



**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
**Departamento de Matemática**

**Tesis de Licenciatura**

# **Tests de curvatura y problemas de asfericidad**

**Martín Axel Blufstein**

**Director:** Gabriel Minian

Fecha de presentación: Diciembre de 2018



# Agradecimientos

Gracias Lolo.

Gracias mamá, gracias papá, gracias Marcos.

Gracias Gabriel, este trabajo es tan tuyo como mío.

Gracias Jonathan, gracias Leandro por ser jurados de esta tesis.

Gracias a mi familia.

Gracias a todos mis amigos y compañeros.

Gracias a los profesores de los que aprendí tanto.

Otra vez, gracias a Gabriel y a Jonathan por enseñarme topología.

Mi no numerable agradecimiento a todos ustedes.



# Introducción

El teorema de Cartan-Hadamard para variedades riemannianas afirma que toda variedad riemanniana conexa, completa y con curvatura seccional no positiva es esférica (más aún, su revestimiento universal es difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ ) [7]. Este resultado admite una versión más general en el contexto de espacios métricos geodésicos completos (ver [4, 17]). Las múltiples versiones que existen de tests de curvatura (principales objetos de estudio en esta tesis) se basan en el teorema de Cartan-Hadamard: se analiza asféricidad a partir de una conveniente noción de curvatura no positiva. Recordemos primero que un espacio topológico arcoconexo  $X$  se dice *asférico* si sus grupos de homotopía  $\pi_n(X)$  son triviales para  $n \geq 2$  (en el contexto de espacios que admiten revestimiento universal, como es el caso de los CW-complejos y las variedades, esto es equivalente a pedir que el revestimiento universal sea contráctil). La noción de asféricidad es central en topología y en geometría, pero también es relevante en el contexto algebraico: la cohomología de un grupo  $G$  puede definirse (y calcularse) en términos algebraicos (a partir de  $G$ ), pero también, en forma equivalente, puede definirse (y calcularse) como la cohomología (singular, simplicial o celular) de un espacio esférico con grupo fundamental  $G$  (lo que se conoce como un *espacio de Eilenberg-MacLane* de tipo  $K(G, 1)$ ). Para ilustrar la importancia de la noción de asféricidad en el contexto geométrico y topológico de variedades, nombramos aquí brevemente algunos de los resultados o problemas más conocidos (y recomendamos el artículo de Lück [32] para una lectura más detallada de estos resultados). La conjetura de Hopf dice que si  $M$  es una variedad esférica cerrada de dimensión par, entonces  $(-1)^{\dim(M)/2} \chi(M) \geq 0$ . Similarmente, la conjetura de Singer relaciona los números de Betti  $L^2$  de una variedad esférica cerrada con su dimensión. La conjetura de Borel afirma que si dos variedades topológicas cerradas y esféricas son homotópicamente equivalentes, entonces son

homeomorfas. Esta conjetura está relacionada con el conocido teorema de rigidez de Mostow en el contexto de variedades hiperbólicas que esencialmente afirma que si  $M$  y  $N$  son variedades hiperbólicas completas, de dimensión mayor o igual a 3 y de volumen finito, y sus grupos fundamentales son isomorfos, entonces son isométricas. En el contexto de las variedades de dimensión 3, Papakyriakopoulos probó en 1957 el Lema de Dehn y el Sphere theorem, de los cuales se deduce, como corolario inmediato, la asfericidad de los complementos de nudos [36, 42].

Uno de los problemas abiertos más conocidos sobre asfericidad en topología es la conjetura de Whitehead[43]. La conjetura de Whitehead afirma que todo subcomplejo conexo de un CW-complejo esférico de dimensión 2 es esférico. La pregunta original de Whitehead (formulada hace más de 75 años) estaba motivada por analizar la asfericidad de los complementos de nudos (la validez de la conjetura de Whitehead implicaría, como caso particular, la asfericidad de los complementos de nudos, mediante los spines de esas 3-variedades, que resultan complejos de dimensión 2). Como hemos mencionado, finalmente la asfericidad de los complementos de nudos fue demostrada por Papakyriakopoulos, pero la conjetura de Whitehead sigue abierta hasta el día de hoy. Sobre la demostración de Papakyriakopoulos Milnor escribió la siguiente rima [34]:

*The perfidious lemma of Dehn  
drove many a good man insane  
but Christos Pap-  
akyriakop-  
oulos proved it without any pain.*

Muchos matemáticos han realizado avances en esta conjetura [22, 26, 33, 39], pero el problema general sigue abierto, incluso para el caso de CW-complejos finitos. Estrechamente relacionado a este problema se tiene el problema de asfericidad de los complementos de ribbon disks [25]. Estas variedades de dimensión 4 generalizan homotópicamente a los complementos de nudos y admiten spines 2-dimensionales que pueden modelarse (topológicamente, algebraicamente y combinatoriamente) mediante los llamados *labelled oriented trees* (LOTs). Concretamente, Howie probó que los complejos de LOTs están en correspondencia con spines 2-dimensionales de los complementos de ribbon disks. En términos de presentaciones de grupos, las presentaciones asociadas a LOTs generalizan las presentaciones de Wirtinger de los grupos de nudos y, al igual que sucede con los

nudos, es sencillo ver que todo complejo asociado a un LOT se embebe en un 2-complejo contráctil. Por lo tanto, la conjetura de Whitehead implicaría la asfericidad de los LOTs (y por lo tanto la de los complementos de ribbon disks). Pero además, en [26] Howie demostró que de ser verdadera la conjetura de Andrews-Curtis la asfericidad de LOTs implicaría la conjetura de Whitehead para el caso finito, por esto los LOTs son considerados casos testigos para la conjetura de Whitehead. La asfericidad de LOTs sigue abierta en general, pero han habido avances significativos en los últimos 30 años, algunos de los cuales presentaremos en el capítulo 3. Entre ellos encontramos el resultado de Howie sobre los LOTs de diámetro menor a igual a 3 [25], y la asfericidad de LOTs inyectivos probada por Harlander y Rosebrock [18] (los LOTs inyectivos son, en este contexto, los equivalentes a los nudos alternados).

Para estudiar la asfericidad de LOTs, Howie utiliza teoría de grupos *localmente indicables*. Un grupo se dice localmente indicable si todo subgrupo finitamente generado no trivial admite un epimorfismo a  $\mathbb{Z}$ . Si  $X$  es un 2-complejo arcoconexo con  $H_2(X) = 0$  y  $\pi_1(X)$  localmente indicable, entonces  $X$  es asférico [24, 25]. Los grupos localmente indicables fueron estudiados originalmente por Higman [21] en relación a los problemas de divisores de cero y unidades de anillos de grupos. Short y Howie probaron que los grupos de nudos son localmente indicables [8, 24]. En esta tesis presentaremos algunos resultados de Howie, interesado principalmente en el estudio de ecuaciones sobre grupos [8, 23, 24]. Más recientemente, diversos autores estudiaron su relación con dinámica de grupos y grupos ordenables [8, 12]. En esta tesis nos vamos a centrar principalmente en su relación con asfericidad.

El concepto de reducibilidad diagramática fue estudiado en un comienzo por Sieradski [41] y Gersten [13, 14]. Esta noción resulta estrictamente más fuerte que la de asfericidad. Sin embargo, su naturaleza combinatoria y su aplicación a la resolución de ecuaciones sobre grupos hacen que sea interesante en sí misma [13]. Uno de los principales tests para reducibilidad diagramática es el weight test de Gersten. Las 2-celdas de un 2-complejo combinatorio pueden pensarse como polígonos. La suma de los ángulos internos de un polígono euclídeo de  $n$  lados es  $(n - 2)\pi$ . Usando este hecho, y trazando un paralelo con el teorema de Cartan-Hadamard, Gersten definió una versión combinatoria de curvatura no positiva asignándole “ángulos” o “pesos” a las esquinas de las 2-celdas. Su test afirma que todo 2-complejo combinatorio con curvatura no positiva

es diagramáticamente reducible. Posteriormente surgieron otros tests de curvatura (y otras nociones de curvatura combinatoria) como los de Huck y Rosebrock [28] y los de Wise [45]. Estos tests fueron enunciados originalmente en distintos términos. El segundo capítulo de esa tesis se encarga de dar una visión unificada de los mismos, y de comparar los diversos tests y definiciones de curvatura. Además de diferir en sus hipótesis, estos tests permiten concluir distintas propiedades de los complejos. Algunos de ellos afirman que el grupo fundamental del complejo es hiperbólico. En [45] Wise conjetura que todo 2-complejo combinatorio compacto con curvatura seccional negativa tiene grupo fundamental hiperbólico. La respuesta a esta pregunta es afirmativa y se deduce inmediatamente de uno de los tests de Huck y Rosebrock. La visión unificada de los tests nos permitió, entre otras cosas, darnos cuenta de este hecho. Aparentemente, Wise no estaba al tanto de ese resultado.

La noción de grupo hiperbólico fue introducida por Gromov [17] con el objetivo de abstraer las propiedades geométricas de la geometría hiperbólica, y motivado por los resultados de Dehn concernientes al grupo fundamental de superficies riemannianas hiperbólicas [11]. Los grupos hiperbólicos tienen el problema de la palabra y el problema del conjugado resolubles. Entre los grupos hiperbólicos se encuentran los grupos libres, los grupos finitos, los grupos fundamentales de variedades riemannianas con curvatura seccional estrictamente negativa, los grupos virtualmente cíclicos, grupos  $CAT(\kappa)$  con  $\kappa < 0$ , y grupos que cumplen ciertas condiciones de small cancellation [4, 16, 31].

Para analizar todos los tests de curvatura se utiliza el *grafo de Whitehead* del complejo. El grafo de Whitehead de un 2-complejo combinatorio es la unión de sus links geométricos. Cada arista de este grafo se corresponde con una de las “esquinas” de una de las 2-celdas del complejo. Luego, si las definiciones de curvatura se basan en asignar ángulos a estas esquinas, la información necesaria para enunciar un test de curvatura puede codificarse en términos del grafo de Whitehead. En el último capítulo de esta tesis hacemos un estudio novedoso de los grafos de Whitehead. Primero nos planteamos la pregunta de cuáles grafos son el grafo de Whitehead del complejo asociado a alguna presentación. Una vez caracterizados estos grafos, a los que llamaremos *grafos tipo Whitehead*, analizamos cómo se relacionan entre sí las distintas presentaciones que tienen un mismo grafo de Whitehead. Investigamos, desde ese punto de vista, todas las nociones desarrolladas en los capítulos previos de la tesis, como asfericidad,

indicabilidad local e hiperbolicidad. Estudiamos las similitudes y diferencias entre las distintas presentaciones que comparten un mismo grafo (y los grupos que presentan). Introducimos para esto el poset asociado a un grafo tipo Whitehead y analizamos cómo dichas presentaciones se comportan en relación a los tests de curvatura y también con respecto al I-test de Barmak y Minian [2] (que es un test de asfericidad no basado en curvatura). Analizamos a lo largo del último capítulo varios ejemplos de posets de presentaciones asociadas a grafos de Whitehead. Tenemos planeado incluir y continuar algunos de los resultados, construcciones y ejemplos desarrollados en el último capítulo de esta tesis en un trabajo futuro.

# Índice general

<b>1. 2-complejos combinatorios</b>	<b>10</b>
1.1. Preliminares . . . . .	10
1.2. Asfericidad . . . . .	14
1.2.1. Reducibilidad diagramática . . . . .	16
1.3. Grupos localmente indicables . . . . .	19
1.4. Grupos hiperbólicos . . . . .	20
<b>2. Tests de curvatura</b>	<b>24</b>
2.1. Grafo de Whitehead y 2-complejos angulados . . . . .	25
2.2. Weight test de Gersten . . . . .	29
2.3. Weight test de Huck y Rosebrock . . . . .	31
2.4. Curvatura seccional . . . . .	35
2.5. Comparación de curvaturas . . . . .	38
<b>3. Asfericidad de LOTs</b>	<b>41</b>
3.1. Ribbon disks . . . . .	41
3.2. Resultados elementales . . . . .	44
3.3. Familias de LOTs esféricos . . . . .	47
3.3.1. Diámetro 3 . . . . .	48
3.3.2. Complejidad . . . . .	51
3.3.3. LOTs inyectivos . . . . .	53
<b>4. Grafos tipo Whitehead</b>	<b>57</b>
4.1. Caracterización de grafos tipo Whitehead . . . . .	57
4.2. El poset asociado a un grafo tipo Whitehead . . . . .	63
4.2.1. El poset de los grupos de Baumslag-Solitar . . . . .	73
4.3. Propiedades de presentaciones con un mismo grafo de Whitehead . . . . .	76

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	9
4.4. I-test y su relación con el poset de un grafo tipo Whitehead .	80
<b>Bibliografía</b>	<b>85</b>

# 1

## 2-complejos combinatorios

### 1.1. Preliminares

Comenzaremos definiendo a los 2-complejos combinatorios, que son una clase de CW-complejos que cumplirán un papel fundamental en el desarrollo de esta tesis. El tratamiento del tema que haremos a continuación está basado en la exposición hecha por Hog-Angeloni y Metzler en el primer capítulo de [22].

Una función celular  $f : X \rightarrow Y$  entre CW-complejos se dice *combinatoria* si su restricción a cada celda abierta de  $X$  es un homeomorfismo con su imagen. Un *2-complejo combinatorio* es un CW-complejo  $X$  de dimensión 2 tal que las funciones de adjunción de sus 2-celdas,  $\phi : S^1 \rightarrow X^{(1)}$ , son combinatorias para alguna subdivisión poligonal de  $S^1$ , donde  $X^{(1)}$  denota el 1-esqueleto de  $X$ . Notar que admitimos que esta subdivisión de  $S^1$  tenga una única 0-celda y una única 1-celda. Por ejemplo, el disco  $D^2$  con la siguiente estructura es combinatorio:

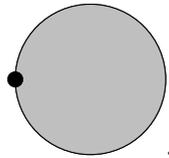


Figura 1.1: Estructura combinatoria del disco

Observamos que  $X^{(1)}$  es un grafo (un CW-complejo de dimensión 1), y que la condición de ser combinatorio es sólo sobre las 2-celdas, puesto

que para las 1-celdas se cumple trivialmente. Lo que estamos pidiendo entonces es que cada arista de la subdivisión de  $S^1$  del borde de las 2-celdas mapee homeomorficamente a una arista del 1-esqueleto de  $X$ . Por ejemplo, un toro puede descomponerse de la siguiente manera, donde las

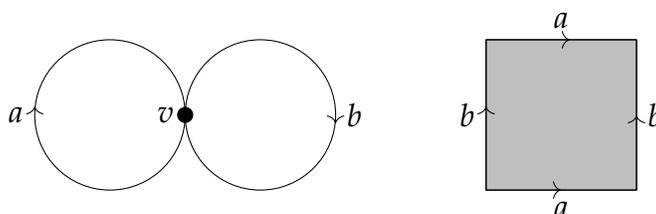


Figura 1.2: 1-esqueleto y pegado de 2-celda del toro

aristas etiquetadas con  $a$  mapean a la 1-celda etiquetada con  $a$  siguiendo la orientación indicada; y análogamente con las aristas etiquetadas con  $b$ .

Observamos que subcomplejos y revestimientos de 2-complejos combinatorios son a su vez 2-complejos combinatorios. Utilizaremos estas propiedades más adelante.

En general trabajaremos con 2-complejos combinatorios finitos. Ejemplos de los mismos que aparecen con frecuencia son los CW-complejos regulares de dimensión 2 (en los que cada 2-celda cerrada es homeomorfa a un disco), los complejos simpliciales de dimensión 2 (que son un caso particular de CW-complejos regulares), y los 2-complejos asociados a presentaciones de grupos.

A lo largo de esta tesis, nos centraremos en el estudio de propiedades homotópicas. Por lo tanto, no perdemos información al restringirnos a los 2-complejos combinatorios, ya que todo CW-complejo de dimensión 2 es homotópicamente equivalente (más aún, se 3-deforma) a un 2-complejo combinatorio. Para una demostración de este hecho ver [22, Proposición 2.3]

Veamos ahora la relación que hay entre 2-complejos combinatorios y 2-complejos asociados a una presentación de un grupo. Una presentación  $P = \langle X | R \rangle$  consiste de un conjunto de generadores  $X$  y un conjunto de palabras  $R$  pertenecientes al grupo libre en los generadores  $X$ . Notaremos por  $G_P$  al grupo asociado a esta presentación. El mismo viene dado por  $G_P = F(X)/N$ , donde  $N$  es la clausura normal de  $R$  en  $F(X)$ , el grupo libre de generadores  $X$ . La cantidad de generadores menos la cantidad de

relaciones de una presentación es la *deficiencia* de la presentación. Si una presentación tiene deficiencia 0, diremos que es una presentación *balanceada*. Llamaremos *one-relator* a las presentaciones que contengan una sola relación.

A cada presentación (finita)  $P = \langle x_1, \dots, x_n | R_1, \dots, R_k \rangle$  se le asocia un 2-complejo combinatorio (finito) de la siguiente manera.  $K_P$  tiene una única 0-celda, y su 1-esqueleto es un wedge de esferas con una copia de  $S^1$  por cada generador de la presentación. Por cada relación  $R_i$ , adjuntamos una 2-celda subdividiendo  $S^1$  en  $l(R_i)$  (donde  $l(R_i)$  denota el largo de la palabra  $R_i$ ) segmentos y siguiendo los ciclos especificados por  $R_i$  en el 1-esqueleto, habiendo asignado previamente una orientación a las aristas del 1-esqueleto. Por el teorema de van Kampen se tiene que  $\pi_1(K_P) = G_P$  (ver [20, Corolario 1.28]).

La estructura del toro vista anteriormente se corresponde con la dada por la presentación  $P = \langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle$ . Otro ejemplo es el plano proyectivo, cuya estructura combinatoria viene dada por la presentación  $Q = \langle a, b | abab \rangle$

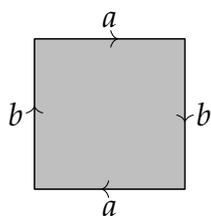


Figura 1.3: Pegado de la 2-celda del plano proyectivo

El complejo asociado a la presentación  $\langle a | a^2 \rangle$  también es homotópicamente equivalente al plano proyectivo. Notamos que un mismo espacio topológico puede tener más de una estructura de 2-complejo combinatorio asociado a una presentación.

Observamos que dos presentaciones de un mismo grupo pueden tener asociados 2-complejos combinatorios no homotópicamente equivalentes. Por ejemplo,  $\langle a | a \rangle$  y  $\langle a | a, a \rangle$  presentan ambas al grupo trivial. Sin embargo, el complejo asociado a la primera es homotópicamente equivalente a  $D^2$  y el de la segunda a  $S^2$ .

Ahora queremos encontrar una manera de asignarle una presentación a un 2-complejo combinatorio. A priori, no todo 2-complejo combinatorio

rio es el complejo asociado a una presentación, pues su 1-esqueleto puede no ser un wedge de esferas. Si  $X$  es un 2-complejo combinatorio cuyo 1-esqueleto es un wedge de esferas, invirtiendo el proceso anterior obtenemos una presentación  $P$  de manera que  $K_P$  sea homeomorfo a  $X$ .

Dado un 2-complejo combinatorio  $X$ , tomamos un árbol maximal  $A$  de su 1-esqueleto. En general no es cierto que si  $Y$  es un subcomplejo de un 2-complejo combinatorio  $X$ , el cociente  $X/Y$  sea combinatorio. Sin embargo sí es cierto cuando  $Y$  es un árbol maximal del 1-esqueleto de  $X$ . Esto se debe a que si  $I$  es un intervalo cerrado de  $\partial D^2$ , entonces  $D^2/I$  es homeomorfo a  $D^2$ . Luego, como  $A$  es contráctil, el cociente  $X/A$  es un 2-complejo combinatorio homotópicamente equivalente a  $X$ . Este nuevo complejo tiene como 1-esqueleto a un wedge de esferas, y por lo mencionado previamente, es homeomorfo al complejo asociado a una presentación  $P$ . Además  $P$  es una presentación del grupo fundamental de  $X/A$ , que es el mismo que el de  $X$ .

Es decir que dado un 2-complejo combinatorio, su cociente por un árbol maximal de su 1-esqueleto es el complejo asociado a una presentación. Más aún, las relaciones de esta presentación son las palabras que describen las funciones de adjunción de las 2-celdas luego de haber realizado el cociente.

En conclusión, si lo que nos interesa es estudiar propiedades estables por homotopía, basta restringirnos al caso de presentaciones y sus complejos asociados. Si bien esta correspondencia es válida para 2-complejos combinatorios y presentaciones en general, nosotros nos vamos a concentrar en el caso de complejos finitos, asociados a presentaciones finitas. Luego, es natural analizar qué operaciones en las presentaciones se traducen en equivalencias homotópicas en los complejos asociados.

Dada una presentación finita  $P = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_m \rangle$ , consideramos los siguientes movimientos:

1. Cambiar  $r_j$  por  $wr_jw^{-1}$ , con  $w \in F(X)$ .
2. Cambiar  $r_j$  por  $r_j^{-1}$ .
3. Cambiar  $r_j$  por  $r_jr_k$  o por  $r_kr_j$ , con  $k \neq j$ .
4. Cambiar  $x_i$  por  $x_i^{-1}$  o por  $x_ix_k$  o por  $x_kx_i$  en todas las relaciones, con  $k \neq i$ .

5. Agregar un nuevo generador  $x_{n+1}$  y una nueva relación  $r_{m+1} = x_{n+1}$ .

Estas operaciones junto con sus inversas se llaman  $Q^{**}$ -transformaciones. Diremos que dos presentaciones son  $Q^{**}$ -equivalentes si se puede obtener una a partir de la otra realizando  $Q^{**}$ -transformaciones.

**Proposición 1.1.1.** ([22, Teorema 2.4]) *Dos presentaciones  $P$  y  $Q$  son  $Q^{**}$  equivalentes si y sólo si  $K_P$  se 3-deforma a  $K_Q$ .*

En particular, estos movimientos preservan el tipo homotópico.

## 1.2. Asféricidad

Como comentamos en la introducción, el concepto de asféricidad tiene gran relevancia en topología, geometría y álgebra. Recordemos que un espacio topológico se dice esférico si sus grupos de homotopía  $\pi_n(X)$  son triviales para  $n \geq 2$ . Para CW-complejos o variedades esto es equivalente a que el revestimiento universal sea contráctil. La conjetura de Whitehead afirma que todo subcomplejo arcoconexo de un 2-complejo esférico es esférico [22, 43]. Papakyriakopoulos probó en 1957 el Lema de Dehn y el Sphere theorem, de los cuales se deduce, como corolario inmediato, la asféricidad de los complementos de nudos [36, 42]. Una generalización de este hecho es uno de los casos testigos más importantes de la conjetura de Whitehead: la asféricidad del complemento de los ribbon disks [25, 26, 27]. Esta última pregunta será tratada en el tercer capítulo de esta tesis.

Cuando estemos hablando de presentaciones, diremos que las mismas son esféricas si sus complejos asociados lo son.

Recordamos ahora dos resultados fundamentales de la teoría de homotopía.

**Teorema 1.2.1.** (Whitehead) *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo entre CW-complejos que induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía. Entonces  $f$  es una equivalencia homotópica.*

**Teorema 1.2.2.** (Hurewicz) *Sea  $X$  un espacio topológico simplemente conexo. Sea  $n \geq 1$  y supongamos que  $\pi_1(X) = \dots = \pi_n(X) = 0$ . Entonces  $H_1(X) = \dots = H_n(X) = 0$  y  $\pi_{n+1}(X) \simeq H_{n+1}(X)$ .*

Estos dos teoremas nos permiten dar una caracterización más sencilla de asféricidad para los 2-complejos.

Notamos que, por el teorema de Whitehead, un CW-complejo, es esférico si y sólo si su revestimiento universal es contráctil.

**Corolario 1.2.3.** *Sea  $X$  un CW-complejo arco conexo de dimensión 2. Entonces  $X$  es esférico si y sólo si  $\pi_2(X) = 0$ .*

*Demostración.* Sea  $\tilde{X}$  el revestimiento universal de  $X$ . Al ser un revestimiento de un CW-complejo de dimensión 2,  $\tilde{X}$  también es un CW-complejo de dimensión 2. Además sabemos que  $\pi_2(\tilde{X}) = \pi_2(X) = 0$  y  $\pi_1(\tilde{X}) = 0$ . Entonces, por Hurewicz  $H_1(\tilde{X}) = H_2(\tilde{X}) = 0$ .

Por ser un complejo de dimensión 2,  $H_n(\tilde{X}) = 0 \forall n \geq 3$ . Luego, utilizando Hurewicz inductivamente, obtenemos que  $\pi_n(\tilde{X}) = 0 \forall n \geq 1$ . Por lo tanto  $\pi_n(X) = 0 \forall n \geq 2$ .  $\square$

De ahora en más, cuando queramos probar que un 2-complejo es esférico, alcanzará con chequear que su segundo grupo de homotopía es trivial. Como ya mencionamos previamente, para estudiar el tipo homotópico de 2-complejos combinatorios, basta con entender las presentaciones y sus complejos asociados.

Observamos que el complejo asociado a una presentación balanceada del grupo trivial es contráctil. Esto se deduce de los teoremas de Whitehead y Hurewicz, y notando que la característica de Euler de dicho complejo es 1.

Dados  $G$  un grupo y  $n \in \mathbb{N}$ , un *espacio de Eilenberg-MacLane* de tipo  $K(G, n)$  es un CW-complejo arcoconexo con  $\pi_n(K(G, n)) = G$  y con todos sus otros grupos de homotopía triviales. Observamos que los CW-complejos esféricos son exactamente los  $K(G, 1)$ .

**Proposición 1.2.4.** *Sea  $X$  un  $K(G, 1)$ , con  $G$  un grupo con torsión. Entonces  $X$  tiene dimensión infinita.*

*Demostración.* Como  $G$  tiene torsión, tiene un subgrupo cíclico finito  $\mathbb{Z}_m$  para algún  $m \geq 2$ . El revestimiento correspondiente a este subgrupo de  $G$  es un  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$  de la misma dimensión que  $X$ . Luego su homología celular es la homología de  $\mathbb{Z}_m$  [6, Proposición 4.1], que es no trivial para infinitos valores de  $n$ . Por lo tanto el revestimiento tiene dimensión infinita, y entonces  $X$  también.  $\square$

Esta proposición nos dice que una presentación no puede ser asférica si el grupo presentado tiene torsión. Un caso particular es el de las presentaciones one-relator, donde la relación es una potencia propia. En breve veremos que todas las presentaciones one-relator cuya relación no es una potencia propia son asféricas.

### 1.2.1. Reducibilidad diagramática

Introduciremos ahora un concepto estrechamente relacionado al de asféricidad. La reducibilidad diagramática fue estudiada en un comienzo por Sieradski [41] y Gersten [13, 14]. Esta noción resulta estrictamente más fuerte que la de asféricidad. Sin embargo, su naturaleza combinatoria y su aplicación a la resolución de ecuaciones sobre grupos hacen que sea interesante en sí misma [13].

**Definición 1.2.5.** Sea  $X$  un 2-complejo combinatorio. Un *diagrama esférico* sobre  $X$  es una función combinatoria  $f : S \rightarrow X$ , donde  $S$  es una estructura combinatoria de  $S^2$ .

Si existen dos 2-celdas distintas  $F_1$  y  $F_2$  de  $S$  con una 1-cara común  $E$ , y un homeomorfismo  $g : F_1 \rightarrow F_2$  que revierte orientación, que fija a  $E$  punto a punto y tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{g} & F_2 \\ & \searrow f & \swarrow f \\ & & X \end{array} ,$$

diremos que un diagrama esférico  $f : S \rightarrow X$  es *reducible*

De existir esas dos caras, pueden colapsarse mediante una homotopía y así obtener un diagrama homotópicamente equivalente con dos caras menos [9, 22]. En términos más coloquiales, esto significa que el diagrama no tendrá caras espejadas. Por ejemplo, no puede suceder lo siguiente:

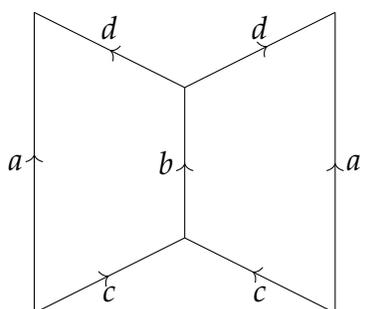


Figura 1.4: Dos caras espejadas

**Definición 1.2.6.** Un 2-complejo combinatorio se dice *diagramáticamente reducible* si no admite diagramas esféricos reducidos. Una presentación  $P$  es diagramáticamente reducible si  $K_P$  lo es.

En [14], Gersten hace notar que la condición del morfismo  $g$  es relevante. Si no pedimos esta condición, espacios como el plano proyectivo serían diagramáticamente reducibles. El diagrama esférico correspondiente al revestimiento de dos hojas del plano proyectivo por  $S^2$  con la siguiente estructura combinatoria tiene dos caras espejadas.

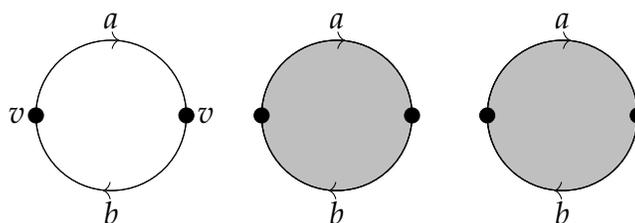


Figura 1.5: Diagrama esférico sobre el plano proyectivo

Sin embargo, la identificación de estas dos caras (que pueden pensarse como el hemisferio norte y el hemisferio sur) que deja fija a una 1-celda del borde no hace conmutar el diagrama. De hecho, colapsar ambas 2-celdas no puede realizarse mediante una homotopía.

Si  $X$  es un complejo diagramáticamente reducible, entonces dado un diagrama esférico sobre  $X$  siempre vamos a poder encontrar dos caras espejadas. Luego, haciendo una reducción, obtenemos un diagrama equivalente con dos caras menos. Este nuevo diagrama tampoco es reducido,

por lo que podemos continuar con este proceso. Esto nos dice que todo diagrama esférico sobre  $X$  es homotópicamente trivial.

**Lema 1.2.7.** [14] *Sea  $X$  un 2-complejo combinatorio. Entonces  $\pi_2(X)$  está generado por los diagramas esféricos como  $\pi_1(X)$ -módulo.*

Juntando este lema con lo observado anteriormente tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 1.2.8.** *Todo 2-complejo diagramáticamente reducible es esférico.*

La recíproca del corolario anterior no es cierta. El dunce hat, correspondiente a la presentación  $P = \langle a | aaa^{-1} \rangle$ , no es diagramáticamente reducible. Sin embargo es contráctil (y en particular esférico), pues corresponde a una presentación balanceada del grupo trivial. El siguiente diagrama esférico sobre el dunce hat que podemos hallar en [14] no es diagramáticamente reducible:

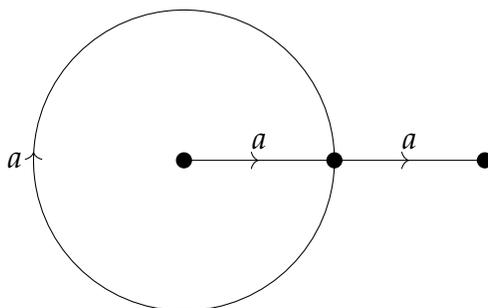


Figura 1.6: Diagrama esférico no reducido sobre el dunce hat

Más adelante, cuando analicemos el tipo homotópico de los complejos de ribbon disks, veremos ejemplos más interesantes de complejos que son esféricos, pero no diagramáticamente reducibles.

En el próximo capítulo estudiaremos el weight test de Gersten [14], que nos permitirá decidir cuándo ciertos complejos son diagramáticamente reducibles, y en particular, esféricos.

Por último enunciamos una caracterización alternativa probada por Corson y Trace [10].

Una  $n$ -celda ( $n = 0, 1$ )  $C$  de un 2-complejo combinatorio  $X$  es una *cara libre* de una  $(n + 1)$ -celda  $D$  de  $X$  si  $C$  es adyacente a  $D$ , la función de adjunción de  $D$  no tiene puntos dobles en  $C$ , y  $C$  no es adyacente a ninguna

otra  $(n + 1)$ -celda. La *frontera* de  $X$  denotada por  $\partial(X)$  es la clausura del conjunto de caras libres de  $X$ . Un 2-complejo combinatorio se dice *colapsado* si su frontera es vacía. Es fácil ver que todo 2-complejo combinatorio es homotópicamente equivalente a un complejo colapsado. Más aún, este complejo colapsado es un subcomplejo del original.

**Proposición 1.2.9.** *Sea  $X$  un 2-complejo combinatorio. Entonces  $X$  es diagramáticamente reducible si y sólo si todo subcomplejo finito de su revestimiento universal colapsa a un subcomplejo de dimensión menor o igual a 1.*

### 1.3. Grupos localmente indicables

Los grupos localmente indicables fueron estudiados originalmente por Higman [21] en relación a los problemas de divisores de cero y unidades de anillos de grupos. Además tienen una estrecha relación con el concepto de asfericidad. Muchos de los resultados que presentaremos a continuación se deben a Howie, interesado principalmente en el estudio de ecuaciones sobre grupos [8, 23, 24]. Más adelante utilizaremos sus resultados para el estudio de la asfericidad.

**Definición 1.3.1.** Un grupo se dice *localmente indicable* si todo subgrupo finitamente generado no trivial admite un epimorfismo a  $\mathbb{Z}$ .

Enunciamos algunos resultados conocidos sobre one-relators que utilizaremos más adelante. Las demostraciones pueden encontrarse en [5, 24]

**Teorema 1.3.2.** *Sean  $A$  y  $B$  grupos localmente indicables, y sea  $G$  el cociente de  $A * B$  por la clausura normal de una palabra cíclicamente reducida  $r$  de largo al menos 2. Entonces son equivalentes:*

1.  $G$  es localmente indicable;
2.  $G$  es libre de torsión;
3.  $r$  no es una potencia propia en  $A * B$ .

**Corolario 1.3.3.** *Sea  $P$  una presentación one-relator cuya relación no es una potencia propia. Entonces  $P$  es localmente indicable.*

**Teorema 1.3.4.** *Sea  $X$  un 2-complejo arcoconexo con  $H_2(X) = 0$  y  $\pi_1(X)$  localmente indicable. Entonces  $X$  es esférico.*

**Teorema 1.3.5.** *Toda presentación one-relator cuya única relación no sea una potencia propia es esférica.*

Tanto al probar que los grupos de nudos son localmente indicables [24], como para probar los resultados anteriores, Short y Howie [23, 24] llevaron a un contexto algebraico y topológico la idea de Papakyriakopoulos para probar el lema de Dehn y el sphere theorem [42]. En la demostración de estos teoremas introdujo las torres de revestimientos en el contexto de la teoría de 3-variedades. Esencialmente, para deshacerse de singularidades realizaba una cadena de revestimientos de dos hojas que dividía la cantidad de singularidades a la mitad en cada paso.

**Definición 1.3.6.** Un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  entre CW-complejos conexos es una *torre* si admite una descomposición

$$f = i_0 \circ p_1 \circ \dots \circ p_k \circ i_k,$$

donde cada  $i_j$  es una inclusión de un subcomplejo conexo, y cada  $p_j$  es un revestimiento conexo. Si los revestimientos son cíclicos, la torre se dice *cíclica*.

En [44] Wise introduce la siguiente definición.

**Definición 1.3.7.** Un 2-complejo  $X$  tiene *torres (cíclicas) no positivas* si para cada torre (cíclica)  $Y \rightarrow X$  con  $Y$  compacto y conexo, o bien  $\chi(Y) \leq 0$  o bien  $\pi_1(Y) = 1$ .

Con ella prueba el subsecuente teorema, que relacionaremos más adelante con sus trabajos sobre curvatura seccional [45].

**Teorema 1.3.8.** *Sea  $X$  con torres cíclicas no positivas. Entonces  $\pi_1(X)$  es localmente indicable.*

## 1.4. Grupos hiperbólicos

La noción de grupo hiperbólico fue introducida por Gromov [17] con el objetivo de abstraer las propiedades geométricas de la geometría hiperbólica, y motivado por los resultados de Dehn concernientes al grupo fundamental de superficies riemannianas hiperbólicas [11]. Ejemplos

de grupos hiperbólicos son los grupos libres, los grupos finitos, los grupos fundamentales de variedades riemannianas con curvatura seccional estrictamente negativa, los grupos virtualmente cíclicos, grupos  $CAT(\kappa)$  con  $\kappa < 0$  y grupos que cumplen ciertas condiciones de small cancellation [4, 16, 31]. En el segundo capítulo expondremos un test de curvatura que nos permite concluir la hiperbolicidad del grupo presentado por una presentación. A continuación daremos una breve introducción del tema. Para profundizar en el mismo, una exposición más completa puede hallarse en [4, 16, 17].

Dado un grupo  $G$  finitamente generado, sea  $X$  un conjunto de generadores. El grafo de Cayley  $\Gamma_X(G)$  de  $G$  con respecto a  $X$  tiene por vértices a los elementos de  $G$ , y tiene una arista orientada etiquetada  $x$  con vértice inicial  $g$  y vértice final  $gx$  para cada  $g \in G$  y  $x \in X$ .

Le asignamos a cada arista del grafo una métrica que la hace isométrica al intervalo real  $[0, 1]$  y definimos la distancia  $d(x, y)$  entre dos puntos  $x, y \in \Gamma_X(G)$  como el mínimo de las distancias de los caminos que los unen. Notamos que  $G$  actúa sobre  $\Gamma_X(G)$  por multiplicación a izquierda, y que con esta métrica la acción es por isometrías. Definimos el largo de  $g \in G$ ,  $|g|_X$ , como el largo de la palabra más corta en  $F(X)$  que lo representa. Equivalentemente,  $|g|_X = d(e, g)$ , donde  $e$  es el elemento neutro del grupo.

Un espacio métrico  $Z$  se dice *geodésico* si para todo par de puntos  $x, y \in Z$  existe una isometría del intervalo  $[0, d(x, y)]$  a  $Z$  que conecta  $x$  e  $y$ . En particular, para cada par de puntos existe un camino (no necesariamente único) que realiza la distancia.

**Definición 1.4.1.** ([17]) Sea  $M$  un espacio métrico. Dado un punto base  $z \in M$ , definimos un producto interno dado por

$$(x.y)_z = \frac{1}{2}(d(x, z) + d(z, y) - d(x, y)).$$

Si existe una constante  $\delta \geq 0$  tal que

$$\forall w, x, y \in M, (w.x)_z \geq \min\{(w.y)_z, (y.x)_z\} - \delta,$$

decimos que el producto interno es  $\delta$ -hiperbólico.

Puede demostrarse que si este producto interno es  $\delta$ -hiperbólico para algún punto base, entonces lo es para cualquier punto base. Ya estamos en condiciones de dar una primera definición de grupo hiperbólico.

**Definición 1.4.2.** Sea  $G$  un grupo finitamente generado. Entonces es un *grupo hiperbólico* si existe un conjunto finito de generadores  $X$  tal que  $\Gamma_X(G)$  es un espacio métrico geodésico con un producto interno  $\delta$ -hiperbólico para algún  $\delta \geq 0$ . Esta definición no depende del sistema de generadores elegido.

Los grupos hiperbólicos resultan finitamente presentados [16, Corolario 4.12]. Usaremos este hecho en la siguiente caracterización de grupos hiperbólicos.

Motivándose en las diferencias entre la geometría euclidiana y la hiperbólica, hay otra definición de grupo hiperbólico que resulta equivalente. Es sabido que hay una relación cuadrática entre el área y el perímetro de un círculo en el caso euclidiano, mientras que esta relación es lineal en el caso hiperbólico. Para llevar esta idea al contexto de grupos debemos definir la noción de área en un grupo.

Sea  $P = \langle X | R \rangle$  una presentación finita de un grupo  $G$ . Sea  $\omega \in F(X)$  una palabra reducida de largo  $l(\omega)$ , cuya clase de equivalencia es trivial en  $G$ . Entonces existen palabras  $p_i \in F(X)$ , relaciones  $R_i$  de  $R$  y  $\epsilon_i = \pm 1$  tales que

$$\omega = \prod_{i=1}^N p_i R_i^{\epsilon_i} p_i^{-1}$$

en  $F(X)$ . Si existe una constante  $K$  tal que para toda palabra reducida  $\omega$  que represente al elemento trivial,  $N(\omega) < Kl(\omega)$ , diremos que  $G$  satisface una *desigualdad isoperimétrica lineal*. Gromov probó que un grupo es hiperbólico si y sólo si admite una presentación finita tal que satisface una desigualdad isoperimétrica lineal [17]. Una demostración completa de esta equivalencia puede hallarse en [15].

Esta es la caracterización de grupos hiperbólicos que utilizaremos más adelante, cuando la relacionemos con tests de curvatura. Veamos cómo adaptarla al contexto combinatorio de diagramas.

Sea  $X$  un 2-complejo combinatorio finito. Un morfismo combinatorio  $f : D \rightarrow X$  es un *diagrama de van Kampen* si  $D$  es un 2-complejo combinatorio conexo y simplemente conexo. Sin pérdida de la generalidad, podemos suponer que  $X = K_P$  para alguna presentación finita  $P$ . Dado un diagrama de van Kampen, es claro que la palabra  $\omega$  que se lee en su borde es trivial en  $\pi_1(X)$ . Más aún, esta palabra es de la forma  $\omega = \prod_{i=1}^N p_i R_i^{\epsilon_i} p_i^{-1}$  en  $\pi_1(X)$ . En este caso,  $l(\omega) = l(\partial D)$ , y  $N$  es la cantidad de 2-celdas de  $D$ .

Recíprocamente, van Kampen probó que dada una palabra  $\omega$  escrita como antes, existe un diagrama de van Kampen con  $N$  2-celdas cuyo borde lee  $\omega$  [31, Proposición 9.2]. Es decir que un grupo  $G$  es hiperbólico si y sólo si existe una presentación finita  $P$  de  $G$  tal que todo diagrama de van Kampen sobre  $K_P$  cumple una desigualdad isoperimétrica lineal.

Hemos introducido dos definiciones equivalentes de grupo hiperbólico. Para los propósitos de esta tesis serán suficientes, pero existen numerosas definiciones de grupo hiperbólico. Se recomienda al lector ver [4, 16, 17] si desea una presentación completa de las mismas.

## 2

# Tests de curvatura

La noción de curvatura es central en geometría riemanniana. Esta noción fue generalizada a espacios métricos [4]. Un espacio métrico geodésico es CAT(0) si sus triángulos geodésicos cumplen la desigualdad CAT(0). Intuitivamente, esta condición dice que los triángulos son más delgados que los triángulos euclídeos. Un espacio métrico tiene curvatura no positiva si es localmente CAT(0). El teorema de Cartan-Hadamard en este contexto afirma que el revestimiento universal  $\tilde{X}$  de un espacio con curvatura no positiva  $X$  es CAT(0) y esto implica en particular que  $\tilde{X}$  es contráctil, y por lo tanto  $X$  es esférico. Gromov probó que para los 2-complejos métricos con celdas euclídeas, tener curvatura no positiva es equivalente a que los ciclos del link geométrico de cada vértice (que es un grafo) tengan longitud mayor o igual a  $2\pi$  [4, 17]. Veremos después que esto es justamente lo que utiliza el test combinatorio de Gersten (Definición 2.2.1): se pide que la suma de los ángulos de cada 2-celda con  $n$ -lados sea menor o igual que  $(n - 2)\pi$  (como sucede en el caso de curvatura menor o igual a cero) y que los ciclos en cada vértice tengan longitud mayor o igual a  $2\pi$  (esto dice que las celdas están modeladas con curvatura no positiva).

Como hemos visto en el capítulo 1, los 2-complejos combinatorios tienen una estructura geométrica intrínseca. Podemos pensar a sus 2-celdas como polígonos, y asignarles “pesos” o “ángulos” a sus esquinas de manera natural. Una vez que tenemos este complejo angulado, surge la siguiente pregunta: ¿Qué podemos decir de su curvatura? Para empezar, debemos dar una definición formal de curvatura en este contexto, y estudiar qué nos dice la misma sobre nuestro complejo. Los resultados de esta sección vendrán en la forma de tests de curvatura. Uno de los prime-

ros tests de curvatura fue introducido por Gersten [14]; y posteriormente otros fueron realizados por Huck y Rosebrock [28], y por Wise [45]. Nuestro objetivo en este capítulo es dar una visión unificada de los mismos. Estudiaremos los diversos tests de curvatura por separado y luego veremos cómo se relacionan entre ellos.

## 2.1. Grafo de Whitehead y 2-complejos angulados

Para comenzar, debemos introducir el objeto sobre el cual trabajaremos durante el resto del capítulo. Dados un 2-complejo combinatorio  $X$  y un vértice  $v \in X^{(0)}$ , recordamos que el link geométrico del vértice,  $Lk_v$ , es el borde de un entorno regular del mismo. Como  $X$  tiene dimensión 2,  $Lk_v$  es un grafo. El *grafo de Whitehead* de  $X$ ,  $Wh_X$ , es la unión de los links geométricos de sus vértices. Como estamos trabajando con 2-complejos combinatorios, podemos pensar a sus 2-celdas como polígonos con sus bordes etiquetados por las funciones de adjunción. En este caso, las esquinas de las 2-celdas están en correspondencia con las aristas del grafo de Whitehead; y los segmentos iniciales y finales de las 1-celdas están en correspondencia con los vértices del mismo. Más en general, llamaremos *esquinas* de  $X$  a las aristas de su grafo de Whitehead. Una función combinatoria  $f : X \rightarrow Y$  entre 2-complejos combinatorios induce una función entre sus grafos de Whitehead. Veamos más concretamente esta construcción en el caso de un complejo asociado a un presentación.

**Ejemplo 2.1.1.** Sea  $P = \langle a, b | aaba^{-1}, bba^{-1} \rangle$ . Su complejo asociado tiene dos 1-celdas y dos 2-celdas

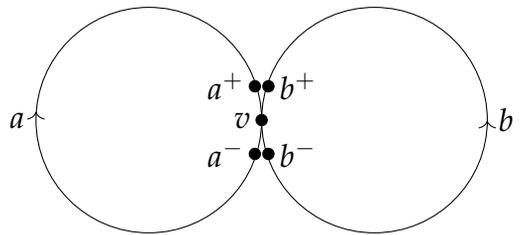
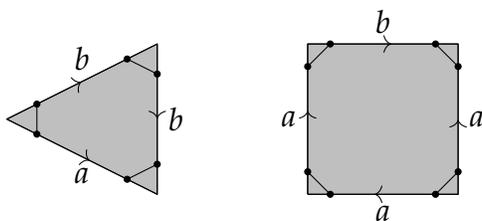
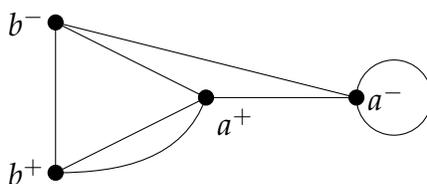


Figura 2.1: 1-esqueleto de  $K_P$

Figura 2.2: 2-celdas de  $K_P$ 

Le damos una orientación a las 1-celdas y describimos las funciones de adjunción de las 2-celdas acordemente. Identificamos al comienzo de la 1-celda  $a$  con  $a^-$  y a su final con  $a^+$ . Hacemos lo mismo para  $b$ . Entonces la primera 2-celda aporta una esquina entre  $b^+$  y  $b^-$ , una entre  $b^+$  y  $a^+$ , y una entre  $a^-$  y  $b^-$ . Haciendo lo mismo con la segunda 2-celda, el grafo de Whitehead resultante es

Figura 2.3: Grafo de Whitehead de  $P$ 

En general, si tenemos generadores  $a_i$  correspondientes a 1-celdas, etiquetamos sus inicios con  $a_i^-$  y sus finales con  $a_i^+$ , y luego procedemos como en el ejemplo. Vale aclarar que en algunos artículos el etiquetado de los vértices del grafo de Whitehead es con los signos invertidos, es decir  $+$  para inicial y  $-$  para final.

Cuando estemos trabajando con presentaciones, llamaremos grafo de Whitehead de una presentación al grafo de Whitehead de su complejo asociado.

Dado un 2-complejo combinatorio  $X$ , un peso  $\omega$  en  $X$  es una función que va de sus esquinas a  $\mathbb{R}$ .  $X$ , junto con una función de peso  $\omega$ , se llamará un *complejo angulado*. Si  $\gamma$  es un camino en  $Wh_X$ , notamos por  $\omega(\gamma)$  a la suma de los pesos de todas las aristas de  $\gamma$ .

Dada una 2-celda  $D$  de un 2-complejo combinatorio  $X$ , entenderemos por  $c \in D$  a una esquina  $c$  correspondiente a  $D$ . Dado un vértice  $v \in X^{(0)}$ ,

las esquinas  $c \in v$  son las esquinas de las 2-celdas cuyo vértice se mapea a  $v$  mediante las funciones de adjunción. Una 2-celda  $D$  de  $X$  admite una subdivisión de su borde de manera tal que la función de adjunción resulte combinatoria. Notamos por  $d(D)$  a la cantidad de aristas de esta subdivisión.

**Definición 2.1.2.** (Curvatura [45]) Dado un complejo angulado  $(X, \omega)$ , definimos:

- La curvatura de una 2-celda  $D$  de  $X$ :

$$\kappa(D) = \left( \sum_{c \in D} \omega(c) \right) - (d(D) - 2)\pi.$$

- La curvatura alrededor de una 0-celda  $v$  de  $X$ :

$$\kappa(v) = 2\pi - \pi\chi(\text{Lk}_v) - \left( \sum_{c \in v} \omega(c) \right),$$

donde  $\chi$  denota la característica de Euler.

En el caso de una 2-celda  $D$ , notamos que  $(d(D) - 2)\pi$  es la suma de los ángulos de un polígono euclídeo de  $d(D)$  lados. Es decir que  $\kappa(D)$  mide qué tan lejos estamos del caso euclídeo. La misma idea aplica para una 0-celda  $v$ . Si  $X$  se embebe en el plano en un entorno de  $v$ , entonces  $\text{Lk}_v$  es un círculo, y en ese caso  $2\pi - \pi\chi(\text{Lk}_v) = 2\pi$ , que es la suma de ángulos esperada en el caso euclídeo.

Ya estamos en condiciones de enunciar y demostrar una versión combinatoria del teorema de Gauss-Bonnet.

**Teorema 2.1.3.** (Gauss-Bonnet combinatorio) Si  $(X, \omega)$  es un complejo angulado, entonces

$$\sum_{D \in 2\text{-celdas}(X)} \kappa(D) + \sum_{v \in X^{(0)}} \kappa(v) = 2\pi\chi(X).$$

*Demostración.* Por simplicidad de notación, dividimos ambos lados de la igualdad y a  $\omega$  por  $\pi$ . Tenemos la siguiente expresión:

$$\sum_{D \in 2\text{-celdas}(X)} \left[ \sum_{c \in D} \omega(c) - (d(D) - 2) \right] + \sum_{v \in X^{(0)}} \left[ 2 - \chi(\text{Lk}_v) - \sum_{c \in v} \omega(c) \right].$$

Como cada esquina corresponde a exactamente una 0-celda y a una 2-celda, las sumas de sus pesos se cancelan y obtenemos

$$\sum_{D \in 2\text{-celdas}(X)} [2 - d(D)] + \sum_{v \in X^{(0)}} [2 - \chi(\text{Lk}_v)].$$

Sean  $V, E$  y  $F$  la cantidad de 0-celdas, 1-celdas y 2-celdas de  $X$  respectivamente. Entonces la fórmula anterior es equivalente a

$$2F - \sum_{D \in 2\text{-celdas}(X)} d(D) + 2V - \sum_{v \in X^{(0)}} \chi(\text{Lk}_v).$$

Ahora, notemos que  $\chi(\text{Lk}_v)$  es igual al número de 1-celdas incidentes a  $v$  menos el número de esquinas en  $v$ ; y  $d(D)$  es igual a la cantidad de esquinas de  $D$ . Como cada 1-celda es incidente a dos 0-celdas (puede conectar a una 0-celda consigo misma, pero en este caso contribuye dos vértices a  $\text{Lk}_v$ ), tenemos

$$\sum_{D \in 2\text{-celdas}(X)} d(D) + \sum_{v \in X^{(0)}} \chi(\text{Lk}_v) = \#\{\text{esquinas}\} + 2E - \#\{\text{esquinas}\} = 2E.$$

Entonces,

$$\sum_{D \in 2\text{-celdas}(X)} \kappa(D) + \sum_{v \in X^{(0)}} \kappa(v) = 2V - 2E + 2F = 2\chi(X)$$

□

El teorema clásico de Gauss-Bonnet relaciona la curvatura gaussiana y la geodésica con la característica de Euler. Concretamente, dada  $M$  una variedad riemanniana compacta orientable de dimensión 2, con borde  $\partial M$ , tenemos que

$$\int_M K dA + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi\chi(M),$$

donde  $K$  es la curvatura gaussiana y  $k_g$  la curvatura geodésica.

No hay una correspondencia directa entre cada una de estas integrales y cada una de las sumas que aparecen en la versión combinatoria. Si separamos la suma de las curvaturas de los vértices en

$$\sum_{v \in X^{(0)} \setminus \partial X^{(0)}} \kappa(v) + \sum_{v \in \partial X^{(0)}} \kappa(v),$$

podemos pensar a la integral de la curvatura geodésica del borde como

$$\sum_{v \in \partial X^{(0)}} \kappa(v),$$

y a la integral de la curvatura gaussiana como

$$\sum_{D \in 2\text{-celdas}(X)} \kappa(D) + \sum_{v \in X^{(0)} \setminus \partial X^{(0)}} \kappa(v).$$

Es decir las curvaturas de las 2-celdas y de los vértices interiores.

## 2.2. Weight test de Gersten

Uno de los primeros tests de curvatura fue el test de curvatura de Gersten [14]. Antes de continuar, debemos establecer la noción de curvatura no positiva para un 2-complejo combinatorio. Diremos que un camino es reducido si ninguna arista es seguida inmediatamente de su inversa.

**Definición 2.2.1.** Un 2-complejo combinatorio tiene *curvatura no positiva* si existe un peso  $\omega$  tal que

1.  $\omega(\gamma) \geq 2\pi$  para todo ciclo reducido no trivial  $\gamma$  en  $Wh_X$ ;
2.  $\kappa(D) \leq 0$  para toda 2-celda  $D$  de  $X$ .

Decimos que dicho complejo está *no positivamente curvado*.

Observemos que la segunda condición es equivalente a  $\sum_{c \in D} \omega(c) \leq (d(D) - 2)\pi$ . Esta formulación será más útil a la hora de asignar pesos manualmente a un grafo de Whitehead.

Con esta definición en mente, es natural suponer que la esfera no tiene curvatura no positiva. Efectivamente esto sucede.

**Lema 2.2.2.** *La esfera  $S^2$  no tiene curvatura no positiva.*

*Demostración.* Supongamos que existe un peso  $\omega$  tal que  $S^2$  tiene curvatura no positiva. Dado un vértice  $v$  de  $S^2$ , como su link geométrico es un círculo, tenemos que  $\kappa(v) = 2\pi - \sum_{c \in v} \omega(c)$ . Por el teorema de Gauss-Bonnet combinatorio

$$\sum_{D \in 2\text{-celdas}(S^2)} \kappa(D) + \sum_{v \in S^2^{(0)}} \kappa(v) = 2\pi\chi(S^2),$$

pero el lado izquierdo es no positivo y el lado derecho es igual a  $4\pi$ , absurdo.  $\square$

**Teorema 2.2.3.** (*Weight test de Gersten [14]*) Sea  $X$  un 2-complejo combinatorio con curvatura no positiva. Entonces  $X$  es diagramáticamente reducible.

*Demostración.* Supongamos que  $f : S \rightarrow X$  es un diagrama esférico reducido. Sea  $\omega$  el peso tal que  $X$  resulta no positivamente curvado. Podemos pullbackear el peso  $\omega$  para obtener un peso  $\tilde{\omega}$  en  $S$ . Es claro que  $\kappa(D) \leq 0$  para toda 2-celda  $D$  de  $S$ , ya que las 2-celdas se mapean a 2-celdas de manera combinatoria. Si podemos probar que  $\tilde{\omega}(\gamma) \geq 2\pi$  para cada ciclo reducido no trivial  $\gamma$  en  $Wh_S$ , entonces  $S$  sería no positivamente curvado, lo cual es una contradicción.

El grafo de Whitehead de  $S$  consiste de la unión disjunta de círculos que corresponden a los links geométricos de sus vértices. Luego, esos círculos son los ciclos reducidos  $\gamma$  que estamos buscando. Notamos que como el diagrama está reducido, estos círculos se mapean a ciclos reducidos en  $Wh_X$ . Sabemos que  $X$  es no positivamente curvado. Entonces, cuando pullbackeamos el peso obtenemos que  $\tilde{\omega}(\gamma) \geq 2\pi$  para todo círculo  $\gamma$  en  $Wh_S$ , como queríamos.  $\square$

Veamos algunos ejemplos de cómo aplicar este test.

**Ejemplo 2.2.4.** Consideramos la presentación  $P = \langle a, b, c | ccb^{-1}ab \rangle$ . Su grafo de Whitehead es el siguiente.

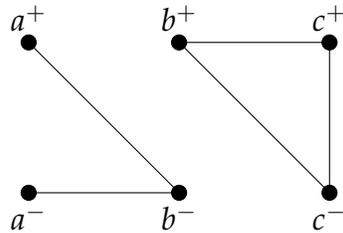


Figura 2.4: Grafo de Whitehead de  $P$

Intuitivamente, queremos que los pesos de los ciclos sumen “mucho” (al menos  $2\pi$ ), pero a la vez queremos que la suma total de los pesos (que corresponden a una única celda de largo cinco) sea menor a  $5\pi - 2\pi = 3\pi$ . Podemos por ejemplo asignarle un peso de  $\pi$  a cada una de las aristas del triángulo, y 0 a las otras dos.

**Ejemplo 2.2.5.** Sea  $K_P$  el dunce hat, donde  $P = \langle a|aaa^{-1} \rangle$ . Su grafo de Whitehead tiene la siguiente forma.

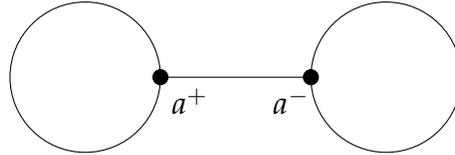


Figura 2.5: Grafo de Whitehead del dunce hat

Como queremos que los pesos de cada ciclo sumen al menos  $2\pi$ , lo mínimo que podemos asignarle a cada círculo es  $2\pi$ . Ahora, la única 2-celda proviene de una palabra de largo tres. Luego la suma total de los pesos tiene que ser menor a igual a  $\pi$ . Por lo tanto, la arista que conecta  $a^+$  con  $a^-$  tiene que pesar como máximo  $-3\pi$ .

Consideremos el ciclo reducido que primero da la vuelta de la izquierda, después cambia de vértice, después recorre la vuelta de la derecha y por último vuelve a  $a^+$ . Por lo observado antes, resulta que la suma de los pesos de las aristas que recorre debe ser menor o igual a  $-2\pi$ . Luego el dunce hat no tiene curvatura no positiva. Era de esperar que esto sucediera, pues previamente habíamos visto que el dunce hat no es diagramáticamente reducible, pero sí es esférico (más aún, contráctil).

### 2.3. Weight test de Huck y Rosebrock

Como hemos visto en la sección anterior, el weight test de Gersten resulta ser bastante restrictivo. El hecho de tener que chequear todos los ciclos reducidos es problemático. Ejemplos sencillos como el dunce hat no cumplen el test porque permitimos pasar por la misma arista más de una vez. Para resolver esta dificultad, Huck y Rosebrock [28] introdujeron una nueva noción de reducibilidad que permite formular un weight test más abarcativo.

Dado un diagrama esférico o de van Kampen  $f : Y \rightarrow X$ , diremos que es *vertex reduced* si cada camino  $\gamma \in Wh_Y$  se mapea a un camino  $f(\gamma) \in Wh_X$  en el que ninguna arista es recorrida dos veces en sentidos opuestos. Un 2-complejo combinatorio  $X$  se dice *vertex aspherical* si no existe ningún diagrama esférico  $g : S \rightarrow X$  vertex reduced. Es fácil ver que un

2-complejo combinatorio diagramáticamente reducible es vertex aspherical, ya que un diagrama vertex reduced es, en particular, reducido.

Al igual que con los diagramas no reducidos, es posible aplicar movimientos de reducción a los diagramas no vertex reduced. Como se ve en la siguiente figura [28], podemos realizar una secuencia de diamond moves que reducen la cantidad de 2-celdas de a dos en cada paso.

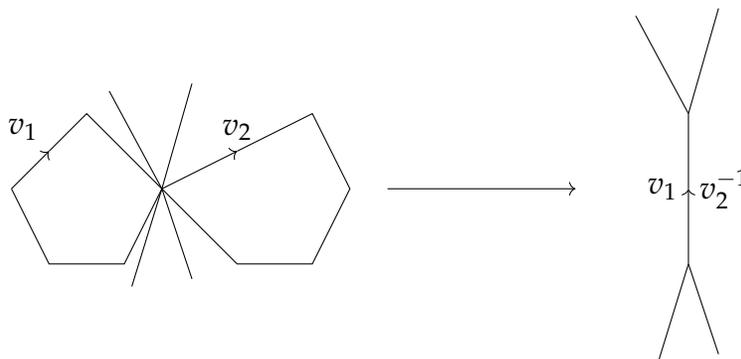


Figura 2.6: Movimiento de reducción de un diagrama no vertex reduced

Los detalles de estas operaciones y de por qué resultan homotopías pueden encontrarse en [9]. Con estos movimientos, podemos transformar cualquier diagrama en uno vertex reduced. Luego, al igual que sucedía con los complejos diagramáticamente reducibles, un 2-complejo combinatorio vertex aspherical  $X$  es esférico, ya que el conjunto de los diagramas esféricos genera  $\pi_2(X)$  como  $\pi_1(X)$ -módulo.

Introducimos ahora una noción debida a Wise [45], que se ajusta al contexto de los complejos vertex aspherical. Diremos que un camino  $\gamma$  en un grafo es *simple* si no tiene aristas repetidas.

**Definición 2.3.1.** Un 2-complejo combinatorio tiene *curvatura planar*  $\leq \alpha$  si existe un peso  $\omega$  tal que

1.  $\omega(\gamma) \geq 2\pi - \alpha$  para todo ciclo simple no trivial  $\gamma$  en  $Wh_X$ ;
2.  $\kappa(D) \leq \alpha$  para toda 2-celda  $D$  de  $X$ .

Cuando  $\alpha = 0$ , decimos que  $X$  tiene curvatura planar no positiva.

Si estamos en el caso de curvatura planar no positiva, la única diferencia con la definición de curvatura no positiva es que ahora los ciclos que

debemos verificar son simples en lugar de reducidos. Notamos que un ciclo simple es en particular, reducido. Por lo tanto, esta definición es menos restrictiva.

**Teorema 2.3.2.** (*Weight test de Huck y Rosebrock [28]*) Sea  $X$  un 2-complejo combinatorio con curvatura planar no positiva. Entonces  $X$  es vertex aspherical.

Con este test, podemos probar la asfericidad de casos que antes no pasaban el weight test de Gersten. Por ejemplo, el dunce hat no cumple el weight test de Gersten (más aún, no es diagramáticamente reducible), pero sí tiene curvatura planar no positiva. Para verlo, basta con utilizar el peso que le dimos previamente. Al no permitir ciclos reducidos, basta con verificar que ambos bucles tengan un peso mayor o igual a  $2\pi$ .

Otra ventaja sobre el weight test de Gersten, es que esta condición es fácilmente computable. Como estamos trabajando con complejos finitos, sus grafos de Whitehead son finitos. Luego tienen una cantidad finita de ciclos simples (esto no tiene por qué ser cierto si consideramos ciclos reducidos). Por lo tanto, el tener curvatura planar no positiva puede traducirse en un sistema finito de inecuaciones, una por cada ciclo simple y una por cada 2-celda. El mismo puede ser testeado con el algoritmo símplex [35].

Este test puede ser levemente modificado para obtener un resultado de hiperbolicidad. Si pedimos que una de las dos desigualdades de la definición de curvatura planar no positiva sea estricta, conseguimos el siguiente resultado.

**Teorema 2.3.3.** (*Weight test hiperbólico*) Sea  $X$  un 2-complejo combinatorio que admite un peso  $\omega$  tal que

1.  $\omega(\gamma) \geq 2\pi$  para todo ciclo simple no trivial  $\gamma$  en  $Wh_X$ ;
2.  $\kappa(D) < 0$  para toda 2-celda  $D$  de  $X$ .

Entonces  $\pi_1(X)$  es hiperbólico.

Huck y Rosebrock prueban este resultado para presentaciones, usando su star graph en lugar de su grafo de Whitehead [28]. Nosotros haremos una demostración utilizando el grafo de Whitehead, y valiéndonos del teorema de Gauss-Bonnet combinatorio. Antes de continuar, observamos que como el complejo sobre el que trabajamos es finito, es equivalente pedir que la desigualdad sea estricta en la primera o en la segunda condición. En la demostración del test probaremos que  $X$  satisface una desigualdad isoperimétrica lineal.

*Demostración.* Queremos probar que dado un diagrama de van Kampen  $f : A \rightarrow X$ ,  $F \leq \text{cte } l(\partial A)$ , donde  $F$  es la cantidad de 2-celdas de  $A$ . Sin pérdida de la generalidad, podemos suponer que el diagrama es vertex reduced.

Sea  $\omega$  el peso en  $X$ , podemos pullbackearlo a  $A$ . Como  $X$  tiene curvatura planar negativa, obtenemos que  $\kappa(D) < 0$  para toda 2-celda  $D$  de  $A$ . El link geométrico de un vértice interior de  $A$  es un círculo, por lo que su imagen en  $Wh_X$  es un ciclo. Luego, como el diagrama es vertex reduced, la imagen de cada link geométrico de un vértice interior de  $A$  puede descomponerse en ciclos simples como se muestra a continuación.



Figura 2.7: Descomposición en ciclos simples

Cada uno de estos ciclos tiene curvatura mayor o igual a  $2\pi$ . Luego  $\kappa(v) \leq 0$  para todo vértice  $v \in A - \partial A$ .

Como  $X$  es compacto,  $\kappa(D) \leq M < 0$  para toda 2-celda  $D$  y un  $M < 0$ . Luego

$$MF \geq \sum_{D \in 2\text{-celdas}(A)} \kappa(D) = 2\pi\chi(A) - \sum_{v \in A^{(0)}} \kappa(v),$$

donde la última igualdad es el teorema de Gauss-Bonnet combinatorio. Como  $A$  es un diagrama de van Kampen,  $\chi(A) = 1$ . Ahora

$$F \leq \frac{1}{-M} \left( \sum_{v \in A^{(0)}} \kappa(v) - 2\pi \right) \leq \frac{1}{-M} \left( \sum_{v \in \partial A^{(0)}} \kappa(v) - 2\pi \right),$$

donde la última igualdad vale porque  $\kappa(v) \leq 0$  para los vértices interiores.

Si logramos acotar la curvatura de los vértices del borde por una constante  $N$ , entonces  $F \leq \frac{N}{-M} l(\partial A)$ . Para eso basta acotar  $\sum_{c \in v} \omega(c)$  por abajo, para  $v$  un vértice en  $\partial(A)$ .

Como  $X$  es compacto, su grafo de Whitehead es finito. Luego existen finitos caminos simples. Sea  $\mu$  el menor de los pesos de esos caminos. El link geométrico de un vértice del borde es un camino reducido que puede

tener aristas dobles. Veamos que el peso de cualquier camino reducido es mayor o igual a  $\mu$ . Si el camino tiene una arista doble, podemos separarlo en un ciclo (que tiene peso mayor o igual a  $2\pi$ ) y un camino con menos aristas dobles de la siguiente manera:



Figura 2.8: Reducción de aristas dobles

Continuando con este proceso, llegamos a que el peso de cualquier camino reducido es mayor o igual a  $\mu$ . Por lo tanto obtenemos la desigualdad isoperimétrica lineal deseada.  $\square$

## 2.4. Curvatura seccional

Los resultados y definiciones presentados en esta sección se deben a Wise [45]. Su definición de curvatura seccional nos permitirá vincular los test de curvatura con otros conceptos como local indicabilidad, que no habían aparecido previamente en relación a otros tests de curvatura.

Un morfismo entre 2-complejos combinatorios es una *inmersión* si es localmente inyectivo.

**Definición 2.4.1.** [45] Una *sección* de un 2-complejo combinatorio  $X$  en la 0-celda  $x$  es una inmersión punteada  $(X, x) \rightarrow (S, s)$ . Una sección se dice *planar* si  $Lk(s)$  es un círculo; y se dice *regular* si  $Lk_s$  es compacto, conexo, sin hojas y contiene al menos una arista.

Notamos que al tratarse de inmersiones, el morfismo inducido  $Lk_s \rightarrow Lk_x$  es inyectivo. Es decir que podemos ver a  $Lk_s$  como un subgrafo de  $Lk_x$ .

En el caso de que  $X$  sea angulado, podemos pullbackear su peso a  $S$  y definir la curvatura de la sección como  $\kappa(s)$ . Diremos que  $X$  tiene curvatura seccional  $\leq \alpha$  en  $x$  si existe un peso  $\omega$  en  $X$  tal que todas las secciones regulares de  $X$  en  $x$  tienen curvatura  $\leq \alpha$ . Además, si existe un peso en  $X$  tal que tiene curvatura seccional  $\leq \alpha$  en todas sus 0-celdas y  $\kappa(D) \leq \alpha$  para toda 2-celda  $D$  de  $X$ , diremos que  $X$  tiene curvatura seccional  $\leq \alpha$ . Cuando  $\alpha = 0$ , diremos que  $X$  tiene curvatura seccional no positiva.

Observamos que si esta condición se cumple sólo para secciones planares,  $X$  tiene curvatura planar  $\leq \alpha$ . Esto se debe a que la imagen de un círculo por una inmersión es un ciclo simple, y cualquier ciclo simple proviene de una sección planar. Como las secciones planares en particular son regulares, los resultados para complejos con curvatura planar no positiva de la sección anterior también son válidos para complejos con curvatura seccional no positiva.

Podemos entonces dar una respuesta afirmativa a una pregunta planteada por Wise. En [45, Problem 2.13], él conjetura que todo 2-complejo combinatorio compacto  $X$  con curvatura seccional negativa tiene grupo fundamental hiperbólico. Esto es corolario inmediato del weight test hiperbólico probado por Huck y Rosebrock [28]. Más aún, basta con pedir que la curvatura planar sea negativa.

Antes de continuar haremos una breve digresión. Originalmente Wise definió curvatura planar y seccional para un complejo angulado (es decir, junto con un peso predeterminado). Como nuestro interés está puesto en la estructura topológica del complejo, hablamos de la existencia de un peso tal que cumpla las condiciones de curvatura dadas. Es decir que nuestras definiciones dependen exclusivamente del complejo. Podría plantearse una analogía con el estudio de variedades riemannianas, o de variedades que admiten una estructura riemanniana. Dicho esto, aclaramos que esta diferencia en las definiciones no influye sobre la veracidad de los resultados de la sección.

**Definición 2.4.2.** Un 2-complejo combinatorio  $X$  tiene *inmersiones no positivas* si para toda inmersión  $Y \rightarrow X$  con  $Y$  compacto y conexo, o bien  $\chi(Y) \leq 0$  o bien  $\pi_1(Y)$  es trivial.

**Definición 2.4.3.** Un grupo  $G$  es *coherente* si todo subgrupo finitamente generado es finitamente presentado.

Como mencionamos en el capítulo 1, en [44] Wise prueba que un 2-complejo con torres no positivas tiene grupo fundamental localmente indicable. Además, bajo las mismas hipótesis resulta coherente. Es evidente de las definiciones que tener inmersiones no positivas implica tener torres no positivas. A continuación, veremos que los complejos con curvatura seccional no positiva cumplen una condición más fuerte que la de inmersiones no positivas.

Recordamos que una cara libre de una  $(n + 1)$ -celda es una  $n$ -celda que es cara simple de ella y no es cara de ninguna otra celda. Decimos que un complejo es *colapsado* si no tiene caras libres. Claramente todo complejo finito se puede colapsar a un subcomplejo colapsado.

**Teorema 2.4.4.** *Sea  $X$  un 2-complejo combinatorio con curvatura seccional no positiva. Sea  $Y \rightarrow X$  una inmersión con  $Y$  colapsado, compacto y conexo. Entonces o bien  $\chi(Y) \leq 0$  o  $Y$  consiste de una única 0-celda.*

*Demostración.* Supongamos que  $Y$  no consiste de una única 0-celda. Entonces, al ser  $Y$  conexo,  $Lk_v$  es no vacío para todo  $v \in Y^{(0)}$ . Como  $Y$  es compacto y colapsado,  $Lk_v$  es finito, sin hojas y no es un vértice aislado. Si logramos ver que esto implica que  $\kappa(v) \leq 0$ , entonces por el teorema de Gauss-Bonnet, resulta que  $\chi(Y) \leq 0$ .

Recordamos que  $\kappa(v) = 2\pi - \pi\chi(Lk_v) - (\sum_{c \in v} \omega(c))$ . Luego cada vértice aislado de  $Lk_v$  resta  $\pi$  a  $\kappa(v)$ . Ahora, cada una de las componentes conexas no triviales de  $Lk_v$  es compacta, sin hojas y tiene al menos una arista. Entonces proviene de una sección regular. Como  $X$  tiene curvatura seccional no positiva, resulta que  $\kappa(v) \leq 0$ .  $\square$

Dada una inmersión  $Y \rightarrow X$ , podemos colapsar  $Y$  a un complejo homotópicamente equivalente y obtener una inmersión  $Y' \rightarrow X$  que se ajusta a las hipótesis del teorema. Por lo tanto, un complejo con curvatura seccional no positiva tiene inmersiones no positivas.

**Corolario 2.4.5.** *Sea  $X$  un 2-complejo combinatorio. Entonces  $\pi_1(X)$  es localmente indicable y coherente.*

**Corolario 2.4.6.** *Sea  $Y$  un 2-complejo combinatorio compacto y colapsado, con curvatura seccional no positiva. Entonces  $\pi_1(Y)$  es no trivial salvo que  $Y$  consista de un único vértice.*

*Demostración.* Como  $Y$  tiene curvatura seccional no positiva, es esférico. Consideramos la inmersión  $Y \xrightarrow{id} Y$ . Luego  $\chi(Y) \leq 0$ . Por lo tanto  $\pi_1(Y)$  es no trivial, pues todo complejo esférico con grupo fundamental trivial tiene característica de Euler 1.  $\square$

## 2.5. Comparación de curvaturas

En este capítulo hemos introducido distintas definiciones de curvatura, cada una con sus implicaciones sobre 2-complejos combinatorios. Ahora vamos a comparar las siguientes nociones y ver cómo se relacionan.

- Curvatura no positiva.
- Curvatura seccional no positiva.
- Curvatura planar no positiva.

Como ya mencionamos previamente, es claro que si un 2-complejo combinatorio  $X$  tiene curvatura seccional no positiva, entonces tiene curvatura planar no positiva. Esto se debe a que las secciones planares en particular son regulares.

También es evidente que tener curvatura no positiva implica tener curvatura planar no positiva, pues como habíamos notado, los ciclos simples son reducidos.

En un principio, no es claro cuál es la relación entre curvatura no positiva y curvatura planar no positiva. Resulta ser que ninguna implica la otra. Esto también nos dice que tener curvatura planar no positiva no implica ninguna de las otras dos.

**Ejemplo 2.5.1.** Primero veamos un ejemplo de un complejo con curvatura no positiva, pero sin curvatura seccional no positiva. Sea

$$P = \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b, aca^{-1}c, dbd^{-1}b, dcd^{-1}c \rangle .$$

Su grafo de Whitehead es un grafo bipartito  $K(4,4)$ .

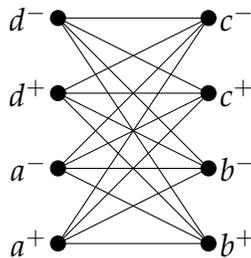


Figura 2.9: Grafo de Whitehead de  $P$

Si le asignamos un peso constante  $\frac{\pi}{2}$ , resulta tener curvatura no positiva, pues todos los ciclos tienen largo al menos 4. Sin embargo,  $\chi(K_P) = 1$ . Luego, por el teorema de Gauss-Bonnet,

$$\sum_{D \in 2\text{-celdas}(K_P)} \kappa(D) + \kappa(v) = 2\pi > 0,$$

donde  $v$  es el único vértice de  $K_P$ . Por lo tanto no tiene curvatura seccional no positiva.

**Ejemplo 2.5.2.** El ejemplo de un complejo con curvatura seccional no positiva pero sin curvatura no positiva es un tanto más trabajoso. En [45], Wise da un ejemplo de un complejo con un peso fijo tal que tiene curvatura seccional no positiva. Ese mismo peso no sirve para probar que el complejo tiene curvatura no positiva. Sin embargo sí existe otro peso con el cual su complejo resulta no positivamente curvado. Recalcamos así la diferencia entre las definiciones de Wise, en las cuales el complejo viene con un peso dado, y nuestras definiciones, que hablan de la existencia de un peso.

Consideramos la presentación

$$P = \langle a, b, c, d, e, f, g \mid aa^{-1}aa^{-1}b, bgfedcdefgcbbb^{-1} \rangle.$$

Su grafo de Whitehead es el siguiente:

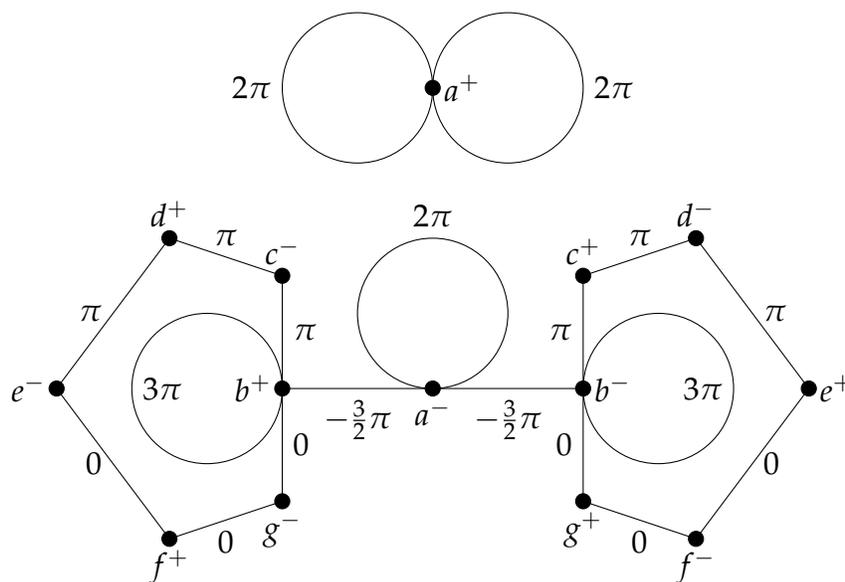


Figura 2.10: Grafo de Whitehead de  $P$

Si consideramos los pesos asignados en la figura, podemos ver que tiene curvatura seccional no positiva. Sin embargo puede verificarse que este complejo no tiene curvatura no positiva con un argumento similar al hecho para el dunce hat. Es decir que tener curvatura seccional no positiva no implica tener curvatura no positiva.

Si bien no hay una relación directa entre curvatura no positiva y curvatura seccional no positiva, sí la hay cuando los pesos considerados son no negativos. Más aún, esta relación es entre curvatura no positiva y curvatura planar no positiva. Wise demostró el siguiente lema en [45].

**Lema 2.5.3.** *Sea  $X$  un 2-complejo combinatorio. Sea  $\omega$  un peso no negativo en  $X$  para el cual  $(X, \omega)$  tiene curvatura planar no positiva. Entonces  $X$  tiene curvatura no positiva.*

*Demostración.* El peso que nos sirve para probar que  $X$  tiene curvatura no positiva es el mismo  $\omega$ . En efecto, dado un ciclo reducido, este contiene un ciclo simple. Como tiene curvatura planar no positiva, los pesos de este ciclo simple suman al menos  $2\pi$ . Luego la suma de los pesos del ciclo reducido también es mayor o igual a  $2\pi$ , pues  $\omega$  es no negativo. Es decir que  $X$  tiene curvatura no positiva.  $\square$

## 3

# Asféricidad de LOTs

Comenzamos por recordar la conjetura de Whitehead. La misma dice que cualquier subcomplejo arcoconexo de un 2-complejo asférico es asférico [43]. Al día de hoy, esta conjetura sigue abierta. En lo que sigue presentaremos uno de los casos testigo más relevantes en el estudio de la versión finita de la conjetura. Howie demostró que la asféricidad de los labelled oriented trees implica la conjetura de Whitehead en el caso de 2-complejos finitos de ser verdadera la conjetura de Andrews-Curtis [26].

### 3.1. Ribbon disks

Un *ribbon  $n$ -disk* ( $n \geq 2$ ) es un embedding propio  $k : D^n \hookrightarrow D^{n+2}$  tal que  $r \circ k : D^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Morse sin puntos críticos de índice mayor a 1, donde  $r : D^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función radial  $x \mapsto \|x\|$ . En [25] Howie estudió la estructura combinatoria del spine del complemento de los ribbon disks. Como veremos a continuación, esta resulta de gran interés para la conjetura de Whitehead. Para empezar, los spines de complementos de nudos se realizan como spines de complementos de ribbon disks. Papakyriakopoulos probó que los primeros son asféricos [42] lo cual es un fuerte indicio de la asféricidad de estos últimos.

Veamos brevemente el procedimiento exhibido por Howie para hallar una presentación de un spine del complemento de un ribbon disk [25]. Como  $r \circ k : D^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Morse sin puntos críticos de índice mayor a 1, podemos llevar  $k$  a  $S^{n+1}$  para obtener una inmersión  $i : D^n \rightarrow S^{n+1}$  cuyas únicas singularidades son finitos discos de codimensión

1 que representan puntos dobles [19]. Estas inmersiones se llaman *ribbon immersions*. A su vez, “empujando” una ribbon immersion hacia el interior de la esfera, obtenemos un ribbon disk.

Dada una ribbon immersion  $i : D^n \rightarrow S^{n+1}$  llamaremos  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  a cada uno de los  $(n-1)$ -discos de puntos dobles. Si miramos sus preimágenes en  $D^n$ , cada  $\alpha_i$  da lugar a un  $(n-1)$ -disco  $\gamma_i$  que interseca a  $\partial D^n$  en su borde; y un  $(n-1)$ -disco  $\gamma'_i$  que está en el interior de  $D^n$ . Los  $\gamma_i$  nos dan una subdivisión de  $D^n$ , y consideramos  $\Gamma$  el grafo dual a la misma. Como  $D^n$  es simplemente conexo, se sigue que este grafo es un árbol. Podemos embeberlo naturalmente en  $D^n$ , y darle una orientación basándonos en la orientación que tiene  $i(D^n)$  en  $S^{n+1}$ .

Por último definimos una función de etiquetado  $\lambda : E(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)$ . Cada arista de  $\Gamma$  está en correspondencia con un  $\gamma_i$ . Entonces etiquetaremos dicha arista con el vértice correspondiente a la componente que contenga a  $\gamma'_i$ . El resultado de este proceso es lo que llamaremos un *labelled oriented tree*. Abstraigamos esta definición.

**Definición 3.1.1.** Un *labelled oriented graph* (LOG) es un grafo  $\Gamma$  que consiste de un conjunto de vértices  $V = V(\Gamma)$ , un conjunto de aristas  $E = E(\Gamma)$  y tres morfismos  $\iota, \tau, \lambda : E \rightarrow V$ . Los morfismos  $\iota$  y  $\tau$  denotan los vértices iniciales y finales respectivamente; y  $\lambda$  es la función de etiquetado. Cuando  $\Gamma$  sea un árbol, diremos que es un *labelled oriented tree* (LOT).

Dado un LOG  $\Gamma$ , podemos construir una presentación  $P(\Gamma)$  de un grupo  $G(\Gamma)$  usando los tres morfismos:

$$P(\Gamma) = \langle V(\Gamma) | \iota(e)\lambda(e)\tau^{-1}(e)\lambda^{-1}(e) : e \in E(\Gamma) \rangle .$$

Un *nudo* es un embedding de  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . En analogía con los ribbon disks y las ribbon immersions, siempre existe un plano sobre el cual la proyección del nudo tiene singularidades a lo sumo dobles. Dicha proyección se llama *proyección regular*. La misma consta de arcos  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , donde  $\alpha_{i-1}$  se conecta con  $\alpha_i$  cuando pasa por debajo de otro arco, y  $\alpha_k$  se conecta con  $\alpha_1$ . Si le damos una orientación a  $S^1$  obtenemos una orientación sobre estos arcos inducida por  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Hay dos situaciones de cruce posibles entre estos arcos:

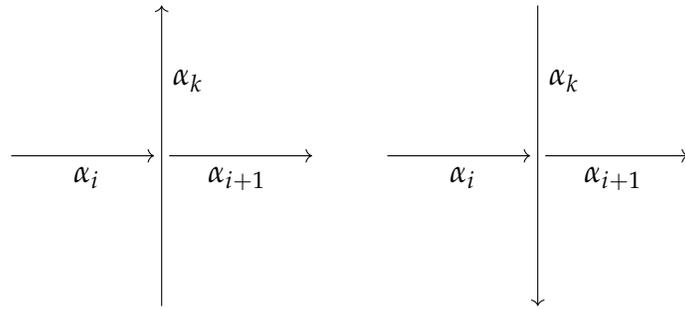


Figura 3.1: Cruces de arcos de un nudo

En el primer caso definimos una relación  $r_i = \alpha_{i+1}\alpha_k\alpha_i^{-1}\alpha_k^{-1}$ , y en el segundo caso  $r_i = \alpha_i\alpha_k\alpha_{i+1}^{-1}\alpha_k^{-1}$ . Con ellas construimos la *presentación de Wirtinger* del nudo:

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k | r_1, \dots, r_{k-1} \rangle .$$

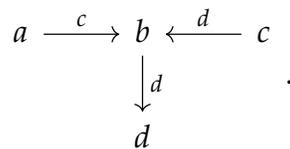
Notar que omitimos la última relación, que puede deducirse de las primeras  $k - 1$ . Como aplicación del teorema de van Kampen, puede verse que esta es una presentación del grupo fundamental del complemento del nudo. Más aún, su complejo asociado se embebe como spine en el complemento del nudo. La demostración de este hecho puede hallarse en [36, Capítulo 3].

**Observación 3.1.2.** *Las presentaciones de Wirtinger del complemento de nudos pueden realizarse como presentaciones de LOTS.*

Ilustraremos a los LOTS como en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.1.3.** El LOT  $\Gamma$  de la siguiente figura induce la presentación

$$P = \langle a, b, c, d | acb^{-1}c^{-1}, cdb^{-1}d^{-1}, bdd^{-1}d^{-1} \rangle .$$



Realizando el proceso inverso al anterior, dado un LOT podemos construir una ribbon immersion. Así obtenemos una correspondencia entre ribbon disks y LOTs. Notaremos por  $K_\Gamma$  al complejo asociado a  $P(\Gamma)$ . Entonces tenemos el siguiente resultado [25].

**Proposición 3.1.4.** *Sea  $i : D^n \rightarrow S^{n+1}$  una ribbon immersion, y sea  $k : D^n \rightarrow D^{n+2}$  su ribbon disk correspondiente. Sea  $\Gamma$  el LOT asociado a  $i$ . Entonces  $K_\Gamma$  se embebe en  $D^{n+2} \setminus k(D^n)$  como spine.*

Diremos que un LOT es esférico cuando su presentación asociada lo es. Cuando no se preste a confusión, nos referiremos por LOT tanto al grafo como al complejo asociado. La proposición anterior implica que probar la asfericidad de los LOTs es equivalente a probar la asfericidad de los complementos de ribbon disks. Dado un LOT  $\Gamma$  tenemos su presentación  $P(\Gamma)$ . Observemos que si le agregamos como relación a uno de sus generadores obtenemos una presentación balanceada del grupo trivial. Luego  $K_\Gamma$  resulta ser un subcomplejo de un 2-complejo contráctil. Por lo tanto los LOTs son un caso testigo de la conjetura de Whitehead. Más aún, Howie probó el siguiente resultado [26] que exhibe la relevancia de la asfericidad de LOTs.

**Teorema 3.1.5.** *Sea  $L$  un 2-complejo finito que se 3-deforma a un punto. Sea  $D$  una 2-celda de  $L$  y sea  $K = L \setminus D$ . Entonces  $K$  se 3-deforma al complejo asociado a un LOT.*

La conjetura de Andrews-Curtis afirma que si  $K$  y  $L$  son 2-complejos finitos contráctiles, entonces  $K$  se 3-deforma a  $L$ . Observamos que si esta conjetura es cierta el teorema anterior nos dice que cualquier 2-complejo de la forma  $K = L \setminus D$ , donde  $L$  es un 2-complejo finito contráctil y  $D$  es una 2-celda de  $L$ , tiene el tipo homotópico de un complejo asociado a un LOT. Es decir que de valer la conjetura de Andrews-Curtis, la asfericidad de LOTs implicaría la conjetura de Whitehead para el caso finito.

## 3.2. Resultados elementales

Nuestro objetivo es probar la asfericidad de la mayor cantidad posible de LOTs. Como sólo nos interesa el tipo homotópico de los mismos, comencemos por identificar operaciones en los LOTs que no modifican su tipo homotópico. en [25] Howie considera los siguientes movimientos:

1. Si una arista tiene como etiqueta a uno de sus vértices terminales, entonces podemos removerla e identificar su vértice inicial con su vértice final.

$$\begin{array}{ccc}
 a \xrightarrow{c} b & \xleftarrow{d} & c \\
 \downarrow d & & \\
 & & d
 \end{array}
 \implies
 a \xrightarrow{c} b \xleftarrow{b} c$$

2. Si dos aristas tienen la misma etiqueta y comparten su vértice inicial (final), podemos identificarlas junto con sus vértices finales (iniciales).

$$\begin{array}{ccc}
 a \xrightarrow{d} b & \xleftarrow{d} & c \\
 \downarrow c & & \\
 & & d
 \end{array}
 \implies
 \begin{array}{c}
 a \\
 \downarrow d \\
 b \\
 \downarrow a \\
 d
 \end{array}$$

3. Supongamos que existe una hoja que no aparece nunca como etiqueta. Entonces podemos removerla junto con su arista incidente.

$$\begin{array}{ccc}
 a \xrightarrow{c} b & \xleftarrow{d} & c \\
 \downarrow d & & \\
 & & d
 \end{array}
 \implies
 \begin{array}{ccc}
 & \xleftarrow{d} & c \\
 \downarrow d & & \\
 & & d
 \end{array}$$

En todos los movimientos anteriores, la nueva función de adjunción se ajusta a las identificaciones de la manera obvia. Diremos que un LOT está *reducido* si ninguno de estos movimientos puede aplicársele.

Notamos que por la forma que tienen sus relaciones, un LOG  $\Gamma$  tiene la misma homología que la suspensión  $S(\Gamma \sqcup *)$  (donde estamos pensando al grafo como un complejo de dimensión 1). En particular, los LOTS tienen la homología de un  $S^1$ . Esto es útil a la hora de probar su asfericidad, ya que como vimos en el capítulo 1, alcanza con ver que su grupo fundamental sea localmente indicable.

Dado un LOG  $\Gamma$ , un subgrafo  $\Gamma'$  es un *sub-LOG* si es cerrado con respecto a la función de etiquetado. Es decir, si sus aristas están etiquetadas con

sus vértices. El siguiente lema se deduce de un resultado de Whitehead que puede encontrarse en [6, Teorema 7.3].

**Lema 3.2.1.** Sean  $X_1 \leftarrow Y \hookrightarrow X_2$  2-complejos esféricos. Entonces el producto amalgamado  $X_1 \cup_Y X_2$  es esférico.

Podemos aplicar este lema al caso de LOGs para obtener el siguiente resultado.

**Corolario 3.2.2.** Sea  $\Gamma$  un LOG y sean  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  sub-LOGs tales que  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$  y se intersecan en un sub-LOG esférico. Entonces si  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son esféricos,  $\Gamma$  lo es.

Por ejemplo, si dado un LOT  $\Gamma$  encontramos dos sub-LOTs esféricos que lo cubran y que se intersequen sólo en un vértice, podemos concluir que  $\Gamma$  es esférico.

**Ejemplo 3.2.3.** Sea  $\Gamma$  el siguiente LOT:

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{e} & b & \xleftarrow{d} & c & \xrightarrow{f} & d \\ & & \downarrow b & & \uparrow b & & \\ & & e & & f & & \end{array}$$

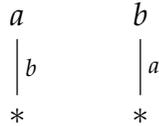
Los sub-LOTs

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{e} & b \\ \downarrow b & & \\ e & & \end{array}, Y \begin{array}{ccc} b & \xleftarrow{d} & c & \xrightarrow{f} & d \\ & & \uparrow b & & \\ & & f & & \end{array}$$

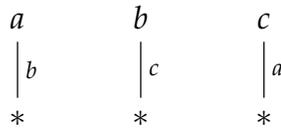
están en las condiciones del teorema, y son ambos esféricos. Su asfericidad puede verse fácilmente con los resultados de la próxima sección. Por lo tanto,  $\Gamma$  es esférico.

Veamos una aplicación sencilla del weight test de Gersten para el caso de LOTs. Las relaciones de un LOT tienen todas largo 4, por lo que la suma de los pesos correspondientes a cada celda no debe ser mayor a  $2\pi$ . Luego, si el grafo de Whitehead de un LOT  $\Gamma$  no tiene ciclos de largo menor a 4, podemos asignarle el peso constante  $\frac{1}{2}\pi$ , y así resulta no positivamente curvado. Esta última condición puede chequearse fácilmente en el grafo del LOT. Simplemente no debe ocurrir ninguna de las siguientes situaciones:

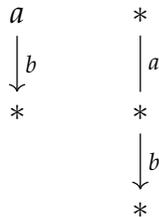
- No puede haber una arista con un vértice terminal  $a$  y con etiqueta  $b$ , y otra con un vértice terminal  $b$  y etiqueta  $a$ .



- No puede haber una arista con un vértice terminal  $a$  y con etiqueta  $b$ , otra con un vértice terminal  $b$  y etiqueta  $c$ , y otra con vértice terminal  $c$  y etiqueta  $a$ .



- No puede haber una arista con un vértice inicial  $a$  y con etiqueta  $b$ , y otras dos aristas consecutivas, una con etiqueta  $a$  y la otra con etiqueta  $b$  orientada alejándose de la arista anterior.



- La situación anterior, pero con las orientaciones de las aristas etiquetadas por  $b$  invertidas.

### 3.3. Familias de LOTs esféricos

Hay diversos resultados que prueban la asfericidad de amplias familias de LOTs. Intentaremos dar una exposición abarcativa de los mismos. Como ya observamos previamente, las presentaciones de Wirtinger son presentaciones de LOT, y sabemos que son esféricas. Sin embargo, hay presentaciones de LOTs que no provienen de mirar el complemento de un nudo. Todo grupo de un nudo no trivial tiene como subgrupo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . A

su vez, un grupo hiperbólico no puede tener como subgrupo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  [17]. Luego basta encontrar un LOT que cumpla el weight test hiperbólico. El primero en hacer esta observación y hallar estos ejemplos fue Rosebrock [38]. Exhibimos ahora un ejemplo, pero una familia mucho más amplia de los mismos puede encontrarse en su artículo.

**Ejemplo 3.3.1.** Puede verificarse que el siguiente LOT cumple el weight test hiperbólico [38].

$$a \xrightarrow{c} b \xrightarrow{d} c \xleftarrow{e} d \xrightarrow{f} e \xrightarrow{g} f \xleftarrow{a} g$$

En particular, no es la presentación de Wirtinger del spine del complemento de un nudo.

Hecha esta observación, está claro que estamos frente a un problema difícil. La asfericidad de los LOTs sigue siendo un problema abierto. Ha habido numerosos avances en el tema, y a continuación veremos algunos de ellos.

### 3.3.1. Diámetro 3

En [25], Howie demostró que los LOTs de diámetro menor o igual a 3 son asféricos. El diámetro de un grafo es la mayor distancia entre cualquier par de vértices del mismo. Su prueba se basa en demostrar que los grupos presentados son localmente indicables. Como vimos, esto es condición suficiente puesto que los LOTs tienen la misma homología que un círculo.

**Definición 3.3.2.** Un *weakly labelled oriented tree* (wLOT) es un grafo  $\Gamma$  que consiste de un conjunto de vértices  $V = V(\Gamma)$ , un conjunto de aristas  $E = E(\Gamma)$  y tres morfismos  $\iota, \tau : E \rightarrow V$  y  $\lambda : E \rightarrow F(V)$ , donde  $\lambda$  es la función de etiquetado que va al grupo libre con base  $V$ .

La única diferencia con los LOTs usuales, es que ahora las etiquetas pueden ser palabras en el grupo libre generado por los vértices. Todas las definiciones y observaciones que hicimos previamente para LOTs se generalizan de la manera obvia al caso de wLOTs. Nuevamente, nos interesa ver qué movimientos en un wLOT  $\Gamma$  no afectan el tipo homotópico de  $K_\Gamma$ . Ahora tenemos más posibilidades que antes.



es la única *sloping word* de altura 0. Sea  $k \geq 1$ , una *sloping word* de altura  $k$  es una palabra de la forma

$$a^w = w^{-1}aw,$$

donde  $a \in A \cup A^{-1}$  y  $w$  es una *sloping word* de altura  $k - 1$ . En el caso de que la *sloping word* sea de altura mayor a 0, vamos a asignarle una *letra superior*. Si la altura es 1, la letra superior tanto de  $a$  como de  $a^{-1}$  es  $a$ . Dada una *sloping word* de altura  $k \geq 2$  que se escribe como  $w_0 = a^w$ , donde  $a \in A \cup A^{-1}$  y  $w$  es una *sloping word* de altura  $k - 1$ , entonces  $w_0$  tiene la misma letra superior que  $w$ .

Ya estamos en condiciones de enunciar los resultados centrales de Howie que permitirán demostrar la asfericidad de los LOTs de diámetro a lo sumo 3 [25].

**Teorema 3.3.3.** ([25, Teorema 6.2]) *Sea  $\Gamma$  un  $w$ LOT con 3 vértices, en el que al menos una etiqueta es una reduced sloping word. Entonces  $G(\Gamma)$  es localmente indicable.*

**Teorema 3.3.4.** ([25, Teorema 7.1]) *Sea  $\Gamma'$  un sub- $w$ LOT del  $w$ LOT  $\Gamma$  tal que  $\Gamma'$  está generado por  $V(\Gamma')$ . Sea  $\Lambda$  el menor subárbol de  $\Gamma$  que contiene a  $\Gamma'$ . Entonces existen una orientación y un etiquetado débil para  $\Lambda$  tales que:*

1. *las orientaciones y el etiquetado débil de  $\Gamma$  y  $\Lambda$  coinciden en  $\Gamma'$ ;*
2.  *$\Lambda$  es equivalente a  $\Gamma$  rel  $\Gamma'$ ;*
3. *las etiquetas en las aristas de  $\Lambda$  son palabras en  $V(\Gamma')$ .*

*Supongamos que además cada vértice de  $\Gamma \setminus \Gamma'$  es una hoja en  $\Gamma$ , y que cada arista de  $\Gamma \setminus \Gamma'$  está etiquetada por un vértice en  $V(\Gamma) \setminus V(\Gamma')$  o por una reduced sloping word de altura al menos 1 en  $V(\Gamma')$ , cuya letra superior es una hoja de  $\Gamma$ . Entonces  $V(\Lambda) = V(\Gamma')$ , y las aristas de  $\Lambda \setminus \Gamma'$  pueden etiquetarse por reduced sloping words.*

Una vez que tenemos estos resultados a mano, la prueba de la asfericidad de los LOTs de diámetro menor o igual a 3 se reduce a un análisis exhaustivo de las posibles situaciones. Los casos de diámetro 1 y 2 son muy sencillos, y para diámetro 3 basta observar que siempre tienen la siguiente forma y considerar si aparece o no como etiqueta uno de los vértices que no es una hoja (siempre pensando que el LOT se encuentra reducido).

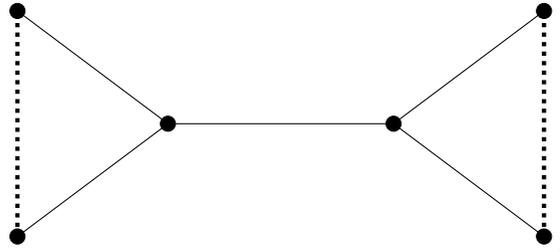


Figura 3.2: LOT de diámetro 3

### 3.3.2. Complejidad

Una noción que es útil para probar la asfericidad de LOTs “pequeños” es la de complejidad, introducida por Rosebrock en [40]. Dado un LOG  $\Gamma$  con  $P(\Gamma) = \langle x_1, \dots, x_m | R_1, \dots, R_k \rangle$ , tomamos un subconjunto de los generadores  $S = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$ . Inductivamente definiremos qué vértices son *buenos* con respecto a  $S$ .

1. Todos los elementos de  $S$  son buenos.
2. En cualquiera de estas dos situaciones

$$a \xrightarrow{b} c, \quad a \xleftarrow{b} c,$$

si  $a$  y  $b$  son buenos, entonces  $c$  lo es.

Esta última condición puede expresarse en términos de presentaciones y relaciones. Es equivalente a decir que existe una relación de la forma  $abc^{-1}b^{-1}$  o  $cba^{-1}b^{-1}$  con  $a, b \in S$ .

El conjunto de vértices buenos con respecto a  $S$  es el conjunto derivado de  $S$ . Si  $V(\Gamma)$  es el derivado de  $S = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$ , y no es el derivado de ningún conjunto con menos de  $n$  elementos, diremos que  $\Gamma$  tiene *complejidad*  $n$ .

**Ejemplo 3.3.5.** El siguiente LOT tiene complejidad 2,

$$a \xrightarrow{f} b \xleftarrow{e} c \xleftarrow{f} d \xrightarrow{a} e \xleftarrow{b} f .$$

Si comenzamos con  $S = \{a, f\}$ , primero podemos obtener  $b$ . Luego con  $b$  y  $f$  conseguimos  $e$ . Continuando con este proceso, vamos a llegar a que  $\{a, b, c, d, e, f\}$  es el derivado de  $S$ .

Intuitivamente, la complejidad nos dice la mínima cantidad de vértices (o de generadores, en el caso de las presentaciones) que necesitamos para construir el LOT. Esta idea se plasma en el siguiente lema de Rosebrock [40].

**Lema 3.3.6.** *Sea  $\Gamma$  un LOT con complejidad  $n$ . Entonces  $P(\Gamma)$  es  $Q^{**}$ -equivalente a una presentación con  $n$  generadores y  $n - 1$  relaciones.*

*Demostración.* Sea  $P(\Gamma) = \langle x_1, \dots, x_m | R_1, \dots, R_{m-1} \rangle$ , y sea  $S = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$  tal que  $V(\Gamma)$  es el derivado de  $S$ . Si  $m = n$  no hay nada que probar. Supongamos que  $m > n$ , entonces existe una relación  $R$  de la forma  $abc^{-1}b^{-1}$  o  $cba^{-1}b^{-1}$  con  $a, b \in S$  y  $c \notin S$ . Dependiendo del caso, podemos reemplazar todas las ocurrencias de  $c$  en las otras relaciones por  $b^{-1}ab$  o  $bab^{-1}$ . Después eliminamos al generador  $c$  y a la relación  $R$ , para obtener una presentación con  $m - 1$  generadores y  $m - 2$  relaciones.

Nuevamente, si  $m - 1 = n$  terminamos, y si no repetimos este proceso. Como  $m - 1 > n$ , existe una relación de la forma  $w_1w_2c^{-1}w_2^{-1}$  o  $cw_2w_1^{-1}w_2^{-1}$ , con  $w_1$  y  $w_2$  palabras en el grupo libre generado por  $S$ . La única diferencia con el caso anterior, es que las relaciones ya no son como las de un LOT, pero sí tienen la forma descrita. Cambiando los roles de  $a$  y  $b$  por  $w_1$  y  $w_2$  podemos eliminar un generador y una relación con el mismo procedimiento de antes. Inductivamente vamos a llegar a una presentación con  $n$  generadores (los elementos de  $S$ ) y  $n - 1$  relaciones.  $\square$

En particular, este lema nos dice que si  $\Gamma$  es un LOT de complejidad 2 entonces  $P(\Gamma)$  es  $Q^{**}$ -equivalente a una presentación one relator. Si la única relación de este one relator no es una potencia propia, sabemos que el grupo presentado es localmente indicable. Es decir que  $G(\Gamma)$  es localmente indicable. Luego, como  $\Gamma$  tiene la homología de un círculo, resulta asférico. Tenemos el siguiente resultado, consecuencia del teorema de identidad de Lyndon [30].

**Lema 3.3.7.** *Sea  $P = \langle a, b | w^n \rangle$  una presentación one relator con  $w$  no una potencia propia. Si la abelianización de  $G_P$  es  $\mathbb{Z}$ , entonces  $n = 1$ .*

*Demostración.* Sean  $i$  y  $j$  las sumas de los exponentes de  $a$  y  $b$  en  $w$  respectivamente. Si vemos a  $w$  en la abelianización, tenemos que  $w^n = (a^i b^j)^n$ . Luego si  $n > 1$  y al menos uno de los exponentes es distinto de 0 tenemos un elemento de torsión de orden  $n$ , cosa que no sucede en  $\mathbb{Z}$ . En caso de que  $i$  y  $j$  sean 0,  $G_P/[G_P, G_P] = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Por lo tanto  $n = 1$ .  $\square$



**Teorema 3.3.10.** ([29]) *Un LOT comprimido e inyectivo cuyos sub-LOTS tienen frontera reducida es diagramáticamente reducible.*

Para demostrarlo utilizan el weight test de Gersten [14] que vimos en el capítulo anterior. Dado un 2-complejo combinatorio  $X$ , su *grafo de Whitehead positivo* es el subgrafo de su grafo de Whitehead que contenga a todos los vértices de  $Wh_X$  que estén etiquetados con el signo  $+$  y a todas las aristas que los conecten. Lo notaremos  $Wh_X^+$ . Análogamente definimos el *grafo de Whitehead negativo*, al que notamos  $Wh_X^-$ .

En el caso de un LOT  $\Gamma$ , si estos dos grafos son un árbol, entonces podemos asignarles un peso de 0 a las aristas de  $Wh_{K_\Gamma}^+$  y  $Wh_{K_\Gamma}^-$ , y un peso de  $\pi$  a las demás. Como cada uno de ellos es un árbol, cualquier ciclo debe pasar por al menos dos aristas de peso  $\pi$ , por lo que el LOT tiene curvatura no positiva. Es sencillo ver que si un LOT inyectivo tiene curvatura no positiva, entonces al cambiar la orientación de cualquiera de sus aristas el nuevo LOT también tiene curvatura no positiva [28].

**Ejemplo 3.3.11.** Consideramos el siguiente LOT  $\Gamma$ :

$$a \xrightarrow{c} b \xleftarrow{a} c .$$

Es inyectivo, comprimido y sus sub-LOTS tienen frontera reducida. Su grafo de Whitehead es

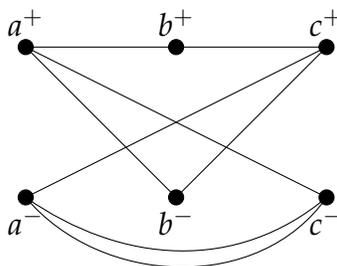


Figura 3.3: Grafo de Whitehead de  $K_\Gamma$

Observamos que  $Wh_{K_\Gamma}^-$  no es un árbol. Sin embargo, si invertimos la orientación de la arista que conecta  $b$  y  $c$ , el grafo de Whitehead resultante es

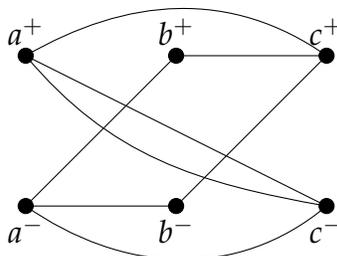


Figura 3.4: Grafo de Whitehead al revertir una arista

En este caso, tanto sus grafos de Whitehead positivo como negativo son árboles. Es decir que este último LOT tiene curvatura no positiva. Luego  $\Gamma$  también es no positivamente curvado.

**Lema 3.3.12.** *Sea  $\Gamma$  un LOT inyectivo y comprimido cuyos sub-LOTS tienen frontera reducida. Entonces existe una reorientación de sus aristas de manera que  $Wh_{K\Gamma}^+$  y  $Wh_{K\Gamma}^-$  son árboles.*

Utilizando este lema y las observaciones previamente realizadas, queda demostrado el teorema de Huck y Rosebrock.

Sea  $X$  un 2-complejo combinatorio, y sea  $Y \subseteq X$  un subcomplejo. Notamos que  $Wh_Y$  es un subgrafo de  $Wh_X$ . Sea  $f : S \rightarrow X$  un diagrama esférico, y  $v$  una 0-celda de  $S$ . El link geométrico de  $v$  es un círculo, al cuál orientamos en sentido horario, y su imagen en  $Wh_X$  mediante  $f$  es un ciclo orientado de esquinas  $\sigma(v)$ . Diremos que  $f$  es *vertex reduced con respecto a  $Y$  en  $v$*  si no hay ninguna esquina en  $\sigma(v)$  fuera de  $Y$  recorrida dos veces con orientaciones opuestas. El diagrama esférico  $f$  se dice *vertex reduced con respecto a  $Y$*  si es vertex reduced con respecto a  $Y$  en todas las 0-celdas de  $S$ . El 2-complejo combinatorio  $X$  se dice *vertex aspherical con respecto a  $Y$*  si para todo diagrama  $f : S \rightarrow X$  que es vertex reduced con respecto a  $Y$ ,  $f(S) \subseteq Y$ . Observamos que la definición que teníamos previamente de vertex aspherical es un caso particular de esta versión relativa tomando  $Y = \emptyset$ .

Esta noción de asfericidad prueba ser de gran utilidad debido al siguiente teorema probado por Harlander y Rosebrock en [18].

**Teorema 3.3.13.** *m Si un 2-complejo combinatorio  $X$  es vertex aspherical relativo a un subcomplejo  $Y$ , entonces  $\pi_2(X)$  está generado como  $\pi_1(X)$  módulo por la*

imagen de  $\pi_2(Y)$  mediante el morfismo inducido por la inclusión. En particular, si  $Y$  es esférico,  $X$  lo es.

*Demostración.* Como  $\pi_2(X)$  está generado como  $\pi_1(X)$  módulo por sus diagramas esféricos, y todo diagrama esférico de  $X$  es homotópicamente equivalente a un diagrama esférico vertex reduced sobre  $Y$ , el resultado se sigue.  $\square$

Combinando este resultado de asfericidad relativa, y utilizando el teorema demostrado previamente por Huck y Rosebrock [28], Harlander y Rosebrock probaron la asfericidad de los LOTS inyectivos. Un desarrollo más detallado la demostración de este teorema puede encontrarse en [18] o en [33, Capítulo 4].

# 4

## Grafos tipo Whitehead

En este capítulo estudiaremos aquellos grafos que pueden ser el grafo de Whitehead de alguna presentación. Una vez que tengamos clasificados dichos grafos, comenzaremos a analizar cómo se relacionan distintas presentaciones que tienen un mismo grafo de Whitehead. Esto lo haremos tanto en el sentido topológico, mirando su tipo homotópico, como en el sentido algebraico, comparando los distintos grupos presentados.

### 4.1. Caracterización de grafos tipo Whitehead

Dado un 2-complejo combinatorio  $X$ , recordamos que su grafo de Whitehead es la unión de los links geométricos de sus vértices. Si estamos trabajando con complejos asociados a presentaciones el grafo de Whitehead puede hallarse de manera sencilla siguiendo el procedimiento ilustrado en el segundo capítulo. En este caso nos referiremos al mismo como el grafo de Whitehead de la presentación. Repasemos este procedimiento con un ejemplo.

**Ejemplo 4.1.1.** Sea  $P = \langle a, b | bb, a\bar{b}b \rangle$ . Para construir el grafo de Whitehead de  $P$ , comenzamos por poner dos vértices por cada relación identificados con los signos  $+$  y  $-$ . Asociamos el final de cada letra con el vértice identificado con  $+$  y el comienzo de cada letra con el vértice identificado con  $-$ . Luego comenzamos a leer las relaciones.

En la primera relación tenemos una  $b$  seguida de otra  $b$ . Eso nos dice que debemos trazar una arista entre  $b^+$  y  $b^-$ . La segunda  $b$  también está

seguida de una  $b$ , pues leemos las relaciones cíclicamente. Entonces debemos agregar otra arista entre  $b^+$  y  $b^-$ .

La segunda relación comienza con una  $a$  seguida de una  $\bar{b}$ . De manera natural, el comienzo de una letra invertida se asocia con el vértice identificado con  $+$ , y el final con el vértice identificado con  $-$ . Luego la primera arista que obtenemos de esta relación conecta  $a^+$  con  $b^+$ . La  $\bar{b}$  está seguida de una  $b$ . Eso se corresponde con un bucle en  $b^-$ . Por último, la  $b$  seguida de una  $a$  nos da una arista entre  $b^+$  y  $a^-$ .

Así, el grafo de Whitehead resultante es el siguiente:

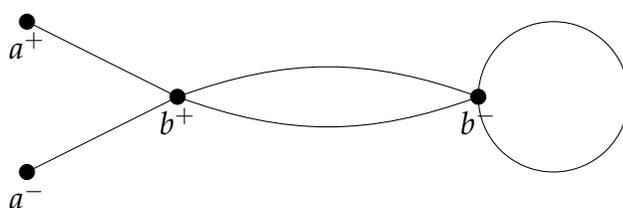


Figura 4.1: Grafo de Whitehead de  $P$

Comencemos entonces con algunas definiciones básicas. En lo que sigue consideraremos como grafo a un grafo finito no dirigido  $G$  con un conjunto de vértices  $V$  y un conjunto de aristas  $E$ . Permitiremos que nuestros grafos tengan aristas paralelas y ciclos de cualquier longitud. En particular pueden tener bucles. Es decir, aristas que empiecen y terminen en un mismo vértice.

Dado un grafo de estas características, queremos saber cuándo puede realizarse como el grafo de Whitehead de alguna presentación. Una primera observación es que dicho grafo debería tener una cantidad par de vértices, pues los grafos de Whitehead tienen dos vértices por cada generador de la presentación.

Llamaremos *grafo con vértices etiquetados* a un grafo finito  $G = (V, E)$  con una cantidad par de vértices, junto con una función biyectiva de etiquetado para sus vértices,

$$L : V \rightarrow \{a_i^-, a_i^+\}_{1 \leq i \leq \frac{|V|}{2}}.$$

Pedimos que la cantidad de vértices de un grafo que admita este etiquetado sea par, en analogía con los grafos de Whitehead en los que por cada

generador  $a_i$  de una presentación  $P = \langle a_1, \dots, a_k | R_1, \dots, R_l \rangle$  tenemos dos vértices:  $a_i^+$  y  $a_i^-$ .

Por cómo es la construcción del grafo de Whitehead de una presentación, es claro que el grado de  $a_i^+$  es igual al de  $a_i^-$ . Recordamos que el *grado* de un vértice en un grafo es la cantidad de aristas incidentes al mismo, contando dos veces los bucles. Esto se debe a que por cada aparición de  $a_i$  o de  $\bar{a}_i$  en una relación, debemos agregar una arista incidente a  $a_i^+$  y a  $a_i^-$ . Esta es una condición necesaria para que un grafo con vértices etiquetados sea el grafo de Whitehead de alguna presentación. El siguiente resultado nos dice que además es suficiente.

**Proposición 4.1.2.** *Sea  $G$  un grafo con vértices etiquetados por  $\{a_i^-, a_i^+\}_{1 \leq i \leq n}$ , de modo que el grado de  $a_i^-$  sea igual al de  $a_i^+$ . Entonces  $G$  es el grafo de Whitehead de alguna presentación.*

*Demostración.* A partir de  $G$  queremos construir una presentación con generadores  $\{a_i\}_{1 \leq i \leq n}$  que tenga a  $G$  como su grafo de Whitehead. Para eso basta decir cómo serán las relaciones. Si el grafo no tiene aristas, no hay nada que hacer, así que asumimos que sí tiene.

Sin pérdida de generalidad, elegimos un vértice  $a_i^-$  del grafo  $G$ , que podemos suponer tiene grado positivo. Supongamos que  $a_i^+$  está conectado a  $a_j^+$ . Entonces comenzamos a escribir una relación  $R_1 = a_i \bar{a}_j$ . Ahora consideramos  $a_j^-$ . Como el grado de  $a_j^+$  es al menos 1, podemos suponer que  $a_j^-$  está conectado a  $a_k^-$ . Así continuamos escribiendo  $R_1 = a_i \bar{a}_j a_k$ . Procedemos similarmente si  $a_j^-$  está conectado con  $a_k^+$ .

Si eventualmente el vértice del final de la relación se conecta al vértice del comienzo de la relación (en este caso sería que  $a_k^+$  se conecte con  $a_i^-$ ), entonces detenemos el proceso y obtenemos la primera relación  $R_1$ . Notamos que esto podría haber sucedido en el primer paso si  $a_i^+$  se conectaba con  $a_i^-$ . Debemos probar que este proceso siempre se puede llevar a cabo.

Asumamos que hasta el momento tenemos escrita una la relación  $R_1$  que comienza en  $a_i$  y termina en  $a_k$ , con  $a_k \neq a_i$ , pues si no ya hubiéramos terminado la palabra. Luego, si miramos el subgrafo correspondiente a  $R_1$ , hasta ahora usamos una arista más de  $a_k^-$  que de  $a_k^+$ , y como tienen el mismo grado, debe haber al menos una arista adyacente a  $a_k^+$  que aún no utilizamos. Por lo tanto podemos continuar el proceso. Como el grafo es finito, eventualmente vamos a terminar de escribir la relación. Aclaremos

que en caso de que la relación hubiese comenzado con  $a_i$  y terminado con  $\bar{a}_i$ , la diferencia entre las aristas que usamos en  $a_i^+$  y  $a_i^-$  habría sido de 2, por lo que el argumento sigue funcionando. De poder terminar la relación ahí, esa diferencia de dos se salva porque debemos agregar un bucle en  $a_i^-$ , que aporta dos al grado de ese vértice.

Ya terminada  $R_1$ , si removemos sus aristas del grafo con vértices etiquetados  $G$ , el nuevo grafo con vértices etiquetados va a seguir estando en las condiciones del teorema, o no va a tener más aristas. Si no quedan aristas, terminamos. Si quedan aristas, entonces comenzamos a escribir una relación  $R_2$  con el mismo procedimiento que antes. Continuando inductivamente obtenemos una presentación con grafo de Whitehead  $G$ .  $\square$

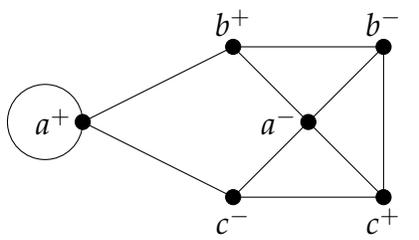
**Observación 4.1.3.** *El algoritmo de la demostración no tiene por qué devolver siempre la misma presentación, ya que en cada paso estamos haciendo una elección.*

**Definición 4.1.4.** Diremos que un grafo de vértices etiquetados  $G$  es un grafo tipo Whitehead, si existe una presentación  $P$  tal que  $Wh_P = G$ .

Luego, un grafo con vértices etiquetados  $G$  es tipo Whitehead si y sólo si el grado de  $a_i^+$  coincide con el de  $a_i^-$  para todo  $i$ . Esto nos dice que un grafo es el grafo de Whitehead de alguna presentación si y sólo si tiene una cantidad de par de vértices y admite un etiquetado de sus vértices que cumpla lo anterior.

Ahora que ya tenemos caracterizados los grafos de tipo Whitehead, nos interesa analizar las distintas presentaciones asociadas a ellos. Como observamos, dado un grafo tipo Whitehead el algoritmo de la Proposición 4.1.2 para obtener una presentación que lo tenga como grafo de Whitehead no tiene por qué llegar siempre a la misma presentación.

**Ejemplo 4.1.5.** Consideremos el siguiente grafo tipo Whitehead  $G$  y construyamos una presentación que lo tenga como grafo de Whitehead siguiendo el algoritmo descrito en la demostración anterior.

Figura 4.2: Grafo tipo Whitehead  $G$ 

Podemos comenzar por  $a^+$ . Como se conecta consigo mismo, empezamos a escribir  $R_1 = a\bar{a}$ . Ahora, como  $a^-$  no se conecta consigo, debemos seguir el proceso. Por ejemplo podemos continuar conectando  $a^-$  con  $b^-$ , obteniendo  $R_1 = a\bar{a}b$ . En este paso, sí sucede que  $b^+$  se conecta con  $a^-$ . Luego finalizamos la escritura de la relación  $R_1 = a\bar{a}b$ .

Ignorando las aristas que utilizamos para formar  $R_1$  debemos empezar a escribir una segunda relación. Tomamos la arista que une  $b^+$  con  $b^-$ . Entonces  $R_2 = b$  ya es una relación terminada. De la misma manera,  $R_3 = c$  es otra relación. Ahora podemos comenzar con la arista que une  $a^+$  con  $c^-$ . Como  $c^+$  se conecta a  $a^-$ , terminamos la relación  $R_4 = ac$ . Continuando con este proceso, una de las posibles presentaciones a las que podríamos llegar es

$$P = \langle a, b, c | a\bar{a}b, b, c, ac, cb\bar{a} \rangle .$$

Esta es una presentación no balanceada del grupo trivial. Sin embargo

$$P' = \langle a, b, c | a\bar{a}bacb\bar{a}c, b, c \rangle \text{ y}$$

$$P'' = \langle a, b, c | a\bar{a}bac\bar{a}b\bar{c}, b, c \rangle$$

son presentaciones de  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Z}_2$  respectivamente, que también tienen a  $G$  como grafo de Whitehead. En particular, puede que dos presentaciones con un mismo grafo de Whitehead presenten tanto grupos localmente indicables como grupos con torsión.

Este ejemplo nos dice que a priori los grupos presentados por presentaciones con un mismo grafo de Whitehead pueden ser muy distintos. Además, el tipo homotópico de los complejos asociados a estas presentaciones también difiere. Observemos el ejemplo anterior. Podemos ver que  $K_P \simeq S^2 \vee S^2$ , mientras que  $K_{P'} \simeq S^2 \vee S^1$  y  $K_{P''} \simeq \mathbb{R}P_2$ . Una de

las preguntas naturales que surgen es : ¿si  $P$  y  $Q$  son presentaciones con  $Wh_P = Wh_Q$ , puede ser que  $P$  sea esférica y  $Q$  no lo sea? Ninguno de los espacios del ejemplo anterior es esférico, así que aún no podemos responder nuestra pregunta, pero observamos que el tipo homotópico de estas presentaciones puede diferir ampliamente.

**Ejemplo 4.1.6.** Consideramos el siguiente grafo tipo Whitehead  $G$ :

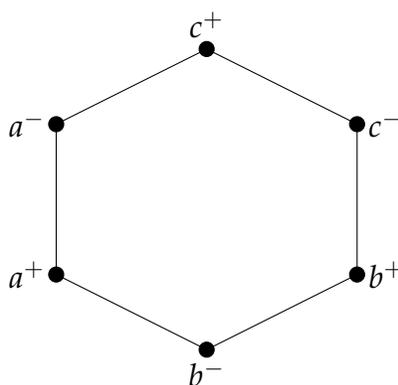


Figura 4.3: Grafo tipo Whitehead  $G$

Dos posibles presentaciones que tienen a  $G$  como grafo de Whitehead son

$$P = \langle a, b, c \mid aabbcc \rangle$$

$$Q = \langle a, b, c \mid aabc, b, c \rangle.$$

La presentación  $P$  cumple todos los tests de curvatura, y en particular es esférica. Por otro lado, el grupo presentado por  $Q$ ,  $G_Q$ , es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ , que tiene torsión. Por lo tanto  $K_Q$  no puede ser esférico. Con esto queda respondida por la negativa la pregunta que habíamos realizado previamente.

Si bien los dos ejemplos anteriores parecen indicar que en general no va a haber relación alguna entre distintas presentaciones con un mismo grafo de Whitehead, esto no tiene por qué ser siempre así. El ejemplo a continuación es muestra de esto.

**Ejemplo 4.1.7.** Sea  $G$  el siguiente grafo tipo Whitehead:

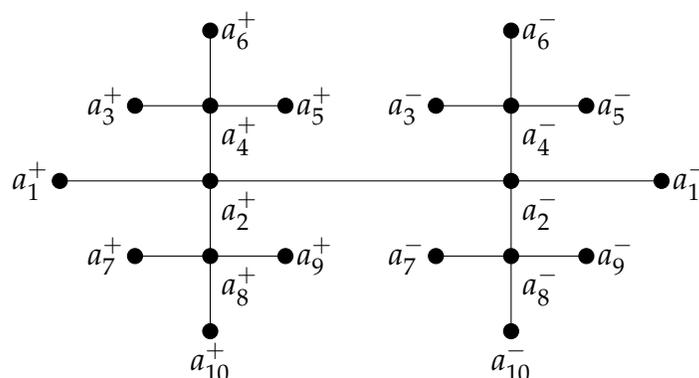


Figura 4.4: Grafo tipo Whitehead con estructura de árbol

Como el grafo es un árbol, cualquier presentación que obtengamos para  $G$  cumplirá todos los tests de curvatura del capítulo 2. Es decir que los grupos presentados son localmente indicables, coherentes e hiperbólicos; y los complejos asociados son diagramáticamente reducibles y en particular asféricos. Como podemos observar, si bien hay grafos tipo Whitehead para los cuales sus presentaciones asociadas son muy distintas (tanto a nivel algebraico como a nivel topológico), hay otros en los que estas comparten muchas propiedades.

## 4.2. El poset asociado a un grafo tipo Whitehead

Ya tenemos una descripción satisfactoria de cómo son los grafos tipo Whitehead. Sin embargo, aún no tenemos demasiada información de cómo se relacionan distintas presentaciones con un mismo grafo de Whitehead. Como vimos, puede que estas tengan semejanzas en un sentido algebraico y topológico, pero también pueden ser radicalmente distintas.

Veamos cómo podemos modificar una presentación de modo tal que la presentación que obtengamos sea homotópicamente equivalente a la original (en particular presente al mismo grupo) y tenga el mismo grafo de Whitehead. Dada una presentación  $P = \langle a_1, \dots, a_n \mid R_1, \dots, R_m \rangle$ , las siguientes dos operaciones nos dan una nueva presentación con el mismo grafo, manteniendo el grupo presentado:

- (1) Permutar una relación cíclicamente.

(2) Invertir una relación.

Más aún, ambas preservan el tipo homotópico del complejo asociado, pues pueden obtenerse como una secuencia de  $Q^{**}$ -transformaciones. Basándonos en estas operaciones vamos a definir una relación de equivalencia en las presentaciones asociadas a un grafo etiquetado tipo Whitehead  $G$ . Diremos que dos presentaciones  $P$  y  $P'$  son *equivalentes Whitehead* ( $P \simeq_W P'$ ) si una puede obtenerse a partir de la otra mediante operaciones de tipo (1) y (2).

**Ejemplo 4.2.1.** Damos algunos ejemplos de presentaciones que tienen el mismo grafo de Whitehead y que pueden o no ser equivalentes Whitehead:

- $\langle a, b, c | ab\bar{a}, bcb \rangle \simeq_W \langle a, b, c | a\bar{b}\bar{a}, bbc \rangle$ .
- $\langle a, b, c | abc, abc, bac \rangle \not\simeq_W \langle a, b, c | abc, baca, bc \rangle$ .
- $\langle a, b | abba \rangle \not\simeq_W \langle a, b | abb, a \rangle$ .

Trabajaremos con las clases de equivalencia de presentaciones dadas por las operaciones (1) y (2). Además de estas dos operaciones, hay otras que no modifican el grafo de Whitehead, pero sí pueden cambiar el grupo presentado y el tipo homotópico del complejo:

- (3) Concatenar dos relaciones que comienzan con la misma letra.
- (4) El inverso de la operación anterior.

Podemos combinar estas operaciones con las anteriores. Por ejemplo, usando (1) y (3) podemos concatenar dos palabras que terminen en la misma letra; y usando (1) y (4) podemos separar una palabra en dos palabras que terminen en la misma letra.

Con la relación de equivalencia, vamos a darle un orden parcial a las clases de equivalencia. Por practicidad, notaremos a las clases de equivalencia como presentaciones, eligiendo un representante. Diremos que  $P \prec P'$  si existe un representante de la clase  $P'$  que puede obtenerse a partir de un representante de la clase  $P$  mediante un movimiento del tipo (3). Equivalentemente,  $P \prec P'$  si existe un representante de la clase  $P$  que puede obtenerse a partir de un representante de la clase  $P'$  mediante un movimiento del tipo (4). Esta relación  $\prec$  nos dice cómo son los vecinos inmediatos, y definimos la relación de orden  $\leq$  como la generada por  $\prec$ .

Dos clases de este poset estarán al mismo *nivel* si sus representantes tienen la misma cantidad de relaciones. Observamos que la noción de nivel no se corresponde con la noción de grado que veremos luego (ver Observación 4.2.11).

**Ejemplo 4.2.2.** El poset del siguiente grafo,

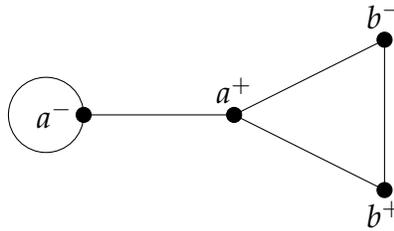


Figura 4.5: Grafo tipo Whitehead

es de la forma,

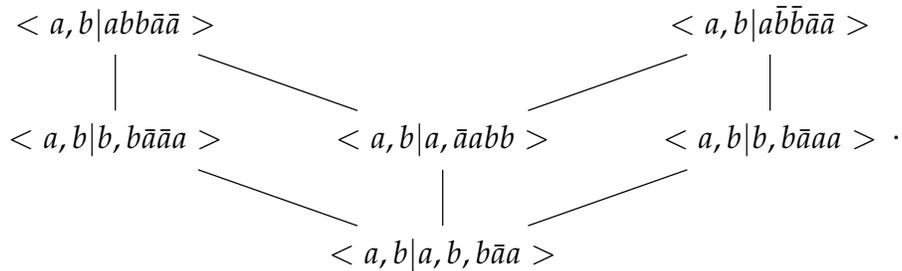


Figura 4.6: Poset del grafo tipo Whitehead

Notamos nuevamente que los grupos presentados pueden ser distintos, incluso cuando se encuentran a un mismo nivel. Por ejemplo tenemos una presentación del grupo trivial y otra de  $\mathbb{Z}_2$  dadas por  $\langle a, b | b, b\bar{a}\bar{a}\bar{a} \rangle$  y  $\langle a, b | a, \bar{a}abb \rangle$  respectivamente. Los complejos asociados también son diferentes. Como  $\langle a, b | b, b\bar{a}\bar{a}\bar{a} \rangle$  es una presentación balanceada del grupo trivial, el complejo es contráctil. En cambio  $\langle a, b | a, \bar{a}abb \rangle$  es  $Q^{**}$ -equivalente a una presentación del plano proyectivo.

Hagamos ahora un ejemplo completo de un poset un tanto más complejo.

**Ejemplo 4.2.3.** Sea  $P = \langle a, b | abb\bar{a}\bar{b} \rangle$ . Como veremos más adelante, esta es una presentación de un grupo de Baumslag-Solitar  $BS(2, 1)$ . El poset asociado tiene la siguiente forma. Incluimos sólo las relaciones de cada presentación por motivos de espacio.

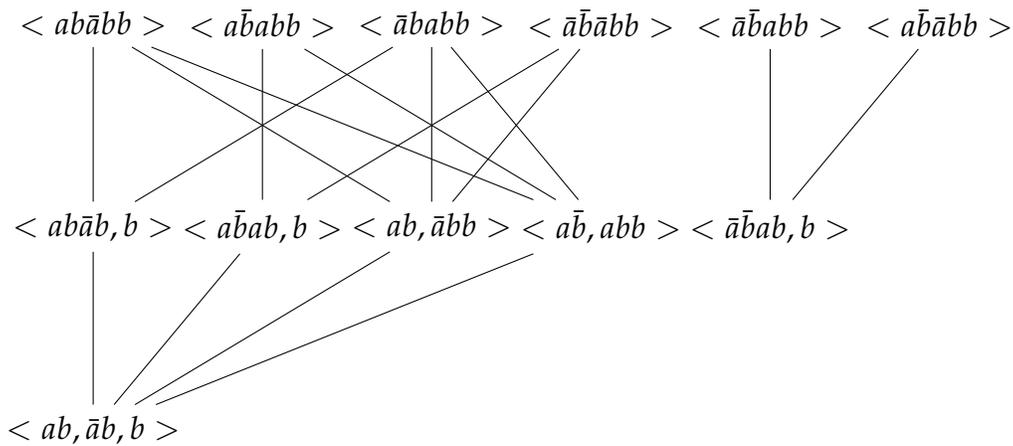


Figura 4.7: Poset de  $BS(2, 1)$

Observamos que el poset tiene dos componentes conexas con distintas alturas. Entre los grupos presentados aparecen  $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$  y el grupo trivial. Más interesante es que la presentación  $\langle a, b | abb\bar{a}\bar{b} \rangle$  presenta al grupo del nudo trébol. Esto puede verse haciendo el cambio  $c = a\bar{b}$ .

**Observación 4.2.4.** *Los elementos maximales del poset son las clases de presentaciones en las que ninguna relación tiene letras en común con otra relación; y los elementos minimales son las clases de presentaciones cuyas relaciones no tienen ninguna letra repetida.*

**Observación 4.2.5.** *Las presentaciones que obtenemos a partir del algoritmo de la Proposición 4.1.2 pertenecen a una clase minimal del poset.*

Es interesante saber cuándo los elementos maximales son presentaciones one-relator. A primera vista, esto sucede cuando podemos encontrar una relación que realice todo el grafo. Es decir cuando exista un camino

euleriano que cambia de  $a^+$  a  $a^-$  cuando llegamos a  $a^+$ , o viceversa. Esta descripción no es muy satisfactoria, pero en base a lo hecho hasta ahora podemos conseguir un criterio más sencillo.

**Proposición 4.2.6.** *Los elementos maximales del poset de un grafo tipo Whitehead  $G$  son clases de presentaciones one-relator si y sólo si al identificar  $a^-$  con  $a^+$  para todo vértice  $a$ , el grafo resultante tiene una única componente conexa no trivial.*

*Demostración.* Es claro que al identificar los vértices del grafo de Whitehead de una presentación one-relator de la manera indicada, este tiene una componente conexa que contiene a todos los vértices correspondientes a los generadores que aparecen en la relación. Los vértices que correspondan a generadores que no aparecen en la relación quedarán aislados.

Ahora supongamos que tenemos un grafo  $G$  tal que al identificar los vértices tiene una única componente conexa no trivial. Sea

$$P = \langle a_1, \dots, a_n \mid R_1, \dots, R_m \rangle$$

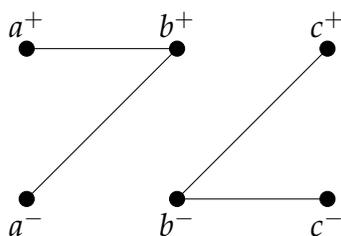
una presentación de una clase maximal. Entonces los conjuntos de letras que aparecen en cada relación son disjuntos dos a dos. Es decir que el subgrafo correspondiente a cada una de estas relaciones es una componente conexa no trivial del grafo  $G$  (habiendo identificado los vértices). Como hay una única componente conexa no trivial, entonces hay una sola relación.  $\square$

En principio, el poset no tiene por qué ser conexo. Puede serlo en casos muy simples, pero en general no, como sucede en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.2.7.** Las presentaciones

- $\langle a, b, c \mid cba\bar{b} \rangle,$
- $\langle a, b, c \mid cb\bar{a}\bar{b} \rangle,$

tienen el siguiente grafo de Whitehead, y son las únicas con dicho grafo:



Observamos que ambas son tanto maximales como minimales, y no se puede llegar de una a la otra mediante operaciones de tipo (1) y (2). Luego no están conectadas en el poset.

El ejemplo anterior también nos dice que en general no va a haber ni máximo ni mínimo. Ambas presentaciones son maximales y minimales, pero no se relacionan.

Veamos ahora cómo son las cadenas en el poset asociado a un grafo tipo Whitehead. Una *cadena* es un subconjunto totalmente ordenado del poset. El *largo* de una cadena es la cantidad de elementos menos 1. Dada una presentación  $P$ , si una de sus relaciones tiene una letra repetida podemos separarla y bajar un nivel en el diagrama del poset. Más en general, si una relación tiene una letra repetida  $n$  veces, podemos descender  $n - 1$  veces. A pesar de esto, no es cierto que dos cadenas maximales tengan el mismo largo (ver Observación 4.2.11).

**Ejemplo 4.2.8.** Las siguientes presentaciones representan clases maximales de un mismo poset asociado a un grafo tipo Whitehead:

- $\langle a, b, c | a\bar{a}b\bar{c}cb\bar{a}bc \rangle,$
- $\langle a, b, c | a\bar{a}b\bar{c}\bar{c}b\bar{a}bc \rangle.$

Sin embargo una cadena maximal que termina en la primera tiene largo 4 y una que termina en la segunda tiene largo 3. En efecto,

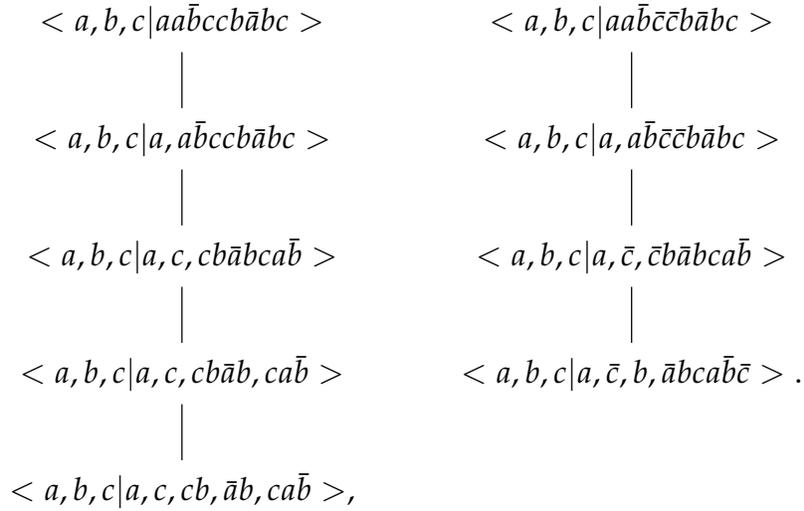


Figura 4.8: Cadenas maximales de un mismo poset

En el ejemplo anterior, las cadenas tenían máximos distintos, pero incluso dos cadenas maximales con un mismo máximo pueden tener largos distintos.

**Ejemplo 4.2.9.** Consideremos la presentación  $\langle a, b, c | abcacb \rangle$ . Si primero separamos por  $a$ , obtenemos  $\langle a, b, c | abc, acb \rangle$ , que ya es un elemento minimal. Ahora si separamos primero por  $b$  y después por  $c$  llegamos a  $\langle a, b, c | ba, ca, cb \rangle$ . Es decir que tenemos una cadena maximal de largo 1 y otra de largo 2 con un mismo máximo.

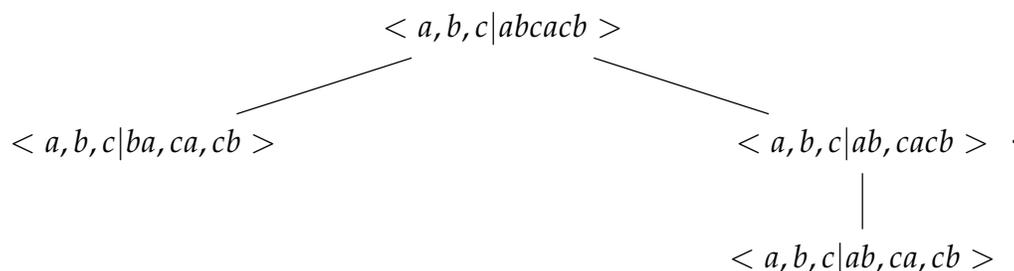


Figura 4.9: Dos cadenas maximales con un mismo máximo

**Definición 4.2.10.** Un poset *homogéneo* es un poset  $P$  en el que todas las cadenas maximales tienen el mismo largo. Decimos que  $P$  es *graduado* si  $U_x := \{y \in P, y \leq x\}$  es homogéneo para todo  $x \in P$ .

**Observación 4.2.11.** Es fácil ver que un poset homogéneo es también graduado. Se sigue de los ejemplos anteriores que el poset de un grafo tipo Whitehead puede no ser homogéneo. Más aún, tampoco tiene por qué ser graduado, como vimos en el ejemplo 4.2.9.

Diremos que un poset finito  $P$  es un *reticulado* si todo par de elementos  $a, b \in P$  tiene un supremo y un ínfimo. Es claro de la definición que en un reticulado existen máximo y mínimo. Si a un reticulado le removemos su mínimo y su máximo obtenemos un *reticulado reducido*. Equivalentemente, un poset finito es un reticulado reducido cuando todo par de elementos acotado superiormente tiene un supremo. Estos posets fueron estudiados por Barmak en [1], por su interés en la topología de espacios finitos.

En general, dados  $x, y \in P$  diremos que  $y$  *cubre* a  $x$  si  $x \leq y$  y no existe  $z \in P$  distinto de  $x$  e  $y$  tal que  $x \leq z$  y  $z \leq y$ . Algo que no puede suceder en un reticulado reducido es que dos elementos estén cubiertos al mismo tiempo por más de un elemento. Los posets de grafos tipo Whitehead pueden no ser reticulados reducidos, como vemos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.2.12.** Consideramos el grafo tipo Whitehead  $G$ :

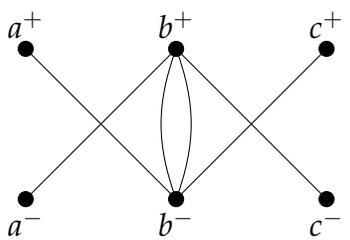


Figura 4.10: Grafo tipo Whitehead  $G$

Parte del poset de  $G$  tiene la siguiente estructura:

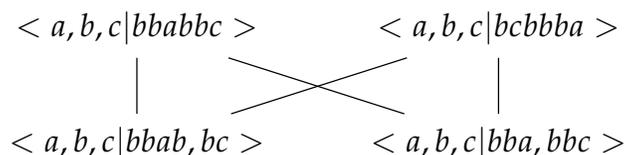


Figura 4.11: Poset de  $G$

Luego hay dos elementos del poset que están cubiertos por más de un elemento. Es decir que no es un reticulado reducido.

Como observamos previamente, los posets de grafos tipo Whitehead pueden no ser conexos. Este hecho nos dice que dadas dos presentaciones que tienen un mismo grafo de Whitehead, no necesariamente puede obtenerse una a partir de la otra usando movimientos de tipo (1), (2), (3) y (4). Dada  $P = \langle A | R \rangle$ , podemos definir un quinto tipo de operación:

- (5) Si una relación es de la forma  $\dots a\bar{w}\bar{a}\dots$ , donde  $w$  es una palabra en  $A \cup A^{-1}$  y  $a \in A \cup A^{-1}$ , podemos cambiarla por  $\dots a\bar{w}\bar{a}\dots$ .

Notamos que en el ejemplo 4.1.6, las dos presentaciones que no se conectan en el poset, sí pueden obtenerse la una de la otra con un movimiento de tipo (5). Más aún, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.2.13.** Sean  $P$  y  $P'$  dos presentaciones con un mismo grafo de Whitehead. Entonces  $P'$  puede obtenerse a partir de  $P$  mediante movimientos de tipo (1), (2), (3), (4) y (5).

*Demostración.* Sean  $P$  y  $P'$  como en el enunciado. Tomamos  $R'$  una relación de  $P'$ . Si  $R'$  tiene una o dos letras, es muy sencillo obtenerla a partir de las relaciones de  $P$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $R'$  comienza con  $abc$  (donde  $a, b$  y  $c$  no son necesariamente distintas); queremos obtenerla a partir de las relaciones de  $P$ . El caso en el que  $R'$  tenga 1 o 2 letras es más sencillo y se deduce del caso general. La primera arista correspondiente a  $R'$  conecta  $a^+$  con  $b^-$ . Buscamos alguna relación  $R$  de  $P$  que contenga esa arista en el grafo de Whitehead. Puede suceder que  $R$  contenga la subpalabra  $ab$  o la subpalabra  $\bar{b}\bar{a}$ . Si estamos en el segundo caso, invertimos la relación  $R$  (abusamos de la notación, y la seguimos llamando  $R$  si bien la modificamos). Ahora continuamos leyendo la relación  $R$  mientras coincida con  $R'$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $R$  contiene la subpalabra  $abd$  con  $d \neq c$  y no la subpalabra  $abc$ . Entonces, mediante permutaciones cíclicas tenemos que  $R$  termina en  $ab$ . Ahora queremos obtener la arista correspondiente a  $bc$ , que va de  $b^+$  a  $c^-$ . Puede haber dos casos: que esa arista ocurra en otra relación de  $P$ , o que sólo ocurra dentro de  $R$ .

Analicemos el primer caso. Sea  $\tilde{R}$  una relación de  $P$  que tiene la arista que buscamos. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\tilde{R}$  contiene la subpalabra  $bc$  (si no la invertimos). Ahora aplicamos una permutación cíclica de manera que  $\tilde{R}$  comience con  $c$  y termine con  $b$ , y concatenamos  $R$  con  $\tilde{R}$  para obtener  $R_1 := R\tilde{R}$ . Esta nueva relación  $R_1$  contiene la subpalabra  $abc$ .

Si estamos en el segundo caso hay dos posibilidades. O bien  $R$  contiene las subpalabras  $bc$  y  $ab$ , o  $R$  contiene las subpalabras  $\bar{c}\bar{b}$  y  $ab$ . En la primera situación, separamos a  $R$  en dos palabras, una terminando en  $b$  y la otra comenzando en  $c$  y terminando en  $ab$ . Permutando cíclicamente esta última palabra, conseguimos una palabra  $R_1$  que contiene la subpalabra  $abc$ . Si  $R$  contiene las subpalabras  $\bar{c}\bar{b}$  y  $ab$ , aplicamos un movimiento de tipo (5) que invierta la subpalabra que hay entre  $b$  y  $\bar{b}$ . La palabra resultante  $R_1$  tendrá la subpalabra  $abc$ .

En cualquiera de los tres casos, procedemos de la misma manera que con  $R$ , ahora con  $R_1$ . Inductivamente vamos a obtener  $R'$ . Una vez que obtuvimos  $R'$ , comenzamos a construir otra de las relaciones de  $P'$  sin usar la  $R'$  que ya construimos. Como las presentaciones son finitas, este proceso termina.  $\square$

Hagamos un ejemplo para ilustrar este procedimiento.

**Ejemplo 4.2.14.** Comenzamos con la presentación  $P = \langle a, b, c | \bar{b}cba, \bar{a}c\bar{b} \rangle$  y queremos llegar a la presentación  $P' = \langle a, b, c | ab, \bar{c}b, \bar{a}cb \rangle$ . Empecemos por obtener  $ab$ . La arista que va de  $a^+$  a  $b^-$  aparece en la relación  $\bar{a}c\bar{b}$ . Invertiendo y reordenando obtenemos  $\bar{c}ab$ . Ahora queremos la arista que va de  $b^+$  a  $a^-$ . Esta aparece en  $\bar{b}cba$ . Si reordenamos esta relación y la concatenamos con la anterior conseguimos  $\bar{c}abab\bar{c}b$ . Nuevamente, si reordenamos esta palabra y la separamos, llegamos a  $ab$  y  $\bar{a}\bar{b}c\bar{b}$ .

Similarmente queremos obtener  $\bar{c}b$  y  $\bar{a}cb$  a partir de  $\bar{a}\bar{b}c\bar{b}$ . Si invertimos la relación y la permutamos cíclicamente tenemos  $\bar{a}c\bar{b}\bar{c}b$ . Aplicando una operación de tipo (5) podemos invertir la letra  $\bar{b}$  y llegar a  $\bar{a}cb\bar{c}b$ . Separando por  $b$  obtenemos  $\bar{a}cb$  y  $\bar{c}b$ , como queríamos.

Este resultado nos permite entender qué tan relacionadas están dos presentaciones con un mismo grafo de Whitehead e términos de operaciones sobre las mismas. En particular, si no requerimos de movimientos de tipo (5) para llegar de una presentación a otra, estas están conectadas en el poset de su grafo.

Dado  $A$  un conjunto de generadores, una palabra  $w \in AUA^{-1}$  (no necesariamente reducida) se dice *positiva* si todas sus letras son elementos de  $A$ . Similarmente,  $w$  se dice *negativa* si sus letras son elementos de  $A^{-1}$ . Una palabra es *mixta* si no es positiva ni negativa. Observar que si  $P$  es una presentación que no tiene relaciones mixtas, cualquier presentación  $Q$  de la misma clase de  $P$  tampoco tiene relaciones mixtas. Más aún, ninguna presentación que pueda obtenerse a partir de  $P$  mediante movimientos (1), (2), (3) y (4) tiene relaciones mixtas.

**Corolario 4.2.15.** *Si  $P$  es una presentación que no tiene relaciones mixtas, entonces ninguna de las (clases de) presentaciones del poset asociado a su grafo de Whitehead tiene relaciones mixtas. Además, el poset es conexo.*

### 4.2.1. El poset de los grupos de Baumslag-Solitar

Generalizaremos lo hecho en el ejemplo 4.2.3. Queremos entender cómo son los posets correspondientes a los grupos de Baumslag-Solitar. Recordamos que un *grupo de Baumslag-Solitar*  $BS(m, n)$  es un grupo que viene dado por una presentación one-relator de la forma

$$\langle a, b | ab^m \bar{a}\bar{b}^n \rangle,$$

con  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Está última es la presentación estándar del grupo  $BS(m, n)$ . Notar que  $BS(m, n)$ ,  $BS(-m, -n)$ ,  $BS(n, m)$  y  $BS(-n, -m)$  son el mismo grupo. El grafo de Whitehead de la presentación estándar de  $BS(m, n)$  es

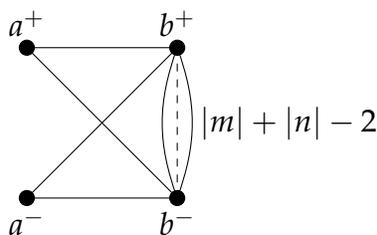


Figura 4.12: Grafo de Whitehead de  $BS(m, n)$

La cantidad de aristas que conectan  $b^+$  con  $b^-$  es  $|m| + |n| - 2$ . Vamos a caracterizar el poset asociado a la presentación estándar de  $BS(m, n)$ . Lo primero que notamos es que el poset de  $BS(m, n)$  es el mismo que el de  $BS(k, l)$  si y sólo si  $|m| + |n| = |k| + |l|$ . Las presentaciones estándar de estos grupos son representantes de clases maximales del poset.

Veamos cómo son todos los elementos maximales. Por la Proposición 4.2.6, sabemos que son todas presentaciones one-relator. Observando el grafo de Whitehead se deduce que si aparecen dos letras  $b$  consecutivas, deben tener el mismo exponente; y que van a aparecer dos letras  $a$  (con exponente 1 o  $-1$ ) que no pueden ser consecutivas. Luego, cada clase maximal tiene un representante de la forma

$$\langle a, b | a^{\epsilon_1} b^i a^{\epsilon_2} b^j \rangle,$$

donde  $\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1$ ,  $i, j \neq 0$  y  $|i| + |j| = |m| + |n|$ . Además debe suceder que  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$  o que  $sg(i) \neq sg(j)$ . Notamos que las presentaciones estándar de  $BS(k, l)$  y de  $BS(-k, -l)$  son equivalentes en el poset. Por lo tanto, cada grupo  $BS(k, l)$  con  $|k| + |l| = |m| + |n|$  está presentado por dos clases maximales en su poset. La clase que contiene a las presentaciones estándar de  $BS(k, l)$  y  $BS(-k, -l)$ ; y la que contiene a las de  $BS(l, k)$  y  $BS(-l, -k)$ .

Sin embargo, no todas las clases de presentaciones maximales corresponden a grupos de Baumslag-Solitar. Si  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ ,

$$\langle a, b | a^{\epsilon} b^i a^{\epsilon} b^j \rangle$$

no es la presentación de ningún grupo de Baumslag-Solitar. Recordamos que el *torus knot group*  $T(m, n)$  es un grupo que viene dado por la presentación

$$\langle a, b | a^m = b^n \rangle .$$

Cuando  $m$  y  $n$  son coprimos, este es el grupo fundamental del complemento de un  $(m, n)$ -torus knot. Si en la presentación anterior hacemos la sustitución  $c = a^{\epsilon} b^i$  obtenemos

$$\langle b, c | c^2 b^{j-i} \rangle .$$

Dependiendo de los signos de  $i$  y  $j$ , esta es la presentación de un grupo  $T(2, |m| + |n|)$  o  $T(2, -|m| - |n|)$ . Notamos que estos últimos son el mismo grupo. Así puede verse que el resto de las clases maximales corresponden a presentaciones de  $T(2, |m| + |n|)$ . Observamos que la cantidad de estas clases es  $|m| + |n| - 1$ .

Ahora veamos cómo son las componentes conexas del poset. Es claro que las clases maximales asociadas a presentaciones de  $BS(k, l)$  con  $sg(k) \neq sg(l)$  y la clases asociadas a presentaciones de  $T(2, |m| + |n|)$  están en la misma componente conexa. Esto se debe a que de cualquiera de ellas puede llegarse a la clase minimal de la presentación del grupo trivial,

$$\langle a, b | ab, \bar{a}b, b, \dots, b \rangle .$$

Del mismo modo, las clases maximales asociadas a presentaciones de  $BS(k, l)$  con  $sg(k) = sg(l)$  pertenecen a la misma componente conexa. Estas se conectan con la clase minimal de la presentación de  $\mathbb{Z}$ ,

$$\langle a, a | ab\bar{a}\bar{b}, b, \dots, b \rangle .$$

Afirmamos que estas dos componentes conexas son disjuntas, y en consecuencia el poset tiene dos componentes conexas. Simplemente hay que observar que en las presentaciones de la segunda componente conexa nunca vamos a poder separar a  $a$  y  $\bar{a}$  en dos relaciones distintas.

Las dos clases minimales que exhibimos son en particular mínimos. Es fácil ver que a cualquier presentación de una clase menor o igual a las maximales se le pueden seguir aplicando movimientos de modo de llegar a uno de estos mínimos.

Los grupos que pueden aparecer presentados en niveles intermedios del poset de la presentaciones estándar de  $BS(m, n)$  son variados. Los mismos son:

- El grupo trivial;
- $\mathbb{Z}$ ;
- $\mathbb{Z}_r$ , donde  $r$  puede ser cualquier divisor de  $|m| + |n|$ ;
- $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_r$ , donde  $r$  puede ser cualquier divisor de  $|m| + |n| - 2$ ;
- Cocientes de  $BS(i, j)$  y  $T(2, |i| + |j|)$  de la forma

$$\langle a, b | a^{\epsilon_1} b^i a^{\epsilon_2} b^j, b^k \rangle,$$

donde  $\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1, i, j \neq 0, k > 1$ , y  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$  o  $sg(i) \neq sg(j)$ .

### 4.3. Propiedades de presentaciones con un mismo grafo de Whitehead

Como hemos visto en las secciones anteriores, en principio las presentaciones de un poset pueden ser muy distintas, tanto a nivel algebraico como a nivel topológico. Haremos ahora un análisis más exhaustivo las propiedades de asfericidad, local indicabilidad, hiperbolicidad en estos posets. Comencemos con algunos ejemplos.

**Ejemplo 4.3.1.** Tenemos el siguiente grafo tipo Whitehead.

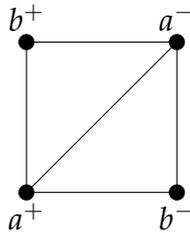


Figura 4.13: Grafo tipo Whitehead

Algunas de las presentaciones que lo tienen como grafo son,

- $P_1 = \langle a, b | a\bar{b}, a, ba \rangle$ . El grupo presentado es el trivial, y  $K_{P_1}$  no es esférico, ya que no es contráctil. Más aún,  $K_{P_1}$  es homotópicamente equivalente a  $S^2$ .

- $P_2 = \langle a, b | a\bar{b}a, ba \rangle$ . El grupo presentado es  $\mathbb{Z}_3$ , que tiene torsión. Por lo tanto no es localmente indicable y  $K_{P_2}$  no es esférico.
- $P_3 = \langle a, b | a\bar{b}abab \rangle$ . Como es un one-relator sin torsión, es localmente indicable, y el complejo  $K_{P_3}$  es esférico.

El siguiente ejemplo nos será de utilidad para estudiar la relación del poset de un grafo de Whitehead con hiperbolicidad.

**Ejemplo 4.3.2.** Sea  $\langle a, b | abb\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{b} \rangle$  la presentación con grafo de Whitehead

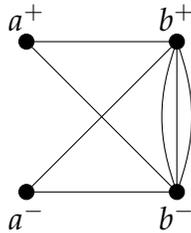


Figura 4.14: Grafo de Whitehead de  $BS(2,3)$

Parte del poset asociado a su grafo de Whitehead es

$$\begin{array}{ccccc}
 \langle a, b | abb\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{b} \rangle & & \langle a, b | \bar{a}bb\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{b} \rangle & & \\
 \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\
 \langle a, b | abb\bar{a}\bar{b}, \bar{b} \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 & & \langle a, b | \bar{a}bb\bar{a}\bar{b}, \bar{b} \rangle \simeq \mathbb{Z} & & \langle a, b | \bar{a}bb\bar{a}\bar{b}, \bar{b}\bar{b} \rangle \simeq \mathbb{Z} \cdot \\
 \downarrow & & & & \\
 \langle a, b | abb, \bar{a}\bar{b}\bar{b}, \bar{b} \rangle \simeq 1 & & & & 
 \end{array}$$

Primero observemos qué sucede con los tests de curvatura.

**Observación 4.3.3.** Si  $P \leq P'$  y  $P$  satisface alguno de los tests de curvatura, entonces  $P'$  lo satisface con el mismo peso.

Sin embargo, no vale la recíproca. Si  $P'$  satisface un weight test,  $P$  no necesariamente lo satisface. En el ejemplo 4.2.2, cualquiera de las presentaciones maximales cumple el weight test de Huck y Rosebrock para ciclos simples, pero la minimal no.

Ahora veamos cómo se comportan dos grupos con un mismo grafo de Whitehead con respecto a la hiperbolicidad. Es sabido que los grupos de Baumslag-Solitar no son hiperbólicos. Más aún, cualquier grupo que contenga un subgrupo isomorfo a un grupo de Baumslag-Solitar no es hiperbólico [3]. La presentación del ejemplo 4.3.2,  $\langle a, b | abb\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{b} \rangle$ , es la presentación de un grupo Baumslag-Solitar  $BS(2, 3)$ , luego el grupo presentado no es hiperbólico. Sin embargo, en el mismo ejemplo, esta presentación cubre a dos presentaciones de  $\mathbb{Z}$ , que sí es hiperbólico. A diferencia de los weight tests, acá tampoco es válida la inversa, como veremos en el ejemplo a continuación.

**Ejemplo 4.3.4.** Consideremos las siguientes dos presentaciones que son parte de un mismo poset

$$\begin{array}{c} \langle a, b, c | ab\bar{a}\bar{b}ac \rangle \\ | \\ \langle a, b, c | ab\bar{a}\bar{b}, ac \rangle \end{array} .$$

La primera de ellas presenta un grupo hiperbólico, pues cumple el weight test hiperbólico. En cambio, el subgrupo generado por  $a$  y  $b$  en la segunda es isomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , por lo que el grupo presentado no resulta hiperbólico.

Con local indicabilidad sucede lo mismo que con hiperbolicidad. En el ejemplo 4.3.2,  $\langle a, b | abb\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{b} \rangle$  presenta un grupo localmente indicable, pues tiene curvatura seccional no positiva. En cambio, una de las presentaciones que cubre presenta a  $\mathbb{Z}_2$ , que no es localmente indicable. A su vez, en ese mismo ejemplo, la presentación de  $\mathbb{Z}_2$  cubre a una presentación del grupo trivial, que es localmente indicable.

Nuevamente tomamos  $P \leq P'$ . Queremos ver ahora qué ocurre si una de ellas es asférica. Si  $P'$  es asférica,  $P$  no tiene por qué serlo. Tomando  $P' = \langle a, b | abb\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{b} \rangle$  y  $P = \langle a, b | abb, a\bar{b}\bar{b}, \bar{b} \rangle$  como en el ejemplo 4.3.2, tenemos que  $P'$  es asférica (cumple el weight test), pero  $P$  no lo es (presenta al grupo trivial y no es balanceada).

Si  $P$  es asférica, entonces no sabemos si  $P'$  lo es. Supongamos que  $P = \langle A | R_1, \dots, R_{m-1}, R_m \rangle$  y  $P' = \langle A | R_1, \dots, R_{m-1}R_m \rangle$ . La presentación  $P$  es equivalente a  $\langle A | R_1, \dots, R_{m-1}R_m, R_m \rangle$ , y  $P'$  es una subpresentación. Luego, la conjetura de Whitehead dice que  $P'$  es asférica.

Veamos que poder probar que si  $P$  es esférica, entonces  $P'$  lo es, es equivalente a probar la conjetura de Whitehead para el caso finito. Recordamos ahora algunos resultados vistos en el capítulo 1, cuyas demostraciones pueden encontrarse en [22]. El primer hecho es que todo CW-complejo de dimensión 2 es homotópicamente equivalente a un 2-complejo combinatorio. A su vez, al cocientar por un árbol maximal, resulta que todo 2-complejo combinatorio es homotópico al complejo asociado a una presentación. Por lo tanto, probar la conjetura de Whitehead para el caso finito es equivalente a probarla para complejos asociados a presentaciones. En este contexto, un subcomplejo se corresponde con eliminar algunas relaciones y generadores de la presentación original. En particular, alcanza con probar la conjetura de Whitehead para una presentación  $Q = \langle a_1, \dots, a_n | R_1, \dots, R_m \rangle$  y una subpresentación  $Q' = \langle a_1, \dots, a_n | R_1, \dots, R_{m-1} \rangle$  con una relación menos, ya que remover 1-celdas no cambia la asfericidad.

Sea  $Q = \langle a_1, \dots, a_n | R_1, \dots, R_m \rangle$  una presentación esférica. Podemos suponer que tiene más de una relación, pues si no al remover su única relación es claro que la presentación resulta esférica. Debemos probar que al remover una relación la presentación resultante es esférica usando el hecho de que si una presentación  $P$  es esférica y  $P \leq P'$ , entonces  $P'$  lo es. Aplicamos la siguiente secuencia de  $Q^{**}$ -transformaciones a  $Q$ , junto con una operación de tipo (3):

$$\langle a_1, \dots, a_n | R_1, \dots, R_m \rangle,$$

$$\langle a_1, \dots, a_n, a | R_1, \dots, R_{m-1} R_m^{-1}, R_m, a \rangle,$$

$$\langle a_1, \dots, a_n, a | R_1, \dots, a R_{m-1} R_m^{-1}, a R_m, a \rangle,$$

$$\langle a_1, \dots, a_n, a | R_1, \dots, a R_{m-1} R_m^{-1} a R_m, a \rangle,$$

$$\langle a_1, \dots, a_n, a | R_1, \dots, R_{m-1} R_m^{-1} R_m, a \rangle,$$

$$\langle a_1, \dots, a_n | R_1, \dots, R_{m-1} R_m^{-1} R_m \rangle,$$

$$\langle a_1, \dots, a_n | R_1, \dots, R_{m-1} \rangle.$$

Luego la presentación que obtuvimos al remover  $R_m$  es esférica.

**Observación 4.3.5.** *La conjetura de Whitehead para el caso finito es equivalente a probar que si  $P \leq P'$  y  $P$  es esférica, entonces  $P'$  es esférica.*

Resumamos los resultados obtenidos hasta ahora. Sean  $P \leq P'$  en el poset de un grafo de Whitehead. Entonces:

- Si  $P$  cumple algún test de curvatura, entonces  $P'$  también lo cumple (ver Observación 4.3.3).
- Si  $P'$  cumple algún test de curvatura,  $P$  no tiene por qué cumplirlo (ver ejemplo 4.2.2).
- Si  $G_P$  es localmente indicable,  $G_{P'}$  puede no serlo (ver ejemplo 4.3.2).
- Si  $G_{P'}$  es localmente indicable,  $G_P$  puede no serlo (ver ejemplo 4.3.2).
- Si  $G_P$  es hiperbólico,  $G_{P'}$  puede no serlo (ver ejemplo 4.3.2).
- Si  $G_{P'}$  es hiperbólico,  $G_P$  puede no serlo (ver ejemplo 4.3.4).
- Si  $P$  es esférica, la asfericidad de  $P'$  es equivalente a la conjetura de Whitehead para el caso finito ver Observación 4.3.5).
- Si  $P'$  es esférica,  $P$  no necesariamente lo es (ver ejemplo 4.3.2).

#### 4.4. I-test y su relación con el poset de un grafo tipo Whitehead

En [2] Barmak y Minian inventaron un nuevo test para presentaciones que implica su reducibilidad diagramática. En particular sirve para testear la asfericidad de una presentación. Bajo ciertas condiciones algebraicas logran demostrar que todo subcomplejo finito del revestimiento universal del complejo asociado a la presentación se colapsa a un complejo de dimensión menor o igual a 1. Como vimos en el capítulo 1, por un resultado de Corson y Trace [10], esto último es equivalente a ser diagramáticamente reducible.

Sea  $P = \langle a_1, \dots, a_n \mid R_1, \dots, R_m \rangle$  una presentación con  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Dada una palabra  $w = a_{i_1}^{\epsilon_1} \dots a_{i_l}^{\epsilon_l}$  en  $A \cup A^{-1}$  con  $\epsilon_i = \pm 1$ , para  $1 \leq k \leq l$

definimos

$$s(k, w) = \begin{cases} a_{i_k}^{\epsilon_k} \dots a_{i_l}^{\epsilon_l} & \text{si } \epsilon_k = 1 \\ a_{i_{k+1}}^{\epsilon_{k+1}} \dots a_{i_l}^{\epsilon_l} & \text{si } \epsilon_k = -1 \end{cases};$$

$$\text{occ}(a_i, w) = \{1 \leq k \leq l \mid a_{i_k} = a_i\}.$$

Consideramos el cociente  $q : F(A) \rightarrow F(A)^{ab}$  que va del grupo libre en los generadores de  $P$  a su abelianización, que es isomorfa a  $\mathbb{Z}^n$ . Identificando  $q(a_i)$  con el  $i$ -ésimo vector canónico, tenemos el siguiente resultado.

**Lema 4.4.1.**  *$G_P$  es indicable si y sólo si existe un vector no nulo  $v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\langle q(R_j), v \rangle = 0 \forall 1 \leq j \leq m$ .*

Si  $G_P$  es indicable, sea  $v$  un vector ortogonal a cada  $q(R_j)$ . Dada una palabra  $w \in A \cup A^{-1}$  vamos a definir su *peso* (relativo a  $v$ ) como

$$\bar{w} = \langle q(w), v \rangle \in \mathbb{R}.$$

Dado un elemento de  $G_P$ , definimos su peso como el peso de algún representante en  $A \cup A^{-1}$ . Notamos que el peso está bien definido. Con esto en mente, Barmak y Minian definen la *matriz de pesos de  $P$*  como

$$M_{i,j} = \{\overline{s(k, R_j)}\}_{k \in \text{occ}(a_i, R_j)}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m.$$

Notar que cada  $M_{i,j}$  es una familia que puede tener repeticiones, y que puede ser vacía si  $a_i$  no aparece en  $R_j$ .

**Definición 4.4.2.** Una matriz de  $n \times m$   $M$  cuyas entradas son familias de número reales será llamada *buena* si existe un ordenamiento  $j_1, j_2, \dots, j_m$  de sus columnas y un ordenamiento  $i_1, i_2, \dots, i_m$  de sus filas, de modo que para cada  $1 \leq k \leq m$

1.  $M_{i_k, j_k}$  es no vacío,
2. el máximo  $\lambda_k$  de  $M_{i_k, j_k}$  es el máximo de toda la fila  $\bigcup_{j=1}^m M_{i_k, j}$  y
3. la multiplicidad de  $\lambda_k$  en  $\bigcup_{l=k}^m M_{i_k, j_l}$  es uno.

Diremos que una presentación  $P = \langle a_1, \dots, a_n \mid R_1, \dots, R_m \rangle$  satisface el *I-test* si existe un vector  $v \in \mathbb{R}^n$  ortogonal a cada  $q(R_j)$  tal que la matriz de pesos asociada a  $P$  es buena. El resultado central del Barmak y Minian es el siguiente.

**Teorema 4.4.3.** (Teorema 2.8 [2]) Si  $P$  satisface el I-test,  $K_P$  es diagramáticamente reducible.

Notamos que el resultado también es válido si en la definición de matriz buena cambiamos máximos por mínimos, ya que esto se corresponde con cambiar  $v$  por  $-v$ . Veamos dos ejemplos de aplicación del I-test.

**Ejemplo 4.4.4.** Consideremos el siguiente LOT  $\Gamma$

$$a \xrightarrow{c} b \xrightarrow{d} c \xleftarrow{a} d .$$

Su presentación es  $P = \langle a, b, c, d | ac\bar{b}\bar{c}, bd\bar{c}\bar{d}, da\bar{c}\bar{a} \rangle$ . Como la suma de los exponentes de todas sus relaciones es 0, podemos tomar  $v = (1, 1, 1, 1)$ . En este caso la matriz resultará

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \emptyset & -2, 0 \\ -1 & 0 & \emptyset \\ -1, 0 & -1 & -1 \\ \emptyset & -1, 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Elegimos como orden de las columnas 2, 3, 1 y de las filas 2, 4, 3. En  $M_{4,3}$  tenemos un 0 que es el máximo de su fila, y el único 0 que aparece en la tercera columna en las filas 2, 3 y 4. Luego tenemos un 0 en  $M_{2,2}$ , que es el máximo de su fila, y el único 0 que aparece en la segunda columna en las filas 2 y 3. Por último, en  $M_{3,1}$  aparece un 0, que es el máximo de su fila y tiene multiplicidad 1 en  $M_{3,1}$ .

Luego, eligiendo como vector a  $v = (1, 1, 1, 1)$ , la matriz de pesos resulta buena. Por lo tanto  $K_\Gamma$  es diagramáticamente reducible.

**Ejemplo 4.4.5.** Sea  $P = \langle a, b, c, d | abcd, \bar{c}\bar{d}ca\bar{c}, bab\bar{c} \rangle$ . Elegimos el vector  $v = (1, -2, -3, 4)$  que es ortogonal a  $q(abcd) = (1, 1, 1, 1)$ ,  $q(\bar{c}\bar{d}ca\bar{c}) = (1, 0, -1, -1)$  y  $q(bab\bar{c}) = (1, 2, -1, 0)$ . La matriz de pesos es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -1 & \emptyset & 0, 1 \\ 1 & -3, 1, 0 & 0 \\ 4 & 1 & \emptyset \end{pmatrix} .$$

$P$  satisface el I-test si elegimos el orden de las columnas 1, 2, 3 y de las filas 4, 1, 2. El máximo de la cuarta fila es 4, y tiene multiplicidad 1 en  $M_{1,4} \cup M_{2,4} \cup M_{4,4}$ . El máximo de la primera fila es 4 y tiene multiplicidad 1 en  $M_{1,2} \cup M_{2,2}$ . Por último, el máximo de la segunda fila es 1 y tiene multiplicidad 2 en  $M_{2,3}$ .

Ahora analicemos cómo se relaciona el I-test con el poset de un grafo tipo Whitehead. Lo primero que observamos es que si  $P \leq P'$  y  $P$  es diagramáticamente reducible, entonces  $P'$  lo es. Esto se debe a que cualquier diagrama esférico en  $P'$  se lleva a uno en  $P$ . Si  $R_1$  y  $R_2$  son las relaciones de  $P$  que concatenamos para obtener  $P'$ , dado un diagrama esférico en  $P'$  lo modificamos con el siguiente movimiento:

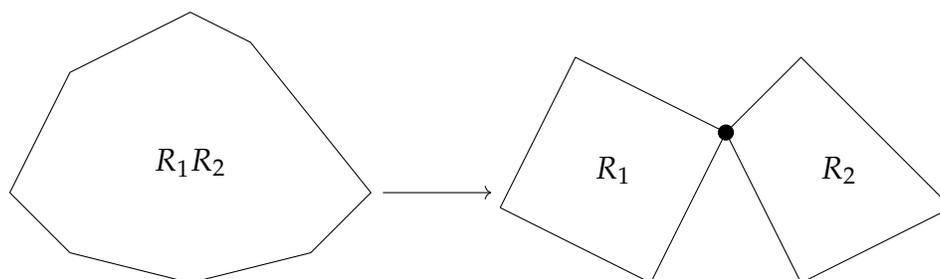


Figura 4.15: Obtención de un diagrama en  $P$  a partir de uno en  $P'$

Por lo tanto, si  $P$  no admite diagramas esféricos reducidos,  $P'$  tampoco. Esto nos dice que si  $P \leq P'$  y  $P$  cumple el I-test, entonces  $P'$  es diagramáticamente reducible. Veamos si además podemos concluir que  $P'$  cumple el I-test. Para eso debemos ver qué sucede con el I-test cuando aplicamos movimientos de tipo (1), (2) y (3).

Lo primero que observamos es que invertir una relación no va a cambiar su columna en la matriz de pesos, por lo que si una presentación cumple el I-test, al aplicar un movimiento de tipo (2) lo sigue cumpliendo. Sin embargo, lo mismo no sucede con movimientos de tipo (1). Basta analizar cómo cambia la columna de una relación en la matriz de pesos al permutar cíclicamente una única letra. En dicha columna todos los elementos incrementan o disminuyen en una constante, dependiendo de cuál sea la letra que permutamos y de cuál es el número correspondiente a esa letra en el vector  $v$ . Veamos qué sucede en el caso de la siguiente presentación, tomada del ejemplo 2.3 de [2].

**Ejemplo 4.4.6.** Sea  $P = \langle x, y, z, w | x^2y^2z^2, xyx^{-1}zyz^{-1}, w^2x^{-1}w^{-1}z \rangle$ . El vector  $v = (1, 0, -1, 2)$  es ortogonal a cada  $q(R_j)$ , y la matriz de pesos

resultante es

$$M = \begin{pmatrix} 0, -1 & 0, 0 & -3 \\ -2, -2 & -1, 1 & \emptyset \\ -2, -1 & 0, 0 & -1 \\ \emptyset & \emptyset & 0, -2, -1 \end{pmatrix}.$$

Como muestran en [2], esta matriz es buena y  $P$  cumple el I-test. Si cambiamos la segunda relación por  $yx^{-1}zyz^{-1}x$  (es decir, cambiamos la primera  $x$  al final), el efecto sobre la segunda columna va a ser sumarle 1 a todos sus elementos. Esto se debe a que la primera coordenada de  $v$  es 1. Luego la matriz de  $\tilde{P} = \langle x, y, z, w | x^2y^2z^2, yx^{-1}zyz^{-1}x, w^2x^{-1}w^{-1}z \rangle$  es

$$M = \begin{pmatrix} 0, -1 & 1, 1 & -3 \\ -2, -2 & 0, 2 & \emptyset \\ -2, -1 & 1, 1 & -1 \\ \emptyset & \emptyset & 0, -2, -1 \end{pmatrix}.$$

Lo que ocurre ahora es que la primera columna no tiene ningún máximo, por lo que la matriz no es buena. Incluso si quisiéramos verificar las condiciones con mínimos en lugar de máximos, la segunda columna no tiene ningún mínimo.

Concluimos de este ejemplo es que si  $P$  y  $Q$  son dos presentaciones que están en una misma clase en el poset y  $P$  cumple el I-test,  $Q$  puede no cumplirlo.

Sean  $P \leq P'$  con  $P = \langle A | R_1, R_2, \dots, R_m \rangle$  y  $P' = \langle A | R_1R_2, \dots, R_m \rangle$ . Sin pérdida de generalidad, suponemos que las relaciones que concatenamos son las primeras dos. Sea  $v$  un vector ortogonal a cada  $q(R_j)$ , y supongamos que la matriz de pesos de  $P$  con respecto a este  $v$  es buena. La matriz de pesos de  $P'$  con respecto a  $v$  tendrá como primera columna a la unión de las dos primeras columnas de la matriz de pesos de  $P$ . Luego, la matriz de pesos de  $P'$  también es buena, ya que elegimos los mismos ordenamientos para sus fila y sus columnas, con la salvedad de que la posición de la primera columna en el ordenamiento es la menor de las posiciones de las primera y segunda columnas de  $P$ .

En conclusión, podemos decir que si hay dos clases comparables en el poset de un grafo tipo Whitehead y la menor de ellas contiene un representante que cumple el I-test, entonces la mayor también contiene un representante que cumple el I-test. Por lo tanto, todas las presentaciones de su clase son esféricas. Sin embargo, no podemos asegurar que todas las presentaciones de estas clases cumplan el I-test.

# Bibliografía

- [1] BARMAK, J. A. Algebraic topology of finite topological spaces and applications. *Springer - Lecture Notes in Mathematics vol. 2032* (2011).
- [2] BARMAK, J. A., MINIAN, E. G. A new test for asphericity and diagrammatic reducibility of group presentations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* (En prensa).
- [3] BESTVINA, M. Questions in geometric group theory. *Disponible en <https://www.math.utah.edu/bestvina/eprints/questions-updated.pdf>* (2004).
- [4] BRIDSON, M. R. , HAEFLIGER, A. Metric spaces of non-positive curvature. *Springer Verlag* (1999).
- [5] BRODSKIĬ, S. D. Equations over groups and groups with a single defining relator. *Uspehi Mat. Nauk* 35, 4 (1980), 183.
- [6] BROWN, K. Cohomology of groups. *Springer Verlag* (1982).
- [7] CARTAN, E. Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann. *Gauthier-Villars* (1928).
- [8] CLAY, A. , ROLFSEN, H. Ordered groups and topology. *Amer. Math. Soc.* (2010).
- [9] COLLINS, D. J. , HUEBSCHMANN, J. Spherical diagrams and identities among relations. *Math. Ann.* 261 (1982), 155–183.
- [10] CORSON, J. M. , TRACE, B. Diagrammatically reducible complexes and Haken manifolds. *J. Austral Math. Soc.* 22, 69 (2000), 116–126.

- [11] DEHN, M. Papers on group theory and topology. *Springer Verlag, traducido por J. Stillwell* (1987).
- [12] DEROIN, B., NAVAS, A., RIVAS, C. Groups, orders, and dynamics. *Disponibile en <https://arxiv.org/abs/1408.5805>* (2016).
- [13] GERSTEN, S. M. Branched coverings of 2-complexes and diagrammatic reducibility. *Trans. Amer. Math. Soc.* 303 (1987), 689–706.
- [14] GERSTEN, S. M. Reducible diagrams and equations over groups. *Essays in Group Theory, Springer Verlag* (1987), 15–73.
- [15] GERSTEN, S. M., SHORT, H. Small cancellation theory and automatic groups. *Inventiones mathematicae* 102, 1 (1990), 305–334.
- [16] GHYS, E., HAEFLIGER, A., VERJOVSKI, A. Group theory from a geometrical viewpoint. *World Scientific* (1990).
- [17] GROMOV, M. Hyperbolic groups. *Essays in Group Theory, Springer Verlag* (1987), 75–263.
- [18] HARLANDER, J., ROSEBROCK, S. Injective labeled oriented trees. *Mathematische Zeitschrift* 4 (2017), 1–15.
- [19] HASS, J. The geometry of the slice-ribbon problem. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 94 (1983), 101–108.
- [20] HATCHER, A. Algebraic topology. *Cambridge University Press* (2002).
- [21] HIGMAN, G. The units of groups and rings. *Proc. London Math. Soc.* 46 (1940), 231–248.
- [22] HOG-ANGELONI, C., METZLER, W., SIERADSKI, A. J. Two-dimensional homotopy and combinatorial group theory. *London Mathematical Society* 197 (1993).
- [23] HOWIE, J. On pairs of 2-complexes and systems of equations over groups. *J. Reine Angew. Math.* 22, 324 (1981), 165–174.
- [24] HOWIE, J. On locally indicable groups. *Math. Z.* 180 (1982), 445–451.
- [25] HOWIE, J. On the asphericity of ribbon disc complements. *Trans. Amer. Math. Soc.* 289 (1985), 281–302.

- [26] HOWIE, J. Some remarks on a problem of J.H.C. Whitehead. *Topology* 22, 4 (1985), 475–485.
- [27] HOWIE, J. Minimal Seifert manifolds for higher ribbon knots. *The Epstein birthday schrift, Geom. Topol. Monogr., Coventry* (1998), 261–293.
- [28] HUCK, G. , ROSEBROCK, S. Weight tests and hyperbolic groups. *London Math. Soc. Lecture Note Ser. 204* (1995), 174–186.
- [29] HUCK, G. , ROSEBROCK, S. Aspherical labelled oriented trees and knots. *Proceedings of the Edinburgh Math. Soc.* 44 (2001), 285–294.
- [30] LYNDON, R. C. Cohomology theory of groups with a single defining relation. *Ann. Math.* 52, 2 (1950), 650–655.
- [31] LYNDON, R. C., SCHUPP, P. E. Combinatorial group theory. *Springer Verlag* (1977).
- [32] LÜCK, W. Aspherical manifolds. *Bulletin of the Manifold Atlas* 17 (2012).
- [33] METZLER, W. , ROSEBROCK, S. Advances in two-dimensional homotopy and combinatorial group theory. *London Mathematical Society* 446 (2018).
- [34] MILNOR, J. W. Collected papers of John Milnor: Homotopy, homology, and manifolds. *Amer. Math. Soc.* 4 (2009), 354.
- [35] MURTY, K. G. Linear programming. *John Wiley , Sons, Inc.* (1983).
- [36] ROLFSEN, D. Knots and links. *AMS Chelsea Publishing, Amer. Math. Soc.* (1976).
- [37] ROSEBROCK, S. A reduced spherical diagram into a ribbon-disk complement and related examples. *Topology and Combinatorial Group Theory. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag* 1440 (1990), 175–185.
- [38] ROSEBROCK, S. On the realization of Wirtinger presentations as knot groups. *Journal of Knot Theory and its Ramifications* 3, 2 (1994), 211–222.
- [39] ROSEBROCK, S. The Whitehead conjecture - an overview. *Siberian Electronic Mathematical Reports* 4 (2007), 440–449.

- [40] ROSEBROCK, S. On the complexity of labeled oriented trees. *Indian Academy of Sciences* 120, 1 (2010), 11–18.
- [41] SIERADSKI, A. J. A coloring test for asphericity. *Quart. J. Math. Oxford* 34 (1983), 97–106.
- [42] STALLINGS, J. Group theory and three-dimensional manifolds. *Yale University Press, New Haven* (1971).
- [43] WHITEHEAD, J. H. C. On adding relations to homotopy groups. *Ann. of Math.* 42 (1941), 409–428.
- [44] WISE, D. Coherence, local-indicability, and nonpositive immersions. *Preprint disponible en*  
*<http://www.math.mcgill.ca/wise/pspapers/NonPositiveCoherence.ps>* (2002).
- [45] WISE, D. Sectional curvature, compact cores and local quasiconvexity. *GAFSA* 14 (2004), 433–468.