



**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
**Departamento de Matemática**

**Tesis de Licenciatura**

**Superficies, nudos y grupos localmente indicables**

**Jazmín Laila Schmunis**

**Director: Gabriel Minian**

Noviembre 2015

# Introducción

En esta tesis estudiamos algunos de los temas, resultados y herramientas básicos de la topología en dimensiones bajas. Comenzamos analizando uno de los invariantes de nudos más conocidos: el grupo del nudo, es decir, el grupo fundamental del complemento del nudo en el espacio. Analizamos la relación entre nudos y superficies, estudiando las superficies de Seifert, las cuales son superficies compactas y orientadas en el espacio cuyo borde es un nudo dado  $y$ , de la mano de las superficies de Seifert, estudiamos el género de los nudos  $y$ , consecuentemente, su factorización como suma conexa de nudos primos. Mostramos la clasificación de superficies compactas desde dos puntos de vista diferentes: el punto de vista diferencial, utilizando Teoría de Morse, y el punto de vista combinatorio, utilizando que toda superficie admite una triangulación. Por último, relacionamos el grupo del nudo con la asféricidad de su complemento, dando una demostración detallada de un teorema demostrado por Howie en [8], y por Howie y Short en [9] que afirma que los grupos de nudos son localmente indicables. Decidimos concentrarnos en este último resultado dado que su demostración involucra y combina diversos temas de topología, geometría y álgebra como, por ejemplo, la relación entre presentaciones de grupos y CW-complejos de dimensión 2, la relación entre 2-complejos y variedades de dimensión 3, algunos resultados propios de las variedades de dimensión 3, la dualidad de Poincaré, etc.

Si consideramos en  $\mathbb{S}^3$  un entorno tubular abierto de un nudo dado, podemos asociarle a dicho nudo una variedad compacta y orientable de dimensión 3 cuyo borde es un toro. El grupo fundamental de dicha variedad coincide con el grupo del nudo.

En la década del 40 no se sabía aún si la 3-variedad asociada a un nudo era esférica o no. Un espacio topológico arcoconexo  $X$  se dice esférico si sus grupos de homotopía  $\pi_n(X)$  son cero para todo  $n \geq 2$ . Motivado en parte por entender la asféricidad de los complementos de nudos, en 1941 J.H.C. Whitehead se preguntó si todo subcomplejo de un 2-complejo esférico es también esférico (ver [19]). La pregunta de Whitehead adquirió luego el carácter de conjetura y aún no ha sido resuelta. De ser afirmativa la respuesta a la pregunta de Whitehead, podría deducirse de ella la asféricidad de los complementos de nudos debido a que estas 3-variedades tienen un “spine”, el cual resulta ser un subcomplejo de un 2-complejo contráctil (y, por lo tanto, esférico). Concretamente, el spine de la 3-variedad de la que estamos hablando es el 2-complejo asociado a la presentación de Wirtinger del grupo del nudo, la cual exponemos en el primer capítulo (ver [1]).

De todas formas e independientemente de la conjetura de Whitehead, en 1957 Papakyriakopoulos probó la asféricidad de los complementos de nudos utilizando técnicas de 3-variedades (ver [16]). Utilizando el resultado de Papakyriakopoulos, en la década del 80 Howie y Short probaron que el grupo de un nudo es localmente indicable (ver

[9]). Un grupo se dice localmente indicable si todos sus subgrupos finitamente generados admiten un epimorfismo al anillo de enteros. Es interesante notar que otro resultado de Howie ([8]) permitiría probar que el hecho de que el grupo de un nudo sea localmente indicable implicaría automáticamente la asféricidad de su complemento.

El primer capítulo de esta tesis consta de dos partes: una primera parte en la cual introducimos los conceptos básicos de la teoría de nudos y una segunda parte en la cual presentamos el grupo de un nudo y mostramos una manera de calcularlo hallando la presentación de Wirtinger del mismo.

El segundo capítulo está dedicado a la clasificación de superficies compactas. Abordamos el tema desde dos enfoques diferentes. Primero demostramos los teoremas de clasificación con herramientas de topología diferencial. En particular, introducimos la Teoría de Morse, que será fundamental en estas demostraciones. Luego, volvemos a demostrar los teoremas de clasificación para superficies sin borde, pero ahora con herramientas de combinatoria aprovechando que toda superficie puede ser triangulada. Definimos las presentaciones de superficies y vemos una serie de transformaciones que pueden aplicarse a las mismas para obtener presentaciones equivalentes.

En el capítulo 3 definimos las superficies de Seifert y probamos la existencia de las mismas para todo nudo manso (un nudo es *manso* si existe una triangulación de  $\mathbb{R}^3$  de la cual este es un subcomplejo). Definimos qué significa que un nudo sea primo y también definimos el género de un nudo. Finalizamos esta sección probando que todo nudo no trivial es suma conexa de nudos primos.

El cuarto y último capítulo tiene por objetivo demostrar que el grupo fundamental del complemento de un nudo en  $\mathbb{S}^3$  es localmente indicable. En la primera parte nos dedicamos a enunciar y recordar conceptos y resultados necesarios para dicha demostración, y luego nos avocamos a la demostración propiamente dicha.

# Agradecimientos

A Gabriel, por aceptar dirigir esta tesis, por permitirme cambiar de tema cuando me di cuenta de que el que había elegido originalmente no me entusiasmaba tanto como yo quería, por ayudarme luego a encontrar un tema tan pero tan hermoso, por darme la posibilidad de tener cierta libertad creativa a la hora de elegir los temas a escribir, por no salir corriendo al ver mis ilustraciones multicolor, por quedarse en la facultad hasta muy tarde ayudándome con la tesis y por ayudarme hasta algunos Domingos vía e-mail.

A Manuela, por leer y corregir mi tesis minuciosamente (y por la buena onda).

A Marco, por sus aportes súper enriquecedores. Gracias por contarme cosas de nudos tan copadas!

A mi mamá, mi papá y mi abuela, por darme la posibilidad de dedicarme a estudiar, por apoyar todas mis decisiones (a pesar de cuestionarlas muchas veces) y por estar para mí siempre que los necesito. A mi abuelo Yaco, quien si bien se fue cuando yo era chica, creo que aún hay mucho que le debo.

A Cris, la mejor “madrstra” del Mundo, por malcriarme tanto y porque siempre puedo contar con ella. Gracias a toda su familia por siempre recibirme de brazos abiertos.

A María Marta, por acompañarme y ayudarme en este camino desde el principio del principio.

A todos los docentes que me contestaron gentilmente mis numerosísimas consultas. Le debo un monumento a la paciencia a más de uno.

A Dani Carando, por la buena onda de siempre, y por tratar de tranquilizarme cada vez que me ve ponerme loca de estrés por temas académico/burocráticos.

A Irene, por salvarme las papas con el cargo.

A mis compañeros docentes de este cuatri, Nico y Martín, por el apoyo moral en mi estado de locura pre-recibida, y algún que otro tip computacional.

A Cristina López, por ofrecerme amorosamente consejo cuando más lo necesitaba, y por sus hermosísimas teóricas de Cálculo Avanzado, que hicieron que me enamorara de la Matemática aún más.

A Eduardo y Esteban, por la buena onda con mis últimos finales.

A Sandra, mi querida profe de expresión corporal, por recibirme cada semana con mi estrés, mi cansancio y mis quejas y devolverme un poquito más entera.

A mi querida profe de teatro Gaby Ferrero (“mami Gaby”), por enseñarme a pararme frente al público, mirar a los espectadores a los ojos y proyectar la voz. Me acuerdo de vos cada vez que doy una clase, una charla de divulgación o concurso para un cargo docente, y seguro que todo lo que me enseñaste estará de presente al defender esta tesis.

A mis compañeras y entrenadores de gimnasia artística quienes, si bien no estuvieron

tan presentes durante mis años en la facultad, estuvieron enormemente presentes durante muchísimos años y etapas importantísimas de mi vida.

A las chicas del Arce, por no permitir que se corte a pesar de los años y de no vernos tan seguido. A Cami, porque aunque pasemos 6 meses sin vernos, cuando nos encontramos es como si nos hubiésemos visto ayer.

A Bar, porque va a escuchar mi defensa aunque deteste la Matemática.

A la Lu, por bancarme por WhatsApp en el día a día.

A Guille y Vale, por darme la posibilidad de ser parte del equipo de divulgadores y así poder acercar la Matemática a la gente como siempre soñé. Fue una de las mejores cosas que me pasaron en la vida. No sólo disfruté enormemente la mayoría de las actividades, sino que también aprendí mucho y se me abrieron muchas puertas. A Rafa, por ser el mejor divu-mate-coequiper, y a Dani Grimaldi, por invitarme a ser voluntaria en la que fue mi primera experiencia de divulgación.

A mi querida profe Ferni, aunque probablemente nunca lea esto, por enseñar en el secundario matemática “de verdad”, por inculcarme (aunque no pudiera apreciarlo hasta mucho después) el valor de saber las definiciones, y por transmitir tanto amor por la materia que enseñaba.

Que yo aprenda a escribir en LaTeX es, podría decirse, un trabajo en equipo. Gran parte de mis agradecimientos es a todos (o al menos a muchos) de los que me ayudaron y me siguen ayudando en el día a día con esto. Quiero agradecer en especial a Mariano Suárez -Alvarez por el taller que dio a mitad de este año. Fue para mí un antes y un después escribiendo en LaTeX.

A mi querida “botella de Klein” (Sofi, Mati, Aye, Nati, Santi D., Santi V., Di, Pablo, Bruno, Rafa, Euge, Kari y Maxi), por acompañarme todos los días vía WAP, por el apoyo moral, por el asesoramiento multirrubro (desde cómo empezar a escribir en LaTeX hasta en qué programa poner el lavarropas) y porque los quiero.

A Juanma y Eli, a quienes conocí en mi primer cuatrimestre en esta facultad y con quienes cursé mis primeras materias cuando todo era nuevo para mí. Ya pasaron varios años y se han convertido en grandes amigos. Gracias por sacarme una sonrisa cada vez que los veo. Gracias, Juanma, por pasarme tus tex y la página para que aprendiera a poner la bibliografía. Gracias, Eli, por los mejores abrazos del mundo.

A Marce, por instalar MikTeX y TeXnicCenter en mi compu aún mucho antes de que empezara a usarlos, y por ser alguien con quien siempre se puede contar.

A Facu, por ayudarme a instalar los programas necesarios para escribir en LaTeX en la compu portátil.

A Maxi, Lucho y Santi V., por el asesoramiento tecnológico frecuente.

A Yami y Nico, por todos los abrazos diarios.

A Maca, por apoyarme aunque ya no estudiemos juntas.

A Xime, por ser mi topo-hermanita mayor y aconsejarme cuando necesito. También por pasarme los tex de su tesis para que pudiera aprender de ellos.

A Sofi, por los mil tips de LaTeX, por el asesoramiento burocrático, por estar siempre dispuesta a dar una mano y hasta ofrecerse a hablar con mi madre para ayudar a organizar la comida post defensa.

A Di, por pasarme el programa “ipe” para hacer ilustraciones para la tesis y ayudarme a instalarlo, por pasarme el link al Detexify, por pasarme los tex de su beamer para que

aprendiera a hacerlo, y por comprometerse a hacer brownies para la comida postdefensa.

A Mati, por todo el asesoramiento de LaTeX vía WAP y personalmente, por resolver el misterio de las páginas en blanco, por escuchar mi primer ensayo de la charla de la defensa y por estar siempre dispuesto a dar una mano.

A Euge, por tirarme la posta más de una vez con temas de LaTeX y por prestarme sus apuntes de topo diferencial que fueron de suma utilidad.

A Kari, por pasarme los primeros tex para que aprendiera cuando todavía me parecía chino avanzado.

A Nati, por prestarme su carpeta de geometría diferencial para que pudiera pulir la mía y por las juntadas de Elementos de Espacios de Banach.

A Meli y Melanie, mis compa de mesa de estudio todas las últimas semanas.

A Rocha, por prestarme su cuaderno de complementos de funcional y ofrecerme el pendrive para imprimir cuando no andaba Internet.

A toda la gente linda que conocí en la facultad, por hacer que disfrute enormemente mis horas acá. Más allá del estrés propio de la actividad académica, mis horas en la facultad son inmensamente felices.

A todos los amigos, compañeros, alumnos, docentes y compañeros docentes que en estos últimos días me dieron una mano con esto o con aquello y/o me dieron palabras de ánimo. Me sentí muy mimada :). Gracias Nami, Javi, Mari, Pau, Luli, Marian, Vir, Juli, Diego, Dani K., Germán, Manu, Carlo, Mauro, Cristian, Luz, Tincho y todos los mencionados anteriormente y todos los que deberían estar nombrados pero estoy omitiendo por distraída.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>4</b>
<b>Notación</b>	<b>8</b>
<b>1. La presentación de Wirtinger</b>	<b>9</b>
1.1. Introducción . . . . .	9
1.2. La presentación de Wirtinger . . . . .	12
<b>2. Clasificación de superficies</b>	<b>23</b>
2.1. Introducción . . . . .	23
2.2. Teoría de Morse . . . . .	23
2.3. La teoría de Morse en la clasificación de superficies . . . . .	32
2.4. Presentaciones de superficies . . . . .	39
2.5. Clasificación combinatoria de superficies . . . . .	44
<b>3. Superficies de Seifert</b>	<b>50</b>
3.1. Existencia de Superficies de Seifert . . . . .	50
<b>4. Grupos localmente indicables</b>	<b>58</b>
4.1. Introducción . . . . .	58
4.2. El grupo de un nudo es localmente indicable . . . . .	60
<b>Bibliografía</b>	<b>63</b>

# Notación

Comenzamos haciendo algunas aclaraciones con respecto a algunas definiciones y notaciones que utilizaremos a lo largo de esta tesis. Cuando hablemos de “norma” en  $\mathbb{R}^n$  nos referiremos a la norma euclídea, y notaremos con  $\mathbb{D}^n$  al conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^n$  de norma menor o igual a 1, e  $\mathbb{I}$  al intervalo  $[0, 1]$ . Llamaremos *n-bola* o *n-disco* a cualquier espacio homeomorfo a  $\mathbb{D}^n$ , y *n-esfera* a cualquier espacio homeomorfo a  $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ . Cuando querramos ser más específicos, notaremos  $B(x, R) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < R\}$  y  $\overline{B}(x, R) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq R\}$ . Recordemos que un *k-simplex* en  $\mathbb{R}^n$  es la cápsula convexa de  $k + 1$  puntos afinmente independientes (intervalos, triángulos, tetrahedros, etc.).

Utilizaremos la notación “ $\simeq$ ” para denotar que dos espacios son homotópicamente equivalentes, “ $\approx$ ” para denotar que son homeomorfos, y “ $\cong$ ” para denotar que son difeomorfos. Si  $Y$  es subespacio de un espacio topológico  $X$ , notaremos  $Y^\circ$  al interior de  $Y$ . Si  $K$  es un complejo simplicial y  $\varphi$  un morfismo simplicial, notaremos  $|K|$  y  $|\varphi|$  a sus realizaciones geométricas respectivas.

Para isomorfismos de grupos utilizaremos la notación “ $\cong$ ”.

Recordemos que  $\mathbb{S}^n$  puede ser vista como la compactificación a un punto de  $\mathbb{R}^n$  y, por lo tanto,  $\mathbb{R}^n$  puede ser visto como un subespacio de  $\mathbb{S}^n$ .

Recordemos que tanto  $\mathbb{R}^n$  como  $\mathbb{S}^n$  pueden ser triangulados. Diremos que un subconjunto  $L$  de los mismos es *lineal a trozos* o *PL* (“*piecewise linear*”) si existe una triangulación del espacio tal que  $L$  resulte un subcomplejo del mismo.

Dado un grupo  $G$ , notamos con  $G^{ab}$  a su abelianizado, es decir,  $G^{ab} = G/[G, G]$ .

# Capítulo 1

## La presentación de Wirtinger

### 1.1. Introducción

En este capítulo veremos algunas nociones básicas de la teoría de nudos y estudiaremos uno de sus invariantes más conocidos: el grupo del nudo.

Este capítulo está basado principalmente en los libros [17] y [12]. Algunas de las ilustraciones que aparecen aquí están basadas en ilustraciones de [17].

**Definición 1.1.1.** *Dado  $X$  un espacio topológico, un nudo en  $X$  es un subespacio  $K \subseteq X$  homeomorfo a una  $n$ -esfera para algún  $n \in \mathbb{N}$ .*

En esta tesis nos dedicaremos al caso  $n = 1$  y  $X = \mathbb{R}^3$  o  $X = \mathbb{S}^3$ . También supondremos que la inclusión de  $K$  en  $X$  es PL y orientada, es decir, existen estructuras simpliciales orientadas en  $\mathbb{S}^1$  y en  $X$  para las cuales dicha función es simplicial y preserva orientación, o bien supondremos que la inclusión es un embedding (que preserva orientación). En cuanto a  $\mathbb{S}^1$ , estamos asumiendo una estructura simplicial finita, es decir,  $K$  es una concatenación de finitos segmentos en  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{S}^3$  tal que el último segmento termina donde comienza de primero. Los nudos que verifican esto se dicen *mansos*, a diferencia de los llamados nudos *salvajes*. Ejemplos de estos últimos pueden hallarse en [17].

A lo largo de este trabajo vamos a suponer que los nudos son poligonales (PL) o  $\mathcal{C}^\infty$  según convenga. En cuanto a la representación gráfica de los mismos, en el caso PL podemos suponer que el nudo está formado por una gran cantidad de segmentos suficientemente pequeños de modo tal que a simple vista las líneas se vean redondeadas.

Según el contexto, puede o no tenerse en cuenta la orientación del nudo, ya sea como embedding de  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{S}^3$ , o como subcomplejo de dimensión 1 de  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{S}^3$ .

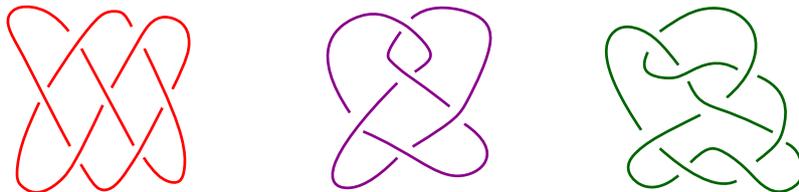


Figura 1.1: Algunos ejemplos de nudos

Tablas con numerosos ejemplos de nudos pueden hallarse en [17] y en [12].

**Ejemplo 1.1.2.** Una clase particular de nudos son los nudos toroidales. Llamamos toroidales a los nudos que se hallan contenidos en la superficie de un toro. Tenemos que  $\pi_1(T^2) = \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Tenemos dos generadores standard de  $\pi_1(T^2)$  que son  $L : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  y  $M : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  dados por  $L(x) = (x, 1)$  y  $M(x) = (1, x)$ . Los de la primera clase reciben el nombre de longitudes y los segundos son llamados meridianos. Todo nudo  $K$  en  $T^2$  puede considerarse como una clase en  $\pi_1(T^2)$ . Dados  $p$  y  $q$  enteros comprimos, notamos  $T_{p,q}$  a la clase de nudos toroidales que recorren  $T^2$  en sentido longitudinal  $p$  veces, y en sentido meridional  $q$  veces.

**Definición 1.1.3.** Dos nudos  $K$  y  $K'$  son equivalentes si existe un homeomorfismo  $h : X \rightarrow X$  tal que  $h(K) = K'$ . Vamos a asumir también que  $h$  es lineal a trozos y que preserva orientación.

Es claro que esta definición nos da una relación de equivalencia. La clase de equivalencia de un nudo se llama el *tipo* del nudo.

El hecho de que  $h$  sea lineal a trozos implica que la misma es isotópica a la identidad, es decir, existe una homotopía  $H : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^3$  tal que  $H(x, 0) = x$  y  $H(x, 1) = h(x)$  para todo  $x$  en  $\mathbb{S}^3$ , que además verifica que la función  $H(\cdot, t)$  es un homeomorfismo para todo  $t \in \mathbb{I}$  fijo. En otras palabras, todo el espacio puede deformarse de foma continua llevando  $K$  a  $K'$  (idem con  $\mathbb{R}^3$ ).

**Definición 1.1.4.** Decimos que un nudo  $K$  es trivial o “desanudado” si es equivalente a  $i : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (o  $\mathbb{S}^3$ ) la inclusión canónica. Equivalentemente,  $K$  es trivial si existe  $g : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (o  $\mathbb{S}^3$ ) un embedding (o una función lineal a trozos) tal que  $K$  sea el borde de  $g(\mathbb{D}^2)$  (en otras palabras,  $K$  es el borde de un 2-disco  $PL$  en  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{S}^3$ ).

**Definición 1.1.5.** Un invariante de nudos es una función  $K \mapsto f(K)$  que asigna a cada nudo  $K$  un objeto  $f(K)$  (según el contexto, puede ser un grupo, un polinomio, una matriz, etc.) de modo tal que si dos nudos  $K$  y  $K'$  son equivalentes,  $f(K)$  y  $f(K')$  también lo son (en el contexto correspondiente).

De la definición de equivalencia de nudos se deduce que si dos nudos son equivalentes, entonces sus complementos son homeomorfos. Por lo tanto, la clase de homeomorfismo del complemento de un nudo es un invariante de nudos. Como espacios homeomorfos tienen grupos de homotopía isomorfos, el  $\pi_1$  de dicho complemento es también un invariante de nudos. Nos enfocaremos ahora en este último.

Un teorema de suma utilidad a la hora de calcular el grupo fundamental de un espacio topológico es el teorema de Van Kampen, el cual da una manera, bajo ciertas hipótesis, de calcular el  $\pi_1$  de un espacio a partir del  $\pi_1$  de ciertos subespacios del mismo. Una demostración de este teorema puede hallarse en [4].

Antes de enunciar el teorema, recordemos la siguiente definición:

**Definición 1.1.6.** Dada una familia de grupos  $(G_i)_{i \in I}$ , se define el producto libre  $*_{i \in I} G_i$  de dichos grupos como el conjunto de tiras finitas (posiblemente vacías)  $g_1 \dots g_n$ , donde  $g_j \in G_{i_j}$  para algún  $i_j \in I$ ,  $i_j \neq i_{j+1} \forall 1 \leq j \leq n-1$  y  $g_j \neq 1 \forall 1 \leq j \leq n$ . Se define en

$*_{i \in I} G_i$  el producto

$$g_1 \dots g_n * h_{n+1} \dots h_m = \begin{cases} g_1 \dots g_n h_{n+1} \dots h_m & \text{si } i_n \neq i_{n+1} \\ g_1 \dots g_{n-1} (g_n h_{n+1}) h_2 \dots h_m & \text{si } i_n = i_{n+1} \text{ y } h_{n+1} \neq g_n^{-1} \\ g_1 \dots g_{n-1} * h_2 \dots h_m & \text{si } i_n = i_{n+1} \text{ y } h_{n+1} = g_n^{-1} \end{cases}$$

El conjunto  $*_{i \in I} G_i$  junto con la operación  $*$  forman un grupo cuyo elemento neutro es la tira vacía.

**Observación 1.1.7.** Si  $G$  y  $H$  son dos grupos con presentaciones  $\langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_m \rangle$  y  $\langle y_1, \dots, y_s | t_1, \dots, t_k \rangle$  respectivamente, entonces  $\langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_s | r_1, \dots, r_m, t_1, \dots, t_k \rangle$  es una presentación de  $G * H$ .

**Teorema 1.1.8. (Teorema de Van-Kampen)** Sean  $X$  un espacio topológico y  $x_0 \in X$  tales que  $X = \cup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ , con  $A_\alpha$  abierto arco-conexo para todo  $\alpha \in \Lambda$  y  $x_0 \in \cap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ . Si  $A_\alpha \cap A_\beta$  es arco-conexo  $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ , entonces el morfismo

$$\phi : *_{\alpha \in \Lambda} \pi_1(A_\alpha, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

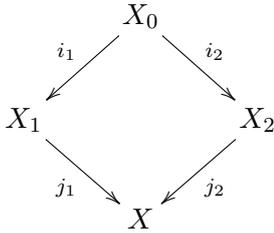
dado por

$$\phi([f_1] * [f_2] * \dots * [f_n]) = [f_1 * f_2 * \dots * f_n]$$

es sobreyectivo. Si además  $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$  es arco-conexo  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$ , entonces  $Nu(\phi)$  es el subgrupo normal generado por los elementos de la forma  $[\omega] * [\bar{\omega}]$ , donde  $\omega$  es un lazo en  $A_\alpha \cap A_\beta$  con base en  $x_0$  para algunos  $\alpha, \beta \in \Lambda$ , y  $\bar{\omega}$  es el mismo lazo recorrido en sentido contrario, tomando  $[\omega]$  como un elemento de  $\pi_1(A_\alpha, x_0)$  y  $[\bar{\omega}]$  como un elemento de  $\pi_1(A_\beta, x_0)$ . En tal caso,

$$\pi_1(X, x_0) \cong *_{\alpha \in \Lambda} \pi_1(A_\alpha, x_0) / Nu(\phi).$$

**Observación 1.1.9.** Supongamos que  $X$  es un espacio topológico y que  $X_1$  y  $X_2$  son dos abiertos arco-conexos no vacíos de  $X$  tales que  $X = X_1 \cup X_2$  y que  $X_0 = X_1 \cap X_2$  es también arco-conexo. Sean  $\langle x_1, \dots | r_1, \dots \rangle$ ,  $\langle y_1, \dots | t_1, \dots \rangle$  y  $\langle z_1, \dots | s_1, \dots \rangle$  presentaciones de  $\pi_1(X_1)$  y  $\pi_1(X_2)$  y  $\pi_1(X_0)$  respectivamente, consideremos las inclusiones



Aplicando el teorema de Van Kampen y la observación 1.1.7, obtenemos que

$$\pi_1(X) \cong \langle x_1, \dots, y_1, \dots | r_1, \dots, t_1, \dots \rangle / R,$$

donde  $R$  es el subgrupo normal generado por los elementos de la forma  $i_{1*}(z) * (i_{2*}(z))^{-1}$ , con  $z$  la clase de un lazo en  $X_0$ . Esto significa que, si  $z = z_{j_1} \dots z_{j_k}$ , entonces,

$i_1(z_{j_1} \cdots z_{j_k}) * i_2((z_{j_1} \cdots z_{j_k})^{-1}) = 1$  en  $\pi_1(X)$ . Observemos que esto es equivalente a que  $i_1(z_{j_1}) \cdots i_1(z_{j_k}) * (i_2(z_{j_k}))^{-1} \cdots (i_2(z_{j_1}))^{-1} = 1$  y, por lo tanto, basta con pedir que la igualdad valga para los  $z_j$ . Dicho todo esto, podemos concluir que

$$\pi_1(X) \cong \langle x_1, \dots, y_1, \dots \mid r_1, \dots, t_1, \dots, i_{1*}(z_1) = i_{2*}(z_1), \dots \rangle.$$

**Proposición 1.1.10.** *Dado  $n \geq 3$ , si  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  es acotado y  $\mathbb{R}^n \setminus B$  es arco-conexo, entonces la inclusión  $i : \mathbb{R}^n \setminus B \rightarrow S^n \setminus \bar{B}$  induce un isomorfismo*

$$i_* : \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus B) \rightarrow \pi_1(S^n \setminus B).$$

*Demostración:* Como  $B$  es acotado, existe  $M \geq 0$  tal que  $B \subseteq \bar{B}(0, M)$ . Consideremos  $U = S^n \setminus \bar{B}(0, M)$ . Vale que  $U$  es un entorno de  $\infty$ , y además  $U \cap B = \emptyset$ . Por lo tanto,  $U \cap (\mathbb{R}^n \setminus B) = U \cap \mathbb{R}^n = U \setminus \{\infty\} \cong S^{n-1}$ , lo que implica que es simplemente conexo siendo  $n \geq 3$ . Observemos que tanto  $\mathbb{R}^n \setminus B$  como  $U$  son arco-conexos y abiertos en  $S^n \setminus B$ , y que  $S^n \setminus B = (\mathbb{R}^n \setminus B) \cup U$ . Aplicando el *Teorema de Van Kampen*, obtenemos que el morfismo  $\phi : (\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus B)) * \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(S^n \setminus B)$  es sobreyectivo. Como  $U$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ ,  $\pi_1(U) = 0$ , por lo cual el morfismo anterior resultará ser la inclusión  $i_* : \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus B) \rightarrow \pi_1(S^n \setminus B)$ . Además, el *Teorema de Van Kampen* también nos dice que el núcleo de  $\phi$  está generado por los elementos de la forma  $[\omega] * [\bar{\omega}]$ , donde  $\omega$  es un lazo en  $U \cap (\mathbb{R}^n \setminus B)$ , el cual ya vimos que es simplemente conexo, lo que implica que  $Nu(\phi) = 0$  y, por lo tanto,  $\phi = i_*$  es un isomorfismo. □

En conclusión, a la hora de calcular el  $\pi_1$  del complemento de un nudo  $K$ , da lo mismo calcularlo en  $\mathbb{R}^3$  o en  $S^3$ . Dicho grupo se denomina el *grupo de  $K$* . Veremos a continuación una manera de calcularlo.

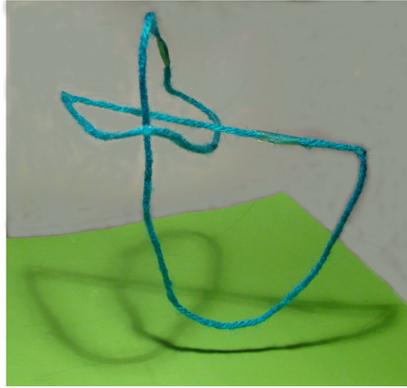
## 1.2. La presentación de Wirtinger

El grupo fundamental del complemento de un nudo es uno de los invariantes de nudos más conocidos. En esta sección utilizaremos el Teorema de Van Kampen para obtener una presentación particular del mismo. En el capítulo 4 retomaremos el estudio de los complementos de nudos y nos enfocaremos en algunas propiedades particulares de dichos espacios.

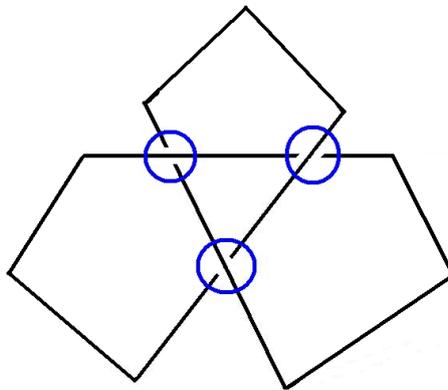
**Definición 1.2.1.** *Dado un nudo poligonal  $K \subseteq \mathbb{R}^3$  y un plano  $\pi$ , si  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \pi$  es la proyección ortogonal sobre  $\pi$ , decimos que  $\pi$  es regular para  $K$  si  $p^{-1}(x)$  interseca a  $K$  en exactamente 0, 1 o 2 puntos  $\forall x \in \pi$  y, en el caso de que sean 2, ninguno puede ser un vértice de  $K$ .*

Es claro que si  $K$  es un nudo poligonal y  $\pi$  es un plano en  $\mathbb{R}^3$ , pueden modificarse  $K$  o  $\pi$  de manera que  $\pi$  resulte regular para  $K$  mediante perturbaciones arbitrariamente pequeñas.

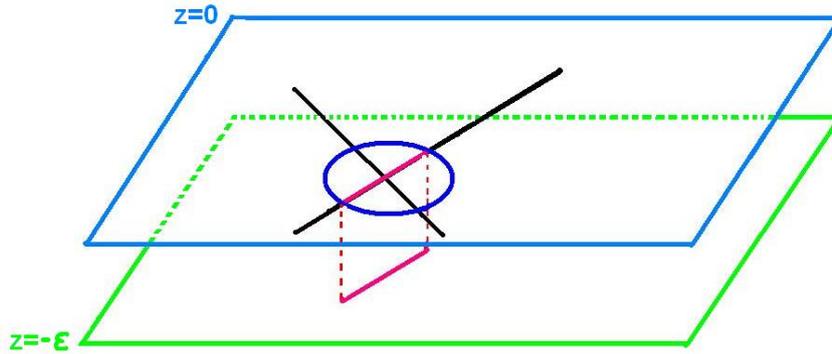
Tomemos como  $\pi$  el plano  $z = 0$  y  $K$  un nudo. Por lo que acabamos de observar, podemos suponer que  $\{z = 0\}$  es regular para  $K$ . Así, la proyección ortogonal  $K'$  nos da un dibujo de  $K$  en  $\mathbb{R}^2$ .



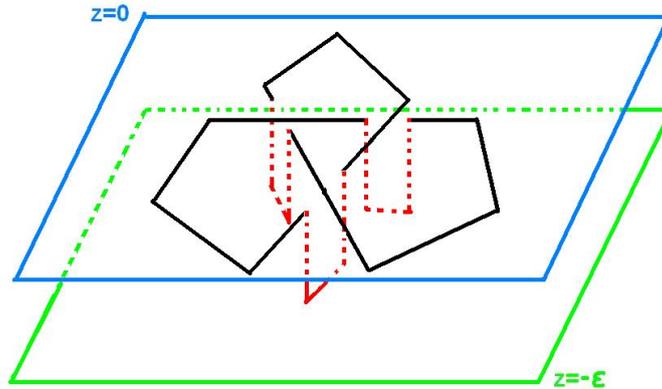
Si volvemos a  $\mathbb{R}^3$ , podemos hacerle algunas modificaciones a esta proyección para obtener un nudo equivalente a  $K$ : Dado que  $K$  es manso, si lo consideramos como poligonal, el número de cruces que aparecen en el plano resulta finito. Podemos, por lo tanto, tomar una bola alrededor de cada cruce, de modo que sean todas disjuntas dos a dos, y que cada bola sólo interseque a dos segmentos de la poligonal  $K'$  (los que se cruzan).



Si bien en el plano las líneas se intersecan, en realidad vienen de distintos tramos de  $K$ , uno de los cuales está “por debajo” del otro. Consideremos un plano de la forma  $\{z = -\varepsilon\}$  y consideremos para cada cruce la intersección de la bola correspondiente con el segmento de  $K'$  que se corresponde con la proyección del tramo de  $K$  que “pasa por debajo”. Tenemos entonces un segmento en  $\{z = -\varepsilon\}$  por cada cruce de  $K'$ .



Si ahora reemplazamos el segmento correspondiente en  $\{z = 0\}$  por el de  $\{z = -\varepsilon\}$  y unimos lo que quedó, obtenemos un nudo  $K''$  equivalente a  $K$ .



Los nudos pueden considerarse orientados o no. Para lo que veremos a continuación, consideraremos los nudos orientados. Un nudo  $K \subseteq \mathbb{R}^3$  puede describirse con un dibujo en  $\mathbb{R}^2$  compuesto por un número finito de arcos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , donde se interpreta que  $\alpha_i$  está conectado con  $\alpha_{i+1}$  y con  $\alpha_{i-1}$  (módulo  $n$ ) por arcos que cruzan “por debajo” como en la figura 1.3, y la numeración respeta la orientación, es decir,  $\alpha_{i+1}$  comienza donde termina  $\alpha_i$  (módulo  $n$ ). Vamos a hallar una presentación de  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$  a partir de un dibujo de esta forma.

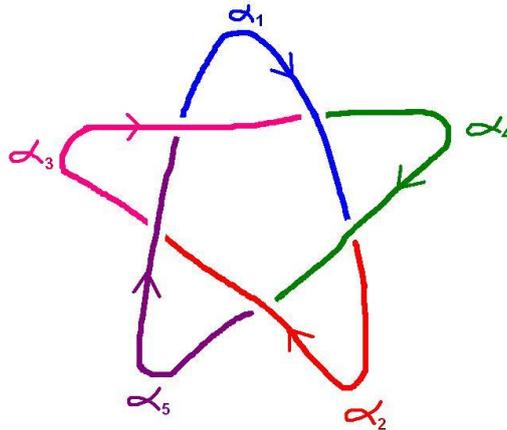


Figura 1.2: Solomon's Seal Knot

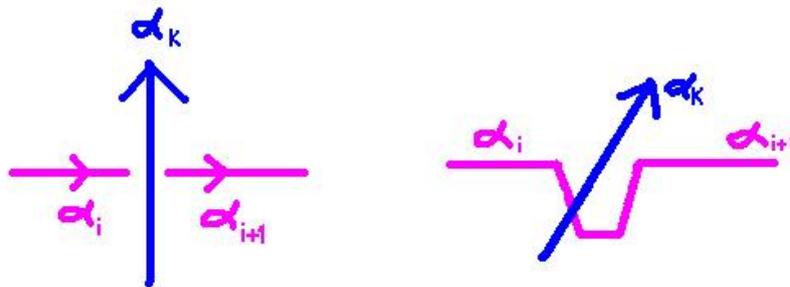
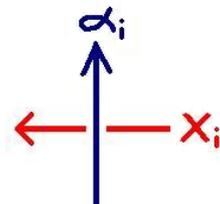
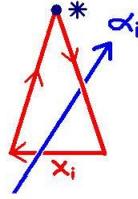


Figura 1.3:

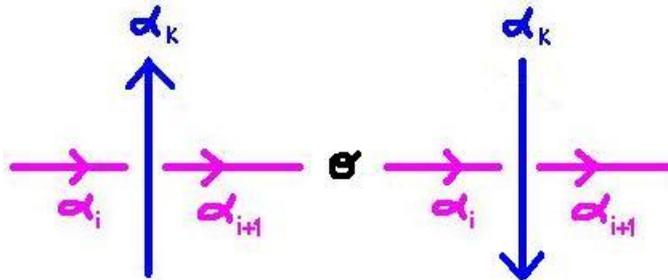
Por lo que vimos antes, podemos suponer que el nudo está contenido en el plano  $\{z = 0\}$ , salvo alrededor de los cruces, donde un tramo pasa por debajo y tiene un segmento contenido en el plano  $\{z = -\varepsilon\}$ . Dado un arco  $\alpha_i$ , considerémoslo por un momento como un segmento orientado apuntando "hacia arriba". Definimos  $x_i$  como una pequeña flecha que pasa por debajo de  $\alpha_i$  de derecha a izquierda como en el dibujo:



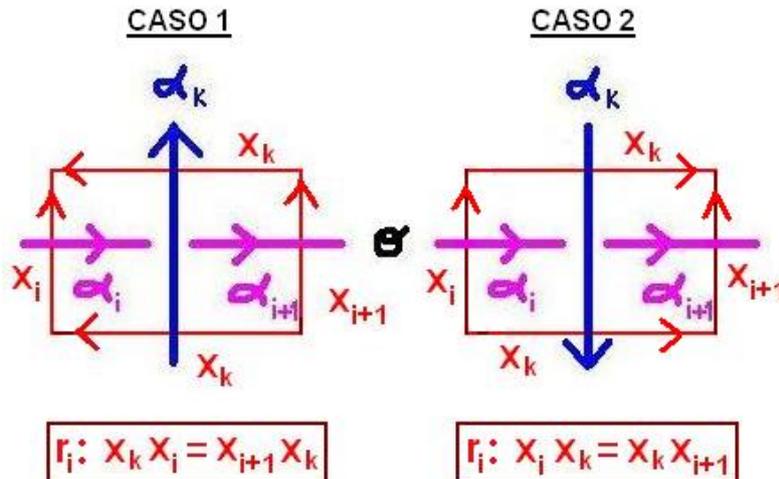
Definimos ahora un lazo, que también llamaremos  $x_i$ , con base en el punto  $*$   $= (0, 0, 1)$ , que consiste en un triángulo orientado que va de  $*$  al extremo inicial de  $x_i$ , recorre  $x_i$ , y vuelve a  $*$ .



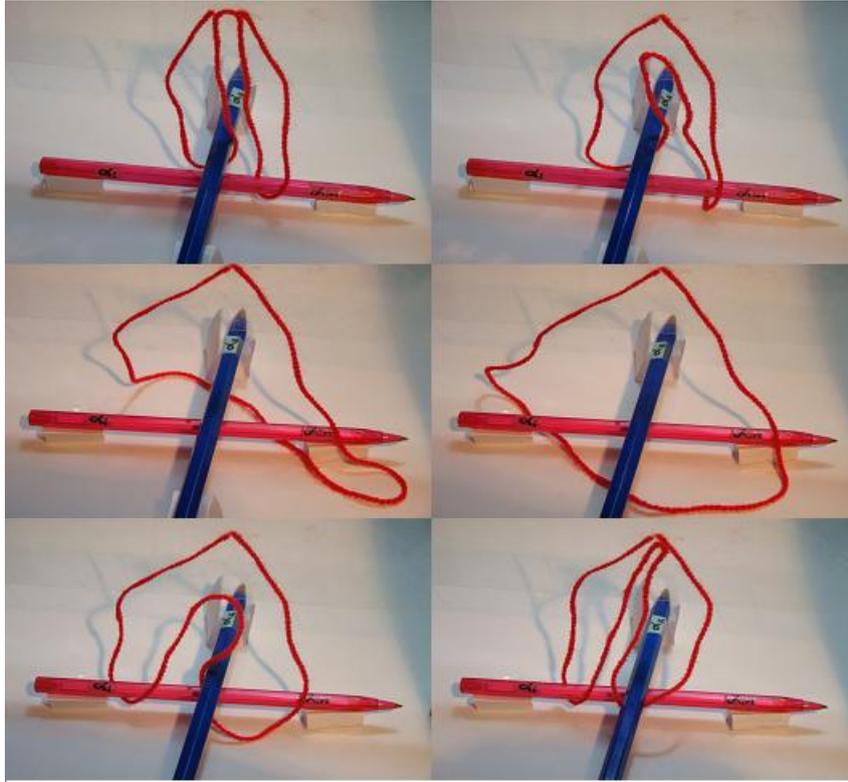
Llamaremos  $c_i$  a cada cruce de la forma



o sea, el cruce donde “termina”  $\alpha_i$  y comienza  $\alpha_{i+1}$ . Tenemos así  $n$  cruces, en cada uno de los cuales hay involucrados tres arcos:  $\alpha_i$ ,  $\alpha_{i+1}$  y  $\alpha_k$  (para algún  $k$ ). Llamaremos también  $x_i$  a la clase de cada lazo  $x_i$  en  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ . En cada  $c_i$  se da una relación  $r_i$  en  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$  según los dos casos de la figura anterior:



Dichas relaciones son fáciles de comprobar tomando 2 biromes y un cordón como se ve a continuación(más adelante las demostraremos formalmente):



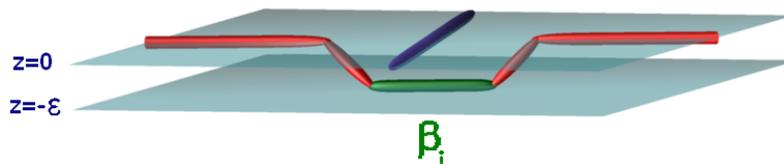
**Observación 1.2.2.** Podemos reescribir  $r_i$  como  $x_{i+1}x_kx_i^{-1}x_k^{-1} = 1$  en el caso 1, y como  $x_{i+1}x_k^{-1}x_i^{-1}x_k = 1$  en el caso 2.

**Teorema 1.2.3. (Presentación de Wirtinger):** El grupo  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$  está generado por las clases de homotopía de los lazos  $x_i$  y tiene una presentación de la forma:

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_n \rangle.$$

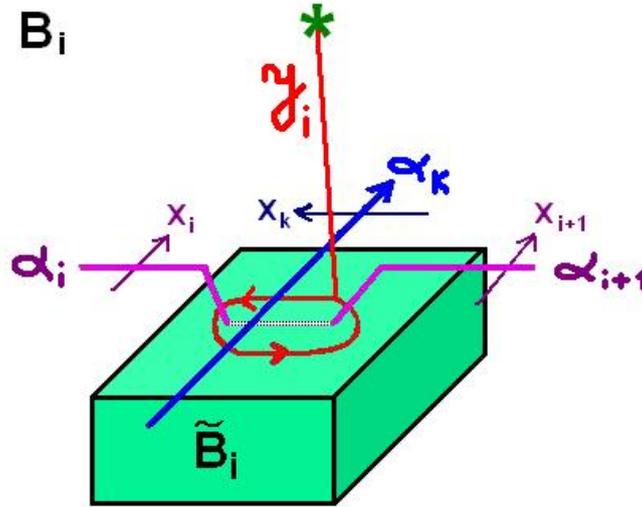
Es más, puede omitirse cualquiera (pero en general sólo 1) de los  $r_i$ .

*Demostración:* Como mencionamos anteriormente, podemos suponer que  $K$  está contenido en el plano  $\{z = 0\}$ , salvo en los cruces, donde pasa “por debajo” y tiene un pequeño segmento contenido en el plano  $\{z = -\varepsilon\}$ . En cada cruce  $c_i$ , a dicho segmento lo llamamos  $\beta_i$ .



Vamos a aplicar el teorema de Van Kampen. Definimos primero los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^3 \setminus K$ :

- $A = \{z \geq -\varepsilon\} \setminus K$ .
- Para cada  $i$ , tomamos  $\widetilde{B}_i$  un bloque de la forma  $[a_i, b_i] \times [c_i, d_i] \times [e_i, -\varepsilon]$ , cuya “tapa” se encuentra contenida en el plano  $\{z = -\varepsilon\}$  y que contenga a  $\beta_i$ . Podemos elegirlos de forma tal que sean todos disjuntos entre sí. Ahora, definimos un lazo  $y_i$  en  $\{z \geq -\varepsilon\} \setminus K$  con base en  $*$  que posea una parte contenida en  $\widetilde{B}_i$  que rodee  $\beta_i$  como en el dibujo. Podemos elegirlo de modo que, mirando “desde arriba”, la parte del lazo contenida en  $\{z = -\varepsilon\}$  esté orientada en sentido antihorario. Llamaremos  $B_i$  a  $(\widetilde{B}_i \setminus \beta_i) \cup y_i$ .



- A todo lo que esté “por debajo” de  $A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n$  lo llamaremos  $D$ . Sea  $\gamma$  un arco que une  $\overline{D}$  con  $*$  y no toca a  $K$ , entonces definimos  $C = \overline{D} \cup \gamma$ .

**PASO 1:**  $\pi_1(A)$  es el grupo libre generado por las clases de los lazos  $x_1, \dots, x_n$ :

Observemos que quitarle los  $\beta_i$  a  $A$  no modifica su tipo homotópico. Por lo tanto, podemos suponer que  $A$  es un semiespacio al que se le han quitado  $n$  “manijas”, correspondientes con los arcos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , cuyos bordes se encuentran en su frontera, el plano  $\{z = -\varepsilon\}$ . Para que un lazo en  $A$  con base en  $*$  no sea null-homotópico, debe pasar “por debajo” de alguna de las manijas. Además, “estirando el cordón”, podemos hacer que pase por  $*$  luego de cada vez que pasa bajo alguna de ellas. De lo dicho recién, podemos concluir que todo lazo en  $A$  con base en  $*$  es homotópico a una concatenación de lazos  $x_i$  y, por lo tanto,  $\pi_1(A)$  es el grupo libre generado  $x_1, \dots, x_n$ .

**PASO 2:** Estudiemos  $\pi_1(A \cup B_i)$ :

Es claro que  $B_i$  es homotópico a  $[a_i, b_i] \times [c_i, d_i] \times [e_i, -\varepsilon]$  y, por lo tanto, es simplemente conexo. Podemos aplicar 1.1.9 tomando  $X = A \cup B_i$ ,  $X_1 = A$  y  $X_2 = B_i$ . Como  $A \cap B_i$  es un rectángulo (bidimensional) al cual se le sustrajo  $\beta_i$  y se le adicionó  $y_i$ , su grupo fundamental es isomorfo a  $\mathbb{Z}$  y está generado por  $y_i$ . Ahora, si observamos la ilustración de  $B_i$ ,  $i_{1*}(y_i) = x_k x_i^{-1} x_k^{-1} x_{i+1}$  si el cruce  $c_i$  es como en el caso 1, y  $i_{1*}(y_i) = x_{i+1} x_k^{-1} x_i^{-1} x_k$  si es como en el caso 2.  $i_{2*}(y_i) = 1$ , pues  $B_i$  es simplemente conexo. Aplicando el teorema,

obtenemos que:

$$\pi_1(A \cup B_i) \cong \langle x_1, \dots, x_n | x_k x_i^{-1} x_k^{-1} x_{i+1} = 1 \rangle$$

en el caso 1 y

$$\pi_1(A \cup B_i) \cong \langle x_1, \dots, x_n | x_{i+1} x_k^{-1} x_i^{-1} x_k = 1 \rangle$$

en el caso 2. Por 1.2.2, podemos reescribir los dos casos como

$$\pi_1(A \cup B_i) \cong \langle x_1, \dots, x_n | r_i \rangle.$$

**PASO 3:** Calculemos  $\pi_1(A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n)$ :

Por lo visto recién,

$$\pi_1(A \cup B_1) \cong \langle x_1, \dots, x_n | r_1 \rangle.$$

Dado que,  $B_2$  es simplemente conexo y que  $(A \cup B_1) \cap B_2 = A \cap B_2$  y, por lo visto en el paso 2,

$$\pi_1((A \cup B_1) \cap B_2) = \pi_1(A \cap B_2) = \langle y_2 \rangle.$$

Si tomamos  $X = A \cup B_1 \cup B_2$ ,  $X_1 = A \cup B_1$  y  $X_2 = B_2$  y aplicamos nuevamente 1.1.9, obtenemos que

$$\pi_1(A \cup B_1 \cup B_2) \cong \langle x_1, \dots, x_n | r_1, i_{1*}(y_2) = i_{2*}(y_2) \rangle.$$

Análogamente a lo observado en el paso 2, se ve que  $i_{1*}(y_2) = i_{2*}(y_2)$  es exactamente  $r_2$ . Por lo tanto,

$$\pi_1(A \cup B_1 \cup B_2) \cong \langle x_1, \dots, x_n | r_1, r_2 \rangle.$$

Si seguimos inductivamente, obtenemos que

$$\pi_1(A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n) = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_n \rangle.$$

**PASO 4:** Calculamos  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ :

Consideremos ahora  $X = \mathbb{R}^3 \setminus K$ ,  $X_1 = A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n$  y  $X_2 = C$ . Tenemos que:

- $X = \mathbb{R}^3 \setminus K = X_1 \cup X_2$ .
- $X_1 \cap X_2$  es homotópico a un plano y, por lo tanto, simplemente conexo.
- $X_2$  es homotópico a un semiespacio y, por lo tanto, también es simplemente conexo.
- $\pi_1(X_1) = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_n \rangle$ .

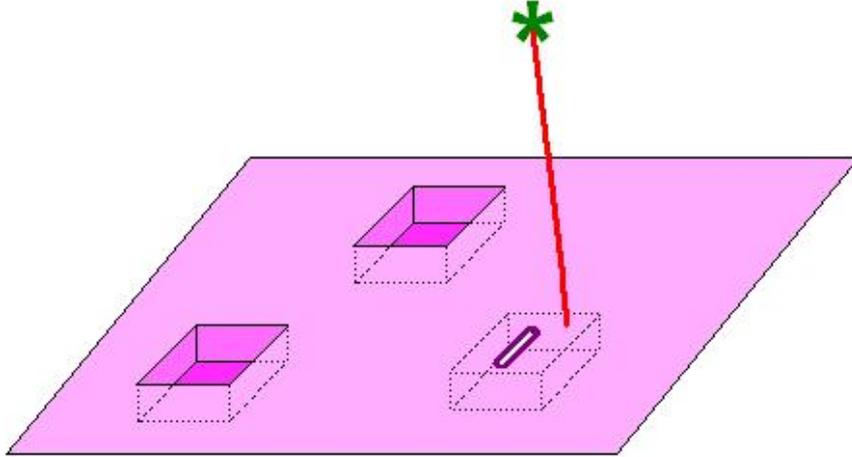
Aplicando nuevamente 1.1.9, concluimos que

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_n \rangle.$$

**PASO 5:** Veamos que se puede quitar uno cualquiera de los  $r_i$ :

Dado que la elección de  $\alpha_1$  es arbitraria, veamos sin pérdida de generalidad que podemos sacar  $r_n$ . Como vimos antes,  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$ , por lo cual podemos trabajar ahora en  $\mathbb{S}^3 \setminus K$ . Sean  $A' = A \cup \{\infty\}$ ,  $C' = B_n \cup C \cup \{\infty\}$  y  $A'' = A' \cup B_1 \cup \dots \cup B_{n-1}$ .  $A'' \cup C' = \mathbb{S}^3 \setminus K$ .

$\pi_1(A') = \pi_1(A)$  y unirle  $B_1 \cup \dots \cup B_{n-1}$  tiene el mismo efecto que con  $A$ , es decir,  $\pi_1(A'') = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_{n-1} \rangle$ . Observemos ahora  $A'' \cap C'$ :



$A'' \cap C'$  es homotópico a un plano al cual se le ha sustraído el segmento  $\beta_n$ , unión  $\infty$ , es decir, es homotópico a una 2-esfera menos un pequeño arco, lo cual es homotópico a  $\mathbb{R}^2$ . Por lo tanto,  $\pi_1(A'' \cap C') = 1$ . Es fácil ver que  $C'$  también es simplemente conexo. Aplicando 1.1.9 una vez más, concluimos que

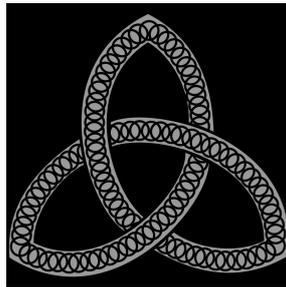
$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K) = \pi_1(A'') = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_{n-1} \rangle.$$

□

**Ejemplo 1.2.4.** El ejemplo más sencillo para aplicar este teorema es el nudo trivial  $T$ , el cual puede representarse con un sólo arco y ningún cruce y, por ende, su grupo tiene una presentación dada por un sólo generador y ninguna relación, Por lo tanto,  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus T) \cong \mathbb{Z}$ .

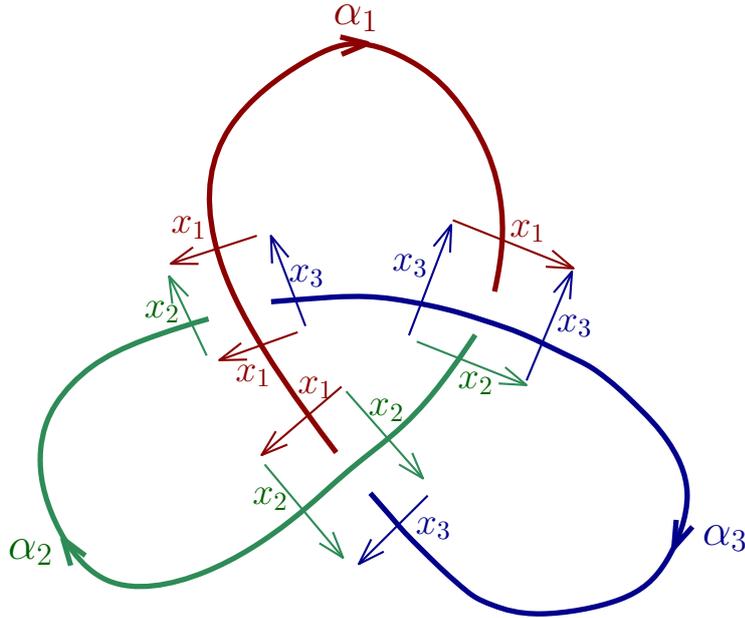
Calculemos ahora el grupo de un nudo un poco más complejo.

**Ejemplo 1.2.5.** Sea  $K$  el nudo que se muestra en la siguiente figura:



Este nudo es conocido como trébol o  $T_{2,3}$ .<sup>1</sup> Comencemos por numerar los 3 arcos de  $K$  y marcar los  $x_i$ .

<sup>1</sup>En la cultura celta se lo conoce como “triqueta” y representa varias ternas como “mente, cuerpo y alma” y “tierra, fuego y agua”.



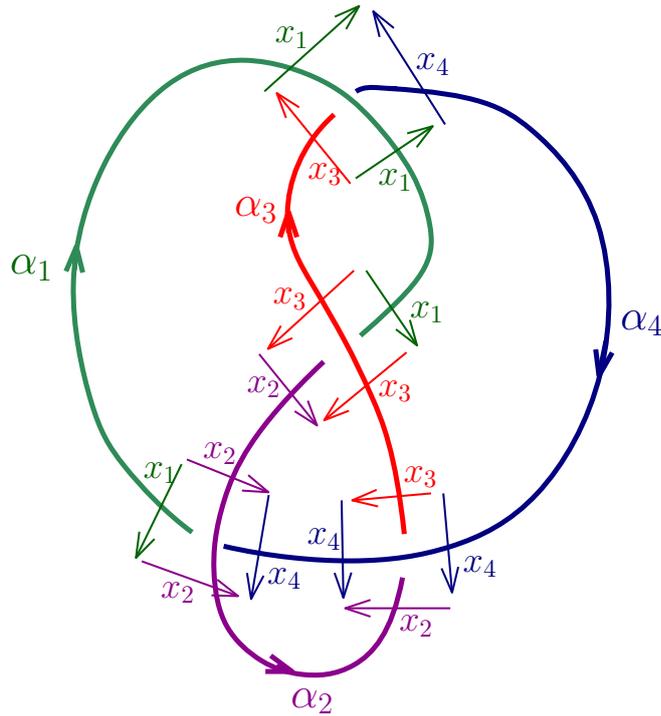
Aplicando el teorema 1.2.3, obtenemos que  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \langle x_1, x_2, x_3 | x_3 x_1 x_3^{-1} x_2^{-1}, x_2 x_3 x_2^{-1} x_1^{-1} \rangle$ . De la primera relación podemos despejar  $x_1 = x_3^{-1} x_2 x_3$  para así eliminar un generador y una relación. Reemplazando en la otra relación, obtenemos que

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \langle x_2, x_3 | x_2 x_3 x_2 = x_3 x_2 x_3 \rangle.$$

Puede probarse que este grupo no es abeliano y, por lo tanto, el trébol no es equivalente al nudo trivial.

Por otra parte, si calculamos el grupo del “otro trébol”, que es la imagen especular del que acabamos de analizar, obtendremos el mismo grupo. Sin embargo, puede probarse (con métodos que no veremos en esta tesis) que no son equivalentes entre sí. Esto nos permite concluir que, si bien en ciertos casos calcular el  $\pi_1$  del complemento de dos nudos basta para distinguirlos, no siempre es suficiente. En otras palabras, el grupo de un nudo no es un invariante completo.

**Ejemplo 1.2.6.** Sea  $L$  el nudo representado por la siguiente figura:



Tenemos 4 generadores  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  y 3 relaciones  $\begin{cases} r_1 : x_3x_1 = x_1x_4 \\ r_2 : x_1x_3 = x_3x_2 \\ r_3 : x_2x_4 = x_1x_2. \end{cases}$

De  $r_1$  podemos despejar  $x_4 = x_1^{-1}x_3x_1$ , y de  $r_2$  podemos despejar  $x_2 = x_3^{-1}x_1x_3$ . Llamando  $x = x_1$  e  $y = x_3$  y reemplazando en  $r_3$  obtenemos  $y^{-1}xyx^{-1}yx = xy^{-1}xy$ . Por lo tanto,  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L) = \langle x, y | y^{-1}xyx^{-1}yx = xy^{-1}xy \rangle$ .

## Capítulo 2

# Clasificación de superficies

### 2.1. Introducción

Este capítulo está dedicado a la clasificación de las superficies compactas, la cual demostraremos utilizando dos enfoques diferentes. Primero daremos un enfoque diferencial del tema aplicando la teoría de Morse. Luego, utilizaremos que toda superficie puede ser triangulada para dar una demostración combinatoria de la misma clasificación en el caso de las superficies sin borde.

Recordemos que si  $X$  es un espacio topológico con homología finitamente generada, se define la *característica de Euler* de  $X$  como

$$\chi(X) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \operatorname{rg}(H_k(X)),$$

donde  $\operatorname{rg}$  denota la dimensión de la parte libre. En el caso particular en que  $X$  sea un CW-complejo, entonces vale que

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i k_i,$$

donde  $k_i$  es la cantidad de  $i$ -celdas de  $X$ .

Por lo tanto, si  $X$  e  $Y$  son dos CW-complejos, tenemos que

$$\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y).$$

### 2.2. Teoría de Morse

Como mencionamos anteriormente, el primer enfoque será diferencial. En esta sección y en la siguiente nos basaremos principalmente en los libros [6] y [14]. Recordemos algunas nociones de geometría diferencial.

Llamaremos *n-variedad* a una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . En particular, llamaremos *superficie* a toda 2-variedad. Dada  $M$  una  $n$ -variedad, notaremos  $T_p M$  al *espacio tangente a  $M$  en el punto  $p$* , y  $T_p^* M$  a su espacio dual. Dada  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una

función diferenciable, identificando canónicamente  $T_{f(p)}\mathbb{R}$  con  $\mathbb{R}$ , queda definida en cada punto  $p$  una aplicación  $d_p f \in T_p^*M$ .

Dada  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable sobre una  $n$ -variedad  $M$ , decimos que  $p \in M$  es un *punto crítico* de  $f$  si  $d_p f \equiv 0$ , es decir,  $X_p(f) = 0$  para todo  $X_p \in T_p M$ .

Dado  $p$  un punto crítico, podemos definir una forma bilineal  $H_p f : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $H_p f(X_p, Y_p) = X_p(Y(f))$  para  $Y$  algún campo  $\mathcal{C}^\infty$  en  $M$  tal que  $Y(p) = Y_p$ . Dados  $X_p, Y_p \in T_p M$ , tomemos campos  $X, Y$  tales que  $X(p) = X_p$  e  $Y(p) = Y_p$ . Entonces,  $H_p f(X_p, Y_p) - H_p f(Y_p, X_p) = [X, Y]_p(f) = 0$ , pues  $[X_p, Y_p]_p \in T_p M$  ( $[\cdot, \cdot]$  denota el corchete de Lie de campos). Por lo tanto,  $H_p f(X_p, Y_p) = H_p f(Y_p, X_p)$ . Dado que el término de la derecha no depende del campo  $X$  elegido, y el de la izquierda no depende de  $Y$ , por lo tanto,  $H_p f(X_p, Y_p)$  no depende ni de  $X$  ni de  $Y$ . Podemos concluir entonces que  $H_p f$  está bien definida y además es simétrica. La forma  $H_p f$  se denomina la *forma hessiana* de  $f$  en  $p$ .

Recordemos que si  $V$  es un  $K$ -espacio vectorial y  $\phi : V \times V \rightarrow K$  es una forma bilineal simétrica, se define el *núcleo* de  $\phi$  como  $Nu(\phi) = \{v \in V : \phi(v, w) = 0 \forall w \in V\}$ , y  $\phi$  se dice *no degenerada* si  $Nu(\phi) = 0$ .

Si  $p \in M$  es un punto crítico, decimos que es *no degenerado* si la forma hessiana de  $f$  en  $p$  es no degenerada.

Sea  $p \in M$  un punto crítico, tomemos  $(\mathcal{U}, \varphi)$  una carta de  $M$  alrededor de  $p$ . Dicha carta nos da una base de  $T_q M$  para todo  $q \in \mathcal{U}$  de la forma  $\{\frac{\partial}{\partial \varphi_1}|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n}|_q\}$ . Calculemos la matriz de  $H_p f$  en la base de  $T_p M$  dada por  $(\mathcal{U}, \varphi)$ . Sean  $X_p$  e  $Y_p$  vectores de  $T_p M$ , existen entonces  $a_1, \dots, a_n$  y  $b_1, \dots, b_n$  tales que  $X_p = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i}|_p$  e  $Y_p = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i}|_p$ . Sea  $Y$  un campo en  $M$  tal que

$$Y|_{\mathcal{U}} \equiv \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i},$$

entonces

$$\begin{aligned} H_p(X_p Y_p) &= X_p(Y(f)) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i}|_p \left( \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial \varphi_j}(f) \right) \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi(p)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz de  $H_p f$  en la base  $\{\frac{\partial}{\partial \varphi_1}|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_n}|_q\}$  es

$$\left( \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi(p)) \right)_{i,j}.$$

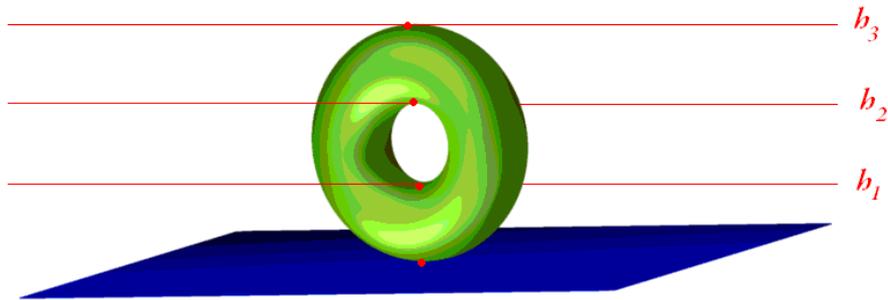
Por lo tanto,  $H_p f$  es no degenerada si y sólo si esta matriz es inversible. Podemos observar que este hecho no depende de la carta elegida.

Recordemos también que si  $\phi$  es una forma bilineal simétrica en un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, entonces existe una base  $B$  del espacio tal que la matriz de  $\phi$  en base  $B$  es diagonal, y los elementos de la diagonal pertenecen al conjunto  $\{0, 1, -1\}$ . La cantidad de “-1” que aparecen no depende de  $B$ , y se denomina el *índice* de  $\phi$ . Definimos el *índice de  $f$  en  $p$*  como el índice de  $H_p f$  y lo notamos  $ind_p f$ . Es claro que  $\phi$  es no degenerada, si y sólo si no aparecen ceros en la diagonal.

**Teorema 2.2.1.** *Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^\infty$ . Entonces los puntos críticos no degenerados de  $f$  son aislados. En particular, si  $M$  es compacta, el conjunto de puntos críticos no degenerados es finito.*

**Definición 2.2.2.** *Si todos los puntos críticos de  $f$  son no degenerados, decimos que  $f$  es una función de Morse.*

Un ejemplo clásico de función de Morse es la que mide la altura de cada punto de un toro posicionado verticalmente sobre el plano  $\{z = 0\}$  como muestra la siguiente figura. En este caso, los puntos críticos son los de alturas  $0$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$ .



Así como para las funciones  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tenemos  $\nabla g = \left( \frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right)$  el campo gradiente, también existe una noción de campo gradiente para funciones a valores reales definidas en variedades riemannianas que nos da información sobre el crecimiento de la función. Si  $M$  es una  $n$ -variedad con una métrica riemanniana (A toda variedad diferenciable puede dársele una métrica riemanniana) y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable, en cada punto  $p \in M$  tenemos  $d_p f \in (T_p M)^*$ . Para cada  $p \in M$  existe un único  $Y_p \in T_p M$  tal que  $d_p f(X_p) = \langle Y_p, X_p \rangle$  para todo  $X_p \in T_p M$ . Este elemento  $Y_p$  es el que nos da el gradiente: concretamente, definimos  $Grad(f)$  como el campo  $C^\infty$  que en cada  $p$  vale  $Grad_p f = Y_p$ . Notar que  $Grad(f)$  depende de la métrica riemanniana elegida.

Enunciamos a continuación uno de los resultados fundamentales de la teoría de Morse:

**Lema 2.2.3. (Lema de Morse)** *Sea  $M$  una  $n$ -variedad y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Si  $p \in M$  es un punto crítico no degenerado de índice  $k$ , entonces existe una carta  $(\mathcal{U}, \varphi)$  alrededor de  $p$  tal que*

$$f \circ \varphi^{-1}(u_1, \dots, u_n) = f(p) - \sum_{i=1}^k u_i^2 + \sum_{i=k+1}^n u_i^2.$$

Demostraciones de este teorema pueden hallarse en [14] y [6].

**Observación 2.2.4.** *Si  $p$  es un punto crítico no degenerado, entonces:*

- $p$  es un mínimo local sí y sólo sí  $k = 0$ .
- $p$  es un máximo local sí y sólo si  $k = n$ .
- Si  $1 \leq k \leq n - 1$ , entonces  $p$  no es ni máximo ni mínimo.

En el caso en que  $1 \leq p \leq n - 1$  decimos que  $p$  es un *punto silla*.

Recordemos que si  $M$  es una variedad diferenciable, un *grupo uniparamétrico de difeomorfismos* de  $M$  es una función  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  de clase  $C^\infty$  que verifica

1. Para todo  $t \in \mathbb{R}$ , la función  $\varphi_t : M \rightarrow M$  que asigna  $x \mapsto \varphi(t, x)$  es un difeomorfismo.
2.  $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_s \circ \varphi_t \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$ .

Observemos que de (1) y (2) se deduce que  $\varphi(0, x) = x \quad \forall x \in M$ . Dado  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  un grupo uniparamétrico, para cada  $p \in M$  podemos definir la función  $\varphi^p : \mathbb{R} \rightarrow M$  dada por  $\varphi^p(t) = \varphi(t, p)$ . La misma representa una curva  $C^\infty$  que verifica que  $\varphi^p(0) = p$ .

**Definición 2.2.5.** Sea  $M$  una  $n$ -variedad y  $X : M \rightarrow T^*M$  un campo  $C^\infty$ , curva integral de  $X$  a una función diferenciable  $\varphi : J \rightarrow M$ , donde  $J \subseteq \mathbb{R}$  es un intervalo, tal que  $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$  para todo  $t \in J$ .

Si  $X$  es un campo  $C^\infty$  en  $M$ , para cada  $p \in M$  existe un intervalo maximal  $J(p)$  alrededor de 0 y una curva integral  $\varphi^p : J(p) \rightarrow M$   $C^\infty$  de  $X$  tal que  $\varphi^p(0) = p$ . Llamamos  $\Omega = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M : t \in J(p)\} \subseteq \mathbb{R} \times M$ . La función  $\varphi : \Omega \rightarrow M$  que asigna  $(t, p) \mapsto \varphi^p(t)$  es el *flujo* de  $X$  y es de clase  $C^\infty$ . Si  $\Omega = \mathbb{R} \times M$  decimos que  $X$  es *completamente integrable*. En este caso,  $\varphi$  resulta ser un grupo uniparamétrico de difeomorfismos.

Si  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  es un grupo uniparamétrico de difeomorfismos, se define el *generador infinitesimal* de  $\varphi$  como el campo  $X(p) = (\varphi^p)'(0)$ .

**Teorema 2.2.6.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y sea  $K \subseteq M$  compacto. Si  $X$  es un campo  $C^\infty$  tal que  $X|_{M \setminus K} \equiv 0$ , entonces existe un único grupo uniparamétrico  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  tal que  $X$  es generador infinitesimal de  $\varphi$ .

Una demostración de este resultado puede hallarse en [10] y en [14].

**Observación 2.2.7.** Si  $c : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  es una curva integral de  $X = \text{Grad}(f)$  para  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^\infty$ , entonces

$$\begin{aligned} (f \circ c)'(t_0) &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t_0} (f \circ c) = \left( d_{c(t_0)} f \circ d_{t_0} c \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = \langle \text{Grad} f(c(t_0)), c'(t_0) \rangle \\ &= \langle \text{Grad} f(c(t_0)), \text{Grad} f(c(t_0)) \rangle = |\text{Grad} f(c(t_0))|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f$  crece a lo largo de las curvas integrales de su campo gradiente.

A continuación, el primer teorema que veremos que evidencia como ciertas características de una función  $C^\infty$  sobre una variedad pueden determinar la clase de difeomorfismo de la misma.

**Teorema 2.2.8.** Sea  $M$  una variedad diferenciable, compacta y con borde y sea

$f : M \rightarrow [a, b]$  una función  $C^\infty$ . Si  $f$  no posee puntos críticos y  $f(\partial M) = \{a, b\}$ , entonces existe un difeomorfismo  $F : f^{-1}(a) \times [a, b] \rightarrow M$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 f^{-1}(a) \times [a, b] & \xrightarrow{F} & M \\
 \pi \downarrow & \swarrow f & \\
 [a, b] & & 
 \end{array}$$

donde  $\pi : f^{-1}(a) \times [a, b] \rightarrow [a, b]$  es la proyección a la segunda coordenada  $\pi(x, t) = t$ . En particular,  $\forall c \in [a, b]$  vale que  $f^{-1}(c) \cong f^{-1}(a) \times \{c\}$ . Por lo tanto, todas las superficies de nivel son difeomorfas.

*Demostración:* Comenzamos por darle a  $M$  una métrica Riemanniana. Dado que  $f$  no posee puntos críticos,  $\text{Grad}f(p) \neq 0 \forall p \in M$ , lo que nos permite definir el campo  $\mathcal{C}^\infty$

$$X(p) = \frac{\text{Grad}f(p)}{|\text{Grad}f(p)|^2}.$$

Dado que  $M$  es compacta, por 2.2.6, existe un único grupo uniparamétrico  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  tal que  $X$  es generador infinitesimal de  $\varphi$ . Si  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  es una curva integral de  $X$ , podemos definir la función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g = f \circ c$ . Procediendo de manera similar a como hicimos en 2.2.7, obtenemos que

$$g'(t_0) = \langle \text{Grad}f(c(t_0)), X(c(t_0)) \rangle = \left\langle \text{Grad}f(c(t_0)), \frac{\text{Grad}f(c(t_0))}{|\text{Grad}f(c(t_0))|^2} \right\rangle = 1.$$

Por lo tanto,  $g(x) - g(y) = x - y \forall x, y \in \mathbb{R}$ . En particular,  $g$  es estrictamente creciente (las curvas de integrales de  $X$  son una reparametrización de las curvas integrales de  $\text{Grad}f$ ).

Dado que  $f$  no posee puntos críticos, alcanza su mínimo en el borde de  $M$ . Como  $f(\partial M) = \{a, b\}$ , deducimos que  $f^{-1}(a)$  es unión de componentes de  $\partial M$ . Definimos la función  $F : f^{-1}(a) \times [a, b] \rightarrow M$  como  $F(x, t) = \varphi^x(t - a)$ . Veamos que  $F$  es inyectiva: Supongamos que  $F(x, t) = F(y, s)$ . Entonces,  $\varphi^x(t - a) = \varphi^y(s - a)$ . Observemos que

$$y = \varphi^y(0) = \varphi_0(y) = \varphi_{a-s} \circ \varphi_{s-a}(y) = \varphi_{a-s}(\varphi_{t-a}(x)) = \varphi_{t-s}(x) = \varphi^x(t - s).$$

Tenemos entonces que

$$f(\varphi^x(0)) = f(x) = a = f(y) = f(\varphi^x(t - s)).$$

Como observamos antes,  $f \circ \varphi^x$  es estrictamente creciente y, por lo tanto, inyectiva. Entonces  $t = s$  e  $y = \varphi^x(t - s) = \varphi^x(0) = x$ . Veamos que  $F$  es sobreyectiva. Sea  $x \in M$  y sea  $s = f(x)$ . Observemos que  $x = \varphi_0(x) = \varphi_{s-a}(\varphi_{a-s}(x))$ . Tomando  $y = \varphi_{a-s}(x)$  obtenemos que  $x = F(y, s)$ . Puede probarse que  $F$  es un difeomorfismo.

Veamos ahora la conmutatividad del diagrama. Dada  $(x, t) \in f^{-1}(a) \times [a, b]$ ,

$$f \circ F(x, t) - a = f(\varphi^x(t - a)) - f(x) = f(\varphi^x(t - a)) - f(\varphi^x(0)) = t - a - 0.$$

Por lo tanto,  $f \circ F(x, t) = t$ . □

A continuación, una aplicación de este teorema.

Recordemos que una variedad se dice *cerrada* si es compacta y sin borde.

**Teorema 2.2.9. (Teorema de Reeb)** Sea  $M$  una  $n$ -variedad cerrada. Si  $M$  admite una función de Morse  $C^\infty$  con exactamente 2 puntos críticos, entonces  $M$  es homeomorfa a  $S^n$ .

*Demostración:* Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse  $C^\infty$  cuyos únicos puntos críticos son  $p$  y  $q$ . Al ser  $M$  compacta,  $f$  alcanza un máximo y un mínimo absolutos. Al  $M$  no poseer borde, dichos extremos se alcanzan en los puntos críticos. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $a = f(p) = \min(f)$  y que  $b = f(q) = \max(f)$ . El Lema de Morse nos dice que existe una carta  $(\mathcal{U}, \varphi)$  de  $M$  alrededor de  $p$  tal que

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = a + x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Por continuidad, existe  $c > a$  tal que  $f^{-1}([a, c]) \subseteq \mathcal{U}$ . Entonces  $B = f^{-1}([a, c])$  es difeomorfo a

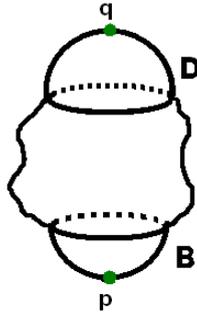
$$\begin{aligned} \varphi(f^{-1}([a, c])) &= (f \circ \varphi^{-1})^{-1}([a, c]) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a \leq a + x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq c\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq c - a\}. \end{aligned}$$

Análogamente, existe  $d < b$  tal que  $D = f^{-1}([d, b])$  es difeomorfo a

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq b - d\}.$$

Tenemos entonces que

$$M = f^{-1}([a, b]) = f^{-1}([a, c]) \cup f^{-1}([c, d]) \cup f^{-1}([d, b]).$$



Dado que  $f$  no posee puntos críticos en  $f^{-1}([c, d])$ , por 2.2.8 tenemos que

$$f^{-1}([c, d]) \cong f^{-1}(c) \times [c, d].$$

Por otra parte,  $f^{-1}(c) = \partial B \approx S^{n-1}$ . Por lo tanto, podemos concluir que

$$M \approx B \bigcup_{\partial B} (S^{n-1} \times [a, b]) \bigcup_{\partial D} D \approx S^n.$$

□

**Observación 2.2.10.** *Existen ejemplos de variedades que son homeomorfas a  $\mathbb{S}^n$ , pero no difeomorfas. En el caso particular  $n = 2$  puede probarse que  $M$  es difeomorfa a  $\mathbb{S}^2$ .*

A continuación, una definición fundamental para describir una superficie a partir de una función de Morse sobre la misma.

**Definición 2.2.11.** *Dada  $M$  una  $n$  variedad y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^\infty$ , para cada  $a \in \mathbb{R}$  definimos  $M_a = \{x \in M : f(x) \leq a\}$ .*

Es claro que, si  $a \leq b$ , entonces  $M_a \subseteq M_b$ .

Nos interesará estudiar cómo cambia  $M_a$  a medida que  $a$  va creciendo.

**Teorema 2.2.12.** *Sean  $M$  una variedad diferenciable sin borde y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$  tales que  $f^{-1}([a, b])$  es compacto y no contiene puntos críticos, entonces:*

1.  $M_a$  es difeomorfo a  $M_b$ .
2.  $M_a$  es un retracto por deformación fuerte de  $M_b$ .

*Demostración:* Llamemos  $K = f^{-1}([a, b])$ . Por hipótesis,  $K$  es compacto. Dándole a  $M$  una métrica riemanniana, podemos definir una función  $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$  que verifique:

- $\rho \geq 0$
- $\rho|_K = \frac{1}{|\text{Grad}f|^2}$  (está bien definida porque  $f$  no posee puntos críticos en  $K$ ).
- Existe un conjunto compacto  $L$  tal que  $K \subset L$  y  $\rho|_{M \setminus L} \equiv 0$ .

Definimos ahora el campo  $X = \rho \cdot \text{Grad}f$ . Por 2.2.6, existe un único  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  grupo uniparamétrico generado por  $X$  (es decir,  $X$  es completamente integrable). Para cada  $p \in K$ , definimos la función  $\gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\gamma_p = f \circ \varphi^p$ . Operando de manera análoga a como hicimos en 2.2.8, obtenemos que, si  $\varphi^p(t) \in K$ , entonces  $\gamma_p'(t) = 1$ . Esto implica que, si  $A_p = (\varphi^p)^{-1}(K) \subseteq \mathbb{R}$ , entonces existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\gamma_p|_{A_p}(t) = t + c$ . Observemos que  $0 \in A$ . Por lo tanto, dado que  $c = \gamma_p(0) = f(\varphi^p(0)) = f(p)$ , se deduce que  $\gamma_p|_{A_p}(t) = t + f(p)$ . Como  $\varphi_{b-a} : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo, para ver (1) basta ver que  $\varphi_{b-a}(M_a) = M_b$ .

- $\varphi(M_a) \subseteq M_b$ : Sea  $x \in M_a$ . Supongamos que  $f(\varphi_{b-a}(x)) > b$ . Dado que  $b - a \geq 0$  y que  $f(\varphi^x(0)) = f(x) \leq a < b$ , el Teorema de Bolzano nos asegura que existen  $s, t \in [0, b - a]$  tales que  $f(\varphi^x(s)) = a$  y  $f(\varphi^x(t)) = b$ . Tenemos que  $\varphi^x(s)$  y  $\varphi^x(t)$  pertenecen a  $K$ . Por lo visto antes,  $b - a = f(\varphi^x(t)) - f(\varphi^x(s)) = t - s$ . Así,  $\varphi_{b-a}(x) = \varphi_{t-s}(x) = \varphi_{-s}(\varphi_t(x))$ . Observemos que  $(f \circ \varphi^p)' = \rho \cdot \langle \text{Grad}f, \text{Grad}f \rangle \geq 0$ . Por lo tanto, la función  $f \circ \varphi^p$  es creciente para todo  $p \in M$ . Como  $f(\varphi_t(x)) = f(\varphi^x(t)) = b$  y  $s \geq 0$ , si llamamos  $y = \varphi_t(x)$  podemos concluir que

$$f(\varphi_{b-a}(x)) = f(\varphi_{t-s}(x)) = f(\varphi_{-s}(\varphi_t(x))) = f(\varphi^y(-s)) \leq f(y) = b.$$

Llegamos así a una contradicción, por lo que deducimos que  $\varphi_{b-a}(x) \in M_b$ .

- $M_b \subseteq \varphi_{b-a}(M_a)$ : Sea  $y \in M_b$ . Como  $y = \varphi_0(y) = (\varphi_{b-a} \circ \varphi_{a-b})(y)$ , basta ver que  $\varphi_{a-b}(y) \in M_a$ . Si  $y \in M_a$ , como  $a - b \leq 0$ , entonces  $f(\varphi_{a-b}(y)) = f(\varphi^y(a-b)) \leq f(\varphi^y(0)) = f(y) \leq a$ . Supongamos entonces que  $a \leq f(y) \leq b$ , es decir,  $y \in K$ . Por otra parte,  $f(\varphi_{a-b}(y)) = f(\varphi^y(a-b)) \leq f(\varphi^y(0)) = f(y) \leq b$ . Si  $f(\varphi_{a-b}(y)) \leq a$ , listo. Si no,  $\varphi^y(a-b)$  también pertenece a  $K$ . Aplicando lo visto antes, podemos deducir que  $f(\varphi^y(0)) - f(\varphi^y(a-b)) = b - a$ . Entonces  $f(\varphi_{a-b}(y)) = f(y) + a - b \leq b + a - b = a$ .

Para ver (2), definimos  $H : M_b \times \mathbb{I} \rightarrow M_b$  de la forma

$$H(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } x \in M_a \\ \varphi_{t \cdot (a-f(x))}(x) & \text{si } a \leq f(x) \leq b. \end{cases}$$

Es fácil corroborar que  $H|_{M_b \times \{0\}} \equiv id_{M_b}$ ,  $H|_{M_b \times \{1\}} \subseteq M_a$  y  $H|_{M_a \times \mathbb{I}} \equiv id_{M_a}$ . Por lo tanto,  $M_a$  es un retracto por deformación fuerte de  $M_b$ . □

Otro resultado sumamente poderoso de la teoría de Morse es el siguiente.

**Teorema 2.2.13.** *Sean  $M$  una variedad diferenciable sin borde y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^\infty$ . Si  $p \in M$  es un punto crítico no degenerado de índice  $k$  con  $f(p) = c$  y  $\varepsilon > 0$  es tal que  $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$  es compacto y  $p$  es el único punto crítico que contiene, entonces  $M_{c+\varepsilon} \simeq M_{c-\varepsilon} \cup e^k$ , donde  $e^k$  denota a una celda de dimensión  $k$ .*

*Demostración:* Daremos una idea de la demostración. Una versión detallada de la misma puede hallarse en [14].

Por el lema de Morse, existe una carta  $(\mathcal{U}, \varphi)$  alrededor de  $p$  tal que  $\varphi(p) = 0$  y  $f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = c - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$ . Aplicando 2.2.12 y modificando  $\varepsilon$  de ser necesario, podemos suponer que  $B(0, \sqrt{2\varepsilon}) \subseteq \varphi(\mathcal{U})$ . Tenemos entonces que  $B(0, \sqrt{\varepsilon}) \subseteq \varphi(\mathcal{U})$  y definimos la  $k$ -celda  $e^k$  como

$$e^k = \varphi^{-1}(\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_k^2 \leq \varepsilon, x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2 = 0\}) \cong \mathbb{D}^k.$$

Esta celda verifica que  $e^k \cap M_{c-\varepsilon} = \partial e^k$ . Por lo tanto,  $M_{c-\varepsilon} \cup e^k$  es el resultado de adjuntar una  $k$ -celda a  $M_{c-\varepsilon}$ . Lo que queremos probar es que  $M_{c-\varepsilon} \cup e^k \subseteq M_{c+\varepsilon}$  es un retracto por deformación fuerte. Para eso, modificamos  $f$  de la siguiente manera: dada una función  $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\mu(0) > 0$ ,  $\mu|_{[2\varepsilon, +\infty)} \equiv 0$  y  $-1 < \mu' \leq 0$ , definimos  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F$  coincida con  $f$  en  $M \setminus \mathcal{U}$  y tal que

$$F \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) - \mu(x_1^2 + \dots + x_k^2 + 2x_{k+1}^2 + \dots + 2x_n^2).$$

Esta función verifica:

- $F \leq f$ .
- $M_{c+\varepsilon}^F = M_{c+\varepsilon}^f$ .
- $F$  tiene los mismos puntos críticos que  $f$  en  $\mathcal{U}$ .
- $K = F^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \subseteq f^{-1}([c + \varepsilon, c - \varepsilon])$ , por lo cual  $K$  resulta compacto.
- $p \notin K$ , por lo que  $F$  no posee puntos críticos en  $K$ .

Por 2.2.12, obtenemos que  $M_{c-\varepsilon}^F \subseteq M_{c+\varepsilon}^F = M_{c+\varepsilon}^f$  es un retracto por deformación fuerte. Sea  $H = M_{c-\varepsilon}^F \setminus M_{c-\varepsilon}^f$ , se comprueba que  $e^k$  está contenida en  $H$ . Por lo tanto,  $M_{c-\varepsilon}^F \cup e^k \subseteq M_{c-\varepsilon}^F \cup H = M_{c-\varepsilon}^F$ , y sólo resta probar que  $M_{c-\varepsilon}^F \cup e^k \subseteq M_{c-\varepsilon}^F \cup H$  es un retracto por deformación fuerte, para lo cual puede hallarse explícitamente la homotopía adecuada.  $\square$

Con una demostración similar puede probarse:

**Teorema 2.2.14.** *Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^\infty$  tal que para algún  $c \in \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(c)$  contiene  $r$  puntos críticos no degenerados  $p_1, \dots, p_r$  de índices  $k_1, \dots, k_r$  respectivamente. Si existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$  es compacto y no contiene otros puntos críticos, entonces  $M_{c+\varepsilon} \simeq M_{c-\varepsilon} \cup e^{k_1} \cup \dots \cup e^{k_r}$ .*

**Corolario 2.2.15.** *Sea  $M$  una variedad cerrada. Si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse, entonces  $M$  es homotópicamente equivalente a un CW-complejo  $X$  compuesto por una celda de dimensión  $k$  por cada punto crítico de  $f$  de índice  $k$ .*

La idea para demostrar este resultado es aplicar sucesivamente el teorema anterior. Una demostración detallada puede hallarse en [14]. Sean  $\min(f) = c_1 < c_2 < \dots < c_s = \max(f)$ . Observemos que si  $p \in f^{-1}(c_1)$ , entonces  $\text{ind}_p f = 0$ . Para  $c < c_1$ ,  $M_c = \emptyset$ . Ahora, si  $c_1 < c < c_2$ , aplicando el teorema anterior obtenemos que  $M_c \simeq \emptyset \cup e_1^0 \cup \dots \cup e_t^0$ , donde  $e_1^0, \dots, e_t^0$  son 0-celdas. Inductivamente, si elegimos  $\varepsilon > 0$  tal que  $c_{i-1} < c_i - \varepsilon < c_i + \varepsilon < c_{i+1}$  y suponemos que  $M_{c_i-\varepsilon}$  es homotópicamente equivalente a un CW-complejo  $Y$  con una celda de dimensión  $k$  por cada punto crítico de  $f$  de índice  $k$  en  $M_{c_i-\varepsilon}$ , aplicando nuevamente el teorema anterior, obtenemos que

$$M_{c_i+\varepsilon} \simeq M_{c_i-\varepsilon} \bigcup_{\varphi_1} e_1^{k_1} \dots \bigcup_{\varphi_{r_i}} e_{r_i}^{k_{r_i}}.$$

Por otra parte, si  $g : M_{c_i-\varepsilon} \rightarrow Y$  es una equivalencia homotópica, entonces

$$M_{c_i-\varepsilon} \bigcup_{\varphi_1} e_1^{k_1} \dots \bigcup_{\varphi_{r_i}} e_{r_i}^{k_{r_i}} \simeq Y \bigcup_{g \circ \varphi_1} e_1^{k_1} \dots \bigcup_{g \circ \varphi_{r_i}} e_{r_i}^{k_{r_i}}.$$

Por otra parte, el teorema de aproximación celular nos permite suponer que  $g \circ \varphi_1, \dots, g \circ \varphi_{r_i}$  son celulares, por lo cual  $Y \bigcup_{g \circ \varphi_1} e_1^{k_1} \dots \bigcup_{g \circ \varphi_{r_i}} e_{r_i}^{k_{r_i}}$  posee una estructura de CW-complejo. Continuando el proceso, llegamos a que  $M = M_{c_s+\varepsilon}$  es homotópicamente equivalente a un CW-complejo con una celda de dimensión  $k$  por cada punto crítico de  $f$  de índice  $k$ .

**Definición 2.2.16.** *Sean  $B_1, \dots, B_k \subseteq (\mathbb{D}^2 \setminus \partial\mathbb{D}^2)$  discos disjuntos en  $\mathbb{D}^2$ , definimos*

$$H_0 = \mathbb{D}^2$$

y

$$H_k = \mathbb{D}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k B_i^\circ \quad \forall k \geq 1$$

Llamamos disco con  $k$  agujeros a cualquier superficie difeomorfa a  $H_k$

**Definición 2.2.17.** Una función de Morse  $f : M \rightarrow [a, b]$  se dice admisible si  $a$  y  $b$  son valores regulares y  $\partial M = f^{-1}(a) \cup f^{-1}(b)$ .

**Teorema 2.2.18.** Sea  $M$  una superficie compacta, conexa y orientable y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse admisible. Si  $f$  tiene exactamente un punto silla (y eventualmente puntos críticos de índice 0 o 2), entonces  $M$  es difeomorfa a  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{D}^2$ ,  $\mathbb{S}^1$  o a  $H_2$ . Además, si  $f|_{\partial M}$  es constante, entonces  $M$  no es difeomorfa a  $H_2$ .

Para una demostración de este resultado ver [6].

### 2.3. La teoría de Morse en la clasificación de superficies

Comenzaremos viendo algunas nociones sobre orientabilidad de funciones.

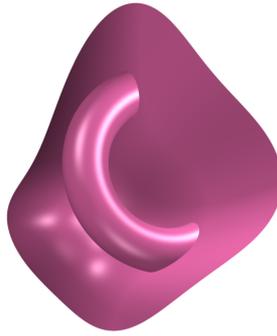
**Definición 2.3.1.** Sea  $f : \mathbb{S}^0 \times \mathbb{D}^2 \rightarrow M$  un embedding, decimos que  $f$  es orientable si  $M$  puede orientarse de modo que  $f$  preserve orientación. En caso contrario, decimos que  $f$  es un embedding no orientable.

**Definición 2.3.2.** Una variedad conexa se dice reversible si es orientable y admite un difeomorfismo de la variedad en si misma que invierte orientación.

**Definición 2.3.3.** Consideremos  $M$  una superficie (con o sin borde) y  $f : \mathbb{S}^0 \times \mathbb{D}^2 \rightarrow (M \setminus \partial M)$  un embedding. La imagen de  $f$  está compuesta por dos discos disjuntos. Si ahora removemos el interior de estos discos (es decir,  $f(\mathbb{S}^0 \times (\mathbb{D}^2)^\circ)$ ), podemos adjuntarle a  $M \setminus f(\mathbb{S}^0 \times (\mathbb{D}^2)^\circ)$  el cilindro  $\mathbb{I} \times \mathbb{S}^1$  mediante la función  $h = f|_{\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1}$ , obteniendo así la superficie

$$M[f] = \left( M \setminus f(\mathbb{S}^0 \times (\mathbb{D}^2)^\circ) \right) \cup_h \mathbb{I} \times \mathbb{S}^1.$$

Existe una única estructura diferencial en  $M[f]$  que induce en  $M \setminus f(\mathbb{S}^0 \times (\mathbb{D}^2)^\circ)$  y en  $\mathbb{I} \times \mathbb{S}^1$  la estructura original. Decimos que  $M[f]$  se obtiene de adjuntarle a  $M$  una manija o por cirugía en  $f$ .



**Observación 2.3.4.** Al adjuntar una manija a una variedad, a nivel celular podemos considerar que estamos sustrayéndole dos 2-celdas y luego adjuntándole una 1-celda y una 2-celda. Por ende,

$$\chi(M[f]) = \chi(M) - 2.$$

**Definición 2.3.5.** Si  $f, g : N \rightarrow M$  son dos embeddings, decimos que son isotópicos si se puede deformar uno en el otro mediante embeddings, es decir, existe una homotopía  $F : N \times \mathbb{I} \rightarrow M$  entre  $f$  y  $g$  tal que para todo  $t \in \mathbb{I}$ , la función  $F_t : N \rightarrow M$ ,  $F_t(x) = F(x, t)$ , es un embedding. A dicha homotopía se la llama isotopía.

A continuación vamos a enunciar algunos resultados que utilizaremos para la clasificación de las superficies compactas. Demostraciones de las mismas pueden hallarse en [6].

**Teorema 2.3.6.** Sea  $M$  una superficie y sean  $f, g : \mathbb{S}^0 \times \mathbb{D}^2 \rightarrow (M \setminus \partial M)$  embeddings isotópicos, entonces  $M[f] \cong M[g]$ .

**Corolario 2.3.7.** Si  $M$  es una superficie conexa no orientable, entonces todas las superficies obtenidas de adjuntarle a  $M$  una manija son difeomorfas entre si.

**Teorema 2.3.8.** Sea  $M$  una superficie y sea  $f : \mathbb{S}^0 \times \mathbb{D}^2 \rightarrow (M \setminus \partial M)$  un embedding, entonces:  
 $M[f]$  es orientable  $\iff$   $f$  es orientable.

**Teorema 2.3.9.** Sea  $M$  una superficie conexa y sean  $f, g : \mathbb{S}^0 \times \mathbb{D}^2 \rightarrow (M \setminus \partial M)$  dos embeddings, entonces  $M[f] \cong M[g]$  si y sólo si vale alguna de las siguientes afirmaciones:

1.  $M$  no es orientable.
2.  $M$  es orientable y ambas  $f$  y  $g$  preservan orientación, o ambas la invierten.
3.  $M$  es reversible y tanto  $f$  como  $g$  son orientables.

**Lema 2.3.10.** Si  $M$  es una superficie reversible y  $f : \mathbb{S}^0 \times \mathbb{D}^2 \rightarrow (M \setminus \partial M)$  es un embedding orientable, entonces  $M[f]$  es reversible.

Dadas dos superficies, vamos a describir a continuación una manera de obtener una superficie que, en cierto sentido, contenga a ambas.

**Definición 2.3.11.** Dadas  $M$  y  $N$  dos superficies (disjuntas) conexas sin borde, construimos otra superficie de la siguiente manera: Dado  $f : \mathbb{S}^0 \times \mathbb{D}^2 \rightarrow M \cup N$  un embedding con  $f((-1) \times \mathbb{D}^2) \subseteq M$  y  $f(1 \times \mathbb{D}^2) \subseteq N$  (es decir, la imagen de  $f$  consiste de un 2-disco en cada una de las superficies), definimos la suma conexa de  $M$  y  $N$  como

$$M\#N = (M \cup N)[f]$$

.

**Observación 2.3.12.** En realidad, no es necesario adjuntar una manija para definir la suma conexa de dos superficies. Es fácil ver que la misma es difeomorfa a la superficie obtenida de sustraerle un 2-disco a cada una y luego pegar las superficies obtenidas por el borde de los discos extraídos.

Ya estamos en condiciones de definir el género de una superficie.

**Definición 2.3.13.** Dados  $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  y  $M$  una superficie compacta, conexa, orientable y sin borde, decimos que  $M$  es de género  $p$  si puede ser obtenida adjuntándole a  $\mathbb{S}^2$  sucesivamente  $p$  manijas, es decir, existen superficies  $M_0, \dots, M_p$  y embeddings orientables

$f_i : \mathbb{S}^0 \times \mathbb{D}^2 \rightarrow M_{i-1}$  para  $i = 1, \dots, p$  (si  $p > 0$ ) tales que  $M_0 \approx \mathbb{S}^2$ ,  $M_i \approx M_{i-1} [f_i]$  y  $M_p = M$ . Equivalentemente,  $M$  es una suma conexa de  $p$  copias de  $T^2$ .

Notaremos  $M [f_1, \dots, f_{p-1}, f_p] = (M [f_1, \dots, f_{p-1}]) [f_p]$ .



**Observación 2.3.14.** Por Observación 2.3.4, una superficie orientable de género  $p$  es compacta, conexa y reversible, y tiene característica de Euler  $2 - 2p$ . Por lo tanto, dos superficies orientables de distinto género no pueden ser difeomorfas entre sí. Recíprocamente, aplicando el teorema 2.3.9, un argumento inductivo nos permite deducir que dos superficies orientables de igual género son difeomorfas entre sí.

Pasemos ahora a las superficies no orientables.

**Definición 2.3.15.** Sea  $M$  una superficie no orientable, compacta, conexa y sin borde y sea  $\mathbb{P}^2$  el plano proyectivo, decimos que  $M$  es una superficie no orientable de género  $p \geq 1$  o una esfera con  $p$  crosscaps si es difeomorfa a una suma conexa de  $p$  copias disjuntas de  $\mathbb{P}^2$ .

Ya podemos definir el género para superficies con borde.

**Definición 2.3.16.** Dada  $M$  una superficie compacta, conexa, orientable (o no orientable) con borde, decimos que es una superficie de género  $p$  con  $k$  componentes de borde si  $M$  se obtiene de sustraerle a una superficie orientable (o no orientable) de género  $p$  el interior de  $k$  discos disjuntos.

**Notación:** En cualquiera de los casos anteriores, notaremos  $g(M)$  al género de la superficie.

Las definiciones que acabamos de ver son las que nos permitirán clasificar todas las superficies compactas mediante una familia de teoremas. Empecemos por las orientables sin borde.

**Observación 2.3.17.** Si  $S$  es una superficie y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Morse, todo punto crítico tiene índice 0, 1 o 2. Por lo tanto,  $p$  es un punto silla sí y sólo si tiene índice 1.

**Teorema 2.3.18.** Sea  $M$  una superficie conexa, compacta, orientable y sin borde, entonces existe un único  $g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que  $M$  es una superficie orientable de género  $g$ .

*Demostración:* Lo probamos por inducción en la cantidad de puntos silla de una función de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Supongamos que existe  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse sin puntos silla y démosle a  $M$  una métrica Riemanniana. Llamemos  $P$  al conjunto de puntos mínimos y consideremos  $\mathcal{Y}$  el campo que corresponde a  $\text{Grad}(f)$ . Dado que  $M$  es compacta, existen al menos un máximo y un mínimo. Toda trayectoria de  $\mathcal{Y}$  tiende a un máximo. Si  $\varphi(p, t)$  es el flujo de  $\mathcal{Y}$  y para cada  $p \in M$  máximo definimos

$$A_p = \left\{ x \in M : \varphi(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} p \right\}$$

podemos ver que  $A_p$  es abierto para todo  $p$  punto máximo y, si  $p$  y  $q$  son dos puntos máximos distintos, entonces  $A_p \cap A_q = \emptyset$ . Por otra parte, la unión de dichos abiertos sobre todos los máximos de  $f$  cubre  $M$ . Dado que  $M$  es conexa, deducimos que  $f$  tiene un único punto máximo en  $M$ . Análogamente,  $f$  tiene un único punto mínimo. Al ser  $f$  una función de Morse, todos sus puntos críticos son no degenerados y, por lo observado antes, tienen índice 0, 1 o 2. En este caso,  $f$  no tiene puntos con índice 1, y tiene exactamente un punto de índice 0 y uno de índice 2. Por lo tanto,  $f$  tiene exactamente 2 puntos críticos. Por la proposición 2.2.9,  $M$  resulta ser difeomorfa a  $\mathbb{S}^2$  y es, por ende, una superficie orientable de género 0.

- Supongamos que para todo  $k \leq n$  vale que, si  $M$  admite una función de Morse con  $k$  puntos silla, entonces existe un único  $g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que  $M$  es una superficie orientable de género  $g$ . Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse con  $n$  puntos críticos. Podemos suponer que  $f$  separa puntos críticos, es decir, si  $p \neq q$  son puntos críticos, entonces  $f(p) \neq f(q)$ . Como  $f$  posee finitos puntos críticos, existe entonces un único  $p \in M$  que verifica  $f(p) < f(q)$  para cualquier otro punto silla  $q$ . Sea  $\alpha = f(p)$ . Por la continuidad de  $f$ , existe  $\beta \geq \alpha$  tal que  $p$  es el único punto crítico en  $f^{-1}([\alpha, \beta])$ . Consideremos  $W = f^{-1}(-\infty, \beta]$  y sea  $V$  la componente conexa de  $W$  que contiene a  $p$ . Es claro que  $\partial V \subseteq f^{-1}(\beta)$ . Enfoquémonos ahora en  $h = f|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Dicha función tiene un único punto silla y, además,  $p$  es el único punto crítico de la misma en  $f^{-1}([\alpha, \beta])$ . Por lo tanto,  $\beta$  es un valor regular de  $h$  con  $\partial V \subseteq h^{-1}(\beta)$  y, en consecuencia,  $h$  es una función de Morse admisible en  $V$ . Aplicando el teorema 2.2.18, obtenemos que  $V$  es difeomorfa a  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{D}^2$ ,  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$  o  $H_2$ . El último caso queda descartado por el mismo teorema, dado que  $h|_{\partial V}$  es constante. Dado que  $\partial V \neq \emptyset$ ,  $V$  tampoco puede ser difeomorfa a  $\mathbb{S}^2$ . Nos quedan entonces dos casos posibles:

◊ Si  $V \cong \mathbb{D}^2$  podemos definir una nueva función de Morse  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  que coincida con  $f$  en  $M \setminus V$  y posea un único punto crítico en  $V$  (un mínimo). Dicha función posee  $n - 1$  puntos silla. Por hipótesis inductiva, existe un único  $g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que  $M$  es una superficie orientable de género  $g$ .

◊ Si  $V \cong \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ , tenemos entonces un difeomorfismo  $\varphi : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow V$ . Construimos ahora una nueva superficie

$$N = \left( M \setminus \varphi(\mathbb{S}^1 \times (0, 1)) \right) \bigcup_{\varphi|_{\mathbb{S}^1 \times \{0, 1\}}} \left( \mathbb{D}^2 \cup^d \mathbb{D}^2 \right),$$

es decir,  $N$  se obtiene de quitarle a  $M$  el interior de  $V$  y tapar las dos componentes de  $\partial V = \varphi(\mathbb{S}^1 \times \{0, 1\})$  adjuntando dos 2-discos. Si extendemos  $f|_{M \setminus V}$  a  $N$  de modo que no posea puntos silla en los discos adjuntados, obtenemos una nueva función de Morse  $g : N \rightarrow \mathbb{R}$  con  $n - 2$  puntos silla. Por hipótesis inductiva, podemos concluir que existe un único  $g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que  $N$  es una superficie orientable de género  $g$ . Volviendo a  $M$ , dicha superficie se obtienen de adjuntarle a  $N$  una manija y, por ende, tiene género  $g + 1$ . Ahora, por teorema 2.3.9 y observación 2.3.14 tenemos que el género es único y vale  $\chi(M) = 2 - 2(g + 1) = -2g$ .

□

Veamos ahora el caso en que  $M$  es orientable y tiene borde no vacío.

**Teorema 2.3.19.** *Sea  $M$  una superficie conexa, compacta y orientable con característica de Euler  $n$  y  $k$  componentes de borde para algún  $k > 0$ . Entonces  $n + k$  es par y  $M$  es difeomorfa a una superficie obtenida de quitarle  $k$  discos disjuntos a una superficie orientable sin borde de género  $p = 1 - \frac{n+k}{2}$ .*

*Demostración* Como  $M$  es una variedad compacta de dimensión 2,  $\partial M$  es una variedad compacta y sin borde de dimensión 1. Esto implica que  $\partial M$  es unión disjunta de finitas copias de  $\mathbb{S}^1$ . Sea  $W$  la superficie obtenida de taparle a  $M$  las  $k$  circunferencias que componen su borde adjuntando  $k$  discos, esto a nivel celular se traduce en que  $W$  posee las mismas celdas que  $M$  y exáctamente  $k$  celdas de dimensión 2 más. Por ende, obtenemos que

$$2 - 2p = \chi(W) = \chi(M) + k = n + k.$$

Despejando  $p$  en la ecuación anterior, resulta  $p = 1 - \frac{n+k}{2}$ .

□

Un poco más compleja es la clasificación de superficies no orientables.

**Observación 2.3.20.** *Llamemos  $B$  a la banda de Möbius,  $D$  al 2-disco y  $P$  al plano proyectivo. Es claro que  $\partial B \approx \partial D \approx \mathbb{S}^1$ . Es fácil ver, como se muestra en la siguiente figura, que  $P$  es homeomorfo al espacio obtenido pegando  $B$  con  $D$  por sus bordes. De aquí podemos deducir que  $P \setminus D^\circ \approx B$ .*

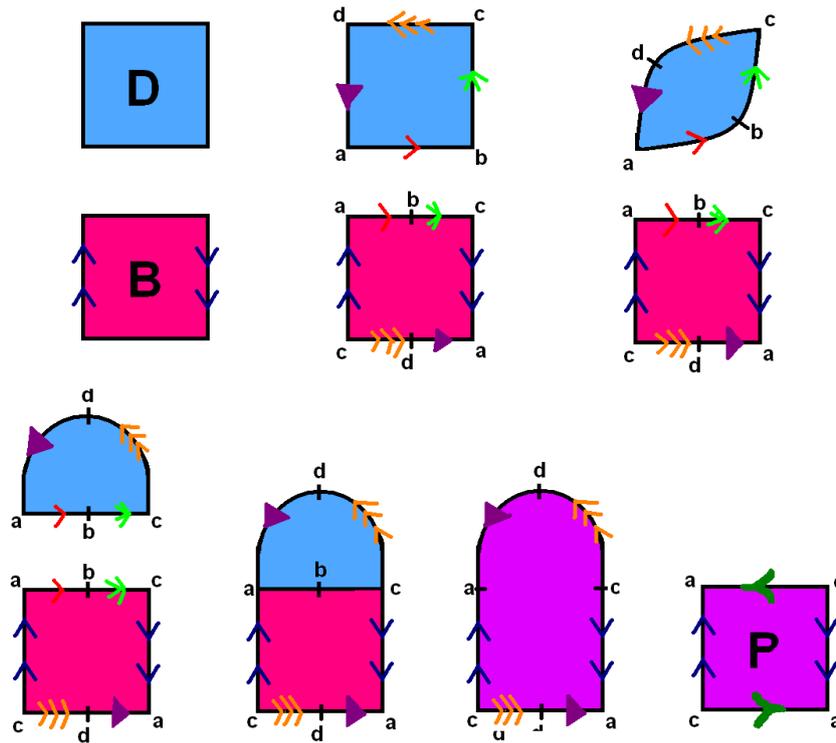


Figura 2.1:

Si  $M$  es una superficie sin borde, entonces vale

$$M \# P \approx (M \setminus D^\circ) \cup_f (P \setminus D^\circ) \approx (M \setminus D^\circ) \cup_f B,$$

donde  $D$  es un disco contenido en  $M$  y  $f : \partial B \rightarrow \partial D$  es un difeomorfismo arbitrario.

**Definición 2.3.21.** Si en la observación anterior consideramos  $i : B \rightarrow M \# P$  la inclusión, decimos que  $i(B) \subseteq M$  es un crosscap.

**Observación 2.3.22.** Si  $\mathbb{P}^2$  es el plano proyectivo, entonces:

- $\chi(\mathbb{P}^2) = 1$ .
- $\chi(M \# \mathbb{P}^2) = \chi(M) - 1$ .
- De los dos items anteriores podemos deducir que, si  $M$  es la suma conexa de  $k$  copias disjuntas de  $\mathbb{P}^2$ , entonces

$$\chi(M) = 1 - (k - 1) = 2 - k$$

**Teorema 2.3.23.** La adjunción de una manija a una superficie no orientable equivale a la adjunción de dos crosscaps. En consecuencia, adjuntar una manija a una superficie no orientable de género  $p$  produce una superficie no orientable de género  $p + 2$ .

*Demostración:* Ver 2.5.3

**Teorema 2.3.24.** *Sea  $M$  una superficie orientable de género  $p$ . Entonces, adjuntar a  $M$  un crosscap produce una superficie no orientable de género  $2p + 1$ .*

*Demostración:* Adjuntarle a  $M$  un crosscap nos da una suma conexa de  $p$  copias de  $T^2$  y una copia de  $\mathbb{P}^2$ . Equivalentemente, es el resultado de adjuntarle a  $\mathbb{P}^2$  una cantidad  $p$  de manijas. Cada manija adjuntada equivale a adjuntarle 2 crosscaps. Por lo tanto, la superficie obtenida es una suma conexa de  $2p + 1$  copias de  $\mathbb{P}^2$ .

**Lema 2.3.25.** *Toda superficie no orientable contiene una subvariedad difeomorfa a una banda de Möbius.*

**Lema 2.3.26.** *Para toda superficie compacta, conexa y no orientable  $N$  existe un único  $p > 0$  tal que  $N$  contiene  $p$  bandas de Möbius, pero no  $p + 1$ .*

**Definición 2.3.27.** *El número  $p$  del lema anterior se denomina el número de Möbius de  $M$ .*

**Teorema 2.3.28.** *Sea  $N$  una superficie compacta, conexa, sin borde y no orientable con número de Möbius  $p$ . Entonces  $N$  es una superficie no orientable de género  $p$ .*

*Demostración:* Sea  $W$  la superficie que se obtiene de quitarle a  $N$  el interior de  $p$  bandas de Möbius disjuntas. Por los lemas 2.3.25 y 2.3.26,  $W$  no contiene ninguna banda de Möbius y, por lo tanto, es orientable. Por la observación 2.3.20,  $\partial W$  tiene  $p$  componentes. Si tapamos todas sus componentes de borde adjuntando discos de dimensión 2, lo que obtenemos es una superficie orientable y sin borde a la cual llamaremos  $M$ . Por Teorema 2.3.18, existe un único  $g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que  $M$  es una superficie orientable de género  $g$ . Observemos que  $N$  se obtiene de  $M$  adjuntándole  $p$  crosscaps. Es decir, existen  $D_1, \dots, D_p$  discos disjuntos en  $M$  y  $B_1, \dots, B_p$  copias de la banda de Möbius tal que

$$N \approx (M \setminus \cup_{i=1}^p D_i^\circ) \bigcup_{\cup h_i} (\cup_{i=1}^p B_i),$$

donde  $h_i : \partial B_i \rightarrow \partial D_i$  es un difeomorfismo para todo  $1 \leq i \leq p$ . Por otra parte,  $M \approx \mathbb{S}^2 [f_1, \dots, f_g]$ . Las funciones  $f_1, \dots, f_g, h_1, \dots, h_p$  pueden elegirse de modo que no importe el orden de adjunción, de modo tal que

$$N \approx \left( M \setminus \bigcup_{i=1}^p D_i^\circ \right) \bigcup_{\cup h_i} \left( \bigcup_{i=1}^p B_i \right) \approx \left( \mathbb{S}^2 [f_1, \dots, f_g] \right) \bigcup_{\cup h_i} \left( \bigcup_{i=1}^p B_i \right) \approx \left( \mathbb{S}^2 \bigcup_{h_1} B_1 \right) [f_1, \dots, f_g] \bigcup_{\cup h_i} \left( \bigcup_{i=2}^p B_i \right).$$

Por Teorema 2.3.24,  $\mathbb{S}^2 \cup_{h_1} B_1$  es una superficie no orientable de género 1. Por Teorema 2.3.23,  $(\mathbb{S}^2 \cup_{h_1} B_1) [f_1, \dots, f_g]$  es una superficie no orientable de género  $1 + 2g$ . Dado que  $N$  se obtiene de adjuntarle a esta última  $p - 1$  crosscaps, concluimos que  $N$  tiene género  $1 + 2g + (p - 1) = 2g + p$ . Esto significa que  $N$  es una esfera con  $2g + p$  crosscaps, lo que implica que su número de Möbius es mayor o igual a  $2g + p$ . Por otra parte, recordemos que  $N$  tiene número de Möbius  $p$ , por lo cual necesariamente vale  $g = 0$ . Por lo tanto,  $N$  es una superficie no orientable de género  $p$ . □

**Proposición 2.3.29.** *Si  $N$  es una superficie compacta, conexa, no orientable y con  $k \geq 0$  componentes de borde, número de Möbius  $p$  y característica de Euler  $q$ , entonces  $N$  es una superficie no orientable con borde de género  $2 - q - k$  (con  $k$  componentes de borde).*

*Demostración:* Sea  $M$  la superficie obtenida de pegar un 2-disco a cada componente de borde. La misma es una superficie sin borde con número de Möbius  $m$ . Por Teorema 2.3.28, se sigue que  $M$  es una superficie no orientable de género  $m$  y, por Observación 2.3.22,  $\chi(M) = 2 - m$ . A su vez, pegar un 2-disco en una componente de borde equivale a adjuntar una 2-celda y, por lo tanto, aumenta en 1 la característica de Euler. De aquí podemos concluir que  $\chi(M) = \chi(N) + k$ . Por ende, tenemos que

$$q + k = \chi(M) = 2 - m$$

y, por lo tanto,  $m = 2 - q - k$ . Dado que  $N$  se obtiene de quitarle a  $M$  el interior de  $k$  discos disjuntos, concluimos que  $N$  es una superficie no orientable de género  $m = 2 - q - k$  con  $k$  componentes de borde. □

**Observación 2.3.30.** *Si  $M$  es una superficie conexa y compacta de género  $p$  y  $k$  componentes de borde, entonces:*

1. *Si  $M$  es orientable, entonces  $\chi(M) = 2 - 2p - k$ .*
2. *Si  $M$  es no orientable, entonces  $\chi(M) = 2 - p - k$ .*

Finalmente, de todo lo visto se desprende el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.31.** *Dos superficies conexas y compactas son difeomorfas si y sólo si son ambas orientables, u ambas no orientables, tienen la misma característica de Euler y tienen el mismo número de componentes de borde.*

## 2.4. Presentaciones de superficies

La idea de esta sección es demostrar nuevamente los teoremas de clasificación de superficies compactas sin borde, pero con herramientas diferentes. Nos basaremos en ([11]).

**Definición 2.4.1.** *Una presentación poligonal es una presentación de la forma  $\mathcal{P} = \langle S | W_1, \dots, W_k \rangle$ , donde  $S$  es un conjunto finito y  $W_1, \dots, W_k$  son concatenaciones finitas de 3 o más elementos de  $S$  o  $S^{-1} = \{x^{-1} : x \in S\}$ . Se pide además que todo elemento de  $S$  aparezca en algún  $W_i$ . A los elementos de  $S$  los llamaremos letras y a los  $W_i$  los llamaremos palabras. Se admite que haya palabras de longitud 2 sólo en los siguientes casos:*

$$\mathcal{P} = \langle a | aa \rangle, \mathcal{P} = \langle a | a^{-1}a^{-1} \rangle, \mathcal{P} = \langle a | aa^{-1} \rangle \text{ y } \mathcal{P} = \langle a | a^{-1}a \rangle.$$

Vamos a construir un espacio topológico a partir de una presentación poligonal.

**Construcción:** Sea  $\mathcal{P} = \langle S | W_1, \dots, W_k \rangle$  una presentación poligonal. Supongamos primero que todas las palabras tienen longitud mayor o igual a 3.

1. Por cada palabra  $W_i$  de longitud  $k_i$  definimos  $P_i$  como la región poligonal de  $\mathbb{R}^2$  encerrada por un polígono convexo de  $k_i$  lados de longitud 1 concenro en el origen y un vértice sobre el semieje  $\{(0, y) : y \geq 0\}$ .
2. A los lados de  $P_i$  se les va asignando a cada uno una letra (*etiqueta*) de  $W_i$  en el orden en que aparecen en la palabra (de izquierda a derecha), comenzando desde el vértice que se encuentra en  $\{(0, y) : y \geq 0\}$  y recorriendo el borde de  $P_i$  en sentido antihorario. Si  $a \in S$  y etiquetamos una arista con dicha letra, entonces llamaremos *vértice inicial* de  $a$  al primer vértice de  $a$  que se recorre yendo en sentido antihorario, y *vértice final* al otro. Si en cambio la arista lleva la etiqueta  $a^{-1}$ , entonces los vértices inicial y final se definen al revés.
3. Definimos en la unión disjunta de los  $P_i$  una relación de equivalencia  $\sim$  que identifica los puntos del interior con sigo mismos, y las aristas son identificadas de la siguiente manera:
  - Si dos aristas tienen la etiqueta  $a$ , entonces se identifican entre si de modo que el vértice inicial de una se identifique con el vértice inicial de la otra (y el final con el final).
  - Si una arista lleva la etiqueta  $a$  y otra lleva la etiqueta  $a^{-1}$ , entonces se identifican entre sí de modo que el vértice inicial de  $a$  se identifique con el vértice inicial de  $a^{-1}$  (y el final con el final).
  - Si una arista lleva la etiqueta  $a$  y ninguna otra arista lleva la etiqueta  $a$  ni  $a^{-1}$ , entonces los puntos de dicha arista se identifican con sigo mismos (sus vértices pueden estar identificados con otros puntos).

En el caso especial en que tengamos una de las cuatro presentaciones con una letra definidas en 2.4.1, en lugar de una región poligonal definimos  $P = \mathbb{D}^2$  y en su borde marcamos dos lados, aquel cuyos elementos tienen la primera coordenada negativa, y aquel cuyos elementos tienen la primer coordenada positiva. Tendrá dos vértices:  $(0, 1)$  y  $(0, -1)$ . A partir del paso 2 todo se define de forma análoga a lo anterior.

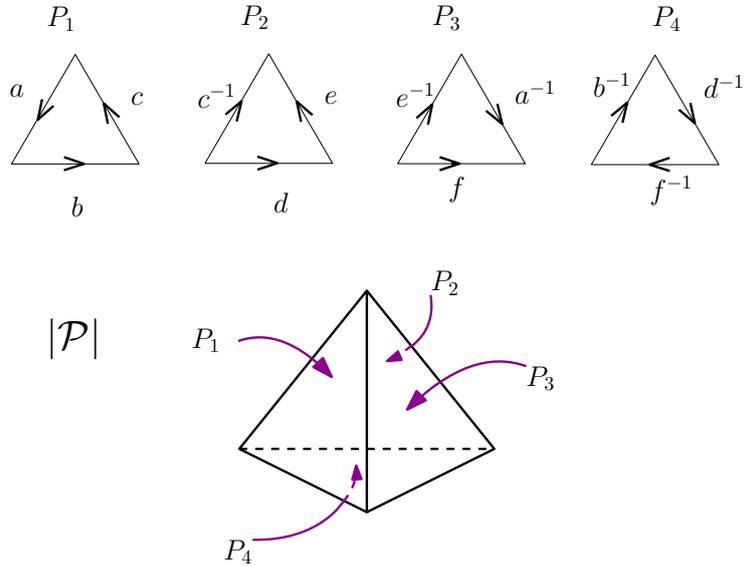
**Definición 2.4.2.** *Dada una presentación poligonal  $\mathcal{P}$ , definimos la realización geométrica de  $\mathcal{P}$  como el espacio topológico*

$$|\mathcal{P}| = \left( \bigcup^d P_i \right) / \sim,$$

donde los  $P_i$  y  $\sim$  son las regiones poligonales y la relación de equivalencia definidos anteriormente. Al interior de cada  $P_i$  le llamamos cara.

**Ejemplo 2.4.3.** *Podemos ver un ejemplo en la siguiente ilustración:*

$$\mathcal{P} = \langle a, b, c, d, e, f \mid abc, c^{-1}de, e^{-1}fa^{-1}, b^{-1}f^{-1}d^{-1} \rangle$$



**Ejemplo 2.4.4.** Volvamos a las siguientes cuatro presentaciones:

- $\mathcal{P} = \langle a \mid aa \rangle$
- $\mathcal{P} = \langle a \mid a^{-1}a^{-1} \rangle$
- $\mathcal{P} = \langle a \mid aa^{-1} \rangle$
- $\mathcal{P} = \langle a \mid a^{-1}a \rangle$

Las primeras dos son presentaciones de  $\mathbb{P}^2$  y las últimas son presentaciones de  $\mathbb{S}^2$ . Llamaremos presentación standard de  $\mathbb{P}^2$  a la primera, y presentación standard de  $\mathbb{S}^2$  a la tercera.

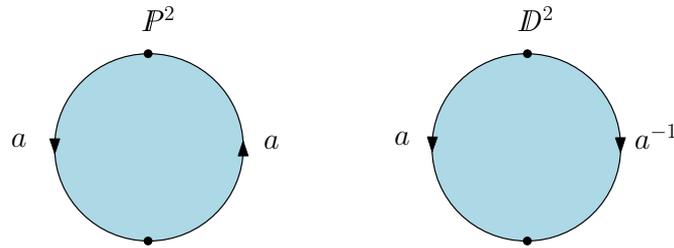


Figura 2.2: Presentaciones Standard de la esfera y el plano proyectivo

**Lema 2.4.5.** Sean  $P_1$  y  $P_2$  dos polígonos convexos con el mismo número de aristas. Si  $f : \partial P_1 \rightarrow \partial P_2$  es un isomorfismo simplicial, entonces existe un homeomorfismo  $\bar{f} : P_1 \rightarrow P_2$  tal que  $\bar{f}|_{\partial P_1} = f$ .

*Demostración:* Para cada  $i = 1, 2$  elegimos un punto  $p_i \in P_i^\circ$ . Dado que cada  $P_i$  es convexo, los segmentos que unen  $p_i$  con un vértice de  $P_i$  están enteramente contenidos en  $P_i$ . Consideremos para cada  $i$  el complejo simplicial  $K_i$  compuesto por los vértices y aristas de  $P_i$  junto con el punto  $p_i$ , los segmentos que lo unen con cada uno de los vértices del polígono y los 2-símplices de la forma  $\{v_j, p_i, v_{j+1}\}$ , donde  $v_j$  y  $v_{j+1}$  son vértices contiguos. Por como está definido, tenemos que  $|K_i| = P_i$ . Definimos ahora un morfismo simplicial  $\varphi : K_1 \rightarrow K_2$  tal que  $\varphi(v) = f(v)$  para cada vértice  $v$  de  $P_1$  y  $\varphi(p_1) = \varphi(p_2)$ . La biyectividad de  $f$  implica la biyectividad de  $\varphi$ , cuya inversa es claramente también un morfismo simplicial. Por lo tanto,  $\bar{f} = |\varphi| : |K_1| \rightarrow |K_2|$  es un homeomorfismo que coincide con  $f$  en  $\partial P_1$  □

**Definición 2.4.6.** Sea  $\mathcal{P} = \langle S | W_1, \dots, W_k \rangle$  una presentación poligonal, decimos que  $\mathcal{P}$  es una presentación de superficie si cada letra  $a \in S$  aparece en  $W_1, \dots, W_k$  exáctamente dos veces, donde las apariciones de  $a^{-1}$  cuentan como apariciones de  $a$ .

**Proposición 2.4.7.** Sean  $P$  una región poligonal de  $\mathbb{R}^2$  con un número par de lados y  $\mathcal{R}$  una relación de equivalencia en  $P$  que identifica cada arista con exáctamente una arista diferente mediante un homeomorfismo simplicial. Entonces  $P/\mathcal{R}$  es una 2-variedad compacta.

**Corolario 2.4.8.** Si  $\mathcal{P}$  es una presentación de superficie, entonces  $|\mathcal{P}|$  es una superficie compacta y sin borde.

**Observación 2.4.9.** Si  $K$  es un complejo simplicial de dimensión 2 en el cual todo simplex maximal tiene dimensión máxima, entonces existe una presentación de superficie  $\mathcal{P}$  tal que  $|K| \approx |\mathcal{P}|$ , donde cada 2-simplex se corresponde con una palabra de longitud tres.

**Definición 2.4.10.** Dadas dos presentaciones poligonales  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$ , decimos que son topológicamente equivalentes si  $|\mathcal{P}_1|$  es homeomorfo a  $|\mathcal{P}_2|$ . Notamos  $\mathcal{P}_1 \approx \mathcal{P}_2$ .

### Transformaciones elementales

Vamos a definir una serie de transformaciones que pueden aplicarse a una presentación poligonal de modo que la presentación resultante sea equivalente a la original.

Sea  $\mathcal{P} = \langle S | W_1, \dots, W_k \rangle$ , llamaremos  $e$  a una letra que no pertenece a  $S$  y adoptaremos la convención  $(a^{-1})^{-1} = a$ .

#### ▪ REETIQUETAR:

1. Cambiar todas las apariciones de una letra  $a \in S$  por alguna letra  $e$  que no esté en  $S$ , junto con cambiar cada aparición de  $a^{-1}$  por  $e^{-1}$ , y cambiar  $S$  por  $(S \setminus \{a\}) \cup \{e\}$ .
2. Dadas dos letras  $a$  y  $b$  en  $S$ , intercambiar cada aparición de  $a$  por  $b$  y viceversa, y lo mismo con  $a^{-1}$  y  $b^{-1}$ .
3. Para alguna letra  $a \in S$ , intercambiar entre sí las apariciones de  $a$  y  $a^{-1}$ .

#### ▪ SUBDIVIDIR: Reemplazar cada aparición de una letra $a \in S$ por $ae$ , y cada aparición de $a^{-1}$ por $e^{-1}a^{-1}$ .

- CONSOLIDAR: Es la operación inversa a SUBDIVIDIR: Si dos letras  $a$  y  $b$  aparecen en las palabras siempre en forma adyacente  $ab$  y  $a^{-1}b^{-1}$ , reemplazar  $ab$  por  $a$  y  $b^{-1}a^{-1}$  por  $a^{-1}$ , siempre y cuando las palabras resultantes tengan longitud mayor o igual a tres, o sean uno de los casos especiales con  $\#S = 1$ .

- REFLEJAR:

$$\langle S|a_1\dots a_m, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S|a_m^{-1}\dots a_1^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

- ROTAR:

$$\langle S|a_1\dots a_m, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S|a_2a_3\dots a_ma_1, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

- CORTAR: Si  $W_1$  y  $W_2$  tienen longitud mayor o igual a dos,

$$\langle S|W_1W_2, W_3, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S, e|W_1e, e^{-1}W_2, \dots, W_k \rangle,$$

donde  $W_1W_2$  denota la concatenación de dichas palabras.

- PEGAR: Es la operación inversa a CORTAR:

$$\langle S, e|W_1e, e^{-1}W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S|W_1W_2, W_3, \dots, W_k \rangle.$$

- PLEGAR: Si  $W_1$  posee 3 o más letras:

$$\langle S, e|W_1ee^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S|W_1, W_2, W_3, \dots, W_k \rangle.$$

En los 4 casos especiales en que  $\#S = 1$  podemos admitir que  $W$  posea 2.

- DESPLEGAR: Es la operación inversa a PLEGAR:

$$\langle S|W_1, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S, e|W_1ee^{-1}, W_2, W_3, \dots, W_k \rangle.$$

**Proposición 2.4.11.** *Si una presentación poligonal  $\mathcal{P}'$  es el resultado de aplicarle a una presentación poligonal  $\mathcal{P}$  una transformación elemental, entonces  $\mathcal{P} \approx \mathcal{P}'$ . Por lo tanto, el resultado de aplicarle a una presentación una secuencia finita de transformaciones elementales es una presentación topológicamente equivalente a la original.*

*Demostración:* Es claro que reetiquetar y subdividir/consolidar y reflejar dan espacios homomorfos al original. Dado que las transformaciones cortar y pegar son inversas entre sí, y plegar y desplegar también, basta probar el resultado para una de cada par. Demostraremos el resultado para las transformaciones cortar-pegar:

Supongamos que  $\mathcal{P} = \langle S, e|W_1e, e^{-1}W_2 \rangle$  y  $\mathcal{P}' = \langle S, W_1W_2 \rangle$ . Sean  $P_1$  y  $P_2$  los polígonos convexos asociados a  $W_1e$  y  $e^{-1}W_2$  respectivamente, y  $PP'$  el asociado a  $\cdot W_1W_2$ . Sean  $W_1 = a_1\dots a_n$  y  $W_2 = b_1\dots b_m$ . Si llamamos  $e$  al segmento que en  $P'$  une el extremo final de  $a_n$  con el extremo inicial de  $a_1$ , el mismo se encuentra enteramente contenido en  $P'$  por la convexidad del mismo. Así,  $P'$  que dividido en dos polígonos convexos (los ángulos interiores de los nuevos polígonos no pueden tener mayor amplitud que los originales).

Llamemos  $P'_1$  al que tiene las aristas  $a_1, \dots, a_n$  y  $e$  y  $P'_2$  al otro. Es claro que  $P'_1$  y  $P'_2$  tienen la misma cantidad de vértices que  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente. Para  $i = 1, 2$ , podemos definir  $f_i : \partial P_i \rightarrow \partial P'_i$  homeomorfismos simpliciales que manden las aristas de  $P_i$  a las de  $P'_i$  que poseen las mismas etiquetas. Por 2.4.5,  $f_i$  puede extenderse a un homeomorfismo  $\bar{f}_i : P_i \rightarrow P'_i$ . Podemos definir entonces una función  $f : P_1 \cup^d P_2 \rightarrow P'$  tal que  $f|_{P_i} = \bar{f}_i$  para  $i = 1, 2$ . Si llamamos  $\pi_1 : P_1 \cup^d P_2 \rightarrow |\mathcal{P}|$  y  $\pi_2 : P' \rightarrow |\mathcal{P}'|$  a las respectivas proyecciones al espacio cociente, podemos definir  $\pi_2 \circ f : P_1 \cup^d P_2 \rightarrow |\mathcal{P}'|$ . Es evidente que si  $x, y \in P_1 \cup^d P_2$  representan el mismo elemento en el cociente, entonces  $\pi_2 \circ f(x) = \pi_2 \circ f(y)$ . Por lo tanto, queda bien definida una función continua  $F : |\mathcal{P}| \rightarrow |\mathcal{P}'|$  que verifica que  $\pi_2 \circ f = F \circ \pi_1$  que es claramente biyectiva. Como  $|\mathcal{P}|$  y  $|\mathcal{P}'|$  son compactos y Hausdorff, entonces  $F$  es un homeomorfismo.

En el caso en que  $\mathcal{P} = \langle S, e, W_1 e, e^{-1} W_2, W_3, \dots, W_k \rangle$ , operamos de la misma manera extendiendo  $f$  como la identidad en los demás polígonos. □

**Proposición 2.4.12.** Sean  $M_1$  y  $M_2$  las superficies determinadas por las presentaciones  $\langle S_1 | W_1 \rangle$  y  $\langle S_2 | W_2 \rangle$  respectivamente, donde  $S_1$  y  $S_2$  son disjuntos, entonces  $\langle S_1 \cup S_2 | W_1 W_2 \rangle$  es una presentación de  $M_1 \# M_2$ .

*Demostración:* Consideremos la presentación  $\langle S_1, a, b, c | W_1 c^{-1} b^{-1} a^{-1}, abc \rangle$ . Pegando primero en  $a$  y luego plegando dos veces, es fácil ver que esta presentación es equivalente a  $\langle S_1 | W_1 \rangle$ . Consideremos  $B_1$  el disco en  $M_1$  dado por la proyección al cociente del interior del triángulo de lados  $a, b$  y  $c$ . Tenemos entonces que  $\langle S_1, a, b, c | W_1 c^{-1} b^{-1} a^{-1} \rangle$  es una presentación de  $M'_1 = M_1 \setminus B_1$ , y  $\partial B_1$  es la proyección de las aristas  $c^{-1} b^{-1} a^{-1}$ . Análogamente,  $\langle S_2, a, b, c | abc W_2 \rangle$  es una presentación de  $M'_2 = M_2 \setminus B_2$ , donde  $B_2$  es el interior de un disco en  $M_2$ . Por lo tanto,  $\langle S_1, S_2, a, b, c | W_1 c^{-1} b^{-1} a^{-1}, abc W_2 \rangle$  es una presentación de  $(M_1 \cup^d M_2) / \sim$ , donde  $\sim$  identifica  $\partial B_1$  con  $\partial B_2$ , es decir, es una presentación de  $M_1 \# M_2$ . Pegando en  $a$  y luego plegando dos veces, obtenemos que esta presentación es equivalente a  $\langle S_1, S_2 | W_1, W_2 \rangle$ . □

## 2.5. Clasificación combinatoria de superficies

A continuación enunciaremos uno de los teoremas más importantes para la clasificación de superficies.

**Teorema 2.5.1. (Teorema de triangulación de Superficies)** Toda 2-variedad sin borde admite una triangulación por un complejo simplicial de dimensión 2 en el cual toda arista está contenida en exactamente dos 2-símplices.

En esquema de la demostración de este teorema puede encontrarse en [11]

**Lema 2.5.2.** La botella de Klein es homeomorfa a  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ .

*Demostración:* Si partimos de la presentación  $\langle a, b | abab^{-1} \rangle$  de la botella de Klein, aplicando sucesivamente las transformaciones elementales cortar, rotar, reflejar, pegar y

rotar nuevamente, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle a, b | abab^{-1} \rangle &\approx \langle a, b, c | abc, c^{-1}ab^{-1} \rangle \approx \langle a, b, c | bca, b^{-1}c^{-1}a \rangle \\ &\approx \langle a, b, c | bca, a^{-1}cb \rangle \approx \langle b, c | bccb \rangle \approx \langle b, c | bbcc \rangle. \end{aligned}$$

Por 2.4.12, esta es una presentación de  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ .

**Lema 2.5.3.** *La suma conexa de un toro  $T^2$  y el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2$  es homeomorfa a  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ .*

*Demostración:* Partamos de una presentación de  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$  y veamos que podemos llevarla por medio de transformaciones elementales a una de  $T^2 \# \mathbb{P}^2$ . Por 2.5.2 y 2.4.12,  $\langle a, b, c | abab^{-1}cc \rangle$  es una presentación de  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ . Aplicando sucesivamente las transformaciones elementales rotar, cortar, rotar, reflejar, pegar, rotar, cortar, rotar, reflejar y pegar, obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle a, b, c | abab^{-1}cc \rangle &\approx \langle a, b, c | cabab^{-1}c \rangle \approx \langle a, b, c, d | cabd^{-1}, dab^{-1}c \rangle \approx \langle a, b, c, d | abd^{-1}c, dab^{-1}c \rangle \\ &\approx \langle a, b, c, d | abd^{-1}c, c^{-1}ba^{-1}d^{-1} \rangle \approx \langle a, b, d | abd^{-1}ba^{-1}d^{-1} \rangle \approx \langle a, b, d | d^{-1}ba^{-1}d^{-1}ab \rangle \approx \\ \langle a, b, d, e | d^{-1}bd^{-1}, ea^{-1}d^{-1}ab \rangle &\approx \langle a, b, d, e | e^{-1}d^{-1}b, ea^{-1}d^{-1}ab \rangle \approx \langle a, b, d, e | b^{-1}de, ea^{-1}d^{-1}ab \rangle \\ &\approx \langle a, d, e | ea^{-1}d^{-1}ade \rangle \approx \langle a, d, e | a^{-1}d^{-1}adee \rangle. \end{aligned}$$

Esta última es efectivamente una presentación de  $T^2 \# \mathbb{P}^2$ . □

**Definición 2.5.4.** *Los pares de aristas  $\{a, a^{-1}\}$  se dicen complementarios, mientras que los pares  $\{a, a\}$  y  $\{a^{-1}, a^{-1}\}$  se dicen torcidos.*

**Lema 2.5.5.** *Si  $\mathcal{P}$  es una presentación de una superficie conexa  $M$ , entonces existe una presentación  $\mathcal{P}'$  con una sola cara equivalente a  $\mathcal{P}$ .*

*Demostración:* En los cuatro casos donde  $S$  contiene un único elemento, la presentación tiene de por sí una sola cara, así que de aquí en adelante supondremos que  $\#S \geq 2$  y que las palabras de la presentación tienen longitud mayor o igual a tres. Lo vemos por inducción en  $k$ .

- Si  $K = 1$  claramente se cumple lo que queremos.
- Supongamos que vale para  $k = n$  y sea  $\mathcal{P} = \langle S | W_1, \dots, W_{n+1} \rangle$ . Como  $M$  es conexa, existe una arista de  $P_{n+1}$  que se identifica con alguna arista de otra cara. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que existe una arista  $a$  de  $P_{n+1}$  que se identifica con una arista de  $P_n$ , es decir,  $P_n$  tiene una arista con la etiqueta  $a$ , o bien con la etiqueta  $a^{-1}$ . En el primer caso, rotaciones de por medio, podemos suponer que  $W_n = acX$  y que  $W_{n+1} = abY$ , donde  $W$  e  $Y$  son palabras no vacías. Podemos

reflejar  $W_n$  obteniendo  $\bar{W}_n = X^{-1}c^{-1}a^{-1}$ , donde  $X^{-1}$  denota la palabra  $X$  reflejada. Ahora podemos pegar  $\bar{W}_n$  y  $W_{n+1}$ , de modo que obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \langle S|W_1, \dots, acX, abY \rangle \approx \langle S|W_1, \dots, X^{-1}c^{-1}a^{-1}, abY \rangle \\ &\approx \langle S \setminus \{a\}|W_1, \dots, X^{-1}c^{-1}bY \rangle. \end{aligned}$$

Llamemos  $\bar{\mathcal{P}}$  a la presentación obtenida. La misma posee  $n$  caras. Por hipótesis inductiva, existe  $\mathcal{P}'$  con una sola cara equivalente a  $\bar{\mathcal{P}}$ . Por lo tanto, obtenemos  $\mathcal{P} \approx \bar{\mathcal{P}} \approx \mathcal{P}'$ . El otro caso es análogo, con la única diferencia de que no aplicamos la reflexión. □

**Observación 2.5.6.** *Si  $\mathcal{P}$  es una presentación con una sola cara de una superficie  $M$  no homeomorfa a  $\mathbb{S}^2$ , en el caso en que  $\mathcal{P}$  posea aristas complementarias adyacentes entre sí podemos cambiar  $\mathcal{P}$  por  $\mathcal{P}'$ , la presentación obtenida de realizar la transformación de plegado en cada par complementario adyacente. Es claro que  $\mathcal{P}'$  es equivalente a  $\mathcal{P}$ , que sigue teniendo una sola cara y que no posee pares complementarios adyacentes.*

**Lema 2.5.7.** *Sea  $\mathcal{P}$  una presentación de una superficie  $M$  distinta de  $\mathbb{P}^2$  y de  $\mathbb{D}^2$  tal que  $\mathcal{P}$  posee una sola cara y no posee pares complementarios adyacentes, existe entonces una presentación  $\mathcal{P}'$  equivalente a  $\mathcal{P}$  con una sola cara y sin pares complementarios adyacentes que además verifica que todos sus pares torcidos son adyacentes.*

*Demostración:* Supongamos que  $\mathcal{P}$  posee algún par torcido de aristas no adyacentes. Rotación de por medio, podemos suponer que  $\mathcal{P}$  es de la forma  $\mathcal{P} = \langle S|VaWa \rangle$ , donde  $V$  y  $W$  son palabras no vacías. Ahora, si aplicamos sucesivamente las operaciones cortar, rotar, reflejar, pegar y rotar, obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle S|VaWa \rangle &\approx \langle S, e|Vae, e^{-1}Wa \rangle \approx \langle S, e|eVa, e^{-1}Wa \rangle \\ &\approx \langle S, e|eVa, a^{-1}W^{-1}e \rangle \approx \langle S \setminus \{a\}, e|eVW^{-1}e \rangle \approx \langle S \setminus \{a\}, e|VW^{-1}ee \rangle. \end{aligned}$$

Observemos que la presentación obtenida posee una sola cara y que, de haber pares adyacentes en  $\mathcal{P}$ , se encuentran enteramente contenidos en  $V$ , o enteramente contenidos en  $W$ . Por lo tanto, las operaciones realizadas no los separan. Además, hemos cambiado un par no adyacente por uno que sí lo es, de modo que en total hemos reducido el número de pares no adyacentes en por lo menos uno. Iterando este procedimiento una cantidad finita de veces, obtenemos  $\bar{\mathcal{P}}$  una presentación con una sola cara cuyos pares torcidos son todos adyacentes entre sí. Si  $\bar{\mathcal{P}}$  no posee pares complementarios adyacentes, entonces esta es la presentación buscada. En caso contrario, procedemos como en 2.5.6, donde no se modifica el número de caras de la presentación ni aparecen pares torcidos nuevos, para obtener  $\mathcal{P}' \approx \bar{\mathcal{P}}$  la presentación deseada. □

**Lema 2.5.8.** *Sea  $\mathcal{P}$  una presentación de una superficie  $M$  distinta de  $\mathbb{S}^2$  y de  $\mathbb{D}^2$ . Si  $\mathcal{P}$  posee una sola cara, ninguna de sus pares complementarios es adyacente y todos sus pares torcidos sí lo son, entonces:*

1. existe una presentación  $\mathcal{P}'$  que verifica todas las hipótesis anteriores y que además cumple que, si  $\sim$  es la relación de equivalencia de 2.4.2, entonces todos los vértices de su única cara pertenecen a la misma clase, es decir, en la representación geométrica todos sus vértices se pegan en un mismo punto.
2. La presentación  $\mathcal{P}'$  verifica que todo par complementario  $a, a^{-1}$  se encuentra intercalado con otro par complementario  $b, b^{-1}$  en la forma  $aXbYa^{-1}Xb^{-1}$ , donde  $X, Y$  y  $Z$  son palabras eventualmente vacías.

*Demostración:*

1. Sea  $V$  una clase de equivalencia en  $\mathcal{P}/\sim$ . Supongamos que  $V$  no contiene a todos los vértices de  $P$ . Sea  $v \in V$ , llamemos  $w$  al primer vértice no perteneciente a  $V$  que se halla recorriendo  $\partial P$  en sentido antihorario desde  $v$ , y  $u$  al vértice anterior. Claramente  $u \in V$ . Llamemos  $a$  a la arista que comparten y  $b$  a la otra arista de la cual  $u$  es vértice. Por hipótesis,  $b \neq a^{-1}$ . Veamos que  $b \neq a$ . Si fuera  $b = a$ , en el cociente se identificarían  $a$  y  $b$  de modo que coincidan sus vértices finales, pero eso implicaría que  $w \sim u$ , lo cual contradice el hecho de que  $w \notin V$ . Por lo tanto,  $b \neq a$ . Llamemos  $x$  al otro vértice de  $b$ . En alguna parte de  $P$  existe otra arista con la etiqueta  $b$  o  $b^{-1}$ . Supongamos que es  $b^{-1}$  (el otro caso es similar). Podemos escribir  $\mathcal{P}$  de la forma  $\langle S|baYb^{-1}Z \rangle$ , donde  $Y$  y  $Z$  son dos palabras no simultáneamente vacías. Aplicando sucesivamente las operaciones cortar, rotar y pegar, obtenemos que

$$\langle S|baYb^{-1}Z \rangle \approx \langle S, e|bae, e^{-1}Yb^{-1}Z \rangle \approx \langle S, e|bae, Ze^{-1}Yb^{-1} \rangle \approx \langle S \setminus \{b\}, e|Ze^{-1}Yae \rangle.$$

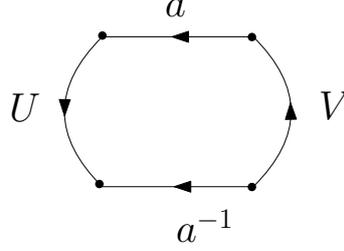
Sean  $\tilde{v}$  y  $\tilde{x}$  los vértices de  $b^{-1}$  que se identifican con  $v$  y  $x$  respectivamente, al cortar  $P$  y volver a pegar las piezas resultantes a lo largo de  $b$ ,  $v$  y  $\tilde{v}$  se vuelven un mismo vértice, y lo mismo con  $x$  y  $\tilde{x}$ . Por otra parte,  $w$ , que resulta ser el vértice inicial de  $e$ , se identifica con el vértice final de  $e^{-1}$ . Esto causa que  $V$  posea ahora un elemento menos, y la clase de  $w$  un elemento más. Por definición, en una presentación de superficie  $\langle S|W \rangle$  la cantidad de vértices es exactamente dos veces el cardinal de  $S$ , por lo que podemos observar que la cantidad total de vértices vuelve a ser la original. Veamos qué ocurre con las hipótesis iniciales:

- La presentación resultante sigue constando de una sola cara.
- En caso de que las transformaciones realizadas lleven a la existencia de un par complementario adyacente, operamos como en 2.5.6, lo cual a lo sumo reduce el cardinal de  $V$ , pero no puede aumentarlo.
- Dado que  $u$  y  $w$  no se identifican entre sí, la primera letra de  $Y$  debe ser distinta de  $a$ . Por lo tanto, los pares torcidos de aristas adyacentes que se encontraran en  $\mathcal{P}$  estaban enteramente contenidos en  $Y$  o en  $Z$  y, en consecuencia, no fueron separados.

En conclusión, obtuvimos una presentación equivalente a  $\mathcal{P}$  con las mismas hipótesis en la cual el cardinal de  $V$  es estrictamente menor. Podemos repetir este procedimiento hasta que  $\#V$  sea menor o igual a 1. Si fuera  $\#V = 1$ , entonces sería  $b = a$ ,

caso que ya descartamos. Por lo tanto, en algún momento tendremos una clase de equivalencia menos. Podemos repetir el proceso hasta quedarnos con una única clase de equivalencia.

- Supongamos que  $\mathcal{P}' = \langle S|aUa^{-1}V \rangle$  y que  $U$  cumple que si  $b$  es una de sus letras, entonces la otra copia de  $b$  o la letra  $b^{-1}$  también se encuentran en  $U$  ( $U \neq \emptyset \neq V$  pues  $\mathcal{P}$  no posee pares complementarios adyacentes). En este caso, lo mismo debe ocurrir con  $V$ .



En esta situación, los vértices iniciales de  $a$  y  $a^{-1}$  sólo pueden identificarse con vértices en  $V$ , mientras que los vértices finales sólo se identifican con vértices en  $U$ . Pero sabemos que todos los vértices se identifican entre sí en ' $PP'$ ' y, por lo tanto, debe existir  $b$  en  $U$  tal que  $b^{-1}$  sea letra de  $V$ .

□

**Lema 2.5.9.** Si  $\mathcal{P}'$  es una presentación como en 2.5.8, entonces existe una presentación  $\mathcal{P}''$  equivalente a  $\mathcal{P}'$  que verifique las mismas condiciones y en la que además todos los pares complementarios intercalados no poseen otras letras en el medio, es decir, si  $\mathcal{P}'' = \langle S|UaXbYa^{-1}Zb^{-1} \rangle$ , entonces de las cuatro palabras  $U, X, Y, Z$ , al menos tres son vacías.

*Demostración:* Supongamos que  $\mathcal{P}' = \langle S|UaXbYa^{-1}Zb^{-1} \rangle$  y que  $X \neq \emptyset$ . Aplicando sucesivamente las operaciones cortar, rotar, pegar, rotar, cortar, rotar, pegar y rotar una última vez, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}' &= \langle S|UaXbYa^{-1}Zb^{-1} \rangle \approx \langle S, e|UaXe, e^1bYa^{-1}Zb^{-1} \rangle \approx \langle S, e|aXeU, Zb^{-1}e^1bYa^{-1} \rangle \\ &\approx \langle S \setminus a, e|Zb^{-1}e^1bYXeU \rangle \approx \langle S \setminus a, e|UZb^{-1}e^1bYXe \rangle \approx \langle S \setminus a, e, f|UZb^{-1}e^1f^{-1}, fbYXe \rangle \\ &\approx \langle S \setminus a, e, f|e^1f^{-1}UZb^{-1}, bYXef \rangle \approx \langle S \setminus a, b, e, f|e^1f^{-1}UZYZXef \rangle \approx \langle S \setminus a, b, e, f|efe^1f^{-1}UZYZX \rangle. \end{aligned}$$

Llamamos a esta última presentación  $\mathcal{P}'$ . De este modo, los pares intercalados  $a, a^{-1}$  y  $b, b^{-1}$  ya no están y tenemos un nuevo par de pares intercalados  $e, f, e^{-1}, f^{-1}$ , que no poseen otras letras en el medio. En el caso en que hubiese previamente bloques de la forma  $xyx^{-1}y^{-1}$ , se hallaban íntegramente contenidos en  $U, X, Y$  o  $Z$  y, por lo tanto, no fueron separados mediante las transformaciones realizadas. Observemos que las hipótesis iniciales no se ven alteradas por las transformaciones realizadas, a excepción de la posible aparición de pares complementarios adyacentes, los cuales pueden eliminarse sin problemas procediendo como en 2.5.6. En conclusión, podemos repetir este procedimiento hasta que todos los pares complementarios intercalados queden en bloque.

□

**Teorema 2.5.10.** (*Clasificación de presentaciones de superficies*) Toda presentación de una superficie conexa es equivalente a una y sólo una de las siguientes:

- $\mathbb{S}^2$
- $T^2 \# \dots \# T^2$
- $\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2$

Es más, toda presentación de superficie puede ser llevada a una de esa forma mediante una secuencia de transformaciones elementales.

*Demostración:* Si  $\mathcal{P}$  es una de las presentaciones vistas en 2.4.4, ya de por sí cumple con el enunciado. Por lo tanto, supondremos que  $\mathcal{P}$  no es ninguna de ellas. Por 2.5.5, 2.5.6, 2.5.7, 2.5.8 y 2.5.9 obtenemos que  $\mathcal{P}$  es equivalente a una presentación de la forma  $\langle S|W \rangle$ , donde  $W$  es una secuencia de bloques de la forma  $aba^{-1}b^{-1}$  y  $cc$ . Dado que  $\langle a, b|aba^{-1}b^{-1} \rangle$  y  $\langle c|cc \rangle$  son presentaciones de  $T^2$  y  $\mathbb{P}^2$  respectivamente, por 2.4.12 deducimos que  $M$  es una suma conexa de copias de  $T^2$  y  $\mathbb{P}^2$ . En el caso en que  $M$  contenga alguna copia de  $\mathbb{P}^2$ , por 2.5.3 podemos reemplazar cada copia de  $T^2$  por dos copias de  $\mathbb{P}^2$  hasta que la presentación obtenida sólo contenga copias de  $\mathbb{P}^2$ . En caso contrario, la presentación obtenida es una suma conexa de copias de  $T^2$ . □

**Corolario 2.5.11.** *Toda superficie cerrada es homeomorfa a una y sólo una de las mencionadas en el teorema anterior.*

*Demostración:* Sea  $M$  una superficie compacta sin borde. Por el teorema de triangulación 2.5.1,  $M$  puede ser triangulada por un complejo simplicial finito de dimensión 2 en el cual toda arista está contenida en exactamente dos símlices de dimensión 2. Por la observación 2.4.9, dicho complejo determina una presentación de superficie  $\mathcal{P}$  cuya representación geométrica es homeomorfa a  $M$ . Por el Teorema 2.5.10,  $\mathcal{P}$  es equivalente a una de las presentaciones allí mencionadas y, por definición de equivalencia de presentaciones,  $M$  es homeomorfa a la superficie correspondiente. □

## Capítulo 3

# Superficies de Seifert

Este capítulo está basado en [17] y [12].

### 3.1. Existencia de Superficies de Seifert

**Definición 3.1.1.** *Dado un nudo orientado  $K$  en  $\mathbb{R}^3$  (o  $\mathbb{S}^3$ ), una superficie de Seifert para  $K$  es una superficie PL conexa, compacta y orientable  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  (o  $\mathbb{S}^3$ ) tal que  $\partial S = K$ .*

**Teorema 3.1.2. (Existencia de superficies de Seifert)** *Sea  $K$  un nudo manso en  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{S}^3$ , entonces  $K$  admite una superficie de Seifert (no es única).*

*Demostración:* Dada un nudo  $K$  en  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{S}^3$ , vamos a describir un algoritmo que nos permitirá construir una superficie de Seifert a partir de una proyección regular de  $K$  sobre el plano  $\{z = 0\}$ . Construiremos una colección finita de superficies compactas y orientables cuya unión nos proporcionará la superficie de Seifert deseada.

1. Como vimos en el capítulo 1, dicha proyección nos da una representación del nudo en  $\mathbb{R}^2$ , a la cual llamaremos  $D$ , dada por  $n$  arcos, donde cada uno se corta en los cruces en los cuales el correspondiente tramo del nudo “pasa por abajo”(ver figura 1.3). Vamos a construir un nuevo dibujo en  $\mathbb{R}^2$ , al cual llamaremos  $D'$ , a partir del dado: Como observamos en el primer capítulo, tenemos  $n$  cruces  $c_1, \dots, c_n$ . Vamos a ir modificando el dibujo cruce por cruce, como se muestra en la siguiente ilustración, de modo que el dibujo final no posea ninguno:

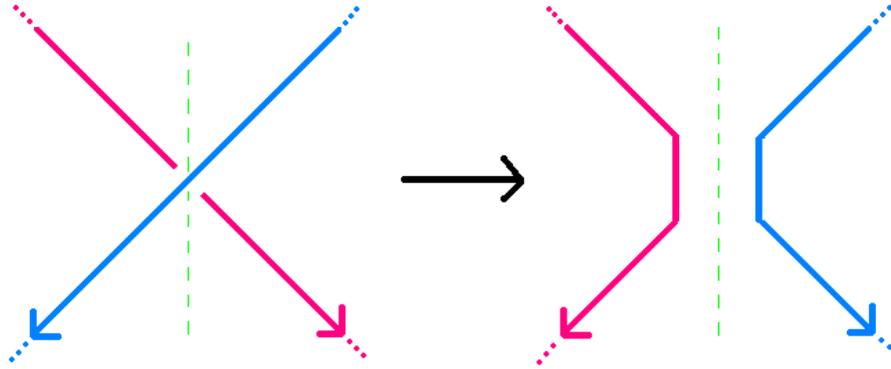


Figura 3.1:

Observemos que la línea de corte es la que deja una “flecha” de cada lado, de modo que se mantenga la orientación en la nueva figura. Es decir, no sería lo mismo hacerlo de este modo:

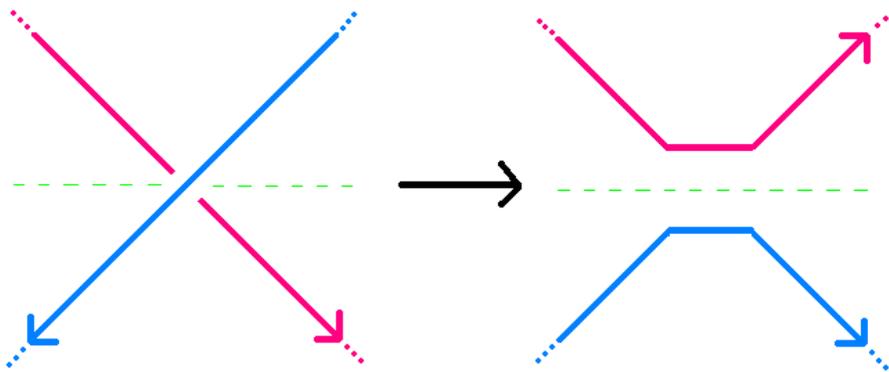


Figura 3.2:

Observemos que:

- a) En cada paso eliminamos un cruce, de modo que la figura final no poseerá ninguno.
- b) En cada cruce, un arco terminaba y otro empezaba. Con las modificaciones realizadas, ya ningún arco se cortará.
- c) Por a) y b), la nueva figura  $D'$  consta de finitas curvas CERRADAS que no se intersecan. Obtenemos entonces una colección finita de curvas simples cerradas disjuntas y concéntricas que reciben el nombre de *circuitos de Seifert*.

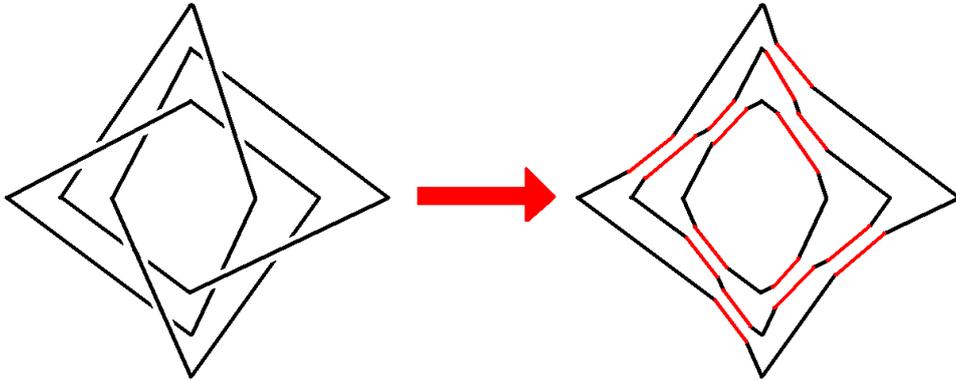
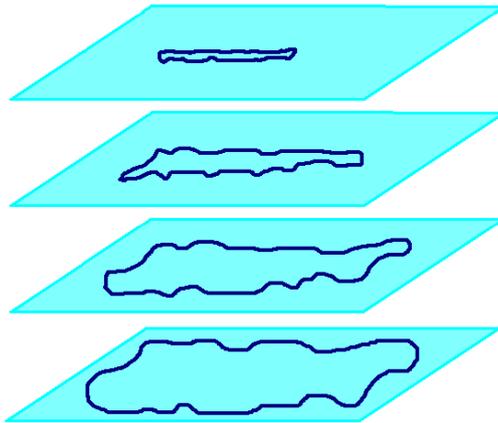


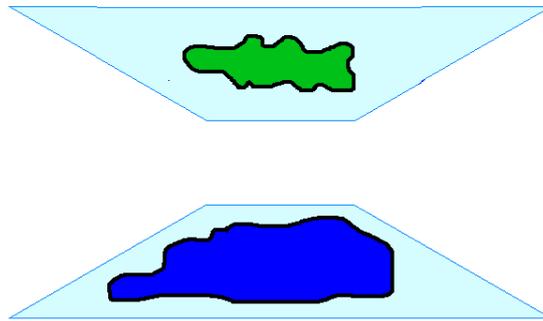
Figura 3.3: Ejemplo: modificamos la proyección del nudo  $T_{3,4}$

2. Supongamos que tenemos  $m$  curvas concéntricas, llamémosles  $L_0, \dots, L_{m-1}$ , numeradas de afuera hacia adentro. Consideraremos ahora una copia  $L_i$  de cada una en el plano  $\{z = i\}$ .



Cada una encierra una región homeomorfa a  $D^2$  en el plano correspondiente. Si tomamos dicha porción de cada plano, obtenemos una superficie compacta y orientable que llamaremos  $S_i$ .

3. Ahora, por cada cruce  $c_i$  definimos una superficie  $B_i$  rectangular que conectará dos superficies  $S_k$  y  $S_{k+1}$  de la siguiente manera:  
Tengamos en cuenta que el objetivo final es obtener una superficie orientable cuyo borde sea  $K$ . Para asegurarnos de que la superficie que construiremos resulte orientable, bastará asegurarnos de que tenga 2 "lados". Para simplificar la visualización y sin pérdida de generalidad, diremos que un lado es azul y el otro, verde. Para cada  $S_i$ , el lado azul será el que mira "hacia arriba".  $B_i$  también tendrá un lado de cada color.



Observemos que, de ser  $S'$  la superficie dada por la unión de las  $S_i$ , su borde resulta una unión disjunta de  $S^1$  que se corresponde con  $D'$ . Queremos modificar  $S'$  para que su borde sea  $K$ . La idea es, en cierto modo, volver de  $D'$  a  $D$  recuperando los cruces. Si observamos las figuras 3.1 y 3.3, veremos que, donde antes había un cruce, ahora hay dos segmentos enfrentados, uno perteneciente a  $L_k = \partial S_k$  y el otro a  $L_{k+1} = \partial S_{k+1}$ . Pegamos un lado de  $B_i$  a uno de estos, de manera que el lado azul de  $S_k$  se continúe con el lado azul de  $B_i$ , y el lado apuesto al otro, pero con una torsión de por medio (que permitirá que nuevamente el lado azul de  $B_i$  se continúe con el lado azul de  $S_{k+1}$ ) según qué segmento pasaba originalmente por arriba como en la siguiente ilustración:

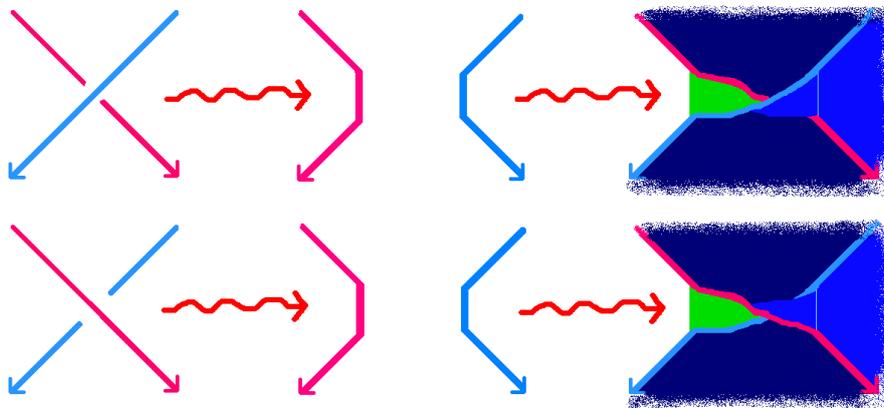
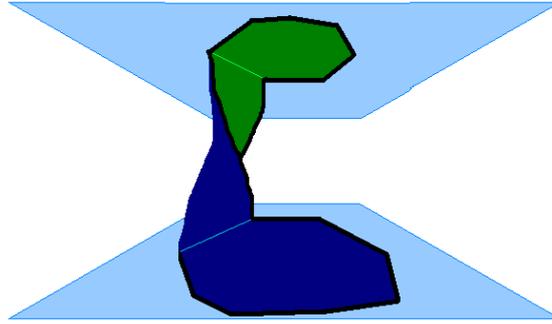


Figura 3.4:

¿Por qué esto efectivamente reconstruye el cruce  $c_i$  correspondiente? Observemos que, viendo  $L_k$  y  $L_{k+1}$  como poligonales, podemos suponer que este procedimiento sólo involucra 3 segmentos consecutivos de cada una de ellas como se ve en la figura 3.4. Al pegar  $B_i$  en el segmento del medio de cada una, dicho segmento ya no formará parte del borde de la nueva superficie, y ahora los segmentos de los extremos serán continuados por los lados de  $B_i$  que no fueron pegados, cruzándose uno por debajo y el otro por arriba según corresponda.

En perspectiva se vería algo así:



Luego de finitos pasos, obtenemos la superficie  $S = S_1 \cup \dots \cup S_m \cup B_1 \cup \dots \cup B_n$  que verifica ser orientable, compacta y tal que  $\partial S = K$ .

□

**Definición 3.1.3. (Género de un nudo)** Dado  $K$  un nudo en  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{S}^3$  y  $M$  una superficie de Seifert del mismo, decimos que  $M$  es minimal si  $g(M) \leq g(N)$  para todo superficie de Seifert  $N$  de  $K$ . En este caso, decimos que  $g(M)$  es el género de  $K$  y lo notamos  $g(K)$ .

El teorema de existencia que acabamos de ver y los teoremas de clasificación de superficies del capítulo anterior nos aseguran que el género de un nudo está bien definido.

Si dos nudos  $K$  y  $K'$  son equivalentes, entonces existe  $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  tal que  $h(K) = K'$ . Por lo tanto, si  $S$  es una superficie de Seifert para  $K$ , entonces  $h(S)$  lo es para  $K'$ . En consecuencia, el género resulta ser un invariante de nudos.

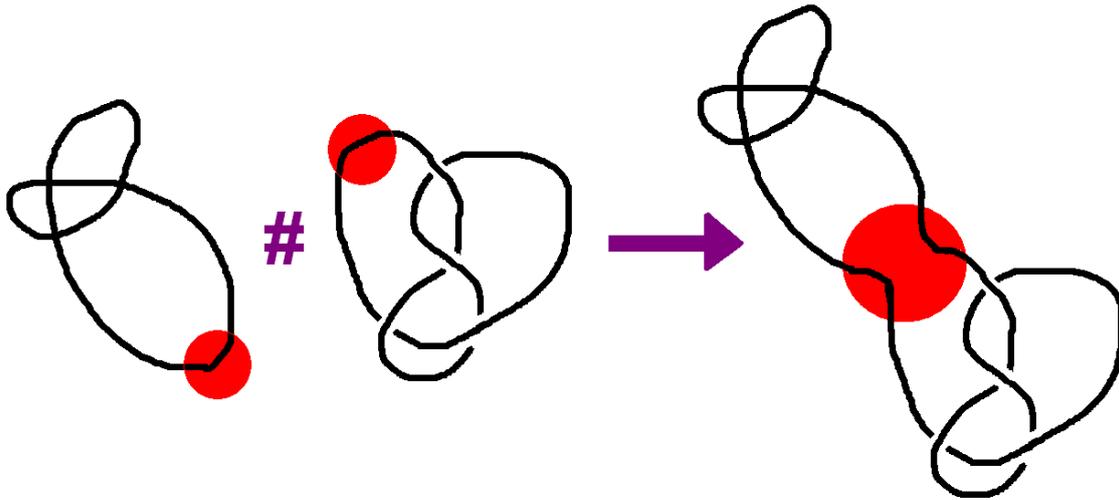
**Ejemplo 3.1.4.** Todo 2-disco es superficie de Seifert para el nudo trivial. Por lo tanto, el nudo trivial tiene género cero.

El concepto de suma conexa que vimos en el capítulo anterior puede generalizarse a otras dimensiones: Si  $M$  y  $N$  son dos  $n$ -variedades, la suma conexa de  $M$  y  $N$  se obtiene de sustraer de cada una el interior de una  $n$ -bola,  $B$  y  $D$  contenidas en  $M$  y  $N$  respectivamente, y luego pegar  $M \setminus B^\circ$  y  $N \setminus D^\circ$  por sus bordes mediante un homeomorfismo  $h : \partial B \rightarrow \partial D$ . Es decir,

$$M \# N = (M \setminus B^\circ) \bigcup_h (N \setminus D^\circ).$$

La suma conexa no está bien definida en general, pues depende de la elección de  $B$  y  $D$ , pero nosotros nos avocaremos a un caso particular.

**Definición 3.1.5.** Dados  $K_1$  y  $K_2$  dos nudos en  $\mathbb{R}^3$  (o  $\mathbb{S}^3$ ), definimos la suma conexa de  $K_1$  y  $K_2$  como  $K_1 \# K_2 = (K_1 \setminus B_1^\circ) \bigcup_h (K_2 \setminus B_2^\circ)$ , donde  $B_1$  y  $B_2$  son homeomorfos al 1-disco  $\mathbb{D}^1$  y existen 3-discos  $D_1$  y  $D_2$  en  $\mathbb{R}^3$  (o  $\mathbb{S}^3$ ) de modo tal que  $B_1 = D_1 \cap K_1$ ,  $B_2 = D_2 \cap K_2$  y los pares topológicos  $(D_1, B_1)$  y  $(D_2, B_2)$  son topológicamente equivalentes a  $(\mathbb{D}^3, \mathbb{D}^1)$ .



**Definición 3.1.6.** Un nudo no trivial se dice primo si no es suma conexas de dos nudos no triviales.

En el capítulo anterior definimos la suma conexas de superficies pegándolas por el borde de discos en el interior de las mismas. Para las superficies con borde no vacío existe también otro tipo de suma conexas.

**Definición 3.1.7.** Sean  $M$  y  $N$  dos superficies con borde no vacío, una suma conexas de borde de  $M$  y  $N$  es una variedad  $W$  que resulta de pegar  $N$  y  $M$  por un segmento del borde de cada una, es decir, existen  $f : [0, 1] \rightarrow \partial M$  y  $g : [0, 1] \rightarrow \partial N$  embeddings y un homeomorfismo  $h : \text{Im}(f) \rightarrow \text{Im}(g)$  tal que  $W = M \cup_h N$ . Observemos que  $\partial M$  y  $\partial N$  pueden tener varias componentes conexas, por lo que la suma conexas de borde no es única. Otra forma de suma conexas de borde es análoga a esta, pero cambiando segmentos por 1-esferas (es decir,  $f$  y  $g$  definidas en  $\mathbb{S}^1$ ).

**Lema 3.1.8.** Sea  $M \subseteq \mathbb{S}^3$  una superficie de Seifert de un nudo  $K$ . Si  $D$  es un disco PL en  $\mathbb{S}^3$  tal que  $M \cap D = \partial D$ ,  $\partial D \subseteq M^{\text{circ}}$  y  $M \setminus \partial D$  es conexas, entonces  $M$  no es minimal para  $K$ .

**Teorema 3.1.9.** Si  $K_1$  y  $K_2$  son nudos disjuntos en  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{S}^3$ , entonces  $g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2)$ .

*Demostración:* Sean  $M_1$  y  $M_2$  superficies de Seifert minimales de  $K_1$  y  $K_2$  respectivamente. Si tomamos  $B_1$  y  $B_2$  como en 3.1.5, podemos definir  $W$  la suma conexas de borde de  $M_1$  y  $M_2$  pegándolas mediante un homeomorfismo de  $B_1$  a  $B_2$ . Es claro que  $\partial W = K_1 \# K_2$ . Veamos que  $g(W) = g(M_1) + g(M_2)$ . Para superficies cerradas, es claro que el género es aditivo. Veamos que vale también en este caso. El género de  $M_i$  es el género de la superficie  $N_i$  que se obtiene de adjuntarle a  $M_i$  un 2-disco  $D_i$  mediante un homeomorfismo entre  $\partial M_i$  y el borde del disco. Sea  $S_i$  el segmento de  $D_i$  que se pega con  $B_i$ . Consideremos ahora la superficie  $V$  obtenida de pegar  $D_1$  y  $D_2$  mediante un homeomorfismo entre  $S_1$  y  $S_2$ . Es claro que  $V \simeq \mathbb{D}^2$ . Consideremos ahora la superficie  $S$

obtenida de adjuntar  $V$  y  $W$  pegando sus bordes. Tenemos así que  $S = S_1 \# S_2$  y, por lo tanto,  $g(W) = g(S) = g(S_1) + g(S_2) = g(M_1) + g(M_2) = g(K_1) + g(K_2)$ . En consecuencia,  $g(K_1 \# K_2) \leq g(K_1) + g(K_2)$ .

Veamos que vale la otra desigualdad. Sea  $M$  una superficie minimal para  $K_1 \# K_2$ , veamos que existe otra superficie de Seifert minimal  $M'$  que puede descomponerse como suma conexa de borde de superficies de Seifert  $M_1$  y  $M_2$  para  $K_1$  y  $K_2$  respectivamente. Consideremos  $K_1 \# K_2$  en  $\mathbb{R}^3$  y  $S$  una 2-esfera que separa  $K_1$  de  $K_2$ . Podemos suponer que  $S$  es transversal a  $M$  y, por lo tanto, que  $S \cap M$  es una 1-variedad cuyo borde son exáctamente 2 puntos. Si  $M \cap S$  es homeomorfo a  $\mathbb{I}$ , entonces nos quedamos con  $M' = M$ . En caso contrario,  $M \cap S$  consiste de un arco y finitas curvas cerradas. Tomamos  $C$  una de esas curvas cerradas que sea borde de un disco  $D$  en  $S$  cuyo interior no interseque a  $M$ . Por 3.1.8,  $M \setminus C$  posee dos componentes conexas. Podemos entonces reemplazar en  $M$  la parte de  $M \setminus C$  que no interseca a  $K$ , por  $D$ , y “empujar” ligeramente esa parte hacia afuera de  $S$ . Llamamos a la superficie resultante  $M'$ , la cual es también una superficie de Seifert minimal para  $K$ , pero tiene  $M' \cap S$  tiene menos componentes. Podemos seguir modificando  $M'$  inductivamente hasta obtener una superficie de Seifert minimal que interseque a  $S$  en sólo un arco. La esfera  $S$  separa  $M$  en dos superficies  $M_1$  y  $M_2$ , las cuales son superficies de Seifert para  $K_1$  y  $K_2$  respectivamente, y se verifica que  $M = M_1 \# M_2$ . Por lo tanto,  $g(K_1) + g(K_2) \leq g(M_1) + g(M_2) = g(M) = g(K_1 \# K_2)$ . □

**Teorema 3.1.10.** *Sea  $K$  un nudo en  $\mathbb{R}^3$  o en  $\mathbb{S}^3$ :*

1. *Si  $g(K) = 0$  sí y sólo si  $K$  es trivial.*
2. *Si  $g(K) = 1$ , entonces  $K$  es primo.*
3. *Todo nudo no trivial es suma conexa de nudos primos.*

*Demostración:*

1. Supongamos que  $g(K) = 0$ . Por lo tanto, existe una superficie orientable  $S$  de género cero que tiene a  $K$  como borde. Por lo visto en el capítulo anterior, dicha superficie se obtiene de quitarle a  $\mathbb{S}^2$  un número finito  $p$  de 2- discos. Como  $K = \partial S$  es conexo, debe ser  $p = 1$  y, por lo tanto,  $K$  es el borde de un 2-disco embebido en  $\mathbb{R}^3$  (o  $\mathbb{S}^3$ ). La otra implicación ya la probamos en 3.1.4.
2. Supongamos que  $K = K_1 \# K_2$ . Por 3.1.9 deducimos que  $1 = g(K) = g(K_1) + g(K_2)$ . De aquí se desprende que  $g(K_1) = 0$  o  $g(K_2) = 0$  y, por lo tanto, alguno de los dos debe ser trivial.
3. Por inducción en  $g(K)$ .
  - Si  $g(K) = 1$ , entonces  $K$  es primo.
  - Supongamos que vale para todo  $K'$  con  $g(K') < n$  y sea  $K$  tal que  $g(K) = n$ . Si  $K$  no es primo, entonces existen  $K_1$  y  $K_2$  dos nudos no triviales tales que  $K = K_1 \# K_2$ . Entonces  $n = g(K) = g(K_1) + g(K_2)$ . Por lo visto anteriormente,  $g(K_1) \neq 0 \neq g(K_2)$ . Entonces  $g(K_1)$  y  $g(K_2)$  son estrictamente menores que  $n$ .

Por hipótesis inductiva, deducimos entonces que  $K_1$  y  $K_2$  son suma conexa de nudos primos y, por lo tanto,  $K = K_1 \# K_2$  también lo es.

□

En particular, tenemos:

**Teorema 3.1.11. (Teorema de no-cancelación)** *Si  $K = K_1 \# K_2$  es equivalente al nudo trivial, entonces  $K_1$  y  $K_2$  son triviales.*

En otras palabras, no se puede “desanudar” no trivial sumándole otro nudo.

## Capítulo 4

# Grupos localmente indicables

### 4.1. Introducción

En el capítulo 1 vimos cómo calcular el  $\pi_1$  del complemento de un nudo en  $\mathbb{S}^3$  (o  $\mathbb{R}^3$ ) a partir de una representación del mismo sobre el plano. Sin embargo, la presentación que dimos contiene mucha más información que la clase de isomorfismo del grupo fundamental. Está demostrado que toda  $n$ -variedad con borde colapsa a un CW-complejo de dimensión  $n-1$ , el cual recibe el nombre de *spine*. En particular, si  $K$  es un nudo en  $\mathbb{S}^3$ , su complemento colapsa a un CW-complejo de dimensión 2 y, por lo tanto, es homotópicamente equivalente a este. Por otra parte, es sabido que toda presentación de grupo determina un 2-complejo (ver [7]). En nuestro caso, el 2-complejo determinado por la presentación de Wirtinger es homeomorfo a un spine de  $\mathbb{S}^3 \setminus K$  (ver [1]), es decir, dicha presentación nos da el tipo homotópico del complemento del nudo. Recordemos que esta presentación es de la forma  $\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_{n-1} \rangle$ . Si llamamos  $\mathcal{P}' = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_{n-1}, x_1 \rangle$ , el complejo asociado a esta última se obtiene de adjuntarle una 2-celda al asociado a  $\mathcal{P}$ . Dado que  $\mathcal{P}'$  es una presentación balanceada con relaciones de la forma  $x_{i+1} = x_k x_i x_k^{-1}$  (o  $x_{i+1} = x_k^{-1} x_i x_k$ ) para  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $x_1 = 1$  implica inductivamente que  $x_i = 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Si  $X$  es su CW-complejo asociado, calculando su característica de Euler como la suma alternada de su cantidad de  $k$ -celdas obtenemos que esta es igual a 1. Se sabe también que  $\mathcal{P}'$  es una presentación de  $\pi_1(X)$ , por lo que deducimos que el mismo es el grupo trivial y, por lo tanto,  $H_1(X) = 0$ . Además, como  $X$  es arcoconexo,  $H_0(X) = \mathbb{Z}$ . De aquí podemos deducir que  $1 = \chi(X) = \dim(H_0(X)) - \dim(H_1(X)) + \dim(H_2(X)) = 1 - 0 + \dim(H_2(X))$  y, por lo tanto  $H_2(X) = 0$ , por lo que el teorema de Whitehead nos asegura que  $X$  es contráctil (ver [4]). En particular,  $X$  es esférico. En el año 1941 J. H. C. Whitehead formuló la siguiente pregunta: Dado  $Z$  un CW-complejo de dimensión 2 esférico ¿todo subcomplejo de  $Z$  es también esférico? Si la respuesta a esta pregunta fuese afirmativa, entonces  $\mathbb{S}^3 \setminus K$  resultaría esférico por ser subcomplejo de  $X$ . Sin embargo, la respuesta a esta pregunta es un problema aún abierto conocido como la *Conjetura de Whitehead*. La asfericidad del complemento de los nudos en  $\mathbb{S}^3$  fue probablemente una de las motivaciones de dicha conjetura. De la mano de estas investigaciones se halla el concepto de indicabilidad. Un grupo se dice *indicable* si posee un epimorfismo a  $\mathbb{Z}$ , y localmente indicable si todos sus subgrupos no triviales y finitamente generados son indicables. En el año 1981, J. Howie probó que, si  $Z$

es un CW-complejo conexo de dimensión 2 con  $H_2(Z) = 0$  y  $\pi_1(Z)$  localmente indicable, entonces  $Z$  es esférico (ver [8]). A su vez, es fácil ver que, siendo subcomplejo de un 2-complejo contráctil, el complejo asociado a la presentación de Wirtinger tiene segundo grupo de homología nulo. Esto implica que, si supiésemos que  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$  es localmente indicable, entonces podríamos probar la asféricidad de dicho espacio. Por otra parte, en 1957 Papakyriakopoulos logró probar, con otros métodos, que el complemento de todo nudo en  $\mathbb{S}^3$  efectivamente es esférico (ver [16]). Recíprocamente, en el año 1981, J. Howie utilizó este resultado para probar que para todo nudo  $K$ ,  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$  es localmente indicable. Dedicaremos este capítulo a la demostración de este resultado.

**Definición 4.1.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico arcoconexo, decimos que  $X$  es esférico si  $\pi_i(X) = 0$  para todo  $i \geq 2$ .*

El siguiente teorema se lo debemos a Papakyriakopoulos (ver [16]).

**Teorema 4.1.2. (Teorema de asféricidad)** *Si  $K$  es un nudo en  $\mathbb{S}^3$ , entonces  $\mathbb{S}^3 \setminus K$  es esférico.*

A continuación definimos uno de los conceptos centrales de esta sección.

**Definición 4.1.3.** *Un grupo  $G$  se dice indicable si existe un morfismo  $f : G \rightarrow \mathbb{Z}$  sobreyectivo (o, equivalentemente, si existe un morfismo  $f : G \rightarrow \mathbb{Z}$  no nulo). Decimos que un grupo  $G$  es localmente indicable si todo subgrupo de  $G$  finitamente generado y no trivial es indicable.*

Los grupos de homología y cohomología de un espacio topológico  $X$  se encuentran fuertemente vinculados entre sí. Una versión más general del siguiente teorema, junto con su demostración, puede encontrarse en [4]. También puede hallarse una demostración en [15]

**Teorema 4.1.4. (Teorema de coeficientes universales para cohomología)** *Sea  $C_*$  un complejo de cadenas integrado por grupos abelianos libres, entonces existe una sucesión exacta corta que se parte de la forma*

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C_*)) \longrightarrow H^n(C_*) \longrightarrow \text{Hom}(H_n(C_*), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Por lo tanto,

$$H^n(C_*) \approx \text{Hom}(H_n(C_*), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_{n-1}(C_*)).$$

**Proposición 4.1.5.** *Si  $H$  es un grupo libre, entonces  $\text{Ext}(H) = 0$ .*

En particular, si  $X$  es un espacio topológico arco-conexo,  $H^1(X) \approx \text{Hom}(H_1(X), \mathbb{Z})$ .

**Proposición 4.1.6.** *Sea  $X$  un espacio arco-conexo con  $G = \pi_1(X)$  finitamente generado. Son equivalentes:*

1.  $G$  es indicable.
2.  $G^{ab}$  es infinito.
3.  $H_1(X)$  es infinito.
4.  $H^1(X) \neq 0$ .

*Demostración:*

- (1) implica (2) porque todo morfismo de  $G$  a  $\mathbb{Z}$  se factoriza por  $G^{ab}$  y, por lo tanto,  $G^{ab}$  no puede carecer de parte libre.
- (2) es equivalente a (3), pues  $H_1(X) = G^{ab}$ .
- (3) implica (4) por 4.1.4.
- Veamos que (4) implica (1). Por 4.1.4, existe un morfismo no nulo de  $G^{ab}$  en  $\mathbb{Z}$  y, por lo tanto, existe  $f : G^{ab} \rightarrow \mathbb{Z}$  epimorfismo. Entonces, si llamamos  $q$  a la proyección al cociente de  $G$  en  $G^{ab}$ , tenemos que  $f \circ q : G \rightarrow \mathbb{Z}$  es un epimorfismo.

□

Veamos otro resultado que será de vital importancia para probar el teorema central de este capítulo.

**Definición 4.1.7.** Llamamos *tríada* a una terna de la forma  $(W, V_0, V_1)$ , donde  $W$  es una  $n$ -variedad compacta y  $V_0$  y  $V_1$  son subvariedades de  $W$  tales que  $\partial W = V_0 \cup^d V_1$ .

**Teorema 4.1.8. (Dualidad de Poincaré generalizada)** Sea  $(W, V_0, V_1)$  una tríada  $(V_0$  y  $V_1$  eventualmente vacíos) con  $W$  una  $n$ -variedad orientable, entonces para todo  $0 \leq k \leq n$  vale

$$H_k(W, V_0) \cong H^{n-k}(W, V_1).$$

Una demostración de este resultado puede hallarse en [13].

En particular, si  $W$  es una 3-variedad orientable con borde,

$$H_1(W) \cong H^2(W, \partial W).$$

**Observación 4.1.9.** Si  $M$  es una superficie cerrada y orientable de género  $p$ , entonces  $H_1(M) = \mathbb{Z}^{2p}$ . Por lo tanto, la única variedad cerrada y orientable cuyo primer grupo de homología no tiene parte libre es  $\mathbb{S}^2$ .

*Demostración:* Usar que  $H_1(X) = (\pi_1(X))^{ab}$  y ver [4] sección 1.2.

## 4.2. El grupo de un nudo es localmente indicable

El siguiente teorema se encuentra en [18].

**Teorema 4.2.1.** Si  $M$  es una 3-variedad y  $\pi_1(M)$  es finitamente generado, entonces existe una 3-subvariedad compacta  $N$  de  $M$  tal que  $i_* : \pi_1(N) \rightarrow \pi_1(M)$  es un isomorfismo.

**Definición 4.2.2.** Sea  $M$  una  $n$ -variedad con o sin borde y sea  $N$  un subespacio de  $M$ . Decimos que  $N$  es una  $k$ -subvariedad con borde de  $M$  si  $N$  es una variedad con borde de dimensión  $k$  y para todo  $p \in N$  existe una carta  $(\mathcal{U}, \varphi)$  de  $M$  alrededor de  $p$  tal que  $\varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$  es un cubo  $C$  centrado en 0,  $\varphi(p) = 0$  y

$$\varphi(\mathcal{U} \cap N) = \begin{cases} \{x \in C : x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\} & \text{si } x \notin \partial N \\ \{x \in C : x_k \geq 0, x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\} & \text{si } x \in \partial N. \end{cases}$$

**Proposición 4.2.3.** *Sea  $M$  una  $n$ -variedad topológica conexa no compacta y  $N$  una subvariedad compacta de  $M$  de dimensión  $n$ , entonces  $N$  tiene borde no vacío.*

*Demostración:* Supongamos que  $\partial N = \emptyset$ . Para todo  $p \in N$  existe una carta  $(\mathcal{U}, \varphi)$  de  $M$  tal que  $\varphi(\mathcal{U}) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < \varepsilon \forall 1 \leq i \leq n\} = C_\varepsilon^n$  para algún  $\varepsilon > 0$  y  $\varphi(\mathcal{U} \cap N) = \{x \in C_\varepsilon^n : x_i = 0 \forall i > n\} = C_\varepsilon^n$ . Es decir,  $\varphi(\mathcal{U} \cap N) = \varphi(\mathcal{U})$ . Por lo tanto, dado que  $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \varphi(\mathcal{U})$  es biyectiva, se concluye que  $\mathcal{U} \cap N = \mathcal{U}$ . De quí se deduce que  $N$  es un abierto de  $M$ . A su vez,  $N$  es compacto, lo que implica que, siendo  $M$  un espacio Hausdorff,  $N$  es cerrado en  $M$ . Como  $M$  es conexo, concluimos que  $N = M$ , lo cual es absurdo pues  $N$  es compacto y  $M$  no. Por lo tanto,  $\partial N \neq \emptyset$ . □

**Observación 4.2.4.** *Recordemos que, si  $p : E \rightarrow B$  es un revestimiento, entonces  $p_* : \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(B)$  es un monomorfismo para  $n = 1$  y un isomorfismo para todo  $n \geq 2$ . Además, si  $B$  es un espacio arco-conexo, localmente arco-conexo y semilocalmente simplemente conexo y  $H$  es un subgrupo de  $\pi_1(B)$ , entonces existe un revestimiento  $p : E \rightarrow B$  con  $E$  arco-conexo tal que  $p_*(\pi_1(E)) = H$ . Dada la inyectividad del morfismo inducido en los  $\pi_1$ , se deduce que  $\pi_1(E) = H$ .*

**Observación 4.2.5.** *Observemos que toda variedad topológica verifica las hipótesis arriba mencionadas. Del el hecho de que los revestimientos son homeomorfismos locales se desprende que si  $M$  es una variedad de dimensión  $n$  y  $p : N \rightarrow M$  es un revestimiento, entonces  $N$  es una variedad de la misma dimensión. Además, si  $M$  tiene borde no vacío, entonces  $\partial N \neq \emptyset$  y vale  $\partial N = p^{-1}(\partial M)$ . Más aún,  $p|_{\partial N} : \partial N \rightarrow \partial M$  es un revestimiento. Por lo tanto, si  $H$  es un subgrupo de  $\pi_1(M)$ , existe una variedad  $N$  de la misma dimensión tal que  $\pi_1(N) = H$ .*

**Teorema 4.2.6. (Conjetura de Poincaré)** *Toda 3-variedad cerrada y simplemente conexa es homeomorfa a  $\mathbb{S}^3$ .*

La conjetura fue probada en el año 2003 por Grigori Perelmán .

Una demostración de este teorema puede hallarse en [5].

**Definición 4.2.7.** *Una 3-celda falsa es una 3-variedad compacta y contráctil que no es homeomorfa a  $\mathbb{D}^3$ .*

Esta conjetura de Poincaré es equivalente a que no existan 3-celdas falsas. Es decir, si  $M$  es una 3-variedad compacta y contráctil, entonces  $M \approx \mathbb{D}^3$ .

**Definición 4.2.8.** *Dado un nudo  $K \subseteq \mathbb{R}^3$  (o  $\mathbb{S}^3$ ), un entorno tubular de  $K$  es un embedding  $F : K \times \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (o  $\mathbb{S}^3$ ) tal que  $F(x, 0) = x \forall x \in K$ .*

Observemos que si  $N$  es el interior de un entorno tubular de  $K$  en  $\mathbb{S}^3$  (es decir,  $N = F(K \times (\mathbb{D}^2)^\circ)$ ), entonces  $\mathbb{S}^3 \setminus N$  es una 3-variedad compacta, orientable y con borde, cuyo borde es homeomorfo a  $T^2$ . Además,  $\mathbb{S}^3 \setminus N$  es un retracto por deformación fuerte de  $\mathbb{S}^3 \setminus K$ . En particular,  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K) = \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus N)$ .

Veremos a continuación el teorema central de este capítulo. La demostración que daremos se basa en [8] y en [9].

**Teorema 4.2.9.** *El grupo fundamental del complemento de un nudo en  $\mathbb{S}^3$  es localmente indicable.*

*Demostración:* Sea  $K$  un nudo en  $\mathbb{S}^3$  y sea  $T$  el interior de un entorno tubular del mismo. Llamemos  $M$  a la 3-variedad  $\mathbb{S}^3 \setminus T$ . Sea  $G = \pi_1(M)$  y sea  $H$  un subgrupo de  $G$  finitamente generado y no trivial. Por la observación 4.2.5, existe un revestimiento  $p : \widetilde{M} \rightarrow M$  ( $\widetilde{M}$  arco-conexo) que verifica que  $\pi_1(\widetilde{M}) = H$ . Sabemos por 4.1.2 que  $\pi_2(M) = 0$  y, por 4.2.4, tenemos que  $\pi_2(\widetilde{M}) = 0$ . Por teorema 4.2.1, existe una 3-subvariedad compacta  $M'$  de  $\widetilde{M}$  tal que la inclusión de  $M'$  en  $\widetilde{M}$  induce un isomorfismo en sus grupos fundamentales. Por lo tanto, tenemos que  $H = \pi_1(M')$ . Ahora observemos que  $M$  es orientable y con borde no vacío. Por lo tanto,  $\widetilde{M}$  y  $M'$  son también orientables y  $\partial\widetilde{M} \neq \emptyset$ . Ahora, por 4.2.3, o bien  $\widetilde{M}$  es compacto y tomamos  $M' = \widetilde{M}$ , o  $\partial M' \neq \emptyset$ , y es, por lo tanto, una variedad compacta y orientable de dimensión 2. De los teoremas de clasificación de 2-variedades compactas se deduce que  $\partial M'$  es unión disjunta de 2-esferas y de superficies cerradas y orientables de género  $g \geq 1$ . Supongamos que  $\partial M' = S_1 \cup^d \dots \cup^d S_n$  y que cada  $S_i$  es homeomorfa a  $\mathbb{S}^2$ . Cada  $S_i$  separa a  $\widetilde{M}$  en 2 componentes conexas, una de las cuales es un 3-disco. Como  $M' \setminus \partial M'$  es conexa, entonces está contenida en alguna de las componentes de  $\widetilde{M} \setminus \partial M'$ . Tenemos que  $M' \not\subseteq D_i$  pues, en caso contrario,  $i_* : \pi_1(M') \rightarrow \pi_1(\widetilde{M})$  se factorizaría por  $\pi_1(D_i) = 1$  y no sería, por ende, un isomorfismo. Sea  $N = M' \cup S_1 \cup \dots \cup S_n$ . Esta subvariedad de  $\widetilde{M}$  es compacta por ser unión finita de subvariedades compactas. Veamos que  $\partial N = \emptyset$ . Sea  $p \in N$ . Si  $p \notin S_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , entonces  $p \notin \partial N$ . Sea  $p \in S_i$  para algún  $i$ . Como  $S_i \subseteq \partial D_i$ , existe una carta  $(\mathcal{U}, \varphi)$  de  $\widetilde{M}$  alrededor de  $p$  tal que  $\varphi(\mathcal{U}) = C$  es un cubo centrado en 0 y  $\varphi(p) = 0$  tal que  $\varphi(\mathcal{U} \cap D_i) = \{x \in C : x_3 \geq 0\}$ . Simultáneamente,  $S_i \subseteq \partial M'$ , por lo cual existe una carta  $(\mathcal{V}, \psi)$  de  $\widetilde{M}$  alrededor de  $p$  tal que  $\psi(\mathcal{V})$  es un cubo  $C'$  centrado en cero,  $\psi(p) = 0$  y  $\psi(\mathcal{V} \cap M') = \{x \in C' : x_3 \geq 0\}$ . Sea  $W = \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$  y sea  $C'' \subseteq \varphi(W)$  un cubo abierto centrado en el origen. Consideremos  $\psi \circ \varphi^{-1}|_{C''} : C'' \rightarrow \psi(W)$ . Es claro que  $\psi \circ \varphi^{-1}|_{C''}(x)$  tiene su tercera coordenada nula si y sólo si  $x_3 = 0$ . Por continuidad, si llamamos  $C''_1$  a  $\{x \in C'' : x_3 > 0\}$  y  $C''_2$  a  $\{x \in C'' : x_3 < 0\}$ , tenemos que  $\psi \circ \varphi^{-1}|_{C''}$  tiene signo constante en  $C''_1$  y en  $C''_2$ . Si  $x \in C''_1$ , entonces  $\varphi^{-1}(x) \in C_i \setminus S_i$  y, por lo tanto  $\varphi^{-1}(x) \notin M'$ . Esto implica que  $\psi \circ \varphi^{-1}|_{C''}(x) < 0$ . Dado que  $\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(W)} : \varphi(W) \rightarrow \psi(W)$  es un homeomorfismo, tenemos que  $\psi \circ \varphi^{-1}(C'')$  es abierto alrededor del cero, por lo cual posee elementos con tercer coordenada positiva. Por lo tanto, existe  $x \in C''$  tal que  $\psi \circ \varphi^{-1}|_{C''}(x)_3 > 0$ , lo cual implica que  $\psi \circ \varphi^{-1}|_{C''}(C''_2) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$ , lo cual implica que  $\varphi^{-1}(C''_2) \subseteq M'$ . Por lo tanto,  $\varphi^{-1}(C'') \subseteq M' \cup D_i \subseteq N$ . Tenemos entonces una carta  $(\varphi^{-1}(C''), \varphi|_{\varphi^{-1}(C'')})$  de  $N$  alrededor de  $p$ , tal que su imagen  $C''$  es un abierto de  $\mathbb{R}^3$  y, por lo tanto,  $p \notin \partial N$ . Razonando como en 4.2.3, tenemos que  $N = \widetilde{M}$ , lo cual es absurdo, pues  $\partial\widetilde{M} \neq \emptyset$ . Por lo tanto,  $\partial M'$  no está compuesto exclusivamente por esferas.

Por 4.1.6, sólo nos resta ver que  $H_1(M') \neq 0$ . Supongamos que  $H^1(M') = 0$ . Entonces  $H_1(M')$  no posee parte libre. Observemos este tramo de la sucesión exacta larga de grupos de cohomología:

$$\dots \longrightarrow H^1(M') \xrightarrow{i^*} H^1(\partial M') \xrightarrow{\delta} H^2(M', \partial M') \longrightarrow \dots$$

Como  $H^1(M') = 0$  y  $H^2(M', \partial M') \cong H_1(M)$  no posee parte libre, deducimos que  $\partial M'$  está compuesta exclusivamente por 2-esferas, llegando así a una contradicción. Por lo tanto,  $H^1(M') \neq 0$ .

□

# Bibliografía

- [1] A. Cavicchioli; F. Hegenbarth. *Knot manifolds with isomorphic spines*. Fund. Math. 145 (1994), no. 1, 79–89.
- [2] M.A. Cerdeiro. *Un nuevo enfoque sobre la conjetura de Whitehead y la asféricidad de los complejos LOT*. Tesis Doctoral, Universidad de Buenos Aires, 2015.
- [3] V. Guillemin, A. Pollack. *Differential topology*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.
- [4] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [5] J. Hempel. *3-Manifolds*. Ann. of Math. Studies, No. 86. Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1976.
- [6] M. Hirsch. *Differential topology*. Graduate Texts in Mathematics, No. 33. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.
- [7] *Two-dimensional homotopy and combinatorial group theory*. Edited by Cynthia Hog- Angeloni, Wolfgang Metzler and Allen J. Sieradski. London Mathematical Society Lecture Note Series, 197. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [8] J. Howie. *On locally indicable groups*. Math. Z. 180 (1982), no. 4, 445–461.
- [9] J. Howie, H. Short. *The band-sum problem*. J. London Math. Soc. (2) 31 (1985), no. 3, 571–576.
- [10] J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer, New York, 2013.
- [11] J. M. Lee. *Introduction to topological manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, 202. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [12] W. B. R. Lickorish. *An introduction to knot theory*. Graduate Texts in Mathematics, 175. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [13] J. M. Milnor. *Lectures on the h-cobordism theorem*. Notes by L. Siebenmann and J. Sondow Princeton University Press, Princeton, N.J. 1965
- [14] J. Milnor. *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51 Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.

- [15] J. R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.
- [16] C. D. Papakyriakopoulos. *On Dehn's lemma and the asphericity of knots*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 43 (1957), no. 1, 169.
- [17] D. Rolfsen. *Knots and links*. Mathematics Lecture Series, No. 7. Publish or Perish, Inc., Berkeley, Calif., 1976.
- [18] G. P. Scott. *Compact submanifolds of 3-manifolds*. J. London Math. Soc. (2) 7 (1973), 246–250.
- [19] J.H.C. Whitehead. *On adding relations to homotopy groups*. Ann. of Math. (2) (1941), 409–428.