UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Deformaciones de álgebras envolventes de álgebras de Lie de dimensión 4

Sofía Nerina D'Alesio Souto

Directora: Andrea Solotar

Fecha de Presentación: 30 de marzo de 2015

Índice general

Agradecimientos **3**

1 Introducción **7**

2 Álgebras de Lie **9**

2.1 Resultados generales 9

2.1.1 Definiciones básicas 9

2.1.2 Invariantes y coinvariantes 11

2.1.3 El álgebra envolvente universal 11

2.2 Homología y Cohomología de álgebras de Lie 13

2.2.1 La resolución de Chevalley-Eilenberg 16

2.2.2 Extensiones y cohomología en grado 2 19

2.3 Álgebras de Lie complejas de dimensión 4 24

3 Homología de Hochschild y deformaciones **25**

3.1 Homología y cohomología de Hochschild 25

3.1.1 Cohomología de Hochschild de álgebras envolventes de álgebras de Lie 28

3.2 Deformaciones de Gerstenhaber de álgebras asociativas 30

3.2.1 Integrabilidad y obstrucciones 31

3.2.2 Deformaciones triviales y equivalencia de deformaciones 33

3.2.3 Deformaciones de Gerstenhaber de un álgebra de Lie 34

3.2.4 Integrabilidad y obstrucciones 35

4 Cálculo de la cohomología de Hochschild **37**

4.1 Cálculos preliminares 37

4.2 Cálculo del centro 40

4.3 Cálculo del primer grupo de cohomología 41

4.4 Cálculo del segundo grupo de cohomología 53

4.5 Cálculo del tercer grupo de cohomología 66

4.6 Cálculo del cuarto grupo de cohomología 72

Bibliografía **74**

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi familia por sostenerme económicamente y permitirme estudiar.

Gracias infinitas a Andrea y a Mariano, por su tiempo, y porque claramente esta tesis no existiría sin ellos.

Gracias a Nico y a Vendra, por leer la tesis, por las correcciones y por la buena onda.

Gracias a Pablo, Quimey, Sergio y Panchito por su ayuda y consejos a lo largo de estos años.

Gracias a los docentes que tuve en la carrera, en especial a Matías Graña, Juan Pablo Pinasco, Mariela Sued, Jonathan Barmak, Pablo Amster, Santiago Saglietti y Gabriel Minian (y a Andrea y Mariano, obviamente).

Gracias a la UBA por la beca estímulo.

Gracias a Pato, Gabi, Diana y Navas por ayudarme a comenzar este camino.

Y por último, gracias a todos mis amigos que me acompañaron (acompañan y acompañarán) en mi vida en la facultad. Gracias a Mati, Diego, Santi V y Euge por la ayuda con latex, ejercicios y el tiempo para explicarme lo que me hiciera falta. Gracias a Maxi y Bru por estar ahí desde el primer día. Y gracias a Nati, Di, Aye, Kari, Jaz, Santi D, Rafa, Dani, Meli, Mari, Marce, Facu, Juanma, Pablo, Lucho, Mel (y más gente que me estoy olvidando, son muchos!) por los almuerzos, meriendas, mates, cursadas, viajes, tardes de estudio y etcéteras.

Capítulo 1

Introducción

Las álgebras de Lie complejas de dimensiones pequeñas constituyen aún un área muy activa de investigación. La clasificación de las mismas en clases de isomorfismo es conocida para dimensiones menores o iguales que 7, en los casos 5, 6 y 7 con restricciones en los tipos de álgebra estudiadas, ver [Rom89], [FP07], [BFNT13]. Dada un álgebra de Lie compleja $\mathfrak{g}$ de dimensión n con base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, el corchete entre dos elementos de la base determina n constantes $\gamma_{i,j}^k$ tales que $[e_i, e_j] = \sum_k \gamma_{i,j}^k e_k$. Estas constantes se llaman *constantes de estructura.*

El objetivo principal de este trabajo es estudiar la cohomología de Hochschild de las álgebras envolventes de álgebras de Lie complejas de dimensión 4 con el propósito posterior de estudiar sus deformaciones. Estas deformaciones pueden provenir o bien de deformar la estructura de Lie, o bien de deformar la estructura asociativa, sin variar el corchete. Las deformaciones de la primera clase y las relaciones entre las mismas han sido completamente estudiadas en los últimos años, ver por ejemplo [FP07].

Nos proponemos usar métodos homológicos para estudiar en particular las deformaciones de la estructura asociativa de las álgebras envolventes de las álgebras de Lie de dimensión 4 del tipo $L_4(\alpha)$, según la clasificación dada por Agaoka [Aga02], donde α es un número complejo no nulo. Esta familia esta incluida, según la clasificación de Fialowski y Penkava [FP07], en la de álgebras de Lie complejas de dimensión 4 del tipo $d_3(\lambda : \mu)$ con $\lambda = 1$ y $\mu = \alpha$.

Las deformaciones de objetos algebraicos y analíticos son estudiadas desde hace mucho tanto en matemática como en física. El conjunto de clases de equivalencia de estructuras de álgebra de Lie sobre un espacio vectorial fijo es llamado el espacio de moduli de álgebras de Lie sobre ese espacio vectorial. El espacio de moduli ha sido descripto completamente en el caso de un espacio vectorial complejo de dimensión 3, ver [Aga99], [TU92]. La estructura de este espacio de moduli es bastante simple: consiste de una familia 1-paramétrica de álgebras de Lie resolubles, y de tres álgebras de Lie especiales.

Es importante notar que todavía no se ha realizado una descripción de la familia de deformaciones de las álgebras envolventes de álgebras de Lie complejas de dimensión 4 que se obtienen al deformar la estructura asociativa.

Las deformaciones infinitesimales de un álgebra asociativa están parametrizadas por el segundo grupo de cohomología de Hochschild del álgebra, a coeficientes en el álgebra considerada como bimódulo sobre sí misma de la manera natural. Asimismo, las posibles obstrucciones para continuar esta deformación infinitesimal en una verdadera deformación están parametrizadas por el tercer grupo de cohomología de Hochschild del álgebra a coeficientes en ella misma.

En el Capítulo 2 se recuerdan algunas definiciones básicas sobre álgebras de Lie, sobre álgebras envolventes y también sobre homología y cohomología de álgebras de Lie, en particular la resolución de Chevalley-Eilenberg. Luego se recuerda el resultado principal del artículo de Agaoka [Aga02], es decir la clasificación de álgebras de Lie de dimensión 4 a menos de isomorfismo.

El Capítulo 3 consiste de un resumen de resultados sobre homología y cohomología de Hochschild de álgebras asociativas y en particular de álgebras envolventes de álgebras de Lie.

En el Capítulo 4 comenzamos realizando algunos cálculos preliminares que serán útiles para describir la cohomología de Hochschild, para posteriormente estudiar las deformaciones. Completamos el cálculo de la cohomología para el caso en que α no es un número racional negativo, ni natural, ni de la forma $\frac{1}{m}$ con m natural.

Capítulo 2

Álgebras de Lie

2.1 Resultados generales

A lo largo de las primeras secciones y hasta nuevo aviso, k será un anillo conmutativo con unidad. Los contenidos de las secciones 1 y 2 también fueron desarrollados en [Cho12]. Para más detalles sobre los mismos puede consultarse [Wei94] y [CE56].

2.1.1 Definiciones básicas

Definición 2.1.1. Una *estructura de álgebra de Lie* en un k-módulo $\mathfrak{g}$ es una aplicación bilineal $[-,-] : \mathfrak{g} \otimes_k \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, llamada corchete de Lie, que cumple

1. antisimetría: $[x, y] = -[y, x],\ \forall\, x, y \in \mathfrak{g}$,
2. identidad de Jacobi: $[[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]],\ \forall\, x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Ejemplos 2.1.2.

1. Dado un k-módulo M podemos definir un corchete en M mediante $[x, y] := 0$ para todos $x, y \in M$. En este caso decimos que $[-,-]$ es la estructura de álgebra de Lie abeliana sobre M.
2. Dada una k-álgebra asociativa A podemos definir $[x, y] := xy - yx$ para todos $x, y \in A$. Es fácil chequear que $[-,-]$ es antisimétrico y que cumple la identidad de Jacobi. Notaremos con $\mathrm{Lie}(A)$ al k-módulo A con esta estructura de Lie.
3. Dada una k-álgebra A, consideramos $\mathrm{Der}(A) := \{D \in \mathrm{End}_k(A) : D(ab) = aD(b) + D(a)b,\ \forall a, b \in A\}$. Es fácil comprobar que $\mathrm{Der}(A)$ es un k-submódulo de $\mathrm{End}_k(A)$ que, con el corchete definido en el ejemplo anterior, resulta una subálgebra de Lie de $\mathrm{Lie}(\mathrm{End}_k(A))$. A esta álgebra la denominaremos álgebra de derivaciones de A.
4. Dada una variedad diferenciable M notamos con $\mathfrak{X}(M)$ a los campos diferenciables definidos sobre ella. Si fijamos que $[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\mathfrak{X}(M)$ resulta un álgebra de Lie.

Definición 2.1.3. Un *morfismo de álgebras de Lie* entre $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ es un morfismo de k-módulos $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ que preserva el corchete, es decir, $\varphi([g_1, g_2]_{\mathfrak{g}}) = [\varphi(g_1), \varphi(g_2)]_{\mathfrak{h}}$ para todos $g_1, g_2 \in \mathfrak{g}$.

Definición 2.1.4. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y sea $\mathfrak{h}$ un k-submódulo de $\mathfrak{g}$. Se dice que $\mathfrak{h}$ es un *ideal* de $\mathfrak{g}$ si $[g, h] \in \mathfrak{h}$ para todos $g \in \mathfrak{g}$ y $h \in \mathfrak{h}$. Observemos que tanto $\mathfrak{h}$ como $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ tienen una estructura de álgebra de Lie inducida por la de $\mathfrak{g}$ vía los morfismos de inclusión $i : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$ y proyección $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Notación. Si $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ son ideales de $\mathfrak{g}$ notamos con $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$ al k-submódulo generado por los elementos de la forma $[h_1, h_2]$ con $h_1 \in \mathfrak{h}_1$ y $h_2 \in \mathfrak{h}_2$.

Lema 2.1.5. *Dados ideales $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ de $\mathfrak{g}$, el k-submódulo $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$ también resulta un ideal de $\mathfrak{g}$.*

Demostración. Sean $h_1 \in \mathfrak{h}_1$, $h_2 \in \mathfrak{h}_2$ y $g \in \mathfrak{g}$. Por la identidad de Jacobi obtenemos

$$[g, [h_1, h_2]] = [[h_2, g], h_1] + [h_2, [h_1, g]] \in [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2].$$ □

Notación. Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ notaremos con $\mathfrak{g}^{ab}$ al álgebra de Lie abeliana definida como $\mathfrak{g}^{ab} := \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Definición 2.1.6. Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie. Un $\mathfrak{g}$-módulo a izquierda M es un k-módulo a izquierda junto con un morfismo de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Lie}(\mathrm{End}_k(M))$ o, equivalentemente, un k-módulo junto con una aplicación bilineal $\mathfrak{g} \otimes_k M \longrightarrow M$, a la cual notaremos $x \otimes m \mapsto xm$, que cumple $[x, y]m = x(ym) - y(xm)$ para todos $x, y \in \mathfrak{g}$ y $m \in M$. Análogamente puede definirse un $\mathfrak{g}$-módulo a derecha.

Ejemplos 2.1.7.

1. Si A es un álgebra asociativa, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(A)$ y M es un A-módulo, M resulta un $\mathfrak{g}$-módulo de la forma obvia.

2. Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, esta resulta un $\mathfrak{g}$-módulo vía $x \cdot y := [x, y]$ para todos $x, y \in \mathfrak{g}$.

3. Para cualquier k-módulo M y álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ podemos definir la estructura de $\mathfrak{g}$-módulo trivial en M vía $x \cdot m = 0$ para todos $x \in \mathfrak{g}$ y $m \in M$.

4. A todo $\mathfrak{g}$-módulo a izquierda M puede dársele una estructura de $\mathfrak{g}$-módulo a derecha vía $m \cdot x := -x \cdot m$ para todos $x \in \mathfrak{g}$ y $m \in M$.

5. Dado un k-módulo M, se define el módulo de *derivaciones* de $\mathfrak{g}$ en M como $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M) := \{D \in \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}, M) : D([x, y]) = xD(y) - yD(x), \forall x, y \in \mathfrak{g}\}$. Si $M = \mathfrak{g}$, $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M)$ se nota simplemente $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

6. Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y M un $\mathfrak{g}$-módulo. Se define el *producto semidirecto* entre $\mathfrak{g}$ y M como la k-álgebra de Lie $M \rtimes \mathfrak{g}$ que tiene como k-módulo subyacente a $M \oplus \mathfrak{g}$ y cuyo corchete es $[(m, g), (n, h)] := (h \cdot m - g \cdot n, [g, h])$

Definición 2.1.8. Un morfismo de $\mathfrak{g}$-módulos M y N es un morfismo de k-módulos $f : M \longrightarrow N$ que cumple $f(xm) = xf(m)$ para todos $x \in \mathfrak{g}$ y $m \in M$. Notaremos con $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, N)$ al conjunto de todos los morfismos de $\mathfrak{g}$-módulos de M en N.

Notación. Escribiremos $\mathfrak{g}$-Mod cuando hablemos de la categoría de $\mathfrak{g}$-módulos a izquierda.

2.1.2 Invariantes y coinvariantes

Definición 2.1.9. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y M un $\mathfrak{g}$-módulo a izquierda. Definimos los *invariantes* y *coinvariantes* de M como sigue.

- Invariantes: $M^{\mathfrak{g}} := \{m \in M : xm = 0 \text{ para todo } x \in \mathfrak{g}\}$.
- Coinvariantes: $M_{\mathfrak{g}} := M/\mathfrak{g}M$.

Veremos ahora que $(-)^{\mathfrak{g}}$ y $(-)_{\mathfrak{g}}$ son funtores de la categoría de $\mathfrak{g}$-Mod a valores en k-Mod.

Sean M y N dos $\mathfrak{g}$-módulos y sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, N)$. Si $m \in M^{\mathfrak{g}}$, resulta que $xf(m) = f(xm) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, como consecuencia, f se restringe a $f|_{M^{\mathfrak{g}}} : M^{\mathfrak{g}} \longrightarrow N^{\mathfrak{g}}$. Si $m \in \mathfrak{g}M$, existen $x_i \in \mathfrak{g}$ y $m_i \in M$ tales que $m = \sum x_i m_i$, y luego $f(m) = \sum x_i f(m_i)$, que es un elemento de $\mathfrak{g}N$. Esto permite definir $\overline{f} : M_{\mathfrak{g}} \longrightarrow N_{\mathfrak{g}}$ como $\overline{f}(\overline{m}) := \overline{f(m)}$.

Por otro lado, consideramos $F : k\text{-Mod} \longrightarrow \mathfrak{g}\text{-Mod}$ el funtor trivial, es decir, el funtor que a cada k-módulo M le asocia el $\mathfrak{g}$-módulo trivial M y tal que, dados M y N dos k-módulos y $f : M \longrightarrow N$ un morfismo entre ellos, $F(f)(m) := f(m)$ para todo $m \in M$. Notar que $F(f)$ resulta un morfismo de $\mathfrak{g}$-módulos, ya que tanto xm como $xf(m)$ son nulos para todos $x \in \mathfrak{g}$ y $m \in M$.

Observación 2.1.10. Si M es un $\mathfrak{g}$-módulo y consideramos a k como $\mathfrak{g}$-módulo trivial, entonces $M^{\mathfrak{g}} \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(k, M)$ vía la correspondencia

$$m \in M^{\mathfrak{g}} \longleftrightarrow 1 \overset{\varphi}{\mapsto} m.$$

Proposición 2.1.11. *Los funtores $(-)^{\mathfrak{g}}$ y $(-)_{\mathfrak{g}}$ son adjuntos a derecha y a izquierda, respectivamente, del funtor trivial. En particular $(-)^{\mathfrak{g}}$ es exacto a izquierda y $(-)_{\mathfrak{g}}$ es exacto a derecha.*

Demostración. Se deduce fácilmente de la descripción de los morfismos hecha anteriormente. □

2.1.3 El álgebra envolvente universal

Dada una k-álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ su álgebra envolvente será una k-álgebra asociativa, que notaremos $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ y que cumple una cierta propiedad universal. El rol que tiene esta álgebra respecto de $\mathfrak{g}$ es análogo al del álgebra de grupo kG respecto de un grupo G. Probaremos que las categorías de $\mathfrak{g}$-módulos y $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos son isomorfas, lo que implicará que $\mathfrak{g}$-Mod tiene suficientes objetos inyectivos y proyectivos. A partir de este hecho, podremos definir la homología y cohomología de álgebras de Lie como los funtores derivados de $(-)^{\mathfrak{g}}$ y $(-)_{\mathfrak{g}}$ respectivamente, tal como sucede con la homología y cohomología de grupos.

Definición 2.1.12. Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ consideramos su álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$ y el ideal bilátero $\mathcal{I}$ de esta última generado por los elementos de la forma $x\otimes y - y\otimes x - [x,y]$ para todos $x, y \in \mathfrak{g}$. Se define el *álgebra envolvente universal* de $\mathfrak{g}$ como $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/\mathcal{I}$. Notaremos con $x_1|\cdots|x_n$ a los elementos homogéneos de grado n (respecto de la graduación evidente) de $T(\mathfrak{g})$ y con $x_1\cdots x_n$ a su clase en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Observación 2.1.13. Podemos definir la aplicación $i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Lie}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ como la composición de los morfismos de k-módulos $\mathfrak{g} \xrightarrow{i} T(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\pi} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, donde i es la inclusión de $\mathfrak{g}$ en la componente de grado 1 de $T(\mathfrak{g})$ y π es la proyección al cociente. La función i es un morfismo de álgebras de Lie que, en caso de que $\mathfrak{g}$ sea libre como k-módulo, resulta inyectivo debido al siguiente teorema.

Teorema 2.1.14. (Poincaré-Birkhoff-Witt) *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie libre como k-módulo y sea $\{e_i\}_{i\in J}$ una base ordenada de $\mathfrak{g}$. Si notamos $I = (i_1 \leq \cdots \leq i_l)$ a una sucesión finita y ordenada de elementos de J y $e_I = e_{i_1}\cdots e_{i_l}$, entonces el conjunto $\{e_I\}_{I\subset J}$ es una base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ como k-módulo.*

Demostración. Puede consultarse en [CE56], Capítulo XIII, Sección 3. □

Haremos ahora algunas observaciones que nos permitirán seguir avanzando hacia el objetivo deseado.

Observaciones 2.1.15.

1. Si $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son dos álgebras de Lie, todo morfismo f de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{h}$, puede extenderse a un morfismo de álgebras asociativas $\hat{f} : T(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ donde $\hat{f}(x_1|\cdots|x_n) := f(x_1)\cdots f(x_n)$. El morfismo $\hat{f}$ pasa al cociente por $\mathcal{I}$ obteniendo

$$\begin{tikzcd} T(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{U}(\mathfrak{g}). \\ \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[ur, dashed, "\mathcal{U}(f)"'] & \end{tikzcd}$$

   Queda así definido un funtor $\mathcal{U}(-)$ de la categoría de k-álgebras de Lie a la de k-álgebras asociativas.

2. Dada una k-álgebra asociativa A y un morfismo de k-álgebras de Lie $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Lie}(A)$, queda bien definido el morfismo $\hat{f} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ tal que $\hat{f}(x_1\cdots x_n) := f(x_1)\cdots f(x_n)$, donde el producto de la derecha es el producto en A. Por otro lado, dado un morfismo de k-álgebras asociativas $h : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ la composición $h\circ i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Lie}(A)$ resulta un morfismo de k-álgebras de Lie ya que $h(i([x,y])) = h([x,y]) = h(xy - yx) = h(x)h(y) - h(y)h(x) = [h(i(x)), h(i(y))]$. Estas asignaciones son mutuamente inversas y dan un isomorfismo natural de k-módulos entre $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathrm{Lie}(A))$ y $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), A)$. Esto prueba que el funtor $\mathrm{Lie}(-)$ es adjunto a izquierda de $\mathcal{U}(-)$.

3. Dado un k-módulo M, tomando el álgebra asociativa $A = \mathrm{End}_k(M)$ en el ítem anterior, obtenemos

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathrm{Lie}(\mathrm{End}_k(M))) \cong \mathrm{Hom}_{k-alg}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \mathrm{End}_k(M)).$$

   Es decir que si M es además un $\mathfrak{g}$-módulo, se le puede dar una estructura de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo de forma natural y si es un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo, también resulta un $\mathfrak{g}$-módulo. Concretamente, si M es un $\mathfrak{g}$-módulo y $x_1 \cdots x_n \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, la fórmula $(x_1 \cdots x_n)m := x_1(x_2(\cdots(x_n m)\cdots))$ da una estructura de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo a M y si M es un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo y $x \in \mathfrak{g}$, M resulta un $\mathfrak{g}$-módulo mediante $xm := i(x)m$. Es fácil ver que un morfismo de $\mathfrak{g}$-módulos resulta también de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos y viceversa.

Del último ítem de la observación se deduce el siguiente teorema.

Teorema 2.1.16. *La categoría de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos es naturalmente isomorfa a la categoría de $\mathfrak{g}$-módulos. En particular esta última tiene suficientes objetos inyectivos y proyectivos.*

Podemos considerar a k como $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo trivial. Notaremos $\varepsilon : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}_k(k) \cong k$ al morfismo que da la acción y lo llamaremos *aumentación*. Notaremos también $\mathcal{J} := \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ al ideal conocido con el nombre de *ideal de aumentación*. Es fácil verificar que $\mathcal{J}$ es el ideal bilátero generado por $i(\mathfrak{g})$ en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, que coincide con $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}$ y que $k \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$.

2.2 Homología y Cohomología de álgebras de Lie

La Proposición 2.1.11 y el Teorema 2.1.16 nos permiten definir los funtores derivados de $(-)^{\mathfrak{g}}$ y $(-)_{\mathfrak{g}}$.

Definición 2.2.1. Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y M un $\mathfrak{g}$-módulo a izquierda. Se definen la *homología* y *cohomología* de álgebras de Lie de $\mathfrak{g}$ con coeficientes en M como

$$H^{\mathrm{Lie}}_{\bullet}(\mathfrak{g}, M) := L_{\bullet}(-_{\mathfrak{g}})(M), \qquad H^{\bullet}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, M) := R^{\bullet}(-^{\mathfrak{g}})(M).$$

Veremos ahora cómo relacionar estas definiciones con funtores derivados conocidos en la categoría de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos.

Teorema 2.2.2. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y M un k-módulo libre que además es $\mathfrak{g}$-módulo a izquierda. Existen isomorfismos naturales*

$$H^{\mathrm{Lie}}_{\bullet}(\mathfrak{g}, M) \cong \mathrm{Tor}^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}_{\bullet}(k, M) \qquad H^{\bullet}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, M) \cong \mathrm{Ext}^{\bullet}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(k, M).$$

Observación 2.2.3. La estructura de k como $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo es la inducida por el morfismo de aumentación.

Demostración. La cohomología y la homología de álgebras de Lie se obtienen mediante funtores derivados, de la misma forma que $\mathrm{Ext}^{\bullet}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(k,-)$ y $\mathrm{Tor}^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}_{\bullet}(k,-)$ y por lo tanto resultan δ-funtores universales. Para ver entonces que hay isomorfismos naturales como los del enunciado basta ver que hay isomorfismos naturales entre los funtores derivados de grado 0. Dichos isomorfismos son los indicados a continuación.

- $k \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} M \cong (\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} M \cong M/\mathfrak{g}M = M_{\mathfrak{g}}$,
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(k,M) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(k,M) \cong M^{\mathfrak{g}}$. □

Corolario 2.2.4. *Dada un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$*,*

$$H^n_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g},\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = H_n^{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g},\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Como $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es libre como $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo, los funtores derivados Tor y Ext se anulan en grados positivos. □

A continuación recordaremos una serie de lemas y resultados que permitirán calcular los grupos de homología y cohomología en grados bajos. Dada una k-álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ consideramos la sucesión exacta de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\varepsilon} k \longrightarrow 0. \tag{2.1}$$

Dado un $\mathfrak{g}$-módulo M, aplicando $\mathrm{Tor}^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}_{\bullet}(-,M)$ resulta

$$H_n^{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g},M) = \mathrm{Tor}^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}_n(k,M) \cong \mathrm{Tor}^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}_{n-1}(\mathcal{J},M) \text{ si } n \geq 2$$

y la sucesión exacta de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos

$$0 \longrightarrow H_1^{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g},M) \longrightarrow \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} M \longrightarrow M \longrightarrow M_{\mathfrak{g}} \longrightarrow 0. \tag{2.2}$$

Lema 2.2.5. *Dada una k-álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y el ideal de aumentación asociado $\mathcal{J}$, resulta*

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \cong \mathfrak{g}^{ab}.$$

Demostración. Consideremos la inclusión $i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Es fácil ver que $i([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) \subseteq \mathcal{J}^2$, por lo cual queda inducida $\bar{i} : \mathfrak{g}^{ab} \longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$. En el otro sentido, fijado $n \in \mathbb{N}$, definimos $\sigma_n : \mathfrak{g}^{\times n} \longrightarrow \mathfrak{g}^{ab}$ como

$$\sigma_n(x_1,\cdots,x_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 2 \\ \bar{x} & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Pasamos cada σ_n al producto tensorial y luego al álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$. Como el morfismo resultante se anula sobre $\mathcal{I}$, se factoriza por el álgebra envolvente, obteniendo $\sigma : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g}^{ab}$. Este morfismo cumple que $\sigma(x) = \bar{x}$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ y que $\sigma_{\restriction_{\mathcal{J}^2}} \equiv 0$. Podemos definir entonces el morfismo $\bar{\sigma} : \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \longrightarrow \mathfrak{g}^{ab}$, que resulta ser el inverso de $\bar{i}$. □

Teorema 2.2.6. *Dada una k-álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $H_1(\mathfrak{g},k) \cong \mathfrak{g}^{ab}$.*

Demostración. De la sucesión exacta (2.2) y del Lema 2.2.5 se deducen los siguientes isomorfismos

$$H_1(\mathfrak{g},k) \cong \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} k \cong \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{J}\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cong \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \cong \mathfrak{g}^{ab}.$$

□

Corolario 2.2.7. *Dada una k-álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y un $\mathfrak{g}$-módulo trivial M, $H_1(\mathfrak{g},M) \cong \mathfrak{g}^{ab} \otimes_k M$.*

Demostración. Como $M = M_{\mathfrak{g}}$, de (2.2) obtenemos que

$$H_1(\mathfrak{g},M) \cong \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} M \cong (\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} k) \otimes_k M \cong \mathfrak{g}^{ab} \otimes_k M.$$

□

Para dar una descripción de los grupos de cohomología, fijemos un $\mathfrak{g}$-módulo M y apliquemos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(-,M)$ a la sucesión exacta (2.1). De ello resulta que

$$H^n(\mathfrak{g},M) \cong \mathrm{Ext}^{n-1}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(\mathcal{J},M) \text{ si } n \geq 2$$

y la sucesión exacta de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos

$$0 \longrightarrow M^{\mathfrak{g}} \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{J},M) \longrightarrow H^1_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g},M) \longrightarrow 0. \tag{2.3}$$

De esta sucesión exacta se deduce que

$$H^1(\mathfrak{g},M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{J},M)/\alpha(M).$$

Veremos que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{J},M)$ es isomorfo a $\mathrm{Der}(\mathfrak{g},M)$ y daremos una caracterización de $\mathrm{Im}(\alpha)$.

Definición 2.2.8. Dado un $\mathfrak{g}$-módulo M y un elemento $m \in M$, definimos $D_m \in \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g},M)$ como $D_m(x) := xm$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. El morfismo D_m resulta una derivación ya que $D_m([x,y]) = [x,y]m = x(ym) - y(xm)$. Notaremos $\mathrm{Der}_{\mathrm{Inn}}(\mathfrak{g},M)$ al k-submódulo de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g},M)$ formado por las derivaciones de la forma D_m con $m \in M$, a las que llamaremos *derivaciones interiores.*

Lema 2.2.9. *Los k-módulos $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{J},M)$ y $\mathrm{Der}(\mathfrak{g},M)$ son naturalmente isomorfos.*

Demostración. Dado $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{J},M)$, le asignamos el morfismo $D_\varphi \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g},M)$ definido por $D_\varphi(x) := \varphi(i(x))$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Si $x,y \in \mathfrak{g}$, $D_\varphi([x,y]) = \varphi(i(x)) = \varphi(xy - yx) = x\varphi(y) - y\varphi(x) = xD_\varphi(y) - yD_\varphi(x)$.

Dada $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g},M)$ consideramos el morfismo $\hat{\varphi} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_k \mathfrak{g} \longrightarrow M$ definido por $\hat{\varphi}(u \otimes x) := uD(x)$. Como D es una derivación, resulta $\hat{\varphi}(u \otimes [x,y] - ux \otimes y + uy \otimes x) = 0$ y por lo tanto existe un morfismo inducido $f : \mathcal{J} \longrightarrow M$ definido por $f(x_0 \cdots x_n) = x_0 \cdots x_{n-1} D(x_n)$. Es claro que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{J},M)$.

Estas asignaciones son morfismos de k-módulos mutuamente inversos. □

Teorema 2.2.10. *Dado un $\mathfrak{g}$-módulo M, resulta $H^1(\mathfrak{g}, M) \cong \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, M)/\mathrm{Der}_{\mathrm{Inn}}(\mathfrak{g}, M)$.*

Demostración. Para probar este resultado basta verificar que $\mathrm{Im}(\alpha) \cong \mathrm{Der}_{\mathrm{Inn}}(\mathfrak{g}, M)$. Siguiendo la construcción de la sucesión exacta (2.3), puede verse que α se factoriza como

$$M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{J}, M),$$

donde la primera flecha es la que a cada $m \in M$ le asigna el morfismo de $\mathfrak{g}$-módulos φ_m que cumple $\varphi_m(1) = m$ y la segunda es la restricción a $\mathcal{J}$. Por el isomorfismo del lema anterior, podemos identificar el subconjunto $\alpha(M)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{J}, M)$ con $\mathrm{Der}_{\mathrm{Inn}}(\mathfrak{g}, M)$: dado $m \in M$ y $x \in \mathfrak{g}$, resulta $D_{\alpha(m)}(x) = D_{\varphi_m}(x) = \varphi_m(i(x)) = xm = D_m(x)$. □

2.2.1 La resolución de Chevalley-Eilenberg

Dada una k-álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ libre como k-módulo, podemos utilizar la resolución de Chevalley-Eilenberg, que es una resolución de k como $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo trivial, para calcular sus grupos de homología y cohomología.

De aquí en más, $\mathfrak{g}$ será un k-módulo libre.

Definición 2.2.11. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define la *n-ésima potencia exterior* de $\mathfrak{g}$ como $\bigwedge^n \mathfrak{g} := \mathfrak{g}^{\otimes n}/J$, donde J es el submódulo generado por los elementos de la forma $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - (-1)^{\sigma(n)} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$. Notaremos con $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ a la clase de $x_1| \cdots |x_n$ y por convención, $\bigwedge^0 \mathfrak{g} = k$.

Observación 2.2.12. Si $\{e_i\}_{i \in I}$ es una base ordenada de $\mathfrak{g}$ como k-módulo, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} : i_j \in I\}$ es una base de $\mathfrak{g}^{\otimes n}$ como k-módulo. Además, el conjunto $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} : i_1 < \cdots < i_n, i_j \in I\}$ resulta una k-base de $\bigwedge^n \mathfrak{g}$.

Definición 2.2.13. Se define el *complejo de Chevalley-Eilenberg* de la siguiente manera

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^3 \mathfrak{g} \xrightarrow{d_2} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^2 \mathfrak{g} \xrightarrow{d_1} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \xrightarrow{d_0} \mathcal{U}(\mathfrak{g}), \qquad (C_\bullet)$$

con los diferenciales dados por

$$d_n(u \otimes x_0 \wedge \cdots \wedge x_n) = \theta_1 + \theta_2,$$

donde

$$\begin{aligned} \theta_1 &:= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i u x_i \otimes x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots x_n, \\ \theta_2 &:= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge x_0 \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_n. \end{aligned}$$

Proposición 2.2.14. *El complejo de Chevalley-Eilenberg es un complejo de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos libres.*

Demostración. Veamos primero que es un complejo, es decir, que $d \circ d = 0$. Para simplificar la notación, si $i < j$ escribiremos $\hat{x}_i : \hat{x}_j$ en lugar de $x_0 \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_n$, y análogamente, si $i < j < k$ escribiremos $\hat{x}_i : \hat{x}_j : \hat{x}_k$ y si $i < j < k < l$ escribiremos $\hat{x}_i : \hat{x}_j : \hat{x}_k : \hat{x}_l$. También notaremos

$$\begin{aligned} d(\theta_1) &= \theta_{1,1} + \theta_{1,2}, \\ d(\theta_2) &= \theta_{2,1} + \theta_{2,2}. \end{aligned}$$

Resulta entonces que

$$d \circ d(u \otimes x_0 \wedge \cdots \wedge x_n) = \theta_{1,1} + \theta_{1,2} + \theta_{2,1} + \theta_{2,2}.$$

Analicemos cada sumando por separado,

$$\begin{aligned}
\theta_{1,1} &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left[\sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k u x_i x_k \otimes \hat{x}_k : \hat{x}_i + \sum_{k=i+1}^{n} (-1)^{k-1} u x_i x_k \otimes \hat{x}_i : \hat{x}_k \right] \\
&= \sum_{k<i} (-1)^{i+k} u x_i x_k \otimes \hat{x}_k : \hat{x}_i + \sum_{i<k} (-1)^{k+i-1} u x_i x_k \otimes \hat{x}_i : \hat{x}_k \\
&= \sum_{i<k} (-1)^{i+k} u x_k x_i \otimes \hat{x}_i : \hat{x}_k - \sum_{i<k} (-1)^{k+i} u x_i x_k \otimes \hat{x}_i : \hat{x}_k \\
&= \sum_{i<k} (-1)^{i+k} u [x_k : x_i] \otimes \hat{x}_i : \hat{x}_k. \\
\theta_{1,2} &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i-2} \sum_{k=j+1}^{i-1} (-1)^{j+k+i} u x_i \otimes [x_j : x_k] \wedge \hat{x}_j : \hat{x}_k : \hat{x}_i \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=i+1}^{n} (-1)^{j+k+i-1} u x_i \otimes [x_j : x_k] \wedge \hat{x}_j : \hat{x}_i : \hat{x}_k \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} (-1)^{j+k+i} u x_i \otimes [x_j : x_k] \wedge \hat{x}_i : \hat{x}_j : \hat{x}_k.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\theta_{2,1} =&\theta_1\left(\sum_{i<j}(-1)^{i+j}u\otimes[x_i,x_j]\wedge\hat{x}_i:\hat{x}_j\right)\\
=&\sum_{i<j}(-1)^{i+j-1}u[x_i:x_j]\otimes\hat{x}_i:\hat{x}_j\\
&+\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=i+1}^{k-1}(-1)^{i+j+k+1}ux_k\otimes[x_i,x_j]\wedge\hat{x}_i:\hat{x}_j:\hat{x}_k\\
&+\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=k+1}^{n}(-1)^{i+j+k}ux_k\otimes[x_i,x_j]\wedge\hat{x}_i:\hat{x}_k:\hat{x}_j\\
&+\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k+1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{i+j+k+1}ux_k\otimes[x_i,x_j]\wedge\hat{x}_k:\hat{x}_i:\hat{x}_j
\end{aligned}
$$

De estas igualdades se deduce que $\theta_{1,1}+\theta_{1,2}+\theta_{2,1}=0$. Veamos que $\theta_{2,2}=0$.

$$
\begin{aligned}
\theta_{2,2} =& \sum_{i<j<k}(-1)^{i+j+k}u\otimes[[x_i,x_j],x_k]\wedge\hat{x}_i:\hat{x}_j:\hat{x}_k\\
&+\sum_{i<k<j}(-1)^{i+j+k-1}u\otimes[[x_i,x_j],x_k]\wedge\hat{x}_i:\hat{x}_k:\hat{x}_j\\
&+\sum_{k<i<j}(-1)^{i+j+k}u\otimes[[x_i,x_j],x_k]\wedge\hat{x}_k:\hat{x}_i:\hat{x}_j\\
&+\sum_{k<l<i<j}(-1)^{i+j}(-1)^{k+l}u\otimes[x_k:x_l]\wedge[x_i,x_j]\wedge\hat{x}_k:\hat{x}_l:\hat{x}_i:\hat{x}_j\\
&+\sum_{k<i<l<j}(-1)^{i+j}(-1)^{k+l-1}u\otimes[x_k:x_l]\wedge[x_i,x_j]\wedge\hat{x}_k:\hat{x}_i:\hat{x}_l:\hat{x}_j\\
&+\sum_{k<i<j<l}(-1)^{i+j}(-1)^{k+l}u\otimes[x_k:x_l]\wedge[x_i,x_j]\wedge\hat{x}_k:\hat{x}_i:\hat{x}_j:\hat{x}_l\\
&+\sum_{i<k<l<j}(-1)^{i+j}(-1)^{k+l}u\otimes[x_k:x_l]\wedge[x_i,x_j]\wedge\hat{x}_i:\hat{x}_k:\hat{x}_l:\hat{x}_j\\
&+\sum_{i<k<j<l}(-1)^{i+j}(-1)^{k+l-1}u\otimes[x_k:x_l]\wedge[x_i,x_j]\wedge\hat{x}_i:\hat{x}_k:\hat{x}_j:\hat{x}_l\\
&+\sum_{i<j<k<l}(-1)^{i+j}(-1)^{k+l}u\otimes[x_k:x_l]\wedge[x_i,x_j]\wedge\hat{x}_i:\hat{x}_j:\hat{x}_k:\hat{x}_l.
\end{aligned}
$$

Las tres primeras sumatorias se cancelan entre sí por la identidad de Jacobi. En cuanto a las últimas seis, reordenando los índices y utilizando la antisimetría de $\bigwedge^n\mathfrak{g}$, se puede ver que la cuarta sumatoria se cancela con la novena, la quinta con la octava y la sexta con la séptima.

Como $\bigwedge^n \mathfrak{g}$ es un k-módulo libre, existe un conjunto I tal que $\bigwedge^n \mathfrak{g} \cong k^{(I)}$ como k-módulos. Resulta entonces que $\bigwedge^n \mathfrak{g} \otimes_k \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cong k^{(I)} \otimes_k \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{(I)}$ como $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulos, es decir, $\bigwedge^n \mathfrak{g} \otimes_k \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ módulo libre. □

Proposición 2.2.15. *El complejo $(C_\bullet, d_\bullet)$ es una resolución libre de k como $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo.*

Demostración. Para probar que es una resolución es necesario ver que el complejo

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^3 \mathfrak{g} \xrightarrow{d_2} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^2 \mathfrak{g} \xrightarrow{d_1} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \xrightarrow{d_0} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\varepsilon} k$$

es exacto. Una prueba de este hecho puede encontrarse en [CE56], Capítulo XIII, Sección 7. Notemos que ya probamos en la demostración anterior que cada C_n es libre como $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo. □

Corolario 2.2.16. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie de dimensión n. Dado $m \in \mathbb{N}$, m mayor que n,*

$$H^m_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, -) = H_m^{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, -) = 0.$$

Demostración. Como $\bigwedge^m \mathfrak{g} = 0$ para todo m mayor que n, el complejo de Chevalley-Eilenberg se anula a partir del término n-ésimo. □

Corolario 2.2.17. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y sea M un $\mathfrak{g}$-módulo. El k-módulo graduado $H^\bullet_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, M)$ es la cohomología del complejo*

$$\cdots \longleftarrow \mathrm{Hom}_k(\wedge^2 \mathfrak{g}, M) \xleftarrow{\delta_1} \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}, M) \xleftarrow{\delta_0} M \longleftarrow 0 \tag{2.4}$$

cuyos diferenciales están dados por

$$\begin{aligned} \delta_n(f)(x_0 \wedge \cdots \wedge x_n) = & \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i \cdot f(x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_n) \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j] \wedge x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_n). \end{aligned}$$

Demostración. Como $H^\bullet_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, M) \cong \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(k, M)$, basta con aplicar $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(-, M)$ a la resolución de Chevalley-Eilenberg e identificar de forma natural $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^\bullet \mathfrak{g}, M)$ con $\mathrm{Hom}_k(\bigwedge^\bullet \mathfrak{g}, M)$. □

2.2.2 Extensiones y cohomología en grado 2

En esta sección daremos una caracterización de $H^2_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, M)$ en términos de extensiones.

Definición 2.2.18. Sean $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y M una k-álgebra de Lie abeliana. Una *extensión de $\mathfrak{g}$ por M* es una sucesión exacta corta de álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} \mathfrak{n} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0. \tag{2.5}$$

Definición 2.2.19. Sean $0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathfrak{n}_1 \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$ y $0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathfrak{n}_2 \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$ dos extensiones de $\mathfrak{g}$ por M. Diremos que estas extensiones son *equivalentes* si existe un isomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{n}_1 \cong \mathfrak{n}_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] & \mathfrak{n}_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\cong"] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_2"] & \mathfrak{n}_2 \arrow[r, "\pi_2"] & \mathfrak{g} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Observación 2.2.20. Bajo las condiciones de la Definición 2.2.18, podemos darle a M una estructura de $\mathfrak{g}$-módulo de la siguiente forma. Si $x \in \mathfrak{g}$, $m \in M$ e y es una preimagen por π de x, definimos $x * m := i^{-1}([i(m), y])$. Dado que $\pi([i(m), y]) = [\pi(i(m)), y] = [0, y] = 0$, el elemento $[i(m), y]$ pertenece a la imagen de i. Además, como i es un monomorfismo, es un isomorfismo con su imagen. Y si $y_1, y_2 \in \mathfrak{n}$ son dos preimágenes de x, entonces $y_1 - y_2 \in \mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Im}(i)$. Eligiendo $n \in M$ tal que $i(n) = y_1 - y_2$ resulta $[i(m), y_1 - y_2]) = [i(m), i(n)] = i([m, n]) = 0$ pues M es abeliana.

Definición 2.2.21. Sean $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie, M un $\mathfrak{g}$-módulo, que consideraremos también k-álgebra de Lie abeliana, y sea $0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$ una extensión de $\mathfrak{g}$ por M. Diremos que la extensión es *compatible con M* si la estrucura de $\mathfrak{g}$-módulo en M que induce la extensión coincide con la estructura de $\mathfrak{g}$-módulo dada.

Proposición 2.2.22. *Sea M un $\mathfrak{g}$-módulo. La extensión $0 \longrightarrow M \longrightarrow M \rtimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$ es compatible con M.*

Demostración. Dados $x \in \mathfrak{g}$ y $m \in M$, basta observar que $\pi(0, x) = x$, $i(m) = (m, 0)$ y $x * m = i^{-1}([(m, 0), (0, x)]) = i^{-1}(x \cdot m, 0) = x \cdot m$. □

A esta extensión la llamaremos *extensión trivial* de $\mathfrak{g}$ por M.

Proposición 2.2.23. *Sean M un $\mathfrak{g}$-módulo y $E : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} \mathfrak{n} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$ una extensión compatible de $\mathfrak{g}$ por M. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *Existe un morfismo de álgebras de Lie $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{n}$ tal que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$.*

2. *E es equivalente a la extensión trivial.*

Demostración. Supongamos que existe un morfismo de álgebras de Lie σ como en 1. Definimos $\varphi : M \rtimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{n}$ como $\varphi(m, x) := i(m) + \sigma(x)$. Veamos que φ un morfismo de álgebras de Lie. Sean $(m, x), (n, y) \in M \rtimes \mathfrak{g}$. Primero observemos que, como $\pi(\sigma(x)) = x$, $\pi(\sigma(y)) = y$ y la extensión es compatible con M, resulta que $x \cdot n = x * n = i^{-1}([i(n), \sigma(x)])$ e $y \cdot m = y * m = i^{-1}([i(m), \sigma(y)])$

$$\begin{aligned} \varphi([(m, x), (n, y)]) =& i(y \cdot m - x \cdot n) + \sigma([x, y]) \\ =& [i(m), \sigma(y)] - [i(n), \sigma(x)] + [\sigma(x), \sigma(y)] \\ =& [i(m), \sigma(y)] + [\sigma(x), i(n)] + [\sigma(x), \sigma(y)] \\ =& [i(m) + \sigma(x), i(n) + \sigma(y)] \\ =& [\varphi(m, x), \varphi(n, y)]. \end{aligned}$$

Además, φ tiene una inversa dada por $\varphi^{-1}(e) = (i^{-1}(e - \sigma \circ \pi(e)), \pi(e))$ y por lo tanto resulta un isomorfismo.

Supongamos ahora que existe un isomorfismo de álgebras de Lie $\psi : M \rtimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{n}$ tal que la extensión trivial es equivalente a E mediante ψ. Definimos $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{n}$ como $\sigma(x) := \psi(0, x)$. Es fácil ver que $\pi(\sigma(x)) = \pi\psi(0, x) = x$. □

Observación 2.2.24. Como estamos suponiendo que $\mathfrak{g}$ es libre como k-módulo, siempre existe $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{n}$ sección k-lineal. Dada una de estas secciones, se verifica que

$$\pi \circ \sigma([x, y]) = [x, y] = [\pi(\sigma(x)), \pi(\sigma(y))] = \pi([\sigma(x), \sigma(y)]),$$

es decir, que

$$\sigma([x, y]) - [\sigma(x), \sigma(y)] \in \operatorname{Ker}(\pi) = \operatorname{Im}(i).$$

Podemos definir entonces $\chi_\sigma : \bigwedge^2 \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ como

$$\chi_\sigma(x \wedge y) = i^{-1}(\sigma([x, y]) - [\sigma(x), \sigma(y)]).$$

Notemos que si σ además de ser una sección k-líneal es una sección de k-álgebras de Lie, resulta que $\chi_\sigma = 0$.

Proposición 2.2.25. *Dadas* $E : 0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$ *una extensión compatible de* $\mathfrak{g}$ *por* M, $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{n}$ *una sección* k*-líneal,* χ_σ *definido en la observación anterior y los diferenciales del complejo* (2.4)*, valen las siguientes afirmaciones.*

1. $\chi_\sigma \in \operatorname{Ker}(\delta_2)$.
2. *Si* $\sigma' : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{n}$ *es otra sección* k*-líneal, entonces* $\chi_\sigma - \chi_{\sigma'} \in \operatorname{Im}(\delta_1)$.

Demostración. 1. Veremos primero que $i \circ \delta_2(\chi_\sigma) = 0$. Como i es un monomorfismo, esto implicará que $\delta_2(\chi_\sigma) = 0$.

$$\begin{aligned} i(\delta_2(\chi_\sigma)(x \wedge y \wedge z)) =& i(x * \chi_\sigma(y \wedge z) - y * \chi_\sigma(x \wedge z) + z * \chi_\sigma(x \wedge y)] \\ & - \chi_\sigma([x, y] \wedge z) + \chi_\sigma([x, z] \wedge y) - \chi_\sigma([y, z] \wedge x) \\ =& [\sigma([y, z]), \sigma(x)] - [[\sigma(y), \sigma(z)], \sigma(x)] \\ & - [\sigma([x, z]), \sigma(y)] + [[\sigma(x), \sigma(z)], \sigma(y)] \\ & + [\sigma([x, y]), \sigma(z)] - [[\sigma(x), \sigma(y)], \sigma(z)] \\ & + \sigma([[x, y], z]) - \sigma([[y, z], x]) + \sigma([[x, z], y]) \\ & - [\sigma([x, y]), \sigma(z)] - [\sigma([y, z]), \sigma(x)] + [\sigma([x, z]), \sigma(y)]. \end{aligned}$$

Algunos términos se cancelan trivialmente, y los restantes se anulan debido a la identidad de Jacobi.

2. Dado $x \in \mathfrak{g}$, como $\pi(\sigma(x)) = \pi(\sigma'(x)) = x$, existe $\beta(x) \in M$ tal que $\sigma'(x) = \sigma(x) + i(\beta(x))$. Como i es monomorfismo, $\beta : \mathfrak{g} \longrightarrow M$ así definido resulta k-líneal.

   Dados $x, y \in \mathfrak{g}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\chi_\sigma(x \wedge y) - \chi_{\sigma'}(x \wedge y) =& i^{-1}(\sigma([x,y]) - [\sigma(x), \sigma(y)] - \sigma'([x,y]) + [\sigma'(x), \sigma'(y)])\\ =& i^{-1}(-i(\beta([x,y])) + [\sigma(x), i(\beta(y))] + [i(\beta(x)), \sigma(y)]\\ =& -\beta[x,y] - x * \beta(y) + y * \beta(x) = -\delta_1(\beta)(x \wedge y).\end{aligned}$$

   Aquí usamos una vez más que M es un álgebra de Lie abeliana. □

Corolario 2.2.26. *Existe una aplicación*

$$\Psi : \{\textit{Extensiones compatibles de } \mathfrak{g} \textit{ por } M\} \longrightarrow H^2_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, M)$$

que asigna a cada extensión la clase de χ_σ en $H^2_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, M)$, para alguna sección k-lineal σ.

Observación 2.2.27. Si $E_i : 0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathfrak{n}_i \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$, $i = 1, 2$ son dos extensiones equivalentes provistas de secciones k-lineales σ_1 y σ_2 respectivamente, entonces existe un isomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{n}_1 \longrightarrow \mathfrak{n}_2$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] & \mathfrak{n}_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[l, bend right, "\sigma_1"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_2"] & \mathfrak{n}_2 \arrow[r, "\pi_2"] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\sigma_2"] & 0. \end{tikzcd}$$

Notemos que $\varphi^{-1}\sigma_2$ es otra sección k-lineal de E_1, y de la Proposición 2.2.25 se deduce que las clases en $H^2_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, M)$ de χ_{σ_1} y $\chi_{\varphi^{-1}\sigma_2}$ coinciden.

Además, de la conmutatividad del diagrama resulta que

$$\begin{aligned}\chi_{\sigma_2}(x \wedge y) - \chi_{\varphi^{-1}\sigma_2}(x \wedge y) =& i_2^{-1}(\sigma_2([x,y]) - [\sigma_2(x), \sigma_2(y)])\\ &- i_1^{-1}(\varphi^{-1}\sigma_2([x,y]) - [\varphi^{-1}\sigma_2(x), \varphi^{-1}\sigma_2(y)])\\ =& i_2^{-1}(\sigma_2([x,y]) - [\sigma_2(x), \sigma_2(y)])\\ &- i_1^{-1}\varphi^{-1}(\sigma_2([x,y]) - [\sigma_2(x), \sigma_2(y)]) = 0.\end{aligned}$$

Como extensiones equivalentes dan origen a 2-cociclos χ_{σ_1} y χ_{σ_2} tales que $\bar{\chi}_{\sigma_1} = \bar{\chi}_{\sigma_2}$ en $H^2_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, M)$, la aplicación Ψ defininida en el corolario anterior pasa al cociente por esta relación de equivalencia. Obtenemos entonces una aplicación

$$\tilde{\Psi} : \left\{\begin{matrix}\text{Clases de extensiones}\\ \text{compatibles de } \mathfrak{g} \text{ por } M\end{matrix}\right\} \longrightarrow H^2_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, M).$$

El objetivo ahora será ver que $\tilde{\Psi}$ es biyectiva.

Proposición 2.2.28. (Inyectividad de $\tilde{\Psi}$) *Dadas dos extensiones compatibles de* $\mathfrak{g}$ *por* M*,* $E_i : 0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathfrak{n}_i \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$*,* $i = 1, 2$ *y secciones* k*-lineales* $\sigma_i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{n}_i$ *tales que* $\bar{\chi}_{\sigma_1}$ *y* $\bar{\chi}_{\sigma_2}$ *coinciden en* $H^2_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, M)$*, resulta que* E_1 *es equivalente a* E_2*.*

Demostración. Sea $\beta : \mathfrak{g} \longrightarrow M$ un morfismo que cumple que $\chi_{\sigma_2} = \chi_{\sigma_1} + \delta_1(\beta)$. Si definimos $\tilde{\sigma}_1 := \sigma_1 + i_1 \circ \beta$, se verifica que $\pi_1\tilde{\sigma}_1 = \pi_1\sigma_1 = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. Además, resulta que $\chi_{\tilde{\sigma}_1} = \chi_{\sigma_1} + \delta_1(\beta) = \chi_{\sigma_2}$, y por lo tanto podemos suponer que no solo las clases de χ_{σ_1} y χ_{σ_2} son iguales en el grupo de cohomología, sino que $\chi_{\sigma_1} = \chi_{\sigma_2}$. Notaremos simplemente χ a este elemento.

Daremos una estructura de álgebra de Lie a $M \oplus \mathfrak{g}$ que dependerá solo de χ y hará que

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow (M \oplus \mathfrak{g})_\chi \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

sea equivalente a E_1 y a E_2.

Sea $\psi_1 : \mathfrak{n}_1 \longrightarrow M \oplus \mathfrak{g}$ el isomorfismo k-lineal dado por

$$\psi_1(e) = (i_1^{-1}(e - \sigma_1 \circ \pi_1(e)), \pi_1(e)),$$

cuya inversa es

$$\psi_1^{-1}(m, x) = i_1(m) + \sigma_1(x).$$

Dando a $M \oplus \mathfrak{g}$ la estructura de álgebra de Lie que hace de ψ_1 un isomorfismo de álgebras de Lie, es decir

$$\begin{aligned}
[(m, x), (n, y))]_\chi :=& \varphi_1([\psi_1^{-1}(m, x), \psi_1^{-1}(n, y)]) \\
=& \psi_1([i_1(m) + \sigma_1(x), i_1(n) + \sigma_1(y)]) \\
=& \psi_1(i_1(y \cdot m - x \cdot n) + [\sigma_1(x), \sigma_1(y)]) \\
=& (y \cdot m - x \cdot n, 0) + \psi_1([\sigma_1(x), \sigma_1(y)]) \\
=& (y \cdot m - x \cdot n, 0) + i^{-1}([\sigma_1(x), \sigma_1(y)] - \sigma_1([x, y]), [x, y]) \\
=& (y \cdot m - x \cdot n - \chi(x \wedge y), [x, y]).
\end{aligned}$$

Obtenemos isomorfismos $\mathfrak{n}_1 \cong \mathfrak{n}_2 \cong (M \oplus \mathfrak{g})_\chi$ de álgebras de Lie. Además, dados $e \in \mathfrak{n}_1$ y $m \in M$ vale que

$$\pi_2 \circ \psi_2^{-1} \circ \psi_1(e) = \pi_1(e)$$

y que

$$\psi_2^{-1} \circ \psi_1 \circ i_1(m) = i_2(m).$$

Por lo tanto E_1 es equivalente a E_2. □

Proposición 2.2.29. *La aplicación* $\tilde{\Psi}$ *definida en la Observación 2.2.27 es sobreyectiva.*

Demostración. Sea $\chi \in \mathrm{Ker}(\delta_2)$. Como en la demostración anterior, daremos una estructura de álgebra de Lie conveniente a $M \oplus \mathfrak{g}$. Definimos en este k-módulo el corchete

$$[(m, x), (n, y))]_\chi := (y \cdot m - x \cdot n - \chi(x \wedge y), [x, y]).$$

Sean $i : M \longrightarrow M \oplus \mathfrak{g}$ y $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow M \oplus \mathfrak{g}$ las inclusiones y $\pi : M \oplus \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ la proyección en la segunda coordenada. Es claro que σ es una sección k-lineal de π y se verifica que

$$\chi_\sigma(x \wedge y) = i^{-1}((0, [x, y]) - [(0, x), (0, y)]) = i^{-1}(\chi(x \wedge y), 0) = \chi(x \wedge y).$$

Por lo tanto, $\chi = \tilde{\Psi}(0 \longrightarrow M \longrightarrow (M \oplus \mathfrak{g})_\chi \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0)$. □

De las últimas dos proposiciones se deduce el siquiente teorema.

Teorema 2.2.30. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie libre como k-módulo y sea M un $\mathfrak{g}$-módulo. El segundo grupo de cohomología de $\mathfrak{g}$ con coeficientes en M, $H^2_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, M)$, está en biyección con las clases de equivalencia de las extensiones compatibles de $\mathfrak{g}$ por M.*

2.3 Álgebras de Lie complejas de dimensión 4

En esta sección listaremos las $\mathbb{C}$-álgebras de dimensión 4. Un algoritmo utilizado para realizar su clasificación puede consultarse en [Aga02].

Teorema 2.3.1. *Sea $\mathfrak{g}$ una $\mathbb{C}$-álgebra de Lie de dimensión 4. Existe una $\mathbb{C}$-base $\{x, y, z, w\}$ de $\mathfrak{g}$ en la cual la expresión de los corchetes no nulos entre x, y, z y w es alguna de las indicadas en la siguiente tabla. La primera columna indica el nombre con el cual es conocida el álgebra correspondiente a los corchetes de la segunda columna.*

L_0				
L_1	$[x, y] = z$			
L_2	$[x, y] = z,$	$[x, z] = w$		
L_3	$[x, y] = y,$	$[x, z] = z,$	$[x, w] = w$	
$L_4(\alpha)$	$[x, y] = y,$	$[x, z] = z,$	$[x, w] = z + \alpha w$	
$L_4(\infty)$	$[x, y] = y$			
L_5	$[x, y] = y,$	$[x, z] = z,$	$[x, w] = 2w,$	$[y, z] = w$
L_6	$[x, y] = y,$	$[x, z] = -z,$	$[y, z] = x$	
$L_7(\alpha, \beta)$	$[x, y] = y,$	$[x, z] = y + \alpha z,$	$[x, w] = z + \beta w$	
$L_8(\alpha)$	$[x, y] = y,$	$[x, z] = y + \alpha z,$	$[x, w] = (\alpha + 1)w,$	$[y, z] = w$
L_9	$[x, y] = y,$	$[z, w] = w$		

Esta forma de describir las álgebras de Lie es conocida como *forma normal.*

Capítulo 3

Homología de Hochschild y deformaciones

A lo largo de este capítulo k será un anillo conmutativo con unidad y A será una k-álgebra asociativa. Escribiremos $|$ o $\otimes$ para referirnos a $\otimes_k$.

3.1 Homología y cohomología de Hochschild

Definición 3.1.1. Dada una k-álgebra asociativa A se define su *álgebra envolvente* como $A^e = A \otimes_k A^{\mathrm{op}}$, donde A^{op} indica al álgebra opuesta de A. El producto en A^e está dado por $(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes db$.

Observación 3.1.2. Dadas dos k-álgebras asociativas A y B, tener un A-B-bimódulo M es lo mismo que tener un $A \otimes B^{\mathrm{op}}$-módulo ya que si M es un k-módulo que además tiene estructura de A-B-bimódulo, m es un elemento de M, $a \in A$ y $b \in B$, se puede definir $(a \otimes b) \cdot m := (a * m) * b = a * (m * b)$ y así M resulta un $A \otimes B^{\mathrm{op}}$-módulo a izquierda.

Recíprocamente, si M es un $A \otimes B^{\mathrm{op}}$-módulo a izquierda, m es un elemento de M, $a \in A$ y $b \in B$, definimos estructuras de A-módulo a izquierda y B-módulo a derecha como $a*m = (a \otimes 1_{\mathrm{B}}) \cdot m$ y $m*b := (1_{\mathrm{A}} \otimes b) \cdot m$. Es fácil verificar que estas dos estructuras son compatibles y que M resulta un A-B-bimódulo.

En particular, esto nos da una manera de identificar la categoría de A-A-bimódulos con la categoría de A^e-módulos. Por lo tanto, siendo una categoría de módulos, tiene suficientes objetos proyectivos.

Definición 3.1.3. Dado un A-bimódulo M se definen la *homología* y *cohomología* de Hochschild de A con coeficientes en M como

$$H_\bullet(A, M) := \mathrm{Tor}_\bullet^{A^e}(A, M) \qquad\qquad H^\bullet(A, M) := \mathrm{Ext}^\bullet_{A^e}(A, M).$$

En el caso en que $M = A$, la homología y la cohomología de Hochschild se suelen notar con $HH_\bullet(A)$ y $HH^\bullet(A)$ respectivamente.

Si miramos a A como A^e-módulo, siempre existe la siguiente resolución libre.

Definición 3.1.4. Dada A una k-álgebra asociativa, se puede definir el *complejo Bar* de A^e-módulos

$$\cdots \longrightarrow A|A^{\otimes 3}|A \xrightarrow{b'_2} A|A^{\otimes 2}|A \xrightarrow{b'_1} A|A|A \xrightarrow{b'_0} A|A \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0. \tag{3.1}$$

donde μ es la multiplicación en A y dado n, b'_n está dado por

$$\begin{aligned} b'_n(1|a_0|\cdots|a_n|1) &= a_0|\cdots|a_n|1 \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}1|a_0|\cdots|a_ia_{i+1}|\cdots|a_n|1 + (-1)^{n+1}1|a_0|\cdots|a_n. \end{aligned}$$

Proposición 3.1.5. *El complejo Bar es una resolución libre de A como A-bimódulo.*

Demostración. Se puede encontrar una demostración de este hecho en [CE56], Capítulo IX, Sección 6. □

Utilizando la resolución Bar describiremos los complejos cuya homología y cohomología es la de Hochschild.

Para calcular la homología, dado un A^e-módulo M, aplicamos el funtor $- \otimes_{A^e} M$ a (3.1). Identificando de forma natural $A|A^{\otimes n}|A \otimes_{A^e} M$ con $A^{\otimes n}|A^e \otimes_{A^e} M$, y luego este último con $A^{\otimes n}|M$, resulta el complejo

$$\cdots \longrightarrow A^{\otimes 3}|M \xrightarrow{b_2} A^{\otimes 2}|M \xrightarrow{b_1} A|M \xrightarrow{b_0} M \longrightarrow 0, \tag{$A^{\otimes\bullet}|M$}$$

cuyos diferenciales son

$$\begin{aligned} &b_n(a_0|\cdots|a_n|m) = \\ &a_1|\cdots|a_n|ma_0 + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}a_0|\cdots|a_ia_{i+1}|\cdots|m + (-1)^{n+1}a_0|\cdots|a_{n-1}|a_nm. \end{aligned}$$

Por otra parte, dado un A^e-módulo M, aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, M)$ a la resolución Bar. Identificando $\mathrm{Hom}_{A^e}(A|A^{\otimes n}|A, M)$ con $\mathrm{Hom}_{A^e}(A^e|A^{\otimes n}, M)$ y este último con $\mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, M)$ obtenemos el complejo

$$\cdots \xleftarrow{\delta_2} \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes 2}, M) \xleftarrow{\delta_1} \mathrm{Hom}_k(A, M) \xleftarrow{\delta_0} M \longleftarrow 0, \tag{$\mathrm{Hom}_k(A^{\otimes\bullet}, M)$}$$

cuyos diferenciales están dados por

$$\delta_0(m)(a) = am - ma,$$

y si n es mayor o igual que 1,

$$\begin{aligned} &\delta_n(f)(a_0|\cdots|a_n) = \\ &a_0f(a_1|\cdots|a_n) + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}f(a_0|\cdots|a_ia_{i+1}|\cdots|a_n) + (-1)^{n+1}f(a_0|\cdots|a_{n-1})a_n. \end{aligned}$$

Puede definirse en $\bigoplus_{i=0}^{\infty}\mathrm{Hom}_k(A^{\otimes i}, A)$ un producto que hace de $\mathrm{Hom}_k(A^{\otimes\bullet}, A)$ un álgebra diferencial graduada.

Definición 3.1.6. Dados $n, m \in \mathbb{N}$ y elementos homogéneos $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, A)$ y $\psi \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes m}, A)$, el *producto cup* entre φ y ψ es el elemento $\varphi \smile \psi \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes(n+m)}, A)$ definido por

$$\varphi \smile \psi(a_1 \cdots |a_n|a_{n+1}| \cdots |a_m) = \varphi(a_1| \cdots |a_n)\psi(a_{n+1}| \cdots |a_m).$$

Lema 3.1.7. *Sean* $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, A)$ *y* $\psi \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes m}, A)$. *El producto cup satisface*

$$\delta_{n+m}(\varphi \smile \psi) = \delta_n(\varphi) \smile \psi + (-1)^{nm}\varphi \smile \delta_m(\psi).$$

Demostración. Basta simplemente con calcular $\delta_{n+m}(\varphi \smile \psi)$. □

Este producto induce una estructura de k-álgebra graduada en la cohomología de Hochschild. También puede definirse en $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes i}, A)$ una estructura de álgebra de Lie de la siguiente manera.

Definición 3.1.8. Dados $n, m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, A)$ y $g \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes m}, A)$, se define el *asociador* entre f y g, $f \circ g \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes(n+m-1)}, A)$ como

$$\begin{aligned} &f \circ g(a_1| \cdots |a_{n+m-1}) \\ &\qquad = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i-1)(m-1)} f(a_1| \cdots |a_{i-1}|g(a_i| \cdots |a_{i+m-1})|a_{i+m}| \cdots |a_{m+n-1}) \end{aligned}$$

y el *corchete de Gerstenhaber* como

$$[f, g] = f \circ g - (-1)^{(n-1)(m-1)} g \circ f.$$

Lema 3.1.9. *Dados* $n, m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, A)$ *y* $g \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes m}, A)$, *vale la siguiente igualdad*

$$\delta(f \circ g) = f \circ \delta(g) + (-1)^{m-1}\delta(f) \circ (g) + (-1)^{m-1}(g \smile f - (-1)^{nm} f \smile g).$$

Demostración. Como en el lema anterior, basta realizar el cálculo. □

Las identidades de los dos últimos lemas nos serán útiles en la próxima sección.

Dado un k-espacio vectorial $\mathbb{Z}$-graduado $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$, se define $V[1]$ como

$$V[1] := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n[1]$$

donde $V_n[1] = V_{n+1}$.

Definición 3.1.10. Un *álgebra de Gerstenhaber* es un k-módulo graduado A, equipado con dos operaciones $\cdot$ y $[-,-]$ que cumplen las siquientes propiedades. Dados* La fórmula que hay al final de la página 61, línea -3, se sale del margen. $n, m, p \in \mathbb{N}$ y elementos homogéneos x, y y z de grados n, m y p respectivamente,

- El producto $x \cdot y$ es conmutativo graduado, es decir, $x \cdot y$ es homogéneo de grado $n+m$ y $x \cdot y = (-1)^{nm} y \cdot x$.
- $[-,-]$ es un corchete de Lie graduado en $A[1]$.
- $[-,z]$ es una derivación de grado $p-1$, es decir, $[x \cdot y, z] = [x,z] \cdot y + (-1)^{n(p-1)} x \cdot [y,z]$.

La cohomología de Hochschild de un álgebra A provista del producto cup y el corchete de Gerstenhaber inducido por la Definición 3.1.8 es un álgebra de Gerstenhaber.

3.1.1 Cohomología de Hochschild de álgebras envolventes de álgebras de Lie

En esta sección veremos cómo, a partir de la resolución de Chevalley-Eilenberg de un álgebra de Lie, podemos calcular la cohomología de Hochschild de su álgebra envolvente.

Se define en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ la estructura de $\mathfrak{g}$-módulo a izquierda dada por

$$x \cdot u = xu - ux$$

para $x \in \mathfrak{g}$ y $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Esta acción así definida se llama *acción adjunta* y cuando consideremos a $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ con esta acción lo notaremos $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathrm{ad}}$.

Proposición 3.1.11. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y sea $A = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ su álgebra envolvente. Existen isomorfismos naturales*

$$HH_\bullet(A) \cong H_\bullet^{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, A^{\mathrm{ad}}), \qquad HH^\bullet(A) \cong H^\bullet_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, A^{\mathrm{ad}}).$$

Demostración. Daremos la prueba para la cohomología. La demostración para la homología es análoga.

Ya vimos en el Teorema 2.2.2 que $H^\bullet_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, A^{\mathrm{ad}}) \cong \mathrm{Ext}^\bullet_A(k, A^{\mathrm{ad}})$, por lo cual para probar la proposición, basta ver que $\mathrm{Ext}^\bullet_A(k, A^{\mathrm{ad}})$ es isomorfo a $\mathrm{Ext}^\bullet_{A^e}(A, A)$. Para calcular $\mathrm{Ext}^\bullet_A(k, A^{\mathrm{ad}})$ contamos con la resolución de Chevalley-Eilenberg de k, cuyos diferenciales ya describimos en el capítulo anterior

$$\cdots \longrightarrow A|\textstyle\bigwedge^3 \mathfrak{g} \xrightarrow{d_2} A|\textstyle\bigwedge^2 \mathfrak{g} \xrightarrow{d_1} A|\mathfrak{g} \xrightarrow{d_0} A \xrightarrow{\varepsilon} k \longrightarrow 0.$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(-, A^{\mathrm{ad}})$ a la resolución, obtenemos el complejo

$$\cdots \longleftarrow \mathrm{Hom}_A(A|\textstyle\bigwedge^2 \mathfrak{g}, A^{\mathrm{ad}}) \xleftarrow{\tilde{\delta}_1} \mathrm{Hom}_A(A|\mathfrak{g}, A^{\mathrm{ad}}) \xleftarrow{\tilde{\delta}_0} A^{\mathrm{ad}} \longleftarrow 0.$$

Identificando de forma natural $\mathrm{Hom}_A(A|\bigwedge^n \mathfrak{g}, A^{\mathrm{ad}})$ con $\mathrm{Hom}_k(\bigwedge^n \mathfrak{g}, A^{\mathrm{ad}})$ resulta el complejo

$$\cdots \longleftarrow \mathrm{Hom}_k(\textstyle\bigwedge^2 \mathfrak{g}, A^{\mathrm{ad}}) \xleftarrow{\delta_1} \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}, A^{\mathrm{ad}}) \xleftarrow{\delta_0} A^{\mathrm{ad}} \longleftarrow 0. \tag{3.2}$$

Si $u \in A^{\mathrm{ad}}$, $x_i \in \mathfrak{g}$ y $n \in \mathbb{N}$, los diferenciales pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
\delta_0(u)(x_0) &= x_0 \cdot u \\
\delta_n(f)(x_0 \wedge \cdots \wedge x_n) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i \cdot f(x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_n) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j] \wedge x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_n),
\end{aligned}$$

donde $\cdot$ denota la acción adjunta de $\mathfrak{g}$ en A. Por lo tanto, $\operatorname{Ext}^{\bullet}_A(k, A^{\mathrm{ad}})$ es la homología del complejo (3.2). Veremos ahora que este complejo también se puede obtener aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_{A^e}(-, A)$ a un complejo que será homotópicamente equivalente al complejo Bar, lo que implicará que sus homologías coincidirán. Para construir el complejo que buscamos, necesitaremos algunas definiciones.

Sea $S : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ la antípoda en la estructura usual de álgebra de Hopf en A. Consideremos ahora sobre A^e las siguientes estructuras de A^e-módulo a izquierda y A-módulo a derecha, respectivamente:

$$\begin{aligned}
x \otimes y \rightharpoonup a \otimes b &:= xa \otimes by, \\
a \otimes b \leftharpoonup z &:= \sum a z_1 \otimes S(z_2) b.
\end{aligned}$$

Es fácil verificar que con estas estructuras A^e resulta un A^e-A-bimódulo. Además, A^e resulta un A-módulo proyectivo (ver Lema 8 de [Whi10]). Sea $C_\bullet$ la resolución de Chevalley-Eilenberg. Como A^e es proyectivo como A-módulo a derecha, $A^e \otimes_A C_\bullet$ resulta una sucesión exacta. Si identificamos canónicamente $A^e \otimes_A A|\bigwedge^\bullet \mathfrak{g}$ con $A^e|\bigwedge^\bullet \mathfrak{g}$ y con $A|\bigwedge^\bullet \mathfrak{g}|A$, y también identificamos a $A^e \otimes_A k$ con $A^e \otimes_A (A/\operatorname{Ker}(\varepsilon))$ y con $A^e/(A^e \operatorname{Ker}(\varepsilon)) = A^e/\operatorname{Ker}(\mu) \cong A$, donde $\mu : A^e \longrightarrow A$ denota la multiplicación, la sucesión $A^e \otimes_A C_\bullet$ se transforma en

$$\cdots \longrightarrow A|\textstyle\bigwedge^3 \mathfrak{g}|A \xrightarrow{d_2} A|\textstyle\bigwedge^2 \mathfrak{g}|A \xrightarrow{d_1} A|\mathfrak{g}|A \xrightarrow{d_0} A^e \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0, \tag{3.3}$$

cuyos diferenciales son, para $n > 0$,

$$\begin{aligned}
&d_n(1|x_0 \wedge \cdots \wedge x_n|1) \\
&\qquad = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x_i|x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_n|1 - 1|x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_n|x_i) \\
&\qquad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} 1|[x_i, x_j] \wedge x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_n|1, \text{ y} \\
&d_0(1|x|1) = x|1 - 1|x.
\end{aligned}$$

Se puede verificar que al aplicar el funtor $\operatorname{Hom}_{A^e}(-, A)$ a esta resolución de A como A^e-módulo a izquierda, se obtiene el complejo (3.2), cuya homología es $\operatorname{Ext}^{\bullet}_A(k, A^{\mathrm{ad}})$.

Además, podemos comparar la resolución (3.3) de A con la resolución Bar, levantando la identidad de A en ambos sentidos

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A|\bigwedge^3\mathfrak{g}|A \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & A|\bigwedge^2\mathfrak{g}|A \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & A|\mathfrak{g}|A \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & A^e \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & A|A^{\otimes 3}|A \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\eta"] & A|A^{\otimes 2}|A \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\eta"] & A|A|A \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\eta"] & A^e \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\eta"] & A \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Las composiciones $\varphi \circ \eta$ y $\eta \circ \varphi$ son homotópicas a las respectivas identidades por ser levantados de la identidad. Por lo tanto, al aplicar $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, A)$, estos morfismos resultan mutuamente inversos a nivel homología, concluyendo la demostración. $\square$

Corolario 3.1.12. *Si $\mathfrak{g}$ es una k-álgebra de Lie de dimensión n y A es su álgebra envolvente, entonces*

$$HH^i(A) = HH_i(A) = 0$$

para todo i mayor que n.

Corolario 3.1.13. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y $A = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ su álgebra envolvente. Existe un morfismo natural de k-módulos inducido por la inclusión $i : \mathfrak{g} \longrightarrow A$*

$$H^{\bullet}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \longrightarrow HH^{\bullet}(A).$$

Demostración. La inclusión $i : \mathfrak{g} \longrightarrow A$ induce una transformación natural $i^* : F \longrightarrow G$ entre los funtores $F = \mathrm{Hom}_A(-, \mathfrak{g})$ y $G = \mathrm{Hom}_A(-, A)$. Luego, si notamos con $C_\bullet$ a la resolución de Chevalley-Eilenberg, esta transformación natural induce un morfismo de complejos $\Phi : F(C_\bullet) \longrightarrow G(C_\bullet)$ y por lo tanto un morfismo en la homología. $\square$

3.2 Deformaciones de Gerstenhaber de álgebras asociativas

El contenido de las próximas dos secciones puede encontrarse en [Ger64].

Aquí k será un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0, A será una k-álgebra asociativa y notaremos con $A[[t]]$ al anillo de series formales con coeficientes en A.

Definición 3.2.1. Una *familia uniparamétrica de deformaciones* de A es un producto asociativo en $A[[t]]$ determinado por la extensión $k[[t]]$-bilineal de una función $f_t : A \times A \longrightarrow A[[t]]$ dada por

$$f_t(a, b) = ab + F_1(a, b)t + F_2(a, b)t^2 + \cdots$$

donde $F_i : A \times A \longrightarrow A$ es una función k-lineal para todo $i \in \mathbb{N}$.

Notaremos a esta álgebra A_t o A_{f_t}, y para abreviar, la llamaremos simplemente una *deformación* de A.

3.2.1 Integrabilidad y obstrucciones

Dada una deformación A_t de A, será asociativa si se satisface que

$$f_t(f_t(a,b),c) = f_t(a, f_t(b,c))$$

para todos $a, b, c \in A$. Desarrollando la fórmula de f_t y utilizando la bilinealidad, esta condición se traduce en

$$\sum_{i+j=s} F_i(F_j(a,b),c) - F_i(a, F_j(b,c)) = 0$$

para todos $a, b, c \in A$ y para todo $s \in \mathbb{N}_0$. Aquí F_0 denotará el producto en A, es decir, $F_0(a,b) = ab$. Despejando los términos $(0,s)$ y $(s,0)$ obtenemos que

$$\sum_{\substack{i+j=s \\ i,j>0}} F_i \circ F_j = \delta_2(F_s)$$

para todo $s \in \mathbb{N}_0$, donde $F_i \circ F_j$ denota al asociador entre F_i y F_j, y δ_2 es el morfismo de grado 2 del complejo de Hochschild $\mathrm{Hom}_k(A^{\otimes \bullet}, A)$. Estas ecuaciones suelen llamarse *ecuaciones de deformación*. Por lo tanto, f_t será asociativo si y solo si se satisfacen las ecuaciones de deformación. Observemos que para $s = 0$, estas ecuaciones describen la asociatividad del producto en A, y para $s = 1$, se traducen en la condición $\delta_2(F_1) = 0$, es decir, que si f_t es asociativo, F_1 debe ser necesariamente un 2-cociclo de Hochschild. Más en general, vale el siguiente resultado.

Lema 3.2.2. *Si f_t una familia uniparamétrica de deformaciones de A tal que $F_i = 0$ para todo $i = 0, \cdots, n-1$, entonces F_n es un 2-cociclo de Hochschild.*

Demostración. Para $s = n$, las ecuaciones de deformación dicen que

$$\delta_2(F_n) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j>0}} F_i \circ F_j = 0,$$

pues si $i + j = n$ y $i, j > 0$, entonces $F_i = F_j = 0$. □

Una pregunta natural que surge es saber si dado un 2-cociclo de Hochschild existirá un producto asociativo f_t tal que dicho 2-cociclo sea su primer término no nulo. La respuesta es negativa, como veremos a continuación.

Definición 3.2.3. Sea F_1 un 2-cociclo de Hochschild. Decimos que F_1 es *integrable* si existe una familia $\{F_i\}_{i\geq 2}$ tal que verifica las ecuaciones de deformación, es decir, si existe una familia uniparamétrica de deformaciones que empieza en F_1.

Tomemos $F_1 \in HH^2(A)$, llamemos también F_1 a un representante de esta clase de equivalencia y tratemos de integrarlo a una familia de deformaciones. Como A es asociativa y F_1 es un cociclo, se cumplen las ecuaciones de deformación para $s = 0, 1$. Si F_1 fuese integrable, entonces la ecuación de deformación para $s = 2$ diría que $F_1 \circ F_1 = \delta_2(F_1)$.

Por otro lado, $\delta_3(F_1 \circ F_1) = F_1 \circ \delta_2(F_1) - \delta_2(F_1) \circ F_1 + F_1 \smile F_1 - F_1 \smile F_1 = 0$, es decir, que $F_1 \circ F_1$ es un 3-cociclo para todo $F_1 \in HH^2(A)$; y si queremos que F_1 sea integrable, $F_1 \circ F_1$ deberá ser cohomólogo a 0. En general vale el siguiente resultado.

Lema 3.2.4. *Si $F_1, \cdots, F_n \in \mathrm{Hom}_k(A \otimes A, A)$ son tales que*

$$\sum_{\substack{i+j=s \\ i,j>0}} F_i \circ F_j = \delta_2(F_s)$$

para todo $s = 1, \cdots, n$, entonces

$$G := \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j>0}} F_i \circ F_j$$

es un 3-cociclo de Hochschild.

Demostración. Primero calculamos

$$\begin{aligned}
\delta_3(G) &= \sum_{i=1}^{n} F_i \circ \delta_2(F_{n-i}) - \delta_2(F_i) \circ F_{n-i} + F_i \smile F_{n-1} - F_{n-i} \smile F_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} F_i \circ \delta_2(F_{n-i}) - \delta_2(F_i) \circ F_{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n-i-1} F_i \circ (F_k \circ F_{n-i-k}) - \sum_{k=1}^{i-1} (F_k \circ F_{i-k}) \circ F_{n-i} \right) \\
&= \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k>0}} F_i \circ (F_j \circ F_k) - (F_i \circ F_j) \circ F_k.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
2\delta_3(G) &= \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k>0}} F_i \circ (F_j \circ F_k) - (F_i \circ F_j) \circ F_k + F_i \circ (F_k \circ F_j) - (F_i \circ F_k) \circ F_j \\
&= \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k>0}} F_i \circ ((F_j + F_k) \circ (F_j + F_h)) - (F_i \circ (F_j + F_k)) \circ (F_j + F_k) = 0.
\end{aligned}$$

Como k tiene característica 0, G resulta un 3-cociclo. □

De esta forma, se puede interpretar el tercer grupo de cohomología de Hochschild como el lugar donde viven las obstrucciones para poder integrar un 2-cociclo.

3.2.2 Deformaciones triviales y equivalencia de deformaciones

Definición 3.2.5. Dos familias de deformaciones f_t y g_t se dicen *equivalentes* si existe un isomorfismo de $k[[t]]$-álgebras $\Phi_t : A_{f_t} \longrightarrow A_{g_t}$, dado por la extensión $k[[t]]$-lineal de

$$\Phi_t(a) = a + \varphi_1(a)t + \varphi_2(a)t^2 + \cdots ,$$

donde $\varphi_i : A \longrightarrow A$ es k-lineal para todo $i \in \mathbb{N}$. Decimos que una familia f_t es *trivial* si es equivalente a A con el producto usual, es decir, si es equivalente a la deformación nula.

Observación 3.2.6. Dada una deformación trivial f_t, de la definición se sigue que $\Phi_t(f_t(a,b)) = \Phi_t(a)\Phi_t(b)$. El término de la izquierda es

$$\Phi_t(f_t(a,b)) = ab + (\varphi_1(ab) + F_1(a,b))t + O(t^2),$$

y el de la derecha es

$$\Phi_t(a)\Phi_t(b) = ab + (a\varphi_1(b) + \varphi_1(a)b)t + O(t^2),$$

por lo tanto, igualando los términos lineales, obtenemos que $F_1(a,b) = \delta_1(\varphi_1)(a,b)$, es decir, F_1 es nulo en $HH^2(A)$.

En general, si f_t es equivalente a g_t, de la igualdad $\Phi_t(f_t(a,b)) = g_t(\Phi_t(a), \Phi_t(b))$, se deduce que $F_1 = G_1 + \delta_1(\varphi_1)$.

Lema 3.2.7. *Sean f_t y g_t dos deformaciones. El morfismo $\Phi_t : A_{f_t} \longrightarrow A_{g_t}$ dado por $\Phi_t(a) := \mathrm{id}_A + \varphi_1(a)t + \varphi_2(a)t^2 + \cdots$, es una equivalencia si y solo si*

$$\sum_{i+j=s} \varphi_i(G_j(a,b)) = \sum_{i+j+k=s} F_i(\varphi_j(a), \varphi_k(b))$$

para todos $s \in \mathbb{N}_0$ y $a, b \in A$.

Demostración. Se sigue de desarrollar la igualdad $\Phi_t(f_t(a,b)) = g_t(\Phi_t(a), \Phi_t(b))$ y agrupar según las distintas potencias de t. □

Proposición 3.2.8. *Sea f_t una familia uniparamétrica no trivial de deformaciones de A. Existen $n \geq 2$ y una familia uniparamétrica de deformaciones g_t equivalente a f_t que cumple que $G_i = 0$ para $i = 0, \cdots, n-1$ y que G_n es un 2-cociclo no cohomólogo a 0.*

Demostración. Sea f_t una deformación no trivial de A. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $F_i = 0$ si i es menor que n y $F_n \neq 0$. Por el Lema 3.2.2, sabemos que F_n es un 2-cociclo. Si F_n no es un coborde, concluye la demostración. En caso contrario, existe φ tal que $F_n = \delta_1(\varphi)$. Consideramos el morfismo $\Phi_t = \mathrm{id}_A - t^n\varphi$ y la deformación definida por $g_t(a,b) := \Phi_t^{-1} f_t(\Phi_t(a), \Phi_t(b))$, entonces g_t es equivalente a f_t y, si $g_t(a,b) = ab + G_1(a,b)t + G_2(a,b)t^2 + \cdots$, además cumple que

$$\begin{aligned}\Phi_t(g_t(a,b)) &= \Phi_t(ab + G_1(a,b)t + G_2(a,b)t^2 + \cdots) \\ &= ab + G_1(a,b)t + \cdots - t^n(\varphi(ab) + \varphi(G_1(a,b)t) + \cdots),\end{aligned}$$

y por otro lado resulta

$$\begin{aligned} f_t(\Phi_t(a), \Phi_t(b)) &= f_t(a - t^n\varphi(a), b - t^n\varphi(b)) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} F_i(a,b)t^i - \left(\sum_{i=0}^{\infty} F_i(a,\varphi(b)) + F_i(\varphi(a),b)t^{i+n}\right) + \sum_{i=0}^{\infty} F_i(\varphi(a),\varphi(b))t^{2n} \\ &= ab + (F_n(a,b) - a\varphi(b) - \varphi(a)b)t^n + O(t^{n+1}). \end{aligned}$$

Igualando coeficiente a coeficiente, vemos que si i es menor que n, entonces $G_i = 0$ y que $G_n(a,b) - \varphi(ab) = F_n(a,b) - a\varphi(b) - \varphi(a)b$, y como $\delta_1(\varphi) = F_n$, se sigue que $G_n = 0$. Podemos ahora aplicar el mismo razonamiento a g_t.

Podría suceder que el procedimiento no termine. En ese caso, podemos construir una sucesión de automorfismos $\Psi_k := \Phi_1 \circ \Phi_2 \circ \cdots \circ \Phi_k$ y proceder como en la Proposición 3.2.18 de [Cho12]. □

Corolario 3.2.9. *Si $HH^2(A) = 0$, entonces toda deformación es trivial.*

En estos casos, se dice que A es *rígida*.

3.2.3 Deformaciones de Gerstenhaber de un álgebra de Lie

En esta sección, k seguirá siendo un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0.

Definición 3.2.10. Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie. Dar una *familia uniparamétrica de deformaciones* de $\mathfrak{g}$ consiste en dar corchete de Lie en $\mathfrak{g}[[t]]$ dado por la extensión $k[[t]]$-bilineal de $f_t : \bigwedge^2 \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}[[t]]$ como sigue

$$f_t(v,w) = [v,w] + F_1(v,w)t + F_2(v,w)t^2 + \cdots ,$$

donde $F_i : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es k-lineal y alternado para todo $i \in \mathbb{N}$.

Notaremos a esta álgebra de Lie con $\mathfrak{g}_t$ ó $\mathfrak{g}_{f_t}$, dependiendo del caso.

Definición 3.2.11. Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie. Dos familias uniparamétricas de deformaciones f_t y g_t de $\mathfrak{g}$ se dirán *equivalentes* si existe un isomorfismo de $k[[t]]$-álgebras de Lie, $\Phi_t : \mathfrak{g}_{f_t} \longrightarrow \mathfrak{g}_{g_t}$, dado por la extensión $k[[t]]$-lineal de

$$\Phi_t(a) = a + \varphi_1(a)t + \varphi_2(a)t^2 + \cdots ,$$

donde cada $\varphi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es k-lineal.

Sea f_0 la deformación tal que $F_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Decimos que una familia f_t es *trivial* si es equivalente a f_0.

3.2.4 Integrabilidad y obstrucciones

Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y sea f_t una familia uniparamétrica de deformaciones. La condición de Jacobi en $\mathfrak{g}_t$ se expresa como

$$f_t(f_t(a,b),c) + f_t(f_t(b,c),a) + f_t(f_t(c,a),b) = 0,$$

que se traduce en

$$\sum_{i+j=s} F_t(F_t(a,b),c) + F_t(F_t(b,c),a) + F_t(F_t(c,a),b) = 0,$$

para todo $s \in \mathbb{N}_0$, donde F_0 denota al corchete de $\mathfrak{g}$. Despejando los términos correspondientes a $(s,0)$ y $(0,s)$ resulta

$$\sum_{\substack{i+j=s\\ i,j>0}} F_t(F_t(a,b),c) + F_t(F_t(b,c),a) + F_t(F_t(c,a),b) = \delta_2(F_s)(a,b,c),$$

donde δ_2 es el diferencial del grado 2 del complejo $\mathrm{Hom}_k(\bigwedge^\bullet \mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ y $s \in \mathbb{N}_0$.

De estas ecuaciones se deduce que F_1 es un 2-cociclo, y también se deducen los siguientes resultados, cuyas demostraciones son similares a las del caso asociativo.

Proposición 3.2.12. *Sean $F_1, \cdots, F_{n-1} \in \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ tales que*

$$\delta_2(F_s)(a,b,c) = \sum_{\substack{i+j=s\\ i,j>0}} F_t(F_t(a,b),c) + F_t(F_t(b,c),a) + F_t(F_t(c,a),b),$$

para $s = 1, \cdots, n-1$ y para todos $a,b,c \in \mathfrak{g}$. Si definimos G por

$$G(a,b,c) := \sum_{\substack{i+j=n\\ i,j>0}} F_t(F_t(a,b),c) + F_t(F_t(b,c),a) + F_t(F_t(c,a),b),$$

entonces G es un 3-cociclo del complejo $\mathrm{Hom}_k(\bigwedge^\bullet \mathfrak{g}, \mathfrak{g})$.

Proposición 3.2.13. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie y sea f_t una deformación no trivial. Existen $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ y una deformación g_t tal que $G_1 = \cdots = G_{n-1} = 0$, G_n no es un 2-coborde y f_t es equivalente a g_t.*

Corolario 3.2.14. *Si $\mathfrak{g}$ es una k-álgebra de Lie tal que $H^2_{\mathrm{Lie}} = 0$, entonces toda deformación de $\mathfrak{g}$ es trivial.*

En este caso se dice que el álgebra $\mathfrak{g}$ es *rígida*.

Capítulo 4

Cálculo de la cohomología de Hochschild

El objetivo de este capítulo es calcular la cohomología de Hochschild del álgebra envolvente de un álgebra de Lie compleja de dimensión 4 para calcular en el futuro sus deformaciones. El álgebra estudiada es $L_4(\alpha)$, con $\alpha \neq 0$, que recordamos, es el álgebra de Lie con base $\{x, y, z, w\}$, y corchetes no nulos dados por $[x, y] = y$, $[x, z] = z$ y $[x, w] = z + \alpha w$.

A partir de cierto momento descartaremos el caso en que α es un número racional negativo. Escribiremos k para referirnos a $\mathbb{C}$ en reiteradas ocasiones. En adelante, $\mathfrak{g}$ será igual a $L_4(\alpha)$.

La mayor diferencia con respecto al cálculo de la cohomología de Hochschild de un álgebra envolvente de un álgebra de Lie de dimensión 3 realizado en [Cho12] está dada por la acción adjunta de x sobre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, que ya no es diagonal como en el caso de dimensión 3. Esto hace que los cálculos sean mucho más complicado como puede apreciarse en este capítulo.

4.1 Cálculos preliminares

El álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ puede expresarse de la siguiente forma, en términos de generadores y relaciones

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \frac{k\langle x, y, z, w\rangle}{(xy - yx - y, xz - zx - z, xw - wx - \alpha w - z, yz - zy, yw - wy, zw - wz)}.$$

Usando la resolución de Chevalley-Eilenberg, y siguiendo la construcción de la Subsección 3.1.1, la cohomología de Hochschild de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es la cohomología del complejo

$$0 \longleftarrow \textstyle\bigwedge^4 \mathfrak{g}^*|\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \xleftarrow{\delta_3} \textstyle\bigwedge^3 \mathfrak{g}^*|\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \xleftarrow{\delta_2} \textstyle\bigwedge^2 \mathfrak{g}^*|\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \xleftarrow{\delta_1} \mathfrak{g}^*|\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \xleftarrow{\delta_0} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longleftarrow 0.$$

Notaremos con $d\hat{x}$ a $dy\wedge dz\wedge dw$ y análogamente escribiremos $d\hat{y}$, $d\hat{z}$ y $d\hat{w}$. Los diferenciales del complejo son

$$
\begin{aligned}
\delta_0(u) = {} & dx|x\cdot u + dy|y\cdot u + dz|z\cdot u + dw|w\cdot u,\\
\delta_1(dx|u_1 + {} & dy|u_2 + dz|u_3 + dw|u_4)\\
&= dx\wedge dy|(x\cdot u_2 - y\cdot u_1 - u_2) + dx\wedge dz|(x\cdot u_3 - z\cdot u_1 - u_3)\\
&\quad + dx\wedge dw|(x\cdot u_4 - w\cdot u_1 - u_3 - \alpha u_4) + dy\wedge dz|(y\cdot u_3 - z\cdot u_2)\\
&\quad + dy\wedge dw|(y\cdot u_4 - w\cdot u_2) + dz\wedge dw|(z\cdot u_4 - w\cdot u_3),\\
\delta_2(dx\wedge dy|v_{12} + {} & dx\wedge dz|v_{13} + dx\wedge dw|v_{14} + dy\wedge dz|v_{23} + dy\wedge dw|v_{24} + dz\wedge dw|v_{34})\\
&= d\hat{w}|(z\cdot v_{12} - y\cdot v_{13} + x\cdot v_{23} - 2v_{23})\\
&\quad + d\hat{z}|(w\cdot v_{12} - y\cdot v_{14} + x\cdot v_{24} - (1+\alpha)v_{24} - v_{23})\\
&\quad + d\hat{y}|(w\cdot v_{13} - z\cdot v_{14} + x\cdot v_{34} - (1+\alpha)v_{34})\\
&\quad + d\hat{x}|(w\cdot v_{23} - z\cdot v_{24} + y\cdot v_{34}),\\
\delta_3(d\hat{x}|u_1 + {} & d\hat{y}|u_2 + d\hat{z}|u_3 + d\hat{w}|u_4)\\
&\quad = dx\wedge dy\wedge dz\wedge dw|(x\cdot u_1 - y\cdot u_2 + z\cdot u_3 - w\cdot u_4 - (2+\alpha)u_1).
\end{aligned}
$$

Para calcular la cohomología de Hochschild de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, probaremos primero una serie de lemas preparatorios. El primero de ellos provee reglas de conmutación del álgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Lema 4.1.1. *Dados $i, j, k \in \mathbb{N}_0$ y $l \in \mathbb{N}$, valen las siguientes reglas de conmutación*

$$
\begin{aligned}
y^j x &= (x-j)y^j,\\
z^k x &= (x-k)z^k,\\
w^l x &= (x-l\alpha)w^l - lzw^{l-1},\\
yx^i &= (x-1)^i y,\\
zx^i &= (x-1)^i z,\\
wx^i &= (x-\alpha)^i w - \left(\sum_{t=0}^{i-1}(x-\alpha)^t(x-1)^{i-1-t}\right) z.
\end{aligned}
$$

Demostración. Es inmediata, razonando por inducción en los exponentes. □

Los dos lemas siguientes describen la acción adjunta de $\mathfrak{g}$ en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Lema 4.1.2. *La acción adjunta de x sobre un monomio $x^i y^j z^k w^l$ en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, donde $i, j, k, l \in \mathbb{N}_0$, está descripta por la siguente igualdad.*

$$x \cdot x^i y^j z^k w^l = (j + k + \alpha l)x^i y^j z^k w^l + l x^i y^j z^{k+1} w^{l-1}.$$

No nos preocuparemos en distinguir si l es positivo o no, ya que el coeficiente que acompaña al monomio $x^i y^j z^{k+1} w^{l-1}$ es l.

Demostración. Utilizando el Lema 4.1.1 simplemente calculamos

$$\begin{aligned}
x \cdot x^i y^j z^k w^l &= x^{i+1} y^j z^k w^l - x^i y^j z^k w^l x \\
&= x^{i+1} y^j z^k w^l - x^i y^j z^k [(x - l\alpha) w^l - l z w^{l-1}] \\
&= x^{i+1} y^j z^k w^l - x^i y^j z^k x w^l + l\alpha x^i y^j z^k w^l + l x^i y^j z^{k+1} w^{l-1} \\
&= x^{i+1} y^j z^k w^l - x^i y^j (x - k) z^k w^l + l\alpha x^i y^j z^k w^l + l x^i y^j z^{k+1} w^{l-1} \\
&= x^{i+1} y^j z^k w^l - x^i y^j x z^k w^l + (k + l\alpha) x^i y^j z^k w^l + l x^i y^j z^{k+1} w^{l-1} \\
&= x^{i+1} y^j z^k w^l - x^i (x - j) y^j z^k w^l + (k + l\alpha) x^i y^j z^k w^l + l x^i y^j z^{k+1} w^{l-1} \\
&= x^{i+1} y^j z^k w^l - x^{i+1} y^j z^k w^l + (j + k + l\alpha) x^i y^j z^k w^l + l x^i y^j z^{k+1} w^{l-1} \\
&= (j + k + \alpha l) x^i y^j z^k w^l + l x^i y^j z^{k+1} w^{l-1}.
\end{aligned}$$ □

Observación 4.1.3. El primer término proviene de una derivación euleriana correspondiente a asignarle a y, z y w grado 1 y a x grado 0; y el segundo de la $k[x, z]$-derivación $w^l \mapsto l z w^{l-1}$.

Lema 4.1.4. *La acciones adjuntas de y y de z sobre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ están dadas, respectivamente, por las siguientes fórmulas. Dado $p = \sum \lambda_{i,j,k,l} x^i y^j z^k w^l$ en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$,*

$$\begin{aligned}
y \cdot p &= (p(x-1, y, z, w) - p(x, y, z, w)) y, \\
z \cdot p &= (p(x-1, y, z, w) - p(x, y, z, w)) z.
\end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
y \cdot \sum \lambda_{i,j,k,l} x^i y^j z^k w^l &= \sum \lambda_{i,j,k,l} y x^i y^j z^k w^l - \sum \lambda_{i,j,k,l} x^i y^j z^k w^l y \\
&= \sum \lambda_{i,j,k,l} (x-1)^i y y^j z^k w^l - \sum \lambda_{i,j,k,l} x^i y^j z^k w^l y \\
&= \sum \lambda_{i,j,k,l} (x-1)^i y^j z^k w^l y - \sum \lambda_{i,j,k,l} x^i y^j z^k w^l y \\
&= (p(x-1, y, z, w) - p(x, y, z, w)) y.
\end{aligned}$$

La otra igualdad se demuestra de forma análoga. □

Lema 4.1.5. *Si L es un cuerpo de característica 0, p es un polinomio en $L[x]$ tal que existe $\beta \in L^*$ que verifica $p(x - \beta) = p(x)$, entonces p es constante.*

Demostración. Supongamos que p no es constante. Sea $\overline{L}$ la clausura algebraica de L y sea r_0 una raíz de p en $\overline{L}$. Sabemos que

$$0 = p(r_0) = p(r_0 - \beta) = p(r_0 - 2\beta).$$

Puede probarse fácilmente que $p(r_0 - n\beta) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto p tiene infinitas raíces, lo que es absurdo. □

Lema 4.1.6. *Si $p = \sum \lambda_{i,j,k,l} x^i y^j z^k w^l$ es un elemento de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $y \cdot p = 0$ o $z \cdot p = 0$, entonces $\lambda_{i,j,k,l} = 0$ para todo $i \neq 0$.*

Demostración. Si $0 = y \cdot p = \sum \lambda_{i,j,k,l}[(x-1)^i - x^i]y^{j+1}z^k w^l$, el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (Teorema 2.1.14), asegura que $\sum_i \lambda_{i,j,k,l}[(x-1)^i - x^i] = 0$ para todos $j, k, l \in \mathbb{N}_0$. Si denotamos $q_{j,k,l}(x)$ al polinomio $\sum_i \lambda_{i,j,k,l}x^i$, el lema anterior dice que $q_{j,k,l}$ tiene que ser constante, es decir, que $\lambda_{i,j,k,l} = 0$ si $i \neq 0$. □

4.2 Cálculo del centro

Sabemos que y, z y w conmutan entre sí, luego lo mismo sucede con los polinomios en estos tres generadores. El cálculo del centro se reduce a describir primero cuáles son lo elementos del álgebra que conmutan con x y a ver después cuáles de estos están en el centro. En el caso en que α no es racional negativo hacemos lo primero en el Lema 4.2.1 y concluímos en la Proposición 4.2.3.

Sea $\mathcal{B} = \{x^i y^j z^k w^l, i, j, k, l \in \mathbb{N}_0\}$ una base de monomios de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, ordenada de la siguiente forma: $x^i y^j z^k w^l$ es menor que $x^{i'} y^{j'} z^{k'} w^{l'}$ si

- $l < l'$ o
- $l = l'$ y $k < k'$ o
- $l = l'$, $k = k'$ y $j < j'$
- $l = l'$, $k = k'$, $j = j'$ y $i < i'$.

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, sea V_n el subespacio vectorial de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ generado por el conjunto $\{x^i y^j z^k w^l : i + j + k + l = n\}$ y sea $\mathcal{B}_n = \mathcal{B} \cap V_n$ una base de monomios de V_n.

Observemos que si $p \in V_n$, el Lema 4.1.2 garantiza que $x \cdot p$ también lo está, por lo tanto podemos considerar la aplicación lineal $x \cdot - : V_n \longrightarrow V_n$; su matriz en la base $\mathcal{B}$ va a ser de la forma $M = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & M' \end{pmatrix}$, donde M' es una matriz cuadrada de tamaño $\dim_k V_n - 1$, es triangular superior y en la diagonal tiene elementos de la forma $j + k + \alpha l$, con $j + k + \alpha l = n - i + (\alpha - 1)l$.

Lema 4.2.1. *Dado $n \in \mathbb{N}_0$, la acción adjunta de x sobre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ se restringe a V_n. Denotaremos también a esta acción por $x \cdot - : V_n \longrightarrow V_n$. Su núcleo es $Ker(x \cdot -) = \langle x^n \rangle$.*

Demostración. Es claro que $x^n \in \mathrm{Ker}(x \cdot -)$. Para demostrar la igualdad, veamos que $\dim_k(\mathrm{Ker}(x \cdot -)) \leq 1$, o equivalentemente, que $\mathrm{rg}(x \cdot -) \geq \dim_k V_n - 1$. Sabemos que $\mathrm{rg}(x \cdot -) \geq \mathrm{rg}(M')$ y este último es igual a $\dim_k V_n - 1$ si y solo si los elementos de la diagonal de M' son no nulos. Como estos son de la forma $j + k + \alpha l = n - i + (\alpha - 1)l$ y $\alpha \notin \mathbb{Q}_{<0}$, estos nunca se anulan, lo que concluye la demostración. □

Corolario 4.2.2. *Si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$, entonces el centro $\mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ está incluido en $k[x]$.*

Proposición 4.2.3. *Si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$, entonces $\mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = k$*

Demostración. Sea $p = \sum \lambda_i x^i \in \mathcal{Z}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$. Como $y \cdot p = 0$ y $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es íntegra, el Lema 4.1.6 garantiza que $\lambda_i = 0$ para todo i no nulo. □

4.3 Cálculo del primer grupo de cohomología

Comenzaremos demostrando dos resultados generales, el primero sobre el anillo de polinomios $k[x]$. En el segundo lema exhibiremos otra base del k-espacio $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Lema 4.3.1. *Sea $\alpha \in \mathbb{C}^*$. La aplicación $\Delta_\alpha : k[x] \longrightarrow k[x]$ definida por $\Delta_\alpha(p) = p(x-\alpha) - p(x)$ es sobreyectiva y su núcleo es el conjunto de los polinomios constantes.*

Demostración. Fijado $n \in \mathbb{N}$, sea $k_n[x]$ el subespacio de $k[x]$ generado por los monomios de grado menor o igual que n. Consideremos $\Delta_\alpha|_{k_n[x]} : k_n[x] \longrightarrow k_{n-1}[x]$. Como la imagen por $\Delta_\alpha|_{k_n[x]}$ de la base $\{1, x, x^2, \cdots x^n\}$ de $k_n[x]$ contiene n polinomios de distinto grado, resulta una base de $k_{n-1}[x]$ y por lo tanto luego $\Delta_\alpha|_{k_n[x]}$ es sobreyectiva. Como esto es cierto para n cualquiera, la función Δ_α es sobreyectiva.

Es claro que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\langle 1 \rangle_k$ está incluido en el núcleo de $\Delta_\alpha|_{k_n[x]}$, y como la aplicación es sobreyectiva, por el teorema de la dimensión vale la igualdad. Luego, dado un polinomio $p \in \operatorname{Ker}(\Delta_\alpha)$ no nulo de grado n, es claro que pertenece a $\operatorname{Ker}(\Delta_\alpha|_{k_n[x]}) = \langle 1 \rangle_k$. □

Lema 4.3.2. *El conjunto $\mathcal{B}' = \{((x-1)^i - x^i)y^j z^k w^l : i \in \mathbb{N}, j, k, l \in \mathbb{N}_0\}$ es una base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.*

Demostración. Usando que $\mathcal{B} = \{x^i y^j z^k w^l, i, j, k, l \in \mathbb{N}_0\}$ es una base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ y el Lema 4.3.1 para $\alpha = 1$, se ve fácilmente que $\mathcal{B}'$ es un sistema de generadores. Para ver que es linealmente independiente, tomaremos una combinación lineal igualada a 0 y llegaremos a que todos los coeficientes son nulos. Sea $r-1$ al grado en x de esa combinación lineal. Supongamos que existen coeficientes $\lambda_{i,j,k,l} \in k$ tales que

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j,k,l} \lambda_{ijkl}((x-1)^i - x^i)y^j z^k w^l \\
&= \sum_{i=1}^{r} ((x-1)^i - x^i) \sum_{j,k,l} \lambda_{ijkl} y^j z^k w^l \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{t=0}^{i-1} \binom{i}{t} x^t (-1)^{i-t} \sum_{j,k,l} \lambda_{ijkl} y^j z^k w^l \\
&= \sum_{t=0}^{r-1} \sum_{i=t+1}^{r} \binom{i}{t} x^t (-1)^{i-t} \sum_{j,k,l} \lambda_{ijkl} y^j z^k w^l \\
&= \sum_{t=0}^{r-1} \sum_{j,k,l} \sum_{i=t+1}^{r} \binom{i}{t} (-1)^{i-t} \lambda_{ijkl} x^t y^j z^k w^l .
\end{aligned}
$$

Como $\mathcal{B}$ es base del k-espacio $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, resulta que

$$
\sum_{i=t+1}^{r} \binom{i}{t} (-1)^{i-t} \lambda_{ijkl} = 0
$$

para todos los j, k, l que correspondan y para todo $t = 0, \cdots, r-1$. Fijando j, k y l, y pensando a la ecuación anterior como un sistema de r ecuaciones con r incógnitas (que ya está triangulado), se puede ver que $\lambda_{ijkl} = 0$ para todo $i = 1, \cdots, r$. □

Lema 4.3.3. *Sea $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Para todo $i \in \mathbb{N}$ vale la igualdad*

$$\sum_{t=0}^{i-1} (x-\alpha)^t (x-1)^{i-1-t} = \frac{(x-\alpha)^i - (x-1)^i}{1-\alpha}.$$

Demostración. Basta observar que $(x-\alpha) - (x-1) = 1-\alpha$. □

Observación 4.3.4. La aplicación Δ_α nos permite expresar las acciones adjuntas de y, z y w sobre un polinomio $p \in k[x]$ como

$$\begin{aligned} y \cdot p &= \Delta_1(p) y, \\ z \cdot p &= \Delta_1(p) z, \\ \text{si } \alpha \neq 1, \text{ entonces } w \cdot p &= \Delta_\alpha(p) w - \frac{\Delta_\alpha(p) - \Delta_1(p)}{1-\alpha} z, \\ \text{y si } \alpha = 1 \text{ e } i \in \mathbb{N}, \text{ entonces } w \cdot x^i &= \Delta_1(x^i) w - i(x-1)^{i-1} z. \end{aligned}$$

Esta notación nos será muy útil más adelante.

Los lemas siguientes describen la imagen de la acciones adjuntas por los elementos de la base de $\mathfrak{g}$.

Lema 4.3.5. *La imagen de $x \cdot - : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ puede describirse como*

$$\operatorname{Im}(x \cdot -) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) y + \mathcal{U}(\mathfrak{g}) z + \mathcal{U}(\mathfrak{g}) w.$$

Demostración. Dado que la acción adjunta de x sobre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es $k-$lineal, basta probar ambas inclusiones para monomios. Sea $p = x^i y^j z^k w^l$ un monomio en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Veamos primero que todo elemento de la imagen tiene grado positivo en y, z o w. En el Lema 4.1.2 probamos que cualesquiera sean $i, j, k, l \in \mathbb{N}_0$

$$x \cdot x^i y^j z^k w^l = (j + k + \alpha l) x^i y^j z^k w^l + l x^i y^j z^{k+1} w^{l-1}.$$

Recordemos que y, z y w conmutan entre sí. Resumiremos en el siguiente cuadro qué sucede con $x \cdot p$ en los diferentes casos.

Si...	entonces
$j > 0$	$x \cdot p \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) y$,
$j = 0$ y $k > 0$	$x \cdot p \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) z$,
$j = k = 0$ y $l > 0$	$x \cdot p = \alpha l w^l + l z w^{l-1} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) z + \mathcal{U}(\mathfrak{g}) w$,
$j = k = l = 0$	$x \cdot p = 0$.

Demostremos ahora la igualdad. Sea $p \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})y + \mathcal{U}(\mathfrak{g})z + \mathcal{U}(\mathfrak{g})w$, $p \neq 0$ probaremos la inclusión que falta por inducción en l, que es el grado en w de p.

Si $l = 0$, entonces $j + k \neq 0$ y $x \cdot x^i y^j z^k = (j + k)x^i y^j z^k$, de donde se deduce que $x \cdot \frac{p}{j+k} = p$.

Sea ahora $l > 0$ y supongamos que todo monomio en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de grado menor o igual que $l - 1$ en w está en $\mathrm{Im}(x \cdot -)$. Veamos que los monomios de grado l en w también pertenecen a $\mathrm{Im}(x \cdot -)$. Como $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$, el coeficiente $j + k + \alpha l$ nunca se anula, y luego

$$x \cdot \frac{x^i y^j z^k w^l}{j + k + \alpha l} = x^i y^j z^k w^l + \frac{l}{j + k + \alpha l} x^i y^j z^{k+1} w^{l-1}$$

Por hipótesis inductiva, existe $q \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $\frac{l}{j+k+\alpha l} x^i y^j z^{k+1} w^{l-1} = x \cdot q$, luego

$$x \cdot \left(\frac{p}{j + k + \alpha l} - q \right) = p. \qquad \square$$

Lema 4.3.6. *La imagen de la acción adjunta de y en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es*

$$\mathrm{Im}(y \cdot -) = \mathcal{U}(\mathfrak{g})y$$

y la imagen de la acción adjunta de z en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es

$$\mathrm{Im}(z \cdot -) = \mathcal{U}(\mathfrak{g})z.$$

Demostración. Ambas inclusiones se siguen de los Lemas 4.1.4 y 4.3.1. $\square$

Lema 4.3.7. *Sea $p \in k[x]$. Para todo $l \geq 1$, pw^l pertenece a $\mathrm{Im}(w \cdot -) + \mathrm{Im}(z \cdot -)$.*

Demostración. Por la Observación 4.3.4 sabemos que si $i \in \mathbb{N}$ y

- $\alpha \neq 1$, entonces $w \cdot x^i = \Delta_\alpha(x^i)w - \dfrac{\Delta_\alpha(x^i) - \Delta_1(x^i)}{1 - \alpha} z$,
- $\alpha = 1$, entonces $w \cdot x^i = \Delta_1(x^i)w - i(x - 1)^{i-1} z$.

Dados $p \in k[x]$ y $l \geq 1$, por el Lema 4.3.1 y lo dicho recién, existen $q \in k[x]$ y $u \in k[x]zw^{l-1}$ tales que $w \cdot qw^{l-1} = pw^l + u$. Se sigue además del Lema 4.3.6 que $u \in \mathrm{Im}(z \cdot -)$. $\square$

El lema siguiente permite una primera aproximación al cálculo de $HH^1(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$.

Lema 4.3.8. *Sean*

$$u_2 = \sum \lambda_{i,j,k,l} x^i y^j z^k w^l, \qquad u_3 = \sum \mu_{i,j,k,l} x^i y^j z^k w^l$$

tales que $y \cdot u_3 - z \cdot u_2 = 0$. Los coeficientes respectivos cumplen las condiciones:

- *si $i, k \in \mathbb{N}$ y $j, l \in \mathbb{N}_0$, entonces $\mu_{i,j,k,l} = \lambda_{i,j+1,k-1,l}$,*
- *si $i \in \mathbb{N}$ y $j, l \in \mathbb{N}_0$, entonces $\mu_{i,j,0,l} = 0$,*

- *si* $i \in \mathbb{N}$ *y* $k, l \in \mathbb{N}_0$, *entonces* $\lambda_{i,0,k,l} = 0$.

Demostración. Utilizando el Lema 4.1.4, que nos dice cómo son las acciones adjuntas de z e y obtenemos

$$\sum \mu_{i,j,k,l}[(x-1)^i - x^i]y^{j+1}z^k w^l = \sum \lambda_{i,j,k,l}[(x-1)^i - x^i]y^j z^{k+1} w^l.$$

Por el Lema 4.3.2 tenemos que para todo i positivo vale la igualdad

$$\sum_{j,k,l} \mu_{i,j,k,l} y^{j+1} z^k w^l = \sum_{j,k,l} \lambda_{i,j,k,l} y^j z^{k+1} w^l.$$

Mirando el coeficiente de z^0 obtenemos que

$$\sum_{j,l} \mu_{i,j,0,l} y^{j+1} w^l = 0,$$

es decir, que $\mu_{i,j,0,l} = 0$ para todos $j, l \in \mathbb{N}_0$, y para todo $i \in \mathbb{N}$. Los coeficientes de z^k con k positivo resultan ser

$$\sum_{j,l} \mu_{i,j,k,l} y^{j+1} w^l = \sum_{j,l} \lambda_{i,j,k-1,l} y^j w^l$$

para todos $j, l \in \mathbb{N}_0$. Si convenimos que $\mu_{i,-1,k,l} = 0$, mirando el coeficiente de y^j en la ecuación anterior obtenemos la igualdad

$$\sum_{l} \mu_{i,j-1,k,l} w^l = \sum_{l} \lambda_{i,j,k-1} w^l$$

para todo $j \in \mathbb{N}_0$, lo que implica que $\mu_{i,j-1,k,l} = \lambda_{i,j,k-1,l}$ para $j, l \in \mathbb{N}_0$ $i, k \in \mathbb{N}$ y concluye la demostración. □

Para continuar con el cálculo de los grupos de cohomología definiremos dos endomorfismos de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ y obtendremos información sobre sus núcleos y sus imágenes.

Lema 4.3.9. *Sea* $\varphi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *el morfismo dado por* $\varphi(u) = x \cdot u - u$ *y sea* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$. *Describimos el núcleo de* φ *de la siguiente forma.*

1. *Si* $\alpha \neq \frac{1}{m}$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$, *entonces* $\mathrm{Ker}(\varphi) = k[x]y + k[x]z$.
2. *Si* $\alpha = 1$, *entonces* $\mathrm{Ker}(\varphi) = k[x]y + k[x]z$.
3. *Si* $\alpha = \frac{1}{m}$ *con* $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, *entonces* $\mathrm{Ker}(\varphi) = k[x]y + k[x]p_m$, *donde* $p_m = (\frac{z}{\alpha - 1} + w)^m$.

Demostración. De la fórmula para la acción adjunta de x que provee el Lema 4.1.2 deducimos que si $p = \sum \lambda_{i,j,k,l} x^i y^j z^k w^l$ es un elemento de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ entonces

$$\varphi(p) = \sum \lambda_{i,j,k,l}[(j + k + \alpha l - 1)x^i y^j z^k w^l + l x^i y^j z^{k+1} w^{l-1}]. \tag{4.1}$$

Con esta escritura es fácil ver que $k[x]y + k[x]z$ o $k[x]y + k[x]p_m$, según el valor de α que corresponda, está incluido en $\ker(\varphi)$. Para probar la inclusión restante separaremos en casos. Sea $p = \sum \lambda_{i,j,k,l} x^i y^j z^k w^l$ en $\mathrm{Ker}(\varphi)$, es decir,

$$\sum \lambda_{i,j,k,l}[(j + k + \alpha l - 1)x^i y^j z^k w^l + l x^i y^j z^{k+1} w^{l-1}] = 0. \tag{4.2}$$

Como en la demostración del Lema 4.3.8, iremos analizando los coeficientes de las potencias de z, en este caso los de la igualdad (4.2).

1. Sea $\alpha \neq \frac{1}{m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

   - Coeficiente de z^0:
   $$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,0,l}(j + \alpha l - 1)x^i y^j w^l = 0.$$
   Esta igualdad implica que $\lambda_{i,j,0,l}(j + \alpha l - 1) = 0$ para todos $i, j, l \in \mathbb{N}_0$. Como $\alpha \neq \frac{1}{m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y no es un racional negativo, el coeficiente $j + \alpha l - 1$ se anula solo si $j = 1$ y $l = 0$, y por lo tanto los $\lambda_{i,j,0,l}$ son todos nulos salvo eventualmente $\lambda_{i,1,0,0}$.
   - Coeficiente de z^1:
   $$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,1,l}(j + \alpha l)x^i y^j w^l + \lambda_{i,j,0,l} l x^i y^j w^{l-1} = 0$$
   Utilizando la información obtenida con el coeficiente anterior reducimos esta ecuación a
   $$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,1,l}(j + \alpha l)x^i y^j w^l = 0.$$
   Notar que el único $\lambda_{i,j,0,l}$ que puede ser no nulo está multiplicado por un 0, correspondiente al índice l. Nuevamente, como $\alpha \neq \frac{1}{m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y no es un racional negativo, $j + \alpha l$ se anula solo si $j = l = 0$ y resulta que $\lambda_{i,j,1,l}$ son todos nulos salvo eventualmente $\lambda_{i,0,1,0}$.
   - Coeficiente de z^2:
   $$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,2,l}(j + 1 + \alpha l)x^i y^j w^l + \lambda_{i,j,1,l} l x^i y^j w^{l-1} = 0$$
   Análogamente al caso anterior, reducimos la ecuación a
   $$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,2,l}(j + 1 + \alpha l)x^i y^j w^l = 0.$$
   Como $\alpha \neq \frac{1}{m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y no es un racional negativo, es inmediato que $\lambda_{i,j,2,l} = 0$ para todos $i, j, l \in \mathbb{N}_0$.

   De la misma forma se prueba que $\lambda_{i,j,k,l} = 0$ para todos $i, j, k, l \in \mathbb{N}_0$ con $k \geq 2$. Obtuvimos entonces $p = \sum_i \lambda_{i,1,0,0} x^i y + \sum_i \lambda_{i,0,1,0} x^i z$, que es lo que queríamos probar.

2. Para el caso $\alpha = 1$ comenzamos de la misma forma. Analizando los coeficientes de las potencias de z de la igualdad (4.2) vemos lo siguiente.

   - Coeficiente de z^0:
   $$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,0,l}(j+l-1)x^i y^j w^l = 0.$$
   Esta igualdad implica que $\lambda_{i,j,0,l}$ se anula salvo eventualmente cuando $j = 0$ y $l = 1$ o $j = 1$ y $l = 0$.
   - Coeficiente de z^1:
   $$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,1,l}(j+l)x^i y^j w^l + \lambda_{i,j,0,l} l x^i y^j w^{l-1} = 0.$$
   Con la información obtenida recién, la igualdad puede reducirse a
   $$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,1,l}(j+l)x^i y^j w^l + \sum_i \lambda_{i,0,0,1} x^i = 0. \tag{4.3}$$
   Ahora analizaremos los coeficientes de las potencias de y de la igualdad (4.3). Si $j > 0$ vemos que
   $$\sum_{i,l} \lambda_{i,j,1,l}(j+l)x^i w^l = 0.$$
   Como en este caso $j + l$ nunca se anula, resulta $\lambda_{i,j,1,l} = 0$. En cuanto a $j = 0$ en (4.3), obtenemos
   $$\sum_{i,l} \lambda_{i,0,1,l} l x^i w^l + \sum_i \lambda_{i,0,0,1} x^i = 0.$$
   Mirando los coeficientes de las potencias positivas de w deducimos que $\lambda_{i,0,1,l} = 0$ para todos $i, l \in \mathbb{N}_0$, $l \geq 1$. Por último, en el coeficiente de w^0 obtenemos
   $$\sum_i \lambda_{i,0,0,1} x^i = 0,$$
   lo que implica que $\lambda_{i,0,0,1} = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$.
   En resumen, $\lambda_{i,j,1,l}$ se anula salvo eventualmente cuando $j = l = 0$.
   - Coeficiente de z^2:
   $$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,2,l}(j+l+1)x^i y^j w^l + \lambda_{i,j,1,l} l x^i y^j w^{l-1} = 0.$$
   Como el único $\lambda_{i,j,1,l}$ no nulo corresponde a $l = 0$, la ecuación puede reducirse a
   $$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,2,l}(j+l+1)x^i y^j w^l,$$
   y como $j + l + 1$ nunca se anula, resulta $\lambda_{i,j,2,l} = 0$ para todos $i, j, l \in \mathbb{N}_0$.

Análogamente se prueba que $\lambda_{i,j,k,l}$ es nulo para todos $i,j,k,l \in \mathbb{N}_0$ con k es mayor o igual que 2. Esto demuestra el resultado deseado ya que resulta $p = \sum_i \lambda_{i,1,0,0} x^i y + \sum_i \lambda_{i,0,1,0} x^i z$.

3. Consideremos finalmente el caso $\alpha = \frac{1}{m}$ con $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Como antes, analizaremos las potencias de z en la igualdad (4.2). Para las potencias positivas escribiremos las igualdades utilizando los resultados obtenidos de las ecuaciones de los coeficientes anteriores.

   - Coeficiente de z^0:
   $$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,0,l}(j + \alpha l - 1) x^i y^j w^l = 0.$$
   Como $j + \alpha l - 1$ se anula si y solo si $j = 1$ y $l = 0$ o si $j = 0$ y $l = \frac{1}{\alpha} = m$, resulta $\lambda_{i,j,0,l} = 0$, exceptuando los dos casos mencionados recién.
   - Coeficiente de z^1:
   $$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,1,l}(j + \alpha l) x^i y^j w^l + \sum_i \lambda_{i,0,0,m} m x^i w^{m-1} = 0.$$
   Mirando las potencias positivas de y en esta ecuación y teniendo en cuenta que $j + \alpha l$ nunca se anula en esos casos, resulta $\lambda_{i,j,1,l} = 0$ para todos $i, l \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{N}$. En cuanto al coeficiente de y^0,
   $$\sum_{i,l} \lambda_{i,0,1,l} \alpha l x^i w^l + \sum_i \lambda_{i,0,0,m} m x^i w^{m-1} = 0.$$
   De aquí deducimos que, para $l \neq m - 1$, $\lambda_{i,0,1,l}$ debe anularse; y que
   $$\lambda_{i,0,1,m-1} \alpha(m - 1) + \lambda_{i,0,0,m} m = 0.$$
   Utilizando que $\alpha m = 1$ obtenemos que $\lambda_{i,0,1,m-1} = \lambda_{i,0,0,m} m/(\alpha - 1)$.
   - Coeficiente de z^2:
   $$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,2,l}(j + \alpha l + 1) x^i y^j w^l + \sum_i \lambda_{i,0,1,m-1}(m - 1) x^i w^{m-2} = 0.$$
   Como en el caso anterior, resulta $\lambda_{i,j,2,l} = 0$ para todos $i, j, l \in \mathbb{N}_0$ con j positivo y $\lambda_{i,0,2,l} = 0$ para todos $i, l \in \mathbb{N}_0$ con $l \neq m - 2$. Para $j = 0$ y $l = m - 2$ nos queda $\lambda_{i,0,2,m-2}(2 - 2\alpha) + \lambda_{i,0,1,m-1}(m - 1) = 0$, de lo que junto con lo visto en el ítem anterior se deduce que
   $$\lambda_{i,0,2,m-2} = \frac{\lambda_{i,0,1,m-1}(m - 1)}{2(\alpha - 1)} = \frac{\lambda_{i,0,0,m} m(m - 1)}{2(\alpha - 1)^2}.$$

- Coeficiente de z^3:

$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,3,l}(j+\alpha l+2)x^i y^j w^l + \sum_i \lambda_{i,0,2,m-2}(m-2)x^i w^{m-3} = 0.$$

Repitiendo el razonamiento hecho anteriormente, se prueba que $\lambda_{i,j,3,l}$ se anula salvo en el caso en que $j=0$ y $l=m-3$. Para dichos valores obtenemos la igualdad $\lambda_{i,j,3,l}(3-3\alpha)+\lambda_{i,0,2,m-2}(m-2)=0$, de la que resulta

$$\lambda_{i,j,3,m-3} = \frac{\lambda_{i,0,2,m-2}(m-2)}{3(\alpha-1)} = \frac{\lambda_{i,0,0,m} m(m-1)(m-2)}{3\cdot 2(\alpha-1)^3} = \binom{m}{3}\frac{\lambda_{i,0,0,m}}{(\alpha-1)^3}.$$

Se prueba fácilmente por inducción que $\lambda_{i,j,k,l}$ se anula salvo que $j=1$ y $k=l=0$ o que $j=0$ y $l=m-k$. Además, en el segundo caso vale

$$\lambda_{i,j,k,l-k} = \binom{m}{k}\frac{\lambda_{i,0,0,m}}{(\alpha-1)^k}.$$

Obtuvimos entonces que

$$\begin{aligned} p &= \sum_i \lambda_{i,1,0,0}x^i y + \sum_i \lambda_{i,0,0,m}x^i \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}\left(\frac{z}{\alpha-1}\right)^k w^{m-k} \\ &= \sum_i \lambda_{i,1,0,0}x^i y + \sum_i \lambda_{i,0,0,m}x^i \left(\frac{z}{\alpha-1}+w\right)^m, \end{aligned}$$

como queríamos.

□

Lema 4.3.10. *Sea $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}_{<0}$ y sea $\theta_\alpha : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ el morfismo definido por $\theta_\alpha(u) = x\cdot u - \alpha u$.*

1. *Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, entonces $\operatorname{Ker}(\theta_\alpha)\cap\{u\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}) : gr_y(u)\geq 1\} = 0$.*
2. *Sea $m\in\mathbb{N}_{\geq 2}$, $\alpha=\frac{1}{m}$, $\mu\in\mathbb{C}$ y $p_m = (\frac{z}{\alpha-1}+w)^m$. Si p es un polinomio en $k[z,w]$ tal que $\theta_\alpha(p)=\mu p_m$, entonces $p=\frac{\mu}{1-\alpha}p_m$.*

Demostración. Valiéndonos del Lema 4.1.2 obtenemos que si $u = \sum \lambda_{i,j,k,l}x^i y^j z^k w^l$ entonces

$$\theta_\alpha(u) = \sum \lambda_{i,j,k,l}[(j+k+\alpha(l-1))x^i y^j z^k w^l + l x^i y^j z^{k+1} w^{l-1}]. \tag{4.4}$$

1. Sea $u\in\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de la forma $u=\tilde{u}y$ y tal que $\theta_\alpha(u)=0$. Igualaremos la expresión (4.4) a 0 y analizaremos los coeficientes de las potencias de z.

   La ecuación que resulta de igualar los coeficientes de z^0 es

$$\sum_{i,j,l}\lambda_{i,j,0,l}(j+\alpha(l-1))x^i y^j w^l = 0.$$

Como j es mayor que 0 y α no es un número natural ni un racional negativo, $j + \alpha(l-1)$ nunca se anula, por lo cual resulta $\lambda_{i,j,0,l} = 0$ para todos $i, l \in \mathbb{N}_0$ y $j \in \mathbb{N}$. Realizando una cuenta similar puede probarse fácilmente por inducción que $\lambda_{i,j,k,l} = 0$ para todos $i, k, l \in \mathbb{N}_0$ y $j \in \mathbb{N}$.

2. Sea $\alpha = \frac{1}{m}$, $\mu \in \mathbb{C}$ y sea $p = \sum \nu_{k,l} z^k w^l$ un polinomio en $k[z, w]$ tal que $\theta_\alpha(p) = \mu p_m$, es decir

$$\sum_{k,l} \nu_{k,l}[(k + \alpha(l-1))z^k w^l + l z^{k+1} w^{l-1}] = \mu \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(\frac{1}{\alpha - 1}\right)^k z^k w^{m-k}. \quad (4.5)$$

De analizar los coeficientes de las potencias de z se deduce fácilmente que los únicos $\nu_{k,l}$ no nulos son los de la forma $\nu_{k,m-k}$. Para simplicar la notación escribiremos

$$p = \sum_{k=0}^{m} \nu_k z^k w^{m-k},$$

la ecuación (4.5) se reduce entonces a

$$\sum_{k=0}^{m} \nu_k[(k+1)(1-\alpha)z^k w^{m-k} + (m-k)z^{k+1} w^{m-k-1}] = \mu \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(\frac{1}{\alpha - 1}\right)^k z^k w^{m-k}. \quad (4.6)$$

Usando la convención de que $\binom{m}{k} = 0$ si $k > m$, estamos en condiciones de probar por inducción en k que $\nu_k = -\frac{\mu}{(\alpha-1)^{k+1}} \binom{m}{k}$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Si $k = 0$, obtenemos que $\nu_0(1-\alpha) = \mu$. Supongamos que $\nu_k = -\frac{\mu}{(\alpha-1)^{k+1}} \binom{m}{k}$ y veamos que la fórmula vale para ν_{k+1}. De (4.6) y la hipótesis inductiva resulta

$$\begin{aligned}
\nu_{k+1}(k+2)(1-\alpha) + \nu_k(m-k) &= \frac{\mu}{(\alpha-1)^{k+1}} \binom{m}{k+1}, \\
\nu_{k+1}(k+2)(1-\alpha) &= \frac{\mu}{(\alpha-1)^{k+1}} \binom{m}{k+1} + \frac{\mu(m-k)}{(\alpha-1)^{k+1}} \binom{m}{k}, \\
\nu_{k+1}(k+2) &= -\frac{\mu}{(\alpha-1)^{k+2}} \left[\binom{m}{k+1} + \binom{m}{k}(m-k)\right], \\
\nu_{k+1} &= -\frac{\mu}{(\alpha-1)^{k+2}} \binom{m}{k+1},
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. Con esta fórmula para los coeficientes ν_k es inmediato probar que $p = \frac{\mu}{1-\alpha} p_m$. $\square$

Damos ahora una base de $HH^1(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ cuando $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$. Debemos considerar tres casos distintos, de acuerdo a los posibles valores de α.

Proposición 4.3.11. *1. Si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$ y $\alpha \neq \frac{1}{m}$ para todo $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, entonces $HH^1(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ está generado por las clases de*

$$dx|1, \qquad dy|z, \qquad dz|(1-\alpha)y + dw|y, \qquad dz|z + dw|w, \qquad dz|(1-\alpha)z + dw|z.$$

2. *Si $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ y $\alpha = \frac{1}{m}$, entonces $HH^1(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ está generado por las clases de*

$$dx|1, \qquad dy|p_m, \qquad dz|y + dw|\frac{y}{1-\alpha}, \qquad dz|p_m + dw|\frac{p_m}{1-\alpha},$$

donde $p_m = (\frac{z}{\alpha-1} + w)^m$.

En todos los casos estas clases son, respectivamente, linealmente independientes.

Demostración. 1. Sea $f = dx|u_1 + dy|u_2 + dz|u_3 + dw|u_4 \in \operatorname{Ker}\delta_1$. Por el Lema 4.3.5 sabemos que existen elementos $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ y $p \in k[x]$ tales que $u_1 = x \cdot u + p(x)$. Podemos suponer, restando $\delta_0(u)$, que $f = dx|p + dy|u_2 + dz|u_3 + dw|u_4$. Valen las siguientes igualdades

$$x \cdot u_2 - u_2 - y \cdot p = 0, \tag{4.7}$$

$$x \cdot u_3 - u_3 - z \cdot p = 0, \tag{4.8}$$

$$x \cdot u_4 - w \cdot p - u_3 - \alpha u_4 = 0, \tag{4.9}$$

$$y \cdot u_3 - z \cdot u_2 = 0, \tag{4.10}$$

$$y \cdot u_4 - w \cdot u_2 = 0, \tag{4.11}$$

$$z \cdot u_4 - w \cdot u_3 = 0. \tag{4.12}$$

La ecuación (4.7) puede reescribirse como $\varphi(u_2) = y \cdot p$. Si $u_2 = \sum q_j y^j$ donde los q_j son elementos de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de grado 0 en y, de la fórmula (4.1) y el hecho de que y, z y w conmuten se deduce que

$$\varphi(u_2) = \sum \varphi(q_j y^j) = \sum \varphi(q_j) y^j.$$

El Lema 4.1.4 implica que $y \cdot p \in k[x]y$ y por lo tanto $\varphi(q_j)y^j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$ distinto de 1. Dicho de otra forma, si $j \neq 1$ entonces

$$q_j y^j \in \operatorname{Ker}(\varphi) \cap \{u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) : u = 0 \text{ o } \operatorname{gr}_y(u) \neq 1\} = k[x]z.$$

Si $j = 1$ escribimos

$$q_1 = \sum \lambda_{i,k,l} x^i z^k w^l y \text{ y } p = \sum \beta_i x^i$$

y obtenemos

$$\sum \lambda_{i,k,l}[(k + \alpha l)x^i y z^k w^l + l x^i y z^{k+1} w^{l-1}] = \sum \beta_i((x-1)^i - x^i)y.$$

Mirando los coeficientes de z^0 en esta igualdad deducimos que para l positivo, $\lambda_{i,0,l}$ se anula. Además, de observar los coeficientes de w^0 y el Lema 4.3.2, resulta que $\beta_i = 0$ para $i \in \mathbb{N}$. De analizar los coeficientes de las potencias de orden positivo de z como en las demostraciones del Lema 4.3.9 se sigue que $\lambda_{i,k,l} = 0$ para todos $i, l \in \mathbb{N}_0$ y $k \in \mathbb{N}$. Resulta entonces que

$$p = \beta_0 \in \mathbb{C} \text{ y } u_2 = r_1(x)y + r_2(x)z.$$

Por el Lema 4.3.1 existe $q \in k[x]$ tal que $y \cdot q = r_1(x)y$. Restando $\delta_0(q)$ a f podemos suponer que $u_2 = r_2(x)z$.

Dado que ahora $z \cdot \beta_0 = 0$, la ecuación (4.8) dice que $u_3 \in \operatorname{Ker}(\varphi) = k[x]y + k[x]z$. Luego, del Lema 4.3.8 y usando la ecuación (4.10) se sigue que $u_2 = \lambda z$ y que $u_3 = \mu_1 y + \mu_2 z$.

Por último, la ecuación (4.9) nos brinda la igualdad

$$x \cdot u_4 - \alpha u_4 = \mu_1 y + \mu_2 z.$$

El miembro de la derecha es suma de monomios de grado 1, y como $x \cdot -$ y restar $\alpha-$ son morfismos homogéneos, el grado de u_4 debe ser también 1. Si escribimos

$$u_4 = \nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z + \nu_4 w,$$

entonces

$$\begin{aligned} x \cdot u_4 - \alpha u_4 &= \nu_2 y + \nu_3 z + \nu_4(z + \alpha w) - \alpha(\nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z + \nu_4 w) \\ &= -\alpha\nu_1 x + (\nu_2 - \alpha\nu_2)y + (\nu_3 - \alpha\nu_3 + \nu_4)z \\ &= \mu_1 y + \mu_2 z. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes obtenemos $\begin{cases} \nu_1 = 0, \\ \mu_1 = (1-\alpha)\nu_2, \\ \mu_2 = (1-\alpha)\nu_3 + \nu_4. \end{cases}$

Entonces

$$\begin{aligned} f =& dx|\beta_0 + dy|\lambda z + dz|([(1-\alpha)\nu_2]y + [(1-\alpha)\nu_3 + \nu_4]z) + dw|(\nu_2 y + \nu_3 z + \nu_4 w) \\ =& \beta_0 dx|1 + \lambda dy|z + \nu_2(dz|(1-\alpha)y + dw|y) \\ &+ \nu_3[dz|(1-\alpha)z + dw|z] + \nu_4(dz|z + dw|w). \end{aligned}$$

Queda probado que las clases de

$$dx|1, \qquad dy|z, \qquad dz|(1-\alpha)y + dw|y, \qquad dz|z + dw|w \qquad \text{y} \qquad dz|(1-\alpha)z + dw|z$$

generan $HH^1(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$. Para ver que son linealmente independientes supongamos que existen $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ y $\beta_i \in \mathbb{C}$ tales que

$$\begin{aligned} &\beta_1 dx|1 + \beta_2 dy|z + \beta_3(dz|(1-\alpha)y + dw|y) \\ &\qquad + \beta_4(dz|(1-\alpha)z + dw|z) + \beta_5(dz|z + dw|w) = \delta_0(u) \\ &\qquad\qquad = dx|x \cdot u + dy|y \cdot u + dz|z \cdot u + dw|w \cdot u. \end{aligned}$$

Esta igualdad nos da un nuevo sistema de ecuaciones

$$\beta_1 - x \cdot u = 0, \tag{4.13}$$
$$\beta_2 z - y \cdot u = 0, \tag{4.14}$$
$$\beta_3(1-\alpha)y + [\beta_4(1-\alpha)+\beta_5]z - z \cdot u = 0, \tag{4.15}$$
$$\beta_3 y + \beta_4 z + \beta_5 w - w \cdot u = 0. \tag{4.16}$$

De (4.13) se deduce que si $u = \sum \lambda_{i,j,k,l} x^i y^j z^k w^l$ entonces

$$\beta_1 = \sum \lambda_{i,j,k,l}[(j+k+\alpha l)x^i y^j z^k w^l + l x^i y^j z^{k+1} w^{l-1}].$$

Mirando los coeficientes de las potencias de z en esta igualdad llegamos a que $u \in k[x]$ y a que $\beta_1 = 0$. Luego, de (4.14) resulta

$$\beta_2 z = \sum \lambda_{i,0,0,0}((x-1)^i - x^i)y$$

lo cual implica que β_2 es nulo y que $u \in \mathbb{C}$. Inmediatamente de (4.15) y (4.16) se sigue que $\beta_i = 0$ para $i = 3, 4, 5$.

2. Como en el primer caso, notaremos $f = dx|u_1 + dy|u_2 + dz|u_3 + dw|u_4 \in \mathrm{Ker}(\delta_1)$ y valdrán las igualdades (4.8) a (4.12). La demostración comienza de la misma manera, podemos suponer que $u_1 \in k[x]$ y $u_2 = \sum q_j y^j$, donde q_j es un elemento de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de grado 0 en y para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Para $j = 1$, como $k + \alpha l$ solo se anula si $k = l = 0$, obtenemos el mismo resultado: $q_1 y \in k[x]y$ y $u_1 \in \mathbb{C}$. Si $j \neq 1$ en cambio resulta
$$q_j y^j \in \mathrm{Ker}(\varphi) \cap \{u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) : u = 0 \text{ o } \mathrm{gr}_y(u) \neq 1\} = k[x]p_m,$$
lo que implica que $u_2 = r_1(x)y + r_2(x)p_m$. Por el Lema 4.3.1 existe $u \in k[x]$ tal que $y \cdot u = r_1(x)y$. Restando $\delta_0(u)$ a f podemos suponer que u_2 es simplemente $r_2(x)p_m$.

   De la ecuación (4.8) se deduce que $u_3 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ y por lo tanto se puede escribir como $u_3 = r_3(x)y + r_4(x)p_m$. Del Lema 4.3.8 y la ecuación (4.10) se sigue que $u_2 = \lambda p_m$ y luego que $u_3 = \mu_1 y + \mu_2 p_m$.

   Para describir u_4 primero observemos que la ecuación (4.11) quedó reducida a $y \cdot u_4 = 0$. El Lema 4.1.6 implica que el grado de u_4 en x es nulo. Notemos ahora $u_4 = \sum_j s_j y^j$ donde s_j es un polinomio en z y w de grado cero en y y analicemos la ecuación (4.9), $\theta_\alpha(u_4) = u_3$. Por (4.4) y el hecho de que y, z y w conmutan entre sí resulta
$$\theta_\alpha(u_4) = \theta_\alpha(\sum_j s_j)y^j = \mu_1 y + \mu_2 p_m,$$
por lo tanto, para $j \geq 2$ del Lema 4.3.10 se deduce

$$s_j y^j \in \mathrm{Ker}(\theta_\alpha) \cap \{u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) : u = 0 \text{ o } \mathrm{gr}_y(u) \geq 1\} = 0.$$

Si $s_1 = \sum \nu_{k,l} z^k w^l$ se sigue que

$$\theta_\alpha(s_1 y) = \sum \nu_{k,l}[(1 + k + \alpha(l-1)z^k w^l + lz^{k+1}w^{l-1}]y = \mu_1 y,$$

y si analizamos los coeficientes de las potencias de z obtenemos que $\nu_{k,l} = 0$ exceptuando el caso en que $k = l = 0$; además vale $\nu_{0,0}(1-\alpha) = \mu_1$. Dado que $\theta_\alpha(s_0) = \mu_2 p_m$, del Lema 4.3.10 se sigue que $s_0 = \frac{\mu_2}{1-\alpha} p_m$. Luego

$$u_4 = \frac{\mu_1}{1-\alpha} y + \frac{\mu_2}{1-\alpha} p_m = \frac{u_3}{1-\alpha} \text{ y}$$

un elemento arbitrario de $\mathrm{Ker}(\delta_1)$ quedó descripto como

$$\begin{aligned} f &= dx|\beta + dy|\lambda p_m + dz|(\mu_1 y + \mu_2 p_m) + dw|\frac{1}{1-\alpha}(\mu_1 y + \mu_2 p_m) \\ &= \beta\, dx|1 + \lambda\, dy|p_m + \mu_1 \left(dz|y + dw|\frac{y}{1-\alpha} \right) + \mu_2 \left(dz|p_m + dw|\frac{p_m}{1-\alpha} \right). \end{aligned}$$

La demostración de que las clases de

$$dx|1, \qquad dy|p_m, \qquad dz|y + dw|\frac{y}{1-\alpha} \qquad \text{y} dz|p_m + dw|\frac{p_m}{1-\alpha}$$

son linealmente independientes es análoga a la del primer caso.

□

4.4 Cálculo del segundo grupo de cohomología

Comenzaremos describiendo las imágenes de los morfismos φ y θ_α definidos en la sección anterior.

Lema 4.4.1. *Sea $\varphi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ el morfismo dado por $\varphi(u) = x \cdot u - u$, sea $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$.*

1. *Si $j + k \neq 1$, entonces para todo $i \geq 0$ el monomio $x^i y^j z^k$ pertenece a la imagen de φ.*
2. *Si $l \geq 1$ y $j + k \neq 0$, entonces para todo $i \geq 0$ el monomio $x^i y^j z^k w^l$ pertenece a la imagen de φ.*
3. *Si $l \geq 2$, $i \geq 0$ y $l \neq \frac{1}{\alpha}$, entonces el monomio $x^i w^l$ pertenece a la imagen de φ.*
4. *Si $\alpha \neq 1$ y $p \in k[x]$, entonces el elemento $p(w + \frac{z}{\alpha-1})$ pertenece a la imagen de φ.*
5. *Si $\alpha = 1$ y $p \in k[x]$, entonces $pz \in \mathrm{Im}(\varphi)$.*

Demostración. 1. Si $x^i y^j z^k$ es un monomio tal que $j + k \neq 1$, de la fórmula (4.1) resulta

$$\varphi\left(\frac{x^i y^j z^k}{j+k-1} \right) = x^i y^j z^k.$$

2. Probaremos el resultado por inducción en l. Sea $x^iy^jz^kw$ un monomio tal que $j+k \neq 0$. De (4.1) resulta
$$\varphi(x^iz^ky^jw) = (j+k+\alpha-1)x^iy^jz^kw + x^iy^jz^{k+1}.$$
Como $j+k$ es distinto de 0, del ítem anterior deducimos que $\varphi(\frac{x^iy^jz^{k+1}}{j+k}) = x^iy^jz^{k+1}$. Como $\alpha \neq 0$ y $j+k-1 \geq 0$, el denominador $j+k+\alpha-1$ nunca se anula y obtenemos
$$\varphi\left(\frac{x^iz^ky^jw - \frac{x^iy^jz^{k+1}}{j+k}}{j+k+\alpha-1}\right) = x^iy^jz^kw.$$
Sea ahora $x^iy^jz^kw^l$ un monomio en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $j+k \neq 0$ y $l \geq 2$, supongamos que todo monomio de grado $l-1$ en w cuyos grados en y y z no sean ambos nulos pertenece a $\mathrm{Im}(\varphi)$ y veamos que si $j+k$ es mayor o igual que 1, entonces $x^iy^jz^kw^l$ también pertenece a la imagen. Nuevamente de (4.1) resulta
$$\varphi(x^iz^ky^jw^l) = (j+k+\alpha l-1)x^iy^jz^kw^l + lx^iy^jz^{k+1}w^{l-1}.$$
Como $j+k+1 \neq 0$ y $l \geq 2$, por hipótesis inductiva el segundo término pertenece a la imagen de φ. Sea $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $\varphi(u) = lx^iz^{k+1}w^{l-1}$. Como α no es un número racional negativo y $j+k \geq 1$, obtenemos
$$\varphi\left(\frac{x^iy^jz^kw^l - u}{j+k+\alpha l-1}\right) = x^iy^jz^kw^l.$$

3. Sean $i \in \mathbb{N}_0$, $l \geq 2$ tal que $l \neq \frac{1}{\alpha}$. De la fórmula (4.1) resulta $\varphi(x^iw^l) = (l\alpha - 1)x^iw^l + lx^izw^{l-1}$. Como $l \geq 2$, por el ítem 2 sabemos que existe $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $\varphi(u) = lx^izw^{l-1}$ y como $l \neq \frac{1}{\alpha}$ resulta
$$\varphi\left(\frac{x^iw^l - u}{\alpha l - 1}\right) = x^iw^l.$$

4. Sea $p \in k[x]$ y $\alpha \neq 1$, de la fórmula (4.1) obtenemos $\varphi(p\frac{w}{\alpha-1}) = p(w + \frac{z}{\alpha-1})$.

5. Sea $p \in k[x]$ y $\alpha = 1$, de la fórmula (4.1) obtenemos $\varphi(pw) = pz$.

□

Corolario 4.4.2. *Sea $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$.*

1. *Si $\alpha \neq \frac{1}{m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = k[x]y + k[x]z + \mathrm{Im}(\varphi)$.*

2. *Si $\alpha = 1$, entonces $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = k[x]y + k[x]w + \mathrm{Im}(\varphi)$.*

3. *Si $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ y $\alpha = \frac{1}{m}$, entonces $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = k[x]y + k[x]z + k[x]w^m + \mathrm{Im}(\varphi)$.*

Demostración. En el caso en que $\alpha \neq \frac{1}{m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, se sigue inmediatamente del lema anterior que $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = k[x]y + k[x]z + k[x]w + \mathrm{Im}(\varphi)$. Observemos también que como $p(w + \frac{z}{\alpha-1}) \in \mathrm{Im}(\varphi)$, resulta $pw \in k[x]z + \mathrm{Im}(\varphi)$.

La demostración del ítem 3 es análoga y en el ítem 2 no hay nada que probar. $\square$

Observación 4.4.3. De la demostración del corolario anterior se deduce que si $\alpha \neq \frac{1}{m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, también vale que $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = k[x]y + k[x]z + \mathrm{Im}(\varphi)$. Algo parecido ocurre si $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ y $\alpha = \frac{1}{m}$, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ puede expresarse como $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = k[x]y + k[x]w + k[x]w^m + \mathrm{Im}(\varphi)$.

Lema 4.4.4. *Sea $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$ y sea $\theta_\alpha : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ el morfismo definido por $\theta_\alpha(u) = x \cdot u - \alpha u$.*

1. *Si $j + k \neq \alpha$, entonces para todo $i \in \mathbb{N}_0$ el monomio $x^i y^j z^k$ pertenece a la imagen de θ_α.*

2. *Si $j + k \neq \alpha - 1$ y $j + k \neq 0$, entonces para todo $i \in \mathbb{N}_0$ el monomio $x^i y^j z^k w$ pertenece a la imagen de θ_α.*

3. *Si $l \geq 2$ y $j + k + l \neq \alpha$, entonces para todo $i \in \mathbb{N}_0$ el monomio $x^i y^j z^k w^l$ pertenece a la imagen de θ_α.*

Demostración. Para los tres casos usaremos la fórmula (4.4) que describe como actúa θ_α sobre un elemento arbitrario de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

1. En este caso $\theta_\alpha(x^i y^j z^k) = (j + k - \alpha)x^i y^j z^k$. Como $j + k - \alpha$ es no nulo, dividiendo por ese coeficiente se obtiene el resultado deseado.

2. Aquí
$$\theta_\alpha(x^i y^j z^k w) = (j + k)x^i y^j z^k w + x^i y^j z^{k+1}.$$
Como $j + k + 1 \neq \alpha$, por el ítem anterior sabemos que existe $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $\theta_\alpha(u) = x^i y^j z^{k+1}$. Además, como $j + k \neq 0$ resulta
$$\theta_\alpha\left(\frac{x^i y^j z^k w - u}{j + k}\right) = x^i y^j z^k w.$$

3. Probaremos este caso por inducción en l. Si $l = 2$ vale la siguiente fórmula
$$\theta_\alpha(x^i y^j z^k w^2) = (j + k + \alpha)x^i y^j z^k w^2 + 2x^i y^j z^{k+1} w.$$
Nuevamente por el ítem anterior, como $j+k+1$ es no nulo y $j+k+2$ es distinto de α, existe $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $\theta_\alpha(u) = 2x^i y^j z^{k+1} w$. Además, como α no es un número racional negativo, $j + k + \alpha \neq 0$ para todos $j, k \in \mathbb{N}_0$ por lo que resulta
$$\theta_\alpha\left(\frac{x^i y^j z^k w^2 - u}{j + k + \alpha}\right) = x^i y^j z^k w^2.$$
Sea ahora $p = x^i y^j z^k w^l$ un monomio en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $l \geq 3$ y $j + k + l \neq \alpha$, y supongamos que todo monomio de grado $l - 1$ en w tal que sus grados en y, z y w

no suman α pertenece a $\mathrm{Im}(\theta_\alpha)$ y veamos que entonces p pertenece a la imagen de θ_α. Recordemos que

$$\theta_\alpha(p) = (j + k + \alpha(l - 1))x^i y^j z^k w^l + l x^i y^j z^{k+1} w^{l-1}.$$

Como $j + (k + 1) + (l - 1) \neq \alpha$ y $l \geq 3$, por hipótesis inductiva el segundo término pertenece a $\mathrm{Im}(\theta_\alpha)$. Sea $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $\theta_\alpha(u) = l x^i z^{k+1} w^{l-1}$. Como α no es un número racional negativo y $l \geq 3$ obtenemos

$$\theta_\alpha \left(\frac{x^i y^j z^k w^l - u}{j + k + \alpha(l - 1)} \right) = p. \qquad \square$$

Corolario 4.4.5. *Sea* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$.

1. *Si* $\alpha \notin \mathbb{N}$, *entonces* $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = k[x]w + \mathrm{Im}(\theta_\alpha)$.
2. *Si* $\alpha \in \mathbb{N}$, *entonces* $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i\geq 0} x^i k_\alpha[y, z, w] + k[x]w + \mathrm{Im}(\theta_\alpha)$, *donde* $k_\alpha[y, z, w]$ *denota al* k*-espacio vectorial de polinomios en* y, z *y* w *homogéneos de grado* α.

Demostración. Se sigue inmediatamente del lema anterior. $\square$

A continuación, introduciremos un nuevo morfismo. Conocer su núcleo ayudará al cálculo de $HH^2(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$.

Lema 4.4.6. *Sea* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$ *y sea* $\psi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *el morfismo dado por* $\psi(u) = x \cdot u - (1 + \alpha)u$. *Describimos el núcleo de* ψ *de la siguiente forma.*

1. *Si* $\alpha \neq \frac{1}{m}$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$ *y* $\alpha \notin \mathbb{N}$, *entonces*
$$\mathrm{Ker}(\psi) = k[x]y \left(w + \frac{z}{\alpha - 1} \right) + k[x]z \left(w + \frac{z}{\alpha - 1} \right).$$
2. *Si* $\alpha = 1$, *entonces* $\mathrm{Ker}(\psi) = k[x]y^2 + k[x]yz + k[x]z^2$.
3. *Si* $\alpha \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, *entonces* $\mathrm{Ker}(\psi) = \bigoplus_{i\geq 0} x^i k_{\alpha+1}[y, z] + k[x]y(w + \frac{z}{\alpha-1}) + k[x]z(w + \frac{z}{\alpha-1})$, *donde* $k_{\alpha+1}[y, z]$ *es el* k*-espacio vectorial de polinomios en* y *y* z *homogéneos de grado* $\alpha + 1$.
4. *Si* $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *y* $\alpha = \frac{1}{m}$, *entonces* $\mathrm{Ker}(\psi) = k[x]y(w + \frac{z}{\alpha-1}) + k[x]p_{m+1}$ *donde* $p_m = (\frac{z}{\alpha-1} + w)^m$.

Demostración. La prueba es similar a la del Lema 4.3.9. Si $p = \sum \lambda_{i,j,k,l} x^i y^j z^k w^l$ es un elemento de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, el Lema 4.1.2 nos da la siguiente fórmula

$$\psi(p) = \sum \lambda_{i,j,k,l} [(j + k - 1 + \alpha(l - 1))x^i y^j z^k w^l + l x^i y^j z^{k+1} w^{l-1}], \qquad (4.17)$$

de la cual se deduce fácilmente que los miembros derechos de las igualdades del enunciado están contenidos en $\mathrm{Ker}(\psi)$. Para probar la otra inclusión separaremos en casos y analizaremos los coeficientes de las potencias de z de la fórmula (4.17) igualada a 0.

1. - Coeficiente de z^0:

$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,0,l}(j-1+\alpha(l-1))x^i y^j w^l = 0.$$

Como $\alpha \neq \frac{1}{m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, no es un racional negativo ni un número natural, $j-1+\alpha(l-1)$ se anula si y solo si $j = l = 1$, lo que implica que $\lambda_{i,j,0,l} = 0$ para todos $i, j, l \in \mathbb{N}_0$ salvo eventualmente cuando $j = l = 1$.

- Coeficiente de z^1: utilizando los cálculos realizados para el coeficiente de z^0 la ecuación se reduce a

$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,1,l}(j+\alpha(l-1))x^i y^j w^l + \sum_i \lambda_{i,1,0,1} x^i y = 0. \tag{4.18}$$

Ahora analizaremos los coeficientes de las potencias de y en esta ecuación. El coeficiente de y^j para $j \neq 1$ es

$$\sum_{i,l} \lambda_{i,j,1,l}(j+\alpha(l-1))x^i w^l = 0.$$

Para $j \geq 2$, como α no es un racional negativo ni un número natural, $j+\alpha(l-1)$ nunca se anula y luego $\lambda_{i,j,1,l} = 0$ para todos $i, l \in \mathbb{N}_0$. Para $j = 0$, $\alpha(l-1)$ se anula solo si $l = 1$, implicando que $\lambda_{i,0,1,l} = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$ y para todo $l \neq 1$. El coeficiente de y en (4.18) es

$$\sum_{i,l} \lambda_{i,1,1,l}(1+\alpha(l-1))x^i w^l + \sum_i \lambda_{i,1,0,1} x^i = 0,$$

de lo que deducimos que $\lambda_{i,1,1,l}$ es nulo si $l > 0$ y que $\lambda_{i,1,1,0}(1-\alpha) + \lambda_{i,1,0,1} = 0$. Despejando, obtenemos la igualdad $\lambda_{i,1,1,0} = \frac{\lambda_{i,1,0,1}}{\alpha-1}$.

- Coeficiente de z^2: se reduce a

$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,2,l}(j+1+\alpha(l-1))x^i y^j w^l + \sum_i \lambda_{i,0,1,1} x^i = 0.$$

Como α no es un racional negativo ni un número natural, $j+1+\alpha(l-1)$ nunca se anula, lo que implica que si $j+l > 0$, $\lambda_{i,j,2,l} = 0$. Si $j = l = 0$ resulta $\lambda_{i,0,2,0}(1-\alpha) + \lambda_{i,0,1,1} = 0$. Despejando obtenemos $\lambda_{i,0,2,0} = \frac{\lambda_{i,0,1,1}}{\alpha-1}$.

- Coeficiente de z^3: como el único $\lambda_{i,j,2,l}$ no nulo corresponde a $l = 0$, la ecuación se reduce a

$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,3,l}(j+2+\alpha(l-1))x^i y^j w^l = 0.$$

Nuevamente, como α no es un racional negativo ni un número natural, $j+2+\alpha(l-1)$ nunca se anula, lo que implica que $\lambda_{i,j,3,l} = 0$ para todos $i, j, l \in \mathbb{N}_0$.

Inductivamente se prueba que $\lambda_{i,j,k,l} = 0$ para todos $i, j, l \in \mathbb{N}_0$ y $k \geq 3$. Obtuvimos

$$\begin{aligned} p &= \sum_i \lambda_{i,1,0,1} x^i yw + \sum_i \lambda_{i,0,1,1} x^i zw + \sum_i \lambda_{i,1,1,0} x^i yz + \sum_i \lambda_{i,0,2,0} x^i z^2 \\ &= \sum_i \lambda_{i,1,0,1} x^i yw + \sum_i \lambda_{i,0,1,1} x^i zw + \sum_i \frac{\lambda_{i,1,0,1}}{\alpha - 1} x^i yz + \sum_i \frac{\lambda_{i,0,1,1}}{\alpha - 1} x^i z^2 \\ &= \sum_i \lambda_{i,1,0,1} x^i y \left(w + \frac{z}{\alpha - 1} \right) + \sum_i \lambda_{i,0,1,1} x^i z \left(w + \frac{z}{\alpha - 1} \right). \end{aligned}$$

2. Para $\alpha = 1$ la fórmula (4.17) es

$$\psi(p) = \sum \lambda_{i,j,k,l} [(j + k + l - 2) x^i y^j z^k w^l + l x^i y^j z^{k+1} w^{l-1}]. \tag{4.19}$$

Analizaremos los coeficientes de las potencias de z en la ecuación resultante de igualar la fórmula (4.19) a 0.

- Coeficiente de z^0:
$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,0,l} (j + l - 2) x^i y^j w^l = 0.$$
De la ecuación deducimos que $\lambda_{i,j,0,l}$ se anula para todos $i, j, l \in \mathbb{N}_0$ exceptuando tres casos: $j = 2$ y $l = 0$, $j = l = 1$ y $j = 0$ y $l = 2$.
- Coeficiente de z^1: se reduce a
$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,1,l} (j + l - 1) x^i y^j w^l + \sum_i \lambda_{i,1,0,1} x^i y + \sum_i \lambda_{i,0,0,2} 2x^i w = 0.$$
Ahora analizaremos los coeficientes de las potencias de y. Para las potencias mayores o iguales que 2 obtenemos
$$\sum_{i,l} \lambda_{i,j,1,l} (j + l - 1) x^i y^j w^l = 0,$$
y como en ese caso $j + l - 1$ es siempre positivo resulta $\lambda_{i,j,1,l} = 0$. Para $j = 1$ los coeficientes son
$$\sum_{i,l} \lambda_{i,1,1,l} l x^i w^l + \sum_i \lambda_{i,1,0,1} x^i = 0,$$
de lo que se deduce que $\lambda_{i,1,1,l}$ se anula si l es positivo y que $\lambda_{i,1,0,1} = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Para $j = 0$ obtenemos
$$\sum_{i,l} \lambda_{i,0,1,l} (l - 1) x^i w^l + \sum_i \lambda_{i,0,0,2} 2x^i w = 0.$$
Esto implica que $\lambda_{i,0,1,l} = 0$ para $l \neq 1$ y que $\lambda_{i,0,0,2} = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

- Coeficiente de z^2:
$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,2,l}(j+l)x^i y^j w^l + \sum_i \lambda_{i,0,1,1}x^i = 0.$$
Mirando los coeficientes de las potencias de y se deduce que $\lambda_{i,j,2,l}$ se anula si j es positivo y mirando luego los de las de w, que $\lambda_{i,0,2,l}$ también se anula si l es positivo. Por otro lado, obtenemos también que $\lambda_{i,0,1,1} = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$.
- Coeficiente de z^3: queda simplemente
$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,3,l}(j+l+1)x^i y^j w^l,$$
de lo que se deduce que $\lambda_{i,j,3,l} = 0$ para todos $i, j, l \in \mathbb{N}_0$.

Inductivamente se puede probar que $\lambda_{i,j,k,l} = 0$ para todos $i, j, l \in \mathbb{N}_0$ y $k \geq 3$. Obtuvimos
$$p = \sum_i \lambda_{i,2,0,0}x^i y^2 + \sum_i \lambda_{i,1,1,0}x^i yz + \sum_i \lambda_{i,0,2,0}x^i z^2,$$
que es lo que queríamos demostrar.

3. En este caso $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 2$. Como siempre, analizaremos los coeficientes de la fórmula (4.17) igualada a 0.

- Coeficiente de z^0:
$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,0,l}(j-1+\alpha(l-1))x^i y^j w^l = 0.$$
Como $\alpha \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $j-1+\alpha(l-1)$ se anula si y solo si $j = l = 1$ o si $j = \alpha+1$ y $l = 0$, en los casos restantes resulta $\lambda_{i,j,0,l} = 0$.
- Coeficiente de z^1: se reduce a
$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,1,l}(j+\alpha(l-1))x^i y^j w^l + \sum_i \lambda_{i,1,0,1}x^i y = 0.$$
Ahora miraremos los coeficientes de las potencias de w en esta igualdad. Para las potencias mayores que 0, resulta
$$\sum_{i,j} \lambda_{i,j,1,l}(j+\alpha(l-1))x^i y^j = 0.$$
En este caso, el coeficiente $j+\alpha(l-1)$ se anula solo si $j = 0$ y $l = 1$, implicando que $\lambda_{i,j,1,l} = 0$ para los valores de j y l restantes. En cuanto al coeficiente de w^0 vale
$$\sum_{i,j} \lambda_{i,j,1,0}(j-\alpha)x^i y^j + \sum_i \lambda_{i,1,0,1}x^i y = 0,$$
de lo que deducimos que para $j \neq 1$ y $j \neq \alpha$, $\lambda_{i,j,1,0}$ debe anularse y que para $j = 1$ resulta $\lambda_{i,1,1,0}(1-\alpha) + \lambda_{i,1,0,1} = 0$.

- Coeficiente de z^2:

$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,2,l}(j+1+\alpha(l-1))x^i y^j w^l + \sum_i \lambda_{i,0,1,1} x^i = 0.$$

Si l es positivo, entonces lo mismo sucede con $j+1+\alpha(l-1)$, lo que implica que $\lambda_{i,j,2,l}$ es nulo para todos $i,j \in \mathbb{N}_0$ y $l \in \mathbb{N}$. Para $l=0$ vale

$$\sum_{i,j} \lambda_{i,j,2,0}(j+1-\alpha)x^i y^j + \sum_i \lambda_{i,0,1,1} x^i = 0,$$

lo que implica que $\lambda_{i,j,2,0} = 0$ si $j \neq 0$ y $j \neq \alpha - 1$. Si $j = 0$, deducimos que $\lambda_{i,0,2,0}(1-\alpha) + \lambda_{i,0,1,1} = 0$.

- Coeficiente de z^3:

$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,3,l}(j+2+\alpha(l-1))x^i y^j w^l = 0.$$

Para l positivo resulta que $\lambda_{i,j,3,l} = 0$ para todos $i,j \in \mathbb{N}_0$, y en caso de que $l=0$ obtenemos que $\lambda_{i,j,3,0} = 0$ salvo eventualmente cuando $j = \alpha - 2$.

Puede probarse por inducción que $\lambda_{i,j,k,l} = 0$ para todos $i,j,k,l \in \mathbb{N}_0$ con $k \geq 2$ y $l \geq 1$; además $\lambda_{i,j,k,0} = 0$ para todos $i,j,k \in \mathbb{N}_0$ exceptuando el caso en que $j = \alpha + 1 - k$. Tenniendo en cuenta esto, p resulta de la forma

$$\begin{aligned}
p =& \sum_i \sum_{k=0}^{\alpha+1} \lambda_{i,\alpha+1-k,k,0} x^i y^{\alpha+1-k} z^k + \sum_i \lambda_{i,1,0,1} x^i y w + \sum_i \lambda_{i,1,1,0} x^i y z \\
&+ \sum_i \lambda_{i,0,1,1} x^i z w + \sum_i \lambda_{i,0,2,0} x^i z^2 \\
=& \sum_i \sum_{k=0}^{\alpha+1} \lambda_{i,\alpha+1-k,k,0} x^i y^{\alpha+1-k} z^k + \sum_i \lambda_{i,1,0,1} x^i y w + \sum_i \frac{\lambda_{i,1,0,1}}{\alpha-1} x^i y z \\
&+ \sum_i \lambda_{i,0,1,1} x^i z w + \sum_i \frac{\lambda_{i,0,1,1}}{\alpha-1} x^i z^2 \\
=& \sum_i \sum_{k=0}^{\alpha+1} \lambda_{i,\alpha+1-k,k,0} x^i y^{\alpha+1-k} z^k + \sum_i \lambda_{i,1,0,1} x^i y \left(w + \frac{z}{\alpha-1}\right) \\
&+ \sum_i \lambda_{i,0,1,1} x^i z \left(w + \frac{z}{\alpha-1}\right).
\end{aligned}$$

4. Por último, consideramos el caso en que $\alpha = \frac{1}{m}$ con $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Una vez más, nos remitimos a la fórmula (4.17) igualada a 0.

- Coeficiente de z^0:

$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,0,l}(j-1+\alpha(l-1))x^i y^j w^l = 0.$$

En este caso $j-1+\alpha(l-1)$ se anula si y solo si $j=1$ y $l=1$ o $j=0$ y $l=m+1$, de lo cual se deduce que $\lambda_{i,j,0,l}=0$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$ y los demás valores de j y l.

- Coeficiente de z^1: queda reducido a

$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,1,l}(j+\alpha(l-1))x^i y^j w^l + \sum_i \lambda_{i,1,0,1}x^i y + \sum_i \lambda_{i,0,0,m+1}(m+1)x^i w^m = 0.$$

Ahora analizaremos los coeficientes de las potencias de y en esta ecuación. Para $j \geq 2$, $j+\alpha(l-1)$ nunca se anula, lo que implica que $\lambda_{i,j,1,l}=0$ para todos $i,l \in \mathbb{N}_0$ en ese caso. Para $j=1$ obtenemos

$$\sum_{i,l} \lambda_{i,1,1,l}(1+\alpha(l-1))x^i w^l + \sum_i \lambda_{i,1,0,1}x^i = 0,$$

de lo que se deduce que para $l>0$ y para todo $i \in \mathbb{N}_0$ resulta $\lambda_{i,1,1,l}=0$. Si $l=0$, deducimos que $\lambda_{i,1,1,0}(1-\alpha)+\lambda_{i,1,0,1}=0$. Para $j=0$ nos queda

$$\sum_{i,l} \lambda_{i,0,1,l}\alpha(l-1)x^i w^l + \sum_i \lambda_{i,0,0,m+1}(m+1)x^i w^m = 0.$$

Deducimos entonces que para $l \neq m$ y $l \neq 1$, el coeficiente $\lambda_{i,0,1,l}$ se anula para todo $i \in \mathbb{N}_0$, y si $l=m$ resulta $\lambda_{i,0,1,l}\alpha(m-1)+\lambda_{i,0,0,m+1}(m+1)=0$; usando que $\alpha m = 1$ obtenemos

$$\lambda_{i,0,1,m} = \frac{\lambda_{i,0,0,m+1}(m+1)}{\alpha-1}.$$

- Coeficiente z^2:

$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,2,l}(j+1+\alpha(l-1))x^i y^j w^l + \sum_i \lambda_{i,0,1,m} m x^i w^{m-1} + \sum_i \lambda_{i,0,1,1}x^i = 0.$$

De esta ecuación resulta que para $j \geq 1$, $\lambda_{i,j,2,l}$ se anula. Lo mismo ocurre en caso de que $j=0$ y $l \neq m-1$ y $l \neq 0$. Si $j=0$ y $l=m-1$ se deduce que

$$\lambda_{i,0,2,m-1}(1+\alpha(m-2)) + \lambda_{i,0,1,m} m = 0,$$

lo que implica que

$$\lambda_{i,0,2,m-1} = \frac{\lambda_{i,0,1,m} m}{2(\alpha-1)} = \frac{\lambda_{i,0,0,m+1}(m+1)m}{2(\alpha-1)^2}.$$

Por último, en caso de que $j=l=0$ deducimos que $\lambda_{i,0,1,1}=0$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

- Coeficiente de z^3:

$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,3,l}(j+2+\alpha(l-1))x^i y^j w^l + \sum_i \lambda_{i,0,2,m-1}(m-1)x^i w^{m-2} = 0.$$

Igual que en el ítem anterior, deducimos que $\lambda_{i,j,3,l} = 0$ si $j > 0$ o si $j = 0$ y $l \neq m-2$ y en caso de que $j = 0$ y $l = m-2$ obtenemos

$$\lambda_{i,0,3,m-2} = \frac{\lambda_{i,0,2,m-1}(m-1)}{3(\alpha-1)} = \frac{\lambda_{i,0,0,m+1}(m+1)m(m-1)}{3\cdot 2(\alpha-1)^3}.$$

Puede probarse por inducción que $\lambda_{i,j,k,l} = 0$ para todos $i,j,k,l \in \mathbb{N}_0$ si $k \geq 2$ y $j > 0$ y si $k \geq 2$, $j = 0$ y $l \neq m+1-k$; y que en caso de que $j = 0$ y $l = m+1-k$ vale

$$\lambda_{i,0,k,m+1-k} = \binom{m+1}{k} \frac{\lambda_{i,0,0,m+1}}{(\alpha-1)^k}.$$

Resulta entonces

$$\begin{aligned} p &= \sum_i \sum_{k=0}^{m+1} \lambda_{i,0,0,m+1} \binom{m+1}{k} x^i \left(\frac{z}{\alpha-1}\right)^k w^{m+1-k} \\ &\quad + \sum_i \lambda_{i,1,0,1} x^i y w + \sum_i \lambda_{i,1,1,0} x^i y z \\ &= \sum_i \lambda_{i,0,0,m+1} x^i \left(\frac{z}{\alpha-1} + w\right)^{m+1} + \sum_i \lambda_{i,1,0,1} x^i y \left(w + \frac{z}{\alpha-1}\right), \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

La siguiente proposición describe el segundo grupo de cohomología para algunos valores de α. Pueden realizarse cálculos similares para otros valores contemplados en los lemas y corolarios anteriores.

Proposición 4.4.7. *Sea $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$ tal que $\alpha \neq \frac{2}{m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \notin \mathbb{N}$, y sean $\Delta_\alpha, \Delta_1 : k[x] \longrightarrow k[x]$ las aplicaciones definidas en el Lema 4.3.1. El k-espacio vectorial $HH^2(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ está generado por las clases de*

$$\begin{array}{ll} dx \wedge dy|y, & dx \wedge dy|z, \\ dx \wedge dz|y, & dx \wedge dy|w, \\ [(1-\alpha)dy \wedge dz + dy \wedge dw]|a_{1,i}x^i y^2, & [(1-\alpha)dy \wedge dz + dy \wedge dw]|a_{2,i}x^i yz, \\ dy \wedge dz|a_{3,i}x^i yz + dy \wedge dw|a_{3,i}x^i yw, & [(1-\alpha)dy \wedge dz + dy \wedge dw]|a_{4,i}x^i z^2, \\ dy \wedge dz|a_{5,i}x^i z^2 + dy \wedge dw|a_{5,i}x^i zw, & dz \wedge dw|b_{1,i}x^i y(\frac{z}{\alpha-1} + w), \\ dz \wedge dw|b_{2,i}x^i z(\frac{z}{\alpha-1} + w), & \end{array}$$

donde $i \in \mathbb{N}_0$, $a_{j,i}, b_{j,i} \in \mathbb{C}$ y se cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
\Delta_\alpha(\sum d_i x^i) &= \frac{\Delta_1(\sum e_i x^i) - \Delta_\alpha(\sum e_i x^i)}{1-\alpha},\\
\Delta_1(\sum f_i x^i) &= (\alpha - 1)\Delta_\alpha(\sum a_i x^i),\\
\Delta_1(\sum g_i x^i) &= (\alpha - 1)\Delta_\alpha(\sum b_i x^i) - \Delta_\alpha(\sum c_i x^i) + \Delta_1(\sum c_i x^i).
\end{aligned}$$

Además, las clases de los cuatro primeros generadores son linealmente independientes, en particular, no nulas.

Demostración. Sea

$$\begin{aligned}
f =& dx \wedge dy|v_{12} + dx \wedge dz|v_{13} + dx \wedge dw|v_{14}\\
&+ dy \wedge dz|v_{23} + dy \wedge dw|v_{24} + dz \wedge dw|v_{34}.
\end{aligned}$$

Restando $\delta_1(dy|u_2 + dz|u_3)$ con u_2 y u_3 adecuados, por el Corolario 4.4.2, que da información sobre la imagen de φ, podemos suponer que $v_{12}, v_{13} \in k[x]y + k[x]z$. Restando $\delta_1(dx|u_1)$ para $u_1 \in k[x]$ conveniente, por el Colorario 4.3.6 podemos suponer que $v_{13} \in k[x]y$. Por último, restando $\delta_1(dw|u_4)$ con u_4 apropiado, por el Corolario 4.4.5, que da información sobre la imagen de θ_α, podemos suponer que $v_{14} \in k[x]w$.

Si $f \in \operatorname{Ker}(\delta_2)$ valen las siguientes igualdades:

$$z \cdot v_{12} - y \cdot v_{13} + x \cdot v_{23} - 2v_{23} = 0, \tag{4.20}$$

$$w \cdot v_{12} - y \cdot v_{14} + x \cdot v_{24} - (1+\alpha)v_{24} - v_{23} = 0, \tag{4.21}$$

$$w \cdot v_{13} - z \cdot v_{14} + x \cdot v_{34} - (1+\alpha)v_{34} = 0, \tag{4.22}$$

$$w \cdot v_{23} - z \cdot v_{24} + y \cdot v_{34} = 0. \tag{4.23}$$

Pasemos a analizar en detalle la ecuación (4.20), $x \cdot v_{23} - 2v_{23} = y \cdot v_{13} - z \cdot v_{12}$. Por las reducciones hechas anteriormente, podemos escribir

$$v_{12} = p_1(x)y + p_2(x)z, \qquad\qquad v_{13} = p_3(x)y,$$

y luego, por la Observación 4.3.4,

$$x \cdot v_{23} - 2v_{23} = \Delta_1(p_3)y^2 - \Delta_1(p_1)(x)yz - \Delta_1(p_2)(x)z^2.$$

Escribiendo $v_{23} = \sum \lambda_{i,j,k,l} x^i y^j z^k w^l$, como $\alpha \neq \frac{2}{m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, y por lo tanto tampoco es de la forma $\alpha \neq \frac{1}{m}$ para $m \in \mathbb{N}$, y no es un racional negativo, analizando los coeficientes de las potencias de z en la igualdad

$$\sum \lambda_{i,j,k,l}[(j+k-2+\alpha l)x^i y^j z^k w^l + l x^i y^j z^{k+1} w^{l-1}] = \Delta_1(p_3)y^2 - \Delta_1(p_1)(x)yz - \Delta_1(p_2)(x)z^2,$$

concluimos que $v_{23} = \sum \lambda_{i,2,0,0} x^i y^2 + \sum \lambda_{i,1,1,0} x^i yz + \sum \lambda_{i,0,2,0} x^i z^2$. Notaremos a este elemento con $v_{23} = t_1(x)y^2 + t_2(x)yz + t_3(x)z^2$. Además, de la ecuación (4.20) se sigue que $\Delta_1(p_1) = \Delta_1(p_2) = \Delta_1(p_3) = 0$ y del Lema 4.3.1, que $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}$. Notaremos a estos elementos ξ_1, ξ_2 y ξ_3 respectivamente.

Si escribimos $v_{14} = p_4(x)w$, la ecuación (4.22) queda reducida a $\psi(v_{34}) = \Delta_1(p_4)zw$. Escribiendo $v_{34} = \sum \mu_{i,j,k,l} x^i y^j z^k w^l$, como $\alpha \neq \frac{1}{m}$, no es un número natural ni un racional negativo, analizando los coeficientes de las potencias de z y usando la fórmula (4.17), se deduce rápidamente que $\Delta_1(p_4) = 0$. Este hecho implica que v_{34} está en el núcleo de ψ y del Lema 4.4.6 se sigue que $v_{34} = \sum \mu_{i,1,0,1} x^i y(\frac{z}{\alpha-1} + w) + \sum \mu_{i,0,1,1} x^i z(\frac{z}{\alpha-1} + w)$. Además, del Lema 4.3.1 se deduce que que $p_4 \in \mathbb{C}$, y lo notaremos con ξ_4.

La ecuación (4.21) quedó reducida a $\psi(v_{24}) = v_{23}$. Escribiendo $v_{24} = \sum \nu_{i,j,k,l} x^i y^j z^k w^l$, analizando los coeficientes de las distintas potencias de z y usando nuevamente la fórmula (4.17), obtenemos que $v_{24} \in k[x]y^2 + k[x]yz + k[x]yw + k[x]z^2 + k[x]zw$ y además los $\nu_{i,j,k,l}$ no nulos tienen relación con los coeficientes de t_1,t_2 y t_3. Más precisamente, si $v_{24} = r_1 y^2 + r_2 yz + r_3 yw + r_4 z^2 + r_5 zw$, entonces

$$\begin{aligned}
t_1 &= r_1(1-\alpha), \\
t_2 &= r_2(1-\alpha) + r_3, \\
t_3 &= r_4(1-\alpha) + r_5.
\end{aligned}$$

Hasta el momento probamos que los v_{ij} son de la forma

$$\begin{aligned}
v_{12} &= \xi_1 y + \xi_2 z, \\
v_{13} &= \xi_3 y, \\
v_{14} &= \xi_4 w, \\
v_{23} &= (1-\alpha)r_1 y^2 + [(1-\alpha)r_2 + r_3]yz + [(1-\alpha)r_4 + r_5]z^2, \\
v_{24} &= r_1 y^2 + r_2 yz + r_3 yw + r_4 z^2 + r_5 zw, \\
v_{34} &= q_1 y \left(\frac{z}{\alpha-1} + w \right) + q_2 z \left(\frac{z}{\alpha-1} + w \right),
\end{aligned}$$

donde ξ_1, ξ_2, ξ_3 y ξ_4 son números complejos, r_i y q_i son polinomios en $k[x]$ tales que cumplen con las ecuaciones (4.20), (4.21) y (4.22). Resta dar condiciones sobre los q_i y r_i para que v_{23}, v_{24} y v_{34} cumplan la ecuación (4.23). Nuevamente utilizando la notación de la Observación 4.3.4, reescribimos dicha ecuación y obtenemos

$$\begin{aligned}
& w \cdot v_{23} - z \cdot v_{24} + y \cdot v_{34} = \\
& (1-\alpha)\Delta_\alpha(r_1)y^2 w + [(1-\alpha)\Delta_\alpha(r_2) + \Delta_\alpha(r_3)]yzw + [(1-\alpha)\Delta_\alpha(r_4) + \Delta_\alpha(r_5)]z^2 w \\
& + [\Delta_1(r_1) - \Delta_\alpha(r_1)]y^2 z + \left[\Delta_1(r_2) - \Delta_\alpha(r_2) + \frac{\Delta_1(r_3) - \Delta_\alpha(r_3)}{1-\alpha} \right] yz^2 \\
& + \left[\Delta_1(r_4) - \Delta_\alpha(r_4) + \frac{\Delta_1(r_5) - \Delta_\alpha(r_5)}{1-\alpha} \right] z^3 \\
& - \Delta_1(r_1)y^2 z - \Delta_1(r_2)yz^2 - \Delta_1(r_3)yzw - \Delta_1(r_4)z^3 - \Delta_1(r_5)z^2 w \\
& + \frac{\Delta_1(q_1)}{\alpha-1} y^2 z + \Delta_1(q_1)y^2 w + \frac{\Delta_1(q_2)}{\alpha-1} yz^2 + \Delta_1(q_2)yzw = 0.
\end{aligned}$$

Agrupando según las potencias de y, z y w, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\Delta_\alpha(r_4) &= \frac{\Delta_1(r_5)-\Delta_\alpha(r_5)}{1-\alpha},\\
\Delta_1(q_1) &= (\alpha-1)\Delta_\alpha(r_1),\\
\Delta_1(q_2) &= (\alpha-1)\Delta_\alpha(r_2)-\Delta_\alpha(r_3)+\Delta_1(r_3).
\end{aligned}$$

Llamando $a_{i,j}$ a los coeficientes de r_i y $b_{i,j}$ a los de q_i, se prueba que las clases propuestas en el enunciado efectivamente generan $HH^2(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$.

Para ver que las clases de $dx\wedge dy|y$, $dx\wedge dy|z$, $dx\wedge dz|y$ y $dx\wedge dy|w$ son linealmente independientes, comencemos tomando una combinación lineal igualada a un coborde. Sean $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4\in\mathbb{C}$ y $u_1,u_2,u_3,u_4\in\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tales que

$$\xi_1 dx\wedge dy|y+\xi_2 dx\wedge dy|z+\xi_3 dx\wedge dz|y+\xi_4 dx\wedge dw|w=\delta_1(dx|u_1+dy|u_2+dz|u_3+dw|u_4).$$

Restando $\delta_0(u)$ para algún u adecuado, podemos suponer que el grado en y de u_2 es nulo. Desarrollando el segundo miembro de la igualdad, obtenemos, entre otras, las siguientes ecuaciones:

$$\xi_1 y+\xi_2 z=\varphi(u_2)-y\cdot u_1, \tag{4.24}$$

$$\xi_3 y=\varphi(u_3)-z\cdot u_1, \tag{4.25}$$

$$\xi_4 w=\theta_\alpha(u_4)-w\cdot u_1-u_3. \tag{4.26}$$

Como el grado en y de u_2 es 0, el de $\varphi(u_2)$ es también nulo. Por lo tanto, de la ecuación (4.24) se sigue que

$$\xi_2 z=\varphi(u_2), \tag{4.27}$$

$$\xi_1 y=-y\cdot u_1. \tag{4.28}$$

Analizando los coeficientes de las distintas potencias de z en (4.27), se deduce que $\xi_2=0$ y que $u_2\in k[x]z$. Por otro lado, la ecuación (4.28) se traduce en $\xi_1 y=-\Delta_1(u_1)y$, lo que implica que $\xi_1=-\Delta_1(u_1)$ y por lo tanto, que $u_1=-\xi_1 x+b$ para algún $b\in\mathbb{C}$.

La ecuación (4.25) puede expresarse ahora como $\xi_3 y=\varphi(u_3)+\xi_1 z$. Nuevamente, analizando las potencias de z en esta igualdad, se prueba que $u_3\in k[x]y+k[x]z$ y que $\xi_3=\xi_1=0$, y esto último implica que $u_1\in\mathbb{C}$.

Por último, si $p_1,p_2\in k[x]$ y escribimos $u_3=p_1y+p_2z$, la ecuación (4.26) es $\xi_4 w=\theta_\alpha(u_4)-p_1y-p_2z$, de la cual se deduce rápidamente que $\xi_4=0$. □

Observación 4.4.8. Las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\Delta_\alpha(r_4) &= \frac{\Delta_1(r_5)-\Delta_\alpha(r_5)}{1-\alpha},\\
\Delta_1(q_1) &= (\alpha-1)\Delta_\alpha(r_1),\\
\Delta_1(q_2) &= (\alpha-1)\Delta_\alpha(r_2)-\Delta_\alpha(r_3)+\Delta_1(r_3),
\end{aligned}$$

junto con el Lema 4.3.1, implican que dado $r_5\in k[x]$, r_4 queda unívocamente determinado salvo constantes. Lo mismo ocurre entre r_1 y q_1, y dados r_2 y $r_3\in k[x]$, q_2 queda determinado salvo constantes.

4.5 Cálculo del tercer grupo de cohomología

Los lemas siguientes y sus respectivos corolarios describen las imágenes de dos morfismos que aparecen naturalmente en el cálculo de los 3-cociclos.

Lema 4.5.1. *Sea $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$ y sea $\psi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ el morfismo dado por $\psi(u) = x \cdot u - (1+\alpha)u$.*

1. *Si $j + k \neq \alpha + 1$, entonces para todo $i \in \mathbb{N}_0$ el monomio $x^i y^j z^k$ pertenece a la imagen de ψ.*

2. *Si $j + k \neq \alpha$ y $j + k \neq 1$, entonces para todo $i \in \mathbb{N}_0$ el monomio $x^i y^j z^k w$ pertenece a la imagen de ψ.*

3. *Si $l \geq 2$, $j + k + l \neq \alpha + 1$ y $j + k \neq 0$, entonces para todo $i \in \mathbb{N}_0$ el monomio $x^i y^j z^k w^l$ pertenece a la imagen de ψ.*

4. *Si $l \geq 3$, $l \neq \frac{1}{\alpha} + 1$ y $l \neq \alpha + 1$, entonces para todo $i \in \mathbb{N}_0$ el monomio $x^i w^l$ pertenece a la imagen de ψ.*

5. *Si $\alpha = 1$ y $q_1, q_2, q_3 \in k[x]$, entonces el elemento $q_1 yz + q_2 z^2 + q_3 zw$ pertenece a la imagen de ψ.*

6. *Si $\alpha \neq 1$ y $p \in k[x]$, entonces el elemento $p(w + \frac{2}{\alpha - 1} z)w$ pertenece a la imagen de ψ.*

Demostración. Nos remitiremos a la fórmula (4.17) que muestra cómo actúa ψ sobre un elemento de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, en particular sobre los monomios.

1. Aquí $\psi(x^i y^j z^k) = (j + k - 1 - \alpha)x^i y^j z^k$ y como $j + k - 1 - \alpha \neq 0$, resulta

$$\psi\left(\frac{x^i y^j z^k}{j + k - 1 - \alpha}\right) = x^i y^j z^k.$$

2. En este caso $\psi(x^i y^j z^k w) = (j + k - 1)x^i y^j z^k w + x^i y^j z^{k+1}$. Como $j + k \neq \alpha$, por el ítem anterior sabemos que existe $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $\psi(u) = x^i y^j z^{k+1}$. Como además $j + k - 1 \neq 0$ obtenemos

$$\psi\left(\frac{x^i y^j z^k w - u}{j + k - 1}\right) = x^i y^j z^k w.$$

3. Probaremos este resultado por inducción en l. Sea $x^i y^j z^k w^2$ un monomio tal que $j + k > 0$ y $j + k + 2 \neq \alpha + 1$. Por la fórmula (4.17) resulta $\psi(x^i y^j z^k w^2) = (j + k - 1 + \alpha)x^i y^j z^k w^2 + 2x^i y^j z^{k+1} w$. Como $j + k + 1 \neq \alpha$ y de 1, por el ítem anterior sabemos que el segundo término pertenece a la imagen de ψ. Sea $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$

tal que $\psi(u) = 2x^iy^jz^{k+1}w$. Además, como $j + k - 1 + \alpha \neq 0$ para todos $j, k \in \mathbb{N}_0$ tales que $j + k > 0$, resulta

$$\psi\left(\frac{x^iy^jz^kw^2 - u}{j + k - 1 + \alpha}\right) = x^iy^jz^kw^2.$$

Sea ahora $x^iy^jz^kw^l$ un monomio donde $l \geq 3$, $j + k > 0$ y $j + k + l \neq \alpha + 1$. Supongamos que todo monomio en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ cuyo grado en w es $l - 1$, sus grados en y y z no son ambos nulos y cuyos grados en y, z y w no suman $\alpha + 1$ pertenece a $\mathrm{Im}(\psi)$ y veamos que $x^iy^jz^kw^l$ también. Nuevamente por la fórmula (4.17) resulta $\psi(x^iy^jz^kw^l) = (j + k - 1 + \alpha(l - 1))x^iy^jz^kw^l + lx^iy^jz^{k+1}w^{l-1}$. Como $l \geq 3$, $j + k + 1 > 0$ y $j + k + l \neq \alpha + 1$, por hipótesis inductiva existe $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $\psi(u) = lx^iy^jz^{k+1}w^{l-1}$. Como $l \geq 3$ y $j + k > 0$, $j + k - 1 + \alpha(l - 1)$ nunca se anula y resulta

$$\psi\left(\frac{x^iy^jz^kw^l - u}{j + k - 1 + \alpha(l - 1)}\right) = x^iy^jz^kw^l.$$

4. Sea $i \in \mathbb{N}_0$, $l \geq 3$ tal que $l \neq \frac{1}{\alpha} + 1$ y $l \neq \alpha + 1$. De la fórmula (4.17) resulta $\psi(x^iw^l) = (\alpha(l - 1) - 1)x^iw^l + lx^izw^{l-1}$. Como $l \geq 3$ y $l \neq \alpha + 1$, por el ítem 3 sabemos que existe $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $\psi(u) = lx^izw^{l-1}$ y como $l \neq \frac{1}{\alpha} + 1$ resulta

$$\psi\left(\frac{x^iw^l - u}{\alpha(l - 1) - 1}\right) = x^iw^l.$$

5. Sean $q_1, q_2, q_3 \in k[x]$ y $\alpha = 1$, de la fórmula (4.19) obtenemos la igualdad $\psi(q_1yw + q_2zw + q_3w^2) = q_1yz + q_2z^2 + q_3zw$.

6. Sea $p \in k[x]$ y $\alpha \neq 1$, la igualdad $\psi(p\frac{w^2}{\alpha-1}) = p(w + \frac{2}{\alpha-1}z)w$ es consecuencia de la fórmula (4.17).

$\square$

Corolario 4.5.2. *Sea* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$.

1. *Si* $\alpha \neq \frac{1}{m}$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$ *y* $\alpha \notin \mathbb{N}$, *entonces* $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Im}(\psi) + k[x]yw + k[x]zw$.

2. *Si* $\alpha = 1$, *entonces* $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Im}(\psi) + k[x]y^2 + k[x]yw + k[x]w^2$.

3. *Si* $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *y* $\alpha = \frac{1}{m}$, *entonces* $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Im}(\psi) + k[x]yw + k[x]zw + k[x]w^{m+1}$.

4. *Si* $\alpha \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, *entonces*

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i \geq 0} x^ik_\alpha[y, z, w] + k[x]zw + \mathrm{Im}(\psi),$$

donde $k_{\alpha+1}[y, z, w]$ *denota al* k*-espacio vectorial de polinomios en* y, z *y* w *homogéneos de grado* $\alpha + 1$.

Demostración. La demostración es análoga a la del Corolario 4.4.2. □

Definimos ahora el morfismo $\eta : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ el dado por $\eta(u) = x \cdot u - 2u$. El Lema 4.1.1 nos permite describir su acción en un elemento $u = \sum \lambda_{i,j,k,l} x^i y^j z^k w^l$ como

$$\eta(u) = \sum \lambda_{i,j,k,l}[(j + k - 2 + \alpha l)x^i y^j z^k w^l + l x^i y^j z^{k+1} w^{l-1}]. \tag{4.29}$$

Observemos que η y ψ coinciden cuando $\alpha = 1$, por lo cual en el lema siguiente obviaremos ese valor de α.

Lema 4.5.3. *Sea $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$ tal que $\alpha \neq 1$ y sea $\eta : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ el morfismo dado por $\eta(u) = x \cdot u - 2u$.*

1. *Si $j + k \neq 2$, entonces para todo $i \in \mathbb{N}_0$ el monomio $x^i y^j z^k$ pertenece a la imagen de η.*

2. *Si $j + k \neq 1$ y $j + k \neq 2 - \alpha$, entonces para todo $i \in \mathbb{N}_0$ el monomio $x^i y^j z^k w$ pertenece a la imagen de η.*

3. *Si $l \geq 2$ y $j + k \neq 0$, entonces para todo $i \in \mathbb{N}_0$ el monomio $x^i y^j z^k w^l$ pertenece a la imagen de η.*

4. *Si $l \geq 2$ y $l \neq \frac{2}{\alpha}$, entonces para todo $i \in \mathbb{N}_0$ el monomio $x^i w^l$ pertenece a la imagen de η.*

5. *Si $p_1, p_2 \in k[x]$, entonces $p_1(w + \frac{z}{\alpha-1})y + p_2(w + \frac{z}{\alpha-1})z$ pertenece a la imagen de η.*

Demostración.

1. De la fórmula (4.29) obtenemos que $\eta(x^i y^j z^k) = (j + k - 2)x^i y^j z^k$. Como $j + k \neq 2$, resulta
$$\eta\left(\frac{x^i y^j z^k}{j + k - 2}\right) = x^i y^j z^k.$$

2. De la fórmula (4.29) se sigue que $\eta(x^i y^j z^k w) = (j + k - 2 + \alpha)x^i y^j z^k w + x^i y^j z^{k+1}$. Como $j + k \neq 1$, del ítem 1 se deduce que existe $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $\eta(u) = x^i y^j z^{k+1}$, y como $j + k \neq 2 - \alpha$, resulta
$$\eta\left(\frac{x^i y^j z^k w - u}{j + k - 2 + \alpha}\right) = x^i y^j z^k w.$$

3. Probaremos este resultado por inducción en l. Si $l = 2$ y j y k no son ambos nulos, resulta $\eta(x^i y^j z^k w^2) = (j + k - 2 + 2\alpha)x^i y^j z^k w^2 + 2x^i y^j z^{k+1} w$. Notemos que como estamos suponiendo que α es distinto de 1 y $j + k \neq 0$, nunca sucede que $j + k + 1 = 2 - \alpha$. Por el ítem 2 sabemos que existe $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $\eta(u) = 2x^i y^j z^{k+1} w$. Como $\alpha \neq 1$, el coeficiente $j + k - 2 + 2\alpha$ nunca se anula y obtenemos
$$\eta\left(\frac{x^i y^j z^k w^2 - u}{j + k - 2 + 2\alpha}\right) = x^i y^j z^k w^2.$$

Sean ahora $l \geq 3$ y $j,k \in \mathbb{N}_0$ no ambos nulos y supongamos que todo monomio de grado $l-1$ en w cuyos grados en y y z no sean ambos nulos pertenece a la imagen de η, veremos que $x^i y^j z^k w^l$ también pertenece a la imagen de η. De (4.29) se sigue que $\eta(x^i y^j z^k w^l) = (j+k-2+l\alpha)x^i y^j z^k w^l + l x^i y^j z^{k+1} w^{l-1}$. Como $l \geq 3$, por hipótesis inductiva existe $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $\eta(u) = l x^i y^j z^{k+1} w^{l-1}$. Como $l \geq 3$, $j+k-2+l\alpha$ nunca se anula y resulta

$$\eta\left(\frac{x^i y^j z^k w^l - u}{j+k-2+l\alpha}\right) = x^i y^j z^k w^l.$$

4. Nuevamente de (4.29) se sigue que $\eta(x^i w^l) = (l\alpha - 2)x^i w^l + l x^i z^1 w^{l-1}$. Como $l \geq 3$, por el ítem 2 sabemos que existe $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $\eta(u) = l x^i z w^{l-1}$, y como $l\alpha - 2 \neq 0$ resulta
$$\eta\left(\frac{x^i w^l - u}{l\alpha - 2}\right) = x^i w^l.$$

5. Si p_1 y p_2 son polinomios en x, de (4.29) se sigue que
$$\eta\left(p_1 \frac{yw}{\alpha-1} + p_2 \frac{zw}{\alpha-1}\right) = p_1\left(w + \frac{z}{\alpha-1}\right)y + p_2\left(w + \frac{z}{\alpha-1}\right)z. \qquad \square$$

Del este lema, y la información obtenida sobre la imagen de ψ en el caso en que $\alpha = 1$, se deduce el siguiente corolario.

Corolario 4.5.4. *Sea* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$.

1. *Si* $\alpha \neq \frac{2}{m}$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$, *entonces* $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \operatorname{Im}(\eta) + k[x]y^2 + k[x]yz + k[x]z^2$.

2. *Si* $\alpha = 2$, *entonces* $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \operatorname{Im}(\eta) + k[x]w + k[x]y^2 + k[x]yz + k[x]z^2$.

3. *Si* $\alpha = 1$, *entonces* $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \operatorname{Im}(\eta) + k[x]y^2 + k[x]yw + k[x]w^2$.

4. *Si* $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ *y* $\alpha = \frac{2}{m}$, *entonces* $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \operatorname{Im}(\eta) + k[x]y^2 + k[x]yz + k[x]z^2 + k[x]w^m$.

El último lema de esta sección describirá el núcleo de un nuevo morfismo para algunos valores de α, que serán aquellos para los cuales calcularemos el tercer grupo de cohomología.

Sea $\rho : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ el morfismo dado por $\rho(u) = x \cdot u - (2+\alpha)u$. Del Lema (4.1.1) se deduce que su acción sobre un elemento $u = \sum \lambda_{i,j,k,l} x^i y^j z^k w^l$ está dada por

$$\rho(u) = \sum \lambda_{i,j,k,l}[(j+k-2+\alpha(l-1))x^i y^j z^k w^l + l x^i y^j z^{k+1} w^{l-1}]. \qquad (4.30)$$

Lema 4.5.5. *Sean* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$ *y* $\rho(u) : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *el morfismo dado por* $\rho(u) = x \cdot u - (2+\alpha)u$. *Si* $\alpha \neq \frac{1}{m}$, $\alpha \neq \frac{2}{m}$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$ *y* $\alpha \notin \mathbb{N}$, *entonces* $\operatorname{Ker}(\rho) = k[x](w + \frac{z}{\alpha-1})y^2 + k[x](w + \frac{z}{\alpha-1})yz$.

Demostración. Una de las inclusiones se prueba fácilmente utilizando la fórmula (4.30). Para demostrar la otra inclusión, analizaremos la fórmula (4.30) igualada a 0, teniendo en cuenta los coeficientes de las distintas potencias de z.

- Coeficiente de z^0:

$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,0,l}(j-2+\alpha(l-1))x^i y^j w^l = 0.$$

  Como $\alpha \neq \frac{1}{m}$, $\alpha \neq \frac{2}{m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, no es un número natural ni un número racional negativo, $j-2+\alpha(l-1)$ se anula solo sí $j=2$ y $l=1$, lo que implica que $\lambda_{i,j,0,l}=0$ salvo, eventualmente, en ese caso.

- Coeficiente de z^1:

$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,1,l}(j-1+\alpha(l-1))x^i y^j w^l + \lambda_{i,2,0,1}x^i y^2 = 0.$$

  Si $j \neq 1,2$, como $\alpha \neq \frac{1}{m}$, $\alpha \neq \frac{2}{m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, no es un número natural ni un número racional negativo, $\lambda_{i,j,1,l}$ se anula para todos $i,l \in \mathbb{N}_0$. Si $j=1$, $\lambda_{i,1,1,l}$ se anula para todos $i,l \in \mathbb{N}_0$ salvo, eventualmente, en caso que $l-1$. Si $j=2$ y $l \neq 0$, también resulta $\lambda_{i,2,1,l}$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Por último, si $j=2$ y $l=0$ obtenemos $\lambda_{i,2,1,0} = \lambda_{i,2,0,1}/(\alpha-1)$.

- Coeficiente de z^2:

$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,2,l}(j+\alpha(l-1))x^i y^j w^l + \lambda_{i,1,1,1}x^i y = 0.$$

  Si $j \neq 1$, $\lambda_{i,j,2,l}$ se anula para todos $i,l \in \mathbb{N}_0$. Si $j=1$ y $l \neq 0$ también resulta $\lambda_{i,1,2,l} = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Y si $j=1$ y $l=0$ obtenemos que $\lambda_{i,1,2,0} = \lambda_{i,1,1,1}/(\alpha-1)$.

- Coeficiente de z^3:

$$\sum_{i,j,l} \lambda_{i,j,2,l}(j+1+\alpha(l-1))x^i y^j w^l = 0.$$

  Como $\alpha \notin \mathbb{N}$ y no es un número racional negativo, $\lambda_{i,j,2,l}$ se anula para todos $i,j,l \in \mathbb{N}_0$.

Puede probarse fácilmente por inducción que $\lambda_{i,j,k,l} = 0$ para todos $i,j,l \in \mathbb{N}_0$ y $k \geq 3$. Un elemento del núcleo quedó descripto como

$$\begin{aligned} &\sum_i \lambda_{i,2,0,1}x^i y^2 w + \frac{\lambda_{i,2,0,1}}{\alpha-1}x^i y^2 z + \lambda_{i,1,1,1}x^i yzw + \frac{\lambda_{i,1,1,1}}{\alpha-1}x^i yz^2 \\ =&\sum_i \lambda_{i,2,0,1}x^i \left(w+\frac{z}{\alpha-1}\right)y^2 + \sum_i \lambda_{i,1,1,1}x^i\left(w+\frac{z}{\alpha-1}\right)yz. \end{aligned}$$ □

Proposición 4.5.6. *Sea $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$ tal que $\alpha \neq \frac{2}{m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \notin \mathbb{N}$. El k-espacio vectorial $HH^3(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ está generado por las clases de*

$$d\hat{x}|x^i(w + \frac{z}{\alpha - 1})y^2, \qquad d\hat{x}|x^i(w + \frac{z}{\alpha - 1})yz, \qquad d\hat{y}|yw, \qquad d\hat{z}|yw, \qquad y \qquad d\hat{z}|zw.$$

Además, las clases de los tres últimos elementos son linealmente independientes, en particular, no nulas.

Demostración. 1. Sea $f = d\hat{x}|u_1 + d\hat{y}|u_2 + d\hat{z}|u_3 + d\hat{w}|u_4$. Restando $\delta_2(dy \wedge dz|v_{23})$ con v_{23} conveniente, por el Corolario 4.5.4, que da información sobre la imagen de η, podemos suponer que $u_4 \in k[x]y^2 + k[x]yz + k[x]z^2$. Restando $\delta_2(dx \wedge dy|v_{12} + dx \wedge dz|v_{13})$ para algunos v_{12} y v_{13} adecuados, por el Lema 4.3.6 podemos suponer que $u_4 = 0$. Ahora, por el Corolario 4.5.2, que describe la imagen de ψ, si restamos $\delta_2(dy \wedge dw|v_{24} + dz \wedge dw|v_{34})$ para ciertos v_{24} y v_{34}, podemos suponer que u_2 y u_3 pertenecen a $k[x]yw + k[x]zw$. Por último, restando $\delta_2(dx \wedge dw|v_{14})$ con $v_{14} \in k[x]w$ adecuado, podemos suponer que $u_2 \in k[x]yw$.

Si $f \in \mathrm{Ker}(\delta_3)$, entonces vale

$$x \cdot u_1 - (2 + \alpha)u_1 - y \cdot u_2 + z \cdot u_3 = 0. \tag{4.31}$$

Si $p_1, p_2, p_3 \in k[x]$, escribimos $u_2 = p_1 yw$, $u_3 = p_2 yw + p_3 zw$ y utilizamos la notación de la Observación 4.3.4, la ecuación (4.31) es

$$\rho(u_1) = \Delta_1(p_1)y^2w - \Delta_1(p_2)yzw - \Delta_1(p_3)z^2w. \tag{4.32}$$

Utilizando la descripción de la acción de ρ dada en (4.30), se pueden analizar los coeficientes de las potencias de z en (4.32) y concluir que $\Delta_1(p_i) = 0$ para $i = 1, 2, 3$ y que $u_1 \in \mathrm{Ker}(\rho)$. Del Lema 4.1.6 se sigue que $p_i \in \mathbb{C}$ para $i = 1, 2, 3$ y del Lema 4.5.5 que $u_1 \in k[x](w + \frac{z}{\alpha-1})y^2 + k[x](w + \frac{z}{\alpha-1})yz$.

Quedó probado entonces que f se puede escribir como

$$\begin{aligned} f = {} & \mu_1 d\hat{y}|yw + \mu_2 d\hat{z}|yw + \mu_3 d\hat{z}|zw \\ & + \sum \lambda_i d\hat{x}|x^i(w + \frac{z}{\alpha - 1})y^2 + \sum \beta_i d\hat{x}|x^i(w + \frac{z}{\alpha - 1})yz, \end{aligned}$$

con μ_i, λ_i y $\beta_i \in \mathbb{C}$.

Para probar que las clases de $d\hat{y}|yw$, $d\hat{z}|yw$ y $d\hat{z}|zw$ son linealmente independientes, tomemos una combinación lineal igualada a un 2-coborde. Sean $\mu_1, \mu_2\mu_3 \in \mathbb{C}$ y $v_{ij} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tales que

$$\begin{aligned} & \mu_1 d\hat{y}|yw + \mu_2 d\hat{z}|yw + \mu_3 d\hat{z}|zw = \\ & \quad \delta_2(dx \wedge dy|v_{12} + dx \wedge dz|v_{13} + dx \wedge dw|v_{14} + dy \wedge dz|v_{23} + dy \wedge dw|v_{24} + dz \wedge dw|v_{34}). \end{aligned}$$

Restando 1-cobordes podemos suponer que $v_{12} \in k[x]y + k[x]z$, que $v_{13} \in k[x]$ y que $v_{14} \in k[x]w$. Desarrollando el miembro de la derecha de la igualdad, obtenemos, entre otras, las siguientes ecuaciones

$$0 = z \cdot v_{12} - y \cdot v_{13} + \eta(v_{23}), \tag{4.33}$$
$$\mu_2 yw + \mu_3 zw = w \cdot v_{12} - y \cdot v_{14} + \psi(v_{24}) - v_{23}, \tag{4.34}$$
$$\mu_1 yw = w \cdot v_{13} - z \cdot v_{14} + \psi(v_{34}). \tag{4.35}$$

Al igual que en la demostración de Proposición 4.4.7, de la ecuación (4.33) se deduce que $v_{12} \in ky + kz$, que $v_{13} \in ky$ y que v_{23} es de la forma $v_{23} = q_1 y^2 + q_2 yz + q_3 z^2$, con $q_1, q_2, q_3 \in k[x]$. Luego, de la ecuación (4.35) se sigue que $\mu_1 = 0$ y que $v_{14} \in kw$. Por último, la ecuación (4.34) quedó reducida a $\mu_2 yw + \mu_3 zw = \psi(v_{24}) - v_{23}$, de la cual se sigue, analizando los coeficientes de las potencias de z, que $\mu_2 = \mu_3 = 0$. □

4.6 Cálculo del cuarto grupo de cohomología

Para finalizar con el cálculo de la cohomología de Hochschild, probaremos un último lema que provee información sobre la imagen de ρ.

Lema 4.6.1. *Sea $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$ y sea $\rho : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ el morfismo definido por $\rho(u) = x \cdot u - (2+\alpha)u$.*

1. *Si $j + k \neq 2 + \alpha$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$ el monomio $x^i y^j z^k$ pertenece a la imagen de ρ.*
2. *Si $j + k \neq 1 + \alpha$ y $j + k \neq 2$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$ el monomio $x^i y^j z^k w$ pertenece a la imagen de ρ.*
3. *Si $j + k \neq \alpha$, $j + k \neq 1$ y $j + k \neq 2 - \alpha$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$ el monomio $x^i y^j z^k w^2$ pertenece a la imagen de ρ.*
4. *Si $l \geq 3$, $j + k \neq 0$ y $j + k + l \neq \alpha + 2$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$ el monomio $x^i y^j z^k w^l$ pertenece a la imagen de ρ.*
5. *Si $l \geq 4$, $l \neq 2 + \alpha$ y $l \neq \frac{2}{\alpha} + 1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$ el monomio $x^i w^l$ pertenece a la imagen de ρ.*
6. *Si $\alpha \neq 1$ y $p, q, r \in k[x]$, los elementos $p(\frac{2z}{\alpha-1} + w)yw$, $q(\frac{2z}{\alpha-1} + w)zw$ y $r(\frac{3z}{2(\alpha-1)} + w)w^2$ pertenecen a la imagen de ρ.*
7. *Si $\alpha = 1$, $i \in \{1, \cdots, 6\}$ y $p_i \in k[x]$, los elementos $p_1 zw^2$, $p_2 z^2 w$, $p_3 z^3$, $p_4 yzw$, $p_5 yz^2$ y $p_6 y^2 z$ pertenecen a la imagen de ρ.*

Demostración. Usaremos la fórmula (4.30) que describe cómo actúa ρ sobre un elemento arbitrario de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

1. En este caso, $\rho(x^i y^j z^k) = (j + k - 2 - \alpha)x^i y^j z^k$. Como $j + k - \alpha - 2$ es no nulo, dividiendo por ese coeficiente se obtiene el resultado deseado.

2. Aquí
$$\rho(x^iy^jz^kw) = (j+k-2)x^iy^jz^kw + x^iy^jz^{k+1}.$$
Como $j+k+1 \neq 2+\alpha$, por el ítem anterior sabemos que existe $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $\rho(u) = x^iy^jz^{k+1}$. Además, como $j+k-2 \neq 0$ resulta
$$\rho\left(\frac{x^iy^jz^kw - u}{j+k-2}\right) = x^iy^jz^kw.$$

3. Como $j+k \neq \alpha$ y $j+k \neq 1$, por el ítem anterior existe $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $\rho(u) = 2x^iy^jz^{k+1}w$. Además, como $j+k \neq 2-\alpha$, resulta
$$\rho\left(\frac{x^iy^jz^kw^2 - u}{j+k-2+\alpha}\right) = x^iy^jz^kw^2.$$

4. Probaremos este caso por inducción en l. Si $l=3$ vale la siguiente fórmula
$$\rho(x^iy^jz^kw^3) = (j+k-2+2\alpha)x^iy^jz^kw^3 + 3x^iy^jz^{k+1}w^2.$$
Por el ítem anterior, como $j+k \neq 0$, $j+k+3 \neq 2+\alpha$ y $j+k \neq 1-\alpha$ (la única manera es que eso pasase sería que $\alpha = 1$ y $j+k=0$, y esto último no sucede), existe $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $\rho(u) = 3x^iy^jz^{k+1}w^2$. Además, como $j+k \neq 0$ y α no es un número racional negativo, $j+k-2+2\alpha$ es no nulo, por lo que resulta
$$\rho\left(\frac{x^iy^jz^kw^3 - u}{j+k-2+2\alpha}\right) = x^iy^jz^kw^3.$$
Sea ahora $p = x^iy^jz^kw^l$ un monomio en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $l \geq 4$, $j+k \neq 0$ y $j+k+l \neq 2+\alpha$, y supongamos que todo monomio de grado $l-1$ en w tal que sus grados en y, z y w no suman $2+\alpha$ y sus grados en y y z no son ambos nulos, pertenece a $\operatorname{Im}(\rho)$ y veamos que entonces p también pertenece a la imagen de ρ.
$$\rho(p) = (j+k-2+\alpha(l-1))x^iy^jz^kw^l + lx^iy^jz^{k+1}w^{l-1}.$$
Como $j+(k+1)+(l-1) \neq 2+\alpha$, $j+k+1 \neq 0$ y $l \geq 4$, por hipótesis inductiva el segundo término pertenece a $\operatorname{Im}(\rho)$. Sea $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $\rho(u) = lx^iz^{k+1}w^{l-1}$. Como α no es un número racional no negativo y $l \geq 4$, $j+k-2+\alpha(l-1)$ no se anula y obtenemos
$$\rho\left(\frac{x^iy^jz^kw^l - u}{j+k-2+\alpha(l-1)}\right) = p.$$

5. Sea $l \geq 4$ e $i \in \mathbb{N}_0$. De la fórmula (4.30) resulta
$$\rho(x^iw^l) = (\alpha(l-1)-2)x^iw^l + lx^izw^{l-1}.$$
Como $l \geq 4$ y $l \neq 2+\alpha$, por el ítem 4 existe $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tal que $\rho(u) = lx^izw^{l-1}$. Como $l \neq \frac{2}{\alpha}+1$, $\alpha(l-1)-2$ resulta no nulo y obtenemos
$$\rho\left(\frac{x^iw^l - u}{\alpha(l-1)-2}\right) = x^iw^l.$$

6. Simplemente calculamos

$$\rho\left(p\frac{yw^2}{\alpha-1}\right) = p\left(yw^2 + \frac{2}{\alpha-1}yzw\right) = p\left(\frac{2z}{\alpha-1} + w\right)yw,$$
$$\rho\left(q\frac{zw^2}{\alpha-1}\right) = q\left(zw^2 + \frac{2}{\alpha-1}z^2w\right) = q\left(\frac{2z}{\alpha-1} + w\right)zw,$$
$$\rho\left(r\frac{w^3}{2(\alpha-1)}\right) = p\left(w^3 + \frac{3}{2(\alpha-1)}zw^2\right) = r\left(\frac{3z}{2(\alpha-1)} + w\right)w^2.$$

7. Como en ítem anterior, basta calcular

$$\rho\left(p_1\frac{w^3}{3}\right) = p_1zw^2, \qquad \rho\left(p_2\frac{zw^2}{2}\right) = q_2z^2w,$$
$$\rho(p_3z^2w) = p_3z^3, \qquad \rho\left(p_4\frac{yw^2}{2}\right) = p_4yzw,$$
$$\rho(p_5yzw) = p_5yz^2, \qquad \rho(p_6y^2w) = p_6y^2z.$$

□

De este lema se deduce el siguiente corolario.

Corolario 4.6.2. *Sea $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$. Notaremos con $k_n[y,z,w]$ al k-espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado n en y, z y w.*

1. *Si $\alpha \neq \frac{2}{m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \notin \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Im}(\rho) + k[x]yzw + k[x]zw^2$.*
2. *Si $\alpha = 1$, entonces $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Im}(\rho) + k[x]y^3 + k[x]y^2w + k[x]yw^2 + k[x]w^3$.*
3. *Si $\alpha = 2$, entonces $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Im}(\rho) + k[x]yzw + k[x]zw^2 + k[x]w^2 + \bigoplus_{i\geq 0} x^i k_4[y,z,w]$.*
4. *Si $\alpha \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, entonces $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Im}(\rho) + k[x]yzw + k[x]zw^2 + \bigoplus_{i\geq 0} x^i k_{2+\alpha}[y,z,w]$.*
5. *Si $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ y $\alpha = \frac{2}{m}$, entonces $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Im}(\rho) + k[x]yzw + k[x]zw^2 + k[x]w^{m+1}$.*

Ahora estamos en condiciones de describir el cuarto grupo de cohomología.

Proposición 4.6.3. *Para todo $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$ se verifica que $HH^4(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = 0$.*

Demostración. Sea $f = dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw|u \in \bigwedge^4 \mathfrak{g}^* \otimes_k \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Del Corolario 4.6.2 y los Lemas 4.3.6 y 4.3.7 se deduce que $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Im}(\rho) + \mathrm{Im}(y\cdot -) + \mathrm{Im}(z\cdot -) + \mathrm{Im}(w\cdot -)$. Por lo tanto, todo elemento de $\bigwedge^4 \mathfrak{g}^* \otimes_k \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es un borde. □

Bibliografía

[Aga99] Y. Agaoka, *On the variety of 3-dimensional Lie algebras*, Lobachevskii J. Math. **3** (1999), 5–17 (electronic). Towards 100 years after Sophus Lie (Kazan, 1998). MR1743129 (2001e:17007)

[Aga02] Y. Agaoka, *An algorithm to determine the isomorphism classes of 4-dimensional complex Lie algebras*, Linear Algebra Appl. **345** (2002), 85–118, DOI 10.1016/S0024-3795(01)00473-6. MR1883269 (2002m:17004)

[BFNT13] L. Boza, E. M. Fedriani, J. Núñez, and Á. F. Tenorio, *A historical review of the classifications of Lie algebras*, Rev. Un. Mat. Argentina **54** (2013), no. 2, 75–99. MR3263653

[CE56] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956. MR0077480 (17,1040e)

[Cho12] S. Chouhy, *Deformaciones de álgebras envolventes de álgebras de Lie de dimensión 3*, Departamento de Matemática, FCEyN, UBA, 2012.

[Ger64] M. Gerstenhaber, *On the deformation of rings and algebras*, Ann. of Math. (2) **79** (1964), 59–103. MR0171807 (30 #2034)

[FP07] A. Fialowski and M. Penkava, *Deformations of four-dimensional Lie algebras*, Commun. Contemp. Math. **9** (2007), no. 1, 41–79, DOI 10.1142/S0219199707002344. MR2293560 (2007j:17036)

[Rom89] M. Romdhani, *Classification of real and complex nilpotent Lie algebras of dimension 7*, Linear and Multilinear Algebra **24** (1989), no. 3, 167–189, DOI 10.1080/03081088908817910. MR1007253 (90j:17021)

[TU92] H. Tasaki and M. Umehara, *An invariant on* 3*-dimensional Lie algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), no. 2, 293–294, DOI 10.2307/2159244. MR1087471 (92i:17009)

[Wei94] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. MR1269324 (95f:18001)

[Whi10] S. Whitherspoon, Curso *"Cohomology of Hopf algebras"*, Universidad de Buenos Aires, 2010.