UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Sobre la geometría de las variedades de Grassmann

Iván Rey

Director: Gabriel Larotonda

30/03/2017

Índice general

Agradecimientos

A mis viejos por siempre apoyarme en todas mis decisiones y proyectos.

A mi abuela por estar siempre de forma incondicional conmigo.

A mi hermano, mis primos, Patri, mis tíos y todo el resto de mi familia.

A Gabriel por presentarme un área de la matemática nueva para mi y realmente dedicar mucho de su tiempo en ayudarme a comprenderla.

A Gabriel Minian y Esteban Andruchow por aceptar ser jurados de mi tesis.

A mis amigos y compañeros de cursada por ayudarme a lo largo de este camino.

A todos los docentes excelentes que tuve durante esta carrera.

A todos los compañeros de ayudantía y del CBC.

A Dani, Ari, Tomy, Thomas, Lucho, Dudu, Bel, Isis y la pequeña Miel por formar parte de mi familia de Criaturas, haber sido y seguir siendo mi nexo con la realidad.

A Nai por bancarme todo este último tiempo mientras escribía esta tesis.
A mi chamiga de toda la vida Natrash.

A Edu por mostrarme cuanto me gusta el mundo de la enseñanza.

Introducción

Una variedad de Finser es una variedad diferenciable modelada por un espacio de Banach junto con una norma definida en cada espacio tangente que varía continuamente. Estas variedades constituyen una generalización de las variedades riemannianas y los mismos problemas que se desarrollan en el contexto riemanniano se pueden plantear en el contexto de Finsler, aunque se cuenta con menos estructura.

Un problema que se ha trabajado a lo largo de la historia en variedades diferenciables con una métrica es el de buscar geodésicas, es decir, curvas que minimicen la distancia intrínseca de la variedad en cuestión. Dicho problema puede ser planteado de varias formas. Se pueden buscar curvas que unan dos puntos de la variedad y que sean minimales con respecto a su longitud o se puede, fijado un punto y una velocidad inicial, buscar una curva que pase por dicho punto, tenga dicha velocidad inicial y minimice distancia entre puntos del arco de la curva, al menos para una longitud de arco pequeña.

En el contexto riemanniano contamos con una herramienta fuerte para caracterizar geodésicas que es la ecuación de Euler-Lagrange (ver [12]). Sin embargo, en el caso de variedades de Finsler, no contamos con esta herramienta. Debido a este hecho, las estrategias para encontrar curvas minimales suelen ser distintas en su naturaleza.

Un ejemplo de una variedad de Finsler, ciertamente no riemmanniana, es el conjunto de operadores lineales y acotados de un espacio de Hilbert complejo, al cual notaremos $\mathcal{B}(\mathscr{H})$. Dotando a este espacio con la norma usual de operadores podemos obtener en el mismo una estructura de variedad de Finsler. Ciertamente no tiene interés el problema de buscar geodésicas en dicho espacio, pués al ser un espacio vectorial las geodésicas serán segmentos. El problema se vuelve de interés a la hora de mirar subvariedades de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$, dichas subvariedades heredan la estructura de Finsler de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ convirtiéndose en variedades de Finsler. Un ejemplo importante, intimamente relacionado con este trabajo, es el del grupo de elementos unitarios de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$. En el año 1987 Atkin [3] estudió las geodésicas de dicha variedad y probó que dados dos operadores unitarios u_1 y u_2, y z es un logaritmo Boreliano de $u_2u_1^*$ que satisface $\|z\| \leq \pi$, entonces la curva dada por:

$$\alpha(t) = u_1 e^{tz}$$

es minimal uniendo dichos puntos y en el caso de que $\|z\| < \pi$, es única.

Otra subvariedad de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ que fue estudiada, por ejemplo, en [7], es la variedad grassmaniana. Hay muchas formas de pensar dicha variedad, pero la misma se puede concebir como el conjunto de proyecciones ortogonales sobre espacios cerrados de un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$, resultando un subconjunto de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$. Notaremos a las grassmanianas como $Gr(\mathscr{H})$ y se puede probar (ver Capítulo 2 de este trabajo) que cada componente conexa de dicho conjunto es una subvariedad de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ y luego una variedad de Finsler.

Las grassmanianas de un espacio de Hilbert están intimamente relacionadas con el conjunto de operadores unitarios. Si llamamos $\mathscr{U}$ a dicho conjunto se tiene que $\mathscr{U}$ actúa a izquierda de forma transitiva sobre cada componente conexa de $Gr(\mathscr{H})$ por conjugación. Esto le da a cada componente conexa de $Gr(\mathscr{H})$ una estructura de espacio homogeneo.

La idea de esta Tesis es estudiar las curvas geodésicas en $Gr(\mathscr{H})$ o mas generalmente en las grassmanianas de una C^*-álgebra arbitraria. En base a que conocemos las geodésicas en $\mathscr{U}$ tiene sentido preguntarse si las curvas de la forma:

$$\alpha(t) = e^{tz} p e^{-tz}$$

con z antihermitiano y $p \in Gr(\mathscr{H})$ son geodésicas en $Gr(\mathscr{H})$, puesto que surgen a partir de aplicar la acción por conjugacion sobre geodésicas de $\mathscr{U}$.

El resultado final de esta Tesis (Teorema 5.1.7) es que, fijado un punto $p \in Gr(\mathscr{H})$ y una velocidad inicial, se puede encontrar un elemento antihermitiano z y una geodésica de esa forma que minimice distancias hasta cierta longitud de arco. La demostración del mismo esta basada en [9].

Esta Tesis se divide en cinco capítulos y un apéndice.

El Capítulo 1 consta de los resultados básicos que usaremos a lo largo de la Tesis sobre diferenciación entre espacios de Banach y variedades de Banach. En las últimas dos secciones de dicho capítulo se muestran ejemplos de variedades de Finsler, enfatizando en las subvariedades usuales de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$.

El Capítulo 2 está enteramente dedicado al estudio de las grassmanianas de un espacio de Hilbert. Se decidió hacerlo sobre un espacio de Hilbert en lugar de sobre una C^*-álgebra con el fin de poder entender la acción de los unitarios en términos de subespacios. Luego se observa como los resultados se generalizan.

En el Capítulo 3 estudiaremos la estructura de Finsler de $Gr(\mathscr{A})$. Veremos cómo se le puede dar una métrica de Finsler a partir de pensarla como una subvariedad de $\mathscr{A}$ y como se le puede dar una métrica de Finsler pensándola como un espacio homogeneo con la acción del grupo de unitarios. Veremos además que dichas estructuras coinciden.

En el Capítulo 4, estudiaremos los mapas de reducción de longitud y a partir de ellos probaremos las primeras versiones del resultado al que queremos llegar. Estás primeras versiones dependerán de la existencia representaciónes de la C^*-álgebra en los operadores acotados de un espacio de Hilbert que cumplan ciertas condiciones.

El Capítulo 5 consta del resultado final de esta Tesis, en el cual se prueba que siempre se pueden encontrar representaciones que satisfagan las condiciones que les pedimos en el Capítulo 4. El capítulo finaliza con una generalización de los resultados a las llamadas Variedades de Bandera basada en [9]

El Apéndice A esta conformado por los resultados sobre C^*-álgebras que usaremos en la Tesis.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo introduciremos las nociones básicas que usaremos a lo largo de todo el trabajo. Comenzaremos con la idea de diferenciación en espacios y álgebras de Banach, para luego estudiar las variedades diferenciables modeladas por espacios de Banach y sus propiedades básicas. El capítulo finaliza con la definición de variedades de Finsler junto con algunos ejemplos que necesitaremos para encarar los problemas centrales de la tesis.

Los resultados enunciados y no demostrados sobre espacios de Banach pueden encontrarse en el libro de Reed y Simon [13]. Los resultados sobre variedades modeladas por espacios de Banach no demostrados pueden entontrarse en el libro de Lang [11].

Los resultados de C^*-álgebras y cálculo funcional que usaremos a lo largo del trabajo, si bien pueden considerarse como preliminares, se encuentran en el Apéndice A de la tesis.

1.1. Diferenciación en Espacios de Banach

En esta sección introduciremos la noción de espacio de Banach y la idea de diferenciación entre espacios de Banach.

Definición 1.1.1. Un espacio de Banach es un espacio vectorial E sobre los números reales o complejos con una norma $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ de forma que (E, d) es completo, donde d es la distancia inducida por la norma.

Observación 1.1.2. Notamos que si E es un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$ siempre lo podemos pensar como un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$.

En lo que sigue, cuando digamos E y F son espacios de Banach, estaremos pensando que ambos son sobre los números complejos o ambos son sobre los númeres reales.

Definición 1.1.3. Sean E y F dos espacios de Banach. Decimos que un operador lineal $T : E \longrightarrow F$ es acotado si se satisface:

$$\sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0\right\} < \infty.$$

Proposición 1.1.4. Sean E y F espacios de Banach y sea $T : E \longrightarrow F$ un operador lineal. Son equivalentes:

I) T es acotado.

II) T es continuo respecto a las topologías inducidas por las normas.

III) $\sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| = 1\} < \infty$.

Notación 1.1.5. Sean E y F espacios de Banach y $T : E \longrightarrow F$ un operador lineal, notamos $\ker(T)$ al núcleo de T y $\mathrm{rg}(T)$ al rango de T.

Observación 1.1.6. Si E y F son espacios de Banach y $T : E \longrightarrow F$ es un operador lineal, entonces, $\ker(T) \subseteq E$ y $\mathrm{rg}(T) \subseteq F$ son subespacios. Además, si T es acotado, $\ker(T)$ resulta un subespacio cerrado.

Definición 1.1.7. Sean E y F dos espacios de Banach, notamos $\mathcal{B}(E, F)$ al conjunto de todos los operadores lineales y acotados de E en F y definimos la norma de un operador $T \in \mathcal{B}(E, F)$ como:

$$\| T \| = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0\right\} = \sup\left\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| = 1\right\}.$$

Notaremos $\mathcal{B}(E)$ a $\mathcal{B}(E, E)$. En el caso de que los espacios sean complejos, nos va a interesar mirar los operadores $\mathbb{R}$-lineales acotados. Al conjunto de dichos operadores lo notaremos $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(E, F)$.

Proposición 1.1.8. Sean E y F dos espacios de Banach entonces $(\mathcal{B}(E, F), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach con la estructura de espacio vectorial dada por sumar y multiplicar por un escalar puntualmente.

Antes de comenzar a estudiar la diferenciación en espacios de Banach mencionamos algunos resultados importantes.

Teorema 1.1.9. (Hahn-Banach) Sea E un espacio de Banach sobre k (donde $k = \mathbb{R}$ ó $k = \mathbb{C}$) y sea $S \subseteq E$ un subespacio. Sea además $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una aplicación que cumple: dados $a, b \in k$ con $|a| + |b| \leq 1$ y dados $x, y \in E$ se tiene:

$$N(ax + by) \leq |a|N(x) + |b|N(y)$$

es decir, una aplicación convexa.

Entonces, dado $\phi : S \longrightarrow k$ un funcional lineal de forma que $\phi(s) \leq N(s)$ para todo $s \in S$, existe $\phi' : E \longrightarrow k$ de forma que ϕ' extiende a ϕ y $\phi'(x) \leq N(x)$ para todo $x \in E$.

Teorema 1.1.10. (Versión Geométrica de Hahn-Banach) Sea E un espacio de Banach, sea $S \subseteq E$ un subespacio y sea $K \subseteq E$ un conjunto abierto, convexo y no vacío de forma que $K \cap S = \emptyset$. Entonces existe un hiperplano cerrado $H \subseteq E$ de forma que $S \subseteq H$ y $H \cap K = \emptyset$.

Teorema 1.1.11. (Aplicación abierta) Sea $T \in \mathcal{B}(E, F)$ un operador sobreyectivo donde E y F son espacios de Banach, entonces se tiene que T es abierto.

Ahora nos centraremos en definir una noción de diferenciabilidad para una función entre espacios de Banach. Hay varias formas de hacer esto. En esta sección desarrollaremos la noción de diferenciabilidad en el sentido de Fréchet y estudiaremos la diferenciabilidad sobre $\mathbb{R}$.

Definición 1.1.12. Sean E y F dos espacios de Banach y sea $f : E \longrightarrow F$ una función. Decimos que f es Fréchet diferenciable (o simplemente diferenciable) en $x \in E$ si existe un operador $L_x \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(E, F)$ que satisface:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - L_x(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

En la siguiente proposición enunciamos las propiedades básicas de la diferenciación en el sentido de la definición previa, y daremos la definición de la diferencial de una función diferenciable.

Proposición 1.1.13. Sean E y F dos espacios de Banach y sean $f, g : E \longrightarrow F$ entonces:

I) Si f es diferenciable en $x \in E$, el operador que realiza la Definición 1.1.12 es único, se lo nota Df_x y se lo llama diferencial de f en x.

II) Si f es diferenciable en $x \in E$ entonces f es continua en x.

III) Si f es diferenciable en $x \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces λf es diferenciable en x y $D(\lambda f)_x = \lambda Df_x$.

IV) Si f y g son diferenciables en $x \in E$ entonces $f + g$ es diferenciable en x y se tiene que $D(f + g)_x = Df_x + Dg_x$.

V) Si $T \in \mathcal{B}(E, F)$ entonces T es diferenciable en x para todo $x \in E$ y $DT_x = T$ para todo $x \in E$. Mas aún, el resultado vale para $T \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(E, F)$.

Proposición 1.1.14. (Regla de la Cadena) Sean E, F, G espacios de Banach y sean $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ dos funciones. Si f es diferenciable en $x \in E$ y g es diferenciable en $f(x) \in F$ entonces se tiene que $g \circ f$ es diferenciable en x y resulta ser:

$$D(g \circ f)_x = Dg_{f(x)} Df_x.$$

Definición 1.1.15. Sea $f : U \subseteq E \longrightarrow F$ donde $U \subseteq E$ es un abierto. Decimos que f es diferenciable en U si lo es en cada $x \in U$.

Definición 1.1.16. Sea $f : U \subseteq E \longrightarrow F$ con $U \subseteq E$ abierto. Decimos que f es de clase C^1 en U si la aplicación $Df : U \longrightarrow \mathcal{B}(E, F)$ definida por $Df(x) = Df_x$ es continua.

Notamos que ahora tenemos definida la noción de que una función entre espacios de Banach sea clase C^1 en un abierto. Esta noción depende de la continuidad de la función $Df : U \longrightarrow \mathcal{B}(E, F)$. Lo que nos podemos preguntar es si esta nueva función es diferenciable. En caso que lo sea diremos que f es dos veces diferenciable y si la aplicación $D(Df) = D^2 f : U \longrightarrow \mathcal{B}(E, \mathcal{B}(E, F))$ es continua diremos que f es de clase C^2.

De forma inductiva, podemos darle un significado a que $f : U \longrightarrow F$ sea de clase C^k con $k \in \mathbb{N}$. En caso de que f sea de clase C^k para todo $k \in \mathbb{N}$ diremos que f es de clase C^∞.

Observación 1.1.17. Dado que en el contexto de este trabajo vamos a trabajar con funciones de clase C^∞, de aquí en adelante a las funciones C^∞ las llamaremos suaves.

Observación 1.1.18. Los resultados enunciados en la Proposición 1.1.13 siguen siendo válidos para funciones suaves.

Definición 1.1.19. Sean E y F espacios de Banach, $U \subseteq E$ y $V \subseteq F$ abiertos. Decimos que $f : U \longrightarrow V$ es suave si y solo si $f : U \longrightarrow F$ lo es.

Definición 1.1.20. Si U y V son abiertos de ciertos espacios de Banach, decimos que $f : U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo si es suave, biyectiva y con inversa suave.

A continuación enunciaremos algunos resultados importantes para funciones suaves en espacios de Banach que necesitaremos a lo largo del trabajo.

Teorema 1.1.21. (Teorema del Valor Medio) Sean E, F espacios de Banach, sea $U \subseteq E$ un abierto convexo y $f : U \longrightarrow F$ suave. Entonces, dados $x, y \in U$ se tiene que :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| \sup_{z \in \overline{xy}} \|Df_z\|$$

donde $\overline{xy}$ denota el segmento que une a x con y.

Teorema 1.1.22. (Teorema de la Función Inversa) Sean E y F espacios de Banach y $f : U \longrightarrow F$ una función suave. Supongamos que para cierto $x \in E$ se tiene que $Df_x : E \longrightarrow F$ es un isomorfismo entre estos espacios de Banach vistos sobre $\mathbb{R}$ (es decir es biyectivo y bicontinuo).

Entonces existen abiertos $V \subseteq U \subseteq E$ y $W \subseteq F$ de forma que $x \in U$, $f(x) \in V$ y $f : U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo.

Definición 1.1.23. Sea E un espacio de Banach y sea $F_1 \subseteq E$ un subespacio cerrado. Decimos que F_1 parte a E si existe $F_2 \subseteq E$, subespacio cerrado, de forma que $E = F_1 \oplus F_2$.

Observación 1.1.24. Si E es un Espacio de Banach y $F \subseteq E$ es un subespacio, tenemos que F junto con la restricción de la norma de E es un espacio de Banach si y solo si F es un subespacio cerrado.

Proposición 1.1.25. Sean E y F dos espacios de Banach, se tiene que $E \times F$ posee estructura de espacio de Banach con la norma dada por $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$. Las proyecciones canónicas dadas por $p_1(x, y) = x$ y $p_2(x, y) = y$ resultan suaves, y para cualquier $x_0 \in E$ fijo la inclusión $i_{x_0} : F \longrightarrow E \times F$ dada por $i_{x_0}(y) = (x_0, y)$ es suave (analogamente para $y_0 \in F$). Además este objeto tiene la propiedad universal del producto en la categoría de espacios de Banach y funciones suaves.

Definición 1.1.26. Si V_1 y V_2 son abiertos de ciertos espacios de Banach y F es una espacio de Banach, decimos que $f : V_1 \times V_2 \longrightarrow F$ es una proyección si existe un difeomorfismo r de V_1 en un abierto de F de forma tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "f"'] & V_1 \arrow[dl, "r"] \\
F &
\end{tikzcd}.$$

Teorema 1.1.27. (Teorema de la Función Implícita) Sean E, F espacios de Banach, sea $U \subseteq E$ abierto y sea $u \in U$. Supongamos que $f : U \longrightarrow F$ es una función suave de forma que Df_u es un epimorfismo y $\ker(Df_u)$ parte a E, es decir, existe E_1 subespacio cerrado de E tal que:

$$E = \ker(Df_u) \oplus E_1.$$

Entonces existen: un abierto $U' \subseteq U$ que contiene a u, abiertos V_1, V_2 de $\ker(Df_u)$ y E_1 respectivamente y un difeomorfismo $h : V_1 \times V_2 \longrightarrow U'$ de forma que $f \circ h$ es una proyección.

1.2. Diferenciación en Álgebras de Banach

En esta sección nos restrigiremos a trabajar con álgebras de Banach, que son un caso particular de espacios de Banach con mas estructura. Necesitamos hacer esto ya que en la mayor parte de este trabajo estaremos en ese contexto y necesitamos probar algunos resultados que usaremos mas adelante.

Definición 1.2.1. Decimos que $(\mathscr{A}, +, \cdot, \cdot_k, \|\cdot\|)$ (con $k = \mathbb{R}$ ó $k = \mathbb{C}$) es un álgebra de Banach si:

I) $(\mathscr{A}, +, \cdot, \cdot_k)$ es un álgebra asociativa sobre k.

II) $(\mathscr{A}, +, \cdot_k, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

III) Dados $x, y \in \mathscr{A}$, $\|x \cdot y\| \leq \|x\|\|y\|$.

Observación 1.2.2. La Definición 1.2.1 nos dice en escencia que un álgebra de Banach es un álgebra asociativa con estructura de espacio de Banach. La condición $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ relaciona la norma con la operación producto y de ella se deduce la continuidad del mismo.

Observación 1.2.3. Notamos que, como un álgebra de Banach es en particular un espacio de Banach, los resultados y las definiciones de la sección anterior siguen siendo válidos en álgebras de Banach.

Observación 1.2.4. Si bien se pueden considerar álgebras de Banach sin identidad, para nosotros de aquí en adelante un álgebra de Banach será un álgebra de Banach con identidad, es decir, existe $1_{\mathscr{A}} \in \mathscr{A}$ de forma que $x1_{\mathscr{A}} = 1_{\mathscr{A}}x = x$ para todo $x \in \mathscr{A}$. Cuando no haya confusión notaremos $1_{\mathscr{A}} = 1$.

Al tener una estructura de álgebra asociativa podemos introducir el producto de funciones. Enunciaremos los resultados básicos sobre el producto de funciones suaves. Primero haremos algunas definiciones y observaciones.

Definición 1.2.5. Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach, y sea $x \in \mathscr{A}$. Definimos las aplicaciones $L_x : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ y $R_x : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ como:

$$L_x(y) = xy$$

$$R_x(y) = yx.$$

Observación 1.2.6. Notamos que las aplicaciones definidas en la definición anterior son lineales y continuas, por lo cual son suaves y se tiene que $D(L_x)_p = L_x$ cualquier sea $p \in \mathscr{A}$ (analogamente para R_x). Además es fácil ver que $\|L_x\| = \|R_x\| = \|x\|$.

Definición 1.2.7. Definimos las aplicaciónes $L : \mathscr{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{A})$ y $R : \mathscr{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{A})$, donde $\mathscr{A}$ es un álgebra de Banach, como:

$$L(x) = L_x$$

$$R(x) = R_x.$$

Observación 1.2.8. Notamos que las aplicaciones definidas en la Definicion 1.2.7 son lineales, por lo cual son suaves y se tiene que $D(L)_x = L$ cualquiera sea $x \in \mathscr{A}$. En general, cuando se claro, notaremos $D(L) = L$. Observamos además que $\|L\| = 1$ puesto que $\|L_x\| = \|x\|$.

Observación 1.2.9. Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach, usando al definición de diferenciabilidad en espacios de Banach y las observaciones previas, es fácil ver que la aplicación $m : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ dada por:

$$m(x, y) = xy$$

es suave.

Proposición 1.2.10. (Regla de Leibnitz) Sean E un espacio de Banach y $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach. Sea $U \subseteq E$ un abierto y funciones $f, g : U \longrightarrow \mathscr{A}$ suaves. Entonces la función $fg : U \longrightarrow \mathscr{A}$ dada por $(fg)(x) = f(x)g(x)$ es suave y se tiene que:

$$D(fg)_x(\cdot) = Df_x(\cdot)g(x) + f(x)Dg_x(\cdot).$$

A continuación definiremos la aplicación exponencial en un álgebra de Banach y estudiaremos sus propiedades. Para ello primero debemos recordar algunas definiciones y propiedades de series en espacios de Banach.

Definición 1.2.11. Sea E un espacio de Banach y sea $(x_n)_n \subseteq E$. Decimos que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ converge absolutamente si la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ converge.

Proposición 1.2.12. Sea E un espacio de Banach y sea $(x_n)_n \subseteq E$. Si la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ converge absolutamente entonces converge.

Demostración. Como E es completo, debemos ver que la sucesión de sumas parciales es de Cauchy. Si notamos $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} x_n$ tenemos que, para $N, M \in \mathbb{N}$ con $N < M$

$$\|S_M - S_N\| = \| \sum_{n=N-1}^{M} x_n\| \leq \sum_{n=N-1}^{M} \|x_n\| = \sum_{n=0}^{M}\|x_n\| - \sum_{n=0}^{N}\|x_n\| < \epsilon$$

si N, M son suficientemente grandes ya que la sucesión $\sum\limits_{n=0}^{N} \|x_n\|$ es de Cauchy por ser la serie absolutamente convergente. □

Proposición 1.2.13. (Producto de Cauchy) Sean E un espacio de Banach y $(x_n)_n, (y_n)_n$ sucesiones en E de forma que las series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ convergen absolutamente.

Si $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ e $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ entonces se tiene que:

$$xy = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}.$$

Demostración. La demostración de este resultado se puede encontrar en el libro de Apostol [2, p.204]. □

Observación 1.2.14. Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach y sea $x \in \mathscr{A}$ se puede probar por inducción que $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Proposición 1.2.15. Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge cualquiera sea $x \in \mathscr{A}$. Más aún, la convergencia es absoluta.

Demostración. Observamos primero que como estamos en un álgebra de Banach y $x \in \mathscr{A}$ tenemos que $\frac{x^n}{n!} \in \mathscr{A}$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}_0$. Ahora como $\mathscr{A}$ es en particular un espacio de Banach por la Proposición 1.2.12 basta ver que la serie converge absolutamente. Luego observando que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{x^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x\|^n}{n!} < \infty$$

se concluye que la serie del enunciado converge absolutamente. □

Definición 1.2.16. Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach se define la aplicación exponencial, $\exp : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ como:

$$\exp(x) = e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Proposición 1.2.17. Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach y sean $x, y \in \mathscr{A}$ de forma que $xy = yx$ entonces:

$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

Demostración. La idea de esta demostración será usar la Proposición 1.2.13 (Producto de Cauchy).

Notamos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ y $e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Como ya vimos previamente, la convergencia es absoluta. Usando el Producto de Cauchy obtenemos:

$$e^x e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}$$

donde, en la tercer igualdad, aplicamos el Binomio de Newton usando la hipótesis de que x e y conmutan. □

Definición 1.2.18. Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach. Se define el grupo lineal de $\mathscr{A}$ como:

$$\mathrm{GL}(\mathscr{A}) = \{x \in \mathscr{A} : \exists y \in \mathscr{A} \quad \text{que verifica} \quad xy = yx = 1_{\mathscr{A}}\}.$$

Observación 1.2.19. Se puede ver que si $x \in \mathrm{GL}(\mathscr{A})$ entonces existe un único $y \in \mathscr{A}$ que satisface $xy = yx = 1_{\mathscr{A}}$. A dicho y lo notaremos x^{-1}.

Observación 1.2.20. Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach y sea $a \in \mathscr{A}$ de forma que existen $x, y \in \mathscr{A}$ tales que $xa = ay = 1$ entonces $x = x1 = xay = 1y = y$ por lo cual a es inversible. Es decir, si posee inverso a izquierda e inverso a derecha es inversible.

Proposición 1.2.21. Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach, sea $\exp : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ el mapa exponencial y sea $x \in \mathscr{A}$. Entonces:

I) $\exp(\mathscr{A}) \subseteq \mathrm{GL}(\mathscr{A})$ y $(e^x)^{-1} = e^{-x}$.

II) Si $g \in \mathrm{GL}(\mathscr{A})$ entonces $ge^xg^{-1} = e^{gxg^{-1}}$.

Demostración. Para ver el primer ítem notamos que $x(-x) = (-x)x$ luego, por la Proposición 1.2.17, se tiene que:

$$e^x e^{-x} = e^{x+(-x)} = e^0 = 1_{\mathscr{A}}$$

y analogamente $e^{-x}e^x = 1_{\mathscr{A}}$, de donde se sigue el resultado.

Veamos el segundo item. Para ello, consideramos el mapa $C_g : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ dado por:

$$C_g(x) = gxg^{-1}$$

es decir la conjugación por g. Este mapa es lineal y continuo, e inductivamente se puede probar que tiene la propiedad $C_g(x^n) = (C_g(x))^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. De donde se sigue, usando la continuidad y la linealidad que:

$$\begin{aligned} ge^xg^{-1} &= C_g\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}x^n\right) = \lim_{N\to\infty} C_g\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}x^n\right) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}C_g(x^n) \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}(C_g(x))^n = e^{C_g(x)} = e^{gxg^{-1}}. \end{aligned}$$

□

Dado que la exponencial se define a partir de una serie de potencias, nos interesará estudiar la suavidad de dichas series. Para ello debemos probar primero algunos lemas.

Lema 1.2.22. Sean E y F espacios de Banach. Sea $U \subseteq E$ un abierto conexo. $(f_n)_n$ una sucesión de funciones suaves de U en E. Supongamos que se cumplen:

I) Existe $x_0 \in U$ de forma que $f_n(x_0)$ es convergente.

II) Para cada $a \in U$ existe $B(a)$ una bola abierta alrrededor de a contenida en U de forma que la sucesión Df_n converge uniformemente en $B(a)$.

Entonces la sucesión $(f_n)_n$ converge uniformemente en todo U y si llamamos f a su límite y g al límite de sus diferenciales, resulta f diferenciable y $Df = g$.

Demostración. Consideramos $a \in U$ fijo. Sea $B(a)$ como en el enunciado y sea $r > 0$ el radio de dicha bola. Utilizando el Teorema del Valor Medio (Teorema 1.1.21), si $x \in B(a)$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))\| &\leq \|x - a\| \sup_{z \in B(a)} \|D(f_n)_z - D(f_m)_z\| \\ &\leq r \sup_{z \in B(a)} \|D(f_n)_z - D(f_m)_z\|.\end{aligned}$$

Como $D(f_n)$ es uniformemente convergente en $B(a)$ entonces es uniformemente de Cauchy y la última expresión tiende a cero al hacer tender n y m a infinito.

Se sigue que $(f_n(x))_n$ es de Cauchy si y solo si $(f_n(a))_n$ es de Cauchy, como F es completo nos está diciendo que $(f_n(x))_n$ converge si y solo si $(f_n(a))_n$ converge, con lo cual los puntos de convergencia de $(f_n)_n$ son un subconjunto abierto y cerrado de U. Como U es conexo y el enunciado nos garantiza la existencia de un punto de convergencia, se sigue que la sucesión $(f_n)_n$ converge en todo U. Mas aún, se sigue que la convergencia es uniforme en cada bola del enunciado.

Ahora que tenemos bien definida la función f como el límite puntual de $(f_n)_n$ sólo resta ver que es diferenciable y su diferencial es g. Para ello fijamos, al igual que antes, $a \in U$ y consideramos $B(a)$ como en el enunciado de radio $r > 0$. Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que si $n \geq n_0$ y $m \geq n_o$ se tiene, para $z \in B(a)$:

$$\|D(f_n)_z - D(f_m)_z\| \leq \epsilon$$

y podemos tomar n_0 de forma tal que además valga

$$\|g_a - D(f_n)_a\| \leq \epsilon.$$

Ahora operando como el la primer parte de la demostración obtenemos:

$$\begin{aligned}\|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))\| &\leq \|x - a\| \sup_{z \in B(a)} \|D(f_n)_z - D(f_m)_z\| \\ &\leq \|x - a\|\epsilon\end{aligned}$$

luego tomando límite en m se sigue que

$$\|f(x) - f(a) - (f_n(x) - f_n(a))\| \leq \|x - a\|\epsilon.$$

Luego para $n \geq n_0$ llamamos:

$$\begin{aligned}A &= \|f(x) - f(a) - (f_n(x) - f_n(a))\| \\ B &= \|f_n(x) - f_n(a) - D(f_n)_a(x - a)\| \\ C &= \|(Df_n)_a(x - a) - g_a(x - a)\|.\end{aligned}$$

Notamos que valen:

$$\|A\| \leq \|x-a\|\epsilon$$
$$\|B\| \leq \|x-a\|\epsilon$$
$$\|C\| \leq \|x-a\|\epsilon.$$

Es claro para A y para C utilizando las desigualdades probadas previamente y como elegimos n_0. Para B simplemente hay que observar que existe $r' < r$ de forma de que si $\|x-a\| < r'$ debe valer la desigualdad, por la convergencia uniforme de las $(f_n)_n$. Luego para n suficientemente grande y x suficientemente cerca de a valen las tres desigualdades de donde se sigue que:

$$\|f(x) - f(a) - g_a(x-a)\| \leq \|A\| + \|B\| + \|C\| \leq 3\epsilon\|x-a\|,$$

luego f es diferenciable en a y $Df_a = g_a$. □

Lema 1.2.23. Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach se tiene que la aplicación $P_n(x) = x^n$ es suave y su diferencial es:

$$D(P_n)_x(h) = x^{n-1}h + x^{n-2}hx + \ldots + xhx^{n-2} + hx^{n-1}$$

la cual puede ser reescrita en términos de operadores como:

$$D(P_n) = L_{(\cdot)}^{n-1} + L_{(\cdot)}^{n-2}R_{(\cdot)} + \ldots + L_{(\cdot)}R_{\cdot}^{n-2} + R_{(\cdot)}^{n-1}$$

donde la potencia indica la composición.

Demostración. Notamos que ya sabemos que es suave por ser producto de funciones suaves. Para calcular su diferencial, desarrollamos la potencia $(x+h)^n$ y agrupando los términos donde aparece h mas de una vez en $r_n(h)$ obtenemos:

$$(x+h)^n = x^n + x^{n-1}h + x^{n-2}hx + \ldots + xhx^{n-2} + hx^{n-1} + r_n(h).$$

Bastará ver que $\frac{\|r_n(h)\|}{\|h\|} \underset{\|h\|\to 0}{\longrightarrow} 0$. para ello notamos que:

$$\|r_n(h)\| \leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \|h\|^k \|x\|^{n-k}$$

al aparecer en cada sumando $\|h\|$ por lo menos dos veces como factor, se sigue lo que queríamos probar. □

Observación 1.2.24. Notamos que, con la notación del Lema 1.2.23 se obtiene que $D(P_n) = q_1(L_{(\cdot)}, R_{(\cdot)})$ donde q_1 es un polinomio conmutativo con n términos mónicos de grado $n-1$. Mas aún, si seguimos diferenciando, en base a la Observación 1.2.8 y la Regla de la Cadena en espacios de Banach, tenemos que $D^2(P_n)$ tambien resulta un polinomio conmutativo en las mismas variables que se puede escribir con $n(n-1)$ sumandos mónicos de grado $n-2$. Así prosiguiendo, podemos pensar las diferenciales de mayor orden obteniendo:

$$D^k(P_n) = q_n(L_{(\cdot)}, R_{(\cdot)})$$

donde q_n es un polinomio conmutativo y $D^k(P_n)$ puede ser escrito como la suma de $n(n-1)\dots(n-k+1)$ términos mónicos de grado $n-k$.

Definición 1.2.25. Una serie de potencias en un álgebra de Banach $\mathscr{A}$ es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n,$$

donde $(c_n)_n \subseteq \mathscr{A}$ y $a \in \mathscr{A}$.

Recordamos que dada una serie de potencias existe $r \in [0;+\infty]$ de forma que la serie converge absolutamente si $\|x-a\| < r$, diverge si $\|x-a\| > r$ y además se tiene que la serie converge uniformemente en $\{x \in \mathscr{A} : \|x-a\| < r'\}$ con $r' < r$.

Recordamos además que la forma de calcular este radio es $r = \frac{1}{\underline{\lim} \sqrt[n]{\|c_n\|}}$, con la convención de que $\frac{1}{0} = \infty$ y $\frac{1}{\infty} = 0$.

En la proposición siguiente probaremos que las series de potencias son funciones suaves en su radio de convergencia. Lo haremos para series centradas en $a = 0$. Si la serie esta centrada en un $a \in \mathscr{A}$ arbitrario, la demostración es análoga.

Teorema 1.2.26. (Diferenciación de Series de Potencias) Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach. Sea $(c_n)_n \subseteq \mathscr{A}$ y sea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ la serie de potencias asociada a la sucesión $(c_n)_n$. Si $r > 0$ es su radio de convergencia, la función definida por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

con $\|x\| < r$ resulta una función suave y además se tiene que

$$Df_x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n D(P_n)_x,$$

donde $P_n(x) = x^n$.

Demostración. Para esta demostración nos basaremos fuertemente en el Lema 1.2.22. Consideramos $U = \{x \in \mathscr{A} : \|x\| < r\}$, el cual es un abierto conexo.

Consideramos las funciones

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n x^n.$$

Para cada $N \in \mathbb{N}$ resulta S_N diferenciable por ser suma de funciones diferenciables. Además podemos calcular sus diferenciales como:

$$D(S_N) = \sum_{n=0}^{N} c_n D(P_n).$$

Ahora, por un lado tenemos que la sucesión $S_N(x)$ posee un punto de convergencia, ya que en $x = 0$ siempre converge (de hecho por hipótesis converge en cualquier x con $\|x\| < r$).

Por otro lado si tomamos $a \in U$, como es una bola abierta, tenemos otra bola alrededor de a contenida en U, que a su vez está contenida en $B_{r_1}(0)$ para cierto $r_1 < r$. Veamos que en $B_{r_1}(0)$ la sucesión de sus diferenciales converge uniformemente.

Tomamos $x \in B_{r_1}(0)$ y en virtud de la Observación 1.2.6, el Lema 1.2.23 y la Observación 1.2.24 se tiene que:

$$\|D(P_n)_x\| \leq n\|x\|^{n-1} < nr_1^{n-1}$$

luego obtenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|c_n D(P_n)_x\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|c_n\| \|D(P_n)_x\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|c_n\| n r_1^{n-1} < \infty$$

donde la convergencia de la última serie se debe a que $\overline{\lim} \sqrt[n]{\|c_n\|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\|c_n\| n}$ pues $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Con lo cual, usando el criterio de convergencia de Weierstrass se tiene que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n D(P_n)$$

converge uniformemente en $B_{r_1}(0)$.

En base al Lema 1.2.22 obtenemos que el límite de la sucesión S_N (el cual ya sabíamos que existía y era f) es diferenciable y su diferencial es:

$$Df_x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n D(P_n)_x$$

como queríamos ver, mas aún, como para cada a con $\|a\| < r$ vimos que existe un entorno de a donde la convergencia de las diferenciables es uniforme, y estas son funciones continuas se obtiene que Df es continua y en particular que f es C^1.

Veamos que es suave por inducción. Asumimos que es clase C^{k-1} y se tiene que:

$$D^{k-1} f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n D^{k-1} P_n$$

luego, tomando U, a y r_1 como en la primer parte de la demostración se sigue que la sucesión $S_N = \sum_{n=0}^{N} c_n D^{k-1} P_n$ es una sucesión de funciones suaves que converge en $x = 0$ (de hecho converge en cualquier x dentro del radio de convergencia por hipótesis inductiva), y para x con $\|x\| < r_1$ tenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \|c_n D^k (P_n)_x\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|c_n\| n(n-1)\dots(n-k+1)\|x\|^{n-k} \\ &< \sum_{n=0}^{\infty} \|c_n\| n(n-1)\dots(n-k+1) r_1^{n-k} < \infty\end{aligned}$$

donde en la primer desigualdad usamos los resultados de la Observación 1.2.24. Para ver la convergencia, usamos lo mismo que en el caso $k = 1$, observando simplemente que

$$\operatorname{lím} \sqrt[n]{n(n-1)\dots(n-k+1)} = 1.$$

Luego aplicando nuevamente el criterio de Weierstrass obtenemos la convergencia uniforme de las diferenciales en una bola centrada alrrededor de a, y por el Lema 1.2.22 obtenemos que $D^{k-1} f$ es diferenciable y $D^k f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n D^k P_n$. Usando la continuidad de las sumas parciales y la convergencia uniforme local, obtenemos que $D^k f$ es continua de la misma forma que antes. Luego tenemos que f es suave, lo cual concluye la demostración. □

Corolario 1.2.27. Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach consideramos $\exp : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ el mapa exponencial. Se tiene que este mapa es suave, y si x e y conmutan $D\exp_x(y) = \exp(x)y$. En particular obtenemos que $D\exp_0 = id_{\mathscr{A}}$.

Demostración. La suavidad es consecuencia del Teorema 1.2.26 por ser una serie de potencias con radio de convergencia infinito. Para ver su diferencial, simplemente observamos que si x e y conmutan entonces

$$D(P_n)_x(y) = n x^{n-1} y$$

y luego sumando se obtiene que:

$$D\exp_x(y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \right) y = \exp(x)y.$$

Para ver lo último solo hay que observar que 0 conmuta con cualquier $y \in \mathscr{A}$ y $e^0 = 1$. □

Lo que haremos a continuación es definir una inversa de la exponencial localmente.

Observación 1.2.28. Si bien en el caso $\mathscr{A} = \mathbb{R}$ podemos conseguir una inversa global del mapa exponencial, esto no valdrá en general. A modo de ejemplo, si $\mathscr{A} = \mathbb{C}$ tenemos que $e^0 = e^{2\pi i}$ con lo cual no puede tener inversa global.

Proposición 1.2.29. Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach, entonces se tiene que existen abiertos $U, V \subseteq \mathscr{A}$ de forma que $0 \in U$, $1 \in V$ y el mapa $\exp : U \longrightarrow V$ resulta un difeomorfismo.

Demostración. Recordamos que vimos en el Corolario 1.2.27 que el mapa exponencial es suave y su diferencial en $0 \in \mathscr{A}$ es la identidad. Luego por el Teorema de la Función Inversa (Teorema 1.1.22) se sigue el resultado. □

Definición 1.2.30. Sean U, V como en la proposición anterior entonces la inversa del mapa exponencial se llama logaritmo en V y se lo nota:

$$\log : V \longrightarrow U.$$

Observación 1.2.31. Se puede probar que la diferencial del mapa exponencial es un isomorfismo cualquiera sea $x \in \mathscr{A}$ de forma tal que se puede definir un logaritmo en cualquier entorno de un elemento de la forma e^x con $x \in \mathscr{A}$.

1.3. Variedades de Banach

En esta sección y las siguientes definiremos la noción de variedad suave modelada por un espacio de Banach a la que denominaremos Variedad de Banach, junto con las nociones habituales de subvariedad regular, morfismos entre variedades.

Definición 1.3.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que (X, τ) es una variedad topológica modelada por un espacio de Banach E, si cumple:

I) El espacio topológico (X, τ) es T_2.

II) Para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subseteq X$ y un homeomorfismo $\phi : U \longrightarrow \phi(U)$ donde $\phi(U) \subseteq E$ es un abierto.

Esto define la noción de variedad topológica modelada por un espacio de Banach E. Cada par (U, ϕ) se denomina carta. Para definir la noción de variedad suave necesitamos primero definir lo que es un atlas suave.

Notación 1.3.2. De aquí en adelante usaremos la notación fg para la composición $f \circ g$ en los casos donde sea claro que es una composición y no un producto.

Definición 1.3.3. Sea X una variedad topológica y sean $(U, \phi), (V, \psi)$ dos cartas. Decimos que son compatibles si se cumple que los mapas $\phi\psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \phi(U \cap V)$ y $\psi\phi^{-1} : \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ son suaves. Estos mapas se denominan mapas de transición.

Definición 1.3.4. Sea X una variedad topológica modelada por un espacio de Banach E. Llamamos atlas suave (o simplemente atlas) de X a una familia de cartas de X, la cual notaremos $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$, que satisface las siguientes condiciones:

I) Si $x \in X$ entonces existe $(U_i, \phi_i) \in \mathcal{A}$ de forma que $x \in U_i$. En otras palabras el atlas cubre al espacio X.

II) Si $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ entonces (U, ϕ) es compatible con (V, ψ).

Proposición 1.3.5. Sea X una variedad topológica modelada por un espacio de Banach E. Sea $\mathcal{A}$ un atlas de X entonces existe un único atlas maximal $\mathcal{A}'$ de forma que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$.

Definición 1.3.6. Una variedad suave modelada por un espacio de Banach E es un par $((X, \tau), \mathcal{A})$ donde (X, τ) es una variedad topológica modelada por E y $\mathcal{A}$ es un atlas maximal.

Definición 1.3.7. Sean X e Y dos variedades suaves modeladas por espacios de Banach E y F respectivamente. Sea $f : X \longrightarrow Y$ continua. Decimos que f es suave en cierto $x \in X$ si existen cartas (U, ϕ), (V, ψ) con $x \in U,\ f(x) \in V$ de forma que la función:

$$\psi f \phi^{-1} : \phi(f^{-1}(V) \cap U) \longrightarrow \psi(V) \quad \text{es suave en } \phi(x).$$

Decimos que f es suave en X si lo es en cada $x \in X$.

Observación 1.3.8. Notamos que dada f una función suave entre variedades, esta debe ser continua por la misma definición de suavidad.

Observación 1.3.9. La noción de suavidad no depende de las cartas. Supongamos que tenemos $f : X \longrightarrow Y$ suave en $x \in X$ con respecto a las cartas $(U, \phi), (V, \psi)$ (ver Definición 1.3.7). Sean (U', ϕ') carta de X en x y (V', ψ') carta de Y en $f(x)$. Entonces $\psi' f \phi'^{-1} = (\psi' \psi^{-1})(\psi f \phi^{-1})(\phi \phi'^{-1}) : \phi'(U \cap U' \cap f^{-1}(V \cap V')) \longrightarrow \psi(V)$ es suave en $\phi'(x)$ por ser composición de funciones suaves (entre abiertos de espacios de Banach).

Lema 1.3.10. Sean X e Y variedades suaves, sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Son equivalentes:

I) f es suave.

II) Para toda carta (U, ϕ) de X y para toda carta (V, ψ) de Y, se tiene que la composición $\psi f \phi^{-1} : \phi(f^{-1}(V) \cap U) \longrightarrow \psi(V)$ es suave.

III) Existen atlas $\mathcal{A}_X$ de X y $\mathcal{A}_Y$ de Y de manera que cualesquiera sean $(U, \phi) \in \mathcal{A}_X$ y $(V, \psi) \in \mathcal{A}_Y$, la composición $\psi f \phi^{-1}$ es suave.

Lema 1.3.11. Sean X, Y, Z variedades suaves modeladas por espacios de Banach E, F, G respectivamente. Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ funciones continuas. Si f es suave en $x \in X$ y g es suave en $f(x) \in Y$ Entonces se tiene que la función $gf : X \longrightarrow Z$ es suave en x.

Corolario 1.3.12. Sean X, Y, Z variedades suaves modeladas por espacios de Banach E, F, G respectivamente. Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ funciones suaves entonces la composición gf es una función suave.

Observación 1.3.13. Observamos que, como consecuencia del Corolario 1.3.12 se tiene que las variedades suaves junto con las funciones suaves forman una categoría.

Veremos ahora algunos ejemplos de construcciones de variedades de Banach.

Ejemplo 1.3.14. Es claro que si E es un espacio de Banach, se tiene que E es una variedad de Banach modelada por si mismo utilizando la carta (E, id_E). Además se tiene que la noción de suavidad de funciones entre espacios de Banach definida en la primer sección de este capítulo coincide con la noción de suavidad como variedades de Banach.

Ejemplo 1.3.15. Si X es una variedad suave modelada por un espacio de Banach E, $\mathcal{A}$ es un atlas maximal de X y $U \subseteq X$ es un abierto, tenemos que U es una variedad de Banach modelada por E, donde su estructura diferenciable esta dada por el atlas $\mathcal{A}_U = \{(U \cap V, \psi\mid_U) : (V, \psi) \in \mathscr{A}\}$ y la inclusión $i_u : U \longrightarrow X$ resulta una función suave.

Ejemplo 1.3.16. (Producto de Variedades) Sean X e Y variedades suaves modeladas por espacios de Banach E y F respectivamente, y sean $\mathcal{A}_X$ y $\mathcal{A}_Y$ atlas de X e Y respectivamente.

Entonces el espacio topológico $X \times Y$ posee estructura de variedad suave modelada por el espacio de Banach $E \times F$ junto con el atlas:

$$\mathcal{A} = \{(U \times V, \phi \times \psi) : (U, \phi) \in \mathcal{A}_X, (V, \psi) \in \mathcal{A}_Y\}.$$

Se tiene además que las proyecciones canónicas resultan funciones suaves y que $X \times Y$ posee la propiedad universal del producto en la categoría de variedades y funciones suaves.

A continuación definiremos los sub-objetos de las variedades suaves, es decir las subvariedades. Una subvariedad suave será un subespacio topológico que herede la estructura diferencial que posee la variedad.

Definición 1.3.17. Sea Y una variedad suave modelada por un espacio de Banach E. Sea $X \subseteq Y$. Decimos que X es una subvariedad de Y si E se descompone como $E = F_1 \oplus F_2 \simeq F_1 \times F_2$ donde F_1 y F_2 son subespacios de Banach y se tiene además que para cada $x \in X$ existe una carta (U, ϕ) de Y en x de forma que induce un difeomorfismo $\phi : U \longrightarrow V_1 \times V_2 \subseteq F_1 \times F_2$ (donde V_1 y V_2 son abiertos de F_1 y F_2 respectivamente) que cumple:

$$\phi(U \cap X) = V_1 \times \{v_2\}$$

para cierto $v_2 \in V_2$. En este contexto llamamos ϕ_X a la proyección a la primer coordenada de ϕ es decir $\phi_X = p_1 \circ \phi$ y a el par $(U \cap X, \phi_X)$ lo llamamos carta de Y adaptada a X.

Proposición 1.3.18. Sea Y una variedad suave, y sea $X \subseteq Y$ una subvariedad. Entonces se tiene que las cartas adaptadas de Y a X forman un atlas suave que le da a X una estructura de variedad suave modelada por F_1 (ver notación de la Proposición 1.3.17).

Observación 1.3.19. Como caso particular de la noción de subvariedad tenemos que si X es una variedad modelada por un espacio de Banach y $U \subseteq X$ es un abierto, entonces U resulta una subvariedad suave modelada por el mismo espacio de Banach E.

1.4. Espacio y Fibrado Tangente

Para comenzar con esta sección, vamos a definir el espacio tangente de una variedad modelada por un espacio de Banach. Si bien hay muchas definiciones posibles para esto, en este trabajo nos va a convenir trabajar con una definición que involucre curvas.

Definición 1.4.1. Sea X una variedad suave modelada por un espacio de Banach E. Una curva suave α va a ser para nosotros una función suave $\alpha : (-\epsilon; \epsilon) \longrightarrow X$.

Dada una carta de X alrededor de $\alpha(0)$ (U, ϕ), notamos:

$$(\phi \circ \alpha)'(0) := D(\phi \circ \alpha)_0(1).$$

Proposición 1.4.2. Sea X una variedad suave modelada por un espacio de Banach E, sea $x \in E$ y sea $\Omega = \{\alpha : \alpha \text{ es una curva suave en } X \ y \ \alpha(0) = x\}$. Dada (U, ϕ) una carta en x, tenemos una relación de equivalencia en Ω dada por:

$$[\alpha] = [\beta] \Longleftrightarrow (\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0).$$

Además las clases no dependen de la carta elegida.

Demostración. La relación va a ser una relación de equivalencia simplemente por el hecho de que la igualdad es una relación de equivalencia. Veamos entonces que no depende de la carta elegida.

Sea (V, ψ) otra carta de X alrededor de x. Queremos ver que $(\psi \circ \alpha)'(0) = (\psi \circ \beta)'(0)$. Utilizando la Regla de la Cadena para funciones suaves ente espacios de Banach tenemos que:

$$\begin{aligned}(\psi \circ \alpha)'(0) = (\psi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \alpha)'(0) = D(\psi \circ \phi_{\phi}^{-1}(x))(\psi \circ \alpha)'(0) = \\ = D(\psi \circ \phi_{\phi}^{-1}(x))(\psi \circ \beta)'(0) = (\psi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \alpha)'(0) = (\psi \circ \beta)'(0),\end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración. □

Definición 1.4.3. Sea X una variedad de Banach y sea $x \in X$ definimos el espacio tangente de X en x como el conjunto de clases de equivalencia de la relación definida en la proposición previa. Notamos T_xX a dicho conjunto.

Lema 1.4.4. Sea X una variedad modelada por un espacio de Banach X, sea $x \in X$ y (U, ϕ) una carta de X en x. Se tiene entonces que la aplicación $F : T_xX \longrightarrow E$ dada por $F([\alpha]) = (\phi \circ \alpha)'(0)$ es biyectiva.

Demostración. Primero observamos que por la misma definición de la relación de equivalencia entre curvas se tiene:

$$F([\alpha]) = F([\beta]) \Longleftrightarrow (\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0) \Longleftrightarrow [\alpha] = [\beta]$$

lo cual me dice que la aplicación F esta bien definida y resulta inyectiva.

Veamos que es sobreyectiva. Supongamos un elemento $v \in E$. Consideramos la curva dada por $\gamma(t) = \phi^{-1}(tv + \phi(x))$. Notamos que es suave por ser suma y composición de funciones suaves y $\gamma(0) = \phi^{-1}(0.v + \phi(x)) = x$ con lo cual $[\gamma] \in T_xX$. Si le aplicamos la función F obtenemos que:

$$F([\gamma]) = (\phi \circ \gamma)'(0) = (\phi(\phi^{-1}(tv + \phi(x)))'(0) = (tv + \phi(x))'(0) = v.$$

Concluímos que la aplicación F es sobreyectiva y luego biyectiva, lo cual finaliza la demostración. $\square$

Observación 1.4.5. El lema anterior nos da una biyección entre T_xX y el espacio de Banach que modela la variedad. Notar que en la misma demostración de la sobreyectividad hemos construído la inversa de F a partir de $F^{-1}(v) = [\phi^{-1}(tv + \phi(x))]$.

Teorema 1.4.6. Sea X una variedad suave modelada por un espacio de Banach E. Se tiene entonces que T_xX posee estructura de espacio vectorial y es isomorfo a E.

Demostración. Consideramos la aplicación F definida en el Lema 1.4.4 que ya vimos que es biyectiva. A partir de esta biyección podemos darle a T_xX estructura de espacio vectorial definiendo para $[\alpha], [\beta] \in T_xX$ y $\lambda \in k$ ($k = \mathbb{R}$ ó $k = \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned}
[\alpha] + [\beta] &= F^{-1}(F([\alpha]) + F([\beta])) \\
\lambda[\alpha] &= F^{-1}(\lambda F([\alpha]))
\end{aligned}$$

y resulta asi T_xX un espacio vectorial y F un isomorfismo de espacios vectoriales entre T_xX y E. $\square$

Observación 1.4.7. Notar que en base al Teorema 1.4.6 y el Lema 1.4.4, podemos explicitar como es la suma y el producto por un escalar en T_xX. Se tiene que si (U, ϕ) es una carta de X en x, para $[\alpha], [\beta] \in T_xX$ y $\lambda \in k$ ($k = \mathbb{R}$ ó $k = \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned}
[\alpha] + [\beta] &= [\phi^{-1}(t((\phi \circ \alpha)'(0) + (\phi \circ \beta)'(0)) + \phi(x))] \\
\lambda[\alpha] &= [\phi^{-1}(\lambda t(\phi \circ \alpha)'(0) + \phi(x))]
\end{aligned}$$

Proposición 1.4.8. Sean X, Y dos variedades de Banach modeladas por E y F respectivamente. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función suave. Entonces se tiene que la aplicación $f_{*,x} : T_xX \longrightarrow T_{f(x)}Y$ dada por $f_{*,x}([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ está bien definida y resulta una transformación lineal.

Definición 1.4.9. Sean X, Y variedades de Banach, $x \in X$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función suave. La transformación lineal $f_{*,x} : T_xX \longrightarrow T_{f(x)}Y$ definida en la Proposición 1.4.8 se llama diferencial de f en x.

Observación 1.4.10. Si las variedades que miramos son espacios de Banach o abiertos de espacios de Banach, con la identificación del tangente del Teorema 1.4.6 se tiene que $f_{*,x} = Df_x$. En general usaremos la notación Df_x cuando estemos en el contexto de espacios de Banach.

Proposición 1.4.11. (Regla de la Cadena) Sean X, Y y Z variedades de Banach y sean $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ funciones suaves. Se tiene que $gf : X \longrightarrow Z$ es suave y si $x \in X$ entonces:

$$(gf)_{*,x} = g_{*,f(x)}f_{*,x}.$$

Demostración. La suavidad de gf ya la vimos en el Corolario 1.3.12. Sea ahora $x \in X$ se tiene que para $[\alpha] \in T_xX$:

$$g_{*,f(x)}f_{*,x}([\alpha]) = g_{*,f(x)}([f \circ \alpha]) = [g \circ (f \circ \alpha)] = [(g \circ f) \circ \alpha] = (gf)_{*,x}([\alpha])$$

□

Observación 1.4.12. Llamamos variedad de Banach punteada a un par (X, x) con $x \in X$. La Proposición 1.4.11 junto al hecho de que la diferencial de la identidad es la identidad nos está diciendo que tomar tangente es funtor entre la categoría de las variedades suaves punteadas y la categoría de espacios vectoriales.

A continuación queremos contruir el fibrado tangente de una variedad X. Antes de hacerlo recordaremos las definiciones de fibrado, fibrado vectorial y morfismo de fibrados vectoriales.

Definición 1.4.13. Sean X y $\mathcal{T}$ variedades diferenciables y $\pi : \mathcal{T} \longrightarrow X$ una función diferenciable. Decimos que la terna $(X, \mathcal{T}, \pi)$ es un fibrado sobre X si se satisface la siguiente propiedad:

Para cada $x \in X$ existe una variedad suave Z y una función suave

$$h : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times Z$$

de forma que $\pi = p_1 \circ h$, donde p_1 es la proyección a la primer coordenada. De forma mas visual, se tiene para cada x un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times Z \arrow[dl, "p_1"] \\
X &
\end{tikzcd}.$$

Observación 1.4.14. La Definición 1.4.13 nos está diciendo que π es localmente una proyección.

A continuación daremos la definición de fibrado vectorial.

Definición 1.4.15. Sea E un espacio de Banach. Decimos que un fibrado $(X, \mathcal{T}, \pi)$ es un fibrado vectorial sobre X, si existe $(U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos de X que satisface:

I) Para cada $i \in I$ existe un difeomorfismo $\tau_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times E$ que satisface que $\pi = p_1 \circ \tau_i$. Además, si nos restringimos a la fibra de un punto se tiene un isomorfismo, es decir si llamamos $\tau_{ix} = \tau_i \mid_{\pi^{-1}(x)}$ se tiene que $\tau_{ix} : \pi^{-1}(x) \longrightarrow E$ es un isomorfismo.

II) Para cada $x \in X$ fijo y cada $i, j \in I$ se tiene que la función $\tau_{jx} \circ \tau_{ix} : E \longrightarrow E$ es un isomorfismo de espacios de Banach.

III) Para cada $i, j \in I$ la función $F : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathcal{B}(E)$, dada por $F(x) = \tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}$, es suave.

Las funciones τ_i se denominan trivializaciones del fibrado, la familia $(U_i)_{i\in I}$ se denomina cubrimiento trivializador. Las funciones $\tau_{ijx} = \tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}$ se llaman funciones de transición del fibrado.

Definición 1.4.16. Sean $(X_1, \mathcal{T}_1, \pi_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2, \pi_2)$ dos fibrados vectoriales. Un morfismo entre fibrados es un par (f, g) de forma que $f : \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2$, $g : X_1 \longrightarrow X_2$ son funciones suaves que cumplen:

I) $g \circ \pi_1 = \pi_2 \circ f$, es decir, se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathcal{T}_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\
X_1 \arrow[r, "g"'] & X_2
\end{tikzcd}.$$

II) Para cada $x \in X_1$ se tiene que el mapa inducido por f, $\pi^{-1}(x) \longrightarrow \pi^{-1}(f(x))$ es lineal.

Observación 1.4.17. Es fácil ver que la composición de morfismos de fibrados es un morfismo de fibrados y que si tomamos f y g como la identidad tendremos una identidad para la composición de fibrados. Luego se tiene que los fibrados vectoriales y los morfismos de fibrados forman una categoría.

En lo que resta de esta sección veremos la construcción del fibrado tangente de una variedad, y como este mismo resulta ser un fibrado vectorial. Probaremos además que un morfismo entre variedades suaves induce un morfismo de fibrados entre sus fibrados tangentes obteniendo un funtor entre la categoría de las variedades suaves y los fibrados vectoriales.

Comenzamos construyendo el tangente de una variedad. Si tenemos una variedad suave X, ya construímos el objeto T_xX y vimos que era un espacio vectorial. La idea será entonces pegar estos espacios vectoriales obteniendo un nuevo objeto que contenga la información de todos ellos y darle estructura de variedad de Banach.

Definición 1.4.18. Sea X una variedad de Banach definimos el tangente de X como la unión disjunta de los espacios tangentes en cada punto, es decir:

$$TX := \coprod_{x\in X} T_xX = \{(x,v) : x \in X, v \in T_xX\}.$$

Observación 1.4.19. Si X es una variedad de Banach y $U \subseteq X$ es un abierto, para cada $x \in U$ vale que $T_xX = T_xU$. Luego se tiene una inclusión $TU \subseteq TX$ donde $TU = \coprod_{x\in U} T_xX$.

Teorema 1.4.20. Sea X una variedad de Banach modelada por un espacio E. Entonces se tiene que TX posee estructura de variedad suave.

Demostración. Primero debemos comenzar dándole una topología. Consideremos (U,ϕ) una carta de X. Podemos construir la aplicación $T\phi : TU \longrightarrow \phi(U) \times E$ dada por:

$$(T\phi)(x,[\alpha]) = (\phi(x),(\phi\circ\alpha)'(0)).$$

Como consecuencia del Lema 1.4.4 tenemos que la aplicación resulta una biyección. Luego como $\phi(U)\times E$ posee estructura de espacio topológico, podemos dotar a TU con la topología inicial respecto de $T\phi$. Obteniendo así una topología sobre TU y resultando $T\phi$ un homeomorfismo. Observamos que con esta topología si $V \subseteq U$ es un abierto se tiene que $TV \subseteq TU$ resulta abierto por ser la preimagen de $\phi(V)\times E$ que es abierto.

Ahora para darle una topología a TX simplemente recordamos que $TU \subseteq TX$ y le damos la topología final respecto de las inclusiones para cada abierto de una carta de un atlas $\mathscr{A}$ de X.

Observamos que con esta topología que definimos en TX, si U es un abierto de X se tiene que $TU \subseteq TX$ es abierto.

En conclusión le dimos una estructura de espacio topológico a TX, el cual resulta T_2 por serlo X. Además si $(x,v) \in TX$ tomamos una carta (U,ϕ) de X y tenemos que $T\phi$ es un homeomorfismo entre TU y $\phi(U) \times E$ que es un abierto de $E \times E$. Con lo cual tenemos que TX posee estructura de espacio topológico modelado por el espacio de Banach $E \times E$.

Para ver ahora que es una variedad de Banach, si $\mathcal{A}$ es una atlas de X veamos que $\mathcal{A}' = \{(TU, T\phi) : (U,\phi) \in \mathcal{A}\}$ es un atlas de TX. Tenemos que claramente lo cubre por la construcción de TU. Solo resta ver la compatibilidad de las cartas. Sean $(TU, T\phi), (TV, T\psi) \in \mathcal{A}'$, lo que queremos ver es que la aplicación:

$$(T\psi) \circ (T\phi)^{-1} : \phi(U \cap V) \times E \longrightarrow \psi(U \cap V) \times E$$

es suave.

Notamos que:

$$(T\psi) \circ (T\phi)^{-1}(\phi(x), (\phi \circ \alpha)'(0)) = (\psi(x), (\psi \circ \alpha)'(0)).$$

Por la propiedad universal del producto, basta ver que proyectando en cada coordenada se tiene un función suave. Proyectando en la primera se tiene que es suave ya que $\psi\phi^{-1}$ lo es. Proyectando en la segunda coordenada se tiene que es suave, pues basta observar que $(\psi\circ\alpha)'(0) = D(\psi\phi^{-1})_{\phi(x)}(\phi\circ\alpha)'(0)$ y la aplicación $D(\psi\phi^{-1})$ es una función suave. □

Observación 1.4.21. En la demostración del Teorema 1.4.20 vimos que si $\mathcal{A}$ es un atlas de una variedad suave X entonces se tiene que $\mathcal{A}' = \{(TU, T\phi) : (U,\phi) \in \mathcal{A}\}$ es un atlas de TX, donde $T\phi(x, [\alpha]) = (\phi(x), (\phi \circ \alpha)'(0))$.

Teorema 1.4.22. Sea X una variedad suave. Sea $\pi : TX \longrightarrow X$ la aplicación dada por $\pi(x,v) = x$. Se tiene entonces que (X, TX, π) es un fibrado vectorial sobre X.

Demostración. Lo primero que debemos ver es que π es una aplicación suave. Para ello, sea $(x,v) \in TX$, sea (U,ϕ) de X en x y sea $(TU, T\phi)$ carta de TX en (x,v). Lo que debemos ver es que la aplicación $\phi\pi(T\phi)^{-1}$ es suave. Pero notamos que esta aplicación es la proyección a la primera coordenada de $\phi(X) \times E$ luego es diferenciable.

Ahora debemos ver que cumple la definición de fibrado vectorial para ello consideramos un atlas $\mathcal{A}$ de X y la familia $(U_i)_{i\in I}$ de abiertos asociados al atlas en cuestión. Estos van a ser nuestros abiertos trivializantes. Veamos ahora que se cumplen todos los items de la definición de fibrado (Definición 1.4.15).

i) Sea U_i abierto de la familia elegida previamente, se tiene entonces que (U_i, ϕ_i) es una carta de X. Consideramos la función $F_{x,\phi} : T_xX \longrightarrow E$ dada por $F([\alpha]) = (\phi\circ\alpha)'(0)$ que vimos que era un isomorfismo lineal en el Lema 1.4.4 y la Proposición 1.4.6. Sea $\tau_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U \times E$ dada por $\tau_i(x,v) = (x, F_{x,\phi}(v))$. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "\tau_i"] \arrow[d, "\pi"'] & U_i \times E \arrow[dl, "p_1"] \\ X & \end{tikzcd}$$

notamos que $\pi^{-1}(U_i) = TU_i$ y que la función τ_i es un difeomorfismo ya que tomando cartas es simplemente la función $\phi \times id_E$. Cuando nos restringimos a un punto $x \in X$ la función τ_{ix} resulta coindicir con la función $F_{x,\phi}$ que resulta un isomorfismo lineal.

II) Para este ítem, dadas dos cartas de X en x, (U, ϕ), (V, ψ) tenemos que $F_{x,\phi} = \tau_{ix}$ y que $F_{x,\psi} = \tau_{jx}$ luego, como vimos que ambas son isomorfismos lineales, se tiene que $\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}$ es un isomofismo lineal.

III) Con la notación del item II) se tiene que, si α es una curva en X con $\alpha(0) = x$

$$\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}((\phi \circ \alpha)'(0)) = \tau_{jx}([\alpha]) = (\psi \circ \alpha)'(0) = D(\psi\phi^{-1})_{\phi(x)}(\phi \circ \alpha)'(0)$$

luego como $D(\psi\phi^{-1})_{\phi(-)}$ es suave por ser composición de funciones suaves ($D(\psi\phi^{-1})$ es diferenciable y ϕ es suave) se sigue que $\tau_{jx} \circ \tau_{ix}^{-1}$ es suave, lo cual finaliza la demostración. $\square$

Proposición 1.4.23. Sean X e Y dos variedades de Banach, sea $f : X \longrightarrow Y$ una función suave, entonces la función $f_* : TX \longrightarrow TY$ dada por $f_*(x, v) = (f(x), f_{*,x}(v))$ es una función suave, mas aún, se tiene que el par (f_*, f) es un morfismo de fibrados vectoriales entre (X, TX, π_X) y (Y, TY, π_Y).

Demostración. Veamos primero que es suave. Sea $(x, [\alpha]) \in TX$, consideramos (U, ϕ) carta de X en x y (V, ψ) carta de Y en y de forma que $f(U) \subseteq V$. Debemos ver entonces que la función $(T\psi) \circ f \circ (T\phi)^{-1} : \phi(U) \times E \longrightarrow \psi(V) \times E$ es suave. Tenemos que:

$$\begin{aligned} ((T\psi) \circ f \circ (T\phi)^{-1})(x, (\phi \circ \alpha)'(0)) &= ((T\psi) \circ f)(x, [\alpha]) = (T\psi)(f(x), [f \circ \alpha]) \\ &= ((\psi f)(x), (\psi \circ f \circ \alpha)'(0)) \end{aligned}$$

nuevamente usando la propiedad universal del producto basta ver que cada coordenada es suave. La primera lo es pues la aplicación $\psi f \phi^{-1}$ lo es y la segunda lo es pues $D(\psi f \phi^{-1})$ lo es y se tiene que $D(\psi f \phi^{-1})_{\phi(x)}(\psi \circ \alpha)'(0) = ((\psi f)(x), (\psi \circ f \circ \alpha)'(0))$.

Veamos que es un morfismo de fibrados. Observamos que $(f \circ \pi_X)((x, v)) = f(x) = (\pi_Y \circ f_*)(x, v)$ es decir el diagrama siguiente es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\pi_X"'] & TY \arrow[d, "\pi_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Por otra parte, fijado $x \in X$, $f_{*,x} : T_xX \longrightarrow T_{f(x)}Y$ es una transformación lineal (Proposición 1.4.8), lo cual finaliza la demostración. $\square$

Observación 1.4.24. Vimos que un morfismo entre variedades induce un morfismo de fibrados entre sus tangentes. Usando la Regla de la Cadena (Proposición 1.4.11) se puede verificar que la asignación es funtorial.

Finalizamos esta sección definiendo la velocidad de una curva.

Observación 1.4.25. Observamos que si $I = [0, 1]$ podemos identificar, vía un isomorfismo de fibrados $TI \simeq I \times \mathbb{R}$. El morfismo es el par (id_I, g) y $g(t, [\alpha]) = (t, \alpha'(t))$ donde $\alpha'(t)$ es la derivada usual.

Definición 1.4.26. Sea X una variedad de Banach y $\alpha : I = [0, 1] \longrightarrow X$ una curva suave. Notamos que vía la trivialización de la Observación 1.4.25 podemos pensar a la diferencial de α como una aplicación $\alpha_* : I \times \mathbb{R} \longrightarrow TX$. Luego si consideramos $i_1 : I \longrightarrow I \times \mathbb{R}$ dada por $i_1(t) = (t, 1)$ podemos definir la velocidad de α como:

$$\dot{\alpha}(t) = \alpha_* \circ i_1(t)$$

notamos que $\dot{\alpha}$ define una aplicación de I en TX.

Observación 1.4.27. Con la definicion previa es fácil de ver que si X es una variedad de Banach y $x \in X$, se tiene que $v \in T_xX$ si y solo si existe una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow X$ que cumple $\alpha(0) = x$ y la proyección a la segunda coordenada de $\dot{\alpha}(0)$ es v. Cuando no haya confusiones nos referiremos a $\dot{\alpha}(0)$ como el elemento v sin pasar por la proyección a la segunda coordenada.

1.5. Teorema de los Valores Regulares

En esta sección definiremos los conceptos de inmersión, sumersión y probaremos el Teorema de los Valores Regulares que usaremos en las siguientes secciones.

Definición 1.5.1. Sean X, Y varieadades suaves, sea $f : X \longrightarrow Y$ una función suave y sea $x \in X$.

i) Se dice que f es una sumersión en x si $f_{*,x} : T_xX \longrightarrow T_{f(x)}Y$ es un epimorfismo.

ii) Se dice que f es una inmersión en x si $f_{*,x} : T_xX \longrightarrow T_{f(x)}Y$ es un monomorfismo.

iii) Si f es una sumersión en x para todo $x \in X$ diremos que es una sumersión.

iv) Si f es una inmersión en x para todo $x \in X$ diremos que es una inmersión.

Teorema 1.5.2. (Teorema de los Valores Regulares) Sean X, Y variedades suaves modeladas por los espacios de Banach E y F respectivamente. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función suave. Supongamos que para cierto $c \in Y$ se tiene que:

Si $x \in f^{-1}(c)$ entonces f es una sumersión en x y además $\ker(f_{*,x})$ parte a T_xX.

Entonces, el conjunto $Z = f^{-1}(c)$ resulta una subvariedad cerrada de X y se tiene un isomorfismo $T_xZ \simeq \ker f_{*,x}$ para todo $x \in Z$.

Demostración. Z es cerrado por ser preimagen de un cerrado por una función continua. Podemos suponer que es no vacío ya que sino no hay nada que probar.

Consideramos una carta (V, ψ) de Y en c de forma que $\psi(c) = 0 \in F$. Sea $z \in Z$, consideramos otra carta $(\widehat{U}, \phi)$ de X en z, de forma tal que $\phi(z) = 0 \in E$ y $f(\widehat{U}) \subseteq V$ y llamamos $U = \phi(\widehat{U})$.

Notamos que tenemos, para cada $z \in Z$, una aplicación $\widehat{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : U \longrightarrow F$ diferenciable que resulta una sumersión, ya que f lo es y ψ y ϕ son difeomorfismos. Por hipótesis su núcleo parte a E, es decir existe un subespacio cerrado de E que notaremos E_1 de forma tal que:

$$E_1 \oplus \ker(D\widehat{f}_0) \simeq E.$$

Utilizando el Teorema de la Función Implícita (Teorema 1.1.27) se tiene que existe $U' \subseteq U$, V_1 abierto de E_1, V_2 abierto de $\ker(D\widehat{f}_0)$ y $h : V_1 \times V_2 \longrightarrow U'$ difeomorfismo, de forma que $\widehat{f} \circ h = p_1$. Tomamos $\theta = h^{-1} \circ \phi$, obteniendo una carta de X dada por $(\widehat{U}, \theta)$ que satisface $\psi \circ f \circ \theta^{-1} = p_1$. Se tiene por la misma construcción que $\theta(\widehat{U}) = V_1 \times V_2$ y que $\psi \circ f \circ \theta^{-1}(0, y) = 0$ luego:

$$\theta(\widehat{U} \cap Z) = 0 \times V_2,$$

de donde se concluye que Z es una subvariedad. Por último observamos que por la misma consrucción se tiene:

$$T_z Z \simeq 0 \times \ker(D\widehat{f}_0) \simeq \ker(f_{*,x}).$$

□

1.6. Variedades de Finsler

En esta sección definiremos las variedades de Finsler, que son el objeto con el cual vamos a trabajar mayormente en este trabajo. La idea es, dada una variedad suave, definir una norma en cada espacio tangente de manera que varíe continuamente al movernos por los puntos del espacio. Esto nos va a permitir medir la velocidad instantánea de una curva de forma intrínseca a la variedad, así como medir longitudes de curvas en la variedad.

Definición 1.6.1. Una Variedad de Finsler es una variedad de Banach X junto con una fución continua $N : TX \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ de forma que para $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v, w \in T_x X$, se cumple que:

I) $N(x, v) = 0 \iff v = 0$.

II) $N(x, \lambda v) = |\lambda| N(x, v)$.

III) $N(x, v + w) \leq N(x.v) + N(x, w)$.

Notación 1.6.2. Notamos que la aplicación N nos está definiendo una norma en cada espacio tangente. De ahí que en general notaremos a $N(x, v)$ como $\|v\|_x$.

Observación 1.6.3. Si E es un espacio de Banach, vimos que tenía estructura de variedad de Banach y su tangente estaba identificado con el mismo espacio E, es fácil ver que la misma norma de E le da estructura de variedad de Finsler. Esta observación también es válida para un abierto $U \subseteq E$ ya que observamos que en este caso $T_xU = T_xE$.

Definición 1.6.4. Sea X una variedad de Finlser y sea $\alpha : [0, 1] \longrightarrow X$ una curva suave. Definimos la longitud de α como:

$$\operatorname{long}(\alpha) := \int_0^1 \|\dot{\alpha}(t)\|_{\alpha(t)}$$

Definición 1.6.5. Sea X una variedad de Finsler arcoconexa y sean $p, q \in X$ definimos la distancia entre p y q como:

$$d(p, q) = \text{ínf} \left\{\operatorname{long}(\alpha) : \alpha : [0, 1] \longrightarrow X \text{ es una curva diferenciable, } \alpha(0) = p,\ \alpha(1) = q\right\}.$$

Observación 1.6.6. Notamos que la aplicación definida así resulta una distancia en X. Si X no es arcoconexa, se tiene que la aplicación es una distancia en cada componente conexa de X.

Definición 1.6.7. Sea X una variedad de Finsler y sean $p, q \in X$ decimos que una curva suave α que une p y q es una geodésica si es minimal con respecto a su longitud, es decir si:

$$d(p, q) = \operatorname{long}(\alpha).$$

1.7. La esfera de un espacio de Hilbert

En esta sección probaremos que la esfera de radio 1 de un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ es una variedad suave y caracterizaremos sus geodésicas.

Comenzamos recordando algunas definiciones.

Definición 1.7.1. Un espacio de Hilbert es un espacio de Banach donde la norma proviene de un producto interno.

Definición 1.7.2. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo definimos la esfera de radio 1 de $\mathscr{H}$ como:

$$S(\mathscr{H}) = \{x \in \mathscr{H} : \|x\| = 1\}.$$

La idea será aplicar el Teorema de los Valores Regulares para ver que $S(\mathscr{H})$ es una subvariedad de $\mathscr{H}$. Necesitamos primero hacer algunas observaciones.

Observación 1.7.3. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo, sea $x \in \mathscr{H}$ fijo entonces las aplicaciónes:

$$\langle -, x\rangle : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$$

$$\langle x, -\rangle : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$$

son $\mathbb{R}$-lineales, por lo cual son suaves.

Observación 1.7.4. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo, entonces las aplicaciones de $\mathscr{H}$ en $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ dadas por:

$$x \longrightarrow \langle -, x\rangle$$

$$x \longrightarrow \langle x, -\rangle$$

son $\mathbb{R}$-lineales, por lo cual son suaves.

Observación 1.7.5. Si $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert complejo, con cierto producto interno $\langle -, -\rangle$ entonces se tiene que $\langle x, y\rangle_{\mathrm{Re}} := \mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)$ define un producto interno real en $\mathscr{H}$. Donde Re denota la parte real.

Teorema 1.7.6. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo entonces $S(\mathscr{H})$ es una subvariedad regular y se tiene que:

$$T_x S(\mathscr{H}) \simeq < x >^{\perp}$$

donde este espacio denota el ortogonal a x con el producto interno real inducido como en la observación anterior.

Demostración. Para empezar notamos que al ser $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ podemos escribir:

$$S(\mathscr{H}) = \{x \in \mathscr{H} : \langle x, x\rangle = 1\}.$$

Ahora consideramos la aplicación $f : \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \langle x, x\rangle$. Notamos que la misma igualdad $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ nos dice que es continua. Veamos que es suave. Para ello notamos que:

$$\frac{\|\langle x+h, x+h\rangle - \langle x, x\rangle - \langle x, h\rangle - \langle h, x\rangle\|}{\|h\|} = \frac{\|\langle h, h\rangle\|}{\|h\|} = \|h\|$$

que tiende a cero cuando la norma de h tiende a cero. Luego como $T_x(h) = \langle x, h\rangle + \langle h, x\rangle$ es $\mathbb{R}$-lineal, se tiene que la aplicación es diferenciable y $Df_x(h) = \langle x, h\rangle + \langle h, x\rangle$. Además se tiene que, por la Observación 1.7.4, Df resulta suave ya que es suma de funciones suaves. Luego f es suave.

Notamos que además para cada $x \in S(\mathscr{H})$ se tiene que $Df_x : \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un epimorfismo ya que es un funcional y es no nulo pues $Df_x(x) = 2\|x\|^2 = 2$.

Por otro lado notamos que $\ker(Df_x)$ debe ser cerrado en $\mathscr{H}$ por la continuidad de Df_x, luego parte a $\mathscr{H}$. Usando el Teorema de los Valores Regulares (Teorema 1.5.2) se concluye que $S(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{H}$ es una subvariedad regular y además se tiene que:

$$T_xS(\mathscr{H}) \simeq \ker(Df_x).$$

Para finalizar la demostración, caractericemos a $\ker(Df_x)$. Notamos que $Df_x(h) = 0$ si y solo si

$$0 = \langle x, h\rangle + \langle h, x\rangle = 2\mathrm{Re}(\langle x, h\rangle).$$

Ahora por la observación previa tenemos que el núcleo es el ortogonal a x con el producto interno inducido por la parte real. □

El siguiente resultado caracteriza las geodésicas en $S(\mathscr{H})$, considerando la estructura de Finsler inducida por el producto interno que surge de tomar la parte real del producto interno del espacio de Hilbert en cuestión. Ver Observación 1.7.5.

Teorema 1.7.7. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo. Sea $k \in \mathbb{R}$ y sean $p, q \in S(\mathscr{H})$ con $\langle p, q\rangle = 0$. Entonces la curva $\alpha(t) = \cos(kt)p + \mathrm{sen}(kt)q$ es una curva que cumple $\alpha(0) = p$ y es geodésica, en el sentido que es minimal uniendo a p con $\alpha(t)$ para valores de t que cumplen $d(p, \alpha(t)) \leq \pi$. Mas aún si $d(p, \alpha(t)) < \pi$ entonces es la única cumpliendo la condición $\mathrm{long}(\alpha) = |tk|$.

Demostración. La demostración de este teorema puede encontrarse en el Capítulo 5 del libro de Lee [12]. □

1.8. Operadores acotados en un espacio de Hilbert

En esta sección utilizaremos todos los resultados vistos en las secciones previas de este capítulo. La idea será estudiar el conjunto de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ donde $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert. Veremos que este conjunto tiene estructura de álgebra de Banach (mas aún de C^*-algebra), y en particular que es una variedad de Finsler.

Estudiaremos además las subvariedades de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$, a excepción de las grassmanianas que serán estudiadas en el segundo capítulo de este trabajo. Las demostraciones no desarrolladas en esta sección pueden encontrarse en cualquier libro de análisis funcional, como por ejemplo el libro de Reed y Simon [13].

Definición 1.8.1. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo. Definimos $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ como el conjunto de operadores lineales y acotados de $\mathscr{H}$ en si mismo.

Observación 1.8.2. Si en $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ consideramos la operación composición se tiene que $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ posee estructura de álgebra de Banach con unidad, y en particular es una variedad de Finsler.

Definición 1.8.3. Si $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert complejo y $T \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$, definimos el adjunto de T, al que notaremos T^* como el único elemento de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ que para todo $x, y \in \mathscr{H}$ cumple:

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$

donde $\langle -, -\rangle$ es el producto interno de $\mathscr{H}$.

Proposición 1.8.4. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ entonces se tiene que:

i) $(a^*)^* = a$.

ii) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$.

iii) $(a+b)^* = a^* + b^*$.

iv) $(ab)^* = b^* a^*$.

v) $\|a^* a\| = \|a\|^2$.

Observación 1.8.5. La Proposición 1.8.4 junto con la Observación 1.8.2, nos dicen que $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ posee estructura de C^* álgebra (ver Apéndice A). Por lo cual se tiene además que, para $a \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$, $\|a\| = \|a^*\|$ resultando así la aplicación $a \longrightarrow a^*$ una isometría.

Tenemos entonces que $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ es una variedad de Finsler. Estudiaremos a continuación algunas subvariedades de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$.

Definición 1.8.6. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo decimos que:

i) $x \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ es hermitiano si $x^* = x$.

ii) $x \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ es antihermitiano si $x^* = -x$.

iii) $x \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ es unitario si $xx^* = x^*x = id_{\mathscr{H}}$.

iv) $x \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ es inversible si existe $y \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ de forma que $xy = yx = id_{\mathscr{H}}$.

Notación 1.8.7. Si $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert complejo, denotamos:

i) $\mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ al conjunto de operadores hermitianos.

ii) $\mathcal{B}_{ah}(\mathscr{H})$ al conjunto de operadores antihermitianos.

iii) $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ o simplemente $\mathscr{U}$ al conjunto de operadores unitarios.

iv) $\mathrm{GL}(\mathscr{H})$ al conjunto de operadores inversibles.

Observación 1.8.8. Notamos que, en base a que nuestra definición de diferenciabilidad es sobre $\mathbb{R}$, cuando pensamos a $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ como una variedad de Banach, lo estamos pensando como un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$. En tal caso, usando la Proposición 1.8.4, es inmediato que $\mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ y $\mathcal{B}_{ah}(\mathscr{H})$ son subespacios de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ y luego son subvariedades suaves y sus tangentes están identificados con si mismos.

A continuación queremos ver que $\mathrm{GL}(\mathscr{H})$ es una subvariedad suave de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$. No podemos utilizar el argumento previo ya que claramente no es un subespacio. Lo que veremos es que $\mathrm{GL}(\mathscr{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathscr{H})$ es abierto. Para ello comenzamos con algunas observaciones.

Observación 1.8.9. Si $x \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ y existe $y \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ tal que $xy = yx = id_{\mathscr{H}}$ entonces puede verse que este y es único y lo notamos $y = x^{-1}$.

Observación 1.8.10. Si $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert complejo, se tiene que $\mathrm{GL}(\mathscr{H})$ es un grupo con la composición. Se tiene además que $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Lema 1.8.11. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo. Si $x \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ y $\|x - 1\| < 1$ entonces $x \in \mathrm{GL}(\mathscr{H})$ y se tiene que:

$$x^{-1} = \sum_{n \geq 0} (1 - x)^n.$$

Demostración. En virtud de que $\|1 - x\| < 1$ se sigue que:

$$\sum_{n \geq 0} \|(1 - x)^n\| \leq \sum_{n \geq 0} \|1 - x\|^n < \infty$$

lo cual me dice que la serie del enunciado converge absolutamente y por lo tanto es convergente y define un elemento de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$.

Calculamos entonces:

$$x \sum_{n \geq 0} (1 - x)^n = (1 - (1 - x)) \sum_{n \geq 0} (1 - x)^n = \sum_{n \geq 0} (1 - x)^n - \sum_{n \geq 0} (1 - x)^{n+1} = (1 - x)^0 = 1$$

analogamente se prueba que $\left(\sum_{n \geq 0} (1 - x)^n \right) x = 1$, lo cual concluye la demostración. □

Proposición 1.8.12. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert entonces $\mathrm{GL}(\mathscr{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathscr{H})$ es un abierto. En particular es una subvariedad y su tangente en cada punto esta identificado con $\mathcal{B}(\mathscr{H})$.

Demostración. Veamos que $\mathrm{GL}(\mathscr{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathscr{H})$ es un abierto. Sea $x \in \mathrm{GL}(\mathscr{H})$, veamos que si $y \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ es tal que $\|x - y\| < \|x^{-1}\|^{-1}$ entonces $y \in \mathrm{GL}(\mathscr{H})$.

Observamos que:

$$\|1 - x^{-1}y\| = \|x^{-1}(x-y)\| \leq \|x^{-1}\|\|x-y\| < 1$$

luego por el Lema 1.8.11 se sigue que $x^{-1}y \in \mathrm{GL}(\mathscr{H})$ y como $\mathrm{GL}(\mathscr{H})$ es un grupo, tenemos que $y = xx^{-1}y \in \mathrm{GL}(\mathscr{H})$ lo cual finaliza la demostración. $\square$

A continuación estudiaremos el conjnto $\mathscr{U}(\mathscr{H}) = \mathscr{U}$. Empezamos nuevamente con algunas observaciones.

Observación 1.8.13. Si $u \in \mathscr{U}$ tenemos que $uu^* = u^*u = 1$ con lo cual u es inversible y $u^* = u^{-1}$. Esto nos da una contención $\mathscr{U} \subseteq \mathrm{GL}(\mathscr{H})$. Además $\mathscr{U}$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}(\mathscr{H})$.

Observación 1.8.14. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo, consideramos la función $f : \mathcal{B}(\mathscr{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H})$ dada por $f(x) = x^*$. Entonces, al ser una aplicación $\mathbb{R}$-lineal, se tiene que f es suave y $Df_x = f$ cualquiera sea $x \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$.

Lema 1.8.15. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo entonces

$$\mathscr{U} = \{u \in GL(\mathscr{H}) : u^*u = 1\}.$$

Demostración. $\subseteq$) Es consecuencia de la Observación 1.8.13.

$\supseteq$) Sea $u \in \mathrm{GL}(\mathscr{H})$ que cumple $u^*u = 1$ luego como es inversible se sigue que existe $y \in GL(\mathscr{H})$ tal que $uy = yu = 1$. Entonces se tiene que $yu = u^*u$ y nuevamente por ser u inversible se sigue que $y = u^*$ por lo que $u \in \mathscr{U}$. $\square$

Lema 1.8.16. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo, para cada $u \in \mathscr{U}$ consideramos:

I) $\mathcal{B}^u_h(\mathscr{H}) = \{x \in \mathcal{B}(\mathscr{H}) : (u^*x)^* = u^*x\}$.

II) $\mathcal{B}^u_{ah}(\mathscr{H}) = \{x \in \mathcal{B}(\mathscr{H}) : (u^*x)^* = -u^*x\}$.

Se tiene entoces que $\mathcal{B}^u_h(\mathscr{H})$ y $\mathcal{B}^u_{ah}(\mathscr{H})$ son subespacios reales de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ y además

$$\mathcal{B}^u_h(\mathscr{H}) \oplus \mathcal{B}^u_{ah}(\mathscr{H}) = \mathcal{B}(\mathscr{H}).$$

Demostración. Veamos que $\mathcal{B}^u_h(\mathscr{H})$ es un subespacio de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ para $\mathcal{B}^u_{ah}(\mathscr{H})$ es análogo.

Notamos que es claro que $0 \in \mathcal{B}^u_h(\mathscr{H})$, y que si $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces, dado $x \in B^u_h(\mathscr{H})$ se tiene que:

$$(u^*(\lambda x))^* = \lambda(u^*x)^* = \lambda u^*x = u^*(\lambda x)$$

de donde se sigue que $\lambda x \in \mathcal{B}^u_h(\mathscr{H})$.

Para ver que es cerrado por sumas, consideramos $x, y \in \mathcal{B}^u_h(\mathscr{H})$ y tenemos que:

$$(u^*(x+y))^* = (u^*x)^* + (u^*y)^* = u^*x + u^*y = u^*(x+y)$$

de donde se concluye que $x + y \in \mathcal{B}_h^u(\mathscr{H})$.

Para ver la suma directa, primero observamos que si $x \in \mathcal{B}_h^u(\mathscr{H}) \cap \mathcal{B}_{ah}^u(\mathscr{H})$ entonces se tiene que $u^*x = -u^*x$. Usando que u^* es inversible se sigue que $x = 0$. Con lo cual están en suma directa.

Ahora, para ver que la suma es todo el espacio basta con observar que:

$$x + ux^*u \in \mathcal{B}_h^u(\mathscr{H})$$

$$x - ux^*u \in \mathcal{B}_{ah}^u(\mathscr{H})$$

y se tiene la escritura:

$$x = \frac{x + ux^*u}{2} + \frac{x - ux^*u}{2}.$$

□

Observación 1.8.17. Notamos que con la notación del Lema 1.8.16 y tomando $u = 1$ tenemos que:

$$\mathcal{B}_h(\mathscr{H}) \oplus \mathcal{B}_{ah}(\mathscr{H}) = \mathcal{B}(\mathscr{H}).$$

Observación 1.8.18. Con la notación del Lema 1.8.16 se tiene que $\mathcal{B}_h^u(\mathscr{H})$ y $\mathcal{B}_{ah}^u(\mathscr{H})$ resultan subvariedades suaves de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ ya que son $\mathbb{R}$-subespacios.

Teorema 1.8.19. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo, entonces $\mathscr{U} \subseteq \mathcal{B}(\mathscr{H})$ es una subvariedad suave y además $T_u\mathscr{U} \simeq \mathcal{B}_{ah}^u(\mathscr{H})$

Demostración. Comenzamos recordando que por el Lema 1.8.15:

$$\mathscr{U} = \{u \in \mathrm{GL}(\mathscr{H}) : u^*u = 1\}$$

luego la idea será considerar la función $f : \mathrm{GL}(\mathscr{H}) \longrightarrow \mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ dada por $f(x) = x^*x$ y aplicar el Teorema de los Valores Regulares.

Primero veamos que la función f es efectivamente diferenciable y calculemos su diferencial. Notamos que, como $\mathrm{GL}(\mathscr{H})$ es un abierto de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ y $\mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ es un espacio de Banach no hace falta tomar cartas.

Afirmamos que $Df_x(h) = h^*x + x^*h$. Notar que es claro que es un operador lineal y continuo, veamos que cumple la definición de diferencial en el sentido de Fréchet.

$$\begin{aligned}\frac{\|f(x+h) - f(x) - Df_x(h)\|}{\|h\|} &= \frac{\|(x+h)^*(x+h) - x^*x - (h^*x + x^*h)\|}{\|h\|} \\ &= \frac{\|h^*h\|}{\|h\|} = \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\| \underset{\|h\|\to 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Esto me dice que la aplicación f es diferenciable y $Df_x(h) = h^*x + x^*h$. Reescribiendo tenemos que

$$Df_{(\cdot)} = R_{(\cdot)} \circ g + L_{g(\cdot)}$$

donde g es la aplicación $g(a) = a^*$ que es suave por la Observación 1.8.14. Luego Df es composición de aplicaciones suaves y por lo cual es suave. Se concluye que f es suave.

Además $Df_x : \mathcal{B}(\mathscr{H}) \longrightarrow \mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ es sobreyectiva para cualquier $u \in \mathscr{U}$, ya que si $y \in \mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ se tiene que:

$$Df_x\left(\frac{uy}{2}\right) = \frac{(uy)^*u + u^*(uy)}{2} = \frac{y + y^*}{2} = y$$

con lo cual f es una sumersión en cualquier $u \in \mathscr{U} = f^{-1}(1)$.

Por otra parte, tenemos que si $u \in \mathscr{U}$ se tiene que $\ker(Df_u) = \mathcal{B}^u_{ah}(\mathscr{H})$ que parte a $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ por el Lema 1.8.16. Luego se sigue por el Teorema de los Valores Regulares (Teorema 1.5.2) que $\mathscr{U} = f^{-1}(1)$ resulta una subvariedad de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ y ademas se tiene $T_u\mathscr{U} \simeq \mathcal{B}^u_{ah}(\mathscr{H})$. □

A continuación enunciaremos algunos resultados sobre el grupo unitario $\mathscr{U}(\mathscr{H})$.

Proposición 1.8.20. Dado $x \in \mathcal{B}_{ah}(\mathscr{H})$ si consideramos $u = e^x$, entonces u es unitario.

Demostración. Simplemente calculamos:

$$(e^x)^* = e^{x^*} = e^{-x}$$

y como $(e^x)^{-1} = e^{-x}$ se sigue el resultado. □

La siguiente proposición nos muestra que todo unitario puede ser escrito como en la proposición anterior. La prueba es consecuencia de la existencia de un logaritmo boreliano para todo operador unitario. Ver Teorema 5.2.9 del libro de Kadison y Ringrose [10].

Proposición 1.8.21. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de hilbert complejo y $u \in \mathscr{U}(\mathscr{H})$ entonces existe $x \in \mathcal{B}_{ah}(\mathscr{H})$ de forma que $u = e^x$ y $\|x\| \leq \pi$.

Proposición 1.8.22. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo. Entonces $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ es arcoconexo.

Demostración. Por la Proposición 1.8.21 se tiene que dado $u \in \mathscr{U}$ existe $x \in \mathcal{B}_{ah}(\mathscr{H})$ de forma que $u = e^x$. Ahora para cada $t \in [0, 1]$ tenemos que $tx \in \mathcal{B}_{ah}$ por ser este un subespacio real y luego por la Proposición 1.8.20 tenemos que la curva $\alpha(t) = e^{tx}$ es una curva en $\mathscr{U}$. Como es continua, $\alpha(0) = id_{\mathscr{H}}$ y $\alpha(1) = u$ se sigue el resultado. □

Proposición 1.8.23. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sea $\mathscr{U}$ su grupo de unitarios. Sean $u, v \in \mathscr{U}$ y sea $x \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ tal que $\|x\| \leq \pi$ y $e^x = u^*v$ (cuya existencia está garantizada por la Proposición 1.8.21). Enonces la curva $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathscr{U}$ dada por:

$$\gamma(t) = ue^{tx}$$

es geodésica minimizante uniendo a u y v.

Demostración. La demostración de este resultado se puede encontrar en [3]. □

Capítulo 2

Estructura diferenciable de las Grassmanianas

En el capítulo anterior estudiamos algunas subvariedades de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ para $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo. Este capítulo estará dedicado en su totalidad a las grassmanianas de un espacio de Hilbert. Trabajaremos en este contexto y en el capítulo siguiente veremos como se pueden generalizar los resultados obtenidos a las grassmanianas de una C^*-álgebra. Las demostraciones de esta sección estan basadas en el trabajo de Andruchow [1].

2.1. Definiciones básicas y notación

Definición 2.1.1. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo, definimos las grassmanianas de $\mathscr{H}$ como:

$$Gr(\mathscr{H}) = \{S \subseteq \mathscr{H} : S \text{ es un subespacio cerrado}\}.$$

Esta definición, si bien es adecuada, no permite en principio un manejo fácil de los objetos ni tampoco pensar a $Gr(\mathscr{H})$ dentro de una variedad diferenciable conocida.

En esta Tesis, pensaremos a las grassmanianas como operadores identificando un subespacio cerrado S con p_S la proyección ortogonal al subespacio o bien con ϵ_S la simetría respecto ese subespacio. La siguiente proposición muestra como es esta identificación.

Proposición 2.1.2. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert. Se tiene que los siguientes conjuntos están en biyección:

I) $\{S \subseteq \mathscr{H} : S \text{ es un subespacio cerrado}\}$.

II) $\{p \in \mathcal{B}(\mathscr{H}) : p^2 = p^* = p\}$.

III) $\{\epsilon \in \mathcal{B}(\mathscr{H}) : \epsilon^* = \epsilon^{-1} = \epsilon\}$.

Demostración. Para ver la biyección entre I) y II) simplemente recordamos que si $S \subseteq \mathscr{H}$ es un subespacio cerrado, entonces S admite complemento ortogonal, al cual notamos $S^\perp$ y se tiene que $\mathscr{H} = S \oplus S^\perp$. Si $x \in \mathscr{H}$, entonces se puede escribir $x = x_S + x_{S^\perp}$ de forma única y definiendo $p_S(x) = x_S$ se tiene una proyección ortogonal que posee rango S; análogamente si p es una proyección ortogonal y miramos su rango obtenemos un subespacio de $\mathscr{H}$ cerrado, lo cual nos da así la primer biyección.

Para ver la segunda biyección, si tenemos p un proyector ortogonal podemos considerar $\epsilon_p = 2p - 1$ obteniendo una simetría y si tenemos ϵ una simetría podemos mirar $p = \frac{\epsilon+1}{2}$ obteniendo una proyección ortogonal y esto define claramente una biyección. □

Observación 2.1.3. La proposición previa nos permite pensar a las grassmanianas como proyecciónes o como simetrías, en particular nos permite pensar que las grassmanianas estas contenidas en los operadores acotados de $\mathscr{H}$, es decir, $Gr(\mathscr{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathscr{H})$.

En lo siguiente nos referiremos a las grassmanianas como proyectores ortogonales o subespacios cerrados de forma indistinta según sea mas conveniente.

Notación 2.1.4. Si S es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ notamos p_S a la proyección ortogonal sobre subespacio y ϵ_S a la simetría respecto al subespacio. Si $p \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ es una proyección ortogonal notamos ϵ_p a la simetría asociada.

Notación 2.1.5. Si $p \in Gr(\mathscr{H})$ notamos $p^\perp = 1 - p$.

Observación 2.1.6. Si $p \in Gr(\mathscr{H})$, entonces:

I) $\operatorname{rg}(p) = \ker(p^\perp)$.

II) $\ker(p) = \operatorname{rg}(p^\perp)$.

Proposición 2.1.7. Sean $p, q \in Gr(H)$, entonces:

$$\| p - q \| \leqslant 1.$$

Demostración. Primero notamos que como q es un proyector ortogonal tenemos una descomposición $\mathscr{H} = \operatorname{rg}(q) \oplus \operatorname{rg}(q)^\perp$ luego si tomamos un elemento $z \in \mathscr{H}$ tenemos que se escribe de forma única como $z = x + y$ donde $x \in \operatorname{rg}(q)$ e $y \in \operatorname{rg}(q)^\perp$

Ahora tenemos que

$$\| p - q \| = \| p - (p + p^\perp)q \| = \| p(1-q) + p^\perp q \| = \| pq^\perp + p^\perp q \| ,$$

evaluando en z, usando que $y = q^\perp(z)$, $x = q(z)$ y la ortogonalidad se sigue que:

$$\begin{aligned} \| (p-q)(z) \|^2 &= \| (pq^\perp + p^\perp q)(z) \|^2 = \| p(y) + p^\perp(x) \|^2 = \| p(y) \|^2 + \| p^\perp(x) \|^2 \\ &\leq \| p \|^2 \| y \|^2 + \| p^\perp \|^2 \| x \|^2 = \| y \|^2 + \| x \|^2 = \| x + y \|^2 = \| z \|^2 . \end{aligned}$$

Luego concluímos que $\| p - q \| \leq 1$. □

2.2. La acción del grupo unitario sobre las grassmanianas

En esta sección estudiaremos como actúa a izquierda el grupo de los operadores unitarios $\mathscr{U} = \mathscr{U}(\mathscr{H})$ sobre las grassmanianas. Dicha acción queda definida en la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\mathscr{U}$ su grupo de unitarios entonces se tiene una acción a izquierda de $\mathscr{U}$ sobre $Gr(\mathscr{H})$ dada por:

$$u \cdot p = upu^*$$

para $p \in Gr(\mathscr{H})$ y $u \in \mathscr{U}$.

Demostración. Observamos que si $p \in Gr(\mathscr{H})$ y $u \in \mathscr{U}$ entonces $upu^* \in Gr(\mathscr{H})$ ya que

$$(upu^*)^2 = upu^*upu^* = up^2u^* = upu^*$$

y

$$(upu^*)^* = (u^*)^*p^*u^* = upu^*.$$

Solo resta verificar que se satisfacen los axiomas de acción de un grupo sobre un conjunto.

I) $1 \cdot p = 1p1^* = p$.

II) $u \cdot (v \cdot p) = u \cdot (vpv^*) = u(vpv^*)u^* = uvp(uv)^* = (uv) \cdot p$.

□

La siguiente proposición tiene como fin entender cómo se interpreta la acción en términos de subespacios.

Proposición 2.2.2. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sea $S \subseteq \mathscr{H}$ un subespacio cerrado entonces:

$$p_{u(S)} = up_su^*.$$

Demostración. Para ver esto hay que recordar que por la proposición anterior up_Su^* es una proyección ortogonal, luego basta ver que $\mathrm{rg}(up_Su^*) = u(S)$, es decir que poseen el mismo rango.

$\subseteq$) Sea $y \in \mathrm{rg}(up_Su^*)$ luego existe $x \in \mathscr{H}$ de forma que $y = (up_Su^*)(x) = u(p_Su^*(x))$ como $p_S(u^*(x)) \in S$ se sigue que $y \in u(S)$.

$\supseteq$) Sea $y \in u(S)$ luego existe $x \in S$ con $u(x) = y$. Por otra parte como u^* es biyectiva se tiene que existe $z \in \mathscr{H}$ de forma que $x = u^*(z)$ luego se tiene que:

$$(up_Su^*)(z) = up_S(x) = u(x) = y$$

de donde se concluye que $y \in \mathrm{rg}(up_Su^*)$. □

Observación 2.2.3. Por la Observación 2.1.3, podemos pensar a $Gr(\mathscr{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathscr{H})$ luego, si bien no es un subespacio vectorial, es un subespacio métrico. El lema que se desarrolla a continuación nos permitirá entender la acción de $\mathscr{U}$ sobre $Gr(\mathscr{H})$ en términos de transitividad.

Lema 2.2.4. La acción definida en la Proposición 2.2.1 de $\mathscr{U}$ en $Gr(\mathscr{H})$ es localmente transitiva, es decir: dados $p, q \in Gr(\mathscr{H})$ tales que $\|p-q\| < 1$ entonces existe $u \in \mathscr{U}$ de forma que $q = upu^*$.

Demostración. Antes de comenzar la demostración observemos que en general es falso que la acción sea transitiva, puesto que en dimensión finita tenemos que dos elementos están en la misma órbita si y solo si poseen la misma dimensión como subespacios. Luego claramente dos elementos con distinta dimensión no pueden estar en la misma órbita y la acción no resulta en tal caso transitiva.

Demostremos entonces que es localmente transtiva. Para esto consideremos p y q como en el enunciado y el operador

$$s = qp + p^{\perp}q^{\perp}$$

Lo primero será ver que s es inversible. Esto será consecuencia de ver que s^*s y ss^* lo son, pues a partir de esto se deduce que s posee invesa a derecha y a izquerda y por ende es inversible. Haremos la cuenta para s^*s ya que la otra es análoga. Notamos que:

$$s^*s = (pq + q^{\perp}p^{\perp})(qp + p^{\perp}q^{\perp)} = pqp + p^{\perp}q^{\perp}p^{\perp},$$

y luego

$$1 - s^*s = p + p^{\perp} - s^*s = p - pqp + p^{\perp} - p^{\perp}q^{\perp}p^{\perp}.$$

Consideremos $z \in \mathscr{H}$. Lo podemos descomponer como $z = x + y$ donde $x \in \mathrm{rg}(p)$ e $y \in \mathrm{rg}(p^{\perp})$. Operando tenemos:

$$\begin{aligned}
\|(1-s^*s)(z)\|^2 &= \|(p-pqp)(x) + (p^{\perp}q^{\perp}p^{\perp})(y)\|^2 \\
&= \|(p-pqp)(x)\|^2 + \|p^{\perp}q^{\perp}p^{\perp})(y)\|^2 \\
&= \|(p(p-q)p)(x)\|^2 + \|(p^{\perp}(p^{\perp}-q^{\perp})p^{\perp})(y)\|^2 \\
&\leq (\|p\|\|p-q\|\|p\|\|x\|)^2 + (\|p^{\perp}\|\|p^{\perp}-q^{\perp}\|\|p^{\perp}\|\|y\|)^2 \\
&= \|p-q\|^2\|x\|^2 + \|p^{\perp}-q^{\perp}\|^2\|y\|^2 = \|p-q\|^2\|x\|^2 + \|p-q\|^2\|y\|^2 \\
&= \|p-q\|^2(\|x\|^2\|y\|^2) = \|p-q\|^2\|z\|^2
\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\|(1-s^*s)(z)\| \leq \|p-q\|\|z\| \; \forall z \in \mathscr{H}$$

y en tal caso

$$\|(1-s^*s)\| < 1.$$

Concluímos así que el operador s^*s es inversible por el Lema 1.8.11. Por lo observado previamente se sigue que s es inversible.

Ahora si miramos la descomposición polar de s (Proposición A.4.12) tenemos que $s = u|s|$ donde u es unitario y $|s| = \sqrt{s^*s}$. Como vimos que s es inversible, se sigue que cero no pertenece a su espectro y rescurriendo al Teorema Espectral (Teorema A.3.7) se sigue que cero no pertenece al espectro de $|s|$ y por lo tanto es inversible.

Con lo cual: $u = s|s|^{-1}$

Notamos que:

$$sp = (qp + q^{\perp}p^{\perp})p = qp = q(qp + q^{\perp}p^{\perp}) = qs.$$

De donde se deduce que $sp = qs$ y a partir de esto, usando propiedades de la involución, se tiene que $ps^* = s^*q$ de donde se sigue que s^*s conmuta con p. Ahora aplicando nuevamente el Teorema Espectral se sigue que, $|s|$ conmuta con p y luego $|s|^{-1}$ tambien lo hace.

Concluimos que

$$up = s|s|^{-1}p = sp|s|^{-1} = qs|s|^{-1} = qu$$

y en tal caso

$$upu^* = q.$$

□

Proposición 2.2.5. Dado $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo y dados $p, q \in Gr(\mathscr{H})$ se tiene que son equivalentes:

I) p y q pertenecen a la misma componente conexa.

II) Existe $u \in \mathscr{U}$ de forma que $q = upu^*$.

Demostración. II)$\longrightarrow$I) Consideramos la función $f : \mathcal{B}(\mathscr{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H})$ dada por:

$$f(x) = xpx^*$$

para $p \in Gr(\mathscr{H})$ fijo. Esta función es continua pues es composición de funciones $\mathbb{R}$-lineales y de los operadores multiplicar a derecha y a izquierda que como vimos en la Observación 1.2.6 son suaves. Luego restringiendo y correstringiendo obtenemos que:

$$f : \mathscr{U} \longrightarrow Gr(\mathscr{H})$$

resulta continua. Como $\mathscr{U}$ es conexo por la Proposición 1.8.22 se sigue que $f(\mathscr{U})$ es conexo. Luego si $q = upu^*$ para $u \in \mathscr{U}$ se tiene que q debe estar en la misma componente conexa que p.

I) $\longrightarrow$ II) En la implicación anterior vimos que el conjunto

$$C = \{upu^* : u \in \mathscr{U}\}$$

es conexo, lo que debemos ver es que es toda la componente conexa de p.

Notamos que es claramente no vacío pues $p \in C$, ahora si tomamos $p_1 \in C$ por el lema previo tenemos que los elementos de $Gr(\mathscr{H})$ a distancia menor a 1 deben ser conjugados de p_1 que a su vez es conjugado de p y luego son conjugados de p, esto nos dice que C es abierto en la componente conexa. Por otro lado si p_1 está en la misma componente conexa que p y no es conjugado, los elementos a distancia menor a 1 de p_1 no pueden ser conjugados de p ya que sino p_1 sería conjugado de p, esto nos dice que C es cerrado en la componente conexa, lo cual concluye la demostración. □

Notación 2.2.6. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sea $p \in Gr(\mathscr{H})$, notamos $Gr(\mathscr{H})_p$ a la componente conexa de p sobre $Gr(\mathscr{H})$.

Observación 2.2.7. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sea $Gr(\mathscr{H})_p$ la componente conexa de $p \in Gr(\mathscr{H})$. Por la Proposición 2.2.5 tenemos que:

$$Gr(\mathscr{H})_p = \{upu^* : u \in \mathscr{U}\}$$

además por el Lema 2.2.4 la acción definida en la Proposición 2.2.1 resulta transitiva cuando la miramos sobre $Gr(\mathscr{H})_p$.

2.3. La estructura diferenciable de $Gr(\mathscr{H})_p$

En esta sección probaremos que dado $p \in Gr(\mathscr{H})$ se tiene que $Gr(\mathscr{H})_p$ es una subvariedad de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$, y estudiaremos su espacio tangente. Para poder hacer esto, debemos comenzar primero con entender a los elementos de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ como matrices de 2×2 cuya representación depende de un subespacio cerrado.

Definición 2.3.1. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sea $p \in Gr(\mathscr{H})$. Definimos M_p como el conjunto de matrices de 2×2 de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

donde $a_{11} \in \mathcal{B}(\mathrm{rg}(p))$, $a_{12} \in \mathcal{B}(\ker(p), \mathrm{rg}(p))$, $a_{21} \in \mathcal{B}(\mathrm{rg}(p), \ker(p))$ y $a_{22} \in \mathcal{B}(\ker(p))$.

Observación 2.3.2. En la escritura de la Definición 2.3.1, cada coordenada a_{ij} se puede pensar como un elemento de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$, simplemente extendiendo a a_{ij} por cero en el complemento ortogonal de su conjunto de partida. Si lo pensamos de esta forma tiene sentido sumar las coordenadas de la matriz.

A continuación la idea es darle a M_p estructura de C^* álgebra de forma de tener un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ y M_p.

Proposición 2.3.3. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sea $p \in Gr(\mathscr{H})$. Entonces la función $F : \mathcal{B}(\mathscr{H}) \longrightarrow M_p$ dada por:

$$F(a) = \begin{pmatrix} pap & pap^{\perp} \\ p^{\perp}ap & p^{\perp}ap^{\perp} \end{pmatrix}$$

es una biyección.

Demostración. Primero notamos que está bien definida pues cada coordenada se restringe bien al espacio adecuado. A modo de ejemplo, la primer coordenada: pap, es una aplicación que cumple $\mathrm{rg}(pap) \subseteq \mathrm{rg}(p)$ y se anula en $(\mathrm{rg}(p))^{\perp} = \ker(p)$, por lo cual podemos pensarla como una aplicación de $\mathrm{rg}(p)$ en si mismo y resulta claramente una aplicación continua.

Para ver que es una biyección, contruyamos su inversa. Sea $G : M_p \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H})$, la función dada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}$$

notamos que la Observación 2.3.2 nos da la buena definición de G. Veamos que es la inversa de F.

Sea $a \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ calculamos:

$$\begin{aligned} G(F(a)) &= pap + pap^{\perp} + p^{\perp}ap + p^{\perp}ap^{\perp} = pa(p + p^{\perp}) + p^{\perp}a(p + p^{\perp}) \\ &= pa + p^{\perp}a = (p + p^{\perp})a = a. \end{aligned}$$

Sea $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_p$ calculamos:

$$F(G(a)) = \begin{pmatrix} pS_ap & pS_ap^{\perp} \\ p^{\perp}S_ap & p^{\perp}S_ap^{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

en donde $S_a = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}$. Notar que la última igualdad se sigue mirando el dominio y codominio de cada una de las coordenadas y cómo las extendimos para pensarlas como operadores en $\mathcal{B}(\mathscr{H})$. Para la primer coordenada tenemos que:

$$pa_{12}p = 0$$

pues el conjunto de partida de a_{12} es $\ker(p)$ y $pa_{22}p = 0$ por la misma razón. Por otro lado $pa_{21}p = 0$ pues el conjunto de llegada de a_{21} es $\ker(p)$ y $pa_{11}p = a_{11}$ pues $a_{11} \in \mathcal{B}(\mathrm{rg}(p))$. De donde se concluye que:

$$a_{11} = pS_ap$$

análogamente para las otras coordenadas. Lo cual concluye la demostración. □

Observación 2.3.4. Notamos que la biyección de la Proposición 2.3.3 nos permite darle a M_p una estructura de C^* algebra a partir de la estructra de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$, resultando ser F un isomorfismo isométrico entre ambas. En la siguiente proposición veremos como es esta estructura.

Observación 2.3.5. En base a la Proposición 2.3.3 si fijamos $p \in Gr(\mathscr{H})$ podemos escribir a p y $p^\perp$ cómo matrices de la siguiente forma:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad p^\perp = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposición 2.3.6. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sea $p \in Gr(\mathscr{H})$. Sean $a, b \in M_p$ dados por $a = (a_{ij})_{ij}$ y $b = (b_{ij})_{ij}$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}$. A partir de la estructura de C^*-algebra dada por la biyección F de la Proposición 2.3.3, se tiene que:

I) $a + b = (a_{ij} + b_{ij})_{ij}$.

II) $\lambda a = (\lambda a_{ij})_{ij}$.

III) $a.b = (c_{ij})_{ij}$ donde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j}$.

IV) $a^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}^t$.

V) $\|a\| = \|a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}\|$.

Demostración. Para hacer esta demostración lo que nos conviene es pensar a los elementos de M_p de la forma:

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pxp & pxp^\perp \\ p^\perp xp & p^\perp xp^\perp \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pyp & pyp^\perp \\ p^\perp yp & p^\perp yp^\perp \end{pmatrix}$$

donde $x, y \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ y se tiene $a = F(x)$, $b = F(y)$.

I) Usamos que $a + b = F(x) + F(y) = F(x + y)$ y luego:

$$\begin{aligned} F(x+y) &= \begin{pmatrix} p(x+y)p & p(x+y)p^\perp \\ p^\perp(x+y)p & p^\perp(x+y)p^\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pxp + pyp & pxp^\perp + pyp^\perp \\ p^\perp xp + p^\perp yp & p^\perp xp^\perp + p^\perp yp^\perp \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

II) Usamos que $\lambda a = \lambda F(x) = F(\lambda x)$ y luego:

$$\begin{aligned} F(\lambda x) &= \begin{pmatrix} p\lambda xp & p\lambda xp^\perp \\ p^\perp \lambda xp & p^\perp \lambda xp^\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda pxp & \lambda pxp^\perp \\ \lambda p^\perp xp & \lambda p^\perp xp^\perp \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

III) Para esta parte tenemos que, calculando el producto de matrices ordinario resulta:

$$\begin{pmatrix} pxp & pxp^\perp \\ p^\perp xp & p^\perp xp^\perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} pyp & pyp^\perp \\ p^\perp yp & p^\perp yp^\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pxyp & pxyp^\perp \\ p^\perp xyp & p^\perp xyp^\perp \end{pmatrix}.$$

luego usando que $ab = F(x)F(y) = F(xy)$ tenemos:

$$\begin{aligned} F(xy) &= \begin{pmatrix} pxp & pxp^\perp \\ p^\perp xp & p^\perp xp^\perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} pyp & pyp^\perp \\ p^\perp yp & p^\perp yp^\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{21} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{21} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar.

IV) Usamos que $a^* = (F(x))^* = F(x^*)$ y tenemos que:

$$\begin{aligned} F(x^*) &= \begin{pmatrix} px^*p & px^*p^\perp \\ p^\perp x^*p & p^\perp x^*p^\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (pxp)^* & (p^\perp xp)^* \\ (pxp^\perp)^* & (p^\perp xp^\perp)^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (pxp)^* & (pxp^\perp)^* \\ (p^\perp xp)^* & (p^\perp xp^\perp)^* \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}^t. \end{aligned}$$

V) Para este último item notamos que $\|a\| = \|F^{-1}(a)\| = \|a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}\|$.

□

En el contexto que estamos trabajando, los elementos son operadores de un espacio de Hilbert. La siguiente proposición nos mostrará como evaluar un elemento de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$, pensado como matriz, en un elemento de $\mathscr{H}$.

Proposición 2.3.7. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sea $p \in Gr(\mathscr{H})$. Sea $a \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ y sea $z \in \mathscr{H}$. Si $z = x + y$ es la escritura única de z con $x \in \operatorname{rg}(p)$ e $y \in \ker(p)$ y $a(z) = \widehat{x} + \widehat{y}$ es la escritura única de $a(z)$ con $\widehat{x} \in \operatorname{rg}(p)$ e $\widehat{y} \in \ker(p)$ entonces se tiene que:

$$\begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pap & pap^\perp \\ p^\perp ap & p^\perp ap^\perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Demostración. Para la demostración simplemente calculamos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} pap & pap^\perp \\ p^\perp ap & p^\perp ap^\perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} pap(x) + pap^\perp(y) \\ p^\perp ap(x) + p^\perp ap^\perp(y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} pa(x) + pa(y) \\ p^\perp a(x) + p^\perp a(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa(z) \\ p^\perp a(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Notamos que la proposición previa nos muestra como estas matrices pueden ser pensadas cómo operadores en $\mathrm{rg}(p) \times \ker(p)$. En base a eso damos la siguiente definición:

Definición 2.3.8. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y sea $p \in Gr(\mathscr{H})$. Para $x \in \mathrm{rg}(p)$ e $y \in \ker(p)$ definimos:

$$\|(x,y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}.$$

Observación 2.3.9. Notamos que el ítem II) de la Proposición 2.3.6, nos explicita cómo calcular la norma de un elemento $a \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ a partir de su escritura cómo matriz. La siguiente proposición nos va a mostrar como efectivamente esta norma es la norma usual de matrices de 2×2.

Proposición 2.3.10. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, sea $p \in Gr(\mathscr{H})$ y sea $a \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ cuya representación en M_p es:

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

entonces se tiene que

$$\|a\| = \sup_{\|(x,y)\|=1} \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$$

para $x \in \mathcal{B}(\mathrm{rg}(p))$ e $y \in \mathcal{B}(\ker(p))$.

Demostración. Para la demostración observamos que todo $z \in \mathscr{H}$ se puede descomponer de forma única como $z = x + y$, donde $x \in \mathrm{rg}(p)$ e $y \in \ker(p)$. Con esta descomposición se tiene además que

$$\|z\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$$

por la Proposición 2.3.7 probamos que si $a(z) = \widehat{x} + \widehat{y}$, donde $\widehat{x} \in rg(p)$ e $\widehat{y} \in ker(p)$, entonces se tiene:

$$\begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

luego se deduce que:

$$\left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\|\widehat{x}\|^2 + \|\widehat{y}\|^2} = \|a(z)\|$$

como $\|a\| = \sup\limits_{\|z\|=1} \|a(z)\|$, se sigue el resultado. □

Observación 2.3.11. Dado que fijado $p \in Gr(\mathscr{H})$ existe un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ y M_p. En adelante, de ser necesario presentaremos a los elementos de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ como matrices.

Definición 2.3.12. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sea $p \in Gr(\mathscr{H})$ fijo.

I) Decimos que $a \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ es diagonal respecto a p si $a = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$.

II) Decimos que $a \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ es codiagonal respecto a p si $a = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$.

Notación 2.3.13. Dado $p \in Gr(\mathscr{H})$, notamos $\mathscr{D}_p$ al conjunto de todos los operadores diagonales respecto a p y $\mathscr{C}_p$ al conjunto de todos los operadores codiagonales respecto a p.

Observación 2.3.14. Notamos que dado $p \in Gr(\mathscr{H})$ se tiene que $\mathscr{D}_p \subseteq \mathcal{B}(\mathscr{H})$ y $\mathscr{C}_p \subseteq \mathcal{B}(\mathscr{H})$ son subespacios complejos y cerrados.

Observación 2.3.15. Si tenemos $a \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ y $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es su representación respecto a cierto $p \in Gr(\mathscr{H})$, entonces se tiene que a se puede escribir de forma única como $a = a_d + a_c$ donde:

$$a_c = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \qquad a_d = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

a_d y a_c se llaman la parte diagonal y la parte codiagonal de a respecto a p. Esto nos dice además que $\mathcal{B}(\mathscr{H}) = \mathscr{D}_p \oplus \mathscr{C}_p$.

Notación 2.3.16. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $p \in Gr(\mathscr{H})$, notamos:

I) $\mathscr{C}_{p,h} = \mathcal{B}_h(\mathscr{H}) \cap \mathscr{C}_p$.

II) $\mathscr{C}_{p,ah} = \mathcal{B}_{ah}(\mathscr{H}) \cap \mathscr{C}_p$.

III) $\mathscr{D}_{p,h} = \mathcal{B}_h(\mathscr{H}) \cap \mathscr{D}_p$.

IV) $\mathscr{D}_{p,ah} = \mathcal{B}_{ah}(\mathscr{H}) \cap \mathscr{D}_p$.

Observación 2.3.17. Notamos que $\mathscr{C}_{p,h}$, $\mathscr{C}_{p,ah}$, $\mathscr{D}_{p,h}$ y $\mathscr{D}_{p,ah}$ son $\mathbb{R}$-subespacios de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ y son cerrados, por ser intersección de subespacios cerrados. Además parten al espacio $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ ya que se tiene: $\mathcal{B}(\mathscr{H}) = \mathscr{C}_{p,h} \oplus \mathscr{C}_{p,ah} \oplus \mathscr{D}_{p,h} \oplus \mathscr{D}_{p,ah}$.

Proposición 2.3.18. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sean $p, q \in Gr(\mathscr{H})$ tales que existe $u \in \mathscr{U}$ de forma que $q = upu^*$ (es decir q y p están en la misma componente conexa). Entonces se tiene que la aplicación $f(x) = uxu^*$ induce isomorfismos:

I) $\mathscr{C}_{p,h} \simeq \mathscr{C}_{q,h}$.

II) $\mathscr{C}_{p,ah} \simeq \mathscr{C}_{q,ah}$.

III) $\mathscr{D}_{p,h} \simeq \mathscr{D}_{q,h}$.

IV) $\mathscr{D}_{p,ah} \simeq \mathscr{D}_{q,ah}$.

Demostración. Probaremos el primer ítem ya que los demás son idénticos. Notamos que la aplicación $f : \mathcal{B}(\mathscr{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H})$ es suave por ser $\mathbb{R}$-lineal. Luego es suave al restringir a subespacios por ser variedades. Además notamos que tenemos una inversa global $f^{-1}(x) = u^*xu$ que por las mismas razones es diferenciable. Luego lo único que hay que ver es que $f(\mathscr{C}_{p,h}) \subseteq \mathscr{C}_{q,h}$ y que $f^{-1}(\mathscr{C}_{q,h}) \subseteq \mathscr{C}_{p,h}$. Como son análogas veamos la primera.

Sea $x \in \mathscr{C}_{p,h}$ luego tenemos que $pxp = 0$ y $p^\perp xp^\perp = 0$. Por otro lado, se tiene:

$$qf(x)q = (upu^*)(uxu^*)(upu^*) = upxpu^* = 0$$

y

$$q^\perp f(x)q^\perp = (up^\perp u^*)(uxu^*)(up^\perp u^*) = up^\perp xp^\perp u^* = 0$$

se sigue luego que $f(x) \in \mathscr{C}_{q,h}$. □

En lo que sigue, nos enfocaremos en probar que para cada $p \in Gr(\mathscr{H})$, el subconjunto $Gr(\mathscr{H})_p \subseteq \mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ es una subvariedad suave. Para ello necesitaremos algunos lemas.

Lema 2.3.19. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sea $p \in Gr(\mathscr{H})$. Sea $a \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ representado en M_p por la matriz:

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

luego se tiene que:

I) a es hermitiano si y solo si a_{11} es hermitiano, a_{22} es hermitiano y $a_{12}^* = a_{21}$.

II) a es antihermitiano si y solo si a_{11} es antihermitiano, a_{22} es antihermitiano y $a_{12}^* = -a_{21}$.

Demostración. La demostración de ambos ítems es análoga. veamos el ítem I).

Por la Proposición 2.3.6 tenemos que a es hermitiano si y solo si:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

igualando coordenada a coordenada se sigue el resultado. □

Lema 2.3.20. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sea $p \in Gr(\mathscr{H})$ entonces el mapa $\phi : \mathcal{B}_h(\mathscr{H}) \longrightarrow \mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ dado por:

$$\phi(a) = a_d + e^{\widehat{a_c}} p e^{-\widehat{a_c}} \quad \text{donde} \quad \widehat{a_c} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} \\ a_{12}^* & 0 \end{pmatrix}$$

es diferenciable y $\phi_{*,0} = 1_{\mathcal{B}_h(\mathscr{H})}$.

Demostración. Primero veamos que el mapa está bien definido. Por el Lema 2.3.19 es claro que si $a \in \mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ entonces se tiene que a_d debe ser hermitiano. Por otro lado tenemos que el mismo lema implica que $\widehat{a_c}$ es antihermitiano, luego $(e^{\widehat{a_c}})^* = e^{-\widehat{a_c}}$ de donde se sigue que $e^{\widehat{a_c}} p e^{-\widehat{a_c}}$ es hermitiano, resultando $\phi(a)$ hermitiano por ser suma de hermitianos.

Se tiene además que ϕ es una función suave por ser suma, producto y composición de aplicaciones suaves. Veamos entonces que $\phi_{*,0} = 1_{\mathcal{B}_h(\mathscr{H})}$.

Para ello tomemos un elemento $X \in T_0(\mathcal{B}_h(\mathscr{H})) = \mathcal{B}_h(\mathscr{H})$. Luego existe una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ que cumple $\alpha(0) = 0$ y $\dot{\alpha}(0) = X$. De hecho, la curva $\alpha(t) = tX$ cumple esto. Calculemos entonces:

$$\begin{aligned}\phi_{*,0}(X) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi \circ \alpha) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(tX_d + e^{t\widehat{X}_c} p e^{-t\widehat{X}_c}\right) \\ &= X_d + \left(e^{t\widehat{X}_c}\widehat{X}_c p e^{-t\widehat{X}_c} - e^{t\widehat{X}_c} p e^{-t\widehat{X}_c}\widehat{X}_c\right)\Big|_{t=0} = X_d + \widehat{X}_c\, p - p\, \widehat{X}_c\end{aligned}$$

reescribiendo esta última expresión en término de matrices obtenemos:

$$X_d + \widehat{X}_c\, p - p\, \widehat{X}_c = \begin{pmatrix} 0 & -x_{12} \\ x_{12}^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -x_{12} \\ x_{12}^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{12}^* & 0 \end{pmatrix} = X_c$$

de donde se concluye que:

$$\phi_{*,0}(X) = X_d + X_c = X$$

por lo tanto $\phi_{*,0} = 1_{\mathcal{B}_h(\mathscr{H})}$. □

Observación 2.3.21. Notar que es claro que la aplicación de $\mathscr{C}_{p,h}$ en $\mathscr{C}_{p,ah}$ dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b^* & 0 \end{pmatrix}$$

es una isometría. Lo probaremos en un contexto mas general en el Lema 3.3.3.

Lema 2.3.22. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y sea $p \in Gr(\mathscr{H})$. Si $z \in \mathscr{C}_p$ entonces:

$$e^z \epsilon_p e^{-z} = e^{2z}\epsilon_p.$$

Demostración. Notamos primero que es fácil ver que la condición de ser p-codiagonal es equivalente a:

$$\epsilon_p z = -z\epsilon_p.$$

Luego inductivamente se puede ver que $\epsilon_p z^k = (-1)^k z^k \epsilon_p$, se sigue que:

$$\begin{aligned}e^z \epsilon_p e^{-z} &= e^z \epsilon_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k!}\right) = e^z\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \epsilon_p z^k}{k!}\right) \\ &= e^z\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k} z^k \epsilon_p}{k!}\right) = e^z\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\epsilon_p = e^z e^z \epsilon_p = e^{2z}\epsilon_p.\end{aligned}$$

□

Lema 2.3.23. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo, sea $p \in Gr(\mathscr{H})$ y sea ϕ el mapa definido en el Lema 2.3.20. Entonces:

$$\phi\left(\mathscr{C}_{p,h} \cap \left\{\|z\| < \frac{\pi}{2}\right\}\right) = Gr(\mathscr{H}) \cap \{\|p-q\| < 1\}.$$

Demostración. Notamos primero que es claro que $\phi(\mathscr{C}_{p,h}) \subseteq Gr(\mathscr{H})$.

Sea $z \in \mathscr{C}_{p,h}$, tenemos:

$$\begin{aligned}\|\phi(z)-p\| &= \|e^{\widehat{z}_c} p e^{-\widehat{z}_c} - p\| = \|e^{\widehat{z}_c}\left(\frac{\epsilon_p - 1}{2}\right)e^{-\widehat{z}_c} - \left(\frac{\epsilon_p-1}{2}\right)\| \\ &= \frac{1}{2}\|e^{\widehat{z}_c}\epsilon_p e^{-\widehat{z}_c} - \epsilon_p\| = \frac{1}{2}\|(e^{2\widehat{z}_c}-1)\epsilon_p\| = \frac{1}{2}\|e^{2\widehat{z}_c}-1\|\end{aligned}$$

donde en la cuarta igualdad usamos el lema anterior y en la última que ϵ_p es una isometría.

Por el Teorema A.3.7 tenemos que, si notamos como σ al espectro,

$$\sigma(e^{2\widehat{z}_c}-1) = e^{2\sigma(\widehat{z}_c)} - 1 = \{e^{2ib}-1 : ib \in \sigma(z)\}$$

donde en la segunda igualdad usamos que como $\widehat{z}_c$ es antihermitiano, por la Proposición A.2.6, su espectro debe ser puramente imaginario.

Como $e^{2\widehat{z}_c} - 1$ es claramente normal usando nuevamente la Proposición A.2.6 tenemos que su norma coincide con su radio espectral, luego:

$$\begin{aligned}\|e^{2\widehat{z}_c}-1\| &= \text{máx}\{|e^{2ib}-1| : ib \in \sigma(\widehat{z}_c)\} \\ &= \text{máx}\{|\cos(2b) + i\,\text{sen}(2b) - 1| : ib \in \sigma(\widehat{z}_c)\} \\ &= \text{máx}\{\sqrt{(\cos(2b)-1)^2 + (\text{sen}(2b))^2} : ib \in \sigma(\widehat{z}_c)\} \\ &= \text{máx}\{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos(2b)} : b \in \sigma(-i\widehat{z}_c)\}.\end{aligned}$$

Notamos que si $\|z\| = \|\widehat{z}_c\| < \frac{\pi}{2}$ (el igual es consecuencia de la Observación 2.3.21), usando que la aplicación $\sqrt{1-\cos(2b)}$ es creciente en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y que $\widehat{z}_c$ es normal se sigue que:

$$\|\phi(z)-p\| = \frac{1}{2}\|e^{2\widehat{z}_c}-1\| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{1-\cos(2\|\widehat{z}_c\|)} < 1$$

lo cual prueba la primer inclusión.

Para ver la otra inclusión tomamos $q \in Gr(\mathscr{H})$ de forma que $\|q-p\| < 1$, notamos que esto implica que:

$$\|\epsilon_q\epsilon_p - 1\| = \|(\epsilon_q - \epsilon_p)\epsilon_p\| = \|\epsilon_q - \epsilon_p\| = \|2q-1-(2p-1)\| = 2\|q-p\| < 2$$

luego $\sigma(\epsilon_q\epsilon_p - 1) \subseteq B_2(0)$ de donde se deduce que $\sigma(\epsilon_q\epsilon_p) \subseteq B_2(1)$, como $\epsilon_q\epsilon_p$ es un operador unitario, por la Proposición A.2.6 tenemos que su espectro está contenido en la circunferencia compleja de radio 1, pero como a su vez esta contenido en $B_2(1)$ se tiene que:

$$\sigma(\epsilon_q\epsilon_p) \subseteq S^1 \quad \text{y} \quad -1 \notin \sigma(\epsilon_q\epsilon_p)$$

luego mirando la rama principal del logaritmo complejo dada por:

$$\log(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(x-1)^k}{k}$$

la misma es continua en el espectro de $\epsilon_q\epsilon_p$ y usando el Teorema A.3.7 (Teorema Espectral) queda bien definido el elemento $\log(\epsilon_q\epsilon_p)$.

Consideremos $w = \frac{1}{2}\log(\epsilon_q\epsilon_p)$.

Primero notamos que si $\lambda \in \sigma(w)$ entonces $\lambda = \frac{1}{2}\log(t)$ para t en el espectro de $\epsilon_q\epsilon_p$. Luego se tiene que:

$$|\lambda| = \frac{1}{2}|\log(t)| = \frac{1}{2}\sqrt{(\log(|t|))^2 + (\mathrm{Arg}(t))^2} = \frac{1}{2}|\mathrm{Arg}(t)| < \frac{\pi}{2}.$$

Para ver que w es p-codiagonal veamos que $\epsilon_p w = -w\epsilon_p$. Para ello hagamos algunas observaciones previas.

Observamos que a partir de la igualdad $\log(x^{-1}) = -\log(x)$ se sigue que

$$\log(\epsilon_p\epsilon_q) = -\log(\epsilon_q\epsilon_p)$$

y es fácil ver inductivamente que

$$\epsilon_p(\epsilon_q\epsilon_p)^k = (\epsilon_p\epsilon_q)^k\epsilon_p$$

Luego usando las observaciones y desarrollando la serie de potencias se sigue que:

$$\epsilon_p\frac{1}{2}\log(\epsilon_q\epsilon_p) = \frac{1}{2}\log(\epsilon_p\epsilon_q)\epsilon_p = -\frac{1}{2}\log(\epsilon_q\epsilon_p)\epsilon_p$$

que es lo que queríamos ver.

Luego $w \in \mathscr{C}_{p,ah}$ y además $\|w\| < \frac{\pi}{2}$. Veamos que $e^w p e^{-w} = q$, o equivalentemente que $e^w\epsilon_p e^{-w} = \epsilon_q$.

Para ello usando el lema previo tenemos que:

$$e^w\epsilon_p e^{-w} = e^{2w}\epsilon_p = \epsilon_q\epsilon_p\epsilon_p = \epsilon_q.$$

Para finalizar la demostración de esta inclusión simplemente hay que observar que por la Observación 2.3.21 existe un único $z \in \mathscr{C}_{p,h}$ que satisface $w = \widehat{z}_c$ y además posee la misma norma que w entonces, por lo probado previamente se sigue que $\phi(z) = q$. $\square$

Teorema 2.3.24. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo, entonces para $p \in Gr(\mathscr{H})$ se tiene que $Gr(\mathscr{H})_p \subseteq \mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ es una subvariedad suave.

Demostración. Primero observamos que $Gr(\mathscr{H}) \cap \{\|p-q\| < 1\} = Gr(\mathscr{H})_p$ por el Lema 2.2.4.

Consideramos ϕ como en el Lema 2.3.20, como $\phi_{*,0} = 1_{\mathcal{B}(\mathscr{H})}$ por el Teorema de la Función Inversa (Teorema 1.1.22) se tiene que existen $V_1, W_1 \subseteq \mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ abiertos de forma que $0 \in V_1$, $p \in W_1$ y $\phi : V_1 \longrightarrow W_1$ es un difeomorfismo.

Consideramos

$$V = V_1 \cap \left\{\|z\| < \frac{\pi}{2}\right\} \cap \phi^{-1}(\{\|p-q\| < 1\})$$

$$W = W_1 \cap \phi^{-1}\left(\left\{\|z\| < \frac{\pi}{2}\right\}\right) \cap \{\|p-q\| < 1\}$$

ahora notamos que $\phi^{-1} : V \longrightarrow W$ es un difeomorfismo, en particular es una carta de $\mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ en p, ahora por el Lema 2.3.23 tenemos que induce un homeomorfismo:

$$\phi^{-1} : W \cap Gr(\mathscr{H})_p \longrightarrow V \cap \mathscr{C}_{p,h}$$

obteniendo así una carta adaptada a $Gr(\mathscr{H})$ en p. Para concluir que es una subvariedad simplemente hay que observar que como consecuencia de la Observación 2.3.17 el subespacio $\mathscr{C}_{p,h}$ es complementado en $\mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ y que si bien tenemos que el subespacio depende del punto p, por la Proposición 2.3.18 podemos modelar a $Gr(\mathscr{H})_p$ con $\mathscr{C}_p$ vía los isomorfismos de dicha proposición.

□

Observación 2.3.25. En el contexto del teorema anterior, como $\mathcal{B}_h(\mathscr{H}) \subseteq \mathcal{B}(\mathscr{H})$ es una subvariedad por ser un subespacio real, se sigue que $Gr(\mathscr{H})_p \subseteq \mathcal{B}(\mathscr{H})$ es una subvariedad.

Observación 2.3.26. Notamos que $Gr(\mathscr{H})$ no es en si una subvariedad de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$, sino que cada componente conexa de $Gr(\mathscr{H})$ lo es. Por el Lema 2.2.4 y la Proposición 2.2.5, tenemos que la distancia entre las componentes conexas es exactamente 1. De aquí en adelante trataremos a $Gr(\mathscr{H})$ como una subvariedad, siempre pensando que estamos trabajando en alguna componente conexa.

Proposición 2.3.27. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y sea $p \in Gr(\mathscr{H})$. Entonces se tiene que $T_p(Gr(\mathscr{H})) = \mathscr{C}_{p,h}$

Demostración. Para la demostración observamos que en el Teorema 2.3.24 vimos que las grassmanianas de un espacio de Hilbert son una subvariedad de $\mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ y luego su tangente será un subespacio de $\mathcal{B}_h(\mathscr{H})$.

$\subseteq$): Tomamos $v \in T_p(Gr(\mathscr{H}))$, y lo pensamos como un vector en $\mathcal{B}_h(\mathscr{H})$. Sea $\alpha : (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow Gr(\mathscr{H})$ una curva que satisface $\alpha(0) = p$ y $\dot\alpha(0) = v$. Como la curva está contenida en las grassmanianas tenemos la identidad:

$$\alpha(t) = (\alpha(t))^2$$

diferenciando en $t = 0$ dicha identidad se sigue:

$$v = vp + pv$$

multiplicando a derecha y a izquierda por p obtenemos la igualdad $pvp = pvp + pvp$ la cual implica que $pvp = 0$. Por otro lado se tiene que:

$$p^\perp v p^\perp = p^\perp(vp + pv)p^\perp = 0$$

como vimos que $pvp = p^\perp v p^\perp = 0$ se sigue que v es p-codiagonal.

$\supseteq$) Sea $v \in \mathscr{C}_{p,h}$, su escritura como matriz respecto a p será entonces de la forma:

$$v = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideramos $\widehat{v} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a^* & 0 \end{pmatrix}$ y la curva $\alpha : (\epsilon,\epsilon) \longrightarrow Gr(\mathscr{H})$ dada por:

$$\alpha(t) = e^{t\widehat{v}} p e^{-t\widehat{v}}$$

su buena definición es consecuencia de ser $\widehat{v}$ antihermitiano. Se tiene además que α es una curva suave y cumple $\alpha(0) = p$. Calculando $\dot\alpha(0)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot\alpha(0) = \widehat{v}p - p\widehat{v} &= \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a^* & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a^* & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a^* & 0 \end{pmatrix} = v\end{aligned}$$

concluímos entonces que $v \in T_p(Gr(\mathscr{H}))$. $\square$

Observación 2.3.28. Ya le hemos dado una estructura diferenciable a $Gr(\mathscr{H})$ como subvariedad de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ y hemos caracterizado a su espacio tangente como $\mathscr{C}_{p,h}$. Este espacio resulta un subespacio real de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ y luego podemos darle la estructura de Finsler dada por la norma de operadores.

Capítulo 3

La estructura de Finsler de $Gr(\mathscr{A})$

En el capítulo previo probamos que $Gr(\mathscr{H})$ es una subvariedad suave de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ y su espacio tangente es $T_p(Gr(\mathscr{H})) = \mathscr{C}_{p,h}$. En este capítulo generalizaremos los resultados a una C^*-álgebra arbitraria y estudiaremos la estructura de Finsler de $Gr(\mathscr{A})$.

3.1. Las grassmanianas de una C^*-álgebra

Comenzamos definiendo las grassmanianas de una C^*-álgebra de la siguiente forma:

$$Gr(\mathscr{A}) := \left\{p \in \mathscr{A} : p^2 = p^* = p\right\}.$$

Si bien está definición coincide con la definición de las grassmanianas de un espacio de Hilbert, en el contexto de una C^*-álgebra los resultados de los capítulos previos difieren un poco. Esta sección está destinada a hacer esas aclaraciones.

Observación 3.1.1. En el Capítulo 1 probamos que el grupo de unitarios de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ para $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo era conexo. Este resultado no se puede generalizar a C^*-álgebras arbitrarias. Las C^*-álgebras de Calkin, que surgen de hacer el cociente de los operadores acotados de un espacio de Hilbert separable por los operadores compactos, son un ejemplo de esta situación. Dichas C^*-álgebras son llamadas álgebras de Calkin, ya que el mismo las estudió en [6].

Observación 3.1.2. Para generalizar la Proposición 1.8.23 al contexto de una C^*-álgebra debemos restringirnos a u, v unitarios en $\mathscr{A}$ de forma que $\|u - v\| < 2$ ya que en ese caso v^*u posee un logaritmo analítico. Y de esta forma podremos construír una geodésica uniendo u y v como en la proposición citada.

Los resultados del Capítulo 2 sobre las grassmanianas de un espacio de Hilbert se generalizan al contexto de una C^*-álgebra teniendo en cuenta que, como consecuencia de que el grupo unitario no es conexo, debemos definir para $p \in Gr(\mathscr{A})$:

$$Gr(\mathscr{A})_p = \{upu^* : u \text{ es unitario}\}$$

y que no necesariamente coincide con la componente conexa de p.

Notación 3.1.3. En general, para aliviar la notación, escribiremos $Gr(\mathscr{A})$ pero estaremos siempre pensando en que estamos trabajando en la órbita de un elemento.

3.2. La acción de $\mathscr{U}(\mathscr{A})$ sobre $Gr(\mathscr{A})$

Si bien en la Sección 2.2 del Capítulo 2 estudiamos esta acción, en esta sección volveremos a recapitular los resultados obtenidos, caracterizaremos los grupos de isotropía y probaremos que la acción es suave. Esto último no lo podíamos hacer previamente ya que no le habíamos dado una estructura diferenciable a las grassmanianas.

Proposición 3.2.1. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra y sea la acción $\Phi : \mathscr{U} \times Gr(\mathscr{A}) \longrightarrow Gr(\mathscr{A})$ dada por:

$$\Phi(u,p) = upu^*$$

se define el grupo de isotropía de un elemento p como $I_p = \{u \in \mathscr{U} : upu^* = p\}$. Entonces se tiene que:

I) La acción es transitiva.

II) Dado $p \in Gr(\mathscr{A})$, $I_p = \mathscr{D}_p \cap \mathscr{U}$.

III) La acción es suave.

Demostración. Notamos que la transitividad de la acción es consecuencia de la misma definición de las grassmanianas.

Para ver II), tenemos que probar que para $u \in \mathscr{U}$ vale:

$$upu^* = p \Longleftrightarrow p^\perp up = pup^\perp = 0.$$

$\Longrightarrow$) Veamos que $p^\perp up = 0$.

$$p^\perp up = 0 \Longleftrightarrow p^\perp upu^* = 0 \Longleftrightarrow p^\perp p = 0$$

como la última igualdad es válida se sigue que $p^\perp up = 0$. Para ver que $pup^\perp = 0$, notamos que $pup^\perp = pu(1-p) = pu - pup$ luego se sigue que:

$$pup^\perp = 0 \Longleftrightarrow (pu - pup)u^* = 0 \Longleftrightarrow p - pupu^* = 0 \Longleftrightarrow p = p^2$$

como la última igualdad es válida, se sigue el resultado.

$\Longleftarrow$) Comenzamos notando que las igualdades $p^\perp up = 0$ y $pup^\perp = 0$ se pueden reescribir como $up = pup$ y $pu = pup$ usando que $p^\perp = 1 - p$. Luego se tiene que $up = pu$ y multiplicando a derecha por u^* se obtiene la igualdad deseada.

Veamos III). Para ello notamos que la acción la podemos extender como

$$\Phi : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$$

la suavidad de esta extensión es consecuencia de la Observación 1.2.9, la Observación 1.8.14 y de poder escribir a Φ como la composición de los mapas:

$$(u, p) \longrightarrow (up, u) \longrightarrow (up, u^*) \longrightarrow upu^*.$$

La suavidad de la acción restringida es consecuencia de que $\mathscr{U}$ y $Gr(\mathscr{H})$ son subvariedades. □

Corolario 3.2.2. Como consecuecia de la proposición anterior se tiene que las siguientes aplicaciones son suaves:

I) $L_u : Gr(\mathscr{A}) \longrightarrow Gr(\mathscr{A})$ dada por $L_u(p) = \Phi(u, p)$ para $u \in \mathscr{U}$ fijo.

II) $L_{(\cdot)}(p) : \mathscr{U} \longrightarrow Gr(\mathscr{A})$ dada por $L_{(\cdot)}(p)(u) = L_u(p)$, para $p \in Gr(\mathscr{A})$ fijo.

3.3. La estructura de Finsler de $Gr(\mathscr{A})$

En esta sección daremos otra presentación del tangente de las grassmanianas de una C^*-álgebra. Si bien ya tenemos caracterizado a este espacio tangente, esta nueva forma de presentarlo será clave a la hora de presentar los resultados de esta tesis y a la hora de darle a $Gr(\mathscr{A})$ una estructura de variedad de Finsler.

Comenzamos probando un resultado general para espacios de Banach.

Proposición 3.3.1. Sea $(E, |\cdot|)$ un espacio de Banach y sea $F \subseteq E$ un subespacio cerrado. Entonces el espacio vectorial E/F posee estructura de espacio de Banach con la norma dada por:

$$\|[x]\| = \inf_{b \in F} |x - b|.$$

Demostración. La buena definición es consecuencia del hecho de que $[x] = [y]$ si y solo si existe $b_0 \in F$ tal que $x = y + b_0$. Veamos que es una norma. Es claro que $\|[x]\| \geq 0$ y que $\|0\| = 0$. Supongamos entonces que $\|[x]\| = 0$ luego para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $b_m \in F$ de forma que:

$$|x - b_n| < \frac{1}{n}$$

esto me dice que $(b_n)_n \subseteq F$ es una sucesión que converge a x con lo cual, por ser F cerrado, se tiene $x \in F$ y luego $[x] = 0$.

Veamos que $\|\lambda[x]\| = |\lambda|\|[x]\|$ para $\lambda \in k$ (donde $k = \mathbb{R}$ ó $k = \mathbb{C}$). Para $\lambda = 0$ es claro. Supongamos entonces que $\lambda \neq 0$. En tal caso se tiene que:

$$\begin{aligned}\|\lambda[x]\| &= \inf_{b \in F} |\lambda x - b| = \inf_{b \in F} |\lambda(x - \lambda^{-1} b)| = \inf_{b \in F} |\lambda||x - \lambda^{-1} b| = |\lambda| \inf_{b \in F} |x - \lambda^{-1} b| \\ &= |\lambda| \inf_{b \in F} |x - b| = |\lambda|\|[x]\|.\end{aligned}$$

Por último veamos la desigualdad triangular. Sean $x, y \in E$, entonces:

$$\begin{aligned}\|[x]+[y]\| &= \|[x+y]\| = \inf_{b\in F}|x+y-b| = \inf_{b_1,b_2\in F}|x-b_1+y-b_2| \\ &\leq \inf_{b_1,b_2\in F}\{|x-b_1|+|y-b_2|\} = \inf_{b\in F}|x-b| + \inf_{b\in F}|y-b| = \|[x]\|+\|[y]\|.\end{aligned}$$

Concluímos que $(E/F, \|\cdot\|)$ resulta un espacio normado. Además es claro que la proyección al cociente es una aplicación continua pues $\|[z]\| \leq \|z\|$.

Veamos que es de Banach, para eso recordamos que un espacio normado es de Banach si y solo si toda serie absolutamente convergente es convergente. Luego, tomemos una sucesión $([x_n])_n \subseteq E/F$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} \|[x_n]\| < \infty$ y debemos ver que converge.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ por la definición de la norma en el cociente, tenemos que existe y_n en la clase de x_n de forma que:

$$|y_n| \leq 2\|[x_n]\|$$

luego se sigue que la serie de los $(y_n)_n \subseteq E$ converge absolutamente y entonces converge a cierto $y \in E$. Luego se tiene:

$$\|[y]-[x_n]\| = \|[y]-[y_n]\| = \|[y-y_n]\|$$

que converge a cero por la continuidad de la proyección al cociente y de la norma. Hemos probado que toda serie que converge absolutamente en E/F es convergente y luego E/F es de Banach. $\square$

Aplicando la proposición anterior al contexto de C^*-álgebras obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.3.2. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra entonces el cociente $\mathscr{A}_{ah}/\mathscr{D}_{p,ah}$ posee estructura de espacio de Banach.

Demostración. La demostración es una consecuencia inmediata de la proposición anterior, puesto que $\mathscr{A}_{ah}$ es una álgebra de Banach real (en particular tiene estructura de espacio de Banach) y $\mathscr{D}_{p,ah}$ es un subespacio cerrado. $\square$

La idea es ahora ver que $\mathscr{A}_{ah}/\mathscr{D}_{p,h}$ con la métrica cociente es isométricamente isomorfo a $\mathscr{C}_{p,h}$. Para ello demostraremos primero un lema.

Lema 3.3.3. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra y sea $p \in Gr(\mathscr{A})$. Si consideramos $x, y, z \in \mathscr{A}$ cuya representación en matrices de 2×2 con respecto a p está dada por:

$$x = \begin{pmatrix} a & -b \\ b^* & c \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix} \qquad z = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b^* & 0 \end{pmatrix}$$

entonces se tiene que $\|z\| = \|y\| = \|b\| \leq \|x\|$.

Demostración. Comenzamos observando que tomando una representación como en el Teorema A.4.9, podemos suponer que estamos trabajando en una C^*-subálgebra de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$. Luego si probamos el resultado en $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ quedará probado en general pues la representación es isométrica.

De aquí en adelante suponemos que $p \in Gr(\mathscr{H})$, y luego $\mathscr{H} = \mathrm{rg}(p) \oplus \ker(p)$.

Veamos primero que $\|b\| \leq \|x\|$ Para ello notamos que dado $\xi \in \mathrm{rg}(p)$ de norma uno se tiene que:

$$\|b^*\xi\| \leq \sqrt{\|a\xi\|^2 + \|b^*\xi\|^2} = \left\| \begin{pmatrix} a\xi \\ b^*\xi \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} a & -b \\ b^* & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{pmatrix} a & -b \\ b^* & c \end{pmatrix} \right\|$$

donde la última desigualdad se debe a que $\|(\xi, 0)\| = 1$. Como esto vale para todo ξ de norma uno se concluye que:

$$\|b\| = \|b^*\| \leq \|x\|.$$

Veamos que $\|y\| = \|b\|$ (para ver $\|z\| = \|b\|$ es análogo).

Como $\|y\|^2 = \|yy^*\| = \left\| \begin{pmatrix} bb^* & 0 \\ 0 & b^*b \end{pmatrix} \right\|$ tenemos que ver que $\left\| \begin{pmatrix} bb^* & 0 \\ 0 & b^*b \end{pmatrix} \right\| = \|b\|^2$.

$\leq$) Tomando (ξ, μ) de forma que $\|(\xi, \mu)\| = 1$ calculamos:

$$\left\| \begin{pmatrix} bb^* & 0 \\ 0 & b^*b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \mu \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} bb^*\xi \\ b^*b\mu \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\|bb^*\xi\|^2 + \|b^*b\mu\|^2} \leq \sqrt{\|bb^*\|^2\|\xi\|^2 + \|b * b\|^2\|\mu\|^2}$$
$$= \sqrt{\|b\|^4\|\xi\|^2 + \|b\|^4\|\mu\|^2} = \|b\|^2\sqrt{\|\xi\|^2 + \|\xi\|^2} = \|b\|^2$$

como vale para cualquier par (ξ, μ) que cumple $\|(\xi, \mu)\| = 1$, se sigue que tomando supremo vale y se concluye la desigualdad.

$\geq$) Para esta desigualdad tomamos $\xi \in \mathrm{rg}(p)$ de norma 1 y tenemos que:

$$\left\| \begin{pmatrix} bb^* & 0 \\ 0 & b^*b \end{pmatrix} \right\| \geq \left\| \begin{pmatrix} bb^* & 0 \\ 0 & b^*b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \|bb^*\xi\|$$

como esto vale para cualquier ξ de norma 1 se sigue que

$$\left\| \begin{pmatrix} bb^* & 0 \\ 0 & b^*b \end{pmatrix} \right\| \geq \|bb^*\| = \|b\|^2.$$

□

Proposición 3.3.4. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra y sea $p \in Gr(\mathscr{A})$. Entonces existe

$$\mathscr{A}_{ah}/\mathscr{D}_{p,ah} \xrightarrow{\phi} \mathscr{C}_{p,h}$$

isomorfismo entre espacios de Banach que además cumple:

$$\|[x]\| = \|\phi([x])\|,$$

es decir, es isométrico.

Demostración. Comenzamos definiendo una aplicación $\Phi : \mathscr{A}_{ah} \longrightarrow \mathscr{C}_{p,h}$. Sea $x \in \mathscr{A}_{ah}$ entonces se tiene que su escritura matricial respecto a p es:

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & c \end{pmatrix}$$

donde $a^* = -a$ y $c^* = -c$. Definimos entonces:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Notamos que Φ así definida es $\mathbb{R}$-lineal, continua, sobreyectiva y su núcleo consta exactamente de los elementos antihermitianos de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, es decir, los p-codiagonales.

Con lo cual existe ϕ isomorfismo lineal que hace conmutativo al diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A}_{ah} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathscr{C}_{p,h} \\ \mathscr{A}_{ah}/\mathscr{D}_{p,ah} \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

dado por $\phi([x]) = \Phi(x)$.

Veamos que es una isometría. Tomamos $[x] \in \mathscr{A}_{ah}/\mathscr{D}_{p,ah}$. Luego, como x es antihermitiano, se tiene que es de la forma:

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & c \end{pmatrix}$$

donde $a^* = -a$ y $c^* = -c$. Luego tenemos que los elementos de su clase deben coincidir en los elementos de la codiagonal. Entonces por el lema anterior tenemos un levantado mínimo dado por:

$$z = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^* & 0 \end{pmatrix}$$

donde su minimalidad está referida a realizar el mínimo de la norma cociente, es decir, $\|x\| = \|[z]\|$. Luego aplicando el lema anterior nuevamente tenemos que $\|\Phi(x)\| = \|x\|$.

Concluímos entonces:

$$\|[z]\| = \|x\| = \|\Phi(x)\| = \|\phi([x])\| = \|\phi([z])\|$$

lo cual finaliza la demostración. $\square$

Definición 3.3.5. En el contexto de la proposición anterior: para $z \in \mathscr{A}_{ah}$, si $[z] = [x]$ decimos que x es un levantado de $[z]$. Si x cumple además que $\|x\| = \|[z]\|$ decimos que x es un levantado minimal.

Observación 3.3.6. El Lema 3.3.3, nos está diciendo que en el caso particular de este cociente, siempre tenemos levantados minimales y se obtienen a partir de tomar el representante del elemento que posee ceros en la diagonal.

Observación 3.3.7. Recordamos que en la Proposición 2.3.27 caracterizamos el espacio tangente de las grassmanianas como $T_p(Gr(\mathscr{A})) = \mathscr{C}_{p,h}$. Además, como vimos en la Proposición 3.3.4, tenemos un isomorfismo isométrico:

$$\mathscr{A}_{ah}/\mathscr{D}_{p,ah} \simeq \mathscr{C}_{p,h}$$

luego como $\mathscr{C}_{p,h}$ es un subespacio real de $\mathscr{A}$, hereda la norma de la C^*-álgebra y le da a $Gr(\mathscr{A})$ una métrica de Finsler. El isomorfismo isométrico nos da otra forma de pensar esta métrica como una métrica cociente.

La siguiente proposición tiene como finalidad mostrar que la presentación del tangente de $Gr(\mathscr{A})$ como $\mathscr{A}_{ah}/\mathscr{D}_{p,ah}$ surge de forma natural al hacer actuar el grupo unitario en $Gr(\mathscr{A})$ por conjugación.

Proposición 3.3.8. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, sea $\mathscr{U}$ su grupo unitario y sea $p \in Gr(\mathscr{A})$. Entonces se tiene que la aplicación $L_{(\cdot)}(p) : \mathscr{U} \longrightarrow Gr(\mathscr{A})$ dada por

$$L_u(p) = upu^*$$

induce un isomorfismo: $\mathscr{A}_{ah}/\mathscr{D}_{p,ah} = T_1\mathscr{U}/T_1I_p \simeq T_pGr(\mathscr{A})$.

Demostración. Llamemos L a la aplicación $L_{(\cdot)}$. En el Corolario 3.2.2 vimos que esta aplicación es suave. Como $L(1) = p$ induce una transformación lineal:

$$L_{*,p} : T_1\mathscr{U} \longrightarrow T_p(Gr(\mathscr{A})).$$

Notamos que el grupo de isometría respecto a p es exactamente el grupo de unitarios de la C^*-subálgebra de operadores p-diagonales (ver Proposición 3.2.1) y que el tangente de los unitarios de una C^*-álgebra consta de los elementos antihermitianos. Luego tenemos que:

$$T_1\mathscr{U}/T_1I_p = \mathscr{A}_{ah}/\mathscr{D}_{p,ah}$$

por otro lado ya vimos la identificación $T_p(Gr(\mathscr{A})) = \mathscr{C}_{p,h}$. Lo que resta ver es que $L_{*,P}$ induce un isomorfismo entre estos espacios.

Veamos primero que $L_{*,p}$ es suryectiva.

Tomamos $v \in \mathscr{A}_{ah}$ y consideramos la curva $\alpha(t) = e^{tv}$. Notamos que $\alpha(0) = 1$ y $\dot{\alpha}(0) = v$. Luego se tiene que:

$$L_{*,p}(v) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,(L \circ \alpha) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,(e^{tv}pe^{-tv}) = vp - pv$$

Pensando a v como una matriz respecto a p tenemos que v debe ser de la forma

$$v = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & c \end{pmatrix}$$

con a y c antihermitianos. Se sigue entonces que:

$$vp - pv = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ -b^* & 0 \end{pmatrix}$$

como toda matriz codiagonal hermitiana es de esta forma obtenemos que $L_{*,p}$ es suryectiva.

Por otro lado hemos calculado $L_{*,p}(v)$ para v arbitrario, entonces tenemos que $v \in \ker(L_{*,p})$ si y solo si v es de la forma

$$v = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

con a y c antihermitianos. Como esta es la forma de todas las matrices diagonales anti hermitianas respecto a p hemos probado que el núcleo de $L_{*,p}$ es exactamente $\mathscr{D}_{p,ah}$. $\square$

Observación 3.3.9. De la proposición anterior se sigue que si $[v] \in \mathscr{A}_{ah}/\mathscr{D}_{p,ah}$ entonces la curva $\gamma(t) = e^{tv}pe^{-tv}$ es una curva que cumple $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = vp - pv$ que es justamente el elemento identificado con $[v]$ en $\mathscr{A}_{ah}/\mathscr{D}_{p,ah}$.

Observación 3.3.10. En base a la proposición anterior, de aquí en adelante haremos la identificación

$$[v] = vp - pv$$

para $[v] \in \mathscr{A}_{ah}/\mathscr{D}_{p,h}$, simplemente para evitar tecnicismos. Esta identificación justamente el isomorfismo que vimos.

En el contexto de las observaciones anteriores, se tiene que la curva $\gamma(t) = e^{tv}pe^{-tv}$ es una curva por p cuya velocidad inicial es $[v]$.

Terminamos este capítulo mostrando que la norma de Finsler de $Gr(\mathscr{A})$ es invariante por la acción del grupo.

Proposición 3.3.11. Sean $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, $u \in \mathscr{U}$, $p \in Gr(\mathscr{A})$ y $v \in T_p(Gr(\mathscr{A}))$. Entonces se tiene que:

$$\|v\|_p = \|(L_u)_{*,p}(v)\|_{upu^*}.$$

Demostración. Notamos que la aplicación $L_u(x) = uxu^*$ es lineal si la miramos como aplicación de $\mathscr{A}$ en si mismo. Luego es suave y su diferencial en cualquier punto es L_u. Si pensamos $T_p(Gr(\mathscr{A})) = \mathscr{C}_{p,h}$ tenemos que:

$$\|v\|_p = \|v\| = \|uvu^*\| = \|L_u(p)\| = \|(L_u)_{*,p}(v)\|_{upu^*}$$

de donde se concluye el resultado. $\square$

Capítulo 4

Condiciones extrínsecas de minimalidad

En el capítulo anterior presentamos el tangente de las grassmanianas de una C^*-álgebra $\mathscr{A}$ como el cociente $\mathscr{A}_{ah}/\mathscr{D}_{p,ah}$. Le dimos la norma cociente probando que el ínfimo se realizaba siempre y caracterizándolo. La idea de este capítulo es que, dados $p \in Gr(\mathscr{A})$ y $[v] \in T_pGr(\mathscr{A})$, la curva α dada por:

$$\alpha(t) = e^{tz}pe^{-tz}$$

donde z es levantado minimal de $[v]$, resulta una geodésica uniendo p con $\alpha(t)$ para t suficientemente chico con velocidad inicial $[v] = vp - pv$.

La palabra extrínseca se debe a que demostraremos primero el resultado condicionado a cierta representación de la C^*-álgebra. Comenzamos introduciendo el concepto de mapa de reducción de longitud.

4.1. Mapas de reducción de longitud

En esta sección definiremos los mapas de reducción de longitud, y veremos como a partir de representaciones de C^*-álgebras en espacios de Hilbert se pueden construír mapas que reducen longitud de las grassmanianas de una C^*-álgebra en las grassmanianas de algún espacio de Hilbert y luego de las grassmanianas de este espacio unitaria del mismo.

Los resultados y definiciones sobre C^*-álgebras que usaremos se encuentran en el Apéndice A del trabajo.

Comenzamos dando la definición de mapa de reducción de longitud.

Definición 4.1.1. Sean X e Y dos variedades de Finsler. Una aplicación suave

$$F : X \longrightarrow Y$$

se dice que reduce longitud o que es un mapa de reducción de longitud, si para cada $p \in X$ y para cada $v \in T_pX$ se tiene que:

$$\|F_{*,p}(v)\|_{F(p)} \leq \|v\|_p.$$

Proposición 4.1.2. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra y sea $\pi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H})$ una representación de $\mathscr{A}$ en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$.

Entonces π se restringe a un mapa:

$$\pi : Gr(\mathscr{A}) \longrightarrow Gr(\mathscr{H})$$

y este mapa reduce longitud.

Demostración. Primero veamos que π mapea grassmanianas en grassmanianas. Para ello, si consideramos $p \in Gr(\mathscr{A})$, notamos que por ser π morfismo de C^*-álgebras se sigue que:

$$(\pi(p))^* = \pi(p^*) = \pi(p)$$
$$(\pi(p))^2 = \pi(p^2) = \pi(p)$$

luego el mapa se restringe bien. Por otro lado, el hecho de que reduce longitud es consecuencia de la Proposición A.3.3 y de que la diferencial de π se puede pensar como la restricción de π a los espacios tangentes los cuales se pueden ver como subespacios de $\mathscr{A}$ y $\mathcal{B}(\mathscr{A})$ respectivamente. □

Observación 4.1.3. La proposición anterior nos dice como obtener un mapa de reducción de longitud de $Gr(\mathscr{A})$ en $Gr(\mathscr{H})$ a partir de una representación de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{H}$. La proposición siguiente nos muestra como una representación puede inducir mas de un mapa de reducción de longitud de $Gr(\mathscr{A})$ en $Gr(\mathscr{H})$.

Notación 4.1.4. Si $\mathscr{A}$ es una C^*-álgebra y $\pi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H})$ es una representación, notaremos $\pi(w) = \widehat{w}$ para $w \in \mathscr{A}$.

Definición 4.1.5. Sean $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, y sea $\pi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H})$ una representación de $\mathscr{A}$ en $\mathcal{B}(\mathscr{H})$. Dados $p \in Gr(\mathscr{A})$ y $q \in Gr(\mathscr{H})$ decimos que la representación es compatible en p respecto de q si para cada $u \in I_p$ se tiene que $\widehat{u} \in I_q$.

Proposición 4.1.6. Sea $\pi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H})$ una representación compatible en $p \in Gr(\mathscr{A})$ respecto de $q \in Gr(\mathscr{H})$. Entonces se tiene que la aplicación $F : Gr(\mathscr{A}) \longrightarrow Gr(\mathscr{H})$ dada por:

$$F(upu^*) = \widehat{u}q\widehat{u}^*$$

para $u \in \mathscr{U}_{\mathscr{A}}$ esta bien definida y cumple

I) Es compatible con la acción del grupo.

II) Es suave.

III) Reduce longitud.

Demostración. Primero notamos que la aplicación F está definida en todo $Gr(\mathscr{A})_p$.

Veamos la buena definición. Supongamos que $upu^* = vpv^*$ para ciertos $u, v \in \mathscr{U}_{\mathscr{A}}$. Luego tenemos que $v^*up(v^*u)^* = p$ con lo cual $v^*u \in I_p$ entonces $\widehat{v}^*\widehat{u} \in I_q$ y entonces

$$\widehat{v}^*\widehat{u}q(\widehat{v}^*\widehat{u})^* = q$$

de donde se sigue que $\widehat{u}q\widehat{u}^* = \widehat{v}q\widehat{v}^*$ es decir $F(upu^*) = F(vpv^*)$.

Para ver que es compatible con la acción del grupo, tomamos $p_1 \in Gr(\mathscr{A})$ y queremos ver que si $u \in \mathscr{U}_{\mathscr{A}}$ se tiene entonces que:

$$F(up_1u^*) = \widehat{u}F(p_1)\widehat{u}^*.$$

Como p' está en la misma órbita de p sabemos que existe $v \in \mathscr{U}_{\mathscr{A}}$ de forma que $p_1 = vpv^*$ luego:

$$F(up_1u^*) = F(uvpv^*u^*) = F(uvp(uv)^*) = \widehat{u}\widehat{v}q\widehat{v}^*\widehat{v} = \widehat{u}F(p_1)\widehat{u}^*.$$

Para ver la suavidad simplemente hay que notar que precomponiendo con la aplicación $L_{(\cdot)}(p) : \mathscr{U}_{\mathscr{A}} \longrightarrow Gr(\mathscr{A})$ obtenemos la aplicación de $\mathscr{U}_{\mathscr{A}}$ en $Gr(\mathscr{H})$ dada por:

$$u \longrightarrow \widehat{u}q\widehat{u}^*$$

que claramente es suave pues lo es como aplicación de $\mathscr{A}$ en $\mathcal{B}(\mathscr{H})$. Luego como $L_{(\cdot)}$ es una sumersión (Proposición 3.3.8) se sigue la suavidad de F.

Por último, veamos que reduce longitud. Por la invariancia de la métrica de Finsler por la acción del grupo (Proposición 3.3.11) y por ser F compatible con la acción como vimos en esta proposición, basta ver que reduce longitud en p es decir que si $[v] \in T_p(Gr(\mathscr{A}))$ entonces:

$$\|F_{*,p}([v])\|_q \leq \|[v]\|_p.$$

Tomamos $w \in \mathscr{A}_{ah}$ levantado minimal de $[v]$, es decir $\|[v]\|_p = \|w\|$.

Consideramos la curva $\alpha(t) = e^{tw}pw^{-tw}$ que como vimos en la Observación 3.3.10 es una curva en $Gr(\mathscr{A})$ con $\alpha(0) = p$ y $\dot{\alpha}(0) = [v]$. Calculamos entonces

$$\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, F(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, (e^{t\widehat{w}}qe^{-t\widehat{w}}) = \widehat{w}q - q\widehat{w}.$$

Ahora si la representación de $\widehat{w}$ respecto a q es:

$$\widehat{w} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b^* & c \end{pmatrix}$$

con a y c antihermitianos entonces la representación de $\widehat{w}q - q\widehat{w}$ resulta

$$\widehat{w}q - q\widehat{w} = \begin{pmatrix} 0 & b^* \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

luego como vimos en el Lema 3.3.3 tenemos que $\|\widehat{w}q - q\widehat{w}\| \leq \|\widehat{w}\|$ y se concluye entonces que:

$$\|F_{*,p}([v])\|_q = \|\widehat{w}q - q\widehat{w}\| \leq \|\widehat{w}\| \leq \|w\| = \|[v]\|_p.$$

$\square$

Definición 4.1.7. Sea $\pi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H})$ una representación compatible en p respecto de q. Al mapa F, definido en la proposición anterior, lo llamaremos representación grassmaniana en p sobre q. Cuando hablemos de un mapa F que es una representación grassmaniana en p respecto de q, nos estaremos refiriendo a un mapa que proviene de una representación de la C^*-álgebra $\mathscr{A}$ por mas que no hagamos referencia a dicha representación.

A continuación construiremos un mapa de reducción de longitud de las grassmanianas en $S(\mathscr{H})$, donde $S(\mathscr{H})$ es la esfera unitaria de $\mathscr{H}$. Este mapa será fundamental, ya que lo utilizaremos junto con el hecho de que conocemos las geodésicas en $S(\mathscr{H})$ para probar que ciertas curvas son geodésicas en $Gr(\mathscr{A})$.

La idea de este mapa es poder pensar a cada elemento $p \in Gr(\mathscr{H})$ como un subespacio cerrado de $\mathscr{H}$ y luego pensarlo como la reflexión unitaria de ese subespacio como vimos en la Proposición 2.1.2.

Comenzamos haciendo algunas observaciones.

Observación 4.1.8. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, entonces la aplicación

$$g : \mathcal{B}(\mathscr{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H})$$

dada por $g(q) = 2q - 1$ es suave y su diferencial es $D(g)_q(Y) = 2Y$.

La observación previa, si bien es muy evidente, nos está diciendo que el mapa que transforma a las grassmanianas como proyecciones en las grassmanianas como simetrías, duplica longitud.

Observación 4.1.9. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\xi \in \mathscr{H}$ el mapa

$$ev_\xi : \mathcal{B}(\mathscr{H}) \longrightarrow S(\mathscr{H})$$

dado por $ev_\xi(q) = q(\xi)$ es lineal y acotado, por lo cual es suave y se tiene además que $D(ev_\xi)_q(Y) = ev_\xi(Y) = Y(\xi)$.

Observación 4.1.10. En el Teorema 1.7.6 vimos que $S(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{H}$ era una subvariedad regular y vimos como su tangente estaba identificado con un subspacio real de $\mathscr{H}$. Podemos entonces definir una norma de Finsler en $S(\mathscr{H})$ de la siguiente forma:

Si $Y \in T_\eta(S(\mathscr{H}))$ definimos $\|Y\|_\eta = \frac{1}{2}\|Y\|$, donde la norma es la inducida por el producto interno que surge de tomar la parte real del producto interno usual. Ver Observación 1.7.5.

Proposición 4.1.11. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sea $\xi \in S(\mathscr{H})$. Si consideramos a $Gr(\mathscr{H})$ con la estructura de variedad de Finsler que le dimos en la Observación 2.3.28 y a $S(\mathscr{H})$ con la estructura de Finsler dada en la observación anterior.

Entonces el mapa $m_\xi : Gr(\mathscr{H}) \longrightarrow S(\mathscr{H})$ dado por:

$$m_\xi(q) = \epsilon_q(\xi) = 2q(\xi) - \xi$$

reduce longitud.

Demostración. Primero observamos que, como ϵ_q es una isometría, se tiene que el mapa está bien definido. Para ver que reduce longitud consideramos el mapa

$$g : \mathcal{B}(\mathscr{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H})$$

definido en la Observación 4.1.8 y el mapa $ev_\xi : \mathcal{B}(\mathscr{H}) \longrightarrow \mathscr{H}$. Notamos que como ambos son suaves la composición

$$ev_\xi \circ g : \mathcal{B}(\mathscr{H}) \longrightarrow \mathscr{H}$$

resulta suave y por la Regla de la Cadena en espacios de Banach, tenemos que:

$$D(ev_\xi \circ g)_q(Y) = D(ev_\xi)_{g(q)} \circ Dg_q(Y) = 2Y(\xi)$$

luego restringiendo a $Gr(\mathscr{H})$ y corestringiendo a $S(\mathscr{H})$ la aplicación sigue siendo suave y coincide con m_ξ. Se sigue que m_ξ es suave y $(m_\xi)_{*,q}(Y) = 2Y(\xi)$. Veamos ahora que reduce longitud. Fijados $q \in Gr(\mathscr{H})$ e $Y \in T_q(Gr(\mathscr{H}))$ tenemos que:

$$\|(m_\xi)_{*,q}(Y)\|_q = \frac{1}{2}\|2Y(\xi)\| = \|Y(\xi)\| \leq \|Y\|\|\xi\| = \|Y\| = \|Y\|_{q(\xi)}$$

lo cual concluye la demostración. $\square$

A continuación combinamos los dos resultados obtenidos en esta sección y en la sección previa para obtener un mapa de $Gr(\mathscr{A})$ en $S(\mathscr{H})$ que reduce longitud.

Teorema 4.1.12. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, sea $\pi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H})$ una representacón compatible en p respecto de q y sea F el mapa asociado de la Proposición 4.1.6.

Entonces si $m_\xi : Gr(\mathscr{H}) \longrightarrow S(\mathscr{H})$ es el mapa definido en la Proposición 4.1.11 se tiene que el mapa $F_\xi := m_\xi \circ F$ es un mapa de $Gr(\mathscr{A})$ en $S(\mathscr{H})$ que reduce longitud.

Demostración. El resultado se sigue del hecho de que F_ξ es composición de mapas que reducen longitud. $\square$

4.2. Primer condición extrínseca de minimalidad

En esta sección fijaremos una primer condición de minimalidad que dependerá de la representación de $\mathscr{A}$ en $\mathcal{B}(\mathscr{H})$.

Definición 4.2.1. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, $p \in Gr(\mathscr{A})$ y $F : Gr(\mathscr{A}) \longrightarrow Gr(\mathscr{H})$ una representación grassmaniana en p respecto de q. Dado $[v] \in T_p(Gr(\mathscr{A}))$ y w levantado minimal de $[v]$, decimos que el par $([v], w)$ esta en buena posición respecto de F si existe $\xi \in S(\mathscr{H})$ para el cual se verifican las siguintes condiciones.

I) $\widehat{w}^2(\xi) = -\lambda^2\xi$ donde $\lambda = \|w\|$.

II) $\epsilon_q(\xi) = \xi$.

III) $\epsilon_q(\widehat{w}(\xi)) = -\widehat{w}(\xi)$.

Observación 4.2.2. Notamos que el ítem I) de la proposición anterior nos está diciendo que ξ realiza la norma de $\widehat{w^2}$. Tomando norma obtenemos que:

$$\|w\|^2 = \|\widehat{w}^2(\xi)\| \leq \|\widehat{w}^2\| \leq \|\widehat{w}\|^2$$

de donde se sigue que $\|\widehat{w}\| = \|w\|$, puesto que la otra desigualdad es consecuencia de ser π una representación.

Lema 4.2.3. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, $p \in Gr(\mathscr{A})$ y $F : Gr(\mathscr{A}) \longrightarrow Gr(\mathscr{H})$ una representación grassmaniana compatible en p respecto de q. Supongamos que el par $([v], w)$ está en buena posición respecto de F, y sea $\xi \in S(\mathscr{H})$ que satisface la Definición 4.2.1.

Entonces se tiene que la curva $\alpha(t) = e^{tw}pe^{-tw}$ es mapeada a través de F_ξ definida en el Teorema 4.1.12 a una geodésica de $S(\mathscr{H})$ cuya longitud coincide con la longitud de α.

Demostración. Notamos que para $w = 0$ el resultado es trivial, luego supondremos $w \neq 0$.

Comenzamos considerando $\widehat{w} \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$. Como es un operador acotado de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ podemos aplicarlo al elemento ξ obteniendo que:

$$\widehat{w}(\xi) = \delta\eta$$

para cierto $\delta > 0$ y cierto $\eta \in S(\mathscr{H})$.

Ahora, como $\widehat{w}$ es antihermitiano,

$$\langle \widehat{w}^2(\xi), \xi \rangle = \langle \widehat{w}(\xi), \widehat{w}^*(\xi) \rangle = \langle \widehat{w}(\xi), -\widehat{w}(\xi) \rangle = -\delta^2.$$

Por otro lado utilizando el ítem I) de la Definición 4.2.1 se sigue que:

$$\langle \widehat{w}^2(\xi), \xi \rangle = \langle -\lambda^2\xi, \xi \rangle = -\lambda^2$$

concluyéndose entonces que $\delta = \lambda$ y que $\widehat{w}(\xi) = \lambda\eta$.

Ahora, veamos que el conjunto $B = \{\xi, \eta\}$ es un conjunto ortonormal. Ambos vectores son normales por lo cual debemos ver que son ortogonales. Para ello, recordemos que al ser ϵ_q una isometría, preserva productos internos, luego utilizando la igualdad $\widehat{w}(\xi) = \lambda\eta$ y los ítems II) y III) de la Definición 4.2.1 se tiene que:

$$\begin{aligned}\langle \xi, \eta \rangle &= \langle \epsilon_q(\xi), \epsilon_q(\eta) \rangle = \left\langle \xi, \lambda^{-1}\epsilon_q(\lambda\eta) \right\rangle = \left\langle \xi, \lambda^{-1}\epsilon_q(\widehat{w}(\xi)) \right\rangle \\ &= \left\langle \xi, -\lambda^{-1}\widehat{w}(\xi) \right\rangle = -\left\langle \xi, \lambda^{-1}\lambda\eta \right\rangle = -\langle \xi, \eta \rangle\end{aligned}$$

concluyéndose que $\langle \xi, \eta \rangle = 0$.

Luego tenemos que B es una base para el subespacio real Z generado por ξ y por η. Notamos que Z invariante por ϵ_q puesto que $\epsilon_q(\xi) = \xi$ y $\epsilon_q(\eta) = -\eta$. Como ϵ_q es hermitiano se tiene que el ortogonal de Z es también invariante por ϵ_q y si miramos la matriz de ϵ_q en la base B restringiendo y correstringiendo al subespacio Z obtenemos:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora por otro lado tenemos que Z es invariante por $\widehat{w}$ ya que vimos que $\widehat{w}(\xi) = \lambda\eta$ y aplicando $\widehat{w}$ a ambos lados obtenemos que:

$$\widehat{w}(\eta) = \lambda^{-1}\widehat{w}^2(\xi) = -\lambda^{-1}\lambda^2\xi = -\lambda\xi$$

luego Z es invariante por $\widehat{w}$ así como su complemento ortogonal, por ser $\widehat{w}$ antihermitiano. Se tiene que su matriz en la base B es:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, veamos como mapea F_ξ a nuestra curva α. Si notamos a esa curva $\gamma(t)$ se tiene que:

$$\gamma(t) = F_\xi(\alpha(t)) = F_\xi(e^{tw}pe^{-tw}) = \epsilon_{e^{t\widehat{w}}qe^{-t\widehat{w}}}(\xi) = e^{t\widehat{w}}\epsilon_q\, e^{-t\widehat{w}}(\xi).$$

Como consecuencia de que Z es invariante por $\widehat{w}$ y por ϵ_q se sigue que $\gamma(t) \in Z$ para todo t. Además su escritura en coordenadas es:

$$\gamma(t) = e^{tM}\ R\ e^{-tM}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si llamamos:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Desarrollando la serie de potencias de la exponencial y agrupando términos pares e impares, es fácil ver que:

$$e^{tM} = \cos(\lambda t) I + \mathrm{sen}(\lambda t) J$$

luego tenemos que:

$$\begin{aligned} e^{tM} \ R \ e^{-tM} &= \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & -\mathrm{sen}(\lambda t) \\ \mathrm{sen}(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\lambda t) & -\mathrm{sen}(-\lambda t) \\ \mathrm{sen}(-\lambda t) & \cos(-\lambda t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\lambda t) - \mathrm{sen}^2(\lambda t) & 2\cos(\lambda t)\mathrm{sen}(\lambda t) \\ 2\cos(\lambda t)\mathrm{sen}(\lambda t) & \mathrm{sen}^2(\lambda t) - \cos^2(\lambda t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\lambda t) & \mathrm{sen}(2\lambda t) \\ \mathrm{sen}(2\lambda t) & -\cos(2\lambda t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Con lo cual γ se escribe en coordenadas como:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\lambda t) & \mathrm{sen}(2\lambda t) \\ \mathrm{sen}(2\lambda t) & -\cos(2\lambda t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\lambda t) \\ \mathrm{sen}(2\lambda t) \end{pmatrix}$$

de donde se sigue que:

$$\gamma(t) = \cos(2\lambda t)\xi + \mathrm{sen}(2\lambda t)\eta$$

que por el Teorema 1.7.7 está contenida en una geodésica de la esfera con la métrica inducida por la parte real del producto interno (Ver Observación 1.7.5). Para calcular su longitud, recordamos que la norma de Finsler que estamos mirando en la esfera es la mitad de la usual (ver Observación 4.1.10). Luego la longitud de γ, en base a esta observación y al Teorema 1.7.7, es $\mathrm{long}(\gamma)_{[0,t]} = t\lambda$. Como la curva α posee velocidad constante $\|[v]\| = \lambda$ se tiene que ambas tienen la misma longitud. Notar que en el hecho de que $\|[v]\| = \lambda$ estamos usando que w es levantado minimal de $[v]$. $\square$

Teorema 4.2.4. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, $p \in Gr(\mathscr{A})$ y $F : Gr(\mathscr{A}) \longrightarrow Gr(\mathscr{H})$ una representación grassmaniana en p respecto a q. Sean además $[v] \in T_p(Gr(\mathscr{A}))$ y $w \in \mathscr{A}_{ah}$ levantado minimal de $[v]$.

Si el par $([v], w)$ está en buena posición respecto de F, entonces la curva

$$\alpha(t) = e^{tw} p e^{-tw}$$

es geodésica minimizante uniendo $p = \alpha(0)$ y $\alpha(t)$ para $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2\|[v]\|}$.

Demostración. Sea $\xi \in S(\mathscr{H})$ que satisface la Definición 4.2.1.

Consideramos $\beta(s)$ otra curva que une a p y $\gamma(t)$ para $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2\|[v]\|}$. Es decir $\beta(0) = p$ y $\beta(t) = \alpha(t)$. Sean $\gamma(s) = F_\xi(\alpha(s))$ y $\tau(s) = F_\xi(\beta(s))$.

Por un lado, por el lema previo y el Teorema 1.7.7 se tiene que:

$$\mathrm{long}(\gamma)_{[0,t]} \leq \mathrm{long}(\tau)_{[0,t]}.$$

Por otro lado, como F_ξ reduce longitud tenemos que:

$$\operatorname{long}(\tau)_{[0,t]} \leq \operatorname{long}(\beta)_{[0,t]}.$$

Juntando ambos resultados y usando que el lema previo nos dice que para el caso particular de α se preserva la longitud se sigue:

$$\operatorname{long}(\alpha)_{[0,t]} = \operatorname{long}(\gamma)_{[0,t]} \leq \operatorname{long}(\tau)_{[0,t]} \leq \operatorname{long}(\beta)_{[0,t]}$$

lo cual concluye la demostración. $\square$

4.3. Segunda condición extrínseca de minimalidad

En la sección anterior vimos una condición extrínseca de minimalidad que involucraba no solo a una representación compatible, sino al mapa grassmaniano compatible inducido. En esta segunda sección, veremos una condición de minimalidad que solo involucre a la representación, es decir cuyas hipótesis estén sobre la representación misma y no sobre el mapa que induce.

Definición 4.3.1. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, $p \in Gr(\mathscr{A})$ y $\pi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H})$ una representación. Dado $[v] \in T_p(Gr(\mathscr{A})$ y w levantado minimal de $[v]$, decimos que la representación π está adaptada a el par $([v], w)$ si existe $\xi \in S(\mathscr{H})$ de forma que se cumplen:

I) $\widehat{w}^2(\xi) = -\lambda^2\xi$ donde $\lambda = \|w\|$.

II) Para cada $u \in I_p$, el vector $\widehat{u}(\xi)$ es ortogonal a $\widehat{w}(\xi)$.

Observación 4.3.2. La ortogonalidad del ítem II) puede ser pensada como con el producto interno de $\mathscr{H}$ o con la parte real de dicho producto interno. Como $u \in I_p$ implica que $iu \in I_p$, resulta que es indistinto.

Teorema 4.3.3. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, $p \in Gr(\mathscr{A})$ y $\pi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H})$ una representación adaptada al par $([v], w)$. Entonces se tiene que la curva $\alpha(t) = e^{tw}pe^{-tw}$ es geodésica uniendo $p = \alpha(0)$ y $\alpha(t)$ para $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2\|[v]\|}$.

Demostración. Sea $\xi \in S(\mathscr{H})$ que satisface la Definición 4.3.1. Consideramos el subespacio cerrado generado por $\Omega = \{\widehat{u}(\xi) : u \in I_p\} \subseteq \mathscr{H}$. Llamemos S_p a dicho subespacio y q a su proyección ortogonal asociada.

Observemos primero que si $u_1 \in I_p$ se tiene que $\widehat{u_1}(\Omega) = \Omega$ puesto que I_p es un grupo con la composición y sus elementos son inversibles. Esto me dice que Ω es invariante por elementos de $\widehat{I_p}$, luego S_p lo es y su complemento ortogonal también. Veamos que $\widehat{I_p} \subseteq I_q$.

Sea $u \in I_p$, lo que debemos probar es que $\widehat{u}q\widehat{u}^* = q$. Sea $z \in \mathscr{H}$ que se descompone de forma única como $z = x + y$ donde $x \in S_p$ e $y \in S_p^\perp$. Como S_p y su complemento ortogonal son invariantes por elementos de I_p se tiene que $\widehat{u}^*(x) \in S_p$ y que $\widehat{u}^*(y) \in S_p^\perp$, luego:

$$\widehat{u}q\widehat{u}^*(z) = \widehat{u}q\widehat{u}^*(x+y) = \widehat{u}q\widehat{u}^*(x) + \widehat{u}q\widehat{u}^*(y) = \widehat{u}\widehat{u}^*(x) = x = q(z).$$

Concluímos entonces que $\widehat{I_p} \subseteq I_q$ y utilizando la Proposición 4.1.6 se tiene una representación grassmaniana compatible en p respecto de q. Además respecto a esta representación el par $([v], w)$ es bueno ya que $\epsilon_q(\xi) = \xi$ pues $\xi \in S_p$, y $\epsilon_q(\widehat{w}(\xi)) = -\widehat{w}(\xi)$ pues $\widehat{w}(\xi) \in S_p^\perp$. El resultado se sigue entonces de aplicar el Teorema 4.2.4. □

Capítulo 5

Condiciones Intrínsecas de minimalidad

En el capítulo anterior, vimos condiciones para que la curva $\alpha(t) = e^{tw}pe^{-tw}$ en $Gr(\mathscr{A})$ sea minimal uniendo $\alpha(0)$ y $\alpha(t)$ para ciertos valores de t. Dichos resultados son el Teorema 4.2.4 y el Teorema 4.3.3. Ambos teoremas dependían de una representación de $\mathscr{A}$ en $\mathcal{B}(\mathscr{H})$. La idea de este capítulo es probar que en el contexto de las grassmanianas de una C^*-álgebra, siempre existe una representación adaptada al par $([v], w)$ con w un levantado minimal de $[v]$, llegando así a un resultado mas fuerte sobre curvas minimales en $Gr(\mathscr{A})$.

El título del capítulo hace referencia a la segunda sección del mismo en el cual mencionaremos como generalizar los resultados al contexto de Variedades de Bandera que, como veremos, son una generalización de las grassmanianas donde se tiene una métrica cociente para la cual puede no haber levantados minimales.

La idea de toda la demostración del resultado principal, así como su generalización, está basada en [9].

5.1. Geodésicas en $Gr(\mathscr{A})$

En esta sección usaremos la definición de estado y ciertas de sus propiedades. Las mismas pueden encontrarse en la Sección 4 del Apéndice A.

Definición 5.1.1. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, $p \in Gr(\mathscr{A})$, $[v] \in T_p(Gr(\mathscr{A}))$ y $w \in \mathscr{A}_{ah}$ un levantado minimal de $[v]$.

Decimos que un estado $\phi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ esta adaptado al par $([v], w)$ si se cumplen:

I) $w^2 + \lambda^2 \in \ker(\phi)$ donde $\lambda = \|w\|$.

II) Para cada $u \in I_p$ se tiene que $\phi(uw) = 0$.

Proposición 5.1.2. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, $p \in Gr(\mathscr{A})$, $[v] \in T_pGr(\mathscr{A})$ y $w \in \mathscr{A}_{ah}$ un levantado minimal de $[v]$. Entonces se tiene que son equivalentes:

I) Existe $\pi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H})$ representación adaptada al par $([v], w)$.

II) Existe $\phi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ estado adaptado al par $([v], w)$.

Demostración. I)$\longrightarrow$II) Sea $\pi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H})$ una representación adaptada al par $([v], w)$. Sea $\xi \in S(\mathscr{H})$ que satisface la Definición 4.3.1, definimos $\phi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$\phi(a) = \langle \widehat{a}(\xi), \xi \rangle .$$

Veamos primero que ϕ es un estado, para ello tomamos $a \in \mathscr{A}$ y se tiene que:

$$\phi(a^*a) = \langle \widehat{a}^*\widehat{a}(\xi), \xi \rangle = \langle \widehat{a}(\xi), \widehat{a}(\xi) \rangle \geq 0$$

luego $\phi(a^*a) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Por otro lado acotando $|\phi(a)|$ obtenemos:

$$|\phi(a)| = |\langle \widehat{a}(\xi), \xi \rangle| \leq \|\widehat{a}(\xi)\|\|\xi\| \leq \|\widehat{a}\| \leq \|a\|$$

y como $\phi(1) = 1$ se sigue que $\|\phi\| = 1$.

Hemos probado que $\|\phi\| = 1$ y $\phi(a^*a) \geq 0$. Como la linealidad de ϕ es inmediata por la linealidad de π y la linealidad de la primera coordenada del producto interno, se sigue que ϕ es un estado.

Veamos ahora que ϕ es un estado adaptado a $([v], w)$.

Recordamos que por hipótesis se tiene que $\widehat{w}^2(\xi) = -\lambda^2\xi$, luego:

$$\phi(w^2 + \lambda^2) = \left\langle \widehat{w}(\xi) + \lambda^2\xi, \xi \right\rangle = \left\langle -\lambda^2\xi + \lambda^2\xi, \xi \right\rangle = 0$$

lo cual prueba que $w^2 + \lambda^2 \in \ker(\phi)$, es decir, el primer ítem de la definición de estado adaptado.

Por otro lado si $u \in I_p$ queremos ver que $uw \in \ker(\phi)$. Recordamos que por hipótesis $\widehat{u}^*(\xi)$ es ortogonal a $\widehat{w}(\xi)$. Luego tenemos que:

$$\phi(uw) = \langle \widehat{u}\widehat{w}(\xi), \xi \rangle = \langle \widehat{w}(\xi), \widehat{u}^*(\xi) \rangle = 0$$

lo cual concluye la primer implicación.

II)$\longrightarrow$I) Supongamos ahora que tenemos un estado ϕ adaptado al par $([v], w)$. Luego si llamamos $\pi_\phi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H})$ a la representación GNS con respecto al estado ϕ se sigue que por la Observación A.4.8 existe $\xi \in S(\mathscr{H})$ que cumple:

$$\phi(a) = \langle \widehat{a}(\xi), \xi \rangle .$$

Veamos entonces que esta representación está adaptada al par $([v], w)$.

Primero debemos ver que $\widehat{w}^2(\xi) = -\lambda^2\xi$. Para ello notamos que por hipótesis $w^2 + \lambda^2 \in \ker(\phi)$, luego tenemos que:

$$\left\langle (\widehat{w}^2 + \lambda^2)(\xi), \xi \right\rangle = 0.$$

Ahora notamos que $\widehat{w}^2$ es hermitiano, por ser $\widehat{w}$ antihermitiano, luego $\widehat{w}^2 + \lambda^2$ es hermitiano. Por otra parte, por la Proposición A.2.2 tenemos que el radio espectral de $\widehat{w}^2$ es $\|\widehat{w}^2\|$, pero tenemos que:

$$\|\widehat{w}^2\| \leq \|\widehat{w}\|^2 \leq \|w\|^2 = \lambda^2$$

entonces $\sigma(\widehat{w}^2) \subseteq [-\lambda^2, \lambda^2]$ de donde se sigue que:

$$\sigma(\widehat{w}^2 + \lambda^2) \subseteq [0, 2\lambda^2]$$

con lo cual el operador $\widehat{w}^2 + \lambda^2$ es positivo. Luego, por la Proposición A.3.14, existe $c \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ tal que $c^*c = \widehat{w}^2 + \lambda^2$. Entonces se tiene que:

$$0 = \langle c^*c(\xi), \xi \rangle = \langle c(\xi), c(\xi) \rangle$$

lo cual implica que $c(\xi) = 0$ y luego $c^*c(\xi) = 0$. Se concluye que $\widehat{w}^2(\xi) = -\lambda^2\xi$.

Veamos ahora que para $u \in I_p$ se tiene que $\widehat{u}(\xi)$ es ortogonal a $\widehat{w}(\xi)$. Por hipótesis sabemos que $u^*w \in \ker(\phi)$ entonces se tiene que:

$$\langle \widehat{u}(\xi), \widehat{w}(\xi) \rangle = \langle \xi, \widehat{u}^* \widehat{w}(\xi) \rangle = \overline{\phi(u^*w)} = 0$$

lo cual concluye la demostración. □

Definición 5.1.3. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, $p \in Gr(\mathscr{A})$ y $w \in \mathscr{A}_{ah}$. Definimos el conjunto M_w como

$$M_w = \{xw - wx^* : x \in \mathscr{D}_p\}.$$

Notamos que es un subconjunto de $\mathscr{A}_h$. Al subespacio real generado por M_w y por $w^2 + \lambda^2$ donde $\|w\| = \lambda$, lo notaremos $S_w \subseteq \mathscr{A}_h$.

Notación 5.1.4. Al conjunto de elementos inversibles y positivos de una C^*-álgebra $\mathscr{A}$ lo notaremos $\mathrm{GL}^+(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{A}_h$.

Observación 5.1.5. Notamos que $\mathrm{GL}^+(\mathscr{A})$ es un conjunto no vacío, abierto y convexo.

Proposición 5.1.6. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, $p \in Gr(\mathscr{A})$, $[v] \in T_p(Gr(\mathscr{A}))$ y $w \in \mathscr{A}_{ah}$ un levantado minimal de $[v]$. Entonces son equivalentes:

I) Existe una representación de $\mathscr{A}$ adaptada al par $([v], w)$.

II) Existe un estado adaptado al par $([v], w)$.

III) $S_w \cap \mathrm{GL}^+(\mathscr{A}) = \emptyset$.

IV) $\|w^2\| \leq \|w^2 + m\|$ para todo $m \in M_w$.

Comenzamos observando que la equivalencia de los dos primeros ítems es justamente la Proposición 5.1.2.

II)⟶III) Supongamos que tenemos un estado adaptado al par $([v], w)$. Luego para todo $u \in I_p$ se tiene que $\phi(uw) = 0$, notar que, por la Proposición A.4.4 se tiene que:

$$\phi(wu^*) = -\overline{\phi(uw)} = 0$$

de donde se sigue que $\phi(wu^*) = 0$.

Luego usando la Proposición A.3.12 y el hecho de que I_p es el conjunto de unitarios de la C^*-álgebra $\mathscr{D}_p$ obtenemos que ϕ se anula en todo M_w. Como además sabemos que ϕ se anula en $w^2 + \lambda^2$ se sigue que:

$$\phi(S_w) = 0.$$

Por otro lado tomamos $a \in \mathrm{GL}^+(\mathscr{A})$, usando la Observación A.4.8 existe ξ con $\|\xi\| = 1$ en el espacio de Hilbert asociado a la representación GNS respecto de ϕ de forma que:

$$\phi(a) = \langle \widehat{a}(\xi), \xi \rangle$$

como a es positivo, por la Proposición A.3.14 se tiene que se escribe como $a = c^*c$ para cierto $c \in \mathscr{A}$. Supongamos que $\phi(a) = 0$ entonces se tiene que $\langle c(\xi), c(\xi) \rangle = 0$ y luego $a(\xi) = 0$. Lo cual me diría que a no es inversible llegando a una contradicción, luego $\phi(a) \neq 0$. Mas aún, como $\phi(a) = \phi(c^*c) \geq 0$ se sigue que $\phi(a) > 0$ y luego ϕ es positiva en $\mathrm{GL}^+(\mathscr{A})$.

Como $\phi(S_w) = 0$ se concluye que $S_w \cap \mathrm{GL}^+(\mathscr{A}) = \emptyset$.

III)⟶II)

Para esta implicación necesitaremos usar la versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.1.10). Notamos que S_w es un subespacio real de $\mathscr{A}_h$, por otro lado tenemos que$\mathrm{GL}^+(\mathscr{A})$ es un conjunto no vacío, convexo y abierto que no interseca a S_w. El teorema de Hahn-Banach me garantiza la existencia de un hiperplano, al cual llamaremos S, de forma que $S_w \subseteq S$ y $S \cap \mathrm{GL}^+(\mathscr{A}) = \emptyset$.

Como $1 \in \mathrm{GL}^+(\mathscr{A})$ se tiene que debe ser:

$$S \oplus < 1 >= \mathscr{A}_h$$

donde $< 1 >$ es el subespacio real generado por el elemento neutro. Luego podemos definir $\phi : \mathscr{A}_h \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\phi(s + t1) = t$$

y resulta un funcional continuo. Además si $x \in \mathrm{GL}^+(\mathscr{A})$ se tiene que $x = s + t$ donde $s \in S$ y $t \in \mathbb{R}$. Si fuese $t = 0$ tendríamos que $x \in S$ lo cual es una contradicción pués $\mathrm{GL}^+(\mathscr{A}) \cap S = \emptyset$.

Si $t < 0$ tendríamos que $\phi(x) < 0$ y $\phi(1) > 0$ luego por la convexidad de $\mathrm{GL}^+(\mathscr{A})$ debería existir $y \in \mathrm{GL}^+(\mathscr{A})$ para el cual $\phi(y) = 0$ llegando a una contradicción como en el caso anterior.

Luego se tiene que $t > 0$ y $\phi(x) = t > 0$.

Si $x \in \mathscr{A}$ podemos escribir a x como $x = a + ib$ donde $a, b \in \mathscr{A}_h$, luego definimos:

$$\phi(x) := \phi(a) + i\phi(b)$$

tenemos en tal caso un funcional claramente lineal y continuo $\phi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{C}$. Notamos que dividiendo eventualmente por la norma podemos asumir que tiene norma uno.

Veamos que $\phi(x^*x) \geq 0$ para todo $x \in \mathscr{A}$. Para ello notemos que como el espectro de $\sigma(x^*x) \subseteq [0, \infty)$ luego para cada $\epsilon > 0$ se tiene que $x^*x + \epsilon 1 \in \mathrm{GL}^+(\mathscr{A})$. Por lo observado previamente tenemos que:

$$\phi(x^*x + \epsilon 1) > 0$$

usando la continuidad de ϕ se sigue que $\phi(x^*x) \geq 0$.

Se concluye entonces que ϕ es un estado. Resta ver que está adaptado al par $([v], w)$. Para ello, notemos que $\phi(S_w) = 0$ por como lo construímos. Esto nos dice que $w^2 + \lambda^2 \in \ker(\phi)$.

Por otro lado como $\phi(bw - wb^*) = 0$ para todo $b \in \mathscr{D}_p$, podemos tomar $b = u$ y $b = iu$ obteniendo las igualdades:

$$\phi(uw - wu^*) = 0$$

$$\phi(iuw + iwu^*) = 0.$$

De la segunda igualdad se sigue que $\phi(uw + wu^*) = 0$ por la linealidad de ϕ luego sumándola a la primer igualdad se sigue que $\phi(uw) = 0$ lo cual finaliza la demostración de esta implicación.

III)$\longrightarrow$IV) Supongamos que existe $m \in M_w$ de forma que $\|w^2\| > \|w^2 + m\|$. Luego se tiene que:

$$\lambda^2 > \|-w^2 - m\|$$

de donde se sigue que el elemento hermitiano $\lambda^2 + w^2 + m$ posee espectro estrictamente positivo. Luego como es un elemento de S_w se tiene que tenemos un elemento inversible y positivo en S_w lo cual cotradice III).

IV)⟶III) Supongamos que existe un elemento positivo e inversile en S_w. En base a la Definición 5.1.3 se tiene que debe ser de la forma:

$$s = \delta(\lambda^2 + w^2) + m$$

para cierto $\delta \in \mathbb{R}$ y cierto $m \in M_w$.

Luego como es positivo tenémos que para cierto $\epsilon > 0$ debe ser:

$$s = \delta(\lambda^2 + w^2) + m > \epsilon > 0.$$

Claramente podemos suponer $\delta > 0$, pués si $\delta \leq 0$ tenemos $\delta(\lambda^2 + w^2) + m \leq \lambda^2 + w^2 + m$ y tenemos la desigualdad con un $\delta = 1$. Luego suponiendo $\delta > 0$ y dividiendo por δ tenemos:

$$\lambda^2 + w^2 + m_1 > \epsilon_1 > 0$$

donde $m_1 = \frac{1}{\delta}m$ y $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{\delta}$.

En conclusión se tiene que $\lambda^2 > -w^2 - m_1$ de donde se sigue que:

$$\|w^2\| = \lambda^2 > \|w^2 + m_1\|$$

contradiciendo III).

Teorema 5.1.7. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, $p \in Gr(\mathscr{A})$. Sea $[v] \in T_p(Gr(\mathscr{A}))$ y $w \in \mathscr{A}_{ah}$ levantado minimal de $[v]$.

Entonces la curva $\alpha(t) = e^{tw}pe^{-tw}$ es geodésica minimizante uniendo $p = \alpha(0)$ y $\alpha(t)$ para $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2\|[v]\|}$.

Demostración. Por el Teorema 4.3.3 basta ver que existe una representación adaptada al par $([v], w)$, y por la proposición anterior basta ver que

$$\|w^2\| \leq \|w^2 + m\|$$

para todo $m \in M_w$.

Como $w \in \mathscr{A}_{ah}$ es levantado minimal, tenemos que $\|w\| \leq \|w+b\|$ para todo $b \in \mathscr{D}_{p,ah}$. Si bien esto es cierto, en verdad tenemos algo mas fuerte. El Lema 3.3.3 nos muestra como el levantado minimal cumple la desigualdad

$$\|w\| \leq \|w + x\|$$

cualquiera sea $x \in \mathscr{D}_p$, y no solo para los antihermitianos. Escribiendo $x = a + b$ con $a \in \mathscr{D}_{p,h}$ y $b \in \mathscr{D}_{p,ah}$ tenemos que:

$$\|w\| \leq \|w + a + b\|.$$

Elevando al cuadrado la desigualdad y usando que w es antihermitiano, en particular normal, tenemos que:

$$\|w^2\| \leq \|(w+a+b)(w+a+b)^*\|$$

y como $\mathscr{D}_{p,h}$ y $\mathscr{D}_{p,ah}$ son subespacios reales se tiene la desigualdad:

$$\|w^2\| \leq \|(w+ta+tb)(w+ta+tb)^*\|$$

cualquiera sea t real.

Consideramos entonces la función definida en los reales positivos dada por

$$h(t) = -w^2 + \frac{(w+ta+tb)(w+ta+tb)^* + w^2}{t}.$$

Supongamos que para algún $t > 0$ se tiene que $\|h(t)\| < \|w^2\|$. Luego se tiene que:

$$\|th(t) + (1-t)(-w^2)\| < \|w^2\|$$

Pero tenemos que:

$$\begin{aligned} th(t) + (1-t)(-w^2) &= -tw^2 + (w+ta+tb)(w+ta+tb)^* + w^2 - w^2 + tw^2 \\ &= (w+ta+tb)(w+ta+tb)^* \end{aligned}$$

que ya vimos que tenía norma mayor igual a $\|w^2\|$ luego llegamos a una contradicción y tenemos que para $t > 0$ debe ser:

$$\|w^2\| \leq \|h(t)\|.$$

Desarrollando el término de la derecha obtenemos que:

$$\begin{aligned} \|h(t)\| &= \left\| -w^2 + \frac{(w+ta+tb)(w+ta+tb)^* + w^2}{t} \right\| \\ &= \left\| -w^2 + \frac{(w+ta+tb)(-w+ta-tb) + w^2}{t} \right\| \\ &= \left\| -w^2 + \frac{-w^2 + twa - tbw - taw - tbw + t^2a^2 - t^2ab + t^2ba - t^2b^2 + w^2}{t} \right\| \\ &= \|-w^2 - (a+b)w - w(a-b) - (-ta^2 + tab - tba + tb^2)\| \\ &= \|w^2 + (a+b)w - w(a-b) + (-ta^2 + tab - tba + tb^2)\| \end{aligned}$$

entonces

$$\|w^2\| \leq \|w^2 + (a+b)w - w(a-b) + (-ta^2 + tab - tba + tb^2)\|$$

y tomando límite cuando t tiende a cero por derecha se sigue que

$$\|w^2\| \leq \|w^2 + (a+b)w - w(a-b)\|$$

recordando que todo $x \in \mathscr{D}_p$ se escribe de la forma $x = a + b$ con $a \in \mathscr{D}_{p,h}$ y $b \in \mathscr{D}_{p,ah}$ lo que probamos fue que:

$$\|w^2\| \leq \|w^2 + xw - wx^*\|,$$

es decir, probamos que $\|w^2\| \leq \|w^2 + m\|$ cualquiera sea $m \in M_w$ que es lo que queríamos ver. □

5.2. Generalizaciones

En esta sección generalizaremos los resultados obtenidos en las grassmanianas de una C^*-álgebra $\mathscr{A}$ al contexto de una Variedad de Bandera. Las demostraciones son análogas al caso de las grassmanianas y pueden encontrarse en [9].

Comenzamos con la definición de Variedad de Bandera.

Definición 5.2.1. Una Variedad de Bandera es un par $(\mathcal{P}, \mathscr{A})$ donde $\mathcal{P}$ es una variedad de Banach y $\mathscr{A}$ es una C^*-álgebra, que además cumple:

i) El grupo de unitarios $\mathscr{U}$ de la C^*-álgebra $\mathscr{A}$ actúa a izquierda sobre $\mathcal{P}$ de forma suave y transitiva, obteniéndose para cada $p \in \mathcal{P}$ un mapa $\Pi_p : \mathscr{U} \longrightarrow \mathcal{P}$ que resulta sobreyectivo y suave.

ii) Para cada $p \in \mathcal{P}$, el grupo de isotropía de p, notado I_p, está dado por el grupo de unitarios de una C^*-subálgebra $\mathscr{B}_p \subseteq \mathscr{A}$.

iii) Para cada $p \in \mathcal{P}$ el mapa $\Pi_p : \mathscr{U} \longrightarrow \mathcal{P}$ resulta una sumersión.

iv) La estructura de Finsler en $\mathcal{P}$ viene dada por $\|X\|_p = \text{ínf}\{|Z + b| : b \in \mathscr{B}_{p,ah}\}$ donde Z es tal que $(\Pi_p)_{*,1}(Z) = X$ (existe por iii)).

Observación 5.2.2. Notar que en el contexto de una variedad de bandera, se tiene que la diferencial de la proyección $\Pi_p : \mathscr{U} \longrightarrow \mathcal{P}$ en 1 induce un isomorfismo:

$$T_1(\mathscr{U})/T_1(I_p) \simeq T_p\mathcal{P}$$

y como el grupo de isotropía está dado por los unitarios de una C^*-subálgebra $\mathscr{B}_p$ se tiene que el tangente puede ser pensado como el cociente:

$$T_p\mathcal{P} = \mathscr{A}_{ah}/\mathscr{B}_{ah}$$

esto explica la métrica de Finsler que se mira en la Variedad de Bandera.

Observación 5.2.3. Notamos que si $\mathcal{P} = Gr(\mathscr{A})$, y los unitarios de $\mathscr{A}$ actúan sobre $\mathcal{P}$ por conjugación, en virtud de lo desarrollado en el Capítulo 3, el par $(Gr(\mathscr{A}), \mathscr{A})$ es una variedad de bandera.

Lo particular de la variedad de bandera estudiada en este trabajo es que en la métrica cociente que le dimos, siempre se realiza el ínfimo. Es decir todo elemento en $T_p(Gr(\mathscr{A}))$ posee un levantado minimal. Esto en general no es cierto en cualquier variedad de bandera. El siguiente teorema es una generalización del Teorema 5.1.7 para el caso de variedades de bandera.

Teorema 5.2.4. Sea $(\mathcal{P}, \mathscr{A})$ una variedad de bandera, sea $[v] \in T_p\mathcal{P}$. Supongamos que existe $w \in \mathscr{A}_{ah}$ levantado minimal de $[v]$ entonces la curva dada por:

$$\alpha(t) = L_{e^{tw}}(p)$$

donde $L_{e^{tw}}(p)$ denota el elemento obtenido al hacer actuar e^{tw} a izquierda en p, cumple $\alpha(0) = p$, $\dot{\alpha}(0) = [v]$ y es geodésica uniendo a p con $\alpha(t)$ para $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2\|[v]\|}$.

Observación 5.2.5. Notamos que el teorema previo es idéntico al Teorema 5.1.7, solo que se pide la existencia de un levantado minimal. Puede probarse que si la variedad de bandera $(\mathcal{P}, \mathscr{A})$ es tal que $\mathscr{A}$ posee un predual, es decir es un álgebra de von Neumann, este levantado siempre existe. Pero en el caso general esto no siempre es cierto. El resultado de la existencia del levantado minimal en el caso de álgebras de von Neumann puede encontrarse en [9].

Observación 5.2.6. Consideramos $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $\mathscr{A}$, la C^*-álgebra (con unidad) que se obtiene al agregarle la identidad a la C^*-álgebra de operadores compactos de $\mathscr{H}$. Fijado un elemento hermitiano y compacto a, el conjunto

$$\mathcal{O}_a = \{uau^* : u \in \mathscr{U}_{\mathscr{A}}\}$$

posee estructura de variedad de bandera. Esta variedad fue estudiada por Bottazzi y Varela quienes probaron en [4] que a podía ser elegido de forma que ciertos elementos no tengan levantados minimales y en [5] que se podía tomar a de forma tal que haya curvas minimales distintas a las curvas exhibidas en este trabajo.

Apéndice A

C*-álgebras

Este apéndice consta de cuatro partes. En la primera introduciremos las nociones de C^*-álgebra y sus propiedades básicas. En la segunda estudiaremos el espectro de un elemento. Dejaremos para la tercer parte el estudio del cálculo funcional continuo. La cuarta parta consta de las definiciones básicas y resultados referidos a representaciones de una C^*-álgebra en los operadores acotados de un espacio de Hilbert.

Las pruebas de los resultados no demostrados pueden encontrarse en el libro de Davidson [8].

A.1. Definiciones y propiedades básicas

La definición de álgebra de Banach, junto con ciertas propiedades básicas de las mismas, se encuentran en la Sección 2 del Capítulo 1.

Definición A.1.1. Una C^*-algebra es un par $(\mathscr{A}, *)$ donde $\mathscr{A}$ es un álgebra de Banach y $* : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ es una aplicación que para todo $a, b \in \mathscr{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ cumple:

I) $(a^*)^* = a$.

II) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$.

III) $(a + b)^* = a^* + b^*$.

IV) $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

a la aplicación $*$ la llamamos involución.

Proposición A.1.2. Si $\mathscr{A}$ es una C^* álgebra y $a \in \mathscr{A}$ se tiene entonces que $\|a\| = \|a^*\|$.

Demostración. Notamos que es evidente si $a = 0$. Para a no nulo se tiene:

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a^*\|\|a\|$$

dividiendo por $\|a\|$ obtenemos que:

$$\|a\| \leq \|a^*\|$$

usando que $(a^*)^* = a$ se sigue la otra desigualdad. □

Ejemplo A.1.3. Si $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert entonces $\mathscr{A} = \mathcal{B}(\mathscr{H})$ es una C^*-álgebra, con la norma dada en la Definición 1.1.7 y la involución $*$ dada en la Definición 1.8.3.

Ejemplo A.1.4. Sea X un espacio topológico T_2 y localmente compacto. Consideramos $C_0(X)$, el conjunto de funciones $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ con la propiedad de que para cada $\epsilon > 0$ existe un compacto K_ϵ de forma que si $x \in X - K_\epsilon$ entonces $|f(x)| < \epsilon$.

Si definimos:

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

y

$$f^*(x) = \overline{f}(x)$$

entonces $C_0(X)$ resulta una C^*-álgebra.

Ejemplo A.1.5. Si X es una variedad suave y consideramos:

$$C_0^\infty(X) := C_0(X) \cap C^\infty(X)$$

se tiene que, con la norma y la involución del ejemplo previo, $\mathscr{A} = C_0^\infty(X)$ satisface todos los axiomas de una C^*-álgebra salvo la completitud. Luego si consideramos su completación, se obtiene una C^*-álgebra.

Definición A.1.6. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra y sea $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ una subálgebra. Decimos que $\mathscr{B}$ es una C^*-subálgebra de $\mathscr{A}$ si:

I) $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ es un subespacio cerrado.

II) $b \in \mathscr{B} \Longrightarrow b^* \in \mathscr{B}$.

Definición A.1.7. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra y sea $S \subseteq \mathscr{A}$. Llamamos C^*-subalgebra generada por S a la intersección de todas las C^*-subalgebras de $\mathscr{A}$ que contienen a S. La notamos $C^*(S)$.

Observación A.1.8. Es claro que interseccion de C^*-subálgebras de una C^*-álgebra $\mathscr{A}$ resulta una C^*-subálgebra. En particular, si $S \subseteq \mathscr{A}$ se tiene que $C^*(S)$ es una C^*-subálgebra de $\mathscr{A}$.

Observación A.1.9. Dada $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, podría ser que $\mathscr{A}$ no tenga unidad. Para este trabajo supondremos que todas las C^*-álgebras poseen unidad, es decir, existe $1_{\mathscr{A}} \in \mathscr{A}$ de forma que $x1_{\mathscr{A}} = 1_{\mathscr{A}}x = x$ cualquiera sea $x \in \mathscr{A}$. Notaremos en general $1_{\mathscr{A}} = 1$.

Las definiciones y resultados, que figuran a continuación, son una generalización de lo visto en la Sección 8 del Capítulo 1. En dicho capítulo trabajamos con $\mathscr{A} = \mathcal{B}(\mathscr{H})$ donde $\mathscr{H}$ era un espacio de Hilbert complejo. Todas las definiciones y demostraciones son idénticas, ya que para hacerlas en el caso $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ solo usamos sus propiedades de C^*-álgebra.

Notación A.1.10. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra notamos

i) $\mathscr{A}_h$ al subconjunto de $\mathscr{A}$ formado por los elementos hermitianos.

ii) $\mathscr{A}_{ah}$ al subconjunto de $\mathscr{A}$ formado por los elementos antihermitianos.

iii) $\mathrm{GL}(\mathscr{A})$ al subconjunto de $\mathscr{A}$ formado por los elementos inversibles.

iv) $\mathscr{U}_{\mathscr{A}}$ al subconjunto de $\mathscr{A}$ formado por elementos unitarios. Cuando no haya confusión lo notaremos $\mathscr{U}$.

Proposición A.1.11. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra se tiene que:

i) $\mathscr{A}_h$ y $\mathscr{A}_{ah}$ son subespacios reales y además $\mathscr{A} = \mathscr{A}_h \oplus \mathscr{A}_{ah}$.

ii) $\mathrm{GL}(\mathscr{A})$ es un subconjunto abierto que posee estructura de grupo con el producto heredado de $\mathscr{A}$. Además se tiene que, si $x, y \in \mathrm{GL}(\mathscr{A})$, entonces $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

iii) $\mathscr{U}_{\mathscr{A}}$ posee estructura de grupo y resulta un subgrupo de $\mathrm{GL}(\mathscr{A})$.

iv) La aplicación $f : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ dada por $f(a, b) = a + b$ es continua.

v) La aplicación $f : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ dada por $f(a, b) = a.b$ es continua.

vi) La aplicación $f : \mathbb{C} \times \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ dada por $f(\lambda, a) = \lambda a$ es continua.

vii) La aplicación $f : \mathrm{GL}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathscr{A})$ dada por $f(a) = a^{-1}$ es continua.

viii) La aplicación $f : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ dada por $f(a) = a^*$ es continua, mas aún, es una isometría.

A.2. El espectro de un elemento

Definición A.2.1. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, y sea $a \in \mathscr{A}$.

i) Al conjunto $\rho_{\mathscr{A}}(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - a \in \mathrm{GL}(\mathscr{A})\}$ lo llamaremos resolvente de a.

ii) Al conjunto $\sigma_{\mathscr{A}}(a) := \mathbb{C} - \rho_{\mathscr{A}}(a)$ lo llamaremos espectro de a.

iii) Al número real $r_{\mathscr{A}}(a) := \sup\limits_{\lambda \in \sigma_{\mathscr{A}}(a)} |\lambda|$ lo llamaremos radio espectral de a.

Proposición A.2.2. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra y sea $a \in \mathscr{A}$. Entonces se tiene que:

1. $\sigma_{\mathscr{A}}(a) \subseteq \mathbb{C}$ es no vacío y compacto.
2. La aplicación $f : \rho_{\mathscr{A}}(a) \longrightarrow \mathscr{A}$ dada por $f(\lambda) = (\lambda - a)^{-1}$ es continua.
3. $r_{\mathscr{A}}(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Observación A.2.3. Si $\mathscr{A}$ es una álgebra C^* y $a \in \mathscr{A}$ entonces, por la proposición anterior

$$r_{\mathscr{A}}(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \|a\|^{n\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|a\| = \|a\|$$

con lo cual tenemos una cota para todos los elementos en el espectro.

Definición A.2.4. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra. Un elemento $a \in \mathscr{A}$ se dice normal si cumple:

$$a^*a = aa^*$$

Observación A.2.5. Notamos que el conjunto de todos los elementos normales contiene a todos los elementos unitarios, todos los elementos hermitianos y todos los elementos antihermitianos.

Proposición A.2.6. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra y sea $a \in \mathscr{A}$ se tiene que:

I) $\sigma_{\mathscr{A}}(a^*) = \overline{\sigma_{\mathscr{A}}(a)}$.

II) Si $a \in GL(\mathscr{A})$ entonces $(\sigma_{\mathscr{A}}(a))^{-1} = \sigma_{\mathscr{A}}(a^{-1})$.

III) Si a es normal entonces $r_{\mathscr{A}}(a) = \|a\|$.

IV) Si a es unitario entonces $\sigma_{\mathscr{A}}(a) \subseteq S^1 \subseteq \mathbb{C}$.

V) Si a es hermitiano entonces $\sigma_{\mathscr{A}}(a) \subseteq \mathbb{R}$.

VI) Si a es antihermitiano entonces $\sigma_{\mathscr{A}}(a) \subseteq i.\mathbb{R}$, es decir, es puramente imaginario.

Observación A.2.7. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra y sea $P \in \mathbb{C}[X]$, entonces tiene sentido evaluar un polinomio $P \in \mathbb{C}[X]$ en elementos de $\mathscr{A}$ de la forma usual, es decir, si $f(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k x^k$ entonces $f(a) = \sum_{k=0}^{N} c_k a^k$. Mas aún, si pensamos a $\mathbb{C}[X]$ junto con la norma dada por tomar el máximo del módulo de sus coeficientes, entonces $\mathbb{C}[X]$ posee estructura de álgebra de Banach y, fijado $a \in \mathscr{A}$, la aplicación $ev_a : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathscr{A}$ dada por:

$$ev_a(P) = P(a)$$

resulta un morfismo de álgebras de Banach.

Proposición A.2.8. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, sea $a \in \mathscr{A}$ y sea P un polinomio con coeficientes complejos. Entonces

$$\sigma_{\mathscr{A}}(P(a)) = P(\sigma_{\mathscr{A}}(a)).$$

A.3. Cálculo Funcional Continuo

La idea fundamental de esta sección es desarrollar el cálculo funcional continuo, para ello debemos empezar introduciendo la idea de morfismos entre C^*-álgebras.

Recordamos que estamos trabajando en un contexto de C^*-álgebras con unidad.

Definición A.3.1. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ dos C^*-álgebras. Un morfismo de álgebras $\pi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ se dice que es un morfismo de C^*-álgebras si satisface:

I) $\pi(1_{\mathscr{A}}) = 1_{\mathscr{B}}$.

II) Para todo $a \in \mathscr{A}$ se tiene que $\pi(a^*) = (\pi(a))^*$.

Observación A.3.2. Notar que la composición de morfismos de C^*-álgebras resulta un morfismo de C^*-álgebras.

Proposición A.3.3. Sea $\pi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un morfismo de C^*-álgebras. Entonces, para todo $a \in \mathscr{A}$ se tiene que:

$$\|\pi(a)\| \leq \|a\|$$

en particular tenemos que todo morfismo de C^*-álgebras es continuo.

Demostración. Sea $a \in \mathrm{GL}(\mathscr{A})$ entonces notamos que:

$$\pi(a)\pi(a^{-1}) = \pi(aa^{-1}) = \pi(1) = 1$$

analogamente se tiene $\pi(a^{-1})\pi(a) = 1$. Esto nos dice que $\pi(\mathrm{GL}(\mathscr{A})) \subseteq \mathrm{GL}(\mathscr{B})$.

Sea ahora $a \in \mathscr{A}$ arbitrario y $\lambda \in \rho_{\mathscr{A}}(a)$. Entonces tenemos que:

$$\lambda - \pi(a) = \pi(\lambda - a) \in \pi(\mathrm{GL}(\mathscr{A})) \subseteq \mathrm{GL}(\mathscr{B})$$

luego $\lambda \in \rho_{\mathscr{B}}(\pi(a))$. Se sigue entonces que $\rho_{\mathscr{A}}(a) \subseteq \rho_{\mathscr{B}}(\pi(a))$ lo cual es lo mismo que decir que $\sigma_{\mathscr{B}}(\pi(a)) \subseteq \sigma_{\mathscr{A}}(a)$ y esto implica que:

$$r_{\mathscr{B}}(\pi(a)) \leq r_{\mathscr{A}}(a).$$

Por otro lado, es fácil ver que a^*a y $\pi(a)^*\pi(a)$ son hermitianos y en particular normales. Luego usando el item III) de la Proposición A.2.6, se tiene:

$$\begin{aligned}\|\pi(a)\|^2 &= \|\pi(a)^*\pi(a)\| = r_{\mathscr{B}}(\pi(a)^*\pi(a)) \\ &= r_{\mathscr{B}}(\pi(a^*a)) \leq r_{\mathscr{A}}(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$. □

Corolario A.3.4. Si $\pi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ es un isomorfismo de C^*-álgebras, es decir, es un morfismo de C^*-álgebras, es biyectivo y su inversa también es un morfismo de C^*-álgebras, entonces π preserva normas, es decir, es una isometría.

A continuación la idea será probar el Teorema Espectral. Daremos la demostración para el caso hermitiano. La demostración del caso normal requiere un mayor desarrollo y la construcción de la Transformada de Gelfand. Estos temas son tratados en el capítulo 1 del libro de Davidson [8].

Comenzamos primero recordando el Teorema de Stone-Weierstrass en su versión real.

Teorema A.3.5. (Stone-Weierstrass, versión real) Sea X un espacio topológico compacto y T_2 y sea $C(X,\mathbb{R})$ el álgebra conmutativa de funciones contnuas de X en $\mathbb{R}$, dotada con la norma del supremo. Sea $S \subseteq C(X)$ una subálgebra que cumple:

I) Dados $x, y \in X$ existe $f \in S$ de forma que $f(x) \neq f(y)$, es decir, S separa puntos.

II) La función constante 1 está en S.

Entonces, S es densa en $C(X)$.

Demostración. La demostración de este teorema puede encontrarse en el libro de Reed y Simon [13]. □

Observación A.3.6. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra y sea $a \in \mathscr{A}$ hermitiano. La Proposición A.2.2 nos dice que $\sigma_{\mathscr{A}}(a)$ es compacto, por otro lado, como a es hermitiano, el ítem V) de la Proposición A.2.6 nos dice que $\sigma_{\mathscr{A}}(a) \subseteq \mathbb{R}$. Luego como podemos pensar en $C(\sigma_{\mathscr{A}}(a), \mathbb{R})$ con la estructura de C^*-álgebra del Ejemplo A.1.4 y tenemos que las funciones polinómicas reales en una variable separan puntos y claramente poseen a la función constante 1. En conclusión por el Teorema de Stone-Weierstrass (Teorema A.3.5) las funciones polinómicas reales en una variable son densas en $C(\sigma_{\mathscr{A}}(a), \mathbb{R})$.

Teorema A.3.7. (Teorema Espectral) Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra y sea $a \in \mathscr{A}$ normal.

Entonces existe un único morfismo de C^*-álgebras que lo notaremos

$$ev_a : C(\sigma_{\mathscr{A}}(a)) \longrightarrow \mathscr{A}$$

que cumple que si f es la restricción de una función polinómica $ev_a(f) = f(a)$ es la valuación usual de un polinomio en un eleménto de $\mathscr{A}$ (ver Observación A.2.7).

Además, se tiene que para toda $f \in C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$, si notamos $ev_a(f) = f(a)$ valen:

I) $\|f(a)\| = \|f\|_{C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))}$

II) $\sigma_{\mathscr{A}}(f(a)) = f(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$

Demostración. Recordamos que, como habíamos observado previamente, haremos la demostración para el caso a hermitiano y pensaremos a $C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$ como las funciones continuas a $\mathbb{R}$.

Primero observamos que debido a que a es normal, si P es una función polinómica restringida a $C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$ se tiene que $P(a)$ resulta normal y usando el ítem III) de la Proposición A.2.6 y la Proposición A.2.8 se sigue:

$$\|P(a)\| = r_{\mathscr{A}}(P(a)) = \sup_{\lambda \in \sigma_{\mathscr{A}}(P(a))} |\lambda| = \sup_{\lambda \in \sigma_{\mathscr{A}}(a)} |P(\lambda| = \|P\|_{C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))}.$$

Esto nos dice que I) queda probado para polinomios reales en una variable. En particular la aplicación ev_a es uniformemente continua cuando nos restringimos al conjunto de estas funciones. Por otra parte, como a es hermitiano, la Observación A.3.6 nos dice que esta familia de funciones es densa. Esto último nos permite, en virtud de la completitud de $\mathscr{A}$, extender a la aplicación ev_a de forma única a todo $C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$ de la siguiente forma:

Si $f \in C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$ entonces existe $(P_n)_n \subseteq C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$ sucesión de funciones polinómicas que converge a f en $C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$ y definimos:

$$f(a) := \lim_{n\to\infty} P_n(a)$$

claramente este es un morfismo de C^*-álgebras (notar que la involución en $C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$ está dada por $f^* = \overline{f} = f$ ya que estamos en el caso de funciones reales).

Esto termina de probar la primera parte del enunciado, veamos ahora los ítems.

I) Este ítem ya lo probamos para funciones polinómicas. Sea entonces $f \in C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$ y sea $(P_n)_n \subseteq C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$ sucesión de funciones polinómicas que converge a f en $C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$ luego:

$$\|f(a)\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n(a)\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n\|_{C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))} = \|f\|_{C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))}$$

II) Observamos primero que para funciones polinómicas este resultado es válido por la Proposición A.2.8. Veamos entonces el caso general. Sea $f \in C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$ y sea $(P_n)_n \subseteq C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$ sucesión de funciones polinómicas que converge a f en $C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$. Queremos ver que:

$$\sigma_{\mathscr{A}}(f(a)) = f(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$$

$\supseteq$) Sea $\lambda \in \sigma_{\mathscr{A}}(a)$, por ser el resultado válido para polinomios tenemos que $P_n(\lambda) \in \sigma_{\mathscr{A}}(P_n(a))$ es decir:

$$P_n(\lambda) - P_n(a) \notin \mathrm{GL}(\mathscr{A})$$

como $GL(\mathscr{A})$ es abierto, su complemento es cerrado y tomando límite se obtiene que $f(\lambda) - f(a) \notin GL(\mathscr{A})$ de donde se sigue que $f(\lambda) \in \sigma_{\mathscr{A}}(f(a))$ y se concluye la contención.

$\subseteq$) Sea $\lambda \notin f(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$ veamos que $\lambda \notin \sigma_{\mathscr{A}}(f(a))$.

Como $\lambda \notin f(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$ entonces podemos considerar $g := (f - \lambda)^{-1}$ y usando que ev_a es un morfismo de C^*-álgebras, obtenemos:

$$g(a)(f(a) - \lambda) = (f(a) - \lambda)g(a) = 1$$

luego $f(a) - \lambda \in \mathrm{GL}(\mathscr{A})$ lo cual implica $\lambda \notin \sigma_{\mathscr{A}}(f(a))$. $\square$

Observación A.3.8. Lo que nos permitió demostrar de forma mas simple el caso $a \in \mathscr{A}$ hemitiano fue el hecho de que su espectro era un compacto de $\mathbb{R}$. Para el caso normal tenemos que su espectro es un compacto de $\mathbb{C}$, y la dificultad se presenta en el hecho de que las funciones polinómicas complejas en una variable no son densas en $C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$.

A continuación veremos para el caso $a \in \mathscr{A}$ normal una familia de funciones densas, la cual puede ser usada para aproximar $f(a)$ para $f \in C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$. Comenzamos con la versión compleja del Teorema de Stone-Weierstrass.

Teorema A.3.9. (Stone-Weierstrass, versión compleja) Sea X un espacio topológico compacto y T_2 y sea $C(X)$ el álgebra conmutativa de todas las funciones continuas de X en $\mathbb{C}$ dotada con la norma del supremo. Sea $S \subseteq C(X)$ una subálgebra que cumple:

i) Dados $x, y \in X$ existe $f \in S$ de forma que $f(x) \neq f(y)$, es decir, S separa puntos.

ii) Si $f \in S$ entonces $\overline{f} \in S$.

iii) La función constante 1 está en S.

Entonces, S es densa en $C(X)$.

Demostración. Sea $f \in S$ notamos que $\mathrm{Re}(f) = \frac{f+\overline{f}}{2} \in S$ y que $\mathrm{Im}(f) = \frac{f-\overline{f}}{2i} \in S$

Sea $S_{\mathbb{R}}$ la subálgebra de S que contiene a todas las funciones a valores reales. Es claro que como S separa puntos $S_{\mathbb{R}}$ debe de hacerlo. Luego usando la versión real del Teorema de Stone-Weierstrass (Teorema A.3.5) se sigue que $S_{\mathbb{R}}$ es densa en $C(X, \mathbb{R})$.

Como $S = \{f + ig : f, g \in S_{\mathbb{R}}\}$ se sigue que S es denso en $C(X, \mathbb{C})$ puesto que $C(X, \mathbb{C}) = C(X, \mathbb{R}) + iC(X, \mathbb{R})$. □

Observación A.3.10. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra, y sea $a \in \mathscr{A}$. La proposición A.2.2 nos dice que $\sigma_{\mathscr{A}}(a) \subseteq \mathbb{C}$ es compacto, luego como es claramente T_2 por ser subespacio de $\mathbb{C}$ se tiene que $C_0(\sigma_{\mathscr{A}}(a)) = C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$ posee estructura de C^*-álgebra como en el ejemplo A.1.4. Por otro lado, si consideramos $\mathrm{Pol}\left[X, \overline{X}\right]$ el conjunto de funciones polinómicas complejas en las variables X y $\overline{X}$ tenemos que este conjunto puede ser pensado como una subálgebra de $C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$ la cual claramente separa puntos, es cerrada por conjugación y contiene a la función constante 1. Luego la versión previa del Teorema de Stone-Weierstrass nos dice justamente que es densa.

Observación A.3.11. Sea $a \in \mathscr{A}$ normal. La observación previa junto al Teorema Espectral (Teorema A.3.7) implican que dada $f \in C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$ podemos calcular:

$$f(a) = \lim_{n \to \infty} P_n(a, a^*)$$

donde $(P_n)_n \subseteq C(\sigma_{\mathscr{A}}(a))$ es una familia de funciones polinómicas en las variables X y $\overline{X}$.

Probaremos ahora un resultado útil.

Proposición A.3.12. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra y sea $x \in \mathscr{A}$ entonces se tiene que x se puede escribir como combinación lineal de cuatro elementos unitarios.

Demostración. Miremos primero el caso $x \in \mathscr{A}_h$ y $\|x\| \leq 1$. En tal caso, como consecuencia de la Proposición A.2.6, tenemos que $\sigma_{\mathscr{A}}(x) \subseteq [-1, 1]$ luego el espectro de $1 - x^2$ está contenido en $[0, 1]$ y utilizando el Teorema A.3.7 queda bien definido $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$. Consideremos entonces el elemento u dado por:

$$u = x + i(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

es fácil ver que dicho elemento es unitario y que además se tiene que $x = \frac{1}{2}(u + u^*)$.

Notamos que si tomamos $x \in \mathscr{A}_h$ cualquiera, simplemente dividiendo por la norma y aplicando lo anterior tenemos una escritura de la forma

$$x = \frac{1}{2}\|x\|(u + u^*)$$

el resultado para un elemento arbitrario $x \in \mathscr{A}$ se sigue de descomponerlo como $x = a+ib$ con $a, b \in \mathscr{A}_h$. □

Terminamos esta sección definiendo lo que es un elemento positivo.

Definición A.3.13. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra y sea $a \in \mathscr{A}$ hermitiano. Decimos que a es positivo si:

$$\sigma_{\mathscr{A}}(a) \subseteq [0, \infty).$$

Proposición A.3.14. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra y sea $a \in \mathscr{A}$ son equivalentes:

I) a es positivo.

II) Existe $b \in \mathscr{A}$ hermitiano tal que $a = b^2$.

III) Existe $c \in \mathscr{A}$ tal que $a = c^*c$.

A.4. Representaciones de C^*-álgebras

Definición A.4.1. Una representación de una C^*-álgebra en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ es un morfismo de C^*-álgebras:

$$\pi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H}).$$

Definición A.4.2. Una representación $\pi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H})$ de una C^*-álgebra $\mathscr{A}$ en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ se dice fiel si la aplicación π es inyectiva.

Definición A.4.3. Un estado en una C^*-álgebra es una aplicación lineal $\phi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ que verifica:

1. $\|\phi\| := \sup\{|\phi(a)| : a \in \mathscr{A}, \|a\| = 1\} = 1$.
2. Para todo $a \in \mathscr{A}$ se tiene que $\phi(a^*a) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Proposición A.4.4. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra y sea $\phi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ un estado. Entonces se tiene que:

1. $\|\phi(b^*a)\|^2 \leq \|\phi(a^*a)\|\|\phi(b^*b)\|$ para todo $a, b \in \mathscr{A}$.
2. $\phi(a^*) = \overline{\phi(a)}$ para todo $a \in \mathscr{A}$. Esto me dice en particular que el núcleo de ϕ es $*$-cerrado.
3. $\|\phi(a)\|^2 \leq \phi(a^*a)$ para todo $a \in \mathscr{A}$.
4. Dado $a \in \mathscr{A}$, entonces
$$\phi(a^*a) = 0 \Longleftrightarrow \phi(ba) = 0 \; \forall \, b \in \mathscr{A}.$$

Notación A.4.5. Si $\mathscr{A}$ es una C^*-álgebra y ϕ es un estado en $\mathscr{A}$, notamos:

$$N_\phi = \{a \in \mathscr{A} : \phi(a^*a) = 0\}.$$

Observación A.4.6. Si $\mathscr{A}$ es una C^*-álgebra y ϕ es un estado en $\mathscr{A}$, se tiene que la aplicación $\langle -, - \rangle : \mathscr{A}/N_\phi \times \mathscr{A}/N_\phi \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$\langle [a], [b] \rangle = \phi(b^*a)$$

está bien definida y resulta un producto interno, luego si consideramos $\mathscr{H}_\phi$, la completación de $\mathscr{A}/N_\phi$ se tiene que la aplicación definida se extiende a $\mathscr{H}_\phi$ resultando este último un espacio de Hilbert.

Proposición A.4.7. (Representación GNS) Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra ϕ un estado en $\mathscr{A}$ se tiene que el mapa $\pi_\phi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H}_\phi)$ dado por:

$$\pi_\phi(a)([b]) = [ab]$$

resulta una representación de $\mathscr{A}$ en $\mathcal{B}(\mathscr{H}_\phi)$.

Observación A.4.8. Con la notación de la proposición anterior tenemos que:

$$\phi(b^*a) = \langle [a], [b] \rangle$$

tomando $b = 1$ se sigue que:

$$\phi(a) = \langle [a], [1] \rangle = \langle \pi_\phi(a)([1]), [1] \rangle$$

notamos además que la norma de $[1]$ es 1.

El siguiente teorema nos garantiza la existencia de una representación fiel de una C^*-álgebra abstracta en un álgebra de operadores, esta representación se llama representación universal de $\mathscr{A}$. Su contrucción puede encontrarse [8].

Teorema A.4.9. Sea $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra. Entonces existe un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ de forma que se tiene una representación fiel $\pi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathscr{H})$, y bajo esta representación $\mathscr{A}$ resulta isometricamente isomorfa a una C^*-subálgebra de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$.

Para finalizar esta sección enunciaremos el resultado conocido como descomposición polar de un elemento $a \in \mathscr{A}$ con $\mathscr{A}$ una C^*-álgebra. Como toda C^*-álgebra es isométricamente isomorfa a una C^*-subálgebra de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ para cierto espacio de Hilbert $\mathscr{H}$, bastará enunciarlo en un contexto de espacios de Hilbert, observando que la isometría del enunciado en el caso de una C^*-álgebra puede no ser parte de la misma sino de la mínima W^*-subálgebra de $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ que la contiene.

Definición A.4.10. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y sea $u \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$, decimos que u es una isometría parcial si cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

i) u^*u es un proyector.

ii) uu^* es un proyector.

iii) u restringido al ortogonal de su núcleo es una isometría.

Observación A.4.11. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, y sea $a \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$. El operador a^*a es un operador positivo por la Proposición A.3.14, luego por el Teorema A.3.7 esta bien definido:

$$|a| := \sqrt{a^*a}.$$

Proposición A.4.12. (Descomposición Polar) Sea $a \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ entonces existe $u \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ una isometría parcial de forma que:

$$a = u|a|$$

además se tiene que u^*u es la proyección a la clausura del rango de $|a|$, uu^* es la proyección a la clausura del rango de a y si a es inversible el operador u resulta unitario.

Bibliografía

[1] Andruchow, Esteban. The Grassmann manifold of a Hilbert space. Proceedings of the XIIth ”Dr. Antonio A. R. Monteiro” Congress, 41–55, Univ. Nac. Sur Dep. Mat. Inst. Mat., Bahía Blanca, 2014. 35

[2] Apostol, Tom M. Mathematical analysis. Second edition. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1974. 8

[3] Atkin, C. J. The Finsler geometry of groups of isometries of Hilbert space. J. Austral. Math. Soc. Ser. A 42 (1987), no. 2, 196–222. VII, 34

[4] Bottazzi, T.; Varela, A. Best approximation by diagonal compact operators, Linear Algebra Appl. 439 (2013) 3044–3056. 79

[5] Bottazzi, T.; Varela, A. Minimal length curves in unitary orbits of a Hermitian compact operator. Differential Geom. Appl. 45 (2016). 79

[6] Calkin, J. W. Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space. Ann. of Math. (2) 42, (1941). 53

[7] Corach, G.; Porta, H.; Recht, L. The geometry of spaces of projections in C^*-algebras. Adv. Math. 101 (1993). VII

[8] Davidson, Kenneth R. C^*-algebras by example. Fields Institute Monographs, 6. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. 81, 86, 91

[9] Durán, Carlos E.; Mata-Lorenzo, Luis E.; Recht, Lázaro. Metric geometry in homogeneous spaces of the unitary group of a C^*-algebra. I. Minimal curves. Adv. Math. 184 (2004), no. 2, 342–366. VIII, IX, 71, 78, 79

[10] Kadison, Richard V.; Ringrose, John R. Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I. Elementary theory. Reprint of the 1983 original. Graduate Studies in Mathematics, 15. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. 34

[11] Lang, Serge. Differential and Riemannian manifolds. Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 160. Springer-Verlag, New York, 1995. 1

[12] Lee, John M. Riemannian manifolds. An introduction to curvature. Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer-Verlag, New York, 1997. VII, 29

[13] Reed, Michael; Simon, Barry. Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis. Second edition. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1980. 1, 29, 86