



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

La dinámica de la mejor respuesta

Carlo Giambiagi Ferrari

Director: Juan Pablo Pinasco

Marzo 2016

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi director Juan Pablo por introducirme a la teoría de juegos y presentarme a este problema que parece simple pero es muy profundo. Por la ayuda y predisposición a lo largo de este trabajo.

Gracias a los jurados.

Gracias a todos los docentes que tuve y me formaron. A Patu, Gabriel Acosta, Igna, Bonder entre muchos otros. A Willy por la ayuda, por todas las puertas que nos abrió. Los viajes, las reuniones y la invaluable oportunidad de aplicar matemática fuera de la facultad.

Cuando llegué a Buenos Aires para estudiar en la UBA no podía imaginar el cambio al cual me estaba por someter. Redescubrí mi historia familiar y entendí un poco más quien soy y qué quiero.

Gracias Julia por compartir esta búsqueda de identidad conmigo. Por traer alegría y enseñarme a valorar el presente.

Gracias a mis padres por todo su apoyo. A mi mamá por su amor incondicional materno. A mi papá por su sabiduría.

A toda mi familia por el soporte que me brinda siempre. Gracias Milena e Isabel porque estando en situaciones parecidas siento que siempre pude contar con ustedes. También a mis hermanas Flô y Anna. A Paloma y a todas mis primas y primos, tíos y abuelos.

Gracias a mis amigos de la facultad. Por compartir esta locura que es estudiar en exactas. Por lo que me enseñaron. Santi Vega, Chebi, Pau, Fede, Rafa, Mel, Lupi, Mer, Vicu y todos los que saben que están acá. Gracias Luz por toda la contención. Gracias Agustín por ser mi amigo cuando todavía no sabía ni donde estaba parado.

Agradezco a Manu por tu amistad y tu ayuda. Por nuestra complicidad. Por compartir el trabajo y el descanso. También a Santi Durán por abrirme la cabeza, por ayudarme a construir y desconstruir creencias y discursos.

A todos los chicos del subsuelo por mostrarme que hay otra manera de hacer las cosas. A Mariano, Nacho, Giuly, Tefi, Dani, Ludmi y Clio, entre tantos.

A Nico por enseñarme tanto de la vida, porque sos un ejemplo de bondad.
A los chicos del Smash. De las mejores formas de despejarse. Gracias pibs.

A mis amigos paulistas porque con ellos parece que nunca me fui. Sé que tengo un puerto seguro donde puedo volver siempre. A los que siempre conocí.
A Barbosa por todo lo vivido, a Jão, Chaves, Amon y Raphael. A mis amigos de la Escola da Vila. También a los que vinieron después y me conocieron ya como argentino. A Rafa, a Isa, Virgilio, Nicolas, Ru, Ju y todos los que siempre están cuando yo también estoy.

Por último a mi compañera Mariana por estar este último tiempo, por más difícil que haya sido. Gracias por perdonar mis ausencias, por hacer un esfuerzo para entender de lo que hablo, por seguir a mi lado y elegir estar conmigo. No podría ser el mismo sin vos.

Aunque este sea un logro personal y hubo también momentos de duda, tuve todo el soporte que necesité. No todos entramos a la universidad en las mismas condiciones y si hoy entrego esta tesis es también porque pude asistir a un gran colegio y pude elegir entre estudiar o trabajar. En casa las bibliotecas rebalsan libros, sobran lugares para estudiar y nunca dudaron de mi capacidad. Gracias a mi familia por este privilegio.

Índice general

Agradecimientos	5
Introducción	8
Preliminares	11
Teoría de Juegos	11
1. La Dinámica de la Mejor Respuesta	16
1.1. Ejemplos 2×2	19
1.2. Ejemplos 3×3	23
2. Existencia y Propiedades	29
2.1. Existencia	29
2.2. Propiedades	32
3. Convergencia	38
3.1. Estrategias evolucionariamente estables	38
4. Juegos Bimatriaciales	46
4.1. La ecuación de Best Response en juegos bimatriaciales	47
4.2. Construcción de Soluciones	48
4.2.1. Cuando a lo sumo un jugador es indiferente	52
4.2.2. Caso 2×2	53
4.2.3. Cuando ambos jugadores son indiferentes	56
4.3. Convergencia y Periodicidad	59
4.3.1. Juegos de suma cero	59
4.3.2. El contra ejemplo de Shapley	61
A. Inclusiones Diferenciales	68

Introducción

Luego de que Nash presentara la noción de equilibrio para juegos no cooperativos en 1951 [9], surge una vasta discusión acerca de su interpretación. Desde el punto de vista teórico los equilibrios de Nash son cruciales para estudiar juegos y modelos de interacción. Pero desde un punto de vista sociológico la definición de Nash no es suficiente para predecir el comportamiento de los jugadores.

En este contexto surge la dinámica discreta de *juego ficticio* (o Fictitious Play), introducida por Brown [2], donde los jugadores actualizan su estrategia hacia una mejor respuesta a lo que juegan sus oponentes. Se esperaba que siguiendo esta simple regla los jugadores encontrarían solos el equilibrio de Nash, pero en los 60 Shapley encontró un contraejemplo en donde ambos participantes recorren cíclicamente las mismas estrategias en una órbita periódica.

La dinámica de mejor respuesta (Best Response), presentada por Gilboa y Matsui [5], surge como la extensión continua de la dinámica de juego ficticio. En una población de jugadores cada individuo juega una estrategia propia y llamamos x a la distribución de toda la población en las distintas estrategias. La dinámica de mejor respuesta dicta que la población actualizará su estrategia en el tiempo según la regla

$$\dot{x} \in \text{BR}(x) - x \tag{1}$$

donde BR es la mejor respuesta a la estrategia x . La población avanza en línea recta hacia la mejor respuesta a su estado actual. Los jugadores son racionales, interpretan como estática a la población y buscan lo que más les conviene a corto plazo, e ignoran el hecho de que sus pares están haciendo lo mismo.

Hay que notar que la correspondencia $\text{BR}(x)$ puede no ser única y por lo tanto hay que abordar a (1) como una *inclusión diferencial*. Este hecho no nos trae mayores dificultades. De hecho enriquece el comportamiento de las trayectorias ya que aparecen algunas que jamás serían admitidas bajo el

paradigma de ecuaciones diferenciales. Veremos ejemplos donde las soluciones entran y salen de puntos de equilibrio *a piacere*.

Es difícil de prever a priori como se comportarán las trayectorias. En muchos casos hay convergencia al equilibrio de Nash, pero en muchos otros no. Tampoco podemos decir nada sobre la estabilidad de los puntos de equilibrio. En este trabajo estudiaremos con detalle esta dinámica. Después de probar la existencia de soluciones vamos a estudiar un caso de convergencia y terminaremos analizando la dinámica de mejor respuesta en juegos bimatriciales.

Luego de presentar la notación y los principales resultados de teoría de juegos en los preliminares, construiremos desde el caso discreto de juego ficticio la dinámica de mejor respuesta y veremos los primeros ejemplos, estudiando casos de convergencia y no convergencia. Se verá de manera clara la diferencia de las soluciones de esta inclusión diferencial con respecto a las ecuaciones diferenciales. En el último ejemplo del capítulo 1 veremos un ejemplo de piedra papel o tijera que admite una órbita periódica. Mas aún, esta órbita es atractiva y para cualquier dato inicial afuera de ella, la solución tenderá a la órbita.

En el segundo capítulo veremos la existencia de soluciones generales para la dinámica de mejor respuesta. El resultado presentado es en realidad un caso particular de la demostración mas general de existencia para las inclusiones diferenciales que está incluido en el apéndice. Aprovechamos el marco de la teoría de juegos para simplificar la demostración. Le sigue un importante resultado, el teorema de aproximación, que a partir de una solución de BR dada, se puede construir una segunda solución lineal a trozos. Trabajar con poligonales va a ser fundamental para estudiar el comportamiento de las soluciones.

En el tercer capítulo hablaremos de la convergencia. A partir de condiciones razonables, veremos que la dinámica de BR converge a las *estrategias evolucionariamente estables*, que son equilibrios de Nash a los que se les agrega una *condición de estabilidad*. La definición de estas estrategias tiene su motivación en la biología, también ilustraremos esto con un ejemplo.

En el cuarto y último capítulo, estudiaremos juegos bimatriciales siguiendo el trabajo de Sparrow y Van Strien [14]. Adaptaremos la dinámica de mejor respuesta para el caso con solamente dos jugadores y veremos que el problema se simplifica bastante. Veremos la existencia y estudiaremos las características de las soluciones en este nuevo problema. En una segunda instancia abordaremos la convergencia, viendo un caso de convergencia global hacia el equilibrio de Nash para juegos de suma cero. Y terminamos la tesis con el famoso contraejemplo de Shapley, el primero en mostrar que existen juegos que admiten órbitas periódicas.

En el apéndice damos una demostración de la existencia de soluciones a las inclusiones diferenciales, ver Aubin y Cellina [1] y Clark [11], que nos da un mayor respaldo teórico al resto del trabajo.

Preliminares

Teoría de Juegos

Empecemos introduciendo el paradigma de la Teoría de Juegos, abordando la notación y los principales resultados.

Definición 0.1. Definimos un juego en su forma normal a la tupla

$$\Gamma = (\mathcal{I}, \{S^i\}_{i \in \mathcal{I}}, \{u^i\}_{i \in \mathcal{I}})$$

donde

- $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$, $N \in \mathbb{N}$ es el conjunto de jugadores,
- $S^i = \{1, \dots, n_i\}$, $n_i \in \mathbb{N}$ es el conjunto de las *estrategias puras* del jugador i ,
- $u^i : S^1 \times \dots \times S^N \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de pago del jugador i .

Llamamos $S = S^1 \times \dots \times S^N$ al conjunto de todas las combinaciones de estrategias. A un elemento $s \in S$ lo llamaremos un perfil.

La interpretación de esta definición es la siguiente. Para jugar el juego Γ , cada jugador $i \in \mathcal{I}$ elige una de sus estrategias $s_i \in S^i$, de manera independiente. Los jugadores no saben qué estrategias están eligiendo los demás. Cada jugador recibe un pago $u^i(s_1, \dots, s_N)$. El pago depende tanto de la elección del jugador i como de la de sus oponentes.

Cada individuo intentará maximizar su pago. Es importante notar que no hay un concepto de ganar o perder ya que la función de pagos u puede beneficiar o perjudicar a los jugadores por igual.

Introducimos ahora la idea de estrategias mixtas. Un jugador i puede, en vez de elegir entre dos o más estrategias puras, optar por jugar cada una con una cierta probabilidad. Definimos

$$\Delta_i := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n_i} : x_j \geq 0, \sum_j^{n_i} x_j = 1 \right\}$$

Los vectores x son una distribución de probabilidad sobre las estrategias puras de i . Lo llamamos una *estrategia mixta* para el jugador i . El conjunto de todas las estrategias mixtas de un jugador forman el simplex $\Delta_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ de dimensión \mathbb{R}^{n_i-1} . Llamamos $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_N$. A $\sigma \in \Delta$ lo llamamos un perfil o un estado (mixto).

Extendemos la función de pago a todas las estrategias mixtas pensando en el pago esperado de un perfil dado σ . Tenemos

$$u^i(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_N=1}^{n_N} \sigma_1^{k_1} \cdots \sigma_N^{k_N} u^i(k_1, \dots, k_N).$$

La nueva función u^i no es mas que multiplicar el pago de cada posible desenlace por la probabilidad de que ocurra. Recordemos que todas las estrategias son independientes.

En nuestro enfoque, tendremos una población muy grande de jugadores y un juego Γ que solo contempla dos jugadores. La función de pagos u será igual para ambos: una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Los jugadores tendrán n estrategias puras. Una vez que eligen su estrategia, son apareados al azar con otro jugador y ambos cobran lo correspondiente a sus estrategias en el juego.

Si un jugador i jugando σ_i es apareado con un jugador j que está jugando σ_j , el pago recibido por i será

$$u(\sigma_i, \sigma_j) = \sigma_i \cdot A \sigma_j$$

y análogamente, el jugador j recibirá

$$u(\sigma_j, \sigma_i) = \sigma_j \cdot A \sigma_i.$$

Como los jugadores serán apareados con probabilidad uniforme con cualquier oponente, es mejor pensar en el *pago esperado* de su estrategia contra toda la población. Decimos que la población está en un estado x cuando x_i es la proporción de jugadores que juega la estrategia i . Luego, el pago esperado de jugar una estrategia mixta σ será

$$\sigma \cdot Ax.$$

El pago medio de la población es $x \cdot Ax$.

Definimos ahora la correspondencia BR de la mejor respuesta. Es una función que manda cada perfil $x \in \Delta$ en las estrategias que maximizan el pago jugando contra x . Formalmente

$$\begin{aligned} \text{BR} : \Delta &\longrightarrow \mathcal{P}(\Delta) \\ \text{BR}(x) &= \operatorname{argmax}_{p \in \Delta} p \cdot Ax = \{p \in \Delta : p \cdot Ax = \max_i (Ax)_i\} \end{aligned}$$

Observación 0.2. La función BR es no vacía para todo $x \in \Delta$ ya que siempre habrá al menos una estrategia pura en $BR(x)$. Pero la mejor respuesta a un x dado no tiene por qué ser única. De hecho puede haber un continuo de mejores respuestas.

Supongamos que $e_i, e_j \in BR(x)$. Entonces $e_i \cdot Ax = e_j \cdot Ax$ (si fuera distinto, uno de los dos no sería la mejor respuesta). Luego cualquier combinación convexa de e_i y e_j también será una mejor respuesta puesto que

$$((1-t)e_i + te_j) \cdot Ax = (1-t)e_i \cdot Ax + te_j \cdot Ax = e_i \cdot Ax.$$

Entonces para cada x , $BR(x)$ es no vacío, convexo, y también compacto.

Por esta observación vemos que los conjuntos $BR(x)$ pueden tener un solo elemento o bien tener un continuo. Si bien $BR(x)$ no puede ser continua, $BR(x)$ si es semicontinua superiormente. Recordemos la definición:

Definición 0.3. $F(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ es semicontinua superiormente si dado $\varepsilon > 0$, existe δ tal que

$$F(x_1) \subset F(x) + \varepsilon B \quad \text{si} \quad \|x_1 - x\| < \delta \quad (2)$$

donde $B = B_1(0)$ es la bola unitaria.

Esto quiere decir que $BR(x)$ es continua en x (en la topología de Hausdorff) o bien $BR(x)$ contiene a $BR(x_1)$ para los x_1 en un entorno de x .

Observación 0.4. La correspondencia $BR(x)$ es semicontinua superiormente.

Demostración. La idea es mirar la cantidad de estrategias puras en $BR(x)$, llamémoslas $|BR(x)|$. Supongamos que $|BR(x)| = 1$. Entonces existe una sola coordenada de Ax que es maximal. Como Ax es continua en x , esa coordenada seguirá siendo máxima en un entorno de x .

Supongamos $|BR(x)| > 1$. Existen coordenadas i_1, \dots, i_k tal que el máximo $\max_i (Ax)_i = e_{i_j} Ax$ para todo $1 \leq j \leq k$. De nuevo usamos la continuidad de Ax visto como función de x .

Llamemos d al valor de la segunda mayor coordenada de Ax . Entonces

$$d < e_{i_j} Ax \quad \text{para todo} \quad j = 1 \dots k.$$

Pero

$$d > e_{i_l} Ax \quad \text{para todo} \quad i_l \neq i_j.$$

Basta tomar un entorno U de x que garantice que todas las coordenadas de Ax_1 , $x_1 \in U$ se mantengan tan lejos como

$$\frac{\max_i(Ax)_i - d}{2}.$$

No pueden entonces aparecer nuevas estrategias puras que sean la mejor respuesta puesto que estas valían a lo sumo d , y todas las coordenadas de Ax_1 que no son i_j valen a lo sumo

$$d + \frac{\max_i(Ax)_i - d}{2} = \frac{\max_i(Ax)_i + d}{2} < \max_i(Ax)_i.$$

Entonces $BR(x_1) \subseteq BR(x)$, concluyendo que $BR(x)$ es semicontinua superiormente. \square

Seguimos con la definición de equilibrio para juegos en su forma normal.

Definición 0.5. Sea $(\mathcal{I}, \{S^i\}_{i \in \mathcal{I}}, \{u^i\}_{i \in \mathcal{I}})$ un juego con N jugadores. Llamamos x_i la estrategia del jugador i y x_{-i} las estrategias de todos los demás jugadores.

El jugador i jugando x_i obtiene como pago $u^i(x_1, \dots, x_N) = u^i(x_i, x_{-i})$. Un conjunto de estrategias $x^* \in S$ se dice un *equilibrio de Nash* si ningún jugador puede beneficiarse cambiando unilateralmente de estrategia. Es decir, para todo $1 \leq i \leq N$,

$$u^i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq u^i(x_i, x_{-i}^*).$$

Si la desigualdad vale estrictamente, decimos que x^* es un equilibrio de Nash *estricto*.

Un equilibrio de Nash se dice *interior* si todas las coordenadas de x^* son no nulas.

El equilibrio de Nash se entiende como una solución al juego. Si los jugadores están en un equilibrio de Nash, no tienen motivación para cambiar su estrategia ya que no pueden mejorar su pago.

En el paradigma de los juegos poblacionales, la definición anterior es equivalente a la siguiente.

Definición 0.6. Supongamos que una población está jugando un juego bajo los pagos de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Un estado x^* se dice un *equilibrio de Nash* si y solo si

$$x^* \in BR(x^*).$$

A los equilibrios de Nash también se los suele notar como \hat{x} .

En 1951, John Nash probó la existencia de equilibrios de Nash para cualquier juego. Veamos una demostración usando el teorema de punto fijo de Kakutani.

Teorema 0.7. Nash

Sea $\Gamma = (\mathcal{I}, \{S^i\}_{i \in \mathcal{I}}, \{u^i\}_{i \in \mathcal{I}})$ un juego. Entonces existe al menos un equilibrio de Nash.

Demostración. Para probar la existencia de un equilibrio de Nash, definimos para el jugador i , $BR_i(\sigma_{-i})$ la mejor respuesta a la estrategia de los demás jugadores.

$$BR_i(\sigma_{-i}) = \operatorname{argmax}_{\sigma_i} (u^i(\sigma_i, \sigma_{-i}))$$

donde $\sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i}) \in \Delta$. Definimos la correspondencia

$$\begin{aligned} r : \Delta &\longrightarrow \mathcal{P}(\Delta) \\ r(\sigma) &= (BR_i(\sigma_{-i}), BR_{-i}(\sigma_i)) \end{aligned}$$

La existencia de un equilibrio de Nash es equivalente a que r tenga un punto fijo. Si $r(\sigma) = \sigma$, entonces la mejor respuesta para i es σ_i y la mejor respuesta para todos los demás es σ_{-i} .

Basta chequear r y Δ están en las hipótesis del teorema de punto fijo de Kakutani. Esto ocurre puesto que Kakutani pide

- Δ compacto, convexo, no vacío,
- $r(\sigma)$ no vacío y convexo para todo σ ,
- $r(\sigma)$ semicontinua superiormente.

Probamos anteriormente que Δ y r cumplen las tres condiciones y entonces el juego Γ tiene al menos un equilibrio de Nash □

Capítulo 1

La Dinámica de la Mejor Respuesta

Empecemos definiendo la dinámica discreta de *Juego Ficticio* (Fictitious Play). Supongamos que tenemos una población que va a jugar el juego A . Los jugadores solo podrán elegir estrategias puras, y podrán ver qué estrategia están usando los demás. En cada instancia, un nuevo jugador entra a la población y elige una estrategia que sea una mejor respuesta si su rival se elige con probabilidad uniforme entre todos los presentes. Aunque cada individuo utilice estrategias puras, el conjunto de la población formará una estrategia mixta esperada.

En un primer momento hay un solo jugador que elige una estrategia pura r_1 . A tiempo 2 ingresa el segundo jugador eligiendo una mejor respuesta a la estrategia del jugador 1. Es decir, maximizará $r_i \cdot Ar_1$ donde r_i son las estrategias puras.

A tiempo k , el jugador entrante $k + 1$ no sabe contra quien irá a jugar, así que elige una mejor respuesta r_{k+1} al promedio s_k de las estrategias de todos los jugadores en juego,

$$s_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k r_i \quad \text{el perfil o estado de la población a tiempo } k$$

El pago esperado del jugador $k + 1$ vendrá a ser

$$r_{k+1}As_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k r_{k+1}Ar_i.$$

Estamos asumiendo que los jugadores no pueden cambiar más su estrategia una vez que entran al juego.

Usando la definición de s_k escribimos

$$s_{k+1} - s_k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} r_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k r_i.$$

Separando el último sumando de s_{k+1} , podemos sacar factor común

$$\begin{aligned} \frac{r_{k+1}}{k+1} + \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^k r_i - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k r_i &= \frac{r_{k+1}}{k+1} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \sum_{i=1}^k r_i \\ &= \frac{r_{k+1}}{k+1} - \frac{1}{(k+1)k} \sum_{i=1}^k r_i \\ &= \frac{r_{k+1} - s_k}{k+1}. \end{aligned}$$

Definimos ahora la versión discreta de la dinámica Fictitious Play

$$s_{k+1} - s_k = \frac{r_{k+1} - s_k}{k+1}, \quad s_1 = r_1, \quad r_{k+1} \in BR(s_k). \quad (\text{FP})$$

Donde $BR(x)$ es el conjunto de todas las mejores respuestas al perfil x . En FP los individuos dan por hecho que la población está en un estado x . Les gustaría jugar una estrategia que maximice su ganancia al jugar contra x . A medida que avanza el tiempo discreto el estado de la población es perturbado por los ingresantes que entran jugando mejores respuestas. Con esto en mente, seguiremos nuestra construcción de la dinámica de la mejor respuesta.

La dinámica continua de Fictitious Play se define naturalmente llamando $s(t) = \frac{1}{t} \int_0^t r(\tau) d\tau$ el perfil de la población a tiempo t . Se lo puede interpretar como un límite de las s_k anteriores, tomando pasos temporales cada vez más chicos, o bien tomar un modelo con infinitos jugadores desde el principio y agregar continuamente nuevos participantes.

De manera similar a la construcción en el caso discreto, escribimos

$$s(t+h) - s(t) = \frac{1}{t+h} \int_0^{t+h} r(\tau) d\tau - \frac{1}{t} \int_0^t r(\tau) d\tau$$

de donde

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t+h} \int_t^{t+h} r(\tau) d\tau + \left(\frac{1}{t+h} - \frac{1}{t} \right) \int_0^t r(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{t+h} \int_t^{t+h} r(\tau) d\tau - \frac{h}{(t+h)t} \int_0^t r(\tau) d\tau \end{aligned}$$

por lo que solo queda dividir ambos lados por h y tomar limite $h \rightarrow 0$ brindándonos la versión continua de Fictitious Play:

$$\dot{s}(t) = \frac{1}{t}(r(t) - s(t)), \quad r(t) \in BR(s(t)). \quad (\text{CFP})$$

Uno podría decir que el factor $\frac{1}{t}$ no es tan significativo ya que solo cambia la velocidad y no la dirección. Hofbauer propone en [6] reescalar el tiempo llamando

$$x(t) = s(e^t)$$

, de donde se deriva la ecuación de la *Mejor Respuesta* (Best Response)

$$\dot{x} = BR(x) - x. \quad (\text{BR})$$

Esta es la ecuación con la que vamos a estudiar en lo que sigue de este trabajo. Una manera de interpretarla es que a cada tiempo t una fracción de los jugadores decide revisar su estrategia y cambiarla por una mejor respuesta al perfil de la población. Es decir, en un momento dado, algunos jugadores se toman el tiempo de mirar la estrategia promedio de toda la población y deciden cambiar su estrategia por una mejor respuesta resultando en un cambio del perfil de toda la población x .

Los jugadores son racionales, actúan de modo a maximizar su pago esperado. Pero al mismo tiempo ignoran el histórico del juego y las acciones de los demás. Toman sus decisiones basados únicamente en el estado actual del juego. (BR) se puede ver como un prototipo de comportamientos racionales, pero miopes, de los agentes.

Puede pasar que la mejor respuesta sea única lo que hará con que la dinámica esté definida de manera única. O bien que no sea única y cualquier combinación de estas puede aparecer.

En realidad la falta de unicidad de la asignación $BR(x)$ hace con que debamos tratar a (BR) como una *inclusión diferencial* en vez de una ecuación diferencial. Formalmente definimos

$$\begin{aligned} BR(x) : \Delta &\longrightarrow \mathcal{P}(\Delta) \\ BR(x) &= \operatorname{argmax}(Ax)_i = \{b \in \Delta : bAx = \max_i(Ax)_i\} \end{aligned} \quad (1.1)$$

La inclusión diferencial de la mejor respuesta es

$$\dot{x} = b - x \quad b \in BR(x) \quad (1.2)$$

O aún mas formal

$$\dot{x} \in F(x) \quad F(x) = \{b - x : b \in BR(x)\} \subset \mathbb{R}^n \quad (1.3)$$

La primer intuición nos dice que las soluciones a las inclusiones diferenciales son mas fáciles de trabajar que las soluciones de ecuaciones diferenciales, ya que tenemos todo un conjunto donde puede vivir la derivada $\dot{x}(t)$. Sin embargo esto no es así. Tratar de encontrar condiciones de existencia para inclusiones diferenciales está supeditado a las condiciones que le impongamos a los conjuntos $F(x)$. La correspondencia $BR(x)$ es buena en este sentido y nos asegura la existencia de soluciones para toda condición inicial, como veremos en el capítulo dos y también en el apéndice.

Presentamos ahora algunos ejemplos que ilustran la complejidad de la dinámica de Best Response y por consecuencia, de las inclusiones diferenciales. Quedará en evidencia la diferencia de comportamiento que tienen con respecto a las ecuaciones diferenciales a las que estamos acostumbrados.

1.1. Ejemplos 2×2

Ejemplo 1.1 (Coordinación con dos estrategias). Supongamos que los agentes son apareados para jugar la coordinación con dos estrategias. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

representa los pagos del juego.

Llamemos $F(x) = Ax$. El juego tiene tres equilibrios de Nash, las estrategias puras e_1 y e_2 y el equilibrio mixto $(\chi_1^*, \chi_2^*) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Las mixtas serán representadas por un único parámetro $\chi \in [0, 1]$. Cualquier estrategia mixta x se puede escribir de la forma $x = (1 - \chi, \chi)$. Los pagos esperados $F(x)$ serán

$$F(x) = Ax = (1 - \chi, 2\chi)^t.$$

Despejamos ahora cuándo cada estrategia pura es la mejor respuesta. Para que e_1 , correspondiente a $\chi = 0$, sea la mejor respuesta, debe pasar

$$e_1 Ax > e_2 Ax \Leftrightarrow (Ax)_1 > (Ax)_2.$$

Luego pedimos

$$1 - \chi > 2\chi \Leftrightarrow \chi < \frac{1}{3}.$$

Equivalentemente, e_2 será la mejor respuesta cuando

$$1 - \chi < 2\chi \Leftrightarrow \chi > \frac{1}{3}.$$



Figura 1.1: Las soluciones de BR en el juego de coordinación

Estamos en condiciones de escribir explícitamente la función de mejor respuesta $BR(\chi)$:

$$BR(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi < \frac{1}{3} \\ [0, 1] & \text{si } \chi = \frac{1}{3} \\ 1 & \text{si } \chi > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Cuando la población está en el Nash mixto $\chi = \frac{1}{3}$, las dos coordenadas de Ax son iguales y cualquier estrategia será una mejor respuesta.

Con la función de mejor respuesta podemos construir la ecuación (BR). Una solución χ_t deberá cumplir

$$\dot{\chi}_t = \begin{cases} 0 - \chi_t & \text{si } \chi < \frac{1}{3} \\ [0, 1] - \frac{1}{3} & \text{si } \chi = \frac{1}{3} \\ 1 - \chi_t & \text{si } \chi > \frac{1}{3} \end{cases} = \begin{cases} -\chi & \text{si } \chi < \frac{1}{3} \\ [-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] & \text{si } \chi = \frac{1}{3} \\ 1 - \chi & \text{si } \chi > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Podemos escribir las fórmulas explícitas de las soluciones χ_t cuando $\chi_0 \neq \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \chi_0 < \frac{1}{3} &\Rightarrow \chi_t = e^{-t}\chi_0 \\ \chi_0 > \frac{1}{3} &\Rightarrow \chi_t = e^{-t}\chi_0 + (1 - e^{-t}) = 1 - e^{-t}(1 - \chi_0). \end{aligned}$$

Las trayectorias avanzan hacia uno de los dos equilibrios puros, alcanzándolo en tiempo infinito. Cuando $\chi_0 = \frac{1}{3}$ pueden pasar muchas cosas. Como $BR(\frac{1}{3}) = [0, 1]$, hay básicamente tres comportamientos posibles

1. La población toma algún $\chi \neq \frac{1}{3}$ como mejor respuesta, avanza hacia el y luego, una vez recuperada la unicidad de la mejor respuesta, avanza hacia una de las estrategias puras, alcanzándola en tiempo infinito.
2. La población toma $\chi = \frac{1}{3}$ como mejor respuesta para todo $t > 0$. Obtenemos la solución estacionaria $\chi_t \equiv \frac{1}{3}$.
3. La solución empieza de forma estacionaria en $\frac{1}{3}$ como en (2). A un tiempo t arbitrario cambia su mejor respuesta y se mueve del punto de equilibrio. Una vez recuperada la unicidad de BR, avanza hacia uno de los equilibrios puros como en (1)

En el ejemplo anterior, hay más de una solución bien definida que tiene como dato inicial $\chi_0 = \frac{1}{3}$. Lo más impactante es el hecho de que existan soluciones que abandonan un punto de equilibrio luego de una cantidad de tiempo positiva. Esto nunca ocurre con soluciones de ecuaciones diferenciales. Vamos a profundizar en esta diferencia luego del siguiente ejemplo donde las soluciones logran llegar al único equilibrio de Nash en tiempo finito.

Ejemplo 1.2 (Anti-Coordiación en dos estrategias). Supongamos ahora que los jugadores son apareados para jugar el juego de anticoordinación cuya matriz es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Al contrario del ejemplo 1.1, los jugadores están motivados a jugar estrategias distintas. Siguiendo la filosofía del ejemplo anterior llamamos χ la proporción de jugadores que están jugando la estrategia e_2 . Vamos a ver que desde cualquier condición inicial, las soluciones de la ecuación (BR) alcanzan el único equilibrio de Nash $\chi^* = \frac{1}{2}$ en tiempo finito.

Si la población está jugando χ , para un jugador dado, sus pagos esperados jugando cada estrategia son

$$A \begin{pmatrix} 1 - \chi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \chi \\ \chi \end{pmatrix} = (\chi - 1, -\chi).$$

La estrategia $\chi = 0$ será la mejor respuesta cuando $\chi - 1 > -\chi$, es decir, $\chi > \frac{1}{2}$. Podemos concluir entonces los valores de la mejor respuesta de cada estrategia:

$$BR(\chi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi < \chi^* \\ [0, 1] & \text{si } \chi = \chi^* \\ 0 & \text{si } \chi > \chi^* \end{cases}$$

De donde podemos construir las derivadas de las soluciones χ_t a la ecuación (BR)

$$\dot{\chi}_t = \begin{cases} 1 - \chi_t & \text{si } \chi < \chi^* \\ [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] & \text{si } \chi = \chi^* \\ -\chi_t & \text{si } \chi > \chi^* \end{cases}$$

y escribir explícitamente las soluciones en función de las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \chi_t &= 1 - (1 - \chi_0)e^{-t}, & \text{si } \chi_0 < \chi^*; \\ \chi_t &= \chi_0 e^{-t}, & \text{si } \chi_0 > \chi^*. \end{aligned}$$

Se puede apreciar que las soluciones alcanzan el equilibrio de Nash $\chi^* = \frac{1}{2}$ en tiempo finito. Si tomamos una solución que tiene como dato inicial $\chi_0 < \frac{1}{2}$

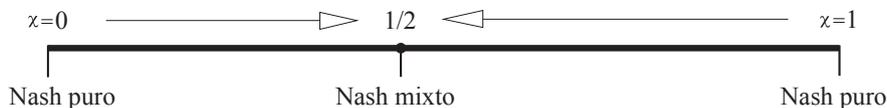


Figura 1.2: Las soluciones de BR en el juego de anti coordinación

por ejemplo, la solución χ_t apuntará hacia la mejor respuesta que en este caso es $\chi = 1$. Está claro entonces que la solución alcanzará el equilibrio $\chi^* = \frac{1}{2}$

La solución que empieza en χ^* será estacionaria. Aunque la dinámica en ese punto tiene a todo el intervalo $[0, 1]$ como opción de mejor respuesta, apenas la trayectoria salga de χ^* , deseará volver. Como esto ocurre para cualquier t positivo, no existe una solución que abandone χ^* .

Ejercicio 1.3. Despejar a qué tiempo t_1 las soluciones alcanzaran el equilibrio de Nash en función de la posición inicial χ_0 .

Estos ejemplos muestran que la dinámica de la mejor respuesta, y por consecuencia las inclusiones diferenciales, tienen comportamientos muy variados cerca de los puntos de equilibrios. En el ejemplo 1.1 todas las soluciones menos una convergen a algún equilibrio de Nash y lo alcanza en tiempo infinito. La solución restante es estacionaria en el equilibrio de Nash mixto. Pero hay soluciones que empiezan en el equilibrio mixto y terminan convergiendo hacia uno de los equilibrios puros. Esto nunca ocurre cuando trabajamos con ecuaciones diferenciales

En el segundo ejemplo vimos que las soluciones alcanzan el equilibrio en tiempo finito y luego se quedan ahí. Las soluciones de esta dinámica violan una propiedad elemental que cumplen las soluciones de ecuaciones diferenciales, que enunciamos a seguir

Lema 1.4. Sea $X(t)$ solución de la ecuación diferencial

$$\dot{X} = F(X),$$

con $F \in C^1$. Entonces

1. Si $X(t) \rightarrow X_0$ cuando $t \rightarrow t_0 \in \mathbb{R}$ y $X(t) \not\equiv X_0$, se sigue que $F(X_0) \neq 0$. Si $X(t)$ llega a un punto, entonces en ese punto tiene derivada distinta de cero, y por lo tanto se va.

2. Si $X(t) \rightarrow X_0$ cuando $t \rightarrow +\infty$ entonces $F(X_0) = 0$. Si una trayectoria tiene un límite cuando el tiempo tiende a infinito, entonces ese límite es un punto crítico. Trayectorias que tienen como dato inicial X_0 son la solución estacionaria $X(t) \equiv X_0$

Las soluciones de ecuaciones diferenciales solo pueden empezar en los puntos críticos, o bien alcanzarlos en tiempo infinito. A medida que una solución X converge a un punto crítico, la derivada \dot{X} tiende a cero. Por lo tanto X avanza cada vez mas despacio. Las soluciones están limitadas por la continuidad de las derivadas.

Las inclusiones diferenciales tienen mas libertad en este sentido. Una solución puede alcanzar un punto crítico teniendo derivada positiva y luego “cambiar” la derivada por el valor cero, haciendo con que la solución se vuelva estacionaria. Análogamente uno puede empezar en un punto crítico y luego irse. Las derivadas tienen puntos de discontinuidad pero veremos en el capítulo dos que para el caso de la mejor respuesta estos puntos forman un conjunto discreto en cada trayectoria.

Terminamos este capítulo presentando dos ejemplos de 3×3 que muestran lo complejidad que pueden llegar a tener las soluciones de (BR).

1.2. Ejemplos 3×3

Ejemplo 1.5 (El juego de Zeeman). El juego de Zeeman está representado por la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Los jugadores tienen tres estrategias cada uno. El juego tiene dos equilibrios de Nash mixtos $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e $y^* = (\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5})$, y uno puro correspondiente a e_1 . Podemos despejar a mano las regiones donde e_1 , e_2 y e_3 son las mejores respuestas. Si la población está en un estado $x = (a, b, c)$, calculamos cuando cada coordenada de $F(x) = Ax$ es más grande que las demás. Usando que la suma de las estrategias es uno, escribimos

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 - a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a + 10b - 4 \\ -8a - 5b + 5 \\ -a + 3b \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Despejamos cuando la estrategia e_1 es la mejor respuesta.

De 1.4 pedimos

$$\begin{cases} 4a + 10b - 4 > -8a - 5b + 5 \\ 4a + 10b - 4 > -a + 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 5b > 3 \\ 5a + 13b > 4. \end{cases} \quad (1.5)$$

Cuando e_2 es la mejor respuesta,

$$\begin{cases} -8a - 5b + 5 > 4a + 10b - 4 \\ -8a - 5b + 5 > -a + 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 5b < 3 \\ 7a + 8b < 5. \end{cases} \quad (1.6)$$

Y cuando e_3 es la mejor respuesta,

$$\begin{cases} -a + 3b > 4a + 10b - 4 \\ -a + 3b > -8a - 5b + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a + 13b < 4 \\ 7a + 8b > 5. \end{cases} \quad (1.7)$$

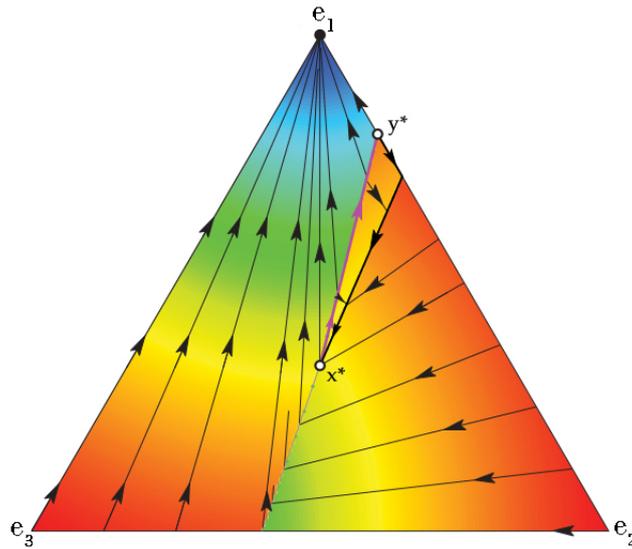


Figura 1.3: La dinámica de mejor respuesta para el juego de Zeeman

Representamos estos conjuntos gráficamente en 1.3. En la figura el espacio de estrategias Δ es un triángulo en el plano. Sus vértices representan las estrategias puras y el interior las estrategias mixtas vistas como combinaciones convexas de los vértices. Las líneas interiores marcan la frontera entre dos elecciones de mejor respuesta y en esas líneas se pierde la unicidad de $BR(x)$.

Mientras que la mayoría de las condiciones iniciales nos dan trayectorias que terminan convergiendo al equilibrio puro e_1 , hay un comportamiento muy interesante en los equilibrios interiores. Hay dos soluciones estacionarias, una en x^* y otra en y^* . Hay soluciones que abandonan x^* en dirección a e_1 o en

dirección a y^* por el segmento que une x^* a y^* . De estas, algunas pueden abandonar el segmento hacia e_1 , alcanzando el equilibrio estable. O bien moverse hacia e_3 donde eventualmente volverían al Nash x^* . También pueden seguir por el segmento hasta y^* . Una vez en y^* pueden quedarse un tiempo positivo para luego avanzar hacia e_1 o hacia e^2 donde volverían a x^* . Una vez que vuelven a x^* , cualquiera de estos comportamientos puede volver a ocurrir. Podemos construir soluciones arbitrariamente complejas.

Ejemplo 1.6 (Piedra, Papel Tijera). Miremos el conocido juego piedra papel o tijera representado por la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -l & w \\ w & 0 & -l \\ -l & w & 0 \end{pmatrix},$$

donde w y l son ambos positivos. El juego tiene un único equilibrio de Nash interior en $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. La dinámica de (BR) en el juego piedra papel ó tijera (RSP) tiene un comportamiento interesante y varía según los valores w y l .

1. Cuando $w = l$ las trayectorias convergen en espiral hacia el Nash x^* y lo alcanzan en tiempo infinito.
2. Cuando $w > l$ las trayectorias alcanzan el Nash en tiempo finito y se quedan ahí para todo tiempo t positivo.
3. Cuando $w < l$ existe una órbita periódica y todas las trayectorias convergen a ella.

Los tres casos tienen esencialmente la misma demostración, que proviene del hecho de que el juego (RSP) cumple la siguiente propiedad:

Proposición 1.7. Si llamamos $F(x) = Ax$ y x_t es una solución de (BR), entonces el juego de piedra papel o tijera cumple

$$\frac{d}{dt} \left(\max_{i \in \{1,2,3\}} F_i(x_t) \right) = - \max_{i \in \{1,2,3\}} F_i(x_t). \quad (1.8)$$

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la población está en un estado donde e_1 es la mejor respuesta. Podemos escribir entonces

$$\dot{x}_t = e_1 - x_t$$

y además

$$F_1(x_t) = wx_3 - lx_2.$$

Vamos a escribir ahora la derivada de F

$$\dot{F}(x_t) = A\dot{x}_t = Ae_1 - Ax_t.$$

Quedándonos con la primer coordenada de $\dot{F}(x_t)$,

$$(Ae_1 - Ax_t)_1 = 0 - (-lx_2 + wx_3) = lx_2 - wx_3,$$

que es igual a $-F_1(x_t)$. Esta misma cuenta vale para los demás casos, así que podemos concluir que vale la igualdad 1.8. \square

Empezamos con el caso en que $w = l$ llamado *estándar*. Si integramos 1.8 de ambos lados, obtenemos

$$\max_{i \in \{1,2,3\}} F_i(x_t) = e^{-t} \max_{i \in \{1,2,3\}} F_i(x_0). \quad (1.9)$$

Como $w = l$, el máximo de la función de pagos F es siempre no negativo y es igual a cero solamente en el equilibrio de Nash $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Para convencerse de esto basta recordar que estamos jugando al piedra papel o tijera y siempre hay una respuesta que nos hace ganar. O si no, tomamos una estrategia cualquiera $x = (a, b, c)$ y los pagos esperados son

$$F(x) = Ax = (-lb + wc, wa - lc, -la + wb) = w(c - b, a - c, b - a).$$

Como $w > 0$ y $a, b, c \geq 0$, hay una de las coordenadas que tiene que ser positiva, a menos que $a = b = c = x^*$, y en este caso todas las coordenadas valen cero. Podemos concluir que si la dinámica empieza lejos de x^* , el máximo de la función de pago decaerá y cuando $t \rightarrow +\infty$, $x_t \rightarrow x^*$.

Cuando $w > l$, la demostración es exactamente la misma, pero ahora la mayor coordenada de $F(x)$ evaluada en x^* es $w - l > 0$. En cualquier otro punto el máximo de $F(x)$ será mayor. Como el máximo de $F(x)$ decae exponencialmente a cero, entonces alcanza el valor $w - l$ correspondiente a x^* en tiempo finito.

En el caso $w < l$ las trayectorias no convergen a ningún equilibrio sino a una órbita periódica. En esta órbita el $\max F(x)$ siempre vale cero. Como $\max F(x_t)$ tiende a cero a medida que t tiende a infinito, entonces las trayectorias convergen a esta órbita. La calculamos explícitamente a seguir.

Veamos primero que si $\max_i F(x_t)$ vale cero, seguirá valiendo cero. Supongamos que estamos parados en un punto $x_0 = (a, b, c)$ tal que $\max_i F(x) = 0$ y, sin pérdida de generalidad, e_1 es la mejor respuesta. Esto quiere decir que la primer coordenada de F vale cero:

$$F(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & -l & w \\ w & 0 & -l \\ -l & w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -lb + wc \\ wa - lc \\ -la + wb. \end{pmatrix}$$

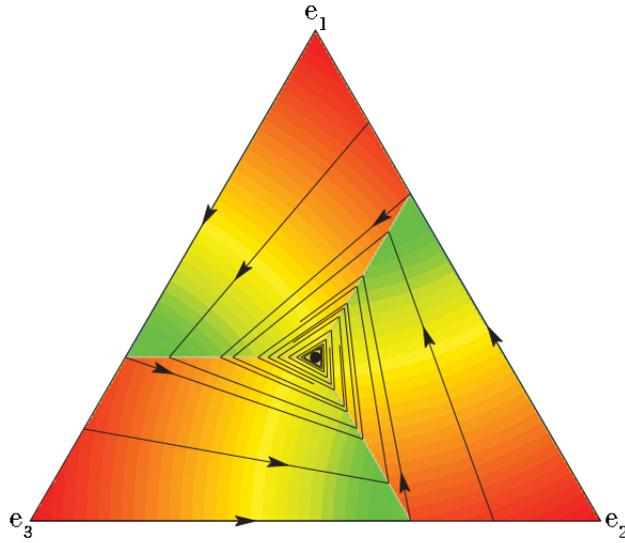


Figura 1.4: En el caso $w = 0$, la dinámica tiende al equilibrio y llega a tiempo infinito

Concluimos entonces que $-lb + wc$ vale cero. Una solución x_t que empiece en ese punto irá en un primer momento hacia e_1 :

$$x_t = e_1 + e^{-t}(x_0 - e_1) = (1, 0, 0) + e^{-t}((a, b, c) - (1, 0, 0))$$

y por lo tanto

$$F(x_t) = \begin{pmatrix} 0 & -l & w \\ w & 0 & -l \\ -l & w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + e^{-t}(a - 1) \\ e^{-t}b \\ e^{-t}c \end{pmatrix}.$$

La primer coordenada termina valiendo

$$-le^{-t}b + we^{-t}c = e^{-t}(-lb + wc) = 0.$$

Así concluimos que si estamos en un punto donde el máximo de F vale cero, seguiremos por un camino donde ese máximo seguirá valiendo cero.

Calculemos ahora la órbita. Por la estructura cíclica del juego, solo hace falta calcular un tercio del tramo. Supongamos que estamos en el punto $x_0 = (a, b, c)$ donde $\max_i F(x_0) = 0$ y tanto e_1 como e_3 son mejores respuestas. Entonces

$$F(x_0) = Ax_0 = \begin{pmatrix} -bl + cw \\ wa - lc \\ -la + wb \end{pmatrix}$$

Desde x_0 , a partir de cualquier tiempo t positivo, la dinámica tomará una única mejor respuesta que será e_1 , así la solución x_t tomará ese objetivo

$$x_t = e_1 + e^{-t}(x_0 - e_1) = (1, 0, 0) + e^{-t}((a, b, c) - (1, 0, 0)).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} Ax_t &= A(e^{-t} + (1 - e^{-t})e_1) = e^{-t}Ax_0 + (1 - e^{-t})Ae_1 \\ &= e^{-t}(-bl + cw, wa + lc, la + wb) + (1 - e^{-t})(0, w, -l) \\ &= (e^{-t}(cw - bl), e^{-t}(wa - lc) + (1 - e^{-t})w, e^{-t}(la + wb) - (1 - e^{-t})l). \end{aligned}$$

Para que sea una órbita cíclica, necesito pedir

$$\begin{aligned} e^{-t}(cw - bl) &= e^{-t}(wa - lc) + (1 - e^{-t})w \\ -e^{-t}bl + e^{-t}cw &= e^{-t}(wa - lc) + w - e^{-t}w \\ e^{-t}(-bl + cw) - e^{-t}(wa - lc) + e^{-t}w &= w \\ e^{-t}(-bl + cw - wa + lc + w) &= w \\ e^{-t} &= \frac{w}{w + (-bl + cw - wa + lc)} \end{aligned} \tag{1.10}$$

De nuestra hipótesis tenemos que $-bl + cw > wa - lc$ y por lo tanto el término de la derecha de 1.10 es menor que uno. Podemos concluir que t es positivo y por lo tanto la órbita sí alcanzará el estado en que las mejores respuestas serán e_1 y e_2 .

Resumiendo, empezamos en un punto x_0 donde $BR(x_0) = \{e_1, e_3\}$ y, avanzando por un camino x_t donde $\max_i(F(x_t)) = 0$, llegamos a un punto x_1 donde $BR(x_1) = \{e_1, e_2\}$. Los otros dos segmentos de la órbita se calculan exactamente igual y concluimos que existe una órbita cíclica donde $\max_i(F(x))_i = 0$ para todo x en la órbita.

Capítulo 2

Existencia y Propiedades

2.1. Existencia

En la literatura las soluciones se construyen desde dos filosofías distintas. Sandholm propone en [12] aplicar una leve perturbación a la matriz de pago de modo que la mejor respuesta sea única. Así tendremos una ecuación diferencial clásica y la dinámica resulta continua y suave. Luego tomamos algún tipo de límite para volver a la Best Response original. La segunda propuesta, y la que utilizaremos nosotros, es construir una solución a partir de límites sobre la dinámica discreta del Fictitious Play. Primero vamos a construir una sucesión de poligonales a partir de Fictitious Play y luego tomar una subsucesión sobre las poligonales que va a converger uniformemente a una solución de Best Response. Este abordaje es semejante al utilizado habitualmente para encontrar soluciones a ecuaciones diferenciales por poligonales de Euler.

Recordemos entonces que la dinámica discreta de Fictitious Play era la siguiente

$$s_{n+1} = s_n + \frac{r_{n+1} - s_n}{k+1} \quad r_{n+1} \in BR(s_n). \quad (2.1)$$

Podemos construir una función $S(t)$ lineal a trozos que cumpla

$$S(n) = s_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para eso basta definir S en cada intervalo $[n, n+1]$ como

$$S(n+t) = \frac{n}{n+t}s_n + \left(1 - \frac{n}{n+t}\right)r_{n+1} \quad t \in [0, 1) \quad (2.2)$$

De esta manera, cuando t vale cero, $S(n) = s_n$ y cuando t vale 1

$$S(n+1) = \frac{n}{n+1}s_n + \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)r_{n+1} = s_n + \frac{r_{n+1} - s_n}{k+1}, \quad (2.3)$$

donde $r_{n+1} \in BR(s_n)$. Esta elección de S resulta cómoda al momento de reparametrizar el tiempo. En efecto, vamos a definir

$$f(t) = S(e^t). \quad (2.4)$$

Si llamo $t_n = \log(n)$, entonces para evaluar f en un punto del intervalo $[t_n, t_{n+1}]$, se tiene

$$f(t_n + \tau) = S(e^{t_n + \tau}) = S(e^{t_n} + e^{t_n + \tau} - e^{t_n})$$

de donde podemos usar la formula explicita de S ya que $e^{t_n} = n$ y $0 \leq e^{t_n + \tau} - e^{t_n} \leq 1$. Queda entonces

$$\begin{aligned} f(t_n + \tau) &= S(n + e^{t_n + \tau} - e^{t_n}) \\ &= \frac{n}{n + e^{t_n + \tau} - e^{t_n}}s_n + \left(1 - \frac{n}{n + e^{t_n + \tau} - e^{t_n}}\right)r_{n+1} \\ &= \frac{n}{e^{t_n}e^\tau}s_n + \left(1 - \frac{n}{e^{t_n}e^\tau}\right)r_{n+1} \\ &= e^{-\tau}s_n + (1 - e^{-\tau})r_{n+1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

con $\tau \in [0, t_{n+1} - t_n]$. Además, por un lado $s_n = f(t_n)$ y por otro, $r_{n+1} \in BR(s_n)$. La fórmula de f queda

$$f(t_n + \tau) = e^{-\tau}f(t_n) + (1 - e^{-\tau})b(t_n) \quad (2.6)$$

para $0 \leq \tau \leq \alpha_n = t_{n+1} - t_n$, y

$$b(t_n) \in BR(f(t_n)) = BR(s_n). \quad (2.7)$$

En cada intervalo $[t_n, t_{n+1}]$, es equivalente definir f por su fórmula explícita o bien por la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{df(t_n + \tau)}{d\tau} = b(t_n) - f(t_n + \tau) \quad \text{para } 0 \leq \tau \leq \alpha_n \quad (2.8)$$

donde la secuencia α_n es

$$\alpha_n = t_{n+1} - t_n = \log(n+1) - \log(n); \quad t_1 = 0. \quad (2.9)$$

que cumple

$$\alpha_n \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty \quad (2.10)$$

A una función f que cumpla (2.6) - (2.10) se la llama un α_n camino o α_n path.

Podemos ahora enunciar el teorema que nos garantiza la existencia de solución de (BR).

Teorema 2.1. *Sea para cada $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon(t)$ un α_n - camino con $\alpha_n \leq \varepsilon$ para todo $n \geq 1$. Entonces, dado $T > 0$, existe una sucesión $\varepsilon_i \rightarrow 0$ tal que $f_{\varepsilon_i}(t)$ converge uniformemente en el intervalo compacto $[0, T]$ cuando $i \rightarrow \infty$. El límite $x(t)$ es solución de la inclusión diferencial (BR) en $[0, T]$.*

Demostración. Las funciones f_ε son α_n - caminos, es decir que cumplen (2.6) - (2.8). A f entonces se la puede escribir de la siguiente manera

$$f_\varepsilon(t) = e^{-t} f(0) + \int_0^t e^{s-t} b_\varepsilon(s) ds, \quad (2.11)$$

donde $b_\varepsilon(s)$ es una función escalonada, continua a derecha y $b_\varepsilon(t_n) \in BR(f_\varepsilon(t_n))$ en cada $[t_n, t_n + 1]$.

De (2.8) concluimos que todas las f_ε tienen su derivada acotada, y que la cota es siempre la misma, ya que tanto b como f viven en el simplex Δ de las estrategias. Por lo tanto las funciones f_ε son uniformemente Lipschitz.

Tenemos que las f_ε son uniformemente acotadas, ya que todas están en Δ , y uniformemente continuas por lo anterior. Arzela-Ascoli nos brinda una subsucesión f_{ε_i} uniformemente convergente. Llamamos este límite $x(t)$.

Ahora consideramos la sucesión $\{b_{\varepsilon_i}\}_{i \geq 1}$. Como Δ es compacto, tienen al menos un punto de acumulación débil b . Entonces existe una subsucesión $\{b_{\varepsilon_{i_j}}\}_{j \geq 1}$ que converge débil a b .

Dado $s \in \Delta$, sabemos que $b_{\varepsilon_{i_j}}(s) \in BR(f_{\varepsilon_{i_j}}(t(s)))$ donde $t(s)$ es el paso temporal anterior a s .

Como $\alpha_n < \varepsilon$, $\alpha_n \rightarrow 0$, $t(s) \rightarrow s$. Luego, como $f_{\varepsilon_{i_j}}(t(s)) \rightarrow x(s)$, entonces $\lim BR(f_{\varepsilon_{i_j}}(t(s))) \subseteq BR(x(s))$ pues BR es semicontinua superiormente.

Finalmente como $b_{\varepsilon_{i_j}}(s) \in BR(f_{\varepsilon_{i_j}}(t(s)))$ para todo j , entonces el punto límite $b \in BR(x(s))$.

Por lo tanto, al tomar límite de ambos lados en (2.11) podemos tomar siempre las $b_{\varepsilon_{i_j}}$ como mejores respuestas en el término de la derecha. Entonces podemos escribir

$$x(t) = e^{-t}x(0) + \int_0^t e^{s-t}b(s)ds, \quad b(s) \in BR(x(s)) \quad (2.12)$$

x es absolutamente continua y es solución de la inclusión diferencial $\dot{x} \in BR(x) - x$. \square

2.2. Propiedades

Más allá de demostrar la existencia formal de soluciones a la dinámica (BR), uno puede construir soluciones manualmente para cada punto inicial x de manera más intuitiva tomando caminos $x(t)$ lineales a trozos. En efecto, está claro que si la población esta en un estado x , entonces podrá moverse en línea recta hacia un punto $b \in \Delta$ si y solo si

$$b \in BR(X) \quad y \quad b \in BR((1 - \varepsilon)x + \varepsilon b) \quad (2.13)$$

para todo ε chico. Cuando la mejor respuesta a x es única, la solución $x(t)$ está bien definida y también es única. Cuando la mejor respuesta no es única, la condición 2.13 nos garantiza que existe una solución $x(t)$ que se mueve hacia una de las mejores respuestas b en línea recta.

En este caso, el hecho de que b sea una mejor respuesta, implica que b es un equilibrio de Nash mixto para el mismo juego restringido al conjunto de estrategias

$$I(x) = \operatorname{argmax}(Ax)_i = \left\{ k : (Ax)_k = \max_i (Ax)_i \right\} \quad (2.14)$$

pues si b es una mejor respuesta, los pagos serán iguales jugando b o cualquier estrategia pura en el soporte de b . Por otro lado, si b es un equilibrio de Nash del juego restringido $A_{I(x)}$, entonces b es una mejor respuesta a x en el juego original, y luego existe una solución de (BR) de la forma

$$x(t) = e^{-t}x + (1 - e^{-t})b \quad (2.15)$$

que cumple $\dot{x} = b - x$. Mientras se cumpla (2.13), b será una de las mejores respuestas al estado $x(t)$. Existe un $t_0 > 0$ tal que para $t \in [0, t_0)$, podemos fijar b como la mejor respuesta y tomar (2.15) como solución hasta el tiempo t_0 . Luego de alcanzado t_0 , b dejará de ser una mejor respuesta y una estrategia pura i en el soporte de b pasará a serlo. El camino cambiará su dirección hacia una nueva $b^* \in BR(x(t_0))$. A t_0 le decimos un *punto de giro* (o *turning point*).

Este proceso nos construye una solución de a un tramo por vez. No tenemos cómo garantizar que los intervalos t_0 estén acotados inferiormente, de hecho

hay ejemplos donde no lo están. Hofbauer en su trabajo propone usar la compacidad del espacio de estrategias Δ para tomar un punto límite de los puntos de giro y luego continuar el camino desde ahí.

De todas maneras ahora vamos a enunciar el teorema de aproximación que nos garantiza que si existe una solución general a la dinámica (BR), entonces también existe una solución simple (lineal a trozos) arbitrariamente cerca de la solución original. Este teorema nos ayudará luego a demostrar convergencia puesto que podremos trabajar con soluciones cuya fórmula conocemos. Tienen la forma de (2.15).

Teorema 2.2 (Aproximación). *Sea $x(t)$ una solución de (BR), y $\varepsilon(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y positiva arbitraria. Entonces existe una solución $\tilde{x}(t)$ simple de (BR) con el mismo valor inicial $\tilde{x}(0) = x(0)$ tal que $|x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon(t)$ para todo $t \geq 0$.*

Si el juego tiene solo finitos equilibrios, entonces las soluciones simples son las únicas soluciones de (BR).

Demostración. La solución general de (BR) en el sentido de la inclusión diferencial es una función absolutamente continua $x(\cdot)$ que satisface

$$\dot{x}(t) = \beta(t) - x(t) \quad \text{para casi todo } t, \text{ con } \beta(t) \in BR(x(t)). \quad (2.16)$$

Usando variación de constantes, es equivalente escribir

$$x(t) = e^{-t}x(0) + (1 - e^{-t})b(t), \quad (2.17)$$

donde

$$b(t) = (e^t - 1)^{-1} \int_0^t e^s \beta(s) ds \quad (2.18)$$

es un promedio ponderado de las mejores respuestas β .

En cualquier intervalo compacto $[0, T]$ la función $b(t)$ es Lipschitz y por lo tanto también lo es $x(t)$.

Ahora definimos para cada t

$$I(t) = \operatorname{argmax}(Ax(t))_i = \{k : (Ax(t))_k = \max_i (Ax(t))_i\} \quad (2.19)$$

el conjunto de los índices de las mejores respuestas a x . Usando la continuidad de $x(t)$, se puede ver que $I(t)$ es semicontinua superiormente. La demostración es semejante a la prueba de que la correspondencia $BR(x)$ es semicontinua superiormente.

Si $I(t)$ tiene un solo elemento i entonces el vector $Ax(t)$ tiene un único máximo en la coordenada i . Por la continuidad de $Ax(t)$, existe un entorno de

t donde esa coordenada se mantiene máxima y por lo tanto $I(t_1) = I(t)$ para todo t_1 en ese entorno. En particular vale la contención de la semicontinuidad superior.

Si $I(t)$ tiene más de un elemento, entonces existen coordenadas i_1, \dots, i_k donde el vector $Ax(t)$ alcanza el máximo. En otras palabras, si

$$Ax(t) = (y_1, \dots, y_n)$$

entonces

$$\max_i Ax(t) = y_{i_l} \text{ para todo } l = 1 \dots k$$

Tomamos ahora ε más chico que la mínima distancia entre el máximo de $Ax(t)$ y la segunda mayor coordenada. Entonces existe un entorno de t tal que

$$\|Ax(t) - Ax(t_1)\|_\infty < \varepsilon.$$

Las coordenadas donde $Ax(t_1)$ alcanza su máximo deben estar contenidas en las coordenadas donde $Ax(t)$ alcanza su máximo, pues como los dos vectores distan ε uno del otro no puede pasar de que haya una nueva coordenada máxima que no sean y_1, \dots, y_k .

Entonces concluimos que $I(t)$ es semicontinua superiormente. Esto también implica que el conjunto de sus puntos de continuidad es abierto y denso.

Veamos ahora que podemos reemplazar la solución de (BR) $x(t)$ por una aproximación lineal a trozos. Si $t = 0$ es un punto de continuidad de I , entonces existe un t tal que $I(s) = I(0)$ para todo s en un intervalo $[0, t]$.

Por un lado, tenemos que $\text{supp } \beta(s) \subseteq I(s)$ y como $b(t)$ es un promedio de las $\beta(s)$, se puede concluir que

$$\text{supp } b(t) \subseteq I(t). \tag{2.20}$$

Por otro lado, tenemos

- $e_i \cdot Ax(0) = e_j \cdot Ax(0)$ para todo $i, j \in I(0)$,
- $e_i \cdot Ax(t) = e_j \cdot Ax(t)$ para todo $i, j \in I(t)$,
- $x(t) = e^{-t}x(0) + (1 - e^{-t})b(t)$

entonces se concluye que $e_i \cdot Ab(t) = e_j \cdot Ab(t) = b(t) \cdot Ab(t)$ pues si $e_i \in I(0) = I(t)$, entonces

$$\begin{aligned} e_i \cdot Ax(t) &= e^{-t}e_i \cdot Ax(0) + (1 - e^{-t})e_i \cdot Ab(t) \\ e_j \cdot Ax(t) &= e^{-t}e_j \cdot Ax(0) + (1 - e^{-t})e_j \cdot Ab(t) \end{aligned} \cdot$$

y restando ambas se obtiene la igualdad

$$0 = (1 - e^{-t}) e_i \cdot Ab(t) - (1 - e^{-t}) e_j \cdot Ab(t) \Leftrightarrow e_i Ab(t) = e_j Ab(t). \quad (2.21)$$

Es natural ver que $e_i \cdot Ab(t) = b(t) \cdot Ab(t)$ para todo i ya que $b(t)$ es una combinación convexa de los e_i que están en su soporte. Así que si restringimos el juego a las estrategias $i \in \text{supp } b(t)$, tenemos que $b(t)$ es un equilibrio de Nash para el juego restringido.

Entonces como $I(t) = I(0)$, podemos reemplazar la solución x por un segmento en el intervalo $[0, t]$ que va de $x(0)$ a $x(t)$ ya que se cumple 2.13.

Por lo tanto, si $t = 0$ es un punto de continuidad de $I(t)$, podemos reemplazar $x(t)$ por una curva lineal a trozos para t chico usando 2.15. Podemos tomar t tan chico como sea necesario para que la nueva solución este lo suficientemente cerca de la solución original.

Si $I(t) \subset I(0)$ para todo $t > 0$ chico, se tiene que $t = 0$ es un punto de discontinuidad y llamamos $|I(0)|$ el rango de esta discontinuidad. A lo largo de una solución simple, el conjunto \mathcal{D}_k de puntos de discontinuidad de rango k es aislado en si mismo. Mas aún, afirmamos que cualquier punto de acumulación un conjunto \mathcal{D}_k en realidad está contenido en un \mathcal{D}_l con $l > k$ (esto lo veremos debajo).

Como cada \mathcal{D}_k no tiene puntos de acumulación, tiene que ser numerable. Luego el conjunto de todos los puntos de discontinuidad $\cup_{k=2}^n \mathcal{D}_k$ es a lo sumo numerable. \square

Proposición 2.3. Cualquier punto de acumulación de un conjunto \mathcal{D}_k está contenido en un \mathcal{D}_l con $l > k$.

Demostración. Sea una sucesión de tiempos $\{t_j\}_{j \geq 1}$, tal que $t_j \rightarrow t_0$, $t_j \in \mathcal{D}_k$. Por la semicontinuidad de $I(t)$, sabemos que $\lim_{j \rightarrow \infty} I(t_j) \subseteq I(t_0)$.

Si $|I(t_0)| = k$, entonces $I(t_j) = I(t_0)$ para todo j porque $I(t_j) \subseteq I(t_0)$ y $|I(t_j)| = |I(t_0)|$. Pero entonces t_0 en realidad es un punto de continuidad y existe un entorno de t_0 donde I es continua. Esto es absurdo pues estamos suponiendo que existe una sucesión de puntos de discontinuidad que tiende a t_0 . Por lo tanto, debe ser $|I(t_0)| > k$. \square

Enunciamos ahora un resultado que relaciona la dinámica discreta de juego ficticio con la dinámica continua de mejor respuesta. Los puntos límite de Fictitious Play forman un conjunto que está compuesto por trayectorias de BR.

Teorema 2.4. *El conjunto de puntos límites de cualquier sucesión de fictitious play es un conjunto invariante para la dinámica de mejor respuesta. Es decir, está compuesto de órbitas completas de BR.*

Demostración. Sea $\{s_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión dada de fictitious play. Consideremos $f(t)$ el α_n -path compuesto por la interpolación de dicha sucesión según (2.6)-(2.7).

Sea z un punto límite, $z = \lim_{n \rightarrow \infty} f(T_n)$ para alguna sucesión $T_n \rightarrow \infty$. Llamamos L al conjunto de todos los puntos límite obtenidos de esta forma.

Vamos a construir una solución de BR $z(t)$, $-T \leq t \leq T$ que esté contenida en L para cada $T > 0$.

Sea

$$f_n(t) = f(T_n + t - T), \quad 0 \leq t \leq 2T.$$

Notemos que $f_n(T) \rightarrow z$ cuando $n \rightarrow \infty$. Además las f_n son todas α_n -paths ya que la f lo es.

Entonces podemos aplicar el teorema 2.1 y obtener una subsucesión de las f_n que converge uniformemente a una solución de BR $z(t)$, $0 \leq t \leq 2T$. Esta solución está completamente contenida en L ya que es límite de las f_n y además $z(t) = z$.

Entonces para cualquier $z \in L$, hay una solución de BR completamente contenida en L que pasa por z . \square

Corolario 2.5. El atractor global de la dinámica BR contiene todos los puntos límite de fictitious play

Proposición 2.6. Si e_i es una estrategia estrictamente dominada y la población está en un estado x , el valor de $x_i(t)$ decae a cero a medida que t avanza para cualquier solución $x(t)$ de BR.

Demostración. Sea $x(t)$ una solución que tiene como dato inicial x . Tomemos entonces $b \in BR(x)$. Luego, como e_i es estrictamente dominada, la coordenada i de b es cero. Supongamos que no. Como b es una mejor respuesta, $b \cdot Ax = \max_j (Ax)_j$. Entonces $b \cdot Ax = e_i \cdot Ax$ porque si no podría subir o bajar la probabilidad de e_i en b para aumentar el pago, pero b ya es una mejor respuesta y el pago ya es máximo. Pero como e_i es estrictamente dominada, existe una estrategia \tilde{x} que cumple $\tilde{x} \cdot Ay > e_i \cdot Ay$ para toda $y \in \Delta$. Entonces, tomando $y = x$

$$\tilde{x} \cdot Ax > e_i \cdot Ax = b \cdot Ax$$

Lo cual es un absurdo porque b es una mejor respuesta.

Calculamos $\dot{x}_i(t)$.

$$\dot{x}_i(t) = b_i - x_i(t) = 0 - x_i(t) = -x_i(t)$$

Luego la coordenada $x_i(t)$ decae como una exponencial.

□

Capítulo 3

Convergencia

3.1. Estrategias evolucionariamente estables

La motivación de la definición de una estrategia evolucionariamente estable vino de la biología. Se trata de explicar la forma como los animales de una misma especie resuelven conflictos entre ellos. En la mayoría de los casos, disputas por comida, territorio o potenciales parejas son resueltas a través del despliegue y la demostración de fuerza por encima de un combate propiamente dicho. Son raros los conflictos que terminan con heridas graves o muertes.

Los ciervos compiten primero rugiendo y luego chocando cuernos. Pero aunque uno tenga una abertura para herir el flanco de su oponente, opta por no hacerlo. No suelen salir heridos de estas contiendas. Esto levanta dudas desde el punto de vista evolutivo ya que un ciervo más agresivo ganaría más disputas y pasaría este comportamiento a sus futuras generaciones. En [7] proponen modelar este problema con dos comportamientos posibles. Un tipo de individuo escala el conflicto hasta que su oponente huya o bien alguno de los dos salga herido. El otro tipo se limita a hacer una demostración de fuerza pero huye si su oponente escala. Este juego es conocido como halcones y palomas.

Ejemplo 3.1. Halcones y Palomas

En este juego, las acciones de los individuos de la población se pueden simplificar como ser un halcón o una paloma. Cuando surge un conflicto, el individuo toma uno de los dos comportamientos. Los halcones escalan el conflicto mientras que las palomas se limitan a hacer un despliegue de sus atributos esperando que su oponente abandone.

Asumamos que el premio por el cual disputan vale G y el precio a pagar por

una herida es C .

Si una paloma encuentra otra paloma, se limitaran a hacer una demostración de fuerza hasta que una de las dos se retire. El ganador se lleva G , y el perdedor no gana ni pierde. El pago medio será $G/2$.

Si una paloma encuentra un halcón, se retirará cuando el halcón empiece a escalar. Se llevará cero y el halcón se llevará G .

Si dos halcones se encuentran, escalarán el conflicto hasta que uno de los dos resulte herido y el otro se lleva el premio. Luego en promedio recibirán $\frac{G-C}{2}$. Asumiremos que el precio de la herida supera el premio.

La matriz de pagos entonces será

$$A = \begin{pmatrix} \frac{G-C}{2} & G \\ 0 & \frac{G}{2} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

donde las primeras fila y columna corresponden a los halcones y las segundas a las palomas. Cuando la mayoría de la población está compuesta por palomas, a los halcones les irá mejor ya que se irán de la mayoría de los conflictos con la totalidad del premio G . Pero si son mayoría, a las palomas les irá mejor ya que se mantendrán igual mientras los halcones se pelean entre ellos. Ninguna de las dos estrategias es mejor que la otra. El éxito de cada comportamiento depende de la composición de la población. Si x es el porcentaje de halcones y $1 - x$ el de palomas, entonces cada halcón ganará en promedio

$$x(G - C)/2 + (1 - x)G$$

y cada paloma ganará

$$x \cdot 0 + (1 - x)G/2 = (1 - x)G/2.$$

Cuando $x < G/C$, les va mejor a los halcones, y se multiplicarán. Cuando $x > G/C$, a las palomas les irá mejor y se multiplicarán. La evolución debería determinar que a la larga la población se acomodará en $x = G/C$, que es un equilibrio de Nash interior. Cuando asumimos que el costo de la herida C es grande, el equilibrio G/C es chico y uno esperaría que esto dará una pequeña población de halcones. Este juego es equivalente, en el sentido de que induce las mismas mejores respuestas, al juego de anti cooperación del ejemplo 1.2.

Este ejemplo es ilustrativo de cómo interactúan individuos de una misma especie, no entre dos especies distintas. Y mas aún, en la vida real las palomas sí escalan el conflicto.

Supongamos que tenemos inicialmente una población de ciervos donde cada uno escala con probabilidad $p = G/C$. Es decir, están en el equilibrio. En

un segundo momento, empiezan a aparecer nuevos ciervos que adoptan una estrategia distinta, escalan con probabilidad $\tilde{p} > p$. A los individuos de la población invasora les irá igual de bien contra la población original que los individuos de la población original contra ellos mismos, porque la población original estaba jugando un equilibrio de Nash interior.

$$\tilde{p} \cdot Ap = p \cdot Ap$$

Pero a la población invasora le irá peor jugando contra ella misma que la población original:

$$\tilde{p} \cdot A\tilde{p} < p \cdot A\tilde{p}$$

Entonces la población original, que jugaba el equilibrio p , es robusta contra la invasión de un comportamiento divergente en el sentido que acabamos de ver. Aunque a los individuos “mutantes” les va igual de bien que los originales cuando juegan contra la población original, les va peor cuando juegan contra ellos mismos.

Este ejemplo nos da la pauta para pensar puntos de equilibrio como estrategias que benefician a la población que las juega aún cuando haya una población disidente jugando algo distinto. La aparición súbita de halcones o de palomas en la población $x = G/C$ hará que los ingresantes ganen lo mismo en promedio que lo que gana la población, pero les irá peor contra ellos mismos. Formalizamos con la siguiente definición:

Definición 3.2. Una estrategia $\hat{p} \in \Delta$ se dice una *Estrategia Evolucionariamente Estable* (ESS) si para todo $p \in \Delta$, $p \neq \hat{p}$, existe $\bar{\varepsilon}(p) > 0$ tal que

$$p \cdot A(\varepsilon p + (1 - \varepsilon)\hat{p}) < \hat{p} \cdot A(\varepsilon p + (1 - \varepsilon)\hat{p}) \quad (3.2)$$

para todo $\varepsilon < \bar{\varepsilon}(p)$.

La población en \hat{p} está siendo invadida por nuevos individuos jugando p . Pero como \hat{p} es evolucionariamente estable, le va ir mejor que los invasores contra la nueva composición de la población, la combinación convexa $\varepsilon p + (1 - \varepsilon)\hat{p}$.

Reescribimos 3.2 como

$$(1 - \varepsilon) (\hat{p} \cdot A\hat{p} - p \cdot A\hat{p}) + \varepsilon (\hat{p} \cdot Ap - p \cdot Ap) > 0 \quad (3.3)$$

y enunciamos una importante equivalencia

Proposición 3.3. Una estrategia \hat{p} es evolucionariamente estable (ESS) si y solo si se cumplen las siguientes dos condiciones

1. Condición de equilibrio

$$p \cdot A\hat{p} \leq \hat{p} \cdot A\hat{p} \quad \text{para todo } p \in \Delta \quad (3.4)$$

2. Condición de estabilidad

$$\text{si } p \neq \hat{p} \text{ y } p \cdot A\hat{p} = \hat{p} \cdot A\hat{p} \text{ entonces } p \cdot Ap < \hat{p} \cdot Ap \quad (3.5)$$

La primer condición es simplemente la definición de equilibrio de Nash. Pero ser un equilibrio no es suficiente para que una estrategia sea estable. En el ejemplo de cooperación 1.1 hay tres equilibrios de Nash. El equilibrio interior no es estable pues uno puede tomar estrategias arbitrariamente cercanas al equilibrio $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ y los jugadores se alejarán hacia los extremos. Por ende el nombre de condición de estabilidad para la segunda condición. Es necesario que \hat{p} sea realmente una mejor opción que p .

Demostración. Tanto la ida como la vuelta son directas.

(\Rightarrow) Sea $p \in \Delta$. Como (3.3) vale para todo ε chico, tomando ε tendiendo a cero tenemos que

$$\hat{p} \cdot A\hat{p} - p \cdot A\hat{p} \geq 0$$

Por lo tanto tenemos (1). Para ver (2), si $p \cdot A\hat{p} = \hat{p} \cdot A\hat{p}$, entonces (3.3) queda

$$\varepsilon(\hat{p} \cdot Ap - p \cdot Ap) > 0.$$

Como ε es positivo, el otro factor también es positivo.

(\Leftarrow) Sea $p \in \Delta$. Si $\hat{p} \cdot A\hat{p} - p \cdot A\hat{p} > 0$ estrictamente, entonces tomamos ε suficientemente chico para que se cumpla la desigualdad. Si vale la igualdad, la condición de estabilidad nos asegurará que valga (3.3). \square

Observación 3.4. Si \hat{p} es un equilibrio de Nash estricto (i.e. $\hat{p} \cdot A\hat{p} > p \cdot A\hat{p}$ para todo $p \in \Delta$), entonces \hat{p} es un ESS.

Recíprocamente, un ESS siempre es un equilibrio de Nash, aunque no necesariamente estricto.

Enunciamos otra equivalencia que nos ayuda a clasificar los ESS.

Teorema 3.5. *Una estrategia \hat{p} es una ESS si y solo si*

$$\hat{p} \cdot Aq > q \cdot Aq \quad (3.6)$$

para todo $q \neq \hat{p}$ en algún entorno de \hat{p} en Δ .

Demostración. (\Rightarrow) Queremos ver que existe un entorno de \hat{p} donde vale la desigualdad.

Tomamos un punto q cualquiera cerca de \hat{p} . Podemos escribir a q como una combinación convexa entre \hat{p} y otro punto p en el borde $\partial\Delta$.

$$q = (1 - \varepsilon)\hat{p} + \varepsilon p$$

Entonces cualquier punto en un entorno de \hat{p} se puede escribir como una combinación convexa entre \hat{p} y p con $p \in \partial\Delta$.

Ahora bien, para cada $p \in \partial\Delta$, como \hat{p} es una ESS, existe un $\bar{\varepsilon}(p) > 0$ tal que se cumple (3.3) para todo $\varepsilon < \bar{\varepsilon}(p)$. Como $\bar{\varepsilon}(p)$ se puede elegir de manera que resulte una función continua, y como el borde $\partial\Delta$ es un conjunto compacto, entonces $\bar{\varepsilon}(p)$ alcanza un mínimo $\varepsilon_0 > 0$. Entonces para $p \in \partial\Delta$, tomando $\varepsilon < \varepsilon_0$ vale la desigualdad (3.2) (o (3.3)).

A (3.2) lo multiplicamos por ε y sumamos

$$(1 - \varepsilon)\hat{p} \cdot A((1 - \varepsilon)\hat{p} + \varepsilon p)$$

a ambos lados. Nos queda entonces

$$\varepsilon p \cdot A(\varepsilon p + (1 - \varepsilon)\hat{p}) + (1 - \varepsilon)\hat{p} \cdot A((1 - \varepsilon)\hat{p} + \varepsilon p) < \hat{p} \cdot A((1 - \varepsilon)\hat{p} + \varepsilon p)$$

como $q = (1 - \varepsilon)\hat{p} + \varepsilon p$, nos queda

$$q \cdot Aq < \hat{p} \cdot Aq$$

(\Leftarrow) La vuelta es similar. Sea $p \in \Delta$ un punto cualquiera. Entonces existe q en un entorno de \hat{p} tal que $q = (1 - \varepsilon)\hat{p} + \varepsilon p$. Luego, como

$$q \cdot Aq < \hat{p} \cdot Aq$$

escribo $q = (1 - \varepsilon)\hat{p} + \varepsilon p$ y $\hat{p} = (1 - \varepsilon)\hat{p} + \varepsilon\hat{p}$, tenemos

$$((1 - \varepsilon)\hat{p} + \varepsilon p) \cdot Aq < ((1 - \varepsilon)\hat{p} + \varepsilon\hat{p}) \cdot Aq,$$

y se cancela $(1 - \varepsilon)\hat{p}$ de ambos lados, quedando

$$\varepsilon p \cdot Aq < \varepsilon\hat{p} \cdot Aq$$

De donde termina de salir la desigualdad (3.2) □

Observación 3.6. Si $\hat{p} \in \text{int}\Delta$ es un ESS, entonces no hay otros ESS. Mas aún, \hat{p} es el único Nash. De hecho, supongamos que existe $\hat{x} \neq \hat{p}$ Nash. Entonces, como \hat{p} es un Nash interior,

$$\hat{x} \cdot A\hat{p} = \hat{p} \cdot A\hat{p}$$

Por la condición de estabilidad 3.5, tenemos

$$\hat{x} \cdot A\hat{x} < \hat{p} \cdot A\hat{x}$$

Entonces \hat{x} no es una mejor respuesta a si mismo y por lo tanto no puede ser Nash.

Veamos una última equivalencia que usaremos en seguida para probar convergencia.

Teorema 3.7. *Sea $\hat{p} \in \text{int}\Delta$ un equilibrio de Nash. Entonces \hat{p} es una ESS si y solo si*

$$\xi \cdot A\xi < 0 \quad \text{para todo } \xi \neq 0 \quad \text{tal que} \quad \sum_{i=1}^n \xi_i = 0 \quad (3.7)$$

Antes de ver la demostración, notemos lo siguiente

Proposición 3.8. Si $\hat{p} \in \text{int}\Delta$ es un ESS, entonces

$$(\hat{p} - x) \cdot A(\hat{p} - x) < 0$$

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sum_i x_i = 1$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sum_i x_i = 1$. Si $x \notin \Delta$, como \hat{p} está en el interior de Δ puedo tomar una combinación convexa \tilde{x} de \hat{p} y x que sí está en Δ . Si x está en Δ , tomo $\tilde{x} = x$.

Como \hat{p} es un equilibrio interior, $\tilde{x} \cdot A\hat{p} = \hat{p} \cdot A\hat{p}$. Entonces, por la condición de estabilidad, $\hat{p} \cdot A\tilde{x} > \tilde{x} \cdot A\tilde{x}$. Escribiendo $\hat{p} = (1 - \varepsilon)\hat{p} + \varepsilon\hat{p}$ y $\tilde{x} = (1 - \varepsilon)\hat{p} + \varepsilon x$, tenemos

$$\begin{aligned} \hat{p} \cdot A\tilde{x} &> \tilde{x} \cdot A\tilde{x} \\ (1 - \varepsilon)\hat{p} \cdot A\tilde{x} + \varepsilon\hat{p} \cdot A\tilde{x} &> (1 - \varepsilon)\hat{p} \cdot A\tilde{x} + \varepsilon x \cdot A\tilde{x} \\ \hat{p} \cdot A\tilde{x} &> x \cdot A\tilde{x} \\ (1 - \varepsilon)\hat{p} \cdot A\hat{p} + \varepsilon\hat{p} \cdot Ax &> (1 - \varepsilon)x \cdot A\hat{p} + \varepsilon x \cdot Ax \end{aligned}$$

De donde se obtiene

$$\hat{p} \cdot Ax > x \cdot Ax \quad (3.8)$$

Ahora basta escribir la desigualdad del enunciado

$$\begin{aligned} (\hat{p} - x) \cdot A(\hat{p} - x) &< 0 \\ \hat{p} \cdot A\hat{p} - \hat{p} \cdot Ax - x \cdot A\hat{p} + x \cdot Ax &< 0 \\ \hat{p} \cdot A\hat{p} - x \cdot A\hat{p} &< \hat{p} \cdot Ax - x \cdot Ax. \end{aligned}$$

El término de la izquierda vale cero porque \hat{p} es un equilibrio y el término de la derecha es positivo por lo que acabamos de ver en 3.8 \square

Estamos ahora en condiciones de demostrar el teorema 3.7

Demostración. \Rightarrow : Sea $\chi \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sum_i \chi_i = 0$. Entonces llamo $\tilde{x} = \hat{p} - \chi$ que cumple $\sum_i \tilde{x}_i = 1$. Luego

$$\chi \cdot A\chi = (\hat{p} - (\hat{p} - \chi)) \cdot A(\hat{p} - (\hat{p} - \chi)) = (\hat{p} - \tilde{x}) \cdot A(\hat{p} - \tilde{x}) < 0$$

\Leftarrow : Como \hat{p} es un equilibrio de Nash interior, cumple la condición de equilibrio. Tenemos que ver que cumple la condición de estabilidad para todo $x \in \Delta$ ya que siempre vale $x \cdot A\hat{p} = \hat{p} \cdot A\hat{p}$.

Tomamos $\chi = \hat{p} - x$ que cumple $\sum_i \chi_i = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} (\hat{p} - x) \cdot A(\hat{p} - x) &< 0 \\ \hat{p} \cdot A\hat{p} - \hat{p} \cdot Ax - x \cdot A\hat{p} + x \cdot Ax &< 0 \\ \hat{p} \cdot A\hat{p} - x \cdot A\hat{p} &< \hat{p} \cdot Ax - x \cdot Ax \\ 0 &< \hat{p} \cdot Ax - x \cdot Ax \end{aligned}$$

Entonces \hat{p} cumple la condición de estabilidad y es un ESS. \square

Presentamos ahora el resultado de convergencia a ESS cuando la matriz tiene un único ESS interior. Bajo la dinámica de mejor respuesta, los jugadores alcanzan el ESS en tiempo finito.

Teorema 3.9 (Convergencia a ESS). *Sea p una ESS interior. Entonces p es globalmente asintóticamente estable para la dinámica de mejor respuesta: Todas las órbitas lineales a trozos llegan a p en tiempo finito.*

Demostración. Consideramos la función $V(x) = \max_i (Ax)_i - x \cdot Ax$ que satisface

1. $V(x) \geq 0$ para todo $x \in \Delta$
2. $V(x) = 0$ si y solo si $x = p$

(1) es obvio puesto que x es un vector de probabilidad, tomar un promedio sobre Ax nunca podrá ser mayor al máximo de todas las coordenadas.

(2) Si $V(x) = 0$, entonces x es una mejor respuesta a si mismo y por lo tanto x es un equilibrio de Nash. El único equilibrio de Nash del juego es p puesto que es una ESS interior. Con el mismo argumento, al evaluar $V(x)$ en p , como p es Nash, $V(p) = 0$.

En conclusión, $V(x)$ es una función de Lyapunov.

Supongamos que estamos en un punto x que no es el equilibrio. Consideremos ahora una solución de BR lineal a trozos x_t que cumple $\dot{x} = b - x$

con $b \in BR(x)$. Estamos usando el teorema de aproximación 2.2 del capítulo anterior. Tenemos

$$V(t) = V(x(t)) = \max(Ax)_i - x \cdot Ax = b \cdot Ax - x \cdot Ax = (b - x) \cdot Ax. \quad (3.9)$$

Por lo tanto

$$\dot{V} = -\dot{x} \cdot Ax + (b - x) \cdot A\dot{x} = -(b - x) \cdot Ax + (b - x) \cdot A(b - x). \quad (3.10)$$

El primer sumando es claramente negativo por la definición de b .

El segundo sumando es estrictamente menor que cero por el teorema 3.7. Pero mas aún, existe un ε tal que $(b - x) \cdot A(b - x) < -\varepsilon < 0$. Esto ocurre pues como A es inversible, pedir $(b - x) \cdot A(b - x)$ es equivalente a pedir $b - x = 0$.

Si $b - x$ no está acotado lejos de cero para todo x distinto de p , entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1}$ tal que $b - x_n \rightarrow 0$. Como Δ es compacto existe un punto de acumulación \tilde{x} que tiene que cumplir $b - \tilde{x} = 0$. Entonces \tilde{x} es un equilibrio de Nash. Como p es el único equilibrio, $\tilde{x} = p$. Pero cualquier sucesión distinta de p que tiende a p tiene siempre su mejor respuesta en el borde $\partial\Delta$. En un entorno de p , $b - x$ es estrictamente menor que $-\varepsilon$ para algún ε para todo x distinto de p . Absurdo.

Entonces $\dot{V}(x) < 0 - \varepsilon = -\varepsilon$. La función V decae como una lineal en todo punto x distinto del equilibrio \hat{p} . Luego, V alcanza el valor cero en tiempo finito sobre cualquier solución $x(t)$, lo cual es equivalente a decir que cualquier solución $x(t)$ alcanza el equilibrio \hat{p} en tiempo finito. \square

Capítulo 4

Juegos Bimatrixiales

Hasta ahora trabajamos la problemática de la dinámica de la mejor respuesta en juegos representados por una sola matriz, y construimos la ecuación desde el punto de vista de juegos poblacionales. En este capítulo abordaremos juegos bimatrixiales. Vamos a tener solamente dos jugadores tratando de maximizar sus pagos en función de la estrategia de su adversario. Los juegos bimatrixiales también se pueden estudiar como juegos poblacionales, donde la población está segregada por distintas matrices de pago haciendo aún más complejas sus interacciones. Sin embargo seguiremos el abordaje hecho por Sparrow y Van Strien en [14] donde plantean una dinámica con dos jugadores que pueden jugar estrategias mixtas y tratan de actualizarla en dirección a la mejor respuesta.

En la primera sección vamos a construir la dinámica de la mejor respuesta a partir del caso discreto como hicimos anteriormente. Surgirá también la problemática de la inclusión diferencial, pero en menor escala ya que veremos que una pequeña condición de transversalidad en las matrices de pago harán que las trayectorias sean únicas para casi todo valor inicial. Mas aún, las trayectorias serán lineales a trozos. Esto será visto en la sección dos.

En la tercera y última sección veremos primero un resultado de convergencia de la dinámica de mejor respuesta al equilibrio de Nash para matrices de suma cero y finalmente cerraremos con el importante ejemplo de Shapley para el piedra papel ó tijera que fue el primero en mostrar que la dinámica de mejor respuesta puede tener una órbita cíclica, enterrando la creencia inicial de que el Fictitious Play siempre converge al equilibrio de Nash. Cabe señalar que en su tesis doctoral, Nash consideró que esto podía ocurrir, si bien confesó no ser capaz de demostrarlo.

4.1. La ecuación de Best Response en juegos bimatriciales

Construiremos la dinámica continua de la Mejor Respuesta a partir del caso del juego ficticio discreto

Sean A y B dos jugadores. Ambos cuentan con n estrategias puras. A las estrategias mixtas de cada jugador las representamos con dos vectores de probabilidad

$$p^A \in \Delta_A \quad \text{y} \quad p^B \in \Delta_B,$$

donde Δ_A y Δ_B son el espacio de vectores de probabilidad en \mathbb{R}^n . Por convención p^A es un vector fila y p^B un vector columna. Llamamos $\Delta = \Delta_A \times \Delta_B$.

Una vez elegidas las estrategias, cada jugador recibe como *utilidad* o *pago* la cantidad $p^A A p^B$ y $p^A B p^B$. Aquí, hemos utilizado las mismas letras A y B para indicar las matrices de pago de los jugadores A y B respectivamente. El contexto siempre dejará claro si estamos hablando de los jugadores o de sus matrices.

En un momento dado, el jugador A puede mejorar su utilidad eligiendo como estrategia a una mejor respuesta $BR(p^B)$ que corresponda a la componente mas grande de $A p^B$. Formalmente definimos las correspondencia BR para un juego bimatricial.

$$BR_A(p^B) := \operatorname{argmax}_{p^A} p^A A p^B \quad \text{y} \quad BR_B(p^A) := \operatorname{argmax}_{p^B} p^A A p^B. \quad (4.1)$$

Igual que en el caso unimatricial, $BR(x)$ es siempre no vacío, cerrado y convexo. La única diferencia es que en vez de evaluar en la estrategia de la propia población, se evalúa BR en la estrategia del oponente. Nuevamente aparece la problemática de la unicidad. En principio ni BR_A ni BR_B tienen porque ser únicas, pero en general sí lo son. La unicidad para A se pierde solo cuando p^B está en ciertos hiperplanos. Estos hiperplanos vienen dados por los $p^B \in \Delta_B$ en los cuales el máximo de $A p^B$ se alcanza en más de una coordenada. Idem para B .

Bajo este nuevo paradigma, un par de estrategias (p_*^A, p_*^B) es un *equilibrio de Nash* si

$$p_*^A \in BR(p_*^B) \quad \text{y} \quad p_*^B \in BR(p_*^A).$$

Si (p_*^A, p_*^B) es un equilibrio *interior*, es decir, que ninguno de los dos vectores tiene ninguna coordenada igual a cero, lo notaremos $E = (E^A, E^B)$. Si E es un equilibrio interior, entonces vale que todas las coordenadas de $A \cdot E^B$ son iguales y todas las coordenadas de $E^A \cdot B$ son iguales. Las mejores respuestas a un Nash interior son todo el espacio de estrategias posibles.

Supongamos entonces que A y B están jugando repetidas veces. A tiempo n están jugando las estrategias $p^A(n)$ y $p^B(n)$ respectivamente. Ambos jugadores les gustaría haber jugado $\text{BR}_A(p^B(n))$ y $\text{BR}_B(p^A(n))$, que son las mejores respuestas a la estrategia de su adversario. Lo que van a hacer es, en el próximo juego, ajustar su estrategia ligeramente en dirección a esa mejor respuesta. A y B ahora juegan

$$\begin{aligned} p^A(n+1) &= (1-h)p^A(n) + h\text{BR}_A(p^B(n)), \\ p^B(n+1) &= (1-h)p^B(n) + h\text{BR}_B(p^A(n)), \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde $h \in \mathbb{R}_{>0}$ es chico. Se pueden reescribir las expresiones de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{p^A(n+1) - p^A(n)}{h} &= \text{BR}_A(p^B(n)) - p^A, \\ \frac{p^B(n+1) - p^B(n)}{h} &= \text{BR}_B(p^A(n)) - p^B. \end{aligned}$$

Resulta natural entonces abstraerse de la discretización del tiempo en jugadas puntuales y pensar la dinámica como la siguiente ecuación diferencial.

$$\begin{cases} dp^A/dt = \text{BR}_A(p^B) - p^A, \\ dp^B/dt = \text{BR}_B(p^A) - p^B. \end{cases} \quad (\text{BR})$$

Aunque esta ecuación es más intuitiva, ya sabemos que por la no unicidad de la correspondencia BR (BR) es en realidad una inclusión diferencial

$$\begin{cases} dp^A/dt \in \text{BR}_A(p^B) - p^A, \\ dp^B/dt \in \text{BR}_B(p^A) - p^B, \end{cases} \quad (\text{BR})$$

donde $\text{BR} : \Delta \rightarrow \mathcal{P}(\Delta)$ es una función no vacía, cerrada y convexa. Además es semicontinua superiormente. Estamos en las hipótesis del teorema de Aubin y Cellina [1] del apéndice, y por lo tanto la inclusión BR tiene al menos una solución $x(t)$ absolutamente continua para cada dato inicial. En la siguiente sección vamos a ver que para juegos bimatriaciales con matrices inversibles, estas soluciones son lineales a trozos y son únicas para un conjunto abierto de medida completa de soluciones iniciales.

4.2. Construcción de Soluciones

Vamos a mostrar cómo son las soluciones de la inclusión (BR) construyendo a mano cada solución en un subconjunto del estado de estrategias $\Delta = \Delta_A \times \Delta_B$ y luego extendiendo a casi todo el espacio.

Supongamos que los jugadores están en un estado (p^A, p^B) . Entonces A ajustará su vector de probabilidad $p^A(t)$ hacia P_i^A , la mejor respuesta a p^B . Si P_i^A se mantiene como mejor respuesta a medida que B actualiza su estrategia entonces el jugador A avanza en línea recta hacia la mejor respuesta P_i^A . De manera análoga, el jugador B se mueve en línea recta hacia su mejor respuesta P_j^B . Mientras P_i^A y P_j^B se mantengan entre las mejores respuestas a $p^A(t)$ y $p^B(t)$, una de las solución a (BR) es

$$\begin{aligned} p^A(t_0 + s) &= p^A(t_0)(1 - s) + s \cdot P_i^A \\ p^B(t_0 + s) &= p^B(t_0)(1 - s) + s \cdot P_j^B, \end{aligned} \quad (4.3)$$

para $s \in [0, 1]$.

Notemos que el tiempo esta parametrizado de manera que los jugadores se muevan hacia sus objetivos a tiempo uniforme y, si no cambian las mejores respuestas, llegarán a tiempo $t_0 + 1$ a (P_i^A, P_j^B) . En este punto la dinámica se volverá estacionaria. La elección de parametrización del tiempo se dio de esta manera para facilitar cálculos y simulaciones. En efecto, la geometría de las soluciones no se ve afectada por variaciones en la velocidad de los agentes. La alternativa más natural sería tomar un tiempo exponencial de la forma e^{-t} como fue hecho en el capítulo dos.

Si la mejor respuesta de ambos jugadores es única entonces hay un entorno de la estrategia de su oponente donde se mantiene igual. Haciendo con que 4.3 sea solución durante un tiempo t positivo. El siguiente lema ilustra este hecho y nos ayuda a entender mejor las preimágenes de las mejores respuestas.

Lema 4.1. Si A y B son matrices de $n \times n$ inversibles, entonces:

1. El conjunto donde un jugador es indiferente entre dos estrategias es un hiperplano de codimension 1
2. Para cada $1 \leq i, j \leq n$ el conjunto

$$S_{ij} = \{(p^A, p^B); \text{BR}_A(p^B) = P_i^A \text{ y } \text{BR}_B(p^A) = P_j^B\}$$

es convexo.

3. Si existe un equilibrio $E = (E^A, E^B)$ en el interior de Δ , entonces todas las n^2 regiones S_{ij} son no-vacías, y sus clausuras se intersecan en E

Demostración. 1. Consideremos primero los puntos en los cuales el jugador A es indiferente entre las estrategias 1 y 2. Es decir, $(p^A, p^B) \in \Delta$

tal que $(Ap^B)_1 = (Ap^B)_2$.

Como

$$(Ap^B)_1 = \sum_{i=1}^n a_{1i}p_i^B \quad \text{y} \quad (Ap^B)_2 = \sum_{i=1}^n a_{2i}p_i^B,$$

quero

$$\sum_{i=1}^n a_{1i}p_i^B = \sum_{i=1}^n a_{2i}p_i^B,$$

de donde

$$\sum_{i=1}^n (a_{1i} - a_{2i})p_i^B = 0$$

esto claramente es un hiperplano en \mathbb{R}^n . La cuenta es análoga para el otro jugador y para cualquier par de estrategias.

2. Tomemos dos puntos $(p^A, p^B), (q^A, q^B) \in S_{ij}$. Queremos ver que cualquier combinación convexa de ellos también está en S_{ij} .

Sea $0 < t < 1$, consideramos $t(p^A, p^B) + (1-t)(q^A, q^B)$. Busquemos la mejor respuesta de A para la estrategia $tp^B + (1-t)q^B$, es decir $BR_A(tp^B + (1-t)q^B)$, que será el componente más grande de $A(tp^B + (1-t)q^B)$.

$$A(tp^B + (1-t)q^B) = tAp^B + (1-t)Aq^B$$

Sabiendo que tanto Ap^B como Aq^B alcanzan su máximo en i , dado $j \neq i$, es fácil ver que

$$(tAp^B + (1-t)Aq^B)_i > (tAp^B + (1-t)Aq^B)_j$$

Ya que $(Ap^B)_i > (Ap^B)_j$ y $(Aq^B)_i > (Aq^B)_j$, y por lo tanto

$$BR_A(tp^B + (1-t)q^B) = P_i^A.$$

La cuenta para B es análoga y concluimos que

$$t(p^A, p^B) + (1-t)(q^A, q^B) \in S_{ij}.$$

Es decir, S_{ij} es convexo.

3. Veamos primero que $E = (E^A, E^B)$ está efectivamente en la clausura de S_{ij} para cualquier i, j .

Tomo $(p^A, p^B) \in S_{ij}$ y considero $L(t) = (1-t)(p^A, p^B) + t(E^A, E^B)$ con $t \in [0, 1]$. Veamos que para todo $t \in [0, 1)$, $L(t) \in S_{ij}$.

Veamos quien es la mejor respuesta para de A para $L(t)^B$,

$$AL(t) = tAp^B + (1-t)AE^B$$

Como AE^B tiene todas sus coordenadas iguales, ya que E^B es el punto de equilibrio, la coordenada mas grande de ese vector será la misma que Ap^B y esa ya sabíamos que era la coordenada i . La cuenta es análoga para B y por lo tanto, $(E^A, E^B) \in \partial S_{ij}$.

Para ver que

$$\bigcap_{ij} S_{ij} = \{(E^A, E^B)\}$$

basta notar que en la intersección de un par cualquiera $\overline{S_{ij}} \cap \overline{S_{kl}}$ están las estrategias que hacen con que el jugador A esté indiferente entre P_i^A y P_k^A . Si intersecamos todos los posibles S_{ij} , quedarán nada más que las estrategias donde los jugadores son indiferentes a cualquier estrategia. El único punto que cumple con esta condición es (E^A, E^B) . □

Seguimos con un ejemplo

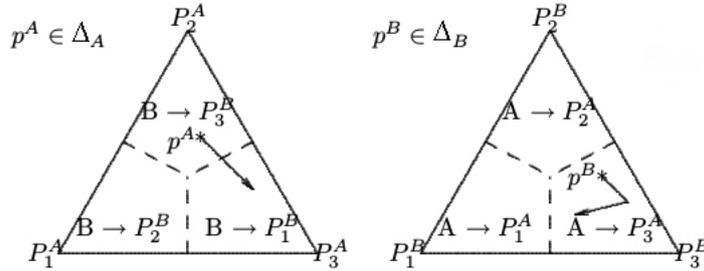


Figura 4.1: Los dos triángulos representan las estrategias y la trayectoria de los jugadores de acuerdo a BR.

Ejemplo 4.2. Sean A y B matrices de 3×3 . Los espacios de estrategias de cada jugador Δ_A y Δ_B están representados por dos triángulos. Los vértices son las estrategias puras y el interior las estrategias mixtas. La figura 4.1 muestra también las regiones S_{ij} . Los jugadores están en un estado (p^A, p^B) donde A y B tienen a P_3^A y P_3^B como mejor respuesta. La dinámica dicta que avancen hacia estas estrategias en línea recta siguiendo (4.3). Cuando A cruza la línea de indiferencia que separa las región en que B prefiere las estrategias P_3^B de P_1^B , el jugador B cambia de mejor respuesta, y (4.3) se

reinicia, esta vez con la nueva mejor respuesta para B mientras que la mejor respuesta de A se mantiene.

En la figura se ve claramente que A sigue avanzando en línea recta y B cambia de dirección en el momento en que A cruza la frontera. Si dejáramos que la dinámica siga, cuando B cruce la frontera, A cambiará su dirección hacia P_1^A .

Queda claro entonces que mientras las mejores respuestas sean únicas, los jugadores se mueven en línea recta hacia la mejor respuesta. El lema 4.1 nos garantiza que el conjunto donde las mejores respuestas son únicas es abierto y por lo tanto existe la solución de la forma (4.3). Veamos ahora qué sucede cuando uno de los dos jugadores tiene mas de una mejor respuesta.

4.2.1. Cuando a lo sumo un jugador es indiferente

Consideremos los hiperplanos donde uno de los dos jugadores está indiferente entre dos estrategias. Llamamos al conjunto donde A está indiferente entre P_i^A y P_j^A como $Z_{ij}^A \subset \Delta_B$. Entonces podemos llamar $Z^A = \bigcup_{ij} Z_{ij}^A$ que son todas las estrategias de B tal que A es indiferente entre dos estrategias. $Z^B \subset \Delta^A$ se define igual y por lo tanto el conjunto

$$Z = (\Delta^A \times Z^A) \bigcup (Z^B \times \Delta^B)$$

está compuesto por todas las estrategias en las cuales al menos uno de los dos jugadores está indiferente entre al menos dos estrategias. Fuera del conjunto Z la dinámica es claramente única y continua. Pues el complemento de Z es la unión de los S^{ij} . Si los jugadores están en un S^{ij} , van a salir de el cuando crucen su frontera, es decir, cuando crucen algún hiperplano en Z Vamos a llamar

$$Z^* = Z^B \times Z^A$$

Que es el conjunto en donde ambos jugadores son indiferentes entre dos o más estrategias. Vale que en el complemento de este conjunto, el flujo se extiende de manera única y continua desde que se cumpla una cierta *condición de transversalidad*.

Proposición 4.3. El movimiento definido por las ecuaciones BR induce un flujo continuo en $(\Delta^A \times \Delta^B) \setminus Z^*$ dado que se cumpla la siguiente condición: Dado un punto $(p^A, p^B) \notin Z^B$ con $p^A \in Z^B$, $p^B \notin Z^A$ y con A prefiriendo la estrategia P_k^A ,

$$\text{El vector que va de } p^A \text{ a } P_k^A \text{ no es paralelo al plano } Z^B \in \Delta_A \quad (4.4)$$

Y vale lo análogo al invertir los roles de A y B

Demostración. Es fácil de visualizar gráficamente. El ejemplo de la figura 4.1 no cumple la condición de transversalidad. Cuando B está en la línea que separa la región donde A es indiferente entre P_2^A y P_3^A , y A está en la región donde B prefiere P_1^B , entonces B avanzará en línea recta hacia P_1^B y seguirá en la línea de indiferencia para A . Mientras B siga en ese segmento, A tendrá elección de mejor respuesta. Si en cambio las direcciones en las que se mueve B nunca son paralelas a los hiperplanos Z^A entonces la condición de transversalidad nos asegura que B saldrá inmediatamente de Z^A . □

La condición de transversalidad nos asegura que los dos jugadores saldrán del conjunto de indiferencia al siguiente instante. El espacio de estrategias de A donde el jugador B es indiferente entre las estrategias l y l' son los vectores de \mathbb{R}^m ortogonales a la diferencia entre las columnas l y l' de la matriz de B . Si el vector canónico e_k no está contenido en este conjunto, entonces $b_{kl} \neq b_{kl'}$. Luego la condición de transversalidad se cumple si para cada columna de A (respectivamente, cada fila de B) los coeficientes son todos distintos, es decir $a_{ij} \neq a_{i'j}$ si $i \neq i'$. Las matrices que cumplen esta condición forman un conjunto abierto, denso, cuyo complemento tiene medida cero.

4.2.2. Caso 2×2

Antes de analizar la dinámica cuando *ambos* jugadores están indiferentes entre estrategias, vamos a analizar el caso de dos matrices de 2×2 . Una vez que incorporemos todas las posibles dinámicas de este caso podremos entender que es lo que pasa *cerca* del conjunto Z^* .

En el caso 2×2 cada jugador tiene dos estrategias. El conjunto de estrategias mixtas de cada jugador lo vemos como un punto p en el intervalo $[0, 1]$. La probabilidad de jugar la estrategia 1 es p , y la de jugar la estrategia 2 es $1 - p$. El conjunto de estrategias $\Delta_A \times \Delta_B$ es el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

Es simple visualizarlo de manera gráfica. El jugador A se mueva hacia la derecha o izquierda dependiendo de la posición de p^B . O sea, si está por encima ó por debajo de una cierta línea horizontal que determina el punto de indiferencia. B se va a mover hacia arriba o hacia abajo.

Lema 4.4. Caso 2×2

Si las matrices A y B de los jugadores son inversibles, dadas dos estrategias iniciales p^A, p^B , hay tres posibilidades.

1. No hay un punto de equilibrio interior en $\Delta_A \times \Delta_B$ y todas las órbitas tienden a un único punto en la frontera. Este caso ocurre cuando Z^A y

Z^B son vacíos.

2. Hay un punto de equilibrio interior E que es estable. Las órbitas espiralean hacia el y el flujo se extiende continuamente en E .
3. Existe un equilibrio interior E que es un punto silla y el flujo *no* se puede extender de manera continua en E . No hay unicidad del flujo cerca de E

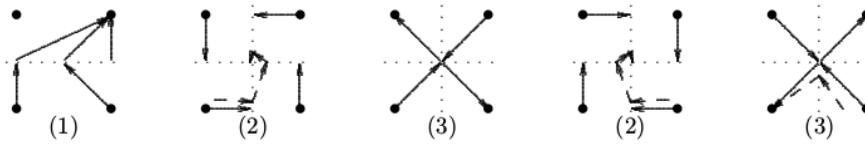


Figura 4.2: Todas las posibles dinámicas del caso 2×2

Demostración. Veamos primero porque es necesario pedir que las matrices sean inversibles. Si alguna de las dos matrices no es inversible, entonces ese jugador tendrá una estrategia dominada y otra dominante. Se moverá siempre hacia la estrategia dominante. El otro jugador terminará eligiendo una mejor respuesta a esta estrategia. Se comportarán como en (1) de la figura 4.2. Es un caso poco interesante.

Los siguientes casos son ligeramente más complejos. Mas allá de la rigurosidad del argumento, es más importante entender intuitivamente la relación entre los valores de las matrices y el comportamiento de los jugadores cuando siguen las ecuaciones de BR.

Si tenemos dos matrices inversibles

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Asumimos, sin pérdida de generalidad que $a > c$.

Si $b \geq d$, entonces el jugador A tiene a la primer fila como estrategia dominante. Se moverá hacia ella no importando lo que haga el jugador B . Este podrá preferir una u otra estrategia dependiendo de donde haya empezado el jugador A , pero a la larga se adaptará y elegirá una mejor respuesta a la estrategia dominante de A . Si A finalmente juega e_1 , entonces, B elegirá lo mejor entre $e_1 \cdot B = (e, f)$. De cualquier manera estamos en el caso (1).

Si $b < d$. Entonces A quiere jugar “lo mismo” que B . Si B juega la primer columna, A va a querer jugar la primer fila pues $a > c$. Si B juega la segunda

columna, A va a querer jugar la segunda fila pues $d > b$. Veamos ahora las distintas posibilidades para la matriz B .

Si B tiene alguna estrategia dominada, estamos en el caso (1). Entonces debemos asumir que $e > f$ y $g < h$ o bien que $e < f$ y $g > h$.

Si $e > f$ y $g < h$

En este caso ambos jugadores buscan jugar lo mismo que su oponente. Si están jugando estrategias distintas, avanzarán ambos hacia la estrategia opuesta hasta que alguno de los dos cruce una línea de indiferencia y luego avanzarán ambos hacia uno de los equilibrios de Nash en los extremos.

Si las estrategias del jugador A las representamos con el vector $(1 - x, x)$ y a las del B con el vector $(1 - y, y)'$. Entonces los vectores de pago de cada uno serán

$$v_A(y) = \begin{pmatrix} a + y(b - a) \\ c + y(d - c) \end{pmatrix} \quad v_B(x) = (e + x(g - e), f + x(h - f))$$

Podemos calcular a mano las mejores respuestas para uno y otro jugador. La ecuación de mejor respuesta queda

$$\dot{x} = \begin{cases} 0 - x & \text{si } y < \frac{a-c}{d-b+a-c}, \\ 1 - x & \text{si } \text{no.} \end{cases} \quad \dot{y} = \begin{cases} 0 - y & \text{si } x < \frac{e-f}{e-f+h-g}, \\ 1 - y & \text{si } \text{no.} \end{cases} \quad (4.6)$$

Mas allá del valor puntual donde los jugadores cambian su preferencia, lo más importante es notar que cuando x es grande, y se quiere agrandar. Cuando x es chico, y se quiere achicar. Lo mismo le pasa a x . Luego Mientras estén en lados distintos de la cuadrícula, cada uno tratará de pasar al otro lado. Cuando están del mismo lado la dinámica irá hacia el equilibrio en el vértice. Este es el caso (3).

Si $e < f$ y $g > h$ En este caso las mejores respuestas de x se mantienen las mismas, pero cambian las de y :

$$\dot{x} = \begin{cases} 0 - x & \text{si } y < \frac{a-c}{d-b+a-c}, \\ 1 - x & \text{si } \text{no.} \end{cases} \quad \dot{y} = \begin{cases} 0 - y & \text{si } x > \frac{e-f}{e-f+h-g}, \\ 1 - y & \text{si } \text{no.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Mientras que x sigue tratando de imitar a y , y quiere hacer lo contrario de lo que está jugando x . Cuando x es grande, y quiere ser chico. Pero entonces llegará un momento en que y es tan chico que x también querrá ser chico. Entonces y vuelve a querer crecer. Los jugadores irán cambiando de dirección alternadamente y convergerán hacia el equilibrio de Nash interior. Este juego en realidad es equivalente a un juego de suma cero donde siempre hay convergencia al equilibrio de Nash. Lo vamos a ver en 4.6 \square

4.2.3. Cuando ambos jugadores son indiferentes

Veamos ahora el comportamiento del sistema para dos matrices genéricas A y B y cuando los dos jugadores están indiferentes entre dos o más estrategias, es decir, cuando estamos dentro del conjunto Z^* . Generalmente las trayectorias cruzan varias veces los conjuntos de codimensión uno donde uno de los dos jugadores es indiferente, pero no llegan nunca a tocar el conjunto Z^* . Vamos a estudiar que pasa *cerca* de Z^* , y concluir que en muchos caso las trayectorias también se pueden extender de forma continua en esos puntos.

Definimos $Z'_{kl,ij}$ el subconjunto de $Z_{kl}^B \times Z_{ij}^A \subset Z^*$ donde el jugador A es indiferente *solo* entre las estrategias i y j , y el jugador B es indiferente *solo* entre las estrategias k y l . Como estamos asumiendo que A y B son inversibles entonces $Z'_{kl,ij}$ es un plano de codimensión dos. Definimos un vecindario de $Z'_{kl,ij}$ como

$$N = \{(p^A, p^B) : \text{BR}_A(p^B) \subset \{i, j\} \quad y \quad \text{BR}_B(p^A) \subset \{k, l\}\} \quad (4.8)$$

En el conjunto N , el jugador A prefiere las estrategias i y j por sobre todas las demás y el jugador B prefiere las estrategias k y l . Por la proposición 4.3, en $N \setminus Z'$, las mejores respuestas son únicas y podemos interpretar a (BR) como una ecuación diferencial en vez de una inclusión diferencial. Por lo tanto hay una única solución que consiste en un decaimiento lineal en todas las estrategias p_m^A con $m \neq i, j$ y p_n^B , con $n \neq k, l$. El comportamiento en las coordenadas restantes dependerá de la forma de las submatrices de 2×2 de A y B .

$$\begin{pmatrix} a_{kk} & a_{kl} \\ a_{lk} & a_{ll} \end{pmatrix} \quad B[i, j] = \begin{pmatrix} b_{ii} & b_{ij} \\ b_{ji} & b_{jj} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Estas matrices describen un juego en el espacio de dos dimensiones generado por $[P_i^A, P_j^A] \times [P_k^B, P_l^B]$. Donde $[P_i^A, P_j^A]$ es el segmento $\lambda P_i^A + (1 - \lambda)P_j^A$. La dinámica en N será resultado de la dinámica en este espacio, que es fácil ya que es el caso 2×2 , en conjunto con el decaimiento lineal en todas las otras coordenadas. Este decaimiento viene del hecho de que cualquier mejor respuesta para ambos tendrá ceros en cualquier coordenada distinta de i y j o de k y l .

La siguiente proposición compila este hecho con la condición de transversalidad para brindar la continuidad y unicidad del flujo en casi todos lados.

Proposición 4.5. Sean A y B matrices inversibles que cumplen la condición de transversalidad. Entonces el flujo definido en los conjuntos S_{ij} se puede extender continuamente de manera única en casi todos lados salvo donde:

- Un jugador está indiferente entre por lo menos dos estrategias y el otro entre por lo menos tres.
- Ambos jugadores están indiferentes entre exactamente dos estrategias y en este conjunto la dinámica se comporta como en el caso (3) del lema anterior.

Si consideramos el vecindario N de $Z'_{kl,ij}$ definido en 4.8, la dinámica en N es gobernada por el subjuego de 2×2 y un decaimiento lineal en las demás coordenadas. Hay tres casos.

1. Las trayectorias cruzan Z_{kl}^B o Z_{ij}^A y localmente el flujo es el producto de un flujo constante perpendicular al plano y un flujo como en (1) del lema 4.4.
2. Las trayectorias en N se mueven en espiral hacia el equilibrio E , es decir, hacia Z' , sobre un cono como muestra la figura 4.3, y convergen hacia la única trayectoria en Z' que se mantiene en Z' . Esta trayectoria es una solución estacionaria que se mantiene en el equilibrio de Nash. Es la única extensión continua del flujo de N a Z' . Localmente se la puede ver como el flujo de (2) en el lema 4.4.
3. Z' actúa como un punto silla y las trayectorias se van de N alejándose de Z' . Localmente las trayectorias son como el caso (3) del lema 4.4.

Demostración. La primer parte del teorema se refiere a los puntos donde no se puede extender el flujo. El caso en el que los jugadores están indiferentes entre mas de dos estrategias lo dejamos abierto a la posibilidad de que exista una extensión continua del flujo. Aunque en principio no la tiene. En [14], Sparrow y Van Strien desarrollaron esta teoría para luego estudiar solamente variaciones del piedra papel o tijera que son juegos de 3×3 . El único punto en el que los jugadores están indiferentes entre tres estrategias es en el equilibrio de Nash.

En el segundo caso no tenemos unicidad del flujo puesto que estamos sobre un punto silla.

La segunda parte describe las trayectorias cuando los jugadores están cerca de Z' . Es decir, cuando prefieren solamente dos estrategias por sobre todas las demás. En este caso la dinámica se reduce al caso 2×2 previamente estudiado. Las trayectorias decaerán linealmente en todas las demás coordenadas mientras que las submatrices de las estrategias preferidas dictarán la dinámica. Los casos (1) y (3) son naturales. Veamos el caso (2).

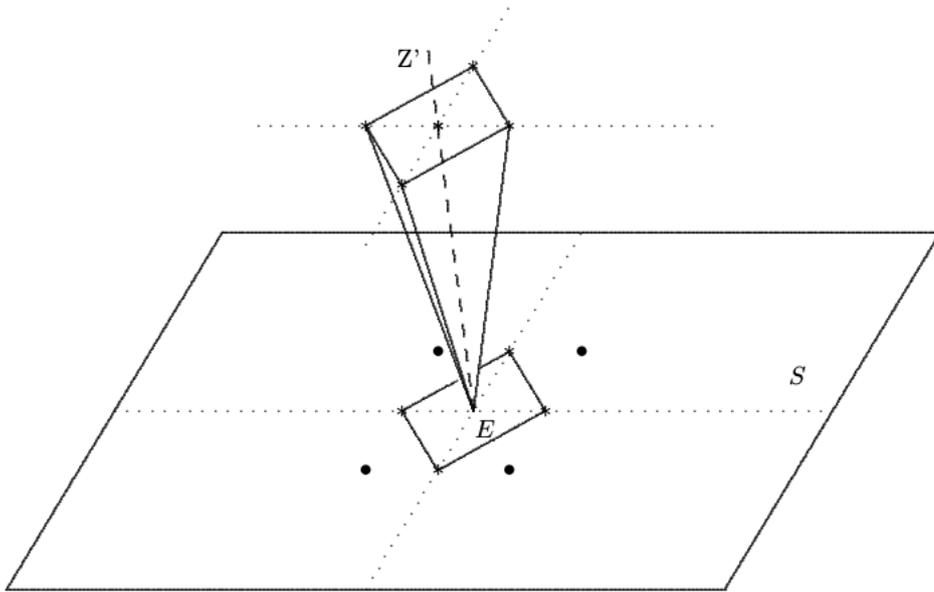


Figura 4.3: Las órbitas van en espiral por el cono hacia el punto de equilibrio E

Llamamos S al plano de dos dimensiones que contiene las cuatro combinaciones de las estrategias puras (P_s^A, P_t^B) , $s \in \{i, j\}$ y $t \in \{k, l\}$. Sea $V \subset S$ un cuadrilátero con lados paralelos a las líneas que conectan el equilibrio $E \in S$ a (P_s^A, P_t^B) , $s \in \{i, j\}$ y $t \in \{k, l\}$. Definimos V de manera que cuando los jugadores apunten hacia (P_s^A, P_t^B) , su componente en S sea paralela a uno de los lados de V . Ahora tomamos un cuadrilátero V_r paralelo a V pero sobre el plano S_q paralelo a S pero que pasa por el punto $q \in Z'$. Si tomamos el cono formado por V_r y el punto de equilibrio E , entonces las órbitas que empiezan en el cono se mantienen en el cono.

Hay que convencerse que los jugadores están haciendo lo dicta la dinámica en el caso (3) del lema 4.4. Si proyectamos la dinámica al plano S se podrá ver la convergencia en espiral de la figura 4.2. Lo que vemos en las demás coordenadas es el decaimiento lineal de los jugadores bajando la probabilidad de esas estrategias, por eso van sobre el cono. \square

En el caso (1) aunque uno de los jugadores tienen la opción de elegir una mejor respuesta en (p^A, p^B) , no hay una elección que los mantenga en indecisión. Esto ocurre pues la condición de transversalidad asegura que estos momentos de indecisión ocurren en tiempos discretos.

En el caso (2) sí existe una elección de mejor respuesta que mantiene a la

dinámica en Z^* . Es la solución estacionaria. Soluciones cercanas se acercan en espiral hacia esta solución y es una extensión continua del flujo en Z^* .

En el caso (3) se pierde la única extensión y no hay unicidad en las soluciones de la inclusión diferencial

Esto concluye el análisis de la existencia de soluciones de la dinámica de (BR) en los juegos bimatriaciales. Estudiaremos a seguir dos resultados de convergencia.

4.3. Convergencia y Periodicidad

En esta sección vamos a ver primero un teorema de convergencia al equilibrio de Nash para los juegos de suma cero. Resulta que en este caso ambos jugadores avanzaran hacia el equilibrio de Nash y lo alcanzarán a tiempo infinito.

Luego veremos el contraejemplo que encontró Shapley en 1960 que muestra que en el piedra papel o tijera los jugadores no solo no convergen al Nash sino que existe una órbita cíclica periódica donde los jugadores repetirán las mismas estrategias ad eternum.

4.3.1. Juegos de suma cero

Recordemos que un juego se dice de suma cero si sus matrices cumplen $A + B = 0$. Un jugador gana exactamente lo que el otro pierde. Decimos que A y B son *equivalentes* a un juego de suma cero si A y B no cumplen $A + B = 0$ pero inducen las mismas mejores respuestas BR_A y BR_B que otras dos matrices \tilde{A} y \tilde{B} que sí cumplen $\tilde{A} + \tilde{B} = 0$. Por ejemplo las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tienen las mismas mejores respuestas. De hecho, si p^B es un vector de probabilidad, $Ap^B = p^B + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{A}p^B + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces el jugador A tiene siempre las mismas mejores respuestas a p^B para ambas matrices. Lo mismo se cumple para el jugador B ya que su matriz no cambia.

Teorema 4.6. *Sea un juego de suma cero con matrices A y B , entonces cualquier solución de (BR) converge a un equilibrio de Nash.*

Demostración. Definimos la función de Lyapunov

$$V(p^A, p^B) = BR_A(p^B)Ap^B - p^A A BR_B(p^A). \quad (4.10)$$

V cumple

- $V \geq 0$
- $V(p^A, p^B) = 0 \Leftrightarrow (p^A, p^B)$ es un equilibrio de Nash

Está claro que

$$BR_A(p^B)Ap^B \geq p^A Ap^B = -p^A B p^B \geq -p^A B \cdot BR_B(p^A)$$

Por lo tanto $V \geq 0$.

Veamos el segundo ítem. \Rightarrow Si (p^A, p^B) no es un equilibrio de Nash, entonces, s.p.g. $BR_A(p^B)Ap^B > p^A Ap^B$. Por lo tanto

$$p^A A \cdot BR_B(p^A) = BR_A(p^B)Ap^B > p^A Ap^B \geq p^A A \cdot BR_B(p^A)$$

Llegando a un absurdo.

\Leftarrow Si (p^A, p^B) es un equilibrio de Nash, entonces están entre sus mejores respuestas y queda claro que $V(p^A, p^B) = 0$.

Veamos ahora que $V(t) = V(p^A(t), p^B(t))$ tiende a cero a medida que t tiende a infinito. Vimos que las funciones BR son constantes a trozos puesto que en cada S_{ij} los jugadores no cambian sus mejores respuestas, escribimos

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= BR_A(p^B)A \frac{dp^B}{dt} - \frac{dp^A}{dt} A \cdot BR_B(p^A) \\ &= BR_A(p^B)A(BR_B(p^A) - p^B) - (BR_A(p^B) - p^A)A \cdot BR_B(p^A) \\ &= -V \end{aligned}$$

Por lo tanto V se comporta como e^{-t} y tiende a cero a medida que t tiende a infinito. Podemos asegurar entonces que desde cualquier punto (p^A, p^B) la dinámica de BR converge a algún Nash del juego. \square

Corolario 4.7. Sean dos matrices A y B equivalentes a un juego de suma cero. Entonces cualquier solución de BR converge en tiempo infinito a un equilibrio de Nash

4.3.2. El contra ejemplo de Shapley

La motivación por detrás de la dinámica de Fictitious Play (que en su versión continua es la dinámica de Best Response) era la idea de que los jugadores encontraran solos los equilibrios de Nash, y hasta se creía que se podría usarla para calcular los equilibrios numéricamente. En los 60 Shapley encontró un contra ejemplo que rompía con estas ilusiones mostrando que en una versión del piedra papel o tijera los jugadores podrían estar en una órbita periódica. Las matrices del juego son

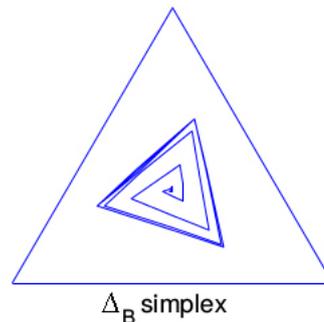
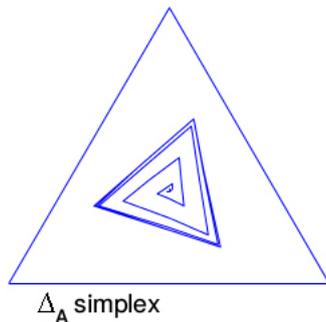
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estas matrices no cumplen la condición de transversalidad 4.4 ya que en cualquier fila o columna aparece repetido el coeficiente cero. Esto implica que no hay unicidad del flujo. No se puede extenderlo al conjunto Z^* donde los jugadores están indiferentes entre estrategias de manera única. Sin embargo la órbita periódica que vamos a mostrar está bien definida y es única.

Teorema 4.8 (Existencia de la órbita periódica de Shapley). *Existe una órbita periódica en la cual los jugadores A y B repiten infinitamente las siguientes estrategias*

<i>time</i>	1	2	3	4	5	6
<i>Estrategia jugador A</i>	1	2	2	3	3	1
<i>Estrategia jugador B</i>	2	2	3	3	1	1

O sea que el jugador A imita al jugador B mientras que este trata de estar siempre un paso adelante.



Demostración. La demostración consiste de una cuenta donde construimos la órbita manualmente. Vamos a tomar un punto de la órbita donde el jugador A prefiere la estrategia e_1 y el jugador B es indiferente entre las estrategias e_1 y e_2 . Vamos a seguir la dinámica del juego imponiendo condiciones para que lleguen a un punto donde A prefiera e_2 y B este indiferente entre e_2 y e_3 . Como las matrices tienen una estructura cíclica, es decir, cada fila y cada columna son una traslación de la anterior. Entonces la dinámica tendrá que repetir el mismo comportamiento y tendremos una órbita cíclica.

Las matrices del juego son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular explícitamente la órbita descrita en el teorema. Por la naturaleza cíclica del juego solo es necesario calcular un tercio de la órbita y los demás tramos son iguales con las variables cambiadas.

Por comodidad, vamos a trabajar con los vectores de pago de cada jugador $v^A = Ap^B$ y $v^B = p^A B$. La órbita empezará en los puntos $v^A(0) = (n_1, n_2, n_3)'$ y $v^B(0) = (m_1, m_2, m_3)$. Pedimos

$$n_1 > n_2, n_3 \quad y \quad m_1 = m_2 > m_3$$

Como n_1 es mayor que los demás, el jugador A ajustará su estrategia hacia e_1 . Esto hará que el vector de pagos de B , v^B , vaya hacia $(0, 1, 0)$ que es la primera fila de B . Notemos entonces que a partir de cualquier t positivo el jugador B , que ya no estará indeciso entre dos estrategias, preferirá la estrategia e_2 . Esto hará con que el vector de pagos v^A vaya en dirección a su segunda columna, $(0, 1, 0)'$.

Tenemos

$$\begin{aligned} v^A(t) &= v^A(0) + t((0, 1, 0)' - v^A(0)) \\ &= (n_1, n_2, n_3)' + t((0, 1, 0)' - (n_1, n_2, n_3)') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^B(t) &= v^B(0) + t((0, 1, 0) - v^B(0)) \\ &= (m_1, m_2, m_3) + t((0, 1, 0) - (m_1, m_2, m_3)) \end{aligned}$$

La dinámica seguirá este curso hasta que la respuesta de alguno de los dos jugadores cambie. Como e_2 era la mejor respuesta a tiempo 0 pues $m_2 \geq m_1, m_3$ y la segunda coordenada de v^B crece mientras las demás se achican, el jugador B seguirá hacia e_2 a menos que el jugador A cambie su dirección. Calculemos cuando cambia la mejor respuesta del jugador A .

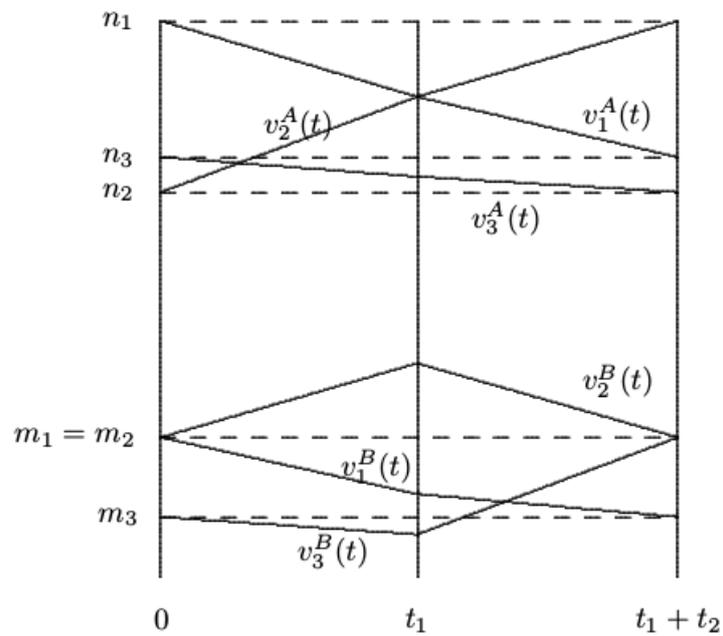


Figura 4.4: Gráfico del valor de cada vector de pago a lo largo del tiempo. Observar que a tiempo t_1+t_2 los valores son exactamente los mismos pero con las coordenadas cambiadas. Como las letras son intercambiables, la dinámica repetirá ese mismo comportamiento.

$$v^A(t) = (n_1 - tn_1, n_2 + t(1 - n_2), n_3 - tn_3)'$$

A tiempo cero la primer coordenada es la mayor, pero luego la segunda empieza a crecer. La mejor respuesta de A cambiará de e_1 a e_2 cuando ambas coordenadas sean iguales. Para saber en que momento eso pasa, pedimos

$$n_1 - t_1 n_1 = n_2 + t_1(1 - n_2) \Leftrightarrow t_1 = \frac{n_1 - n_2}{1 + n_1 - n_2}.$$

Podría pasar que las coordenadas 1 y 3 se igualen antes que la 1 con la 2. Pero despejando el tiempo t_2 tal que la primera y la tercer coordenadas son iguales

$$n_1 - t_2 n_1 = n_3 - t_2 n_3 \Leftrightarrow t_2 = \frac{n_1 - n_3}{n_1 - n_3} = 1$$

Se ve claramente que $t_1 < t_2$ y por lo tanto el jugador A cambiará su estrategia preferida a e_2 a partir del momento t_1 .

Llamamos $(n_1(t_1), n_2(t_1), n_3(t_1))'$ y $(m_1(t_1), m_2(t_1), m_3(t_1))$ a los vectores de pago de los jugadores a tiempo t_1 .

A partir de ese momento el jugador A empieza a preferir la estrategia e_2 , o sea que empezará a ajustar su estrategia. A causa de esto, el vector de pagos v^B de B se moverá hacia su segunda fila $(0, 0, 1)$.

En cambio el jugador B mantiene su estrategia preferida, y el vector de pagos v^A seguirá moviéndose hacia su segunda columna $(0, 1, 0)$ Recordemos que cuando el conjunto de mejor respuesta cambiaba para algun jugador, se reseteaba el tiempo. Los vectores de pago seguirán ahora como

$$\begin{cases} v^A(t) = v^A(t_1) + t((0, 1, 0)' - v^A(t_1)) \\ v^B(t) = v^B(t_1) + t((0, 0, 1) - v^B(t_1)) \end{cases} \quad (4.11)$$

Y reescribiéndolo, quedaría

$$\begin{cases} v^A(t) = (n_1(t_1) - tn_1(t_1), n_2(t_1) + t(1 - n_2(t_1)), n_3(t_1) - tn_3(t_1))' \\ v^B(t) = (m_1(t_1) - tm_1(t_1), m_2(t_1) - tm_2(t_1), m_3(t_1) + t(1 - m_3(t_1))) \end{cases} \quad (4.12)$$

Por lo tanto el jugador B , que prefiere la estrategia 2, en breve va a preferir la estrategia 3. Esto ocurrirá cuando $(v^B(t))_1 = (v^B(t))_3$. O sea

$$m_2(t_1) - tm_2(t_1) = m_3(t_1) + t(1 - m_3(t_1))$$

de donde despejamos que esto ocurre a tiempo t_2

$$t_2 = \frac{m_2(t_1) - m_3(t_1)}{1 + m_2(t_1) - m_3(t_1)}. \quad (4.13)$$

De nuevo hay que aclarar que esto va a pasar antes que $(v^B)_3 = (v^B)_2$, puesto que esto pasaría en un tiempo $t_2^* = \frac{m_1(t_1) - m_2(t_1)}{m_1(t_1) - m_2(t_1)} = 1$ que es mayor a t_2 .

Recordemos que queremos que esta sea una órbita cíclica. Los jugadores empezaron en el estado $(n_1, n_2, n_3)'$ y (m_1, m_2, m_3) que cumple

$$n_1 > \max\{n_2, n_3\} \quad \text{y} \quad m_1 = m_2 > m_3.$$

La dinámica avanzó.

El jugador A cambió su mejor respuesta y luego llegamos a tiempo $t_1 + t_2$ donde $n_2(t_1 + t_2) > \max\{n_1(t_1 + t_2), n_3(t_1 + t_2)\}$ y el jugador B es indiferente entre las estrategias 2 y 3. Este es un estado similar al inicial pero con las variables cambiadas. Si pedimos

$$v^A(t_1 + t_2) = \begin{pmatrix} n_3 \\ n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v^B(t_1 + t_2) = (m_3 \quad m_1 \quad m_1) \quad (4.14)$$

estaríamos en la situación inicial pero con las variables rotadas. Así tendríamos un tercio de la órbita cíclica y los otros dos tercios de órbita vienen dados por la misma cuenta. Desarrollemos entonces a $v^A(t_1 + t_2)$ y $v^B(t_1 + t_2)$ en función de $(n_1, n_2, n_3)'$ y (m_1, m_2, m_3) . De 4.12 y 4.13 nos damos cuenta que se necesitará a los vectores $v^A(t_1)$ y $v^B(t_1)$ escritos en función de $(n_1, n_2, n_3)'$ y (m_1, m_2, m_3) .

Empezemos con los vectores de pago v^A y v^B a tiempo t_1 .

Como $t_1 = \frac{n_1 - n_2}{1 + n_1 - n_2}$ y $v^A(t) = (n_1 - tn_1, n_2 + t(1 - n_2), n_3 - tn_3)$, tenemos

$$v^A(t_1) = \left(n_1 - \frac{n_1 - n_2}{1 + n_1 - n_2} n_1, \quad n_2 + \frac{n_1 - n_2}{1 + n_1 - n_2} (1 - n_2), \quad n_3 - \frac{n_1 - n_2}{1 + n_1 - n_2} n_3 \right)$$

y por lo tanto

$$v^A(t_1) = \left(\frac{n_1}{1 + n_1 - n_2}, \quad \frac{n_2 + (n_1 - n_2)}{1 + n_1 - n_2}, \quad \frac{n_3}{1 + n_1 - n_2} \right). \quad (4.15)$$

Y reemplazando t_1 en v^B se da

$$v^B(t_1) = \left(m_1 - \frac{n_1 - n_2}{1 + n_1 - n_2} m_1, \quad m_2 + \frac{n_1 - n_2}{1 + n_1 - n_2} (1 - m_2), \quad m_3 - \frac{n_1 - n_2}{1 + n_1 - n_2} m_3 \right)$$

que termina quedando

$$v^B(t_1) = \left(\frac{m_1}{1 + n_1 - n_2}, \quad \frac{m_2 + n_1 - n_2}{1 + n_1 - n_2}, \quad \frac{m_3}{1 + n_1 - n_2} \right) \quad (4.16)$$

Ahora simplifiquemos t_2 . De 4.13, 4.15 y 4.16, escribimos

$$t_2 = \frac{m_2(t_1) - m_3(t_1)}{1 + m_2(t_1) - m_3(t_1)} = \frac{\frac{m_2 + n_1 - n_2}{1 + n_1 - n_2} - \frac{m_3}{1 + n_1 - n_2}}{1 + \frac{m_2 + n_1 - n_2 - m_3}{1 + n_1 - n_2}}.$$

Al desarrollar, tenemos

$$t_2 = \frac{n_1 - n_2 + m_2 - m_3}{(1 + n_1 - n_2) + n_1 - n_2 + m_2 - m_3} = \frac{\delta}{X} \quad (4.17)$$

donde $\delta = n_1 - n_2 + m_2 - m_3$ y $X = (1 + n_1 - n_2) + \delta$. Esta notación hará las cuentas ligeramente más sencillas.

Ahora sí podemos escribir 4.12

$$\begin{cases} v^A(t_1 + t_2)_1 &= \frac{n_1}{1+n_1-n_2} - \frac{\delta}{X} \frac{n_1}{1+n_1-n_2} = \frac{n_1}{X} \\ v^A(t_1 + t_2)_2 &= \frac{n_2+(n_1-n_2)}{1+n_1-n_2} + \frac{\delta}{X} \left(1 - \frac{n_1}{1+n_1-n_2}\right) = \frac{n_1+\delta}{X} \\ v^A(t_1 + t_2)_3 &= \frac{n_3}{1+n_1-n_2} - \frac{\delta}{X} \frac{n_3}{1+n_1-n_2} = \frac{n_3}{X} \end{cases} \quad (4.18)$$

Y por otro lado

$$\begin{cases} v^B(t_1 + t_2)_1 &= \frac{m_2+n_1-n_2}{1+n_1-n_2} - \frac{\delta}{X} \frac{m_1}{1+n_1-n_2} = \frac{m_1}{X} \\ v^B(t_1 + t_2)_2 &= \frac{m_2+n_1-n_2}{1+n_1-n_2} - \frac{\delta}{X} \frac{m_2+n_1-n_2}{1+n_1-n_2} = \frac{m_2+n_1-n_2}{X} \\ v^B(t_1 - t_2)_3 &= \frac{m_2}{1+n_1-n_2} + \frac{\delta}{X} \left(1 - \frac{m_3}{1+n_1-n_2}\right) = \frac{m_3+\delta}{X} \end{cases} \quad (4.19)$$

Podemos construir el sistema de ecuaciones polinómicas de seis incógnitas reemplazando 4.18 y 4.19 en 4.14. De esta manera encontraremos los valores iniciales n_1 , n_2 , n_3 , m_1 , m_2 y m_3 que corresponden a la órbita cíclica. Desarrollando la igualdad coordenada a coordenada, se obtiene

$$\begin{cases} \frac{n_1}{X} &= n_3 \\ \frac{n_1+\delta}{X} &= n_1 \\ \frac{n_3}{X} &= n_2 \\ \frac{m_1}{X} &= m_3 \\ \frac{m_2+n_1-n_2}{X} &= m_1 \\ \frac{m_3+\delta}{X} &= m_1 \end{cases} \quad (4.20)$$

Y luego de desarrollado

$$\begin{cases} n_3 - n_1 + 2n_1n_3 - 2n_2n_3 + n_3m_2 - n_3m_3 = 0 \\ n_1 - n_2 + m_2 - m_3 - 2n_1^2 + 2n_1n_2 - n_1m_2 + n_1m_3 = 0 \\ n_2 - n_3 + 2n_1n_2 - 2n_2^2 + m_2n_2 - n_2m_3 = 0 \\ m_3 - m_1 + 2n_1m_3 - 2n_2m_3 + m_2m_3 - m_3^2 = 0 \\ n_1 - n_2 + m_2 - m_1 - 2n_1m_1 + 2n_2m_1 - m_1m_2 + m_1m_3 = 0 \\ n_2 - n_1 + m_1 - m_2 + 2n_1m_1 - 2n_2m_1 + m_1m_2 - m_1m_3 = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Este sistema se puede resolver utilizando el comando *fsolve* de Octave [3] y la solución aproximada es

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,59441 \\ 0,12884 \\ 0,27674 \end{pmatrix} \quad (m_1 \ m_2 \ m_3) = (0,40559 \ 0,40559 \ 0,18883) \quad (4.22)$$

La existencia de estos valores nos asegura que existe una condición inicial que nos brinda una solución cíclica. Se puede notar que los valores de hecho suman uno y cumplen las desigualdades que deben cumplir. Terminamos así la demostración de la existencia de la órbita de Shapley. \square

Terminamos esta sección enunciando la estabilidad de la órbita que hemos calculado. La demostración se puede encontrar en el teorema 3,2 de [14].

Teorema 4.9. *La órbita de Shapley es atractiva globalmente. El flujo tiene una única órbita cerrada. Para cualquier condición inicial que no entra el conjunto de discontinuidad, las soluciones convergen a esta órbita cerrada.*

Apéndice A

Inclusiones Diferenciales

Daremos a seguir una demostración de la existencia de soluciones para inclusiones diferenciales. Seguiremos principalmente [11].

Empezamos recordando que una función es *absolutamente continua* en $[a, b]$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda secuencia finita de subintervalos disjuntos (x_k, y_k) de $[a, b]$, se cumple

$$\sum_k y_k - x_k < \delta \Rightarrow \sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

Es equivalente pedir que f tenga derivada f' en casi todo punto, y vale

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

Definición A.1. Una función absolutamente continua $x(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es solución de una *Inclusión Diferencial Ordinaria* si

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) \in F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Donde $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ es el dato inicial a tiempo t_0 .

Definición A.2. Llamamos una *Selección de F* a una función $f(t, x(t)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(t, x(t)) \in F(t, x(t))$ para cada $t \in [a, b]$.

Si f es una función continua, diremos que es una *selección continua* de F .

Observación A.3. Está claro que si F admite una selección continua, el problema está resuelto. Pues para encontrar soluciones de la inclusión diferencial, basta tomar las soluciones a las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t))$$

A la función F le vamos a pedir

1. $F(t, x)$ es compacto, convexo y no vacío para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
2. $F(t, x)$ es semicontinua superiormente. Es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe δ tal que

$$F(t_1, x_1) \subset F(t, x) + \varepsilon B \quad \text{si} \quad \|(t_1, x_1) - (t, x)\| < \delta \quad (\text{A.1})$$

donde $B = B_1(0)$ es la bola unitaria.

3. Existen constantes positivas γ y c tales que para todo (t, x) , vale

$$y \in F(t, x) \Rightarrow \|y\| \leq \gamma \|x\| + c \quad (\text{A.2})$$

La condición 3 nos permite aplicar el Lema de Gronwall:

Lema A.4. Sea $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|x'(t)\| \leq \gamma \|x(t)\| + c(t) \quad \text{c.t.p. } t \in [a, b],$$

con $\gamma \geq 0$ y $c(\cdot) \in L^1[a, b]$. Entonces,

$$\|x(t) - x(a)\| \leq (e^{\gamma(t-a)} - 1)\|x(a)\| + \int_a^t e^{\gamma(t-s)} c(s) ds.$$

Aprovechamos para enunciar otro lema que usaremos más adelante

Lema A.5. Sean r_0, r_1, \dots, r_N números no negativos tales que

$$r_{i+1} \leq (1 + \delta_i)r_i + \Delta_i,$$

con $\delta_i, \Delta_i \geq 0$, y $r_0 = 0$. Entonces

$$r_N \leq \left(\exp\left(\sum_{i=0}^{N-1} \delta_i\right) \right) \sum_{i=0}^{N-1} \Delta_i.$$

Para encontrar soluciones a nuestro problema, tomamos una selección f de F . Esta selección hereda la linealidad de la condición 3.

Definimos una *Solución de Euler* como límite uniforme de poligonales. El siguiente resultado de ecuaciones diferenciales nos garantiza la existencia de una solución de Euler para F .

Teorema A.6. Sea f acotada linealmente,

$$\|f(t, x)\| \leq \gamma\|x\| + c,$$

Entonces existe al menos una solución de Euler en $[a, b]$ del problema

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x) \\ f(a) = x_0, \end{cases}$$

Esta solución es Lipschitz, y satisface

$$\|x(t) - x(a)\| \leq (t - a)e^{\gamma(t-a)}(c + \gamma\|x(a)\|), \quad a \leq t \leq b.$$

Si además f es continua, entonces $x \in C^1(a, b)$ y satisface la ecuación diferencial en (a, b) .

Demostración. Sea $\pi = \{a = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. En el primer intervalo $[t_0, t_1]$, resolvemos

$$\begin{cases} x'(t) = f(t_0, x_0) \\ f(t_0) = x_0, \end{cases}$$

Como $f(t_0, x_0)$ está fijo, la solución es única y es lineal. Ahora, definiendo $x_j = x(t_j)$, resolvemos iterativamente en $[t_j, t_{j+1}]$,

$$\begin{cases} x'(t) = f(t_j, x_j) \\ f(t_j) = x_j. \end{cases}$$

A la solución x_π obtenida de esta manera la llamamos un poligonal de Euler.

Definimos ahora $\mu_\pi = \max\{t_j - t_{j-1} : 1 \leq j \leq n\}$ el diámetro de la partición π . x será solución de Euler si es límite uniforme de poligonales de Euler con $\mu_{\pi_j} \rightarrow 0$. Ya tenemos las poligonales, veamos que podemos tomar este límite. Para cada partición π tenemos una solución asociada x_π . Dado $t \in (a, b)$, t está en algún subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$. Entonces

$$\|x'_\pi(t)\| = \|f(t_i, x_i)\| \leq \gamma\|x_i\| + c$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|x_{i+1} - x_0\| &\leq \|x_{i+1} - x_i\| + \|x_i - x_0\| \\ &\leq (t_{i+1} - t_i)(\gamma\|x_i\| + c) + (t_i - t_0)(\gamma\|x_0\| + c). \end{aligned}$$

Podemos aplicar el lema A.5, con

$$\|x_i - x_0\| \leq M,$$

donde

$$M = (b - a)e^{\gamma(b-a)}(\gamma\|x_0\| + c).$$

Luego, todos los nodos x_i están en la clausura de la bola $B(x_0, M)$, y por convexidad, también lo están todos los valores $x_\pi(t)$ para $a < t < b$. Además, como son lineales a trozos,

$$\|x'_\pi\| \leq k = \gamma M + c.$$

Tenemos entonces que x_π es Lipschitz con constante k en $[a, b]$.

Tomamos ahora una sucesión π_j tal que $\mu_{\pi_j} \rightarrow 0$. Vamos a poder usar Arzela Ascoli ya que

$$\begin{aligned} x_{\pi_j}(a) &= x_0, \\ \|x_{\pi_j} - x_0\| &\leq M, \\ \|x'_{\pi_j}\| &\leq k. \end{aligned}$$

Es decir, la sucesión x_{π_j} es equiacotada y equicontinua. Existe una subsucesión que converge uniformemente a un límite x . Este límite es Lipschitz con la misma constante k . Por lo tanto x es absolutamente continua y es solución de Euler de la ecuación.

Veamos ahora que si f es continua, entonces $x \in \mathcal{C}^1$ es solución clásica. Si f es continua, entonces es uniformemente continua en $[a, b] \times \overline{B_M(x_0)}$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe δ tal que

$$|t - \tilde{t}| < \delta, \|x - \tilde{x}\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(t, x) - f(\tilde{t}, \tilde{x})\| < \varepsilon.$$

Tomamos j lo suficientemente grande para que el diámetro μ_{π_j} sea menor que δ y que δ/k .

Para $t \in [a, b]$ distinto de los nodos de la partición, vale

$$x'_{\pi_j}(t) = f(\tilde{t}, x_{\pi_j}(\tilde{t})).$$

Para algún \tilde{t} a distancia menor que δ de t . Por otro lado, como las x_{π_j} son todas Lipschitz,

$$\|x_{\pi_j}(t) - x_{\pi_j}(\tilde{t})\| \leq k\mu_{\pi_j} < \delta.$$

Juntando ambas, tenemos

$$\|x'_{\pi_j}(t) - f(t, x_{\pi_j}(t))\| = \|f(t, x_{\pi_j}(t)) - f(\tilde{t}, x_{\pi_j}(\tilde{t}))\| < \varepsilon.$$

Podemos entonces plantear

$$\begin{aligned} \left\| x_{\pi_j}(t) - x_{\pi_j}(a) - \int_a^t f(\tau, x_{\pi_j}(\tau)) d\tau \right\| &= \left\| \int_a^t [x'_{\pi_j}(\tau) - f(\tau, x_{\pi_j}(\tau))] d\tau \right\| \\ &< \varepsilon(t - a) \\ &\leq \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

Pasando al límite cuando $j \rightarrow \infty$, nos queda

$$\left\| x(t) - x(a) - \int_a^t f(\tau, x(\tau)) d\tau \right\| \leq \varepsilon(b - a),$$

con lo cual

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(\tau, x(\tau)) d\tau,$$

y entonces x es C^1 , y su derivada es $f(t, x(t))$. □

El teorema nos asegura que si f es continua entonces existe una solución de Euler $x \in C^1$. Si f no es continua, la solución de Euler no tiene porque cumplir la ecuación para todo t . El siguiente resultado y su corolario nos asegurarán la existencia de soluciones a la inclusión diferencial.

Teorema A.7. *Sea $\{x_i\}_{i \geq 1}$ una sucesión de arcos en $[a, b]$ tales que $\{x_i(a)\}_{i \geq 1}$ está acotada, y tal que*

$$x'_i(t) \in F(\tau_i(t), x_i(t) + y_i(t)) + r_i(t)B$$

c.t.p., donde $\{y_i\}_{i \geq 1}$, $\{r_i\}_{i \geq 1}$ y $\{\tau_i\}_{i \geq 1}$ son sucesiones de funciones medibles en $[a, b]$ tales que $r_i \geq 0$, y

$$\begin{aligned} y_i &\rightarrow 0 && \text{en } L^2 \\ r_i &\rightarrow 0 && \text{en } L^2 \\ \tau_i &\rightarrow t && \text{c.t.p.} \end{aligned}$$

Entonces, existe una subsucesión $\{x_i\}_{i \geq 1}$ que converge uniformemente a x que es una trayectoria para F , y cuyas derivadas convergen débilmente a x' .

Demostración. Como $x_i(t) \in F$, por la condición (3), vale

$$\|x'_i(t)\| \leq \gamma \|x_i(t) + y_i(t)\| + \|r_i(t)\|.$$

Entonces podemos aplicar el lema de Gronwall para encontrar una cota uniforme para $\|x_i\|_\infty$ y $\|x'_i\|_2$,

$$\begin{aligned} \|x_i\|_\infty &\leq \|x_i - x_i(a)\|_\infty + \|x_i(a)\|_\infty \\ &\leq (e^{\gamma(t-a)} - 1)\|x_i(a)\|_\infty + \left| \int_a^t e^{\gamma(t-s)} c(s) ds \right| + \|x_i(a)\|_\infty \quad (\text{Gronwall}) \\ &\leq (e^{\gamma(t-a)} - 1)\|x_i(a)\|_\infty + (b-a)\|e^{\gamma(t-s)} c(s)\|_{L^2} + \|x_i(a)\|_\infty \\ &\leq \text{constante} \end{aligned}$$

Y x'_i está acotado en L^2 por la condición (3).

Por un lado usamos Arzela Ascoli para tomar una subsucesión de $\{x_i\}_{i \geq 1}$ uniformemente convergente a una función continua x .

Por otro lado, como las x'_i están acotadas en L^2 , existe una subsucesión de esa subsucesión que converge debilmente a un límite y_0 . Tomando límite en

$$x_{i_j} = x_{i_j}(a) + \int_a^t x'_{i_j}(s) ds \quad (\text{A.3})$$

obtenemos

$$x(t) = x(a) + \int_a^t y_0(s) ds \quad (\text{A.4})$$

Entonces x es solución de Euler y su derivada es y_0 c.t.p. x es un trayectoria de F por el teorema A.9 que veremos a continuación. \square

El siguiente corolario toma las soluciones de Euler que habíamos encontrado y las sitúa en las hipótesis del Teorema A.7.

Corolario A.8. Sea f una selección de F , y x una solución de Euler en $[a, b]$ de

$$x'(t) = f(t, x), \quad x(a) = x_0.$$

Entonces x es una trayectoria de F en $[a, b]$.

Demostración. Sean x_{π_j} las funciones poligonales cuyo límite uniforme es x como en la demostración del primer teorema. Sea $t \in (a, b)$ un punto de la partición. Definimos $\tau_j(t)$ el punto de la partición t_i anterior a t . Escribimos

$$x'_{\pi_j}(t) = f(t_i, x_i) \in F(t_i, x_i) = F(\tau_j(t), x_{\pi_j}(t) + y_j(t)),$$

donde $y_j(t) = x_i - x_{\pi_j}(t) = x_{\pi_j}(\tau_j(t)) - x_{\pi_j}(t)$. Recordemos que las funciones x_{π_j} tenían una constante Lipschitz k en común. Luego

$$\|y_j(t)\|_\infty \leq \sup_{t \in [a, b]} |\tau_j(t) - t| \leq k\mu_{\pi_j}.$$

Por lo tanto, tanto τ_j como y_j son funciones medibles que convergen uniformemente a t y a 0 respectivamente. Por el teorema anterior, x es una trayectoria \square

Enunciaremos ahora el último teorema de este apéndice que usamos para concluir la demostración del teorema A.7.

Teorema A.9. *Sea $E : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow A$, donde A son los subconjuntos cerrados y convexos de un conjunto compacto $E_0 \subset \mathbb{R}^N$ cuyo gráfico es cerrado. Sea $\{v_i\}_{i \geq 1}$ una sucesión en $L^2[a, b]$ tal que*

$$v_i(t) \in E(\tau_i(t), u_i(t)) + r_i(t)\bar{B}$$

c.t.p. $t \in [a, b]$, y la sucesión de funciones medibles $\{(\tau_i(\cdot), u_i(\cdot))\}_{i \geq 1}$ converge en casi todo punto a $(t, u_0(t))$, y la sucesión de funciones medibles no negativas $\{r_i\}_{i \geq 1}$ converge a 0 en $L^2[a, b]$. Entonces existe una subsucesión $\{v_{i_j}\}_{j \geq 1}$ que converge débil en $L^2[a, b]$ a un límite v_0 que satisface

$$v_0(t) \in E(t, u_0(t))$$

c.t.p. $t \in [a, b]$.

Está claro que podemos aplicar el resultado de este teorema directamente en el final de la demostración del teorema A.7 para ver que el y_0 de la sucesión x'_i pertenece al conjunto $F(t, x(t))$, obteniendo así la solución a la inclusión diferencial.

Demostración. Por la definición de A , la sucesión $\{v_i\}_{i \geq 1}$ es acotada en $L^2[a, b]$. Y por compacidad débil, existe una subsucesión que converge débilmente en $L^2[a, b]$ a un límite v_0 .

Queremos ver que

$$v_0(t) \in E(t, u_0(t)) \quad \text{para casi todo } t \in [a, b].$$

Definimos

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow (-\infty, +\infty) \\ h(t, u, p) &= \min\{\langle p, v \rangle : v \in E(t, u)\}. \end{aligned}$$

Como E es convexo, por el teorema de Hahn Banach, se cumple que $v \in E(t, u) \Leftrightarrow \langle p, v \rangle \geq h(t, u, p)$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$. Y por lo tanto, como las $v_i \in E(\tau_i(t), u_i(t)) + r_i(t)\bar{B}$, vale

$$\langle p, v_i(t) \rangle + r_i(t)\|p\| \geq h(\tau_i(t), u_i(t), p) \tag{A.5}$$

en casi todo punto.

Como $E(t, u)$ es semicontinua superiormente y es siempre cerrado, la función que manda (t, u) en $h(t, u, p)$ es semicontinua inferiormente (pues h es un mínimo). La función que manda $t \mapsto h(\tau_i(t), u_i(t), p)$ es medible.

Consideramos ahora un conjunto medible G en $[a, b]$. Escribimos

$$\int_G \left\{ \langle p, v_{i_j}(t) \rangle + \|p\| r_{i_j}(t) - h(\tau_{i_j}(t), u_{i_j}(t), p) \right\} dt \geq 0.$$

Cuando $j \rightarrow \infty$, la convergencia débil nos da

$$\int_G \langle p, v_{i_j}(t) \rangle dt + \int_G r_{i_j}(t) \rightarrow \int_G \langle p, v_0(t) \rangle dt + 0,$$

y aplicando el lema de Fatou, podemos escribir

$$\int_G \langle p, v_0(t) \rangle dt - \int_G \liminf_{j \rightarrow \infty} h(\tau_{i_j}(t), u_{i_j}(t), p) dt \geq 0.$$

Usamos la semicontinuidad inferior de h y tenemos que

$$\int_G \left\{ \langle p, v_0(t) \rangle dt - h(t, u_0, p) \right\} dt \geq 0.$$

Pero G era un conjunto arbitrario, así que concluimos que

$$\langle p, v_0(t) \rangle \geq h(t, u_0, p) \quad \text{para casi todo } t \in [a, b]. \quad (\text{A.6})$$

Para concluir, sea $\{p_i\}_{i \geq 0}$ un conjunto denso y numerable de \mathbb{R}^n . Como la desigualdad A.6 vale para cada $p = p_i$, excepto en un conjunto G_i de medida nula, tenemos que

$$\langle p, v_0(t) \rangle \geq h(t, u_0, p) \quad (\text{A.7})$$

vale para todo $p \in \{p_i\}_{i \geq 0}$, menos en un conjunto de medida nula $G = \cup_i G_i$. Como $\langle p, v_0(t) \rangle$ y $h(t, u_0, p)$ son funciones continuas en p , la desigualdad termina valiendo para todo $p \in \mathbb{R}^n$. Y vimos que esto era equivalente a que

$$v_0(t) \in E(t, u_0(t)) \quad \text{para casi todo } t$$

y el teorema queda demostrado \square

Resumiendo, el teorema A.6 nos garantiza la existencia de soluciones de Euler. Los teoremas A.7 y A.9 nos garantizan la existencia de soluciones a las inclusiones diferenciales ordinarias. El corolario A.8 toma las soluciones de Euler y muestra que estas cumplen las condiciones del teorema A.7.

Concluimos el apéndice mostrando que la dinámica de mejor respuesta tiene soluciones en general. Basta ver que las funciones $\text{BR}(x)$ cumplen las tres hipótesis que fijamos al principio

Teorema A.10. *Sea A una matriz inversible. Para todo $x \in \Delta$, la correspondencia $F(x) = BR(x) - x$ cumple las tres hipótesis anteriores. Es decir,*

1. $F(x)$ es compacto, convexo y no vacío para todo $x \in \Delta$.
2. $F(x)$ es semicontinua superiormente.
3. Existen γ y c tal que se cumple la siguiente cota

$$\|F(x)\| \leq \gamma\|x\| + c$$

Demostración. (1). Está claro que $BR(x) - x$ no es vacío pues $BR(x) = \operatorname{argmax} Ax$ no es vacío. Fijado x , $BR(x)$ contiene solamente una estrategia pura o bien más de una y todas las combinaciones convexas entre ellas. Está claro que $BR(x)$ es compacto y convexo. Hacer la traslación $BR(x) - x$ mantiene ambas propiedades.

(2). Basta ver que $BR(x)$ es semicontinua superiormente pues x visto como la función identidad es continua.

Supongamos $|BR(x)| = 1$. Entonces $BR(x)$ es continua en x ya que existe una sola coordenada de Ax que es maximal. Como Ax es continua en x , esa coordenada seguirá siendo máxima en un entorno de x .

Supongamos $|BR(x)| > 1$. Existen coordenadas i_1, \dots, i_k tal que el máximo $\max_i (Ax)_i = e_{i_j} Ax$ para todo $1 \leq j \leq k$. De nuevo usamos la continuidad de Ax visto como función de x .

Llamemos d al valor de la segunda mayor coordenada de Ax . Entonces

$$d < e_{i_j} Ax \text{ para todo } j = 1 \dots k.$$

Pero

$$d > e_{i_l} \text{ para todo } i_l \neq i_j.$$

Basta tomar un entorno U de x que garantice que todas las coordenadas de Ax_1 , $x_1 \in U$ se mantengan tan lejos como

$$\frac{\max_i (Ax)_i - d}{2}.$$

No pueden entonces aparecer nuevas estrategias puras que sean la mejor respuesta puesto que estas valían a lo sumo d , y todas las coordenadas de Ax_1 que no son i_j valen a lo sumo

$$d + \frac{\max_i (Ax)_i - d}{2} = \frac{\max_i (Ax)_i + d}{2} < \max_i (Ax)_i$$

Entonces $BR(x_1) \subseteq BR(x)$. Concluyendo que $BR(x)$ es semicontinua superior. Por lo tanto $BR(x) - x$ también lo es.

(3). Es obvia. Sea $b \in BR(x)$. Luego $y = b - x \in F(x)$,

$$\|y\| = \|b - x\| \leq \|b\| + \|x\| = \|x\| + 1.$$

Tomo $\gamma = c = 1$ y la desigualdad se cumple □

Concluimos entonces que la dinámica de mejor respuesta cumple las hipótesis que necesitábamos y por lo tanto tiene al menos una solución absolutamente continua para todo dato inicial.

Bibliografía

- [1] J. Aubin and A. Cellina. Differential inclusions. 1984.
- [2] G. W. Brown. Iterative solution of games by fictitious play. *Activity analysis of production and allocation*, 13(1):374–376, 1951.
- [3] J. W. Eaton, D. Bateman, and S. Hauberg. *GNU Octave version 3.0.1 manual: a high-level interactive language for numerical computations*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2009. ISBN 1441413006.
- [4] T. S. Ferguson. *Game Theory*. 2014.
- [5] I. Gilboa and A. Matsui. Social stability and equilibrium. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 859–867, 1991.
- [6] J. Hofbauer. Stability for the best response dynamics. *preprint*, 1995.
- [7] J. Hofbauer and K. Sigmund. *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge university press, 1998.
- [8] J. Hofbauer and K. Sigmund. Evolutionary game dynamics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 40(4):479–519, 2003.
- [9] J. Nash. Non-cooperative games. *Annals of mathematics*, pages 286–295, 1951.
- [10] G. Ostrovski. *Topics arising from fictitious play dynamics*. PhD thesis, University of Warwick, 2013.
- [11] J. P. Pinasco. Algunas notas sobre inclusiones diferenciales.
- [12] W. H. Sandholm. *Population games and evolutionary dynamics*. MIT press, 2010.
- [13] C. Sparrow and S. van Strien. Dynamics associated to games (fictitious play) with chaotic behavior. In *Dynamics, Games and Science I*, pages 747–759. Springer, 2011.

- [14] C. Sparrow, S. Van Strien, and C. Harris. Fictitious play in 3×3 games: The transition between periodic and chaotic behaviour. *Games and Economic Behavior*, 63(1):259–291, 2008.
- [15] N. Wolanski. Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias.