UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Control óptimo para ecuaciones de Schrödinger no lineales

Carolina Gisele Naudeau

Director: Constanza Sanchez de la Vega

11 de abril de 2017

Agradecimientos

Agradezco a la educación pública que me permitió formarme y hoy completar una licenciatura. Al tiempo que tarde en licenciarme, que me dio la posibilidad de tener como directora a una excelente persona y profesional. Gracias Constanza por aceptar el arduo trabajo de dirigirme a distancia, por tu compromiso, predisposición, dedicación, amabilidad y buena voluntad. Por ser un ejemplo de mujer a seguir en la vida y en esta institución. Gracias totales.

A los docentes que pusieron su granito de arena para que este proyecto de ser licenciada no caduque a lo largo de los años, por orden de aparición, a Ezequiel Martín, Constanza, Pablo Solernó, Norberto Fava, María Angélica Cueto, Pablo de Nápoli, Victoria Pernostro y Tico.

A mi familia, a Juli, por tu paciencia infinita, por bancarme, por ayudarme y recordarme que debo disfrutar de lo que hago, por enseñarme a ver el mundo desde otro ángulo, por ser mi equipo favorito y el amor de mi vida, gracias por acompañarme en estos últimos años. A Viole, por ser lo más lindo que acurrió en el preceso de este trabajo y el motor que me empuja día a día.

A mi hermana, por su incondicionalidad infinita, por su amistad, y su compañía a lo largo de todos estos años. A Alex, por bancarse todos mis "ahora la tía no puede, está estudiando". A mis viejos y mi hermano, por bancarme en los comienzos de este proyecto.

A la banda gigantezca de gente hermosa que me regalo esta carrera: A las chicas, Magalí, Anita, Paula, Georgi, Flopa, Laura, Irina, Solange, que siempre estuvieron ahí en todos los momentos, por los mates, por la comilonas, por las charlas, por bancar mis ausencias y acompañarme siempre. Gracias totales. A Carla, Gaby, Santiago, Adrián y Mariela.

A Alicia Scarfiello y Patricia Folino, por su confianza, por su apoyo y cariño.

A Paz, Vito, Mocho, Silvana y Fabián, por bancarme y por estar ahí sin importar las distancias. Gracias!

Y a todos los que aportaron su granito de arena de alguna manera para que este proyecto sea un hecho. GRACIAS.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Los problemas de control óptimo pueden describirse a partir de un modelo matemático que describe el sistema en consideración a través de la *ecuación de estado*

$$A(u) = f(\phi). \tag{1.1}$$

Aquí, ϕ es el *control* que podemos elegir libremente en un conjunto de *controles admisibles* para actuar sobre el sistema y la variable u, solución de la ecuación (1.1) describe el *estado* del sistema dependiendo de ϕ. Esta ecuación de estado en la práctica puede ser un sistema algebraico o funcional. En muchos problemas, se busca optimizar un funcional de costo que depende tanto del estado como del control. En estos casos, es natural analizar existencia de control óptimo e intentar dar una caracterización del mismo.

El estudio de problemas de control óptimo para sistemas descriptos por una ecuación diferencial ordinaria, se remonta a la década del 60, con los trabajos de Pontryagin-Boltyanskii-Gramkrelidze-Mischenko [11] y Hestenes [14] sobre la condiciones necesarias que debe satisfacer un control óptimo. En esos mismo años comenzó el estudio de problemas de control óptimo cuando la ecuación de estado (1.1) es una ecuación en derivadas parciales, por J.L. Lions [13].

Desde entonces se ha profundizado la investigación de sistemas de control óptimo donde el estado es descripto por una ecuación diferencial en deriavdas parciales, especialmente los problemas de control cuántico descriptos por la ecuación de Schrödinger. En esta tesis estudiaremos un problema de control óptimo bilineal para la siguiente ecuación de Schrödinger no lineal,

$$\left\{ \begin{array}{c} iu_t + \Delta u + \lambda |u|^{2\sigma} u + \phi(t) V(x) u = 0 \quad , \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x) \end{array} \right. \tag{1.2}$$

donde ϕ es el control y u el estado.

Los problemas de control cuántico son un ejemplo específico de problemas de control óptimo, que consiste en la minimización de la función de costo en función de la solución de la ecuación de estado y del control y caracterizar el mínimo del funcional por una condición de optimalidad.

El problemas de control para la ecuación de Schrödinger que trabajaremos se aplica en la teoría de condensados de Bose-Einstein y también en muchos problemas físicos. Básicamente lo que haremos es optimizar un sistema que evoluciona con el tiempo y que es influenciado por fuerzas externas. Encontrar un control óptimo nos da un camino de comportamiento para las variables de control, nos indica como llevar el sistema de un estado inicial dado en un intervalo de tiempo acotado a uno final de forma óptima.

Esta tesis se basa en el trabajo de Feng-Zhao-Chen [12] que mejora los resultados obtenidos por Hintermüller-Marahrens-Markowich-Sparber en el trabajo [10] utilizando la misma función de costo que utiliza Hintermüller para analizar nuestro problema. La diferencia entre ambos trabajos radica en emplear un método completamente diferente para generalizar resultados dada la falta de compacidad al trabajar en todo $\mathbb{R}^N$. Hintermüller prueba la existencia de un control óptimo usando la inclusión compacta del espacio de energía en $L^2(\mathbb{R}^N)$ y en nuestra situación, dado que la inclusión $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ no es compacta, el método que utiliza Hintermüller falla. Pero utilizando resultados de compacidad, Lema 2.1 y 2.2 podemos derivar la compacidad de la sucesión minimizante.

Nuestro problema será considerar el funcional objetivo,

$$F(u,\phi) := \langle u(T,.); Au(T;.)\rangle_{L^2}^2 + \gamma_1 \int_0^T (E'(t))^2 dt + \gamma_2 \int_0^T (\phi'(t))^2 dt \tag{1.3}$$

donde u es solución de la ecuación de estado,ϕ el parámetro de control, $A : H^1 \to L^2$ un operador lineal acotado, E la energía correspondiente a la ecuación de estado y $\gamma_1 \geq 0, \gamma_2 > 0$ parámetros dados. Pensemos este funcional definido en algún espacio, $\Lambda(0,T)$ que por ahora no definiré. El problema de minimización que queremos resolver será

$$F_* = \inf_{(u,\phi)\in\Lambda(0,T)} F(u,\phi).$$

En primer lugar probaremos buen planteo de la ecuación de estado (1.2) para los controles en $H^1(0,T)$. Esto nos permitirá considerar cada variable de estado $u = u(\phi)$. Luego, estudiaremos la existencia de un minimizador para el problema anterior. Esto lo mostraremos en el Teorema 4.1 y gracias al buen planteo global de nuestra ecuación para cualquier dato inicial en $H^1(\mathbb{R})$ podemos definir un funcional $\mathcal{F}(\phi)$ para el cual analizaremos diferencialidad y obtendremos el primer orden de optimalidad del sistema, esto lo mostraremos en el Teorema 5.1.

A continuación, hacemos una descripción breve de cada capítulo.

En el Capítulo 2, recordaremos definiciones, resultados conocidos de los espacios de Sobolev, probaremos algunos resultados de compacidad que nos garantizarán la existencia de una sucesión minimizante y por último veremos algunas estimaciones y resultados clásicos de la ecuación de Schrödinger que ultizaremos a lo largo de este trabajo.

En el Capítulo 3, veremos el buen planteo local de nuestro problema de control que nos garantizará existencia de solución global.

En el Capítulo 4, estudiaremos la existencia de un minimizador para nuestro problema de control óptimo demostrando el Teorema 4.1.

En el Capítulo 5, estudiaremos la derivada y análisis de lo que llamaremos ecuación adjunta y luego la Lipschitz continuidad con respecto al control, lo que nos permitirá establecer condiciones necesarias de primer orden.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Espacios de Sobolev

En esta sección recordaremos definiciones y resultados conocidos de los espacios de Sobolev que utilizaremos a lo largo de este trabajo. Todas las definiciones podemos encontrarlas en [1], [2] y [4].

En lo que sigue consideraremos Ω un dominio en $\mathbb{R}^N$.

Definición 2.1. Notamos con $L^p(\Omega)$ al espacio de funciones medibles a valores complejos, cuya norma es finita. Es decir,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{C} \text{ medibles, tal que } (\int_\Omega \|u(x)\|^p dx)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \text{ si } p \in [1, \infty)$$

y en el caso $p = \infty$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = essup_\Omega \|u\|$$

Teorema 2.1. *$L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach y $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert real cuando equipamos el espacio con el producto escalar*

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \mathrm{Re} \left(\int_\Omega u(x)\overline{v}(x) dx \right)$$

Podemos encontrar una demostración de este teorema en [2] Theorem 2.16 y Corollary 2.18 .

Notamos $C_c^\infty(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciables con soporte compacto en Ω.

Definición 2.2. Sean $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$. Decimos que v es la derivada débil de u respecto de x_i si

$$\int_\Omega u\partial_{x_i}\phi dx = -\int_\Omega v\phi dx$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Observación 2.1. Si existe una derivada bébil de u respecto de x_i, entonces es única. Y en tal caso notamos $v = \partial_{x_i} u$.

Definición 2.3. El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ se define por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ |\alpha| \leq m\}.$$

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$, notamos $\bigtriangledown u = (\partial_1 u, \partial_2 u, ..., \partial_N u)$ al gradiente de u en el sentido débil.

El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ está dotado de la norma:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=0}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

Cuando $p = 2$ notaremos con $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ y equipamos este espacio con la norma equivalente:

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = (\sum_{|\alpha|=0}^{N} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$$

Teorema 2.2. *El espacio* $W^{m,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach para* $1 \leq p \leq \infty$.

Podemos ver una demostración de este teorema en [2] Theorem 3.3.

Observación 2.2. $H^2(\Omega)$ podemos equiparlo con la norma equivalente

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Observación 2.3. Cuando $p = 2$, $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno:

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \langle \partial_i u, \partial_i v\rangle_{L^2(\Omega)}$$

con la norma asociada

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}.$$

Definición 2.4. Sea E un espacio de Banach. Definimos el espacio dual de E como:

$$E^* = \{\varphi : E \to \mathbb{R} : \varphi \text{ es lineal y continua}\}$$

Dada $\varphi \in E^*$, notamos $\langle \varphi, x\rangle_{E^*,E} = \varphi(x)$ para cada $x \in E$

Definición 2.5. Sea E un espacio de Banach. Decimos que E es reflexivo si $J(E) = E^{**}$ donde $J : E \to E^{**}$ es la inyección canónica $J(x)(\varphi) = \varphi(x)$ para toda $\varphi \in E^*$, que también notamos

$$\langle Jx, \varphi\rangle_{E^{**},E} = \langle \varphi, x\rangle_{E^*,E}.$$

Definición 2.6. Diremos que un espacio normado $(E, \|.\|_E)$ es separable, cuando exite un subconjunto $H \subset E$ numerable, de manera que H resulte denso en E.

Proposición 2.1. *El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio reflexivo para $1 < p < \infty$ y separable para $1 \leq p < \infty$.*

Podemos encontrar una demostración de este resultado en [2] Corollary 2.40 y Theorem 2.21 .

Corolario 2.1. *El espacio $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable.*

Definición 2.7. Definimos el espacio $H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|.\|_{H^1(\Omega)}}$.

Observación 2.4. El espacio $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert y reflexivo.

Proposición 2.2. *Las funciones $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ son densas en $H^1(\mathbb{R}^N)$ entonces $H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Podemos encontrar una demostración de esta proposición en [2] Theorem 3.22 y Corollary 3.23 .

Teorema 2.3 (Inmersiones de Sobolev)**.** *Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^N$ con frontera Lipschitz continua, entonces:*

1. $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *para todo* $q \in [2, \frac{2N}{N-2})$ *con* $N > 2$.
2. *Si* $N = 2$, *entonces* $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *para* $q \in [2, \infty)$.
3. $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, $N \leq 3$.

Una demostración de este teorema se puede encontrar en [2] Theorem 4.12, para el item 1 y 3, parte I, caso C, con parámetros $j = 0$, $m = 1$, $p = 2$, caso B con $j = 0$, $m = 1$, $p = 2$ y para el item 3 basta con usar parte 1, caso A con $m = 2$, $p = 2$ y $q = \infty$.

Definición 2.8. Definimos el espacio $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^*$, el espacio dual de $H_0^1(\Omega)$. Es decir, $f \in H^{-1}(\Omega)$ si $f : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es lineal y continua.

Notaremos $\langle , \rangle_{H^{-1},H_0^1}$ al par dual entre $H^{-1}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$.
El espacio $H^{-1}(\Omega)$ esta dotado de la norma:

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{u \in H_0^1(\Omega):\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \langle f, u \rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

Definición 2.9. Sean X e Y dos espacios de Banach, $X \subset Y$ diremos que la inclusión es continua, cuando el operador inclusión lo sea. Es decir, siempre que:
$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ $(x \in X)$ para alguna constante C.

Definición 2.10. Sean X e Y dos espacios de Banach, $X \subset Y$. Decimos que X está compactamente contenido en Y y lo notaremos como $X \subset\subset Y$. Cuando el operador inclusión sea un operador continuo y compacto. Es decir, si se verifica:
i) $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ $(x \in X)$ para alguna constante C.
ii)Cada sucesión en X es precompacta en Y.

Observación 2.5. Equivalentemente podemos decir que X está compactamente contenido en Y si para toda sucesión acotada en X existe una subsucesión convergente en Y.

Proposición 2.3. *Las siguiente inclusiones son continuas:*

$$H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \subset H^{-1}(\mathbb{R}^N).$$

Haremos una breve demostración de este corolario.

Demostración. Es fácil ver que $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ continuamente.
En efecto, dada $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|_{L^2}^2 = \|u\|_{H^1}^2.$$

Ahora para ver que $L^2(\mathbb{R}^N) \subset H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ continuamente. Sea $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ consideremos $T_u : H^1 \to \mathbb{R}$ dada por $T_u(v) = \langle u, v \rangle_{L^2}$.
Asi, por abuso de notación decimos

$$\|u\|_{H^{-1}} = \|T_u\|_{H^{-1}} = \sup_{v \in H^1:\|v\|_{H_0^1}=1} |\langle u, v \rangle_{L^2}|.$$

Entonces, por Cauchy -Schwarz

$$\|u\|_{H^{-1}} \leq \sup_{v \in H^1 : \|v\|_{H_0^1} = 1} (\|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}) \leq \sup_{v \in H^1 : \|v\|_{H_0^1} = 1} (\|u\|_{L^2} \|v\|_{H^1}) = \|u\|_{L^2}.$$

□

Observación 2.6. Algunas propiedades útiles del espacio $H^{-1}(\Omega)$:

1. De la inclusión densa de $C_c^\infty(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ deducimos que $H^{-1}(\Omega)$ es un espacio de distribuciones. Además se sigue de la inclusión densa $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ que $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ y entonces es densa también. En particular $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $H^{-1}(\Omega)$.

2. Dado q para el cual $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ resulta que $L^{q'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ y la inclusión es densa (ver teorema de inmersiones 2.3).

3. Aunque $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, en general no se identifica $H^{-1}(\Omega)$ con $H_0^1(\Omega)$. Se identifica en vez, $L^2(\Omega)$ con su dual.

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \sim (L^2(\Omega))^* \hookrightarrow H^{-1}(\Omega).$$

De modo que, $H^{-1}(\Omega)$ se convierte en un subespacio de $(C_c^\infty(\Omega))^*$ que contiene a $L^2(\Omega)$.

En particular, si $u \in H_0^1(\Omega)$ y $v \in L^2(\Omega)$ entonces

$$\langle v, u \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \mathrm{Re}\left(\int u(x)\overline{v(x)}dx \right) = \langle v, u \rangle_{L^2}.$$

Esto muestra que

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq C\|u\|_{H_0^1}\|u\|_{H^{-1}} \quad \text{para toda} \quad u \in H^1(\Omega) \tag{2.1}$$

Veamos (2.1). Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ $u \neq 0$, si consideramos $v = \frac{u}{\|u\|_{H_0^1}}$, tenemos que $\|v\|_{H_0^1} = 1$. Luego por definición de norma:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{-1}} = \sup_{v \in H^1 : \|v\|_{H_0^1} = 1} \langle u, v \rangle_{H^{-1} H_0^1} &\geq \langle u, \frac{u}{\|u\|_{H_0^1}} \rangle_{H^{-1} H_0^1} \\ =& \langle u, \frac{u}{\|u\|_{H_0^1}} \rangle_{L^2} = \frac{\|u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{H_0^1}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|u\|_{H^{-1}}\|u\|_{H_0^1} \geq \|u\|_{L^2}^2$$

y si $u = 0$ la desigualdad es trivial.

4. Veamos que se tiene la identificación $(L^p(\Omega))' \sim L^{p'}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$ con p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

   Consideremos para cada elemento, $v \in L^{p'}(\Omega)$ el funcional T_v en $L^p(\Omega)$ dado por
$$T_v(u) = \int u(x)v(x)dx,\ u \in L^p(\Omega).$$

   Por la desigualdad de Hölder tenemos que $|T_v(u)| \leq \|u\|_p\|v\|_{p'}$, por lo que $T_v \in (L^p(\Omega))^*$ y es claro que $\|T_v\| \leq \|v\|_{p'}$.

   Veamos que este operador es una isometría, es decir, que la desigualdad anterior es una igualdad.

   Para $1 < p < \infty$ consideramos
$$u(x) = |v(x)|^{p'-2}\overline{v}(x) \text{ si } v(x) \neq 0 \text{ y } u(x) = 0 \text{ en otro caso}$$

   Es fácil ver que $u \in L^p(\Omega)$ y que $T_v(u) = \|u\|_p\|v\|_{p'}$.

   Para $p = 1$ y $p' = \infty$ si $\|v\|_{p'} = 0 \Rightarrow u(x) = 0$. En otro caso, sea $0 < \epsilon < \|v\|_\infty$ y A un subconjunto medible de Ω tal que $0 < \mu(A) < \infty$ y $|v(x)| > \|v\| - \epsilon$ en A. Sea $u(x) = \frac{\overline{v}(x)}{v(x)}$ en A y $u(x) = 0$ fuera de A. Entonces $u \in L^1(\Omega)$ y $T_v(u) \geq \|u\|_1(\|v\|_\infty - \epsilon)$.

   Esto muestra que $\|T_v\| = \|v\|_{p'}$ es decir, el operador $\mathcal{L} : v \mapsto T_v$ es una isometría de $L^{p'}(\Omega)$ en $(L^p(\Omega))^*$.

   Resta ver que es un isomorfismo. Es decir, queremos probar que cada funcional lineal en $(L^p(\Omega))'$ es de la forma T_v para algún $v \in L^{p'}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. En efecto, si $p = 2$ es una consecuencia inmediata del Teorema de Representación de Riez y para p general podemos basarnos en una prueba de Radon-Nykodym en [7], Theorem 6.16.

5. Más generalmente, sea p tal que $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ (ver Teorema de inmensión 2.3). Por el item 2, $L^{p'} \sim (L^p)' \subset H^{-1}$.

   Luego, dado $u \in H^{-1}(\Omega)$, si $u \in L^{p'}(\Omega)$, el producto de dualidad $\langle u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}$ se puede pensar como el producto de dualidad de $\langle u, v\rangle_{(L^p)',L^p}$ y usando la identificación $L^{p'} \sim (L^p)'$ se tiene
$$\langle u, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \langle u, v\rangle_{(L^{p'}),L^p} = \langle \tilde{u}, v\rangle_{L^2}$$

   Donde, en esta última desigualdad identificamos $\tilde{u} \in L^{p'}$ con $u = T_{\tilde{u}}$ en $(L^p)'$,
$$T_{\tilde{u}}(v) = \mathrm{Re}\left(\int \tilde{u}v\right) = \langle \tilde{u}, v\rangle_{L^2}.$$

Teorema 2.4 (Desigualdad de Gagliardo - Niremberg)**.** *Sean* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *y sean* j, m *dos enteros, tal que* $0 \leq j < m$. *Si*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{N} + a(\frac{1}{r} - \frac{m}{N}) + \frac{1-a}{q}$$

para $a \in [\frac{j}{m}, 1]$ *(*$a < 1$ *si* $r > 1$ *y* $m - j - \frac{N}{r} = 0$*), entonces existe* $C(N, m, j, a, q, r)$ *tal que*

$$\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|_{L^p} \leq C(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^r})^a \|u\|_{L^q}^{1-a}$$

para toda $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Ver [4] Theorem 1.3.7.

Usaremos repetidamente las siguientes desigualdades.

Corolario 2.2. *Para* $a = \frac{N}{2p}$ *con* $p > \frac{N}{2}$ *y* $p \geq 1$, $r = 2$, $q = 2$, $\tilde{p} = \frac{2p}{p-1}$, $j = 0$, $m = 1$ *tenemos:*

$$\|u\|^2_{L^{\frac{2p}{p-1}}} \leq C\|u\|_{H^1}^{\frac{N}{p}} \|u\|_{L^2}^{\frac{2p-N}{p}}. \tag{2.2}$$

Para $a = \frac{N\sigma}{2\sigma+2}$ *con* $\sigma \geq 0$ *y* $N\sigma < 2$, $r = 2$, $q = 2$, $p = 2\sigma + 2$, $j = 0$, $m = 1$ *tenemos:*

$$\|u\|^{2\sigma+2}_{L^{2\sigma+2}} \leq C\|u\|_{H^1}^{N\sigma} \|u\|_{L^2}^{2\sigma+2-N\sigma} \tag{2.3}$$

Corolario 2.3. *Para los escalares como en el Corolario 2.2 se deduce fácilmente que*

$$\|u\|_{L^{2\sigma+2}} \leq C\|u\|_{H^1}.$$

Teorema 2.5 (Desigualdad de Young)**.** *Sean* $a, b \geq 0$, p, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Podemos encontrar una demostración de esta desigualdad en [1] Appendice B2.c.

Teorema 2.6 (Desigualdad de Hölder generalizado)**.** *Dadas* $f_i \in L^{p_i}$ *con* $p_i, r \geq 0$, $1 < i < k$ *si*

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r}$$

entonces

$$\|f_1 f_2 ... f_k\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} .... \|f_k\|_{p_k}.$$

También en [1] Appendice B2.g podemos encontrar una demostración de este teorema.

Definición 2.11. Sean M, N espacios métricos y E el conjunto de aplicaciones $f : M \to N$. El conjunto E se dice equicontinuo en el punto $a \in M$ cuando, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implique que $d(f(x), f(a)) < \epsilon$ para cada $f \in E$.

Si E es equicontinua en todo punto de M diremos que E es equicontinua en M.

Teorema 2.7 (Arzela- Ascoli)**.** *Sean M, N espacios métricos, con M separable, y N completo. Sea $E \subset C(M, N)$ una familia equicontinua tal que para cada $x \in M, \overline{\{f(x) | f \in E\}}$ es compacto en N. Entonces toda sucesión $(f_n) \subset E$ tiene una subsucesión (f_{n_k}) que converge puntualmente a $f \in C(M, N)$ y la convergencia es uniforme en cada compacto de M.*

Podemos encontrar una demostración en [6] Appendice A5.

Definición 2.12. Sea E un espacio de Banach y E^* su espacio dual. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en E, notaremos por $x_n \rightharpoonup x$ la convergencia de x_n a x en la topología débil $\sigma(E, E^*)$, es decir, diremos que

$$x_n \rightharpoonup x \text{ si y solo si } \langle f, x_n \rangle_{E^*,E} \to \langle f, x \rangle_{E^*,E}$$

para toda $f \in E^*$ donde, como antes $\langle f, x \rangle_{E^*,E} = f(x)$.

Teorema 2.8 (Banach - Alaoglu)**.** *Sea E un espacio normado y*

$$B_{E^*} = \{f \in E^* : \|f\| \leq 1\}$$

Entonces B_{E^*} es compacta en la topología débil.

Podemos encontrar una demostración de este teorema en [3] Teorema 3.16.

Teorema 2.9 (Rellich - Krondrachov)**.**

$$H^1(0, T) \hookrightarrow L^2(0, T) \quad \textit{es compacta.}$$

Una desmostración de este teorema se puede encontrar en [2]Theorem 6.3 parte II, con $j = 0$, $k = 1$, $m = 1$, $p = 2$, $n = 1$, $1 \leq q < \infty$.

Consideremos ahora un intervalo abierto $I \in \mathbb{R}$ y un espacio de Banach X equipado con su norma $\|.\|$.

Definición 2.13. Definimos por $C_c(I, X)$ al conjunto de funciones $u : I \to X$ continuas con soporte compacto. Dotado de la norma:

$$\|u\|_{C(I,X)} = \max_{t\in I} \|u(t)\|_X.$$

Definición 2.14. Definimos el espacio $L^p(I, X)$ como el cunjunto de funciones medibles $u : I \to X$ tal que la función

$$t \mapsto \|u(t)\| \text{ pertenece a } L^p(I)$$

Asi, el espacio $L^p(I, X)$ queda dotado de la norma

$$\|u\|_{L^p(I,X)} = (\int_I \|u(t)\|_X^p dt)^{\frac{1}{p}} \text{ si } \ p < \infty$$

y

$$\|u\|_{L^\infty(I,X)} = esssup_{t\in I}\|u(t)\|_X.$$

En adelante trabajaremos con $I = [0, T]$.

Definición 2.15. Análogamente definimos el espacio de Sobolev $W^{1,p}(I, X)$ como el conjunto de todas las funciones $u \in L^p(I, X)$ tal que u' existe en sentido débil y pertenece a $L^p(I, X)$.

Dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(I,X)} = \|u\|_{L^p(I,X)} + \|u'\|_{L^p(I,X)} \text{ si } 1 \le p \le \infty$$

Observación 2.7. Escribimos así $H^1(I, X) = W^{1,2}(I, X)$.

Teorema 2.10. *Sea $u \in W^{1,p}(0, T; X)$ para algún $1 \le p \le \infty$ Entonces:*

i)$u \in C([0, T]; X)$ (eventualmente, después de ser redefinido en un conjunto de medida cero).

ii) $u(t) = u(s) + \int_s^t u'(\tau)d\tau$ para todo $0 \le s \le t \le T$.

iii) Además, se tiene la siguiente estimación:

$$\max_{0\le t\le T} \|u(t)\|_X \le C\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)}$$

y la constante C sólo depende de T.

Se puede ver una demostración de este teorema en [1] Sección 5.2.9 Teorema 2.

Teorema 2.11. *Supongamos que* $u \in L^2(0,T;H_0^1(U))$ *con* $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$.

i) Entonces

$$u \in C([0,T];L^2(U))$$

(eventualmente, después de ser redefinido en un conjunto de medida cero).

ii) La función

$$t \mapsto \|u(t)\|^2_{L^2(U)}$$

es absolutamente continua, con

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(U)} = 2\langle u'(t), u(t)\rangle$$

para casi todo $t \in [0,T]$.

iii) Además tenemos la siguiente estimación

$$\max_{0\le t\le T} \|u(t)\|_{L^2(U)} \le C(\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))})$$

con C *una constante que depende sólo de* T.

Podemos ver una demostración de este teorema en [1] Sección 5.9.2 Teorema 3.

Definición 2.16. Definimos los siguientes espacios de Banach

$$C_{b,u}(\overline{I},X) = \left\{u : \overline{I} \to X \text{ uniformemente continua y acotada con la topología uniforme}\right\}$$

$$C^m_{b,u}(\overline{I},X) = \big\{u : \overline{I} \to X, \text{cuya derivada de orden } j \text{ pertenece a } C_{b,u}(\overline{I},X) \\ \text{para todo } 0 \le j \le m\big\}\,.$$

Este espacio está equipado con la norma de $W^{m,\infty}(I,X)$.

$$C^{m,\alpha}(\overline{I},X) = \Big\{u \in C^m_{b,u}(\overline{I},X) \text{ tal que} \\ \|u\|_{C^{m,\alpha}} = \|u\|_{W^{m,\alpha}} + \sup_{s,t\in I}\{|t-s|^{-\alpha}\|\frac{d^m u}{dt^m}(t) - \frac{d^m u}{dt^m}(s)\|\} < \infty\Big\}$$

Corolario 2.4. *Se desprende facilmente del Teorema 2.10 que:*

$$W^{1,1}(I,X) \hookrightarrow C_{b,u}(\overline{I},X)$$

y que si $p > 1$ *entonces*

$$W^{1,1}(I,X) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{I},X)$$

con $\alpha = \frac{p-1}{p}$.

Proposición 2.4. *Asumimos X reflexivo y sea $f \in L^p(I,X)$. Resulta que $f \in W^{1,p}(I,X)$ si y solo si existe $\varphi \in L^p(I)$ y un conjunto N de medida cero tal que*

$$\|f(t) - f(s)\| \leq |\int_s^t \varphi(\sigma)d\sigma| \ \forall \ s,t \in I - N.$$

En ese caso,

$$\|f'\|_{L^p(I,X)} \leq \|\varphi\|_{L^p(I)}.$$

Ver [4] Proposition 1.3.12.

Observación 2.8. Aplicando la Proposición 2.4 se puede mostrar los siguientes resultados:

i) Sea X reflexivo, y $f : I \to X$ Lipchitz continua y acotada. Resulta que $f \in W^{1,\infty}(I,X)$ y $\|f'\|_{L^\infty(I,X)}$.

ii) Sea X reflexivo y que $1 < p \leq \infty$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de $W^{1,p}(I,X)$ y sea

$$f : I \to X : f_n(t) \rightharpoonup f(t) \ \text{ en } X \text{ si } \ n \to \infty$$

para casi todo $t \in I$. Resulta que:

$$f \in W^{1,p}(I,X) \ \text{ y } \ \|f\|_{W^{1,p}(I,X)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{W^{1,p}(I,X)}.$$

iii) Sea X reflexivo y que $1 < p \leq \infty$ y sea $f \in L^p(I,X)$. Si existe K tal que para todo $J \subset\subset I$ y todo $|h| < d(\overline{J}, \partial I)$ tal que

$$\|f(.+h) - f(.)\|_{L^p(J,X)} \leq K|h|.$$

Entonces

$$f \in W^{1,p}(I,X) \text{ y } \|f'\|_{L^p(I,X)} \leq K.$$

Ver [4] Remark 1.3.13.

2.2. Compacidad

En esta sección demostraremos algunos resultados que nos permitirán probar resultados de compacidad en ciertos espacios de funciones.

Proposición 2.5. *Sean $X \hookrightarrow Y$ dos espacios de Banach. Consideremos $x \in X$ y una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Si $x_n \rightharpoonup x$ en X, entonces $x_n \rightharpoonup x$ en Y.*

Demostración. Probemos algo más general:

Sean X, Y dos espacios de Banach. $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Si $(x_n) \subset X$, $x_n \rightharpoonup x$ en X. Entonces $Ax_n \rightharpoonup Ax$ en Y.

Sea $y' \in Y^*$, $y' : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ lineal. Entonces $y' \circ A : X \longrightarrow \mathbb{K}$ lineal, es decir, $y \circ A \in X^*$.

Por definición de convergencia débil, tenemos que:

$\langle y', Ax_n \rangle_{Y^*Y} = \langle y' \circ A, x_n \rangle_{X^*X} \longrightarrow \langle y' \circ A, x \rangle_{X^*X} = \langle y', Ax \rangle_{Y^*Y}$
por lo tanto $Ax_n \rightharpoonup Ax$ en Y.

En particular, si $A = \imath$ la inclusión canónica $\imath : X \longrightarrow Y$ tenemos que si $x_n \rightharpoonup x$ en X entonces $x_n \rightharpoonup x$ en Y. Lo que demuestra nuestra Proposición.

$\square$

Proposición 2.6. *Sean $X \hookrightarrow Y$ dos espacios de Banach. X reflexivo. Sea $y \in Y$, $(x_n) \subset X$ una sucesión acotada. Si $x_n \rightharpoonup y$ en Y, entonces $y \in X$ y $x_n \rightharpoonup y$ en X.*

Demostración. Veamos primero que $y = x \in X$:

X es reflexivo y $(x_n) \subset X$ acotada, por lo tanto admite una subsucesión débilmente convergente.

Es decir, existen $x \in X$ y $(x_{n_k}) \subset X$ tal que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ en X cuando $k \to \infty$

En particular, por la Proposición 2.5, se tiene que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ en Y.

Por hipótesis sabemos que $x_n \rightharpoonup y$ *en* Y, por lo tanto $x_{n_k} \rightharpoonup y$ en Y y por unicidad de límite débil tenemos que $x = y$.

Resta ver que $x_n \rightharpoonup y$ en X:

Sea $x' \in X^*$, como $X \hookrightarrow Y$ por Hahn Banach, sabemos que x' se puede prolongar a una aplicación lineal y continua de Y en $\mathbb{R}$, es decir, $x' \in Y^*$. Además, $(x_n) \subset X \subset Y$.

Luego:

$\langle x', x_n \rangle_{X^*X} = \langle x', x_n \rangle_{Y^*Y} \longrightarrow \langle x', y \rangle_{Y^*Y} = \langle x', y \rangle_{X^*X}$ pues hemos visto que $y \in X$.

$\square$

Proposición 2.7. *Sean $X \hookrightarrow Y$ dos espacios de Banach y sea $I \subset \mathbb{R}$ abierto y acotado. Sea $u : \overline{I} \longrightarrow Y$ débil continua. Si X es reflexivo y existe un subconjunto denso E de I tal que $u(t) \in X\ \forall\ t \in E$ y $\sup\{\|u(t)\|_X, t \in E\} = K < \infty$ entonces $u(t) \in X\ \forall\ t \in \overline{I}$ y $u : \overline{I} \longrightarrow X$ es débil continua.*

Demostración. Sea $t \in \overline{I}$ (en particular $t \in \overline{E}$) y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que $t_n \longrightarrow t$ en $E \subset I$.

Como $u : \overline{I} \longrightarrow Y$ es débil continua, se tiene $u(t_n) \rightharpoonup u(t)$ en Y.

Si $x_n = u(t_n)$, como $t_n \in E$ para todo $n \in \mathbb{N}$ resulta que $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $u(t) \in Y$.

Luego, por ser X es reflexivo, se deduce de la Proposición 2.6, que $u(t_n) \rightharpoonup u(t)$ en X y $u(t) \in X$.

Además, para todo $t \in \overline{I}$, $\|u(t)\|_X \leq \liminf \|u(t_n)\|_X \leq K$.

Luego, $\sup\{\|u(t)\|_X, t \in \overline{I}\} \leq K$.

Hemos visto que $u : \overline{I} \longrightarrow X$ y $\sup\{\|u(t)\|_X, t \in \overline{I}\} \leq K$.

Veamos finalmente que u es débil continua en X para todo $t \in \overline{I}$:

Sea $(s_n), s \in \overline{I}$ tal que $s_n \rightharpoonup s$, como u es débil continua en Y tenemos que:

$u(s_n) \rightharpoonup u(s)$ en Y y al ser X reflexivo, por la Proposición 2.6, concluímos que:

$u(s_n) \rightharpoonup u(s)$ en X y $u(s) \in X$.

□

Lema 2.1. *Sean $X \hookrightarrow Y$ dos espacios de Banach y sea I un intervalo abierto y acotado de $\mathbb{R}$. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $C(\overline{I}, Y)$. Asumimos que $u_n(t) \in X$ para todo $(n,t) \in \mathbb{N} \times I$ y que $Sup\{\|u_n(t)\|, (n,t) \in \mathbb{N} \times I\} = K < \infty$. Asumimos además que (u_n) es uniformemente equicontinua en Y.*

(i.e $\forall\ \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\forall\ n, s, t \in \mathbb{N} \times I \times I$ $\|u_n(t) - u_n(s)\|_Y < \epsilon$ si $|t - s| < \delta$).

Si X es reflexivo, entonces existe una función $u \in C(\overline{I}, Y)$ débilmente continua de $\overline{I} \longrightarrow X$ y una subsucesión u_{n_k} tal que $u_{n_k}(t) \rightharpoonup u(t)$ en X si $k \to \infty\ \ \forall\ \ t \in \overline{I}$.

Demostración. Como X es reflexivo y $(u_n(t))$ es una sucesión acotada en X para todo $t \in \overline{I}$. Existe un funcional $u : I \longrightarrow X$ y una subsucesión $(u_{n_k}(t))$ tal que $u_{n_k}(t) \rightharpoonup u(t)$ en X.

Consideremos $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una numeración de $\mathbb{Q} \cap I$ y veamos que existe una subsucesión, tal que $u_{n_k}(t_j) \rightharpoonup u(t_j)$ $(k \to \infty)$ en $X\ \forall\ j$ con $u : \mathbb{Q} \cap I \longrightarrow X$.

$E = \mathbb{Q} \cap I$ es un denso numerable de I.

Como $u_n(t) \in X \ \ \forall \ \ (n,t)$. En particular para $t_1 \in E, u_n(t_1) \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y es una sucesión acotada en X reflexivo. Por lo que existe una subsucesión débilmente convergente, que llamaremos $(u_{n_1 j}(t_1))_j$.

Para $t_2 \in E$, $(u_{n_1 j}(t_2))_j$ también resulta acotada y por lo tanto admite una subsucesión débilmente convergente, que llamaremos $(u_{n_2 j}(t_2))_j$.

Notemos que la sucesión $(u_{n_2 j}(t_1))_j$ también converge débil por ser una subsucesión de $(u_{n_1 j}(t_1))_j$.

Luego, siguiendo este procedimiento, construimos sucesiones para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $(u_{n_k+1 j}(t_l))_j$ es subsucesión de $(u_{n_k j}(t_l))_j$ y que $(u_{n_k j}(t_l))_j$ es subsucesión de $(u_{n_1 j}(t_1))_j \ \ \forall \, k, l \in \mathbb{N}$.

Definimos la sucesión diagonal $u_{nk}(t_j) = (u_{n_k j}(t_j))_j$ la cual verifica que:

$u_{nk}(t_j) \rightharpoonup u(t_j)$ en $X \ \ \forall \ \ j \in \mathbb{N}$ con $u : E \longrightarrow X$.

Como $X \hookrightarrow Y$ son Banach, por la Proposición 2.5, se tiene que $u_{nk}(t_j) \rightharpoonup u(t_j)$ en Y.

Veamos que u se puede extender a una función continua de $\overline{I} \to Y$:

Sea $t \in \overline{I}$, por densidad existe $(t_{nj}) \subset E$ tal que $t_{nj} \to t$. Veamos que $u(t_{nj})$ converge:

s$(u(t_{nj})) \subset Y$ completo. Si vemos que es una sucesión de Cauchy, tendrá límite y tal límite caerá en Y.

Sea $\epsilon > 0$ por la equicontinuidad uniforme de las (u_n) existe $\delta > 0$ tal que si $|t_{nk} - t_{nj}| < \delta$ se tiene que $\|u_{nk}(t_{nk}) - u_{nk}(t_{nj})\|_Y < \epsilon$.

Luego $\|u(t_{nk}) - u(t_{nj})\|_Y \leqslant \liminf \|u_{nk}(t_{nk}) - u_{nk}(t_{nj})\|_Y < \epsilon$.

Por lo tanto $u(t_{nj})$ converge en Y y así podemos definir $U : \overline{I} \longrightarrow Y$ de forma continua de la siguiente forma:

$$U(t) = \begin{cases} u(t) & si \quad t \in E \\ \lim_{j\to\infty} u(t_{nj}) & con \quad t_{nj} \to t \text{ si no} \end{cases}$$

Veamos que U está bien definida y que efectivamente es continua.

Buena definición:

Sea $t \in \overline{I}$ y $(t_{nj}), (s_{nj}) \subset E$ tal que $t_{nj} \to t$ y $s_{nj} \to t$ cuando $j \to \infty$.

Por la equicontinuidad uniforme de las (u_n) sabemos que existen los límites de $(u(t_{nj}))$ y $(u(s_{nj}))$.

Sea $U(t) = \lim_{j\to\infty} u(t_{nj})$ y veamos que es el mismo límite de la sucesión $u(s_{nj})$.

Dado $\epsilon > 0$ podemos suponer que existe $\delta > 0$ tal que

$|t_{nj} - s_{nj}|, |t_{nj} - t|, |s_{nj} - t| < \delta$ para j suficientemente grande.

$$\begin{aligned}\|u(s_{nj}) - U(t)\|_Y &= \|u(s_{nj}) - u(t_{nj}) + u(t_{nj}) - U(t)\|_Y \\ &\leqslant \|u(s_{nj}) - u(t_{nj})\|_Y + \|u(t_{nj}) - U(t)\|_Y \\ &\leqslant \liminf \|u_{nk}(s_{nj}) - u_{nk}(t_{nj})\|_Y + \|u(t_{nj}) - U(t)\|_Y \\ &\leqslant \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.\end{aligned}$$

Luego

$$U(t) = \lim_{j\to\infty} u(t_{nj}) = \lim_{j\to\infty} u(s_{nj}).$$

Ahora veamos que U es continua:

Como $u : E \longrightarrow X$ es continua para todo $s \in E$. Se tiene que para todo $s \in \overline{I}$

$$\lim_{t\to s} u(t) = U(s).$$

Dados $s \in \overline{I}$ y $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para $t \in E, |t - s| < \delta$

$$\Rightarrow \|u(t) - U(s)\|_Y < \epsilon/2.$$

Veamos que para todo $\overline{s} \in \overline{I}$ con $|\overline{s} - s| < \delta$ tenemos que

$$\|U(\overline{s}) - U(s)\|_Y < \epsilon.$$

Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que $s_n \to \overline{s}$. Sin pérdida de generalidad podemos admitir que

$$|s_n - s| < \delta \ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto

$$\|U(s) - u(s_n)\|_Y < \epsilon/2 \ \forall\ n.$$

Luego, como

$$U(\overline{s}) = \lim_{t\to\overline{s}} u(t), = \lim_{n\to\infty} u(s_n)$$

se sigue que:

$$\|U(\overline{s}) - U(s)\|_Y \leqslant \liminf \|u(s_n) - U(s)\|_Y \leqslant \epsilon/2 < \epsilon.$$

Por abuso de notación llamaremos a U como u.

Luego $u \in C(\overline{I}, Y)$ y está bien definida. En particular, u es débilmente continua de $\overline{I} \longrightarrow Y$ es decir, si $t_n \to t \Rightarrow u(t_n) \rightharpoonup u(t)$ en Y.

Como X es reflexivo, por la Proposición 2.6 se tiene que, $u(t) \in X$ y $u(t_n) \rightharpoonup u(t)$ en X es decir, u es débilmente continua de $\overline{I} \longrightarrow X$ y además

$$\forall\ t \in \overline{I},\ \|u(t)\|_X \leqslant \liminf \|u(t_{nj})\|_X \leqslant K.$$

Resta ver que para todo $t \in \overline{I}$ la sucesión $(u_{nk}(t))_k$ converge débil a $u(t)$ en X:

Para cada $t \in \overline{I}$ existe $(t_j) \subset E$ tal que $t_j \to t$ cuando $j \to \infty$.
Sea $y' \in Y^*$, $\epsilon > 0$

$$| < y', u_{nk}(t) - u(t) >_{Y^*Y} | \leqslant | < y', u_{nk}(t) - u_{nk}(t_j) >_{Y^*Y} | + | < y', u(t) - u(t_j) >_{Y^*Y} |$$

$$+ \ | < y', u_{nk}(t_j) - u(t_j) >_{Y^*Y} |.$$

Por la equicontinuidad uniforme de las (u_n) y la continuidad de u, el primer y segundo término del lado derecho en la desigualdad anterior es menor o igual que $\epsilon/3$ para j suficientemente grande; y el tercer término, como

$$u_{nk}(t_j) \rightharpoonup u(t_j) \text{ en } Y \text{ para todo } j$$

también será menor que $\epsilon/3$ para j suficientemente grande.

Luego

$$| < y', u_{nk}(t) - u(t) >_{Y^*Y} | \longrightarrow 0 \ si\ k \to \infty$$

ie $u_{nk}(t) \rightharpoonup u(t)$ en Y y por la Proposición 2.6 $u_{nk}(t) \rightharpoonup u(t)$ en X.

□

Lema 2.2. *Sea I un intervalo acotado en $\mathbb{R}$ y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $L^\infty(I, H_0^1) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1})$. Entonces, existe $u \in L^\infty(I, H_0^1) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1})$ y una subsucesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $t \in \overline{I}$, $u_{nk}(t) \rightharpoonup u(t)$ en H_0^1.*

Demostración. Aplicaremos el Lema 2.1, con $X = H^1$ e $Y = H^{-1}$.

Veamos que estamos bajo las hipótesis del lema:

$X \hookrightarrow Y$, pues $H^1 \hookrightarrow H^{-1}$ por el Teorema 2.3 y H^1 es reflexivo. Además $I = [0, T]$ y por el Corolario 2.4 tenemos que $W^{1,\infty}(I, H^{-1}) \subset C(I, H^{-1})$, lo que implica que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C(I, H^{-1})$ y es acotada por hipótesis. Resta ver que es uniformemnte equicontinua en H^{-1}. En efecto, Como $u_n \in$ es una sucesión acotada en $L^\infty(I, H_0^1) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1})$, existe $C > 0$ tal que $\|(u_n)_t\|_{H^{-1}} < C$ uniformemente en n y t. Si $s < t$, sabemos que

$$u_n(t) - u_n(s) = \int_s^t (u_n)_t(r)dr$$

$$\Rightarrow \|u_n(t) - u_n(s)\|_{H^{-1}} \leq \int_s^t \|(u_n)_t(r)\|_{H^{-1}} dr \leq C|s-t|.$$

Luego, dado $\epsilon > 0$ alcanza con tomar $\delta < \frac{\epsilon}{C}$.

En consecuencia, por el Lema 2.1. Existe una $u \in C(\overline{I}, H^{-1})$, que es débilmente continua de $\overline{I} \to H_0^1$ y una subsucesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $t \in \overline{I}$, $u_{nk}(t) \rightharpoonup u(t)$ en $X = H^1$ cuando $k \to \infty$.

Por la Observación 2.8, al estar (u_n) acotada en $W^{1,\infty}(I, H^{-1})$ y $u : I \to H^{-1}$ tal que $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ en $H^{-1} \Rightarrow u \in W^{1,\infty}(I, H^{-1})$ y

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(I,H^{-1})} \leq \liminf_n \|u_n\|_{W^{1,\infty}(I,H^{-1})} < \infty.$$

Asi, $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ en H^1 y $u \in L^\infty(I, H^1) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1})$ lo que termina la demostración.

□

2.3. Estimaciones

A continuación definimos Δ como un operador lineal de H^1 en H^{-1} y probaremos algunas estimaciones que usaremos a lo largo de este trabajo.

Observación 2.9. Definimos $\Delta : H^1 \to H^{-1}$ como un operador lineal y continuo. Notemos que para $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ queda definida la forma lineal,

$T_{\Delta u} : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ por

$$T_{\Delta u}(v) = \langle \Delta u, v\rangle_{H^{-1}\times H^1} = -Re \int \bigtriangledown u \overline{\bigtriangledown v}$$

Sin olvidar que podemos escribirla así porque estamos usando : $(H_0^1)^* = H^{-1}$ y $H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$.

Con esta definición y por abuso de notación tenemos que:

Para $u \in H^1$, $\Delta u \in H^{-1}$,

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}} = \|T_{\Delta u}\|_{H^{-1}} = \sup_{v\in H^1(\mathbb{R}^N)/\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}=1} |\langle \Delta u, v\rangle_{H^{-1},H^1}|.$$

Veamos que efectivamente es continuo:

Para ello probaremos que $\|\Delta u\|_{H^{-1}} \leq \|u\|_{H^1}$:

Sean $u, v \in H^1$

$$\begin{aligned}\langle \Delta u, v\rangle_{H^{-1},H^1} &= -Re\int \nabla u\overline{\nabla v} = -\langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2}\\ &\leq \| \nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\| \nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.\end{aligned}$$

Entonces tomando supremo sobre $v \in H^1$ tal que $\|v\|_{H^1} = 1$ tenemos que

$$\|\Delta u\|_{H^{-1}} = \sup_{v\in H^1:\|v\|_{H^1}=1} |\langle \Delta u, v\rangle_{H^{-1},H^1}| \leq \|u\|_{H^1}. \tag{2.4}$$

Lo que muestra que $\Delta \in \mathcal{L}(H^1, H^{-1})$.

Observación 2.10. Para $u \in L^\infty(0, T; H^1) \cap W^{1,\infty}(0, T; H^{-1})$. Se tiene que:

$$\|u(t) - u(s)\|_{L^2} \leq C|t - s|^{\frac{1}{2}} \text{ para todo } t, s \in (0, T). \tag{2.5}$$

Demostración. Veamos (2.5): Usando (2.1)

$$\begin{aligned}\|u(t) - u(s)\|^2_{L^2} &\leq \|u(t) - u(s)\|_{H^1}\|u(t) - u(s)\|_{H^{-1}}\\ &\leq 2\|u\|_{L^\infty((0,T),H^1)}\|u(t) - u(s)\|_{H^{-1}} \leq 2C|t - s|\end{aligned}$$

Esta última desigualdad es por la inclusión $W^{1,\infty} \hookrightarrow C^{0,1}$ ya que

$$\frac{\|u(t) - u(s)\|_{H^{-1}}}{|t - s|} \leq \|u\|_{C^{0,1}((0,T),H^1)} \leq \|u\|_{W^{1,\infty}((0,T),H^{-1})} \text{ para todo } t \neq s$$

Entonces,

$$\|u(t) - u(s)\|_{H^{-1}} \leq C|t - s|$$

y por lo tanto

$$\|u(t) - u(s)\|_{L^2} \leq C|t - s|^{\frac{1}{2}} \text{ para todo } t, s \in (0, T).$$

□

Probaremos a continuación una acotación que nos permitirá trabajar con la no linealidad $|u|^{2\sigma}u$.

Observación 2.11. Para todo $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene que:

$$||z|^{2\sigma}z - |w|^{2\sigma}w| \leq C(|z|^{2\sigma} + |w|^{2\sigma})|z - w|.$$

En efecto:

$$
\begin{aligned}
||z|^{2\sigma}z - |w|^{2\sigma}w| &= \left||z|^{2\sigma}z - |z|^{2\sigma}w + |z|^{2\sigma}w - |w|^{2\sigma}w\right| \\
&\leq \left||z|^{2\sigma}z - |z|^{2\sigma}w\right| + \left||z|^{2\sigma}w - |w|^{2\sigma}w\right| \\
&= |z|^{2\sigma}|z-w| + |w|\left||z|^{2\sigma} - |w|^{2\sigma}\right|.
\end{aligned}
$$

Por Lagrange tenemos que si $x, y \in \mathbb{R}$

$$
|x^{2\sigma} - y^{2\sigma}| = |2\sigma\xi^{2\sigma-1}(x-y)| \leq 2\sigma|\xi|^{2\sigma-1}|x-y| \leq 2\sigma(\text{máx}(|x|,|y|))^{2\sigma-1}|x-y|
$$

con $\xi \in int(x, y)$.

Luego si $x = |z|$ e $y = |w|$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\left||z|^{2\sigma}z - |w|^{2\sigma}w\right| &\leq |z|^{2\sigma}|z-w| + |w|||z|^{2\sigma} - |w|^{2\sigma}| \\
&\leq |z|^{2\sigma}|z-w| + |w|2\sigma(\text{máx}(|z|,|w|))^{2\sigma-1}||z|-|w|| \\
&\leq |z|^{2\sigma}|z-w| + |w|2\sigma(\text{máx}(|z|,|w|))^{2\sigma-1}|z-w|.
\end{aligned}
$$

Podemos suponer que $|w| \geq |z|$ ya que el problema es simétrico en el caso contrario. Asi tenemos:

$$
\begin{aligned}
\left||z|^{2\sigma}z - |w|^{2\sigma}w\right| &\leq |z|^{2\sigma}|z-w| + |w|2\sigma|w|^{2\sigma-1}|z-w| \\
&= |z-w|(|z|^{2\sigma} + |w|^{2\sigma}2\sigma) \\
&\leq \text{máx}(1, 2\sigma)|z-w|(|z|^{2\sigma} + |w|^{2\sigma}).
\end{aligned}
$$

2.4. Existencia de solución en H^1

A continuación daremos algunas definiciones y resultados de existencia de solución de la ecuación no lineal de Schrödinger que se pueden encontrar en el capítulo 3 de [4].

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto.

Definición 2.17. Dada g una no linealidad, consideramos el problema a valores iniciales

$$
\left\{
\begin{aligned}
iu_t + \Delta u + g(u) = 0 \quad &, \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \Omega \\
u|_{\partial\Omega} = 0 & \\
u(0,x) = u_0(x) &
\end{aligned}
\right.
\tag{2.6}
$$

Consideramos $g \in C(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ y un intervalo I tal que $0 \in I$.

Decimos que u es una solución débil en H_0^1 de (2.6) en I si u verifica (2.6) en $H^{-1}(\Omega)$ para casi todo $t \in I$ y

$$u \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega)).$$

Y decimos que u es una solución fuerte en $H_0^1(\Omega)$ de (2.6) en I si u verifica (2.6) en $H^{-1}(\Omega)$ para todo $t \in I$ y

$$u \in C(I, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(I, H^{-1}(\Omega)).$$

En nuestro caso, la no linealidad es $g(u) = |u|^{2\sigma}u + \phi(t)Vu$, con $V = V_1 + V_2$, $V_1 \in L^p$, $V_2 \in L^\infty$

Observación 2.12.

- Si $u \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1})$ entonces $u \in C(\overline{I}, L^2(\Omega))$ y así tiene sentido la condición $u(0) = u_0$.
- Sea $u \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega))$. Si $g(u) \in L^\infty(I, H^{-1}(\Omega))$ (o si $g : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ es acotado en subconjuntos acotados) entonces $\Delta u + g(u) \in L^\infty(I, H^{-1}(\Omega))$ por lo tanto, si u satisface $iu_t + \Delta u + g(u) = 0$ en sentido distribucional, entonces $u \in W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega))$. Además si $u \in C(I, H_0^1(\Omega))$ satisface $iu_t + \Delta u + g(u) = 0$ en sentido distribucional, entonces $u \in C^1(I, H^{-1}(\Omega))$.

Definición 2.18. Diremos que u continua en I con $0 \in I$ es una mild solution del problema a valores iniciales (2.6) cuando es solución de la ecuación integral

$$u(t) = U(t)u_0 + i\int_0^t U(t-s)g(u(s))ds \quad \text{para todo} \quad t \in I.$$

donde U es el grupo de isometrías generado por $i\Delta$ en H^1.

Proposición 2.8 (Fórmula de Duhamel)**.** *Sea I un intervalo tal que $0 \in I$, $g \in C(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ y $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Si g es acotada en subconjuntos acotados y $u \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega))$. Entonces, u es una solución débil en $H_0^1(\Omega)$ de* (2.6) *en I si y solo si*

$$u(t) = U(t)u_0 + i\int_0^t U(t-s)g(u(s))ds \quad ctp \quad t \in I. \tag{2.7}$$

La función $u \in C(I, H_0^1(\Omega))$ es una solucioón fuerte en $H_0^1(\Omega)$ para (2.6) *en I si y sólo si satisface* (2.7) *para todo $t \in I$, donde U es el grupo de isometrías generado por iA.*

Definición 2.19 (Unicidad en H^1)**.** Consideramos $g \in C(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ decimos que hay unicidad en $H^1(\Omega)$ para el problema (2.6) si dada cualquier $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ y cualquier intervalo I tal que $0 \in I$, si cualesquiera dos soluciones débiles en H_0^1 de (2.6) coinciden en I.

Definición 2.20 (Buen planteo local en H_0^1)**.** Consideramos $g \in C(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$, decimos que el problema a valores iniciales (2.6) está localmente bien planteado en $H_0^1(\Omega)$ si valen las siguiente propiedades:

- Hay unicidad en $H^1(\Omega)$ para el problema (2.6).

- Para cada $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ existe una solución fuerte en $H_0^1(\Omega)$ que se define en un intervalo maximal $(-T_{min}, T_{max})$ con $T_{max} = T_{max}(u_0) \in (0, \infty]$ y $T_{min} = T_{min}(u_0) \in (0, \infty]$.

- Se tiene la alternativa blow-up: si $T_{max} < \infty$ entonces
$$\lim_{t \nearrow T_{max}} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty.$$
(respectivamente si $T_{min} < \infty$, entonces $\lim_{t \searrow T_{min}} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty$)

- La solución depende continuamente del dato inicial, es decir, si $u_n^0 \to u_0$ en $H_0^1(\Omega)$ y si $I \subset (-T_{min}, T_{max})$ es un intervalo cerrado, entonces la solución maximal u_n de (2.6) con condición inicial $u_n(0) = u_n^0$ está definida en $\overline{I}$ para n suficientemente grande y satisface que $u_n \to u$ en $C(\overline{I}, H_0^1(\Omega))$.

Observación 2.13.

- La propiedad que $(-T_{min}, T_{max})$ es el intervalo maximal de existencia, significa que si I es un intervalo tal que $0 \in I$ y existe solución fuerte en H_0^1 de (2.6) en I, entonces $I \subset (-T_{min}, T_{max})$.

- Si $T_{max} < \infty$ (respectivamente $T_{min} < \infty$) entonces por la alternativa blow-up
$$\lim_{t \nearrow T_{max}} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty \text{ (respectivamente } \lim_{t \searrow T_{min}} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty).$$
En este caso se dice que la solución u explota en T_{max} (respectivamente $-T_{min}$). Si $T_{max} = \infty$ se dice que la solución es positivamente global. En este caso, la alternativa blow-up no dice nada sobre la limitación de $\|u\|_{H^1}$ cuando $t \to \infty$.

- La propiedad de la dependencia continua implica que las funciones T_{max} y T_{min} son semicontinuas inferior de $H_0^1(\Omega)$ en $(0, \infty]$.

Concluímos que la noción de buen planteo requerida es bastante fuerte, dado que se requiere, unicidad, la alternativa blow-up y la continua dependencia.

En nuestro problema consideraremos $\Omega = \mathbb{R}^N$ donde también valen los resultados del capítulo 3 de [4].

Teorema 2.12. *Consideremos A un operador $\mathbb{C}$-lineal, autoadjunto, ≤ 0 en $L^2(\Omega)$ con dominio en $H^2(\Omega)$ y $\overline{A}$ la extensión de A a $H^{-2}(\Omega)$. Sea $\tau(t)$ el grupo de isometrías generado en $H^{-2}(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega)$, $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ o $H^2(\Omega)$ por el operador iA. Asumimos que $g : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es Lipschitz continua en subconjuntos acotados de $L^2(\Omega)$ y que existe $G \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ tal que $G'(x) = g(x)$ para todo $x \in H^1(\Omega)$. Asumimos también que*

1. *$\langle g(x), ix\rangle_{L^2(\Omega)} = 0$ para todo $x \in L^2(\Omega)$.*

2. *Para cada $x \in H^1(\Omega)$, sea*

$$E(x) = \frac{1}{2}(\|x\|^2_{H^1(\Omega)} - \|x\|^2_{L^2(\Omega)}) - G(x) = -\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle_{L^2(\Omega)} - G(x)$$

tal que $E \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ y $E'(x) = -Ax - g(x) \in H^{-1}(\Omega)$.

Entonces para cada $x \in L^2(\Omega)$ existe una única solución u del problema

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in C(\mathbb{R}, L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{-2}(\Omega)) \\ iu_t + \overline{A}u + g(u) = 0 \\ u(0) = x \end{array} \right. , \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

y además valen las siguientes propiedades:

- *$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|x\|_{L^2(\Omega)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (conservación de carga).*
- *Si $x \in H^1$ entonces $u \in C(\mathbb{R}, H^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{-1}(\Omega))$ y $E(u(t)) = E(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (conservación de energía).*
- *Si $x \in H^2$ entonces $u \in C(\mathbb{R}, H^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$.*

El teorema anterior no se puede aplicar a nolinealidades como la nuestra, ya que no es Lipschitz en acotados de L^2, por eso enunciaremos el siguiente teorema más general.

Teorema 2.13. *Sea $g = g_1 + ... + g_k$ donde cada g_j satisface las siguientes propiedades para algunos exponentes r_j, ρ_j:*

1. *$g = G'$ para alguna $G \in C^1(H^1_0(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. En particular $g \in C(H^1_0(\mathbb{R}^N), H^{-1}(\mathbb{R}^N))$.*

2. *Existen* $r, \rho \in [2, \frac{2N}{N-2})$ $(r, \rho \in [2, \infty]$ *si* $N = 1)$ *tal que* $g \in C(H_0^1(\mathbb{R}^N), L^{\rho'}(\mathbb{R}^N))$.

3. *Para cada* $M < \infty$ *existe* $C(M) < \infty$ *tal que*

$$\|g(v) - g(u)\|_{L^{\rho'}} \leq C(M)\|v - u\|_{L^r} \quad \text{para todo} \quad u, v \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$$

tal que $\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1} \leq M$.

4. *Para cada* $u \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{Im}(g(u)\overline{u}) = 0$ *a.e en* $\mathbb{R}^N$.

Sea $G = G_1 + ... + G_k$ *y* $E = E_1 + ... + E_k$. *Para cada* $M > 0$, *existe* $T(M) > 0$ *con la siguiente propiedad. Para cada* $\varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $\|\varphi\|_{H^1} \leq M$ *existe* u *solución débil en* H_0^1 *de*

$$\left\{ \begin{array}{c} iu_t + \Delta u + g(u) = 0 \\ u(0) = \varphi(x) \end{array} \right. \tag{2.9}$$

en $I = (-T(M), T(M))$. *Además* $\|u\|_{L^\infty(-T(M),T(M)),H^1)} \leq 2M$, $\|u(t)\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$, $E(u(t)) \leq E(\varphi)$ *para todo* $t \in (-T(M), T(M))$.

Observemos que el teorema anterior nos da existencia pero no unicidad de solución. A continuación enunciaremos un resultado por el cual, asumiendo unicidad de solución, tendremos buen planteo local en H^1.

Observación 2.14. El operador A representa un observable físico, con $spec(A) \subset \mathbb{R}$. Un ejemplo sería $A = P_\varphi - 1$ donde P_φ denota la proyección ortogonal sobre $\varphi \in L^(\mathbb{R}^N)$. Así

$$\langle u(T, .); Au(T, .)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = |\langle u(T, .), \varphi(.)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}|^2 - 1.$$

Usando el hecho que $\|u(T, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 1$.

Teorema 2.14. *Sea* $g = g_1 + ... + g_k$ *donde cada* g_j *satisface las siguientes propiedades para algunos exponentes* r_j, ρ_j:

1. $g = G'$ *para alguna* $G \in C^1(H_0^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. *En particular* $g \in C(H_0^1(\mathbb{R}^N), H^{-1}(\mathbb{R}^N))$.

2. *Existen* $r, \rho \in [2, \frac{2N}{N-2})$ $(r, \rho \in [2, \infty]$ *si* $N = 1)$ *tal que* $g \in C(H_0^1(\mathbb{R}^N), L^{\rho'}(\mathbb{R}^N))$.

3. *Para cada* $M < \infty$ *existe* $C(M) < \infty$ *tal que*

$$\|g(v) - g(u)\|_{L^{\rho'}} \leq C(M)\|v - u\|_{L^r} \quad \text{para todo} \quad u, v \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$$

tal que $\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1} \leq M$.

4. *Para cada* $u \in H_0^1(\Omega)$, $\operatorname{Im}(g(u)\overline{u}) = 0$ *a.e en* $\mathbb{R}^N$.

y sea $G = G_1 + ... + G_k$ y $E = E_1 + ... + E_k$. Asumimos además que tenemos unicidad para el problema

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + g(u) = 0 \\ u(0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{2.10}$$

Entonces (2.10) *está localmente bien planteada en $H_0^1(\mathbb{R}^N)$ y que se tiene conservación de carga y energía. Es decir, $\|u(t)\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$ y $E(u(t)) = E(\varphi)$ para todo $t \in (-T_{min}, T_{max})$ donde u es la solución de* (2.10) *con valor inicial $\varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$.*

Observemos que para tener buen planteo en $H^1(\mathbb{R}^N)$ necesitamos probar unicidad. Las técnicas para probar unicidad dependen de las nolinealidades. En nuestro caso necesitaremos de las estimaciones de Strichartz que describiremos en la próxima sección.

2.5. Estimaciones de Strichartz

A continuación daremos algunas definiciones y resultados de estimaciones de Strichartz y existencia y unicidad de solución que se pueden encontrar en los capítulos 2 y 4 de [4].

Definición 2.21. Diremos que un par (q, r) es admisible, si $\frac{2}{q} = N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})$ y $2 \le r \le \frac{2N}{N-2}$, donde $2 \le r \le \infty$ si $N = 1$, y $2 \le r < \infty$ si $N = 2$.

Observación 2.15. Si el par (q, r) es admisible, entonces $2 \le q \le \infty$. El par $(\infty, 2)$ es siempre admisible. El par $(2, \frac{2N}{N-2})$ es admisible si $N \ge 3$.

Consideremos $U(t)$ el grupo de isometrías generado por $i\Delta$.

Proposición 2.9. *Sea $p \in [2, \infty]$ y $t \neq 0$. Entonces $U(t)$ es una función continua de $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ a $L^p(\mathbb{R}^N)$ y*

$$\|U(t)\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le (4\pi|t|)^{-N(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}$$

para toda $\varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 2.15. *[Estimaciones de Strichartz] Valen las siguientes propiedades:*

1. *Para cada $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$, la función $t \mapsto U(t)\varphi$ pertenece a $L^q(\mathbb{R}, L^r(\mathbb{R}^N)) \cap C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N))$ para cada par admisible (q, r). Además existe una constante C tal que $\|U(.)\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}, L^r(\mathbb{R}^N))} \le \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ para cada $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$.*

2. *Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ (no necesariamente acotado), $J = \overline{I}$ y $t_0 \in J$. Si (γ, ρ) es un par admisible y $f \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^N))$.*

   Entonces para cada par (q, r) admisible la función

$$t \mapsto \phi_f(t) = \int_{t_0}^{t} U(t-s)f(s)ds, \quad t \in I$$

   pertenece a $L^q(I, L^r(\mathbb{R}^N)) \cap C(J, L^2(\mathbb{R}^N))$. Además existe una constante C independiente de I tal que

$$\|\phi_f\|_{L^q(I,L^r)} \leq C\|f\|_{L^{\gamma'}(I,L^{\rho'})}$$

   para cada $f \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^N))$.

Proposición 2.10. *[Unicidad] Consideremos $g_1, ..., g_k \in C(H^1(\mathbb{R}^N), H^{-1}(\mathbb{R}^N))$ y sea $g = g_1 + ... + g_k$. Asumimos que cada g_j satisface:*

Existe C_j tal que

$$\|g_j(u) - g_j(v)\|_{L^{\rho_j'}} \leq C_j(M)\|u - v\|_{L^{r_j}}$$

para exponentes r_j , $\rho_j \in [2, \frac{2N}{N-2})$, ($r_j, \rho_j \in [2, \infty]$ si $N = 1$) y para toda $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|u\|_{H^1}, \|v\|_{H^1} \leq M$. Si $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ y u_1, u_2 son dos soluciones débiles en H^1 de

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + g(u) = 0 \\ u(0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{2.11}$$

en algún intervalo I tal que $0 \in I$, entonces $u_1 = u_2$.

Los siguientes resultados serán necesarios para probar buen planteo en $L^2(\mathbb{R}^N)$ de la ecuación adjunta.

Teorema 2.16. *Asumimos que valen las siguiente hipótesis*
(2.12)
$$g : L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N) \to L^{r'}(\mathbb{R}^N) \text{ para algún } r \in [2, \frac{2N}{N-2})(r \in [2, \infty] \text{ si } N = 1).$$

Además, que existe

$$\begin{aligned} &\alpha > 0 \text{ tal que para cada } M > 0 \text{ existe } K(M) < \infty \text{ tal que} \\ &\|g(v) - g(u)\|_{L^{r'}} \leq K(M)(\|u\|_{L^r}^{\alpha} + \|v\|_{L^r}^{\alpha})\|v - u\|_{L^r} \\ &\text{para } u, v \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N) \text{ tal que } \|u\|_{L^2}, \|v\|_{L^2} \leq M \end{aligned} \tag{2.13}$$

y

$$\frac{2}{q} = N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})$$

tal que (q, r) es un par admisible. Si $\alpha+2 < q$ entonces para cada $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$, existe $T_{max}, T_{min} \in (0, \infty]$ y una única solución maximal

$$u \in C((-T_{min}, T_{max}), L^2(\mathbb{R}^N)) \cap L^q_{loc}((-T_{min}, T_{max}), L^r(\mathbb{R}^N))$$

del problema

$$\left\{ \begin{array}{c} iu_t + \Delta u + g(u) = 0 \\ u(0) = \varphi(x) \end{array} \right. \tag{2.14}$$

Además se tienen las siguientes propiedades.

1. *(Alternativa Blow-up) Si $T_{max} < \infty$ (respectivamente si $T_{min} < \infty$) entonces $\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to \infty$ si $t \nearrow T_{max}$ (respectivamente si $t \searrow -T_{min}$).*

2. *$u \in L^\gamma_{loc}((-T_{min}, T_{max}), L^\rho(\mathbb{R}^N))$ para cada par admisible (γ, ρ).*

3. *u depende continuamente de φ en el siguiente sentido, las funciones $\varphi \mapsto T_{min}, T_{max}$ son semicontinuas inferiores de $L^2(\mathbb{R}^N) \to (0, \infty]$. Si $\varphi_n \to \varphi$ en L^2 y si u_n denota la solución de (2.14) con dato incial φ_n entonces $u_n \to u$ en $L^\gamma((-S, T), L^\rho(\mathbb{R}^N))$ para cada par admisible (γ, ρ) y $-T_{min} < -S < 0 < T < T_{max}$.*

4. *Si $\langle g(\omega), i\omega \rangle_{L^{r'}, L^r} = 0$ para toda $\omega \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)$ entonces $T_{min} = T_{max} = +\infty$ y $\|u(t)\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Teorema 2.17. *Sea $g = g_1 + ... + g_k$ donde cada g_j satisface (2.12), (2.13) para algunos exponentes r_j, α_j. Sea $\frac{2}{q_j} = N(\frac{1}{2} - \frac{1}{r_j})$ y sea $r = \max\{r_1, ..., r_k\}$, $q = \min\{q_1, .., q_k\}$. Si $2 + \alpha_j < q_j$ para $j = 1, .., k$ entonces se verifican las conclusiones del teorema 2.16.*

A continuación daremos un lema previo que permite probar buen planteo local de soluciones de la ecuación no lineal de Schrödinger en H^2, siguiendo el método de Kato (ver sección 4.8 de [4]) y también enunciaremos el resultado de buen planteo local en H^2. La existencia de solución de la ecuación de estado en H^2 será necesaria para tener bien planteada la ecuación adjunta en la cual potencias del estado u intervienen como potenciales.

Lema 2.3. *Sea J un intervalo acotado, tal que $0 \in J$, (γ, ρ) un par admisible. Consideremos $f \in L^\infty(J, L^2)$ tal que $f_t \in L^{\gamma'}(J, L^{\rho'})$. Si*

$$v(t) = i \int_0^t U(t-s) f(s) ds \quad \forall \quad t \in J.$$

Entonces

$$v \in L^\infty(J, H^2) \cap C^1(J, L^2) \cap W^{1,a}(J, L^b)$$

para cada par admisible (a, b) *y*

$$\|\Delta v\|_{L^\infty(J,L^2)} \leq \|f\|_{L^\infty(J,L^2)} + \|f(0)\|_{L^2} + C\|f_t\|_{L^{\gamma'}(J,L^{\rho'})}$$

donde C *es independiente de* J *y de* f.

Teorema 2.18. *Sea* $g = g_1 + ... + g_k$ *donde cada* g_j *satisfacen:* $g_j : H^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, *asumimos que existe* $0 \leq s_j < 2$ *y* $2 \leq r_j, \rho_j < \frac{2N}{N-2}$ $(2 \leq r_j, \rho_j < \infty$ *si* $N = 1)$ *tal que* $g_j \in C(H^{s_j}(\mathbb{R}^2), L^2(\mathbb{R}^N))$ *es acotada en subconjuntos acotados y*

$$\|g_j(u) - g_j(v)\|_{L^{\rho_j'}} \leq L_j(M)\|u - v\|_{L^{r_j}} \quad \text{para todo} \quad u, v \in H^2(\mathbb{R}^N)$$

tal que $\|u\|_{H^{s_j}}, \|v\|_{H^{s_j}} \leq M$ *para algunos exponentes* s_j, r_j, ρ_j *y alguna función* $L_j(M)$ *para cada* $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^N)$ *existe* $T_{max}, T_{min} > 0$ *y una única solución maximal*

$$u \in C((-T_{min}, T_{max}), H^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1((-T_{min}, T_{max}), L^2(\mathbb{R}^N))$$

de (2.14). *Además valen las siguientes propiedades:*

- $u \in W^{1,q}_{loc}((-T_{min}, T_{max}), L^r(\mathbb{R}^N))$ *para cada par admisible* (q, r)
- *(Alternativa Blow-up) Si* $T_{max} < \infty$ *(respectivamente si* $T_{min} < \infty$*) entonces* $\|u(t)\|_{H^2} \to \infty$ *cuando* $t \nearrow T_{max}$ *(respectivamente cuando* $t \searrow -T_{min}$*).*
- u *depende continuamente de* φ *en el siguiente sentido:*

  Exite $T > 0$ *dependiendo de* $\|\varphi\|_{H^2}$ *tal que si* $\varphi_n \to \varphi$ *en* $H^2(\mathbb{R}^N)$ *y si* u_n *es la correspondiente solución de* (2.14) *entonces* u_n *está definida en* $[-T, T]$ *para* n *suficientemente grande y* $\|u_n\|_{L^\infty((-T,T),H^2)}$.
- *Si* $\langle g(w), iw\rangle_{L^2} = 0$ *para todo* $w \in H^2(\mathbb{R}^N)$ *entonces se tiene conservación de carga.*
- *Si para cada* j *existe* $G_j \in C^1(H^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}))$ *tal que* $g_j = G_j'$ *entonces se tiene conservación de energía.*

Capítulo 3

Buen Planteo

3.1. Conservación de masa y variación de la energía

En este trabajo estudiaremos un sistema de control en donde la ecuación de estado viene dada por la ecuación de Schrödinger no lineal:

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + \lambda |u|^{2\sigma} u + \phi(t) V(x) u = 0 \quad , \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

Donde $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\phi(t)$ denota el parámetro de control y $V(x)$ un potencial dado, con $\phi(t)$ y $V(x)$ funciones a valores reales.

Para simplificar, notaremos con L^p a $L^p(\mathbb{R}^N)$, con L^∞ a $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y con H^1 a $H^1(\mathbb{R}^N)$, en cualquier otro caso, haremos la especificación correspondiente.

Definimos $E(t)$, el candidato natural para la energía correspondiente a (3.1):

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\bigtriangledown u(t,x)|^2 dx - \frac{\lambda}{2\sigma+2}\int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x)|^{2\sigma+2} dx - \frac{\phi(t)}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u(t,x)|^2 dx \tag{3.2}$$

Veamos que en esta ecuación tenemos conservación de masa, es decir : $\|u(t,-)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Consideremos $G(u(t)) = \|u(t,-)\|_{L^2}^2$ y veamos que $\frac{d}{dt}G(u(t)) = 0$.

$$G(u(t)) = \mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\overline{u}(t,x)dx\right) = \langle u(t); u(t)\rangle_{L^2}$$

y usando el hecho de que u es solución de la ecuación (3.1) se tiene que,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G(u(t)) &= \langle u_t(t); u(t)\rangle_{L^2} + \langle u(t); u_t(t)\rangle_{L^2} \\
&= 2\langle u(t); u_t(t)\rangle_{L^2} = 2\mathrm{Re}\left(\int u(t)\overline{u}_t(t)dx\right) \\
&= 2\mathrm{Re}\left(\int u\overline{(\Delta u + \lambda|u|^{2\sigma}u + \phi(t)V(x)u)i}\right) \\
&= -2\mathrm{Re}\left(\int u\Delta\overline{u}idx\right) - 2\mathrm{Re}\left(\int u\lambda|u|^{2\sigma}\overline{u}idx\right) \\
&- 2\mathrm{Re}\left(\int u\phi(t)V\overline{u}idx\right) \\
&= 2\mathrm{Re}\left(\int \nabla u \nabla \overline{u}idx\right) - 2\mathrm{Re}\left(\int \lambda|u|^{2\sigma+2}idx\right) \\
&- 2\mathrm{Re}\left(\int |u|^2\phi(t)Vidx\right) \\
&= 2\mathrm{Re}\left(\int |\nabla u|^2 idx\right) - 2\mathrm{Re}\left(\int \lambda|u|^{2\sigma+2}idx\right) \\
&- 2\mathrm{Re}\left(\int |u|^2\phi(t)Vidx\right) = 0
\end{aligned}$$

Por ser cada término un imaginario puro.

$\Rightarrow G(u(t)) = cte$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y al ser $u(0,x) = u_0$, conluímos que $\|u(t,-)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$ como queríamos ver. Veamos también que no tenemos conservación de energía y que,

$$\frac{dE(t)}{dt} = -1/2\phi'(t)\int V(x)|u(t,x)|^2dx. \tag{3.3}$$

En efecto, podemos reescribir (3.2) de la siguiente manera,

$$
\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}\langle \bigtriangledown u; \bigtriangledown u\rangle_{L^2} - \frac{\lambda}{2\sigma+2}\langle |u|^{2\sigma}u; u\rangle_{L^2} - \frac{\phi(t)}{2}\langle Vu; u\rangle_{L^2} \\
\Rightarrow E'(t) &= \frac{1}{2}\langle (\bigtriangledown u)_t; \bigtriangledown u\rangle_{L^2} + \frac{1}{2}\langle \bigtriangledown u; (\bigtriangledown u)_t\rangle_{L^2} - \frac{\lambda}{2\sigma+2}[\langle (|u|^{2\sigma}u)_t; u\rangle_{L^2} \\
&+ \langle |u|^{2\sigma}u; u_t\rangle_{L^2}] - \frac{\phi'(t)}{2}\langle Vu; u\rangle_{L^2} - \frac{\phi(t)}{2}[\langle Vu_t; u\rangle_{L^2} + \langle Vu; u_t\rangle_{L^2}] \\
&= -\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \Delta\overline{u}u_t\right) - \frac{\lambda}{2\sigma+2}[2\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \sigma|u|^{2\sigma}\overline{u}u_t\right) \\
&+ 2\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2\sigma}\overline{u}u_t\right)] - \phi(t)\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^N} V\overline{u}u_t\right) - \frac{\phi'(t)}{2}\int_{\mathbb{R}^N} Vu\overline{u} \\
&= -\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^N} (\Delta\overline{u} + \lambda|u|^{2\sigma}\overline{u} + \phi(t)V\overline{u})u_t\right) - \frac{\phi'(t)}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V|u|^2 \\
&= -\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \overline{(\Delta u + \lambda|u|^{2\sigma}u + \phi(t)Vu)}(\Delta u + \lambda|u|^{2\sigma}u + \phi(t)Vu)i\right) \\
&- \frac{\phi'(t)}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V|u|^2 \\
&= -\frac{\phi'(t)}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V|u|^2.
\end{aligned}
$$

Pues, $\mathrm{Re}\left(\overline{(a+bi)}(a+bi)i\right) = \mathrm{Re}\left((a^2+b^2)i\right) = 0$ por ser imaginario puro.

3.2. Existencia global

Lema 3.1. *Sea $u_0 \in H^1$ y $V \in L^p + L^\infty$, $p \geq 1$, $p > \frac{N}{2}$. Asumimos que si $\lambda < 0$, $0 < \sigma < \frac{2}{N-2}$ y si $\lambda > 0$, $0 < \sigma < \frac{2}{N}$. Dados cualquier $T > 0$, $\phi \in H^1(0,T)$ existe una única solución $u \in C([0,T], H^1)$ del problema (3.1) donde $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\phi(t)$ el parámetro de control y $V(x)$ el potencial dado. Además*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T:H^1)} \leq C(T, \|u_0\|_{H^1}, \|\phi\|_{H^1(0,T)}). \tag{3.4}$$

Demostración. Procederemos como es standard en los problemas de existencia global de solución. Primero probaremos existencia local y luego usando las estimaciones para la energía probaremos que $\|u\|_{H^1}$ está acotada, con lo cual por tener buen planteo, podremos deducir la existencia global.

Para probar esto analizaremos los resultados de existencia dados en [4] en el caso $\phi(t) = cte$. En el Teorema 2.12 tenemos resultados de existencia para no linealidad Lipschitz continua en acotados de L^2. El autor prueba este hecho en varios pasos. Primero, muestra que si el dato inicial $u_0 \in L^2$ existe una única solución maximal $u \in C(T_1, T_2; L^2)$ con $T_1 < 0 < T_2$ y además si $u_0 \in H^2$ se tiene $u \in C(T_1, T_2; H^2) \cap C^1(T_1, T_2; L^2)$ y que u depende continuamente de dato inicial en L^2 uniformemente sobre subconjuntos compactos del intervalo maximal de existencia.

Segundo, prueba que si $u_0 \in H^2$ se tiene conservación de carga y energía. En nuestro caso, tenemos

$$E'(t) = -\frac{1}{2}\phi'(t) \int V(x)|u(t,x)|^2 dx.$$

Tercero, muestra que por el paso anterior y la dependencia continua, se tiene conservación de masa para $u_0 \in L^2$. Entonces la solución $u \in C(T_1, T_2, L^2)$ está acotado en L^2 para todo t en el intervalo maximal de existencia y así por la alternativa Blow-up la solución debe existir en todo $[0, T]$.

Así tenemos que $u \in C(0, T; L^2)$ y además si $u_0 \in H^2$ la solución es más regular, es decir, $u \in C(0, T; H^2) \cap C^1(0, T; L^2)$.

Cuarto, prueba que si $u_0 \in H^1$ como H^2 es denso en H^1 existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^2$ tal que $x_n \to u_0$ en H^1. Siendo u_n soluciones con dato inicial x_n, tenemos por lo anterior que $u_n \in C(0, T; H^2) \cap C^1(0, T; L^2)$ entonces $(u_n)_t \in C(0, T; L^2)$. Además se obtiene que las u_n son acotadas uniformemente en $L^\infty(0, T; H^1)$ y como la ecuación vale para $(u_n)_t$ en L^2 se puede ver que $(u_n)_t$ son acotadas uniformemente en $L^\infty(0, T; H^{-1})$. Luego como $u_n(t) \to u(t)$ en L^2 y $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ en H^1 se tiene que $u \in L^\infty(0, T; H^1) \cap W^{1,\infty}(0, T; H^{-1})$.

Finalmente, muestra que $u \in C(0, T; H^1) \cap C^1(0, T; H^{-1})$ usando la continuidad de la función $t \mapsto \|u(t)\|_{H^1}^2$ y el hecho que $u : [0, T] \to H^1$ es débil continua.

El problema con el Teorema 2.12 es que funciona solo para no linealidades Lipschitz continuas en acotados de L^2 y la no linealidad $|u|^{2\sigma}u$ no lo es, aunque sí en acotados de H^1. Es por esto que en el Teorema 2.13 usando aproximaciones de la no linealidad, prueba un resultado de existencia en H^1 para no linealidades del tipo $|u|^{2\sigma}u$ y el buen planteo local en el Teorema 2.14, asumiendo unicidad. Por último, gracias a la unicidad probada en la Proposición 2.10 deduce el buen planteo del problema.

La pregunta es por qué en nuestro caso podremos reproducir los pasos anteriores para $g = g_1 + g_2 = \lambda|u|^{2\sigma}u + \phi(t)Vu$. El punto clave de este hecho consiste en observar que como $\phi \in H^1(0, T) \hookrightarrow L^\infty(0, T)$ podemos conseguir cotas uniformes en t para $\phi(t)$. Esto nos permitirá en un principio probar el primer paso del Teorema 2.12 para g_1 una no linealidad Lipschitz continua en acotados de L^2 y $g_2 = \phi(t)Vu$ pudiendo acotar uniformemente $\phi(t)$. Los siguientes pasos se prueban en forma totalmentente análoga a lo hecho por el autor para ϕ constante, con la única diferencia en que al no tener conservación de la energía, tendremos que acotar $\|u(t)\|_{H^1}$ como lo haremos en la segunda parte de esta demostración. Estas mismas acotaciones son las que nos permitirán estimar la norma H^1 de las aproximaciones u^m, solución de los problemas con las regularizaciones de las nolinealidades, que se utilizan en la demostración del Teorema 2.13.

Finalmente, extendiendo de manera análoga el Teorema 2.14 y la Proposición 2.10 para nuestro caso, podremos reproducir los resultados de [4] descriptos anteriormente y probar así existencia local y buen planteo de solución para el problema (3.1).

A continuación probaremos existencia global de solución. Para ello, supongamos que u existe en $[0, \tau] \subseteq [0, T]$. Si vemos que $\|u(t)\|_{H^1} \leq C$ para todo $t \in [0, \tau]$ por la alternativa blow up, $u(t)$ existirá en $[0, T]$, donde también esta definida ϕ.

Por lo tanto, para demostrar este lema, nos queda mostrar que:

$$\|u(t)\|_{H^1} \leq C(T, \|u_0\|_{H^1}, \|\phi\|_{H^1(0,T)})$$

para todo t en donde existe la solución $u(t)$.

Recordemos que $V \in L^p + L^\infty$, $V = V_1 + V_2$ con $V_1 \in L^p$ y $V_2 \in L^\infty$. Comenzaremos por probar que,

$$\|E'\|_{L^2(0,T)} \leq C\|\phi'\|_{L^2(0,T)}(\|V_1\|_{L^p}\|u\|^2_{L^\infty(0,T;L^{\frac{2p}{p-1}})} + \|V_2\|_{L^\infty}\|u_0\|^2_{L^2}). \tag{3.5}$$

Para ver esto, llamaremos

$$g(t) = \int |V(x)||u(t,x)|^2 dx.$$

Así, de la expresión (3.3) tenemos

$$\int_0^T |E'(t)|^2 dt \leq C \int_0^T |\phi'(t)|^2 |g(t)|^2 dt. \tag{3.6}$$

Veamos que

$$\|g\|_{L^\infty(0,T)} \leq \|V_1\|_{L^p}\|u\|^2_{L^\infty(0,T;L^{\frac{2p}{p-1}})} + \|V_2\|_{L^\infty}\|u_0\|^2_{L^2}. \tag{3.7}$$

Sea $t \in [0, T]$ fijo,

$$g(t) = \int |V_1(x)+V_2(x)||u(t,x)|^2 dx \leq \int |V_1(x)||u(t,x)|^2 dx + \int |V_2(x)||u(t,x)|^2 dx.$$

Como $V_2 \in L^\infty$, se tiene que

$$\int |V_2(x)||u(t,x)|^2 dx \leq \|V_2\|_{L^\infty} \int |u(t,x)|^2 dx \leq \|V_2\|_{L^\infty} \|u(t,-)\|_{L^2}^2 = \|V_2\|_{L^\infty} \|u_0\|_{L^2}^2,$$

por conservación de la carga.

Y como $V_1 \in L^p$ se tiene que, por Hölder:

$$\int |V_1(x)||u(t,x)|^2 dx \leq \|V_1\|_p \|u(t,-)^2\|_{p'}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Donde esta última norma podemos reescribirla de la siguiente manera

$$\|u(t,-)^2\|_{p'} = \left[\left(\int u(t,x)^{2p'} dx \right)^{\frac{1}{2p'}} \right]^2 = \|u(t,-)\|_{2p'}^2 = \|u(t,-)\|_{\frac{2p}{p-1}}^2.$$

Luego, de las acotaciones (3.6) y (3.7) se obtiene (3.5).

Asi, como $E'(t) \in L^2$ se tiene de Cauchy Schwarz y de (3.5) que,

$$\begin{aligned} E(t) &= E(0) + \int_0^t E'(s) ds \leq E(0) + T^{1/2} \|E'\|_{L^2(0,T)} \\ &\leq E(0) + T^{1/2} C \|\phi'\|_{L^2(0,T)} (\|V_1\|_p \|u(t,-)\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{2p}{p-1}})}^2 + \|V_2\|_\infty \|u_0\|_2^2). \end{aligned}$$

Podemos reescribir la expresión de la energía vista en (3.2)de la siguiente manera,

$$E(t) = \frac{1}{2} \| \bigtriangledown u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda}{2\sigma+2} \|u(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} - \frac{\phi(t)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u(t,x)|^2 dx.$$

Cuando $\lambda \leq 0$, como $\phi \in H^1(0,T) \hookrightarrow L^\infty(0,T)$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\| \bigtriangledown u(t)\|_{L^2}^2 &\leq CE(t) + C\|\phi\|_{L^\infty(0,T)} \int V(x)|u(t,x)|^2 dx \\
&\leq CE(0) + CT^{1/2}\|\phi'\|_{L^2(0,T)}(\|V_1\|_p \|u(t)\|^2_{\frac{2p}{p-1}} + \|V_2\|_\infty \|u_0\|_2^2) \\
&+ C\|\phi\|_{L^\infty(0,T)} \int V(x)|u(t,x)|^2 dx \\
&\leq CE(0) + CT^{1/2}\|\phi'\|_{L^2(0,T)}(\|V_1\|_p \|u(t)\|^2_{\frac{2p}{p-1}} + \|V_2\|_\infty \|u_0\|_2^2) \\
&+ C\|\phi\|_{L^\infty(0,T)}(\|V_1\|_p \|u(t)\|^2_{\frac{2p}{p-1}} + \|V_2\|_\infty \|u_0\|_2^2) \\
&= CE(0) + C\|V_2\|_{L^\infty} \|u_0\|_2^2 (T^{\frac{1}{2}}\|\phi'\|_{L^2(0,T)} + \|\phi\|_{L^\infty(0,T)}) \\
&+ \|u(t)\|^2_{\frac{2p}{p-1}} \|V_1\|_p (CT^{\frac{1}{2}}\|\phi'\|_{L^2(0,T)} + C\|\phi\|_{L^\infty(0,T)}).
\end{aligned}
$$

Usando que $H^1(0,T) \hookrightarrow L^\infty(0,T)$ continuamente y la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg (2.2)

$$
\begin{aligned}
\| \bigtriangledown u(t)\|_2^2 &\leq C(T, \|\phi\|_{H^1}, \|u_0\|_{L^2}) \left(\|u(t)\|^2_{\frac{2p}{p-1}} + 1 \right) \\
&\leq C(T, \|\phi\|_{H^1}, \|u_0\|_{L^2}) \left(\tilde{C}\|u(t)\|_{H^1}^{\frac{N}{p}} \|u(t)\|_2^{\frac{2p-N}{p}} + 1 \right)
\end{aligned}
$$

si $p > \frac{N}{2}$.
Notemos $C = C(T, \|\phi\|_{H^1}, \|u_0\|_{L^2}) = \tilde{C}C(T, \|\phi\|_{H^1}, \|u_0\|_{L^2})$.
Por conservación de masa y la desigualdad de Young, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\| \bigtriangledown u(t)\|_2^2 &\leq C + (C\epsilon \|u(t)\|_{H^1}^{\frac{N}{p}})(\frac{1}{\epsilon}\|u(0)\|_2^{\frac{2p-N}{p}}) \\
&\leq C + \frac{(C\epsilon \|u(t)\|_{H^1}^{\frac{N}{p}})^\alpha}{\alpha} + (\frac{1}{\epsilon^{\alpha'}} \frac{\|u(0)\|_2^{\frac{2p-N}{p}\alpha'}}{\alpha'}).
\end{aligned}
$$

Para $\alpha = \frac{2p}{N}$, $\alpha' = \frac{2p}{2p-N}$ donde $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \| \bigtriangledown u(t)\|_2^2 &\leq C + \frac{\epsilon^\alpha C^\alpha \|u(t)\|_{H^1}^2}{\alpha} + \frac{\|u(0)\|_2^2}{\epsilon^{\alpha'}\alpha'} \\
&\leq C + \frac{\epsilon^\alpha C^\alpha}{\alpha} \left(\|u(0)\|_2^2 + \| \bigtriangledown u(t)\|_2^2 \right) + \frac{1}{\epsilon^{\alpha'}\alpha'} \|u(0)\|_2^2.
\end{aligned}
$$

Si elegimos $\epsilon > 0$ tal que $\frac{\epsilon^\alpha C^\alpha}{\alpha} < 1$ obtenemos

$$(1-\frac{\epsilon^{\alpha}C^{\alpha}}{\alpha})\|\bigtriangledown u(t)\|_2^2 \leq C(T,\|\phi\|_{H^1(0,T)},\|u_0\|_{L^2}).$$

Tomando supremo para $t\in[0,\tau]$ tenemos que

$$\sup_{t\in[0,\tau]}\|\bigtriangledown u(t)\|_2^2 \leq C(T,\|\phi\|_{H^1(0,T)},\|u_0\|_{H^1})$$

$$\Rightarrow \sup_{t\in[0,\tau]}\|u(t)\|_{H^1}^2 \leq C(T,\|\phi\|_{H^1(0,T)},\|u_0\|_{H^1}).$$

En el caso que $\lambda>0$, usando el mismo argumento tenemos que

$$\begin{aligned}\|\bigtriangledown u(t)\|_2^2 \leq CE(0) &+ CT^{1/2}\|\phi'\|_{L^2(0,T)}(\|V_1\|_p\|u(t)\|^2_{\frac{2p}{p-1}}+\|V_2\|_\infty\|u_0\|_2^2)\\ &+C\|\phi\|_{L^\infty(0,T)}(\|V_1\|_p\|u(t)\|^2_{\frac{2p}{p-1}}+\|V_2\|_\infty\|u_0\|_2^2)+C\|u(t)\|^{2\sigma+2}_{L^{2\sigma+2}}\end{aligned}$$

Y por las desigualdades de Gagliardo-Nirenberg (2.2) y (2.3) , junto con la desigualdad de Young para $\epsilon>0$ tal que $\frac{C^\alpha\epsilon^\alpha}{\alpha}+\frac{\tilde{C}^\gamma\epsilon^\gamma}{\gamma}<1$ con $\alpha=\frac{2p}{N}$ como antes y $\gamma=\frac{2}{N\sigma}$ tal que $\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma'}=1$ y $\tilde{C}$ la constante de la desigualdad (2.3) ($N\sigma<2$) tomando supremo para $t\in[0,\tau]$ obtenemos que:

$$\sup_{t\in[0,\tau]}\|u\|_{H^1}^2 \leq C(\|\phi\|_{H^1},T,\|u_0\|_2).$$

Luego, se tiene que u está definida en $[0,T]$ y vale (3.4) □

A continuación daremos un resultado de existencia de solución de (3.1) en H^2, que será necesario para la última parte de esta tesis.

No haremos una demostración de la misma ya que se escapa a la teoría que desarrollamos en este trabajo. Los detalles de esta teoría se pueden encontrar en el capítulo de regularidad en H^2 de soluciones de la ecuación de Scrödinger no lineal en el capítulo 5, sección 3 de [4]. Para probar el lema alcanza con usar los Teoremas 5.3.1 y 5.3.4 de [4], ver Remark 5.3.3 y Remark 5.3.5. Notamos que los Teoremas 5.3.1 y 5.3.4 se basan en el teorema de existencia en H^2 2.18 enunciado en preliminares.

Lema 3.2. *Sea $u_0\in H^2$ $\phi\in W^{1,\infty}(0,T)$ y $V,\bigtriangledown V\in L^p+L^\infty$ para $p\geq 2$, $p\geq\frac{N}{2}$. Asumimos que $0\leq\sigma<\frac{2}{N-2}$ si $\lambda<0$ o $0\leq\sigma<\frac{2}{N}$ si $\lambda>0$. Entonces la mild solution de* (3.1) *satisface $u\in L^\infty(0,T;H^2)$.*

Capítulo 4

Existencia de mínimo

En esta sección estudiaremos la existencia de un minimizador para el problema de control óptimo bilineal (3.1) Nuestro objetivo consiste en la minimización de la función de costo, dependiendo de la solución de la ecuación de estado.

Consideramos: $V \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) + W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ con $p \geq 2$, $\quad p > \frac{N}{2}$. Dado un $T \geq 0$ fijo, $H^1(0,T)$ será el espacio vectorial real para el parámetro de control ϕ,

$$X(0,T) := L^2(0,T;H_0^1) \cap W^{1,2}(0,T;H^{-1})$$

el espacio para el estado u y los conjuntos

$$B_1 = \{u_0 \in H^1 : \|u_0\|_{H^1} \leq M_1\} \quad \text{y} \quad B_2 = \{\phi_0 \in \mathbb{R} : |\phi_0| \leq M_2\}$$

para $M_1 > 0$ y $M_2 > 0$ dados.

Definimos el conjunto de los pares (u, ϕ) admisible como

$$\Lambda(0,T) := \big\{(u,\phi) \in X(0,T) \times H^1(0,T) : (u,\phi) \text{ satisfacen la ecuación (3.1)} \\ \text{con } u(0) \in B_1 \text{ y } \phi(0) \in B_2\}$$

En virtud del próximo lema el conjunto $\Lambda(0,T)$ es no vacío. En consecuencia, definimos el funcional objetivo

$$F(u,\phi) := \langle u(T,.); Au(T;.)\rangle_{L^2}^2 + \gamma_1 \int_0^T (E'(t))^2 dt + \gamma_2 \int_0^T (\phi'(t))^2 dt \tag{4.1}$$

donde los parámetros $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$, $A : H^1 \to L^2$ es un operador lineal acotado, esencialmente autoadjunto y localizado en L^2. Es decir, existe $R > 0$ tal que para toda $\psi \in H^1$, $Supp_{x \in \mathbb{R}^N}(A\psi(x)) \subseteq B(R)$.

Asi, definimos el problema de minimización:

$$F_* = \inf_{(u,\phi)\in\Lambda(0,T)} F(u,\phi) \tag{4.2}$$

y nos encargaremos de probar la existencia de un minimizador para el problema anterior en el Teorema 4.1.

A continuación probaremos existencia de mínimo.

Teorema 4.1. *Asumiendo que $0 < \sigma < \frac{2}{N-2}$ si $\lambda < 0$ o $0 < \sigma < \frac{2}{N}$ si $\lambda > 0$. Sea $V \in L^p + L^\infty$ para algún $p \geq 1$, $p > \frac{N}{2}$. Entonces, para cualquier $T > 0$, $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, $\gamma_1 \geq 0$ y $\gamma_2 > 0$ el problema de control óptimo $F_* = \inf_{(u,\phi)\in\Lambda(0,T)} F(u,\phi)$ tiene un minimizador $(u_*,\phi_*) \in \Lambda(0,T)$.*

Demostración. Vamos a hacer la prueba en tres etapas. Primero probaremos que el funcional es acotado inferiormente y el conjunto de admisibles $\Lambda(0,T)$ es no vacío. Con lo cual, podemos asegurar la existencia de una sucesión minimizante. Luego probaremos que esta sucesión tiene límite en algún sentido y por último veremos que este límite es admisible, por lo tanto será un mínimo.

Etapa 1: Estimaciones de $(u_n,\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dados $T > 0$, $M_1, M_2 > 0$, $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 > 0$, $u_0 \in B_1$ y $\phi \in H^1(0,T)$ tal que $\phi(0) \in B_2$.

Como $\phi \in H^1(0,T)$ por el lema 3.1 existe una única solución suave $u \in C([0,T],H^1)$ del problema (3.1).

Y despejando de la ecuación (3.1), es fácil ver que $u_t \in L^2(0,T,H^{-1})$, como veremos en la página 45, ecuación (4.4) para $(u_n)_t$. Por lo tanto $u \in X(0,T)$ y resulta que el conjunto $\Lambda(0,T)$ es no vacío y al ser $F \geq 0$, es decir, acotada inferiormente, se tiene que existe un ínfimo. Luego existe una sucesión minimizante $(u_n,\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda(0,T)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} F(u_n,\phi_n) = F_*.$$

Como la sucesión $(F(u_n,\phi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, es acotada, por lo tanto existe C tal que

$$F(u_n,\phi_n) \leq C < \infty$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y como $\gamma_2 > 0$ resulta que

$$\|\phi_n'\|^2_{L^2[0,T]} \leq C < \infty.$$

Usando que $H^1(0,T) \hookrightarrow C[0,T]$ y que $\phi_n(0) \in B_2$, donde

$$B_2 = \{\phi_0 \in \mathbb{R}/|\phi_0| \leq M_2\}$$

tenemos por Cauchy Schwarz que:

$$\phi_n(t) = \phi_n(0) + \int_0^t \phi_n'(s)ds \leq M_2 + (T\int_0^T (\phi_n'(s))^2 ds)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

para todo $t \in [0,T]$. Esto implica que la sucesión $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada uniformemente en $L^\infty(0,T)$, por lo tanto, está acotada uniformemente en $L^2(0,T)$ y en consecuencia, en $H^1(0,T)$, pues $\|\phi_n'\|_{L^2}^2 < C$ y $\|\phi_n\|_{L^2}^2 < C$.

Es decir, ϕ_n resulta uniformemente acotada en $H^1(0,T)$. Luego, por el Teorema 2.8 existirá una subsucesión, que también llamaremos ϕ_n y un límite $\phi_* \in H^1(0,T)$ tal que $\phi_n \rightharpoonup \phi_*$ en $H^1(0,T)$ si $n \to \infty$.

Por el corolario 2.9 del Teorema de Rellich Kondrachov existirá también $\psi_* \in L^2(0,T)$ y una subsucesión que seguiremos llamando ϕ_n tal que $\phi_n \to \psi_*$ en $L^2(0,T)$ si $n \to \infty$. Claramente, $\phi_* = \psi_*$. En efecto, como $\phi_n \to \psi_*$ en $L^2(0,T)$ tenemos que $\phi_n \rightharpoonup \psi_*$ en $L^2(0,T)$, ya que convergencia fuerte, implica convergencia débil. Pero también por la Proposición 2.5 tenemos que $\phi_n \rightharpoonup \phi_*$ en $L^2(0,T)$ y por unicidad del límite, resulta que $\phi_* = \psi_*$.

Concluímos entonces que existe una subsucesión ϕ_n y límite ϕ_* en $H^1(0,T)$ tal que $\phi_n \rightharpoonup \phi_*$ en $H^1(0,T)$ y además $\phi_n \to \phi_*$ en $L^2(0,T)$.

Observemos que como $(u_n,\phi_n) \in \Lambda(0,T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces (u_n,ϕ_n) satisface la ecuación (3.1), con $\phi_n \in H^1(0,T)$ y $u_n \in L^2(0,T;H^1) \cap W^{1,2}(0,T;H^{-1})$. Luego satisface la desigualdad (3.5)

$$\|E_n'\|_{L^2(0,T)} \leq C\|\phi_n'\|_{L^2(0,T)}(\|V_1\|_{L^p}\|u_n\|^2_{L^\infty(0,T,L^{\frac{2p}{p-1}})} + \|V_2\|_{L^\infty}\|u_0^n\|^2_{L^2}).$$

Vamos a probar que

$$u_n \in L^\infty(0,T;H^1) \cap W^{1,\infty}(0,T;H^{-1}) \subseteq L^2(0,T;H^1) \cap W^{1,2}(0,T;H^{-1}).$$

Usando el mismo argumento que en el Lema 3.1 y que $u_n(0) \in B_1$, donde $B_1 = \{u_0 \in H^1/\|u_0\|_{H^1} \leq M_1\}$ se tiene de (3.4):

$$\|u_n\|_{L^\infty((0,T),H^1)} \leq C. \tag{4.3}$$

Pues, $\|u_n(t)\|_{H^1} \leq C(T, \|u_0^n\|_{H^1}, \|\phi_n\|_{H^1})$ para todo $t \in [0,T]$, $\|\phi_n\|_{H^1}$ con cota uniforme y $\|u_0^n\|_{H^1}$ está en B_1.

Combinando esta estimación y el hecho que u_n es solución de (3.1) veremos que

$$\|(u_n)_t\|_{L^\infty((0,T),H^{-1})} < C. \tag{4.4}$$

En efecto, despejando de la ecuación (3.1) tenemos que

$$(u_n)_t = i(\Delta u_n + \lambda|u_n|^{2\sigma}u_n + \phi_n(t)V(x)u_n)$$

Veamos entonces que para cada $t \in [0,T]$ el lado derecho está acotado uniformemente en t y en n en norma $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$.

Para el primer término:

Por la desigualdad (2.4) tenemos que, como $u_n \in L^\infty(0,T,H^1)$

$$\|\Delta u_n(t)\|_{H^{-1}} \leq \|u_n(t)\|_{H^1} \leq C(T, \|u_0^n\|_{H^1}, \|\phi_n\|_{H^1})$$

por lo que, tenemos una cota uniforme en t y n como queremos.

Para el segundo término:

$$\||u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t)\|_{H^{-1}} = \sup_{v\in H_0^1(\mathbb{R}^N)/\|v\|_{H_0^1(\mathbb{R}^N)}=1} |\langle |u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t), v\rangle_{H^{-1},H^1}|. \tag{4.5}$$

Como $u_n(t) \in H^1(\mathbb{R}^N)$, por la desigualdad de Gagliardo Niremberg (2.3) tenemos que $u_n(t) \in L^{2\sigma+2}(\mathbb{R}^N)$. Este hecho implica que $|u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $p = \frac{2\sigma+2}{2\sigma+1}$ y por el Corolario 2.3 se tiene:

$$\||u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t)\|_{L^p} = \|u_n(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+1} \leq C\|u_n(t)\|_{H^1}^{2\sigma+1} < \infty \tag{4.6}$$

Luego por la observación 2.6 item 4, podemos reescribir el producto de dualidad de la siguiente manera:

$$|\langle |u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t), v\rangle_{H^{-1},H^1}| = |\langle |u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t), v\rangle_{L^p,L^q}|$$

donde $p = \frac{2\sigma+2}{2\sigma+1}$ y q tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Asi, como $p > 1$ por Hölder tenemos

$$\begin{aligned}
|\langle |u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t), v\rangle_{L^p,L^q}| &\leq \mathrm{Re}\left(|\int |u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t)\overline{v}|\right) \leq \int |u_n(t)|^{2\sigma+1}|v| \\
&\leq \left(\int |u_n(t)|^{(2\sigma+1)p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |v|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int |u_n(t)|^{2\sigma+2}\right)^{\frac{2\sigma+1}{2\sigma+2}} \left(\int |v|^{2\sigma+2}\right)^{\frac{1}{2\sigma+2}} \\
&= \|u_n(t)\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+1}\|v\|_{L^{2\sigma+2}}
\end{aligned}$$

Como $\|u_n(t)\|_{L^{2\sigma+2}}$ está acotada por la norma $\|u_n(t)\|_{H^1}$ uniforme en t y n por el Corolario 2.3 usando la misma desigualdad para la norma $\|v\|_{L^{2\sigma+2}}$, al ser $\|v\|_{H^1} = 1$ desaparece y así obtenemos que:

$$\||u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t)\|_{H^{-1}} \leq C(T, \|u_0^n\|_{H^1}, \|\phi_n\|_{H^1})$$

para todo t y n es decir, tenemos cota uniforme como queremos.

Para el tercer término:

(4.7)
$$\|\phi_n(t)(V_1+V_2)u_n(t)\|_{H^{-1}} = \sup_{v\in H_0^1(\mathbb{R}^N)/\|v\|_{H_0^1(\mathbb{R}^N)}=1} |\langle \phi_n(t)(V_1+V_2)u_n(t), v\rangle_{H^{-1},H^1}|$$

Veamos los dos términos por separado:

Primero $\langle \phi_n V_2 u_n, v\rangle_{H^{-1},H^1}$.

Como $V_2 \in L^\infty$ y $\phi_n \in H^1 \subseteq L^\infty$ y por (4.6), $u_n \in L^{2\sigma+2}$ se tiene que $\phi_n V_2 u_n(t) \in L^{2\sigma+2}$. En efecto,

$$\left(\int |\phi_n V_2 u_n|^{2\sigma+2}\right)^{\frac{1}{2\sigma+2}} \leq \|\phi_n\|_{L^\infty}\|V_2\|_{L^\infty}\left(\int |u_n|^{2\sigma+2}\right)^{\frac{1}{2\sigma+2}} < \infty$$

Luego por la observacion 2.6 item 4, podemos pensar el producto de dualidad de la siguente manera,

$$\langle \phi_n V_2 u_n, v\rangle_{H^{-1},H^1} = \langle \phi_n V_2 u_n, v\rangle_{L^p,L^q}$$

con $p = 2\sigma+2$ donde q es tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Asi,

$$\begin{aligned}
|\langle \phi_n V_2 u_n, v\rangle_{L^p,L^q}| &\leq \mathrm{Re}\left(\int |\phi_n V_2 u_n \overline{v}|\right) \leq \int |\phi_n V_2 u_n \overline{v}| \\
&\leq \|\phi_n\|_\infty \int |V_2 u_n \overline{v}| \leq \|\phi_n\|_\infty \|V_2\|_\infty \int |u_n v| \\
&\leq \|\phi_n\|_\infty \|V_2\|_\infty \|u_n\|_{L^{2\sigma+2}}\|v\|_{L^q}
\end{aligned}$$

Análogamente a lo hecho anteriormente es claro que esta acotado uniformemente en t y n.

Para el otro término $\langle \phi_n V_1 u_n, v\rangle_{H^{-1},H^1}$

Observemos que por la desigualdad de Gagliardo Niremberg (2.2) y el Corolario 2.3 como $u_n(t) \in H^1$ se tiene que $u_n(t) \in L^{\frac{2p}{p-1}}$, lo que implica que

$\phi_n V_1 u_n \in L^r$ con $r = \frac{2p}{p+1}$.En efecto, por Hölder para $\alpha = \frac{p}{r}$ con $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$ se tiene que,

$$
\begin{aligned}
\left(\int |\phi_n V_1 u_n|^r\right)^{\frac{1}{r}} &\leq \|\phi_n\|_{L^\infty} \left(\int |V_1|^r |u_n|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \|\phi_n\|_{L^\infty} \left(\int V_1^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |u_n|^{r\alpha'}\right)^{\frac{1}{\alpha' r}} \\
&= \|\phi_n\|_{L^\infty} \|V_1\|_{L^p} \|u_n\|_{\frac{2p}{p-1}} < \infty.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Luego podemos reescribir el producto de dualidad de la siguiente manera,

$$
\langle \phi_n V_1 u_n, v\rangle_{H^{-1}H^1} = \langle \phi_n V_1 u_n, v\rangle_{L^r,L^q}
$$

donde $q = \frac{2p}{p-1}$ y $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$. Asi,

$$
\begin{aligned}
|\langle \phi_n V_1 u_n, v\rangle_{L^r,L^q}| &\leq \mathrm{Re}\left(\int |\phi_n V_1 u_n \overline{v}|\right) \leq \int |\phi_n V_1 u_n \overline{v}| \\
&\leq \left(\int |\phi_n V_1 u_n|^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int |v|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|\phi_n V_1 u_n\|_{L^r} \|v\|_{L^q} \\
&\leq \|\phi_n\|_{L^\infty} \|V_1\|_{L^p} \|u_n\|_{L^{\frac{2p}{p-1}}} \|v\|_{L^q}.
\end{aligned}
$$

Por (4.8) y acotando $\|v\|_{L^q}$ por Gagliardo Niremberg (2.2) queda acotado uniformemente en t y n.

Luego, hemos visto (4.4).

Etapa 2: Pasando al límite.

Aplicando las cotas (4.3) y (4.4) se tiene que

$$
u_n \in L^\infty((0,T), H^1) \cap W^{1,\infty}((0,T), H^{-1})
$$

y están acotadas uniformemente para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego por el lema 2.2 deducimos que existe

$$
u_* \in L^\infty((0,T), H^1) \cap W^{1,\infty}((0,T), H^{-1}) \subseteq X(0,T)
$$

y una subsucesión que seguimos denotanto por $(u_n)_{n\in N}$ tal que para todo $t \in [0,T]$,

$$
u_n(t) \rightharpoonup u_*(t) \text{ en } H^1 \text{ si } n \to \infty
$$

Como $u_* \in L^\infty((0,T),H^1) \cap W^{1,\infty}((0,T),H^{-1})$ por la observación 2.10 se tiene que,

$$\|u_*(t) - u_*(s)\|_{L^2} \leq C|t-s|^{\frac{1}{2}} \text{ para todo } t,s \in (0,T).$$

Veamos que $|u_n|^{2\sigma}u_n$ es acotada en $C^{0,\frac{a}{2}}(0,T;L^{r'})$ para algún $a > 0$ y $r' > 1$ que nos permitirá usar el lema 2.1. Para eso probaremos la desigualdad,

$$\||u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t) - |u_n(s)|^{2\sigma}u_n(s)\|_{L^{r'}} \leq C|t-s|^{\frac{a}{2}} \tag{4.9}$$

donde $r = 2\sigma + 2$ y $a = 1 - N(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sigma+2})$.

En efecto,

Veamos primero que:

(4.10)

$$\||u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t) - |u_n(s)|^{2\sigma}u_n(s)\|_{L^{r'}} \leq C(\|u_n(t)\|_{L^r}^{2\sigma} + \|u_n(s)\|_{L^r}^{2\sigma})\|u_n(t) - u_n(s)\|_{L^r}$$

Por la observación 2.11 tenemos que

$$\begin{aligned}
\||u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t) - |u_n(s)|^{2\sigma}u_n(s)\|_{L^{r'}}^{r'} &\leq C\|(|u_n(t)|^{2\sigma} + |u_n(s)|^{2\sigma})|u_n(t) - u_n(s)|\|_{L^{r'}}^{r'} \\
&\leq C\left(\||u_n(t)|^{2\sigma}|u_n(t) - u_n(s)|\|_{L^{r'}}^{r'}\right. \\
&\qquad \left. + \||u_n(s)|^{2\sigma}|u_n(t) - u_n(s)|\|_{L^{r'}}^{r'}\right)
\end{aligned}$$

Usando el Teorema 2.6 (desigualdad de Hölder generalizado) para el primer término del lado derecho de la última desigualdad tenemos que:

$$\||u_n(t)|^{2\sigma}|u_n(t) - u_n(s)|\|_{L^{r'}}^{r'} \leq \||u_n(t)|^{2\sigma}\|_p^{r'}\|u_n(t) - u_n(s)\|_q^{r'}$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r'}$.

Análogamente tratamos el segundo término, obteniendo así:

(4.11)

$$\||u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t) - |u_n(s)|^{2\sigma}u_n(s)\|_{L^{r'}}^{r'} \leq C\|u_n(t) - u_n(s)\|_q^{r'}(\||u_n(t)|^{2\sigma}\|_p^{r'} + \||u_n(s)|^{2\sigma}\|_p^{r'}).$$

Siendo $r = 2\sigma + 2$, tendremos $r' = \frac{2\sigma+2}{2\sigma+1}$ pero además

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r'} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{2\sigma+1}{2\sigma+2} - \frac{1}{p}.$$

Como queremos que $2\sigma p = r$, $p = \frac{r}{2\sigma} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{2(\sigma+1)}$ es decir, $q = 2(\sigma+1) = r$.

Por lo tanto

$$\||u_n(t)|^{2\sigma}\|_p^{r'} = \|u_n(t)\|_r^{\frac{rr'}{p}} = \|u_n(t)\|_r^{2\sigma r'}$$

luego si elevamos a la $\frac{1}{r'}$ la desigualdad (4.11) probamos la desigualdad (4.10) que queríamos ver.

En segundo lugar, veamos que :

$$\|u_n(t) - u_n(s)\|_r(\|u_n(t)\|_r^{2\sigma} + \|u_n(s)\|_r^{2\sigma}) \leq C\|u_n(t) - u_n(s)\|_2^a \tag{4.12}$$

con $a = 1 - N(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sigma+2})$.

En principio podemos acotar por el corolario 2.3 y (3.4) de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\|u_n(t) - u_n(s)\|_r(\|u_n(t)\|_r^{2\sigma} + \|u_n(s)\|_r^{2\sigma}) &\leq 2\|u_n\|_{L^\infty((0,T),L^r)}^{2\sigma}\|u_n(t) - u_n(s)\|_r \\ &\leq C\|u_n(t) - u_n(s)\|_r\end{aligned}$$

y luego usando la desigualdad de Gagliardo Niremberg (2.3) con $r = 2\sigma+2$ y (3.4) se tiene que

$$\begin{aligned}\|u_n(t) - u_n(s)\|_r &\leq C(\|u_n(t) - u_n(s)\|_{H^1}^{N\sigma}\|u_n(t) - u_n(s)\|_{L^2}^{2\sigma+2-N\sigma})^{\frac{1}{2\sigma+2}} \\ &\leq C\|u_n(t) - u_n(s)\|_{L^2}^{\frac{2\sigma+2-N\sigma}{2\sigma+2}} = C\|u_n(t) - u_n(s)\|_{L^2}^a\end{aligned}$$

Esta última igualdad es cierta , ya que:

$$\frac{2\sigma + 2 - N\sigma}{2\sigma + 2} = 1 - \frac{N\sigma}{2\sigma + 2} = 1 - \frac{N\sigma}{r}$$

y

$$a = 1 - N\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sigma + 2}\right) = 1 - N\left(\frac{2\sigma}{2(2\sigma + 2)}\right) = 1 - \frac{N\sigma}{2\sigma + 2} = 1 - \frac{N\sigma}{r}$$

lo que prueba la desigualdad (4.12).

Luego, usando consecutivamente (4.10), (4.12), y finalmente por (2.5) obtenemos la desigualdad (4.9) como queríamos probar.

Esto implica que $(|u_n|^{2\sigma}u_n)_{n\in N}$ es acotada en $C^{0,\frac{a}{2}}([0,T], L^{r'})$, y por la definición 2.16 de la norma en este espacio , $(|u_n|^{2\sigma}u_n)_{n\in N}$ resulta uniformemente equicontinua en $L^{r'}$. Tomando $X = Y = L^{r'}$, como $L^{r'}$ es un espacio reflexivo, estamos en condiciones de aplicar el lema 2.1, de lo que se deduce que existe una subsucesión que seguimos notando $(|u_n|^{2\sigma}u_n)_{n\in N}$ y $f \in C^{0,\frac{a}{2}}([0,T], L^{r'})$ tal que para todo $t \in [0,T]$, $|u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t) \rightharpoonup f(t)$ en $L^{r'}$ si $n \to \infty$.

Resta ver que $f(t) = |u_*(t)|^{2\sigma}u_*(t)$ para casi todo $t \in [0,T]$ y que (ϕ_*, u_*) satisface la ecuación (3.1), para obtener así que $(\phi_*, u_*) \in \Lambda(0,T)$.

Se sigue de $(u_n, \phi_n) \in \Lambda(0,T)$ que para cada $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, multiplicando la ecuación (3.1) por $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tenemos

$$\langle i(u_n(t))_t, w\rangle_{H^{-1}H^1} + \langle \Delta u_n(t) + \lambda |u_n(t)|^{2\sigma} u_n(t) + \phi_n(t) V u_n(t), w\rangle_{H^{-1}H^1} = 0$$

y luego multiplicando por $\eta \in C^\infty(0,T)$ tenemos:

$$\langle i(u_n(t))_t, w\rangle_{H^{-1}H^1}\eta(t) + \langle \Delta u_n(t) + \lambda |u_n(t)|^{2\sigma} u_n(t) + \phi_n(t) V u_n(t), w\rangle_{H^{-1}H^1}\eta(t) = 0$$

entonces,

$$\frac{d}{dt}(\langle iu_n(t), w\rangle_{H^{-1}H^1})\eta(t) + \langle \Delta u_n(t) + \lambda |u_n(t)|^{2\sigma} u_n(t) + \phi(t) V u_n(t), w\rangle_{H^{-1}H^1}\eta(t) = 0.$$

Luego integrando la igualdad y haciendo partes en el primer término, se obtiene:

$$\int_0^T [-\langle iu_n(t), w\rangle_{H^{-1}H^1}\eta'(t) + \langle \Delta u_n(t) + \lambda |u_n(t)|^{2\sigma} u_n(t) + \phi_n(t) V u_n(t), w\rangle_{H^{-1}H^1}\eta(t)]dt = 0$$

pues $\eta(t)\langle iu_n(t), w\rangle|_0^T = 0$ ya que $\eta \in C^\infty(0,T)$

Aplicando que:

1. $\phi_n \rightharpoonup \phi_*$ en $H^1(0,T)$, $\phi_n \to \phi_*$ en $L^2(0,T)$ si $n \to \infty$.
2. $u_n(t) \rightharpoonup u*(t)$ en H^1 si $n \to \infty$.
3. $|u_n(t)|^{2\sigma} u_n(t) \rightharpoonup f(t)$ en $L^{r'}$ si $n \to \infty$.

y el Teorema de Convergencia Mayorada, deducimos que se puede pasar al límite en la ecuación anterior. Es decir, probaremos que vale la igualdad

$$\int_0^T [-\langle iu_*(t), w\rangle\eta'(t) + \langle \Delta u_*(t) + \lambda f + \phi_*(t) V u_*(t), w\rangle\eta(t)]dt = 0$$

para todo $\eta \in C_c^\infty(0,T)$, $w \in C_c^\infty$.

Probemos esta convergencia término a término:

Para
$$\int_0^T \langle -iu_n(t); w\rangle_{H^{-1}H^1}\eta'(t)dt$$

tenemos que para cada $t \in [0,T]$, $u_n(t) \rightharpoonup u_*(t)$ en H^1, por lo tanto también $u_n(t) \rightharpoonup u_*(t)$ en $L^2(0,T)$, y como $H^1 \hookrightarrow H^{-1}$ tiene sentido pensar en este producto de dualidad de la siguiente manera

$$\langle u_n(t); w\rangle_{H^{-1}H^1} = \langle u_n(t); w\rangle_{L^2} \to \langle u_*(t); w\rangle_{L^2} = \langle u_*(t); w\rangle_{H^{-1}H^1}$$

cuando $n \to \infty$.

Luego como:

$$\begin{aligned}
|\langle u_n(t); w\rangle_{L^2}\eta'(t)| &= \left|\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n(t,x)\overline{w}(x)dx\eta'(t)\right)\right| \\
&\leq \|u_n(t)\|_{L^2}\|w\|_{L^2}|\eta'(t)| \\
&\leq \|u_n(t)\|_{H^1}\|w\|_{L^2}|\eta'(t)| \\
&\leq \|u_n\|_{L^\infty(0,T,H^1)}\|w\|_{L^2}|\eta'(t)| \in L^1(0,T).
\end{aligned}$$

Por convergencia mayorada, tenemos que:

$$\int_0^T \langle -iu_n(t); w\rangle_{H^{-1}H^1}\eta'(t)dt \to \int_0^T \langle -iu_*(t); w\rangle_{H^{-1}H^1}\eta'(t)dt \text{ cuando } n \to \infty$$

Para el segundo término:

$$\int_0^T \langle \Delta u_n(t); w\rangle_{H^{-1}H^1}\eta(t)dt.$$

De la definición de Δ, y haciendo partes, ya que $u_n - u_* \in H^1$ y $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle \Delta u_n(t), w\rangle_{H^{-1},H^1} - \langle \Delta u_*(t), w\rangle_{H^{-1},H^1} &= \langle \Delta(u_n(t) - u_*(t)), w\rangle_{H^{-1},H^1} \\
&:= -\langle \bigtriangledown(u_n - u_*)(t), \bigtriangledown w\rangle_{L^2} \\
&= \langle (u_n - u_*)(t), \Delta w\rangle_{L^2} \to 0
\end{aligned}$$

porque $u_n(t) \rightharpoonup u_*(t)$ en L^2.

Y para usar convergencia mayorada observamos que:

$$\begin{aligned}
|\langle \Delta u_n(t), w\rangle_{H^{-1},H^1}\eta(t)| &\leq \|\Delta u_n(t)\|_{H^{-1}}\|w\|_{H^1}|\eta(t)| \\
&\leq \|u_n(t)\|_{H^1}\|w\|_{H^1}|\eta(t)| \\
&\leq \|u_n\|_{L^\infty(0,T,H^1)}\|w\|_{H^1}|\eta(t)| \in L^1(0,T)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_0^T \langle \Delta u_n(t); w\rangle_{H^{-1}H^1}\eta(t)dt \to \int_0^T \langle \Delta u_*(t); w\rangle_{H^{-1}H^1}\eta(t)dt \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

Para el tercer término:

$$\int_0^T \langle |u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t); w\rangle_{H^{-1}H^1}\eta(t)dt$$

Como $|u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t) \rightharpoonup f(t)$ en $L^{r'}$, y $w \in C_c^\infty$ por lo que $w \in L^r$. Tenemos

$$\langle |u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t), w\rangle_{L^{r'}L^r} \to \langle f(t), w\rangle_{L^{r'}L^r}$$

y por la observación 2.6 item 4, podemos ver el producto $\langle,\rangle_{L^{r'}L^r} = \langle,\rangle_{H^{-1},H^1}$ por lo que, podemos decir que

$$\langle |u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t), w\rangle_{H^{-1}H^1} \to \langle f, w\rangle_{H^{-1}H^1}.$$

Finalmente para usar convergencia mayorada, acotamos la sucesión de la siguente manera. Como $|u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t) \in L^{\frac{2\sigma+2}{2\sigma+1}}$, que $w \in C_c^\infty$ usando los mismos argumentos que utilizamos para acotar (4.5), tenemos

$$\||u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t)\|_{H^{-1}} \leq C(T, \|u_0^n\|_{H^1}, \|\phi_n\|_{H^1})$$

para todo t y n es decir, esta acotado uniformemente. De esta manera,

$$\begin{aligned} |\langle |u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t), w\rangle_{H^{-1}H^1}\eta(t)| &\leq \||u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t)\|_{H^{-1}}\|w\|_{H^1}|\eta(t)| \\ &\leq C|\eta(t)| \in L^1(0,T). \end{aligned}$$

Por lo que

$$\int_0^T \langle |u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t); w\rangle_{H^{-1}H^1}\eta(t)dt \to \int_0^T \langle f(t); w\rangle_{H^{-1}H^1}\eta(t)dt.$$

Y para el último término,

$$\int_0^T \langle \phi_n(t)Vu_n(t); w\rangle_{H^{-1}H^1}\eta(t)dt.$$

Usando argumentos análogos a los que venimos utilizando y por tener la convergencia $\phi_n(t) \to \phi_*(t)$ en L^2 se tiene que $\phi_n(t) \to \phi_*(t)$ a.e.

Sea $t \in [0,T]$

$$
\begin{aligned}
|\langle \phi_n(t)Vu_n(t); w\rangle_{H^{-1}H^1} &- \langle \phi_*(t)Vu_*(t); w\rangle_{H^{-1}H^1}| \\
&=|\langle \phi_n(t)Vu_n(t); w\rangle_{H^{-1}H^1} - \langle \phi_*(t)Vu_n(t); w\rangle_{H^{-1}H^1} + \\
&+\langle \phi_*(t)Vu_n(t); w\rangle_{H^{-1}H^1} - \langle \phi_*(t)Vu_*(t); w\rangle_{H^{-1}H^1}| \\
&\leq |\phi_n(t) - \phi_*(t)|\langle Vu_n(t), w\rangle_{H^{-1}H^1} + |\phi_*(t)|\langle V(u_n(t) - u_*(t)), w\rangle_{H^{-1}H^1}
\end{aligned}
$$

El primer término de esta última desigualdad podemos acotarlo de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
|\phi_n(t) - \phi_*(t)|\langle Vu_n(t), w\rangle_{H^{-1}H^1} &= |\phi_n(t) - \phi_*(t)|(\langle V_1u_n(t), w\rangle_{H^{-1}H^1} \\
&\quad +\langle V_2u_n(t), w\rangle_{H^{-1}H^1}) \\
&\leq |\phi_n(t) - \phi_*(t)|(\|V_1\|_{L^p}\|u_n(t)\|_{L^{\frac{2p}{p-1}}}\|w\|_{L^q} \\
&\quad + \|V_2\|_{L^\infty}\|u_n(t)\|_{L^{2\sigma+2}}\|w\|_{L^r})
\end{aligned}
$$

con q tal que $\frac{p+1}{2p} + \frac{1}{q} = 1$ y r tal que $\frac{1}{2\sigma+2} + \frac{1}{r} = 1$, análogamente a lo hecho en la demostración del Teorema 4.1 y como hemos visto repetidas veces, estas cotas son iniformes en n y t. Por lo tanto, se tiene que

$$
|\phi_n(t) - \phi_*(t)|(\|V_1\|_{L^p}\|u_n(t)\|_{L^{\frac{2p}{p-1}}}\|w\|_{L^q} + \|V_2\|_{L^\infty}\|u_n(t)\|_{L^{2\sigma+2}}\|w\|_{L^r}) \to 0
$$

cuando $n \to \infty$

Por último, para ver que

$$
\langle \phi_*(t)V(x)u_n(t); w\rangle_{H^{-1}H^1} \to \langle \phi_*(t)V(x)u_*(t); w\rangle_{H^{-1}H^1}
$$

usamos las cuentas hechas para (4.7) que nos permiten ver el producto dual anterior de la siguiente manera

(4.13)

$$
\begin{aligned}
&\langle \phi_*(t)V(x)(u_n(t) - u_*(t)); w\rangle_{H^{-1}H^1} = \\
&\qquad |\phi_*(t)|\left(\langle V_1(u_n(t) - u_*(t)); w\rangle_{L^rL^{r'}} + \langle V_2(u_n(t) - u_*(t)); w\rangle_{L^pL^q}\right) \\
&\qquad \leq \|\phi_*\|\left(\langle V_1(u_n(t) - u_*(t)); w\rangle_{L^rL^{r'}} + \langle V_2(u_n(t) - u_*(t)); w\rangle_{L^pL^q}\right)
\end{aligned}
$$

con $r' = \frac{2p}{p-1}$ y r tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, $p = 2\sigma + 2$ y q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Asi, del hecho que $u_n(t) \rightharpoonup u_*(t)$ en H^1 y V_1 y V_2 son reales, tenemos que los dos términos anteriores tienden a cero cuando $n \to \infty$. Luego, hemos visto que la sucesión $\langle \phi_n(t)Vu_n(t); w\rangle_{H^{-1}H^1} \to \langle \phi_*(t)Vu_*(t); w\rangle_{H^{-1}H^1}$

Además como $\|u_n(t)\|_{L^{\frac{2p}{p-1}}}$ y $\|u_n(t)\|_{L^{2\sigma+2}}$ están acotadas por $\|u_n(t)\|_{H^1}$ uniforme en t, gracias a los corolarios de Gagliardo Niremberg (2.2), (2.3), y 2.3 se tiene

$$\begin{aligned}|\langle \phi_n V(x) u_n(t); w\rangle_{H^{-1}H^1}\eta(t)| &\leq \|\phi_n\|_{L^\infty}(\|V_1\|_{L^p}\|u_n(t)\|_{H^1}\|w\|_{L^q} \\ &\quad + \|V_2\|_{L^\infty}\|u_n(t)\|_{H^1}\|w\|_{L^r})|\eta(t)| \\ &\leq \|\phi_n\|_{L^\infty} C(\|V_1\|_{L^p}\|w\|_{L^q} + \|V_2\|_{L^\infty}\|w\|_{L^r})|\eta(t)| \\ &\in L^1(0,T)\end{aligned}$$

y finalmente por convergencia mayorada tenemos:

$$\int_0^T \langle \phi_* V(x) u_n(t); w\rangle_{H^{-1}H^1}\eta(t)dt \to \int_0^T \langle \phi_* V(x) u_*(t); w\rangle_{H^{-1}H^1}\eta(t)dt$$

Esto implica que u_* satisface la ecuación:

$$i\frac{d}{dt}u_* + \Delta u_* + \lambda f + \phi_*(t) V u_* = 0 \quad \text{para casi todo} \quad t \in [0,T]$$

en sentido distribucional.

Lo próximo a mostrar es que:

$$|u_*(t,x)|^{2\sigma} u_*(t,x) = f(t,x) \text{ para casi todo } \ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^N$$

como funciones en $L^{r'}$. Para ello, alcanza con ver que son iguales como distribuciones. Es decir, que para cualquier $t \in [0,T]$ se tiene que

(4.14)
$$\int_{R^N} |u_*(t,x)|^{2\sigma} u_*(t,x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(t,x)\varphi(x)dx \quad \text{para} \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Probaremos esta igualdad por el absurdo:

Si no fuera cierta, existiría $\varphi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_*(t,x)|^{2\sigma} u_*(t,x)\varphi_0(x)dx \neq \int_{\mathbb{R}^N} f(t,x)\varphi_0(x)dx$$

Y como $|u_n(t)|^{2\sigma}u_n(t) \rightharpoonup f(t)$ en $L^{r'}$ si $n \to \infty$ se tendría que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n(t,x)|^{2\sigma} u_n(t,x)\varphi_0(x)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} f(t,x)\varphi_0(x)dx \quad \text{si} \quad n \to \infty$$

Por otro lado, se deduce de que $u_n(t) \rightharpoonup u_*(t)$ en H^1 que existe una subsucesión, que seguiremos notando $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_n(t) \to u_*(t)$ en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y por Gagliardo Niremberg en $L^{2\sigma+2}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y por lo tanto $|u_n(t)|^{2\sigma} \to |u_*(t)|^{2\sigma}$ en $L^{\frac{2\sigma+2}{2\sigma}}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Luego combinando: $\|u_n\|_{L^\infty((0,T),H^1)} \leq C$, que $u_n(t) \rightharpoonup u_*(t)$ en H^1, y usando el teorema 2.6 (desigualdad de Hölder generalizado) se tiene:

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N} |u_n(t,x)|^{2\sigma} u_n(t,x)\varphi_0(x)dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_*(t,x)|^{2\sigma} u_*(t,x)\varphi_0(x)dx\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} ||u_n(t,x)|^{2\sigma} u_n(t,x)\varphi_0(x) - |u_n(t,x)|^{2\sigma} u_*(t,x)\varphi_0(x) \\
&+ |u_n(t,x)|^{2\sigma} u_*(t,x)\varphi_0(x) - |u_*(t,x)|^{2\sigma} u_*(t,x)\varphi_0(x)|dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(t,x)|^{2\sigma} |u_n(t,x) - u_*(t,x)||\varphi_0(x)| \\
&+ \left||u_n(t,x)|^{2\sigma} - |u_*(t,x)|^{2\sigma}||u_*(t,x)|\right| |\varphi_0(x)|dx \\
&\leq \|u_n(t)\|^{2\sigma}_{L^{2\sigma+2}(\Omega)} \|u_n(t) - u_*(t)\|_{L^{2\sigma+2}(\Omega)} \|\varphi_0\|_{L^{2\sigma+2}(\Omega)} \\
&+ \||u_n(t)|^{2\sigma} - |u_*(t)|^{2\sigma}\|_{L^{\frac{2\sigma+2}{2\sigma}}(\Omega)} \|u_*(t)\|_{L^{2\sigma+2}} \|\varphi_0\|_{L^{2\sigma+2}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

donde en esta última desigualdad estamos usando para el primer y segundo término, Hölder con $p_1 = \frac{2\sigma+2}{2\sigma}$, $p_2 = 2\sigma + 2$, $p_3 = 2\sigma + 2$ y $r = 1$, con Ω el soporte compacto de φ_0. Asi obtenemos que cuando $n \to \infty$ estos dos términos tienden a cero. Lo que contradice el hecho de que:

$$\int_{R^N} |u_*(t,x)|^{2\sigma} u_*(t,x)\varphi_0(x)dx \neq \int_{R^N} f(t,x)\varphi_0(x)dx$$

y así, hemos visto (4.14).

En resumen, $u_* \in L^\infty((0,T),H^1) \cap W^{1,\infty}((0,T),H^{-1})$ y satisface la ecuación:

$$i\frac{d}{dt}u_* + \Delta u_* + \lambda |u_*|^{2\sigma} u_* + \phi_*(t)V(x)u_* = 0 \quad \text{para casi todo} \quad t \in [0,T]$$

en sentido distribucional. Luego, usando el clásico argumento basado en las estimaciones de Strichartz, podemos obtener la unicidad de la solución débil u_* de (3.1).

Argumentando como en la prueba del Teorema 2.14 de [4] para nuestro caso, como hemos hecho en el análisis de buen planteo en el capítulo 3, resulta que u_* es una solucion suave de (3.1) y $u_* \in C((0,T),H^1) \cap C^1((0,T),H^{-1})$.

Etapa 3: Conclusión.

De etapa 2 concluímos que existe un par $(u_*, \phi_*) \in \Lambda(0,T)$ que es límite de la sucesión minimizante (u_n, ϕ_n) en el sentido 1, 2 y 3 de la página 51. Para concluir que el par (u_*, ϕ_*) es un minimizador del problema de control óptimo:

$$F_* = \inf_{(u,\phi)\in\Lambda(0,T)} F(u,\phi).$$

Necesitamos mostrar que:

$$F_* = \lim_{n\to\infty} F(u_n, \phi_n) \geq F(u_*, \phi_*).$$

Recordemos la definición de nuestro funcional objetivo (4.1)

$$F(u,\phi) := \langle u(T,.); Au(T;.)\rangle^2_{L^2} + \gamma_1 \int_0^T (E'(t))^2 dt + \gamma_2 \int_0^T (\phi'(t))^2 dt.$$

De la suposición del operador $A : H^1 \to L^2$ acotado, existe $R > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ $supp_{x\in\mathbb{R}^N}(Au_n(T,x)) \subseteq B(R)$ por lo que deducimos de $u_n(T) \to u_*(T)$ en L^2_{loc} que $Au_n(T) \rightharpoonup Au_*(T)$ en L^2. En efecto, sea $v \in L^2$ (4.15)

$$\begin{aligned}\langle Au_n(T), v\rangle - \langle Au_*(T), v\rangle_{L^2} &= \langle A(u_n(T) - u_*(T)), v\rangle_{L^2} \\ &= \mathrm{Re}\left(\int_{B(R)} A(u_n(T) - u_*(T))\overline{v}dx\right) \text{ por ser } A \text{ localizado} \\ &= \langle A(u_n(T) - u_*(T)), v\rangle_{L^2(B(R))}.\end{aligned}$$

Por densidad de H^1 en L^2 existe una sucesión $(v_j) \subset H^1$ tal que $v_j \to v$ en L^2 Asi, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle Au_n(T), v\rangle - \langle Au_*(T), v\rangle_{L^2} = {} & \langle A(u_n(T) - u_*(T)), v - v_j\rangle_{L^2(B(R))} \\ & + \langle A(u_n(T) - u_*(T)), v_j\rangle_{L^2(B(R))}.\end{aligned}$$

Para el primer término de la igualdad anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle A(u_n(T) - u_*(T)), v - v_j\rangle_{L^2(B(R))} &\leq \|A(u_n(T) - u_*(T))\|_{L^2(B(R))}\|v - v_j\|_{L^2(B(R))} \\ &\leq C\|u_n(T) - u_*(T)\|_{H^1}\|v - v_j\|_{L^2} \\ &\leq C(\|u_n(T)\|_{H^1} + \|u_*(T)\|_{H^1})\|v - v_j\|_{L^2} \\ &\leq C(\|u_n(T)\|_{H^1} + \|u_*(T)\|_{H^1})\|v - v_j\|_{L^2} \\ &\to 0 \text{ cuando } j \to \infty\end{aligned}$$

Para el segundo término, para j fijo conveniente, como $v_j \in H^1$ tenemos que

$$\begin{aligned}\langle A(u_n(T) - u_*(T)), v_j\rangle_{L^2(B(R))} &= \langle u_n(T) - u_*(T), Av_j\rangle_{L^2(B(R))} \\ &\to 0 \text{ cuando } n \to \infty\end{aligned}$$

ya que $u_n(T) \rightharpoonup u_*(T)$ en L^2_{loc}.

Usando este hecho, veamos la convergencia del primer término del funcional F:

(4.16)

$$\begin{aligned}|\langle u_n(T), Au_n(T)\rangle - \langle u_*(T), Au_*(T)\rangle| \\ &\leq \langle u_n(T) - u_*(T), Au_n(T)\rangle + \langle u_*(T), A(u_n(T) - u_*(T))\rangle \\ &= \langle u_n(T) - u_*(T), Au_n(T)\rangle_{L^2(B(R))} \\ &+ \langle u_*(T), A(u_n(T) - u_*(T))\rangle_{L^2(B(R))} \\ &\leq \|u_n(T) - u_*(T)\|_{L^2(B(R))} C\|u_n(T)\|_{L^2(B(R))} \\ &+ \langle u_*(T), A(u_n(T) - u_*(T))\rangle_{L^2(B(R))} \\ &\leq C\|u_n\|_{L^\infty(0,T,H^1)}\|u_n(T) - u_*(T)\|_{L^2(B(R))} \\ &+ \langle u_*(T), A(u_n(T) - u_*(T))\rangle_{L^2(B(R))} \to 0\end{aligned}$$

si $n \to \infty$.

Para el término que acompaña a γ_1, queremos probar que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^T \phi_n'(t)^2 w_n(t)^2 dt \geq \int_0^T \phi_*'(t)^2 w_*(t)^2 dt$$

donde llamamos

$$w_n(t) = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_n(t,x)|^2 dx \text{ y } w_*(t) = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_*(t,x)|^2 dx.$$

Sumando y restando

$$\int_0^T \phi_n'(t)^2 w_*(t)^2 dt$$

se tiene que;

$$\liminf_{n\to\infty}\int_0^T \phi_n'(t)^2 w_n(t)^2 dt = \liminf_{n\to\infty}\int_0^T (\phi_n'(t)^2 w_n(t)^2 + \phi_n'(t)^2 w_*(t)^2 - \phi_n'(t)^2 w_*(t)^2)dt$$

$$(4.17)\qquad \geq \liminf_{n\to\infty}\int_0^T \phi_n'(t)^2 w_*(t)^2 dt + \liminf_{n\to\infty}\int_0^T \phi_n'(t)^2 (w_n(t)^2 - w_*(t)^2)dt.$$

Para el primer término de esta última desigualdad, recordemos que

$$|w_*(t)| \leq \|V_1\|_{L^p} C(T, \|u_0\|_{H^1}, \|\phi\|_{H^1}) + \|V_2\|_{L^\infty}\|u_0\|_{L^2}^2$$

independiente de t. Veamos que

$$\phi_n' w_* \rightharpoonup \phi_*' w_* \text{ en } L^2$$

En efecto, como $\phi_n \rightharpoonup \phi_*$ en H^1 y $\phi_n \to \phi_*$ en L^2, por el Lemma 8.2 de [3] tenemos que $\phi_n' \rightharpoonup \phi_*'$ en L^2 y en consecuencia que $\phi_n' w_* \rightharpoonup \phi_*' w_*$ en L^2.

Luego de la observación 2.8 (ii) se tiene que

$$(4.18)\qquad \begin{aligned} &\liminf_{n\to\infty} \|\phi_n'(t) w_*(t)\|_{L^2}^2 \geq \|\phi_*'(t) w_*(t)\|_{L^2}^2 \\ &\liminf_{n\to\infty}\int_0^T (\phi_n'(t))^2 w_*(t)^2 dt \geq \int_0^T (\phi_*'(t))^2 w_*(t)^2 \end{aligned}$$

Para el segundo término de (4.17). Es fácil ver que vale la siguiente desigualdad

$$(4.19)\qquad \liminf_{n\to\infty} w_n^2(t) \geq w_*^2(t)$$

y de las desigualdades (4.18) y (4.19) por el lema de Fatou se tiene

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty}\int_0^T (\phi_n'(t))^2 w_n^2(t) dt &\geq \int_0^T (\phi_*'(t))^2 w_*^2(t) dt \\ &+ \int_0^T \liminf_{n\to\infty}(\phi_n'(t))^2 . \liminf_{n\to\infty}(w_n^2(t) - w_*^2(t)) dt \\ &\geq \int_0^T (\phi_*'(t))^2 w_*^2(t) dt. \end{aligned}$$

Para el término que involucra a γ_2:

$$\int_0^T (\phi_n'(t))^2 dt$$

Usando otra vez el hecho de que al tener $\phi_n \rightharpoonup \phi_*$ en H^1 y $\phi_n \to \phi_*$ en L^2 se tiene que $\phi_n' \rightharpoonup \phi_*'$ en L^2. De la observación 2.8(ii), se desprende

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^T (\phi_n'(t))^2 dt \geq \int_0^T (\phi_*'(t))^2 dt \tag{4.20}$$

Luego de (4.16), (4.18) y (4.20) se deriva que:

$$F_* = \liminf_{n\to\infty} F(u_n, \phi_n) \geq F(u_*, \phi_*)$$

y como la otra desigualdad es obvia, porque $(u_*, \phi_*) \in \Lambda(0,T)$, se tiene que$F_* = F(u_*, \phi_*)$ con $(u_*, \phi_*) \in \Lambda(0,T)$ que resuelve nuestro problema, lo que completa la prueba.

□

Capítulo 5

Condiciones necesarias de primer orden

Con el fin de obtener una caracterización rigurosa del minimizador $(u_*, \phi_*) \in \Lambda(0,T)$ tenemos que derivar las condiciones de optimalidad para nuestro problema de control óptimo. Para ello, en primer lugar calculamos formalmente la derivada de la función objetivo $F(u, \phi)$ y analizamos el resultado del problema adjunto en la siguiente subsección.

5.1. Derivada y análisis de la ecuación adjunta

Queremos derivar el funcional objetivo $F(u, \phi)$.

Siendo u solución del problema (3.1) y ϕ el control correspondiente. Hemos visto en el Lema 3.1 que dada $\phi \in H^1(0,T)$ tal que $\phi(0) \in B_2$ existe u solución tal que $u \in X(0,T)$, $u(0) \in B_1$. Esto define para cada $\phi \in H^1(0,T)$ la siguente función:

$$u : H^1(0,T) \to X(0,T), \quad \phi \mapsto u(\phi)$$

donde

$$X(0,T) := L^2(0,T,H_0^1) \cap W^{1,2}(0,T,H^{-1})$$

que introduce un funcional

$$\mathcal{J} : H^1(0,T) \to \mathbb{R}, \ \phi \mapsto \mathcal{J}(\phi) = F(u(\phi), \phi)$$

con

$$F(u,\phi) = \langle u(T,.); Au(T,.)\rangle_{L^2}^2 + \gamma_1 \int_0^T (E'(t))^2 dt + \gamma_2 \int_0^T (\phi'(t))^2 dt.$$

Para caracterizar los puntos críticos tenemos que calcular la derivada de $\mathcal{J}$. Para ello, en virtud de la derivada Gâteaux , que podemos recordar una definición en [9], consideramos $\delta_\phi \in H^1(0,T)$ con $\delta_\phi(0) = 0$ un control posible. Recordemos que $H^1(0,T) \hookrightarrow C(0,T)$ y por lo tanto tiene sentido evaluar $\delta_\phi(t)$ en $t = 0$.

Observemos que:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{J} : H^1(0,T) \to \mathbb{R} \\
&\mathcal{J}' : H^1(0,T) \to (H^1(0,T))^* = H^{-1}(0,T) \\
&\mathcal{J}'(\phi) : H^1(0,T) \to \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Por definición

$$\langle \mathcal{J}'(\phi), \delta_\phi \rangle_{H^{-1}(0,T),H^1(0,T)} = \mathcal{J}'(\phi)(\delta_\phi) = \frac{d}{d\epsilon}\mathcal{J}(\phi + \epsilon\delta_\phi)|_{\epsilon=0}$$

es la derivada de $\mathcal{J}$ respecto a ϕ en la dirección de δ_ϕ. Haciendo regla de la cadena obtenemos:

(5.1)

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{J}'(\phi), \delta_\phi \rangle_{H^{-1}(0,T),H^1(0,T)} &:= \frac{d}{d\epsilon}\mathcal{J}(\phi + \epsilon\delta_\phi)|_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon}F(u(\phi + \epsilon\delta_\phi); \phi + \epsilon\delta_\phi)|_{\epsilon=0} \\
&= \langle \frac{\partial F}{\partial u}(u(\phi), \phi); u'(\phi).\delta_\phi) \rangle_{X(0,T)^*,X(0,T)} \\
&+ \langle \frac{\partial F}{\partial \phi}(u(\phi), \phi); \delta_\phi) \rangle_{H^{-1}(0,T),H^1(0,T)}
\end{aligned}
$$

con $X(0,T)^*$ el dual de $X(0,T)$.

Observemos que:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u(\phi), \phi)[v] = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(u(\phi) + hv, \phi) - F(u(\phi), \phi)}{h}$$

que se define para $v \in X(0,T)$ y si existe el límite nos da un valor real, por lo que $\frac{\partial F}{\partial u}(u(\phi), \phi) \in X(0,T)^*$ y

$$u'(\phi)[\psi] = \lim_{h \to 0^+} \frac{u(\phi + h\psi) - u(\phi)}{h}.$$

Como $u : H^1(0,T) \to X(0,T)$ el límite anterior si existe, pertenece a $X(0,T)$, es decir

$$u'(\phi)[\delta_\phi] \in X(0,T) \text{ si } \phi, \delta_\phi \in H^1(0,T)$$

con $\delta_\phi(0) = 0$ para que $(\phi + h\delta_\phi)(0) = \phi(0)$ y así verifique $\|\phi(0)\| \leq M_2$. Escribimos la ecuación en una forma más abstracta:

$$\text{i.e } \; P(u, \phi) = iu_t + \Delta u + \lambda|u|^{2\sigma}u + \phi(t)V(x)u = 0$$

siendo $u = u(\phi)$. La diferenciación con respecto a ϕ formalmente queda:

$$\frac{dP}{d\phi}(u(\phi), \phi) = \partial_u P(u(\phi), \phi).u'(\phi) + \partial_\phi P(u(\phi), \phi) = 0. \tag{5.2}$$

Calculemos $\partial_u P(u, \phi)$:

$$\langle \frac{\partial P}{\partial u}(u, \phi); u'(\phi)\delta \rangle = \frac{dP}{d\epsilon}(u + \epsilon u'(\phi)\delta; \phi)|_{\epsilon=0}. \tag{5.3}$$

Dado $\xi \in X(0,T)$ calculamos $\frac{\partial P}{\partial u}(u, \phi)[\xi]$. Así,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{P(u + \epsilon\xi, \phi) - P(u, \phi)}{\epsilon} = i\xi_t + \Delta\xi + \phi(t)V(x)\xi + \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\lambda|u + \epsilon\xi|^{2\sigma}(u + \epsilon\xi) - \lambda|u|^{2\sigma}u}{\epsilon}.$$

La dificultad de este límite radica en calcular la derivada de la función

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = |z|^{2\sigma} z.$$

Haremos esté cálculo con cuidado: Una forma equivalente de pensar a la función f sería:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; f(x, y) = |(x, y)|^{2\sigma}(x, y) = (x^2+y^2)^\sigma(x, y) = ((x^2+y^2)^\sigma x; (x^2+y^2)^\sigma y)$$

cuya matriz diferencial viene dada por:

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \sigma(x^2 + y^2)^{\sigma-1}2x^2 + (x^2 + y^2)^\sigma & \sigma(x^2 + y^2)^{\sigma-1}2yx \\ \sigma(x^2 + y^2)^{\sigma-1}2yx & \sigma(x^2 + y^2)^{\sigma-1}2y^2 + (x^2 + y^2)^\sigma \end{pmatrix}$$

Luego si (u, v) es la dirección, tenemos:

$$Df(x, y)(u, v) = \sigma(x^2 + y^2)^{\sigma-1} \begin{pmatrix} 2x^2 & 2yx \\ 2yx & 2y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + (x^2 + y^2)^\sigma \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Así podemos escribir a la derivada direccional como:

$$Df(x, y)(u, v) = \sigma|z|^{2\sigma-2} \begin{pmatrix} 2x^2u + 2yxv \\ 2yxu + 2y^2v \end{pmatrix} + |z|^{2\sigma} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

donde $z = x + iy$ y la dirección $w = u + iv$.

Veamos que:

$$\begin{pmatrix} 2x^2u + 2yxv \\ 2yxu + 2y^2v \end{pmatrix}$$

representa al número complejo $(w.\overline{z}+\overline{w}.z).z$

$$
\begin{aligned}
(w.\overline{z}+\overline{w}.z).z &= (u+iv).\overline{(x+iy)}+(x+iy)\overline{(u+iv)} \\
&= (2ux+2vy).(x+iy) = 2x^2u+2yxv+i(2yxu+2y^2v).
\end{aligned}
$$

Luego podemos decir que la derivada direccional viene dada por

$$
f'(z)[w] = \sigma|z|^{2\sigma-2}z(w.\overline{z}+\overline{w}.z)+|z|^{2\sigma}w.
$$

Así finalmente hemos calculado:

$$
\begin{aligned}
\langle\frac{\partial P}{\partial u}(u,\phi);\xi\rangle &= i\xi_t+\Delta\xi+\phi(t)V(x)\xi+\lambda(\sigma|u|^{2\sigma}\xi+\sigma|u|^{2\sigma-2}u^2\overline{\xi}+|u|^{2\sigma}\xi) \\
&= i\xi_t+\Delta\xi+\phi(t)V(x)\xi+\lambda(\sigma+1)|u|^{2\sigma}\xi+\lambda\sigma|u|^{2\sigma-2}u^2\overline{\xi}
\end{aligned}
$$

con $\xi\in X(0,T)$.

Consideraremos a continuación la ecuación adjunta. Sin mucho detalle justificaremos existencia de solución en la Proposición 5.1, lo cual nos permitirá junto con la Lipschitz continuidad que probaremos en la Proposición 5.2 justificar la diferenciabilidad de $\mathcal{F}$.

Sea φ solución de la siguiente ecuación adjunta

$$
\begin{aligned}
i\varphi_t+\Delta\varphi+&\phi(t)V(x)\varphi+\lambda(\sigma+1)|u|^{2\sigma}\varphi+\lambda\sigma|u|^{2\sigma-2}u^2\overline{\varphi} \\
&= 4\gamma_1(\phi'(t))^2w(t)V(x)u(t,x) \\
&\varphi(T) = i4\langle u(T),Au(T)\rangle_{L^2_x}Au(T)
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

En la siguiente proposición vamos a analizar la existencia de solución de (5.4)

Proposición 5.1. *Sea $N\leq 3$, $u_0\in H^2$, $\phi\in W^{1,\infty}(0,T)$ y V, $\bigtriangledown V\in L^p+L^\infty$ para $p\geq 2$. Asumimos que $0<\sigma<\frac{2}{N-2}$ si $\lambda<0$ o $0<\sigma<\frac{2}{N}$ si $\lambda>0$. Entonces, para cada $T>0$ la ecuación* (5.4) *admite una única mild solution $\varphi\in C([0,T],L^2)$.*

Demostración. Como V es un potencial ilimitado, no puede ser tratado por el argumento de perturbación como en la Proposición 3.6 [10]. Bajo nuestras suposiciones en V, u_0, N, y A deducimos de $H^2\hookrightarrow L^\infty$ y el Lema 3.2 que $|u|^{2\sigma},|u|^{2\sigma-2}u^2\in L^\infty$,

$$
4\gamma_1(\phi'(t))^2w(t)V(x)u(t,x)\in L^1(0,T;L^{\frac{2p}{p+1}})\ ,\ i4\langle u(T),Au(T)\rangle_{L^2_x}Au(T)\in L^2.
$$

Observemos que en nuestro caso al ser

$$
g_1(\varphi)=\phi V\varphi,\quad g_2(\varphi)=\lambda(\sigma+1)|u|^{2\sigma}\varphi,\quad g_3=\lambda\sigma|u|^{2\sigma-2}u^2\overline{\varphi}
$$

lineales, es fácil verificar las hipótesis (2.12) y (2.13) del Teorema 2.17. En consecuencia, aplicado el teorema podemos obtener el buen planteo local. La existencia global se puede derivar por el argumento clásico para la ecuación de Schrödinger y la desigualdad de Gronwall. Pero no desarrollaremos esto último en esta tesis por ser similar a lo hecho para la existencia global de u. $\square$

5.2. Lipschitz continuidad con respecto al control

Esta sección se dedica a probar que la solución (3.1) depende en forma Lipschitz continua del parámetro de control ϕ.

Para empezar, estudiamos la dependencia continua de la solución $u = u(\phi)$ con respecto al control.

Proposición 5.2. *Sea $N \leq 3$, V, $\bigtriangledown V \in L^p + L^\infty$ y $V \in L^{2p}$ para $p \geq 2$. Asumimos que $0 < \sigma < \frac{2}{N-2}$ si $\lambda < 0$ o $0 < \sigma < \frac{2}{N}$ si $\lambda > 0$. Sean $u, \tilde{u} \in L^\infty(0,T;H^2)$ dos mild solution de 3.1 con mismo dato inicial $u_0 \in H^2$ correspondiendo a los parámetros de control $\phi, \tilde{\phi} \in W^{1,\infty}(0,T)$ respectivamente. Dado $M > 0$ constante, si*

$$\|\phi\|_{W^{1,\infty}(0,T)} \ , \ \|\tilde{\phi}\|_{W^{1,\infty}(0,T)} \ , \ \|u(t)\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \ , \ \|\tilde{u}(t)\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \leq M$$

Entonces, existe $\tau = \tau(M) > 0$ y una constante $C = C(M)$ tal que

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(I_t;H^2)} &\leq C(\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{H^2} + \|\phi - \tilde{\phi}\|_{H^1(I_t)}) \\ &\leq C(\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{H^2} + \|\phi - \tilde{\phi}\|_{W^{1,\infty}(I_t)}) \end{aligned} \tag{5.5}$$

donde $I_t := [t, t+\tau] \cap [0,T]$ En particular la solución $u(\phi)$ depende continuamente en el parámetro control $\phi \in W^{1,\infty}(0,T)$.

Demostración. Para simplificar notación, asumimos que $t + \tau \leq T$. Aplicando el lema 3.1 existe un $\tau > 0$ dependiendo solamente de M tal que $u|_{I_t}$ es un punto fijo del operador

$$\Phi(u) := U(. - t)u(t) + i \int_t^{\cdot} U(. - s)(\lambda|u(s)|^{2\sigma}u(s) + \phi(s)Vu(s))ds$$

que mapea el espacio de Banach

$$Y = \{u \in L^\infty(I_t; H^2), \ \ \|u\|_{L^\infty(I_t;H^2)} \leq 2M\}, \ \ \text{en si mismo,}$$

con U el grupo de isometrías en H^1.

Lo mismo vale para $\tilde{u}$ en consecuencia obtenemos:

(5.6)
$$\tilde{u}(s)-u(s) = U(s-t)(\tilde{u}(t)-u(t))+i\int_t^s U(s-r)(\lambda[|\tilde{u}|^{2\sigma}\tilde{u}-|u|^{2\sigma}u]+V(\tilde{u}\tilde{\phi}-u\phi))(r)dr$$

donde $s \in [t, t+\tau]$.

En lo que sigue establecemos $r = 2\sigma + 2$ y $\rho = \frac{2p}{p-1}$ tomando q y γ tal que (q,r) y (γ,ρ) son dos pares admisibles como se define en 2.21. Aplicando estimaciones de Strichartz (Teorema 2.15) para (5.6), los teoremas de inclusión , Teorema 2.3. $\tilde{\phi}, \phi \in H^1(0,T) \hookrightarrow L^\infty(0,T)$ y $\tilde{u}(t,.), u(t,.) \in H^2(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$ donde $N \leq 3$, la desigualdad de Hölder y (2.11) Veremos:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t;L^2)} &\leq C\|\tilde{u}(t)-u(t)\|_{L^2} + C\tau^{\frac{1}{q'}}\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t;H^2)} \\ &\quad + C\tau^{\frac{1}{\gamma'}}\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t;H^2)} + C\|\tilde{\phi}-\phi\|_{H^1(I_t)}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Utilizando los resultados de Strichartz vistos en 2.15, y siendo $(\infty, 2)$, (q', r') y (γ', ρ') pares admisibles se tiene

(5.8)
$$\begin{aligned} \|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t,L^2)} &\leq \|U(s-t)(\tilde{u}(t)-u(t))\|_{L^\infty(I_t,L^2)} \\ &\quad + \|i\int_t^s U(s-t)[\lambda(|\tilde{u}|^{2\sigma}\tilde{u}-|u|^{2\sigma}u)+V(\tilde{u}\tilde{\phi}-u\phi)](r)dr\|_{L^\infty(I_t,L^2)} \\ &\leq C\|\tilde{u}(t)-u(t)\|_{L^2} + C\|f_1\|_{L^{q'}(I_t,L^{r'})} + C\|f_2\|_{L^{\gamma'}(I_t,L^{\rho'})} \end{aligned}$$

con $f_1 = |\tilde{u}|^{2\sigma}\tilde{u} - |u|^{2\sigma}u$ y $f_2 = V(\tilde{u}\tilde{\phi} - u\phi)$.

Veamos $\|f_1\|_{L^{q'}(I_t,L^{r'})}$:

$$\|f_1\|_{L^{q'}(I_t,L^{r'})} = \left(\int_{I_t} \||\tilde{u}|^{2\sigma}\tilde{u}-|u|^{2\sigma}u\|_{L^{r'}}^{q'} dt\right)^{\frac{1}{q'}} \tag{5.9}$$

y usando la desigualdad de la Observación 2.11

(5.10)
$$\begin{aligned} \||\tilde{u}|^{2\sigma}\tilde{u}-|u|^{2\sigma}u\|_{L^{r'}}^{q'} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} (\big||\tilde{u}|^{2\sigma}\tilde{u}-|u|^{2\sigma}u\big|)^{r'}\right)^{\frac{q'}{r'}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} (\big||\tilde{u}|^{2\sigma}+|u|^{2\sigma}\big|)^{r'}(|\tilde{u}-u|)^{r'}\right)^{\frac{q'}{r'}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^{2\sigma r'}(|\tilde{u}-u|)^{r'} + |u|^{2\sigma r'}(|\tilde{u}-u|)^{r'}\right)^{\frac{q'}{r'}} \\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^{2\sigma r'}(|\tilde{u}-u|)^{r'}\right)^{\frac{q'}{r'}} + C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2\sigma r'}(|\tilde{u}-u|)^{r'}\right)^{\frac{q'}{r'}} \end{aligned}$$

Veamos con más detalle el segundo término de esta última desigualdad. Usando Hölder para $\alpha = \frac{r}{r'}$, siendo $r = 2\sigma + 2$ y r' tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ y α' tal que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$ se tiene

(5.11)
$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2\sigma r'}(|\tilde{u}-u|)^{r'}\right)^{\frac{q'}{r'}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2\sigma r'\alpha'}\right)^{\frac{q'}{\alpha'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\tilde{u}-u|)^{r}\right)^{\frac{q'}{\alpha r'}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{r}\right)^{\frac{2\sigma q(2\sigma+1)}{(2\sigma+1)(q-1)((2\sigma+2))}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\tilde{u}-u|)^{r}\right)^{\frac{q(2\sigma+1)}{(2\sigma+1)(q-1)(2\sigma+2)}} \\
&= \|u\|_{L^r}^{2rq'} \|\tilde{u}-u\|_{L^r}^{q'}.
\end{aligned}$$

Análogamente podemos tratar el primer término de (5.10) y así obtenemos

$$\begin{aligned}
\|f_1\|_{L^{q'}(I_t,L^{r'})} &\leq \left(\int_{I_t} C\|\tilde{u}\|_{L^r}^{2rq'}\|\tilde{u}-u\|_{L^r}^{q'} + C\|u\|_{L^r}^{2rq'}\|\tilde{u}-u\|_{L^r}^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \\
&\leq C\left(\|\tilde{u}\|_{L^\infty(I_t,L^r)}^{2\sigma} + \|u\|_{L^\infty(I_t,L^r)}^{2\sigma}\right)\left(\int_{I_t} \|\tilde{u}-u\|_{L^r}^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

haciendo Hölder con las funciones $h_1 = 1$ y $h_2 = \|\tilde{u}-u\|_{L^r}^{q'}$ para $\alpha = \frac{q}{q'}$ tenemos que

(5.13)
$$\begin{aligned}
\|f_1\|_{L^{q'}(I_t,L^{r'})} &\leq C\left(\|\tilde{u}\|_{L^\infty(I_t,L^r)}^{2\sigma} + \|u\|_{L^\infty(I_t,L^r)}^{2\sigma}\right)\left((\int_{I_t} \|\tilde{u}-u\|_{L^r}^{q})^{\frac{q}{q'}}(\int_{I_t} 1)^{\frac{1}{\alpha'}}\right)^{\frac{1}{q'}} \\
&\leq C\left(\|\tilde{u}\|_{L^\infty(I_t,L^r)}^{2\sigma} + \|u\|_{L^\infty(I_t,L^r)}^{2\sigma}\right)\left(\|\tilde{u}-u\|_{L^q(I_t,L^r)}|I_t|^{\frac{1}{\alpha' q'}}\right)
\end{aligned}$$

donde $|I_t|^{\frac{1}{\alpha' q'}} = \tau^{\frac{q-q'}{qq'}}$. Así

$$\|f_1\|_{L^{q'}(I_t,L^{r'})} \leq C\left(\|\tilde{u}\|_{L^\infty(I_t,L^r)}^{2\sigma} + \|u\|_{L^\infty(I_t,L^r)}^{2\sigma}\right)\left(\|\tilde{u}-u\|_{L^q(I_t,L^r)}\tau^{\frac{1}{\alpha' q'}}\right).$$

Para $f_2 = V(\tilde{u}\tilde{\phi} - u\phi)$, si sumamos y restamos $u\tilde{\phi}$ por desigualdad triangular tenemos que

$$\|f_2\|_{L^{\gamma'}(I_t,L^{\rho'})} \leq \|V\tilde{\phi}(\tilde{u}-u)\|_{L^{\gamma'}(I_t,L^{\rho'})} + \|Vu(\tilde{\phi}-\phi)\|_{L^{\gamma'}(I_t,L^{\rho'})}.$$

Veamos el primer término:

$$\|V\tilde{\phi}(\tilde{u}-u)\|_{L^{\gamma'}(I_t,L^{\rho'})} = \left(\int_{I_t} \|V\tilde{\phi}(\tilde{u}-u)\|_{L^{\rho'}}^{\gamma'}\right)^{\frac{1}{\gamma'}} \tag{5.14}$$

haciendo Hölder para $\alpha = \frac{\rho}{\rho'}$ y α' tal que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\|V\tilde{\phi}(\tilde{u}-u)\|_{L^{\rho'}}^{\gamma'} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} (V\tilde{\phi}(|\tilde{u}-u|))^{\rho'}\right)^{\frac{\gamma'}{\rho'}} \\
&\leq \|\tilde{\phi}\|_{L^\infty}^{\gamma'} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|V(\tilde{u}-u)|)^{\rho'}\right)^{\frac{\gamma'}{\rho'}} \\
&\leq \|\tilde{\phi}\|_{L^\infty}^{\gamma'} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |V|^{\rho'\gamma'}\right)^{\frac{\gamma'}{\alpha'\rho'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\tilde{u}-u|)^{\rho}\right)^{\frac{\rho'\gamma'}{\rho\rho'}} \\
&\leq \|\tilde{\phi}\|_{L^\infty}^{\gamma'} \|V\|_{L^p}^{\gamma'} \|\tilde{u}-u\|_{L^\rho}^{\gamma'}.
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

Para el segundo término :

$$
\|Vu(\tilde{\phi}-\phi)\|_{L^{\gamma'}(I_t,L^{\rho'})} = \left(\int_{I_t} \|Vu(\tilde{\phi}-\phi)\|_{L^{\rho'}}^{\gamma'}\right)^{\frac{1}{\gamma'}}
$$

Haciendo Hölder para $\alpha = \frac{\rho}{\rho'}$ con α' tal que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|Vu(\tilde{\phi}-\phi)\|_{L^{\rho'}}^{\gamma'} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|Vu(\tilde{\phi}-\phi)|)^{\rho'}\right)^{\frac{\gamma'}{\rho'}} = (|\tilde{\phi}-\phi|)^{\gamma'} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|Vu|)^{\rho'}\right)^{\frac{\gamma'}{\rho'}} \\
&\leq (|\tilde{\phi}-\phi|)^{\gamma'} \left((\int_{\mathbb{R}^N} |V|^{\alpha'\rho'})^{\frac{1}{\alpha'}} (\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\alpha\rho'})^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\frac{\gamma'}{\rho'}} \\
&= (|\tilde{\phi}-\phi|)^{\gamma'} \|V\|_{L^p}^{\gamma'} \|u\|_{L^\rho}^{\gamma'}.
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\|f_2\|_{L^{\gamma'}(I_t,L^{\rho'})} &\leq \left(\int_{I_t} \|\tilde{\phi}\|_{L^\infty}^{\gamma'} \|V\|_{L^p}^{\gamma'} \|\tilde{u}-u\|_{L^\rho}^{\gamma'}\right)^{\frac{1}{\gamma'}} + \left(\int_{I_t} (|\tilde{\phi}-\phi|)^{\gamma'} \|V\|_{L^p}^{\gamma'} \|u\|_{L^\rho}^{\gamma'}\right)^{\frac{1}{\gamma'}} \\
&= \|\tilde{\phi}\|_{L^\infty} \|V\|_{L^p} \|\tilde{u}-u\|_{L^{\gamma'}(I_t,L^\rho)} + \|V\|_{L^p} \left(\int_{I_t} (|\tilde{\phi}-\phi|)^{\gamma'} \|u\|_{L^\rho}^{\gamma'}\right)^{\frac{1}{\gamma'}} \\
&= \|\tilde{\phi}\|_{L^\infty} \|V\|_{L^p} \|\tilde{u}-u\|_{L^{\gamma'}(I_t,L^\rho)} + \|V\|_{L^p} \|\tilde{\phi}-\phi\|_{L^{\gamma'}(I_t)} \|u\|_{L^\rho}
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

Así podemos escribir (5.8) de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t,L^2)} &\leq C\|\tilde{u}(t)-u(t)\|_{L^2} \\
&\quad + C\left(\|\tilde{u}\|_{L^\infty(I_t,L^r)}^{2\sigma} + \|u\|_{L^\infty(I_t,L^r)}^{2\sigma}\right)\left(\|\tilde{u}-u\|_{L^q(I_t,L^r)} \tau^{\frac{1}{\alpha' q'}}\right) \\
&\quad + \|\tilde{\phi}\|_{L^\infty} \|V\|_{L^p} \|\tilde{u}-u\|_{L^{\gamma'}(I_t,L^\rho)} + \|V\|_{L^p} \|\tilde{\phi}-\phi\|_{L^{\gamma'}(I_t)} \|u\|_{L^\rho}.
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

El segundo y tercer término de esta última desigualdad se puede escribir como sigue

$$
\begin{aligned}
I_2 &= C\left(\|\tilde{u}\|^{2\sigma}_{L^\infty(I_t,L^r)} + \|u\|^{2\sigma}_{L^\infty(I_t,L^r)}\right)\left(\|\tilde{u}-u\|_{L^q(I_t,L^r)}\tau^{\frac{1}{\alpha' q'}}\right)\\
&\le C\tau^{\frac{q-q'}{qq'}}\tilde{C}\left(\int_{I_t}\|\tilde{u}-u\|^q_{L^r}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\le C\tau^{\frac{q-q'}{qq'}}\left(\int_{I_t}\|\tilde{u}-u\|^q_{H^2}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (5.19)\\
&\le C\tau^{\frac{q-q'}{qq'}}\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t,H^2)}|I_t|^{\frac{1}{q}}\\
&= C\tau^{\frac{1}{q'}}\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t,H^2)}.
\end{aligned}
$$

El cuarto término

$$I_4 = \|\tilde{\phi}\|_{L^\infty}\|V\|_{L^p}\|\tilde{u}-u\|_{L^{\gamma'}(I_t,L^\rho)} \le C\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t,H^2)}\tau^{\frac{1}{\gamma'}}$$

y el quinto, usando la inclusión de $H^1(0,T) \hookrightarrow L^\infty(0,T)$ tenemos que

$$\|V\|_{L^p}\|\tilde{\phi}-\phi\|_{L^{\gamma'}(I_t)}\|u\|_{L^\rho} \le C\|\tilde{\phi}-\phi\|_{H^1(I_t)}$$

y así podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t,L^2)} &\le C\|\tilde{u}(t)-u(t)\|_{L^2} + C\tau^{\frac{1}{q'}}\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t,H^2)} \qquad (5.20)\\
&\quad + C\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t,H^2)}\tau^{\frac{1}{\gamma'}} + C\|\tilde{\phi}-\phi\|_{H^1(I_t)}
\end{aligned}
$$

como queríamos ver.

Sea $f_1(t) = \lambda(|\tilde{u}|^{2\sigma}\tilde{u} - |u|^{2\sigma}u)(t)$ y $f_2(t) = V(\tilde{u}\tilde{\phi} - u\phi)(t)$, se deduce del Lema 2.3 que

(5.21)

$$
\begin{aligned}
\|\Delta(\tilde{u}-u)\|_{L^\infty(I_t,L^2)} &\le \|\Delta(\tilde{u}(t)-u(t))\|_{L^2} + C\|f_1(t)+f_2(t)\|_{L^2} + \|f_1+f_2\|_{L^\infty(I_t,L^2)}\\
&\quad + C\|(f_1)_t\|_{L^{q'}(I_t,L^{r'})} + C\|(f_2)_t\|_{L^{\gamma'}(I_t,L^{\rho'})}.
\end{aligned}
$$

Estimamos estos términos por argumentos similares a lo usado en (5.7) obtenemos

(5.22)

$$
\begin{aligned}
\|f_1(t)+f_2(t)\|_{L^2} &\le C\|(|\tilde{u}|^{2\sigma}+|u|^{2\sigma})(t)(\tilde{u}-u)(t)\|_{L^2} + \|V\tilde{\phi}(t)(\tilde{u}-u)(t)\|_{L^2}\\
&\quad + \|Vu(t)(\tilde{\phi}-\phi)(t)\|_{L^2}\\
&\le C\|\tilde{u}(t)-u(t)\|_{L^2} + \tilde{\phi}(t)\|V\|_{L^p}\|(\tilde{u}-u)(t)\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}}\\
&\quad + |(\tilde{\phi}-\phi)(t)|\|Vu(t)\|_{L^2}\\
&\le C\|\tilde{u}(t)-u(t)\|_{L^2} + C\|\tilde{u}(t)-u(t)\|_{H^2} + C\|\tilde{\phi}-\phi\|_{H^1(I_t)}
\end{aligned}
$$

Donde $2 < p < \infty$, $2 < \frac{2p}{p-2} < \infty$ deducimos de la desigualdad

$$\|u\|_{L^{\frac{2p}{p-2}}} \leq C\|u\|_{H^2}^{\frac{N}{2p}}\|u\|_{L^2}^{\frac{2p-N}{2p}}$$

y la desigualdad de Young que

(5.23)
$$\begin{aligned}\|f_1+f_2\|_{L^\infty(I_t;L^2)} &\leq C\|(|\tilde{u}|^{2\sigma}+|u|^{2\sigma})(\tilde{u}-u)\|_{L^\infty(I_t;L^2)} + \|V\tilde{\phi}(\tilde{u}-u)\|_{L^\infty(I_t;L^2)}\\ &+ \|Vu(\tilde{\phi}-\phi)\|_{L^\infty(I_t;L^2)}\\ &\leq C\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t;L^2)} + C\|V\|_{L^p}\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t;L^{\frac{2p}{p-2}})}\\ &+ \|\tilde{\phi}-\phi\|_{H^1(I_t)}\|V\|_{L^p}\|u\|_{L^\infty(I_t,H^2)}\\ &\leq C\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t;L^2)} + \epsilon\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t;H^2)} + C\|\tilde{\phi}-\phi\|_{H^1(I_t)}.\end{aligned}$$

Cuando $p = 2$ por argumentos similares al anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}\|V\tilde{\phi}(\tilde{u}-u)\|_{L^\infty(I_t;L^2)} &\leq \|V\|_{L^4}\|\tilde{\phi}(\tilde{u}-u)\|_{L^\infty(I_t,L^4)}\\ &\leq C\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t;L^2)} + \epsilon\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t;H^2)}.\end{aligned} \tag{5.24}$$

Cuando $p = \infty$

$$\|V\tilde{\phi}(\tilde{u}-u)\|_{L^\infty(I_t;L^2)} \leq \|V\|_{L^\infty}\|\tilde{\phi}(\tilde{u}-u)\|_{L^\infty(I_t,L^2)}. \tag{5.25}$$

Después de algunos cálculos con argumentos similares a los hechos en (5.7) obtenemos

(5.26)
$$\begin{aligned}\|(f_1)_t\|_{L^{q'}(I_t;L^{r'})} &\leq C\||\tilde{u}|^{2\sigma}\tilde{u}_t - |u|^{2\sigma}u_t\|_{L^{q'}(I_t;L^{r'})}\\ &+ \||\tilde{u}|^{2\sigma-2}\overline{\tilde{u}_t}\tilde{u}^2 - |u|^{2\sigma-2}\overline{u_t}u^2\|_{L^{q'}(I_t;L^{r'})}\\ &\leq C\|\tilde{u}_t-u_t\|_{L^{q'}(I_t;L^2)} + \||\tilde{u}|^{2\sigma-2}\tilde{u}^2(\overline{\tilde{u}_t}-\overline{u_t})\|_{L^{q'}(I_t;L^{r'})}\\ &+ \|(|\tilde{u}|^{2\sigma-2}\tilde{u}^2 - |u|^{2\sigma-2}u^2)\overline{u_t}\|_{L^{q'}(I_t;L^{r'})}\\ &\leq C\|\tilde{u}_t-u_t\|_{L^{q'}(I_t;L^2)} + C\|(\tilde{u}-u)(|\tilde{u}|^{2\sigma-1}+|u|^{2\sigma-1})\overline{u_t}\|_{L^{q'}(I_t;L^{r'})}\\ &\leq C\|\tilde{u}_t-u_t\|_{L^{q'}(I_t;L^2)} + \tau^{\frac{1}{q'}}\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t;H^2)}.\end{aligned}$$

donde
(5.27)
$$\begin{aligned}\|\tilde{u}_t-u_t\|_{L^{q'}(I_t;L^2)} &\leq C\|\Delta(\tilde{u}-u)\|_{L^{q'}(I_t;L^2)} + C\|V(\tilde{u}\tilde{\phi}-u\phi)\|_{L^{q'}(I_t;L^2)}\\ &+ C\||\tilde{u}|^{2\sigma}\tilde{u} - |u|^{2\sigma}u\|_{L^{q'}(I_t;L^2)}\\ &\leq C\tau^{\frac{1}{q'}}\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t;H^2)} + C\|\tilde{\phi}-\phi\|_{H^1(I_t)} + \tau^{\frac{1}{q'}}\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t;L^2)}.\end{aligned}$$

Similarmente,

$$
\begin{aligned}
\|(V(\tilde{u}\tilde{\phi}-u\phi))_t\|_{L^{\gamma'}(I_t,L^{\rho'})} &\leq \|V(\tilde{\phi}'-\phi')\tilde{u}\|_{L^{\gamma'}(I_t,L^{\rho'})}+\|V\phi'(\tilde{u}-u)\|_{L^{\gamma'}(I_t,L^{\rho'})}\\
&+\|V(\tilde{\phi}-\phi)\tilde{u}_t\|_{L^{\gamma'}(I_t,L^{\rho'})}+\|V\phi(\tilde{u}_t-u_t)\|_{L^{\gamma'}(I_t,L^{\rho'})}\\
&\leq C\|\tilde{\phi}-\phi\|_{H^1(I_t)}+\tau^{\frac{2-\gamma'}{2\gamma'}}\|\phi'\|_{L^2}\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t,H^2)}\\
&+\|V\|_{L^{2p}}\|\tilde{\phi}-\phi\|_{H^1(I_t)}+\|V\|_{L^{2p}}\|\tilde{u}_t-u_t\|_{L^{\gamma'}(I_t;L^2)}.
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

Notar que las estimaciones (5.7) - (5.28) se mantiene para $V\in L^\infty$.

Combinando (5.7) - (5.28), usando la equivalencia de normas para H^2 vista en la Observación 2.2 obtenemos

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t;H^2)} &\leq C\|\tilde{u}(t)-u(t)\|_{H^2}+C\tau^{\frac{1}{q'}}\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t;H^2)}\\
&+C\tau^{\frac{1}{\gamma'}}\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t;H^2)}+C\|\tilde{\phi}-\phi\|_{H^1(I_t)}\\
&+\tau^{\frac{2-\gamma'}{2\gamma'}}\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t;H^2)}+\epsilon\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t;H^2)}
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

Por lo tanto, la estimación (5.5) se mantiene para una elección de τ y ϵ suficientemente pequeña. Debido a que $\tilde{u}(0)=u(0)$ deducimos por argumentos de continuidad y de (5.5) que el mapeo:

$\phi\to u(\phi)$ es continuo con respecto a $\phi\in W^{1,\infty}(0,T)$. □

Ahora estamos en condiciones de mostrar la Lipschitz continuidad de la solución $u(\phi)$ con respecto a $\phi\in W^{1,\infty}(0,T)$. Con la estimación (5.5) a mano, la prueba es análoga a la Proposición 4.5 de [10].

Proposición 5.3. *Sea $N\leq 3$ $V,\bigtriangledown V\in L^p+L^\infty$ y $V\in L^{2p}$ para $p\geq 2$. Asumimos que $0<\sigma<\frac{2}{N-2}$ si $\lambda<0$ o $0<\sigma<\frac{2}{N}$ si $\lambda>0$. Sea $\phi\in W^{1,\infty}(0,T)$, y $u=u(\phi)\in L^\infty(0,T;H^2)$ solución de (3.1). Dados $\delta_\phi\in H^1(0,T)$ con $\delta_\phi(0)=0$, para todo $\epsilon\in[-1,1]$, sea $\tilde{u}=u(\phi+\epsilon\delta_\phi)$ solución de (3.1) con control $\phi+\epsilon\delta_\phi$ y el mismo dato inicial $u(\phi)$. Entonces existe una constante $C>0$ tal que:*

$$
\|\tilde{u}-u\|_{L^\infty(I_t;H^2)}\leq C\|\tilde{\phi}-\phi\|_{H^1(0,T)}\leq C\|\tilde{\phi}-\phi\|_{W^{1,\infty}(0,T)}=C|\epsilon|\|\delta_\phi\|_{W^{1,\infty}(0,T)}.
$$

Demostración. Como podemos encontrar una cota uniforme en ϵ con $|\epsilon|<1$ para $\tilde{\phi}$, obtenemos que el valor de τ que determina la longitud del intervalo en donde vale la estimación (5.5) es uniforme en ϵ, depende solo de la cota M. En consecuencia, gracias al buen planteo de la ecuación que determina la solución u y dado que $u(0)=\tilde{u}(0)$, sumas finitas de la estimación en intervalos de la forma $[n\tau,(n+1)\tau]$ nos dan el resultado deseado. □

Teorema 5.1. *Sea* $N \leq 3$, $u_0 \in H^2$, $\phi \in W^{1,\infty}(0,T)$, $V, \nabla V \in L^p + L^\infty$ *y* $V \in L^{2p}$ *para* $p \geq 2$. *Asumimos que* $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{2}{N-2}$ *si* $\lambda < 0$ *o* $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{2}{N}$ *si* $\lambda > 0$. *Entonces la solución de* (3.1) *satisface* $u \in L^\infty(0,T;H^2)$ *y el funcional* $\mathcal{F}(\phi)$ *es Gâteaux diferenciable para todo* $t \in [0,T]$ *con*

$$\mathcal{F}'(\phi) = \mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\varphi}(t,x)V(x)u(t,x)dx\right) - 2\frac{d}{dt}(\phi'(t)(\gamma_2 + \gamma_1(w(t))^2)) \tag{5.30}$$

en sentido distribucional, donde $w(t)$ *esta definida por:*

$$w(t) = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u(t,x)|^2 dx \tag{5.31}$$

y $\varphi \in C([0,T];L^2)$ *es la solución de la ecuación adjunta*

(5.32)

$$i\varphi_t + \Delta\varphi + \phi(t)V(x)\varphi + \lambda(\sigma+1)|u|^{2\sigma}\varphi + \lambda\sigma|u|^{2\sigma-2}u^2\overline{\varphi} = \gamma_1(\phi'(t))^2 w(t)V(x)u$$

sujeto a las condiciones iniciales de Cauchy: $\varphi(T) = 4i\langle u(T); Au(T)\rangle_{L^2} Au(T)$

Demostración. En virtud de la definición de derivada Gâteaux.

Sea $u = u(\phi)$, $\tilde{u} = u(\tilde{\phi})$ con $\tilde{\phi} = \phi + \epsilon\delta_\phi$. Vamos a calcular la derivada direccional en la dirección de δ_ϕ es decir, calcularemos

$\mathcal{F}'(\phi)[\delta_\phi] = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{F(\phi+\epsilon\delta_\phi)-F(\phi)}{\epsilon}$. Necesitamos probar que ese límite existe y que se satisface la ecuación (5.30). Para ello, sea: $u = u(\phi)$, $\tilde{u} = u(\tilde{\phi})$ con $\tilde{\phi} = \phi + \epsilon\delta_\phi$ que satisface las hipótesis de la Proposición 5.3 y por lo tanto $\tilde{u}, u \in L^\infty(0,T;H^2) \hookrightarrow L^\infty(0,T;\mathbb{R}^N)$.

Consideremos la diferencia de las funcionales objetivo correspondiente: $\mathcal{F}(\phi)$, $\mathcal{F}(\tilde{\phi})$. Esta diferencia la podemos escribir como suma de tres términos:

$$\mathcal{F}(\tilde{\phi}) - \mathcal{F}(\phi) = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3$$

donde

$$\mathcal{J}_1 := \langle \tilde{u}(T), A\tilde{u}(T)\rangle_{L^2}^2 - \langle u(T), Au(T)\rangle_{L^2}^2$$

$$\mathcal{J}_2 := \gamma_2 \int_0^T [(\tilde{\phi}'(t))^2 - (\phi'(t))^2]dt$$

$$\mathcal{J}_3 := \gamma_1 \int_0^T (\tilde{\phi}'(t))^2 (\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|\tilde{u}(t,x)|^2)^2 dt - \gamma_1 \int_0^T (\phi'(t))^2 (\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u(t,x)|^2)^2 dt.$$

La estrategia general será utilizar la Lipchitz continuidad establecida en la Proposición 5.3 y reescribir los términos $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ de tal manera que

$$\mathcal{F}(\tilde{\phi}) - \mathcal{F}(\phi) = \text{término lineal en}(\tilde{\phi} - \phi) + \mathcal{O}(\|\tilde{\phi} - \phi\|_{H_t^1}^2).$$

Dado que $\tilde{\phi} = \phi + \epsilon\delta_\phi$ y por lo tanto $\mathcal{O}(\|\tilde{\phi} - \phi\|^2_{H^1_t}) = \mathcal{O}(\epsilon^2)$ el límites cuando $\epsilon \to 0$ nos dará la derivada funcional que buscamos.

En lo que sigue usaremos repetidamente la siguiente identidad:

$$a^2 - b^2 = 2b(a-b) + (a-b)^2. \tag{5.33}$$

Empecemos con el primer término $\mathcal{J}_1$:

Podemos reescribirlo en la forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_1 &= \langle \tilde{u}(T), A\tilde{u}(T)\rangle^2_{L^2_x} - \langle u(T), Au(T)\rangle^2_{L^2_x} \\ &= 2(\langle u(T), Au(T)\rangle_{L^2_x})(\langle \tilde{u}(T), A\tilde{u}(T)\rangle_{L^2_x} - \langle u(T), Au(T)\rangle_{L^2_x}) \\ &+ (\langle \tilde{u}(T), A\tilde{u}(T)\rangle_{L^2_x} - \langle u(T), Au(T)\rangle_{L^2_x})^2.\end{aligned} \tag{5.34}$$

Usando el hecho de que A es esencialmente autoadjunta, los términos entre paréntesis los podemos reescribir así:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{u}(T), A\tilde{u}(T)\rangle_{L^2_x} - \langle u(T), Au(T)\rangle_{L^2_x} = 2\langle \tilde{u}(T) - u(T); Au(T)\rangle_{L^2_x} + \\ \langle \tilde{u}(T) - u(T); A(\tilde{u}(T) - u(T))\rangle_{L^2_x}.\end{aligned}$$

Usando la cota que nos da la Proposición 5.3 obtenemos que:

$$|\langle \tilde{u}(T) - u(T); A(\tilde{u}(T) - u(T))\rangle_{L^2_x}| \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H^2, L^2_x)} \|\tilde{u}(T) - u(T)\|^2_{H^2} \leq C\epsilon^2 \|\delta_\phi\|^2_{H^1_t}$$

y por lo tanto

$$\langle \tilde{u}(T), A\tilde{u}(T)\rangle_{L^2_x} - \langle u(T), Au(T)\rangle_{L^2_x} = 2\langle \tilde{u}(T) - u(T); Au(T)\rangle_{L^2_x} + \mathcal{O}(\|\tilde{\phi} - \phi\|^2_{H^1_t}).$$

Luego

$$\mathcal{J}_1 = 4\langle u(T), Au(T)\rangle_{L^2_x} \langle \tilde{u}(T) - u(T); Au(T)\rangle_{L^2_x} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{5.35}$$

Ahora consideramos, $\mathcal{J}_2$, que podemos escribirlo así, en virtud de la identidad (5.33)

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_2 &= 2\gamma_2 \int_0^T \phi'(t)(\tilde{\phi}'(t) - \phi'(t))dt + \gamma_2 \int_0^T (\tilde{\phi}'(t) - \phi'(t))^2 dt \\ &= 2\gamma_2 \int_0^T \phi'(t)(\tilde{\phi}'(t) - \phi'(t))dt + \mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned} \tag{5.36}$$

Finalmente para el tercer término $\mathcal{J}_3$, por la definición de

$$w(t) = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u(t,x)|^2 dx,$$

podemos escribir a $\mathcal{J}_3$ así:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_3 &= \gamma_1 \int_0^T ((\tilde{\phi}'(t))^2 - (\phi'(t))^2)(w(t))^2 dt \\
&+ \gamma_1 \int_0^T (\tilde{\phi}'(t))^2 \left((\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|\tilde{u}(t,x)|^2 dx)^2 - (w(t))^2 \right) dt.
\end{aligned} \tag{5.37}
$$

Gracias a la cota de la Proposición 5.3 cualquier error cuadrático $\|\tilde{u}-u\|_{L_t^\infty L_x^2}$ es acotado por $\mathcal{O}(\|\tilde{\phi}-\phi\|^2_{H_t^1})$. Veamos que podemos obtener la siguiente escritura para $\mathcal{J}_3$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_3 = 4\gamma_1 \int_0^T (\phi'(t))^2 w(t) [\mathrm{Re} \left(\int_{\mathbb{R}^N} ((\overline{\tilde{u}} - \overline{u}) V u)(t,x) dx \right)] dt + \\
2\gamma_1 \int_0^T (\tilde{\phi}'(t) - \phi'(t)) \phi'(t) (w(t))^2 dt + \mathcal{O}(\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{5.38}
$$

Notemos por

$$\tilde{w}(t) = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|\tilde{u}(t,x)|^2 dx.$$

Usando la identidad (5.33) podemos escribir el primer término de $\mathcal{J}_3$ como sigue:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \gamma_1 \int_0^T ((\tilde{\phi}'(t))^2 - (\phi'(t))^2)(w(t))^2 dt \\
&= \gamma_1 \int_0^T [2\phi'(t)(\tilde{\phi}'(t) - \phi'(t)) + (\tilde{\phi}'(t) - \phi'(t))^2](w(t))^2 dt \\
&= 2\gamma_1 \int_0^T [\phi'(t)(\tilde{\phi}'(t) - \phi'(t))(w(t))^2 dt + \mathcal{O}(\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{5.39}
$$

Para el segundo término de $\mathcal{J}_3$, usando la identidad (5.33) tenemos que,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \gamma_1 \int_0^T (\tilde{\phi}'(t))^2 ((\tilde{w}(t))^2 - (w(t))^2) dt \\
&= \gamma_1 \int_0^T (\tilde{\phi}'(t))^2 [2w(t)(\tilde{w}(t) - w(t)) + (\tilde{w}(t) - w(t))^2] dt.
\end{aligned} \tag{5.40}
$$

Usando el hecho que $|\tilde{u}(t,x)|^2 - |u(t,x)|^2$ es $\mathcal{O}(\epsilon)$ tenemos que $(\tilde{w}(t) - w(t))^2$ es $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ y además de la identidad (5.33) tenemos que

$$(\tilde{\phi}'(t))^2 = (\phi'(t))^2 + 2\phi'(t)(\tilde{\phi}'(t) - \phi'(t)) + (\tilde{\phi}'(t) - \phi'(t))^2 = (\phi'(t))^2 + \mathcal{O}(\epsilon).$$

De esta manera, el término I_2 queda

$$I_2 = \gamma_1 2 \int_0^T (\phi'(t))^2 w(t)(\tilde{w}(t) - w(t))dt$$

y de la identidad

$$|a|^2 - |b|^2 = -|a-b|^2 + 2\mathrm{Re}\left(a(\overline{a-b})\right)$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\tilde{w}(t) - w(t) &= \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\left(|\tilde{u}(t,x)|^2 - |u(t,x)|^2\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\left(-|\tilde{u}(t,x) - u(t,x)|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\tilde{u}(t,x)(\overline{\tilde{u}(t,x) - u(t,x)})\right)\right) \\
&= 2\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\tilde{u}(t,x)(\overline{\tilde{u}(t,x) - u(t,x)})dx\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto el segundo término queda de la forma que queríamos:

$$I_2 = 4\gamma_1 \int_0^T (\phi'(t))^2 w(t)[\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^N} ((\overline{\tilde{u}-u})Vu)(t,x)dx\right)]dt + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Luego, hemos visto que

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 = {} & 4\langle u(T), Au(T)\rangle_{L^2_x}\langle \tilde{u}(T) - u(T); Au(T)\rangle_{L^2_x} \\
& + 2\gamma_2 \int_0^T \phi'(t)(\tilde{\phi}'(t) - \phi'(t))dt \\
& + 4\gamma_1 \int_0^T (\phi'(t))^2 w(t)[\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^N} ((\overline{\tilde{u}-u})Vu)(t,x)dx\right)]dt \\
& + 2\gamma_1 \int_0^T (\tilde{\phi}'(t) - \phi'(t))\phi'(t)w(t)^2 dt + \mathcal{O}(\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Estos cuatro términos son $\mathcal{O}(\epsilon)$ y por eso relevantes para el cálculo del límite

$$\mathcal{F}'(\phi)[\delta_\phi] = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\mathcal{F}(\phi + \epsilon\delta_\phi) - \mathcal{F}(\phi)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3}{\epsilon}.$$

Si tomamos límite en el segundo y cuarto término en sentido distribucional, notemos este límite por

$$\mathcal{F}_2'(\phi)[\delta_\phi] + \mathcal{F}_4'(\phi)[\delta_\phi]$$

tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_2'(\phi)[\delta_\phi] + \mathcal{F}_4'(\phi)[\delta_\phi] &= -2\frac{d}{dt}\left(\phi'(t)(\gamma_2+\gamma_1(w(t))^2)\right)[\delta_\phi] \\
&= -\int_0^T 2\phi'(t)(\gamma_2+\gamma_1(w(t))^2)[(\delta_\phi)'(t)]dt.
\end{aligned} \tag{5.42}
$$

Resta ver el límite del primer y tercer término, que notaremos por

$$\mathcal{F}_1'(\phi)[\delta_\phi] + \mathcal{F}_3'(\phi)[\delta_\phi].$$

Para ello, consideremos φ solución de la ecuación adjunta (5.4).

El tercer término de $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3$ lo podemos reescribir de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
&4\gamma_1 \int_0^T (\phi'(t))^2 w(t)[\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^N} ((\overline{\tilde{u}-u})Vu)(t,x)dx\right)]dt \\
&= \langle 4\gamma_1(\phi'(t))^2 w(t)V(x)u(t,x); \tilde{u}(t,x)-u(t,x)\rangle_{L^2_tL^2_x}
\end{aligned}
$$

notando $\delta_{u(t,x)} = \tilde{u}(t,x) - u(t,x)$ y de la ecuación (5.4) podemos escribir el producto interno anterior como

$$
\begin{aligned}
&\langle i\varphi_t + \Delta\varphi + \phi v\varphi + \lambda(\sigma+1)|u|^{2\sigma}u\varphi + \lambda\sigma|u|^{2\sigma-2}u^2\overline{\varphi}; \delta_u\rangle_{L^2_tL^2_x} \\
&\quad = \langle i\varphi_t;\delta_u\rangle_{L^2_tL^2_x} + \langle \Delta\varphi + \phi V\varphi + \lambda(\sigma+1)|u|^{2\sigma}u\varphi + \lambda\sigma|u|^{2\sigma-2}u^2\overline{\varphi}; \delta_u\rangle_{L^2_tL^2_x}
\end{aligned}
$$

haciendo partes en t y en x queda

$$
\begin{aligned}
&-\langle i\varphi;(\delta_u)_t\rangle_{L^2_tL^2_x} + \langle i\varphi;\delta_u\rangle_{L^2}|_0^T \\
&\quad + \langle \varphi; \Delta\delta_u + \phi V\delta_u + \lambda(\sigma+1)|u|^{2\sigma}u\delta_u + \lambda\sigma|u|^{2\sigma-2}u^2\overline{\delta_u}\rangle_{L^2_tL^2_x}
\end{aligned}
$$

y usando que $\delta_{u(0)} = 0$ que $-\langle i\varphi;(\delta_u)_t\rangle_{L^2_tL^2_x} = \langle\varphi; i(\delta_u)_t\rangle_{L^2_tL^2_x}$ y de la expresión de $\partial_u P(u,\phi)(\delta_u)$ tenemos que el tercer término queda igual a

$$
\begin{aligned}
&\langle\varphi;\partial_u P(u,\phi)(\delta_u)\rangle_{L^2_tL^2_x} + \langle i\varphi(T);\delta_u(T)\rangle_{L^2_x} = \\
&\quad \langle\varphi;\partial_u P(u,\phi)(\delta_u)\rangle_{L^2_tL^2_x} - 4\langle u(T), Au(T)\rangle_{L^2_x}\langle\delta_{u(T)}, Au(T)\rangle_{L^2_x}.
\end{aligned}
$$

Asi, la suma del primer y tercer término queda sólo

$$\langle\varphi;\partial_u P(u,\phi)(\delta_u)\rangle_{L^2_tL^2_x}$$

Calculemos explicitamente $\partial_u P(u,\phi)$, donde $\partial_u P(u,\phi)$ es la derivada de P calculada en (5.3). Como $\tilde{u}$ y u resuelven (3.1) podemos escribir:

(5.43)

$$
\begin{aligned}
\partial_u P(u,\phi)(\delta_u) &= i(\tilde{u}-u)_t + \Delta(\tilde{u}-u) + \phi(t)V(x)(\tilde{u}-u) + \lambda(\sigma+1)|u|^{2\sigma}(\tilde{u}-u) \\
&\quad + \lambda\sigma|u|^{2\sigma-2}u^2\overline{(\tilde{u}-u)} \\
&= i(\tilde{u}-u)_t + \Delta(\tilde{u}-u) + V(x)(\tilde{\phi}(t)\tilde{u} - \phi(t)u) + V(x)\tilde{u}(\tilde{\phi}(t)-\phi(t)) \\
&\quad + \lambda|\tilde{u}|^{2\sigma}\tilde{u} - \lambda|u|^{2\sigma}u + \varrho(\tilde{u},u) \\
&= V(x)\tilde{u}(\tilde{\phi}(t)-\phi(t)) + \varrho(\tilde{u},u)
\end{aligned}
$$

donde $\varrho(\tilde{u}, u)$ está dado por:

$$\varrho(\tilde{u}, u) = \lambda[\sigma|u|^{2\sigma-2}u^2(\overline{\tilde{u}} - \overline{u}) - |\tilde{u}|^{2\sigma}\tilde{u} + |u|^{2\sigma}u + |u|^{2\sigma}(\tilde{u} - u) + \sigma|u|^{2\sigma}(\tilde{u} - u)]$$

Por hipótesis $\|\tilde{u}\|_{L_t^\infty L_x^\infty}, \|u\|_{L_t^\infty L_x^\infty} \leq Cte$ y como $H^2(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$ el resto puede ser acotado por:

$$|\varrho(\tilde{u}, u)| \leq Cte(|\tilde{u}|^{2\sigma-1} + |u|^{2\sigma-1})|\tilde{u} - u|^2.$$

Además como $\varphi \in C([0,T]; L^2)$ y $H^2(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^N)$ tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(t,x)||\tilde{u}(t,x) - u(t,x)|^2 dx \leq \|\varphi\|_{L_t^\infty L_x^2}\|\tilde{u} - u\|^2_{L_t^\infty L_x^4} \leq \mathcal{O}(\|\tilde{\phi} - \phi\|^2_{H_t^1}),$$

y del hecho de que $(\tilde{\phi}(t) - \phi(t))V(x)\tilde{u}$ en (5.43) es igual a

$$(\tilde{\phi}(t) - \phi(t))V(x)u + (\tilde{\phi}(t) - \phi(t))V(x)(\tilde{u} - u)$$

donde este último término puede ser estimado por $\mathcal{O}(\|\tilde{\phi} - \phi\|^2_{H_t^1})$ como antes, obtenemos que la suma del primer y tercer término queda

$$\mathcal{F}_1'(\phi)[\delta_\phi] + \mathcal{F}_3'(\phi)[\delta_\phi] = \int_0^T \mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\varphi}(t,x)V(x)u(t,x)dx\right)(\delta_\phi)(t)dt.$$

En resumen, juntando todas las expresiones obtenidas para $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ y $\mathcal{J}_3$ y tomando límite cuando $\epsilon \to 0$ hemos mostrado que $\mathcal{F}(\phi)$ es Gâteaux diferenciable con derivada $\mathcal{F}'(\phi)$ dada por la fórmula (5.30) lo que concluye la prueba del teorema. □

En el siguiente corolario derivamos la caracterización precisa para los puntos críticos $\phi_* \in H^1(0,T)$ del funcional $\mathcal{F}$

Corolario 5.1. *Sea u_* la solución de* (3.1) *con control ϕ_* y φ_* la solución correspondiente a la ecuación adjunta* (5.4)

Entonces, $\phi_* \in C^2(0,T)$ es solución clásica de la ecuación diferencial ordinaria siguiente:

$$\frac{d}{dt}(\phi_*'(t)(\gamma_2 + \gamma_1 w_*^2(t))) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\varphi_*}(t,x)V(x)u_*(t,x)dx\right) \tag{5.44}$$

sujeto al dato inicial $\phi_*(0) = \phi_0$ y $\phi_*'(T) = 0$

Demostración. Sea $\mu \in C_c^\infty(0,T)$ una función test con soporte compacto en $(0,T)$. Por los teoremas 4.1 y 5.1 tenemos que existe $\phi_* \in H^1(0,T)$ tal que $\mathcal{F}'(\phi_*) = 0$ satisfaciendo (5.30) en el sentido distribucional.

Es decir,

$$\int_0^T \phi_*'(t)\mu'(t)(\gamma_2+\gamma_1 w_*(t)^2)dt = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \mu(t)\overline{\varphi_*}(t,x)V(x)u_*(t,x)dxdt\right)$$

donde hemos usado el hecho que los términos de borde en $t = 0$ y $t = T$ desaparecen, ya que $\mu(t)$ es de soporte compacto.

Mostraremos que la solución débil ϕ_* es única. Consideremos dos soluciones diferenctes $\phi_*^1(t)$ y $\phi_*^2(t)$ satisfaciendo $\phi_*^1(0) = \phi_*^2(0) = \phi_0$

Denotaremos su diferencia por $\psi_* = \phi_*^1 - \phi_*^2$. Asi, ψ_* resuelve

$$\int_0^T \psi_*'(t)\mu'(t)(\gamma_2 + \gamma_1 w_*(t)^2)dt = 0 \quad \forall \quad \mu \in C_c^\infty(0,T)$$

como $\gamma_2 > 0$ y $\gamma_1 \geq 0$, se tiene que $\psi_*'(t) = 0$ en sentido distribucional y como ϕ_*^1 , $\phi_*^2 \in H^1(0,T) \hookrightarrow C(0,T)$ concluímos que $\psi_* \in C[0,T]$ y que $\phi_*(t) = cte$ para todo $t \in [0,T]$. Dado que $\psi_*(0) = 0$ por hipótesis, obtenemos la unicidad de solución débil, es decir $\phi_*(t)$ es la única solución.

Por otro lado, argumentos conocidos implican que (5.44) admite una solución clásica $\phi_* \in C^2(0,T)$, siempre que $w_* \in C^1(0,T)$ y el lado derecho es continuo en el tiempo. Esto último es claramente cierto gracias a que el u_* es mild solution de (3.1) y la Proposición 5.1. Además, como $V, \bigtriangledown V \in L^p + L^\infty$ deducimos que para toda $u(t) \in X(0,T)$ se cumple que $V(x)u(t) \in X(0,T)$ y también se cumple que

$$\begin{aligned} w_*'(t) &= 2\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \partial_t u_*(t,x)V(x)\overline{u_*(t,x)}dx\right) \\ &= \langle V(x)u_*(t), u_*'(t)\rangle_{X(0,T),X(0,T)^*} < \infty \end{aligned} \tag{5.45}$$

Así, $w(t) \in C^1(0,T)$ dando lugar a la existencia de una única solución clásica $\phi_* \in C^2(0,T)$. Por lo tanto, conclímos que la única solución débil ϕ_* obtenida es una solución clásica satisfaciendo (5.44) sujeto a $\phi_*(0) = \phi_0$, $\phi_*'(T) = 0$ □

En conclusión, hemos probado el siguiente teorema

Teorema 5.2. *Si (u_*, ϕ_*) minimiza el problema*

$$\min_{(u,\phi)\in\Lambda(0,T)} F(u,\phi) \tag{5.46}$$

donde

$$\Lambda(0,T) := \big\{(u,\phi) \in X(0,T) \times H^1(0,T) : (u,\phi) \ \ \textit{satisfacen la ecuación } (3.1) \\ \textit{con } u(0) \in B_1 \ \ \textit{y} \ \ \phi(0) \in B_2\big\},$$

para

$$X(0,T) = L^2(0,T,H_0^1) \cap W^{1,2}(0,T,H^{-1}),$$

$$B_1 = \{u_0 \in H^1 / \|u_0\|_{H^1} \leq M_1\} \textit{ y } B_2 = \{\phi_0 \in \mathbb{R}/|\phi_0| \leq M_2\}.$$

u_* satisface la ecuación

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + \lambda|u|^{2\sigma}u + \phi(t)V(x)u = 0 \quad , \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

con control ϕ_*. Entonces existe φ_* solución del problema adjunto

$$\begin{cases} i\varphi_t + \Delta\varphi + \phi(t)V(x)\varphi + \lambda(\sigma+1)|u|^{2\sigma}\varphi + \lambda\sigma|u|^{2\sigma-2}u^2\overline{\varphi} \\ = 4\gamma_1(\phi'(t))^2 w(t)V(x)u(t,x) \\ \varphi(T) = i4\langle u(T), Au(T)\rangle_{L_x^2} Au(T) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

y se satisface

$$\frac{d}{dt}(\phi_*'(t)(\gamma_2 + \gamma_1 w_*^2(t))) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\varphi_*}(t,x)V(x)u_*(t,x)dx\right)$$

sujeto al dato inicial $\phi_*(0) = \phi_0$ y $\phi_*'(T) = 0$. Es decir, se satisfacen las condiciones necesarias de primer orden.

Bibliografía

[1] Lawrence C. Evans - Partial differential equations, Graduate Stu-dies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, 2010.

[2] R.A. Adams; J.J. Fourier - Sobolev Space , 2003

[3] H. Brezis - Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer-Verlang, 2010.

[4] T. Cazenave - Semilinear Schroedinger equations, Courant Lecture Notes in Mathematics 10, 2004.

[5] T. Cazenave and A. Haraux - An Introduction to Semilinear Evolutions Equations, Clarendon Press Oxford, 1998.

[6] W. Rudin - Functional Analysis, MacGraw-Hill, second edition, 1991.

[7] W. Rudin - Real and Complex Analysis, 3era edición 1987

[8] Stein, Elias M. - Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1970.

[9] E. Hille, R. Phillips - Functional Analysis and Semi-Grups American Mathematical Society, 1957.

[10] M. Hintermüller, D Marahrens, P. A. Markowich, C. Sparber - Optimal bilinear control of Gross-Pitaevskii equations, Society for indrustrial and applied Mathematics, 2013.

[11] Pontryagin, L. S. and Boltyanski , V. G. and Gamkrelidze, R. V. and Mishchenko, E. F. - Selected works. Vol. 4, Classics of Soviet Mathematics, 1986.

[12] Feng, Binhua and Zhao, Dun and Chen, Pengyu - Optimal bilinear control of nonlinear Schrödinger equations with singular potentials, Nonlinear Anal. 2014.

[13] Lions, J.L. - Optimal control of systems governed by partial differential equations , Translated from the French by S. K. Mitter. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 170, 1971.

[14] Hestenes, Magnus R. - On variational theory and optimal control theory, J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A Control, 1965.