UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Una construcción de bicolimites 2-filtrantes de categorias

Matías Ignacio Data

Director: Eduardo J. Dubuc

Fecha de Presentacion: 15 de Diciembre de 2014

Contents

1 Introduccion

1.1 Objetivos generales y el contenido de este trabajo

El objetivo de este trabajo es generalizar la construccion de pseudocolimites de categorias indexados por una categoria filtrada, realizada por A. Grothendieck en [SGA4-2, Exposé VI, 6]. La construccion es la siguiente, dado un functor $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$, se tiene asociada una cofibracion $\int F \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ (en el sentido de [SGA1, Exposé VI, 10]), luego se observa que si se invierten las flechas cocartesianas se obtiene el pseudocolimite. Mas importante aun es el hecho de que si $\mathscr{C}$ es una categoria filtrante entonces las flechas cocartesianas admiten un calculo de fracciones a izquierda (en el sentido de [GZ67, I, 2.3]), por lo tanto la construccion del pseudocolimite es muy simple y manejable ya que los *homs* estan dados por colimites filtrantes de conjuntos.

Este trabajo generaliza el proceso anterior para obtener una construccion de pseudocolimites de categorias indexados por una *2*-categoria *2*-filtrante, es decir se obtiene una construccion del pseudocolimite de un *2*-funtor $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ donde $\mathscr{C}$ es una *2*-categoria *2*-filtrante. Para lograr esto utilizamos la teoria de *2*-fibraciones desarrollada por I. Bakovic y M. Buckley, estas *2*-fibraciones se corresponden con trifuntores $\mathscr{C}^{coop} \longrightarrow \mathcal{B}icat$. Dado que necesitamos mucho menos que esto desarrollamos una teoria de *2*-fibraciones *2*-discretas que se corresponden con *2*-funtores $\mathscr{C}^{coop} \longrightarrow \mathcal{C}at$. Mas aun mostramos que esta teoria es mucho mas simple y similar a la teoria de fibraciones, en particular observamos que hay solo una definicion correcta, mientras que para *2*-fibraciones en general hay distintas nociones mas laxas o estrictas (vease [Buc14]). Tambien utilizamos la tecnologia de la bicategoria de fracciones de D. Pronk [Pro96, 2], que generaliza a la construccion de Gabriel-Zisman. Esta bicategoria es la que vuelve equivalencias a una familia de flechas de una bicategoria de forma universal. La construccion es la siguiente, dado el *2*-functor $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$, se le asocia una coop-*2*-fibracion *2*-discreta $\int F \xrightarrow{p} \mathscr{C}$, en este caso $\int F$ es una *2*-categoria. Se prueba que si $\mathscr{C}$ es *2*-filtrante entonces las flechas cocartesianas admiten un calculo de fracciones a izquierda (en el sentido de [Pro96, 2.1]). Se obtiene entonces la bicategoria de fracciones $\int F[\Sigma^{eq}]$, y luego se le aplica el functor de componentes conexas en los *homs* obteniendo una categoria $\pi_0(\int F[\Sigma^{eq}])$, se prueba por construccion que esta categoria es el pseudocolimite.

Por otra parte, en [DS06] se habia construido este pseudocolimite a mano. Probamos en la ultima seccion que nuestra construccion coincide con la de Dubuc-Street.

En las secciones 2, 3 y 4 se da un breve repaso de los contenidos a generalizar, nada de esto es nuevo salvo la subseccion 4.7 en donde observamos como construir los colimites (filtrantes) de conjuntos utilizando la construccion de Grothendieck y un funtor de componentes conexas, idea que utilizamos luego. En la seccion 5 se estudia la nocion de *2*-categoria *2*-filtrante, se da una nueva definicion de este concepto y se prueba que coincide con las dos definiciones existentes. Tambien se introduce la nocion de *2*-categoria strict-*2*-filtrante y se construyen los *2*-colimites y pseudocolimites en este caso. El problema de esta nocion es que es demasiado estricta para aparecer usualmente en la practica. En la seccion 6 se desarrolla una generalizacion del calculo de fracciones de Gabriel-Zisman a *2*-categorias, esta construccion da la *2*-categoria que hace una familia de flechas isomorfismos de forma universal. Los resultados de esta seccion no son utilizados luego ya que las condiciones necesarias para poder aplicar tal construccion son demasiado estrictas. Las seccion 7 contiene un resumen de los resultados de *2*-fibraciones de [Buc14] que utilizaremos, y tambien los resultados anunciados sobre *2*-fibraciones *2*-discretas. La seccion 8 es solo para introducir la bicategoria de fracciones de [Pro96]. Por ultimo, la seccion 9 contienen la demostracion del teorema principal y la comparacion con [DS06].

1.2 Motivacion

En su obra fundamental [SGA4-1, SGA4-2, SGA4-3], A. Grothendieck desarrolla la teoria de Topos como el marco teorico en donde formular un problema matematico y resolverlo utilizando tecnicas homologicas. Un topos es una categoria de haces sobre un sitio, por ejemplo, dado un espacio topologico X uno tiene una categoria de abiertos $\mathscr{O}(X)$, que es un sitio considerando los cubrimientos por abiertos, y la categoria de haces es una subcategoria de $\mathcal{E}ns^{\mathscr{O}(X)^{op}}$ cuyos objetos son los funtores que satisfacen una propiedad de pegado de secciones locales. Dado un sitio $\mathscr{C}$, se nota $\widetilde{\mathscr{C}}$ a la categoria de haces asociada que es una subcategoria de la categoria de prehaces $\mathcal{E}ns^{\mathscr{C}^{op}}$. Dado un topos $\mathscr{E}$, se obtiene una *categoria abeliana* $\mathcal{A}b(\mathscr{E})$ que es la categoria de objetos grupos abelianos de $\mathscr{E}$. Para poner los pies sobre la tierra, si $\mathscr{E}$ es la categoria de haces sobre un sitio $\mathscr{C}$, entonces tautologicamente $\mathcal{A}b(\mathscr{E})$ se identifica con la categoria de haces de grupos abelianos. Mas aun $\mathcal{A}b(\mathscr{E})$ es una categoria *AB5* y tiene un generador, por lo tanto un teorema del Tohoku nos garantiza que $\mathcal{A}b(\mathscr{E})$ tiene *suficientes inyectivos*, luego uno tiene resoluciones inyectivas, y por lo tanto uno obtiene naturalmente la cohomologia del topos tomando los funtores derivados a derecha del funtor de secciones globales $\mathcal{A}b(\mathscr{E}) \xrightarrow{hom(1,-)_*} \mathcal{A}b$. Esta idea fantastica unifica las teorias de cohomologia topologicas y de estructuras algebraicas en un mismo marco teorico y permite ademas definir la cohomologia étale de esquemas. La idea general de Grothendieck para atacar un problema, es *encontrar el topos natural del mismo, expresar el problema en terminos de la cohomologia del topos y resolverlo.*

Esta es nuestra principal motivacion para estudiar la teoria de Topos. Este trabajo sin embargo no es estrictamente sobre teoria de topos, o mas bien es sobre una parte tecnica de la misma, pero nuestra motivacion es las aplicaciones que tiene en la misma. Cuando Grothendieck trabaja con topos se da cuenta que la categoria de topos $\mathcal{T}op$ es mas bien una *2*-categoria, y es el primero en prestarle atencion a los detalles que surgen de este hecho. En particular las nociones usuales de limites y colimites en categorias son demasiado rigidas en este contexto. Es por esto que define el concepto de bilimites y en [SGA4-2], utilizando la teoria de Fibraciones de Grothendieck desarrollada en [SGA1], da una construccion de los bilimites y bicolimites de categorias indexados por una categoria (en realidad eran pseudocolimites pero esta distincion no existia). Mas aun, observa que en el caso filtrante la construccion del bicolimite es muy simple y manejable. Utilizando esta tecnica construye los bilimites cofiltrantes de topos. La restriccion principal que tienen estas construcciones es que los diagramas tienen que estar indexado por una categoria, cuando mas generalmente un diagrama puede estar indexado por una *2*-categoria. Es por esto que en [DS06] se construyen los bicolimites *2*-filtrantes de categorias, y como aplicacion en [DY11] se construyen lo bilimites *2*-cofiltrantes de topos. Otra aplicacion interesante de esta tecnica es [Dub10] donde se prueba que todo topos de galois tiene un punto.

1.3 Conocimientos previos y advertencias

A lo largo de esta tesis no encontrara ningun ejemplo ya que el objetivo no es dar una introduccion accesible a un tema conocido, simplemente en las primeras cuatro secciones se repasan los temas con los que se va a trabajar. El lector que este interesado en aprender estos temas por primera vez puede leerlos de una gran variedad de excelentes libros, por ejemplo [Vis06]. En este trabajo se asume que el lector esta familiarizado con el yoga basico de la teoria de categorias. Estos contenidos pueden encontrarse en el famoso libro de S. Mac Lane [CFWM], mas especificamente los primeros 5 capitulos son suficientes. Otra opcion es la enciclopedia de F. Borceux [HCA1], [HCA2], [HCA3], especificamente los primeros 4 capitulos del primer tomo cubren los temas basicos. El libro de P. Gabriel y M. Zisman [GZ67] es la mejor refencia del capitulo 2, y en este podemos encontrar muchas aplicaciones interesantes del calculo de fracciones. El capitulo 3 solo introduce los conceptos basicos *2*-categoricos que usaremos mas adelante, para una referencia mas completa ver [KS74],[HCA1]. El capitulo 4 es un resumen de la teoria de Fibraciones de Grothendieck, estos resultados aparecieron originalmente en [SGA1] y [SGA4-2], sin embargo estos trabajos son poco accesibles para un publico general. Para el lector interesado en profundizar sobre las categorias fibradas y sus aplicaciones recomendamos las notas de A. Vistoli [Vis06], o en su defecto el capitulo 8 de [HCA2]. En este trabajo nos restringimos a trabajar con *2*-categorias en lugar de bicategorias, sin embargo por razones tecnicas en las secciones 7, 8 y 9 aparecera aisladamente este concepto. En este trabajo no definimos este concepto, asi como tampoco definimos el concepto de pseudofuntor, ya que no son particularmente relevantes para nuestro objetivo y su definicion ocuparia varias hojas. Para estas definiciones damos como referencia el trabajo de J. Bénabou [Ben67] aunque este tiene ciertas notaciones anticuadas que no son usuales, una exposicion mas accesible se encuentra en el capitulo 7 de [HCA1].

2 Categoria de fracciones

2.1 Categoria filtrante y colimites filtrantes de conjuntos

Definition 2.1. Decimos que una categoria $\mathscr{C}$ es *filtrante* si es no vacia, y satisface

(F1) Dado un par de objetos $a, b \in \mathscr{C}$, existen flechas u, v y un objeto c como en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "u"] & \\
& c \\
b \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Informalmente decimos que *dados dos objetos, existe uno despues.*

(F2) Todo diagrama del tipo

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b
\end{tikzcd}$$

se puede completar a un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[r, "h"] & c
\end{tikzcd}$$

Es decir, *dos flechas son iguales mas lejos.*

La categoria se dice *pseudofiltrante* si satisface *(F2)*, pero en lugar de *(F1)* satisface la condicion mas debil siguiente

(PF1) Todo diagrama del tipo

$$\begin{tikzcd}
& a \\
e \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\
& b
\end{tikzcd}$$

se puede completar a un diagrama (no necesariamente conmutativo)

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dr, "u"] & \\
e \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & c \\
 & b \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Remark 2.2. *(1)* Si $\mathscr{C}$ es filtrante entonces $\mathscr{C}$ es pseudofiltrante.

(2) Tautologicamente si $\mathscr{C}$ es pseudofiltrante se tiene que dado un diagrama del tipo

$$\begin{tikzcd}
 & a \\
e \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\
 & b
\end{tikzcd}$$

se puede completar a un diagrama *conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dr, "u"] & \\
e \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & c \\
 & b \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

(3) Si $\mathscr{C}$ tiene objeto final entonces es filtrante.

(4) $\mathscr{C}$ es filtrante si y solo si es pseudofiltrante, no vacia y conexa. Esta es la definicion original de Grothendieck en el [SGA4-1].

(5) Si $\mathscr{C}$ tiene coproductos finitos y coegalizadores entonces es filtrante, en efecto la condicion *(F1)* nos dice que existe un cono para un diagrama dado por elegir dos elementos, y la condicion *(F2)* nos dice que existe un cono para un diagrama dado por elegir dos flechas entre dos objetos, entonces basta tomar el coproducto para *(F1)* y el coegalizador para *(F2)*, y $\mathscr{C}$ es no vacia pues $\coprod_{\emptyset} = 0$.

Es decir que una categoria filtrante es la nocion *no universal* de categoria con coproductos y coegalizadores. En el caso exacto, se tiene que

$$\frac{\mathscr{C}\text{ tiene coproductos finitos y coegalizadores}}{\mathscr{C}\,\textit{tiene colimites finitos}}$$

Es de esperar entonces que en este caso se tenga un resultado analogo, es decir se espera que

$\underline{\mathscr{C}\text{ es filtrante}}$

todo diagrama finito en $\mathscr{C}$ tiene un (co-)cono

Esto de hecho es cierto y se deduce tautologicamente de los siguientes hechos,

(6) $\mathscr{C}$ es no vacia y satisface *(F1)* si y solo si para toda coleccion finita de objetos existe uno despues de todos.

(7) $\mathscr{C}$ satisface *(F2)* si y solo si toda coleccion finita de flechas entre dos objetos, son iguales mas lejos.

Estas ultima observacion justifica las definiciones *2*-categoricas de filtrabilidad que proponemos posteriormente. Por ultimo, recordamos la construccion de los colimites filtrantes de conjuntos.

Theorem 2.3. Dado un funtor $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathcal{E}ns$, con $\mathscr{C}$ filtrante, entonces el colimite de F se puede construir como $colim\, F = \coprod_{a \in \mathscr{C}} Fa/\sim$, donde $(x, a) \sim (y, b)$ si y solo si existen flechas

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "u"] & \\
& c \\
b \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

tales que $Fu(x) = Fv(y)$.

2.2 Categoria de fracciones

Como introduccion a esta seccion, recordamos la construccion del monoide de fracciones. Dado un monoide M, y un subconjunto $S \subset M$, nos interesa invertir a los elementos de S de manera universal. Esto se expresa en la siguiente propiedad universal, nos interesa encontrar un monoide $M[S^{-1}]$ con un morfismo $M \xrightarrow{\lambda} M[S^{-1}]$ tal que $\lambda(s)$ es inversible para todo $s \in S$, y para todo morfismo $M \xrightarrow{\varphi} N$ tal que $\varphi(s)$ es inversible para todo $s \in S$,

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "\varphi"'] & M[S^{-1}] \arrow[d, dashed, "\exists!\, \overline{\varphi}"] \\
& N
\end{tikzcd}$$

Si el monoide M es conmutativo, y S es multiplicativamente cerrado, entonces *se puede construir* $M[S^{-1}]$ de manera muy simple

$$M[S^{-1}] = \{\tfrac{m}{s} \,|\, m \in M,\, s \in S\}$$

con el producto obvio, y donde $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}$ si y solo si existe $s'' \in S$ tal que $s''s'm = s''sm'$. Sin embargo, si quitamos estas hipotesis, esta construccion no es posible, aunque se puede hacer de una forma canonica. Primero, tomamos M_S el monoide de palabras de M al que le agregamos letras libres s^{-1} para cada $s \in S$, y luego tomamos el cociente por la relacion de equivalencia compatible generada que recuerda la composicion, es decir *la palabra mn es igual a la letra mn*, y que impone $ss^{-1} = s^{-1}s = 1$, es claro que obtenemos el monoide de fracciones buscado

$$M[S^{-1}] = {}^{M_S}/_{\sim}$$

La primera construccion tiene la gran ventaja de que uno puede realizar cuentas explicitamente en este monoide y los elementos se expresan como fracciones. La segunda construccion tiene la ventaja de funcionar en general, aunque hacer cuentas en este monoide es muy dificil, ya que es un monoide de palabras cocientado por una relacion de equivalencia generada que no conocemos explicitamente.

Dado que un monoide es una categoria con un solo objeto, este problema se puede generalizar de manera obvia a categorias.

Definition 2.4. Dada una categoria $\mathscr{C}$ y un conjunto de flechas $\Sigma \subset Fl(\mathscr{C})$, decimos que existe una *categoria de fracciones* $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$, si se tiene un funtor

$$\mathscr{C} \xrightarrow{h} \mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$$

tal que $h(s)$ es un iso para toda $s \in \Sigma$, y es universal respecto a esta propiedad. Mas precisamente, dado un funtor $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$ tal que $F(s)$ es un iso para toda $s \in \Sigma$, entonces

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "F"'] & \mathscr{C}[\Sigma^{-1}] \arrow[d, dashed, "\exists!\, \widehat{F}"] \\
 & \mathscr{D}
\end{tikzcd}$$

Mas aun, pedimos que tenga una propiedad universal *2*-categorica, se pide que h nos de un *isomorfismo de categorias*

$$[\mathscr{C}[\Sigma^{-1}], \mathscr{D}] \xrightarrow{h^*} [\mathscr{C}, \mathscr{D}]_{\Sigma^{-1}}$$

donde $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]_{\Sigma^{-1}}$ es la categoria de funtores que invierten a las flechas de Σ.

Remark 2.5. Este problema tiene una solucion general similar al caso de monoides, se considera el grafo dirigido de la categoria, y se le agregan flechas s^{-1} en la direccion opuesta para cada s, luego consideramos la categoria libre sobre este grafo, en esta la composicion esta dada por concatenacion. Se cocienta luego por la relacion de equivalencia compatible generada que recuerda la composicion y que impone $ss^{-1} = 1$, $s^{-1}s = 1$, y se obtiene la categoria de fracciones. Nuevamente, esta construccion es totalmente inmanejable y no nos permite hacer cuentas explicitamente. Ver 1.1 de [GZ67] para una descripcion mas detallada de esta construccion.

Para resolver este problema P. Gabriel introdujo una serie de propiedades, que permiten dar una construccion de la categoria $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ en la que las flechas se representan como fracciones.

2.3 Calculo de fracciones

Definition 2.6. Dada una categoria $\mathscr{C}$ y un conjunto de flechas Σ decimos que este *satisface un calculo de fracciones (a izquierda)* si

(CF1) $1_a \in \Sigma$ *para todo* $a \in \mathscr{C}$

(CF2) Si se tienen $a \xrightarrow{s} b \xrightarrow{t} c$ *, con* $s, t \in \Sigma$ *entonces* $ts \in \Sigma$.

(CF3) Dado un diagrama del tipo

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
b & & c
\end{tikzcd}$$

con $s \in \Sigma$*, entonces se puede completar a un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
b \arrow[dr, dashed, "f'"'] & & c \arrow[dl, dashed, "s'"] \\
& d &
\end{tikzcd}$$

con $s' \in \Sigma$.

(CF4) Dadas f, g *flechas, si existe* $s \in \Sigma$ *tal que*

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "s"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b
\end{tikzcd}$$

entonces existe $s' \in \Sigma$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[r, dashed, "s'"] & x' \end{tikzcd}$$

Remark 2.7. *(1)* Las propiedades *(CF1) y (CF2)* nos garantizan en particular que si tomamos a los objetos de $\mathscr{C}$ con las flechas de Σ entonces forman una subcategoria de $\mathscr{C}$, que por abuso de notacion tambien llamamos Σ.

(2) Si Σ satisface (CF3) y (CF4) decimos que satisface un pre-calculo de fracciones, ya que en estas condiciones agregandole a Σ las identidades y las composiciones satisface el calculo de fracciones.

En efecto, para ver *(CF3)* se pegan diagramas

$$\begin{tikzcd} & & b \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ & a \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, dashed, "f'"'] & & c \arrow[dl, dashed, "s'"] \\ e \arrow[dr, dashed, "f''"'] & & d \arrow[dl, dashed, "t'"] & \\ & d' & & \end{tikzcd}$$

Para ver *(CF4)* basta observar que si tengo que conmuta

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "s"] & y \arrow[r, "t"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \end{tikzcd}$$

entonces existe un $s' \in \Sigma$ tal que

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, "t"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[r, "s'"] & x' \end{tikzcd}$$

y luego existe un $t' \in \Sigma$ tal que

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[r, "s'"] & x' \arrow[r, "t'"] & y' \end{tikzcd}$$

Lemma 2.8. Si Σ satisface un calculo de fracciones, y $a \in \mathscr{C}$ un objeto, entonces $^{a}/_{\Sigma}$ es una categoria filtrada. Recordamos que $^{a}/_{\Sigma}$ es la subcategoria slice debajo de a cuyos objetos son las flechas de Σ con dominio a y una flecha de s a t es una flecha f de $\mathscr{C}$ tal que el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "t"'] & b \arrow[d, "f"] \\ & c \end{tikzcd}$$

En efecto, para ver *(F1)* dadas $s, t \in {}^{a}/\Sigma$ por *(CF3)* se tiene un diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & b \arrow[dr, "t'"] & \\
a \arrow[ur, "s"] \arrow[rr, "t's=s't"] \arrow[dr, "t"'] & & d \\
 & c \arrow[ur, "s'"'] &
\end{tikzcd}$$

con $t' \in \Sigma$. Por *(CF2)* entonces $t's \in \Sigma$ y esto prueba *(F1)*.
Para ver *(F2)*, dadas flechas f, g

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "t"'] & b \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \\
 & c
\end{tikzcd}$$

por *(CF4)* existe $s' \in \Sigma$ tal que

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "t"'] \arrow[ddr, bend right, "s't"'] & b \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \\
 & c \arrow[d, "s'"] \\
 & d
\end{tikzcd}$$

y nuevamente por *(CF2)* entonces $s't \in \Sigma$, esto prueba *(F2)*.

Definition 2.9. Dados $a, b \in \mathscr{C}$ se define $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}][a, b]$ como el colimite filtrante del funtor

$$\begin{tikzcd}
{}^{b}/\Sigma \arrow[r] & \mathcal{E}ns
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(b \arrow[r, "s"] & c) & \longrightarrow & {[a, c]}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "t"'] & c \arrow[d, "f"] & \longrightarrow & {[a, c]} \arrow[r, "f_*"] & {[a, c']} \\
 & c' & & &
\end{tikzcd}$$

Es decir, $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}][a, b] = \underset{b \xrightarrow{s} c,\ s \in {}^{b}/\Sigma}{colim} [a, c]$. De la construccion de colimites filtrantes de conjuntos se sigue que

$$\mathscr{C}[\Sigma^{-1}][a,b] = \coprod_{b \xrightarrow{s} c,\ s \in b/\Sigma} [a,c]/\sim$$

donde $(f,s) \sim (g,t)$ si y solo si son iguales mas lejos, es decir existen u, v y $s' \in \Sigma$ tales que

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dr, "u"] & \\
b \arrow[ur, "s"] \arrow[rr, "s'"] \arrow[dr, "t"'] & & c'' \\
 & c' \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

y tales que conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & c'' \\
 & c' \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Es decir, en un unico diagrama, $(f,s) \sim (g,t)$ si y solo si existe un diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & b \arrow[u, "s"'] \arrow[d, "t"] & c'' \\
 & c' \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

tal que el diagrama exterior conmuta y $us = vt \in \Sigma$. Las fracciones las notamos como $\frac{f}{s}$ o mas precisamente $s^{-1}f$.

Se define la composicion en $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ utilizando *(CF3),* es decir dadas fracciones

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "f"'] & & b \arrow[dl, "s"] \arrow[dr, "g"'] & & c \arrow[dl, "t"] \\
 & x & & y &
\end{tikzcd}$$

la composicion es la fraccion

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "f"'] & & b \arrow[dl, "s"] \arrow[dr, "g"'] & & c \arrow[dl, "t"] \\
& x \arrow[dr, "g'"'] & & y \arrow[dl, "s'"] & \\
& & z & &
\end{tikzcd}$$

Veamos que la composicion esta bien definida, es decir que no depende de las fracciones elegidas. Lo hacemos en dos pasos, si tenemos $(g_1, t_1) \sim (g_2, t_2)$ entonces se tienen u, v tales que

$$\begin{tikzcd}
& y_1 \arrow[dr, "u"] & \\
b \arrow[ur, "g_1"] \arrow[dr, "g_2"'] & c \arrow[u, "t_1"'] \arrow[d, "t_2"] & z \\
& y_2 \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

y $ut_1 = vt_2 \in \Sigma$. Queremos ver que las siguientes fracciones son iguales

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "f"'] & & b \arrow[dl, "s"] \arrow[dr, "g_1"'] & & c \arrow[dl, "t_1"] \\
& x \arrow[dr, "g'_1"'] & & y_1 \arrow[dl, "s_1"] & \\
& & z_1 & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "f"'] & & b \arrow[dl, "s"] \arrow[dr, "g_2"'] & & c \arrow[dl, "t_2"] \\
& x \arrow[dr, "g'_2"'] & & y_2 \arrow[dl, "s_2"] & \\
& & z_2 & &
\end{tikzcd}$$

Aplicando sucesivas veces *(CF3)* se obtiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dr, "g_1'"] & & & \\
b \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "g_1"'] & & z_1 \arrow[dr, "u'"] & & \\
 & y_1 \arrow[ur, "s_1"'] \arrow[dr, "u"] & & w_1 \arrow[dr, "s_2''"] & \\
c \arrow[ur, "t_1"] \arrow[dr, "t_2"'] & & z \arrow[ur, "s_1'"'] \arrow[dr, "s_2'"] & & w_3 \\
 & y_2 \arrow[ur, "v"'] \arrow[dr, "s_2"] & & w_2 \arrow[ur, "s_1''"'] & \\
b \arrow[ur, "g_2"] \arrow[dr, "s"'] & & z_2 \arrow[ur, "v'"'] & & \\
 & x \arrow[ur, "g_2'"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, se tiene que $s_2''u'g_1's = s_1''v'g_2's$ y por *(CF4)* existe $w_3 \xrightarrow{s'} w$ en Σ tal que $s's_2''u'g_1' = s's_1''v'g_2'$. Tomando $u'' = s's_2''u'$ y $v'' = s's_1''v'$ se obtiene que

$$\begin{tikzcd}
 & y_1 \arrow[dr, "u''"] & \\
b \arrow[ur, "g_1'f"] \arrow[dr, "g_2'f"'] & c \arrow[u, "s_1t_1"'] \arrow[d, "s_2t_2"] & w \\
 & y_2 \arrow[ur, "v''"'] &
\end{tikzcd}$$

y $u''s_1t_1 = v''s_2t_2 \in \Sigma$, por lo tanto las fracciones son iguales. Ahora, si tenemos $(f_1, s_1) \sim (f_2, s_2)$ entonces queremos ver que la composicion con (g, t) da la misma fraccion.

Por hipotesis tenemos u, v tales que

$$\begin{tikzcd}
 & x_1 \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & b \arrow[u, "s_1"'] \arrow[d, "s_2"] & z \\
 & x_2 \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

y tal que $us_1 = vs_2 = s \in \Sigma$. Por *(CF3)* se tiene entonces un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[dl, "us_1=vs_2=s"'] \arrow[dr, "g"] & \\
z \arrow[dr, "g'"'] & & y \arrow[dl, "s'"] \\
& w &
\end{tikzcd}$$

y luego podemos definir las composiciones como

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "f_1"'] & & b \arrow[dl, "s_1"] \arrow[dr, "g"'] & & c \arrow[dl, "t"] \\
& x_1 \arrow[dr, "g'u"'] & & y \arrow[dl, "s'"] & \\
& & w & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "f_2"'] & & b \arrow[dl, "s_2"] \arrow[dr, "g"'] & & c \arrow[dl, "t"] \\
& x_2 \arrow[dr, "g'v"'] & & y \arrow[dl, "s'"] & \\
& & z_2 & &
\end{tikzcd}$$

que de hecho son la misma fraccion ya que $uf_1 = vf_2$, por lo tanto la composicion esta bien definida.

Observamos que se tiene naturalmente una funcion,

$$[a,b] \longrightarrow \mathscr{C}[\Sigma^{-1}][a,b] = \underset{b \xrightarrow{s} x,\ s \in b/\Sigma}{colim} [a,x]$$

$$\begin{tikzcd}
(a \arrow[r, "f"] & b) & & a \arrow[dr, "f"'] & & b \arrow[dl, "1_b"] \\
& & \arrow[from=1-2, to=1-4, phantom, ""] & & b &
\end{tikzcd}$$

$$(a \xrightarrow{f} b) \qquad \longrightarrow \qquad \begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "f"'] & & b \arrow[dl, "1_b"] \\
& b &
\end{tikzcd}$$

A partir de esto podemos concluir que $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ es una categoria, y tenemos un funtor canonico

$$\begin{array}{c} \mathscr{C} \xrightarrow{h} \mathscr{C}[\Sigma^{-1}] \\ \hline a \longrightarrow a \end{array}$$

$$(a \xrightarrow{f} b) \qquad \longrightarrow \qquad \begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "f"'] & & b \arrow[dl, "1_b"] \\
& b &
\end{tikzcd}$$

Remark 2.10. *(1)* Este funtor hace a las flechas de Σ isomorfismos, ya que la inversa de $\frac{s}{1_b}$ esta dada por $\frac{1_b}{s}$. En efecto, tenemos que $(s,s) \sim (1_a, 1_a)$ ya que tomamos $u = 1_b$, $v = s$, luego

$$\begin{tikzcd}
 & b \arrow[dr, "1_b"] & \\
a \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "1_a"'] & & b \\
 & a \arrow[ur, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

y esto prueba la afirmacion.

(2) Dadas flechas $a \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} b$ entonces $\frac{f}{1_b} = \frac{g}{1_b}$ si y solo si existe $s \in \Sigma$ tal que $sf = sg$.

Por ultimo, verificamos que $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ tiene la propiedad universal deseada. En efecto, dado un funtor $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$ tal que $F(s)$ es un isomorfismo para todo $s \in \Sigma$ se define

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "F"'] & \mathscr{C}[\Sigma^{-1}] \arrow[d, dashed, "\widehat{F}"] \\
 & \mathscr{D}
\end{tikzcd}$$

en los objetos igual que F, y en las flechas por la formula

$$\widehat{F}(\tfrac{f}{s}) = F(s)^{-1}F(f)$$

Claramente, esta es la unica forma de definirlo para que el diagrama conmute. Hay que ver que esta bien definido, en efecto, si $(f,s) \sim (g,t)$, sean u, v tales que $us = vt \in \Sigma$ y $uf = vg$. Observar que se deduce que $F(u)$ y $F(v)$ son isos. Luego se tiene que

$$\widehat{F}(\tfrac{f}{s}) = F(s)^{-1}F(f) = F(s)^{-1}F(u)^{-1}F(u)F(f) = F(us)^{-1}F(uf) =$$

$$F(vt)^{-1}F(vg) = F(t)^{-1}F(v)^{-1}F(v)F(g) = F(t)^{-1}F(g) = \widehat{F}(\tfrac{g}{t})$$

Es funtorial, ya que

$$\begin{gathered}\widehat{F}(\tfrac{g}{t}\tfrac{f}{s}) = \widehat{F}(\tfrac{g'f}{s't}) = F(s't)^{-1}F(g'f) = F(t)F(s')^{-1}F(g')F(f) = \\ F(t)F(g)F(s)^{-1}F(f) = \widehat{F}(\tfrac{g}{t})\widehat{F}(\tfrac{f}{s})\end{gathered}$$

Veamos que h induce un isomorfismo de categorias h^*, que tiene un adjunto

$$\begin{tikzcd}
{[\mathscr{C}[\Sigma^{-1}], \mathscr{D}]} \arrow[r, shift left, "h^*"] & {[\mathscr{C}, \mathscr{D}]_{\Sigma^{-1}}} \arrow[l, shift left, "\widehat{(-)}"]
\end{tikzcd}$$

Como ya vimos que h^* es biyectivo en los objetos, basta ver que este par forma una equivalencia adjunta. En efecto, se tiene que dado un funtor $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}] \xrightarrow{G} \mathscr{D}$ se tiene una biyeccion natural

$$\frac{Gh \xrightarrow{\eta} F}{G \xrightarrow{\eta} \widehat{F}}$$

donde el abuso de notacion esta mas que justificado, pues ambas transformaciones naturales estan definidas por la misma formula. Para chequear la naturalidad de $G \xrightarrow{\eta} \widehat{F}$ basta observar que dada una fraccion $\frac{f}{s}$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Ga \arrow[r, "\eta_a"] \arrow[d, "G(\frac{f}{s})"'] & \widehat{F}a \arrow[d, "\widehat{F}(\frac{f}{s})"] \\
Gb \arrow[r, "\eta_b"'] & \widehat{F}b
\end{tikzcd}$$

pues $G(\frac{f}{s}) = (Gh(s))^{-1}Gh(f)$ y $\widehat{F}(\frac{f}{s}) = F(s)^{-1}F(f)$, y luego se puede escribir como el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Ga \arrow[r, "\eta_a"] \arrow[d, "Gh(f)"'] & \widehat{F}a \arrow[d, "F(f)"] \\
Gx \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "Gh(s)^{-1}"'] & \widehat{F}x \arrow[d, "F(s)^{-1}"] \\
Gb \arrow[r, "\eta_b"] & \widehat{F}b
\end{tikzcd}$$

Es claro por la misma cuenta que se tiene una biyeccion natural

$$\frac{F \xrightarrow{\eta} Gh}{\widehat{F} \xrightarrow{\eta} G}$$

ya que la direccion de η no importaba en esta ultima cuenta, es decir que se tiene $\widehat{(-)} \dashv h^* \dashv \widehat{(-)}$, en particular $\widehat{(-)}$ es funtorial, y forman una equivalencia adjunta. Esto prueba que se tiene el isomorfismo de categorias deseado.

2.4 Propiedades de exactitud

Proposition 2.11. Sea $\mathscr{C}$ una categoria, $\Sigma \subset Fl(\mathscr{C})$ que satisface el calculo de fracciones a izquierda, entonces

$$\mathscr{C} \xrightarrow{h} \mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$$

preserva colimites finitos (i.e. es *exacto a derecha*).

En efecto, queremos ver que dado una categoria finita $\mathscr{A}$, y un funtor $\mathscr{A} \xrightarrow{F} \mathscr{C}$, entonces el morfismo canonico

$$h(\underset{a\in\mathscr{A}}{colim}\, F(a)) \dashrightarrow \underset{a\in\mathscr{A}}{colim}\, hF(a)$$

es un isomorfismo. Equivalentemente por el lema de yoneda, basta ver que se tiene para cada una biyeccion natural en $c \in \mathscr{C}$,

$$\mathscr{C}[\Sigma^{-1}][h(\underset{a\in\mathscr{A}}{colim}\, F(a)), c] \longrightarrow \underset{a\in\mathscr{A}}{lim}\, \mathscr{C}[\Sigma^{-1}][hF(a), c]$$

Pero como $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}][a, b] = \underset{b\overset{s}{\to}x}{colim}\, [a, x]$, entonces

$$\mathscr{C}[\Sigma^{-1}][h(\underset{a\in\mathscr{A}}{colim}\, F(a)), c] = \underset{c\overset{s}{\to}x}{colim}\, [\underset{a\in\mathscr{A}}{colim}\, F(a), x] = \underset{c\overset{s}{\to}x}{colim}\, \underset{a\in\mathscr{A}}{lim}\, [F(a), x]$$

Por la conmutatividad de los colimites filtrantes y los limites finitos se tiene un biyeccion natural

$$\underset{c\overset{s}{\to}x}{colim}\, \underset{a\in\mathscr{A}}{lim}\, [F(a), x] \longrightarrow \underset{a\in\mathscr{A}}{lim}\, \underset{c\overset{s}{\to}x}{colim}\, [F(a), x]$$

y por ultimo,

$$\underset{a\in\mathscr{A}}{lim}\, \underset{c\overset{s}{\to}x}{colim}\, [F(a), x] = \underset{a\in\mathscr{A}}{lim}\, \mathscr{C}[\Sigma^{-1}][hF(a), c]$$

Por lo tanto h preserva colimites finitos.

3 2-Categorias

3.1 Definiciones basicas

Definition 3.1. Una *2-categoria* esta dada por

(1) Una coleccion de *objetos*

$$a, b, c...$$

(2) Para cada par de objetos a, b se tiene un conjunto de *flechas*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \end{tikzcd}$$

(3) Para cada par de flechas entre dos objetos se tiene un conjunto de *2-flechas*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & b \end{tikzcd}$$

(4) Composicion
Dadas flechas consecutivas se las puede componer

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, "g"] & c \arrow[r, phantom, "="] & a \arrow[r, "gf"] & c \end{tikzcd}$$

y dadas *2*-flechas se tiene la *composicion vertical*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, "f'" description] \arrow[r, bend right=50, "f''"'] \arrow[r, phantom, shift left=1.5ex, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=1.5ex, "\Downarrow\alpha'"] & b \arrow[r, phantom, "="] & a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f''"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha' \circ \alpha"] & b \end{tikzcd}$$

y la *composicion horizontal*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & b \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "g'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta"] & c \arrow[r, phantom, "="] & a \arrow[r, bend left, "gf"] \arrow[r, bend right, "g'f'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta\alpha"] & c \end{tikzcd}$$

que satisfacen las siguientes condiciones

(5) Asociatividad

La composicion de flechas, la composicion vertical y la composicion horizontal de *2*-flechas son asociativas.

(6) Identidades

La composicion de flechas y la composicion vertical de *2*-flechas tienen identidades. Dado un objeto a notamos a su identidad por $a \xrightarrow{1_a} a$ y dada una flecha $a \xrightarrow{f} b$ notamos a la identidad de f por

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_f"] & b
\end{tikzcd}$$

y satisfacen

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_f"] & b \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_g"] & c & = & a \arrow[r, bend left, "gf"] \arrow[r, bend right, "gf"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_{gf}"] & c
\end{tikzcd}$$

(7) Ley de Intercambio

El siguiente diagrama es inambiguo

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, "f'" description] \arrow[r, bend right=50, "f''"'] \arrow[r, phantom, shift left=2.5ex, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "\Downarrow\alpha'"] & b \arrow[r, bend left=50, "g"] \arrow[r, "g'" description] \arrow[r, bend right=50, "g''"'] \arrow[r, phantom, shift left=2.5ex, "\Downarrow\beta"] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "\Downarrow\beta'"] & c
\end{tikzcd}$$

Es decir que

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f''"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha' \circ \alpha"] & b \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "g''"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta' \circ \beta"] & c & = & a \arrow[r, bend left=50, "gf"] \arrow[r, "g'f'" description] \arrow[r, bend right=50, "g''f''"'] \arrow[r, phantom, shift left=2.5ex, "\Downarrow\beta\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "\Downarrow\beta'\alpha'"] & b
\end{tikzcd}$$

o mas explicitamente $(\beta' \circ \beta)(\alpha' \circ \alpha) = (\beta'\alpha') \circ (\beta\alpha)$. Utilizamos el siguiente abuso de notacion, llamamos a la identidad de una flecha igual que la flecha en cuestion. En particular, la composicion horizontal

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_f"] & b \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & c \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_g"] & d
\end{tikzcd}$$

la escribimos asi

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & c \arrow[r, "g"] & d \end{tikzcd}$$

Equivalentemente, una *2*-categoria es una categoria enriquecida en $\mathcal{C}at$. Explicitamente, una *2*-categoria $\mathscr{C}$ esta dada por

(1) Una clase de objetos a, b, c...

(2) Para cada par de objetos una *categoria pequeña* $[a,b]$

(3) Para cada terna de objetos se tiene un *funtor de composicion*

$$\begin{tikzcd} {[a,b]\times[b,c]} \arrow[r, "c_{a,b,c}"] & {[a,c]} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (f,g) \arrow[r] & gf \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (f,g) \arrow[r, "(\alpha,\beta)"] & (f',g') & {} \arrow[r] & {} & gf \arrow[r, Rightarrow, "\beta*\alpha"] & g'f' \end{tikzcd}$$

(4) Para cada objeto $a \in \mathscr{C}$ un *funtor unidad*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "u_a"] & {[a,a]} \end{tikzcd}$$

tal que se satisfacen

(5) Asociatividad

El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} {[a,b]\times[b,c]\times[c,d]} \arrow[r, "c_{a,b,c}\times 1"] \arrow[d, "1\times c_{b,c,d}"'] & {[a,c]\times[c,d]} \arrow[d, "c_{a,c,d}"] \\ {[a,b]\times[b,d]} \arrow[r, "c_{a,b,d}"'] & {[a,d]} \end{tikzcd}$$

(6) Unidad

El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} {[a,a]\times[a,b]} \arrow[r, "c_{a,a,b}"] & {[a,b]} & {[a,b]\times[b,b]} \arrow[l, "c_{a,b,b}"'] \\ & {[a,b]} \arrow[ul, "u_a\times 1"] \arrow[u, equal] \arrow[ur, "1\times u_b"'] & \end{tikzcd}$$

A modo de ejercicio observamos que la *ley de intercambio* es la funtorialidad del funtor de composicion, en efecto

$$(\beta'\alpha')\circ(\beta\alpha) = c_{a,b,c}(\alpha',\beta')c_{a,b,c}(\alpha,\beta) = c_{a,b,c}(\alpha'\circ\alpha,\beta'\circ\beta) = (\beta'\circ\beta)(\alpha'\circ\alpha)$$

Definition 3.2. Un *2-funtor* $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$ esta dado por funciones en los objetos, flechas y 2-flechas respectivamente

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, "F"] & \mathscr{D}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] & Fa
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] & b & \longrightarrow & Fa \arrow[r, "Ff"] & Fb
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & b & \longrightarrow & Fa \arrow[r, bend left, "Ff"] \arrow[r, bend right, "Ff'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F\alpha"] & Fb
\end{tikzcd}$$

que *preserva todas las composiciones y todas las identidades*

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
a \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, "f'" description] \arrow[r, bend right=50, "f''"'] \arrow[r, phantom, shift left=2.5ex, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "\Downarrow\alpha'"] & b \arrow[r, bend left=50, "g"] \arrow[r, "g'" description] \arrow[r, bend right=50, "g''"'] \arrow[r, phantom, shift left=2.5ex, "\Downarrow\beta"] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "\Downarrow\beta'"] & c & \longrightarrow & Fa \arrow[r, bend left=50, "Ff"] \arrow[r, "Ff'" description] \arrow[r, bend right=50, "Ff''"'] \arrow[r, phantom, shift left=2.5ex, "\Downarrow F\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "\Downarrow F\alpha'"] & Fb \arrow[r, bend left=50, "Fg"] \arrow[r, "Fg'" description] \arrow[r, bend right=50, "Fg''"'] \arrow[r, phantom, shift left=2.5ex, "\Downarrow F\beta"] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "\Downarrow F\beta'"] & Fc
\end{tikzcd}$$

y *preserva las unidades*, $F(1_a) = 1_{Fa}$, y $F(1_f) = 1_{Ff}$.

Dado que las construcciones categoricas suelen ser *salvo isomorfismo*, uno puede relajar la definicion de 2-funtor a la de *pseudo-funtor*, la diferencia es que no le pedimos que preserve la composicion de flechas, si no que lo haga salvo una 2-flecha de manera coherente.

Definition 3.3. Dados 2-funtores $\mathscr{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathscr{C}$ una *transformacion pseudo-natural* esta dada por una familia de flechas $(Fa \xrightarrow{\eta_a} Ga)_{a \in \mathscr{A}}$ y para cada $a \xrightarrow{f} b$ un *isomorfismo* η_f

$$\begin{tikzcd}
 & Ga \arrow[dr, "Gf"] & \\
Fa \arrow[ur, "\eta_a"] \arrow[dr, "Ff"'] & \Downarrow \eta_f & Gb \\
 & Fb \arrow[ur, "\eta_b"'] &
\end{tikzcd}$$

que satisfacen
(PNT1)

$$\begin{tikzcd}
 & Ga \arrow[dr, "G1_a"] & & & & Ga \arrow[dr, "G1_a"] & \\
Fa \arrow[ur, "\eta_a"] \arrow[dr, "F1_a"'] & \Downarrow \eta_{1_a} & Ga & = & Fa \arrow[ur, "\eta_a"] \arrow[dr, "F1_a"'] & \Downarrow 1_{\eta_a} & Ga \\
 & Fa \arrow[ur, "\eta_a"'] & & & & Fa \arrow[ur, "\eta_a"'] &
\end{tikzcd}$$

es decir, $\eta_{1_a} = 1_{\eta_a}$.

(PNT2) Para todas g, f

$$\begin{tikzcd}
 & Ga \arrow[dr, "Ggf"] & & & & Ga \arrow[dr, "Gf"] & & \\
Fa \arrow[ur, "\eta_a"] \arrow[dr, "Fgf"'] & \Downarrow \eta_{gf} & Gc & = & Fa \arrow[ur, "\eta_a"] \arrow[dr, "Ff"'] & \Downarrow \eta_f & Gb \arrow[dr, "Gg"] & \\
 & Fc \arrow[ur, "\eta_c"'] & & & & Fb \arrow[ur, "\eta_b"'] \arrow[dr, "Fg"'] & \Downarrow \eta_g & Gc \\
 & & & & & & Fc \arrow[ur, "\eta_c"'] &
\end{tikzcd}$$

es decir, $\eta_{gf} = (\eta_g Ff) \circ (Gg\eta_f)$.

(PNT3) Para toda $f \xRightarrow{\alpha} g$

$$\begin{tikzcd}
 & Ga \arrow[dr, "Gf"] & & & & Ga \arrow[dr, bend left, "Gf"] \arrow[dr, bend right, "Gg"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow G\alpha"] & \\
Fa \arrow[ur, "\eta_a"] \arrow[dr, bend left, "Ff"] \arrow[dr, bend right, "Fg"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow F\alpha"] & \Downarrow \eta_f & Gb & = & Fa \arrow[ur, "\eta_a"] \arrow[dr, "Fg"'] & \eta_g \Downarrow & Gb \\
 & Fb \arrow[ur, "\eta_b"'] & & & & Fb \arrow[ur, "\eta_b"'] &
\end{tikzcd}$$

es decir, $(\eta_b F\alpha) \circ \eta_f = \eta_g \circ (G\alpha\eta_a)$.

Cuando η_f es solo una *2*-flecha pero no necesariamente un isomorfismo, obtenemos el concepto de *transformacion laxnatural.* Cuando η_f es la identidad, es decir los cuadrados conmutan, es la nocion de *transformacion 2-natural.*

Definition 3.4. Dadas transformaciones pseudonaturales (resp. laxnaturales, y *2*-naturales)

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta \qquad \Downarrow \theta"] & \mathscr{C}
\end{tikzcd}$$

una *modificacion* esta dada por una familia de *2*-flechas

$$\Big(\begin{tikzcd} Fa \arrow[r, bend left, "\eta_a"] \arrow[r, bend right, "\theta_a"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \psi_a"] & Ga \end{tikzcd} \Big)_{a\in\mathscr{A}}$$

tales que se satisface
(M) Para toda f

$$\begin{tikzcd} & Ga \arrow[dr, "Gf"] & & & & Ga \arrow[dr, "Gf"] & \\ Fa \arrow[ur, "\eta_a"] \arrow[dr, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \eta_f"] & & Gb & = & Fa \arrow[ur, bend left, "\eta_a"] \arrow[ur, "\theta_a"'] \arrow[ur, phantom, bend left=20, "\Downarrow\psi_a"] \arrow[dr, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \theta_f"] & & Gb \\ & Fb \arrow[ur, "\eta_b"] \arrow[ur, bend right, "\theta_b"'] \arrow[ur, phantom, bend right=20, "\Downarrow\psi_b"] & & & & Fb \arrow[ur, "\theta_b"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $(\psi_b Ff) \circ \eta_f = \theta_f \circ (Gf\psi_a)$.

Remark 3.5. Dado que las transformaciones pseudonaturales (resp. 2-naturales y laxnaturales) satisfacen *(PNT3)* se deduce que una modificacion satisface:

(M') Para toda $f \xRightarrow{\alpha} g$

$$\begin{tikzcd} & Ga \arrow[dr, "Gf"] & & & & Ga \arrow[dr, bend left, "Gf"] \arrow[dr, "Gg"'] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "\Downarrow G\alpha"] & \\ Fa \arrow[ur, "\eta_a"] \arrow[dr, bend left=20, "Ff"] \arrow[dr, bend right, "Fg"'] \arrow[dr, phantom, bend right=20, "\Downarrow F\alpha"] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \eta_f"] & & Gb & = & Fa \arrow[ur, bend left, "\eta_a"] \arrow[ur, "\theta_a"'] \arrow[ur, phantom, bend left=20, "\Downarrow\psi_a"] \arrow[dr, "Fg"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \theta_g"] & & Gb \\ & Fb \arrow[ur, "\eta_b"] \arrow[ur, bend right, "\theta_b"'] \arrow[ur, phantom, bend right=20, "\Downarrow\psi_b"] & & & & Fb \arrow[ur, "\theta_b"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $(\psi_b F\alpha) \circ \eta_f = \theta_g \circ (G\alpha\psi_a)$.

Definition 3.6. Dadas *2*-categorias $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ se tiene una *2*-categoria $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ cuyos objetos son los *2*-funtores de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$, cuyas flechas son las transformaciones pseudonaturales, y las *2*-flechas son las modificaciones. Dadas transformaciones pseudonaturales

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left=40, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=40, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\Downarrow\eta"] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\Downarrow\theta"] & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

definimos la composicion vertical por $(\theta\circ\eta)_a = \theta_a\eta_a$, y el isomorfismo $(\theta\circ\eta)_f$ con el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & Ha \arrow[dr, "Hf"] & \\
 & Ga \arrow[ur, "\theta_a"] \arrow[dr, "Gf"] & \Downarrow \theta_f & Hb \\
Fa \arrow[ur, "\eta_a"] \arrow[dr, "Ff"'] & \Downarrow \eta_f & Gb \arrow[ur, "\theta_b"'] & \\
 & Fb \arrow[ur, "\eta_b"'] & &
\end{tikzcd}$$

es decir, $(\theta \circ \eta)_f = (\theta_b \eta_f) \circ (\theta_f \eta_a)$.

Analogamente se obtienen *2*-categorias si se toman transformaciones *2*-naturales o laxnaturales, aunque cuando nos referimos a estas *2*-categorias usamos la misma notacion pero lo aclaramos explicitamente.

3.2 2-Colimites

Definition 3.7. Dado un *2*-funtor $\mathscr{A} \xrightarrow{F} \mathscr{C}$ un *pseudocono (resp. 2-cono, laxcono)* $F \xrightarrow{\lambda} c$ es un objeto $c \in \mathscr{C}$ con una *transformacion pseudonatural (resp. 2-natural, laxnatural)* $F \xrightarrow{\lambda} c$ donde llamamos c al 2-funtor constante c. Explicitamente, se tiene una familia de flechas $(Fa \xrightarrow{\lambda_a} c)_{a \in \mathscr{A}}$ y una familia de *2*-flechas isos

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\lambda_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda_f"] & c \\
Fa' \arrow[ur, "\lambda_{a'}"'] &
\end{tikzcd}$$

para cada $a \xrightarrow{f} a'$ tales que

(PSC1)

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\lambda_a"] \arrow[d, "F1_a"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda_{1_a}"] & c & = & Fa \arrow[r, "\lambda_a"] \arrow[d, "F1_a"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow 1_{\lambda_a}"] & c \\
Fa' \arrow[ur, "\lambda_{a'}"'] & & & Fa' \arrow[ur, "\lambda_{a'}"'] &
\end{tikzcd}$$

(PSC2) Dadas flechas $a \xrightarrow{f} a' \xrightarrow{g} a''$ en $\mathscr{A}$,

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[d, "Ff"', "\Downarrow\lambda_f"] \arrow[dr, "\lambda_a"] & & & Fa \arrow[dd, "Fgf"', "\Downarrow\lambda_{gf}"] \arrow[dr, "\lambda_a"] & \\
Fa' \arrow[r, "\lambda_{a'}"] \arrow[d, "Fg"', "\Downarrow\lambda_g"] & c & = & & c \\
Fa'' \arrow[ur, "\lambda_{a''}"'] & & & Fa'' \arrow[ur, "\lambda_{a'}"'] &
\end{tikzcd}$$

(PSC3) Dada una 2-flecha $\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & a' \end{tikzcd}$ se tiene que

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left, "Ff"] \arrow[r, bend right, "Fg"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F\alpha"] \arrow[rr, bend left=60, "\lambda_a", "\Downarrow\lambda_f"'] & Fa' \arrow[r, "\lambda_{a'}"] & c & = & Fa \arrow[r, "Fg"] \arrow[rr, bend left=60, "\lambda_a", "\Downarrow\lambda_g"'] & Fa' \arrow[r, "\lambda_{a'}"] & c
\end{tikzcd}$$

Como antes, cuando $\lambda_f = 1_{\lambda_a}$ para toda f, es decir cuando los diagramas conmutan, se tiene la nocion de *2-cono*, es claro que en este caso las condiciones *(PSC1)* y *(PSC2)* se cumplen automaticamente, y tambien cuando las flechas λ_f no son necesariamente isos se tiene la nocion de *laxcono*.

Dados pseudoconos (resp. 2-conos, laxconos) $\begin{tikzcd} F \arrow[r, shift left, "\lambda"] \arrow[r, shift right, "h"'] & c \end{tikzcd}$, una *modificacion* $\lambda \xrightarrow{\psi} h$ esta dada por una familia de *2*-flechas ($\begin{tikzcd} Fa \arrow[r, bend left, "\lambda_a"] \arrow[r, bend right, "h_a"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\psi_a"] & c \end{tikzcd}$ $)_{a\in\mathscr{A}}$ tales que para toda $a \xrightarrow{f} a'$

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend left=60, "\lambda_a", "\Downarrow\lambda_f"'] & Fa' \arrow[r, bend left, "\lambda_{a'}"] \arrow[r, bend right, "h_{a'}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\psi_{a'}"] & c & = & Fa \arrow[rr, bend left, "\lambda_a"] \arrow[rr, bend right, "h_a"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\psi_a"] \arrow[dr, "Ff"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_f"] & c \\
 & & & & & Fa' \arrow[ur, "h_{a'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dado un objeto $c \in \mathscr{C}$ se tiene una categoria $PsCon[F, c]$ (resp. 2-$Con[F, c]$ *y* $LaxCon[F, c]$). Dado un pseudocono $F \xrightarrow{\lambda} L$ se tiene un funtor dado por precomposicion

$$[L, c] \xrightarrow{\lambda^*} PsCon[F, c]$$

Decimos que $F \xrightarrow{\lambda} L$ es el *pseudocolimite* si λ^* es un *isomorfismo de categorias* para todo $c \in \mathscr{C}$. Similarmente se obtienen la definicion de *2-colimite* (resp. *laxcolimite*), si se toma un *2*-cono (resp. un laxcono) y la categoria 2-$Con[F, c]$ (resp. $LaxCon[F, c]$). Decimos que $F \xrightarrow{\lambda} L$ es el *bicolimite* si λ^* es una *equivalencia de categorias.*

4 Categorias fibradas

4.1 Categorias fibradas, definiciones y yoga basico

Remark 4.1. Sea $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ un funtor, y sea $b \xrightarrow{f} a$ una flecha de $\mathscr{C}$, decimos que $y \xrightarrow{\alpha} x$ *esta arriba de f si $p\alpha = f$.* Dado que usualmente escribiremos diagramas conmutativos en las dos categorias involucradas a la vez, escribimos uno arriba del otro, por ejemplo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[r, "h"] & x \\
b \arrow[r, "f"] & a
\end{tikzcd}$$

nos dice que α esta arriba de f. Notamos $\mathscr{F}_a$ a la fibra sobre a, es decir $\mathscr{F}_a = p^{-1}(a)$, es una categoria cuyos objetos son los $x \in \mathscr{F}$ tales que $px = a$, y cuyas flechas son las *flechas verticales*, las flechas $x \xrightarrow{\alpha} y$ tal que $p\alpha = 1_a$. Un diagrama muy usual sera de la forma

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[d, dashed, "\exists! \overline{\varphi}"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
y \arrow[r, "\alpha"'] & x \\
b \arrow[r, "f"'] & a
\end{tikzcd}$$

que significa que $p\alpha = f = p\varphi$ y $\overline{\varphi}$ es *vertical*, es decir $p\overline{\varphi} = 1_b$.

Definition 4.2. Sea $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ un funtor, y sea $b \xrightarrow{f} a$ una flecha de $\mathscr{C}$, dada $y \xrightarrow{\alpha} x$ arriba de f, decimos que

(1) α es precartesiana si para toda $z \xrightarrow{\varphi} y$ arriba de f se tiene

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[d, dashed, "\exists! \overline{\varphi}"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
y \arrow[r, "\alpha"'] & x \\
b \arrow[r, "f"'] & a
\end{tikzcd}$$

es decir, existe una unica $\overline{\varphi}$ tal que $\varphi = \alpha\overline{\varphi}$ y tal que $p\overline{\varphi} = 1_b$.

(2) α es cartesiana si para toda $c \xrightarrow{g} b$ y toda $z \xrightarrow{\varphi} y$ arriba de fg se tiene

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[rrd, "\varphi"] \arrow[rd, dashed, "\exists!\,\overline{\varphi}"'] & & \\
& y \arrow[r, "\alpha"'] & x
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[rrd, "fg"] \arrow[rd, "g"'] & & \\
& b \arrow[r, "f"'] & a
\end{tikzcd}$$

es decir, existe una unica $\overline{\varphi}$ tal que $\varphi = \alpha\overline{\varphi}$ y tal que $p\overline{\varphi} = g$.

Proposition 4.3. α es cartesiana si y solo si para todo $z \in \mathscr{F}$ el siguiente diagrama es un pullback (en $\mathcal{E}ns$)

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}[z,y] \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "p"'] & \mathscr{F}[z,x] \arrow[d, "p"] \\
\mathscr{C}[c,b] \arrow[r, "f_*"] & \mathscr{C}[c,a]
\end{tikzcd}$$

En efecto, por el yoga basico de las categorias basta ver la propiedad universal para el singleton, y en este caso esta

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rrd, bend left, "\varphi"] \arrow[rd, dashed, "\exists!\,\overline{\varphi}"] \arrow[rdd, bend right, "g"'] & & \\
& \mathscr{F}[z,y] \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "p"'] & \mathscr{F}[z,x] \arrow[d, "p"] \\
& \mathscr{C}[c,b] \arrow[r, "f_*"] & \mathscr{C}[c,a]
\end{tikzcd}$$

nos dice exactamente la definicion de flecha cartesiana.

Proposition 4.4. Sea $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ un funtor, entonces

(1) Las flechas cartesianas son cerradas por composicion.
Es decir, si tengo

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r, "\beta"] & y \arrow[r, "\alpha"] & x \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "g"] & b \arrow[r, "f"] & a \end{tikzcd}$$

con α y β cartesianas, entonces $\alpha\beta$ es cartesiana.
(2) Si $\alpha\beta$ es cartesiana y α es cartesiana, entonces β es cartesiana.
(3) Una flecha cartesiana es unica salvo isomorfismo.
Mas especificamente, si α y α' son cartesianas sobre f, entonces existe un unico isomorfismo $z \xrightarrow{h} y$ tal que

$$\begin{tikzcd} z \arrow[d, dashed, "\exists!\, h"'] \arrow[dr, "\alpha'"] & \\ y \arrow[r, "\alpha"'] & x \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "f"'] & a \end{tikzcd}$$

En efecto, *(1)* se sigue de que para todo $w \in \mathscr{F}$

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}[w,z] \arrow[r, "\beta_*"] \arrow[d, "p"'] & \mathscr{F}[w,y] \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "p"'] & \mathscr{F}[w,x] \arrow[d, "p"] \\ \mathscr{C}[d,c] \arrow[r, "g_*"] & \mathscr{C}[d,b] \arrow[r, "f_*"] & \mathscr{C}[d,a] \end{tikzcd}$$

el siguiente diagrama es un pullback por el Pullback Lemma *(PBL)*. El *(PBL)* nos dice tambien que si el cuadrado exterior y el de la derecha son pullbacks, entonces el de la izquierda lo es, y por lo tanto se sigue *(2)*. Es claro que *(3)* es trivial.

Definition 4.5. Decimos que $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ es una *fibracion (de Grothendieck)* si para toda $b \xrightarrow{f} a$ y todo $x \in \mathscr{F}$ tal que $px = a$, existe $y \xrightarrow{\alpha} x$ cartesiana sobre f. Decimos tambien en este caso que $\mathscr{F}$ *es una categoria fibrada sobre* $\mathscr{C}$.

Proposition 4.6. Si $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ es una fibracion, y sea $y \xrightarrow{\alpha} x$ sobre $b \xrightarrow{f} a$, entonces son equivalentes

(1) α es cartesiana.
(2) α es precartesiana.

En efecto, es claro que siempre (1) $\Rightarrow$ (2), y si α es precartesiana, dada α' cartesiana sobre f, se tiene que $\alpha = \alpha' h$ con $z \xrightarrow{h} y$ un isomorfismo. Es claro entonces que α resulta cartesiana pues α' lo es y el diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}[w,z] \arrow[r, "h^*"] \arrow[d, "p"'] \arrow[rr, bend left, "\alpha_*"] & \mathscr{F}[w,y] \arrow[r, "\alpha'_*"] \arrow[d, "p"'] & \mathscr{F}[w,x] \arrow[d, "p"] \\
\mathscr{C}[d,b] \arrow[r, "1_{b*}"] \arrow[rr, bend right, "f_*"'] & \mathscr{C}[d,b] \arrow[r, "f_*"] & \mathscr{C}[d,a]
\end{tikzcd}$$

por el *(PBL)*.

Proposition 4.7. $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ es una fibracion si y solo si

(1) si para toda $b \xrightarrow{f} a$ y todo $x \in \mathscr{F}$ tal que $px = a$, existe $y \xrightarrow{\alpha} x$ precartesiana sobre f.

(2) composicion de flechas precartesianas es precartesiana.

En efecto, ya vimos que si p es una fibracion satisface *(1)* y *(2)*. Si se satisfacen *(1)* y *(2)*, dada $y \xrightarrow{\alpha} x$ precartesiana sobre f, veremos que es cartesiana. Dada $c \xrightarrow{g} b$ tomamos β precartesiana sobre g,

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[dr, "\beta"'] \arrow[drr, "\alpha\beta"] & & \\
& y \arrow[r, "\alpha"'] & x
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[dr, "g"'] \arrow[drr, "fg"] & & \\
& b \arrow[r, "f"'] & a
\end{tikzcd}$$

y por *(2)* $\alpha\beta$ es precartesiana. Luego, para toda $w \xrightarrow{\varphi} x$ se tiene

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[d, dashed, "\exists!\,\varphi'"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
z \arrow[r, "\alpha\beta"'] & x
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "fg"'] & a
\end{tikzcd}$$

y esto muestra que se tiene un unico $\overline{\varphi} = \beta\varphi'$, tal que

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[dr, dashed, "\exists!\,\overline{\varphi}"'] \arrow[drr, "\varphi"] & & \\
& y \arrow[r, "\alpha"'] & x
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[dr, "g"'] \arrow[drr, "fg"] & & \\
& b \arrow[r, "f"'] & a
\end{tikzcd}$$

Proposition 4.8. Sean $\mathscr{G} \xrightarrow{q} \mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ funtores, sea $b \xrightarrow{f} a$ en $\mathscr{C}$, y se tienen

$$\begin{tikzcd}
y' \arrow[r, "\alpha'"] & x'
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[r, "\alpha"] & x
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "f"] & a
\end{tikzcd}$$

Si α es cartesiana sobre f entonces α' es cartesiana sobre α si y solo si α' es cartesiana sobre f.

En efecto, para todo $z' \in \mathscr{G}$ el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{G}[z', y] \arrow[r, "\alpha'_*"] \arrow[d, "q"'] & \mathscr{F}[z', x] \arrow[d, "q"] \\
\mathscr{F}[z, y] \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "p"'] & \mathscr{F}[z, x] \arrow[d, "p"] \\
\mathscr{C}[c, b] \arrow[r, "f_*"] & \mathscr{C}[c, a]
\end{tikzcd}$$

si y solo si el cuadrado de arriba es un pullback, por el *(PBL)*.

Corollary 4.9. Sean $\mathscr{G} \xrightarrow{q} \mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ fibraciones, entonces pq es una fibracion.

Proposition 4.10. Una flecha $y \xrightarrow{f} x$ en $\mathscr{F}$ es un isomorfismo si y solo si es cartesiana para $\mathscr{F} \longrightarrow 1$ si y solo si es cartesiana para toda fibracion $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$.

En efecto, si $y \xrightarrow{f} x$ es un iso entonces es cartesiana para $\mathscr{F} \longrightarrow 1$ ya que

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[d, dashed, "\exists!\, f^{-1}g"'] \arrow[dr, "g"] & \\
y \arrow[r, "f"'] & x
\end{tikzcd}$$

$$* \longrightarrow *$$

Por otro lado, si $y \xrightarrow{f} x$ es cartesiana para $\mathscr{F} \longrightarrow 1$ entonces considerando

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d, dashed, "\exists!\, h"'] \arrow[dr, "1_x"] & \\
y \arrow[r, "f"'] & x
\end{tikzcd}$$

$$* \longrightarrow *$$

Falta ver que $hf = 1_y$, pero $fhf = 1_x f = f$, por unicidad del levantado $hf = 1_y$. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & 1 \\
\mathscr{C} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

donde p es cualquier fibracion. Si $y \xrightarrow{f} x$ en $\mathscr{F}$ es cartesiana para $\mathscr{F} \longrightarrow 1$, entonces automaticamente $py \xrightarrow{pf} px$ es cartesiana para $\mathscr{C} \longrightarrow 1$, por el corolario 4.9 entonces $y \xrightarrow{f} x$ es cartesiana para $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$.

Definition 4.11. Dadas fibraciones $(\mathscr{F}, p)$, $(\mathscr{G}, q)$ sobre $\mathscr{C}$, un *funtor cartesiano* es un funtor $\mathscr{F} \xrightarrow{F} \mathscr{G}$ tal que

(1) $p = qF$, es decir conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "p"'] & \mathscr{G} \arrow[d, "q"] \\
& \mathscr{C}
\end{tikzcd}$$

(2) F preserva flechas cartesianas.

Mas precisamente, si $y \xrightarrow{\alpha} x$ en $\mathscr{F}$ es cartesiana sobre $b \xrightarrow{f} a$, entonces $Fy \xrightarrow{F\alpha} Fx$ en $\mathscr{G}$ es cartesiana sobre f.

Definition 4.12. Dada una categoria $\mathscr{C}$, definimos la *2*-categoria $Fib(\mathscr{C})$ que es una subcategoria de ${}^{\mathcal{C}at}/_{\mathscr{C}}$, cuyos objetos son las fibraciones sobre $\mathscr{C}$, las flechas son los funtores cartesianos, y las 2-flechas son las transformaciones naturales entre ellos como flechas de ${}^{\mathcal{C}at}/_{\mathscr{C}}$, es decir, son las transformaciones naturales

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta"] & \mathscr{G}
\end{tikzcd}$$

tales que

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta"] & \mathscr{G} \arrow[r, "q"] & \mathscr{C} \arrow[r, phantom, "="] & \mathscr{F} \arrow[r, "p"] & \mathscr{C}
\end{tikzcd}$$

4.2 Fibraciones discretas

Sea $\mathscr{C}^{op} \xrightarrow{F} \mathcal{E}ns$ un prehaz (i.e. un funtor), entonces se tiene la categoria $\int F$ cuyos elementos son los pares (x, a) con $x \in Fa$, y cuyas flechas estan dadas por

$$\frac{(x, a) \xrightarrow{f} (y, b)}{a \xrightarrow{f} b \ \textit{tal que } Ff(y) = x}$$

Por el Lema de Yoneda esta categoria es equivalente a ${}^{\mathscr{C}}/_{F}$ donde identificamos a $\mathscr{C}$ con los funtores representables via el Funtor de Yoneda $\mathscr{C} \xrightarrow{h} \mathcal{E}ns^{\mathscr{C}^{op}}$. Se tiene un funtor dominio

$$\int F \xrightarrow{\Diamond} \mathscr{C}$$

$$(x,a) \longrightarrow a$$

y este funtor es una fibracion. En efecto, dada una flecha $b \xrightarrow{f} a$, y un par $(x,a) \in \int F$ la unica flecha arriba de f es

$$(Ff(x),b) \xrightarrow{f} (x,a)$$

$$b \xrightarrow{\quad f \quad} a$$

De esto se deduce automaticamente que es precartesiana, y que estas flechas son cerradas por composicion, y por lo tanto resulta una fibracion.

Definition 4.13. Un funtor $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ es una *fibracion discreta* si dada una flecha $b \xrightarrow{f} a$ y $x \in \mathscr{F}_a$, entonces existe una unica flecha $y \xrightarrow{\alpha} x$ arriba de f.

Del argumento anterior se deduce que *una fibracion discreta es de hecho una fibracion.* Mas aun, veamos que todas son de este tipo. Dada una fibracion discreta $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ definimos

$$\mathscr{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{F_p} \mathcal{E}ns$$

$$a \longrightarrow \mathscr{F}_a = p^{-1}(a)$$

y en las flechas, dada $b \xrightarrow{f} a$ y dado $x \in \mathscr{F}_a$ existe una unica flecha cartesiana

$$y \xrightarrow{\alpha} x$$

$$b \xrightarrow{f} a$$

definimos entonces

$$\mathscr{F}_a \xrightarrow{f^*} \mathscr{F}_b$$

$$x \longrightarrow f^*(x) = y$$

Por la unicidad de las flechas cartesianas se sigue que dadas flechas

$$c \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} a$$

se tiene que $g^*f^* = (fg)^*$ y por lo tanto F resulta funtorial. Mas aun, si llamamos $DFib(\mathscr{C})$ a la *categoria de fibraciones discretas*, tenemos entonces el siguiente hecho.

Theorem 4.14. Se tiene un isomorfismo de categorias

$$\mathcal{E}ns^{\mathscr{C}^{op}} \xrightarrow{\int} DFib(\mathscr{C})$$

Para ver que $\int$ es funtorial, falta definirlo en las flechas, dada una transformacion natural

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}^{op} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow h"] & \mathcal{E}ns \end{tikzcd}$$

es facil ver que se obtiene un funtor cartesiano

$$\int F \xrightarrow{h} \int G$$

$$(x, a) \longrightarrow (h_a(x), a)$$

Por otro lado, dado un funtor cartesiano entre dos fibraciones discretas $(\mathscr{F}, p) \xrightarrow{h} (\mathscr{G}, q)$, dado que $qh = p$ se tiene que si $x \in \mathscr{F}_a$ entonces $hx \in \mathscr{G}_a$, por lo tanto podemos definir una familia de funciones

$$\mathscr{F}_a \xrightarrow{h_a} \mathscr{G}_a$$

$$x \longrightarrow hx$$

y resultan en una transformacion natural. Es claro que es la unica transformacion natural que aplicando $\int$ me da h, y por lo tanto se tiene que $\int$ es un isomorfismo de categorias.

4.3 Construccion de Grothendieck

Grothendieck se dio cuenta que este hecho se puede generalizar a una equivalencia de *2*-categorias

$$[\mathscr{C}^{op}, \mathcal{C}at] \xrightarrow{\int} Fib(\mathscr{C})$$

mediante la llamada *Construccion de Grothendieck*, donde $[\mathscr{C}^{op}, \mathcal{C}at]$ es la *2*-categoria de *pseudofuntores* de $\mathscr{C}$ a $\mathcal{C}at$, *transformaciones pseudonaturales*, y *modificaciones.*

Veamos como es esta equivalencia, dada una fibracion $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ se tiene para cara $a \in \mathscr{C}$ una categoria $\mathscr{F}_a$, que es la fibra de a, cuyos objetos son los $x \in \mathscr{F}$ tal que $px = a$ y cuyas flechas son las *flechas verticales*, es decir las flechas $y \xrightarrow{\alpha} x$ tales que $p\alpha = 1_a$. Dada $b \xrightarrow{f} a$ en $\mathscr{C}$, se tiene para cada $x \in \mathscr{F}_x$ una flecha cartesiana f_x sobre f

$$\begin{tikzcd}
f^*(x) \arrow[r, "f_x"] & x \\
b \arrow[r, "f"] & a
\end{tikzcd}$$

y por lo tanto se obtiene un funtor

$$\frac{\mathscr{F}_a \xrightarrow{f^*} \mathscr{F}_b}{x \longrightarrow f^*(x)}$$

y dada una flecha vertical $y \xrightarrow{\alpha} x$ se define $f^*\alpha$ por

$$\begin{tikzcd}
f^*(y) \arrow[r, "f_y"] \arrow[d, dashed, "\exists!\, f^*\alpha"'] & y \arrow[d, "\alpha"] \\
f^*(x) \arrow[r, "f_x"'] & x \\
b \arrow[r, "f"'] & a
\end{tikzcd}$$

Por la unicidad del levantamiento se sigue la funtorialidad de f^*, es decir $f^*(\alpha\beta) = f^*(\alpha)\, f^*(\beta)$. Observar que tal funtor *depende de la eleccion* de las flechas cartesianas f_x para cada $x \in \mathscr{F}_a$.

Definition 4.15. Dada una fibracion $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$, un *clivaje* es una *eleccion* para cada $b \xrightarrow{f} a$ en $\mathscr{C}$ y cada $x \in \mathscr{F}_a$, de una flecha cartesiana f_x arriba de f.

Por el axioma de eleccion, toda fibracion admite un clivaje. Dada una fibracion $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ con un clivaje, entonce se tienen funtores $\mathscr{F}_a \xrightarrow{f^*} \mathscr{F}_b$ para cada $b \xrightarrow{f} a$, pero dadas $c \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} a$, no es cierto que $g^* f^* = (fg)^*$, ya que no hay unicidad de levantamiento a flechas cartesianas. Sin embargo, se tiene existe un isomorfismo natural

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}_a \arrow[r, "f^*"] \arrow[dr, "(fg)^*"'] & \mathscr{F}_b \arrow[d, "g^*"] \arrow[dl, phantom, "\Downarrow F_{g,f}"] \\
& \mathscr{F}_c
\end{tikzcd}$$

pues dado que la composicion

$$\begin{tikzcd}
g^* f^*(x) \arrow[r, "g_{f^*(x)}"] & f^*(x) \arrow[r, "f_x"] & x \\
c \arrow[r, "g"] & b \arrow[r, "f"] & a
\end{tikzcd}$$

resulta cartesiana sobre fg, se tiene que existe un unico isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
g^* f^*(x) \arrow[d, dashed, "\exists!\,(F_{g,f})_x"'] \arrow[dr, "f_x g_{f^*(x)}"] & \\
(fg)^*(x) \arrow[r, "(fg)_x"'] & x \\
c \arrow[r, "fg"'] & a
\end{tikzcd}$$

La unicidad muestra que en efecto este isomorfismo resulta natural y satisface los axiomas de coherencia de pseudofuntores. Luego dada una fibracion se obtiene un pseudofuntor $\mathscr{C}^{op} \xrightarrow{F_p} \mathcal{C}at$.

Definition 4.16. Un *clivaje se parte* si satisface que dadas $c \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} a$ y $x \in \mathscr{F}_a$, el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
(fg)^*(x) \arrow[d, equal] \arrow[rrd, bend left, "(fg)_x"] & & \\
g^* f^*(x) \arrow[r, "g_{f^*(x)}"] & f^*(x) \arrow[r, "f_x"] & x \\
c \arrow[r, "g"] & b \arrow[r, "f"] & a
\end{tikzcd}$$

es decir que $(fg)^* = f^* g^*$, y tambien $(1_a)_x = 1_x$. No toda fibracion admite un clivaje que se parte, sin embargo toda fibracion es *equivalente* a una que lo admite.

Es claro que dada una fibracion $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ con un clivaje elegido, entonces este *se parte* si y solo si $\mathscr{C}^{op} \xrightarrow{F_p} \mathcal{C}at$ *es un funtor.*

Por otro lado, dado un pseudofuntor $\mathscr{C}^{op} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ construimos una fibracion asociada $\int F \xrightarrow{\Diamond} \mathscr{C}$. Los objetos de $\int F$ son pares (x, a) con $x \in Fa$, y las flechas estan dadas por

$$\frac{(x,a) \xrightarrow{(f,\varepsilon)} (y,b)}{a \xrightarrow{f} b \ \text{ y una flecha } \ x \xrightarrow{\varepsilon} Ff(y) \ \text{ en } Fa}$$

Explicitamos la composicion en $\int F$, dadas $(x,a) \xrightarrow{(f,\varepsilon)} (y,b) \xrightarrow{(g,\varphi)} (z,c)$ la composicion esta dada por las flechas

$$a \xrightarrow{gf} c \ \text{ y } \ x \xrightarrow{\varepsilon} Ff(y) \xrightarrow{Ff\varphi} FfFg(z) \xrightarrow{(F_{g,f})_z} Fgf(z)$$

La identidad $(x,a) \xrightarrow{1_{(x,a)}} (x,a)$ esta dada dada por las flechas

$$a \xrightarrow{1_a} a \ \text{ y } \ x \xrightarrow{(F_a^{-1})_x} F1_a(x)$$

En el caso en que F sea un *funtor* la composicion es mas simple ya que no hace falta considerar los isomorfismos naturales de composicion y unidad. Dado que F es un pseudofuntor $\int F$ resulta ser una categoria. Si $(y,b) \xrightarrow{(f,\varepsilon)} (x,a)$ es precartesiana, la propiedad universal

$$\begin{tikzcd}
(z,b) \arrow[d, dashed, "\exists!\,(1_b,\overline{\varphi})"'] \arrow[dr, "(f,\varphi)"] & \\
(y,b) \arrow[r, "(f,\varepsilon)"'] & (x,a)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "f"'] & a
\end{tikzcd}$$

nos dice que para todo $z \in Fb$

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[d, dashed, "\exists ! \overline{\varphi}"'] \arrow[dr, "\forall \varphi"] & \\
y \arrow[r, "\varepsilon"'] & Ffx
\end{tikzcd}$$

es decir que $[z, y] \xrightarrow{\varepsilon_*} [z, Ffx]$ es una biyeccion natural en z, por Yoneda esto nos dice exactamente que ε es un isomorfismo. Es claro luego que las flechas precartesianas son cerradas por composicion. Por otro lado, dado (x, a) sobre a, y una $b \xrightarrow{f} a$ siempre se puede tomar la flecha cartesiana

$$\begin{tikzcd}
(Ff(x), b) \arrow[r, "(f, 1_{Ff(x)})"] & (x, a) \\
b \arrow[r, "f"] & a
\end{tikzcd}$$

y por lo tanto $\int F \xrightarrow{\Diamond} \mathscr{C}$ es una fibracion. Esto nos da ademas siempre un *clivaje canonico*.

Theorem 4.17. *(Construccion de Grothendieck)* Se tiene una equivalencia de *2*-categorias

$$[\mathscr{C}^{op}, \mathcal{C}at] \xrightarrow{\int} Fib(\mathscr{C})$$

No damos aqui la demostracion completa de este teorema, lo que resta es simplemente una larga verificacion de rutina, el lector interesado puede ver [HCA2].

4.4 Construccion de laxcolimites de categorias indexados por una categoria

Hay una construccion dual para co-fibraciones y funtores $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$, esta nos interesa ya que nos permite calcular el *laxcolimite* y el *pseudocolimite* de F.

La categoria $\int F$ tiene como objetos los pares (x, a) con $x \in Fa$, las flechas estan dadas por

$$\frac{(x, a) \xrightarrow{(f, \varepsilon)} (y, b)}{a \xrightarrow{f} b \text{ y una flecha } Ff(x) \xrightarrow{\varepsilon} y \text{ en } Fb}$$

Para cada $a \in \mathscr{C}$ se tiene un funtor

$$\begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "\lambda_a"] & \int F \\ x \arrow[r] & (x,a) \end{tikzcd}$$

y se tienen transformaciones naturales

$$\begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "\lambda_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda_f"] & \int F \\ Fb \arrow[ur, "\lambda_b"'] & \end{tikzcd}$$

dadas por

$$\frac{(x,a) \xrightarrow{(\lambda_f)_x} (Ff(x),b)}{a \xrightarrow{f} b \ \text{ y } \ Ff(x) \xrightarrow{1_{Ff(x)}} Ff(x)}$$

Es claro que definen asi un *laxcono*, y mas aun es universal.

Theorem 4.18. Se tiene un isomorfismo de categorias para toda categoria $c \in \mathcal{C}at$,

$$[\int F, c] \xrightarrow{\lambda^*} LaxCon[F,c]$$

es decir $\int F$ es el *laxcolimite de F*.

En efecto, dado un *laxcono* $F \xrightarrow{h} c$ se define un funtor

$$\begin{tikzcd} \int F \arrow[r, "h"] & c \\ (x,a) \arrow[r] & h_a(x) \end{tikzcd}$$

y a una flecha $(x,a) \xrightarrow{(f,\varepsilon)} (y,b)$ le asigna $h_a(x) \xrightarrow{(h_f)_x} h_bFf(x) \xrightarrow{h_b(\varepsilon)} h_b(y)$. Es claro que es el unico funtor tal que

$$\begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "\lambda_a"] \arrow[dr, "h_a"'] & \int F \arrow[d, dashed, "\exists!\, h"] \\ & c \end{tikzcd}$$

y resulta funtorial ya que $F \xrightarrow{h} c$ era un laxcono. Tambien es tautologico verificar que se tiene una biyeccion entre las transformaciones naturales y las modificaciones entre los laxconos, por lo tanto λ^* es un isomorfismo.

4.5 Construccion de pseudocolimites de categorias indexados por una categoria

Por definicion, un laxcono $F \xrightarrow{h} c$ es un *pseudocono* si y solo si h_f es un iso para toda f. Dado que $\int F$ es el laxcono universal se sigue que $h_f = h\lambda_f$, osea que h_f es un iso si y solo si $h\lambda_f$ lo es. Por definicion de h, la transformacion natural $h\lambda_f$ esta dada en $x \in Fa$ por aplicar h a cada $(x,a) \xrightarrow{(\lambda_f)_x} (Ff(x),b)$, pues esto nos da $h_a(x) \xrightarrow{(h_f)_x} h_b Ff(x)$. Es decir que es un pseudocono si y solo si $\int F \xrightarrow{h} c$ hace isos a las flechas

$$\frac{(x,a) \xrightarrow{(\lambda_f)_x} (Ff(x),b)}{a \xrightarrow{f} b \text{ y } Ff(x) \xrightarrow{1_{Ff(x)}} Ff(x)}$$

Estas flechas son el clivaje canonico de la co-fibracion $\int F \xrightarrow{\Diamond} \mathscr{C}$ por lo visto anteriormente. Luego, como dadas dos flechas co-cartesianas se tiene un isomorfismo entre sus dominios, se obtiene que $F \xrightarrow{h} c$ es un pseudocono si y solo si $\int F \xrightarrow{h} c$ hace isos a las flechas co-cartesianas. Llamamos Σ a la coleccion de flechas co-cartesianas en $\int F$, luego tenemos un isomorfismo de categorias

$$[\textstyle\int F, c]_{\Sigma^{-1}} \xrightarrow{\lambda^*} PsCon[F,c]$$

y se tiene un isomorfismo de categorias

$$[\textstyle\int F[\Sigma^{-1}], c] \xrightarrow{h^*} [\textstyle\int F, c]_{\Sigma^{-1}}$$

por lo tanto se obtiene el siguiente resultado.

Theorem 4.19. Se tiene un isomorfismo de categorias para toda categoria $c \in \mathcal{C}at$,

$$[\textstyle\int F[\Sigma^{-1}], c] \xrightarrow{(h\lambda)^*} PsCon[F,c]$$

es decir $\int F[\Sigma^{-1}]$ es el *pseudocolimite de* F, donde Σ son las flechas co-cartesianas o bien las flechas del clivaje canonico.

Si bien esta construccion es el pseudo colimite, al aplicar la categoria de fracciones en el caso general, esta construccion resulta inmanejable en terminos practicos. Sin embargo Grothendieck observo que si la categoria $\mathscr{C}$ es pseudofiltrada entonces las flechas co-cartesianas satisfacen el *calculo de fracciones* y podemos dar una construccion simple del pseudocolimite.

4.6 Construccion de pseudocolimites filtrantes de categorias

Lemma 4.20. Sea $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ una cofibracion y supongamos que $\mathscr{C}$ es pseudofiltrada, entonces las flechas co-cartesianas satisfacen el calculo de fracciones.

Es claro que satisface *(CF1)* ya que la identidad

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "1_x"] & x \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "1_a"] & a \end{tikzcd}$$

es co-cartesiana y satisfacen *(CF2)* pues ya vimos que las flechas co-cartesianas son cerradas por composicion. Se satisface *(CF3)* pues dado un diagrama

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ y & & z \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl, "ps"'] \arrow[dr, "pf"] & \\ b & & c \end{tikzcd}$$

con $s \in \Sigma$, es decir co-cartesiana. Como $\mathscr{C}$ es pseudofiltrada podemos conseguir un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl, "ps"'] \arrow[dr, "pf"] & \\ b \arrow[dr, "u"'] & & c \arrow[dl, "v"] \\ & d & \end{tikzcd}$$

y como p es una fibracion podemos levantar con flechas co-cartesianas y obtener un diagrama

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
y \arrow[d, "t"'] & & z \arrow[d, "s'"] \\
w' & & w
\end{tikzcd}$$

pero ambas son flechas arriba de $up(s) = vp(f)$ y como ts es co-cartesiana existe una flecha

$$\begin{tikzcd}
& w \\
x \arrow[ur, "s'f"] \arrow[r, "ts"'] & w' \arrow[u, dashed, "\exists!\, r"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "up(s)"'] & d
\end{tikzcd}$$

Se toma $f' = rt$ y luego tenemos el diagrama conmutativo deseado

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
y \arrow[dr, "f'"'] & & z \arrow[dl, "s'"] \\
& w &
\end{tikzcd}$$

Para ver *(CF4)* si se tienen $x \xrightarrow{s} y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} z$ con s co-cartesiana, por ser $\mathscr{C}$ pseudofiltrada se tiene una flecha h tal que $hp(f) = hp(g)$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "s"] & y \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & z \arrow[r, dashed, "s'"] & w
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "ps"] & b \arrow[r, shift left, "pf"] \arrow[r, shift right, "pg"'] & c \arrow[r, dashed, "\exists\, h"] & d
\end{tikzcd}$$

y se tiene una flecha co-cartesiana s' arriba de h. Luego $s'fs = s'gs$ y como s es co-cartesiana se sigue que $s'f = s'g$.

Mas aun, se deduce de la misma forma el siguiente resultado.

Corollary 4.21. Sea $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ una fibracion con un clivaje que se parte y supongamos que $\mathscr{C}$ es pseudofiltrante, entonces las flechas del clivaje satisfacen el calculo de fracciones.

Con este lema entonces podemos dar la descripcion de $\int F[\Sigma^{-1}]$ usando el calculo de fracciones de Gabriel-Zisman para Σ las flechas del clivaje canonico.

Theorem 4.22. Sea $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ un funtor, supongamos que $\mathscr{C}$ es pseudofiltrante, entonces el pseudocolimite de F esta dado por la categoria $\int F[\Sigma^{-1}]$ que describimos a continuacion. Los objetos de $\int F[\Sigma^{-1}]$ son pares (x,a) con $x \in Fa$, y una flecha $(x,a) \xrightarrow{(u,\varepsilon,v)} (y,b)$ esta dada por flechas

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "u"'] & & b \arrow[dl, "v"] \\
& c &
\end{tikzcd}$$

y una flecha $Fu(x) \xrightarrow{\varepsilon} Fv(y)$ en Fc, donde identificamos $(u_1,\varepsilon_1,v_1) \sim (u_2,\varepsilon_2,v_2)$ si existen w_1, w_2 tales que conmutan

$$\begin{tikzcd}
& c_1 \arrow[dr, "w_1"] & \\
b \arrow[ur, "v_1"] \arrow[dr, "v_2"'] & & c_3 \\
& c_2 \arrow[ur, "w_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& c_1 \arrow[dr, "w_1"] & \\
a \arrow[ur, "u_1"] \arrow[dr, "u_2"'] & & c_3 \\
& c_2 \arrow[ur, "w_2"'] &
\end{tikzcd}$$

y tal que $Fw_1(\varepsilon_1) = Fw_2(\varepsilon_2)$.

4.7 Construccion de colimites de conjuntos con la construccion de Grothendieck

Aqui observamos que podemos utilizar la construccion de Grothendieck para construir el colimite de un funtor $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathcal{E}ns$. Este resultado es importante ya que en la construccion que hacemos del pseudocolimite de un funtor $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ donde ahora $\mathscr{C}$ es una *2*-categoria, hacemos una generalizacion *2*-categorica de esta tecnica.

Primero observamos que se tiene un par de funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}at \arrow[r, shift left, "\pi_0"] & \mathcal{E}ns \arrow[l, shift left, "d"]
\end{tikzcd}$$

donde d le asigna a cada conjunto una categoria discreta, es decir cuyas unicas flechas son las identidades, y cuyos objetos son los elementos del conjunto.

Por otro lado, dada una categoria $\mathscr{C}$, como su nombre lo indica $\pi_0(\mathscr{C})$ es el conjunto de componentes conexas de la misma, es decir se identifican objetos si existe una cadena de flechas que los une. Tautologicamente se ve que $\pi_0 \dashv d$.

Dado $c \in \mathcal{E}ns$, se tiene un isomorfismo

$$[\textstyle\int F, d(c)] \xrightarrow{\lambda^*} LaxCon[F, d(c)]$$

Por otro lado, como $d(c)$ es una categoria discreta, se tiene que

$$LaxCon[F, d(c)] = Con[F, c]$$

Luego utilizando la adjuncion anterior, se obtiene una biyeccion natural

$$[\pi_0(\textstyle\int F), c] \longrightarrow Con[F, c]$$

Por lo tanto $\pi_0(\int F)$ es el colimite de F. De esta construccion se obtiene que el colimite de F esta dado por pares (x, a) con $x \in Fa$ donde identificamos $(x, a) \sim (y, b)$ si existe una cadena de flechas en $\int F$ que los une. Mas precisamente, es la relacion de equivalencia generada por $(x, a) \sim (y, b)$ si existe $a \xrightarrow{f} b$ tal que $Ff(x) = y$. Es facil ver que esta construccion no es otra que la contruccion canonica de colimites de conjuntos, es decir, se toma la union disjunta y luego se cocienta por una relacion de equivalencia canonica.

Si la categoria $\mathscr{C}$ es pseudofiltrada, entonces es facil ver que la relacion de equivalencia anterior se simplifica ya que las cadenas se pueden reducir a un caso mas simple y se obtiene que $(x, a) \sim (y, b)$ si y solo si existen

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "f"] & \\
& c \\
b \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

tales que $Ff(x) = Fg(y)$. Es decir que se obtiene la construccion de germenes usual.

5 Nociones de 2-filtrabilidad

5.1 2-filtrabilidad

Definition 5.1. Decimos que una *2*-categoria es *finita*, si tiene finitas 2-flechas, y por lo tanto finitas flechas y finitos objetos.

Definition 5.2. Dada una categoria $\mathscr{C}$, un *2-diagrama finito* en $\mathscr{C}$ esta dado por un *2*-funtor $\mathscr{A} \xrightarrow{F} \mathscr{C}$ donde $\mathscr{A}$ es una *2*-categoria finita.

Definition 5.3. Decimos que una *2*-categoria $\mathscr{C}$ es

(1) 2-filtrante si todo *2*-diagrama finito tiene un *pseudocono.*
(2) strict-2-filtrante si todo *2*-diagrama finito tiene un *2-cono.*
(3) lax-filtrante si todo *2*-diagrama finito tiene un *laxcono.*

5.2 Definiciones equivalentes de 2-filtrabilidad

La siguiente proposicion nos da condiciones verificables para ver cuando una categoria es *2*-filtrada o strict-*2*-filtrada. La parte *(1)* de esta proposicion muestra que nuestra definicion de *2*-filtrante es equivalente a la definicion de J. Kennison en [Ken92] que el llama *bifiltrante.*

Proposition 5.4. Una *2*-categoria $\mathscr{C}$ es

(1) 2-filtrante si y solo si satisface *(F1)* y las condiciones

(PSF2) Dadas flechas $a \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} b$ *existe* $b \xrightarrow{h} x$ *y un isomorfismo*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "hf"] \arrow[r, bend right, "hg"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & x \end{tikzcd}$$

(F3) Dadas 2-flechas $$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, bend left=25, "f"] \arrow[rr, bend right=25, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta"] & b \end{tikzcd}$$ *existe* $b \xrightarrow{h} c$ *tal que* $h\alpha = h\beta$.

(2) Una *2*-categoria es *strict-2-filtrante* si y solo si satisface *(F1), (F2)* y *(F3)*.

Veamos *(1)*, ya que *(2)* es igual pero aun mas facil ya que todo conmuta estrictamente. Es claro que si $\mathscr{C}$ es *2*-filtrante entonces se satisface *(F1)* pues basta considerar un pseudocono del diagrama dado por elegir dos objetos. Para ver *(PSF2)* se considera un pseudocono del diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \end{tikzcd}$$

Luego se tienen isos

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[rr, bend left=50, "\lambda_a"] \arrow[rr, bend right=50, "\lambda_a"'] & b \arrow[r, "\lambda_b"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\lambda_f"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\lambda_g"] & c \end{tikzcd}$$

y se toma $h = \lambda_b$, $\alpha = \lambda_g \circ \lambda_f^{-1}$. Para ver *(F3)*, se considera un pseudocono del diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, bend left=25, "f"] \arrow[rr, bend right=25, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta"] & b \end{tikzcd}$$

Se tiene entonces que

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[rr, bend left=70, "\lambda_a"] & b \arrow[r, "\lambda_b"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\lambda_f"] & c & = & a \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left=60, "\lambda_a"] & b \arrow[r, "\lambda_b"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\lambda_g"] & c & = & a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] \arrow[rr, bend left=70, "\lambda_a"] & b \arrow[r, "\lambda_b"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\lambda_f"] & c \end{tikzcd}$$

Como $(\lambda_b\alpha) \circ \lambda_f = (\lambda_b\beta) \circ \lambda_f$ y λ_f es un iso, en particular es epi, entoces $\lambda_b\alpha = \lambda_b\beta$. Luego tomando $h = \lambda_b$ se tiene *(F3)*.

Ahora supongamos que $\mathscr{C}$ satisface *(F1), (PSF2)* y *(F3)*. Dado un diagrama finito $\mathscr{A} \xrightarrow{F} \mathscr{C}$, por *(F1)* dado que se tienen finitos objetos, podemos conseguir $Fa \xrightarrow{\lambda_a} c$. Ahora, queremos conseguir isomorfismos

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\lambda_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[d, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\lambda_f"] & c \\
Fb \arrow[ur, "\lambda_b"'] &
\end{tikzcd}$$

para cada $a \xrightarrow{f} b$ en $\mathscr{A}$. Dado que son finitas flechas, yendo mas lejos por *(PSF2)* podemos conseguir estos isomorfismos. Ahora necesitamos que estos isomorfismos cumplan las condiciones *(PSC1)*, *(PSC2)* y *(PSC3).* Dado que se tienen finitas *2*-flechas involucradas, estas condiciones me determinan finitas ecuaciones, nuevamente yendo mas lejos, ahora usando *(F3)*, podemos conseguir que estas condiciones se cumplan.

Mencionamos aqui una propiedad importante de las *2*-categorias *2*-filtradas que utilizaremos mas adelante.

Lemma 5.5. Si una *2*-categoria es *2*-filtrante, entonces para toda *2-flecha*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & b
\end{tikzcd}$$

existe $b \xrightarrow{h} c$ tal que $h\alpha$ es un isomorfismo.

En efecto, esto se deduce automaticamente de *(PSF2)* y *(F3).*

En [DS06] Dubuc y Street definen otra nocion de *2*-filtrabilidad, tambien llamada *2*-filtrante, que les permite hacer las cuentas para construir el pseudo-colimite de un *2*-funtor $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ donde $\mathscr{C}$ es una *2*-categoria *2*-filtrante. Mostramos la equivalencia de estas definiciones.

Definition 5.6. *(Dubuc-Street)* Una *2*-categoria $\mathscr{C}$ se dice *pre-2-filtrante* si satisface

(PRF1) Todo diagrama del tipo

$$\begin{tikzcd}
 & a \\
e \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\
 & b
\end{tikzcd}$$

se puede completar a un diagrama con un iso γ

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dr, "u"] & \\
e \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \gamma & c \\
& b \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

(PRF2) Dadas 2-flechas cualesquiera

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dr, "u_1"] & & & & a \arrow[dr, "u_2"] & \\
e \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \gamma_1 & c_1 & & e \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \gamma_2 & c_2 \\
& b \arrow[ur, "v_1"'] & & & & b \arrow[ur, "v_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Existen w_1, w_2, y isos α, β tales que

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dr, "u_1"] & & & & & & c_1 \arrow[dr, "w_1"] & \\
e \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \gamma_1 & c_1 \arrow[dr, "w_1"] & & & & a \arrow[ur, "u_1"] \arrow[dr, "u_2"] & \Downarrow \beta & c \\
& b \arrow[ur, "v_1"'] \arrow[dr, "v_2"'] & \Downarrow \alpha & c & = & e \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \gamma_2 & c_2 \arrow[ur, "w_2"'] & \\
& & c_2 \arrow[ur, "w_2"'] & & & & b \arrow[ur, "v_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dados pares (γ_1, α),(γ_2, β) como arriba, decimos que satisfacen la *ecuacion LL.*

Lemma 5.7. Sea $\mathscr{C}$ una *2*-categoria pre-*2*-filtrante, si se tienen *2*-flechas

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dr, "u_1"] & & & & a \arrow[dr, "u_2"] & \\
e \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \gamma_1 & c_1 & & e \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \gamma_2 & c_2 \\
& a \arrow[ur, "v_1"'] & & & & a \arrow[ur, "v_2"'] &
\end{tikzcd}$$

con $u_1 = v_1, u_2 = v_2$, entonces existen w_1, w_2, y un iso ε tal que satisface la ecuacion LL

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dr, "u_1"] & & & & & & c_1 \arrow[dr, "w_1"] & \\
e \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \gamma_1 & c_1 \arrow[dr, "w_1"] & & & & a \arrow[ur, "u_1"] \arrow[dr, "u_2"] & \Downarrow \varepsilon & c \\
 & a \arrow[ur, "v_1"'] \arrow[dr, "v_2"'] & \Downarrow \varepsilon & c & = & e \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \gamma_2 & c_2 \arrow[ur, "w_2"'] & \\
 & & c_2 \arrow[ur, "w_2"'] & & & & a \arrow[ur, "v_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Definition 5.8. Una *2*-categoria $\mathscr{C}$ se dice *pseudo-2-filtrante* si satisface *(PRF2)* y el siguiente axioma

(FF1) Dados

$$\begin{tikzcd}
 & a & & & a \\
e_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & & & e_2 \arrow[ur, "f_2"] \arrow[dr, "g_2"'] & \\
 & b & & & b
\end{tikzcd}$$

entonces existen u, v *y isos* γ_1, γ_2

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dr, "u"] & & & & a \arrow[dr, "u"] & \\
e_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & \Downarrow \gamma_1 & c & & e_2 \arrow[ur, "f_2"] \arrow[dr, "g_2"'] & \Downarrow \gamma_2 & c \\
 & b \arrow[ur, "v"'] & & & & b \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Definition 5.9. Una *2*-categoria $\mathscr{C}$ se dice *2-filtrante* si es pseudo-*2*-filtrante y satisface *(F1)*.

Theorem 5.10. Las definiciones *de 2*-categoria *2*-filtrante son equivalentes. Es decir, si $\mathscr{C}$ satisface (F1) entonces son equivalentes

(1) $\mathscr{C}$ satisface *(FF1)* y *(PRF2)*
(2) $\mathscr{C}$ satisface *(PSF2)* y *(F3)*

En efecto, si vale *(2)* entonces todo diagrama finito tiene un pseudocono. Para ver *(FF1)* consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& a & & & a \\
e_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & & & e_2 \arrow[ur, "f_2"] \arrow[dr, "g_2"'] & \\
& b & & & b
\end{tikzcd}$$

Entonces, un pseudocono de este diagrama nos da

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dr, "u"] & & & & a \arrow[dr, "u"] & \\
e_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & \Downarrow \gamma_1 & c & & e_2 \arrow[ur, "f_2"] \arrow[dr, "g_2"'] & \Downarrow \gamma_2 & c \\
& b \arrow[ur, "v"'] & & & & b \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $u = \lambda_a, v = \lambda_b$ y $\gamma_1 = \lambda_{g_1} \circ \lambda_{f_1}^{-1}$, $\gamma_2 = \lambda_{g_2} \circ \lambda_{f_2}^{-1}$. Para ver *(PRF2)*, consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dr, "u_1"] & & & & a \arrow[dr, "u_2"] & \\
e \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \gamma_1 & c_1 & & e \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \gamma_2 & c_2 \\
& b \arrow[ur, "v_1"'] & & & & b \arrow[ur, "v_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces por *(FF1)* podemos conseguir w_1', w_2', y isos α', β'

$$\begin{tikzcd}
& c_1 \arrow[dr, "w_1'"] & & & & c_1 \arrow[dr, "w_1'"] & \\
a \arrow[ur, "u_1"] \arrow[dr, "u_2"'] & \Downarrow \alpha' & c' & & b \arrow[ur, "v_1"] \arrow[dr, "v_2"'] & \Downarrow \beta' & c' \\
& c_2 \arrow[ur, "w_2'"'] & & & & c_2 \arrow[ur, "w_2'"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego se tienen dos *2*-flechas $\eta = (\alpha' g) \circ (w_1' \gamma_1)$, $\theta = (w_2' \gamma_2) \circ (\beta' f)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
e \arrow[r, bend left, "w_1' u_1 f"] \arrow[r, bend right, "w_2' u_2 g"'] \arrow[r, phantom, "\eta \Downarrow \qquad \Downarrow \theta"] & c'
\end{tikzcd}$$

Por *(F3)* existe $c' \xrightarrow{h} c$ tal que $h\eta = h\theta$. Luego, se toma $w_1 = hw_1', w_2 = hw_2', \alpha = h\alpha', \beta = h\beta'$, y se tiene que estos satisfacen la ecuacion LL, es decir que probamos *(PRF2)*.

Ahora veamos que *(1)* implica *(2)*. Para ver *(PSF2)*, dadas $a \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} b$ se toman primero u, v y un iso γ

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \gamma & c \\
& b \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego, por *(FF1)* aplicados a

$$\begin{tikzcd}
& b & & & b \\
b \arrow[ur, "1_b"] \arrow[dr, "u"'] & & & b \arrow[ur, "1_b"] \arrow[dr, "v"'] & \\
& c & & & c
\end{tikzcd}$$

podemos conseguir h, s con isos

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[dr, "h"] & & & & b \arrow[dr, "h"] & \\
b \arrow[ur, "1_b"] \arrow[dr, "u"'] & \Downarrow \eta & x & & b \arrow[ur, "1_b"] \arrow[dr, "u"'] & \Downarrow \theta & x \\
& c \arrow[ur, "s"'] & & & & c \arrow[ur, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

y luego se tiene un diagrama

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[dr, "u"'] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[drr, phantom, "\Downarrow\eta"] & & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \gamma & c \arrow[r, "s"] & x \\
& b \arrow[ur, "v"] \arrow[urr, bend right, "h"'] \arrow[urr, phantom, "\Downarrow\theta^{-1}"] & &
\end{tikzcd}$$

Luego se define $\alpha = (\theta^{-1}g) \circ (s\gamma) \circ (\eta f)$, y resulta ser el iso que buscamos. Para ver *(F3)*, si tenemos *2*-flechas

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \alpha \qquad \Downarrow \beta"] & & b \end{tikzcd}$$

Considero los diagramas

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dr, "1_b"] & \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \alpha & b \\ & b \arrow[ur, "1_b"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & b \arrow[dr, "1_b"] & \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \beta & b \\ & b \arrow[ur, "1_b"'] & \end{tikzcd}$$

En virtud *(PRF2)* y del lema 5.7, podemos encontrar w_1, w_2, y un iso ε tal que

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dr, "1_b"] & & \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \alpha & b \arrow[dr, "w_1"] & \\ & b \arrow[ur, "1_b"'] \arrow[dr, "1_b"'] & \Downarrow \varepsilon & c \\ & & b \arrow[ur, "w_2"'] & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & & b \arrow[dr, "w_1"] & \\ & b \arrow[ur, "1_b"] \arrow[dr, "1_b"] & \Downarrow \varepsilon & c \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \beta & b \arrow[ur, "w_2"'] & \\ & b \arrow[ur, "1_b"'] & & \end{tikzcd}$$

Es decir que

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & b \arrow[r, bend left, "w_1"] \arrow[r, bend right, "w_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & c \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & b \arrow[r, bend left, "w_1"] \arrow[r, bend right, "w_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & c \end{tikzcd}$$

Pero luego, por la ley de intercambio

$$w_2\alpha = (\varepsilon^{-1} \circ \varepsilon)(1_g \circ \alpha) = (\varepsilon^{-1} 1_g) \circ (\varepsilon\alpha) = (*)$$

$$(*) = (\varepsilon^{-1} 1_g) \circ (\varepsilon\beta) = (\varepsilon^{-1} \circ \varepsilon)(1_g \circ \beta) = w_2\beta$$

Tomando $h = w_2$, se obtiene *(F3).* Esto prueba que ambas definiciones son equivalentes.

5.3 Propiedad fundamental de las 2-categorias strict-2-filtrantes

De las propiedades *(F2)* y *(F3)* se deduce facilmente el siguiente hecho.

Lemma 5.11. Si una *2*-categoria es strict-*2*-filtrante, entonces para toda *2*-*flecha*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right, "g"'{name=D}] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & b \end{tikzcd}$$

existe $b \xrightarrow{h} c$ tal que $hf = hg$ y $h\alpha = 1_{hf}$.

Corollary 5.12. Dado un *2*-funtor $\mathscr{A} \xrightarrow{F} \mathscr{C}$, con $\mathscr{A}$ strict-*2*-filtrante, y dada una familia de flechas $(\; Fa \xrightarrow{\lambda_a} c \;)_{a \in \mathscr{A}}$ con una familia de isos

$$\begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "\lambda_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda_f" near start] & c \\ Fa' \arrow[ur, "\lambda_{a'}"'] & \end{tikzcd}$$

que satisfacen *(PSC1), (PSC2)*, entonces satisfacen *(PSC3)*, es decir es un pseudocono.

En efecto basta verificar *(PSC3)*, dada una *2*-flecha

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & a' \end{tikzcd}$$

queremos ver que $(\lambda_{a'} F\alpha) \circ \lambda_f = \lambda_g$. Pero por el lema 5.11 existe $a' \xrightarrow{h} a''$ tal que $hf = hg$ y $h\alpha = 1_{hf}$. Luego, $Fhf = Fhg$ y $Fh\alpha = FhF\alpha = 1_{Fhf}$, por lo tanto

$$(\lambda_{a''} FhF\alpha) \circ \lambda_{hf} = \lambda_{hf} = \lambda_{hg} = (\lambda_h Fg) \circ \lambda_g$$

Por otro lado

$$(\lambda_{a''} FhF\alpha) \circ \lambda_{hf} = (\lambda_h Fg) \circ (\lambda_{a'} F\alpha) \circ \lambda_f$$

y luego se obtiene que

$$(\lambda_h Fg) \circ (\lambda_{a'} F\alpha) \circ \lambda_f = (\lambda_h Fg) \circ \lambda_g$$

Como λ_h es un iso, $\lambda_h Fg$ es un iso, y por lo tanto se puede cancelar a izquierda pues es mono, luego

$$(\lambda_{a'} F\alpha) \circ \lambda_f = \lambda_g$$

que es lo que queriamos mostrar.

Remark 5.13. Se tiene una proposicion similar para *2*-conos, es decir, si se tiene un cono, entonces la condicion *(PSC3)* se satisface automaticamente y es un *2*-cono.

Remark 5.14. Dada una *2*-categoria $\mathscr{C}$, llamamos $\mathscr{C}_o$ a la *categoria subyacente*, es decir, me olvido de las *2*-flechas.

El siguiente resultado es muy importante, aunque no tiene analogos para las nociones mas debiles de *2*-filtrabilidad, y nos dice que esta condicion es muy fuerte.

Theorem 5.15. Sea $\mathscr{A}$ una *2*-categoria strict-*2*-filtrante y sea $\mathscr{A} \xrightarrow{F} \mathscr{C}$ un *2*-funtor, entonces el pseudocolimite (resp. *2*-colimite) de F es igual al pseudocolimite (resp. *2*-colimite) de $\mathscr{A}_o \xrightarrow{F} \mathscr{C}$.

Es decir, puedo olvidarme las *2*-flechas de $\mathscr{A}$ y calcular el pseudocolimite (resp. *2*-colimite) ya que estas no me imponen ninguna condicion. Este teorema nos permite probar automaticamente que la construccion usual de colimites filtrantes de categorias funciona en el caso en el que el diagrama esta indexado por una *2*-categoria strict-*2*-filtrante, y que la construccion de Grothendieck de pseudocolimites filtrantes de categorias nos da el pseudocolimite en el caso strict-*2*-filtrante.

5.4 Construccion de pseudocolimites strict-2-filtrantes de categorias

Theorem 5.16. Dado un *2*-funtor $\mathscr{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ con $\mathscr{A}$ strict-*2*-filtrante, entonces el *pseudocolimite* de F esta dado por la Construccion de Grothendieck $\int F[\Sigma^{-1}]$.

Explicitamente, los objetos de $\int F[\Sigma^{-1}]$ son pares (x, a) con $x \in Fa$, una flecha $(x, a) \xrightarrow{(u,\varepsilon,v)} (y, b)$ esta dada por flechas

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "u"'] & & b \arrow[dl, "v"] \\
& c &
\end{tikzcd}$$

y una flecha $Fu(x) \xrightarrow{\varepsilon} Fv(y)$, donde identificamos $(u_1, \varepsilon_1, v_1) \sim (u_2, \varepsilon_2, v_2)$ si existen w_1, w_2 tales conmutan

$$\begin{tikzcd}
& c_1 \arrow[dr, "w_1"] & \\
b \arrow[ur, "v_1"] \arrow[dr, "v_2"'] & & c_3 \\
& c_2 \arrow[ur, "w_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& c_1 \arrow[dr, "w_1"] & \\
a \arrow[ur, "u_1"] \arrow[dr, "u_2"'] & & c_3 \\
& c_2 \arrow[ur, "w_2"'] &
\end{tikzcd}$$

y tal que $Fw_1(\varepsilon_1) = Fw_2(\varepsilon_2)$.

5.5 Construccion de 2-colimites strict-2-filtrantes de categorias

Theorem 5.17. Dado un *2*-funtor $\mathscr{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ con $\mathscr{A}$ strict-*2*-filtrante, entonces el *2-colimite* de F existe y esta dado por la siguiente categoria $\mathcal{L}(F)$.

Los objetos de $\mathcal{L}(F)$ son el colimite de los objetos, observando que como en particular $\mathscr{A}$ es filtrada, este es un colimite filtrante de conjuntos.

Es decir, $Ob(\mathcal{L}(F)) = \underset{a \in \mathscr{A}}{colim}\, ob(Fa)$, y de la construccion de Godement de colimites conjuntistas, un objeto de $\mathcal{L}(F)$ es un germen de objetos. Mas explicitamente, los objetos de $\mathcal{L}(F)$ son pares (x, a) con $x \in Fa$, donde identificamos (x, a) con (y, b) si y solo si existen flechas

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "u"] & \\
& c \\
b \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

tales que $Fu(x) = Fv(y)$. Es decir, dos objetos son iguales si son iguales mas lejos. A los objetos de $\mathcal{L}(F)$ los notamos $[x, a]$.

Similarmente $Fl(\mathcal{L}(F)) = \underset{a\in\mathscr{A}}{colim}\, Fl(Fa)$, es decir una flecha es un par (f,a) con $x \xrightarrow{f} y$ una flecha en Fa, donde identificamos (f,a) con (g,b) si y solo si existen flechas

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "u"] & \\
& c \\
b \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

tales que $Fu(f) = Fv(g)$. En otras palabras, dos flechas son iguales si son iguales mas lejos. Notamos a las flechas $[f,a]$ o mas especificamente $[\ x \xrightarrow{f} y\ , a]$. Luego, dados objetos $[x,a]$, $[y,b]$, existira una flecha entre ellos, si y solo si existen flechas

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "u"] & \\
& c \\
b \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

y una flecha $Fu(x) \xrightarrow{f} Fv(y)$ en la categoria Fc.

La composicion en $\mathcal{L}(F)$ esta dada mas lejos, es decir, si tenemos una flecha $[\ x \xrightarrow{f} y\ , a]$ y una flecha $[\ y' \xrightarrow{g} z\ , b]$, podemos componerlas si y solo si existen

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "u"] & \\
& c \\
b \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

tales que $Fu(y) = Fv(y')$, y en tal caso la composicion esta dada por $[Fv(g)Fu(f), c]$. Es conocido que este es el colimite de categorias (ver por ejemplo [GZ67]) y por el teorema 5.15 este es *2*-colimite.

5.6 Propiedades de exactitud

Corollary 5.18. Sea $\mathscr{A}$ una *2*-categoria strict-*2*-filtrante, entonces dado $\mathscr{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ se tiene que el funtor canonico $\underset{a\in\mathscr{A}}{colim}\, Fa \longrightarrow 2\text{-}\underset{a\in\mathscr{A}}{colim}\, Fa$ *es un isomorfismo.*

Se sabe que los colimites filtrantes de categorias conmutan con los limites finitos (ver el capitulo 5 de [HCA2]), luego se obtiene el siguiente resultado.

Corollary 5.19. Sea $\mathscr{A}$ una *2*-categoria strict-*2*-filtrante, $\mathcal{P}$ una categoria finita, entonces dado un *2*-funtor $\mathscr{A} \times \mathcal{P} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ se tiene que el funtor canonico

$$2\text{-}\underset{a\in\mathscr{A}}{colim}\,(\underset{i\in\mathcal{P}}{lim} F(a,i)) \longrightarrow \underset{i\in\mathcal{P}}{lim}\,(2\text{-}\underset{a\in\mathscr{A}}{colim}\, F(a,i)\ )$$

es un isomorfismo.

Theorem 5.20. Sea $\mathscr{A}$ una *2*-categoria strict-*2*-filtrante, sea $\mathcal{P}$ una categoria finita, y sea $\mathscr{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ un *2*-funtor. Consideramos el *2*-funtor $\mathscr{A} \xrightarrow{F^{\mathcal{P}}} \mathcal{C}at$ dado por $F^{\mathcal{P}}(a) = F(a)^{\mathcal{P}}$, entonces el funtor canonico

$$\mathcal{L}(F^{\mathcal{P}}) \xrightarrow{\Diamond} \mathcal{L}(F)^{\mathcal{P}}$$

es un isomorfismo de categorias.

De la construccion se tiene que un objeto de $\mathcal{L}(F^{\mathcal{P}})$ es un par (x, a) con $x \in F(a)^{\mathcal{P}}$, es decir un diagrama $\mathcal{P} \xrightarrow{x} Fa$, donde dos diagramas son equivalentes si y solo si existen u, v tales que conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"'] & Fa \arrow[d, "Fu"] \\
Fb \arrow[r, "Fv"'] & Fc
\end{tikzcd}$$

Una flecha de $\mathcal{L}(F^{\mathcal{P}})$ es un par $(\ x \xrightarrow{\eta} y\ , a)$ con η una transformacion natural

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[r, bend left, "x"] \arrow[r, bend right, "y"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta"] & Fa
\end{tikzcd}$$

donde (η, a) es igual a (θ, b) si y solo si existen u, v tales que $Fu(\eta) = Fv(\theta)$.

Por otro lado, un objeto de $\mathcal{L}(F)^{\mathcal{P}}$ es un diagrama $\mathcal{P} \xrightarrow{x} \mathcal{L}(F)$, y las flechas son las transformaciones naturales. Para ver que $\Diamond$ es un isomorfismo de categorias, veremos que dado $\mathcal{P} \xrightarrow{x} \mathcal{L}(F)$ existe una factorizacion

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "x^a"'] & \mathcal{L}(F) \\
& Fa \arrow[u, "\lambda_a"']
\end{tikzcd}$$

y dada otra factorizacion $x = \lambda_b x^b$, se tiene que x^a es igual a x^b como objetos de $\mathcal{L}(F^{\mathcal{P}})$. En efecto, dado un diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[r, "x"] & \mathcal{L}(F) \\
i \arrow[r] & x_i
\end{tikzcd}$$

cada $x_i \in \mathcal{L}(F)$ es una clase $[x_i, a_i]$ con $x_i \in Fa_i$. Dada $i \xrightarrow{\alpha} j$ se tiene que $[x_i, a_i] \xrightarrow{[\alpha]} [x_j, a_j]$ esta dada por un par de flechas u_α, v_α y una flecha $Fu_\alpha(x_i) \xrightarrow{[\alpha]} Fv_\alpha(x_j)$ en Fa_α. Dado que $\mathcal{P}$ es finita, y $\mathscr{A}$ es filtrante entonces existe un cono del diagrama dado por

$$\begin{tikzcd}
a_i \arrow[dr, "u_\alpha"] & \\
& a_\alpha \\
a_j \arrow[ur, "v_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

para todo $i \in \mathcal{P}$ y toda flecha $i \xrightarrow{\alpha} j$. Un cono es un $a \in \mathscr{A}$ con flechas h_i tal que conmuta

$$\begin{tikzcd}
a_i \arrow[dr, "u_\alpha"'] \arrow[drr, "h_i"] & & \\
& a_\alpha \arrow[r, "h_\alpha"] & a \\
a_j \arrow[ur, "v_\alpha"] \arrow[urr, "h_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Tenemos entonces una factorizacion

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "x^a"'] & \mathcal{L}(F) \\
 & Fa \arrow[u, "\lambda_a"']
\end{tikzcd}$$

dada por

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[r, "x"] & Fa
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[r] & x_i^a = h_i(x_i)
\end{tikzcd}$$

y a cada flecha $\begin{tikzcd} i \arrow[r, "\alpha"] & j \end{tikzcd}$ le asigna $\begin{tikzcd} x_i^a \arrow[rr, "h_\alpha[\alpha]=\alpha^a"] & & x_j^a \end{tikzcd}$. Si se tiene otra factorizacion $x = \lambda_b x^b$ entonces, como cada $\lambda_a(x_i^a) = [x_i^a, a] \sim [x_i^b, b] = \lambda_b(x_i^b)$, por ser $\mathscr{A}$ filtrante y $\mathcal{P}$ finita existen

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "u"] & \\
 & c \\
b \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

tales que $Fu(x_i^a) = Fv(x_i^b)$ y $Fu(\alpha^a) = Fv(\alpha^b)$ para toda $\begin{tikzcd} i \arrow[r, "\alpha"] & j \end{tikzcd}$. Es decir que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"'] & Fa \arrow[d, "Fu"] \\
Fb \arrow[r, "Fv"'] & Fc
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\lozenge$ es biyectivo en los objetos. Similarmente, dada una transformacion natural $\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[rr, bend left, "x"] \arrow[rr, bend right, "y"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \eta"] & & \mathcal{L}(F) \end{tikzcd}$ podemos encontrar una factorizacion

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[r, bend left, "x"] \arrow[r, bend right, "y"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] \arrow[dr, bend left, "x^a"] \arrow[dr, bend right=50, "y^a"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta^a"] & \mathcal{L}(F) \\
 & Fa \arrow[u, "\lambda_a"']
\end{tikzcd}$$

pues η esta dada por una familia finita de flechas $x_i \xrightarrow{\eta_i} y_i$. Tambien, se ve similarmente que dos factorizaciones η^a, η^b son iguales como objetos de $\mathcal{L}(F^{\mathcal{P}})$. Esto prueba que $\Diamond$ es plenamente fiel, y es por lo tanto un isomorfismo de categorias.

Sea $\mathcal{C}at_{f\ell}$ la *2*-categoria de las categorias pequeñas con limites finitos, y funtores exactos a izquierda. Se obtiene como corolario el siguiente resultado:

Theorem 5.21. Sea $\mathscr{A}$ una *2*-categoria strict-*2*-filtrante, y $\mathscr{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at_{f\ell}$ un *2*-funtor. Entonces $\mathcal{L}(F)$ tiene limites finitos, los funtores $Fa \xrightarrow{\lambda_a} \mathcal{L}(F)$ son exactos a izquierda. y $\mathcal{L}(F)$ *es el 2-colimite.*

6 2-Categoria de fracciones

6.1 Distintas generalizaciones 2-categoricas de la categoria de fracciones

Nos interesa primeramente, generalizar la construccion del calculo de fracciones de Gabriel-Zisman a un contexto *2*-categorico. Como vimos, esta construccion es la solucion universal del problema: dada $\Sigma \subset Fl(\mathscr{C})$ se busca una categoria $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ con un funtor $\mathscr{C} \xrightarrow{h} \mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ tal que $h(s)$ es un isomorfismo $\forall s \in \Sigma$ y es universal con respecto a esta propiedad en el siguiente sentido. Dada otra categoria $\mathscr{D}$, sea $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]_{\Sigma^{-1}}$ la categoria de funtores de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$ que hacen a las flechas de Σ isomorfismos, entonces h nos da un *isomorfismo de categorias*

$$[\mathscr{C}[\Sigma^{-1}], \mathscr{D}] \xrightarrow{h^*} [\mathscr{C}, \mathscr{D}]_{\Sigma^{-1}}$$

Ahora bien, en una *2*-categoria no solo tenemos *isomorfismos*, tenemos *equivalencias* y tenemos *adjunciones.* Mas aun, en algunos casos la propiedad universal podria estar dada por una equivalencia de *2*-categorias, o por una *biequivalencia.* Esto nos otorga varias generalizaciones totalmente distintas del problema anterior en el caso *2*-categorico. Dada una *2*-categoria $\mathscr{C}$ y una familia de flechas $\Sigma \subset Fl(\mathscr{C})$, se obtienen asi los siguientes problemas

(1) se busca una *2*-categoria $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ con un funtor $\mathscr{C} \xrightarrow{h} \mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ tal que $h(s)$ es un isomorfismo $\forall s \in \Sigma$ universal en el sentido de que

$$[\mathscr{C}[\Sigma^{-1}], \mathscr{D}] \xrightarrow{h^*} [\mathscr{C}, \mathscr{D}]_{\Sigma^{-1}}$$

(1.1) es un isomorfismo de 2-categorias.
(1.2) es una equivalencia de 2-categorias.
(1.3) es una biequivalencia de 2-categorias.

(2) se busca una *2*-categoria $\mathscr{C}[\Sigma^{eq}]$ con un funtor $\mathscr{C} \xrightarrow{h} \mathscr{C}[\Sigma^{eq}]$ tal que $h(s)$ es una equivalencia $\forall s \in \Sigma$ universal en el sentido de que

$$[\mathscr{C}[\Sigma^{eq}], \mathscr{D}] \xrightarrow{h^*} [\mathscr{C}, \mathscr{D}]_{\Sigma^{eq}}$$

(2.1), (2.2), (2.3) como antes.

(3) se busca una *2*-categoria $\mathscr{C}[\Sigma^{adj}]$ con un funtor $\mathscr{C} \xrightarrow{h} \mathscr{C}[\Sigma^{adj}]$ tal que $h(s)$ es un adjunto a izquierda $\forall s \in \Sigma$ universal en el sentido de que

$$[\mathscr{C}[\Sigma^{adj}], \mathscr{D}] \xrightarrow{h^*} [\mathscr{C}, \mathscr{D}]_{\Sigma^{adj}}$$

(3.1), (3.2), (3.3) como antes.

Mas aun, existen aun mas variantes si se consideran los tres distintos tipos de funtores y transformaciones naturales en el caso *2*-categorico.

En esta tesis mostramos que *(1)* tiene solucion en el sentido mas fuerte, es decir es una solucion de *(1.1)*, y mas aun damos un *2*-calculo de fracciones que nos da una construccion simple de $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ como en Gabriel-Zisman. El caso *(1)* fue estudiado anteriormente en un contexto mas general, el de las categorias enriquecidas, por H. Wolff en [Wol70] y resuelto (en un sentido mas debil al de las 3 variantes anteriores), aunque las condiciones para que se tenga un calculo de fracciones en ese trabajo $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ son distintas a las que damos nosotros, que son mas simples, intrinsecas de la familia de flechas, y generalizan a las de Gabriel-Zisman. El caso *(2)* fue resuelto por D. Pronk en [Pro96] en el sentido intermedio, es decir hay una solucion de *(2.2)*, donde se da un bicalculo de fracciones. Esta construccion es tratada en el capitulo 8 de este trabajo. El caso *(3)* fue estudiado por *R. Dawson, R. Paré y D. Pronk*, y se construye una solucion de *(3.2)*, aunque sin presentarse un calculo de fracciones.

Citamos aqui un resultado general de la existencia de una *2*-categoria aun cuando no se satisface un *2*-calculo de fracciones, aunque la propiedad universal es mas restrictiva. Este resultado puede usarse luego para construir pseudocolimites en general, pero con una construccion inmanejable.

Theorem 6.1. *(Wolff)* Dada una *2*-categoria $\mathscr{C}$ y una familia de flechas Σ, existe una categoria $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$, con un *2*-funtor $\mathscr{C} \xrightarrow{h} \mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ tal que $h(s)$ es un isomorfismo $\forall s \in \Sigma$, y tal que

$$[\mathscr{C}[\Sigma^{-1}], \mathscr{D}] \xrightarrow{h^*} [\mathscr{C}, \mathscr{D}]_{\Sigma^{-1}}$$

es un isomorfismo de categorias, donde aqui la categoria $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ es la categoria de *2*-funtores y transformaciones *2*-naturales.

Este es una caso particular de *Theorem 1.1.9*, de [Wol70], cuando se toma $\mathcal{V} = \mathcal{C}at$.

6.2 2-Calculo de fracciones

En esta seccion resolvemos el problema de *(1.1)* con un *2*-calculo de fracciones que definimos a continuacion.

Definition 6.2. Dada una *2*-categoria $\mathscr{C}$ y una familia de flechas $\Sigma \subset Fl(\mathscr{C})$, decimos que Σ *satisface un 2-calculo de fracciones* si satisface el calculo de fracciones, es decir satisface *(CF1), (CF2), (CF3), (CF4), y ademas satisface*

(CF5) Dado un diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, bend left, "f"] \arrow[dr, bend right, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \\
b & & c
\end{tikzcd}$$

con $s \in \Sigma$, entonces se puede completar a un diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, bend left, "f"] \arrow[dr, bend right, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \\
b \arrow[dr, bend left, "f'"] \arrow[dr, bend right, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha'"] & & c \arrow[dl, "s'"] \\
 & d &
\end{tikzcd}$$

con $s \in \Sigma$, tal que

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & c \arrow[r, "s'"] & d \arrow[r, phantom, "="] & a \arrow[r, "s"] & b \arrow[r, bend left, "f'"] \arrow[r, bend right, "g'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha'"] & d
\end{tikzcd}$$

es decir, tal que $s'f = f's$, $s'g = g's$ y $s'\alpha = \alpha's$.

(CF6) Dadas 2-flechas $\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha \qquad \Downarrow\beta"] & b \end{tikzcd}$ *, si existe* $x \xrightarrow{s} a$ *en Σ tal que $\alpha s = \beta s$ entonces existe* $b \xrightarrow{s'} y$ *tal que $s'\alpha = s'\beta$.*

Observacion: Es claro que *(CF5)* implica *(CF3)*, aunque dejamos este axioma para explicitar cuando lo usamos.

Lemma 6.3. Si Σ satisface el *2*-calculo de fracciones, entonces para todo $a \in \mathscr{C}$ la *2*-categoria ${}^{a}/_{\Sigma}$ es strict-*2*-filtrada.

La *2*-categoria ${}^{a}/_{\Sigma}$ tiene como objetos a las flechas $a \xrightarrow{s} x$ con $s \in \Sigma$, una flecha $(s, x) \xrightarrow{f} (t, y)$ es una $x \xrightarrow{f} y$ en $\mathscr{C}$ tal que conmuta

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "t"'] & x \arrow[d, "f"] \\
 & y
\end{tikzcd}$$

y una *2-flecha* $\begin{tikzcd}(s,x) \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & (t,y)\end{tikzcd}$ es una *2-flecha*

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & y
\end{tikzcd}$$

en $\mathscr{C}$ tal que $\alpha s = t$.

En efecto, ya vimos que es filtrada, solo basta ver que satisface *(F3)*. Si tenemos *2*-flechas

$$\begin{tikzcd}
(s,x) \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha \qquad \Downarrow \beta"] & (t,y)
\end{tikzcd}$$ entonces $\alpha s = t = \beta s$ con $s \in \Sigma$,

por *(CF6)* existe $y \xrightarrow{s'} z$ tal que $s'\alpha = s'\beta$, se tiene $(t,y) \xrightarrow{s'} (s't,z)$ que muestra *(F3)*.

Proposition 6.4. Si una familia de flechas $\Sigma \subset Fl(\mathscr{C})$ satisface *(CF1)* a *(CF4)*, *(CF6)* y ademas

(CF5') Si dadas flechas $\begin{tikzcd}a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b\end{tikzcd}$ *tales que existe* $x \xrightarrow{s} a$ *en* Σ *y una 2-flecha*

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "fs"] \arrow[r, bend right, "gs"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & b
\end{tikzcd}$$

entonces existe $b \xrightarrow{s'} y$ *en* Σ *y una 2-flecha*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "s'f"] \arrow[r, bend right, "s'g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha'"] & y
\end{tikzcd}$$

tal que $\alpha' s = s'\alpha$.

Entonces, Σ satisface el *2*-calculo de fracciones.

En efecto, basta ver que vale *(CF5)*. Si tenemos dada

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, bend left, "f"] \arrow[dr, bend right, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \\
b & & c
\end{tikzcd}$$

por *(CF3)* se tienen f', s_1, g', s_2 tal que $s_1 f = f' s$ y $s_2 g = g' s$. Utilizando *(CF3)* se pueden obtener u', v'

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[dr, "f'"] & & \\
a \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "f"'] & & z_1 \arrow[dr, "u'"] & \\
& c \arrow[ur, "s_1"'] \arrow[dr, "s_2"] & & z_3 \\
a \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "s"'] & & z_2 \arrow[ur, "v'"'] & \\
& b \arrow[ur, "g'"'] & &
\end{tikzcd}$$

tales que $u' s_1 = v' s_2 = s_3 \in \Sigma$. De la *2*-flecha

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & c
\end{tikzcd}$$

se obtiene por composicion una *2*-flecha

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "u'f's"] \arrow[r, bend right, "v'g's"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow s_3\alpha"] & z_3
\end{tikzcd}$$

Por *(CF5')* existe una flecha $z_3 \xrightarrow{s_4} d$ y una *2*-flecha

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, bend left, "s_4u'f'"] \arrow[r, bend right, "s_4v'g'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha'"] & d
\end{tikzcd}$$

tal que $\alpha' s = s_4 s_3 \alpha$. Llamando $u = s_4 u'$, $v = s_4 v'$ y $s' = s_4 s_3$, entonces se tiene un diagrama

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, bend left, "f"] \arrow[dr, bend right, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \\
b \arrow[dr, bend left, "uf'"] \arrow[dr, bend right, "vg'"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha'"] & & c \arrow[dl, "s'"] \\
& d &
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"{name=F}] \arrow[r, bend right, "g"'{name=G}] \arrow[Rightarrow, from=F, to=G, phantom, "\Downarrow\alpha"] & c \arrow[r, "s'"] & d \end{tikzcd} \qquad = \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "s"] & b \arrow[r, bend left, "uf'"{name=U}] \arrow[r, bend right, "vg'"'{name=V}] \arrow[from=U, to=V, phantom, "\Downarrow\alpha'"] & d \end{tikzcd}$$

y esto concluye la demostracion.

Definition 6.5. Dada una *2*-categoria $\mathscr{C}$ y una familia de flechas $\Sigma \subset Fl(\mathscr{C})$ que satisface el *2*-calculo de fracciones, definimos $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}][a,b] = 2\text{-}\mathop{\mathit{colim}}\limits_{(s,x)\in {}^{b}/_{\Sigma}} [a,x]$. Mas especificamente, se tienen *2-funtores*

$$\begin{tikzcd} {}^{b}/_{\Sigma} \arrow[r] & \mathscr{C} \arrow[r, "{[a,-]}"] & \mathcal{C}at \\ (s,x) \arrow[r] & x \arrow[r] & {[a,x]} \end{tikzcd}$$

y se le toma el *2*-colimite a la composicion.

De la construccion de *2*-colimites strict-*2*-filtrantes se tiene que los objetos de $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}][a,b]$ son pares (f,s) con $s \in \Sigma$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, "f"'] & & b \arrow[dl, "s"] \\ & x & \end{tikzcd}$$

donde identificamos (f,s) y (g,t) si existen u, v tales que

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "u"] & \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & b \arrow[u, "s"'] \arrow[d, "t"] & z \\ & y \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

$us = vt = s' \in \Sigma$ y $uf = vg$.

Es decir, son las fracciones del calculo de fracciones usual de Gabriel-Zisman. Si tenemos dos fracciones $\frac{f}{s}$, $\frac{g}{t}$, entonces una flecha entre ellas esta dada por flechas u, v

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & x \arrow[d, "u"] \\ y \arrow[r, "v"'] & z \end{tikzcd}$$

y tal que $us = vt = s' \in \Sigma$, con una *2-flecha*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "uf"] \arrow[r, bend right, "vg"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & z
\end{tikzcd}$$

Dado que la categoria ${}^{b}/_{\Sigma}$ es *2*-filtrada entonces siempre podemos representar dos fracciones en $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}][a,b]$ como $\frac{f}{s}$, $\frac{g}{s}$, y una flecha entre ellas es simplemente una *2*-flecha

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & x
\end{tikzcd}$$

A esta flecha entre fracciones la notamos $\frac{\alpha}{s}$.

De la construccion se tiene que dos flechas entre fracciones

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, bend left, "f_1"] \arrow[dr, bend right, "f_2"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & b \arrow[dl, "s"] & & a \arrow[dr, bend left, "g_1"] \arrow[dr, bend right, "g_2"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & & b \arrow[dl, "t"] \\
& x & & & & y &
\end{tikzcd}$$

son equivalentes si y solo si existen

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & x \arrow[d, "u"] \\
y \arrow[r, "v"'] & z
\end{tikzcd}$$

tales que $us = vt = s' \in \Sigma$ y tales que $u\alpha = v\beta$.

Para que $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ resulte una *2*-categoria debemos definir funtor de composicion

$$\mathscr{C}[\Sigma^{-1}][a,b] \times \mathscr{C}[\Sigma^{-1}][b,c] \longrightarrow \mathscr{C}[\Sigma^{-1}][a,c]$$

En los objetos, lo definimos como antes, es decir la composicion de $\frac{f}{s}$ y $\frac{g}{t}$ es la fraccion $\frac{g'f}{s't}$ dada por *(CF3)*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "f"'] & & b \arrow[dl, "s"] \arrow[dr, "g"'] & & c \arrow[dl, "t"] \\
& x \arrow[dr, "g'"'] & & y \arrow[dl, "s'"] & \\
& & z & &
\end{tikzcd}$$

Falta definir al funtor en las flechas, si tenemos flechas entre fracciones

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, bend left, "f_1"] \arrow[dr, bend right, "f_2"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & b \arrow[dl, "s"] \arrow[dr, bend left, "g_1"] \arrow[dr, bend right, "g_2"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & & c \arrow[dl, "t"] \\
& x & & y &
\end{tikzcd}$$

Por *(CF5)* podemos conseguir un diagrama

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, bend left, "f_1"] \arrow[dr, bend right, "f_2"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & b \arrow[dl, "s"] \arrow[dr, bend left, "g_1"] \arrow[dr, bend right, "g_2"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & & c \arrow[dl, "t"] \\
& x \arrow[dr, bend left, "g_1'"] \arrow[dr, bend right, "g_2'"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta'"] & & y \arrow[dl, "s'"] & \\
& & z & &
\end{tikzcd}$$

donde β' es una flecha que satisface $\beta' s = s' \beta$, y definimos la composicion como $\beta'\alpha$.

Ahora veamos que la composicion esta bien definida, sabemos que esta bien definida en las fracciones, falta ver la buena definicion de la composicion de las *2*-flechas. Supongamos que $\frac{\alpha}{s} = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{s}}$ entonces existen u, v tales que $us = v\tilde{s}$ y $u\alpha = v\tilde{\alpha}$. Por *(CF3)* existen g', s' tales que

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[dl, "us=v\tilde{s}"'] \arrow[dr, "g"] & \\
z \arrow[dr, "g'"'] & & y \arrow[dl, "s'"] \\
& z' &
\end{tikzcd}$$

luego la composicion es la flecha dada por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, bend left, "f_1"] \arrow[dr, bend right, "f_2"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & & & c \arrow[dl, "t"] \\
& x \arrow[dr, "g'u"'] & & y \arrow[dl, "s'"] & \\
& & z' & &
\end{tikzcd}$$

que es el mismo diagrama

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, bend left, "\tilde{f}_1"] \arrow[dr, bend right, "\tilde{f}_2"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\tilde{\alpha}"] & & & & c \arrow[dl, "t"] \\
& x \arrow[dr, "g'v"'] & & y \arrow[dl, "s'"] & \\
& & z' & &
\end{tikzcd}$$

que podemos tomar para la otra composicion. Por otro lado, si $\frac{\beta}{t} = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{t}}$ entonces se tienen u, v tales que $ut = v\tilde{t}$ y $u\beta = v\tilde{\beta}$. Esto nos da una nueva flecha que llamamos

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, bend left, "\hat{g_1}"] \arrow[dr, bend right, "\hat{g}_2"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\hat{\beta}"] & & b \arrow[dl, "\hat{t}"] \\
& y &
\end{tikzcd}$$

Ahora nos olvidamos de los sombreros, pues solo falta ver que la composicion es independiente de la eleccion de β'. Si tomabamos otra flecha β'' tal que $\beta'' s = s'\beta$ entonces $\beta' s = \beta'' s$ y por *(CF6)* existe una $z \xrightarrow{s''} z'$ tal que $s''\beta' = s''\beta''$. Esto muestra que la composicion esta bien definida.

Corollary 6.6. $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ *es una 2-categoria,* y se tiene un *2*-funtor

$$\mathscr{C} \xrightarrow{h} \mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & b & {} \arrow[r] & {} & a \arrow[dr, bend left, "f"] \arrow[dr, bend right, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & b \arrow[dl, "1_b"] \\
& & & & & b &
\end{tikzcd}$$

tal que $\lambda(s)$ es un iso $\forall s \in \Sigma$

Theorem 6.7. $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ tiene la propiedad universal de la *2*-categoria de fracciones, mas especificamente para todo *2*-funtor $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$ tal que $F(s)$ es un iso $\forall s \in \Sigma$ se tiene

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "F"'] & \mathscr{C}[\Sigma^{-1}] \arrow[d, dashed, "\exists! \widehat{F}"] \\
& \mathscr{D}
\end{tikzcd}$$

Mas aun, sea $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]_{\Sigma^{-1}}$ la subcategoria de *2*-funtores que hacen isos a las flechas de Σ, entonces se tiene que

$$[\mathscr{C}[\Sigma^{-1}], \mathscr{D}] \xrightarrow{h^*} [\mathscr{C}, \mathscr{D}]_{\Sigma^{-1}}$$

es un isomorfismo de *2*-categorias. Aqui la *2*-categoria $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ es la *2*-categoria de 2-funtores, transformaciones pseudonaturales, y modificaciones. Observamos tambien que la biyeccion se restringe a transformaciones 2-naturales.

Remark 6.8. Este teorema no es cierto si en lugar de *2*-funtores se toman pseudofuntores. La razon es muy simple, *un pseudofuntor no preserva isomorfismos*, pero un pseudofuntor preserva equivalencias, luego si $s \in \Sigma$, como flecha en $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ es un isomorfismo, y un pseudofuntor $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}] \xrightarrow{F} \mathscr{D}$ cualquiera solo hara que $F(s)$ sea una equivalencia.

En efecto, basta definir $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}] \xrightarrow{\widehat{F}} \mathscr{D}$ en los objetos como F, en las flechas por $\widehat{F}(\frac{f}{s}) = F(s)^{-1}F(f)$ y por ultimo en las *2*-flechas

$$\begin{tikzcd}
\widehat{F}(\ a \arrow[dr, bend left, "f"] \arrow[dr, bend right, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & b\ ) = F(s)^{-1}F(\alpha) \arrow[dl, "s"] \\
& x &
\end{tikzcd}$$

Por lo visto en el caso de categorias, ya sabemos que $\widehat{F}$ esta bien definido en los objetos, y flechas, y resulta funtorial respecto a la composicion de flechas. Es claro tambien que esta es la unica definicion posible tal que $\widehat{F}\lambda = F$. Esta bien definido en las *2*-flechas, ya que si $(\alpha, s) \sim (\alpha', s')$ existen u, v tales que $us = vs'$ y $u\alpha = v\alpha'$, luego

$$\widehat{F}(\tfrac{\alpha}{s}) = F(s)^{-1}F(\alpha) = F(s)^{-1}F(u)^{-1}F(u)F(\alpha) = F(us)^{-1}F(u\alpha) =$$

$$= F(vs')^{-1}F(v\alpha') = F(s')^{-1}F(v)^{-1}F(v)F(\alpha') = F(s')^{-1}F(\alpha') = \widehat{F}(\tfrac{\alpha'}{s'})$$

Tambien $\widehat{F}$ preserva la composicion vertical pues

$$\begin{tikzcd}
\widehat{F}(\frac{\beta}{s} \circ \frac{\alpha}{s}) = \widehat{F}(\frac{\beta\circ\alpha}{s}) = \widehat{F}(\ a \arrow[dr, bend left, "f"] \arrow[dr, "g" description] \arrow[dr, bend right, "h"'] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "\Downarrow\alpha"] \arrow[dr, phantom, bend right=20, "\Downarrow\beta"] & & b\ ) = \arrow[dl, "s"] \\
& x &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left, "Ff"] \arrow[r, bend right, "Fh"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F(\beta\circ\alpha)"] & Fx \arrow[r, "F(s)^{-1}"] & Fb\ =
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
=\ Fa \arrow[r, bend left, "Ff"] \arrow[r, "Fg" description] \arrow[r, bend right, "Fh"'] \arrow[r, phantom, bend left=20, "\Downarrow F\alpha"] \arrow[r, phantom, bend right=20, "\Downarrow F\beta"] & Fx \arrow[r, "F(s)^{-1}"] & Fb\ = \widehat{F}(\frac{\beta}{s}) \circ \widehat{F}(\frac{\alpha}{s})
\end{tikzcd}$$

Por ultimo, $\widehat{F}$ preserva la composicion horizontal de *2*-flechas pues para definir la composicion se considera un diagrama

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, bend left, "f_1"] \arrow[dr, bend right, "f_2"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & b \arrow[dl, "s"] \arrow[dr, bend left, "g_1"] \arrow[dr, bend right, "g_2"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & & c \arrow[dl, "t"] \\
& x \arrow[dr, bend left, "g_1'"] \arrow[dr, bend right, "g_2'"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta'"] & & y \arrow[dl, "s'"] & \\
& & z & &
\end{tikzcd}$$

donde $\beta' s = s'\beta$, entonces

$$\widehat{F}(\tfrac{\beta}{t}\,\tfrac{\alpha}{s}) = \widehat{F}(\tfrac{\beta'\alpha}{s't}) = \begin{tikzcd} Fa \arrow[r, bend left, "Fg_1'f_1"] \arrow[r, bend right, "Fg_2'f_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F(\beta'\alpha)"] & Fz \arrow[r, "F(s't)^{-1}"] & Fc \end{tikzcd} =$$

$$= \begin{tikzcd} Fa \arrow[r, bend left, "Ff_1"] \arrow[r, bend right, "Ff_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F\alpha"] & Fx \arrow[r, bend left, "Fg_1'"] \arrow[r, bend right, "Fg'{}_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F\beta'"] & Fz \arrow[r, "F(s')^{-1}"] & Fy \arrow[r, "F(t)^{-1}"] & Fc \end{tikzcd} = (*)$$

Como $\beta' s = s'\beta$ entonces $F(s')^{-1}\,F(\beta') = F(\beta)\,F(s)^{-1}$, luego

$$(*) = \begin{tikzcd} Fa \arrow[r, bend left, "Ff_1"] \arrow[r, bend right, "Ff_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F\alpha"] & Fx \arrow[r, "F(s)^{-1}"] & Fb \arrow[r, bend left, "Fg_1"] \arrow[r, bend right, "Fg_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F\beta'"] & Fy \arrow[r, "F(t)^{-1}"] & Fc \end{tikzcd} = \widehat{F}(\tfrac{\beta}{t})\widehat{F}(\tfrac{\alpha}{s})$$

y esto prueba que $\widehat{F}$ es un *2-funtor.* Tenemos entonces que

$$[\mathscr{C}[\Sigma^{-1}], \mathscr{D}] \xrightarrow{h^*} [\mathscr{C}, \mathscr{D}]_{\Sigma^{-1}}$$

es biyectiva, para ver que es un isomorfismo de *2*-categorias, basta ver que para cada par de funtores $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}] \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \mathscr{D}$ se tiene que $[F, G] \xrightarrow{h^*} [Fh, Gh\ ]$ es un isomorfismo de categorias, y para ver esto, basta ver que es biyectivo en las transformaciones pseudonaturales, y en las modificaciones entre estas.

Dada una transformacion pseudonatural

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta"] & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

entre funtores que de $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]_{\Sigma^{-1}}$, definimos entonces una transformacion pseudonatural

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}[\Sigma^{-1}] \arrow[r, bend left, "\widehat{F}"] \arrow[r, bend right, "\widehat{G}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \widehat{\eta}"] & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

dada por la familia $(Fa \xrightarrow{\eta_a} Ga\ )_{a \in \mathscr{A}}$ y para cada fraccion $\frac{f}{s}$ *el isomorfismo* $\eta_{\frac{f}{s}}$

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{G}a \arrow[dr, "\widehat{G}(\frac{f}{s})"] & & & & Ga \arrow[dr, "Gf"] & & \\
\widehat{F}a \arrow[ur, "\widehat{\eta}_a"] \arrow[dr, "\widehat{F}(\frac{f}{s})"'] & \Downarrow \widehat{\eta}_{\frac{f}{s}} & \widehat{G}b & = & Fa \arrow[ur, "\eta_a"] \arrow[dr, "Ff"'] & \Downarrow \eta_f & Gx \arrow[dr, "G(s)^{-1}"] & \\
 & \widehat{F}b \arrow[ur, "\widehat{\eta}_b"'] & & & & Fx \arrow[ur, "\eta_x"'] \arrow[dr, "F(s)^{-1}"'] & \Downarrow \eta_s^{-1} & Gb \\
 & & & & & & Fb \arrow[ur, "\eta_c"'] &
\end{tikzcd}$$

Es claro que esta es la unica definicion posible tal que $\widehat{\eta}h = \eta$.

Chequeamos que $\widehat{\eta}$ es pseudonatural. *(PNT1)* es tautologicamente cierta. Veamos *(PNT2)*, sean $\frac{g}{t}$, $\frac{f}{s}$ fracciones, su composicion es $\frac{g'f}{s't}$ luego,

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{G}a \arrow[dr, "\widehat{G}(\frac{g'f}{s't})"] & & & & Ga \arrow[dr, "Gg'f"] & & \\
\widehat{F}a \arrow[ur, "\widehat{\eta}_a"] \arrow[dr, "\widehat{F}(\frac{g'f}{s't})"'] & \Downarrow \widehat{\eta}_{\frac{g'f}{s't}} & \widehat{G}c & = & Fa \arrow[ur, "\eta_a"] \arrow[dr, "Fg'f"'] & \Downarrow \eta_{g'f} & Gz \arrow[dr, "G(s't)^{-1}"] & \\
 & \widehat{F}c \arrow[ur, "\widehat{\eta}_c"'] & & & & Fz \arrow[ur, "\eta_z"'] \arrow[dr, "F(s't)^{-1}"'] & \Downarrow \eta_{s't}^{-1} & Gc \\
 & & & & & & Fc \arrow[ur, "\eta_c"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora, dado que η satisface *(PNT2)* podemos descomponer el diagrama en

$$\begin{tikzcd}
 & Ga \arrow[dr, "Gf"] & & & & \\
Fa \arrow[ur, "\eta_a"] \arrow[dr, "Ff"'] & \Downarrow \eta_f & Gx \arrow[dr, "Gg'"] & & & \\
 & Fx \arrow[ur, "\eta_b"'] \arrow[dr, "Fg'"'] & \Downarrow \eta_{g'} & Gz \arrow[dr, "G(s')^{-1}"] & & \\
 & & Fz \arrow[ur, "\eta_z"'] \arrow[dr, "F(s')^{-1}"'] & \Downarrow \eta_{s'}^{-1} & Gy \arrow[dr, "G(t)^{-1}"] & \\
 & & & Fy \arrow[ur, "\eta_y"'] \arrow[dr, "F(t)^{-1}"'] & \Downarrow \eta_t^{-1} & Gc \\
 & & & & Fc \arrow[ur, "\eta_c"'] &
\end{tikzcd}$$

que dado que $g's = s'g$, es igual a

$$\begin{tikzcd}
 & Ga \arrow[dr, "Gf"] & & & & \\
Fa \arrow[ur, "\eta_a"] \arrow[dr, "Ff"'] & \Downarrow \eta_f & Gx \arrow[dr, "G(s)^{-1}"] & & & \\
 & Fx \arrow[ur, "\eta_b"'] \arrow[dr, "F(s)^{-1}"'] & \Downarrow \eta_s^{-1} & Gb \arrow[dr, "Gg"] & & \\
 & & Fb \arrow[ur, "\eta_z"'] \arrow[dr, "Fg"'] & \Downarrow \eta_g & Gy \arrow[dr, "G(t)^{-1}"] & \\
 & & & Fy \arrow[ur, "\eta_y"'] \arrow[dr, "F(t)^{-1}"'] & \Downarrow \eta_t^{-1} & Gc \\
 & & & & Fc \arrow[ur, "\eta_c"'] &
\end{tikzcd}$$

que es por definicion

$$\begin{tikzcd}
& \widehat{G}a \arrow[dr, "\widehat{G}(\frac{f}{s})"] & & \\
\widehat{F}a \arrow[ur, "\widehat{\eta}_a"] \arrow[dr, "\widehat{F}(\frac{f}{s})"'] & \Downarrow \widehat{\eta}_{\frac{f}{s}} & \widehat{G}b \arrow[dr, "\widehat{G}(\frac{g}{t})"] & \\
& \widehat{F}b \arrow[ur, "\widehat{\eta}_b"'] \arrow[dr, "\widehat{F}(\frac{g}{t})"'] & \Downarrow \widehat{\eta}_{\frac{g}{t}} & \widehat{G}c \\
& & \widehat{F}c \arrow[ur, "\widehat{\eta}_c"'] &
\end{tikzcd}$$

Veamos que vale *(PNT3)*. En efecto,

$$\begin{tikzcd}
& \widehat{G}a \arrow[dr, "\widehat{G}(\frac{f}{s})"] & \\
\widehat{F}a \arrow[ur, "\widehat{\eta}_a"] \arrow[dr, bend left, "\widehat{F}(\frac{f}{s})"] \arrow[dr, bend right, "\widehat{F}(\frac{g}{s})"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \widehat{F}\alpha"] & \Downarrow \widehat{\eta}_{\frac{f}{s}} & \widehat{G}b \\
& \widehat{G}b \arrow[ur, "\widehat{\eta}_b"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& Ga \arrow[dr, "Gf"] & & \\
Fa \arrow[ur, "\eta_a"] \arrow[dr, bend left, "Ff"] \arrow[dr, bend right, "Fg"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow F\alpha"] & \Downarrow \eta_f & Gx \arrow[dr, "G(s)^{-1}"] & \\
& Fx \arrow[ur, "\eta_x"'] \arrow[dr, "F(s)^{-1}"'] & \Downarrow \eta_s^{-1} & Gb \\
& & Fb \arrow[ur, "\eta_b"'] &
\end{tikzcd}$$

y como η satisface *(PNT3)* es igual a

$$\begin{tikzcd}
& Ga \arrow[dr, bend left, "Gf"] \arrow[dr, bend right, "Gg"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow G\alpha"] & & \\
Fa \arrow[ur, "\eta_a"] \arrow[dr, "Fg"'] & \eta_g \Downarrow & Gx \arrow[dr, "G(s)^{-1}"] & \\
& Fx \arrow[ur, "\eta_x"'] \arrow[dr, "F(s)^{-1}"'] & \Downarrow \eta_s^{-1} & Gb \\
& & Fb \arrow[ur, "\eta_b"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& \widehat{G}a \arrow[dr, bend left, "\widehat{G}(\frac{f}{s})"] \arrow[dr, bend right, "\widehat{G}(\frac{g}{s})"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \widehat{G}\alpha"] & \\
\widehat{F}a \arrow[ur, "\widehat{\eta}_a"] \arrow[dr, "\widehat{F}(\frac{g}{s})"'] & \Downarrow \widehat{\eta}_{\frac{g}{s}} & \widehat{G}b \\
& \widehat{F}b \arrow[ur, "\widehat{\eta}_b"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\widehat{\eta}$ resulta pseudonatural, es claro tambien que si η es *2-natural* entonces $\widehat{\eta}$ tambien lo es, por lo tanto la biyeccion se restringe bien a transformaciones *2*-naturales. Por ultimo, dada una modificacion

$$\begin{tikzcd}
(Fa \arrow[r, bend left, "\eta_a"] \arrow[r, bend right, "\theta_a"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \psi_a"] & Ga)_{a \in \mathscr{C}}
\end{tikzcd}$$

se define la modificacion $\widehat{\psi}$ por la misma familia de *2*-flechas ψ_a para cada $a \in \mathscr{C}$. Es claro que es la unica definicion posible tal que $\widehat{\psi}\lambda = \psi$, veamos que en efecto es una modificacion,

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{G}a \arrow[dr, "\widehat{G}(\frac{f}{s})"] & & & & Ga \arrow[dr, "Gf"] & & \\
\widehat{F}a \arrow[ur, "\widehat{\eta}_a"] \arrow[dr, "\widehat{F}(\frac{f}{s})"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \widehat{\eta}_{\frac{f}{s}}"] & & \widehat{G}b & = & Fa \arrow[ur, "\eta_a"] \arrow[dr, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \eta_f"] & & Gx \arrow[dr, "G(s)^{-1}"] & \\
 & \widehat{F}b \arrow[ur, bend left, "\widehat{\eta}_b"] \arrow[ur, bend right, "\widehat{\theta}_b"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \widehat{\psi}_b"] & & & & Fx \arrow[ur, "\eta_x"'] \arrow[dr, "F(s)^{-1}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \eta_s^{-1}"] & & Gb \\
 & & & & & & Fb \arrow[ur, bend left, "\eta_b"] \arrow[ur, bend right, "\theta_b"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \psi_b"] &
\end{tikzcd}$$

Como ψ es una modificacion entonces por *(M)* esta *2*-flecha es igual a

$$\begin{tikzcd}
 & Ga \arrow[dr, "Gf"] & & \\
Fa \arrow[ur, "\eta_a"] \arrow[dr, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \eta_f"] & & Gx \arrow[dr, "G(s)^{-1}"] & \\
 & Fx \arrow[ur, bend left, "\eta_x"] \arrow[ur, bend right, "\theta_x"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \psi_x"] \arrow[dr, "F(s)^{-1}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \theta_s^{-1}"] & & Gb \\
 & & Fb \arrow[ur, "\theta_b"'] &
\end{tikzcd}$$

que nuevamente por *(M)* es igual a

$$\begin{tikzcd}
& Ga \arrow[dr, "Gf"] & & & & & & \\
Fa \arrow[ur, bend left=50, "\eta_a"] \arrow[ur, bend right=10, "\theta_a"'] \arrow[ur, phantom, bend left=20, "\Downarrow\psi_a"] \arrow[dr, "Ff"'] & \Downarrow \theta_f & Gx \arrow[dr, "G(s)^{-1}"] & & & & Ga \arrow[dr, "\widehat{G}(\frac{f}{s})"] & \\
& Fx \arrow[ur, "\theta_x"'] \arrow[dr, "F(s)^{-1}"'] & \Downarrow \theta_s^{-1} & Gb & = & \widehat{F}a \arrow[ur, bend left=50, "\widehat{\eta}_a"] \arrow[ur, bend right=10, "\widehat{\theta}_a"'] \arrow[ur, phantom, bend left=20, "\Downarrow\widehat{\psi}_a"] \arrow[dr, "\widehat{F}(\frac{f}{s})"'] & \Downarrow \widehat{\theta}_{\frac{g}{s}} & \widehat{G}b \\
& & Fb \arrow[ur, "\theta_b"'] & & & & \widehat{F}b \arrow[ur, "\widehat{\eta}_b"'] &
\end{tikzcd}$$

y esto prueba que $\widehat{\psi}$ es una modificacion. Esto prueba el teorema.

7 2-Categorias fibradas

7.1 2-Categorias fibradas, definiciones y yoga basico

Definition 7.1. *(Buckley)* Sea $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ un *2*-funtor, una flecha $y \xrightarrow{f} x$ en $\mathscr{F}$ se dice *2-cartesiana* si satisface

(CR1) para toda $z \xrightarrow{h} x$ *y* $pz \xrightarrow{u} py$ *tal que* $ph = p(f)u$ *se tiene*

$$\begin{tikzcd} z \arrow[rrd, "h"] \arrow[rd, dashed, "\exists!\,\overline{u}"'] & & \\ & y \arrow[r, "f"'] & x \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} pz \arrow[rrd, "ph"] \arrow[rd, "u"'] & & \\ & py \arrow[r, "f"'] & px \end{tikzcd}$$

(CR2) Para toda 2-flecha $\begin{tikzcd} z \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "h'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & x \end{tikzcd}$ *y* $\begin{tikzcd} pz \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "u'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & py \end{tikzcd}$ *tal que* $p\sigma = p(f)\theta$

$$\begin{tikzcd} z \arrow[d, bend right, "\overline{u'}"'] \arrow[d, bend left, "\overline{u}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\exists!\,\overline{\theta}}{\Leftarrow}"] \arrow[rd, bend left=30, "h"] \arrow[rd, bend left=10, "h'"'] \arrow[rd, phantom, "\Downarrow\sigma"] & \\ y \arrow[r] & x \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} pz \arrow[d, bend right, "u'"'] \arrow[d, bend left, "u"] \arrow[d, phantom, "\overset{\theta}{\Leftarrow}"] \arrow[rd, bend left=30, "ph"] \arrow[rd, bend left=10, "ph'"'] \arrow[rd, phantom, "\Downarrow p\sigma"] & \\ py \arrow[r] & px \end{tikzcd}$$

es decir, existe una unica $\overline{\theta}$ *tal que* $p(\overline{\theta}) = \theta$ *y* $\sigma = f\overline{\sigma}$.

Proposition 7.2. *(Buckley)* Una flecha $y \xrightarrow{f} x$ en $\mathscr{F}$ es *2-cartesiana* si y solo si

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}[z,y] \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "p_{z.y}"'] & \mathscr{F}[z,x] \arrow[d, "p_{z,x}"] \\
\mathscr{C}[pz,py] \arrow[r, "pf_*"] & \mathscr{C}[pz,px]
\end{tikzcd}$$

es un pullback en $\mathcal{C}at$ para todo $z \in \mathscr{F}$.

Para ver esto considerar la categoria $1 = *$ que me da la propiedad *(CR1),* y la categoria $2 = \ *_1 \longrightarrow *_2\ $ que me da la propiedad *(CR2)*. Como estas categorias son generadores de $\mathcal{C}at$, esto muestra la proposicion.

Definition 7.3. Sea $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ un 2-funtor, sea
$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & x \end{tikzcd}$$
una 2-flecha de $\mathscr{F}$, decimos que α es *cartesiana* si lo es para el funtor $\mathscr{F}[y,x] \xrightarrow{p_{y,x}} \mathscr{C}[py,px]$. Esto nos dice explicitamente, que para toda $h \overset{\beta}{\Longrightarrow} f$ tal que $p\beta = p(\alpha)\theta$,

$$\begin{tikzcd}
h \arrow[drr, Rightarrow, "\beta"] \arrow[dr, Rightarrow, dashed, "\exists!\,\overline{\theta}"'] & & \\
& g \arrow[r, Rightarrow, "\alpha"'] & f
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
h \arrow[drr, Rightarrow, "p(\alpha)\theta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\theta"'] & & \\
& g \arrow[r, Rightarrow, "p\alpha"'] & f
\end{tikzcd}$$

Definition 7.4. *(Buckley)* Decimos que un 2-funtor $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ es una *2-fibracion* si satisface

(TF1) Dado $x \in \mathscr{F}$ y dada $b \xrightarrow{f} px$, existe $f^*(x) \xrightarrow{f_x} x$ 2-cartesiana arriba de f.

(TF2) Para cada $x, y \in \mathscr{F}$, el funtor $\mathscr{F}[x,y] \xrightarrow{P_{x,y}} \mathscr{C}[px,py]$ es una fibracion.

(TF3) La composicion horizontal de 2-flechas cartesianas es cartesiana.

Los siguientes resultados se siguen facilmente de la misma forma que en caso de las Fibraciones de Grothendieck usuales.

Proposition 7.5. Sea $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ un *2*-funtor, entonces

(1) Si se tienen $z \xrightarrow{g} y \xrightarrow{f} x$ en $\mathscr{F}$ y f es *2*-cartesiana, entonces g es *2*-cartesiana si y solo si fg lo es.

(2) Si tengo $y \xrightarrow{f} x$ en $\mathscr{F}$, y $\mathscr{C} \xrightarrow{q} \mathscr{E}$ un *2*-funtor. Supongamos que $py \xrightarrow{pf} px$ es *2*-cartesiana para $\mathscr{C} \xrightarrow{q} \mathscr{E}$, entonces f es *2*-cartesiana para $\mathscr{F} \xrightarrow{qp} \mathscr{E}$ si y solo si lo es para $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$.

(3) Sea $y \xrightarrow{f} x$ una flecha de $\mathscr{F}$, entonces es un isomorfismo si y solo si es *2*-cartesiana para $\mathscr{F} \longrightarrow 1$ si y solo si es *2*-cartesiana para toda fibracion $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$.

Hay una nocion mas debil de *flecha 2-cartesiana* que son las mas relevantes cuando uno quiere generalizar esta teoria a bicategorias. Si bien en [Buc14] ambas se llaman cartesianas, aqui las distinguimos ya que en general las nociones no son equivalentes.

Definition 7.6. *(Buckley)* Sea $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ un *2*-funtor, una flecha $y \xrightarrow{f} x$ en $\mathscr{F}$ se dice *bicartesiana* si satisface

(BCR1) para toda $z \xrightarrow{h} x$ *y* $pz \xrightarrow{u} py$ *, con un iso* $\begin{tikzcd} pz \arrow[r, bend left, "p(f)u"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & px \end{tikzcd}$, entonces existe $\widehat{u}$, un iso $\widehat{\alpha}$

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[d, dashed, "\widehat{u}"'] \arrow[dr, "h"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\widehat{\alpha}" near end, shift right=3ex] & \\
y \arrow[r, "f"'] & x
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
pz \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "ph"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\alpha" near end, shift right=3ex] & \\
py \arrow[r, "pf"'] & px
\end{tikzcd}$$

y un iso $\begin{tikzcd} pz \arrow[r, bend left, "p\widehat{u}"] \arrow[r, bend right, "u"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & py \end{tikzcd}$ *tal que*

$$\begin{tikzcd}
pz \arrow[d, bend right, "u"'] \arrow[d, bend left, "p\widehat{u}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\beta}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, "ph"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow p\widehat{\alpha}" near end, shift right=3ex] & \\
py \arrow[r, "pf"'] & px
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
pz \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "ph"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\alpha" near end, shift right=3ex] & \\
py \arrow[r, "pf"'] & px
\end{tikzcd}$$

Decimos que $(\widehat{u}, \widehat{\alpha}, \beta)$ *levantan* a (u, α).

(BCR2) Si se tienen 2-flechas $\begin{tikzcd} z \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "h'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & x \end{tikzcd}$, $\begin{tikzcd} pz \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "u'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & py \end{tikzcd}$ *, con isomorfismos* $\begin{tikzcd} pz \arrow[r, bend left, "p(f)u"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & px \end{tikzcd}$, $\begin{tikzcd} pz \arrow[r, bend left, "p(f)u'"] \arrow[r, bend right, "h'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha'"] & px \end{tikzcd}$ *, tales que*

$$\begin{tikzcd}
pz \arrow[d, bend right=40, "u"'] \arrow[d, bend left=40, "u'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\theta}{\Rightarrow}"] \arrow[drr, "ph'"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\alpha'"] & & & & pz \arrow[d, "u"'] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\alpha"] \arrow[drr, bend left, "ph'"] \arrow[drr, bend right, "ph"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow p\sigma"] & & \\
py \arrow[rr, "pf"'] & & px & = & py \arrow[rr, "pf"'] & & px
\end{tikzcd}$$

Sean $(\widehat{u}, \widehat{\alpha}, \beta)$, $(\widehat{u'}, \widehat{\alpha'}, \beta')$ *sus respectivos levantados, entonces existe una unica 2-flecha* $\begin{tikzcd} z \arrow[r, bend left, "\widehat{u}"] \arrow[r, bend right, "\widehat{u'}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\widehat{\theta}"] & y \end{tikzcd}$ *tal que* $p\widehat{\theta} \circ \beta = \beta' \circ \theta$ *y tal que*

$$\begin{tikzcd}
pz \arrow[d, bend right=40, "p\widehat{u}"'] \arrow[d, bend left=40, "p\widehat{u'}"] \arrow[d, phantom, "\overset{p\widehat{\theta}}{\Rightarrow}"] \arrow[drr, "ph'"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow p\widehat{\alpha}"] & & & & pz \arrow[d, "p\widehat{u}"'] \arrow[d, phantom, "\Uparrow p\widehat{\alpha}"] \arrow[drr, bend left, "ph'"] \arrow[drr, bend right, "ph"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow p\sigma"] & & \\
py \arrow[rr, "pf"'] & & px & = & py \arrow[rr, "pf"'] & & px
\end{tikzcd}$$

Proposition 7.7. *(Buckley)* Una flecha $y \xrightarrow{f} x$ en $\mathscr{F}$ es *bicartesiana* si y solo si

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}[z, y] \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "p_{z.y}"'] & \mathscr{F}[z, x] \arrow[d, "p_{z,x}"] \\
\mathscr{C}[pz, py] \arrow[r, "pf_*"] & \mathscr{C}[pz, px]
\end{tikzcd}$$

es un *bipullback* en $\mathcal{C}at$ para todo $z \in \mathscr{F}$. Aqui se utiliza bipullback en el sentido de Joyal y Street en [JS93].

Los siguientes resultados pueden encontrarse en [Buc14].

Proposition 7.8. *(Buckley) (1)* Si una flecha $y \xrightarrow{f} x$ en $\mathscr{F}$ es *2*-cartesiana entonces es bicartesiana.

(2) Si se tienen $z \xrightarrow{g} y \xrightarrow{f} x$ en $\mathscr{F}$, si f, g son bicartesianas entonces fg es bicartesiana.

(3) Si una flecha $y \xrightarrow{f} x$ en $\mathscr{F}$ es una equivalencia entonces es bicartesiana para toda *2*-fibracion $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$.

(4) Si se tiene un iso $\begin{tikzcd} y \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & x \end{tikzcd}$ en $\mathscr{F}$ entonces f es bicartesiana si y solo si g es bicartesiana.

(5) Si $y \xrightarrow{f} x$ en $\mathscr{F}$ es bicartesiana y se tienen *2*-flechas $\begin{tikzcd} z \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "h'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & x \end{tikzcd}$,

$\begin{tikzcd} pz \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "u'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & py \end{tikzcd}$, con isomorfismos $\begin{tikzcd} pz \arrow[r, bend left, "p(f)u"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & px \end{tikzcd}$, $\begin{tikzcd} pz \arrow[r, bend left, "p(f)u'"] \arrow[r, bend right, "h'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha'"] & px \end{tikzcd}$, tales que

$$\begin{tikzcd}
pz \arrow[d, bend right, "u"'] \arrow[d, bend left, "u'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\theta}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, "ph'"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow p\alpha'"' near end] & \\
py \arrow[r, "pf"'] & px
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
pz \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, bend left, "ph'"] \arrow[dr, bend right, "ph"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow p\sigma"] & \\
py \arrow[r, "pf"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\alpha"] & px
\end{tikzcd}$$

Sean $(\widehat{u}, \widehat{\alpha}, \beta)$, $(\widehat{u'}, \widehat{\alpha'}, \beta')$ sus respectivos levantados. Si θ y σ son isomorfismos, entonces el unico $\begin{tikzcd} z \arrow[r, bend left, "\widehat{u}"] \arrow[r, bend right, "\widehat{u'}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\widehat{\theta}"] & y \end{tikzcd}$ dado por *(PCR2)* es un isomorfismo.

(6) Si una flecha $y \xrightarrow{f} x$ en $\mathscr{F}$ es bicartesiana entonces dadas (u, α) siempre admiten un levantado del tipo $(\widehat{u}, \widehat{\alpha}, 1_u)$, es decir siempre se puede elegir $\widehat{u}, \widehat{\alpha}$ tal que $p\widehat{u} = u$, $p\widehat{\alpha} = \alpha$.

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[d, dashed, "\widehat{u}"'] \arrow[dr, "h"] & \\
y \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\widehat{\alpha}"] & x
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
pz \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "ph"] & \\
py \arrow[r, "pf"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\alpha"] & px
\end{tikzcd}$$

7.2 Construccion de Grothendieck 2-categorica

Definition 7.9. Dada una *2*-fibracion $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$, un clivaje es una eleccion de

(1) Para cada $x \in \mathscr{F}$ y cada $b \xrightarrow{f} px$, una flecha *2*-cartesiana $f^*(x) \xrightarrow{f_x} x$ arriba de f.

(2) Para cada $y \xrightarrow{f} x$ en $\mathscr{F}$, y cada *2*-flecha

$$\begin{tikzcd} py \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "pf"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & px \end{tikzcd}$$

, una *2*-flecha cartesiana

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, bend left, "g_f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha_f"] & x \end{tikzcd}$$

arriba de α.

Definition 7.10. Dada una *2*-fibracion $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ con un clivaje, decimos que el clivaje se parte si satisface

(SC1) Dado $x \in \mathscr{F}$ y flechas $c \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} px$, entonces $(fg)_x = f_x g_{f^*(x)}$ y $(1_{px})_x = 1_x$.

(SC2) Respeta la composicion vertical de 2-flechas, es decir $y \xrightarrow{f} x$ en $\mathscr{F}$, y *2*-flechas

$$\begin{tikzcd} py \arrow[r, bend left=60, "h"] \arrow[r, "g" description] \arrow[r, bend right=60, "pf"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & px \end{tikzcd}$$

, entonces

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, bend left=60, "h_{g_f}"] \arrow[r, "g_f" description] \arrow[r, bend right=60, "f"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha_{g_f}"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta_f"] & x \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} y \arrow[r, bend left, "h_f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow(\beta\circ\alpha)_f"] & x \end{tikzcd} .$$

(SC3) Respeta la composicion horizontal de 2-flechas, es decir dadas $z \xrightarrow{g} y \xrightarrow{f} x$ en $\mathscr{F}$ y *2*-flechas

$$\begin{tikzcd} pz \arrow[r, bend left, "v"] \arrow[r, bend right, "pg"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & py \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "pf"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & px \end{tikzcd}$$

, entonces

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r, bend left, "v_g"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta_g"] & y \arrow[r, bend left, "u_f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha_f"] & x \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} z \arrow[r, bend left, "uv_{gf}"] \arrow[r, bend right, "gf"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\alpha_{gf}"] & x \end{tikzcd} .$$

(SC4) Respeta identidades, es decir dada $y \xrightarrow{f} x$ en $\mathscr{F}$ entonces

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, bend left, "f_f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow(1_f)_f"] & x \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} y \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_f"] & x \end{tikzcd}$$

Definition 7.11. Una *2-fibracion que se parte* es una 2-fibracion $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ con un clivaje que se parte.

En esta seccion, $2\mathcal{C}at$ sera la 3-categoria de 2-categorias pequeñas, 2-funtores, transformaciones 2-naturales y modificaciones.

Definition 7.12. *(Construccion de Grothendieck 2-categorica)* Dado un 2-funtor $\mathscr{C}^{coop} \xrightarrow{F} 2\mathcal{C}at$, sea $\int F$ la 2-categoria cuyos *objetos* son pares (x, a) con $x \in Fa$, las *flechas* estan dadas por

$$\frac{(x,a) \xrightarrow{(f,\varepsilon)} (y,b)}{a \xrightarrow{f} b \text{ y una flecha } x \xrightarrow{\varepsilon} Ff(y) \text{ en } Fa}$$

y una *2-flecha* esta dada por

$$\frac{\begin{tikzcd} (x,a) \arrow[rr, bend left, "{(f,\varepsilon)}"] \arrow[rr, bend right, "{(g,\varphi)}"'] \arrow[rr, phantom, "{\Downarrow (\alpha,\vartheta)}"] & & (y,b) \end{tikzcd}}{\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & b \text{ y una 2-flecha } x \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\vartheta" near end, shift left=2ex] & Ff(y) \text{ en } Fa \\ & & Fg(y) \arrow[u, "F\alpha_y"'] \end{tikzcd}}$$

La composicion vertical de 2-flechas $\begin{tikzcd} (x,a) \arrow[r, bend left=40, "{(f,\varepsilon)}"] \arrow[r, "{(g,\varphi)}" description] \arrow[r, bend right=40, "{(h,\psi)}"'] \arrow[r, phantom, bend left=20, "{\Downarrow(\alpha,\vartheta)}"] \arrow[r, phantom, bend right=20, "{\Downarrow(\beta,\varrho)}"] & (y,b) \end{tikzcd}$ esta dada por

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, "g" description] \arrow[r, bend right=50, "h"'] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, bend right=25, "\Downarrow\beta"] & b \end{tikzcd} \text{ y la 2-flecha dada por el diagrama}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[ddr, bend right, "\psi"'] & Ff(y) \\ \Downarrow\vartheta & Fg(y) \arrow[u, "F\alpha_y"'] \\ \Downarrow\varrho & Fh(y) \arrow[u, "F\beta_y"'] \end{tikzcd}$$

La composicion horizontal de *2*-flechas $\begin{tikzcd}(x,a) \arrow[r, bend left, "{(f_1,\varepsilon_1)}"] \arrow[r, bend right, "{(g_1,\varphi_1)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow(\alpha,\vartheta)"] & (y,b) \arrow[r, bend left, "{(f_2,\varepsilon_2)}"] \arrow[r, bend right, "{(g_2,\varphi_2)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow(\beta,\varrho)"] & (z,c)\end{tikzcd}$ esta dada por $\begin{tikzcd}a \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, bend right, "g_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & b \arrow[r, bend left, "f_2"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & c\end{tikzcd}$ y la *2*-flecha dada por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\varepsilon_1"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\Downarrow\vartheta"] & Ff_1(y) \arrow[r, "Ff_1(\varepsilon_2)"] \arrow[dr, "Ff_1(\varphi_2)"] & Ff_1f_2(z) \\
& Fg_1(y) \arrow[u, "F\alpha_y"] \arrow[dr, "Fg_1(\varphi_2)"'] & Ff_1g_2(z) \arrow[u, "Ff_1(F\beta_z)"'] \arrow[u, phantom, shift right=4, "\Downarrow\varrho"] \\
& & Fg_1g_2(z) \arrow[u, "F\alpha_{g_2(z)}"']
\end{tikzcd}$$

Es claro que proyectando se obtiene un *2*-funtor $\int F \xrightarrow{\lozenge} \mathscr{C}$.

Proposition 7.13. *(Buckley)* Dado un 2-funtor $\mathscr{C}^{coop} \xrightarrow{F} 2\mathcal{C}at$, entonces la *2*-fibracion $\int F \xrightarrow{\lozenge} \mathscr{C}$ se parte.

Definition 7.14. Dada una *2*-categoria $\mathscr{C}$ se define la *3*-categoria $2Fib_s(\mathscr{C})$ cuyos objetos son las *2*-fibraciones que se parten sobre $\mathscr{C}$, una flecha entre *2*-fibraciones es un *2*-funtor

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "p"'] & \mathscr{G} \arrow[d, "q"] \\
& \mathscr{C}
\end{tikzcd}$$

es *cartesiano* si $p = qF$, preserva las flechas *2*-cartesianas y *2*-flechas cartesianas, y tambien preserva los clivajes. Las *2*-flechas y *3*-flechas son las de ${}^{2\mathcal{C}at}/_{\mathscr{C}}$, se suelen llamar transformaciones 2-naturales verticales, y modificaciones verticales.

Theorem 7.15. *(Buckley)* Se tiene una equivalencia de *3*-categorias

$$[\mathscr{C}^{coop}, 2\mathcal{C}at] \xrightarrow{\int} 2Fib_s(\mathscr{C})$$

donde $[\mathscr{C}^{coop}, 2\mathcal{C}at]$ es la *3*-categoria de *2*-funtores, transformaciones *2*-naturales, modificaciones y perturbaciones.

7.3 2-Fibraciones 2-discretas

Definition 7.16. Decimos que un *2*-funtor $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ es una *2-fibracion 2-discreta* si satisface

(FD1) Dado $x \in \mathscr{F}$ y dada $b \xrightarrow{f} px$, existe una flecha cartesiana arriba de f (en el sentido clasico de 4.2).

(FD2) Dada una flecha $y \xrightarrow{f} x$ en $\mathscr{F}$ y una *2*-flecha

$$\begin{tikzcd} py \arrow[r, bend left, "g"{name=U}] \arrow[r, bend right, "pf"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\alpha"] & px \end{tikzcd}$$

, existe una unica *2*-flecha

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, bend left, "\widehat{g}"{name=U}] \arrow[r, bend right, "f"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\widehat{\alpha}"] & x \end{tikzcd}$$

arriba de α.

Remark 7.17. La condicion *(FD2)* nos dice exactamente que para cada $x, y \in \mathscr{F}$ el funtor $\mathscr{F}[x,y] \xrightarrow{P_{x,y}} \mathscr{C}[px,py]$ es una fibracion discreta.

Proposition 7.18. Si $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ es una *2*-fibracion *2*-discreta entonces es una *2*-fibracion.

En efecto, sabemos que una fibracion discreta es una fibracion, por lo tanto vale *(TF2)*. Para ver *(TF3)*, basta observar que la composicion horizontal de *2*-flechas cartesianas es cartesiana, esto se sigue tautologicamente de la unicidad de levantamiento de *2*-flechas por *(FD2)*. Falta ver *(TF1)* es decir, tenemos que ver que una flecha cartesiana en el sentido clasico es *2*-cartesiana. Dada $y \xrightarrow{f} x$ cartesiana, queremos ver que satisface la condicion de levantamiento de *2*-flechas, pero dadas

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r, bend left, "g"{name=U}] \arrow[r, bend right, "g'"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\sigma"] & x \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} pz \arrow[r, bend left, "h"{name=U}] \arrow[r, bend right, "h'"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\theta"] & py \end{tikzcd}$$

tales que $p\sigma = p(f)\theta$ por *(FD2)* existe una unica *2*-flecha

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r, bend left, "s"{name=U}] \arrow[r, bend right, "\overline{h'}"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\exists!\,\hat{\theta}"] & y \end{tikzcd}$$

sobre θ*.* Falta ver que $\hat{\theta}$ satisface $\sigma = f\hat{\theta}$, y luego $s = \overline{h}$ dado que f es cartesiana. Pero esto sale facil pues $p(f\hat{\theta}) = pf\theta = p\sigma$, por *(DF2)* $\sigma = f\hat{\theta}$.

Proposition 7.19. Una *2*-fibracion *2*-discreta $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ *se parte* si y solo si admite un clivaje que satisface *(SC1)*.

En efecto, es claro que *(SC2)*, *(SC3)*, *(SC4)* se satisfacen automaticamente por *(FD2)*.

Dada $\mathscr{C}$ una 2-categoria se define la 2-categoria $D2Fib_s(\mathscr{C})$ cuyos objetos son las 2-fibraciones 2-discretas que se parten. Las flechas son los funtores cartesianos, aunque no les pedimos que preserven los clivajes ya que no asumimos que una 2-fibracion 2-discreta que se parte tiene un clivaje asociado. Las 2-flechas son las transformaciones 2-naturales verticales.

Theorem 7.20. Se tiene una equivalencia de 2-categorias

$$[\mathscr{C}^{coop}, \mathcal{C}at] \xrightarrow{\int} D2Fib_s(\mathscr{C})$$

donde $[\mathscr{C}^{coop}, \mathcal{C}at]$ es la 2-categoria de 2-funtores, transformaciones pseudonaturales y modificaciones.

En efecto, dado un 2-funtor $\mathscr{C}^{coop} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$, la Construccion de Grothendieck nos da una 2-fibracion $\int F \xrightarrow{\Diamond} \mathscr{C}$, cuyos objetos son pares (x, a) con $x \in Fa$, las flechas estan dadas por

$$\frac{(x,a) \xrightarrow{(f,\varepsilon)} (y,b)}{a \xrightarrow{f} b \ \text{ y una flecha } \ x \xrightarrow{\varepsilon} Ff(y) \ \text{ en } Fa}$$

y una *2-flecha* esta dada por

$$\begin{tikzcd}
(x,a) \arrow[r, bend left, "{(f,\varepsilon)}"] \arrow[r, bend right, "{(g,\varphi)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & (y,b)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & b & \text{tal que conmuta} & x \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Ff(y) \\
& & & & Fg(y) \arrow[u, "F\alpha_y"']
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, dada una flecha $(x,a) \xrightarrow{(g,\varphi)} (y,b)$ y 2-flecha $\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & b \end{tikzcd}$, existe una unica 2-flecha arriba de α, y esta es $\begin{tikzcd} (x,a) \arrow[r, bend left, "{(f,F\alpha_y\varphi)}"] \arrow[r, bend right, "{(g,\varphi)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & (y,b) \end{tikzcd}$. Luego $\int F \xrightarrow{\Diamond} \mathscr{C}$ es una 2-fibracion 2-discreta. Conversamente, dada una 2-fibracion 2-discreta $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ le asignamos $\mathscr{C}^{coop} \xrightarrow{F_p} 2\mathcal{C}at$, donde $F_p(a) = \mathscr{F}_a$. $\mathscr{F}_a$ es la

2-categoria de objetos arriba de a, flechas arriba de 1_a, y 2-flechas arriba de 1_{1_a}. Pero dada una flecha $x \xrightarrow{f} y$ arriba de 1_a, entonces $p(1_f) = 1_{1_a}$ por la *2*-funtorialidad, luego por unicidad 1_f es la unica *2*-flecha arriba de 1_{1_a} si levantamos en f. Esto muestra que $\mathscr{F}_a$ es una categoria ya que las *2*-flechas son solo las identidades y luego podemos olvidarlas, y por lo tanto F_p en realidad es un *2*-funtor $\mathscr{C}^{coop} \xrightarrow{F_p} \mathcal{C}at$. El resto de las verificaciones son de rutina.

Corollary 7.21. Dado un *2*-funtor $\mathscr{C}^{coop} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$, dada una flecha $b \xrightarrow{f} a$ en $\mathscr{C}$ y sea $x \in Fa$, luego $(y, b) \xrightarrow{(f,\varepsilon)} (x, a)$ es *2*-cartesiana si y solo si ε es un isomorfismo.

Una propiedad muy importante que tienen las *2*-fibraciones *2*-discretas es que las flechas cartesianas, *2*-cartesianas y bicartesianas coinciden, mientras que en general esto no ocurre.

Proposition 7.22. Si $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ es una *2*-fibracion *2*-discreta entonces una flecha $y \xrightarrow{f} x$ es cartesiana si y solo si es bicartesiana.

Vimos que cartesiana implica *2*-cartesiana, por 7.8.1 entonces es bicartesiana. Falta ver la vuelta, sea $y \xrightarrow{f} x$ bicartesiana, queremos ver que f es cartesiana. Dada $z \xrightarrow{g} x$ tal que $pg = p(f)h$, por 7.8.6 se tiene que existe

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[d, "\exists\hat{h}"'] \arrow[rd, "g"] & \\
y \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\alpha"] & x
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
pz \arrow[d, "h"'] \arrow[rd, "pg"] & \\
py \arrow[r, "pf"'] & px
\end{tikzcd}$$

con $p\hat{h} = h$. Por *(FD2)* se tiene que $\alpha = 1_g$ y luego $f\hat{h} = g$. Falta ver que $\hat{h}$ es unica, pero dada $\hat{h}'$ tal que $p\hat{h}' = h$ y $f\hat{h}' = g$, dado que f es bicartesiana existe $\begin{tikzcd} z \arrow[r, bend left, "\hat{h}'"] \arrow[r, bend right, "\hat{h}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & y \end{tikzcd}$ tal que $p\theta = 1_h$. Nuevamente por *(FD2)* el unico levantado de 1_h en $\hat{h}$ es $1_{\hat{h}}$ y por lo tanto $\hat{h} = \hat{h}'$.

Remark 7.23. Se deduce en particular que las todas las propiedades de estabilidad de las flechas bicartesianas se trasladan a las flechas cartesianas.

7.4 Construccion de laxcolimites de categorias

Definition 7.24. Decimos que una *2*-categoria es *2-discreta* si sus unicas *2*-flechas son identidades.

Dada una categoria $\mathscr{D}$ le podemos asigar una *2*-categoria *2*-discreta $d(\mathscr{D})$ que solo tiene como *2*-flecha identidades. Por otro lado, dada una bicategoria $\mathscr{C}$ le podemos asignar una categoria $\pi_0(\mathscr{C})$, que es aplicar π_0 en los *hom*, es decir los objetos son los mismos y las flechas de $\pi_0(\mathscr{C})$ son las componentes arcoconexas de flechas de $\mathscr{C}$, mas precisamente se identifican a las flechas que estan conectadas por una cadena de *2*-flechas. Estas asignaciones definen *2*-funtores, y forman una *2-adjuncion*, esto queda explicitado en la siguiente proposicion.

Proposition 7.25. Sean $\mathscr{C}$ una bicategoria y $\mathscr{D}$ una categoria. Entonces se tiene un isomorfismo de categorias

$$[\pi_0(\mathscr{C}), \mathscr{D}] \xrightarrow{\eta^*} [\mathscr{C}, d(\mathscr{D})]$$

dado por

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\forall F"'] & d\pi_0(\mathscr{C}) \arrow[d, "\widetilde{F}"] & \pi_0(\mathscr{C}) \arrow[d, dashed, "\exists!\, \widetilde{F}"] \\
& d(\mathscr{D}) & \mathscr{D}
\end{tikzcd}$$

Aqui $[\mathscr{C}, d(\mathscr{D})]$ es la categoria cuyos objetos son los pseudofuntores y cuyas flechas son las transformaciones pseudonaturales, mientras que $[\pi_0(\mathscr{C}), \mathscr{D}]$ es la categoria de funtores y transformaciones naturales. Dado un pseudofuntor $\mathscr{C} \xrightarrow{F} d(\mathscr{D})$, si entre dos flechas $a \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} b$ existe un camino de *2*-flechas, entonces necesariamente $F(f) = F(g)$ pues las *2*-flechas tienen que ir a identidades via F ya que no hay otras *2*-flechas. Por lo tanto, F pasa al cociente y me define a $\widetilde{F}$. Es trivial ver que es biyectivo en las flechas, por lo tanto es un isomorfismo de categorias.

Dada una *2*-categoria $\mathscr{C}$ y dado un *2*-funtor $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$, entonces la *Construccion de Grothendieck para 2-categorias* nos da una *2*-categoria $\int F$ cuyos objetos son pares (x, a) con $x \in Fa$, las flechas estan dadas por

$$\begin{tikzcd}(x,a) \arrow[r, "{(f,\varepsilon)}"] & (y,b)\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}a \arrow[r, "f"] & b\end{tikzcd} \text{ y una flecha } \begin{tikzcd}Ff(x) \arrow[r, "\varepsilon"] & y\end{tikzcd} \text{ en } Fb$$

y una *2-flecha* esta dada por

$$\begin{tikzcd}(x,a) \arrow[rr, bend left, "{(f,\varepsilon)}"] \arrow[rr, bend right, "{(g,\varphi)}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \alpha"] & & (y,b)\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}a \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \alpha"] & & b\end{tikzcd} \text{ tal que conmuta } \begin{tikzcd}Ff(x) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "F\alpha_x"'] & y \\ Fg(x) \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Se deduce facilmente de lo hecho anteriormente que dada $c \in \mathcal{C}at$, se tiene un isomorfismo de categorias

$$\begin{tikzcd}{[\int F, d(c)]} \arrow[r, "\lambda^*"] & LaxCon[F,c]\end{tikzcd}$$

En efecto, basta observar que dada una *2-flecha*

$$\begin{tikzcd}(x,a) \arrow[rr, bend left, "{(f,\varepsilon)}"] \arrow[rr, bend right, "{(g,\varphi)}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \alpha"] & & (y,b)\end{tikzcd}$$

entonces definiendo $\int F \xrightarrow{h} c$ como antes, hay que ver que $h(f,\varepsilon) = h(g,\varphi)$ para que este bien definido y sea por lo tanto un *2*-funtor. Basta observar que se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}h_a(x) \arrow[r, "(h_f)_x"] \arrow[dr, "(h_g)_x"'] & h_bFf(x) \arrow[r, "h_b(\varepsilon)"] \arrow[d, "F\alpha_x"] & h_b(y) \\ & h_bFg(x) \arrow[ur, "h_b(\varphi)"'] & \end{tikzcd}$$

pues $F \xrightarrow{h} c$ es un laxcono y por lo tanto estas flechas van a parar a la misma flecha en c, y α es la identidad ya que es la unica *2*-flecha posible.

Por el isomorfismo anterior

$$\begin{tikzcd}{[\pi_0(\int F), c]} \arrow[r, "\eta^*"] & {[\int F, d(c)]}\end{tikzcd}$$

se obtiene que el siguiente resultado.

Theorem 7.26. Sea $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ un *2*-funtor donde $\mathscr{C}$ es una *2*-categoria, entonces $\pi_0(\int F)$ es el *laxcolimite* de F.

7.5 Construccion de pseudocolimites de categorias

Para construir el pseudocolimite en el caso general se puede hacer el mismo procedimiento. Sabemos que se tiene un isomorfismo de categorias

$$[\textstyle\int F, d(c)] \xrightarrow{\lambda^*} LaxCon[F, c]$$

Igual que antes, se observa que este isomorfismo se restringe a los pseudoconos como

$$[\textstyle\int F, d(c)]_{\Sigma^{-1}} \xrightarrow{\lambda^*} PsCon[F, c]$$

Utilizando la construccion general de la *2*-categoria de fracciones de H. Wolff en [Wol70], se obtiene un isomorfismo de categorias

$$[\textstyle\int F[\Sigma^{-1}], d(c)] \xrightarrow{h^*} [\textstyle\int F, d(c)]_{\Sigma^{-1}}$$

y por ultimo se tiene un isomorfismo de categorias

$$[\pi_0(\textstyle\int F[\Sigma^{-1}]), c] \xrightarrow{\pi^*} [\textstyle\int F[\Sigma^{-1}], d(c)]$$

Por lo tanto se tiene el siguiente teorema.

Theorem 7.27. Sea $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ un *2*-funtor donde $\mathscr{C}$ es una *2*-categoria, entonces $\pi_0(\int F[\Sigma^{-1}])$ es el *pseudocolimite* de F.

Se puede ver facilmente que si $\mathscr{C}$ es strict-2-filtrante, entonces las flechas del clivaje canonico satisfacen el *2*-calculo de fracciones aqui definido, y por lo tanto se tiene una construccion del pseudocolimite con esta tecnica. Sin embargo, viendo detenidamente esta construccion se observa que no es otra que la construccion de Grothendieck usual, como explicamos en 5.4.

8 Bicategoria de fracciones

8.1 Bicategoria de fracciones

En este capitulo repasamos la definicion de la bicategoria de fracciones de Pronk, donde se obtiene el siguiente resultado.

Theorem 8.1. *(Pronk)* Dada una bicategoria $\mathscr{C}$ y una familia de flechas $\Sigma \subset Fl(\mathscr{C})$ que satisface el *bicalculo de fracciones*, entonces existe una bicategoria $\mathscr{C}[\Sigma^{eq}]$ con un pseudofuntor $\mathscr{C} \xrightarrow{h} \mathscr{C}[\Sigma^{eq}]$ tal que $h(s)$ es una equivalencia $\forall s \in \Sigma$ y es universal en el sentido de que

$$[\mathscr{C}[\Sigma^{eq}], \mathscr{D}] \xrightarrow{h^*} [\mathscr{C}, \mathscr{D}]_{\Sigma^{eq}}$$

es una equivalencia de bicategorias, donde $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]_{\Sigma^{eq}}$ es la bicategoria de pseudofuntores que hacen equivalencias a las flechas de Σ, transformaciones pseudonaturales y modificaciones.

Aqui daremos la definicion solo para el caso en el que $\mathscr{C}$ es una *2*-categoria, ya que es el caso que nos interesa y esto reduce un poco las cuentas. Sin embargo aclaramos que aun cuando $\mathscr{C}$ sea una *2*-categoria, $\mathscr{C}[\Sigma^{eq}]$ sera una bicategoria. Esto puede ser un problema para algunas aplicaciones pero no para nuestros objetivos.

8.2 Bicalculo de fracciones

Definition 8.2. *(Pronk)* Sea $\mathscr{C}$ una *2*-categoria y una familia de flechas $\Sigma \subset Fl(\mathscr{C})$, decimos que Σ satisface el *bicalculo de fracciones (a izquierda)* si satisface

(BF1) Todas las equivalencias estan en Σ

(BF2) Si se tienen $a \xrightarrow{s} b \xrightarrow{t} c$ *, con* $s, t \in \Sigma$ *entonces* $ts \in \Sigma$.

(BF3) Dado un diagrama del tipo

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ b & & c \end{tikzcd}$$

con $s \in \Sigma$*, entonces se puede completar a un diagrama con un isomorfismo* α

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[ld, "s"'] \arrow[rd, "f"] & \\
b \arrow[rd, "f'"'] & \overset{\alpha}{\Longleftarrow} & c \arrow[ld, "s'"] \\
& d &
\end{tikzcd}$$

con $s' \in \Sigma$.

(BF4) Dadas flechas $a \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} b$, si existe $x \xrightarrow{s} a$ en Σ con una 2-flecha

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "fs"] \arrow[r, bend right, "gs"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & b
\end{tikzcd}$$

entonces existe $b \xrightarrow{s'} y$ en Σ y una 2-flecha

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "s'f"] \arrow[r, bend right, "s'g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta"] & y
\end{tikzcd}$$

tal que $\beta s = s'\alpha$. Mas aun, si α es un iso, entonces β lo es. Si se tienen dos flechas $s_1, s_2 \in \Sigma$, $b \xrightarrow{s_i} y_i$,cada una con una 2-flecha β_i tal que $\beta_i s = s_i\alpha$, entonces existen u, v tal que $us_1, vs_2 \in \Sigma$ y una 2-flecha iso

$$\begin{tikzcd}
& y_1 \arrow[rd, "u"] & \\
b \arrow[ru, "s_1"] \arrow[rd, "s_2"'] & \Downarrow \varepsilon & y \\
& y_2 \arrow[ru, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

y tal que satisfacen la ecuacion LL

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[rd, "s_1"] & & \\
a \arrow[ru, "f"] \arrow[rd, "g"'] & \Downarrow \beta_1 & y_1 \arrow[rd, "u"] & \\
& b \arrow[ru, "s_1"] \arrow[rd, "s_2"'] & \Downarrow \varepsilon & y \\
& & y_2 \arrow[ru, "v"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& & y_1 \arrow[rd, "u"] & \\
& b \arrow[ru, "s_1"] \arrow[rd, "s_2"] & \Downarrow \varepsilon & y \\
a \arrow[ru, "f"] \arrow[rd, "g"'] & \Downarrow \beta_2 & y_2 \arrow[ru, "v"'] & \\
& b \arrow[ru, "s_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

(BF5) Si $a \xrightarrow{s} b$ *esta en* Σ, *y existe un iso* α

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "s"{name=U}] \arrow[r, bend right, "s'"'{name=D}] & b
\arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

entonces $s' \in \Sigma$.

Ahora pasamos a definir $\mathscr{C}[\Sigma^{eq}]$. Los objetos de $\mathscr{C}[\Sigma^{eq}]$ seran los de $\mathscr{C}$. Una flecha $a \xrightarrow{(f,s)} b$ esta dada por un par de flechas en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "f"'] & & b \arrow[dl, "s"] \\
& x &
\end{tikzcd}$$

con $s \in \Sigma$. Para definir la composicion de $a \xrightarrow{(f,s)} b \xrightarrow{(g,t)} c$, se *elige* un diagrama dado por *(BF3)*,

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "f"'] & & b \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "g"] & & c \arrow[dl, "t"] \\
& x \arrow[dr, "g'"'] & \Longleftarrow^{\alpha} & y \arrow[dl, "s'"] & \\
& & z & &
\end{tikzcd}$$

y se define la composicion por $a \xrightarrow{(g'f,s't)} c$. Mas aun, cuando $g = 1_b$ (resp. cuando $s = 1_b$) entonces se toma el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "1_b"] & \\
x \arrow[dr, "1_x"'] & & b \arrow[dl, "s"] \\
& x &
\end{tikzcd}$$

La composicion dependera de estas elecciones, ya que aqui no se identifican fracciones, esta es la razon por la que $\mathscr{C}[\Sigma^{eq}]$ sera una bicategoria.

Una *2*-flecha $\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "(f,s)"{name=U}] \arrow[r, bend right, "(g,t)"'{name=D}] & b \arrow[Rightarrow, from=U, to=D] \end{tikzcd}$ esta representada por (u, v, α, β) donde u, v son flechas

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, "u"] & \\
 & z \\
y \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

tal que $us, vt \in \Sigma$, α, β son *2*-flechas, con β isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dr, "u"] & & & & x \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \alpha & z & & b \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "t"'] & \Downarrow \beta & z \\
 & y \arrow[ur, "v"'] & & & & y \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Se identifican $(u_1, v_1, \alpha_1, \beta_1)$ con $(u_2, v_2, \alpha_2, \beta_2)$ si existen flechas

$$\begin{tikzcd}
z_1 \arrow[dr, "w_1"] & \\
 & z \\
z_2 \arrow[ur, "w_2"'] &
\end{tikzcd}$$

tales que $w_1 u_1 s, w_2 u_2 s \in \Sigma$, y existen isomorfismos

$$\begin{tikzcd}
 & z_1 \arrow[dr, "w_1"] & & & & z_1 \arrow[dr, "w_1"] & \\
x \arrow[ur, "u_1"] \arrow[dr, "u_2"'] & \Uparrow \gamma_1 & z & & y \arrow[ur, "v_1"] \arrow[dr, "v_2"'] & \Uparrow \gamma_2 & z \\
 & z_2 \arrow[ur, "w_2"'] & & & & z_2 \arrow[ur, "w_2"'] &
\end{tikzcd}$$

tales que
(LL1)

$$\begin{tikzcd}
 & & z_2 \arrow[dr, "w_2"] & & & & x \arrow[dr, "u_2"] & & \\
 & x \arrow[ur, "u_2"] \arrow[dr, "u_1"] & \Downarrow \gamma_1 & z & = & b \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "t"'] & \Downarrow \beta_2 & z_2 \arrow[dr, "w_2"] & \\
b \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "t"'] & \Downarrow \beta_1 & z_1 \arrow[ur, "w_1"'] & & & & y \arrow[ur, "v_2"] \arrow[dr, "v_1"'] & \Downarrow \gamma_2 & z \\
 & y \arrow[ur, "v_1"'] & & & & & & z_1 \arrow[ur, "w_1"'] &
\end{tikzcd}$$

(LL2)

$$\begin{tikzcd}
 & & z_2 \arrow[dr, "w_2"] & & & & x \arrow[dr, "u_2"] & & \\
 & x \arrow[ur, "u_2"] \arrow[dr, "u_1"] & \Downarrow \gamma_1 & z & = & a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \alpha_2 & z_2 \arrow[dr, "w_2"] & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \alpha_1 & z_1 \arrow[ur, "w_1"'] & & & & y \arrow[ur, "v_2"] \arrow[dr, "v_1"'] & \Downarrow \gamma_2 & z \\
 & y \arrow[ur, "v_1"'] & & & & & & z_1 \arrow[ur, "w_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego se deben definir las composiciones verticales y horizontales de *2*-flechas, para esto ver [Pro96].

El pseudofuntor $\mathscr{C} \xrightarrow{h} \mathscr{C}[\Sigma^{eq}]$ esta definido en los objetos y flechas como siempre, y en las *2*-flechas, dada $\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & b \end{tikzcd}$ definimos $h(\alpha) = (1_b, 1_b, \alpha, 1_b)$.

Remark 8.3. Dado un pseudofuntor $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$ que hace equivalencias a las flechas de Σ, entonces se define $\mathscr{C}[\Sigma^{eq}] \xrightarrow{\widehat{F}} \mathscr{D}$ como F en los objetos, en las flechas dada $a \xrightarrow{(f,s)} b$ se elige una quasi-inversa de Fs en $\mathscr{D}$, llamemosla u, y se define $\widehat{F}(f,s) = uFf$. Es claro que si $\mathscr{D}$ es una *2*-categoria *2*-discreta, entonces la definicion de $\widehat{F}$ esta univocamente determinada, ya que en este caso si $Fs \in \mathscr{D}$ es una equivalencia, es un isomorfismo ya que no hay *2*-flechas salvo las identidades, luego se define $\widehat{F}(f,s) = F(s)^{-1}Ff$. Por lo tanto, se tiene que en este caso h^* es biyectiva y entonces

$$[\mathscr{C}[\Sigma^{eq}], \mathscr{D}] \xrightarrow{h^*} [\mathscr{C}, \mathscr{D}]_{\Sigma^{eq}}$$

es un isomorfismo de categorias.

9 Construccion de pseudocolimites 2-filtrantes de categorias

Lemma 9.1. Sea $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ una coop-*2*-fibracion *2*-discreta y supongamos que $\mathscr{C}$ es *2*-filtrante, entonces las flechas co-cartesianas *satisfacen el bicalculo de fracciones (a izquierda).*

En efecto, ya sabemos que satisfacen *(BF1)*, *(BF2)* y *(BF5)* por las proposiciones7.22 y 7.8.

Para ver *(BF3)* si se tiene un diagrama en $\mathscr{F}$

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
b & & c
\end{tikzcd}$$

con s co-cartesiana, dado que $\mathscr{C}$ es *2*-filtrada entonces podemos conseguir u, v y un isomorfismo β

$$\begin{tikzcd}
 & pa \arrow[dl, "ps"'] \arrow[dr, "pf"] & \\
pb \arrow[dr, "u"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\beta}{\Longleftarrow}"] & & pc \arrow[dl, "v"] \\
 & x &
\end{tikzcd}$$

Podemos levantar u, v con flechas co-cartesianas

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
b \arrow[d, "t"'] & & c \arrow[d, "s'"] \\
d' & & d
\end{tikzcd}$$

y por ser ts co-cartesiana se tiene una flecha $d' \xrightarrow{r} d$, y β se levanta a un isomorfismo α

$$\begin{tikzcd}
 & x & & & d \\
pa \arrow[ur, "vp(f)"] \arrow[r, "up(s)"'] & x \arrow[u, "1_x"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\beta"', shift right=4] & & a \arrow[ur, "s'f"] \arrow[r, "ts"'] & d' \arrow[u, "r"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\alpha"', shift right=4]
\end{tikzcd}$$

Luego, llamando $f' = rt$ se tiene el diagrama deseado

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[ld, "s"'] \arrow[rd, "f"] & \\
b \arrow[rd, "f'"'] & \overset{\alpha}{\Longleftarrow} & c \arrow[ld, "s'"] \\
& d &
\end{tikzcd}$$

Para ver *(BF4)*, si se tienen $x \xrightarrow{s} a \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} b$ con s co-cartesiana, y una *2*-flecha

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, bend left, "fs"] \arrow[rr, bend right, "gs"'] & \Downarrow \alpha & b
\end{tikzcd}$$

por ser $\mathscr{C}$ *2*-filtrada se tiene una flecha $c \xrightarrow{h} w$ con un iso

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, bend left, "hp(f)"] \arrow[rr, bend right, "hp(g)"'] & \Downarrow \alpha' & w
\end{tikzcd}$$

tal que $\alpha' p(s) = hp(\alpha)$. Levantamos h a una flecha co-cartesiana s',

$$\begin{tikzcd}
\underline{x} \arrow[r, "s"] \arrow[d, dotted, mapsto] & \underline{a} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, dotted, mapsto] & \underline{b} \arrow[r, dashed, "s'"] \arrow[d, dotted, mapsto] & \underline{y} \arrow[d, dotted, mapsto] \\
px \arrow[r, "ps"] & pa \arrow[r, shift left, "pf"] \arrow[r, shift right, "pg"'] & pb \arrow[r, dashed, "\exists h"] & w
\end{tikzcd}$$

Luego $p(s'\alpha) = hp(\alpha) = \alpha' p(s)$ y entonces podemos levantar α' a una *2*-flecha β

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
 & y \\
x \arrow[ur, bend left, "s'fs"] \arrow[ur, "s'gs"'] \arrow[ur, phantom, bend left=15, "\Downarrow s'\alpha"] \arrow[r, "s"'] & a \arrow[u, bend left, "s'f"] \arrow[u, bend right, "s'g"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\exists! \beta}{\Rightarrow}"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
 & w \\
px \arrow[ur, bend left, "ps'fs"] \arrow[ur, "ps'gs"'] \arrow[ur, phantom, bend left=15, "\Downarrow ps'\alpha"] \arrow[r, "s"'] & pa \arrow[u, bend left, "hpf"] \arrow[u, bend right, "hpg"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\alpha'}{\Rightarrow}"]
\end{tikzcd}$$

que por lo tanto satisface $\beta s = s'\alpha$. Es claro que si α es un iso, entonces α' lo es pues podemos levantar la inversa de β a una inversa de α'. Por ultimo, debemos ver que si se tienen $s_1, s_2, \beta_1, \beta_2$ con

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "s_i f"] \arrow[r, bend right, "s_i g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta_i"] & y_i
\end{tikzcd}$$

tales que $\beta_i s = s_i \alpha$, entonces existen u, v tal que us_1, vs_2 son co-cartesianas y un isomorfismo ε

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, bend left, "us_1"] \arrow[r, bend right, "vs_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] & y
\end{tikzcd}$$

tal que satisface la ecuacion LL

$$\begin{tikzcd}
 & b \arrow[dr, "s_1"] & & & & & & y_1 \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \beta_1 & y_1 \arrow[dr, "u"] & & & & b \arrow[ur, "s_1"] \arrow[dr, "s_2"] & \Downarrow \varepsilon & y \\
 & b \arrow[ur, "s_1"] \arrow[dr, "s_2"'] & \Downarrow \varepsilon & y & = & a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \Downarrow \beta_2 & y_2 \arrow[ur, "v"'] & \\
 & & y_2 \arrow[ur, "v"'] & & & & b \arrow[ur, "s_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dado que $\mathscr{C}$ es *2*-filtrada, por el lema 5.7 existe una solucion de esta ecuacion en $\mathscr{C}$, es decir podemos encontrar

$$\begin{tikzcd}
 & py_1 \arrow[dr, "w_1"] & \\
pb \arrow[ur, "ps_1"] \arrow[dr, "ps_2"'] & \Downarrow \gamma & z \\
 & py_2 \arrow[ur, "w_2"'] &
\end{tikzcd}$$

que satisface la ecuacion LL en $\mathscr{C}$. Llamemos σ a la *2*-flecha dada por pegar los diagramas, es decir $\sigma = (\gamma pg) \circ (w_1 p \beta_1) = (vp\beta_2) \circ (\gamma pf)$. Aplicando el mismo procedimiento que para probar *(BF3),* podemos levantar w_1, w_2 a flechas co-cartesianas u, v y levantar γ a un isomorfismo ε,

$$\begin{tikzcd}
 & y_1 \arrow[dr, "u"] & \\
b \arrow[ur, "s_1"] \arrow[dr, "s_2"'] & \Downarrow \varepsilon & y \\
 & y_2 \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Falta ver que este ε satisface la ecuacion LL. En efecto, por la ecuacion LL en $\mathscr{C}$, se tiene que

$$p((\varepsilon g) \circ (u\beta_1)) = (\gamma pg) \circ (w_1 p\beta_1) = \sigma = (w_2 p\beta_2) \circ (\gamma pf) = p((v\beta_2) \circ (\varepsilon f))$$

Es decir, estas *2*-flechas son levantados de la misma *2*-flecha (podriamos terminar la demostracion aqui usando *(FD2)* pero lo mostramos sin usar esta propiedad). Ademas, observamos que si precomponemos con s la ecuacion LL se satisface, en efecto, hay que ver que

$$(\varepsilon gs) \circ (u\beta_1 s) = (v\beta_2 s) \circ (\varepsilon fs)$$

Pero, $(\varepsilon gs) \circ (u\beta_1 s) = (\varepsilon gs) \circ (us_1\alpha)$ y $(v\beta_2 s) \circ (\varepsilon fs) = (vs_2\alpha) \circ (\varepsilon fs)$, y por la ley de intercambio

$$(\varepsilon gs) \circ (us_1\alpha) = \varepsilon\alpha = (vs_2\alpha) \circ (\varepsilon fs)$$

Como s es co-cartesiana, existe un unico levantado de σ,

$$\begin{tikzcd}
 & y \\
x \arrow[ur, bend left=30, "us_1fs"] \arrow[ur, bend right=10, "vs_2gs"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varepsilon\alpha"] \arrow[r, "s"'] & a \arrow[u, bend left=20, "us_1f"] \arrow[u, bend right=20, "vs_2g"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\exists!\hat{\sigma}}{\Rightarrow}"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & z \\
px \arrow[ur, bend left=30, "p(us_1gs)"] \arrow[ur, bend right=10, "p(vs_2gs)"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\gamma p\alpha"] \arrow[r, "s"'] & pa \arrow[u, bend left=20, "p(us_1f)"] \arrow[u, bend right=20, "p(vs_2g)"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"]
\end{tikzcd}$$

por lo tanto son iguales y luego satisfacen la ecuacion LL. Por lo tanto las flechas co-cartesianas satisfacen el bicalculo de fracciones.

Remark 9.2. Con modificaciones menores se puede ver que dada una coop-*2*-fibracion $\mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{C}$ con $\mathscr{C}$ *2*-filtrante, entonces las flechas co-bicartesianas satisfacen el bicalculo de fracciones (a izquierda).

Theorem 9.3. Sea $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ un *2*-funtor, y supongamos que $\mathscr{C}$ es una *2*-categoria *2*-filtrada, entonces el pseudocolimite de F existe y esta dado por la categoria $\pi_0(\int F[\Sigma^{eq}])$. Mas aun, describimos esta categoria explicitamente, los *objetos* son pares (x, a) con $x \in Fa$, las *flechas* $(x, a) \xrightarrow{(u,\varepsilon,v)} (y, b)$ estan dada por flechas

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "u"'] & & b \arrow[dl, "v"] \\
 & c &
\end{tikzcd}$$

y una flecha $Fu(x) \xrightarrow{\varepsilon} Fv(y)$, donde identificamos $(u_1, \varepsilon_1, v_1) \sim (u_2, \varepsilon_2, v_2)$ si existen $(u_1, \varepsilon_1, v_1) \overset{(w_1,w_2,\alpha,\beta)}{\Longrightarrow} (u_2, \varepsilon_2, v_2)$ dada por flechas

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[dr, "w_1"] & \\
 & c \\
c_2 \arrow[ur, "w_2"'] &
\end{tikzcd}$$

y *2*-flechas isos

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, bend left, "w_1u_1"] \arrow[rr, bend right, "w_2u_2"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \alpha"] & & c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} b \arrow[rr, bend left, "w_1v_1"] \arrow[rr, bend right, "w_2v_2"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \beta"] & & c \end{tikzcd}$$

tal que conmuta

$$\begin{tikzcd} Fw_1u_1(x) \arrow[r, "Fw_1(\varepsilon_1)"] \arrow[d, "F\alpha_x"'] & Fw_1v_1(y) \arrow[d, "F\beta_y"] \\ Fw_2u_2(x) \arrow[r, "Fw_2(\varepsilon_2)"'] & Fw_2v_2(y) \end{tikzcd}$$

En efecto, ver que $\pi_0(\int F[\Sigma^{eq}])$ es el pseudocolimite no es dificil, por lo visto anteriormente se tiene un isomorfismo

$$[\textstyle\int F, d(c)]_{\Sigma^{-1}} \xrightarrow{\lambda^*} PsCon[F, c]$$

Dado que $d(c)$ es una *2*-categoria *2*-discreta, se tiene que

$$[\textstyle\int F, d(c)]_{\Sigma^{-1}} = [\int F, d(c)]_{\Sigma^{eq}}$$

Es decir, que un funtor invierta las flechas es lo mismo a que las haga equivalencias, ya que en una *2*-categoria *2*-discreta los conceptos de isomorfismo y equivalencia coinciden. Por el *bicalculo de fracciones* de Pronk tenemos una equivalencia de categorias

$$[\textstyle\int F[\Sigma^{eq}], d(c)] \xrightarrow{h^*} [\int F, d(c)]_{\Sigma^{eq}}$$

que es un *isomorfismo* por lo observado en 8.3.
Por ultimo, se tiene un isomorfismo por la adjuncion

$$[\pi_0(\textstyle\int F[\Sigma^{eq}]), c] \xrightarrow{\eta^*} [\int F[\Sigma^{eq}], d(c)]$$

y se obtiene que $\pi_0(\int F[\Sigma^{eq}])$ es el *pseudocolimite* de F.

Tenemos que ver que la construccion que damos es efectivamente esta. Si tomamos la categoria $\int F$ y le aplicamos el bicalculo de fracciones de Pronk, obtenemos una *2*-categoria $\int F[\Sigma^{eq}]$, cuyos *objetos* son pares (x, a) con $x \in Fa$, una flecha $(x, a) \xrightarrow{(u,\varepsilon,v,\varphi)} (y, b)$ esta dada por flechas

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, "u"'] & & b \arrow[dl, "v"] \\ & c & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Fu(x) \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & Fv(y) \arrow[dl, "\varphi"] \\ & z & \end{tikzcd}$$

donde φ es un isomorfismo. Una *2*-flecha

$$\begin{tikzcd}
(x,a) \arrow[rr, bend left, "{(f_1,\varepsilon_1,v_1,\varphi_1)}"] \arrow[rr, bend right, "{(f_2,\varepsilon_2,v_2,\varphi_2)}"'] & \Downarrow & (y,b)
\end{tikzcd}$$

esta representada por flechas

$$\begin{tikzcd}
(c_1,z_1) \arrow[dr, "{(w_1,\sigma_1)}"] & \\
& (c,z) \\
(c_2,z_2) \arrow[ur, "{(w_2,\sigma_2)}"'] &
\end{tikzcd}$$

y *2*-flechas α, β con β un isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
& (c_1,z_1) \arrow[dr, "{(w_1,\sigma_1)}"] & \\
(a,x) \arrow[ur, "{(u_1,\varepsilon_1)}"] \arrow[dr, "{(u_2,\varepsilon_2)}"'] & \Downarrow \alpha & (c,z) \\
& (c_2,z_2) \arrow[ur, "{(w_2,\sigma_2)}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& (c_1,z_1) \arrow[dr, "{(w_1,\sigma_1)}"] & \\
(b,y) \arrow[ur, "{(v_1,\varphi_1)}"] \arrow[dr, "{(u_2,\varphi_2)}"'] & \Downarrow \beta & (c,z) \\
& (c_2,z_2) \arrow[ur, "{(w_2,\sigma_2)}"'] &
\end{tikzcd}$$

cocientadas por la relacion de equivalencia explicitada anteriormente.
Las *2*-flechas α, β estan dadas por la descripcion de $\int F$ por *2*-flechas en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, bend left, "w_1u_1"] \arrow[rr, bend right, "w_2u_2"'] & \Downarrow \alpha & c
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "w_1v_1"] \arrow[rr, bend right, "w_2v_2"'] & \Downarrow \beta & c
\end{tikzcd}$$

con β iso, tal que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
Fw_1u_1(x) \arrow[r, "Fw_1(\varepsilon_1)"] \arrow[d, "F\alpha_x"'] & Fw_1(z_1) \arrow[r, "\sigma_1"] & z \\
Fw_2u_2(x) \arrow[r, "Fw_2(\varepsilon_2)"'] & Fw_2(z_2) \arrow[ur, "\sigma_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Fw_1v_1(y) \arrow[r, "Fw_1(\varphi_1)"] \arrow[d, "F\beta_x"'] & Fw_1(z_1) \arrow[r, "\sigma_1"] & z \\
Fw_2v_2(y) \arrow[r, "Fw_2(\varphi_2)"'] & Fw_2(z_2) \arrow[ur, "\sigma_2"'] &
\end{tikzcd}$$

y tal que $\sigma_1 Fw_1(\varphi_1)$, $\sigma_2 Fw_2(\varphi_2)$ son isos, ya que tiene que ser una flecha cartesiana.

Observamos primero que podemos asumir que α *es un isomorfismo*, ya que siendo $\mathscr{C}$ *2*-filtrada, por el lema 5.5 existe $c \xrightarrow{h} c'$ tal que $h\alpha$ es un iso, y tenemos que

$$((w_1,\sigma_1),(w_2,\sigma_2),\alpha,\beta) \sim ((hw_1,Fh(\sigma_1)),(hw_2,Fh(\sigma_2)),h\alpha,h\beta)$$

ya que basta tomar las flechas

$$\begin{tikzcd}
(c,z) \arrow[dr, "(h,1_{Fhz})"] & \\
& (c',Fhz) \\
(c',Fhz) \arrow[ur, "(1_{c'},1_{Fhz})"'] &
\end{tikzcd}$$

y como isomorfismos las identidades, ya que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
& (c,z) \arrow[dr, "(h,1_{Fhz})"] & \\
(c_1,z_1) \arrow[ur, "(w_1,\sigma_1)"] \arrow[dr, "(hw_1,Fh(\sigma_1))"'] & & (c',Fhz) \\
& (c',Fhz) \arrow[ur, "(1_{c'},1_{Fhz})"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& (c,z) \arrow[dr, "(h,1_{Fhz})"] & \\
(c_2,z_2) \arrow[ur, "(w_2,\sigma_2)"] \arrow[dr, "(hw_2,Fh(\sigma_2))"'] & & (c',Fhz) \\
& (c',Fhz) \arrow[ur, "(1_{c'},1_{Fhz})"'] &
\end{tikzcd}$$

Es claro que se satisfacen *(LL1)* y *(LL2)*.

Una vez aplicado π_0, podemos identificar la flecha $(x,a) \xrightarrow{(u,\varepsilon,v,\varphi)} (y,b)$ con la flecha $(x,a) \xrightarrow{(u,\varphi^{-1}\varepsilon,v)} (y,b)$ dada por las flechas

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "u"'] & & b \arrow[dl, "v"] \\
& c &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Fu(x) \arrow[dr, "\varphi^{-1}\varepsilon"'] & & Fv(y) \arrow[dl, "1_{Fv(y)}"] \\
& Fv(y) &
\end{tikzcd}$$

ya que se tienen diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
 & (c,z) \arrow[dr, "{(1_c,1_z)}"] & \\
(a,x) \arrow[ur, "{(u,\varepsilon)}"] \arrow[dr, "{(u,\varphi^{-1}\varepsilon)}"'] & & (c,z) \\
 & (c,Fv(y)) \arrow[ur, "{(1_c,\varphi)}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & (c,z) \arrow[dr, "{(1_c,1_z)}"] & \\
(b,y) \arrow[ur, "{(v,\varphi)}"] \arrow[dr, "{(v,1_{Fv(y)})}"'] & & (c,z) \\
 & (c,Fv(y)) \arrow[ur, "{(1_c,\varphi)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Si tenemos una *2*-flecha como arriba

$$\begin{tikzcd}
(x,a) \arrow[r, bend left, "{(f_1,\varepsilon_1,v_1,\varphi_1)}"] \arrow[r, bend right, "{(f_2,\varepsilon_2,v_2,\varphi_2)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & (y,b)
\end{tikzcd}$$

entonces, se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Fw_1u_1(x) \arrow[r, "Fw_1(\varphi_1^{-1}\varepsilon_1)"] \arrow[d, "F\alpha_x"'] & Fw_1v_1(y) \arrow[d, "F\beta_x"] \\
Fw_2u_2(x) \arrow[r, "Fw_2(\varphi_2^{-1}\varepsilon_2)"'] & Fw_2v_2(y)
\end{tikzcd}$$

ya que en el diagrama siguiente, el diagrama exterior y el de la izquierda conmutan

$$\begin{tikzcd}
Fw_1u_1(x) \arrow[r, "Fw_1(\varphi_1^{-1}\varepsilon_1)"] \arrow[d, "F\alpha_x"'] & Fw_1v_1(y) \arrow[r, "Fw_1(\varphi_1)"] \arrow[d, "F\beta_x"'] & Fw_1(z_1) \arrow[r, "\sigma_1"] & z \\
Fw_2u_2(x) \arrow[r, "Fw_2(\varphi_2^{-1}\varepsilon_2)"'] & Fw_2v_2(y) \arrow[r, "Fw_2(\varphi_2)"'] & Fw_2(z_2) \arrow[ur, "\sigma_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, en $\pi_0(\int F[\Sigma^{eq}])$ podemos tomar a las flechas dadas por $(x,a) \xrightarrow{(u,\varepsilon,v)} (y,b)$, con

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "u"'] & & b \arrow[dl, "v"] \\
 & c &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Fu(x) \arrow[r, "\varepsilon"] & Fv(y)
\end{tikzcd}$$

y se identifican $(u_1,\varepsilon_1,v_1) \sim (u_2,\varepsilon_2,v_2)$ si existen $(u_1,\varepsilon_1,v_1) \xRightarrow{(w_1,w_2,\alpha,\beta)} (u_2,\varepsilon_2,v_2)$ dada por

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[dr, "w_1"] & \\
& c \\
c_2 \arrow[ur, "w_2"'] &
\end{tikzcd}$$

y *2*-flechas isos

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "w_1u_1"] \arrow[r, bend right, "w_2u_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & c
\end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}
b \arrow[r, bend left, "w_1v_1"] \arrow[r, bend right, "w_2v_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta"] & c
\end{tikzcd}$$

tal que conmuta

$$\begin{tikzcd}
Fw_1u_1(x) \arrow[r, "Fw_1(\varepsilon_1)"] \arrow[d, "F\alpha_x"'] & Fw_1v_1(y) \arrow[d, "F\beta_y"] \\
Fw_2u_2(x) \arrow[r, "Fw_2(\varepsilon_2)"'] & Fw_2v_2(y)
\end{tikzcd}$$

como afirmamos anteriormente.

References

[SGA1] A. Grothendieck. *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA1).* Lecture notes in mathematics, Volume 224, Springer-Verlag, 1971.

[SGA4-1] M. Artin, A. Grothendieck, J.L.Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des Schémas, Tome 1 (SGA4).* Lecture Notes in Mathematics, Volume 269, Springer-Verlag, 1972.

[SGA4-2] M. Artin, A. Grothendieck, J.L.Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des Schémas, Tome 2 (SGA4).* Lecture Notes in Mathematics, Volume 270, Springer-Verlag, 1972.

[SGA4-3] M. Artin, A. Grothendieck, J.L.Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des Schémas, Tome 3 (SGA4).* Lecture Notes in Mathematics, Volume 305, Springer-Verlag, 1972.

[GZ67] P. Gabriel and M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory.* Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete, Band 35, 1967.

[DS06] E.J. Dubuc, R. Street. *A construction of 2-filtered bicolimits of categories.* Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, Tome 47, Numéro 2, pp. 83–106, 2006.

[DY11] E.J. Dubuc, S. Yuhjtman. *A construction of 2-cofiltered bilimits of topoi.* Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, Tome 52, Numéro 4, pp. 242–252, 2011.

[Dub10] E.J. Dubuc. *2-Filteredness and the point of every galois topos.* Applied Categorical Structures, Volume 18, Issue 2, pp. 115-121, 2010.

[Pro96] D.A. Pronk. *Etendues and stacks as bicategories of fractions.* Compositio Mathematica, Tome 102, Numéro 3, pp. 243-303, 1996.

[Her99] C. Hermida. *Some properties of Fib as a fibred 2-category.* Journal of Pure and Applied Algebra, Volume 134, Issue 1, pp. 83-109, 1999.

[Buc14] M. Buckley. *Fibred 2-categories and bicategories.* Journal of Pure and Applied Algebra, Volume 218, Issue 6, pp. 1034–1074, 2014.

[Bak11] I. Bakovic. *Fibrations of bicategories.* Preprint.

[Bak07] I. Bakovic. *Grothendieck construction for bicategories.* Preprint.

[Wol70] H.E. Wolff. *V-localizations and V-triples.* Dissertation, University of Illinois, 1970.

[Wol73] H.E. Wolff. *V-localizations and V-monads.* Journal of Algebra, Volume 24, Issue 3, pp. 405-438, 1973.

[DPP03] R. Dawson, R. Paré, D. A. Pronk. *Adjoining adjoints.* Advances in Mathematics, Volume 178, Issue 1, pp. 99–140, 2003.

[Ken92] J.F. Kennison. *The fundamental localic groupoid of a topos.* Journal of Pure and Applied Algebra, Volume 77, Issue 1, pp. 67-86, 1992.

[JS93] A. Joyal, R. Street. *Pullbacks equivalent to pseudopullbacks.* Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, Tome 34, Numéro 2, pp. 153–156, 1993.

[Kel93] G.M. Kelly. *Elementary observations on 2-categorical limits.* Bulletin of the Australian Mathematical Society, Volume 39, pp. 301–317, 1989.

[KS74] G.M. Kelly, R. Street. *Review of the elements of 2-categories.* Category Seminar: Proceedings Sydney Category Theory Seminar 1972 /1973, Lecture Notes in Mathematics, Volume 420, pp. 75–103, Springer-Verlag, 1974.

[Gra74] J.W. Gray. *Formal category theory: Adjointness for 2-categories.* Lecture Notes in Mathematics, Volume 391, Springer-Verlag, 1974.

[Ben67] J. Bénabou. *Introduction to bicategories.* Reports of the Midwest Category Seminar, Springer-Verlag, pp. 1–77, 1967.

[McL07] C. McLarty. *The rising sea: Grothendieck on simplicity and generality I.* Episodes in the history of recent algebra, American Mathematical Society, pp. 301–326, 2007.

[Kel82] G.M. Kelly. *Basic concepts of enriched category theory.* London Mathematical Society Lecture Note Series 64, Cambridge University Press, 1982.

[Vis06] A. Vistoli. *Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*, in B. Fantechi, L. Gottsche, L. Illusie, S. Kleiman, N. Nitsure, A. Vistoli, *Fundamental Algebraic Geometry: Grothendieck's FGA explained*, Mathematical Surveys and Monographs 123, A.M.S., 2006.

[CFWM] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1998.

[HCA1] F. Borceux. *Handbook of categorical algebra I, Basic category theory.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Volume 50, Cambridge University Press, 1994.

[HCA2] F. Borceux. *Handbook of categorical algebra II, Categories and structure.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Volume 51, Cambridge University Press, 1994.

[HCA3] F. Borceux. *Handbook of categorical algebra III, Categories and sheaves.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Volume 52, Cambridge University Press, 1994.