UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Tipo y cotipo métricos

Felipe Marceca

Director: Daniel Carando

Marzo 2016

Índice general

Agradecimientos

A mi director Daniel por enseñarme y guiarme.

Al jurado por tomarse el trabajo de leer esta tesis.

A la Educación Pública, en especial a la FCEN y al DM.

A la ANCEFN por otorgarme la beca.

A Adali y Ernesto, mis viejos, por enseñarme que todos nos hacemos de hueso, por dejarme un trapo en la cabeza para ver si me lo sacaba, por el silloncito amarillo y por hacer al pajarito volar.

A la abuela Beatriz y al abuelo José, por el trineo improvisado y por albergarme cuando estaba “solo y sin comida”. A la abuela Yolanda y al abuelo Negro, por los fideos con pimentón y las escobas de quince después de la escuela. A la familia, por el traje terrorífico de Papá Noel, la hamaca de peluches, los fines de año en Gesell, las *Magic* y las vacaciones en Chascomús.

A los tíos postizos, por enseñarme que detrás de los Andes no aguarda Santiago del Estero y no permitir que sea un burro de burrez máxima. Por los refranes, las charlas de subsidios y las clases medias blancas. Al tío que gestionó mi nacimiento y ahora está en el carajo.

A los amigos de acá y de allá, por las salidas a 36 billares, las noches de TEG, el equipo MSR, las charlas bizarras en la rampita del pab. I, los viajes a la ópera de La Plata y los juegos de escape.

A Chechu por los paseos de la calle Corrientes, por compartir 1/4 de Nutellate de la Nonna y por los lemon pies festivos. Por querer engañarme igual que a un niño y por ir juntos para allá donde el lobo no está.

Introducción

El objetivo de esta tesis es exponer algunos resultados obtenidos en el marco del proyecto conocido como *Programa de Ribe*. Dicho proyecto consiste en la generalización de conceptos y teoremas propios de la teoría de espacios de Banach a la teoría de espacios métricos y sus aplicaciones.

El *Programa de Ribe* toma su nombre de un teorema de Martin Ribe del cual se deduce que ciertas propiedades de los espacios de Banach son preservadas por homeomorfismos uniformes. En esencia, este teorema demuestra que propiedades aparentemente relacionadas con la estructura vectorial de los espacios de Banach son preservadas por morfismos que en principio sólo respetan la estructura métrica. Esto sugiere que dichas propiedades podrían no depender de la estructura vectorial, sino ser en realidad de carácter exclusivamente métrico. En tal caso, podrían admitir una formulación que apele únicamente a la estructura métrica del espacio. Reformulada cierta propiedad p en términos puramente métricos, tendría sentido hablar de que un espacio métrico, ya no necesariamente de Banach, satisfaga p. En ese caso, el hecho de satifacer la propiedad p es una noción que habremos extendido, o bien traducido, del ámbito de los espacios de Banach al de espacios métricos. Esta generalización de conceptos representa el primer paso del *Programa de Ribe*. Habiendo hecho esto, el segundo paso consiste en estudiar qué teoremas de la teoría de espacios de Banach admiten una versión métrica, vinculando los conceptos que han sido reformulados. Finalmente, el tercer paso está dado por la aplicación de los conceptos y teoremas obtenidos en los primeros dos pasos para la resolución, no sólo de problemas relacionados con los espacios de Banach, sino también de problemas intrínsecamente no lineales. En esta tesis se desarrollarán, entonces, los tres pasos del programa para ciertos conceptos, teoremas y sus posteriores aplicaciones.

Comenzaremos el primer capítulo (Preliminares) exponiendo en mayor detalle los fundamentos del *Programa de Ribe*. A continuación, luego de convenir notaciones e introducir herramientas útiles, presentaremos los conceptos de *tipo* y *cotipo* para espacios de Banach. Finalmente, probaremos dos teoremas que caracterizan a los espacios de Banach de tipo trivial y a los de cotipo trivial respectivamente.

El segundo capítulo (Tipo métrico) consistirá en el desarrollo del primer y segundo paso del programa para el concepto de tipo. En primer lugar, presentaremos distintas versiones métricas como posibles generalizaciones de la definición de tipo al ámbito de los espacios métricos. A continuación, probaremos que restringiéndonos a los espacios de Banach, una de ellas es casi coincidente con la noción de tipo original. Esto representará una concreción parcial del primer paso del programa. Finalmente, demostraremos un análogo métrico del teorema del primer capítulo que caracterizaba los espacios de tipo trivial, completando el segundo paso.

El tercer capítulo (Cotipo métrico) tendrá una estructura idéntica al anterior, abordando esta vez el concepto de cotipo. Comenzaremos brindando distintas versiones métricas de la definición de cotipo. Luego, estudiaremos su vínculo con la noción de cotipo original al restringirnos a los espacios de Banach. A diferencia del capítulo anterior, una de las versiones métricas resultará totalmente coincidente con la definición original, concretando el primer paso del programa. Por último, probaremos un análogo métrico del teorema del primer capítulo que caracterizaba los espacios de cotipo trivial, completando el segundo paso.

El cuarto capítulo (Aplicaciones) estará dedicado al tercer paso del programa. Expondremos dos resultados de carácter intrínsecamente no lineal como prueba de la capacidad del *Programa de Ribe* de abordar problemas completamente ajenos a la teoría de espacios de Banach.

Finalmente, en el apéndice se encuentran las demostraciones de resultados técnicos que fueron omitidas durante los últimos dos capítulos para mayor claridad expositiva.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, abordaremos los temas previos necesarios para el desarrollo de la tesis. En primer lugar, presentaremos el *Programa de Ribe* y el teorema que inspiró su origen. En segundo lugar, introduciremos herramientas y conceptos útiles para el trabajo posterior. A continuación, trataremos las nociones de tipo y cotipo para espacios de Banach, cuyas versiones métricas se desarrollarán en los capítulos siguientes. Finalmente, caracterizaremos los espacios de Banach de tipo o cotipo trivial.

1.1. Programa de Ribe

El objetivo de esta sección es exponer en mayor detalle los lineamientos generales del programa comentados en la introducción. Para ello, será necesario dar algunas definiciones previas.

Definición 1.1. Sean E y F espacios métricos. Dada una función $f : E \to F$, definimos su norma Lipschitz por

$$\|f\|_{Lip} := \sup_{x \neq y \in E} \frac{d_F(f(x), f(y))}{d_E(x, y)}.$$

Supongamos además que f es inyectiva, lo cual notaremos en adelante como $f : E \hookrightarrow F$. Llamando f^{-1} a la inversa de f co-restringida a su imagen, definimos la distorsión de f como

$$\operatorname{dist}(f) := \|f\|_{Lip} \left\|f^{-1}\right\|_{Lip}.$$

Observación 1.1. Dados E, F, G espacios métricos y funciones $f : E \hookrightarrow F$, $g : F \hookrightarrow G$, tenemos que

$$\|g \circ f\|_{Lip} \leq \|g\|_{Lip} \|f\|_{Lip}.$$

Más aún, si las funciones son inyectivas resulta:

$$\operatorname{dist}(g \circ f) \leq \operatorname{dist}(g) \operatorname{dist}(f).$$

Para la primer afirmación, observemos que para todo $x, y \in E$ se cumple que

$$d_G(g \circ f(x), g \circ f(y)) \leq \|g\|_{Lip} d_F(f(x), f(y)) \leq \|g\|_{Lip} \|f\|_{Lip} d_E(x, y),$$

de donde el resultado se sigue. En cuanto a la segunda, basta ver que

$$\left\|(g \circ f)^{-1}\right\|_{Lip} \leq \left\|g^{-1}\right\|_{Lip} \left\|f^{-1}\right\|_{Lip}.$$

Si bien parece una consecuencia directa de lo anterior, existe una sutileza que surge de las co-restricciones realizadas al tomar la inversa de las funciones, lo cual fue omitido en la notación. Tomando esto en cuenta y usando la primer afirmación, nos queda

$$\begin{aligned}\left\|(g \circ f)^{-1}\right\|_{Lip} &= \left\|\left(g \circ f|^{g\circ f(E)}\right)^{-1}\right\|_{Lip} \leq \left\|\left(g|^{g\circ f(E)}_{f(E)}\right)^{-1}\right\|_{Lip} \left\|\left(f|^{f(E)}\right)^{-1}\right\|_{Lip} \\ &\leq \left\|\left(g|^{g(F)}\right)^{-1}\right\|_{Lip} \left\|\left(f|^{f(E)}\right)^{-1}\right\|_{Lip} = \left\|g^{-1}\right\|_{Lip} \left\|f^{-1}\right\|_{Lip},\end{aligned}$$

como buscábamos.

A continuación, daremos una interpretación de la distorsión de una función. Dada $f : E \to F$ una función inyectiva, para todo $x, y \in E$ tenemos que

$$d_E(x, y) \leq \left\|f^{-1}\right\|_{Lip} d_F(f(x), f(y)) \leq \operatorname{dist}(f) d_E(x, y).$$

Podemos definir la distancia inducida por f en E como $d_f(x, y) := d_F(f(x), f(y))$. Observemos que, por la desigualdad anterior, el mínimo valor que puede tomar la distorión es uno y se alcanza cuando d_f sólo es un cambio de escala con respecto a la distancia d_E original. En general, la distorsión es la mejor constante con la cual podemos comparar la distancias relativas entre los puntos de E con las distancias entre sus imágenes en F.

Por lo tanto, podemos deducir que la distorsión es una medida de cuánto deforma f la métrica del espacio E al incluirlo en F (salvo cambios de escala). Dicho esto, dados dos espacios métricos, cabe preguntarse cuál es la mínima distorsión con la que podemos incluir uno en el otro. Esto conduce a la definición siguiente.

Definición 1.2. Sean E y F espacios métricos. Definimos la constante $C_F(E)$ como el ínfimo de las distorsiones con las cuales E puede ser incluido en F. Es decir:

$$C_F(E) \coloneqq \text{ínf}\left\{\operatorname{dist}(f) : \ f : E \hookrightarrow F\right\}.$$

Si además $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ son dos familias de espacios métricos definimos $C_F(\mathcal{E})$ como la menor distorsión con la que todos los espacios de $\mathcal{E}$ se incluyen en F,

$$C_F(\mathcal{E}) \coloneqq \sup\left\{C_F(E) : \ E \in \mathcal{E}\right\},$$

y $C_{\mathcal{F}}(E)$ como la menor distorsión con la que E se incluye en alguno de los espacios de $\mathcal{F}$,

$$C_{\mathcal{F}}(E) \coloneqq \text{ínf}\left\{C_F(E) : \ F \in \mathcal{F}\right\}.$$

Por otro lado, si E y F son espacios normados, podemos definir una versión lineal $C_F^\ell(E)$ de la constante $C_F(E)$ agregando el requerimiento de linealidad a las inclusiones. Es decir,

$$C_F^\ell(E) \coloneqq \text{ínf}\left\{\operatorname{dist}(T) : \ T : E \hookrightarrow F \text{ t.l.}\right\}.$$

Como antes, definimos $C_F^\ell(\mathcal{E})$ y $C_{\mathcal{F}}^\ell(E)$.

Observación 1.2. Notemos que dados E, F, G espacios métricos se cumple que

$$C_G(E) \leq C_G(F)C_F(E).$$

Lo mismo ocurre para el caso lineal. Efectivamente, podemos asumir que las constantes $C_G(F)$ y $C_F(E)$ son finitas, pues sino la desigualdad se satisface trivialmente. Luego, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar funciones $f : E \hookrightarrow F$ y $g : F \hookrightarrow G$ de distorsión menor que $(1+\varepsilon)C_F(E)$ y $(1+\varepsilon)C_G(F)$ respectivamente. Luego, por la Observación 1.1 resulta que

$$C_G(E) \leq \operatorname{dist}(g \circ f) \leq \operatorname{dist}(g)\operatorname{dist}(f) < (1+\varepsilon)^2 C_G(F)C_F(E),$$

de donde la afirmación se sigue.

A continuación, daremos una definición informal de lo que en la teoría de espacios de Banach es conocido como *propiedad local*. Cierta propiedad de los espacios de Banach se dice *local* si no depende de la comprensión del espacio como un todo, sino que queda determinada por sus subespacios de dimensión finita. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.3. Ser un espacio de Hilbert es una propiedad local de los espacios de Banach. Un espacio de Banach E es un espacio de Hilbert si y sólo si su norma proviene de un producto interno. Es sabido que una condición necesaria y suficiente para que lo anterior ocurra es que la norma satisfaga la ley del paralelogramo. Es decir que E es de Hilbert si para todo $u, v \in E$ se cumple que

$$2\left\|u\right\|^2 + 2\left\|v\right\|^2 = \left\|u+v\right\|^2 + \left\|u-v\right\|^2 .$$

Como la igualdad anterior involucra únicamente dos vectores del espacio, basta corroborarla para cualquier subespacio de dimensión dos. Luego, ser un espacio de Hilbert depende únicamente de que sus subespacios de dimensión dos cumplan la ley del paralelogramo, por lo que resulta ser una propiedad local.

Al estudiar propiedades locales, surge naturalmente preguntarse cuándo dos espacios las comparten o, más generalmente, cuándo uno las hereda del otro. A grandes rasgos, esto ocurrirá cuando los subespacios finitos del primero estén incluidos en el segundo, pues entonces cumplirán las propiedades que satisfacían los subespacios finitos de este último. Para dar mayor precisión al comentario anterior, introduciremos el concepto de finita representabilidad.

Definición 1.3. Sean E y F espacios normados. Consideremos la familia de espacios normados $\mathcal{E}$ compuesta por todos los subespacios de dimensión finita de E.

- Decimos que el E es finitamente representable en F si $C^{\ell}_F(\mathcal{E}) = 1$.
- Decimos que el E es crudamente finitamente representable en F si $C^{\ell}_F(\mathcal{E}) < \infty$.

En términos de la definición anterior, si un espacio de Banach E es finitamente representable en un espacio de Banach F, entonces E heredará las propiedades locales de F. Esto se debe a que los subespacios finitos de E pueden incluirse con distorión arbitrariamente pequeña en F. Para algunas propiedades bastará incluso que E sea crudamente finitamente representable en F. Cabe aclarar que si bien todo lo anterior será siempre cierto en la práctica, no podemos brindarle mayor rigor del que tuvimos al definir la noción de propiedad local. Retornemos al Ejemplo 1.3.

Ejemplo 1.3 (continuación). Dado un espacio de Banach E y un espacio de Hilbert F, probemos que si E es finitamente representable en F entonces E es un espacio de Hilbert. Dado S un subespacio de E de dimensión dos, basta ver que S satisface la ley del paralelogramo. Luego, dados $u, v \in S$, queremos ver que

$$2\|u\|_E^2 + 2\|v\|_E^2 = \|u+v\|_E^2 + \|u-v\|_E^2 . \tag{1.1}$$

Para ello, trasladaremos nuestro análisis a F, cambiando a S por un subespacio de F con mínima distorsión. Como E es finitamente representable en F, dado $\varepsilon > 0$, existe una transformación lineal $T : S \to F$ inyectiva tal que $\operatorname{dist}(T) < 1 + \varepsilon$. Usando, a continuación, que F es un espacio de Hilbert, tenemos que

$$\begin{aligned} 2\|T(u)\|_F^2 + 2\|T(v)\|_F^2 &= \|T(u)+T(v)\|_F^2 + \|T(u)-T(v)\|_F^2 \\ &= \|T(u+v)\|_F^2 + \|T(u-v)\|_F^2 . \end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando la cota para la distorsión de T, resulta:

$$\begin{aligned} 2\|u\|_E^2 + 2\|v\|_E^2 &\leq 2\left(\left\|T^{-1}\right\|_{Lip}\|T(u)\|_F\right)^2 + 2\left(\left\|T^{-1}\right\|_{Lip}\|T(v)\|_F\right)^2 \\ &= \left\|T^{-1}\right\|_{Lip}^2\left(\|T(u+v)\|_F^2 + \|T(u-v)\|_F^2\right) \\ &\leq \operatorname{dist}(T)^2\left(\|u+v\|_E^2 + \|u-v\|_E^2\right) \\ &< (1+\varepsilon)^2\left(\|u+v\|_E^2 + \|u-v\|_E^2\right) . \end{aligned}$$

Ahora bien, como ε es arbitrario podemos deducir que

$$2\|u\|_E^2 + 2\|v\|_E^2 \leq \|u+v\|_E^2 + \|u-v\|_E^2 .$$

Aplicando un razonamiento análogo comenzando por el lado derecho de la expresión (1.1), obtenemos la desigualdad anterior en sentido inverso probando la igualdad. En consecuencia, ser un espacio de Hilbert es una propiedad que se hereda mediante finita representabilidad. Notemos que no podríamos haber usado el argumento anterior para la condición de cruda finita representabilidad pues hizo falta una distorsión arbitrariamente chica. Veamos que efectivamente ser un espacio de Hilbert no se hereda mediante cruda finita representabilidad. Para ello, expondremos un contraejemplo. Tomemos $E = F = \mathbb{R}^2$ con la norma infinito y la norma dos respectivamente. Notemos que F es un espacio de Hilbert mientras que E no lo es. Observemos, además, que para todo $v \in \mathbb{R}^2$ se satisface la desigualdad

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{2}\,\|v\|_\infty .$$

Esto es equivalente a afirmar que la función identidad $id : E \to F$ tiene distorsión menor o igual que $\sqrt{2}$. Luego, cualquier subespacio de E se incluye en F con a lo sumo esa distorsión. Por lo tanto, E es crudamente finitamente representable en un espacio de Hilbert sin heredar, sin embargo, esta propiedad.

Daremos una última definición para luego enunciar el Teorema de Ribe y exponer las metas del proyecto que lleva su nombre.

Definición 1.4. Sean E y F espacios métricos. Dada una función $f : E \to F$, decimos que f es un homeomorfismo uniforme si es biyectiva, uniformemente continua y con inversa uniformemente continua.

Teorema 1.4 (Teorema de Ribe)**.** *Dos espacios normados uniformemente homeomorfos son crudamente finitamente representables el uno en el otro.*

Comentario 1.5. La demostración original se puede encontrar en [1], mientras que otras dos pruebas alternativas fueron obtenidas por Heinrich y Mankiewicz [2], y Bourgain [3]. Si bien el enunciado del teorema servirá de inspiración y punto de partida para la exposición del *Programa de Ribe*, no lo usaremos para probar resultados posteriores. Es por eso que nos permitiremos omitir su demostración.

Estamos en condiciones de presentar los fundamentos del *Programa de Ribe*. Supongamos que cierta propiedad local p es heredada mediante cruda finita representabilidad. Es decir, asumamos que para cualquier par de espacios de Banach E y F, si F satisface p y E es crudamente finitamente representable en F, entonces E también cumple p. Como consecuencia del Teorema 1.4, podemos deducir que la propiedad p es invariante por homeomorfismos uniformes, pues dos espacios de Banach uniformemente homeomorfos serán crudamente finitamente representables el uno en el otro. Explícitamente, si dos espacios de Banach son uniformemente homeomorfos, entonces uno satisface p si y sólo si el otro también lo hace.

Luego, cabe preguntarse por qué una propiedad p, inherente a los espacios de Banach y su estructura vectorial, habría de ser preservada por un morfismo que en principio respeta únicamente la estructura métrica del espacio. Tal vez los homeomorfismos uniformes aplicados a espacios de Banach son muy rígidos y mantienen también parte de la estructura vectorial. Sin embargo, la idea fundamental del programa se basa en la suposición inversa. Tal vez no sea cierto que la propiedad p dependa de la estrcutra vectorial de los espacios sino que es un propiedad exclusivamente métrica, y es por esa razón que es invariante por homeomorfismos uniformes.

La osadía de esta conjetura radica en que las propiedades de los espacios de Banach suelen estar definidas en términos inherentes a la estructura vectorial, como por ejemplo las combinaciones lineales. ¿Cómo puede ser la propiedad p exclusivamente métrica si está definida en términos de combinaciones lineales? Para que esto ocurra, debería existir una reformulación equivalente de p que aluda únicamente a distancias entre puntos, o sea, que apele sólo a la estructura métrica del espacio. Si la consiguiéramos, podríamos extender la definición reformulada de p al ámbito de los espacios métricos. Entonces, satisfacer o no la propiedad p dejaría de ser una característica exclusiva de los espacios de Banach para pasar a ser una característica de todos los espacios métricos.

Este ejercicio de traducción de conceptos lineales en términos métricos define el primer paso del *Programa de Ribe*. El objetivo consiste en generalizar todas las nociones posibles relacionadas con las propiedades locales de los espacios de Banach, al ámbito de los espacios métricos. Sin embargo, esta tarea no siempre da lugar a generalizaciones estrictas de los conceptos originales. Frecuentemente, se obtienen versiones o equivalentes métricos que cumplen, en la teoría de espacios métricos, un rol análogo al que dichos conceptos originales tenían en la teoría de espacios de Banach.

A continuación, cabe preguntarse si los teoremas que vinculan las nociones que fueron extendidas también pueden ser generalizados o si al menos es posible probar un análogo métrico. Esto constituye el propósito del segundo paso del programa, donde no sólo se intenta trasladar los conceptos al ámbito de los espacios métricos, sino también la teoría. Finalmente, el tercer paso tiene como objetivo la aplicación de lo realizado anteriormente a la resolución de problemas. El éxito de esta última parte justifica el esfuerzo de los primeros dos pasos. Efectivamente, el *Programa de Ribe* ha rendido sus frutos, tanto en el estudio de la geometría de los espacios de Banach como en la demostración de resultados propios del ámbito de los espacios métricos y completamente ajenos a la teoría lineal [4].

1.2. Vectores aleatorios en espacios de Banach

Comenzaremos esta sección ofreciendo una mirada probabilística de los promedios en espacios de Banach. A lo largo de esta tesis, esto nos permitirá la utilización de argumentos propios de la teoría de la medida y probabilidad que no hubiesen surgido naturalmente en otro ámbito. Lo que sigue puede considerarse como un caso particular de la teoría de integración en espacios de Banach [5]. No es necesario, sin embargo, que el lector este familiarizado con este tema, dada la simpleza del caso a tratar.

Comentario 1.6. Durante esta sección trabajaremos con E un espacio de Banach real y X un conjunto finito dotado de la medida de equiprobabilidad que llamaremos μ. Todo lo realizado será válido para el caso complejo usando los mismos argumentos.

Notemos que al tomar X finito, cualquier función $f : X \to \mathbb{R}$ resulta una función medible o variable aleatoria (usando terminología de teoría de la medida o teoría de la probabilidad respectivamente). Más aún, toda variable aleatoria f resulta integrable pues tenemos que

$$\sum_{x \in X} |f(x)| < \infty.$$

Luego, podemos calcular su esperanza como

$$\mathbb{E}_x [f(x)] = \int_X f(x)\, d\mu(x) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x).$$

Para el caso particular del espacio de medida (X, μ) con el que estamos trabajando, podemos extender lo anterior reemplazando $\mathbb{R}$ por un espacio de Banach E. (Esto requriría de mayor teoría si trataramos con un espacio probabilidad general.)

Definición 1.5. Sean E un espacio de Banach y X un conjunto finito dotado de la medida de equiprobabilidad μ. Llamaremos vector aleatorio a toda función $f : X \to E$. Además, diremos que dos vectores aleatorios tienen la misma distribución, si tienen la misma imagen y toman cada valor de esta con la misma probabilidad. Por otro lado, dado un vector aleatorio f, definimos su esperanza o integral por

$$\mathbb{E}_x [f(x)] = \int_X f(x)\, d\mu(x) := \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x).$$

Usaremos la notación $\mathbb{E}[f]$ o $\int_X f\, d\mu$ cuando no dé lugar a confusión sobre qué variable se está integrando.

Observación 1.7. Observemos que no tenía sentido definir integrabilidad en nuestro caso. Al igual que como vimos para variables aleatorias, para todo vector aleatorio f se cumple que

$$\sum_{x \in X} \|f(x)\| < \infty.$$

La notación anterior será de gran ayuda para pensar un promedio de vectores en términos probabilísticos como la esperanza de un vector aleatorio que toma el valor de cada vector del promedio de forma equiprobable. Esto nos permitirá aplicar propiedades típicas de la esperanza a las expresiones promediadas (que aparecerán muy frecuentemente más adelante). Por ejemplo, en la siguiente observación veremos que dos vectores aleatorios con la misma distribución tienen la misma esperanza.

Observación 1.8. Dado un vector aleatorio $f : X \to E$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f] = \sum_{x \in X} \frac{1}{|X|} f(x) &= \sum_{v \in f(X)} \frac{|\{x :\ f(x) = v\}|}{|X|} v \\ &= \sum_{v \in f(X)} \mu(\{x :\ f(x) = v\}) v.\end{aligned}$$

Luego, si dos vectores aleatorios tienen la misma distribución, entonces su esperanza coincide.

Notemos que el conjunto de vectores aleatorios E^X hereda de E una estructura de espacio vectorial definiendo la suma y la multiplicación por escalares punto a punto.

En consecuencia, de la Definición 1.5 se deduce inmediatamente la linealidad de la esperanza.

A continuación, recordemos la definición de $L^p(\mu)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Buscaremos extenderla reemplazando el codominio $\mathbb{R}$ de las funciones por E, tal como como hicimos antes. El espacio $L^p(\mu)$ consiste de todas las funciones medibles $f : X \to \mathbb{R}$ cuya norma p es finita. Sin embargo, en nuestro caso, todas las funciones son medibles y satisfacen esta condición. Luego, el espacio vectorial base de cualquier $L^p(\mu)$ es $\mathbb{R}^X$ y para distintos valores de p lo único que cambia es la norma con la cual dotamos a $\mathbb{R}^X$. Lo mismo ocurrirá cuando extendamos la definición para espacios de Banach, pues para todo vector aleatorio $f \in E^X$ y todo $1 \leq p < \infty$ se tiene que

$$\sum_{x \in X} \|f(x)\|^p < \infty.$$

Definición 1.6. Sean E y (X, μ) como antes. Dado $1 \leq p \leq \infty$, llamaremos $L^p(\mu, E)$ al espacio vectorial E^X dotado de la siguiente norma. Dado $f \in E^X$, si $p < \infty$ definimos la norma p de f por

$$\|f\|_p := \left(\int_X \|f(x)\|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} \|f(x)\|^p \right)^{1/p}.$$

Para el caso $p = \infty$ tomamos

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in X} \|f(x)\|.$$

(Notemos que en la definición anterior, las integrales involucradas corresponden a la integral usual de funciones a valores en $\mathbb{R}$ y no a la que introdujimos en la Definición 1.5.)

Observación 1.9. Mediante una corroboración directa, resulta que las expresiones que hemos definido anteriormente efectivamente son normas y que los espacios $L^p(\mu, E)$ son completos, y por lo tanto, de Banach.

En el siguiente teorema, veremos una caracterización de los duales de los espacios $L^p(\mu, E)$ cuando E tiene dimensión finita. Previo al enunciado, cabe aclarar que notaremos V^* al dual de cierto espacio vectorial V.

Teorema 1.10. *Sean E un espacio de Banach de dimensión finita y (X, μ) como antes. Dado $1 \leq p < \infty$, tomemos q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Luego, existe un isomorfismo isométrico entre los espacios $L^p(\mu, E)^*$ y $L^q(\mu, E^*)$.*

Demostración. Comenzaremos definiendo un operador $T : L^q(\mu, E^*) \to L^p(\mu, E)^*$ para luego probar que es un isomorfismo isométrico. En adelante, notaremos $\langle v^*, v\rangle$ a la evaluación de cierto $v^* \in E^*$ en un vector $v \in E$. Dadas funciones $f \in L^p(\mu, E)$ y $g \in L^q(\mu, E^*)$ tomemos

$$T_{(g)}(f) := \int_X \langle g(x), f(x)\rangle \, d\mu(x).$$

Luego, de la definición de T, deducimos que

$$\left|T_{(g)}(f)\right| \leq \int_X |\langle g(x), f(x)\rangle| \; d\mu(x) \leq \int_X \|g(x)\|_{E^*} \|f(x)\|_E \; d\mu(x).$$

Aplicando la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\left|T_{(g)}(f)\right| \leq \|g\|_{L^q(\mu, E^*)} \|f\|_{L^p(\mu, E)},$$

de donde resulta que

$$\left\|T_{(g)}\right\|_{L^p(\mu, E)^*} \leq \|g\|_{L^q(\mu, E^*)}.$$

Probemos la desigualdad inversa para poder concluir que T es una isometría. En primer lugar, demostraremos el caso en el que $p > 1$ y en consecuencia $q < \infty$. Sea $g \in L^q(\mu, E^*)$ que suponemos distinta de cero sin pérdida de generalidad. Como E tiene dimensión finita, para cada $x \in X$ existe un vector $v_x \in B_E$ que cumple la igualdad

$$\|g(x)\|_{E^*} = \max_{v \in B_E} \langle g(x), v\rangle = \langle g(x), v_x\rangle.$$

Sea $f : X \to E$ definida por

$$f(x) := \|g(x)\|_{E^*}^{q-1} v_x.$$

Notemos que se satisface la desigualdad

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(\mu, E)}^p &= \int_X \|f(x)\|_E^p \; d\mu(x) = \int_X \|g(x)\|_{E^*}^{(q-1)p} \|v_x\|_E^p \; d\mu(x) \\
&= \int_X \|g(x)\|_{E^*}^q \|v_x\|_E^p \; d\mu(x) \leq \int_X \|g(x)\|_{E^*}^q \; d\mu(x) \\
&= \|g\|_{L^q(\mu, E^*)}^q.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|g\|^q_{L^q(\mu,E^*)} &= \int_X \|g(x)\|^q_{E^*} \, d\mu(x) = \int_X \|g(x)\|^{q-1}_{E^*} \max_{v\in B_E} \langle g(x), v\rangle \, d\mu(x) \\
&= \int_X \|g(x)\|^{q-1}_{E^*} \langle g(x), v_x\rangle \, d\mu(x) = \int_X \langle g(x), f(x)\rangle \, d\mu(x) \\
&= T_{(g)}(f) \leq \left\|T_{(g)}\right\|_{L^p(\mu,E)^*} \|f\|_{L^p(\mu,E)} \\
&\leq \left\|T_{(g)}\right\|_{L^p(\mu,E)^*} \|g\|^{q/p}_{L^q(\mu,E^*)} .
\end{aligned}$$

Despejando la norma de g de la derecha, deducimos que

$$\|g\|_{L^q(\mu,E^*)} \leq \left\|T_{(g)}\right\|_{L^p(\mu,E)^*} ,$$

como buscábamos.

Pasemos al caso en que $p = 1$ y en consecuencia $q = \infty$. Dada $g \in L^\infty(\mu, E^*)$, existe un $x_0 \in X$ en donde g alcanza su norma. Explícitamente, tenemos que

$$\|g\|_{L^\infty(\mu,E^*)} = \|g(x_0)\|_{E^*} . \tag{1.2}$$

Apelando nuevamente a la dimensión finita de E, definimos un vector $v_0 \in B_E$ de manera tal que se cumpla la igualdad

$$\|g(x_0)\|_{E^*} = \max_{v\in B_E} \langle g(x_0), v\rangle = \langle g(x_0), v_0\rangle. \tag{1.3}$$

Tomemos, entonces, $f : X \to E$ definida por

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq x_0 \\ |X|\, v_0 & \text{si } x = x_0 \end{cases} .$$

Notemos que se satisface la desigualdad

$$\|f\|_{L^1(\mu,E)} = \int_X \|f(x)\|_E \, d\mu(x) = \|v_0\|_E \leq 1.$$

Luego, combinando las expresiones (1.2) y (1.3), obtenemos

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^\infty(\mu,E^*)} &= \langle g(x_0), v_0\rangle = \frac{1}{|X|} \langle g(x_0), f(x_0)\rangle = T_{(g)}(f) \\
&\leq \left\|T_{(g)}\right\|_{L^1(\mu,E)^*} \|f\|_{L^1(\mu,E)} \leq \left\|T_{(g)}\right\|_{L^1(\mu,E)^*} .
\end{aligned}$$

Concluimos, entonces, que T es una isometría. En particular, T resulta inyectiva por lo que basta probar la sobreyectividad. Para ello, como estamos trabajando en dimensión finita, será suficiente corroborar que el dominio y el codominio de T tienen la misma dimensión. Efectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned}\dim\left(L^q(\mu, E^*)\right) &= |X| \dim\left(E^*\right) = |X| \dim\left(E\right) = \dim\left(L^p(\mu, E)\right)\\ &= \dim\left(L^p(\mu, E)^*\right),\end{aligned}$$

como queríamos probar. □

En lo que resta de la sección nos concentraremos en un caso particular, tomando como espacio X al conjunto $\{-1, 1\}^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Veremos que bajo estas condiciones los vectores aleatorios admiten una suerte de desarrollo de Fourier.

Definición 1.7. Dados $n \in \mathbb{N}$ y un subconjunto $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$, llamaremos función de Walsh asociada a A, a la aplicación $w_A : \{-1, 1\}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$w_A(x) := \prod_{j \in A} x_j,$$

donde $x = (x_j)_{j=1}^n \in \{-1, 1\}^n$. Denominaremos sistema de Walsh al conjunto de todas todas las funciones de Walsh $\{w_A\}_{A \subseteq \{1,\ldots,n\}}$.

Por otro lado, sean E un espacio de Banach y $f : \{-1, 1\}^n \to E$ un vector aleatorio. Dado un subconjunto A como antes, llamaremos coeficiente de Fourier de f asociado a A, al vector

$$f_A := \mathbb{E}\left[w_A f\right].$$

Por último, denominaremos desarrollo de Fourier o bien desarrollo en sistema de Walsh de f a la función $\tilde{f} : \{-1, 1\}^n \to E$ definida por

$$\tilde{f}(x) = \sum_{A \subseteq \{1,\ldots,n\}} w_A(x) f_A.$$

Concluimos esta sección probando que todo vector aleatorio coincide con su desarrollo en sistema de Walsh.

Proposición 1.11. *Sean E un espacio de Banach y $n \in \mathbb{N}$. Luego, todo vector aleatorio $f : \{-1,1\}^n \to E$ coincide con su desarrollo en sistema de Walsh. Es decir, que se satisface la igualdad*

$$f = \sum_{A \subseteq \{1,\dots,n\}} w_A f_A.$$

Demostración. Dado $x \in \{-1,1\}^n$, resulta

$$\sum_{A \subseteq \{1,\dots,n\}} w_A(x) f_A = \sum_{A \subseteq \{1,\dots,n\}} w_A(x) \mathbb{E}_y \left[w_A(y) f(y) \right] = \sum_{A \subseteq \{1,\dots,n\}} \mathbb{E}_y \left[w_A(xy) f(y) \right],$$

donde xy denota el producto punto a punto. Notemos que los vectores aleatorios $w_A(xy)f(y) = w_A(xy)f(x(xy))$ y $w_A(y)f(xy)$ tienen la misma distribución (con respecto a la variable y), por lo que sus esperanzas coinciden. Luego, resulta

$$\begin{aligned} \sum_{A \subseteq \{1,\dots,n\}} w_A(x) f_A &= \sum_{A \subseteq \{1,\dots,n\}} \mathbb{E}_y \left[w_A(y) f(xy) \right] = \mathbb{E}_y \left[\left(\sum_{A \subseteq \{1,\dots,n\}} w_A(y) \right) f(xy) \right] \\ &= \mathbb{E}_y \left[\left(\prod_{j=1}^{n} (y_j + 1) \right) f(xy) \right]. \end{aligned} \tag{1.4}$$

El último paso se justifica por un argumento inductivo. Efectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{n} (y_j + 1) = (y_n + 1) \prod_{j=1}^{n-1} (y_j + 1) &= (y_n + 1) \sum_{A \subseteq \{1,\dots,n-1\}} w_A(y) \\ &= \sum_{A \subseteq \{1,\dots,n-1\}} y_n w_A(y) + \sum_{A \subseteq \{1,\dots,n-1\}} w_A(y) \\ &= \sum_{A \subseteq \{1,\dots,n\}} w_A(y), \end{aligned}$$

probando el paso inductivo (el caso base es inmediato). Por lo tanto, notando que el producto de la igualdad (1.4) es no nulo únicamente si $y = (1, \dots, 1)$, deducimos que

$$\sum_{A \subseteq \{1,\dots,n\}} w_A(x) f_A = \mathbb{E}_y \left[2^n \chi_{\{(1,\dots,1)\}}(y) f(xy) \right] = f(x). \qquad \square$$

1.3. Tipo y cotipo

En esta sección desarrollaremos los conceptos de tipo y cotipo para espacios de Banach [6, 7]. Serán estas las nociones que extenderemos al ámbito de los espacios métricos en los capítulos subsiguientes. En primer lugar, demostraremos la desigualdad de Kahane-Khintchine que nos servirá durante el resto de la sección. En segundo lugar, expondremos las nociones de tipo y cotipo junto con algunas propiedades básicas.

Comentario 1.12. En lo que resta del capítulo, trabajaremos con el espacio $X \coloneqq \{-1,1\}^n$ dotado de la medida de equiprobabilidad μ. Además, notaremos x o y a sus elementos.

A continuación, enunciamos la desigualdad de Kahane-Khintchine [6, cap. 6].

Teorema 1.13. *Dado $1 \leq p < \infty$, existe una constante C_p tal que para todo espacio de Banach E, todo $n \in \mathbb{N}$ y toda elección de vectores $(v_j)_{j=1}^n \subseteq E$, se satisface la desigualdad*

$$\mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^n x_j v_j \right\| \leq \left(\mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^n x_j v_j \right\|^p \right)^{1/p} \leq C_p \mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^n x_j v_j \right\|. \tag{1.5}$$

Observación 1.14. Notemos que, en términos de la sección anterior, la desigualdad de Kahane-Khintchine compara las normas p de los vectores aleatorios de la forma $f \coloneqq \sum_{j=1}^n x_j v_j$. Explícitamente, podemos reescribir la desigualdad (1.5) como

$$\|f\|_{L^1(\mu,E)} \leq \|f\|_{L^p(\mu,E)} \leq C_p \|f\|_{L^1(\mu,E)}.$$

Para la demostración del Teorema 1.13 necesitaremos algunos lemas previos.

Lema 1.15. *Sea $f : \{-1,1\}^n \to E$ un vector aleatorio tal que f y $-f$ tienen la misma distribución. Luego, para todo vector $v \in E$ se cumple la desigualdad*

$$\mu\left(\|f+v\| \geq \|v\|\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Demostración. Fijemos $v \in E$. Para todo $x \in \{-1,1\}^n$, usando la desigualdad triangular, obtenemos

$$\begin{aligned} 2\|v\| &= \|2v\| = \|v + f(x) + v - f(x)\| \\ &\leq \|v + f(x)\| + \|v - f(x)\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $x \in \{-1,1\}^n$, o bien $\|v + f(x)\|$ o bien $\|v - f(x)\|$ resulta mayor o igual que $\|v\|$. En consecuencia, deducimos que

$$\begin{aligned}1 = \mu(\{-1,1\}^n) &= \mu(\{\|v+f\| \geq \|v\|\} \cup \{\|v-f\| \geq \|v\|\}) \\ &\leq \mu\left(\|v+f\| \geq \|v\|\right) + \mu\left(\|v-f\| \geq \|v\|\right).\end{aligned}$$

Por último, como las distribuciones de f y $-f$ coinciden, lo mismo ocurre con $v+f$ y $v-f$. Concluimos, entonces, que

$$1 \leq 2\mu\left(\|v+f\| \geq \|v\|\right),$$

de donde el lema se sigue. $\square$

Lema 1.16. *Sean $n \in \mathbb{N}$, E un espacio de Banach y ciertos vectores $(v_j)_{j=1}^n \subseteq E$. Para todo $1 \leq m \leq n$, consideramos los vectores aleatorios $f_m : \{-1,1\}^n \to E$ definidos por*

$$f_m(x) = \sum_{j=1}^{m} x_j v_j.$$

Luego, para todo $\lambda > 0$ se tiene que

$$\mu\left(\max_{1\leq m\leq n} \|f_m\| > \lambda\right) \leq 2\mu\left(\|f_n\| > \lambda\right).$$

Demostración. Definamos para cada $1 \leq m \leq n$, los conjuntos

$$X_m \coloneqq \{x \in \{-1,1\}^n : \ \|f_m(x)\| > \lambda \text{ y } \|f_j(x)\| \leq \lambda \text{ para todo } j < m\}.$$

Notemos que los conjuntos X_m forman una partición del conjunto

$$\left\{x \in \{-1,1\}^n : \ \max_{1\leq m\leq n} \|f_m(x)\| > \lambda\right\}.$$

Luego, aplicando la aditividad de μ, obtenemos

$$\mu\left(\max_{1\leq m\leq n} \|f_m\| > \lambda\right) = \sum_{m=1}^{n} \mu\left(X_m\right). \tag{1.6}$$

Además, dado que se satisface la inclusión

$$\{x \in \{-1,1\}^n : \ \|f_n(x)\| > \lambda\} \subseteq \left\{x \in \{-1,1\}^n : \ \max_{1\leq m\leq n} \|f_m(x)\| > \lambda\right\},$$

deducimos que

$$\mu\left(\|f_n\| > \lambda\right) = \sum_{m=1}^{n} \mu\left(X_m \cap \left(\|f_n\| > \lambda\right)\right).$$

En consecuencia, usando que $\|f_m(x)\| > \lambda$ para todo $x \in X_m$, resulta

$$\mu\left(\|f_n\| > \lambda\right) \geq \sum_{m=1}^{n} \mu\left(X_m \cap \left(\|f_n\| \geq \|f_m\|\right)\right). \tag{1.7}$$

Por otro lado, observemos que la pertenencia de un $x \in \{-1,1\}^n$ al conjunto X_m depende únicamente de sus primeras m coordenadas. Notemos $\pi_m : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}^m$ a la proyección en las primeras m coordenadas y definamos el conjunto

$$Y_m \coloneqq \pi_m\left(X_m\right).$$

Luego, para cada $1 \leq m \leq n$, el conjunto X_m se parte a su vez como la unión disjunta de los conjuntos $\pi_m^{-1}(y)$ con $y \in Y_m$. Aplicando esto a cada término del miembro derecho de la desigualdad (1.7), nos queda

$$\begin{aligned}
&\mu\left(X_m \cap \left(\|f_n\| \geq \|f_m\|\right)\right) \\
&\qquad = \sum_{y \in Y_m} \mu\left(\left(\pi_m = y\right) \cap \left(\|f_n\| \geq \|f_m\|\right)\right) \\
&\qquad = \sum_{y \in Y_m} \mu\left(\left(\pi_m = y\right) \cap \left(\left\|\sum_{j=1}^{m} y_j v_j + \sum_{j=m+1}^{n} x_j v_j\right\| \geq \left\|\sum_{j=1}^{m} y_j v_j\right\|\right)\right).
\end{aligned}$$

Notemos que, en cada sumando, el evento de la izquierda depende únicamente de las primeras m coordenadas mientras que el de la dercecha depende sólo de las restantes $n-m$. Por lo tanto, por un argumento de independencia, resulta

$$\begin{aligned}
&\mu\left(X_m \cap \left(\|f_n\| \geq \|f_m\|\right)\right) \\
&\qquad = \sum_{y \in Y_m} \mu\left(\pi_m = y\right) \mu\left(\left\|\sum_{j=1}^{m} y_j v_j + \sum_{j=m+1}^{n} x_j v_j\right\| \geq \left\|\sum_{j=1}^{m} y_j v_j\right\|\right).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Ahora bien, como el vector aleatorio $f \coloneqq \sum_{j=m+1}^{n} x_j v_j$ tiene la misma distribución que $-f$, por el lema anterior deducimos que

$$\mu\left(\left\|\sum_{j=1}^{m} y_j v_j + \sum_{j=m+1}^{n} x_j v_j\right\| \geq \left\|\sum_{j=1}^{m} y_j v_j\right\|\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Aplicando la última cota a la igualdad (1.8), obtenemos

$$\mu\left(X_m \cap (\|f_n\| \geq \|f_m\|)\right) \geq \frac{1}{2} \sum_{y \in Y_m} \mu\left(\pi_m = y\right) = \frac{1}{2}\mu\left(X_m\right).$$

Finalmente, combinando lo anterior con las expresiones (1.6) y (1.7) el lema queda probado. $\square$

Lema 1.17. *Bajo las hipótesis del lema anterior, para todo $\lambda > 0$ se tiene que*

$$\mu\left(\|f_n\| > 2\lambda\right) \leq 4\mu\left(\|f_n\| > \lambda\right)^2.$$

Demostración. Usaremos los objetos construidos durante el lema anterior. Fijado $1 \leq m \leq n$, recordemos que la pertenencia de un $x \in \{-1,1\}^n$ al conjunto X_m depende únicamente de sus primeras m coordenadas. Veamos que los eventos X_m y $\left(\left\|\sum_{j=m}^n x_j v_j\right\| > \lambda\right)$ son independientes. Para ello, basta corroborar que las variables aleatorias x_m y $\left\|\sum_{j=m}^n x_j v_j\right\|$ lo son. Efectivamente, tomando $a = \pm 1$ y $b \geq 0$ resulta

$$\begin{aligned}
\mu\left((x_m = a) \cap \left(\left\|\sum_{j=m}^n x_j v_j\right\| = b\right)\right) &= \mu\left((x_m = a) \cap \left(\left\|a v_m + \sum_{j=m+1}^n x_j v_j\right\| = b\right)\right) \\
&= \mu\left(x_m = a\right)\mu\left(\left\|a v_m + \sum_{j=m+1}^n x_j v_j\right\| = b\right) \\
&= \mu\left(x_m = a\right)\mu\left(\left\|x_m a v_m + \sum_{j=m+1}^n x_m x_j v_j\right\| = b\right) \\
&= \mu\left(x_m = a\right)\mu\left(\left\|\sum_{j=m}^n x_j v_j\right\| = b\right).
\end{aligned}$$

Por otro lado, dado $x \in X_m$ tal que $\|f_n(x)\| > 2\lambda$, tenemos que

$$\left\|\sum_{j=m}^n x_j v_j\right\| = \|f_n(x) - f_{m-1}(x)\| \geq \|f_n(x)\| - \|f_{m-1}(x)\| > 2\lambda - \lambda = \lambda.$$

(Para el caso $m = 1$, tomamos $f_0 \coloneqq 0$.) Luego, resulta

$$\begin{aligned}
\mu\left(X_m \cap (\|f_n\| > 2\lambda)\right) &\leq \mu\left(X_m \cap \left(\left\|\sum_{j=m}^n x_j v_j\right\| > \lambda\right)\right) \\
&\leq \mu\left(X_m\right)\mu\left(\left\|\sum_{j=m}^n x_j v_j\right\| > \lambda\right).
\end{aligned}$$

Aplicando el lema anterior invirtiendo el orden de los vectores, deducimos

$$\mu\left(X_m \cap (\|f_n\| > 2\lambda)\right) \leq 2\mu\left(X_m\right)\mu\left(\|f_n\| > \lambda\right).$$

Por lo tanto, sumando sobre $1 \leq m \leq n$, obtenemos

$$\begin{aligned}\mu\left(\|f_n\| > 2\lambda\right) &= \sum_{m=1}^{n} \mu\left(X_m \cap (\|f_n\| > 2\lambda)\right)\\ &\leq 2\sum_{m=1}^{n} \mu\left(X_m\right)\mu\left(\|f_n\| > \lambda\right)\\ &\leq 2\mu\left(\max_{1\leq m\leq n} \|f_m\| > \lambda\right)\mu\left(\|f_n\| > \lambda\right).\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando nuevamente el lema anterior nos queda

$$\mu\left(\|f_n\| > 2\lambda\right) \leq 4\mu\left(\|f_n\| > \lambda\right)^2,$$

como buscábamos. □

Estamos en condiciones de probar la desigualdad de Kahane-Khintchine.

Demostración del Teorema 1.13. Sean $1 \leq p < \infty$, E un espacio de Banach, $n \in \mathbb{N}$ y vectores $(v_j)_{j=1}^n \subseteq E$. Observemos que la primera cota de la desigualdad (1.5) es una consecuencia directa de la desigualdad de Hölder. En cuanto a la segunda, podemos reescribirla en términos de los lemas anteriores como

$$\left(\mathbb{E}\left\|f_n\right\|^p\right)^{1/p} \leq C_p \mathbb{E}\left\|f_n\right\|.$$

Reescalando la norma de ser necesario, podemos suponer que

$$\mathbb{E}\left\|f_n\right\| = 1. \tag{1.9}$$

Luego, por la desigualdad de Chebyshev deducimos que

$$\mu\left(\|f_n\| > 8\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left\|f_n\right\|}{8} = \frac{1}{8}.$$

Aplicando el lema anterior repetidas veces mediante un argumento inductivo, para todo $k \in \mathbb{N}$ resulta

$$\mu\left(\|f_n\| > 2^k 8\right) \leq 4^{2^k-1}\left(\frac{1}{8}\right)^{2^k} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,\|f_n\|^p &= \int_{\{-1,1\}^n} \|f_n(x)\|^p \; d\mu(x) = \int_{\{-1,1\}^n} \int_0^{\|f_n(x)\|} pt^{p-1}\, dt\, d\mu(x) \\
&= \int_{\{-1,1\}^n} \int_0^{\infty} pt^{p-1} \chi_{(0,\|f_n(x)\|)}(t)\, dt\, d\mu(x) \\
&= \int_{\{-1,1\}^n} \int_0^{\infty} pt^{p-1} \chi_{(\|f_n\|>t)}(x)\, dt\, d\mu(x).
\end{aligned}$$

Dado que la integral con respecto a la medida μ no es más que una suma finita, podemos invertir el orden de las integrales. Luego, la igualdad anterior nos queda

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,\|f_n\|^p &= \int_0^{\infty} pt^{p-1} \int_{\{-1,1\}^n} \chi_{(\|f_n\|>t)}(x)\, d\mu(x)\, dt = \int_0^{\infty} pt^{p-1} \mu\left(\|f_n\| > t\right)\, dt \\
&\leq \int_0^{8} pt^{p-1}\, dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{k-1}8}^{2^k 8} pt^{p-1} \mu\left(\|f_n\| > t\right)\, dt \\
&\leq 8^p + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{k-1}8}^{2^k 8} pt^{p-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k - 1} dt \\
&\leq 8^p + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kp} 8^p \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k - 1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por la igualdad (1.9), basta tomar la constante C_p tal que C_p^p sea igual al último término de la desigualdad anterior. $\square$

Habiendo probado la desigualdad de Kahane-Khintchine, podemos pasar a las definiciones de tipo y cotipo.

Definición 1.8. Decimos que un espacio de Banach E tiene tipo p con $1 \leq p \leq 2$, si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo conjunto finito de vectores $\{v_j\}_{j=1}^n$ en E se satisface la desigualdad

$$\left(\mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \right\|^p \right)^{1/p} \leq C \left(\sum_{j=1}^{n} \|v_j\|^p \right)^{1/p}. \tag{1.10}$$

Definición 1.9. Decimos que un espacio de Banach E tiene cotipo q con $2 \leq q \leq \infty$, si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo conjunto finito de vectores

$\{v_j\}_{j=1}^n$ en E se satisface la desigualdad

$$\left(\sum_{j=1}^n \|v_j\|^q\right)^{1/q} \leq C \left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j v_j\right\|^q\right)^{1/q}, \tag{1.11}$$

para el caso en que $q < \infty$ y

$$\max_{1\leq j\leq n} \|v_j\| \leq C \max_{\substack{1\leq j\leq n\\ x\in\{-1,1\}^n}} \left\|\sum_{j=1}^n x_j v_j\right\|,$$

para el caso en que $q = \infty$.

Haremos una serie de observaciones que surgen de las definiciones anteriores.

Observación 1.18.

1. La definición de cotipo cuando $q = \infty$ surge de considerar el caso límite de la desigualdad (1.11).

2. Las restricciones $p \leq 2$ y $q \geq 2$ en las definiciones anteriores son consecuencia de la desigualdad de Kahane-Khintchine. Efecivamente, tomando un vector unitario $v \in E$ y tomando $v_j := v$ para todo $1 \leq j \leq n$, de la definición de tipo p resulta

$$\left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j v\right\|^p\right)^{1/p} \leq C \left(\sum_{j=1}^n \|v\|^p\right)^{1/p} = Cn^{1/p}.$$

Por otro lado, utilizando la desigualdad de Kahane-Khintchine, tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j v\right\|^p\right)^{1/p} &\geq \mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j v\right\| \geq C_2^{-1} \left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j v\right\|^2\right)^{1/2} \\ &= C_2^{-1} \left(\mathbb{E}_x \left[\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^2\right]\right)^{1/2} = C_2^{-1} \left(\sum_{j,k=1}^n \mathbb{E}_x [x_j x_k]\right)^{1/2} \\ &= C_2^{-1} n^{1/2}.\end{aligned}$$

Combinando ambas desigualdades, para todo $n \in \mathbb{N}$ deducimos

$$n^{1/2-1/p} \leq C_2 C.$$

En consecuencia, ningún espacio puede tener tipo $p > 2$. Un argumento análogo prueba que tampoco es posible tener cotipo $q < 2$.

3. Todo espacio de Banach E tiene tipo 1 y cotipo ∞ con constante $C = 1$ como consecuencia de la desigualdad triangular. Para el caso de tipo 1 el argumento es directo, mientras que para el caso de cotipo ∞ basta notar que

$$\begin{aligned}\|v_k\| = \frac{1}{2}\left\| v_k + \sum_{j\neq k} v_j + v_k - \sum_{j\neq k} v_j \right\| &\leq \frac{1}{2}\left(\left\| \sum_{j=1}^{n} v_j \right\| + \left\| v_k - \sum_{j\neq k} v_j \right\| \right) \\ &\leq \max_{\substack{1\leq j\leq n \\ x\in\{-1,1\}^n}} \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \right\|.\end{aligned}$$

4. Todo espacio de Banach de tipo p y cotipo q tiene tipo p' y cotipo q' para todo $1 \leq p' \leq p$ y todo $q \leq q' \leq \infty$. Para ver esto, supongamos que cierto espacio de Banach E tiene tipo p y tomemos $1 \leq p' \leq p$, $n \in \mathbb{N}$ y un conjunto finito de vectores $\{v_j\}_{j=1}^n$ en E. Luego, por la desigualdad de Kahane-Khintchine resulta

$$\left(\mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j v \right\|^{p'} \right)^{1/p'} \leq C_{p'} \mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j v \right\| \leq C_{p'} \left(\mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j v \right\|^{p} \right)^{1/p}.$$

   Como E tiene tipo p, existe una constante C que nos permite continuar la cota anterior obteniendo

$$\left(\mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j v \right\|^{p'} \right)^{1/p'} \leq C_{p'} C \left(\sum_{j=1}^{n} \|v_j\|^p \right)^{1/p} \leq C_{p'} C \left(\sum_{j=1}^{n} \|v_j\|^{p'} \right)^{1/p'},$$

   donde en la última desigualdad utilizamos el hecho de que en $\mathbb{R}^n$ la norma p es decreciente en p. La afirmación para el caso de cotipo se deduce en forma análoga.

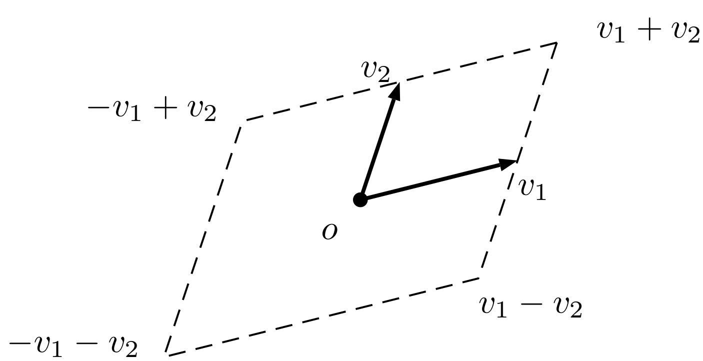
Los puntos 3 y 4 de la observación anterior justifican la siguiente definición de tipo y cotipo trivial.

Definición 1.10. Se dice que un espacio de Banach E tiene *tipo trivial* si no tiene tipo p para ningún $p > 1$, es decir, si sólamente tiene tipo 1. Análogamente, un espacio de Banach E tendrá *cotipo trivial* si no tiene cotipo q para ningún $q < \infty$, es decir, si sólamente tiene cotipo ∞.

Comentario 1.19. En rigor, lo más correcto habría sido definir tipo trivial como tipo 1, para luego referirnos a espacios que carecen de tipo no trivial. Sin embargo, nos permitimos la licencia para alivianar la nomenclatura. Lo mismo aplica a la definición de cotipo trivial.

En la siguiente observación, daremos una interpretación geométrica de las definiciones de tipo y cotipo.

Observación 1.20. Las desigualdades de la definición de tipo y cotipo comparan el largo promedio de las diagonales de un paralelepípedo con la suma de los largos de sus lados. Para hacer esta afirmación más específica, dado $1 \leq r \leq \infty$ llamaremos r-promedio a la raíz r-ésima de un promedio de números positivos elevados a la r y r-suma a la raíz r-ésima de una suma de números positivos elevados a la r. Dado $n \in \mathbb{N}$ y vectores $\{v_j\}_{j=1}^n$ en E, consideremos el paralelepípedo n-dimensional cuyos vértices son los vectores $\sum_{j=1}^n x_j v_j$ con $x \in \{-1,1\}^n$. Para una representación gráfica podemos considerar sólo dos vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ y el paralelogramo formado por los vértices $\pm v_1 \pm v_2$.



Notemos que si unimos cierto vértice $x_1 v_1 + x_2 v_2$ con su opuesto, es decir cambiando x_1 por $-x_1$ y x_2 por $-x_2$, obtendremos una diagonal. Por otra parte, si unimos dicho vértice cambiando el signo de uno sólo de los sumandos, obtendremos un lado. Más aún, el lado resultante es paralelo al vector cuyo signo invertimos. Análogamente, en el paralelepípedo general las diagonales son los segmentos cuyos extremos corresponden a los pares de la forma

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j v_j, \sum_{j=1}^n (-x_j) v_j \right),$$

con $x \in \{-1,1\}^n$. Por otra parte, para cada $1 \le i \le n$, existen 2^{n-1} lados paralelos a v_i que llamaremos lados i-ésimos. Estos quedan determinados por los pares

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j, -x_i v_i + \sum_{j \neq i} x_j v_j \right),$$

con $x \in \{-1,1\}^n$. Luego, la longitud de las diagonales resulta ser $\left\| 2 \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \right\|$ con $x \in \{-1,1\}^n$, mientras que longitud de los lados i-ésimos es $\|2v_i\|$ con $x \in \{-1,1\}^n$. Más aún, si unimos los dos extremos de una diagonal recorriendo de forma óptima los lados del paralelepípedo, para cada $1 \le i \le n$ habremos pasado por exactamente un lado i-ésimo. Cabe preguntarse cómo se compara el largo promedio del recorrido directo a través de la diagonal con el largo del recorrido indirecto a través de los lados. Esto es justamente lo que miden las desigualdades de la definición de tipo p y cotipo q tomando como largo la distancia entre vétrices elevada a la p o a la q respectivamente. Más especificamente, la condición de tipo p, por ejemplo, acota el p-promedio de la longitud de las diagonales en función de la p-suma de la longitud de los lados.

A continuación, veremos que las nociones de tipo y cotipo entran en el marco del *Programa de Ribe* como conceptos proclives a admitir una versión métrica.

Observación 1.21. Notemos que tener tipo p o cotipo q es una propiedad local de los espacios de Banach, ya que impone cierta condición solamente sobre elecciones de finitos vectores. Veamos, además, que es heredada mediante cruda finita representabilidad. Como vimos en la Sección 1.1, esto permite inferir que las nociones de tipo p y cotipo q son en realidad propiedades que dependen únicamente de la estructura métrica del espacio. Luego, se justifica el intento de abordar el primer paso del *Programa de Ribe* para estos conceptos. Supongamos, entonces, que tenemos E y F espacios de Banach tales que E es crudamente finitamente representable en F y F tiene tipo p para cierto $1 \le p \le 2$. Probemos que E también tiene tipo p. Como E es crudamente finitamente representable en F, existe una constante K tal que $C_F^{\ell}(\mathcal{E}) < K$ donde $\mathcal{E}$ es la familia de subespacios de dimensión finita de E. Sean $n \in \mathbb{N}$ y un conjunto finito de vectores $\{v_j\}_{j=1}^n$ en E. Llamemos S al subespacio generado por los vectores $\{v_j\}_{j=1}^n$. Como S es de dimensión finita, existe una transformación lineal inyectiva $T : S \to E$ de distorsión menor que K. Luego, usando que F tiene tipo p, para cierta constante C resulta

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^n x_j v_j \right\|_E^p &\leq \left\| T^{-1} \right\|^p \mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^n x_j T(v_j) \right\|_F^p \\ &\leq C^p \left\| T^{-1} \right\|^p \sum_{j=1}^n \| T(v_j) \|_F^p \\ &\leq C^p \left\| T^{-1} \right\|^p \| T \|^p \sum_{j=1}^n \| v_j \|_E^p \\ &\leq C^p K^p \sum_{j=1}^n \| v_j \|_E^p .\end{aligned}$$

Por lo tanto E tiene tipo p con constante CK. Una cuenta análoga muestra que el cotipo q también es heredado mediante cruda finita representabilidad.

En lo que resta de la sección, introduciremos algunos parámetros necesarios para el desarrollo posterior, probaremos sus propiedades básicas y discutiremos su relación con las definiciones de tipo y cotipo [6, cap. 7].

Definición 1.11. Sean E un espacio de Banach, $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Definimos $\delta_p^{(q)}(E; n)$ como la menor constante δ tal que, para toda elección de vectores $\{v_j\}_{j=1}^n \in E$, se satisface la desigualdad

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n x_j v_j \right\|^q \right)^{1/q} \leq \delta n^{1/p - 1/q} \left(\sum_{j=1}^n \| v_j \|^q \right)^{1/q} .$$

Análogamente, llamaremos $\gamma_q^{(p)}(E; n)$ a la menor constante γ que satisfaga la desigualdad

$$\left(\sum_{j=1}^n \| v_j \|^p \right)^{1/p} \leq \gamma n^{1/p - 1/q} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n x_j v_j \right\|^p \right)^{1/p} .$$

Finalmente, definimos

$$\delta_p^{(q)}(E) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \delta_p^{(q)}(E; n) \quad \text{y} \quad \gamma_q^{(p)}(E) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \gamma_q^{(p)}(E; n).$$

Notaremos $\gamma_q^{(p)}$ y $\delta_p^{(q)}$ en vez de $\gamma_q^{(p)}(E)$ y $\delta_p^{(q)}(E)$ cuando no dé lugar a confusión. Además escribiremos γ_q y δ_p en vez de $\gamma_q^{(q)}$ y $\delta_p^{(p)}$.

Observación 1.22.

1. Dada una elección de vectores $\{v_j\}_{j=1}^n \in E$ podemos tomar $v_{n+1} := 0$. Aplicando la definición de $\delta_p^{(q)}(E; n+1)$, obtenemos

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n x_j v_j\right\|^q\right)^{1/q} \leq \delta_p^{(q)}(E; n+1)(n+1)^{1/p-1/q}\left(\sum_{j=1}^n \|v_j\|^q\right)^{1/q}.$$

   Por lo tanto, resulta que

$$\delta_p^{(q)}(E; n)n^{1/p-1/q} \leq \delta_p^{(q)}(E; n+1)(n+1)^{1/p-1/q}.$$

   En particular, cuando $p = q$ resulta que $n^{1/p-1/q} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, la desigualdad anterior se reduce a afirmar que $\delta_p(E; n)$ es creciente en n. Análogamente, tendremos que

$$\gamma_q^{(p)}(E; n)n^{1/p-1/q} \leq \gamma_q^{(p)}(E; n+1)(n+1)^{1/p-1/q}.$$

2. Veamos que $\delta_p^{(q)}(E; n) \leq n^{1-1/p}$. Aplicando desigualdad triangular y usando la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n x_j v_j\right\|^q\right)^{1/q} &\leq \left(n^{q-1}\sum_{j=1}^n \|v_j\|^q\right)^{1/q} \leq n^{1-1/q}\left(\sum_{j=1}^n \|v_j\|^q\right)^{1/q} \\ &\leq n^{1-1/p}n^{1/p-1/q}\left(\sum_{j=1}^n \|v_j\|^q\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

3. Veamos que $\gamma_q^{(p)}(E; n) \leq n^{1/q}$. Dados $1 \leq i \leq n$ y $x \in \{-1, 1\}^n$, por la convexidad de la función $\|\cdot\|^p$ resulta

$$\begin{aligned}\|v_i\|^p &\leq \frac{1}{2}\left\|v_i + \sum_{j\neq i} x_i x_j v_j\right\|^p + \frac{1}{2}\left\|v_i - \sum_{j\neq i} x_i x_j v_j\right\|^p \\ &= \frac{1}{2}\left\|\sum_{j=1}^n x_j v_j\right\|^p + \frac{1}{2}\left\|x_i v_i + \sum_{j\neq i}(-x_j)v_j\right\|^p.\end{aligned}$$

Luego, como x_j y $(-x_j)$ tienen la misma distribución, tomando esperanza en la desigualdad anterior nos queda

$$\|v_i\|^p \leq \mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right\|^p.$$

Por lo tanto, sumando y tomando raíz p-ésima deducimos que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|v_j\|^p\right)^{1/p} \leq n^{1/p}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right\|^p\right)^{1/p} = n^{1/q} n^{1/p-1/q}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right\|^p\right)^{1/p}.$$

4. Notemos que, como consecuencia directa de la definición de tipo, un espacio de Banach E tiene tipo p si y sólo si $\delta_p < \infty$. Análogamente, E tiene cotipo q si y sólo si $\gamma_q < \infty$.

Continuamos exponiendo una última propiedad de los parámetros $\delta_p^{(q)}$ y $\gamma_q^{(p)}$.

Lema 1.23. *Los parámetros $\delta_p^{(q)}(E;n)$ y $\gamma_q^{(p)}(E;n)$ son submultiplicativos con respecto a n.*

Demostración. Sean E un espacio de Banach, $1 \leq p \leq q < \infty$ y $n, m \in \mathbb{N}$. Consideraremos los espacios $X := \{-1,1\}^m \times \{-1,1\}^n$ e $Y := \{-1,1\}^m$ ambos dotados de la medida de equiprobabilidad. Notaremos $\mathbb{E}_{x,y}$ a la esperanza con respecto a las variables $x \in X$ e $y \in Y$. Para todo $1 \leq i \leq m$ y todo $1 \leq j \leq n$ elijamos un vector $v_{ij} \in E$. Observemos que fijado un $y \in Y$, para todo $1 \leq r < \infty$ se satisface la igualdad

$$\mathbb{E}_x \left\|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_i x_{ij} v_{ij}\right\|^r = \mathbb{E}_x \left\|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} v_{ij}\right\|^r,$$

pues las variables aleatorias $y_i x_{ij}$ tienen la misma distribución que x_{ij}. Luego, tomando esperanza sobre y, obtenemos

$$\mathbb{E}_{x,y} \left\|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_i x_{ij} v_{ij}\right\|^r = \mathbb{E}_x \left\|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} v_{ij}\right\|^r. \tag{1.12}$$

Esta igualdad será utilizada reemplazando r por p o q. Veamos que se cumple la desigualdad

$$\delta_p^{(q)}(E;mn) \leq \delta_p^{(q)}(E;m)\delta_p^{(q)}(E;n). \tag{1.13}$$

Aplicando la igualdad (1.12) para $r = q$ y usando dos veces la definición de $\delta_p^{(q)}$, resulta

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{E}_x \left\| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} v_{ij} \right\|^q \right)^{1/q} &= \left(\mathbb{E}_{x,y} \left\| \sum_{i=1}^m y_i \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} v_{ij} \right) \right\|^q \right)^{1/q} \\
&\leq \delta_p^{(q)}(E;m) m^{1/p-1/q} \left(\sum_{i=1}^m \mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^n x_{ij} v_{ij} \right\|^q \right)^{1/q} \\
&\leq \delta_p^{(q)}(E;m) \delta_p^{(q)}(E;n) (mn)^{1/p-1/q} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \|v_{ij}\|^q \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, deducimos la validez de la desigualdad (1.13). Resta por ver que se cumple la desigualdad

$$\gamma_q^{(p)}(E;mn) \leq \gamma_q^{(p)}(E;m) \gamma_q^{(p)}(E;n). \tag{1.14}$$

Como antes, aplicando la definición de $\gamma_q^{(p)}$ dos veces obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \|v_{ij}\|^p \right)^{1/p} &\leq \gamma_q^{(p)}(E;n) n^{1/p-1/q} \left(\sum_{i=1}^m \mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^n x_{ij} v_{ij} \right\|^p \right)^{1/p} \\
&\leq \gamma_q^{(p)}(E;m) \gamma_q^{(p)}(E;n) (mn)^{1/p-1/q} \left(\mathbb{E}_{x,y} \left\| \sum_{i=1}^m y_i \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} v_{ij} \right) \right\|^p \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Luego, por la igualdad (1.12) para $r = p$, deducimos que

$$\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \|v_{ij}\|^p \right)^{1/p} \leq \gamma_q^{(p)}(E;m) \gamma_q^{(p)}(E;n) (mn)^{1/p-1/q} \left(\mathbb{E}_x \left\| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} v_{ij} \right\|^p \right)^{1/p}.$$

Concluimos, entonces, que se satisface la desigualdad (1.14) probando el lema. □

En el punto 4 de la Observación 1.22, vimos cómo expresar la noción de tipo p y cotipo q en función de los parámetros δ_p y γ_q. En lo que sigue, nos dedicaremos a dilucidar los vínculos entre tipo y $\delta_p^{(q)}$, y entre cotipo y $\gamma_q^{(p)}$ para el caso en que $p \neq q$.

Observación 1.24.

1. Sea E un espacio de Banach de tipo p con constante C. Entonces, dado $p \leq q \leq \infty$, tenemos que $\delta_p^{(q)} \leq C_q C$ donde C_q es la constante proveniente de la desigualdad

de Kahane-Khintchine (Teorema 1.13). Efectivamente, dados $n \in \mathbb{N}$ y vectores $\{v_j\}_{j=1}^n \in E$, aplicando la desigualdad de Kahane-Khintchine dos veces obtenemos

$$\left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j v_j\right\|^q\right)^{1/q} \leq C_q \mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j v_j\right\| \leq C_q \left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j v_j\right\|^p\right)^{1/p}.$$

Luego, como E tiene tipo p con constante C, resulta que

$$\left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j v_j\right\|^q\right)^{1/q} \leq C_q C \left(\sum_{j=1}^n \|v_j\|^p\right)^{1/p}.$$

Finalmente, por la desigualdad de Hölder deducimos que

$$\left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j v_j\right\|^q\right)^{1/q} \leq C_q C n^{1/p-1/q} \left(\sum_{j=1}^n \|v_j\|^q\right)^{1/q},$$

probando la afirmación.

2. Sea E un espacio de Banach de cotipo q con constante C. Entonces, dado $1 \leq p \leq q$, tenemos que $\gamma_q^{(p)} \leq C_q C$. La demostración de este hecho es análoga a la del punto 1 invirtiendo el sentido de las desigualdades. Explícitamente, dados $n \in \mathbb{N}$ y vectores $\{v_j\}_{j=1}^n \in E$, tenemos que

$$\left(\sum_{j=1}^n \|v_j\|^p\right)^{1/p} \leq n^{1/p-1/q} \left(\sum_{j=1}^n \|v_j\|^q\right)^{1/q} \leq C n^{1/p-1/q} \left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j v_j\right\|^q\right)^{1/q}$$
$$\leq C_q C n^{1/p-1/q} \left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j v_j\right\|^p\right)^{1/p}.$$

Cabe aclarar que esta cuenta es válida únicamente si $q < \infty$. Sin embargo, para el caso $q = \infty$ ya contamos con el punto 3 de la Observación 1.22 que garantiza que $\gamma_\infty^{(p)} \leq 1$.

La observación anterior prueba que tener tipo p (resp. cotipo q) es, en principio, más fuerte que satisfacer la condición $\delta_p^{(\cdot)} < \infty$ (resp. $\gamma_q^{(\cdot)} < \infty$). Luego, cabe preguntarse si vale la afirmación recíproca. La siguiente proposición nos permitirá responder a este interrogante.

Proposición 1.25. *Sea E un espacio de Banach y $1 \leq p < q \leq \infty$. Entonces:*

1. *E tiene tipo r para cierto $r > p$ si y sólo si existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\delta_p^{(q)}(E; n_0) < 1$.*

2. *Análogamente, E tiene cotipo s para cierto $s < q$ si y sólo si existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_q^{(p)}(E; n_0) < 1$.*

Demostración. Comencemos probando la primer afirmación. Si E tiene tipo r para cierto $r > p$, entonces $\delta_r^{(q)} < \infty$. Luego, tenemos que

$$\delta_p^{(q)}(E; n) n^{1/p-1/q} \leq \delta_r^{(q)} n^{1/r-1/q}.$$

Por lo tanto, deducimos que

$$\delta_p^{(q)}(E; n) \leq \delta_r^{(q)} n^{1/r-1/p} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Concluimos, entonces, que existe cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\delta_p^{(q)}(E; n_0) < 1$. Pasemos a demostrar la recíproca. Supongamos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ que cumple la condición $\delta_p^{(q)}(E; n_0) < 1$. Tomemos una constante $\theta > 0$ de manera tal que $\delta_p^{(q)}(E; n_0) = n_0^{-\theta}$ (notemos que $n_0 > 1$ pues siempre se tiene que $\delta_p^{(q)}(E; 1) = 1$). Por la submultiplicatividad del parámetro $\delta_p^{(q)}(E; n)$ (Lema 1.23), resulta que para todo $k \in \mathbb{N}$ se satisface la desigualdad

$$\delta_p^{(q)}(E; n_0^k) \leq n_0^{-k\theta}.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, tomemos el único k que cumple que $n_0^{k-1} \leq n < n_0^k$. Luego, como la expresión $\delta_p^{(q)}(E; n) n^{1/p-1/q}$ es creciente en n (punto 1 de la Obsevación 1.22), resulta

$$\begin{aligned}
\delta_p^{(q)}(E; n) n^{1/p-1/q} &\leq \delta_p^{(q)}(E; n_0^k) n_0^{k(1/p-1/q)} \leq n_0^{k(1/p-1/q-\theta)} \\
&\leq n_0^{1/p-1/q-\theta} n^{1/p-1/q-\theta}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando $C = n_0^{1/p-1/q-\theta}$, deducimos que

$$\delta_p^{(q)}(E; n) \leq C n^{-\theta}. \tag{1.15}$$

Sea $r > p$ suficientemente cercano a p, de manera tal que se satisfaga la condición $1/p - 1/r < \theta$. Además, fijemos vectores $\{v_j\}_{j=1}^n$ en E. Podemos suponer que la norma de los vectores es decreciente ($\|v_1\| \geq \|v_2\| \geq \ldots$) sin pérdida de generalidad. Por una cuestión notacional, tomaremos $v_j = 0$ para todo $j > n$. Aplicando la desigualdad (1.15), dado $k \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} x_j v_j \right\|^q \right)^{1/q} &\leq C 2^{(k-1)(1/p-1/q-\theta)} \left(\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \|v_j\|^q \right)^{1/q} \\ &\leq C 2^{(k-1)(1/p-\theta)} \left\| v_{2^{k-1}} \right\|. \qquad (1.16)\end{aligned}$$

Notemos que se cumple la desigualdad

$$2^{k-1} \left\| v_{2^{k-1}} \right\|^r \leq \sum_{j=1}^{2^{k-1}} \|v_j\|^r \leq \sum_{j=1}^{n} \|v_j\|^r .$$

Luego, deducimos que

$$\left\| v_{2^{k-1}} \right\| \leq 2^{-(k-1)/r} \left(\sum_{j=1}^{n} \|v_j\|^r \right)^{1/r}. \qquad (1.17)$$

Aplicando la cota anterior a la desigualdad (1.16), resulta que

$$\left(\mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} x_j v_j \right\|^q \right)^{1/q} \leq C 2^{(k-1)(1/p-1/r-\theta)} \left(\sum_{j=1}^{n} \|v_j\|^r \right)^{1/r}.$$

Finalmente, utilizando la desigualdad de Kahane-Khintchine y la desigualdad triangular para luego aplicar la cota anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \right\|^r \right)^{1/r} &\leq C_r \mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \right\| \leq C_r \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} x_j v_j \right\| \\ &\leq C_r \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} x_j v_j \right\|^q \right)^{1/q} \\ &\leq C_r C \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(k-1)(1/p-1/r-\theta)} \left(\sum_{j=1}^{n} \|v_j\|^r \right)^{1/r}.\end{aligned}$$

Como elegimos r de manera tal que se satisfaga la condición $1/p - 1/r - \theta < 0$, la sumatoria en k resulta convergente. Concluimos, entonces que E tiene tipo r como queríamos probar.

Pasemos a demostrar la segunda afirmación mediante un argumento similar. El hecho de que $\gamma_q^{(p)}(E;n_0) < 1$ para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$, si E tiene cotipo menor que q se prueba de forma análoga a lo realizado anteriormente. Supongamos, entonces, que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_q^{(p)}(E;n_0) < 1$. Luego, $\gamma_q^{(p)}(E;n_0) = n_0^{-\theta}$ para cierto $\theta > 0$. Por lo tanto, al igual que como vimos antes para la desigualdad (1.15), existe una constante C para la cual se cumple que

$$\gamma_q^{(p)}(E;n) \leq Cn^{-\theta}.$$

Tomando vectores $\{v_j\}_{j=1}^n$ en E como antes y extendiéndolos por 0 para $j > n$, para todo $k \in \mathbb{N}$ deducimos que

$$\left(\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \|v_j\|^p\right)^{1/p} \leq C2^{(k-1)(1/p-1/q-\theta)} \left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} x_j v_j\right\|^p\right)^{1/p}. \tag{1.18}$$

Notemos que fijado un $x \in \{-1,1\}^n$, para toda partición $A \cup B = \{1,\ldots,n\}$ se satisface la desigualdad

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j\in A} x_j v_j\right\|^p &= \left\|\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n x_j v_j + \frac{1}{2}\left(\sum_{j\in A} x_j v_j - \sum_{j\in B} x_j v_j\right)\right\|^p \\ &\leq \frac{1}{2}\left\|\sum_{j=1}^n x_j v_j\right\|^p + \frac{1}{2}\left\|\sum_{j\in A} x_j v_j - \sum_{j\in B} x_j v_j\right\|^p.\end{aligned}$$

Luego, como x_j y $(-x_j)$ tienen la misma distribución, tomando esperanza y raíz p-ésima en la desigualdad anterior nos queda

$$\left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j\in A} x_j v_j\right\|^p\right)^{1/p} \leq \left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j v_j\right\|^p\right)^{1/p}.$$

Aplicando lo anterior a la desigualdad (1.18), resulta

$$\left(\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \|v_j\|^p\right)^{1/p} \leq C2^{(k-1)(1/p-1/q-\theta)} \left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right\|^p\right)^{1/p}. \tag{1.19}$$

Por otro lado, sea $s < q$ suficientemente cercano a q, de manera tal que $s \geq p$ y se satisfaga la condición $1/s - 1/q < \theta$. Al igual que lo realizado en la desigualdad (1.17), tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \|v_j\|^s &\leq \|v_{2^{k-1}}\|^{s-p} \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \|v_j\|^p \\ &\leq 2^{-(k-1)p(1/p-1/s)} \left(\sum_{j=1}^{n} \|v_j\|^s\right)^{1-p/s} \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \|v_j\|^p .\end{aligned}$$

Luego, combinando lo anterior con la desigualdad (1.19), deducimos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \|v_j\|^s &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \|v_j\|^s \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} \|v_j\|^s\right)^{1-p/s} \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{-(k-1)p(1/p-1/s)} \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \|v_j\|^p\right) \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} \|v_j\|^s\right)^{1-p/s} C^p \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{(k-1)p(1/s-1/q-\theta)}\right) \mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right\|^p .\end{aligned}$$

Por lo tanto, elevando a la $1/p$ y reorganizando las expresiones, resulta

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n} \|v_j\|^s\right)^{1/s} &\leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{(k-1)p(1/s-1/q-\theta)}\right)^{1/p} \left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right\|^p\right)^{1/p} \\ &\leq C_p C \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{(k-1)p(1/s-1/q-\theta)}\right)^{1/p} \left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right\|^s\right)^{1/s} .\end{aligned}$$

Nuevamente, como elegimos s de manera tal que se satisfaga la condición $1/s-1/q-\theta < 0$, la sumatoria en k resulta convergente. Concluimos, entonces que E tiene cotipo s como queríamos probar. □

Como consecuencia de esta proposición obtenemos recíprocas parciales de las afirmaciones de la Observación 1.24.

Corolario 1.26. *Sea E un espacio de Banach.*

1. *(i) Supongamos que E tiene tipo p. Entonces, dado $p \leq q \leq \infty$, se tiene que $\delta_p^{(q)} < \infty$.*

   (ii) Recíprocamente, si $\delta_p^{(q)} < \infty$*, entonces* E *tiene tipo* p' *para todo* $p' < p$.

2. *(i) Supongamos que* E *tiene cotipo* q*. Entonces, dado* $1 \leq p \leq q$*, se tiene que* $\gamma_q^{(p)} < \infty$.

   (ii) Recíprocamente, si $\gamma_q^{(p)} < \infty$*, entonces* E *tiene cotipo* q' *para todo* $q' > q$.

Demostración. La primer afirmación del punto 1 fue probada en la Observación 1.24. En cuanto a la segunda, dado $p' < p$ tenemos que

$$\delta_{p'}^{(q)}(E;n)n^{1/p'-1/q} \leq \delta_p^{(q)} n^{1/p-1/q}.$$

Luego,

$$\delta_{p'}^{(q)}(E;n) \leq \delta_p^{(q)} n^{1/p-1/p'} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por lo tanto, por la Proposición 1.25, E tiene tipo r para cierto $r > p'$. Por la Observación 1.18 concluimos que E tiene tipo p', probando el primer punto. La demostración del punto 2 es análoga. $\square$

En vista del corolario anterior, la condición $\delta_p^{(q)} < \infty$ puede considerarse una versión débil del concepto de tipo p. En el Capítulo 2, una de las definiciones de tipo métrico (conocida como tipo métrico de Bourgain, Milman y Wolfson) surgirá, justamente, construyendo una versión métrica de la condición $\delta_p^{(2)} < \infty$. Análogamente, en el Capítulo 3, obtendremos una versión métrica de la condición $\gamma_q^{(p)} < \infty$ que llamaremos cotipo métrico (q, p).

1.4. Caracterización del tipo y el cotipo trivial

En esta sección caracterizaremos los espacios de Banach de tipo y cotipo triviales [6, cap. 11]. Comenzaremos probando que los espacios que contienen con distorsión acotada a las familias $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\ell_\infty^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tienen tipo trivial y cotipo trivial respectivamente. Luego, nos enfocaremos en demostrar la afirmación recíproca. Para ello, será necesario introducir el concepto de ultrafiltro y la construcción del ultraproducto de un espacio de Banach.

En primer lugar, recordemos las definiciones de ℓ_1^n y ℓ_∞^n.

Definición 1.12. Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos ℓ_1^n como el espacio $\mathbb{R}^n$ dotado de la norma 1. Análogamente, llamamos ℓ_∞^n al mismo espacio dotado de la norma ∞. Además, para cada $1 \leq j \leq n$ notaremos e_j a los vectores de la base canónica de cualquiera de los dos espacios.

Observación 1.27.

1. Sea E un espacio de Banach. Si E cumple la condición

$$C_E^\ell\left(\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) < \infty,$$

entonces tiene tipo trivial. En otras palabras, la contención de la familia $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ impide que un espacio de Banach tenga tipo mayor que uno. Para ver esto, tomemos una constante K mayor que la magnitud anterior. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe una transformación lineal inyectiva $T : \ell_1^n \to E$ de distorsión menor que K. Para todo $1 \leq j \leq n$ notemos $v_j := T(e_j)$. Luego, dado $p > 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}_x\left\|\sum_{j=1}^n x_j v_j\right\|_E^p\right)^{1/p} &= \left(\mathbb{E}_x\left\|T\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right)\right\|_E^p\right)^{1/p} \\ &\geq \frac{1}{\|T^{-1}\|}\left(\mathbb{E}_x\left\|\sum_{j=1}^n x_j e_j\right\|_1^p\right)^{1/p} = \frac{n}{\|T^{-1}\|}\end{aligned}$$

Suponiendo que E tiene tipo p con constante C, de la desigualdad anterior resulta que

$$\begin{aligned} n &\leq \left\|T^{-1}\right\|\left(\mathbb{E}_x\left\|\sum_{j=1}^n x_j v_j\right\|_E^p\right)^{1/p} \leq C\left\|T^{-1}\right\|\left(\sum_{j=1}^n \|v_j\|_E^p\right)^{1/p} \\ &\leq CK\left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|_1^p\right)^{1/p} = CKn^{1/p}.\end{aligned}$$

Como esta cota debería ser válida para todo $n \in \mathbb{N}$ deducimos que p no puede ser mayor que uno. Concluimos, entonces, que E tiene tipo trivial.

2. Mediante el mismo razonamiento que antes deducimos que si E cumple la condición

$$C_E^\ell\left(\{\ell_\infty^n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) < \infty,$$

entonces tiene cotipo trivial. En otras palabras, la contención de la familia $\{\ell_\infty^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ impide que un espacio de Banach tenga cotipo finito.

Nos proponemos probar que la contención de las familias $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\ell_\infty^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es el único impedimento de un espacio de Banach para tener tipo mayor que uno o cotipo finito respectivamente. Enunciaremos este resultado en los siguientes dos teoremas cuyas demostraciones se encuentran al final de la sección.

Teorema 1.28. *Sea E un espacio de Banach, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *E tiene tipo trivial;*

(ii) $C_E^\ell(\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 1$*;*

(iii) $C_E^\ell(\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}) < \infty$*.*

Teorema 1.29. *Sea E un espacio de Banach, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *E tiene cotipo trivial;*

(ii) $C_E^\ell(\{\ell_\infty^n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 1$*;*

(iii) $C_E^\ell(\{\ell_\infty^n\}_{n\in\mathbb{N}}) < \infty$*.*

Notemos que hemos probado la implicación *(iii)* $\implies$ *(i)* de ambos teoremas en la Observación 1.27. Dado que la implicación *(ii)* $\implies$ *(iii)* es inmediata, bastará probar que *(i)* $\implies$ *(ii)*. Para ello, será necesario contar con la noción de ultraproducto de un espacio de Banach que desarrollaremos en lo que sigue.

Definición 1.13. Dado un conjunto infinito I, decimos que un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathbb{P}(I)$ es un filtro en I, si satisface las siguientes condiciones:

- El conjunto vacío no pertenece a $\mathcal{F}$;
- si $A \subseteq B \subseteq I$ y $A \in \mathcal{F}$, entonces $B \in \mathcal{F}$;
- si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Además, llamaremos ultrafiltro a los filtros maximales con respecto a la inclusión, es decir, un filtro que no está propiamente contenido en ningún otro filtro. Por otro lado, dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, decimos que f converge a α a través del filtro $\mathcal{F}$ si para todo abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ que contiene a α se cumple que su preimagen $f^{-1}(U)$ pertenece a $\mathcal{F}$. En ese caso, notaremos

$$\lim_{\mathcal{F}} f = \alpha.$$

Observación 1.30.

1. Tanto la existencia de ultrafiltros como la propiedad de que todo filtro está incluido en un ultrafiltro se pueden deducir del Lema de Zorn. Más aún, los ultrafiltros quedan caracterizados al agregar a la definición de filtro la siguiente condición adicional:

   - para todo $A \subseteq I$ o bien $A \in \mathcal{F}$ o bien $A^c \in \mathcal{F}$.

2. Notemos que dado un ultrafiltro $\mathcal{U}$, toda función acotada $f : I \to \mathbb{R}$ converge a través de $\mathcal{U}$. Efectivamente, supongamos que $f(\mathbb{R}) \subseteq [-M, M]$ para cierto $M > 0$ pero no converge a ningún $\alpha \in \mathbb{R}$ a través de $\mathcal{U}$. Luego, para cada $\alpha \in [-M, M]$, existe un abierto $U_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ que contiene a α tal que su preimagen $f^{-1}(U_\alpha)$ no pertenece a $\mathcal{U}$. Por la compacidad del conjunto $[-M, M]$, existen finitos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [-M, M]$ de manera tal que

$$[-M, M] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}.$$

   Para todo $1 \leq j \leq n$, como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro y $f^{-1}(U_{\alpha_j}) \notin \mathcal{U}$, deducimos que $f^{-1}(U_{\alpha_j})^c \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, como los filtros son cerrados por intersecciones finitas resulta que

$$\varnothing = f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{n} U_{\alpha_j}\right)^c = \bigcap_{j=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_j})^c \in \mathcal{U},$$

   lo cual es absurdo. Concluimos, entonces que las funciones acotadas siempre convergen a través de un ultrafiltro.

3. Los límites a través de filtros se comportan de la misma forma que los límites usuales en cuanto a sumas, productos y composición con funciones continuas.

En adelante, nos limitaremos al caso particular en que $I = \mathbb{N}$ y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro que contiene a todos los conjuntos de la forma $\{n, n+1, \ldots\}$ con $n \in \mathbb{N}$. En este contexto, las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ serán simplemente sucesiones a valores en $\mathbb{R}$.

Definición 1.14. Sean E un espacio de Banach y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ como antes. Definimos el espacio de Banach de sucesiones acotadas

$$\ell_\infty(E) := \left\{ \{v_k\}_{k=1}^\infty \subseteq E : \sup_{k\in\mathbb{N}} \|v_k\| < \infty \right\} \text{ con norma } \left\|\{v_k\}_{k=1}^\infty\right\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} \|v_k\|,$$

y el subespacio (cerrado)

$$c_{0,\mathcal{U}}(E) := \left\{ \{v_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \ell_\infty(E) : \lim_{\mathcal{U}} \|v_k\| = 0 \right\}.$$

Llamaremos ultraproducto de E al cociente de estos espacios y lo notaremos $E_{\mathcal{U}}$. El ultraproducto resulta un espacio de Banach al dotarlo de la norma cociente definida por

$$\|[\{v_k\}_{k=1}^\infty]\|_{\mathcal{U}} := \inf_{u\in c_{0,\mathcal{U}}(E)} \sup_{k\in\mathbb{N}} \|v_k - u_k\| = \lim_{\mathcal{U}} \|v_k\| \text{ para todo } [\{v_k\}_{k=1}^\infty] \in E_{\mathcal{U}}.$$

La prueba de esta última identidad es directa por lo que nos permitiremos omitirla.

Nuestro próximo objetivo será probar que para todo espacio de Banach E y todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ como antes, el ultraproducto $E_{\mathcal{U}}$ es finitamente representable en E. Para ello necesitaremos una definición y un lema previos.

Definición 1.15. Sea S un espacio métrico, $\{v_j\}_{j=1}^n$ un conjunto finito de elementos de S y $\varepsilon > 0$. Decimos que los vectores $\{v_j\}_{j=1}^n$ forman una ε-red en S si se satisface la inclusión

$$S \subseteq \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(v_j).$$

Lema 1.31. *Sean E y F espacios de Banach con F de dimensión finita, $0 < \varepsilon < 1/3$ y $\{v_j\}_{j=1}^n$ una ε-red en la esfera unitaria $S_F := \{v \in F : \|v\|_F = 1\}$. Supongamos que* *una transformación lineal $T : F \to E$ satisface que $1 - \varepsilon \leq \|T(v_j)\|_E \leq 1 + \varepsilon$ para todo $1 \leq j \leq n$. Entonces, se tiene que*

$$\operatorname{dist}(T) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-3\varepsilon}.$$

Demostración. Dado $v \in S_F$, como $\{v_j\}_{j=1}^n$ es una ε-red en S_F, existe $1 \leq j \leq n$ tal que $\|v - v_j\|_F < \varepsilon$. Luego, se cumple la desigualdad

$$\|T(v)\|_E \leq \|T(v - v_j)\|_E + \|T(v_j)\|_E \leq \|T\| \varepsilon + 1 + \varepsilon.$$

Por lo tanto, deducimos

$$\|T\| \leq \|T\| \varepsilon + 1 + \varepsilon,$$

y entonces,

$$\|T\| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Este útimo paso es válido, dado que $\|T\| < \infty$ por ser F de dimensión finita. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \|T(v)\|_E &\geq \|T(v_j)\|_E - \|T(v - v_j)\|_E \geq 1 - \varepsilon - \|T\| \varepsilon \\ &\geq 1 - \varepsilon - \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\varepsilon = \frac{1-3\varepsilon}{1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Luego, T es inyectiva y resulta

$$\|T^{-1}\| \leq \frac{1-\varepsilon}{1-3\varepsilon},$$

probando el lema. □

Proposición 1.32. *Dados E un espacio de Banach y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, el ultraproducto $E_{\mathcal{U}}$ es finitamente representable en E.*

Demostración. Sea $F \subseteq E_{\mathcal{U}}$ un subespacio de dimensión finita. Tomando representantes en $\ell_\infty(E)$ para cierta base de F, podemos construir un espacio $\tilde{F}$ incluido en $\ell_\infty(E)$ isomorfo a F. Dado $0 < \varepsilon < 1/3$, tomemos $\{\varphi_j\}_{j=1}^n \subseteq \tilde{F}$ de manera tal que $\{[\varphi_j]\}_{j=1}^n$ forme una ε-red en la esfera unitaria S_F. Fijado $1 \leq j \leq n$, tenemos que

$$\lim_{\mathcal{U}} \|\varphi_j(k)\|_E = \|[\varphi_j]\|_{\mathcal{U}} = 1$$

Luego, existe cierto $A_j \in \mathcal{U}$ tal que para todo $k \in A_j$ se satisface la desigualdad $1-\varepsilon < \|\varphi_j(k)\|_E < 1+\varepsilon$. Tomemos A como la intersección de todos los A_j. Como la intersección es finita, resulta que $A \in \mathcal{U}$ y por lo tanto es no vacío. En consecuencia, fijado cierto $k \in A$, se cumple que $1-\varepsilon < \|\varphi_j(k)\|_E < 1+\varepsilon$ para todo $1 \leq j \leq n$. Sea $T : F \to E$ la transformación lineal definida por

$$T([\varphi]) \coloneqq \varphi(k) \quad \text{para todo elemento } \varphi \in \tilde{F}.$$

Como T está en las condiciones del lema anterior, deducimos que

$$\operatorname{dist}(T) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-3\varepsilon}.$$

Por último, como esta cota es arbitrariamente cercana a uno, concluimos que $C_E^{\ell}(F) = 1$ de donde la proposición se sigue. □

Finalizamos esta sección con las pruebas de los Teoremas 1.28 y 1.29.

Demostración del Teorema 1.28. Como vimos luego de enunciar este resultado, la implicación *(iii)* $\implies$ *(i)* fue probada en la Observación 1.27. Dado que la implicación *(ii)* $\implies$ *(iii)* es inmediata, bastará demostrar que *(i)* $\implies$ *(ii)*. Dado $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, será suficiente probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que ℓ_1^n está isométrciamente incluido en $E_{\mathcal{U}}$. A partir de este resultado, el teorema se deduce de la proposición anterior. Efectivamente, como $E_{\mathcal{U}}$ es finitamente representable en E, lo anterior implicará que $C_E^{\ell}(\ell_1^n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ como buscamos demostrar. Comencemos, entonces, fijando un $n \in \mathbb{N}$. Notemos que como E tiene tipo trivial, por la Proposición 1.25 para $p = 1$ y $q = 2$, tenemos que $\delta_1^{(2)}(E; n) \geq 1$. Luego, la igualdad se deduce como consecuencia del punto 2 de la Observación 1.22. Por lo tanto, para todo conjunto de vectores $\{v_j\}_{j=1}^n$ en E, resulta que

$$\left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j v_j\right\|_E^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{n} \left(\sum_{j=1}^n \|v_j\|_E^2\right)^{1/2}.$$

Más aún, esta cota es óptima. En consecuencia, para todo $k \in \mathbb{N}$ existirán vectores $\{v_{j,k}\}_{j=1}^n$ en E que satisfagan las condiciones

$$n - \frac{1}{k} \leq \left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j v_{j,k}\right\|_E^2\right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \left(\sum_{j=1}^n \|v_{j,k}\|_E^2\right)^{1/2} = \sqrt{n}. \tag{1.20}$$

Aplicando la desigualdad triangular y luego la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$n - \frac{1}{k} \leq \left(\mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j v_{j,k} \right\|_E^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{j=1}^{n} \|v_{j,k}\|_E \leq \sqrt{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \|v_j\|_E^2 \right)^{1/2} = n \qquad (1.21)$$

Por otro lado, para cada $1 \leq j \leq n$, definimos el elemento $\varphi_j := \{v_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$ en $\ell_\infty(E)$. Nos permitiremos un pequeño abuso de notación llamando también φ_j a su clase en $E_{\mathcal{U}}$. El teorema quedará probado al ver que la identificación de cada φ_j con $e_j \in \ell_1^n$ determina un isomorfismo isométrico entre $\langle \varphi_j \rangle_{j=1}^n$ y ℓ_1^n. A partir de la segunda condición en (1.20) deducimos que

$$\sqrt{n} = \lim_{\mathcal{U}} \sqrt{n} = \lim_{\mathcal{U}} \left(\sum_{j=1}^{n} \|v_{j,k}\|_E^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_{\mathcal{U}}^2 \right)^{1/2}. \qquad (1.22)$$

Veamos además que

$$n = \left(\mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j \right\|_{\mathcal{U}}^2 \right)^{1/2} = \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_{\mathcal{U}}.$$

Dado un abierto $U \in \mathbb{R}$ que contiene a n, existe un k_0 tal que para todo $k \geq k_0$ se cumple que $[n - 1/k, n] \subseteq U$. Luego, por la cota (1.21) tenemos que

$$\{k_0, k_0 + 1, \ldots\} \subseteq \left\{ k \in \mathbb{N} : \left(\mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j v_{j,k} \right\|_E^2 \right)^{1/2} \in U \right\},$$

y

$$\{k_0, k_0 + 1, \ldots\} \subseteq \left\{ k \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^{n} \|v_{j,k}\|_E \in U \right\}.$$

Como $\{k_0, k_0 + 1, \ldots\}$ pertenece a $\mathcal{U}$, cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$ que contenga a $\{k_0, k_0 + 1, \ldots\}$ también estará en el ultrafiltro. Por lo tanto, resulta que

$$n = \lim_{\mathcal{U}} \left(\mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j v_{j,k} \right\|_E^2 \right)^{1/2} = \left(\mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j \right\|_{\mathcal{U}}^2 \right)^{1/2}, \qquad (1.23)$$

y

$$n = \lim_{\mathcal{U}} \sum_{j=1}^{n} \|v_{j,k}\|_E = \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_{\mathcal{U}}. \tag{1.24}$$

Aplicando las igualdades (1.22) y (1.24), deducimos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \left(\|\varphi_j\|_{\mathcal{U}} - 1\right)^2 &= \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_{\mathcal{U}}^2 - 2\sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_{\mathcal{U}} + \sum_{j=1}^{n} 1 \\ &= n - 2n + n = 0.\end{aligned}$$

Esto implica que $\|\varphi_j\|_{\mathcal{U}} = 1$ para todo $1 \leq j \leq n$. Por otra parte, aplicando la desigualdad triangular y la ecuación (1.24), para todo $x \in \{-1,1\}^n$ resulta

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j \right\|_{\mathcal{U}} \leq \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_{\mathcal{U}} = n.$$

Debido a la igualdad (1.23), no es posible que la desigualdad anterior sea estricta para ningún x. Luego, para todo $x \in \{-1,1\}^n$ tenemos que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j \right\|_{\mathcal{U}} = n. \tag{1.25}$$

Por último, dado $a \in \ell_1^n$ con $-1 \leq a_1, \ldots, a_n \leq 1$, tomemos $x \in \{-1,1\}^n$ tal que $x_j = \operatorname{sgn}(a_j)$ para todo $1 \leq j \leq n$. Notemos que se satisface la desigualdad

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j \right\|_{\mathcal{U}} \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j| \, \|\varphi_j\|_{\mathcal{U}} = \sum_{j=1}^{n} |a_j| = \|a\|_1.$$

Recíprocamente, por la ecuación (1.25) se cumple que

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j \right\|_{\mathcal{U}} &\geq \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j \right\|_{\mathcal{U}} - \left\| \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j) \varphi_j \right\|_{\mathcal{U}} \\ &\geq n - \sum_{j=1}^{n} (1 - |a_j|) \, \|\varphi_j\|_{\mathcal{U}} = \sum_{j=1}^{n} |a_j| = \|a\|_1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que $\langle \varphi_j \rangle_{j=1}^n$ es isométricamente isomorfo a ℓ_1^n como buscábamos. $\square$

Demostración del Teorema 1.29. La prueba es análoga a la del Teorema 1.28 por lo que omitiremos algunos detalles. En primer lugar, recordamos que la implicación *(iii)* $\Longrightarrow$ *(i)* fue probada en la Observación 1.27 y la implicación *(ii)* $\Longrightarrow$ *(iii)* es inmediata. Pasemos a demostrar que *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)*. Al igual que antes, por la Proposición 1.25 para $p = 2$ y $q = \infty$ y el punto 3 de la Observación 1.22, tenemos que $\gamma_\infty^{(2)}(E; n) = 1$. En consecuencia, para todo $k \in \mathbb{N}$ existirán vectores $\{v_{j,k}\}_{j=1}^n$ en E que satisfagan las condiciones

$$\left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j v_{j,k}\right\|_E^2\right)^{1/2} \leq 1 + \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad \left(\sum_{j=1}^n \|v_{j,k}\|_E^2\right)^{1/2} = \sqrt{n}. \tag{1.26}$$

Como vimos durante la prueba del punto 3 de la Observación 1.22, para todo $1 \leq i \leq n$ tenemos que

$$\|v_{i,k}\|_E \leq \left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j v_{j,k}\right\|_E^2\right)^{1/2}.$$

Además, por la segunda condición en (1.26), debe existir cierto $1 \leq i \leq n$ tal que $\|v_{i,k}\|_E \geq 1$. Luego, deducimos que

$$1 \leq \max_{1\leq j\leq n} \|v_{j,k}\|_E \leq \left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j v_{j,k}\right\|_E^2\right)^{1/2} \leq 1 + \frac{1}{k}.$$

Definiendo φ_j como en el teorema anterior, obtenemos

$$\sqrt{n} = \left(\sum_{j=1}^n \|\varphi_j\|_{\mathcal{U}}^2\right)^{1/2}, \quad \text{y} \quad 1 = \max_{1\leq j\leq n} \|\varphi_j\|_{\mathcal{U}} = \left(\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j \varphi_j\right\|_{\mathcal{U}}^2\right)^{1/2}.$$

De las primeras dos igualdades, resulta que $\|\varphi_j\|_{\mathcal{U}} = 1$ para todo $1 \leq j \leq n$. Por otro lado, notemos que se satisface la desigualdad

$$2 = \mathbb{E}_x \|2x_1\varphi_1\|_{\mathcal{U}} \leq \mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j\varphi_j\right\|_{\mathcal{U}} + \mathbb{E}_x \left\|x_1\varphi_1 + \sum_{j=2}^n (-x_j)\varphi_j\right\|_{\mathcal{U}} = 2\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j\varphi_j\right\|_{\mathcal{U}}.$$

Luego, deducimos que

$$0 \leq \mathbb{E}_x \left(\left\|\sum_{j=1}^n x_j\varphi_j\right\|_{\mathcal{U}} - 1\right)^2 = \mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j\varphi_j\right\|_{\mathcal{U}}^2 - 2\mathbb{E}_x \left\|\sum_{j=1}^n x_j\varphi_j\right\|_{\mathcal{U}} + 1 \leq 0.$$

Por lo tanto, para todo $x \in \{-1,1\}^n$ tenemos que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j \right\|_{\mathcal{U}} = 1. \tag{1.27}$$

Sea $f : [-1,1]^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(a) := \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j v_{j,k} \right\|_E .$$

Notemos que f es una función convexa definida sobre $[-1,1]^n$ que es el convexo generado por los vértices $\{-1,1\}^n$. Deducimos, entonces, que f alcanza un máximo en $\{-1,1\}^n$. En consecuencia, por la ecaución (1.27) resulta que $f(a) \leq 1$ para todo $a \in [-1,1]^n$. Luego, para todo $a \in \ell_\infty^n$ no nulo, nos queda que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\|a\|_\infty} \varphi_j \right\|_{\mathcal{U}} = f\left(\frac{a}{\|a\|_\infty} \right) \leq 1;$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j \right\|_{\mathcal{U}} \leq \|a\|_\infty .$$

Recíprocamente, suponiendo sin pérdida de generalidad que a alcanza su norma infinito en la primer coordenada, se cumple que

$$\begin{aligned} 2\|a\|_\infty = \|2a_1\varphi_1\|_{\mathcal{U}} &\leq \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j \right\|_{\mathcal{U}} + \left\| a_1\varphi_1 + \sum_{j=1}^{n} (-a_j)\varphi_j \right\|_{\mathcal{U}} \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j \right\|_{\mathcal{U}} + \|a\|_\infty . \end{aligned}$$

Luego, deducimos que

$$\|a\|_\infty \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j \right\|_{\mathcal{U}} .$$

Por lo tanto, concluimos que $\langle \varphi_j \rangle_{j=1}^n$ es isométricamente isomorfo a ℓ_∞^n como buscábamos. $\square$

En los capítulos siguientes, nos propondremos hallar versiones métricas de los conceptos y resultados vistos hasta el momento. En particular, en el marco del segundo paso del *Programa de Ribe*, expondremos análogos métricos de los Teoremas 1.28 y 1.29 que acabamos de probar.

Capítulo 2

Tipo métrico

En este capítulo trataremos versiones métricas del concepto de tipo y sus aplicaciones. En primer lugar, introduciremos la noción de tipo métrico de Enflo [8] cuya definición brinda un ejemplo claro de la construcción de una versión métrica a partir de un concepto lineal. En segundo lugar, presentaremos una definición de tipo métrico algo más compleja brindada por Bourgain, Milman y Wolfson en [9], con la cual realizaremos todo el desarrollo posterior. A continuación, probaremos que restringiéndonos a los espacios de Banach, las nociones de tipo y tipo métrico coinciden parcialmente. Finalmente, demostraremos un análogo métrico del Teorema 1.28 caracterizando los espacios de tipo métrico trivial.

2.1. Tipo métrico de Enflo

Buscamos generalizar la definición de tipo. Para ello recordemos la definición original.

Definición 1.8. Decimos que un espacio de Banach E tiene tipo p con $1 \leq p \leq 2$, si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo conjunto finito de vectores $\{v_j\}_{j=1}^n$ en E se satisface la desigualdad

$$\left(\mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^n x_j v_j \right\|^p\right)^{1/p} \leq C \left(\sum_{j=1}^n \|v_j\|^p\right)^{1/p}. \tag{1.10}$$

Comentario 2.1. Durante este capítulo trabajaremos con el espacio $\{-1,1\}^n$ dotado siempre de la medida μ de equiprobabilidad y notaremos x e y a sus elementos.

Como vimos en la Observación 1.20, esta definición compara p-promedio de la longitud de las diagonales del paralelepípedo de vértices $\sum_{j=1}^n x_j v_j$ con la p-suma de la longitud de sus lados. Esto se ve explícitamente reescribiendo la desigualdad (1.10) de la forma

$$\left(\mathbb{E}\left\|2\sum_{j=1}^n x_j v_j\right\|^p\right)^{1/p} \leq C\left(\sum_{j=1}^n \|2v_j\|^p\right)^{1/p};$$

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n x_j v_j - \sum_{j=1}^n (-x_j) v_j\right\|^p\right)^{1/p} \leq C\left(\sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1} x_i v_i - \left(-x_j v_j + \sum_{i\neq j}^n x_i v_i\right)\right\|^p\right)^{1/p}. \tag{2.1}$$

Para obtener una definición exclusivamente métrica deberíamos modificar la expresión (2.1) para no apelar a la estructura vectorial del espacio. Dados $(v_j)_{j=1}^n$ definamos el vector aleatorio $f : \{-1,1\}^n \to E$ por $f(x) = \sum_{j=1}^n x_j v_j$ para todo $x \in \{-1,1\}^n$. Es claro que podemos reescribir el lado izquierdo de la desigualdad (2.1) en términos de la función f. En cuanto al lado derecho observemos que,

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1} x_i v_i - \left(-x_j v_j + \sum_{i\neq j}^n x_i v_i\right)\right\|^p = \mathbb{E}\left\|f(x) - f(x_1,\ldots,x_{j-1},-x_j,x_{j+1},\ldots,x_n)\right\|^p.$$

Luego, reemplazando en (2.1) nos queda,

$$\left(\mathbb{E}\|f(x)-f(-x)\|^p\right)^{1/p} \leq C\left(\sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left\|f(x) - f(x_1,\ldots,x_{j-1},-x_j,x_{j+1},\ldots,x_n)\right\|^p\right)^{1/p}, \tag{2.2}$$

donde $-x = (-x_j)_{j=1}^n$. Consideremos ahora d la distancia inducida por la norma en E e introduzcamos la siguiente notación:

$$\Delta f(x) := d\left(f(x), f(-x)\right),$$

y

$$\Delta_j f(x) := d\left(f(x), f(x_1,\ldots,x_{j-1},-x_j,x_{j+1},\ldots,x_n)\right).$$

Reescribiendo la desigualdad (2.2) en estos términos obtenemos:

$$\mathbb{E}\left[(\Delta f)^p\right]^{1/p} \leq C\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[(\Delta_j f)^p\right]\right)^{1/p}. \tag{2.3}$$

Observemos que la ecuación (2.3) aún apela a la estructura vectorial del espacio ya que la misma función f no es arbitraria sino que está definida en términos de combinaciones lineales. Con el objetivo de remarcar esta distinción, procederemos a enunciar la noción de cubo para espacios métricos.

Definición 2.1. Sea (E,d) un espacio métrico. Un cubo de dimensión n para $n \in \mathbb{N}$ es un vector aleatorio $f:\{-1,1\}^n \to E$ arbitrario. Dado un cubo f, definimos además una estructura interna identificando ciertos pares de vértices como lados y ciertos otros como diagonales.

- Decimos que un par $(f(x), f(y))$ con $x, y \in \{-1,1\}^n$ es un lado j-ésimo del cubo, con $1 \leq j \leq n$, si $x_i = y_i$ para $i \neq j$ y $x_j = -y_j$. Es decir que x e y difieren únicamente en la coordenada j-ésima.

- Decimos que un par $(f(x), f(y))$ con $x, y \in \{-1,1\}^n$ es una diagonal del cubo si $y = -x$.

Finalmente, dado $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, definimos un cubo lineal como un cubo $f:\{-1,1\}^n \to E$ tal que $f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$ para ciertos $\{v_j\}_{j=1}^{n}$ en E.

Observación 2.2. Por lo visto hasta aquí, un espacio de Banach E tiene tipo p si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que para todo cubo lineal f,

$$\mathbb{E}\left[(\Delta f)^p\right]^{1/p} \leq C\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[(\Delta_j f)^p\right]\right)^{1/p}. \tag{2.4}$$

Esta reformulación de la definición de tipo sugiere una posible noción de tipo métrico brindada por Enflo que consiste en retirar el requerimiento de linealidad del cubo f.

Definición 2.2. Sea (E,d) un espacio métrico. Decimos que E tiene tipo (métrico) de Enflo p para cierto $1 \leq p \leq 2$ si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo cubo $f:\{-1,1\}^n \to E$, se cumple

$$\mathbb{E}\left[(\Delta f)^p\right]^{1/p} \leq C\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[(\Delta_j f)^p\right]\right)^{1/p}. \tag{2.5}$$

Observación 2.3. En términos geométricos, la condición de tipo de Enflo p tiene una interpretación análoga al caso lineal reemplazando los paralelepípedos por cubos arbitrarios. Específicamente, la desigualdad de la definición anterior acota el p-promedio de la longitud de las diagonales de cualquier cubo f en términos de la p-suma del p-promedio de la longitud de sus lados j-ésimos. (En el caso lineal sólo aparece la p-suma de los lados pues fijado j, todos los lados j-ésimos miden igual.)

Observación 2.4. Restringiéndonos a los espacios de Banach, tener tipo de Enflo p es en principio más fuerte que tener tipo p. Los espacios de Banach de tipo de Enflo p cumplen para cualquier cubo lo que los espacios de Banach de tipo p sólo cumplen para cubos lineales. Geométricamente, que un espacio tenga tipo de Enflo p requiere que la cota de las diagonales en términos de los lados se dé para cualquier cubo no lineal, mientras que para tener tipo p sólo requerimos la validez de la cota para cubos lineales cuya imagen es un paralelepípedo y cuyos lados y diagonales coinciden con las del paralelepípedo en el sentido usual. Si bien se conjetura que para espacios de Banach las dos nociones son equivalentes, aún no se ha podido probar. El resultado que sí es sabido es que tipo p implica tipo de Enflo p' para todo $1 \leq p' < p$. Sin embargo, cabe aclarar que existe una versión más compleja, llamada *tipo de Enflo escalado* para la cual sí se ha podido probar la equivalencia con la definición de tipo [10].

Hemos presentado hasta aquí la noción de tipo de Enflo cuya definición resulta muy intuitiva una vez que hemos desglosado y despojado paulatinamente los rasgos lineales de la definición de tipo. Sin embargo, para lo que sigue necesitaremos otra noción de tipo métrico algo más compleja que introduciremos a continuación.

2.2. Tipo métrico de Bourgain, Milman y Wolfson

Para construir la noción de tipo de Enflo, partimos directamente de la definición de tipo. Esta vez tomaremos como punto de partida el Corolario 1.26 que caracterizaba parcialmente la propiedad de tener tipo p. En dicho corolario se afirma que un espacio de Banach de tipo p satisface que $\delta_p^{(q)} < \infty$ para todo $p \leq q \leq \infty$ y recíprocamente, de valer esa desigualdad, el espacio tiene tipo p' para todo $1 \leq p' < p$. Un procedimiento análogo al realizado para el tipo de Enflo aplicado a la desigualdad de la definición de

$\delta_p^{(2)}$, inspira la noción de tipo métrico brindada por Bourgain, Milman y Wolfson.

Definición 2.3. Sea (E, d) un espacio métrico. Decimos que E tiene tipo métrico (o tipo BMW) p para cierto $1 \leq p \leq 2$ si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo cubo $f : \{-1, 1\}^n \to E$, se tiene

$$\mathbb{E}\left[(\Delta f)^2\right]^{1/2} \leq C n^{1/p-1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[(\Delta_j f)^2\right]\right)^{1/2}. \tag{2.6}$$

Comentario 2.5. Si bien todo lo expuesto en lo que resta del capítulo fue probado originalmente por Bourgain, Milman y Wolfson en [9], seguiremos las ideas de Pisier que simplificó considerablemente las demostraciones en [11].

Observación 2.6.

- Es claro que tipo métrico p implica tipo métrico p' para todo $p' < p$, pues $n^{1/p-1/2} < n^{1/p'-1/2}$.
- En el caso $p = 2$, las definiciones de tipo métrico y tipo de Enflo coinciden.
- Como consecuencia de la desigualdad triangular se tiene que todo espacio métrico tiene tipo métrico 1 con constante $C = 1$. En efecto, dada $f : \{-1, 1\}^n \to E$, usando la desigualdad triangular y la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos para cada $x \in \{-1, 1\}^n$,

  $$\Delta f(x)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \Delta_j f(x)\right)^2 \leq n \sum_{j=1}^{n} \Delta_j f(x)^2.$$

  Promediando sobre $x \in \{-1, 1\}^n$ resulta:

  $$\mathbb{E}\left[(\Delta f)^2\right]^{1/2} \leq n^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[(\Delta_j f)^2\right]\right)^{1/2}.$$

Observación 2.7. Idealmente, para completar el primer paso del *Programa de Ribe* deberíamos probar que para espacios de Banach las definiciones de tipo y tipo métrico son equivalentes. Sin embargo, sólo se ha podido probar que tipo p implica tipo métrico p' para todo $1 \leq p' < p$ y que tipo métrico p implica tipo p' para todo $1 \leq p' < p$. Esta última implicación es una conscuencia directa del Corolario 1.26. Un espacio de Banach E con tipo métrico p cumple la condición (2.6) para todo cubo, en particular para cubos lineales, lo cual es equivalente a que $\delta_p^{(2)} < C$. Aplicando el corolario obtenemos que E tiene tipo p' para todo $1 \leq p' < p$. Queda por probar la otra afirmación, que enunciaremos en el siguiente teorema.

Teorema 2.8. *Sea E un espacio de Banach de tipo p, entonces E es de tipo métrico p' para todo $1 \leq p' < p$.*

El Teorema 2.8 es una consecuencia directa de un lema probado por Pisier que presentaremos luego de introducir algo de notación.

Notación 2.4. Dado E un espacio de Banach y $f : \{-1,1\}^n \to E$ un cubo arbitrario, definimos para cada $1 \leq j \leq n$,

$$\partial_j f(x) := \frac{f(x) - f(x_1, \ldots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)}{2x_j}.$$

Lema 2.9 (Lema de Pisier)**.** *Sea E un espacio de Banach. Se tiene la siguiente desigualdad para todo $p \geq 1$, todo $n > 1$ y todo cubo arbitrario $f : \{-1,1\}^n \to E$:*

$$\mathbb{E}\left[\|f - \mathbb{E}[f]\|^p\right]^{1/p} \leq 2e\log(n)\mathbb{E}_{x,y}\left[\left\|\sum_{j=1}^n y_j \partial_j f(x)\right\|^p\right]^{1/p}, \tag{2.7}$$

donde $x, y \in \{-1,1\}^n$ y el subíndice de la esperanza indica sobre qué variables se toma el promedio.

Observación 2.10. Notemos que la desigualdad (2.7) acota una magnitud dependiente de un cubo arbitrario f por una magnitud dependiente de un cubo lineal $\sum_{j=1}^n y_j \partial_j f(x)$. Será este el vínculo por el cual podremos pasar de una propiedad válida para los cubos lineales a una propiedad válida para todos los cubos.

Siguiendo esta idea probamos a continuación el Teorema 2.8.

Demostración del Teorema 2.8. Recordemos que por el Corolario 1.26 existe una constante $C_0 > 0$ tal que para todo conjunto finito de vectores $\{v_j\}_{j=1}^n$ en E,

$$\left(\mathbb{E}_y \left\|\sum_{j=1}^n y_j v_j\right\|^2\right)^{1/2} \leq C_0 n^{1/p-1/2} \left(\sum_{j=1}^n \|v_j\|^2\right)^{1/2}.$$

Sea $f : \{-1,1\}^n \to E$ un cubo arbitrario. Por lo visto en la Sección 1.2, podemos considerar a f como un elemento del espacio $L^2(\mu, E)$ (con μ la medida de equiprobabilidad en $\{-1,1\}^n$). De la misma forma, pensamos a la función de dos variables $\sum_{j=1}^n y_j \partial_j f(x)$ como elemento de $L^2(\mu \times \mu, E)$. En consecuencia, es posible reformular el enunciado del Lema 2.9 para el caso $p = 2$ en términos de las normas de dichas funciones en los espacios mencionados. Concretamente, la desigualdad (2.7) del lema resulta en:

$$\|f - \mathbb{E}f\|_{L^2(\mu,E)} \leq 2e \log(n) \left\| \sum_{j=1}^n y_j \partial_j f(x) \right\|_{L^2(\mu\times\mu,E)}.$$

Aplicando la desigualdad anterior obtenemos,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(\Delta f)^2\right]^{1/2} &= \|f(x) - f(-x)\|_{L^2(\mu,E)} \leq 2\,\|f - \mathbb{E}f\|_{L^2(\mu,E)} \\
&\leq 4e \log(n) \left\| \sum_{j=1}^n y_j \partial_j f(x) \right\|_{L^2(\mu\times\mu,E)} \\
&= 4e \log(n) \mathbb{E}_{x,y} \left[\left\| \sum_{j=1}^n y_j \partial_j f(x) \right\|^2 \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Usando aquí el Corolario 1.26 con $v_j = \partial_j f(x)$ la desigualdad nos queda,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(\Delta f)^2\right]^{1/2} &\leq 4e \log(n) \mathbb{E}_x \left[C_0^2 n^{2/p-1} \sum_{j=1}^n \|\partial_j f(x)\|^2 \right]^{1/2} \\
&= 4e \log(n) C_0 n^{1/p-1/2} \mathbb{E}_x \left[\sum_{j=1}^n \|\partial_j f(x)\|^2 \right]^{1/2} \\
&= C_1 \log(n) n^{1/p-1/2} \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\Delta_j f}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \\
&= C_2 \log(n) n^{1/p-1/2} \left(\sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left[(\Delta_j f)^2\right] \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Basta con notar que para todo $1 \leq p' < p$ existe una constante C tal que se cumple la condición $\log(n) n^{1/p-1/2} < C n^{1/p'-1/2}$ y el teorema queda demostrado. $\square$

Observación 2.11. Notemos que de no ser por el factor $\log(n)$ del Lema 2.9, habríamos podido probar en el teorema anterior que tipo p implica tipo métrico p (y también tipo de Enflo p con una cuenta similar). Si bien es sabido que dicho factor no puede ser removido para cualquier espacio de Banach, se conjetura que esto es posible para los de tipo p [4].

Finalizamos esta sección con la prueba del Lema de Pisier que había quedado pendiente.

Demostración del Lema 2.9. Sin pérdida de generalidad podemos asumir E de dimensión finita pues la imagen de f es finita. Luego, como vimos en el capítulo anterior, se tiene que $L^p(\mu, E)^* = L^q(\mu, E^*)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. (Notaremos $\|.\|_p$ y $\|.\|_q$ a la norma en $L^p(\mu, E)$ y $L^q(\mu, E^*)$ respectivamente.) Podemos suponer además que $\mathbb{E}[f] = 0$ dado que $\partial_j f$ no varía al trasladar a f en una constante. Por lo tanto, usando la notación anterior, la desigualdad (2.7) se reduce a probar:

$$\|f\|_p \leq 2e \log(n) \left\| \sum_{j=1}^{n} y_j \partial_j f(x) \right\|_{L^p(\mu \times \mu, E)}.$$

Sea $g : \{-1,1\}^n \to E^*$ un cubo en el dual de E. Escribimos su desarrollo de Fourier sobre el sistema de Walsh, $g = \sum_{A \subseteq \{1,\dots,n\}} w_A g_A$ donde $g_A = \mathbb{E}[w_A g]$ (ver Sección 1.2). Dado $0 \leq \varepsilon \leq 1$, definimos:

$$g_\varepsilon : \{-1,1\}^n \times \{-1,1\}^n \to E^* \qquad \text{por} \quad g_\varepsilon(x,y) := \sum_{A \subseteq \{1,\dots,n\}} \left(\prod_{j \in A} (\varepsilon x_j + (1-\varepsilon) y_j) \right) g_A$$
$$= g(\varepsilon x + (1-\varepsilon) y),$$

y

$$T_\varepsilon : L^2(\mu) \to L^2(\mu) \qquad \text{por} \quad T_\varepsilon(w_A) := \varepsilon^{|A|} w_A.$$

Observemos que T_ε es un operador de $L^p(\mu)$ en $L^p(\mu)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. Luego, podemos extender T_ε a un operador de $L^p(\mu, E)$ en $L^p(\mu, E)$. Efectivamente, dada $h = \sum_{A \subseteq \{1,\dots,n\}} w_A h_A \in L^p(\mu, E)$ definimos

$$T_\varepsilon \left(\sum_{A \subseteq \{1,\dots,n\}} w_A h_A \right) := \sum_{A \subseteq \{1,\dots,n\}} T_\varepsilon(w_A) h_A.$$

Análogamente T_ε se extiende a un operador de $L^q(\mu, E^*)$ en $L^q(\mu, E^*)$.

Probaremos la siguiente identidad:

$$g_\varepsilon(x, y) = (1-\varepsilon)\sum_{j=1}^{n} y_j T_\varepsilon \partial_j g(x) + \Phi(x, y), \tag{2.8}$$

donde $\Phi : \{-1,1\}^n \times \{-1,1\}^n \to E^*$ cumple que $\mathbb{E}_y\left[y_j \Phi(x, y)\right] = 0$ para todo $x \in \{-1,1\}^n$ y todo $1 \leq j \leq n$. Para ello, basta ver que la igualdad se satisface en $L^p(\mu)$ para cualquier w_A y el resultado se sigue por linealidad. Notemos que

$$\partial_j w_A = w_{A-\{j\}}\chi_A(j),$$

y por lo tanto,

$$T_\varepsilon \partial_j w_A = \varepsilon^{|A|-1} w_{A-\{j\}}\chi_A(j).$$

Luego,

$$\begin{aligned}(w_A)_\varepsilon(x, y) = &\prod_{j\in A}(\varepsilon x_j + (1-\varepsilon)y_j) = \sum_{j\in A}(1-\varepsilon)y_j \prod_{i\in A,\ i\neq j}\varepsilon x_i + \Phi(x, y)\\ =&(1-\varepsilon)\sum_{j=1}^{n} y_j \varepsilon^{|A|-1} w_{A-\{j\}}(x)\chi_A(j) + \Phi(x, y)\\ =&(1-\varepsilon)\sum_{j=1}^{n} y_j T_\varepsilon \partial_j w_A(x) + \Phi(x, y).\end{aligned}$$

Hemos separado el producto en los términos que contienen un único y_j y definido todo el resto como $\Phi(x, y)$. Esto implica que fijado un x_0, el desarrollo de Fourier en y de $\Phi(x_0, y)$ es de la forma $\sum_{A\subseteq\{1,\ldots,n\},|A|\neq 1} w_A \Phi(x_0, .)_A$. En otras palabras, los términos $\Phi(x_0, .)_{\{j\}}$ son cero. Estos son justamente $\mathbb{E}\left[y_j \Phi(x_0, y)\right] = 0$, con lo cual probamos la afirmación (2.8).

Como vimos en la Sección 1.2, todo vector aleatorio en $E^{\{-1,1\}^n}$ pertenece al espacio $L^p(\mu, E)$, en particular el cubo f del enunciado. Recordemos, además, que dado un espacio de Banach V notábamos $\langle v^*, v\rangle$ a la evaluación de cierto $v^* \in V^*$ en un vector

$v \in V$. Consideramos, entonces, la siguiente integral:

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon =&\mathbb{E}_{x,y}\left[\langle g_\varepsilon(x,y), \sum_{j=1}^n y_j \partial_j f(x)\rangle\right]\\
=&\mathbb{E}_{x,y}\left[\langle (1-\varepsilon)\sum_{i=1}^n y_i T_\varepsilon \partial_i g(x) + \Phi(x,y), \sum_{j=1}^n y_j \partial_j f(x)\rangle\right]\\
=&\mathbb{E}_{x,y}\left[(1-\varepsilon)\sum_{i,j=1}^n \langle y_i T_\varepsilon \partial_i g(x), y_j \partial_j f(x)\rangle + \sum_{j=1}^n \langle \Phi(x,y), y_j \partial_j f(x)\rangle\right]\\
=&\mathbb{E}_{x}\left[(1-\varepsilon)\sum_{j=1}^n \langle T_\varepsilon \partial_j g(x), \partial_j f(x)\rangle + \sum_{j=1}^n \langle \Phi(x,y)_{\{j\}}, \partial_j f(x)\rangle\right]\\
=&\mathbb{E}_{x}\left[(1-\varepsilon)\sum_{j=1}^n \langle T_\varepsilon \partial_j g(x), \partial_j f(x)\rangle\right],
\end{aligned}$$

y notando J a la identificación natural entre $L^p(\mu, E)$ y su doble dual nos queda,

$$\begin{aligned}
=&(1-\varepsilon)\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n \langle J\partial_j f, T_\varepsilon \partial_j g\rangle\right]\\
=&(1-\varepsilon)\mathbb{E}\left[\langle \sum_{j=1}^n (T_\varepsilon \partial_j)^* J\partial_j f, g\rangle\right].
\end{aligned}$$

Para alivianar la notación dejaremos de distinguir entre $L^p(\mu, E)$ y su doble dual por lo que la igualdad anterior resultará en:

$$I_\varepsilon =(1-\varepsilon)\mathbb{E}\left[\langle g, \sum_{j=1}^n (T_\varepsilon \partial_j)^* \partial_j f\rangle\right]. \tag{2.9}$$

Observemos que se cumplen las siguientes identidades de operadores de $L^p(\mu, E)$ en $L^p(\mu, E)$:

- $T_\varepsilon^* = T_\varepsilon$. (Con todo rigor, deberíamos escribir esta igualdad como $J^{-1}T_\varepsilon^* J = T_\varepsilon$ y aclarar que el primer T_ε es visto como un operador de $L^q(\mu, E^*) = L^p(\mu, E)^*$ y el segundo T_ε es visto como un operador de $L^p(\mu, E)$.)

- $T_\varepsilon \partial_j = \frac{1}{\varepsilon}\partial_j T_\varepsilon, \quad (\varepsilon > 0)$.

- $\sum_{j=1}^{n} \partial_j^* \partial_j f = \sum_{A\subseteq\{1,\ldots,n\}} |A|\, w_A f_A$. (Aquí también cabe aclarar que el ∂_j de la izquierda es visto como operador de $L^q(\mu, E^*) = L^p(\mu, E)^*$ por lo que ∂_j^* resulta un operador de $L^p(\mu, E)^{**} \cong L^p(\mu, E)$.)

Basta corroborar la validez de las igualdades a nivel $L^p(\mu)$ evaluando en los w_A. Escribiremos la deducción de la última a modo de ejemplo. Veamos primero el desarrollo de Fourier de $\partial_j^* \partial_j w_A$.

$$\begin{aligned}(\partial_j^* \partial_j w_A)_B =& \mathbb{E}\left[w_B \partial_j^* \partial_j w_A\right] = \langle w_B, \partial_j^* \partial_j w_A\rangle = \langle \partial_j w_B, \partial_j w_A\rangle \\ =& \langle w_{B-\{j\}}\chi_B(j), w_{A-\{j\}}\chi_A(j)\rangle = \chi_A(j)\delta_{A,B}.\end{aligned}$$

Luego, $\partial_j^* \partial_j w_A = \chi_A(j) w_A$ por lo que resulta $\sum_{j=1}^{n} \partial_j^* \partial_j w_A = |A|\, w_A$. Usando estas tres identidades podemos reducir aun más la ecuación (2.9) para obtener,

$$\begin{aligned}I_\varepsilon =&(1-\varepsilon)\mathbb{E}\left[\langle g, \sum_{j=1}^{n} \partial_j^* T_\varepsilon^* \partial_j f\rangle\right] = (1-\varepsilon)\mathbb{E}\left[\langle g, \sum_{j=1}^{n} \partial_j^* T_\varepsilon \partial_j f\rangle\right] \\ =&(1-\varepsilon)\mathbb{E}\left[\langle g, \sum_{j=1}^{n} \partial_j^* \partial_j T_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} f\rangle\right] = (1-\varepsilon)\mathbb{E}\left[\langle g, \sum_{j=1}^{n} \partial_j^* \partial_j \sum_{A\subseteq\{1,\ldots,n\}} \varepsilon^{|A|-1} w_A f_A\rangle\right] \\ =&(1-\varepsilon)\mathbb{E}\left[\langle g, \sum_{A\subseteq\{1,\ldots,n\}} |A|\, \varepsilon^{|A|-1} w_A f_A\rangle\right] = (1-\varepsilon)\mathbb{E}\left[\langle g, T_\varepsilon' f\rangle\right],\end{aligned} \tag{2.10}$$

donde T_ε' es la derivada formal de T_ε respecto de ε.

Por otro lado, sabemos que existe un funcional $G \in L^p(\mu, E)^*$ con $\|G\| \leq 1$ tal que $G(T_\varepsilon' f) = \|T_\varepsilon' f\|_p$. Vía la identificación $L^p(\mu, E)^* = L^q(\mu, E^*)$ obtenemos un $g \in L^q(\mu, E^*)$ con $\|g\|_q \leq 1$ tal que $G = \mathbb{E}\left[\langle g, .\rangle\right]$. Luego, aplicando la ecuación (2.10) nos queda:

$$\begin{aligned}\|T_\varepsilon' f\|_p =& \mathbb{E}\left[\langle g, T_\varepsilon' f\rangle\right] = (1-\varepsilon)^{-1} I_\varepsilon \\ =&(1-\varepsilon)^{-1}\mathbb{E}_{x,y}\left[\langle g_\varepsilon(x,y), \sum_{j=1}^{n} y_j \partial_j f(x)\rangle\right] \\ \leq&(1-\varepsilon)^{-1}\|g_\varepsilon\|_{L^q(\mu\times\mu, E^*)}\left\|\sum_{j=1}^{n} y_j \partial_j f(x)\right\|_{L^p(\mu\times\mu, E)}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Buscamos a continuación acotar el término $\|g_\varepsilon\|_{L^q(\mu\times\mu,E^*)}$ de la última desigualdad. Notemos que podemos pensar a g como un polinomio $g:\mathbb{R}^n\to E^*$ que tiene grado a lo sumo 1 en cada variable. Es decir que fijadas todas las variables menos una, nos queda una función lineal. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
&g(z_1,\dots,z_{j-1},\varepsilon x_j+(1-\varepsilon)y_j,z_{j+1},\dots,z_n)\\
&=a(\varepsilon x_j+(1-\varepsilon)y_j)+b=\varepsilon(ax_j+b)+(1-\varepsilon)(ay_j+b)\\
&=\varepsilon g(z_1,\dots,z_{j-1},x_j,z_{j+1},\dots,z_n)+(1-\varepsilon)g(z_1,\dots,z_{j-1},y_j,z_{j+1},\dots,z_n).
\end{aligned}$$

Recordemos que, pensando a g como polinomio, $g_\varepsilon(x,y)=g(\varepsilon x+(1-\varepsilon)y)$. Reiterando el procedimiento anterior en cada coordenada obtenemos,

$$g_\varepsilon(x,y)=\sum_{\alpha\in\{0,1\}^n}\varepsilon^{n-n_\alpha}(1-\varepsilon)^{n_\alpha}g(z(x,y,\alpha)),$$

$$\text{donde}\quad n_\alpha=\sum_{j=1}^n\alpha_j\quad\text{y}\quad z(x,y,\alpha)_j:=\begin{cases}x_j & \text{si}\quad \alpha_j=0\\ y_j & \text{si}\quad \alpha_j=1\end{cases}.$$

Definamos, además, el vector $w(x,y,\alpha)$ complementario a $z(x,y,\alpha)$ de manera tal que dado $1\le j\le n$,

$$w(x,y,\alpha)_j:=\begin{cases}y_j & \text{si}\quad \alpha_j=0\\ x_j & \text{si}\quad \alpha_j=1\end{cases}.$$

Luego, se tiene:

$$\begin{aligned}
\|g_\varepsilon\|_{L^q(\mu\times\mu,E^*)}&=\left\|\sum_{\alpha\in\{0,1\}^n}\varepsilon^{n-n_\alpha}(1-\varepsilon)^{n_\alpha}g(z(x,y,\alpha))\right\|_{L^q(\mu\times\mu,E^*)}\\
&\le\sum_{\alpha\in\{0,1\}^n}\varepsilon^{n-n_\alpha}(1-\varepsilon)^{n_\alpha}\|g(z(x,y,\alpha))\|_{L^q(\mu\times\mu,E^*)}\\
&=\sum_{\alpha\in\{0,1\}^n}\varepsilon^{n-n_\alpha}(1-\varepsilon)^{n_\alpha}\mathbb{E}_{x,y}\left[\|g(z(x,y,\alpha))\|_{E^*}^q\right]^{1/q}.
\end{aligned}$$

Fijado α, aplicamos el cambio de vaiables $z = z(x, y, \alpha)$ y $w = w(x, y, \alpha)$, del cual deducimos,

$$\begin{aligned}
\|g_\varepsilon\|_{L^q(\mu\times\mu,E^*)} &= \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n} \varepsilon^{n-n_\alpha}(1-\varepsilon)^{n_\alpha}\mathbb{E}_{z,w}\left[\|g(z)\|_{E^*}^q\right]^{1/q} \\
&= \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n} \varepsilon^{n-n_\alpha}(1-\varepsilon)^{n_\alpha}\mathbb{E}_{z}\left[\|g(z)\|_{E^*}^q\right]^{1/q} \\
&= \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n} \varepsilon^{n-n_\alpha}(1-\varepsilon)^{n_\alpha}\|g\|_{L^q(\mu,E^*)} \\
&= \sum_{j=1}^n \binom{n}{j}\varepsilon^{n-j}(1-\varepsilon)^{j}\|g\|_{L^q(\mu,E^*)} \\
&= \|g\|_{L^q(\mu,E^*)} \le 1.
\end{aligned}$$

Habiendo acotado $\|g_\varepsilon\|_{L^q(\mu\times\mu,E^*)}$, la desigualdad (2.11) resulta en:

$$\|T'_\varepsilon f\|_p \le (1-\varepsilon)^{-1}\left\|\sum_{j=1}^n y_j\partial_j f(x)\right\|_{L^p(\mu\times\mu,E)}. \tag{2.12}$$

Hemos logrado una primera cota inferior del miembro derecho de la desigualdad del lema. Consideremos ahora la función $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ como $\psi(\varepsilon) = \|T_\varepsilon f\|_p$. Escribiendo a $T_\varepsilon f$ en su desarrollo de Fourier y usando la desigualdad triangular se deduce que,

$$\left\|\frac{T_{\varepsilon+h}f - T_\varepsilon f}{h} - T'_\varepsilon f\right\|_p \overset{h\to 0}{\to} 0,$$

uniformemente en ε. En consecuencia,

$$\left|\frac{\psi(\varepsilon+h)-\psi(\varepsilon)}{h}\right| = \left|\frac{\|T_{\varepsilon+h}f\|_p - \|T_\varepsilon f\|_p}{h}\right| \le \left\|\frac{T_{\varepsilon+h}f - T_\varepsilon f}{h}\right\|_p \overset{h\to 0}{\to} \|T'_\varepsilon f\|_p\,,$$

uniformemente en ε. Por lo tanto, $\psi(\varepsilon)$ resulta absolutamente continua (en particular, derivable *c.t.p.*) y

$$|\psi'(\varepsilon)| \le \|T'_\varepsilon f\|_p\,.$$

Notemos que $T_0 f = \mathbb{E}[f] = 0$. Luego,

$$\|T_\varepsilon f\|_p = \|T_\varepsilon f\|_p - \|T_0 f\|_p = \psi(\varepsilon) - \psi(0) \le V_0^\varepsilon(\psi) = \int_0^\varepsilon |\psi'(\delta)|\, d\delta \le \int_0^\varepsilon \|T'_\delta f\|_p\, d\delta,$$

y aplicando la desigualdad (2.12),

$$\|T_\varepsilon f\|_p \leq \log(1-\varepsilon)^{-1} \left\| \sum_{j=1}^{n} y_j \partial_j f(x) \right\|_{L^p(\mu\times\mu,E)}. \tag{2.13}$$

Como último paso, probaremos que $\varepsilon^n \|f\|_p \leq \|T_\varepsilon f\|_p$ logrando así relacionar los dos miembros de la desigualdad del lema. En primer lugar, notemos que se satisface la igualdad $\varepsilon^n f = T_\varepsilon \left(w_{\{1,\ldots,n\}} T_\varepsilon f\right)$. Tomando norma tendremos:

$$\varepsilon^n \|f\|_p = \left\|T_\varepsilon \left(w_{\{1,\ldots,n\}} T_\varepsilon f\right)\right\|_p \leq \|T_\varepsilon\| \left\|w_{\{1,\ldots,n\}} T_\varepsilon f\right\|_p = \|T_\varepsilon\| \|T_\varepsilon f\|_p .$$

Por lo tanto, basta ver que T_ε es una contracción. Para ello, probaremos que T_ε puede ser expresado como una convolución con el núcleo $R_\varepsilon(x) = \prod_{j=1}^n (1+\varepsilon x_j)$. Explícitamente se puede probar la identidad:

$$T_\varepsilon f(x) = \mathbb{E}_y \left[R_\varepsilon(y) f(xy)\right] = \mathbb{E}_y \left[\left(\prod_{j=1}^{n} (1+\varepsilon y_j) \right) f(xy) \right], \quad \text{donde} \quad (xy)_j = x_j y_j.$$

Por el mismo argumento de antes, basta probarlo en $L^p(\mu)$ para las funciones de Walsh, donde el resultado se sigue. Expresando T_ε de esta manera, deducimos que es una contracción:

$$\begin{aligned}
\|T_\varepsilon f\|_p &= \|\mathbb{E}_y \left[R_\varepsilon(y) f(xy)\right]\|_p \leq \mathbb{E}_y \left[\|R_\varepsilon(y) f(xy)\|_p\right] = \mathbb{E}_y \left[\|R_\varepsilon(y) f(x)\|_p\right] \\
&= \mathbb{E}_y \left[|R_\varepsilon(y)|\right] \|f\|_p = \mathbb{E}_y \left[\prod_{j=1}^{n} |1+\varepsilon y_j| \right] \|f\|_p \\
&= \left(\prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}_{y_j} |1+\varepsilon y_j| \right) \|f\|_p = \|f\|_p .
\end{aligned}$$

Finalmente tomando $\varepsilon = (1 - 1/n)$ y aplicando lo anterior a la desigualdad (2.13) obtenemos

$$(1-1/n)^n \|f\|_p \leq \left\|T_{1-1/n} f\right\|_p \leq \log(n) \left\| \sum_{j=1}^{n} y_j \partial_j f(x) \right\|_{L^p(\mu\times\mu,E)}$$

y por lo tanto,

$$\|f\|_p \leq 2e \log(n) \left\| \sum_{j=1}^{n} y_j \partial_j f(x) \right\|_{L^p(\mu\times\mu,E)},$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Hemos cumplido (parcialmente) con el primer paso del *Programa de Ribe* para el concepto de tipo. A continuación daremos el siguiente paso del programa brindando una versión métrica del Teorema 1.28.

2.3. Caracterización del tipo métrico trivial

Recordemos que el Teorema 1.28 caracterizaba los espacios de Banach de tipo trivial como aquellos que contenían linealmente a los espacios ℓ_1^n con distorsión acotada uniformemente para todo $n \in \mathbb{N}$. Más precisamente, teníamos que un espacio de Banach E tenía tipo trivial si y sólo si $C_E^\ell(\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}) < \infty$, lo cual era a su vez equivalente a que $C_E^\ell(\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 1$. En esta sección nos proponemos exponer un análogo métrico de este resultado.

Es de esperar que la versión métrica del Teorema 1.28 no involucre a los espacios ℓ_1^n, sino un equivalente métrico. Este será justamente el espacio $Q_n := \{-1, 1\}^n$ que puede pensarse como un subconjunto de ℓ_1^n. En consecuencia, tal vez lo más natural sería considerar al espacio Q_n con la métrica inducida por la norma de ℓ_1^n. Sin embargo, será más práctico reescalarla de manera tal que los lados del cubo midan 1. Concretamente definiremos la distancia en Q_n como

$$\partial(x, y) := 1/2 \left\|x - y\right\|_1 = \left|\{j \in \{1, \ldots, n\} : \ x_j \neq y_j\}\right|. \tag{2.14}$$

Hecho esto, estamos en condiciones de presentar la versión métrica del Teorema 1.28.

Teorema 2.12. *Sea E un espacio métrico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) E tiene tipo métrico trivial;

(ii) $C_E(\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 1$;

(iii) $C_E(\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}) < \infty$.

Observación 2.13. Una consecuencia sorprendente de este teorema y su versión lineal (Teorema 1.28) es que si un espacio de Banach contiene cubos Q_n con distorsión acotada uniformemente para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces contiene linealmente a los espacios ℓ_1^n con distorsión 1. Es decir,

$$C_E(\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}) < \infty \implies C_E^{\ell}(\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 1,$$

pues, para espacios de Banach, tener tipo métrico trivial es equivalente a tener tipo trivial. Este es un ejemplo de una aplicación del *Programa de Ribe* a la geometría de los espacios de Banach.

Para probar el teorema deberemos dar una definición, un lema y una proposición previos. Estos serán análogos métricos a la Definición 1.11, al Lema 1.23 y a la Proposición 1.25 respectivamente.

Definición 2.5. Sea E un espacio métrico, definimos $\mathcal{A}_n(E)$ como la menor constante $\mathcal{A}$ tal que, para todo cubo $f : \{-1,1\}^n \to E$ se cumple

$$\mathbb{E}\left[(\Delta f)^2\right]^{1/2} \leq \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[(\Delta_j f)^2\right]\right)^{1/2}.$$

Notaremos simplemente $\mathcal{A}_n$ cuando no dé lugar a confusión.

Observación 2.14. El parámetro $\mathcal{A}_n$ es la versión métrica del $\delta_2(E;n)$ de la Definición 1.11. Siguiendo los mismos razonamientos que en el caso lineal, tendremos que las observaciones realizadas para $\delta_2(E;n)$ aplican en el caso métrico. Luego, $\mathcal{A}_n$ resulta creciente en n y cumple que $\mathcal{A}_n \leq n^{1/2}$. Además, un espacio métrico tiene tipo métrico p si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que $\mathcal{A}_n \leq Cn^{1/p-1/2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema 2.15. *El parámetro $\mathcal{A}_n$ es submultiplicativo con respecto a n.*

Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, queremos ver que $\mathcal{A}_{mn} \leq \mathcal{A}_m\mathcal{A}_n$. Tomemos un cubo arbitrario $f : \{-1,1\}^{mn} \to E$. Definamos $F : \{-1,1\}^{mn} \times \{-1,1\}^m \to E$ como:

$$F(x,y) := f\left(x_1y_1, \ldots, x_ny_1, x_{n+1}y_2, \ldots, x_{2n}y_2, \ldots\ldots\ldots, x_{(m-1)n+1}y_m, \ldots, x_{mn}y_m\right).$$

Notemos que, fijado $y \in \{-1,1\}^m$ tenemos,

$$\mathbb{E}_x\left[(\Delta f)^2\right] = \mathbb{E}_x\left[(\Delta^{(y)} F)^2\right],$$

donde el exponente (y) de $\Delta^{(y)}$ indica respecto de que variables estamos aplicando Δ. Por lo tanto tomando $\mathbb{E}_y$ nos queda,

$$\mathbb{E}_x\left[(\Delta f)^2\right] = \mathbb{E}_{x,y}\left[(\Delta^{(y)}F)^2\right]. \tag{2.15}$$

Por otro lado, por la definición de $\mathcal{A}_m$ sabemos que, fijado un $x \in \{-1,1\}^{mn}$,

$$\mathbb{E}_y\left[(\Delta^{(y)}F)^2\right] \leq \mathcal{A}_m^2 \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}_y\left[(\Delta_i^{(y)}F)^2\right].$$

Usando la desigualdad anterior en la ecuación (2.15), podemos acotar $\mathbb{E}_x\left[(\Delta f)^2\right]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\left[(\Delta f)^2\right] =& \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_y\left[(\Delta^{(y)}F)^2\right]\right] \leq \mathbb{E}_x\left[\mathcal{A}_m^2 \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}_y\left[(\Delta_i^{(y)}F)^2\right]\right]\\ =& \mathcal{A}_m^2 \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}_{x,y}\left[(\Delta_i^{(y)}F)^2\right]. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Como último paso, observemos que fijados $y \in \{-1,1\}^m$ y x_j con $j \leq (i-1)n$ o $j > in$ para cierto $1 \leq i \leq m$, $F(x,y)$ resulta un cubo de dimensión n que depende únicamente de la variable $x' = (x_{(i-1)n+1}, \ldots, x_{in})$. Por lo tanto, se tiene:

$$\mathbb{E}_{x'}\left[(\Delta^{(x')}F)^2\right] \leq \mathcal{A}_n^2 \sum_{l=1}^{n} \mathbb{E}_{x'}\left[(\Delta_l^{(x')}F)^2\right].$$

Notemos que, $\Delta^{(x')}F = \Delta_i^{(y)}F$ y $\Delta_l^{(x')}F = \Delta_{(i-1)n+l}^{(x)}F$. Luego, integrando sobre y y los x_j restantes la desigualdad anterior resulta en:

$$\mathbb{E}_{x,y}\left[(\Delta_i^{(y)}F)^2\right] \leq \mathcal{A}_n^2 \sum_{j=(i-1)n+1}^{in} \mathbb{E}_{x,y}\left[(\Delta_j^{(x)}F)^2\right].$$

Aplicando esto a la desigualdad (2.16) el lema queda probado. En efecto,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\left[(\Delta f)^2\right] \leq& \mathcal{A}_m^2 \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}_{x,y}\left[(\Delta_i^{(y)}F)^2\right] \leq \mathcal{A}_m^2\mathcal{A}_n^2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=(i-1)n+1}^{in} \mathbb{E}_{x,y}\left[(\Delta_j^{(x)}F)^2\right]\\ =& \mathcal{A}_m^2\mathcal{A}_n^2 \sum_{j=1}^{mn} \mathbb{E}_x\left[(\Delta_j f)^2\right], \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos que $\mathbb{E}_{x,y}\left[(\Delta_j^{(x)}F)^2\right] = \mathbb{E}_x\left[(\Delta_j f)^2\right]$, cuya justificación es análoga a lo realizado para la igualdad (2.15). Probamos, entonces, que para todo cubo f de dimensión mn se satisface

$$\mathbb{E}_x\left[(\Delta f)^2\right]^{1/2} \leq \mathcal{A}_m\mathcal{A}_n\left(\sum_{j=1}^{mn}\mathbb{E}_x\left[(\Delta_j f)^2\right]\right)^{1/2}.$$

De aquí se deduce que $\mathcal{A}_{mn} \leq \mathcal{A}_m\mathcal{A}_n$, que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Para concluir con los resultados previos al Teorema 2.12, pasemos a la versión métrica de la Propiedad 1.25.

Proposición 2.16. *Sea E un espacio métrico y $1 \leq p < 2$, entonces E tiene tipo métrico r con $r > p$ si y sólo si existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A}_{n_0} < n_0^{1/p-1/2}$.*

Demostración. Supongamos que E tiene tipo métrico r con $r > p$. Luego, existe una constante $C > 0$ tal que $\mathcal{A}_n \leq Cn^{1/r-1/2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, como $r > p$, para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande se cumple que $Cn_0^{1/r-1/2} < n_0^{1/p-1/2}$. En consecuencia, deducimos que $\mathcal{A}_{n_0} < n_0^{1/p-1/2}$.

Recíprocamente, supongamos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A}_{n_0} < n_0^{1/p-1/2}$, con lo cual $\mathcal{A}_{n_0} = n_0^{1/r-1/2}$ para cierto $r > p$. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_0^{k-1} \leq n < n_0^k$. Luego, como $\mathcal{A}_n$ es creciente y submultiplicativo en n, tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n \leq& \mathcal{A}_{n_0^k} \leq \mathcal{A}_{n_0}^k = \left(n_0^{1/r-1/2}\right)^k = \left(n_0^k\right)^{1/r-1/2} \\ =& n_0^{1/r-1/2}\left(n_0^{k-1}\right)^{1/r-1/2} \leq \mathcal{A}_{n_0}n^{1/r-1/2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, E tiene tipo métrico r con constante $C = \mathcal{A}_{n_0}$. $\square$

Estamos ahora en condiciones de probar el Teorema 2.12.

Demostración del Teorema 2.12. Dejaremos la prueba de *(i)* $\implies$ *(ii)* para el final pues es la más extensa. Como *(ii)* $\implies$ *(iii)* es inmediato, procederemos directamente a probar que *(iii)* $\implies$ *(i)*. Por *(iii)*, existe una constante $K > 0$ tal que $C_E(\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}) < K$. Luego, existen subconjuntos $E_n \subseteq E$ y biyecciones $f_n : Q_n \to E_n$ con distorsión

$\mathrm{dist}(f_n) = \|f_n\|_{Lip} \|f_n^{-1}\|_{Lip} < K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observemos entonces que para todo $x \in Q_n$,

$$n = \partial(x, -x) \leq \left\|f_n^{-1}\right\|_{Lip} \Delta f_n(x) \quad \text{y} \quad \Delta_j f_n(x) \leq \|f_n\|_{Lip},$$

donde ∂ es la distancia en Q_n que definimos mediante la ecuación (2.14). Si E tuviera tipo métrico p para cierto $p > 1$ resultaría que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} n \leq & \left\|f_n^{-1}\right\|_{Lip} \mathbb{E}[(\Delta f_n)^2]^{1/2} \leq \left\|f_n^{-1}\right\|_{Lip} C n^{1/p-1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[(\Delta_j f_n)^2\right]\right)^{1/2} \\ \leq & \left\|f_n^{-1}\right\|_{Lip} C n^{1/p-1/2} n^{1/2} \|f_n\|_{Lip} \leq C \|f_n\|_{Lip} \left\|f_n^{-1}\right\|_{Lip} n^{1/p} \\ \leq & C K n^{1/p}, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo pues tendríamos que $n^{1-1/p}$ está uniformemente acotado para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, queda probado que *(iii)* $\implies$ *(i)*.

Resta ver que *(i)* $\implies$ *(ii)*. Por *(i)*, sabemos que E no tiene tipo métrico r para ningún $r > 1$. Luego, por la Proposición 2.16 tomando $p = 1$ resulta que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n \geq n^{1/1-1/2} = n^{1/2}$. Por otro lado, como siempre se cumple que $\mathcal{A}_n \leq n^{1/2}$, nos queda que $\mathcal{A}_n = n^{1/2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{A}_n$ es una cota óptima, habrá cubos cuya relación entre lados y diagonales sea arbitrariamente cercana al límite impuesto por $\mathcal{A}_n$. Serán estos cubos los que tendrán una distorsión arbitrariamente cercana a 1 independientemente de n, probando así la condición *(ii)*. Fijemos un $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que para todo $\delta > 0$ existe un cubo $f : Q_n \to E$ tal que,

$$n^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[(\Delta_j f)^2\right]\right)^{1/2} < (1+\delta)^{1/2} \mathbb{E}\left[(\Delta f)^2\right]^{1/2}. \tag{2.17}$$

Basta probar que, dado $\lambda > 0$, para δ lo suficientemente chico la distorsión de f es menor que $1 + \lambda$. En Q_n las diagonales miden n. Tomemos a tal que el 2-promedio de la logitud de las diagonales de f sea an. Explícitamente:

$$a := 1/n \mathbb{E}\left[(\Delta f)^2\right]^{1/2}.$$

Luego, para garantizar que la distorsión sea cercana a 1, probaremos que la distancia $d(f(x), f(y))$ es aproximadamente $a\partial(x, y)$ para todo $x, y \in Q_n$. Dado $1 \leq j \leq n$, definamos:

$$f_j(x) := f(-x_1, \dots, -x_j, x_{j+1}, \dots, x_n),$$

y

$$\Phi_j(x) := a^{-1} d(f_{j-1}(x), f_j(x)).$$

Veamos como paso previo que la función Φ_j es arbitrariamente cercana a 1 para cualquier j si tomamos un δ suficientemente chico. Notemos que por la desigualdad triangular, $\Delta f \leq \sum_{j=1}^{n} d(f_{j-1}, f_j)$. Luego,

$$n = a^{-1}\mathbb{E}\left[(\Delta f)^2\right]^{1/2} \leq \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} \Phi_j\right)^2\right]^{1/2} = \left\|\sum_{j=1}^{n} \Phi_j\right\|_2. \tag{2.18}$$

Por otro lado, como Φ_j y $a^{-1}\Delta_j f$ tienen la misma distribución, por la desigualdad (2.17) tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} \Phi_j^2\right]^{1/2} &= a^{-1}\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} (\Delta_j f)^2\right]^{1/2} < a^{-1} n^{-1/2}(1+\delta)^{1/2}\mathbb{E}\left[(\Delta f)^2\right]^{1/2} \\ &= n^{1/2}(1+\delta)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Definamos a continuación dos funciones auxiliares,

$$S_1 := \left(\sum_{j=1}^{n} \Phi_j\right)^2 \quad \text{y} \quad S_2 := n\sum_{j=1}^{n} \Phi_j^2,$$

y observemos que,

$$S_2 - S_1 = 1/2 \sum_{i,j=1}^{n} (\Phi_i - \Phi_j)^2 \geq 0.$$

Por las desigualdades (2.18) y (2.19) obtenemos,

$$\mathbb{E}\left[S_2\right] = n\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} \Phi_j^2\right] \leq n^2(1+\delta) \leq \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} \Phi_j\right)^2\right](1+\delta) \leq \mathbb{E}\left[S_1\right](1+\delta),$$

con lo cual,

$$\mathbb{E}\left[S_2 - S_1\right] \le \delta \mathbb{E}\left[S_1\right] \le \delta \mathbb{E}\left[S_2\right] \le \delta(1+\delta)n^2;$$
$$\mathbb{E}\left[1/2 \sum_{i,j=1}^{n} (\Phi_i - \Phi_j)^2\right] \le \delta(1+\delta)n^2.$$

Equivalentemente,

$$\sum_x \sum_{i,j=1}^{n} (\Phi_i(x) - \Phi_j(x))^2 \le 2\delta(1+\delta)n^2 2^n.$$

Por lo tanto, tomando $\psi_1(\delta) = \left(2\delta(1+\delta)n^2 2^n\right)^{1/2}$ resulta que para todo $1 \le i, j \le n$,

$$\left\|\Phi_i - \Phi_j\right\|_\infty \le \psi_1(\delta).$$

(Recordemos que como n está fijo, $\psi_1(\delta)$ es arbitrariamente chico.) Además, si las funciones Φ_j distan poco entre sí, naturalmente distarán poco de su promedio. En efecto, tomando $\Phi = 1/n \sum_{j=1}^{n} \Phi_j$ el promedio de las funciones Φ_j y usando la desigualdad triangular nos queda, para todo $1 \le j \le n$,

$$\left\|\Phi_j - \Phi\right\|_\infty \le \psi_1(\delta). \tag{2.20}$$

Llamemos $\mathbb{E}_k$ a la esperanza condicional respecto de las variables $\{x_1, \ldots, x_k\}$ y notemos $\mathbb{E}_0$ a la esperanza. Aplicando la desigualdad de Jensen y la ecuación (2.20) deducimos que para todo $1 \le j \le n$ y todo $0 \le k \le n$,

$$\left\|\mathbb{E}_k\left[\Phi_j\right] - \mathbb{E}_k\left[\Phi\right]\right\|_\infty \le \left\|\Phi_j - \Phi\right\|_\infty \le \psi_1(\delta).$$

Observemos que como Φ_j no depende de la variable x_j, resulta que $\mathbb{E}_j\left[\Phi_j\right] = \mathbb{E}_{j-1}\left[\Phi_j\right]$. Luego, para todo $1 \le j \le n$,

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbb{E}_j[\Phi] - \mathbb{E}_{j-1}[\Phi]\right\|_\infty &\le \left\|\mathbb{E}_j[\Phi] - \mathbb{E}_j[\Phi_j]\right\|_\infty + \left\|\mathbb{E}_j[\Phi_j] - \mathbb{E}_{j-1}[\Phi]\right\|_\infty \\
&= \left\|\mathbb{E}_j[\Phi] - \mathbb{E}_j[\Phi_j]\right\|_\infty + \left\|\mathbb{E}_{j-1}[\Phi_j] - \mathbb{E}_{j-1}[\Phi]\right\|_\infty \\
&\le 2\psi_1(\delta),
\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\left\|\Phi - \mathbb{E}[\Phi]\right\|_\infty \le \sum_{j=1}^{n} \left\|\mathbb{E}_j[\Phi] - \mathbb{E}_{j-1}[\Phi]\right\|_\infty \le 2n\psi_1(\delta). \tag{2.21}$$

Por otro lado, podemos comparar $\mathbb{E}[\Phi]$ con $\|\Phi\|_2$.

$$\left|\|\Phi\|_2 - \mathbb{E}[\Phi]\right| \leq \|\Phi - \mathbb{E}[\Phi]\|_2 \leq \|\Phi - \mathbb{E}[\Phi]\|_\infty \leq 2n\psi_1(\delta). \tag{2.22}$$

Veamos a continuación que el valor $\|\Phi\|_2$ es cercano a 1. Notemos que por la desigualdad (2.18) tenemos que $1 \leq \|\Phi\|_2$. Además, recordando que $S_1 \leq S_2$ y aplicando la desigualdad (2.19) obtenemos

$$1 \leq \|\Phi\|_2 = \frac{1}{n}\mathbb{E}[S_1]^{1/2} \leq \frac{1}{n}\mathbb{E}[S_2]^{1/2} \leq n^{-1/2}\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n}\Phi_j^2\right]^{1/2} \leq (1+\delta)^{1/2},$$

y, por lo tanto,

$$\left|\|\Phi\|_2 - 1\right| < (1+\delta)^{1/2} - 1. \tag{2.23}$$

Aplicando la desigualdad triangular y usando las cotas obtenidas en (2.20), (2.21), (2.22) y (2.23) concluimos que Φ_j es arbitrariamente cercano a 1 para todo $1 \leq j \leq n$. Explícitamente tenemos

$$\|\Phi_j - 1\|_\infty < \psi_2(\delta), \tag{2.24}$$

donde $\psi_2(\delta) = (4n+1)\psi_1(\delta) + \left((1+\delta)^{1/2} - 1\right)$ es la suma de todas las cotas anteriores. A partir de la desigualdad (2.24) veremos que la distorsión de f resulta menor que $1+\lambda$ si δ es chico, probando el teorema. En primer lugar, se deduce de manera inmediata que los lados miden aproximadamente a. En efecto, dados $x, y \in Q_n$ tales que $\partial(x,y) = 1$, tenemos $d(f(x), f(y)) = a\Phi_j(z)$ para cierto $1 \leq j \leq n$ y $z \in Q_n$. Luego,

$$|d(f(x), f(y)) - a| = a\,|\Phi_j(z) - 1| \leq a\psi_2(\delta). \tag{2.25}$$

En segundo lugar, estimemos el valor de las diagonales del cubo.

$$\Delta f(x) \leq a\sum_{j=1}^{n}\Phi_j(x) \leq an(1+\psi_2(\delta)).$$

Por otro lado, sea m el mínimo de Δf. Luego, acotando cualquier otro valor de Δf por $an(1+\psi_2(\delta))$ obtenemos

$$\begin{aligned}(an)^2 =& \mathbb{E}\left[(\Delta f)^2\right] \leq 2^{-n}\left(m^2 + (2^n - 1)\left(an(1+\psi_2(\delta))\right)^2\right)\\ =& 2^{-n}m^2 + (1-2^{-n})(an)^2(1+\psi_2(\delta))^2.\end{aligned}$$

Entonces, para cualquier $x \in Q_n$,

$$\Delta f(x)^2 \geq m^2 \geq (an)^2 2^n \left(1 - (1-2^{-n})(1+\psi_2(\delta))^2\right) = (an)^2 \left(1 - \psi_3(\delta)\right),$$

donde $\psi_3(\delta) = (2^n - 1)\left(2\psi_2(\delta) + \psi_2(\delta)^2\right)$. Luego, podemos tomar ψ_4 positivo tal que $\psi_4(\delta) \overset{\delta \to 0}{\to} 0$ y $\|\Delta f - an\|_\infty \leq an\psi_4(\delta)$. Hecho esto, procederemos a acotar la distorsión de f. Sean $x, y \in Q_n$. Aplicando la desigualdad triangular podremos acotar la distancia $d(f(x), f(y))$ por una suma de lados que van cambiando una coordenada de x a la vez. Notemos que la cantidad de sumandos será entonces $|\{j \in \{1, \ldots, n\} : \ x_j \neq y_j\}|$. Usando además la desigualdad (2.25) tenemos

$$d(f(x), f(y)) \leq a(1+\psi_2(\delta))\left|\{j \in \{1, \ldots, n\} : \ x_j \neq y_j\}\right| = a(1+\psi_2(\delta))\partial(x,y),$$

y, por lo tanto,

$$\|f\|_{Lip} \leq a(1+\psi_2(\delta)). \tag{2.26}$$

Por otra parte, podemos acotar inferiormente la distancia $d(f(x), f(y))$:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\geq \Delta f(x) - d(f(-x), f(y)) \\ &\geq an\left(1 - \psi_4(\delta)\right) - a(1+\psi_2(\delta))\partial(-x,y) \\ &= a\left(n - \partial(-x,y) - n\psi_4(\delta) - \psi_2(\delta)\partial(-x,y)\right) \\ &\geq a\left(\partial(x,y) - n\psi_4(\delta) - n\psi_2(\delta)\right) \\ &\geq a\left(1 - n\psi_4(\delta) - n\psi_2(\delta)\right)\partial(x,y). \end{aligned}$$

Luego, f restringida a su imagen es inversible y se tiene que

$$\left\|f^{-1}\right\|_{Lip} \leq a^{-1}\left(1 - n\psi_4(\delta) - n\psi_2(\delta)\right)^{-1}. \tag{2.27}$$

En conclusión, de las desigualdades (2.26) y (2.27) obtenemos una cota para la distorsión de f:

$$\operatorname{dist}(f) \leq \left(1+\psi_2(\delta)\right)\left(1 - n\psi_4(\delta) - n\psi_2(\delta)\right)^{-1} < 1 + \lambda,$$

si δ es suficientemente chico.

Hemos probado que dado $\lambda > 0$ arbitrario, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar un cubo $f_n : Q_n \to E$ de distorsión menor que $1+\lambda$. Resulta entonces que $C_E(\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 1$, con lo cual el teorema queda demostrado. $\square$

Hemos avanzado hasta el segundo paso del programa con algunas versiones métricas de resultados lineales. Sin embargo, la resolución de un problema intrínsecamente no lineal será presentada una vez que contemos con la versión métrica de cotipo que introduciremos en el próximo capítulo.

Capítulo 3

Cotipo métrico

En este capítulo brindaremos una versión métrica del concepto de cotipo y sus aplicaciones. En primer lugar, introduciremos la noción de cotipo métrico propuesta por Mendel y Naor [12]. En segundo lugar, probaremos que restringiéndonos a los espacios de Banach, dicha definición coincide con la noción de cotipo usual. Finalmente, demostraremos un análogo métrico del Teorema 1.29 caracterizando los espacios de cotipo métrico trivial. Por claridad de la exposición, algunas demostraciones de resultados auxiliares se encuentran en el apéndice.

3.1. Cotipo métrico de Mendel y Naor

Si bien las distintas definiciones de tipo métrico fueron contemporáneas al surgimiento del *Programa de Ribe*, una generalización exitosa de la noción de cotipo eludió a los investigadores por más de 20 años. Fue recién en 2008 cuando Mendel y Naor en [12] no sólo brindaron una definición de cotipo métrico que coincide con la definición usual en espacios de Banach, sino que también encontraron numerosas aplicaciones.

Pasemos entonces a la definición de cotipo métrico. Un primer intento sería aplicar a la noción de cotipo un procedimiento análogo al realizado en el capítulo anterior para elaborar la definición de tipo métrico de Enflo. De esta manera, obtendríamos la siguiente carcterización.

Observación 3.1. Un espacio de Banach E tiene cotipo q si y sólo si existe una constante

$C > 0$ tal que para todo cubo lineal f,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[(\Delta_j f)^q \right] \right)^{1/q} \leq C \mathbb{E}\left[(\Delta f)^q \right]^{1/q}. \tag{3.1}$$

Procederíamos luego a dar la definición general para espacios métricos removiendo el requerimiento de linealidad del cubo f. Sin embargo, los cubos no lineales pueden tener las diagonales colapsadas sin que sus lados midan cero. En efecto, supongamos que cierto espacio métrico E satisface la condición (3.1) para cubos arbitrarios. Si E contiene dos puntos u y v distintos entre sí, entonces para todo número par n definimos el cubo $f : \{-1, 1\}^n \to E$ por

$$f(x) := \begin{cases} u & \text{si } x \text{ tiene un número par de unos} \\ v & \text{si no} \end{cases}.$$

Notemos que, como para todo lado (x, y) los vértices x e y difieren en una sola coordenada, cambia la paridad de unos. Luego, $\Delta_i f(x) = d(u, v) > 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ y todo $x \in \{-1, 1\}^n$. Por otro lado, como tomamos un n par, para todo $x \in \{-1, 1\}^n$ la paridad de unos en x y $-x$ se mantiene. Por lo tanto, $\Delta f(x) = 0$ para todo $x \in \{-1, 1\}^n$. Tendríamos entonces que,

$$0 < (nd(u, v)^q)^{1/q} = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[(\Delta_i f)^q \right] \right)^{1/q} \leq C \mathbb{E}\left[(\Delta f)^q \right]^{1/q} = 0,$$

lo cual es absurdo.

Este hecho hace que la definición pierda su sentido si no se mantiene la hipótesis de linealidad, imposibilitando así extender la definición al ámbito de los espacios métricos. Lo mismo ocurriría si nos basáramos en la construcción de Bourgain, Milman y Wolfson. El problema resulta inherente a la estructura de los cubos que nos permiten colapsar las diagonales sin colapsar los lados. (Con estructura nos referimos aquí a qué pares de vértices hemos definido como diagonales y qué pares como lados.) La solución propuesta por Mendel y Naor consiste en cambiar los cubos $\{-1, 1\}^n$ por otros espacios con otra estructura que impida el colapso del lado derecho de la desigualdad. Dichos espacios serán los toros discretos $\mathbb{Z}_m^n$ que introducimos en la siguiente definición.

Definición 3.1. Dado $m \in \mathbb{N}$, notaremos $\mathbb{Z}_m$ al grupo abeliano que se obtiene al cocientar $\mathbb{Z}$ por el subgrupo $m\mathbb{Z}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos el toro discreto (de dimensión n y escala m) como el producto cartesiano de n copias de $\mathbb{Z}_m$ y lo notaremos $\mathbb{Z}_m^n$. Finalmente, llamaremos $\{e_j\}_{j=1}^n$ a la base canónica de $\mathbb{Z}_m^n$, donde e_j vale uno en la coordenada j-ésima y cero en las demás.

Observación 3.2. El nombre de toro surge por el isomorfismo de grupos entre $\mathbb{Z}_m$ y el grupo de raíces m-ésimas de la unidad, pues estas son un subgrupo discreto del toro $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$. Más aún, esta identificación justifica denominar *factor de escala* al parámetro m, pues mide con cuánta resolución estamos discretizando al toro $\mathbb{T}$.

Presentamos a continuación la definición de cotipo métrico.

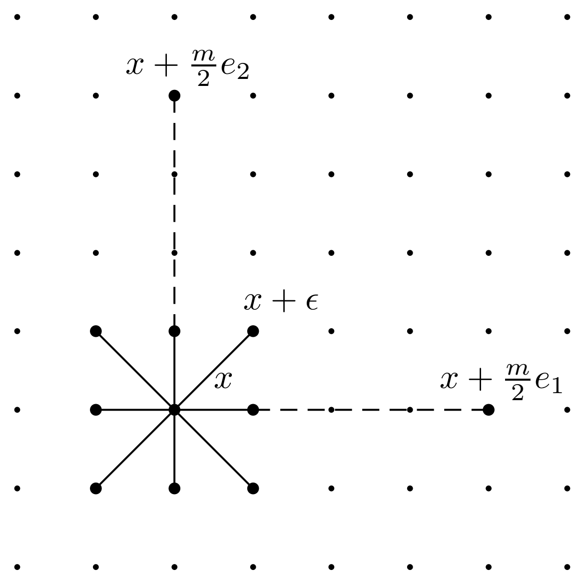
Definición 3.2. Sea (E, d) un espacio métrico y $2 \leq q < \infty$. Decimos que E tiene cotipo métrico q (con constante $\Gamma > 0$) si para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un m par tal que para toda $f : \mathbb{Z}_m^n \to E$ se cumple

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left[d\left(f\left(x + \frac{m}{2} e_j \right), f(x) \right)^q \right] \right)^{1/q} \leq \Gamma m \mathbb{E}_{x,\epsilon} \left[d\left(f(x+\epsilon), f(x) \right)^q \right]^{1/q}, \tag{3.2}$$

donde las esperanzas se toman sobre los $x \in \mathbb{Z}_m^n$ y los $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}^n$, ambos distribuidos de manera equiprobable.

Comentario 3.3. Durante este capítulo trabajaremos con los espacios $\mathbb{Z}_m^n$, $\{-1, 0, 1\}^n$ y $\{-1, 1\}^n$, dotados siempre de la medida de equiprobabilidad que llamaremos μ, σ y θ respectivamente. Además notaremos x o y a los elementos de $\mathbb{Z}_m^n$, ϵ o δ a los elementos de $\{-1, 0, 1\}^n$ y ξ o ζ a los elementos de $\{-1, 1\}^n$.

Observación 3.4. Para obtener una interpretación geométrica de la definición de cotipo métrico, representaremos al toro $\mathbb{Z}_m^2$ como la grilla $\{0, \ldots, m-1\}^2$ en condiciones periódicas (esto es, que escapar la grilla avanzando hacia la derecha nos hace aparecer por la izquierda y escapar por arriba nos hace aparecer por abajo). Dado un $x \in \mathbb{Z}_m^2$, los elementos involucrados en la Definición 3.2 se pueden disponer en la grilla según la siguiente figura.



En la definición de cotipo métrico, los pares $\left(f\left(x+\frac{m}{2}e_j\right), f(x)\right)$ cumplen el rol que en la Observación 3.1 tenían los lados j-ésimos del cubo. Dichos pares provienen de los pares $\left(x+\frac{m}{2}e_j, x\right)$ que, como se observa en el gráfico, corresponden a lados j-ésimos de un cubo de tamaño $\frac{m}{2}$. Por otra parte, los pares de la forma $(f(x+\epsilon), f(x))$ cumplen el rol que tenían las diagonales. Sin embargo, los pares $(x+\epsilon, x)$ no corresponden únicamente a diagonales de cubos de tamaño 1, sino también a todos los alrededores del punto x. Definiendo una diagonal de orden $0 \leq k \leq n$ como un par $(x+\epsilon, x)$ donde ϵ tiene exactamente k coordenadas no nulas, resulta que los pares $(x+\epsilon, x)$ corresponden no sólo a las diagonales de orden n (las usuales) sino también a las de todo orden, todas ellas pertenecientes a cubos de tamaño 1. Como se notó en la Observación 1.20, a grandes rasgos la desigualdad de cotipo usual acotaba lados por diagonales. En el caso métrico, la desigualdad (3.2) acota lados de cubos de tamaño $\frac{m}{2}$ por diagonales (de todo orden) de cubos de tamaño 1. A nivel intuitivo, la diferencia de tamaño entre cubos justifica que el lado derecho de la desigualdad esté multiplicado por m para compensar y hacerlo comparable con el lado izquierdo.

Observación 3.5. Notemos que si $d\left(f(x+\epsilon), f(x)\right) = 0$ para todo $x \in \mathbb{Z}_m^n$ y todo $\epsilon \in \{-1,0,1\}^n$ la función f sería constante. Luego, el lado izquierdo de la desigualdad (3.2) también sería cero, evitando así la contradicción a la que habíamos en nuestro primer intento de llegar a una versión métrica de cotipo.

Al igual que en el capítulo anterior, el objetivo de esta sección será probar que restringiéndonos a los espacios de Banach, la Definición 3.2 de cotipo métrico es equivalente a la definición de cotipo usual. Sin embargo, necesitaremos de algunas definiciones y lemas técnicos previos que presentaremos en lo que sigue.

Definición 3.3. Sean (E, d) un espacio métrico y $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

- Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $m \in 2\mathbb{N}$, llamaremos $\Gamma_q^{(p)}(E; n, m)$ al ínfimo de los $\Gamma > 0$ tales que para toda función $f : \mathbb{Z}_m^n \to E$,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left[d\left(f\left(x + \frac{m}{2} e_j \right), f(x) \right)^p \right] \right)^{1/p} \leq \Gamma m n^{1/p - 1/q} \mathbb{E}_{x,\epsilon} \left[d\left(f(x+\epsilon), f(x) \right)^p \right]^{1/p}. \tag{3.3}$$

  (Notar que, para $p = 2$, esta desigualdad es una versión al estilo Bourgain, Milman y Wolfson de la desigualdad (3.2) y que $\Gamma_q^{(p)}(E; n, m)$ es un equivalente métrico del parámetro $\gamma_q^{(p)}(E; n)$ introducido en la Definición 1.11.)

- Definimos además $\Gamma_q^{(p)}(E) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m \in 2\mathbb{N}} \Gamma_q^{(p)}(E; n, m)$ y lo notaremos $\Gamma_q^{(p)}$ cuando no dé lugar a confusión.

- Por otro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\Gamma > 0$, $m_q^{(p)}(E; n, \Gamma)$ será el ínfimo de los $m \in 2\mathbb{N}$ tales que para toda función $f : \mathbb{Z}_m^n \to E$ se satisface la desigualdad (3.3).

- Finalmente, notaremos Γ_q y m_q en vez de $\Gamma_q^{(q)}$ y $m_q^{(q)}$ cuando p sea igual a q.

Observación 3.6. Podemos expresar la noción de cotipo métrico en términos de la definición anterior. Tener cotipo métrico q con constante $\Gamma > 0$ significa que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un $m \in 2\mathbb{N}$ tal que se satisface la desigualdad (3.2) para toda función $f : \mathbb{Z}_m^n \to E$. Esto sucede si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un $m \in 2\mathbb{N}$ tal que $\Gamma_q(E; n, m) \leq \Gamma$, lo cual implica que $\Gamma_q \leq \Gamma$. Se deduce también una recíproca parcial de lo antedicho: si $\Gamma_q < \infty$, entonces el espacio E tiene cotipo métrico q con constante Γ para todo $\Gamma > \Gamma_q$, pues para todo $n \in \mathbb{N}$ existirá un $m \in 2\mathbb{N}$ tal que $\Gamma_q(E; n, m) \leq \Gamma$. En particular, sin preocuparse por las constantes, podemos afirmar que E tiene cotipo métrico q si y sólo si $\Gamma_q < \infty$.

En vista de la caracterización del cotipo métrico de la observación anterior, se podría dar una generalización de la definición.

Definición 3.4. Sea E un espacio métrico y $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Decimos que E tiene cotipo métrico (q,p) si $\Gamma_q^{(p)} < \infty$. (En particular, cotipo métrico (q,q) es lo mismo que cotipo métrico q.)

Observación 3.7. Nuestra definición de cotipo métrico original es, en cierta forma, análoga a la de tipo de Enflo, mientras que la de cotipo métrico $(q,2)$ es análoga a la definición de tipo métrico (de Bourgain, Milman y Wolfson). Por otro lado, haciendo un paralelismo con la teoría lineal, el concepto de cotipo métrico (q,p) es un análogo métrico de la condición $\gamma_q^{(p)} < \infty$ que podía considerarse una versión débil del concepto de cotipo por lo visto en el Corolario 1.26.

Pasemos a estudiar el factor $m_q^{(p)}$. La siguiente proposición (cuya demostración se encuentra en el apéndice) deja en evidencia que para espacios métricos de más de un punto, $m_q^{(p)}(E;n,\Gamma)$ debe ser muy grande.

Proposición 3.8. *Sea (E,d) un espacio métrico de más de un punto. Entonces para todo $1 \leq p \leq q < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ y $\Gamma > 0$ tenemos que:*

$$m_q^{(p)}(E;n,\Gamma) \geq \frac{n^{1/q}}{\Gamma}. \tag{3.4}$$

La proposición anterior dice que el factor m en la definición de cotipo debe ser grande para que ésta tenga sentido. Intuitivamente podemos pensar al toro $\mathbb{Z}_m^n$ como una discretización del toro continuo n-dimensional $\mathbb{T}^n$ (ver Observación 3.2). Visto de esta forma, la grilla de puntos que conforma $\mathbb{Z}_m^n$ aumenta su grado de subdividisión al aumentar el factor m. La Proposición 3.8 sugiere entonces que la definición de cotipo requiere de toros con un grado de subdivisión alto, es decir una discretización de $\mathbb{T}^n$ de mucha resolución. Este hecho se condice con la imposibilidad de brindar una definición de cotipo métrico en términos de cubos, ya que a nivel de conjuntos un cubo no es otra cosa que $\mathbb{Z}_2^n$.

Al pensar a m como un factor que escala la subdivisión de la grilla, resulta natural preguntarse si un refinamiento de la subdivisión (es decir, reemplazar a m por un múltiplo) mejora la cota $\Gamma_q^{(p)}(E;n,m)$. La siguiente Proposición responde afirmativamente a este interrogante.

Proposición 3.9. *Sea (E,d) un espacio métrico. Entonces para todo $n,k \in \mathbb{N}$ y $m \in 2\mathbb{N}$ tenemos que*

$$\Gamma_q^{(p)}(E;n,km) \leq \Gamma_q^{(p)}(E;n,m). \tag{3.5}$$

Por otro lado, sería interesante conocer la relación entre $\Gamma_q^{(p)}(E;k,m)$ y $\Gamma_q^{(p)}(E;n,m)$ si $k \leq n$. Efectivamente, se tiene un resultado análogo al punto 1 de la Observación 1.22.

Proposición 3.10. *Sea (E,d) un espacio métrico. Entonces para todo par de números naturales $k \leq n$ y todo $m \in 2\mathbb{N}$ se cumple que*

$$\Gamma_q^{(p)}(E;k,m)k^{1/p-1/q} \leq \Gamma_q^{(p)}(E;n,m)n^{1/p-1/q}.$$

Las demostraciones de ambas proposiciones se encuentran en el apéndice. Nuestro siguiente objetivo será probar que un espacio de Banach con cotipo métrico q, tiene cotipo q en el sentido usual. Para ello, demostraremos un lema previo para espacios de Banach conocido como *Principio de contracción* (ver [13]).

Lema 3.11 (Principio de contracción)**.** *Sean E un espacio de Bancah, $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ y vectores $\{v_j\}_{j=1}^n$ en E.*

1. *Si $a \in \mathbb{R}^n$ tenemos que*

$$\mathbb{E}_\xi \left\| \sum_{j=1}^n a_j \xi_j v_j \right\|^p \leq \|a\|_\infty^p \, \mathbb{E}_\xi \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j v_j \right\|^p. \tag{3.6}$$

2. *Si $a \in \mathbb{C}^n$ tenemos que*

$$\mathbb{E}_\xi \left\| \sum_{j=1}^n a_j \xi_j v_j \right\|^p \leq 2^p \|a\|_\infty^p \, \mathbb{E}_\xi \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j v_j \right\|^p.$$

Demostración. Veamos primero el caso real. Asumimos que $a \neq 0$ dado que si $a = 0$, la desigualdad se satisface trivialmente. Luego, podemos suponer $\|a\|_\infty = 1$, reemplazando a por $a/\|a\|_\infty$ de ser necesario. En particular, tendremos que $a \in [-1,1]^n$.

Definamos la siguiente función,

$$\phi : [-1,1]^n \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{como} \quad \phi(\alpha) = \mathbb{E}_\xi \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j v_j \right\|^p.$$

Notemos que ϕ es una función convexa definida sobre $[-1,1]^n$ que es el convexo generado por los vértices $\{-1,1\}^n$. Luego, ϕ alcanza su máximo en cierto $\alpha \in \{-1,1\}^n$. Por lo tanto,

$$\mathbb{E}_\xi \left\| \sum_{j=1}^n a_j \xi_j v_j \right\|^p = \phi(a) \le \phi(\alpha) = \mathbb{E}_\xi \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j v_j \right\|^p .$$

Como α_j es constante y vale ± 1 para todo j, la distribución de $(\alpha_j \xi_j)_{j=1}^n \in \{-1,1\}^n$ coincide con la de ξ. Luego,

$$\mathbb{E}_\xi \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j v_j \right\|^p = \mathbb{E}_\xi \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j v_j \right\|^p ,$$

probando la desigualdad (3.6).

El caso complejo se deduce del caso real separando la parte real de la imaginaria mediante la desigualdad triangular y usando la desigualdad de Hölder. En efecto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\xi \left\| \sum_{j=1}^n a_j \xi_j v_j \right\|^p =& \mathbb{E}_\xi \left\| \sum_{j=1}^n \mathrm{Re}(a_j) \xi_j v_j + i \sum_{j=1}^n \mathrm{Im}(a_j) \xi_j v_j \right\|^p \\
=& 2^{p-1} \left(\mathbb{E}_\xi \left\| \sum_{j=1}^n \mathrm{Re}(a_j) \xi_j v_j \right\|^p + \mathbb{E}_\xi \left\| \sum_{j=1}^n \mathrm{Im}(a_j) \xi_j v_j \right\|^p \right) \\
\le& 2^{p-1} \left(\|\mathrm{Re}(a)\|_\infty^p \, \mathbb{E}_\xi \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j v_j \right\|^p + \|\mathrm{Im}(a)\|_\infty^p \, \mathbb{E}_\xi \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j v_j \right\|^p \right) \\
\le& 2^p \, \|a\|_\infty^p \, \mathbb{E}_\xi \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j v_j \right\|^p .
\end{aligned}$$

□

Habiendo demostrado el *Principio de contracción*, estamos en condiciones de probar que cotipo métrico q implica cotipo q (en el sentido usual) para espacios de Banach. En virtud de la Observación 1.22 y la Observación 3.6, esto es equivalente a demostrar que si Γ_q es finito, entonces γ_q también. Más generalmente, dado $1 \le p \le q$, veremos que si $\Gamma_q^{(p)}$ es finito, entonces $\gamma_q^{(p)}$ también. Por ahora, probaremos esto únicamente para espacios de Banach complejos. El resultado general se deduce de un argumento de complejización que presentaremos en el apéndice.

Teorema 3.12. *Sea E un espacio de Banach complejo y $1 \leq p \leq q < \infty$, entonces $\gamma_q^{(p)} \leq 2\pi\Gamma_q^{(p)}$.*

Observación 3.13.

1. En el caso $p = q$, el teorema dice que si E tiene cotipo métrico q, entonces E tiene cotipo q con constante $2\pi\Gamma_q$. Este resultado es un análogo a afirmar que tipo de Enflo implica tipo usual.

2. En el caso $p < q$, combinando el teorema con el Corolario 1.26 se deduce que si E tiene cotipo métrico (q, p), entonces E tiene cotipo q' para todo $q' > q$. Este resultado es un análogo a afirmar que tipo métrico p implica tipo usual p' para todo $p' < p$.

Demostración del Teorema 3.12. Sin pérdida de generalidad suponemos que $\Gamma_q^{(p)} < \infty$. Sean $\{v_j\}_{j=1}^n$ en E con $n \in \mathbb{N}$. Tomando $\Gamma > \Gamma_q^{(p)}$ resulta que, por la definición de $\Gamma_q^{(p)}$, existe un $m \in 2\mathbb{N}$ tal que $\Gamma > \Gamma_q^{(p)}(E; n, m)$. Consideremos la función $f : \mathbb{Z}_m^n \to E$ definida como,

$$f(x) := \sum_{j=1}^{n} e^{\frac{2\pi i x_j}{m}} v_j.$$

Luego, por la Observación 3.6, como $\Gamma > \Gamma_q^{(p)}(E; n, m)$ sabemos que

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left\| f\left(x + \frac{m}{2} e_j\right) - f(x) \right\|^p \leq \Gamma^p m^p n^{1-p/q} \mathbb{E}_{x,\epsilon} \left\| f(x+\epsilon) - f(x) \right\|^p . \tag{3.7}$$

Analicemos el lado izquierdo de la desigualdad. Notemos que

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{m}{2} e_j\right) = \sum_{l=1}^{n} e^{\frac{2\pi i \left(x + \frac{m}{2} e_j\right)_l}{m}} v_l = \sum_{l \neq j} e^{\frac{2\pi i x_l}{m}} v_l + e^{\frac{2\pi i \left(x_j + \frac{m}{2}\right)}{m}} v_j \\ = f(x) - e^{\frac{2\pi i x_j}{m}} v_j + e^{\frac{2\pi i x_j}{m}} e^{\pi i} v_j = f(x) - 2e^{\frac{2\pi i x_j}{m}} v_j \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left\| f\left(x + \frac{m}{2} e_j\right) - f(x) \right\|^p &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left\| -2e^{\frac{2\pi i x_j}{m}} v_j \right\|^p \\ &= 2^p \sum_{j=1}^{n} \left\| v_j \right\|^p . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Por otro parte, acotemos la esperanza del lado derecho de la desigualdad (3.7). En primer lugar, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x,\epsilon}\|f(x+\epsilon)-f(x)\|^p =& \mathbb{E}_{x,\epsilon}\left\|\sum_{j=1}^{n}\left(e^{\frac{2\pi i(x_j+\epsilon_j)}{m}}-e^{\frac{2\pi i x_j}{m}}\right)v_j\right\|^p\\ =& \mathbb{E}_{x,\epsilon}\left\|\sum_{j=1}^{n}e^{\frac{2\pi i x_j}{m}}\left(e^{\frac{2\pi i\epsilon_j}{m}}-1\right)v_j\right\|^p.\end{aligned}$$

Dado $\xi\in\{-1,1\}^n$, si le sumamos $m(1-\xi_j)/4$ a x_j, por la invariancia por traslaciones resulta

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x,\epsilon}\|f(x+\epsilon)-f(x)\|^p =& \mathbb{E}_{x,\epsilon}\left\|\sum_{j=1}^{n}e^{\frac{2\pi i x_j}{m}+\frac{\pi i(1-\xi_j)}{2}}\left(e^{\frac{2\pi i\epsilon_j}{m}}-1\right)v_j\right\|^p\\ =& \mathbb{E}_{x,\epsilon}\left\|\sum_{j=1}^{n}e^{\frac{2\pi i x_j}{m}}\left(e^{\frac{2\pi i\epsilon_j}{m}}-1\right)\xi_j v_j\right\|^p.\end{aligned}$$

Tomando esperanza con respecto a ξ en la igualdad anterior y usando el *Principio de contracción* nos queda

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x,\epsilon}\|f(x+\epsilon)-f(x)\|^p =& \mathbb{E}_{x,\epsilon,\xi}\|f(x+\epsilon)-f(x)\|^p\\ =& \mathbb{E}_{x,\epsilon,\xi}\left\|\sum_{j=1}^{n}e^{\frac{2\pi i x_j}{m}}\left(e^{\frac{2\pi i\epsilon_j}{m}}-1\right)\xi_j v_j\right\|^p\\ \le& \mathbb{E}_{x,\epsilon}\left[2^p\max_{1\le j\le n}\left|e^{\frac{2\pi i x_j}{m}}\left(e^{\frac{2\pi i\epsilon_j}{m}}-1\right)\right|^p\mathbb{E}_\xi\left\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j v_j\right\|^p\right]\\ =& 2^p\mathbb{E}_\xi\left\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j v_j\right\|^p\mathbb{E}_\epsilon\left[\max_{1\le j\le n}\left|e^{\frac{2\pi i\epsilon_j}{m}}-1\right|^p\right].\end{aligned}$$

Acotando la distancia entre puntos de la circunferencia unitaria por su arco, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x,\epsilon}\|f(x+\epsilon)-f(x)\|^p \le& 2^p\mathbb{E}_\xi\left\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j v_j\right\|^p\mathbb{E}_\epsilon\left[\left(\frac{2\pi}{m}\right)^p\right]\\ =& \left(\frac{4\pi}{m}\right)^p\mathbb{E}_\xi\left\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j v_j\right\|^p. \qquad (3.9)\end{aligned}$$

Por lo tanto, de (3.7), (3.8) y (3.9) deducimos que

$$\begin{aligned}
2^p \sum_{j=1}^{n} \|v_j\|^p = & \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left\| f\left(x + \frac{m}{2} e_j\right) - f(x) \right\|^p \\
\leq & \Gamma^p m^p n^{1-p/q} \mathbb{E}_{x,\epsilon} \| f(x+\epsilon) - f(x) \|^p \\
\leq & \Gamma^p m^p n^{1-p/q} \left(\frac{4\pi}{m}\right)^p \mathbb{E}_\xi \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j v_j \right\|^p \\
\leq & \left(4\pi\Gamma\right)^p n^{1-p/q} \mathbb{E}_\xi \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j v_j \right\|^p,
\end{aligned}$$

de donde el resultado se sigue por la definición de $\gamma_q^{(p)}$ tomando ínfimo sobre los $\Gamma > \Gamma_q^{(p)}$. □

Como mencionamos en el enunciado del teorema anterior para el caso $p = q$, hemos probado que cotipo métrico implica cotipo usual para espacios de Banach. Para completar el primer paso del *Programa de Ribe* deberemos demostrar la afirmación recíproca que enunciamos a continuación.

Teorema 3.14. *Sea E un espacio de Banach y $1 \leq p \leq q < \infty$, entonces $\Gamma_q^{(p)} \leq 90\gamma_q^{(p)}$.*

Observación 3.15.

1. En el caso $p = q$, el teorema dice que si E tiene cotipo q, entonces E tiene cotipo métrico q con constante arbitrariamente cercana a $90\gamma_q$. Este resultado podría considerarse un análogo a afirmar que tipo implica tipo de Enflo, lo cual no se ha podido probar hasta ahora, como se vio en la Observación 2.4. Sin embargo, para la noción *tipo de Enflo escalado* cuyo paralelismo con la definición de cotipo métrico es pleno, sí se ha podido probar la equivalencia con la definición de tipo como se menciona en la observación.

2. En el caso $p < q$, si E tiene cotipo q, entonces $\gamma_q^{(p)} < \infty$ por el Corolario 1.26. Luego, por el teorema, se deduce que E tiene cotipo métrico (q, p). Este resultado podría considerarse un análogo a afirmar que tipo implica tipo métrico, lo cual no se ha podido probar hasta ahora.

Para probar el Teorema 3.14, necesitaremos algunas nociones y resultados técnicos previos cuyas demostraciones se encuentran en el apéndice. En primer lugar, enunciaremos un lema que utilizaremos a lo largo de este capítulo para acotar el parámetro $\Gamma_q^{(p)}(E;n,m)$.

Lema 3.16. *Sea (E,d) un espacio métrico. Dado $C>0$, $n\in\mathbb{N}$ y $m\in 2\mathbb{N}$, supongamos que para todo $1\leq l\leq n$ y toda función $f:\mathbb{Z}_m^l\to E$ se cumple que*

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{l}\mathbb{E}_x\left[d\left(f\left(x+\frac{m}{2}e_j\right),f(x)\right)^p\right]\\ \leq C^p m^p n^{1-p/q}\left(\mathbb{E}_{x,\xi}\left[d\left(f(x+\xi),f(x)\right)^p\right]+\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}\mathbb{E}_x\left[d\left(f(x+e_j),f(x)\right)^p\right]\right).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Entonces, se tiene que $\Gamma_q^{(p)}(E;n,m)\leq 5C$.

Para presentar los próximos lemas harán falta algunas nociones previas.

Definición 3.5. Dados $n\in\mathbb{N}$, $m\in 2\mathbb{N}$, $j\in\{1,\dots,n\}$ y $k\in\mathbb{N}$ con $k<m/2$ impar, definimos el subconjunto del toro $S(j,k)\subseteq\mathbb{Z}_m^n$ como

$$S(j,k):=\{y\in\{-k,\dots,k\}^n\subseteq\mathbb{Z}_m^n\ :\ y_j \text{ es par e } y_l \text{ es impar para todo } l\neq j\}.$$

Por otro lado, dada una función $f:\mathbb{Z}_m^n\to E$ con E un espacio de Banach definimos

$$\mathcal{E}_j^{(k)}f(x):=\frac{1}{\mu\left(S(j,k)\right)}\int_{S(j,k)}f(x+y)\,d\mu(y),$$

donde por μ notábamos la medida de equiprobabilidad en $\mathbb{Z}_m^n$.

Finalmente, enunciamos los dos últimos resultados necesarios para probar el Teorema 3.14.

Lema 3.17. *Sean E un espacio de Bancah, $p\geq 1$, $n\in\mathbb{N}$, $m\in 2\mathbb{N}$, $j\in\{1,\dots,n\}$ y $k\in\mathbb{N}$ con $k<m/2$ impar. Entonces, para toda función $f:\mathbb{Z}_m^n\to E$ tenemos que*

$$\mathbb{E}_x\left\|\mathcal{E}_j^{(k)}f(x)-f(x)\right\|^p\leq 2^{p-1}\mathbb{E}_x\left\|f(x+e_j)-f(x)\right\|^p+2^pk^p\mathbb{E}_{x,\xi}\left\|f(x+\xi)-f(x)\right\|^p. \tag{3.11}$$

Lema 3.18. *Sean E un espacio de Bancah, $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in 2\mathbb{N}$, $\xi \in \{-1,1\}^n$ y $k \in \mathbb{N}$ con $k < m/2$ impar. Entonces, para toda función $f : \mathbb{Z}_m^n \to E$ se cumple que*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j \left(\mathcal{E}_j^{(k)} f(x+e_j) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x-e_j) \right) \right\|^p \\ \leq \frac{24^p n^{2p-1}}{k^p} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_x \left\| f(x+e_j) - f(x) \right\|^p \\ + 3^{p-1} \mathbb{E}_x \left\| f(x+\xi) - f(x-\xi) \right\|^p . \quad (3.12)\end{aligned}$$

Concluimos esta sección con la prueba del Teorema 3.14.

Demostración del Teorema 3.14. Sin pérdida de generalidad suponemos que $\gamma_q^{(p)} < \infty$. Dado $n \in \mathbb{N}$, basta ver que existe un $m \in \mathbb{N}$ par de manera tal que se satisfaga la desigualdad

$$\Gamma_q^{(p)}(E; n, m) \leq 90 \gamma_q^{(p)}.$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ divisible por cuatro (más adelante pediremos ciertas condiciones adicionales sobre m). Por comodidad llamaremos $\gamma \coloneqq \gamma_q^{(p)}$. La prueba del teorema consistirá en ver que se satisfacen las hipótesis del Lema 3.16 para obtener así la cota deseada para $\Gamma_q^{(p)}(E; n, m)$. Efectivamente, dados $1 \leq l \leq n$ y $f : \mathbb{Z}_m^l \to E$, basta ver que se satisface la desigualdad

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^l \mathbb{E}_x \left\| f\left(x + \frac{m}{2} e_j\right) - f(x) \right\|^p \\ &\leq (18\gamma)^p m^p n^{1-p/q} \left(\mathbb{E}_{x,\xi} \left\| f(x+\xi) - f(x) \right\|^p + \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l \mathbb{E}_x \left\| f(x+e_j) - f(x) \right\|^p \right). \quad (3.13)\end{aligned}$$

Fijemos $j \in \{1, \ldots, l\}$ y tomemos $k \in \mathbb{N}$ impar con $k < m/2$ a determinar. El Lema 3.17 nos permitirá reemplazar $f(x)$ por $\mathcal{E}_j^{(k)} f(x)$ sin perder el control de nuestras acotaciones. Concretamente, aplicando desigualdad triangular y la desigualdad de Hölder, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x \left\| f\left(x+\frac{m}{2}e_j\right) - f(x)\right\|^p \leq & 3^{p-1}\mathbb{E}_x \left\| f\left(x+\frac{m}{2}e_j\right) - \mathcal{E}_j^{(k)} f\left(x+\frac{m}{2}e_j\right)\right\|^p \\ & + 3^{p-1}\mathbb{E}_x \left\| \mathcal{E}_j^{(k)} f\left(x+\frac{m}{2}e_j\right) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x)\right\|^p \\ & + 3^{p-1}\mathbb{E}_x \left\| \mathcal{E}_j^{(k)} f(x) - f(x)\right\|^p .\end{aligned}$$

Usando la invariancia por traslaciones, si le restamos $\frac{m}{2}e_j$ a x en el primer sumando, se deduce que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x \left\| f\left(x+\frac{m}{2}e_j\right) - f(x)\right\|^p \leq & 3^{p-1}\mathbb{E}_x \left\| \mathcal{E}_j^{(k)} f\left(x+\frac{m}{2}e_j\right) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x)\right\|^p \\ & + 3^{p-1}2\mathbb{E}_x \left\| \mathcal{E}_j^{(k)} f(x) - f(x)\right\|^p .\end{aligned}$$

Luego, por el lema, resulta:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x \left\| f\left(x+\frac{m}{2}e_j\right) - f(x)\right\|^p \leq & 3^{p-1}\mathbb{E}_x \left\| \mathcal{E}_j^{(k)} f\left(x+\frac{m}{2}e_j\right) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x)\right\|^p \\ & + 3^{p-1}2^p\mathbb{E}_x \left\| f(x+e_j) - f(x)\right\|^p \\ & + 3^{p-1}2^{p+1}k^p\mathbb{E}_{x,\xi} \left\| f(x+\xi) - f(x)\right\|^p \\ \leq & 3^{p-1}\mathbb{E}_x \left\| \mathcal{E}_j^{(k)} f\left(x+\frac{m}{2}e_j\right) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x)\right\|^p \\ & + 6^p\mathbb{E}_x \left\| f(x+e_j) - f(x)\right\|^p \\ & + 6^p k^p\mathbb{E}_{x,\xi} \left\| f(x+\xi) - f(x)\right\|^p . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Observemos que el segundo y tercer sumando del lado derecho de la desigualdad anterior se asemejan al lado derecho de la desigualdad (3.13) que buscamos probar. El resto de la demostración consistirá en acotar el primer sumando por términos de este estilo. Como antes, comenzaremos aplicando desigualdad triangular y la desigualdad de Hölder al primer sumando:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_x \left\| \mathcal{E}_j^{(k)}\ f\left(x+\frac{m}{2}e_j\right) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x)\right\|^p \\ &\quad \leq \left(\frac{m}{4}\right)^{p-1} \sum_{s=1}^{m/4} \mathbb{E}_x \left\| \mathcal{E}_j^{(k)} f(x+2se_j) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x+2(s-1)e_j)\right\|^p \\ &\quad = \left(\frac{m}{4}\right)^{p} \mathbb{E}_x \left\| \mathcal{E}_j^{(k)} f(x+e_j) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x-e_j)\right\|^p .\end{aligned}$$

Luego, si sumamos sobre los $j \in \{1, \ldots, l\}$ y aplicamos la definición de $\gamma = \gamma_q^{(p)}$ a los vectores $\left\{\mathcal{E}_j^{(k)} f(x+e_j) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x-e_j)\right\}_{j=1}^{l}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}_x \left\| \mathcal{E}_j^{(k)} \ f\left(x + \frac{m}{2} e_j\right) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x) \right\|^p \\ \leq \left(\frac{m}{4}\right)^p \gamma^p l^{1-p/q} \mathbb{E}_{x,\xi} \left\| \sum_{j=1}^{l} \xi_j \left(\mathcal{E}_j^{(k)} f(x+e_j) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x-e_j)\right) \right\|^p,\end{aligned}$$

y, aplicando el Lema 3.18, esto último queda acotado por

$$\begin{aligned}&\frac{(\gamma m)^p}{4^p} l^{1-p/q} \left(\frac{24^p l^{2p-1}}{k^p} \sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}_{x,\xi} \left\| f(x+e_j) - f(x) \right\|^p \right. \\ &\quad \left. + 3^{p-1} \mathbb{E}_{x,\xi} \left\| f(x+\xi) - f(x-\xi) \right\|^p \right) \\ \leq &\frac{(\gamma m)^p}{4^p} l^{1-p/q} \left(\frac{24^p l^{2p-1}}{k^p} \sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}_x \left\| f(x+e_j) - f(x) \right\|^p \right. \\ &\quad \left. + 3^{p-1} \mathbb{E}_{x,\xi} \left[2^{p-1} \left(\left\| f(x+\xi) - f(x) \right\|^p + \left\| f(x) - f(x-\xi) \right\|^p \right) \right] \right) \\ \leq &\frac{(6\gamma m)^p l^{2p-p/q}}{k^p} \sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}_x \left\| f(x+e_j) - f(x) \right\|^p \\ &\quad + \frac{(6\gamma m)^p l^{1-p/q}}{4^p 3} \mathbb{E}_{x,\xi} \left\| f(x+\xi) - f(x) \right\|^p.\end{aligned}$$

Finalmente, si en la desigualdad (3.14) sumamos sobre los $j \in \{1, \ldots, l\}$ y luego usamos la cota anterior, resulta:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}_x \left\| f\left(x + \frac{m}{2} e_j\right) - f(x) \right\|^p \leq \left(\frac{(18\gamma m)^p l^{2p-p/q}}{k^p} + 6^p \right) \sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}_x \left\| f(x+e_j) - f(x) \right\|^p \\ + \left(\frac{(18\gamma m)^p l^{1-p/q}}{4^p} + 6^p k^p l \right) \mathbb{E}_{x,\xi} \left\| f(x+\xi) - f(x) \right\|^p.\end{aligned}$$

Si tomamos m de manera tal que $m \geq 6n^{2+1/q}$ y $m/2 > 4n^2 + 1$, podemos tomar $k = 4l^2 + 1$. Luego, k cumplirá (además de ser impar y menor que $m/2$) la condición $4l^2 \leq k \leq \frac{3m}{4l^{1/q}}$. Aplicando esto a la desigualdad anterior se deduce la desigualdad (3.13) que buscábamos demostrar. $\square$

Comentario 3.19. Durante la prueba del teorema no nos preocupamos por conseguir la menor cota para m en función de n. De todas formas, obtuvimos que es posible tomar m con un comportamiento asintótico comparable a $n^{2+1/q}$. En [14] se logró la cota asintótica $n^{1+1/q}$, mientras se conjetura que es posible llegar al valor óptimo $n^{1/q}$ fijado por la Proposición 3.8.

Hemos cumplido hasta aquí con el primer paso del *Programa de Ribe* para el concepto de cotipo. A continuación, daremos el siguiente paso del programa brindando una versión métrica del Teorema 1.29.

3.2. Caracterización del cotipo métrico trivial

Recordemos que el Teorema 1.29 caracterizaba los espacios de Banach de cotipo trivial como aquellos que contenían linealmente a los espacios ℓ_∞^n con distorsión acotada uniformemente para todo $n \in \mathbb{N}$. Más precisamente, teníamos que un espacio de Banach E tenía cotipo trivial si y sólo si $C_E^\ell(\{\ell_\infty^n\}_{n\in\mathbb{N}}) < \infty$, lo cual era a su vez equivalente a que $C_E^\ell(\{\ell_\infty^n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 1$. En esta sección nos proponemos exponer un análogo métrico de este resultado.

Al igual que al caracterizar los espacios de tipo métrico trivial, la versión métrica del Teorema 1.29 no involucra a los espacios ℓ_∞^n, sino un equivalente métrico. Este será el espacio $[m]^n := \{0, \ldots, m\}^n$ pensado como subespacio métrico de ℓ_∞^n.

Observación 3.20. Recordemos que, en el capítulo anterior, la caracterización de espacios con tipo métrico trivial se realizo con la definición de Bourgain, Milman y Wolfson. Aquí también, la caracterización se realizará en términos de su análogo para el caso de cotipo, es decir, la noción de cotipo métrico $(q, 2)$ (ver Definición 3.4).

A partir de la siguiente proposición (cuya demostración se encuentra en el apéndice), la definición de cotipo métrico trivial surgirá naturalmente.

Proposición 3.21.

- *Si un espacio tiene cotipo métrico* $(q, 2)$*, entonces tiene cotipo métrico* $(q', 2)$ *para todo* $q' > q$.
- *Todo espacio tiene cotipo métrico* $(\infty, 2)$.

Definición 3.6. Dado E un espacio métrico, decimos que tiene cotipo métrico trivial si no tiene cotipo métrico $(q, 2)$ para ningun $q < \infty$. En otras palabras, E tiene cotipo métrico trivial si $\Gamma_q^{(2)} = \infty$ para todo $q < \infty$.

Estamos en condiciones de presentar la versión métrica del Teorema 1.29.

Teorema 3.22. *Sea E un espacio métrico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *E tiene cotipo métrico trivial;*

(ii) $C_E(\{[m]^n\}_{n,m\in\mathbb{N}}) = 1$*;*

(iii) $C_E(\{[m]^n\}_{n,m\in\mathbb{N}}) < \infty$.

Para probar el Teorema 3.22, necesitaremos algunas nociones y resultados técnicos previos cuyas demostraciones dejaremos en su mayor parte para el apéndice.

Daremos una definición de *camino* en $\mathbb{Z}_m^n$ que fue esbozada previamente en la demostración del Lema 3.17.

Definición 3.7. Sean $n, m, r \in \mathbb{N}$ y $x, y \in \mathbb{Z}_m^n$. Definimos un camino de x a y de longitud r como una función $\pi : \{0, \ldots, r\} \to \mathbb{Z}_m^n$ tal que: $\pi(0) = x$, $\pi(r) = y$ y el paso $\pi(k) - \pi(k-1)$ pertenece a $\{-1, 1\}^n$ para todo $1 \leq k \leq r$. Además, diremos que π es una geodésica si su longitud es minimal. A veces abusaremos de la notación identificando un camino o geodésica con su imagen vista como un vector ordenado de coordenadas $\pi_k := \pi(k)$ con $k \in \{0, \ldots, r\}$.

Definición 3.8. Sean (E, d) un espacio métrico y $n, s \in \mathbb{N}$. llamaremos $\mathcal{B}(E; n, s)$ al ínfimo de los $\mathcal{B} > 0$ tales que para todo $m \in 2\mathbb{N}$ y toda función $f : \mathbb{Z}_m^n \to E$ se cumple que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left[d\left(f(x + se_j), f(x)\right)^2\right]\right)^{1/2} \leq \mathcal{B} s n^{1/2} \mathbb{E}_{x,\xi} \left[d\left(f(x + \xi), f(x)\right)^2\right]^{1/2}. \qquad (3.15)$$

Observación 3.23.

- Si bien la definición de $\mathcal{B}(E; n, s)$ guarda cierta semejanza con la de $\Gamma_\infty^{(2)}(E; n, m)$, existen dos cambios significativos: reemplazamos $m/2$ por una variable s independiente de m y, en el lado derecho de la desigualdad, promediamos sobre los $\xi \in \{-1, 1\}^n$ en vez de sobre los $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}^n$.

- La expresión $\mathcal{B}(E;n,s)sn^{1/2}$ cumplirá un rol análogo al del parámetro $\mathcal{A}_n$ que utilizamos para caracterizar los espacios de tipo métrico trivial en la Sección 2.3.

Vimos en la Observación 2.14 que $\mathcal{A}_n \leq n^{1/2}$. Paralelamente, tendremos una cota para $\mathcal{B}(E;n,s)$. Daremos la demostración de este hecho aquí, ya que se hará referencia a parte de la prueba más adelante.

Lema 3.24. *Sea E un espacio métrico. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}_0$, $r, m \in 2\mathbb{N}$ y $f : \mathbb{Z}_m^n \to E$ una función arbitraria, se tiene:*

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left[d\left(f(x+(am+r)e_j), f(x)\right)^2 \right] \leq \text{mín}\left(r^2, (m-r)^2\right) n\mathbb{E}_{x,\xi} \left[d\left(f(x+\xi), f(x)\right)^2 \right]. \tag{3.16}$$

En particular, se deduce que $\mathcal{B}(E;n,s) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $s \in 2\mathbb{N}$, tomando r y a tal que $s = am + r$.

Demostración. Notemos que el lado izquierdo de la desigualdad (3.16) no depende de a ni se ve alterado al intercambiar r por $m-r$. Luego, podemos asumir $a = 0$ y $r \leq m-r$. Dado $j \in \{1, \ldots, n\}$, observemos que

$$\left(\frac{1-(-1)^k}{2} \sum_{k \neq j} e_k + ke_j \right)_{k=0}^{r}$$

es un camino de 0 a re_j. Como ningún otro camino de 0 a re_j puede tener longitud menor a r, este resulta una geodésica. En consecuencia, un camino de 0 a re_j es una geodésica si tiene longitud r. Por otro lado, dado $x \in \mathbb{Z}_m^n$, toda geodésica de x a $x+re_j$ es de la forma $\pi + x$ con π una geodésica de 0 a re_j. Es decir, que la cantidad de geodésicas de x a $x+re_j$ es una constante K independiente de x. Tomemos $\pi + x$ una geodésica de x a $x+re_j$. Aplicando la desigualdad triangular y luego la desigualdad de Hölder, se deduce que

$$d\left(f(x+re_j), f(x)\right)^2 \leq r \sum_{k=1}^{r} d\left(f(\pi(k)+x), f(\pi(k-1)+x)\right)^2.$$

Notemos que, en el lado derecho de la desigualdad, las distancias se toman siempre sobre pares de la forma $(f(y+\xi), f(y))$ con $y \in \mathbb{Z}_m^n$ y $\xi \in \{-1,1\}^n$. Si sumamos a ambos lados de la desigualdad sobre todos los $x \in \mathbb{Z}_m^n$ y todas las geodésicas π de 0 a re_j, por un argumento de simetría deducimos que cada par $(f(y+\xi), f(y))$ aparecerá la misma cantidad C de veces. Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{x\in\mathbb{Z}_m^n}\sum_{\pi} d\left(f(x+re_j), f(x)\right)^2 &\leq r\sum_{k=1}^{r}\sum_{x\in\mathbb{Z}_m^n}\sum_{\pi} d\left(f(\pi(k)+x), f(\pi(k-1)+x)\right)^2 \\ &= r\sum_{k=1}^{r} C\sum_{y\in\mathbb{Z}_m^n}\sum_{\xi\in\{-1,1\}^n} d\left(f(y+\xi), f(y)\right)^2. \qquad (3.17)\end{aligned}$$

Ahora bien, como la cantidad de sumandos en la última igualdad debe ser la misma, deducimos que $C = K/2^n$. En consecuencia, la desigualdad anterior nos queda:

$$\begin{aligned}K\sum_{x\in\mathbb{Z}_m^n} d\left(f(x+re_j), f(x)\right)^2 &\leq \frac{r^2K}{2^n}\sum_{y\in\mathbb{Z}_m^n}\sum_{\xi\in\{-1,1\}^n} d\left(f(y+\xi), f(y)\right)^2 \\ &= r^2K\sum_{y\in\mathbb{Z}_m^n}\mathbb{E}_\xi\left[d\left(f(y+\xi), f(y)\right)^2\right].\end{aligned}$$

Luego, dividiendo por Km^n, resulta:

$$\mathbb{E}_x\left[d\left(f(x+re_j), f(x)\right)^2\right] \leq r^2\mathbb{E}_{y,\xi}\left[d\left(f(y+\xi), f(y)\right)^2\right].$$

Finalmente, sumando sobre $j \in \{1,\ldots,n\}$, el lema se sigue. □

Manteniendo la comparación con $\mathcal{A}_n$, al igual que lo visto en el Lema 2.15, se cumplirá una suerte de submultiplicatividad para $\mathcal{B}(E;n,s)$ que se enuncia en el siguiente lema.

Lema 3.25. *Dados $n,k,s,t \in \mathbb{N}$, se cumple que*

$$\mathcal{B}(E;nk,st) \leq \mathcal{B}(E;n,s)\mathcal{B}(E;k,t).$$

Continuamos, tal como en la Sección 2.3, con la siguiente propiedad análoga a la Proposición 2.16.

Proposición 3.26. *Sea E un espacio métrico. Si existen números naturales $n_0, s_0 > 1$ tales que $\mathcal{B}(E;n_0,s_0) < 1$, entonces existe un $q < \infty$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se satisface la desigualdad*

$$m_q^{(2)}(E;n,3n_0) \leq 2s_0 n^{\log_{n_0} s_0}.$$

En particular, $\Gamma_q^{(2)} < \infty$ por lo que E tiene cotipo métrico $(q,2)$.

Finalmente, estamos en condiciones de presentar el corazón de la prueba del Teorema 3.22, a partir del cual deduciremos el caso *(i)* $\implies$ *(ii)*.

Teorema 3.27. *Sean E un espacio métrico, $n \in \mathbb{N}$ mayor que uno, $m \in 2\mathbb{N}$, $s \in 4\mathbb{N}$ y $\eta \in (0,1)$ tal que $8^{sn}\sqrt{\eta} < 1/2$. Supongamos que existe una función $f : \mathbb{Z}_m^n \to E$ tal que*

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left[d\left(f(x+se_j), f(x)\right)^2 \right] > (1-\eta)s^2 n \mathbb{E}_{x,\xi} \left[d\left(f(x+\xi), f(x)\right)^2 \right]. \tag{3.18}$$

Entonces,

$$C_E\left([s/4]^n\right) < 1 + 8^{sn}\sqrt{\eta}.$$

En particular, si $\mathcal{B}(E;n,s) = 1$, entonces $C_E\left([s/4]^n\right) = 1$.

Demostración. En primer lugar, daremos algunas consideraciones generales. El resto de la prueba se encuentra dividido en seis pasos.

Notemos que de la desigualdad (3.18) y el Lema 3.24 se deduce que

$$\frac{m}{2} > s\sqrt{1-\eta} \geq s\left(1-\eta\right).$$

Luego, como $\eta < \frac{1}{16^{sn}4}$ por hipótesis, tenemos que

$$m > 2s\left(1 - \frac{1}{16^{sn}4}\right) = 2s - \frac{2s}{16^{sn}4} \geq 2s - 1,$$

y, por lo tanto,

$$m \geq 2s.$$

Por otro lado, dado $x \in \mathbb{Z}_m^n$ y $j \in \{1,\ldots,n\}$, notaremos $\mathcal{G}_j^+(x)$ (respectivamente $\mathcal{G}_j^-(x)$) al conjunto de geodésicas π de x a $x + se_j$ (respectivamente $x - se_j$). Como vimos en la demostración del Lema 3.24, la longitud de dichas geodésicas será s. Por una cuestión de simetría $\mathcal{G}_j^+(x)$ y $\mathcal{G}_j^-(x)$ tienen la misma cantidad de elementos, y nuevamente por la demostración del lema, dicha cantidad es no nula e independiente de x. Más aún, también es independiente de j pues $\mathcal{G}_j^+(x)$ está en biyección con $\mathcal{G}_{j'}^+(x)$

para $j' \neq j$ reordenando las coordenadas de $\mathbb{Z}_m^n$ (lo mismo para $\mathcal{G}_j^-(x)$). Además, se cumple que los conjuntos $\mathcal{G}_j^+(x)$ y $\mathcal{G}_j^-(x)$ son o bien iguales si $m = 2s$, o bien disjuntos si $m > 2s$. En cualquier caso, notaremos con el exponente $\pm$ a la unión de ambos: $\mathcal{G}_j^\pm(x) \coloneqq \mathcal{G}_j^+(x) \cup \mathcal{G}_j^-(x)$. Por último, para π en $\mathcal{G}_j^\pm(x)$ definimos:

$$\operatorname{sgn}(\pi) \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{si } \pi \in \mathcal{G}_j^+(x) \\ -1 & \text{si no} \end{cases}$$

La demostración del teorema consistirá en ir aumentando nuestro control sobre la estructura métrica de la imagen de f hasta poder probar, finalmente, que contiene al conjunto $[s/4]^n$ con una distorsión mínima.

Paso 1. Veamos que podemos reescalar la distancia en E y precomponer a f con un cambio de variables de manera tal que se cumpla la afirmación siguiente. Dados $y \in \{0, \ldots, s-1\}^n \subseteq \mathbb{Z}_m^n$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\pi \in \mathcal{G}_j^\pm(y)$ y $l \in \{1, \ldots, s\}$, se satisface la desigualdad

$$\left| d\left(f(\pi_l), f(\pi_{l-1})\right) - \frac{1}{s} d\left(f(y + \operatorname{sgn}(\pi) s e_j), f(y)\right) \right| \leq 2^{2sn}\sqrt{\eta}. \tag{3.19}$$

Notemos, en primer lugar, que dados $a_1, \ldots, a_s \geq 0$ y $0 \leq b \leq \frac{1}{s}\sum_{l=1}^s a_l$ se cumple la siguiente desigualdad

$$\sum_{l=1}^{s} (a_l - b)^2 \leq \sum_{l=1}^{s} a_l^2 - sb^2. \tag{3.20}$$

(Esto se deduce desarrollando el cuadrado de la izquierda y despejando b.) Luego, dado $x \in \mathbb{Z}_m^n$ y $\pi \in \mathcal{G}_j^+(x)$, tomemos $a_l = d\left(f(\pi_l), f(\pi_{l-1})\right)$ y $b = \frac{1}{s} d\left(f(x + \operatorname{sgn}(\pi) s e_j), f(x)\right)$. Esta elección de a_l y b cumple las hipótesis previas a la desigualdad (3.20) como consecuencia de la desigualdad triangular. Por lo tanto, obtenemos:

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^{s} \left(d\left(f(\pi_l), f(\pi_{l-1})\right) - \frac{1}{s} d\left(f(x + \operatorname{sgn}(\pi) s e_j), f(x)\right)\right)^2 \\ &\qquad \leq \sum_{l=1}^{s} d\left(f(\pi_l), f(\pi_{l-1})\right)^2 - \frac{1}{s} d\left(f(x + \operatorname{sgn}(\pi) s e_j), f(x)\right)^2 . \end{aligned}$$

Notaremos a la constante $K \coloneqq \left|\mathcal{G}_j^\pm(x)\right|$ que, como vimos durante las consideraciones generales, no depende de x ni de j. Luego, sumando sobre $j \in \{1, \ldots, n\}$, $x \in \mathbb{Z}_m^n$ y

$\pi \in \mathcal{G}_j^{\pm}(x)$ a ambos lados de la desigualdad anterior, resulta que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \sum_{x\in\mathbb{Z}_m^n} \sum_{\pi\in\mathcal{G}_j^{\pm}(x)} \sum_{l=1}^{s} & \left(d\left(f(\pi_l), f(\pi_{l-1})\right) - \frac{1}{s} d\left(f(x+\operatorname{sgn}(\pi) s e_j), f(x)\right)\right)^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{x\in\mathbb{Z}_m^n} \sum_{\pi\in\mathcal{G}_j^{\pm}(x)} \left(\sum_{l=1}^{s} d\left(f(\pi_l), f(\pi_{l-1})\right)^2 - \frac{1}{s} d\left(f(x+\operatorname{sgn}(\pi) s e_j), f(x)\right)^2 \right) \\
&\leq n \sum_{l=1}^{s} \sum_{x\in\mathbb{Z}_m^n} \sum_{\pi\in\mathcal{G}_j^{\pm}(x)} d\left(f(\pi_l), f(\pi_{l-1})\right)^2 \\
&\quad - \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{n} \sum_{x\in\mathbb{Z}_m^n} \sum_{\pi\in\mathcal{G}_j^{+}(x)} d\left(f(x+se_j), f(x)\right)^2 \\
&\quad - \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{n} \sum_{x\in\mathbb{Z}_m^n} \sum_{\pi\in\mathcal{G}_j^{-}(x)} d\left(f(x-se_j), f(x)\right)^2 . \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Como vimos en la desigualdad (3.17) del Lema 3.24, los pares $(f(\pi_l), f(\pi_{l-1}))$ son todos de la forma $(f(x+\xi), f(x))$ con $x \in \mathbb{Z}_m^n$ y $\xi \in \{-1,1\}^n$. Más aún, cada par $(f(x+\xi), f(x))$ aparecerá en la suma la misma cantidad de veces. Esto nos permitirá acotar el primer término del lado derecho de la desigualdad (3.21). En cuanto al tercer término, trasladaremos x sumando se_j para obtener la misma expresión que en el segundo. Aplicando todo lo anterior, podemos acotar el lado derecho de la desigualdad por

$$\begin{aligned}
n \sum_{l=1}^{s} \frac{K}{2^n} \sum_{x\in\mathbb{Z}_m^n} \sum_{\xi\in\{-1,1\}^n} & d\left(f(x+\xi), f(x)\right)^2 \\
& - \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{n} \sum_{x\in\mathbb{Z}_m^n} \sum_{\pi\in\mathcal{G}_j^{+}(x)} d\left(f(x+se_j), f(x)\right)^2 \\
& - \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{n} \sum_{x\in\mathbb{Z}_m^n} \sum_{\pi\in\mathcal{G}_j^{-}(x)} d\left(f(x+se_j), f(x)\right)^2 \\
\leq & Km^n \Bigg(ns \mathbb{E}_{x,\xi}\left[d\left(f(x+\xi), f(x)\right)^2\right] \\
& - \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x\left[d\left(f(x+se_j), f(x)\right)^2\right] \Bigg) \\
& < 2^{sn} 2m^n \eta ns \mathbb{E}_{x,\xi}\left[d\left(f(x+\xi), f(x)\right)^2\right], \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

donde en el último paso aplicamos la desigualdad (3.18) de la hipótesis del teorema y el hecho de que $K \leq 2^{sn}2$. Definamos una función $\psi : \mathbb{Z}_m^n \to \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned}\psi(x) &:= \eta 2sn2^{sn}\mathbb{E}_\xi \left[d\left(f(x+\xi), f(x)\right)^2\right] \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n} \sum_{\pi \in \mathcal{G}_j^{\pm}(x)} \sum_{l=1}^{s} \left(d\left(f(\pi_l), f(\pi_{l-1})\right) - \frac{1}{s} d\left(f(x+\operatorname{sgn}(\pi)se_j), f(x)\right)\right)^2.\end{aligned}$$

Uniendo las desigualdades (3.21) y (3.22) normalizadas por m^n y aplicando la definición de ψ, obtenemos:

$$0 < \mathbb{E}_x\left[\psi\right] = \frac{1}{(2s-1)^n}\mathbb{E}_x\left[\sum_{y \in x+(-s,s)^n \cap \mathbb{Z}^n} \psi(y)\right].$$

En consecuencia, existe cierto $x_0 \in \mathbb{Z}_m^n$ tal que

$$0 < \sum_{y \in x_0+(-s,s)^n \cap \mathbb{Z}^n} \psi(y).$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned}\sum_{y \in x_0+(-s,s)^n \cap \mathbb{Z}^n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\pi \in \mathcal{G}_j^{\pm}(y)} \sum_{l=1}^{s} \left(d\left(f(\pi_l), f(\pi_{l-1})\right) - \frac{1}{s} d\left(f(y+\operatorname{sgn}(\pi)se_j), f(y)\right)\right)^2 \\ < \eta 2sn2^{sn} \sum_{y \in x_0+(-s,s)^n \cap \mathbb{Z}^n} \mathbb{E}_\xi\left[d\left(f(y+\xi), f(y)\right)^2\right]. \quad (3.23)\end{aligned}$$

Normalizemos la métrica d en E de forma tal que se satisfaga la igualdad

$$\frac{1}{(2s-1)^n} \sum_{y \in x_0+(-s,s)^n \cap \mathbb{Z}^n} \mathbb{E}_\xi\left[d\left(f(y+\xi), f(y)\right)^2\right] = 1. \quad (3.24)$$

Luego, existe cierto $y_0 \in x_0 + (-s,s)^n \cap \mathbb{Z}^n$ tal que

$$\mathbb{E}_\xi\left[d\left(f(y_0+\xi), f(y_0)\right)^2\right] \geq 1, \quad (3.25)$$

hecho al que aludiremos más adelante. Precomponiendo a f con una traslación y una multiplicación (coordenada a coordenada) por un vector en $\{-1,1\}^n$ adecuado, podemos suponer que $y_0 = 0$ y que x_0 tiene todas sus coordenadas positivas. Esto implica que $\{0,\ldots,s-1\}^n \subseteq x_0 + (-s,s)^n \cap \mathbb{Z}^n$. Por lo tanto, dados $y \in \{0,\ldots,s-1\}^n$, $j \in$

$\{1, \ldots, n\}$, $\pi \in \mathcal{G}_j^{\pm}(y)$ y $l \in \{1, \ldots, s\}$, deducimos de las desigualdades (3.23) y (3.24) que el lado izquierdo de la desigualdad (3.19) está acotado por $\sqrt{\eta 2sn2^{sn}(2s-1)^n}$. El *Paso 1* queda demostrado al observar que

$$\sqrt{\eta 2sn2^{sn}(2s-1)^n} \leq \sqrt{\eta 2^{sn}2^{sn}(2^s)^n} \leq 2^{2sn}\sqrt{\eta}.$$

Paso 2. Veamos que dados $\xi, \zeta \in \{-1,1\}^n$ y $x \in \mathbb{Z}_m^n$ tales que $x+\xi \in \{0, \ldots, s-1\}^n$, se satisface la desigualdad

$$|d\left(f(x+\xi), f(x)\right) - d\left(f(x+\zeta), f(x)\right)| \leq 2^{2sn+1}\sqrt{\eta}.$$

Definamos $S \coloneqq \{j \in \{1, \ldots, n\} \; : \; \xi_j \neq \zeta_j\}$. Si $\xi = \zeta$, la desigualdad se satisface trivialmente, por lo cual podemos asumir que existe $j_0 \in S$. Tomemos $\theta, \tau \in \{-1,1\}^n$ definidas por

$$\theta_j \coloneqq \begin{cases} \zeta_{j_0} & \text{si } j = j_0 \\ \xi_j & \text{si } j \in S - \{j_0\} \\ 1 & \text{si } j \notin S \end{cases} \quad \text{y} \quad \tau_j \coloneqq \begin{cases} \zeta_{j_0} & \text{si } j = j_0 \\ \xi_j & \text{si } j \in S - \{j_0\} \\ -1 & \text{si } j \notin S \end{cases}.$$

A continuación, consideraremos el camino π de longitud s que parte de $x + \xi$ y se construye repitiendo $s/4$ veces la secuencia: restar ξ, sumar ζ, sumar θ, sumar τ. Luego, tendremos que

$$\begin{aligned} &\pi_0 = x + \xi, \quad \pi_1 = x, \quad \pi_2 = x + \zeta \quad \text{y} \\ &\pi_s = x + \xi + \frac{s}{4}(-\xi + \zeta + \theta + \tau) = x + \xi + s\zeta_{j_0}e_{j_0}. \end{aligned}$$

Resulta, entonces, que $\pi \in \mathcal{G}_{j_0}^{\pm}(x+\xi)$. Por lo tanto, usando la desigualdad triangular y aplicando dos veces el *Paso 1* deducimos

$$\begin{aligned} &|d\left(f(x+\xi), f(x)\right) - d\left(f(x+\zeta), f(x)\right)| \\ &\qquad = |d\left(f(\pi_0), f(\pi_1)\right) - d\left(f(\pi_2), f(\pi_1)\right)| \\ &\qquad \leq \left| d\left(f(\pi_0), f(\pi_1)\right) - \frac{1}{s} d\left(f(x+\xi+\operatorname{sgn}(\pi)se_{j_0}), f(x+\xi)\right) \right| \\ &\qquad\quad + \left| \frac{1}{s} d\left(f(x+\xi+\operatorname{sgn}(\pi)se_{j_0}), f(x+\xi)\right) - d\left(f(\pi_2), f(\pi_1)\right) \right| \\ &\qquad \leq 2^{2sn}\sqrt{\eta} + 2^{2sn}\sqrt{\eta} = 2^{2sn+1}\sqrt{\eta}, \end{aligned} \tag{3.26}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Paso 3. Veamos que existe una constante $A \geq 1$ tal que para todo $\xi \in \{-1,1\}^n$ se cumple que

$$\left(1 - 2^{2sn+2}\sqrt{\eta}\right) A \leq d\left(f(\xi), f(0)\right) \leq \left(1 + 2^{2sn+2}\sqrt{\eta}\right) A. \tag{3.27}$$

Notaremos $e := \sum_{j=1}^{n} e_j$ y tomaremos

$$A = \mathbb{E}_\xi \left[d\left(f(\xi), f(0)\right)^2\right]^{1/2}.$$

Por la desigualdad (3.25) (recordar que $y_0 = 0$), tenemos que $A \geq 1$. Sean $\xi, \zeta \in \{-1,1\}^n$. Dado que $e \in \{0, \ldots, s-1\}^n$, aplicando el *Paso 2* para $x = 0$ dos veces seguidas, resulta:

$$d\left(f(\xi), f(0)\right) \leq d\left(f(e), f(0)\right) + 2^{2sn+1}\sqrt{\eta} \leq d\left(f(\zeta), f(0)\right) + 2^{2sn+2}\sqrt{\eta}. \tag{3.28}$$

Luego, promediando la desigualdad sobre $\zeta \in \{-1,1\}^n$ y usando la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$\begin{aligned} d\left(f(\xi), f(0)\right) &\leq \mathbb{E}_\zeta \left[d\left(f(\zeta), f(0)\right)^2\right]^{1/2} + 2^{2sn+2}\sqrt{\eta} = A + 2^{2sn+2}\sqrt{\eta} \\ &\leq \left(1 + 2^{2sn+2}\sqrt{\eta}\right) A, \end{aligned}$$

probando el lado derecho de la desigualdad (3.27). En cuanto al lado izquierdo, revirtiendo los nombres de la desigualdad (3.28), se tiene que

$$d\left(f(\zeta), f(0)\right) \leq d\left(f(\xi), f(0)\right) + 2^{2sn+2}\sqrt{\eta}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} A^2 = \mathbb{E}_\zeta \left[d\left(f(\zeta), f(0)\right)^2\right] &\leq \left(d\left(f(\xi), f(0)\right) + 2^{2sn+2}\sqrt{\eta}\right)^2 \\ &\leq \left(d\left(f(\xi), f(0)\right) + 2^{2sn+2}\sqrt{\eta} A\right)^2. \end{aligned}$$

Tomando raíz cuadrada ($A \geq 1 > 0$), se deduce el lado izquierdo de la desigualdad (3.27) completando la prueba del *Paso 3*.

Paso 4. Sea $V := 2\left[s/4\right]^n \subseteq \mathbb{Z}_m^n$. Dados $x, y \in V$, notemos $t := \|y - x\|_\infty$ y supongamos que $y_{j_0} - x_{j_0} = t$ para $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, existe $\pi \in \mathcal{G}_{j_0}^+(x)$ tal que $\pi_t = y$.

Construiremos π inductivamente. Tomemos $\pi_0 \coloneqq x$ y supongamos que hemos definido π hasta π_l con $0 \leq l \leq t-1$. Debemos definir π_{l+1} sumándole a π_l un vector $\xi_l \in \{-1,1\}^n$ de manera tal de irse acercando a y. La elección del signo de este vector en cada coordenada se hará bajo el siguiente criterio: sumaremos uno en las coordenadas donde π_l sea menor o igual que y y restaremos uno en las otras. De esta manera, π_l se va acercando a y a medida que l aumenta. Más precisamente, dado $j \in \{1,\ldots,n\}$, π_l alcanzará a y en la coordenada j-ésima en exactamente $|y_j - x_j|$ pasos. Luego, permanecerá oscilando, sumando y restando uno. Notemos que dichas oscilaciones se generarán siempre en un valor impar de l y se cancelarán en los pares, ya que $|y_j - x_j|$ es par para todo $j \in \{1,\ldots,n\}$. Dicho esto, es fácil corroborar que π alcanza a y en el paso $t = \|y-x\|_\infty$. A partir del paso t, repetimos el mismo criterio de elección de signos, pero esta vez acercándonos a $x + se_{j_0}$. Para las coordenadas j-ésimas con $j \neq j_0$, son necesarios al menos otros t pasos para volver de y_j a x_j. Como $x, y \in V$, sabemos que $2t \leq s$, por lo que hay una cantidad suficiente de pasos para que dichas coordenadas lleguen a destino. En cuanto a la coordenada j_0-ésima, su recorrido será siempre ir sumando uno. Por lo tanto, al cabo de s pasos, alcanzará el valor $x_{j_0} + s$. Concluimos, entonces, que π satisface todos los requisitos pedidos.

Paso 5. Veamos que para todo $x \in V$ y todo $\xi \in \{-1,1\}^n$ se cumple que

$$\left(1 - 2^{2sn} 10\sqrt{\eta}\right) A \leq d\left(f(x+\xi), f(x)\right) \leq \left(1 + 2^{2sn} 10\sqrt{\eta}\right) A.$$

Sea $t \coloneqq \|x\|_\infty$. Aplicando el *Paso 4* a $0, x \in V$, deducimos que existe $\pi \in \mathcal{G}_j^+(0)$ con $j \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $\pi_t = x$. Tomando π construida específicamente como en la demostración, tendremos que $\pi_1 = e$. Luego, tal como hicimos en la desigualdad (3.26), usando la desigualdad triangular y aplicando dos veces el *Paso 1*, obtenemos:

$$\begin{aligned}
|d\left(f(e), f(0)\right) - d\left(f(\pi_{t-1}), f(x)\right)| &= |d\left(f(\pi_1), f(\pi_0)\right) - d\left(f(\pi_{t-1}), f(\pi_t)\right)| \\
&\leq 2^{2sn+1}\sqrt{\eta}.
\end{aligned}$$

Notemos que $x + e \in \{0,\ldots,s-1\}^n$ dado que $x \in V$. Esto nos permitirá aplicar el

Paso 2. En efecto, dado $\xi \in \{-1,1\}^n$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&|d\left(f(x+\xi), f(x)\right) - d\left(f(e), f(0)\right)| \\
&\qquad \leq |d\left(f(x+\xi), f(x)\right) - d\left(f(x+e), f(x)\right)| \\
&\qquad\quad + |d\left(f(x+e), f(x)\right) - d\left(f(\pi_{t-1}), f(x)\right)| \\
&\qquad\quad + |d\left(f(\pi_{t-1}), f(x)\right) - d\left(f(e), f(0)\right)| \\
&\qquad \leq 2^{2sn+1}\sqrt{\eta} + 2^{2sn+1}\sqrt{\eta} + 2^{2sn+1}\sqrt{\eta} = 2^{2sn}6\sqrt{\eta}.
\end{aligned}$$

Finalmente, usando la cota del *Paso 3* para $d\left(f(e), f(0)\right)$, el resultado se sigue.

Paso 6. Veamos que para $x, y \in V$ distintos entre sí, se satisface la desigualdad

$$\left(1 - 2^{2sn}23s\sqrt{\eta}\right) A \leq \frac{d\left(f(x), f(y)\right)}{\|x-y\|_\infty} \leq \left(1 + 2^{2sn}12\sqrt{\eta}\right) A. \tag{3.29}$$

Sea $t \coloneqq \|x-y\|_\infty$. Intercambiando el rol de x e y de ser necesario, podemos asumir que existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $y_j - x_j = t$. Aplicando el *Paso 4* a $x, y \in V$, deducimos que existe $\pi \in \mathcal{G}_j^+(x)$ tal que $\pi_t = y$. Dado $l \in \{1, \dots, s\}$, aplicando el *Paso 1*, obtenemos

$$\left| d\left(f(\pi_l), f(\pi_{l-1})\right) - \frac{1}{s} d\left(f(x + se_j), f(x)\right) \right| \leq 2^{2sn}\sqrt{\eta}. \tag{3.30}$$

Tal como hicimos en la desigualdad (3.26), usando la desigualdad triangular y la cota anterior para l y para 1, resulta que

$$|d\left(f(\pi_l), f(\pi_{l-1})\right) - d\left(f(\pi_1), f(\pi_0)\right)| \leq 2^{2sn+1}\sqrt{\eta}.$$

Por otro lado, el *Paso 5* nos dice que

$$\left(1 - 2^{2sn}10\sqrt{\eta}\right) A \leq d\left(f(\pi_1), f(\pi_0)\right) \leq \left(1 + 2^{2sn}10\sqrt{\eta}\right) A. \tag{3.31}$$

Luego, deducimos que para todo $l \in \{1, \dots, s\}$, se cumple la desigualdad

$$\left(1 - 2^{2sn}12\sqrt{\eta}\right) A \leq d\left(f(\pi_l), f(\pi_{l-1})\right) \leq \left(1 + 2^{2sn}12\sqrt{\eta}\right) A. \tag{3.32}$$

Por lo tanto, usando la desigualdad triangular obtenemos la cota derecha de la desigualdad (3.29). Efectivamente,

$$\begin{aligned}
d\left(f(x), f(y)\right) &\leq \sum_{l=1}^{t} d\left(f(\pi_l), f(\pi_{l-1})\right) \leq t\left(1 + 2^{2sn}12\sqrt{\eta}\right) A \\
&= \|x-y\|_\infty \left(1 + 2^{2sn}12\sqrt{\eta}\right) A.
\end{aligned}$$

En cuanto al lado izquierdo, tenemos que

$$d\left(f(x), f(y)\right) \geq d\left(f(x), f(x+se_j)\right) - d\left(f(x+se_j), f(y)\right).$$

A continuación, usando la desigualdad (3.30) (con $l = 1$) para el primer término y desigualdad triangular para el segundo, podemos acotar la expresión anterior por

$$sd\left(f(\pi_1), f(\pi_0)\right) - s2^{2sn}\sqrt{\eta} - \sum_{l=t+1}^{s} d\left(f(\pi_l), f(\pi_{l-1})\right).$$

Luego, aplicando la cota izquierda de la desigualdad (3.31) para el primer término y la cota derecha de la desigualdad (3.32) para el último, nos queda

$$\begin{aligned} d\left(f(x), f(y)\right) \geq & s\left(1 - 2^{2sn}11\sqrt{\eta}\right)A - (s-t)\left(1 + 2^{2sn}12\sqrt{\eta}\right)A \\ \geq & tA - s2^{2sn}23\sqrt{\eta}A \\ \geq & \|x-y\|_\infty \left(1 - 2^{2sn}23s\sqrt{\eta}\right)A, \end{aligned}$$

que es la cota que buscábamos.

Habiendo probado el *Paso 6*, concluyamos la demostración del teorema. Notemos que la aplicación $x \mapsto 2x$ es una biyección de distorsión 1 entre los espacios $\left([s/4]^n, \|\cdot\|_\infty\right)$ y $(V, \|\cdot\|_\infty)$. Luego, basta ver que la función f restringida a V y co-restringida a a su imagen tiene distorsión menor o igual que $1 + 8^{sn}\sqrt{\eta}$. Dicha estimación surge como consecuencia directa del *Paso 6*. Reescribamos la desigualdad (3.29) como:

$$\begin{aligned} d\left(f(x), f(y)\right) \leq \|x-y\|_\infty \left(1 + 2^{2sn}12\sqrt{\eta}\right)A \quad \text{y} \\ \|x-y\|_\infty \leq \frac{1}{\left(1 - 2^{2sn}23s\sqrt{\eta}\right)A} d\left(f(x), f(y)\right). \end{aligned}$$

Luego, deducimos que

$$\begin{aligned} \|f\|_{Lip} \leq \left(1 + 2^{2sn}12\sqrt{\eta}\right)A \quad \text{y} \\ \left\|f^{-1}\right\|_{Lip} \leq \frac{1}{\left(1 - 2^{2sn}23s\sqrt{\eta}\right)A}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $8^{sn}\sqrt{\eta} < 1/2$, $n > 1$ y s es múltiplo de 4, resulta

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(f) &\leq \frac{1 + 2^{2sn}12\sqrt{\eta}}{1 - 2^{2sn}23s\sqrt{\eta}} \leq 1 + \frac{2^{2sn}(12 + 23s)\sqrt{\eta}}{1 - 2^{2sn}23s\sqrt{\eta}} \\
&\leq 1 + \frac{2^{2sn}\left(12 + 92\frac{s}{4}\right)\sqrt{\eta}}{1 - 8^{sn}\sqrt{\eta}} \leq 1 + 2^{2sn}2\left(2^7\frac{s}{4}\right)\sqrt{\eta} \\
&\leq 1 + 2^{2sn}\left(2^8\frac{s}{4}\right)\sqrt{\eta} \leq 1 + 2^{2sn}2^{2s}\sqrt{\eta} \\
&\leq 1 + 2^{2sn}2^{sn}\sqrt{\eta} \leq 1 + 8^{sn}\sqrt{\eta},
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. □

A continuación presentaremos una observación que nos permitirá intercambiar los espacios $[m]^n$ y $\mathbb{Z}_m^n$. Sin embargo, antes deberemos dar una noción de distancia en $\mathbb{Z}_m^n$.

Definición 3.9. Dados $n, m \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{Z}_m^n$ que identificamos con sus representantes en $[m-1]^n \subseteq \mathbb{Z}^n$, definimos la distancia ∂ como

$$\partial(x, y) \coloneqq \min_{z \in m\mathbb{Z}^n} \|x - y + z\|_\infty = \min_{z \in \{-m, 0, m\}^n} \|x - y + z\|_\infty .$$

Observación 3.28. Dados $n, m \in \mathbb{N}$, observemos que $[m]^n$ está isométricamente incluido en $\mathbb{Z}_{2m}^n$ y que $\mathbb{Z}_m^n$ está isométricamente incluido en $[m]^{mn}$. La primera afirmación se deduce de tomar la inclusión canónica $x \mapsto x$. En cuanto a la segunda, basta ver que la asignación $\psi : \mathbb{Z}_m \to [m]^m$ definida por

$$\psi(x) \coloneqq (\partial(x, 0), \ldots, \partial(x, m-1)),$$

es una inclusión isométrica. Dados $x, y \in \mathbb{Z}_m$, para todo $k \in \{0, \ldots, m-1\}$ tenemos que

$$|\partial(x, k) - \partial(y, k)| \leq \partial(x, y)$$

con lo cual,

$$\|\psi(x) - \psi(y)\|_\infty \leq \partial(x, y).$$

Finalmente, tomando $k = y$ se deduce que la desigualdad anterior es en realidad una igualdad, pues en esa coordenada se alcanza la cota superior de la norma infinito.

Probaremos un último lema previo al Teorema 3.22 que se utilizará en el caso *(iii)* $\Longrightarrow$ *(i)*.

Lema 3.29. *Sea E un espacio métrico, $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma > 0$ y $q < \infty$. Si $m_q^{(2)}(E; n, \Gamma) < \infty$, entonces*

$$C_E(\mathbb{Z}_m^n) \geq \frac{n^{1/q}}{2\Gamma},$$

para todo $m \geq m_q^{(2)}(E; n, \Gamma)$. (Esto sucederá siempre y cuando $m^n \leq |E|$.)

Demostración. Dada una función inyectiva $f : \mathbb{Z}_m^n \to E$, por la definición del parámetro $m_q^{(2)}(E; n, \Gamma)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left[d\left(f\left(x + \frac{m}{2} e_j \right), f(x) \right)^2 \right] &\leq \Gamma^2 m^2 n^{1-2/q} \mathbb{E}_{x,\epsilon} \left[d\left(f(x+\epsilon), f(x) \right)^2 \right] \\
&\leq \Gamma^2 m^2 n^{1-2/q} \|f\|_{Lip}^2 \, \mathbb{E}_{x,\epsilon} \left[\partial(x+\epsilon, x)^2 \right] \\
&\leq \Gamma^2 m^2 n^{1-2/q} \|f\|_{Lip}^2 .
\end{aligned}$$

Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left[d\left(f\left(x + \frac{m}{2} e_j \right), f(x) \right)^2 \right] &\geq \frac{1}{\|f^{-1}\|_{Lip}^2} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left[\partial\left(x + \frac{m}{2} e_j, x \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{\|f^{-1}\|_{Lip}^2} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left[\left(\frac{m}{2} \right)^2 \right] \\
&= \frac{m^2 n}{4 \|f^{-1}\|_{Lip}^2}.
\end{aligned}$$

Combinando ambas desigualdades deducimos que

$$\begin{aligned}
\frac{m^2 n}{4 \|f^{-1}\|_{Lip}^2} &\leq \Gamma^2 m^2 n^{1-2/q} \|f\|_{Lip}^2 \\
\frac{n^{2/q}}{4\Gamma^2} &\leq \operatorname{dist}(f)^2,
\end{aligned}$$

y, tomando raíz cuadrada, nos queda

$$\frac{n^{1/q}}{2\Gamma} \leq \operatorname{dist}(f),$$

de donde el resultado se sigue. $\square$

Estamos en condiciones de demostrar el Teorema 3.22.

Demostración del Teorema 3.22. Comencemos por demostrar la implicación *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)*. Supongamos que E tiene cotipo métrico trivial, es decir, que $\Gamma_q^{(2)} = \infty$ para todo $q < \infty$. Luego, por la Proposición 3.26, deducimos que $\mathcal{B}(E; n, s) = 1$ para todo $n, s > 1$. Sea $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ y tomemos $s = 4m$. Como consecuencia del Teorema 3.27 resulta que $C_E\left([m]^n\right) = 1$ probando *(ii)*.

Como *(ii)* $\Longrightarrow$ *(iii)* es inmediato, procederemos directamente a probar que *(iii)* $\Longrightarrow$ *(i)*. Sea $K < \infty$ tal que $C_E(\{[m]^n\}_{n,m\in\mathbb{N}}) < K$. Luego, para todo $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que $C_E([m]^n) < K$. Por la Observación 3.28 sabemos que $\mathbb{Z}_m^n$ está isométricamente incluido en $[m]^{mn}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, deducimos que $C_E(\mathbb{Z}_m^n) < K$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Supongamos, a continuación, que no se satisface la condición *(i)*. Entonces, existe un $q < \infty$ tal que $\Gamma_q^{(2)} < \infty$. Luego, dada una constante finita $\Gamma > \Gamma_q^{(2)}$, tenemos que $m_q^{(2)}(E; n, \Gamma) < \infty$. Dado $n \in \mathbb{N}$, notemos $m(n) \coloneqq m_q^{(2)}(E; n, \Gamma)$. Por el Lema 3.29, deducimos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se satisface la desigualdad

$$n^{1/q} \leq 2\Gamma C_E(\mathbb{Z}_{m(n)}^n) \leq 2\Gamma K,$$

lo cual es absurdo. □

Gracias a la Observación 3.28, también podemos dar una caracterización del cotipo métrico trivial en función de los espacios $\mathbb{Z}_m^n$. Explícitamente se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.30. *Sea E un espacio métrico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *E tiene cotipo métrico trivial;*

(ii) $C_E(\{\mathbb{Z}_m^n\}_{n,m\in\mathbb{N}}) = 1$;

(iii) $C_E(\{\mathbb{Z}_m^n\}_{n,m\in\mathbb{N}}) < \infty$.

Observación 3.31. Al igual que como vimos para el caso de tipo métrico trivial en la Observación 2.13, obtenemos un resultado (inmediato a partir de lo hecho hasta aquí) relativo a la geometría de los espacios de Banach. Como consecuencia del Teorema 3.22

y su versión lineal (Teorema 1.29), si un espacio de Banach contiene a los espacios $[m]^n$ (o $\mathbb{Z}_m^n$) con distorsión acotada uniformemente para todo $n, m \in \mathbb{N}$, entonces contiene linealmente a los espacios ℓ_∞^n con distorsión 1. Es decir,

$$C_E(\{[m]^n\}_{n,m\in\mathbb{N}}) < \infty \implies C_E^\ell(\{\ell_\infty^n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 1,$$

pues, para espacios de Banach, tener cotipo métrico trivial es equivalente a tener cotipo trivial.

Hemos avanzado hasta el segundo paso del programa con algunas versiones métricas de resultados lineales. En [12], pueden encontrarse otras aplicaciones de lo realizado a la geometría de los espacios de Banach. En el siguiente capítulo, sin embargo, usaremos las herramientas adquiridas para probar problemas intrínsecamente no lineales. Lo que sigue será, entonces, una prueba de concepto de la capacidad del *Programa de Ribe* de trascender sus orígenes en la teoría lineal.

Capítulo 4

Aplicaciones

En este capítulo daremos inicio al tercer paso del programa. Expondremos dos aplicaciones de la caracterización del cotipo métrico trivial descubiertas por Mendel y Naor [12]. En primer lugar, probaremos una conjetura de Arora *et al.* [15]. Veremos que una familia de espacios métricos o bien contiene a cualquier espacio métrico finito con distorsión arbitrariamente cercana a 1, o bien existen espacios métricos de cardinal n arbitrariamente grande que no pueden ser incluidos en ningún miembro de la familia con distorsión menor que $C(\log n)^{\alpha}$, con C y α constantes. En segundo lugar, probaremos una versión cuantitativa del Teorema Ramsey de distorsión acotada de Matoušek [16]. Veremos que dado un espacio métrico finito E, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que todo espacio métrico que contenga al espacio $[n^3]^n$ con cierta distorsión, contiene al espacio E con distorisón cercana a 1.

Antes de presentar los enunciados precisos, comenzaremos dando una breve motivación [15, 17]. En Ciencias de la Computación, existen muchos problemas computacionalmente difíciles que involucran el análisis de espacios métricos finitos (generalmente grafos). Sin embargo, se pueden obtener algoritmos veloces que brindan soluciones aproximadas de cierto poblema al reemplazar el espacio métrico original E por otro E', de manera tal que la distorión sea mínima y el nuevo espacio E' tenga cierta estructura deseada. Es decir, que se busca un substituto que no difiera mucho del original y que cumpla ciertos requerimientos que facilitan la resolución del problema. Dichos requerimientos pueden ser, por ejemplo, que E' sea un subespacio (métrico) de $F \in \mathcal{F}$ con

$\mathcal{F}$ una familia de espacios métricos en particular. Luego, dada una familia de espacios métricos específica $\mathcal{F}$ querremos estudiar como depende $C_{\mathcal{F}}(E)$ (ver Definición 1.2) del cardinal de E. El primer resultado de este capítulo (Teorema 4.1) brinda una cota inferior para $C_{\mathcal{F}}(E)$ en función del cardinal de E asumiendo que la familia $\mathcal{F}$ no contiene a cualquier espacio métrico finito con distorsión arbitrariamente cercana a 1. En la misma línea de estudio, el segundo resultado (Teorema 4.6) muestra una condición suficiente para que un espacio métrico E esté incluido en un espacio métrico F con distorsión cercana a 1.

4.1. Conjetura de Arora *et al.*

En esta sección responderemos una pregunta realizada por Arora, Lovász, Newman, Rabani, Rabinovich y Vempala [15] incluso con mayor generalidad que con la que fue planteada originamlente. Para enunciar formalmente el resultado, daremos algunas definiciones previas.

Definición 4.1. Dada $\mathcal{F}$ una familia de espacios métricos, decimos que $\mathcal{F}$ es universal si para todo espacio métrico finito E se cumple que $C_{\mathcal{F}}(E) = 1$. Por otro lado, dado $n \in \mathbb{N}$, notaremos

$$D_n(\mathcal{F}) \coloneqq \sup \{C_{\mathcal{F}}(E) : \ E \text{ espacio métrico de a lo sumo } n \text{ puntos}\}.$$

Dado F un espacio métrico, notaremos $D_n(F) \coloneqq D_n(\{F\})$.

Definición 4.2. Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ decimos que f es $\Omega(g)$ si existe una constante $C > 0$ y un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) \geq Cg(n)$ para todo $n > n_0$.

Habiendo introducido estos conceptos y notaciones, enunciamos el primer resultado del capítulo.

Teorema 4.1. *Dada $\mathcal{F}$ una familia de espacios métricos, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\mathcal{F}$ no es universal;

(ii) Existe $0 < \alpha < \infty$ tal que $D_n(\mathcal{F})$ es $\Omega\left((\log n)^{\alpha}\right)$.

Comentario 4.2. Originalmente Arora *et al.* conjeturaron la validez de *(ii)* para una clase especial de familias $\mathcal{F}$. Sin embargo, Mendel y Naor lo probaron en general para cualquier familia $\mathcal{F}$ no universal.

Antes de presentar la demostración del Teorema 4.1, enunciaremos algunos resultados previos cuyas demostraciones se encuentran en el apéndice. Como veremos en la Sección 5.5, el siguiente lema es una consecuencia del Lema 3.29.

Lema 4.3. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de espacios métricos y sean $0 < q, c, \Gamma < \infty$. Supongamos que para todo $F \in \mathcal{F}$ y todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $m_q^{(2)}(F; n, \Gamma) < cn$. Luego, resulta que $D_n(\mathcal{F})$ es $\Omega\left((\log n)^{\alpha}\right)$ para todo $0 < \alpha < 1/q$.*

Lema 4.4. *Sean E un espacio métrico de cardinal n y $0 < \varepsilon < 1/2$. Notemos*

$$\beta := \text{máx}\left\{n, \frac{\text{diam}(E)}{\varepsilon \min_{x \neq y} d(x, y)}\right\}.$$

Dado $s \in \mathbb{N}$ tal que $s \geq \beta$, se cumple que

$$C_{[s]^n}(E) \leq 1 + 4\varepsilon.$$

Estamos en condiciones de demostrar el Teorema 4.1.

Demostración del Teorema 4.1. En primer lugar, notemos que si $\mathcal{F}$ es universal, entonces se cumple que $C_{\mathcal{F}}(E) = 1$ para todo espacio métrico finito E. Luego, tenemos que $D_n(\mathcal{F}) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto prueba el caso *(ii)* $\implies$ *(i)*.

Pasemos, entonces, al caso *(i)* $\implies$ *(ii)*. Probaremos esto en dos pasos luego de definir algunos conceptos.

Llamaremos Z a la unión disjunta de todos los subespacios métricos finitos de algún miembro de $\mathcal{F}$. Explícitamente, definimos

$$Z := \coprod \{E \subseteq F : \ |E| < \infty \text{ y } F \in \mathcal{F}\}.$$

Dado $K > 1$, introducimos una distancia d_K en Z definida para cada $x, y \in Z$ como

$$d_K(x, y) := \begin{cases} \frac{d_E(x,y)}{\text{diam}(E)} & \text{si } x \text{ e } y \text{ pertenecen al mismo miembro } E \\ & \text{de la unión que conforma } Z \\ K & \text{si no} \end{cases}.$$

Observemos que, (Z, d_K) contiene una copia de todos los subconjuntos finitos E de cualquier miembro F de $\mathcal{F}$ con la misma métrica salvo un factor de escala $1/\operatorname{diam}(E)$.

Paso 1. Veamos que existe $K > 1$, tal que el espacio (Z, d_K) no tiene cotipo métrico trivial (es decir, tiene cotipo métrico $(q, 2)$ para cierto $q < \infty$).

Supongamos lo contrario e intentemos llegar a una contradicción. Si (Z, d_K) tiene cotipo métrico trivial para todo $K > 1$, aplicando el Teorema 3.22, tenemos que $C_Z([m]^n) = 1$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ (cualquiera sea la distancia que tomemos en Z). Por la condición *(i)*, existe un espacio métrico finito X tal que $C \coloneqq C_{\mathcal{F}}(X) > 1$. Consideremos el espacio $X' \coloneqq X \times \{1, 2\}$. Podemos extender la métrica d_X en X a una métrica $d_{X'}$ en X' requiriendo que para todo $x, y \in X$ se satisfagan las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} &d_{X'}((x,1),(y,1)) = d_{X'}((x,2),(y,2)) = d_X(x,y) \quad \text{y} \\ &d_{X'}((x,1),(y,2)) = 2\operatorname{diam}(X). \end{aligned}$$

Por el Lema 4.4, existe un $s \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande, tal que $C_{[s]^s}(X') < \min(2, C)$. Luego, podemos deducir que $C_Z(X') < \min(2, C)$ para cualquiera de las métricas d_K que consideremos en Z. Fijemos una de ellas definiendo

$$K \coloneqq \frac{4\operatorname{diam}(X)}{\min_{x \neq y} d_X(x,y)}.$$

Además, tomemos una función $f : X' \to Z$ inyectiva, tal que $\operatorname{dist}(f) < \min(2, C)$. Veamos que existe un miembro E de la unión que conforma Z que contiene más de un elemento de la imagen de f. Si no fuera el caso, la distancia entre cualquier par de elementos de la imagen de f sería K. En consecuencia, dados $x, y \in X$ distintos entre sí, tendríamos que

$$\begin{aligned} K &= d_K(f(x,1), f(y,1)) \le \|f\|_{Lip}\, d_{X'}((x,1),(y,1)) \\ &= \|f\|_{Lip}\, d_X(x,y) \le \|f\|_{Lip} \operatorname{diam}(X). \end{aligned}$$

Sin embargo, por otra parte,

$$\begin{aligned} K &= d_K(f(x,1), f(y,2)) \ge \frac{1}{\|f^{-1}\|_{Lip}} d_{X'}((x,1),(y,2)) \\ &= \frac{\|f\|_{Lip}}{\operatorname{dist}(f)} 2\operatorname{diam}(X) > \|f\|_{Lip} \operatorname{diam}(X), \end{aligned}$$

lo cual es absurdo. Luego, existe un espacio métrico finito E miembro de la unión que conforma Z, que contiene más de un elemento de la imagen de f. Veamos que necesariamente $f(X') \subseteq E$. Supongamos que no, es decir, que existe $x' \in X'$ tal que $f(x') \notin E$. Sabemos que existen $a', b' \in X'$ distintos entre sí tales que $f(a'), f(b') \in E$. Por lo tanto, resulta que

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{d_E\left(f(a'), f(b')\right)}{\operatorname{diam}(E)} = d_K\left(f(a'), f(b')\right) \geq \frac{1}{\|f^{-1}\|_{Lip}} d_{X'}(a', b') \\ &\geq \frac{\|f\|_{Lip}}{\operatorname{dist}(f)} \min_{x \neq y} d_X(x, y) > \frac{\|f\|_{Lip}}{2} \min_{x \neq y} d_X(x, y), \end{aligned}$$

y,

$$K = d_K\left(f(x'), f(a')\right) \leq \|f\|_{Lip} d_{X'}(x', a') \leq \|f\|_{Lip} 2 \operatorname{diam}(X).$$

Combinando las dos desigualdades y aplicando la definición de K, llegamos a una contradicción. En efecto,

$$\begin{aligned} 2 &= 2KK^{-1} \leq \|f\|_{Lip} 4 \operatorname{diam}(X) K^{-1} = \|f\|_{Lip} \min_{x \neq y} d_X(x, y) \\ &< 2. \end{aligned}$$

Probamos, entonces, que $f(X') \subseteq E$. Como la métrica d_K en E coincide con la original d_E salvo por un factor de escala (que no afecta la distorsión), concluimos que $C_E(X') \leq \operatorname{dist}(f) < C$, pensando a E munido de la métrica original d_E. En particular, deducimos que $C_E(X) < C$. Recordando que E era un subespacio métrico de algún $F \in \mathcal{F}$, resulta que $C_F(X) < C$. Esto implica que $C_{\mathcal{F}}(X) < C$, lo cual es absurdo.

Paso 2. Veamos que el *Paso 1* implica la condición *(ii)*.

Por el *Paso 1*, existe un $K > 1$, tal que el espacio (Z, d_K) no tiene cotipo métrico trivial. A partir de aquí consideraremos a Z munido siempre de esta métrica. Supongamos que $\mathcal{B}(Z; n, n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ mayor que 1. Luego, por el Teorema 3.27 tenemos que $C_Z([n/4]^n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ múltiplo de 4. En consecuencia, resulta que Z tiene cotipo métrico trivial por el Teorema 3.22, lo cual es absurdo. Por lo tanto, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ mayor que uno tal que $\mathcal{B}(Z; n_0, n_0) < 1$. Ahora bien, por la Proposición 3.26 resulta que para cierto $q < \infty$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, se satisface la desigualdad $m_q^{(2)}(Z; n, 3n_0) \leq 2n_0 n$. En particular, tenemos que $m_q^{(2)}(E; n, 3n_0) \leq 2n_0 n$ para todo

E miembro de la unión que conforma Z. Luego, se cumple la misma desigualdad para todo $F \in \mathcal{F}$, pues todos los subespacios métricos finitos E de F la satisfacen. Tomando $\Gamma := 3n_0$ y $c := 2n_0$ y aplicando el Lema 4.3, deducimos que $D_n(\mathcal{F})$ es $\Omega\left((\log n)^{\alpha}\right)$ para todo $0 < \alpha < 1/q$, probando el teorema. $\square$

4.2. Versión cuantitativa del Teorema de Matoušek

En esta sección probaremos una versión cuantitativa del Teorema Ramsey de distorsión acotada de Matoušek. Comenzaremos enunciando el resultado original [16].

Teorema 4.5 (Teorema Ramsey de distorsión acotada de Matoušek)**.** *Sean E un espacio métrico finito, $\varepsilon \in (0,1)$ y $\alpha > 1$. Luego, existe un espacio métrico $G = G(E, \varepsilon, \alpha)$ tal que para todo espacio métrico F que cumpla la condición $C_F(G) \leq \alpha$, tenemos que $C_F(E) \leq 1 + \varepsilon$.*

La versión que presentamos a continuación, exhibe explícitamente una elección posible del espacio G del teorema anterior.

Teorema 4.6. *Sean E un espacio métrico finito, $\varepsilon \in (0,1)$ y $\alpha > 1$. Notemos*

$$s := \max\left\{|E|, \frac{16\,\mathrm{diam}(E)}{\varepsilon \min_{x\neq y} d(x,y)}\right\}, \quad \mu := \frac{\varepsilon^2}{8^{8s^2+1}},$$

y tomemos,

$$n \geq (2\alpha)^{s^2/\mu}.$$

Luego, para todo espacio métrico F tal que $C_F\left([n^3]^n\right) \leq \alpha$, tenemos que $C_F(E) \leq 1+\varepsilon$.

Para probar el teorema, haremos uso del siguiente lema técnico cuya demostración se encuentra en el apéndice.

Lema 4.7. *Para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $C_{[3k]^3}(\mathbb{Z}_{6k}) \leq 3$.*

Dicho esto, pasamos a demostrar el último resultado del capítulo.

Demostración del Teorema 4.6. Sean E un espacio métrico finito y $\varepsilon \in (0,1)$. Notemos que como $|E| \leq s$, tenemos que $[s]^{|E|} \subseteq [s]^s$. Luego, por el Lema 4.4, se cumple que

$$C_{[s]^s}(E) \leq C_{[s]^{|E|}}(E) \leq 1 + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por lo tanto, dado F un espacio métrico tal que $C_F(E) > 1 + \varepsilon$, deducimos que $C_F([s]^s) > 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. Buscaremos utilizar el Teorema 3.27 en sentido inverso. Llamemos $s_0 := 4s$, $n_0 := s$ y $\eta := 2\mu$. Obtenemos, entonces, que

$$8^{s_0 n_0}\sqrt{\eta} = \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{2}.$$

Aplicando el Teorema 3.27, resulta:

$$\mathcal{B}(F; n_0, s_0) \leq \sqrt{1-\eta} \leq 1 - \frac{\eta}{2} = 1 - \mu.$$

Como consecuencia de la Proposición 3.26, deducimos que para cierto $q < \infty$ y todo $n \in \mathbb{N}$, vale la desigualdad

$$m_0 := m_q^{(2)}(F; n, 3s) \leq 8sn^{\log_s(4s)} \leq 8sn^2. \tag{4.1}$$

Apelando a la demostración de la Proposición 3.26, encontramos que podemos tomar q de manera tal que

$$1 - \mu < s^{-1/q}.$$

Bastará, entonces, tomar $q := s/\mu$, dado que se satisface la desigualdad

$$1 - \mu < e^{-\mu} \leq \left(s^{1/s}\right)^{-\mu} = s^{-1/q}.$$

Por otro lado, aplicando el Lema 3.29 a la desigualdad (4.1), resulta que

$$C_F(\mathbb{Z}_m^n) \geq \frac{n^{1/q}}{6s}, \tag{4.2}$$

para todo $m \geq m_0$ y todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, tomemos $n > 8s$. Luego, deducimos de la desigualdad (4.1) que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m_0 \leq 6k \leq n^3$. Fijemos, además, el máximo $l \in \mathbb{N}$ tal que $3l \leq n$. Aplicando el Lema 4.7, obtenemos que

$$C_{[3k]^{3l}}(\mathbb{Z}_{6k}^l) \leq 3,$$

y, por lo tanto,

$$C_{[n^3]^n}(\mathbb{Z}_{6k}^l) \leq 3.$$

Combinando esto con la desigualdad (4.2), nos queda

$$C_F([n^3]^n) \geq \frac{l^{1/q}}{18s} = \frac{(4l)^{1/q}}{4^{1/q}18s} \geq \frac{n^{1/q}}{36s} = \frac{n^{\mu/s}}{36s}.$$

Finalmente, tomando n como en la hipótesis, resulta que

$$C_F([n^3]^n) \geq \frac{n^{\mu/s}}{36s} \geq \frac{(2\alpha)^s}{36s} > \alpha.$$

Probamos que si $C_F(E) > 1 + \varepsilon$, entonces $C_F([n^3]^n) > \alpha$, por lo que el teorema queda demostrado. □

Hemos dado una muestra del tercer paso del programa, cumpliendo con el propósito de este capítulo. A continuación, en el apéndice, encontraremos las demostraciones que fueron postergadas a lo largo de la tesis.

Capítulo 5

Apéndice

En lo que sigue, presentaremos las pruebas faltantes del capítulo anterior. En primer lugar, demostraremos algunas propiedades básicas del cotipo métrico. En segundo lugar, daremos un argumento de complejización para probar el caso real del Teorema 3.12. Luego, abordaremos los resultados previos a los Teoremas 3.14 y 3.22, concluyendo todo lo referente al tercer capítulo. Finalmente, completaremos lo que fue postergado durante el Capítulo 4.

5.1. Propiedades básicas del cotipo métrico

Demostración de la Proposición 3.8. Sean $u, v \in E$ con $u \neq v$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $d(u, v) = 1$ (de lo contrario podríamos normalizar la distancia). Denotemos $m := m_q^{(p)}(E; n, \Gamma)$ que podemos suponer finito pues de lo contrario la desigualdad (3.4) se cumpliría trivialmente.

Consideremos, a continuación, $\{u, v\}^{\mathbb{Z}_m^n}$ el espacio de las funciones f del toro que toman valores en $\{u, v\}$ dotado de la medida de equiprobabilidad. Luego, dado $x \in \mathbb{Z}_m^n$ fijo, notaremos $f(x)$ a la variable aleatoria que a cada $f \in \{u, v\}^{\mathbb{Z}_m^n}$ le asigna el valor $f(x)$. Observemos que las variables $f(x)$ con $x \in \mathbb{Z}_m^n$, son variables *iid* que toman el valor u y el valor v con probabilidad $1/2$. Por lo tanto, para todo $x, y \in \mathbb{Z}_m^n$, la variable aleatoria $d(f(x), f(y))^p$ toma el valor 1 y el valor 0 con probabilidad $1/2$, por lo que $\mathbb{E}_f \left[d(f(x), f(y))^p\right] = 1/2$. Por la definición de m sabemos que para toda $f \in \{u, v\}^{\mathbb{Z}_m^n}$, es decir para toda función $f : \mathbb{Z}_m^n \to \{u,v\}$, se satisface la desigualdad (3.3). Tomando esperanza con respecto a f en la desigualdad obtenemos que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_f\left[\sum_{j=1}^n \mathbb{E}_x\left[d\left(f\left(x+\frac{m}{2}e_j\right), f(x)\right)^p\right]\right] \leq& \mathbb{E}_f\left[\Gamma^p m^p n^{1-p/q}\mathbb{E}_{x,\epsilon}\left[d\left(f(x+\epsilon), f(x)\right)^p\right]\right],\\
\sum_{j=1}^n \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_f\left[d\left(f\left(x+\frac{m}{2}e_j\right), f(x)\right)^p\right]\right] \leq& \Gamma^p m^p n^{1-p/q}\mathbb{E}_{x,\epsilon}\left[\mathbb{E}_f\left[d\left(f(x+\epsilon), f(x)\right)^p\right]\right].
\end{aligned}$$

Usando que $\mathbb{E}_f\left[d(f(x), f(y))^p\right] = 1/2$ para todo $x, y \in \mathbb{Z}_m^n$ nos queda que,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \mathbb{E}_x\left[1/2\right] \leq& \Gamma^p m^p n^{1-p/q}\mathbb{E}_{x,\epsilon}\left[1/2\right],\\
\sum_{j=1}^n 1/2 \leq& \Gamma^p m^p n^{1-p/q} 1/2,\\
n \leq& \Gamma^p m^p n^{1-p/q},\\
\frac{n^{p/q}}{\Gamma^p} \leq& m^p.
\end{aligned}$$

Finalmente, tomando raíz p-ésima se deduce la desigualdad (3.4) que buscábamos demostrar. $\square$

Demostración de la Proposición 3.9. Dada una función $f : \mathbb{Z}_{km}^n \to E$, definimos para todo $y \in \mathbb{Z}_k^n$ la función $f_y : \mathbb{Z}_m^n \to E$ como,

$$f_y(x) := f(kx+y).$$

Dado $\Gamma > \Gamma_q^{(p)}(E; n, m)$, aplicando la definición de $\Gamma_q^{(p)}(E; n, m)$ para la función f_y resulta que:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^n \mathbb{E}_x\left[d\left(f(kx+\frac{km}{2}e_j+y), f(kx+y)\right)^p\right]\\
&\qquad\qquad \leq \Gamma^p m^p n^{1-p/q}\mathbb{E}_{x,\epsilon}\left[d\left(f(kx+k\epsilon+y), f(kx+y)\right)^p\right].
\end{aligned}$$

Luego, tomando esperanza con respecto a y, obtenemos:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_{x,y}\left[d\left(f(kx+y+\frac{km}{2}e_j), f(kx+y)\right)^p\right]$$
$$\leq \Gamma^p m^p n^{1-p/q} \mathbb{E}_{x,y,\epsilon}\left[d\left(f(kx+y+k\epsilon), f(kx+y)\right)^p\right].$$

Notemos que la función $h : \mathbb{Z}_m^n \times \mathbb{Z}_k^n \to \mathbb{Z}_{km}^n$ definida como $h(x,y) = kx + y$ es una biyección. Teniendo en cuenta además que en los toros trabajamos con la medida de equiprobabilidad, resulta que tomar esperanza con respecto a x e y es equivalente a tomar esperanza con respecto a $z \in \mathbb{Z}_{km}^n$ reemplazando $kx + y$ por z. Por lo tanto, nos queda:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_{z}\left[d\left(f(z+\frac{km}{2}e_j), f(z)\right)^p\right] \\
&\leq \Gamma^p m^p n^{1-p/q} \mathbb{E}_{z,\epsilon}\left[d\left(f(z+k\epsilon), f(z)\right)^p\right] \\
&\leq \Gamma^p m^p n^{1-p/q} \mathbb{E}_{z,\epsilon}\left[\left(\sum_{s=1}^{k} d\left(f(z+s\epsilon), f(z+(s-1)\epsilon)\right)\right)^p\right] \\
&\leq \Gamma^p m^p n^{1-p/q} \mathbb{E}_{z,\epsilon}\left[k^{p-1}\sum_{s=1}^{k} d\left(f(z+s\epsilon), f(z+(s-1)\epsilon)\right)^p\right] \\
&\leq \Gamma^p (km)^p n^{1-p/q} \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k} \mathbb{E}_{z,\epsilon}\left[d\left(f(z+(s-1)\epsilon+\epsilon), f(z+(s-1)\epsilon)\right)^p\right] \\
&\leq \Gamma^p (km)^p n^{1-p/q} \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k} \mathbb{E}_{w,\epsilon}\left[d\left(f(w+\epsilon), f(w)\right)^p\right] \\
&\leq \Gamma^p (km)^p n^{1-p/q} \mathbb{E}_{w,\epsilon}\left[d\left(f(w+\epsilon), f(w)\right)^p\right].
\end{aligned}$$

Luego, por definición, tenemos que $\Gamma_q^{(p)}(E; n, km) < \Gamma$ para todo $\Gamma > \Gamma_q^{(p)}(E; n, m)$. Concluimos entonces que $\Gamma_q^{(p)}(E; n, km) \leq \Gamma_q^{(p)}(E; n, m)$ que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Demostración de la Proposición 3.10. Dada una función $f : \mathbb{Z}_m^k \to E$, definimos una función $g : \mathbb{Z}_m^n = \mathbb{Z}_m^k \times \mathbb{Z}_m^{n-k} \to E$ por $g(x,y) \coloneqq f(x)$. El resultado se sigue directamente de aplicar la definición de $\Gamma \coloneqq \Gamma_q^{(p)}(E; n, m)$ a g. En efecto,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}_x \left[d\left(f\left(x + \frac{m}{2}e_j \right), f(x) \right)^p \right] &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_{x,y} \left[d\left(g\left((x,y) + \frac{m}{2}e_j \right), g(x,y) \right)^p \right] \\ &\leq \Gamma^p m^p n^{1-p/q} \mathbb{E}_{x,y,\epsilon} \left[d\left(g((x,y)+\epsilon), g(x,y) \right)^p \right] \\ &\leq \left(\frac{n}{k} \right)^{1-p/q} \Gamma^p m^p k^{1-p/q} \mathbb{E}_{x,\delta} \left[d\left(f(x+\delta), f(x) \right)^p \right],\end{aligned}$$

donde $\delta \in \{-1,1\}^k$ consiste de las primeras k coordenadas de $\epsilon \in \{-1,1\}^n$. □

5.2. Caso real del Teorema 3.12

Presentaremos, en lo que sigue, un argumento de complejización que extiende el Teorema 3.12 al caso de espacios de Banach reales.

Definición 5.1. Dado E un espacio de Banach real, definimos su complejización $\hat{E}$ como el espacio vectorial complejo $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} E = E \oplus iE$. Además, la norma en E se extiende a una norma en $\hat{E}$ definiendo:

$$\|u + iv\|_{\hat{E}} \coloneqq \sup_{\phi \in B_{E^*}} \sqrt{\phi(u)^2 + \phi(v)^2} \quad \text{para todo } u, v \in E$$

(El espacio $\hat{E}$ resulta un espacio de Banach complejo con esta norma.)

Notemos que, como E está incluido isométricamente en $\hat{E}$, resulta que $\gamma_q^{(p)}(E) \leq \gamma_q^{(p)}(\hat{E})$. Luego, por el Teorema 3.12, tenemos que $\gamma_q^{(p)}(E) \leq 2\pi \Gamma_q^{(p)}(\hat{E})$. Veamos, finalmente, cómo se relaciona $\Gamma_q^{(p)}(\hat{E})$ con $\Gamma_q^{(p)}(E)$. Sean $n \in \mathbb{N}$, $m \in 2\mathbb{N}$ y una función $f : \mathbb{Z}_m^n \to \hat{E}$. Podemos escribir a f como $f = u + iv$ con $u, v : \mathbb{Z}_m^n \to E$. Llamemos, además C a la menor constante tal que $(a^2+b^2)^{1/2} \leq C\left(|a|^p + |b|^p\right)^{1/p}$ para todo par $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left\| f\left(x + \frac{m}{2}e_j \right) - f(x) \right\|_{\hat{E}}^p \\ &\quad = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left\| \left(u\left(x + \frac{m}{2}e_j \right) - u(x) \right) + i\left(v\left(x + \frac{m}{2}e_j \right) - v(x) \right) \right\|_{\hat{E}}^p,\end{aligned}$$

y, tomando $u_j(x) \coloneqq u\left(x + \frac{m}{2}e_j\right) - u(x)$ y $v_j(x) \coloneqq v\left(x + \frac{m}{2}e_j\right) - v(x)$, nos queda,

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left(\sup_{\phi \in B_{E^*}} \sqrt{\phi(u_j(x))^2 + \phi(v_j(x))^2} \right)^p \\
&\leq C^p \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \sup_{\phi \in B_{E^*}} \left(|\phi(u_j(x))|_E^p + |\phi(v_j(x))|_E^p \right) \\
&\leq C^p \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left[\|u_j(x)\|_E^p + \|v_j(x)\|_E^p \right].
\end{aligned}
$$

Aplicando, a continuación, la definición de $\Gamma \coloneqq \Gamma_q^{(p)}(E; n, m)$ para las funciones u y v obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left\| f\left(x + \frac{m}{2}e_j\right) - f(x) \right\|_{\hat{E}}^p \\
&\qquad \leq C^p \Gamma^p m^p n^{1-p/q} \mathbb{E}_{x,\epsilon} \left[\|u(x+\epsilon) - u(x)\|_E^p + \|v(x+\epsilon) - v(x)\|_E^p \right] \\
&\qquad \leq 2 C^p \Gamma^p m^p n^{1-p/q} \mathbb{E}_{x,\epsilon} \|f(x+\epsilon) - f(x)\|_{\hat{E}}^p .
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, podemos deducir que $\Gamma_q^{(p)}(\hat{E}) \leq 2^{1/p} C \Gamma_q^{(p)}(E)$. Ahondando en el valor exacto de C se logra obtener la cota $\Gamma_q^{(p)}(\hat{E}) \leq 2\Gamma_q^{(p)}(E)$ independiente de p. En conclusión, probamos que $\gamma_q^{(p)}(E) \leq 4\pi \Gamma_q^{(p)}(E)$, perdiendo únicamente un factor 2 al extender el Teorema 3.12 al caso de espacios de Banach reales.

5.3. Resultados previos al Teorema 3.14

A continuación nos proponemos probar el Lema 3.16. Para ello demostraremos un lema previo para alivianar la demostración.

Lema 5.1. *Sea (E, d) un espacio métrico. Entonces para todo $1 \leq p < \infty$ y toda función $f : \mathbb{Z}_m^n \to E$ con $n, m \in \mathbb{N}$, tenemos que:*

$$
\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left[d\left(f(x+e_j), f(x)\right)^p \right] \leq 2^{p-1} 3n \mathbb{E}_{x,\epsilon} \left[d\left(f(x+\epsilon), f(x)\right)^p \right]. \tag{5.1}
$$

Demostración. Para todo $x \in \mathbb{Z}_m^n$ y $\epsilon \in \{-1,0,1\}^n$, sabemos que:

$$\begin{aligned} d\left(f(x+e_j), f(x)\right)^p &\leq \left(d\left(f(x+e_j), f(x+\epsilon)\right) + d\left(f(x+\epsilon), f(x)\right)\right)^p \\ &\leq 2^{p-1}\left(d\left(f(x+e_j), f(x+\epsilon)\right)^p + d\left(f(x+\epsilon), f(x)\right)^p\right) \\ &= 2^{p-1}\left(d\left(f(x+\epsilon), f(x+e_j)\right)^p + d\left(f(x+\epsilon), f(x)\right)^p\right). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Por otro lado, fijado $1 \leq j \leq n$, la probabilidad de que dado un $\epsilon \in \{-1,0,1\}^n$ se cumpla que $\epsilon_j \neq -1$ es $2/3$ pues trabajamos en $\{-1,0,1\}^n$ con la medida σ de equiprobabilidad. Luego,

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3}\mathbb{E}_x\left[d\left(f(x+e_j)\ \ , f(x)\right)^p\right] \\ &\qquad = \sigma(\{\epsilon \in \{-1,0,1\}^n :\ \epsilon_j \neq -1\})\mathbb{E}_x\left[d\left(f(x+e_j), f(x)\right)^p\right] \\ &\qquad = \int_{\{\epsilon\in\{-1,0,1\}^n:\ \epsilon_j\neq -1\}} \mathbb{E}_x\left[d\left(f(x+e_j), f(x)\right)^p\right] \, d\sigma(\epsilon), \end{aligned}$$

y utilizando la desigualdad (5.2), resulta

$$\begin{aligned} &\leq 2^{p-1}\int_{\{\epsilon\in\{-1,0,1\}^n:\ \epsilon_j\neq -1\}} \mathbb{E}_x\left[d\left(f(x+\epsilon), f(x+e_j)\right)^p\right] \, d\sigma(\epsilon) \\ &\quad + 2^{p-1}\int_{\{\epsilon\in\{-1,0,1\}^n:\ \epsilon_j\neq -1\}} \mathbb{E}_x\left[d\left(f(x+\epsilon), f(x)\right)^p\right] \, d\sigma(\epsilon) \\ &= 2^{p-1}\int_{\{\epsilon\in\{-1,0,1\}^n:\ \epsilon_j\neq -1\}} \mathbb{E}_x\left[d\left(f(x-e_j+\epsilon), f(x)\right)^p\right] \, d\sigma(\epsilon) \\ &\quad + 2^{p-1}\int_{\{\epsilon\in\{-1,0,1\}^n:\ \epsilon_j\neq -1\}} \mathbb{E}_x\left[d\left(f(x+\epsilon), f(x)\right)^p\right] \, d\sigma(\epsilon). \end{aligned}$$

Notemos que en la primer integral del último paso, podemos realizar un cambio de variables $\tilde{\epsilon} := -e_j + \epsilon$. Luego, $\tilde{\epsilon}$ recorre los valores de $\{-1,0,1\}^n$ donde $\tilde{\epsilon}_j$ es distinto de 1. Aplicando este cambio a la desigualdad anterior obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{3}\mathbb{E}_x\left[d\left(f(x+e_j)\ \ ,f(x)\right)^p\right]\\
&\qquad\qquad\leq 2^{p-1}\int_{\{\tilde{\epsilon}\in\{-1,0,1\}^n\ /\ \tilde{\epsilon}_j\neq 1\}}\mathbb{E}_x\left[d\left(f(x+\tilde{\epsilon}),f(x)\right)^p\right]\,d\sigma(\tilde{\epsilon})\\
&\qquad\qquad\quad+2^{p-1}\int_{\{\epsilon\in\{-1,0,1\}^n\ /\ \epsilon_j\neq -1\}}\mathbb{E}_x\left[d\left(f(x+\epsilon),f(x)\right)^p\right]\,d\sigma(\epsilon)\\
&\qquad\qquad\leq 2^{p-1}2\int_{\{-1,0,1\}^n}\mathbb{E}_x\left[d\left(f(x+\epsilon),f(x)\right)^p\right]\,d\sigma(\epsilon)\\
&\qquad\qquad=2^p\mathbb{E}_{x,\epsilon}\left[d\left(f(x+\epsilon),f(x)\right)^p\right].
\end{aligned}
$$

Finalmente, multiplicando la desigualdad por $3/2$ y sumando sobre todos los $1\leq j\leq n$ se deduce el resultado buscado. □

Estamos ahora en condiciones de probar el Lema 3.16.

Demostración del Lema 3.16. Dada una función $f:\mathbb{Z}_m^n\to E$ y un conjunto $A\subseteq\{1,\ldots,n\}$, podemos considerar la restricción de la función f a las coordenadas indexadas por el conjunto A. Aplicando la hipótesis a la función restringida tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j\in A}\mathbb{E}_x\left[d\left(f\left(x+\frac{m}{2}e_j\right),f(x)\right)^p\right]\\
&\qquad\leq C^pm^pn^{1-p/q}\left(\mathbb{E}_{x,\xi}\left[d\left(f\left(x+\sum_{j\in A}\xi_je_j\right),f(x)\right)^p\right]\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{1}{|A|}\sum_{j\in A}\mathbb{E}_x\left[d\left(f(x+e_j),f(x)\right)^p\right]\right).
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

(Es conveniente realizar dos aclaraciones. La primera es que para el caso $A=\varnothing$, si bien no podemos utilizar la hipótesis del lema, la desigualdad se stasiface trivialmente. La segunda es que pensamos a los $\xi\in\{-1,1\}^{|A|}$ con coordenadas numeradas por los elementos de A, es decir, $\xi=(\xi_j)_{j\in A}$.)

A continuación, multiplicamos la desigualdad (5.3) por $2^{|A|}/3^n$ y sumamos sobre todos los subconjuntos $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ para obtener:

$$\sum_{A\subseteq\{1,\dots,n\}} \frac{2^{|A|}}{3^n} \sum_{j\in A} \mathbb{E}_x \left[d\left(f\left(x + \frac{m}{2} e_j \right), f(x) \right)^p \right]$$
$$\leq C^p m^p n^{1-p/q} \left(\sum_{A\subseteq\{1,\dots,n\}} \frac{2^{|A|}}{3^n} \mathbb{E}_{x,\xi} \left[d\left(f\left(x + \sum_{j\in A} \xi_j e_j \right), f(x) \right)^p \right] \right.$$
$$\left. + \sum_{A\subseteq\{1,\dots,n\}} \frac{2^{|A|}}{|A|\, 3^n} \sum_{j\in A} \mathbb{E}_x \left[d\left(f(x+e_j), f(x) \right)^p \right] \right). \quad (5.4)$$

Veamos como resultan ambos lados de la desigualdad por separado. Para el lado izquierdo obtenemos,

$$\sum_{A\subseteq\{1,\dots,n\}} \frac{2^{|A|}}{3^n} \sum_{j\in A} \mathbb{E}_x \left[d\left(f\left(x + \frac{m}{2} e_j \right), f(x) \right)^p \right]$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{A\subseteq\{1,\dots,n\} \\ |A|=k}} \frac{2^k}{3^n} \sum_{j\in A} \mathbb{E}_x \left[d\left(f\left(x + \frac{m}{2} e_j \right), f(x) \right)^p \right],$$

y como cada $j \in \{1, \dots, n\}$ pertenece exactamente a $\binom{n-1}{k-1}$ subconjuntos $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ de cardinal k, nos queda

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^n} \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \mathbb{E}_x \left[d\left(f\left(x + \frac{m}{2} e_j \right), f(x) \right)^p \right]$$
$$= \frac{2}{3^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 2^{k-1} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left[d\left(f\left(x + \frac{m}{2} e_j \right), f(x) \right)^p \right]$$
$$= \frac{2}{3^n} 3^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left[d\left(f\left(x + \frac{m}{2} e_j \right), f(x) \right)^p \right]$$
$$= \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left[d\left(f\left(x + \frac{m}{2} e_j \right), f(x) \right)^p \right]. \quad (5.5)$$

Analicemos el primer sumando dentro del paréntesis del lado derecho de la desigualdad (5.4):

$$\begin{aligned}
&\sum_{A\subseteq\{1,\dots,n\}} \frac{2^{|A|}}{3^n}\mathbb{E}_{x,\xi}\left[d\left(f\left(x+\sum_{j\in A}\xi_j e_j\right), f(x)\right)^p\right]\\
&=\sum_{A\subseteq\{1,\dots,n\}} \frac{2^{|A|}}{3^n}\frac{1}{2^{|A|}}\sum_{\xi\in\{-1,1\}^{|A|}}\mathbb{E}_{x}\left[d\left(f\left(x+\sum_{j\in A}\xi_j e_j\right), f(x)\right)^p\right]\\
&=\frac{1}{3^n}\sum_{A\subseteq\{1,\dots,n\}}\sum_{\xi\in\{-1,1\}^{|A|}}\mathbb{E}_{x}\left[d\left(f\left(x+\sum_{j\in A}\xi_j e_j\right), f(x)\right)^p\right]\\
&=\frac{1}{3^n}\sum_{\epsilon\in\{-1,0,1\}^n}\mathbb{E}_x\left[d\left(f(x+\epsilon), f(x)\right)^p\right]\\
&=\mathbb{E}_{x,\epsilon}\left[d\left(f(x+\epsilon), f(x)\right)^p\right]. \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

Pasemos ahora a acotar el segundo sumando de (5.4):

$$\begin{aligned}
&\sum_{A\subseteq\{1,\dots,n\}} \frac{2^{|A|}}{|A|\,3^n}\sum_{j\in A}\mathbb{E}_x\left[d\left(f(x+e_j), f(x)\right)^p\right]\\
&\qquad=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{A\subseteq\{1,\dots,n\}\\|A|=k}}\frac{2^k}{k3^n}\sum_{j\in A}\mathbb{E}_x\left[d\left(f(x+e_j), f(x)\right)^p\right].
\end{aligned}$$

Luego, repitiendo el razonamiento de la desigualdad (5.5), lo anterior resulta igual a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k3^n}\binom{n-1}{k-1}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}_x\left[d\left(f(x+e_j), f(x)\right)^p\right].$$

Por lo tanto, aplicando el Lema 5.1 obtenemos,

$$\begin{aligned}
&\sum_{A\subseteq\{1,\dots,n\}} \frac{2^{|A|}}{|A|\,3^n}\sum_{j\in A}\mathbb{E}_x\left[d\left(f(x+e_j),f(x)\right)^p\right]\\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k3^n}\binom{n-1}{k-1}2^{p-1}3n\mathbb{E}_{x,\epsilon}\left[d\left(f(x+\epsilon),f(x)\right)^p\right]\\
&\leq \frac{2^{p-1}}{3^{n-1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}2^k\mathbb{E}_{x,\epsilon}\left[d\left(f(x+\epsilon),f(x)\right)^p\right]\\
&\leq \frac{2^{p-1}}{3^{n-1}}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^k\mathbb{E}_{x,\epsilon}\left[d\left(f(x+\epsilon),f(x)\right)^p\right]\\
&\leq \frac{2^{p-1}}{3^{n-1}}\left(3^n-1\right)\mathbb{E}_{x,\epsilon}\left[d\left(f(x+\epsilon),f(x)\right)^p\right]\\
&\leq 2^{p-1}3\mathbb{E}_{x,\epsilon}\left[d\left(f(x+\epsilon),f(x)\right)^p\right]\\
&\leq 2^{p}\mathbb{E}_{x,\epsilon}\left[d\left(f(x+\epsilon),f(x)\right)^p\right]. \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

De esta manera, reemplazando el lado izquierdo de la desigualdad (5.4) utilizando la identidad (5.5), y acotando el lado derecho según (5.6) y (5.7) resulta,

$$\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}_x\left[d\left(f\left(x+\frac{m}{2}e_j\right),f(x)\right)^p\right]\leq C^pm^pn^{1-p/q}(2^p+1)\mathbb{E}_{x,\epsilon}\left[d\left(f(x+\epsilon),f(x)\right)^p\right],$$

y por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}_x\left[d\left(f\left(x+\frac{m}{2}e_j\right),f(x)\right)^p\right]\leq C^pm^pn^{1-p/q}\frac{3}{2}(2^p+1)\mathbb{E}_{x,\epsilon}\left[d\left(f(x+\epsilon),f(x)\right)^p\right]. \qquad (5.8)$$

El lema se deduce tras corroborar que $\frac{3}{2}(2^p+1)\leq 5^p$ para todo $p\geq 1$,

$$\frac{(2^p+1)}{5^p}=\left(\frac{2}{5}\right)^p+\left(\frac{1}{5}\right)^p\leq\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}\leq\frac{2}{3}.$$

□

Demostración del Lema 3.17. Comencemos acotando el integrando de la izquierda de la desigualdad (3.11). A partir de la convexidad de la función $\|\cdot\|^p$ deducimos que,

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{E}_j^{(k)} f(x) - f(x)\right\|^p =& \left\|\frac{1}{\mu\left(S(j,k)\right)} \int_{S(j,k)} \left(f(x+y) - f(x)\right)\, d\mu(y)\right\|^p \\ \leq& \frac{1}{\mu\left(S(j,k)\right)} \int_{S(j,k)} \|f(x+y) - f(x)\|^p \, d\mu(y).\end{aligned}$$

Tomando esperanza con respecto a $x \in \mathbb{Z}_m^n$ obtenemos,

$$\mathbb{E}_x \left\|\mathcal{E}_j^{(k)} f(x) - f(x)\right\|^p \leq \frac{1}{\mu\left(S(j,k)\right)} \int_{S(j,k)} \mathbb{E}_x \|f(x+y) - f(x)\|^p \, d\mu(y). \tag{5.9}$$

Para llegar desde esta última desigualdad a la deseada, el próximo paso será acotar la expresión $\|f(x+y) - f(x)\|$ en función de términos de la forma $\|f(w+e_j) - f(w)\|$ y $\|f(z+\xi) - f(z)\|$. Esto se logrará de manera directa intercalando puntos y usando la desigualdad triangular. La verdadera dificultad de la demostración radica en llevar la cuenta de cuántos términos fueron necesarios.

Prosigamos, entonces, especificando con qué criterio serán intercalados los puntos mencionados anteriormente, pues si bien se realizará de manera bastante simple, la escritura formal es algo técnica. Sea $a \in \{0, \ldots, k\}^n$ tal que a_j es impar para todo $1 \leq j \leq n$. Veamos que existe una función $\pi_a : \{0, \ldots, \|a\|_\infty\} \to \mathbb{Z}_m^n$, que denominaremos camino, tal que: $\pi_a(0) = 0$, $\pi_a(\|a\|_\infty) = a$ y el paso $\pi_a(t) - \pi_a(t-1)$ pertenece a $\{-1, 1\}^n$ para todo $1 \leq t \leq \|a\|_\infty$. Intuitivamente esta función se puede construir de manera tal que vaya sumando 1 en cada coordenada j-ésima hasta alcanzar el valor a_j y que a partir de allí oscile restando y sumando 1. Concretamente, definiremos π_a inductivamente como $\pi_a(0) \coloneqq 0$ y para todo $1 \leq t \leq \|a\|_\infty$,

$$\pi_a(t) \coloneqq \begin{cases} \pi_a(t-1) + \sum_{j=1}^n e_j & \text{si } t \text{ es impar} \\ \pi_a(t-2) + 2\sum_{\{j/\pi_a(t-1)_j < a_j\}} e_j & \text{si } t \text{ es par} \end{cases}.$$

Ahora bien, dado cierto $a \in [-k, k]^n$ con todas sus coordenadas impares construiremos un camino de 0 a a que cumpla los requerimientos anteriores. Basta considerar $\pi_{|a|}$ un camino de 0 a $|a| \coloneqq (|a_1|, \ldots, |a_n|)$ y tomar $\pi_a = \operatorname{sgn}(a)\pi_{|a|}$, donde $\operatorname{sgn}(a) \coloneqq (\operatorname{sgn}(a_1), \ldots, \operatorname{sgn}(a_n))$ es el vector de los signos de cada coordenada de a.

Volviendo a nuestro objetivo original dado $x \in \mathbb{Z}_m^n$ e $y \in S(j,k)$ intercalaremos puntos entre x y $x+y$ de dos formas distintas. La primera será intercalando $x+e_j$ y luego los puntos de un camino entre $x+e_j$ y $x+y=x+e_j+(y-e_j)$. La segunda, pasará por $x-e_j$ y los puntos de un camino entre $x-e_j$ y $x+y=x-e_j+(y+e_j)$. Explícitamente, dado que $y-e_j$ e $y+e_j$ pertenecen a $[-k,k]^n$ y tienen todas sus coordenadas impares, podemos definir dichos caminos como:

$$\pi^{+1}_{x,y} := x+e_j+\pi_{(y-e_j)} \quad \text{y} \quad \pi^{-1}_{x,y} := x-e_j+\pi_{(y+e_j)}.$$

Luego, aplicando la desigualdad triangular, podemos obtener dos cotas distintas para la expresión $\|f(x+y)-f(x)\|$ según qué puntos intercalemos:

$$\begin{aligned} \|f(x+y)-f(x)\| &\leq \|f(x+e_j)-f(x)\| + \sum_{t=1}^{\|y-e_j\|_\infty} \left\| f\circ\pi^{+1}_{x,y}(t) - f\circ\pi^{+1}_{x,y}(t-1)\right\|; \\ \|f(x+y)-f(x)\| &\leq \|f(x-e_j)-f(x)\| + \sum_{t=1}^{\|y+e_j\|_\infty} \left\| f\circ\pi^{-1}_{x,y}(t) - f\circ\pi^{-1}_{x,y}(t-1)\right\|. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Notemos que hemos logrado acotar $\|f(x+y)-f(x)\|$ en función de términos de la forma $\|f(w+e_j)-f(w)\|$ y $\|f(z+\xi)-f(z)\|$ como nos proponíamos, pues los puntos consecutivos de los caminos que construimos distan siempre en cierto ξ perteneciente a $\{-1,1\}^n$. A continuación, elevando a la p la primer desigualdad de (5.10) que obtuvimos (esa es la magnitud que buscamos acotar, ver la desigualdad (5.9)) y aplicando la desigualdad de Hölder para pasar dicha potencia dentro de la suma, deducimos que

$$\begin{aligned} \|f(x+y)-f(x)\|^p \leq & 2^{p-1}\|f(x+e_j)-f(x)\|^p \\ & + 2^{p-1}\left(\sum_{t=1}^{\|y-e_j\|_\infty} \left\| f\circ\pi^{+1}_{x,y}(t) - f\circ\pi^{+1}_{x,y}(t-1)\right\|\right)^p \\ \leq & 2^{p-1}\|f(x+e_j)-f(x)\|^p \\ & + 2^{p-1}\|y-e_j\|_\infty^{p-1} \sum_{t=1}^{\|y-e_j\|_\infty} \left\| f\circ\pi^{+1}_{x,y}(t) - f\circ\pi^{+1}_{x,y}(t-1)\right\|^p \end{aligned}$$

Procediendo de forma análoga con la otra desigualdad resulta,

$$\begin{aligned} \|f(x+y)-f(x)\|^p \leq & 2^{p-1}\|f(x-e_j)-f(x)\|^p \\ & + 2^{p-1}\|y+e_j\|_\infty^{p-1} \sum_{t=1}^{\|y+e_j\|_\infty} \left\| f\circ\pi^{-1}_{x,y}(t) - f\circ\pi^{-1}_{x,y}(t-1)\right\|^p. \end{aligned}$$

En consecuencia, teniendo en cuenta que $\|y-e_j\|_\infty, \|y+e_j\|_\infty \leq k$, promediando ambas desigualdades nos queda,

$$\begin{aligned}\|f(x+y)-f(x)\|^p \leq & 2^{p-2}\|f(x+e_j)-f(x)\|^p + 2^{p-2}\|f(x-e_j)-f(x)\|^p \\ & + 2^{p-2}k^{p-1}\sum_{t=1}^{\|y-e_j\|_\infty}\left\|f\circ\pi_{x,y}^{+1}(t)-f\circ\pi_{x,y}^{+1}(t-1)\right\|^p \\ & + 2^{p-2}k^{p-1}\sum_{t=1}^{\|y+e_j\|_\infty}\left\|f\circ\pi_{x,y}^{-1}(t)-f\circ\pi_{x,y}^{-1}(t-1)\right\|^p .\end{aligned}$$

Luego, aplicando la desigualdad anterior a nuestra cota inicial (5.9) obtenemos,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\left\|\mathcal{E}_j^{(k)}f(x)\ -f(x)\right\|^p \leq & \frac{1}{\mu\left(S(j,k)\right)}\int_{S(j,k)}\mathbb{E}_x\|f(x+y)-f(x)\|^p\ d\mu(y) \\ \leq & 2^{p-2}\mathbb{E}_x\|f(x+e_j)-f(x)\|^p + 2^{p-2}\mathbb{E}_x\|f(x-e_j)-f(x)\|^p \\ & + \frac{2^{p-2}k^{p-1}}{\mu\left(S(j,k)\right)}\int_{S(j,k)}\mathbb{E}_x\left[\sum_{t=1}^{\|y-e_j\|_\infty}\left\|f\circ\pi_{x,y}^{+1}(t)-f\circ\pi_{x,y}^{+1}(t-1)\right\|^p\right. \\ & \left.+\sum_{t=1}^{\|y+e_j\|_\infty}\left\|f\circ\pi_{x,y}^{-1}(t)-f\circ\pi_{x,y}^{-1}(t-1)\right\|^p\right] d\mu(y) \\ \leq & 2^{p-1}\mathbb{E}_x\|f(x+e_j)-f(x)\|^p \\ & + \frac{2^{p-2}k^{p-1}}{|S(j,k)|\, m^n}\sum_{y\in S(j,k)}\sum_{x\in\mathbb{Z}_m^n}\left(\sum_{t=1}^{\|y-e_j\|_\infty}\left\|f\circ\pi_{x,y}^{+1}(t)-f\circ\pi_{x,y}^{+1}(t-1)\right\|^p\right. \\ & \left.+\sum_{t=1}^{\|y+e_j\|_\infty}\left\|f\circ\pi_{x,y}^{-1}(t)-f\circ\pi_{x,y}^{-1}(t-1)\right\|^p\right). \qquad (5.11)\end{aligned}$$

Llegamos al punto mencionado anteriormente donde deberemos contar la cantidad de veces que aparece sumando el término $\|f(z+\xi)-f(z)\|$ en la fórmula anterior para cada $z\in\mathbb{Z}_m^n$ y cada $\xi\in\{-1,1\}^n$. Para ello, definamos dos conjuntos:

$$\begin{aligned}F^{+1}(z,\xi) := \Big\{(x,y)\in\mathbb{Z}_m^n\times S(j,k):\ & \pi_{x,y}^{+1}(t-1)=z \text{ y} \\ & \pi_{x,y}^{+1}(t)=z+\xi \text{ con } 1\leq t\leq\|y-e_j\|_\infty\Big\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F^{-1}(z,\xi) := \Big\{(x,y)\in\mathbb{Z}_m^n\times S(j,k):\ & \pi_{x,y}^{-1}(t-1)=z \text{ y} \\ & \pi_{x,y}^{-1}(t)=z+\xi \text{ con } 1\leq t\leq\|y+e_j\|_\infty\Big\}.\end{aligned}$$

Notemos que si cierto par (x, y) pertenece al conjunto $F^{+1}(z, \xi)$, entonces el elemento t que cumple las condiciones $\pi^{+1}_{x,y}(t-1) = z$ y $\pi^{+1}_{x,y}(t) = z + \xi$ es único, ya que $\pi_{x,y}$ es inyectivo en la coordenada donde $y - e_j$ alcanza su norma infinito. Lo mismo ocurre con el conjunto $F^{-1}(z, \xi)$, por lo que podemos acotar

$$\begin{aligned}
\sum_{y \in S(j,k)} \sum_{x \in \mathbb{Z}^n_m} \Bigg(& \sum_{t=1}^{\|y-e_j\|_\infty} \left\| f \circ \pi^{+1}_{x,y}(t) - f \circ \pi^{+1}_{x,y}(t-1) \right\|^p \\
& + \sum_{t=1}^{\|y+e_j\|_\infty} \left\| f \circ \pi^{-1}_{x,y}(t) - f \circ \pi^{-1}_{x,y}(t-1) \right\|^p \Bigg) \\
& \leq \sum_{\xi \in \{-1,1\}^n} \sum_{z \in \mathbb{Z}^n_m} \left(\left| F^{+1}(z,\xi) \right| + \left| F^{-1}(z,\xi) \right| \right) \| f(z+\xi) - f(z) \|^p \\
& = \sum_{\xi \in \{-1,1\}^n} \sum_{z \in \mathbb{Z}^n_m} N(z,\xi) \| f(z+\xi) - f(z) \|^p , \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

llamando $N(z, \xi)$ al valor $(|F^{+1}(z, \xi)| + |F^{-1}(z, \xi)|)$. Veamos, a continuación, que la magnitud $N(z, \xi)$ es una constante independiente del par (z, ξ) y acotemos su valor. Para ello, dados dos pares $(z, \xi), (w, \zeta) \in \mathbb{Z}^n_m \times \{-1, 1\}^n$ consideremos la función $\psi : \mathbb{Z}^n_m \times S(j, k) \to \mathbb{Z}^n_m \times S(j, k)$ definida como,

$$\psi(x, y) \coloneqq (w - \xi\zeta z + \xi\zeta x, \xi\zeta y) .$$

La asignación ψ resulta biyectiva y cumple las condiciones $\psi\left(F^{+1}(z, \xi)\right) = F^{\xi_j\zeta_j}(w, \zeta)$ y $\psi\left(F^{-1}(z, \xi)\right) = F^{-\xi_j\zeta_j}(w, \zeta)$. En efecto, dado un par $(x, y) \in F^{+1}(z, \xi)$ existe un t tal que $\pi^{+1}_{x,y}(t-1) = z$ y $\pi^{+1}_{x,y}(t) = z+\xi$. Consideremos entonces el camino $w - \xi\zeta z + \xi\zeta\pi^{+1}_{x,y}$. Dicho camino es por definición igual a w al evaluarlo en $t-1$ e igual a $w+\zeta$ al evaluarlo en t. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
w - \xi\zeta z + \xi\zeta\pi^{+1}_{x,y} =& w - \xi\zeta z + \xi\zeta \left(x + e_j + \pi_{(y-e_j)} \right) = w - \xi\zeta z + \xi\zeta x + \xi\zeta e_j + \xi\zeta\pi_{(y-e_j)} \\
=& w - \xi\zeta z + \xi\zeta x + \xi\zeta e_j + \pi_{(\xi\zeta y - \xi\zeta e_j)} = \pi^{\xi_j\zeta_j}_{\psi(x,y)} .
\end{aligned}$$

Luego, podemos concluir que $\psi(x, y) \in F^{\xi_j\zeta_j}(w, \zeta)$ y por lo tanto $\psi\left(F^{+1}(z, \xi)\right) \subset F^{\xi_j\zeta_j}(w, \zeta)$. Aplicando el mismo razonamiento para la inversa de ψ obtenemos la igualdad. Finalmente, la deducción de la segunda igualdad, $\psi\left(F^{-1}(z, \xi)\right) = F^{-\xi_j\zeta_j}(w, \zeta)$, es análoga. Hemos probado que la magnitud $N(z, \xi)$ es constante por lo que la notaremos simplemente N.

Como último paso, procederemos a acotar la constante N:

$$\begin{aligned}
m^n 2^n N &= \sum_{(z,\xi)\in\mathbb{Z}_m^n\times\{-1,1\}^n} \left(\left|F^{+1}(z,\xi)\right| + \left|F^{-1}(z,\xi)\right|\right) \\
&= \sum_{(z,\xi)\in\mathbb{Z}_m^n\times\{-1,1\}^n} \sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}_m^n\times S(j,k)} \sum_{t=1}^{\|y-e_j\|_\infty} \chi_{\left\{\pi_{x,y}^{+1}(t-1)=z\wedge\pi_{x,y}^{+1}(t)=z+\xi\right\}} \\
&\quad + \sum_{(z,\xi)\in\mathbb{Z}_m^n\times\{-1,1\}^n} \sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}_m^n\times S(j,k)} \sum_{t=1}^{\|y+e_j\|_\infty} \chi_{\left\{\pi_{x,y}^{-1}(t-1)=z\wedge\pi_{x,y}^{-1}(t)=z+\xi\right\}} \\
&\leq \sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}_m^n\times S(j,k)} \sum_{t=1}^{\|y-e_j\|_\infty} 1 + \sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}_m^n\times S(j,k)} \sum_{t=1}^{\|y+e_j\|_\infty} 1 \\
&\leq \sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}_m^n\times S(j,k)} 2k = 2km^n \left|S(j,k)\right|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $N \leq 2^{1-n}k\left|S(j,k)\right|$. Luego, aplicando esta cota y la desigualdad (5.12) a la inecuación (5.11) que habíamos conseguido, el lema se sigue. Efectivamente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x \left\|\mathcal{E}_j^{(k)} f(x) - f(x)\right\|^p \leq& 2^{p-1}\mathbb{E}_x \left\|f(x+e_j) - f(x)\right\|^p \\
&+ \frac{2^{p-2}k^{p-1}}{\left|S(j,k)\right| m^n} \sum_{\xi\in\{-1,1\}^n} \sum_{z\in\mathbb{Z}_m^n} N \left\|f(z+\xi) - f(z)\right\|^p \\
\leq& 2^{p-1}\mathbb{E}_x \left\|f(x+e_j) - f(x)\right\|^p + 2^{p-1}k^p\mathbb{E}_{z,\xi} \left\|f(z+\xi) - f(z)\right\|^p,
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Demostración del Lema 3.18. Dado $x \in \mathbb{Z}_m^n$, notaremos $A(x)$ a la suma del lado izquierdo de la desigualdad (3.12),

$$A(x) := \sum_{j=1}^{n} \xi_j \left(\mathcal{E}_j^{(k)} f(x+e_j) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x-e_j)\right).$$

Observemos que esta expresión resulta una combinación lineal entera de elementos de la imagen de la función f divididos por $|S(j,k)| = k(k+1)^{n-1}$. Es decir, que para todo $y \in \mathbb{Z}_m^n$ existirán coeficientes $a_y(x) \in \mathbb{Z}$ de manera tal que,

$$A(x) = \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{y\in\mathbb{Z}_m^n} a_y(x)f(y).$$

Compararemos esta cantidad con otra suma que llamaremos $B(x)$, definida como

$$\begin{aligned} B(x) &:= \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{z \in x+(-k,k)^n \cap (2\mathbb{Z})^n} (f(z+\xi) - f(z-\xi)) \\ &= \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{w \in (-k,k)^n \cap (2\mathbb{Z})^n} (f(x+w+\xi) - f(x+w-\xi)) \\ &= \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{y \in \mathbb{Z}_m^n} b_y(x) f(y), \end{aligned}$$

donde aquí también elegimos los coeficientes $b_y(x) \in \mathbb{Z}$ adecuadamente. Para $x \in \mathbb{Z}_m^n$, definamos además el siguiente conjunto:

$$S(x) := \{ y \in x + (2\mathbb{Z}+1)^n : \ \|y-x\|_\infty = k \text{ y } |\{ j : \ |y_j - x_j| \equiv k \ (m) \}| \geq 2 \}.$$

Veamos que si $y \notin S(x)$, entonces $a_y(x) = b_y(x)$. Fijado $y \notin S(x)$, separaremos nuestro análisis en casos según la condición de pertenencia al conjunto $S(x)$ que no se cumpla.

- En primer lugar, supongamos que $y \notin x+(2\mathbb{Z}+1)^n$. Por la definición del operador $\mathcal{E}_j^{(k)}$, en la suma $A(x)$ sólo aparecen términos de la forma $f(x+w \pm e_j)$ con $w \in S(j,k)$. Luego, como el elemento $w \pm e_j$ pertenece al conjunto $(2\mathbb{Z}+1)^n$, tenemos que $a_y(x) = 0$. Lo mismo ocurre con la expresión $B(x)$ donde sólo se encuentran en la combinación lineal los términos $f(x+w\pm\xi)$ con $w \in (2\mathbb{Z})^n$. Por lo tanto, si $y \notin x + (2\mathbb{Z}+1)^n$, entonces $a_y(x) = b_y(x) = 0$.

- En segundo lugar, supongamos que $y \in x + (2\mathbb{Z}+1)^n$ pero que $\|y-x\|_\infty > k$. Con un argumento similar, rastreando cuándo aparece $f(y)$, se deduce que $a_y(x) = b_y(x) = 0$. Por otro lado, cuando $\|y-x\|_\infty < k$ en ambas sumas el término $f(y)$ se encuentra sumando y restando por lo cual también se satisface la igualdad $a_y(x) = b_y(x) = 0$.

- Finalmente, si $y \in x+(2\mathbb{Z}+1)^n$ cumple que $\|y-x\|_\infty = k$ pero $y \notin S(x)$, necesariamente resulta que $|\{ j : \ |y_j - x_j| \equiv k \ (m)\}| = 1$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $y_1 - x_1 = k$ y que $|y_j - x_j| < k$ para $j \geq 2$. Para el caso de $A(x)$ nos queda entonces que $f(y)$ se cancela en la expresión $\left(\mathcal{E}_j^{(k)} f(x+e_j) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x-e_j)\right)$ para $j \geq 2$, y en cambio, únicamente está sumando para $j = 1$. Luego, tendremos $a_y(x) = \xi_1$. Para el caso de $B(x)$, el término $f(y)$ aparece únicamente cuando $z = y - \xi_1\xi$ por lo que su signo será ξ_1. Por lo tanto, se deduce que $a_y(x) = b_y(x) = \xi_1$.

Concluimos, entonces, que los coeficientes $a_y(x)$ y $b_y(x)$ pueden diferir solamente si $y \in S(x)$. Procedemos, luego, a acotar el lado izquierdo de la desigualdad (3.12) intercalando la suma $B(x)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x \|A(x)\|^p =& \mathbb{E}_x \|B(x) + A(x) - B(x)\|^p \\ =& \mathbb{E}_x \left\| B(x) + \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{y\in S(x)} (a_y(x) - b_y(x))\, f(y) \right\|^p ,\end{aligned}$$

aplicando la desigualdad triangular y la desigualdad de Hölder obtenemos,

$$\begin{aligned}&\leq 3^{p-1}\mathbb{E}_x \|B(x)\|^p + 3^{p-1}\mathbb{E}_x \left\| \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{y\in S(x)} a_y(x) f(y) \right\|^p \\ &\quad + 3^{p-1}\mathbb{E}_x \left\| \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{y\in S(x)} b_y(x) f(y) \right\|^p . \qquad (5.13)\end{aligned}$$

Bastará con acotar los tres sumandos de la desigualdad anterior. Para el primero, aplicando de manera directa la convexidad de la función $\|\cdot\|^p$, resulta

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x \|B(x)\|^p \leq& \mathbb{E}_x \left\| \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{w\in(-k,k)^n\cap(2\mathbb{Z})^n} (f(x+w+\xi) - f(x+w-\xi)) \right\|^p \\ \leq& \frac{1}{k^n} \sum_{w\in(-k,k)^n\cap(2\mathbb{Z})^n} \mathbb{E}_x \|f(x+w+\xi) - f(x+w-\xi)\|^p \\ \leq& \mathbb{E}_x \|f(x+\xi) - f(x-\xi)\|^p . \qquad (5.14)\end{aligned}$$

Prosigamos con la cota de los otros dos sumandos de la desigualdad (5.13). Definamos para $x \in \mathbb{Z}_m^n$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$ la función auxiliar $\tau_j^x : \mathbb{Z}_m^n \to \mathbb{Z}_m^n$ por

$$\tau_j^x(y) := \begin{cases} y - 2ke_j & \text{si } y \in S(x) \text{ y } y_j - x_j \equiv k\ (m) \\ y & \text{si no} \end{cases} .$$

Notemos que se satisface la siguiente igualdad:

$$\tau_j^x(y) = \tau_j^0(y - x) + x. \tag{5.15}$$

Por otro lado, como realizamos previamente, dado $y \in S(x)$ podemos escribir los coeficientes $a_y(x)$ explícitamente a partir de la definición de $A(x)$,

$$a_y(x) = \sum_{j/y_j - x_j \equiv k\ (m)} \xi_j - \sum_{j/y_j - x_j \equiv -k\ (m)} \xi_j.$$

Luego, teniendo en cuenta que $\tau_j^x(y) = y$ a menos que y pertenezca a $S(x)$ y cumpla la condición $y_j - x_j \equiv k\ (m)$, resulta que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \sum_{y \in \mathbb{Z}_m^n} \xi_j \left(f(y) - f \circ \tau_j^x(y)\right) \\
&\qquad = \sum_{y \in S(x)} \sum_{j/y_j - x_j \equiv k\ (m)} \xi_j \left(f(y) - f \circ \tau_j^x(y)\right) \\
&\qquad = \sum_{y \in S(x)} \sum_{j/y_j - x_j \equiv k\ (m)} \xi_j f(y) - \sum_{y \in S(x)} \sum_{j/y_j - x_j \equiv k\ (m)} \xi_j f \circ \tau_j^x(y).
\end{aligned}$$

Aplicando el cambio de variables inducido por la biyección α entre los pares $(j, y) \in \{1, \dots, n\} \times S(x)$ tales que $y_j - x_j \equiv k\ (m)$ y los pares $(j, y) \in \{1, \dots, n\} \times S(x)$ tales que $y_j - x_j \equiv -k\ (m)$ definida como $\alpha(j, y) \coloneqq (j, \tau_j^x(y))$, lo anterior resulta igual a

$$\begin{aligned}
&\sum_{y \in S(x)} \sum_{j/y_j - x_j \equiv k\ (m)} \xi_j f(y) - \sum_{y \in S(x)} \sum_{j/y_j - x_j \equiv -k\ (m)} \xi_j f(y) \\
&= \sum_{y \in S(x)} \left(\sum_{j/y_j - x_j \equiv k\ (m)} \xi_j - \sum_{j/y_j - x_j \equiv -k\ (m)} \xi_j \right) f(y) \\
&= \sum_{y \in S(x)} a_y(x) f(y).
\end{aligned}$$

A continuación, veamos que también podemos reescribir la suma $\sum_{y \in S(x)} b_y(x) f(y)$ de forma muy similar. Explícitamente, probaremos que,

$$\sum_{y \in S(x)} b_y(x) f(y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{y \in \mathbb{Z}_m^n} \frac{\delta_{j,y}(x)}{2} \left(f(y) - f \circ \tau_j^x(y)\right), \tag{5.16}$$

donde $\delta_{j,y}(x) \in \{-1,0,1\}^n$. Dado que $b_y(x) = b_{y-x}(0)$, $S(x) = x + S(0)$ y $\tau_j^x(y) = \tau_j^0(y-x) + x$, podemos reducirnos al caso $x = 0$. Como vimos anteriormente, dado $y \in S(0)$ podemos escribir los coeficientes $b_y(0)$ explícitamente a partir de la definición de $B(0)$,

$$b_y(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists j \in \{1,\dots,n\} \ / \ y_j \equiv \xi_j k \ (m) \text{ y } y_l \not\equiv -\xi_l k \ (m) \ \forall l \neq j \\ -1 & \text{si } \exists j \in \{1,\dots,n\} \ / \ y_j \equiv -\xi_j k \ (m) \text{ y } y_l \not\equiv \xi_l k \ (m) \ \forall l \neq j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}.$$

Definamos una función auxiliar $\theta : S(0) \to S(0)$ coordenada a coordenada de manera tal que dado $j \in \{1,\dots,n\}$,

$$\theta(y)_j := \begin{cases} -y_j & \text{si } y_j = \pm k \\ y_j & \text{si no} \end{cases}.$$

A partir de θ definimos para $l \in \{0,\dots,n\}$ la función θ_l para que tome los valores de θ en las primeras l coordenadas y que valga la identidad en las otras. Explícitamente, tenemos que

$$\theta_l(y)_j := \begin{cases} \theta(y)_j & \text{si } j \leq l \\ y_j & \text{si no} \end{cases}.$$

Notemos que con esta definición $\theta_0 = \mathrm{id}$, $\theta_n = \theta$ y $\theta_l = \tau_l^0 \theta_{l-1}$. Además, observemos que $b_y(0) = -b_{\theta(y)}(0)$ por lo que se satisface la igualdad

$$\sum_{y \in S(0)} b_y(0) f(y) = \frac{1}{2} \sum_{y \in S(0)} b_y(0) f(y) - \frac{1}{2} \sum_{y \in S(0)} b_{\theta(y)}(0) f(y).$$

Dado que $\theta^2 = \mathrm{id}$, nos queda

$$\begin{aligned}
\sum_{y\in S(0)} b_y(0)f(y) =& \frac{1}{2}\sum_{y\in S(0)} b_y(0)f(y) - \frac{1}{2}\sum_{y\in S(0)} b_y(0)f\circ\theta(y) \\
=& \frac{1}{2}\sum_{y\in S(0)} b_y(0)\left(f(y) - f\circ\theta(y)\right) \\
=& \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{y\in S(0)} b_y(0)\left(f\circ\theta_{l-1}(y) - f\circ\theta_l(y)\right) \\
=& \sum_{l=1}^{n}\sum_{y\in S(0)} \frac{b_y(0)}{2}\big(f\circ\theta_{l-1}(y) - f\circ\tau_l^0(\theta_{l-1}(y))\big),
\end{aligned}$$

y usando que $\theta_{l-1}^2 = \mathrm{id}$, resulta

$$\begin{aligned}
=& \sum_{l=1}^{n}\sum_{y\in S(0)} \frac{b_{\theta_{l-1}(y)}(0)}{2}\big(f(y) - f\circ\tau_l^0(y)\big) \\
=& \sum_{l=1}^{n}\sum_{y\in \mathbb{Z}_m^n} \frac{\chi_{S(0)}(y)b_{\theta_{l-1}(y)}(0)}{2}\big(f(y) - f\circ\tau_l^0(y)\big).
\end{aligned}$$

Tomando $\delta_{l,y}(0) := \chi_{S(0)}(y)b_{\theta_{l-1}(y)}(0)$, habremos probado la igualdad (5.16).

Hasta aquí hemos expresado las dos sumas cuyas normas necesitamos acotar de la forma,

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{y\in \mathbb{Z}_m^n} \eta_{j,y}(x)\big(f(y) - f\circ\tau_j^x(y)\big),$$

con $|\eta_{j,y}(x)| \leq 1$. Para concluir la demostración del lema bastará con probar la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x \left\| \frac{1}{k(k+1)^{n-1}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{y\in \mathbb{Z}_m^n} \eta_{j,y}(x)\big(f(y) - f\circ\tau_j^x(y)\big)\right\|^p& \\
\leq \frac{8^p n^{2p-1}}{2k^p}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}_x\left\|f(x+e_j) - f(x)\right\|^p,& \quad (5.17)
\end{aligned}$$

para cualquier elección de constantes $\eta_{j,y}(x)$ tales que $|\eta_{j,y}(x)| \leq 1$.

Comencemos notando $N(x)$ a la cantidad de sumandos no nulos de

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{y\in \mathbb{Z}_m^n} \eta_{j,y}(x)\big(f(y) - f\circ\tau_j^x(y)\big).$$

Buscamos acotar el valor de $N(x)$. Para ello, recordemos que $\tau_j^x(y) = y$ para todo $y \notin S(x)$. Dentro de $S(x)$ podemos definir una partición $\left\{S^l(x)\right\}_{l\in\{2,\ldots,n\}}$ como,

$$S^l(x) := \{y \in S(x) : \ |\{j : \ |y_j - x_j| \equiv k \ (m)\}| = l\} .$$

Notemos que $\left|S^l(x)\right| = \binom{n}{l} 2^l (k-1)^{n-l}$ y que para cada $y \in S^l(x)$ existen a lo sumo l posibles valores de j de manera tal que $\tau_j^x(y) \neq y$. Luego, podemos deducir que

$$\begin{aligned} N(x) \leq & \sum_{l=2}^{n} \left|S^l(x)\right| l = \sum_{l=2}^{n} \binom{n}{l} 2^l (k-1)^{n-l} l \\ =& 2n \sum_{l=2}^{n} \binom{n-1}{l-1} 2^{l-1} (k-1)^{n-l} = 2n \sum_{l=1}^{n-1} \binom{n-1}{l} 2^l (k-1)^{n-1-l} \\ =& 2n \left((k+1)^{n-1} - (k-1)^{n-1}\right) . \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de valor medio de Lagrange para la función x^{n-1}, obtenemos

$$N(x) \leq 2n(n-1)(k+1)^{n-2} 2 \leq \frac{4n^2}{k^2} k(k+1)^{n-1}. \tag{5.18}$$

Acotemos, entonces, el término izquierdo de la desigualdad (5.17):

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_x \left\| \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \ \sum_{j=1}^{n} \sum_{y\in\mathbb{Z}_m^n} \eta_{j,y}(x) \left(f(y) - f \circ \tau_j^x(y)\right) \right\|^p \\ &\qquad = \mathbb{E}_x \left[\left(\frac{N(x)}{k(k+1)^{n-1}} \right)^p \left\| \frac{1}{N(x)} \sum_{j=1}^{n} \sum_{y\in\mathbb{Z}_m^n} \eta_{j,y}(x) \left(f(y) - f \circ \tau_j^x(y)\right) \right\|^p \right] , \end{aligned}$$

y por convexidad de la función $\|\cdot\|^p$, resulta

$$\leq \left(\frac{N(x)}{k(k+1)^{n-1}} \right)^{p-1} \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{y\in\mathbb{Z}_m^n} \mathbb{E}_x \left\|f(y) - f \circ \tau_j^x(y)\right\|^p .$$

Luego, acotando $N(x)$ según la desigualdad (5.18) nos queda:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_x \left\| \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \ \sum_{j=1}^{n} \sum_{y\in\mathbb{Z}_m^n} \eta_{j,y}(x) \left(f(y) - f \circ \tau_j^x(y)\right) \right\|^p \\ &\qquad \leq \left(\frac{4n^2}{k^2} \right)^{p-1} \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{y\in\mathbb{Z}_m^n} \mathbb{E}_x \left\|f(y) - f \circ \tau_j^x(y)\right\|^p , \end{aligned}$$

aplicando, a continuación, el cambio $z = y - x$ y usando la igualdad (5.15) obtenemos

$$\leq \left(\frac{4n^2}{k^2}\right)^{p-1} \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{z \in \mathbb{Z}_m^n} \mathbb{E}_x \left\| f(z+x) - f(\tau_j^0(z)+x) \right\|^p . \tag{5.19}$$

Para cada $1 \leq j \leq n$, consideremos el conjunto E_j definido como:

$$\begin{aligned} E_j &:= \left\{ z \in \mathbb{Z}_m^n \quad / \quad \tau_j^0(z) = z - 2ke_j \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{Z}_m^n \quad / \quad \tau_j^0(z) \neq z \right\} . \end{aligned}$$

Realizando una cuenta análoga a la acotación de la magnitud $N(x)$, podemos estimar el cardinal de E_j:

$$\begin{aligned} |E_j| &\leq \sum_{l=1}^{n-1} \binom{n-1}{l} 2^l (k-1)^{n-1-l} \\ &= \left((k+1)^{n-1} - (k-1)^{n-1}\right) \leq \frac{2n}{k}(k+1)^{n-1}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Como $\tau_j^0(z) = z$ fuera de E_j, podemos deducir:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} \sum_{z \in \mathbb{Z}_m^n} \mathbb{E}_x \left\| f(z+x) - f(\tau_j^0(z)+x) \right\|^p \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{z \in E_j} \mathbb{E}_x \left\| f(z+x) - f(z+x-2ke_j) \right\|^p \\ &= \sum_{j=1}^{n} |E_j| \, \mathbb{E}_w \left\| f(w) - f(w-2ke_j) \right\|^p . \end{aligned}$$

Luego, aplicando la cota (5.20), podemos acotar lo anterior por

$$\begin{aligned} &\frac{2n}{k}(k+1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_w \left\| f(w) - f(w-2ke_j) \right\|^p \\ \leq &\frac{2n}{k}(k+1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_w \left[\left(\sum_{t=1}^{2k} \| f(w-(t-1)e_j) - f(w-te_j) \| \right)^p \right] \\ \leq &\frac{2n}{k}(k+1)^{n-1} (2k)^{p-1} \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{2k} \mathbb{E}_w \left\| f(w-(t-1)e_j) - f(w-te_j) \right\|^p \\ \leq &2^{p+1} n k^{p-1} (k+1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_z \left\| f(z+e_j) - f(z) \right\|^p . \end{aligned} \tag{5.21}$$

Combinando las desigualdades (5.19) y (5.21) obtenemos la desigualdad (5.17) que buscábamos probar. Por lo tanto, podemos acotar

$$\mathbb{E}_x \left\| \sum_{y\in S(x)} a_y(x) f(y) \right\|^p \quad \text{y} \quad \mathbb{E}_x \left\| \sum_{y\in S(x)} b_y(x) f(y) \right\|^p,$$

por

$$\frac{8^p n^{2p-1}}{2k^p} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left\| f(x+e_j) - f(x) \right\|^p,$$

ya que habíamos reformulado las expresiones

$$\sum_{y\in S(x)} a_y(x) f(y) \quad \text{y} \quad \sum_{y\in S(x)} b_y(x) f(y),$$

como

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{y\in \mathbb{Z}_m^n} \eta_{j,y}(x) \left(f(y) - f\circ \tau_j^x(y) \right),$$

con una elección adecuada de las constantes $\eta_{j,y}(x)$.

Hemos llegado a la cota deseada para los dos últimos términos pendientes de la desigualdad (5.13). Luego, el lema queda demostrado al aplicar esto y la cota (5.14) a la desigualdad (5.13). □

5.4. Resultados previos al Teorema 3.22

Demostración de la Proposición 3.21. La primera afirmación se deduce inmediatamente de que $n^{1/q'} \leq n^{1/q}$. Para la segunda afirmación, sean $n \in \mathbb{N}$, $m \in 2\mathbb{N}$ y $f : \mathbb{Z}_m^n \to E$ una función arbitraria. Luego,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left[d\left(f(x+\frac{m}{2}e_j), f(x) \right)^2 \right] \\
&\quad \leq \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left[\frac{m}{2} \sum_{l=1}^{m/2} d\left(f(x+le_j), f(x+(l-1)e_j) \right)^2 \right] \\
&\quad \leq \left(\frac{m}{2}\right)^2 \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_x \left[d\left(f(x+e_j), f(x) \right)^2 \right] \\
&\quad \leq \frac{3}{2} m^2 n \mathbb{E}_{x,\epsilon} \left[d\left(f(x+\epsilon), f(x) \right)^2 \right],
\end{aligned}$$

donde en el último paso aplicamos el Lema 5.1 para $p = 2$. $\square$

Demostración del Lema 3.25. Sea $m \in 2\mathbb{N}$ y $f : \mathbb{Z}_m^{nk} \to E$ una función arbitraria, queremos ver que

$$\sum_{l=1}^{nk} \mathbb{E}_x \left[d\left(f(x + ste_l), f(x)\right)^2 \right] \leq \mathcal{B}(E; n, s)^2 \mathcal{B}(E; k, t)^2 s^2 t^2 nk \mathbb{E}_{x,\xi} \left[d\left(f(x + \xi), f(x)\right)^2 \right]. \tag{5.22}$$

Debemos adecuar el lado izquierdo de la desigualdad para poder utilizar las cotas brindadas por la definición de $\mathcal{B}(E; n, s)$ y $\mathcal{B}(E; k, t)$. Para ello, será útil pensar el espacio $\mathbb{Z}_m^{nk}$ subdividido como el producto de k espacios $\mathbb{Z}_m^n$. Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, llamaremos φ_j a la inclusión de $\mathbb{Z}_m^n$ en el j-ésimo $\mathbb{Z}_m^n$ de $\mathbb{Z}_m^{nk}$. Notando $\{a_i\}_{i=1}^n$ a la base canónica de $\mathbb{Z}_m^n$, se tiene que $\varphi_j(a_i) = e_{(j-1)n+i}$. Más en general, dado $c \in \mathbb{Z}_m^n$ podemos escribir φ_j explícitamente como:

$$\varphi_j(c) = \sum_{i=1}^n c_i e_{(j-1)n+i}.$$

Desde esta perspectiva, el lado izquierdo de la desigualdad (5.22) resulta:

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{nk} \mathbb{E}_x \left[d\left(f(x + ste_l), f(x)\right)^2 \right] &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_x \left[d\left(f(x + ste_{(j-1)n+i}), f(x)\right)^2 \right] \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_x \left[d\left(f(x + t\varphi_j(sa_i)), f(x)\right)^2 \right]. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, definamos $F_j : \mathbb{Z}_m^{nk} \times \mathbb{Z}_m^n \to E$ como:

$$F_j(x, y) \coloneqq f\left(x + t\varphi_j(y)\right).$$

Dado $y \in \mathbb{Z}_m^n$, por la invariancia al trasladar x dentro de la esperanza, podemos deducir:

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{nk} \mathbb{E}_x \left[d\left(f(x + ste_l), f(x)\right)^2 \right] &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_x \left[d\left(f(x + t\varphi_j(y + sa_i)), f(x + t\varphi_j(y))\right)^2 \right] \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_x \left[d\left(F_j(x, y + sa_i), F_j(x, y)\right)^2 \right].\end{aligned}$$

Luego, promediando sobre los y, obtenemos:

$$\sum_{l=1}^{nk} \mathbb{E}_x \left[d\left(f(x+ste_l), f(x)\right)^2 \right] = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}_x \left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_y \left[d\left(F_j(x, y+sa_i), F_j(x,y)\right)\right)^2 \right] \right].$$

Aplicando, a continuación, la definición de $\mathcal{B}(E; n, s)$ a la función $F_j(x, y)$ pensada como función de y, nos queda:

$$\sum_{l=1}^{nk} \mathbb{E}_x \left[d\left(f(x+ste_l), f(x)\right)^2 \right]$$
$$\leq \mathcal{B}(E; n, s)^2 s^2 n \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}_x \left[\mathbb{E}_{y,\xi} \left[d\left(F_j(x, y+p_j(\xi)), F_j(x,y)\right)^2 \right] \right],$$

donde ξ es una variable aleatoria en $\{-1,1\}^{nk}$ y p_j es la proyección de $\{-1,1\}^{nk}$ en el j-ésimo $\{-1,1\}^n$. De aquí resulta:

$$\sum_{l=1}^{nk} \mathbb{E}_x \left[d\left(f(x+ste_l), f(x)\right)^2 \right]$$
$$\leq \mathcal{B}(E; n, s)^2 s^2 n \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}_{x,y,\xi} \left[d\left(f(x+t\varphi_j(y)+t\varphi_j \circ p_j(\xi)), f(x+t\varphi_j(y))\right)\right)^2 \right]$$
$$= \mathcal{B}(E; n, s)^2 s^2 n \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}_{x,\xi} \left[d\left(f(x+t\varphi_j \circ p_j(\xi)), f(x)\right)^2 \right]. \tag{5.24}$$

Para finalizar la demostración, bastará repetir el razonamiento para $\mathcal{B}(E; k, t)$. Recordemos que la definición de F_j surgió de la expresión $f(x+t\varphi_j(sa_i))$ de la desigualdad (5.23) reemplazando sa_i por y. Buscaremos hacer lo mismo con la expresión $f(x+t\varphi_j \circ p_j(\xi))$. Notemos $\{b_j\}_{j=1}^{n}$ a la base canónica de $\mathbb{Z}_m^k$. Luego, para cada $\xi \in \{-1,1\}^{nk}$, definimos $\psi_\xi : \mathbb{Z}_m^n \to \mathbb{Z}_m^{nk}$ en la base canónica como $\psi_\xi(b_j) = \varphi_j \circ p_j(\xi)$ y extendemos por linealidad. Concretamente, dado $d \in \mathbb{Z}_m^n$ podemos escribir ψ_ξ explícitamente como:

$$\psi_\xi(d) = \sum_{j=1}^{k} d_j \varphi_j \circ p_j(\xi) = \sum_{j=1}^{k} d_j \left(\sum_{i=1}^{n} (p_j(\xi))_i e_{(j-1)n+i} \right) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} d_j \xi_{(j-1)n+i} e_{(j-1)n+i}.$$

De esta manera, resulta que $f(x+t\varphi_j \circ p_j(\xi)) = f(x+\psi_\xi(tb_j))$. Por lo tanto, para cada $\xi \in \{-1,1\}^n$, definimos $G_\xi : \mathbb{Z}_m^{nk} \times \mathbb{Z}_m^k \to E$ como:

$$G_\xi(x,z) := f\left(x+\psi_\xi(z)\right).$$

Repitiendo argumentos anteriores, deducimos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}_{x,\xi}\left[d\left(f(x+t\varphi_j\circ p_j(\xi)), f(x)\right)^2\right]\\
&\qquad =\sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}_{x,\xi,z}\left[d\left(G_\xi(x,z+tb_i), G_\xi(x,z)\right)^2\right]\\
&\qquad =\mathbb{E}_{x,\xi}\sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}_{z}\left[d\left(G_\xi(x,z+tb_i), G_\xi(x,z)\right)^2\right]
\end{aligned}$$

Aplicando, a continuación, la definición de $\mathcal{B}(E;k,t)$ a la función $G_\xi(x,z)$ pensada como función de z, nos queda:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}_{x,\xi}\left[d\left(f(x+t\varphi_j\circ p_j(\xi)), f(x)\right)^2\right]\\
&\qquad \le\mathcal{B}(E;k,t)^2t^2k\mathbb{E}_{x,z,\xi,\zeta}\left[d\left(G_\xi(x,z+\zeta), G_\xi(x,z)\right)^2\right],
\end{aligned}$$

con $\zeta\in\{-1,1\}^k$. Luego,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}_{x,\xi}\left[d\left(f(x+t\varphi_j\circ p_j(\xi)), f(x)\right)^2\right]\\
&\qquad \le\mathcal{B}(E;k,t)^2t^2k\mathbb{E}_{x,z,\xi,\zeta}\left[d\left(f\left(x+\psi_\xi(z+\zeta)\right), f\left(x+\psi_\xi(z)\right)\right)^2\right]\\
&\qquad =\mathcal{B}(E;k,t)^2t^2k\mathbb{E}_{x,\xi,\zeta}\left[d\left(f\left(x+\psi_\xi(\zeta)\right), f(x)\right)^2\right]\\
&\qquad =\mathcal{B}(E;k,t)^2t^2k\mathbb{E}_{x,\xi,\zeta}\left[d\left(f\left(x+\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\zeta_j\xi_{(j-1)n+i}e_{(j-1)n+i}\right), f(x)\right)^2\right]\\
&\qquad =\mathcal{B}(E;k,t)^2t^2k\mathbb{E}_{x,\xi}\left[d\left(f\left(x+\xi\right), f(x)\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Usando la cota anterior en la desigualdad (5.24) obtenemos la desigualdad (5.22), concluyendo la demostración del lema. □

Demostración de la Proposición 3.26. Tomemos $q<\infty$ tal que $\mathcal{B}(E;n_0,s_0)<n_0^{-1/q}$. Iterando el Lema 3.25, resulta que $\mathcal{B}(E;n_0^k,s_0^k)\le n_0^{-k/q}$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Tomemos $n=n_0^k$ y $m=2s_0^k$ para cierto $k\in\mathbb{N}$. Dado $1\le l\le n$ sea $f:\mathbb{Z}_m^l\to E$ una función arbitraria. Definamos una función $g:\mathbb{Z}_m^n=\mathbb{Z}_m^l\times\mathbb{Z}_m^{n-l}\to E$ por $g(x,y):=f(x)$. Luego,

dado que $\mathcal{B}(E;n,m/2) \leq n^{-1/q}$, tenemos:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_{(x,y)} \left[d\left(g\left((x,y) + \frac{m}{2} e_j \right), g(x,y) \right)^2 \right] \\ \leq \left(\frac{m}{2}\right)^2 n^{1-2/q} \mathbb{E}_{(x,y),(\xi,\zeta)} \left[d\left(g\left((x,y) + (\xi,\zeta) \right), g(x,y) \right)^2 \right],$$

donde $(\xi,\zeta) \in \{-1,1\}^l \times \{-1,1\}^{n-l} = \{-1,1\}^n$. Equivalentemente,

$$\sum_{j=1}^{l} \mathbb{E}_x \left[d\left(f\left(x + \frac{m}{2} e_j \right), f(x) \right)^2 \right] \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 m^2 n^{1-2/q} \mathbb{E}_{x,\xi} \left[d\left(f(x+\xi), f(x) \right)^2 \right].$$

Luego, por el Lema 3.16 para $p = 2$, resulta que $\Gamma_q^{(2)}(E;n,m) \leq \frac{5}{2} \leq 3$.

Si, a continuación, tomamos un $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, existirá un $k \in \mathbb{N}$ minimal tal que $n \leq n_0^k$. Por lo tanto, por la Proposición 3.10, deducimos:

$$\Gamma_q^{(2)}(E;n,2s_0^k) \leq \left(\frac{n_0^k}{n}\right)^{1/2-1/q} \Gamma_q^{(2)}(E;n_0^k,2s_0^k) \leq 3n_0^{1/2-1/q} \leq 3n_0.$$

En consecuencia, se tiene que

$$m_q^{(2)}(E;n,3n_0) \leq 2s_0^k = 2s_0 s_0^{k-1} = 2s_0 \left(n_0^{k-1}\right)^{\log_{n_0} s_0} \leq 2s_0 n^{\log_{n_0} s_0},$$

que es lo que queríamos demostrar. □

5.5. Resultados previos a los Teoremas 4.1 y 4.6

Demostración del Lema 4.3. Dado $N \in \mathbb{N}$, tomemos $n \in \mathbb{N}$ máximo tal que $(cn)^n \leq N$. Además, sea m igual a la parte entera de cn. Luego, para todo $F \in \mathcal{F}$, se tiene que

$$m_q^{(2)}(F;n,\Gamma) \leq m \leq cn < \infty.$$

Por el Lema 3.29, deducimos que

$$C_F(\mathbb{Z}_m^n) \geq \frac{n^{1/q}}{2\Gamma},$$

(Esto sucederá siempre y cuando $m^n \leq |F|$.) Ahora bien, como $\mathbb{Z}_m^n$ es un espacio de a lo sumo N puntos, obtenemos:

$$D_N(\mathcal{F}) \geq \frac{n^{1/q}}{2\Gamma}. \tag{5.25}$$

Dado $0 < \alpha < 1/q$, como $N \leq (c(n+1))^{n+1}$, resulta que

$$(\log N)^\alpha \leq ((n+1)\log(c(n+1)))^\alpha \leq n^{1/q}, \tag{5.26}$$

si N, y por lo tanto n, es lo suficientemente grande. Combinando las desigualdades (5.25) y (5.26), el lema se sigue. □

Demostración del Lema 4.4. Sea $s \geq \beta$. Reescalando la métrica d en E de ser necesario (lo cual no cambia el valor de β), podemos asumir que $\operatorname{diam}(E) = s$. Numeremos los elementos de E de manera tal que $E = (x_k)_{k=1}^n$. Análogamente a lo realizado en la Observación 3.28, definimos una función $\psi : (E, d) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ por

$$\psi(x) := \left(d\left(x, x_k\right)\right)_{k=1}^n.$$

Dados $x, y \in E$, para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que

$$\left|d\left(x, x_k\right) - d\left(y, x_k\right)\right| \leq d(x, y)$$

con lo cual,

$$\|\psi(x) - \psi(y)\|_\infty \leq d(x, y).$$

Luego, observando la coordenada k-ésima con k tal que $y = x_k$, se deduce que la desigualdad anterior es en realidad una igualdad, pues en esa coordenada se alcanza la cota superior de la norma infinito. Por lo tanto, ψ resulta una inclusión isométrica.

Notemos que, como $\operatorname{diam}(E) = s$, la imagen de ψ está incluida en $[0, s]^n$. Podemos, entonces, asignarle a cada vector de la imagen el elemento de $[s]^n$ más cercano (si hay más de una opción elegimos cualquiera de ellas). Esto induce una función $\phi : E \to [s]^n$, donde primero aplicamos ψ y luego distorsionamos levemente la imagen para que quede contenida en $[s]^n$. Basta ver que ϕ es inyectiva y tiene distorsión menor que $1 + 4\varepsilon$. En primer lugar, observemos que

$$s \geq \beta \geq \frac{\operatorname{diam}(E)}{\varepsilon \operatorname{mín}_{x \neq y} d(x, y)} = \frac{s}{\varepsilon \operatorname{mín}_{x \neq y} d(x, y)}.$$

Luego,

$$\min_{x \neq y} d(x,y) \geq \frac{1}{\varepsilon} \geq 2.$$

Al aplicar ϕ, cada elemento de la imagen de ψ no es modificado en más que $1/2$ en cada coordenada. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\min_{x\neq y} \|\phi(x)-\phi(y)\|_\infty &\geq \min_{x\neq y} \|\psi(x)-\psi(y)\|_\infty - 1/2 - 1/2 = \min_{x\neq y} d(x,y) - 1 \\ &\geq \frac{1}{\varepsilon} - 1 \geq 1.\end{aligned}$$

Esto prueba la inyectividad de ϕ. A continuación, estimemos $\|\phi\|_{Lip}$ y $\|\phi^{-1}\|_{Lip}$. Dados $x, y \in E$, aplicando desigualdad triangular, tenemos que

$$\begin{aligned}\|\phi(x)-\phi(y)\|_\infty &\leq \|\phi(x)-\psi(x)\|_\infty + \|\psi(x)-\psi(y)\|_\infty + \|\psi(y)-\phi(y)\|_\infty \\ &\leq d(x,y) + 1 \leq \left(1 + \frac{1}{\min_{x\neq y} d(x,y)}\right) d(x,y) \\ &\leq (1+\varepsilon)\, d(x,y),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}d(x,y) = \|\psi(x)-\psi(y)\|_\infty &\leq \|\phi(x)-\phi(y)\|_\infty + 1 \\ &= \left(\frac{1}{\min_{x\neq y}\|\phi(x)-\phi(y)\|_\infty} + 1\right) \|\phi(x)-\phi(y)\|_\infty \\ &\leq \left(\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} - 1} + 1\right) \|\phi(x)-\phi(y)\|_\infty \\ &= \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right) \|\phi(x)-\phi(y)\|_\infty .\end{aligned}$$

Concluimos, entonces, que

$$\|\phi\|_{Lip} \leq 1+\varepsilon \quad \text{y} \quad \left\|\phi^{-1}\right\|_{Lip} \leq \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Luego,

$$\operatorname{dist}(f) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 1 + \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq 1 + 4\varepsilon,$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Demostración del Lema 4.7. Basta ver que la asignación $\psi : \mathbb{Z}_{6k} \to [3k]^3$ definida por

$$\psi(x) := (\partial(x,0), \partial(x,2k), \partial(x,4k)),$$

es de distorsión menor o igual que tres. En primer lugar, veamos que $\|\psi\|_{Lip} \leq 1$. Dados $x, y \in \mathbb{Z}_{6k}$ y $j \in \{0,1,2\}$, tenemos que

$$|\partial(x,2kj) - \partial(y,2kj)| \leq \partial(x,y)$$

con lo cual,

$$\|\psi(x) - \psi(y)\|_\infty \leq \partial(x,y).$$

En segundo lugar, veamos que dados $x, y \in \mathbb{Z}_{6k}$, se cumple la desigualdad

$$\partial(x,y) \leq 3\,\|\psi(x) - \psi(y)\|_\infty,$$

probando así que $\|\psi^{-1}\|_{Lip} \leq 3$, y por lo tanto, el lema. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$0 \leq x \leq 2k-1 \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq 4k-1.$$

Si $y \leq 3k$, entonces tendremos que

$$\partial(x,y) = y - x = |\partial(x,0) - \partial(y,0)| \leq 3\,\|\psi(x) - \psi(y)\|_\infty,$$

como buscábamos probar. Por el contrario, asumamos que $y > 3k$. A continuación, separemos una vez más en casos suponiendo que $x \geq k$. Luego,

$$\partial(x,y) = y - x = |\partial(x,4k) - \partial(y,4k)| \leq 3\,\|\psi(x) - \psi(y)\|_\infty,$$

como queríamos. Finalmente, supongamos que $x < k$. Observemos que

$$\partial(x,y) = \text{mín}(y - x, 6k - (y - x)) \leq 3k.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\|\psi(x) - \psi(y)\|_\infty &\geq |\partial(x,0) - \partial(y,0)| = |x - (6k - y)| \\ &= 6k - y - x \geq 6k - 4k - k = k \\ &= \frac{3k}{3} \geq \frac{\partial(x,y)}{3},\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Bibliografía

[1] M. Ribe. On uniformly homeomorphic normed spaces. *Arkiv för matematik*, 14(1): 237-244, 1976.

[2] S. Heinrich y P. Mankiewicz. Applications of ultrapowers to the uniform and lipschitz classification of Banach spaces. eng. *Studia mathematica*, 73(3): 225-251, 1982.

[3] J. Bourgain. Remarks on the extension of lipschitz maps defined on discrete sets and uniform homeomorphisms. En, *Geometrical aspects of functional analysis*. Springer Berlin Heidelberg, 1987.

[4] A. Naor. An introduction to the ribe program. *Japanese journal of mathematics*, 7(2): 167-233, 2012.

[5] J. Diestel y J. J. Uhl Jr. Integration. En, *Vector measures*. American Mathematical Society, 1977.

[6] F. Albiac y N. J. Kalton. *Topics in Banach space theory*. Springer New York, 2006.

[7] M. I. Ostrovskii. *Metric embeddings*. De Gruyter, 2013.

[8] P. Enflo. On the nonexistence of uniform homeomorphisms between l_p-spaces. *Arkiv för matematik*, 8(2): 103-105, 1970.

[9] J. Bourgain, V. Milman y H. Wolfson. On type of metric spaces. *Transactions of the american mathematical society*, 294(1): 295-317, 1986.

[10] M. Mendel y A. Naor. Scaled enflo type is equivalent to rademacher type. *Bulletin of the london mathematical society*, 39(3): 493-498, 2007.

[11] G. Pisier. Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces. En, *Probability and analysis*. Springer Berlin Heidelberg, 1986.

[12] M. Mendel y A. Naor. Metric cotype. *Annals of mathematics*, 168(1): 247-298, 2008.

[13] M. Ledoux y M. Talagrand. Rademacher averages. En, *Probability in Banach spaces: isoperimetry and processes*. Springer Berlin Heidelberg, 1991.

[14] O. Giladi, M. Mendel y A. Naor. Improved bounds in the metric cotype inequality for Banach spaces. *Journal of functional analysis*, 260(1): 164 -194, 2011.

[15] S. Arora, L. Lovász, I. Newman, Y. Rabani, Y. Rabinovich y S. Vempala. Local versus global properties of metric spaces. En *Proceedings of the 17th acm-siam symposium on discrete algorithms*. ACM Press, 2006, páginas 41-50.

[16] J. Matoušek. Ramsey-like properties for bi-lipschitz mappings of finite metric spaces. eng. *Commentationes mathematicae universitatis carolinae*, 33(3): 451-463, 1992.

[17] N. Linial, E. London e Y. Rabinovich. The geometry of graphs and some of its algorithmic applications. *Combinatorica*, 15(2): 215-245, 1995.