



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

**Balanceando distancias de viajes mediante programación
matemática en el fútbol juvenil argentino**

Agustina Florencia López

Director: Dr. Guillermo Durán

Noviembre 2018

Agradecimientos

A toda mi familia. A los que nunca se enojaron cuando no pude estar en un plan por tener que quedarme estudiando. A mis abuelas, que me ayudaron mucho más de lo que creen, desde todo punto de vista. A mi cuñada Flor, que iluminó tantas veces mis noches de estudio con sus exquisitas cenas y charlas. A mi mamá, a mi papá y a mi hermano, que me acompañaron desde el primer momento en la decisión de seguir esta carrera y nunca dejaron de hacerlo en todos estos (largos) años. A ellos, que fueron mi gran sostén siempre y sé que lo seguirán siendo; definitivamente no hubiera podido sin todo su apoyo, en lo académico y en lo personal. Son realmente una inmensa parte de mí y de lo que soy hoy, me siento infinitamente orgullosa de cada uno de ustedes. (Ah! Y a los valiosos conocimientos de mi papá en Fortran 4, por supuesto).

A mis amigos. Porque los quiero, los quiero mucho! A los que me dio la facultad y a los de antes. A Fede, Estefi, Juli, Maga, Teffu, que me acompañan con tanto amor desde la escuela. A Mar, con quien siempre tuve y sigo teniendo una conexión única, sin importar cuánto tiempo pase. A Sol, que me dio la amistad más genuina e íntegra que conocí, que está siempre, **siempre**, cada vez que la necesito desde hace tantos años. A Cami, que me hizo mucho más livianos los primeros cuatrimestres. A los Bolzano: Alito, Buber, Chanchu, Flor, Gordo, Gus, Lion, Pierna. Porque sin ustedes el camino por la facultad se me hace inimaginable, porque compartimos mil juntadas, mil tardes de estudio, mil cenas y hasta viajes, porque indudablemente son el recuerdo más hermoso de esta carrera. A Alito, porque su amistad hoy en día me es realmente indispensable y sin dudas de lo más valioso que tengo y tendré en la vida. A Flor, porque parecía imposible encontrar tal amiga en la facultad, porque el día que nos conocimos ya estábamos arreglando para volvernos a juntar. A Lion, porque me hizo olvidar de lo que era estudiar y preparar finales sola, porque elegimos sufrir todas las materias juntos desde que nos encontramos. A todas las personas que conocí gracias a Exactas y con quienes compartí buenos momentos. Al Colo, a Favo, a Fede, a Joaco, a Joe, a Lucho, a Luli, a Naza, a Tami, a Vale.

A mis amigos del laburo, que me bancaron mil veces hablar de esta tesis y de lo que estaba haciendo (y que me vieron trabajando en ella, ¿por qué no?). A todos ellos, con los que compartí más de un *antidomingazo* y me hicieron sentir bien desde el principio, a la amistad que formé con cada uno. A Car, Mati, Nico, porque somos un grupo único y me hacen reír todos los días. A Jime, porque siempre valoró mucho mi crecimiento tanto laboral como personal y académico.

A Willy, que me dio incontables e increíbles oportunidades en el marco de esta tesis, que confió en mí para proyectos tan importantes y que me hizo descubrir nuevos mundos académicos. Porque fue quien finalmente me convenció de que mi carrera iba mucho más allá de sentarme a hacer ejercicios en un cuaderno y de que el mundo donde aplicar todo eso que había aprendido existía realmente. Porque hizo que me sienta orgullosa de haber elegido matemática aplicada. A Mario y Gonzalo, que son dos genios y desde la distancia me dieron una gran mano en todo esto. Porque nunca importó si el lugar era Argentina, Chile, Noruega o España.

A Diego y Patu, que con entusiasmo aceptaron ser jurados de esta tesis.

A los docentes que me hicieron querer un poquito más a la matemática. A Ileana y Sonia, que me hicieron tenerle tanto cariño durante la secundaria. A los de Exactas que me enseñaron desde el pizarrón y también a los que lo compartieron conmigo en mis cuatrimestres de ayudante. A los que sentí un poco más cercanos y se bancaron todas mis preguntas, los que dictan clases a las que da gusto asistir: a Marcelo Valdetaro, a Maria Eugenia Rodríguez, a Pablo Solernó, a Dani Cuesta, a Martín Completa, a Gabriel Acosta, a Daniel Carando, a Felipe Marceca, a Daniel Galicer, a Martín Savransky, a Ale Martínez, a Agustin Gravano, a Willy de nuevo, a Facu Gutiérrez, a Osvaldo Santillán, a Facu Sapienza.

Y finalmente a la UBA, a Exactas. Que me hicieron sufrir pero me enseñaron mucho, que me dieron educación pública de impecable e indiscutible calidad. Que me abrieron la cabeza en miles de aspectos y que me vieron aprender y crecer.

Índice

Introducción	1
1. Programación matemática	3
1.1. Programación lineal	3
1.1.1. Programación lineal entera	4
1.1.2. Programación lineal entera mixta	5
1.2. Métodos de resolución	5
1.2.1. El algoritmo Simplex	5
1.2.2. Branch & Bound	7
1.3. Sports Scheduling	9
2. Torneo Marzo-Junio 2018	13
2.1. Estructura del torneo	13
2.2. Estrategia de resolución	14
2.3. Zona A	15
2.3.1. Clusters	21
2.3.2. Matriz de distancias	32
2.4. Zona B	40
2.4.1. Clusters	44
2.4.2. Matriz de distancias	45
3. Torneo Agosto-Noviembre 2018	47
3.1. Estructura del torneo	47
3.2. Estrategia de resolución	48
3.3. Zona A	49
3.3.1. Clusters	53
3.3.2. Matriz de distancias	61
3.4. Zona B	65
3.4.1. Clusters	69
3.4.2. Matriz de distancias	69
4. Resultados y conclusiones	71
4.1. Torneo Marzo-Junio 2018	71
4.1.1. Clusters	72
4.1.2. Matriz de distancias, modelo 1: minimizar la suma de diferencias . .	74
4.1.3. Matriz de distancias, modelo 2: minimizar la máxima diferencia . .	76
4.2. Torneo Agosto-Noviembre 2018	79
4.2.1. Clusters	80
4.2.2. Matriz de distancias, modelo 1: minimizar la suma de diferencias . .	82
4.2.3. Matriz de distancias, modelo 2: minimizar la máxima diferencia . .	84
4.3. Comparación adicional	87
4.4. Otras aplicaciones y trabajo futuro	88
Bibliografía	91

Introducción

La programación lineal es un área de la matemática que vio la luz a fines de la década de los 40 cuando su padre, George Dantzig, desarrolló un método para poder resolver los problemas de este estilo: el método Simplex.

Muchos de los modelos construídos hace algunas décadas no podían ser resueltos debido a su complejidad computacional. El increíble avance de la tecnología fue haciendo posible resolver problemas que hace un tiempo eran intratables, por lo que gracias a esto y a la investigación en este área se le han encontrado innumerables campos de aplicación.

Uno de los primeros usos y de los más clásicos, fue para reducir costos bajo ciertas condiciones de disponibilidad, utilizado por ejemplo por empresas incluso al día de hoy. Actualmente podemos encontrar programación lineal en el ruteo de vehículos, asignación de horarios, licitaciones, planificación de producción, localización de edificios, entre miles de otras aplicaciones. En particular, también podemos encontrar programación lineal en el deporte, específicamente en el diseño de fixtures, área más conocida por su nombre en inglés como “*Sports Scheduling*”.

En esta tesis, nos focalizaremos en el desarrollo de algunos fixtures para Torneos reales del Fútbol Argentino que se llevaron a cabo durante el año 2018. Particularmente, nos centraremos en los dos Torneos de Fútbol Juvenil organizados por la Superliga Argentina de Fútbol (SAF), que tuvieron lugar desde marzo a junio y desde agosto a noviembre. Además de las restricciones básicas que deben cumplir estos torneos, existe una serie de restricciones impuestas por la SAF que debemos garantizar. La más importante de ellas es equiparar, para todos los equipos, las distancias recorridas entre sus divisiones (mayores y menores), algo prácticamente imposible de lograr mediante la programación manual.

Este trabajo forma parte de un convenio de cooperación entre el Instituto de Cálculo de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA y la SAF, para asesorar a esta última institución en las programaciones de los diferentes campeonatos que organiza.

En el Capítulo 1 veremos un breve repaso sobre la programación lineal, incluyendo programación lineal entera y programación lineal entera mixta. Además, veremos también algunos aspectos importantes del método Simplex y de “Branch & Bound”, como así también hablaremos sobre problemas de breaks y de distancias englobados en el Sports Scheduling y definiremos lo necesario para entender el trabajo del resto de los capítulos.

En el Capítulo 2 nos centraremos en el Torneo Marzo-Junio, definiendo su estructura y describiendo dos estrategias de resolución para poder diseñar diferentes modelos que nos arrojen un fixture acorde a lo que buscamos. La primera de ellas será agrupando a los equipos en diferentes clusters geográficos, y la segunda será teniendo en cuenta la distancia específica que hay entre ellos.

En el Capítulo 3 trabajaremos sobre el Torneo Agosto-Noviembre, también definiendo su estructura y analizando sus dos estrategias de resolución, que presentarán varias similitudes con las definidas para el Torneo anterior pero también algunas diferencias.

El Capítulo 4 lo destinaremos a sacar conclusiones sobre los modelos realizados y fundamentalmente sobre los fixtures que conseguimos como resultado, comparandolos entre ellos y contra los que se usaban anteriormente. Además, plantearemos algunos aspectos importantes que podrán ser utilizados en un trabajo futuro.

Capítulo 1

Programación matemática

La *programación matemática* (u *optimización matemática*, o simplemente *optimización*) es una técnica muy utilizada en la toma de decisiones cuando se quiere encontrar un elemento que sea “mejor” sobre los otros bajo ciertos criterios y ciertas condiciones. En general, buscamos minimizar o maximizar una función real sobre elementos de un conjunto dado por determinadas restricciones.

Hay muchos y diversos tipos de optimización, entre ellos, la programación dinámica, la optimización combinatoria, las heurísticas, la programación no lineal, etc. Nos centraremos esencialmente en tres de ellos: la programación lineal (LP), la programación lineal entera (ILP) y la programación lineal entera mixta (MILP).

1.1. Programación lineal

Comencemos por definir aquellos que se consideran problemas de “*programación lineal*” (*LP problems*).

Sean $c_1, \dots, c_n$ números reales y sean $x_1, \dots, x_n$ variables también reales. Definimos:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

función lineal que de aquí en adelante llamaremos “*función objetivo*”. $x_1, \dots, x_n$ son llamadas “*variables de decisión*”.

Si g es otra función lineal, llamaremos “*ecuación lineal*” e “*inecuaciones lineales*” a las siguientes expresiones, respectivamente:

$$g(x_1, \dots, x_n) = b$$

$$g(x_1, \dots, x_n) \leq b$$

$$g(x_1, \dots, x_n) \geq b$$

Las ecuaciones e inequaciones lineales forman el conjunto de las “*restricciones lineales*”, o simplemente de las “*restricciones*”.

Usualmente consideramos que las variables definidas son positivas. Así, un problema de programación lineal clásico queda definido como:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimizar} && \sum_{i=1}^n c_i x_i \\
 & \text{s.a.} && \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \leq b_1 \\
 & && \vdots \\
 & && \sum_{i=1}^n a_{mi} x_i \leq b_m \\
 & && x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}
 \end{aligned}$$

O, en su forma más compacta:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimizar} && c^T x \\
 & \text{s.a.} && Ax \leq b \\
 & && x \geq 0
 \end{aligned}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, y $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

También podemos elegir *maximizar* una función objetivo, pero sólo por convención definimos el problema como uno de minimización.

Un vector x que cumpla las restricciones del problema (es decir, que verifica: $Ax \leq b$ y $x \geq 0$), se llama “*solución factible*”. Entre las soluciones factibles, aquella que minimiza la función objetivo es llamada “*solución óptima*”, siendo el “*valor óptimo*” aquel que se obtiene al evaluarla en la función objetivo.

Una observación importante es que no necesariamente existe una única solución óptima, ya que para un problema pueden directamente no existir soluciones factibles, o puede haber más de una solución que minimice la función objetivo, o puede no haber solución que la optimice. Los problemas en los que sucede lo primero mencionado se llaman “*infactibles*”, y aquellos en los que sucede lo último son llamados “*no acotados*”. Por otro lado, los problemas en los que tenemos más de una solución óptima son en realidad aquellos que presentan infinitas, y que llamaremos problemas “*de múltiples óptimos*”.

1.1.1. Programación lineal entera

Dentro de la programación lineal, podemos estudiar aquellos problemas cuyas variables de decisión son enteras (y no negativas). Estos son los llamados problemas de “*programación lineal entera*” (*ILP problems*) y, respetando la formulación presentada anteriormente, podemos definirlos clásicamente como:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimizar} && c^T x \\
 & \text{s.a.} && Ax \leq b \\
 & && x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}
 \end{aligned}$$

Dentro de esta categoría también se encuentran aquellos problemas cuyas variables de decisión son binarias, es decir, $x_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Los *ILP problems* son difíciles de resolver, en el sentido de que son *NP completos*, mientras que, por ejemplo, los de programación lineal pertenecen a la clase *P*. Para decirlo muy brevemente, los que pertenecen a esta última clase mencionada tienen un algoritmo que los resuelve en tiempo polinomial, mientras que no se conoce un algoritmo con esa complejidad para los otros.

1.1.2. Programación lineal entera mixta

Los *MILP problems* son aquellos cuyas variables de decisión pueden ser continuas o enteras. Nuevamente adoptando la última formulación propuesta para los problemas de programación lineal, ponemos definir a este nuevo tipo de problemas como:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & c^T x + d^T y \\ \text{s.a.} \quad & Ax + Dy \leq b \\ & x \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Como en el caso anterior, estos problemas son *NP completos*, lo que hace que su resolución sea considerada difícil.

1.2. Métodos de resolución

Veremos ahora una breve idea de los métodos de resolución clásicos y más estudiados para los problemas LP e ILP.

1.2.1. El algoritmo Simplex

Lo primero que debemos saber, es que se puede probar que el conjunto de elementos que cumplen las restricciones de un problema PL, $K = \{x / Ax \leq b, x \geq 0\}$, es convexo. No daremos la demostración de este hecho pero su clave está en la linealidad del sistema. Llamaremos *poliedro* a este conjunto.

Si este conjunto es acotado, se denomina *polítopo*. Además, si $K = \emptyset$, entonces estamos ante un problema infactible.

Cuando este último no es el caso y cuando K es un polítopo, tenemos entonces solución óptima finita (que recordemos, no necesariamente es única). Lo más importante de todo esto es que, en el caso de que exista unicidad en la solución, ésta debe ser un extremo de K , también llamado *vértice*. Un detalle es que también puede existir unicidad de solución aún cuando K no sea acotado, por ejemplo si estamos minimizando en una dirección que no es aquella en la que el poliedro no está limitado. Veamos un par de figuras (en dimensión 2) donde se puede apreciar mejor lo explicado:

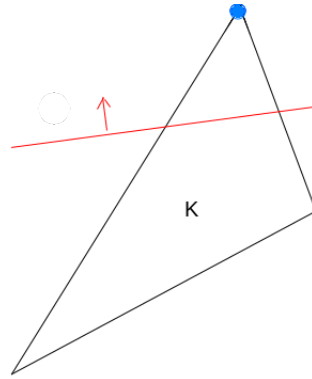


Figura 1: Polítopo con única solución óptima

El trazo rojo sería la dirección en la que minimizamos (o maximizamos), y el punto azul representa la que claramente va a resultar solución óptima.

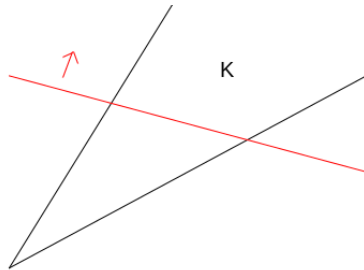


Figura 2: Poliedro sin solución óptima

En este caso, estamos ante un poliedro no acotado, con la dirección de optimización marcada en rojo, que nos indica que no encontraremos solución óptima.

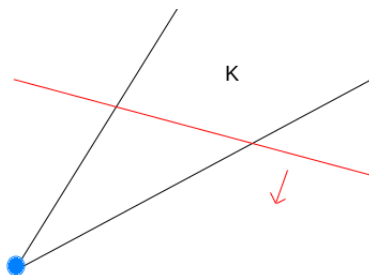


Figura 3: Poliedro con única solución óptima

Por el contrario, en este poliedro no acotado, sí habrá solución óptima ya que estamos optimizando en una dirección que no se ve afectada por el hecho de que K no esté acotado.

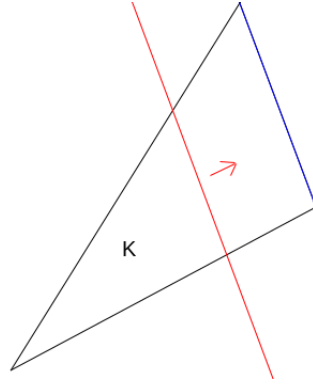


Figura 4: Segmento óptimo

Aquí, como vemos, la dirección en la que optimizamos hace que la solución óptima no sea una, si no infinitas, ya que coincide con una de las caras del polígono, marcada en color azul.

Como ya habíamos mencionado, de existir solución óptima finita, el valor óptimo se alcanza en un vértice de K . Además, de existir más de una solución óptima finita, el valor óptimo se alcanza en cualquier combinación lineal convexa de los vértices donde se originalmente se alcanza (Figura 4).

En muy pocas palabras, *Simplex* saca el mayor provecho de esto, comenzando entonces por un vértice inicial y chequeando si es óptimo. Si no es así, se desplaza a otro vértice adyacente que mejore la función objetivo e itera, parando al hallar un vértice que da optimalidad o en caso de encontrar una dirección extrema que indique que el problema no está acotado.

Hay más de un método que afirma que Programación Lineal es un problema polinomial, aunque *Simplex* no siempre pueda resolverlo en ese tiempo. Entre ellos, podemos destacar el presentado por L. G. Khachiyan en 1979, conocido como el “*método de las elipsoides*”, o aquellos que ya no se desplazan por los vértices del poliedro factible, siendo considerados entonces “*algoritmos de punto interior*”. Sin embargo, en la práctica, los adelantos científicos y tecnológicos nos garantizan que actualmente *Simplex* funciona muy bien.

Hay mucha teoría sobre cómo *Simplex* encuentra un vértice inicial, sobre cómo halla una dirección de no acotamiento, sobre cómo garantiza optimalidad, etc. Considero que no es el objetivo de esta sección ni de esta tesis dar dichas explicaciones, ya que no aportarían demasiado a los efectos de nuestro problema.

1.2.2. Branch & Bound

Veremos ahora las ideas globales de otro algoritmo, conocido como “*Branch & Bound*”, específicamente utilizado para resolver problemas de programación lineal entera y programación lineal entera mixta.

Tomemos nuestro problema original de MILP:

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && c^T x + d^T y \\
& \text{s.a.} && Ax + Dy \leq b \\
& && x \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
& && y \geq 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Vamos a considerar la “*relajación lineal*” de este problema, que esencialmente elimina la restricción a cada x_i de ser variables enteras:

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && c^T x + d^T y \\
& \text{s.a.} && Ax + Dy \leq b \\
& && x \geq 0 \\
& && y \geq 0
\end{aligned} \tag{2}$$

La primera observación, obligatoria, es que si (x^*, y^*) es solución óptima de la relajación lineal de (1) y las variables x_i^* son enteras, entonces (x^*, y^*) es solución óptima del problema original.

Por otro lado, si x_i^* no cumplen la condición de ser enteras, podemos buscar alguna forma de conseguir el óptimo del problema original utilizando el óptimo de (2). Otro dato importante es que no hay motivo por el cual suponer que el óptimo de (1) es “cercano” al de su relajación lineal.

Enumerar todas las soluciones posibles del problema original y luego encontrar la mejor puede ser una tarea imposible de lograr. El algoritmo de Branch & Bound busca optimalidad reduciendo el espacio de soluciones de forma inteligente para evitar esto. La idea consiste en particionar el conjunto factible de la relajación lineal y resolver los *subproblemas* resultantes. Luego, analizando las soluciones obtenidas y sus valores óptimos, se decide si es posible conseguir mejores soluciones volviendo a dividir algún *subproblema*. Formalicemos un poco esta idea.

Sea $C_0 = \{(x, y) / Ax + Dy \leq b, x \geq 0, y \geq 0\}$, es decir, el conjunto de soluciones factibles de (2) (que asumiremos acotado). Tomemos (x_0^*, y_0^*) óptimo de (2). Si resulta que todas las coordenadas de x_0^* (o sea, las variables x_i^*) son enteras, entonces (x_0^*, y_0^*) es óptimo para (1) y el problema se termina. De lo contrario, existe i_0 tal que $x_{i_0}^*$ no es entera. Luego, defino $C_0^+ = \{(x, y) \in C_0 / x_{i_0} \geq \lfloor x_{i_0}^* \rfloor + 1\}$ y $C_0^- = \{(x, y) \in C_0 / x_{i_0} \leq \lfloor x_{i_0}^* \rfloor\}$.

Sean ahora los siguientes problemas:

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && c^T x + d^T y \\
& \text{s.a.} && (x, y) \in C_0^+
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && c^T x + d^T y \\
& \text{s.a.} && (x, y) \in C_0^-
\end{aligned} \tag{4}$$

Obviamente, $(x, y) \in C_0 \Rightarrow c^T x + d^T y \leq c^T \hat{x} + d^T \hat{y} \forall (\hat{x}, \hat{y}) \in C_0^+ \cup C_0^-$ (pues $C_0^+ \cup C_0^- \subseteq C_0$). Además, si (x_0^*, y_0^*) es el óptimo de (2), debe valer que $(x_0^*, y_0^*) \in C_0^+$ o $(x_0^*, y_0^*) \in C_0^-$, ya que x_0^* debe ser entera.

Ahora, podemos proseguir analizando el óptimo de (3). De encontrar una solución óptima (x^*, y^*) para este problema y de ser x^* entera, no necesariamente estamos ante un óptimo de (1), ya que la solución óptima de (4) podría ser mejor, pero al menos tenemos una cota superior para el valor óptimo de (1). Si x^* no es entera, entonces podemos nuevamente ramificar el problema análogo a lo realizado anteriormente.

De este modo, se construye un árbol binario de subproblemas que nos llevarán a encontrar la solución óptima de (1).

Un dato importante es que hay ciertas ramas de dicho árbol que no será necesario ramificar y entonces las *podaremos*. Los motivos para no ramificar un subproblema pueden ser tres, a saber:

- El subproblema resulta infactible (luego, cualquier ramificación resultará infactible).
- La solución óptima (x^*, y^*) del subproblema es factible para (1), es decir, x^* es entera (luego, ramificar este subproblema sólo nos traerá soluciones que eventualmente empeoren la función objetivo).
- El subproblema arroja una solución factible para (1) y el valor de la función objetivo que se obtiene es igual o peor a uno que ya se obtuvo en otro subproblema.

Finalmente, siguiendo el proceso descrito y resolviendo todas las instancias de ramificación posibles, podremos hallar una solución óptima para (1), sin la necesidad de enumerar todas sus soluciones factibles.

Esto completa las ideas básicas de las estrategias de resolución de los modelos de programación lineal con los que trabajaremos. Actualmente, expertos dedican sus días a desarrollar algoritmos más sofisticados en base a los vistos, o en encontrar características particulares de los problemas que ayuden a resolverlos. Sería inaceptable trabajar “*a mano*” para resolver problemas de un tamaño tal como los que nos enfrentaremos nosotros, y es por eso que usaremos un *solver* especial para esto.

1.3. Sports Scheduling

Dentro de la programación matemática, existe un área que se encarga del diseño de fixtures de torneos teniendo en cuenta diferentes condiciones: “*Sports Scheduling*”. Para resolver sus problemas, se utilizan diversas técnicas que van desde la programación lineal hasta la teoría de grafos o las metaheurísticas. Sus aplicaciones están dispersas a lo largo de muchos deportes, como por ejemplo, fútbol ([2], [8], [9], [13], [14], [15], [22], [25], [26]), baseball ([4], [27]), basquet ([5], [16], [20], [32], [38]), tenis de mesa ([18]), voley ([3], [29]), cricket ([1], [36], [37], [39]) o hockey sobre hielo ([12], [21]).

En cualquier torneo deportivo es necesaria una construcción del fixture, es decir, se debe determinar qué equipo juega contra qué otro en cada fecha. En particular, nos

centraremos en los torneos donde las localías de cada equipo son realmente importantes, es decir, no nos da lo mismo que los equipos jueguen de local o de visitante en cada fecha. Un torneo “*round robin*” es aquel donde todos los equipos se enfrentan contra todos los otros una cantidad de veces fija (Rasmussen & Trick, , [24]). Dentro de esta clase hay varios tipos, siendo los *single* y los *double round robin* los más comunes, en donde todos los equipos se enfrentan entre ellos una o dos veces, respectivamente. Por supuesto que también existen torneos con una cantidad diferente de partidos entre equipos, siendo tres o cuatro más usuales que otras.

En el caso de un *single round robin*, si n es la cantidad de equipos participantes, $n - 1$ fechas son necesarias en caso de que n sea par. Siendo n impar, se necesitan entonces n fechas para que todos logren enfrentarse contra todos. Si hay alguna fecha en la que un equipo no juega, entonces se dice que en dicha fecha tiene un *bye*. Además, si hay dos fechas consecutivas en las que un equipo juega con la misma localía, decimos que tiene un *break*, que será de local o de visitante.

Diseñar el fixture de un torneo puede parecer una tarea fácil; sin embargo, cuando muchas restricciones deben ser tenidas en cuenta se transforma en un complejo desafío. Entre ellas podemos tener:

- Restricciones de localía ([2], [4], [6], [7], [12], [17], [22], [23], [28], [30], [32], [34], [38]), en las que debemos asegurar que ciertos equipos jueguen de local o de visitante en determinadas fechas.
- Restricciones sobre equipos grandes y chicos ([2], [6], [7], [9], [16], [17], [20], [22], [28], [30]).
- Restricciones sobre breaks ([2], [7], [16], [17], [20], [22], [35]).
- Restricciones sobre los partidos ([2], [4], [7], [16], [20], [22], [31], [38]), en las que se predeterminan las fechas para el enfrentamiento entre ciertos equipos.
- Restricciones geográficas ([2], [6], [7], [22], [30], [33]), que incluyen desde evitar una serie de partidos demasiado cercanos hasta equiparar viajes entre equipos.
- Restricciones de separación ([2], [9], [12], [16], [20], [22], [23], [38]), en torneos donde los equipos se enfrentan más de una vez, se busca que la distancia entre sus partidos esté acotada.

Como veremos más adelante, nosotros trabajaremos con dos torneos que incluyen restricciones de todos estos tipos.

El diseño de un fixture puede no consistir únicamente en conseguir un esquema en el cual se respeten todas las condiciones básicas y las requeridas por la institución deportiva que lo solicita, si no también en querer optimizar algún aspecto del torneo. Entre las variantes más conocidas, se deben reconocer aquellos trabajos en los cuales se minimizan los breaks ([9], [15], [19], [23], [26], [33], [34], [35]) y aquellos donde se minimizan distancias recorridas ([3], [5], [10], [11], [12], [24], [32]).

Sobre los primeros, es obligatorio destacar los trabajos de de Werra ([33], [34], [35]), no sólo por ser un pionero en el asunto, si no porque demostró dos de los resultados más importantes sobre los torneos de tipo *round robin*:

Teorema 1.1. (de Werra [33]). En un torneo round robin de $2n$ equipos, el número de breaks es mayor o igual a $2n - 2$.

Teorema 1.2. (de Werra [33]). Si un torneo round robin de $2n$ equipos tiene $2n - 2$ breaks, entonces hay exactamente dos equipos que no tienen breaks y los otros tienen exactamente un break cada uno.

Estos teoremas nos dan cotas inferiores a la hora de programar un round robin en el que busquemos minimizar breaks, lo cual es muy útil para analizar la optimalidad del problema que lo modela.

Sobre minimizar distancias podemos encontrar diferentes tipos de problemas: aquellos en los que se busca equiparar distancias entre equipos o entre divisiones, minimizar distancia total recorrida, minimizar viajes entre partidos, entre otros. En algunos casos se desea optimizar distancias para abaratar costos de viaje, en otros, por ejemplo, para hacer un torneo más parejo.

En 2001, Easton, Nemhauser y Trick ([10]) propusieron el “*Travelling Tournament Problem*” (TTP), una especie de analogía deportiva con el “*Travelling Salesman Problem*” (TSP) que se ha transformado en uno de los problemas más importantes sobre minimización de distancias y que posteriormente fue ampliamente estudiado y también utilizado para la modelización de torneos ([7]).

El TTP puede ser definido de la siguiente manera (Easton et al. [10]):

Input: n , cantidad de equipos, $D \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ matriz de distancias, l, u parámetros enteros.

Output: Un torneo double round robin entre los n equipos tal que:

- El número de partidos consecutivos con la misma localía está entre l y u inclusive.
- Minimiza la distancia total recorrida por los equipos.

Además, dos restricciones adicionales suelen pedirse:

- El fixture debe ser espejado.
- Ningún par de equipos puede enfrentarse en dos fechas consecutivas.

El TTP fue un punto de partida y de inspiración para muchos problemas de optimización sobre distancias de la mano de la programación lineal.

En particular, en los dos capítulos siguientes de esta tesis estudiaremos los modelos de programación lineal entera y programación lineal entera mixta utilizados para diseñar el fixture de dos torneos reales de la temporada 2018 del fútbol juvenil argentino, siendo el objetivo principal equiparar las distancias recorridas entre las divisiones de un mismo equipo, para todos ellos.

Capítulo 2

Torneo Marzo-Junio 2018

En este capítulo hablaremos sobre el Torneo Juvenil de Fútbol Argentino llevado a cabo durante los meses de marzo, abril, mayo y junio de 2018. Describiremos la estructura general del torneo, que nos permitirá notar de qué manera abordar el problema a resolver. Veremos dos enfoques principales para conseguir el fixture que buscamos, analizando los diferentes caminos propuestos en cada uno.

2.1. Estructura del torneo

El torneo juvenil de fútbol para la primer mitad del año 2018 tiene una estructura particular. Participan 28 equipos argentinos que vienen dados por el campeonato de primera división, divididos en dos zonas de 14, A y B, presorteadas por la Superliga Argentina de Fútbol (SAF). Dentro de cada zona, se juega lo que llamamos un *single round robin*: cada equipo juega una única vez contra todos los otros. Esto nos daría un total de 13 partidos por equipo (uno por cada fecha). Sin embargo, la SAF decidió añadir una fecha extra, que denominaremos “fecha de clásicos”. En ella, cada equipo de la zona A se enfrentará con su rival clásico, que necesariamente pertenece a la zona B. Luego, el total de fechas a jugar es 14. La SAF estableció que esta fecha especial sea la número 7, relativamente a la mitad del torneo.

Para definir un ganador en cada división, los dos equipos que terminaron primeros en la zona A se enfrentan en una semifinal con los dos primeros de la zona B, pero cruzados: es decir, el equipo mejor posicionado de la zona A juega contra el segundo de la B, y viceversa. De estas semifinales, surgen dos equipos que finalmente disputarán la final para uno proclamarse “Campeón del Torneo Transición de Juveniles 2018”.

Como los rivales clásicos son públicamente conocidos, basta con sortear una sola zona para definir ambas. Este sorteo fue hecho por la SAF, arrojando por resultado lo siguiente (la numeración es nuestra):

	Zona A	Zona B
1	River	Boca
2	San Lorenzo	Huracán
3	Vélez	Argentinos Jrs.
4	Tigre	Chacarita
5	Independiente	Racing
6	Banfield	Lanús
7	Defensa y Justicia	Arsenal
8	Estudiantes	Gimnasia y Esgrima
9	Rosario Central	Newell's
10	Colón	Unión
11	Talleres	Belgrano
12	San Martín SJ	Godoy Cruz
13	Atlético Tucumán	Patronato
14	Temperley	Olimpo

Cuadro 1: Sorteo de zonas

Los 28 equipos participantes tienen 6 divisiones inferiores: 4° a 9°, que son las ligas que usualmente conocemos como sub-20, sub-18, sub-17, sub-16, sub-15 y sub-14. A las divisiones 4°, 5° y 6° las llamamos “*mayores*”, mientras que a las 7°, 8° y 9° las llamamos “*menores*”. Las tres divisiones mayores juegan exactamente con el mismo fixture, así como también lo hacen las tres menores. Pero además, las divisiones mayores juegan con el mismo fixture que las menores, pero con sus localías invertidas. Esto quiere decir que, por ejemplo, si las mayores del equipo I juegan de **local** contra las mayores del equipo II en la fecha k , entonces las menores del equipo I juegan de **visitante** contra las menores del equipo II en la fecha k .

Las menores de un equipo deben viajar hasta el estadio de su adversario (ida y vuelta) por cada fecha en la que les toque jugar de visitante. Por lo dicho anteriormente, esas fechas resultan aquellas en las que las mayores de ese mismo equipo no viajan. De la misma forma, cada vez que las menores juegan de local, las mayores tienen un viaje de ida y vuelta. El objetivo principal es armar un fixture en el cual se equipare la distancia recorrida a lo largo de todo el torneo entre las divisiones mayores y las menores de cada equipo.

Una primera observación es que basta con programar matemáticamente sólo uno de los dos fixtures, ya que el de la otra división queda completamente determinado al invertir las localías. Sin pérdida de generalidad, asumiremos que el fixture a programar será el de las mayores.

2.2. Estrategia de resolución

Usaremos programación lineal para modelar el problema. El costo de armar el fixture considerando a los 28 equipos juntos es demasiado alto, por lo que decidimos utilizar las zonas ya sorteadas para descomponer el problema en dos. Modelaremos primero a la zona

A y luego a la B. Notemos que estos fixtures no son independientes. Una vez que tenemos los resultados de la zona A, las localías de la “fecha de clásicos” (donde sólo hay partidos interzonales) ya quedan fijadas. Por ejemplo, si resultó que el equipo I (perteneciente a la zona A) juega de local dicha fecha especial, entonces su rival clásico (perteneciente a la zona B) la jugará de visitante. Esta información necesita ser incorporada en nuestro modelo para la zona B.

2.3. Zona A

El hecho de haber dividido a los 28 equipos en dos zonas de 14 interrelacionadas, hace que en cada una de ellas necesitemos identificar al rival clásico de cada equipo. No tendría sentido considerar a cada uno de los rivales por separado, ya que esto sería como trabajar con los 28 equipos a la par. Para esto, emplearemos en el modelo un equipo extra: el “equipo n° 15” o “equipo comodín”, que representará al adversario clásico.

Comencemos con el modelo básico para la zona A. Definamos en primera medida los conjuntos:

$$Fechas : \mathbf{R} = \{1, \dots, 14\}$$

$$Equipos : \mathbf{T} = \{1, \dots, 15\}$$

$$Equipos \text{ sin extra} : \mathbf{T}^* = \{1, \dots, 14\}$$

$$Equipos \text{ grandes} : \mathbf{BT} = \{1, 2, 5\}$$

Veremos más adelante por qué existe la necesidad de destacar a los “equipos grandes”, que siguiendo la numeración usada al transcribir los equipos de cada zona, éstos son: River, San Lorenzo e Independiente.

Veamos ahora las variables utilizadas para modelar el problema. Para todo equipo $i \in \mathbf{T}$, $j \in \mathbf{T}$ y para toda fecha $k \in \mathbf{R}$, definimos:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ juega de local contra el equipo } j \text{ en la fecha } k \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ juega de local en las fechas } k \text{ y } k+1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$w_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ juega de visitante en las fechas } k \text{ y } k+1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ juega de local contra el equipo } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Observemos que la información que realmente nos interesa obtener es cuáles de las variables x_{ijk} toman el valor 1, ya que son las que nos determinarán el fixture.

Pasemos ahora a las restricciones. Veamos primero aquellas que sirven para relacionar las variables que definimos.

$$z_{ij} = \sum_{k \in R} x_{ijk} \quad \forall i, j \in T \quad (1)$$

$$\sum_{j \in T} x_{ijk} + \sum_{l \in T} x_{ilk+1} \leq 2 \cdot (1 - w_{ik}) \quad \forall i \in T^*, k \in R, k \neq 14 \quad (2)$$

$$\sum_{j \in T} x_{ijk} + \sum_{l \in T} x_{ilk+1} \geq 1 - w_{ik} \quad \forall i \in T^*, k \in R, k \neq 14 \quad (3)$$

$$\sum_{j \in T} x_{jik} + \sum_{l \in T} x_{lik+1} \leq 2 \cdot (1 - y_{ik}) \quad \forall i \in T^*, k \in R, k \neq 14 \quad (4)$$

$$\sum_{j \in T} x_{jik} + \sum_{l \in T} x_{lik+1} \geq 1 - y_{ik} \quad \forall i \in T^*, k \in R, k \neq 14 \quad (5)$$

(1). La variable z_{ij} tiene por único objetivo simplificar notación y su relación con x_{ijk} es inmediata. Si el equipo i juega de local contra el equipo j en la fecha k , entonces obviamente el equipo i juega de local contra el j . Luego, esto es lo mismo que decir que si existe k tal que x_{ijk} vale 1, entonces el lado derecho de la ecuación vale 1 (ya que los equipos se enfrentan en una sólo fecha) y por lo tanto z_{ij} debe valer 1. En la misma línea, si no existe k tal que x_{ijk} vale 1, la sumatoria es 0 y por lo tanto z_{ij} debe valer 0.

(2). Recordemos que la variable w_{ik} vale 1 si el equipo i tiene un break de visitante en la fecha k y 0 si no. Luego, si w_{ik} vale 1, entonces el equipo i no puede jugar de local ni en la fecha k ni en la $k + 1$. Esto se traduce en que, para un equipo i fijo, el lado derecho de la ecuación vale 0 y por lo tanto x_{ijk} y x_{ijk+1} también deben ser nulas para cualquier rival j (ya que i debe jugar de visitante y no de local). Luego, la sumatoria del lado izquierdo está obligada a valer 0.

Observemos que si w_{ik} vale 0, la ecuación no nos dice nada que no supiéramos, con lo cual surge la necesidad de incorporar una nueva restricción para aclarar el rol de x_{ijk} en este caso.

(3). Continuando con lo arriba mencionado, si w_{ik} vale 0, quiere decir que el equipo i no tiene break de visitante en la fecha k , o lo que es lo mismo, alguno de los dos partidos jugados en la fecha k o $k + 1$ debe ser de local. Es decir, en este caso la parte derecha de la ecuación vale 1 y por lo tanto la parte izquierda nos dice que debe existir un equipo adversario contra el cual i juegue de local en alguna de dichas fechas. Por otro lado, si w_{ik} vale 1 la ecuación no aporta información nueva, pero este caso fue el contemplado en (2).

(4) y (5) son análogas a (2) y (3) pero ahora teniendo en cuenta los breaks de local.

Antes de continuar, observemos que las restricciones (2) ... (5) fueron pedidas para los equipos $i \in T^*$ y para las fechas $k \in R$ con $k \neq 14$. Esto se debe a que no hay breaks que comiencen en la fecha k (pues es ésta la última) y a que el equipo comodín sólo juega en una fecha en todo el torneo, con lo cual no tiene sentido hablar de sus breaks.

Sigamos ahora con el resto de las restricciones. Establezcamos aquellas que servirán para darle la estructura global al torneo.

$$x_{iik} = 0 \quad \forall i \in T, k \in R \quad (6)$$

$$z_{ij} + z_{ji} = 1 \quad \forall i, j \in T, i \neq j \quad (7)$$

$$\sum_{\substack{j \in T \\ i \neq j}} x_{ijk} + x_{jik} = 1 \quad \forall i \in T^*, k \in R \quad (8)$$

$$\sum_{\substack{i \in T^* \\ i \neq j}} \sum_{\substack{j \in T^* \\ j \neq i}} x_{ijk} = 7 \quad \forall k \in R, k \neq 7 \quad (9)$$

$$\sum_{\substack{j \in T \\ j \neq i}} z_{ij} = 7 \quad \forall i \in T \quad (10)$$

$$\sum_{j \in T} x_{15j7} = 7 \quad (11)$$

$$\sum_{j \in T} x_{j157} = 7 \quad (12)$$

$$\sum_{j \in T} \sum_{\substack{k \in R \\ k \neq 7}} x_{j15k} + x_{15jk} = 0 \quad (13)$$

(6). Ningún equipo debe jugar contra sí mismo, así que dada una fecha k no hay equipo i que juegue contra i (ni de local, ni de visitante), lo que nos dice que x_{iik} debe valer 0.

(7). Recordemos que el modelo que estamos presentando es para la zona A, con lo cual es correcto decir que todos los equipos deben jugar contra todos (y una única vez). Luego, fijados i y j , $z_{ij} + z_{ji}$ debe valer exactamente 1, pues se enfrentan sólo una vez y con alguna localía.

(8). Dado un equipo i (que no es el comodín) y una fecha k , debe tener un único rival con quién enfrentarse, ya sea de local o de visitante. La sumatoria del lado izquierdo de la ecuación vale 1 cuando se le encuentra a i el adversario j de la fecha k , sin importar si juega de local o visitante. Como sólo hay que enfrentarse a un equipo por fecha, dicha suma debe valer 1.

(9). En cada fecha deben jugarse 7 partidos (pues recordemos que son 14 equipos) y obviamente uno de los dos clubes que se enfrentan debe jugar de local. Luego, fijada $k \neq 7$, podemos modelar esto pidiendo que la suma sobre todos los equipos i y $j \in T^*$ de x_{ijk} sea 7, dado que cada una de esas variables valdrá 1 cuando haya un equipo i que juegue de local en dicha fecha.

Para la fecha de clásicos y el equipo comodín, la restricción será tratada algo diferente y la veremos un poco más adelante.

(10). Cada equipo $i \in T$ jugará 7 partidos de local y 7 de visitante a lo largo del torneo. Como además ya sabemos que debe jugar en todas las fechas (por (8)) y que el total de fechas es 14, sería redundante pedir dos restricciones separadas para esto, así

que, sin pérdida de generalidad, basta con pedir que cada equipo juegue 7 partidos de local. Observemos que fijado i , la suma sobre todos los equipos j de z_{ij} es la cantidad de equipos contra los cuales i juega de local. Luego, la condición que estamos queriendo modelar surge de igualar dicha suma a 7.

(11). Como se mencionó anteriormente, tenemos un tratamiento especial para el equipo n° 15. Sabemos que debe jugar partidos sólo en la fecha 7, y para que resulte parejo para el resto de los equipos reales, jugará 7 de visitante y 7 de local. Luego, si sumamos sobre todos los adversarios j las variables x_{15j7} obtenemos la cantidad de partidos que el equipo comodín juega de local en su fecha correspondiente. Por lo tanto, basta igualar esta expresión a 7 para obtener la cantidad correcta de partidos de local.

(12) es totalmente análoga a (11) pero considerando los partidos de visitante.

(13). Juntando las restricciones (7), (11) y (12), tenemos que el equipo n° 15 juega todos sus partidos en la fecha 7. Sin embargo, aclararemos que no debe jugar en ninguna otra fecha, a los únicos efectos de acelerar un poco el proceso de resolución del problema en el solver utilizado.

Si sumamos las variables $x_{15jk} + x_{i15k}$ sobre todas las fechas salvo la 7, consigueremos el valor 1 por cada equipo j con el que se enfrente. Lo que necesitamos es que no haya tal equipo j en dichas fechas. Luego, la suma de la expresión anterior sobre todos los equipos j debe ser 0.

Tenemos hasta acá todas las restricciones necesarias para el formato básico del torneo. Agreguemos algunas más sobre los breaks y los equipos grandes, requeridas por la SAF.

$$y_{ik} + y_{ik+1} \leq 1 \quad \forall i \in T^*, k \in R, k \neq 14 \quad (14)$$

$$w_{ik} + w_{ik+1} \leq 1 \quad \forall i \in T^*, k \in R, k \neq 14 \quad (15)$$

$$\sum_{k \in R} y_{ik} \leq 1 \quad \forall i \in T^* \quad (16)$$

$$\sum_{k \in R} w_{ik} \leq 1 \quad \forall i \in T^* \quad (17)$$

$$y_{i1} + w_{i1} + y_{i13} + w_{i13} = 0 \quad \forall i \in T^* \quad (18)$$

$$x_{ij1} + x_{ji1} + x_{ij14} + x_{ji14} = 0 \quad \forall i, j \in BT \quad (19)$$

$$1 - x_{ijk+1} - x_{jik+1} \geq x_{ilk} + x_{lik} \quad \forall i \in T^*, j, l \in BT, k \in R \quad (20)$$

Nuevamente, no tiene sentido hablar de breaks para el equipo comodín ya que sabemos que juega sólo en una fecha; por lo que las siguientes restricciones son sólo para los equipos que pertenezcan al conjunto $T^* = \{1, \dots, 14\}$.

Se impuso que ningún equipo juegue más de dos partidos consecutivos con la misma localía. Luego, no puede existir equipo que tenga el mismo tipo de break en dos fechas

consecutivas, ya que esto implicaría jugar al menos tres partidos seguidos de local o tres seguidos de visitante.

(14). Se pide entonces que la suma entre y_{ik} y y_{ik+1} sea menor o igual a 1 para todo equipo i , logrando así que nadie tenga breaks de local en la fecha k y en la $k + 1$ a la vez.

(15) es análoga a (14) pero esta vez teniendo en cuenta los breaks de visitante.

Por otro lado, se pide que no haya más de un break de cada tipo por equipo a lo largo del torneo. Es decir, ningún equipo puede jugar dos veces seguidas de local más de una vez en todo el torneo, ni tampoco de visitante.

(16). Para los breaks de local: para un equipo i fijo, la suma sobre todas las fechas $k \in R$ de y_{ik} nos dice la cantidad de rondas en las cuales i juega dos partidos seguidos de local, por lo que basta pedir que esta expresión sea menor o igual a 1.

(17). Misma condición pero impuesta para los breaks de visitante.

(18). Se pidió también que no haya breaks en la primer ni en la última fecha; es decir, que ningún equipo juegue con la misma localía en las fechas 1 y 2 ni en las fechas 13 y 14. Volvemos a utilizar las variables y_{ik} y w_{ik} para modelar esto teniendo en cuenta las fechas necesarias. Notemos que al aparecer sumadas cuatro variables no negativas e igualada su suma a 0, necesariamente cada una de ellas debe valer 0.

Finalmente, veamos qué significan las últimas dos restricciones, que son las referidas a los equipos grandes.

(19). Se pidió que no haya enfrentamientos entre los equipos considerados grandes ni en la primer ni en la última fecha, con el fin de reservar estos partidos “atractivos” para otra etapa del torneo. Basta con hacer algo similar a (18) e igualar a 0 la suma de las cuatro variables no negativas que necesitamos para esto. Como no queremos que los equipos grandes jueguen entre ellos en las fechas antes mencionadas (independientemente de la localía), necesitamos que x_{ij1} , x_{ji1} , x_{ij14} y x_{ji14} valgan 0 para todos los equipos i , $j \in BT$.

(20). Por último, se busca que ningún equipo real tenga que jugar dos partidos seguidos contra un equipo grande, sin tener en cuenta las localías. Luego, si hay algún equipo i que juega contra un equipo grande j en la fecha k ($x_{ijk} + x_{jik} = 1$), entonces i no debe jugar contra ningún otro equipo grande l en la fecha $k + 1$ ($x_{ilk+1} + x_{lik+1} = 0$).

Veamos algunas restricciones más.

Cabe destacar que este torneo puede pensarse como un single round robin, a pesar de que la distribución de los partidos sea algo extraña (debido al equipo comodín, que sólo juega en la fecha 7). Así, nuestra forma de modelar el torneo sigue la definición: todos se enfrentan contra todos una única vez ([24]). Sin embargo, no podríamos apoyarnos directamente en los **Teoremas 1.1 y 1.2** de De Werra para decir con exactitud cuál es la mínima cantidad de breaks posibles (ya que el equipo 15 no juega en el torneo como si realmente fuera un equipo, en el sentido de que se enfrenta a todos los restantes en una sola fecha). De todas maneras, si consideramos un modelo que minimice la cantidad de breaks totales en el torneo y que sólo tenga las restricciones (1) ... (13) (relación entre variables y estructura básica), nuestro solver nos garantiza que no puede haber menos de 12 breaks.

Esto nos permite elegir dos equipos cuyo patrón de localías sea perfecto, es decir: Local - Visitante - Local - Visitante - Local... o viceversa. Dado que San Martín de San Juan y Atlético Tucumán son los equipos más alejados del resto en esta zona, parece justo pedir que sean ellos los que no tengan ningún break. Esto es:

$$\sum_{j \in T} x_{j121} = 1 \quad (21)$$

$$\sum_{j \in T} x_{12j2} = 1 \quad (22)$$

$$\sum_{j \in T} x_{j123} = 1 \quad (23)$$

$\vdots$

$$\sum_{j \in T} x_{12j14} = 1 \quad (34)$$

Para el equipo 12 (San Martín SJ) y para cada fecha fija $k \in \{1, \dots, 14\}$, la suma sobre todos los otros equipos $j \in T$ de las variables $\mathbf{x}_{12jk}$ valdrá 1 si juega de local en tal fecha y la suma sobre $\mathbf{x}_{j12k}$ valdrá 1 si juega de visitante.

Pidamos ahora el patrón contrario para el equipo 13 (Atlético Tucumán):

$$\sum_{j \in T} x_{13j1} = 1 \quad (35)$$

$$\sum_{j \in T} x_{j132} = 1 \quad (36)$$

$$\sum_{j \in T} x_{13j3} = 1 \quad (37)$$

$\vdots$

$$\sum_{j \in T} x_{j1314} = 1 \quad (48)$$

Hemos incorporado todas las condiciones necesarias para crear un fixture de la zona A para el campeonato que necesitábamos (por ahora sin optimizar nada en particular). Sin embargo, aún no hay nada que involucre las distancias de viaje de cada equipo. Recordemos que las divisiones mayores y menores juegan con el mismo fixture pero con sus localías invertidas, y que el objetivo principal es equiparar los kilómetros recorridos entre divisiones dentro de cada equipo.

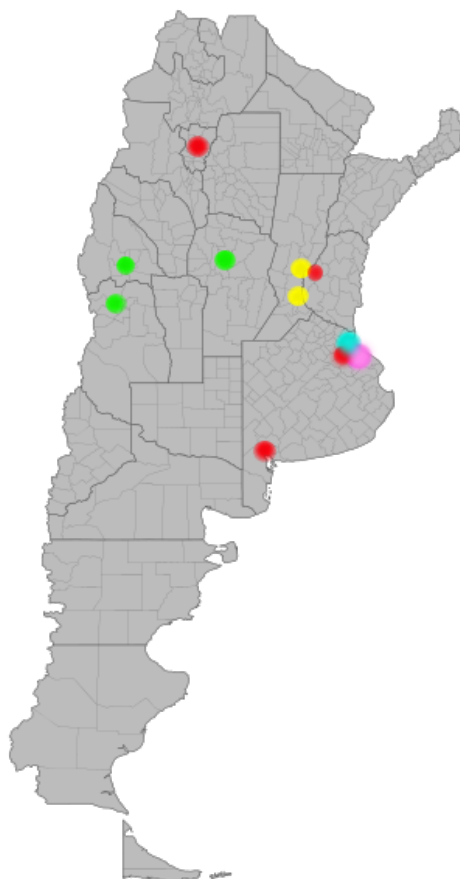
Tenemos dos enfoques diferentes para seguir modelando este problema sin perder de vista los viajes de cada equipo. Mostraremos ahora el primero de ellos.

2.3.1. Clusters

La primera opción para garantizar que la diferencia de viajes entre mayores y menores de cada club sea reducida, es dividir a todos los equipos en grupos o “clusters” geográficos, de forma tal que queden agrupados por cercanía. La idea global será que cada equipo juegue la mitad de sus partidos de local y la mitad de visitante contra los equipos de los otros clusters y también contra los del suyo propio.

De esta manera, supongamos que el equipo I de las mayores del cluster A juega dos partidos de local y dos de visitante contra los equipos del cluster B (que imaginemos está conformado por cuatro equipos). Como las menores de ese mismo equipo juegan con las localías invertidas, también jugarán dos partidos de local y dos de visitante contra el cluster B pero de local contra los clubes que las mayores jugaron de visitante y viceversa. Al estar todos los equipos de un mismo cluster cerca, esto hará que las distancias recorridas entre las diferentes divisiones del equipo I sean parejas, que es lo que queremos conseguir.

Veamos cómo quedan conformados los clusters en vista de los clubes participantes.



Cluster **CABA**
River - Boca
San Lorenzo - Huracán
Vélez - Argentinos Jrs.
Tigre - Chacarita

Cluster **Buenos Aires**
Independiente - Racing
Banfield - Lanús
Defensa y Justicia - Arsenal
Estudiantes - Gimnasia y Esgrima

Cluster **Santa Fe**
Rosario Central - Newell's
Colón - Unión

<u>Cluster Córdoba/Cuyo</u>	<u>Cluster Extra</u>
Talleres - Belgrano	Atlético Tucumán - Patronato
San Martín SJ - Godoy Cruz	Temperley - Olimpo

Al ser 28 clubes participantes divididos en dos zonas de 14, resulta cómodo que los clusters tengan una cantidad par de equipos. Éstos nuevamente están emparejados según su clásico y los de la izquierda son aquellos pertenecientes a la zona A mientras que los de la derecha a la zona B.

Como se puede ver, los equipos dentro de un mismo cluster están cerca salvo por los pertenecientes al cluster Extra. Lo acordado en éste es que se sortearían en bloque: en una zona quedarían Patronato y Olimpo y en la otra Atlético Tucumán y Temperley. Esto, esencialmente, se acordó pensando en los equipos de Buenos Aires (que son amplia mayoría): en la zona A habría un viaje largo y uno corto (Atlético Tucumán, Temperley), y en la zona B, para compensar, habría dos viajes de duración intermedia (Patronato, Olimpo).

Agrupados los equipos de esta forma, incorporemos las condiciones necesarias en el modelo para equiparar distancias.

Primero que nada, necesitamos agregar nuevos conjuntos para poder distinguir a los equipos entre clusters. Recordemos que aún seguimos trabajando sobre la zona A, con lo cual los clubes participantes son 14.

$$CABA : \mathbf{CABA} = \{1, \dots, 4\}$$

$$Buenos Aires : \mathbf{BA} = \{5, \dots, 8\}$$

$$Santa Fe : \mathbf{SF} = \{9, 10\}$$

$$Cordoba/Cuyo : \mathbf{CC} = \{11, 12\}$$

$$Extra : \mathbf{E} = \{13, 14\}$$

Luego, como mencionamos antes, pediremos que cada equipo juegue contra todos los equipos de los clusters la mitad de sus partidos con una localía y la otra mitad con la contraria. Es decir:

- Cada equipo de CABA jugará dos partidos de local dentro de su propio cluster y un partido de visitante, teniendo entonces su partido clásico de visitante (recordemos que su rival clásico pertenece a su propio grupo). Al revés esto es válido también: está totalmente permitido que juegue dos de visitante y uno de local, siendo su clásico de local. Además, deberá jugar dos partidos de local y dos de visitante contra el cluster de Buenos Aires, y uno de local y uno de visitante contra los clusters de Santa Fe, Córdoba/Cuyo y Extra.
- Para cada equipo de Buenos Aires las restricciones son análogas ya que también se conforma por 4 clubes.

- Para los otros clusters el espíritu sigue siendo el mismo pero tiene unas leves modificaciones por estar constituídos por dos clubes en lugar de cuatro: cada equipo de Santa Fe jugará un partido de local contra el otro equipo de su cluster, siendo entonces su partido clásico de visitante (o de visitante y local, respectivamente). Además debe jugar dos partidos de local y dos de visitante contra CABA y contra Buenos Aires, pero uno y uno contra Extra y contra Córdoba/Cuyo.
- Para los clusters de Córdoba/Cuyo y Extra las condiciones son análogas a las de Santa Fe.

Veremos cómo escribir todo esto matemáticamente para CABA.

$$2.x_{15,i,7} \leq \sum_{\substack{j \in \text{CABA} \\ j \neq i}} z_{ij} \quad \forall i \in \text{CABA} \quad (49)$$

$$x_{15,i,7} \leq \sum_{\substack{j \in \text{CABA} \\ j \neq i}} z_{ji} \quad \forall i \in \text{CABA} \quad (50)$$

$$2.x_{i,15,7} \leq \sum_{\substack{j \in \text{CABA} \\ j \neq i}} z_{ji} \quad \forall i \in \text{CABA} \quad (51)$$

$$x_{i,15,7} \leq \sum_{\substack{j \in \text{CABA} \\ j \neq i}} z_{ij} \quad \forall i \in \text{CABA} \quad (52)$$

Las restricciones (49) ... (52) ilustran el hecho de que cada equipo de CABA juega dos partidos de local y uno de visitante contra su propio cluster y su clásico de visitante (o viceversa). Detallemos esto.

Notemos que fijado un equipo $i \in \text{CABA}$, si juega de visitante su clásico entonces debe jugar dos partidos de local contra los otros equipos de su propio cluster y uno de visitante. Recordemos que los clubes constituyentes de ese cluster son cuatro; luego, podemos pedir que juegue al menos dos partidos de local y al menos uno de visitante. Esto es:

(49). La suma sobre todos los rivales $j \in \text{CABA}$ de las variables z_{ij} nos dice cuántos partidos juega i de local contra su propio cluster. Así, si su clásico lo juega de visitante entonces $x_{15,i,7}$ vale 1 y por lo tanto el lado izquierdo de la ecuación vale 2 y debe ser menor o igual a la suma antes mencionada (como se dijo antes, debe jugar al menos dos partidos de local). Observemos que si el equipo i no juega de visitante su clásico, la restricción no impone nada.

(50). Análogamente, la suma sobre todos los rivales $j \in \text{CABA}$ de las variables z_{ji} nos dice cuántos partidos juega i de visitante contra su propio cluster. Así, si su clásico lo juega de visitante entonces $x_{15,i,7}$ vale 1 y por lo tanto lo mismo vale el lado izquierdo de la ecuación y debe ser menor o igual a la suma antes mencionada (como se dijo antes, debe jugar al menos un partido de visitante). Observemos que si el equipo i no juega de visitante su clásico, la restricción no impone nada.

En la misma línea, si el equipo i juega de local su clásico entonces debe jugar dos partidos de visitante contra los otros equipos de su cluster y uno de local. Como antes, podemos pedir al menos dos de visitante y al menos uno de local.

(51). Del lado derecho de la ecuación tenemos la cantidad de partidos que i juega de visitante, que debe ser mayor o igual a 2 en caso de que x_{i157} sea 1, es decir en caso de que juegue de local contra su rival clásico. Al ser z_{ij} variables no negativas, esta restricción no modifica nada en caso de que i no juegue de local su partido clásico.

(52). Análogamente, el lado derecho de la ecuación nos dice la cantidad de partidos que i juega en casa, debiendo ser mayor o igual a 1 si juega con esa misma localía en la fecha de clásicos. Exactamente igual que antes, esta restricción no modifica nada en caso de que i no juegue de local su partido clásico.

Con las cuatro condiciones impuestas para los partidos intra-clusters de los equipos de CABA, debemos especificar el balance de localías contra los otros grupos.

La cantidad de clubes que constituyen al cluster Buenos Aires son cuatro, con lo cual los equipos de CABA jugarán dos partidos con cada localía contra ellos:

$$2 = \sum_{j \in \text{BA}} z_{ij} \quad \forall i \in \text{CABA} \quad (53)$$

$$2 = \sum_{j \in \text{BA}} z_{ji} \quad \forall i \in \text{CABA} \quad (54)$$

(53). Parecido a lo anterior, la suma sobre todos los equipos $j \in \text{BA}$ de las variables z_{ij} para un equipo fijo $i \in \text{CABA}$, nos dice la cantidad de partidos que i juega de local contra el cluster de Buenos Aires, que debe ser igual a 2.

(54). Ahora, la suma es también sobre los equipos de Buenos Aires pero de las variables z_{ji} , con lo que se simboliza la cantidad de partidos que i juega de visitante, que también debe ser 2.

$$1 = \sum_{j \in \text{SF}} z_{ij} \quad \forall i \in \text{CABA} \quad (55)$$

$$1 = \sum_{j \in \text{SF}} z_{ji} \quad \forall i \in \text{CABA} \quad (56)$$

En el cluster Santa Fe la cantidad de equipos de la zona A es 2, por lo que (55) y (56) nos dicen que los equipos de CABA jugarán un partido con cada localía contra ellos. Esto lo representamos indicando que la suma sobre los clubes $j \in \text{SF}$ de las variables z_{ij} debe ser 1, así como también será tal suma pero de las variables z_{ji} .

$$1 = \sum_{j \in \text{CC}} z_{ij} \quad \forall i \in \text{CABA} \quad (57)$$

$$1 = \sum_{j \in \text{CC}} z_{ji} \quad \forall i \in \text{CABA} \quad (58)$$

(57) y (58) son análogas a (55) y (56) pero cambiando el cluster de Santa Fe (SF) por el cluster Córdoba/Cuyo (CC).

$$1 = \sum_{j \in \text{E}} z_{ij} \quad \forall i \in \text{CABA} \quad (59)$$

$$1 = \sum_{j \in E} z_{ji} \quad \forall i \in \text{CABA} \quad (60)$$

Finalmente, (59) y (60) son las restricciones equivalentes que corresponden al cluster Extra.

Con estas condiciones impuestas, nos garantizamos que las distancias recorridas entre las divisiones de cada equipo de CABA sean parejas. Esto necesitamos repetirlo para los otros cuatro clusters restantes.

No tendría sentido explicar una por una las restricciones para los demás clusters ya que son completamente análogas a las que previamente describimos para CABA. De todas formas quedará plasmada su formulación matemática.

Cluster Buenos Aires

► BA contra su propio cluster

$$2 \cdot x_{15,i,7} \leq \sum_{\substack{j \in \text{BA} \\ j \neq i}} z_{ij} \quad \forall i \in \text{BA} \quad (61)$$

$$x_{15,i,7} \leq \sum_{\substack{j \in \text{BA} \\ j \neq i}} z_{ji} \quad \forall i \in \text{BA} \quad (62)$$

$$2 \cdot x_{i,15,7} \leq \sum_{\substack{j \in \text{BA} \\ j \neq i}} z_{ji} \quad \forall i \in \text{BA} \quad (63)$$

$$x_{i,15,7} \leq \sum_{\substack{j \in \text{BA} \\ j \neq i}} z_{ij} \quad \forall i \in \text{BA} \quad (64)$$

► BA contra CABA

$$2 = \sum_{j \in \text{CABA}} z_{ij} \quad \forall i \in \text{BA} \quad (65)$$

$$2 = \sum_{j \in \text{CABA}} z_{ji} \quad \forall i \in \text{BA} \quad (66)$$

► BA contra SF

$$1 = \sum_{j \in \text{SF}} z_{ij} \quad \forall i \in \text{BA} \quad (67)$$

$$1 = \sum_{j \in \text{SF}} z_{ji} \quad \forall i \in \text{BA} \quad (68)$$

► BA contra CC

$$1 = \sum_{j \in CC} z_{ij} \quad \forall i \in BA \quad (69)$$

$$1 = \sum_{j \in CC} z_{ji} \quad \forall i \in BA \quad (70)$$

► BA contra E

$$1 = \sum_{j \in E} z_{ij} \quad \forall i \in BA \quad (71)$$

$$1 = \sum_{j \in E} z_{ji} \quad \forall i \in BA \quad (72)$$

Cluster Santa Fe

► SF contra su propio cluster

$$x_{15,i,7} \leq \sum_{\substack{j \in SF \\ j \neq i}} z_{ij} \quad \forall i \in SF \quad (73)$$

$$x_{i,15,7} \leq \sum_{\substack{j \in SF \\ j \neq i}} z_{ji} \quad \forall i \in SF \quad (74)$$

► SF contra CABA

$$2 = \sum_{j \in CABA} z_{ij} \quad \forall i \in SF \quad (75)$$

$$2 = \sum_{j \in CABA} z_{ji} \quad \forall i \in SF \quad (76)$$

► SF contra BA

$$2 = \sum_{j \in BA} z_{ij} \quad \forall i \in SF \quad (77)$$

$$2 = \sum_{j \in BA} z_{ji} \quad \forall i \in SF \quad (78)$$

► SF contra CC

$$1 = \sum_{j \in CC} z_{ij} \quad \forall i \in SF \quad (79)$$

$$1 = \sum_{j \in CC} z_{ji} \quad \forall i \in SF \quad (80)$$

► SF contra E

$$1 = \sum_{j \in E} z_{ij} \quad \forall i \in \text{SF} \quad (81)$$

$$1 = \sum_{j \in E} z_{ji} \quad \forall i \in \text{SF} \quad (82)$$

Cluster Córdoba/Cuyo

► CC contra su propio cluster

$$x_{15,i,7} \leq \sum_{\substack{j \in \text{CC} \\ j \neq i}} z_{ij} \quad \forall i \in \text{CC} \quad (83)$$

$$x_{i,15,7} \leq \sum_{\substack{j \in \text{CC} \\ j \neq i}} z_{ji} \quad \forall i \in \text{CC} \quad (84)$$

► CC contra CABA

$$2 = \sum_{j \in \text{CABA}} z_{ij} \quad \forall i \in \text{CC} \quad (85)$$

$$2 = \sum_{j \in \text{CABA}} z_{ji} \quad \forall i \in \text{CC} \quad (86)$$

► CC contra BA

$$2 = \sum_{j \in \text{BA}} z_{ij} \quad \forall i \in \text{CC} \quad (87)$$

$$2 = \sum_{j \in \text{BA}} z_{ji} \quad \forall i \in \text{CC} \quad (88)$$

► CC contra SF

$$1 = \sum_{j \in \text{SF}} z_{ij} \quad \forall i \in \text{CC} \quad (89)$$

$$1 = \sum_{j \in \text{SF}} z_{ji} \quad \forall i \in \text{CC} \quad (90)$$

► CC contra E

$$1 = \sum_{j \in E} z_{ij} \quad \forall i \in \text{CC} \quad (91)$$

$$1 = \sum_{j \in E} z_{ji} \quad \forall i \in \text{CC} \quad (92)$$

Cluster Extra

- E contra su propio cluster

$$x_{15,i,7} \leq \sum_{\substack{j \in E \\ j \neq i}} z_{ij} \quad \forall i \in E \quad (93)$$

$$x_{i,15,7} \leq \sum_{\substack{j \in E \\ j \neq i}} z_{ji} \quad \forall i \in E \quad (94)$$

- E contra CABA

$$2 = \sum_{j \in \text{CABA}} z_{ij} \quad \forall i \in E \quad (95)$$

$$2 = \sum_{j \in \text{CABA}} z_{ji} \quad \forall i \in E \quad (96)$$

- E contra BA

$$2 = \sum_{j \in \text{BA}} z_{ij} \quad \forall i \in E \quad (97)$$

$$2 = \sum_{j \in \text{BA}} z_{ji} \quad \forall i \in E \quad (98)$$

- E contra SF

$$1 = \sum_{j \in \text{SF}} z_{ij} \quad \forall i \in E \quad (99)$$

$$1 = \sum_{j \in \text{SF}} z_{ji} \quad \forall i \in E \quad (100)$$

- E contra CC

$$1 = \sum_{j \in \text{CC}} z_{ij} \quad \forall i \in E \quad (101)$$

$$1 = \sum_{j \in \text{CC}} z_{ji} \quad \forall i \in E \quad (102)$$

Finalmente, tenemos incorporadas todas las condiciones básicas del torneo y ahora también las que solucionan nuestro problema para emparejar distancias entre divisiones. Sin embargo, hay un detalle para esta zona que no debemos pasar por alto: las mayores de algunos equipos podrían tener que jugar de visitante contra Atlético Tucumán y contra San Martín SJ, los dos clubes más alejados. Esto podría causar una diferencia considerable

en la distancia recorrida entre las divisiones, especialmente para los equipos céntricos, ya que las menores jugarían de local contra estos dos equipos. Impongamos una restricción más, en la que ninguno de estos equipos juegue con la misma localía contra estos dos clubes.

$$z_{12i} = z_{i13} \quad \forall i \in \text{CABA} \cup \text{BA} \quad (103)$$

(103). Si dado un equipo fijo $i \in \text{CABA} \cup \text{BA}$ z_{12i} vale 1, entonces i juega de visitante contra San Martín SJ, y se pide que z_{i13} valga lo mismo, es decir, que juegue de local contra Atlético Tucumán. Análogamente si z_{12i} vale 0.

Ahora sí, completamos las restricciones para equilibrar distancias entre divisiones. Pasemos a las últimas, requeridas por los clubes y la SAF. Primero, las de los clubes.

$$\sum_{j \in \text{CABA} \cup \text{BA}} x_{1j3} + x_{j13} = 1 \quad (104)$$

$$\sum_{j \in \text{CABA} \cup \text{BA}} x_{3j3} + x_{j33} = 1 \quad (105)$$

$$\sum_{j \in \text{CABA} \cup \text{BA}} x_{2j1} + x_{j21} = 1 \quad (106)$$

$$\sum_{j \in \text{CABA} \cup \text{BA}} x_{2j6} + x_{j26} = 1 \quad (107)$$

$$\sum_{j \in \text{CABA} \cup \text{BA}} x_{14j1} + x_{j141} = 1 \quad (108)$$

$$\sum_{j \in \text{CABA} \cup \text{BA}} x_{14j4} + x_{j144} = 1 \quad (109)$$

$$\sum_{j \in \text{CABA} \cup \text{BA}} x_{14j6} + x_{j146} = 1 \quad (110)$$

(104). En esta ocasión, River solicitó no tener un viaje largo en la tercera fecha, es decir, jugar contra un equipo de CABA o de BA. Luego, si sumamos las variables x_{1j3} y x_{j13} sobre todos los equipos j que pertenecen a $\text{CABA} \cup \text{BA}$, tenemos que vale 1 si River juega contra alguno de ellos en la fecha 3 y 0 si no. Luego, igualando esta sumatoria a 1, obtenemos lo que buscábamos.

(105) ... (110) son análogas a (104) pero para Vélez en la tercera fecha, para San Lorenzo en la primera y en la sexta, y para Temperley en la primera, la cuarta y la sexta, respectivamente.

Por último, veamos las requeridas por la SAF.

$$x_{131211} + x_{121311} = 1 \quad (111)$$

$$x_{9411} + x_{4911} = 1 \quad (112)$$

$$x_{111011} + x_{101111} = 1 \quad (113)$$

(111). Atlético Tucumán debe jugar contra San Martín SJ en la fecha 11. Luego, sumando las variables $\mathbf{x}_{131211}$ y $\mathbf{x}_{121311}$ obtenemos 1 si se enfrentan en dicha fecha y 0 si no. Luego, basta igualar esta suma a 1.

(112) y (113) son análogas pero para Rosario Central vs. Tigre y para Colón vs. Talleres.

Estas tres restricciones surgen ya que la fecha 11 cae miércoles y es deseable que los jugadores no tengan que hacer viajes muy largos, debido a que son en su mayoría menores de edad y asisten a la escuela.

$$w_{ik} \leq \left(\sum_{j \in \text{CABA} \cup \text{BA}} x_{jik} + x_{jik+1} \right) + x_{15ik} + x_{15ik+1} \quad \forall i \in \text{CABA} \cup \text{BA}, \quad \forall k \in R, k \neq 14 \quad (114)$$

$$w_{ik} \leq \left(\sum_{j \in \text{SF}} x_{jik} + x_{jik+1} \right) + x_{15ik} + x_{15ik+1} \quad \forall i \in \text{SF}, \quad \forall k \in R, k \neq 14 \quad (115)$$

$$w_{11k} \leq \left(\sum_{j \in \text{CC} \cup \text{SF}} x_{j11k} + x_{j11k+1} \right) + x_{1511k} + x_{1511k+1} \quad \forall k \in R, k \neq 14 \quad (116)$$

$$w_{14k} \leq \left(\sum_{j \in \text{CABA} \cup \text{BA}} x_{j14k} + x_{j14k+1} \right) \quad \forall k \in R, k \neq 14 \quad (117)$$

La idea general de estas restricciones será que los equipos no tengan dos viajes largos en caso de que les toque un break de visitante.

(114). Si tomamos una fecha fija k y un equipo i en $\text{CABA} \cup \text{BA}$ y sumamos sobre todos los equipos j en el mismo conjunto las variables $\mathbf{x}_{jik}$ y $\mathbf{x}_{jik+1}$, obtenemos la cantidad de partidos que i juega de visitante en las fechas k y $k+1$ contra esos equipos. Si además adicionamos a esta suma $\mathbf{x}_{15ik}$ y $\mathbf{x}_{15ik+1}$, contamos también su partido clásico. Obviamente, toda esta suma puede valer 0, 1 o 2. Lo que nosotros necesitamos es que si i tiene un break de visitante en esas fechas, entonces la suma antes mencionada no valga 0, es decir, juegue uno de los partidos con los equipos cercanos (incluyendo a su rival de la fecha 7, que está cerca también). Luego, basta con pedir que w_{ik} sea menor o igual a dicha suma, de manera tal que cuando esta variable valga 1, obligue al término de la derecha de la inecuación a ser mayor o igual a ese valor.

(115), (116) y (117) son análogas a la anterior, pero para los clusters restantes. En particular, para el cluster Córdoba/Cuyo y para Extra, estas restricciones sólo necesitan ser pedidas para Temperley y para Talleres (a quien también se le permite jugar contra

los equipos de Santa Fe, que están tan cerca como el de su propio cluster, San Martín SJ), ya que los otros dos clubes que conforman dichos clusters tienen patrón perfecto y por lo tanto no es posible que jueguen dos partidos seguidos de visitante. Además, en el caso de (117) ya no permitimos que se juegue el partido clásico en una de las dos fechas involucradas en el break, ya que el rival en este partido para Temperley es Olimpo (en Bahía Blanca), que no lo consideramos cerca.

Notemos que debemos pedir también estas restricciones para breaks de local, ya que el fixture que estamos modelando es el de las mayores pero las menores juegan con las localías invertidas, por lo que un break de local para nuestro fixture es uno de visitante para el otro.

$$y_{ik} \leq \left(\sum_{j \in \text{CABA} \cup \text{BA}} x_{ijk} + x_{ijk+1} \right) + x_{i15k} + x_{i15k+1} \quad \forall i \in \text{CABA} \cup \text{BA}, \quad \forall k \in R, k \neq 14 \quad (118)$$

$$y_{ik} \leq \left(\sum_{j \in \text{SF}} x_{ijk} + x_{ijk+1} \right) + x_{i15k} + x_{i15k+1} \quad \forall i \in \text{SF}, \quad \forall k \in R, k \neq 14 \quad (119)$$

$$y_{11k} \leq \left(\sum_{j \in \text{CCUSF}} x_{11jk} + x_{11jk+1} \right) + x_{1115k} + x_{1115k+1} \quad \forall k \in R, k \neq 14 \quad (120)$$

$$y_{14k} \leq \left(\sum_{j \in \text{CABA} \cup \text{BA}} x_{14jk} + x_{14jk+1} \right) \quad \forall k \in R, k \neq 14 \quad (121)$$

Tenemos entonces nuestro modelo con todas las restricciones incorporadas, por lo que estamos en condiciones de pasar a la función objetivo y así finalizar la zona A.

Esta vez tenemos cierta libertad para elegir qué minimizar o maximizar, ya que mediante las restricciones abarcamos el punto principal sobre diferencia de viajes. Decidimos entonces minimizar la cantidad de breaks totales en todo el torneo. Matemáticamente hablando:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{\substack{i \in T^* \\ k \in R}} y_{ik} + w_{ik}$$

Esto completa el primer modelo para resolver el problema de la zona A. Veremos ahora el otro enfoque utilizado para resolverla y luego debemos diseñar el modelo que corresponde a la zona B.

2.3.2. Matriz de distancias

Como habíamos mencionado, mostraremos una segunda opción para armar un fixture que equipare los viajes realizados entre las mayores y las menores. De antemano, es seguro que resultará más precisa pero más costosa en términos computacionales. Este camino no utilizará los clusters geográficos e incorporará explícitamente la distancia (en kilómetros) entre los clubes.

Generaremos una matriz D que en cada lugar D_{ij} tenga la distancia entre el estadio del equipo i y el del equipo j . Esto nos permitirá no utilizar los clusters para reducir las diferencias de viajes, sino que buscaremos lograrlo mediante el uso de la función objetivo.

Nuevamente, diseñaremos en primera medida un fixture para la zona A e incorporaremos las restricciones sobre la fecha de clásicos al querer programar los partidos para la zona B.

Recordemos que lo que queremos minimizar (esta vez empleando la función objetivo) es la diferencia de kilómetros recorridos entre las divisiones de cada equipo. Hacer esto simultáneamente no es una tarea simple, pero hay más de una alternativa para lograrlo.

Una posibilidad es estudiar la optimización *multiobjetivo*, que no se engloba dentro de la programación lineal pero sí dentro de la programación matemática. El problema modelo definido por este tipo de optimización sería:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } (f_1(x), \dots, f_k(x)) \\ & \text{s.a. } x \in X \end{aligned}$$

donde X es el conjunto de vectores factibles.

¿Qué sería entonces minimizar un vector? Hay diferentes convenciones para determinar qué elemento se considera solución óptima y qué no. Esta opción para resolver nuestro problema es válida pero no será la que estudiemos, por lo que no entraremos en mayor detalle.

Un segundo camino posible (vía programación lineal) es definir una función objetivo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que contemple los valores a minimizar a la vez. Para esto, tendremos dos enfoques principales. El primero de ellos será minimizar la suma sobre todos los equipos de la diferencia de viaje entre sus divisiones. El segundo, será minimizar el máximo de estas diferencias.

¿Por qué la suma? ¿Por qué el máximo? Teniendo en cuenta que tenemos más de un valor para minimizar y que queremos conseguir una función objetivo cuyo codominio sea $\mathbb{R}$, tiene sentido considerar alguna norma ya definida para vectores en $\mathbb{R}^n$. En estos casos, las elegidas fueron la norma 1 y la norma infinito, que para $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se definen como:

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|_1 &= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \\ \|\vec{x}\|_\infty &= \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \end{aligned}$$

En síntesis, vamos a construir dos modelos, cada uno de ellos minimizando diferentes funciones objetivo, siendo éstas:

$$\sum_{i \in T^*} |d_i| \quad y \quad \max_{i \in T^*} |d_i|$$

donde d_i es, para cada equipo i (sin contar el comodín, obvio), la resta de kilómetros recorridos entre sus divisiones mayores y menores.

Notemos que estas funciones no son lineales debido a la presencia del valor absoluto en ambas y del máximo en el caso de la segunda. En consecuencia, debemos reformularlas para poder cumplir con los requisitos necesarios de este tipo de modelado.

En primer lugar, veamos cómo linealizar la primera de ellas.

Proposición 2.1. El modelo de optimización:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^n |x_i| \\ & \text{s.a.} \quad Ax \leq b \\ & \quad \quad x_i \text{ libre } \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \tag{1}$$

es equivalente al siguiente modelo de programación lineal:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^n x_i^+ + x_i^- \\ & \text{s.a.} \quad A(x^+ - x^-) \leq b \\ & \quad \quad x_i^+, x_i^- \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \tag{2}$$

Demostración. Primero, vamos a necesitar el siguiente lema:

Lema 2.1. Si $(x^{*+}, x^{*-}) = (x_1^{*+}, \dots, x_n^{*+}, x_1^{*-}, \dots, x_n^{*-})$ es solución óptima de (2), entonces dado $i \in \{1, \dots, n\}$ vale que $x_i^{*+} = 0$ o $x_i^{*-} = 0$.

Demostración. Supongamos que existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_{i_0}^{*+}$ y $x_{i_0}^{*-}$ son ambas positivas. Sea:

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{x_{i_0}^{*+}}{2}, \frac{x_{i_0}^{*-}}{2} \right\} > 0$$

Considero $(\hat{x}^+, \hat{x}^-) = (x_1^{*+}, \dots, x_{i_0}^{*+} - \varepsilon, \dots, x_n^{*+}, x_1^{*-}, \dots, x_{i_0}^{*-} - \varepsilon, \dots, x_n^{*-})$.

Como $\hat{x}_{i_0}^+$ y $\hat{x}_{i_0}^-$ son no negativas y $\hat{x}_{i_0}^+ - \hat{x}_{i_0}^- = (x_{i_0}^{*+} - \varepsilon) - (x_{i_0}^{*-} - \varepsilon) = x_{i_0}^{*+} - x_{i_0}^{*-}$, se tiene que $(\hat{x}^+, \hat{x}^-)$ es también solución factible de (2).

Pero:

$$\sum_{i=1}^n \hat{x}_i^+ + \hat{x}_i^- = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n (x_i^{*+} + x_i^{*-}) + (x_{i_0}^{*+} - \varepsilon + x_{i_0}^{*-} - \varepsilon) = \sum_{i=1}^n (x_i^{*+} + x_i^{*-}) - 2\varepsilon$$

Es decir, conseguimos una solución factible que disminuye en 2ε la función objetivo evaluada en la solución óptima, lo que es absurdo. Esto prueba que para una solución óptima (x^{*+}, x^{*-}) , dado $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que $x_i^{*+} = 0$ o $x_i^{*-} = 0$. $\square$.

Veamos ahora sí la equivalencia entre los problemas.

Sea x^* solución óptima de (1). Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sea:

$$x_i^{*+} = \begin{cases} x_i^* & \text{si } x_i^* \geq 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$x_i^{*-} = \begin{cases} -x_i^* & \text{si } x_i^* < 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Es fácil notar que, cualquiera sea $i \in \{1, \dots, n\}$: $|x_i^*| = x_i^{*+} + x_i^{*-}$, $x_i^* = x_i^{*+} - x_i^{*-}$ y $x_i^{*+}, x_i^{*-} \geq 0$. Luego, (x^{*+}, x^{*-}) es solución factible de (2); queremos ver que es óptima.

Sea $(x^+, x^-) \in \mathbb{R}^{2n}$ solución factible de (2). Considero $x = (x_1, \dots, x_n) = (x_1^+ - x_1^-, \dots, x_n^+ - x_n^-)$. Notemos que en este caso, no necesariamente $x_i^+ = 0$ o $x_i^- = 0$. De todas maneras, x definida anteriormente es solución factible de (1) y por la optimalidad de x^* :

$$\sum_{i=1}^n |x_i^*| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$$

Además:

$$\sum_{i=1}^n x_i^{*+} + x_i^{*-} = \sum_{i=1}^n |x_i^*| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n |x_i^+ - x_i^-| \leq \sum_{i=1}^n |x_i^+| + |x_i^-| = \sum_{i=1}^n x_i^+ + x_i^-$$

Finalmente, esto nos dice que (x^{*+}, x^{*-}) es solución óptima para (2).

Ahora veamos la equivalencia restante.

Sea $(x^{*+}, x^{*-}) = (x_1^{*+}, \dots, x_n^{*+}, x_1^{*-}, \dots, x_n^{*-})$ solución óptima de (2). Por el **Lema 2.1**, se tiene que dado $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i^{*+} = 0$ o $x_i^{*-} = 0$. Defino $x_i^* = x_i^{*+} - x_i^{*-}$ y se tiene que $|x_i^*| = x_i^{*+} + x_i^{*-}$.

Sea x solución factible de (1). Haciendo la descomposición usual en su parte negativa y positiva, conseguimos (x^+, x^-) solución factible para (2). Pero como (x^{*+}, x^{*-}) es óptima de (2), tenemos que:

$$\sum_{i=1}^n x_i^{*+} + x_i^{*-} \leq \sum_{i=1}^n x_i^+ + x_i^-$$

o lo que es lo mismo,

$$\sum_{i=1}^n |x_i^*| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$$

de donde concluimos que $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ es solución óptima para (1). ■

Trabajemos ahora sobre la segunda función objetivo para lograr linealizarla también.

Proposición 2.2. El modelo de optimización:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \\ & \text{s.a.} && Ax \leq b \\ & && x_i \text{ libre } \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \tag{1}$$

es equivalente al siguiente modelo:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && M \\ & \text{s.a.} && Ax \leq b \\ & && x_i \leq M \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ & && -M \leq x_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \tag{2}$$

que a su vez es equivalente al siguiente modelo de programación lineal:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && M \\ & \text{s.a.} && A(x^+ - x^-) \leq b \\ & && x_i^+ + x_i^- \leq M \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ & && x_i^+, x_i^- \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \tag{3}$$

Demostración. Veamos primero la equivalencia entre (1) y (2).

Sea $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ solución óptima de (1). Luego, $Ax^* \leq b$ y por ser óptima, $\max\{|x_1^*|, \dots, |x_n^*|\} \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ siendo $x = (x_1, \dots, x_n)$ cualquier solución factible.

Sea $M^* = \max\{|x_1^*|, \dots, |x_n^*|\}$. Como ya sabíamos, $Ax^* \leq b$; pero también vale que $|x_i^*| \leq M^*$, o sea, $x_i^* \leq M^*$ y $-M^* \leq x_i^* \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Luego, (x^*, M^*) es solución factible de (2). El objetivo es probar que es óptima. Para esto, sea (x, M) otra solución factible de (2), queremos ver que $M^* \leq M$. Notemos que x es solución factible de (1) y por lo tanto $M^* = \max\{|x_1^*|, \dots, |x_n^*|\} \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. Pero además, $x_i \leq M \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ y $-M \leq x_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$, por lo que $|x_i| \leq M$, y entonces $\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \leq M$. Luego, $M^* \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \leq M$, lo que implica que $M^* \leq M$ y así (x^*, M^*) es solución óptima de (2).

Veamos ahora que si (x^*, M^*) es solución óptima de (2) entonces x^* es solución óptima de (1). Es claro que x^* es solución factible de (1). Sea x otra solución factible de (1), queremos ver que $\max\{|x_1^*|, \dots, |x_n^*|\} \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. Si $M = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$, entonces (x, M) es solución factible de (2) y como (x^*, M^*) es la solución óptima de este problema, $M^* \leq M$, o lo que es lo mismo, $M^* \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. Pero necesariamente,

$\max\{|x_1^*|, \dots, |x_n^*|\} \leq M^*$; luego, $\max\{|x_1^*|, \dots, |x_n^*|\} \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ o lo que es lo mismo, la función objetivo de (1) evaluada en x^* es menor igual que la misma evaluada en x siendo x cualquier solución factible de tal problema. Luego, x^* es óptimo para (1), que es lo que queríamos probar.

Veamos ahora la equivalencia entre (2) y (3), lo que también probaría entonces la equivalencia entre (1) y (3).

Sea (x^*, M^*) solución óptima de (2). Al igual que en la demostración de la proposición anterior, defino:

$$x_i^{*+} = \begin{cases} x_i^* & \text{si } x_i^* \geq 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$x_i^{*-} = \begin{cases} -x_i^* & \text{si } x_i^* < 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Considero (x^{*+}, x^{*-}, M^*) y veamos que es solución factible de (3). Como previamente dijimos, $|x_i^*| = x_i^{*+} + x_i^{*-}$. Luego, por ser (x^*, M^*) solución factible de (2), tenemos que $|x_i^*| \leq M$, de donde $x_i^{*+} + x_i^{*-} \leq M$. Además, por definición vale que x_i^{*+} y x_i^{*-} son no negativas y como $x_i^+ = x_i^{*+} - x_i^{*-}$, (x^{*+}, x^{*-}, M^*) resulta solución factible para (3). El objetivo es ver que es óptima. Sea entonces $(x_1^+, \dots, x_n^+, x_1^-, \dots, x_n^-, M)$ solución factible de (3). Defino $x_i = x_i^+ - x_i^-$. Como x_i^+ y x_i^- son no negativas y se tiene que $x_i^+ + x_i^- \leq M$, tenemos que $x_i^+ - x_i^- \leq x_i^+ + x_i^- \leq M$. Luego, $x_i \leq M$. De la misma forma, $-M \leq -x_i^+ - x_i^- \leq x_i^+ - x_i^-$, por lo que $-M \leq x_i$. Además, trivialmente $Ax \leq b$. Luego, la solución factible de (3) que tomamos, $(x_1^+, \dots, x_n^+, x_1^-, \dots, x_n^-, M)$, es solución factible de (2). Pero por ser (x^*, M^*) la óptima de este problema, se tiene que $M^* \leq M$. Luego, la función objetivo de (3) evaluada en cualquier solución factible es mayor o igual a dicha función evaluada en (x^{*+}, x^{*-}, M^*) , lo que nos dice que esta última solución es óptima.

Tomemos ahora $(x_1^{+*}, \dots, x_n^{+*}, x_1^{-*}, \dots, x_n^{-*}, M^*)$ solución óptima para (3). Defino $x_i^* = x_i^{+*} - x_i^{-*}$. Por ser estas variables no negativas y factibles, $x_i^* = x_i^{+*} - x_i^{-*} \leq x_i^{+*} + x_i^{-*} \leq M^*$. Además, $-M^* \leq -x_i^{+*} - x_i^{-*} \leq x_i^{+*} - x_i^{-*} = x_i^*$. Luego, como también vale $Ax^* \leq b$, tenemos que esta solución es factible para (2). Sea (x, M) solución factible de (2). Al igual que antes, defino x_i^+ y x_i^- de manera tal que $x_i = x_i^+ - x_i^-$ y que $|x_i| = x_i^+ + x_i^-$. Ambas son no negativas y además, como $-M \leq x_i \leq M$, tenemos que $x_i^+ + x_i^- \leq M$. Finalmente, el hecho de que también se cumple que $A(x^+ - x^-) \leq b$ nos garantiza que $(x_1^+, \dots, x_n^+, x_1^-, \dots, x_n^-, M)$ es solución factible de (3). Por ser $(x_1^{+*}, \dots, x_n^{+*}, x_1^{-*}, \dots, x_n^{-*}, M^*)$ óptima de este problema, tenemos que $M^* \leq M$. De aquí concluimos que entonces (x^*, M^*) es solución óptima de (2), lo que finaliza la demostración. ■

Ahora que sabemos cómo linealizar las funciones objetivo que proponíamos, retomemos nuestro problema. Recordemos que antes de hablar del modelo de los clusters, teníamos una serie de conjuntos, variables y restricciones que modelaban el problema original, sin tener en cuenta los viajes realizados por los equipos. Hagamos un muy breve repaso de esto:

Variables

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ juega de local contra el equipo } j \text{ en la fecha } k \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ juega de local en las fechas } k \text{ y } k+1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$w_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ juega de visitante en las fechas } k \text{ y } k+1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ juega de local contra el equipo } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Restricciones

Las restricciones estaban modeladas por las ecuaciones (1) a (48), y agrupadas según su tipo: relación entre variables, básicas para estructurar el torneo, breaks, partidos contra equipos grandes y patrones perfectos. Pero además, habíamos incorporado algunas más una vez definidos los clusters, que hacían uso de ellos aunque no tenían que ver con el emparejamiento de distancias. Estas eran sobre requerimientos de los clubes ((104) a (110)) y sobre requerimientos de la SAF ((111) a (113) sobre partidos en la fecha 11 y (114) a (121) sobre cercanías en breaks). Todas estas serán nuevamente utilizadas para este nuevo modelo, y ya no serán necesarias las que balanceaban las localías dentro y entre clusters ((49) a (103)). No tiene sentido transcribir todas nuevamente.

El hecho de reutilizar los clusters (aunque esencialmente con otro fin) nos obliga a incluirlos en nuestra serie de conjuntos.

Conjuntos

$$Fechas : \mathbf{R} = \{1, \dots, 14\}$$

$$Equipos : \mathbf{T} = \{1, \dots, 15\}$$

$$Equipos \text{ sin extra} : \mathbf{T}^* = \{1, \dots, 14\}$$

$$Equipos \text{ grandes} : \mathbf{BT} = \{1, 2, 5\}$$

$$CABA : \mathbf{CABA} = \{1, \dots, 4\}$$

$$Buenos Aires : \mathbf{BA} = \{5, \dots, 8\}$$

$$Santa Fe : \mathbf{SF} = \{9, 10\}$$

$$Cordoba/Cuyo : \mathbf{CC} = \{11, 12\}$$

$$Extra : \mathbf{E} = \{13, 14\}$$

Como ya dijimos, hasta acá no tenemos nada incorporado sobre distancias. Antes también mencionamos que para tener en cuenta los viajes, ahora trabajaríamos con una matriz de distancias D . Veamos cómo es su construcción:

$$\begin{pmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{128} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & \cdots & d_{228} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ d_{281} & d_{282} & d_{283} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

A B A ... B

Como ya dijimos, D tendrá las distancias entre los estadios de todos los equipos participantes del torneo; luego, $D \in \mathbb{R}^{28 \times 28}$. Es claro que $D_{ii} = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, 28\}$ y que D es simétrica. Además, ubicaremos a los equipos de forma tal que en las filas/columnas impares figurarán las distancias de los equipos de la zona A a los restantes, y en las pares las de los equipos de la zona B. Más aún, el club de la fila/columna siguiente a cada club de la zona A será su rival clásico. Digamos, siguiendo el orden propuesto en el cuadro 1, tendríamos en la primera fila/columna las distancias de Boca al resto de los estadios, en la segunda las de River, en la tercera las de San Lorenzo, en la cuarta las de Huracán, etc.

Como queremos trabajar con las restricciones de distancia mediante la función objetivo, tendremos que incorporar algunas nuevas variables de decisión. Recordando que primero veremos el modelo para la zona A, consideraremos las variables d_i , una por cada equipo (14 en esta zona), que será la resta entre lo recorrido (sólo de ida) por las divisiones mayores y por las menores, es decir:

$$d_i = \sum_{j \in T^*} D_{2i-1 \ 2j-1} \cdot (2z_{ji} - 1) + D_{2i-1 \ 2i} \cdot (2z_{15i} - 1)$$

Primero que nada, contemplamos sólo el kilometraje de ida porque considerar la vuelta sería multiplicar por una constante nuestra función objetivo, que no afecta en nada para la resolución del problema. Entendamos ahora esta definición. Si el equipo i juega de visitante contra el j , entonces sumaremos la distancia entre ellos (pues z_{ji} valdrá 1, lo que hace que $2z_{ji} - 1$ también tome el valor 1 y entonces se sume el valor de la matriz $D_{2i-1 \ 2j-1}$, que al pertenecer i y j a la zona A y al conjunto $\{1, \dots, 14\}$ corresponde a la distancia entre los estadios de estos dos equipos). Por el contrario, si i juega de local contra j , entonces $2z_{ji} - 1$ valdrá -1 y esto hará que la distancia antes mencionada se reste. Esto es equivalente a sumar los viajes realizados por una división y a restar los realizados por la contraria, ya que como habíamos dicho, juegan con las localías invertidas. Para el caso del partido especial de la fecha 7, si i lo juega de visitante entonces $2z_{15i} - 1$ valdrá 1 y se sumará la distancia entre el equipo i y su rival clásico ($D_{2i-1 \ 2i}$), mientras que se restará en caso de que aquel partido i lo juegue de local. Luego, d_i es efectivamente la resta entre los kilómetros realizados por ambas divisiones (ida) para un equipo $i \in T^*$. Es preciso observar que d_i no es necesariamente positiva.

Ahora, una vez comentada la estrategia de resolución con la matriz D y las funciones objetivo, focalicemos en ambos modelos por separado; primero aquel que busca minimizar la suma de diferencias de viajes y luego el que busca minimizar la máxima de estas.

Modelo 1

Lo que buscamos, como antes dijimos, es:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i \in T^*} |d_i|$$

Recordemos que una función objetivo así definida no es lineal debido al valor absoluto, pero la **Proposición 2.1** nos da una forma de reformular el problema para transformarlo en uno de programación lineal.

Así, además de las variables $\mathbf{x}_{ijk}$, $\mathbf{y}_{ik}$, $\mathbf{w}_{ik}$, $\mathbf{z}_{ij}$, incorporaremos $\mathbf{d}_i^+$ y $\mathbf{d}_i^-$, ambas no negativas. Luego, a nuestro modelo original habrá que agregarle las siguientes restricciones:

$$d_i^+ - d_i^- = \sum_{j \in T^*} D_{2i-1, 2j-1} \cdot (2z_{ji} - 1) + D_{2i-1, 2i} \cdot (2z_{15i} - 1) \quad \forall i \in T^*$$

$$d_i^+, d_i^- \geq 0 \quad \forall i \in T^*$$

Ahora, como todas las otras restricciones son las del modelo original y no imponen condiciones sobre distancias, la parte positiva y la negativa de d_i no vuelven a aparecer. Luego, estos son todos los cambios que necesitamos según la **Proposición 2.1** y el modelo quedaría listo definiendo entonces la función objetivo como:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i \in T^*} d_i^+ + d_i^-$$

Modelo 2

Ahora lo que buscamos es:

$$\text{minimizar} \quad \max_{i \in T^*} |d_i|$$

Como pasó en el modelo 1, esta función objetivo no es lineal, pero la **Proposición 2.2** nos permite reescribir nuestro problema para llevarlo a la forma que necesitamos.

Sin dudas seguiremos necesitando $\mathbf{x}_{ijk}$, $\mathbf{y}_{ik}$, $\mathbf{w}_{ik}$ y $\mathbf{z}_{ij}$. La proposición antes mencionada nos sugiere incorporar además otras variables, en primer lugar la parte positiva y la negativa de d_i : $\mathbf{d}_i^+$ y $\mathbf{d}_i^-$, y luego una variable más que llamaremos $\mathbf{M}$ (y será no negativa), para poder linealizar el máximo.

Luego, al igual que antes, al modelo original debemos agregarle algunas restricciones:

$$d_i^+ - d_i^- = \sum_{j \in T^*} D_{2i-1, 2j-1} \cdot (2z_{ji} - 1) + D_{2i-1, 2i} \cdot (2z_{15i} - 1) \quad \forall i \in T^*$$

$$d_i^+ + d_i^- \leq M \quad \forall i \in T^*$$

$$d_i^+, d_i^- \geq 0 \quad \forall i \in T^*$$

Finalmente, tal como sucedía con el modelo 1, las otras restricciones que provienen del modelo básico no tienen en cuenta los viajes realizados por ningún equipo, por lo que las modificaciones necesarias para diseñar este modelo quedan completas considerando la siguiente función objetivo:

$$\text{minimizar} \quad M$$

No perdamos de vista que el modelo presentado es siempre para la zona A. Veamos ahora qué cambios y modificaciones son necesarios para la zona B, ya sea mediante el modelo de los clusters o de la matriz de distancias.

2.4. Zona B

Se podría pensar que podríamos aprovecharnos de lo resuelto para la zona A para modelar esta segunda etapa, por ejemplo invirtiendo todas las localías de los partidos. Sin embargo, esto se ve impedido por las restricciones de los clubes (que dependen de los conformantes de cada zona), o por los patrones perfectos, o incluso por las condiciones impuestas por la SAF, entre otras cosas.

Notemos entonces que debemos hacer varias modificaciones para armar el modelo de la zona restante. Lo primero a modificar será el conjunto de los equipos grandes, ya que en esta zona son Boca y Racing (equipos número 1 y 5, respectivamente).

$$\text{Equipos grandes : } \mathbf{BT} = \{1, 5\}$$

El resto de los conjuntos los seguiremos usando, inclusive los de los clusters, dado que sean utilizados o no para equiparar distancias, vimos que hay restricciones que los necesitan (por ejemplo las de los clubes). Además, las variables x_{ijk} , y_{ik} , w_{ik} y z_{ij} por supuesto volverán a aparecer.

Las funciones objetivo, tanto en el modelo de los clusters como en los de la matriz de distancias, podrán mantenerse sin modificación alguna.

En particular, las restricciones (1) ... (20) serán usadas tal cual estaban, ya que no eran exclusivas de una zona u otra.

Las de patrones perfectos, (21) a (48), sufrirán algunos cambios. En principio, en esta zona los equipos más alejados son Godoy Cruz (número 12) y Olimpo (número 14). El primero resulta un poco más perjudicado en cuanto a distancia al resto de los equipos, por lo que nos gustaría elegirlo como uno de los que no tendrá breaks, y además podemos saber de antemano su localía en el partido clásico, ya que en la zona A pedimos que San

Martín SJ (su rival en la fecha 7) juegue con el patrón Visitante-Local-Visitante..., lo que implica que su clásico sea de visitante y por lo tanto Godoy Cruz lo jugará de local. En el caso de Olimpo, su rival era Temperley, que no sabemos con qué localía jugará en la fecha 7 hasta no tener el resultado de la zona A. Esto implica que Olimpo puede llegar a quedar sin patrón perfecto (ya que debería jugar de visitante en la fecha 7 teniendo en cuenta lo que se pidió para Godoy Cruz, pero esto podría no ser posible).

Así, en principio, para Godoy Cruz:

$$\sum_{j \in T} x_{12j1} = 1 \quad (122)$$

$$\sum_{j \in T} x_{j122} = 1 \quad (123)$$

$$\sum_{j \in T} x_{12j3} = 1 \quad (124)$$

$\vdots$

$$\sum_{j \in T} x_{j1214} = 1 \quad (135)$$

Y para Olimpo (en los casos donde los partidos de la fecha 7 resultantes de la zona A lo permitan):

$$\sum_{j \in T} x_{j141} = 1 \quad (136)$$

$$\sum_{j \in T} x_{14j2} = 1 \quad (137)$$

$$\sum_{j \in T} x_{j143} = 1 \quad (138)$$

$\vdots$

$$\sum_{j \in T} x_{14j14} = 1 \quad (149)$$

Las restricciones de clubes y de la SAF también resultarán modificadas dado que los equipos participantes en esta zona son otros. Veamos cómo.

$$\sum_{j \in \text{CABA} \cup \text{BA}} x_{6j5} + x_{j65} = 1 \quad (150)$$

$$\sum_{j \in \text{CABA} \cup \text{BA}} x_{7j8} + x_{j78} = 1 \quad (151)$$

En el caso de los clubes tenemos algunas menos. Esta vez, Lanús pidió jugar contra algún equipo de CABA o de Buenos Aires en la fecha 5 (150), y Arsenal lo mismo, pero para la fecha 8 (151).

Para terminar, pasemos a los requerimientos de la SAF. Como en la zona A, tenemos algunas más sobre la fecha 11 para evitar viajes largos:

$$x_{13\ 10\ 11} + x_{10\ 13\ 11} = 1 \quad (152)$$

$$x_{9\ 4\ 11} + x_{4\ 9\ 11} = 1 \quad (153)$$

$$x_{11\ 12\ 11} + x_{12\ 11\ 11} = 1 \quad (154)$$

$$\sum_{\substack{j \in \text{BA} \\ j \neq 5}} x_{14j11} + x_{j1411} = 1 \quad (155)$$

Se pidió que, en la onceava fecha, Patronato juegue contra Unión (152), Newell's contra Chacarita (153), Belgrano contra Godoy Cruz (154) y Olimpo contra cualquier equipo de Buenos Aires salvo contra Racing (155).

Y finalmente, nuevamente tenemos que considerar las cercanías para los breaks. Si bien presentan grandes similitudes con las de la zona A, habrá algunas salvedades que debemos mencionar.

$$w_{ik} \leq \left(\sum_{j \in \text{CABA} \cup \text{BA}} x_{jik} + x_{jik+1} \right) + x_{15ik} + x_{15ik+1} \quad \forall i \in \text{CABA} \cup \text{BA}, \quad \forall k \in R, k \neq 14 \quad (156)$$

$$w_{ik} \leq \left(\sum_{j \in \text{SF}} x_{jik} + x_{jik+1} \right) + x_{15ik} + x_{15ik+1} \quad \forall i \in \text{SF}, \quad \forall k \in R, k \neq 14 \quad (157)$$

$$w_{11k} \leq \left(\sum_{j \in \text{CCUSF}} x_{j11k} + x_{j11k+1} \right) + x_{15\ 11k} + x_{15\ 11k+1} \quad \forall k \in R, k \neq 14 \quad (158)$$

$$w_{13k} \leq \sum_{j \in \text{SF}} x_{j13k} + x_{j13k+1} \quad \forall k \in R, k \neq 14 \quad (159)$$

$$w_{14k} \leq \left(\sum_{j \in \text{CABA} \cup \text{BA}} x_{j14k} + x_{j14k+1} \right) + x_{15\ 14k} + x_{15\ 14k+1} \quad \forall k \in R, k \neq 14 \quad (160)$$

Para los primeros cuatro clusters (CABA, Buenos Aires, Santa Fe y Córdoba/Cuyo), las restricciones se repiten. Para extra, debemos destacar algunas diferencias: a Patronato (equipo número 13) le permitiremos jugar contra cualquier equipo del cluster Santa Fe en caso de tener un break de visitante, pero no contra su clásico (ya que éste es Atlético Tucumán, que está alejado); y Olimpo (número 14), sólo podrá jugar contra un equipo de CABA o Buenos Aires si es que se ve en la obligación de hacer dos viajes seguidos (observar que esta restricción no será necesaria pedir en caso de que podamos pedirle patrón perfecto, pero nuevamente eso depende de los resultados de la zona A).

Como antes, debemos aclarar las mismas restricciones pero con breaks de local, para contemplar los viajes en fechas consecutivas de las divisiones menores:

$$y_{ik} \leq \left(\sum_{j \in \text{CABA} \cup \text{BA}} x_{ijk} + x_{ijk+1} \right) + x_{i15k} + x_{i15k+1} \quad \forall i \in \text{CABA} \cup \text{BA}, \quad \forall k \in R, k \neq 14 \quad (161)$$

$$y_{ik} \leq \left(\sum_{j \in \text{SF}} x_{ijk} + x_{ijk+1} \right) + x_{i15k} + x_{i15k+1} \quad \forall i \in \text{SF}, \quad \forall k \in R, k \neq 14 \quad (162)$$

$$y_{11k} \leq \left(\sum_{j \in \text{CCUSF}} x_{11jk} + x_{11jk+1} \right) + x_{1115k} + x_{1115k+1} \quad \forall k \in R, k \neq 14 \quad (163)$$

$$y_{13k} \leq \sum_{j \in \text{SF}} x_{13jk} + x_{13jk+1} \quad \forall k \in R, k \neq 14 \quad (164)$$

$$y_{14k} \leq \left(\sum_{j \in \text{CABA} \cup \text{BA}} x_{14jk} + x_{14jk+1} \right) + x_{1415k} + x_{1415k+1} \quad \forall k \in R, k \neq 14 \quad (165)$$

Para finalizar con el modelo de la segunda zona (aún sin equilibrio las distancias), sólo falta especificar cómo se jugará en la fecha 7, que se determina una vez obtenido un resultado para la zona A. Tomando los equipos sólo a modo de ejemplo, una posible serie de restricciones a agregar sería:

$$x_{1157} = 1 \quad (166)$$

$$x_{2157} = 1 \quad (167)$$

$$x_{3157} = 1 \quad (168)$$

$$x_{4157} = 1 \quad (169)$$

$$x_{5157} = 1 \quad (170)$$

$$x_{6157} = 1 \quad (171)$$

$$x_{7157} = 1 \quad (172)$$

Esto completa el modelo para la zona B sin tener en cuenta que debemos emparejar el kilometraje recorrido entre las dos divisiones de cada equipo. Para considerar esto, que es lo más importante, separemos nuevamente en los casos correspondientes.

2.4.1. Clusters

En principio, todas las restricciones de balance de localías inter e intra clusters, (49) a (103), se mantienen. Sin embargo, hay una observación muy importante en este caso.

La restricción (154) nos pide que Godoy Cruz juegue contra Belgrano (que está en su mismo cluster) en la fecha 11. Además, como a Godoy Cruz le pedimos patrón perfecto, sabemos que en todas las fechas impares jugará con la misma localía, y en todas las pares con la contraria. En particular, Godoy Cruz jugaría su clásico (fecha 7) y su partido contra Belgrano (fecha 11) de local. Esto no puede ser posible ya que como en su zona y en su cluster (Córdoba/Cuyo) sólo está Belgrano, las restricciones (83) y (84) nos obligan a que las localías de su partido de la fecha 7 y de su partido contra Belgrano sean diferentes.

En este caso en particular, el problema resultaría infactible de no suprimir alguna condición. Como nuestro objetivo principal es reducir distancias y los clusters se conformaron especialmente para lograr esto, no sería correcto permitir que Godoy Cruz juegue su partido clásico y su partido contra Belgrano con la misma localía. Además, prefijar la fecha del partido Godoy Cruz - Belgrano fue una decisión de la SAF, por lo que tampoco deberíamos suprimirla. Teniendo en cuenta esto y considerando que asignar un patrón perfecto a un equipo no es algo obligatorio ni tampoco lo más relevante de nuestro fixture, decidimos eliminar esta condición y así conseguir factibilidad.

El hecho de dejar de pedirle patrón perfecto a Godoy Cruz, nos indica que debemos considerar entonces sus cercanías en los viajes cuando tenga algún break. Esto es:

$$w_{12k} \leq \left(\sum_{j \in CC} x_{j12k} + x_{j12k+1} \right) + x_{1512k} + x_{1512k+1} \quad \forall k \in R, k \neq 14 \quad (173)$$

$$y_{12k} \leq \left(\sum_{j \in CC} x_{12jk} + x_{12jk+1} \right) + x_{1215k} + x_{1215k+1} \quad \forall k \in R, k \neq 14 \quad (174)$$

En particular, para este equipo pedimos que en sus breaks de visitante o de local (que seguro tendrá alguno), uno de los dos viajes consecutivos que debe realizar sea contra un equipo de su cluster (en este caso sólo Belgrano) o contra su rival clásico (San Martín SJ).

Por otro lado, notemos que antes pedíamos que ningún equipo de CABA o BA juegue con la misma localía contra San Martín SJ y contra Atlético Tucumán, que eran los dos

clubes más alejados de todos (103). Esta vez, debido a la forma en que quedan agrupados los equipos en los clusters, será necesario hacer una distinción similar para Godoy Cruz y Olimpo en los partidos contra los equipos de CABA y de Buenos Aires, quienes se verían más perjudicados en caso de tener que realizar estos dos viajes. Como Olimpo y Godoy Cruz no tienen la misma numeración que los dos clubes mencionados anteriormente de la zona A (dado que no son exactamente sus rivales clásicos), la restricción debe ser levemente modificada, resultando:

$$z_{12i} = z_{i14} \quad \forall i \in \text{CABA} \cup \text{BA} \quad (175)$$

2.4.2. Matriz de distancias

Sin tener en cuenta si estamos minimizando la máxima diferencia de distancias o la suma de todas ellas, la definición de d_i (o bien dicho, la definición de $d_i^+ - d_i^-$) será una de las cosas que distinguirá a una zona de otra (además de todas las restricciones ya mencionadas, antes de meternos en el equilibrio de viajes). De esta forma:

$$d_i^+ - d_i^- = \sum_{j \in T^*} D_{2i2j} \cdot (2z_{ji} - 1) + D_{2i2i-1} \cdot (2z_{15i} - 1) \quad \forall i \in T^* \quad (176)$$

Antes, las filas/columnas de la matriz utilizadas en esta definición eran las impares, ya que ellas eran las asignadas a la zona A en el armado de D; pero ahora nos vemos obligados a modificarlas por las pares, que habíamos especificado para la zona B. En el único momento que debemos acceder a la fila/columna impar es para referirnos al rival clásico de un equipo (que pertenece a la zona A y por la estructura de D sabemos que está en la fila/columna anterior a tal club).

Finalmente, hemos completado los modelos tanto para la zona A como para la B del Torneo Argentino de Fútbol Juvenil Marzo-Junio 2018.

Capítulo 3

Torneo Agosto-Noviembre 2018

En este capítulo hablaremos sobre el Torneo Juvenil de Fútbol Argentino llevado a cabo durante los meses de agosto, septiembre, octubre y noviembre de 2018. Al igual que en el capítulo pasado, describiremos la estructura general del torneo, que nos permitirá notar de qué manera abordar el problema a resolver; y por supuesto veremos las diferencias que hay entre ambos. Nuevamente estudiaremos dos enfoques principales para conseguir el fixture que buscamos.

3.1. Estructura del torneo

Para definir cuántos y cuáles equipos serán los participantes de este torneo, la SAF se basa en el Campeonato de Primera División, que finalizó en mayo de 2018. En dicho torneo también participaron 28 equipos, siendo Temperley, Arsenal, Chacarita y Olimpo los descendidos, y Aldosivi y San Martín de Tucumán los ascendidos. Esto da un total de 26 equipos que disputarán el torneo de Primera División que comienza en agosto. Así, extrapolando estos equipos a las divisiones inferiores, en el torneo juvenil de fútbol para la segunda mitad del año 2018 participan 26 equipos (y no 28, como en el caso anterior). De todas maneras, nuevamente están divididos en dos zonas (esta vez de 13 equipos cada una), A y B, presorteadas por la SAF. La estructura dentro de cada zona es similar a la ya usada: se juega un *single round robin*, es decir, cada equipo juega una única vez contra todos los otros. La primera observación es que la cantidad de equipos por zona ya no es como antes, si no que ahora es impar. Sabemos obviamente que en cada partido los equipos que se enfrentan son dos, con lo cual esto nos dice que tenemos un equipo en cada fecha que no tiene rival dentro de su zona. Para solucionar esto, la SAF decidió que, en cada fecha, el equipo que queda “suelto” se enfrentara a su rival clásico, que al igual que en el caso anterior, necesariamente está agrupado en la zona contraria. De esta manera, todos los equipos juegan exactamente un partido en cada fecha, siendo uno de esos partidos el que llamaremos *interzonal*. Esto nos daría un total de 13 fechas, y en esta ocasión, la SAF decidió no agregar la fecha extra de clásicos (justamente los clásicos van sucediendo a lo largo de todo el torneo debido a la cantidad impar de equipos en las zonas A y B). Finalmente, en cada división, los equipos de cada zona que obtengan

una mayor cantidad de puntos a lo largo de las 13 fechas, se enfrentarán en una final en cancha neutral, consagrandose el ganador como el “Campeón del Torneo de Juveniles del Segundo Semestre de 2018”.

El resultado del sorteo de equipos hecho por la SAF fue el siguiente (la numeración es nuestra):

	Zona A	Zona B
1	Boca	River
2	Argentinos Jrs.	Vélez
3	Huracán	San Lorenzo
4	Racing	Independiente
5	Lanús	Banfield
6	Defensa y Justicia	Tigre
7	Gimnasia y Esgrima	Estudiantes
8	Aldosivi	Patronato
9	Rosario Central	Newell's
10	Colón	Unión
11	Belgrano	Talleres
12	Godoy Cruz	San Martín SJ
13	San Martín de Tucumán	Atlético Tucumán

Cuadro 2: Sorteo de zonas

Al igual que antes, cada uno de los equipos participantes tiene 6 divisiones inferiores: 4°, 5° y 6° (las mayores), y 7°, 8° y 9° (las menores). De nuevo, 4°, 5° y 6° juegan con el mismo fixture, y 7°, 8° y 9° con otro, aunque se vuelve a cumplir que las divisiones mayores juegan con el mismo fixture que las menores, pero con sus localías invertidas (si las mayores del equipo I juegan de **local** contra las mayores del equipo II en la fecha k , entonces las menores del equipo I juegan de **visitante** contra las menores del equipo II en la fecha k).

Como los viajes que hacen las mayores son justamente los que no hacen las menores y viceversa, el objetivo principal se repite: armar un fixture en el cual se equipare la distancia recorrida a lo largo de todo el torneo entre ambas divisiones de cada equipo.

Como basta con construir un modelo para una sola de las dos divisiones, el fixture que programaremos será el de las mayores, sin pérdida de generalidad.

3.2. Estrategia de resolución

Volveremos a usar programación lineal entera mixta para modelar el problema, primero el que corresponde a la zona A y luego el de la B, usando los datos necesarios que obtuvimos de la primera zona. Antes, los fixtures no eran independientes debido a la fecha extra de clásicos; en este caso tampoco lo serán, pero el motivo es que en cada fecha tenemos un partido interzonal. Luego, una vez organizada la zona A, queda predeterminado qué equipo de la zona B jugará su partido interzonal en qué fecha, y estos datos serán entonces restricciones para dicha segunda etapa.

3.3. Zona A

De alguna forma nos vemos nuevamente obligados a identificar a los rivales clásicos en nuestro modelo, y no es sensato ni necesario considerar a todos los equipos de la zona B, por lo que decidimos retomar la idea previa de definir un equipo extra: el “equipo n° 14” o “equipo comodín”.

Definamos ahora sí los conjuntos que usaremos para modelar el problema básico, sin restricciones de distancias todavía.

$$Fechas : \mathbf{R} = \{1, \dots, 13\}$$

$$Equipos : \mathbf{T} = \{1, \dots, 14\}$$

$$Equipos \text{ sin extra} : \mathbf{T}^* = \{1, \dots, 13\}$$

$$Equipos \text{ grandes} : \mathbf{BT} = \{1, 4\}$$

Siguiendo la numeración usada en la tabla 2, los equipos grandes para la zona A resultan ser Boca y Racing (1 y 4 respectivamente).

Dadas las similitudes con el torneo anterior y la comodidad de las variables ya utilizadas (que además son un clásico en Sports Scheduling), las volveremos a emplear para esta ocasión. Para todo equipo $i \in \mathbf{T}$, $j \in \mathbf{T}$ y para toda fecha $k \in \mathbf{R}$, se definen:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ juega de local contra el equipo } j \text{ en la fecha } k \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ juega de local en las fechas } k \text{ y } k+1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$w_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ juega de visitante en las fechas } k \text{ y } k+1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ juega de local contra el equipo } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Notemos que las restricciones no van a poder ser exactamente las mismas que antes dado que la estructura general del torneo es diferente (esencialmente por cómo están tratados los partidos clásicos en este torneo y por la relevante modificación en la cantidad de equipos). Sin embargo, sin dudas presentarán algunas similitudes. Comencemos por las de relación entre variables:

$$z_{ij} = \sum_{k \in \mathbf{R}} x_{ijk} \quad \forall i, j \in \mathbf{T} \quad (1)$$

$$\sum_{j \in \mathbf{T}} x_{ijk} + \sum_{l \in \mathbf{T}} x_{ilk+1} \leq 2 \cdot (1 - w_{ik}) \quad \forall i \in \mathbf{T}, k \in \mathbf{R}, k \neq 13 \quad (2)$$

$$\sum_{j \in \mathbf{T}} x_{ijk} + \sum_{l \in \mathbf{T}} x_{ilk+1} \geq 1 - w_{ik} \quad \forall i \in \mathbf{T}, k \in \mathbf{R}, k \neq 13 \quad (3)$$

$$\sum_{j \in T} x_{jik} + \sum_{l \in T} x_{lik+1} \leq 2 \cdot (1 - y_{ik}) \quad \forall i \in T, k \in R, k \neq 13 \quad (4)$$

$$\sum_{j \in T} x_{jik} + \sum_{l \in T} x_{lik+1} \geq 1 - y_{ik} \quad \forall i \in T, k \in R, k \neq 13 \quad (5)$$

Las restricciones (1) ... (5) son muy similares a las del torneo anterior, pero hay que tener en cuenta que ahora la última fecha es la 13 y es la que será descontada al tener en cuenta los breaks. Además, observemos que las restricciones (2) ... (5) fueron pedidas para los equipos $i \in T$, pues esta vez el equipo 14, que es el comodín que representa el rival clásico, ya no juega en una fecha específica si no que va alternando sus partidos a lo largo de todo el torneo como si fuera un equipo más. Es por esto que es correcto hablar de sus breaks (aunque no resulten relevantes) y que debemos entonces plantear la relación entre todas las variables teniendolo en cuenta.

Veamos ahora las restricciones que dan la estructura básica correspondiente a nuestro campeonato.

$$x_{iik} = 0 \quad \forall i \in T, k \in R \quad (6)$$

$$z_{ij} + z_{ji} = 1 \quad \forall i, j \in T, i \neq j \quad (7)$$

$$\sum_{\substack{j \in T \\ i \neq j}} x_{ijk} + x_{jik} = 1 \quad \forall i \in T, k \in R \quad (8)$$

$$\sum_{\substack{i \in T \\ i \neq j}} \sum_{\substack{j \in T \\ j \neq i}} x_{ijk} = 7 \quad \forall k \in R \quad (9)$$

$$\sum_{\substack{j \in T^* \\ j \neq i}} z_{ij} = 6 \quad \forall i \in T^* \quad (10)$$

$$\sum_{\substack{j \in T^* \\ j \neq i}} z_{ji} = 6 \quad \forall i \in T^* \quad (11)$$

(6) y (7) son idénticas al torneo anterior: nadie debe jugar contra sí mismo y todos deben jugar contra todos una única vez (recordemos que estamos modelando la zona A).

(8) también es bastante similar pero tiene una sutil diferencia: fijada una fecha y un equipo (esto incluye al comodín), éste debe jugar contra un equipo de local o de visitante. En el caso anterior, al jugar el equipo extra sólo en la fecha 7, debíamos excluirlo de esta restricción.

(9). En cada una de las fechas de las trece posibles, deben jugarse exactamente siete partidos (esto incluye los seis partidos entre doce miembros de la zona A y el interzonal). Antes, por ejemplo, esta restricción no podía ser válida para la ronda 7.

En (10) y (11) vemos una primera diferencia algo más marcada con el torneo anterior: como el total de partidos que los equipos juegan a lo largo del torneo es 13, fijado un

equipo i , que no necesariamente es el comodín, debe jugar 6 partidos de local y también 6 partidos de visitante, sin contar su interzonal. Es decir, cada equipo real jugará 6 partidos con una localía y 7 partidos con otra, variando cuál de ellas en cada caso. Para entender la expresión, basta notar que dado $i \in T^*$, la suma de z_{ij} sobre todos los equipos $j \in T^*$ nos da la cantidad de partidos que i juega como local sin contar su interzonal. Respectivamente, la suma de z_{ji} sobre todos los equipos $j \in T^*$ da la cantidad de partidos de visitante sin su clásico.

Incorporemos también, al igual que antes, algunas restricciones solicitadas por la SAF sobre breaks y sobre equipos grandes.

$$y_{ik} + y_{ik+1} \leq 1 \quad \forall i \in T^*, k \in R, k \neq 13 \quad (12)$$

$$w_{ik} + w_{ik+1} \leq 1 \quad \forall i \in T^*, k \in R, k \neq 13 \quad (13)$$

$$\sum_{k \in R} y_{ik} \leq 1 \quad \forall i \in T^* \quad (14)$$

$$\sum_{k \in R} w_{ik} \leq 1 \quad \forall i \in T^* \quad (15)$$

$$y_{i1} + w_{i1} + y_{i12} + w_{i12} = 0 \quad \forall i \in T^* \quad (16)$$

$$x_{ij1} + x_{ji1} + x_{ij2} + x_{ji2} + x_{ij12} + x_{ji12} + x_{ij13} + x_{ji13} = 0 \quad \forall i, j \in BT \quad (17)$$

$$1 - x_{ijk+1} - x_{jik+1} \geq x_{ilk} + x_{lik} \quad \forall i \in T^*, j, l \in BT, k \in R, k \neq 13 \quad (18)$$

Nuevamente, se impuso que ningún equipo juegue más de dos partidos consecutivos con la misma localía. Es decir, no puede existir equipo que tenga el mismo tipo de break en dos fechas consecutivas, ya que esto implicaría jugar al menos tres partidos seguidos de local o tres seguidos de visitante. De aquí que las restricciones (12) y (13) son análogas al torneo anterior.

También al igual que antes, se quiere lograr que ningún equipo tenga más de un break de cada tipo a lo largo de todo el torneo. Esto hace que volvamos a incorporar las restricciones (14) y (15) en este nuevo campeonato.

Se pidió una vez más que no haya breaks en la primer ni en la última fecha; es decir, que ningún equipo juegue con la misma localía en las fechas 1 y 2 ni en las fechas 12 y 13, lo que nos hace repetir la restricción (16) (sólo sufre un sutil cambio debido a la diferencia en la cantidad de fechas totales en este campeonato).

En el caso de las condiciones sobre los equipos grandes, tenemos un leve cambio en la primera: esta vez se pide que los enfrentamientos entre grandes no se den ni la primera ni en la última fecha, pero tampoco en la segunda y en la anteúltima. Es simple reutilizar la restricción que ya teníamos, simplemente agregando a la suma los términos

x_{ij2} , x_{ji2} , x_{ij12} y x_{ji12} . Además, tenemos que cambiar la fecha 14 por la 13 dado que en este torneo hay una fecha menos que en el anterior.

Finalmente, (18), la segunda y última condición sobre este tipo, sigue igual: ningún equipo real juega dos partidos consecutivos contra un equipo grande.

Pasemos ahora a ver algunas condiciones más del torneo antes de abarcar el emparejamiento de distancias (mediante la función objetivo o mediante las restricciones mismas).

En esta ocasión, es preciso notar que aunque hayamos incorporado un equipo comodín a nuestros 13 participantes originales, la forma de modelar el torneo hace que resulte un *single round robin*, ya que los 14 equipos se enfrentan contra todos, una vez cada uno. Esto implica que, considerando entonces que hay 14 clubes participantes, la mínima cantidad de breaks es mayor o igual a 12 (**Teorema 1.1**). Además, de ser exactamente 12, hay sólo dos equipos que pueden no tener breaks, o dicho de otra forma, cuyo patrón es “perfecto” (**Teorema 1.2**), uno de ellos alternando sus localías comenzando como local, y el otro comenzando como visitante. Lo que haremos es elegir dichos dos equipos, esperando que podamos conseguir factibilidad. Para este caso, elegiremos a San Martín de Tucumán y Godoy Cruz, simplemente porque son los dos equipos más alejados con respecto a los otros participantes, y dado que prácticamente siempre van a tener viajes largos, nos parece justo que tengan la posibilidad de no viajar en dos fechas consecutivas.

Matemáticamente, respetando la numeración propuesta en la tabla 2, nos queda:

$$\sum_{j \in T} x_{j121} = 1 \quad (19)$$

$$\sum_{j \in T} x_{12j2} = 1 \quad (20)$$

$$\sum_{j \in T} x_{j123} = 1 \quad (21)$$

$\vdots$

$$\sum_{j \in T} x_{12j12} = 1 \quad (30)$$

$$\sum_{j \in T} x_{j1213} = 1 \quad (31)$$

Basta observar que para Godoy Cruz, el equipo 12, y para cada fecha fija $k \in \{1, \dots, 13\}$, la suma sobre todos los otros equipos $j \in T$ de las variables x_{12jk} valdrá 1 si juega de local en tal fecha y la suma sobre x_{j12k} valdrá 1 si juega de visitante.

Respectivamente, tenemos el patrón contrario para San Martín de Tucumán, que es el equipo número 13:

$$\sum_{j \in T} x_{13j1} = 1 \quad (32)$$

$$\sum_{j \in T} x_{j132} = 1 \quad (33)$$

$$\sum_{j \in T} x_{13j3} = 1 \quad (34)$$

$\vdots$

$$\sum_{j \in T} x_{j1312} = 1 \quad (43)$$

$$\sum_{j \in T} x_{13j13} = 1 \quad (44)$$

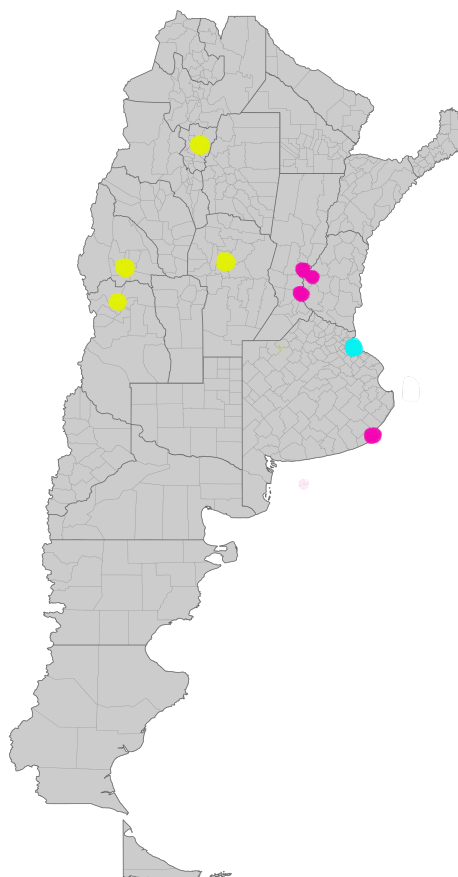
Con esto, tenemos completo un primer modelo (aunque sin función objetivo por el momento) para la zona A con las restricciones principales del torneo, pero aún sin considerar los viajes que realizan las divisiones de cada equipo. Nuevamente, para abarcar este tema vamos a tomar dos caminos principales, el primero de ellos será agrupando a los equipos en clusters geográficos y el segundo utilizando específicamente la matriz de distancias entre estadios.

Veamos primero el caso de los clusters.

3.3.1. Clusters

Tal como hicimos en el campeonato pasado, agruparemos a los equipos por cercanía, respetando la idea general de que cada equipo juegue una cantidad pareja de partidos de local y de visitante contra los otros clusters y también contra el suyo propio, incluyendo su partido clásico.

Veamos la organización propuesta teniendo en cuenta los equipos participantes de la segunda mitad del año de este torneo:



Cluster CABA/GBA

Boca - River
 Argentinos Jrs. - Vélez
 Huracán - San Lorenzo
 Racing - Independiente
 Lanús - Banfield
 Defensa y Justicia - Tigre
 Gimnasia y Esgrima - Estudiantes

Cluster Interior Cercano

Aldosivi - Patronato
 Rosario Central - Newell's
 Colón - Unión

Cluster Interior Lejano

Belgrano - Talleres
 Godoy Cruz - San Martín SJ
 San Martín de Tucumán - Atlético Tucumán

Esta vez, la cantidad de equipos en cada cluster es impar. Esto no necesariamente es lo más cómodo a la hora de agruparlos teniendo en cuenta que vamos a querer emparejar las localías, pero de todas formas es útil si consideramos la distribución geográfica de los clubes participantes. En cada cluster, los equipos de la izquierda pertenecen a la zona A y los de la derecha a la zona B, siempre agrupados según su rival clásico (definido por la SAF).

Si consideramos primero el cluster CABA/GBA, lo que haremos es pedir que cada equipo juegue entre uno y dos partidos de local contra el cluster de Interior Cercano y contra el de Interior Lejano. Obviamente, jugará entonces dos o un partido de visitante, respectivamente. Dentro de su propio cluster, lo que pediremos es que juegue tres partidos de local y tres de visitante sin contar el partido interzonal, que podrá ser con cualquiera de las dos localías. Así, resultan en total tres partidos de visitante y cuatro de local o cuatro y tres, respectivamente.

Observemos que pedir esta estructura obliga a que ningún equipo de CABA/GBA juegue dos partidos de local contra Interior Cercano y también dos de local contra Interior Lejano. Imaginemos que de ser así, dicho equipo tendría un total de cuatro partidos de local fuera de su cluster, y como las restricciones (10) y (11) imponen que en total juegue seis partidos con cada localía (sin contar el interzonal), debería jugar dos partidos de local contra su propio cluster excluyendo a su rival clásico. Como, al descontar este partido especial, en su propio cluster tiene seis rivales, se debería enfrentar como visitante a los cuatro restantes, incumpliendo así el hecho de jugar tres partidos con cada localía contra el resto de los equipos participantes de su zona que se encuentran dentro de su propio grupo.

Exactamente lo mismo vale si pensamos tales partidos de visitante en lugar de local. Esto nos dice que, si consideramos a los clusters de Interior Lejano e Interior Cercano juntos, cada equipo de CABA/GBA juega tres partidos de local y tres de visitante contra ellos, lo cual suena totalmente razonable.

Para el caso de los clusters Interior Lejano e Interior Cercano la idea principal es esencialmente la misma: cada equipo de dichos clusters jugará un partido de local y uno de visitante dentro de su propio cluster y siendo el interzonal con alguna de las dos localías. Además, jugará dos de visitante y uno de local (o viceversa) contra el otro cluster; y finalmente jugará tres partidos de visitante y cuatro de local contra los equipos que pertenecen a CABA/GBA (o tres local y cuatro visitante).

Veamos la forma matemática de incluir esto en el modelo, empezando por la incorporación de los conjuntos y luego por las restricciones.

$$CABA/GBA : \mathbf{BA} = \{1, \dots, 7\}$$

$$Interior\ Cercano : \mathbf{IC} = \{8, 9, 10\}$$

$$Interior\ Lejano : \mathbf{IL} = \{11, 12, 13\}$$

Escribamos las restricciones de distancia para emparejar los kilómetros recorridos entre divisiones separadas por clusters.

Cluster CABA/GBA

$$3 = \sum_{\substack{j \in \mathbf{BA} \\ j \neq i}} z_{ij} \quad \forall i \in \mathbf{BA} \quad (45)$$

$$3 = \sum_{\substack{j \in \mathbf{BA} \\ j \neq i}} z_{ji} \quad \forall i \in \mathbf{BA} \quad (46)$$

$$\sum_{j \in \mathbf{IC}} z_{ij} \leq 2 \quad \forall i \in \mathbf{BA} \quad (47)$$

$$\sum_{j \in \mathbf{IC}} z_{ij} \geq 1 \quad \forall i \in \mathbf{BA} \quad (48)$$

$$\sum_{j \in \text{IL}} z_{ij} \leq 2 \quad \forall i \in \text{BA} \quad (49)$$

$$\sum_{j \in \text{IL}} z_{ij} \geq 1 \quad \forall i \in \text{BA} \quad (50)$$

(45). La suma sobre todos los rivales $j \in \text{BA}$ de las variables z_{ij} nos dice cuántos partidos juega i de local contra su propio cluster. Como ya dijimos, esta cantidad tiene que ser 3.

(46). Análogamente, la suma sobre todos los rivales $j \in \text{CABA}$ de las variables z_{ji} nos dice cuántos partidos juega i de visitante contra su propio cluster, que también tiene que ser 3.

No es necesario aclarar nada sobre la localía del partido clásico, ya que al tener sólo dos opciones (local o visitante), la diferencia en cantidad de partidos que una división de un equipo juegue con cada localía es a lo sumo uno.

(47). Del lado izquierdo de la ecuación tenemos la cantidad de partidos que i juega de local contra los equipos de Interior Cercano, que debe no ser 3, ya que esa es la cantidad total de equipos de la zona A en tal cluster. Luego, pediremos que sea menor o igual a 2.

(48). Siguiendo la línea de (47), en esta restricción especificamos que la cantidad de partidos que i jugará de local contra los equipos de IC será mayor o igual a 1.

Es decir, juntando (47) y (48), tenemos que i jugará entre uno y dos partidos de local contra el cluster Interior Cercano. Luego, necesariamente el o los partidos restantes contra ese cluster, serán de visitante, logrando así que la diferencia entre localías no exceda a 1.

(49) y (50) son totalmente análogas a las dos anteriores, pero esta vez cambiando el cluster Interior Cercano por Interior Lejano. Esta simplicidad se debe a que ambos clusters están constituídos por tres equipos.

Veamos ahora cómo son las restricciones similares que deben pedirse para Interior Cercano e Interior Lejano.

Cluster Interior Cercano

$$1 = \sum_{\substack{j \in \text{IC} \\ j \neq i}} z_{ij} \quad \forall i \in \text{IC} \quad (51)$$

$$1 = \sum_{\substack{j \in \text{IC} \\ j \neq i}} z_{ji} \quad \forall i \in \text{IC} \quad (52)$$

$$\sum_{j \in \text{BA}} z_{ij} \leq 4 \quad \forall i \in \text{IC} \quad (53)$$

$$\sum_{j \in \text{BA}} z_{ij} \geq 3 \quad \forall i \in \text{IC} \quad (54)$$

$$\sum_{j \in \text{IL}} z_{ij} \leq 2 \quad \forall i \in \text{IC} \quad (55)$$

$$\sum_{j \in \text{IL}} z_{ij} \geq 1 \quad \forall i \in \text{IC} \quad (56)$$

Cluster Interior Lejano

$$1 = \sum_{\substack{j \in \text{IL} \\ j \neq i}} z_{ij} \quad \forall i \in \text{IL} \quad (57)$$

$$1 = \sum_{\substack{j \in \text{IL} \\ j \neq i}} z_{ji} \quad \forall i \in \text{IL} \quad (58)$$

$$\sum_{j \in \text{BA}} z_{ij} \leq 4 \quad \forall i \in \text{IL} \quad (59)$$

$$\sum_{j \in \text{BA}} z_{ij} \geq 3 \quad \forall i \in \text{IL} \quad (60)$$

$$\sum_{j \in \text{IC}} z_{ij} \leq 2 \quad \forall i \in \text{IL} \quad (61)$$

$$\sum_{j \in \text{IC}} z_{ij} \geq 1 \quad \forall i \in \text{IL} \quad (62)$$

Como podemos ver, las restricciones propuestas para estos dos últimos clusters son prácticamente las mismas, y presentan varias similitudes con las empleadas para el cluster CABA/GBA. Explicaremos sólo las correspondientes a Interior Cercano.

(51). La suma sobre todos los equipos $j \in \text{IC}$ de las variables z_{ij} nos dice cuántos partidos juega de local un equipo fijo $i \in \text{IC}$ contra su propio cluster. Al haber tres clubes en total en la zona A en Interior Cercano, esta cantidad debe ser 1.

(52). Análogamente, la suma del lado derecho de la ecuación representa la cantidad de partidos que i juega de visitante dentro de su propio cluster, que también debe ser 1.

Sobre el partido clásico no es necesario hacer aclaraciones mayores, ya que éste será de local o de visitante, pero no nos importará cuál de las dos localías corresponda.

(53) y (54). La suma del lado izquierdo nos dice la cantidad de partidos de local que i juega contra los equipos del cluster CABA/GBA, que como mencionamos debe estar entre 3 y 4, de manera que la diferencia entre ellos sea 1, teniendo en cuenta que los miembros de CABA/GBA son siete.

(55) y (56). Recordando que tenemos tres equipos que conforman el cluster Interior Lejano, la cantidad de partidos que i juega en casa debe estar entre 1 y 2.

Como ya mencionamos, para Interior Lejano se deben cumplir las mismas condiciones pero contra los clusters correspondientes, lo que hace que la esencia de (57) ... (62) sea la misma que la ya explicada.

Por el momento, ya tenemos incorporadas todas las restricciones básicas del torneo y contemplados casi todos los problemas de distancia recorrida. Sin embargo, vamos a adicionar un par de condiciones más.

La primera de ellas, será todavía con respecto al emparejamiento de viajes. Similar al torneo anterior, algo que puede suceder es que al correr el modelo para la zona A, nos encontremos con que algún equipo juega de visitante contra San Martín de Tucumán y contra Godoy Cruz. Esto a priori no parece ser un problema, pero observemos que dentro de esta zona son los dos equipos más alejados con respecto a los otros. Si recordamos que la otra división de ese mismo equipo no tendrá que hacer esos dos viajes (ya que se invierten localías), notamos que puede que esto incremente la brecha en los kilómetros recorridos entre las divisiones. Para evitarlo, simplemente vamos a pedir que no haya ningún equipo en el cluster CABA/GBA que juegue con la misma localía al enfrentarse a estos dos equipos (en Buenos Aires es donde tenemos a la mayoría de los equipos, que son los que pueden ser más perjudicados en caso de tener que realizar dicho par de viajes). Esto es:

$$z_{i12} = z_{13i} \quad \forall i \in BA \quad (63)$$

(63). Si un equipo $i \in BA$ juega de visitante contra el equipo 13 (San Martín de Tucumán), entonces el lado derecho de la ecuación vale 1 y se pide que dicho valor sea igual a la variable z_{i12} , es decir, i debe jugar de local contra el equipo 12 (Godoy Cruz). Por el contrario, si i juega de local contra San Martín de Tucumán, entonces el lado derecho de la ecuación vale 0 y eso implica que juegue de visitante contra Godoy Cruz.

Agreguemos ahora también algunas restricciones a pedido de la SAF y otras de los clubes en particular.

$$\sum_{j \in BA} x_{1j1} + x_{j11} = 1 \quad (64)$$

$$x_{131413} + x_{141313} = 1 \quad (65)$$

(64). Boca pidió jugar contra un equipo de Capital Federal o del Gran Buenos Aires en la primera fecha. Luego, haremos uso del cluster CABA/GBA para especificar esto, sumando las variables x_{1j1} y x_{j11} sobre dichos equipos e igualando este valor a 1.

(65). San Martín de Tucumán solicitó que su partido interzonal sea en la última fecha. Luego, si sumamos las variables x_{131413} y x_{141313} y lo igualamos a 1, nos garantizamos que el equipo 13 juegue contra el 14 (comodín) en la fecha 13.

$$x_{1146} + x_{1416} + x_{1147} + x_{1417} + x_{1148} + x_{1418} = 1 \quad (66)$$

$$x_{4141} + x_{1441} + x_{4142} + x_{1442} + x_{41412} + x_{14412} + x_{41413} + x_{14413} = 0 \quad (67)$$

$$x_{3141} + x_{1431} + x_{3142} + x_{1432} + x_{31412} + x_{14312} + x_{31413} + x_{14313} = 0 \quad (68)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in BA} \left(\sum_{j \in IC} x_{ij6} + x_{ji6} + \sum_{l \in IL} x_{il6} + x_{li6} \right) + \sum_{\substack{j \in IC \\ j \neq 8}} \left(\sum_{i \in BA \cup \{8\}} x_{ji6} + x_{ij6} + \sum_{l \in IL} x_{jl6} + x_{lj6} \right) + \\
& \sum_{i \in IL} \left(\sum_{i \in BA} x_{li6} + x_{il6} + \sum_{j \in IC} x_{lj6} + x_{jl6} \right) + \left(\sum_{j \in IC} x_{8j6} + x_{j86} + \sum_{l \in IL} x_{8l6} + x_{l86} \right) \\
& + (x_{8146} + x_{1486}) \leq 6
\end{aligned} \tag{69}$$

La Superliga Argentina de Fútbol quería asegurarse que los partidos más clásicos (Boca-River, Racing-Independiente, Huracán-San Lorenzo) se den en ciertas fechas atractivas para el público. Veamos esto específicamente:

(66). El partido interzonal de Boca debe ser entre las fechas 6 y 8. Como no sabemos la localía, sumamos las variables $\mathbf{x}_{1\ 14k}$ y $\mathbf{x}_{14\ 1k}$ sobre todas las fechas $k \in \{6, 7, 8\}$.

(67) y (68) son muy similares entre ellas y también similares a (66). Lo que la SAF pidió en este caso es que los partidos interzonales de Racing y de Huracán sean entre las fechas 3 y 11. Para esto, lo que pedimos es que dichos partidos no se den en las fechas 1, 2, 12 ni 13, nuevamente utilizando las variables $\mathbf{x}_{4\ 14k}$ y $\mathbf{x}_{3\ 14k}$, respectivamente, variando k entre las fechas mencionadas.

(69) surge a partir de otro pedido de la SAF: que haya a lo sumo tres partidos inter-clusters en la fecha 6 (ya que este fixture también se usará en la primera mitad del año que viene y dicha fecha es en Semana Santa, donde se busca que los clubes no tengan que viajar demasiado). Si sumamos las variables $\mathbf{x}_{ij6}$ y $\mathbf{x}_{ji6}$ sobre todos los equipos j pertenecientes al cluster Interior Cercano y las variables $\mathbf{x}_{il6}$ y $\mathbf{x}_{li6}$ sobre los equipos l de Interior Lejano, obtenemos la cantidad de partidos que i juega en la fecha 6 contra dichos clusters. Si ahora sumamos eso sobre todos los equipos $i \in BA$, conseguimos la cantidad de partidos inter-clusters que se dan para los equipos de CABA/GBA. Si repetimos esta idea para los otros dos clusters, obtenemos el doble de la cantidad total de partidos inter-clusters para la fecha 6 (ya que estamos contando cuando el equipo i de algún cluster juega de local contra un equipo j de otro cluster y también cuando j cuando juega de visitante contra i). Luego, basta pedir que esta sumatoria sea menor o igual a 6 para garantizarnos lo que queríamos originalmente. La única salvedad fue para Aldosivi, que en realidad se considera que un partido inter-cluster para él es uno en el que no juegue contra un equipo de CABA/GBA (que son los clubes más cercanos que tiene); por lo que se consideró esto como un caso aparte y no dentro del cluster Interior Cercano, a cual pertenece. Además, tampoco sirve que tenga su partido interzonal en dicha fecha (ya que Patronato sigue quedando lejos de él), por lo que también se cuenta este partido.

Veamos ahora, para terminar, una serie de restricciones sobre cercanías en breaks.

$$w_{ik} \leq \left(\sum_{j \in BA} x_{jik} + x_{jik+1} \right) + x_{14ik} + x_{14ik+1} \quad \forall i \in BA, \quad \forall k \in R, k \neq 13 \tag{70}$$

$$w_{ik} \leq \left(\sum_{\substack{j \in IC \\ j \neq 8}} x_{jik} + x_{jik+1} \right) + x_{i14k} + x_{i14k+1} \quad \forall i \in IC, i \neq 8, \quad \forall k \in R, k \neq 13 \quad (71)$$

$$w_{8k} \leq \left(\sum_{j \in BA} x_{j8k} + x_{j8k+1} \right) \quad \forall k \in R, k \neq 13 \quad (72)$$

$$w_{11k} \leq \left(\sum_{j \in IL} x_{j11k} + x_{j11k+1} \right) + x_{i1411k} + x_{i1411k+1} \quad \forall k \in R, k \neq 13 \quad (73)$$

Como en el torneo pasado, la SAF solicitó que cada vez que un equipo tiene un break de visitante, no tenga que viajar demasiado en ambos partidos, lo que esencialmente se traduce en que alguno de ambos partidos sea con un equipo de su propio cluster (salvo para Aldosivi, que nuevamente vamos a considerarlo con especialidad ya que no está particularmente cerca del resto de clubes de Interior Cercano).

(70). Si un equipo i de CABA/GBA tiene un break de visitante ($w_{ik} = 1$), entonces al menos uno de esos dos partidos debe ser contra otro equipo de CABA/GBA (incluyendo a su clásico). Luego, el lado izquierdo de la ecuación (la cantidad de partidos que i juega contra su propio cluster incluyendo su interzonal) en las fechas k y $k+1$ debe ser mayor o igual a 1 (que es el valor de w_{ik}). Por el contrario, si no tiene un break de visitante y $w_{ik} = 0$, la restricción no impone nada.

(71). Esencialmente es igual a (70) pero para los equipos del cluster Interior Cercano, excluyendo a Aldosivi.

(72). Para Aldosivi, en caso de tener un break de visitante, la cantidad de partidos que juega contra los equipos de Buenos Aires en las fechas k y $k+1$ (el lado derecho de la ecuación) debe ser mayor o igual a 1 (el lado izquierdo).

(73) es el pedido para el cluster Interior Lejano, pero si recordamos que ya pedimos que San Martín de Tucumán y Godoy Cruz tengan patrón perfecto (0 breaks), en realidad sólo es necesario modelarlo para Belgrano, que es el tercer integrante de este grupo. En esencia vuelve a ser una condición como (70) o (71), sólo para el equipo 11.

Ahora, recordemos que estamos armando el modelo para una de las dos divisiones (habíamos asumido que serían las mayores, sin pérdida de generalidad). Luego, debemos pedir exactamente las mismas restricciones pero con breaks de local, ya que las menores tendrán dichos breaks como visitante, y es ahí donde queremos evitar dos viajes largos seguidos. Basta entonces hacer leves modificaciones en (70) ... (73) para conseguirlo (básicamente w_{ik} será y_{ik} y x_{jik} será x_{ijk}):

$$y_{ik} \leq \left(\sum_{j \in BA} x_{ijk} + x_{ijk+1} \right) + x_{i14k} + x_{i14k+1} \quad \forall i \in BA, \quad \forall k \in R, k \neq 13 \quad (74)$$

$$y_{ik} \leq \left(\sum_{\substack{j \in IC \\ j \neq 8}} x_{ijk} + x_{ijk+1} \right) + x_{i14k} + x_{i14k+1} \quad \forall i \in IC, i \neq 8, \quad \forall k \in R, k \neq 13 \quad (75)$$

$$y_{8k} \leq \left(\sum_{j \in BA} x_{8jk} + x_{8jk+1} \right) \quad \forall k \in R, k \neq 13 \quad (76)$$

$$y_{11k} \leq \left(\sum_{j \in IL} x_{11jk} + x_{11jk+1} \right) + x_{1114k} + x_{1114k+1} \quad \forall k \in R, k \neq 13 \quad (77)$$

Con esto completamos todas las restricciones para este modelo de la zona A. Estamos en condiciones entonces de presentar la función objetivo, que buscará nuevamente minimizar breaks:

$$\text{minimizar} \sum_{\substack{i \in T^* \\ k \in R}} y_{ik} + w_{ik}$$

Lo que resta para completar con la idea de emparejar distancias mediante los clusters geográficos es el modelo para la zona B. Veremos más adelante, luego de presentar el otro enfoque de resolución, cuáles son las modificaciones necesarias al de la zona A para poder diseñarlo.

3.3.2. Matriz de distancias

Al igual que en el torneo anterior, veremos una segunda opción para armar un fixture que equipare los viajes realizados entre las dos divisiones de cada equipo, en la que no se utilizarán los clusters geográficos con este fin, si no que se incorporará explícitamente la distancia (en kilómetros) entre los clubes.

Generaremos otra matriz D que en cada lugar D_{ij} tendrá la distancia del estadio del equipo i al del equipo j . Como siempre, diseñaremos en primer lugar un fixture para la zona A e incorporaremos las restricciones sobre los partidos interzonales para modelar la zona B.

Recordemos que lo que queremos minimizar es, para cada equipo, la diferencia de kilómetros recorridos entre las menores y las mayores (esta vez empleando la función objetivo). Para ello, vamos a construir dos modelos, donde cada uno de ellos minimizará:

$$\sum_{i \in T^*} |d_i| \quad \text{o} \quad \max_{i \in T^*} |d_i|$$

siendo d_i , para cada equipo i , la resta de kilómetros recorridos entre su par de divisiones.

Vimos en el capítulo anterior que si bien estas funciones no son lineales, podíamos reformular nuestro problema de una forma equivalente (para que termine siendo un MILP), que nos permita reconstruir la solución que buscamos (**Proposición 2.1** y **Proposición 2.2**). Así, básicamente lo que hacíamos era reescribir d_i como la resta de su parte positiva y negativa (dos variables que resultan mayores o iguales a 0), para referirnos así a su módulo como la suma de ellas. En el caso del máximo, además, lo que debíamos hacer era incorporar una variable M que es la que minimizaremos, agregando como restricción: $d_i^+ + d_i^- \leq M$.

La inclusión de los clusters en el modelo previo fue específicamente para equiparar distancias. Sin embargo, estos conjuntos luego se terminaron utilizando también para algunas otras restricciones (en particular, fueron útiles para algunas condiciones que solicitaron los clubes (64), o para restricciones requeridas por la SAF (69) ... (77)). Es por esto que vamos a mantener dichos conjuntos en estos nuevos modelos, pero no los utilizaremos para otras restricciones que no sean las recién mencionadas, de manera tal que el emparejamiento de distancias sea totalmente controlado por la matriz D mediante la función objetivo.

Recordemos entonces la serie de conjuntos y variables que nos servirán para diseñar el problema:

Conjuntos

$$Fechas : \mathbf{R} = \{1, \dots, 13\}$$

$$Equipos : \mathbf{T} = \{1, \dots, 14\}$$

$$Equipos \text{ sin extra} : \mathbf{T}^* = \{1, \dots, 13\}$$

$$Equipos \text{ grandes} : \mathbf{BT} = \{1, 4\}$$

$$CABA/GBA : \mathbf{BA} = \{1, \dots, 7\}$$

$$Interior \text{ Cercano} : \mathbf{IC} = \{8, 9, 10\}$$

$$Interior \text{ Lejano} : \mathbf{IL} = \{11, 12, 13\}$$

Variables

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ juega de local contra el equipo } j \text{ en la fecha } k \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ juega de local en las fechas } k \text{ y } k+1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$w_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ juega de visitante en las fechas } k \text{ y } k+1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ juega de local contra el equipo } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Las restricciones que usaremos en este caso son las mismas que en el modelo de los clusters, pero eliminaremos aquellas que utilizamos para equiparar distancias: (45) ... (63). Luego, las que mantendremos son:

- Relación entre variables: (1) ... (5)
- Estructura básica del torneo: (6) ... (11)
- Breaks: (12) ... (16)
- Equipos grandes: (17) y (18)

- Patrones perfectos: (19) ... (44)
- Restricciones de clubes: (64) y (65)
- Restricciones específicas de la SAF (66) ... (77)

Esto implica que hasta acá no haya nada incorporado sobre distancias equilibradas entre divisiones. Veamos cómo es el armado de la matriz D , similar al torneo anterior:

$$\begin{pmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & \cdots & d_{126} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & \cdots & d_{226} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ d_{261} & d_{262} & d_{263} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

A B A ... B

En este caso, al haber ahora 26 equipos participantes y no 28, $D \in \mathbb{R}^{26 \times 26}$. Al igual que antes, $D_{ii} = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, 26\}$ y es simétrica. También ubicaremos a los equipos de forma tal que en las filas/columnas impares figuren las distancias de los equipos de la zona A a los restantes, y en las pares las de los equipos de la zona B. Más aún, el club de la fila/columna siguiente a cada club de la zona A será su rival clásico.

Como ya sabemos, tendremos que tener en cuenta algunas nuevas variables. Como detallaremos el modelo para la zona A, definiremos d_i por cada equipo ($i \in \{1, \dots, 13\}$), como la resta entre lo recorrido (sólo de ida) por sus divisiones mayores y menores, es decir:

$$d_i = \sum_{j \in T^*} D_{2i-1 \ 2j-1} \cdot (2z_{ji} - 1) + D_{2i-1 \ 2i} \cdot (2z_{14i} - 1)$$

La definición de d_i es esencialmente la que explicamos para el Torneo Marzo-Junio 2018, con la única salvedad de que esta vez el equipo comodín es el número 14 y no el 15.

Nuevamente, es importante observar que d_i no es necesariamente positiva, por lo que, siguiendo las **Proposiciones 2.1 y 2.2**, las variables de decisión que finalmente agregaremos serán d_i^+ y d_i^- , incorporando a nuestra serie de restricciones las siguientes:

$$d_i^+ - d_i^- = \sum_{j \in T^*} D_{2i-1 \ 2j-1} \cdot (2z_{ji} - 1) + D_{2i-1 \ 2i} \cdot (2z_{14i} - 1) \ \forall i \in T^* \quad (78)$$

$$d_i^+, d_i^- \geq 0 \ \forall i \in T^* \quad (79)$$

Focalicemos en ambos modelos que buscan minimizar las diferencias de distancias por separado; primero aquel que busca minimizar la suma de ellas y luego el que busca minimizar la máxima.

Modelo 1

Como ya dijimos, nuestro ideal es:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i \in T^*} |d_i|$$

Como no tomamos a d_i como una variable nueva de decisión (ya que puede tomar valores negativos), en vistas de la **Proposición 2.1** podemos reformular el problema de manera de conseguir un MILP, con la ayuda de d_i^+ y d_i^- .

Así, además de x_{ijk} , y_{ik} , w_{ik} , z_{ij} , agregaremos a nuestras variables de decisión d_i^+ y d_i^- , ambas no negativas. Finalmente, no olvidandonos de incorporar las restricciones (78) y (79), sólo resta definir correctamente la función objetivo para terminar con este modelo:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i \in T^*} d_i^+ + d_i^-$$

Modelo 2

En esta ocasión, el objetivo es:

$$\text{minimizar} \quad \max_{i \in T^*} |d_i|$$

Gracias a la **Proposición 2.2**, podemos reformular nuestro problema para llevarlo a la forma que necesitamos, con una función objetivo lineal.

Tal como en el modelo 1, necesitamos incorporar d_i^+ y d_i^- a las variables de decisión originales x_{ijk} , y_{ik} , w_{ik} y z_{ij} . Pero esta vez, también necesitabamos agregar una más, que llamaremos M , y será no negativa.

Obviamente, acá tampoco podemos olvidarnos de agregar las restricciones (78) y (79) para tener una correcta definición de d_i . Pero además, necesitamos aclarar qué rol jugará M en este modelo. Es decir, añadiremos también:

$$d_i^+ + d_i^- \leq M \quad \forall i \in T^* \quad (80)$$

Finalmente, este modelo queda completo considerando la siguiente función objetivo:

$$\text{minimizar} \quad M$$

No perdamos de vista que el modelo presentado es siempre para la zona A, tanto para el caso de los clusters como el caso de la matriz. Hablaremos ahora sobre cómo sería el correspondiente a la zona B.

3.4. Zona B

Olvidemonos por un momento de que necesitamos equiparar distancias entre divisiones. De esta forma, definamos el modelo para la zona B que todavía no incluya a los clusters ni a la matriz de distancias.

Las variables de decisión x_{ijk} , y_{ik} , w_{ik} y z_{ij} serán nuevamente usadas, como así también los conjuntos que ya teníamos:

$$Fechas : \mathbf{R} = \{1, \dots, 13\}$$

$$Equipos : \mathbf{T} = \{1, \dots, 14\}$$

$$Equipos \sin extra : \mathbf{T}^* = \{1, \dots, 13\}$$

$$Equipos grandes : \mathbf{BT} = \{1, 3, 4\}$$

La única diferencia en la definición de los conjuntos es que ahora el conjunto de grandes está conformado por River (equipo 1), San Lorenzo (equipo 3) e Independiente (equipo 4).

Al igual que en el campeonato pasado, las funciones objetivo se podrán mantener iguales, independientemente de si el modelo utilizado es el de los clusters o los de la matriz de distancias.

Las restricciones (1) ... (5) (relación entre variables), (6) ... (11) (estructura básica del torneo), (12) ... (16) (breaks) y (17) y (18) (equipos grandes) se mantendrán exactamente igual a la zona A. Veamos entonces las diferencias en las restricciones sobre patrones perfectos, clubes y condiciones requeridas por la SAF.

Los equipos más alejados (y posiblemente más perjudicados en términos de distancias en esta zona) son San Martín de San Juan y Atlético Tucumán, justamente los rivales de Godoy Cruz y San Martín de Tucumán, respectivamente, que son los equipos para los cuales se les pidió patrón perfecto en el modelo para la zona A. Luego, la única modificación que debemos hacer en las restricciones (19) ... (44) es invertir las localías, ya que al ser los equipos rivales de la zona anterior, quedan identificados por el mismo número. Así, lo que pedimos es:

$$\sum_{j \in \mathbf{T}} x_{12j1} = 1 \quad (81)$$

$$\sum_{j \in \mathbf{T}} x_{j122} = 1 \quad (82)$$

$$\sum_{j \in \mathbf{T}} x_{12j3} = 1 \quad (83)$$

⋮

$$\sum_{j \in \mathbf{T}} x_{j1212} = 1 \quad (92)$$

$$\sum_{j \in T} x_{12j13} = 1 \quad (93)$$

Y para Atlético Tucumán:

$$\sum_{j \in T} x_{j131} = 1 \quad (94)$$

$$\sum_{j \in T} x_{13j2} = 1 \quad (95)$$

$$\sum_{j \in T} x_{j133} = 1 \quad (96)$$

$\vdots$

$$\sum_{j \in T} x_{13j12} = 1 \quad (105)$$

$$\sum_{j \in T} x_{j1313} = 1 \quad (106)$$

Por otro lado, al ser otros clubes, las restricciones pedidas por ellos cambiarán respecto de la zona A, siendo estas:

$$\sum_{j \in BA} x_{1j1} + x_{j11} = 1 \quad (107)$$

$$\sum_{j \in BA} x_{1j2} + x_{j12} = 1 \quad (108)$$

$$\sum_{j \in BA} x_{ij1} + x_{ji1} \geq x_{1i2} + x_{i12} \quad \forall i \in BA \quad (109)$$

(107) y (108) corresponden a un pedido de River: sus rivales en las fechas 1 y 2 deben ser equipos de CABA/GBA. Luego, sumar sobre todos los equipos $j \in BA$ las variables x_{1j1} y x_{j11} nos da la cantidaad de equipos de CABA/GBA contra los cuales River debe enfrentarse en la fecha 1, que debe entonces dar 1.

(109). En este caso, se pide que el equipo rival de River en la segunda fecha juegue contra un equipo de CABA/GBA en la primera. Luego, $x_{1i2} + x_{i12}$ nos da 1 para el equipo i que se enfrente a River en la segunda fecha (que por la restricción inmediatamente anterior, sabemos que es de CABA/GBA) y 0 para el resto. Luego, sumar las variables x_{ij1} y x_{ji1} sobre todos los equipos $j \in BA$ (1 si i juega contra un equipo de CABA/GBA en la primera fecha, 0 si no), debe ser mayor o igual 1 para dicho equipo i . Observar que para el resto de los equipos, la restricción no impone nada.

La SAF no impuso nuevas condiciones para esta zona, sólo se debe respetar las ya pedidas: que los interzonales clásicos se juguen dentro de determinado rango de fechas,

que haya a lo sumo tres partidos inter-clusters en la fecha 6 y las cercanías en breaks de visitante. Las de los partidos clásicos no hace falta volverlas a pedir, ya que quedarán determinadas una vez que agreguemos los partidos interzonales que vienen fijados por la zona A. La siguiente sufrirá una pequeña modificación ya que no hace falta separar al equipo 8 en esta zona (en la anterior, éste equipo era Aldosivi, que estaba lejos de su cluster, pero acá dicho equipo es Patronato, que sí está cerca de los otros equipos que conforman su cluster, Interior Cercano). Quedaría así:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in BA} \left(\sum_{j \in IC} x_{ij6} + x_{ji6} + \sum_{l \in IL} x_{il6} + x_{li6} \right) + \sum_{j \in IC} \left(\sum_{i \in BA} x_{ji6} + x_{ij6} + \sum_{l \in IL} x_{jl6} + x_{lj6} \right) + \\ \sum_{i \in IL} \left(\sum_{i \in BA} x_{li6} + x_{il6} + \sum_{j \in IC} x_{lj6} + x_{jl6} \right) \leq 6 \end{aligned} \quad (110)$$

La esencia es la misma que en la zona anterior, pero como ya dijimos, no hace falta tratar a ningún equipo de una forma especial, ya que en este caso todos están cerca de su cluster.

Veamos por último los cambios necesarios en las restricciones sobre cercanías en breaks de visitante:

$$w_{ik} \leq \left(\sum_{j \in BA} x_{jik} + x_{jik+1} \right) + x_{14ik} + x_{14ik+1} \quad \forall i \in BA, \quad \forall k \in R, k \neq 13 \quad (111)$$

$$w_{ik} \leq \left(\sum_{j \in IC} x_{jik} + x_{jik+1} \right) + x_{14ik} + x_{14ik+1} \quad \forall i \in IC, i \neq 8, \quad \forall k \in R, k \neq 13 \quad (112)$$

$$w_{8k} \leq \left(\sum_{j \in IC} x_{j8k} + x_{j8k+1} \right) \quad \forall k \in R, k \neq 13 \quad (113)$$

$$w_{11k} \leq \left(\sum_{j \in IL} x_{j11k} + x_{j11k+1} \right) + x_{1411k} + x_{1411k+1} \quad \forall k \in R, k \neq 13 \quad (114)$$

La SAF solicitó que cada vez que un equipo tiene un break de visitante, no tenga que viajar demasiado en ambos partidos, lo que esencialmente se traduce en que alguno de ambos partidos sea con un equipo de su propio cluster o con su rival clásico. La salvedad esta vez es para Patronato, que si bien está cerca de los equipos de su propio cluster, no lo está de Aldosivi, con quien debe jugar su partido interzonal. Es por eso que no está contemplado en (112) y tiene su restricción especial (113). En el caso del cluster Interior Lejano, como ya vimos se pidió patrón perfecto para dos de sus integrantes, con lo cual sólo es necesario aclarar esta restricción sobre distancias en breaks para Talleres (equipo 11), lo que se ve reflejado en (114).

Ahora, recordemos que debemos pedir exactamente las mismas restricciones pero con breaks de local, ya que la división para la cual no estamos armando el fixture tendrá

dichos breaks como visitante, y es ahí donde queremos evitar dos viajes largos seguidos. Basta entonces, como antes, hacer las modificaciones necesarias en las cuatro restricciones anteriores (w_{ik} será y_{ik} y x_{jik} será x_{ijk}):

$$y_{ik} \leq \left(\sum_{j \in BA} x_{ijk} + x_{ijk+1} \right) + x_{i14k} + x_{i14k+1} \quad \forall i \in BA, \quad \forall k \in R, k \neq 13 \quad (115)$$

$$y_{ik} \leq \left(\sum_{j \in IC} x_{ijk} + x_{ijk+1} \right) + x_{i14k} + x_{i14k+1} \quad \forall i \in IC, i \neq 8, \quad \forall k \in R, k \neq 13 \quad (116)$$

$$y_{8k} \leq \left(\sum_{j \in IC} x_{8jk} + x_{8jk+1} \right) \quad \forall k \in R, k \neq 13 \quad (117)$$

$$y_{11k} \leq \left(\sum_{j \in IL} x_{11jk} + x_{11jk+1} \right) + x_{1114k} + x_{1114k+1} \quad \forall k \in R, k \neq 13 \quad (118)$$

Para terminar con las condiciones del modelo de la zona B (aún sin tener en cuenta las distancias), sólo falta agregar los partidos interzonales que vienen delimitados por la zona A. Tomando los equipos y las fechas sólo a modo de ejemplo, la serie de restricciones que debemos agregar sería:

$$x_{1141} = 1 \quad (119)$$

$$x_{2142} = 1 \quad (120)$$

$$x_{3143} = 1 \quad (121)$$

$$x_{4144} = 1 \quad (122)$$

$$x_{5145} = 1 \quad (123)$$

$$x_{6146} = 1 \quad (124)$$

$$x_{1477} = 1 \quad (125)$$

$$x_{1488} = 1 \quad (126)$$

$$x_{1499} = 1 \quad (127)$$

$$x_{141010} = 1 \quad (128)$$

$$x_{14\ 11\ 11} = 1 \quad (129)$$

$$x_{14\ 12\ 12} = 1 \quad (130)$$

$$x_{14\ 13\ 13} = 1 \quad (131)$$

Ahora sí, lo único que resta es incorporar las condiciones necesarias para equiparar distancias. Las diferencias son pocas pero igualmente separemos en ambos casos.

3.4.1. Clusters

Afortunadamente, para este caso no hay diferencias, ya que al haber numerado a los equipos por sus rivales y al haber elegido los clusters de manera inteligente, el balance de localías de los partidos se mantiene igual. Es decir, los equipos de CABA/GBA seguirán jugando tres partidos de local contra su mismo cluster y tres de visitante, dos de local contra Interior Cercano y uno de visitante (o viceversa), y dos de visitante y uno de local contra Interior Lejano (o viceversa). La misma analogía con la zona A vale para la forma en que Interior Cercano e Interior Lejano deben acomodar sus localías.

El único detalle es que nuevamente vamos a pedir que ningún equipo de CABA/GBA ni de Interior Cercano juegue con la misma localía contra los dos equipos más alejados que hay. En esta zona, dichos equipos son San Martín SJ y Atlético Tucumán. Al ser los rivales clásicos de Godoy Cruz y de San Martín de Tucumán (los equipos para los cuales se pidió lo mismo en la zona A), la restricción queda exactamente como estaba.

El hecho de que los equipos más alejados en ambas zonas sean justamente los rivales clásicos, evita el problema que había surgido en el torneo anterior, donde a Olimpo no siempre se le podía asegurar la ausencia de breaks (su rival clásico de la zona A era Temperley, que no es de los más alejados). Además, esta vez no hubo ninguna restricción de la SAF que lleve a una contradicción con el balance de localías, como había sucedido en el capítulo anterior para Godoy Cruz.

3.4.2. Matriz de distancias

Aquí, independientemente de si queremos minimizar la suma de diferencias de distancia o la máxima de ellas, la discrepancias entre las zonas A y B (sin contar las que ya mencionamos) caerán en la definición de d_i , o mejor dicho, en la definición de $d_i^+ - d_i^-$, básicamente por la forma en que armamos la matriz de distancias. Así:

$$d_i^+ - d_i^- = \sum_{j \in T^*} D_{2i\ 2j} \cdot (2z_{ji} - 1) + D_{2i\ 2i-1} \cdot (2z_{14i} - 1) \quad \forall i \in T^* \quad (132)$$

Ahora, las filas/columnas a los que debemos acceder de la matriz son las pares, ya que la habíamos acomodado de forma tal que éstas sean reservadas para equipos de la zona B (siendo las impares para los de la zona A).

Hemos completado los modelos para ambas zonas del Torneo Argentino de Fútbol Juvenil Agosto-Noviembre 2018.

Capítulo 4

Resultados y conclusiones

En este último capítulo, veremos las soluciones arrojadas por nuestros modelos y analizaremos sus ventajas y desventajas. En particular, los fixtures que se mostrarán son sólo para las divisiones mayores (recordemos que las menores juegan con el mismo fixture pero con sus localías invertidas). En ellos, podemos ver en cada fila los rivales de cada equipo separados por fechas. Fijada una fila i (correspondiente entonces a los partidos del equipo i), un '@' delante del nombre de un club rival quiere decir que i jugará de visitante contra él. Por el contrario, ante la ausencia de tal símbolo, diremos que i jugará de local. Veremos marcados en **rojo** los breaks de visitante y en **azul** los de local, como también observaremos en **negrita** aquellos partidos que correspondan a enfrentamientos inter zonas.

En principio, no tendría mucho sentido realizar comparaciones entre ambos torneos, ya que si bien presentan muchas similitudes, son estructuralmente diferentes. Es por esto que analizaremos los resultados obtenidos para todos los modelos pero separando en los dos campeonatos realizados.

Para que el análisis sea correctamente comparable, todos los modelos se dejaron correr 36 horas en CPLEX para Linux (versión 12.6.2), en una computadora con procesador INTEL CORE i7 7^{ma} generación. En algunos casos se encontró el óptimo, en otros solamente se consiguió algunas soluciones factibles entre las cuales se escogió la mejor (en términos de la función objetivo que corresponda).

4.1. Torneo Marzo-Junio 2018

Para cada uno de los tres modelos propuestos y para cada zona de este torneo, veamos los posibles fixtures finales y la distancia (en kilómetros) que deben recorrer tanto las mayores como las menores de cada equipo. Destacaremos además, la cantidad de breaks de cada uno, la suma de diferencias en los viajes entre divisiones y la máxima de ellas (que son las diversas funciones objetivo con las que trabajamos).

4.1.1. Clusters

ZONA A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
River	@Temperley	Independiente	Tigre	@San Lorenzo	Defensa y Justicia	@Rosario Central	Boca	@San Martín SJ	@Estudiantes	Talleres	@Vélez	Atlético Tucumán	@Banfield	Colón
San Lorenzo	@Vélez	Banfield	@Atlético Tucumán	River	San Martín SJ	@Tigre	Huracán	@Colón	Temperley	@Independiente	Estudiantes	@Defensa y Justicia	Rosario Central	@Talleres
Vélez	San Lorenzo	@Talleres	@Defensa y Justicia	Temperley	@Atlético Tucumán	Estudiantes	@Argentinos Jrs.	Independiente	Colón	@Banfield	River	@Rosario Central	San Martín SJ	@Tigre
Tigre	@Independiente	Atlético Tucumán	@River	Defensa y Justicia	@Temperley	San Lorenzo	@Chacarita	Talleres	Banfield	@San Martín SJ	Rosario Central	@Estudiantes	@Colón	Vélez
Independiente	Tigre	@River	San Martín SJ	@Rosario Central	Colón	@Banfield	Racing	@Vélez	@Atlético Tucumán	San Lorenzo	Temperley	@Talleres	Estudiantes	@Defensa y Justicia
Banfield	Colón	@San Lorenzo	Talleres	@San Martín SJ	@Estudiantes	Independiente	@Lanus	Atlético Tucumán	@Tigre	Vélez	Defensa y Justicia	@Temperley	River	@Rosario Central
Defensa y Justicia	San Martín SJ	@Colón	Vélez	@Tigre	@River	Temperley	@Arsenal	Rosario Central	@Talleres	Estudiantes	@Banfield	San Lorenzo	@Atlético Tucumán	Independiente
Estudiantes	Talleres	@San Martín SJ	Rosario Central	@Colón	Banfield	@Vélez	Gimnasia y Esgrima	@Temperley	River	@Defensa y Justicia	@San Lorenzo	Tigre	@Independiente	Atlético Tucumán
Rosario Central	@Atlético Tucumán	Temperley	@Estudiantes	Independiente	@Talleres	River	Newell's	@Defensa y Justicia	San Martín SJ	@Colón	@Tigre	Vélez	@San Lorenzo	Banfield
Colón	@Banfield	Defensa y Justicia	@Temperley	Estudiantes	@Independiente	Atlético Tucumán	@Unión	San Lorenzo	@Vélez	Rosario Central	Talleres	@San Martín SJ	Tigre	@River
Talleres	@Estudiantes	Vélez	@Banfield	Atlético Tucumán	Rosario Central	@San Martín SJ	Belgrano	@Tigre	Defensa y Justicia	@River	@Colón	Independiente	@Temperley	San Lorenzo
San Martín SJ	@Defensa y Justicia	Estudiantes	@Independiente	Banfield	@San Lorenzo	Talleres	@Godoy Cruz	River	@Rosario Central	Tigre	@Atlético Tucumán	Colón	@Vélez	Temperley
Atlético Tucumán	Rosario Central	@Tigre	San Lorenzo	@Talleres	Vélez	@Colón	Patronato	@Banfield	Independiente	@Temperley	San Martín SJ	@River	Defensa y Justicia	@Estudiantes
Temperley	River	@Rosario Central	Colón	@Vélez	Tigre	@Defensa y Justicia	@Olimpo	Estudiantes	@San Lorenzo	Atlético Tucumán	@Independiente	Banfield	Talleres	@San Martín SJ

ZONA B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Boca	Patronato	@Belgrano	@Racing	Newell's	@Unión	Godoy Cruz	@River	Argentinos Jrs.	@Olimpo	Chacarita	@Arsenal	Lanus	@Huracán	Gimnasia y Esgrima
Huracán	@Gimnasia y Esgrima	Unión	@Newell's	Racing	@Godoy Cruz	Argentinos Jrs.	@San Lorenzo	Arsenal	@Chacarita	Olimpo	@Lanus	Belgrano	Boca	@Patronato
Argentinos Jrs.	@Arsenal	Godoy Cruz	@Olimpo	Unión	Lanus	@Huracán	Vélez	@Boca	Patronato	@Belgrano	Racing	@Gimnasia y Esgrima	Chacarita	@Newell's
Chacarita	@Godoy Cruz	Olimpo	@Unión	Arsenal	Gimnasia y Esgrima	Patronato	Tigre	@Patronato	Huracán	@Boca	Newell's	@Racing	@Argentinos Jrs.	Belgrano
Racing	@Newell's	Gimnasia y Esgrima	Boca	@Huracán	Patronato	@Belgrano	@Independiente	@Godoy Cruz	@Arsenal	Unión	@Argentinos Jrs.	Chacarita	@Olimpo	Lanus
Lanus	@Unión	Arsenal	@Godoy Cruz	Olimpo	@Argentinos Jrs.	Chacarita	Banfield	@Gimnasia y Esgrima	Belgrano	@Patronato	Huracán	@Boca	Newell's	@Racing
Arsenal	Argentinos Jrs.	@Lanus	Belgrano	@Chacarita	Olimpo	@Patronato	Defensa y Justicia	@Huracán	Racing	@Newell's	Boca	@Godoy Cruz	@Gimnasia y Esgrima	Unión
Gimnasia y Esgrima	Huracán	@Racing	Patronato	@Belgrano	@Chacarita	Newell's	@Estudiantes	Lanus	@Unión	Godoy Cruz	@Olimpo	Argentinos Jrs.	Arsenal	@Boca
Newell's	Racing	@Patronato	Huracán	@Boca	Belgrano	@Gimnasia y Esgrima	@Rosario Central	Olimpo	@Godoy Cruz	Arsenal	@Chacarita	Unión	@Lanus	Argentinos Jrs.
Unión	Lanus	@Huracán	Chacarita	@Argentinos Jrs.	Boca	@Olimpo	Colón	@Belgrano	Gimnasia y Esgrima	@Racing	Patronato	@Newell's	Godoy Cruz	@Arsenal
Belgrano	@Olimpo	Boca	@Arsenal	Gimnasia y Esgrima	@Newell's	Racing	@Talleres	Unión	@Lanus	Argentinos Jrs.	Godoy Cruz	@Huracán	Patronato	@Chacarita
Godoy Cruz	Chacarita	@Argentinos Jrs.	Lanus	@Patronato	Huracán	@Boca	San Martín SJ	@Racing	Newell's	@Gimnasia y Esgrima	@Belgrano	Arsenal	@Unión	Olimpo
Patronato	@Boca	Newell's	@Gimnasia y Esgrima	Godoy Cruz	@Racing	Arsenal	@Atlético Tucumán	Chacarita	@Argentinos Jrs.	Lanus	@Unión	Olimpo	@Belgrano	Huracán
Olimpo	Belgrano	@Chacarita	Argentinos Jrs.	@Lanus	@Arsenal	Unión	Temperley	@Newell's	Boca	@Huracán	Gimnasia y Esgrima	@Patronato	Racing	@Godoy Cruz

Zona A

Equipos	Mayores	Menores	Diferencia
River	3260,8	4996	53,21 %
San Lorenzo	5039,2	3203,8	57,29 %
Vélez	4717,8	3510,2	34,40 %
Tigre	3647,2	4764,4	30,63 %
Independiente	4740,6	3541,6	33,86 %
Banfield	3257,6	5115,6	57,04 %
Defensa y Justicia	5324,4	3339,2	59,45 %
Estudiantes	4077,4	5335,2	30,85 %
Rosario Central	5716	5070,4	12,73 %
Colón	6733,2	6514	3,37 %
Talleres	9094	7704,2	18,04 %
San Martín SJ	13226	14878	12,49 %
Atlético Tucumán	15338	15302	0,24 %
Temperley	4412,8	5263,4	19,28 %

- Cantidad de breaks = 20.
- Suma de diferencias (ida y vuelta) = 16988,6 km.
- Máxima diferencia absoluta (ida y vuelta) = 1985,2 km. (Defensa y Justicia)

Zona B

Equipos	Mayores	Menores	Diferencia
Boca	3754,6	3991,8	6,32 %
Huracán	3941,6	3725,2	5,81 %
Argentinos Jrs.	3497,6	4111	17,54 %
Chacarita	4176,8	3601,4	15,98 %
Racing	3420,2	4299,8	25,72 %
Lanús	4302,6	3437,4	25,17 %
Arsenal	4038,4	3839,4	5,18 %
Gimnasia y Esgrima	4224,8	4511	6,77 %
Newell's	4756,4	5158	8,44 %
Unión	6702	5764,2	16,27 %
Belgrano	8362,2	8614	3,01 %
Godoy Cruz	14018	13130	6,76 %
Patronato	6241	7994	28,09 %
Olimpo	10876	10182	6,82 %

- Cantidad de breaks = 16.
- Suma de diferencias (ida y vuelta) = 8798,6 km.
- Máxima diferencia absoluta (ida y vuelta) = 1753 km. (Patronato)

4.1.2. Matriz de distancias, modelo 1: minimizar la suma de diferencias

ZONA A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
River	@Temperley	Atlético Tucumán	@Estudiantes	Vélez	@San Lorenzo	Banfield	@Boca	Defensa y Justicia	Talleres	@Rosario Central	Independiente	@Colón	Tigre	@San Martín SJ
San Lorenzo	Tigre	@Independiente	Talleres	@Temperley	River	@Estudiantes	Huracán	@San Martín SJ	Vélez	@Colón	@Banfield	Atlético Tucumán	Defensa y Justicia	@Rosario Central
Vélez	Talleres	@San Martín SJ	Tigre	@River	Temperley	@Rosario Central	Argentinos Jrs.	@Estudiantes	@San Lorenzo	Atlético Tucumán	@Defensa y Justicia	Banfield	Independiente	@Colón
Tigre	@San Lorenzo	Estudiantes	@Vélez	Colón	@Atlético Tucumán	Independiente	@Chacarita	Banfield	San Martín SJ	@Talleres	Rosario Central	@Defensa y Justicia	@River	Temperley
Independiente	@Colón	San Lorenzo	Defensa y Justicia	@San Martín SJ	Talleres	@Tigre	Racing	@Rosario Central	@Banfield	Temperley	@River	Estudiantes	@Vélez	Atlético Tucumán
Banfield	@Rosario Central	Temperley	@Colón	Atlético Tucumán	Estudiantes	@River	Lanús	@Tigre	Independiente	@San Martín SJ	San Lorenzo	@Vélez	Talleres	@Defensa y Justicia
Defensa y Justicia	@Atlético Tucumán	Colón	@Independiente	@Talleres	San Martín SJ	@Temperley	Arsenal	@River	Rosario Central	@Estudiantes	Vélez	Tigre	@San Lorenzo	Banfield
Estudiantes	San Martín SJ	@Tigre	River	Rosario Central	@Banfield	San Lorenzo	@Gimnasia y Esgrima	Vélez	@Atlético Tucumán	Defensa y Justicia	@Temperley	Independiente	Colón	@Talleres
Rosario Central	Banfield	@Talleres	San Martín SJ	@Estudiantes	@Colón	Vélez	@Newell's	Independiente	@Defensa y Justicia	River	@Tigre	Temperley	@Atlético Tucumán	San Lorenzo
Colón	Independiente	@Defensa y Justicia	Banfield	@Tigre	Rosario Central	@San Martín SJ	@Unión	Atlético Tucumán	@Temperley	San Lorenzo	@Talleres	River	@Estudiantes	Vélez
Talleres	@Vélez	Rosario Central	@San Lorenzo	Defensa y Justicia	@Independiente	Atlético Tucumán	@Belgrano	Temperley	@River	Tigre	Colón	@San Martín SJ	@Banfield	Estudiantes
San Martín SJ	@Estudiantes	Vélez	@Rosario Central	Independiente	@Defensa y Justicia	Colón	@Godoy Cruz	San Lorenzo	@Tigre	Banfield	@Atlético Tucumán	Talleres	@Temperley	River
Atlético Tucumán	Defensa y Justicia	@River	Temperley	@Banfield	Tigre	@Talleres	Patronato	@Colón	Estudiantes	@Vélez	San Martín SJ	@San Lorenzo	Rosario Central	@Independiente
Temperley	River	@Banfield	@Atlético Tucumán	San Lorenzo	@Vélez	Defensa y Justicia	Olimpo	@Talleres	Colón	@Independiente	Estudiantes	@Rosario Central	San Martín SJ	@Tigre

ZONA B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Boca	@Argentinos Jrs.	Gimnasia y Esgrima	Chacarita	@Patronato	Belgrano	@Newell's	River	@Arsenal	Lanús	@Olimpo	Racing	@Unión	@Huracán	Godoy Cruz
Huracán	Newell's	@Belgrano	Patronato	Racing	@Unión	Godoy Cruz	@San Lorenzo	Gimnasia y Esgrima	@Argentinos Jrs.	@Chacarita	Lanús	@Arsenal	Boca	@Olimpo
Argentinos Jrs.	Boca	@Chacarita	Newell's	@Lanús	Patronato	@Olimpo	@Vélez	Godoy Cruz	Huracán	@Gimnasia y Esgrima	Arsenal	@Belgrano	Racing	@Unión
Chacarita	@Unión	Argentinos Jrs.	@Boca	@Belgrano	Lanús	@Patronato	Tigre	@Racing	Olimpo	Huracán	@Newell's	Godoy Cruz	@Arsenal	Gimnasia y Esgrima
Racing	@Godoy Cruz	Unión	Arsenal	@Huracán	Olimpo	@Lanús	@Independiente	Chacarita	@Belgrano	Patronato	@Boca	Gimnasia y Esgrima	@Argentinos Jrs.	Newell's
Lanús	Belgrano	@Olimpo	@Gimnasia y Esgrima	Argentinos Jrs.	@Chacarita	Racing	@Banfield	Unión	@Boca	Newell's	@Huracán	Patronato	@Godoy Cruz	Arsenal
Arsenal	Olimpo	@Newell's	@Racing	Gimnasia y Esgrima	@Godoy Cruz	Unión	@Defensa y Justicia	Boca	@Patronato	Belgrano	@Argentinos Jrs.	Huracán	Chacarita	@Lanús
Gimnasia y Esgrima	Patronato	@Boca	Lanús	@Arsenal	Newell's	@Belgrano	Estudiantes	@Huracán	@Godoy Cruz	Argentinos Jrs.	Olimpo	@Racing	Unión	@Chacarita
Newell's	@Huracán	Arsenal	@Argentinos Jrs.	Godoy Cruz	@Gimnasia y Esgrima	Boca	Rosario Central	@Patronato	Unión	@Lanús	Chacarita	@Olimpo	Belgrano	@Racing
Unión	Chacarita	@Racing	Belgrano	@Olimpo	Huracán	@Arsenal	Colón	@Lanús	@Newell's	Godoy Cruz	@Patronato	Boca	@Gimnasia y Esgrima	Argentinos Jrs.
Belgrano	@Lanús	Huracán	@Unión	Chacarita	@Boca	Gimnasia y Esgrima	Talleres	@Olimpo	Racing	@Arsenal	@Godoy Cruz	Argentinos Jrs.	@Newell's	Patronato
Godoy Cruz	Racing	@Patronato	Olimpo	@Newell's	Arsenal	@Huracán	San Martín SJ	@Argentinos Jrs.	Gimnasia y Esgrima	@Unión	Belgrano	@Chacarita	Lanús	@Boca
Patronato	@Gimnasia y Esgrima	Godoy Cruz	@Huracán	Boca	@Argentinos Jrs.	Chacarita	@Atlético Tucumán	Newell's	Arsenal	@Racing	Unión	@Lanús	Olimpo	@Belgrano
Olimpo	@Arsenal	Lanús	@Godoy Cruz	Unión	@Racing	Argentinos Jrs.	@Temperley	Belgrano	@Chacarita	Boca	@Gimnasia y Esgrima	Newell's	@Patronato	Huracán

Zona A

Equipos	Mayores	Menores	Diferencia
River	4119,8	4137	0,42 %
San Lorenzo	4119,6	4123,4	0,09 %
Vélez	4116,2	4111,8	0,11 %
Tigre	4171,4	4240,2	1,65 %
Independiente	4136,4	4145,8	0,23 %
Banfield	4176,4	4196,8	0,49 %
Defensa y Justicia	4325	4338,6	0,31 %
Estudiantes	4704,8	4707,8	0,06 %
Rosario Central	5102,4	5684	11,40 %
Colón	6625,2	6622	0,05 %
Talleres	8280,2	8518	2,87 %
San Martín SJ	13378	14726	10,08 %
Atlético Tucumán	15242	15398	1,02 %
Temperley	4829,4	4846,8	0,36 %

- Cantidad de breaks = 20.
- Suma de diferencias (ida y vuelta) = 2484,6 km.
- Máxima diferencia absoluta (ida y vuelta) = 1348 km. (San Martín SJ)

Zona B

Equipos	Mayores	Menores	Diferencia
Boca	3877,2	3869,2	0,21 %
Huracán	3764	3902,8	3,69 %
Argentinos Jrs.	3810,2	3798,4	0,31 %
Chacarita	3950,8	3827,4	3,22 %
Racing	3705	4015	8,37 %
Lanús	3708,4	4031,6	8,72 %
Arsenal	3950,8	3927	0,61 %
Gimnasia y Esgrima	4427	4308,8	2,74 %
Newell's	5080	4834,4	5,08 %
Unión	6193	6273,2	1,30 %
Belgrano	9080	7896,2	14,99 %
Godoy Cruz	14262	12886	10,68 %
Patronato	7120	7115	0,07 %
Olimpo	10642	10416	2,17 %

- Cantidad de breaks = 20.
- Suma de diferencias (ida y vuelta) = 4173,8 km.
- Máxima diferencia absoluta (ida y vuelta) = 1376 km. (Godoy Cruz)

4.1.3. Matriz de distancias, modelo 2: minimizar la máxima diferencia

ZONA A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
River	Temperley	@Independiente	Vélez	Rosario Central	@Talleres	Atlético Tucumán	@Boca	@San Lorenzo	Colón	@San Martín SJ	Defensa y Justicia	@Estudiantes	Banfield	@Tigre
San Lorenzo	Banfield	@Estudiantes	San Martín SJ	@Temperley	Independiente	@Defensa y Justicia	Huracán	River	@Atlético Tucumán	Talleres	@Vélez	@Tigre	Rosario Central	@Colón
Vélez	@Talleres	Defensa y Justicia	@River	Colón	@Banfield	Rosario Central	@Argentinos Jrs.	Tigre	@Temperley	Atlético Tucumán	San Lorenzo	@San Martín SJ	Estudiantes	@Independiente
Tigre	@Atlético Tucumán	Colón	@Banfield	@Estudiantes	San Martín SJ	@Temperley	Chacarita	@Vélez	Independiente	@Defensa y Justicia	Rosario Central	San Lorenzo	@Talleres	River
Independiente	@Rosario Central	River	@Colón	Atlético Tucumán	@San Lorenzo	Banfield	Racing	@San Martín SJ	@Tigre	Estudiantes	@Temperley	Talleres	@Defensa y Justicia	Vélez
Banfield	@San Lorenzo	Talleres	Tigre	@San Martín SJ	Vélez	@Independiente	Lanús	@Temperley	Defensa y Justicia	@Rosario Central	Estudiantes	@Colón	@River	Atlético Tucumán
Defensa y Justicia	San Martín SJ	@Vélez	@Atlético Tucumán	Talleres	@Colón	San Lorenzo	@Arsenal	Estudiantes	@Banfield	Tigre	@River	Temperley	Independiente	@Rosario Central
Estudiantes	@Colón	San Lorenzo	@Rosario Central	Tigre	@Atlético Tucumán	Talleres	Gimnasia y Esgrima	@Defensa y Justicia	San Martín SJ	@Independiente	@Banfield	River	@Vélez	Temperley
Rosario Central	Independiente	@San Martín SJ	Estudiantes	@River	Temperley	@Vélez	Newell's	@Colón	@Talleres	Banfield	@Tigre	Atlético Tucumán	@San Lorenzo	Defensa y Justicia
Colón	Estudiantes	@Tigre	Independiente	@Vélez	Defensa y Justicia	@San Martín SJ	@Unión	Rosario Central	@River	Temperley	@Talleres	Banfield	@Atlético Tucumán	San Lorenzo
Talleres	Vélez	@Banfield	Temperley	@Defensa y Justicia	River	@Estudiantes	@Belgrano	Atlético Tucumán	@Rosario Central	@San Lorenzo	Colón	@Independiente	Tigre	@San Martín SJ
San Martín SJ	@Defensa y Justicia	Rosario Central	@San Lorenzo	Banfield	@Tigre	Colón	@Godoy Cruz	Independiente	@Estudiantes	River	@Atlético Tucumán	Vélez	@Temperley	Talleres
Atlético Tucumán	Tigre	@Temperley	Defensa y Justicia	@Independiente	Estudiantes	@River	Patronato	@Talleres	San Lorenzo	@Vélez	San Martín SJ	@Rosario Central	Colón	@Banfield
Temperley	@River	Atlético Tucumán	@Talleres	San Lorenzo	@Rosario Central	Tigre	@Olimpo	Banfield	Vélez	@Colón	Independiente	@Defensa y Justicia	San Martín SJ	@Estudiantes

ZONA B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Boca	@Olimpo	Godoy Cruz	Argentinos Jrs.	@Lanús	Arsenal	@Gimnasia y Esgrima	River	@Patronato	Newell's	@Unión	Huracán	@Racing	@Chacarita	Belgrano
Huracán	@Belgrano	Newell's	@Olimpo	@Arsenal	Gimnasia y Esgrima	Unión	@San Lorenzo	Godoy Cruz	@Argentinos Jrs.	Lanús	@Boca	Chacarita	@Patronato	Racing
Argentinos Jrs.	@Newell's	Chacarita	@Boca	Unión	@Belgrano	@Racing	Vélez	@Lanús	Huracán	@Arsenal	Gimnasia y Esgrima	Olimpo	@Godoy Cruz	Patronato
Chacarita	Gimnasia y Esgrima	@Argentinos Jrs.	Patronato	@Olimpo	Lanús	Godoy Cruz	@Tigre	@Belgrano	Arsenal	@Racing	Newell's	@Huracán	Boca	@Unión
Racing	Patronato	@Arsenal	@Newell's	Belgrano	@Unión	Argentinos Jrs.	@Independiente	Olimpo	@Godoy Cruz	Chacarita	@Lanús	Boca	Gimnasia y Esgrima	@Huracán
Lanús	@Godoy Cruz	Belgrano	@Unión	Boca	@Chacarita	Olimpo	@Banfield	Argentinos Jrs.	Patronato	@Huracán	Racing	@Gimnasia y Esgrima	Arsenal	@Newell's
Arsenal	@Unión	Racing	@Belgrano	Huracán	@Boca	Newell's	Defensa y Justicia	@Gimnasia y Esgrima	@Chacarita	Argentinos Jrs.	@Olimpo	Patronato	@Lanús	Godoy Cruz
Gimnasia y Esgrima	@Chacarita	Unión	@Godoy Cruz	Newell's	@Huracán	Boca	@Estudiantes	Arsenal	Belgrano	@Patronato	@Argentinos Jrs.	Lanús	@Racing	Olimpo
Newell's	Argentinos Jrs.	@Huracán	Racing	@Gimnasia y Esgrima	Patronato	@Arsenal	@Rosario Central	Unión	@Boca	Godoy Cruz	@Chacarita	Belgrano	@Olimpo	Lanús
Unión	Arsenal	@Gimnasia y Esgrima	Lanús	@Argentinos Jrs.	Racing	@Huracán	Colón	@Newell's	@Olimpo	Boca	@Patronato	Godoy Cruz	@Belgrano	Chacarita
Belgrano	Huracán	@Lanús	Arsenal	@Racing	Argentinos Jrs.	@Patronato	Talleres	@Gimnasia y Esgrima	@Chacarita	Olimpo	@Godoy Cruz	@Newell's	Unión	@Boca
Godoy Cruz	Lanús	@Boca	Gimnasia y Esgrima	@Patronato	Olimpo	@Chacarita	San Martín SJ	@Huracán	@Newell's	@Newell's	Belgrano	@Unión	Argentinos Jrs.	@Arsenal
Patronato	@Racing	Olimpo	@Chacarita	Godoy Cruz	@Newell's	Belgrano	@Atlético Tucumán	Boca	@Lanús	Gimnasia y Esgrima	Unión	@Arsenal	Huracán	@Argentinos Jrs.
Olimpo	Boca	@Patronato	Huracán	Chacarita	@Godoy Cruz	@Lanús	Temperley	@Racing	Unión	@Belgrano	Arsenal	@Argentinos Jrs.	Newell's	@Gimnasia y Esgrima

Zona A

Equipos	Mayores	Menores	Diferencia
River	4013,4	4243,4	5,73 %
San Lorenzo	3780,2	4462,8	18,06 %
Vélez	3881,2	4346,8	12,00 %
Tigre	4393	4018,6	9,32 %
Independiente	4123,6	4158,6	0,85 %
Banfield	4080,2	4293	5,22 %
Defensa y Justicia	4492,8	4170,8	7,72 %
Estudiantes	4853,8	4558,8	6,47 %
Rosario Central	5478	5308,4	3,20 %
Colón	6993,2	6254	11,82 %
Talleres	8484,2	8314	2,05 %
San Martín SJ	13794	14310	3,74 %
Atlético Tucumán	15648	14992	4,38 %
Temperley	4571,8	5104,4	11,65 %

- Cantidad de breaks = 20.
- Suma de diferencias (ida y vuelta) = 5401 km.
- Máxima diferencia absoluta (ida y vuelta) = 739,2 km. (Colón)

Zona B

Equipos	Mayores	Menores	Diferencia
Boca	3415,2	4331,2	26,82 %
Huracán	3705,2	3961,6	6,92 %
Argentinos Jrs.	4295,6	3313	29,66 %
Chacarita	3748,2	4030	7,52 %
Racing	3841,6	3878,4	0,96 %
Lanús	4007	3733	7,34 %
Arsenal	3923	3954,8	0,81 %
Gimnasia y Esgrima	3886,6	4849,2	24,77 %
Newell's	4746,4	5168	8,88 %
Unión	5869	6597,2	12,41 %
Belgrano	8758	8218,2	6,57 %
Godoy Cruz	14298	12850	11,27 %
Patronato	6634	7601	14,58 %
Olimpo	11182	9876	13,22 %

- Cantidad de breaks = 22.
- Suma de diferencias (ida y vuelta) = 9152,6 km.
- Máxima diferencia absoluta (ida y vuelta) = 1448 km. (Godoy Cruz)

Ni el fixture resultante de la zona A ni el de la B del modelo de los clusters es la solución óptima; los que se presentan son aquellos que mostraron el menor número de breaks hacia el final de la corrida. Además, recordemos que en este caso es donde no se pudo pedir patrón perfecto para Godoy Cruz. Incluso se presentó una cuestión más: el fixture resultante de la zona A obligaba a Olimpo a jugar de visitante su interzonal y por lo tanto tampoco pudimos pedirle patrón perfecto. Sin embargo, a ambos equipos se les contempló jugar un partido cerca cuando tengan un break. Los patrones perfectos en la zona B resultaron para Patronato y para Unión.

Como podemos ver, los porcentajes de diferencias entre una división y otra no son tan bajos, especialmente para los equipos de la zona A. El mayor de ellos es para Defensa y Justicia (59,45 %), lo que nos dice que, para este equipo, las mayores viajan un poco más de la mitad que lo que viajan las menores. En el caso de la zona B, el mayor porcentaje obtenido es para Patronato (28,09 %), donde fue a las menores a quienes les tocó viajar un poco más.

Es importante destacar que, a los efectos de emparejar los viajes entre divisiones, en este modelo no era necesario obtener optimalidad, si no que bastaba con conseguir una solución factible, ya que todas las condiciones sobre diferencia de distancia recorrida estaban abarcadas bajo las restricciones (balanceando localías por clusters) y no bajo la función objetivo.

En el caso del modelo 1 de la matriz de distancias (aquel que minimiza la suma sobre todos los equipos de las diferencias de kilometraje entre divisiones), el resultado se ve mucho mejor, y de hecho para la zona A es el fixture óptimo (demoró unas 27 horas en hallarse, mientras que para la B la solución óptima no pudo ser encontrada y la presentada se consiguió luego de 10 horas). Afortunadamente, ambos patrones perfectos pudieron ser requeridos como se deseaba para la zona B.

El porcentaje máximo de diferencias se ve para Rosario Central (11,40 %) en la zona A, y para Belgrano (14,99 %) en la zona B. Cabe destacar que este porcentaje no necesariamente coincide con la mayor diferencia de kilómetros recorridos, ya que debe considerarse sobre el viaje total de cada equipo. Es decir, es lógico que la mayor diferencia se de para los equipos más alejados, como resultó suceder para San Martín SJ y para Godoy Cruz, pero porcentualmente esto no representa una gran discrepancia entre las divisiones, dado la cantidad total de kilómetros que deben recorrer.

Además, la suma de los kilómetros de diferencia entre divisiones es menor a 2500km. en la zona A y menor a 4200km. en la zona B, valores muy buenos teniendo en cuenta la distribución de los equipos en nuestro país y la superficie del mismo.

Los breaks de los fixtures de ambas zonas son 20, un número razonable teniendo en cuenta que el mínimo es 12 y el máximo 28 (dos por cada equipo).

Para el modelo 2 de la matriz (el que minimiza la máxima diferencia), el resultado conseguido es también muy positivo. Podría considerarse como un intermedio entre el modelo anterior y el de los clusters si miramos los porcentajes de diferencias. El mayor de estos se da para San Lorenzo en la zona A y para Argentinos Jrs. en la zona B, siendo el mayor de ellos menor que 30 %. Nuevamente, el fixture para la zona A fue la solución óptima (alcanzada luego de casi 18 horas de corrida), pero no así para la B. Como en el caso del primer modelo analizado, Olimpo tampoco pudo tener 0 breaks.

La suma de kilómetros en diferencia entre divisiones aumenta respecto del modelo anterior, siendo menor a 5500km en la zona A y menor a 9200km. en la zona B.

Los breaks para estas zonas fueron de 20 y 22, respectivamente.

Es lógico que los resultados conseguidos por estos últimos dos modelos sean mejores que en el de los clusters, ya que al restringir las condiciones de distancia a la función objetivo, buscar el óptimo es mejorar la solución actual (en términos de emparejamiento de kilometraje) cada vez más, mientras que en el modelo de los clusters, la primer solución arrojada y la óptima podrían presentar porcentajes de diferencias esencialmente iguales. Sin embargo, en éste último modelo mencionado, los tiempos son bastante buenos: a pesar de haber dejado correr ambas zonas 36 horas, las soluciones presentadas (y las mejores en términos de breaks) se consiguieron a las 6 y a las 3 horas de comenzar, respectivamente.

Si tuviéramos que elegir un fixture para ambas zonas, considero que en este caso sería el arrojado por el modelo 1 que utiliza la matriz de distancias, ya que se puede ver una amplia reducción en las diferencias de kilómetros recorridos por las divisiones de cada equipo. De hecho, la gran mayoría de todos estos porcentajes son por debajo del 5 %. Además, la cantidad de breaks obtenida en ambas zonas (que en los modelos de la matriz no tuvimos intenciones de minimizar) es totalmente aceptable.

4.2. Torneo Agosto-Noviembre 2018

Como en el caso anterior, veamos los fixtures resultantes para cada zona de este torneo y la distancia (en kilómetros) que recorrerían las dos divisiones de cada equipo en cada uno de los tres modelos propuestos. Nuevamente, haremos un breve resumen de cada solución incluyendo los resultados de las tres funciones objetivo que estudiamos: cantidad de breaks, suma de diferencias de viajes entre mayores y menores y máxima de ellas.

4.2.1. Clusters

ZONA A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Boca	Defensa y Justicia	@Godoy Cruz	Huracán	@Belgrano	Argentinos Jrs.	@Gimnasia y Esgrima	River	Rosario Central	@Lanús	Colón	@Racing	S. M. Tucumán	@Aldosivi
Argentinos Jrs.	Aldosivi	@Racing	Godoy Cruz	@Colón	@Boca	Vélez	@S. M. Tucumán	Huracán	@Gimnasia y Esgrima	Lanús	Defensa y Justicia	@Rosario Central	Belgrano
Huracán	@Rosario Central	Belgrano	@Boca	Gimnasia y Esgrima	@S. M. Tucumán	Racing	@Colón	@Argentinos Jrs.	Aldosivi	@San Lorenzo	Godoy Cruz	@Defensa y Justicia	Lanús
Racing	@S. M. Tucumán	Argentinos Jrs.	@Gimnasia y Esgrima	Independiente	Colón	@Huracán	Aldosivi	@Belgrano	Defensa y Justicia	@Rosario Central	Boca	@Lanús	Godoy Cruz
Lanús	@Banfield	S. M. Tucumán	@Defensa y Justicia	Rosario Central	Gimnasia y Esgrima	@Aldosivi	Belgrano	@Godoy Cruz	Boca	@Argentinos Jrs.	@Colón	Racing	@Huracán
Defensa y Justicia	@Boca	Rosario Central	Lanús	@Godoy Cruz	Aldosivi	@Belgrano	Gimnasia y Esgrima	@Tigre	@Racing	S. M. Tucumán	@Argentinos Jrs.	Huracán	@Colón
Gimnasia y Esgrima	Colón	@Aldosivi	Racing	@Huracán	@Lanús	Boca	@Defensa y Justicia	S. M. Tucumán	Argentinos Jrs.	@Belgrano	Estudiantes	@Godoy Cruz	Rosario Central
Aldosivi	@Argentinos Jrs.	Gimnasia y Esgrima	@Rosario Central	S. M. Tucumán	@Defensa y Justicia	Lanús	@Racing	Colón	@Huracán	@Godoy Cruz	Belgrano	@Patronato	Boca
Rosario Central	Huracán	@Defensa y Justicia	Aldosivi	@Lanús	Belgrano	@Colón	Godoy Cruz	@Boca	Newell's	Racing	@S. M. Tucumán	Argentinos Jrs.	@Gimnasia y Esgrima
Colón	@Gimnasia y Esgrima	Unión	@S. M. Tucumán	Argentinos Jrs.	@Racing	Rosario Central	Huracán	@Aldosivi	Godoy Cruz	@Boca	Lanús	@Belgrano	Defensa y Justicia
Belgrano	Godoy Cruz	@Huracán	@Talleres	Boca	@Rosario Central	Defensa y Justicia	@Lanús	Racing	@S. M. Tucumán	Gimnasia y Esgrima	@Aldosivi	Colón	@Argentinos Jrs.
Godoy Cruz	@Belgrano	Boca	@Argentinos Jrs.	Defensa y Justicia	@San Martín SJ	S. M. Tucumán	@Rosario Central	Lanús	@Colón	Aldosivi	@Huracán	Gimnasia y Esgrima	@Racing
S. M. Tucumán	Racing	@Lanús	Colón	@Aldosivi	Huracán	@Godoy Cruz	Argentinos Jrs.	@Gimnasia y Esgrima	Belgrano	@Defensa y Justicia	Rosario Central	@Boca	Atlético Tucumán

ZONA B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
River	@Tigre	Vélez	@San Martín SJ	San Lorenzo	@Unión	Talleres	@Boca	@Newell's	Atlético Tucumán	@Estudiantes	Independiente	@Banfield	Patronato
Vélez	Estudiantes	@River	Tigre	@Atlético Tucumán	Newell's	@Argentinos Jrs.	Banfield	@Patronato	Unión	@Independiente	@Talleres	San Martín SJ	@San Lorenzo
San Lorenzo	Atlético Tucumán	@Estudiantes	Newell's	@River	Tigre	@Banfield	@San Martín SJ	Independiente	@Talleres	Huracán	Patronato	@Unión	Vélez
Independiente	@San Martín SJ	Patronato	@Unión	@Racing	Atlético Tucumán	@Estudiantes	Tigre	@San Lorenzo	Banfield	Vélez	@River	Talleres	@Newell's
Banfield	Lanús	@Atlético Tucumán	Estudiantes	Unión	@Patronato	San Lorenzo	@Vélez	San Martín SJ	@Independiente	Talleres	@Newell's	River	@Tigre
Tigre	River	@Newell's	@Vélez	Talleres	@San Lorenzo	San Martín SJ	@Independiente	Defensa y Justicia	Estudiantes	@Patronato	Unión	@Atlético Tucumán	Banfield
Estudiantes	@Vélez	San Lorenzo	@Banfield	Patronato	@Talleres	Independiente	Atlético Tucumán	@Unión	@Tigre	River	@Gimnasia y Esgrima	Newell's	@San Martín SJ
Patronato	Talleres	@Independiente	Atlético Tucumán	@Estudiantes	Banfield	@Newell's	Unión	Vélez	@San Martín SJ	Tigre	@San Lorenzo	Aldosivi	@River
Newell's	@Unión	Tigre	@San Lorenzo	San Martín SJ	@Vélez	Patronato	@Talleres	River	@Rosario Central	@Atlético Tucumán	Banfield	@Estudiantes	Independiente
Unión	Newell's	@Colón	Independiente	@Banfield	River	@Atlético Tucumán	@Patronato	Estudiantes	@Vélez	San Martín SJ	@Tigre	San Lorenzo	@Talleres
Talleres	@Patronato	San Martín SJ	Belgrano	@Tigre	Estudiantes	@River	Newell's	@Atlético Tucumán	San Lorenzo	@Banfield	Vélez	@Independiente	Unión
San Martín SJ	Independiente	@Talleres	River	@Newell's	Godoy Cruz	@Tigre	San Lorenzo	@Banfield	Patronato	@Unión	Atlético Tucumán	@Vélez	Estudiantes
Atlético Tucumán	@San Lorenzo	Banfield	@Patronato	Vélez	@Independiente	Unión	@Estudiantes	Talleres	@River	Newell's	@San Martín SJ	Tigre	@S. M. Tucumán

Zona A

Equipos	Mayores	Menores	Diferencia
Boca	4602,8	4230,4	8,80 %
Argentinos Jrs.	4232,4	4572,4	8,03 %
Huracán	4212	4606,8	9,37 %
Racing	4715,6	4104,2	14,90 %
Lanús	4102,6	4756,2	15,93 %
Defensa y Justicia	5016,4	4176,2	20,12 %
Gimnasia y Esgrima	4867,8	4787	1,69 %
Aldosivi	9140	9662	5,71 %
Rosario Central	4860	5948,4	22,40 %
Colón	7018	6029,2	16,40 %
Belgrano	8414,2	7912	6,35 %
Godoy Cruz	11948	13568	13,56 %
S. M. de Tucumán	15392	12003,2	28,23 %

- Cantidad de breaks = 15.
- Suma de diferencias (ida y vuelta) = 11403,4 km.
- Máxima diferencia absoluta (ida y vuelta) = 3388,8 km. (S. M. de Tucumán)

Zona B

Equipos	Mayores	Menores	Diferencia
River	4084,2	4890,2	19,73 %
Vélez	4923,2	4042	21,80 %
San Lorenzo	4885,8	4148,8	17,76 %
Independiente	4094,6	5013,2	22,43 %
Banfield	4279,6	4969,6	16,12 %
Tigre	4108,4	5015,6	22,08 %
Estudiantes	5471,6	4738,4	15,47 %
Patronato	6202	6929	11,72 %
Newell's	4992,4	4690	6,45 %
Unión	5112,2	6162	20,54 %
Talleres	7564	7092,2	6,65 %
San Martín SJ	11948	13460	12,65 %
Atlético Tucumán	13423,2	12104	10,90 %

- Cantidad de breaks = 15.
- Suma de diferencias (ida y vuelta) = 11055,4 km.
- Máxima diferencia absoluta (ida y vuelta) = 1512 km. (San Martín SJ)

4.2.2. Matriz de distancias, modelo 1: minimizar la suma de diferencias

ZONA A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Boca	Argentinos Jrs.	@Huracán	Lanús	@Belgrano	Godoy Cruz	@Gimnasia y Esgrima	Colón	River	@Defensa y Justicia	Racing	@S. M. Tucumán	Aldosivi	@Rosario Central
Argentinos Jrs.	@Boca	Belgrano	@S. M. Tucumán	Huracán	@Rosario Central	Defensa y Justicia	Lanús	@Gimnasia y Esgrima	Godoy Cruz	@Aldosivi	@Vélez	Colón	@Racing
Huracán	@S. M. Tucumán	Boca	Defensa y Justicia	@Argentinos Jrs.	Gimnasia y Esgrima	@Racing	Godoy Cruz	@S. M. Tucumán	Belgrano	@San Lorenzo	@Lanús	Rosario Central	@Aldosivi
Racing	Rosario Central	@Defensa y Justicia	Gimnasia y Esgrima	@Colón	Independiente	Huracán	@S. M. Tucumán	@Lanús	Aldosivi	@Boca	Godoy Cruz	@Belgrano	Argentinos Jrs.
Lanús	@Belgrano	Colón	@Boca	Aldosivi	@Defensa y Justicia	Rosario Central	@Argentinos Jrs.	Racing	@S. M. Tucumán	@Gimnasia y Esgrima	Huracán	@Banfield	Godoy Cruz
Defensa y Justicia	@Aldosivi	Racing	@Huracán	@Tigre	Lanús	@Argentinos Jrs.	Belgrano	@Godoy Cruz	Boca	Rosario Central	Colón	S. M. Tucumán	@Gimnasia y Esgrima
Gimnasia y Esgrima	@Colón	Estudiantes	@Racing	S. M. Tucumán	@Huracán	Boca	@Aldosivi	Argentinos Jrs.	@Rosario Central	Lanús	Belgrano	@Godoy Cruz	Defensa y Justicia
Aldosivi	Defensa y Justicia	@Godoy Cruz	Patronato	@Lanús	Belgrano	@Colón	Newell's	S. M. Tucumán	@Racing	Argentinos Jrs.	@Rosario Central	@Boca	Huracán
Rosario Central	@Racing	S. M. Tucumán	Colón	@Godoy Cruz	Argentinos Jrs.	@Lanús	@Boca	@Belgrano	Gimnasia y Esgrima	@Defensa y Justicia	Aldosivi	@Huracán	Boca
Colón	Gimnasia y Esgrima	@Lanús	@Rosario Central	Racing	@S. M. Tucumán	Aldosivi	@Defensa y Justicia	Rosario Central	@Huracán	@Godoy Cruz	Defensa y Justicia	@Argentinos Jrs.	Belgrano
Belgrano	Lanús	@Argentinos Jrs.	Godoy Cruz	Boca	@Aldosivi	Talleres	@Huracán	@Rosario Central	S. M. Tucumán	Colón	@Gimnasia y Esgrima	Racing	@Colón
Godoy Cruz	@San Martín SJ	Aldosivi	@Belgrano	Rosario Central	@Boca	S. M. Tucumán	@Huracán	Defensa y Justicia	@Argentinos Jrs.	Colón	@Racing	Gimnasia y Esgrima	@Lanús
S. M. Tucumán	Huracán	@Rosario Central	Argentinos Jrs.	@Gimnasia y Esgrima	Colón	@Godoy Cruz	Racing	@Aldosivi	Lanús	@Belgrano	Boca	@Defensa y Justicia	Atlético Tucumán

ZONA B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
River	@Estudiantes	Tigre	@Unión	Newell's	@San Martín SJ	Banfield	Atlético Tucumán	@Boca	@Independiente	Patronato	@San Lorenzo	Talleres	@Vélez
Vélez	@Tigre	San Martín SJ	@San Lorenzo	Banfield	Talleres	@Patronato	Independiente	@Atlético Tucumán	Newell's	@Estudiantes	Argentinos Jrs.	@Unión	River
San Lorenzo	Patronato	@Atlético Tucumán	Vélez	@Talleres	Tigre	@Independiente	@Unión	San Martín SJ	@Banfield	Huracán	River	@Newell's	Estudiantes
Independiente	@Unión	Newell's	@Banfield	Estudiantes	@Racing	Patronato	@Vélez	Talleres	River	@Atlético Tucumán	@Tigre	San Martín SJ	@Patronato
Banfield	Atlético Tucumán	@Talleres	Independiente	@Vélez	Patronato	@River	Estudiantes	Talleres	San Lorenzo	@Newell's	Unión	Lanús	@San Martín SJ
Tigre	Vélez	@River	@Estudiantes	Defensa y Justicia	Atlético Tucumán	@Independiente	@Banfield	@Tigre	San Lorenzo	Talleres	Independiente	@Atlético Tucumán	Newell's
Estudiantes	River	@Gimnasia y Esgrima	Unión	@Independiente	Atlético Tucumán	Vélez	@Talleres	@Newell's	@Patronato	Vélez	@Talleres	Patronato	@San Lorenzo
Patronato	@San Lorenzo	Unión	@Aldosivi	San Martín SJ	@Banfield	Vélez	@Talleres	@Newell's	Tigre	@River	Atlético Tucumán	@Estudiantes	Independiente
Newell's	Talleres	@Independiente	Atlético Tucumán	@River	@Unión	Estudiantes	@Rosario Central	Patronato	@Vélez	Banfield	@San Martín SJ	San Lorenzo	@Tigre
Unión	Independiente	@Patronato	River	@Atlético Tucumán	Newell's	@Tigre	San Lorenzo	@Colón	@Vélez	Banfield	@Banfield	Vélez	@Talleres
Talleres	@Newell's	Banfield	@San Martín SJ	San Lorenzo	@Vélez	@Belgrano	Patronato	@Independiente	Atlético Tucumán	@Tigre	Estudiantes	@River	Unión
San Martín SJ	Godoy Cruz	@Vélez	Talleres	@Patronato	River	@Atlético Tucumán	Tigre	@San Lorenzo	Estudiantes	@Unión	Newell's	@Independiente	Banfield
Atlético Tucumán	@Banfield	San Lorenzo	@Newell's	Unión	@Estudiantes	San Martín SJ	@River	Vélez	@Talleres	Independiente	@Patronato	Tigre	@S. M. Tucumán

Zona A

Equipos	Mayores	Menores	Diferencia
Boca	4747,2	4086	16,18 %
Argentinos Jrs.	4165,6	4639,2	11,37 %
Huracán	4372,8	4446	1,67 %
Racing	4965,6	3854,2	28,84 %
Lanús	4167	4691,8	12,59 %
Defensa y Justicia	4374	4818,6	10,16 %
Gimnasia y Esgrima	5074,6	4580,2	10,79 %
Aldosivi	8352	10450	25,12 %
Rosario Central	5212	5596,4	7,38 %
Colón	6580	6467,2	1,74 %
Belgrano	8716	7610,2	14,53 %
Godoy Cruz	12760	12756	0,03 %
S. M. de Tucumán	13290	14105,2	6,13 %

- Cantidad de breaks = 17.
- Suma de diferencias (ida y vuelta) = 8303,4 km.
- Máxima diferencia absoluta (ida y vuelta) = 2098 km. (Aldosivi)

Zona B

Equipos	Mayores	Menores	Diferencia
River	3525,2	5449,2	54,58 %
Vélez	4546,8	4418,4	2,91 %
San Lorenzo	5533,6	3501	58,06 %
Independiente	4553,2	4554,6	0,03 %
Banfield	4600	4649,2	1,07 %
Tigre	5948,2	3175,8	87,30 %
Estudiantes	5061,2	5148,8	1,73 %
Patronato	6732	6399	5,20 %
Newell's	4586,4	5096	11,11 %
Unión	5236,2	6038	15,31 %
Talleres	7612,2	7044	8,07 %
San Martín SJ	12580	12828	1,97 %
Atlético Tucumán	12319,2	13208	7,21 %

- Cantidad de breaks = 15.
- Suma de diferencias (ida y vuelta) = 10345 km.
- Máxima diferencia absoluta (ida y vuelta) = 2772,4 km. (Tigre)

4.2.3. Matriz de distancias, modelo 2: minimizar la máxima diferencia

ZONA A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Boca	@Gimnasia y Esgrima	S. M. Tucumán	@Racing	@Aldosivi	Colón	@Godoy Cruz	Rosario Central	@River	Huracán	Defensa y Justicia	@Lanús	Argentinos Jrs.	@Belgrano
Argentinos Jrs.	Rosario Central	@Aldosivi	@Gimnasia y Esgrima	Racing	@S. M. Tucumán	Defensa y Justicia	Belgrano	@Lanús	Vélez	@Colón	Godoy Cruz	@Boca	Huracán
Huracán	@Belgrano	Colón	Defensa y Justicia	@Godoy Cruz	@Argentino Jrs.	Racing	@San Lorenzo	Aldosivi	@Boca	S. M. Tucumán	@Rosario Central	Lanús	@Argentinos Jrs.
Racing	Lanús	@Defensa y Justicia	Boca	@Argentino Jrs.	@Rosario Central	@Huracán	Colón	@Belgrano	Godoy Cruz	@Independiente	@S. M. Tucumán	Aldosivi	@Gimnasia y Esgrima
Lanús	@Racing	Banfield	@Colón	Belgrano	@Defensa y Justicia	Gimnasia y Esgrima	@S. M. Tucumán	@Godoy Cruz	@Rosario Central	Aldosivi	Boca	@Huracán	Godoy Cruz
Defensa y Justicia	@Tigre	Racing	@Huracán	S. M. Tucumán	Lanús	@Argentino Jrs.	Gimnasia y Esgrima	@Godoy Cruz	Colón	@Boca	@Aldosivi	Belgrano	@Rosario Central
Gimnasia y Esgrima	Boca	@Godoy Cruz	Argentinos Jrs.	@Rosario Central	Huracán	@Lanús	@Defensa y Justicia	S. M. Tucumán	@Aldosivi	Belgrano	Estudiantes	@Colón	Racing
Aldosivi	@S. M. Tucumán	Argentinos Jrs.	@Belgrano	Boca	Patronato	@Rosario Central	Godoy Cruz	@Huracán	Gimnasia y Esgrima	@Lanús	Defensa y Justicia	@Racing	Colón
Rosario Central	@Argentinos Jrs.	Belgrano	@S. M. Tucumán	Gimnasia y Esgrima	@Racing	Aldosivi	@Boca	@Colón	Lanús	@Godoy Cruz	Huracán	@Newells	Defensa y Justicia
Colón	Godoy Cruz	@Huracán	Lanús	@Unión	@Boca	S. M. Tucumán	@Racing	Rosario Central	@Defensa y Justicia	Argentinos Jrs.	@Belgrano	Gimnasia y Esgrima	@Aldosivi
Belgrano	Huracán	@Rosario Central	Aldosivi	@Lanús	Godoy Cruz	Talleres	@Argentinos Jrs.	Racing	@S. M. Tucumán	@Gimnasia y Esgrima	Colón	@Defensa y Justicia	Boca
Godoy Cruz	@Colón	Gimnasia y Esgrima	@San Martín SJ	Huracán	@Belgrano	Boca	@Aldosivi	Defensa y Justicia	@Racing	Rosario Central	@Argentinos Jrs.	S. M. Tucumán	@Lanús
S.M. Tucumán	Aldosivi	@Boca	Rosario Central	@Defensa y Justicia	Argentinos Jrs.	@Colón	Lanús	@Gimnasia y Esgrima	Belgrano	@Huracán	Racing	@Godoy Cruz	Atlético Tucumán

ZONA B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
River	@Banfield	Vélez	@Tigre	San Lorenzo	@Estudiantes	San Martín SJ	@Unión	Boca	@Patronato	Talleres	Independiente	@Atlético Tucumán	Newell's
Vélez	Estudiantes	@River	Atlético Tucumán	@Independiente	@Newell's	San Lorenzo	@San Martín SJ	Unión	@Argentinos Jrs.	Banfield	@Talleres	Patronato	@Tigre
San Lorenzo	Patronato	@Talleres	Estudiantes	@River	Tigre	@Vélez	Huracán	@Independiente	Atlético Tucumán	@Newell's	Banfield	Unión	@San Martín SJ
Independiente	Atlético Tucumán	@Unión	Patronato	Vélez	@Banfield	Newell's	@Estudiantes	San Lorenzo	@San Martín SJ	Racing	@River	Tigre	@Talleres
Banfield	River	@Lanús	Talleres	@Patronato	Independiente	@Atlético Tucumán	Tigre	@Estudiantes	Newell's	@Vélez	@San Lorenzo	San Martín SJ	@Unión
Tigre	Defensa y Justicia	@Atlético Tucumán	River	Newell's	@San Lorenzo	Estudiantes	@Banfield	San Martín SJ	@Talleres	Patronato	@Unión	@Independiente	Vélez
Estudiantes	@Vélez	Newell's	@San Lorenzo	@Atlético Tucumán	River	@Tigre	Independiente	Banfield	@Unión	San Martín SJ	@Gimnasia y Esgrima	Talleres	@Patronato
Patronato	@San Lorenzo	San Martín SJ	@Independiente	Banfield	@Aldosivi	Unión	@Talleres	@Newell's	River	@Tigre	Atlético Tucumán	@Vélez	Estudiantes
Newell's	Talleres	@Estudiantes	Unión	@Tigre	Vélez	@Independiente	Atlético Tucumán	Patronato	@Banfield	San Lorenzo	@San Martín SJ	Rosario Central	@River
Unión	@San Martín SJ	Independiente	@Newell's	Colón	Talleres	@Patronato	River	@Vélez	Estudiantes	@Atlético Tucumán	Tigre	@San Lorenzo	Banfield
Talleres	@Newell's	San Lorenzo	@Banfield	San Martín SJ	@Unión	@Belgrano	Patronato	@Atlético Tucumán	Tigre	@River	Vélez	@Estudiantes	Independiente
San Martín SJ	Unión	@Patronato	Godoy Cruz	@Talleres	Atlético Tucumán	@River	Vélez	@Tigre	Independiente	@Estudiantes	Newell's	@Banfield	San Lorenzo
Atlético Tucumán	@Independiente	Tigre	@Vélez	Estudiantes	@San Martín SJ	Banfield	@Newell's	Talleres	@San Lorenzo	Unión	@Patronato	River	@S. M. Tucumán

Zona A

Equipos	Mayores	Menores	Diferencia
Boca	4634,8	4198,4	10,39 %
Argentinos Jrs.	4464	4340,8	2,84 %
Huracán	4410,4	4408,4	0,05 %
Racing	4134,6	4685,2	13,32 %
Lanús	4221,2	4637,6	9,86 %
Defensa y Justicia	4037,8	5154,8	27,66 %
Gimnasia y Esgrima	5021,6	4633,2	8,38 %
Aldosivi	9432	9370	0,66 %
Rosario Central	5842,4	4966	17,65 %
Colón	6379,2	6668	4,53 %
Belgrano	7724	8602,2	11,37 %
Godoy Cruz	12856	12660	1,55 %
S. M. de Tucumán	13648	13747,2	0,73 %

- Cantidad de breaks = 17.
- Suma de diferencias (ida y vuelta) = 5434,6 km.
- Máxima diferencia absoluta (ida y vuelta) = 1117 km. (Defensa y Justicia)

Zona B

Equipos	Mayores	Menores	Diferencia
River	4528,2	4446,2	1,84 %
Vélez	4428,6	4536,6	2,44 %
San Lorenzo	4407,2	4627,4	5,00 %
Independiente	4895,4	4212,4	16,21 %
Banfield	4670,6	4578,6	2,01 %
Tigre	4981,6	4142,4	20,26 %
Estudiantes	5169	5041	2,54 %
Patronato	6570	6561	0,14 %
Newell's	4988	4694,4	6,25 %
Unión	5759	5515,2	4,42 %
Talleres	7064,2	7592	7,47 %
San Martín SJ	12608	12800	1,52 %
Atlético Tucumán	12735,2	12792	0,45 %

- Cantidad de breaks = 13.
- Suma de diferencias (ida y vuelta) = 3475,4 km.
- Máxima diferencia absoluta (ida y vuelta) = 839,2 km. (Tigre)

Este torneo resultó un poco más complicado a la hora de encontrar buenas soluciones, ya que en ninguno de todos los modelos se pudo hallar solución óptima.

En el caso de los fixtures definidos para las zonas A y B del modelo de los clusters, los resultados se ven muy buenos (y mejor aún en comparación al modelo de esta índole del torneo anterior). Como se puede observar, la mayor diferencia porcentual en distancias recorridas entre divisiones es de 28,23 % para San Martín de Tucumán en la zona A, y de 22,43 % para Independiente en la zona B. Ambos valores se encuentran por debajo del 30 %, lo que hace que la reducción conseguida sea más que razonable.

Por otro lado, el número de breaks fue de 15 para ambas zonas, valor que nos deja muy conformes.

La suma de diferencias en kilómetros recorridos fue poco más de 11000km. tanto en la zona A como en la B; y como podemos observar, a diferencia de lo que pasaba en el campeonato anterior, los porcentajes están distribuidos de una forma mucho más pareja: en la primera zona el promedio de éstos es de 13,19 %, en la segunda es de 15,72 %, y no hay equipo cuyo porcentaje de diferencia sea menor a 5,7 %.

Cabe destacar que, en este caso, los resultados obtenidos para ambas zonas fueron logrados en menos de una hora (aunque recordemos que todos los modelos corrieron 36).

Al correr los modelos que minimizan la suma de diferencias de distancia utilizando la matriz D, obtuvimos dos fixtures en donde el mayor porcentaje de discrepancia de kilómetros entre divisiones fue para Racing en la zona A con un 28,84 %, y para Tigre en la zona B con un número bastante más alto, 87,30 % (el mayor visto hasta el momento).

Estos porcentajes también se ven distribuidos de una forma uniforme en la zona A; pero en la B, Tigre, River y San Lorenzo presentan unos ampliamente mayores al resto (más del 54 % en los tres casos, mientras que para el resto de los equipos son menores a 15,4 %, e incluso llega a ser de 0,03 %, para Independiente).

La cantidad de breaks obtenida es de 17 y 15, respectivamente en ambas zonas.

La suma de diferencias de kilometraje es menor a la que vimos en el modelo anterior, tanto para la primera zona como para la segunda (no alcanzando a superar los 10400km.), aunque a decir verdad, el no haber conseguido solución óptima resultó un poco perjudicial. Hasta ahora, el modelo anterior parece ser mejor en términos de nuestro objetivo principal.

Por último, si miramos en detenimiento la performance del último modelo, notaremos que la mayor diferencia es para Defensa y Justicia en la zona A, con un porcentaje del 27,66 %, siendo el segundo mayor de éstos 20,26 % para Tigre en la zona B. El resto de ellos rara vez están por encima del 10 %, en cualquiera de las dos zonas.

La suma de diferencias se ve ampliamente menor que en el resto de los modelos, no superando los 5500km. ni en la zona A ni en la B. Es sorprendente que este valor (en ambas zonas) sea tanto mejor que el obtenido en el modelo anterior, en el cual justamente era lo que se optimizaba. Como ya mencionamos, el hecho de no poder alcanzar un óptimo en el tiempo preestablecido hace que este fenómeno sea posible. Además, es importante observar que las soluciones dadas por éste último modelo son bastante buenas, y el hecho de haber conseguido que la máxima diferencia de viajes entre divisiones no supere el 28 % obliga a que el resto de las diferencias sean también pequeñas, por lo que es sensato que la suma de ellas no sea demasiado alta.

Los breaks obtenidos son 17 y 13, cantidades que nuevamente son razonables. Por coincidencia, la máxima diferencia vista en kilómetros viajados entre divisiones se da en los dos equipos antes mencionados que porcentualmente también tienen esta mayor discrepancia.

En el caso de la zona A, se necesitaron unas 24 horas para toparnos con la solución presentada; para la B, fueron poco más de 5.

Si nuevamente nos vemos ante la obligación de elegir un par de fixtures (para ambas zonas), considero conveniente escoger los que corresponden al modelo de los clusters. Esta vez, el balance en viajes entre divisiones fue muy bien logrado (aunque quizás no tanto como en el último modelo analizado), pero, como ya dijimos, la velocidad con que se encuentra una solución es realmente destacable, no sólo por si misma si no también con respecto a las otras.

4.3. Comparación adicional

Merece la pena contrastar los fixtures que obtuvimos como resultados de este trabajo con el empleado por la SAF (armado de forma manual) en el Torneo de Fútbol Juvenil de la Superliga de 2017, el campeonato previo a los aquí estudiados, que como ya sabemos corresponden al año 2018.

Es preciso observar que la modalidad de juego era distinta: se enfrentaban todos los equipos contra todos en un single round robin, pero ya no divididos en dos zonas. Los participantes eran 30: River, Boca, Vélez, San Martín SJ, Godoy Cruz, Banfield, Lanús, Tigre, Defensa y Justicia, Arsenal, Atlético Tucumán, Patronato, Temperley, Olimpo, Talleres, Belgrano, Estudiantes, Gimnasia y Esgrima, Independiente, Racing, San Lorenzo, Huracán, Colón, Unión, Rosario Central, Newell's, Aldosivi, Atlético Rafaela, Quilmes y Sarmiento.

Sin embargo, tenemos una constante que se mantenía: las mayores jugaban con el fixture invertido de las menores (en términos de localía). Es decir, más allá de la estructura del torneo, sigue siendo un tópico interesante querer reducir las distancias de viajes realizadas por sus divisiones para todos los equipos.

El fixture utilizado en ese entonces estaba semi-definido y armado de forma numérica (digamos: “el *equipo 1* juega de local contra el *equipo 2* en la fecha 3”), por lo que la SAF simplemente sorteaba qué equipo se asignaría a cada número. Como para ese momento no se había considerado nada al respecto de los viajes, el equilibrio de kilómetros quedaba reducido al azar.

Teniendo en cuenta tal fixture, lo que se hizo fue calcular la diferencia (en porcentaje) entre lo viajado por las divisiones mayores y menores de cada equipo. Se obtuvo el siguiente resultado:

River	126,07 %	Belgrano	44,26 %
Boca	119,19 %	Estudiantes	167,43 %
Vélez	135,81 %	Gimnasia y Esgrima	128,55 %
San Martín SJ	10,95 %	Independiente	113,81 %
Godoy Cruz	1,92 %	Racing	158,34 %
Banfield	81,97 %	San Lorenzo	201,16 %
Lanús	27,25 %	Huracán	45,66 %
Tigre	157,81 %	Colón	44,49 %
Defensa y Justicia	175,39 %	Unión	30,92 %
Arsenal	34,22 %	Rosario Central	2,47 %
Atlético Tucumán	39,81 %	Newell's	5,98 %
Patronato	28,83 %	Aldosivi	1,90 %
Temperley	4,36 %	Atlético Rafaela	36,66 %
Olimpo	26,55 %	Quilmes	147,61 %
Talleres	29,97 %	Sarmiento	15,67 %

Como podemos observar, efectivamente no había ningún tipo de relación entre los viajes de las divisiones, lo que nos otorga diferencias que van desde 1,90 % (Aldosivi) hasta 201,16 % (San Lorenzo). En síntesis, teníamos equipos para los cuales el kilometraje realizado por sus dos divisiones era prácticamente el mismo, y equipos donde la distancia recorrida por una división triplica a la recorrida por la otra.

Si consideramos los cuatro fixtures elegidos en los torneos analizados (zona A y B del modelo 1 de la matriz en el primer torneo y zona A y B del modelo de los clusters en el segundo torneo), no hay porcentaje de diferencias mayor a 29 %, lo que claramente refleja el éxito de nuestros resultados.

Tal es así que hoy, los modelos de los clusters fueron la base para constituir los fixtures oficiales para el Torneo Transición de Juveniles 2018 (Marzo-Junio) y para el Torneo de Juveniles del Segundo Semestre de 2018 (Agosto-Noviembre), ambos organizados por la Superliga Argentina de Fútbol.

4.4. Otras aplicaciones y trabajo futuro

Antes de hablar del trabajo futuro, podemos destacar que si bien el esquema particular de estos torneos es algo poco convencional, las ideas que empleamos en este trabajo podrían ser extrapoladas a un torneo double round robin donde se desee balancear lo que cada equipo recorre en cada una de las dos etapas del torneo, ya que en esta clase de campeonatos, todos los clubes se enfrentan dos veces entre ellos pero con las localías invertidas, lo que nos permite relacionarlo con las dos divisiones de los torneos que estudiamos.

Si nos centramos ahora en otros caminos para repensar o continuar este trabajo, posiblemente la optimización *multiobjetivo* es un campo en el que valga la pena incursionar, como ya habíamos mencionado, ya que lo que tuvimos que hacer es minimizar cierto valor

para todos los equipos a la vez, y esta optimización trabaja sobre vectores, permitiendonos definir una función objetivo que no necesariamente tenga por codominio a los números reales. En términos de las variables definidas y de este nuevo enfoque, lo que se podría plantear es:

$$\text{minimizar } (d_1^+ + d_1^-, \dots, d_n^+ + d_n^-)$$

donde n sería 28 o 26, dependiendo el torneo, y por supuesto restringiéndonos al espacio necesario en cada caso.

En este trabajo dimos más de un camino para poder emparejar las distancias recorridas entre divisiones, corroborando que los fixtures finales cumplieron nuestro objetivo y fueron una muy buena solución. De todas maneras, indagar en la resolución de nuestro problema desde esta nueva cara puede ser algo verdaderamente interesante.

Por otro lado, podríamos pensar en mezclar ambas variaciones de resolución y construir modelos en los cuales minimicemos breaks teniendo en cuenta (es decir, vía el conjunto de restricciones) que la suma sobre todos los equipos de diferencias de distancias esté acotada (por un valor a determinar), o que esté acotada la máxima de ellas; o incluso que ambas estén acotadas.

De esta manera, contemplaríamos reducción en diferencia de viajes desde las restricciones, tal como en el modelo de los clusters, pero usando explícitamente la matriz D , lo que nuevamente nos liberaría la función objetivo.

Fijar los valores para acotar las diferencias puede ser un trabajo arduo (sobretudo si utilizamos cotas *justas*), pero podríamos basarnos en los resultados ya obtenidos para encontrar algunos que se acomoden a lo esperado.

Tampoco parece una mala idea, a priori, dejar de armar los clusters en ambas zonas teniendo en cuenta los rivales clásicos de los partidos interzonales, permitiendo incluso que en la zona A y en la zona B los clusters no sean análogos, o que tengan diferente cantidad de equipos.

Por ejemplo, en el caso del Torneo Agosto-Noviembre 2018, el rival clásico de Aldosivi (zona A) era Patronato (zona B), pero geográficamente sus ubicaciones difieren notablemente. ¿Podría Aldosivi formar parte del cluster CABA/GBA de la zona A (haciendo que éste pase a tener 8 conformantes en lugar de 7) y quedar Patronato en el cluster Interior Lejano de la zona B? Si bien es algo que podría resultar un poco incómodo al pasar de modelar una zona a otra (las restricciones sobre balance de localías ya no serían las mismas entre ambas zonas), parece una idea totalmente válida, que tal vez termine dando buenos resultados y nos permita no hacer tantas excepciones para estos equipos en las restricciones, por ejemplo al modelar sus cercanías en breaks.

Una última idea podría ser combinar modelos al diseñar las distintas zonas. Por ejemplo, utilizar el modelo de los clusters para diseñar la zona A de algún torneo, pero utilizar alguno de los dos modelos que surgen a partir de la matriz de distancias para buscar un fixture para la zona B. Más aún, podrían estudiarse muchas de las combinaciones posibles y elegir aquel fixture que resulte mejor, permitiendo incluso correr la zona B y luego la A.

Considero que valdría la pena explorar estas otras variaciones de resolución (aunque por supuesto puede haber más), a pesar de que en esta tesis hayamos obtenido resultados que nos dejan más que conformes.

Bibliografía

- [1] J. Armstrong and R. J. Willis. Scheduling the cricket World Cup – A case-study. *Journal of the Operational Research Society*, 44:1067–1072, 1993.
- [2] T. Bartsch, A. Drexler, and S. Kröger. Scheduling the professional soccer leagues of Austria and Germany. *Computers and Operations Research*, 33(7):1907–1937, 2006.
- [3] F. Bonomo, A. Burzyn, A. Cardemil, G. Durán and J. Marenco. An application of the traveling tournament problem: The Argentine volleyball league. *The 7th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling, PATAT*, 2008.
- [4] W.O. Cain, Jr. The computer-assisted heuristic approach used to schedule the major league baseball clubs. In S.P. Ladany and R.E. Machol, editors, *Optimal Strategies in Sports*, volume 5 of *Studies in Management Science and Systems*, pages 32–41. North Holland/American Elsevier, 1977.
- [5] R.T. Campbell and D.S. Chen. A minimum distance basketball scheduling problem. In R.E. Machol, S.P. Ladany, and D.G. Morrison, editors, *Management Science in Sports*, volume 4 of *Studies in the Management Sciences*, pages 15–26. North-Holland Publishing Company, 1976.
- [6] F.D. Croce and D. Oliveri. Scheduling the Italian football league: an ILP-based approach. *Computers and Operations Research*, 33(7):1963–1974, 2006.
- [7] A. Drexler and S. Knust. Sports league scheduling: Graph - and resource - based models. *Omega*, 35(5):465-471, 2007.
- [8] G. Durán, M. Guajardo, J. Miranda, D. Sauré, S. Souyris, A. Weintraub and R. Wolf. Scheduling the Chilean Soccer League by Integer Programming. *INTERFACES* 37, 539-552, 2007.
- [9] G. Durán, M. Guajardo, D. Sauré. Scheduling the South American Qualifiers to the 2018 FIFA World Cup by integer programming. *European Journal of Operational Research*, 262(3):1109-1115, 2017.
- [10] K. Easton, G. Nemhauser, and M. Trick. The traveling tournament problem: Description and benchmarks. In T. Walsh, editor, *Principles and Practice of Constraint Programming*, volume 2239 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 580–585. Springer, Berlin / Heidelberg, 2001.
- [11] K. Easton, G. Nemhauser, and M. Trick. Solving the traveling tournament problem: a combined integer programming and constraint programming approach. In E. Burke and P. De Causmaecker, editors, *Practice and Theory of Automated Timetabling IV*, volume 2740 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 100–109. Springer, Berlin / Heidelberg, 2003.
- [12] J.A. Ferland and C. Fleurent. Computer aided scheduling for a sport league. *INFOR*, 29:14–25, 1991.
- [13] J. Fiallos, J. Perez, F. Sabillon, M. Licona. Scheduling soccer league of Honduras using integer programming. *Proceedings of the 2010 Industrial Engineering Research Conference*, San Carlos. 2010.
- [14] T. Flatberg, E. Nilssen, and M. Stlevik. Scheduling the topmost football leagues of Norway. *Book of Abstracts of the 23rd European Conference on Operational Research*, page 240, Bonn, 2009.

- [15] D. Goossens and F. Spieksma. Scheduling the Belgian soccer league. *INTERFACES*, 39(2):109–118, 2006.
- [16] M. Henz. Scheduling a major college basketball conference - revisited. *Operations Research*, 49:163–168, 2001.
- [17] M. Henz. Constraint-based round robin tournament planning. In D. De Schreye, editor, *Proceedings of the International Conference on Logic Programming*, Las Cruces, New Mexico, pages 545–557. MIT Press, 1999.
- [18] S. Knust. Scheduling non-professional table-tennis leagues. *European Journal of Operational Research*, 200:358–367, 2010.
- [19] R. Miyashiro, H. Iwasaki, T. Matsui. Characterizing feasible pattern sets with a minimum number of breaks. *PATAT 2002, Lecture Notes in Computer Science* 2740, 78-99. 2003.
- [20] G.L. Nemhauser and M.A. Trick. Scheduling a major college basketball conference. *Operations Research*, 46(1):1–8, 1998.
- [21] K. Nurmi, J. Kyngäs, D. Goossens. Scheduling a triple round robin tournament with minitournaments for the Finnish national youth ice hockey league. *Journal of the Operational Research Society* 65, 1770-1779. 2013.
- [22] R.V. Rasmussen. Scheduling a triple round robin tournament for the best Danish soccer league. Working Paper no. 2006/1, Department of Operations Research, University of Aarhus, 2006.
- [23] R.V. Rasmussen and M.A. Trick. A Benders approach for constrained minimum break problem. *European Journal of Operational Research*, 177(1):198–213, 2007.
- [24] R.V. Rasmussen and M.A. Trick. Round Robin Scheduling - A Survey. *European Journal of Operational Research*, 188(3): 617- 636, 2007.
- [25] D. Recalde, R. Torres, P. Vaca. Scheduling the professional Ecuadorian football league by integer programming. *Computers & Operations Research* 40, 2478-2484. 2013.
- [26] C. C. Ribeiro and S. Urrutia. Scheduling the Brazilian Soccer Tournament: Solution Approach and Practice. *INTERFACES* 42(3): 260-272, 2012.
- [27] R.A. Russell and J.M.Y. Leung. Devising a cost effective schedule for a baseball league. *Operations Research*, 42(4):614–625, 1994.
- [28] A. Schaerf. Scheduling sport tournaments using constraint logic programming. *Constraints*, 4:43–65, 1999.
- [29] J.A.M. Schreuder, A. van Weert. Construction of basic match schedules for sports competitions by using graph theory. *PATAT 1997, Lecture Notes in Computer Science* 1408, 201-210. 1998
- [30] J.A.M. Schreuder. Combinatorial aspects of construction of competition dutch professional football leagues. *Discrete Applied Mathematics*, 35:301–312, 1992.
- [31] M. Trick. A schedule-then-break approach to sports timetabling. In E. Burke and W. Erben, editors, *Practice and Theory of Automated Timetabling III*, volume 2079 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 242–252. Springer, Berlin / Heidelberg, 2001.
- [32] T.V. Voorhis. College basketball scheduling with travel swings. *Computers & Industrial Engineering*, 48:163–172, 2005.
- [33] D. de Werra. Geography, games and graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 2:327–337, 1980.

- [34] D. de Werra. Some models of graphs for scheduling sports competitions. *Discrete Applied Mathematics*, 21:47–65, 1988.
- [35] D. de Werra, L. Jacot-Descombes, and P. Masson. A constrained sports scheduling problem. *Discrete Applied Mathematics*, 26:41–49, 1990.
- [36] R.J. Willis and B.J. Terrill. Scheduling the Australian state cricket season using simulated annealing. *Journal of the Operational Research Society*, 45(3):276–280, 1994.
- [37] M. Wright. Scheduling fixtures for New Zealand cricket. *IMA Journal of Management Mathematics*, 16:99–112, 2005.
- [38] M.B. Wright. Scheduling fixtures for basketball New Zealand. *Computers & Operations Research*, 33:1875–1893, 2006.
- [39] M.B. Wright. Timetabling county cricket fixtures using a form of tabu search. *Journal of the Operational Research Society*, 45(7):758–770, 1994.