playo en  $(0, 0, 0, 0)$ .

Veamos que pasa en el punto  $(1, 1, 1, 1)$  que también está en  $V(I)$ :

```
> ring r=0, (x,y,z,k), ds;
> ideal I=x2-k5yz,xz-k2y,x-k3z2;
> ideal I1=subst(I,x,x+1,y,y+1,z,z+1,k,k+1);
> dim(std(I1));
2
> ideal J=I1,k;
> dim(std(J));
1
```

En este caso

$$\begin{aligned} \dim(\pi^{-1}(1), (1, 1, 1, 1)) + \dim(\mathbb{C}, 1) &= \dim(V(I), (1, 1, 1, 1)) \\ 1 + 1 &= 2 \end{aligned}$$

Pero la vuelta solo vale si  $X_x$  es Cohen-Macaulay: SINGULAR nos permite chequearlo con el comando `isCM` de la librería "homolog.lib", que devuelve 1 si es Cohen-Macaulay y 0 si no.

```
> LIB "homolog.lib"
> isCM(I1);
1
```

Por lo tanto, vale la vuelta, y por lo tanto el morfismo es playo.

Calculando dimensiones, podemos comprobar si el morfismo es playo en ciertos puntos, pero hay que conocer los puntos de la variedad, que en general no podremos hacerlo.

### 5.3. Redes bioquímicas y playitud

Supongamos que tenemos una red de reacciones químicas, con cinética de acción de masas. Para cada vector de constantes de reacción  $\kappa$ , tenemos un sistema dinámico asociado:

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i(x, \kappa)$$

con  $f_i(x, \kappa)$  polinomios en las variables  $x_j$ , y en las variables  $\kappa_\ell$ .

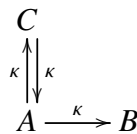
Consideramos el ideal  $I$  generado por los  $f_i(x, \kappa)$ , y la variedad  $V(I) \subset \mathbb{C}^{s+r}$ . Tenemos la proyección

$$\begin{aligned} \pi: V(I) \subset \mathbb{C}^{s,r} &\rightarrow \mathbb{C}^r \\ (x, \kappa) &\mapsto \kappa \end{aligned}$$

Lo que queremos ver es cuando esta proyección es playo.

Veamos algunos ejemplos de redes de reacciones con cinética de acción de masas. Empecemos con un ejemplo sencillo:

**Ejemplo 5.3.1.** Consideremos la red:



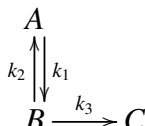
En este caso particular, las constantes de reacción son iguales. Las ecuaciones diferenciales asociadas a la red son:

$$\begin{aligned} \frac{dx_A}{dt} &= f_1(x, \kappa) = -2\kappa x_A + \kappa x_C \\ \frac{dx_B}{dt} &= f_2(x, \kappa) = \kappa x_A \\ \frac{dx_C}{dt} &= f_3(x, \kappa) = -\kappa x_C + \kappa x_A \end{aligned}$$

Como  $f_3 = -f_1 - f_2$ , el ideal generado por los  $f_i$  es  $I = \langle f_1, f_2 \rangle$ . Ahora consideremos la proyección  $\pi: V(I) \subset \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ , que manda  $\pi(x_A, x_B, x_C, \kappa) = \kappa$ . Queremos ver si la proyección es playo. Para esto tenemos que ver si  $M = \mathbb{C}[x, \kappa]/I$  es playo como  $A = \mathbb{C}[\kappa]$ -módulo. Como  $A$  es un dominio de ideales principales, por el corolario 4.2.7,  $M$  es playo

si y sólo si  $M$  es libre de torsión. Pero por ejemplo, la clase de  $x_A$  está en  $M$  y  $\kappa x_A \in I$ , o sea,  $\kappa x_A = 0$  en  $M$ . Luego  $M$  no es libre de torsión y por lo tanto no es playo.

Consideremos la misma red pero ahora no ponemos la restricción de que las constantes sean iguales:



Nos queda el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx_A}{dt} &= f_1(x, k) = -k_1 x_A + k_2 x_B \\ \frac{dx_B}{dt} &= f_2(x, k) = k_1 x_A - x_B(k_2 + k_3) \\ \frac{dx_C}{dt} &= f_3(x, k) = k_3 x_B \end{aligned}$$

El ideal generado por los  $f_i$  es  $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ . Queremos ver ahora, para que valores de  $k$ , la proyección  $\pi: V(I) \subset \mathbb{C}^6 \rightarrow \mathbb{C}^3$  es playo. Para chequear si la proyección es playo con herramientas como Tor o ideales de Fitting, o para calcular el flat locus de manera computacional, necesitamos que los módulos sean finitamente presentados, y en general, en los ejemplos con redes el módulo  $C[x, k]/I$  no es finitamente generado como  $C[k]$ -módulo. Así que tendremos que usar otras herramientas. Por ejemplo, podemos usar bases de Gröbner, que nos va a devolver un abierto en  $\mathbb{C}^3$ , donde podemos garantizar playitud.

Calculemos una base de Gröbner con SINGULAR (escribimos las variables  $x_A = x_1, x_B = x_2$  y  $x_C = x_3$ )

```
> ring r=0, (x1, x2, x3, k1, k2, k3), (dp(3), dp(3));
> poly f1=-k1*x1+x2*k2;
> poly f3=k3*x2;
> ideal I=f1, f3;
> std(I);
_[1]=x2*k3
_[2]=x1*k1-x2*k2
```

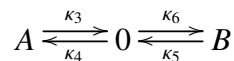
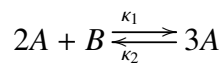
Luego una base de Gröbner de  $I$  es  $\{x_B k_3, x_A k_1 - x_B k_2\}$ . Entonces, por la Proposición 5.2.13, fuera de  $\kappa_1 = 0$  y  $\kappa_3 = 0$ , la proyección es playo. Es decir, para todo  $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{C}^3$ , con  $k_1$  y  $k_3$  distintos de 0 (en particular para todo valor de  $k_2$ , incluido  $k_2 = 0$ ), la proyección  $\pi: V(I) \rightarrow \mathbb{C}^3$  es playo en todo punto  $(x_A, x_B, x_C, k_1, k_2, k_3) \in V(I)$ .

En el ejemplo anterior observamos que algunos métodos para chequear playitud que desarrollamos en la sección anterior no nos sirven, ya que los módulos que tenemos que considerar no nos quedan finitamente generados (en general). Las herramientas que podemos utilizar son entonces el cálculo de dimensiones, que tiene la desventaja de que hay que conocer exactamente el punto de la variedad (algo que en general no conocemos), y

las bases de Gröbner, que aunque no nos dan exactamente el “flat locus”(nos pueden dar más restricciones), nos devuelven valores donde podemos garantizar que la proyección es playita.

Ahora mostramos un ejemplo en el que la red admite múltiples estados de equilibrio, pero uno de sus equilibrios es degenerado. En este ejemplo, en ese punto la proyección es playita.

**Ejemplo 5.3.2.** Consideremos la red:



Nos quedan las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx_A}{dt} &= f_1(x, k) = k_1 x_A^2 x_B - k_2 x_A^3 - k_3 x_A + k_4 \\ \frac{dx_B}{dt} &= f_2(x, k) = -k_1 x_A^2 x_B + k_2 x_A^3 - k_5 x_B + k_6 \end{aligned}$$

El ideal generado por los  $f_i$  está generado por  $f_1$  y  $g$ , con  $g = f_1 + f_2$ .

Usando bases de Gröbner nuevamente, veamos para que constantes de reacción la proyección  $\pi: V(I) \subset \mathbb{C}^8 \rightarrow \mathbb{C}^6$ ,  $\pi(x_A, x_B, k) = k$ , con  $k \in \mathbb{C}^6$ , es playita. Calculemos entonces una base de Gröbner para  $I$  ( $x_A = x$ ,  $x_B = y$ ):

```
> ring r=0, (x, y, k1, k2, k3, k4, k5, k6), (dp(2), dp(6));
> poly f1=k1*x^2*y-k2*x^3-k3*x+k4;
> poly f2=-k1*x^2*y+k2*x^3-k5*y+k6;
> poly g=f1+f2;
> ideal I=f1, g;
> std(I);
_[1]=x*k3+y*k5-k4-k6
_[2]=y^3*k1*k3*k5^2+y^3*k2*k5^3-x^2*k2*k3^2*k4-x^2*k2*k3^2*k6
+x*y*k1*k3^2*k4+x*y*k2*k3*k4*k5+x*y*k1*k3^2*k6+x*y*k2*k3*k5*k6
-y^2*k1*k3*k4*k5-y^2*k2*k4*k5^2-y^2*k1*k3*k5*k6-y^2*k2*k5^2*k6
-x*k3^4+k3^3*k4
_[3]=x*y^2*k2*k5^2-y^3*k1*k5^2+x^2*k2*k3*k4+x^2*k2*k3*k6
-x*y*k1*k3*k4-x*y*k2*k4*k5-x*y*k1*k3*k6-x*y*k2*k5*k6+y^2*k1*k4*k5
+y^2*k1*k5*k6+x*k3^3-k3^2*k4
_[4]=x^2*y*k2*k5-x*y^2*k1*k5-x^2*k2*k4-x^2*k2*k6+x*y*k1*k4
+x*y*k1*k6-x*k3^2+k3*k4
_[5]=x^3*k2-x^2*y*k1+x*k3-k4
```

En este caso el polinomio  $c(k)$  de la Proposición 5.2.13 es  $c(k) = (k_3)(k_1 k_3 k_5^2 + k_2 k_5^3)(k_2 k_5^2)(k_2 k_5)(k_2)$ . Luego si  $k$  no se anula en  $c(k)$  la proyección es playita. Es decir, si

$k_2, k_3, k_5$  son distintos de cero, y  $k_1 k_3 + k_2 k_5$  no es 0, la proyección es playa. Por ejemplo podemos poner  $k_6, k_4$  y  $k_1$  iguales 0, y la proyección va a ser playa.

Ahora veamos que pasa en un ejemplo con  $k_2 = 0$  (la Proposición 5.2.13 no nos dice que pasa en los puntos en los que  $c(k) = 0$ , podría ser playo ahí también).

Haciendo cuentas, llegamos a que si los valores de las constantes de reacción son  $k_1 = 1, k_2 = 0$  (esto correspondería a la subred de la red original que se obtuvo removiendo la reacción con constante  $k_2$ ),  $k_3 = 1, k_4 = \frac{3}{16}, k_5 = 1$  y  $k_6 = \frac{25}{16}$  la red tiene dos estados de equilibrio positivos:  $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$  y  $(\frac{3}{4}, 1)$ . El primero es un cero degenerado. Veamos si la proyección es playa en esos puntos:

Primero veamos si la proyección es playa en  $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 1, 0, 1, \frac{3}{16}, 1, \frac{25}{16})$ , calculando dimensiones:

```
> ring r=0, (x,y,k1,k2,k3,k4,k5,k6), ds;
> poly f1=k1*x^2*y-k2*x^3-k3*x+k4;
> poly f2=-k1*x^2*y+k2*x^3-k5*y+k6;
> poly g=f1+f2;
> ideal I=f1,g;
> ideal I1=subst(I,x,x+1/2,y,y+5/4,k1,k1+1,k3,k3+1,k4,k4+3/16,
k5,k5+1,k6,k6+25/16);
> dim(std(I1));
6
> ideal J=I1,k1,k2,k3,k4,k5,k6;
> dim(std(J));
0
```

Luego, si  $X = V(J)$ , y llamamos  $x = (\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 1, 0, 1, \frac{3}{16}, 1, \frac{25}{16})$ ,  $y = (1, 0, 1, \frac{3}{16}, 1, \frac{25}{16})$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \dim(\pi^{-1}(y), x) + \dim(\mathbb{C}^6, y) &= \dim(X, x) \\ 0 + 6 &= 6 \end{aligned}$$

Como vale la igualdad, para que sea playo tendríamos que chequear que  $X$  es Cohen-Macaulay en  $x$ :

```
> LIB "homolog.lib";
> isCM(I1);
1
>
```

Como vale la igualdad y es Cohen-Macaulay, entonces la proyección es playa en el punto que queríamos.

También podemos chequear que en el punto  $x = (\frac{3}{4}, 1, 1, 0, 1, \frac{3}{16}, 1, \frac{25}{16})$  la proyección es playa.

```

> ring r=0, (x,y,k1,k2,k3,k4,k5,k6), ds;
> poly f1=k1*x^2*y-k2*x^3-k3*x+k4;
> poly f2=-k1*x^2*y+k2*x^3-k5*y+k6;
> poly g=f1+f2;
> ideal I=f1,g;
> ideal I1=subst(I,x,x+3/4,y,y+1,k1,k1+1,k3,k3+1,k4,k4+3/16,
k5,k5+1,k6,k6+25/16);
> dim(std(I1));
6
> ideal J=I1,k1,k2,k3,k4,k5,k6;
> dim(std(J));
0
> LIB "homolog.lib";
> isCM(I1);
1

```

Como  $X = V(I)$  es Cohen-Macaulay en  $x$ ,  $y$  además

$$\begin{aligned} \dim(\pi^{-1}(y), x) + \dim(\mathbb{C}^6, y) &= \dim(X, x) \\ 0 + 6 &= 6, \end{aligned}$$

entonces la proyección también es playa en el punto  $(\frac{3}{4}, 1, 1, 0, 1, \frac{3}{16}, 1, \frac{25}{16})$ .

Si nos movemos cerquita de las constantes de reacción que tenemos, en particular, cerca de  $k_2 = 0$ , vamos a garantizar continuidad en las fibras, aunque estos son resultados que se pueden garantizar en  $\mathbb{C}$ .

Nos queda pendiente ver qué pasa con las soluciones reales, que será parte del trabajo futuro a realizar.





# Bibliografía

- [AM69] M.F. Atiyah and I.G. Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley series in mathematics. Addison-Wesley, 1969.
- [Ass94] Abdallah Assi. On flatness of generic projections. *Journal of Symbolic Computation*, 18(5):447 – 462, 1994.
- [AST76] Michael Artin, Conjeeveroun S Seshadri, and Allen Tannenbaum. *Lectures on deformations of singularities*, volume 54. Tata Institute of Fundamental Research Bombay, 1976.
- [BGL<sup>+</sup>07] O. Bachmann, G.M. Greuel, C. Lossen, G. Pfister, and H. Schönemann. *A Singular Introduction to Commutative Algebra*. Springer, 2007.
- [BGS92] Dave Bayer, André Galligo, and Mike Stillman. Grobner bases and extension of scalars. *arXiv preprint alg-geom/9202021*, 1992.
- [BH93] Winfried Bruns and Jürgen Herzog. *Cohen-Macaulay rings*, volume 39 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [BM93] Dave Bayer and David Mumford. What can be computed in algebraic geometry. *Computational algebraic geometry and commutative algebra (Cortona, 1991)*, 1:D48, 1993.
- [CDSS09] Gheorghe Craciun, Alicia Dickenstein, Anne Shiu, and Bernd Sturmfels. Toric dynamical systems. *Journal of Symbolic Computation*, 44(11):1551 – 1565, 2009. In Memoriam Karin Gatermann.
- [CFRS07] Carsten Conradi, Dietrich Flockerzi, Jörg Raisch, and Jörg Stelling. Sub-network analysis reveals dynamic features of complex (bio) chemical networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 104(49):19175–19180, 2007.
- [CHW08] Gheorghe Craciun, J William Helton, and Ruth J Williams. Homotopy methods for counting reaction network equilibria. *Mathematical biosciences*, 216(2):140–149, 2008.

- [CLO07] D.A. Cox, J. Little, and D. O’Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Springer, 2007.
- [CNP13] Gheorghe Craciun, Fedor Nazarov, and Casian Pantea. Persistence and permanence of mass-action and power-law dynamical systems. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 73(1):305–329, 2013.
- [Dec12] G.-M.; Pfister G.; Schönemann H. Decker, W.; Greuel. SINGULAR 3-1-6 — A computer algebra system for polynomial computations. 2012. <http://www.singular.uni-kl.de>.
- [DL06] W. Decker and C. Lossen. *Computing in Algebraic Geometry: A Quick Start Using SINGULAR*. Algorithms and Computation in Mathematics. Springer, 2006.
- [DPM11] Alicia Dickenstein and Mercedes Pérez Millán. How far is complex balancing from detailed balancing? *Bulletin of Mathematical Biology*, 73(4):811–828, 2011.
- [Eis95] D. Eisenbud. *Commutative Algebra: With a View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1995.
- [Fei72] Martin Feinberg. Complex balancing in general kinetic systems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 49(3):187–194, 1972.
- [Fei77] Martin Feinberg. Mathematical aspects of mass action kinetics. *Chemical Reactor Theory: A Review*, pages 1–78, 1977.
- [Fei79] Martin Feinberg. Lectures on chemical reaction networks. notes of lectures given at the mathematics research center of the university of wisconsin in 1979, 1979.
- [Fei89] Martin Feinberg. Necessary and sufficient conditions for detailed balancing in mass action systems of arbitrary complexity. *Chemical Engineering Science*, 44(9):1819 – 1827, 1989.
- [Fei95a] Martin Feinberg. The existence and uniqueness of steady states for a class of chemical reaction networks. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 132(4):311–370, 1995.
- [Fei95b] Martin Feinberg. Multiple steady states for chemical reaction networks of deficiency one. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 132(4):371–406, 1995.
- [FH77] Martin Feinberg and F.J.M. Horn. Chemical mechanism structure and the coincidence of the stoichiometric and kinetic subspaces. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 66(1):83–97, 1977.

- [FKAW12] Elisenda Feliu, Michael Knudsen, Lars N Andersen, and Carsten Wiuf. An algebraic approach to signaling cascades with  $n$  layers. *Bulletin of mathematical biology*, 74(1):45–72, 2012.
- [FW12a] Elisenda Feliu and Carsten Wiuf. Enzyme-sharing as a cause of multi-stationarity in signalling systems. *Journal of The Royal Society Interface*, 9(71):1224–1232, 2012.
- [FW12b] Elisenda Feliu and Carsten Wiuf. Variable elimination in chemical reaction networks with mass-action kinetics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 72(4):959–981, 2012.
- [FW13a] Elisenda Feliu and Carsten Wiuf. Simplifying biochemical models with intermediate species. *Journal of The Royal Society Interface*, 10(87):20130484, 2013.
- [FW13b] Elisenda Feliu and Carsten Wiuf. Variable elimination in post-translational modification reaction networks with mass-action kinetics. *Journal of mathematical biology*, 66(1-2):281–310, 2013.
- [Gat01] Karin Gatermann. Counting stable solutions of sparse polynomial systems in. In *Symbolic Computation: Solving Equations in Algebra, Geometry, and Engineering, 2000*, volume 286, page 53. American Mathematical Soc., 2001.
- [GH02] Karin Gatermann and Birkett Huber. A family of sparse polynomial systems arising in chemical reaction systems. *Journal of Symbolic Computation*, 33(3):275 – 305, 2002.
- [GH11] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley Classics Library. Wiley, 2011.
- [Gun03] Jeremy Gunawardena. Chemical reaction network theory for in-silico biologists. *Notes available for download at <http://vcp.med.harvard.edu/papers/crnt.pdf>*, 2003.
- [Gun07] Jeremy Gunawardena. Distributivity and processivity in multisite phosphorylation can be distinguished through steady-state invariants. *Biophysical journal*, 93(11):3828–3834, 2007.
- [Gun12] Jeremy Gunawardena. A linear framework for time-scale separation in nonlinear biochemical systems. *PloS one*, 7(5):e36321, 2012.
- [GW05] Karin Gatermann and Matthias Wolfrum. Bernstein’s second theorem and viro’s method for sparse polynomial systems in chemistry. *Advances in Applied Mathematics*, 34(2):252 – 294, 2005.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Number 52. Springer, 1977.

- [HFWS13] Heather A Harrington, Elisenda Feliu, Carsten Wiuf, and Michael PH Stumpf. Cellular compartments cause multistability and allow cells to process more information. *Biophysical journal*, 104(8):1824–1831, 2013.
- [HJ72] F. Horn and R. Jackson. General mass action kinetics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 47(2):81–116, 1972.
- [Hor72] F. Horn. Necessary and sufficient conditions for complex balancing in chemical kinetics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 49(3):172–186, 1972.
- [Hor73] Fritz Horn. Stability and complex balancing in mass-action systems with three short complexes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 334(1598):331–342, 1973.
- [Hor74] Fritz Horn. The dynamics of open reaction systems. In *Mathematical aspects of chemical and biochemical problems and quantum chemistry (Proc. SIAM-AMS Sympos. Appl. Math., New York, 1974)*, pages 125–137, 1974.
- [JS13] Badal Joshi and Anne Shiu. Atoms of multistationarity in chemical reaction networks. *Journal of Mathematical Chemistry*, 51(1):153–178, 2013.
- [KFW12] Michael Knudsen, Elisenda Feliu, and Carsten Wiuf. Exact analysis of intrinsic qualitative features of phosphorelays using mathematical models. *Journal of theoretical biology*, 300:7–18, 2012.
- [KPMD<sup>+</sup>12] Robert L Karp, Mercedes Pérez Millán, Tathagata Dasgupta, Alicia Dickenstein, and Jeremy Gunawardena. Complex-linear invariants of biochemical networks. *Journal of theoretical biology*, 311:130–138, 2012.
- [Mar10] Thomas Markwig. Computational algebraic geometry. 2010. Notas disponibles en: <http://www.mathematik.uni-kl.de/keilen/download/LectureNotes/compalggeom.pdf>.
- [Mck95] Timothy W Mckeithan. Kinetic proofreading in t-cell receptor signal transduction. *Proceedings of the national academy of sciences*, 92(11):5042–5046, 1995.
- [MDSC12] Mercedes Pérez Millán, Alicia Dickenstein, Anne Shiu, and Carsten Conradi. Chemical reaction systems with toric steady states. *Bulletin of mathematical biology*, 74(5):1027–1065, 2012.
- [MG08] Arjun Kumar Manrai and Jeremy Gunawardena. The geometry of multisite phosphorylation. *Biophysical journal*, 95(12):5533–5543, 2008.
- [Mum88] D. Mumford. *The Red Book of Varieties and Schemes*. Number no. 1358 in Lecture Notes in Mathematics, Vol 1358. Springer-Verlag, 1988.

- [PGRC14] Casian Pantea, Ankur Gupta, James B Rawlings, and Gheorghe Craciun. The qssa in chemical kinetics: As taught and as practiced. In *Discrete and Topological Models in Molecular Biology*, pages 419–442. Springer, 2014.
- [RT13] Lorenzo Robbiano and Maria-Laura Torrente. Zero-dimensional families of polynomial systems. *Le Matematiche*, 68(1):137–164, 2013.
- [Ser56] Jean-Pierre Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique. In *Annales de l’institut Fourier*, volume 6, pages 1–42. Institut Fourier, 1956.
- [Sha94] I.R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 2*. Basic Algebraic Geometry. Springer-Verlag, 1994.
- [SOMMA02] Shai S Shen-Orr, Ron Milo, Shmoolik Mangan, and Uri Alon. Network motifs in the transcriptional regulation network of escherichia coli. *Nature genetics*, 31(1):64–68, 2002.
- [Son01] Eduardo D Sontag. Structure and stability of certain chemical networks and applications to the kinetic proofreading model of t-cell receptor signal transduction. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 46(7):1028–1047, 2001.
- [SS10] Anne Shiu and Bernd Sturmfels. Siphons in chemical reaction networks. *Bulletin of mathematical biology*, 72(6):1448–1463, 2010.
- [TG09a] Matthew Thomson and Jeremy Gunawardena. The rational parameterisation theorem for multisite post-translational modification systems. *Journal of theoretical biology*, 261(4):626–636, 2009.
- [TG09b] Matthew Thomson and Jeremy Gunawardena. Unlimited multistability in multisite phosphorylation systems. *Nature*, 460(7252):274–277, 2009.
- [VK75] A. I. Vol’pert and S. I. Khudiaev. Analysis in classes of discontinuous functions and the equations of mathematical physics. *Moscow Izdatel Nauka*, 1975.