



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

**Tesis de Licenciatura**

**TEORIA MUSICAL: COMPARACION DE SISTEMAS DE  
AFINACION**

Nahuel I. Arca

**Director:** Dr. Pablo Amster

17/12/2015



# Agradecimientos

A mis padres por la educación y el apoyo económico que me brindaron y me brindan hasta el día de hoy, y a mi familia en general por brindarme ejemplos cotidianos de moral, esenciales para mi formación humana.

A los amigos que me acompañan desde la secundaria: Marcos, Nicolás y Félix. Les agradezco por aportar ideas fuera de lo que frecuento, y por una multitud de proyectos postergados que espero que próximamente podamos llevar a cabo.

A mis compañeros de carrera: Camila, Nicolás, Carmen, Mariano, Juan Piombo, Felipe, Juan Orza, Emiliano, Pablo, Virginia, Nahuel, Ezequiel, Daniel, Fernando, Iván, Franco, Maximiliano, Juan Desimoni, José, Juan Zucotti, Tomás, Guillermo, Francisco, Gabriel, Bruno, Sofía, Martín, Luis y Pedro. Gracias por prestarme sus apuntes y cuadernos, y también por comparar ejercicios y ayudarme a hacer guías enteras. También gracias por compartir ejercicios de parciales que me fueron de gran utilidad, y que de otra forma nunca hubiera hecho.

A mis amigos de otras carreras: Sabrina, Cristian, Leandro, Matías, Gonzalo, Chechu, Guillermo y Max. Les agradezco por facilitarme el borrado de líneas entre nuestras disciplinas y mostrarme cómo interpretar algunas cosas que creía conocer. También me gustaría agregar una mención especial a la mesa de los físicos de la Noriega por compartirme mates y tomacorrientes, a pesar de no ser del palo.

A los integrantes (y ex-integrantes) del taller de ajedrez: Sebastián Fell, Antonio, Daniel Zanola, Fernando, Rodrigo, Pablo, Pipo, Tomás, Sebastián Taboh, Hugo, Nicolás,

Francisco, Noelia, Gabriel, Ignacio, Daniel Seidler e Iván. Gracias por compartir mis ratos de mayor ocio dentro del ámbito académico.

A los integrantes del taller de guitarra: Emilio, Nicolás, Martín, Ezequiel y Matías. Les agradezco sobre todo la paciencia, y espero que esta tesis sea compensatoria de mi falta de dedicación.

A Pablo por aceptar dirigirme, darme a elegir entre una variedad de temas de tesis, por su paciencia, y también por las primeras correcciones ajena. Y también a Román y Bruno por aceptar ser jurados, y ayudarme a llevar este trabajo a su forma final.

# Prefacio: material inédito

La historia de esta tesis comienza a fines del primer cuatrimestre de 2014. Pensaba entonces que, quedándome cursar sólo dos materias para el siguiente cuatrimestre, podía escribir mi tesis en el tiempo que tuviera libre. Desde hace algún tiempo había pensado escribir sobre música. Ya que entre mis libros tengo una copia de *¡Matemática, maestro!: Un concierto para números y orquesta*[1], se me ocurrió contactar a Pablo para pedirle que sea mi director de tesis, pedido que aceptó. Para ayudarme a decidir qué tema específico quería hacer, me pasó una copia de *Music: A Mathematical Offering*[2] de Dave Benson. Con este libro entendí que en la intersección entre música y matemática hay una enorme cantidad de áreas, que usan distintas ramas de la matemática. Por ejemplo:

- Acústica y análisis de las ondas sonoras que generan los distintos tipos de instrumentos (ecuaciones diferenciales)
- Consonancia y disonancia
- Aproximaciones a distintos sistemas de afinación (fracciones continuas y geometría de números)
- Música digital (análisis armónico)
- Simetrías en las piezas musicales (teoría de grupos)

Después de un tiempo decidí elegir como tema de tesis el problema de Kac, presentando originalmente en el paper *Can One Hear the Shape of a Drum?*[3] de Mark Kac. El problema consiste en determinar la forma de un tambor, conociendo el espectro de

frecuencias en las que puede vibrar. En este punto había terminado el segundo cuatrimestre sin avanzar sustancialmente en la tesis.

A fines del verano de este año, ya había esquematizado mi tesis. La primera parte, que consistía en formalizar el problema, podía hacerse de dos formas distintas: mediante herramientas de análisis funcional, como puede verse en el libro *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*[4] de Haim Brezis<sup>1</sup>, o mediante funciones de Green, como puede verse en el libro *Methods of Mathematical Physics I*[5] de Richard Courant y David Hilbert. La segunda parte, mostrar que hay dos tambores no congruentes con el mismo espectro, hacía uso de herramientas de geometría diferencial, como puede verse en el paper *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*[6] de Carolyn Gordon, David L. Webb y Scott Wolpert. Además, Kac presentó en el paper original, interpretaciones físicas muy interesantes del problema, que posiblemente fueran incluidas en la tesis.

Antes de empezar a trabajar profundamente en el tema, quería ver si tenía alguna alternativa preferible. Fue entonces cuando recordé que Pablo me había comentado sobre unos papers, que trataban sobre comparación de sistemas de afinación usando lógica borrosa. Le pedí que me los pasara y encontré que era un tema nuevo e interesante. Me atraía la idea de poder hacer nuevas contribuciones al área, así que le solicité cambiar de tema, otro pedido que fue aceptado. Es así como terminé escribiendo esta tesis.

Antes que nada, vale aclarar que las definiciones de muchos de los conceptos presentados en esta tesis, difieren ligeramente de las que fueron dadas en los papers originales sobre comparación de sistemas de afinación, por lo que se recomienda al lector precaución a la hora de citar resultados.

El primer capítulo contiene una pequeña introducción sobre la física detrás de las ondas sonoras, y continúa con el método de comparación más simple que puede formularse: la comparación “clásica” (no hace uso de los conceptos de lógica borrosa) entre sistemas de afinación que respetan la equivalencia de octava. Este método fue inicialmente desarrollado por Vicente Liern en [7]. Por tratarse de un método “canónico”, conforma la base de las tablas de comparación que el lector encontrará en el apéndice.

---

<sup>1</sup>Ya había escrito buena parte de esto, de ahí el título de esta sección.

El segundo capítulo generaliza las ideas del primer capítulo, para incorporar sutilezas a gusto del usuario de tales métodos. Estas sutilezas se incorporan mediante lógica borrosa. Este método también fue inicialmente desarrollado por Liern en [8], y por Teresa León junto con Liern en [9]. La forma aquí presentada generaliza un poco la original, en el sentido de que admite diversos tipos de conjuntos difusos, incluso en el mismo sistema de afinación. Adicionalmente, se presenta una versión de este método acorde con el trabajo sobre consonancia de R. Plomp y W. J. M. Levelt en [10], y se compara el método de afinación borrosa con el método de afinación clásica.

El tercer capítulo desarrolla resultados sobre aproximación mediante temperamentos iguales, en términos de los métodos desarrollados en los primeros dos capítulos. Este tipo de resultados también fueron desarrollados por Liern en [8] y [7].

El cuarto y último capítulo generaliza las ideas del primer y segundo capítulo a sistemas de afinación que no respetan la equivalencia de octava. Además, se comparan los métodos de afinación con octavas con los métodos de afinación sin octavas, y también los métodos de afinación sin octavas, clásica y borrosa, entre sí. La tesis finaliza con un apéndice con tablas de comparación de diversos sistemas de afinación.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Prefacio: material inédito</b>	<b>v</b>
<b>1. Afinación clásica</b>	<b>1</b>
1.1. De la naturaleza del sonido . . . . .	1
1.2. De las notas musicales . . . . .	5
1.2.1. Comparación de las métricas en T . . . . .	8
1.3. De los sistemas de afinación . . . . .	11
<b>2. Afinación borrosa</b>	<b>17</b>
2.1. Algunos conceptos de lógica borrosa . . . . .	17
2.1.1. Conjuntos difusos . . . . .	17
2.1.2. Teoría de la posibilidad . . . . .	19
2.2. De las notas musicales . . . . .	20
2.2.1. Comentario: la elección de $\mu$ . . . . .	26
2.3. De los sistemas de afinación . . . . .	29
2.4. Comparación de métodos:	
un enfoque categórico . . . . .	32
2.4.1. Una introducción a la teoría de categorías . . . . .	32
2.4.2. Comparación de métodos . . . . .	34
<b>3. Aproximación mediante temperamentos iguales</b>	<b>39</b>
3.1. Aproximación mediante racionales . . . . .	39
3.2. Aproximación de sistemas de afinación . . . . .	46

3.2.1.	De los temperamentos iguales . . . . .	46
3.2.2.	De los generadores de un sistema de afinación . . . . .	47
3.2.3.	Resultados sobre aproximación . . . . .	47
<b>4.</b>	<b>Afinación sin octavas</b>	<b>53</b>
4.1.	Afinación clásica . . . . .	53
4.1.1.	Comparación con la afinación clásica con octavas . . . . .	56
4.2.	Afinación borrosa . . . . .	63
4.2.1.	De las notas musicales . . . . .	63
4.2.2.	Comentario: la elección de $\mu$ . . . . .	66
4.2.3.	De los sistemas de afinación . . . . .	68
4.2.4.	Comparación con la afinación clásica sin octavas . . . . .	70
4.2.5.	Comparación con la afinación borrosa con octavas . . . . .	73
<b>A.</b>	<b>Comparación de diversos sistemas de afinación</b>	<b>85</b>
A.1.	Notación . . . . .	85
A.1.1.	Notación de Eitz . . . . .	86
A.1.2.	Notación de Riemann . . . . .	87
A.1.3.	Notación para sistemas de afinación que no respetan la octava .	88
A.2.	Lectura de tablas . . . . .	89
A.3.	Sistemas de afinación que respetan la octava . . . . .	91
A.3.1.	Afinación Pitagórica . . . . .	91
A.3.2.	Temperamentos Justos . . . . .	91
A.3.3.	Temperamentos Mesotónicos . . . . .	95
A.3.4.	Temperamentos Irregulares ( $\mathcal{I}$ ) . . . . .	96
A.3.5.	Temperamento Igual de $n$ Tonos ( $\mathcal{E}_n$ ) . . . . .	100
A.3.6.	Temperamentos Super Justos ( $\mathcal{S}$ ) . . . . .	100
A.4.	Sistemas de afinación que no respetan la octava . . . . .	102
A.4.1.	Las Escalas de Wendy Carlos ( $\mathcal{C}$ ) . . . . .	102
A.4.2.	Las Escalas de Bohlen-Pierce ( $\mathcal{B}$ ) . . . . .	103
A.5.	Tablas de comparación . . . . .	104

# Capítulo 1

## Afinación clásica

En el presente capítulo, se introduce al lector a las nociones clásicas de la teoría musical, en un contexto matemáticamente riguroso.

### 1.1. De la naturaleza del sonido

Tomaré prestada una explicación de Richard Feynman[11], sobre la naturaleza del sonido. El ejemplo que él propone es el de un objeto que se mueve rápidamente en el aire. Tal movimiento no permite que el aire fluya naturalmente, y en consecuencia comprime el aire, lo que produce un cambio de presión que empuja más aire. Este aire a su vez es comprimido, lo que aumenta la presión, y la onda sonora se propaga.

Para encontrar una fórmula, él considera el caso más simple: la onda en una dimensión. El fundamento para considerar este caso es que si estamos suficientemente alejados de la fuente, el frente de ondas es casi plano. Por esto, se asume que el desplazamiento del aire  $\chi$  sólo depende de  $x$  y  $t$ , y no de  $y$  y  $z$ . Este desplazamiento, será el desplazamiento del centro de masa de un pequeño elemento del gas, y la presión o densidad será la presión o densidad en esta región. Llamaremos a la presión  $P$  y a la densidad  $\rho$ , y ambas serán funciones de  $x$  y  $t$ . Aquí aclara que esta descripción es una aproximación que sólo es válida cuando estas propiedades del gas, no varían demasiado rápidamente con la distancia.

Feynman analiza el fenómeno en tres partes:

1. El gas se mueve y cambia la densidad.
2. El cambio en densidad corresponde a un cambio en presión.
3. La diferencia de presión genera movimiento del gas.

Primeramente, deriva una ecuación para 2. Para esto, considera que la presión es una función de la densidad:  $P = f(\rho)$ . Llama  $P_0$  y  $\rho_0$  a la presión y densidad del gas en estado de equilibrio (antes de que llegue la onda), y por lo tanto,  $P_0 = f(\rho_0)$ . Aquí Feynman argumenta que, en acústica, los cambios de presión son extremadamente pequeños comparados con la presión atmosférica (la presión de equilibrio). La presión se puede medir en *bares*: 1 bar son  $10^5$  Pa. 1 atmósfera estándar son 1.0133 bares. La intensidad de un sonido, se mide en términos de la amplitud de presión: para una amplitud de presión  $P$ , se tiene una intensidad de  $20 \log_{10}(P/P_{ref})$  *decibeles* (db), donde  $P_{ref} = 2 \times 10^{-10}$  bares. 120 db representa una intensidad dolorosa para el oído, por lo que se suelen considerar intensidades de menos de 100 db, es decir,  $20 \log_{10}(P/P_{ref}) < 100 \Leftrightarrow \log_{10}(P/P_{ref}) < 5 \Leftrightarrow P/P_{ref} < 10^5 \Leftrightarrow P < 10^5 P_{ref} = 2 \times 10^{-5}$  bares. Como consecuencia de que los cambios de presión sean extremadamente pequeños, también lo son los desplazamientos y los cambios de densidad.

Volviendo a la ecuación para 2, se plantea  $P = P_0 + P_e$  y  $\rho = \rho_0 + \rho_e$ , donde el cambio de presión  $P_e$  es muy pequeño comparado con  $P_0$ , y el cambio de densidad  $\rho_e$  es muy pequeño comparado con  $\rho_0$ . Luego se tiene  $P_0 + P_e = P = f(\rho) = f(\rho_0 + \rho_e) = f(\rho_0) + \rho_e f'(\rho_0) = P_0 + \rho_e f'(\rho_0)$ , pues  $\rho_e$  es muy chico, y en consecuencia:

$$P_e = \kappa \rho_e \quad (1.1)$$

con  $\kappa = f'(\rho_0)$ . Ahora, planteemos una ecuación para 1. Por la naturaleza del fenómeno, el desplazamiento es longitudinal. Luego, si la posición de una porción de aire sin ser perturbada por la onda sonora es  $x$  y el desplazamiento en el tiempo  $t$  debido al sonido es  $\chi(x, t)$ , su nueva posición es  $x + \chi(x, t)$ . Ahora, la posición sin perturbar de una porción cercana de aire era  $x + \Delta x$ , y su nueva posición es  $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$ . Como estamos trabajando con ondas planas, podemos tomar una unidad de área perpendicular a la dirección  $x$ , que es la dirección de propagación de la onda sonora. La cantidad de aire por unidad de área en  $\Delta x$  es entonces  $\rho_0 \Delta x$ . Este aire, al ser desplazado por la

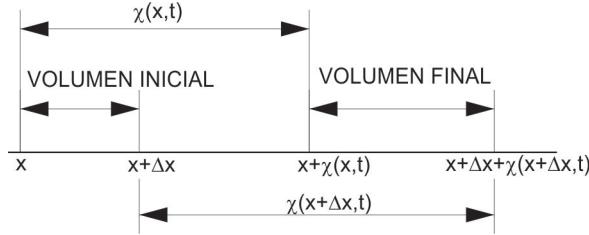


Figura 1.1: Imagen tomada de [11].

onda sonora, queda entre  $x + \chi(x, t)$  y  $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$  como muestra la figura 1.1, y como es la misma cantidad de materia, se tiene  $\rho_0 \Delta x = \rho(x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - x - \chi(x, t)) = \rho(\Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - \chi(x, t))$ . Como  $\Delta x$  es pequeño, tenemos que  $\chi(x + \Delta x, t) - \chi(x, t) = (\partial \chi / \partial x) \Delta x \Rightarrow \rho_0 \Delta x = \rho(\Delta x + (\partial \chi / \partial x) \Delta x) \Rightarrow \rho_0 = \rho(1 + (\partial \chi / \partial x)) = (\rho_0 + \rho_e)(1 + (\partial \chi / \partial x)) = \rho_0 + \rho_e + \rho_0(\partial \chi / \partial x) + \rho_e(\partial \chi / \partial x) \Rightarrow \rho_e = -\rho_0(\partial \chi / \partial x) - \rho_e(\partial \chi / \partial x)$ , y como  $\rho_e$  es muy pequeño comparado con  $\rho_0$ , podemos considerar despreciable el término  $-\rho_e(\partial \chi / \partial x)$ , y la ecuación queda:

$$\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x} \quad (1.2)$$

Nos falta derivar una ecuación para 3. Si tomamos una tajada delgada de aire, de largo  $\Delta x$  y área unitaria perpendicular a  $x$ , la masa de aire en esta tajada es  $\rho_0 \Delta x$ , y tiene aceleración  $\partial^2 \chi / \partial t^2$ . Tenemos la fuerza en dirección  $+x$ , en  $x$ , de valor  $P(x, t)$  por unidad de área, y tenemos la fuerza en la dirección opuesta, en  $x + \Delta x$ , de valor  $P(x + \Delta x, t)$  por unidad de área, como muestra la figura 1.2. Además, tenemos que  $P(x, t) - P(x + \Delta x, t) = -(\partial P / \partial x) \Delta x = -(\partial P_e / \partial x) \Delta x$ , pues  $\Delta x$  es pequeño y  $P_0$  es constante. Usando la segunda ley de Newton, tenemos que  $-(\partial P_e / \partial x) \Delta x = \rho_0 \Delta x (\partial^2 \chi / \partial t^2)$  y nos

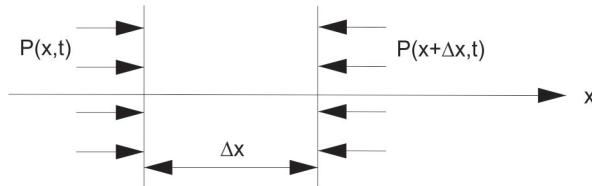


Figura 1.2: Imagen tomada de [11].

queda la ecuación:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\frac{\partial P_e}{\partial x} \quad (1.3)$$

Reemplazando (1.1) en (1.3), tenemos que  $\rho_0(\partial^2 \chi / \partial t^2) = -\kappa(\partial \rho_e / \partial x)$ , y reemplazando (1.2) en esta última ecuación, nos queda que  $\rho_0(\partial^2 \chi / \partial t^2) = \kappa \rho_0(\partial^2 \chi / \partial x^2)$ , y por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \quad (1.4)$$

Analizando (1.1), tenemos que al aumentar la densidad ( $\rho_e > 0$ ), intuitivamente debería aumentar la presión ( $P_e > 0$ ), de manera que  $\kappa = P_e / \rho_e > 0$ , y reemplazando  $\kappa = c^2$  obtenemos la forma usual de la ecuación de ondas.

Tales ondas sonoras estimulan nuestros oídos, los cuales envían la información al cerebro. Puede decirse entonces que los sonidos son nuestra percepción de las ondas sonoras.

Estaremos interesados en las ondas sonoras sinusoidales. Éstas son de la forma:

$$\chi(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

con  $A$  y  $k$  constantes positivas,  $\omega$  constante no nula<sup>1</sup>, y  $\varphi$  constante. Si derivamos dos veces en función de  $x$  tenemos que  $\partial^2 \chi / \partial x^2 = -k^2 \chi$ , y derivando dos veces en función de  $t$  tenemos que  $\partial^2 \chi / \partial t^2 = -\omega^2 \chi$ , por lo que  $(\partial^2 \chi / \partial x^2) / k^2 = -\chi = (\partial^2 \chi / \partial t^2) / \omega^2 \Rightarrow \partial^2 \chi / \partial t^2 = (\omega^2 / k^2)(\partial^2 \chi / \partial x^2)$ . Por lo tanto, tomando  $\omega^2 / k^2 = \kappa \Leftrightarrow |\omega| = k\sqrt{\kappa}$ , tenemos que es solución de (1.4).

Notemos que si en una onda de este tipo fijamos  $x = x_0$ , obtenemos  $\chi(x_0, t) = A \sin((kx_0 + \varphi) - \omega t)$ . La razón por la cual estamos interesados en ondas de este tipo es que las percibimos como una nota. Más aún, el valor de  $|\omega|$  (que llamamos *frecuencia*) indica la nota que percibimos.

Los sonidos musicales son sumas de estas ondas sonoras, donde la menor de estas frecuencias se conoce como *frecuencia fundamental*, mientras que las otras se llaman *armónicos*. La frecuencia fundamental define la nota musical, mientras que los armóni-

---

<sup>1</sup>Aquí el signo de  $\omega$  indica simplemente en qué dirección se mueve la onda: si  $\omega > 0$  se mueve hacia la dirección de las  $x$  positivas, si  $\omega < 0$  se mueve hacia la dirección de las  $x$  negativas.

cos determinan el *timbre* del instrumento. Esto es lo que diferencia un violín de un piano, por ejemplo, cuando ambos instrumentos tocan la misma nota.

## 1.2. De las notas musicales

La frecuencia es una magnitud escalar positiva<sup>2</sup> que se mide en *hertz* (Hz, ciclos por segundo). En consecuencia, el conjunto de todas las frecuencias puede representarse mediante  $\mathbb{R}_{>0}$ . Este conjunto con el producto de  $\mathbb{R}$  forma un grupo abeliano.

Volviendo a lo musical, dada una frecuencia  $f_0$ , el cerebro humano percibe a las notas generadas por  $f_0$  y  $2f_0$  como la misma<sup>3</sup>. Se dice que  $2f_0$  está una *octava* más alta que  $f_0$  (o que  $f_0$  está una octava más baja que  $2f_0$ ). En consecuencia, las notas musicales quedan representadas por el cociente  $\mathbb{R}_{>0}/\langle 2 \rangle$ .

Podemos pensar entonces que las notas musicales forman un círculo. Una construcción matemática de esto es considerar los siguientes morfismos de grupos:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}_{>0} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{T} \\ f & \longmapsto & \log_2 f & & & & \\ & & & & & & \\ x & & & & \longmapsto & e^{2\pi i x} & \end{array}$$

donde  $\mathbb{R}$  es un grupo abeliano con la suma, y  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$  es un grupo abeliano con el producto de  $\mathbb{C}$ . Nótese que  $\phi$  es un isomorfismo con inversa  $\phi^{-1}(x) = 2^x$ . Además,  $\psi$  es un epimorfismo, luego  $\text{im}(\psi \circ \phi) = \mathbb{T}$ .  $f \in \ker(\psi \circ \phi) \Leftrightarrow e^{2\pi i \log_2 f} = 1 \Leftrightarrow \log_2 f \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow f \in \langle 2 \rangle$ , por lo tanto,  $\ker(\psi \circ \phi) = \langle 2 \rangle$ , y por el primer teorema de isomorfismos,  $\mathbb{R}_{>0}/\langle 2 \rangle \simeq \mathbb{T}$ . Aquí se ve claro el círculo.

A partir de ahora,  $\mathbb{T}$  va a representar el conjunto de notas musicales. Un *sistema de afinación* es simplemente un subconjunto finito no vacío de  $\mathbb{T}$ . Ahora, para comparar dos o más sistemas de afinación, necesitaremos primero comparar dos notas, es decir, una noción de distancia en  $\mathbb{T}$ . Como  $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{T}$  ya tiene una métrica canónica, pero nosotros

---

<sup>2</sup>Se podría argumentar que una frecuencia nula representa la falta de perturbación del aire, es decir, el silencio. Sin embargo, no nos interesa este caso.

<sup>3</sup>Esto aparentemente tiene una explicación anatómica en la arquitectura del tálamo auditivo. Véase [12].

queremos una métrica que en cierto sentido mida la razón entre frecuencias, pues de ésta se deriva la consonancia entre notas. Y para pasar de una razón a una diferencia, contamos con los logaritmos. En especial, si usamos el logaritmo base 2, tenemos que  $1 = |\log_2(f_2) - \log_2(f_1)| = |\log_2(f_2/f_1)| \Leftrightarrow \log_2(f_2/f_1) = 1 \text{ ó } -1 \Leftrightarrow f_2/f_1 = 2 \text{ ó } 1/2 \Leftrightarrow f_2 = 2f_1 \text{ ó } 2f_2 = f_1$ , con lo cual se estaría midiendo en octavas.

**Proposición 1.**  $d_f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $d_f(f_1, f_2) = |\phi(f_2) - \phi(f_1)|$  define una métrica.

*Demostración.* Resulta inmediato pues  $d(x_1, x_2) = |x_2 - x_1|$  es la métrica usual de  $\mathbb{R}$  y  $\phi$  es una función inyectiva.  $\square$

*Observación 1.* En teoría musical, la distancia entre dos frecuencias suele medirse en *cents*. La distancia entre  $f_1$  y  $f_2$  es de  $1200|\log_2(f_2/f_1)|$  cents. Aquí se aprecia que 1200 cents forman una octava.

Ahora que tenemos una noción de distancia para las frecuencias, nos falta definir una noción de distancia para las notas. Recordando que las notas son clases de equivalencia de las frecuencias, tomaremos la distancia entre conjuntos. Para ver que esto define una métrica, necesitaremos algunos lemas previos:

**Lema 2.** Dadas dos frecuencias  $f_1$  y  $f_2$ ,  $\exists! k \in \mathbb{Z}/ 2^k f_1 \leq f_2 < 2^{k+1} f_1$  ( $k = \lfloor \log_2(f_2/f_1) \rfloor$ , donde  $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z}/ n \leq x\}$  es la parte entera de  $x$ ).

*Demostración.*  $2^k f_1 \leq f_2 < 2^{k+1} f_1 \Leftrightarrow 2^k \leq f_2/f_1 < 2^{k+1} \Leftrightarrow k \leq \log_2(f_2/f_1) < k + 1 \Leftrightarrow k = \lfloor \log_2(f_2/f_1) \rfloor$   $\square$

**Lema 3.** Dada una frecuencia  $f_1$  y una nota  $[f_2] = f_2 \langle 2 \rangle = \{2^n f_2 / n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $d_f(f_1, [f_2]) = \min\{\{\log_2(f_1/f_2)\}, 1 - \{\log_2(f_1/f_2)\}\}$ , donde  $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$  es la parte fraccionaria de  $x$ , y tal distancia se realiza.

*Demostración.* Por la demostración del lema anterior,  $2^k f_2 \leq f_1 < 2^{k+1} f_2$ , donde  $k = \lfloor \log_2(f_1/f_2) \rfloor$ . Si  $n \in \mathbb{Z}$ :

- $n \leq k \Rightarrow 2^n f_2 \leq 2^k f_2 \leq f_1 \Rightarrow \log_2(2^n f_2) \leq \log_2(2^k f_2) \leq \log_2(f_1) \Rightarrow \phi(2^n f_2) - \phi(f_1) \leq \phi(2^k f_2) - \phi(f_1) \leq 0 \Rightarrow d_f(f_1, 2^n f_2) \geq d_f(f_1, 2^k f_2) = \phi(f_1) - \phi(2^k f_2) = \log_2(f_1) - \log_2(2^k f_2) = \log_2(f_1/f_2) - k = \log_2(f_1/f_2) - \lfloor \log_2(f_1/f_2) \rfloor = \{\log_2(f_1/f_2)\}$

$$\begin{aligned} \blacksquare n > k \Rightarrow n \geq k + 1 \Rightarrow 2^n f_2 \geq 2^{k+1} f_2 > f_1 \Rightarrow \log_2(2^n f_2) \geq \log_2(2^{k+1} f_2) > \\ \log_2(f_1) \Rightarrow \phi(2^n f_2) - \phi(f_1) \geq \phi(2^{k+1} f_2) - \phi(f_1) > 0 \Rightarrow d_f(f_1, 2^n f_2) \geq d_f(f_1, 2^{k+1} f_2) = \\ \phi(2^{k+1} f_2) - \phi(f_1) = \log_2(2^{k+1} f_2) - \log_2(f_1) = k + 1 - (\log_2(f_1) - \log_2(f_2)) = \\ 1 - \log_2(f_1/f_2) + \lfloor \log_2(f_1/f_2) \rfloor = 1 - \{\log_2(f_1/f_2)\} \end{aligned}$$

$\therefore d_f(f_1, 2^n f_2) \geq \min\{\{\log_2(f_1/f_2)\}, 1 - \{\log_2(f_1/f_2)\}\} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow d_f(f_1, [f_2]) \geq \min\{\{\log_2(f_1/f_2)\}, 1 - \{\log_2(f_1/f_2)\}\}$ , y como  $d_f(f_1, 2^k f_2) = \{\log_2(f_1/f_2)\}$  y  $d_f(f_1, 2^{k+1} f_2) = 1 - \{\log_2(f_1/f_2)\}$ , vale la igualdad y tal distancia se realiza.  $\square$

**Lema 4.** Sean  $x \in \mathbb{R}$  y  $k \in \mathbb{Z}$ . Vale:

1.  $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$
2.  $\{x + k\} = \{x\}$

*Demostración.* 1.  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + k \leq x + k < (\lfloor x \rfloor + k) + 1 \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor + k = \lfloor x + k \rfloor \quad (\lfloor x \rfloor + k \in \mathbb{Z}).$

2.  $\{x + k\} = x + k - \lfloor x + k \rfloor = x - \lfloor x \rfloor = \{x\}$  (usando el item anterior).

$\square$

*Observación 2.* Si  $[f_1] = [f_0] \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} / f_1 = 2^n f_0$ .  $d_f(f_1, [f_2]) = \min\{\{\log_2(f_1/f_2)\}, 1 - \{\log_2(f_1/f_2)\}\}$ , pero  $\{\log_2(f_1/f_2)\} = \{\log_2(2^n f_0/f_2)\} = \{n + \log_2(f_0/f_2)\} = \{\log_2(f_0/f_2)\}$ , luego  $d_f(f_1, [f_2]) = d_f(f_0, [f_2])$ .

Esto implica que  $d_f([f_1], [f_2]) = d_f(f_1, [f_2]) = \min\{\{\log_2(f_1/f_2)\}, 1 - \{\log_2(f_1/f_2)\}\} = \min\{\{d_f(f_1, f_2)\}, 1 - \{d_f(f_1, f_2)\}\}$  y se realiza con  $f_1$  y  $f_3 \in [f_2]$ . Esto último es importante, en cuanto nos dice que nuestro concepto de distancia entre notas coincide con la idea intuitiva de tomar una frecuencia que represente a una de las notas, y luego tomar un representante de la otra nota que minimice la distancia a esa frecuencia.

Ahora sí, estamos en condiciones de probar que la distancia entre notas como conjuntos de frecuencias, define una métrica.

**Proposición 5.**  $d_{[f]} : \mathbb{R}_{>0}/\langle 2 \rangle \times \mathbb{R}_{>0}/\langle 2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $d_{[f]}([f_1], [f_2]) = d_f([f_1], [f_2])$  define una métrica.

*Demostración.* Es claro que es semidefinida positiva, simétrica y que  $d_f([f_1], [f_1]) = 0$ , pues  $d_f$  es una métrica, y las distancias entre conjuntos heredan estas propiedades.

Si  $d_f([f_1], [f_2]) = 0 \Rightarrow d_f(f_1, f_3) = 0$  con  $f_3 \in [f_2] \Rightarrow f_1 = f_3 \in [f_2] \Rightarrow [f_1] = [f_2]$ .  $d_f([f_1], [f_2]) = d_f(g_1, f_2)$  y  $d_f([f_2], [f_3]) = d_f(f_2, g_3)$ , con  $g_1 \in [f_1]$  y  $g_3 \in [f_3]$ , y como  $d_f([f_1], [f_3]) \leq d_f(g_1, g_3) \leq d_f(g_1, f_2) + d_f(f_2, g_3) = d_f([f_1], [f_2]) + d_f([f_2], [f_3])$ , vale la desigualdad triangular.  $\square$

Finalmente tenemos una métrica que imita la percepción humana. Podemos ahora preguntarnos cuál es su relación con la métrica inducida por  $\mathbb{C}$ .

### 1.2.1. Comparación de las métricas en $\mathbb{T}$

Primeramente, volvamos a la distancia entre frecuencias, veamos qué es lo que mide en términos geométricos en  $\mathbb{T}$ . Para ello consideraremos  $\eta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\eta(z) = (\Re(z), \Im(z))$  biyección que en términos intuitivos preserva la geometría. Ahora, quisieramos medir la longitud de la curva que va desde la frecuencia  $f_1$  a  $f_2$  en  $\mathbb{T}$ . Esta curva está descripta (suponiendo  $f_1 \leq f_2$ ) por  $\eta \circ \psi \circ \phi : [f_1, f_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , y consecuentemente su longitud será:

$$\int_{f_1}^{f_2} \|(\eta \circ \psi \circ \phi)'(t)\| dt$$

$\eta \circ \psi \circ \phi(t) = \eta \circ \psi(\log_2 t) = \eta(e^{2\pi i \log_2 t}) = (\cos(2\pi \log_2 t), \sin(2\pi \log_2 t)) \Rightarrow (\eta \circ \psi \circ \phi)'(t) = (-\sin(2\pi \log_2 t)2\pi/(t \ln 2), \cos(2\pi \log_2 t)2\pi/(t \ln 2)) \Rightarrow \|(\eta \circ \psi \circ \phi)'(t)\| = 2\pi/(|t| \ln 2)$  y teniendo en cuenta que  $0 < f_1 \leq f_2$ , obtenemos que la longitud es  $2\pi(\ln f_2 - \ln f_1)/\ln 2 = 2\pi \log_2(f_2/f_1) = 2\pi d_f(f_1, f_2)$ . En este sentido,  $d_f(f_1, f_2)$  mide la cantidad de vueltas que hay que darle a  $\mathbb{T}$  para ir de  $f_1$  a  $f_2$ .

Con tal interpretación, y recordando la observación 2, podemos pensar que para determinar la distancia entre las notas  $[f_1]$  y  $[f_2]$ , fijamos  $f_1$  en  $\mathbb{T}$  y tratamos de recorrer la menor cantidad de vueltas (en sentido horario o antihorario) hasta algún representante de  $[f_2]$ . Es decir,  $d_{[f]}([f_1], [f_2])$  estaría dada por el arco de menor longitud entre  $\psi \circ \phi(f_1)$  y  $\psi \circ \phi(f_2)$ , medido en vueltas. Dado que  $|\psi \circ \phi(f_1) - \psi \circ \phi(f_2)|$  mide la longitud de la cuerda entre  $\psi \circ \phi(f_1)$  y  $\psi \circ \phi(f_2)$ , lo que pretendemos saber es, dado un ángulo  $\alpha \in [0, \pi]$ , cuál es la relación entre la longitud del arco y la longitud de la cuerda que determina en un círculo de radio 1.

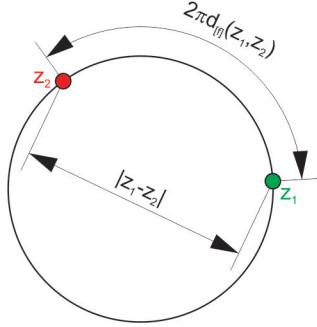


Figura 1.3: La imagen muestra que mide cada métrica.

Para ello, podemos considerar el arco de  $\mathbb{T}$  que comienza en 1 y recorre en sentido antihorario hasta llegar a  $e^{i\alpha}$ . Sabemos que la longitud de tal arco es  $\alpha$ , y la longitud de la cuerda es  $|e^{i\alpha} - 1| = |\cos \alpha + i \sin \alpha - 1| = \sqrt{(\cos \alpha - 1)^2 + \sin^2 \alpha} = \sqrt{\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + 1 + \sin^2 \alpha} = \sqrt{2(1 - \cos \alpha)}$ . Luego, la relación entre  $d_{[f]}([f_1], [f_2])$  y  $|\psi \circ \phi(f_1) - \psi \circ \phi(f_2)|$  sería:

$$|\psi \circ \phi(f_1) - \psi \circ \phi(f_2)| = \sqrt{2(1 - \cos 2\pi d_{[f]}([f_1], [f_2]))} \quad (1.5)$$

o equivalentemente:

$$d_{[f]}([f_1], [f_2]) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arc cos} \left( 1 - \frac{|\psi \circ \phi(f_1) - \psi \circ \phi(f_2)|^2}{2} \right) \quad (1.6)$$

Formalizando:

**Proposición 6.** *Dadas dos frecuencias  $f_1$  y  $f_2$  valen las fórmulas (1.5) y (1.6).*

*Demostación.*

$$\begin{aligned} |\psi \circ \phi(f_1) - \psi \circ \phi(f_2)| &= |e^{2\pi i \phi(f_1)} - e^{2\pi i \phi(f_2)}| \\ &= |e^{2\pi i \phi(f_2)}| |e^{2\pi i (\phi(f_1) - \phi(f_2))} - 1| \\ &= |e^{2\pi i (\phi(f_1) - \phi(f_2))} - 1| \\ &= \sqrt{2(1 - \cos(2\pi(\phi(f_1) - \phi(f_2))))} \end{aligned}$$

Ahora bien, por la demo del lema 3,  $d_{[f]}([f_1], [f_2]) = \min\{d_f(f_1, 2^k f_2), d_f(f_1, 2^{k+1} f_2)\}$ , donde  $2^k f_2 \leq f_1 < 2^{k+1} f_2$ .  $d_f(f_1, 2^k f_2) = \phi(f_1) - \phi(2^k f_2) = \phi(f_1) - \phi(f_2) - k \Rightarrow$

$\cos(2\pi d_f(f_1, 2^k f_2)) = \cos(2\pi(\phi(f_1) - \phi(f_2) - k)) = \cos(2\pi(\phi(f_1) - \phi(f_2)))$  y  $d_f(f_1, 2^{k+1} f_2) = \phi(2^{k+1} f_2) - \phi(f_1) = k + 1 + \phi(f_2) - \phi(f_1) \Rightarrow \cos(2\pi d_f(f_1, 2^{k+1} f_2)) = \cos(2\pi(k + 1 + \phi(f_2) - \phi(f_1))) = \cos(2\pi(\phi(f_2) - \phi(f_1))) = \cos(2\pi(\phi(f_1) - \phi(f_2))),$  por lo cual vale (1.5).

$|\psi \circ \phi(f_1) - \psi \circ \phi(f_2)| = \sqrt{2(1 - \cos 2\pi d_{[f]}([f_1], [f_2]))} \Leftrightarrow |\psi \circ \phi(f_1) - \psi \circ \phi(f_2)|^2 = 2(1 - \cos 2\pi d_{[f]}([f_1], [f_2])) \Leftrightarrow |\psi \circ \phi(f_1) - \psi \circ \phi(f_2)|^2/2 = 1 - \cos 2\pi d_{[f]}([f_1], [f_2]) \Leftrightarrow 1 - |\psi \circ \phi(f_1) - \psi \circ \phi(f_2)|^2/2 = \cos 2\pi d_{[f]}([f_1], [f_2])$   
 Si  $\{\log_2(f_1/f_2)\} \leq 1/2 \Rightarrow d_{[f]}([f_1], [f_2]) \leq 1/2;$  si  $\{\log_2(f_1/f_2)\} > 1/2 \Rightarrow 1 - \{\log_2(f_1/f_2)\} < 1/2 \Rightarrow d_{[f]}([f_1], [f_2]) < 1/2.$  Por lo tanto,  $0 \leq d_{[f]}([f_1], [f_2]) \leq 1/2 \Rightarrow 0 \leq 2\pi d_{[f]}([f_1], [f_2]) \leq \pi,$  y en consecuencia,  $1 - |\psi \circ \phi(f_1) - \psi \circ \phi(f_2)|^2/2 = \cos 2\pi d_{[f]}([f_1], [f_2]) \Leftrightarrow \arccos(1 - |\psi \circ \phi(f_1) - \psi \circ \phi(f_2)|^2/2) = 2\pi d_{[f]}([f_1], [f_2]) \Leftrightarrow \arccos(1 - |\psi \circ \phi(f_1) - \psi \circ \phi(f_2)|^2/2)/(2\pi) = d_{[f]}([f_1], [f_2]),$  por lo cual vale (1.6).  $\square$

*Observación 3.* Teniendo en cuenta que  $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha),$  podemos reescribir (1.5) como  $|\psi \circ \phi(f_1) - \psi \circ \phi(f_2)| = \sqrt{2(1 - (1 - 2\sin^2 \pi d_{[f]}([f_1], [f_2])))} = \sqrt{4\sin^2 \pi d_{[f]}([f_1], [f_2])} = 2|\sin \pi d_{[f]}([f_1], [f_2])|,$  y como  $0 \leq d_{[f]}([f_1], [f_2]) \leq 1/2 \Rightarrow 0 \leq \pi d_{[f]}([f_1], [f_2]) \leq \pi/2 \Rightarrow \sin \pi d_{[f]}([f_1], [f_2]) \geq 0,$  nos queda:

$$|\psi \circ \phi(f_1) - \psi \circ \phi(f_2)| = 2 \sin \pi d_{[f]}([f_1], [f_2]) \quad (1.7)$$

Además, como  $0 \leq \pi d_{[f]}([f_1], [f_2]) \leq \pi/2,$  tenemos que esto equivale a:

$$d_{[f]}([f_1], [f_2]) = \frac{1}{\pi} \arcsin \left( \frac{|\psi \circ \phi(f_1) - \psi \circ \phi(f_2)|}{2} \right) \quad (1.8)$$

*Observación 4.*  $|z - s| = |z' - s'| \Leftrightarrow d_{[f]}(z, s) = d_{[f]}(z', s')$

*Observación 5.* Ambas métricas son invariantes por la acción de  $\mathbb{T},$  es decir,  $|wz - ws| = |w||z - s| = |z - s| \Rightarrow d_{[f]}(wz, ws) = d_{[f]}(z, s).$

Finalmente, una última propiedad de interés:

**Proposición 7.** En  $\mathbb{T},$  la métrica canónica y  $d_{[f]}$  son equivalentes. En particular, vale que  $4d_{[f]}([f_1], [f_2]) \leq |\psi \circ \phi(f_1) - \psi \circ \phi(f_2)| \leq 2\pi d_{[f]}([f_1], [f_2]),$  y estas desigualdades son óptimas.

*Demostración.* Analicemos la función  $g : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Claramente  $g$  es continua, y derivable en  $(0, \pi/2)$ :  $g'(x) = (x \cos x - \sin x)/x^2 \quad \forall x \in (0, \pi/2)$ . Además, por el teorema del valor medio tenemos si  $x \in (0, \pi/2)$  que  $\tan x/x = (\tan x - \tan 0)/(x - 0) = 1/\cos^2 c$  con  $c \in (0, x) \subseteq (0, \pi/2) \Rightarrow 0 < \cos c < 1 \Rightarrow 1 < 1/\cos^2 c \Rightarrow \tan x/x > 1 \Rightarrow \sin x > x \cos x \Rightarrow x \cos x - \sin x < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$ , es decir que  $g$  es decreciente, y por lo tanto,  $1 = g(0) \geq g(x) \geq g(\pi/2) = 2/\pi \quad \forall x \in [0, \pi/2] \Rightarrow 1 \geq \sin x/x \geq 2/\pi \quad \forall x \in (0, \pi/2] \Rightarrow x \geq \sin x \geq (2/\pi)x \quad \forall x \in (0, \pi/2]$ , y obviamente, ésto último también vale para  $x = 0$ . Sabemos que  $0 \leq d_{[f]}([f_1], [f_2]) \leq 1/2 \Rightarrow 0 \leq \pi d_{[f]}([f_1], [f_2]) \leq \pi/2$ , por lo que tomando  $x = \pi d_{[f]}([f_1], [f_2])$  nos queda  $\pi d_{[f]}([f_1], [f_2]) \geq \sin \pi d_{[f]}([f_1], [f_2]) \geq 2d_{[f]}([f_1], [f_2])$ , y en consecuencia:

$$4d_{[f]}([f_1], [f_2]) \leq |\psi \circ \phi(f_1) - \psi \circ \phi(f_2)| \leq 2\pi d_{[f]}([f_1], [f_2])$$

como queríamos ver. Para ver que son óptimas, usamos que  $g(\pi d_{[f]}([f_1], [f_2])) = (\sin \pi d_{[f]}([f_1], [f_2]))/(\pi d_{[f]}([f_1], [f_2]))$  si  $d_{[f]}([f_1], [f_2]) \neq 0$ , y que tal expresión es  $2/\pi$  si  $d_{[f]}([f_1], [f_2]) = 1/2$  (por ejemplo,  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = \sqrt{2}$ ), y tiende a 1 si  $d_{[f]}([f_1], [f_2]) \rightarrow 0$  (por ejemplo,  $d_{[f]}([2^{1/n}], [1]) = 1/n$  si  $n \geq 2$ ).  $\square$

### 1.3. De los sistemas de afinación

Como ya dijimos, un sistema de afinación es un subconjunto finito no vacío de  $\mathbb{T}$ . En esta sección, desarrollaremos un método para comparar distintos sistemas de afinación, lo que puede ser de utilidad para la transcripción de piezas musicales de distintas culturas, o para la interpretación mediante instrumentos con rango continuo de notas. Para ello definimos primero que es una *transcripción* entre sistemas de afinación.

**Definición 1.** Sean  $S$  y  $S'$  dos sistemas de afinación. Una transcripción  $\tau$  de  $S$  a  $S'$  es una función  $\tau : S \rightarrow S'$ . La *fidelidad* de  $\tau$  está dada por:

$$\Phi(\tau) = 1 - 2 \max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau(z))$$

*Observación 6.*  $0 \leq d_{[f]}(z, \tau(z)) \leq 1/2 \forall z \in S \Rightarrow 0 \leq \max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau(z)) \leq 1/2 \Leftrightarrow 0 \leq 2 \max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau(z)) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - 2 \max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau(z)) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \Phi(\tau) \leq 1$ . Además,  $\Phi(\tau) = 1 \Leftrightarrow 1 - 2 \max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau(z)) = 1 \Leftrightarrow \max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau(z)) = 0 \Leftrightarrow d_{[f]}(z, \tau(z)) = 0 \forall z \in S \Leftrightarrow z = \tau(z) \forall z \in S$ .

La fidelidad cumple una suerte de desigualdad triangular.

**Proposición 8.** Sean  $S$ ,  $S'$  y  $S''$  tres sistemas de afinación, con transcripciones  $\tau : S \rightarrow S'$  y  $\tau' : S' \rightarrow S''$ . Entonces:

$$\Phi(\tau' \circ \tau) \geq \Phi(\tau') + \Phi(\tau) - 1$$

*Demostración.* Dado  $z \in S$ ,  $d_{[f]}(z, \tau' \circ \tau(z)) \leq d_{[f]}(z, \tau(z)) + d_{[f]}(\tau(z), \tau' \circ \tau(z)) \leq \max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau(z)) + \max_{s \in S'} d_{[f]}(s, \tau'(s))$ , por lo que  $\max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau' \circ \tau(z)) \leq \max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau(z)) + \max_{z \in S'} d_{[f]}(z, \tau'(z)) \Leftrightarrow -2 \max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau' \circ \tau(z)) \geq -2 \max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau(z)) - 2 \max_{z \in S'} d_{[f]}(z, \tau'(z)) \Leftrightarrow 2 - 2 \max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau' \circ \tau(z)) \geq 1 - 2 \max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau(z)) + 1 - 2 \max_{z \in S'} d_{[f]}(z, \tau'(z)) \Leftrightarrow 1 + \Phi(\tau' \circ \tau) \geq \Phi(\tau') + \Phi(\tau) \Leftrightarrow \Phi(\tau' \circ \tau) \geq \Phi(\tau') + \Phi(\tau) - 1$ .  $\square$

**Definición 2.** Sean  $S$  y  $S'$  dos sistemas de afinación. Si  $\forall z \in S$ ,  $\exists! w_z \in S' / d_{[f]}(z, S') = d_{[f]}(z, w_z)$ , se dice que existe la *transcripción canónica* de  $S$  a  $S'$  dada por  $\tau(z) = w_z$ .

*Observación 7.* La transcripción canónica puede no existir. Por ejemplo, si tomamos  $S = \{1\}$  y  $S' = \{i, -i\}$ ,  $d_{[f]}(1, i) = d_{[f]}(1, -i) = d_{[f]}(1, S') = 1/4$ , como muestra la figura 1.4.

*Observación 8.* En caso de existir la transcripción canónica, esta tiene la máxima fidelidad. En efecto, si existe la transcripción canónica  $\tau$  de  $S$  a  $S'$ , y  $\tau' : S \rightarrow S'$  es una transcripción cualquiera,  $d_{[f]}(z, \tau(z)) = d_{[f]}(z, S') \leq d_{[f]}(z, \tau'(z)) \forall z \in S \Rightarrow \max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau(z)) \leq \max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau'(z)) \Leftrightarrow -2 \max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau(z)) \geq -2 \max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau'(z)) \Leftrightarrow 1 - 2 \max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau(z)) \geq 1 - 2 \max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau'(z)) \Leftrightarrow \Phi(\tau) \geq \Phi(\tau')$ .

**Definición 3.** Dos sistemas de afinación,  $S$  y  $S'$ , se dicen *canónicamente intercambiables* si existen las transcripciones canónicas de  $S$  a  $S'$  y de  $S'$  a  $S$ , y ambas son inyectivas.

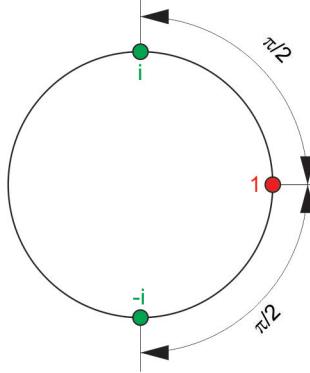


Figura 1.4: El punto rojo es el elemento de  $S$ , y los puntos verdes son los elementos de  $S'$ . La distancia entre estos está dada en radianes.

*Observación 9.* Si  $S$  y  $S'$  son dos sistemas de afinación canónicamente intercambiables, tienen el mismo cardinal. En efecto,  $\#S \leq \#S'$  pues la transcripción canónica de  $S$  a  $S'$  es inyectiva, y  $\#S' \leq \#S$  pues la transcripción canónica de  $S'$  a  $S$  es inyectiva, luego  $\#S = \#S'$ .

*Observación 10.* La relación "son canónicamente intercambiables" es reflexiva ( $id_S : S \rightarrow S$  es la transcripción canónica de  $S$  a  $S$ ) y obviamente simétrica, pero no transitiva. Por ejemplo, si  $S = \{1, -1\}$ ,  $S' = \{e^{i\pi/4}, -e^{i\pi/4}\}$  y  $S'' = \{i, -i\}$ ,  $S$  y  $S'$  son canónicamente intercambiables,  $S'$  y  $S''$  también lo son, pero ni siquiera existen las transcripciones canónicas entre  $S$  y  $S''$ , como muestra la figura 1.5.

**Proposición 9.** *Si  $S$  y  $S'$  son dos sistemas de afinación canónicamente intercambiables, con transcripciones canónicas  $\tau : S \rightarrow S'$  y  $\tau' : S' \rightarrow S$ , entonces una es la inversa de la otra.*

*Demostración.* Lo hacemos por inducción, con  $n = \#S = \#S'$ .

El caso  $n = 1$  es trivial. Supongamos que  $n \geq 2$ :

Considero  $z \in S$  y  $w \in S' / d_{[f]}(z, w) = d_{[f]}(S, S') \Rightarrow \tau(z) = w$  y  $\tau'(w) = z$ , y como ambas son inyectivas, tengo bien definidas  $\tau : S \setminus \{z\} \rightarrow S' \setminus \{w\}$  y  $\tau' : S' \setminus \{w\} \rightarrow S \setminus \{z\}$ . Dado  $z' \in S \setminus \{z\}$ ,  $d_{[f]}(z', S' \setminus \{w\}) \leq d_{[f]}(z', \tau(z')) = d_{[f]}(z', S') \leq d_{[f]}(z', S' \setminus \{w\}) \Rightarrow d_{[f]}(z', \tau(z')) = d_{[f]}(z', S' \setminus \{w\}) = d_{[f]}(z', S')$ , por lo que si  $w' \in S' \setminus \{w\} / d_{[f]}(z', w') = d_{[f]}(z', S' \setminus \{w\}) \Rightarrow w' \in S'$  y  $d_{[f]}(z', w') = d_{[f]}(z', S') \Rightarrow w' = \tau(z')$ . Por lo tanto,

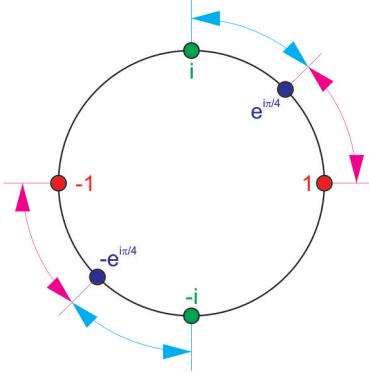


Figura 1.5: Los puntos rojos son los elementos de  $S$ , los puntos azules son los elementos de  $S'$  y los puntos verdes son los elementos de  $S''$ . Las flechas magenta indican las transcripciones canónicas entre  $S$  y  $S'$ , y las flechas azul cyan indican las transcripciones canónicas entre  $S'$  y  $S''$ . Como se señaló anteriormente,  $i$  y  $-i$  equidistan de 1, por lo que no hay transcripción canónica de  $S$  a  $S''$ . Análogamente, tampoco hay transcripción canónica de  $S''$  a  $S$ .

$\tau : S \setminus \{z\} \rightarrow S' \setminus \{w\}$  es la transcripción canónica y es inyectiva.

Análogamente,  $\tau' : S' \setminus \{w\} \rightarrow S \setminus \{z\}$  es la transcripción canónica y es inyectiva, y por inducción tenemos que  $\tau' \circ \tau : S \setminus \{z\} \rightarrow S' \setminus \{w\}$  es  $id_{S \setminus \{z\}}$  y  $\tau \circ \tau' : S' \setminus \{w\} \rightarrow S \setminus \{z\}$  es  $id_{S' \setminus \{w\}}$ . Además, sabemos que  $\tau' \circ \tau(z) = \tau'(w) = z$  y  $\tau \circ \tau'(w) = \tau(z) = w$ , por lo que  $\tau' \circ \tau : S \rightarrow S$  es  $id_S$  y  $\tau \circ \tau' : S' \rightarrow S'$  es  $id_{S'}$ .  $\square$

**Proposición 10.** *Dados  $S$  y  $S'$  dos sistemas de afinación, y  $\tau$  una transcripción biyectiva de  $S$  a  $S'$ , entonces  $\Phi(\tau) = \Phi(\tau^{-1})$ .*

*Demostración.* Es inmediato pues  $\{(z, \tau(z)) : z \in S\} = \{(\tau^{-1}(w), w) : w \in S'\}$ .  $\square$

Finalmente, podemos comparar sistemas de afinación canónicamente intercambiables.

**Definición 4.** Dado  $0 \leq \alpha \leq 1$ , dos sistemas de afinación  $S$  y  $S'$  canómicamente intercambiables, con transcripción canónica  $\tau : S \rightarrow S'$ , se dicen  $\alpha$ -similares si  $\Phi(\tau) \geq \alpha$ .

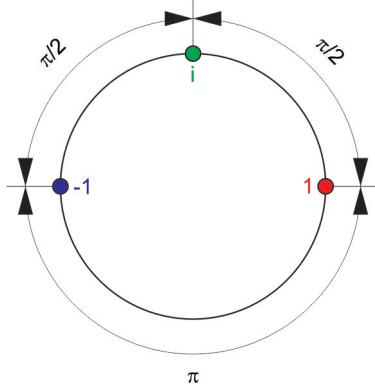


Figura 1.6:  $S$  está representado por el punto rojo,  $S'$  por el punto verde y  $S''$  por el punto azul. Las distancias están indicadas en radianes. Puede observarse que las transcripciones entre  $S$  y  $S'$ , y entre  $S'$  y  $S''$ , tienen fidelidad  $1/2$ , pero entre  $S$  y  $S''$  tienen fidelidad  $0$ .

*Observación 11.* Dado  $0 \leq \alpha \leq 1$ , la relación "son  $\alpha$ -similares" es reflexiva ( $\Phi(id_S) = 1 \geq \alpha$ ) y simétrica (por las dos proposiciones anteriores), pero no transitiva, ni siquiera si los tres sistemas de afinación son canónicamente intercambiables tomados de a dos. Por ejemplo, si  $S = \{1\}$ ,  $S' = \{i\}$  y  $S'' = \{-1\}$ ,  $S$  y  $S'$  son  $1/2$ -similares,  $S'$  y  $S''$  también lo son, pero  $S$  y  $S''$  no lo son, como muestra la figura 1.6.

**Proposición 11.** Sean  $S$ ,  $S'$  y  $S''$  tres sistemas de afinación canónicamente intercambiables tomados de a dos,  $S$  y  $S'$   $\alpha$ -similares,  $S'$  y  $S''$   $\beta$ -similares. Si  $\gamma = \alpha + \beta - 1 \geq 0$ , entonces  $S$  y  $S''$  son  $\gamma$ -similares.

*Demostración.* Sean  $\tau$ ,  $\tau'$  y  $\tau''$  las transcripciones canónicas de  $S$  a  $S'$ , de  $S'$  a  $S''$  y de  $S$  a  $S''$  respectivamente. Entonces, tenemos que  $\Phi(\tau) \geq \alpha$  y  $\Phi(\tau') \geq \beta$ , y por la observación 8,  $\Phi(\tau'') \geq \Phi(\tau' \circ \tau)$ . Además, por la proposición 8, tenemos que  $\Phi(\tau' \circ \tau) \geq \Phi(\tau') + \Phi(\tau) - 1 \geq \alpha + \beta - 1 = \gamma \Rightarrow 1 \geq \Phi(\tau'') \geq \gamma$ .  $\square$



# Capítulo 2

## Afinación borrosa

En el capítulo anterior, trabajamos en lo que podría llamarse el marco clásico para comparar sistemas de afinación. Ese es un buen punto de partida, pero hay consideraciones más sutiles sobre la percepción humana que no se toman en cuenta. Por ello, en este capítulo introducimos nociones de lógica borrosa para hacer una comparación más precisa.

### 2.1. Algunos conceptos de lógica borrosa

#### 2.1.1. Conjuntos difusos

En muchas ocasiones de la vida cotidiana, una afirmación tiene un estado de verdad entre verdadero y falso. Esto ocurre sobre todo cuando los conceptos en juego no están del todo definidos. Por ejemplo: "el agua está caliente" o "1000 es un número grande". En 1965, para modelar tales situaciones, Zadeh[13] introdujo la noción de *conjunto difuso*.

Dado un conjunto  $X$ , si tomamos un subconjunto  $Y \subseteq X$ , este admite una función característica  $\chi_Y : X \rightarrow \{0, 1\}$ :

$$\chi_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Y \\ 0 & \text{si } x \notin Y \end{cases}$$

Y también es cierto que dada  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $\exists! Y \subseteq X / f = \chi_Y$  ( $Y = \{x \in X / f(x) = 1\}$ ). De manera que podemos identificar a los conjuntos con su función característica. Los conjuntos difusos surgen de considerar funciones  $f : X \rightarrow [0, 1]$ .

**Definición 5.** Un conjunto difuso  $A$  es un par  $(X, \mu_A)$  donde  $X$  es un conjunto y  $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$  es una función.  $\mu_A$  se denomina la *función de pertenencia* de  $A$  y dado  $x \in X$ ,  $\mu_A(x)$  se denomina el *grado de pertenencia* de  $x$  a  $A$ .

*Observación 12.* Si tomamos una función  $\mu_A / \text{im}(\mu_A) \subseteq \{0, 1\}$ ,  $A$  resulta un conjunto en el sentido clásico. De esta manera, el concepto de conjunto difuso generaliza al de conjunto.

Tal definición resuelve parcialmente los problemas antes planteados. Para el caso de la afirmación "el agua está caliente", simplemente necesitamos definir una función creciente  $\mu_H : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow [0, 1]$ , y midiendo la temperatura  $T$  del agua en kelvin,  $\mu_H(T)$  determina cuán cierta es la afirmación. Igualmente, se definiría en el segundo caso, una función creciente  $\mu_B : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , y  $\mu_B(1000)$  nos dice qué tan cierta es tal afirmación. Aun así, la elección de las funciones de pertenencia continúa siendo subjetiva.

Zadeh luego define la inclusión.

**Definición 6.** Dado  $X$  conjunto,  $A = (X, \mu_A)$  y  $B = (X, \mu_B)$  conjuntos difusos, se dice que  $A \subseteq B$  si  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x \in X$ .

*Observación 13.* Si  $A$  y  $B$  son conjuntos en el sentido clásico ( $\text{im}(\mu_A), \text{im}(\mu_B) \subseteq \{0, 1\}$ ),  $A \subseteq B$  en el sentido clásico  $\Leftrightarrow$  si  $x \in A$  entonces  $x \in B \Leftrightarrow \forall x \in X$  si  $\mu_A(x) = 1$  entonces  $\mu_B(x) = 1 \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \forall x \in X$ , por lo que esto generaliza el concepto clásico.

Siguiendo con la analogía, Zadeh define en [14] el concepto de *relación difusa*.

**Definición 7.** Dados  $X, Y$  conjuntos, una relación difusa  $R$  de  $X$  a  $Y$  es un conjunto difuso  $(X \times Y, \mu_R)$ . Si  $X = Y$  se dice que  $R$  es una relación difusa en  $X$ .

**Definición 8.** Dados  $X, Y, Z$  conjuntos, y relaciones difusas  $R = (X \times Y, \mu_R)$  y  $S = (Y \times Z, \mu_S)$ , se define la composición  $S \circ R = (X \times Z, \mu_{S \circ R})$ , donde  $\mu_{S \circ R}(x, z) = \bigvee_{y \in Y} (\mu_R(x, y) \wedge \mu_S(y, z))$ .

**Notación 9.** Dados  $r, t \in [0, 1]$ , se denota  $r \wedge t = \min\{r, t\}$  y  $r \vee t = \max\{r, t\}$ . Asimismo, dado  $\emptyset \neq A \subseteq [0, 1]$  (en el sentido clásico), se denota  $\bigwedge A = \inf A$  y  $\bigvee A = \sup A$ . En este caso por ejemplo, tenemos  $\mu_{S \circ R}(x, z) = \sup_{y \in Y} \min\{\mu_R(x, y), \mu_S(y, z)\}$ .

*Observación 14.* Si  $R$  y  $S$  son relaciones en el sentido clásico, tenemos que  $\mu_{S \circ R}(x, z) = 1 \Leftrightarrow (x, z) \in S \circ R \Leftrightarrow \exists y \in Y / (x, y) \in R \text{ y } (y, z) \in S \Leftrightarrow \exists y \in Y / \mu_R(x, y) = 1 \text{ y } \mu_S(y, z) = 1 \Leftrightarrow \exists y \in Y / \mu_R(x, y) \wedge \mu_S(y, z) = 1 \Leftrightarrow \bigvee_{y \in Y} (\mu_R(x, y) \wedge \mu_S(y, z)) = 1$ . Por lo tanto, esto generaliza el concepto clásico.

Y luego extiende el concepto de relación de equivalencia al de *relación de similaridad*.

**Definición 10.** Dado  $X$  conjunto, una relación de similaridad  $S$  en  $X$  es una relación difusa en  $X$  que cumple:

**Reflexividad**  $\mu_S(x, x) = 1 \quad \forall x \in X$ .

**Simetría**  $\mu_S(x, y) = \mu_S(y, x) \quad \forall x, y \in X$ .

**Transitividad**  $\mu_S(x, z) \geq \bigvee_{y \in X} (\mu_S(x, y) \wedge \mu_S(y, z))$

*Observación 15.* La propiedad de transitividad es equivalente a  $S \circ S \subseteq S$ . Luego, es claro que cada una de estas propiedades generaliza las correspondientes propiedades clásicas, y en consecuencia, el concepto de relación de similaridad es una generalización del de relación de equivalencia.

### 2.1.2. Teoría de la posibilidad

En [15], Zadeh traza una analogía con la teoría de la probabilidad.

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , un conjunto  $E$ , y una variable aleatoria  $X : \Omega \rightarrow E$ , ésta induce una estructura de espacio de probabilidad en  $E$ : se tiene que  $\mathcal{E} = \{A \subseteq E / X^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$  es una  $\sigma$ -álgebra, y  $P_X : \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$ , definida por  $P_X(A) = P(X^{-1}(A))$  es una medida de probabilidad.

Análogamente, Zadeh le asigna a una variable  $X$  que toma valores en un conjunto  $U$ , un conjunto difuso  $\Pi_X = (U, \pi_X)$ , donde  $\pi_X(u)$  representa que tan posible es que  $X = u$ . Cabe aquí destacar que se habla de si algo es posible o no, no de si algo es probable o no.  $\pi_X$  representa en este sentido el grado de ignorancia que tenemos respecto de

qué valores puede tomar  $X$ :  $X$  en general no mide cierta magnitud en función del resultado de un experimento aleatorio, y es por eso que no se habla de un espacio muestral como en el caso de las variables aleatorias.

Zadeh llama a  $\Pi_X$  la *distribución de posibilidad* asociada a  $X$ , a  $\pi_X$  la *función de distribución de posibilidad* asociada a  $X$ , y dice que  $X$  es una *variable difusa*. Naturalmente, un conjunto difuso  $A = (U, \mu_A)$  tiene una variable difusa asociada  $X_A$  que toma valores en  $U$  con distribución de posibilidad  $A$ . Ahora, de la misma manera que cuando  $X$  era una variable aleatoria, la probabilidad de que  $X \in A$  estaba dada por  $P\{X \in A\} = P(X^{-1}(A)) = P_X(A)$ , Zadeh define la *posibilidad* de que la variable difusa  $X \in A$  (donde  $A \subseteq U$  sigue siendo siendo un conjunto en el sentido clásico) como<sup>1</sup>:

$$\text{Poss}\{X \in A\} = \bigvee_{u \in A} \pi_X(u)$$

Se puede pensar en la función  $\text{Poss}_X : \mathcal{P}(U) \rightarrow [0, 1]$ ,  $\text{Poss}_X(A) = \text{Poss}\{X \in A\}$  que extiende a  $\pi_X$ .  $\text{Poss}_X$  es el análogo posibilístico de  $P_X$ . Esto se extiende a conjuntos difusos. Si  $A = (U, \mu_A)$  es un conjunto difuso, Zadeh define:

$$\text{Poss}\{X \text{ es } A\} = \bigvee_{u \in U} (\mu_A(u) \wedge \pi_X(u))$$

Dada la relación entre conjuntos y variables difusas, tiene sentido comparar así conjuntos difusos  $A = (U, \mu_A)$  y  $B = (U, \mu_B)$ :

$$\text{Poss}\{A \text{ es } B\} = \text{Poss}\{X_A \text{ es } B\} = \text{Poss}\{X_B \text{ es } A\} = \bigvee_{u \in U} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(u)) \quad (2.1)$$

## 2.2. De las notas musicales

Armado con el concepto de conjunto difuso, Liern definió en un paper de 2005 [8], el concepto de *nota musical difusa*. En este trabajo estamos utilizando un enfoque distinto al del paper citado, por lo cual nuestra definición será un poco distinta.

**Definición 11.** Dado  $z \in \mathbb{T}$ , una nota musical difusa asociada a  $z$  es un conjunto difuso  $\tilde{z} = (\mathbb{T}, \mu_{\tilde{z}})$ , donde  $\mu_{\tilde{z}}$  cumple:

---

<sup>1</sup>Definimos  $\bigvee \emptyset = 0$ .

1.  $\mu_{\tilde{z}}(z) = 1$ .
2.  $\mu_{\tilde{z}}$  es continua<sup>2</sup>.
3. Dados  $s, s' \in \mathbb{T}$  /  $d_{[f]}(z, s) \leq d_{[f]}(z, s') \Rightarrow \mu_{\tilde{z}}(s) \geq \mu_{\tilde{z}}(s')$ .

**Proposición 12.** *Dada una nota musical difusa  $\tilde{z}$  /  $\mu_{\tilde{z}} \not\equiv 1$ , puede recuperarse el valor  $z \in \mathbb{T}$  al cual está asociada.*

*Demuestra.* Sea  $z_0 \in \mathbb{T}$  /  $\mu_{\tilde{z}}(z_0) \neq 1$ , y sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}$  definida por  $\gamma(t) = z_0 e^{2\pi i t}$ .  $\gamma$  es una parametrización de  $\mathbb{T}$ , por lo que  $\exists t_0 \in [0, 1]$  /  $\gamma(t_0) = z \Rightarrow \mu_{\tilde{z}} \circ \gamma(t_0) = 1 \Rightarrow (\mu_{\tilde{z}} \circ \gamma)^{-1}(1) \neq \emptyset$ . La idea es averiguar el valor de  $t_0$ , el cual desconocemos, porque desconocemos el valor de  $z$ . Sean  $a = \wedge(\mu_{\tilde{z}} \circ \gamma)^{-1}(1)$  y  $b = \vee(\mu_{\tilde{z}} \circ \gamma)^{-1}(1)$ . Como  $\mu_{\tilde{z}} \circ \gamma$  es continua,  $(\mu_{\tilde{z}} \circ \gamma)^{-1}(1)$  es cerrado en  $[0, 1]$ , y por lo tanto  $a, b \in (\mu_{\tilde{z}} \circ \gamma)^{-1}(1)$ . Además,  $\mu_{\tilde{z}} \circ \gamma(0) = \mu_{\tilde{z}} \circ \gamma(1) = \mu_{\tilde{z}}(z_0) \neq 1$ , por lo que  $0 < a \leq b < 1$ .

Sabemos entonces que  $(\mu_{\tilde{z}} \circ \gamma)^{-1}(1) \subseteq [a, b]$ , y que  $t_0 \in [a, b]$ . Si  $t_0 < (a + b)/2 \Rightarrow 0 \leq t_0 - a < (b - a)/2 < 1/2$ , por lo que puedo tomar  $\epsilon > 0$  /  $\epsilon < a$ ,  $t_0 + \epsilon/2 < (a + b)/2$  y  $t_0 - a + \epsilon < (b - a)/2$ . Ahora,  $d_{[f]}(z, \gamma(a - \epsilon)) = \arcsin(|e^{2\pi i t_0} - e^{2\pi i(a - \epsilon)}|/2)/\pi = \arcsin(|\psi \circ \phi(2^{t_0}) - \psi \circ \phi(2^{a - \epsilon})|/2)/\pi = d_{[f]}([2^{t_0}], [2^{a - \epsilon}]) = \min\{\{t_0 - a + \epsilon\}, 1 - \{t_0 - a + \epsilon\}\} = t_0 - a + \epsilon$  pues  $0 < t_0 - a + \epsilon < (b - a)/2 < 1/2$ .

Pero  $d_{[f]}(z, \gamma(b)) = \arcsin(|e^{2\pi i t_0} - e^{2\pi i b}|/2)/\pi = \arcsin(|\psi \circ \phi(2^{t_0}) - \psi \circ \phi(2^b)|/2)/\pi = d_{[f]}([2^{t_0}], [2^b]) = \min\{\{b - t_0\}, 1 - \{b - t_0\}\}$ , y  $0 < b - t_0 < 1 \Rightarrow \{b - t_0\} = b - t_0$ . Si  $b - t_0 \leq 1/2 \Rightarrow d_{[f]}(z, \gamma(b)) = b - t_0$ , pero  $t_0 + \epsilon/2 < (a + b)/2 \Leftrightarrow 2t_0 + \epsilon < a + b \Leftrightarrow t_0 - a + \epsilon < b - t_0$ , es decir  $d_{[f]}(z, \gamma(a - \epsilon)) < d_{[f]}(z, \gamma(b)) \Rightarrow \mu_{\tilde{z}} \circ \gamma(a - \epsilon) \geq \mu_{\tilde{z}} \circ \gamma(b) = 1$  lo que es absurdo pues  $a - \epsilon < a = \wedge(\mu_{\tilde{z}} \circ \gamma)^{-1}(1)$ . Si en cambio  $b - t_0 > 1/2 \Rightarrow d_{[f]}(z, \gamma(b)) = 1 - b + t_0$ , pero  $b < 1 \Rightarrow 1 - b > 0 > -a + \epsilon \Rightarrow 1 - b + t_0 > t_0 - a + \epsilon \Rightarrow d_{[f]}(z, \gamma(b)) > d_{[f]}(z, \gamma(a - \epsilon)) \Rightarrow \mu_{\tilde{z}} \circ \gamma(a - \epsilon) \geq \mu_{\tilde{z}} \circ \gamma(b) = 1$ , llegando de vuelta a un absurdo. Por lo tanto,  $t_0 \geq (a + b)/2$ , análogamente se prueba que  $t_0 \leq (a + b)/2$ , y por lo tanto  $t_0 = (a + b)/2$ , luego  $z$  queda determinado promediando los extremos de la región en la que  $\mu_{\tilde{z}}$  es 1.  $\square$

*Observación 16.* Se tiene luego una función  $u : \{\tilde{z} / \tilde{z} \text{ es una nota musical difusa y } \mu_{\tilde{z}} \not\equiv 1\} \rightarrow \mathbb{T}$  donde  $u(\tilde{z})$  es el valor al cual  $\tilde{z}$  está asociada.

---

<sup>2</sup>La verificación de esta propiedad es independiente de que se trabaje con la métrica canónica o con  $d_{[f]}$ , por ser métricas equivalentes.

**Proposición 13.** *Dado  $z \in \mathbb{T}$ , se tiene que  $\Gamma_z : \{\mu : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1] \text{ continuas y decrecientes/ } \mu(0) = 1\} \rightarrow \{\mu_{\tilde{z}} / (\mathbb{T}, \mu_{\tilde{z}}) \text{ es una nota musical difusa asociada a } z\}$  dada por  $\Gamma_z(\mu)(s) = \mu(d_{[f]}(z, s))$ , es biyectiva.*

*Demuestra.* Sea  $\mu : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$ . Como  $0 \leq d_{[f]}(z, s) \leq 1/2$ , tiene sentido la expresión  $\mu(d_{[f]}(z, s))$ .  $\Gamma_z(\mu)(z) = \mu(d_{[f]}(z, z)) = \mu(0) = 1$  por lo que  $\Gamma_z(\mu)$  cumple 1. Además,  $\Gamma_z(\mu) = \mu \circ d_{[f]}(z, \cdot)$ , y como  $d_{[f]}(z, s) \leq d_{[f]}(z, s') + d_{[f]}(s', s) \Leftrightarrow d_{[f]}(z, s) - d_{[f]}(z, s') \leq d_{[f]}(s', s)$ , y análogamente  $d_{[f]}(z, s') - d_{[f]}(z, s) \leq d_{[f]}(s, s')$ , tenemos que  $|d_{[f]}(z, s) - d_{[f]}(z, s')| \leq d_{[f]}(s, s')$ , y por lo tanto  $d_{[f]}(z, \cdot)$  es continua, lo que implica que  $\Gamma_z(\mu)$  también lo es, pues  $\mu$  es continua. Finalmente, si  $d_{[f]}(z, s) \leq d_{[f]}(z, s') \Rightarrow \Gamma_z(\mu)(s) = \mu(d_{[f]}(z, s)) \geq \mu(d_{[f]}(z, s')) = \Gamma_z(\mu)(s')$ , pues  $\mu$  es decreciente. Luego,  $\Gamma_z$  está bien definida.

Ahora, consideremos  $(\mathbb{T}, \mu_{\tilde{z}})$  una nota musical difusa asociada a  $z$ . Si  $\exists \mu : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$  y  $\Gamma_z(\mu) = \mu_{\tilde{z}}$ , dado  $t \in [0, 1/2]$ ,  $\mu_{\tilde{z}}(ze^{2\pi it}) = \Gamma_z(\mu)(ze^{2\pi it}) = \mu(d_{[f]}(z, ze^{2\pi it}))$ . Pero  $d_{[f]}(z, ze^{2\pi it}) = d_{[f]}(1, e^{2\pi it}) = \arcsin(|1 - e^{2\pi it}|/2)/\pi = \arcsin(\sqrt{(1 - \cos(2\pi t))^2 + \sin^2(2\pi t)/2})/\pi = \arcsin(\sqrt{2 - 2\cos(2\pi t)})/2/\pi = \arcsin(\sqrt{2 - 2(1 - 2\sin^2(\pi t))/2})/\pi = \arcsin(|\sin(\pi t)|)/\pi$  y como  $0 \leq t \leq 1/2 \Leftrightarrow 0 \leq \pi t \leq \pi/2 \Rightarrow \sin(\pi t) \geq 0$  y  $\arcsin(\sin(\pi t)) = \pi t$ . En consecuencia,  $d_{[f]}(z, ze^{2\pi it}) = \arcsin(|\sin(\pi t)|)/\pi = \arcsin(\sin(\pi t))/\pi = t \Rightarrow \mu(t) = \mu_{\tilde{z}}(ze^{2\pi it})$ . Esto prueba la inyección de  $\Gamma_z$ .

Para ver que  $\Gamma_z$  es sobreyectiva, necesitamos ver que  $\mu(t) = \mu_{\tilde{z}}(ze^{2\pi it})$  es continua y decreciente,  $\mu(0) = 1$  y  $\Gamma_z(\mu) = \mu_{\tilde{z}}$ .  $\mu$  es continua por ser composición de funciones continuas, y  $\mu(0) = \mu_{\tilde{z}}(z) = 1$ . Si  $0 \leq t \leq t' \leq 1/2$ ,  $d_{[f]}(z, ze^{2\pi it}) = t \leq t' = d_{[f]}(z, ze^{2\pi it'}) \Rightarrow \mu(t) = \mu_{\tilde{z}}(ze^{2\pi it}) \geq \mu_{\tilde{z}}(ze^{2\pi it'}) = \mu(t')$ , es decir,  $\mu$  es decreciente. Por último,  $\Gamma_z(\mu)(s) = \mu(d_{[f]}(z, s)) = \mu_{\tilde{z}}(ze^{2\pi id_{[f]}(z, s)})$  y  $d_{[f]}(z, ze^{2\pi id_{[f]}(z, s)}) = d_{[f]}(z, s) \Rightarrow \mu_{\tilde{z}}(ze^{2\pi id_{[f]}(z, s)}) = \mu_{\tilde{z}}(s) \Rightarrow \Gamma_z(\mu)(s) = \mu_{\tilde{z}}(s) \Rightarrow \Gamma_z(\mu) = \mu_{\tilde{z}}$ .  $\square$

Liern trabaja fijando  $\mu$  y asociando a  $z \in \mathbb{T}$  la nota musical difusa  $(\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu))$ . Esto sugiere definir  $\mu_R : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow [0, 1]$ ,  $\mu_R(z, s) = \mu(d_{[f]}(z, s)) = \mu_{\tilde{z}}(s) = \mu_s(z)$ , lo que define una relación difusa  $R$  en  $\mathbb{T}$  que es obviamente reflexiva y simétrica, y tomar una  $\mu$  conveniente para que esto sea una relación de similaridad. Lamentablemente, tal  $\mu$  no resulta de mucha utilidad.

**Proposición 14.** Sea  $\mu : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$  y  $\mu_R : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow [0, 1]$  dada por  $\mu_R(z, s) = \mu(d_{[f]}(z, s))$  define una relación de similaridad  $R$  en  $\mathbb{T}$ . Entonces  $\mu \equiv 1$ .

Para probar esta proposición, necesitamos probar algunos lemas previos.

**Lema 15.** Sea  $\mu : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente,  $\emptyset \neq A \subseteq [0, 1/2]$ . Vale:

- $\bigvee_{x \in A} \mu(x) = \mu(\bigwedge A)$
- $\bigwedge_{x \in A} \mu(x) = \mu(\bigvee A)$

*Demostración.* Primeramente, todo está bien definido pues,  $\emptyset \neq A \subseteq [0, 1/2] \Rightarrow 0 \leq \bigwedge A \leq \bigvee A \leq 1/2$ , y  $\emptyset \neq \mu(A) \subseteq [0, 1]$ . Probaremos que  $\bigvee_{x \in A} \mu(x) = \mu(\bigwedge A)$ , el otro ítem es análogo.  $x \geq \bigwedge A \forall x \in A \Rightarrow \mu(x) \leq \mu(\bigwedge A) \forall x \in A \Rightarrow \bigvee_{x \in A} \mu(x) \leq \mu(\bigwedge A)$ . Además, si tomo  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A / x_n \rightarrow \bigwedge A$ , como  $\mu$  es continua,  $\mu(x_n) \rightarrow \mu(\bigwedge A)$ , por lo que  $\bigvee_{x \in A} \mu(x) = \mu(\bigwedge A)$ .  $\square$

**Lema 16.** Dados  $z, s \in \mathbb{T}$ ,  $\exists m \in \mathbb{T} / d_{[f]}(z, m) = d_{[f]}(s, m) = d_{[f]}(z, s)/2$ .

*Demostración.* Por la observación 4,  $d_{[f]}(z, m) = d_{[f]}(s, m) \Leftrightarrow |z - m| = |s - m|$ . Si  $m$  existe, como  $z, s, m \in \mathbb{T}$ , se puede escribir  $z = e^{i\zeta}$ ,  $s = e^{i\sigma}$  y  $m = e^{i\theta}$ , con  $\zeta, \sigma, \theta \in \mathbb{R}$ ,  $\zeta$  y  $\sigma$  son dato, y  $\theta$  la incógnita. Luego, la ecuación queda  $|e^{i\zeta} - e^{i\theta}| = |e^{i\sigma} - e^{i\theta}| \Leftrightarrow |e^{i(\zeta-\theta)} - 1| = |e^{i(\sigma-\theta)} - 1| \Leftrightarrow |e^{i(\zeta-\theta)} - 1|^2 = |e^{i(\sigma-\theta)} - 1|^2 \Leftrightarrow (\cos(\zeta-\theta)-1)^2 + \sin^2(\zeta-\theta) = (\cos(\sigma-\theta)-1)^2 + \sin^2(\sigma-\theta) \Leftrightarrow 2 - 2 \cos(\zeta-\theta) = 2 - 2 \cos(\sigma-\theta) \Leftrightarrow \cos(\zeta-\theta) = \cos(\sigma-\theta)$ , con lo cual hay dos posibilidades:

- Si  $\sin(\zeta - \theta) = \sin(\sigma - \theta) \Leftrightarrow \zeta - \theta = \sigma - \theta + 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \zeta = \sigma + 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z = s$ . Si tomamos  $m = z = s$ , obtenemos lo que queríamos.
- Si  $\sin(\zeta - \theta) = -\sin(\sigma - \theta) \Rightarrow \cos(\sigma - \theta) \sin(\zeta - \theta) = -\cos(\zeta - \theta) \sin(\sigma - \theta) \Leftrightarrow \cos(\sigma - \theta) \sin(\zeta - \theta) + \cos(\zeta - \theta) \sin(\sigma - \theta) = 0 \Leftrightarrow \sin((\zeta - \theta) + (\sigma - \theta)) = 0 \Leftrightarrow \sin(\zeta + \sigma - 2\theta) = 0$ . Además,  $\sin(\zeta - \theta) = -\sin(\sigma - \theta) \Rightarrow 1 = \cos^2(\sigma - \theta) + \sin^2(\sigma - \theta) = \cos(\zeta - \theta) \cos(\sigma - \theta) - \sin(\zeta - \theta) \sin(\sigma - \theta) = \cos(\zeta - \theta + \sigma - \theta) = \cos(\zeta + \sigma - 2\theta)$ , por lo que  $\zeta + \sigma - 2\theta = 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Esto último es equivalente a que  $\zeta - \theta = \theta - \sigma + 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , lo que a su vez implica  $\sin(\zeta - \theta) = -\sin(\sigma - \theta)$  y  $\cos(\zeta - \theta) = \cos(\sigma - \theta)$ .

Sigamos analizando este último caso. Tenemos que  $\theta = (\zeta + \sigma)/2 - k\pi \Rightarrow |z - m|^2 = |e^{i\zeta} - e^{i\theta}|^2 = |e^{i(\zeta-\theta)} - 1|^2 = (\cos(\zeta - \theta) - 1)^2 + \sin^2(\zeta - \theta) = 2 - 2\cos(\zeta - \theta) = 2 - 2\cos((\zeta - \sigma)/2 + k\pi) = 2 - 2(-1)^k \cos((\zeta - \sigma)/2)$ . Además,  $|z - s|^2 = |e^{i\zeta} - e^{i\sigma}|^2 = |e^{i(\zeta-\sigma)} - 1|^2 = (\cos(\zeta - \sigma) - 1)^2 + \sin^2(\zeta - \sigma) = 2 - 2\cos(\zeta - \sigma) = 4\sin^2((\zeta - \sigma)/2)$ .

$$\begin{aligned} d_{[f]}(z, m) = d_{[f]}(z, s)/2 &\Leftrightarrow 2d_{[f]}(z, m) = d_{[f]}(z, s), \text{ y esto implica que } \sin(2\pi d_{[f]}(z, m)) = \sin(\pi d_{[f]}(z, s)) \Leftrightarrow 2\sin(\pi d_{[f]}(z, m))\cos(\pi d_{[f]}(z, m)) = \sin(\pi d_{[f]}(z, s)) \\ &\Leftrightarrow 4\sin(\pi d_{[f]}(z, m))\cos(\pi d_{[f]}(z, m)) = 2\sin(\pi d_{[f]}(z, s)) \\ &\Leftrightarrow 16\sin^2(\pi d_{[f]}(z, m))\cos^2(\pi d_{[f]}(z, m)) = 4\sin^2(\pi d_{[f]}(z, s)) \Leftrightarrow 16\sin^2(\pi d_{[f]}(z, m))(1 - \sin^2(\pi d_{[f]}(z, m))) = 4\sin^2(\pi d_{[f]}(z, s)) \Leftrightarrow 16\sin^2(\pi d_{[f]}(z, m)) - 16\sin^4(\pi d_{[f]}(z, m)) = 4\sin^2(\pi d_{[f]}(z, s)) \Leftrightarrow 4|z - m|^2 - |z - m|^4 = |z - s|^2 \Leftrightarrow (4 - |z - m|^2)|z - m|^2 = |z - s|^2 \Leftrightarrow (2 - 2(-1)^k \cos((\zeta - \sigma)/2))(2 + 2(-1)^k \cos((\zeta - \sigma)/2)) = 4\sin^2((\zeta - \sigma)/2) \Leftrightarrow 4 - 4\cos^2((\zeta - \sigma)/2) = 4\sin^2((\zeta - \sigma)/2), \text{ lo que obviamente es cierto. Para obtener la implicación } \sin(2\pi d_{[f]}(z, m)) = \sin(\pi d_{[f]}(z, s)) \Rightarrow 2d_{[f]}(z, m) = d_{[f]}(z, s), \text{ necesitamos que } 0 \leq 2\pi d_{[f]}(z, m) \leq \pi/2 \Leftrightarrow 0 \leq d_{[f]}(z, m) \leq 1/4. \end{aligned}$$

$d_{[f]}(z, m) = \arcsin(|z - m|/2)/\pi$ , y como  $|z - m|^2 = 2 - 2\cos((\zeta - \sigma)/2 + k\pi) = 4\sin^2((\zeta - \sigma)/4 + k\pi/2) \Leftrightarrow |z - m| = 2|\sin((\zeta - \sigma)/4 + k\pi/2)|$ ,  $d_{[f]}(z, m) = \arcsin(|\sin((\zeta - \sigma)/4 + k\pi/2)|/\pi)$ .  $-\pi/4 \leq (\zeta - \sigma)/4 + k\pi/2 \leq \pi/4 \Leftrightarrow -\pi/4 - (\zeta - \sigma)/4 \leq k\pi/2 \leq \pi/4 - (\zeta - \sigma)/4 \Leftrightarrow -1/2 - (\zeta - \sigma)/(2\pi) \leq k \leq 1/2 - (\zeta - \sigma)/(2\pi)$ , por lo que si tomamos  $k = \lfloor 1/2 - (\zeta - \sigma)/(2\pi) \rfloor$ , tenemos que  $k \leq 1/2 - (\zeta - \sigma)/(2\pi) < k + 1 \Rightarrow k > -1/2 - (\zeta - \sigma)/(2\pi)$ , por lo que cumple  $-1/2 - (\zeta - \sigma)/(2\pi) < k \leq 1/2 - (\zeta - \sigma)/(2\pi)$ , y en consecuencia,  $-\pi/4 \leq (\zeta - \sigma)/4 + k\pi/2 \leq \pi/4 \Rightarrow |\sin((\zeta - \sigma)/4 + k\pi/2)| = \sin(|(\zeta - \sigma)/4 + k\pi/2|)$ , y como  $0 \leq |(\zeta - \sigma)/4 + k\pi/2| \leq \pi/4$ , tenemos que  $d_{[f]}(z, m) = \arcsin(|\sin((\zeta - \sigma)/4 + k\pi/2)|/\pi) = \arcsin(\sin(|(\zeta - \sigma)/4 + k\pi/2|))/\pi = |(\zeta - \sigma)/4 + k\pi/2|/\pi \leq 1/4$ , con lo que  $d_{[f]}(z, m) = d_{[f]}(z, s)/2$ . Por lo tanto, si  $z \neq s$ , basta tomar  $m = e^{i\theta}$  con  $\theta = (\zeta + \sigma)/2 - k\pi$ , donde  $z = e^{i\zeta}$ ,  $s = e^{i\sigma}$  y  $k = \lfloor 1/2 - (\zeta - \sigma)/(2\pi) \rfloor$ .  $\square$

**Lema 17.** *Dados  $x, z \in \mathbb{T}$ , vale que:*

$$\bigwedge_{y \in \mathbb{T}} (d_{[f]}(x, y) \vee d_{[f]}(y, z)) = d_{[f]}(x, z)/2 \quad (2.2)$$

*Demuestra*ción. Sea  $y \in \mathbb{T}$ , si  $d_{[f]}(x, y) \vee d_{[f]}(y, z) < d_{[f]}(x, z)/2 \Rightarrow d_{[f]}(x, z) \leq d_{[f]}(x, y) + d_{[f]}(y, z) < d_{[f]}(x, z)/2 + d_{[f]}(x, z)/2 = d_{[f]}(x, z)$ , y llegamos a un absurdo. Por lo tanto,  $d_{[f]}(x, y) \vee d_{[f]}(y, z) \geq d_{[f]}(x, z)/2 \forall y \in \mathbb{T} \Rightarrow \bigwedge_{y \in \mathbb{T}} (d_{[f]}(x, y) \vee d_{[f]}(y, z)) \geq d_{[f]}(x, z)/2$ .

Además, sabemos que  $\exists m \in \mathbb{T} / d_{[f]}(x, m) = d_{[f]}(m, z) = d_{[f]}(x, z)/2 \Rightarrow d_{[f]}(x, m) \vee d_{[f]}(m, z) = d_{[f]}(x, z)/2$ , por lo que  $\bigwedge_{y \in \mathbb{T}} (d_{[f]}(x, y) \vee d_{[f]}(y, z)) = d_{[f]}(x, z)/2$ .  $\square$

Ahora sí, probemos la proposición.

*Demuestra*ción. Sean  $x, z \in \mathbb{T}$ , aplicando  $\mu$  a ambos lados de (2.2), obtenemos que  $\mu(d_{[f]}(x, z)/2) = \mu(\bigwedge_{y \in \mathbb{T}} (d_{[f]}(x, y) \vee d_{[f]}(y, z))) = \bigvee_{y \in \mathbb{T}} \mu(d_{[f]}(x, y) \vee d_{[f]}(y, z)) = \bigvee_{y \in \mathbb{T}} (\mu(d_{[f]}(x, y)) \wedge \mu(d_{[f]}(y, z)))$ .

Si  $R$  fuera transitiva,  $\mu(d_{[f]}(x, z)) = \mu_R(x, z) \geq \mu(d_{[f]}(x, z)/2) \geq \mu(d_{[f]}(x, z)) \forall x, z \in \mathbb{T}$  pues  $d_{[f]}(x, z)/2 \leq d_{[f]}(x, z)$ , lo que implica que  $\mu(d_{[f]}(x, z)) = \mu(d_{[f]}(x, z)/2) \forall x, z \in \mathbb{T}$ .

Ahora, si fijamos  $x, z \in \mathbb{T}$ , y llamamos  $z_0 = z$ , dado  $z_n \in \mathbb{T} / d_{[f]}(x, z_{n+1}) = d_{[f]}(x, z_n)/2$ , y como  $d_{[f]}(x, z_0) = d_{[f]}(x, z)$ , tenemos que  $d_{[f]}(x, z_n) = d_{[f]}(x, z)/2^n$ .

Además, por lo que probamos recién, tenemos que  $\mu(d_{[f]}(x, z_{n+1})) = \mu(d_{[f]}(x, z_n)/2) = \mu(d_{[f]}(x, z_n))$ , por lo que  $\mu(d_{[f]}(x, z)) = \mu(d_{[f]}(x, z_n)) = \mu(d_{[f]}(x, z)/2^n)$ , y como  $d_{[f]}(x, z)/2^n \rightarrow 0$ , y  $\mu$  es continua,  $\mu(d_{[f]}(x, z)/2^n) \rightarrow \mu(0) = 1$ , por lo que  $\mu_{\tilde{x}}(z) = \mu_R(x, z) = \mu(d_{[f]}(x, z)) = 1$ , y como  $z$  es arbitrario,  $\Gamma_x(\mu) = \mu_{\tilde{x}} \equiv 1$ . Además, como  $\Gamma_x(1) \equiv 1$  y  $\Gamma_x$  es inyectiva, tenemos que  $\mu \equiv 1$ .  $\square$

Sin embargo, podemos olvidarnos de las relaciones de similaridad, y simplemente comparar las notas musicales utilizando la teoría de la posibilidad. Este enfoque es el que utiliza Liern.

**Definición 12.** Dadas  $\tilde{z} = (\mathbb{T}, \mu_{\tilde{z}})$  y  $\tilde{s} = (\mathbb{T}, \mu_{\tilde{s}})$  dos notas musicales difusas, la *compatibilidad* entre ellas está dada por:

$$\text{comp}(\tilde{z}, \tilde{s}) = \text{Poss}\{\tilde{z} \text{ es } \tilde{s}\} = \bigvee_{u \in \mathbb{T}} (\mu_{\tilde{z}}(u) \wedge \mu_{\tilde{s}}(u))$$

*Observación 17.* Un caso especial de esto es aquel que analiza Liern, fijando  $\mu$  y trabajando con  $\mu_{\tilde{z}} = \Gamma_z(\mu)$  y  $\mu_{\tilde{s}} = \Gamma_s(\mu)$ . En ese caso tenemos  $\text{comp}(\tilde{z}, \tilde{s}) = \bigvee_{u \in \mathbb{T}} (\mu_{\tilde{z}}(u) \wedge \mu_{\tilde{s}}(u)) = \bigvee_{u \in \mathbb{T}} (\mu(d_{[f]}(z, u)) \wedge \mu(d_{[f]}(s, u))) = \bigvee_{u \in \mathbb{T}} \mu(d_{[f]}(z, u) \vee d_{[f]}(s, u)) = \mu(\bigwedge_{u \in \mathbb{T}} (d_{[f]}(z, u) \vee d_{[f]}(s, u))) = \mu(d_{[f]}(z, s)/2)$ .

### 2.2.1. Comentario: la elección de $\mu$

Aún usando el enfoque de Liern, hay diversidad en el sentido de que pueden elegirse distintas  $\mu$  para hacer la comparación entre notas. En [8], Liern considera que el estándar de los músicos para  $\mu$  está implícito en la forma en que funcionan los afinadores electrónicos: medición en cents, y asociar una frecuencia a una nota determinada cuando se encuentra a menos de 50 cents de distancia. Esto nos da:

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{\delta} & \text{si } t \leq \delta \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

en este caso con  $\delta = 50/1200 = 1/24$ .

En [9], León y Liern argumentan que es preferible tomar en consideración que el oído humano no puede distinguir dos notas suficientemente cercanas [?], por lo que en un entorno de 0 tenemos  $\mu \equiv 1$ . A partir de donde finaliza este entorno hacen caer a  $\mu$  linealmente hasta 0, manteniendo la medición en cents en el sentido anteriormente visto. Esto nos da:

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq \epsilon \\ 1 - \frac{t-\epsilon}{\delta-\epsilon} & \text{si } \epsilon < t \leq \delta \\ 0 & \text{si } t > \delta \end{cases}$$

en este caso con  $\delta = 1/24$  y  $\epsilon = 6/1200 = 1/200$  ó  $\epsilon = 3/1200 = 1/400$ .

Quisiera aquí proponer una  $\mu$  alternativa a éstas. En [10], Plomp y Levelt argumentaron, en base a una serie de experimentos, que la consonancia (en un sentido puramente estético) entre ondas sinusoidales puras de frecuencias  $f_1$  y  $f_2$  está dada por:

$$\text{cons}(f_1, f_2) = c \left( \frac{|f_1 - f_2|}{w(\sqrt{f_1 f_2})} \right)$$

donde  $c : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ ,  $w : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  y  $w(f)$  es el ancho crítico de banda de  $f$ .

Mi propuesta es elegir  $\mu$  de manera que  $\Gamma_{[f_1]}(\mu)([f_2]) = \text{cons}(f_3, f_4)$  donde  $f_3 \in [f_1]$  y  $f_4 \in [f_2] / d_f(f_3, f_4) = d_f([f_1], [f_2])$ , cuando  $[f_1]$  y  $[f_2]$  sean suficientemente cercanos.

Por la observación 2, sabemos que  $f_3$  y  $f_4$  existen. Además,  $\Gamma_{[f_1]}(\mu)([f_2]) = \mu(d_{[f]}([f_1], [f_2])) = \mu(d_f(f_3, f_4)) = \mu(|\log_2(f_4) - \log_2(f_3)|)$ . Los representantes de  $[f_1]$  son de la forma  $2^k f_3$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , y los representantes de  $[f_2]$  son de la forma  $2^n f_4$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . Podemos

asumir sin pérdida de generalidad que  $f_3 \leq f_4$ , tenemos luego que si  $d_f(2^k f_3, 2^n f_4) = d_f([f_1], [f_2]) \Leftrightarrow |\log_2(2^n f_4) - \log_2(2^k f_3)| = |\log_2(f_4) - \log_2(f_3)| = \log_2(f_4) - \log_2(f_3) \Leftrightarrow |n - k + \log_2(f_4) - \log_2(f_3)| = \log_2(f_4) - \log_2(f_3)$  con lo que se tienen dos opciones:

1. Si  $n - k + \log_2(f_4) - \log_2(f_3) \geq 0$ , entonces  $n - k + \log_2(f_4) - \log_2(f_3) = \log_2(f_4) - \log_2(f_3) \Leftrightarrow n = k$
2. Si  $n - k + \log_2(f_4) - \log_2(f_3) < 0$ , entonces  $n - k + \log_2(f_4) - \log_2(f_3) = -\log_2(f_4) + \log_2(f_3) \Leftrightarrow (n - k)/2 + \log_2(f_4) - \log_2(f_3) = 0 \Leftrightarrow (n - k)/2 = \log_2(f_3/f_4) \Leftrightarrow f_4 = 2^{(k-n)/2} f_3$

En ambos casos, necesitaríamos que  $\text{cons}(f_3, f_4) = \text{cons}(2^k f_3, 2^n f_4) \Leftrightarrow c(|f_3 - f_4|/w(\sqrt{f_3 f_4})) = c(|2^k f_3 - 2^n f_4|/w(2^{(k+n)/2} \sqrt{f_3 f_4}))$ . Para ello, sería deseable tomar  $w/|f_3 - f_4|/w(\sqrt{f_3 f_4}) = |2^k f_3 - 2^n f_4|/w(2^{(k+n)/2} \sqrt{f_3 f_4})$ .

En 1, esto se traduce a  $|f_3 - f_4|/w(\sqrt{f_3 f_4}) = 2^k |f_3 - f_4|/w(2^k \sqrt{f_3 f_4})$ , si  $f_3 \neq f_4$  esto es  $w(2^k \sqrt{f_3 f_4}) = 2^k w(\sqrt{f_3 f_4})$ , es decir, pedimos que  $w(2^k t) = 2^k w(t) \forall t \in \mathbb{R}_{>0}, \forall k \in \mathbb{Z}$ . Si suponemos que  $w$  se extiende a una función continua en  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ , y hacemos  $k \rightarrow -\infty$ , obtenemos  $w(0) = 0$ . Además, si suponemos que  $w$  se extiende a una función derivable en 0, tenemos que  $(w(2^k t) - w(0))/(2^k t) = w(t)/t$  y con  $k \rightarrow -\infty$  tenemos  $w'(0) = w(t)/t$ , de manera que tenemos  $w(t) = at$  con  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  constante a determinar.

En 2, tenemos entonces  $|f_3 - 2^{(k-n)/2} f_3|/w(\sqrt{2^{(k-n)/2} (f_3)^2}) = |2^k f_3 - 2^{(k+n)/2} f_3|/w(2^{(k+n)/2} \sqrt{2^{(k-n)/2} (f_3)^2}) \Leftrightarrow f_3 |1 - 2^{(k-n)/2}|/(a 2^{(k-n)/4} f_3) = f_3 |2^k - 2^{(k+n)/2}|/(a 2^{(k+n)/2} 2^{(k-n)/4} f_3) \Leftrightarrow |1 - 2^{(k-n)/2}| = |2^k - 2^{(k+n)/2}|/2^{(k+n)/2} \Leftrightarrow |2^{(k+n)/2} - 2^k| = |2^k - 2^{(k+n)/2}|$ , lo que vale siempre. Luego, como única condición para  $w$  tenemos que  $w(t) = at$  con  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  constante a determinar.

Luego, si  $w(t)$  es la función que describe el ancho de banda crítico, necesitamos aproximarla por  $at$ . Si consideramos que los valores de las frecuencias están entre  $f_1$  y  $f_2$ , y queremos minimizar el cuadrado de la diferencia entre ambas funciones, podemos considerar:

$$I(a) = \int_{f_1}^{f_2} (at - w(t))^2 dt$$

y buscar para qué valor de  $a$  esta función alcanza un mínimo. Si  $w$  es continua en  $[f_1, f_2]$  tenemos que:

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_{f_1}^{f_2} 2(at - w(t))tdt \\ I''(a) &= \int_{f_1}^{f_2} 2t^2 dt > 0 \end{aligned}$$

$I'(a) = 0 \Leftrightarrow a \int_{f_1}^{f_2} t^2 dt = \int_{f_1}^{f_2} w(t)tdt \Leftrightarrow a((f_2)^3 - (f_1)^3)/3 = \int_{f_1}^{f_2} w(t)tdt \Leftrightarrow a = 3 \int_{f_1}^{f_2} w(t)tdt / ((f_2)^3 - (f_1)^3)$ , y como  $I''(a) > 0$ , éste es el mínimo que estábamos buscando.

Según Glasberg y Moore [16], buenas aproximaciones del ancho de banda rectangular equivalente (ERB) de una frecuencia  $f$ , están dadas por las fórmulas:

$$6,23f^2 + 93,4f + 28,5 \quad (2.3)$$

$$24,7(4,37f + 1) \quad (2.4)$$

donde  $f$  está en kHz y ERB en Hz. Éstas aproximaciones están dadas para frecuencias entre 0,1 y 10 kHz, y el ERB es una aproximación del valor del ancho crítico de banda. Luego, en el caso de (2.4) tenemos un valor  $a_1 \approx 0,11$ , mientras que en el caso de (2.3) tenemos un valor  $a_2 \approx 0,14$ .

Además, Benson[2] da la siguiente fórmula para  $c$ :

$$c(x) = 1 - 4|x|e^{1-4|x|}$$

Tenemos además,  $f_3 \in [f_1]$  y  $f_4 \in [f_2]$ /  $f_3 \leq f_4$  y  $d_f([f_1], [f_2]) = d_f(f_3, f_4) = \log_2(f_4) - \log_2(f_3) = \log_2(f_4/f_3)$ . Entonces  $\mu(d_{[f]}([f_1], [f_2])) = \text{cons}(f_3, f_4) = c(|f_3 - f_4|/w(\sqrt{f_3 f_4})) = c((f_4 - f_3)/(a\sqrt{f_3 f_4})) = c((f_4/f_3 - 1)/(a\sqrt{f_4/f_3})) = c((2^{d_{[f]}([f_1], [f_2])} - 1)/(a\sqrt{2^{d_{[f]}([f_1], [f_2])}}))$ , y por esto proponemos:

$$\mu(t) = c \left( \frac{2^t - 1}{a 2^{t/2}} \right)$$

usando  $c(x) = 1 - 4|x|e^{1-4|x|}$ . Tenemos  $\mu : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$ , luego  $t \geq 0 \Rightarrow 2^t \geq 1$ , y como usamos  $a > 0$ , podemos considerar  $c(x) = 1 - 4xe^{1-4x}$ . Ahora bien,  $c'(x) = -4e^{1-4x} + 16xe^{1-4x} = 4(4x - 1)e^{1-4x}$ , por lo que:

$$\mu'(t) = 4(4x - 1)e^{1-4x} \frac{2^{3t/2} + 2^{t/2} \ln 2}{2^{t+1} a}$$

donde  $x = (2^t - 1)/(a2^{t/2})$ , por lo que  $\mu'(t) < 0 \Leftrightarrow 4x - 1 < 0 \Leftrightarrow 4(2^t - 1) < a2^{t/2} \Leftrightarrow 4(2^{t/2})^2 - a2^{t/2} - 4 < 0$ . El polinomio  $4z^2 - az - 4$  tiene raíces  $(a \pm \sqrt{a^2 + 64})/8$ , pero como  $a - \sqrt{a^2 + 64} < 0$ , tenemos que  $4(2^{t/2})^2 - a2^{t/2} - 4 < 0 \Leftrightarrow 2^{t/2} < (a + \sqrt{a^2 + 64})/8 \Leftrightarrow t < 2(\log_2(a + \sqrt{a^2 + 64}) - 3)$ .  $2(\log_2(a + \sqrt{a^2 + 64}) - 3) < 1/2 \Leftrightarrow \log_2(a + \sqrt{a^2 + 64}) - 3 < 1/4 \Leftrightarrow \log_2(a + \sqrt{a^2 + 64}) < 13/4 \Leftrightarrow a + \sqrt{a^2 + 64} < 2^{13/4} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 64} < 2^{13/4} - a \Leftrightarrow a^2 + 64 < (2^{13/4} - a)^2 = a^2 - 2^{17/4}a + 2^{13/2} \Leftrightarrow 2^{17/4}a < 2^{13/2} - 2^6 \Leftrightarrow a < 2^{9/4} - 2^{7/4} \approx 1,39$ . Luego,  $\mu$  decrece entre 0 y  $2(\log_2(a + \sqrt{a^2 + 64}) - 3)$ , y luego crece. Además,  $\mu(2(\log_2(a + \sqrt{a^2 + 64}) - 3)) = c(((a + \sqrt{a^2 + 64})/8)^2 - 1)/(a(a + \sqrt{a^2 + 64})/8)) = c((a^2 + 2a\sqrt{a^2 + 64} + a^2 + 64 - 64)/(8a(a + \sqrt{a^2 + 64}))) = c(2a(a + \sqrt{a^2 + 64})/(8a(a + \sqrt{a^2 + 64}))) = c(1/4) = 0$ , y  $\mu(0) = c(0) = 1$ . Tenemos entonces  $\mu : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$ , definida por:

$$\mu(t) = \begin{cases} c \left( \frac{2^t - 1}{a2^{t/2}} \right) & \text{si } t \leq 2(\log_2(a + \sqrt{a^2 + 64}) - 3) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

con  $c(x) = 1 - 4xe^{1-4x}$  y  $a > 0$ . En nuestro caso tenemos  $\mu_1$  si consideramos  $a = 0,11$ , y  $\mu_2$  si consideramos  $a = 0,14$ .

## 2.3. De los sistemas de afinación

Análogamente a como se define una nota musical difusa, se define *sistema de afinación difuso*.

**Definición 13.** Dado un sistema de afinación  $S$ , un sistema de afinación difuso asociado a  $S$  es un conjunto  $\tilde{S} = \{\tilde{z}\}_{z \in S}$ , donde  $\tilde{z}$  es una nota musical difusa asociada a  $z / \mu_{\tilde{z}} \neq 1$ .

*Observación 18.* Por la proposición 12, a partir de  $\tilde{S}$  puedo recuperar  $S$ . En especial, usando la notación de la observación 16, tenemos definida una función

$U : \{\tilde{S} / \tilde{S} \text{ es un sistema de afinación difuso}\} \rightarrow \{S / S \text{ es un sistema de afinación}\}$ , donde  $U(\tilde{S}) = \{u(\tilde{z})\}_{\tilde{z} \in \tilde{S}}$  que es el sistema de afinación al cual  $\tilde{S}$  está asociado.

Procedemos por analogía al caso clásico:

**Definición 14.** Sean  $\tilde{S}$  y  $\tilde{S}'$  dos sistemas de afinación difusos. Una *transcripción difusa*

$\tilde{\tau}$  de  $\tilde{S}$  a  $\tilde{S}'$  es una función  $\tilde{\tau} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$ . La fidelidad de  $\tilde{\tau}$  está dada por:

$$\Phi(\tilde{\tau}) = \bigwedge_{\tilde{z} \in \tilde{S}} \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{\tau}(\tilde{z}))$$

*Observación 19.*  $0 \leq \Phi(\tilde{\tau}) \leq 1$

**Definición 15.** Sean  $\tilde{S}$  y  $\tilde{S}'$  dos sistemas de afinación difusos. Si  $\forall \tilde{z} \in \tilde{S}, \exists! \tilde{w}_{\tilde{z}} \in \tilde{S}' / \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{w}_{\tilde{z}}) = \bigvee_{\tilde{w} \in \tilde{S}'} \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{w})$ , se dice que existe la *transcripción difusa canónica* de  $\tilde{S}$  a  $\tilde{S}'$  dada por  $\tau(\tilde{z}) = \tilde{w}_{\tilde{z}}$ .

*Observación 20.* La transcripción difusa canónica puede no existir. Por ejemplo, si fijamos una  $\mu \neq 1$  cualquiera, notamos  $z_{\mu} = (\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu))$ , y tomamos  $\tilde{S} = \{1_{\mu}\}$  y  $\tilde{S}' = \{i_{\mu}, (-i)_{\mu}\}$ ,  $\text{comp}(1_{\mu}, i_{\mu}) = \text{comp}(1_{\mu}, (-i)_{\mu}) = \bigvee_{\tilde{w} \in \tilde{S}'} \text{comp}(1_{\mu}, \tilde{w}) = \mu(1/8)$ .

*Observación 21.* En caso de existir la transcripción difusa canónica, esta tiene la máxima fidelidad. En efecto, si existe la transcripción difusa canónica  $\tilde{\tau}$  de  $\tilde{S}$  a  $\tilde{S}'$ , y  $\tilde{\tau}' : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$  es una transcripción difusa cualquiera,  $\text{comp}(\tilde{z}, \tilde{\tau}(\tilde{z})) = \bigvee_{\tilde{w} \in \tilde{S}'} \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{w}) \geq \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{\tau}'(\tilde{z})) \forall \tilde{z} \in \tilde{S} \Rightarrow \bigwedge_{\tilde{z} \in \tilde{S}} \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{\tau}(\tilde{z})) \geq \bigwedge_{\tilde{z} \in \tilde{S}} \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{\tau}'(\tilde{z})) \Leftrightarrow \Phi(\tilde{\tau}) \geq \Phi(\tilde{\tau}')$ .

**Definición 16.** Dos sistemas de afinación difusos,  $\tilde{S}$  y  $\tilde{S}'$ , se dicen canónicamente intercambiables si existen las transcripciones difusas canónicas de  $\tilde{S}$  a  $\tilde{S}'$  y de  $\tilde{S}'$  a  $\tilde{S}$ , y ambas son inyectivas.

*Observación 22.* Si  $\tilde{S}$  y  $\tilde{S}'$  son dos sistemas de afinación difusos canónicamente intercambiables, tienen el mismo cardinal.

*Observación 23.* A diferencia del caso clásico, la relación "son canónicamente intercambiables" ni siquiera es reflexiva. Por ejemplo, fijando:

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq \epsilon \\ 1 - \frac{t-\epsilon}{\delta-\epsilon} & \text{si } \epsilon < t \leq \delta \\ 0 & \text{si } t > \delta \end{cases}$$

con  $\delta = 1/2$  y  $\epsilon = 1/4$ , si denotamos  $z_{\mu} = (\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu))$ , y tomamos  $\tilde{S} = \{1_{\mu}, i_{\mu}\}$ , tenemos que  $\text{comp}(1_{\mu}, 1_{\mu}) = \text{comp}(1_{\mu}, i_{\mu}) = 1$ , por lo que no existe la transcripción difusa canónica de  $\tilde{S}$  a  $\tilde{S}$ .

**Proposición 18.** Si  $\tilde{S}$  y  $\tilde{S}'$  son dos sistemas de afinación difusos canónicamente intercambiables, con transcripciones difusas canónicas  $\tilde{\tau} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$  y  $\tilde{\tau}' : \tilde{S}' \rightarrow \tilde{S}$ , entonces una es la inversa de la otra.

*Demostración.* Lo hacemos por inducción, con  $n = \#\tilde{S} = \#\tilde{S}'$ .

El caso  $n = 1$  es trivial. Supongamos que  $n \geq 2$ :

Considero  $\tilde{z} \in \tilde{S}$  y  $\tilde{w} \in \tilde{S}' / \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{w}) = \bigvee_{\tilde{s} \in \tilde{S}} \text{comp}(\tilde{s}, \tilde{v}) \Rightarrow \tilde{\tau}(\tilde{z}) = \tilde{w}$  y  $\tilde{\tau}'(\tilde{w}) = \tilde{z}$ , y como ambas son inyectivas, tengo bien definidas  $\tilde{\tau} : \tilde{S} \setminus \{\tilde{z}\} \rightarrow \tilde{S}' \setminus \{\tilde{w}\}$  y  $\tilde{\tau}' : \tilde{S}' \setminus \{\tilde{w}\} \rightarrow \tilde{S} \setminus \{\tilde{z}\}$ .

Dado  $\tilde{z}' \in \tilde{S} \setminus \{\tilde{z}\}$ ,  $\bigvee_{\tilde{u} \in \tilde{S}' \setminus \{\tilde{w}\}} \text{comp}(\tilde{z}', \tilde{u}) \geq \text{comp}(\tilde{z}', \tilde{\tau}(\tilde{z}')) = \bigvee_{\tilde{u} \in \tilde{S}'} \text{comp}(\tilde{z}', \tilde{u}) \geq \bigvee_{\tilde{u} \in \tilde{S}' \setminus \{\tilde{w}\}} \text{comp}(\tilde{z}', \tilde{u}) \Rightarrow \text{comp}(\tilde{z}', \tilde{\tau}(\tilde{z}')) = \bigvee_{\tilde{u} \in \tilde{S}'} \text{comp}(\tilde{z}', \tilde{u}) = \bigvee_{\tilde{u} \in \tilde{S}' \setminus \{\tilde{w}\}} \text{comp}(\tilde{z}', \tilde{u})$ , por lo que si  $\tilde{w}' \in \tilde{S}' \setminus \{\tilde{w}\} / \text{comp}(\tilde{z}', \tilde{w}') = \bigvee_{\tilde{u} \in \tilde{S}' \setminus \{\tilde{w}\}} \text{comp}(\tilde{z}', \tilde{u}) \Rightarrow \tilde{w}' \in \tilde{S}'$  y  $\text{comp}(\tilde{z}', \tilde{w}') = \bigvee_{\tilde{u} \in \tilde{S}'} \text{comp}(\tilde{z}', \tilde{u}) \Rightarrow \tilde{w}' = \tilde{\tau}(\tilde{z}')$ . Por lo tanto,  $\tilde{\tau} : \tilde{S} \setminus \{\tilde{z}\} \rightarrow \tilde{S}' \setminus \{\tilde{w}\}$  es la transcripción difusa canónica y es inyectiva.

Análogamente,  $\tilde{\tau}' : \tilde{S}' \setminus \{\tilde{w}\} \rightarrow \tilde{S} \setminus \{\tilde{z}\}$  es la transcripción difusa canónica y es inyectiva, y por inducción tenemos que  $\tilde{\tau}' \circ \tilde{\tau} : \tilde{S} \setminus \{\tilde{z}\} \rightarrow \tilde{S} \setminus \{\tilde{z}\}$  es  $\text{id}_{\tilde{S} \setminus \{\tilde{z}\}}$  y  $\tilde{\tau} \circ \tilde{\tau}' : \tilde{S}' \setminus \{\tilde{w}\} \rightarrow \tilde{S}' \setminus \{\tilde{w}\}$  es  $\text{id}_{\tilde{S}' \setminus \{\tilde{w}\}}$ . Además, sabemos que  $\tilde{\tau}' \circ \tilde{\tau}(\tilde{z}) = \tilde{\tau}'(\tilde{w}) = \tilde{z}$  y  $\tilde{\tau} \circ \tilde{\tau}'(\tilde{w}) = \tilde{\tau}(\tilde{z}) = \tilde{w}$ , por lo que  $\tilde{\tau}' \circ \tilde{\tau} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$  es  $\text{id}_{\tilde{S}}$  y  $\tilde{\tau} \circ \tilde{\tau}' : \tilde{S}' \rightarrow \tilde{S}'$  es  $\text{id}_{\tilde{S}'}$ .  $\square$

**Proposición 19.** Dados  $\tilde{S}$  y  $\tilde{S}'$  dos sistemas de afinación difusos, y  $\tilde{\tau}$  una transcripción difusa biyectiva de  $\tilde{S}$  a  $\tilde{S}'$ , entonces  $\Phi(\tilde{\tau}) = \Phi(\tilde{\tau}^{-1})$ .

*Demostración.* Es inmediato pues  $\{(\tilde{z}, \tilde{\tau}(\tilde{z})) : \tilde{z} \in \tilde{S}\} = \{(\tilde{\tau}^{-1}(\tilde{w}), \tilde{w}) : \tilde{w} \in \tilde{S}'\}$ .  $\square$

Finalmente, podemos comparar sistemas de afinación difusos canónicamente intercambiables.

**Definición 17.** Dado  $0 \leq \alpha \leq 1$ , dos sistemas de afinación difusos  $\tilde{S}$  y  $\tilde{S}'$  canónicamente intercambiables, con transcripción difusa canónica  $\tilde{\tau} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$ , se dicen  $\alpha$ -compatibles si  $\Phi(\tilde{\tau}) \geq \alpha$ .

Hemos completado las bases de la afinación borrosa. Podemos ahora compararla con la afinación clásica.

## 2.4. Comparación de métodos: un enfoque categórico

### 2.4.1. Una introducción a la teoría de categorías

**Definición 18.** Por simplicidad, decimos que una *categoría*  $\mathcal{C}$  está formada por dos conjuntos<sup>3</sup>:

- $\text{ob}(\mathcal{C})$  el conjunto de *objetos* de la categoría.
- $\text{hom}(\mathcal{C})$  el conjunto de *flechas* de la categoría.

Además, debe haber dos funciones de  $\text{hom}(\mathcal{C})$  a  $\text{ob}(\mathcal{C})$ :

- $\text{dom} : \text{hom}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{ob}(\mathcal{C})$  la función *dominio*.
- $\text{cod} : \text{hom}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{ob}(\mathcal{C})$  la función *codominio*.

Y también una función  $\text{id} : \text{ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{hom}(\mathcal{C})$ ,  $C \mapsto \text{id}_C$ , que debe cumplir  $\text{dom}(\text{id}_C) = \text{cod}(\text{id}_C) = C \ \forall C \in \text{ob}(\mathcal{C})$ . Por último, debe haber una función  $\circ : \{(g, f) / f, g \in \text{hom}(\mathcal{C}) \text{ y } \text{dom}(g) = \text{cod}(f)\} \rightarrow \text{hom}(\mathcal{C})$ ,  $(g, f) \mapsto g \circ f$ , que debe cumplir  $\text{dom}(g \circ f) = \text{dom}(f)$  y  $\text{cod}(g \circ f) = \text{cod}(g) \ \forall f, g \in \text{hom}(\mathcal{C}) / \text{dom}(g) = \text{cod}(f)$ , ser asociativa, y cumplir  $\text{id}_{\text{cod}(f)} \circ f = f \circ \text{id}_{\text{dom}(f)} = f \ \forall f \in \text{hom}(\mathcal{C})$ .

Algunos ejemplos de categorías:

Categoría	Objetos	Flechas
<b>Set</b>	Conjuntos	Funciones
<b>Grp</b>	Grupos	Morfismos de grupos
<b>Vect<sub>ℝ</sub></b>	ℝ-espacios vectoriales	Transformaciones lineales
<b>Top</b>	Espacios topológicos	Funciones continuas

**Definición 19.** Una *subcategoría*  $\mathcal{D}$  de la categoría  $\mathcal{C}$  es una categoría que cumple  $\text{ob}(\mathcal{D}) \subseteq \text{ob}(\mathcal{C})$ ,  $\text{hom}(\mathcal{D}) \subseteq \text{hom}(\mathcal{C})$ , y hereda las flechas identidad y la composición de  $\mathcal{C}$ .

---

<sup>3</sup>En general se habla de *clases*, no de conjuntos, pero este caso particular alcanza para cubrir nuestras necesidades. Véase [17].

Algunos ejemplos de subcategorías:

Categoría	Subcategoría	Objetos de la subcategoría
<b>Grp</b>	<b>Ab</b>	Grupos abelianos
<b>Vect<sub>ℝ</sub></b>	<b>FVect<sub>ℝ</sub></b>	ℝ-espacios vectoriales de dimensión finita
<b>Top</b>	<b>Haus</b>	Espacios de Hausdorff

**Definición 20.** Dadas dos categorías  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$ , un *funtor*  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  se define mediante dos funciones:

- $F : \text{ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{ob}(\mathcal{D})$
- $F : \text{hom}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{hom}(\mathcal{D})$

y debe cumplirse que  $F(id_C) = id_{F(C)}$   $\forall C \in \text{ob}(\mathcal{C})$ ,  $\text{dom}(F(f)) = F(\text{dom}(f))$  y  $\text{cod}(F(f)) = F(\text{cod}(f))$   $\forall f \in \text{hom}(\mathcal{C})$ , y  $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$   $\forall f, g \in \text{hom}(\mathcal{C})$  /  $\text{dom}(g) = \text{cod}(f)$ .

*Observación 24.* Una consecuencia inmediata es que si  $f \in \text{hom}(\mathcal{C})$  tiene inversa ( $f^{-1} \in \text{hom}(\mathcal{C}) / \text{dom}(f^{-1}) = \text{cod}(f)$ ,  $\text{cod}(f^{-1}) = \text{dom}(f)$ ,  $f^{-1} \circ f = id_{\text{dom}(f)}$  y  $f \circ f^{-1} = id_{\text{cod}(f)}$ ) entonces  $F(f^{-1}) \circ F(f) = F(f^{-1} \circ f) = F(id_{\text{dom}(f)}) = id_{\text{dom}(F(f))}$  y  $F(f) \circ F(f^{-1}) = F(f \circ f^{-1}) = F(id_{\text{cod}(f)}) = id_{\text{cod}(F(f))}$ , es decir,  $F(f^{-1}) = F(f)^{-1}$ .

Ejemplos de funtores son el funtor que va de la categoría de ℝ-espacios vectoriales de dimensión finita a la categoría de espacios de Hausdorff dado por tomar una base cualquiera en el espacio vectorial y asociarle la topología usual de  $\mathbb{R}^n$ , o el funtor que va de la categoría de espacios topológicos a la categoría de grupos abelianos dado por asignarle a cada espacio topológico su  $n$ -ésimo grupo de homología. También se tienen los llamados *funtores de olvido* que "olvidan" determinada estructura, por ejemplo los funtores que van de las categorías de grupos, ℝ-espacios vectoriales o espacios topológicos a la categoría de conjuntos que simplemente les quitan la estructura correspondiente a los objetos de estas categorías. Otro ejemplo de funtor de olvido es aquel que va de la categoría de ℝ-espacios vectoriales a la categoría de grupos abelianos quitándole a los espacios vectoriales la acción de ℝ.

**Definición 21.** Un funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  se dice *pleno* si  $\forall X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C}), \forall g \in \text{hom}(\mathcal{D}) / \text{dom}(g) = F(X)$  y  $\text{cod}(g) = F(Y)$ ,  $\exists f \in \text{hom}(\mathcal{C}) / \text{dom}(f) = X, \text{cod}(f) = Y$  y  $F(f) = g$ .

Ahora estamos en condiciones de comparar ambos métodos.

### 2.4.2. Comparación de métodos

Podemos considerar dos subcategorías de **Set** (la categoría de conjuntos con funciones). La primera es **Tun**, la categoría que tiene como objetos los sistemas de afinación y como flechas las transcripciones. La segunda es **Fuzz**, la categoría que tiene como objetos los sistemas de afinación difusos y como flechas las transcripciones difusas.

Por la observación 18, tenemos definida  $U : \text{ob}(\mathbf{Fuzz}) \rightarrow \text{ob}(\mathbf{Tun})$ . Además, si tengo una transcripción difusa  $\tilde{\tau} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$ , puedo definir  $U(\tilde{\tau}) : U(\tilde{S}) \rightarrow U(\tilde{S}')$  como  $U(\tilde{\tau})(z) = u(\tilde{\tau}(\tilde{z}))$  donde  $\tilde{z} \in \tilde{S}$  es la nota musical difusa asociada a  $z \in U(\tilde{S})$ . Tengo luego,  $U : \text{hom}(\mathbf{Fuzz}) \rightarrow \text{hom}(\mathbf{Tun})$ . Además,  $U(id_{\tilde{S}})(z) = u(id_{\tilde{S}}(\tilde{z})) = u(\tilde{z}) = z$ , por lo que  $U(id_{\tilde{S}}) = id_{U(\tilde{S})}$ , y si tengo  $\tilde{\tau} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$  y  $\tilde{\tau}' : \tilde{S}' \rightarrow \tilde{S}''$ ,  $U(\tilde{\tau}' \circ \tilde{\tau})(z) = u(\tilde{\tau}' \circ \tilde{\tau}(z)) = u(\tilde{\tau}'(\tilde{\tau}(z))) = U(\tilde{\tau}')(u(\tilde{\tau}(z))) = U(\tilde{\tau}')(U(\tilde{\tau})(z)) = U(\tilde{\tau}') \circ U(\tilde{\tau})(z)$ , por lo que  $U(\tilde{\tau}' \circ \tilde{\tau}) = U(\tilde{\tau}') \circ U(\tilde{\tau})$ . Tenemos luego un funtor de olvido  $U : \mathbf{Fuzz} \rightarrow \mathbf{Tun}$ .

Además, si consideramos  $\mu : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$  y  $\mu \not\equiv 1$ , podemos definir  $F_\mu : \text{ob}(\mathbf{Tun}) \rightarrow \text{ob}(\mathbf{Fuzz})$  como  $F_\mu(S) = \{(\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu))\}_{z \in S}$  que es un sistema de afinación difuso asociado a  $S$ . Y si tenemos una transcripción  $\tau : S \rightarrow S'$ , definimos la transcripción difusa  $F_\mu(\tau) : F_\mu(S) \rightarrow F_\mu(S')$  como  $F_\mu(\tau)(\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu)) = (\mathbb{T}, \Gamma_{\tau(z)}(\mu))$ . Tenemos entonces que  $F_\mu(id_S) = id_{F_\mu(S)}$ , y que  $F_\mu(\tau' \circ \tau) = F_\mu(\tau') \circ F_\mu(\tau)$ , por lo que tenemos funtores  $F_\mu : \mathbf{Tun} \rightarrow \mathbf{Fuzz}$ .

Además,  $U \circ F_\mu = id_{\mathbf{Tun}}$ :  $U \circ F_\mu(\tau)(z) = U(F_\mu(\tau))(z) = u(F_\mu(\tau)(\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu))) = u(\mathbb{T}, \Gamma_{\tau(z)}(\mu)) = \tau(z)$ . Y también vale que  $F_\mu$  es un funtor pleno: sea  $\tilde{\tau} : F_\mu(S) \rightarrow F_\mu(S')$ , defino  $\tau : S \rightarrow S'$  como  $\tau = U(\tilde{\tau}) \Rightarrow \tau(z) = U(\tilde{\tau})(z) = u(\tilde{\tau}(\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu)))$ , tenemos entonces que  $F_\mu(\tau)(\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu)) = (\mathbb{T}, \Gamma_{\tau(z)}(\mu))$ , y si  $\tilde{\tau}(\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu)) = (\mathbb{T}, \Gamma_w(\mu))$  con  $w \in S'$ ,  $u(\tilde{\tau}(\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu))) = u(\mathbb{T}, \Gamma_w(\mu)) = w \Rightarrow \tau(z) = w \Rightarrow F_\mu(\tau)(\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu)) = (\mathbb{T}, \Gamma_w(\mu)) = \tilde{\tau}(\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu))$ , por lo que  $F_\mu(\tau) = \tilde{\tau}$ .

Dada una transcripción  $\tau : S \rightarrow S'$ , podemos preguntarnos cual es la relación entre  $\Phi(\tau)$  y  $\Phi(F_\mu(\tau))$ .

**Proposición 20.** *Sean  $S$  y  $S'$  dos sistemas de afinación, y sea  $\tau : S \rightarrow S'$  una transcripción. Sea  $\mu : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$  y  $\mu \not\equiv 1$ . Vale*

que:

$$\Phi(F_\mu(\tau)) = \mu \left( \frac{1 - \Phi(\tau)}{4} \right)$$

*Demostración.* En efecto,  $\Phi(F_\mu(\tau)) = \bigwedge_{\tilde{z} \in F_\mu(S)} \text{comp}(\tilde{z}, F_\mu(\tau)(\tilde{z}))$   $= \bigwedge_{z \in S} \text{comp}((\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu)), F_\mu(\tau)(\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu))) = \bigwedge_{z \in S} \text{comp}((\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu)), (\mathbb{T}, \Gamma_{\tau(z)}(\mu))),$  pero por la observación 17 sabemos que  $\text{comp}((\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu)), (\mathbb{T}, \Gamma_{\tau(z)}(\mu))) = \mu(d_{[f]}(z, \tau(z))/2),$  por lo que  $\Phi(F_\mu(\tau)) = \bigwedge_{z \in S} \mu(d_{[f]}(z, \tau(z))/2) = \mu(\bigvee_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau(z))/2).$  A su vez,  $\Phi(\tau) = 1 - 2 \bigvee_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau(z)) \Leftrightarrow \bigvee_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau(z)) = (1 - \Phi(\tau))/2,$  por lo que  $\Phi(F_\mu(\tau)) = \mu((1 - \Phi(\tau))/4),$  como queríamos probar.  $\square$

**Proposición 21.** *Sean  $S$  y  $S'$  dos sistemas de afinación, y sea  $\mu : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$  y  $\mu \not\equiv 1.$  Si existe la transcripción difusa canónica  $\tilde{\tau} : F_\mu(S) \rightarrow F_\mu(S'),$  entonces  $U(\tilde{\tau}) : S \rightarrow S'$  es la transcripción canónica de  $S$  a  $S'.$*

*Demostración.* Sea  $z \in S.$   $w_z \in S'/ d_{[f]}(z, w_z) = d_{[f]}(z, S') = \bigwedge_{w \in S'} d_{[f]}(z, w) \Leftrightarrow w_z \in S'/ d_{[f]}(z, w_z)/2 = \bigwedge_{w \in S'} d_{[f]}(z, w)/2 \Rightarrow w_z \in S'/ \mu(d_{[f]}(z, w_z)/2) = \bigvee_{w \in S'} \mu(d_{[f]}(z, w)/2) \Leftrightarrow w_z \in S'/ \text{comp}((\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu)), (\mathbb{T}, \Gamma_{w_z}(\mu))) = \bigvee_{w \in S'} \text{comp}((\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu)), (\mathbb{T}, \Gamma_w(\mu))) \Leftrightarrow (\mathbb{T}, \Gamma_{w_z}(\mu)) \in F_\mu(S') / \text{comp}((\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu)), (\mathbb{T}, \Gamma_{w_z}(\mu))) = \bigvee_{\tilde{w} \in \tilde{S}'} \text{comp}((\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu)), \tilde{w}) \Rightarrow (\mathbb{T}, \Gamma_{w_z}(\mu)) = \tilde{\tau}(\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu)) \Rightarrow w_z = u(\tilde{\tau}(\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu))) = U(\tilde{\tau})(z),$  con lo cual queda probada la proposición pues  $d_{[f]}(z, S')$  se realiza por ser  $S'$  un conjunto finito.  $\square$

*Observación 25.* Sean  $S$  y  $S'$  dos sistemas de afinación, y sea  $\mu : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$  y  $\mu \not\equiv 1.$  Si  $F_\mu(S)$  y  $F_\mu(S')$  son canónicamente intercambiables,  $S$  y  $S'$  son canónicamente intercambiables.

**Proposición 22.** *Sean  $S$  y  $S'$  dos sistemas de afinación, y sea  $\mu : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$  y  $\mu \not\equiv 1.$  Si  $F_\mu(S)$  y  $F_\mu(S')$  son  $\alpha$ -compatibles, sea  $\beta \in [0, 1]/ \mu((1 - \beta)/4) < \alpha,$  entonces  $S$  y  $S'$  son  $\beta$ -similares.*

*Demostración.*  $S$  y  $S'$  son canónicamente intercambiables pues  $F_\mu(S)$  y  $F_\mu(S')$  lo son. Si  $S$  y  $S'$  no fueran  $\beta$ -similares,  $\Phi(\tau) < \beta$  donde  $\tau : S \rightarrow S'$  es la transcripción canónica de  $S$  a  $S'.$  Si  $\tilde{\tau} : F_\mu(S) \rightarrow F_\mu(S')$  es la transcripción difusa canónica de  $F_\mu(S)$  a  $F_\mu(S'),$  vimos que  $F_\mu(U(\tilde{\tau})) = \tilde{\tau},$  pero también vimos que  $U(\tilde{\tau})$  es la transcripción canónica de  $S$  a  $S',$  es decir  $\tau.$  Por lo tanto,  $F_\mu(\tau) = \tilde{\tau},$  y por la proposición 20, tenemos que  $\Phi(\tilde{\tau}) = \mu((1 - \Phi(\tau))/4),$  pero  $\Phi(\tau) < \beta \Rightarrow (1 - \Phi(\tau))/4 > (1 - \beta)/4 \Rightarrow$

$\mu((1 - \Phi(\tau))/4) \leq \mu((1 - \beta)/4) < \alpha \Rightarrow \Phi(\tilde{\tau}) < \alpha$  lo cual es absurdo pues  $F_\mu(S)$  y  $F_\mu(S')$  son  $\alpha$ -compatibles.  $\square$

**Proposición 23** (La afinación clásica como caso particular de la borrosa). *Si tomamos  $\mu : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$  definida como:*

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 - 4t & \text{si } t \leq 1/4 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

vale lo siguiente:

1. Dados  $z, s \in \mathbb{T} \Rightarrow \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{s}) = 1 - 2d_{[f]}(z, s)$ , donde  $\tilde{z} = (\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu))$  y  $\tilde{s} = (\mathbb{T}, \Gamma_s(\mu))$ .
2. Dada una transcripción  $\tau : S \rightarrow S' \Rightarrow \Phi(F_\mu(\tau)) = \Phi(\tau)$ .
3.  $\tau : S \rightarrow S'$  es la transcripción canónica  $\Leftrightarrow F_\mu(\tau) : F_\mu(S) \rightarrow F_\mu(S')$  es la transcripción difusa canónica.
4.  $S$  y  $S'$  son canónicamente intercambiables  $\Leftrightarrow F_\mu(S)$  y  $F_\mu(S')$  lo son.
5.  $S$  y  $S'$  son  $\alpha$ -similares  $\Leftrightarrow F_\mu(S)$  y  $F_\mu(S')$  son  $\alpha$ -compatibles.

*Demostración.* 1.  $\text{comp}(\tilde{z}, \tilde{s}) = \mu(d_{[f]}(z, s)/2)$ , y como  $d_{[f]}(z, s) \leq 1/2 \Rightarrow d_{[f]}(z, s)/2 \leq 1/4 \Rightarrow \mu(d_{[f]}(z, s)/2) = 1 - 4d_{[f]}(z, s)/2 = 1 - 2d_{[f]}(z, s)$ .

2.  $0 \leq \Phi(\tau) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq (1 - \Phi(\tau))/4 \leq 1/4 \Rightarrow \Phi(F_\mu(\tau)) = \mu((1 - \Phi(\tau))/4) = \Phi(\tau)$
3.  $d_{[f]}(z, s) = d_{[f]}(z, S') \Leftrightarrow d_{[f]}(z, s) = \bigwedge_{w \in S'} d_{[f]}(z, w) \Leftrightarrow 1 - 2d_{[f]}(z, s) = 1 - 2 \bigwedge_{w \in S'} d_{[f]}(z, w) = \bigvee_{w \in S'} (1 - 2d_{[f]}(z, w)) \Leftrightarrow \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{s}) = \bigvee_{\tilde{w} \in F_\mu(S')} \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{w})$ . Si  $\tau$  es la transcripción canónica, tenemos que  $\tilde{s} \in F_\mu(S') / \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{s}) = \bigvee_{\tilde{w} \in F_\mu(S')} \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{w}) \Leftrightarrow d_{[f]}(z, s) = d_{[f]}(z, S') \Leftrightarrow s = \tau(z) \Leftrightarrow \tilde{s} = F_\mu(\tau)(\tilde{z})$ , mientras que si  $F_\mu(\tau)$  es la transcripción difusa canónica, tenemos que  $s \in S' / d_{[f]}(z, s) = d_{[f]}(z, S') \Leftrightarrow \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{s}) = \bigvee_{\tilde{w} \in F_\mu(S')} \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{w}) \Leftrightarrow \tilde{s} = F_\mu(\tau)(\tilde{z}) \Leftrightarrow s = \tau(z)$ .

4. Hay que probar que  $\tau : S \rightarrow S'$  es inyectiva  $\Leftrightarrow F_\mu(\tau) : F_\mu(S) \rightarrow F_\mu(S')$  es inyectiva. Si  $\tau$  es inyectiva,  $F_\mu(\tau)(\tilde{z}) = F_\mu(\tau)(\tilde{s}) \Rightarrow \tau(z) = \tau(s) \Rightarrow z = s \Rightarrow \tilde{z} = \tilde{s}$ , mientras que si  $F_\mu(\tau)$  es inyectiva,  $\tau(z) = \tau(s) \Rightarrow F_\mu(\tau)(\tilde{z}) = F_\mu(\tau)(\tilde{s}) \Rightarrow \tilde{z} = \tilde{s} \Rightarrow z = s$ .
5. Sale de los items anteriores.

□



# Capítulo 3

## Aproximación mediante temperamentos iguales

En este capítulo presentamos una introducción a la teoría de fracciones continuas que aplicamos a la aproximación de sistemas de afinación mediante temperamentos iguales, y comentamos resultados sobre la similaridad entre el sistema de afinación original y el temperamento que lo aproxima.

### 3.1. Aproximación mediante racionales

La teoría de esta sección está basada en [18] y sobre todo en [19]. Una *fracción continua de primer orden* es una expresión de la forma:

$$a_0 + \frac{1}{a_1}$$

con  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$  y  $a_1 > 0$ , y se la nota  $[a_0; a_1]$ . Recursivamente, una *fracción continua de  $n+1$ -ésimo orden* es una expresión de la forma:

$$a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \dots, a_{n+1}]}$$

con  $a_0 \in \mathbb{R}$  y  $a_1 > 0$ , y se la nota  $[a_0; a_1, \dots, a_{n+1}]$ . Además, la notación  $[a_0]$  con  $a_0 \in \mathbb{R}$  representa una *fracción continua de orden 0*, que es simplemente un número real:  $[a_0] = a_0$ . Todas éstas se llaman *fracciones continuas finitas*. Una *fracción continua*

## 40 CAPÍTULO 3. APROXIMACIÓN MEDIANTE TEMPERAMENTOS IGUALES

*infinita* es una expresión de la forma:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

con  $a_i \in \mathbb{R} \forall i \in \mathbb{N}_0$  y  $a_i > 0 \forall i \in \mathbb{N}$ , y se la nota  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ . En cualquier caso  $a_0, a_1, a_2, \dots$  se denominan *cocientes incompletos*, y si pedimos que  $a_i \in \mathbb{Z} \forall i$ , la fracción continua se denomina *simple*.

**Definición 22.** Dada una fracción continua  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$  (posiblemente finita) se definen las siguientes sucesiones (posiblemente finitas):

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0 & p_1 &= a_1 a_0 + 1 & p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \text{ si } n \geq 2 \\ q_0 &= 1 & q_1 &= a_1 & q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} \text{ si } n \geq 2 \end{aligned}$$

Se dice que  $p_n/q_n$ , con estos específicos valores para el numerador y el denominador, es el  $n$ -ésimo *convergente*.

*Observación 26.* Esto siempre va a estar bien definido, pues  $a_n > 0 \forall n \geq 1$ .  $q_0, q_1 > 0$  claramente, y por inducción, si  $q_{n-1}, q_{n-2} > 0 \Rightarrow q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} > 0$ .

En especial, si se trata de una fracción continua simple, tenemos que  $q_0, q_1 \geq 1$ , y por inducción, si  $q_{n-1} \geq n - 1$  y  $q_{n-2} \geq n - 2 \Rightarrow q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-1} + q_{n-2} \geq n - 1 + 1 = n$ .

**Proposición 24.** *Dada una fracción continua  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$  (posiblemente finita) y  $p_n/q_n$  su  $n$ -ésimo convergente, se tiene que  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = p_n/q_n$ .*

*Demostración.* Si  $n = 0$  o  $n = 1$ , está claro. Si  $n = 2$  tenemos que  $[a_0; a_1, a_2] = a_0 + 1/(a_1 + 1/a_2) = a_0 + a_2/(a_1 a_2 + 1) = (a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2)/(a_1 a_2 + 1)$  y  $p_2/q_2 = (a_2 p_1 + p_0)/(a_2 q_1 + q_0) = (a_2(a_1 a_0 + 1) + a_0)/(a_2 a_1 + 1) = (a_2 a_1 a_0 + a_2 + a_0)/(a_2 a_1 + 1)$ , por lo que también resulta cierto. Por inducción, queremos probar que  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = p_n/q_n$  con  $n > 2$ . Tenemos entonces que  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1/a_n]$ , y los convergentes de esta fracción continua serán  $p_i/q_i \forall 0 \leq i \leq n - 2$ , pero el  $n - 1$ -ésimo convergente es  $p'_{n-1}/q'_{n-1}$  con  $p'_{n-1} = (a_{n-1} + 1/a_n)p_{n-2} + p_{n-3} = a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3} + p_{n-2}/a_n = p_{n-1} + p_{n-2}/a_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2})/a_n = p_n/a_n$ , y análogamente  $q'_{n-1} = q_n/a_n$ , por lo que  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1/a_n] = p'_{n-1}/q'_{n-1} = (p_n/a_n)/(q_n/a_n) = p_n/q_n$ , es decir  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = p_n/q_n$ .  $\square$

**Proposición 25.** *Sea  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$  una fracción continua (posiblemente finita) y  $p_k/q_k$  su  $k$ -ésimo convergente, se tiene que  $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} \forall n \geq 1$ .*

*Demostración.* Si  $n = 1$  está claro. Por inducción, queremos probar que  $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$  con  $n > 1$ . Tenemos entonces que  $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - p_{n-1} (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) = a_n p_{n-1} q_{n-1} + p_{n-2} q_{n-1} - a_n p_{n-1} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2} = -(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = -(-1)^{n-2} = (-1)^{n-1}$ .  $\square$

**Proposición 26.** *Sea  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$  una fracción continua (posiblemente finita) y  $p_k/q_k$  su  $k$ -ésimo convergente, se tiene que  $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n \forall n \geq 2$ .*

*Demostración.* Tenemos que  $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2} (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) = a_n p_{n-1} q_{n-2} + p_{n-2} q_{n-2} - a_n p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-2} q_{n-2} = a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = (-1)^{n-2} a_n = (-1)^n a_n$ .  $\square$

*Observación 27.*  $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n \Rightarrow p_n/q_n - p_{n-2}/q_{n-2} = (-1)^n a_n/q_n q_{n-2}$  y como  $a_n > 0 \forall n \geq 2$  y  $q_n > 0 \forall n$ , se tiene que si  $n = 2k$ ,  $p_{2k}/q_{2k} - p_{2k-2}/q_{2k-2} = a_{2k}/q_{2k} q_{2k-2} > 0 \forall k \geq 1$ , es decir, los convergentes pares forman una sucesión estrictamente creciente. Si en cambio  $n = 2k+1$ ,  $p_{2k+1}/q_{2k+1} - p_{2k-1}/q_{2k-1} = -a_{2k+1}/q_{2k+1} q_{2k-1} < 0 \forall k \geq 1$ , es decir, los convergentes impares forman una sucesión estrictamente decreciente.

**Proposición 27.** *Dada una fracción continua  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$  (posiblemente finita), cualquiera de sus convergentes impares es mayor estricto que cualquiera de sus convergentes pares.*

*Demostración.* Sea  $p_{2m+1}/q_{2m+1}$  con  $m \geq 0$  uno de sus convergentes impares, y  $p_{2\mu}/q_{2\mu}$  con  $\mu \geq 0$  uno de sus convergentes pares.

- Si  $m = \mu$ , como  $p_{2m+1} q_{2m} - p_{2m} q_{2m+1} = (-1)^{2m} = 1 \Rightarrow p_{2m+1}/q_{2m+1} - p_{2m}/q_{2m} = 1/q_{2m+1} q_{2m} > 0 \Rightarrow p_{2m+1}/q_{2m+1} > p_{2m}/q_{2m}$ .
- Si  $\mu < m \Rightarrow 2\mu < 2m$  y por la observación anterior, se tiene que  $p_{2\mu}/q_{2\mu} < p_{2m}/q_{2m}$ , y como  $p_{2m+1}/q_{2m+1} > p_{2m}/q_{2m}$ , resulta que  $p_{2m+1}/q_{2m+1} > p_{2\mu}/q_{2\mu}$ .

## 42 CAPÍTULO 3. APROXIMACIÓN MEDIANTE TEMPERAMENTOS IGUALES

- Si  $\mu > m \Rightarrow 2\mu > 2m \Rightarrow 2\mu + 1 > 2m + 1$  y por la observación anterior, se tiene que  $p_{2\mu+1}/q_{2\mu+1} < p_{2m+1}/q_{2m+1}$ , y como  $p_{2\mu+1}/q_{2\mu+1} > p_{2\mu}/q_{2\mu}$ , resulta que  $p_{2m+1}/q_{2m+1} > p_{2\mu}/q_{2\mu}$ .

□

**Definición 23.** Dada una fracción continua infinita  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ , si la sucesión de convergentes  $p_n/q_n = [a_0; a_1, \dots, a_n]$  converge a  $x \in \mathbb{R}$ , se dice que la fracción continua *converge al valor x*, y se nota  $x = [a_0; a_1, a_2 \dots]$ .

**Teorema 28.** *Toda fracción continua infinita simple converge.*

*Demostración.* Dada una fracción continua infinita simple  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ , sea  $p_k/q_k$  es su  $k$ -ésimo convergente. Por la proposición y la observación anteriores, tenemos que  $p_0/q_0 < p_2/q_2 < p_4/q_4 < \dots$  y esta subsucesión está acotada superiormente por  $p_1/q_1$ , y  $p_1/q_1 > p_3/q_3 > p_5/q_5 > \dots$  y esta subsucesión está acotada inferiormente por  $p_0/q_0$ . Por lo tanto,  $p_{2n}/q_{2n} \rightarrow \xi_1$  y  $p_{2n+1}/q_{2n+1} \rightarrow \xi_2$ , y por la proposición anterior tenemos además que  $\xi_1 \leq \xi_2$ . Además, por la proposición 25, tenemos que  $p_{2n+1}q_{2n} - p_{2n}q_{2n+1} = (-1)^{2n} = 1 \Rightarrow p_{2n+1}/q_{2n+1} - p_{2n}/q_{2n} = 1/q_{2n}q_{2n+1} \Rightarrow |p_{2n+1}/q_{2n+1} - p_{2n}/q_{2n}| = 1/q_{2n}q_{2n+1}$ , y por la observación 26, tenemos que  $|p_{2n+1}/q_{2n+1} - p_{2n}/q_{2n}| \leq 1/2n(2n+1) \rightarrow 0$ . Por último,  $|\xi_1 - \xi_2| \leq |\xi_1 - p_{2n}/q_{2n}| + |p_{2n+1}/q_{2n+1} - p_{2n}/q_{2n}| + |\xi_2 - p_{2n+1}/q_{2n+1}|$ , y como cada uno de estos términos se puede hacer arbitrariamente chico, tomando  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, tenemos que  $\xi_1 = \xi_2$ , por lo que  $p_n/q_n \rightarrow \xi_1 = \xi_2$ , es decir, la fracción continua converge.

□

*Observación 28.* La demostración nos da también una cota para el error de aproximar el valor de la fracción continua mediante sus convergentes. Si  $x$  es el valor de la fracción continua, tenemos que  $p_{2n}/q_{2n} < x < p_{2n+1}/q_{2n+1} \Rightarrow 0 < x - p_{2n}/q_{2n} < p_{2n+1}/q_{2n+1} - p_{2n}/q_{2n} = 1/q_{2n}q_{2n+1} \Rightarrow |x - p_{2n}/q_{2n}| = x - p_{2n}/q_{2n} < 1/q_{2n}q_{2n+1}$ . Análogamente,  $p_{2n+2}/q_{2n+2} < x < p_{2n+1}/q_{2n+1} \Rightarrow 0 > x - p_{2n+1}/q_{2n+1} > p_{2n+2}/q_{2n+2} - p_{2n+1}/q_{2n+1} = (p_{2n+2}q_{2n+1} - p_{2n+1}q_{2n+2})/q_{2n+1}q_{2n+2} = (-1)^{2n+1}/q_{2n+1}q_{2n+2} = -1/q_{2n+1}q_{2n+2} \Rightarrow |x - p_{2n+1}/q_{2n+1}| = -(x - p_{2n+1}/q_{2n+1}) < 1/q_{2n+1}q_{2n+2}$ , por lo tanto  $|x - p_n/q_n| < 1/q_nq_{n+1} \forall n$ . En especial, si se trata de una fracción continua simple,  $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} > q_n \Rightarrow 1/q_n > 1/q_{n+1}$  y tenemos que  $|x - p_n/q_n| < 1/q_n^2 \forall n$ .

Como se ve, los convergentes de una fracción continua simple permiten aproximar su valor mediante números racionales. Para poder usar este enfoque para aproximar cualquier número real, necesitamos ver si dado  $x \in \mathbb{R}$  es posible construir una fracción continua simple  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$  (posiblemente finita) /  $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ , y para esto necesitamos ver cuál es la relación entre el valor de una fracción continua simple y sus cocientes incompletos.

**Lema 29.** *Dada una fracción continua finita simple  $[a_0; a_1, \dots, a_N]$  /  $a_0 > 0$  y  $N \geq 1$ , tenemos que  $[a_0; a_1, \dots, a_N] > 1$ .*

*Demuestração.* Si  $N = 1$ , tenemos que  $a_0 \geq 1$  y  $a_1 > 0 \Rightarrow [a_0; a_1] = a_0 + 1/a_1 > 1$ . Por inducción, tenemos que si  $N > 1$ ,  $[a_0; a_1, \dots, a_N] = a_0 + 1/[a_1; a_2, \dots, a_N]$ , y por hipótesis inductiva  $[a_1; a_2, \dots, a_N] > 1 > 0 \Rightarrow [a_0; a_1, \dots, a_N] > a_0 \geq 1$ .  $\square$

**Lema 30.** *Dada una fracción continua infinita simple  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$  /  $a_0 > 0$ , tenemos que  $[a_0; a_1, a_2, \dots] > 1$ .*

*Demuestração.*  $[a_0; a_1, a_2, \dots] = \lim_{N \rightarrow \infty} [a_0; a_1, \dots, a_N] = \lim_{N \rightarrow \infty} a_0 + 1/[a_1; a_2, \dots, a_N] = a_0 + 1/\lim_{N \rightarrow \infty} [a_1; a_2, \dots, a_N]$ , como  $a_1 > 0$ , tenemos por el lema anterior que  $[a_1; a_2, \dots, a_N] > 1 \forall N \geq 2 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} [a_1; a_2, \dots, a_N] \geq 1 > 0 \Rightarrow [a_0; a_1, a_2, \dots] > a_0 \geq 1$ .  $\square$

Luego, dada una fracción continua infinita simple  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ , si su valor es  $x_0 \in \mathbb{R}$ , tendremos que  $x_0 = [a_0; a_1, a_2, \dots] = \lim_{N \rightarrow \infty} [a_0; a_1, \dots, a_N] = \lim_{N \rightarrow \infty} a_0 + 1/[a_1; a_2, \dots, a_N] = a_0 + 1/\lim_{N \rightarrow \infty} [a_1; a_2, \dots, a_N] = a_0 + 1/[a_1; a_2, a_3, \dots]$ , y como  $a_1 > 0$ , tenemos que  $[a_1; a_2, a_3, \dots] > 1 \Rightarrow 0 < 1/[a_1; a_2, a_3, \dots] < 1 \Rightarrow a_0 < x_0 < a_0 + 1 \Rightarrow a_0 = \lfloor x_0 \rfloor$ . Si llamamos  $x_1$  a  $[a_1; a_2, a_3, \dots]$ , tenemos entonces que  $x_0 = \lfloor x_0 \rfloor + 1/x_1 \Rightarrow \{x_0\} = 1/x_1 \Rightarrow x_1 = 1/\{x_0\}$  y como vimos con  $x_0$  y  $a_0$ ,  $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$ . Es decir, inductivamente, si llamamos  $x_n$  a  $[a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$ , se obtiene que  $a_n = \lfloor x_n \rfloor$  y  $x_{n+1} = 1/\{x_n\}$ .

En consecuencia, dado  $x \in \mathbb{R}$ , podemos armarnos de este modo un candidato a fracción continua simple cuyo valor sea  $x$ . Está claro que este proceso podría terminar en algún punto, si obtenemos un  $x_n / \{x_n\} = 0 \Leftrightarrow x_n \in \mathbb{Z}$ . Pero en tal caso, tendríamos simplemente que  $[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, x_n] = x$  con  $x_n = 1/\{x_{n-1}\}$  y como  $0 < \{x_{n-1}\} < 1 \Rightarrow x_n > 0$  por lo que  $[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, x_n] = [a_0; a_1, \dots, a_n]$  sería una fracción continua

#### 44 CAPÍTULO 3. APROXIMACIÓN MEDIANTE TEMPERAMENTOS IGUALES

finita simple, o en el caso de que  $n = 0$ ,  $x_0 = x \in \mathbb{Z}$  por lo que también se trata de una fracción continua finita simple. Quedaría entonces ver que en el caso de que el proceso no se detenga, la fracción continua infinita simple tendrá valor  $x$ . Formalizando:

**Teorema 31.** *Dado  $x \in \mathbb{R}$ , definimos  $x_0 = x$ ,  $x_{n+1} = 1/\{x_n\}$  siempre que  $x_n \notin \mathbb{Z}$ , y  $a_n = \lfloor x_n \rfloor$ . Tenemos entonces que  $x = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, x_n] \forall n$ , y en el caso de que  $x_n \notin \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{N}_0$ , tenemos que  $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ .*

*Demostración.* Para la parte de las fracciones continuas finitas, procedemos por inducción. Si  $n = 0$ , tenemos que  $[x_0] = x_0 = x$ . Si  $n > 0$ ,  $[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, x_n] = [a_0; a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1/x_n] = [a_0; a_1, \dots, a_{n-2}, \lfloor x_{n-1} \rfloor + \{x_{n-1}\}] = [a_0; a_1, \dots, a_{n-2}, x_{n-1}] = x$ , por hipótesis inductiva.

Para la parte de la fracción continua infinita simple, si  $p_k/q_k$  es el  $k$ -ésimo convergente de la fracción continua, tenemos que  $x = [a_0; a_1, \dots, a_n, x_{n+1}]$  y como esta fracción continua comparte hasta el  $n$ -ésimo cociente incompleto con la fracción continua  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ , compartirá también hasta el  $n$ -ésimo convergente. Luego, como se trata de una fracción continua de  $n + 1$ -ésimo orden, su convergente  $n + 1$ -ésimo nos da su valor, y este se computa como  $(x_{n+1}p_n + p_{n-1})/(x_{n+1}q_n + q_{n-1})$ , es decir,  $x = (x_{n+1}p_n + p_{n-1})/(x_{n+1}q_n + q_{n-1}) \Rightarrow x - p_n/q_n = (x_{n+1}p_n + p_{n-1})/(x_{n+1}q_n + q_{n-1}) - p_n/q_n = (x_{n+1}p_n q_n + p_{n-1}q_n - x_{n+1}p_n q_n - p_n q_{n-1})/(x_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n = (p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1})/(x_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n = -(p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n)/(x_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n = -(-1)^{n-1}/(x_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n = (-1)^n/(x_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n \Rightarrow |x - p_n/q_n| = 1/|x_{n+1}q_n + q_{n-1}|q_n$ , pero  $a_{n+1} = \lfloor x_{n+1} \rfloor < x_{n+1} = 1/\{x_n\} > 0 \Rightarrow |x - p_n/q_n| = 1/(x_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n$  y  $x_{n+1}q_n + q_{n-1} > a_{n+1}q_n + q_{n-1} = q_{n+1} \Rightarrow 1/q_{n+1} > 1/(x_{n+1}q_n + q_{n-1}) \Rightarrow |x - p_n/q_n| < 1/q_n q_{n+1} \leq 1/n(n+1) \rightarrow 0$ , por lo que efectivamente,  $\lim_{N \rightarrow \infty} [a_0; a_1, \dots, a_N] = x$ , es decir,  $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ .  $\square$

En especial, si  $x \notin \mathbb{Q}$ , este algoritmo define una fracción continua infinita simple, puesto que las fracciones continuas finitas simples representan números racionales. Por lo tanto, se tiene el siguiente resultado:

**Corolario 32.** *Dado  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , existen infinitos racionales  $p/q$  /  $|x - p/q| < 1/q^2$ .*

*Demostración.* Por el algoritmo anterior tenemos una fracción continua infinita simple  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$  cuyo valor es  $x$ , y si  $p_n/q_n$  es su  $n$ -ésimo convergente, vale que

$|x - p_n/q_n| < 1/q_n^2$ . Como, por ejemplo, la subsucesión de convergentes pares es estrictamente creciente, tengo infinitas soluciones.  $\square$

En el caso en que  $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = a/b$  con  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ . Si  $x \neq p/q \Rightarrow a/b \neq p/q \Rightarrow aq - bp \neq 0$ , y por lo tanto  $|x - p/q| = |a/b - p/q| = |aq - bp|/b|q| \geq 1/b|q|$ . Luego, si  $|x - p/q| < 1/q^2 \Rightarrow 1/b|q| < 1/q^2 \Rightarrow |q| < b$ , y a su vez  $|p| \leq |p - qx| + |qx| = |x - p/q||q| + |q||x| < 1/|q| + b|a/b| \leq 1 + |a|$ , por lo que hay una cantidad finita de soluciones. Esto además prueba que las fracciones continuas infinitas simples siempre tienen valores irracionales, pues como vimos recién los convergentes me dan infinitas soluciones al problema de aproximar el valor de la fracción continua.

Estos resultados pueden generalizarse.

**Teorema 33.** Sean  $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}$ , entonces  $\exists p_1, \dots, p_k \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} / |\xi_i - p_i/q| < 1/q^{1+1/k} \forall 1 \leq i \leq k$ . Si alguno de los  $\xi_i \notin \mathbb{Q}$ , hay infinitas soluciones.

*Demostración.* Dado  $Q \in \mathbb{N}$ , considero la función  $s : \{0, 1, \dots, Q^k\} \rightarrow \{0, 1, \dots, Q-1\}^k$ ,  $s(l) = (\lfloor Q\{l\xi_1\} \rfloor, \dots, \lfloor Q\{l\xi_k\} \rfloor)$ . Esta función está bien definida, pues  $0 \leq \{l\xi_i\} < 1 \Rightarrow 0 \leq Q\{l\xi_i\} < Q \Rightarrow \lfloor Q\{l\xi_i\} \rfloor \in \{0, 1, \dots, Q-1\} \forall 1 \leq i \leq k$ . Además,  $\#\{0, 1, \dots, Q^k\} = Q^k + 1$  y  $\#(\{0, 1, \dots, Q-1\}^k) = Q^k$ , por lo que  $s$  no puede ser inyectiva, es decir,  $\exists l_1, l_2 \in \{0, \dots, Q^k\} / l_1 < l_2$  y  $s(l_1) = s(l_2)$ . Si tomo  $q = l_2 - l_1$  y  $p_i = \lfloor l_2\xi_i \rfloor - \lfloor l_1\xi_i \rfloor \forall 1 \leq i \leq k$ , tengo que  $0 < q \leq Q^k$  y  $q\xi_i = l_2\xi_i - l_1\xi_i = \lfloor l_2\xi_i \rfloor + \{l_2\xi_i\} - \lfloor l_1\xi_i \rfloor - \{l_1\xi_i\} = p_i + \{l_2\xi_i\} - \{l_1\xi_i\} \Rightarrow q\xi_i - p_i = \{l_2\xi_i\} - \{l_1\xi_i\} \Rightarrow Q(q\xi_i - p_i) = Q\{l_2\xi_i\} - Q\{l_1\xi_i\} = \lfloor Q\{l_2\xi_i\} \rfloor + \{Q\{l_2\xi_i\}\} - \lfloor Q\{l_1\xi_i\} \rfloor - \{Q\{l_1\xi_i\}\} = s(l_2) + \{Q\{l_2\xi_i\}\} - s(l_1) - \{Q\{l_1\xi_i\}\} = \{Q\{l_2\xi_i\}\} - \{Q\{l_1\xi_i\}\} \Rightarrow -1 < Q(q\xi_i - p_i) < 1 \Rightarrow |Q(q\xi_i - p_i)| < 1 \Rightarrow |\xi_i - p_i/q| < 1/Qq \leq 1/q^{1+1/k} \forall 1 \leq i \leq k$ .

Para la segunda parte del teorema tengo que  $\xi_i \notin \mathbb{Q}$  para algún  $1 \leq i \leq k$ . Si hubiera finitas soluciones, digamos que todas son  $p_{1s}, \dots, p_{ks} \in \mathbb{Z}, q_s \in \mathbb{N}$  con  $|\xi_j - p_{js}/q_s| < 1/(q_s)^{1+1/k}, 1 \leq s \leq N$  y si  $s \neq r, p_{js}/q_s \neq p_{jr}/q_r$  para algún  $1 \leq j \leq k$ , tendría entonces que tomando  $Q \in \mathbb{N} / |\xi_i - p_{is}/q_s| > 1/Q \forall 1 \leq s \leq N$ , lo que se puede hacer pues  $\xi_i \notin \mathbb{Q}$ , por la construcción anterior,  $\exists p_1, \dots, p_k \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} / |\xi_j - p_j/q| < 1/q^{1+1/k} \forall 1 \leq j \leq k$  y  $|\xi_i - p_i/q| < 1/Qq \leq 1/Q$ , por lo que  $p_i/q \neq p_{is}/q_s \forall 1 \leq s \leq N$ , lo que es absurdo. Por lo tanto hay infinitas soluciones.  $\square$

*Observación 29.* La demostración anterior además prueba que, dados  $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}$ ,  $Q \in \mathbb{N}$ , entonces  $\exists p_1, \dots, p_k \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N} / q \leq Q^k$  y  $|\xi_i - p_i/q| < 1/Qq \forall 1 \leq i \leq k$ , y que si alguno de los  $\xi_i \notin \mathbb{Q}$ , y no se pide que  $q \leq Q^k$ , entonces hay infinitas soluciones.

## 3.2. De la aproximación de sistemas de afinación mediante temperamentos iguales

### 3.2.1. De los temperamentos iguales

Primeramente, queremos dar una noción intuitiva de que es un *temperamento igual*. Esto sería que "todas sus notas son iguales".

**Definición 24.** Sea  $S$  un sistema de afinación. Se dice que es un temperamento igual si:

$$\frac{z_2}{z_1}S = S \quad \forall z_1, z_2 \in S$$

*Observación 30.* Esto representa la idea intuitiva antes enunciada pues lo que hago es rotar  $S$  para que  $z_2$  tome el lugar antes ocupado por  $z_1$ , y me sigue dando  $S$ .

**Proposición 34.** Sea  $S$  un temperamento igual,  $z \in S$ . Entonces  $S = zG_n$  donde  $G_n = \{s \in \mathbb{C} / s^n = 1\}$  y  $n = \#S$ .

*Demostración.* Sea  $G = z^{-1}S$ . Está claro que  $\#G = n$ . Además  $G$  es un subgrupo de  $\mathbb{C}^*$ . Sean  $z_1, z_2 \in S \Rightarrow (z^{-1}z_1)(z^{-1}z_2) = z^{-1}(z_1/z)z_2$ , pero como  $S$  es un temperamento igual y  $z, z_1, z_2 \in S$ , tenemos que  $(z_1/z)z_2 \in S$ , y por lo tanto  $z^{-1}(z_1/z)z_2 \in z^{-1}S = G$ . Además  $(z^{-1}z_1)^{-1} = z/z_1 = z^{-1}(z/z_1)z$ , y como  $S$  es un temperamento igual y  $z, z_1 \in S$ , tenemos que  $(z/z_1)z \in S \Rightarrow z^{-1}(z/z_1)z \in z^{-1}S = G$ . También,  $z \in S \Rightarrow 1 = z^{-1}z \in z^{-1}S = G$ . Luego  $G$  es un subgrupo de  $\mathbb{C}^*$  con  $n$  elementos, y por lo tanto debe ser  $G_n \Rightarrow S = zG = zG_n$ .  $\square$

Estos son siempre temperamentos iguales:

**Proposición 35.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z \in \mathbb{T}$ . Entonces  $S = zG_n$  es un temperamento igual.

*Demostración.* Sea  $s \in G_n \Rightarrow |zs| = |z||s| = 1$ , por lo que  $S \subseteq \mathbb{T}$ . Además,  $1 \in G_n \Rightarrow z \in S$ , y como  $\#G_n = n$  y  $z \neq 0$ ,  $\#S = \#G_n = n$ . Por lo tanto,  $S$  es un sistema de afinación.

Dados  $s, s_1, s_2 \in G_n \Rightarrow ((zs_2)/(zs_1))zs = z(ss_2s_1^{-1})$ , pero como  $G_n$  es un grupo,  $ss_2s_1^{-1} \in G_n \Rightarrow z(ss_2s_1^{-1}) \in zG_n = S$ , por lo que  $S$  es un temperamento igual.  $\square$

### 3.2.2. De los generadores de un sistema de afinación

**Definición 25.** Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}_{>0}$  y  $S$  un sistema de afinación. Si  $\exists z \in S / z^{-1}S \subseteq \psi \circ \phi(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle)$  se dice que  $S$  está generado por  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ . En especial, si  $\alpha_i$  es el  $i$ -ésimo primo  $\forall 1 \leq i \leq k$ , se dice que  $S$  está basado en el  $\alpha_k$ -límite<sup>1</sup>.

*Observación 31.* Si  $\exists z \in S / z^{-1}S \subseteq \psi \circ \phi(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle)$ , entonces vale para cualquier  $s \in S$  que  $s^{-1}S \subseteq \psi \circ \phi(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle)$ . En efecto, como  $z^{-1}S \subseteq \psi \circ \phi(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle)$ , tengo que  $s/z \in \psi \circ \phi(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle)$ , es decir,  $s/z = \psi \circ \phi(\alpha_1^{n_1} \cdots \alpha_k^{n_k})$  con  $n_i \in \mathbb{Z} \ \forall 1 \leq i \leq k$ . Dado  $w \in S$ , tendría que  $w/z = \psi \circ \phi(\alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_k^{m_k})$  con  $m_j \in \mathbb{Z} \ \forall 1 \leq j \leq k$ , por lo que  $w/s = (w/z)/(s/z) = \psi \circ \phi(\alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_k^{m_k})/\psi \circ \phi(\alpha_1^{n_1} \cdots \alpha_k^{n_k}) = \psi \circ \phi(\alpha_1^{m_1-n_1} \cdots \alpha_k^{m_k-n_k})$  puesto que  $\phi$  y  $\psi$  son morfismos de grupos. Por lo tanto,  $w/s \in \psi \circ \phi(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle)$ , es decir  $s^{-1}S \subseteq \psi \circ \phi(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle)$ .

*Observación 32.* Dado  $S$  un temperamento igual de  $n$  tonos, tengo que  $S$  está generado por  $2^{1/n}$ . En efecto, si  $z, s \in S$ , tengo que  $s/z \in G_n$ , pues  $S = zG_n$ , por lo que  $s/z = e^{2\pi ik/n} = \psi(k/n) = \psi \circ \phi(2^{k/n}) = \psi \circ \phi((2^{1/n})^k)$ , y en consecuencia  $s/z \in \psi \circ \phi(\langle 2^{1/n} \rangle)$ . Por lo tanto,  $z^{-1}S \subseteq \psi \circ \phi(\langle 2^{1/n} \rangle)$ , es decir  $S$  está generado por  $2^{1/n}$ .

### 3.2.3. Resultados sobre aproximación

Un problema de la mayoría de los sistemas de afinación es que están armados para que los intervalos melódicos suenen bien respecto de una nota fija. Si se quiere tocar una obra compuesta en torno a otra nota, el sistema de afinación no garantiza que los intervalos tengan la misma consonancia. Para arreglar esto, actualmente se suele emplear el temperamento igual de 12 tonos (12-TET). Por definición, cualquier temperamento igual va a permitir que la consonancia de los intervalos sea independiente de la nota

---

<sup>1</sup>Esta terminología fue introducida por Harry Partch. Véase [2].

## 48 CAPÍTULO 3. APROXIMACIÓN MEDIANTE TEMPERAMENTOS IGUALES

en torno a la cual se está tocando. Pero aquí el problema resulta ser que los intervalos son más disonantes. Para solucionar este problema hay que elegir cuidadosamente la cantidad de tonos del temperamento igual.

Planteamos entonces el problema de aproximar un sistema de afinación  $S$  generado por  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}_{>0}$ , mediante un temperamento igual que tenga al menos un elemento en común. Si fijamos  $z \in S$ , un elemento cualquiera  $s \in S$  cumplirá que  $s/z = \psi \circ \phi(\alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_k^{m_k})$  mientras que el temperamento igual de  $n$  tonos que contiene a  $z$  ( $zG_n$ ) tiene elementos de la forma  $ze^{2\pi ij/n}$ . Si medimos la distancia entre ambas notas, obtenemos  $d_{[f]}(s, ze^{2\pi ij/n}) = d_{[f]}(z \cdot \psi \circ \phi(\alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_k^{m_k}), z \cdot \psi \circ \phi(2^{j/n})) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(\alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_k^{m_k}), \psi \circ \phi(2^{j/n})) = \min\{\{\log_2(2^{-j/n} \cdot \alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_k^{m_k})\}, 1 - \{\log_2(2^{-j/n} \cdot \alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_k^{m_k})\}\} \leq \{\log_2(2^{-j/n} \cdot \alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_k^{m_k})\} = \{-j/n + m_1 \log_2(\alpha_1) + \cdots + m_k \log_2(\alpha_k)\}$ . Ahora, hablando heuristicamente, si  $\log_2(\alpha_l) \approx j_l/n \forall 1 \leq l \leq k$ , tendremos que  $m_1 \log_2(\alpha_1) + \cdots + m_k \log_2(\alpha_k) \approx m_1 j_1/n + \cdots + m_k j_k/n = (m_1 j_1 + \cdots + m_k j_k)/n$ , por lo que si tomo  $j = m_1 j_1 + \cdots + m_k j_k$  tengo que  $m_1 \log_2(\alpha_1) + \cdots + m_k \log_2(\alpha_k) \approx j/n \Rightarrow -j/n + m_1 \log_2(\alpha_1) + \cdots + m_k \log_2(\alpha_k) \approx 0 \Rightarrow d_{[f]}(s, ze^{2\pi ij/n}) \approx 0$ . El truco consiste entonces en hallar un  $n \in \mathbb{N}$  con el que se pueda aproximar bien los valores  $\log_2(\alpha_l)$  como múltiplos de  $1/n$ .

**Lema 36.** *Sea  $x \in \mathbb{R}$ , entonces  $\min\{\{x\}, 1 - \{x\}\} \leq |x|$ .*

*Demostración.*  $\{x\} \leq |x| \Leftrightarrow x - \lfloor x \rfloor \leq |x| \Leftrightarrow x \leq |x| + \lfloor x \rfloor$ . Si  $\lfloor x \rfloor \geq 0$  esto es obviamente cierto pues  $x \leq |x|$ . Por lo tanto, tenemos que si  $x \geq 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor \geq 0$  y vale la desigualdad. Por otro lado, si  $x < 0$  tenemos que  $\{x\} \leq |x| \Leftrightarrow x \leq -x + \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow 2x \leq \lfloor x \rfloor$ , pero sabemos que  $\lfloor x \rfloor > x - 1$ , por lo cual si tenemos  $2x \leq x - 1 \Leftrightarrow x \leq -1$ , se cumple la desigualdad. Nos falta ver que pasa si  $-1 < x < 0$ . En ese caso tenemos  $\lfloor x \rfloor = -1 \Rightarrow \{x\} = x + 1$  y  $|x| = -x$ , con lo cual  $\{x\} \leq |x|$  se traduce a  $x + 1 \leq -x \Leftrightarrow 2x \leq -1 \Leftrightarrow x \leq -1/2$ , por lo que la desigualdad vale si  $-1 < x \leq -1/2$ . Si  $-1/2 < x < 0$  tenemos que  $1 - \{x\} = 1 - (x + 1) = -x = |x|$  por lo que también vale lo que queríamos probar.  $\square$

*Observación 33.* De la discusión anterior podemos sacar una cota para el error. Si  $|\log_2(\alpha_l) - j_l/n| = \varepsilon_l$ , tenemos que  $d_{[f]}(s, ze^{2\pi ij/n}) \leq |\log_2(2^{-j/n} \cdot \alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_k^{m_k})| =$

$$|-j/n + m_1 \log_2(\alpha_1) + \cdots + m_k \log_2(\alpha_k)| \leq |m_1| |\log_2(\alpha_1) - j_1/n| + \cdots + |m_k| |\log_2(\alpha_k) - j_k/n| = |m_1| \varepsilon_1 + \cdots + |m_k| \varepsilon_k.$$

Esto último se traduce en un resultado de Liern[8], que aquí presentamos en otros términos.

**Lema 37.** *Dado  $T$  un temperamento igual de  $n$  tonos con  $n > 1$ , y  $z_1 \neq z_2 \in T$ , se tiene que  $d_{[f]}(z_1, z_2) \geq 1/n$ .*

*Demostración.* Como  $T = zG_n$ , tenemos que  $z_j = ze^{2\pi im_j/n}$  con  $0 \leq m_j \leq n-1$  y  $m_1 \neq m_2$ . Luego,  $d_{[f]}(z_1, z_2) = d_{[f]}(ze^{2\pi im_1/n}, ze^{2\pi im_2/n}) = d_{[f]}(e^{2\pi im_1/n}, e^{2\pi im_2/n}) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(2^{m_1/n}), \psi \circ \phi(2^{m_2/n})) = \min\{\{\log_2(2^{(m_1-m_2)/n})\}, 1 - \{\log_2(2^{(m_1-m_2)/n})\}\} = \min\{\{(m_1-m_2)/n\}, 1 - \{(m_1-m_2)/n\}\}$ . Suponemos sin pérdida de generalidad  $m_1 > m_2$ , luego  $0 < m_1 - m_2 \leq m_1 \leq n-1 \Rightarrow 1 \leq m_1 - m_2 \leq n-1 \Rightarrow 1/n \leq (m_1 - m_2)/n \leq 1 - 1/n < 1 \Rightarrow \{(m_1 - m_2)/n\} = (m_1 - m_2)/n$ , por lo que  $\{(m_1 - m_2)/n\} \geq 1/n$  y  $1 - \{(m_1 - m_2)/n\} \geq 1/n$ . Luego,  $d_{[f]}(z_1, z_2) \geq 1/n$ .  $\square$

*Observación 34.* Sea  $\mu : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$  y  $\mu \not\equiv 1$ , y sean  $\tilde{z}_1 = (\mathbb{T}, \Gamma_{z_1}(\mu))$  y  $\tilde{z}_2 = (\mathbb{T}, \Gamma_{z_2}(\mu))$ . Entonces  $\text{comp}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = \mu(d_{[f]}(z_1, z_2)/2) \leq \mu(1/2n)$ .

**Proposición 38.** *Dado un sistema de afinación  $S$  y un temperamento igual  $T$  de  $n$  tonos, si  $d_{[f]}(s, T) < 1/2n \forall s \in S$ , tenemos que existe la transcripción canónica  $\tau$  de  $S$  a  $T$ , vale que  $\tau(s)$  es el único  $z \in T / d_{[f]}(s, z) < 1/2n$ , y  $\Phi(\tau) > 1 - 1/n$ . Además, si  $\tau$  es biyectiva,  $S$  y  $T$  son canónicamente intercambiables.*

*Demostración.* Si  $s \in S$ ,  $z_1 \neq z_2 \in T / d_{[f]}(s, T) = d_{[f]}(s, z_1) = d_{[f]}(s, z_2)$ , entonces  $d_{[f]}(z_1, z_2) \leq d_{[f]}(z_1, s) + d_{[f]}(s, z_2) < 1/2n + 1/2n = 1/n$ , lo que es absurdo pues  $d_{[f]}(z_1, z_2) \geq 1/n$ . Se deduce que hay un único  $z \in T / d_{[f]}(s, z) < 1/2n$ , y por lo tanto debe ser el único elemento donde se realiza la distancia de  $s$  a  $T$ . Además, si llamamos  $\tau$  a la transcripción canónica de  $S$  a  $T$ , tenemos que  $d_{[f]}(s, \tau(s)) = d_{[f]}(s, T) < 1/2n \forall s \in S \Rightarrow \max_{s \in S} d_{[f]}(s, \tau(s)) < 1/2n \Rightarrow \Phi(\tau) = 1 - 2 \max_{s \in S} d_{[f]}(s, \tau(s)) > 1 - 1/n$ .

Si  $\tau$  es biyectiva, dados  $s \in S, z \in T$ ,  $d_{[f]}(z, s) < 1/2n \Leftrightarrow z = \tau(s) \Leftrightarrow s = \tau^{-1}(z)$ , lo que prueba que  $\tau^{-1}$  es la transcripción canónica de  $T$  a  $S$ , y por lo tanto  $S$  y  $T$  son canónicamente intercambiables.  $\square$

## 50 CAPÍTULO 3. APROXIMACIÓN MEDIANTE TEMPERAMENTOS IGUALES

*Observación 35.* Sea  $\mu : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$  y  $\mu \not\equiv 1$ . Entonces por la proposición 20, tenemos que  $\Phi(F_\mu(\tau)) = \mu((1 - \Phi(\tau))/4)$ , pero  $\Phi(\tau) > 1 - 1/n \Rightarrow 1/4n > (1 - \Phi(\tau))/4 \Rightarrow \mu(1/4n) \leq \mu((1 - \Phi(\tau))/4) \Rightarrow \Phi(F_\mu(\tau)) \geq \mu(1/4n)$ .

**Proposición 39.** *Sea  $S$  un sistema de afinación y  $T$  un temperamento igual de  $n$  tonos, tales que  $d_{[f]}(s, T) < 1/2n \forall s \in S$ . Sea  $\tau$  la transcripción canónica de  $S$  a  $T$ , y sea  $\mu : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$  y  $\mu \not\equiv 1$ . Si existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\mu$  es derivable y  $\mu' < 0$  en  $(1/4n - \varepsilon, 1/4n)$ , se tiene que  $F_\mu(\tau)$  es la transcripción difusa canónica de  $F_\mu(S)$  a  $F_\mu(T)$ . Además, si  $\tau$  es biyectiva,  $F_\mu(S)$  y  $F_\mu(T)$  son canónicamente intercambiables.*

*Demostración.* Sean  $s \in S, z \in T$  y  $\tilde{s} = (\mathbb{T}, \Gamma_s(\mu)), \tilde{z} = (\mathbb{T}, \Gamma_z(\mu))$ , entonces  $\text{comp}(\tilde{s}, \tilde{z}) = \mu(d_{[f]}(s, z)/2)$ . Tenemos además que  $\bigvee_{\tilde{w} \in F_\mu(T)} \text{comp}(\tilde{s}, \tilde{w}) = \bigvee_{w \in T} \mu(d_{[f]}(s, w)/2) = \mu(\bigwedge_{w \in T} d_{[f]}(s, w)/2) = \mu(d_{[f]}(s, T)/2)$ , por lo que  $\text{comp}(\tilde{s}, \tilde{z}) = \bigvee_{\tilde{w} \in F_\mu(T)} \text{comp}(\tilde{s}, \tilde{w}) \Leftrightarrow \mu(d_{[f]}(s, z)/2) = \mu(d_{[f]}(s, T)/2)$ . Si  $d_{[f]}(s, z) \geq 1/2n \Rightarrow d_{[f]}(s, z)/2 \geq 1/4n \Rightarrow \mu(d_{[f]}(s, z)/2) \leq \mu(1/4n)$ , pero  $d_{[f]}(s, T) < 1/2n \Rightarrow d_{[f]}(s, T)/2 < 1/4n$ , y si tomo un  $\delta > 0$  tal que  $\delta < \varepsilon$  y  $1/4n - \delta > d_{[f]}(s, T)/2$ , tengo que  $\mu(1/4n) - \mu(1/4n - \delta) < 0 \Rightarrow \mu(1/4n) < \mu(1/4n - \delta)$  por el teorema fundamental del cálculo, y  $\mu(1/4n - \delta) \leq \mu(d_{[f]}(s, T)/2) \Rightarrow \mu(1/4n) < \mu(d_{[f]}(s, T)/2) \Rightarrow \mu(d_{[f]}(s, z)/2) < \mu(d_{[f]}(s, T)/2)$ . Por lo tanto,  $\text{comp}(\tilde{s}, \tilde{z}) = \bigvee_{\tilde{w} \in F_\mu(T)} \text{comp}(\tilde{s}, \tilde{w}) \Rightarrow d_{[f]}(s, z) < 1/2n \Rightarrow z = \tau(s) \Rightarrow \tilde{z} = F_\mu(\tau)(\tilde{s})$ , y por lo tanto  $F_\mu(\tau)$  es la transcripción difusa canónica de  $F_\mu(S)$  a  $F_\mu(T)$ . Si  $\tau$  es biyectiva, dados  $s \in S, z \in T / \text{comp}(\tilde{s}, \tilde{z}) > \mu(1/4n)$ , si  $d_{[f]}(s, z) \geq 1/2n \Rightarrow d_{[f]}(s, z)/2 \geq 1/4n \Rightarrow \text{comp}(\tilde{s}, \tilde{z}) = \mu(d_{[f]}(s, z)/2) \leq \mu(1/4n)$  lo que es absurdo, y por lo tanto  $d_{[f]}(s, z) < 1/2n \Leftrightarrow z = \tau(s) \Leftrightarrow s = \tau^{-1}(z)$ . Recíprocamente,  $d_{[f]}(s, z) < 1/2n \Rightarrow d_{[f]}(s, z)/2 < 1/4n \Rightarrow \text{comp}(\tilde{s}, \tilde{z}) = \mu(d_{[f]}(s, z)/2) > \mu(1/4n)$  como vimos anteriormente, lo que prueba que  $\text{comp}(\tilde{s}, \tilde{z}) > \mu(1/4n) \Leftrightarrow s = \tau^{-1}(z) \Leftrightarrow \tilde{s} = F_\mu(\tau^{-1})(\tilde{z})$ . Por lo tanto  $F_\mu(\tau^{-1}) = F_\mu(\tau)^{-1}$  es la transcripción canónica de  $F_\mu(T)$  a  $F_\mu(S)$ , y en consecuencia  $F_\mu(S)$  y  $F_\mu(T)$  son canónicamente intercambiables.  $\square$

**Proposición 40.** *Sean  $\lambda, f_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $S = \{\psi \circ \phi(\lambda^k f_0)\}_{k=0}^n$  con  $\#S = n + 1$ ,  $p \in \mathbb{N}_0$ ,  $q \in \mathbb{N}$  y  $T_j = \psi \circ \phi(\lambda^j f_0) G_q$  con  $0 \leq j \leq n$ . Si  $|\log_2(\lambda) - p/q| < 1/2qm$  donde  $m = \max\{j, n-j\}$ , tenemos que existe la transcripción canónica  $\tau$  de  $S$  a  $T_j$ , está dada por  $\tau(\psi \circ \phi(\lambda^k f_0)) = \psi \circ \phi(\lambda^j f_0) e^{2\pi i(k-j)p/q}$ , y  $\Phi(\tau) > 1 - 1/q$ . En especial, si  $(p, q) = 1$  y  $q = n + 1$  se tiene además que  $S$  y  $T_j$  son canónicamente intercambiables.*

*Demostración.*  $d_{[f]}(\psi \circ \phi(\lambda^k f_0), \psi \circ \phi(\lambda^j f_0) e^{2\pi i(k-j)p/q}) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(\lambda^j f_0) \psi \circ \phi(\lambda^{k-j}), \psi \circ \phi(\lambda^j f_0) e^{2\pi i(k-j)p/q}) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(\lambda^{k-j}), \psi \circ \phi(2^{(k-j)p/q})) \leq |k-j| |\log_2(\lambda) - p/q| < |k-j|/2qm$ , pero  $0 \leq k \leq n \Rightarrow -j \leq k-j \leq n-j \Rightarrow |k-j| \leq m \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(\lambda^k f_0), \psi \circ \phi(\lambda^j f_0) e^{2\pi i(k-j)p/q}) < m/2qm = 1/2q \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(\lambda^k f_0), T_j) < 1/2q$ . Por la proposición 38, tenemos entonces que existe la transcripción canónica  $\tau$  de  $S$  a  $T_j$ , está dada por  $\tau(\psi \circ \phi(\lambda^k f_0)) = \psi \circ \phi(\lambda^j f_0) e^{2\pi i(k-j)p/q}$ , y vale que  $\Phi(\tau) > 1 - 1/q$ .

Ahora, si  $(p, q) = 1$  y  $q = n + 1$ , tenemos que  $T_j = \{\psi \circ \phi(\lambda^j f_0) e^{2\pi i(k-j)p/q}\}_{k=0}^{q-1} \Rightarrow \#T_j = q = n + 1 = \#S$  y  $\tau$  es sobreyectiva  $\Rightarrow \tau$  es biyectiva, y por lo tanto  $S$  y  $T_j$  son canónicamente intercambiables.  $\square$

*Observación 36.* Si  $\mu : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$  y  $\mu \neq 1$ , y existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\mu$  es derivable y  $\mu' < 0$  en  $(1/4q - \varepsilon, 1/4q)$ , se tiene que  $F_\mu(\tau)$  es la transcripción difusa canónica de  $F_\mu(S)$  a  $F_\mu(T_j)$ , y  $\Phi(F_\mu(\tau)) \geq \mu(1/4q)$ . En especial, si  $(p, q) = 1$  y  $q = n + 1$  se tiene además que  $F_\mu(S)$  y  $F_\mu(T_j)$  son canónicamente intercambiables.

*Observación 37.* Si  $\log_2(\lambda) \notin \mathbb{Q}$  y  $n > 0$ , usando el corolario 32, puedo encontrar  $p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}/ |\log_2(\lambda) - p/q| < 1/q^2$  y  $q \geq 2m \Rightarrow 1/q^2 \leq 1/2mq$ . En especial, si la fracción continua de  $\log_2(\lambda)$  tiene  $q_k = n+1$  para algún  $k$ , se tiene que  $|\log_2(\lambda) - p_k/q_k| < 1/q_k^2$  y  $(p_k, q_k) = 1$  (por la proposición 25); si tomamos  $j = \lfloor (n+1)/2 \rfloor \Rightarrow m = \max\{\lfloor (n+1)/2 \rfloor, n - \lfloor (n+1)/2 \rfloor\}$ , pero  $\lfloor (n+1)/2 \rfloor \leq (n+1)/2$  y  $(n+1)/2 < \lfloor (n+1)/2 \rfloor + 1 \Rightarrow (n-1)/2 < \lfloor (n+1)/2 \rfloor \Rightarrow n - \lfloor (n+1)/2 \rfloor < n - (n-1)/2 = (n+1)/2$ , por lo que  $m \leq (n+1)/2 \Rightarrow 2m \leq n+1 = q_k$ .

Estos resultados pueden generalizarse.

**Proposición 41.** Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_k, f_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $J \subseteq \mathbb{Z}^k$  un subconjunto finito no vacío,  $S = \{\psi \circ \phi(\alpha_1^{j_1} \cdots \alpha_k^{j_k} \cdot f_0)\}_{j \in J}$  con  $\#S = \#J$ ,  $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}_0$ ,  $q \in \mathbb{N}$  y  $T_h = \psi \circ \phi(\alpha_1^{h_1} \cdots \alpha_k^{h_k} \cdot f_0) G_q$  con  $h \in J$ . Si  $|\log_2(\alpha_l) - p_l/q| < 1/2qm \ \forall 1 \leq l \leq k$  donde  $m = \max_{j \in J} \{\|j - h\|_1\}$ , tenemos que existe la transcripción canónica  $\tau$  de  $S$  a  $T_h$ , está dada por  $\tau(\psi \circ \phi(\alpha_1^{j_1} \cdots \alpha_k^{j_k} \cdot f_0)) = \psi \circ \phi(\alpha_1^{h_1} \cdots \alpha_k^{h_k} \cdot f_0) e^{2\pi i(j-h) \cdot p/q}$ , y  $\Phi(\tau) > 1 - 1/q$ . En especial, si  $\{(j - h) \cdot p \bmod q\}_{j \in J} = \{0, \dots, q-1\}$  y  $q = \#J$  se tiene además que  $S$  y  $T_h$  son canónicamente intercambiables.

## 52 CAPÍTULO 3. APROXIMACIÓN MEDIANTE TEMPERAMENTOS IGUALES

*Demostración.*  $d_{[f]}(\psi \circ \phi(\alpha_1^{j_1} \cdots \alpha_k^{j_k} \cdot f_0), \psi \circ \phi(\alpha_1^{h_1} \cdots \alpha_k^{h_k} \cdot f_0) e^{2\pi i(j-h) \cdot p/q}) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(\alpha_1^{h_1} \cdots \alpha_k^{h_k} \cdot f_0) \psi \circ \phi(\alpha_1^{j_1-h_1} \cdots \alpha_k^{j_k-h_k}), \psi \circ \phi(\alpha_1^{h_1} \cdots \alpha_k^{h_k} \cdot f_0) e^{2\pi i(j-h) \cdot p/q}) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(\alpha_1^{j_1-h_1} \cdots \alpha_k^{j_k-h_k}), \psi \circ \phi(2^{(j-h) \cdot p/q})) \leq |(j_1-h_1) \log_2(\alpha_1) + \cdots + (j_k-h_k) \log_2(\alpha_k) - (j_1-h_1)p_1/q - \cdots - (j_k-h_k)p_k/q| \leq |j_1-h_1| |\log_2(\alpha_1) - p_1/q| + \cdots + |j_k-h_k| |\log_2(\alpha_k) - p_k/q| < \|j-h\|_1/2qm \leq 1/2q \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(\alpha_1^{j_1} \cdots \alpha_k^{j_k} \cdot f_0), T_h) < 1/2q$ . Por la proposición 38, tenemos entonces que existe la transcripción canónica  $\tau$  de  $S$  a  $T_h$ , está dada por  $\tau(\psi \circ \phi(\alpha_1^{j_1} \cdots \alpha_k^{j_k} \cdot f_0)) = \psi \circ \phi(\alpha_1^{h_1} \cdots \alpha_k^{h_k} \cdot f_0) e^{2\pi i(j-h) \cdot p/q}$ , y vale que  $\Phi(\tau) > 1 - 1/q$ . Ahora, si  $\{(j-h) \cdot p \bmod q\}_{j \in J} = \{0, \dots, q-1\}$  y  $q = \#J$ , tenemos que  $T_h = \{\psi \circ \phi(\alpha_1^{h_1} \cdots \alpha_k^{h_k} \cdot f_0) e^{2\pi i(j-h) \cdot p/q}\}_{j \in J} \Rightarrow \#T_h = q = \#J = \#S$  y  $\tau$  es sobreyectiva  $\Rightarrow \tau$  es biyectiva, y por lo tanto  $S$  y  $T_j$  son canónicamente intercambiables.  $\square$

*Observación 38.* Si  $\mu : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$  y  $\mu \not\equiv 1$ , y existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\mu$  es derivable y  $\mu' < 0$  en  $(1/4q - \varepsilon, 1/4q)$ , se tiene que  $F_\mu(\tau)$  es la transcripción difusa canónica de  $F_\mu(S)$  a  $F_\mu(T_h)$ , y  $\Phi(F_\mu(\tau)) \geq \mu(1/4q)$ . En especial, si  $\{(j-h) \cdot p \bmod q\}_{j \in J} = \{0, \dots, q-1\}$  y  $q = \#J$  se tiene además que  $F_\mu(S)$  y  $F_\mu(T_h)$  son canónicamente intercambiables.

*Observación 39.* La observación 29 con  $Q = 2m$  garantiza la existencia de  $p_1, \dots, p_k$  y  $q$ , con  $q \leq (2m)^k$ .

Los sistemas de afinación que se suelen usar, cumplen que los  $\alpha_l$  son de la forma  $(a_l/b_l)^{r_l/s_l}$  con  $a_l, b_l, r_l, s_l \in \mathbb{N}$  y  $(a_l, b_l) = (r_l, s_l) = 1$ . Se tiene entonces que  $\log_2(\alpha_l) = (r_l/s_l) \log_2(a_l/b_l)$ , luego  $\log_2(\alpha_l) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \log_2(a_l/b_l) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \log_2(a_l/b_l) = p/q$  con  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ , pero en tal caso,  $a_l/b_l = 2^{p/q} \Leftrightarrow a_l^q/b_l^q = 2^p \Leftrightarrow a_l^q = 2^p b_l^q$ . Si  $p \geq 0$ , se tiene que  $b_l = 1$ , pues  $(a_l, b_l) = 1$ , y por lo tanto  $a_l^q = 2^p \Rightarrow a_l = 2^k$ . Si en cambio  $p < 0 \Rightarrow 2^{-p} a_l^q = b_l^q$ , y por lo tanto  $a_l = 1 \Rightarrow 2^{-p} = b_l^q \Rightarrow b_l = 2^k$ . En consecuencia, si  $\log_2(\alpha_l) \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a_l = 2^k \text{ y } b_l = 1) \text{ o } (a_l = 1 \text{ y } b_l = 2^k)$ . Recíprocamente, si  $a_l = 2^k$  y  $b_l = 1 \Rightarrow \alpha_l = (2^k)^{r_l/s_l} = 2^{k r_l/s_l} \Rightarrow \log_2(\alpha_l) = k r_l/s_l \in \mathbb{Q}$ , y si  $a_l = 1$  y  $b_l = 2^k \Rightarrow \alpha_l = (2^{-k})^{r_l/s_l} = 2^{-k r_l/s_l} \Rightarrow \log_2(\alpha_l) = -k r_l/s_l \in \mathbb{Q}$ . Esto da un criterio para decidir de forma inmediata, si los sistemas de afinación usuales admiten infinitas aproximaciones mediante temperamentos iguales.

# Capítulo 4

## Afinación sin octavas

En este capítulo desarrollamos métodos de comparación para sistemas de afinación que no respetan la octava.

### 4.1. Afinación clásica

Hasta ahora hemos trabajado con los elementos de  $\mathbb{T}$ , pero hicimos esto porque las frecuencias estaban relacionadas por la equivalencia de octava. Por esta razón, en este capítulo trabajaremos directamente con las frecuencias.

**Definición 26.** Un *sistema de afinación* es una terna  $(S, a, b)$  donde  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}/a < b$  y  $S$  es un subconjunto finito no vacío de  $[a, b]$ . Haciendo un abuso de notación se puede referir a  $S$  como el sistema de afinación.  $[a, b]$  es el *rango* de  $S$ .

Para comparar dos sistemas de afinación pediremos que tengan el mismo rango.

**Definición 27.** Sean  $S$  y  $S'$  dos sistemas de afinación con rango  $[a, b]$ . Una *transcripción*  $\tau$  de  $S$  a  $S'$  es una función  $\tau : S \rightarrow S'$ . La *fidelidad* de  $\tau$  está dada por:

$$\Phi(\tau) = 1 - \frac{\max_{x \in S} d_f(x, \tau(x))}{\log_2(b/a)}$$

*Observación 40.*  $x, \tau(x) \in [a, b] \quad \forall x \in S \Rightarrow \phi(x), \phi(\tau(x)) \in [\log_2(a), \log_2(b)] \quad \forall x \in S \Rightarrow d_f(x, \tau(x)) = |\phi(\tau(x)) - \phi(x)| < \log_2(b) - \log_2(a) = \log_2(b/a) \quad \forall x \in S \Rightarrow 0 \leq d_f(x, \tau(x)) < \log_2(b/a) \quad \forall x \in S \Rightarrow 0 \leq \max_{x \in S} d_f(x, \tau(x)) < \log_2(b/a) \Rightarrow 0 \leq$

$$\max_{x \in S} d_f(x, \tau(x)) / \log_2(b/a) < 1 \Rightarrow 0 < \Phi(\tau) \leq 1$$

Además,  $\Phi(\tau) = 1 \Leftrightarrow 1 - \max_{x \in S} d_f(x, \tau(x)) / \log_2(b/a) = 1 \Leftrightarrow \max_{x \in S} d_f(x, \tau(x)) = 0 \Leftrightarrow d_f(x, \tau(x)) = 0 \forall x \in S \Leftrightarrow x = \tau(x) \forall x \in S$ .

**Proposición 42.** Sean  $S$ ,  $S'$  y  $S''$  tres sistemas de afinación con rango  $[a, b]$ , y transcripciones  $\tau : S \rightarrow S'$  y  $\tau' : S' \rightarrow S''$ . Entonces:

$$\Phi(\tau' \circ \tau) \geq \Phi(\tau') + \Phi(\tau) - 1$$

*Demuestra*ción. Dado  $x \in S$ ,  $d_f(x, \tau' \circ \tau(x)) \leq d_f(x, \tau(x)) + d_f(\tau(x), \tau' \circ \tau(x)) \leq \max_{x \in S} d_f(x, \tau(x)) + \max_{y \in S'} d_f(y, \tau'(y))$ , por lo que  $\max_{x \in S} d_f(x, \tau' \circ \tau(x)) \leq \max_{x \in S} d_f(x, \tau(x)) + \max_{x \in S'} d_f(x, \tau'(x)) \Leftrightarrow -\max_{x \in S} d_f(x, \tau' \circ \tau(x)) / \log_2(b/a) \geq -\max_{x \in S} d_f(x, \tau(x)) / \log_2(b/a) - \max_{x \in S'} d_f(x, \tau'(x)) / \log_2(b/a) \Leftrightarrow 2 - \max_{x \in S} d_f(x, \tau' \circ \tau(x)) / \log_2(b/a) \geq 1 - \max_{x \in S} d_f(x, \tau(x)) / \log_2(b/a) + 1 - \max_{x \in S'} d_f(x, \tau'(x)) / \log_2(b/a) \Leftrightarrow 1 + \Phi(\tau' \circ \tau) \geq \Phi(\tau') + \Phi(\tau) \Leftrightarrow \Phi(\tau' \circ \tau) \geq \Phi(\tau') + \Phi(\tau) - 1$ .  $\square$

**Definición 28.** Sean  $S$  y  $S'$  dos sistemas de afinación con el mismo rango. Si  $\forall x \in S$ ,  $\exists! y_x \in S' / d_f(x, S') = d_f(x, y_x)$ , se dice que existe la *transcripción canónica* de  $S$  a  $S'$  dada por  $\tau(x) = y_x$ .

*Observación 41.* En caso de existir la transcripción canónica, esta tiene la máxima fidelidad. En efecto, si existe la transcripción canónica  $\tau$  de  $S$  a  $S'$ , y  $\tau' : S \rightarrow S'$  es una transcripción cualquiera,  $d_f(x, \tau(x)) = d_f(x, S') \leq d_f(x, \tau'(x)) \forall x \in S \Rightarrow \max_{x \in S} d_f(x, \tau(x)) \leq \max_{x \in S} d_f(x, \tau'(x)) \Leftrightarrow -\max_{x \in S} d_f(x, \tau(x)) / \log_2(b/a) \geq -\max_{x \in S} d_f(x, \tau'(x)) / \log_2(b/a) \Leftrightarrow 1 - \max_{x \in S} d_f(x, \tau(x)) / \log_2(b/a) \geq 1 - \max_{x \in S} d_f(x, \tau'(x)) / \log_2(b/a) \Leftrightarrow \Phi(\tau) \geq \Phi(\tau')$ .

**Definición 29.** Dos sistemas de afinación,  $S$  y  $S'$ , se dicen *canónicamente intercambiables* si existen las transcripciones canónicas de  $S$  a  $S'$  y de  $S'$  a  $S$ , y ambas son inyectivas.

*Observación 42.* Si  $S$  y  $S'$  son dos sistemas de afinación canónicamente intercambiables, tienen el mismo cardinal. En efecto,  $\#S \leq \#S'$  pues la transcripción canónica de  $S$  a  $S'$  es inyectiva, y  $\#S' \leq \#S$  pues la transcripción canónica de  $S'$  a  $S$  es inyectiva, luego  $\#S = \#S'$ .

**Proposición 43.** Si  $S$  y  $S'$  son dos sistemas de afinación canónicamente intercambiables, con transcripciones canónicas  $\tau : S \rightarrow S'$  y  $\tau' : S' \rightarrow S$ , entonces una es la inversa de la otra.

*Demostración.* Lo hacemos por inducción, con  $n = \#S = \#S'$ .

El caso  $n = 1$  es trivial. Supongamos que  $n \geq 2$ :

Considero  $x \in S$  e  $y \in S'/ d_f(x, y) = d_f(S, S') \Rightarrow \tau(x) = y$  y  $\tau'(y) = x$ , y como ambas son inyectivas, tengo bien definidas  $\tau : S \setminus \{x\} \rightarrow S' \setminus \{y\}$  y  $\tau' : S' \setminus \{y\} \rightarrow S \setminus \{x\}$ .

Dado  $x' \in S \setminus \{x\}$ ,  $d_f(x', S' \setminus \{y\}) \leq d_f(x', \tau(x')) = d_f(x', S') \leq d_f(x', S' \setminus \{y\}) \Rightarrow d_f(x', \tau(x')) = d_f(x', S' \setminus \{y\}) = d_f(x', S')$ , por lo que si  $y' \in S' \setminus \{y\}/ d_f(x', y') = d_f(x', S' \setminus \{y\}) \Rightarrow y' \in S'$  y  $d_f(x', y') = d_f(x', S') \Rightarrow y' = \tau(x')$ . Por lo tanto,  $\tau : S \setminus \{x\} \rightarrow S' \setminus \{y\}$  es la transcripción canónica y es inyectiva.

Análogamente,  $\tau' : S' \setminus \{y\} \rightarrow S \setminus \{x\}$  es la transcripción canónica y es inyectiva, y por inducción tenemos que  $\tau' \circ \tau : S \setminus \{x\} \rightarrow S \setminus \{x\}$  es  $id_{S \setminus \{x\}}$  y  $\tau \circ \tau' : S' \setminus \{y\} \rightarrow S' \setminus \{y\}$  es  $id_{S' \setminus \{y\}}$ . Además, sabemos que  $\tau' \circ \tau(x) = \tau'(y) = x$  y  $\tau \circ \tau'(y) = \tau(x) = y$ , por lo que  $\tau' \circ \tau : S \rightarrow S$  es  $id_S$  y  $\tau \circ \tau' : S' \rightarrow S'$  es  $id_{S'}$ .  $\square$

**Proposición 44.** Dados  $S$  y  $S'$  dos sistemas de afinación con el mismo rango, y  $\tau$  una transcripción biyectiva de  $S$  a  $S'$ , entonces  $\Phi(\tau) = \Phi(\tau^{-1})$ .

*Demostración.* Es inmediato pues  $\{(x, \tau(x)) : x \in S\} = \{(\tau^{-1}(y), y) : y \in S'\}$ .  $\square$

**Definición 30.** Dado  $0 \leq \alpha \leq 1$ , dos sistemas de afinación  $S$  y  $S'$  canónicamente intercambiables, con transcripción canónica  $\tau : S \rightarrow S'$ , se dicen  $\alpha$ -similares si  $\Phi(\tau) \geq \alpha$ .

**Proposición 45.** Sean  $S$ ,  $S'$  y  $S''$  tres sistemas de afinación canónicamente intercambiables tomados de a dos,  $S$  y  $S'$   $\alpha$ -similares,  $S'$  y  $S''$   $\beta$ -similares. Si  $\gamma = \alpha + \beta - 1 \geq 0$ , entonces  $S$  y  $S''$  son  $\gamma$ -similares.

*Demostración.* Sean  $\tau$ ,  $\tau'$  y  $\tau''$  las transcripciones canónicas de  $S$  a  $S'$ , de  $S'$  a  $S''$  y de  $S$  a  $S''$  respectivamente. Entonces, tenemos que  $\Phi(\tau) \geq \alpha$  y  $\Phi(\tau') \geq \beta$ , y por la observación 41,  $\Phi(\tau'') \geq \Phi(\tau' \circ \tau)$ . Además, por la proposición 42, tenemos que  $\Phi(\tau' \circ \tau) \geq \Phi(\tau') + \Phi(\tau) - 1 \geq \alpha + \beta - 1 = \gamma \Rightarrow 1 \geq \Phi(\tau'') \geq \gamma$ .  $\square$

### 4.1.1. Comparación con la afinación clásica con octavas

Dados  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$  /  $a < b$ , podemos considerar  $\mathbf{Tun}_{[a,b]}$  la categoría cuyos objetos son los sistemas de afinación con rango  $[a, b)$  y cuyas flechas son las transcripciones. Además podemos definir  $E_a : \mathbf{Tun} \rightarrow \mathbf{Tun}_{[a,2a]}$  como  $E_a(S) = ((\psi \circ \phi)^{-1}(S) \cap [a, 2a], a, 2a)$ .

Si  $x, y \in [a, 2a)$  /  $\psi \circ \phi(x) = \psi \circ \phi(y) \Rightarrow \psi \circ \phi(x/y) = 1 \Rightarrow x/y = 2^k$  para algún  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2^k y$ . Pero  $a \leq y < 2a \Rightarrow 2^k a \leq x < 2^{k+1} a \Rightarrow 2^k a \leq x < 2a$  y  $a \leq x < 2^{k+1} a \Rightarrow k < 1$  y  $0 < k + 1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = y$ , es decir  $\psi \circ \phi : [a, 2a) \rightarrow \mathbb{T}$  es inyectiva. Ahora, si tomamos  $z \in \mathbb{T} \Rightarrow z = e^{2\pi i t}$  para algún  $t \in \mathbb{R}$ , y si consideramos  $2^{t - \lfloor t - \log_2(a) \rfloor} \in \mathbb{R}_{>0}$  tenemos que  $\lfloor t - \log_2(a) \rfloor \leq t - \log_2(a) < \lfloor t - \log_2(a) \rfloor + 1 \Leftrightarrow \log_2(a) \leq t - \lfloor t - \log_2(a) \rfloor < \log_2(a) + 1 \Leftrightarrow a \leq 2^{t - \lfloor t - \log_2(a) \rfloor} < 2a$ , y además,  $\psi \circ \phi(2^{t - \lfloor t - \log_2(a) \rfloor}) = \psi(t - \lfloor t - \log_2(a) \rfloor) = e^{2\pi i t} = z$ , por lo que  $\psi \circ \phi : [a, 2a) \rightarrow \mathbb{T}$  es sobreyectiva. Luego, tenemos la biyección  $\sigma_a = \psi \circ \phi|_{[a,2a)}$ , que induce biyecciones  $\sigma_a : (\psi \circ \phi)^{-1}(S) \cap [a, 2a) \rightarrow S$ , y dada una transcripción  $\tau : S \rightarrow S'$  en  $\mathbf{Tun}$  podemos definir  $E_a(\tau) : (\psi \circ \phi)^{-1}(S) \cap [a, 2a) \rightarrow (\psi \circ \phi)^{-1}(S') \cap [a, 2a)$  como  $E_a(\tau) = \sigma_a^{-1} \circ \tau \circ \sigma_a$ .  $E_a$  define un functor:  $E_a(\text{id}_S) = \sigma_a^{-1} \circ \text{id}_S \circ \sigma_a = \text{id}_{(\psi \circ \phi)^{-1}(S) \cap [a, 2a)} = \text{id}_{E_a(S)}$ , y  $E_a(\tau') \circ E_a(\tau) = \sigma_a^{-1} \circ \tau' \circ \sigma_a \circ \sigma_a^{-1} \circ \tau \circ \sigma_a = \sigma_a^{-1} \circ \tau' \circ \tau \circ \sigma_a = E_a(\tau' \circ \tau)$ .

Además, dados  $a \in \mathbb{R}_{>0}, n \in \mathbb{N}$ , se puede definir  $E_a^n : \mathbf{Tun} \rightarrow \mathbf{Tun}_{[a,2^na]}$  como  $E_a^n(S) = ((\psi \circ \phi)^{-1}(S) \cap [a, 2^na], a, 2^na)$ , y si  $\tau : S \rightarrow S'$  es una transcripción en  $\mathbf{Tun}$ , se puede definir  $E_a^n(\tau) : (\psi \circ \phi)^{-1}(S) \cap [a, 2^na] \rightarrow (\psi \circ \phi)^{-1}(S') \cap [a, 2^na]$  como  $E_a^n(\tau)|_{[2^ka,2^{k+1}a]} = E_{2^k a}(\tau) \forall 0 \leq k < n$ .  $E_a^n$  así definido resulta un functor:  $E_a^n(\text{id}_S)|_{[2^ka,2^{k+1}a]} = E_{2^k a}(\text{id}_S) = \text{id}_{(\psi \circ \phi)^{-1}(S) \cap [2^ka,2^{k+1}a]} \forall 0 \leq k < n \Rightarrow E_a^n(\text{id}_S) = \text{id}_{(\psi \circ \phi)^{-1}(S) \cap [a, 2^na]} = \text{id}_{E_a^n(S)}$ , y  $E_a^n(\tau' \circ \tau)|_{[2^ka,2^{k+1}a]} = E_{2^k a}(\tau' \circ \tau) = E_{2^k a}(\tau') \circ E_{2^k a}(\tau) = E_a^n(\tau')|_{[2^ka,2^{k+1}a]} \circ E_a^n(\tau)|_{[2^ka,2^{k+1}a]} \forall 0 \leq k < n \Rightarrow E_a^n(\tau' \circ \tau) = E_a^n(\tau') \circ E_a^n(\tau)$ .

**Proposición 46.** Sean  $a \in \mathbb{R}_{>0}, n \in \mathbb{N}$ , y consideremos  $\tau : S \rightarrow S'$  en  $\mathbf{Tun}$ . Vale que:

$$1 - n(1 - \Phi(E_a^n(\tau))) = \Phi(E_a(\tau)) \leq \frac{1 + \Phi(\tau)}{2}$$

*Demostración.* Tenemos que  $\{(x, E_a(\tau)(x)) : x \in (\psi \circ \phi)^{-1}(S) \cap [a, 2a)\} \subseteq \{(x, E_a^n(\tau)(x)) : x \in (\psi \circ \phi)^{-1}(S) \cap [a, 2^na]\}$  pues  $E_a^n(\tau)|_{[a,2a)} = E_a(\tau)$ , y por lo tanto  $\max_{x \in E_a(S)} d_f(x, E_a(\tau)(x)) \leq \max_{x \in E_a(S)} d_f(x, E_a^n(\tau)(x))$ . Pero si  $x \in E_a^n(S)$ , tenemos que  $\lfloor \log_2(x/a) \rfloor \leq \log_2(x/a) < \lfloor \log_2(x/a) \rfloor + 1 \Leftrightarrow 2^{\lfloor \log_2(x/a) \rfloor} a \leq x < 2^{\lfloor \log_2(x/a) \rfloor + 1} a \Leftrightarrow a \leq 2^{-\lfloor \log_2(x/a) \rfloor} x < 2a$ , y  $\psi \circ \phi(2^{-\lfloor \log_2(x/a) \rfloor} x) = \psi(\log_2(x) - \lfloor \log_2(x/a) \rfloor) = \psi(\log_2(x)) = \psi \circ \phi(x) \in S$ , por lo que

$2^{-\lfloor \log_2(x/a) \rfloor} x \in (\psi \circ \phi)^{-1}(S) \cap [a, 2a]$ . Además,  $E_a(\tau)(2^{-\lfloor \log_2(x/a) \rfloor} x) = \sigma_a^{-1}(\tau(\psi \circ \phi(x)))$ , pero si llamamos  $k = \lfloor \log_2(x/a) \rfloor$ , anteriormente vimos que  $x \in [2^k a, 2^{k+1} a]$ , por lo que  $E_a^n(\tau)(x) \in [2^k a, 2^{k+1} a] \Rightarrow 2^{-k} E_a^n(\tau)(x) \in [a, 2a]$  y  $\psi \circ \phi(2^{-k} E_a^n(\tau)(x)) = \psi(\log_2(E_a^n(\tau)(x)) - k) = \psi(\log_2(\sigma_{2^k a}^{-1}(\tau(\psi \circ \phi(x))))) = \tau(\psi \circ \phi(x)) \Rightarrow E_a(\tau)(2^{-k} x) = 2^{-k} E_a^n(\tau)(x)$ . Por último,  $d_f(2^{-k} x, 2^{-k} E_a^n(\tau)(x)) = |\phi(2^{-k} E_a^n(\tau)(x)) - \phi(2^{-k} x)| = |\log_2(E_a^n(\tau)(x)) - k - \log_2(x) + k| = |\phi(E_a^n(\tau)(x)) - \phi(x)| = d_f(x, E_a^n(\tau)(x))$ , por lo que  $\max_{x \in E_a(S)} d_f(x, E_a(\tau)(x)) \geq \max_{x \in E_a^n(S)} d_f(x, E_a^n(\tau)(x)) \Rightarrow \max_{x \in E_a(S)} d_f(x, E_a(\tau)(x)) = \max_{x \in E_a^n(S)} d_f(x, E_a^n(\tau)(x))$ , pero  $\Phi(E_a^n(\tau)) = 1 - \max_{x \in E_a^n(S)} d_f(x, E_a^n(\tau)(x))/n \Leftrightarrow \max_{x \in E_a^n(S)} d_f(x, E_a^n(\tau)(x)) = n(1 - \Phi(E_a^n(\tau)))$ , por lo que  $\Phi(E_a(\tau)) = 1 - \max_{x \in E_a(S)} d_f(x, E_a(\tau)(x)) = 1 - n(1 - \Phi(E_a^n(\tau)))$ .

Dado  $x \in E_a(S)$ , tenemos que  $d_f(x, E_a(\tau)(x)) \geq d_f([x], [E_a(\tau)(x)]) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \psi \circ \phi(E_a(\tau)(x)))$ , pero  $\psi \circ \phi(E_a(\tau)(x)) = \tau(\psi \circ \phi(x))$ , por lo que  $d_f(x, E_a(\tau)(x)) \geq d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \tau(\psi \circ \phi(x))) \Rightarrow \max_{x \in E_a(S)} d_f(x, E_a(\tau)(x)) \geq \max_{x \in E_a(S)} d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \tau(\psi \circ \phi(x))) = \max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau(z)) \Rightarrow 1 - \Phi(E_a(\tau)) \geq (1 - \Phi(\tau))/2 \Rightarrow \Phi(E_a(\tau)) \leq 1 - (1 - \Phi(\tau))/2 = (1 + \Phi(\tau))/2$ .  $\square$

**Proposición 47.** *Sea  $a \in \mathbb{R}_{>0}$ , si existe la transcripción canónica de  $S$  a  $S'$  en **Tun**, entonces existe la transcripción canónica de  $E_a(S)$  a  $E_a(S')$  en **Tun**<sub>[a, 2a]</sub>.*

*Demostración.* Supongamos que no existe la transcripción canónica de  $E_a(S)$  a  $E_a(S')$ . Entonces  $\exists x \in E_a(S)$ ,  $y, z \in E_a(S') / y \neq z$  y  $d_f(x, y) = d_f(x, z) = d_f(x, E_a(S')) \Rightarrow |\phi(y) - \phi(x)| = |\phi(z) - \phi(x)| = d_f(x, E_a(S'))$ , lo que da dos posibilidades:

- $\phi(y) - \phi(x) = \phi(z) - \phi(x) \Rightarrow \phi(y) = \phi(z) \Rightarrow y = z$ , lo cual es absurdo.
- $\phi(y) - \phi(x) = -\phi(z) + \phi(x) \Rightarrow \phi(z) = 2\phi(x) - \phi(y) = \phi(x^2/y) \Rightarrow z = x^2/y$

Si  $y = x \Rightarrow 0 = d_f(x, y) = d_f(x, z) \Rightarrow z = x \Rightarrow y = z$ , lo cual es absurdo. Por lo tanto,  $y \neq x$ . Si  $y > x \Rightarrow yx > x^2 \Rightarrow x > x^2/y = z$ , por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $y < x \Rightarrow xy < x^2 \Rightarrow x < x^2/y = z$ . Tenemos entonces que  $a \leq y < x < z < 2a \Rightarrow \phi(a) \leq \phi(y) < \phi(x) < \phi(z) < \phi(2a) = 1 + \phi(a) \Rightarrow \phi(a) - \phi(x) \leq \phi(y) - \phi(x) < 0 < \phi(z) - \phi(x) < 1 + \phi(a) - \phi(x) \Rightarrow |\phi(y) - \phi(x)| = \phi(x) - \phi(y) \leq \phi(x) - \phi(a)$  y  $|\phi(z) - \phi(x)| = \phi(z) - \phi(x) < 1 + \phi(a) - \phi(x)$ , por lo que  $2|\phi(y) - \phi(x)| = 2|\phi(z) - \phi(x)| = |\phi(y) - \phi(x)| + |\phi(z) - \phi(x)| < \phi(x) - \phi(a) + 1 + \phi(a) - \phi(x) = 1 \Rightarrow |\phi(y) - \phi(x)| =$

$|\phi(z) - \phi(x)| < 1/2 \Rightarrow 0 < \phi(x) - \phi(y) = \phi(z) - \phi(x) < 1/2 \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \psi \circ \phi(y)) = \phi(x) - \phi(y) < 1/2$  y  $d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \psi \circ \phi(z)) = \phi(z) - \phi(x) < 1/2$ , por lo que  $d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \psi \circ \phi(y)) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \psi \circ \phi(z)) = d_f(x, E_a(S'))$  con  $\psi \circ \phi(x) \in S$ ,  $\psi \circ \phi(y), \psi \circ \phi(z) \in S'$  /  $\psi \circ \phi(y) \neq \psi \circ \phi(z)$ . Pero  $d_f(x, E_a(S')) = d_f(x, (\psi \circ \phi)^{-1}(S') \cap [a, 2a])$ , y como  $a \leq y < x < z < 2a$  tenemos que  $d_f(x, (\psi \circ \phi)^{-1}(S') \cap [a, 2a]) = d_f(x, (\psi \circ \phi)^{-1}(S')) = \min_{t \in (\psi \circ \phi)^{-1}(S')} d_f(x, t)$ , y  $(\psi \circ \phi)^{-1}(S') = \bigcup_{s \in S'} (\psi \circ \phi)^{-1}(s) \Rightarrow \min_{t \in (\psi \circ \phi)^{-1}(S')} d_f(x, t) = \min_{s \in S'} \min_{t \in (\psi \circ \phi)^{-1}(s)} d_f(x, t) = \min_{s \in S'} d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), s) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), S')$ , lo cual es absurdo pues, por hipótesis, existe la transcripción canónica de  $S$  a  $S'$ .  $\square$

*Observación 43.* Que  $\tau$  sea la transcripción canónica de  $S$  a  $S'$  en **Tun**, no implica que  $E_a(\tau)$  sea la transcripción canónica de  $E_a(S)$  a  $E_a(S')$  en **Tun**<sub>[a, 2a]</sub>. Por ejemplo, si tomamos  $S = \{-i\}$ ,  $S' = \{1, i\}$  y  $a = 1$ , se tiene que  $\psi \circ \phi(1) = \psi(0) = 1$ ,  $\psi \circ \phi(2^{1/4}) = \psi(1/4) = i$ ,  $\psi \circ \phi(2^{3/4}) = \psi(3/4) = -i$ , y  $1, 2^{1/4}, 2^{3/4} \in [1, 2]$ , por lo que  $E_a(S) = \{2^{3/4}\}$  y  $E_a(S') = \{1, 2^{1/4}\}$ . Luego,  $d_f(2^{1/4}, 2^{3/4}) = |3/4 - 1/4| = 1/2$  y  $d_f(1, 2^{3/4}) = |3/4 - 0| = 3/4$ , por lo que la transcripción canónica de  $E_a(S)$  a  $E_a(S')$  es aquella que asigna  $2^{3/4} \mapsto 2^{1/4}$ . Sin embargo,  $d_{[f]}(1, -i) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(1), \psi \circ \phi(2^{3/4})) = \min\{\{\log_2(2^{3/4})\}, 1 - \{\log_2(2^{3/4})\}\} = \min\{3/4, 1/4\} = 1/4$ ,  $d_{[f]}(i, -i) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(2^{1/4}), \psi \circ \phi(2^{3/4})) = \min\{\{\log_2(2^{1/2})\}, 1 - \{\log_2(2^{1/2})\}\} = \min\{1/2, 1/2\} = 1/2$ , por lo que  $\tau(-i) = 1 \Rightarrow E_a(\tau)(2^{3/4}) = 1$ .

*Observación 44.* En general, que exista la transcripción canónica de  $S$  a  $S'$  en **Tun**, no garantiza que exista la transcripción canónica de  $E_a^n(S)$  a  $E_a^n(S')$  en **Tun**<sub>[a, 2<sup>n</sup>a]</sub>. Por ejemplo, si tomamos  $S = \{1\}$  y  $S' = \{-1\}$ , es obvio que existe la transcripción canónica de  $S$  a  $S'$ , pero si  $n \geq 2$ , se tiene que  $\lfloor -\log_2(a) \rfloor \leq -\log_2(a) < \lfloor -\log_2(a) \rfloor + 1 \Rightarrow \log_2(a) \leq -\lfloor -\log_2(a) \rfloor < 1 + \log_2(a) = \log_2(2a) \Rightarrow a \leq 2^{-\lfloor -\log_2(a) \rfloor} < 2a \Rightarrow 2a \leq 2^{1-\lfloor -\log_2(a) \rfloor} < 4a$ , y  $\psi \circ \phi(2^{1-\lfloor -\log_2(a) \rfloor}) = \psi(1 - \lfloor -\log_2(a) \rfloor) = 1$ , mientras que  $\lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor \leq 1/2 - \log_2(a) < \lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor + 1 \Rightarrow \log_2(a) - 1/2 \leq -\lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor < 1/2 + \log_2(a) \Rightarrow \log_2(a) \leq 1/2 - \lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor < 1 + \log_2(a) = \log_2(2a) \Rightarrow a \leq 2^{1/2 - \lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor} < 2a \Rightarrow 2a \leq 2^{3/2 - \lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor} < 4a$ , y  $\psi \circ \phi(2^{1/2 - \lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor}) = \psi \circ \phi(2^{3/2 - \lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor}) = \psi(1/2 - \lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor) = \psi(1/2) = -1$ . Por último,  $d_f(2^{1-\lfloor -\log_2(a) \rfloor}, 2^{1/2 - \lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor}) = |1/2 - \lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor - 1 + \lfloor -\log_2(a) \rfloor| = | -1/2 - \lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor + \lfloor -\log_2(a) \rfloor |$  y  $d_f(2^{1-\lfloor -\log_2(a) \rfloor}, 2^{3/2 - \lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor}) = |3/2 - \lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor - 1 + \lfloor -\log_2(a) \rfloor | = |1/2 - \lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor + \lfloor -\log_2(a) \rfloor |$ . Si tomamos  $a \in$

$\mathbb{R}_{>0}/ \lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor = \lfloor -\log_2(a) \rfloor$ , por ejemplo  $a = 1 \Rightarrow \lfloor 1/2 - \log_2(1) \rfloor = \lfloor 1/2 \rfloor = 0$  y  $\lfloor -\log_2(1) \rfloor = \lfloor 0 \rfloor = 0$ , tenemos entonces que  $d_f(2^{1-\lfloor -\log_2(a) \rfloor}, 2^{1/2-\lfloor 1/2-\log_2(a) \rfloor}) = d_f(2^{1-\lfloor -\log_2(a) \rfloor}, 2^{3/2-\lfloor 1/2-\log_2(a) \rfloor}) = 1/2$ , y  $d_f(2^{1-\lfloor -\log_2(a) \rfloor}, E_a^n(S')) = d_f(2^{1-\lfloor -\log_2(a) \rfloor}, (\psi \circ \phi)^{-1}(S') \cap [a, 2^n a]) = d_f(2^{1-\lfloor -\log_2(a) \rfloor}, (\psi \circ \phi)^{-1}(S')) = d_f(2^{1-\lfloor -\log_2(a) \rfloor}, (\psi \circ \phi)^{-1}(-1)) = d_{[f]}(1, -1) = 1/2$ , pues  $2^{1/2-\lfloor 1/2-\log_2(a) \rfloor} = 2^{1/2-\lfloor -\log_2(a) \rfloor}, 2^{3/2-\lfloor 1/2-\log_2(a) \rfloor} = 2^{3/2-\lfloor -\log_2(a) \rfloor}$  y  $a \leq 2^{1/2-\lfloor -\log_2(a) \rfloor} < 2^{1-\lfloor -\log_2(a) \rfloor} < 2^{3/2-\lfloor -\log_2(a) \rfloor} < 4a \leq 2^n a$ . Luego, no existe la transcripción canónica de  $E_a^n(S)$  a  $E_a^n(S')$ .

**Proposición 48.** *Sea  $\tau$  la transcripción canónica de  $S$  a  $S'$  en  $\mathbf{Tun}$  y  $\#S' > 1$ , entonces  $\exists a \in \mathbb{R}_{>0}/ E_a^n(\tau)$  es la transcripción canónica de  $E_a^n(S)$  a  $E_a^n(S')$  en  $\mathbf{Tun}_{[a, 2^n a)}$   $\forall n \in \mathbb{N}$ , y también:*

$$\Phi(E_a^n(\tau)) = 1 - \frac{1 - \Phi(\tau)}{2n}$$

*En caso de que  $S$  y  $S'$  sean canónicamente intercambiables, se puede elegir  $a$  de manera que  $E_a^n(S)$  y  $E_a^n(S')$  sean canónicamente intercambiables  $\forall n \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Sea  $z \in \tau(S)$ , y sea  $y \in \mathbb{R}_{>0}/ \psi \circ \phi(y) = z$ . Definimos  $a = \min\{t \in [y/\sqrt{2}, \sqrt{2}y)/ \psi \circ \phi(t) \in \tau^{-1}(z) \cup \{z\}\}$  y  $b = \max\{t \in [y/\sqrt{2}, \sqrt{2}y)/ \psi \circ \phi(t) \in \tau^{-1}(z) \cup \{z\}\} \Rightarrow a \leq y \leq b < 2a$ , pues  $y/\sqrt{2} \leq a \Rightarrow \sqrt{2}y \leq 2a \Rightarrow b < \sqrt{2}y \leq 2a$ .

Dado  $x \in E_{2^k a}(S)$ , se tiene que  $d_f(x, E_{2^k a}(\tau)(x)) < 1/2$ . En efecto, si  $d_f(x, E_{2^k a}(\tau)(x)) = 1/2 \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \tau(\psi \circ \phi(x))) = 1/2$ , y como  $\#S' > 1 \Rightarrow \exists s \in S'/ s \neq \tau(\psi \circ \phi(x)) \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), s) \leq 1/2 = d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \tau(\psi \circ \phi(x))) \Rightarrow s = \tau(\psi \circ \phi(x))$ , lo que es absurdo. Por otro lado, si  $d_f(x, E_{2^k a}(\tau)(x)) > 1/2 \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \tau(\psi \circ \phi(x))) = 1 - d_f(x, E_{2^k a}(\tau)(x))$ , pues  $x, E_{2^k a}(\tau)(x) \in [2^k a, 2^{k+1} a) \Rightarrow d_f(x, E_{2^k a}(\tau)(x)) < d_f(2^k a, 2^{k+1} a) = 1$ , y aquí hay dos posibilidades:

1.  $x < E_{2^k a}(\tau)(x) \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \tau(\psi \circ \phi(x))) = 1 - \phi(E_{2^k a}(\tau)(x)) + \phi(x) = \phi(x) - \phi(E_{2^k a}(\tau)(x)/2) = d_f(x, E_{2^k a}(\tau)(x)/2)$  y  $E_{2^k a}(\tau)(x) < 2^{k+1} a \Rightarrow E_{2^k a}(\tau)(x)/2 < 2^k a$ . Si  $2^k y \leq x \Rightarrow d_f(x, 2^k y) < d_f(x, E_{2^k a}(\tau)(x)/2) \leq 1/2 \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), z) < d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \tau(\psi \circ \phi(x)))$ , lo cual es absurdo. Por lo tanto,  $E_{2^k a}(\tau)(x)/2 < 2^k a \leq x < 2^k y \Rightarrow \phi(2^k y) - \phi(2^k a) = d_f(2^k y, 2^k a) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(a), z) \leq d_{[f]}(\psi \circ \phi(a), \tau(\psi \circ \phi(x))) = d_f(2^k a, E_{2^k a}(\tau)(x)/2) = \phi(2^k a) - \phi(E_{2^k a}(\tau)(x)/2)$  y  $\phi(x) - \phi(E_{2^k a}(\tau)(x)/2) = d_f(x, E_{2^k a}(\tau)(x)/2) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \tau(\psi \circ \phi(x))) \leq d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), z) = d_f(x, 2^k y) = \phi(2^k y) - \phi(x) \Rightarrow \phi(x) - \phi(E_{2^k a}(\tau)(x)/2) - \phi(2^k a) \leq$

$\phi(2^k y) - \phi(x) - \phi(2^k a) \leq \phi(2^k a) - \phi(E_{2^k a}(\tau)(x)/2) - \phi(x) \Rightarrow 2\phi(x) \leq 2\phi(2^k a) \Rightarrow x \leq 2^k a \Rightarrow x = 2^k a \Rightarrow E_{2^k a}(\tau)(x) = E_{2^k a}(\tau)(2^k a) = 2^k y \Rightarrow d_f(x, E_{2^k a}(\tau)(x)) = d_f(2^k a, 2^k y) \leq 1/2$ , lo cual es absurdo.

2.  $E_{2^k a}(\tau)(x) < x \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \tau(\psi \circ \phi(x))) = 1 - \phi(x) + \phi(E_{2^k a}(\tau)(x)) = \phi(E_{2^k a}(\tau)(x)) - \phi(x/2) = d_f(x/2, E_{2^k a}(\tau)(x))$  y  $x < 2^{k+1} a \Rightarrow x/2 < 2^k a$ . Aquí hay dos posibilidades:

a)  $2^k y \leq E_{2^k a}(\tau)(x) \Rightarrow d_f(x/2, 2^k y) \leq d_f(x/2, E_{2^k a}(\tau)(x)) \leq 1/2 \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), z) \leq d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \tau(\psi \circ \phi(x))) \Rightarrow z = \tau(\psi \circ \phi(x)) \Rightarrow E_{2^k a}(\tau)(x) = 2^k y$ . Si  $2^{k-1/2} y \leq x/2 \Rightarrow y/\sqrt{2} \leq x/2^{k+1} < a$  y  $\tau(\psi \circ \phi(x/2^{k+1})) = \tau(\psi \circ \phi(x)) = z$ , lo que es absurdo por la definición de  $a$ . Luego,  $x/2 < 2^{k-1/2} y \Rightarrow x < 2^{k+1/2} y \Rightarrow 2^{k-1/2} y \leq 2^k a \leq x < 2^{k+1/2} y \Rightarrow y/\sqrt{2} \leq x/2^k < \sqrt{2} y$  y  $\tau(\psi \circ \phi(x/2^k)) = \tau(\psi \circ \phi(x)) = z \Rightarrow x/2^k \leq b \Rightarrow x \leq 2^k b$ . Si  $2^k a \leq x \leq 2^k y \Rightarrow d_f(x, E_{2^k a}(\tau)(x)) = d_f(x, 2^k y) \leq d_f(2^k a, 2^k y) = d_f(a, y) \leq d_f(y/\sqrt{2}, y) = 1/2$ , mientras que si  $2^k y \leq x \leq 2^k b \Rightarrow d_f(x, E_{2^k a}(\tau)(x)) = d_f(x, 2^k y) \leq d_f(2^k y, 2^k b) = d_f(y, b) \leq d_f(y, \sqrt{2} y) = 1/2$ , es decir,  $d_f(x, E_{2^k a}(\tau)(x)) \leq 1/2$ , lo cual es absurdo.

b)  $E_{2^k a}(\tau)(x) < 2^k y \Rightarrow d_f(2^k a, E_{2^k a}(\tau)(x)) < d_f(2^k a, 2^k y) \leq 1/2 \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(a), \tau(\psi \circ \phi(x))) < d_{[f]}(\psi \circ \phi(a), z)$ , lo que es absurdo.

Luego,  $d_f(x, E_{2^k a}(\tau)(x)) < 1/2 \Rightarrow d_f(x, E_{2^k a}(\tau)(x)) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \tau(\psi \circ \phi(x))) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), S') = d_f(x, (\psi \circ \phi)^{-1}(S')) \leq d_f(x, (\psi \circ \phi)^{-1}(S') \cap [a, 2^n a]) = d_f(x, E_a^n(S')) \leq d_f(x, E_{2^k a}(\tau)(x)) \Rightarrow d_f(x, E_{2^k a}(\tau)(x)) = d_f(x, E_a^n(S')) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), S') < 1/2$ . Si  $w \in E_a^n(S') / d_f(x, w) = d_f(x, E_a^n(S'))$  y  $w \neq E_{2^k a}(\tau)(x) \Rightarrow \phi(x) - \phi(E_{2^k a}(\tau)(x)) = \phi(w) - \phi(x) \Rightarrow w = x^2/E_{2^k a}(\tau)(x) \Rightarrow \psi \circ \phi(w) = \psi \circ \phi(x)^2/\tau(\psi \circ \phi(x))$  y  $d_f(x, w) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), S') < 1/2 \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \psi \circ \phi(w)) = d_f(x, w) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), S') \Rightarrow \psi \circ \phi(w) = \tau(\psi \circ \phi(x)) \Rightarrow \psi \circ \phi(x)^2/\tau(\psi \circ \phi(x)) = \tau(\psi \circ \phi(x)) \Rightarrow \psi \circ \phi(x)^2 = \tau(\psi \circ \phi(x))^2$ . Si  $\psi \circ \phi(x) = \tau(\psi \circ \phi(x)) \Rightarrow d_f(x, w) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), S') = d_f(x, E_{2^k a}(\tau)(x)) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \tau(\psi \circ \phi(x))) = 0 \Rightarrow w = x = E_{2^k a}(\tau)(x)$ , lo cual es absurdo, mientras que si  $-\psi \circ \phi(x) = \tau(\psi \circ \phi(x)) \Rightarrow \psi \circ \phi(\sqrt{2}x) = \psi(1/2 + \phi(x)) = -\psi \circ \phi(x) = \tau(\psi \circ \phi(x))$ , y  $d_f(x, \sqrt{2}x) = \phi(\sqrt{2}x) - \phi(x) = 1/2 \Rightarrow d_f(x, E_{2^k a}(\tau)(x)) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \tau(\psi \circ \phi(x))) = d_f(x, \sqrt{2}x) = 1/2$ , lo que también es absurdo. Luego,  $E_a^n(\tau)$  es la transcripción canónica

de  $E_a^n(S)$  a  $E_a^n(S')$ , y tenemos que  $d_f(x, E_{2^k a}(\tau)(x)) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \tau(\psi \circ \phi(x))) \forall x \in E_a^n(S) \Rightarrow \max_{x \in E_a^n(S)} d_f(x, E_{2^k a}(\tau)(x)) = \max_{s \in S} d_{[f]}(s, \tau(s)) \Rightarrow n(1 - \Phi(E_a^n(\tau))) = (1 - \Phi(\tau))/2 \Rightarrow \Phi(E_a^n(\tau)) = 1 - (1 - \Phi(\tau))/2n$ .

Por último, si  $S$  y  $S'$  son canónicamente intercambiables, se tiene que  $a = \min\{t \in [y/\sqrt{2}, \sqrt{2}y] / \psi \circ \phi(t) \in \{z, \tau^{-1}(z)\}\}$ . Si  $a = y/\sqrt{2} \Rightarrow d_f(a, y) = d_f(y/\sqrt{2}, y) = 1/2 \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(a), \psi \circ \phi(y)) = 1/2 \Rightarrow d_{[f]}(\tau^{-1}(z), z) = 1/2$ , pero como  $\#S' > 1, \exists s \in S' / s \neq z \Rightarrow d_{[f]}(\tau^{-1}(z), s) \leq 1/2 = d_{[f]}(\tau^{-1}(z), z) \Rightarrow s = z$ , lo que es absurdo. Por lo tanto,  $y/\sqrt{2} < a < \sqrt{2}y \Rightarrow a/\sqrt{2} < y < \sqrt{2}a$  y de la misma forma  $b/\sqrt{2} < y < \sqrt{2}b$ . Aquí hay dos posibilidades:

- $a < y \Rightarrow \psi \circ \phi(a) = \tau^{-1}(z)$ , pues  $\psi \circ \phi : [y/\sqrt{2}, \sqrt{2}y] \rightarrow \mathbb{T}$  es una biyección, y por lo tanto  $\{t \in [a/\sqrt{2}, \sqrt{2}a] / \psi \circ \phi(t) \in \{\tau^{-1}(z), \tau(\tau^{-1}(z))\}\} = \{a, y\}$ , pues  $\psi \circ \phi : [a/\sqrt{2}, \sqrt{2}a] \rightarrow \mathbb{T}$  es una biyección. Luego,  $\min\{t \in [a/\sqrt{2}, \sqrt{2}a] / \psi \circ \phi(t) \in \{\tau^{-1}(z), \tau(\tau^{-1}(z))\}\} = a$ , y  $E_a^n(\tau^{-1})$  es la transcripción canónica de  $E_a^n(S')$  a  $E_a^n(S) \forall n \in \mathbb{N}$ .
- $a = y \Rightarrow \psi \circ \phi(b) = \tau^{-1}(z)$ , pues  $\psi \circ \phi : [y/\sqrt{2}, \sqrt{2}y] \rightarrow \mathbb{T}$  es una biyección, y por lo tanto  $\{t \in [b/\sqrt{2}, \sqrt{2}b] / \psi \circ \phi(t) \in \{\tau^{-1}(z), \tau(\tau^{-1}(z))\}\} = \{y, b\}$ , pues  $\psi \circ \phi : [b/\sqrt{2}, \sqrt{2}b] \rightarrow \mathbb{T}$  es una biyección. Luego,  $\min\{t \in [b/\sqrt{2}, \sqrt{2}b] / \psi \circ \phi(t) \in \{\tau^{-1}(z), \tau(\tau^{-1}(z))\}\} = y = a$ , y  $E_a^n(\tau^{-1})$  es la transcripción canónica de  $E_a^n(S')$  a  $E_a^n(S) \forall n \in \mathbb{N}$ .

Además, como  $E_a^n(\tau)|_{[2^k a, 2^{k+1} a]} = \sigma_{2^k a}^{-1} \circ \tau \circ \sigma_{2^k a}$  y  $\tau$  es inyectiva,  $E_a^n(\tau)$  es inyectiva: si  $E_a^n(\tau)(z) = E_a^n(\tau)(s) \in [2^k a, 2^{k+1} a] \Rightarrow z, s \in [2^k a, 2^{k+1} a]$  y  $\sigma_{2^k a}^{-1} \circ \tau \circ \sigma_{2^k a}(z) = \sigma_{2^k a}^{-1} \circ \tau \circ \sigma_{2^k a}(s) \Rightarrow z = s$ . Análogamente,  $E_a^n(\tau^{-1})$  es inyectiva, por lo que  $E_a^n(S)$  y  $E_a^n(S')$  resultan canónicamente intercambiables.  $\square$

*Observación 45.* El ejemplo de la observación anterior, muestra que esto último no es cierto si  $\#S' = 1$ . Dado  $x \in \mathbb{R}$ , se tiene que  $1/2 + x > x \geq \lfloor x \rfloor \Rightarrow \lfloor 1/2 + x \rfloor \geq \lfloor x \rfloor$ , y además,  $1/2 + x < 1/2 + 1 + \lfloor x \rfloor < 2 + \lfloor x \rfloor \Rightarrow \lfloor 1/2 + x \rfloor \leq 1 + \lfloor x \rfloor$ , por lo que  $\lfloor 1/2 + x \rfloor - \lfloor x \rfloor$  es 1 o 0. Ya vimos que pasa si  $\lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor - \lfloor -\log_2(a) \rfloor$  es 0. En el caso en que sea 1, se tiene que  $d_f(2^{-\lfloor -\log_2(a) \rfloor}, 2^{1/2 - \lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor}) = |1/2 - \lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor + \lfloor -\log_2(a) \rfloor| = |1/2 - 1| = |-1/2| = 1/2$  y  $d_f(2^{-\lfloor -\log_2(a) \rfloor}, 2^{3/2 - \lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor}) = |3/2 - \lfloor 1/2 - \log_2(a) \rfloor + \lfloor -\log_2(a) \rfloor| = |3/2 - 1| = |1/2| = 1/2$ , y  $d_f(2^{-\lfloor -\log_2(a) \rfloor}, E_a^n(S')) = d_f(2^{-\lfloor -\log_2(a) \rfloor}, (\psi \circ$

$\phi)^{-1}(S') \cap [a, 2^n a]) = d_f(2^{-\lfloor -\log_2(a) \rfloor}, (\psi \circ \phi)^{-1}(S')) = d_f(2^{-\lfloor -\log_2(a) \rfloor}, (\psi \circ \phi)^{-1}(-1)) = d_{[f]}(1, -1) = 1/2$ , pues  $2^{1/2-\lfloor 1/2-\log_2(a) \rfloor} = 2^{-1/2-\lfloor -\log_2(a) \rfloor}$ ,  $2^{3/2-\lfloor 1/2-\log_2(a) \rfloor} = 2^{1/2-\lfloor -\log_2(a) \rfloor}$  y  $a \leq 2^{-1/2-\lfloor -\log_2(a) \rfloor} < 2^{-\lfloor -\log_2(a) \rfloor} < 2^{1/2-\lfloor -\log_2(a) \rfloor} < 4a \leq 2^n a$ .

*Observación 46.* Si tengo  $S, S', S'' \in \mathbf{Tun}$  canónicamente intercambiables tomados de a dos y con  $\#S = \#S' = \#S'' > 1$ , en general no existe  $a \in \mathbb{R}_{>0}/E_a^n$  mande las transcripciones canónicas en **Tun** a transcripciones canónicas en **Tun**<sub>[a, 2^n a]</sub>. En efecto, si consideramos  $S = \{1, -1\}$ ,  $S' = \{e^{\pi i/3}, -e^{\pi i/3}\}$  y  $S'' = \{e^{-\pi i/3}, -e^{-\pi i/3}\}$ , podemos construir la siguiente tabla con valores de  $d_{[f]}$ :

		$S$		$S'$		$S''$	
		1	-1	$e^{\pi i/3}$	$-e^{\pi i/3}$	$e^{-\pi i/3}$	$-e^{-\pi i/3}$
1	0	1/2	1/6	1/3	1/6	1/6	1/3
-1	1/2	0	1/3	1/6	1/3	1/6	1/6
$e^{\pi i/3}$	1/6	1/3	0	1/2	1/3	1/6	1/6
$-e^{\pi i/3}$	1/3	1/6	1/2	0	1/6	1/3	1/3
$e^{-\pi i/3}$	1/6	1/3	1/3	1/6	0	1/2	1/2
$-e^{-\pi i/3}$	1/3	1/6	1/6	1/3	1/2	0	0

De esta tabla se deduce que  $S$ ,  $S'$  y  $S''$  son canónicamente intercambiables tomados de a dos, las transcripciones canónicas están dadas por:

$$\begin{array}{ccc} S & \longleftrightarrow & S' \\ \hline 1 & \longleftrightarrow & e^{\pi i/3} \\ -1 & \longleftrightarrow & -e^{\pi i/3} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S & \longleftrightarrow & S'' \\ \hline 1 & \longleftrightarrow & e^{-\pi i/3} \\ -1 & \longleftrightarrow & -e^{-\pi i/3} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S' & \longleftrightarrow & S'' \\ \hline e^{\pi i/3} & \longleftrightarrow & -e^{-\pi i/3} \\ -e^{\pi i/3} & \longleftrightarrow & e^{-\pi i/3} \end{array}$$

Si tomamos por ejemplo  $a \in (2^k, 2^{k+1/6}]$  para algún  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2^k < a \leq 2^{k+1/6} \Rightarrow 2^{k+1} < 2a \leq 2^{k+7/6} \Rightarrow a \leq 2^{k+1/6} < 2^{k+1} < 2a$ , tenemos que  $E_a(S) = \{2^{k+1}, 2^{k+1/2}\}$ ,  $E_a(S') = \{2^{k+1/6}, 2^{k+2/3}\}$  y  $E_a(S'') = \{2^{k+5/6}, 2^{k+1/3}\}$ , y podemos construir la siguiente tabla con valores de  $d_f$ :

$E_a(S)$		$E_a(S')$		$E_a(S'')$	
$2^{k+1}$	$2^{k+1/2}$	$2^{k+1/6}$	$2^{k+2/3}$	$2^{k+5/6}$	$2^{k+1/3}$
$2^{k+1}$	0	$1/2$	$5/6$	$1/3$	$1/6$
$2^{k+1/2}$	$1/2$	0	$1/3$	$1/6$	$1/3$
$2^{k+1/6}$	$5/6$	$1/3$	0	$1/2$	$2/3$
$2^{k+2/3}$	$1/3$	$1/6$	$1/2$	0	$1/6$
$2^{k+5/6}$	$1/6$	$1/3$	$2/3$	$1/6$	0
$2^{k+1/3}$	$2/3$	$1/6$	$1/6$	$1/3$	$1/2$

Y de esta tabla se deduce que  $E_a(S)$  y  $E_a(S')$  no son ni siquiera canónicamente intercambiables. Sus transcripciones canónicas están dadas por:

$$\begin{array}{ccc} E_a(S) & \longrightarrow & E_a(S') \\ 2^{k+1} & \longmapsto & 2^{k+2/3} \\ 2^{k+1/2} & \longmapsto & 2^{k+2/3} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E_a(S') & \longrightarrow & E_a(S) \\ 2^{k+1/6} & \longmapsto & 2^{k+1/2} \\ 2^{k+2/3} & \longmapsto & 2^{k+1/2} \end{array}$$

Por simetría, para los intervalos  $(2^{k+1/6}, 2^{k+1/3}]$ ,  $(2^{k+1/3}, 2^{k+1/2}]$ ,  $(2^{k+1/2}, 2^{k+2/3}]$ ,  $(2^{k+2/3}, 2^{k+5/6}]$  y  $(2^{k+5/6}, 2^{k+1}]$ , hay argumentos análogos, lo que prueba que  $\nexists a \in \mathbb{R}_{>0} / E_a$  mande las transcripciones canónicas en **Tun** a transcripciones canónicas en **Tun**<sub>[a, 2a]</sub>.

## 4.2. Afinación borrosa

Hemos visto una forma de comparar sistemas de afinación que no respetan octavas. Pero de la misma forma que en el capítulo 2 se formuló una teoría que enriquece a la teoría del capítulo 1, haciendo uso de los conceptos vistos de lógica borrosa, puede formularse una teoría de afinación borrosa para sistemas de afinación que no respetan la octava.

### 4.2.1. De las notas musicales

**Definición 31.** Dado  $x \in \mathbb{R}_{>0}$ , una nota musical difusa asociada a  $x$  es un conjunto difuso  $\tilde{x} = (\mathbb{R}_{>0}, \mu_{\tilde{x}})$ , donde  $\mu_{\tilde{x}}$  cumple:

1.  $\mu_{\tilde{x}}(x) = 1$ .

2.  $\mu_{\tilde{x}}$  es continua<sup>1</sup>.
3. Dados  $y, y' \in \mathbb{R}_{>0}$  /  $d_f(x, y) \leq d_f(x, y') \Rightarrow \mu_{\tilde{x}}(y) \geq \mu_{\tilde{x}}(y')$ .

**Proposición 49.** *Dada una nota musical difusa  $\tilde{x}$  /  $\mu_{\tilde{x}} \neq 1$ , puede recuperarse el valor  $x \in \mathbb{R}_{>0}$  al cual está asociada.*

*Demuestração.* Tenemos que  $\exists x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$  /  $\mu_{\tilde{x}}(x_0) \neq 1$ , y como  $\mu_{\tilde{x}}(x) = 1 \Rightarrow x_0 \neq x$ . Si  $x_0 < x \Rightarrow x_0 x < x^2 \Rightarrow x < x^2/x_0$  y  $d_f(x, x^2/x_0) = \phi(x^2/x_0) - \phi(x) = 2\phi(x) - \phi(x_0) - \phi(x) = \phi(x) - \phi(x_0) = d_f(x, x_0) \Rightarrow \mu_{\tilde{x}}(x^2/x_0) = \mu_{\tilde{x}}(x_0) \neq 1$ . Análogamente, si  $x < x_0 \Rightarrow x^2/x_0 < x$  y  $d_f(x, x^2/x_0) = d_f(x, x_0) \Rightarrow \mu_{\tilde{x}}(x^2/x_0) = \mu_{\tilde{x}}(x_0) \neq 1$ . Es decir que se tiene  $x_1 < x < x_2$  /  $\mu_{\tilde{x}}(x_1) \neq 1$  y  $\mu_{\tilde{x}}(x_2) \neq 1$ . Además, si  $y \leq x_1 \Rightarrow d_f(x, y) \geq d_f(x, x_1) \Rightarrow \mu_{\tilde{x}}(y) \leq \mu_{\tilde{x}}(x_1) < 1$ , por lo que  $\mu_{\tilde{x}}^{-1}(1) \subseteq (x_1, +\infty)$ , y análogamente se tiene que  $\mu_{\tilde{x}}^{-1}(1) \subseteq (0, x_2) \Rightarrow \mu_{\tilde{x}}^{-1}(1) \subseteq (x_1, x_2)$ . Sean  $a = \bigwedge \mu_{\tilde{x}}^{-1}(1)$  y  $b = \bigvee \mu_{\tilde{x}}^{-1}(1)$ . Como  $\mu_{\tilde{x}}$  es continua,  $\mu_{\tilde{x}}^{-1}(1)$  es cerrado, y por lo tanto  $a, b \in \mu_{\tilde{x}}^{-1}(1) \Rightarrow x_1 < a \leq b < x_2$ .

Sabemos entonces que  $\mu_{\tilde{x}}^{-1}(1) \subseteq [a, b] \Rightarrow x \in [a, b]$ . Si  $x < \sqrt{ab} \Rightarrow x^2/b < a$ , por lo que puedo tomar  $x^2/b < a' < a \Rightarrow b/x^2 > 1/a' > 1/a \Rightarrow x^2/a < x^2/a' < b$ . Pero  $a \leq x \Rightarrow ax \leq x^2 \Rightarrow x \leq x^2/a \Rightarrow d_f(x, x^2/a') < d_f(x, b)$  y  $a' < x \Rightarrow d_f(x, a') = \phi(x) - \phi(a') = 2\phi(x) - \phi(a') - \phi(x) = \phi(x^2/a') - \phi(x) = d_f(x, x^2/a') < d_f(x, b) \Rightarrow \mu_{\tilde{x}}(a') \geq \mu_{\tilde{x}}(b) = 1 \Rightarrow \mu_{\tilde{x}}(a') = 1$ , lo cual es absurdo pues  $a' < a$ . Por lo tanto,  $x \geq \sqrt{ab}$ , y análogamente  $x \leq \sqrt{ab} \Rightarrow x = \sqrt{ab}$ .  $\square$

*Observación 47.* Se tiene luego una función  $u : \{\tilde{x} / \tilde{x} \text{ es una nota musical difusa y } \mu_{\tilde{x}} \neq 1\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  donde  $u(\tilde{x})$  es el valor al cual  $\tilde{x}$  está asociada.

**Proposición 50.** *Dado  $x \in \mathbb{R}_{>0}$ , se tiene que  $\Gamma_x : \{\mu : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1] \text{ continuas y decrecientes/ } \mu(0) = 1\} \rightarrow \{\mu_{\tilde{x}} / (\mathbb{R}_{>0}, \mu_{\tilde{x}}) \text{ es una nota musical difusa asociada a } x\}$  dada por  $\Gamma_x(\mu)(y) = \mu(d_f(x, y))$ , es biyectiva.*

*Demuestração.* Sea  $\mu : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente /  $\mu(0) = 1$ .  $\Gamma_x(\mu)(x) = \mu(d_f(x, x)) = \mu(0) = 1$  por lo que  $\Gamma_x(\mu)$  cumple 1. Además,  $\Gamma_x(\mu) = \mu \circ d_f(x, \cdot)$ , y como  $d_f(x, y) \leq d_f(x, y') + d_f(y', y) \Leftrightarrow d_f(x, y) - d_f(x, y') \leq d_f(y', y)$ , y análogamente  $d_f(x, y') - d_f(x, y) \leq d_f(y, y')$ , tenemos que  $|d_f(x, y) - d_f(x, y')| \leq d_f(y, y')$ , y por lo

---

<sup>1</sup>La verificación de esta propiedad es independiente de que se trabaje con la métrica canónica o con  $d_f$ , pues  $\phi : (\mathbb{R}_{>0}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$  es un homeomorfismo, y se tiene la isometría  $\phi : (\mathbb{R}_{>0}, d_f) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ .

tanto  $d_f(x, \cdot)$  es continua, lo que implica que  $\Gamma_x(\mu)$  también lo es, pues  $\mu$  es continua. Finalmente, si  $d_f(x, y) \leq d_f(x, y') \Rightarrow \Gamma_x(\mu)(y) = \mu(d_f(x, y)) \geq \mu(d_f(x, y')) = \Gamma_x(\mu)(y')$ , pues  $\mu$  es decreciente. Luego,  $\Gamma_x$  está bien definida.

Ahora, consideremos  $(\mathbb{R}_{>0}, \mu_{\tilde{x}})$  una nota musical difusa asociada a  $x$ . Si  $\exists \mu : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$  y  $\Gamma_x(\mu) = \mu_{\tilde{x}}$ , dado  $t \geq 0$ ,  $\mu_{\tilde{x}}(2^t x) = \Gamma_x(\mu)(2^t x) = \mu(d_f(x, 2^t x))$ . Pero  $d_f(x, 2^t x) = \phi(2^t x) - \phi(x) = t \Rightarrow \mu(t) = \mu_{\tilde{x}}(2^t x)$ . Esto prueba la inyectividad de  $\Gamma_x$ .

Para ver que  $\Gamma_x$  es sobreyectiva, necesitamos ver que  $\mu(t) = \mu_{\tilde{x}}(2^t x)$  es continua y decreciente,  $\mu(0) = 1$  y  $\Gamma_x(\mu) = \mu_{\tilde{x}}$ .  $\mu$  es continua por ser composición de funciones continuas, y  $\mu(0) = \mu_{\tilde{x}}(x) = 1$ . Si  $0 \leq t \leq t'$ ,  $d_f(x, 2^t x) = t \leq t' = d_f(x, 2^{t'} x) \Rightarrow \mu(t) = \mu_{\tilde{x}}(2^t x) \geq \mu_{\tilde{x}}(2^{t'} x) = \mu(t')$ , es decir,  $\mu$  es decreciente. Por último,  $\Gamma_x(\mu)(y) = \mu(d_f(x, y)) = \mu_{\tilde{x}}(2^{d_f(x,y)} x)$  y  $d_f(x, 2^{d_f(x,y)} x) = d_f(x, y) \Rightarrow \mu_{\tilde{x}}(2^{d_f(x,y)} x) = \mu_{\tilde{x}}(y) \Rightarrow \Gamma_x(\mu)(y) = \mu_{\tilde{x}}(y) \Rightarrow \Gamma_x(\mu) = \mu_{\tilde{x}}$ .  $\square$

**Definición 32.** Dadas  $\tilde{x} = (\mathbb{R}_{>0}, \mu_{\tilde{x}})$  e  $\tilde{y} = (\mathbb{R}_{>0}, \mu_{\tilde{y}})$  dos notas musicales difusas, la *compatibilidad* entre ellas está dada por:

$$\text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \text{Poss}\{\tilde{x} \text{ es } \tilde{y}\} = \bigvee_{u \in \mathbb{R}_{>0}} (\mu_{\tilde{x}}(u) \wedge \mu_{\tilde{y}}(u))$$

Ahora veamos algunos resultados que nos servirán para hacer una observación al respecto.

**Lema 51.** Sea  $\mu : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente,  $\emptyset \neq A \subseteq [0, +\infty)$ . Vale:

- $\bigvee_{x \in A} \mu(x) = \mu(\bigwedge A)$
- Si  $A$  está acotado superiormente  $\Rightarrow \bigwedge_{x \in A} \mu(x) = \mu(\bigvee A)$ .

*Demostración.* Primeramente, todo está bien definido pues  $\emptyset \neq A \subseteq [0, 1]$ . Probaremos que  $\bigvee_{x \in A} \mu(x) = \mu(\bigwedge A)$ , el otro ítem es análogo.  $x \geq \bigwedge A \forall x \in A \Rightarrow \mu(x) \leq \mu(\bigwedge A) \forall x \in A \Rightarrow \bigvee_{x \in A} \mu(x) \leq \mu(\bigwedge A)$ . Además, si tomo  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A / x_n \rightarrow \bigwedge A$ , como  $\mu$  es continua,  $\mu(x_n) \rightarrow \mu(\bigwedge A)$ , por lo que  $\bigvee_{x \in A} \mu(x) = \mu(\bigwedge A)$ .  $\square$

**Lema 52.** Dados  $x, z \in \mathbb{R}_{>0}$ , vale que:

$$\bigwedge_{y \in \mathbb{R}_{>0}} (d_f(x, y) \vee d_f(y, z)) = d_f(x, z)/2 \quad (4.1)$$

*Demostración.* Sea  $y \in \mathbb{R}_{>0}$ , si  $d_f(x, y) \vee d_f(y, z) < d_f(x, z)/2 \Rightarrow d_f(x, z) \leq d_f(x, y) + d_f(y, z) < d_f(x, z)/2 + d_f(x, z)/2 = d_f(x, z)$ , y llegamos a un absurdo. Por lo tanto,  $d_f(x, y) \vee d_f(y, z) \geq d_f(x, z)/2 \forall y \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow \bigwedge_{y \in \mathbb{R}_{>0}} (d_f(x, y) \vee d_f(y, z)) \geq d_f(x, z)/2$ . Además,  $d_f(x, \sqrt{xz}) = |\phi(\sqrt{xz}) - \phi(x)| = |\phi(x)/2 + \phi(z)/2 - \phi(x)| = |\phi(z)/2 - \phi(x)/2| = |\phi(z) - \phi(x)|/2 = d_f(x, z)/2$ , y análogamente  $d_f(\sqrt{xz}, z) = d_f(x, z)/2 \Rightarrow d_f(x, \sqrt{xz}) \vee d_f(\sqrt{xz}, z) = d_f(x, z)/2$ , por lo que  $\bigwedge_{y \in \mathbb{R}_{>0}} (d_f(x, y) \vee d_f(y, z)) = d_f(x, z)/2$ .  $\square$

Finalmente, la observación:

*Observación 48.* Si fijamos  $\mu$  y trabajamos con  $\mu_{\tilde{x}} = \Gamma_x(\mu)$  y  $\mu_{\tilde{y}} = \Gamma_y(\mu)$ , tenemos  $\text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bigvee_{u \in \mathbb{R}_{>0}} (\mu_{\tilde{x}}(u) \wedge \mu_{\tilde{y}}(u)) = \bigvee_{u \in \mathbb{R}_{>0}} (\mu(d_f(x, u)) \wedge \mu(d_f(y, u))) = \bigvee_{u \in \mathbb{R}_{>0}} \mu(d_f(x, u) \vee d_f(y, u)) = \mu(\bigwedge_{u \in \mathbb{R}_{>0}} (d_f(x, u) \vee d_f(y, u))) = \mu(d_f(x, y)/2)$ .

#### 4.2.2. Comentario: la elección de $\mu$

Tal como hicimos en el capítulo 2, podemos intentar elegir  $\mu$  de manera que se adapte a los estudios de consonancia de Plomp y Levelt[10]. De hecho, en este caso es en principio más simple, pues no hay que preocuparse por las limitaciones que impone la equivalencia de octava.

Dado  $x \in \mathbb{R}_{>0}$ , quisieramos elegir una nota musical difusa asociada  $\tilde{x}$  que cumpla  $\mu_{\tilde{x}}(y) = \text{cons}(x, y)$  cuando  $x$  e  $y$  estén suficientemente cerca. Si  $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq xy \Rightarrow x^2/y \leq x \Rightarrow d_f(x, x^2/y) = \phi(x) - \phi(x^2/y) = \phi(x) - (2\phi(x) - \phi(y)) = \phi(y) - \phi(x) = d_f(x, y) \Rightarrow \mu_{\tilde{x}}(y) = \mu_{\tilde{x}}(x^2/y) \Rightarrow \text{cons}(x, y) = \text{cons}(x, x^2/y)$ , lo que da lugar a la ecuación<sup>2</sup>:

$$c\left(\frac{y-x}{w(\sqrt{xy})}\right) = c\left(\frac{x-x^2/y}{w(\sqrt{x^3/y})}\right)$$

Además,  $\lim_{y \rightarrow x^+} (y - x)/w(\sqrt{xy}) = 0$  y  $\lim_{y \rightarrow x^+} (x - x^2/y)/w(\sqrt{x^3/y}) = 0$ , y como  $c(t) = 1 - 4te^{1-4t} \Rightarrow c'(t) = -4e^{1-4t} + 16te^{1-4t} = 4(4t-1)e^{1-4t}$ , se tiene que

---

<sup>2</sup>Todo esto puede evitarse si se cambia en la definición de nota musical difusa la condición 3, por pedir que sea creciente en  $(0, x)$  y decreciente en  $(x, +\infty)$ . Adicionalmente, para poder definir los funtores  $U_{[a,b]}$ , se deberá definir una nota musical difusa asociada a  $x$ , como un par  $(x, \tilde{x})$ , donde  $\tilde{x}$  es un conjunto difuso que cumple las propiedades enumeradas. Esto es así, porque al cambiar 3, deja de valer la proposición 49. La principal ventaja de este enfoque es que se pueden utilizar mejores aproximaciones al ancho crítico de banda.

$c'(t) < 0 \Leftrightarrow 4t - 1 < 0 \Leftrightarrow t < 1/4$ , por lo que, por el teorema del valor medio,  $c|_{[0,1/4]}$  es inyectiva. Luego,  $\exists \varepsilon > 0 / 0 \leq y - x < \varepsilon \Rightarrow (y - x)/w(\sqrt{xy}), (x - x^2/y)/w(\sqrt{x^3/y}) \in [0, 1/4] \Rightarrow (y - x)/w(\sqrt{xy}) = (x - x^2/y)/w(\sqrt{x^3/y}) = x(y - x)/yw(\sqrt{x^3/y}) \Rightarrow w(x\sqrt{xy}/y) = xw(\sqrt{xy})/y$ .

Aquí podemos hacer el cambio de variables  $t = x/y$  y  $s = \sqrt{xy}$ , con lo que se tiene  $x = ty \Rightarrow s = \sqrt{ty} \Rightarrow y = s/\sqrt{t} \Rightarrow x = \sqrt{ts}$ . Se tiene entonces la ecuación  $w(ts) = tw(s) \Leftrightarrow w(ts) - w(s) = tw(s) - w(s) = (t - 1)w(s) \Leftrightarrow w((t - 1)s + s) - w(s) = (t - 1)w(s) \Leftrightarrow (w((t - 1)s + s) - w(s))/s(t - 1) = w(s)/s$ . Traducimos la condición  $0 \leq y - x < \varepsilon$  en términos de  $t$  y  $s$ :  $0 \leq s/\sqrt{t} - \sqrt{ts} < \varepsilon \Leftrightarrow 0 \leq 1/\sqrt{t} - \sqrt{t} < \varepsilon/s \Leftrightarrow 0 \leq 1 - t < \varepsilon\sqrt{t}/s \Leftrightarrow t \leq 1$  y  $0 < t + \varepsilon\sqrt{t}/s - 1$ . Las raíces del polinomio  $z^2 + \varepsilon z/s - 1$  son  $(-\varepsilon/s \pm \sqrt{\varepsilon^2/s^2 + 4})/2$  y como  $(-\varepsilon/s - \sqrt{\varepsilon^2/s^2 + 4})/2 < 0$ , se tiene que  $0 < t + \varepsilon\sqrt{t}/s - 1 \Leftrightarrow \sqrt{t} > (-\varepsilon/s + \sqrt{\varepsilon^2/s^2 + 4})/2 \Leftrightarrow t > (-\varepsilon/s + \sqrt{\varepsilon^2/s^2 + 4})^2/4$ , pues  $\varepsilon^2/s^2 + 4 > \varepsilon^2/s^2 \Rightarrow \sqrt{\varepsilon^2/s^2 + 4} > \varepsilon/s \Rightarrow -\varepsilon/s + \sqrt{\varepsilon^2/s^2 + 4} > 0 \Rightarrow (-\varepsilon/s + \sqrt{\varepsilon^2/s^2 + 4})/2 > 0$ .  $\varepsilon^2/s^2 + 4 < \varepsilon^2/s^2 + 4 + 4\varepsilon/s = (\varepsilon/s + 2)^2 \Rightarrow \sqrt{\varepsilon^2/s^2 + 4} < \varepsilon/s + 2 \Rightarrow -\varepsilon/s + \sqrt{\varepsilon^2/s^2 + 4} < 2 \Rightarrow (-\varepsilon/s + \sqrt{\varepsilon^2/s^2 + 4})^2 < 4 \Rightarrow (-\varepsilon/s + \sqrt{\varepsilon^2/s^2 + 4})^2/4 < 1$ , por lo que se puede hacer  $t \rightarrow 1^- \Rightarrow s(t - 1) \rightarrow 0$ , y si suponemos que  $w$  es derivable queda la ecuación diferencial  $w'(s) = w(s)/s \Rightarrow w'(s)/w(s) = 1/s$ . Al integrar obtenemos  $\ln |w(s)| = \ln |s| + C \Rightarrow w(s) = as$  con  $a > 0$  pues  $w : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ .

Con esta forma de  $w$ , queremos elegir  $\mu$  de manera que  $\mu(d_f(x, y)) = \text{cons}(x, y) = c((y - x)/w(\sqrt{xy})) = c((y - x)/a\sqrt{xy}) = c((y/x - 1)/a\sqrt{y/x})$  donde  $x \leq y$ , y haciendo el cambio de variables  $t = d_f(x, y) = \phi(y) - \phi(x) = \phi(y/x) \Rightarrow y/x = 2^t$ , obtenemos la ecuación  $\mu(t) = c((2^t - 1)/a2^{t/2}) \Rightarrow \mu'(t) = c'((2^t - 1)/a2^{t/2})(a2^{3t/2}\ln 2 - a2^{t/2}(2^t - 1)\ln 2/2)/a^22^t$ , por lo que  $\mu'(t) \leq 0 \Leftrightarrow c'((2^t - 1)/a2^{t/2})(a2^{3t/2}\ln 2 - a2^{t/2}(2^t - 1)\ln 2/2) \leq 0$  y como  $a2^{3t/2}\ln 2 - a2^{t/2}(2^t - 1)\ln 2/2 = a(2^{3t/2} - 2^{t/2}(2^t - 1)/2)\ln 2 = a(2^{3t/2+1} - 2^{3t/2+2t/2})\ln 2/2 = a(2^{3t/2} + 2^{t/2})\ln 2/2 > 0$ , se tiene que  $\mu'(t) \leq 0 \Leftrightarrow c'((2^t - 1)/a2^{t/2}) \leq 0 \Leftrightarrow (2^t - 1)/a2^{t/2} \leq 1/4 \Leftrightarrow 4 \cdot 2^t - a2^{t/2} - 4 \leq 0$ . El polinomio  $4z^2 - az - 4$  tiene raíces  $(a \pm \sqrt{a^2 + 64})/8$ , y se tiene que  $(a + \sqrt{a^2 + 64})/8 > 0$  y  $a^2 < a^2 + 64 \Rightarrow a < \sqrt{a^2 + 64} \Rightarrow (a - \sqrt{a^2 + 64})/8 < 0$ , por lo que  $4 \cdot 2^t - a2^{t/2} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow 2^{t/2} \leq (a + \sqrt{a^2 + 64})/8 \Leftrightarrow t/2 \leq \log_2(a + \sqrt{a^2 + 64}) - 3 \Leftrightarrow t \leq 2(\log_2(a + \sqrt{a^2 + 64}) - 3)$ .

Por lo tanto, podemos elegir:

$$\mu(t) = \begin{cases} c \left( \frac{2^t - 1}{a 2^{t/2}} \right) & \text{si } t \leq 2(\log_2(a + \sqrt{a^2 + 64}) - 3) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

con  $c(x) = 1 - 4xe^{1-4x}$  y  $a > 0$ . Tal como antes, tenemos  $\mu_1$  si consideramos  $a = 0,11$ , y  $\mu_2$  si consideramos  $a = 0,14$ .

#### 4.2.3. De los sistemas de afinación

**Definición 33.** Dado un sistema de afinación  $(S, a, b)$ , un *sistema de afinación difuso asociado* a  $(S, a, b)$  es un conjunto  $\tilde{S} = \{\tilde{x}\}_{x \in S}$  donde  $\tilde{x}$  es una nota musical difusa asociada a  $x / \mu_{\tilde{x}} \not\equiv 1$ . Además, diremos que  $\tilde{S}$  está en el rango  $[a, b]$ .

*Observación 49.* Un sistema de afinación difuso puede estar en más de un rango. Si por ejemplo, consideramos  $S = S' = \{1\}$ ,  $a = a' = 1$ ,  $b = 2$ ,  $b' = 3$  y definimos  $\mu : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$  como:

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{si } t \leq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Tenemos que  $\tilde{S} = \{(\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_1(\mu))\}$  es un sistema de afinación difuso asociado a  $(S, a, b)$  y a  $(S', a', b')$ , y por lo tanto está en los rangos  $[a, b] = [1, 2]$  y  $[a', b'] = [1, 3]$ .

*Observación 50.* Por la proposición 49, a partir de  $\tilde{S}$  puedo recuperar  $S$ . En especial, usando la notación de la observación 47, tenemos definida una función  $U_{[a,b]} : \{\tilde{S} / \tilde{S} \text{ es un sistema de afinación difuso en el rango } [a, b]\}$

$\rightarrow \{S / S \text{ es un sistema de afinación con rango } [a, b]\}$ , donde  $U_{[a,b]}(\tilde{S}) = \{u(\tilde{x})\}_{\tilde{x} \in \tilde{S}}$  que es el sistema de afinación con rango  $[a, b]$  al cual  $\tilde{S}$  está asociado.

**Definición 34.** Sean  $\tilde{S}$  y  $\tilde{S}'$  dos sistemas de afinación difusos. Una *transcripción difusa*  $\tilde{\tau}$  de  $\tilde{S}$  a  $\tilde{S}'$  es una función  $\tilde{\tau} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$ . La fidelidad de  $\tilde{\tau}$  está dada por:

$$\Phi(\tilde{\tau}) = \bigwedge_{\tilde{x} \in \tilde{S}} \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{\tau}(\tilde{x}))$$

*Observación 51.*  $0 \leq \Phi(\tilde{\tau}) \leq 1$

**Definición 35.** Sean  $\tilde{S}$  y  $\tilde{S}'$  dos sistemas de afinación difusos. Si  $\forall \tilde{x} \in \tilde{S}, \exists! \tilde{y}_{\tilde{x}} \in \tilde{S}' / \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}_{\tilde{x}}) = \bigvee_{\tilde{y} \in \tilde{S}'} \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y})$ , se dice que existe la *transcripción difusa canónica* de  $\tilde{S}$  a  $\tilde{S}'$  dada por  $\tilde{\tau}(\tilde{x}) = \tilde{y}_{\tilde{x}}$ .

*Observación 52.* En caso de existir la transcripción difusa canónica, esta tiene la máxima fidelidad. En efecto, si existe la transcripción difusa canónica  $\tilde{\tau}$  de  $\tilde{S}$  a  $\tilde{S}'$ , y  $\tilde{\tau}' : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$  es una transcripción difusa cualquiera,  $\text{comp}(\tilde{x}, \tilde{\tau}(\tilde{x})) = \bigvee_{\tilde{y} \in \tilde{S}'} \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{\tau}'(\tilde{x})) \forall \tilde{x} \in \tilde{S} \Rightarrow \bigwedge_{\tilde{x} \in \tilde{S}} \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{\tau}(\tilde{x})) \geq \bigwedge_{\tilde{x} \in \tilde{S}} \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{\tau}'(\tilde{x})) \Leftrightarrow \Phi(\tilde{\tau}) \geq \Phi(\tilde{\tau}')$ .

**Definición 36.** Dos sistemas de afinación difusos,  $\tilde{S}$  y  $\tilde{S}'$ , se dicen canómicamente intercambiables si existen las transcripciones difusas canónicas de  $\tilde{S}$  a  $\tilde{S}'$  y de  $\tilde{S}'$  a  $\tilde{S}$ , y ambas son inyectivas.

*Observación 53.* Si  $\tilde{S}$  y  $\tilde{S}'$  son dos sistemas de afinación difusos canómicamente intercambiables, tienen el mismo cardinal.

**Proposición 53.** Si  $\tilde{S}$  y  $\tilde{S}'$  son dos sistemas de afinación difusos canómicamente intercambiables, con transcripciones difusas canónicas  $\tilde{\tau} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$  y  $\tilde{\tau}' : \tilde{S}' \rightarrow \tilde{S}$ , entonces una es la inversa de la otra.

*Demostración.* Lo hacemos por inducción, con  $n = \#\tilde{S} = \#\tilde{S}'$ .

El caso  $n = 1$  es trivial. Supongamos que  $n \geq 2$ :

Considero  $\tilde{x} \in \tilde{S}$  e  $\tilde{y} \in \tilde{S}' / \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bigvee_{\tilde{s} \in \tilde{S}} \text{comp}(\tilde{s}, \tilde{t}) \Rightarrow \tilde{\tau}(\tilde{x}) = \tilde{y}$  y  $\tilde{\tau}'(\tilde{y}) = \tilde{x}$ , y como ambas son inyectivas, tengo bien definidas  $\tilde{\tau} : \tilde{S} \setminus \{\tilde{x}\} \rightarrow \tilde{S}' \setminus \{\tilde{y}\}$  y  $\tilde{\tau}' : \tilde{S}' \setminus \{\tilde{y}\} \rightarrow \tilde{S} \setminus \{\tilde{x}\}$ .

Dado  $\tilde{x}' \in \tilde{S} \setminus \{\tilde{x}\}$ ,  $\bigvee_{\tilde{u} \in \tilde{S}' \setminus \{\tilde{y}\}} \text{comp}(\tilde{x}', \tilde{u}) \geq \text{comp}(\tilde{x}', \tilde{\tau}(\tilde{x}')) = \bigvee_{\tilde{u} \in \tilde{S}'} \text{comp}(\tilde{x}', \tilde{u}) \geq \bigvee_{\tilde{u} \in \tilde{S}' \setminus \{\tilde{y}\}} \text{comp}(\tilde{x}', \tilde{u}) \Rightarrow \text{comp}(\tilde{x}', \tilde{\tau}(\tilde{x}')) = \bigvee_{\tilde{u} \in \tilde{S}'} \text{comp}(\tilde{x}', \tilde{u}) = \bigvee_{\tilde{u} \in \tilde{S}' \setminus \{\tilde{y}\}} \text{comp}(\tilde{x}', \tilde{u})$ , por lo que si  $\tilde{y}' \in \tilde{S}' \setminus \{\tilde{y}\} / \text{comp}(\tilde{x}', \tilde{y}') = \bigvee_{\tilde{u} \in \tilde{S}' \setminus \{\tilde{y}\}} \text{comp}(\tilde{x}', \tilde{u}) \Rightarrow \tilde{y}' \in \tilde{S}'$  y  $\text{comp}(\tilde{x}', \tilde{y}') = \bigvee_{\tilde{u} \in \tilde{S}'} \text{comp}(\tilde{x}', \tilde{u}) \Rightarrow \tilde{y}' = \tilde{\tau}(\tilde{x}')$ . Por lo tanto,  $\tilde{\tau} : \tilde{S} \setminus \{\tilde{x}\} \rightarrow \tilde{S}' \setminus \{\tilde{y}\}$  es la transcripción difusa canónica y es inyectiva.

Análogamente,  $\tilde{\tau}' : \tilde{S}' \setminus \{\tilde{y}\} \rightarrow \tilde{S} \setminus \{\tilde{x}\}$  es la transcripción difusa canónica y es inyectiva, y por inducción tenemos que  $\tilde{\tau}' \circ \tilde{\tau} : \tilde{S} \setminus \{\tilde{x}\} \rightarrow \tilde{S} \setminus \{\tilde{x}\}$  es  $\text{id}_{\tilde{S} \setminus \{\tilde{x}\}}$  y  $\tilde{\tau} \circ \tilde{\tau}' : \tilde{S}' \setminus \{\tilde{y}\} \rightarrow \tilde{S}' \setminus \{\tilde{y}\}$  es  $\text{id}_{\tilde{S}' \setminus \{\tilde{y}\}}$ . Además, sabemos que  $\tilde{\tau}' \circ \tilde{\tau}(\tilde{x}) = \tilde{\tau}'(\tilde{y}) = \tilde{x}$  y  $\tilde{\tau} \circ \tilde{\tau}'(\tilde{y}) = \tilde{\tau}(\tilde{x}) = \tilde{y}$ , por lo que  $\tilde{\tau}' \circ \tilde{\tau} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$  es  $\text{id}_{\tilde{S}}$  y  $\tilde{\tau} \circ \tilde{\tau}' : \tilde{S}' \rightarrow \tilde{S}'$  es  $\text{id}_{\tilde{S}'}$ .  $\square$

**Proposición 54.** *Dados  $\tilde{S}$  y  $\tilde{S}'$  dos sistemas de afinación difusos, y  $\tilde{\tau}$  una transcripción difusa biyectiva de  $\tilde{S}$  a  $\tilde{S}'$ , entonces  $\Phi(\tilde{\tau}) = \Phi(\tilde{\tau}^{-1})$ .*

*Demuestra.* Es inmediato pues  $\{(\tilde{x}, \tilde{\tau}(\tilde{x})) : \tilde{x} \in \tilde{S}\} = \{(\tilde{\tau}^{-1}(\tilde{y}), \tilde{y}) : \tilde{y} \in \tilde{S}'\}$ .  $\square$

**Definición 37.** Dado  $0 \leq \alpha \leq 1$ , dos sistemas de afinación difusos  $\tilde{S}$  y  $\tilde{S}'$  canónicamente intercambiables, con transcripción difusa canónica  $\tilde{\tau} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$ , se dicen  $\alpha$ -compatibles si  $\Phi(\tilde{\tau}) \geq \alpha$ .

#### 4.2.4. Comparación con la afinación clásica sin octavas

Podemos considerar  $\mathbf{Fuzz}_{\mathbb{R}_{>0}}$ , la categoría cuyos objetos son los sistemas de afinación difusos, y cuyas flechas son las transcripciones difusas. Además, dados  $a, b \in \mathbb{R}_{>0} / a < b$ , podemos considerar  $\mathbf{Fuzz}_{[a,b]} \subseteq \mathbf{Fuzz}_{\mathbb{R}_{>0}}$  la subcategoría plena de sistemas de afinación difusos en el rango  $[a, b]$ . Tal como en el caso de afinación con octavas, dada una transcripción difusa  $\tilde{\tau} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$  en  $\mathbf{Fuzz}_{[a,b]}$ , se puede definir  $U_{[a,b]}(\tilde{\tau}) : U_{[a,b]}(\tilde{S}) \rightarrow U_{[a,b]}(\tilde{S}')$  como  $U_{[a,b]}(\tilde{\tau})(x) = u(\tilde{\tau}(\tilde{x}))$  donde  $\tilde{x} \in \tilde{S}$  es la nota musical difusa asociada a  $x \in U_{[a,b]}(\tilde{S})$ . Se tiene entonces  $U_{[a,b]} : \text{hom}(\mathbf{Fuzz}_{[a,b]}) \rightarrow \text{hom}(\mathbf{Tun}_{[a,b]})$ . Además,  $U_{[a,b]}(id_{\tilde{S}})(x) = u(id_{\tilde{S}}(\tilde{x})) = u(\tilde{x}) = x$ , por lo que  $U_{[a,b]}(id_{\tilde{S}}) = id_{U_{[a,b]}(\tilde{S})}$ , y si tengo  $\tilde{\tau} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$  y  $\tilde{\tau}' : \tilde{S}' \rightarrow \tilde{S}''$ ,  $U_{[a,b]}(\tilde{\tau}' \circ \tilde{\tau})(x) = u(\tilde{\tau}' \circ \tilde{\tau}(\tilde{x})) = u(\tilde{\tau}'(\tilde{\tau}(\tilde{x}))) = U_{[a,b]}(\tilde{\tau}')(u(\tilde{\tau}(\tilde{x}))) = U_{[a,b]}(\tilde{\tau}')(U_{[a,b]}(\tilde{\tau})(x)) = U_{[a,b]}(\tilde{\tau}') \circ U_{[a,b]}(\tilde{\tau})(x)$ , por lo que  $U_{[a,b]}(\tilde{\tau}' \circ \tilde{\tau}) = U_{[a,b]}(\tilde{\tau}') \circ U_{[a,b]}(\tilde{\tau})$ . Tenemos luego un funtor de olvido  $U_{[a,b]} : \mathbf{Fuzz}_{[a,b]} \rightarrow \mathbf{Tun}_{[a,b]}$ . Además, si consideramos  $\mu : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$  y  $\mu \not\equiv 1$ , podemos definir  $F_{\mu}^{[a,b]} : \text{ob}(\mathbf{Tun}_{[a,b]}) \rightarrow \text{ob}(\mathbf{Fuzz}_{[a,b]})$  como  $F_{\mu}^{[a,b]}(S) = \{(\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x(\mu))\}_{x \in S}$  que es un sistema de afinación difuso asociado a  $S$ . Y si tenemos una transcripción  $\tau : S \rightarrow S'$  en  $\mathbf{Tun}_{[a,b]}$ , definimos la transcripción difusa  $F_{\mu}^{[a,b]}(\tau) : F_{\mu}^{[a,b]}(S) \rightarrow F_{\mu}^{[a,b]}(S')$  como  $F_{\mu}^{[a,b]}(\tau)(\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x(\mu)) = (\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_{\tau(x)}(\mu))$ . Tenemos entonces que  $F_{\mu}^{[a,b]}(id_S) = id_{F_{\mu}^{[a,b]}(S)}$ , y que  $F_{\mu}^{[a,b]}(\tau' \circ \tau) = F_{\mu}^{[a,b]}(\tau') \circ F_{\mu}^{[a,b]}(\tau)$ , por lo que tenemos funtores  $F_{\mu}^{[a,b]} : \mathbf{Tun}_{[a,b]} \rightarrow \mathbf{Fuzz}_{[a,b]}$ .

Por último,  $U_{[a,b]} \circ F_{\mu}^{[a,b]} = id_{\mathbf{Tun}_{[a,b]}}$ :  $U_{[a,b]} \circ F_{\mu}^{[a,b]}(\tau)(x) = U_{[a,b]}(F_{\mu}^{[a,b]}(\tau))(x) = u(F_{\mu}^{[a,b]}(\tau)(\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x(\mu))) = u(\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_{\tau(x)}(\mu)) = \tau(x)$ . Y también vale que  $F_{\mu}^{[a,b]}$  es un funtor pleno: sea  $\tilde{\tau} : F_{\mu}^{[a,b]}(S) \rightarrow F_{\mu}^{[a,b]}(S')$ , defino  $\tau : S \rightarrow S'$  como  $\tau = U_{[a,b]}(\tilde{\tau}) \Rightarrow \tau(x) = U_{[a,b]}(\tilde{\tau})(x) = u(\tilde{\tau}(\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x(\mu)))$ , tenemos entonces que  $F_{\mu}^{[a,b]}(\tau)(\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x(\mu)) =$

$(\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_{\tau(x)}(\mu))$ , y si  $\tilde{\tau}(\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x(\mu)) = (\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_y(\mu))$  con  $y \in S'$ ,  $u(\tilde{\tau}(\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x(\mu))) = u(\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_y(\mu)) = y \Rightarrow \tau(x) = y \Rightarrow F_\mu^{[a,b]}(\tau)(\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x(\mu)) = (\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_y(\mu)) = \tilde{\tau}(\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x(\mu))$ , por lo que  $F_\mu^{[a,b]}(\tau) = \tilde{\tau}$ .

**Proposición 55.** Sean  $S$  y  $S'$  dos sistemas de afinación con rango  $[a, b]$ , y sea  $\tau : S \rightarrow S'$  una transcripción. Sea  $\mu : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$  y  $\mu \not\equiv 1$ . Vale que:

$$\Phi(F_\mu^{[a,b]}(\tau)) = \mu \left( \frac{(1 - \Phi(\tau)) \log_2(b/a)}{2} \right)$$

*Demostración.* En efecto,  $\Phi(F_\mu^{[a,b]}(\tau)) = \bigwedge_{\tilde{x} \in F_\mu^{[a,b]}(S)} \text{comp}(\tilde{x}, F_\mu^{[a,b]}(\tau)(\tilde{x})) = \bigwedge_{x \in S} \text{comp}((\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x(\mu)), F_\mu^{[a,b]}(\tau)(\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x(\mu))) = \bigwedge_{x \in S} \text{comp}((\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x(\mu)), (\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_{\tau(x)}(\mu))),$  pero por la observación 48 sabemos que  $\text{comp}((\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x(\mu)), (\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_{\tau(x)}(\mu))) = \mu(d_f(x, \tau(x))/2)$ , por lo que  $\Phi(F_\mu^{[a,b]}(\tau)) = \bigwedge_{x \in S} \mu(d_f(x, \tau(x))/2) = \mu(\bigvee_{x \in S} d_f(x, \tau(x))/2)$ . A su vez,  $\Phi(\tau) = 1 - \bigvee_{x \in S} d_f(x, \tau(x)) / \log_2(b/a) \Leftrightarrow \bigvee_{x \in S} d_f(x, \tau(x)) = (1 - \Phi(\tau)) \log_2(b/a)$ , por lo que  $\Phi(F_\mu^{[a,b]}(\tau)) = \mu((1 - \Phi(\tau)) \log_2(b/a)/2)$ , como queríamos probar.  $\square$

**Proposición 56.** Sean  $S$  y  $S'$  dos sistemas de afinación con rango  $[a, b]$ , y sea  $\mu : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$  y  $\mu \not\equiv 1$ . Si existe la transcripción difusa canónica  $\tilde{\tau} : F_\mu^{[a,b]}(S) \rightarrow F_\mu^{[a,b]}(S')$ , entonces  $U_{[a,b]}(\tilde{\tau}) : S \rightarrow S'$  es la transcripción canónica de  $S$  a  $S'$ .

*Demostración.* Sea  $x \in S$ .  $y_x \in S' / d_f(x, y_x) = d_f(x, S') = \bigwedge_{y \in S'} d_f(x, y) \Leftrightarrow y_x \in S' / d_f(x, y_x)/2 = \bigwedge_{y \in S'} d_f(x, y)/2 \Rightarrow y_x \in S' / \mu(d_f(x, y_x)/2) = \bigvee_{y \in S'} \mu(d_f(x, y)/2) \Leftrightarrow y_x \in S' / \text{comp}((\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x(\mu)), (\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_{y_x}(\mu))) = \bigvee_{y \in S'} \text{comp}((\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x(\mu)), (\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_y(\mu))) \Leftrightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_{y_x}(\mu)) \in F_\mu^{[a,b]}(S') / \text{comp}((\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x(\mu)), (\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_{y_x}(\mu))) = \bigvee_{\tilde{y} \in F_\mu^{[a,b]}(S')} \text{comp}((\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x(\mu)), \tilde{y}) \Rightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_{y_x}(\mu)) = \tilde{\tau}(\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x(\mu)) \Rightarrow y_x = u(\tilde{\tau}(\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x(\mu))) = U_{[a,b]}(\tilde{\tau})(x)$ , con lo cual queda probada la proposición pues  $d_f(x, S')$  se realiza por ser  $S'$  un conjunto finito.  $\square$

*Observación 54.* Sean  $S$  y  $S'$  dos sistemas de afinación con rango  $[a, b]$ , y sea  $\mu : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$  y  $\mu \not\equiv 1$ . Si  $F_\mu^{[a,b]}(S)$  y  $F_\mu^{[a,b]}(S')$  son canónicamente intercambiables,  $S$  y  $S'$  son canónicamente intercambiables.

**Proposición 57.** Sean  $S$  y  $S'$  dos sistemas de afinación con rango  $[a, b]$ , y sea  $\mu : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$  y  $\mu \not\equiv 1$ . Si  $F_\mu^{[a,b]}(S)$  y  $F_\mu^{[a,b]}(S')$

son  $\alpha$ -compatibles, sea  $\beta \in [0, 1] / \mu((1 - \beta) \log_2(b/a)/2) < \alpha$ , entonces  $S$  y  $S'$  son  $\beta$ -similares.

*Demostración.*  $S$  y  $S'$  son canónicamente intercambiables pues  $F_\mu^{[a,b)}(S)$  y  $F_\mu^{[a,b)}(S')$  lo son. Si  $S$  y  $S'$  no fueran  $\beta$ -similares,  $\Phi(\tau) < \beta$  donde  $\tau : S \rightarrow S'$  es la transcripción canónica de  $S$  a  $S'$ . Si  $\tilde{\tau} : F_\mu^{[a,b)}(S) \rightarrow F_\mu^{[a,b)}(S')$  es la transcripción difusa canónica de  $F_\mu^{[a,b)}(S)$  a  $F_\mu^{[a,b)}(S')$ , vimos que  $F_\mu^{[a,b)}(U_{[a,b)}(\tilde{\tau})) = \tilde{\tau}$ , pero también vimos que  $U_{[a,b)}(\tilde{\tau})$  es la transcripción canónica de  $S$  a  $S'$ , es decir  $\tau$ . Por lo tanto,  $F_\mu^{[a,b)}(\tau) = \tilde{\tau}$ , y por la proposición 55, tenemos que  $\Phi(\tilde{\tau}) = \mu((1 - \Phi(\tau)) \log_2(b/a)/2)$ , pero  $\Phi(\tau) < \beta \Rightarrow (1 - \Phi(\tau)) \log_2(b/a)/2 > (1 - \beta) \log_2(b/a)/2 \Rightarrow \mu((1 - \Phi(\tau)) \log_2(b/a)/2) \leq \mu((1 - \beta) \log_2(b/a)/2) < \alpha \Rightarrow \Phi(\tilde{\tau}) < \alpha$  lo cual es absurdo pues  $F_\mu^{[a,b)}(S)$  y  $F_\mu^{[a,b)}(S')$  son  $\alpha$ -compatibles.  $\square$

**Proposición 58** (La afinación clásica como caso particular de la borrosa). *Si tomamos  $\mu : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$  definida como:*

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2t}{\log_2(b/a)} & \text{si } t \leq \log_2(b/a)/2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

vale lo siguiente:

1. Dados  $x, y \in [a, b) \Rightarrow \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1 - d_f(x, y)/\log_2(b/a)$ , donde  $\tilde{x} = (\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x(\mu))$  e  $\tilde{y} = (\mathbb{R}_{>0}, \Gamma_y(\mu))$ .
2. Dada una transcripción  $\tau : S \rightarrow S'$  en  $\mathbf{Tun}_{[a,b)}$   $\Rightarrow \Phi(F_\mu^{[a,b)}(\tau)) = \Phi(\tau)$ .
3.  $\tau : S \rightarrow S'$  es la transcripción canónica en  $\mathbf{Tun}_{[a,b)}$   $\Leftrightarrow F_\mu^{[a,b)}(\tau) : F_\mu^{[a,b)}(S) \rightarrow F_\mu^{[a,b)}(S')$  es la transcripción difusa canónica.
4.  $S$  y  $S'$  son canónicamente intercambiables en  $\mathbf{Tun}_{[a,b)}$   $\Leftrightarrow F_\mu^{[a,b)}(S)$  y  $F_\mu^{[a,b)}(S')$  lo son.
5.  $S$  y  $S'$  son  $\alpha$ -similares en  $\mathbf{Tun}_{[a,b)}$   $\Leftrightarrow F_\mu^{[a,b)}(S)$  y  $F_\mu^{[a,b)}(S')$  son  $\alpha$ -compatibles.

*Demostración.* 1.  $\text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mu(d_f(x, y)/2)$ , y como  $d_f(x, y) \leq \log_2(b) - \log_2(a) = \log_2(b/a) \Rightarrow d_f(x, y)/2 \leq \log_2(b/a)/2 \Rightarrow \mu(d_f(x, y)/2) = 1 - 2d_f(x, y)/(2 \log_2(b/a)) = 1 - d_f(x, y)/\log_2(b/a)$ .

2.  $0 \leq \Phi(\tau) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq (1 - \Phi(\tau)) \log_2(b/a)/2 \leq \log_2(b/a)/2 \Rightarrow \Phi(F_\mu^{[a,b)}(\tau)) = \mu((1 - \Phi(\tau)) \log_2(b/a)/2) = \Phi(\tau)$
3.  $d_f(x, y) = d_f(x, S') \Leftrightarrow d_f(x, y) = \bigwedge_{z \in S'} d_f(x, z) \Leftrightarrow 1 - d_f(x, y)/\log_2(b/a) = 1 - \bigwedge_{z \in S'} d_f(x, z)/\log_2(b/a) = \bigvee_{z \in S'} (1 - d_f(x, z)/\log_2(b/a)) \Leftrightarrow \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bigvee_{\tilde{z} \in F_\mu^{[a,b)}(S')} \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{z})$ . Si  $\tau$  es la transcripción canónica, tenemos que  $\tilde{y} \in F_\mu^{[a,b)}(S') / \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bigvee_{\tilde{z} \in F_\mu^{[a,b)}(S')} \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{z}) \Leftrightarrow d_f(x, y) = d_f(x, S') \Leftrightarrow y = \tau(x) \Leftrightarrow \tilde{y} = F_\mu^{[a,b)}(\tau)(\tilde{x})$ , mientras que si  $F_\mu^{[a,b)}(\tau)$  es la transcripción difusa canónica, tenemos que  $y \in S' / d_f(x, y) = d_f(x, S') \Leftrightarrow \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bigvee_{\tilde{z} \in F_\mu^{[a,b)}(S')} \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{z}) \Leftrightarrow \tilde{y} = F_\mu^{[a,b)}(\tau)(\tilde{x}) \Leftrightarrow y = \tau(x)$ .
4. Hay que probar que  $\tau : S \rightarrow S'$  es inyectiva  $\Leftrightarrow F_\mu^{[a,b)}(\tau) : F_\mu^{[a,b)}(S) \rightarrow F_\mu^{[a,b)}(S')$  es inyectiva. Si  $\tau$  es inyectiva,  $F_\mu^{[a,b)}(\tau)(\tilde{x}) = F_\mu^{[a,b)}(\tau)(\tilde{y}) \Rightarrow \tau(x) = \tau(y) \Rightarrow x = y \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$ , mientras que si  $F_\mu^{[a,b)}(\tau)$  es inyectiva,  $\tau(x) = \tau(y) \Rightarrow F_\mu^{[a,b)}(\tau)(\tilde{x}) = F_\mu^{[a,b)}(\tau)(\tilde{y}) \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{y} \Rightarrow x = y$ .
5. Sale de los items anteriores.

□

#### 4.2.5. Comparación con la afinación borrosa con octavas

Tal como hicimos con la afinación clásica, dado  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  podemos definir un funtor  $\tilde{E}_a : \mathbf{Fuzz} \rightarrow \mathbf{Fuzz}_{[a,2a]}$ . Dado un sistema de afinación difuso  $\tilde{S} \in \mathbf{Fuzz}$ , está asociado a  $S = U(\tilde{S}) \in \mathbf{Tun}$ , y tenemos el sistema de afinación  $E_a(S) \in \mathbf{Tun}_{[a,2a]}$ . Definiremos  $\tilde{E}_a(\tilde{S})$  como un sistema de afinación difuso asociado a  $E_a(S)$ .

Dada  $\mu : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$  continua y decreciente/  $\mu(0) = 1$  y  $\mu \not\equiv 1$ , definimos  $\bar{\mu} : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$  como:

$$\bar{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ \mu(1/2) & \text{si no} \end{cases}$$

$\bar{\mu}$  resulta entonces continua y decreciente,  $\bar{\mu}(0) = 1$  y  $\bar{\mu} \not\equiv 1$ . Definimos entonces:

$$\tilde{E}_a(\tilde{S}) = \left\{ \left( \mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x \left( \overline{\Gamma_{\sigma_a(x)}^{-1} \left( \widetilde{\mu_{\sigma_a(x)}} \right)} \right) \right) \right\}_{x \in E_a(S)}$$

Nótese que  $\tilde{S} = \{\tilde{z}\}_{z \in S} = \left\{ \widetilde{\sigma_a(x)} \right\}_{x \in E_a(S)}$ . Dada una transcripción difusa  $\tilde{\tau} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$  en **Fuzz**, se define  $\tilde{E}_a(\tilde{\tau}) : \tilde{E}_a(\tilde{S}) \rightarrow \tilde{E}_a(\tilde{S}')$  en **Fuzz**<sub>[a,2a]</sub> como:

$$\tilde{E}_a(\tilde{\tau}) \left( \mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x \left( \overline{\Gamma_{\sigma_a(x)}^{-1} \left( \mu_{\widetilde{\sigma_a(x)}} \right)} \right) \right) = \left( \mathbb{R}_{>0}, \Gamma_{E_a(\tau)(x)} \left( \overline{\Gamma_{\tau \circ \sigma_a(x)}^{-1} \left( \mu_{\widetilde{\tau \circ \sigma_a(x)}} \right)} \right) \right)$$

donde  $\tau = U(\tilde{\tau})$ .  $\tilde{E}_a$  resulta un functor. Es obvio que  $\tilde{E}_a(\text{id}_{\tilde{S}}) = \text{id}_{\tilde{E}_a(\tilde{S})}$ , mientras que si tenemos  $\tilde{\tau}' : \tilde{S}' \rightarrow \tilde{S}''$ :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_a(\tilde{\tau}') \circ \tilde{E}_a(\tilde{\tau}) \left( \mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x \left( \overline{\Gamma_{\sigma_a(x)}^{-1} \left( \mu_{\widetilde{\sigma_a(x)}} \right)} \right) \right) &= \tilde{E}_a(\tilde{\tau}') \left( \mathbb{R}_{>0}, \Gamma_{E_a(\tau)(x)} \left( \overline{\Gamma_{\tau \circ \sigma_a(x)}^{-1} \left( \mu_{\widetilde{\tau \circ \sigma_a(x)}} \right)} \right) \right) \\ &= \left( \mathbb{R}_{>0}, \Gamma_{E_a(\tau') \circ E_a(\tau)(x)} \left( \overline{\Gamma_{\tau' \circ \tau \circ \sigma_a(x)}^{-1} \left( \mu_{\widetilde{\tau' \circ \tau \circ \sigma_a(x)}} \right)} \right) \right) \\ &= \left( \mathbb{R}_{>0}, \Gamma_{E_a(\tau' \circ \tau)(x)} \left( \overline{\Gamma_{\tau' \circ \tau \circ \sigma_a(x)}^{-1} \left( \mu_{\widetilde{\tau' \circ \tau \circ \sigma_a(x)}} \right)} \right) \right) \\ &= \tilde{E}_a(\tilde{\tau}' \circ \tilde{\tau}) \left( \mathbb{R}_{>0}, \Gamma_x \left( \overline{\Gamma_{\sigma_a(x)}^{-1} \left( \mu_{\widetilde{\sigma_a(x)}} \right)} \right) \right) \end{aligned}$$

donde  $\tau' = U(\tilde{\tau}') \Rightarrow \tau' \circ \tau = U(\tilde{\tau}') \circ U(\tilde{\tau}) = U(\tilde{\tau}' \circ \tilde{\tau})$ , por lo que  $\tilde{E}_a(\tilde{\tau}' \circ \tilde{\tau}) = \tilde{E}_a(\tilde{\tau}') \circ \tilde{E}_a(\tilde{\tau})$ .

También, dados  $a \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , puede definirse  $\tilde{E}_a^n : \mathbf{Fuzz} \rightarrow \mathbf{Fuzz}_{[a,2^n a]}$  como  $\tilde{E}_a^n(\tilde{S}) = \bigsqcup_{k=0}^{n-1} \tilde{E}_{2^k a}(\tilde{S})$ , y si se tiene la transcripción difusa  $\tilde{\tau} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$  en **Fuzz**, se define  $\tilde{E}_a^n(\tilde{\tau}) : \tilde{E}_a^n(\tilde{S}) \rightarrow \tilde{E}_a^n(\tilde{S}')$  en **Fuzz**<sub>[a,2^n a]</sub> como  $\tilde{E}_a^n(\tilde{\tau})|_{\tilde{E}_{2^k a}(\tilde{S})} = \tilde{E}_{2^k a}(\tilde{\tau})$ . Esto está bien definido pues  $\tilde{E}_a^n(\tilde{S}) = \bigsqcup_{k=0}^{n-1} \tilde{E}_{2^k a}(\tilde{S}) = \bigsqcup_{k=0}^{n-1} \{\tilde{x}\}_{x \in E_{2^k a}(S)}$  donde  $\tilde{x}$  es una nota musical difusa asociada a  $x \in E_{2^k a}(S)$ , y como  $E_a^n(S) = \bigsqcup_{k=0}^{n-1} E_{2^k a}(S) \Rightarrow \tilde{E}_a^n(\tilde{S}) = \{\tilde{x}\}_{x \in E_a^n(S)}$ , por lo que  $\tilde{E}_a^n(\tilde{S})$  es un sistema de afinación difuso asociado a  $E_a^n(S) \in \mathbf{Tun}_{[a,2^n a]} \Rightarrow \tilde{E}_a^n(\tilde{S}) \in \mathbf{Fuzz}_{[a,2^n a]}$ . Por último,  $\tilde{E}_a^n$  resulta ser un functor:  $\tilde{E}_a^n(\text{id}_{\tilde{S}})|_{\tilde{E}_{2^k a}(\tilde{S})} = \tilde{E}_{2^k a}(\text{id}_{\tilde{S}}) = \text{id}_{\tilde{E}_{2^k a}(\tilde{S})} \forall 0 \leq k < n \Rightarrow \tilde{E}_a^n(\text{id}_{\tilde{S}}) = \text{id}_{\tilde{E}_a^n(\tilde{S})}$ , y  $\tilde{E}_a^n(\tilde{\tau}' \circ \tilde{\tau})|_{\tilde{E}_{2^k a}(\tilde{S})} = \tilde{E}_{2^k a}(\tilde{\tau}' \circ \tilde{\tau}) = \tilde{E}_{2^k a}(\tilde{\tau}') \circ \tilde{E}_{2^k a}(\tilde{\tau}) = \tilde{E}_a^n(\tilde{\tau}')|_{\tilde{E}_{2^k a}(\tilde{S}')} \circ \tilde{E}_a^n(\tilde{\tau})|_{\tilde{E}_{2^k a}(\tilde{S})} = (\tilde{E}_a^n(\tilde{\tau}') \circ \tilde{E}_a^n(\tilde{\tau}))|_{\tilde{E}_{2^k a}(\tilde{S})} \forall 0 \leq k < n \Rightarrow \tilde{E}_a^n(\tilde{\tau}' \circ \tilde{\tau}) = \tilde{E}_a^n(\tilde{\tau}') \circ \tilde{E}_a^n(\tilde{\tau})$ .

**Proposición 59.** Sean  $a \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , y consideremos  $\tilde{\tau} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}'$  en **Fuzz**. Vale que:

$$\Phi(\tilde{E}_a^n(\tilde{\tau})) = \Phi(\tilde{E}_a(\tilde{\tau})) \leq \Phi(\tilde{\tau})$$

*Demostración.* Tenemos que  $\{(\tilde{x}, \tilde{E}_a(\tilde{\tau})(\tilde{x})) : \tilde{x} \in \tilde{E}_a(\tilde{S})\} \subseteq \{(\tilde{x}, \tilde{E}_a^n(\tilde{\tau})(\tilde{x})) : \tilde{x} \in \tilde{E}_a^n(\tilde{S})\}$  pues  $\tilde{E}_a^n(\tilde{\tau})|_{\tilde{E}_a(\tilde{S})} = \tilde{E}_a(\tilde{\tau})$ , y por lo tanto  $\bigwedge_{\tilde{x} \in \tilde{E}_a(\tilde{S})} \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{E}_a(\tilde{\tau})(\tilde{x}))$

$\geq \bigwedge_{\tilde{x} \in \tilde{E}_a^n(\tilde{S})} \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{E}_a^n(\tilde{\tau})(\tilde{x}))$ . Por otro lado, si  $\tilde{x} \in \tilde{E}_a^n(\tilde{S}) \Rightarrow x \in E_a^n(S) \Rightarrow x \in E_{2^k a}(S) \Rightarrow 2^k a \leq x < 2^{k+1} a \Rightarrow a \leq 2^{-k} x < 2a$  y  $\psi \circ \phi(2^{-k}x) = \psi(\log_2(x) - k) = \psi(\log_2(x)) = \psi \circ \phi(x) \in S$ , por lo que  $2^{-k}x \in E_a(S) \Rightarrow \widetilde{2^{-k}x} \in \tilde{E}_a(\tilde{S})$ . Quisiéramos ver que  $\text{comp}(\widetilde{2^{-k}x}, \tilde{E}_a(\tilde{\tau})(\widetilde{2^{-k}x})) = \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{E}_a^n(\tilde{\tau})(\tilde{x}))$ .

Dado  $u \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $d_f(2^{-k}x, 2^{-k}u) = |\log_2(x) - k - (\log_2(u) - k)| = |\log_2(x) - \log_2(u)| = d_f(x, u)$ , y como  $\sigma_a(2^{-k}x) = \sigma_{2^k a}(x) \Rightarrow \mu_{\widetilde{2^{-k}x}}(2^{-k}u) = \Gamma_{\sigma_a(2^{-k}x)}^{-1}(\mu_{\sigma_a(\widetilde{2^{-k}x})})(d_f(2^{-k}x, 2^{-k}u)) = \overline{\Gamma_{\sigma_{2^k a}(x)}^{-1}(\mu_{\sigma_{2^k a}(x)})}(d_f(x, u)) = \mu_{\tilde{x}}(u)$ . Además,  $x \in E_{2^k a}(S) \Rightarrow E_a^n(\tau)(x) = E_{2^k a}(\tau)(x) \in E_{2^k a}(S') \Rightarrow 2^k a \leq E_a^n(\tau)(x) < 2^{k+1} a \Rightarrow a \leq 2^{-k} E_a^n(\tau)(x) < 2a$  y  $\psi \circ \phi(2^{-k} E_a^n(\tau)(x)) = \psi(\log_2(E_a^n(\tau)(x)) - k) = \psi(\log_2(E_a^n(\tau)(x))) = \psi \circ \phi(E_a^n(\tau)(x)) = \tau \circ \sigma_{2^k a}(x) = \tau \circ \sigma_a(2^{-k}x) \Rightarrow 2^{-k} E_a^n(\tau)(x) = E_a(\tau)(2^{-k}x)$ . Análogamente,  $d_f(E_a(\tau)(2^{-k}x), 2^{-k}u) = d_f(2^{-k} E_a^n(\tau)(x), 2^{-k}u) = |\log_2(E_a^n(\tau)(x)) - k - (\log_2(u) - k)| = |\log_2(E_a^n(\tau)(x)) - \log_2(u)| = d_f(E_a(\tau)(x), u)$ , y como  $\sigma_a(E_a(\tau)(2^{-k}x)) = \tau \circ \sigma_a(2^{-k}x) = \tau \circ \sigma_{2^k a}(x) = \sigma_{2^k a}(E_{2^k a}(\tau)(x)) = \sigma_{2^k a}(E_a^n(\tau)(x)) \Rightarrow \mu_{\widetilde{E_a(\tau)(2^{-k}x)}}(2^{-k}u) = \overline{\Gamma_{\sigma_a(E_a(\tau)(2^{-k}x))}^{-1}(\mu_{\sigma_a(\widetilde{E_a(\tau)(2^{-k}x)})})}(d_f(E_a(\tau)(2^{-k}x), 2^{-k}u)) = \Gamma_{\sigma_{2^k a}(E_a^n(\tau)(x))}^{-1}(\mu_{\sigma_{2^k a}(\widetilde{E_a(\tau)(x)})})(d_f(E_a^n(\tau)(x), u)) = \mu_{\widetilde{E_a(\tau)(x)}}(u) \Rightarrow \mu_{\widetilde{2^{-k}x}}(2^{-k}u) \wedge \mu_{\widetilde{E_a(\tau)(2^{-k}x)}}(2^{-k}u) = \mu_{\tilde{x}}(u) \wedge \mu_{\widetilde{E_a(\tau)(x)}}(u) \Rightarrow \text{comp}(\widetilde{2^{-k}x}, \tilde{E}_a(\tilde{\tau})(\widetilde{2^{-k}x})) = \bigvee_{u \in \mathbb{R}_{>0}} (\mu_{\widetilde{2^{-k}x}}(u) \wedge \mu_{\widetilde{E_a(\tau)(2^{-k}x)}}(u)) = \bigvee_{u \in \mathbb{R}_{>0}} (\mu_{\widetilde{2^{-k}x}}(2^{-k}u) \wedge \mu_{\widetilde{E_a(\tau)(2^{-k}x)}}(2^{-k}u)) = \bigvee_{u \in \mathbb{R}_{>0}} (\mu_{\tilde{x}}(u) \wedge \mu_{\widetilde{E_a(\tau)(x)}}(u)) = \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{E}_a^n(\tilde{\tau})(\tilde{x}))$ , pues  $\tilde{E}_a(\tilde{\tau})(\widetilde{2^{-k}x}) = E_a(\tau)(2^{-k}x)$  y  $\tilde{E}_a^n(\tilde{\tau})(\tilde{x}) = E_a^n(\tau)(x)$ . Por lo tanto,  $\bigwedge_{\tilde{x} \in \tilde{E}_a(\tilde{S})} \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{E}_a(\tilde{\tau})(\tilde{x})) = \bigwedge_{\tilde{x} \in \tilde{E}_a^n(\tilde{S})} \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{E}_a^n(\tilde{\tau})(\tilde{x}))$ , es decir,  $\Phi(\tilde{E}_a(\tilde{\tau})) = \Phi(\tilde{E}_a^n(\tilde{\tau}))$ .

Por último, queremos ver que  $\bigwedge_{\tilde{x} \in \tilde{E}_a(\tilde{S})} \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{E}_a(\tilde{\tau})(\tilde{x})) \leq \bigwedge_{\tilde{z} \in \tilde{S}} \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{\tau}(\tilde{z})) \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in E_a(S)} \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{E}_a(\tilde{\tau})(\tilde{x})) \leq \bigwedge_{z \in S} \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{\tau}(\tilde{z}))$ . Dado  $x \in E_a(S) \Rightarrow d_f(x, u) \geq d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \psi \circ \phi(u))$  y  $d_f(E_a(\tau)(x), u) \geq d_{[f]}(\psi \circ \phi(E_a(\tau)(x)), \psi \circ \phi(u)) = d_{[f]}(\tau(\psi \circ \phi(x)), \psi \circ \phi(u))$ . Además, tenemos que  $\Gamma_x^{-1}(\mu_{\tilde{x}}) = \overline{\Gamma_{\sigma_a(x)}^{-1}(\mu_{\sigma_a(x)})} \Rightarrow \mu_{\tilde{x}}(u) = \Gamma_x^{-1}(\mu_{\tilde{x}})(d_f(x, u)) = \overline{\Gamma_{\sigma_a(x)}^{-1}(\mu_{\sigma_a(x)})}(d_f(x, u)) \leq \overline{\Gamma_{\sigma_a(x)}^{-1}(\mu_{\sigma_a(x)})}(d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \psi \circ \phi(u))) = \Gamma_{\sigma_a(x)}^{-1}(\mu_{\sigma_a(x)})(d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \psi \circ \phi(u))) = \mu_{\widetilde{\sigma_a(x)}}(\psi \circ \phi(u))$ , y análogamente,  $\mu_{\tilde{E}_a(\tilde{\tau})(\tilde{x})}(u) \leq \mu_{\widetilde{\tau}(\sigma_a(x))}(\psi \circ \phi(u)) \Rightarrow \mu_{\tilde{x}}(u) \wedge \mu_{\tilde{E}_a(\tilde{\tau})(\tilde{x})}(u) \leq \mu_{\widetilde{\sigma_a(x)}}(\psi \circ \phi(u)) \wedge \mu_{\widetilde{\tau}(\sigma_a(x))}(\psi \circ \phi(u)) \Rightarrow \bigvee_{u \in \mathbb{R}_{>0}} (\mu_{\tilde{x}}(u) \wedge \mu_{\tilde{E}_a(\tilde{\tau})(\tilde{x})}(u)) \leq \bigvee_{u \in \mathbb{R}_{>0}} (\mu_{\widetilde{\sigma_a(x)}}(\psi \circ \phi(u)) \wedge \mu_{\widetilde{\tau}(\sigma_a(x))}(\psi \circ \phi(u))) = \bigvee_{u \in \mathbb{T}} (\mu_{\widetilde{\sigma_a(x)}}(u) \wedge \mu_{\widetilde{\tau}(\sigma_a(x))}(u)) \Rightarrow \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{E}_a(\tilde{\tau})(\tilde{x})) \leq \text{comp}(\sigma_a(x), \tilde{\tau}(\sigma_a(x))) \Rightarrow \bigwedge_{x \in E_a(S)} \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{E}_a(\tilde{\tau})(\tilde{x}))$

$\leq \bigwedge_{x \in E_a(S)} \text{comp}(\widetilde{\sigma_a(x)}, \tilde{\tau}(\widetilde{\sigma_a(x)})) = \bigwedge_{z \in S} \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{\tau}(\tilde{z}))$ . Por lo tanto,  $\Phi(\tilde{E}_a(\tilde{\tau})) \leq \Phi(\tilde{\tau})$ .  $\square$

**Lema 60.** Sean  $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$  /  $x \leq y$  con notas musicales difusas asociadas  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$ . Entonces  $\exists z \in [x, y]$  /  $\mu_{\tilde{x}}(z) \wedge \mu_{\tilde{y}}(z) = \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y})$ . Además,  $\text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \text{comp}(\widetilde{\psi \circ \phi(x)}, \widetilde{\psi \circ \phi(y)})$  y si  $d_f(x, y) \leq 1/2 \Rightarrow \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(x)}}(\psi \circ \phi(z)) \wedge \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(y)}}(\psi \circ \phi(z)) = \text{comp}(\widetilde{\psi \circ \phi(x)}, \widetilde{\psi \circ \phi(y)}) = \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y})$ , donde:

$$\begin{aligned}\mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(x)}} &= \Gamma_{\psi \circ \phi(x)}(\Gamma_x^{-1}(\mu_{\tilde{x}})|_{[0,1/2]}) \\ \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(y)}} &= \Gamma_{\psi \circ \phi(y)}(\Gamma_y^{-1}(\mu_{\tilde{y}})|_{[0,1/2]})\end{aligned}$$

*Demuestra*ción. Si  $u < x \Rightarrow d_f(x, u) > d_f(x, x)$  y  $d_f(y, u) > d_f(y, x) \Rightarrow \mu_{\tilde{x}}(u) \leq \mu_{\tilde{x}}(x)$  y  $\mu_{\tilde{y}}(u) \leq \mu_{\tilde{y}}(x) \Rightarrow \mu_{\tilde{x}}(u) \wedge \mu_{\tilde{y}}(u) \leq \mu_{\tilde{x}}(x) \wedge \mu_{\tilde{y}}(x)$ . Análogamente, si  $u > y \Rightarrow \mu_{\tilde{x}}(u) \wedge \mu_{\tilde{y}}(u) \leq \mu_{\tilde{x}}(y) \wedge \mu_{\tilde{y}}(y)$ , por lo que  $\bigvee_{u \in \mathbb{R}_{>0}} (\mu_{\tilde{x}}(u) \wedge \mu_{\tilde{y}}(u)) = \bigvee_{u \in [x, y]} (\mu_{\tilde{x}}(u) \wedge \mu_{\tilde{y}}(u)) \Rightarrow \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \bigvee_{u \in [x, y]} (\mu_{\tilde{x}}(u) \wedge \mu_{\tilde{y}}(u))$ , y como  $[x, y]$  es compacto,  $\exists z \in [x, y]$  /  $\mu_{\tilde{x}}(z) \wedge \mu_{\tilde{y}}(z) = \bigvee_{u \in [x, y]} (\mu_{\tilde{x}}(u) \wedge \mu_{\tilde{y}}(u))$ .

Si  $r \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \psi \circ \phi(r)) \leq d_f(x, r)$  y  $d_{[f]}(\psi \circ \phi(y), \psi \circ \phi(r)) \leq d_f(y, r)$ , por lo que  $\mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(x)}}(\psi \circ \phi(r)) = \Gamma_x^{-1}(\mu_{\tilde{x}})|_{[0,1/2]}(d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \psi \circ \phi(r))) \geq \Gamma_x^{-1}(\mu_{\tilde{x}})(d_f(x, r)) = \mu_{\tilde{x}}(r)$ , y análogamente  $\mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(y)}}(\psi \circ \phi(r)) \geq \mu_{\tilde{y}}(r) \Rightarrow \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(x)}}(\psi \circ \phi(r)) \wedge \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(y)}}(\psi \circ \phi(r)) \geq \mu_{\tilde{x}}(r) \wedge \mu_{\tilde{y}}(r)$ . Luego,  $\mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(x)}}(\psi \circ \phi(z)) \wedge \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(y)}}(\psi \circ \phi(z)) \geq \mu_{\tilde{x}}(z) \wedge \mu_{\tilde{y}}(z) = \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) \Rightarrow \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \text{comp}(\psi \circ \phi(x), \psi \circ \phi(y))$ . Además, si  $d_f(x, r) \leq 1/2$  y  $d_f(y, r) \leq 1/2$ , se tiene que  $d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \psi \circ \phi(r)) = d_f(x, r)$  y  $d_{[f]}(\psi \circ \phi(y), \psi \circ \phi(r)) = d_f(y, r) \Rightarrow \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(x)}}(\psi \circ \phi(r)) = \mu_{\tilde{x}}(r)$  y  $\mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(y)}}(\psi \circ \phi(r)) = \mu_{\tilde{y}}(r) \Rightarrow \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(x)}}(\psi \circ \phi(r)) \wedge \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(y)}}(\psi \circ \phi(r)) = \mu_{\tilde{x}}(r) \wedge \mu_{\tilde{y}}(r)$ . Si  $s \in \mathbb{T} / \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(x)}}(s) \wedge \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(y)}}(s) > \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) \Rightarrow \exists t \in [x, 2x] / \psi \circ \phi(t) = s$ , y si  $d_f(x, y) \leq 1/2 \Rightarrow \phi(y) - \phi(x) \leq 1/2 \Rightarrow \phi(y) \leq 1/2 + \phi(x) \Rightarrow y \leq \sqrt{2}x$ , y aquí tenemos las siguientes posibilidades:

- $t \in [x, \sqrt{2}x] \Rightarrow d_f(x, t) \leq d_f(x, \sqrt{2}x) = 1/2$  y  $d_f(y, t) \leq d_f(x, \sqrt{2}x) = 1/2 \Rightarrow \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(x)}}(\psi \circ \phi(t)) \wedge \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(y)}}(\psi \circ \phi(t)) = \mu_{\tilde{x}}(t) \wedge \mu_{\tilde{y}}(t) \leq \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) \Rightarrow \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(x)}}(s) \wedge \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(y)}}(s) \leq \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y})$ , lo que es absurdo.
- $t \in [\sqrt{2}y, 2x] \Rightarrow \sqrt{2}y \leq t < 2x \Rightarrow y/\sqrt{2} \leq t/2 < x \Rightarrow d_f(x, t/2) \leq d_f(y, y/\sqrt{2}) = 1/2$  y  $d_f(y, t/2) \leq d_f(y, y/\sqrt{2}) = 1/2 \Rightarrow \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(x)}}(\psi \circ \phi(t/2)) \wedge \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(y)}}(\psi \circ \phi(t/2)) = \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(x)}}(s) \wedge \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(y)}}(s) \leq \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y})$ .

$\mu_{\tilde{x}}(t/2) \wedge \mu_{\tilde{y}}(t/2) \leq \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) \Rightarrow \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(x)}}(s) \wedge \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(y)}}(s) \leq \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y})$ , lo que es absurdo.

- $t \in (\sqrt{2}x, \sqrt{2}y) \Rightarrow d_f(t, 2x) < d_f(\sqrt{2}x, 2x) = 1/2 \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(t), \psi \circ \phi(2x)) = d_f(t, 2x) = \phi(2x) - \phi(t) = 1 + \phi(x) - \phi(t) \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), s) = 1 + \phi(x) - \phi(t)$  y  $d_f(t, y) < d_f(\sqrt{2}y, y) = 1/2 \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(t), \psi \circ \phi(y)) = d_f(t, y) = \phi(t) - \phi(y) \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(y), s) = \phi(t) - \phi(y)$ . Si  $r \in [x, y]$ ,  $d_f(r, x) \leq 1 + \phi(x) - \phi(t) \Leftrightarrow \phi(r) - \phi(x) \leq 1 + \phi(x) - \phi(t) \Leftrightarrow \phi(r) \leq 1 + 2\phi(x) - \phi(t) \Leftrightarrow r \leq 2x^2/t$  y  $d_f(r, y) \leq \phi(t) - \phi(y) \Leftrightarrow \phi(y) - \phi(r) \leq \phi(t) - \phi(y) \Leftrightarrow 2\phi(y) - \phi(t) \leq \phi(r) \Leftrightarrow y^2/t \leq r$ . Pero  $x \leq 2x^2/t \Leftrightarrow t \leq 2x$ ,  $y^2/t \leq y \Leftrightarrow y \leq t$  e  $y^2/t \leq 2x^2/t \Leftrightarrow y \leq \sqrt{2}x$ , por lo que  $\max\{x, y^2/t\} \leq \min\{y, 2x^2/t\} \Rightarrow \exists r \in [\max\{x, y^2/t\}, \min\{y, 2x^2/t\}]$ . Luego,  $d_f(r, x) \leq d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), s) \leq 1/2 \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \psi \circ \phi(r)) \leq d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), s) \Rightarrow \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(x)}}(\psi \circ \phi(r)) \geq \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(x)}}(s)$  y  $d_f(r, y) \leq d_{[f]}(\psi \circ \phi(y), s) \leq 1/2 \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(y), \psi \circ \phi(r)) \leq d_{[f]}(\psi \circ \phi(y), s) \Rightarrow \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(y)}}(\psi \circ \phi(r)) \geq \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(y)}}(s) \Rightarrow \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(x)}}(\psi \circ \phi(r)) \wedge \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(y)}}(\psi \circ \phi(r)) \geq \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(x)}}(s) \wedge \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(y)}}(s) > \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y})$ , pero esto es absurdo pues  $\mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(x)}}(\psi \circ \phi(r)) = \mu_{\tilde{x}}(r)$  y  $\mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(y)}}(\psi \circ \phi(r)) = \mu_{\tilde{y}}(r) \Rightarrow \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(x)}}(\psi \circ \phi(r)) \wedge \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(y)}}(\psi \circ \phi(r)) = \mu_{\tilde{x}}(r) \wedge \mu_{\tilde{y}}(r) \leq \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y})$ .

Por lo tanto,  $\text{comp}(\widetilde{\psi \circ \phi(x)}, \widetilde{\psi \circ \phi(y)}) = \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mu_{\tilde{x}}(z) \wedge \mu_{\tilde{y}}(z) = \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(x)}}(\psi \circ \phi(z)) \wedge \mu_{\widetilde{\psi \circ \phi(y)}}(\psi \circ \phi(z))$ .  $\square$

*Observación 55.*  $z$  puede tomarse de manera que  $\mu_{\tilde{x}}(z) = \mu_{\tilde{y}}(z)$ . En efecto, si  $\mu_{\tilde{x}}(z) < \mu_{\tilde{y}}(z) \Rightarrow \mu_{\tilde{x}}(z) - \mu_{\tilde{y}}(z) < 0$  y como  $\mu_{\tilde{x}}(x) - \mu_{\tilde{y}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{y}}(x) \geq 0$  y  $\mu_{\tilde{x}} - \mu_{\tilde{y}}$  es continua,  $\exists t \in [x, z] / \mu_{\tilde{x}}(t) - \mu_{\tilde{y}}(t) = 0 \Rightarrow \mu_{\tilde{x}}(t) = \mu_{\tilde{y}}(t)$ . Además, como  $d_f(t, x) \leq d_f(z, x) \Rightarrow \mu_{\tilde{x}}(t) \geq \mu_{\tilde{x}}(z) \Rightarrow \mu_{\tilde{x}}(t) \wedge \mu_{\tilde{y}}(t) \geq \mu_{\tilde{x}}(z) \wedge \mu_{\tilde{y}}(z) = \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) \Rightarrow \mu_{\tilde{x}}(t) \wedge \mu_{\tilde{y}}(t) = \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y})$ . Análogamente, si  $\mu_{\tilde{x}}(z) > \mu_{\tilde{y}}(z) \Rightarrow \exists t \in [z, y] / \mu_{\tilde{x}}(t) = \mu_{\tilde{y}}(t) = \mu_{\tilde{x}}(t) \wedge \mu_{\tilde{y}}(t) = \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y})$ .

**Lema 61.** Sean  $\tilde{S}, \tilde{S}' \in \mathbf{Fuzz}$  canónicamente intercambiables, y sea  $\tilde{\tau}$  la transcripción canónica de  $\tilde{S}$  a  $\tilde{S}'$ . Dados  $\tilde{s} \in \tilde{S}$  y  $\tilde{z} \in \tilde{S}'$ , se definen:

$$\begin{aligned} l_{\tilde{s}} &= \bigvee (\Gamma_s^{-1}(\mu_{\tilde{s}}))^{-1}(\text{comp}(\tilde{s}, \tilde{\tau}(\tilde{s}))) \\ l_{\tilde{z}} &= \bigvee (\Gamma_z^{-1}(\mu_{\tilde{z}}))^{-1}(\text{comp}(\tilde{z}, \tilde{\tau}^{-1}(\tilde{z}))) \end{aligned}$$

Entonces se tiene que  $\tilde{\tau}(\tilde{s}) = \tilde{z} \Leftrightarrow l_{\tilde{s}} + l_{\tilde{z}} \geq d_{[f]}(s, z)$ .

*Demostración.* Sea  $x \in (\psi \circ \phi)^{-1}(s)$ , sea  $y \in (\psi \circ \phi)^{-1}(z) / d_f(x, y) = d_{[f]}(s, z)$ , y supongamos sin pérdida de generalidad que  $x \leq y$ . Consideramos las notas musicales difusas asociadas  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  con:

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{x}} &= \Gamma_x \left( \overline{\Gamma_s^{-1}(\mu_s)} \right) \\ \mu_{\tilde{y}} &= \Gamma_y \left( \overline{\Gamma_z^{-1}(\mu_z)} \right)\end{aligned}$$

Si  $\tilde{\tau}(\tilde{s}) = \tilde{z}$ , por el lema y la observación anterior,  $\exists t \in [x, y] / \mu_{\tilde{x}}(t) = \mu_{\tilde{y}}(t) = \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y})$  y  $\mu_{\tilde{s}}(\psi \circ \phi(t)) \wedge \mu_{\tilde{z}}(\psi \circ \phi(t)) = \text{comp}(\tilde{s}, \tilde{z}) = \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y})$ . Luego,  $d_{[f]}(s, z) \leq d_{[f]}(s, \psi \circ \phi(t)) + d_{[f]}(\psi \circ \phi(t), z)$ ,  $\Gamma_s^{-1}(\mu_s)(d_{[f]}(s, \psi \circ \phi(t))) = \Gamma_x^{-1}(\mu_{\tilde{x}})(d_{[f]}(s, \psi \circ \phi(t))) = \Gamma_x^{-1}(\mu_{\tilde{x}})(d_f(x, t)) = \mu_{\tilde{x}}(t) = \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \text{comp}(\tilde{s}, \tilde{z}) \Rightarrow d_{[f]}(s, \psi \circ \phi(t)) \leq l_{\tilde{s}}$ , y análogamente  $d_{[f]}(z, \psi \circ \phi(t)) \leq l_{\tilde{z}} \Rightarrow d_{[f]}(s, z) \leq l_{\tilde{s}} + l_{\tilde{z}}$ .

Si en cambio  $l_{\tilde{s}} + l_{\tilde{z}} \geq d_{[f]}(s, z) = d_f(x, y) \Rightarrow l_{\tilde{s}} \geq d_f(x, y) - l_{\tilde{z}}$ ,  $l_{\tilde{s}} \geq 0$  y  $l_{\tilde{z}} \geq 0 \Rightarrow d_f(x, y) \geq d_f(x, y) - l_{\tilde{z}} \Rightarrow d_f(x, y) - l_{\tilde{z}} \vee 0 \leq l_{\tilde{s}} \wedge d_f(x, y)$ , luego puedo tomar  $d \in [d_f(x, y) - l_{\tilde{z}} \vee 0, l_{\tilde{s}} \wedge d_f(x, y)]$ . Si considero  $t = 2^d x$ , tengo que  $0 \leq d \leq d_f(x, y) = \phi(y) - \phi(x) = \phi(y/x) \Rightarrow 1 \leq 2^d \leq y/x \Rightarrow x \leq t \leq y$ ,  $d_f(t, x) = \phi(t/x) = \phi(2^d) = d \leq l_{\tilde{s}} \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(t), s) \leq l_{\tilde{s}} \Rightarrow \mu_s(\psi \circ \phi(t)) \geq \Gamma_s^{-1}(\mu_s)(l_{\tilde{s}}) = \text{comp}(\tilde{s}, \tilde{\tau}(\tilde{s}))$  y  $d_f(t, y) = d_f(x, y) - d_f(t, x) = d_f(x, y) - d \leq l_{\tilde{z}} \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(t), z) \leq l_{\tilde{z}} \Rightarrow \mu_z(\psi \circ \phi(t)) \geq \Gamma_z^{-1}(\mu_z)(l_{\tilde{z}}) = \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{\tau}^{-1}(\tilde{z})) \Rightarrow \mu_s(\psi \circ \phi(t)) \wedge \mu_z(\psi \circ \phi(t)) \geq \text{comp}(\tilde{s}, \tilde{\tau}(\tilde{s})) \wedge \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{\tau}^{-1}(\tilde{z}))$ . Si  $\text{comp}(\tilde{s}, \tilde{\tau}(\tilde{s})) \leq \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{\tau}^{-1}(\tilde{z})) \Rightarrow \text{comp}(\tilde{s}, \tilde{z}) \geq \text{comp}(\tilde{s}, \tilde{\tau}(\tilde{s})) \Rightarrow \tilde{z} = \tilde{\tau}(\tilde{s})$ , mientras que si  $\text{comp}(\tilde{s}, \tilde{\tau}(\tilde{s})) > \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{\tau}^{-1}(\tilde{z})) \Rightarrow \text{comp}(\tilde{s}, \tilde{z}) \geq \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{\tau}^{-1}(\tilde{z})) \Rightarrow \tilde{s} = \tilde{\tau}^{-1}(\tilde{z}) \Rightarrow \tilde{z} = \tilde{\tau}(\tilde{s})$ .

□

**Lema 62.** Sean  $\tilde{S}, \tilde{S}' \in \mathbf{Fuzz}_{\mathbb{R}_{>0}}$  canónicamente intercambiables, y sea  $\tilde{\tau}$  la transcripción canónica de  $\tilde{S}$  a  $\tilde{S}'$ . Dados  $\tilde{x} \in \tilde{S}$  y  $\tilde{y} \in \tilde{S}'$ , se definen:

$$\begin{aligned}l_{\tilde{x}} &= \bigvee (\Gamma_x^{-1}(\mu_{\tilde{x}}))^{-1}(\text{comp}(\tilde{x}, \tilde{\tau}(\tilde{x}))) \\ l_{\tilde{y}} &= \bigvee (\Gamma_y^{-1}(\mu_{\tilde{y}}))^{-1}(\text{comp}(\tilde{y}, \tilde{\tau}^{-1}(\tilde{y})))\end{aligned}$$

Entonces se tiene que  $\tilde{\tau}(\tilde{x}) = \tilde{y} \Leftrightarrow l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}} \geq d_f(x, y)$ .

*Demostración.* La demostración es análoga a la del lema anterior. □

**Lema 63.** Sean  $\tilde{S}, \tilde{S}' \in \mathbf{Fuzz}$  canónicamente intercambiables, y sea  $\tilde{\tau}$  la transcripción canónica de  $\tilde{S}$  a  $\tilde{S}'$ . Sean  $S = U(\tilde{S})$ ,  $S' = U(\tilde{S}')$  y  $\tau = U(\tilde{\tau})$ . Dado  $s \in S$ , sea  $x \in (\psi \circ \phi)^{-1}(s)$  e  $y \in (\psi \circ \phi)^{-1}(\tau(s))$  /  $d_f(x, y) = d_{[f]}(s, \tau(s))$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $x \leq y$ , entonces  $(x, y] \cap (\psi \circ \phi)^{-1}(S) = [x, y] \cap (\psi \circ \phi)^{-1}(S') = \emptyset$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\exists t \in (x, y] \cap (\psi \circ \phi)^{-1}(S) \Rightarrow \psi \circ \phi(t) = z \in S$ , y sea  $r \in (\psi \circ \phi)^{-1}(\tau(z))$  /  $d_f(t, r) = d_{[f]}(z, \tau(z))$ . Luego, por el lema anterior tenemos las desigualdades:

$$\begin{aligned} l_{\tilde{s}} + l_{\tilde{\tau}(\tilde{s})} &\geq d_{[f]}(s, \tau(s)) = d_f(x, y) \\ l_{\tilde{z}} + l_{\tilde{\tau}(\tilde{z})} &\geq d_{[f]}(z, \tau(z)) = d_f(t, r) \\ l_{\tilde{z}} + l_{\tilde{\tau}(\tilde{s})} &< d_{[f]}(z, \tau(s)) = d_f(t, y) \\ l_{\tilde{s}} + l_{\tilde{\tau}(\tilde{z})} &< d_{[f]}(s, \tau(z)) \end{aligned}$$

Si sumamos las primeras dos desigualdades obtenemos que  $d_f(x, y) + d_f(t, r) \leq l_{\tilde{s}} + l_{\tilde{\tau}(\tilde{s})} + l_{\tilde{z}} + l_{\tilde{\tau}(\tilde{z})}$ , mientras que al sumar las dos últimas, tenemos que  $l_{\tilde{s}} + l_{\tilde{\tau}(\tilde{s})} + l_{\tilde{z}} + l_{\tilde{\tau}(\tilde{z})} < d_f(t, y) + d_{[f]}(s, \tau(z)) \Rightarrow d_f(x, y) + d_f(t, r) < d_f(t, y) + d_{[f]}(s, \tau(z)) \Rightarrow d_f(x, y) + d_f(t, r) - d_f(t, y) < d_{[f]}(s, \tau(z)) \Rightarrow d_f(x, t) + d_f(t, r) < d_{[f]}(s, \tau(z)) \Rightarrow d_f(x, r) < d_{[f]}(s, \tau(z)) \leq d_f(x, r)$ , lo que es absurdo.

Análogamente, si suponemos que  $\exists t \in [x, y] \cap (\psi \circ \phi)^{-1}(S') \Rightarrow \psi \circ \phi(t) = z \in S'$ , y tomamos  $r \in (\psi \circ \phi)^{-1}(\tau^{-1}(z))$  /  $d_f(t, r) = d_{[f]}(z, \tau^{-1}(z))$ , tenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} l_{\tilde{s}} + l_{\tilde{\tau}(\tilde{s})} &\geq d_{[f]}(s, \tau(s)) = d_f(x, y) \\ l_{\tilde{z}} + l_{\tilde{\tau}^{-1}(\tilde{z})} &\geq d_{[f]}(z, \tau^{-1}(z)) = d_f(t, r) \\ l_{\tilde{z}} + l_{\tilde{s}} &< d_{[f]}(z, s) = d_f(t, x) \\ l_{\tilde{\tau}^{-1}(\tilde{z})} + l_{\tilde{\tau}(\tilde{s})} &< d_{[f]}(\tau^{-1}(z), \tau(s)) \end{aligned}$$

Y si sumamos tal como antes, obtenemos que  $d_f(x, y) + d_f(t, r) < d_f(t, x) + d_{[f]}(\tau^{-1}(z), \tau(s)) \Rightarrow d_f(x, y) + d_f(t, r) - d_f(t, x) < d_{[f]}(\tau^{-1}(z), \tau(s)) \Rightarrow d_f(t, y) + d_f(t, r) < d_{[f]}(\tau^{-1}(z), \tau(s)) \Rightarrow d_f(r, y) < d_{[f]}(\tau^{-1}(z), \tau(s)) \leq d_f(r, y)$ , lo que es absurdo.  $\square$

**Lema 64.** Sean  $\tilde{S}, \tilde{S}' \in \mathbf{Fuzz}_{\mathbb{R}_{>0}}$  canónicamente intercambiables, y sea  $\tilde{\tau}$  la transcripción canónica de  $\tilde{S}$  a  $\tilde{S}'$ . Sean  $S = U(\tilde{S})$ ,  $S' = U(\tilde{S}')$  y  $\tau = U(\tilde{\tau})$ . Dado  $x \in S$ , supongamos sin pérdida de generalidad que  $x \leq \tau(x)$ , entonces  $(x, \tau(x)] \cap S = [x, \tau(x)) \cap S' = \emptyset$ .

*Demostración.* La demostración es análoga a la del lema anterior.  $\square$

**Proposición 65.** *Sean  $\tilde{S}, \tilde{S}' \in \mathbf{Fuzz}$  canónicamente intercambiables tales que  $\#\tilde{S} = \#\tilde{S}' > 1$ , y sea  $\tilde{\tau}$  la transcripción canónica de  $\tilde{S}$  a  $\tilde{S}'$ . Entonces  $\exists a \in \mathbb{R}_{>0}/ \tilde{E}_a^n(\tilde{\tau})$  es la transcripción canónica de  $\tilde{E}_a^n(\tilde{S})$  a  $\tilde{E}_a^n(\tilde{S}')$  en  $\mathbf{Fuzz}_{[a, 2^na]}$ ,  $\tilde{E}_a^n(\tilde{S})$  y  $\tilde{E}_a^n(\tilde{S}')$  son canónicamente intercambiables  $\forall n \in \mathbb{N}$ , y también:*

$$\Phi(\tilde{E}_a^n(\tilde{\tau})) = \Phi(\tilde{\tau})$$

*Demostración.* Sean  $S = U(\tilde{S})$ ,  $S' = U(\tilde{S}')$  y  $\tau = U(\tilde{\tau})$ . Sea  $x \in (\psi \circ \phi)^{-1}(S) \Rightarrow \psi \circ \phi(x) = s \in S$ , sea  $y \in (\psi \circ \phi)^{-1}(\tau(s))/ d_f(x, y) = d_{[f]}(s, \tau(s))$ , y sea  $a = \min\{x, y\}$ . Dado  $z \in E_a^n(S)$ ,  $d_f(z, E_a^n(\tau)(z)) \leq 1/2$ . En efecto, si  $d_f(z, E_a^n(\tau)(z)) > 1/2 \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(z), \tau(\psi \circ \phi(z))) = 1 - d_f(z, E_a^n(\tau)(z))$ , pues  $z \in E_a^n(S) \Rightarrow z \in E_{2^ka}(S) \Rightarrow E_a^n(\tau)(z) = E_{2^ka}(\tau)(z) \in E_{2^ka}(S') \Rightarrow 2^k a \leq z < 2^{k+1}a$  y  $2^k a \leq E_a^n(\tau)(z) < 2^{k+1}a \Rightarrow d_f(z, E_a^n(\tau)(z)) < d_f(2^k a, 2^{k+1}a) = 1$ . Si  $z \leq E_a^n(\tau)(z) \Rightarrow d_f(z, E_a^n(\tau)(z)) = \phi(E_a^n(\tau)(z)) - \phi(z) \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(z), \tau(\psi \circ \phi(z))) = 1 - \phi(E_a^n(\tau)(z)) + \phi(z) = \phi(z) - \phi(E_a^n(\tau)(z)/2) = d_f(z, E_a^n(\tau)(z)/2)$  y  $E_a^n(\tau)(z)/2 < 2^k a \leq z$ . Si  $x \leq y \Rightarrow a = x$ , como sabemos que  $[E_a^n(\tau)(z)/2, z] \cap (\psi \circ \phi)^{-1}(S) = \emptyset \Rightarrow 2^k x = z \Rightarrow E_a^n(\tau)(z) = 2^k y \Rightarrow d_f(z, E_a^n(\tau)(z)) = d_f(2^k x, 2^k y) = d_f(x, y) \leq 1/2$ , lo que es absurdo, mientras que si  $x > y \Rightarrow a = y$ , lo que es absurdo pues  $(E_a^n(\tau)(z)/2, z] \cap (\psi \circ \phi)^{-1}(S') = \emptyset$ . Análogamente, si  $z > E_a^n(\tau)(z) \Rightarrow d_f(z, E_a^n(\tau)(z)) = \phi(z) - \phi(E_a^n(\tau)(z)) \Rightarrow d_{[f]}(\psi \circ \phi(z), \tau(\psi \circ \phi(z))) = 1 - \phi(z) + \phi(E_a^n(\tau)(z)) = \phi(E_a^n(\tau)(z)) - \phi(z/2) = d_f(z/2, E_a^n(\tau)(z))$  y  $z/2 < 2^k a \leq E_a^n(\tau)(z)$ . Si  $x \leq y \Rightarrow a = x$ , lo que es absurdo pues  $(z/2, E_a^n(\tau)(z)] \cap (\psi \circ \phi)^{-1}(S) = \emptyset$ , mientras que si  $x > y \Rightarrow a = y$ , y como  $[z/2, E_a^n(\tau)(z)] \cap (\psi \circ \phi)^{-1}(S') = \emptyset \Rightarrow 2^k y = E_a^n(\tau)(z) \Rightarrow 2^k x = z \Rightarrow d_f(z, E_a^n(\tau)(z)) = d_f(2^k x, 2^k y) = d_f(x, y) \leq 1/2$ , lo que es absurdo. Luego,  $d_f(z, E_a^n(\tau)(z)) \leq 1/2$ .

Por lo tanto,  $\text{comp}(\tilde{z}, \tilde{E}_a^n(\tilde{\tau})(\tilde{z})) = \text{comp}(\widetilde{\psi \circ \phi(z)}, \widetilde{\tilde{\tau}(\psi \circ \phi(z))}) \forall z \in E_a^n(S) \Rightarrow \Phi(\tilde{E}_a^n(\tilde{\tau})) = \Phi(\tilde{\tau})$ . Si  $\text{comp}(\tilde{z}, \tilde{w}) \geq \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{E}_a^n(\tilde{\tau})(\tilde{z}))$  con  $z \in E_a^n(S)$  y  $w \in E_a^n(S')$   
 $\Rightarrow \text{comp}(\widetilde{\psi \circ \phi(z)}, \widetilde{\psi \circ \phi(w)}) \geq \text{comp}(\widetilde{z}, \widetilde{w}) \geq \text{comp}(\widetilde{z}, \widetilde{\tilde{E}_a^n(\tilde{\tau})(\tilde{z})})$   
 $= \text{comp}(\widetilde{\psi \circ \phi(z)}, \widetilde{\tilde{\tau}(\psi \circ \phi(z))}) \Rightarrow \psi \circ \phi(w) = \tilde{\tau}(\psi \circ \phi(z)) \Rightarrow \psi \circ \phi(w) = \tau(\psi \circ \phi(z)) = \psi \circ \phi(E_a^n(\tau)(z)) \Rightarrow w = 2^k E_a^n(\tau)(z)$ :

1. Si  $k \geq 1$ , sea  $s \in (\psi \circ \phi)^{-1}(S) \cap [E_a^n(\tau)(z), 2E_a^n(\tau)(z)]/ \psi \circ \phi(s) \neq \psi \circ \phi(z) \Rightarrow s \neq z$ .  
 Si  $s < z \Rightarrow s \in [E_a^n(\tau)(z), z]$ , pero  $d_f(z, E_a^n(\tau)(z)) \leq 1/2 \Rightarrow d_f(z, E_a^n(\tau)(z)) =$

$d_{[f]}(\psi \circ \phi(z), \tau(\psi \circ \phi(z))) \Rightarrow [E_a^n(\tau)(z), z] \cap (\psi \circ \phi)^{-1}(S) = \emptyset$ , lo que es absurdo. Luego,  $z < s < 2E_a^n(\tau)(z)$ . Si tomamos  $t \in (\psi \circ \phi)^{-1}(\tau(\psi \circ \phi(s))) / d_f(s, t) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(s), \tau(\psi \circ \phi(s))), \{\tilde{z}, \tilde{s}\}, \{\tilde{w}, \tilde{t}\} \in \mathbf{Fuzz}_{\mathbb{R}_{>0}}$  son canónicamente intercambiables pues:

$$\begin{aligned} \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{t}) &\leq \text{comp}(\widetilde{\psi \circ \phi(z)}, \widetilde{\tau(\psi \circ \phi(s))}) < \text{comp}(\widetilde{\psi \circ \phi(z)}, \widetilde{\tau(\psi \circ \phi(z))}) = \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{w}) \\ \text{comp}(\tilde{s}, \tilde{w}) &\leq \text{comp}(\widetilde{\psi \circ \phi(s)}, \widetilde{\tau(\psi \circ \phi(z))}) < \text{comp}(\widetilde{\psi \circ \phi(s)}, \widetilde{\tau(\psi \circ \phi(s))}) = \text{comp}(\tilde{s}, \tilde{t}) \\ \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{t}) &\leq \text{comp}(\widetilde{\psi \circ \phi(z)}, \widetilde{\tau(\psi \circ \phi(s))}) < \text{comp}(\widetilde{\psi \circ \phi(s)}, \widetilde{\tau(\psi \circ \phi(s))}) = \text{comp}(\tilde{s}, \tilde{t}) \\ \text{comp}(\tilde{s}, \tilde{w}) &\leq \text{comp}(\widetilde{\psi \circ \phi(s)}, \widetilde{\tau(\psi \circ \phi(z))}) < \text{comp}(\widetilde{\psi \circ \phi(z)}, \widetilde{\tau(\psi \circ \phi(z))}) = \text{comp}(\tilde{z}, \tilde{w}) \end{aligned}$$

Se tiene entonces que  $s \in (z, w] \cap \{z, s\}$ , que por el lema anterior es absurdo.

2. Si  $k \leq -1$ , sea  $s \in (\psi \circ \phi)^{-1}(S) \cap [E_a^n(\tau)(z)/2, E_a^n(\tau)(z)] / \psi \circ \phi(s) \neq \psi \circ \phi(z) \Rightarrow s \neq z$ . Si  $s > z \Rightarrow s \in (z, E_a^n(\tau)(z)]$ , pero  $d_f(z, E_a^n(\tau)(z)) \leq 1/2 \Rightarrow d_f(z, E_a^n(\tau)(z)) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(z), \tau(\psi \circ \phi(z))) \Rightarrow (z, E_a^n(\tau)(z)] \cap (\psi \circ \phi)^{-1}(S) = \emptyset$ , lo que es absurdo. Luego,  $E_a^n(\tau)(z)/2 \leq s < z$ . Si tomamos  $t \in (\psi \circ \phi)^{-1}(\tau(\psi \circ \phi(s))) / d_f(s, t) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(s), \tau(\psi \circ \phi(s)))$ , tal como en el ítem anterior  $\{\tilde{z}, \tilde{s}\}, \{\tilde{w}, \tilde{t}\} \in \mathbf{Fuzz}_{\mathbb{R}_{>0}}$  son canónicamente intercambiables y se tiene que  $s \in [w, z) \cap \{z, s\}$ , que por el lema anterior es absurdo.

Tenemos entonces que  $k = 0 \Rightarrow w = E_a^n(\tau)(z) \Rightarrow \tilde{w} = \tilde{E}_a^n(\tilde{\tau})(\tilde{z})$ , por lo que  $\tilde{E}_a^n(\tilde{\tau})$  es la transcripción canónica de  $\tilde{E}_a^n(\tilde{S})$  a  $\tilde{E}_a^n(\tilde{S}')$  en  $\mathbf{Fuzz}_{[a, 2^n a]}$ . Del mismo modo,  $\tilde{E}_a^n(\tilde{\tau}^{-1})$  es la transcripción canónica de  $\tilde{E}_a^n(\tilde{S}')$  a  $\tilde{E}_a^n(\tilde{S})$  en  $\mathbf{Fuzz}_{[a, 2^n a]}$ , y como  $\tilde{E}_a^n(\tilde{\tau}) \circ \tilde{E}_a^n(\tilde{\tau}^{-1}) = \tilde{E}_a^n(\tilde{\tau} \circ \tilde{\tau}^{-1}) = \tilde{E}_a^n(\text{id}_{\tilde{E}_a^n(\tilde{S}')} = \text{id}_{\tilde{E}_a^n(\tilde{S})})$ , y análogamente,  $\tilde{E}_a^n(\tilde{\tau}^{-1}) \circ \tilde{E}_a^n(\tilde{\tau}) = \text{id}_{\tilde{E}_a^n(\tilde{S})}$ , se tiene que  $\tilde{E}_a^n(\tilde{S})$  y  $\tilde{E}_a^n(\tilde{S}')$  son canónicamente intercambiables.  $\square$

*Observación 56.* Esto no vale, ni siquiera para el caso  $n = 1$ , si no se pide que  $\tilde{S}$  y  $\tilde{S}'$  sean canónicamente intercambiables. Por ejemplo, si tomamos  $\omega = e^{5i\pi/12}$ ,  $S = \{\omega, -\omega, \omega^{-1}, -\omega^{-1}\}$  y  $S' = \{1, -1\}$ , tenemos los sistemas de afinación difusas asociados

$\tilde{S}$  y  $\tilde{S}'$  con:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\omega}^{-1}(\mu_{\tilde{\omega}}) &= \Gamma_{\omega^{-1}}^{-1}(\mu_{\widetilde{\omega^{-1}}}) = \begin{cases} 1 - 48t & \text{si } t \leq 1/48 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\ \Gamma_{-\omega}^{-1}(\mu_{\tilde{\omega}}) &= \Gamma_{-\omega^{-1}}^{-1}(\mu_{\widetilde{\omega^{-1}}}) = \begin{cases} 1 - 8t & \text{si } t \leq 1/8 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\ \Gamma_1^{-1}(\mu_{\tilde{1}}) &= \begin{cases} 1 - 16t/3 & \text{si } t \leq 3/16 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\ \Gamma_{-1}^{-1}(\mu_{\tilde{-1}}) &= \begin{cases} 1 - 48t & \text{si } t \leq 1/49 \\ 1/49 & \text{si } 1/49 < t \leq 7/24 \\ 8/49 - 24t/49 & \text{si } 7/24 < t \leq 1/3 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}\end{aligned}$$

Si  $\exists z \in \mathbb{T}/ \mu_{\tilde{\omega}}(z) \wedge \mu_{\tilde{1}}(z) > 0 \Rightarrow \mu_{\tilde{\omega}}(z) > 0$  y  $\mu_{\tilde{1}}(z) > 0 \Rightarrow d_{[f]}(z, \omega) < 1/48$  y  $d_{[f]}(z, 1) < 3/16 \Rightarrow d_{[f]}(\omega, 1) \leq d_{[f]}(\omega, z) + d_{[f]}(z, 1) < 1/48 + 3/16 = 5/24$ , pero  $d_{[f]}(\omega, 1) = |5/24 - 0| = 5/24$ , por lo que  $\text{comp}(\tilde{\omega}, \tilde{1}) = 0$ . Además,  $d_{[f]}(\omega, -1) = |5/24 - 1/2| = 7/24 \Rightarrow \mu_{\tilde{-1}}(\omega) = 1/49 \Rightarrow \mu_{\tilde{\omega}}(\omega) \wedge \mu_{\tilde{-1}}(\omega) = 1/49 \Rightarrow \text{comp}(\tilde{\omega}, \tilde{-1}) \geq 1/49 \Rightarrow \text{comp}(\tilde{\omega}, \tilde{1}) < \text{comp}(\tilde{\omega}, \tilde{-1})$ . Por simetría, se tiene un resultado idéntico para  $\widetilde{\omega^{-1}}$ .

$d_{[f]}(-\omega^{-1}, e^{7i\pi/20}) = |7/24 - 7/40| = 7/60 \leq 1/8 \Rightarrow \mu_{\widetilde{\omega^{-1}}}(e^{7i\pi/20}) = 1/15$  y  $d_{[f]}(1, e^{7i\pi/20}) = |7/40 - 0| = 7/40 \leq 3/16 \Rightarrow \mu_{\tilde{1}}(e^{7i\pi/20}) = 1/15 \Rightarrow \mu_{\widetilde{\omega^{-1}}}(e^{7i\pi/20}) \wedge \mu_{\tilde{1}}(e^{7i\pi/20}) = 1/15 \Rightarrow \text{comp}(\widetilde{\omega^{-1}}, \tilde{1}) \geq 1/15$ . Por otro lado, si  $\exists z \in \mathbb{T}/ \mu_{\widetilde{\omega^{-1}}}(z) \wedge \mu_{\tilde{-1}}(z) > 1/49 \Rightarrow \mu_{\widetilde{\omega^{-1}}}(z) > 1/49$  y  $\mu_{\tilde{-1}}(z) > 1/49 \Rightarrow 1 - 8d_{[f]}(-\omega^{-1}, z) > 1/49$  y  $d_{[f]}(-1, z) < 1/49 \Rightarrow d_{[f]}(-\omega^{-1}, z) < 6/49$  y  $d_{[f]}(-1, z) < 1/49 \Rightarrow d_{[f]}(-\omega^{-1}, -1) \leq d_{[f]}(-\omega^{-1}, z) + d_{[f]}(z, -1) < 6/49 + 1/49 = 1/7$ , pero  $d_{[f]}(-\omega^{-1}, -1) = |1/2 - 7/24| = 5/24 > 1/7$ , por lo que  $\text{comp}(\widetilde{\omega^{-1}}, \tilde{-1}) \leq 1/49 < 1/15 \Rightarrow \text{comp}(\widetilde{\omega^{-1}}, \tilde{-1}) < \text{comp}(\widetilde{\omega^{-1}}, \tilde{1})$ . Por simetría, se tiene un resultado idéntico para  $\widetilde{\omega}$ .

De esto sale que existe la transcripción difusa canónica  $\tilde{\tau}$  de  $\tilde{S}$  a  $\tilde{S}'$  y está dada por:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \longrightarrow & \tilde{S}' \\ \hline \widetilde{\omega} & \longmapsto & \widetilde{-1} \\ \widetilde{\omega^{-1}} & \longmapsto & \widetilde{-1} \\ \widetilde{-\omega^{-1}} & \longmapsto & \widetilde{1} \\ \widetilde{-\omega} & \longmapsto & \widetilde{1} \end{array}$$

Si tomamos  $a \in (2^k, 2^{k+5/24}]$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ , tenemos que  $E_a(S) = \{2^{k+5/24}, 2^{k+7/24}, 2^{k+17/24}, 2^{k+19/24}\}$ ,  $E_a(S') = \{2^{k+1}, 2^{k+1/2}\}$  y  $\tilde{E}_a(\tilde{\tau}) : \tilde{E}_a(\tilde{S}) \rightarrow \tilde{E}_a(\tilde{S}')$  está dada por:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}_a(\tilde{S}) & \longrightarrow & \tilde{E}_a(\tilde{S}') \\ \hline \widetilde{2^{k+5/24}} & \longmapsto & \widetilde{2^{k+1/2}} \\ \widetilde{2^{k+19/24}} & \longmapsto & \widetilde{2^{k+1/2}} \\ \widetilde{2^{k+7/24}} & \longmapsto & \widetilde{2^{k+1}} \\ \widetilde{2^{k+17/24}} & \longmapsto & \widetilde{2^{k+1}} \end{array}$$

Si  $\exists t \in \mathbb{R}_{>0} / \mu_{\widetilde{2^{k+7/24}}}(t) \wedge \mu_{\widetilde{2^{k+1}}}(t) > 0 \Rightarrow \mu_{\widetilde{2^{k+7/24}}}(t) > 0$  y  $\mu_{\widetilde{2^{k+1}}}(t) > 0 \Rightarrow d_f(2^{k+7/24}, t) < 1/8$  y  $d_f(2^{k+1}, t) < 3/16 \Rightarrow d_f(2^{k+7/24}, 2^{k+1}) \leq d_f(2^{k+7/24}, t) + d_f(t, 2^{k+1}) < 1/8 + 3/16 = 5/16$ , pero  $d_f(\widetilde{2^{k+7/24}}, \widetilde{2^{k+1}}) = |1 - 7/24| = 17/24 > 5/16$ , por lo que  $\text{comp}(\widetilde{2^{k+7/24}}, \widetilde{2^{k+1}}) = 0 \leq \text{comp}(\widetilde{2^{k+7/24}}, \widetilde{2^{k+1/2}})$ . Por simetría, tampoco sirve tomar  $a \in (2^{k+19/24}, 2^{k+1}]$ .

Si tomamos  $a \in (2^{k+5/24}, 2^{k+7/24}]$ , tenemos que  $E_a(S) = \{2^{k+29/24}, 2^{k+7/24}, 2^{k+17/24}, 2^{k+19/24}\}$ ,  $E_a(S') = \{2^{k+1}, 2^{k+1/2}\}$  y  $\tilde{E}_a(\tilde{\tau}) : \tilde{E}_a(\tilde{S}) \rightarrow \tilde{E}_a(\tilde{S}')$  está dada por:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}_a(\tilde{S}) & \longrightarrow & \tilde{E}_a(\tilde{S}') \\ \hline \widetilde{2^{k+29/24}} & \longmapsto & \widetilde{2^{k+1/2}} \\ \widetilde{2^{k+19/24}} & \longmapsto & \widetilde{2^{k+1/2}} \\ \widetilde{2^{k+7/24}} & \longmapsto & \widetilde{2^{k+1}} \\ \widetilde{2^{k+17/24}} & \longmapsto & \widetilde{2^{k+1}} \end{array}$$

Tal como en el caso anterior, tenemos que  $\text{comp}(\widetilde{2^{k+7/24}}, \widetilde{2^{k+1}}) = 0 \leq \text{comp}(\widetilde{2^{k+7/24}}, \widetilde{2^{k+1/2}})$ . Por simetría, tampoco sirve tomar  $a \in (2^{k+17/24}, 2^{k+19/24}]$ .

Si tomamos  $a \in (2^{k+7/24}, 2^{k+1/2}]$ , tenemos que  $E_a(S) = \{2^{k+29/24}, 2^{k+31/24}, 2^{k+17/24}, 2^{k+19/24}\}$ ,  $E_a(S') = \{2^{k+1}, 2^{k+1/2}\}$  y  $\tilde{E}_a(\tilde{\tau}) : \tilde{E}_a(\tilde{S}) \rightarrow \tilde{E}_a(\tilde{S}')$  está dada por:

$$\begin{array}{ccc}
 \widetilde{E}_a(\tilde{S}) & \longrightarrow & \widetilde{E}_a(\tilde{S}') \\
 \overbrace{2^{k+29/24}} & \longmapsto & \overbrace{2^{k+1/2}} \\
 \overbrace{2^{k+19/24}} & \longmapsto & \overbrace{2^{k+1/2}} \\
 \overbrace{2^{k+31/24}} & \longmapsto & \overbrace{2^{k+1}} \\
 \overbrace{2^{k+17/24}} & \longmapsto & \overbrace{2^{k+1}}
 \end{array}$$

Si  $\exists t \in \mathbb{R}_{>0} / \mu_{\widetilde{2^{k+29/24}}}(t) \wedge \mu_{\widetilde{2^{k+1/2}}}(t) > 0 \Rightarrow \mu_{\widetilde{2^{k+29/24}}}(t) > 0$  y  $\mu_{\widetilde{2^{k+1/2}}}(t) > 0 \Rightarrow d_f(2^{k+29/24}, t) < 1/48$  y  $d_f(2^{k+1/2}, t) < 1/3 \Rightarrow d_f(2^{k+29/24}, 2^{k+1/2}) \leq d_f(2^{k+29/24}, t) + d_f(t, 2^{k+1/2}) < 1/48 + 1/3 = 17/48$ , pero  $d_f(2^{k+29/24}, 2^{k+1/2}) = |1/2 - 29/24| = 17/24 > 17/48$ , por lo que  $\text{comp}(\widetilde{2^{k+29/24}}, \widetilde{2^{k+1/2}}) = 0 \leq \text{comp}(\widetilde{2^{k+29/24}}, \widetilde{2^{k+1}})$ . Por simetría, tampoco sirve tomar  $a \in (2^{k+1/2}, 2^{k+17/24}]$ .

# Apéndice A

## Comparación de diversos sistemas de afinación

Aquí tomamos una serie de sistemas de afinación tomados de [2] y los comparamos entre ellos.

### A.1. Notación

Dado un sistema de afinación  $S$  que respeta la octava, es decir, un subconjunto finito no vacío de  $\mathbb{T}$ , como  $\psi \circ \phi$  es sobreyectiva, este puede expresarse como  $S = \{\psi \circ \phi(f_j)\}_{j=1}^n$ , donde  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}_{>0}$  son frecuencias representantes del sistema de afinación. Si tomamos una frecuencia cualquiera  $f_k$  con  $1 \leq k \leq n$ , y definimos  $r_j = f_j/f_k$  podemos reescribir  $S = \{\psi \circ \phi(r_j f_k)\}_{j=1}^n$ , de manera que  $S$  está determinado por  $f_k, r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}_{>0}$ , donde  $r_k = 1$ . La forma usual de dar un sistema de afinación es dar, en una forma u otra, la lista de razones  $r_1, \dots, r_n$ , por lo que al elegir  $f_k$  el sistema queda determinado. En lo que sigue se asume que  $f_k = 1$  para todos los sistemas de afinación, es decir que todos los sistemas de afinación tienen una nota en común y tomamos unidades de frecuencia de manera que esa nota valga 1 (se dividen todas las frecuencias por la frecuencia de esa nota). Esto no altera el análisis previo, pues  $d_f(x, y) = |\log_2(x) - \log_2(y)| = |\log_2(x) - \log_2(f_k) - \log_2(y) + \log_2(f_k)| = |\log_2(x/f_k) - \log_2(y/f_k)| = d_f(x/f_k, y/f_k)$ . Esto será así, con la única excepción de la afinación de la gaita escocesa, donde se

## 86 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

asumirá que la nota marcada como  $A$  tiene valor  $2^{5/6}$ .

Directamente en esta forma, da Benson los temperamentos super justos y la Escala Sruti, por lo que aquí también los damos así. Para los otros temperamentos, Benson combina la notación de Eitz con una notación usualmente atribuida a Hugo Riemann.

### A.1.1. Notación de Eitz

La notación de Eitz puede definirse asignando las siguientes razones a las siguientes letras<sup>1</sup>:

$F$	$C$	$G$	$D$	$A$	$E$	$B$
$(3/2)^{-1}$	$(3/2)^0$	$(3/2)^1$	$(3/2)^2$	$(3/2)^3$	$(3/2)^4$	$(3/2)^5$

Además, se tienen las siguientes razones asignadas a los siguientes símbolos:

$\sharp$	$\flat$
$(3/2)^7$	$(3/2)^{-7}$

Las razones a representar se escriben entonces como una letra sola, una letra seguida de uno o varios  $\sharp$ , o una letra seguida de uno o varios  $\flat$ . Con los símbolos que definimos hasta ahora, podemos representar cualquier razón del tipo  $(3/2)^n$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . Por ejemplo,  $F\flat, C\flat, G\flat, D\flat, A\flat, E\flat, B\flat$  representan las razones de este tipo con  $-8 \leq n \leq -2$ ,  $F\sharp, C\sharp, G\sharp, D\sharp, A\sharp, E\sharp, B\sharp$  representan las razones de este tipo con  $6 \leq n \leq 12$ ,  $F\flat\flat, C\flat\flat, G\flat\flat, D\flat\flat, A\flat\flat, E\flat\flat, B\flat\flat$  representan las razones de este tipo con  $-15 \leq n \leq -9$ , etc.

Para representar temperamentos justos, es necesario incluir de alguna forma la razón  $5/4$ <sup>2</sup>. Esto se logra agregando un exponente  $m \in \mathbb{Z}$  que indica multiplicar el valor obtenido por  $(81/80)^m$ <sup>3</sup>. Si consideramos que  $(3/2)^4(81/80)^{-1} = 80/16 = 5$  y que por equivalencia de octava  $5 \sim 5/4$ , la razón  $5/4$  queda incorporada: por ejemplo,  $E^{-1}$  representa la razón  $(3/2)^4(81/80)^{-1} = 5$ . Si además se permite que  $m \in \mathbb{R}$  no sea necesariamente entero, la notación resulta muy útil para describir temperamentos

<sup>1</sup>La razón  $3/2$  se conoce como el *intervalo de quinta*.

<sup>2</sup>La razón  $5/4$  se conoce como el *intervalo de tercera mayor*.

<sup>3</sup>La razón  $81/80$  se conoce como la *coma sintónica*.

mesotónicos e irregulares. Entre estos últimos, a veces aparece en el exponente una  $p$ , que tiene valor  $\log_{81/80}(531441/524288)$ <sup>4</sup>.

### A.1.2. Notación de Riemann

$\mathbb{C}$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Además, si  $a + bi = 0$  con  $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a = -bi$ , si  $b \neq 0 \Rightarrow -a/b = i \Rightarrow (a/b)^2 = -1$ , lo que es absurdo, por lo que  $b = 0 \Rightarrow a = 0$ , es decir,  $\{1, i\}$  es base de  $\mathbb{C}$ . Alternativamente, si consideramos  $a + be^{\pi i/3} = 0$  con  $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b \cos(\pi/3) + b \sin(\pi/3)i = 0 \Rightarrow a + b \cos(\pi/3) = b \sin(\pi/3) = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = 0$ , por lo que  $\{1, e^{\pi i/3}\}$  también es base.

Tenemos entonces bien definida  $\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\rho(a + be^{\pi i/3}) = (3/2)^a(5/4)^b$ , y  $\rho$  resulta sobreyectiva pues  $\rho(\log_{3/2}(x)) = x \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$ . Si restringimos  $\rho$  al reticulado de combinaciones enteras de 1 y  $e^{\pi i/3}$ , tenemos que  $\rho|_{\langle 1, e^{\pi i/3} \rangle_{\mathbb{Z}}}$  es inyectiva: si  $(3/2)^a(5/4)^b = (3/2)^c(5/4)^d$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , tenemos que  $2^{-a-2b}3^a5^b = 2^{-c-2d}3^c5^d \Rightarrow 2^{c+2d-a-2b}3^{a-c}5^{b-d} = 1$ , y por el teorema fundamental de la aritmética, se tiene entonces que  $a - c = b - d = 0 \Rightarrow a = c$  y  $b = d$ .

$\rho$  en general no es inyectiva, pues  $(3/2)^a(5/4)^b = x \Leftrightarrow a \ln(3/2) + b \ln(5/4) = \ln(x) \Leftrightarrow b = (\ln(x) - a \ln(3/2)) / \ln(5/4)$ , es decir, la preimagen de  $x \in \mathbb{R}_{>0}$  es la recta  $\{a + (\ln(x) - a \ln(3/2))e^{\pi i/3} / \ln(5/4) : a \in \mathbb{R}\}$ . Más aún, por equivalencia de octavas,  $f_j \sim 2^l f_j$  por lo que se podría tener en lugar de  $r_j$ ,  $2^l r_j$  y se estaría describiendo el mismo sistema de afinación.

La notación de Riemann consiste en ubicar las razones que componen el sistema de afinación en lugares correspondientes, cercanos a los que le corresponden al reticulado  $\langle 1, e^{\pi i/3} \rangle_{\mathbb{Z}}$ . Esto es porque dado  $z \in \mathbb{C}$ , las frecuencias que representa el triángulo  $z$ ,  $z + e^{\pi i/3}$  y  $z + 1$  forman lo que se conoce como tríada mayor (están en razón 4:5:6), mientras que las frecuencias que representa el triángulo  $z$ ,  $z + e^{-\pi i/3}$  y  $z + 1$  forman lo que se conoce como tríada menor (están en razón 10:12:15), ambas de importancia en teoría musical. Cuando se describe un temperamento justo, a cada una de las razones que componen el sistema de afinación se le suele asignar el único lugar que le corresponde en el reticulado  $\langle 1, e^{\pi i/3} \rangle_{\mathbb{Z}}$ , mientras que cuando se describen otros temperamentos,

---

<sup>4</sup>La razón 531441/524288 se conoce como la *coma pitagórica*, es decir, la  $p$  en el exponente reemplaza la coma sintónica por la coma pitagórica.

a algunas notas se le asignan dos lugares para mostrar la "espiralidad" del sistema de afinación.

### A.1.3. Notación para sistemas de afinación que no respetan la octava

Las escalas de Wendy Carlos se presentan como subgrupos de  $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ . Para las escalas de Bohlen-Pierce (que abreviaremos BP), se modifica la notación de Eitz y la notación de Riemman. El primer detalle a tener en cuenta es que las escalas BP se construyen aceptando no la equivalencia de octava, sino la equivalencia de *BP-tritava*: se considera que  $f \sim 3f \forall f \in \mathbb{R}_{>0}$ . La versión BP de la notación de Eitz puede definirse asignando las siguientes razones a las siguientes letras<sup>5</sup>:

$D$	$B$	$J$	$G$	$E$	$C$	$A$	$H$	$F$
$(7/3)^{-5}$	$(7/3)^{-4}$	$(7/3)^{-3}$	$(7/3)^{-2}$	$(7/3)^{-1}$	$(7/3)^0$	$(7/3)^1$	$(7/3)^2$	$(7/3)^3$

Además, se tienen las siguientes razones asignadas a los siguientes símbolos<sup>6</sup>:

$\sharp$	$\flat$
$(7/3)^{-9}$	$(7/3)^9$

Para representar temperamentos BP-justos, es necesario incluir de alguna forma la razón  $5/3$ <sup>7</sup>. Esto se logra agregando un exponente  $m \in \mathbb{Z}$  que indica multiplicar el valor obtenido por  $(245/243)^m$ <sup>8</sup>. Si consideramos que  $(7/3)^{-2}(245/243)^1 = 5/27$  y que por equivalencia de BP-tritava  $5/27 \sim 5/3$ , la razón  $5/3$  queda incorporada: por ejemplo,  $G^{+1}$  representa la razón  $(7/3)^{-2}(245/243)^1 = 5/27$ .

Tal como antes, tenemos bien definida  $\zeta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\zeta(a + be^{\pi i/3}) = (7/3)^a(5/3)^b$  y además tenemos que  $\zeta|_{\langle 1, e^{\pi i/3} \rangle_{\mathbb{Z}}}$  es inyectiva: si  $(7/3)^a(5/3)^b = (7/3)^c(5/3)^d$  con  $a, b, c, d \in$

<sup>5</sup>La razón  $7/3$  se conoce como el *intervalo de BP-décima*.

<sup>6</sup>Aquí hay una diferencia con lo anteriormente visto pues  $(7/3)^9 \sim 7^9/3^{16}$ , y como  $\log_3(7^9/3^{16}) \approx -0,06 \Rightarrow |\log_3(7^9/3^{16})| < 1/2$ , se considera que el efecto de multiplicar por  $(7/3)^9$  es bajar un poco el tono en consideración. Anteriormente, se tenía que  $(3/2)^7 \sim 3^7/2^{11}$ , y como  $\log_2(3^7/2^{11}) \approx 0,09 \Rightarrow |\log_2(3^7/2^{11})| < 1/2$ , se considera que el efecto de multiplicar por  $(3/2)^7$  es subir un poco el tono en consideración.

<sup>7</sup>La razón  $5/3$  se conoce como el *intervalo de BP-sexta mayor*.

<sup>8</sup>La razón  $245/243$  se conoce como la *BP-diesis menor*.

$\mathbb{Z}$ , tenemos que  $3^{-a-b}7^a5^b = 3^{-c-d}7^c5^d \Rightarrow 3^{c+d-a-b}7^{a-c}5^{b-d} = 1$ , y por el teorema fundamental de la aritmética, se tiene entonces que  $a - c = b - d = 0 \Rightarrow a = c$  y  $b = d$ .  $\zeta$  en general no es inyectiva, pues  $(7/3)^a(5/3)^b = x \Leftrightarrow a \ln(7/3) + b \ln(5/3) = \ln(x) \Leftrightarrow b = (\ln(x) - a \ln(7/3)) / \ln(5/3)$ , es decir, la preimagen de  $x \in \mathbb{R}_{>0}$  es la recta  $\{a + (\ln(x) - a \ln(7/3))e^{\pi i/3} / \ln(5/3) : a \in \mathbb{R}\}$ . Más aún, por equivalencia de BP-tritavas,  $f_j \sim 3^l f_j$  por lo que se podría tener en lugar de  $r_j$ ,  $3^l r_j$  y se estaría describiendo el mismo sistema de afinación.

La versión BP de la notación de Riemann también consiste en ubicar las razones que componen el sistema de afinación en lugares correspondientes, cercanos a los que le corresponden al reticulado  $\langle 1, e^{\pi i/3} \rangle_{\mathbb{Z}}$ . Dado  $z \in \mathbb{C}$ , las frecuencias que representa el triángulo  $z, z + e^{\pi i/3}$  y  $z + 1$  forman una BP-tríada mayor (están en razón 3:5:7), mientras que las frecuencias que representa el triángulo  $z, z + e^{-\pi i/3}$  y  $z + 1$  forman una BP-tríada menor (están en razón 15:21:35). Cuando describamos un temperamento justo, a cada una de las razones que componen el sistema de afinación le asignaremos el único lugar que le corresponde en el reticulado  $\langle 1, e^{\pi i/3} \rangle_{\mathbb{Z}}$ , mientras que cuando describamos las afinaciones pitagóricas, a algunas notas le asignaremos dos lugares para mostrar la "espiralidad" del sistema de afinación.

## A.2. Lectura de tablas

Las tablas presentadas tienen como filas y columnas distintos sistemas de afinación. Dados  $S$  y  $S'$  dos sistemas de afinación que respetan la octava, si existe la transcripción canónica  $\tau : S \rightarrow S'$ ,  $\Phi(\tau) = 1 - 2 \max_{z \in S} d_{[f]}(z, \tau(z)) = 1 - 2 \max_{z \in S} d_{[f]}(z, S')$ . Como vemos, este número puede calcularse sin la necesidad de que exista  $\tau$ : la celda con fila  $S$  y columna  $S'$  contiene este número.

Para extender la definición de este número a sistemas de afinación que no respetan la octava, necesitamos la siguiente proposición.

**Proposición 66.** *Sean  $S$  y  $S'$  dos sistemas de afinación que respetan la octava, y sea  $\mu : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$  definida como:*

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 - 4t & \text{si } t \leq 1/4 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

90 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

Se tiene entonces que:

$$\bigvee_{y \in (\psi \circ \phi)^{-1}(S')} \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1 - 2d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), S') \quad \forall x \in (\psi \circ \phi)^{-1}(S)$$

donde  $\mu_{\tilde{r}} = \Gamma_r(\mu) \quad \forall r \in \mathbb{R}_{>0}$ .

*Demuestra*ción. Dados  $x \in (\psi \circ \phi)^{-1}(S)$  e  $y \in (\psi \circ \phi)^{-1}(S') \Rightarrow \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mu(d_f(x, y)/2)$ . Si  $d_f(x, y) \leq 1/2 \Rightarrow d_f(x, y)/2 \leq 1/4 \Rightarrow \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1 - 2d_f(x, y) = 1 - 2d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \psi \circ \phi(y))$ , y como  $d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \psi \circ \phi(y)) \geq d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), S') \Rightarrow 1 - 2d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), \psi \circ \phi(y)) \leq 1 - 2d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), S') \Rightarrow \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq 1 - 2d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), S')$ . Si en cambio  $d_f(x, y) > 1/2 \Rightarrow d_f(x, y)/2 > 1/4 \Rightarrow \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \leq 1 - 2d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), S')$ , por lo que  $\bigvee_{y \in (\psi \circ \phi)^{-1}(S')} \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq 1 - 2d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), S')$ . Sea  $z \in S' / d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), z) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), S')$ , y sea  $y \in (\psi \circ \phi)^{-1}(z) / d_f(x, y) = d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), z) \leq 1/2 \Rightarrow \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mu(d_f(x, y)/2) = 1 - 2d_f(x, y) = 1 - 2d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), S') \Rightarrow 1 - 2d_{[f]}(\psi \circ \phi(x), S') \leq \bigvee_{y \in (\psi \circ \phi)^{-1}(S')} \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y})$ .  $\square$

Luego, dado  $b \geq 2a > 0$ ,  $E_a(S) \subseteq (\psi \circ \phi)^{-1}(S) \cap [a, b] \subseteq (\psi \circ \phi)^{-1}(S) \Rightarrow \psi \circ \phi(E_a(S)) \subseteq \psi \circ \phi((\psi \circ \phi)^{-1}(S) \cap [a, b]) \subseteq \psi \circ \phi((\psi \circ \phi)^{-1}(S)) \subseteq S \Rightarrow \psi \circ \phi((\psi \circ \phi)^{-1}(S) \cap [a, b]) = S$ , y por lo tanto:

$$\bigwedge_{x \in (\psi \circ \phi)^{-1}(S) \cap [a, b]} \bigvee_{y \in (\psi \circ \phi)^{-1}(S')} \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1 - 2 \max_{z \in S} d_{[f]}(z, S')$$

lo que sugiere pensar los sistemas de afinación como ternas  $(T, r, s) / T \subseteq \mathbb{R}_{>0}$  es un subconjunto no vacío y  $r \leq s$ . El número en la celda de fila  $(T, r, s)$  y columna  $(R, p, q)$  será:

$$\bigwedge_{x \in T \cap [r, s]} \bigvee_{y \in R} \text{comp}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

Usaremos el rango  $[2^{-4}, 2^5]$  para todos los sistemas de afinación. Si  $S$  es el conjunto de frecuencias que aquí se presentan asociadas a un sistema de afinación, el sistema de afinación es de la forma:

- $(S \cdot \langle 2 \rangle, 2^{-4}, 2^5)$ , si se trata de un sistema de afinación que respeta la octava.
- $(S, 2^{-4}, 2^5)$ , si se trata de una de las escalas de Wendy Carlos.
- $(S \cdot \langle 3 \rangle, 2^{-4}, 2^5)$ , si se trata de una de las escalas de Bohlen-Pierce.

## A.3. Sistemas de afinación que respetan la octava

### A.3.1. Afinación Pitagórica

Escala Clásica ( $\mathcal{P}$ )

	$E^0$		$B^0$		
$C^0$		$G^0$		$D^0$	
				$A^0$	$E^0$

	$F^0$			$C^0$	
--	-------	--	--	-------	--

Escala Extendida ( $\mathcal{PE}$ )

	$E^0$		$B^0$		$F\sharp^0$		$C\sharp^0$		$G\sharp^0$	
$C^0$		$G^0$		$D^0$		$A^0$		$E^0$		
	$E\flat^0$		$B\flat^0$		$F^0$		$C^0$			

### A.3.2. Temperamentos Justos

Escala Clásica ( $\mathcal{J}$ )

	$A^{-1}$		$E^{-1}$		$B^{-1}$	
$F^0$		$C^0$		$G^0$		$D^0$

Monocordio de Ramis ( $\mathcal{JR}a$ )

	$D^{-1}$		$A^{-1}$		$E^{-1}$		$B^{-1}$		$F\sharp^{-1}$		$C\sharp^{-1}$	
$A\flat^0$		$E\flat^0$		$B\flat^0$		$F^0$		$C^0$		$G^0$		

Monocordio de Erlangen ( $\mathcal{JE}r$ )

					$E^{-1}$		$B^{-1}$									
$G\flat^0$			$D\flat^0$		$A\flat^0$		$E\flat^0$		$B\flat^0$		$F^0$		$C^0$		$G^0$	
$E\flat\flat^{+1}$			$B\flat\flat^{+1}$													

Monocordio de Erlangen, Revisado ( $\mathcal{JER}$ )

			$E^{-1}$		$B^{-1}$		$F\sharp^{-1}$		$C\sharp^{-1}$		$G\sharp^{-1}$		
$E\flat^0$		$B\flat^0$		$F^0$		$C^0$		$G^0$		$D^0$		$A^0$	

92 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

**Monocordio de Fogliano No. 1 ( $\mathcal{JF}_1$ )**

	$F\sharp^{-2}$		$C\sharp^{-2}$		$G\sharp^{-2}$
$D^{-1}$		$A^{-1}$		$E^{-1}$	$B^{-1}$
$B\flat^0$		$F^0$		$C^0$	$G^0$
				$E\flat^{+1}$	

**Monocordio de Fogliano No. 2 ( $\mathcal{JF}_2$ )**

	$F\sharp^{-2}$		$C\sharp^{-2}$		$G\sharp^{-2}$
$A^{-1}$		$E^{-1}$		$B^{-1}$	
$F^0$		$C^0$		$G^0$	$D^0$
			$E\flat^{+1}$		$B\flat^{+1}$

**Monocordio de Agricola ( $\mathcal{JA}$ )**

		$F\sharp^{-1}$		$C\sharp^{-1}$		$G\sharp^{-1}$		$D\sharp^{-1}$
$B\flat^0$	$F^0$	$C^0$	$G^0$	$D^0$	$A^0$	$E^0$	$B^0$	

**Monocordio de De Caus ( $\mathcal{JDC}$ )**

	$F\sharp^{-2}$		$C\sharp^{-2}$		$G\sharp^{-2}$		$D\sharp^{-2}$
$D^{-1}$		$A^{-1}$		$E^{-1}$		$B^{-1}$	
$B\flat^0$		$F^0$		$C^0$		$G^0$	

**Monocordio de Kepler No. 1 ( $\mathcal{JK}e_1$ )**

		$E^{-1}$		$B^{-1}$		$F\sharp^{-1}$		$C\sharp^{-1}$		$G\sharp^{-1}$
$F^0$	$C^0$		$G^0$		$D^0$		$A^0$			
			$E\flat^{+1}$		$B\flat^{+1}$					

**Monocordio de Kepler No. 2 ( $\mathcal{JK}e_2$ )**

		$E^{-1}$		$B^{-1}$		$F\sharp^{-1}$		$C\sharp^{-1}$
$F^0$	$C^0$		$G^0$		$D^0$		$A^0$	
$A\flat^{+1}$		$E\flat^{+1}$		$B\flat^{+1}$				

**Afinación de Espineta de Mersenne No. 1 ( $\mathcal{JME}_1$ )**

	$D^{-1}$	$A^{-1}$	$E^{-1}$	$B^{-1}$
	$B\flat^0$	$F^0$	$C^0$	$G^0$
	$G\flat^{+1}$	$D\flat^{+1}$	$A\flat^{+1}$	$E\flat^{+1}$

**Afinación de Espineta de Mersenne No. 2 ( $\mathcal{JME}_2$ )**

	$F\sharp^{-2}$	$C\sharp^{-2}$	$G\sharp^{-2}$	$D\sharp^{-2}$
	$A^{-1}$	$E^{-1}$	$B^{-1}$	
	$B\flat^0$	$F^0$	$C^0$	$G^0$

**Afinación de Laúd de Mersenne No. 1 ( $\mathcal{JML}_1$ )**

	$D^{-1}$	$A^{-1}$	$E^{-1}$	$B^{-1}$
	$F^0$	$C^0$	$G^0$	
	$G\flat^{+1}$	$D\flat^{+1}$	$A\flat^{+1}$	$E\flat^{+1}$

**Afinación de Laúd de Mersenne No. 2 ( $\mathcal{JML}_2$ )**

	$A^{-1}$	$E^{-1}$	$B^{-1}$	
	$F^0$	$C^0$	$G^0$	$D^0$
	$G\flat^{+1}$	$D\flat^{+1}$	$A\flat^{+1}$	$E\flat^{+1}$

**Monocordio de Marpurg No. 1 ( $\mathcal{JMar}_1$ )**

	$C\sharp^{-2}$	$G\sharp^{-2}$		
	$A^{-1}$	$E^{-1}$	$B^{-1}$	$F\sharp^{-1}$
	$F^0$	$C^0$	$G^0$	$D^0$

94 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

**Monocordio de Marpurg No. 3<sup>9</sup> ( $\mathcal{J}M_{ar_3}$ )**

	$C\sharp^{-2}$		$G\sharp^{-2}$		
		$E^{-1}$		$B^{-1}$	$F\sharp^{-1}$
$B\flat^0$	$F^0$	$C^0$	$G^0$	$D^0$	$A^0$
			$E\flat^{+1}$		

**Monocordio de Marpurg No. 4 ( $\mathcal{J}M_{ar_4}$ )**

	$F\sharp^{-2}$		$C\sharp^{-2}$		$G\sharp^{-2}$	
		$D^{-1}$		$E^{-1}$		$B^{-1}$
$F^0$		$A^{-1}$		$C^0$		$G^0$
				$E\flat^{+1}$		$B\flat^{+1}$

**Monocordio de Malcolm ( $\mathcal{J}M_{al}$ )**

		$A^{-1}$		$E^{-1}$		$B^{-1}$		$F\sharp^{-1}$	
$B\flat^0$		$F^0$		$C^0$		$G^0$		$D^0$	
		$D\flat^{+1}$		$A\flat^{+1}$		$E\flat^{+1}$			

**Monocordio de Euler ( $\mathcal{J}E_u$ )**

		$C\sharp^{-2}$		$G\sharp^{-2}$		$D\sharp^{-2}$		$A\sharp^{-2}$	
			$A^{-1}$		$E^{-1}$		$B^{-1}$		$F\sharp^{-1}$
$F^0$		$C^0$		$G^0$		$D^0$			

**Monocordio de Montvallon ( $\mathcal{J}M_o$ )**

		$A^{-1}$		$E^{-1}$		$B^{-1}$		$F\sharp^{-1}$		$C\sharp^{-1}$		$G\sharp^{-1}$	
$B\flat^0$		$F^0$		$C^0$		$G^0$		$D^0$					
					$E\flat^{+1}$								

---

<sup>9</sup>Según [2], el monocordio de Marpurg No. 2 es el mismo que el monocordio de Kepler.

**Monocordio de Romieu ( $\mathcal{JR}om$ )**

		$C\sharp^{-2}$		$G\sharp^{-2}$		
		$A^{-1}$		$E^{-1}$		$B^{-1}$
$B\flat^0$	$F^0$		$C^0$		$G^0$	$D^0$
				$E\flat^{+1}$		

**Kirnberger I ( $\mathcal{JK}i$ )<sup>10</sup>**

		$A^{-1}$		$E^{-1}$		$B^{-1}$		$F\sharp^{-1}$
$D\flat^0$	$A\flat^0$	$E\flat^0$	$B\flat^0$	$F^0$		$C^0$		$G^0$
					$C^0$		$G^0$	$D^0$
					$E\flat^{+1}$		$B\flat^{+1}$	

**Monocordio de Rousseau ( $\mathcal{JR}ou$ )**

$F\sharp^{-2}$		$C\sharp^{-2}$			
		$A^{-1}$		$E^{-1}$	
$F^0$		$C^0$		$G^0$	
		$E\flat^{+1}$		$B\flat^{+1}$	
$A\flat^{+1}$					

**Escala Sruti ( $\mathcal{JS}$ )**

1:1, 256:243, 16:15, 10:9, 9:8, 32:27, 6:5, 5:4, 81:64, 4:3, 27:20, 45:32, 729:512, 3:2, 128:81, 8:5, 5:3, 27:16, 16:9, 9:5, 15:8, 243:128, (2:1)

**A.3.3. Temperamentos Mesotónicos****Escala Clásica ( $\mathcal{M}$ )**

$E^{-1}$		$B^{-\frac{5}{4}}$			
$C^0$		$G^{-\frac{1}{4}}$		$D^{-\frac{1}{2}}$	
				$A^{-\frac{3}{4}}$	
				$F^{+\frac{1}{4}}$	
					$C^0$

---

<sup>10</sup>Este es el único temperamento justo de Kirnberger.

**Temperamento Mesotónico de Aaron ( $\mathcal{MA}$ )**

	$E^{-1}$	$B^{-\frac{5}{4}}$	$F\sharp^{-\frac{3}{2}}$	$C\sharp^{-\frac{7}{4}}$
	$C^0$	$G^{-\frac{1}{4}}$	$D^{-\frac{1}{2}}$	$A^{-\frac{3}{4}}$
$A\flat^{+1}$	$E\flat^{+\frac{3}{4}}$	$B\flat^{+\frac{1}{2}}$	$F^{+\frac{1}{4}}$	$C^0$

**Monocordio de Gibelius para Temperamento Mesotónico ( $\mathcal{MG}$ )**

	$G\sharp^{-2}$	$D\sharp^{-\frac{9}{4}}$			
	$E^{-1}$	$B^{-\frac{5}{4}}$	$F\sharp^{-\frac{3}{2}}$	$C\sharp^{-\frac{7}{4}}$	$G\sharp^{-2}$
	$C^0$	$G^{-\frac{1}{4}}$	$D^{-\frac{1}{2}}$	$A^{-\frac{3}{4}}$	$E^{-1}$
$A\flat^{+1}$	$E\flat^{+\frac{3}{4}}$	$B\flat^{+\frac{1}{2}}$	$F^{+\frac{1}{4}}$	$C^0$	

**Temperamento Mesotónico de  $\alpha$ -coma ( $\mathcal{M}_\alpha$ )**

Los valores más usuales de  $\alpha$  son  $1/7$ ,  $1/6$ ,  $1/5$ ,  $2/9$ ,  $1/4$ ,  $2/7$  y  $1/3$ .

	$E^{-4\alpha}$	$B^{-5\alpha}$	$F\sharp^{-6\alpha}$	$C\sharp^{-7\alpha}$	$G\sharp^{-8\alpha}$
	$C^0$	$G^{-\alpha}$	$D^{-2\alpha}$	$A^{-3\alpha}$	$E^{-4\alpha}$
	$E\flat^{+3\alpha}$	$B\flat^{+2\alpha}$	$F^{+\alpha}$	$C^0$	

**A.3.4. Temperamentos Irregulares ( $\mathcal{I}$ )**
**Temperamento Mesotónico Mejorado de Mersenne No. 1 ( $\mathcal{IMe}$ )<sup>11</sup>**

	$E^{-p}$	$B^{-\frac{5}{4}p}$	$F\sharp^{-\frac{3}{2}p}$	$C\sharp^{-\frac{7}{4}p}$	$G\sharp^{-2p}$
	$C^0$	$G^{-\frac{1}{4}p}$	$D^{-\frac{1}{2}p}$	$A^{-\frac{3}{4}p}$	$E^{-p}$
	$E\flat^{+\frac{1}{4}p}$	$B\flat^{+\frac{1}{4}p}$	$F^{+\frac{1}{4}p}$	$C^0$	

**Temperamento de Bendeler No. 1 ( $\mathcal{IBe}_1$ )**

	$E^{-\frac{2}{3}p}$	$B^{-\frac{2}{3}p}$	$F\sharp^{-p}$	$C\sharp^{-p}$	$G\sharp^{-p}$
	$C^0$	$G^{-\frac{1}{3}p}$	$D^{-\frac{2}{3}p}$	$A^{-\frac{2}{3}p}$	$E^{-\frac{2}{3}p}$
	$E\flat^0$	$B\flat^0$	$F^0$	$C^0$	

<sup>11</sup>Este es el único temperamento irregular de Mersenne.

**Temperamento de Bendeler No. 2 ( $\mathcal{IB}e_2$ )**

$E^{-\frac{2}{3}p}$	$B^{-\frac{2}{3}p}$	$F\sharp^{-\frac{2}{3}p}$	$C\sharp^{-p}$	$G\sharp^{-p}$
$C^0$	$G^{-\frac{1}{3}p}$	$D^{-\frac{1}{3}p}$	$A^{-\frac{2}{3}p}$	$E^{-\frac{2}{3}p}$
$E\flat^0$	$B\flat^0$	$F^0$	$C^0$	

**Temperamento de Bendeler No. 3 ( $\mathcal{IB}e_3$ )**

$E^{-\frac{1}{2}p}$	$B^{-\frac{3}{4}p}$	$F\sharp^{-\frac{3}{4}p}$	$C\sharp^{-\frac{3}{4}p}$	$G\sharp^{-\frac{3}{4}p}$
$C^0$	$G^{-\frac{1}{4}p}$	$D^{-\frac{1}{2}p}$	$A^{-\frac{1}{2}p}$	$E^{-\frac{1}{2}p}$
$E\flat^0$	$B\flat^0$	$F^0$	$C^0$	

**Werckmeister III<sup>12</sup> ( $\mathcal{IW}_{III}$ )**

$E^{-\frac{3}{4}p}$	$B^{-\frac{3}{4}p}$	$F\sharp^{-p}$	$C\sharp^{-p}$	$G\sharp^{-p}$
$C^0$	$G^{-\frac{1}{4}p}$	$D^{-\frac{1}{2}p}$	$A^{-\frac{3}{4}p}$	$E^{-\frac{3}{4}p}$
$E\flat^0$	$B\flat^0$	$F^0$	$C^0$	

**Werckmeister IV ( $\mathcal{IW}_{IV}$ )**

$E^{-\frac{2}{3}p}$	$B^{-p}$	$F\sharp^{-p}$	$C\sharp^{-\frac{4}{3}p}$	$G\sharp^{-\frac{4}{3}p}$
$C^0$	$G^{-\frac{1}{3}p}$	$D^{-\frac{1}{3}p}$	$A^{-\frac{2}{3}p}$	$E^{-\frac{2}{3}p}$
$E\flat^0$	$B\flat^{+\frac{1}{3}p}$	$F^0$	$C^0$	

**Werckmeister V ( $\mathcal{IW}_V$ )**

$E^{-\frac{1}{2}p}$	$B^{-\frac{1}{2}p}$	$F\sharp^{-\frac{1}{2}p}$	$C\sharp^{-\frac{3}{4}p}$	$G\sharp^{-p}$
$C^0$	$G^0$	$D^0$	$A^{-\frac{1}{4}p}$	$E^{-\frac{1}{2}p}$
$E\flat^{+\frac{1}{4}p}$	$B\flat^{+\frac{1}{4}p}$	$F^{+\frac{1}{4}p}$	$C^0$	

**Temperamento Circulante de Neidhardt No. 1 “für ein Dorf” ( $\mathcal{IN}_1$ )**

$E^{-\frac{2}{3}p}$	$B^{-\frac{3}{4}p}$	$F\sharp^{-\frac{5}{6}p}$	$C\sharp^{-\frac{5}{6}p}$	$G\sharp^{-\frac{5}{6}p}$
$C^0$	$G^{-\frac{1}{6}p}$	$D^{-\frac{1}{3}p}$	$A^{-\frac{1}{2}p}$	$E^{-\frac{2}{3}p}$
$E\flat^0$	$B\flat^0$	$F^0$	$C^0$	

<sup>12</sup>Werckmeister I es  $\mathcal{J}$  y Werckmeister II es  $\mathcal{M}$ .

98 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

**Temperamento Circulante de Neidhardt No. 2 “für eine kleine Stadt” ( $\mathcal{IN}_2$ )**

$E^{-\frac{7}{12}p}$	$B^{-\frac{7}{12}p}$	$F\sharp^{-\frac{2}{3}p}$	$C\sharp^{-\frac{3}{4}p}$	$G\sharp^{-\frac{5}{6}p}$
$C^0$	$G^{-\frac{1}{6}p}$	$D^{-\frac{1}{3}p}$	$A^{-\frac{1}{2}p}$	$E^{-\frac{7}{12}p}$
$E\flat^{+\frac{1}{6}p}$	$B\flat^{+\frac{1}{6}p}$	$F^{+\frac{1}{12}p}$	$C^0$	

**Temperamento Circulante de Neidhardt No. 3 “für eine grosse Stadt” ( $\mathcal{IN}_3$ )**

$E^{-\frac{7}{12}p}$	$B^{-\frac{7}{12}p}$	$F\sharp^{-\frac{2}{3}p}$	$C\sharp^{-\frac{3}{4}p}$	$G\sharp^{-\frac{5}{6}p}$
$C^0$	$G^{-\frac{1}{6}p}$	$D^{-\frac{1}{3}p}$	$A^{-\frac{1}{2}p}$	$E^{-\frac{7}{12}p}$
$E\flat^{+\frac{1}{6}p}$	$B\flat^{+\frac{1}{12}p}$	$F^0$	$C^0$	

**Kirnberger II ( $\mathcal{IK}_{II}$ )**

	$E^{-1}$	$B^{-1}$	$F\sharp^{-1}$	
$C^0$	$G^0$	$D^0$	$A^{-\frac{1}{2}}$	$E^{-1}$
$A\flat^0$	$E\flat^0$	$B\flat^0$	$F^0$	$C^0$
		$D\flat^0$		$A\flat^0$

**Kirnberger III ( $\mathcal{IK}_{III}$ )**

	$E^{-1}$	$B^{-1}$	$F\sharp^{-1}$	
$C^0$	$G^{-\frac{1}{4}}$	$D^{-\frac{1}{2}}$	$A^{-\frac{3}{4}}$	$E^{-1}$
$A\flat^0$	$E\flat^0$	$B\flat^0$	$F^0$	$C^0$
		$D\flat^0$		$A\flat^0$

**Temperamento de  $\frac{1}{7}$ -coma de Lambert ( $\mathcal{IL}$ )**

$E^{-\frac{4}{7}p}$	$B^{-\frac{5}{7}p}$	$F\sharp^{-\frac{6}{7}p}$	$C\sharp^{-\frac{6}{7}p}$	$G\sharp^{-\frac{6}{7}p}$
$C^0$	$G^{-\frac{1}{7}p}$	$D^{-\frac{2}{7}p}$	$A^{-\frac{3}{7}p}$	$E^{-\frac{4}{7}p}$
$E\flat^{+\frac{1}{7}p}$	$B\flat^{+\frac{1}{7}p}$	$F^{+\frac{1}{7}p}$	$C^0$	

**Temperamento I de Marpurg ( $\mathcal{IM}a$ )<sup>13</sup>**

$E^{-\frac{1}{3}p}$	$B^{-\frac{1}{3}p}$	$F\sharp^{-\frac{1}{3}p}$	$C\sharp^{-\frac{1}{3}p}$	$G\sharp^{-\frac{2}{3}p}$
$C^0$	$G^0$	$D^0$	$A^0$	$E^{-\frac{1}{3}p}$
$E\flat^{+\frac{1}{3}p}$	$B\flat^{+\frac{1}{3}p}$	$F^{+\frac{1}{3}p}$	$C^0$	

**Temperamento de  $\frac{1}{6}$ -coma de Barca ( $\mathcal{IB}a$ )**

$E^{-\frac{2}{3}}$	$B^{-\frac{5}{6}}$	$F\sharp^{-1}$	$C\sharp^{-1}$	$G\sharp^{-1}$
$C^0$	$G^{-\frac{1}{6}}$	$D^{-\frac{1}{3}}$	$A^{-\frac{1}{2}}$	$E^{-\frac{2}{3}}$
$E\flat^0$	$B\flat^0$	$F^0$	$C^0$	

**Temperamento de Young No. 1 ( $\mathcal{IY}$ )**

$E^{-\frac{3}{4}}$	$B^{-\frac{5}{6}}$	$F\sharp^{-\frac{11}{12}}$	$C\sharp^{-\frac{11}{12}}$	$G\sharp^{-\frac{11}{12}}$
$C^0$	$G^{-\frac{3}{16}}$	$D^{-\frac{3}{8}}$	$A^{-\frac{9}{16}}$	$E^{-\frac{3}{4}}$
$E\flat^{+\frac{1}{6}}$	$B\flat^{+\frac{1}{6}}$	$F^{+\frac{1}{12}}$	$C^0$	

**Temperamento de  $\frac{1}{6}$ -coma de Vallotti y Young<sup>14</sup> ( $\mathcal{IVY}$ )**

$E^{-\frac{2}{3}p}$	$B^{-\frac{5}{6}p}$	$F\sharp^{-p}$	$C\sharp^{-p}$	$G\sharp^{-p}$
$C^0$	$G^{-\frac{1}{6}p}$	$D^{-\frac{1}{3}p}$	$A^{-\frac{1}{2}p}$	$E^{-\frac{2}{3}p}$
$E\flat^0$	$B\flat^0$	$F^0$	$C^0$	

**Reconstrucción de Bach de Kelletat ( $\mathcal{IBK}t$ )**

$E^{-\frac{5}{6}p}$	$B^{-p}$	$F\sharp^{-p}$	$C\sharp^{-p}$	$G\sharp^{-p}$
$C^0$	$G^{-\frac{1}{12}p}$	$D^{-\frac{1}{3}p}$	$A^{-\frac{7}{12}p}$	$E^{-\frac{5}{6}p}$
$E\flat^0$	$B\flat^0$	$F^0$	$C^0$	

**Reconstrucción de Bach de Kellner ( $\mathcal{IBK}r$ )**

$E^{-\frac{4}{5}p}$	$B^{-\frac{4}{5}p}$	$F\sharp^{-p}$	$C\sharp^{-p}$	$G\sharp^{-p}$
$C^0$	$G^{-\frac{1}{5}p}$	$D^{-\frac{2}{5}p}$	$A^{-\frac{3}{5}p}$	$E^{-\frac{4}{5}p}$
$E\flat^0$	$B\flat^0$	$F^0$	$C^0$	

<sup>13</sup>Este es el único temperamento irregular de Marpurg.<sup>14</sup>Este es el temperamento de Young No. 2.

## 100 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

### Reconstrucción de Bach de Barnes ( $\mathcal{IBB}$ )

$$\begin{array}{ccccc}
 E^{-\frac{2}{3}p} & B^{-\frac{5}{6}p} & F\sharp^{-\frac{5}{6}p} & C\sharp^{-p} & G\sharp^{-p} \\
 C^0 & G^{-\frac{1}{6}p} & D^{-\frac{1}{3}p} & A^{-\frac{1}{2}p} & E^{-\frac{2}{3}p} \\
 E\flat^0 & B\flat^0 & F^0 & C^0 &
 \end{array}$$

### Reconstrucción de Bach de Lehman ( $\mathcal{IBL}$ )

$$\begin{array}{ccccc}
 E^{-\frac{2}{3}p} & B^{-\frac{2}{3}p} & F\sharp^{-\frac{2}{3}p} & C\sharp^{-\frac{2}{3}p} & G\sharp^{-\frac{3}{4}p} \\
 C^0 & G^{-\frac{1}{6}p} & D^{-\frac{1}{3}p} & A^{-\frac{1}{2}p} & E^{-\frac{2}{3}p} \\
 E\flat^{+\frac{1}{6}p} & B\flat^{+\frac{1}{12}p} & F^{+\frac{1}{6}p} & C^0 &
 \end{array}$$

### A.3.5. Temperamento Igual de $n$ Tonos ( $\mathcal{E}_n$ )

Los valores más usuales de  $n$  son 12, 19, 24, 31, 43 y 53.

$$\mathcal{E}_n = \{2^{j/n} : 0 \leq j < n\}$$

### A.3.6. Temperamentos Super Justos ( $\mathcal{S}$ )

#### Temperamento Super Justo de Harry Partch ( $\mathcal{SPa}$ )

1:1, 81:80, 33:32, 21:20, 16:15, 12:11, 11:10, 10:9, 9:8, 8:7, 7:6, 32:27, 6:5, 11:9, 5:4, 14:11, 9:7, 21:16, 4:3, 27:20, 11:8, 7:5, 10:7, 16:11, 40:27, 3:2, 32:21, 14:9, 11:7, 8:5, 18:11, 5:3, 27:16, 12:7, 7:4, 16:9, 9:5, 20:11, 11:6, 15:8, 40:21, 64:33, 160:81, (2:1)

#### Escala Lü ( $\mathcal{SL}$ )

1:1, 18:17, 9:8, 6:5, 54:43, 4:3, 27:19, 3:2, 27:17, 27:16, 9:5, 36:19, (2:1)

#### Afinación de la Gaita Escocesa ( $\mathcal{SE}$ )

(7:8), 1:1 (A), 9:8, 5:4, 4:3, 3:2, 5:3, 7:4, (2:1)

#### Temperamento Super Justo de Wendy Carlos ( $\mathcal{SCa}$ )

1:1, 17:16, 9:8, 6:5, 5:4, 4:3, 11:8, 3:2, 13:8, 5:3, 7:4, 15:8, (2:1)

**Escala Harmónica de Wendy Carlos ( $\mathcal{S}\mathcal{C}a\mathcal{H}$ )**

1:1, 17:16, 9:8, 19:16, 5:4, 21:16, 11:8, 3:2, 13:8, 27:16, 7:4, 15:8, (2:1)

**Temperamento Super Justo de Lou Harrison ( $\mathcal{S}\mathcal{H}\mathcal{L}$ )**

1:1, 16:15, 10:9, 8:7, 7:6, 6:5, 5:4, 4:3, 17:12, 3:2, 8:5, 5:3, 12:7, 7:4, 9:5, 15:8, 15:7, 15:6, 15:5, 15:4, 15:3, 15:2, 15:1, 14:13, 14:12, 14:11, 14:10, 14:9, 14:8, 14:7, 14:6, 14:5, 14:4, 14:3, 14:2, 14:1, 13:12, 13:11, 13:10, 13:9, 13:8, 13:7, 13:6, 13:5, 13:4, 13:3, 13:2, 13:1, 12:11, 12:10, 12:9, 12:8, 12:7, 12:6, 12:5, 12:4, 12:3, 12:2, 12:1, 11:10, 11:9, 11:8, 11:7, 11:6, 11:5, 11:4, 11:3, 11:2, 11:1, 10:9, 10:8, 10:7, 10:6, 10:5, 10:4, 10:3, 10:2, 10:1, 9:8, 9:7, 9:6, 9:5, 9:4, 9:3, 9:2, 9:1, 8:7, 8:6, 8:5, 8:4, 8:3, 8:2, 8:1, 7:6, 7:5, 7:4, 7:3, 7:2, 7:1, 6:5, 6:4, 6:3, 6:2, 6:1, 5:4, 5:3, 5:2, 5:1, 4:3, 4:2, 4:1, 3:2, 3:1, 2:1, 1:1

**Temperamento Super Justo de Wilfrid Perret ( $\mathcal{S}\mathcal{P}e$ )**

1:1, 21:20, 35:32, 9:8, 7:6, 6:5, 5:4, 21:16, 4:3, 7:5, 35:24, 3:2, 63:40, 8:5, 5:3, 7:4, 9:5, 15:8, 63:32, (2:1)

**Temperamento Super Justo de John Chalmers ( $\mathcal{S}\mathcal{C}h$ )**

1:1, 21:20, 16:15, 9:8, 7:6, 6:5, 5:4, 21:16, 4:3, 7:5, 35:24, 3:2, 63:40, 8:5, 5:3, 7:4, 9:5, 28:15, 63:32, (2:1)

**Temperamento Super Justo de Michael Harrison ( $\mathcal{S}\mathcal{H}\mathcal{M}$ )**

1:1, 28:27, 135:128, 16:15, 243:224, 9:8, 8:7, 7:6, 32:27, 6:5, 135:112, 5:4, 81:64, 9:7, 21:16, 4:3, 112:81, 45:32, 64:45, 81:56, 3:2, 32:21, 14:9, 128:81, 8:5, 224:135, 5:3, 27:16, 12:7, 7:4, 16:9, 15:8, 243:128, 27:14, (2:1)

**Werckmeister VI ( $\mathcal{S}\mathcal{W}_{VI}$ )**

1:1, 196:186, 196:176, 196:165, 196:156, 4:3, 196:139, 196:131, 196:124, 196:117, 196:110, 196:104, (2:1)

## A.4. Sistemas de afinación que no respetan la octava

### A.4.1. Las Escalas de Wendy Carlos ( $\mathcal{C}$ )

Escala  $\alpha$  de Carlos ( $\mathcal{C}_\alpha$ )

$$\mathcal{C}_\alpha = \left\langle \phi^{-1} \left( \frac{9 \log_2(3/2) + 5 \log_2(5/4) + 4 \log_2(6/5)}{9^2 + 5^2 + 4^2} \right) \right\rangle$$

Escala  $\alpha'$  de Carlos ( $\mathcal{C}_{\alpha'}$ )

$$\mathcal{C}_{\alpha'} = \left\langle \phi^{-1} \left( \frac{9 \log_2(3/2) + 5 \log_2(5/4) + 4 \log_2(6/5)}{2(9^2 + 5^2 + 4^2)} \right) \right\rangle$$

Escala  $\beta$  de Carlos ( $\mathcal{C}_\beta$ )

$$\mathcal{C}_\beta = \left\langle \phi^{-1} \left( \frac{11 \log_2(3/2) + 6 \log_2(5/4) + 5 \log_2(6/5)}{11^2 + 6^2 + 5^2} \right) \right\rangle$$

Escala  $\beta'$  de Carlos ( $\mathcal{C}_{\beta'}$ )

$$\mathcal{C}_{\beta'} = \left\langle \phi^{-1} \left( \frac{15 \log_2(7/4) + 11 \log_2(3/2) + 6 \log_2(5/4) + 5 \log_2(6/5)}{15^2 + 11^2 + 6^2 + 5^2} \right) \right\rangle$$

Escala  $\gamma$  de Carlos ( $\mathcal{C}_\gamma$ )

$$\mathcal{C}_\gamma = \left\langle \phi^{-1} \left( \frac{20 \log_2(3/2) + 11 \log_2(5/4) + 9 \log_2(6/5)}{20^2 + 11^2 + 9^2} \right) \right\rangle$$

### A.4.2. Las Escalas de Bohlen-Pierce ( $\mathcal{B}$ )

#### Escala BP-Pitagórica Clásica ( $\mathcal{BP}$ )

	$D^0$	$B^0$	$J^0$
	$J^0$	$G^0$	$E^0$
	$E^0$	$C^0$	$A^0$
	$H^0$	$F^0$	$H^0$

#### Escala BP-Pitagórica Extendida ( $\mathcal{BPE}$ )

	$F\sharp^0$	$D^0$	$B^0$	$J^0$
	$J^0$	$G^0$	$E^0$	
	$E^0$	$C^0$	$A^0$	$H^0$
	$H^0$	$F^0$	$D\flat^0$	
	$D\flat^0$	$B\flat^0$	$J\flat^0$	

#### Escala BP-Justa Clásica ( $\mathcal{BJ}$ )

	$D^{+2}$	$B^{+2}$
	$J^{+1}$	$G^{+1}$
	$E^0$	$C^0$
	$H^{-1}$	$F^{-1}$

#### Escala BP-Justa Extendida ( $\mathcal{BJE}$ )

	$F\sharp^{+2}$	$D^{+2}$	$B^{+2}$
	$J^{+1}$	$G^{+1}$	
	$E^0$	$C^0$	$A^0$
	$H^{-1}$	$F^{-1}$	
	$D\flat^{-2}$	$B\flat^{-2}$	$J\flat^{-2}$

#### Escala BP-Igual ( $\mathcal{BE}$ )

$$\mathcal{BE} = \{3^{j/13} : 0 \leq j < 13\}$$

## A.5. Tablas de comparación

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{PE}$	$\mathcal{J}$	$\mathcal{JR}a$	$\mathcal{JE}r$	$\mathcal{JER}$	$\mathcal{JF}_1$	$\mathcal{JF}_2$
$\mathcal{P}$	1	1	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{PE}$	0,85	1	0,846	0,961	0,961	0,964	0,928	0,928
$\mathcal{J}$	0,964	0,964	1	0,964	0,967	0,964	0,964	1
$\mathcal{JR}a$	0,846	0,961	0,846	1	0,967	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{JE}r$	0,85	0,961	0,846	0,967	1	0,997	0,964	0,964
$\mathcal{JER}$	0,846	0,964	0,846	0,964	0,997	1	0,964	0,964
$\mathcal{JF}_1$	0,846	0,928	0,846	0,964	0,964	0,964	1	0,964
$\mathcal{JF}_2$	0,846	0,928	0,882	0,964	0,964	0,964	0,964	1

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{PE}$	$\mathcal{J}$	$\mathcal{JR}a$	$\mathcal{JE}r$	$\mathcal{JER}$	$\mathcal{JF}_1$	$\mathcal{JF}_2$
$\mathcal{JA}$	0,846	0,964	0,846	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{JDC}$	0,85	0,928	0,846	0,964	0,967	0,964	0,932	0,932
$\mathcal{JK}e_1$	0,846	0,964	0,846	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{JK}e_2$	0,846	0,964	0,846	0,964	0,964	0,964	0,932	0,932
$\mathcal{JME}_1$	0,846	0,964	0,846	0,964	0,964	0,964	0,932	0,932
$\mathcal{JME}_2$	0,85	0,928	0,846	0,964	0,967	0,964	0,932	0,932
$\mathcal{JML}_1$	0,846	0,964	0,846	0,964	0,964	0,964	0,932	0,932
$\mathcal{JML}_2$	0,846	0,964	0,846	0,964	0,964	0,964	0,932	0,932
$\mathcal{JMar}_1$	0,846	0,928	0,846	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{PE}$	$\mathcal{J}$	$\mathcal{JR}a$	$\mathcal{JE}r$	$\mathcal{JER}$	$\mathcal{JF}_1$	$\mathcal{JF}_2$
$\mathcal{JMar}_3$	0,846	0,928	0,846	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{JMar}_4$	0,846	0,928	0,882	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{JMal}$	0,846	0,964	0,846	0,964	0,964	0,964	0,932	0,932
$\mathcal{JEu}$	0,846	0,928	0,846	0,964	0,967	0,964	0,932	0,932
$\mathcal{JMo}$	0,846	0,964	0,846	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{JRom}$	0,846	0,928	0,846	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{JK}i$	0,846	0,961	0,846	0,964	0,967	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{JRou}$	0,846	0,928	0,882	0,964	0,964	0,964	0,932	0,932
$\mathcal{JS}$	0,846	0,961	0,846	0,964	0,961	0,964	0,928	0,928

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{PE}$	$\mathcal{J}$	$\mathcal{JR}a$	$\mathcal{JE}r$	$\mathcal{JER}$	$\mathcal{JF}_1$	$\mathcal{JF}_2$
$\mathcal{M}$	0,955	0,955	0,982	0,982	0,976	0,973	0,982	0,982
$\mathcal{MA}$	0,832	0,937	0,864	0,964	0,964	0,967	0,932	0,932
$\mathcal{MG}$	0,832	0,928	0,864	0,958	0,958	0,958	0,923	0,923
$\mathcal{M}_{1/7}$	0,834	0,959	0,841	0,974	0,985	0,985	0,959	0,959
$\mathcal{M}_{1/6}$	0,832	0,952	0,846	0,976	0,982	0,982	0,964	0,964
$\mathcal{M}_{1/5}$	0,832	0,943	0,854	0,978	0,978	0,978	0,971	0,971
$\mathcal{M}_{2/9}$	0,834	0,936	0,858	0,975	0,975	0,972	0,976	0,976
$\mathcal{M}_{1/4}$	0,832	0,928	0,864	0,967	0,967	0,964	0,982	0,982
$\mathcal{M}_{2/7}$	0,831	0,918	0,867	0,957	0,957	0,954	0,98	0,98
$\mathcal{M}_{1/3}$	0,834	0,906	0,87	0,944	0,944	0,94	0,976	0,976

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{PE}$	$\mathcal{J}$	$\mathcal{JR}a$	$\mathcal{JE}r$	$\mathcal{JER}$	$\mathcal{JF}_1$	$\mathcal{JF}_2$
$\mathcal{IME}$	0,84	0,922	0,856	0,961	0,961	0,958	0,974	0,974
$\mathcal{IBe}_1$	0,85	0,961	0,846	0,987	0,977	0,974	0,964	0,964
$\mathcal{IBe}_2$	0,837	0,961	0,837	0,977	0,977	0,974	0,954	0,954
$\mathcal{IBe}_3$	0,84	0,971	0,84	0,984	0,984	0,98	0,958	0,958
$\mathcal{IW}_{III}$	0,85	0,961	0,846	0,984	0,974	0,971	0,964	0,964
$\mathcal{IW}_{IV}$	0,837	0,948	0,85	0,977	0,977	0,974	0,964	0,964
$\mathcal{IW}_V$	0,83	0,961	0,83	0,964	0,98	0,984	0,948	0,948
$\mathcal{IN}_1$	0,843	0,967	0,843	0,977	0,984	0,98	0,961	0,961
$\mathcal{IN}_2$	0,837	0,967	0,837	0,977	0,984	0,98	0,954	0,954
$\mathcal{IN}_3$	0,837	0,967	0,837	0,977	0,984	0,98	0,954	0,954

106 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{PE}$	$\mathcal{J}$	$\mathcal{JR}a$	$\mathcal{JE}r$	$\mathcal{JER}$	$\mathcal{JF}_1$	$\mathcal{JF}_2$
$\mathcal{IK}_{II}$	0,846	0,961	0,846	0,964	0,985	0,982	0,964	0,964
$\mathcal{IK}_{III}$	0,846	0,961	0,846	0,982	0,976	0,973	0,964	0,964
$\mathcal{IL}$	0,844	0,966	0,844	0,975	0,986	0,983	0,962	0,962
$\mathcal{IM}a$	0,837	0,974	0,837	0,964	0,974	0,977	0,941	0,941
$\mathcal{IB}a$	0,846	0,964	0,846	0,976	0,985	0,982	0,964	0,964
$\mathcal{IY}$	0,843	0,967	0,843	0,978	0,983	0,98	0,961	0,961
$\mathcal{IVY}$	0,85	0,961	0,846	0,977	0,984	0,98	0,964	0,964
$\mathcal{IBK}t$	0,85	0,961	0,846	0,977	0,98	0,977	0,964	0,964
$\mathcal{IBK}r$	0,85	0,961	0,846	0,98	0,98	0,977	0,964	0,964
$\mathcal{IBB}$	0,843	0,961	0,843	0,977	0,984	0,98	0,961	0,961
$\mathcal{IBL}$	0,837	0,971	0,837	0,977	0,984	0,98	0,954	0,954

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{PE}$	$\mathcal{J}$	$\mathcal{JR}a$	$\mathcal{JE}r$	$\mathcal{JER}$	$\mathcal{JF}_1$	$\mathcal{JF}_2$
$\mathcal{E}_{12}$	0,83	0,974	0,83	0,971	0,977	0,977	0,948	0,948
$\mathcal{E}_{19}$	0,835	0,907	0,87	0,907	0,907	0,907	0,895	0,895
$\mathcal{E}_{24}$	0,83	0,907	0,83	0,913	0,91	0,907	0,891	0,891
$\mathcal{E}_{31}$	0,832	0,91	0,854	0,917	0,913	0,91	0,916	0,916
$\mathcal{E}_{43}$	0,832	0,907	0,846	0,907	0,907	0,907	0,893	0,893
$\mathcal{E}_{53}$	0,848	0,924	0,847	0,924	0,924	0,924	0,889	0,889

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{PE}$	$\mathcal{J}$	$\mathcal{JR}a$	$\mathcal{JE}r$	$\mathcal{JER}$	$\mathcal{JF}_1$	$\mathcal{JF}_2$
$\mathcal{SP}a$	0,846	0,911	0,846	0,911	0,911	0,911	0,911	0,911
$\mathcal{SL}$	0,835	0,964	0,835	0,964	0,964	0,964	0,934	0,934
$\mathcal{SE}$	0,843	0,922	0,853	0,961	0,961	0,958	0,971	0,971
$\mathcal{SC}a$	0,835	0,911	0,835	0,927	0,919	0,923	0,927	0,919
$\mathcal{SC}a\mathcal{H}$	0,835	0,911	0,835	0,927	0,919	0,923	0,927	0,919
$\mathcal{SH}L$	0,835	0,955	0,835	0,919	0,951	0,955	0,919	0,919
$\mathcal{SP}e$	0,846	0,931	0,859	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919
$\mathcal{SCh}$	0,846	0,931	0,846	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919
$\mathcal{SHM}$	0,846	0,915	0,846	0,919	0,915	0,919	0,895	0,895
$\mathcal{SW}_{VI}$	0,839	0,962	0,839	0,985	0,974	0,971	0,956	0,956

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{PE}$	$\mathcal{J}$	$\mathcal{JR}a$	$\mathcal{JE}r$	$\mathcal{JER}$	$\mathcal{JF}_1$	$\mathcal{JF}_2$
$\mathcal{C}_\alpha$	0,84	0,912	0,836	0,914	0,913	0,915	0,891	0,891
$\mathcal{C}_{\alpha'}$	0,831	0,905	0,832	0,907	0,906	0,907	0,891	0,891
$\mathcal{C}_\beta$	0,83	0,914	0,83	0,914	0,915	0,915	0,894	0,894
$\mathcal{C}_{\beta'}$	0,831	0,906	0,83	0,907	0,906	0,908	0,898	0,898
$\mathcal{C}_\gamma$	0,833	0,905	0,835	0,908	0,905	0,908	0,894	0,894
$\mathcal{B}\mathcal{P}$	0,836	0,926	0,836	0,919	0,915	0,919	0,895	0,895
$\mathcal{B}\mathcal{P}\mathcal{E}$	0,836	0,926	0,835	0,919	0,915	0,919	0,894	0,894
$\mathcal{B}\mathcal{J}$	0,837	0,928	0,837	0,919	0,915	0,919	0,895	0,895
$\mathcal{B}\mathcal{J}\mathcal{E}$	0,837	0,928	0,837	0,908	0,915	0,919	0,895	0,895
$\mathcal{B}\mathcal{E}$	0,85	0,907	0,844	0,91	0,907	0,907	0,901	0,901

	$\mathcal{JA}$	$\mathcal{JDC}$	$\mathcal{JK}e_1$	$\mathcal{JK}e_2$	$\mathcal{JM}E_1$	$\mathcal{JM}E_2$	$\mathcal{JM}L_1$	$\mathcal{JM}L_2$	$\mathcal{JM}ar_1$
$\mathcal{P}$	1	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{PE}$	0,964	0,928	0,964	0,964	0,964	0,928	0,964	0,964	0,928
$\mathcal{J}$	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	1	0,964	1	1
$\mathcal{JR}a$	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{JE}r$	0,964	0,967	0,964	0,964	0,964	0,967	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{JER}$	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{JF}_1$	0,964	0,932	0,964	0,932	0,932	0,932	0,932	0,932	0,964
$\mathcal{JF}_2$	0,964	0,932	0,964	0,932	0,932	0,932	0,932	0,932	0,964

	$\mathcal{JA}$	$\mathcal{JDC}$	$\mathcal{JK}e_1$	$\mathcal{JK}e_2$	$\mathcal{JM}E_1$	$\mathcal{JM}E_2$	$\mathcal{JM}L_1$	$\mathcal{JM}L_2$	$\mathcal{JM}ar_1$
$\mathcal{JA}$	1	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{JDC}$	0,964	1	0,932	0,932	0,932	0,964	0,932	0,932	0,932
$\mathcal{JK}e_1$	0,964	0,932	1	0,967	0,964	0,932	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{JK}e_2$	0,964	0,932	0,967	1	0,964	0,932	0,964	0,964	0,932
$\mathcal{JM}E_1$	0,964	0,932	0,964	0,964	1	0,932	0,964	0,964	0,932
$\mathcal{JM}E_2$	0,964	0,964	0,932	0,932	0,932	1	0,932	0,932	0,932
$\mathcal{JM}L_1$	0,964	0,932	0,964	0,964	0,964	0,932	1	0,964	0,932
$\mathcal{JM}L_2$	0,964	0,932	0,964	0,964	0,964	0,932	0,964	1	0,932
$\mathcal{JM}ar_1$	0,964	0,932	0,964	0,932	0,932	0,932	0,932	0,932	1

## 108 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

	$\mathcal{J}\mathcal{A}$	$\mathcal{J}\mathcal{DC}$	$\mathcal{J}\mathcal{K}e_1$	$\mathcal{J}\mathcal{K}e_2$	$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{E}_1$	$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{E}_2$	$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{L}_1$	$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{L}_2$	$\mathcal{J}\mathcal{M}ar_1$
$\mathcal{J}\mathcal{M}ar_3$	0,964	0,932	0,964	0,932	0,932	0,932	0,932	0,932	0,964
$\mathcal{J}\mathcal{M}ar_4$	0,964	0,932	0,964	0,932	0,932	0,932	0,932	0,932	0,964
$\mathcal{J}\mathcal{M}al$	0,964	0,932	0,964	0,964	0,964	0,932	0,964	0,964	0,932
$\mathcal{J}\mathcal{E}u$	0,964	0,964	0,932	0,932	0,932	0,964	0,932	0,932	0,932
$\mathcal{J}\mathcal{M}o$	0,964	0,932	0,964	0,964	0,964	0,932	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{J}\mathcal{R}om$	0,964	0,932	0,964	0,932	0,932	0,932	0,932	0,932	0,964
$\mathcal{J}\mathcal{K}i$	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{J}\mathcal{R}ou$	0,964	0,932	0,964	0,964	0,932	0,932	0,932	0,932	0,932
$\mathcal{J}\mathcal{S}$	0,964	0,928	0,964	0,964	0,964	0,928	0,964	0,964	0,932

	$\mathcal{J}\mathcal{A}$	$\mathcal{J}\mathcal{DC}$	$\mathcal{J}\mathcal{K}e_1$	$\mathcal{J}\mathcal{K}e_2$	$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{E}_1$	$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{E}_2$	$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{L}_1$	$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{L}_2$	$\mathcal{J}\mathcal{M}ar_1$
$\mathcal{M}$	0,955	0,982	0,973	0,973	0,982	0,982	0,982	0,982	0,982
$\mathcal{M}\mathcal{A}$	0,955	0,932	0,967	0,973	0,941	0,932	0,941	0,941	0,932
$\mathcal{M}\mathcal{G}$	0,955	0,932	0,923	0,923	0,923	0,932	0,923	0,923	0,923
$\mathcal{M}_{1/7}$	0,974	0,952	0,974	0,962	0,962	0,952	0,962	0,962	0,964
$\mathcal{M}_{1/6}$	0,97	0,949	0,976	0,955	0,955	0,949	0,955	0,955	0,97
$\mathcal{M}_{1/5}$	0,964	0,946	0,978	0,946	0,946	0,946	0,946	0,946	0,978
$\mathcal{M}_{2/9}$	0,96	0,944	0,972	0,94	0,94	0,944	0,94	0,94	0,98
$\mathcal{M}_{1/4}$	0,955	0,941	0,964	0,932	0,932	0,941	0,932	0,932	0,982
$\mathcal{M}_{2/7}$	0,949	0,937	0,954	0,921	0,921	0,937	0,921	0,921	0,974
$\mathcal{M}_{1/3}$	0,94	0,932	0,94	0,908	0,908	0,932	0,908	0,908	0,964

	$\mathcal{JA}$	$\mathcal{JDC}$	$\mathcal{JK}e_1$	$\mathcal{JK}e_2$	$\mathcal{JM}E_1$	$\mathcal{JM}E_2$	$\mathcal{JM}L_1$	$\mathcal{JM}L_2$	$\mathcal{JM}ar_1$
$\mathcal{IM}e$	0,951	0,958	0,958	0,925	0,925	0,958	0,925	0,925	0,974
$\mathcal{IB}e_1$	0,974	0,967	0,964	0,964	0,964	0,967	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{IB}e_2$	0,974	0,954	0,964	0,964	0,964	0,954	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{IB}e_3$	0,971	0,958	0,964	0,964	0,964	0,958	0,964	0,964	0,958
$\mathcal{IW}_{III}$	0,971	0,967	0,964	0,964	0,964	0,967	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{IW}_{IV}$	0,961	0,967	0,964	0,951	0,951	0,967	0,951	0,951	0,964
$\mathcal{IW}_V$	0,98	0,948	0,974	0,964	0,964	0,948	0,964	0,964	0,958
$\mathcal{IN}_1$	0,971	0,961	0,964	0,964	0,964	0,961	0,964	0,964	0,961
$\mathcal{IN}_2$	0,977	0,954	0,971	0,971	0,971	0,954	0,971	0,971	0,958
$\mathcal{IN}_3$	0,977	0,954	0,967	0,967	0,971	0,954	0,967	0,967	0,958

	$\mathcal{JA}$	$\mathcal{JDC}$	$\mathcal{JK}e_1$	$\mathcal{JK}e_2$	$\mathcal{JM}E_1$	$\mathcal{JM}E_2$	$\mathcal{JM}L_1$	$\mathcal{JM}L_2$	$\mathcal{JM}ar_1$
$\mathcal{IK}_{II}$	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{IK}_{III}$	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{IL}$	0,972	0,962	0,97	0,97	0,97	0,962	0,97	0,97	0,962
$\mathcal{IM}a$	0,977	0,941	0,977	0,977	0,964	0,941	0,964	0,964	0,941
$\mathcal{IB}a$	0,97	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{IY}$	0,97	0,961	0,97	0,97	0,97	0,961	0,97	0,97	0,961
$\mathcal{IV}Y$	0,967	0,967	0,964	0,964	0,964	0,967	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{IB}Kt$	0,961	0,967	0,964	0,964	0,964	0,967	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{IB}Kr$	0,969	0,967	0,964	0,964	0,964	0,967	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{IB}B$	0,967	0,961	0,964	0,964	0,964	0,961	0,964	0,964	0,964
$\mathcal{IB}L$	0,974	0,954	0,967	0,967	0,971	0,954	0,967	0,967	0,954

110 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

	$\mathcal{J}\mathcal{A}$	$\mathcal{J}\mathcal{DC}$	$\mathcal{J}\mathcal{K}e_1$	$\mathcal{J}\mathcal{K}e_2$	$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{E}_1$	$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{E}_2$	$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{L}_1$	$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{L}_2$	$\mathcal{J}\mathcal{M}ar_1$
$\mathcal{E}_{12}$	0,984	0,948	0,971	0,971	0,971	0,948	0,971	0,971	0,951
$\mathcal{E}_{19}$	0,928	0,895	0,907	0,907	0,895	0,895	0,895	0,895	0,895
$\mathcal{E}_{24}$	0,907	0,913	0,907	0,91	0,891	0,91	0,891	0,891	0,891
$\mathcal{E}_{31}$	0,91	0,916	0,91	0,917	0,917	0,916	0,917	0,917	0,917
$\mathcal{E}_{43}$	0,914	0,9	0,907	0,907	0,893	0,893	0,893	0,893	0,893
$\mathcal{E}_{53}$	0,924	0,891	0,924	0,924	0,889	0,891	0,889	0,889	0,889

	$\mathcal{J}\mathcal{A}$	$\mathcal{J}\mathcal{DC}$	$\mathcal{J}\mathcal{K}e_1$	$\mathcal{J}\mathcal{K}e_2$	$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{E}_1$	$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{E}_2$	$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{L}_1$	$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{L}_2$	$\mathcal{J}\mathcal{M}ar_1$
$\mathcal{S}\mathcal{P}a$	0,911	0,911	0,911	0,911	0,911	0,911	0,911	0,911	0,911
$\mathcal{S}\mathcal{L}$	0,964	0,932	0,97	0,97	0,964	0,932	0,964	0,964	0,953
$\mathcal{S}\mathcal{E}$	0,958	0,961	0,958	0,925	0,925	0,961	0,925	0,925	0,971
$\mathcal{S}\mathcal{C}a$	0,923	0,927	0,919	0,919	0,911	0,927	0,911	0,911	0,919
$\mathcal{S}\mathcal{C}a\mathcal{H}$	0,923	0,927	0,919	0,919	0,911	0,927	0,911	0,911	0,919
$\mathcal{S}\mathcal{H}\mathcal{L}$	0,951	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919
$\mathcal{S}\mathcal{P}e$	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919
$\mathcal{S}\mathcal{C}h$	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919
$\mathcal{S}\mathcal{H}\mathcal{M}$	0,919	0,895	0,919	0,919	0,919	0,895	0,919	0,919	0,895
$\mathcal{S}\mathcal{W}_{VI}$	0,971	0,956	0,971	0,965	0,965	0,956	0,965	0,965	0,967

	$\mathcal{J}\mathcal{A}$	$\mathcal{J}\mathcal{DC}$	$\mathcal{J}\mathcal{K}e_1$	$\mathcal{J}\mathcal{K}e_2$	$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{E}_1$	$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{E}_2$	$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{L}_1$	$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{L}_2$	$\mathcal{J}\mathcal{M}ar_1$
$\mathcal{C}_\alpha$	0,913	0,892	0,914	0,914	0,891	0,892	0,891	0,891	0,891
$\mathcal{C}_{\alpha'}$	0,906	0,892	0,907	0,907	0,891	0,892	0,891	0,891	0,891
$\mathcal{C}_\beta$	0,915	0,894	0,914	0,914	0,899	0,894	0,899	0,899	0,894
$\mathcal{C}_{\beta'}$	0,908	0,898	0,907	0,907	0,899	0,898	0,899	0,899	0,899
$\mathcal{C}_\gamma$	0,905	0,894	0,908	0,908	0,894	0,894	0,894	0,894	0,894
$\mathcal{B}\mathcal{P}$	0,919	0,895	0,919	0,919	0,919	0,895	0,919	0,919	0,908
$\mathcal{B}\mathcal{P}\mathcal{E}$	0,919	0,894	0,919	0,919	0,919	0,894	0,919	0,919	0,908
$\mathcal{B}\mathcal{J}$	0,919	0,895	0,919	0,919	0,919	0,895	0,919	0,919	0,919
$\mathcal{B}\mathcal{J}\mathcal{E}$	0,919	0,895	0,908	0,908	0,906	0,895	0,906	0,906	0,896
$\mathcal{B}\mathcal{E}$	0,907	0,901	0,907	0,91	0,91	0,901	0,91	0,91	0,904

	$\mathcal{J}Mar_3$	$\mathcal{J}Mar_4$	$\mathcal{J}Mal$	$\mathcal{J}Eu$	$\mathcal{J}Mo$	$\mathcal{J}Rom$	$\mathcal{J}Ki$	$\mathcal{J}Rou$	$\mathcal{J}S$
$\mathcal{P}$	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	1
$\mathcal{P}\mathcal{E}$	0,928	0,928	0,964	0,928	0,964	0,928	0,961	0,928	0,997
$\mathcal{J}$	0,964	0,964	1	1	1	1	1	1	1
$\mathcal{J}Ra$	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,997
$\mathcal{J}Er$	0,964	0,964	0,964	0,967	0,964	0,964	0,967	0,964	0,997
$\mathcal{J}ER$	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,997
$\mathcal{J}F_1$	0,964	0,964	0,932	0,932	0,964	0,964	0,964	0,932	0,964
$\mathcal{J}F_2$	0,964	0,964	0,932	0,932	0,964	0,964	0,964	0,932	0,964

	$\mathcal{J}Mar_3$	$\mathcal{J}Mar_4$	$\mathcal{J}Mal$	$\mathcal{J}Eu$	$\mathcal{J}Mo$	$\mathcal{J}Rom$	$\mathcal{J}Ki$	$\mathcal{J}Rou$	$\mathcal{J}S$
$\mathcal{J}A$	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,997
$\mathcal{J}DC$	0,932	0,932	0,932	0,964	0,932	0,932	0,964	0,932	0,964
$\mathcal{J}Ke_1$	0,964	0,964	0,964	0,932	0,964	0,964	0,964	0,964	0,997
$\mathcal{J}Ke_2$	0,932	0,932	0,964	0,932	0,964	0,932	0,964	0,964	0,997
$\mathcal{J}ME_1$	0,932	0,932	0,964	0,932	0,964	0,932	0,964	0,932	0,997
$\mathcal{J}ME_2$	0,932	0,932	0,932	0,964	0,932	0,932	0,964	0,932	0,964
$\mathcal{J}ML_1$	0,932	0,932	0,964	0,932	0,964	0,932	0,964	0,932	0,997
$\mathcal{J}ML_2$	0,932	0,932	0,964	0,932	0,964	0,932	0,964	0,932	0,997
$\mathcal{J}Mar_1$	0,964	0,964	0,932	0,932	0,964	0,964	0,964	0,932	0,967

	$\mathcal{J}Mar_3$	$\mathcal{J}Mar_4$	$\mathcal{J}Mal$	$\mathcal{J}Eu$	$\mathcal{J}Mo$	$\mathcal{J}Rom$	$\mathcal{J}Ki$	$\mathcal{J}Rou$	$\mathcal{J}S$
$\mathcal{J}Mar_3$	1	0,964	0,932	0,932	0,964	0,964	0,964	0,932	0,967
$\mathcal{J}Mar_4$	0,964	1	0,932	0,932	0,964	0,964	0,964	0,932	0,964
$\mathcal{J}Mal$	0,932	0,932	1	0,932	0,967	0,932	0,964	0,932	1
$\mathcal{J}Eu$	0,932	0,932	0,932	1	0,932	0,932	0,967	0,932	0,967
$\mathcal{J}Mo$	0,964	0,964	0,967	0,932	1	0,964	0,964	0,964	0,997
$\mathcal{J}Rom$	0,964	0,964	0,932	0,932	0,964	1	0,964	0,932	0,967
$\mathcal{J}Ki$	0,964	0,964	0,964	0,967	0,964	0,964	1	0,964	1
$\mathcal{J}Rou$	0,932	0,932	0,932	0,932	0,964	0,932	0,964	1	0,964
$\mathcal{J}S$	0,932	0,928	0,964	0,932	0,964	0,932	0,964	0,928	1

## 112 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

	$\mathcal{J}Mar_3$	$\mathcal{J}Mar_4$	$\mathcal{J}Mal$	$\mathcal{J}Eu$	$\mathcal{J}Mo$	$\mathcal{J}Rom$	$\mathcal{J}Ki$	$\mathcal{J}Rou$	$\mathcal{J}S$
$\mathcal{M}$	0,973	0,982	0,982	0,982	0,982	0,982	0,982	0,982	0,982
$\mathcal{MA}$	0,932	0,932	0,941	0,932	0,967	0,932	0,964	0,982	0,976
$\mathcal{MG}$	0,923	0,923	0,923	0,932	0,923	0,923	0,958	0,923	0,958
$\mathcal{M}_{1/7}$	0,964	0,959	0,962	0,952	0,98	0,964	0,98	0,959	0,985
$\mathcal{M}_{1/6}$	0,97	0,964	0,955	0,949	0,982	0,97	0,982	0,955	0,982
$\mathcal{M}_{1/5}$	0,978	0,971	0,946	0,946	0,978	0,978	0,978	0,946	0,982
$\mathcal{M}_{2/9}$	0,976	0,976	0,94	0,944	0,972	0,984	0,975	0,94	0,975
$\mathcal{M}_{1/4}$	0,973	0,982	0,932	0,941	0,964	0,982	0,967	0,932	0,967
$\mathcal{M}_{2/7}$	0,969	0,985	0,921	0,937	0,954	0,974	0,957	0,921	0,957
$\mathcal{M}_{1/3}$	0,964	0,976	0,908	0,932	0,94	0,964	0,944	0,908	0,944

	$\mathcal{J}Mar_3$	$\mathcal{J}Mar_4$	$\mathcal{J}Mal$	$\mathcal{J}Eu$	$\mathcal{J}Mo$	$\mathcal{J}Rom$	$\mathcal{J}Ki$	$\mathcal{J}Rou$	$\mathcal{J}S$
$\mathcal{I}Me$	0,971	0,974	0,925	0,958	0,958	0,974	0,961	0,925	0,961
$\mathcal{IBe}_1$	0,964	0,964	0,964	0,967	0,964	0,964	0,974	0,964	0,987
$\mathcal{IBe}_2$	0,964	0,954	0,964	0,967	0,964	0,964	0,987	0,954	0,987
$\mathcal{IBe}_3$	0,958	0,958	0,964	0,958	0,964	0,958	0,98	0,958	0,984
$\mathcal{IW}_{III}$	0,964	0,964	0,964	0,967	0,964	0,964	0,98	0,964	0,984
$\mathcal{IW}_{IV}$	0,964	0,964	0,951	0,954	0,964	0,964	0,987	0,951	0,987
$\mathcal{IW}_V$	0,958	0,948	0,964	0,958	0,974	0,958	0,974	0,948	0,984
$\mathcal{IN}_1$	0,961	0,961	0,964	0,961	0,964	0,961	0,984	0,961	0,984
$\mathcal{IN}_2$	0,958	0,954	0,971	0,958	0,971	0,958	0,984	0,954	0,984
$\mathcal{IN}_3$	0,958	0,954	0,971	0,958	0,971	0,958	0,984	0,954	0,984

	$\mathcal{J}Mar_3$	$\mathcal{J}Mar_4$	$\mathcal{J}Mal$	$\mathcal{J}\mathcal{E}u$	$\mathcal{J}Mo$	$\mathcal{J}Rom$	$\mathcal{J}Ki$	$\mathcal{J}Rou$	$\mathcal{J}\mathcal{S}$
$\mathcal{IK}_{II}$	0,964	0,964	0,964	0,967	0,964	0,964	0,982	0,964	0,982
$\mathcal{IK}_{III}$	0,964	0,964	0,964	0,967	0,964	0,964	0,982	0,964	0,982
$\mathcal{IL}$	0,962	0,962	0,97	0,962	0,97	0,962	0,981	0,962	0,983
$\mathcal{IM}a$	0,941	0,941	0,964	0,941	0,964	0,941	0,964	0,941	0,987
$\mathcal{IB}a$	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,982	0,964	0,982
$\mathcal{IY}$	0,961	0,961	0,97	0,961	0,97	0,961	0,984	0,961	0,984
$\mathcal{IVY}$	0,964	0,964	0,964	0,967	0,964	0,964	0,984	0,964	0,984
$\mathcal{IBK}t$	0,964	0,964	0,964	0,967	0,964	0,964	0,987	0,964	0,987
$\mathcal{IBK}r$	0,964	0,964	0,964	0,967	0,964	0,964	0,984	0,964	0,984
$\mathcal{IBB}$	0,964	0,961	0,964	0,967	0,964	0,964	0,984	0,961	0,984
$\mathcal{IBL}$	0,954	0,954	0,971	0,954	0,971	0,954	0,984	0,954	0,984

	$\mathcal{J}Mar_3$	$\mathcal{J}Mar_4$	$\mathcal{J}Mal$	$\mathcal{J}\mathcal{E}u$	$\mathcal{J}Mo$	$\mathcal{J}Rom$	$\mathcal{J}Ki$	$\mathcal{J}Rou$	$\mathcal{J}\mathcal{S}$
$\mathcal{E}_{12}$	0,951	0,948	0,974	0,951	0,974	0,951	0,974	0,948	0,984
$\mathcal{E}_{19}$	0,907	0,895	0,907	0,907	0,907	0,907	0,907	0,895	0,931
$\mathcal{E}_{24}$	0,907	0,891	0,913	0,91	0,91	0,91	0,91	0,891	0,926
$\mathcal{E}_{31}$	0,91	0,916	0,926	0,918	0,918	0,918	0,918	0,916	0,927
$\mathcal{E}_{43}$	0,892	0,893	0,907	0,893	0,907	0,893	0,907	0,893	0,928
$\mathcal{E}_{53}$	0,891	0,889	0,924	0,891	0,924	0,891	0,924	0,889	0,925

## 114 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

	$\mathcal{J}Mar_3$	$\mathcal{J}Mar_4$	$\mathcal{J}Mal$	$\mathcal{J}Eu$	$\mathcal{J}Mo$	$\mathcal{J}Rom$	$\mathcal{J}Ki$	$\mathcal{J}Rou$	$\mathcal{J}S$
$\mathcal{SP}a$	0,911	0,911	0,911	0,911	0,911	0,911	0,911	0,911	0,938
$\mathcal{SL}$	0,953	0,934	0,964	0,932	0,964	0,953	0,964	0,934	0,985
$\mathcal{SE}$	0,971	0,971	0,925	0,961	0,958	0,971	0,961	0,925	0,961
$\mathcal{SC}a$	0,891	0,919	0,935	0,927	0,927	0,927	0,927	0,919	0,947
$\mathcal{SC}a\mathcal{H}$	0,891	0,919	0,935	0,927	0,927	0,927	0,927	0,919	0,947
$\mathcal{SH}\mathcal{L}$	0,919	0,919	0,919	0,928	0,919	0,919	0,919	0,919	0,955
$\mathcal{SP}e$	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919	0,931
$\mathcal{SC}h$	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919	0,931
$\mathcal{SH}\mathcal{M}$	0,895	0,895	0,919	0,895	0,919	0,895	0,915	0,895	0,951
$\mathcal{SW}_{VI}$	0,967	0,956	0,965	0,961	0,971	0,967	0,971	0,956	0,985

	$\mathcal{J}Mar_3$	$\mathcal{J}Mar_4$	$\mathcal{J}Mal$	$\mathcal{J}Eu$	$\mathcal{J}Mo$	$\mathcal{J}Rom$	$\mathcal{J}Ki$	$\mathcal{J}Rou$	$\mathcal{J}S$
$\mathcal{C}_\alpha$	0,891	0,891	0,915	0,892	0,915	0,892	0,913	0,891	0,926
$\mathcal{C}_{\alpha'}$	0,891	0,891	0,907	0,892	0,907	0,892	0,906	0,891	0,926
$\mathcal{C}_\beta$	0,894	0,894	0,914	0,894	0,914	0,894	0,914	0,894	0,934
$\mathcal{C}_{\beta'}$	0,892	0,898	0,908	0,9	0,908	0,9	0,906	0,898	0,925
$\mathcal{C}_\gamma$	0,894	0,894	0,908	0,894	0,908	0,894	0,905	0,894	0,927
$\mathcal{BP}$	0,897	0,895	0,919	0,908	0,919	0,908	0,919	0,895	0,93
$\mathcal{BPE}$	0,897	0,894	0,919	0,908	0,919	0,908	0,919	0,894	0,93
$\mathcal{BJ}$	0,919	0,895	0,919	0,919	0,919	0,919	0,919	0,895	0,955
$\mathcal{BJE}$	0,896	0,895	0,908	0,896	0,908	0,896	0,908	0,895	0,942
$\mathcal{BE}$	0,904	0,901	0,91	0,904	0,91	0,904	0,907	0,901	0,942

	$\mathcal{M}$	$\mathcal{MA}$	$\mathcal{MG}$	$\mathcal{M}_{1/7}$	$\mathcal{M}_{1/6}$	$\mathcal{M}_{1/5}$	$\mathcal{M}_{2/9}$	$\mathcal{M}_{1/4}$	$\mathcal{M}_{2/7}$	$\mathcal{M}_{1/3}$
$\mathcal{P}$	0,955	0,955	0,955	0,974	0,97	0,964	0,96	0,955	0,949	0,94
$\mathcal{PE}$	0,846	0,937	0,937	0,959	0,952	0,943	0,936	0,928	0,918	0,904
$\mathcal{J}$	0,982	0,982	0,982	0,98	0,982	0,986	0,984	0,982	0,98	0,976
$\mathcal{JRa}$	0,841	0,964	0,967	0,974	0,976	0,978	0,975	0,967	0,957	0,944
$\mathcal{JEr}$	0,841	0,964	0,967	0,985	0,982	0,978	0,975	0,967	0,957	0,944
$\mathcal{JER}$	0,841	0,967	0,967	0,985	0,982	0,978	0,972	0,964	0,954	0,94
$\mathcal{JF}_1$	0,855	0,932	0,982	0,959	0,964	0,971	0,976	0,982	0,98	0,976
$\mathcal{JF}_2$	0,873	0,932	0,982	0,959	0,964	0,971	0,976	0,982	0,98	0,976

	$\mathcal{M}$	$\mathcal{MA}$	$\mathcal{MG}$	$\mathcal{M}_{1/7}$	$\mathcal{M}_{1/6}$	$\mathcal{M}_{1/5}$	$\mathcal{M}_{2/9}$	$\mathcal{M}_{1/4}$	$\mathcal{M}_{2/7}$	$\mathcal{M}_{1/3}$
$\mathcal{JA}$	0,841	0,955	0,955	0,974	0,97	0,964	0,96	0,955	0,949	0,94
$\mathcal{JDC}$	0,855	0,932	0,982	0,952	0,949	0,946	0,944	0,941	0,937	0,932
$\mathcal{JK}e_1$	0,841	0,967	0,967	0,974	0,976	0,978	0,972	0,964	0,954	0,94
$\mathcal{JK}e_2$	0,846	0,973	0,973	0,962	0,955	0,946	0,94	0,932	0,921	0,908
$\mathcal{JME}_1$	0,855	0,941	0,941	0,962	0,955	0,946	0,94	0,932	0,921	0,908
$\mathcal{JME}_2$	0,855	0,932	0,982	0,952	0,949	0,946	0,944	0,941	0,937	0,932
$\mathcal{JML}_1$	0,855	0,941	0,941	0,962	0,955	0,946	0,94	0,932	0,921	0,908
$\mathcal{JML}_2$	0,855	0,941	0,941	0,962	0,955	0,946	0,94	0,932	0,921	0,908
$\mathcal{JMar}_1$	0,855	0,932	0,982	0,964	0,97	0,978	0,98	0,982	0,974	0,964

	$\mathcal{M}$	$\mathcal{MA}$	$\mathcal{MG}$	$\mathcal{M}_{1/7}$	$\mathcal{M}_{1/6}$	$\mathcal{M}_{1/5}$	$\mathcal{M}_{2/9}$	$\mathcal{M}_{1/4}$	$\mathcal{M}_{2/7}$	$\mathcal{M}_{1/3}$
$\mathcal{JMar}_3$	0,855	0,932	0,973	0,964	0,97	0,978	0,976	0,973	0,969	0,964
$\mathcal{JMar}_4$	0,873	0,932	0,982	0,959	0,964	0,971	0,976	0,982	0,985	0,976
$\mathcal{JMal}$	0,855	0,941	0,941	0,962	0,955	0,946	0,94	0,932	0,921	0,908
$\mathcal{JEu}$	0,855	0,932	0,949	0,952	0,949	0,946	0,944	0,941	0,937	0,932
$\mathcal{JMo}$	0,841	0,967	0,967	0,98	0,982	0,978	0,972	0,964	0,954	0,94
$\mathcal{JRom}$	0,855	0,932	0,982	0,964	0,97	0,978	0,984	0,982	0,974	0,964
$\mathcal{JKi}$	0,841	0,964	0,967	0,98	0,982	0,978	0,975	0,967	0,957	0,944
$\mathcal{JRou}$	0,873	0,982	0,982	0,959	0,955	0,946	0,94	0,932	0,921	0,908
$\mathcal{JS}$	0,841	0,941	0,941	0,962	0,955	0,946	0,94	0,932	0,921	0,908

116 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

	$\mathcal{M}$	$\mathcal{MA}$	$\mathcal{MG}$	$\mathcal{M}_{1/7}$	$\mathcal{M}_{1/6}$	$\mathcal{M}_{1/5}$	$\mathcal{M}_{2/9}$	$\mathcal{M}_{1/4}$	$\mathcal{M}_{2/7}$	$\mathcal{M}_{1/3}$
$\mathcal{M}$	1	1	1	0,981	0,985	0,991	0,995	1	0,994	0,985
$\mathcal{MA}$	0,873	1	1	0,962	0,955	0,946	0,94	0,932	0,921	0,908
$\mathcal{MG}$	0,873	0,932	1	0,943	0,941	0,937	0,935	0,932	0,921	0,908
$\mathcal{M}_{1/7}$	0,843	0,962	0,969	1	0,993	0,984	0,977	0,969	0,959	0,945
$\mathcal{M}_{1/6}$	0,849	0,955	0,976	0,993	1	0,99	0,984	0,976	0,966	0,952
$\mathcal{M}_{1/5}$	0,859	0,946	0,986	0,984	0,99	1	0,994	0,986	0,975	0,962
$\mathcal{M}_{2/9}$	0,865	0,94	0,992	0,977	0,984	0,994	1	0,992	0,982	0,968
$\mathcal{M}_{1/4}$	0,873	0,932	1	0,969	0,976	0,986	0,992	1	0,99	0,976
$\mathcal{M}_{2/7}$	0,876	0,921	0,99	0,959	0,966	0,975	0,982	0,99	1	0,986
$\mathcal{M}_{1/3}$	0,879	0,908	0,976	0,945	0,952	0,962	0,968	0,976	0,986	1

	$\mathcal{M}$	$\mathcal{MA}$	$\mathcal{MG}$	$\mathcal{M}_{1/7}$	$\mathcal{M}_{1/6}$	$\mathcal{M}_{1/5}$	$\mathcal{M}_{2/9}$	$\mathcal{M}_{1/4}$	$\mathcal{M}_{2/7}$	$\mathcal{M}_{1/3}$
$\mathcal{I}\mathcal{M}e$	0,856	0,925	0,983	0,963	0,97	0,979	0,986	0,983	0,979	0,974
$\mathcal{I}\mathcal{B}e_1$	0,841	0,964	0,967	0,984	0,982	0,978	0,975	0,967	0,957	0,944
$\mathcal{I}\mathcal{B}e_2$	0,841	0,964	0,967	0,985	0,982	0,978	0,975	0,967	0,957	0,944
$\mathcal{I}\mathcal{B}e_3$	0,84	0,967	0,967	0,985	0,982	0,972	0,966	0,958	0,947	0,934
$\mathcal{IW}_{III}$	0,841	0,964	0,967	0,985	0,982	0,978	0,975	0,967	0,957	0,944
$\mathcal{IW}_{IV}$	0,846	0,951	0,973	0,984	0,982	0,978	0,976	0,973	0,969	0,957
$\mathcal{IW}_V$	0,839	0,964	0,966	0,989	0,984	0,977	0,972	0,966	0,957	0,944
$\mathcal{IN}_1$	0,843	0,97	0,97	0,985	0,982	0,975	0,969	0,961	0,951	0,937
$\mathcal{IN}_2$	0,84	0,967	0,967	0,991	0,985	0,975	0,969	0,961	0,951	0,937
$\mathcal{IN}_3$	0,84	0,967	0,967	0,991	0,985	0,975	0,969	0,961	0,951	0,937

	$\mathcal{M}$	$\mathcal{MA}$	$\mathcal{MG}$	$\mathcal{M}_{1/7}$	$\mathcal{M}_{1/6}$	$\mathcal{M}_{1/5}$	$\mathcal{M}_{2/9}$	$\mathcal{M}_{1/4}$	$\mathcal{M}_{2/7}$	$\mathcal{M}_{1/3}$
$\mathcal{IK}_{II}$	0,841	0,964	0,967	0,985	0,982	0,978	0,975	0,967	0,957	0,944
$\mathcal{IK}_{III}$	0,841	0,964	0,967	0,985	0,982	0,978	0,975	0,967	0,957	0,944
$\mathcal{IL}$	0,843	0,97	0,97	0,99	0,986	0,976	0,97	0,962	0,952	0,938
$\mathcal{IMa}$	0,846	0,95	0,95	0,977	0,971	0,963	0,957	0,95	0,941	0,929
$\mathcal{IBa}$	0,841	0,967	0,967	0,985	0,982	0,978	0,972	0,964	0,954	0,94
$\mathcal{IY}$	0,843	0,97	0,97	0,991	0,985	0,976	0,969	0,961	0,951	0,937
$\mathcal{IVY}$	0,841	0,964	0,967	0,985	0,982	0,978	0,975	0,967	0,957	0,944
$\mathcal{IBKt}$	0,841	0,964	0,967	0,985	0,982	0,978	0,975	0,967	0,957	0,944
$\mathcal{IBKr}$	0,841	0,964	0,967	0,985	0,982	0,978	0,975	0,967	0,957	0,944
$\mathcal{IBB}$	0,841	0,964	0,967	0,985	0,982	0,978	0,975	0,967	0,957	0,944
$\mathcal{IBL}$	0,841	0,963	0,963	0,988	0,982	0,972	0,966	0,958	0,947	0,934

	$\mathcal{M}$	$\mathcal{MA}$	$\mathcal{MG}$	$\mathcal{M}_{1/7}$	$\mathcal{M}_{1/6}$	$\mathcal{M}_{1/5}$	$\mathcal{M}_{2/9}$	$\mathcal{M}_{1/4}$	$\mathcal{M}_{2/7}$	$\mathcal{M}_{1/3}$
$\mathcal{E}_{12}$	0,839	0,96	0,96	0,985	0,978	0,969	0,962	0,954	0,944	0,93
$\mathcal{E}_{19}$	0,879	0,904	0,904	0,915	0,913	0,909	0,907	0,904	0,9	0,895
$\mathcal{E}_{24}$	0,839	0,905	0,905	0,913	0,911	0,909	0,907	0,905	0,903	0,899
$\mathcal{E}_{31}$	0,87	0,933	0,933	0,925	0,928	0,931	0,933	0,933	0,923	0,909
$\mathcal{E}_{43}$	0,855	0,903	0,903	0,913	0,91	0,907	0,905	0,903	0,901	0,897
$\mathcal{E}_{53}$	0,84	0,904	0,904	0,915	0,913	0,908	0,907	0,904	0,901	0,899

	$\mathcal{M}$	$\mathcal{MA}$	$\mathcal{MG}$	$\mathcal{M}_{1/7}$	$\mathcal{M}_{1/6}$	$\mathcal{M}_{1/5}$	$\mathcal{M}_{2/9}$	$\mathcal{M}_{1/4}$	$\mathcal{M}_{2/7}$	$\mathcal{M}_{1/3}$
$\mathcal{SPa}$	0,846	0,911	0,911	0,913	0,911	0,911	0,911	0,911	0,911	0,907
$\mathcal{SL}$	0,843	0,952	0,952	0,974	0,97	0,963	0,958	0,952	0,943	0,929
$\mathcal{SE}$	0,853	0,925	0,98	0,963	0,97	0,978	0,979	0,98	0,976	0,971
$\mathcal{SCa}$	0,853	0,937	0,937	0,918	0,911	0,913	0,915	0,918	0,922	0,927
$\mathcal{SCaH}$	0,852	0,937	0,937	0,918	0,911	0,913	0,915	0,918	0,922	0,927
$\mathcal{SHL}$	0,844	0,928	0,928	0,939	0,937	0,933	0,931	0,928	0,921	0,908
$\mathcal{SPe}$	0,85	0,928	0,928	0,924	0,925	0,926	0,927	0,928	0,921	0,908
$\mathcal{SCh}$	0,85	0,928	0,928	0,924	0,925	0,926	0,927	0,928	0,921	0,908
$\mathcal{SHM}$	0,841	0,904	0,904	0,919	0,913	0,909	0,907	0,904	0,903	0,895
$\mathcal{SW}_{VI}$	0,84	0,965	0,967	0,981	0,983	0,981	0,975	0,967	0,956	0,943

## 118 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

	$\mathcal{M}$	$\mathcal{MA}$	$\mathcal{MG}$	$\mathcal{M}_{1/7}$	$\mathcal{M}_{1/6}$	$\mathcal{M}_{1/5}$	$\mathcal{M}_{2/9}$	$\mathcal{M}_{1/4}$	$\mathcal{M}_{2/7}$	$\mathcal{M}_{1/3}$
$\mathcal{C}_\alpha$	0,839	0,904	0,904	0,912	0,91	0,907	0,906	0,904	0,899	0,897
$\mathcal{C}_{\alpha'}$	0,839	0,904	0,904	0,912	0,91	0,907	0,905	0,904	0,899	0,895
$\mathcal{C}_\beta$	0,839	0,903	0,903	0,914	0,911	0,907	0,907	0,903	0,904	0,896
$\mathcal{C}_{\beta'}$	0,839	0,907	0,907	0,913	0,91	0,907	0,906	0,906	0,9	0,895
$\mathcal{C}_\gamma$	0,839	0,903	0,903	0,913	0,91	0,908	0,905	0,903	0,9	0,895
$\mathcal{BP}$	0,843	0,904	0,904	0,924	0,919	0,911	0,905	0,904	0,901	0,895
$\mathcal{BPE}$	0,843	0,904	0,904	0,924	0,919	0,911	0,905	0,904	0,901	0,895
$\mathcal{BJ}$	0,841	0,904	0,904	0,924	0,919	0,912	0,907	0,904	0,903	0,895
$\mathcal{BJE}$	0,841	0,904	0,904	0,924	0,919	0,91	0,906	0,904	0,903	0,895
$\mathcal{BE}$	0,843	0,903	0,903	0,914	0,91	0,909	0,906	0,903	0,901	0,897

	$\mathcal{IMe}$	$\mathcal{IBe}_1$	$\mathcal{IBe}_2$	$\mathcal{IBe}_3$	$\mathcal{IW}_{III}$	$\mathcal{IW}_{IV}$	$\mathcal{IW}_V$	$\mathcal{IN}_1$	$\mathcal{IN}_2$	$\mathcal{IN}_3$
$\mathcal{P}$	0,951	0,974	0,974	0,971	0,971	0,961	0,98	0,971	0,977	0,977
$\mathcal{PE}$	0,922	0,961	0,961	0,971	0,961	0,948	0,961	0,967	0,967	0,967
$\mathcal{J}$	0,98	0,974	0,987	0,98	0,98	0,987	0,974	0,984	0,984	0,984
$\mathcal{JRa}$	0,961	0,987	0,977	0,984	0,984	0,977	0,964	0,977	0,977	0,977
$\mathcal{JEr}$	0,961	0,977	0,977	0,984	0,974	0,977	0,98	0,984	0,984	0,984
$\mathcal{JER}$	0,958	0,974	0,974	0,98	0,971	0,974	0,984	0,98	0,98	0,98
$\mathcal{JF}_1$	0,974	0,964	0,954	0,958	0,964	0,964	0,948	0,961	0,954	0,954
$\mathcal{JF}_2$	0,974	0,964	0,954	0,958	0,964	0,964	0,948	0,961	0,954	0,954

	$\mathcal{IMe}$	$\mathcal{IBe}_1$	$\mathcal{IBe}_2$	$\mathcal{IBe}_3$	$\mathcal{IW}_{III}$	$\mathcal{IW}_{IV}$	$\mathcal{IW}_V$	$\mathcal{IN}_1$	$\mathcal{IN}_2$	$\mathcal{IN}_3$
$\mathcal{JA}$	0,951	0,974	0,974	0,971	0,971	0,961	0,98	0,971	0,977	0,977
$\mathcal{JDC}$	0,958	0,967	0,954	0,958	0,967	0,967	0,948	0,961	0,954	0,954
$\mathcal{JKe}_1$	0,958	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,974	0,964	0,971	0,967
$\mathcal{JKe}_2$	0,925	0,964	0,964	0,964	0,964	0,951	0,964	0,964	0,971	0,967
$\mathcal{JME}_1$	0,925	0,964	0,964	0,964	0,964	0,951	0,964	0,964	0,971	0,971
$\mathcal{JME}_2$	0,958	0,967	0,954	0,958	0,967	0,967	0,948	0,961	0,954	0,954
$\mathcal{JML}_1$	0,925	0,964	0,964	0,964	0,964	0,951	0,964	0,964	0,971	0,967
$\mathcal{JML}_2$	0,925	0,964	0,964	0,964	0,964	0,951	0,964	0,964	0,971	0,967
$\mathcal{JMar}_1$	0,974	0,964	0,964	0,958	0,964	0,964	0,958	0,961	0,958	0,958

	$\mathcal{I}\mathcal{M}e$	$\mathcal{I}\mathcal{B}e_1$	$\mathcal{I}\mathcal{B}e_2$	$\mathcal{I}\mathcal{B}e_3$	$\mathcal{I}\mathcal{W}_{III}$	$\mathcal{I}\mathcal{W}_{IV}$	$\mathcal{I}\mathcal{W}_V$	$\mathcal{I}\mathcal{N}_1$	$\mathcal{I}\mathcal{N}_2$	$\mathcal{I}\mathcal{N}_3$
$\mathcal{J}\mathcal{M}ar_3$	0,971	0,964	0,964	0,958	0,964	0,964	0,958	0,961	0,958	0,958
$\mathcal{J}\mathcal{M}ar_4$	0,974	0,964	0,954	0,958	0,964	0,964	0,948	0,961	0,954	0,954
$\mathcal{J}\mathcal{M}al$	0,925	0,964	0,964	0,964	0,964	0,951	0,964	0,964	0,971	0,971
$\mathcal{J}\mathcal{E}u$	0,958	0,967	0,967	0,958	0,967	0,954	0,958	0,961	0,958	0,958
$\mathcal{J}\mathcal{M}o$	0,958	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,974	0,964	0,971	0,971
$\mathcal{J}\mathcal{R}om$	0,974	0,964	0,964	0,958	0,964	0,964	0,958	0,961	0,958	0,958
$\mathcal{J}\mathcal{K}i$	0,961	0,974	0,987	0,98	0,98	0,987	0,974	0,984	0,984	0,984
$\mathcal{J}\mathcal{R}ou$	0,925	0,964	0,954	0,958	0,964	0,951	0,948	0,961	0,954	0,954
$\mathcal{J}\mathcal{S}$	0,925	0,961	0,964	0,964	0,961	0,951	0,964	0,964	0,967	0,964

	$\mathcal{I}\mathcal{M}e$	$\mathcal{I}\mathcal{B}e_1$	$\mathcal{I}\mathcal{B}e_2$	$\mathcal{I}\mathcal{B}e_3$	$\mathcal{I}\mathcal{W}_{III}$	$\mathcal{I}\mathcal{W}_{IV}$	$\mathcal{I}\mathcal{W}_V$	$\mathcal{I}\mathcal{N}_1$	$\mathcal{I}\mathcal{N}_2$	$\mathcal{I}\mathcal{N}_3$
$\mathcal{M}$	0,996	0,981	0,981	0,984	0,985	0,99	0,975	0,985	0,978	0,978
$\mathcal{M}\mathcal{A}$	0,925	0,964	0,964	0,967	0,964	0,951	0,964	0,97	0,967	0,967
$\mathcal{M}\mathcal{G}$	0,925	0,958	0,958	0,958	0,958	0,951	0,949	0,958	0,952	0,952
$\mathcal{M}_{1/7}$	0,963	0,984	0,985	0,985	0,985	0,984	0,989	0,985	0,991	0,991
$\mathcal{M}_{1/6}$	0,97	0,982	0,982	0,982	0,982	0,982	0,984	0,982	0,985	0,985
$\mathcal{M}_{1/5}$	0,979	0,978	0,978	0,972	0,978	0,978	0,977	0,975	0,975	0,975
$\mathcal{M}_{2/9}$	0,986	0,975	0,975	0,966	0,975	0,976	0,972	0,969	0,969	0,969
$\mathcal{M}_{1/4}$	0,983	0,967	0,967	0,958	0,967	0,973	0,966	0,961	0,961	0,961
$\mathcal{M}_{2/7}$	0,979	0,957	0,957	0,947	0,957	0,969	0,957	0,951	0,951	0,951
$\mathcal{M}_{1/3}$	0,974	0,944	0,944	0,934	0,944	0,957	0,944	0,937	0,937	0,937

120 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

	$\mathcal{I}\mathcal{M}e$	$\mathcal{I}\mathcal{B}e_1$	$\mathcal{I}\mathcal{B}e_2$	$\mathcal{I}\mathcal{B}e_3$	$\mathcal{I}\mathcal{W}_{III}$	$\mathcal{I}\mathcal{W}_{IV}$	$\mathcal{I}\mathcal{W}_V$	$\mathcal{I}\mathcal{N}_1$	$\mathcal{I}\mathcal{N}_2$	$\mathcal{I}\mathcal{N}_3$
$\mathcal{I}\mathcal{M}e$	1	0,961	0,961	0,951	0,961	0,974	0,961	0,954	0,954	0,954
$\mathcal{I}\mathcal{B}e_1$	0,961	1	0,987	0,99	0,993	0,987	0,974	0,987	0,987	0,987
$\mathcal{I}\mathcal{B}e_2$	0,961	0,987	1	0,99	0,987	0,987	0,984	0,993	0,99	0,99
$\mathcal{I}\mathcal{B}e_3$	0,951	0,99	0,99	1	0,99	0,977	0,98	0,993	0,993	0,993
$\mathcal{I}\mathcal{W}_{III}$	0,961	0,993	0,987	0,99	1	0,987	0,98	0,99	0,987	0,987
$\mathcal{I}\mathcal{W}_{IV}$	0,974	0,987	0,987	0,977	0,987	1	0,977	0,98	0,977	0,977
$\mathcal{I}\mathcal{W}_V$	0,961	0,974	0,984	0,98	0,98	0,977	1	0,987	0,987	0,987
$\mathcal{I}\mathcal{N}_1$	0,954	0,987	0,993	0,993	0,99	0,98	0,987	1	0,993	0,993
$\mathcal{I}\mathcal{N}_2$	0,954	0,987	0,99	0,993	0,987	0,977	0,987	0,993	1	0,997
$\mathcal{I}\mathcal{N}_3$	0,954	0,987	0,99	0,993	0,987	0,977	0,987	0,993	0,997	1

	$\mathcal{I}\mathcal{M}e$	$\mathcal{I}\mathcal{B}e_1$	$\mathcal{I}\mathcal{B}e_2$	$\mathcal{I}\mathcal{B}e_3$	$\mathcal{I}\mathcal{W}_{III}$	$\mathcal{I}\mathcal{W}_{IV}$	$\mathcal{I}\mathcal{W}_V$	$\mathcal{I}\mathcal{N}_1$	$\mathcal{I}\mathcal{N}_2$	$\mathcal{I}\mathcal{N}_3$
$\mathcal{I}\mathcal{K}_{II}$	0,961	0,974	0,987	0,98	0,98	0,987	0,984	0,987	0,987	0,987
$\mathcal{I}\mathcal{K}_{III}$	0,961	0,99	0,99	0,984	0,993	0,987	0,982	0,99	0,987	0,987
$\mathcal{I}\mathcal{L}$	0,955	0,985	0,991	0,992	0,987	0,981	0,986	0,994	0,993	0,993
$\mathcal{I}\mathcal{M}a$	0,945	0,974	0,974	0,98	0,971	0,961	0,984	0,98	0,98	0,98
$\mathcal{I}\mathcal{B}a$	0,958	0,986	0,99	0,992	0,989	0,984	0,984	0,997	0,99	0,99
$\mathcal{I}\mathcal{Y}$	0,955	0,987	0,993	0,993	0,991	0,981	0,987	0,994	0,993	0,993
$\mathcal{I}\mathcal{V}\mathcal{Y}$	0,961	0,987	0,987	0,99	0,99	0,987	0,98	0,993	0,987	0,987
$\mathcal{I}\mathcal{B}\mathcal{K}t$	0,961	0,987	0,987	0,987	0,99	0,987	0,98	0,99	0,984	0,984
$\mathcal{I}\mathcal{B}\mathcal{K}r$	0,961	0,99	0,987	0,988	0,994	0,987	0,98	0,993	0,987	0,987
$\mathcal{I}\mathcal{B}\mathcal{B}$	0,961	0,987	0,993	0,99	0,99	0,987	0,987	0,993	0,99	0,99
$\mathcal{I}\mathcal{B}\mathcal{L}$	0,951	0,987	0,987	0,993	0,987	0,974	0,987	0,993	0,997	0,993

	$\mathcal{IMe}$	$\mathcal{IBe}_1$	$\mathcal{IBe}_2$	$\mathcal{IBe}_3$	$\mathcal{IW}_{III}$	$\mathcal{IW}_{IV}$	$\mathcal{IW}_V$	$\mathcal{IN}_1$	$\mathcal{IN}_2$	$\mathcal{IN}_3$
$\mathcal{E}_{12}$	0,948	0,98	0,984	0,987	0,98	0,971	0,987	0,987	0,99	0,99
$\mathcal{E}_{19}$	0,904	0,917	0,917	0,919	0,914	0,906	0,921	0,917	0,912	0,916
$\mathcal{E}_{24}$	0,91	0,917	0,917	0,917	0,917	0,91	0,91	0,917	0,917	0,917
$\mathcal{E}_{31}$	0,926	0,918	0,918	0,92	0,922	0,927	0,918	0,922	0,924	0,921
$\mathcal{E}_{43}$	0,904	0,913	0,914	0,913	0,911	0,906	0,916	0,913	0,913	0,914
$\mathcal{E}_{53}$	0,904	0,924	0,924	0,915	0,924	0,911	0,915	0,918	0,918	0,918

	$\mathcal{IMe}$	$\mathcal{IBe}_1$	$\mathcal{IBe}_2$	$\mathcal{IBe}_3$	$\mathcal{IW}_{III}$	$\mathcal{IW}_{IV}$	$\mathcal{IW}_V$	$\mathcal{IN}_1$	$\mathcal{IN}_2$	$\mathcal{IN}_3$
$\mathcal{SPa}$	0,911	0,912	0,912	0,911	0,911	0,911	0,911	0,911	0,916	0,916
$\mathcal{SL}$	0,946	0,964	0,964	0,964	0,964	0,964	0,974	0,964	0,971	0,967
$\mathcal{SE}$	0,98	0,961	0,961	0,951	0,961	0,974	0,961	0,955	0,955	0,955
$\mathcal{SCa}$	0,92	0,919	0,919	0,929	0,92	0,917	0,919	0,926	0,925	0,925
$\mathcal{SCaH}$	0,92	0,919	0,919	0,929	0,92	0,917	0,919	0,926	0,925	0,925
$\mathcal{SHL}$	0,925	0,928	0,928	0,935	0,925	0,928	0,945	0,935	0,935	0,935
$\mathcal{SPe}$	0,925	0,932	0,932	0,928	0,928	0,932	0,919	0,925	0,925	0,925
$\mathcal{SCh}$	0,925	0,932	0,932	0,928	0,928	0,932	0,919	0,925	0,925	0,925
$\mathcal{SHM}$	0,905	0,915	0,915	0,925	0,915	0,908	0,925	0,922	0,925	0,925
$\mathcal{SW}_{VI}$	0,96	0,989	0,984	0,99	0,989	0,982	0,971	0,984	0,984	0,984

	$\mathcal{IMe}$	$\mathcal{IBe}_1$	$\mathcal{IBe}_2$	$\mathcal{IBe}_3$	$\mathcal{IW}_{III}$	$\mathcal{IW}_{IV}$	$\mathcal{IW}_V$	$\mathcal{IN}_1$	$\mathcal{IN}_2$	$\mathcal{IN}_3$
$\mathcal{C}_\alpha$	0,902	0,913	0,913	0,916	0,913	0,906	0,912	0,919	0,915	0,916
$\mathcal{C}_{\alpha'}$	0,902	0,912	0,912	0,912	0,912	0,906	0,911	0,912	0,914	0,914
$\mathcal{C}_\beta$	0,903	0,914	0,914	0,915	0,914	0,907	0,915	0,915	0,912	0,915
$\mathcal{C}_{\beta'}$	0,904	0,912	0,912	0,915	0,911	0,909	0,911	0,913	0,913	0,915
$\mathcal{C}_\gamma$	0,901	0,913	0,915	0,912	0,912	0,905	0,911	0,912	0,913	0,915
$\mathcal{BP}$	0,901	0,915	0,92	0,92	0,915	0,915	0,93	0,922	0,923	0,923
$\mathcal{BPE}$	0,901	0,915	0,92	0,92	0,915	0,915	0,93	0,922	0,923	0,923
$\mathcal{BJ}$	0,905	0,915	0,928	0,925	0,915	0,915	0,935	0,922	0,928	0,928
$\mathcal{BJE}$	0,902	0,915	0,916	0,922	0,912	0,915	0,928	0,922	0,922	0,922
$\mathcal{BE}$	0,901	0,914	0,917	0,916	0,911	0,907	0,914	0,913	0,917	0,917

122 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

	$\mathcal{IK}_{II}$	$\mathcal{IK}_{III}$	$\mathcal{IL}$	$\mathcal{IMa}$	$\mathcal{IBa}$	$\mathcal{IY}$	$\mathcal{IVY}$	$\mathcal{IBKt}$	$\mathcal{IBKr}$	$\mathcal{IBB}$	$\mathcal{IBL}$
$\mathcal{P}$	0,964	0,964	0,972	0,987	0,97	0,97	0,967	0,961	0,969	0,967	0,974
$\mathcal{PE}$	0,961	0,961	0,966	0,974	0,964	0,967	0,961	0,961	0,961	0,961	0,971
$\mathcal{J}$	0,982	0,982	0,981	0,964	0,982	0,984	0,984	0,987	0,984	0,984	0,984
$\mathcal{JR}a$	0,964	0,982	0,975	0,964	0,976	0,978	0,977	0,977	0,98	0,977	0,977
$\mathcal{J}e\mathcal{r}$	0,985	0,976	0,986	0,974	0,985	0,983	0,984	0,98	0,98	0,984	0,984
$\mathcal{JER}$	0,982	0,973	0,983	0,977	0,982	0,98	0,98	0,977	0,977	0,98	0,98
$\mathcal{JF}_1$	0,964	0,964	0,962	0,941	0,964	0,961	0,964	0,964	0,964	0,961	0,954
$\mathcal{JF}_2$	0,964	0,964	0,962	0,941	0,964	0,961	0,964	0,964	0,964	0,961	0,954

	$\mathcal{IK}_{II}$	$\mathcal{IK}_{III}$	$\mathcal{IL}$	$\mathcal{IMa}$	$\mathcal{IBa}$	$\mathcal{IY}$	$\mathcal{IVY}$	$\mathcal{IBKt}$	$\mathcal{IBKr}$	$\mathcal{IBB}$	$\mathcal{IBL}$
$\mathcal{JA}$	0,964	0,964	0,972	0,977	0,97	0,97	0,967	0,961	0,969	0,967	0,974
$\mathcal{JDC}$	0,964	0,964	0,962	0,941	0,964	0,961	0,967	0,967	0,967	0,961	0,954
$\mathcal{JK}e_1$	0,964	0,964	0,97	0,977	0,964	0,97	0,964	0,964	0,964	0,964	0,967
$\mathcal{JK}e_2$	0,964	0,964	0,97	0,977	0,964	0,97	0,964	0,964	0,964	0,964	0,967
$\mathcal{JM}E_1$	0,964	0,964	0,97	0,964	0,964	0,97	0,964	0,964	0,964	0,964	0,971
$\mathcal{JM}E_2$	0,964	0,964	0,962	0,941	0,964	0,961	0,967	0,967	0,967	0,961	0,954
$\mathcal{JM}L_1$	0,964	0,964	0,97	0,964	0,964	0,97	0,964	0,964	0,964	0,964	0,967
$\mathcal{JM}L_2$	0,964	0,964	0,97	0,964	0,964	0,97	0,964	0,964	0,964	0,964	0,967
$\mathcal{JM}ar_1$	0,964	0,964	0,962	0,941	0,964	0,961	0,964	0,964	0,964	0,964	0,954

	$\mathcal{IK}_{II}$	$\mathcal{IK}_{III}$	$\mathcal{IL}$	$\mathcal{IMa}$	$\mathcal{IBa}$	$\mathcal{IY}$	$\mathcal{IVY}$	$\mathcal{IBKt}$	$\mathcal{IBKr}$	$\mathcal{IBB}$	$\mathcal{IBL}$
$\mathcal{JM}ar_3$	0,964	0,964	0,962	0,941	0,964	0,961	0,964	0,964	0,964	0,964	0,954
$\mathcal{JM}ar_4$	0,964	0,964	0,962	0,941	0,964	0,961	0,964	0,964	0,964	0,961	0,954
$\mathcal{JM}al$	0,964	0,964	0,97	0,964	0,964	0,97	0,964	0,964	0,964	0,964	0,971
$\mathcal{JE}u$	0,967	0,967	0,962	0,941	0,964	0,961	0,967	0,967	0,967	0,967	0,954
$\mathcal{JM}o$	0,964	0,964	0,97	0,964	0,964	0,97	0,964	0,964	0,964	0,964	0,971
$\mathcal{JR}om$	0,964	0,964	0,962	0,941	0,964	0,961	0,964	0,964	0,964	0,964	0,954
$\mathcal{JK}i$	0,982	0,982	0,981	0,964	0,982	0,984	0,984	0,987	0,984	0,984	0,984
$\mathcal{JR}ou$	0,964	0,964	0,962	0,941	0,964	0,961	0,964	0,964	0,964	0,961	0,954
$\mathcal{JS}$	0,964	0,964	0,966	0,964	0,964	0,967	0,961	0,961	0,961	0,964	0,967

	$\mathcal{IK}_{II}$	$\mathcal{IK}_{III}$	$\mathcal{IL}$	$\mathcal{IMa}$	$\mathcal{IBa}$	$\mathcal{IY}$	$\mathcal{IVY}$	$\mathcal{IBKt}$	$\mathcal{IBKr}$	$\mathcal{IBB}$	$\mathcal{IBL}$
$\mathcal{M}$	0,982	0,991	0,983	0,968	0,985	0,985	0,988	0,991	0,986	0,988	0,981
$\mathcal{MA}$	0,964	0,964	0,97	0,95	0,967	0,97	0,964	0,964	0,964	0,964	0,963
$\mathcal{MG}$	0,958	0,958	0,953	0,945	0,958	0,952	0,958	0,958	0,958	0,958	0,952
$\mathcal{M}_{1/7}$	0,985	0,985	0,99	0,977	0,985	0,991	0,985	0,985	0,985	0,985	0,988
$\mathcal{M}_{1/6}$	0,982	0,982	0,986	0,971	0,982	0,985	0,982	0,982	0,982	0,982	0,982
$\mathcal{M}_{1/5}$	0,978	0,978	0,976	0,963	0,978	0,976	0,978	0,978	0,978	0,978	0,972
$\mathcal{M}_{2/9}$	0,975	0,975	0,97	0,957	0,972	0,969	0,975	0,975	0,975	0,975	0,966
$\mathcal{M}_{1/4}$	0,967	0,967	0,962	0,95	0,964	0,961	0,967	0,967	0,967	0,967	0,958
$\mathcal{M}_{2/7}$	0,957	0,957	0,952	0,941	0,954	0,951	0,957	0,957	0,957	0,957	0,947
$\mathcal{M}_{1/3}$	0,944	0,944	0,938	0,929	0,94	0,937	0,944	0,944	0,944	0,944	0,934

	$\mathcal{IK}_{II}$	$\mathcal{IK}_{III}$	$\mathcal{IL}$	$\mathcal{IMa}$	$\mathcal{IBa}$	$\mathcal{IY}$	$\mathcal{IVY}$	$\mathcal{IBKt}$	$\mathcal{IBKr}$	$\mathcal{IBB}$	$\mathcal{IBL}$
$\mathcal{IMe}$	0,961	0,961	0,955	0,945	0,958	0,955	0,961	0,961	0,961	0,961	0,951
$\mathcal{IBe}_1$	0,974	0,99	0,985	0,974	0,986	0,987	0,987	0,987	0,99	0,987	0,987
$\mathcal{IBe}_2$	0,987	0,99	0,991	0,974	0,99	0,993	0,987	0,987	0,987	0,993	0,987
$\mathcal{IBe}_3$	0,98	0,984	0,992	0,98	0,992	0,993	0,99	0,987	0,988	0,99	0,993
$\mathcal{IW}_{III}$	0,98	0,993	0,987	0,971	0,989	0,991	0,99	0,99	0,994	0,99	0,987
$\mathcal{IW}_{IV}$	0,987	0,987	0,981	0,961	0,984	0,981	0,987	0,987	0,987	0,987	0,974
$\mathcal{IW}_V$	0,984	0,982	0,986	0,984	0,984	0,987	0,98	0,98	0,98	0,987	0,987
$\mathcal{IN}_1$	0,987	0,99	0,994	0,98	0,997	0,994	0,993	0,99	0,993	0,993	0,993
$\mathcal{IN}_2$	0,987	0,987	0,993	0,98	0,99	0,993	0,987	0,984	0,987	0,99	0,997
$\mathcal{IN}_3$	0,987	0,987	0,993	0,98	0,99	0,993	0,987	0,984	0,987	0,99	0,993

124 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

	$\mathcal{IK}_{II}$	$\mathcal{IK}_{III}$	$\mathcal{IL}$	$\mathcal{IMa}$	$\mathcal{IBa}$	$\mathcal{IY}$	$\mathcal{IVY}$	$\mathcal{IBKt}$	$\mathcal{IBKr}$	$\mathcal{IBB}$	$\mathcal{IBL}$
$\mathcal{IK}_{II}$	1	0,982	0,986	0,974	0,988	0,987	0,987	0,987	0,984	0,987	0,987
$\mathcal{IK}_{III}$	0,982	1	0,986	0,973	0,988	0,991	0,99	0,994	0,995	0,99	0,987
$\mathcal{IL}$	0,986	0,986	1	0,98	0,994	0,995	0,994	0,989	0,991	0,994	0,993
$\mathcal{IMa}$	0,974	0,973	0,98	1	0,977	0,98	0,974	0,974	0,974	0,974	0,98
$\mathcal{IBa}$	0,988	0,988	0,994	0,977	1	0,994	0,997	0,991	0,993	0,997	0,99
$\mathcal{IY}$	0,987	0,991	0,995	0,98	0,994	1	0,994	0,991	0,994	0,994	0,993
$\mathcal{IVY}$	0,987	0,99	0,994	0,974	0,997	0,994	1	0,993	0,995	0,993	0,987
$\mathcal{IBKt}$	0,987	0,994	0,989	0,974	0,991	0,991	0,993	1	0,992	0,993	0,987
$\mathcal{IBKr}$	0,984	0,995	0,991	0,974	0,993	0,994	0,995	0,992	1	0,993	0,987
$\mathcal{IBB}$	0,987	0,99	0,994	0,974	0,997	0,994	0,993	0,993	0,993	1	0,987
$\mathcal{IBL}$	0,987	0,987	0,993	0,98	0,99	0,993	0,987	0,987	0,987	0,987	1

	$\mathcal{IK}_{II}$	$\mathcal{IK}_{III}$	$\mathcal{IL}$	$\mathcal{IMa}$	$\mathcal{IBa}$	$\mathcal{IY}$	$\mathcal{IVY}$	$\mathcal{IBKt}$	$\mathcal{IBKr}$	$\mathcal{IBB}$	$\mathcal{IBL}$
$\mathcal{E}_{12}$	0,977	0,977	0,986	0,99	0,984	0,986	0,98	0,977	0,98	0,984	0,987
$\mathcal{E}_{19}$	0,907	0,907	0,914	0,919	0,919	0,913	0,917	0,91	0,912	0,917	0,916
$\mathcal{E}_{24}$	0,91	0,917	0,914	0,917	0,917	0,917	0,917	0,917	0,917	0,917	0,913
$\mathcal{E}_{31}$	0,918	0,927	0,923	0,914	0,922	0,924	0,925	0,927	0,924	0,925	0,921
$\mathcal{E}_{43}$	0,907	0,907	0,913	0,917	0,913	0,911	0,91	0,907	0,911	0,91	0,909
$\mathcal{E}_{53}$	0,924	0,924	0,919	0,912	0,922	0,919	0,924	0,924	0,924	0,924	0,918

	$\mathcal{IK}_{II}$	$\mathcal{IK}_{III}$	$\mathcal{IL}$	$\mathcal{IMa}$	$\mathcal{IBa}$	$\mathcal{IY}$	$\mathcal{IVY}$	$\mathcal{IBKt}$	$\mathcal{IBKr}$	$\mathcal{IBB}$	$\mathcal{IBL}$
$\mathcal{SPa}$	0,911	0,911	0,911	0,912	0,911	0,911	0,911	0,911	0,911	0,911	0,912
$\mathcal{SL}$	0,964	0,964	0,97	0,977	0,964	0,97	0,964	0,964	0,964	0,964	0,967
$\mathcal{SE}$	0,961	0,961	0,955	0,948	0,958	0,955	0,961	0,961	0,961	0,961	0,951
$\mathcal{SCa}$	0,919	0,919	0,925	0,924	0,923	0,926	0,919	0,919	0,919	0,919	0,925
$\mathcal{SCaH}$	0,919	0,919	0,925	0,924	0,923	0,926	0,919	0,919	0,919	0,919	0,925
$\mathcal{SHL}$	0,937	0,928	0,938	0,942	0,937	0,934	0,935	0,932	0,931	0,935	0,935
$\mathcal{SPe}$	0,919	0,928	0,924	0,919	0,925	0,925	0,925	0,922	0,927	0,925	0,925
$\mathcal{SCh}$	0,919	0,928	0,924	0,919	0,925	0,925	0,925	0,922	0,927	0,925	0,925
$\mathcal{SHM}$	0,915	0,915	0,921	0,928	0,919	0,922	0,915	0,915	0,915	0,915	0,928
$\mathcal{SW}_{VI}$	0,971	0,985	0,982	0,971	0,983	0,984	0,984	0,982	0,986	0,984	0,984

	$\mathcal{IK}_{II}$	$\mathcal{IK}_{III}$	$\mathcal{IL}$	$\mathcal{IMa}$	$\mathcal{IBa}$	$\mathcal{IY}$	$\mathcal{IVY}$	$\mathcal{IBKt}$	$\mathcal{IBKr}$	$\mathcal{IBB}$	$\mathcal{IBL}$
$\mathcal{C}_\alpha$	0,913	0,915	0,916	0,914	0,916	0,916	0,913	0,912	0,913	0,913	0,915
$\mathcal{C}_{\alpha'}$	0,906	0,907	0,912	0,912	0,912	0,91	0,91	0,907	0,911	0,91	0,911
$\mathcal{C}_\beta$	0,915	0,914	0,913	0,914	0,915	0,912	0,915	0,914	0,914	0,915	0,909
$\mathcal{C}_{\beta'}$	0,906	0,912	0,911	0,914	0,91	0,913	0,91	0,907	0,91	0,913	0,91
$\mathcal{C}_\gamma$	0,905	0,908	0,911	0,915	0,911	0,912	0,909	0,905	0,91	0,909	0,91
$\mathcal{BP}$	0,919	0,919	0,921	0,93	0,919	0,922	0,915	0,915	0,915	0,922	0,923
$\mathcal{BPE}$	0,919	0,919	0,921	0,93	0,919	0,922	0,915	0,915	0,915	0,922	0,923
$\mathcal{BJ}$	0,919	0,919	0,921	0,928	0,919	0,922	0,915	0,915	0,915	0,922	0,928
$\mathcal{BJE}$	0,919	0,915	0,921	0,928	0,919	0,922	0,915	0,915	0,915	0,922	0,922
$\mathcal{BE}$	0,907	0,91	0,912	0,917	0,91	0,913	0,909	0,907	0,909	0,913	0,92

126 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

	$\mathcal{E}_{12}$	$\mathcal{E}_{19}$	$\mathcal{E}_{24}$	$\mathcal{E}_{31}$	$\mathcal{E}_{43}$	$\mathcal{E}_{53}$
$\mathcal{P}$	0,984	0,952	0,984	0,97	0,979	0,999
$\mathcal{P}\mathcal{E}$	0,974	0,952	0,974	0,97	0,979	0,999
$\mathcal{J}$	0,974	0,976	0,974	0,983	0,986	0,998
$\mathcal{J}\mathcal{R}a$	0,971	0,952	0,971	0,97	0,978	0,997
$\mathcal{J}\mathcal{E}r$	0,977	0,952	0,977	0,97	0,979	0,997
$\mathcal{J}\mathcal{E}\mathcal{R}$	0,977	0,952	0,977	0,969	0,979	0,997
$\mathcal{J}\mathcal{F}_1$	0,948	0,975	0,962	0,98	0,978	0,995
$\mathcal{J}\mathcal{F}_2$	0,948	0,975	0,962	0,98	0,978	0,995

	$\mathcal{E}_{12}$	$\mathcal{E}_{19}$	$\mathcal{E}_{24}$	$\mathcal{E}_{31}$	$\mathcal{E}_{43}$	$\mathcal{E}_{53}$
$\mathcal{J}\mathcal{A}$	0,984	0,952	0,984	0,969	0,979	0,997
$\mathcal{J}\mathcal{D}\mathcal{C}$	0,948	0,963	0,959	0,98	0,978	0,995
$\mathcal{J}\mathcal{K}e_1$	0,971	0,952	0,971	0,969	0,978	0,997
$\mathcal{J}\mathcal{K}e_2$	0,971	0,952	0,971	0,974	0,978	0,997
$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{E}_1$	0,971	0,964	0,971	0,981	0,978	0,997
$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{E}_2$	0,948	0,963	0,959	0,98	0,978	0,995
$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{L}_1$	0,971	0,964	0,971	0,981	0,978	0,997
$\mathcal{J}\mathcal{M}\mathcal{L}_2$	0,971	0,964	0,971	0,981	0,978	0,997
$\mathcal{J}\mathcal{M}ar_1$	0,951	0,964	0,962	0,981	0,978	0,995

	$\mathcal{E}_{12}$	$\mathcal{E}_{19}$	$\mathcal{E}_{24}$	$\mathcal{E}_{31}$	$\mathcal{E}_{43}$	$\mathcal{E}_{53}$
$\mathcal{J}\mathcal{M}ar_3$	0,951	0,964	0,962	0,974	0,978	0,995
$\mathcal{J}\mathcal{M}ar_4$	0,948	0,975	0,962	0,98	0,978	0,995
$\mathcal{J}\mathcal{M}al$	0,974	0,964	0,974	0,983	0,986	0,997
$\mathcal{J}\mathcal{E}u$	0,951	0,951	0,959	0,983	0,978	0,995
$\mathcal{J}\mathcal{M}o$	0,974	0,952	0,974	0,969	0,979	0,997
$\mathcal{J}\mathcal{R}om$	0,951	0,964	0,962	0,983	0,978	0,995
$\mathcal{J}\mathcal{K}i$	0,974	0,952	0,974	0,97	0,979	0,997
$\mathcal{J}\mathcal{R}ou$	0,948	0,976	0,966	0,98	0,978	0,995
$\mathcal{J}\mathcal{S}$	0,967	0,952	0,967	0,97	0,978	0,997

	$\mathcal{E}_{12}$	$\mathcal{E}_{19}$	$\mathcal{E}_{24}$	$\mathcal{E}_{31}$	$\mathcal{E}_{43}$	$\mathcal{E}_{53}$
$\mathcal{M}$	0,971	0,985	0,971	0,998	0,991	0,982
$\mathcal{MA}$	0,96	0,979	0,96	0,998	0,987	0,982
$\mathcal{MG}$	0,949	0,972	0,96	0,997	0,984	0,982
$\mathcal{M}_{1/7}$	0,985	0,95	0,985	0,972	0,984	0,982
$\mathcal{M}_{1/6}$	0,978	0,952	0,978	0,979	0,991	0,982
$\mathcal{M}_{1/5}$	0,969	0,961	0,969	0,988	1	0,981
$\mathcal{M}_{2/9}$	0,962	0,967	0,962	0,995	0,993	0,983
$\mathcal{M}_{1/4}$	0,954	0,975	0,96	0,997	0,985	0,982
$\mathcal{M}_{2/7}$	0,944	0,986	0,959	0,987	0,978	0,983
$\mathcal{M}_{1/3}$	0,93	0,999	0,96	0,973	0,978	0,981

	$\mathcal{E}_{12}$	$\mathcal{E}_{19}$	$\mathcal{E}_{24}$	$\mathcal{E}_{31}$	$\mathcal{E}_{43}$	$\mathcal{E}_{53}$
$\mathcal{IME}$	0,948	0,974	0,961	0,984	0,979	0,982
$\mathcal{IBe}_1$	0,98	0,952	0,98	0,97	0,979	0,987
$\mathcal{IBe}_2$	0,984	0,952	0,984	0,97	0,979	0,987
$\mathcal{IBe}_3$	0,987	0,95	0,987	0,969	0,979	0,981
$\mathcal{IW}_{III}$	0,98	0,952	0,98	0,97	0,979	0,982
$\mathcal{IW}_{IV}$	0,971	0,956	0,971	0,974	0,979	0,986
$\mathcal{IW}_V$	0,987	0,947	0,987	0,968	0,977	0,981
$\mathcal{IN}_1$	0,987	0,948	0,987	0,972	0,978	0,981
$\mathcal{IN}_2$	0,99	0,95	0,99	0,969	0,978	0,981
$\mathcal{IN}_3$	0,99	0,95	0,99	0,969	0,978	0,981

128 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

	$\mathcal{E}_{12}$	$\mathcal{E}_{19}$	$\mathcal{E}_{24}$	$\mathcal{E}_{31}$	$\mathcal{E}_{43}$	$\mathcal{E}_{53}$
$\mathcal{IK}_{II}$	0,977	0,952	0,977	0,97	0,979	0,982
$\mathcal{IK}_{III}$	0,977	0,952	0,977	0,97	0,979	0,982
$\mathcal{IL}$	0,986	0,949	0,986	0,971	0,977	0,984
$\mathcal{IMa}$	0,99	0,953	0,99	0,97	0,977	0,987
$\mathcal{IBa}$	0,984	0,952	0,984	0,969	0,979	0,982
$\mathcal{IY}$	0,986	0,949	0,986	0,972	0,978	0,982
$\mathcal{IVY}$	0,98	0,952	0,98	0,97	0,979	0,981
$\mathcal{IBKt}$	0,977	0,952	0,977	0,97	0,979	0,985
$\mathcal{IBKr}$	0,98	0,952	0,98	0,97	0,979	0,985
$\mathcal{IBB}$	0,984	0,952	0,984	0,97	0,979	0,981
$\mathcal{IBL}$	0,987	0,953	0,987	0,97	0,977	0,981

	$\mathcal{E}_{12}$	$\mathcal{E}_{19}$	$\mathcal{E}_{24}$	$\mathcal{E}_{31}$	$\mathcal{E}_{43}$	$\mathcal{E}_{53}$
$\mathcal{E}_{12}$	1	0,947	1	0,968	0,977	0,981
$\mathcal{E}_{19}$	0,921	1	0,961	0,969	0,978	0,982
$\mathcal{E}_{24}$	0,917	0,947	1	0,968	0,977	0,981
$\mathcal{E}_{31}$	0,919	0,949	0,96	1	0,977	0,982
$\mathcal{E}_{43}$	0,919	0,949	0,959	0,968	1	0,982
$\mathcal{E}_{53}$	0,918	0,948	0,959	0,968	0,977	1

	$\mathcal{E}_{12}$	$\mathcal{E}_{19}$	$\mathcal{E}_{24}$	$\mathcal{E}_{31}$	$\mathcal{E}_{43}$	$\mathcal{E}_{53}$
$\mathcal{SPa}$	0,918	0,947	0,964	0,971	0,978	0,983
$\mathcal{SL}$	0,971	0,949	0,971	0,971	0,978	0,984
$\mathcal{SE}$	0,948	0,97	0,969	0,979	0,978	0,991
$\mathcal{SCa}$	0,919	0,964	0,969	0,981	0,986	0,986
$\mathcal{SCaH}$	0,919	0,952	0,965	0,974	0,979	0,986
$\mathcal{SHL}$	0,945	0,952	0,969	0,973	0,978	0,986
$\mathcal{SPe}$	0,922	0,952	0,962	0,98	0,978	0,99
$\mathcal{SCh}$	0,922	0,952	0,962	0,98	0,978	0,99
$\mathcal{SHM}$	0,932	0,952	0,961	0,968	0,979	0,989
$\mathcal{SW}_{VI}$	0,977	0,953	0,977	0,969	0,981	0,983

	$\mathcal{E}_{12}$	$\mathcal{E}_{19}$	$\mathcal{E}_{24}$	$\mathcal{E}_{31}$	$\mathcal{E}_{43}$	$\mathcal{E}_{53}$
$\mathcal{C}_\alpha$	0,918	0,948	0,959	0,968	0,977	0,981
$\mathcal{C}_{\alpha'}$	0,918	0,948	0,959	0,968	0,977	0,981
$\mathcal{C}_\beta$	0,918	0,948	0,959	0,968	0,977	0,981
$\mathcal{C}_{\beta'}$	0,917	0,948	0,959	0,968	0,977	0,981
$\mathcal{C}_\gamma$	0,917	0,95	0,959	0,968	0,977	0,981
$\mathcal{BP}$	0,926	0,953	0,959	0,968	0,977	0,983
$\mathcal{BPE}$	0,926	0,953	0,959	0,968	0,977	0,983
$\mathcal{BJ}$	0,935	0,952	0,961	0,968	0,977	0,987
$\mathcal{BJE}$	0,932	0,952	0,961	0,968	0,977	0,983
$\mathcal{BE}$	0,917	0,948	0,959	0,968	0,977	0,982

	$\mathcal{SPa}$	$\mathcal{SL}$	$\mathcal{SE}$	$\mathcal{SCa}$	$\mathcal{SCaH}$	$\mathcal{SHL}$	$\mathcal{SPe}$	$\mathcal{SCh}$	$\mathcal{SHM}$	$\mathcal{SW}_{VI}$
$\mathcal{P}$	0,984	0,978	0,843	0,964	0,955	0,964	0,964	0,951	1	0,971
$\mathcal{PE}$	0,984	0,964	0,843	0,899	0,899	0,964	0,951	0,951	0,997	0,962
$\mathcal{J}$	1	0,964	0,807	1	0,955	0,964	1	0,987	1	0,971
$\mathcal{JR}a$	0,984	0,964	0,807	0,919	0,919	0,964	0,964	0,964	0,964	0,985
$\mathcal{JE}r$	0,984	0,964	0,84	0,919	0,919	0,964	0,964	0,964	0,997	0,974
$\mathcal{JER}$	0,981	0,964	0,843	0,923	0,923	0,964	0,964	0,964	0,997	0,971
$\mathcal{JF}_1$	0,977	0,934	0,807	0,887	0,887	0,932	0,964	0,964	0,964	0,956
$\mathcal{JF}_2$	0,977	0,934	0,807	0,887	0,887	0,932	0,977	0,977	0,964	0,956

	$\mathcal{SPa}$	$\mathcal{SL}$	$\mathcal{SE}$	$\mathcal{SCa}$	$\mathcal{SCaH}$	$\mathcal{SHL}$	$\mathcal{SPe}$	$\mathcal{SCh}$	$\mathcal{SHM}$	$\mathcal{SW}_{VI}$
$\mathcal{JA}$	0,981	0,964	0,843	0,923	0,923	0,964	0,964	0,951	0,997	0,971
$\mathcal{JDC}$	0,977	0,932	0,807	0,887	0,887	0,932	0,964	0,964	0,964	0,956
$\mathcal{JK}e_1$	0,981	0,97	0,843	0,919	0,919	0,964	0,964	0,964	0,964	0,971
$\mathcal{JK}e_2$	0,987	0,97	0,843	0,919	0,919	0,964	0,964	0,964	0,964	0,965
$\mathcal{JM}E_1$	0,987	0,964	0,807	0,903	0,903	0,964	0,955	0,955	0,964	0,965
$\mathcal{JM}E_2$	0,977	0,932	0,807	0,887	0,887	0,932	0,964	0,964	0,987	0,956
$\mathcal{JM}L_1$	0,987	0,964	0,807	0,903	0,903	0,989	0,955	0,955	0,964	0,965
$\mathcal{JM}L_2$	0,987	0,964	0,807	0,903	0,903	0,964	0,955	0,955	0,964	0,965
$\mathcal{JM}ar_1$	0,977	0,953	0,807	0,887	0,887	0,932	0,977	0,977	0,964	0,967

130 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

	$\mathcal{SP}_a$	$\mathcal{SL}$	$\mathcal{SE}$	$\mathcal{SC}_a$	$\mathcal{SCaH}$	$\mathcal{SHL}$	$\mathcal{SP}_e$	$\mathcal{SC}_h$	$\mathcal{SHM}$	$\mathcal{SW}_{VI}$
$\mathcal{J}Mar_3$	0,977	0,953	0,843	0,887	0,887	0,932	0,964	0,964	0,987	0,967
$\mathcal{J}Mar_4$	0,977	0,934	0,807	0,887	0,887	0,932	0,964	0,964	0,964	0,956
$\mathcal{J}Mal$	0,987	0,964	0,807	0,935	0,935	0,964	0,955	0,964	1	0,965
$\mathcal{J}Eu$	0,977	0,932	0,807	0,887	0,887	0,932	0,977	0,977	0,987	0,961
$\mathcal{J}Mo$	0,981	0,964	0,807	0,923	0,923	0,964	0,964	0,964	0,997	0,971
$\mathcal{J}Rom$	0,977	0,953	0,807	0,887	0,887	0,932	0,964	0,964	0,987	0,967
$\mathcal{J}Ki$	0,984	0,964	0,807	0,919	0,919	0,964	0,964	0,964	0,997	0,971
$\mathcal{J}Rou$	0,977	0,934	0,807	0,919	0,919	0,932	0,977	0,977	0,964	0,956
$\mathcal{J}S$	0,984	0,964	0,807	0,899	0,899	0,964	0,951	0,951	0,964	0,964

	$\mathcal{SP}_a$	$\mathcal{SL}$	$\mathcal{SE}$	$\mathcal{SC}_a$	$\mathcal{SCaH}$	$\mathcal{SHL}$	$\mathcal{SP}_e$	$\mathcal{SC}_h$	$\mathcal{SHM}$	$\mathcal{SW}_{VI}$
$\mathcal{M}$	0,982	0,961	0,816	0,982	0,946	0,982	0,982	0,982	0,982	0,976
$\mathcal{MA}$	0,982	0,952	0,816	0,937	0,937	0,941	0,982	0,982	0,978	0,965
$\mathcal{MG}$	0,982	0,923	0,816	0,887	0,887	0,932	0,977	0,977	0,978	0,952
$\mathcal{M}_{1/7}$	0,982	0,974	0,828	0,918	0,918	0,962	0,974	0,974	0,985	0,981
$\mathcal{M}_{1/6}$	0,982	0,97	0,825	0,911	0,911	0,955	0,976	0,976	0,982	0,983
$\mathcal{M}_{1/5}$	0,986	0,963	0,822	0,901	0,901	0,946	0,978	0,978	0,982	0,981
$\mathcal{M}_{2/9}$	0,984	0,958	0,819	0,895	0,895	0,94	0,98	0,98	0,979	0,975
$\mathcal{M}_{1/4}$	0,982	0,952	0,816	0,887	0,887	0,932	0,977	0,977	0,978	0,967
$\mathcal{M}_{2/7}$	0,977	0,943	0,812	0,892	0,892	0,921	0,967	0,967	0,977	0,956
$\mathcal{M}_{1/3}$	0,976	0,929	0,807	0,906	0,906	0,908	0,953	0,953	0,976	0,943

	$\mathcal{SP}_a$	$\mathcal{SL}$	$\mathcal{SE}$	$\mathcal{SC}_a$	$\mathcal{SCaH}$	$\mathcal{SHL}$	$\mathcal{SPe}$	$\mathcal{Sch}$	$\mathcal{SHM}$	$\mathcal{SW}_{VI}$
$\mathcal{IMe}$	0,98	0,946	0,814	0,889	0,889	0,925	0,97	0,97	0,977	0,96
$\mathcal{IBe}_1$	0,984	0,964	0,817	0,919	0,919	0,964	0,964	0,964	0,974	0,989
$\mathcal{IBe}_2$	0,977	0,964	0,817	0,919	0,919	0,964	0,964	0,964	0,987	0,984
$\mathcal{IBe}_3$	0,974	0,964	0,824	0,929	0,929	0,964	0,964	0,964	0,98	0,99
$\mathcal{IW}_{III}$	0,984	0,964	0,814	0,919	0,919	0,964	0,964	0,964	0,98	0,989
$\mathcal{IW}_{IV}$	0,987	0,964	0,817	0,906	0,906	0,951	0,964	0,964	0,984	0,982
$\mathcal{IW}_V$	0,971	0,974	0,833	0,919	0,919	0,964	0,971	0,971	0,984	0,971
$\mathcal{IN}_1$	0,977	0,964	0,824	0,926	0,926	0,964	0,964	0,964	0,984	0,984
$\mathcal{IN}_2$	0,977	0,971	0,824	0,925	0,925	0,971	0,971	0,971	0,984	0,984
$\mathcal{IN}_3$	0,977	0,967	0,824	0,925	0,925	0,967	0,967	0,967	0,984	0,984

	$\mathcal{SP}_a$	$\mathcal{SL}$	$\mathcal{SE}$	$\mathcal{SC}_a$	$\mathcal{SCaH}$	$\mathcal{SHL}$	$\mathcal{SPe}$	$\mathcal{Sch}$	$\mathcal{SHM}$	$\mathcal{SW}_{VI}$
$\mathcal{IK}_{II}$	0,982	0,964	0,825	0,919	0,919	0,964	0,964	0,964	0,982	0,971
$\mathcal{IK}_{III}$	0,982	0,964	0,816	0,919	0,919	0,964	0,964	0,964	0,982	0,985
$\mathcal{IL}$	0,978	0,97	0,826	0,925	0,925	0,97	0,97	0,97	0,983	0,982
$\mathcal{IM}_a$	0,977	0,977	0,83	0,912	0,912	0,964	0,964	0,964	0,987	0,971
$\mathcal{IB}_a$	0,981	0,964	0,825	0,923	0,923	0,964	0,964	0,964	0,982	0,983
$\mathcal{IY}$	0,978	0,97	0,823	0,926	0,926	0,97	0,97	0,97	0,984	0,984
$\mathcal{IVY}$	0,984	0,964	0,824	0,919	0,919	0,964	0,964	0,964	0,984	0,984
$\mathcal{IBK}t$	0,984	0,964	0,82	0,919	0,919	0,964	0,964	0,964	0,987	0,982
$\mathcal{IBK}r$	0,984	0,964	0,82	0,919	0,919	0,964	0,964	0,964	0,984	0,986
$\mathcal{IBB}$	0,984	0,964	0,824	0,919	0,919	0,964	0,964	0,964	0,984	0,984
$\mathcal{IBL}$	0,974	0,967	0,824	0,925	0,925	0,967	0,967	0,967	0,984	0,984

132 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

	$\mathcal{SP}_a$	$\mathcal{SL}$	$\mathcal{SE}$	$\mathcal{SC}_a$	$\mathcal{SCaH}$	$\mathcal{SHL}$	$\mathcal{SP}_e$	$\mathcal{SCh}$	$\mathcal{SHM}$	$\mathcal{SW}_{VI}$
$\mathcal{E}_{12}$	0,971	0,971	0,83	0,919	0,919	0,971	0,971	0,968	0,984	0,977
$\mathcal{E}_{19}$	0,976	0,919	0,808	0,883	0,883	0,907	0,94	0,94	0,976	0,912
$\mathcal{E}_{24}$	0,971	0,913	0,83	0,913	0,913	0,913	0,939	0,936	0,936	0,917
$\mathcal{E}_{31}$	0,976	0,915	0,817	0,887	0,887	0,927	0,932	0,928	0,928	0,922
$\mathcal{E}_{43}$	0,974	0,914	0,822	0,896	0,896	0,907	0,939	0,939	0,939	0,914
$\mathcal{E}_{53}$	0,97	0,924	0,81	0,887	0,887	0,924	0,932	0,924	0,924	0,918

	$\mathcal{SP}_a$	$\mathcal{SL}$	$\mathcal{SE}$	$\mathcal{SC}_a$	$\mathcal{SCaH}$	$\mathcal{SHL}$	$\mathcal{SP}_e$	$\mathcal{SCh}$	$\mathcal{SHM}$	$\mathcal{SW}_{VI}$
$\mathcal{SP}_a$	1	0,911	0,807	0,89	0,89	0,911	0,941	0,935	0,935	0,917
$\mathcal{SL}$	0,979	1	0,837	0,905	0,905	0,964	0,957	0,957	0,964	0,971
$\mathcal{SE}$	0,993	0,947	1	0,889	0,889	0,925	0,971	0,971	0,971	0,96
$\mathcal{SC}_a$	0,98	0,911	0,807	1	0,955	0,914	0,948	0,948	0,955	0,92
$\mathcal{SCaH}$	0,98	0,911	0,843	0,955	1	0,914	0,948	0,948	0,955	0,92
$\mathcal{SHL}$	0,976	0,919	0,807	0,914	0,914	1	0,941	0,941	0,964	0,925
$\mathcal{SP}_e$	0,99	0,919	0,807	0,91	0,91	0,919	1	0,928	0,955	0,926
$\mathcal{SCh}$	0,987	0,919	0,807	0,91	0,91	0,919	0,955	1	0,955	0,926
$\mathcal{SHM}$	0,984	0,919	0,807	0,895	0,895	0,919	0,941	0,941	1	0,924
$\mathcal{SW}_{VI}$	0,979	0,971	0,822	0,92	0,92	0,965	0,971	0,971	0,971	1

	$\mathcal{SP}_a$	$\mathcal{SL}$	$\mathcal{SE}$	$\mathcal{SC}_a$	$\mathcal{SCaH}$	$\mathcal{SHL}$	$\mathcal{SP}_e$	$\mathcal{SCh}$	$\mathcal{SHM}$	$\mathcal{SW}_{VI}$
$\mathcal{C}_\alpha$	0,972	0,914	0,814	0,879	0,879	0,915	0,932	0,925	0,926	0,915
$\mathcal{C}_{\alpha'}$	0,969	0,908	0,81	0,878	0,878	0,907	0,93	0,925	0,926	0,907
$\mathcal{C}_\beta$	0,971	0,914	0,813	0,876	0,876	0,914	0,936	0,928	0,931	0,907
$\mathcal{C}_{\beta'}$	0,968	0,907	0,814	0,879	0,879	0,916	0,93	0,93	0,931	0,914
$\mathcal{C}_\gamma$	0,969	0,908	0,808	0,877	0,877	0,908	0,93	0,927	0,927	0,912
$\mathcal{BP}$	0,97	0,93	0,831	0,885	0,885	0,919	0,93	0,93	0,93	0,922
$\mathcal{BPE}$	0,97	0,93	0,831	0,884	0,884	0,919	0,93	0,93	0,93	0,922
$\mathcal{BJ}$	0,971	0,928	0,807	0,887	0,887	0,919	0,941	0,941	0,964	0,925
$\mathcal{BJE}$	0,971	0,908	0,807	0,882	0,882	0,919	0,932	0,928	0,928	0,912
$\mathcal{BE}$	0,986	0,912	0,818	0,894	0,894	0,91	0,942	0,942	0,94	0,918

	$\mathcal{C}_\alpha$	$\mathcal{C}_{\alpha'}$	$\mathcal{C}_\beta$	$\mathcal{C}_{\beta'}$	$\mathcal{C}_\gamma$	$\mathcal{BP}$	$\mathcal{BPE}$	$\mathcal{BJ}$	$\mathcal{BJE}$	$\mathcal{BE}$
$\mathcal{P}$	0,941	0,97	0,956	0,947	0,975	0,685	0,776	0,709	0,823	0,899
$\mathcal{PE}$	0,94	0,968	0,955	0,947	0,972	0,646	0,776	0,67	0,823	0,896
$\mathcal{J}$	0,937	0,969	0,951	0,947	0,974	0,685	0,776	0,696	0,823	0,891
$\mathcal{JRa}$	0,937	0,968	0,951	0,947	0,974	0,682	0,776	0,696	0,823	0,891
$\mathcal{JEr}$	0,938	0,969	0,952	0,947	0,971	0,685	0,776	0,693	0,823	0,891
$\mathcal{JER}$	0,938	0,968	0,952	0,947	0,974	0,682	0,776	0,696	0,823	0,891
$\mathcal{JF}_1$	0,937	0,969	0,947	0,947	0,974	0,649	0,743	0,66	0,791	0,88
$\mathcal{JF}_2$	0,937	0,969	0,947	0,947	0,974	0,649	0,743	0,66	0,791	0,88

	$\mathcal{C}_\alpha$	$\mathcal{C}_{\alpha'}$	$\mathcal{C}_\beta$	$\mathcal{C}_{\beta'}$	$\mathcal{C}_\gamma$	$\mathcal{BP}$	$\mathcal{BPE}$	$\mathcal{BJ}$	$\mathcal{BJE}$	$\mathcal{BE}$
$\mathcal{JA}$	0,941	0,968	0,952	0,947	0,974	0,682	0,776	0,696	0,823	0,893
$\mathcal{JDC}$	0,937	0,969	0,947	0,947	0,974	0,685	0,743	0,66	0,791	0,88
$\mathcal{JK}e_1$	0,937	0,968	0,951	0,947	0,974	0,649	0,776	0,673	0,823	0,891
$\mathcal{JK}e_2$	0,937	0,968	0,951	0,947	0,974	0,649	0,776	0,673	0,823	0,891
$\mathcal{JME}_1$	0,937	0,968	0,951	0,947	0,974	0,649	0,776	0,673	0,823	0,891
$\mathcal{JME}_2$	0,937	0,969	0,947	0,947	0,974	0,685	0,743	0,66	0,791	0,88
$\mathcal{JML}_1$	0,937	0,968	0,951	0,947	0,974	0,649	0,776	0,673	0,823	0,891
$\mathcal{JML}_2$	0,937	0,968	0,951	0,947	0,974	0,649	0,776	0,673	0,823	0,891
$\mathcal{JMar}_1$	0,937	0,968	0,947	0,947	0,974	0,649	0,743	0,673	0,791	0,882

	$\mathcal{C}_\alpha$	$\mathcal{C}_{\alpha'}$	$\mathcal{C}_\beta$	$\mathcal{C}_{\beta'}$	$\mathcal{C}_\gamma$	$\mathcal{BP}$	$\mathcal{BPE}$	$\mathcal{BJ}$	$\mathcal{BJE}$	$\mathcal{BE}$
$\mathcal{JMar}_3$	0,937	0,968	0,947	0,947	0,974	0,649	0,743	0,673	0,791	0,882
$\mathcal{JMar}_4$	0,937	0,969	0,947	0,947	0,974	0,649	0,743	0,66	0,791	0,88
$\mathcal{JMal}$	0,937	0,968	0,951	0,947	0,974	0,649	0,776	0,673	0,823	0,891
$\mathcal{JEu}$	0,937	0,968	0,947	0,947	0,974	0,682	0,743	0,696	0,791	0,882
$\mathcal{JMo}$	0,937	0,968	0,951	0,947	0,974	0,649	0,776	0,673	0,823	0,891
$\mathcal{JRom}$	0,937	0,968	0,947	0,947	0,974	0,649	0,743	0,673	0,791	0,882
$\mathcal{JKi}$	0,937	0,968	0,951	0,947	0,974	0,682	0,776	0,696	0,823	0,891
$\mathcal{JRou}$	0,937	0,969	0,947	0,947	0,974	0,649	0,743	0,66	0,791	0,88
$\mathcal{JS}$	0,936	0,968	0,951	0,947	0,974	0,646	0,776	0,67	0,823	0,891

134 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

	$\mathcal{C}_\alpha$	$\mathcal{C}_{\alpha'}$	$\mathcal{C}_\beta$	$\mathcal{C}_{\beta'}$	$\mathcal{C}_\gamma$	$\mathcal{BP}$	$\mathcal{BPE}$	$\mathcal{BJ}$	$\mathcal{BJE}$	$\mathcal{BE}$
$\mathcal{M}$	0,935	0,969	0,948	0,947	0,971	0,676	0,785	0,687	0,832	0,881
$\mathcal{MA}$	0,935	0,969	0,948	0,947	0,971	0,649	0,752	0,673	0,8	0,881
$\mathcal{MG}$	0,935	0,969	0,947	0,947	0,971	0,649	0,735	0,673	0,782	0,881
$\mathcal{M}_{1/7}$	0,935	0,968	0,947	0,947	0,971	0,67	0,774	0,693	0,822	0,878
$\mathcal{M}_{1/6}$	0,937	0,968	0,947	0,947	0,971	0,667	0,767	0,691	0,815	0,879
$\mathcal{M}_{1/5}$	0,936	0,968	0,947	0,947	0,971	0,664	0,758	0,687	0,805	0,879
$\mathcal{M}_{2/9}$	0,936	0,968	0,948	0,947	0,971	0,661	0,751	0,684	0,799	0,879
$\mathcal{M}_{1/4}$	0,935	0,969	0,947	0,947	0,971	0,658	0,743	0,678	0,791	0,881
$\mathcal{M}_{2/7}$	0,935	0,968	0,947	0,947	0,971	0,654	0,733	0,67	0,781	0,878
$\mathcal{M}_{1/3}$	0,936	0,968	0,948	0,947	0,973	0,649	0,732	0,66	0,767	0,879

	$\mathcal{C}_\alpha$	$\mathcal{C}_{\alpha'}$	$\mathcal{C}_\beta$	$\mathcal{C}_{\beta'}$	$\mathcal{C}_\gamma$	$\mathcal{BP}$	$\mathcal{BPE}$	$\mathcal{BJ}$	$\mathcal{BJE}$	$\mathcal{BE}$
$\mathcal{IME}$	0,935	0,968	0,947	0,947	0,971	0,675	0,737	0,673	0,784	0,879
$\mathcal{IBE}_1$	0,937	0,968	0,949	0,947	0,972	0,685	0,776	0,693	0,823	0,881
$\mathcal{IBE}_2$	0,937	0,968	0,949	0,947	0,973	0,672	0,776	0,696	0,823	0,881
$\mathcal{IBE}_3$	0,936	0,968	0,947	0,947	0,971	0,675	0,776	0,699	0,823	0,879
$\mathcal{IW}_{III}$	0,936	0,968	0,947	0,947	0,971	0,685	0,776	0,693	0,823	0,879
$\mathcal{IW}_{IV}$	0,935	0,968	0,948	0,946	0,972	0,672	0,763	0,693	0,81	0,881
$\mathcal{IW}_V$	0,937	0,968	0,947	0,947	0,971	0,666	0,776	0,689	0,823	0,879
$\mathcal{IN}_1$	0,937	0,968	0,948	0,947	0,971	0,679	0,776	0,699	0,823	0,879
$\mathcal{IN}_2$	0,936	0,968	0,947	0,947	0,971	0,672	0,779	0,696	0,827	0,879
$\mathcal{IN}_3$	0,936	0,968	0,947	0,947	0,971	0,672	0,776	0,696	0,823	0,879

	$\mathcal{C}_\alpha$	$\mathcal{C}_{\alpha'}$	$\mathcal{C}_\beta$	$\mathcal{C}_{\beta'}$	$\mathcal{C}_\gamma$	$\mathcal{B}\mathcal{P}$	$\mathcal{B}\mathcal{P}\mathcal{E}$	$\mathcal{B}\mathcal{J}$	$\mathcal{B}\mathcal{J}\mathcal{E}$	$\mathcal{B}\mathcal{E}$
$\mathcal{IK}_{II}$	0,938	0,968	0,952	0,947	0,971	0,682	0,776	0,696	0,823	0,881
$\mathcal{IK}_{III}$	0,935	0,968	0,948	0,947	0,971	0,682	0,776	0,696	0,823	0,881
$\mathcal{IL}$	0,936	0,968	0,948	0,947	0,972	0,68	0,782	0,698	0,829	0,879
$\mathcal{IMa}$	0,937	0,968	0,949	0,947	0,974	0,659	0,789	0,683	0,836	0,883
$\mathcal{IBa}$	0,938	0,968	0,947	0,947	0,971	0,682	0,776	0,696	0,823	0,879
$\mathcal{IY}$	0,937	0,968	0,947	0,947	0,971	0,679	0,779	0,699	0,826	0,879
$\mathcal{IVY}$	0,937	0,968	0,949	0,947	0,971	0,685	0,776	0,693	0,823	0,879
$\mathcal{IBKt}$	0,935	0,969	0,948	0,947	0,971	0,685	0,776	0,693	0,823	0,879
$\mathcal{IBKr}$	0,936	0,969	0,947	0,947	0,972	0,685	0,776	0,693	0,823	0,878
$\mathcal{IBB}$	0,937	0,968	0,949	0,947	0,971	0,679	0,776	0,699	0,823	0,879
$\mathcal{IBL}$	0,937	0,968	0,947	0,947	0,971	0,672	0,779	0,696	0,827	0,879

	$\mathcal{C}_\alpha$	$\mathcal{C}_{\alpha'}$	$\mathcal{C}_\beta$	$\mathcal{C}_{\beta'}$	$\mathcal{C}_\gamma$	$\mathcal{B}\mathcal{P}$	$\mathcal{B}\mathcal{P}\mathcal{E}$	$\mathcal{B}\mathcal{J}$	$\mathcal{B}\mathcal{J}\mathcal{E}$	$\mathcal{B}\mathcal{E}$
$\mathcal{E}_{12}$	0,935	0,969	0,947	0,948	0,971	0,666	0,779	0,689	0,827	0,879
$\mathcal{E}_{19}$	0,936	0,968	0,947	0,947	0,974	0,638	0,731	0,637	0,766	0,879
$\mathcal{E}_{24}$	0,935	0,968	0,947	0,947	0,971	0,666	0,749	0,629	0,773	0,879
$\mathcal{E}_{31}$	0,935	0,968	0,947	0,947	0,971	0,641	0,732	0,627	0,767	0,879
$\mathcal{E}_{43}$	0,935	0,968	0,947	0,947	0,971	0,642	0,735	0,627	0,766	0,879
$\mathcal{E}_{53}$	0,935	0,968	0,947	0,947	0,971	0,647	0,738	0,633	0,784	0,878

	$\mathcal{C}_\alpha$	$\mathcal{C}_{\alpha'}$	$\mathcal{C}_\beta$	$\mathcal{C}_{\beta'}$	$\mathcal{C}_\gamma$	$\mathcal{B}\mathcal{P}$	$\mathcal{B}\mathcal{P}\mathcal{E}$	$\mathcal{B}\mathcal{J}$	$\mathcal{B}\mathcal{J}\mathcal{E}$	$\mathcal{B}\mathcal{E}$
$\mathcal{SPa}$	0,935	0,968	0,949	0,947	0,971	0,638	0,731	0,631	0,77	0,883
$\mathcal{SL}$	0,936	0,968	0,95	0,947	0,972	0,649	0,776	0,673	0,823	0,879
$\mathcal{SE}$	0,937	0,968	0,949	0,948	0,971	0,679	0,737	0,702	0,784	0,881
$\mathcal{SCa}$	0,936	0,968	0,951	0,947	0,972	0,649	0,731	0,628	0,77	0,882
$\mathcal{SCaH}$	0,936	0,968	0,951	0,947	0,972	0,661	0,731	0,628	0,77	0,882
$\mathcal{SHL}$	0,937	0,968	0,951	0,947	0,974	0,649	0,731	0,673	0,778	0,882
$\mathcal{SPe}$	0,937	0,968	0,949	0,947	0,974	0,649	0,731	0,651	0,778	0,887
$\mathcal{SCh}$	0,937	0,968	0,949	0,947	0,973	0,649	0,731	0,651	0,778	0,887
$\mathcal{SHM}$	0,937	0,968	0,95	0,947	0,973	0,638	0,731	0,627	0,778	0,891
$\mathcal{SW}_{VI}$	0,935	0,968	0,949	0,947	0,971	0,674	0,776	0,698	0,823	0,878

136 APÉNDICE A. COMPARACIÓN DE DIVERSOS SISTEMAS DE AFINACIÓN

	$\mathcal{C}_\alpha$	$\mathcal{C}_{\alpha'}$	$\mathcal{C}_\beta$	$\mathcal{C}_{\beta'}$	$\mathcal{C}_\gamma$	$\mathcal{BP}$	$\mathcal{BPE}$	$\mathcal{BJ}$	$\mathcal{BJE}$	$\mathcal{BE}$
$\mathcal{C}_\alpha$	1	1	0,947	0,947	0,971	0,647	0,734	0,628	0,775	0,878
$\mathcal{C}_{\alpha'}$	0,935	1	0,947	0,947	0,971	0,642	0,734	0,628	0,768	0,878
$\mathcal{C}_\beta$	0,935	0,968	1	0,947	0,971	0,644	0,733	0,627	0,774	0,88
$\mathcal{C}_{\beta'}$	0,935	0,968	0,947	1	0,971	0,648	0,733	0,629	0,774	0,879
$\mathcal{C}_\gamma$	0,935	0,968	0,947	0,947	1	0,638	0,732	0,626	0,768	0,879
$\mathcal{BP}$	0,936	0,969	0,948	0,947	0,975	1	1	0,953	0,953	0,951
$\mathcal{BPE}$	0,936	0,969	0,948	0,947	0,975	0,814	1	0,766	0,953	0,951
$\mathcal{BJ}$	0,935	0,969	0,947	0,947	0,975	0,953	0,953	1	1	0,951
$\mathcal{BJE}$	0,935	0,969	0,947	0,947	0,975	0,766	0,953	0,719	1	0,951
$\mathcal{BE}$	0,936	0,968	0,947	0,947	0,971	0,737	0,737	0,734	0,772	1

# Bibliografía

- [1] P. Amster, *¡Matemática, maestro!: Un concierto para números y orquesta*, Siglo Veintiuno Editores, Buenos Aires (2010)
- [2] D. Benson, *Music: A Mathematical Offering*, Cambridge University Press (2006)
- [3] M. Kac, *Can One Hear the Shape of a Drum?*, American Mathematical Monthly 73 (4, part 2), 1-23 (1966)
- [4] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York (2011)
- [5] R. Courant y D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics I*, Interscience Publishers, Inc., New York (1953)
- [6] C. Gordon, D. L. Webb, y S. Wolpert, *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*, Inventiones Mathematicae 110, 1-22 (1992)
- [7] V. Liern, *On the construction, comparison, and exchangeability of tuning systems*, Journal of Mathematics and Music, DOI: 10.1080/17459737.2015.1031468 (2015)
- [8] V. Liern, *Fuzzy tuning systems: the mathematics of musicians*, Fuzzy Sets and Systems 150, 35-52 (2005)
- [9] T. León y V. Liern, *A fuzzy framework to explain musical tuning in practice*, Fuzzy Sets and Systems 214, 51-64 (2013)
- [10] R. Plomp y W. J. M. Levelt, *Tonal Consonance and Critical Bandwidth*, J. Acoust. Soc. Am. 38, 548-560 (1965)

- [11] R. Feynman, R. Leighton, y M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1964)
- [12] M. Braun y V. Chaloupka, *Carbamazepine induced pitch shift and octave space representation*, Hearing Research 210, 85-92 (2005)
- [13] L. A. Zadeh, *Fuzzy Sets*, Information and Control 8, 338-353 (1965)
- [14] L. A. Zadeh, *Similarity Relations and Fuzzy Orderings*, Information Sciences 3, 177-200 (1971)
- [15] L. A. Zadeh, *Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility*, Fuzzy Sets and Systems 1, 3-28 (1978)
- [16] B. R. Glasberg y B. C. J. Moore, *Derivation of auditory filter shapes from notched-noise data*, Hearing Research 47, 103-138 (1990)
- [17] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, New York (1998)
- [18] A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, Phoenix Books, Chicago (1964)
- [19] G. H. Hardy y E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, New York (2008)