Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Tesis de Licenciatura

Análisis de Fourier en el grupo de ideles y funciones L de Dirichlet

Hernán Bernardo Galletti

Director: Nicolás Sirolli

Febrero de 2018

Índice general

Agradecimientos V

Introducción VII

1. Teoría clásica 1
- 1.1. Caracteres de Dirichlet . . . 1
  - Definición y propiedades básicas . . . 1
  - Ejemplos . . . 2
- 1.2. Sumas de Gauss . . . 3
- 1.3. Funciones L de Dirichlet . . . 6
- 1.4. Funciones theta . . . 7
  - Fórmula de sumación de Poisson . . . 7
  - Funciones theta . . . 9
- 1.5. Ecuación funcional y continuación analítica . . . 10

2. Preliminares 15
- 2.1. Estructuras básicas y algunas notaciones . . . 15
- 2.2. Grupos topológicos . . . 15
  - Generalidades . . . 15
  - Axiomas de separación y cocientes . . . 16
  - Grupos localmente compactos . . . 17
- 2.3. Dual de Pontryagin . . . 17
- 2.4. Teoría de la medida en espacios localmente compactos . . . 20
  - Definiciones y resultados básicos . . . 20
  - Medidas de Radon y regularidad . . . 21
  - Medida en el producto de espacios topológicos . . . 23

3. Adeles e ideles 25
- 3.1. Números p-ádicos . . . 25
  - Valor absoluto . . . 25
  - Construcción de los números p-ádicos . . . 26
  - Los números p-ádicos como series de potencias . . . 29
  - Propiedades topológicas y algebraicas . . . 33
  - Unidades de $\mathbb{Z}_p$ . . . 35

3.2. Producto restringido de grupos topológicos 36
Definición y propiedades básicas 37
Cuasi-caracteres 40
3.3. Adeles e ideles 41
Adeles 41
Ideles 44
3.4. Caracteres locales y globales aditivos 48
Caracteres de $\mathbb{Q}_p$ 48
Caracteres adélicos 50
3.5. Cuasi-caracteres locales y globales multiplicativos 52
Cuasi-caracteres de $\mathbb{Q}_p^\times$ 52
Cuasi-caracteres idélicos 53
Conductor 55
Funciones L 56
Correspondencia con los caracteres de Dirichlet 58

4. Elementos de análisis **63**
4.1. Medida de Haar 63
Generalidades 63
Medida de Haar en el producto restringido de grupos 67
4.2. Medidas de Haar globales y locales 70
Medida de Haar en los números p-ádicos 70
Medida de Haar en los adeles e ideles 73
4.3. Transformada de Fourier 73
Espacio de Schwartz-Bruhat 73
Transformada de Fourier en $\mathbb{Q}_p$ 74
Transformada de Fourier en $\mathbb{A}$ 78
Fórmula de inversión 79
4.4. Sumación de Poisson 80

5. Teoría moderna **85**
5.1. Funciones zeta 85
5.2. Resultados locales 86
Funciones zeta locales 86
Root number local 95
5.3. Resultados globales 96

Agradecimientos

A mi director Nicolás por la enorme paciencia, las correcciones y sugerencias.

A Leandro y Román por la buena onda y por aceptar ser jurados de esta tesis. Gracias Román por tu tiempo en el IAM y tus sugerencias.

A todos los profesores que hicieron que me guste la matemática cada vez más. Especialmente a todos los que padecieron mis consultas y dudas a lo largo de estos años.

A todos los compañeros de la FCEN con los que tuve charlas e ideas inspiradoras. En particular, aquellos con los que compartí salidas o momentos agradables fuera de la facu; recordándome que no todo es estudio.

A mi familia y amigos por bancarme, especialmente a mi mamá que sin su esfuerzo infinito hubiese sido imposible seguir lo que más me gusta.

A Lau por su paciencia y apoyo en los momentos más difíciles.

A Lissy y Maia por su amor y cariño incondicional.

A Gastón, Sergio y Gonzalo por ser mis amigos de toda la vida.

Introducción

Teoría clásica

El ejemplo prototipo de las funciones L es la función ζ de Riemann, definida, a priori, como

$$\zeta(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s},$$

para s un número complejo con parte real mayor a 1. La identidad descubierta en 1737 por Euler:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

es una versión analítica del Teorema Fundamental de la Aritmética y el primer indicio al vínculo entre los números primos y ciertas funciones analíticas. Euler también se dio cuenta que la divergencia de la serie armónica (es decir, la existencia de un polo de ζ en $s = 1$) implica la existencia de infinitos primos. Riemann puso de manifiesto en su célebre artículo de 1859 que el vínculo entre estas dos teorías era más fuerte de lo que se creía al conjeturar la relación entre la función contadora de primos π y los ceros de ζ. Además probó que la función ζ tiene extensión meromorfa a todo $\mathbb{C}$ y que verifica la ecuación funcional

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

La ecuación funcional muestra que los ceros no triviales de ζ son simétricos respecto a la recta $\{\Re(s) = 1/2\}$.

Dirichlet, cien años después de Euler, fue el primero que logró extender esas ideas para probar que las progresiones aritméticas $\{a + qN : q \in \mathbb{N}\}$, con a y N coprimos, contienen infinitos primos. En lenguaje moderno, consideró funciones de la forma

$$L(s,\chi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

donde $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ es un morfismo. Dirichlet demostró que cualquiera sea el morfismo χ, se tiene que $L(1,\chi) \neq 0$, y que esto implica que

$$\sum_{p\equiv a \,(\text{mód}\, N)} \frac{1}{p^s} \xrightarrow[s\to 1^+]{} +\infty.$$

Las funciones L de Dirichlet también puede escribirse como un producto de Euler, tienen extensión meromorfa a todo $\mathbb{C}$ y una ecuación funcional.

En 1877 Dedekind introdujo la función zeta de un cuerpo de números K, definida, a priori, para s un número complejo con parte real mayor a 1

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}\subseteq\mathcal{O}_K} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p}\text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1},$$

donde la suma se hace sobre todos los ideales I no nulos de $\mathcal{O}_K$, $\mathcal{O}_K$ es el anillo de enteros de K, y $N(\mathfrak{a})$ es la norma del ideal $\mathfrak{a}$. En una serie de artículos publicados entre 1917 y 1920, Hecke extendió la noción de carácteres de Dirichlet a cuerpos de números y definió las correspondientes funciones L, de las cuales la función ζ_K es un caso particular. Además demostró que las funciones L de estos caracteres (de orden finito e infinito), tienen una extensión meromorfa a todo $\mathbb{C}$ y verifican una ecuación funcional. Cabe mencionar que la teoría de Hecke era bastante complicada y las dificultades técnicas venían en aumento.

Otro dato a subrayar es que en todos los casos hasta ahora citados (incluyendo los casos de funciones de Dirichlet como veremos en esta tesis), en la ecuación funcional la función L asociada viene acompañada de un factor donde aparece la función Γ. Este factor no tiene mucha explicación dentro del marco de la teoría subyacente.

La teoría de Iwasawa-Tate

En 1950 John Tate en su tesis doctoral [Tat67][1] hizo una reformulación de la teoría que permite obtener de forma mucho más simple y elegante (en el caso general) la ecuación funcional y la continuación meromorfa de las funciones L de carácteres de Hecke sobre cuerpos de números. Su enfoque fue innovador y se basa en hacer análisis armónico en el anillo de los adeles $\mathbb{A}$. Además, debido a la naturaleza del grupo de unidades de los adeles, la teoría muestra que las funciones zeta de los caracteres de dicho grupo, se factorizan naturalmente en "componentes locales". Cada componente local está asociada o bien, a un ideal primo del cuerpo base, o bien a una inmersión del cuerpo base en $\mathbb{C}$. Gracias a estas últimas, se explican los factores que tienen que ver con la función Γ.

La teoría lleva el apellido Iwasawa porque fue también desarrollada en forma independiente por Kenkichi Iwasawa, quién la publicó en 1952 [Iwa92]. Esencialmente utilizó el mismo método. Nosotros vamos a centrarnos en el trabajo de Tate por ser más conocido.

De Iwasawa-Tate a la actualidad

Los carácteres que considera Tate pueden ser entendidos como representaciones irreducibles de $\mathbb{A}^\times = \mathrm{GL}(1,\mathbb{A})$. El trabajo de Tate fue un disparador fundamental para el estudio de la teoría de representaciones irreducibles de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$, y sus funciones L

[1] Recién fue publicada en 1967.

asociadas. Estableciendo así un marco que unifica las teorías de carácteres de Dirichlet ($n = 1$) y formas modulares ($n = 2$) [Bum97].

Descripción de la tesis

El objetivo de la tesis es comparar la teoría clásica, con el enfoque de Tate (el cual llamaremos teoría moderna), en el caso que el cuerpo base es $\mathbb{Q}$. Veremos que los carácteres que se consideran en ambas teorías son esencialmente los mismos; la única diferencia significativa es que en la teoría moderna los carácteres pueden tener orden infinito.

Decidimos hacer el trabajo sobre $\mathbb{Q}$ para concentrarnos especialmente en los aspectos analíticos del trabajo de Tate. Hacerlo en el caso general no involucra dificultades adicionales en estos aspectos, pero requiere de la maquinaria básica de la teoría algebraica de números, y hacerlo con detalle implicaría un desarrollo mucho más extenso.

En este trabajo buscamos desarrollar la teoría describiendo cuidadosamente sus bases, especialmente en aquellos aspectos que no se ven en la carrera y que se dan por supuesto en la bibliografía. Además procuramos dar las demostraciones con sumo detalle.

En el Capítulo 1 desarrollamos rápidamente la teoría clásica. Introducimos los caracteres de Dirichlet y sus funciones L, con algunos ejemplos. El resultado principal del capítulo es el Teorema 1.5.10, en el cual se demuestra que estas funciones tienen continuación meromorfa y satisfacen una ecuación funcional. Su demostración está basada en la fórmula de sumación de Poisson. Los resultados y las demostraciones de este capítulo están estructurados de manera de resaltar la similitud con la teoría moderna.

En el Capítulo 2 se repasan algunas nociones básicas de grupos topológicos y teoría de la medida en espacios localmente compactos.

En el Capítulo 3 se empieza construyendo los números p-ádicos, que se utilizan para la construcción del anillo de adeles y su grupo de unidades, los ideles. Luego de estudiar los caracteres de estos grupos, procedemos a establecer la correspondencia entre los caracteres de Dirichlet y los caracteres del grupo de clases de ideles (Teorema 3.5.27).

En el Capítulo 4 nos concentramos en estudiar la transformada de Fourier en el anillo de adeles. En particular, demostramos la fórmula de inversión en este caso. El resultado principal es la Fórmula de sumación de Poisson 4.4.5, que termina generalizando la fórmula clásica.

En el Capítulo 5 presentamos los resultados principales de la tesis de Tate. El resultado principal es el Teorema 5.3.21, el cual generaliza el teorema principal del Capítulo 1.

Capítulo 1

Teoría clásica

A lo largo de todo el trabajo, siempre que digamos número primo significará número primo *positivo*.

1.1. Caracteres de Dirichlet

Definición y propiedades básicas

Dentro del grupo de números complejos no nulos, $\mathbb{C}^\times$, consideramos el subgrupo de números complejos de módulo 1 el cual denotaremos S^1. Dado N un número natural mayor a 1, sea $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ el grupo de unidades del anillo $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Un *carácter de Dirichlet módulo* N es un morfismo de grupos $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to S^1$.

Dado un divisor $d > 1$ de N, si η es un carácter de Dirichlet módulo d y π es la proyección canónica de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ en $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$, entonces la composición $\chi = \eta \circ \pi$ es un carácter de Dirichlet módulo N. Decimos que η induce a χ y que d es un *módulo inducido por* χ. El número 1 es un *módulo inducido* por χ si χ es trivial en $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$.

Al menor módulo inducido por χ se lo denomina *conductor* de χ y lo denotamos $\mathrm{cond}(\chi)$. El carácter de Dirichlet χ se dice *primitivo* si $\mathrm{cond}(\chi) = N$. En otras palabras, el caracter χ es primitivo si cada vez que se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\chi"] & \\
(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times \arrow[r, "\eta"'] & S^1
\end{tikzcd} \quad ,$$

con d divisor de N y η un carácter de Dirichlet módulo d, se tiene que $d = N$.

Es usual levantar un carácter de Dirichlet a una función $\chi' : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definida del siguiente modo:

$$\chi'(a) = \begin{cases} \chi(\bar{a}), & \text{si } a \text{ es coprimo con } N; \\ 0, & \text{si no;} \end{cases} \tag{1.1.1}$$

donde $\bar{a}$ denota la clase de a en $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. La función χ' verifica las siguientes propiedades:

(I) $\chi'(a) = 0$ para todo entero a no coprimo con N;

(II) $\chi'(a+N) = \chi'(a)$ para todo entero a coprimo con N;

(III) $\chi'(ab) = \chi'(a)\chi'(b)$ para todo par de enteros a y b.

Por abuso de notación, escribiremos χ en lugar de χ'. También es usual considerar la función idénticamente 1 en $\mathbb{Z}$ como un carácter de Dirichlet módulo 1.

Sea $N \in \mathbb{N}$, y sea χ un carácter de Dirichlet módulo N.

Proposición 1.1.2. *Sea $d \in \mathbb{N}$ un divisor de N. Son equivalentes:*

a) Para todo $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \equiv 1 \pmod{d}$ y $(a, N) = 1$, se tiene que $\chi(a) = 1$.

b) El carácter de Dirichlet χ está inducido por un carácter de Dirichlet módulo d. En otras palabras, el número d es un módulo inducido por χ.

Demostración. Supongamos que vale a). Sea $\pi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ la proyección canónica. Por hipótesis, el núcleo del morfismo de grupos $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to S^1$ contiene al núcleo de π. Luego existe un morfismo de grupos η tal que

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\chi"] & \\ (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times \arrow[r, "\eta"'] & S^1 \end{tikzcd} , \tag{1}$$

conmuta.

Si vale b), existe η morfismo de grupos tal que (1) conmuta. Si $a \in \mathbb{Z}$ verifica que $a \equiv 1 \pmod{d}$ y $(a, N) = 1$, entonces $\chi(a) = \chi(\bar{a}) = \eta \circ \pi(\bar{a}) = 1$, pues por hipótesis $\bar{a} \in \ker \pi$. □

Observemos que como χ es morfismo se tiene que $\chi(-1) \in \{-1, 1\}$. Decimos que χ es *par* si $\chi(-1) = 1$, en caso contrario decimos que χ es *impar*.

Denotamos con $\overline{\chi}$ al carácter de Dirichlet módulo N dado por $\chi(a) = \overline{\chi(a)}$ si $a \in \mathbb{Z}$.

Ejemplos

Ejemplo 1.1.3. Sea $N \in \mathbb{N}$. Al carácter trivial se lo llama *carácter principal módulo N*. Está dado por

$$\chi(a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \text{ es coprimo con } N; \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Notar que la función idénticamente 1 en $\mathbb{Z}$ es el carácter principal módulo 1.

Ejemplo 1.1.4. Sea p un primo impar. Se define el símbolo de Legendre como

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \text{ es un cuadrado módulo } p \text{ y } a \text{ es coprimo con } p; \\ -1, & \text{si } a \text{ no es un cuadrado módulo } p; \\ 0, & \text{si } a \text{ no es coprimo con } p; \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{Z}$. Notar que si p divide a a entonces a no es un cuadrado módulo p. La aplicación $a \mapsto \left(\frac{a}{p}\right)$ es un carácter de Dirichlet primitivo módulo p.

Ejemplo 1.1.5. Sea N un entero impar. Si $N = {p_1}^{k_1} \cdots {p_m}^{k_m}$, con $p_1, \ldots, p_m$ primos distintos, se define el símbolo de Jacobi como

$$\left(\frac{a}{N}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{a}{p_1}\right)^{k_m},$$

donde $a \in \mathbb{Z}$. La aplicación $a \mapsto \left(\frac{a}{N}\right)$ es un carácter de Dirichlet.

Ejemplo 1.1.6. Sean p un primo impar, $k \in \mathbb{N}$, ξ un generador de $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$ y ω una raíz primitiva $\varphi(p^k)$-ésima de 1, donde φ es la función de Euler. Entonces para todo $0 \leq h \leq \varphi(p^k) - 1$, la aplicación

$$\begin{aligned} \chi_h : \left(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}\right)^\times &\longrightarrow S^1 \\ \xi^m &\longmapsto \omega^{hm} \quad (m \in \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

es un carácter de Dirichlet módulo p^k. De hecho, se puede ver que $\chi_0, \ldots, \chi_{\varphi(p^k)-1}$ son todos los caracteres de Dirichlet módulo p^k. Además χ_h es primitivo si y sólo si p no divide a h. Para ver cuales son todos los caracteres de Dirichlet módulo una potencia de 2, ver por ejemplo [Apo76, Capítulo 10, Sección 11]. Si N no es una potencia de un primo, podemos obtener caracteres de Dirichlet módulo N no triviales de la anterior construcción y el Teorema chino del resto.

1.2. Sumas de Gauss

Sean $N \in \mathbb{N}$ y χ un carácter de Dirichlet módulo N. Se define la *suma de Gauss asociada a* χ como

$$\tau(\chi) = \sum_{n \,(\text{mód}\, N)} \chi(n) e^{2\pi i n/N},$$

donde $n \pmod{N}$ denota que la suma se hace sobre un sistema de representantes en $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Notemos que como $\chi(n) = 0$ si n no es coprimo con N, también podemos escribir

$$\tau(\chi) = \sum_{\substack{n \,(\text{mód}\, N) \\ (n,N)=1}} \chi(n) e^{2\pi i n/N} = \sum_{\bar{n} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \chi(\bar{n}) e^{2\pi i \bar{n}/N},$$

donde (n, N) denota el máximo común divisor de n y N.

Proposición 1.2.1. *Si χ es un carácter de Dirichlet primitivo módulo N, para todo $m \in \mathbb{Z}$ se tiene que*

$$\sum_{n \,(\text{mód}\, N)} \chi(n) e^{2\pi i n m/N} = \overline{\chi(m)}\, \tau(\chi). \tag{1.2.2}$$

Demostración. Supongamos primero que $(m, N) = 1$. Si n recorre un sistema de representantes de $\mathbb{Z}$ módulo N, entonces $n' = nm$ recorre otro sistema de representantes de $\mathbb{Z}$ módulo N. Luego,

$$\tau(\chi) = \sum_{n' \,(\text{mód}\, N)} \chi(n') e^{2\pi i n'/N} = \sum_{n \,(\text{mód}\, N)} \chi(nm) e^{2\pi i n m/N} = \chi(m) \sum_{n \,(\text{mód}\, N)} \chi(n) e^{2\pi i n m/N}. \tag{1}$$

Como m es coprimo con N, se tiene que $\chi(m) \neq 0$ y $\chi(m)^{-1} = \overline{\chi(m)}$. La ecuación (1.2.2) se sigue inmediatamente de (1).

Supongamos que $(m, N) > 1$. Entonces $\chi(m) = 0$ y debemos verificar que el lado izquierdo de (1.2.2) es 0. Sea $l = (m, N)$, y sean d y d' enteros tales que $N = dl$ y $m = d'l$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n \,(\text{mód}\, N)} \chi(n) e^{2\pi i n m/N} &= \sum_{n \,(\text{mód}\, N)} \chi(n) e^{2\pi i n d'/d} = \sum_{r \,(\text{mód}\, d)} \sum_{\substack{n \,(\text{mód}\, N) \\ n \equiv r (\text{mód}\, d)}} \chi(n) e^{2\pi i n d'/d} \\ &= \sum_{r \,(\text{mód}\, d)} \sum_{\substack{n \,(\text{mód}\, N) \\ n \equiv r (\text{mód}\, d)}} \chi(n) e^{2\pi i r d'/d} = \sum_{r \,(\text{mód}\, d)} \left(\sum_{\substack{n \,(\text{mód}\, N) \\ n \equiv r (\text{mód}\, d)}} \chi(n) \right) e^{2\pi i r d'/d}. \end{aligned}$$

Basta ver entonces que la suma entre paréntesis de la última línea es cero. Como d es un divisor propio de N y χ es un carácter de Dirichlet primitivo módulo N, el número d no es un módulo inducido por χ. Por la Proposición 1.1.2, existe $a \in \mathbb{Z}$, con $a \equiv 1$ $(\text{mód}\ d)$ y $(a, N) = 1$ tal que $\chi(a) \neq 1$. Es fácil ver que si n recorre los elementos de un sistema de representantes de $\mathbb{Z}$ módulo N que son congruentes a r módulo d, entonces an también. Luego,

$$\chi(a) \sum_{\substack{n \,(\text{mód}\, N) \\ n \equiv r (\text{mód}\, d)}} \chi(n) = \sum_{\substack{n \,(\text{mód}\, N) \\ n \equiv r (\text{mód}\, d)}} \chi(an) = \sum_{\substack{n \,(\text{mód}\, N) \\ n \equiv r (\text{mód}\, d)}} \chi(n). \tag{2}$$

Como $\chi(a) \neq 1$, la suma de la derecha de (2) es cero y obtenemos lo que queríamos ver. $\square$

Proposición 1.2.3. *Si χ es un carácter de Dirichlet primitivo módulo N, entonces $\tau(\chi) \neq 0$. Más aún, $|\tau(\chi)| = \sqrt{N}$.*

Demostración. Por la Proposición 1.2.1 tenemos que

$$
\begin{aligned}
|\tau(\chi)|^2 = \overline{\tau(\chi)}\tau(\chi) &= \sum_{m\,(\text{mód}\,N)} \overline{\chi(m)}e^{-2\pi i m/N}\tau(\chi) \\
&= \sum_{m\,(\text{mód}\,N)} e^{-2\pi i m/N} \sum_{n\,(\text{mód}\,N)} \chi(n)e^{2\pi i n m/N} = \sum_{m\,(\text{mód}\,N)} \sum_{n\,(\text{mód}\,N)} \chi(n)e^{2\pi i (n-1)m/N} \\
&= \sum_{n\,(\text{mód}\,N)} \chi(n) \sum_{m\,(\text{mód}\,N)} e^{2\pi i (n-1)m/N} = \sum_{n\,(\text{mód}\,N)} \chi(n) \sum_{m\,(\text{mód}\,N)} \left(e^{2\pi i (n-1)/N}\right)^m .
\end{aligned} \tag{1}
$$

Si $n \not\equiv 1 \pmod{N}$, entonces

$$
\sum_{m\,(\text{mód}\,N)} \left(e^{2\pi i (n-1)/N}\right)^m = \sum_{m=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i (n-1)/N}\right)^m = \frac{e^{2\pi i (n-1)} - 1}{e^{2\pi i (n-1)/N} - 1} = 0.
$$

Luego de (1) resulta que $|\tau(\chi)|^2 = \chi(1)N = N$, de modo que $|\tau(\chi)| = \sqrt{N}$. □

Proposición 1.2.4. *Se verifica que* $\tau(\overline{\chi}) = \chi(-1)\overline{\tau(\chi)}$.

Demostración. Como $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to S^1$ es un morfismo, resulta que

$$
\begin{aligned}
\overline{\tau(\overline{\chi})} &= \sum_{n\,(\text{mód}\,N)} \chi(n)e^{-2\pi i n/N} = \sum_{n\,(\text{mód}\,N)} \chi(-(-n))e^{-2\pi i n/N} \\
&= \sum_{n\,(\text{mód}\,N)} \chi(-1)\chi(-n)e^{-2\pi i n/N} = \chi(-1) \sum_{n\,(\text{mód}\,N)} \chi(-n)e^{-2\pi i n/N} = \chi(-1)\tau(\chi).
\end{aligned}
$$

□

Corolario 1.2.5. *Si χ es un carácter de Dirichlet primitivo módulo N, entonces*

$$
\tau(\chi)\tau(\overline{\chi}) = \chi(-1)N. \tag{1.2.6}
$$

Demostración. Es inmediato de las proposiciones 1.2.3 y 1.2.4. □

Combinando los resultados anteriores, obtenemos el desarrollo de Fourier para caracteres de Dirichlet.

Teorema 1.2.7. *Sea χ un carácter de Dirichlet primitivo módulo N. Entonces para todo $n \in \mathbb{Z}$,*

$$
\chi(n) = \frac{1}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{m\,(\text{mód}\,N)} \overline{\chi(m)}e^{2\pi i n m/N}. \tag{1.2.8}
$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Por la Proposición 1.2.1, tenemos que

$$
\chi(n) = \overline{\overline{\chi}(n)} = \overline{\frac{1}{\tau(\chi)} \sum_{m\,(\text{mód}\,N)} \overline{\chi}(m)e^{2\pi i n m/N}} = \frac{1}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{m\,(\text{mód}\,N)} \overline{\chi(m)}e^{2\pi i n m/N}.
$$

□

Observar que el lado derecho de (1.2.8) está definido para todo $n \in \mathbb{R}$, mientras que el lado izquierdo, a priori, no tiene una extensión natural a todo $\mathbb{R}$.

1.3. Funciones L de Dirichlet

Sea χ un caracter de Dirichlet. Se define la *L-serie* de χ o *función L* de Dirichlet de χ, como la función

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s},$$

donde s es un número complejo s con $\Re s>1$. Notar que si χ_1 es el carácter principal módulo 1 entonces su L-serie es la función ζ. Como $|\chi(n)n^{-s}|\leq n^{-\Re s}$, la L-serie de χ es absolutamente convergente en compactos de $\{\Re s>1\}$. En particular, la función $s\mapsto L(s,\chi)$ es una función holomorfa en $\{\Re s>1\}$.

Lema 1.3.1. *Para cada primo p, sea $\alpha_p\in S^1$. Entonces el producto*

$$\prod_{p \text{ primo}}\left(1-\alpha_p p^{-s}\right)^{-1},$$

converge absolutamente para todo $s\in\mathbb{C}$ con $\Re s>1$.

Demostración. Una cuenta sencilla muestra que si $(z_n)_n$ es una sucesión contenida en $\mathbb{C}^{\times}$, entonces $\prod_n z_n$ converge absolutamente si y sólo si $\prod_n z_n^{-1}$ converge absolutamente. Basta ver entonces que el producto

$$\prod_{p \text{ primo}}\left(1-p^{-s}\right)$$

converge absolutamente si $s\in\mathbb{C}$ con $\sigma=\Re s>1$. En efecto,

$$\sum_{p \text{ primo}}|-p^{-s}|=\sum_{p \text{ primo}}p^{-\sigma}\leq\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\sigma}<\infty,$$

dado que $\sigma>1$. □

Proposición 1.3.2 (Producto de Euler)**.** *Si $\Re s>1$, entonces*

$$L(s,\chi)=\prod_{p \text{ primo}}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Además el producto converge absolutamente.

Demostración. Ver [Apo76, Teorema 11.7]. □

Notar que por (1.1.1), en el producto solo quedan los factores correspondientes a los primos p que no dividen a N. En el caso particular del carácter de Dirichlet χ_1, tenemos que

$$\zeta(s)=\prod_{p \text{ primo}}\left(1-p^{-s}\right)^{-1}, \tag{1.3.3}$$

para todo $s\in\mathbb{C}$ con $\Re s>1$.

Ejemplo 1.3.4. Consideramos el carácter de Dirichlet dado por $\chi(n) = \left(\frac{-4}{n}\right)$, para $n \in \mathbb{Z}$. Si p es un primo, es sabido que

$$\left(\frac{-4}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \equiv 1 \mod 4; \\ -1, & \text{si } p \equiv 3 \mod 4; \\ 0, & \text{si } p = 2. \end{cases}$$

Luego, por la Proposición 1.3.2, tenemos que

$$L(s,\chi) = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{\substack{p \text{ primo} \\ p\equiv 1 (\text{mód } 4)}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \cdot \prod_{\substack{p \text{ primo} \\ p\equiv 3 (\text{mód } 4)}} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\Re s > 1$.

1.4. Funciones theta

Fórmula de sumación de Poisson

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función integrable, consideramos su transformada de Fourier

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \omega y}\, dy. \tag{1.4.1}$$

Supongamos que f es una función de Schwartz.

Teorema 1.4.2 (Fórmula de sumación de Poisson). *Se verifica que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n). \tag{1.4.3}$$

Demostración. Consideremos la función definida en $\mathbb{R}$ como

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n). \tag{1}$$

Al ser f una función de Schwartz, es fácil ver que la serie converge absoluta y uniformemente sobre compactos, de modo que F es continua. Además claramente F tiene periodo 1 y, por lo tanto, un desarrollo en serie de Fourier de la forma $\sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n e^{2\pi i n x}$, donde $F_n \in \mathbb{C}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Calculemos cada coeficiente F_n. Si $n \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\begin{aligned} F_n &= \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i n x}\, dx = \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2\pi i n x}\, dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi i n x}\, dx \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(x) e^{-2\pi i n x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i n x}\, dx = \widehat{f}(n). \end{aligned}$$

Como f' es una función de Schwartz, podemos derivar término a término la serie de (1). Obtenemos así que F es C^1 y su serie de Fourier converge uniformemente a F. En particular, para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n e^{2\pi i n x}$. Evaluando en 0, obtenemos que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n).$$

□

Para nuestros propósitos vamos a necesitar una versión adaptada de (1.4.3) a caracteres de Dirichlet.

Proposición 1.4.4. *Sean $N \in \mathbb{N}$ y χ un carácter de Dirichlet primitivo módulo N. Entonces*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n) f(n) = \frac{\chi(-1)}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\chi(n)} \widehat{f}(n/N). \tag{1.4.5}$$

Demostración. De (1.2.8), resulta que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n) f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{m \,(\text{mód}\, N)} \overline{\chi(m)} e^{2\pi i n m/N} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(n), \tag{1}$$

donde denotamos

$$g(x) = \frac{1}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{m \,(\text{mód}\, N)} \overline{\chi(m)} e^{2\pi i x m/N} f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Dado $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{m \,(\text{mód}\, N)} \overline{\chi(m)} e^{2\pi i y m/N} f(y) e^{-2\pi i x y}\, dy \\
&= \frac{1}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{m \,(\text{mód}\, N)} \overline{\chi(m)} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i y(x-m/N)}\, dy = \frac{1}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{m \,(\text{mód}\, N)} \overline{\chi(m)} \widehat{f}(x - m/N) \\
&= \frac{1}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{m \,(\text{mód}\, N)} \overline{\chi(-m)} \widehat{f}(x + m/N) = \frac{\chi(-1)}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{m \,(\text{mód}\, N)} \overline{\chi(m)} \widehat{f}(x + m/N).
\end{aligned}$$

Entonces por (1.4.3) en (1), tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n) f(n) &= \frac{\chi(-1)}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m \,(\text{mód}\, N)} \overline{\chi(m)} \widehat{f}(n + m/N) \\
&= \frac{\chi(-1)}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m \,(\text{mód}\, N)} \overline{\chi(nN+m)} \widehat{f}\left(\frac{nN+m}{N}\right),
\end{aligned} \tag{2}$$

pues χ es carácter de Dirichlet módulo N. Como $nN+m$ recorre todos los enteros (una vez), cuando m recorre un sistema de representantes módulo N y n recorre $\mathbb{Z}$, la última línea de (2) es igual al lado derecho de (1.4.5), como queríamos ver. □

Funciones theta

Sea χ un caracter de Dirichlet primitivo módulo N, y sea $\varepsilon \in \{0,1\}$ tal que $\chi(-1) = (-1)^\varepsilon$. Para cada $x \in \mathbb{R}_{>0}$, sea

$$\theta_\chi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n) n^\varepsilon e^{-\pi n^2 x/N}. \tag{1.4.6}$$

El rápido decrecimiento de la exponencial permite asegurar la convergencia uniforme sobre compactos de la serie en $\mathbb{R}_{>0}$.

El *root number* del carácter χ es el número complejo

$$W(\chi) = \frac{\tau(\chi)}{i^\varepsilon \sqrt{N}}. \tag{1.4.7}$$

Notar que por la Proposición 1.2.3 tiene valor absoluto 1. Además, por (1.2.6), se tiene que

$$W(\overline{\chi}) = W(\chi)^{-1}. \tag{1.4.8}$$

La Proposición 1.4.4 nos va a permitir hallar una ecuación funcional para θ_χ en la cual aparece el root number de χ.

Para estudiar θ_χ, nos será útil calcular la transformada de Fourier de la función que acompaña a χ dentro de la suma. Para ellos nos valemos del siguiente resultado conocido:

Lema 1.4.9. *Si $a > 0$ entonces para todo $\omega \in \mathbb{R}$,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} e^{-2\pi i y\omega}\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\pi^2\omega^2/a}.$$

Fijado $a > 0$, consideremos la funciones definidas en $\mathbb{R}$ por $g_a(y) = e^{-ay^2}$ y $h_a(y) = y g_a(y)$. El Lema 1.4.9 nos dice que para todo $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{g_a}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\pi^2\omega^2/a}. \tag{1.4.10}$$

Por ser g_a una función de Schwartz, un resultado clásico nos dice que $\widehat{h_a} = \frac{i}{2\pi}\widehat{g_a}'$. Luego por el Lema 1.4.9 tenemos que para todo ω,

$$\widehat{h_a}(\omega) = \frac{i}{2\pi}\frac{d}{d\omega}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\pi^2 y\omega^2/a}\right) = -i\left(\frac{\pi}{a}\right)^{3/2} \omega e^{-\pi^2\omega^2/a}. \tag{1.4.11}$$

Teorema 1.4.12 (Ecuación funcional para θ_χ)**.** *Para todo $x > 0$ se tiene que*

$$\theta_\chi(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} W(\chi)\theta_{\overline{\chi}}(1/x). \tag{1.4.13}$$

Demostración. Sea $x > 0$. Tomando $a = \pi x/N$ en (1.4.10) y (1.4.10), obtenemos que para todo $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{g_{\pi x/N}}(\omega) = \sqrt{\frac{N}{x}}\, e^{-\pi\omega^2 N/x}; \qquad \widehat{h_{\pi x/N}}(\omega) = -i\left(\frac{N}{x}\right)^{3/2} \omega\, e^{-\pi\omega^2 N/x}. \tag{1}$$

Si denotamos $f_0 = g_{\pi x/N}$ y $f_1 = h_{\pi x/N}$, tenemos que $\theta_\chi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n) f_\varepsilon(n)$. De (1) se obtiene que

$$\widehat{f_\varepsilon}(\omega) = (-i)^\varepsilon \left(\frac{N}{x}\right)^{1/2+\varepsilon} \omega^\varepsilon\, e^{-\pi\omega^2 N/x},$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}$. Luego por (1.4.5) resulta que

$$\begin{aligned}\theta_\chi(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n) f_\varepsilon(n) = \frac{\chi(-1)}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\chi(n)}(-i)^\varepsilon \left(\frac{N}{x}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \left(\frac{n}{N}\right)^\varepsilon e^{-\frac{\pi(n/N)^2 N}{x}} \\ &= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \frac{\chi(-1)\sqrt{N}}{i^\varepsilon \tau(\overline{\chi})} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\chi(n)} n^\varepsilon e^{-\frac{\pi n^2}{xN}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \frac{\tau(\chi)}{i^\varepsilon\sqrt{N}} \theta_{\overline{\chi}}(1/x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} W(\chi)\theta_{\overline{\chi}}(1/x),\end{aligned}$$

donde en la última línea utilizamos (1.2.6) y (1.4.7). □

1.5. Ecuación funcional y continuación analítica

Si $s \in \mathbb{C}$ es un número complejo tal que $\Re s > 0$, se define

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dt. \tag{1.5.1}$$

La función Γ verifica las siguientes propiedades:

(I) Γ (1) =1;

(II) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$;

(III) $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$, si $z \notin \mathbb{Z}$ (ecuación funcional);

(IV) $\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$ (fórmula de duplicación).

Si bien solo tenemos asegurada la convergencia de la integral (1.5.1) si $\Re s > 0$, podemos extender Γ a todo el plano complejo según su ecuación funcional. La función Γ resulta ser una función meromorfa en $\mathbb{C}$, cuyos polos son los números enteros menores o iguales que cero, y son todos simples.

Sea χ un carácter de Dirichlet primitivo módulo N. Tomemos $\varepsilon \in \{0,1\}$ tal que $\chi(-1) = (-1)^\varepsilon$. Para $s \in \mathbb{C}$ con $\Re s > 1$, definimos la función

$$\Lambda(s,\chi) = N^{\frac{s+\varepsilon}{2}} \pi^{-\frac{s+\varepsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\varepsilon}{2}\right) L(s,\chi). \tag{1.5.2}$$

Ejemplo 1.5.3. Si χ_1 es el carácter principal módulo 1, vamos a denotar $\Xi = \Lambda(\cdot, \chi_1)$. Se tiene entonces que

$$\Xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \tag{1.5.4}$$

para s con $\Re s > 1$[1].

Sea s un número complejo con $\Re s > 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}\Lambda(s,\chi) &= N^{\frac{s+\varepsilon}{2}}\pi^{-\frac{s+\varepsilon}{2}}\left(\int_0^{+\infty} x^{\frac{s+\varepsilon}{2}-1}e^{-x}\,dx\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}\right)\\ &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{Nx}{\pi}\right)^{\frac{s+\varepsilon}{2}} e^{-x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}\right)\frac{dx}{x} = \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{Nx}{\pi n^2}\right)^{\frac{s+\varepsilon}{2}} e^{-x}\chi(n)n^{\varepsilon}\frac{dx}{x}.\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $t = Nx/\pi n^2$ en la última integral, obtenemos que

$$\Lambda(s,\chi) = \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty} t^{\frac{s+\varepsilon}{2}}e^{-\pi n^2 t/N}\chi(n)n^{\varepsilon}\frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} t^{\frac{s+\varepsilon}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{\varepsilon}e^{-\pi n^2 t/N}\frac{dt}{t}.$$

Consideramos para cada $s \in \mathbb{C}$ tal que la integral correspondiente converja absolutamente,

$$\begin{aligned}\Lambda_+(s,\chi) &= \int_1^{+\infty} t^{\frac{s+\varepsilon}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{\varepsilon}e^{-\pi n^2 t/N}\frac{dt}{t};\\ \Lambda_-(s,\chi) &= \int_0^{1} t^{\frac{s+\varepsilon}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{\varepsilon}e^{-\pi n^2 t/N}\frac{dt}{t}.\end{aligned} \tag{1.5.5}$$

Notar que ambas integrales convergen al menos en $\{\Re s > 1\}$. Tenemos entonces que

$$\Lambda(s,\chi) = \Lambda_+(s,\chi) + \Lambda_-(s,\chi), \tag{1.5.6}$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ con parte real mayor a 1.

Necesitaremos el siguiente resultado estándar de análisis complejo:

Lema 1.5.7. *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $\varphi : I \times U \to \mathbb{C}$ una función continua. Supongamos ademas que para todo $x \in I$ la función $\varphi(x, \cdot) : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa y que $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ es una función continua. Sea $g : U \to \mathbb{C}$ definida por*

$$g(s) = \int_I \varphi(t,s)\,dt.$$

Si existe $h : I \to \mathbb{R}$ integrable tal que $|\varphi(t,s)| \leq |h(t)|$, entonces g es holomorfa.

[1] También es usual considerar la función $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\,\Xi(s)$; así lo hizo Riemann en su artículo. La ecuación funcional (1.5.12) en términos de ξ es la misma: $\xi(s) = \xi(1-s)$. A diferencia de Ξ, la función ξ es analítica en todo $\mathbb{C}$.

Proposición 1.5.8. *La función $s \mapsto \Lambda_+(s,\chi)$ es entera.*

Demostración. Para $t > 0$, consideremos la función $f(t) = e^{-\pi t}$. Entonces,

$$\Lambda_+(s,\chi) = \int_1^{+\infty} t^{\frac{s+\varepsilon}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{\varepsilon} f\left(n^2 t/N\right) \, dt.$$

Basta ver que $s \mapsto \Lambda_+(s,\chi)$ es holomorfa para toda región $U = \{\Re s < M\}$, donde $M > 0$. Para probarlo, usamos el Lema 1.5.7. Veamos que el integrando está acotado por una función integrable (el resto de las condiciones son inmediatas). Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > M/2 + 1$. Entonces existe $C > 0$ tal que $|f(t)| \leq C/t^k$. Luego, si $s \in U$ y $t \geq 1$,

$$\left| t^{\frac{s+\varepsilon}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{\varepsilon} f\left(n^2 t/N\right) \right| \leq t^{\frac{\Re s+\varepsilon}{2}-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nCN^k}{(n^2 t)^k} \leq t^{\frac{M}{2}-k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nCN^k}{n^{2k}}. \tag{1}$$

Por la condición sobre k, la función $\int_1^{+\infty} t^{\frac{M}{2}-k} \, dt$ es integrable. De (1) y del Lema 1.5.7, concluimos lo que queríamos ver. □

Nuestro próximo paso es probar la ecuación funcional y la extensión meromorfa de las funciones L de Dirichlet. Resulta que va a haber dos situaciones bien diferenciadas: los carácteres tales que $\chi(0) = 0$ y los carácteres en los cuales $\chi(0) \neq 0$. En realidad, la segunda situación solo puede ocurrir si $N = 1$ (por (1.1.1)), es decir si χ es el carácter principal módulo 1, χ_1. En particular, si $\chi(0) = 1$ entonces $\varepsilon = 0$. Resulta entonces que en todos los casos tenemos que

$$\theta_\chi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n) n^{\varepsilon} e^{-\pi n^2 t/N} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \chi(n) n^{\varepsilon} e^{-\pi n^2 t/N} + \chi(0),$$

y por lo tanto de (1.5.5),

$$\Lambda_+(s,\chi) = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \left(\theta_\chi(t) - \chi(0)\right) t^{\frac{s+\varepsilon}{2}} \frac{dt}{t}; \quad \Lambda_-(s,\chi) = \frac{1}{2}\int_0^{1} \left(\theta_\chi(t) - \chi(0)\right) t^{\frac{s+\varepsilon}{2}} \frac{dt}{t}. \tag{1.5.9}$$

Teorema 1.5.10. *Sea χ un carácter de Dirichlet primitivo. Entonces la función $s \mapsto \Lambda(s,\chi)$ tiene continuación meromorfa a todo $\mathbb{C}$, y su extensión es entera, salvo si el carácter χ es el carácter principal módulo 1. En este último caso, la función $s \mapsto \Lambda(s,\chi_1) = \Xi(s)$ tiene dos polos simples en 1 y 0, con residuos 1 y -1, respectivamente. Además, en ambos casos, tenemos la ecuación funcional*

$$\Lambda(s,\chi) = W(\chi)\Lambda\left(1-s,\overline{\chi}\right), \tag{1.5.11}$$

la cual vale para todo $s \in \mathbb{C}$. En el caso $\chi = \chi_1$, el número $W(\chi)$ es igual a 1, y la ecuación (1.5.11) *resulta ser*

$$\Xi(s) = \Xi(1-s), \tag{1.5.12}$$

para todo $s \in \mathbb{C}$.

Demostración. Sea $s \in \mathbb{C}$ con $\Re s > 1$, entonces haciendo el cambio de variable $x = 1/t$ y luego usando (1.4.13), obtenemos que

$$\begin{aligned}\Lambda_-(s,\chi) &= \frac{1}{2}\int_0^1 (\theta_\chi(t) - \chi(0))\, t^{\frac{s+\varepsilon}{2}} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} (\theta_\chi(1/x) - \chi(0))\, x^{-\frac{s+\varepsilon}{2}} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} W(\chi)\theta_{\overline{\chi}}(x) - \chi(0)\right) x^{-\frac{s+\varepsilon}{2}} \frac{dx}{x}.\end{aligned} \tag{1}$$

Si $\chi \neq \chi_1$, entonces de (1) y (1.5.9) se obtiene

$$\Lambda_-(s,\chi) = \frac{W(\chi)}{2}\int_1^{+\infty} \theta_{\overline{\chi}}(x) x^{\frac{1-s+\varepsilon}{2}} \frac{dx}{x} = W(\chi)\Lambda_+(1-s,\overline{\chi}).$$

Luego, por (1.5.6) tenemos que

$$\Lambda(s,\chi) = \Lambda_+(s,\chi) + W(\chi)\Lambda_+(1-s,\overline{\chi}), \tag{2}$$

y esta igualdad vale para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\Re s > 1$. Por la Proposición 1.5.8, el lado derecho de (2) es una función entera. Podemos extender $\Lambda(s,\chi)$ a todo $\mathbb{C}$ mediante esta igualdad. Por otro lado, si en el lado derecho de (2) hacemos el cambio

$$s \longmapsto 1-s, \qquad \chi \longmapsto \overline{\chi},$$

obtenemos por (1.4.8) la ecuación:

$$\Lambda_+(1-s,\overline{\chi}) + W(\overline{\chi})\Lambda_+(s,\chi) = \frac{1}{W(\chi)}\left(W(\chi)\Lambda_+(1-s,\overline{\chi}) + \Lambda_+(s,\chi)\right). \tag{3}$$

Concluimos de (2) y (3) que

$$\Lambda(1-s,\overline{\chi}) = \frac{1}{W(\chi)}\Lambda(s,\chi),$$

para todo $s \in \mathbb{C}$, como queríamos ver.

Supongamos que $\chi = \chi_1$, entonces $\varepsilon = 0$, $N = 1$, $W(\chi) = 1$ (recordar (1.4.7)), $\overline{\chi} = \chi_1$. Luego, por (1):

$$\begin{aligned}\Lambda_-(s,\chi_1) &= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \left(x^{\frac{1}{2}}\theta_{\chi_1}(x) - 1\right) x^{-\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \left(\theta_{\chi_1}(x) - x^{-\frac{1}{2}}\right) x^{\frac{1-s}{2}} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} (\theta_{\chi_1}(x) - 1)\, x^{\frac{1-s}{2}} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \left(1 - x^{-\frac{1}{2}}\right) x^{\frac{1-s}{2}} \frac{dx}{x}.\end{aligned} \tag{4}$$

De (1.5.9), la primera integral de (4) es $\Lambda_+(1-s,\chi_1)$. Por otro lado, como $\Re s > 1$, la segunda integral de (4) es igual a

$$\int_1^{+\infty} \left(x^{\frac{1-s}{2}} - x^{-s/2}\right) \frac{dx}{x} = \frac{2}{s-1} - \frac{2}{s}.$$

pues $\Re s > 1$. Volviendo a (4), tenemos entonces que

$$\Lambda_-(s,\chi_1) = \Lambda_+(1-s,\chi_1) + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}.$$

Luego por (1.5.4) y (1.5.6), obtenemos que

$$\Lambda(s,\chi_1) = \Lambda_+(s,\chi_1) + \Lambda_+(1-s,\chi_1) + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}, \tag{5}$$

y esta igualdad vale para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\Re s > 1$. Por la Proposición 1.5.8, el lado derecho de (5) es una función meromorfa en todo $\mathbb{C}$, con dos polos simples en 1 y 0, y con residuos 1 y -1 respectivamente. Podemos extender $\Xi = \Lambda(\cdot,\chi_1)$ a todo $\mathbb{C}$ mediante esta igualdad. Además como el lado derecho de (5) resulta invariante al hacer el cambio $s \longmapsto 1-s$, concluimos que vale la ecuación (1.5.11) para todo $s \in \mathbb{C}$. Como $W(\chi_1) = 1$, tenemos que (1.5.11) se simplifica en (1.5.12).

□

La ecuación (1.5.12) nos dice que es más "natural" considerar Ξ que ζ, ya que es Ξ quien satisface una ecuación funcional. Vamos a ver más adelante que la función Ξ "completa" de cierta manera a ζ, y entenderemos de donde salen los factores extra.

Escrita en términos de la función ζ, la ecuación (1.5.12) nos queda:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Equivalentemente,

$$\zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}+s}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\zeta(1-s) = 2^s\pi^{-(1-s)}\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right), \tag{1.5.13}$$

para $s \in \mathbb{C}$ con $\Re s > 1$. La última igualdad se obtiene de una cuenta sencilla utilizando las propiedades (III) y (IV) de la función Γ.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Estructuras básicas y algunas notaciones

Dado un conjunto I, decimos que una propiedad se cumple *para casi todo i en I*, si se cumple para todo i en I salvo quizá finitos.

Todos los grupos con los que trabajaremos en esta tesis son abelianos, por lo tanto, salvo que indiquemos lo contrario, cada vez que tengamos un grupo abstracto supondremos que es abeliano. A pesar de eso, como gran parte de los resultados valen en general, con correcciones obvias, usaremos en este capítulo notación multiplicativa en lugar de aditiva.

Si G es un grupo, denotaremos con 1 al neutro de un grupo G. Un subconjunto $A \subseteq G$ se dice *simétrico* si $A^{-1} = A$.

Sean $h \in G$ y f una función definida en G. Definimos la *función trasladada* de f por h como:

$$\tau_h(f)(g) = f(h^{-1}g), \tag{2.1.1}$$

para $g \in G$.

Un grupo $(G, \cdot)$ que tiene una topología se dice *grupo topológico* si

$$\begin{aligned} m : G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 g_2 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} (\cdot)^{-1} : G &\longrightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

son continuas. Los *morfismos de grupos topológicos* son los morfismos de grupos que son continuos. Análogamente consideraremos anillos topológicos y los morfismos de las estructuras correspondientes.

Tomamos como norma general que la topología en un grupo finito es la discreta.

2.2. Grupos topológicos

Generalidades

Enunciaremos a continuación algunas definiciones y resultados bien conocidos que más adelante utilizaremos.

Proposición 2.2.1. *Sea U un entorno de 1. Entonces existe un entorno abierto simétrico V de 1 tal que $V \cdot V \subseteq U$.*

Proposición 2.2.2. *Sean $A, B \subseteq G$.*

a) Si A es abierto (respectivamente cerrado), entonces AB es abierto (respectivamente cerrado).

b) Si A y B son compactos, entonces AB es compacto.

Proposición 2.2.3. *Sea H un subgrupo de G. Entonces:*

a) La clausura de H es subgrupo de G.

b) Si H es abierto entonces es cerrado.

c) Si H es cerrado y el índice de H en G es finito, entonces H es abierto.

Axiomas de separación y cocientes

En los grupos topológicos, hipótesis mínimas de separación implican propiedades de separación, en principio, mucho más fuertes. Por ejemplo, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.2.4. *Sea G un grupo topológico. Son equivalentes:*

a) El espacio topológico G es Hausdorff.

b) El espacio topológico G es T_0.

c) El conjunto $\{1\}$ es un cerrado de G.

Se puede probar incluso, aunque la demostración es más difícil que la de la Proposición 2.2.4, que un grupo topológico es T_0 si y sólo si un espacio de Tychonoff.

Si H es un subgrupo del grupo topológico G, le damos a G/H la topología cociente, esto es, la topología más fina en G/H tal que la proyeccción canónica $\pi : G \to G/H$ es continua. En otras palabras, un subconjunto V de G/H es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(V)$ es un abierto de G.

Notemos que si A es un subjunto de G/H, entonces

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{h \in H} A\,h.$$

Luego, si U un abierto de G entonces $\pi(U)$ es un abierto de G/H. Tenemos entonces que π es una aplicación abierta.

Proposición 2.2.5. *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo. Vale lo siguiente:*

a) Si H es compacto, entonces π es cerrada.

b) El grupo G/H es un grupo topológico.

c) El espacio cociente G/H es Hausdorff si y sólo si H es cerrado.

d) El espacio cociente G/H es discreto si y sólo si H es abierto.

Grupos localmente compactos

Antes de tratar específicamente grupos localmente compactos, recordemos algunos resultados de topología general cuya demostración es directa y sencilla:

Observación 2.2.6. *Sea X espacio topológico localmente compacto.*

a) Si $F \subseteq X$ es un cerrado, entonces es localmente compacto.

b) Sea $\sim$ una relación de equivalencia en X. Si la proyección al cociente $\pi : X \to X/\sim$ es abierta, entonces $X/\sim$ es localmente compacto.

Un grupo topológico se dice *localmente compacto* si es un grupo topológico que como espacio topológico es localmente compacto y Hausdorff.

Como consecuencia de la Proposición 2.2.5 y la Observación 2.2.6 tenemos:

Proposición 2.2.7. *Sean G un grupo localmente compacto y H un subgrupo cerrado de G. Entonces H y G/H son grupos localmente compactos.*

Otro resultado que va a sernos útil es el siguiente:

Proposición 2.2.8. *Sea G un grupo topológico Hausdorff. Si H es un subgrupo localmente compacto de G, entonces es cerrado. En particular, todo subgrupo discreto de G es cerrado.*

Teorema 2.2.9 (Teorema de la función abierta)**.** *Sean G_1 y G_2 grupos localmente compactos tal que G_1 es unión contable de subconjuntos compactos. Si $\phi : G_1 \to G_2$ es un morfismo suryectivo, entonces es abierto. En particular, si ϕ es un morfismo biyectivo entonces es un isomorfismo.*

Demostración. Ver [DE14, Teorema 4.2.10]. □

2.3. Dual de Pontryagin

Sea G un grupo topológico (recordar que para nosotros todos los grupos son abelianos). Decimos que $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ es un *cuasi-carácter* en G si χ es un morfismo de grupos topológicos. Si además $\chi(g) \in S^1$ para todo $g \in G$, decimos que χ es un *carácter* en G. Al conjunto de todos los caracteres en G lo denotamos $\widehat{G}$. Algunos autores denominan caracteres a nuestros cuasi-caracteres.

Sea $\mathscr{C}(G, S^1)$ el conjunto de las funciones continuas definidas en G a valores en S^1; lo dotamos con la topología compacto abierta. Notemos que $\widehat{G}$ es un subgrupo de $\mathscr{C}(G, S^1)$ con la multiplicación puntual. La topología inducida en $\widehat{G}$ tiene como abiertos básicos a los conjuntos $S(K, U)$, los cuales se definen del siguiente modo: si K es un compacto de G y U es un abierto de S^1,

$$S(K, U) = \{\chi \in \widehat{G} : \chi(K) \subseteq U\}.$$

Al grupo topológico $\widehat{G}$ se lo llama el *dual de Pontryagin* de G. Se puede probar que si G es un grupo localmente compacto, entonces $\widehat{G}$ es un grupo localmente compacto.

Si E un subconjunto de G, denotamos con $E^{\perp}$ al anulador de E. Es decir, al conjunto

$$E^{\perp} = \{\chi \in \widehat{G} : \chi(x) = 1 \text{ para todo } x \in E\}.$$

Proposición 2.3.1. *El anulador de E es un subgrupo cerrado.*

Demostración. Es claro que es subgrupo de $\widehat{G}$. Supongamos que $\chi \in \widehat{G}$, y sea $(\chi_\alpha)_\alpha \subseteq E^{\perp}$ una red que converge a χ. Sea $x \in E$. Como en $\widehat{G}$ se tiene la topología subespacio de la compacto abierta, la red $(\chi_\alpha)_\alpha$ converge puntualmente a χ. Luego $(\chi_\alpha(x))_\alpha = (1)_\alpha$ converge a $\chi(x)$. Al ser G Hausdorff se tiene que $\chi(x) = 1$, y como $x \in E$ era arbitrario, concluimos que $\chi \in E^{\perp}$. $\square$

Proposición 2.3.2. *Si H es un subgrupo compacto de G, entonces $H^{\perp}$ es un subgrupo abierto de $\widehat{G}$.*

Demostración. Sea $U \subseteq S^1$ un abierto que contiene a 1 pero a ningún subgrupo no trivial de S^1 (tal U existe, ver demostración del Lema 2.3.5). Afirmamos que $H^{\perp} = S(H, U)$, con lo cual $H^{\perp}$ es un abierto básico de $\widehat{G}$. Es claro que $H^{\perp} \subseteq S(H, U)$. Por otro lado, si $\chi \in S(H, U)$, como $\chi(H) \subseteq U$ es un subgrupo de S^1, debe ser $\chi(H) = \{1\}$. Luego, $S(H, U) \subseteq H^{\perp}$. $\square$

Supongamos que G_1 y G_2 son dos grupos topológicos y que $\varphi : G_1 \to G_2$ es un morfismo. Consideremos a la aplicación $\varphi^* : \widehat{G_2} \to \widehat{G_1}$ definida por $\varphi^*(\psi) = \psi \circ \varphi$. Es inmediato que si $K \subseteq G_1$ es un compacto y U es un abierto de S^1 se tiene que $(\varphi^*)^{-1}(S(K, U)) = S(\varphi(K), U)$, por lo tanto φ^* es un morfismo. El morfismo φ^* se llama el *morfismo inducido por φ* en los duales de Pontryagin.

Sea A un anillo topológico y sea ψ un carácter de $(A, +)$. Si $a \in A$, denotemos con ψ_a al carácter de $(A, +)$ dado por

$$\psi_a(x) = \psi(ax). \tag{2.3.3}$$

Proposición 2.3.4. *La aplicación $\Psi : A \to \widehat{A}$ dada por $\Psi(a) = \psi_a$ es un morfismo de grupos topológicos. Además, si A es un cuerpo y ψ es no trivial, entonces Ψ es inyectiva.*

Demostración. Una cuenta sencilla muestra que Ψ es morfismo de grupos, veamos la continuidad. Sea $m : A \times A \to A$ la multiplicación en el anillo A y sea $f = \Psi \circ m$. Como f está en $\mathscr{C}(A \times A, S^1)$, la función $\tilde{f} : A \to \mathscr{C}(A, S^1)$ definida por $\tilde{f}(a)(x) = f(a, x)$ es una función continua, donde en $\mathscr{C}(A, S^1)$ se toma la topología compacto abierta. Como para todo $a \in A$ se tiene que $\tilde{f}(a) = \Psi(a)$, si llamamos $i : \widehat{A} \to \mathscr{C}(A, S^1)$ a la inclusión, tenemos que $\tilde{f} = i \circ \Psi$. Concluimos que Ψ es continua.

Supongamos que A es un cuerpo. Es fácil ver que

$$\ker \Psi = \{a \in A : (a) \subseteq \ker \psi\},$$

donde (a) denota el ideal de A generado por a. Concluimos que si Ψ no es inyectiva, entonces ψ es el morfismo trivial. $\square$

Un resultado que va a resultarnos muy útil cuando estudiemos la estructura del dual de Pontryagin en diversos ejemplos es el siguiente:

Lema 2.3.5. *Sea G un grupo topológico tal que existe una familia $\mathcal{F}$ de subgrupos de G tal que cada entorno de 1 contiene a un elemento de $\mathcal{F}$. Sea χ un cuasi-carácter en G. Entonces el núcleo de χ contiene un elemento de $\mathcal{F}$. Si además G es compacto y los elementos de $\mathcal{F}$ son entornos, entonces χ es un carácter de orden finito.*

Demostración. Sea U el subconjunto de $\mathbb{C}^\times$ dado por

$$U = \left\{ z \in \mathbb{C}^\times : \frac{1}{2} < |z| < 2, \Re(z) > 0 \right\}.$$

Es fácil ver que U no contiene ningún subgrupo de $\mathbb{C}^\times$ no trivial. Como χ es una función continua, tenemos que $\chi^{-1}(U)$ es un abierto que contiene a 1. Por hipótesis, existe $H \in \mathcal{F}$ tal que $H \subseteq \chi^{-1}(U)$. Luego al ser $\chi(H)$ un subgrupo de $\mathbb{C}^\times$ contenido en U, debe ser $\chi(H) = \{1\}$. De modo que $H \subseteq \ker \chi$.

En el caso que G sea compacto y los elementos de $\mathcal{F}$ sean entornos, al ser H un entorno de 1, entonces G puede cubrirse con finitos conjuntos de la forma gH, con $g \in G$. Luego G/H es finito, y como χ se factoriza por G/H, la imagen de χ es finita. Por lo tanto, el orden de χ es finito. Por otro lado, al ser $\chi(G)$ un subgrupo finito de $\mathbb{C}^\times$, está contenido en S^1. Concluimos que χ es un carácter. □

En esta tesis veremos varios ejemplos del siguiente resultado general.

Proposición 2.3.6. *Sea G un grupo topológico. Se tiene:*

a) Si G es compacto, entonces $\widehat{G}$ es discreto.

b) Si G es discreto, entonces $\widehat{G}$ es compacto.

Demostración. Ver [DE14, Proposición 3.1.5]. □

En el resto de la sección supondremos que G es un grupo localmente compacto.

Para cada $x \in G$ consideremos la aplicación $ev_x : \widehat{G} \to \mathbb{C}$ definida por $ev_x(\chi) = \chi(x)$. Es claro que si χ y ψ son caracteres entonces $ev_x(\chi\psi) = ev_x(\chi)ev_x(\psi)$. Además, como la convergencia en compactos implica convergencia puntual, se tiene que si $(\chi_\alpha)_\alpha$ es una red en $\widehat{G}$ que converge a $\chi \in \widehat{G}$, entonces la red $(ev_x(\chi_\alpha))_\alpha = (\chi_\alpha(x))_\alpha$ converge a $\chi(x) = ev_x(\chi)$ en G. Esto muestra que ev_x es continua y por lo tanto $ev_x \in \widehat{\widehat{G}}$. Tenemos entonces definida una aplicación $ev : G \to \widehat{\widehat{G}}$ dada por $ev(x) = ev_x$, esta aplicación se denomina *aplicación de Pontryagin*.

El siguiente teorema es de gran importancia y puede encontrarse en varios de los libros de la bibliografía ([DE14], [Fol16], [HR79] y [RV99]).

Teorema 2.3.7 (Dualidad de Pontryagin)**.** *La aplicación de Pontryagin es un isomorfismo.*

Es importante señalar que en el caso que G no sea un grupo abeliano, no se puede concluir lo mismo y el objeto dual a G no es un grupo topológico. Para más detalles ver [HR79, Capítulo 6] y [HR70, Capítulo 7].

Con el Teorema 2.3.7, no es difícil deducir el siguiente resultado:

Proposición 2.3.8. *Sea H un subgrupo cerrado de G. Entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} H^{\perp} &\longrightarrow \widehat{G/H} \\ \chi &\longmapsto \tilde{\chi} \end{aligned}$$

es un isomorfismo, donde $\widetilde{\chi}$ es el carácter de G/H definido por $\widetilde{\chi}(gH) = \chi(g)$ si $g \in G$.

Demostración. Ver [DE14, Proposición 3.6.1 (a)]. □

2.4. Teoría de la medida en espacios localmente compactos

Definiciones y resultados básicos

Recordemos algunas definiciones básicas de teoría de la medida. A un par $(X, \mathcal{M})$, donde X es un conjunto no vacío y $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra sobre X se lo llama *espacio medible*. Una terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$ donde $(X, \mathcal{M})$ es un espacio medible y μ es una medida en X, se denomina *espacio de medida*. A los elementos de $\mathcal{M}$ se los llama *conjuntos medibles*.

Supongamos que $Y \subseteq X$ es un conjunto medible. A la σ-álgebra de subconjuntos de Y definida por $\mathcal{M}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{M}\}$, se la llama *$\sigma$-álgebra inducida en Y por $\mathcal{M}$*. Como $\mathcal{M}_Y \subseteq \mathcal{M}$, podemos definir la función $\mu_Y = \mu|_{\mathcal{M}_Y}$. Es fácil ver que $(Y, \mathcal{M}_Y, \mu_Y)$ es un espacio de medida. A la medida μ_Y se la llama *medida inducida en Y por μ*.

La medida μ se dice *σ-finita* si X puede escribirse como unión contable de conjuntos medibles de medida finita. Un conjunto $E \subseteq X$ se dice *σ-finito*, si puede escribirse como una unión contable de conjuntos de medida finita.

Si X es un espacio topológico, a la σ-álgebra de X generada por los abiertos se la llama *σ-álgebra de Borel* y la denotaremos por $\mathcal{B}_X$. A los elementos de $\mathcal{B}_X$ se los llama *borelianos* de X.

Un conjunto $E \subseteq X$ se dice *σ-compacto*, si puede escribirse como una unión contable de conjuntos compactos.

Proposición 2.4.1. *Supongamos que $Y \subseteq X$. Entonces la σ-álgebra inducida en Y por $\mathcal{B}_X$ es $\mathcal{B}_Y$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}_Y$ la σ-álgebra de Borel de Y y sea $\mathcal{A} = \{E \cap Y : E \in \mathcal{B}_X\}$ la σ-álgebra en Y inducida por $\mathcal{B}_X$. Como todo abierto de Y está en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}_Y$ es la menor sub-álgebra que contiene a los abiertos de Y, tenemos que $\mathcal{B}_Y \subseteq \mathcal{A}$. Para probar la otra inclusión, consideremos $\mathcal{M} = \{E \subseteq X : E \cap Y \in \mathcal{B}_Y\}$. Es claro que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra de conjuntos de X que contiene a todos los abiertos de X, luego $\mathcal{B}_X \subseteq \mathcal{M}$. Esto último implica que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_Y$, como se quería ver. □

Observación 2.4.2. *Sean $Y \subseteq X$ un subespacio y $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible cuyo soporte está contenido en Y. Entonces*

$$\int_X f\,d\mu = \int_Y f|_Y\,d\mu_Y.$$

Proposición 2.4.3. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sea $h : X \to [0, +\infty]$ una función medible. Sea $\lambda : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ la función definida por*

$$\lambda(E) = \int_E h\,d\mu.$$

Entonces λ es una medida de X y para toda $f : X \to [0, +\infty]$ medible se tiene que

$$\int_X f\,d\lambda = \int_X fh\,d\mu.$$

Demostración. Ver [Rud87, Teorema 1.29]. □

Medidas de Radon y regularidad

Si X es un espacio localmente compacto y Hausdorff, a una medida definida sobre $\mathcal{B}_X$ se la llama *medida de Borel*. De aquí en adelante en esta sección $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ denotará un espacio de medida, con X espacio topológico localmente compacto y Hausdorff, $\mathcal{B}_X$ su σ-álgebra de Borel y μ una medida de Borel.

Sea $E \in \mathcal{B}_X$. Decimos que μ es *regular exteriormente en E* si

$$\mu(E) = \text{ínf}\,\{\mu(U) : E \subseteq U, U \text{ abierto}\},$$

y decimos que μ es *regular interiormente en E* si

$$\mu(E) = \sup\,\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ compacto}\}.$$

La medida μ es una *medida de regular* si es regular exterior e interiormente en todos los borelianos.

Si el espacio X no es σ-compacto, la regularidad es una condición algo fuerte y se suele trabajar con una condición más débil: la medida μ es una *medida de Radon* si es finita en todos los compactos, regular exteriormente en todos los borelianos y regular interiormente en todos los abiertos.

En el caso que el espacio topológico sea suficientemente bueno, ambas nociones son equivalentes y con hipótesis muy relajadas podemos asegurar la regularidad:

Teorema 2.4.4. *Supongamos que todo abierto de X es σ-compacto. Entonces toda medida de Borel en X que es finita en conjuntos compactos es regular, y en particular, es de Radon.*

Demostración. Ver [Fol99, Teorema 7.8]. □

Observación 2.4.5. *Si X verifica el segundo axioma de numerabilidad, todo abierto de X es σ-compacto.*

Todos los ejemplos concretos de espacios topológicos con los que trabajaremos cumplirán las hipótesis del teorema anterior. Esto nos va a permitir simplificar notoriamente la construcción de ciertas medidas.

De aquí en adelante en esta sección supondremos que μ es una medida de Radon en X.

Proposición 2.4.6. *Sea $Y \subseteq X$ un abierto localmente compacto. Entonces la medida inducida en Y por μ es de Radon.*

Demostración. Sea μ_Y la medida en Y inducida por μ. Por la Proposición 2.4.1, la σ-álgebra en Y inducida por $\mathcal{B}_X$ es $\mathcal{B}_Y$. En consecuencia, la medida μ_Y es de Borel. Es claro que μ_Y es finita en todos los compactos de Y. Sea $E \in \mathcal{B}_Y$. Probemos que μ_Y es regular exteriormente en E. Como μ es regular exteriormente en E,

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \text{ínf}\{\mu(V) : E \subseteq V, V \text{ abierto de } X\} \\ &\geq \text{ínf}\{\mu(V \cap Y) : E \subseteq V, V \text{ abierto de } X\} \geq \mu(E).\end{aligned}$$

Entonces son todas igualdades. Por otro lado, como

$$\{\mu(V \cap Y) : E \subseteq V, V \text{ abierto de } X\} = \{\mu_Y(W) : E \subseteq W, W \text{ abierto de } Y\},$$

concluimos que μ_Y es regular exteriormente en E.

Finalmente, la medida μ_Y es regular interiormente en todos los abiertos de Y pues todo abierto de Y es abierto de X y μ es de Radon. □

Sea $\mathscr{C}_c(X)$ el conjunto de las funciones continuas definidas en X, de soporte compacto y a valores en $\mathbb{C}$. Como $\mu(K) < \infty$ para todo K compacto de X, tenemos que $\mathscr{C}_c(X)$ es un subespacio vectorial de $L^p_\mu(X)$ para todo $p \geq 1$.

Proposición 2.4.7. *Si μ es una medida de Radon en X entonces $\mathscr{C}_c(X)$ es denso en $L^p_\mu(X)$ para todo $1 \leq p < \infty$.*

Queremos enunciar un teorema de principal importancia, el Teorema de representación de Riesz. Para ello introduzcamos primero un poco de notación.

Dado un conjunto $A \in \mathcal{B}_X$, denotamos por $\mathbf{1}_A : X \to \mathbb{R}$ a la función característica de A. Sea $\mathscr{C}^+_c(X) = \{f \in \mathscr{C}_c(X) : f(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in X \text{ y } \|f\|_1 > 0\}$. Un funcional lineal $I : \mathscr{C}_c(X) \to \mathbb{C}$ se dice *positivo* si para toda función $f \in \mathscr{C}^+_c(X)$ se tiene que $I(f) \geq 0$. Al soporte de una función f lo denotaremos $\operatorname{Supp}(f)$.

Teorema 2.4.8 (Teorema de representación de Riesz)**.** *Si I es un funcional lineal positivo de $\mathscr{C}_c(X)$, entonces existe una única medida de Radon ν en X tal que $I(f) = \int f\, d\nu$ para toda $f \in \mathscr{C}_c(X)$. Además ν satisface:*

$$\nu(U) = \sup\{I(f) : f \in \mathscr{C}_c(X), \operatorname{Supp}(f) \subseteq U, 0 \leq f \leq 1\} \text{ para todo abierto } U \subseteq X \tag{2.4.9}$$

y

$$\nu(K) = \text{ínf}\{I(f) : f \in \mathscr{C}_c(X), \mathbf{1}_K \leq f\} \text{ para todo compacto } K \subseteq X.$$

Medida en el producto de espacios topológicos

Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos localmente compactos, Hausdorff y que verifican el segundo axioma de numerabilidad. Para cada $\alpha \in \Lambda$, sea μ_α una medida de Radon en X_α y sea $X = \prod_\alpha X_\alpha$.

Proposición 2.4.10. *Supongamos que $\Lambda = \{1, \dots, n\}$. Entonces existe una única medida de Radon $\mu_1 \times \cdots \times \mu_n$, tal que*

$$(\mu_1 \times \cdots \times \mu_n)(A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(A_i),$$

si A_i pertenece a $\mathcal{B}_{X_i}$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Demostración. Ver [Fol99, Capítulo 2, Sección 5] y [Fol99, Teorema 7.20]. □

Nos interesa un resultado similar en el caso que Λ sea infinito. Si $L \subseteq \Lambda$, denotemos con π_L a la proyección $X \to \prod_{\alpha\in L} X_\alpha$.

Proposición 2.4.11. *Supongamos para cada α, el espacio X_α es compacto y que $\mu_\alpha(X_\alpha) = 1$. Entonces existe una única medida de Radon $\mu = \bigtimes_\alpha \mu_\alpha$ en X tal que para todo $L \subseteq \Lambda$ finito y cualquier boreliano E de $\prod_{\alpha\in L} X_\alpha$, se verifica que*

$$\mu(\pi_L^{-1}(E)) = \left(\bigtimes_{\alpha\in L} \mu_\alpha\right)(E).$$

Demostración. Ver [Fol99, Teoremas 7.26 y 7.28]. □

Notar que tomando $L = \emptyset$, esto nos dice que $\mu\left(\prod_\alpha X_\alpha\right) = 1$.

Combinando estas últimas dos proposiciones, podemos debilitar las hipótesis de la Proposición 2.4.11.

Teorema 2.4.12. *Supongamos que existe $S \subseteq \Lambda$ finito tal que si $\alpha \notin S$ entonces X_α es compacto y $\mu_\alpha(X_\alpha) = 1$. Entonces existe una única medida de Radon $\mu = \bigtimes_{\alpha\in\Lambda} \mu_\alpha$ en X tal que si E_1 es un boreliano de $\prod_{\alpha\in S} X_\alpha$ y E_2 es un boreliano de $\prod_{\alpha\notin S} X_\alpha$, se verifica que*

$$\mu(E_1 \times E_2) = \bigtimes_{\alpha\in S} \mu_\alpha(E_1) \cdot \bigtimes_{\alpha\notin S} \mu_\alpha(E_2). \tag{2.4.13}$$

A la medida μ se la llama *medida producto de* $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

Teorema 2.4.14 (Teorema de Fubini-Tonelli para el producto de medidas de Radon)**.** *Sean X e Y dos espacios localmente compactos, Hausdorff y que verifican el segundo axioma de numerabilidad. Sean μ y ν medidas de Radon en X e Y respectivamente, y sea f una función boreliana de $X \times Y$. Entonces para cada $x \in X$ e $y \in Y$ las funciones $f(x,\cdot)$ y $f(\cdot,y)$ son borelianas. Si $f \geq 0$, entonces $x \mapsto \int_Y f(x,\cdot)\,d\nu$ e $y \mapsto \int_X f(\cdot,y)\,d\mu$ son funciones borelianas en X e Y respectivamente. Si $f \in L^1(X \times Y)$, entonces $f(x,\cdot) \in L^1(Y)$ para casi todo x y*

$f(\cdot, y) \in L^1(X)$ para casi todo y, y $x \mapsto \int_Y f(x, \cdot)\, d\nu$ e $y \mapsto \int_X f(\cdot, y)\, d\mu$ son funciones de $L^1(X)$ y $L^1(Y)$ respectivamente. En ambos casos, tenemos que

$$\int_{X \times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_Y \int_X f\, d\mu d\nu = \int_X \int_Y f\, d\nu d\mu.$$

Demostración. Ver [Fol99, Teorema 7.27]. □

Capítulo 3

Adeles e ideles

En este capítulo haremos las construcciones básicas para poder reformular y generalizar los resultados que vimos en el Capítulo 1.

3.1. Números p-ádicos

Valor absoluto

Si K es un cuerpo, un *valor absoluto* en K es una función $|\cdot| : K \to [0, +\infty)$ que verifica para todo $x, y \in K$:

(I) $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$;

(II) $|xy| = |x||y|$;

(III) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Dado un valor absoluto en un cuerpo K, consideramos la *métrica inducida* por el valor absoluto definida como $d(x, y) = |x - y|$ si $x, y \in K$. Es fácil probar que un cuerpo junto con la topología que induce la métrica es un cuerpo topológico.

Diremos que dos valores absolutos son *equivalentes* si las correspondientes métricas inducidas lo son. Va a importarnos especialmente el caso $K = \mathbb{Q}$. En este caso, tenemos dos ejemplos claros (no equivalentes) de valor absoluto: el valor absoluto trivial, i.e. $|x| = 1$ si $x \neq 0$ y $|0| = 0$; y el valor absoluto usual, el cual denotaremos $| \, |_\infty$. Ahora vamos a definir, para cada primo, un valor absoluto no equivalente a estos dos.

Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Dados dos enteros no nulos a y b, la *valuación p-ádica* del número racional no nulo $\frac{a}{b}$, que será notada como $\nu_p\left(\frac{a}{b}\right)$, es el único entero k tal que $\frac{a}{b} = p^k \frac{n}{m}$ con n y m enteros no nulos coprimos con p.

Dado un número racional x, definimos el *valor absoluto p-ádico* como

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\nu_p(x)}, & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

El valor absoluto p-ádico verifica las tres propiedades anteriores, e inclusive verifica una versión más fuerte de la tercera propiedad, llamada *desigualdad ultramétrica*:

$$|x+y|_p \leq \text{máx}\{|x|_p; |y|_p\}. \tag{3.1.1}$$

Un valor absoluto que verifica la desigualdad ultramétrica se denomina *no arquimediano*; y en caso de no verificarla, se denomina *arquimediano*.

La desigualdad ultramétrica tiene consecuencias poco intuitivas:

Proposición 3.1.2 (Principio del triángulo isósceles)**.** *Sea K un cuerpo con un valor absoluto no arquimediano $|\cdot|$. Si x, y son elementos de K tal que $|x| \neq |y|$, entonces $|x+y| = \text{máx}\{x, y\}$.*

Para abreviar notación definimos:

$$\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ primo}\}; \qquad\qquad \mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{\infty\}.$$

El Teorema de Ostrowski (ver por ejemplo [Kob77]) afirma que todo valor absoluto no trivial en $\mathbb{Q}$ es equivalente a $|\ |_p$ para un único $p \in \mathcal{P}'$. Así que al estudiar $|\cdot|_p$ con $p \in \mathcal{P}'$, estamos estudiando en realidad todos los valores absolutos posibles no triviales en $\mathbb{Q}$.

Construcción de los números p-ádicos

En lo que resta de esta sección p será un número primo fijo.

Una de las formas de construir los números p-ádicos es análoga a la construcción de Cantor de los números reales. Sea $\mathscr{C}$ el conjunto de las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$ con respecto a $|\cdot|_p$. Es fácil ver que $\mathscr{C}$ es un subanillo del anillo producto $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. Las sucesiones de elementos de $\mathbb{Q}$ que tiende a cero forman un ideal I de $\mathscr{C}$.

Proposición 3.1.3. *El ideal I es un ideal máximal de $\mathscr{C}$.*

Demostración. Supongamos que $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{C} \backslash I$. Afirmamos que el ideal $\langle a\rangle + I$ es igual a $\mathscr{C}$.

Como a es sucesión de Cauchy y no tiende a 0, existen $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n|_p \geq \varepsilon$ si $n > N$.

Sea $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por:

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \leq N; \\ 0, & \text{si } n > N. \end{cases}$$

El elemento $x = a - ba + b = a + (1-a)b$ está en $\langle a\rangle + I$ pues b está en I.

Consideremos $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$y_n = \begin{cases} 1, & n \leq N; \\ 1/a_n, & n > N. \end{cases}$$

Luego,

$$|y_n - y_m|_p \leq \frac{|a_m - a_n|_p}{\varepsilon^2} \qquad \text{si } n, m > N,$$

y por lo tanto y es sucesión de Cauchy.

Tenemos entonces que $yx = (1, 1, 1, \ldots) \in \langle a \rangle + I$, y concluimos que $\langle a \rangle + I = \mathscr{C}$. □

Corolario 3.1.4. *El anillo $\mathscr{C}/I$ es un cuerpo.*

Denotaremos a dicho cuerpo por $\mathbb{Q}_p$ y lo llamaremos el *cuerpo de los números p-ádicos*. Si x está en $\mathscr{C}$, denotaremos con $[x]$ a la clase de x.

Para cada elemento $x \in \mathbb{Q}$, la sucesión constantemente x está en $\mathscr{C}$. Puesto que si una sucesión es constante y está en I, es la sucesión nula, tenemos una copia de los números racionales dentro de $\mathbb{Q}_p$.

Proposición 3.1.5. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{C}$. Entonces existe $\lim_{n\to\infty} |a_n|_p$.*

Demostración. Si el límite de $\left(|a_n|_p\right)_{n\in\mathbb{N}}$ no es cero, existe $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $\left(|a_{n_k}|_p\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que para todo k se verifica que $|a_{n_k}|_p \geq \epsilon$. Tomemos M tal que si $n, n' > M$, $|a_n - a_{n'}|_p < \varepsilon$.

Si $n > M$, tenemos que $|a_n - a_{n_M}|_p \neq |a_{n_M}|_p$ y entonces por el Principio del triángulo isósceles $|a_n|_p = |a_{n_M}|_p$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} |a_n|_p = |a_{n_M}|_p$. □

Definimos el *valor absoluto p-ádico* de $a \in \mathbb{Q}_p$ como $\lim_{n\to\infty} |a_n|_p$, siendo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un representante de a. La definición es buena porque si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos representantes de a, entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n - a'_n) = 0$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} |a_n|_p = \lim_{n\to\infty} |a'_n|_p$.

Notemos que esta definición extiende a la que teníamos en $\mathbb{Q}$.

Observación 3.1.6. *Por la Proposición 3.1.5, si a es un elemento de $\mathbb{Q}_p$, su valor absoluto es nulo o una potencia de p.*

Proposición 3.1.7. *El valor absoluto p-ádico $|\cdot|_p$ es un valor absoluto no arquimediano en $\mathbb{Q}_p$. En particular, el cuerpo $\mathbb{Q}_p$ junto con la topología inducida por $|\cdot|_p$ es un cuerpo topológico.*

Demostración. Sea $x = [(x_n)_n] \in \mathbb{Q}_p$. Como por definición $|x|_p = \lim_{n\to\infty} |x_n|_p$, se tiene que $|x|_p = 0$ si sólo si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, es decir, si y sólo si $x = [(x_n)_n] = 0$.

Sean $x, y \in \mathbb{Q}_p$ y sean $(x_n)_n, (y_n)_n \in \mathscr{C}$ tales que $x = [(x_n)_n]$ e $y = [(x_n)_n]$. Entonces por definición, $x + y = [(x_n + y_n)_n]$, $xy = [(x_n y_n)_n]$ y

$$\begin{aligned}
|xy|_p &= \lim_{n\to\infty} |x_n y_n|_p = \lim_{n\to\infty} |x_n|_p |y_n|_p = |x|_p |y|_p; \\
|x+y|_p &= \lim_{n\to\infty} |x_n + y_n|_p \leq \lim_{n\to\infty} \max\left\{|x_n|_p, |y_n|_p\right\} \\
&= \max\left\{\lim_{n\to\infty} |x_n|_p, \lim_{n\to\infty} |y_n|_p\right\} = \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\}.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.1.8. *Sean $a \in \mathbb{Q}_p$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ es un representante de a si y sólo si $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.*

Demostración. Supongamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ es un representante de a.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es otro representante, dado $\varepsilon > 0$, si k y n son suficientemente grandes,

$$|a_k - x_n|_p \leq \max\{|a_k - a_{k+n}|_p, |a_{k+n} - x_{k+n}|_p, |x_{k+n} - x_k|_p\} < \varepsilon.$$

Luego, de la definición del valor absoluto p-ádico en $\mathbb{Q}_p$,

$$|a - x_n|_p = \lim_{k\to\infty} |a_k - x_n|_p \leq \varepsilon$$

para n suficientemente grande, lo que muestra que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Recíprocamente, supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Entonces por la primera parte, tenemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, y por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} (x_n - a_n) = 0$. Concluimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un representante de a. □

Teorema 3.1.9. *El cuerpo $\mathbb{Q}_p$ junto con la distancia inducida por $|\cdot|_p$ es un espacio métrico completo. Además $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{Q}_p$. En particular, el espacio topológico $\mathbb{Q}_p$ cumple el segundo axioma de numerabilidad.*

Demostración. Supongamos que $x \in \mathbb{Q}_p$, y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ un representante de x. Por el Lema 3.1.8 se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, de modo que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{Q}_p$. En particular, el espacio métrico $\mathbb{Q}_p$ es separable.

Ahora probemos la completitud. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}_p$ una sucesión de Cauchy. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{Q}_p$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in \mathbb{Q}$ tal que

$$|x_n - a_n|_p < 1/n. \tag{1}$$

Como el valor absoluto p-ádico en $\mathbb{Q}$ es la restricción del valor absoluto p-ádico en $\mathbb{Q}_p$, se sigue que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ es sucesión de Cauchy. Consideremos $a = \left[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \in \mathbb{Q}_p$. Entonces en virtud de (1) $\lim_{n\to\infty}|x_n - a_n|_p = 0$, y como $\lim_{n\to\infty}|a_n - a|_p = 0$ por el Lema 3.1.8, concluimos que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ y que $\mathbb{Q}_p$ es un espacio métrico completo. □

Debido a la desigualdad ultramétrica y la multiplicatividad del valor absoluto, el conjunto

$$\mathbb{Z}_p = \{a \in \mathbb{Q}_p : |a|_p \leq 1\}$$

es un subanillo de $\mathbb{Q}_p$, que llamaremos *anillo de enteros p-ádicos*. Es claro que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}_p$ y que el grupo de unidades de $\mathbb{Z}_p$ es

$$\mathbb{Z}_p^\times = \{a \in \mathbb{Q}_p : |a|_p = 1\}.$$

Observación 3.1.10. *Los elementos de $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$ son los números racionales cuyo denominador (en su escritura como fracción irreducible) es coprimo con p. En particular,*

$$\bigcap_{q\in\mathcal{P}} (\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_q) = \mathbb{Z}.$$

Para todo $a \in \mathbb{Q}_p$, por la Observación 3.1.6, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $p^m a \in \mathbb{Z}_p$. Luego, $a = n/p^m$ con $n \in \mathbb{Z}_p$. Concluimos que $\mathbb{Q}_p$ es el cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z}_p$.

Notemos que si un elemento a está en $\mathbb{Z}_p$ y no es una unidad, $|a|_p < 1 = |1|_p$ y en consecuencia por el Principio del triángulo isósceles $1 - a$ es unidad. Esto nos dice que $\mathbb{Z}_p$ es un anillo local.

Del mismo modo que con los enteros usuales, podemos hablar de divisibilidad y congruencia en el anillo de enteros p-ádicos.

Observación 3.1.11. *Sea $a \in \mathbb{Z}_p$. Si $n \in \mathbb{N}$, p^n divide a a si y sólo si $|a|_p \leq p^{-n}$.*

Sea a un elemento de $\mathbb{Q}_p$ y $r > 0$. Denotaremos con $B(a, r)$ (respectivamente con $\bar{B}(a, r)$), a la bola abierta (respectivamente cerrada) en $\mathbb{Q}_p$ de centro a y radio r.

Observación 3.1.12. *Sea a un elemento de $\mathbb{Q}_p$ y n un número entero. Entonces*

$$\bar{B}(a, p^{-n}) = a + p^n \mathbb{Z}_p.$$

En particular, $\{a + p^n \mathbb{Z}_p : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base de entornos de a. Más aún, es una base de entornos abiertos y cerrados pues por la Observación 3.1.6 tenemos que

$$\bar{B}\left(a, p^{-n}\right) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p \leq p^{-n}\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < p^{-n+1}\} = B(a, p^{-n+1}). \tag{3.1.13}$$

Como en $\mathbb{Q}_p$ hay elementos de valor absoluto p^n para todo n, tenemos que $\mathbb{Q}_p$ no es un espacio topológico compacto. En la sección 3.1 "Propiedades topológicas y algebraicas" veremos $\mathbb{Z}_p$ es compacto, y la Observación 3.1.12 nos permitirá concluir que $\mathbb{Q}_p$ es localmente compacto.

Proposición 3.1.14. *Sean B_1 y B_2 dos bolas en $\mathbb{Q}_p$. Si B_1 y B_2 se intersecan, entonces B_1 está contenida en B_2 o B_2 está contenida en B_1.*

Demostración. Primero probemos lo siguiente: Si $z \in B(a, r)$ con $a \in \mathbb{Q}_p$ y $r > 0$, entonces $B(a, r) = B(z, r)$. En efecto, si $x \in B(a, r)$ entonces la desigualdad

$$|x - z|_p \leq \text{máx}\{|x - a|_p, |a - z|_p\} < r$$

implica que $B(a, r) \subseteq B(z, r)$. La otra inclusión es análoga.

Escribamos $B_1 = B(a_1, r_1)$ y $B_2 = B(a_2, r_2)$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}_p$ y $r_1, r_2 > 0$. Si existe $z \in B_1 \cap B_2$, entonces, por lo visto previamente, $B_1 = B(z, r_1)$ y $B_2 = B(z, r_2)$. Según si $r_1 \geq r_2$ o si $r_1 \leq r_2$, se tiene alguna de las dos inclusiones que se quería probar. $\square$

Los números p-ádicos como series de potencias

Pensar los números p-ádicos como clases de sucesiones de Cauchy no es la forma más cómoda para trabajar con ellos. Daremos a continuación una caracterización gracias a la cual pueden pensarse como series de potencias.

Proposición 3.1.15. *Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números p-ádicos. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.*

Demostración. Veamos que si la sucesión tiende a 0, la serie converge.

Si $m > n$, por la desigualdad ultramétrica,

$$\left| \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right|_p \leq \max_{n+1 \leq k \leq m} |a_k|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Luego, como $\mathbb{Q}_p$ es completo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. $\square$

Lema 3.1.16. *Sea $x \in \mathbb{Q}$ con $|x|_p \leq 1$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq x_n < p^n$ y $|x - x_n|_p \leq p^{-n}$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Escribamos $x = \frac{a}{b}$, con a y b coprimos. Como $|x|_p \leq 1$, se sigue que b es coprimo con p. Luego, existen s y t enteros tales que $sb + tp^n = 1$. Tomemos $x_n = as$. Entonces como m es entero, tenemos que $|m|_p \leq 1$ y por lo tanto,

$$|x - x_n|_p = \left| \frac{a}{b} \right|_p |1 - sb|_p \leq |1 - sb|_p = |tp^n|_p \leq p^{-n}.$$

Eventualmente podemos sumar un múltiplo entero de p^n para que x_n pertenezca a $\{0, 1, \ldots, p^n - 1\}$. Por la desigualdad ultramétrica, la condición $|x - x_n|_p \leq p^{-n}$ se mantiene. $\square$

Proposición 3.1.17. *Sea $a \in \mathbb{Z}_p$ tal que $|a|_p \leq 1$. Entonces existe una única sucesión de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}_0$ que representa a a y tal que:*

a) $0 \leq x_n < p^n$ *para todo n;*

b) $x_n \equiv x_{n+1} \pmod{p^n}$ *para todo n.*

Demostración. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{Q}_p$, para cada n natural existe $a_n \in \mathbb{Q}$ tal que

$$|a - a_n|_p \leq p^{-n}.$$

Notemos que esto implica que $|a_n|_p \leq \max\{|a_n - a|_p, |a|_p\} \leq 1$ y entonces por el Lema 3.1.16, existe x_n entero tal que $0 \leq x_n < p^n$ y $|a_n - x_n|_p \leq p^{-n}$. Luego $|a - x_n|_p \leq \max\{|a - a_n|_p, |a_n - x_n|_p\} \leq p^{-n}$ y por el Lema 3.1.8 la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es un representante de a. Además,

$$|x_{n+1} - x_n|_p \leq \max\{|x_{n+1} - a|_p, |a - x_n|_p\} \leq p^{-n},$$

lo cual implica que p^n divide a $x_{n+1} - x_n$ por la Observación 3.1.11.

Supongamos ahora que tenemos otra sucesión $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que verifica el enunciado. Si n_0 es un natural tal que $x_{n_0} \neq x'_{n_0}$, por la condición a), $x_{n_0} \not\equiv x'_{n_0} \pmod{p^{n_0}}$. Luego si $n \geq n_0$, $x_n \not\equiv x'_n \pmod{p^{n_0}}$ y por lo tanto p^{n_0} no divide a $x_n - x'_n$. Concluimos por la Observación 3.1.11 que $|x_n - x'_n|_p > p^{-n_0}$ para $n \geq n_0$ y $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es un representante de a. $\square$

De la proposición anterior se sigue inmediatamente:

Corolario 3.1.18. *El conjunto $\mathbb{Z}$ es denso en $\mathbb{Z}_p$.*

Teorema 3.1.19. *Sea $a \in \mathbb{Z}_p$. Existe una única sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{N}_0$ tal que:*

a) $0 \leq a_n < p$ *para todo* $n \geq 0$;

b) $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$.

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}_0$ la sucesión de la Proposición 3.1.17. Definamos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$:

$$\begin{aligned} a_0 &= x_1; \\ a_n &= \frac{x_{n+1} - x_n}{p^n}, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

De las dos condiciones de la Proposición 3.1.17, se sigue que $0 \leq x_{n+1} - x_n < p^{n+1}$ y por lo tanto se cumple la primera condición a demostrar. Puesto que $x_{n+1} = x_n + a_n p^n$ para todo n, se sigue que

$$x_n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_{n-1} p^{n-1}, \quad \text{para todo } n. \tag{1}$$

En la demostración de la Proposición 3.1.17 vimos que $|a - x_n|_p \leq p^{-n}$, y por lo tanto se verifica la segunda condición a demostrar.

Es fácil ver la unicidad de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiendo ahora la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en (1) y usando la unicidad de la Proposición 3.1.17. □

La escritura de un elemento a de $\mathbb{Z}_p$ en la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$ del teorema anterior, la denominamos *escritura canónica de* a.

¿Cómo podemos caracterizar los elementos de $\mathbb{Q}_p$ que no son enteros p-ádicos?

Para todo elemento a de $\mathbb{Q}_p$ no nulo, por la Observación 3.1.6, existe un único $m \in \mathbb{Z}$ tal que $|p^{-m} a|_p = 1$. Luego por el teorema anterior,

$$p^{-m} a = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n p^n,$$

de donde, renombrando y reindexando los coeficientes, obtenemos la siguiente Proposición:

Proposición 3.1.20. *Si a es un elemento de $\mathbb{Q}_p$, entonces existen $m \in \mathbb{Z}$ y números enteros $0 \leq a_n < p$ con $n \geq m$, tales que*

$$a = \sum_{n=m}^{\infty} a_n p^n.$$

Si $a \neq 0$ y se toma m de forma que $a_m \neq 0$, dicha escritura es única.

Al valor de m como en la última afirmación se lo llama *valuación p-ádica* de a y se lo denota $\nu_p(a)$. Esta definición extiende la definición que teníamos para el caso a racional no nulo. Notemos que $a = p^{\nu_p(a)}\left(p^{-\nu_p(a)}a\right)$ está en $p^{\nu_p(a)}\mathbb{Z}_p^{\times}$, y que se verifica que

$$|a|_p = p^{-\nu_p(a)}.$$

Obtenemos además la siguiente igualdad de conjuntos

$$\mathbb{Q}_p = \{0\} \sqcup \bigsqcup_{m\in\mathbb{Z}} p^m\mathbb{Z}_p^{\times}. \tag{3.1.21}$$

Dado un elemento $a \in \mathbb{Q}_p$, consideremos una escritura de a como en la Proposición 3.1.20. A la suma de los términos que corresponden a potencias de p negativas se la llama *la parte fraccionaria de a* y la denotamos $\{a\}_p$. Explícitamente,

$$\{a\}_p = \begin{cases} \sum_{n=m}^{-1} a_n p^n, & \text{si } m < 0; \\ 0, & \text{si } m \geq 0. \end{cases} \tag{3.1.22}$$

Al entero p-ádico $a - \{a\}_p$ se lo llama *la parte entera* de a y lo denotamos $\lfloor a \rfloor_p$.

Sea n un número natural.

Proposición 3.1.23. *Sea $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p$ el morfismo de anillos natural. Entonces ϕ es un morfismo sobreyectivo de anillos e induce un isomorfismo $\bar{\phi} : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p$.*

Demostración. Es inmediato del Teorema 3.1.19 que ϕ es un morfismo de anillos sobreyectivo. Como el nucleo de ϕ claramente contiene a $p^n\mathbb{Z}$, solo hay que ver que todo elemento del núcleo está en $p^n\mathbb{Z}$.

Supongamos que x es un elemento del núcleo de ϕ no nulo. Sean $m = \nu_p(x)$ y a un entero coprimo con p, tales que $x = ap^m$. Como $\phi(x) = 0 \in \mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p$, por la Observación 3.1.11 $m \geq n$ y por lo tanto $x = p^n(p^{m-n}a) \in p^n\mathbb{Z}$. □

Corolario 3.1.24. *Consideremos la aplicación*

$$\begin{aligned} \gamma_n : \mathbb{Z}_p &\longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i &\mapsto \pi_n\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i\right), \end{aligned}$$

donde $\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ es la escritura canónica de un elemento de $\mathbb{Z}_p$ y π_n es la proyección canónica $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Entonces γ_n es morfismo sobreyectivo de anillos con núcleo $p^n\mathbb{Z}_p$.

Demostración. Sean $\bar{\phi} : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p$ el isomorfismo de la proposición anterior y $\pi_n' : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p$ la proyección canónica. Es fácil ver que $\gamma_n = \bar{\phi}^{-1}\pi_n'$ y por lo tanto γ_n es morfismo de anillos. El resto de las afirmaciones se siguen fácilmente de esta igualdad. □

Propiedades topológicas y algebraicas

A continuación, daremos una construcción algebraica del cuerpo de los números p-ádicos. Dicha construcción nos permitirá probar de forma elegante que $\mathbb{Q}_p$ es un cuerpo localmente compacto. Se podría probar sin hacer esta construcción, pero este camino nos parece más enriquecedor.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, consideremos el anillo $\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ con la topología discreta. Dado un par $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $i \leq j$, sea $f_{i,j} : \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$, el morfismo de anillos canónico. Es fácil ver que la familia de pares $\left(\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}, f_{i,j}\right)_{i \leq j}$ es un sistema inverso en la categoría de anillos topológicos. Como los anillos son finitos y discretos, el límite inverso $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ es compacto y Hausdorff.

Teorema 3.1.25. *El anillo de enteros p-ádicos es isomorfo como anillo topológico a $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. En particular, es compacto.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos al morfismo sobreyectivo de anillos $\gamma_n : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ del Corolario 3.1.24.

Sea $x \in \mathbb{Z}_p$, y sean $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \leq j$. Afirmamos que

$$f_{i,j}\left(\gamma_j(x)\right) = \gamma_i(x). \tag{1}$$

En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\pi_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ la proyección canónica. De la definición de las $f_{i,j}$ es claro que

$$f_{i,j}\pi_j = \pi_i. \tag{2}$$

Luego, si $\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ es la forma canónica de x, tenemos por (2) que

$$f_{i,j}\gamma_j\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i\right) = f_{i,j}\pi_j\left(\sum_{i=0}^{j-1} a_i p^i\right) = \pi_i\left(\sum_{i=0}^{j-1} a_i p^i\right) = \pi_i\left(\sum_{i=0}^{i-1} a_i p^i\right) = \gamma_i\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i\right).$$

De modo que vale (1).

Entonces, existe un único morfismo de anillos topológicos $\gamma : \mathbb{Z}_p \to \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ tal que, si $i \leq j$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}_p \arrow[d, "\gamma"] \arrow[ddl, bend right, "\gamma_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\gamma_j"] & \\
 & \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \arrow[dl, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & \\
\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} & & \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \arrow[ll, "f_{i,j}"]
\end{tikzcd},$$

donde p_i y p_j son las proyecciones. El morfismo γ está dado por

$$\gamma(x) = (\gamma_n(x))_{n \in \mathbb{N}}, \tag{3}$$

para todo $x \in \mathbb{Z}_p$.

Veamos que γ es inyectiva. Supongamos que $\gamma(x) = 0$ y verifiquemos que $x = 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $0 = p_n(\gamma(x)) = \gamma_n(x)$, de donde $x \in \ker \gamma_n = p^n\mathbb{Z}_p$. De la Observación 3.1.11 tenemos que

$$|x|_p \leq p^{-n}.$$

Como n era arbitrario obtenemos que $x = 0$, como queríamos ver.

Veamos que γ es suryectiva. Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, y para cada n, sea s'_n el único entero tal que $0 \leq s'_n \leq p^n - 1$ y $\pi_n(s'_n) = s_n$. Afirmamos que $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}_p$ es una sucesión de Cauchy. Sea $i_0 \in \mathbb{N}$, vamos a ver que

$$|s'_j - s'_i|_p \leq p^{-i_0}, \quad \text{si } j \geq i \geq i_0. \tag{4}$$

Sean $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $j \geq i \geq i_0$. Como $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, se verifica que $f_{i,j}(s_j) = s_i$, es decir

$$f_{i,j}\left(\pi_j(s'_j)\right) = \pi_i(s'_i). \tag{5}$$

Combinando (5) con (2) obtenemos que $\pi_i(s'_j) = \pi_i(s'_i)$ y por lo tanto p^i divide a $s'_j - s'_i$. Luego por la Observación 3.1.11 vale (4) y por lo tanto $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}_p$. Sea $s' = \lim_{n\to\infty} s'_n$. Vamos a probar que $\gamma(s') = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Como $|s'_n|_p \leq 1$ para todo n, se sigue que $|s'|_p \leq 1$. Entonces s' es un entero p-ádico. Además si n es un natural, por la desigualdad (4),

$$|s' - s'_n|_p \leq p^{-n}.$$

Luego por la Observación 3.1.11 y el Corolario 3.1.24, el elemento $s' - s'_n$ está en el núcleo de γ_n, lo cual implica que $\gamma_n(s') = \gamma_n(s'_n)$. Como γ_n coincide con π_n en los enteros, se sigue que $\gamma_n(s') = s_n$. Como n era un natural arbitrario, por (3) obtenemos que $\gamma(s') = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Para terminar, falta probar que γ es abierta. Basta ver que si $n \in \mathbb{N}$ entonces $\gamma(p^n\mathbb{Z}_p)$ es abierto. Afirmamos que $\gamma(p^n\mathbb{Z}_p) = W_n \cap \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, donde

$$W_n = \underbrace{\{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{n \text{ factores}} \times \prod_{i>n} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}.$$

En efecto, sea $\iota : \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \hookrightarrow \prod_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ la inclusión. Un elemento x de $\mathbb{Z}_p$ está en $(\iota\gamma)^{-1}(W_n)$ si y sólo si $\gamma_i(x) = 0$ para todo $i \leq n$. Por el Corolario 3.1.24, esto es equivalente a que x esté en $p^i\mathbb{Z}_p$ para todo $i \leq n$. Luego

$$(\iota\gamma)^{-1}(W_n) = p^n\mathbb{Z}_p.$$

Entonces como γ es suryectiva,

$$\gamma(p^n\mathbb{Z}_p) = \gamma\left(\gamma^{-1}(\iota^{-1}(W_n))\right) = W_n \cap \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$

Como W_n es un abierto del producto directo $\prod_i \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$, concluimos que γ es abierta. $\square$

Corolario 3.1.26. *El espacio topológico $\mathbb{Q}_p$ es localmente compacto. Más aún, toda bola es compacta.*

Demostración. Por (3.1.13), toda bola abierta es una bola cerrada. Luego, como $\mathbb{Q}_p$ es cuerpo topológico, basta ver que $\bar{B}(0,1)$ es compacta. Pero esto último ya lo sabemos pues $\bar{B}(0,1) = \mathbb{Z}_p$. □

Unidades de $\mathbb{Z}_p$

El grupo de unidades de $\mathbb{Z}_p$ está formado por los enteros p-ádicos que tienen valor absoluto 1. Notemos que

$$\mathbb{Z}_p^\times = \mathbb{Z}_p \backslash \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq p^{-1} \right\},$$

y por lo tanto $\mathbb{Z}_p^\times$ es un abierto de $\mathbb{Q}_p$. Además $\mathbb{Z}_p^\times$ es compacto por ser un cerrado del compacto $\mathbb{Z}_p$.

Para cada N número natural, consideramos el subconjunto de $\mathbb{Z}_p^\times$ definido por

$$U_p(N) = \{x \in \mathbb{Z}_p^\times : x \equiv 1 \pmod{N}\}.$$

Es un subgrupo de $\mathbb{Z}_p^\times$. En efecto, es claro que si x e y están en $U_p(N)$, entonces xy también. Por otro lado, si x está en $U_p(N)$, verifiquemos que $x^{-1} \in U_p(N)$. Sea $a \in \mathbb{Z}_p$ tal que $x = 1 + Na$. Tenemos entonces que $1 = x^{-1} + x^{-1}Na$, y como $x^{-1} \in \mathbb{Z}_p$, concluimos que $x^{-1} \equiv 1 \pmod{N}$ como queríamos ver.

Notemos que

$$U_p(N) = U_p\left(p^{\nu_p(N)}\right). \tag{3.1.27}$$

Luego si $k = \nu_p(N) \geq 1$, entonces $U_p(N) = \bar{B}(1, p^{-k}) \subseteq \mathbb{Z}_p^\times$. También podemos escribir $U_p(N) = 1 + p^k\mathbb{Z}_p$. Y en el caso que p no divide a N, tenemos que $U_p(N) = \mathbb{Z}_p^\times$.Tenemos entonces una cadena de subgrupos

$$\mathbb{Z}_p^\times \supsetneq U_p(p) \supsetneq U_p(p^2) \supsetneq U_p(p^3) \supsetneq \dots,$$

que forman una base de entornos de 1.

Proposición 3.1.28. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces,*

$$\mathbb{Z}_p^\times = \bigsqcup_{\substack{i=1 \\ (i:p)=1}}^{p^n} i\, U_p(p^n).$$

Demostración. Es fácil ver que si $i \in \mathbb{Z}_p^\times$, entonces $\{x \in \mathbb{Z}_p^\times : x \equiv i \pmod{p^n}\} = i\, U_p(p^n)$. Luego,

$$\mathbb{Z}_p^\times = \bigsqcup_{\substack{i=1 \\ (i:p)=1}}^{p^n} \{x \in \mathbb{Z}_p^\times : x \equiv i \pmod{p^n}\} = \bigsqcup_{\substack{i=1 \\ (i:p)=1}}^{p^n} i\, U_p(p^n).$$

□

Proposición 3.1.29. *Para cada número natural $N \in \mathbb{N}$, tenemos un isomorfismo*

$$\mathbb{Z}_p^\times/U_p(N) \xrightarrow{\gamma^\times_{\nu_p(N)}} \left(\mathbb{Z}/p^{\nu_p(N)}\mathbb{Z}\right)^\times .$$

Además, si j, k son dos números naturales tales que $j \leq k$, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_p^\times/U_p(p^k) \arrow[r, "\gamma_k^\times", "\cong"'] \arrow[d, "\pi"] & (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times \arrow[d, "\pi'"] \\ \mathbb{Z}_p^\times/U_p(p^j) \arrow[r, "\gamma_j^\times", "\cong"'] & (\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z})^\times \end{tikzcd} , \tag{3.1.30}$$

donde π y π' son las proyecciones canónicas.

Demostración. Si N es coprimo con p, es trivial. Supongamos que p divide a N y sea $n = \nu_p(N)$. Consideremos el morfismo de anillos sobreyectivo $\gamma_n : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ del Colorario 3.1.24. Un entero p-ádico $a = \sum_{i=0}^\infty a_i p^i$ está en $\mathbb{Z}_p^\times$, si y sólo si $0 < a_0 < p$. Esto último es equivalente a que el número entero $\sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i$ sea coprimo con p, y por lo tanto a que $\gamma_n(a) \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$. Entonces de restringir γ_n a $\mathbb{Z}_p^\times$, obtenemos un epimorfismo de grupos $\gamma_n|_{\mathbb{Z}_p^\times} : \mathbb{Z}_p^\times \to (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$. Un entero p-ádico $a = \sum_{i=0}^\infty a_i p^i$ está en el núcleo de $\gamma_n|_{\mathbb{Z}_p^\times}$, si y sólo si $\sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i = 1$, es decir, si y sólo si $a = 1 + p^n \sum_{i=n}^\infty a_i p^{i-n}$. Por lo tanto $\ker \gamma_n|_{\mathbb{Z}_p^\times} = U_p(p^n)$, y por (3.1.27), concluimos que tenemos un isomorfismo $\mathbb{Z}_p^\times/U_p(N) \xrightarrow{\gamma_n^\times} (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$.

La conmutatividad del diagrama es clara teniendo en cuenta que $\gamma_k^\times$ y $\gamma_j^\times$ son simplemente truncar los desarrollos en serie de potencias de p. □

3.2. Producto restringido de grupos topológicos

Nuestro próximo paso va a ser construir un anillo con una topología que condense la información de todos los posibles valores absolutos (no triviales) del cuerpo $\mathbb{Q}$, y que contenga a $\mathbb{Q}$. Parece natural entonces tomar como candidato $\prod_{p\in\mathcal{P}'} \mathbb{Q}_p$, este anillo contiene al cuerpo de los números racionales vía la aplicación

$$\mathbb{Q} \ni x \mapsto (x, x, x, \dots). \tag{3.2.1}$$

El inconveniente que presenta este candidato es no ser un espacio localmente compacto. Va a ser importante para nosotros que sea localmente compacto porque para hacer análisis en este anillo necesitaremos de la medida de Haar.

Veamos por qué $\prod_{p\in\mathcal{P}'} \mathbb{Q}_p$ no es localmente compacto. Supongamos que un abierto U no vacío estuviese contenido en un compacto K. Entonces U contiene un abierto W de la forma $\prod_p W_p$, con W_p abierto de $\mathbb{Q}_p$ para todo p, y $W_p = \mathbb{Q}_p$ para casi todo p. Por lo tanto, proyectando K vía las proyecciones canónicas, $\pi_p : \prod_{q\in\mathcal{P}'} \mathbb{Q}_q \to \mathbb{Q}_p$, se tendría que $\mathbb{Q}_p$ es compacto para casi todo p.

Para arreglar este problema, una posibilidad sería tomar en vez de $\prod_{p\in\mathcal{P}'}\mathbb{Q}_p$, el producto $\mathbb{R}\times\prod_{p\in\mathcal{P}}\mathbb{Z}_p$. En este caso la compacidad local está asegurada, pero la aplicación dada por (3.2.1) no está bien definida pues $\mathbb{Q}\nsubseteq\mathbb{Z}_p$ para ningún primo p.

Vamos a fabricar entonces un objeto que cumpla ambas condiciones. Lo haremos en el contexto de grupos topológicos pues no requiere ningún esfuerzo adicional, y más adelante nos va a servir esta construcción en ese caso específico.

Definición y propiedades básicas

Sea I un conjunto de índices y para cada $i\in I$, sean G_i un grupo topológico y H_i un subgrupo abierto de G_i. Para cada $S\subseteq I$ conjunto finito, denotemos con G_S al grupo topológico

$$G_S=\prod_{i\in S}G_i\times\prod_{i\notin S}H_i.$$

Como conjunto, el *producto restringido de la familia* $\{G_i\}_{i\in I}$ *con respecto a* $\{H_i\}_{i\in I}$ se define como

$$G=\prod_{i\in I}{}' G_i=\bigcup_S G_S,$$

donde la unión se hace sobre todos los conjuntos $S\subseteq I$ finitos. Es fácil ver que

$$G=\left\{(g_i)_{i\in I}\in\prod_i G_i : g_i\in H_i \text{ para casi todo } i\right\}.$$

Como $G_S\subseteq G_T$ si $S\subseteq T$, y todos los G_S son subgrupos de $\prod_{i\in I}G_i$, se tiene que G es subgrupo de $\prod_{i\in I}G_i$.

Definamos ahora la topología de G. Para cada $S\subseteq\mathcal{P}'$ finito, sea $\mathcal{B}_S$ la base de la topología del producto directo G_S dada por

$$\mathcal{B}_S=\left\{\prod_{i\in I}U_i : U_i\subseteq G_i \text{ abierto para todo } i, U_i\subseteq H_i \text{ si } i\notin S, U_i=H_i \text{ para casi todo } i\right\}.$$

Consideremos el conjunto $\mathcal{B}$ definido por

$$\mathcal{B}=\bigcup_S\mathcal{B}_S=\left\{\prod_{i\in I}U_i : U_i\subseteq G_i \text{ abierto para todo } i, U_i=H_i \text{ para casi todo } i\right\}. \quad (3.2.2)$$

Veamos que $\mathcal{B}$ es una base para una topología en G. Al ser $\mathcal{B}_S$ base de G_S para todo S, la unión de todos los elementos de $\mathcal{B}$ es G. Y por otro lado, si $x\in U_1\cap U_2$ con $U_1\in\mathcal{B}_{S_1}$ y $U_2\in\mathcal{B}_{S_2}$, entonces $U_1,U_2\in\mathcal{B}_{S_1\cup S_2}$ y por lo tanto existe $U'\in\mathcal{B}_{S_1\cup S_2}\subseteq\mathcal{B}$ tal que $x\in U'\subseteq U_1\cap U_2$.

Proposición 3.2.3. *Sea $S\subseteq I$ un conjunto finito. El conjunto G_S es un abierto de G y la topología que hereda como subespacio coincide con la topología del producto directo.*

Demostración. Como $\mathcal{B}_S \subseteq \mathcal{B}$, G_S es abierto en G. Más aún, todo abierto con la topología del producto directo es abierto en G; en particular, es abierto en G_S tomando en G_S la topología del subespacio. Para ver la otra inclusión, basta ver que si $U \in \mathcal{B}$ entonces $U \cap G_S \in \mathcal{B}_S$. Tomemos $U \in \mathcal{B}$, entonces existe $T \subseteq I$ finito tal que $U = \prod_{i\in T} U_i \times \prod_{i\notin T} H_i$, con U_i abierto para todo $i \in T$. Tenemos entonces que

$$U \cap G_S = \left(\prod_{i\in T} U_i \times \prod_{i\notin T} H_i\right) \cap \left(\prod_{i\in S} G_i \times \prod_{i\notin S} H_i\right),$$

obteniendo que

$$U \cap G_S = \prod_{i\in S\cap T} U_i \times \prod_{i\in T\setminus S} U_i \cap H_i \times \prod_{i\notin T} H_i.$$

De lo que es inmediato que $U \cap G_S \in \mathcal{B}_S$. □

Corolario 3.2.4. *El grupo G es un grupo topológico.*

Demostración. Veamos que la multiplicación $m : G \times G \to G$ es continua; para la inversión se hace una cuenta similar. Por la Proposición 3.2.3 la inclusión $\iota : G_S \to G$ es continua para todo S. Además como $\{G_S \times G_T : S, T \text{ subconjuntos finitos de } I\}$ es una familia de abiertos que cubre $G \times G$, basta ver que la restricción de m,

$$m|_{G_S\times G_T} : G_S \times G_T \to G_{S\cup T}$$

es continua. Al ser $G_{S\cup T}$ grupo topológico, entonces $m|_{G_{S\cup T}} : G_{S\cup T} \times G_{S\cup T} \to G_{S\cup T}$ es continua, de lo que es inmediato que $m|_{G_S\times G_T}$ también lo es. □

Observación 3.2.5. *Supongamos que tenemos otra familia de grupos $\{H'_i\}_{i\in I}$ tal que $H'_i \subseteq G_i$ es subgrupo abierto para todo $i \in I$. Si $H_i = H'_i$ para casi todo i, el producto restringido de $\{G_i\}_{i\in I}$ con respecto a $\{H_i\}_{i\in I}$ y a $\{H'_i\}_{i\in I}$ es el mismo (no solo isomorfo), como conjunto y como grupo topológico.*

Proposición 3.2.6. *La topología del producto restringido es más fina que la que hereda el conjunto G como subespacio de $\prod_i G_i$. En particular, el espacio G es Hausdorff y la inclusión de G en el producto directo es continua.*

Demostración. Basta ver que todo conjunto de la forma $(\prod_i U_i) \cap G$, con $U_i \subseteq G_i$ abierto para todo i y $U_i = G_i$ para casi todo i, es abierto de G. Es claro que para todo S, el conjunto $(\prod_i U_i) \cap G_S$ está en $\mathcal{B}_S$. Luego como

$$\left(\prod_i U_i\right) \cap G = \bigcup_S \left(\left(\prod_i U_i\right) \cap G_S\right),$$

tenemos que $(\prod_i U_i) \cap G$ es abierto de G. □

Observación 3.2.7. *Si $H_i \subsetneq G_i$ para infinitos $i \in I$, entonces $\prod_i H_i$ es abierto de G con la topología del producto restringido, pero no con la topología que hereda G como subespacio de $\prod_i G_i$ (por no contener ningún abierto básico). Concluimos entonces que en este caso, la topología del producto restringido es estrictamente más fina que la que hereda G como subespacio de $\prod_i G_i$.*

Proposición 3.2.8. *Supongamos que I es contable y que para cada $i \in I$, el grupo topológico G_i cumple el segundo axioma de numerabilidad. Entonces G cumple el segundo axioma de numerabilidad.*

Demostración. Para cada $S \subseteq I$ finito, sea A_S una base contable de abiertos de $\prod_{i\in S} G_i$. Entonces el conjunto

$$B_S = \left\{ U \times \prod_{i \notin S} H_i : U \in A_S \right\}$$

es una base contable de abiertos de G_S. Es claro que el conjunto $B = \bigcup_S B_S$, donde la unión se hace sobre todos los subconjuntos finitos de I, es una base contable de abiertos de G. □

Ahora vamos a ver cuáles son las condiciones para que el producto restringido sea localmente compacto.

Lema 3.2.9. *Supongamos que $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos tales que $A_i \subseteq G_i$ para todo i y $\prod_i A_i \subseteq G$. Entonces,*

$$\overline{\prod_i A_i} = \prod_i \overline{A_i}.$$

Demostración. Supongamos que x está en $\overline{\prod_i A_i}$. Sea S un conjunto finito de índices tal que $x_i \in H_i$ para todo $i \notin S$. Fijemos un índice i_0 y veamos que x_{i_0} está en $\overline{A_{i_0}}$. Sea $U_{i_0} \subseteq G_{i_0}$ abierto con $x_{i_0} \in U_{i_0}$, y para cada $i \in S$, $i \neq i_0$, sea U_i un abierto de G_i con $x_i \in U_i$. Entonces $x \in U = U_{i_0} \times \prod_{i\in S, i\neq i_0} U_i \times \prod_{i\notin S, i\neq i_0} H_i$ y como U es un abierto de G por ser un elemento de la base $\mathcal{B}$ (ver (3.2.2)), se tiene que $U \cap \prod_i A_i \neq \emptyset$. En particular $U_{i_0} \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ y por lo tanto $x_{i_0} \in \overline{A_{i_0}}$.

Ahora supongamos que x está en $\prod_i \overline{A_i}$. Sea $U \subseteq G$ un abierto que contiene a x. Veamos que $U \cap \prod_i A_i \neq \emptyset$. Podemos suponer que $U = \prod_i U_i$ con U_i abierto de G_i para todo i, y $U_i = H_i$ para casi todo i. Para cada i, $x_i \in \overline{A_i} \cap U_i$, con lo que podemos tomar un elemento $z_i \in U_i \cap A_i$. Entonces el elemento $z = (z_i)_i$ está en $U \cap \prod_i A_i$ y por lo tanto x pertenece a $\overline{\prod_i A_i}$. □

Proposición 3.2.10. *El grupo topológico $G = \prod'_{i\in I} G_i$ es localmente compacto si y sólo si G_i es localmente compacto para todo i y H_i es compacto para casi todo i.*

Demostración. Probaremos solamente la implicación "si", que nos resultará útil en nuestra construcción. Supongamos que G_i es localmente compacto para todo i y H_i es compacto para todo $i \notin S$, donde S es un conjunto de índices finito. Basta probar que existe un entorno compacto que contiene al neutro de G. Para cada $i \in S$, sea U_i un abierto de G_i que contiene a $1 \in G_i$ y con clausura compacta. Consideremos el conjunto $U = \prod_{i \in S} U_i \times \prod_{i \notin S} H_i$. Entonces por el Teorema de Tychonoff y por el Lema 3.2.9, la clausura de U en G,

$$\overline{U} = \prod_{i \in S} \overline{U_i} \times \prod_{i \notin S} H_i$$

es un compacto de G_S con la topología producto usual. Pero por la Proposición 3.2.3, esa topología es la misma que tiene G_S como subespacio de G. Entonces $\overline{U}$ es compacto con la topología que hereda de G y como $1 \in U$, concluímos que G es localmente compacto.

□

Nos va a interesar especialmente el caso en que H_i es compacto para casi todo i. Tenemos el siguiente resultado que más adelante nos será útil:

Proposición 3.2.11. *Supongamos que H_i es compacto para casi todo i. Un subconjunto A de $G = \prod'_{i \in I} G_i$ tiene clausura compacta si y sólo si existe una familia de subconjuntos compactos $\{K_i\}_i$, con $K_i \subseteq G_i$ para todo i y $K_i = H_i$ para casi todo i, tal que $A \subseteq \prod_i K_i$.*

Demostración. Probemos que si existe una familia de subconjuntos compactos $\{K_i\}_i$ con las hipótesis del enunciado, entonces la clausura de A es compacta. Sea $K = \prod_i K_i$. Es claro que existe S finito tal que $K \subseteq G_S$. Por la Proposición 3.2.3, K es compacto y al ser G un espacio topológico Hausdorff, $\overline{A}$ es un cerrado dentro de K y por lo tanto compacto.

□

Cuasi-caracteres

Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos y para cada $i \in I$, sea $H_i \subseteq G_i$ un subgrupo abierto. Consideremos el grupo topológico $G = \prod'_{i \in I} G_i$.

Sea χ un cuasi-carácter de G. Para cada $i \in I$, denotemos con χ_i a la restricción de χ a G_i. Por la Proposición 3.2.3, la inclusión $j_i : G_i \hookrightarrow G$ es continua, de modo que χ_i es un carácter de G_i. Se lo llama *componente local i-ésima* del cuasi-carácter χ.

Proposición 3.2.12 (Descomposición en componentes locales)**.** *Sea χ un cuasi-carácter de G. Entonces χ_i es trivial en H_i para casi todo i. Además*

$$\chi = \prod_{i \in I} \chi_i. \tag{3.2.13}$$

Notar que si bien el producto de (3.2.13) tiene infinitos factores si I es infinito, vamos a ver en la demostración que para cada $x \in G$, hay solo finitos $i \in I$ tal que $\chi(x_i) \neq 1$. Es decir, fijado $x \in G$, el producto $\prod_{i \in I} \chi_i(x_i)$ es en verdad un producto finito.

Demostración. Sea U un abierto básico que contiene a 1. Entonces existe $S \subseteq I$ finito tal que $U = \prod_{i \in S} U_i \times \prod_{i \notin S} H_i$, con U_i abierto de G_i para todo $i \in S$. Luego U contiene al subgrupo de G dado por $\prod_{i\in S}\{1\} \times \prod_{i\notin S} H_i$. Tenemos así que cada entorno de 1 contiene a un elemento de la familia

$$\mathcal{F} = \left\{ \prod_{i\in S}\{1\} \times \prod_{i\notin S} H_i : S \subseteq I \text{ finito} \right\}.$$

Del Lema 2.3.5, existe $S \subseteq I$ finito tal que $\chi\left(\prod_{i\in \S}\{1\} \times \prod_{i\notin S} H_i\right) = \{1\}$, en particular, $\chi(H_i) = \{1\}$ para todo $i \notin S$.

Ahora verifiquemos la igualdad (3.2.13). Tomemos $x \in G$ y sea $T \subseteq I$ finito tal que $x_i \in H_i$ si $i \notin T$. Tenemos entonces que los únicos posibles valores de i tal que $\chi_i(x_i) \neq 1$, son los elementos del conjunto finito $S \cup T$. Luego $\prod_{i\in I} \chi_i(x_i)$ está bien definido y es fácil ver que $\chi(x) = \prod_{i\in I} \chi_i(x_i)$. □

Proposición 3.2.14. *Para cada $i \in I$ sea χ_i un cuasi-carácter de G_i. Supongamos que dicha familia de cuasi-caracteres verifica que χ_i es trivial en H_i para casi todo i. Entonces la aplicación $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ definida como en (3.2.13) es un cuasi-carácter de G.*

Demostración. De forma idéntica a la anterior demostración se prueba que χ está bien definida. Probemos la continuidad de χ. Sea $S \subseteq I$ finito tal que χ_i es trivial en H_i si $i \notin S$, y sea n el cardinal de S. Tomemos un abierto W de $\mathbb{C}^\times$ que contiene a 1. Es fácil probar por inducción de la Proposición 2.2.1 que existe V entorno de 1 tal que $V^n \subseteq W$. Para cada $i \in S$ sea $U_i \subseteq G_i$ abierto que contiene a 1 tal que $U_i \subseteq \chi_i^{-1}(V)$. Es claro que entonces $\prod_{i\in S} U_i \times \prod_{i\notin S} H_i \subseteq \chi^{-1}(W)$. □

Por la Proposición 2.3.2, si H_i es un subgrupo compacto de G_i para casi todo $i \in I$, tiene sentido considerar el producto restringido de la familia $\left\{\widehat{G_i}\right\}_{i\in I}$ respecto a la familia $\{H_i^\perp\}_{i\in I}$. Las dos últimas proposiciones implican que, al menos como conjunto, el dual de G es isomorfo a este producto restringido. De hecho, vale que si G_i es localmente compacto para casi todo i, el isomorfismo es de grupos topológicos. Para una demostración de esto último, ver [RV99, Teorema 5-4].

3.3. Adeles e ideles

Adeles

Consideremos la familia de grupos localmente compactos $\{\mathbb{Q}_p\}_{p\in\mathcal{P}'}$ (recordemos que $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$, donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de números primos). Para cada primo p, consideramos el subgrupo abierto y compacto $\mathbb{Z}_p$. Para $p = \infty$, podemos considerar como subgrupo abierto de $\mathbb{Q}_\infty (= \mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$, aunque no tiene mayor importancia por la Observación 3.2.5. El producto restringido $\prod'_{p\in\mathcal{P}'} \mathbb{Q}_p$ se denomina *anillo de los adeles* del cuerpo $\mathbb{Q}$ y lo denotaremos $\mathbb{A}$.

Tenemos entonces que como conjunto,

$$\mathbb{A} = \{(x_p)_{p\in\mathcal{P}'} : x_p \in \mathbb{Q}_p \text{ para todo } p \in \mathcal{P}', x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ para casi todo } p \in \mathcal{P}\},$$

y tiene como base de la topología al conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{p \in \mathcal{P}'} U_p : U_p \subseteq \mathbb{Q}_p \text{ abierto para todo } p \in \mathcal{P}', U_p = \mathbb{Z}_p \text{ para casi todo } p \in \mathcal{P} \right\}.$$

Es fácil ver que con las operaciones coordenada a coordenada $\mathbb{A}$ es anillo topológico. Luego, las proposiciones 3.2.10 y 3.2.8, tenemos que $\mathbb{A}$ es anillo localmente compacto y verifica el segundo axioma de numerabilidad.

Al producto restringido $\prod'_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Q}_p$ se lo denomina *anillo de los adeles finitos del cuerpo* $\mathbb{Q}$ y lo denotaremos $\mathbb{A}_{fin}$. Tenemos que

$$\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_{fin}.$$

Siguiendo la notación de la sección anterior, si S es un subconjunto finito de $\mathcal{P}'$ que contiene a ∞, denotamos

$$\mathbb{A}_S = \prod_{p\in S} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p\notin S} \mathbb{Z}_p.$$

Vía el morfismo de anillos inyectivo

$$\begin{aligned} \iota :&\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{A} \\ &x \mapsto (x, x, x, \dots), \end{aligned}$$

vamos a identificar $\mathbb{Q}$ con $\iota(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{A}$.

Lema 3.3.1. *Sea W el subconjunto de $\mathbb{A}$ dado por*

$$W = (-1, 1) \times \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p.$$

Entonces $W \cap \mathbb{Q} = \{0\}$.

Demostración. Es inmediato de la Observación 3.1.10. □

Corolario 3.3.2. *El subanillo $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{A}$ es discreto.*

Demostración. Sea $S_0 = \{\infty\}$ y W el conjunto del Lema 3.3.1. Como W está incluido en $\mathbb{A}_{S_0} = \mathbb{R} \times \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$, de la Proposición 3.2.3 se sigue que W es un abierto de $\mathbb{A}$. Por el Lema 3.3.1, si $\alpha \in \mathbb{Q}$ entonces

$$(W + \alpha) \cap \mathbb{Q} = \{\alpha\},$$

y por lo tanto $\mathbb{Q}$ es discreto. □

Proposición 3.3.3 (Aproximación débil)**.** *Sean $p_1, \dots, p_n$ números primos positivos distintos. Sea r_i un elemento de $\mathbb{Q}_{p_i}$ para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $\alpha \in \mathbb{Q}$ tal que*

$$|\alpha - r_i|_{p_i} < \varepsilon,$$

para todo $1 \leq i \leq n$. Además α puede elegirse de modo que su denominador sea coprimo con todo primo distinto de $p_1, \dots, p_n$.

Demostración. Supongamos primero que $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}$. Tomemos $k_1, \dots, k_n$ números naturales tales que $p^{-k_i} < \varepsilon$ para todo i. Por el Teorema chino del resto, existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv r_1 \pmod{p_1^{k_1}}; \\ &\vdots \\ \alpha &\equiv r_n \pmod{p_n^{k_n}}. \end{aligned}$$

Entonces por la Observación 3.1.11,

$$|\alpha - r_i|_{p_i} \leq p^{-k_i} < \varepsilon,$$

para todo i.

Supongamos ahora que $r_i \in \mathbb{Z}_{p_i}$ para todo i. Como $\mathbb{Z}$ es denso en $\mathbb{Z}_p$ para todo primo p, existen $r'_1, \dots, r'_n$ enteros tales que para todo i,

$$|r'_i - r_i|_{p_i} < \varepsilon. \tag{1}$$

Por el caso anterior, existe un entero α tal que para todo i,

$$|\alpha - r'_i|_{p_i} < \varepsilon. \tag{2}$$

De (1) y (2), tenemos entonces que

$$|\alpha - r_i|_{p_i} \leq \max\{|\alpha - r'_i|_{p_i}, |r'_i - r_i|_{p_i}\} < \varepsilon,$$

para todo i.

Finalmente supongamos que $r_i \in \mathbb{Q}_{p_i}$ para todo i. Sean $k_1, \dots, k_n$ enteros no negativos tales que $p_i^{k_i} r_i \in \mathbb{Z}_{p_i}$ para todo i. Sea $d = \prod_{i=1}^{n} p_i^{k_i}$ y definamos para cada i,

$$r'_i = d \cdot r_i.$$

Entonces para todo i, $r'_i \in \mathbb{Z}_{p_i}$ y por el caso anterior existe $\alpha' \in \mathbb{Z}$ tal que para todo i,

$$|\alpha' - r'_i|_{p_i} < \varepsilon/d. \tag{3}$$

Tomemos $\alpha = \alpha'/d$. Entonces el denominador de α es coprimo con todo primo distinto de $p_1, \dots, p_n$ y además, por (3),

$$|\alpha - r_i|_{p_i} = \left|\frac{1}{d}\right|_{p_i} |\alpha' - r'_i|_{p_i} = p_i^{k_i} |\alpha' - r'_i|_{p_i} < \varepsilon$$

para todo i. □

Proposición 3.3.4. *Sea* $D = [0,1) \times \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$. *Entonces*

$$\mathbb{A} = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbb{Q}} (\alpha + D).$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{A}$. Existe un conjunto finito $S \subset \mathcal{P}$ tal que

$$|x_p|_p \leq 1, \tag{1}$$

para todo primo p que no está en S. Por la aproximación débil, existe un número racional α' tal que para todo $p \in S$,

$$|x_p - \alpha'|_p \leq 1. \tag{2}$$

Y por la condición del denominador, el número α' puede tomarse de forma que

$$|\alpha'|_p \leq 1 \tag{3}$$

para todo primo p que no esté en S. Notemos que si p pertenece a $\mathcal{P}\backslash S$, la desigualdad (2) se sigue cumpliendo por (1) y (3). Sea $\alpha = \alpha' + \lfloor x_\infty - \alpha' \rfloor$, donde $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ es la función parte entera. Entonces $x_\infty - \alpha \in [0,1)$ y, como para todo primo se cumple (2), se tiene que $|x_p - \alpha|_p \leq 1$ para todo $p \in \mathcal{P}$. Concluimos entonces que $x - \alpha$ está en D y por lo tanto $x \in \alpha + D$.

Supongamos que $x = \alpha_1 + d_1 = \alpha_2 + d_2$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$ racionales y $d_1, d_2 \in D$. Entonces $d_2 - d_1 \in \mathbb{Q}$, $d_2 - d_1 \in (-1,1)$ y $|d_2 - d_1|_p \leq 1$ para todo $p \in \mathcal{P}$. Por el Lema 3.3.1 se tiene que $d_1 = d_2$ y $\alpha_1 = \alpha_2$. □

En otras palabras, si consideramos el grupo $\mathbb{Q}$ actuando sobre $\mathbb{A}$ por traslaciones, entonces D es un dominio fundamental para esta acción.

Teorema 3.3.5. *El anillo topológico $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ es compacto.*

Demostración. Sea D el conjunto de la Proposición 3.3.4. Por la Proposición 3.2.11, la clausura de D es compacta.

Sea $\pi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}/\mathbb{Q}$ la proyección canónica. Entonces $\pi\left(\overline{D}\right)$ es un compacto de $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$. Basta ver entonces que la restricción de π a D es sobreyectiva, pero esto es consecuencia inmediata de la Proposición 3.3.4. □

Esto nos dice que $\mathbb{A}$ no es "mucho más grande" que $\mathbb{Q}$.

Ideles

Consideremos el grupo de unidades de $\mathbb{A}$,

$$\mathbb{A}^\times = \{(x_p)_{p\in\mathcal{P}'} : x_p \in \mathbb{Q}_p^\times \text{ para todo } p \in \mathcal{P}', x_p \in \mathbb{Z}_p^\times \text{ para casi todo } p \in \mathcal{P}\}. \tag{3.3.6}$$

Ingenuamente uno consideraría en $\mathbb{A}^\times$ la topología subespacio de $\mathbb{A}$. Nos topamos con el inconveniente que dado un anillo topológico, no necesariamente el grupo de unidades con la topología subespacio es un grupo topológico. A continuación veremos que específicamente en este caso es falsa dicha afirmación.

Para cada natural n, sea p_n el n-ésimo primo. Sea $x_n = (1, \dots, 1, p_n, 1, \dots)$, donde la única coordenada con el valor p_n es la que corresponde a la asociada al primo p_n, y la primer coordenada corresponde a ∞. Afirmamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ si en $\mathbb{A}^\times$ se considera la topología subespacio de $\mathbb{A}$.

Cualquier abierto que contenga a 1 contiene un abierto de la forma

$$U = \left(\prod_{p\in S} U_p \times \prod_{p\notin S} \mathbb{Z}_p\right) \cap \mathbb{A}^\times,$$

con $S \subset \mathcal{P}'$ conjunto finito y $U_p \subseteq \mathbb{Q}_p$ abierto para todo $p \in S$. Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, p_n no está en S y por lo tanto $x_n \in U$. Luego $(x_n)_n$ tiende a $1 \in \mathbb{A}^\times$ con la topología subespacio, como queríamos ver.

Por otro lado, si p_n no está en S, la coordenada correspondiente a ese primo de x_n^{-1} es p_n^{-1}, el cual no es un elemento de $\mathbb{Z}_{p_n}$. Entonces no es cierto que x_n^{-1} esté en U para n suficientemente grande, y en consecuencia, la sucesión $\left(x_n^{-1}\right)_n$ no tiende a 1 en $\mathbb{A}^\times$. Concluimos que $(\cdot)^{-1}$ no es continua en $\mathbb{A}^\times$ con la topología subespacio.

De (3.3.6) vemos que $\mathbb{A}^\times$ es, como conjunto, el producto restringido de $\left\{\mathbb{Q}_p^\times\right\}_{p\in\mathcal{P}'}$ con respecto a $\left\{\mathbb{Z}_p^\times\right\}_{p\in\mathcal{P}} \cup \{\mathbb{Q}_\infty^\times\}$; le daremos la correspondiente topología. Por las proposiciones 3.2.10 y 3.2.8, el grupo $\mathbb{A}^\times$ es un grupo localmente compacto y verifica el segundo axioma de numerabilidad. Se lo denomina el *grupo de los ideles* del cuerpo $\mathbb{Q}$. Notar que los abiertos básicos que contienen a 1 son los conjuntos de la forma

$$U = \prod_{p\in S} U_p \times \prod_{p\notin S} \mathbb{Z}_p^\times$$

con $S \subset \mathcal{P}'$ conjunto finito que contiene a ∞ y $U_p \subseteq \mathbb{Q}_p^\times$ abierto para todo $p \in S$. En este caso, es falso que $x_n \in U$ para $p_n \notin S$ y por lo tanto $(x_n)_n$ no tiende a 1.

Al producto restringido $\prod'_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Q}_p^\times$ se lo denomina *grupo de los ideles finitos* del cuerpo $\mathbb{Q}$ y lo denotaremos $\mathbb{A}_{fin}^\times$. Tenemos que

$$\mathbb{A}^\times = \mathbb{R}^\times \times \mathbb{A}_{fin}^\times.$$

De forma similar al caso de los adeles, si S es un subconjunto finito de $\mathcal{P}'$ que contiene a ∞, denotamos

$$\mathbb{A}_S^\times = \prod_{p\in S} \mathbb{Q}_p^\times \times \prod_{p\notin S} \mathbb{Z}_p^\times.$$

Dado un número racional no nulo $x = a/b$, si S es el conjunto de primos que dividen a a o a b, entonces x está en $\mathbb{Z}_p^\times$ para todo primo p que no está en S. Por lo tanto podemos pensar $\mathbb{Q}^\times$ dentro de $\mathbb{A}^\times$ vía el morfismo de grupos inyectivo

$$\begin{aligned} \iota : \mathbb{Q}^\times &\hookrightarrow \mathbb{A}^\times \\ x &\mapsto (x, x, x, \dots). \end{aligned}$$

Para cada $p \in \mathcal{P}'$, también podemos identificar $\mathbb{Q}_p^\times$ con el subgrupo de $\mathbb{A}^\times$,

$$\mathbb{Q}_p^\times \times \prod_{q\in\mathcal{P}'-\{p\}} \{1\},$$

en la manera obvia.

Lema 3.3.7. *Sea W' el subconjunto de $\mathbb{A}^\times$ dado por*

$$W' = (0,2) \times \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p^\times.$$

Entonces $W' \cap \mathbb{Q}^\times = \{1\}$.

Demostración. Consideremos al conjunto W del Lema 3.3.1. Como $W' \subseteq W + 1$, tenemos por ese lema que $W' \cap \mathbb{Q}^\times \subseteq \{1\}$. □

Corolario 3.3.8. *El subgrupo topológico $\mathbb{Q}^\times$ de $\mathbb{A}^\times$ es discreto.*

Demostración. Es similar a la demostración del Corolario 3.3.2. □

En vistas del Teorema 3.3.5, cabe preguntarse si $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ es compacto. Si miramos el camino que tomamos en el caso de los adeles, notamos que fue esencial probar que existe un dominio fundamental D con clausura compacta para la acción de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{A}$. Se puede probar que en el caso de los ideles, tomando la acción de traslación de $\mathbb{Q}^\times$ en $\mathbb{A}^\times$, un dominio fundamental es $D = \mathbb{R}_{>0} \times \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p^\times$. Vemos entonces que no funciona dicho argumento, de hecho, es falso que $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ es compacto. Vamos a quedarnos con un subgrupo más chico de $\mathbb{A}^\times$, de forma que el cociente con $\mathbb{Q}^\times$ sea compacto.

Dado un idele $x = (x_p)_{p\in\mathcal{P}'}$, como $|x_p|_p = 1$ para casi todo p, podemos definir la *norma idélica* como

$$\|x\| = \prod_{p\in\mathcal{P}'} |x_p|_p.$$

Proposición 3.3.9. *La aplicación $\|\cdot\| : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{R}_{>0}$ es un morfismo de grupos topológicos.*

Demostración. Es claro que es morfismo de grupos.

Sea S un subconjunto finito no vacío de $\mathcal{P}'$. Probemos que $\|\cdot\|$ restringida a $\mathbb{A}_S^\times$ es continua. Por la Proposición 3.2.6, la proyección

$$\begin{aligned} \pi_S : \mathbb{A}_S^\times &\longrightarrow \prod_{p\in S} \mathbb{Q}_p^\times \\ (x_p)_{p\in\mathcal{P}'} &\mapsto (x_p)_{p\in S} \end{aligned}$$

es continua. Además como S es finito, también es continua la función

$$\begin{aligned} N_S : \prod_{p\in S} \mathbb{Q}_p^\times &\longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ (x_p)_{p\in S} &\mapsto \prod_{p\in S} |x_p|_p. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|\cdot\|$ restringida a $\mathbb{A}_S^\times$ es continua por coincidir con $N_S \circ \pi_S$. Luego, como $\mathbb{A}^\times = \bigcup_S \mathbb{A}_S^\times$ y cada $\mathbb{A}_S^\times$ es abierto, se concluye que $\|\cdot\|$ es continua. □

Proposición 3.3.10 (Fórmula del producto)**.** *El núcleo de $\|\cdot\|$ contiene a $\mathbb{Q}^\times$. Es decir, para todo $q \in \mathbb{Q}^\times$ se verifica que*

$$\prod_{p\in\mathcal{P}'} |q|_p = 1.$$

Demostración. Como el subgrupo generado por $\{q : q > 0 \text{ primo}\} \cup \{-1\}$ es $\mathbb{Q}^\times$, basta ver que $\|(q,q,q,\dots)\| = 1$ para q primo. Pero esto es sencillo pues

$$\|(q,q,q,\dots)\| = \prod_{p\in\mathcal{P}'} |q|_p = |q|_\infty |q|_q = qq^{-1} = 1.$$

□

Al núcleo de la norma idélica se lo denomina *el subgrupo de los 1-ideles* y lo denotaremos $\mathbb{A}^1$. Por la Proposición 3.3.9 es un subgrupo cerrado de $\mathbb{A}^\times$. Además, por el Colorario 3.3.8 y la Proposición 3.3.10 tenemos que $\mathbb{Q}^\times$ es un subgrupo discreto de $\mathbb{A}^1$.

Lema 3.3.11. *Sea $x \in \mathbb{A}^1$. Entonces $x_\infty \in \mathbb{Q}^\times$ y $|x_\infty|_p = |x_p|_p$ para todo primo p.*

Demostración. Se deduce fácilmente de la igualdad

$$1 = |x_\infty|_\infty \prod_{p\in\mathcal{P}} |x_p|_p,$$

y de tener en cuenta que para $a \in \mathbb{Q}^\times$ y p, q primos vale que

$$||a|_p|_q = \begin{cases} 1, & \text{si } q \neq p; \\ |a|_p^{-1}, & \text{si } q = p. \end{cases}$$

□

Identifiquemos $\prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p^\times$ con el subgrupo $\{1\} \times \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p^\times$ de $\mathbb{A}^1$.

Teorema 3.3.12. *Tenemos que $\mathbb{A}^1 = \mathbb{Q}^\times \cdot \left(\prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p^\times\right)$, donde el producto es directo. En particular, el grupo topológico $\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times$ es compacto.*

Demostración. Sea $x = (x_\infty, x_{fin}) \in \mathbb{A}^1$. Por el Lema 3.3.11 tenemos que x_∞ pertenece a $\mathbb{Q}^\times$ y x_{fin}/x_∞ pertenece a $\prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p^\times$. Luego $x = \iota(x_\infty) \cdot (1, x_{fin}/x_\infty)$ pertenece a $\mathbb{Q}^\times \cdot \left(\prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p^\times\right)$. Por otro lado, por el Lema 3.3.7, tenemos que $\mathbb{Q}^\times \cap \left(\prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p^\times\right) = 1$. □

Ahora va interesarnos caracterizar $\mathbb{A}^\times$ como el producto de anillos topológicos más sencillos de estudiar.

Proposición 3.3.13. *El anillo de los ideles es el producto directo $\mathbb{A}^\times = \mathbb{R}_{>0} \cdot \mathbb{A}^1$.*

Demostración. Si $x \in \mathbb{A}^\times$, entonces $x = (\|x\|, 1, 1, \dots) \cdot \left(\frac{x_\infty}{\|x\|}, x_{fin}\right) \in \mathbb{R}_{>0} \cdot \mathbb{A}^1$. Es claro que $\mathbb{R}_{>0} \cap \mathbb{A}^1 = \{1\}$. □

Corolario 3.3.14. *El anillo de los ideles es el producto directo $\mathbb{A}^\times = \mathbb{R}_{>0} \cdot \mathbb{Q}^\times \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p^\times$. Más aún, dado $x \in \mathbb{A}^\times$ podemos escribir*

$$x = (\|x\|, 1, 1, \dots) \cdot \iota\left(\frac{x_\infty}{\|x\|}\right) \cdot \left(1, \frac{\|x\|}{x_\infty} x_{fin}\right),$$

y se tiene que $\|x\| \in \mathbb{R}_{>0}$, $\frac{x_\infty}{\|x\|} \in \mathbb{Q}^\times$ y $\frac{\|x\|}{x_\infty} x_{fin} \in \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p^\times$.

3.4. Caracteres locales y globales aditivos

Caracteres de $\mathbb{Q}_p$

Empecemos con el caso $p = \infty$. Consideremos la aplicación $e_\infty : \mathbb{R} \to S^1$ definida por $e_\infty(x) = e^{2\pi i x}$. Claramente e_∞ es un carácter de $\mathbb{R}$. Entonces para cada $a \in \mathbb{R}$, tenemos el carácter $(e_\infty)_a \in \widehat{\mathbb{R}}$ (recordar notación de (2.3.3)). Resulta que todos los caracteres de $\mathbb{R}$ son de esta forma:

Lema 3.4.1. *Sea χ un carácter de $\mathbb{R}$. Entonces existe un único número real a tal que $\chi = (e_\infty)_a$.*

Demostración. La unicidad de a se sigue de la Proposición 2.3.4, veamos la existencia. Como $\chi(0) = 1$ y χ es continuo, existe $h > 0$ tal que $c = \int_0^h \chi(t)\, dt \neq 0$. Luego si $x \in \mathbb{R}$,

$$\chi(x)c = \int_0^h \chi(x+t)\, dt = \int_x^{x+h} \chi(t)\, dt,$$

y por lo tanto $\chi(x) = c^{-1} \int_x^{x+h} \chi(t)\, dt$. Tenemos entonces que χ es diferenciable y

$$\chi'(x) = c^{-1} (\chi(x+h) - \chi(x)) = k\chi(x),$$

donde $k = c^{-1} (\chi(h) - 1)$. De modo que $\chi(x) = e^{kx}$ para todo x. Como $|\chi(x)| = 1$ para todo x, podemos tomar $a \in \mathbb{R}$ de modo que $k = 2\pi i a$. Concluimos que $\chi = (e_\infty)_a$. □

Si bien el siguiente resultado no tiene que ver con caracteres aditivos, no podemos dejar de señalarlo aquí por ser un corolario de lo anterior:

Corolario 3.4.2. *Sea χ un carácter de $\mathbb{R}_{>0}$, entonces existe un único número real b tal que $\chi(x) = x^{ib}$ para todo $x \in \mathbb{R}_{>0}$. En particular, el carácter χ tiene orden finito si y sólo si χ es trivial.*

Demostración. Es inmediato de la Proposición anterior y de componer con el isomorfismo $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$. □

Teorema 3.4.3. *La aplicación $\Psi_\infty : \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$ definida por $\Psi_\infty(a) = (e_\infty)_a$ es un isomorfismo.*

Demostración. Como $\mathbb{R}$ es cuerpo y e_∞ es un carácter no trivial, por la Proposición 2.3.4 tenemos que Ψ_∞ es un monomorfismo. Del Lema 3.4.1 y el Teorema de la función abierta, concluimos que Ψ_∞ es un isomorfismo.

□

Sea p un primo. Nuestro objetivo en el resto de esta subsección será probar un resultado análogo para $\mathbb{Q}_p$. Para ello será necesario previamente definir el conductor de un carácter no trivial de $\mathbb{Q}_p$.

Sea χ_p un carácter no trivial de $\mathbb{Q}_p$. Consideremos la familia $\mathcal{F} = \{p^k\mathbb{Z}_p : k \in \mathbb{Z}\}$. Recordando la Observación 3.1.12, sabemos que $\mathcal{F}$ es una base de entornos de 0 en $\mathbb{Q}_p$. Además es claro que los elementos de $\mathcal{F}$ son subgrupos de $\mathbb{Q}_p$. Por el Lema 2.3.5, el conjunto $A = \{k \in \mathbb{Z} : \chi_p$ es trivial en $p^k\mathbb{Z}_p\}$ es no vacío. Por ser χ_p no trivial y al ser $\left(p^k\mathbb{Z}_p\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ una cadena, el conjunto A está acotado inferiormente. Sea k_0 el mínimo de A, al número p^{k_0} se lo llama el *conductor del carácter* χ_p.

Consideremos la aplicación $e_p : \mathbb{Q}_p \to S^1$ definida por $e_p(x) = e^{-2\pi i\{x\}_p}$ (recordar que $\{x\}_p$ es la parte fraccionaria de x). Es claro que e_p es un morfismo de grupos con núcleo $\mathbb{Z}_p$. Al ser $(e_p)^{-1}(\{1\}) = \mathbb{Z}_p$ un entorno de 0, se tiene que e_p es continuo en 0, concluyendo que e_p es un carácter de $\mathbb{Q}_p$ con conductor 1.

Lema 3.4.4. *Sea χ_p un carácter de $\mathbb{Q}_p$. Entonces existe un único racional p-ádico a tal que $\chi_p = (e_p)_a$.*

Demostración. Sea χ_p un carácter de $\mathbb{Q}_p$. Queremos ver que existe $a \in \mathbb{Q}_p$ tal que $\chi_p = (e_p)_a$. Si χ_p es trivial entonces $a = 0$ sirve, de modo que podemos suponer que χ_p tiene conductor p^k para algún $k \in \mathbb{Z}$. Podemos suponer también que $k = 0$. En efecto, si χ_p tiene conductor p^k y el resultado valiese para caracteres de conductor 1, sea $\tilde{\chi_p}$ definido por $\tilde{\chi_p}(x) = \chi_p(p^kx)$. Tenemos que $\tilde{\chi_p}$ tiene conductor 1 y por lo tanto existe $a \in \mathbb{Q}_p$ tal que $\tilde{\chi_p} = (e_p)_a$. Luego para todo $x \in \mathbb{Q}_p$,

$$\chi_p(x) = \tilde{\chi_p}(p^{-k}x) = (e_p)_a(p^{-k}x) = e_p(ap^{-k}x) = (e_p)_{ap^{-k}}(x),$$

de modo que $\chi_p = (e_p)_{ap^{-k}}$.

Dado $m \in \mathbb{N}$, como $(\chi_p(1/p^m))^{p^m} = \chi_p(1) = 1$ y $e_p(1/p^m)$ es una raíz p^m-ésima primitiva de 1, existe un único entero $0 \le a_m < p^m$ tal que $\chi_p(1/p^m) = (e_p(1/p^m))^{a_m}$. Luego,

$$\chi_p(1/p^m) = e_p\left(\frac{a_m}{p^m}\right). \tag{1}$$

Notemos además que como $\left(\chi_p(1/p^{m+1})\right)^p = \chi_p(1/p^m)$, se tiene que $e_p\left(\frac{p\,a_{m+1}}{p^{m+1}}\right) = e_p\left(\frac{a_m}{p^m}\right)$ y por lo tanto $a_{m+1} \equiv a_m \pmod{p^m}$. Luego, por la Observación 3.1.11, para todo $l \in \mathbb{N}$

$$|a_{m+l} - a_m|_p \le p^{-m}, \tag{2}$$

y por lo tanto $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Z}_p$. Sea $a = \lim_{m\to\infty} a_m$, afirmamos que $\chi_p(x) = (e_p)_a(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}_p$. Por (2) y la Observación 3.1.11 para todo natural m se tiene que $a \equiv a_m \pmod{p^m}$. Entonces al ser e_p trivial en $\mathbb{Z}_p$, obtenemos de (1) que

$$\chi_p(1/p^m) = e_p\left(\frac{a}{p^m}\right), \tag{3}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Como χ_p y e_p son triviales en $\mathbb{Z}_p$ y $a \in \mathbb{Z}_p$, para demostrar que $\chi_p = (e_p)_a$ basta ver que $\chi_p(x) = e_p(ax)$ para todo $x \in \mathbb{Q}_p$ con parte entera nula. Escribamos $x = \sum_{m=-k}^{-1} x_m p^m$, donde $k \in \mathbb{N}_0$ y $0 \leq x_m < p$ para todo $-k \leq m < -1$. Por (3) se tiene que

$$\chi_p(x) = \chi_p\left(\sum_{m=1}^{k} \frac{x_m}{p^m}\right) = \prod_{m=1}^{k}\left(\chi_p\left(\frac{1}{p^m}\right)\right)^{x_m}$$
$$= \prod_{m=1}^{k}\left(e_p\left(\frac{a}{p^m}\right)\right)^{x_m} = e_p\left(\sum_{m=1}^{k} \frac{x_m a}{p^m}\right) = e_p(ax),$$

como se quería ver. Concluimos que $\chi_p = (e_p)_a$ y por lo tanto ψ_p es suryectiva. □

Teorema 3.4.5. *La aplicación $\Psi_p : \mathbb{Q}_p \to \widehat{\mathbb{Q}_p}$ definida por $\Psi_p(a) = (e_p)_a$ es un isomorfismo.*

Demostración. Es similar a la demostración del Teorema 3.4.3. □

Caracteres adélicos

Un *carácter adélico* es un carácter de $\mathbb{A}$. Nos interesa ahora caracterizar el dual de $\mathbb{A}$. Como vimos en 3.4 "Caracteres de $\mathbb{Q}_p$", para cada $p \in \mathcal{P}$ tenemos un carácter e_p de $\mathbb{Q}_p$ cuyo núcleo es $\mathbb{Z}_p$. Por la Proposición 3.2.14, el producto $\prod_{p\in\mathcal{P}} e_p$ define un carácter de $\mathbb{A}_{fin}$. Tenemos entonces bien definido un carácter de $\mathbb{A}$ dado por

$$e(x) = \prod_{p\in\mathcal{P}'} e_p(x_p),$$

para todo $x \in \mathbb{A}$. Vamos a probar que todo carácter adélico es de la forma e_a, para algún $a \in \mathbb{A}$.

Teorema 3.4.6. *El morfismo de grupos $\Psi : \mathbb{A} \to \widehat{\mathbb{A}}$ definido por $\Psi(a) = e_a$ es un isomorfismo de grupos topológicos.*

Demostración. Por la Proposición 2.3.4 sabemos que Ψ es morfismo. Por el Teorema de la función abierta alcanza con probar es que es biyectivo.

Sea χ un carácter de $\mathbb{A}$. Por los lemas 3.4.1 y 3.4.4, para cada $p \in \mathcal{P}'$ existe $a_p \in \mathbb{Q}_p$ tal que $\chi_p = (e_p)_{a_p}$. Sea $a = (a_p)_{p\in\mathcal{P}'}$ entonces por la Proposición 3.2.12, si $x \in \mathbb{A}$

$$\chi(x) = \prod_{p\in\mathcal{P}'} \chi_p(x_p) = \prod_{p\in\mathcal{P}'} e_p(a_p\, x_p) = e(ax) = e_a(x),$$

y por lo tanto $\chi = \Psi(a)$ y Ψ es suryectivo.

Supongamos que a es un adele tal que $\Psi(a) = e_a$ es el carácter trivial. Sea $p \in \mathcal{P}'$. Tenemos que la componente local $(e_a)_p$ es trivial. Pero es fácil ver que $(e_a)_p = (e_p)_{a_p}$, y por lo tanto $\Psi_p(a_p)$ es el carácter trivial de $\mathbb{Q}_p$, donde Ψ_p es la aplicación del Teorema 3.4.3 o del Teorema 3.4.5 según si p es infinito o finito. Entonces $a_p = 0$, y como $p \in \mathcal{P}'$ era arbitrario, tenemos que $a = 0$ y Ψ es inyectivo. □

También nos va a ser útil caracterizar los caracteres de $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$. El resto de la sección estará dedicado a eso.

Lema 3.4.7. *El núcleo del carácter e es $\mathbb{Q} + \left(\{0\} \times \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p\right)$.*

Demostración. Sea $H = \mathbb{Q} + \left(\{0\} \times \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p\right)$. Es claro que $\{0\} \times \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p \subseteq \ker e$. Veamos que $\mathbb{Q} \subseteq \ker e$. Sea $\alpha \in \mathbb{Q}$. Entonces

$$e(\alpha) = \prod_{p\in\mathcal{P}'} e_p(\alpha) = e^{2\pi i\alpha} \prod_{p\in\mathcal{P}} e^{-2\pi i\{\alpha\}_p} = e^{2\pi i\left(\alpha - \sum_{p\in\mathcal{P}}\{\alpha\}_p\right)}.$$

Notar que la suma $\sum_{p\in\mathcal{P}}\{\alpha\}_p$ tiene solo finitos términos no nulos pues $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ para casi todo $p \in \mathcal{P}$. Basta probar entonces que el número racional

$$\beta = \alpha - \sum_{p\in\mathcal{P}}\{\alpha\}_p$$

es un número entero. Por la Observación 3.1.10, esto se puede reducir a verificar que β está en $\mathbb{Z}_q$ para todo $q \in \mathcal{P}$. Sea $q \in \mathcal{P}$. Como $\alpha - \{\alpha\}_q = \lfloor\alpha\rfloor_q \in \mathbb{Z}_q$ y para todo $p \in \mathcal{P}$ distinto de q se tiene que $\{\alpha\}_p \in \mathbb{Z}_q$, entonces

$$\beta = \alpha - \{\alpha\}_q - \sum_{p\in\mathcal{P},\, p\neq q}\{\alpha\}_p \in \mathbb{Z}_q;$$

como queríamos ver. Luego $\mathbb{Q} \subseteq \ker e$, de modo que $H \subseteq \ker e$.

Ahora consideremos un adele a tal que $e(a) = 0$ y verifiquemos que $a \in H$. Por la Proposición 3.3.4, existen $r \in \mathbb{Q}$ y $d \in [0,1) \times \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$ tales que $a = r + d$. Como $\mathbb{Q} \subseteq \ker e$, tenemos que $d \in \ker e$. Luego, puesto que $\ker e_p = \mathbb{Z}_p$ para todo $p \in \mathcal{P}$, obtenemos que

$$1 = e(d) = e_\infty(d_\infty).$$

Entonces $d_\infty \in \mathbb{Z} \cap [0,1) = \{0\}$, y por lo tanto $a \in H$. □

Lema 3.4.8. *Sea $a \in \mathbb{A}$. Entonces $e(ax) = 1$ para todo $x \in \mathbb{Q}$ si y sólo si $a \in \mathbb{Q}$.*

Demostración. Veamos que si $e(ax) = 1$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, entonces $a \in \mathbb{Q}$. Como $a \in \ker e$, por el Lema 3.4.7, podemos escribir $a = \alpha + d$, con $\alpha \in \mathbb{Q}$ y $d \in \{0\} \times \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$. Como $\mathbb{Q} \subseteq \ker e$, se tiene que $e(dx) = 1$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Supongamos que $d_p \neq 0$ para algún $p \in \mathcal{P}$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $d_p/p^k \notin \mathbb{Z}_p$. Como por hipótesis $d/p^k \in \ker e$, existen $\alpha' \in \mathbb{Q}$ y $d' \in \{0\} \times \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$ tales que $d/p^k = \alpha' + d'$. Pero α' es la coordenada correspondiente a infinito de d/p^k, de modo que $\alpha' = 0$. Luego $d'_p = d_p/p^k \notin \mathbb{Z}_p$ y por lo tanto $d' \notin \{0\} \times \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$, contradicción. □

Teorema 3.4.9. *Se tiene que $\widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}$. El isomorfismo viene dado por $\alpha \mapsto \widetilde{e_\alpha}$, donde $\widetilde{e_\alpha}$ es el carácter en $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ inducido por e_α.*

Demostración. Al ser $\mathbb{Q}$ es un subgrupo discreto de $\mathbb{A}$, por la Proposición 2.2.8, es un subgrupo cerrado de $\mathbb{A}$. Entonces por la Proposición 2.3.8 tenemos que $\mathbb{Q}^{\perp} \cong \widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}}$.

Sea Ψ el isomorfismo del Teorema 3.4.6. Sea $a \in \mathbb{A}$, entonces $\Psi(a) = e_a \in \mathbb{Q}^{\perp}$ si y solo si $e(ax) = 1$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Por el Lema 3.4.8 esto último es equivalente a que $a \in \mathbb{Q}$. Concluimos entonces que $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^{\perp}$ y por lo tanto $\mathbb{Q} \cong \widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}}$. La expresión del isomorfismo es inmediata de la Proposición 2.3.8. □

Notemos que $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ es un grupo compacto y $\mathbb{Q}$ es un grupo discreto. Es un ejemplo de lo que afirma la Proposición 2.3.6.

3.5. Cuasi-caracteres locales y globales multiplicativos

En la sección anterior dimos una descripción de los grupos de caracteres de $\mathbb{Q}_p$ y $\mathbb{A}$ que nos permite entenderlos completamente. En el caso multiplicativo, los caracteres resultan ser más interesantes y hay más trabajo que hacer.

Un *cuasi-carácter idélico* (respectivamente *carácter idélico*) es un cuasi-carácter (respectivamente carácter) de $\mathbb{A}^{\times}$. Si bien el Teorema central de este capítulo trata de cuasi-caracteres muy particulares, consideraremos cuasi-carácteres generales para comparar nuestro enfoque con el de Tate.

Introduzcamos algunas notaciones generales. Al carácter trivial de $\mathbb{A}^{\times}$ lo denotaremos χ_0. Para cada $p \in \mathcal{P}'$, al carácter trivial de $\mathbb{Q}_p^{\times}$ lo denotaremos $(\chi_0)_p$. El grupo topológico $\prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p^{\times}$ es un subgrupo de $\mathbb{A}_{fin}^{\times}$ que jugará un rol central en esta sección. Para abreviar notación llamaremos $\mathcal{K}$ a dicho subgrupo.

Cuasi-caracteres de $\mathbb{Q}_p^{\times}$

Sea $p \in \mathcal{P}'$. A pesar de no ser estándar, por comodidad, vamos a denotar con $\mathbb{Z}_\infty^{\times}$ al subgrupo de elementos $x \in \mathbb{Q}_\infty^{\times}$ tales que $|x|_\infty = 1$. Es decir, convenimos $\mathbb{Z}_\infty^{\times} = \{-1, 1\}$[1].

Un cuasi-carácter χ_p se dice *no ramificado* si es trivial en $\mathbb{Z}_p^{\times}$. Notar que en el caso $p = \infty$, que χ_∞ sea no ramificado es simplemente decir que $\chi_\infty(-1) = 1$.

Lema 3.5.1. *Los cuasi-caracteres de $\mathbb{R}_{>0}$ son las funciones de la forma $x \mapsto x^s$, con $s \in \mathbb{C}$. El número complejo s está unívocamente determinado por el cuasi-carácter.*

Demostración. Se demuestra adaptando la demostración del Lema 3.4.1 y el Corolario 3.4.2 al caso de tener un cuasi-carácter. □

Consideramos el morfismo $u_p : \mathbb{Q}_p^{\times} \to \mathbb{Z}_p^{\times}$, dado por

$$u_p(x) = \begin{cases} |x|_p\, x, & \text{si } p \in \mathcal{P}; \\ \frac{x}{|x|_\infty}, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Notar que u_p es una retracción de la inclusión de $\mathbb{Z}_p^{\times} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p^{\times}$.

[1] Esto es notación ya que $\mathbb{Z}$ no coincide con $\{x \in \mathbb{R} : |x|_\infty \le 1\}$, es decir, $\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}_\infty$.

Lema 3.5.2. *Los cuasi-caracteres no ramificados de $\mathbb{Q}_p^\times$ son las funciones de la forma*

$$\chi_p(x) = |x|_p^s,$$

donde s es un número complejo. En el caso que $p = \infty$, el número s está determinado por χ_∞. En el caso $p \in \mathcal{P}$, el número s está determinado módulo $2\pi i/\log p$.

Demostración. Supongamos que χ_p es un cuasi-carácter no ramificado de $\mathbb{Q}_p^\times$. Entonces si $x \in \mathbb{Q}_p^\times$ se tiene que

$$\chi_p(x) = \chi_p\left(\frac{x}{u_p(x)}\right). \tag{1}$$

En el caso $p = \infty$, como $x/u_\infty(x) = |x|_\infty$ y $x \mapsto \chi_\infty\left(|x|_\infty\right)$ es un cuasi-carácter de $\mathbb{R}_{>0}$, por el Lema 3.5.1 tenemos que existe un único $s \in \mathbb{C}$ tal que $\chi_\infty(x) = |x|_\infty^s$ para todo $x \in \mathbb{R}^\times$. En el caso $p \in \mathcal{P}$, sean $s \in \mathbb{C}$ tal que $\chi_p(p) = p^{-s}$ y $k = \nu_p(x)$, entonces el lado derecho de (1) es

$$\chi_p\left(p^k\right) = \left(p^{-s}\right)^k = e^{-sk\log p} = e^{s\log\left(|x|_p\right)} = |x|_p^s.$$

Si s' es otro número complejo tal que $\chi_p(x) = |x|_p^{s'}$ para todo $x \in \mathbb{Q}_p^\times$, se tiene que $\chi_p(p) = p^{-s'} = p^{-s}$ y un cálculo elemental muestra que $s - s' \in \frac{2\pi i}{\log p}\mathbb{Z}$. □

Proposición 3.5.3. *Sea χ_p un cuasi-carácter de $\mathbb{Q}_p^\times$. Entonces, existe un número complejo s tal que*

$$\chi_p(x) = \chi_p(u_p(x))|x|_p^s, \tag{3.5.4}$$

para todo $x \in \mathbb{Q}_p^\times$. El número s está determinado del mismo modo que el Lema 3.5.2.

Demostración. Dado $x \in \mathbb{Q}_p^\times$, se tiene que

$$\chi_p(x) = \chi_p(u_p(x))\,\chi_p\left(\frac{x}{u_p(x)}\right).$$

Es claro que la aplicación $x \mapsto \chi_p\left(x/u_p(x)\right)$ es un cuasi-carácter no ramificado de $\mathbb{Q}_p^\times$. Luego, por el Lema 3.5.2, existe $s \in \mathbb{C}$ tal que vale la igualdad (3.5.4). La determinación del número complejo s es inmediata del Lema 3.5.2. □

Notemos que la parte real de s está unívocamente determinada, se la llama *exponente* del cuasi-carácter χ_p. Tomando valor absoluto en ambos lados de (3.5.4), obtenemos que los caracteres de $\mathbb{Q}_p^\times$ son los cuasi-caracteres de $\mathbb{Q}_p^\times$ de exponente 0. .

Cuasi-caracteres idélicos

Dado χ un cuasi-carácter idélico y $p \in \mathcal{P}'$, decimos que χ es *no ramificado en p*, si la componente local p-ésima es no ramificada. Por la Proposición 3.2.12, todo carácter idélico es no ramificado para casi todo primo p.

Consideramos el morfismo $u : \mathbb{A}^\times \to \mathcal{K}$, dado por

$$u(x) = \left(\frac{\|x\|}{x_\infty} x_{fin}\right).$$

Notar que u es una retracción de la inclusión de $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathbb{A}^\times$. Del Corolario 3.3.14, se sigue que todo carácter χ de $\mathbb{A}^\times$ puede escribirse como

$$\chi(x) = \chi_{\mathbb{R}^+}(\|x\|) \cdot \chi_{\mathbb{Q}^\times}\left(\frac{x_\infty}{\|x\|}\right) \cdot \chi_{\mathcal{K}}(u(x)), \tag{3.5.5}$$

donde los caracteres $\chi_{\mathbb{R}^+}$, $\chi_{\mathbb{Q}^\times}$ y $\chi_{\mathcal{K}}$ son las restricciones del carácter χ a $\mathbb{R}_{>0}$, a $\mathbb{Q}^\times$ y a $\mathcal{K}$ respectivamente.

Proposición 3.5.6. *Sea χ un cuasi-carácter idélico trivial sobre $\mathbb{Q}^\times$. Entonces, existe un único $s \in \mathbb{C}$ tal que para todo $x \in \mathbb{A}^\times$,*

$$\chi(x) = \chi_{\mathcal{K}}(u(x))\|x\|^s, \tag{3.5.7}$$

donde $\chi_{\mathcal{K}}$ es la restricción de χ a $\mathcal{K}$.

Demostración. Por el Lema 3.5.1, existe un único $s \in \mathbb{C}$ tal que $\chi_{\mathbb{R}^+}(\|x\|) = \|x\|^s$. Se sigue inmediatamente de la escritura (3.5.5), la escritura (3.5.7). □

Al igual que en el caso local, vemos, en particular, que la parte real de s está unívocamente determinada; se la llama *exponente del cuasi-carácter* χ.

Corolario 3.5.8. *Sea χ un carácter idélico trivial sobre $\mathbb{Q}^\times$, entonces existe un único $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{A}^\times$,*

$$\chi(x) = \chi_{\mathcal{K}}(u(x))\|x\|^{i\lambda},$$

donde $\chi_{\mathcal{K}}$ es la restricción de χ a $\mathcal{K}$.

Proposición 3.5.9. *Sea χ un cuasi-carácter idélico trivial sobre $\mathbb{Q}^\times$. Entonces χ es trivial sobre $\mathcal{K}$ si y sólo si no ramificado para todo $p \in \mathcal{P}$. En tal caso, en ∞ también es no ramificado.*

Demostración. Supongamos que χ es trivial sobre $\mathcal{K}$. Por la proposición 3.5.6, existe $s \in \mathbb{C}$ tal que $\chi(x) = \|x\|^s$ para todo $x \in \mathbb{A}^\times$. Sea $p \in \mathcal{P}$ y consideramos la inclusión $j_p : \mathbb{Q}_p^\times \hookrightarrow \mathbb{A}^\times$. Si $x_p \in \mathbb{Z}_p^\times$, se tiene que $j_p(x_p) = (1, 1, \cdots, x_p, 1, \dots)$, donde x_p está en la coordenada que corresponde al primo p. Luego $\|j_p(x_p)\| = |x_p|_p = 1$, y por lo tanto, $\chi_p(x_p) = \chi \circ j_p(x_p) = \|j_p(x_p)\|^s = 1$.

Recíprocamente, supongamos que χ_p es no ramificado para todo primo p. Si $x \in \mathcal{K}$, entonces (3.2.13) nos dice que

$$\chi(x) = \chi(1, x_2, x_3, x_5, \dots) = \chi_\infty(1) \prod_{p\in\mathcal{P}} \chi_p(x_p) = 1,$$

pues para todo $p \in \mathcal{P}$, tenemos que $x_p \in \mathbb{Z}_p^\times$ y χ_p es no ramificado.

Resta ver que en estas condiciones χ_∞ es trivial en $\{-1, 1\}$. En efecto, por la Proposición 3.5.6, existe $s \in \mathbb{C}$ tal que $\chi = \chi_{\mathcal{K}} \circ u\|\cdot\|^s$. Luego,

$$\chi_\infty(-1) = \chi_{\mathcal{K}}(u(-1, 1, 1, \dots)\|(-1, 1, 1, \dots)\|^s = 1 \cdot 1 = 1.$$

□

Conductor

Fijemos un primo p. Para definir el conductor de un carácter de $\mathbb{Q}_p^\times$, primero lo definiremos para caracteres de $\mathbb{Z}_p^\times$. Sea χ_p un carácter de $\mathbb{Z}_p^\times$. Consideremos la base de entornos de 1 en $\mathbb{Z}_p^\times$ dada por $\mathcal{F} = \{U_p(p^k) : k \in \mathbb{N}_0\}$. Por el Lema 2.3.5, existe $k_0 \in \mathbb{N}_0$ mínimo tal que χ_p es trivial en $U_p(p^{k_0})$. Definimos $E_p(\chi_p) = k_0$. El *conductor* de χ_p se define como

$$\mathrm{cond}(\chi_p) = p^{E_p(\chi_p)}.$$

En el caso que tengamos un carácter χ_p de $\mathbb{Q}_p^\times$, definimos el *conductor* de χ_p como el conductor de $\chi_p|_{\mathbb{Z}_p^\times}$.

Observación 3.5.10. *El conductor de χ_p es 1 si y sólo si χ_p es trivial en $\mathbb{Z}_p^\times$. En otras palabras, el conductor de χ_p es divisible por p si y sólo si χ_p es no ramificado.*

Observación 3.5.11. *Por definición de $E_p(\chi_p)$, si k es un entero no negativo, el carácter χ_p es trivial en $U_p(p^k)$ si y sólo si $E_p(\chi_p) \leq k$. Por (3.1.27) tenemos entonces que χ_p es trivial en $U_p(N)$ si y sólo si $E_p(\chi_p) \leq \nu_p(N)$.*

Proposición 3.5.12. *Sea χ_p un carácter de $\mathbb{Q}_p^\times$ con conductor p^k. Denotemos con $\widetilde{\chi_p}$ al carácter inducido en $\mathbb{Z}_p^\times/U_p(p^k)$ por χ_p, y consideremos el isomorfismo $\gamma_k^\times : \mathbb{Z}_p^\times/U_p(p^k) \to \left(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}\right)^\times$ de la Proposición 3.1.29. Entonces el morfismo $\xi = \widetilde{\chi_p} \circ \left(\gamma_k^\times\right)^{-1}$ es un carácter de Dirichlet primitivo módulo p^k.*

Demostración. Supongamos que $0 \leq j < k$ y que existe un carácter de Dirichlet módulo p^j, η, tal que $\xi = \eta \circ q$, donde $q : (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z})^\times$ es la proyección canónica. Por la Proposición 3.1.29 tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times \arrow[r, "(\gamma_k^\times)^{-1}"] \arrow[d, "q"] & \mathbb{Z}_p^\times/U_p(p^k) \arrow[r, "\widetilde{\chi_p}"] \arrow[d, "q'"] & S^1 \\
(\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z})^\times \arrow[r, "(\gamma_j^\times)^{-1}"] & \mathbb{Z}_p^\times/U_p(p^j) \arrow[ur, "\eta\circ\gamma_j^\times"'] &
\end{tikzcd},$$

donde q' es la proyección canónica. Se sigue que el carácter χ_p es trivial en $U_p(p^j)$, pero esto contradice que el conductor de χ_p sea p^k pues $j < k$. $\square$

Ahora definamos el conductor para caracteres de $\mathcal{K}$. El grupo topológico $\mathcal{K}$ puede pensarse como el producto restringido de la familia $\{\mathbb{Z}_p^\times\}_{p\in\mathcal{P}}$ con respecto a sí misma. Por lo tanto, si χ es un carácter de $\mathcal{K}$, podemos aplicar la Proposición 3.2.12 obteniendo que las componentes locales χ_p son triviales para casi todo p y que χ es el producto de sus componentes locales. Luego, por la Observación 3.5.10, tenemos que $\mathrm{cond}(\chi_p) = 1$ para casi todo p. Definimos el *conductor* de χ como

$$\mathrm{cond}(\chi) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathrm{cond}(\chi_p) = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{E_p(\chi_p)}. \tag{3.5.13}$$

Observación 3.5.14. *Sea $p \in \mathcal{P}$. Entonces, el conductor de χ es divisible por p si y sólo si χ es ramificado en p.*

Para $N \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto

$$U(N) = \prod_{p \in \mathcal{P}} U_p(N).$$

Proposición 3.5.15. *Se verifica:*

a) Sea $\mathcal{F} = \{U(N) : N \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\mathcal{F}$ es un base de entornos de 1 en $\mathcal{K}$ formada por subgrupos.

b) Sean $N, N' \in \mathbb{N}$. Entonces N' divide a N si y sólo si $U(N) \subseteq U(N')$.

Demostración. a) Sea $N \in \mathbb{N}$. Por lo visto en 3.1 "Unidades de $\mathbb{Z}_p$", el conjunto $U(N)$ es un subgrupo abierto de $\mathcal{K}$. Además, si S es el conjunto de primos positivos que dividen a N, podemos escribir $U(N) = \prod_{p \in S} U_p(N) \times \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p^\times$, de modo que $U(N)$ es un abierto básico de $\mathcal{K}$. Del hecho que $\{U_p(p^j) : j \geq 0\}$ es una base de entornos de 1 en $\mathbb{Z}_p^\times$ para todo $p \in \mathcal{P}$, es inmediato que $\mathcal{F}$ es una base de entornos de 1 en $\mathcal{K}$.

b) Si $M \in \mathbb{N}$, por (3.1.27), tenemos que

$$U(M) = \prod_{p \in \mathcal{P}} U_p\left(p^{\nu_p(M)}\right). \tag{1}$$

La afirmación es inmediata de la escritura de $U(N)$ y $U(N')$ en la forma (1). □

Si χ es un carácter idélico o un carácter de $\mathbb{A}^1$, el *conductor* de χ se define restringiendo a $\mathcal{K}$.

Proposición 3.5.16. *Sea χ un carácter de $\mathcal{K}$ y sea $N \in \mathbb{N}$. Entonces χ es trivial en $U(N)$ si y sólo si $\mathrm{cond}(\chi)$ divide a N. En particular el conductor de χ es el mínimo natural N tal que χ es trivial en $U(N)$.*

Demostración. Es claro que χ es trivial en $U(N)$ si y sólo si χ_p es trivial en $U_p(N)$ para todo primo p. Por la Observación 3.5.11 esto último es equivalente a que $E_p(\chi_p) \leq \nu_p(N)$ para todo primo p. En virtud de (3.5.13) y como $N = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(N)}$, esto es equivalente a que $\mathrm{cond}(\chi)$ divide a N. □

Funciones L

Sea $p \in \mathcal{P}$. Si χ_p es un carácter de $\mathbb{Q}_p^\times$, definimos la *función L (local) de χ_p* como

$$L_p(s, \chi_p) = \begin{cases} \left(1 - \chi_p(p) p^{-s}\right)^{-1}, & \text{si } \chi_p \text{ es no ramificado;} \\ 1, & \text{si } \chi_p \text{ es ramificado;} \end{cases}$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\Re s > 0$. Si χ_∞ es un carácter de $\mathbb{Q}_\infty^\times$, por la Proposición 3.5.3, existe un único $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\chi_\infty(x) = \chi_\infty(\mathrm{sg}(x))|x|_\infty^{i\lambda},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^\times$. Sea $\varepsilon \in \{0, 1\}$ tal que $\chi_\infty(-1) = (-1)^\varepsilon$. Se define función L (local) de χ_∞ como

$$L_\infty(s, \chi_\infty) = \pi^{-\frac{s+i\lambda+\varepsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{s + i\lambda + \varepsilon}{2}\right), \tag{3.5.17}$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $\Re s > 0$.

Proposición 3.5.18. *Sea $p \in \mathcal{P}'$. Supongamos que χ_p y χ'_p son caracteres del grupo de $\mathbb{Q}_p^\times$ tales que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ que verifica $\chi_p(x) = \chi'_p(x)|x|_p^{i\lambda}$, para todo $x \in \mathbb{Q}_p^\times$. Entonces se tiene que*

$$L_p(s, \chi_p) = L_p(s + i\lambda, \chi'_p)$$

para todo s.

Demostración. Es inmediato. □

Sea χ un carácter idélico. Se define la *función L (global) del carácter χ* como el producto

$$L(s, \chi) = \prod_{p \in \mathcal{P}'} L_p(s, \chi_p),$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\Re s > 1$. El producto es absolutamente convergente para estos valores de s por el Lema 1.3.1. Si $p \in \mathcal{P}'$, la función L_p se llama *componente local p-ésima de la función L*. Definimos la *función L parcial* como

$$L_{fin}(s, \chi) = \prod_{p \in \mathcal{P}} L_p(s, \chi_p),$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\Re s > 1$. Tenemos entonces que para todo s,

$$L(s, \chi) = L_\infty(s, \chi) L_{fin}(s, \chi). \tag{3.5.19}$$

Notemos que si $S = \{\infty\} \cup R$, donde R es el subconjunto de primos p tal que χ es ramificado en p, entonces

$$L_{fin}(s, \chi) = \prod_{p \notin S} L_p(s, \chi_p). \tag{3.5.20}$$

Ejemplo 3.5.21. Tomemos χ_0 el carácter trivial de $\mathbb{A}^\times$. Como χ_0 no es ramificado en ningún primo, por (1.3.3) tenemos que para s con $\Re s > 1$,

$$L_{fin}(s, \chi_0) = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1} = \zeta(s),$$

y de (3.5.17),

$$L(s, \chi_0) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s).$$

Notar que esta última función es Ξ, la función que aparece en el Teorema 1.5.10.

Correspondencia con los caracteres de Dirichlet

Para concluir este capítulo veremos que los caracteres idélicos triviales sobre $\mathbb{Q}^\times$ guardan estrecha relación con los caracteres de Dirichlet. Concretamente, el Teorema 3.5.27 nos dirá que podemos identificar los caracteres idélicos, triviales sobre $\mathbb{Q}^\times$, y de orden finito, con los caracteres de Dirichlet primitivos.

Lema 3.5.22. *Sea $\chi_\mathcal{K}$ un carácter de $\mathcal{K}$. Entonces $\chi_\mathcal{K}$ tiene orden finito.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{U(N) : N \in \mathbb{N}\}$. Como $\mathcal{K}$ es compacto, por la Proposición 3.5.15 a) y el Lema 2.3.5, el orden de $\chi_\mathcal{K}$ es finito. □

Corolario 3.5.23. *Sea χ un carácter idélico trivial sobre $\mathbb{Q}^\times$. Digamos que $\chi = \chi_\mathcal{K} \circ u \|\cdot\|^{i\lambda}$, donde $\chi_\mathcal{K}$ es la restricción de χ a $\mathcal{K}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces χ tiene orden finito si y sólo si $\lambda = 0$. En particular, todo carácter idélico, trivial sobre $\mathbb{Q}^\times$, y de orden finito verifica que $\chi = \chi_\mathcal{K} \circ u$.*

Demostración. Es inmediato del Lema 3.5.22 y el Corolario 3.4.2. □

Corolario 3.5.24. *La aplicación $\chi \mapsto \chi_\mathcal{K}$ es una correspondencia biyectiva, que preserva el conductor, entre los caracteres de $\mathbb{A}^\times$ de orden finito que son triviales sobre $\mathbb{Q}^\times$ y los de $\mathcal{K}$.*

Lema 3.5.25. *Para cada número natural N tenemos un isomorfismo*

$$\mathcal{K}/U(N) \xrightarrow{\gamma_N} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times.$$

Además si d es un divisor de N entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}/U(N) \arrow[r, "\gamma_N", "\cong"'] \arrow[d, "q"] & (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \arrow[d, "q'"] \\ \mathcal{K}/U(d) \arrow[r, "\gamma_d", "\cong"'] & (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times \end{tikzcd} \quad , \tag{3.5.26}$$

donde q y q' son las proyecciones canónicas.

Demostración. Para cada primo p divisor de N, por la Proposición 3.1.29, tenemos un isomorfismo

$$\mathbb{Z}_p^\times/U_p(N) \longrightarrow \left(\mathbb{Z}/p^{\nu_p(N)}\mathbb{Z}\right)^\times.$$

Por lo tanto, tenemos un isomorfismo

$$\prod_{p|N} \left(\mathbb{Z}_p^\times/U_p(N)\right) \longrightarrow \prod_{p|N} \left(\mathbb{Z}/p^{\nu_p(N)}\mathbb{Z}\right)^\times. \tag{1}$$

Como $U_p(N) = \mathbb{Z}_p^\times$ si p no es divisor de N, el lado izquierdo de (1) coincide con $\prod_{p\in\mathcal{P}} \left(\mathbb{Z}_p^\times/U_p(N)\right)$. Considerando el isomorfismo canónico

$$\mathcal{K}\Big/\left(\prod_{p\in\mathcal{P}} U_p(N)\right) \cong \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(\mathbb{Z}_p^\times/U_p(N)\right),$$

obtenemos un isomorfismo

$$\mathcal{K}/U(N) \xrightarrow{\alpha_N} \prod_{p|N} \left(\mathbb{Z}/p^{\nu_p(N)}\mathbb{Z}\right)^{\times}.$$

Por otro lado, consideremos

$$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times} \xrightarrow{\beta_N} \prod_{p|N} \left(\mathbb{Z}/p^{\nu_p(N)}\mathbb{Z}\right)^{\times}$$

el isomorfismo del Teorema chino del resto. El isomorfismo buscado es $\gamma_N = \beta_N^{-1} \circ \alpha_N$.

Para ver que el Diagrama (3.5.26) es conmutativo, veamos que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times} \arrow[r, "\beta_N"] \arrow[d, "q'"] & \prod_{p|N} \left(\mathbb{Z}/p^{\nu_p(N)}\mathbb{Z}\right)^{\times} \arrow[d, "q''"] \\
(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^{\times} \arrow[r, "\beta_d"] & \prod_{p|d} \left(\mathbb{Z}/p^{\nu_p(d)}\mathbb{Z}\right)^{\times}
\end{tikzcd} \tag{2}$$

y

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}/U(N) \arrow[r, "\alpha_N"] \arrow[d, "q"] & \prod_{p|N} \left(\mathbb{Z}/p^{\nu_p(N)}\mathbb{Z}\right)^{\times} \arrow[d, "q''"] \\
\mathcal{K}/U(d) \arrow[r, "\alpha_d"] & \prod_{p|d} \left(\mathbb{Z}/p^{\nu_p(d)}\mathbb{Z}\right)^{\times}
\end{tikzcd} , \tag{3}$$

donde q'' es la proyección canónica, son conmutativos.

El Diagrama (2) es conmutativo claramente. Es fácil ver que la conmutatividad del Diagrama (3) se reduce a probar la conmutatividad del Diagrama (3.1.30) con $k = \nu_p(N)$, $j = \nu_p(d)$, para todo primo $p \in \mathcal{P}$. Esto último vale por la Proposición 3.1.29. □

Antes de enunciar el resultado principal de esta sección, fijemos la notación que vamos a utilizar. Si $N \in \mathbb{N}$, denotemos con π_N a la proyección canónica $\mathcal{K} \to \mathcal{K}/U(N)$. Si ψ es un carácter de $\mathcal{K}$ de conductor N, por la Proposición 3.5.16 se anula en $U(N)$; denotamos con $\widetilde{\psi}$ al único morfismo tal que $\widetilde{\psi} \circ \pi_N = \psi$.

Teorema 3.5.27 (Teorema de correspondencia)**.** *Hay una correspondencia biyectiva*

$$\left\{\chi \in \widehat{\mathbb{A}^{\times}} : \chi \text{ de orden finito y trivial sobre } \mathbb{Q}^{\times}\right\} \longrightarrow \left\{\text{Caracteres de Dirichlet primitivos}\right\}.$$

Más aún, para cada N número natural, la aplicación $\chi \mapsto \widetilde{\chi_{\mathcal{K}}} \circ \gamma_N^{-1} = \xi$ establece una correspondencia biyectiva entre los caracteres de $\mathbb{A}^{\times}$ de orden finito, triviales sobre $\mathbb{Q}^{\times}$ y con conductor N; y los caracteres de Dirichlet módulo N primitivos. Además, para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\Re s > 1$,

$$\Lambda(s, \overline{\xi}) = N^{\frac{s+\varepsilon}{2}} L(s, \chi), \tag{3.5.28}$$

donde Λ es la aplicación definida en (1.5.2) y $\varepsilon \in \{0, 1\}$ verifica que $\chi_\infty(-1) = \xi(-1) = (-1)^{\varepsilon}$.

Demostración. Fijemos $N \in \mathbb{N}$. Para verificar la primera parte del enunciado, por el Corolario 3.5.24, basta ver que

$$\begin{aligned}\left\{\chi \in \widehat{\mathcal{K}} : \mathrm{cond}(\chi) = N\right\} &\xrightarrow{\Phi} \left\{\text{Caracteres de Dirichlet módulo } N \text{ primitivos}\right\}\\ \chi_{\mathcal{K}} &\longmapsto \widetilde{\chi_{\mathcal{K}}} \circ \gamma_N^{-1},\end{aligned}$$

establece una correspondencia biyectiva.

Sea $\chi_{\mathcal{K}}$ un carácter de $\mathcal{K}$ con conductor N. Veamos que $\Phi(\chi_{\mathcal{K}}) = \widetilde{\chi_{\mathcal{K}}} \circ \gamma_N^{-1}$ es un carácter de Dirichlet módulo N primitivo. Supongamos que d es un número natural que divide a N y que ξ es un carácter de $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ tal que $\xi \circ q' = \Phi(\chi_{\mathcal{K}})$. Debemos probar que $d = N$. Consideremos el carácter de $\mathcal{K}$ definido por $\alpha = \xi \circ \gamma_d \circ \pi_d$. Por el Lema 3.5.25 tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, "\pi_N"] \arrow[dr, "\pi_d"'] & \mathcal{K}/U(N) \arrow[r, "\gamma_N"] \arrow[d, "q"] & (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \arrow[d, "q'"] \\ & \mathcal{K}/U(d) \arrow[r, "\gamma_d"] & (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times \end{tikzcd} \quad . \tag{1}$$

Por lo tanto,

$$\alpha = \xi \circ \gamma_d \circ \pi_d = \xi \circ q' \circ \gamma_N \circ \pi_N = \Phi(\chi_{\mathcal{K}}) \circ \gamma_N \circ \pi_N = \widetilde{\chi_{\mathcal{K}}} \circ \pi_N = \chi_{\mathcal{K}},$$

de modo que $\chi_{\mathcal{K}}$ es trivial en $U(d)$. Por la Proposición 3.5.16, tenemos que $\mathrm{cond}(\chi_{\mathcal{K}}) = N$ divide a d. Concluimos que $d = N$, como queríamos ver.

Ahora vamos a definir la aplicación que va a resultar ser la inversa de Φ. Sea ξ un carácter de Dirichlet módulo N primitivo, definimos $\Psi(\xi) = \xi \circ \gamma_N \circ \pi_N$. Veamos que $\psi = \xi \circ \gamma_N \circ \pi_N$ tiene conductor N. Sea d el conductor de ψ. Como ψ se anula en $U(N)$, por la Proposición 3.5.16, tenemos que d divide a N. Consideremos el carácter de $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ dado por $\beta = \widetilde{\psi} \circ \gamma_d^{-1}$. Afirmamos que $\beta \circ q' = \xi$. Utilizando de nuevo la conmutatividad del Diagrama (1), tenemos que

$$\beta \circ q' = \widetilde{\psi} \circ q \circ \gamma_N^{-1}.$$

Por lo tanto, basta ver que $\widetilde{\psi} \circ q = \xi \circ \gamma_N$. Como

$$\widetilde{\psi} \circ q \circ \pi_N = \widetilde{\psi} \circ \pi_d = \psi = \xi \circ \gamma_N \circ \pi_N,$$

y π_N sobreyectiva, se sigue que

$$\widetilde{\psi} \circ q = \xi \circ \gamma_N,$$

como se quería ver. Entonces $\beta \circ q' = \xi$, y como ξ es primitivo, debe ser $d = N$. Concluimos que el conductor de $\psi = \Psi(\xi)$ es N.

Veamos que Φ y Ψ son mutuamente inversas. Si $\chi_{\mathcal{K}}$ es un carácter de $\mathcal{K}$ con conductor N y ξ es un carácter de Dirichlet primitivo, entonces

$$\Psi \circ \Phi(\chi_{\mathcal{K}}) = \Psi\left(\widetilde{\chi_{\mathcal{K}}} \circ \gamma_N^{-1}\right) = \widetilde{\chi_{\mathcal{K}}} \circ \pi_N = \chi_{\mathcal{K}},$$

y

$$\Phi \circ \Psi(\xi) = \Phi\left(\xi \circ \gamma_N \circ \pi_N\right) = \left(\xi \circ \widetilde{\gamma_N \circ \pi_N}\right) \circ \gamma_N^{-1}.$$

Si vemos que $\xi \circ \widetilde{\gamma_N \circ \pi_N} = \xi \circ \gamma_N$, la demostración de la primera parte del enunciado está completa. Esto es inmediato de la definición de $\xi \circ \widetilde{\gamma_N \circ \pi_N}$.

Sea $s \in \mathbb{C}$ con $\Re s > 1$. Para probar la ecuación (3.5.28), primero demostraremos que

$$L\left(s, \overline{\xi}\right) = L_{fin}\left(s, \chi\right). \tag{2}$$

Como el conductor de χ es N, por la Observación 3.5.14, el conjunto de todos los primos tales que χ es ramificado es el conjunto de los primos que dividen a N. Se tiene entonces por (3.5.20) que

$$L_{fin}\left(s, \chi\right) = \prod_{\substack{p \text{ primo} \\ p \nmid N}} \left(1 - \frac{\chi_p(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Por otro lado, por la Proposición 1.3.2,

$$L\left(s, \overline{\xi}\right) = \prod_{\substack{p \text{ primo} \\ p \nmid N}} \left(1 - \frac{\overline{\xi}(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Para verificar (2), basta ver entonces que para todo primo p que no divide a N, se tiene que $\chi_p(p) = \overline{\xi}(p)$. Sea p un tal primo. Por el Corolario 3.5.23, tenemos que $\chi = \Psi(\xi) \circ u$, donde $u(x) = \frac{\|x\|}{x_\infty} x_{fin}$ para todo $x \in \mathbb{A}^\times$. Entonces

$$\begin{aligned}
\chi_p(p) = \chi \circ j_p(p) = \Psi(\xi) \circ u \circ j_p(p) &= \Psi(\xi)\Big(u(1, 1, \ldots, 1, \underbrace{p}_{\text{Lugar } p.}, 1, \ldots)\Big) \\
&= \Psi(\xi)\Big(p^{-1}(1, 1, \ldots, 1, p, 1, \ldots)\Big) = (\xi \circ \gamma_N \circ \pi_N)\Big(p^{-1}, \ldots, p^{-1}, 1, p^{-1}, \ldots)\Big).
\end{aligned}$$

Como p no divide a N, tenemos que:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{K} & \xrightarrow{\quad\pi_N\quad} & \mathcal{K}/U(N) \cong \prod_{q|N} \mathbb{Z}_p/U_q(N) \\
\Big(p^{-1}, \ldots, p^{-1}, \underbrace{1}_{\text{Lugar } p.}, p^{-1}, \ldots\Big) & \longmapsto & \Big(1, \ldots, 1, \underbrace{p^{-1}, \ldots, p^{-1}}_{\text{Lugares } q \text{ con } q|N.}, 1, \ldots\Big).
\end{array}$$

Claramente $\gamma_N\left(1, \ldots, 1, p^{-1}, \ldots p^{-1}, 1, \ldots\right) = p^{-1} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$, y por lo tanto concluimos que $\chi_p(p) = \xi(p^{-1}) = \overline{\xi}(p)$, y que vale (2).

Como χ tiene orden finito, por (3.5.17), (3.5.19) y el Corolario 3.5.23,

$$L(s, \chi) = \pi^{-\frac{s+\varepsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\varepsilon}{2}\right) L_{fin}(s, \chi),$$

donde $\varepsilon \in \{0, 1\}$ verifica que $\chi_\infty(-1) = (-1)^\varepsilon$. Por otro lado, tenemos por (1.5.2) que

$$\Lambda(s, \overline{\xi}) = N^{\frac{s+\varepsilon'}{2}} \pi^{-\frac{s+\varepsilon'}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\varepsilon'}{2}\right) L(s, \overline{\xi}),$$

donde ε' verifica que $\overline{\xi}(-1) = (-1)^{\varepsilon'}$. Por (2), para verificar (3.5.28) nos resta ver $\varepsilon = \varepsilon'$. En efecto,

$$\begin{aligned}(-1)^\varepsilon &= \chi_\infty(-1) = \chi \circ j_\infty(-1) = \chi(-1, 1, 1, \dots) = \Psi(\xi)(u(-1, 1, 1, \dots)) \\ &= \Psi(\xi)(-1, -1, \dots) = \xi\Big(\gamma_N\Big(1, \dots, 1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{\text{Lugares } q \text{ con } q|N.}, 1, \dots\Big)\Big) = \xi(-1) = (-1)^{\varepsilon'}.\end{aligned}$$

□

Al grupo $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ se lo denomina *grupo de clases de ideles*. Del Corolario 3.3.8 y la Proposición 2.2.8, tenemos que $\mathbb{Q}^\times$ es un subgrupo cerrado de $\mathbb{A}^\times$. Luego, la Proposición 2.3.8 nos dice que $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times \cong (\mathbb{Q}^\times)^\perp$. Esto nos permite identificar los caracteres del grupo de clase de ideles y los caracteres de $\mathbb{A}^\times$ triviales sobre $\mathbb{Q}^\times$. El Teorema 3.5.27 nos dice que los caracteres de orden finito del grupo de clases de ideles están en correspondencia con los caracteres de Dirichlet primitivos.

Capítulo 4

Elementos de análisis

4.1. Medida de Haar

La medida de Haar es lo que se busca naturalmente si se tiene un grupo topológico y se quiere una medida que mida de manera homogénea subconjuntos del grupo.

El primer ejemplo con el que uno se encuentra al estudiar teoría de la medida es el de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, o más en general $\mathbb{R}^n$, con respecto a la suma. Esta medida es invariante por traslaciones.

Otro ejemplo es el de los grupos finitos. Como tomamos la topología discreta, la σ-álgebra de Borel son todos sus subconjuntos. Si trasladamos un subconjunto, la cantidad de elementos se mantiene. Entonces podemos considerar la *medida contante*: si $A \subseteq G$ definimos $\mu(A) = \#A$. Esta medida es de Haar.

Generalidades

Sea G un grupo topológico y μ una medida de Borel en G. Decimos que μ es *invariante por traslaciones* si para todo boreliano E de G, $\mu(gE) = \mu(E)$ para todo $g \in G$. Una *medida de Haar* es una medida de Radon no nula que es invariante por traslaciones.

Proposición 4.1.1. *Sea G un grupo localmente compacto con una medida no nula de Radon μ. Entonces la medida μ es una medida de Haar en G si y sólo si*

$$\int_G \tau_g f \, d\mu = \int_G f \, d\mu \tag{4.1.2}$$

para toda $f \in \mathscr{C}_c^+(G)$ y para todo $g \in G$. En tal caso, la fórmula (4.1.2) vale para toda función medible $f : G \to \mathbb{C}$ tal que existe $\int_G f \, d\mu$.

Demostración. Empecemos suponiendo que μ es medida de Haar y probemos que si $g \in G$ entonces $\int_G \tau_g f = \int_G f$. Notemos que esto vale para funciones simples. En efecto, si h es una función simple, entonces h es de la forma $h = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, donde $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ y $A_1, \ldots, A_m$ son borelianos de G. Es claro que $\tau_g \mathbf{1}_{A_i} = \mathbf{1}_{gA_i}$ para todo

i, y por lo tanto

$$\int_G \tau_g h \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(gA_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i) = \int_G h \, d\mu. \tag{1}$$

Supongamos que $f : G \to [0, +\infty)$ es una función medible. Entonces por definición de la integral y por (1) (con el elemento g^{-1} en lugar de g),

$$\begin{aligned} \int_G \tau_g f d\mu &= \sup \left\{ \int_G h \, d\mu : h \text{ simple }, h \leq \tau_g f \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_G \tau_{g^{-1}} h \, d\mu : h \text{ simple }, h \leq \tau_g f \right\}. \end{aligned}$$

Como $h(x) \leq f(g^{-1}x)$ para todo x si y sólo si $h(gx) \leq f(x)$ para todo x, tenemos que

$$\int_G \tau_g f \, d\mu = \sup \left\{ \int_G \tau_{g^{-1}} h \, d\mu : h \text{ simple }, \tau_{g^{-1}} h \leq f \right\}. \tag{2}$$

Notemos que si h es simple, $\tau_{g^{-1}} h$ también lo es. Más aún, la asignación $h \mapsto \tau_{g^{-1}} h$ define una biyección en las funciones simples. Por lo tanto

$$\sup \left\{ \int_G \tau_{g^{-1}} h \, d\mu : h \text{ simple }, \tau_{g^{-1}} h \leq f \right\} = \int_G f \, d\mu,$$

y entonces por (2) obtenemos que vale (4.1.2) para toda f medible no negativa. En particular, para toda función $f \in \mathscr{C}_c^+(G)$.

Recíprocamente, supongamos que para toda $f \in \mathscr{C}_c^+(G)$ y para todo $g \in G$ vale (4.1.2). Sea $g \in G$. Probemos primero que $\mu(gU) = \mu(U)$ para U abierto de G. Para cada $f \in \mathscr{C}_c(X)$, definamos $I(f) = \int_G f \, d\mu$. Tenemos que $I : \mathscr{C}_c(G) \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal positivo de $\mathscr{C}_c(G)$ y entonces por (2.4.9) del Teorema de representación de Riesz,

$$\mu(U) = \sup \left\{ \int_G f \, d\mu : f \in \mathscr{C}_c(G), \operatorname{Supp}(f) \subseteq U, 0 \leq f \leq 1 \right\}.$$

Usando que $\operatorname{Supp}(\tau_{g^{-1}} f) = g^{-1} \operatorname{Supp}(f)$ y (4.1.2), podemos escribir

$$\mu(U) = \sup \left\{ \int_G \tau_{g^{-1}} f \, d\mu : f \in \mathscr{C}_c(G), \operatorname{Supp}(\tau_{g^{-1}} f) \subseteq gU, 0 \leq \tau_{g^{-1}} f \leq 1 \right\}.$$

Al ser claramente $f \mapsto \tau_{g^{-1}} f$ una biyección en $\mathscr{C}_c(G)$,

$$\mu(U) = \sup \left\{ \int_G f \, d\mu : f \in \mathscr{C}_c(G), \operatorname{Supp} f \subseteq gU, 0 \leq f \leq 1 \right\}.$$

Aplicando de nuevo el Teorema de representación de Riesz, obtenemos entonces que $\mu(U) = \mu(gU)$.

Ahora supongamos que E es un boreliano de G. Como μ es de Radon, por regularidad exterior,

$$\mu(gE) = \inf\{\mu(U) : gE \subseteq U, U \text{ abierto}\}.$$

Como sabemos que vale para abiertos, podemos escribir

$$\inf\{\mu(U) : gE \subseteq U, \text{ U abierto}\} = \inf\{\mu(g^{-1}U) : E \subseteq g^{-1}U, g^{-1}U \text{ abierto}\}.$$

Y por lo tanto concluimos que $\mu(gE) = \mu(E)$, de modo que μ es una medida de Haar.

Si $f : G \to \mathbb{C}$ una función medible tal que existe $\int_G f\, d\mu$, la fórmula (4.1.2) es válida pues vale para funciones medibles no negativas y porque se puede descomponer la parte real y la parte imaginaria de f como suma de funciones de ese tipo. □

Observación 4.1.3. *Sea G un grupo localmente compacto con una medida de Haar μ. Si en G hay un compacto con infinitos elementos, entonces $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in G$.*

Proposición 4.1.4. *Sea G un grupo localmente compacto con una medida de Haar μ, entonces:*

a) La medida μ es positiva sobre todos los conjuntos abiertos no vacíos de G y $\int_G f\, d\mu > 0$ para toda $f \in \mathscr{C}_c^+(G)$.

b) La medida $\mu(G)$ es finita si y sólo si G es compacto.

c) Si H es un subgrupo abierto se tiene que μ_H es una medida de Haar en H.

Demostración. a) Sea U un abierto no vacío de G. Como μ es no nula, por la regularidad interior de μ en G existe $K \subseteq G$ compacto tal que $\mu(K) > 0$. Al ser K compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in G$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} x_i U.$$

Como $\mu(x_i U) = \mu(U)$ para todo i, obtenemos que $\mu(U) > 0$.

Sea $f \in \mathscr{C}_c^+(G)$, entonces existe un abierto U y un $\varepsilon > 0$ tales que $f \geq \varepsilon\, \mathbf{1}_U$. Obtenemos entonces por la primera parte que $\int_G f\, d\mu \geq \int_g \varepsilon\, \mathbf{1}_u = \varepsilon\mu(U) > 0$.

b) Si G es compacto entonces $\mu(G)$ es finita por ser μ medida de Radon.

La otra implicación vamos a probarla demostrando la implicación contrarrecíproca. Supongamos que G no es compacto. Como G es localmente compacto, existe $K \subseteq G$ entorno compacto de 1. Entonces G no puede ser cubierto por finitas traslaciones de K y, por lo tanto, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para todo n,

$$x_n \notin \bigcup_{i<n} x_i K. \tag{1}$$

Por la Proposición 2.2.1, existe U entorno simétrico de 1 tal que $U \cdot U \subseteq K$. Notemos que si n y m son números naturales distintos, entonces $x_n U \cap x_m U = \emptyset$. En efecto, podemos suponer que $m > n$ y que tenemos elementos $u_n, u_m \in U$ tales que $x_n u_n = x_m u_m$. Como $u_n u_m^{-1} \in U \cdot U^{-1} = U \cdot U \subseteq K$, entonces $x_m = x_n u_n u_m^{-1} \in x_n K$, lo cual contradice (1). La contradicción provino de suponer que $x_n U \cap x_m U \neq \emptyset$; luego $\{x_n U : n \in N\}$ es una familia de abiertos disjuntos dos a dos. Como $\mu(x_n U) = \mu(U)$ para todo n, concluimos que $\mu(G) = \infty$.

c) Por la Proposición 2.4.6 la medida μ_H es de Radon. Además es claro que es una medida invariante. Lo único que restaría chequear es que sea no nula, pero esto es inmediato de a). □

El siguiente teorema es de central importancia. La demostración nos desviaría bastante del objetivo de nuestro trabajo. Puede encontrarse, por ejemplo, en [RV99, Teorema 1-8] o [Fol16, Teoremas 2.10 y 2.20].

Teorema 4.1.5. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces G tiene una medida de Haar. Esta medida es única salvo múltiplos escalares positivos.*

En consecuencia, si $K \subseteq G$ es un entorno compacto y α es un número real positivo, existe una única medida de Haar en G tal que $\mu(K) = \alpha$.

Proposición 4.1.6. *Sean G un grupo localmente compacto y μ una medida de Haar en G. Entonces para toda función $f : G \to \mathbb{C}$ tal que existe $\int_G f \, d\mu$ se tiene que:*

$$\int_G f(x)\, d\mu(x) = \int_G f\left(x^{-1}\right)\, d\mu(x).$$

Demostración. Consideramos la función de conjuntos $\mu' : \mathcal{B}_G \to [0, +\infty]$, definida por $\mu'(E) = \mu\left(E^{-1}\right)$. Como $x \mapsto x^{-1}$ es un automorfismo de G, entonces μ' es una medida de Haar en G y

$$\int_G f(x)\, d\mu'(x) = \int_G f\left(x^{-1}\right)\, d\mu(x),$$

para toda función $f : G \to \mathbb{C}$ tal que exista $\int_G f \, d\mu$. Basta probar entonces que $\mu' = \mu$. Por el Teorema 4.1.5, existe $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\mu' = \alpha\mu$. Por la Proposición 2.2.1 y por ser G grupo localmente compacto, existe $V \subseteq G$ entorno abierto de 1, simétrico y de medida finita. Luego,

$$\mu(V) = \mu(V^{-1}) = \mu'(V) = \alpha\mu(V),$$

y como $\mu(V) > 0$ (Proposición 4.1.4 a)), concluimos que $\alpha = 1$ y $\mu' = \mu$. □

Teorema 4.1.7 (Fórmula de la integral del cociente)**.** *Sea G un grupo localmente compacto y sea H un subgrupo cerrado. Dadas medidas de Haar en G y en H, existe una única medida de Haar ν en G/H tal que*

$$\int_G f(x)\, dx = \int_{G/H} \int_H f(xh)\, dh\, d\nu(x). \tag{4.1.8}$$

para toda función $f \in L^1(G)$.

Demostración. Ver [DE14, Teorema 1.5.3] en el caso particular que G sea un grupo abeliano. □

Observación 4.1.9. *Notar que la función $G \ni x \mapsto \int_H f(xh)dh$ es constante sobre las coclases gH. En efecto, si $x, x' \in G$ son tales que $xH = x'H$ entonces*

$$\int_H f(x'h)dh = \int_H f\left(\left(xx'^{-1}\right)x'h\right)dh = \int_H f(xh)dh,$$

por la invarianza de la medida de H.

Corolario 4.1.10. *Con las hipótesis del Teorema 4.1.7 y la condición adicional de que G es σ-finito, la fórmula (4.1.8) vale para toda función medible f tal que exista la integral $\int_G f(x)\,dx$ (pudiendo tomar la integral los valores $+\infty$ y $-\infty$). En particular, vale para toda función medible $f : G \to [0, +\infty]$.*

Demostración. Sea ν la medida en G/H del Teorema 4.1.7. Basta probar la fórmula (4.1.8) en el caso particular del enunciado.

Sea $f : G \to [0, +\infty]$ una función medible. Si $\int_G f$ es finita, sabemos que la fórmula vale por el Teorema 4.1.7. Supongamos que $\int_G f = +\infty$, debemos ver que la integral de la derecha de (4.1.8) también es igual a $+\infty$. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de conjuntos medibles de medida finita tal que $f^{-1}((0, +\infty]) = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea f_n la función definida en G por $f_n(x) = \text{mín}\{|f(x)|\mathbf{1}_{A_n}(x), n\}$. Es claro que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de funciones integrables no negativas que converge en todo punto a f. Entonces por (4.1.8) para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_G f_n(x)\,dx = \int_{G/H}\int_H f_n(xh)\,dh\,d\nu(x) \le \int_{G/H}\int_H f(xh)\,dh\,d\nu(x),$$

y del Teorema de convergencia monótona se sigue que $\int_{G/H}\int_H f(xh)\,dh\,d\nu(x) = +\infty$. □

Medida de Haar en el producto restringido de grupos

Nuestro objetivo es construir medidas de Haar en $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}^\times$ a partir de las medidas que tomemos en $\mathbb{Q}_p$ y $\mathbb{Q}_p^\times$. Puesto que ambos casos son ejemplos de producto restringido de grupos, procedemos a hacer la construcción en el caso de grupos abstractos, para más adelante especializar al caso de los adeles e ideles.

Proposición 4.1.11. *Sean $G_1, \dots, G_n$ grupos localmente compactos que verifican el segundo axioma de numerabilidad. Para cada $1 \le i \le n$, sea μ_i una medida de Haar en G_i. Entonces $\mu = \bigtimes_{i=1}^n \mu_i$ es una medida de Haar en $\prod_{i=1}^n G_i$.*

Demostración. Se sigue fácilmente de la Proposición 2.4.10. □

Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos localmente compactos que verifican el segundo axioma de numerabilidad. Supongamos que para cada $i \in I$, tenemos un subgrupo abierto $H_i \subseteq G_i$. Supongamos además que H_i es compacto para casi todo i. Denotemos con I_∞ al conjunto

$$I_\infty = \{i \in I : H_i \text{ no es compacto}\}.$$

Tenemos que I_∞ es un subconjunto finito de I y, por la Proposición 3.2.10, el grupo topológico $G = \prod'_{i\in I} G_i$ es localmente compacto.

Sea para cada $i \in I$, μ_i una medida de Haar en G_i, de modo que $\mu_i(H_i) = 1$ para todo $i \notin I_\infty$. Para cada $i \notin I_\infty$, sea μ_{H_i} la medida μ_i restringida a H_i. Si S es un subconjunto de índices finito tal que $S \supseteq I_\infty$, consideramos en el subgrupo G_S la medida producto (ver Teorema 2.4.12),

$$\mu_S = \left(\bigtimes_{i\in S} \mu_i\right) \times \left(\bigtimes_{i\notin S} \mu_{H_i}\right).$$

Es inmediato de la Proposición 4.1.4 c) y la Proposición 4.1.11 que μ_S es medida de Haar.

Teorema 4.1.12. *Existe una única medida de Haar μ en G tal que para todo subconjunto de índices finito $S \supseteq I_\infty$, la medida inducida por μ en G_S es μ_S.*

Demostración. Para cada $i \in I_\infty$ tomemos un entorno compacto $K_i \subseteq G_i$. Sean

$$K = \prod_{i\in I_\infty} K_i \times \prod_{i\notin I_\infty} H_i,$$

y $\alpha = \prod_{i\in I_\infty} \mu_i(K_i) \in (0, +\infty)$. Como $K \subseteq G_{I_\infty}$, de la Proposición 3.2.3 se sigue que K es un entorno compacto de G. Por el teorema 4.1.5, existe una única medida de Haar μ en G tal que $\mu(K) = \alpha$.

Supongamos que S es un subconjunto de índices finito que contiene a I_∞ y sea μ_{G_S} la medida inducida por μ en G_S. Como G_S es un subgrupo abierto de G, por la Proposición 4.1.4 c), la medida μ_{G_S} es una medida de Haar en G_S. Es claro que $\mu_S(K) = \alpha$, luego μ_S y μ_{G_S} son dos medidas de Haar en G_S que coinciden en el entorno compacto K. Por el Teorema 4.1.5 tenemos que $\mu_{G_S} = \mu_S$, es decir, la medida inducida por μ en G_S es μ_S.

Por otro lado, si ν es una medida de Haar en G tal que la medida inducida en G_{I_∞} es μ_{I_∞}, debe ocurrir que $\nu(K) = \mu_{I_\infty}(K) = \alpha$ y por lo tanto $\nu = \mu$. □

A la medida μ la llamamos medida de Haar en G *inducida por* $\{\mu_i\}_{i\in I}$.

Proposición 4.1.13. *Supongamos que I es un conjunto contable.*

a) Sea $f : G \to \mathbb{C}$ una función medible tal que existe $\int_G f\, d\mu$. Entonces

$$\int_G f\, d\mu = \lim_S \int_{G_S} f|_{G_S}\, d\mu_S. \tag{4.1.14}$$

b) Sea S_0 un subconjunto finito de I tal que $S_0 \supseteq I_\infty$, y supongamos que para cada $i \in I$ tenemos una función $f_i \in L^1(G_i)$ continua tal que $f_i|_{H_i} \equiv 1$ si $i \notin S_0$. Para cada $g \in G$, sea $f(g) = \prod_{i\in I} f_i(g_i)$. Entonces f es una función continua en G. Además se tiene que

$$\int_G |f|\, d\mu = \prod_{i\in I}\left(\int_{G_i} |f_i|\, d\mu_i\right), \tag{4.1.15}$$

y si $f \in L^1(G)$ vale que

$$\int_G f\,d\mu = \prod_{i\in I}\left(\int_{G_i} f_i\,d\mu_i\right). \tag{4.1.16}$$

Demostración. a) Basta probarlo para una función $f : G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ medible. Tomemos $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos finitos de I creciente cuya unión sea I. Consideremos para cada natural n la función $f_n = f\,\mathbf{1}_{G_{S_n}}$. Se tiene que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de funciones no negativas y entonces por el Teorema de convergencia monótona,

$$\int_G f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_G f_n\,d\mu. \tag{1}$$

Por la Observación 2.4.2, si $T \subseteq I$ es finito

$$\int_G f\,\mathbf{1}_{G_T}\,d\mu = \int_{G_T} f|_{G_T}\,d\mu_T, \tag{2}$$

y por lo tanto podemos reescribir el lado derecho de (1), obteniendo que

$$\int_G f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{G_{S_n}} f_n|_{G_{S_n}}\,d\mu_{S_n}. \tag{3}$$

En el caso que $f \notin L^1(G)$, tenemos que $\lim_{n\to\infty}\int_{G_{S_n}} f_n|_{G_{S_n}}\,d\mu_{S_n} = +\infty$ y por lo tanto $\lim_S \int_{G_S} f|_{G_S}\,d\mu_S = +\infty$ y vale (4.1.14).

Supongamos ahora que $f \in L^1(G)$. Dado $\varepsilon > 0$, queremos probar que existe S_0 subconjunto finito de I tal que si $S \supseteq S_0$, entonces $\left|\int_G f\,d\mu - \int_{G_S} f|_{G_S}\,d\mu_S\right| < \varepsilon$. De (3) y al ser f una función no negativa, tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq \int_G f\,d\mu - \int_{G_{n_0}} f_{n_0}|_{G_{S_{n_0}}}\,d\mu < \epsilon. \tag{4}$$

Si $S \subseteq I$ es un conjunto finito que contiene a S_{n_0}, aplicando (2) y por (4) se tiene que

$$0 \leq \int_G f\,d\mu - \int_{G_S} f|_{G_S}\,d\mu_S < \varepsilon + \left(\int_{G_{S_{n_0}}} f|_{G_{S_{n_0}}}\,d\mu_{S_{n_0}} - \int_{G_S} f|_{G_S}\,d\mu_S\right) < \varepsilon.$$

b) Para ver que f es continua, basta ver que $f|_U$ es continua para todo abierto básico $U \subseteq G$. Supongamos que $T \subseteq I$ es un conjunto finito y sea $U = \prod_{i\in T} U_i \times \prod_{i\notin T} H_i$, con $U_i \subseteq G_i$ abierto para todo $i \in T$. Es claro que $f|_U = \prod_{i\in T\cup S_0}(f_i \circ \pi_i)$, donde $\pi_i : G \to G_i$ es la proyección canónica, de modo que $f|_U$ es continua por ser un producto finito de funciones continuas.

Tomemos S un subconjunto de I finito que contenga a S_0. Afirmamos que $f|_{G_S}$ está en $L^1(G_S)$ y que

$$\int_{G_S} f|_{G_S}\,d\mu_S = \prod_{i\in S}\left(\int_{G_i} f_i\,d\mu_i\right). \tag{5}$$

Esta igualdad será consecuencia del Teorema de Fubini-Tonelli para la función $f|_{G_S}$, por lo que primero debemos chequear que $f|_{G_S} \in L^1(G_S)$. Si $i \notin S_0$ tenemos que $f_i|_{H_i} \equiv 1$ y $\mu_i(H_i) = 1$ y por lo tanto, por el Teorema de Fubini-Tonelli para funciones no negativas,

$$\int_{G_S} |f|_{G_S}|\, d\mu_S = \left(\int_{\prod_{i\in S} G_i} \left(\prod_{i\in S} |f_i| \right) d\left(\bigtimes_{i\in S} \mu_i \right) \right) \left(\bigtimes_{i\notin S} \mu_{H_i} \left(\prod_{i\notin S} H_i \right) \right)$$
$$= \int_{\prod_{i\in S} G_i} \left(\prod_{i\in S} |f_i| \right) d\left(\bigtimes_{i\in S} \mu_i \right) = \prod_{i\in S} \left(\int_{G_i} |f_i|\, d\mu_i \right) < +\infty.$$

Luego $f|_{G_S} \in L^1(G_S)$, y entonces por el Teorema de Fubini-Tonelli y una cuenta idéntica a la anterior (pero con la función $f|_{G_S}$ en lugar de $|f|_{G_S}|$), obtenemos (5).

Por (4.1.14) y (5) tenemos que

$$\int_G |f|\, d\mu = \lim_S \int_{G_S} |f|_{G_S}|\, d\mu_S = \lim_S \prod_{i\in S} \left(\int_{G_i} |f_i|\, d\mu_i \right) = \prod_{i\in I} \left(\int_{G_i} |f_i|\, d\mu_i \right).$$

Si $f \in L^1(G)$, en particular existe $\int_G f\, d\mu$ y por lo tanto podemos usar de nuevo (4.1.14) y (5) (con f en lugar de $|f|$), obteniendo (4.1.16). $\square$

4.2. Medidas de Haar globales y locales

Medida de Haar en los números p-ádicos

Sea $p \in \mathcal{P}'$. Consideremos los grupos localmente compactos $\mathbb{Q}_p$ y $\mathbb{Q}_p^\times$. ¿Hay álguna manera de relacionar una medida de Haar del grupo aditivo con una medida de Haar del grupo multiplicativo? Vamos a responder esto en esta sección.

Nos va a ser útil fijar la medida de Haar en el grupo $\mathbb{Q}_p$ bajo una condición de normalización para no arrastrar constantes innecesarias. En el caso $p = \infty$, tomamos μ_∞ como la medida de Haar en $\mathbb{R}$ tal que $\mu_\infty([0,1]) = 1$; es decir, la medida de Lebesgue usual en $\mathbb{R}$. Para $p \in \mathcal{P}$, tomamos μ_p como la medida de Haar en $\mathbb{Q}_p$ tal que $\mu_p(\mathbb{Z}_p) = 1$.

Lema 4.2.1. *Supongamos que $p \in \mathcal{P}$, y sea $a \in \mathbb{Z}_p$ no nulo. Entonces $\mathbb{Z}_p/a\mathbb{Z}_p$ tiene $|a|_p^{-1}$ elementos.*

Demostración. Sea $n = \nu_p(a)$. Existe $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ tal que $a = p^n u$ y por lo tanto $a\mathbb{Z}_p = p^n\mathbb{Z}_p$. Como $|a|_p^{-1} = p^n$, solo restaría ver que $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p$ tiene p^n elementos. Pero esto ya lo sabemos pues $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. $\square$

Proposición 4.2.2. *Sea $a \in \mathbb{Q}_p^\times$. Entonces para todo E boreliano de $\mathbb{Q}_p$,*

$$\mu_p(aE) = |a|_p \mu_p(E). \tag{4.2.3}$$

Más aún, si $f \in L^1(\mathbb{Q}_p)$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(ax)\, d\mu_p(x) = |a|_p^{-1} \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\, d\mu_p(x). \tag{4.2.4}$$

Demostración. Si $p = \infty$ lo sabemos por la teoría de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Podemos asumir entonces que $p \in \mathcal{P}$.

Supongamos primero que $a \in \mathbb{Z}_p \backslash \{0\}$. Sea $\mathcal{B}$ el σ-álgebra de Borel de $\mathbb{Q}_p$ y sea ν la función definida en $\mathcal{B}$ por $\nu(E) = \mu_p(aE)$. Dado que $x \mapsto ax$ es un automorfismo del grupo topológico $\mathbb{Q}_p$, se tiene que ν es una medida de Haar en $(\mathbb{Q}_p, +)$. Por el Teorema 4.1.5, existe $c > 0$ tal que $\nu = c\mu_p$. Es decir que para todo boreliano E,

$$\mu_p(aE) = c\,\mu_p(E).$$

Tomando entonces $E = \mathbb{Z}_p$, obtenemos que $c = \mu_p(a\mathbb{Z}_p)$. Sea $m = |a|_p^{-1}$. Por el Lema 4.2.1 existen $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{Z}_p$ tales que

$$\mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{i=1}^{m} (x_i + a\mathbb{Z}_p)\,.$$

Al ser μ_p invariante, esta última ecuación implica que $1 = m\mu_p(a\mathbb{Z}_p)$. Concluimos entonces que $c = |a|_p$, como queríamos ver.

En el caso que a no sea un entero p-ádico, la ecuación (4.2.3) es inmediata del caso anterior y de que $a^{-1} \in \mathbb{Z}_p \backslash \{0\}$.

La ecuación (4.2.4) se deduce fácilmente de (4.2.3), demostrándola primero para funciones simples, luego para medibles no negativas y, finalmente, generalizándola para funciones de $L^1(\mathbb{Q}_p)$. $\square$

Denotemos con $\mathcal{B}^\times$ a la σ-álgebra de conjuntos borelianos de $\mathbb{Q}_p^\times$. Definimos la función $\mu_p^\times : \mathcal{B}^\times \to [0, +\infty]$ como

$$\mu_p^\times(E) = c_p \int_E \frac{d\mu_p(x)}{|x|_p}, \tag{4.2.5}$$

donde c_p es una constante positiva que más adelante fijaremos. Es claro que $\mu_p^\times$ es una medida boreliana en $\mathcal{B}^\times$.

Proposición 4.2.6. *La medida $\mu_p^\times$ es una medida de Haar en $(\mathbb{Q}_p^\times, \cdot)$. Además, si $f : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{C}$ es una función medible tal que existe $\int_{\mathbb{Q}_p^\times} f\, d\mu_p^\times$ entonces*

$$\int_{\mathbb{Q}_p^\times} f(x)\, d\mu_p^\times(x) = c_p \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \frac{f(x)}{|x|_p}\, d\mu_p(x). \tag{4.2.7}$$

Demostración. Podemos suponer que $c_p = 1$. Si $K \subseteq \mathbb{Q}_p^\times$ es un compacto, al ser la función $x \mapsto 1/|x|_p$ una función continua, existe $M > 0$ tal que $\frac{1}{|x|_p} \leq M$ para todo $x \in K$. Se tiene entonces que $\mu_p^\times(K) \leq M\mu_p(K)$ y por lo tanto, la medida $\mu_p^\times$ es finita sobre compactos.

Como $\mathbb{Q}_p$ cumple el segundo axioma de numerabilidad (Teorema 3.1.9), por el Teorema 2.4.4 tenemos que $\mu_p^\times$ es una medida de Radon.

Para ver que vale la ecuación (4.2.7) para toda función $f : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{C}$ como en la hipótesis, basta probarlo para toda $f : \mathbb{Q}_p^\times \to [0, +\infty]$ medible. Esto es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.4.3.

Resta ver que $\mu_p^\times$ es invariante. Para ello, por la Proposición 4.1.1 basta comprobar que: si $f \in \mathscr{C}_c^+(\mathbb{Q}_p^\times)$ y $a \in \mathbb{Q}_p^\times$ entonces

$$\int_{\mathbb{Q}_p^\times} \tau_a f \, d\mu_p^\times = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} f \, d\mu_p^\times.$$

Esta última igualdad se obtiene fácilmente de (4.2.7) y de la Proposición 4.2.2. □

Si $p = \infty$, tomamos $c_p = 1$. Si $p \in \mathcal{P}$, tomamos c_p de modo que $\mu_p^\times(\mathbb{Z}_p^\times) = 1$. Calculemos explícitamente c_p. Notemos que tomando $E = \mathbb{Z}_p^\times$ en (4.2.5), la condición pedida se transforma en

$$c_p = \left(\mu_p\left(\mathbb{Z}_p^\times\right)\right)^{-1}.$$

Entonces el problema se reduce a calcular $\mu_p\left(\mathbb{Z}_p^\times\right)$. Siguiendo la misma idea que en (3.1.21), tenemos la siguiente igualdad de conjuntos:

$$\mathbb{Z}_p = \{0\} \sqcup \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}_0} p^m \mathbb{Z}_p^\times. \tag{4.2.8}$$

Notemos que los puntos de $\mathbb{Q}_p$ tienen medida nula (Observación 4.1.3). Luego, por (4.2.3) obtenemos de (4.2.8) que $1 = \sum_{m \geq 0} p^{-m} \mu_p\left(\mathbb{Z}_p^\times\right)$, y por lo tanto $1 - p^{-1} = \mu_p\left(\mathbb{Z}_p^\times\right)$. De modo que el valor buscado es:

$$c_p = \frac{1}{1 - p^{-1}}.$$

Proposición 4.2.9. *Sea $p \in \mathcal{P}$. Si $n \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$\mu_p^\times\left(U_p(p^n)\right) = p^{1-n}(p-1)^{-1}. \tag{4.2.10}$$

Demostración. Por la Proposición 3.1.28 podemos escribir

$$\mathbb{Z}_p^\times = \bigsqcup_{i=1}^{\varphi(p^n)} \alpha_i U_p(p^n),$$

para ciertos $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\varphi(p^n)}$, donde φ es la función de Euler. Entonces por la invariancia de $\mu_p^\times$ resulta que

$$1 = \sum_{i=1}^{\varphi(p^n)} \mu_p^\times\left(\alpha_i U_p(p^n)\right) = \sum_{i=1}^{\varphi(p^n)} \mu_p^\times\left(U_p(p^n)\right) = \varphi(p^n)\mu_p^\times\left(U_p(p^n)\right),$$

de donde se obtiene (4.2.10). □

Medida de Haar en los adeles e ideles

Para cada $p \in \mathcal{P}'$, se considera la medida de Haar μ_p de $\mathbb{Q}_p$ definida en la subsección anterior. Si $p \in \mathcal{P}$, consideramos el subgrupo abierto $H_p = \mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Q}_p$; y si $p = \infty$, consideramos $H_\infty = \mathbb{R}$. Fijamos en $\mathbb{A}$ la medida de Haar μ que nos brinda el Teorema 4.1.12.

Hacemos lo mismo en $\mathbb{A}^\times$, consideramos para cada $p \in \mathcal{P}'$ la medida de Haar $\mu_p^\times$ de $\mathbb{Q}_p^\times$ definida en la subsección anterior. Consideramos los subgrupos $H_p^\times \subseteq \mathbb{Q}_p^\times$ elegidos de forma análoga. Denotemos con $\mu^\times$ a la medida de Haar en $\mathbb{A}^\times$ obtenida del Teorema 4.1.12.

Proposición 4.2.11. *Se tiene que* $\mu^\times(\mathbb{A}^1) = 0$.

Demostración. Recordemos que denotamos $\mathcal{K}$ al conjunto $\prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$. Como $\mathbb{A}^1 = \mathbb{Q}^\times\mathcal{K}$ (Teorema 3.3.12), basta ver que $\mu^\times(\mathcal{K}) = 0$. En efecto, por (2.4.13) tenemos que

$$\mu^\times(\mathcal{K}) = \mu^\times\left(\{1\} \times \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p^\times\right) = 0 \cdot 1 = 0.$$

□

4.3. Transformada de Fourier

Sea G grupo abeliano localmente compacto y sea μ una medida de Haar en G. Sea $f \in L^1(G)$. Se define la *transformada de Fourier* de f, y la denotaremos como $\widehat{f}$ o también como $\mathcal{F}(f)$, a la función $\widehat{f} : \widehat{G} \to \mathbb{C}$ definida como

$$\widehat{f}(\chi) = \mathcal{F}(f)(\chi) = \int_G f(g)\overline{\chi(g)}\, d\mu(g).$$

Claramente $\mathcal{F} : L^1(G) \to L^\infty(G)$ es un operador lineal.

Al igual que en el caso clásico ($G = \mathbb{R}$), la definición puede extenderse, por densidad de $L^1(G) \cap L^2(G)$, a $L^2(G)$. Nosotros vamos a adoptar otro enfoque en los grupos con los que trabajaremos, que también se usa en el caso clásico, el cual consiste en considerar la transformada en el espacio de Schwartz, y a partir de allí extenderla a $L^2(G)$.

Espacio de Schwartz-Bruhat

Si $G = \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$, el *espacio de Schwartz-Bruhat* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se define como el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que son infinitamente diferenciables y tales que para todo par de enteros $n, m \in \mathbb{N}_0$, la función $x^n D^m f$ está acotada. Es decir, el espacio de Schwartz clásico.

Si $G = \mathbb{Q}_p$ con p primo, el *espacio de Schwartz-Bruhat* $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ es el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$ localmente constantes y de soporte compacto. Claramente $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p) \subseteq \mathscr{C}_c(\mathbb{Q}_p)$; en particular, las funciones de $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ están en $L^1(\mathbb{Q}_p)$.

Si $G = \mathbb{A}$, el *espacio de Schwartz-Bruhat* $\mathcal{S}(\mathbb{A})$ es el conjunto de las combinaciones lineales de funciones de la forma

$$f(x) = \prod_{p \in \mathcal{P}'} f_p(x_p),$$

donde $f_p \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ para todo $p \in \mathcal{P}'$ y $f_p = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}$ para casi todo $p \in \mathcal{P}$.

Transformada de Fourier en $\mathbb{Q}_p$

Por lo que vimos en 3.4 "Caracteres de $\mathbb{Q}_p$", vía el isomorfismo Ψ_p podemos identificar $\widehat{\mathbb{Q}_p}$ con $\mathbb{Q}_p$. Con esta identificación, si $f \in L^1(\mathbb{Q}_p)$ entonces la transformada de f está dada por

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(y)\,(e_p)_{-x}\,(y)\,dy,$$

si $x \in \mathbb{Q}_p$.

Notemos que con esta misma identificación, si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{Q}_p)$ entonces podemos considerar $\widehat{\widehat{f}} : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$.

En el caso $p = \infty$, obtenemos que la transformada de f viene dada por

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i x y}\,dy,$$

que coincide con la transformada de Fourier clásica que consideramos en (1.4.1). Sabemos en este caso que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces

$$\widehat{\widehat{f}}\,(x) = f(-x) \tag{4.3.1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ (ver por ejemplo [Fol99, Sección 8.3]). A la igualdad (4.3.1) la llamaremos *formula de inversión*. Más adelante enunciaremos, en el Teorema 4.3.19, que la fórmula de inversión vale en grupos localmente compactos con hipótesis mínimas sobre f; no lo demostraremos con tal generalidad, sino algunos casos particulares.

En esta subsección vamos a probar que la fórmula de inversión es válida para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ con p finito.

Observación 4.3.2. *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$. Sea i el automorfismo de $\mathbb{Q}_p$ dado por $i(x) = -x$. Como consecuencia inmediata de la Proposición 4.1.6 se tiene que*

$$\widehat{f \circ i} = \widehat{f} \circ i.$$

En lo que resta de la subsección, supondremos que p es finito.

Proposición 4.3.3. *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$. Existen $n \in \mathbb{N}_0$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}_p$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}^\times$ tales que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \mathbf{1}_{a_i + p^{k_i}\mathbb{Z}_p}. \tag{4.3.4}$$

Demostración. Como f es localmente constante, el conjunto $f^{-1}(\{0\})$ es abierto y por lo tanto el soporte de f es $K = \{x \in \mathbb{Q}_p : f(x) \neq 0\}$. Para cada $a \in K$ existe $k_a \in \mathbb{Z}$ tal que f es constante en $B(a, p^{-k_a})$. Tomemos $n \in \mathbb{N}_0$ y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}_p$, tales que $K \subseteq \cup_{i=1}^n B(a_i, p^{-k_i})$, donde $k_i = k_{a_i}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Por la Proposición 3.1.14 podemos suponer que estas bolas son disjuntas. Además si $1 \leq i \leq n$, por ser f constante en $B(a_i, p^{-k_i})$, tenemos que $B(a_i, p^{-k_i}) \subseteq K$. Luego

$$K = \bigsqcup_{i=1}^{n} B(a_i, p^{-k_i}) = \bigsqcup_{i=1}^{n} \left(a_i + p^{k_i}\mathbb{Z}_p\right). \tag{1}$$

Si consideramos para $1 \leq i \leq n$, el número $\lambda_i = f(a_i)$, es claro de (1) la igualdad (4.3.4). □

Lema 4.3.5. *Sea K grupo compacto y sea μ una medida de Haar en K. Supongamos que χ es un carácer de K. Entonces*

$$\int_K \chi \, d\mu = \begin{cases} \mu(K), & \text{si } \chi \equiv 1; \\ 0, & \text{si } \chi \not\equiv 1. \end{cases}$$

Demostración. Si $\chi \equiv 1$, la igualdad es trivial. Supongamos que $\chi \not\equiv 1$. Sea $k_0 \in K$ tal que $\chi(k_0) \neq 1$. Luego al ser μ invariante,

$$\chi(k_0) \int_K \chi(y) \, d\mu(y) = \int_K \chi(k_0 y) \, d\mu(y) = \int_K \chi(y) \, d\mu(y),$$

y por lo tanto $(1 - \chi(k_0)) \int_K \chi \, d\mu = 0$. Concluimos que $\int_K \chi \, d\mu = 0$. □

Lema 4.3.6. *Se verifica que*

$$\widehat{\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}} = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}.$$

Demostración. Si $x \in \mathbb{Q}_p$ por el Lema 4.3.5,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}}(x) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}(y) \, (e_p)_{-x}(y) \, dy = \int_{\mathbb{Z}_p} (e_p)_{-x}(y) \, dy \\ &= \begin{cases} \mu_p(\mathbb{Z}_p), & \text{si } (e_p)_{-x} \text{ es trivial en } \mathbb{Z}_p; \\ 0, & \text{si } (e_p)_{-x} \text{ no es trivial en } \mathbb{Z}_p. \end{cases} \end{aligned}$$

Puesto que $\mu_p(\mathbb{Z}_p) = 1$, podemos escribir

$$\widehat{\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}}(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p^\perp}\left((e_p)_{-x}\right).$$

Puesto que el núcleo de e_p es $\mathbb{Z}_p$, el carácter $(e_p)_{-x}$ está en $\mathbb{Z}_p^\perp$ si y sólo si $-xy$ está en $\mathbb{Z}_p$ para todo $y \in \mathbb{Z}_p$. Como esto último es equivalente a que x sea un entero p-ádico, obtenemos la igualdad que queríamos probar. □

Imitando la notación que utilizamos en la Sección 2.3 para caracteres, en los restantes resultados de esta subsección utilizaremos la siguiente notación: si $a \in \mathbb{Q}_p$ y f es una función definida en $\mathbb{Q}_p$, denotamos $(f)_a$ a la función

$$(f)_a(x) = f(ax),$$

para $x \in \mathbb{Q}_p$. Si $a \neq 0$, no confundir con la función $\tau_{a^{-1}}(f)$ definida en (2.1.1)[1].

Lema 4.3.7. *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ y sean $a \in \mathbb{Q}_p$ y $\lambda \in \mathbb{Q}_p^\times$. Entonces $\tau_a(f)$, $f \cdot (e_p)_a$ y f_λ están en $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ y se tiene que:*

a) $(\tau_a(f))^\wedge = \widehat{f} \cdot (e_p)_{-a}$,

b) $\left(f \cdot (e_p)_a\right)^\wedge = \tau_a\left(\widehat{f}\right)$,

c) $\widehat{f_\lambda} = |\lambda|_p^{-1} \left(\widehat{f}\right)_{\lambda^{-1}}$.

Demostración. Como $x \mapsto x - a$ y $x \mapsto \lambda x$ son automorfismos de $\mathbb{Q}_p$, tenemos que $\tau_a(f)$ y f_λ están en $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$. Veamos ahora que $f \cdot (e_p)_a \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$.

Podemos suponer que a es no nulo pues en caso contrario $(e_p)_a$ es el carácter trivial y no hay nada que hacer. Como $x \mapsto ax$ es automorfismo, se tiene que $(e_p)_a$ es localmente constante si y sólo si e_p es localmente constante. Como $e_p^{-1}(\{1\}) = \mathbb{Z}_p$ es un abierto de $\mathbb{Q}_p$ y e_p es un morfismo, para todo $w \in \mathbb{C}$ se tiene que $e_p^{-1}(\{w\})$ es un abierto de $\mathbb{Q}_p$. Por lo tanto e_p es localmente constante, y en consecuencia $(e_p)_a$ también. Tenemos luego que $f \cdot (e_p)_a$ es localmente constante, y al ser f una función de soporte compacto, concluimos que $f \cdot (e_p)_a$ también es de soporte compacto y $f \cdot (e_p)_a \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$.

Las fórmulas de transformación se obtienen de cuentas sencillas; probemos por ejemplo c). Sea $x \in \mathbb{Q}_p$. Entonces

$$\widehat{f_\lambda}(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(\lambda y)\,(e_p)_x(y)\,dy = \int_{\mathbb{Q}_p} f(\lambda y)\,(e_p)_{x\lambda^{-1}}(\lambda y)\,dy,$$

que por la Proposición 4.2.2 es igual a

$$|\lambda|_p^{-1} \int_{\mathbb{Q}_p} f(y)\,(e_p)_{x\lambda^{-1}}(y)\,dy = |\lambda|_p^{-1}\,\widehat{f}(x\lambda^{-1}) = |\lambda|_p^{-1} \left(\widehat{f}\right)_{\lambda^{-1}}(x).$$

□

Observación 4.3.8. *El Lema 4.3.7 es válido en el caso $p = \infty$. Las demostraciones de las fórmulas a), b) y c) son formalmente las mismas.*

Lema 4.3.9. *Sean $a \in \mathbb{Q}_p$ y $k \in \mathbb{Z}$. Entonces*

$$\left(\mathbf{1}_{a+p^k\mathbb{Z}_p}\right)^\wedge = p^{-k}\left(\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}\right)_{p^k} \cdot (e_p)_{-a}\,.$$

[1] Recordar que se utilizaba notación multiplicativa para la operación del grupo. En este caso, es decir donde el grupo es $\mathbb{Q}_p$, la función trasladada está dada por $\tau_a(f)(x) = f(x-a)$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{Q}_p$. Entonces x está en $a + p^k\mathbb{Z}_p$ si y sólo si $p^{-k}(x-a)$ está en $\mathbb{Z}_p$, por lo tanto tenemos que

$$\mathbf{1}_{a+p^k\mathbb{Z}_p}(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}\left(p^{-k}(x-a)\right) = \tau_a\left(\left(1_{\mathbb{Z}_p}\right)_{p^{-k}}\right)(x).$$

Como x era arbitrario, tenemos que $\mathbf{1}_{a+p^k\mathbb{Z}_p} = \tau_a\left(\left(1_{\mathbb{Z}_p}\right)_{p^{-k}}\right)$. Luego aplicando las fórmulas del Lema 4.3.7, obtenemos que

$$\left(\mathbf{1}_{a+p^k\mathbb{Z}_p}\right)^\wedge = \left(\tau_a\left(\left(1_{\mathbb{Z}_p}\right)_{p^{-k}}\right)\right)^\wedge = \left(\left(\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}\right)_{p^{-k}}\right)^\wedge \cdot (e_p)_{-a} = |p^{-k}|_p^{-1}\left(\widehat{\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}}\right)_{p^k} \cdot (e_p)_{-a}\,.$$

Puesto que $|p^{-k}|_p^{-1} = p^{-k}$, concluimos por el Lema 4.3.6 que vale la igualdad que se quería verificar. □

Estamos en condiciones de probar la fórmula de inversión para funciones de $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$.

Corolario 4.3.10. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$, entonces $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$.*

Demostración. Es inmediato de la Proposición 4.3.3 y de los lemas 4.3.7 y 4.3.9. □

Teorema 4.3.11. *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$. Entonces para todo $x \in \mathbb{Q}_p$ se tiene que*

$$\widehat{\widehat{f}}\,(x) = f(-x). \tag{4.3.12}$$

Demostración. Por la linealidad de la Transformada de Fourier y por la Proposición 4.3.3, basta ver el caso en que f es de la forma $f = \mathbf{1}_{a+p^k\mathbb{Z}_p}$, con $a \in \mathbb{Q}_p$ y $k \in \mathbb{Z}$. En este caso, por el Lema 4.3.9, linealidad y las fórmulas del Lema 4.3.7, se tiene que

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{\mathbf{1}_{a+p^k\mathbb{Z}_p}}} &= p^{-k}\left[\left(\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}\right)_{p^k} \cdot (e_p)_{-a}\right]^\wedge = p^{-k}\,\tau_{-a}\left(\widehat{\left(\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}\right)_{p^k}}\right) = p^{-k}\,\tau_{-a}\left(|p^k|_p^{-1}\left(\widehat{\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}}\right)_{p^{-k}}\right)\\ &= \tau_{-a}\left(\left(\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}\right)_{p^{-k}}\right).\end{aligned}$$

Y por lo tanto, para cada $x \in \mathbb{Q}_p$ se tiene que

$$\widehat{\widehat{\mathbf{1}_{a+p^k\mathbb{Z}_p}}}(x) = \left(\left(\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}\right)_{p^{-k}}\right)(x+a) = \left(\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}\right)\left(p^{-k}(x+a)\right) = \mathbf{1}_{p^k\mathbb{Z}_p}(x+a)\,. \tag{1}$$

Como $p^k\mathbb{Z}_p$ es un subgrupo de $\mathbb{Q}_p$, el elemento $x+a$ está en $p^k\mathbb{Z}_p$ si y sólo si el elemento $-(x+a)$ está en $\mathbb{Z}_p$, y por lo tanto

$$\mathbf{1}_{p^k\mathbb{Z}_p}(x+a) = \mathbf{1}_{p^k\mathbb{Z}_p}(-(x+a)) = \mathbf{1}_{a+p^k\mathbb{Z}_p}(-x)\,. \tag{2}$$

De (1) y (2) se concluye que

$$\widehat{\widehat{\mathbf{1}_{a+p^k\mathbb{Z}_p}}}(x) = \mathbf{1}_{a+p^k\mathbb{Z}_p}(-x)\,,$$

como se quería ver. □

Este resultado puede extenderse a funciones de $L^2(\mathbb{Q}_p)$, donde la igualdad de la fórmula de inversión debe interpretarse como igualdad de clases de funciones de $L^2(\mathbb{Q}_p)$. No lo vamos a hacer porque nos desvía de nuestro objetivo, pero esbozamos a continuación un modo de hacerlo. Puede probarse que $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ es denso en $\mathscr{C}_c(\mathbb{Q}_p)$. Entonces, por la Proposición 2.4.7, se tiene que $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ es denso en $L^2(\mathbb{Q}_p)$. Una cuenta no muy complicada demuestra que $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p) \to \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ preserva la norma de $L^2(\mathbb{Q}_p)$, y de esto es fácil ver que $\mathcal{F}$ puede extenderse a $L^2(\mathbb{Q}_p)$ y que dicha extensión preserva la norma.

Transformada de Fourier en $\mathbb{A}$

Por lo que vimos en 3.4 "Carácteres adélicos", vía el isomorfismo Ψ podemos identificar $\widehat{\mathbb{A}}$ con $\mathbb{A}$. Con esta identificación, si $f \in L^1(\mathbb{A})$ entonces la transformada de f está dada por

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{A}} f(y)\, e_{-x}(y)\, dy,$$

si $x \in \mathbb{A}$.

Nuestro objetivo en esta subsección es probar que la fórmula (4.3.1) es válida para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$. Por supuesto que para ello primero debemos comprobar que las funciones de $\mathcal{S}(\mathbb{A})$ son integrables.

Lema 4.3.13. *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$, entonces $f \in L^1(\mathbb{A})$.*

Demostración. Se puede suponer que f es de la forma $f = \prod_{p\in\mathcal{P}'} f_p$, donde $f_p \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ para todo $p \in \mathcal{P}'$ y $f_p = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}$ para casi todo $p \in \mathcal{P}$. Tenemos entonces que $|f|$ es de la forma $\prod_{p\in\mathcal{P}'}|f_p|$, con $|f_p| \in L^1(\mathbb{Q}_p)$ para todo $p \in \mathcal{P}'$ y que existe S subconjunto finito de $\mathcal{P}'$ que contiene a $\{\infty\}$ tal que $|f_p| = 1_{\mathbb{Z}_p}$ para todo $p \notin S$. Luego, por la Proposición 4.1.13 b),

$$\int_{\mathbb{A}} |f|\, d\mu = \prod_{p\in S} \left(\int_{\mathbb{Q}_p} |f_p|\, d\mu_p \right) < +\infty.$$

$\square$

Proposición 4.3.14. *Sea $f = \prod_{p\in\mathcal{P}'} f_p$, donde $f_p \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ para todo $p \in \mathcal{P}'$ y $f_p = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}$ para casi todo $p \in \mathcal{P}$. Entonces*

$$\widehat{f} = \prod_{p\in\mathcal{P}'} \widehat{f}_p. \tag{4.3.15}$$

En particular $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{A}$. Como $f_p = 1_{\mathbb{Z}_p}$ para casi todo $p \in \mathcal{P}$, por el Lema 4.3.6 tenemos que $\widehat{f_p} = 1_{\mathbb{Z}_p}$ para casi todo $p \in \mathcal{P}$. Por lo tanto $f_p(x_p) = 1$ salvo finitos p y el lado derecho de (4.3.15) evaluado en x es un producto finito.

Para probar la igualdad vamos a utilizar la Proposición 4.1.13 b), verifiquemos entonces las hipótesis. Por el Lema 4.3.7 se tiene que $f_p \cdot (e_p)_{-x_p} \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ para todo p. Además, puesto que $\ker e_p = \mathbb{Z}_p$ para todo $p \in \mathcal{P}$, se verifica que $f_p \cdot (e_p)_{-x_p} = 1_{\mathbb{Z}_p}$ para casi todo $p \in \mathcal{P}'$. Finalmente, como $f \cdot e_{-x} = \prod_{p\in\mathcal{P}'} f_p \cdot (e_p)_{-x_p}$ está en $L^1(\mathbb{A})$, obtenemos de la Proposición 4.1.13 b) que

$$\int_{\mathbb{A}} f \cdot e_{-x}\, d\mu = \prod_{p\in\mathcal{P}'} \left(\int_{\mathbb{Q}_p} f_p \cdot (e_p)_{-x_p}\, d\mu_p \right). \tag{1}$$

El lado izquierdo de (1) es $\widehat{f}(x)$ y el lado derecho es $\prod_{p\in\mathcal{P}'} \widehat{f_p}(x_p)$. Al ser x un adele arbitrario, esto concluye la demostración. □

Teorema 4.3.16. *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$. Entonces para todo $x \in \mathbb{A}$ se tiene que*

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x).$$

Demostración. Por la linealidad basta ver la igualdad para f de la forma $\prod_{p\in\mathcal{P}'} f_p$, donde $f_p \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ para todo $p \in \mathcal{P}'$ y $f_p = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}$ para casi todo $p \in \mathcal{P}$. Pero este caso es una consecuencia inmediata de la Proposición 4.3.14 y del Teorema 4.3.11. □

De la Proposición 4.3.14 (y el Lema 4.3.7 c) y la Observación 4.3.8) también se deduce el siguiente resultado que nos será útil más adelante.

Proposición 4.3.17. *Sean $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ y $a \in \mathbb{A}^\times$. Si f_a es la función en $\mathbb{A}$ dada por $f_a(x) = f(ax)$, entonces*

$$\widehat{f_a} = \|a\|^{-1} \left(\widehat{f}\right)_{a^{-1}}.$$

Fórmula de inversión

Sea G grupo localmente compacto y sea μ una medida de Haar en G.

Teorema 4.3.18 (Teorema de Plancherel). *Existe una única medida de Haar en $\widehat{G}$, denominada* medida de Plancherel, *tal que para toda función $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ se verifica que $\|f\|_{L^2(G)} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\widehat{G})}$.*

Demostración. Ver [DE14, Teorema 3.4.8] □

Teorema 4.3.19 (Formula de inversión). *Se considera $\widehat{G}$ con la medida de Plancherel. Sea $f \in L^1(G)$ tal que $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$. Entonces $\widehat{\widehat{f}}$ es una función continua y para casi todo $x \in G$ se tiene que*

$$\widehat{\widehat{f}}\left(ev\left(x^{-1}\right)\right) = f(x),$$

donde ev es la aplicación de Pontryagin. En particular, si además f es continua, la igualdad vale para todo $x \in G$.

Demostración. Ver [DE14, Teorema 3.5.8]. □

Corolario 4.3.20. *Para toda medida de Haar en $\widehat{G}$ existe una constante positiva C, tal que para toda función f como en las hipótesis del teorema se tiene que*

$$C\,\widehat{\widehat{f}}\left(ev\left(x^{-1}\right)\right) = f(x).$$

4.4. Sumación de Poisson

Vamos a proceder a demostrar la fórmula de sumación de Poisson que extiende a la vista en el Teorema 1.4.2 en el caso adélico. Necesitaremos varios resultados previos.

Notemos que por el Teorema 3.4.9 el grupo $\widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}}$ es numerable y discreto. Entonces la medida contante en $\widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}}$ es una medida de Haar; fijamos en $\widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}}$ dicha medida.

Lema 4.4.1. *Sea ν una medida de Haar en $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$. Entonces la constante del Corolario 4.3.20 es*

$$C = \frac{1}{\nu(\mathbb{A}/\mathbb{Q})}.$$

Demostración. Sea χ_0 el carácter trivial de $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ es compacto, entonces χ_0 es integrable. Tenemos que si $\chi \in \widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}}$,

$$\widehat{\chi_0}(\chi) = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \chi_0(x)\overline{\chi(x)}\, d\nu(x) = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \overline{\chi(x)}\, d\nu(x).$$

Luego por el Lema 4.3.5,

$$\widehat{\chi_0} = \nu(\mathbb{A}/\mathbb{Q})\mathbf{1}_{\{\chi_0\}}.$$

En particular, la función $\widehat{\chi_0}$ está en $L^1\left(\widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}}\right)$ y entonces podemos aplicar el Colorario 4.3.20, obteniendo que

$$\begin{aligned}
1 = \chi_0(x) = C\widehat{\widehat{\chi_0}}(-x) &= C \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}}} \nu(\mathbb{A}/\mathbb{Q})\mathbf{1}_{\{\chi_0\}}(\chi)\overline{(ev(-x))\,(\chi)} \\
&= C\nu(\mathbb{A}/\mathbb{Q})\overline{(ev(-x))\,(\chi_0)} = C\nu(\mathbb{A}/\mathbb{Q}).
\end{aligned}$$

□

Proposición 4.4.2 (Desarrollo en serie de Fourier). *Sea ν una medida de Haar en $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ y sea $F : \mathbb{A}/\mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ una función continua tal que $\widehat{F} \in L^1(\widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}})$. Entonces*

$$F(x) = \frac{1}{\nu(\mathbb{A}/\mathbb{Q})} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}}} \widehat{F}(\chi)\,\chi(x),$$

para todo $x \in \mathbb{A}/\mathbb{Q}$.

Demostración. Como $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ es compacto y F es una función continua, se tiene que F es integrable. Si $x \in \mathbb{A}/\mathbb{Q}$, por el Corolario 4.3.20 y el Lema 4.4.1, se tiene que

$$F(x) = \frac{1}{\nu(\mathbb{A}/\mathbb{Q})} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}}} \widehat{F}(\chi)\overline{(ev(-x))\,(\chi)} = \frac{1}{\nu(\mathbb{A}/\mathbb{Q})} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}}} \widehat{F}(\chi)\chi(x).$$

□

Este resultado se puede generalizar: reemplazando $\mathbb{A}$ por un grupo G localmente compacto y $\mathbb{Q}$ por un subgrupo H cerrado de G tal que G/H es compacto. Por la Proposición 2.3.6, el grupo $\widehat{G/H}$ es discreto, y la misma demostración se puede repetir. En el caso particular que $G = \mathbb{R}$ y $H = \mathbb{Z}$, se obtiene el desarrollo en serie de Fourier clásico.

Lema 4.4.3. *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$. La función en $\mathbb{A}$ dada por*

$$x \longmapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} f(x+\alpha), \tag{4.4.4}$$

converge absoluta y uniformemente sobre compactos.

Demostración. Podemos suponer que f es de la forma $f = \prod_{p \in \mathcal{P}'} f_p$, donde $f_p = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}$ si $p \notin S$, con S un subconjunto finito de I que incluye a ∞. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{A}$. Agrandando eventualmente S, podemos suponer que K es de la forma $K = \prod_{p \in S} K_p \times \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p$.

Sea $p \in \mathcal{P}$. Si $p \in S$, como el soporte de f_p es compacto, existe $l_p \in \mathbb{N}$ tal que si $|\alpha|_p > p^{l_p}$ entonces $f_p(x_p + \alpha) = 0$ para todo $x_p \in K_p$. Si $p \notin S$, entonces para $x_p \in \mathbb{Z}_p$ se tiene que $f_p(x_p + \alpha) = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}(\alpha)$. Tomando $l_p = 0$ si $p \notin S$, consideremos el conjunto F dado por

$$F = \left\{ \alpha \in \mathbb{Q} : |\alpha|_p \leq p^{l_p} \text{ para todo } p \in \mathcal{P} \right\}.$$

Sea $x \in K$. Por lo anterior, podemos escribir

$$|f(x+\alpha)| = \begin{cases} \prod_{p \in S} |f_p(x_p + \alpha)|, & \text{si } \alpha \in F; \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Consideremos el número entero $N = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{l_p}$. Tenemos entonces que

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} |f(x+\alpha)| = \sum_{\alpha \in F} |f(x+\alpha)| = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| f\left(x + \frac{m}{N}\right)\right|. \tag{1}$$

Acotemos cada término de la suma del lado derecho de (1) uniformemente para $x \in K$. Como para todo primo p, la función f_p es continua de soporte compacto, existe una constante C_1 tal que $\prod_{p \in S \cap \mathcal{P}} |f_p| \leq C_1$. Además al ser f_∞ una función de Schwartz en $\mathbb{R}$, existen constantes C_2 y C_3 tales que $|f_\infty(y)| \leq C_2$ y $|y^2 f_\infty(y)| \leq C_3$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\left| f\left(x + \frac{m}{N}\right)\right| = \prod_{p \in S} \left| f_p\left(x_p + \frac{m}{N}\right)\right| \leq C_1 \left| f_\infty\left(x_\infty + \frac{m}{N}\right)\right|. \tag{2}$$

Sea $R > 0$ tal que $K_\infty \subseteq [-R, R]$. Vamos a separar en dos casos, según si m/N está en $[-2R, 2R]$ o no.

Los términos tales que $m/N \in [-2R, 2R]$ no traen mayor complicación pues son finitos; denotemos con M a la cantidad de dichos términos. En este caso podemos simplemente acotar $\left| f_\infty\left(x_\infty + \frac{m}{N}\right)\right|$ por la constante C_2.

Si $m/N \notin [-2R, 2R]$, como $x_\infty \in [-R, R]$ y $R < |m|/2N$, tenemos que

$$\left|x_\infty + \frac{m}{N}\right| \geq \frac{|m|}{N} - |x_\infty| > \frac{|m|}{N} - \frac{|m|}{2N} = \frac{|m|}{2N},$$

y en consecuencia

$$\left|f_\infty\left(x_\infty + \frac{m}{N}\right)\right| \leq \frac{C_3}{\left|x_\infty + \frac{m}{N}\right|^2} \leq \frac{4N^2C_3}{m^2}.$$

Juntando entonces ambos casos con (2), obtenemos que $\left|f\left(x + \frac{m}{N}\right)\right| \leq C_1C_2$ si $m/N \in [-2R, 2R]$ y $\left|f\left(x + \frac{m}{N}\right)\right| \leq C_1\frac{4N^2C_3}{m^2}$ si $m/N \notin [-2R, 2R]$. Como $x \in K$ era arbitrario y la suma

$$C_1C_2M + \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus[-2R,2R]} \frac{4N^2C_3}{m^2}$$

es finita, se concluye de (1) que la función de (4.4.4) converge absoluta y uniformemente sobre K. $\square$

Al ser $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}$ discreto, la medida contante en $\mathbb{Q}$ es una medida de Haar. Recordemos además que, por la Proposición 2.2.8, es un subgrupo cerrado de $\mathbb{A}$. Por lo tanto, por el Teorema 4.1.7 existe una única medida de Haar ν en $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ de forma que vale la Fórmula de la integral del cociente (4.1.8). De aquí en adelante utilizaremos estas elecciones de medidas.

Teorema 4.4.5 (Fórmula de sumación de Poisson)**.**

a) $\nu(\mathbb{A}/\mathbb{Q}) = 1$.

b) *Sea* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$*. Para todo* $x \in \mathbb{A}^\times$ *se tiene que*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Q}} f(\alpha x) = \frac{1}{\|x\|} \sum_{\alpha\in\mathbb{Q}} \widehat{f}(\alpha/x). \tag{4.4.6}$$

Demostración. Si $y \in \mathbb{A}$, denotaremos $\bar{y}$ a la clase de y en $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$. Consideremos la función

$$\mathbb{A} \ni y \mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{Q}} f(y + \alpha).$$

Por el Lema 4.4.3 es una función continua. Además es claro que si $y \in \mathbb{A}$, esta función es constante sobre $\bar{y}$. Por lo tanto, si consideramos $F : \mathbb{A}/\mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ dada por

$$F(\bar{y}) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Q}} f(y + \alpha),$$

resulta ser una función bien definida y continua de $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$. La fórmula de sumación de Poisson va a resultar ser una consecuencia del desarrollo en serie de Fourier de F, debemos entonces verificar además que $\widehat{F} \in L^1\left(\widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}}\right)$.

Supongamos que $\alpha \in \mathbb{Q}$. Por (4.1.8),

$$\widehat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{A}} f(y)\, e_{-\alpha}(y)\, dy = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \sum_{\beta \in \mathbb{Q}} f(y+\beta)\, e_{-\alpha}(y+\beta)\, d\nu(\bar{y}). \tag{1}$$

Como e es un carácter cuyo núcleo contiene a $\mathbb{Q}$, entonces para todo $\beta \in \mathbb{Q}$ vale que

$$e_{-\alpha}(y+\beta) = e_{-\alpha}(y) = \overline{e_\alpha(y)} = \overline{\widetilde{e_\alpha}(\bar{y})},$$

donde $\widetilde{e_\alpha}$ es el carácter en $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ inducido por e_α. Luego el lado derecho de (1) es igual a

$$\int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \left(\sum_{\beta \in \mathbb{Q}} f(y+\beta) \right) \overline{\widetilde{e_\alpha}(\bar{y})} d\nu(\bar{y}) = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} F(\bar{y}) \overline{\widetilde{e_\alpha}(\bar{y})} d\nu(\bar{y}) = \widehat{F}(\widetilde{e_\alpha}).$$

Por lo tanto tenemos que para todo $\alpha \in \mathbb{Q}$,

$$\widehat{f}(\alpha) = \widehat{F}(\widetilde{e_\alpha}). \tag{2}$$

Por otro lado, como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ entonces $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\widehat{\mathbb{A}})$. Luego por el Lema 4.4.3,

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} \left| \widehat{f}(\alpha) \right| = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} \left| \widehat{F}(\widetilde{e_\alpha}) \right| \tag{3}$$

converge. Notemos que el Teorema 3.4.9 nos dice que

$$\widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} = \{\widetilde{e_\alpha} : \alpha \in \mathbb{Q}\}. \tag{4}$$

Luego, la igualdad (3) la podemos reescribir como

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} \left| \widehat{f}(\alpha) \right| = \|\widehat{F}\|_{L^1(\widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}})},$$

y por lo tanto $\widehat{F} \in L^1(\widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}})$.

Estamos en las hipótesis de la Proposición 4.4.2 y por lo tanto tenemos que para todo $\bar{y} \in \mathbb{A}/\mathbb{Q}$,

$$F(\bar{y}) = \frac{1}{\nu(\mathbb{A}/\mathbb{Q})} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}}} \widehat{F}(\chi)\, \chi(\bar{y}).$$

Que teniendo en cuenta de nuevo (4), nos dice que

$$F(\bar{y}) = \frac{1}{\nu(\mathbb{A}/\mathbb{Q})} \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} \widehat{F}\left(\widetilde{e_\alpha}\right) \widetilde{e_\alpha}(\bar{y}).$$

Evaluando en $y = 0$ y usando (2), obtenemos

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} f(\alpha) = \frac{1}{\nu(\mathbb{A}/\mathbb{Q})} \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} \widehat{f}(\alpha). \tag{5}$$

Aplicando esta última igualdad a $\widehat{f}$, obtenemos por el Teorema 4.3.16,

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Q}} \widehat{f}(\alpha) = \frac{1}{\nu(\mathbb{A}/\mathbb{Q})} \sum_{\alpha\in\mathbb{Q}} f(-\alpha). \tag{6}$$

De combinar (5) y (6) obtenemos la igualdad

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Q}} f(\alpha) = \frac{1}{\nu(\mathbb{A}/\mathbb{Q})^2} \sum_{\alpha\in\mathbb{Q}} f(-\alpha). \tag{7}$$

la cual implica que $\nu(\mathbb{A}/\mathbb{Q}) = 1$. En efecto, como la igualdad (7) vale para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ arbitraria, se puede tomar la función $\prod_{p\in\mathcal{P}'} f_p$, donde $f_p = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}$ si $p \neq \infty$ y $f_\infty(x) = e^{-x^2}$. En este caso, las sumas del lado izquierdo y derecho de (7) valen lo mismo, son positivas y finitas, de modo que podemos cancelarlas y concluir que $\nu(\mathbb{A}/\mathbb{Q}) = 1$.

Para probar b), notemos que volviendo a (5) obtenemos que

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Q}} f(\alpha) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Q}} \widehat{f}(\alpha), \tag{8}$$

es decir, la igualdad (4.4.6) con $x = 1$. El caso de un $x \in \mathbb{A}^\times$ arbitrario, se deduce rápidamente de (8) con la función $f_x(y) = f(xy)$ y utilizando la Proposición 4.3.17. $\square$

Observación 4.4.7. *Sea $f_\infty \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Si para cada real positivo x_∞ se considera el idele $x = (x_\infty, 1, 1, \dots)$ y se toma en el Teorema 4.4.5 la función $f = \prod_{p\in\mathcal{P}'} f_p \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$, donde $f_p = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}$ para todo $p \in \mathcal{P}$; se recupera el teorema clásico. (Teorema 1.4.2).*

Capítulo 5

Teoría moderna

5.1. Funciones zeta

Sea χ un carácter del grupo de clases de ideles y sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$. Para $s \in \mathbb{C}$ con $\Re s > 1$, se considera la *función zeta (global)* de χ y f, definida como

$$\zeta(s, \chi, f) = \int_{\mathbb{A}^\times} f(x)\chi(x)\|x\|^s \, d^\times x. \tag{5.1.1}$$

Uno de los primeros que consideró funciones zeta de este tipo fue J. Tate en su tesis de doctorado [Tat67]. Cabe mencionar que en dicho trabajo las definió ligeramente distintas, tomando ζ con parámetros c y f, donde c es un cuasi-carácter de $\mathbb{A}^\times$ trivial sobre $\mathbb{Q}^\times$, y f es una función suficientemente buena (las funciones de Schwartz-Bruhat verifican las condiciones requeridas). En esas condiciones definió

$$\zeta(c, f) = \int_{\mathbb{A}^\times} f(x)c(x) \, d^\times x,$$

si el exponente de c es mayor a 1. En estos términos, puede pensarse la función $\zeta(\cdot, f)$ como una "cuasi-transformada" de Fourier multiplicativa de f. El requerimiento sobre el exponente de c es para asegurar la convergencia de la integral y es equivalente a la condición $\Re s > 1$. La Proposición 3.5.6 muestra que nuestro planteo es esencialmente el mismo que el de Tate, pero elegimos nuestro enfoque por ser más moderno y práctico.

Podemos reducir el estudio de $\zeta(s, \chi, f)$ al caso en que

$$f = \prod_{p \in \mathcal{P}'} f_p \text{ con } f_p \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p) \text{ para todo } p \text{ y } f_p = 1_{\mathbb{Z}_p} \text{ para casi todo } p. \tag{5.1.2}$$

En dicho caso, formalmente se tiene que

$$\zeta(s, \chi, f) = \prod_{p \in \mathcal{P}'} \zeta_p(s, \chi_p, f_p), \tag{5.1.3}$$

donde las funciones ζ_p se definen de la siguiente manera: dado $p \in \mathcal{P}'$, si χ_p es un carácter de $\mathbb{Q}_p^\times$ y $f_p \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$, se considera la *función zeta (local)* de χ_p y f_p, definida como

$$\zeta_p(s, \chi_p, f_p) = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} f_p(x)\chi_p(x)|x|_p^s \, d^\times x, \tag{5.1.4}$$

para $s \in \mathbb{C}$ con $\Re s > 0$.

Nuestra motivación de estudiar funciones zeta globales es que resultarán estar íntimamente relacionadas a las funciones L de caracteres del grupo de clase de ideles. Comenzaremos comparando sus componentes locales.

5.2. Resultados locales

Fijemos $p \in \mathcal{P}'$.

Funciones zeta locales

Proposición 5.2.1. *Sean $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ y $\chi_p \in \widehat{\mathbb{Q}_p^\times}$. Entonces:*

a) La integral (5.1.4) es absolutamente convergente si $\Re s > 0$.

b) Como función de s, $\zeta_p(s, \chi_p, f)$ es holomorfa en $\{s \in \mathbb{C} : \Re s > 0\}$.

Demostración. a) Sea $\sigma = \Re s$. Debemos verificar que $\int_{\mathbb{Q}_p^\times} |f(x)||x|_p^\sigma \, d^\times x$ es finita para $\sigma > 0$. Separemos la integral en dos subintegrales, la primera en la región $\mathbb{Q}_p^+ = \{|x|_p > 1\}$ y la segunda en la región $\mathbb{Q}_p^- = \{0 < |x|_p \leq 1\}$.

Si $p = \infty$, en la región $\mathbb{Q}_p^+$ podemos tomar, por ejemplo, una constante positiva C tal que $|f(x)| \leq C|x|_\infty^{-\sigma-1}$ para todo x. Luego,

$$\int_{\mathbb{Q}_\infty^+} |f(x)||x|_\infty^\sigma \, d^\times x = \int_{\mathbb{Q}_\infty^+} |f(x)||x|_\infty^{\sigma-1} \, dx \leq \int_{\mathbb{Q}_\infty^+} \frac{C}{|x|_\infty^2} \, dx,$$

y por lo tanto la integral es convergente. Si p es finito, por ser f de soporte compacto, la integral en $\mathbb{Q}_p^+$ es claramente finita. Notemos que en ambos casos la integral es absolutamente convergente incluso para $\sigma \leq 0$; la condición $\sigma > 0$ la utilizaremos en la otra región.

Para la integral en la región $\mathbb{Q}_p^-$, basta ver que la integral

$$\int_{\mathbb{Q}_p^-} |x|_p^\sigma \, d^\times x \tag{1}$$

es finita. Si $p = \infty$, esto es inmediato de que $\sigma > 0$. En el caso p finito, descomponiendo $\mathbb{Q}_p^- = \bigsqcup_{k \geq 0} p^k \mathbb{Z}_p^\times$, tenemos que el valor de dicha integral es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{p^k \mathbb{Z}_p^\times} p^{-k\sigma} \, d^\times x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(p^{-k\sigma} \mu_p^\times \left(p^k \mathbb{Z}_p^\times \right) \right).$$

Por ser $\mu_p^\times$ invariante, y dado que $\mu_p^\times\left(\mathbb{Z}_p^\times\right) = 1$, el lado derecho de (1) es una suma geométrica de razón $p^{-\sigma} < 1$. En particular, un número finito.

b) Basta ver que si $0 < a < 1$ y $b > 1$, la función $s \mapsto \zeta_p(s, \chi_p, f)$ es holomorfa en $U = \{s \in \mathbb{C} : a < \Re s < b\}$. Sea $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de compactos de $\mathbb{Q}_p^\times$ cuya unión es $\mathbb{Q}_p^\times$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la función

$$g_n(s) = \int_{K_n} f(x)\chi_p(x)|x|_p^s \, d^\times x,$$

donde $s \in U$. Cada g_n es holomorfa por ser K_n compacto para todo n. Afirmamos que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $s \mapsto \zeta_p(s, \chi_p, f)$ en U. Dado $s \in U$, escribamos $\sigma = \Re s$. Tenemos que

$$\begin{aligned} |\zeta_p(s, \chi_p, f) - g_n(s)| &= \left| \int_{\mathbb{Q}_p^\times \setminus K_n} f(x)\chi_p(x)|x|_p^s \, d^\times x \right| \leq \int_{\mathbb{Q}_p^\times \setminus K_n} \left| f(x)\chi_p(x)|x|_p^s \right| d^\times x \\ &= \int_{\mathbb{Q}_p^\times \setminus K_n} |f(x)||x|_p^\sigma d^\times x \leq \int_{\mathbb{Q}_p^\times \setminus K_n} h(x) d^\times x, \end{aligned} \tag{2}$$

donde

$$h(x) = \begin{cases} |f(x)||x|_p^a, & \text{si } |x|_p \leq 1; \\ |f(x)||x|_p^b, & \text{si } |x|_p > 1. \end{cases}$$

Basta ver que h es una función integrable en $\mathbb{Q}_p^\times$, porque en tal caso, el teorema de convergencia monótona asegura que el último término de la desigualdad (2) tiende a 0 cuando n tiende infinito; de modo que la convergencia es uniforme. En efecto, se tiene que

$$\int_{\mathbb{Q}_p^\times} h(x) \, d^\times x \leq \int_{\mathbb{Q}_p^\times} |f(x)||x|_p^a \, d^\times x + \int_{\mathbb{Q}_p^\times} |f(x)||x|_p^b \, d^\times x,$$

donde los dos términos de la derecha son finitos por a). □

A continuación calcularemos la función ζ_p en varios ejemplos y la compararemos con ciertas función L_p. Estos ejemplos van a ser importantes porque veremos que el estudio del caso general se reduce a ellos.

Ejemplo 5.2.2. Supongamos que $p = \infty$. Consideramos la función f_1 definida en $\mathbb{R}$ por $f_1(x) = e^{-\pi x^2}$. Entonces

$$\begin{aligned} \zeta_\infty(s, id_{\mathbb{R}^\times}, f_1) &= \int_{\mathbb{R}^\times} e^{-\pi x^2}|x|_\infty^s \, d^\times x = \int_{\mathbb{R}^\times} e^{-\pi x^2}|x|_\infty^{s-1} dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-\pi x^2} x^{s-1} dx \\ &= \pi^{-\frac{s}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{s}{2}-1} \, du = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = L_\infty(s, id_{\mathbb{R}^\times}), \end{aligned}$$

para $s \in \mathbb{C}$ con parte real mayor a 0.

Ejemplo 5.2.3. Supongamos que $p=\infty$. Consideramos la función f_2 definida en $\mathbb{R}$ por $f_2(x)=xe^{-\pi x^2}$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\zeta_\infty(s,\mathrm{sg},f_2) &= \int_{\mathbb{R}^\times} xe^{-\pi x^2}\,\mathrm{sg}(x)|x|_\infty^s\,d^\times x = \int_{\mathbb{R}^\times} e^{-\pi x^2}|x|_\infty^{s+1}\,d^\times x\\ &= \zeta_\infty\left(s+1, id_{\mathbb{R}^\times}, f_1\right) = \pi^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = L_\infty(s,\mathrm{sg}),\end{aligned}$$

para $s\in\mathbb{C}$ con parte real mayor a 0.

Ejemplo 5.2.4. Supongamos que $p\in\mathcal{P}$. Sea χ_p un carácter no ramificado de $\mathbb{Q}_p^\times$. Consideramos la función $f_3=\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}$. Entonces para s con parte real mayor a 0 tenemos que

$$\zeta_p\left(s,\chi_p,f_3\right) = \int_{\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}} \chi_p(x)|x|_p^s\,d^\times x = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{p^k\mathbb{Z}_p^\times}\chi_p(x)p^{-ks}\,d^\times x\right),$$

de aplicar la descomposición $\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}=\bigsqcup_{k\geq 0}p^k\mathbb{Z}_p^\times$. Además por la invarianza de $\mu_p^\times$ (igualdad (4.1.2)), se tiene que

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{p^k\mathbb{Z}_p^\times}\chi_p(x)p^{-ks}\,d^\times x\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{Z}_p^\times}\chi_p(p^kx)p^{-ks}\,d^\times x\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\int_{\mathbb{Z}_p^\times}\chi_p(p)^k\chi_p(x)\,d^\times x\right)p^{-ks}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\int_{\mathbb{Z}_p^\times}\chi_p(x)\,d^\times x\right)\chi_p(p)^kp^{-ks}\right).\end{aligned}$$

Como χ_p es constantemente 1 en $\mathbb{Z}_p^\times$, la última expresión se reduce a

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\chi_p(p)p^{-s}\right)^k = \left(1-\chi_p(p)p^{-s}\right)^{-1},$$

pues la parte real de s es mayor a cero. Obtenemos así que

$$\zeta_p\left(s,\chi_p,\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}\right) = \left(1-\chi_p(p)p^{-s}\right)^{-1} = L_p(s,\chi_p),$$

para $s\in\mathbb{C}$ con parte real mayor a 0. En particular, si $(\chi_0)_p$ es el carácter trivial de $\mathbb{Q}_p^\times$ se tiene que

$$\zeta_p\left(s,(\chi_0)_p,\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}\right) = \left(1-p^{-s}\right)^{-1},$$

para $s\in\mathbb{C}$ con parte real mayor a 0.

Ejemplo 5.2.5. Supongamos que $p\in\mathcal{P}$. Sea χ_p un carácter de $\mathbb{Q}_p^\times$ con $\chi_p(p)=1$ y conductor p^n, donde $n\in\mathbb{N}$. Consideramos la función $f_4=\mathbf{1}_{p^{-n}\mathbb{Z}_p}\cdot e_p$, donde e_p es el carácter de $\mathbb{Q}_p$ dado por $e_p(x)=e^{-2\pi i\{x\}_p}$ y $\{\cdot\}_p$ es la función definida según (3.1.22). Entonces para s con parte real mayor a 0,

$$\begin{aligned}\zeta_p\left(s,\chi_p,f_4\right) &= \int_{\mathbb{Q}_p^\times}\mathbf{1}_{p^{-n}\mathbb{Z}_p}(x)e_p(x)\chi_p(x)|x|_p^s\,d^\times x = \int_{p^{-n}\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}} e_p(x)\chi_p(x)|x|_p^s\,d^\times x\\ &= \sum_{k\geq -n}\int_{p^k\mathbb{Z}_p^\times}e_p(x)\chi_p(x)|x|_p^s\,d^\times x = \sum_{k\geq -n}p^{-ks}\int_{p^k\mathbb{Z}_p^\times}e_p(x)\chi_p(x)\,d^\times x.\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Haciendo una traslación en cada una de las integrales en la suma (igualdad (4.1.2)) y recordando que $\chi_p(p) = 1$, obtenemos que el lado derecho de (5.2.6) es igual a

$$\sum_{k\geq -n} p^{-ks} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} e_p(p^k x)\chi_p(p^k x)\, d^\times x = \sum_{k\geq -n} p^{-ks} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} (e_p)_{p^k}(x)\chi_p(x)\, d^\times x. \tag{5.2.7}$$

Afirmamos que la integral

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} (e_p)_{p^k}(x)\chi_p(x)\, d^\times x, \tag{5.2.8}$$

es cero si $k > -n$. Como el núcleo de e_p es $\mathbb{Z}_p$, el núcleo de $(e_p)_{p^k}$ es $p^{-k}\mathbb{Z}_p$. Si $k \geq 0$, entonces la integral de (5.2.8) es igual a $\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \chi_p(x)\, d^\times x$. Como $\operatorname{cond}(\chi_p) \neq 1$, el carácter χ_p no es trivial en $\mathbb{Z}_p^\times$, y entonces la integral (5.2.8) es 0, por el Lema 4.3.5. Supongamos que $0 > k > -n$. Por la Proposición 3.1.28, tenemos que (5.2.7) es igual a

$$\sum_{\substack{j=1\\(j:p)=1}}^{p^{-k}} \int_{jU_p(p^{-k})} (e_p)_{p^k}(x)\chi_p(x)\, d^\times x = \sum_{\substack{j=1\\(j:p)=1}}^{p^{-k}} \int_{U_p(p^{-k})} (e_p)_{p^k}(jx)\chi_p(jx)\, d^\times x, \tag{5.2.9}$$

donde $U_p(p^l) = 1 + p^l\mathbb{Z}_p$ si $l \in \mathbb{N}$. Si $x \in U_p(p^{-k})$, existe $a \in \mathbb{Z}_p$ tal que $x = 1 + ap^{-k}$. Luego, si $1 \leq j \leq p^{-k}$, tenemos que $p^k jx = p^k j + ja$, y por lo tanto,

$$(e_p)_{p^k}(jx) = e_p\left(p^k jx\right) = e_p\left(p^k j + ja\right) = e_p\left(p^k j\right) e_p(ja) = e_p\left(p^k j\right).$$

Entonces el lado derecho de (5.2.9) resulta ser igual a

$$\sum_{\substack{j=1\\(j:p)=1}}^{p^{-k}} e_p\left(p^k j\right) \chi_p(j) \int_{U_p(p^{-k})} \chi_p(x)\, d^\times x. \tag{5.2.10}$$

Como $-k < n$ y $\operatorname{cond}(\chi_p) = p^n$, tenemos que χ_p no es trivial en $U_p\left(p^{-k}\right)$. Se sigue entonces del Lema 4.3.5 que la expresión (5.2.10) es 0, y concluimos que (5.2.8) es 0 si $0 > k > -n$.

Tenemos entonces que (5.2.7) es igual a

$$p^{ns} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} (e_p)_{p^{-n}}(x)\chi_p(x)\, d^\times x = p^{ns} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} (e_p)_{p^{-n}}(x)\chi_p(x)\, d^\times x. \tag{5.2.11}$$

Repitiendo los pasos que hicimos con (5.2.8) para $0 > k > -n$, tenemos que podemos reescribir (5.2.11) como

$$p^{ns}\sum_{\substack{j=1\\(j:p)=1}}^{p^n}\int_{jU_p(p^n)}(e_p)_{p^{-n}}(x)\chi_p(x)\,d^\times x = p^{ns}\sum_{\substack{j=1\\(j:p)=1}}^{p^n}\int_{U_p(p^n)}(e_p)_{p^{-n}}(jx)\chi_p(jx)\,d^\times x$$
$$= p^{ns}\sum_{\substack{j=1\\(j:p)=1}}^{p^n} e_p(p^{-n}j)\chi_p(j)\int_{U_p(p^n)}\chi_p(x)\,d^\times x. \tag{5.2.12}$$

Como χ_p es trivial en $U_p(p^n)$, obtenemos de (4.2.10) que

$$\zeta_p(s,\chi_p,f_4) = p^{ns}\mu_p^\times(U_p(p^n))\sum_{\substack{j=1\\(j:p)=1}}^{p^n} e_p(p^{-n}j)\chi_p(j) = p^{ns}\frac{p^{1-n}}{p-1}\sum_{\substack{j=1\\(j:p)=1}}^{p^n} e_p(p^{-n}j)\chi_p(j)$$
$$= p^{ns}\frac{p^{1-n}}{p-1}\sum_{\substack{j=1\\(j:p)=1}}^{p^n} e^{-2\pi i\{p^{-n}j\}_p}\chi_p(j) = p^{ns}\frac{p^{1-n}}{p-1}\sum_{\substack{j=1\\(j:p)=1}}^{p^n}\chi_p(j)e^{-2\pi ij/p^n},$$

para $s\in\mathbb{C}$ con parte real mayor a 0. Afirmamos que $\zeta_p(\cdot,\chi_p,f_4)$ es no nula. En efecto, notemos que por la Proposición 3.5.12 podemos pensar a χ_p como un carácter de Dirichlet ξ_p primitivo módulo p^n. Entonces la suma de la derecha de (5.2.12) la podemos poner en términos de la suma de Gauss de ξ_p. Concretamente, tenemos que

$$\zeta_p(s,\chi_p,f_4) = p^{ns}\frac{p^{1-n}}{p-1}\overline{\tau(\xi_p)} = p^{ns}\frac{p^{1-n}}{p-1}\chi_p(-1)\tau(\xi_p),$$

donde en la última igualdad usamos la Proposición 1.2.4. Por la Proposición 1.2.3 concluimos que $\zeta_p(\cdot,\chi_p,f_4)$ es no nula.

Notar que en los cuatro ejemplos, la función $s\mapsto\zeta_p(s,*,*)$ resulta tener una extensión meromorfa a todo el plano complejo (la extensión es la expresión obtenida en el cálculo). Veremos que la misma conclusión se puede obtener en el caso general. Además, salvo en el caso p finito y χ_p ramificado, encontramos una función $f\in\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ tal que $\zeta_p(s,\chi_p,f)$ coincide con $L_p(s,\chi_p)$.

Diremos que dos caracteres de $\mathbb{Q}_p^\times$ son *equivalentes* si su cociente es un carácter no ramificado. Por el Lema 3.5.2 tenemos que dos caracteres $\chi_p,\chi_p'\in\widehat{\mathbb{Q}_p^\times}$ son equivalentes si y sólo si existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $\chi_p(x)=\chi_p'(x)|x|_p^{i\lambda}$, para todo $x\in\mathbb{Q}_p^\times$. El exponente tiene esa forma pues al ser χ_p y χ_p' caracteres, son cuasi-caracteres de exponente 0. Notemos también que dos caracteres equivalentes tienen el mismo conductor.

Proposición 5.2.13. *Sea χ_p un carácter de $\mathbb{Q}_p^\times$. Entonces χ_p es equivalente a un carácter χ_p', que satisface:*

a) *Si* $p = \infty$ *y* χ_p *es no ramificado,* $\chi'_p = id_{\mathbb{R}^\times}$.

b) *Si* $p = \infty$ *y* χ_p *es ramificado,* $\chi'_p = \mathrm{sg}$.

c) *Si* $p \in \mathcal{P}$ *y* χ_p *es no ramificado,* $\chi'_p = id_{\mathbb{Q}_p^\times}$.

d) *Si* $p \in \mathcal{P}$ *y* χ_p *es ramificado,* $\chi'_p(p) = 1$.

Demostración. Se sigue de la Proposición 3.5.3, tomando $\chi'_p = \chi_p \circ u_p$. □

Observación 5.2.14. *Sea* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$*. Supongamos que* χ_p *y* χ'_p *son caracteres de* $\mathbb{Q}_p^\times$ *tales que existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *que verifica* $\chi_p(x) = \chi'_p(x)|x|_p^{i\lambda}$*, para todo* $x \in \mathbb{Q}_p^\times$*. Entonces*

$$\zeta_p(s, \chi_p, f) = \zeta_p(s + i\lambda, \chi'_p, f),$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ *con parte real mayor a 0.*

Lema 5.2.15. *Sea* χ_p *un carácter de* $\mathbb{Q}_p^\times$*. Entonces existe* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ *tal que* $s \mapsto \zeta_p(s, \chi_p, f)$ *no es idénticamente nula.*

Demostración. Se sigue de combinar la Observación 5.2.14 y la Proposición 5.2.13, con lo calculado en los ejemplos 5.2.2, 5.2.3, 5.2.4 y 5.2.5. □

Lema 5.2.16. *Sean* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ *y* $\chi_p \in \widehat{\mathbb{Q}_p^\times}$*. Entonces, si* $0 < \Re s < 1$,

$$\zeta_p(s, \chi_p, f)\zeta_p(1 - s, \chi_p^{-1}, \widehat{g}) = \zeta_p(s, \chi_p, g)\zeta_p(1 - s, \chi_p^{-1}, \widehat{f}\,). \tag{5.2.17}$$

Demostración. La prueba consiste en reescribir el lado izquierdo de (5.2.17) como una expresión que sea simétrica al intercambiar f y g. Tenemos que

$$\begin{aligned}\zeta_p(s, \chi_p, f)\zeta_p(1 - s, \chi_p^{-1}, \widehat{g}\,) &= \left(\int_{\mathbb{Q}_p^\times} f(x)\chi_p(x)|x|_p^s \, d^\times x\right)\left(\int_{\mathbb{Q}_p^\times} \widehat{g}(y)\chi_p(y)^{-1}|y|_p^{1-s} \, d^\times y\right)\\ &= \int_{\mathbb{Q}_p^\times}\left(\int_{\mathbb{Q}_p^\times} \widehat{g}(y)\chi_p(y)^{-1}|y|_p^{1-s} f(x)\chi_p(x)|x|_p^s \, d^\times y\right) d^\times x.\end{aligned} \tag{1}$$

Aplicando una traslación a la integral interior, la última expresión nos queda

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{Q}_p^\times}\left(\int_{\mathbb{Q}_p^\times} \widehat{g}(xy)\chi_p(xy)^{-1}|xy|_p^{1-s} f(x)\chi_p(x)|x|_p^s \, d^\times y\right) d^\times x\\ &= \int_{\mathbb{Q}_p^\times}\left(\int_{\mathbb{Q}_p^\times} \widehat{g}(xy)\chi_p(y)^{-1}|y|_p^{1-s} f(x)|x|_p \, d^\times y\right) d^\times x.\end{aligned} \tag{2}$$

Queremos usar el Teorema de Fubini-Tonelli en la expresión (2). Para ello debemos verificar que la función $(x, y) \mapsto \widehat{g}(xy)\chi_p(y)^{-1}|y|_p^{1-s} f(x)|x|_p$ está en $L^1\left(\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times\right)$. En efecto, repitiendo los pasos en la cadena de igualdades (1) y (2), pero en valor absoluto, si $\sigma = \Re s$ resulta que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{Q}_p^\times}\left(\int_{\mathbb{Q}_p^\times}\left|\widehat{g}(xy)\chi_p(y)^{-1}|y|_p^{1-s}f(x)|x|_p\right|d^\times y\right)d^\times x\\&\quad=\left(\int_{\mathbb{Q}_p^\times}|f(x)||\chi_p(x)||x|_p^{\sigma}\,d^\times x\right)\left(\int_{\mathbb{Q}_p^\times}|\widehat{g}(y)||\chi_p(y)^{-1}||y|_p^{1-\sigma}\,d^\times y\right),\end{aligned}$$

donde las dos integrales de la última expresión son finitas por la Proposición 5.2.1 a).

Aplicando entonces el Teorema de Fubini-Tonelli a la expresión (2) obtenemos

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{Q}_p^\times}\left(\int_{\mathbb{Q}_p^\times}\widehat{g}(xy)\chi_p(y)^{-1}|y|_p^{1-s}f(x)|x|_p\,d^\times x\right)d^\times y\\&=\int_{\mathbb{Q}_p^\times}\left(\int_{\mathbb{Q}_p^\times}\left(\int_{\mathbb{Q}_p}g(z)e_p(-xyz)\,dz\right)f(x)|x|_p\,d^\times x\right)\chi_p(y)^{-1}|y|_p^{1-s}\,d^\times y.\end{aligned}$$

Por la Proposición 4.2.6 en la integración en x, la última expresión resulta ser

$$\begin{aligned}&c_p\int_{\mathbb{Q}_p^\times}\left(\int_{\mathbb{Q}_p^\times}\left(\int_{\mathbb{Q}_p}g(z)e_p(-xyz)\,dz\right)f(x)dx\right)\chi_p(y)^{-1}|y|_p^{1-s}\,d^\times y\\&=c_p\int_{\mathbb{Q}_p^\times}\left(\int_{\mathbb{Q}_p}\left(\int_{\mathbb{Q}_p}g(z)e_p(-xyz)f(x)\,dz\right)dx\right)\chi_p(y)^{-1}|y|_p^{1-s}\,d^\times y,\end{aligned}\tag{3}$$

donde $c_p = (1-p^{-1})^{-1}$ si $p \in \mathcal{P}$ y $c_\infty = 1$. Podemos aplicar nuevamente el Teorema de Fubini-Tonelli en x y z pues

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Q}_p}\left(\int_{\mathbb{Q}_p}|g(z)e_p(-xyz)f(x)|\,dz\right)dx&=\int_{\mathbb{Q}_p}\left(\int_{\mathbb{Q}_p}|g(z)||f(x)|\,dz\right)dx\\&=\left(\int_{\mathbb{Q}_p}|g(z)|\,dz\right)\left(\int_{\mathbb{Q}_p}|f(x)|\,dx\right),\end{aligned}$$

y las dos integrales de la derecha son finitas, por ser f y g funciones de Schwartz-Bruhat. Luego, la expresión de (3) resulta ser igual a

$$c_p\int_{\mathbb{Q}_p^\times}\left(\int_{\mathbb{Q}_p\times\mathbb{Q}_p}g(z)e_p(-xyz)f(x)d(x,z)\right)\chi_p(y)^{-1}|y|_p^{1-s}\,d^\times y.$$

Esta expresión de $\zeta_p(s,\chi_p,f)\zeta_p(1-s,\chi_p^{-1},\widehat{g})$ es claramente simétrica en f y g, lo que finaliza la demostración. □

Teorema 5.2.18 (Ecuación funcional local)**.** *Sea $\chi_p \in \widehat{\mathbb{Q}_p^\times}$. Existe una función meromorfa $s \mapsto \gamma_p(s,\chi_p)$ definida en $\{0 < \Re s < 1\}$, tal que para toda función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ se tiene que*

$$\zeta_p(s,\chi_p,f) = \gamma_p(s,\chi_p)\zeta_p(1-s,\chi_p^{-1},\widehat{f}\,),\tag{5.2.19}$$

para todo s con $0 < \Re s < 1$.

Demostración. Por el Lema 5.2.15, existe una función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ tal que la función holomorfa $s \mapsto \zeta_p(1-s, \chi_p^{-1}, f)$ no es idénticamente nula en $\{\Re s < 1\}$. En virtud de (4.3.12) existe $g \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ tal que $\widehat{g} = f$. Consideremos para $\{0 < \Re s < 1\}$ la función

$$\gamma_p(s, \chi_p) = \frac{\zeta_p(s, \chi_p, g)}{\zeta_p(1-s, \chi_p^{-1}, \widehat{g})}.$$

Está bien definida por lo anterior y es una función meromorfa en s. Por el Lema 5.2.16 se verifica (5.2.19). $\square$

Corolario 5.2.20. *Dadas $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ y $\chi_p \in \widehat{\mathbb{Q}_p^\times}$, la función $s \mapsto \zeta_p(s, \chi_p, f)$ es no nula si y sólo si la función $s \mapsto \zeta_p(1-s, \chi_p^{-1}, \widehat{f})$ es no nula. En tal caso,*

$$\gamma_p(s, \chi_p) = \frac{\zeta_p(s, \chi_p, f)}{\zeta_p(1-s, \chi_p^{-1}, \widehat{f})}, \tag{5.2.21}$$

para $s \in \mathbb{C}$ con $0 < \Re s < 1$.

Demostración. Por el Lema 5.2.15 y (5.2.19), la función meromorfa $s \mapsto \gamma_p(s, \chi_p)$ no es idénticamente nula. Las afirmaciones del enunciado son inmediatas de (5.2.19). $\square$

Calculemos explícitamente γ_p en los caracteres que consideramos en los ejemplos 5.2.2, 5.2.3, 5.2.4 y 5.2.5. Por el Corolario 5.2.20, podemos tomar la función $f_i \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ de cada uno de los ejemplos y utilizar (5.2.21).

Ejemplo 5.2.22. Supongamos que $p = \infty$ y que el carácter es $id_{\mathbb{R}^\times}$. Por (1.4.10), la transformada de Fourier de f_1 es f_1. Luego, del Ejemplo 5.2.2, tenemos que para s con $0 < \Re s < 1$,

$$\gamma_\infty\left(s, id_{\mathbb{R}^\times}\right) = \frac{\zeta_\infty\left(s, id_{\mathbb{R}^\times}, f_1\right)}{\zeta_\infty\left(1-s, id_{\mathbb{R}^\times}, f_1\right)} = \pi^{\frac{1}{2}-s}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} = 2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma\left(s\right)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right).$$

donde la última igualdad se puede obtener utilizando las propiedades (III) y (IV) de la función Γ. El término de la derecha de esta igualdad nos recuerda al factor que aparece en (1.5.13).

Ejemplo 5.2.23. Supongamos que $p = \infty$ y que el carácter es sg. Tenemos que $\widehat{f_2} = -if_2$ por (1.4.11). Luego, del Ejemplo 5.2.3, tenemos que para $s \in \mathbb{C}$ con $0 < \Re s < 1$,

$$\begin{aligned}\gamma_\infty(s, \mathrm{sg}) &= \frac{\zeta_\infty(s, \mathrm{sg}, f_2)}{\zeta_\infty(1-s, \mathrm{sg}, -if_2)} = \frac{\pi^{-\frac{s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{-i\,\pi^{-\frac{1-s+1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s+1}{2}\right)} = i\pi^{\frac{1}{2}-s}\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)} \\ &= i\,2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma(s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right).\end{aligned}$$

Ejemplo 5.2.24. Supongamos que $p \in \mathcal{P}$ y que el carácter es $(\chi_0)_p$. Como $\widehat{f_3} = f_3$, resulta que

$$\gamma_p(s, (\chi_0)_p) = \frac{\zeta_p(s, (\chi_0)_p, f_3)}{\zeta_p(1-s, (\chi_0)_p, f_3)} = \frac{\left(1-p^{-s}\right)^{-1}}{\left(1-p^{-(1-s)}\right)^{-1}} = \frac{1-p^{s-1}}{1-p^{-s}},$$

si $s \in \mathbb{C}$ con $0 < \Re s < 1$.

Ejemplo 5.2.25. Supongamos que $p \in \mathcal{P}$. Sea χ_p un carácter de $\mathbb{Q}_p^\times$ con $\chi_p(p) = 1$ y conductor p^n, donde $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que

$$f_4 = \mathbf{1}_{p^{-n}\mathbb{Z}_p} \cdot e_p = p^n \cdot g \circ i, \tag{5.2.26}$$

donde $g = p^{-n}\mathbf{1}_{p^{-n}\mathbb{Z}_p} \cdot (e_p)_{-1}$ e i es la función de $\mathbb{Q}_p$ dada por $i(x) = -x$. Notemos que del Lema 4.3.9, resulta que

$$\widehat{\mathbf{1}_{U_n(p^n)}} = \widehat{\mathbf{1}_{1+p^n\mathbb{Z}_p}} = p^{-n}\left(\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}\right)_{p^n} \cdot (e_p)_{-1} = p^{-n}\mathbf{1}_{p^{-n}\mathbb{Z}_p} \cdot (e_p)_{-1} = g. \tag{5.2.27}$$

Combinando (5.2.26) y (5.2.27), por (4.3.12) y la Observación 4.3.2 tenemos que

$$\widehat{f_4} = p^n\, \widehat{g \circ i} = p^n\, \widehat{g} \circ i = p^n\, \widehat{\widehat{\mathbf{1}_{U_p(p^n)}}} \circ i = p^n \mathbf{1}_{U_p(p^n)}. \tag{5.2.28}$$

Luego para $s \in \mathbb{C}$ con $\Re s < 1$,

$$\begin{aligned}\zeta_p\left(1-s, \chi_p^{-1}, \widehat{f_4}\right) &= \int_{\mathbb{Q}_p^\times} p^n \mathbf{1}_{U_p(p^n)}(x)\chi_p(x)^{-1}|x|_p^{1-s}\, d^\times x\\ &= p^n \int_{U_p(p^n)} \chi_p(x)^{-1}|x|_p^{1-s}\, d^\times x.\end{aligned}$$

Como χ_p es trivial en $U_p(p^n)$ y $|x|_p = 1$ para todo $x \in U_p(p^n)$, nos queda por (4.2.10) que

$$\zeta_p\left(1-s, \chi_p^{-1}, \widehat{f_4}\right) = p^n \mu_p^\times\left(U_p(p^n)\right) = \frac{p}{p-1}, \tag{5.2.29}$$

para $s \in \mathbb{C}$ con parte real mayor a 0.

Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}\gamma_p(s, \chi_p) &= \frac{\zeta_p\left(s, \chi_p, f_4\right)}{\zeta_p(1-s, \chi_p^{-1}, \widehat{f_4})} = p^{ns-n} \sum_{\substack{j=1\\(j:p)=1}}^{p^n} e_p(p^{-n}j)\chi_p(j) = p^{-n(1-s)} \sum_{\substack{j=1\\(j:p)=1}}^{p^n} e^{\frac{-2\pi i j}{p^n}}\chi_p(j)\\ &= p^{-n(1-s)}\chi_p(-1)\tau(\xi_p),\end{aligned}$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ con $0 < \Re s < 1$.

La siguiente proposición nos permite relacionar las función γ_p de caracteres equivalentes.

Proposición 5.2.30. *Supongamos que χ_p y χ_p' son caracteres de $\mathbb{Q}_p^\times$ tales que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ que verifica $\chi_p(x) = \chi_p'(x)|x|_p^{i\lambda}$, para todo $x \in \mathbb{Q}_p^\times$. Entonces*

$$\gamma_p(s, \chi_p) = \gamma_p(s + i\lambda, \chi_p'),$$

para todo $s \in \mathbb{C}$, con $0 < \Re s < 1$.

Demostración. Notemos que para todo $x \in \mathbb{Q}_p^\times$ se verifica que $\chi_p^{-1}(x) = {\chi'_p}^{-1}(x)|x|_p^{-i\lambda}$. Entonces si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$, $0 < \Re s < 1$ y $\zeta_p(1-s, \chi_p^{-1}, \widehat{f}\,) \neq 0$, por la Observación 5.2.14 tenemos que

$$\gamma_p(s, \chi_p) = \frac{\zeta_p(s, \chi_p, f)}{\zeta_p(1-s, \chi_p^{-1}, \widehat{f}\,)} = \frac{\zeta_p(s+i\lambda, \chi'_p, f)}{\zeta_p(1-s-i\lambda, \chi_p^{-1}, \widehat{f}\,)} = \gamma_p(s+i\lambda, \chi_p).$$

□

Lema 5.2.31. *Sea $\chi_p \in \widehat{\mathbb{Q}_p^\times}$. Entonces $s \mapsto \gamma_p(s, \chi_p)$ tiene una extensión meromorfa a todo $\mathbb{C}$.*

Demostración. En el caso particular de un carácter χ_p como en cada uno de los ejemplos 5.2.22, 5.2.23, 5.2.24 y 5.2.25, vimos que $s \mapsto \gamma_p(s, \chi_p)$ tiene una extensión meromorfa a todo $\mathbb{C}$ (gracias a las fórmulas explícitas que obtuvimos). De las proposiciones 5.2.13 y 5.2.30 se sigue que para cualquier carácter $\chi_p \in \widehat{\mathbb{Q}_p^\times}$, la función $s \mapsto \gamma_p(s, \chi_p)$ tiene una extensión meromorfa a todo $\mathbb{C}$. □

Teorema 5.2.32 (Continuación meromorfa de las funciones zeta locales)**.** *Sean $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ y $\chi_p \in \widehat{\mathbb{Q}_p^\times}$. Entonces $s \mapsto \zeta_p(s, \chi_p, f)$ tiene una continuación meromorfa a todo $\mathbb{C}$. Además* (5.2.19) *vale en todo $\mathbb{C}$.*

Demostración. Dado que por el Lema 5.2.31 el lado derecho de (5.2.19) es una función meromorfa en la región $\{\Re s < 1\}$, podemos extender $s \mapsto \zeta_p(s, \chi_p, f)$ a todo $\mathbb{C}$ según esta ecuación. □

Root number local

Sea χ_p un carácter de $\mathbb{Q}_p^\times$. La función

$$\varepsilon_p(s, \chi_p) = \gamma_p(s, \chi_p)^{-1} \cdot \frac{L_p(s, \chi_p)}{L_p(1-s, \chi_p^{-1})}, \tag{5.2.33}$$

donde s es un número complejo con $0 < \Re s < 1$, se llama *root number local*. Notemos que por el Corolario 5.2.20, para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ tal que $s \mapsto \zeta_p(s, \chi_p, f)$ es no nula, se tiene que

$$\varepsilon_p(s, \chi_p) = \frac{L_p(s, \chi_p)}{\zeta_p(s, \chi_p, f)} \cdot \frac{\zeta_p(1-s, \chi_p^{-1}, \widehat{f})}{L_p(1-s, \chi_p^{-1})}. \tag{5.2.34}$$

Como consecuencia inmediata de las proposiciones 3.5.18 y 5.2.30 tenemos:

Observación 5.2.35. *Supongamos que χ_p y χ'_p son caracteres de $\mathbb{Q}_p^\times$ tales que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ que verifica $\chi_p(x) = \chi'_p(x)|x|_p^{i\lambda}$, para todo $x \in \mathbb{Q}_p^\times$. Entonces*

$$\varepsilon_p(s, \chi_p) = \varepsilon_p(s+i\lambda, \chi'_p),$$

para todo $s \in \mathbb{C}$, con $0 < \Re s < 1$.

Proposición 5.2.36. *Para todo s con $0 < \Re s < 1$ se tiene que*

$$\varepsilon_p(s, \chi_p) = \begin{cases} 1, & \text{si } \chi_p \text{ es no ramificado;} \\ \gamma_p(s, \chi_p)^{-1}, & \text{si } p \in \mathcal{P} \text{ y } \chi_p \text{ es ramificado;} \\ -i, & \text{si } p = \infty \text{ y } \chi_\infty \text{ es ramificado.} \end{cases}$$

En particular, el root number local puede extenderse a todo $\mathbb{C}$ como función de s, y su extensión es entera y nunca se anula.

Demostración. Por la Observación 5.2.35, basta reducirse a los casos de la Proposición 5.2.13. En tales casos, el resultado se sigue fácilmente de lo visto en los ejemplos 5.2.2, 5.2.3, 5.2.4 y 5.2.23, y las igualdades (5.2.33) y (5.2.34). □

5.3. Resultados globales

Proposición 5.3.1. *Sean χ un carácter del grupo de clases de ideles y $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$. Entonces, si $\Re s > 1$:*

a) La integral (5.1.1) converge absolutamente.

b) La función $s \mapsto \zeta(s, \chi, f)$ es una función holomorfa en $\{\Re s > 1\}$.

c) Si además f es de la forma (5.1.2), la descomposición (5.1.3) es válida.

Demostración. a) Se puede suponer que f es de la forma (5.1.2) pues en caso contrario es una combinación lineal de funciones de este tipo.

Sea $s \in \mathbb{C}$ tal que $\sigma = \Re s > 1$. Como

$$\left|f(x)\chi(x)\|x\|^s\right| = \prod_{p\in\mathcal{P}'} |f_p(x)|\, |x|_p^s| = \prod_{p\in\mathcal{P}'} |f_p(x)||x|_p^\sigma,$$

usando (4.1.15) obtenemos que

$$\int_{\mathbb{A}^\times} |f(x)\chi(x)\|x\|^s|\, d^\times x = \prod_{p\in\mathcal{P}'} \left(\int_{\mathbb{Q}_p^\times} |f_p(x)||x|_p^\sigma\, d^\times x \right). \tag{1}$$

Notar que, salvo en el caso $p = \infty$, cada integral del lado derecho de (1) es igual a $\zeta_p(\sigma, (\chi_0)_p, |f_p|)$ (recordar que denotamos con $(\chi_0)_p$ al carácter trivial de $\mathbb{Q}_p^\times$). En el caso $p = \infty$, no podríamos escribir esa igualdad porque no necesariamente $|f_\infty|$ es una función de Schwartz (no tiene porque ser derivable). De todos modos, podemos usar dicha notación haciendo el abuso $\zeta_\infty(\sigma, (\chi_0)_\infty, |f_\infty|) = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} |f_p(x)||x|_p^\sigma\, d^\times x$. Se tiene entonces que para todo $p \in \mathcal{P}'$, el número $\zeta_p(\sigma, (\chi_0)_p, |f_p|)$ es finito por la Proposición 5.2.1 a).

Notemos además que si $f_p = \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}$, de lo visto en el ejemplo 5.2.4, tenemos que $\zeta_p(\sigma, (\chi_0)_p, |f_p|) = (1 - p^{-\sigma})^{-1}$. Luego, el lado derecho de (1) lo podemos reescribir como

$$\prod_{p\in\mathcal{P}'} \zeta_p(\sigma, (\chi_0)_p, |f_p|) = \left(\prod_{p\in S} \zeta_p(\sigma, (\chi_0)_p, |f_p|) \right) \cdot \left(\prod_{p\notin S} (1 - p^{-\sigma})^{-1} \right), \tag{2}$$

donde S es un subconjunto finito de $\mathcal{P}'$ que contiene a ∞. Por ser σ mayor a 1, el Lema 1.3.1 implica que el producto de la derecha de (2) es un número finito, como queríamos ver.

b) Es una cuenta muy similar a la demostración de la Proposición 5.2.1 b). Existe una sucesión de compactos creciente cuya unión es $\mathbb{A}^\times$ por ser $\mathbb{A}^\times$ σ-compacto. (Por la Observación 2.4.5 es σ-compacto, pues $\mathbb{A}^\times$ verifica el segundo axioma de numerabilidad por la Proposición 3.2.8).

c) Por la parte a), la aplicación

$$x \longmapsto f(x)\chi(x)\|x\|^s$$

es una función de $L^1(\mathbb{A}^\times)$. La igualdad (4.1.16) nos dice que la descomposición (5.1.3) es válida. $\square$

Ejemplo 5.3.2. Sea $f = \prod_{p\in\mathcal{P}'} f_p$, donde

$$f_p(x_p) = \begin{cases} e^{-\pi(x_\infty)^2}, & \text{si } p = \infty; \\ \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}(x_p), & \text{si } p \in \mathcal{P}. \end{cases}$$

Sea χ_0 el carácter trivial de $\mathbb{A}^\times$. Entonces por lo visto en los ejemplos 5.2.2 y 5.2.4 se tiene que

$$\begin{aligned} \zeta(s,\chi_0,f) &= \prod_{p\in\mathcal{P}'} \zeta_p(s,(\chi_0)_p,f_p) = \zeta_\infty(s,(\chi_0)_\infty,f_\infty)\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\chi(p)p^{-s}\right)^{-1} \\ &= \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \Xi(s) = L(s,\chi_0), \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

para $s \in \mathbb{C}$ con $\Re s > 1$.

Ejemplo 5.3.4. Sea χ un carácter del grupo de clases de ideles. Sea $f = \prod_{p\in\mathcal{P}'} f_p$, donde $f_p \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ está dada por

$$f_p(x_p) = \begin{cases} e^{-\pi(x_\infty)^2}, & \text{si } p=\infty \text{ y } \chi \text{ es no ramificado en } \infty; \\ xe^{-\pi(x_\infty)^2}, & \text{si } p=\infty \text{ y } \chi \text{ es ramificado en } \infty; \\ \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}(x_p), & \text{si } p\in\mathcal{P} \text{ y } \chi \text{ es no ramificado en } p; \\ (p-1)p^{n-1}\mathbf{1}_{U_p(p^n)}(x_p), & \text{si } p\in\mathcal{P} \text{ y } \operatorname{cond}(\chi)=p^n \text{ con } n\geq 1. \end{cases} \tag{5.3.5}$$

Sea $s \in \mathbb{C}$ con $\Re s > 0$. Es inmediato de combinar las proposiciones 3.5.18, 5.2.13, la Observación 5.2.14, y lo visto en los ejemplos 5.2.2, 5.2.3, 5.2.4 y 5.2.25 (ver (5.2.28) y (5.2.29)), que $\zeta_p(s,\chi_p,f_p) = L_p(s,\chi)$. Por lo tanto de la Proposición 5.3.1 c) tenemos que

$$\zeta(s,\chi,f) = L(s,\chi), \tag{5.3.6}$$

si $\Re s > 1$.

Observación 5.3.7. *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$. Supongamos que χ y χ' son caracteres del grupo de ideles tales que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ que verifica $\chi(x) = \chi'(x)\|x\|^{i\lambda}$, para todo $x \in \mathbb{A}^\times$. Entonces*

$$\zeta(s, \chi, f) = \zeta(s + i\lambda, \chi', f),$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ con parte real mayor a 1.

Antes de continuar, vamos a fijar y recordar algunas convenciones. En el grupo $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ se toma la medida de Haar $\nu^\times$ que nos da el Teorema 4.1.7, con $G = \mathbb{A}^\times$, $H = \mathbb{Q}^\times$, la medida $\mu^\times$ en $\mathbb{A}^\times$ y la medida contante en $\mathbb{Q}^\times$. Por otro lado, la Proposición 3.3.13 nos dice que la inclusión $\mathbb{R}_{>0} \hookrightarrow \mathbb{A}^\times$ induce un isomorfismo $\mathbb{R}_{>0} \cong (\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times)/(\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times)$. Le damos a $(\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times)/(\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times)$ la medida inducida por $\mu^\times_\infty$. Por el Corolario 4.1.10, existe una única medida de Haar η en $\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times$ tal que para toda función medible f que sea no negativa o esté en $L^1(\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times)$,

$$\int_{\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times} f(\bar{x})\, d\nu^\times(\bar{x}) = \int_{\mathbb{R}_{>0}} \int_{\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times} f(t\bar{x})\, d\eta(\bar{x})\, d^\times t. \tag{5.3.8}$$

Lema 5.3.9. *Se tiene que $\eta\left(\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times\right) = 1$.*

Demostración. Consideremos el subconjunto de $\mathbb{A}^\times$ dado por $B = [1, e] \times \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p^\times$. Afirmamos que $\mu^\times(B) = 1$. En efecto,

$$\mu^\times(B) = \mu^\times_\infty([1, e]) \cdot \bigtimes_{p\in\mathcal{P}} \mu^\times_p \left(\prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p^\times\right) = \left(\int_1^e \frac{dt}{t}\right) \cdot 1 = 1.$$

Luego por el Corolario 4.1.10,

$$1 = \int_{\mathbb{A}^\times} \mathbf{1}_B(x)\, d\mu^\times(x) = \int_{\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times} F(\bar{x})\, d\nu^\times(\bar{x}), \tag{1}$$

donde F es la función de $\mathbb{A}^\times$ dada por $F(\bar{x}) = \sum_{q\in\mathbb{Q}^\times} \mathbf{1}_B(q\bar{x})$

La ecuación (5.3.8) nos dice que (1) es igual a

$$\int_{\mathbb{R}_{>0}} \int_{\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times} F(t\bar{x})\, d\eta(\bar{x})\, d^\times t = \int_{\mathbb{R}_{>0}} \left(\int_{\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times} F(t\bar{x})\, d\eta(\bar{x})\right) \tfrac{1}{t}\, dt. \tag{2}$$

Consideremos $x \in \mathbb{A}^1$ y $t \in \mathbb{R}_{>0}$ fijos y calculemos $F(t.\bar{x})$. Sea $q \in \mathbb{Q}^\times$. El idele qtx está en B si y sólo si $qtx_\infty \in [1, e]$ y $|qx_p|_p = 1$ para todo $p \in \mathcal{P}$. Por el Lema 3.3.11, esto ocurre si y sólo si $qtx_\infty \in [1, e]$ y $|qx_\infty|_p = 1$ para todo $p \in \mathcal{P}$. Por la Observación 3.1.10, la segunda condición es equivalente a $qx_\infty \in \{-1, +1\}$, y como la primera nos dice en particular que el signo de q y x_∞ es el mismo, tenemos que qtx está en B si y sólo si $q = 1/x_\infty$ y $t \in [1, e]$. Luego como $x_\infty \in \mathbb{Q}^\times$ (por Lema 3.3.11),

$$F(t\bar{x}) = \sum_{q\in\mathbb{Q}^\times} \mathbf{1}_B(q(t\bar{x})) = \mathbf{1}_{[1,e]}(t).$$

Entonces el lado derecho de (2) es igual a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_{>0}} \left(\int_{\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times} \mathbf{1}_{[1,e]}(t)\, d\eta(\bar{x}) \right) \tfrac{1}{t}\, dt &= \int_{\mathbb{R}_{>0}} \mathbf{1}_{[1,e]}(t) \eta\left(\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times\right) \tfrac{1}{t}\, dt \\ &= \eta\left(\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times\right) \int_1^e \frac{dt}{t} = \eta\left(\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times\right).\end{aligned}$$

Concluimos por (1) que $\eta\left(\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times\right) = 1$. □

Consideremos los subconjuntos de $\mathbb{A}^\times$ dados por

$$\mathbb{A}^+ = \{x \in \mathbb{A}^\times : \|x\| > 1\}; \qquad \mathbb{A}^- = \{x \in \mathbb{A}^\times : 0 < \|x\| < 1\}.$$

Sean χ un carácter del grupo de clases de ideles y $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$. Por la Proposición 4.2.11, tenemos que todo $s \in \mathbb{C}$ con parte real mayor a 1,

$$\zeta(s, \chi, f) = \int_{\mathbb{A}^+} f(x)\chi(x)\|x\|^s\, d^\times x + \int_{\mathbb{A}^-} f(x)\chi(x)\|x\|^s\, d^\times x. \tag{5.3.10}$$

Similarmente a lo hecho en la Sección 1.5, vamos a ver que la primera integral de (5.3.10) es absolutamente convergente en todo $\mathbb{C}$, y hallar una relación entre ambas integrales que nos permitirá obtener la extensión meromorfa de $\zeta(\cdot, \chi, f)$ a todo $\mathbb{C}$.

Consideramos para cada $s \in \mathbb{C}$ tal que la integral correspondiente converja absolutamente,

$$\begin{aligned}\zeta_+(s, \chi, f) &= \int_{\mathbb{A}^+} f(x)\chi(x)\|x\|^s\, d^\times x; \\ \zeta_-(s, \chi, f) &= \int_{\mathbb{A}^-} f(x)\chi(x)\|x\|^s\, d^\times x.\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

Notar que ambas integrales convergen absolutamente al menos en $\{\Re s > 1\}$ por la Proposición 5.3.1 a). En dicha región se tiene que

$$\zeta(s, \chi, f) = \zeta_+(s, \chi, f) + \zeta_-(s, \chi, f).$$

Proposición 5.3.12. *La función $s \mapsto \zeta_+(s, \chi, f)$ es entera.*

Demostración. Haciendo la misma cuenta que en la demostración de la Proposición 5.3.1 b), basta ver que la integral (5.3.11) converge absolutamente *para todo* $s \in \mathbb{C}$. Sean $s \in \mathbb{C}$ y $\sigma = \Re s$. Tomemos $M > \max\{\sigma, 1\}$, como $\|x\|^\sigma < \|x\|^M$ para todo $x \in \mathbb{A}^+$, resulta que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{A}^+} |f(x)\chi(x)\|x\|^s|\, d^\times x = \int_{\mathbb{A}^+} |f(x)|\|x\|^\sigma d^\times x &\leq \int_{\mathbb{A}^+} |f(x)|\|x\|^M d^\times x \\ &\leq \int_{\mathbb{A}^\times} |f(x)|\|x\|^M d^\times x.\end{aligned}$$

Por la Proposición 5.3.1 a), la última integral es finita, así que podemos concluir que (5.3.11) es absolutamente convergente. □

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$, consideramos la función

$$\theta_f(\bar{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} f(\alpha x), \tag{5.3.13}$$

para $x \in \mathbb{A}^\times$, donde $\bar{x}$ es la clase de x en $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$.

Observación 5.3.14. *Por la fórmula de sumación de Poisson* (4.4.6) *obtenemos la ecuación funcional:*

$$\theta_f(\bar{x}) = \frac{1}{\|\bar{x}\|} \theta_{\widehat{f}}\left(\bar{x}^{-1}\right), \tag{5.3.15}$$

para todo $x \in \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$*.*

Denotemos $\mathbb{A}^+/\mathbb{Q}^\times$ y $\mathbb{A}^-/\mathbb{Q}^\times$ a los conjuntos

$$\mathbb{A}^+/\mathbb{Q}^\times = \{\bar{x} \in \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times : 1 < \|\bar{x}\|\}; \qquad \mathbb{A}^-/\mathbb{Q}^\times = \{\bar{x} \in \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times : 0 < \|\bar{x}\| < 1\}.$$

Lema 5.3.16. *Sea* $\sigma \in \mathbb{R}$*. Entonces:*

a) La integral $\int_{\mathbb{A}^+/\mathbb{Q}^\times} \|\bar{x}\|^\sigma \, d\nu^\times(\bar{x})$ *converge si y sólo si* $\sigma < 0$*.*

b) La integral $\int_{\mathbb{A}^-/\mathbb{Q}^\times} \|\bar{x}\|^\sigma \, d\nu^\times(\bar{x})$ *converge si y sólo si* $\sigma > 0$*.*

Demostración. a) Por el Corolario 4.1.10 y el Lema 5.3.9 tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{A}^+/\mathbb{Q}^\times} \|\bar{x}\|^\sigma \, d\nu^\times(\bar{x}) &= \int_1^{+\infty} \int_{\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times} \|t\bar{x}\|^\sigma d\eta(\bar{x}) \, d^\times t = \int_1^{+\infty} \int_{\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times} |t|^\sigma d\eta(\bar{x}) \, d^\times t \\ &= \int_1^{+\infty} |t|^{\sigma-1} \, dt,\end{aligned}$$

el cual es un número finito si y sólo si $\sigma < 0$.

b) Es inmediato de la Proposición 4.1.6, de que $\mathbf{1}_{\mathbb{A}^-/\mathbb{Q}^\times}\left(\bar{x}^{-1}\right) = \mathbf{1}_{\mathbb{A}^+/\mathbb{Q}^\times}(\bar{x})$ para todo $\bar{x} \in \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$, y de la parte a). □

Lema 5.3.17. *Para todo* $s \in \mathbb{C}$ *tal que* $\zeta_\pm(s, \chi, f)$ *esté definida se tiene que*

$$\zeta_\pm(s, \chi, f) = \int_{\mathbb{A}^\pm/\mathbb{Q}^\times} (\theta_f(\bar{x}) - f(0)) \, \chi(\bar{x}) \|\bar{x}\|^s \, d\nu^\times(\bar{x}).$$

Demostración. Sea s como en la hipótesis. Por (4.1.8),

$$\zeta_\pm(s, \chi, f) = \int_{\mathbb{A}^\pm} f(x)\chi(x)\|x\|^s \, d^\times x = \int_{\mathbb{A}^\pm/\mathbb{Q}^\times} \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}^\times} f(\alpha x)\chi(\alpha x)\|\alpha x\|^s \, d\nu^\times(\bar{x}),$$

Como χ y $\|\cdot\|$ son triviales en $\mathbb{Q}^\times$ y teniendo en cuenta (5.3.13), podemos escribir la última integral como

$$\int_{\mathbb{A}^\pm/\mathbb{Q}^\times} \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Q}^\times} f(\alpha x) \right) \chi(\bar{x}) \|\bar{x}\|^s \, d\nu^\times(\bar{x}) = \int_{\mathbb{A}^\pm/\mathbb{Q}^\times} (\theta_f(\bar{x}) - f(0)) \, \chi(\bar{x}) \|\bar{x}\|^s \, d\nu^\times(\bar{x}).$$

□

Ahora vamos a probar la ecuación funcional y la extensión meromorfa de la función zeta global. La demostración va a ser muy parecida a la demostración que presentamos para las funciones L del caso clásico.

Teorema 5.3.18. *Sean χ un carácter del grupo de clases de ideles y $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$. Entonces la función $s \mapsto \zeta(s, \chi, f)$ tiene continuación meromorfa a todo $\mathbb{C}$, y su extensión es entera, salvo quizás si el carácter χ es trivial sobre $\mathbb{A}^1$. En este último caso, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\chi(x) = \|x\|^{i\lambda}$ para todo $x \in \mathbb{A}^\times$ y $s \mapsto \zeta(s, \chi, f)$ tiene a lo sumo dos polos simples en $1 - \lambda i$ y $-\lambda i$, con residuos $\widehat{f}(0)$ y $-f(0)$, respectivamente. Además, en ambos casos, tenemos la ecuación funcional*

$$\zeta(s, \chi, f) = \zeta(1 - s, \chi^{-1}, \widehat{f}), \tag{5.3.19}$$

la cual vale para todo $s \in \mathbb{C}$.

Demostración. Sea $s \in \mathbb{C}$ con $\Re s > 1$. Por el Lema 5.3.17 y utilizando la Proposición 4.1.6, obtenemos que

$$\begin{aligned} \zeta_-(s, \chi, f) &= \int_{\mathbb{A}^-/\mathbb{Q}^\times} (\theta_f(\bar{x}) - f(0))\, \chi(\bar{x}) \|\bar{x}\|^s \, d\nu^\times(\bar{x}) \\ &= \int_{\mathbb{A}^+/\mathbb{Q}^\times} \left(\theta_f\left(\bar{x}^{-1}\right) - f(0)\right) \chi^{-1}(\bar{x}) \|\bar{x}\|^{-s} \, d\nu^\times(\bar{x}). \end{aligned} \tag{1}$$

De la ecuación funcional (5.3.15), vemos que la última línea de (1) es igual a

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{A}^+/\mathbb{Q}^\times} \left(\|x\| \theta_{\widehat{f}}(\bar{x}) - f(0)\right) \chi^{-1}(\bar{x}) \|\bar{x}\|^{-s} \, d\nu^\times(\bar{x}) \\ &= \int_{\mathbb{A}^+/\mathbb{Q}^\times} \left(\theta_{\widehat{f}}(\bar{x}) - \frac{f(0)}{\|\bar{x}\|}\right) \chi^{-1}(\bar{x}) \|\bar{x}\|^{1-s} \, d\nu^\times(\bar{x}) \\ &= \int_{\mathbb{A}^+/\mathbb{Q}^\times} \left(\left(\theta_{\widehat{f}}(\bar{x}) - \widehat{f}(0)\right) \chi^{-1}(\bar{x}) \|\bar{x}\|^{1-s} + \left(\widehat{f}(0) - \frac{f(0)}{\|\bar{x}\|}\right) \chi^{-1}(\bar{x}) \|\bar{x}\|^{1-s}\right) d\nu^\times(\bar{x}). \end{aligned} \tag{2}$$

Como la parte real de s es mayor a 1, por el Lema 5.3.16 a), las integrales

$$\int_{\mathbb{A}^+/\mathbb{Q}^\times} \widehat{f}(0) \chi^{-1}(\bar{x}) \|\bar{x}\|^{1-s} \, d\nu^\times(\bar{x}) \qquad \text{y} \qquad \int_{\mathbb{A}^+/\mathbb{Q}^\times} \frac{f(0)}{\|\bar{x}\|} \chi^{-1}(\bar{x}) \|\bar{x}\|^{-s} \, d\nu^\times(\bar{x})$$

existen y tienen valor absoluto finito, y por lo tanto la integral (2) la podemos escribir como

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{A}^+/\mathbb{Q}^\times} \left(\theta_{\widehat{f}}(\bar{x}) - \widehat{f}(0)\right) \chi^{-1}(\bar{x}) \|\bar{x}\|^{1-s} \, d\nu^\times(\bar{x}) \\ &+ \int_{\mathbb{A}^+/\mathbb{Q}^\times} \left(\widehat{f}(0) - \frac{f(0)}{\|\bar{x}\|}\right) \chi^{-1}(\bar{x}) \|\bar{x}\|^{1-s} \, d\nu^\times(\bar{x}). \end{aligned}$$

Por el Lema 5.3.17, la integral de la primera línea es $\zeta_+(1-s,\chi^{-1},\widehat{f})$. Para la integral de la segunda línea, usamos (5.3.8) y vemos que es igual a

$$\begin{aligned}&\int_1^{+\infty}\int_{\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times}\left(\widehat{f}(0)-\frac{f(0)}{|t|}\right)\chi^{-1}(t\bar{x})|t|^{1-s}\,d\eta(\bar{x})\,d^\times t\\ &=\left(\int_1^{+\infty}\left(\widehat{f}(0)-\frac{f(0)}{|t|}\right)\chi^{-1}(t)|t|^{1-s}\,d^\times t\right)\left(\int_{\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times}\chi^{-1}(\bar{x})\,d\eta(\bar{x})\right). \qquad (3)\end{aligned}$$

Siguiendo la cadena de igualdades que empieza (1), tenemos hasta ahora que:

$$\begin{aligned}\zeta(s,\chi,f)&=\zeta_+(s,\chi,f)+\zeta_-(s,\chi,f)=\zeta_+(s,\chi,f)+\zeta_+(1-s,\chi^{-1},\widehat{f})\\ &\quad+\left(\int_1^{+\infty}\left(\widehat{f}(0)-\frac{f(0)}{|t|}\right)\chi^{-1}(t)|t|^{1-s}\,d^\times t\right)\left(\int_{\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times}\chi^{-1}(\bar{x})\,d\eta(\bar{x})\right). \qquad (4)\end{aligned}$$

Si χ no es trivial en $\mathbb{A}^1$, entonces (3) nos queda igual a 0 y por lo tanto,

$$\zeta(s,\chi,f)=\zeta_+(s,\chi,f)+\zeta_+(1-s,\chi^{-1},\widehat{f}). \qquad (5)$$

Por la Proposición 5.3.12, el lado derecho de (5) es una función entera. Luego, la función $s\mapsto\zeta(s,\chi,f)$ tiene una extensión entera.

Si χ es trivial en $\mathbb{A}^1$, por el Corolario 3.5.8, existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $\chi(x)=\|x\|^{i\lambda}$ para todo $x\in\mathbb{A}^\times$. Luego, del Lema 5.3.9, resulta que (3) es igual a

$$\begin{aligned}&\left(\int_1^{+\infty}\left(\widehat{f}(0)-\frac{f(0)}{|t|}\right)|t|^{1-s-i\lambda}\,d^\times t\right)\eta\left(\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^\times\right)=\int_1^{+\infty}\left(\widehat{f}(0)-\frac{f(0)}{|t|}\right)|t|^{-s-i\lambda}\,dt\\ &=\widehat{f}(0)\int_1^{+\infty}|t|^{-s-i\lambda}\,dt-f(0)\int_1^{+\infty}|t|^{-1-s-i\lambda}\,dt=\frac{\widehat{f}(0)}{s+i\lambda-1}-\frac{f(0)}{s+i\lambda}.\end{aligned}$$

Volviendo a (4), obtenemos que

$$\zeta(s,\chi,f)=\zeta_+(s,\chi,f)+\zeta_+(1-s,\chi^{-1},\widehat{f})+\frac{\widehat{f}(0)}{s+i\lambda-1}-\frac{f(0)}{s+i\lambda}. \qquad (6)$$

Por la Proposición 5.3.12, el lado derecho de (6) es una función meromorfa en todo $\mathbb{C}$, con dos polos simples en $1-\lambda i$ y $-i\lambda$, y con residuos $\widehat{f}(0)$ y $-f(0)$, respectivamente. Luego, la función $s\mapsto\zeta(s,\chi,f)$ tiene una extensión meromorfa en todo $\mathbb{C}$ como dice el enunciado.

Tanto en (5) como en (6), las expresiones son invariantes al hacer el cambio

$$s\longmapsto 1-s, \qquad \chi\longmapsto\chi^{-1}, \qquad f\longmapsto\widehat{f}.$$

(Notar que en el caso que $\chi\|\cdot\|^{i\lambda}$, tenemos que $\chi^{-1}=\|\cdot\|^{-i\lambda}$). Concluimos que vale la igualdad (5.3.19) para todo $s\in\mathbb{C}$. □

Ejemplo 5.3.20. Sean f y χ_0 como en el ejemplo 5.3.2. Por la Proposición 4.3.14 tenemos que $\widehat{f} = \prod_{p\in\mathcal{P}'} \widehat{f}_p = \prod_{p\in\mathcal{P}'} f_p = f$ y que $\chi_0 = \|\cdot\|^{i\lambda}$ con $\lambda = 0$. Por el Teorema 5.3.18, $s \mapsto \zeta(s,\chi_0,f) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \Xi(s)$ tiene continuación meromorfa a todo $\mathbb{C}$, tiene dos polos simples en 1 y 0, ambos con residuos $f(0) = 1$ y $-f(0) = -1$, respectivamente. Además se verifica la ecuación funcional $\zeta(s,\chi_0,f) = \zeta(1-s,\chi_0,f)$ que podemos reescribir como

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Equivalentemente,

$$\zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}+s}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\zeta(1-s),$$

para $s \in \mathbb{C}$ con $\Re s > 1$. Vemos así que recuperamos la ecuación funcional (1.5.13).

Si χ es un carácter del grupo de clases de ideles, la función

$$\varepsilon(s,\chi) = \prod_{p\in\mathcal{P}'} \varepsilon_p(s,\chi_p),$$

donde s es un número complejo, se llama *root number global*. Notemos que como χ es no ramificado en p para casi todo $p \in \mathcal{P}'$, por la Proposición 5.2.36, el producto es finito y $s \mapsto \varepsilon(s,\chi)$ es una función entera que nunca se anula.

Teorema 5.3.21. *Sea χ un carácter del grupo de clases de ideles. Entonces la función $s \mapsto L(s,\chi)$ tiene continuación meromorfa a todo $\mathbb{C}$, y su extensión es entera, salvo si el carácter χ es trivial sobre $\mathbb{A}^1$. En este último caso, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\chi(x) = \|x\|^{i\lambda}$ para todo $x \in \mathbb{A}^\times$ y $s \mapsto L(s,\chi)$ tiene dos polos simples en $1-\lambda i$ y $-\lambda i$ con residuos 1 y -1, respectivamente. Además, en ambos casos, tenemos la ecuación funcional*

$$L(s,\chi) = \varepsilon(s,\chi)L\left(1-s,\chi^{-1}\right), \tag{5.3.22}$$

la cual vale para todo $s \in \mathbb{C}$. En el caso $\chi = \|\cdot\|^{i\lambda}$, la función $s \mapsto \varepsilon(s,\chi)$ es idénticamente 1, y la ecuación (5.3.22) resulta ser

$$\Xi(s+i\lambda) = \Xi(1-s-i\lambda),$$

para todo $s \in \mathbb{C}$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ la función de (5.3.5). Entonces de (5.3.6) y el Teorema 5.3.18, tenemos que $s \mapsto L(s,\chi) = \zeta(s,\chi,f)$ tiene continuación meromorfa a todo $\mathbb{C}$, con las carácteristicas de las singularidades como en el enunciado. Sea $s \in \mathbb{C}$ con $\Re s > 1$. De (5.2.34) y la Proposición 4.3.14 resulta que

$$\varepsilon(s,\chi) = \prod_{p\in\mathcal{P}'}\left(\frac{L_p(s,\chi)}{\zeta_p(s,\chi_p,f_p)}\cdot\frac{\zeta_p(1-s,\chi_p^{-1},\widehat{f}_p)}{L_p(1-s,\chi^{-1})}\right) = \frac{L(s,\chi)}{\zeta(s,\chi,f)}\cdot\frac{\zeta(1-s,\chi^{-1},\widehat{f})}{L(1-s,\chi^{-1})}.$$

Por (5.3.19), concluimos que $L(s,\chi) = \varepsilon(s,\chi)L\left(1-s,\chi^{-1}\right)$ para s con parte real mayor a 1, lo que implica que vale dicha igualdad en todo $\mathbb{C}$.

Si χ no es trivial en $\mathbb{A}^1$, entonces $s \mapsto L(s,\chi)$ es entera.

Supongamos que χ es trivial es $\mathbb{A}^1$, entonces por el Corolario 3.5.8, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\chi(x) = \|x\|^{i\lambda}$ para todo $x \in \mathbb{A}^{\times}$. Además como χ es trivial en $\mathcal{K}$, por la Proposición 3.5.9, es no ramificado para todo $p \in \mathcal{P}'$. Luego, la función $s \mapsto \varepsilon(s,\chi)$ es idénticamente 1, y la función f es la del Ejemplo 5.3.2. De combinar la Observación 5.3.7 y (5.3.3), tenemos que

$$\zeta(s,\chi,f) = \zeta(s,\chi_0\|\cdot\|^{i\lambda},f) = \zeta(s+i\lambda,\chi_0,f) = \Xi(s+i\lambda),$$

para todo s con $\Re s > 1$, y luego para todo $s \in \mathbb{C}$. Entonces, la ecuación funcional nos queda

$$\Xi(s+i\lambda) = \Xi(1-s-i\lambda),$$

para todo $s \in \mathbb{C}$. El residuo en $1-\lambda i$ es $\widehat{f}(0) = f(0) = 1$, y el residuo en λi es $-f(0) = -1$. $\square$

Corolario 5.3.23. *Sea χ un carácter del grupo de clases de ideles de orden finito, y sea ξ el carácter de Dirichlet primitivo que le corresponde por la biyección del Teorema 3.5.27. Entonces para todo $s \in \mathbb{C}$ se tiene que*

$$\varepsilon(s,\chi) = N^{\frac{1}{2}-s}W(\xi),$$

donde $W(\xi)$ es el root number de ξ y N es el conductor de χ y ξ.

Demostración. Resulta fácilmente de combinar (1.5.11), (3.5.28), (5.3.22), y el hecho claro que la biyección del Teorema 3.5.27 manda χ^{-1} en $\overline{\xi}$. $\square$

Bibliografía

[Apo76] Tom M. Apostol. *Introduction to analytic number theory*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976. Undergraduate Texts in Mathematics.

[Bum97] Daniel Bump. *Automorphic forms and representations*, volume 55 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[DE14] Anton Deitmar and Siegfried Echterhoff. *Principles of harmonic analysis*. Universitext. Springer, Cham, second edition, 2014.

[Fol99] Gerald B. Folland. *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.

[Fol16] Gerald B. Folland. *A course in abstract harmonic analysis*. Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, second edition, 2016.

[HR70] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract harmonic analysis. Vol. II: Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact Abelian groups*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 152. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970.

[HR79] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract harmonic analysis. Vol. I*, volume 115 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin-New York, second edition, 1979. Structure of topological groups, integration theory, group representations.

[Iwa92] Kenkichi Iwasawa. Letter to J. Dieudonné. In *Zeta functions in geometry (Tokyo, 1990)*, volume 21 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 445–450. Kinokuniya, Tokyo, 1992.

[Kob77] Neal Koblitz. *P-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions.*, volume 58 of *Graduate texts in mathematics*. Springer-Verlag, 1977.

[Rud87] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[RV99] Dinakar Ramakrishnan and Robert J Valenza. *Fourier Analysis on Number Fields.*, volume 186 of *Graduate texts in mathematics*. Springer New York, 1999.

[Tat67] John T. Tate. Fourier analysis in number fields and hecke's zeta-functions. In *Algebraic number theory*, Proceedings of an instructional conference organized by the London Mathematical Society (a NATO Advanced Study Institute) with the support of the International Mathematical Union. Edited by J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, chapter XV, pages 305–346. Academic Press, London; Thompson Book Co., Inc., Washington, D.C., 1967.