



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

**Modelado de enfermedades infecciosas a través de  
ecuaciones diferenciales ordinarias**

Paula Adaglio

Directora: Constanza Sánchez de la Vega

Fecha de Presentación: Marzo 2016



## **Agradecimientos**

Primero agradecerle a Constanza por la dedicación, la paciencia y la buena predisposición. Fue un placer haberte elegido como directora.

A Ale por apoyarme, alentarme y tenerme paciencia todo este tiempo de carrera y sobre todo en la etapa de la tesis.

A mis papás, hermanos y abuelas por acompañarme a lo largo de toda la carrera.

A mis amigos de la facu, en especial a Caro y Dani por hacer que las cursadas sean más divertidas.

A mis amigos de toda la vida, por estar presentes durante toda la carrera.

Gracias!!



## Índice general

	I
	1
Chapter 1. Introducción	3
1.1. Modelo SEIR sin control	5
1.2. Modelo SEIR con control	10
Chapter 2. Preliminares	13
2.1. Resultados de ecuaciones diferenciales ordinarias	13
2.2. Cono Normal	22
2.3. Principio del máximo de Pontryagin	25
2.4. Principio del máximo con restricciones	30
2.5. Existencia de control y regularidad	38
2.6. Legendre - Clebsch	41
Chapter 3. Modelo SEIR con control	45
3.1. Invarianza de la solución	46
3.2. Existencia de control óptimo para los problemas SEIR	50
3.3. Modelo SEIR con función objetivo lineal sin restricciones mixtas	55
3.4. Modelo SEIR con función objetivo lineal y restricciones	61
3.5. Modelo SEIR con función objetivo cuadrática y restricciones	66
Chapter 4. Resultados Numéricos	73
Chapter 5. Apéndice	77
Bibliography	87



## CHAPTER 1

### Introducción

En la actualidad, los temas relacionados con la salud pública tienen un gran impacto y repercusión en la opinión pública y más, si de lo que se trata es de la propagación de una enfermedad infecciosa entre una amplia población (epidemia). Los efectos de carácter sanitario, económico y social de las epidemias pueden llegar a ser considerables. Es por ello por lo que es de vital importancia tratar de entender y simular la dinámica y la evolución de las mismas. Así, y fundamentalmente a partir del siglo XX, diferentes ramas de la Ciencia (Medicina, Biología, Física, Matemática, Informática, etc.) han unido sus esfuerzos para tratar de desarrollar modelos eficientes que permitieran estudiar con un grado suficiente de realismo la propagación de cualquier tipo de epidemia. El fin último de estos modelos es el de proporcionar herramientas computacionales al gestor para que pueda adoptar las políticas sanitarias (establecimiento de mecanismos eficientes y protocolos sanitarios de seguimiento y control) necesarias en caso de que se produzca una epidemia.

Es, por lo tanto, fundamental diseñar modelos matemáticos y computacionales que permitan estudiar y simular la propagación de epidemias. De ello se encarga la epidemiología Matemática la cual nace a partir del modelo basado en ecuaciones diferenciales ordinarias propuesto por Kermack y McKendrick en 1927. Concretamente en él se propone el primer modelo compartimental llamado SIR, en el que la población se divide en tres grandes grupos: susceptibles (aquellos individuos que pueden contraer la enfermedad), infectados (aquellos individuos que poseen la enfermedad y son capaces de transmitirla) y recuperados (aquellos individuos que se han recuperado de la enfermedad). Es más, establece otros resultados fundamentales en la epidemiología Matemática como es el denominado Teorema Umbral en el que se establece que la propagación de la epidemia se produce cuando el número de

susceptibles supera una cantidad umbral. En los trabajos (basados en los modelos compartimentales) que han ido apareciendo posteriormente en la literatura, se han ido introduciendo otros tipos de población atendiendo a las distintas características a las epidemias. Así nos podemos encontrar con los individuos expuestos (aquellos individuos que se han infectado por la enfermedad pero que aún no son capaces de transmitirla a los susceptibles, es decir están infectados pero no son infecciosos).

Teniendo en cuenta la dinámica de los diferentes tipos de individuos, los modelos compartimentales se suelen dividir en tres grandes tipos: Modelo SIS, Modelo SIR y el Modelo SEIR. En los modelos SIS los individuos susceptibles una vez que se han infectado retornan al estado susceptible después de un determinado período de tiempo (esto es, haber sufrido la enfermedad no le confiere al individuo inmunidad; este es el caso de la tuberculosis, la meningitis, la gonorrea, etc.). En los Modelos SIR, los individuos infectados una vez que dejan de estarlo se vuelven inmunes a la enfermedad y pasan al estado recuperado (como la rubeola, el sarampión, etc.). En algunas enfermedades (como el VIH, la Varicela, entre otras) existe un período de tiempo - período de latencia - durante el cual el individuo infectado no tiene la capacidad de transmitir la enfermedad; durante este período de tiempo se dice que el individuo está expuesto, y a estos modelos se los denomina SEIR. Las siguientes hipótesis son comunes a todos estos modelos; (1) la enfermedad se transmite por contacto directo entre un individuo infectado y uno susceptible; (2) la enfermedad se transmite inmediatamente después de producirse el contacto directo; (3) todos los individuos susceptibles tienen la misma probabilidad de ser infectados.

En este trabajo estudiaremos el modelo SEIR, en el cual, para modelar el progreso de una enfermedad infecciosa en una cierta población, el modelo SEIR divide a los individuos en cuatro compartimentos diferentes relevantes a la enfermedad. Estas son  $S$  Susceptibles,  $E$  Expuestos,  $I$  Infectados y  $R$  Recuperados.



### 1.1. Modelo SEIR sin control

Un individuo en  $S$  es vulnerable (o susceptible) a contraer la enfermedad. Aquellos que ya están infectados pero que todavía no contagian pertenecen al grupo de los expuestos,  $E$ . Los individuos infectados, que pueden contagiar la enfermedad son los que pertenecen al grupo  $I$  y aquellos que son inmunes (o recuperados) pertenecen al grupo  $R$ . Como la inmunidad no es hereditaria, asumimos que todos individuo es susceptible al momento de nacer.

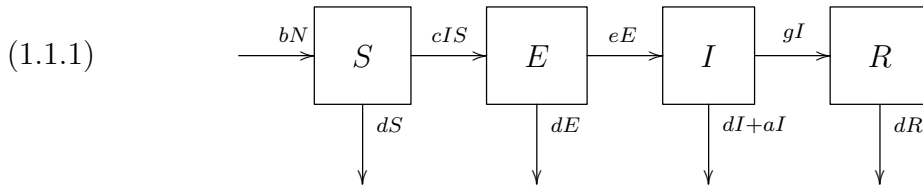
Por otro lado, la enfermedad solo se transmite de manera horizontal, es decir, un individuo susceptible se infecta cuando tiene contacto con un individuo infectado. Este contacto puede ser directo o indirecto. Los individuos infectados pueden morir o recuperarse completamente y los recuperados se consideran inmunes. Para estos cuatro grupos del modelo tomemos,  $S(t), E(t), I(t), R(t)$  como el números de individuos pertenecientes a las clases susceptibles, expuestos, infectados y recuperados a tiempo  $t$  respectivamente. El total de la población a tiempo  $t$  la representaremos por  $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ . Para describir la transmisión de enfermedades en una población definimos,

- $S(t)$  = número de individuos pertenecientes a la clase de susceptibles a tiempo  $t$ ,
- $E(t)$  = número de individuos pertenecientes a la clase de expuestos a tiempo  $t$ ,
- $I(t)$  = número de individuos pertenecientes a la clase de infectados a tiempo  $t$ ,
- $R(t)$  = número de individuos pertenecientes a la clase de recuperados a tiempo  $t$ ,
- $e$  = tasa a la que los individuos expuestos pasan a ser infectados,
- $g$  = tasa a la que los individuos infectados pasan a ser recuperados,
- $a$  = tasa de mortalidad por la enfermedad,
- $b$  = tasa de natalidad,

- $d$  = tasa de mortalidad natural,
- $c$  = coeficiente de incidencia de transmisión horizontal.

Tomaremos los parámetros como constantes durante todo el intervalo de tiempo observado. La tasa de transmisión se describe como el número de veces que tienen contacto un individuo infectado y uno susceptible, se describe como  $cS(t)I(t)$ .

El siguiente diagrama muestra la transmisión de una enfermedad entre individuos con un modelo SEIR sin control:



El sistema de ecuaciones diferenciales que lo representa es:

$$\dot{S}(t) = bN(t) - dS(t) - cS(t)I(t)$$

$$\dot{E}(t) = cS(t)I(t) - (e + d)E(t)$$

$$\dot{I}(t) = eE(t) - (g + a + d)I(t)$$

$$\dot{R}(t) = gI(t) - dR(t)$$

Para definir la variable  $\dot{N}(t)$ , usaremos la relación que hay entre las variables

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$$

definida anteriormente. Derivando obtenemos,

$$\dot{N}(t) = \dot{S}(t) + \dot{E}(t) + \dot{I}(t) + \dot{R}(t)$$

Reemplazando cada una de las variables resulta

$$\begin{aligned}
 \dot{N}(t) &= bN(t) - dS(t) - cS(t)I(t) + cS(t)I(t) - eE(t) - dE(t) + \\
 &+ eE(t) - gI(t) - aI(t) - dI(t) + gI(t) - dR(t) \\
 &= bN(t) - dS(t) - dE(t) - aI(t) - dI(t) - dR(t) \\
 &= bN(t) - d(S(t) + E(t) + I(t) + R(t)) - aI(t) \\
 &= bN(t) - dN(t) - aI(t) \\
 &= (b - d)N(t) - aI(t) \\
 \Rightarrow \dot{N}(t) &= (b - d)N(t) - aI(t)
 \end{aligned}$$

Dado que  $R(t)$  aparece solo en la ecuación  $\dot{R}(t) = gI(t) - dR(t)$  y que puede obtenerse de la relación  $R(t) = N(t) - S(t) - E(t) - I(t)$ , podemos quedarnos con el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$(1.1.2) \quad \dot{S}(t) = bN(t) - dS(t) - cS(t)I(t)$$

$$(1.1.3) \quad \dot{E}(t) = cS(t)I(t) - (e + d)E(t)$$

$$(1.1.4) \quad \dot{I}(t) = eE(t) - (g + a + d)I(t)$$

$$(1.1.5) \quad \dot{N}(t) = (b - d)N(t) - aI(t)$$

En [7] se muestra que existe un valor  $R_0$ , llamado el número de reproducción, tal que, si  $R_0 > 1$  la enfermedad no se controla, de hecho se ve con la solución del sistema que la enfermedad se expande hasta producirse una epidemia. En cambio, si  $R_0 < 1$  la enfermedad tiende a desaparecer o mantenerse estable.

Resolvimos el sistema de ecuaciones diferenciales anterior para  $R_0 > 1$  y  $R_0 < 1$  con Matlab para mostrar como se comporta la solución en cada caso.

Para la solución del sistema en el cual la enfermedad no se convierte en epidemia, es decir  $R_0 < 1$ , usamos los parámetros

$$a = 0.2; b = 0.525; c = 0.001; d = 0.5; e = 0.5; g = 0.1.$$

y obtuvimos los siguientes gráficos.

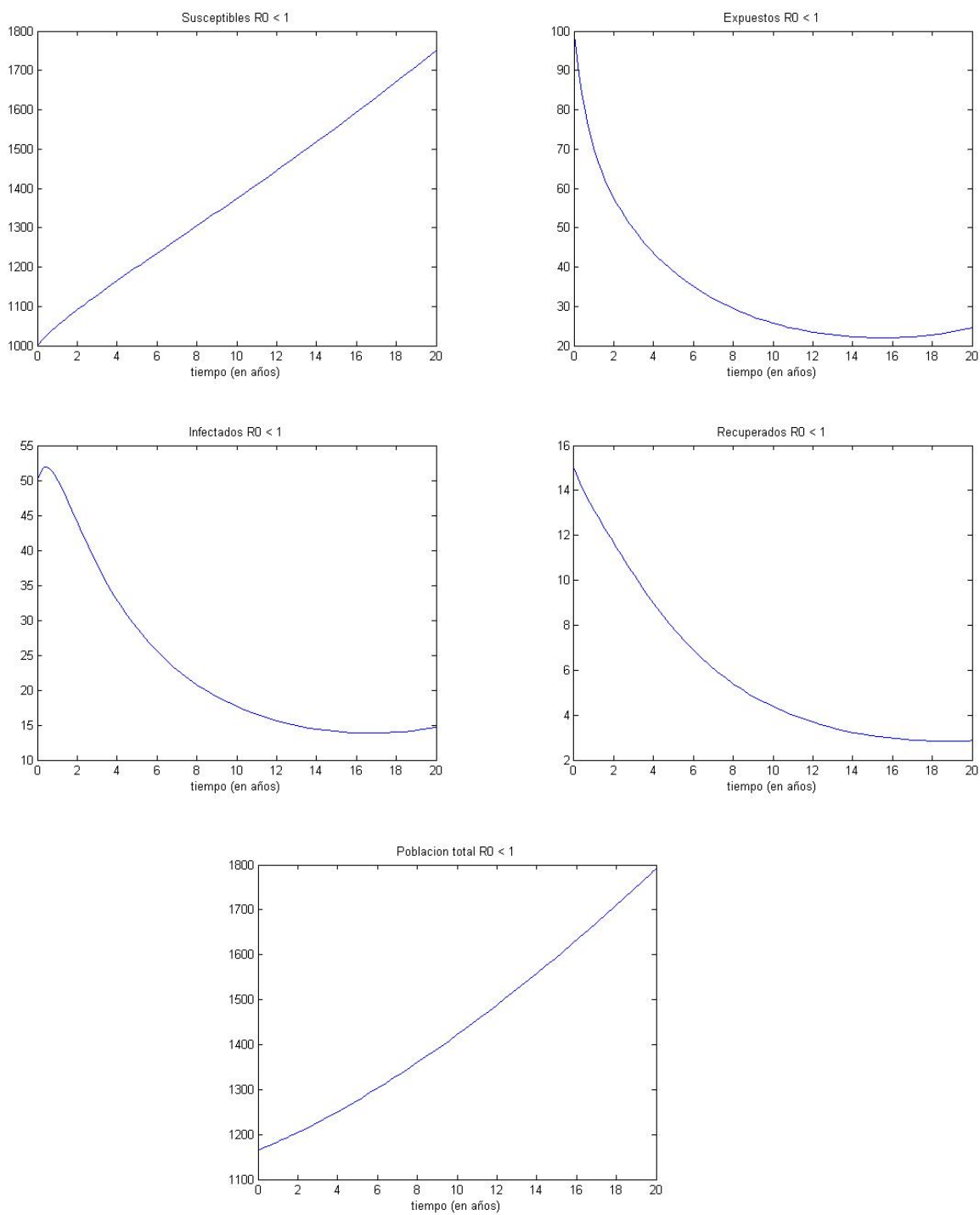
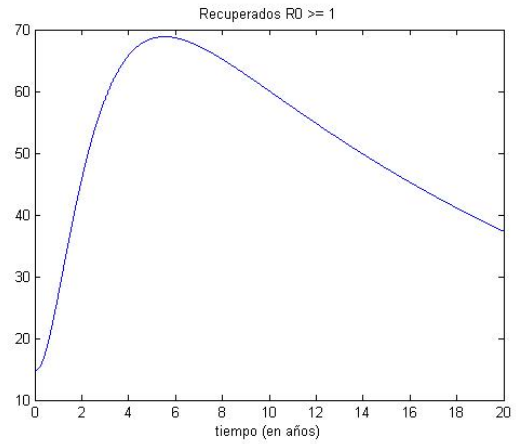
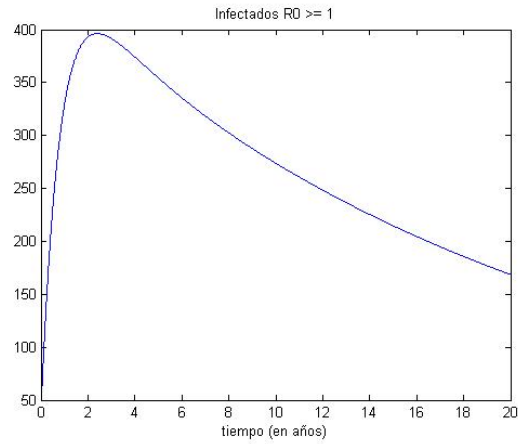
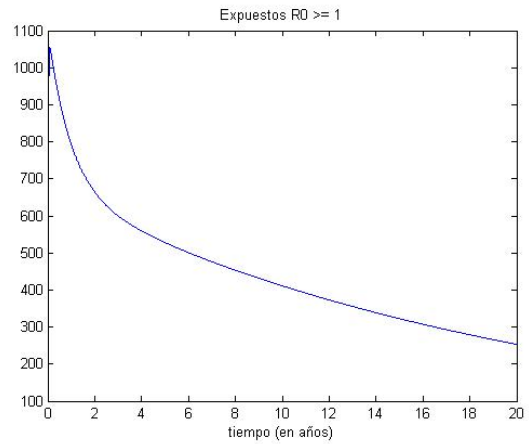
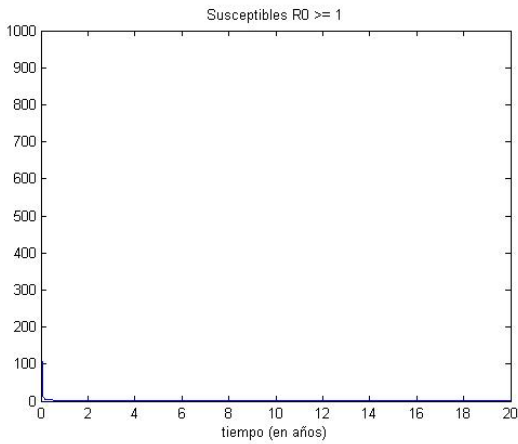


FIGURE 1. Gráficos en el que se muestra el comportamiento de la enfermedad con  $R_0 < 1$ .

Para la solución del sistema en el cual la enfermedad se convierte en epidemia, es decir  $R_0 > 1$ , usamos los parámetros

$a = 0.2$ ;  $b = 0.525$ ;  $c = 0.89$ ;  $d = 0.5$ ;  $e = 0.5$ ;  $g = 0.1$ .

y obtuvimos los siguientes gráficos.



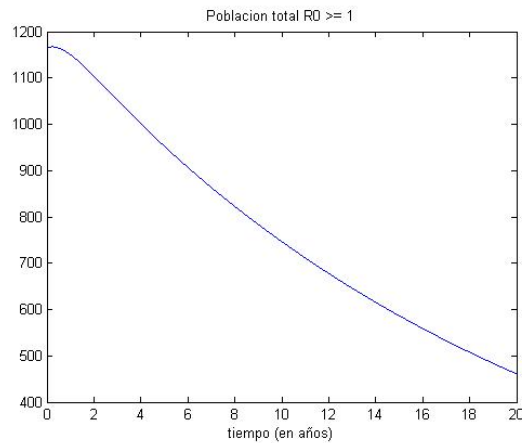


FIGURE 2. Gráficos en el que se muestra el comportamiento de la enfermedad con  $R_0 > 1$ .

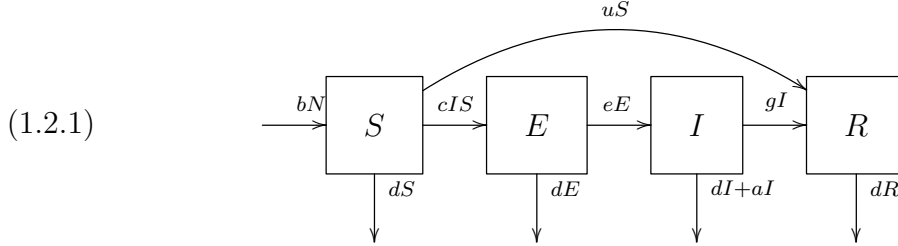
## 1.2. Modelo SEIR con control

En este caso se quiere controlar la expansión de la enfermedad infecciosa con el uso de una vacuna.

Como mencionamos anteriormente, si  $R_0 > 1$  se produce una epidemia, para que esto no suceda se propone controlar la enfermedad a través de la vacunación y eso es lo que estudiaremos a lo largo de este trabajo.

Asumimos que la vacuna es efectiva, por lo tanto, todo individuo susceptible que se vacuna se vuelve inmune. Consideramos las variables y constantes de la sección anterior 1.1 y definimos

$u(t)$  = porcentaje de individuos susceptibles vacunados por unidad de tiempo. El diagrama que simboliza este modelo es el siguiente:



El sistema de ecuaciones diferenciales que lo representa es:

$$\dot{S}(t) = bN(t) - dS(t) - cS(t)I(t) - u(t)S(t)$$

$$\dot{E}(t) = cS(t)I(t) - (e + d)E(t)$$

$$\dot{I}(t) = eE(t) - (g + a + d)I(t)$$

$$\dot{R}(t) = gI(t) - dR(t) + u(t)S(t)$$

Como se definió anteriormente, la relación que hay entre las variables es

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$$

Análogamente se prueba que:

$$\dot{N}(t) = bN(t) - dS(t) - cS(t)I(t) - u(t)S(t) + cS(t)I(t) - eE(t) - dE(t) +$$

$$+ eE(t) - gI(t) - aI(t) - dI(t) + gI(t) - dR(t) + u(t)S(t)$$

$$= bN(t) - dS(t) - dE(t) - aI(t) - dI(t) - dR(t)$$

$$= bN(t) - d(S(t) + E(t) + I(t) + R(t)) - aI(t)$$

$$= bN(t) - dN(t) - aI(t)$$

$$\Rightarrow \dot{N}(t) = (b - d)N(t) - aI(t)$$

Por lo tanto, como antes, nos quedaremos con el siguiente sistema

$$(1.2.2) \quad \dot{S}(t) = bN(t) - dS(t) - cS(t)I(t) - u(t)S(t)$$

$$(1.2.3) \quad \dot{E}(t) = cS(t)I(t) - (e + d)E(t)$$

$$(1.2.4) \quad \dot{I}(t) = eE(t) - (g + a + d)I(t)$$

$$(1.2.5) \quad \dot{N}(t) = (b - d)N(t) - aI(t)$$

Con condiciones iniciales:

$$(1.2.6) \quad S(0) = S_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0, N(0) = N_0$$

Observar que  $u$  actúa como la variable de control de este sistema. Si  $u = 0$ , no se aplicó ninguna vacuna y si  $u = 1$  indica que toda la población susceptible está vacunada.

En esta tesis estudiaremos las políticas de vacunación óptimas en modelos epidemiológicos del tipo SEIR. Analizaremos distintas funciones objetivo y restricciones para el control y el estado.

En el capítulo 2 se presentarán algunos resultados preliminares que se usarán durante la tesis. Se darán algunos resultados de ecuaciones diferenciales ordinarias. También se dará el marco teórico de la teoría de control óptimo y algunos resultados específicos que usaremos más adelante.

En el capítulo 3 analizaremos el problema con control y distintas funciones objetivo. En la sección 1 estudiaremos el problema que presenta una función objetivo lineal sin restricciones para el control, en la sección 2 el problema planteado por Maurer y de Pinho [3], en el cual la función objetivo es lineal y también presenta restricciones mixtas de control-estado. Y por último, en la sección 3 estudiaremos el problema con control, función objetivo cuadrática y restricciones mixtas de control-estado.

En el capítulo 4 mostraremos algunos resultados numéricos de lo estudiado anteriormente modelados en Matlab.



## CHAPTER 2

### Preliminares

#### 2.1. Resultados de ecuaciones diferenciales ordinarias

**Lema de Gronwall Generalizado:** Sean  $\beta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  y  $g, \alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas tal que para todo  $t \in [0, T]$  vale

$$g(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)g(s)ds$$

Entonces, para todo  $t \in [0, T]$  vale

$$g(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(r)dr} ds$$

*Demostración:* Definimos  $G(t) = \int_0^t \beta(s)g(s)ds \forall t \in [a, T] \Rightarrow$  por el teorema fundamental del cálculo  $G'(t) = \beta(t)g(t)$ .

Entonces tenemos  $g(t) \leq \alpha(t) + G(t)$ .

Como  $\beta(t) > 0$  si multiplicamos a ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$\begin{aligned} \underbrace{\beta(t)g(t)}_{G'(t)} &\leq \beta(t)\alpha(t) + \beta(t)G(t) \\ \Rightarrow G'(t) - \beta(t)G(t) &\leq \beta(t)\alpha(t) \end{aligned}$$

Multiplicando a ambos lados por  $e^{-\int_0^t \beta(r)dr}$  nos queda

$$\underbrace{e^{-\int_0^t \beta(r)dr} G'(t) - e^{-\int_0^t \beta(r)dr} \beta(t)G(t)}_{(e^{-\int_0^t \beta(r)dr} G(t))'} \leq e^{-\int_0^t \beta(r)dr} \beta(t)\alpha(t)$$

Integrando entre 0 y  $t$  a ambos lados resulta

$$\int_0^t (e^{-\int_0^s \beta(r)dr} G(s))' ds \leq \int_0^t e^{-\int_0^s \beta(r)dr} \beta(s)\alpha(s)ds$$

y usando que  $G(0) = 0$ , tenemos que

$$e^{-\int_0^t \beta(r)dr} G(t) \leq \int_0^t \beta(s)\alpha(s)e^{-\int_0^s \beta(r)dr} ds$$

$$G(t) \leq \int_0^t \beta(s) \alpha(s) e^{\int_0^t \beta(r) dr} e^{-\int_0^s \beta(r) dr} ds = \int_0^t \beta(s) \alpha(s) e^{\int_s^t \beta(r) dr} ds$$

Como  $g(t) \leq \alpha(t) + G(t)$ , concluimos que

$$g(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s) \alpha(s) e^{\int_s^t \beta(r) dr} ds$$

■

**Observación:** La demostración es la misma en caso que valiera la igualdad.

**Corolario 1:** Sean  $C, K \geq 0$  constantes y sea  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que para todo  $t \in [0, T]$  vale

$$g(t) \leq C + \int_0^t K g(s) ds$$

entonces para todo  $t \in [0, T]$  vale

$$g(t) \leq C e^{Kt}$$

Demostración: Basta usar el lema de Gronwall con  $\alpha(t) = C$  y  $\beta(t) = K$ .

■

**Corolario 2:** Dadas  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $C$  constante y  $K \geq 0$  tal que  $f(t) \leq C + K \int_t^T f(s) ds$ ,  $\Rightarrow f(t) \leq C e^{K(T-t)}$ .

Demostración: Sea  $g(t) = f(T-t)$ ,  $t \in [0, T] \Rightarrow g(T-t) = f(t) \forall t \in [0, T]$ .  $g$  es continua pues  $f$  lo es. Entonces para todo  $t \in [0, T]$  se tiene

$$\underbrace{f(T-t)}_{g(t)} \leq C + K \int_{T-t}^T f(s) ds.$$

Haciendo el cambio de variables

$$r = T - s$$

$$dr = -ds$$

Nos queda

$$g(t) \leq C + K \int_t^0 f(T-r)(-dr) = C + K \int_0^t f(T-r) dr = C + K \int_0^t g(r) dr.$$

Por el corolario de Gronwall anterior, Corolario 1, obtenemos

$$g(t) \leq Ce^{K(t-0)} \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\Rightarrow \underbrace{g(T-t)}_{f(t)} \leq Ce^{K(T-t)} \quad \forall t \in [0, T]$$

Por lo tanto,  $f(t) \leq Ce^{K(T-t)}$ .

■

**Definición:** Una función  $\zeta : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en un intervalo  $I = [a, b]$  se dice absolutamente continua si satisface la siguiente propiedad:

Para cada  $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que para todo  $k$  y para toda sucesión de puntos

$$a \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_k < b_k \leq b$$

tal que  $\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) < \delta$  vale que  $\sum_{i=1}^k |\zeta(b_i) - \zeta(a_i)| < \varepsilon$ . La función  $\zeta$  es absolutamente continua si y solo si existe una función integrable  $h$  tal que

$$(2.1.1) \quad \zeta(t) = \zeta(a) + \int_a^t h(\tau) d\tau \quad \forall t \in I$$

Una función absolutamente continua es diferenciable en casi todo punto y vale  $\dot{\zeta}(t) = h(t)$  para casi todo  $t \in I$ , si  $h$  es como en (2.1.1). Notemos que una función es Lipschitz continua si y solo si es absolutamente continua y tiene derivadas esencialmente acotadas.

**Observación:** Una función  $\zeta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida en un intervalo  $I = [a, b]$  se dice absolutamente continua si es absolutamente continua en cada una de sus componentes.

**Corolario 3 de Gronwall:** Sea  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f$  absolutamente continua con  $f(T) = 0$  y  $\exists K \geq 0 / |f'(t)| \leq K|f(t)|$  para casi todo  $t \in [0, T] \Rightarrow f(t) \equiv 0$ .

Demostración:

$$|f'(t)| \leq K|f(t)|$$

$$-K|f(t)| \leq f'(t) \leq K|f(t)|$$

Integrando:

$$\begin{aligned}
-K \int_t^T |f(s)| ds &\leq \int_t^T f'(s) ds \leq K \int_t^T |f(s)| ds \\
-K \int_t^T |f(s)| ds &\leq f(T) - f(t) \leq K \int_t^T |f(s)| ds \\
-\underbrace{f(T)}_{=0} - K \int_t^T |f(s)| ds &\leq -f(t) \leq -\underbrace{f(T)}_{=0} + K \int_t^T |f(s)| ds \\
-K \int_t^T |f(s)| ds &\leq -f(t) \leq K \int_t^T |f(s)| ds \\
-K \int_t^T |f(s)| ds &\leq f(t) \leq K \int_t^T |f(s)| ds \\
|f(t)| &\leq K \int_t^T |f(s)| ds
\end{aligned}$$

$|f(t)|$  es absolutamente continua a valores reales,  $K \geq 0$  y vale la desigualdad anterior. Por el Corolario 2 con  $C = 0$ , resulta:

$$|f(t)| \leq 0$$

Luego,  $|f(t)| = 0 \Rightarrow f(t) \equiv 0$ . ■

A continuación probaremos existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial ordinaria. Para eso comenzaremos con el siguiente lema.

**Lema 1:** Sean  $f, g : L \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  medibles en  $t$  y continuas en  $x$ , con  $L$  un intervalo de  $\mathbb{R}$ , y sean  $X_0 \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^n$  dos subconjuntos, consideramos

$$\zeta : L \rightarrow X \text{ y } \eta : L \rightarrow X_0$$

continuas. Supongamos que existen dos funciones localmente integrables

$$\alpha, \beta : L \rightarrow \mathbb{R}_+$$

tales que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \alpha(t) \|x - y\|$$

para todo  $x, y \in X$  y todo  $t \in L$ , y

$$\|f(t, x) - g(t, x)\| \leq \beta(t)$$

para todo  $x \in X$  y todo  $t \in L$ . Luego, tomando  $x^0, z^0$  elementos arbitrarios de  $\mathbb{R}^n$  y  $\sigma^0 \in L$ , consideramos

$$\tilde{\zeta}(t) := x_0 + \int_{\sigma^0}^t f(\tau, \zeta(\tau)) d\tau$$

y

$$\tilde{\eta}(t) := z_0 + \int_{\sigma^0}^t g(\tau, \eta(\tau)) d\tau$$

vale que

$$\|\tilde{\zeta}(t) - \tilde{\eta}(t)\| \leq \|x^0 - z^0\| + \int_{\sigma^0}^t \alpha(\tau) \|\zeta(\tau) - \eta(\tau)\| d\tau + \int_{\sigma^0}^t \beta(\tau) d\tau$$

para todo  $t \geq \sigma^0$  tal que  $t \in L$ .

**Teorema de existencia y unicidad:** Consideramos el problema a valores iniciales

$$(2.1.2) \quad \dot{\zeta}(t) = f(t, \zeta(t)), \quad \zeta(\sigma^0) = x^0$$

Sea  $f : I \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  medible en sus dos variables  $t$  y  $x$ , donde  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y  $I \subseteq [0, T]$ . Si valen:

1.  $f$  localmente Lipschitz en  $x$ , es decir, para cada  $x^0 \in X$  existe  $\rho > 0$  y una función localmente integrable

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_+$$

tal que para cada  $x, y \in B_\rho(x^0) \subset X$  (bola de radio  $\rho$  centrada en  $x^0$ ) y  $t \in I$  resulta

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \alpha(t) \|x - y\|$$

2.  $f$  es localmente integrable en  $t$ , es decir, para cada  $x^0$  fijo existe una función integrable  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que

$$\|f(t, x_0)\| \leq \beta(t)$$

para casi todo  $t$ .

Luego, para cada par  $(\sigma^0, x^0) \in I \times X$ ,  $\exists J \subseteq [0, T]$  intervalo no vacío abierto relativo a  $I$  y  $\exists \eta$  solución del problema a valores iniciales (2.1.2) en  $J$  con la siguiente propiedad: Si

$$\eta : J' \rightarrow X$$

es otra solución del problema a valores iniciales (2.1.2) donde  $J' \subseteq J$ , necesariamente

$$J' \subseteq J, \zeta = \eta \text{ en } J'.$$

La solución  $\zeta$  se dice maximal en el problema a valores iniciales en  $I$ .

**Observación:** Bajo nuestras suposiciones, la condición 2. vale uniformemente en compactos. Esto es, para cualquier compacto  $K \subseteq X$  existe una función uniformemente integrable  $\gamma$  tal que

$$(2.1.3) \quad \|f(t, x)\| \leq \gamma(t) \quad \forall t \in I, x \in K.$$

Esto se prueba de la siguiente manera. Dado  $x^0 \in K$ , existen  $\rho > 0$  y funciones  $\alpha, \beta$  como en el teorema. Por lo tanto, para cualquier  $x \in B_\rho(x^0)$  y cada  $t \in I$ ,

$$(2.1.4) \quad \begin{aligned} \|f(t, x)\| &\leq \|f(t, x^0)\| + \|f(t, x) - f(t, x^0)\| \\ &\leq \beta(t) + \rho\alpha(t). \end{aligned}$$

Llamamos a esta última función  $\gamma_{x^0}$  y notemos que es localmente integrable. Consideremos un cubrimiento por bolas abiertas  $B_\rho(x^0)$  de  $K$ ; como es compacto, existe un subcubrimiento finito. Supongamos bolas centradas en  $x_1, \dots, x_l$ . Tomando

$$\gamma(t) := \max\{\gamma_{x_1}, \dots, \gamma_{x_l}\}.$$

es localmente integrable y (2.1.4) implica (2.1.3).

Demostremos ahora el teorema.

Demostración: Asumimos, sin pérdida de generalidad que  $I \neq \{\sigma^0\}$  pues sino

el problema es trivial. Mostraremos primero que existe  $\delta > 0$  tal que el problema (2.1.2) tiene solución en el intervalo  $[\sigma^0, \sigma^0 + \delta] \cap I$ . Si  $\sigma^0$  es el extremo derecho del intervalo  $I$ , es obvio, entonces asumimos que este no es el caso. Tomamos, para el  $x^0$  dado un número  $\rho > 0$  y unas funciones localmente integrables  $\alpha$  y  $\beta$  como las enunciadas en el teorema. Notemos que, como son localmente integrables, la función

$$a(t) := \int_{\sigma^0}^{t+\sigma^0} \alpha(\tau) d\tau \rightarrow 0$$

cuando  $t \rightarrow 0^+$ , y análogamente para

$$b(t) := \int_{\sigma^0}^{t+\sigma^0} \beta(\tau) d\tau$$

Notemos también que  $a$  y  $b$  son no negativas y crecientes. Por lo tanto, existe  $\delta > 0$  tal que  $\sigma^0 + \delta \in I$  y

- (i)  $a(t) \leq a(\delta) = \lambda < 1 \forall t \in [0, \delta]$  y
- (ii)  $a(t)\rho + b(t) \leq a(\delta)\rho + b(\delta) < \rho \forall t \in [0, \delta]$

Sea  $\zeta_0 \equiv x^0$  en el intervalo  $[\sigma^0, \sigma^0 + \delta]$  y consideremos la bola de radio  $\rho$  centrada en ese punto, en el espacio  $C_n^0(\sigma^0, \sigma^0 + \delta)$ ,

$$\bar{B} := \bar{B}_\rho(\zeta_0)$$

Con  $C_n^0(\sigma, \tau) = \{\zeta : [\sigma, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ funciones continuas}\}$ .

Introducimos el operador

$$S : \bar{B} \rightarrow C_n^0(\sigma^0, \sigma^0 + \delta)$$

definido por

$$(S\zeta)(t) := x^0 + \int_{\sigma^0}^t f(\tau, \zeta(\tau)) d\tau$$

Como los valores de  $\zeta(\tau)$ ,  $\tau \in [\sigma^0, \sigma^0 + \delta]$  pertenecen a un compacto  $K$  (por la continuidad de  $\zeta$ ) se sigue que  $f(\cdot, \zeta(\cdot))$  es localmente intergrable, y

$$\int_{\sigma^0}^t \|f(\tau, \zeta(\tau))\| d\tau \leq \int_{\sigma^0}^t \gamma(\tau) d\tau.$$

Por lo tanto,  $S$  está bien definida y  $S\zeta$  es absolutamente continua para cada  $\zeta$ . Veamos que  $\bar{B}$  es invariante por  $S$ . Sea  $\eta \in \bar{B}$  y aplicamos el Lema 1 con  $L = [\sigma^0, \delta + \sigma^0]$ ,  $g \equiv 0$ . Tomamos  $\alpha, \beta, x^0, \zeta$  y  $f$  los indicados anteriormente,  $X =$

$B_\rho(x^0), X_0 = \{x^0\}, \eta := \zeta_0$  y  $z^0 = x^0$ . Luego,  $\tilde{\zeta} = S\zeta$  y  $\tilde{\eta} = \zeta_0$ , concluimos entonces que

$$\|S\zeta - \zeta_0\|_\infty \leq \|\zeta - \zeta_0\|_\infty a(\delta) + b(\delta) < \rho,$$

la última desigualdad sale de la propiedad (ii). Por lo tanto, podemos pensar a  $S$  como una función  $\bar{B} \rightarrow \bar{B}$ . Veamos que es una contracción así podemos usar el teorema del punto fijo.

Para eso aplicaremos nuevamente el Lema 1, pero esta vez tomaremos, dado cualquier  $\zeta, \eta \in \bar{B} : X = X_0 = B_\rho(x^0), \alpha, f, x^0$  como antes,  $g = f, \beta \equiv 0$  y  $L = [\sigma^0, \delta + \sigma^0]$ . Notemos que el primer y tercer término de la conclusión del lema se anulan, entonces tenemos

$$\|S\zeta - S\eta\|_\infty \leq \lambda \|\zeta - \eta\|_\infty,$$

entonces  $S$  es una contracción.

Se sigue del teorema de punto fijo que existe un punto fijo  $\zeta = S\zeta$ , que es una solución del problema (2.1.2) en el intervalo  $[\sigma^0, \delta + \sigma^0]$ . Si  $\sigma^0$  no es un extremo izquierdo de  $I$ , se puede usar un argumento similar al anterior para probar que existe solución en un intervalo de la forma  $[\sigma^0 - \delta, \sigma^0]$ , y concatenando las dos soluciones, concluimos que existe solución en el intervalo  $[\sigma^0 - \delta, \sigma^0 + \delta]$ . Si  $\sigma^0$  es un extremo, tenemos una solución en un intervalo de la forma  $[\sigma^0, \delta + \sigma^0]$  o  $[\sigma^0 - \delta, \sigma^0]$  y, en cualquier caso nos da una solución definida en un entorno de  $\sigma^0$  en  $I$ . Luego, existe localmente para todo par inicial  $(\sigma^0, x^0)$ .

Probemos ahora la unicidad, es decir, si  $\zeta$  y  $\eta$  son dos soluciones de (2.1.2) en algún intervalo  $J \subseteq I, \sigma^0 \in J$  luego,  $\zeta \equiv \eta$  en  $J$ . Probaremos que coinciden para  $t \in J, t \geq \sigma^0$ , el caso  $t \leq \sigma^0$  es análogo.

Probemos primero que  $\zeta$  y  $\eta$  coinciden en algún intervalo de la forma  $[\sigma^0, \sigma^0 + \delta]$ , para algún  $\delta > 0$ . Elegimos  $\rho$  como en la condición 1., para un  $x^0$  dado. Por la continuidad de  $\zeta$  y  $\eta$ , existe  $\delta$  suficientemente chico tal que los valores  $\zeta(t)$  y  $\eta(t)$ , para  $t \in [\sigma^0, \sigma^0 + \delta]$ , pertenecen a la bola  $B_\rho(x^0)$ . Una vez más aplicamos el Lema 1, tomando  $X = X_0 = X, f, x^0, \zeta, \eta, \alpha$  del teorema,  $z^0 = x^0, g = f, L = [\sigma^0, \sigma^0 + \delta]$



y  $\beta \equiv 0$ . Como antes, el primer y tercer término se anula y obtenemos,

$$\|\zeta(t) - \eta(t)\| \leq \int_{\sigma^0}^t \alpha(\tau) \|\zeta(\tau) - \eta(\tau)\| d\tau$$

para todo  $t \in [\sigma^0, \sigma^0 + \delta]$ . Por el Lema de Gronwall concluimos que el término de la izquierda tiene que ser cero. Esto prueba la unicidad en ese (pequeño) intervalo.

Asumamos ahora que existe algún  $t > \sigma^0, t \in J$  tal que  $\zeta(t) \neq \eta(t)$ . Definimos

$$\sigma^1 := \inf\{t \in J, t > \sigma^0 | \zeta(t) \neq \eta(t)\}.$$

Entonces  $\zeta \equiv \eta$  en  $[\sigma^0, \sigma^1)$ , y por la continuidad de  $\zeta$  y  $\eta$  vale también que  $\zeta(\sigma^1) = \eta(\sigma^1)$ . La unicidad probada anteriormente es válida también para cualquier punto inicial  $\sigma^0 \in I$  y  $x^0 \in X$ . Por lo tanto, si lo aplicamos al problema a valores iniciales con  $\sigma^1$  como tiempo inicial y  $x^1 := \zeta(\sigma^1)$  como estado inicial, se sigue que  $\zeta \equiv \eta$  en algún intervalo de la forma  $[\sigma^1, \sigma^1 + \delta]$  para algún  $\delta > 0$ , contradiciendo la definición de  $\sigma^1$ .

Veremos ahora que existe una solución maximal. Para esto, consideremos

$$\tau_{min} := \inf\{t \in I | \exists \text{ solución en } [t, \sigma^0]\}$$

y

$$\tau_{max} := \sup\{t \in I | \exists \text{ solución en } [\sigma^0, t]\}$$

. (Posiblemente  $\tau_{max} = +\infty$  o  $\tau_{min} = -\infty$ .) Por el resultado de existencial local sabemos que  $\tau_{min} < \tau_{max}$ . Consideremos el intervalo  $(\tau_{min}, \tau_{max})$ . Existe una solución definida en ese intervalo ya que existen dos sucesiones

$$s_n \downarrow \tau_{min} \quad y \quad t_n \uparrow \tau_{max},$$

y hay una solución en cada intervalo  $(s_n, t_n)$  por definición de  $\tau_{min}$  y  $\tau_{max}$ , las cuales coinciden en el dominio en común por unicidad de estado.

Tomemos ahora  $J$  de la siguiente manera. Si  $\tau_{min}$  y  $\tau_{max}$  están en el interior de  $I$ , luego

$$J := (\tau_{min}, \tau_{max}).$$

Si  $\tau_{min}$  es el extremo izquierdo (es decir,  $I$  es de la forma  $[\tau_{min}, b]$  o  $(\tau_{min}, b)$ ), luego agregamos  $\tau_{min}$  a  $J$  concluyendo que existe una solución en el intervalo, incluyendo a  $\tau_{min}$ . Análogamente para  $\tau_{max}$ . Con esta definición,  $J$  es abierto relativo a  $I$  y no vacío.

Además, si  $\tau_{min}$  pertenece al interior de  $I$ , puede no haber solución  $\zeta$  de (2.1.2) que está definida en  $[\tau_{min}, \sigma^0]$ . Por otro lado, por el teorema de existencia local aplicado al teorema de valores iniciales con  $\eta(\tau_{min}) = \zeta(\tau_{min})$ , obtendremos una solución en algún intervalo

$$(\tau_{min} - \delta, \tau_{min}]$$

y por lo tanto, por concatenación también hay una en  $(\tau_{min} - \delta, \sigma^0]$ , contradiciendo la definición de  $\tau_{min}$ . Análogamente se prueba para  $\tau_{max}$ .

En conclusión, cualquier solución de (2.1.2) tiene que estar definida en un subconjunto de  $J$ , y, por lo tanto, de la última parte del teorema se obtiene la unicidad. ■

## 2.2. Cono Normal

Seguiremos la notación y conceptos dados en el paper de Clarke y de Pinho [4]

**Definición:** Sea  $X$  un espacio normado,  $S \subset X$  un conjunto convexo y  $x \in S$ , definimos al cono normal por el conjunto

$$N_S^C(x) = \{\zeta \in X^* : \langle \zeta, x' - x \rangle \leq 0 \forall x' \in S\}$$

A partir de ahora notaremos  $N_S^C(x) = N_S(x)$  y estudiaremos en particular el caso  $X = R^n$ .

**Lema :** Sean  $S_1$  y  $S_2$  subconjuntos normados de los espacios  $X_1$  y  $X_2$  y sean  $x \in S_1, y \in S_2 \Rightarrow N_{S_1 \times S_2}(x, y) = N_{S_1}(x) \times N_{S_2}(y)$ .

Demostración: Llamemos  $X^* = (X_1^*, X_2^*)$ .

$$N_{S_1 \times S_2}(x_1, x_2) = \{(\zeta_1, \zeta_2) \in X^* / \langle (\zeta_1, \zeta_2), (x'_1, x'_2) - (x_1, x_2) \rangle_{X^* \times X} \leq 0 \forall (x'_1, x'_2) \in S_1 \times S_2\}$$

$$N_{S_1}(x_1) = \{\zeta_1 \in X_1^* / \langle \zeta_1, x'_1 - x_1 \rangle_{X_1^* \times X_1} \leq 0 \forall x'_1 \in S_1\}$$

$$N_{S_2}(x_2) = \{\zeta_2 \in X_2^* / \langle \zeta_2, x'_2 - x_2 \rangle_{X_2^* \times X_2} \leq 0 \forall x'_2 \in S_2\}$$

Sea  $(\zeta_1, \zeta_2) \in N_{S_1}(x_1) \times N_{S_2}(x_2)$ , quiero ver que  $(\zeta_1, \zeta_2) \in N_{S_1 \times S_2}(x_1, x_2)$

$$\Rightarrow \zeta_1 \in N_{S_1}(x_1), \zeta_2 \in N_{S_2}(x_2)$$

$$\Rightarrow \langle \zeta_1, x'_1 - x_1 \rangle_{X_1^* \times X_1} \leq 0 \forall x'_1 \in S_1; \langle \zeta_2, x'_2 - x_2 \rangle_{X_2^* \times X_2} \leq 0 \forall x'_2 \in S_2$$

$$\Rightarrow \langle \zeta_1, x'_1 - x_1 \rangle_{X_1^* \times X_1} + \langle \zeta_2, x'_2 - x_2 \rangle_{X_2^* \times X_2} \leq 0 \forall x'_1 \in S_1, x'_2 \in S_2$$

$$\Rightarrow \langle (\zeta_1, \zeta_2), (x'_1 - x_1, x'_2 - x_2) \rangle_{X^* \times X} \leq 0 \forall x'_1 \in S_1, x'_2 \in S_2$$

$$\Rightarrow \langle (\zeta_1, \zeta_2), ((x'_1, x'_2) - (x_1, x_2)) \rangle_{X^* \times X} \leq 0 \forall x'_1 \in S_1, x'_2 \in S_2$$

$$\Rightarrow \langle (\zeta_1, \zeta_2), ((x'_1, x'_2) - (x_1, x_2)) \rangle_{X^* \times X} \leq 0 \forall (x'_1, x'_2) \in S_1 \times S_2$$

Entonces,  $(\zeta_1, \zeta_2) \in N_{S_1 \times S_2}(x_1, x_2)$ .

Veamos ahora la otra inclusión:

Sean  $(\zeta_1, \zeta_2) \in N_{S_1 \times S_2}(x_1, x_2)$  quiero ver que  $(\zeta_1, \zeta_2) \in N_{S_1}(x_1) \times N_{S_2}(x_2)$

$$\Rightarrow \langle (\zeta_1, \zeta_2), ((x'_1, x'_2) - (x_1, x_2)) \rangle_{X^* \times X} \leq 0 \forall (x'_1, x'_2) \in S_1 \times S_2$$

$$\Rightarrow \langle (\zeta_1, \zeta_2), (x'_1 - x_1, x'_2 - x_2) \rangle_{X^* \times X} \leq 0 \forall x'_1 \in S_1, x'_2 \in S_2$$

$$\Rightarrow \langle \zeta_1, x'_1 - x_1 \rangle_{X_1^* \times X_1} + \langle \zeta_2, x'_2 - x_2 \rangle_{X_2^* \times X_2} \leq 0 \forall x'_1 \in S_1, x'_2 \in S_2$$

Como vale para todo  $x'_1 \in S_1$  y  $x'_2 \in S_2$ ,

- Si tomamos  $x'_2 = x_2$  obtenemos que  $\langle \zeta_1, x'_1 - x_1 \rangle_{X_1^* \times X_1} \leq 0 \forall x'_1 \in S_1$

y

- Si tomamos  $x'_1 = x_1$  obtenemos que  $\langle \zeta_2, x'_2 - x_2 \rangle_{X_2^* \times X_2} \leq 0 \forall x'_2 \in S_2$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \langle \zeta_1, x'_1 - x_1 \rangle_{X_1^* \times X_1} \leq 0 \quad \forall x'_1 \in S_1 \quad \wedge \quad \langle \zeta_2, x'_2 - x_2 \rangle_{X_2^* \times X_2} \leq 0 \quad \forall x'_2 \in S_2 \\ &\Rightarrow \zeta_1 \in N_{S_1}(x_1), \quad \zeta_2 \in N_{S_2}(x_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, resulta  $(\zeta_1, \zeta_2) \in N_{S_1}(x_1) \times N_{S_2}(x_2)$

Luego,  $N_{S_1 \times S_2}(x, y) = N_{S_1}(x) \times N_{S_2}(y)$ .

■

A continuación calcularemos el cono normal para algunos subconjuntos que serán utilizados más adelante en distintos resultados.

- $N_{\{x_0\}}(x_0) = \{\zeta \in \mathbb{R} / \zeta(x' - x_0) \leq 0 \quad \forall x' = x_0\}$

$$\begin{aligned} N_{\{x_0\}}(x_0) &= \{\zeta \in \mathbb{R} / \zeta(x' - x_0) \leq 0 \quad \forall x' = x_0\} \\ &= \{\zeta \in \mathbb{R} / \zeta(x_0 - x_0) \leq 0\} \\ &= \{\zeta \in \mathbb{R} / \zeta 0\} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Sea  $x \in [0, 1]$  calculamos  $N_{[0,1]}(x) = \{\zeta \in \mathbb{R} / \zeta(x' - x) \leq 0 \quad \forall x' \in [0, 1]\}$

Si  $x = 0$

$$\begin{aligned} N_{[0,1]}(x) &= \{\zeta \in \mathbb{R} / \zeta x' \leq 0 \quad \forall x' \in [0, 1]\} \\ &= \mathbb{R}_{\leq 0} \end{aligned}$$

Si  $x = 1$

$$\begin{aligned} N_{[0,1]}(x) &= \{\zeta \in \mathbb{R} / \zeta(x' - 1) \leq 0 \quad \forall x' \in [0, 1]\} \\ &= \mathbb{R}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Si  $x \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} N_{[0,1]}(x) &= \{\zeta \in \mathbb{R} / \zeta(x' - x) \leq 0 \quad \forall x' \in [0, 1]\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

Pues, dado  $x \in (0, 1)$  puedo tomar  $x' \in [0, 1]$  tal que  $x' - x$  sea positivo o negativo. Por lo tanto  $\zeta$  tiene que valer 0.

Con el mismo argumento tenemos

- $N_{\mathbb{R}}(x) = \{\zeta \in \mathbb{R} / \zeta(x' - x) \leq 0 \forall x' \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{aligned} N_{\mathbb{R}}(x) &= \{\zeta \in \mathbb{R} / \zeta(x' - x) \leq 0 \forall x' \in \mathbb{R}\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

- Por último, calcularemos  $N_{\mathbb{R}_{\leq 0}}(x) = \{\zeta \in \mathbb{R} / \zeta(x' - x) \leq 0 \forall x' \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}$  con  $x \in \mathbb{R}$   
Si  $x = 0$

$$\begin{aligned} N_{\mathbb{R}_{\leq 0}}(x) &= \{\zeta \in \mathbb{R} / \zeta x' \leq 0 \forall x' \in \mathbb{R}_{\leq 0}\} \\ &= \mathbb{R}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Si  $x < 0$  podemos tomar  $x' \in \mathbb{R}_{\leq 0}$  tal que  $x' - x$  sea positivo o negativo. Por lo tanto  $\zeta$  tiene que valer 0.

$$\begin{aligned} N_{\mathbb{R}_{\leq 0}}(x) &= \{\zeta \in \mathbb{R} / \zeta(x' - x) \leq 0 \forall x' \in \mathbb{R}_{\leq 0}\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

**Observación:** Sea  $E \subseteq \mathbb{R}$ , si  $x \in E^\circ \implies N_E(x) = \{0\}$ .

Por el lema anterior

- $N_{\mathbb{R}^n}(x) = \{0\} \times \{0\} \times \dots \times \{0\} = \{\bar{0}\} \in \mathbb{R}^n$ .
- Sean  $x_0, x \in \mathbb{R}^m$  y  $y \in \mathbb{R}^n$ . Luego,  $N_{\{x_0\} \times \mathbb{R}^n}(x, y) = N_{\{x_0\}}(x) \times N_{\mathbb{R}^n}(y) = \mathbb{R}^m \times \{0\}$ .

### 2.3. Principio del máximo de Pontryagin

Las ecuaciones diferenciales son una de las herramientas que usa la matemática para describir la forma en que el mundo de la física se comporta. Los sistemas de

ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

son usadas para modelar gran cantidad de fenómenos en diversas áreas como aeronáutica, crecimiento económico, enfermedades y recursos naturales. El éxito de este paradigma se debe en parte a que sugiere un mecanismo natural a través del cual el comportamiento del sistema puede ser influenciado por factores externos.

Esto se hace introduciendo una variable de control explícita en la ecuación diferencial, un parámetro que varía con el tiempo, que se puede elegir de manera tal que se alcance cierto objetivo. Esto nos lleva a la ecuación diferencial de control

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in U$$

La cual vamos a utilizar durante todo nuestro análisis. El par  $(f, U)$  se denomina sistema de control.

El tema del que hablaremos ahora es la optimalidad. Comenzaremos con un poco de terminología utilizada en este tipo de problemas. Sea  $[0, T]$  un intervalo, tenemos la función dinámica

$$f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

y un conjunto de control  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Un control es una función  $u : [0, T] \rightarrow U$  medible y el estado correspondiente al control  $u$  es la solución  $x$ , en el sentido del Teorema de Existencia y Unicidad 2.1, definida en  $[0, T]$  del problema a valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0, \quad t \in [0, T] \text{ a.e.} \end{cases}$$

con  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  la condición inicial. Donde,  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función vectorial absolutamente continua en cada componente. Esta ecuación diferencial que relaciona el control  $u$  y el estado  $x$  se denomina la ecuación de estado. La idea es elegir el control  $u$  que genere el estado  $x$  de tal manera que el costo, definido por

$$J(x, u) = \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt$$

sea mínimo. Donde  $L$  es una función dada. Por último, tenemos el punto final  $x(T) \in E$  con  $E$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  conocido.

Llamaremos par admisible al par  $(x, u)$  que consiste de una función  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolutamente continua en cada componente y una función medible  $u$  que satisfacen

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0, t \in [0, T] \text{ a.e.} \end{cases}$$

Un mínimo local  $(x_*, u_*)$  es un par admisible tal que existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\forall (x, u)$  admisible que cumple  $\|x - x_*\| \leq \epsilon$  resulta  $J(x_*, u_*) \leq J(x, u)$ . Donde  $\|x - x_*\| = \max_{[0, T]} |x(t) - x_*(t)|$

Con el objetivo de resolver el problema de control óptimo podemos actuar de la siguiente manera deductiva. Sabemos con certeza, por el teorema de existencia que enunciaremos en la sección 2.5, que existe solución del problema, usamos condiciones necesarias, cuya aplicación se justifique rigurosamente, encontramos el mejor candidato (posiblemente el único) que cumpla con las condiciones necesarias y concluimos que es la solución.

Se sigue entonces que el principio del máximo se puede usar en un contexto deductivo, pero para esto necesitaremos tener una versión en la que los controles pertenezcan a la misma clase que pertenecen los controles del teorema de existencia. Por lo tanto enunciaremos el principio del máximo de Pontryagin en la clase de controles medibles ya que tenemos resultados de existencia en esa clase de controles.

El problema de control óptimo que consideraremos es:

$$(OC) \quad \begin{cases} \text{Min } J(x, u) = \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt; \\ \text{sujeto a :} \\ \dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \quad t \in [0, T] \text{ a.e.}, \\ u(t) \in U(t) \quad t \in [0, T] \text{ a.e.}, \\ x(0) = x_0, x(T) \in E, \end{cases}$$

Tomaremos el conjunto  $U$  acotado y las siguientes hipótesis para los datos:

H1) Las funciones  $f$  y  $L$  son continuas y admiten derivadas  $D_x f(t, x, u)$  y  $D_x L(t, x, u)$  relativas a  $x$  continuas en todas las variables  $(t, x, u)$  (esto implica que  $J(x, u)$  está bien definido). El conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  es cerrado.

Definimos la función Hamiltoniana  $H^\lambda : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  asociada al problema (OC) por

$$H^\lambda(t, x, p, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle - \lambda L(t, x, u)$$

con  $\lambda \in \{0, 1\}$ .

El máximo del Hamiltoniano es  $M^\lambda$  y lo definimos por:

$$M^\lambda(t, x, p) = \sup_{u \in U(t)} H^\lambda(t, x, p, u).$$

**Teorema Principio del máximo:** Seguiremos la notación dada en el libro de Clarke [2](ver teorema 22.2).

Sea  $(x_*, u_*)$  un mínimo local para el problema (OC) bajo las hipótesis de regularidad enunciadas anteriormente, con  $U$  un conjunto acotado. Luego, existe una función  $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolutamente continua y un escalar  $\lambda \in \{0, 1\}$  que satisfacen:

- La condición de no trivialidad

$$(\lambda, p(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

- La condición de transversalidad

$$-p(T) \in N_E(x_*(T)).$$

- La ecuación adjunta para casi todo  $t$

$$-p'(t) = D_x H^\lambda(t, x_*(t), p(t), u_*(t)).$$

- Condición del máximo para casi todo  $t$

$$H^\lambda(t, x_*(t), p(t), u_*(t)) = M^\lambda(t, x_*(t), p(t)).$$



Si el problema es autónomo, es decir,  $f$ ,  $U$  y  $L$  no dependen explícitamente de  $t$ , podemos agregar la constancia del Hamiltoniano: para alguna constante  $h$  tenemos

$$(2.3.1) \quad H^\lambda(x_*(t), p(t), u_*(t)) = M^\lambda(x_*(t), p(t)) = h \text{ a.e.}$$

**Definición:** Decimos que un extremo  $(x_*, u_*)$  es normal si vale  $\lambda = 1$ .

**Corolario :** En el contexto del teorema anterior, si tomamos  $E = \mathbb{R}^n$ , o mas generalmente,  $x_*(T) \in E^\circ$ . Luego, el principio del máximo vale para  $\lambda = 1$ .

*Demostración :* Sea  $x_*(T) \in E^\circ$ , entonces por la observación hecha en la sección 2.2 tenemos que  $N_E(x_*(T)) = 0$ .

Como la condición de transversalidad implica que  $p(T) \in N_E(x_*(T)) \Rightarrow p(T) = 0$ .

Supongamos ahora que el principio del máximo vale para  $\lambda = 0$ , entonces la ecuación adjunta se reduce a la siguiente ecuación diferencial lineal para  $p$ :

$$\begin{aligned} -p'(t) &= D_x f(t, x_*(t), u_*(t))p(t) \\ p(T) &= 0 \end{aligned}$$

Pero cualquier solución de  $p$  de esa ecuación diferencial lineal que se anula en un punto, necesariamente se anula en todos lados, es decir es constantemente cero (por el Corolario 3 de la sección 2). Entonces resulta que  $\lambda = 0$  y  $p(t) = 0$ , lo que contradice la hipótesis de no trivialidad.

Luego,  $\lambda = 1$ .

■

**Corolario :** Se puede enunciar el principio del máximo para el siguiente problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } J(x, u) = \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt; \\ \text{sujeto a :} \\ \dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \quad t \in [0, T] \text{ a.e.}, \\ u(t) \in U(t) \quad t \in [0, T] \text{ a.e.}, \\ x(0) = x_0, \quad x(T) \in E, \end{array} \right.$$

Como buscar

$$\text{Max } J(x, u) = \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt$$

es análogo a buscar

$$\text{Min } -J(x, u) = \int_0^T -L(t, x(t), u(t)) dt$$

Tomando la función Hamiltoniana  $H^\lambda : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  obtenemos la asociada al problema por

$$\begin{aligned} H^\lambda(t, x, p, u) &= \langle p, f(t, x, u) \rangle - \lambda(-L(t, x, u)) \\ &= \langle p, f(t, x, u) \rangle + \lambda L(t, x, u) \end{aligned}$$

con  $\lambda \in \{0, 1\}$ .

## 2.4. Principio del máximo con restricciones

**2.4.1. Teorema del principio del máximo con restricciones.** Consideraremos el problema de control óptimo con costo y función dinámica standard, en el cual el estado  $x$  y el control  $u$  están sujetos a restricciones mixtas del tipo  $\varphi(t, x(t), u(t)) \in \Phi \subset \mathbb{R}^k$ .

Seguiremos la notación dada en el libro de Clarke [2] (Ver teorema 25.14).

El problema asociado a estas restricciones es

$$(RM) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } J(x, u) = \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt; \\ \text{sujeto a :} \\ x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ u(t) \in U, \quad t \in [0, T] \text{ a.e.} \\ \varphi(t, x(t), u(t)) \in \Phi \text{ a.e.} \\ (x(0), x(T)) \in \{x_0\} \times E \end{array} \right.$$

Asumiremos las siguientes hipótesis:

HR) Las funciones  $f$ ,  $L$  y  $\varphi$  satisfacen las hipótesis clásicas de regularidad del problema de control óptimo estandard del libro de Clarke. Son funciones continuas y admiten derivadas relativas a  $x$  continuas en todas las variables  $(t, x, u)$ . Los conjuntos  $U$ ,  $E$  y  $\Phi$  son cerrados.

Sea  $(x_*, u_*)$  un mínimo local para (RM), y asumimos que  $u_*$  está acotado.

Las condiciones de regularidad o también llamadas cualificación de las restricciones (constraint qualification) son hipótesis necesarias en el caso de tener restricciones. Estas condiciones son propiedades de la descripción analítica de un conjunto que asegure que la estructura de un entorno de un par admisible pueda ser descrito como aproximaciones de primer orden de las restricciones que definen el conjunto. Estas condiciones de regularidad son esenciales para derivar condiciones de primer orden en problemas de optimización.

C) La condición de regularidad correspondiente a la restricción mixta es, para cada  $t \in [0, T]$

$$\text{Dados } u \in U, \text{ tal que } \varphi(t, x_*(t), u) \in \Phi, \quad q \in N_{\Phi}(\varphi(t, x_*(t), u)),$$

$$(2.4.1) \quad \text{Si } -D_u \langle q, \varphi \rangle(t, x_*(t), u) \in N_U(u) \Rightarrow q = 0.$$

En este caso es conveniente definir el Hamiltoniano aumentado por

$$\begin{aligned} H_{\varphi}^{\lambda}(t, x, p, u, q) &= H^{\lambda}(t, x, p, u) - \langle q, \varphi \rangle(t, x, u) \\ &= \langle p, f(t, x, u) \rangle - \lambda L(t, x, u) - \langle q, \varphi \rangle(t, x, u). \end{aligned}$$

**Teorema del principio del máximo con restricciones mixtas:** Bajo las hipótesis HR), si  $(x_*, u_*)$  es un mínimo local para (RM) con  $u_*$  acotada que cumple la condición de regularidad C), existe una función absolutamente continua  $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , un escalar  $\lambda \in \{0, 1\}$  y una función medible  $q : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^k$  tal que

$$(2.4.2) \quad q \in N_{\Phi}(\varphi(t, x_*(t), u_*(t))) \text{ a.e.},$$

Y se satisfacen:

- La condición de no trivialidad

$$(2.4.3) \quad (\lambda, p(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T],$$

- La condición de transversalidad

$$(2.4.4) \quad (p(0), -p(T)) \in N_{\{x_0\} \times E}(x_*(0), x_*(T)) = N_{\{x_0\}}(x_*(0)) \times N_E(x_*(T)),$$

- La ecuación adjunta para casi todo t

$$(2.4.5) \quad -p'(t) = D_x H_{\varphi}^{\lambda}(t, x_*(t), p(t), u_*(t), q(t)),$$

- Así como, para casi todo t, la condición del máximo

$$u \in U, \varphi(t, x_*(t), u) \in \Phi \Rightarrow$$

$$(2.4.6) \quad H^{\lambda}(t, x_*(t), p(t), u) \leq H^{\lambda}(t, x_*(t), p(t), u_*(t)),$$

- Y la condición estacionaria

$$D_u H_{\varphi}^{\lambda}(t, x_*(t), p(t), u_*(t), q(t)) \in N_U(u_*(t)),$$

equivalentemente

$$(2.4.7)$$

$$D_u \langle p, f \rangle(t, x_*(t), u_*(t)) - \lambda D_u L(t, x_*(t), u_*(t)) - D_u \langle q, \varphi \rangle(t, x_*(t), u_*(t)) \in N_U(u_*(t)).$$

**Lema de regularidad:** Supongamos que vale la condición de regularidad dada por

- C) Para todo  $t \in [0, T]$ , si  $u \in U$  es tal que  $\varphi(t, x_*(t), u) \in \Phi$  y  $q \in N_{\Phi}(\varphi(t, x_*(t), u))$  es tal que  $-D_u \langle q, \varphi \rangle(t, x_*(t), u) \in N_U(u)$ , entonces debe ser  $q = 0$ .

Luego existe  $K > 0$  tal que para todo  $t \in [0, T]$ , para todo  $u \in U$  tales que  $\varphi(t, x_*(t), u) \in \Phi$ ,  $q \in N_\Phi(\varphi(t, x_*(t), u))$  y  $\psi \in D_u \langle q, \varphi \rangle(t, x_*(t), u) + N_U(u)$ , entonces  $|q| \leq K|\psi|$ .

*Demostración:* Por contradicción, supongamos que existen sucesiones  $t_i \in [0, T]$ ,  $u_i \in U$  con  $\varphi(t_i, x_*(t_i), u_i) \in \Phi$  y  $q_i \in N_\Phi(\varphi(t_i, x_*(t_i), u_i))$  tales que existe una sucesión  $\psi_i \in D_u \langle q_i, \varphi \rangle(t_i, x_*(t_i), u_i) + N_U(u_i)$ , de manera que  $|q_i| > K_i|\psi_i|$  con  $K_i \rightarrow \infty$ .

De la última desigualdad tenemos que  $|q_i| > 0$ , luego normalizando podemos suponer que  $|q_i| = 1$  y por lo tanto  $1/K_i > |\psi_i|$ . Siendo  $U$  y  $[0, T]$  acotados y tomando sucesivas subsucesiones tenemos que existen subsucesiones convergentes  $q_i \rightarrow q_0$ ,  $t_i \rightarrow t_0 \in [0, T]$ ,  $u_i \rightarrow u_0 \in U$  y  $\psi_i \rightarrow 0$ .

Luego se tiene que  $x_*(t_i) \rightarrow x_*(t_0)$  y  $\varphi(t_0, x_*(t_0), u_0) \in \Phi$ , de donde obtenemos que  $-D_u \langle q, \varphi \rangle \in N_U(u)$ , lo cual es una contradicción por C). ■

**Corolario :** Bajo las hipótesis del principio del máximo en la sección 2.4.1 si  $(x_*, u_*)$  es un par óptimo, se tiene que existen  $K_1 > 0$  y  $K_2 > 0$  tal que

$$|q| \leq K_1|p| + K_2|\lambda|.$$

*Demostración:* Como estamos bajo las hipótesis del principio del máximo enunciado en la sección 2.4.1, sabemos que vale la condición de regularidad. Además, por la ecuación (2.4.7) sabemos que

$$D_u \langle p, f \rangle(t, x_*(t), u_*(t)) - \lambda D_u L(t, x_*(t), u_*(t)) - D_u \langle q, \varphi \rangle(t, x_*(t), u_*(t)) \in N_U(u_*(t)),$$

entonces,

$$D_u \langle p, f \rangle(t, x_*(t), u_*(t)) - \lambda D_u L(t, x_*(t), u_*(t)) \in D_u \langle q, \varphi \rangle(t, x_*(t), u_*(t)) + N_U(u_*(t)).$$

Luego, si tomamos  $\psi = D_u \langle p, f \rangle(t, x_*(t), u_*(t)) - \lambda D_u L(t, x_*(t), u_*(t))$ , usando el Lema de regularidad de la sección 2.4.1, tenemos que  $\exists K > 0$  tal que

$$\begin{aligned} |q| &\leq K|\psi| = K|D_u \langle p, f \rangle(t, x_*(t), u_*(t)) - \lambda D_u L(t, x_*(t), u_*(t))| \\ &\leq K(|pf_u(t, x_*(t), u_*(t))| + |\lambda L_u(t, x_*(t), u_*(t))|) \end{aligned}$$

Como  $f_u$  y  $L_u$  son continuas definidas en compacto, existen  $\tilde{K}_1 > 0$  y  $\tilde{K}_2 > 0$  tal que  $|f_u| \leq \tilde{K}_1$  y  $|L_u| \leq \tilde{K}_2$ . Luego,

$$\begin{aligned} |q| &\leq K(|pf_u(t, x_*(t), u_*(t))| + |\lambda L_u(t, x_*(t), u_*(t))|) \\ &\leq K\tilde{K}_1|p| + K\tilde{K}_2|\lambda| = K_1|p| + K_2|\lambda| \end{aligned}$$

■

**Corolario :** En el contexto del teorema del principio del máximo con restricciones de la sección 2.4.1, si tomamos  $E = \mathbb{R}^n$ , o mas generalmente,  $x_*(T) \in E^\circ$ . Luego, el principio del máximo vale para  $\lambda = 1$ .

*Demostración:* Sea  $x_*(T) \in E^\circ$ , entonces por la observación en la sección 2.2 tenemos que  $N_E(x_*(T)) = 0$ .

Como la condición de transversalidad implica que  $p(T) \in N_E(x_*(T)) \Rightarrow p(T) = 0$ .

Supongamos ahora que el principio del máximo vale para  $\lambda = 0$ , entonces la ecuación adjunta se reduce a la siguiente ecuación diferencial lineal para  $p$ :

$$\begin{aligned} -p'(t) &= D_x f(t, x_*(t), u_*(t))p(t) + D_x \varphi(t, x_*(t), u_*(t))q(t) \\ p(T) &= 0 \end{aligned}$$

Usando el corolario anterior y la ecuación de  $p'$  obtenemos que

$$|p'(t)| \leq C_1|p| + C_2|q| \leq C_1|p| + C_2(K_1|p| + K_2 \underbrace{|\lambda|}_{=0}) = \tilde{C}|p|$$

Pero cualquier solución de  $p$  de esa ecuación diferencial lineal que se anula en un punto, necesariamente se anula en todos lados, es decir es constantemente cero (por

el Corolario 3 de la sección 2). Entonces resulta que  $\lambda = 0$  y  $p(t) = 0$ , lo que contradice la hipótesis de no trivialidad.

Luego,  $\lambda = 1$ .

■

**2.4.2. Principio del máximo con restricciones adaptado al problema estudiado.** Usaremos el teorema anterior con:

- $U = [0, 1]$
- $E = \mathbb{R}^n$

Haciendo abuso de notación, para preservar la escritura del artículo estudiado, llamaremos  $f = f + gu$ . Donde la  $f$  del lado izquierdo es la estudiada hasta el momento en las formulaciones generales y la  $f$  del lado derecho es la que utilizaremos en nuestra formulación particular.

- $f(t, x(t), u(t)) = f(x(t)) + g(x(t))u(t)$
- $\varphi(t, x(t), u(t)) = x_1(t)u(t) - V_0$ , con  $V_0 > 0$  dado
- $\Phi = \mathbb{R}_{\leq 0}$
- $n = 4$

Dadas  $L : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se busca

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } J(x, u) := \int_0^T L(x(t), u(t)) dt; \\ \text{sujeto a :} \\ \dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))u(t); \\ u \in [0, 1], \\ x_1(t)u(t) - V_0 \leq 0 \text{ a.e., } t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \\ x(T) \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

**Teorema del máximo con restricciones adaptado a (P):** Como  $f$ ,  $g$ ,  $\varphi$  y  $L$  satisfacen las hipótesis de regularidad clásica y  $U$ ,  $E$ ,  $\Phi$  son cerrados vemos que se satisfacen las hipótesis HR) del teorema de la sección 2.4.1.

Dados  $t \in [0, T]$  y  $u \in [0, 1]$ , comencemos por estudiar el cono normal  $N_\Phi(\varphi(t, x_*(t), u(t)))$ .

En este problema,  $\Phi = \mathbb{R}_{\leq 0}$  y

$$N_\Phi(\varphi(t, x_*(t), u)) = N_{\mathbb{R}_{\leq 0}}(\varphi(t, x_*(t), u)) = \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0}, & \text{si } \varphi(t, x_*(t), u) = 0 \\ 0, & \text{si } \varphi(t, x_*(t), u) < 0 \end{cases}$$

Entonces vimos que  $q \in N_\Phi(\varphi(t, x_*(t), u)) \iff q \geq 0$  y  $\langle q, \varphi(t, x_*(t), u) \rangle = 0$ .

Además vemos que se satisface la condición de regularidad dada por C).

Sea  $(x_1)_*(t) = S_*(t)$  y sean  $t \in [0, T]$  y  $u \in [0, 1]$  tal que

$$(2.4.8) \quad S_*(t)u \leq V_0 \text{ y}$$

$$(2.4.9) \quad q \geq 0 : \langle q, \varphi(t, x_*(t), u) \rangle = \langle q, S_*(t)u - V_0 \rangle = 0.$$

Si  $-D_u \langle q, S_*(t)u - V_0 \rangle \in N_U(u)$  quiero ver que  $q = 0$ .

$$D_u \langle q, S_*(t)u - V_0 \rangle = qS_*(t).$$

y

$$N_U(u) = \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0} & \text{si } u = 1 \\ 0 & \text{si } u \in (0, 1) \\ \mathbb{R}_{\leq 0} & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

Como veremos en el capítulo 3  $S_*(t) \geq 0$ .

Si  $S_*(t) = 0$  por (2.4.9) tenemos que  $-qV_0 = 0 \Rightarrow q = 0$  pues  $V_0 > 0$  constante conocida. Observar que en este caso es trivial que  $qS_*(t) = 0$  está en el cono normal.

Si  $S_*(t) > 0$



$$-D_u \langle q, S_*(t)u - V_0 \rangle \in N_U(u) \Rightarrow -qS_*(t) \in \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0} & \text{si } u = 1 \\ 0 & \text{si } u \in (0, 1) \\ \mathbb{R}_{\leq 0} & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

- Si  $u = 0 \Rightarrow$  por (2.4.9)  $q(-V_0) = 0 \Rightarrow q = 0$  pues  $V_0 > 0$  constante conocida.
- Si  $u = 1 \Rightarrow -qS_*(t) \geq 0$  siendo  $S_*(t) > 0$  y por (2.4.9) se tiene que  $q = 0$ .
- Si  $u \in (0, 1) \Rightarrow -qS_*(t) = 0 \Rightarrow q = 0$  pues  $S_*(t) > 0$ .

Luego, se satisface la condición de regularidad C).

Supongamos  $(x_*, u_*)$  es un par admisible mínimo local del problema  $(P)$ .

Entonces existen  $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^4$  absolutamente continua, un escalar  $\lambda \in \{0, 1\}$  y una función medible  $q : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$(2.4.10) \quad q \in N_{\Phi}(\varphi(t, x_*(t), u_*(t))) \text{ a.e.}$$

Se satisfacen:

- Condición de no trivialidad

$$(2.4.11) \quad (\lambda, p) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T] \Rightarrow \max\{|p(t)| : t \in [0, T]\} + \lambda > 0.$$

- Condición de transversalidad

$$(p(0), -p(T)) \in N_{\{x_0\} \times \mathbb{R}^4}(x_*(0), x_*(T))$$

$\Rightarrow$  por el Lema de la sección 2.2.

$$(2.4.12) \quad (p(0), -p(T)) \in \mathbb{R}^4 \times \{(0, 0, 0, 0)\}.$$

- La ecuación adjunta para casi todo  $t$

$$-p'(t) = D_x \{H_\varphi^\lambda\} = D_x \{p(t), f + gu\} - \lambda L - \langle q, \varphi \rangle(x_*(t), u_*(t)) \text{ a.e.,}$$

$$\text{siendo } H_\varphi^\lambda(t, x, p, u, q) = \langle p, f(x) + g(x)u \rangle - \lambda L(x, u) - \langle q, \varphi \rangle(t, x, u)$$

$$(2.4.13)$$

$$\Rightarrow -p'(t) = \langle p(t), f_x(x_*(t)) + g_x(x_*(t))u_*(t) \rangle - \langle q(t), \varphi_x(x_*(t)) \rangle - \lambda L_x(x_*(t)).$$

- Así como, para casi todo  $t$ , la condición del máximo  
 $u \in U, \varphi(t, x_*(t), u) \in \Phi \Rightarrow$

$$(2.4.14) \quad H^\lambda(t, x_*(t), p(t), u) \leq H^\lambda(t, x_*(t), p(t), u_*(t)).$$

- Y la condición estacionaria

$$(2.4.15) \quad D_u H_\varphi^\lambda(t, x_*(t), p(t), u_*(t), q(t)) \in N_U(u_*(t)),$$

equivalentemente

$$D_u \langle p, f + gu \rangle(t, x_*(t), u_*(t)) - \lambda D_u L(t, x_*, u_*) - D_u \langle q, \varphi \rangle(t, x_*(t), u_*(t)) \in N_U(u_*(t)).$$

Si definimos

$$(2.4.16) \quad \mu(t) = D_u \{H_\varphi^\lambda\} = D_u \{ \langle p(t), f + gu \rangle - \lambda L - \langle q, \varphi \rangle \}(x_*(t), u_*(t)) \text{ a.e.},$$

$\mu$  es una función medible que satisface  $\mu(t) \in N_U(u_*(t))$  a.e.

- Como vimos que se satisface la condición de regularidad, por el segundo Corolario del Lema de regularidad dado en la sección 2.4.1 se tiene que el par óptimo  $(x_*, u_*)$  es normal, es decir  $\lambda = 1$ .

## 2.5. Existencia de control y regularidad

Para buscar un control óptimo para el problema, primero deberemos asegurarnos que existe solución, para eso usaremos el teorema de existencia enunciado a continuación que es una adaptación del Teorema 23.11 que se encuentra en el libro de Clarke [2].

Sea el problema de control óptimo autónomo con restricciones mixtas y una función de control escalar:

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \int_0^T L(x(t), u(t)) dt; \\ \text{suje } a : \\ \dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \quad \forall t, \\ \varphi(x(t), u(t)) \leq 0 \quad \forall t, \\ u(t) \in U \text{ a.e. } t, \\ x(t) \in Q \quad \forall t \in [0, T], \quad (x(0), x(T)) \in \{x_0\} \times E \end{array} \right.$$

Con  $\varphi(x(t), u(t)) = m(x(t))u(t) - V_0$  y  $E = \mathbb{R}^n$ . El estado  $x$  toma valores en  $\mathbb{R}^n$  (es decir  $Q \subset \mathbb{R}^n$ ) mientras que el control  $u$  es un escalar y  $U$ , el conjunto al cual pertenece el control, es un subconjunto de  $\mathbb{R}$ . En cuanto a las funciones tenemos,  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Por último, sea  $V_0 \in \mathbb{R}$  una constante positiva dada.

**Teorema Existencia:** Supongamos que el problema  $(P)$  satisface las siguientes hipótesis:

- a. Las funciones  $f$ ,  $g$  y  $L$  son continuas en  $x$  y  $f$ , y  $g$  tienen crecimiento lineal, es decir, existe una constante  $M$  tal que

$$\text{Si } x \in Q \Rightarrow |f(x)| \leq M(1 + |x|);$$

$$\text{Si } x \in Q \Rightarrow |g(x)| \leq M(1 + |x|);$$

- b. El conjunto  $U$  es cerrado y convexo y los conjuntos  $E$  y  $Q$  son cerrados;  
c. La función  $L(x, \cdot)$  es convexa para cada  $x \in Q$ , y existe una constante  $\lambda$  tal que

$$x \in Q, u \in U \Rightarrow L(x, u) \geq \lambda;$$

Luego, si existe al menos un par admisible  $(x, u)$  para el cual  $J(x, u)$  es finita, el problema admite solución.

Con el teorema anterior vimos las condiciones para asegurar la existencia de una función de control  $u$  para el problema  $(P)$ . Con el siguiente resultado mostraremos

condiciones que garanticen que el control óptimo es una función Lipschitz continua. Este resultado es una adaptación a nuestro caso del dado en [10] en donde el teorema se enuncia con  $U = \mathbb{R}$ .

Como el teorema en [10] se enuncia para  $U = \mathbb{R}$  (no hay restricciones para el control) reformularemos nuestro problema para adaptarlo y así poder usar este teorema. Para esto definimos  $\varphi(x(t), u(t)) = (\varphi_1(x(t), u(t)), \varphi_2(x(t), u(t)), \varphi_3(x(t), u(t))) = (m(x(t))u(t) - V_0, u - 1, -u)$  y pediremos  $\varphi_i(x(t), u(t)) \leq 0 \forall i = 1, 2, 3$ . Llamaremos a este problema  $(\tilde{P})$ .

Sea  $(x_*, u_*)$  un mínimo para  $(\tilde{P})$  dado por el principio del máximo con restricciones enunciado en la sección 2.4.2 adaptado al teorema de regularidad de [10] y sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^4$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x - x_*(t)| \leq \epsilon, \text{ con } t \in [0, T]\} \text{ (para algún } \epsilon > 0)$$

Consideramos las siguientes hipótesis:

$\tilde{H}1)$   $L, f, g$  de clase  $C^1$ .

$\tilde{H}2)$  Para cada  $x \in \Omega$  la función  $u \mapsto L(x, u)$  es

a) De clase  $C^2$

b) Fuertemente convexa, es decir  $\exists \sigma > 0$  constante tal que  $D_{uu}^2 L(x, u) \geq \sigma \forall x \in \Omega, \forall u \in \mathbb{R}$ .

Además para cada conjuntos compactos  $D \subset \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^4$  la función  $x \mapsto D_u L(x, u)$  es Lipschitz continua uniformemente en  $E$  con respecto a  $u \in D$ .

$\tilde{H}3)$  La función  $x \mapsto \varphi(x, u)$  es de clase  $C^1$  en  $\Omega$  y la función  $u \mapsto \varphi(x, u)$  es de clase  $C^2$  y convexa para  $x \in \Omega$ . Además para cada conjuntos compactos  $D \subset \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^4$  la función  $x \mapsto D_u(\varphi(x, u))$  es Lipschitz continua uniformemente en  $E$  con respecto a  $u \in D$ .

$\tilde{H}4)$  Definimos  $I(t) = \{j \mid \varphi_j(x_*(t), u_*(t)) = 0\}$ . Para casi todo  $t \in [0, T]$  y  $\forall (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \neq (0, 0, 0), \sum_{i \in I(t)} \beta_i D_u(\varphi_i(x_*(t), u_*(t))) \neq 0$

**Teorema de regularidad del control óptimo:** Supongamos que valen las hipótesis  $\tilde{H}1) - \tilde{H}4)$  para  $(P)$  normal (es decir  $\lambda = 1$ ). Entonces el control óptimo  $u_*$  y la función  $q$ , función que multiplica a la restricción mixta, son Lipschitz continuas.

## 2.6. Legendre - Clebsch

**Condición generalizada de Legendre - Clebsch:** En esta sección analizaremos el caso particular en el cual el Hamiltoniano es lineal en el control. Daremos condiciones necesarias de segundo orden (Teorema de Legendre Clebsch) que nos darán información importante en este caso particular. Consideremos el problema de control óptimo con función de costo y ecuación de estado lineales en el control. Es decir, tenemos el funcional de costo.

$$(2.6.1) \quad J(u(\cdot)) = \int_0^T L_0(t, x(t)) + L_1(t, x(t))u(t)dt$$

sujeto al sistema de ecuaciones

$$(2.6.2) \quad \dot{x}(t) = f_0(t, x(t)) + f_1(t, x(t))u(t) \text{ para casi todo } t \in [0, T]$$

y las restricciones

$$(2.6.3) \quad |u(t)| \leq K \text{ para casi todo } t \in [0, T]$$

$$(2.6.4) \quad x(t_0) = x_0, \quad x(T) \in \mathbb{R}^n.$$

Donde  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $f_0$  y  $f_1$  verifican las hipótesis H1) y la solución de la ecuación de estado es como definimos anteriormente una función vectorial absolutamente continua.

El Hamiltoniano para este problema esta definido por

$$(2.6.5) \quad H(t, x, p, u) = p^T f_0(t, x) + L_0(t, x) + [p^T f_1(t, x) + L_1(t, x)]u$$

con  $p \in \mathbb{R}^n$ . Según el principio del máximo y el corolario de normalidad del óptimo de la sección 2.3 la condición necesaria para que el par  $(u_*(\cdot), x_*(\cdot))$  sea óptimo es la existencia de una función absolutamente continua  $p(\cdot)$ , llamada función adjunta, que cumpla

$$(2.6.6) \quad \dot{p}(t) = -H_x^T(t, x_*(t), p(t), u_*(t)) \text{ a.e. en } [0, T],$$

$$(2.6.7) \quad p(T) = 0,$$

(2.6.8)

$$H(t, x_*(t), p_*(t), u_*(t)) \leq H(t, x_*(t), p_*(t), v) \quad \forall |v| \leq K \text{ y para casi todo } t \in [0, T].$$

Para cualquier terna  $(x(\cdot), p(\cdot), u(\cdot))$  que satisfacen (2.6.2), (2.6.3) y (2.6.6), definimos

$$(2.6.9) \quad \phi(t) = p^T f_1(t, x(t)) + L_1(t, x(t)) = (\partial/\partial u)H(t, x(t), p(t), u(t)).$$

De manera que el Hamiltoniano se puede reescribir como

$$H(t, x(t), p(t), u(t)) = p^T f_0(t, x) + L_0(t, x) + \phi(t)u.$$

. De esta expresión y de (2.6.8) se pueden obtener dos posibilidades diferentes para el control óptimo  $u_*(\cdot)$  en un subintervalo  $(t_a, t_b) \subset [0, T]$ ,

$$(2.6.10) \quad \phi_*(t) \neq 0 \Rightarrow u_*(t) = -K \operatorname{sgn}(\phi_*(t)), \quad t \in (t_a, t_b) \quad \text{ó}$$

$$(2.6.11) \quad \phi_*(t) = 0, \quad t \in (t_a, t_b).$$

Cualquier terna  $(x_*(\cdot), p(\cdot), u_*(\cdot))$  que satisfacen (2.6.2), (2.6.3) (2.6.4), (2.6.6), (2.6.7) y (2.6.8) es un extremo para el problema, y  $\phi_*$  denota la evaluación de  $\phi$  en el extremo.

Un arco correspondiente al subintervalo  $(t_a, t_b)$  se dice no singular si cumple (2.6.10) y, se dice singular si cumple (2.6.11). Sobre un arco no singular, el principio del máximo (2.6.8) se satisface estrictamente. En un arco singular, la condición necesaria de primer orden (2.6.8) se satisface trivialmente y no nos da información sobre el control óptimo.

Definimos el orden de un arco singular extremo en  $(t_a, t_b)$  como el entero  $q$  tal que  $(d^{2q}/dt^{2q})[H_u]$  es el mínimo orden de derivada total de  $H_u$  en el que aparece explícitamente  $u$ .

Para determinar el orden de un arco extremo singular, derivamos  $H_u(t, x_*(t), p(t), u_*(t))$  respecto de  $t$

$$\begin{aligned} (d/dt)H_u &= H_{ut} + H_{ux}^T \dot{x} + H_{up}^T \dot{p} \\ &= H_{ut} + H_{ux}^T [f_0(t, x) + f_1(t, x)u] - H_{up}^T H_x^T \end{aligned}$$

usando (2.6.2) y (2.6.6).

Definimos ahora el orden intrínseco de un problema de control óptimo en el cual el control aparece linealmente, como el menor entero  $q$  tal que  $(d^{2q}/dt^{2q})H_u$  depende explícitamente de  $u$ .

Se conoce el siguiente teorema que nos da condiciones de segundo orden en caso de estar en un arco singular el cual se encuentra en el artículo [9].

**Teorema Legendre - Clebsch:** Supongamos que  $(x_*(\cdot), p(\cdot), u_*(\cdot))$  es un extremo normal para el problema de orden intrínseco  $q$ , con un arco singular en el intervalo  $(t_a, t_b)$ , y tal que  $|u_*(t)| \leq K$  para  $t \in (t_a, t_b)$ . Luego, para que el extremo sea óptimo es necesario que valga

$$(2.6.12) \quad (-1)^q \{ \partial / \partial u (d^{2q} / dt^{2q}) H_u \}_* \geq 0$$

para todo  $t \in (t_a, t_b)$  para los cuales  $u_*$  es analítica.





## CHAPTER 3

### Modelo SEIR con control

En este capítulo estudiaremos los problemas SEIR con control teniendo en cuenta dos tipos. Uno en el que no existen restricciones, y el otro en el cual consideramos una restricción mixta de control-estado.

Si bien son dos tipos de problemas diferentes, podemos probar a través de un lema, indistintamente del problema que estemos considerando, que cada una de las variables del sistema de ecuaciones son positivas. Esto es consistente con lo que estamos estudiando ya que cada una de las variables representa un grupo poblacional.

El lema que usaremos es el siguiente.

**Lema :** Sea  $A(t) \in L^1[t_0, T]$ ,  $k$  constante positiva y sea el sistema lineal de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} y'(t) = A(t) + ky(t), & t \geq t_0, \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Entonces, la solución  $y : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  viene dada por:

$$y(t) = y(t_0)e^{k(t-t_0)} + e^{k(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-k(s-t_0)} A(s) ds.$$

Demostración :

$$y'(t) = A(t) + ky(t)$$

$$\Rightarrow y'(t) - ky(t) = A(t)$$

Multiplicando por  $e^{-k(t-t_0)}$  resulta

$$\underbrace{e^{-k(t-t_0)}y'(t) - e^{-k(t-t_0)}ky(t)}_{(e^{-k(t-t_0)}y(t))'} = e^{-k(t-t_0)}A(t).$$

Integrando entre  $t_0$  y  $t$  obtenemos:

$$\int_{t_0}^t (e^{-k(s-t_0)}y(s))'ds = \int_{t_0}^t e^{-k(s-t_0)}A(s)ds$$

$$\Rightarrow e^{-k(t-t_0)}y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-k(s-t_0)}A(s)ds.$$

Luego,

$$\Rightarrow y(t) = y(t_0)e^{k(t-t_0)} + e^{k(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-k(s-t_0)}A(s)ds.$$

■

**Observación:** Si  $y_0 \geq 0$  y  $A(t) > 0$  en casi todo punto de  $[t_0, T]$ , entonces  $y(t) > 0$  en casi todo punto de  $[t_0, T]$ . De la misma manera, si  $y_0 \geq 0$  y  $A(t) \geq 0$  entonces  $y(t) \geq 0$ .

### 3.1. Invarianza de la solución

Consideraremos el problema

$$\begin{cases} \dot{S} = b(S + E + I + R) - dS - cSI - u(t)S \\ \dot{E} = cSI - (e + d)E \\ \dot{I} = eE - (g + a + d)I \\ \dot{R} = gI - dR + u(t)S \end{cases}$$

con  $t \in [0, T]$ . Sea

$$D = \mathbb{R}_+^4 = \{(S, E, I, R) \in \mathbb{R}^4 / S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, R \geq 0\}.$$

Recordar que resolver este sistema es equivalente a resolver el sistema en las variables  $(S, E, I, N)$ .

Sea  $u(t)$  medible tal que  $u(t) \in [0, 1]$  y  $(S, E, I, R)$  solución del sistema entonces la solución es invariante por  $D$ . Primero debemos asegurar que existe solución local y es única, para esto usaremos el teorema de existencia y unicidad enunciado en la sección 2.

En este caso, el problema a valores iniciales es

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad f(x) = \begin{pmatrix} -bN - dS - cSI \\ cSI - (e + d)E \\ eE - (g + a + d)I \\ gI - dR + u(t)S \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} -S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x(0) = (S_0, E_0, I_0, R_0).$$

Como  $f(x) + g(x)u$  es continua, es localmente Lipschitz en  $x$  y como no depende explícitamente de  $t$ , no hay que probar que es integrable en  $t$ . Entonces existe solución y es única.

Consideremos un intervalo maximal de existencia  $[0, \tau)$ , queremos ver que la solución del problema siempre se mantiene dentro de  $D$  para todo  $t \in [0, \tau)$ . Sea  $t \in [0, \tau)$  tal que  $(S(t), E(t), I(t), R(t)) \in D$ .

- (1) Si  $S(t) = E(t) = I(t) = R(t) = 0 \Rightarrow$  la solución del problema es  $S \equiv E \equiv I \equiv R \equiv 0$ .

Supongamos ahora que no todos son igual a 0, es decir  $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) > 0$  entonces

- (2) Si  $S(t) = 0 \Rightarrow E(t) + I(t) + R(t) > 0$ , queremos analizar el signo de  $S$ . La ecuación que nos queda es

$$\dot{S}(t) = b(E + I + R) > 0.$$

Queremos ver que existe  $\delta > 0 / S(\xi) > 0$  si  $\xi \in (t, t + \delta)$ .

Usando el desarrollo de Taylor de  $S(\xi)$  obtenemos que existe  $\delta > 0$  tal que

$$S(\xi) = S(t) + \dot{S}(t)(\xi - t) + o(\xi - t) \quad \forall \xi \in [t, t + \delta),$$

como sabemos que  $S(t) = 0$  entonces,

$$S(\xi) = \dot{S}(t)(\xi - t) + o(\xi - t).$$

Dado que  $o(\xi - t)$  es despreciable, podemos quedarnos con

$$S(\xi) = \dot{S}(t)(\xi - t)$$

y como  $(\xi - t) > 0$ , y  $\dot{S}(t) > 0$ , concluimos que  $S(\xi) > 0$ .

Luego,  $S(\xi) > 0 \forall \xi \in (t, t + \delta)$ , es decir, la solución apunta hacia adentro del conjunto  $D$ .

- (3) Si  $I(t) = 0$ , como  $(S(t), E(t), I(t), R(t)) \in D$ , sabemos que  $E(t) \geq 0$ .
- a) Si  $E(t) > 0 \Rightarrow \dot{I}(t) > 0$  pues  $\dot{I}(t) = eE(t)$ . Como  $\dot{I}$  es continua,  $I(\xi)$  es creciente en  $[t, t + \delta)$ , para algún  $\delta > 0$ . Entonces  $I(\xi) > I(t) = 0 \forall \xi \in (t, t + \delta)$ , es decir, la solución apunta hacia adentro del conjunto  $D$ .
- b) Si  $E(t) = 0 \Rightarrow I \equiv E \equiv 0$  son solución de las ecuaciones que involucran a  $\dot{E}, \dot{I} \Rightarrow$  se queda en el borde.

Hasta acá vimos que  $S(\xi) \geq 0 \forall \xi \in [0, \tau)$  y  $I(\xi) \geq 0 \forall \xi \in [0, \tau)$ .

- (4) Si  $E(t) = 0 \Rightarrow S(t) + I(t) + R(t) > 0$ .

Como sabemos que  $I(t) \geq 0$ , tenemos dos opciones:

- a) Si  $I(t) = 0$  estamos en el mismo caso que (3) b).
- b) Si  $I(t) > 0$  tenemos  $\dot{E}(\xi) = \underbrace{cS(\xi)I(\xi)}_{\geq 0} - (e + d)E(\xi) \forall \xi \geq t$ , entonces por lema anterior sabemos que  $E(\xi) \geq 0 \forall \xi \in [0, \tau)$ .

- (5) Si  $R(t) = 0 \Rightarrow \dot{R}(\xi) = -dR(\xi) + \underbrace{gI(\xi) + u(\xi)S(\xi)}_{\geq 0} \forall \xi \geq t$ , usando el lema anterior sabemos que  $R(\xi) \geq 0 \forall \xi \in [0, \tau)$ . Además se puede observar que  $gI(\xi) + u(\xi)S(\xi) \in L^1[t, r]$  con  $r < \tau$  pues  $u$  es medible y toma valores entre 0 y 1 y sabemos que  $I$  y  $S$  son continuas.

Con esto podemos concluir que en  $(t, t + \delta)$  las soluciones quedarán siempre dentro del conjunto  $D$ . Con lo cual se mantienen en  $D$  para todo  $t \in [0, \tau)$ . Es decir, la solución es invariante por  $D$ .

Veamos que, siempre y cuando las soluciones existan, están acotadas.

Vimos que  $S, E, I, R \geq 0$ , queremos ver que las soluciones están definidas globalmente en  $[0, T]$ . Para eso, supongamos que están definidas en  $[0, \tau) \subset [0, T]$  y veamos que están acotadas. El sistema que analizaremos es

$$\begin{cases} \dot{S} = b(S + E + I + R) - dS - cSI - u(t)S \\ \dot{E} = cSI - (e + d)E \\ \dot{I} = eE - (g + a + d)I \\ \dot{R} = gI - dR + u(t)S \end{cases}$$

Además usaremos la ecuación  $\dot{N} = (b - d)N - aI$  para acotar las soluciones ya que

$$\begin{aligned} N(t) &= N(0)e^{-\int_0^t (b-d)ds} - e^{-\int_0^t (b-d)ds} \int_0^t e^{(b-d)s} \underbrace{aI(s)}_{\geq 0} ds \leq \\ &\leq N(0)e^{-\int_0^t (b-d)ds} = N(0)e^{(b-d)t} \leq N(0)e^{(b-d)T} = N_0 e^{(b-d)T}. \end{aligned}$$

Entonces  $N(t)$  está uniformemente acotada.

Como sabemos que vale  $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N(t)$  resulta que

$$S(t) \leq S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N(t).$$

$$E(t) \leq S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N(t).$$

$$I(t) \leq S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N(t).$$

$$R(t) \leq S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N(t).$$

Entonces todas las variables están acotadas en el intervalo en el que están definidas.

Lo cual nos permiten decir que existen en el intervalo  $[0, T]$ .

### 3.2. Existencia de control óptimo para los problemas SEIR

En esta sección probaremos la existencia de control para los problemas SEIR que estudiaremos en este capítulo. El problema estudiado en la sección 3.3 tiene función objetivo lineal y no tiene restricciones mixtas, el problema de la sección 3.4 tiene función objetivo lineal y restricciones mixtas y el estudiado en la sección 3.5 tiene función objetivo cuadrática y restricciones mixtas.

A continuación plantearemos el problema a estudiar de manera genérica

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } J(x, u) = \int_0^T L(x(t), u(t))dt; \\ \text{sujeto a :} \\ \dot{S}(t) = bN(t) - dS(t) - cS(t)I(t) - u(t)S(t), \\ \dot{E}(t) = cS(t)I(t) - (e + d)E(t), \\ \dot{I}(t) = eE(t) - (g + a + d)I(t), \\ \dot{N}(t) = (b - d)N(t) - aI(t), \\ u(t) \in [0, 1] \text{ a.e. } t \in [0, T], \\ \varphi(t, x(t), u(t)) \in \Phi, \\ (S(0), E(0), I(0), N(0)) = (S_0, E_0, I_0, N_0), \\ (S(T), E(T), I(T), N(T)) \in \mathbb{R}^4 \end{array} \right.$$

Con  $L(x(t), u(t)) = I(t) + Bu(t)$  para los problemas con función objetivo lineal y  $L(x(t), u(t)) = AI(t) + u^2(t)$  para el problema con función objetivo cuadrático.

Además, para el problema sin restricciones no existe  $\varphi(t, x(t), u(t))$  y para los problemas con restricciones consideraremos  $\varphi(t, x(t), u(t)) = x_1(t)u - V_0 = S(t)u - V_0$  y  $\Phi = \mathbb{R}_{\leq 0}$ .

Como podemos ver, las funciones  $f(x) + g(x)u$ ,  $L$  y  $\varphi$  cumplen las hipótesis de regularidad clásicas.

Las constantes A y B, de cada una de las funciones objetivo, son pesos a definir. Nuestra ecuación diferencial  $\dot{x}(t) = (\dot{S}, \dot{E}, \dot{I}, \dot{N})(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t)$  está dada por

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad f(x) = \begin{pmatrix} -bN - dS - cSI \\ cSI - (e + d)E \\ eE - (g + a + d)I \\ (b - d)N - aI \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} -S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como podemos ver es lineal en el control y es no lineal en el estado  $x$  por el término  $SI$ .

Antes de buscar una solución necesitamos asegurar que existe. Para esto usaremos el Teorema de Existencia dado en la sección 2.5. Como vimos en la sección de invarianza de la solución 3.1, las soluciones se mantienen siempre uniformemente acotadas y son positivas, por lo tanto vimos que dado  $u \in [0, 1]$  medible,  $\exists R > 0$  tal que la solución  $x(t)$  del problema  $(P)$  cumple que  $x(t) \in \mathbb{R}_+^4 \cap \overline{B(0, R)}$ .

Entonces, como las soluciones siempre se encuentran en ese conjunto, es lo mismo considerar el problema  $(P)$  que considerar el problema  $(P_Q)$  dado por el problema  $(P)$  agregando la condición  $x(t) \in Q = \mathbb{R}_+^4 \cap \overline{B(0, R)} \forall t \in [0, T]$ , donde  $Q$  es el conjunto al cual pertenece el estado  $x(t)$  planteado en la sección de existencia de control 2.5. Luego consideraremos el problema  $(P_Q)$ .

Observemos que tomando  $u = 0$  obtenemos una solución admisible con costo finito. Pues, obtenemos el siguiente problema de ecuaciones diferenciales ordinarias con  $f$  Lipschitz:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } J(x, u) = \int_0^T L(x(t), 0)dt; \\ \text{sujeto a :} \\ \dot{S}(t) = bN(t) - dS(t) - cS(t)I(t), \\ \dot{E}(t) = cS(t)I(t) - (e + d)E(t), \\ \dot{I}(t) = eE(t) - (g + a + d)I(t), \\ \dot{N}(t) = (b - d)N(t) - aI(t), \\ (S(0), E(0), I(0), N(0)) = (S_0, E_0, I_0, N_0), \\ x(t) \in Q, \\ (S(T), E(T), I(T), N(T)) \in \mathbb{R}^4 \end{array} \right.$$

Que lo podemos ver como

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \int_0^T L(x(t), 0)dt; \\ \text{sujeto a :} \\ \dot{x} = f(x(t)) \forall t, \\ x(0) = x_0, \\ x(t) \in Q, \\ x(T) \in \mathbb{R}^4 \end{array} \right.$$

Por lo tanto, existe al menos un par admisible tal que la función objetivo es finita. Quiero ver entonces que se cumplen las hipótesis del teorema para este problema.

- a. Veamos que  $f$  y  $g$  son continuas en  $x$  y tienen crecimiento lineal, es decir, existe una constante  $M$  tal que

$$x \in Q \Rightarrow |f(x)| \leq M(1 + |x|);$$

y

$$x \in Q \Rightarrow |g(x)| \leq M(1 + |x|);$$

La función  $g(S, E, I, N) = (-S, 0, 0, 0)$  es continua en  $x$ . Nos falta ver que es una función con crecimiento lineal

$$g(x) = (-S, 0, 0, 0) \Rightarrow |g(x)| = |S| \leq ||x||.$$

Si tomamos  $M = 1 \Rightarrow |g(x)| \leq M||x|| \leq M||x|| + M = M(1 + ||x||)$ . Luego,  $g$  tiene un crecimiento lineal.

La función  $f$  es continua ya que es suma y producto de funciones continuas. Para ver que tiene crecimiento lineal, es necesario probar que cada una de sus componentes tiene crecimiento lineal.  $f(x) = (\dot{S}, \dot{E}, \dot{I}, \dot{N})$ , y como podemos ver en las ecuaciones de cada coordenada,  $\dot{I}$  y  $\dot{N}$  son lineales pero  $\dot{S}$  y  $\dot{E}$  no son lineales por el término  $cSI$ . Pero, como sabemos que  $x(t) \in \mathbb{R}_+^4 \cap \overline{B(0, R)}$ , podemos acotar una de las dos variables, por ejemplo  $I$  y obtener la linealidad en el término  $cSI$  ya que nos quedaría  $cR|S|$ .

Luego, probamos que  $f$  tiene crecimiento lineal.



Como vimos tenemos dos posibilidades para la función  $L(x(t), u(t))$ , pero ambas son funciones continuas en  $x$  ya que dependen de  $I(t)$  que es continua.

- b. Veamos que el conjunto  $U$  es cerrado y convexo y que los conjuntos  $E$  y  $Q$  son cerrados;

$U = [0, 1]$  es cerrado y convexo.

$E = \mathbb{R}^4$  es cerrado.

$Q = \mathbb{R}_+^4 \cap \overline{B(0, R)}$  es cerrado.

- c. Veamos ahora que  $L(x, \cdot)$  es convexa para cada  $x \in Q$ , y que existe una constante  $\lambda$  tal que

$$x \in Q, u \in U \Rightarrow L(x, u) \geq \lambda;$$

para cada una de las funciones objetivo que vamos a estudiar.

i.  $L(x, u) = I + Bu$

- $L(x, \cdot)$  es convexa para cada  $x \in \mathbb{R}_+^4$  pues es una función lineal.
- Además, como estamos considerando  $x \in \mathbb{R}_+^4 \cap \overline{B(0, R)}$ ,  $L(x, u) = I + Bu \geq 0$ . Luego, la constante que usaremos es  $\lambda = 0$ .

ii.  $L(x, u) = AI + u^2$

- $L(x, \cdot)$  es convexa para cada  $x \in \mathbb{R}_+^4 \cap \overline{B(0, R)}$  pues es una función cuadrática.
- Además, como estamos considerando  $x \in \mathbb{R}_+^4 \cap \overline{B(0, R)}$ ,  $L(x, u) = AI + u^2 \geq 0$ . Luego, la constante que usaremos es  $\lambda = 0$ .

Entonces el problema, cualquiera sea el que estemos considerando, tiene solución.

Además se puede probar que la solución  $u$  es continua cuando el costo es cuadrático y no lo es cuando es lineal, como se verá mas adelante, ya que en estos casos los controles de las soluciones óptimas son de tipo bang-bang.

Como vimos en la sección 2.5, se puede enunciar el problema ( $\tilde{P}$ ) para adaptar el problema de [10] al nuestro. Observaremos que se cumplen las hipótesis del teorema de regularidad del control de la sección 2.5.

$\tilde{H}1$ ) Las funciones  $L$ ,  $f$  y  $g$  son de clase  $C^1$ .

$\tilde{H}2$ ) La función  $u \mapsto L(x, u) = AI + u^2$  es de clase  $C^2$  y fuertemente convexa ya que  $D_{uu}^2 L(x, u) = 2$ . Además, la función  $x \mapsto D_u L(x, u)$  es Lipschitz continua ya que  $D_u L(x, u) = 2u$ .

$\tilde{H}3$ ) En este caso  $\varphi(x, u) = (Su - V_0, u - 1, -u)$ , entonces la función  $x \mapsto \varphi(x, u)$  es de clase  $C^1$  ya que todas sus coordenadas lo son y la función  $u \mapsto \varphi(x, u)$  es de clase  $C^2$  y convexa para  $x \in \Omega$ . Y además la función  $x \mapsto D_u \varphi(x, u) = (S, 1, -1)$  es Lipschitz continua en  $E \subset \mathbb{R}^4$  compacto.

$\tilde{H}4$ ) Definimos  $I(t) = \{j \mid \varphi_j(x_*(t), u_*(t)) = 0\}$ . Para casi todo  $t \in [0, T]$  y  $\forall (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \neq (0, 0, 0)$ ,  $\sum_{i \in I(t)} \beta_i D_u(\varphi_i(x_*(t), u_*(t))) \neq 0$

En este caso  $I(t) = \{j \in \{1, 2, 3\} \mid \varphi_j(x_*(t), u_*(t)) = 0\}$ .

- Si  $S_*(t)u_*(t) = V_0 \Rightarrow j = 1 \in I(t)$ .
- Si  $u_*(t) - 1 = 0 \Rightarrow j = 2 \in I(t)$ .
- Si  $-u_*(t) = 0 \Rightarrow j = 3 \in I(t)$ .

Se puede observar fácilmente que si  $3 \in I(t)$ , 1 y 2 no pueden estarlo. Luego, hay cuatro opciones para  $I(t)$  que son  $I(t) = \{1\}$ ,  $I(t) = \{2\}$ ,  $I(t) = \{3\}$  y  $I(t) = \{1, 2\}$  pues las tres juntas no pueden cumplirse y si  $j = 3 \in I(t)$  no se pueden cumplir las otras dos. Entonces:

- Si  $I(t) = \{1, 2\} \Rightarrow$  por el caso  $j = 2$ ,  $u_* = 1$  y por  $j = 1$ ,  $S_*(t) = V_0$ . Luego,  $\beta_1 S_*(t) + \beta_2 = 0 \iff (\beta_1, \beta_2) = (0, 0)$  pues  $S_*(t) = V_0 > 0$ .
- Si  $I(t) = \{1\} \Rightarrow S_*(t)u_*(t) = V_0$ . Luego,  $\beta_1 S_*(t) = 0 \iff \beta_1 = 0$ . Pues si  $S_*(t) = 0$  resulta que  $V_0 = 0$  lo cual sabemos que no es cierto porque  $V_0 > 0$  una constante conocida.
- Si  $I(t) = \{2\} \Rightarrow u_*(t) = 1$ . Luego,  $\beta_2 = 0 \iff \beta_2 = 0$ .
- Si  $I(t) = \{3\} \Rightarrow u_* = 0$ . Luego,  $-\beta_3 = 0 \iff \beta_3 = 0$ .

Por lo tanto,  $u$  es un función Lipschitz continua.

Podemos observar que todas las hipótesis valen para la función  $L(x, u) = I + Bu$  salvo la hipótesis  $\tilde{H}2$ ) ya que la función  $u \mapsto L(x, u) = I + Bu$  no es fuertemente convexa pues  $D_{uu}^2 L(x, u) = 0$ .

### 3.3. Modelo SEIR con función objetivo lineal sin restricciones mixtas

En esta sección se estudiará el problema planteado por Maurer y de Pinho [3] en la sección 4 de ese artículo, en el que se quiere encontrar un control que minimice una función objetivo lineal sujeto a ciertas condiciones.

Consideraremos las variables y parámetros del modelo SEIR con control enunciadas en las secciones 1.1 y 1.2.

El sistema de ecuaciones diferenciales que tenemos es:

$$(3.3.1) \quad \dot{S}(t) = bN(t) - dS(t) - cS(t)I(t) - u(t)S(t), \quad S(0) = S_0$$

$$(3.3.2) \quad \dot{E}(t) = cS(t)I(t) - (e + d)E(t), \quad E(0) = E_0$$

$$(3.3.3) \quad \dot{I}(t) = eE(t) - (g + a + d)I(t), \quad I(0) = I_0$$

$$(3.3.4) \quad \dot{N}(t) = (b - d)N(t) - aI(t), \quad N(0) = N_0$$

En este caso consideraremos que el total de la población susceptible puede ser vacunada. Como  $u(t)$  representa la fracción de individuos vacunados, tenemos la restricción de control:

$$(3.3.5) \quad 0 \leq u(t) \leq 1 \text{ a.e. } t \in [0, T].$$

Como vimos anteriormente alcanza con usar las variables  $S$ ,  $E$ ,  $I$ ,  $N$  ya que la población recuperada,  $R$ , se obtiene a partir de las demás variables.

Consideramos el funcional de costo  $L^1$ , que es lineal con respecto a la variable de control  $u$ .

$$(3.3.6) \quad J(x, u) = \int_0^T (I(t) + Bu(t))dt, \quad (B > 0).$$

El problema de control básico consiste en determinar una función medible  $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  que minimice el funcional  $J(x, u)$  de tipo  $L^1$  sujeto a las restricciones anteriores.

### Solución del problema básico de control óptimo

El problema básico de control óptimo se puede escribir de forma compacta de la siguiente manera

$$(OCP) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } J(x, u) = \int_0^T (I(t) + Bu(t))dt; \\ \text{sujeto a :} \\ \dot{S}(t) = bN(t) - dS(t) - cS(t)I(t) - u(t)S(t), \quad S(0) = S_0 \\ \dot{E}(t) = cS(t)I(t) - (e + d)E(t), \quad E(0) = E_0 \\ \dot{I}(t) = eE(t) - (g + a + d)I(t), \quad I(0) = I_0 \\ \dot{N}(t) = (b - d)N(t) - aI(t), \quad N(0) = N_0 \\ u(t) \in [0, 1] \text{ a.e. } t \in [0, T]. \end{array} \right.$$

El vector de estado está dado por  $x = (S, E, I, N)$ .

Como la variable de control aparece en las restricciones dinámicas de manera lineal, el lado derecho de las EDOs es de la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad f(x) = \begin{pmatrix} -bN - dS - cSI \\ cSI - (e + d)E \\ eE - (g + a + d)I \\ (b - d)N - aI \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} -S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notaremos al integrando de la función objetivo como  $L(x, u) = I + Bu$ .

A continuación evaluaremos las condiciones necesarias de optimalidad para el problema (OCP).

La función Hamiltoniano para este problema se define por:

$$H^\lambda(x, p, u) = -\lambda L(x, u) + \langle p, f(x) + g(x)u \rangle,$$

con  $p = (p_S, p_E, p_I, p_N) \in \mathbb{R}^4$  las variables adjuntas y  $\lambda \geq 0$ .

Sea  $(x_*, u_*)$  un par admisible estado-control óptimo que cumple con las hipótesis del principio del máximo sin restricciones enunciado como el principio del máximo en la sección 2.3. Por otro lado, en la sección 2.4.2, en la cual enunciamos el problema

adaptado al que vamos a estudiar, se ve que las funciones cumplen las hipótesis, en este caso no hay que probar que cumplen con la condición de regularidad C) ya que no tiene restricciones mixtas.

Como vimos este principio asegura la existencia de un escalar  $\lambda \geq 0$  y una función absolutamente continua  $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que se satisfacen las siguientes condiciones en casi todo  $t$ . La notación  $[t]$  indica que se evalúa en la solución óptima:

(i)  $\max\{|p(t)| : t \in [0, T]\} + \lambda > 0$ .

(ii) Ecuación adjunta y condición de transversalidad

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= -H_x^\lambda[t] = \lambda L_x[t] - \langle p, f_x[t] + g_x[t]u_*(t) \rangle, \\ p(T) &= (0, 0, 0, 0).\end{aligned}$$

(iii) Condición máxima para el Hamiltoniano  $H^\lambda$

$$H^\lambda(x_*(t), p(t), u_*(t)) = \max_u \{H^\lambda(x_*(t), p(t), u) \mid 0 \leq u \leq 1\}.$$

Las ecuaciones adjuntas en (ii) para la variable adjunta  $p = (p_S, p_E, p_I, p_N)$  están dadas explícitamente por

$$(3.3.7) \quad \dot{p}_S(t) = p_S(t)(d + cI_*(t) + u_*(t)) - p_E(t)cI_*(t),$$

$$(3.3.8) \quad \dot{p}_E(t) = p_E(t)(e + d) - p_I(t)e,$$

$$(3.3.9) \quad \dot{p}_I(t) = 1 + p_S(t)cS_*(t) - p_E(t)cS_*(t) + p_I(t)(g + a + d) + p_N(t)a,$$

$$(3.3.10) \quad \dot{p}_N(t) = -p_S(t)b - p_N(t)(b - d).$$

Para evaluar la condición del máximo (iii) para el Hamiltoniano  $H^\lambda$ , consideramos la función

$$\begin{aligned}\phi(x_*, p) &= H_u^\lambda(x_*, u, p) = D_u(-\lambda(I_* + Bu) + p \cdot (f + gu)) = \\ (3.3.11) \quad &= -\lambda B - p \cdot g = -\lambda B - p_S S_*.\end{aligned}$$

Definimos  $\phi(t) = \phi(x_*(t), p(t))$ .

Usando el Corolario 3 de la sección 2 se puede ver que el problema es normal, es decir  $\lambda \neq 0$ . Por lo tanto,  $\lambda > 0$ , normalizando podemos tomar  $\lambda = 1$ .

Luego, la condición (iii) es equivalente a pedir

$$(3.3.12) \quad \phi(t)u_*(t) = \max_u \{\phi(t)u \mid 0 \leq u \leq 1\},$$

pues:

$$\begin{aligned} \max_u H(x_*, u, p) &= \max_u \{- (I_* + Bu) + p \cdot (f + gu)\} = \\ &= \max_u \{-Bu + p \cdot gu\} = \max_u (-B + p \cdot g)u = \\ &= \max_u (-B - p_S S_*)u. \end{aligned}$$

Con lo cual se obtiene un control

$$(3.3.13) \quad u_*(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \phi(t) > 0 \\ 0 & \text{si } \phi(t) < 0 \\ \text{sing} & \text{si } \phi(t) = 0 \text{ } [t_1, t_2] \subset [0, T] \end{array} \right\}.$$

Por cada cero aislado de la función  $\phi$  se obtiene un salto de 0 a 1 o viceversa. El control  $u$  se llama bang-bang en un intervalo  $[t_1, t_2] \subset [0, T]$  si la función  $\phi$  tiene solo ceros aislados en el intervalo  $[t_1, t_2]$ . El control  $u$  se llama singular en un intervalo  $[t_1, t_2] \subset [0, T]$  si la función  $\phi$  vale constantemente cero en  $[t_1, t_2]$ . Luego, el control óptimo es una concatenación de arcos bang-bang y singulares.

Para obtener una expresión para el control singular, derivaremos la relación

$$(3.3.14) \quad \phi(t) = -B - p_S(t)S_*(t) = 0,$$

en un intervalo  $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ . Para la primer derivada obtenemos, omitiendo el argumento tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= -\dot{p}_S S_* - p_S \dot{S}_*, \\ \dot{\phi} &= -dp_S S_* - cI_* S_* p_S - up_S S_* + cI_* p_E S_* - p_S b N_* + p_S d S_* + p_S c S_* I_* + p_S u S_*, \\ \dot{\phi} &= p_E c I_* S_* - p_S b N_*. \end{aligned}$$

Luego

$$(3.3.15) \quad \dot{\phi} = p_{EC}I_*S_* - p_SbN_* = 0.$$

Derivando nuevamente  $\phi$  se obtiene:

$$(3.3.16) \quad 0 = \ddot{\phi} = \dot{p}_{EC}I_*S_* + p_{EC}\dot{I}_*S_* + p_{EC}I_*\dot{S}_* - \dot{p}_SbN_* - p_Sb\dot{N}_*.$$

Usando las ecuaciones de estado y adjunta

$$\dot{S}_*(t) = bN_* - dS_* - cS_*I_* - uS_*,$$

$$\dot{I}_*(t) = eE_* - (g + a + d)I_*,$$

$$\dot{N}_*(t) = (b - d)N_* - aI_*,$$

$$\dot{p}_S(t) = p_S(d + cI_* + u) - p_{EC}I_*,$$

$$\dot{p}_E(t) = p_E(e + d) - p_Ie,$$

obtenemos:

$$0 = \ddot{\phi} = (p_E(e + d) - p_Ie)cI_*S_* + p_{EC}(eE_* - (g + a + d)I_*)S_* + p_{EC}I_*(bN_* - dS_* - cS_*I_* - uS_*) - (p_S(d + cI_* + u) - p_{EC}I_*)bN_* - p_Sb((b - d)N_* - aI_*).$$

Como podemos observar, en la derivada segunda aparece explícitamente  $u$ .

La condición de Legendre-Clebsch Generalizada, GLC, 2.6 requiere que valga la siguiente desigualdad:

$$(3.3.17) \quad \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial u} \geq 0.$$

Si derivamos  $\ddot{\phi}$  respecto de  $u$  obtentemos

$$(3.3.18) \quad \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial u} = -p_{EC}I_*S_* - p_SbN_*.$$

Como  $\dot{\phi} = 0$  resulta  $p_{EC}I_*S_* = p_SbN_*$ . Entonces,

$$(3.3.19) \quad \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial u} = -2p_SbN_*.$$

Es fácil ver que se cumple la condición GLC estricta. De la ecuación (3.3.14), obtenemos,  $p_S(t) = -\frac{B}{S_*} < 0$ , entonces

$$(3.3.20) \quad \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial u} = -2 \left( \frac{-B}{S_*} \right) bN_* = \frac{2BbN_*}{S_*} > 0,$$

pues  $S(t)_* > 0$  ya que estamos en  $[t_1, t_2]$  en donde  $\phi(t) = 0$  y como  $B \neq 0 \Rightarrow S$  ni  $p_S$  pueden ser cero. Esto permite determinar una expresión para el control singular  $u_{sing} = u_{sing}(x, p)$  despejando  $u$  de (3.3.16).

Por lo tanto, encontramos una expresión para  $u_*(t)$ .



### 3.4. Modelo SEIR con función objetivo lineal y restricciones

En esta sección estudiaremos el modelo SEIR con función objetivo lineal visto en la sección anterior considerando una restricción mixta en el estado-control como se desarrolla en la sección 6 del artículo de Maurer y de Pinho [3].

Esta restricción mixta de estado-control esta dada por

$$u(t)S(t) \leq V_0 \text{ a.e. } t \in [0, T].$$

Que representa la cantidad de vacunas disponibles para ser aplicadas a la población susceptible. Con el objetivo de que el problema sea realista, esta cantidad de vacunas disponibles está limitada por la constante positiva  $V_0$ .

Podemos escribir a la restricción como

$$\varphi(x, u) = uS - V_0 \leq 0.$$

Dado que tenemos restricciones mixtas, necesitaremos probar que vale la condición de regularidad C). Para eso vimos en la sección 2.4.2 que alcanza con pedir que  $S_*(t) \geq 0$  para todo  $t \in [0, T]$  donde la restricción mixta está activa. Lo cual probamos que vale siempre en todo el intervalo en que está definida la solución.

Luego, el problema a estudiar es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } J(x, u) = \int_0^T (I(t) + Bu(t))dt; \\ \text{sujeto a :} \\ \dot{S}(t) = bN(t) - dS(t) - cS(t)I(t) - u(t)S(t), \quad S(0) = S_0 \\ \dot{E}(t) = cS(t)I(t) - (e + d)E(t), \quad E(0) = E_0 \\ \dot{I}(t) = eE(t) - (g + a + d)I(t), \quad I(0) = I_0 \\ \dot{N}(t) = (b - d)N(t) - aI(t), \quad N(0) = N_0 \\ u(t) \in [0, 1] \text{ a.e. } t \in [0, T], \\ u(t)S(t) - V_0 \leq 0. \end{array} \right.$$

Sea el par  $(x_*, u_*)$  un mínimo local. Queremos ver que valen las condiciones del principio del máximo con restricciones enunciado en la sección 2.4.1. En la

sección 2.4.2 vimos que las funciones del problema cumplen con las hipótesis HR) y probamos, como dijimos anteriormente, que si  $S_*(t) \geq 0$  vale la condición de regularidad. Además, sabemos que la función Hamiltoniano se define por

$$H^\lambda(x, p, u) = -\lambda L(x, u) + \langle p, f(x) + g(x)u \rangle,$$

con  $p = (p_S, p_E, p_I, p_N) \in \mathbb{R}^4$  las variables adjuntas y  $\lambda \geq 0$ . Luego, podemos considerar el Hamiltoniano aumentado, en el cual se tiene en cuenta también la restricción mixta multiplicada por  $q \in \mathbb{R}$  y obtenemos

$$H_\varphi^\lambda(x, p, u, q) = H^\lambda(x, p, u) - q\varphi(x, u).$$

Por el principio del máximo con restricciones de la sección 2.4.1 sabemos que existen  $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^4$  absolutamente continua, un escalar  $\lambda \in \{0, 1\}$  y una función medible  $q : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$(3.4.21) \quad q \in N_{\mathbb{R}_{\leq 0}}(\varphi(x_*(t), u_*(t))) \text{ a.e.}$$

Como probamos en la sección 2.4.2, esta condición quiere decir que

$$q \geq 0, \quad \langle q, \varphi(x_*(t), u) \rangle = 0.$$

- Condición de no trivialidad

$$(3.4.22) \quad \max\{|p(t)| : t \in [0, T]\} + \lambda > 0.$$

- Condición de transversalidad

$$(3.4.23) \quad (p(0), -p(T)) \in \mathbb{R}^4 \times \{(0, 0, 0, 0)\}.$$

- La ecuación adjunta para casi todo t

$$(3.4.24) \quad -p'(t) = D_x\{H_\varphi^\lambda\} = \lambda L_x[t] - \langle p(t), f_x[t] + g_x[t]u_*(t) \rangle + \langle q(t), \varphi_x[t] \rangle.$$

- Así como, para casi todo t, la condición del máximo para el Hamiltoniano  $H^\lambda$

$$(3.4.25)$$

$$H^\lambda(x_*(t), p(t), u_*(t)) = \max_u \{H^\lambda(x_*(t), p(t), u(t)) \mid 0 \leq u \leq 1, \varphi(x_*(t), u) \leq 0\}.$$

- Y la condición estacionaria

$$(3.4.26) \quad D_u H_\varphi^\lambda(x_*(t), p(t), u_*(t), q(t)) \in N_{[0,1]}(u_*(t)),$$

equivalentemente

$$D_u \langle p, f + gu \rangle(x_*, u_*) - \lambda D_u L(x_*, u_*) - D_u \langle q, \varphi \rangle(x_*, u_*) \in N_{[0,1]}(u_*(t)).$$

Si definimos

$$(3.4.27) \quad \mu(t) = D_u \{H_\varphi^\lambda\} = -L_u[t] + \langle p(t), g[t] \rangle - q(t)\varphi_u[t] \in N_{[0,1]}(u_*(t)),$$

$\mu$  es una función medible que satisface  $\mu(t) \in N_{[0,1]}(u_*(t))$  a.e.

Con  $N_{[0,1]}(u_*(t))$  el cono normal enunciado en la sección 2.2. Como el estado terminal del problema,  $x(T)$  es libre, usando el Corolario 3 de la sección 2 es fácil ver que las condiciones anteriores valen para  $\lambda = 1$ .

Queremos extraer información de las variables adjuntas tomando  $\lambda = 1$ . Las ecuaciones para estas variables  $p = (p_S, p_E, p_I, p_N)$  se ven explícitamente:

$$(3.4.28) \quad \dot{p}_S(t) = p_S(t)(d + cI_*(t) + u_*(t)) - p_E(t)cI_*(t) + q(t)u_*(t),$$

$$(3.4.29) \quad \dot{p}_E(t) = p_E(t)(e + d) - p_I(t)e,$$

$$(3.4.30) \quad \dot{p}_I(t) = 1 + p_S(t)cS_*(t) - p_E(t)cS_*(t) + p_I(t)(g + a + d) + p_N(t)a,$$

$$(3.4.31) \quad \dot{p}_N(t) = -p_S(t)b - p_N(t)(b - d).$$

Para evaluar la condición del máximo para el Hamiltoniano  $H^\lambda$  utilizaremos la función

$$(3.4.32) \quad \phi(x_*, p) = H_u^\lambda(x_*, u, p) = -B - p_S S_*, \quad \phi(t) = \phi(x_*(t), p(t)),$$

la cual coincide con 3.3.11. Luego, esta condición es equivalente a la condición del máximo

$$(3.4.33) \quad \phi(t)u_*(t) = \max_u \{\phi(t)u \mid 0 \leq u \leq 1, uS_*(t) \leq V_0\}.$$

A partir de esto vamos a tratar de caracterizar al control óptimo.

Observemos que para que se satisfaga la restricción mixta en  $(x_*, u_*)$  debe valer  $S_*(t)u_*(t) \leq V_0$  y además sabemos que  $u_*(t) \in [0, 1]$ . Entonces podemos hacer el siguiente análisis:

1) Si  $\phi(t) = -B - p_S(t)S_*(t) < 0$ , entonces el máximo se realiza en  $u_*(t) = 0$ .

2) Si  $\phi(t) = -B - p_S(t)S_*(t) > 0$ , sabemos que  $S_*(t) \geq 0$

Si  $S_*(t) = 0 \Rightarrow B < 0$  y sabemos que  $B > 0 \Rightarrow S_*(t) > 0$ . Entonces tenemos dos opciones:

- i. Si  $\frac{V_0}{S_*(t)} < 1 \Rightarrow \phi(t)u_*(t) = \max_u \{ \phi(t)u \mid 0 \leq u \leq 1, uS_*(t) \leq V_0 \} = \max_u \{ \phi(t)u \mid u \leq \frac{V_0}{S_*(t)} \} \Rightarrow u_*(t) = \frac{V_0}{S_*(t)}$ .
- ii. Si  $\frac{V_0}{S_*(t)} \geq 1 \Rightarrow \phi(t)u_*(t) = \max_u \{ \phi(t)u \mid 0 \leq u \leq 1, uS_*(t) \leq V_0 \} = \max_u \{ \phi(t)u \mid 0 \leq u \leq 1, \} \Rightarrow u_*(t) = 1$ .

Luego, encontramos una caracterización para el control óptimo y lo podemos escribir de la siguiente manera

$$u_*(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \min \left\{ 1, \frac{V_0}{S_*(t)} \right\}, & \text{si } \phi(t) > 0 \\ 0, & \text{si } \phi(t) < 0 \end{array} \right\}.$$

Por cada cero aislado de la función  $\phi(t)$  se obtiene un salto entre  $\min \left\{ 1, \frac{V_0}{S_*(t)} \right\}$  y 0 y viceversa. Luego, si vale  $\phi(t) = 0$  para un intervalo  $[t_1, t_2] \subset [0, T]$  tenemos un control singular. Para encontrar una expresión para el control singular se puede hacer un análisis como el hecho en la sección anterior. No lo haremos para este caso.

Además, para toda función absolutamente continua en la que la restricción mixta este activa, es decir cuando vale  $u_*(t) = \frac{V_0}{S_*(t)}$ , entonces  $u_*(t) > 0$  y si supieramos que  $u_*(t) < 1$  tendríamos una caracterización de  $q$ .

Dado que  $0 < u_*(t) < 1$ ,  $\mu(t)$  de la condición estacionaria se anula y obtenemos

$$0 = \mu(t) = D_u H_\varphi^\lambda[t] = -B - p_S S_*(t) - q(t)S_*(t).$$

Esto nos permite definir el multiplicador  $q(t)$  en la forma

$$q(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{-B}{S_*(t)} - p_S(t) = \frac{\phi(t)}{S_*(t)}, & \text{si } u_*(t) = \frac{V_0}{S_*(t)} \\ 0, & \text{si } u_*(t) < \frac{V_0}{S_*(t)} \end{array} \right\}.$$

Luego, encontramos una expresión para  $u_*(t)$  y  $q(t)$ .

### 3.5. Modelo SEIR con función objetivo cuadrática y restricciones

En este caso, el problema que vamos a considerar es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } J(x, u) = \int_0^T (AI(t) + u^2(t))dt; \\ \text{sujeto a :} \\ \dot{S}(t) = bN(t) - dS(t) - cS(t)I(t) - u(t)S(t), \quad S(0) = S_0 \\ \dot{E}(t) = cS(t)I(t) - (e + d)E(t), \quad E(0) = E_0 \\ \dot{I}(t) = eE(t) - (g + a + d)I(t), \quad I(0) = I_0 \\ \dot{N}(t) = (b - d)N(t) - aI(t), \quad N(0) = N_0 \\ Su - V_0 \leq 0, \\ u(t) \in [0, 1] \text{ a.e. } t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, x(T) \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right.$$

Como vimos al principio de este capítulo, el problema que estamos considerando tiene solución. Sea  $(x_*, u_*)$  tal solución. Usaremos el Principio del Máximo para determinarla.

Definimos el Hamiltoniano aumentado para este problema como:

$$H_\varphi^\lambda(x(t), p(t), u(t), q(t)) = p \cdot (f(x) + g(x)u) - q \cdot (m(x)u - V_0) - \lambda L(x, u).$$

Y, aplicaremos el teorema del principio del máximo con restricciones enunciado en la sección 2.4.2 a nuestro problema.

Dadas  $L : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se busca

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } J(x, u) := \int_0^T L(x(t), u(t))dt; \\ \text{sujeto a :} \\ \dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \\ u \in [0, 1], \\ x_1(t)u(t) - V_0 \leq 0 \text{ a.e.} \\ x(0) = x_0, t \in [0, T], \\ x(T) \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right.$$

El teorema del máximo con restricciones asegura la existencia de una función  $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^4$  absolutamente continua, un escalar  $\lambda \in \{0, 1\}$  y una función medible  $q : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$(3.5.1) \quad q \in N_{\mathbb{R}_{\leq 0}}((x_1(t))_* u_*(t) - V_0) \text{ a.e..}$$

La cual se puede deducir de las ecuaciones (2.4.1), como hicimos en la sección 2.4.2 que resulta

$$\Rightarrow q \geq 0, \quad \langle q, (x_1(t))_* u_*(t) - V_0 \rangle = 0.$$

Y se satisfacen:

- Condición de no trivialidad

$$(3.5.2) \quad \max\{|p(t)| : t \in [0, T]\} + \lambda > 0.$$

- Condición de transversalidad

$$(3.5.3) \quad (p(0), -p(T)) \in \mathbb{R}^4 \times \{(0, 0, 0, 0)\}.$$

- La ecuación adjunta para casi todo t

$$-p'(t) = D_x H_\varphi^\lambda = D_x \{ \langle p(t), f + gu \rangle - \lambda L - \langle q, \varphi \rangle \} (x_*(t), u_*(t)) \text{ a.e..}$$

$$(3.5.4)$$

$$\Rightarrow -p'(t) = \langle p(t), f_x(x_*(t)) + g_x(x_*(t))u_*(t) \rangle - \langle q(t), \varphi_x(x_*(t)) \rangle - \lambda L_x(x_*(t)).$$

- Así como, para casi todo t, la condición del máximo  
 $u \in [0, 1], \varphi(x_*(t), u) \leq 0 \Rightarrow$

$$(3.5.5) \quad H^\lambda(x_*(t), p(t), u) \leq H^\lambda(x_*(t), p(t), u_*(t)).$$

- Y la condición estacionaria

$$(3.5.6) \quad D_u H_\varphi^\lambda(x_*(t), p(t), u_*(t), q(t)) \in N_{[0,1]}(u_*(t)),$$

equivalentemente,

$$D_u \langle p, f + gu \rangle (x_*, u_*) - \lambda D_u L(x_*, u_*) - D_u \langle q, \varphi \rangle (x_*, u_*) \in N_{[0,1]}(u_*(t)).$$

Si definimos

$$(3.5.7) \quad \mu(t) = D_u H_\varphi^\lambda = D_u \{ \langle p(t), f + gu \rangle - \lambda L - \langle q, \varphi \rangle \} (x_*(t), u_*(t)) \text{ a.e.},$$

$\mu$  es una función medible que satisface  $\mu(t) \in N_{[0,1]}(u_*(t))$  a.e.

$N_{[0,1]}(u_*(t))$  es el cono normal en  $[0, 1]$  en el control óptimo  $u_*(t)$  definido por

$$(3.5.8) \quad N_{[0,1]}(u_*(t)) = \begin{cases} 0 & \text{si } u_*(t) \in (0, 1) \\ \{\mu : \mu \geq 0\} & \text{si } u_*(t) = 1 \\ \{-\mu : \mu \geq 0\} & \text{si } u_*(t) = 0 \end{cases}$$

Por último,

- Como vimos que se satisfacen hipótesis del principio del máximo con restricciones de 2.4.1, si  $(x_*, u_*)$  es un par óptimo, se puede ver por el segundo Corolario del Lema de regularidad enunciado en la sección 2.4.1, que es normal, es decir  $\lambda = 1$ .

Veamos ahora las consecuencias de tener  $\lambda = 1$ . Definimos  $p(t) = (p_s, p_e, p_i, p_n)$  y  $x_*(t) = (S_*(t), E_*(t), I_*(t), N_*(t))$ . Luego la ecuación adjunta se lee:

$$(3.5.9) \quad -\dot{p}_s(t) = -(d + cI_*(t) + u_*(t))p_s(t) + cI_*(t)p_e(t) - u_*(t)q(t),$$

$$(3.5.10) \quad -\dot{p}_e(t) = -(e + d)p_e(t) + ep_i(t),$$

$$(3.5.11) \quad -\dot{p}_i(t) = -cS_*(t)p_s(t)p_e(t) - (g + a + d)p_i(t) - ap_n(t) - A,$$

$$(3.5.12) \quad -\dot{p}_n(t) = bp_s(t) + (b - d)p_n(t)$$

y, para  $\mu(t)$ , la ecuación estacionaria se reduce a

$$(3.5.13) \quad \mu(t) = -p_s(t)S_*(t) - q(t)S_*(t) - 2u_*(t)$$

La condición del máximo se lee:

$$(3.5.14) \quad -p_s(t)S_*(t)u - u^2 \leq -p_s(t)S_*(t)u_*(t) - u_*(t)^2.$$

$\forall u \in [0, 1]$  tal que  $S_*(t)u \leq V_0$ .

Trataremos ahora de caracterizar el control óptimo. Ya vimos en la sección de Invarianza de la solución 3.1 que  $S_*(t) \geq 0$ .



Si  $S_*(t) = 0$ , de las ecuaciones (3.5.13) y (3.5.14) podemos ver que  $\mu(t) = 0$  y  $u_*(t) = 0$  pues tenemos

$$\begin{aligned}\mu(t) &= -2u_*(t), \\ u_*^2(t) &\leq u^2 \quad \forall u \in [0, 1].\end{aligned}$$

Como la segunda condición vale para todo  $u \in [0, 1]$ , en particular vale para  $u = 0 \Rightarrow u_*(t) = 0 \Rightarrow \mu(t) = 0$ .

Si  $S_*(t) > 0 \quad \forall t$

Sabemos que vale la restricción mixta  $u_*(t) \leq \frac{V_0}{S_*(t)}$ , y además  $u_*(t) \in [0, 1]$ . Estas condiciones determinan dos posibilidades en donde puede encontrarse el 1. Tenemos dos casos:

1) Supongamos que vale  $\frac{V_0}{S_*(t)} \geq 1$ .

Luego,  $\forall u \in [0, 1], uS_*(t) \leq S_*(t) \leq V_0 \Rightarrow [0, 1] \subseteq \{uS_*(t) \leq V_0\} \Rightarrow \{uS_*(t) \leq V_0\} \cap [0, 1] = [0, 1]$ .

Y por el principio del máximo, para casi todo  $t \in [0, T]$  vale que si  $u \in [0, 1]$  es tal que  $S_*(t)u \leq V_0$ , entonces

$$-p_s(t)S_*(t)u - u^2 \leq -p_s(t)S_*(t)u_*(t) - u_*(t)^2.$$

Sabemos que

$$\max_{u \in [0, 1], S_*(t)u \leq V_0} H^\lambda(x_*(t), p_*(t), q(t), u) = H^\lambda(x_*(t), p_*(t), q(t), u_*(t)).$$

En este caso podemos plantear:

$$\max_{u \in [0, 1] \cap \{uS_*(t) \leq V_0\}} -p_s(t)S_*(t)u - u^2 = \max_{u \in [0, 1]} -p_s(t)S_*(t)u - u^2.$$

Como es una función cuadrática, alcanza el máximo en el vértice. En este caso el vértice es  $-\frac{p_s(t)S_*(t)}{2}$ . Por lo tanto:

- Si  $-\frac{p_s(t)S_*(t)}{2} \in (0, 1) \Rightarrow$  el máximo se realiza en el vértice  $\Rightarrow u_*(t) = -\frac{p_s(t)S_*(t)}{2}$ .
- Si  $-\frac{p_s(t)S_*(t)}{2} \geq 1 \Rightarrow$  el máximo es  $u_*(t) = 1$ .
- Si  $-\frac{p_s(t)S_*(t)}{2} \leq 0 \Rightarrow$  el máximo es  $u_*(t) = 0$ .

2) Supongamos ahora que  $\frac{V_0}{S_*(t)} < 1$

Como,  $[0, 1] \cap [0, \frac{V_0}{S_*(t)}] = [0, \frac{V_0}{S_*(t)}]$ , tenemos

$$\max_{u \in [0, 1] \cap [0, \frac{V_0}{S_*(t)}]} -p_s(t)S_*(t)u - u^2 = \max_{[0, \frac{V_0}{S_*(t)}]} -p_s(t)S_*(t)u - u^2.$$

Entonces,

- Si  $-\frac{p_s(t)S_*(t)}{2} \in (0, \frac{V_0}{S_*(t)}) \Rightarrow$  el máximo se realiza en el vértice y  $u_*(t) = -\frac{p_s(t)S_*(t)}{2}$ .
- Si  $-\frac{p_s(t)S_*(t)}{2} \geq \frac{V_0}{S_*(t)} \Rightarrow$  el máximo se realiza en  $\frac{V_0}{S_*(t)}$  y  $u_*(t) = \frac{V_0}{S_*(t)}$ .
- Si  $-\frac{p_s(t)S_*(t)}{2} \leq 0 \Rightarrow$  el máximo se realiza en 0 y  $u_*(t) = 0$ .

Luego, podemos concluir que:

$$(3.5.15) \quad u_*(t) = \max \left\{ 0, \min \left\{ 1, \frac{V_0}{S_*(t)}, \frac{-p_s(t)S_*(t)}{2} \right\} \right\}.$$

Queremos ahora determinar  $q(t)$ .

Para esto usaremos la restricción mixta en el óptimo, la condición del máximo y la condición estacionaria. Sabemos que la restricción mixta es

$$S_*(t)u_*(t) \leq 0,$$

la condición del máximo es

$$-p_s(t)S_*(t)u - u^2 \leq -p_s(t)S_*(t)u_*(t) - u_*(t)^2 \quad \forall u \in [0, 1] / S_*(t)u \leq 0$$

y la condición estacionaria es

$$\mu(t) = -p_s(t)S_*(t) - q(t)S_*(t) - 2u_*(t) \in N_{[0,1]}(u_*(t)),$$

con  $N_{[0,1]}(u_*(t))$  el cono normal.

- Si  $S_*(t)u_*(t) < V_0$  por (3.5.1) resulta que  $q(t) = 0$ .
- Si  $S_*(t)u_*(t) = V_0$  (es decir la restricción esta activa) veremos que  $u_*(t) > 0$ .

Como sabemos que  $V_0 \neq 0 \Rightarrow u_*(t) \neq 0$ . Luego  $u_*(t) \in (0, 1]$ .

Si suponemos que  $u_*(t) < 1$  entonces podremos determinar  $q(t)$  para el caso en que la restricción mixta este activa.

Si  $u_*(t) \in (0, 1) \Rightarrow \mu(t) = 0 \Rightarrow -p_S(t)S_*(t) - q(t)S_*(t) - 2u_*(t) = 0$ .

Despejando  $q(t)$  obtenemos

$$q(t) = -p_S(t) - \frac{2u_*(t)}{S_*(t)}$$

Además, como estamos bajo la condición que la restricción mixta en el óptimo está activa, vale

$$S_*(t)u_*(t) = V_0 \Rightarrow u_*(t) = \frac{V_0}{S_*(t)}.$$

Reemplazando  $u_*(t)$  en  $q(t)$  obtenemos

$$q(t) = -p_S(t) - \frac{2V_0(t)}{S_*^2(t)}.$$

Entonces

$$(3.5.16) \quad q(t) = \max \left\{ 0, -p_S(t) - \frac{2V_0(t)}{S_*^2(t)} \right\}.$$



## CHAPTER 4

### Resultados Numéricos

En este capítulo mostraremos algunos resultados numéricos de lo estudiado hasta el momento. Los sistemas fueron resueltos con métodos numéricos como Runge-Kutta utilizando Matlab.

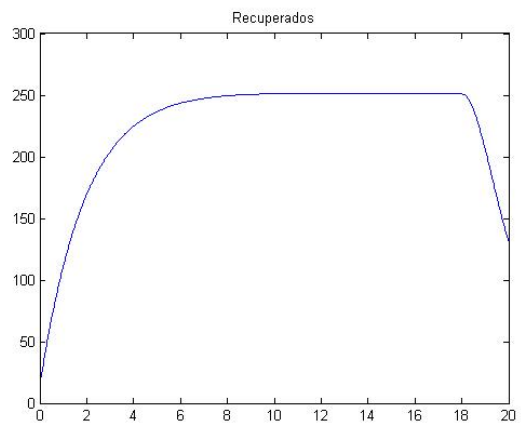
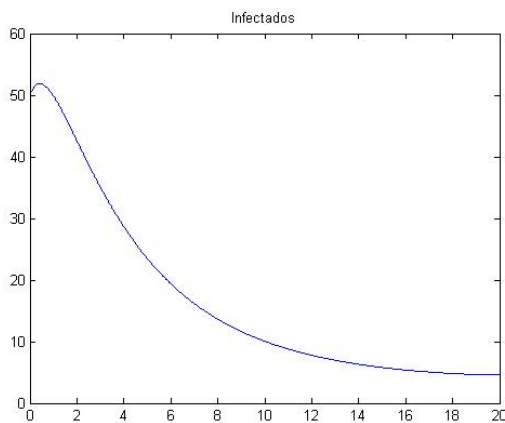
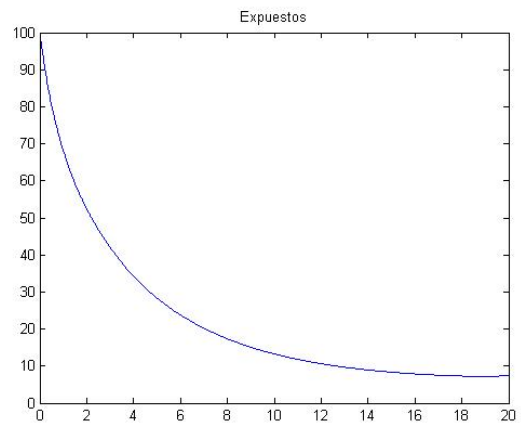
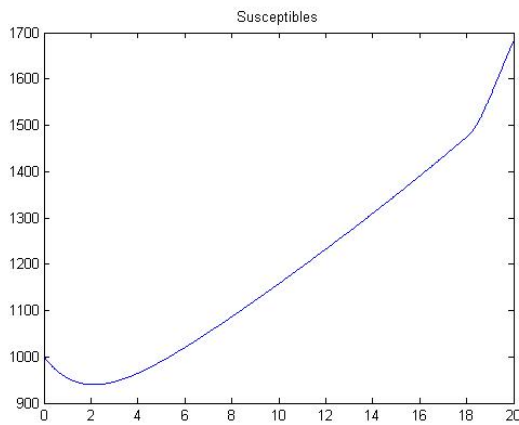
El algoritmo que aplicamos se encuentra en el paper [8]. Este algoritmo se llama Método Forward-Backward Sweep y es una técnica numérica para resolver problemas de control óptimo. Es un método indirecto, es decir aproxima las soluciones resolviendo el problema con valores acotados, que resuelve las ecuaciones diferenciales del Principio del Máximo de manera numérica. Para eso utiliza dos teoremas, que no vamos a enunciar, que muestran que resolviendo de manera iterativa el sistema de ecuaciones diferenciales se obtiene una sucesión que converge a la solución del sistema. Y el segundo teorema asegura que al discretizar el sistema continuo, la iteración converge al aumentar el número de iteraciones y la cantidad de subintervalos.

La idea de este algoritmo es tomar el valor inicial de la ecuación de estado del problema y resolverla de manera forward en el tiempo, estimando el control y la variable de estado. Luego, usando esos resultados, se toma el valor final de la variable de coestado y se resuelve de manera backward en el tiempo.

Primero se definen las variables de estado, coestado, control y el multiplicador  $q$  para  $t_0, \dots, t_M$  y se las inicializa en cero. Por otro lado, se define a las variables de estado en  $t_0$  con los valores de  $S_0, E_0, I_0, N_0$ . Luego se empieza a iterar haciendo, en cada iteración Runge-Kutta forward en el estado y usando los resultados obtenidos de este método, se hace Runge-Kutta backward en el coestado. Cuando se obtiene estos resultados se calcula el control  $u$  y el multiplicador  $q$ .

Una vez que están calculadas todas las variables, se las compara con las de la iteración anterior con el objetivo de ir convergiendo de manera numérica a la solución.

En cuanto al problema con función objetivo cuadrática y restricciones mixtas obtuvimos los siguientes resultados



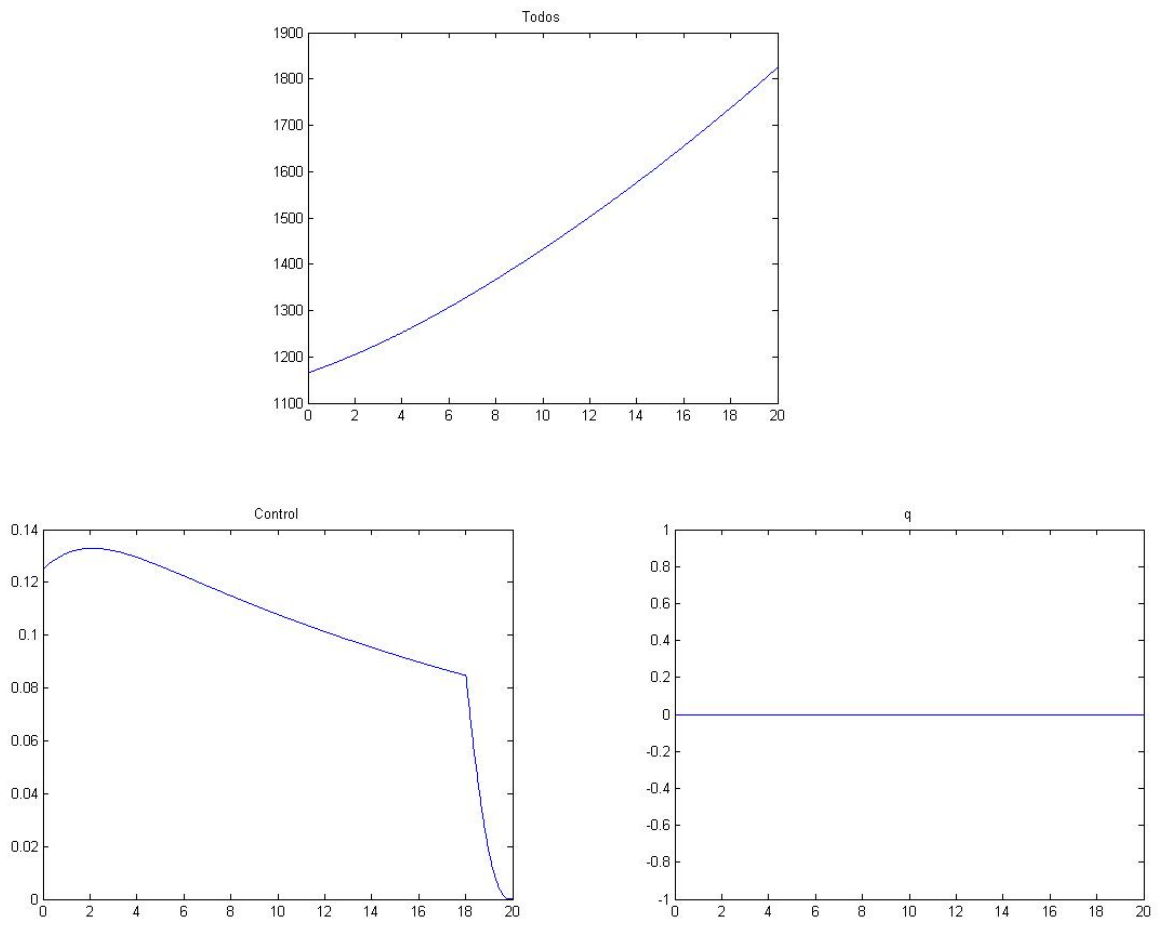


FIGURE 1. Función objetivo cuadrática y restricciones mixtas.





## CHAPTER 5

### Apéndice

En este apéndice mostraremos el código con el que resolvimos el método numérico para el problema de función cuadrática con restricciones mixtas estudiado cuyos resultados vimos en el capítulo anterior.

Para correr el programa usamos los siguientes valores iniciales que son las mismas que utilizan en [8].

$$b = 0.525,$$

$$d = 0.5,$$

$$c = 0.001,$$

$$e = 0.5,$$

$$g = 0.1,$$

$$a = 0.2,$$

$$S_0 = 1000,$$

$$E_0 = 100,$$

$$I_0 = 50,$$

$$R_0 = 15,$$

$$A = 0.1,$$

$$T = 20,$$

$$V_0 = 125$$

LISTING 5.1. Código Matlab

```
1 function y = SEIR_cuadratico_con_restric(b,d,c,e,g,a,S0,E0,  
    I0,R0,A,T,V0)  
2  
3 test = -1;
```

```
4
5 delta = 0.001;
6 M = 1000;
7 t=linspace(0,T,M+1);
8 h=T/M;
9 h2 = h/2;
10
11 S=zeros(1,M+1);
12 E=zeros(1,M+1);
13 I=zeros(1,M+1);
14 R=zeros(1,M+1);
15 N=zeros(1,M+1);
16 S(1)=S0;
17 E(1)=E0;
18 I(1)=I0;
19 R(1)=R0;
20 N(1)=S0+E0+I0+R0;
21
22 lambda1=zeros(1,M+1);
23 lambda2=zeros(1,M+1);
24 lambda3=zeros(1,M+1);
25 lambda4=zeros(1,M+1);
26
27 u=zeros(1,M+1);
28 q=zeros(1,M+1);
29
30 while(test < 0)
31
```

```

32     oldu = u;
33     oldS = S;
34     oldE = E;
35     oldI = I;
36     oldN = N;
37     oldq = q;
38     oldlambda1 = lambda1;
39     oldlambda2 = lambda2;
40     oldlambda3 = lambda3;
41     oldlambda4 = lambda4;
42
43     %Aca hace RK forward para el estado
44
45     for i = 1:M
46         m11 = b*N(i) - d*S(i) - c*S(i)*I(i) - u(i)*S(i);
47         m12 = c*S(i)*I(i) - (e+d)*E(i);
48         m13 = e*E(i) - (g+a+d)*I(i);
49         m14 = (b-d)*N(i) - a*I(i);
50
51         m21 = b*(N(i)+h2*m14) - d*(S(i)+h2*m11) - c*(S(i)+h2
           *m11)*(I(i)+h2*m13) - 0.5*(u(i)+u(i+1))*(S(i)+h2*
           m11);
52         m22 = c*(S(i)+h2*m11)*(I(i)+h2*m13) - (e+d)*(E(i)+h2
           *m12);
53         m23 = e*(E(i)+h2*m12) - (g+a+d)*(I(i)+h2*m13);
54         m24 = (b-d)*(N(i)+h2*m14) - a*(I(i)+h2*m13);
55

```

```

56     m31 = b*(N(i)+h2*m24) - d*(S(i)+h2*m21) - c*(S(i)+h2
        *m21)*(I(i)+h2*m23) - 0.5*(u(i)+u(i+1))*(S(i)+h2*
        m21);
57     m32 = c*(S(i)+h2*m21)*(I(i)+h2*m23) - (e+d)*(E(i)+h2
        *m22);
58     m33 = e*(E(i)+h2*m22) - (g+a+d)*(I(i)+h2*m23);
59     m34 = (b-d)*(N(i)+h2*m24) - a*(I(i)+h2*m23);
60
61     m41 = b*(N(i)+h*m34) - d*(S(i)+h*m31) - c*(S(i)+h*
        m31)*(I(i)+h*m33) - u(i+1)*(S(i)+h*m31);
62     m42 = c*(S(i)+h*m31)*(I(i)+h*m33) - (e+d)*(E(i)+h*
        m32);
63     m43 = e*(E(i)+h*m32) - (g+a+d)*(I(i)+h*m33);
64     m44 = (b-d)*(N(i)+h*m34) - a*(I(i)+h*m33);
65
66     S(i+1) = S(i) + (h/6)*(m11 + 2*m21 + 2*m31 + m41);
67     E(i+1) = E(i) + (h/6)*(m12 + 2*m22 + 2*m32 + m42);
68     I(i+1) = I(i) + (h/6)*(m13 + 2*m23 + 2*m33 + m43);
69     N(i+1) = N(i) + (h/6)*(m14 + 2*m24 + 2*m34 + m44);
70     end
71
72     % RK backward para el coestado
73
74     for i = 1:M
75         j = M + 2 - i;
76         m11 = lambda1(j)*(d + c*I(j) + u(j)) - c*lambda2(j)*
            I(j)+u(j)*q(j);
77         m12 = lambda2(j)*(e + d) - lambda3(j)*e;

```

$$78 \quad m13 = A + (\text{lambda1}(j) - \text{lambda2}(j)) * c * S(j) + \text{lambda3}(j) * (g+a+d) + \text{lambda4}(j) * a;$$

$$79 \quad m14 = -\text{lambda1}(j) * b - \text{lambda4}(j) * (b-d);$$

80

$$81 \quad m21 = (\text{lambda1}(j) - h2 * m11) * (d + c * 0.5 * (I(j) + I(j-1)) + 0.5 * (u(j) + u(j-1))) - c * (\text{lambda2}(j) - h2 * m12) * 0.5 * (I(j) + I(j-1)) + 0.5 * (u(j) * q(j) + u(j-1) * q(j-1));$$

$$82 \quad m22 = (\text{lambda2}(j) - h2 * m12) * (e + d) - (\text{lambda3}(j) - h2 * m13) * e;$$

$$83 \quad m23 = A + ((\text{lambda1}(j) - h2 * m11) - (\text{lambda2}(j) - h2 * m12)) * c * 0.5 * (S(j) + S(j-1)) + (\text{lambda3}(j) - h2 * m13) * (g+a+d) + (\text{lambda4}(j) - h2 * m14) * a;$$

$$84 \quad m24 = -(\text{lambda1}(j) - h2 * m11) * b - (\text{lambda4}(j) - h2 * m14) * (b-d);$$

85

$$86 \quad m31 = (\text{lambda1}(j) - h2 * m21) * (d + c * 0.5 * (I(j) + I(j-1)) + 0.5 * (u(j) + u(j-1))) - c * (\text{lambda2}(j) - h2 * m22) * 0.5 * (I(j) + I(j-1)) + 0.5 * (u(j) * q(j) + u(j-1) * q(j-1));$$

$$87 \quad m32 = (\text{lambda2}(j) - h2 * m22) * (e + d) - (\text{lambda3}(j) - h2 * m23) * e;$$

$$88 \quad m33 = A + ((\text{lambda1}(j) - h2 * m21) - (\text{lambda2}(j) - h2 * m22)) * c * 0.5 * (S(j) + S(j-1)) + (\text{lambda3}(j) - h2 * m23) * (g+a+d) + (\text{lambda4}(j) - h2 * m24) * a;$$

$$89 \quad m34 = -(\text{lambda1}(j) - h2 * m21) * b - (\text{lambda4}(j) - h2 * m24) * (b-d);$$

90

```

91     m41 = (lambda1(j)-h*m31)*(d + c*I(j-1) + u(j-1)) - c
          *(lambda2(j)-h*m32)*I(j-1)+0.5*(u(j)*q(j) + u(j
          -1)*q(j-1));
92     m42 = (lambda2(j)-h*m32)*(e + d) - (lambda3(j)-h*m33
          )*e;
93     m43 = A + ((lambda1(j)-h*m31) - (lambda2(j)-h*m32))*
          c*S(j-1) + (lambda3(j)-h*m33)*(g+a+d) + (lambda4(
          j)-h*m34)*a;
94     m44 = -(lambda1(j)-h*m31)*b - (lambda4(j)-h*m34)*(b-
          d);
95
96     lambda1(j-1) = lambda1(j) - (h/6)*(m11 + 2*m21 + 2*
          m31 + m41);
97     lambda2(j-1) = lambda2(j) - (h/6)*(m12 + 2*m22 + 2*
          m32 + m42);
98     lambda3(j-1) = lambda3(j) - (h/6)*(m13 + 2*m23 + 2*
          m33 + m43);
99     lambda4(j-1) = lambda4(j) - (h/6)*(m14 + 2*m24 + 2*
          m34 + m44);
100    end
101
102    % Calcula u*(t) usando la ecuacion (3.5.15)
103
104    umax1=-(S.*lambda1)./2;
105    umax2=V0./S;
106    u1 = max(0,min(1,min(umax1,umax2)));
107

```

```

108  % Calcula el multiplicador q(t) usando la ecuacion
      (3.5.16)
109
110  q1=(S.*u-V0>=0).*(-2*V0./(S.^2)-lambda1);
111
112  q = 0.5*(q1 + oldq);
113  u = 0.5*(u1 + oldu);
114
115  % Se calculan las diferencias entre los nuevos valores y
      los anteriores
116
117  temp1 = delta*sum(abs(u)) - sum(abs(oldu - u));
118  temp2 = delta*sum(abs(S)) - sum(abs(oldS - S));
119  temp3 = delta*sum(abs(E)) - sum(abs(oldE - E));
120  temp4 = delta*sum(abs(I)) - sum(abs(oldI - I));
121  temp5 = delta*sum(abs(N)) - sum(abs(oldN - N));
122  temp6 = delta*sum(abs(lambda1)) - sum(abs(olddlambda1 -
      lambda1));
123  temp7 = delta*sum(abs(lambda2)) - sum(abs(olddlambda2 -
      lambda2));
124  temp8 = delta*sum(abs(lambda3)) - sum(abs(olddlambda3 -
      lambda3));
125  temp9 = delta*sum(abs(lambda4)) - sum(abs(olddlambda4 -
      lambda4));
126
127  % Si q=0 va un 1, y si q es distinto de cero va lo otro
128

```

```

129     temp10 = (sum(abs(q))==0)+(delta*sum(abs(q)) - sum(abs(
        oldq - q)));
130
131     % Se calcula el minimo de todas las diferencias de las
        variables
132
133     test = min(temp1, min(temp2, min(temp3, min(temp4, min(
        temp5, min(temp6, min(temp7, min(temp8, min(temp9,
        temp10))))))))))
134 end
135
136     % Calcula el valor de la variable R con RK forward
137
138 for i=1:M
139     m1 = g*I(i) - d*R(i) + u(i)*S(i);
140     m2 = g*0.5*(I(i)+I(i+1)) - d*(R(i)+h2*m1) + 0.5*(u(i)+u(
        i+1))*0.5*(S(i)+S(i+1));
141     m3 = g*0.5*(I(i)+I(i+1)) - d*(R(i)+h2*m2) + 0.5*(u(i)+u(
        i+1))*0.5*(S(i)+S(i+1));
142     m4 = g*I(i+1) - d*(R(i)+h*m3) + u(i+1)*S(i+1);
143     R(i+1) = R(i) + (h/6)*(m1 + 2*m2 + 2*m3 + m4);
144 end
145
146 y(1,:) = t;
147 y(2,:) = S;
148 y(3,:) = E;
149 y(4,:) = I;
150 y(5,:) = R;

```



```
151 y(6,:) = N;
152 y(7,:) = u;
153 y(8,:) = q;
154
155 plot(y(1,:),y(2,:))
156 title('Susceptibles')
157
158 figure(2)
159 plot(y(1,:),y(3,:))
160 title('Expuestos')
161
162 figure(3)
163 plot(y(1,:),y(4,:))
164 title('Infectados')
165
166 figure(4)
167 plot(y(1,:),y(5,:))
168 title('Recuperados')
169
170 figure(5)
171 plot(y(1,:),y(6,:))
172 title('Todos')
173
174 figure(6)
175 plot(y(1,:),y(7,:))
176 title('Control')
177
178 figure(7)
```

```
179 plot(y(1,:),y(8,:))  
180 title('q')
```

## Bibliography

- [1] M.H.A. BISWASS, L.T. PAIVA y MDR DE PINHO, *A SEIR Model for control of infectious diseases with constraints*, Mathematical Biosciences and engineering, Volume11, Number4, pp.761-784, August 2014.
- [2] FRANCIS CLARKE *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*, Springer, 2013.
- [3] H. MAURER y MDR DE PINHO *Optimal Control of Epidemiological SEIR models with L1-Objectives and Control-State Constraints*, Manuscript submitted, preprint <https://hal.inria.fr/hal-01101291>.
- [4] FRANCIS CLARKE y MDR DE PINHO *Optimal Control problems with mixed constraints*, SIAM J. Control Optim. 48 (2010), no. 7, 45004524.
- [5] LAWRENCE PERKO *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 2000.
- [6] EDUARDO D. SONTAG *Mathematical control theory*, Springer, 1998.
- [7] DAVID GREENHALG *Some results for an SEIR epidemic model with density dependence in the death rate*, IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine & Biology, Vol 9, pp 67-106, 1992.
- [8] MICHAEL MCASEY, LIBIN MOU y WEIMIN HAN *Convergence of the forward-backward sweep method in optimal control*, Comput Optim Appl, 2012, Vol 53, pp 207-226.
- [9] R.M LEWIS *Definitions of order and junction conditions in singular optimal control problems*, SIAM J. Control and optimization, Vol 18, No 1, January 1980.
- [10] MDR DE PINHO y ILYA SHVARTSMAN *Lipschitz continuity of optimal control and Lagrange multipliers in a problem with mixed and pure state constraints*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 29 (2011), no. 2, 505522.