



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Rango óptimo en teoremas de restricción para la transformada de Fourier a conjuntos fractales

Tesis de Licenciatura en Ciencias matemáticas

Nahuel Garcia

Director: Ezequiel Rela

Buenos Aires, Julio de 2018

Resumen

En esta tesis estudiaremos un problema clásico del análisis armónico conocido como “restricción de la transformada de Fourier”, cuya formulación clásica, debida a Stein, es la siguiente: ¿Es posible restringir el operador transformada de Fourier que va de un espacio de funciones $L^p(\mathbb{R}^d)$ a otro espacio de funciones $L^q(\mathbb{R}^d)$ a un operador saliendo del mismo espacio pero llegando a $L^q(\mathbb{S}^{d-1})$ para algún par de exponentes p, q ? Notemos que la esfera tiene medida de Lebesgue cero, y teniendo en cuenta que si tomamos una función en L^2 , su transformada de Fourier también caerá en L^2 , restringirla a un conjunto de medida cero no tendrá sentido. En este trabajo estudiaremos las condiciones necesarias para que existan teoremas de restricción a la esfera, esto vendrá dado por lo que se conoce como "Knapp example", que consiste en estudiar el comportamiento de la función en pequeñas cáscaras esféricas y en donde la curvatura cumplirá un rol fundamental.

En cuanto al problema de decidir cuándo estas condiciones son suficientes, estudiaremos un resultado de Fefferman-Stein [Fef70] donde prueban que para dimensión $d = 2$ lo son, pero en general es un problema que sigue abierto.

Estudiaremos también un resultado debido a Mockenhaupt que generaliza el problema propuesto por Stein a conjuntos medibles más generales y no sólo hipersuperficies como la esfera.

También estudiaremos dos nociones de dimensión: la dimensión de Hausdorff y la dimensión de Fourier. Ilustraremos esto con algunos ejemplos de conjuntos fractales que poseen dimensión fraccionaria. Esto nos permitirá dar un marco introductorio adecuado para el estudio de una publicación debida a Laba-Hambrook [HL13] en donde prueban un análogo del "Knapp example" para el caso de subconjuntos fractales de la recta real, a donde el rol que antes cumplía la curvatura, lo cumplirá el no tener “mucho” estructura aritmética.

Por último, estudiaremos algunas aplicaciones de teoremas de restricción a PDE's, en particular las ecuaciones de Schrodinger y Helmholtz. También estudiaremos la relación entre los problemas de restricción de la transformada de Fourier y otros dos problemas clásicos de la teoría geométrica de la medida y el análisis armónico: el problema de Kakeya y los multiplicadores de Bochner-Riesz.

Palabras claves: Restricción de la transformada de Fourier, conjuntos de Salem, dimensión de Hausdorff, dimensión de Fourier.

Agradecimientos

A Rela por su infinita paciencia, sin la cuál este trabajo nunca hubiera sido terminado.

A Dani y Carlos por aceptar ser jurados de este trabajo.

A mi familia por bancarme todos estos años.

A mis amigos y compañeros por estar siempre a pesar de las ausencias.

A mi persona favorita.

Índice general

1. Introducción	3
2. Preliminares	7
2.1. Interpolación	7
2.2. Medida	8
2.3. La transformada de Fourier	9
2.3.1. La transformada de Fourier en L^1	9
2.3.2. Identidades y desigualdades clásicas	10
2.4. Clase de Schwartz	10
2.5. Algunos resultados útiles	11
3. Restricción a la esfera - Condiciones necesarias	15
3.1. Formulación dual: problema de extensión	15
3.2. Condiciones necesarias para la esfera y otras superficies	16
3.2.1. Superficies curvadas	17
3.2.2. Primera condición necesaria para \mathbb{S}^{d-1}	18
3.2.3. Segunda condición para \mathbb{S}^{d-1}	18
3.2.4. Densidades en L^2	19
3.2.5. Conjetura de restricción	21
3.2.6. Teorema de Stein-Tomas	22
4. Teorema de Stein para el círculo	25
4.1. Restricción en \mathbb{R}^2	25
4.2. “Idea” de la demostración	26
4.3. La prueba	26
5. Teorema de Stein-Tomas-Mockenhaupt	31
5.1. Deduciendo el teorema de Stein-Tomas	35
6. Dimensión de Hausdorff y dimensión de Fourier	37
6.1. Método I:	38
6.2. Método II:	40
6.3. Medida de Hausdorff	41
6.3.1. Conjunto ternario de Cantor	42
6.4. Ejemplos de fractales	44

6.4.1.	Triángulo de Sierpinski	45
6.4.2.	Copo de nieve de Koch	46
6.4.3.	Curva de Hilbert	47
6.5.	Dimensión de Fourier	47
6.5.1.	Energía	47
6.5.2.	Capacidades y medidas de Hausdorff	49
6.5.3.	Transformada de Fourier y energías	51
6.6.	Conjuntos de Salem	53
7.	Optimalidad del teorema de Mockenhaupt	55
7.1.	Idea de la demostración:	55
7.2.	Construcción de μ	56
7.2.1.	Existencia del límite débil	59
7.2.2.	Crecimiento local de μ	59
7.3.	Construcción del Cantor determinístico y las f_l	60
7.4.	Decaimiento de Fourier y f_l	61
7.5.	La divergencia de $\frac{\ \widehat{f_l d\mu}\ _{L^p(\mathbb{R})}}{\ f_l\ _{L^2(\mu)}}$	68
8.	Aplicaciones de Restricción	75
8.1.	PDE's	75
8.1.1.	Ecuación de Schrödinger	75
8.1.2.	Ecuación de Helmholtz	77
8.2.	Keakeya vs Restricción	78
8.2.1.	El problema de Keakeya	78
8.2.2.	Conexión con restricción	79
8.3.	Bochner-Riesz vs Restricción	82
8.3.1.	Multiplicadores del disco	83
8.3.2.	Multiplicadores de Bochner-Riez	83
A.	Integrales oscilatorias	85
A.1.	Primer caso: una variable	85
A.1.1.	Varias variables	89

Capítulo 1

Introducción

Uno de los operadores más importantes en el análisis armónico y de la matemática en general es la transformada de Fourier definida en principio para funciones absolutamente integrables en \mathbb{R}^d por la fórmula

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx.$$

Este operador se extiende luego a $L^p(\mathbb{R}^d)$, con $1 \leq p \leq 2$ de manera natural (ver 2.3 para más detalles, definiciones y propiedades de la transformada de Fourier). Una pregunta que surge entonces es : si tengo una función en un determinado espacio de funciones y le tomo transformada ¿qué sabemos acerca del espacio donde cae?. En particular, si tomamos funciones en espacios de Lebesgue L^p , uno podría querer comparar el tamaño de una función f en \mathbb{R}^d con el tamaño de \hat{f} , su transformada de Fourier.

De forma más cuantitativa, podemos plantear la siguiente pregunta: ¿cuándo existe una constante $C > 0$ tal que tenemos estimaciones de la forma:

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \tag{1.1}$$

para toda f , en principio, en la clase de Schwartz?

La clase de Schwartz es un espacio de funciones con la propiedad de que tanto la función como todas sus derivadas, decrecen más rápido que cualquier polinomio (ver 2.4 para una definición formal y algunas propiedades). Es un espacio un poco mayor que C_0^∞ , y lo usamos en lugar de este porque tiene la propiedad de que si tomamos transformada de una función en esta clase, vuelve a caer en ella (ver Teorema 2.4.5).

La desigualdad de Hausdorff-Young nos dice que

$$\|\hat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \text{ para todo } 1 \leq p \leq 2$$

donde p' es el exponente dual de p , es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Y estas son todas las posibles acotaciones de esta forma . (ver notas de Tao [Tao99b]). Supongamos ahora que no queremos controlar el tamaño de \hat{f} en todo \mathbb{R}^d , sino en un subconjunto de \mathbb{R}^d , es decir, ahora buscamos acotaciones de la forma

$$\|\hat{f}\|_{L^{p'}(B)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.2}$$

donde B es un subconjunto de \mathbb{R}^d . Consideremos por ejemplo, $B = B(0, 1)$ la bola unitaria. Igual que antes, por la desigualdad de Hausdorff-Young tenemos que (1.2) se cumple siempre que $q = p'$ y $1 \leq p \leq 2$. Pero en este caso, al estar considerando un subconjunto compacto, por la Observación 2.0.1 tenemos que podemos extender esta cota a todos los $q \leq p'$ con $1 \leq p \leq 2$. Y resulta que también en este caso estas son todas las acotaciones posibles (ver notas de Tao [Tao99b]).

La situación es más interesante cuando uno no restringe a un conjunto abierto como B sino a una hipersuperficie como por ejemplo la esfera unitaria \mathbb{S}^{d-1} . A fines de la década del 60, Stein propuso la siguiente pregunta ¿es posible restringir la transformada de Fourier \widehat{f} de una función $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, con $1 \leq p \leq 2$, a la esfera \mathbb{S}^{d-1} como una función en $L^q(\mathbb{S}^{d-1})$ para algún $1 \leq q \leq \infty$? Uno de los objetivos de este trabajo va a ser presentar los resultados clásicos relacionados con esta pregunta. En la primera parte nos vamos a centrar principalmente en la esfera por una cuestión histórica, pero como veremos en el Capítulo 5, los resultados que mostraremos para la esfera pueden extenderse a otras hipersuperficies, en donde la curvatura va a cumplir un rol fundamental. Por ejemplo, si consideramos un hiperplano, veremos en el Capítulo 3 que sólo tendremos restricción para el caso trivial $p = 1$, $q = \infty$, pero mientras más curvada sea la superficie, mejores resultados obtendremos. Nos interesa estudiar el problema de restricción en distintas hipersuperficies ya que es posible aproximar las soluciones de varios problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de teoremas sobre esas superficies, como veremos en el Capítulo 8.

Sabemos que dada $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, \widehat{f} resulta continua, y luego, podemos definir la restricción a la esfera como la evaluación. Pero esto no siempre sucede. Por ejemplo, si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, por Plancharel (ver 2.4.7) tenemos que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, con lo cual no tiene sentido restringirla a un conjunto de medida cero como la esfera.

Dada una función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, donde \mathcal{S} es la clase de Schwartz, se tiene que $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y luego tiene sentido pensar a \widehat{f} restringida a \mathbb{S}^{d-1} . Consideramos el operador

$$\begin{aligned} R : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d) &\rightarrow L^q(\mathbb{S}^{d-1}) \\ f &\mapsto \widehat{f}|_{\mathbb{S}^{d-1}}. \end{aligned}$$

Si este operador resulta acotado para algún par (p, q) , como la clase de Schwartz es densa en $L^p(\mathbb{R}^d)$, podemos extenderlo y darle sentido a la restricción para una función $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ arbitraria. El objetivo entonces será encontrar una constante $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\widehat{f}(w)|^q d\sigma \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^q, \quad (1.3)$$

donde $d\sigma$ es la medida usual de la esfera.

En caso de que exista tendremos un teorema de restricción con exponentes (p, q) y diremos que vale $R(p \rightarrow q)$. En el Capítulo 3 repasaremos la historia del problema y estudiaremos las condiciones necesarias para la existencia de teoremas de restricción en la esfera.

El problema de para qué valores de (p, q) existen acotaciones de este tipo, no está resuelto aún, pero hay varios avances. Uno de los objetivos de este trabajo va a ser estudiar los teoremas de "restricción" clásicos, lo que haremos en los Capítulos 4 y 5.

En el Capítulo 6 introduciremos dos nociones de dimensión: la dimensión de Hausdorff y la dimensión de Fourier. También introduciremos una familia especial de conjuntos llamados “conjuntos de Salem”, que son aquellos en los que los valores de dimensión dados por ambas definiciones coinciden.

Vamos a ver que el problema de restricción puede pensarse para otros conjuntos, no sólo la esfera. En el Capítulo 5 particularmente, estudiaremos una versión más general del teorema de Stein-Tomas (uno de los teoremas clásicos de restricción) dada por Mockenhaupt, sobre espacios de medida, no necesariamente hipersuperficies como veníamos mencionando hasta ahora. Antes mencionamos que la curvatura cumplía un rol fundamental en la existencia de teoremas de restricción, pero el teorema de Mockenhaupt que probaremos, nos permitirá pensar el problema en \mathbb{R} (e incluso en conjuntos con dimensión fraccionaria), donde no tenemos una noción de curvatura. En este contexto, la dimensión de Fourier será la que va a cumplir un rol fundamental en la existencia de teoremas de restricción en estos conjuntos.

¿Por qué nos interesa estudiar este problema? Más allá del valor intrínseco del conocimiento este problema posee numerosas aplicaciones a distintas áreas de la matemática como por ejemplo ,teoría de números, teoría espectral, y PDE's. En el Capítulo 8 estudiaremos como se aplican resultados de restricción a PDE's, y también estudiaremos la relación con otros dos problemas del análisis armónico y teoría geométrica de la medida: el problema de Kakeya y los multiplicadores de Bochner-Riesz.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo enunciaremos los resultados y definiciones básicas de medida, transformada de Fourier, interpolación, etc. que necesitaremos para los capítulos siguientes. A lo largo del trabajo diremos que $A \lesssim B$ si existe una constante $C > 0$ tal que $A \leq CB$.

Empezaremos el capítulo con una observación acerca de los espacios L^p sobre compactos que nos va a resultar útil:

Observación 2.0.1 (Espacios L^p anidados) Si $B \subset \mathbb{R}^d$ es un subconjunto compacto, se tiene

$$L^r \subset L^q \subset L^1 \text{ para todos los } q, r \text{ tales que } 1 \leq q \leq r. \quad (2.1)$$

Esto puede probarse usando Hölder y se ve reflejado en una desigualdad de normas

$$\|f\|_{L^q(B)} \leq C \|f\|_{L^r(B)} \text{ para toda } f \in L^r(B). \quad (2.2)$$

2.1. Interpolación

En esta sección enunciaremos un resultado clave de interpolación real que nos permitirá encontrar cotas para todos los valores intermedios entre dos cotas "conocidas".

Teorema 2.1.1 (Interpolación M Riez-Thorin) Sean p_0, p_1, q_0, q_1 tales que

$$1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty.$$

Dado $0 \leq \theta \leq 1$, definimos p y q como

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Si T es un operador lineal de $L^{p_0} + L^{p_1}$ en $L^{q_0} + L^{q_1}$ tal que

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0} \text{ para } f \in L^{p_0},$$

$$\|Tf\|_{q_1} \leq M_1^\theta \|f\|_{p_1} \text{ para } f \in L^{p_1}.$$

Entonces

$$\|Tf\|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_p.$$

En particular, el teorema nos dice que si tenemos un par de cotas $(p_0, q_0), (p_1, q_1)$, tenemos la acotación para cualquier par (p, q) tal que $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ cae en el segmento que une $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0})$ con $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1})$.

2.2. Medida

En esta sección enunciaremos algunos resultados relacionados con los distintos tipos de convergencia de medidas, que necesitaremos a lo largo del trabajo.

Dado un conjunto S , notaremos con \mathcal{S} a la σ -álgebra de Borel, es decir, la σ -álgebra generada por los abiertos de S .

Definición 2.2.1 Una medida de probabilidad en \mathcal{S} es una función de conjuntos P σ -aditiva que cumple $P(S) = 1$.

Definición 2.2.2 Dada una sucesión de medidas de probabilidad P_n , diremos que P_n converge débilmente a P , otra medida de probabilidad, si vale que

$$\int_S f dP_n \rightarrow \int_S f dP \text{ para toda } f \text{ continua y acotada.}$$

Lo notaremos $P_n \xrightarrow{w} P$.

Definición 2.2.3 Un conjunto $A \in \mathcal{S}$ se dice P -continuo si su frontera ∂A cumple $P(\partial A) = 0$.

Usaremos las siguientes equivalencias de convergencia débil:

Teorema 2.2.4 (Teorema de Portmanteau) Son equivalentes:

1. $P_n \xrightarrow{w} P$.
2. $\int_S f dP_n \rightarrow \int_S f dP$ para toda f uniformemente continua y acotada.
3. $\limsup_n P_n F \leq PF$ para todo $F \subset S$ cerrado.
4. $\liminf_n P_n G \geq PG$ para todo $G \subset S$ abierto.
5. $P_n A \rightarrow PA$ para todo $A \subset S$ P -continuo.

Teorema 2.2.5 (Teorema de la convergencia dominada) Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones medibles en un espacio de medida (S, Σ, μ) . Supongamos que f_n converge punto a punto a una función f y que existe $g \in L^1$ tal que la sucesión f_n está dominada por g , es decir,

$$|f_n(x)| \leq |g(x)| \quad \forall n \quad \forall x \in S.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S |f_n - f| d\mu = 0,$$

lo que también implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f_n d\mu = \int_S f d\mu.$$

Lema 2.2.6 (Lema de Fatou) Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y $X \in \Sigma$ un conjunto. Sea f_n una sucesión de funciones medibles no negativas, $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$. Definimos la función $f : X \rightarrow [0, \infty]$ como

$$f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Entonces f es medible y

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

2.3. La transformada de Fourier

En esta sección definiremos un operador clave para este trabajo, la transformada de Fourier, y enunciaremos un teorema clásico muy útil conocido como inversión de Fourier.

2.3.1. La transformada de Fourier en L^1

Definición 2.3.1 Dada $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ absolutamente integrable, se define la Transformada de Fourier por la fórmula

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx. \quad (2.3)$$

Más generalmente, sea $M(\mathbb{R}^d)$ el espacio de las medidas en \mathbb{R}^d finitas a valores complejos con la norma

$$\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R}^d). \quad (2.4)$$

donde $|\mu|$ es la variación total. Luego $L^1(\mathbb{R}^d)$ está contenido en $M(\mathbb{R}^d)$ vía la identificación $f \rightarrow \mu, d\mu = f dx$. Ahora vamos a definir la transformada de una medida:

Definición 2.3.2 Sea $\mu \in M(\mathbb{R}^d)$, definimos su transformada como

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \xi x} d\mu(x). \quad (2.5)$$

En el caso particular en que tanto f como \widehat{f} están en $L^1(\mathbb{R}^d)$ tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.3.3 Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y supongamos que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Entonces para casi todo x (a.e) vale lo siguiente:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi. \quad (2.6)$$

Equivalentemente,

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x) \quad (2.7)$$

para casi todo x .

Uno podría preguntarse si hay algún subespacio de $L^1(\mathbb{R}^d)$ en el cuál este resultado valga para todo x . A continuación vamos a introducir la clase de Schwartz (que está contenida en $L^1(\mathbb{R}^d)$) que tiene la particularidad de que si tomamos transformada de una función en esta clase, vuelve a caer en la misma.

2.3.2. Identidades y desigualdades clásicas

Sean $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $y \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}$, α multiíndice y $a > 0$. Introducimos la siguiente notación

$$\begin{aligned}\tau^y(f)(x) &= f(x - y), \\ \delta^a(f)(x) &= f(ax), \\ \widehat{f}(x) &= f(-x).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Valen las siguientes propiedades:

1. $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$.
2. $\widehat{f + g} = \widehat{f} + \widehat{g}$, $\widehat{bf} = b\widehat{f}$, $\widehat{\widehat{f}} = \widetilde{\widetilde{f}}$, $\widehat{\widetilde{f}} = \widehat{\widehat{f}}$.
3. $\widehat{\tau^y(f)}(\xi) = e^{-2\pi iy \cdot \xi} \widehat{f}(\xi)$, $(e^{-2\pi iy \cdot \cdot} f(\cdot))^\widehat{(\xi)} = \tau^y(\widehat{f})(\xi)$.
4. $\delta^a(\widehat{f})^\widehat{(\xi)} = a^{-n} \delta^{a^{-1}}(\widehat{f})^\widehat{(\xi)}$.
5. $(\partial^\alpha f)^\widehat{(\xi)} = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$.
6. $(\partial^\alpha \widehat{f})(\xi) = ((-2\pi i \cdot)^\alpha f(\cdot))^\widehat{(\xi)}$.
7. $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
8. $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$, donde $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)dy$.
9. $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x)g(x) dx$.
10. Sea $f^\vee(x) = \widehat{f}(-x)$ para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces $(\widehat{f})^\vee = f = \widehat{f^\vee}$.
11. $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{h(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{h}(\xi)} d\xi$.
12. **Hausdorff-Young:** $(1 \leq p \leq 2) \|\widehat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.
13. **Young:** Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, $f \in L^p$, $g \in L^q$ y r con $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ entonces

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

2.4. Clase de Schwartz

Intuitivamente, las funciones en la clase de Schwartz son funciones suaves y tales que tanto la misma función como todas sus derivadas decaen en el infinito más rápido que cualquier polinomio. Más formalmente, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.4.1 Diremos que una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ está en la clase de Schwartz si para todo par de multiíndices α y β existen constantes positivas $C_{\alpha,\beta}$ tales que

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| = C_{\alpha,\beta} < \infty.$$

Proposición 2.4.2 *El conjunto de las funciones suaves de soporte compacto $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ está contenido en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Proposición 2.4.3 *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ para $1 \leq p \leq \infty$. En particular, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$.*

Tenemos la siguiente caracterización de la Clase de Schwartz:

Proposición 2.4.4 *Una función $f \in C^\infty$ está en la clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si y sólo si para todo entero positivo N y todo multiíndice α existe una constante positiva $C_{\alpha,N}$ tal que*

$$|(\partial^\alpha f)(x)| \leq \frac{C_{\alpha,N}}{(1+|x|)^N}.$$

Teorema 2.4.5 *$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si y sólo si $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Observación 2.4.6 *La clase de Schwartz \mathcal{S} es densa en L^p para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Proposición 2.4.7 (Plancherel) *Sea $f \in L^1 \cap L^2$ entonces, $\widehat{f} \in L^2$ y además se tiene*

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (2.9)$$

Por un argumento de continuidad, Plancherel nos permite extender la transformada de Fourier a un operador unitario en L^2 . En $L^1 \cap L^2$ esta extensión coincide con la transformada definida en L^1 , alargando el dominio del operador transformada a $L^1 + L^2$, y consecuentemente a L^p con $1 \leq p \leq 2$.

2.5. Algunos resultados útiles

Proposición 2.5.1 *Sea $T : L^2 \rightarrow L^2$ definido como $Tf = f * K$, entonces $\|T\| = \|\widehat{K}\|_\infty$.*

Lema 2.5.2 (Parseval para medidas o dualidad) *Sean $\mu \in M(\mathbb{R}^d)$ y $\nu \in M(\mathbb{R}^d)$. Entonces*

$$\int \widehat{\mu} d\nu = \int \widehat{\nu} d\mu.$$

En particular, si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\int \widehat{f}(x)g(x)dx = \int f(x)\widehat{g}(x)dx.$$

Proposición 2.5.3 *Sea $\mu \in M(\mathbb{R}^d)$ con soporte compacto. Entonces $\widehat{\mu}$ es C^∞ y*

$$D^\alpha \widehat{\mu} = ((-2\pi i x)^\alpha \mu). \quad (2.10)$$

Proposición 2.5.4 *Sea $\mu \in M(\mathbb{R}^d)$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces*

$$\widehat{\phi \mu} = \widehat{\phi} * \mu, \quad (2.11)$$

$$\widehat{\phi \mu} = \widehat{\phi} * \widehat{\mu}. \quad (2.12)$$

Demostración: Usando la Proposición 2.5.3 y que el producto de funciones en \mathcal{S} está en \mathcal{S} , tenemos que $\widehat{\psi\phi\check{\mu}}$ está en \mathcal{S} . Luego, para probar (2.11) basta ver que

$$\int \widehat{\psi\phi\check{\mu}} = \int \psi(\widehat{\phi * \mu}) \text{ para toda } \psi \in \mathcal{S}.$$

Veamos que esto es así. Notaremos $Tx = -x$.

$$\begin{aligned} \int \widehat{\psi(x)\phi(x)\widehat{\mu}(-x)}dx &= \int \widehat{\psi(-x)\phi(-x)\check{\mu}(x)}dx \\ &= \int ((\widehat{\psi\phi}) \circ T)\widehat{\mu} \\ &= \int ((\widehat{\psi\phi}) \circ T)\widehat{d\mu} \text{ por Parseval para medidas} \\ &= \int (\widehat{\psi \circ T}) * (\widehat{\phi \circ T})d\mu \\ &= \int \psi * (\widehat{\phi \circ T})d\mu \\ &= \int \int \psi(y)\widehat{\phi}(-x+y)dyd\mu(x) \\ &= \int \psi(y)\widehat{\phi} * \mu(y)dy. \end{aligned}$$

Para probar (2.12), nuevamente basta ver que

$$\int \widehat{\phi\mu}\psi dx = \int (\widehat{\phi * \widehat{\mu}})\psi dx \text{ para toda } \psi \in \mathcal{S}.$$

Veamos que esto es así, usando Parseval para medidas nos queda

$$\begin{aligned} \int \widehat{\phi\mu}\psi dx &= \int \widehat{\psi\phi}d\mu \\ &= \int \widehat{\check{\phi} * \psi}d\mu \\ &= \int (\check{\phi} * \psi)\widehat{\mu}dx \\ &= \int (\widehat{\phi * \widehat{\mu}})\psi dx. \end{aligned}$$

■

Lema 2.5.5 Sean $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, y sea μ una medida con soporte compacto. Entonces se tiene

$$\int \widehat{f\check{g}}d\mu = \int (\widehat{\mu * \bar{g}}).f dx. \quad (2.13)$$

Demostración: Una de las propiedades útiles nos decía

$$\widehat{\widehat{g}} = \check{\check{g}} = \bar{g},$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned}\int \widehat{f} \widehat{g} d\mu &= \int f(\widehat{g}\mu) \\ &= \int f(\overline{g} * \widehat{\mu}) dx.\end{aligned}$$

■

Capítulo 3

Restricción a la esfera - Condiciones necesarias

Dedicaremos este capítulo al estudio de las condiciones necesarias para la existencia de teoremas de restricción para el caso de la esfera. Si estas condiciones son suficientes, es un problema abierto para $d \geq 3$, y en el caso de $d = 2$, se sabe que son suficientes y fue probado por Stein y Fefferman en los 70', y lo estudiaremos en el capítulo siguiente.

En la siguiente sección estudiaremos un lema de dualidad que nos permitirá reformular el operador de restricción y transformar el problema en estudiar un problema de extensión. Esta es la forma en la que generalmente se estudia el problema, aunque históricamente fue formulado como un problema de restricción y por eso conserva el nombre.

3.1. Formulación dual: problema de extensión

El siguiente lema nos va a proveer de una herramienta valiosa para el estudio de la conjetura de restricción

Lema 3.1.1 (Dualidad) *Sea μ una medida finita y positiva. Para cualquier $1 \leq q \leq \infty$ y cualquier $C > 0$, los siguientes items son equivalentes:*

1. $\|\widehat{f}\|_{L^p(d\mu)} \leq C\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$, $f \in \mathcal{S}$.
2. $\|\widehat{gd\mu}\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)} \leq C\|g\|_{L^p(d\mu)}$, $g \in L^p(d\mu)$.

Demostración: Sea $f \in \mathcal{S}$, $g \in L^p(d\mu)$. Por la relación de dualidad (Lema 2.5.2),

$$\int \widehat{f}gd\mu = \int \widehat{gd\mu}.fdx. \quad (3.1)$$

Si se cumple 2., entonces

$$\int \widehat{gd\mu}.fdx \leq \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}\|\widehat{gd\mu}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^p(d\mu)}, \quad \forall g \in L^p(d\mu).$$

Luego por (3.1) tenemos

$$\int \widehat{f}gd\mu \leq C\|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^p(d\mu)}, \quad \forall g \in L^p(d\mu),$$

lo que prueba 1. pues

$$\|\widehat{f}\|_{L^p(d\mu)} = \sup_{\|g\|=1} \left| \int \widehat{f}g d\mu \right|.$$

Si vale 1., entonces

$$\|\widehat{f}\|_{L^p(d\mu)} \leq \|\widehat{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^{p'}(d\mu)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^{p'}(d\mu)}, \quad g \in \mathcal{S}.$$

y luego,

$$\int \widehat{g d\mu} \cdot f dx \leq C \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^{p'}(d\mu)}, \quad g \in \mathcal{S}.$$

Como \mathcal{S} es densa en $L^{q'}$, vale 2. como antes. ■

Llamaremos operador de extensión al operador:

$$\begin{aligned} E : L^{q'}(\mathbb{S}^{d-1}) &\rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^d) \\ g &\mapsto \widehat{g d\sigma}. \end{aligned}$$

Se lo conoce como operador de extensión porque en este caso partimos de una función definida sobre toda la esfera y su transformada llega a \mathbb{R}^d . Para el caso particular de la esfera buscaremos acotaciones de la forma:

$$\|\widehat{g d\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq C \|g\|_{L^{q'}(d\sigma)}.$$

3.2. Condiciones necesarias para la esfera y otras superficies

En esta sección estudiaremos condiciones necesarias para que valgan acotaciones del tipo $R(p \rightarrow q)$. Empecemos con un ejemplo:

Ejemplo 3.2.1 (Superficies planas) Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0, \|x\| \leq 1\}$. Si vale $R_S(p \rightarrow q)$, entonces $p = 1$.

Consideremos $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tal que $\widehat{\psi}(\xi) = 1$ en $[-1, 1]^d$. Escribimos a los puntos de \mathbb{R}^d como $x = (\bar{x}, x_d)$. Definimos f como

$$f(x) = \psi\left(\bar{x}, \frac{x_d}{\lambda}\right).$$

Entonces, haciendo un cambio de variables tenemos:

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \psi\left(\bar{x}, \frac{x_d}{\lambda}\right) \right|^p dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(x_1, \dots, x_{d-1}, x_d)|^p dx = \lambda \|\psi\|_p^p.$$

Por otro lado, $\widehat{f}(\xi) = \lambda \widehat{\psi}(\xi_1, \dots, \xi_{d-1}, \lambda \xi_d)$. Entonces

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_{L^q(S)}^q &= \lambda^q \int_S |\widehat{\psi}(\xi_1, \dots, \xi_{d-1}, \lambda \xi_d)|^q d\sigma \\ &= \lambda^q \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \chi_{B(0,1)}(\xi) |\widehat{\psi}(\xi_1, \dots, \xi_{d-1}, 0)|^q d\xi_1 \cdots d\xi_{d-1} \\ &\sim \lambda^q. \end{aligned}$$

Entonces

$$\|f\|_p \sim \lambda^{\frac{1}{p}} \quad y \quad \|\widehat{f}\|_q \sim \lambda.$$

Juntando las dos estimaciones nos queda que se tiene que cumplir la siguiente desigualdad:

$$\lambda \leq C\lambda^{\frac{1}{p}} \quad \forall \lambda \quad (p \geq 1).$$

Haciendo tender λ a infinito vemos que tiene que valer $p = 1$.

3.2.1. Superficies curvadas

Supongamos que tenemos una superficie $S \subset \mathbb{R}^d$ dada como el gráfico de una función $\varphi : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, tal que $\varphi(0) = \nabla\varphi(0) = 0$ y tal que $\varphi(x) = O(|x|^k)$ con $k \geq 2$. Tenemos entonces el siguiente resultado:

Proposición 3.2.2 *Si vale $R_s(p \rightarrow q)$ con una superficie $(S, d\sigma)$ como la de arriba, entonces $p > \frac{d+k-1}{d-1}q$.*

Demostración: La idea de la demostración es esencialmente la misma que en el ejemplo anterior, trabajar con las dilataciones y conseguir estimaciones tanto de f como de \widehat{f} y compararlas. Consideremos como antes $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tal que $\widehat{\psi}(\xi) = 1$ en $[-1, 1]^d$. Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{d-1}, x_d) = \psi\left(\frac{x_1}{\lambda^{\frac{1}{k}}}, \frac{x_2}{\lambda^{\frac{1}{k}}}, \dots, \frac{x_{d-1}}{\lambda^{\frac{1}{k}}}, \frac{x_d}{\lambda}\right) \quad \lambda \gg 1.$$

Entonces

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\lambda^{\frac{d-1+k}{k}} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \sim \lambda^{\frac{d+k-1}{kp}}.$$

Por otro lado,

$$\widehat{f}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) = \lambda^{\frac{d-1+k}{k}} \widehat{\psi}(\xi_1 \lambda^{\frac{1}{k}}, \dots, \xi_{d-1} \lambda^{\frac{1}{k}}, \xi_d \lambda).$$

Calculamos ahora $\|\widehat{f}\|_{L^q(S)}$. Sea $B(0, \lambda^{\frac{-1}{k}}) \subset \mathbb{R}^{d-1}$. Definamos

$$\Omega_\lambda = B(0, \lambda^{\frac{-1}{k}}) \times (-\lambda^{-1}, \lambda^{-1}).$$

Entonces $\widehat{f} \sim \lambda^{\frac{d-1+k}{k}}$ sobre $S \cap \Omega_\lambda$. Además podemos estimar la medida de $S \cap \Omega_\lambda$ como

$$d\sigma(S \cap \Omega_\lambda) \sim \lambda^{\frac{-1}{k}(d-1)}.$$

Juntando estas dos estimaciones tenemos que

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(S)} \sim \lambda^{\frac{d+k-1}{k}} \lambda^{\frac{1-d}{qk}}.$$

Como esto tiene que valer para cualquier elección de $\lambda \gg 1$, tenemos que

$$\lambda^{\frac{d+k-1}{k}} \lambda^{\frac{1-d}{qk}} \lesssim \lambda^{\frac{d+k-1}{kp}}.$$

De esta desigualdad se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{d+k-1}{kp}p + \frac{1-d}{qk} - \frac{d+k-1}{kp} &\leq 0 \\ \frac{d+k-1}{kp}(p-1) &\leq \frac{d-1}{kq}. \end{aligned}$$

Y obtenemos la siguiente condición:

$$\frac{1}{q} \geq \frac{d+k-1}{d-1} \frac{1}{p'}. \quad (3.2)$$

■

Si la superficie es suave, tenemos asegurado $k \geq 2$ ya que no es lineal su crecimiento (su gradiente es 0 en 0) y entonces su polinomio de Taylor posee al menos un término no lineal no nulo. Observemos que cuanto más plana es la superficie, más restrictiva es la condición (3.2). En el caso extremo que la superficie sea un plano, vimos que no es posible encontrar cotas para exponentes no triviales.

3.2.2. Primera condición necesaria para \mathbb{S}^{d-1}

En el caso de la esfera sabemos que en la Proposición 3.2.2 tenemos $k = 2$ (cuando parametrizamos en coordenadas esféricas se comporta como r^2). Con esto tenemos la primer condición para que existe un teorema de restricción para la esfera:

$$\frac{1}{q} \geq \frac{d+1}{d-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

3.2.3. Segunda condición para \mathbb{S}^{d-1}

Consideremos la formulación dual del problema de restricción. Si tomamos $g \equiv 1$ en (2) del Lema 3.1.1 entonces tiene que valer:

$$\|\widehat{d\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq C.$$

Ahora usamos que $|\widehat{d\sigma}| = O(|x|^{-\frac{d-1}{2}})$ para $x \gg 1$ (Ver apéndice fase estacionaria). Entonces la condición necesaria que aparece es que la integral

$$\int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^{\frac{d-1}{2}p'}} dx = \omega_d \int_{r>1} \frac{1}{r^{\frac{d-1}{2}p'}} r^{d-1} dr = \int_{r>1} r^{\frac{d-1}{2}(p'-2)} dr$$

sea finita. Esto pasa si y sólo si se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d-1}{2}(p'-2) > 1 &\iff p' > \frac{2}{d-1} + 2 = \frac{2d}{d-1} \\ &\iff \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{p'} > \frac{d+1}{2d}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces la segunda condición necesaria:

$$\frac{1}{p} > \frac{d+1}{2d}.$$

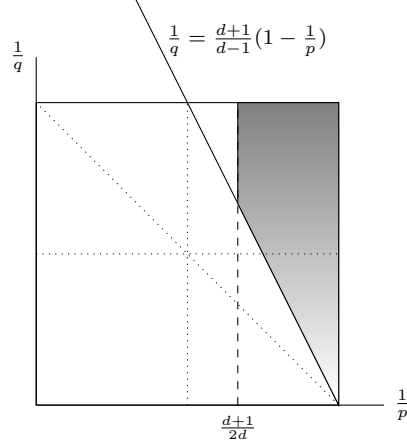


Figura 3.1: Condiciones necesarias para \mathbb{S}^{d-1}

3.2.4. Densidades en L^2

Veremos ahora una reformulación del lema 3.1.1 para el caso en que $q = 2$:

Lema 3.2.3 *lem:ddualidad* Sea μ una medida finita y positiva. Para cualquier q y cualquier C , los siguientes items son equivalentes:

1. $\|\widehat{f}\|_{L^2(d\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$, $f \in \mathcal{S}$.
2. $\|\widehat{gd\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq C\|g\|_{L^2(d\mu)}$, $g \in L^2(d\mu)$.
3. $\|\widehat{\mu} * g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq C^2\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$, $g \in \mathcal{S}$.

Demostración: Ya vimos que 1. implica 2. y viceversa. Veamos ahora que 1. y 3. son equivalentes:

Si vale 3., entonces

$$\int ((\widehat{\mu} * \bar{f}) \cdot f) dx \leq C^2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^2 \text{ para } f \in \mathcal{S}.$$

Luego, por (2.13), tomando $f = g$ nos queda:

$$\int |\widehat{f}|^2 = \int \widehat{f} \widetilde{f} d\mu \leq C^2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^2,$$

lo que prueba 1. .

Si vale 1. , entonces para toda $f, g \in \mathcal{S}$, usando la desigualdad de schwartz en el lado izquierdo de (2.13) nos queda:

$$\int \widehat{f\bar{g}} d\mu \leq C^2 \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Y luego, el lado derecho de (2.13) también, es decir,

$$\int ((\widehat{\mu} * \bar{g}) \cdot f) dx \leq C^2 \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Como esto vale para toda $f \in \mathcal{S}$ usando el mismo argumento que antes, vemos que esto prueba 3. . ■

Observación 3.2.4 *La forma estándar de presentar el lema es pensarlo dentro del sistema abstracto siguiente:*

$$T : L^p \rightarrow L^2 \iff T^* : L^2 \rightarrow L^{p'} \iff T^*T : L^p \rightarrow L^{p'}.$$

Veamos como funciona esto con el operador de restricción. Consideremos una superficie S y una medida μ soportada en ella. Tenemos el operador $R : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(S)$ tal que para cada f vale

$$R(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx \quad \xi \in S.$$

El adjunto de R es

$$R^*(g)(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{-2\pi i x \xi} g(\xi) d\mu(\xi) = \widehat{g d\mu}(x) \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

pues

$$\begin{aligned} R^*(g)(f) &= g(R(f)) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(\xi) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx d\mu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \xi} g(\xi) d\mu(\xi) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \widehat{g d\mu}(x) dx. \end{aligned}$$

de modo que $R^*(g) = \widehat{g d\mu}$.

Entonces

$$\begin{aligned} R^*R(f)(x) &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{-2\pi i x \xi} R(f)(\xi) d\mu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{-2\pi i x \xi} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i y \xi} f(y) dy \right) d\mu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{-2\pi i \xi(x-y)} d\mu(\xi) \right) f(-y) dy \\ &= (\widetilde{f} * K)(x), \end{aligned}$$

donde $K(x) = \widehat{d\mu}(x)$.

Otra manera de verlo para el caso de la esfera es la siguiente. Buscamos una desigualdad del tipo

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

y elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} \int |\widehat{f}|^2 d\sigma &\leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^2 \\ \langle \widehat{f}, \widehat{f} d\sigma \rangle &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^2 \\ \langle \widehat{f}, \widehat{f * d\sigma} \rangle &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^2 \\ \langle f, f * \widehat{d\sigma} \rangle &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^2 \end{aligned}$$

donde usamos que la medida de la esfera es real y simétrica, con lo cuál vale $\widehat{d\sigma} = (d\sigma)^\vee$. Como además tenemos que por Hölder vale que

$$\langle f, f * \widehat{d\sigma} \rangle \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|f * \widehat{d\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}.$$

El objetivo es encontrar entonces acotaciones del “operador de convolución” $f * \widehat{d\sigma}$ del tipo:

$$\|f * \widehat{d\sigma}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \quad (3.3)$$

Observemos que al considerar el operador de convolución, la geometría de la esfera queda codificada en la convolución $f * \widehat{d\sigma}$ y no en el espacio de salida o el de llegada como pasaba en los casos de los operadores de restricción y extensión. Con lo cuál, como estamos tomando ambas normas en espacios L^p sobre \mathbb{R}^d , en algunos casos esto nos facilitará la tarea de encontrar acotaciones.

3.2.5. Conjetura de restricción

A fines de los 60' Stein propuso la siguiente conjetura

Conjetura 3.2.5 (Restricción en la esfera) Dada $f \in L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ entonces

$$\|\widehat{f d\sigma}\|_q \leq C_q \|f\|_\infty \quad \forall q > \frac{2d}{d-1}. \quad (3.4)$$

De hecho, se puede probar que la cota más fuerte

$$\|\widehat{f d\sigma}\|_q \leq C_q \|f\|_q \quad \forall q > \frac{2d}{d-1} \quad (3.5)$$

es formalmente equivalente.

El problema correspondiente para densidades en L^2 fue resuelto en los 70':

3.2.6. Teorema de Stein-Tomas

Aunque históricamente el orden es el contrario, esto será un corolario del Teorema de Mockenhaupt aplicado al caso particular de la esfera.

Teorema 3.2.6 (Stein-Tomas) *Si $f \in L^2(\mathbb{S}^{d-1})$, entonces*

$$\|\widehat{fd\sigma}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \quad (3.6)$$

para $q \geq \frac{2d+2}{d-1}$ y estos son todos los posibles q .

Observación 3.2.7 *En el teorema anterior podemos reemplazar la esfera por cualquier otra superficie suave cuya curvatura Gaussiana nunca se anule. Lo enunciaremos para la esfera por una cuestión histórica ya que así fue como apareció por primera vez.*

Ahora veremos que el rango de exponentes propuesto en (3.6) es el mejor posible. El siguiente ejemplo fue introducido por A. Knapp .

Proposición 3.2.8 (Knapp example) *El rango de exponentes $q \geq \frac{2d+2}{d-1}$ es el mejor para el cuál se pueden obtener estimaciones del tipo (3.6).*

Demostración: Para poder probar este resultado, tendremos que usar una función f cuyo soporte esté muy localizado. El soporte de la f que vamos a considerar va a ser \mathbb{S}^{d-1} intersecado con un pequeño rectángulo. Ahora los detalles:

Sea

$$C_\delta = \{x \in \mathbb{S}^{d-1} : 1 - x \cdot e_d \leq \delta^2\}$$

donde $e_d = (0, \dots, 0, 1)$. Veamos que $|x - e_d|^2 = 2(1 - x \cdot e_d)$:

$$|x - e_d|^2 = |\langle x - e_d, x - e_d \rangle| = |\langle x, x \rangle - 2\langle x, e_d \rangle + \langle e_d, e_d \rangle| = 2|1 - \langle x, e_d \rangle|,$$

donde en la última igualdad usamos que tanto x como e_d están en \mathbb{S}^{d-1} . Con esto, es fácil ver que

$$|x - e_d| \leq C^{-1}\delta \implies x \in C_\delta \implies |x - e_d| \leq C\delta$$

con C una constante tal que $2C^2 = 1$

Sea ahora $f = f_\delta$ la indicadora del conjunto C_δ . Ahora vamos a calcular $\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}$ y $\|\widehat{fd\sigma}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}$. Primero, $\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}$ es la raíz cuadrada de la medida de C_δ y por la cuenta anterior y la dimensionalidad de la esfera tenemos que

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \approx \delta^{\frac{d-1}{2}}. \quad (3.7)$$

El soporte de $fd\sigma$ está contenido en el rectángulo centrado en e_d de longitud $\approx \delta^2$ en la dirección \underline{e}_d y de longitud $\approx \delta$ en las direcciones ortogonales.

Miramos $\widehat{f\delta}$ en el rectángulo “dual” centrado en 0. Supongamos que $|\xi_d| \leq C_1^{-1}\delta^{-2}$ y que $|\xi_j| \leq C_1^{-1}\delta^{-1}$ cuando $j < d$, donde C_1 es una constante grande. Entonces

$$\begin{aligned} |\widehat{fd\sigma}(\xi)| &= \left| \int_{C_\delta} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\sigma(x) \right| \\ &= \left| \int_{C_\delta} e^{-2\pi i (x - e_d) \cdot \xi} d\sigma(x) \right| \\ &\geq \int_{C_\delta} \cos(2\pi (x - e_d) \cdot \xi) d\sigma(x), \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos que

$$|e^{-2\pi i e_d \cdot \xi}| = 1.$$

Nuestras condiciones sobre ξ implican que podemos tomar C_1 suficientemente grande de manera que $|(x - e_d) \cdot \xi| \leq \pi/3$ para todo $x \in C_\delta$. Luego,

$$|\widehat{fd\sigma}(\xi)| \geq \frac{1}{2}|C_\delta| \approx \delta^{d-1}.$$

El conjunto de ξ que estamos considerando tiene un volume $\approx \delta^{d-1}$, con lo cuál

$$\delta^{d-1-\frac{d+1}{q}} \lesssim \|\widehat{fd\sigma}\|_q.$$

Si comparamos esto con (3.7), vemos que si vale (3.6), entonces

$$\delta^{d-1-\frac{d+1}{q}} \lesssim \delta^{\frac{d-1}{2}}$$

uniformemente en $\delta \in (0, 1]$. Y entonces tiene que ser $d-1-\frac{d+1}{q} \geq \frac{d-1}{2}$, es decir, $q \geq \frac{2d+2}{d-1}$. ■

Capítulo 4

Teorema de Stein para el círculo

En este capítulo estudiaremos otro de los resultados clásicos de restricción, probaremos que vale $R_{p \rightarrow q}$ en dimensión $d = 2$ para todo el rango de exponentes conjeturado. Este resultado fue probado por Fefferman y Stein en [Fef70]. Nosotros seguiremos la construcción dada por Grafakos en su libro [Gra09].

Cabe destacar que este es el único caso en el que el problema está completamente resuelto para la esfera. Para dimensión $d \geq 3$ se han ido mejorando las cotas, pero no se ha resuelto si vale o no para todo el rango conjeturado por Stein.

4.1. Restricción en \mathbb{R}^2

Durante este capítulo notaremos

$$\chi^\delta(\xi) = \chi_{(1-\delta, 1+\delta)}(|\xi|), \quad \xi \in \mathbb{R}^2.$$

El objetivo del capítulo va ser probar el siguiente resultado:

Teorema 4.1.1 1. *Dados $1 \leq p < \frac{4}{3}$, $q = \frac{p'}{3}$, existe una constante $C_p > 0$ tal que para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ y $\delta > 0$ pequeño se tiene:*

$$\|\chi^\delta \widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C_p \delta^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \quad (4.1)$$

2. *Cuando $p = q = \frac{4}{3}$, existe una constante $C > 0$ tal que para toda $f \in L^{4/3}(\mathbb{R}^2)$ y $\delta > 0$ pequeño se tiene:*

$$\|\chi^\delta \widehat{f}\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^2)} \leq C_p \delta^{\frac{4}{3}} \log\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \|f\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^2)}. \quad (4.2)$$

Empecemos con una definición:

Definición 4.1.2 *Para cada $k \geq 0$ definimos los arcos sectoriales como*

$$\Gamma_{k,l} = \{re^{2\pi i\theta} \in \mathbb{R}^2 : |\theta - l2^{-\frac{k}{2}}| < 2^{-\frac{k}{2}}, \quad 1 - \frac{5}{8}2^{-k} \leq r \leq 1 - \frac{1}{8}2^{-k}\}$$

para todo $l \in \{0, 1, 2, \dots, [2^{\frac{k}{2}}] - 1\}$.

Necesitaremos del siguiente lema técnico que utilizaremos sin demostración. Para una demostración ver el Lema 10.2.5 del libro [Gra09]

Lema 4.1.3 *Existe una constante C_0 tal que para todo $k \geq 0$, se tiene la siguiente cota*

$$\sum_{l \in I} \sum_{l' \in I} \chi_{\Gamma_{k,l} + \Gamma_{k,l'}} \leq C_0,$$

donde para cada $k \geq 0$, $\Gamma_{k,l}$ son los arcos sectoriales.

4.2. “Idea” de la demostración

Para probar el resultado para \mathbb{S}^1 “engordaremos” el círculo en una pequeña cantidad 2δ y luego obtendremos un teorema de restricción para el círculo “engordado”. Finalmente usaremos la siguiente identidad:

$$\int_{\mathbb{S}^1} |\widehat{f}(\omega)|^q d\omega = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_{1-\delta}^{1+\delta} \int_{\mathbb{S}^1} |\widehat{f}(r\theta)|^q d\theta dr.$$

En lo que sigue vamos a considerar $\delta = 2^{-k} < \frac{1}{2400^2}$ (condición que va a ser necesaria para poder aplicar el lema anterior).

Por lo que observamos antes, $R_{p \rightarrow q}(\mathbb{S}^1)$ es una consecuencia inmediata de la siguiente acotación:

$$\frac{1}{2\delta} \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^1} |\chi^\delta(r\theta) \widehat{f}(r\theta)|^q d\theta dr \leq C^q \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^q.$$

O equivalentemente,

$$\|\chi^\delta \widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq (2\delta)^{\frac{1}{q}} C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}.$$

4.3. La prueba

Demostración: Para probar vamos a trabajar con el operador de extensión

$$E^\delta(g) = \widehat{\chi^\delta g} = \widehat{\chi^\delta} * \widehat{g},$$

que es el dual de $f \mapsto \chi^\delta \widehat{f}$. Por el método T^*T , nos alcanza con probar la siguiente cota:

$$\|E^\delta(f)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^2)} \leq C \delta^{\frac{1}{q}} (\log(\frac{1}{\delta}))^\beta \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^2)},$$

donde $\beta = \frac{1}{4}$ cuando $p = \frac{4}{3}$ y $\beta = 0$ cuando $p < \frac{4}{3}$. Vamos a considerar la siguiente partición de la unidad :

$$\chi_l^\delta(\xi) = \chi^\delta(\xi) \chi_{2\pi l \delta^{\frac{1}{2}}} \quad \text{para } l \in \{0, 1, \dots, [\delta^{-\frac{1}{2}}]\}.$$

La suma de estas funciones es χ^δ . Ahora partimos el conjunto $\{0, 1, \dots, [\delta^{-\frac{1}{2}}]\}$ en nueve subconjuntos de manera que los soportes de las funciones indexadas por los índices de cada uno de esos subconjuntos caigan en un sector de diámetro a lo sumo $\pi/4$. Sea I uno de estos subconjuntos, notaremos

$$E_I^\delta(f) = \sum_{l \in I} \widehat{\chi_l^\delta f}.$$

Luego, nos alcanza con obtener la acotación buscada para cada E_I^δ en lugar de E^δ . Fijemos uno de estos I . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $I = \{0, 1, \dots, [\frac{1}{8}\delta^{-\frac{1}{2}}]\}$. Como el teorema es trivial para $p = 1$ (siempre vale $R(1 \rightarrow \infty)$), para probar (4.1), fijemos p con $1 < p < \frac{4}{3}$. Tomemos $r = (\frac{p'}{2})'$ y observemos que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}$ y $1 < r < 2$. Aplicando Hausdorff-Young ($\|h\|_{L^{r'}} \leq \|h^\vee\|_{L^r}$), tenemos

$$\begin{aligned} \|E_I^\delta(f)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^2)}^{p'} &= \int_{\mathbb{R}^2} |E_I^\delta(f)^2|^{r'} dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |(E_I^\delta(f)^2)^\vee|^r dx \right)^{\frac{r'}{r}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_{l \in I} \sum_{l' \in I} (\chi_l^\delta f) * (\chi_{l'}^\delta f) \right|^r dx \right)^{\frac{r'}{r}}. \end{aligned}$$

Vamos a obtener la siguiente cota:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_{l \in I} \sum_{l' \in I} (\chi_l^\delta f) * (\chi_{l'}^\delta f) \right|^r dx \right)^{\frac{r'}{r}} \leq C \delta^{\frac{p'}{q}} \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^2)}^{p'}.$$

Para lograr esto vamos a empezar por aplicarle Hölder a las sumas del lado izquierdo de esta última desigualdad. Para ello, notemos por $S_{\delta, l, l'}$ al soporte de $\chi_l^\delta + \chi_{l'}^\delta$. Luego, reescribiendo nos queda:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_{l, l' \in I} (\chi_l^\delta f) * (\chi_{l'}^\delta f) \chi_{S_{\delta, l, l'}} \right|^r dx \right)^{\frac{r'}{r}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{l, l' \in I} |(\chi_l^\delta f) * (\chi_{l'}^\delta f)|^r \left(\sum_{l, l' \in I} |\chi_{S_{\delta, l, l'}}|^{r'} \right)^{\frac{r'}{r}} dx \right)^{\frac{r'}{r}} \right)^{\frac{r'}{r}},$$

donde en la última desigualdad usamos Hölder discreto. Por el Lema 4.1.3, existe una constante $C > 0$ (que no depende de δ) tal que

$$\sum_{l \in I} \sum_{l' \in I} |\chi_{S_{\delta, l, l'}}|^{r'} \leq C.$$

Luego, tenemos la siguiente desigualdad:

$$\|E_I^\delta(f)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^2)}^{p'} \leq \left(\sum_{l \in I} \sum_{l' \in I} \int_{\mathbb{R}^2} |(\chi_l^\delta f) * (\chi_{l'}^\delta f)|^r dx \right)^{\frac{r'}{r}}. \quad (4.3)$$

Para completar la demostración usaremos el siguiente lema que probaremos más adelante:

Lema 4.3.1 *Para cualquier $1 < r < \infty$, existe una constante $C > 0$ (que no depende de δ ni f) tal que*

$$\|(\chi_l^\delta f) * (\chi_{l'}^\delta f)\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} \leq C \left(\frac{\delta^{\frac{3}{2}}}{|l - l'| + 1} \right)^{\frac{1}{r'}} \|\chi_l^\delta f\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} \|\chi_{l'}^\delta f\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}$$

para todo $l, l' \in \{0, 1, \dots, [\frac{1}{8}\delta^{-\frac{1}{2}}]\}$.

Asumiendo el lema nos queda:

$$\begin{aligned} \|E_I^\delta(f)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^2)}^{p'} &\leq C\delta^{\frac{3}{2}} \left[\sum_{l \in I} \|\chi_l^\delta f\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}^{rs} \left(\sum_{l' \in I} \frac{\|\chi_{l'}^\delta\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}^r}{(|l-l'|+1)^{\frac{r}{r'}}} \right) \right] \\ &\leq C\delta^{\frac{3}{2}} \left[\sum_{l \in I} \|\chi_l^\delta f\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}^r \right]^{\frac{r'}{rs}} \left[\left(\sum_{l' \in I} \frac{\|\chi_{l'}^\delta\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}^r}{(|l-l'|+1)^{\frac{r}{r'}}} \right)^{s'} \right]^{\frac{r}{rs'}}, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos Hölder discreto con $1 < s < \infty$.

Observación 4.3.2 *El operador*

$$\{a_j\} \mapsto \left\{ \sum_{j'} \frac{a_{j'}}{(|j-j'|+1)^{1-\alpha}} \right\}_j$$

mapea $l^s(\mathbb{Z})$ en $l^{s'}(\mathbb{Z})$ cuando

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.4)$$

Cuando $1 < p < \frac{4}{3}$, tenemos $1 < r < 2$ y tomando $\alpha = 2 - r = 1 - \frac{r}{r'}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \|E_I^\delta(f)\|_{L^{p'}}^{p'} &\leq C'\delta^{\frac{3}{2}} \left[\sum_{l \in I} \|\chi_l^\delta f\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}^{rs} \right]^{\frac{r'}{rs}} \left[\sum_{l \in I} \|\chi_l^\delta f\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}^{rs} \right]^{\frac{r'}{rs}} \\ &= C'\delta^{\frac{3}{2}} \left[\sum_{l \in I} \|\chi_l^\delta f\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}^{rs} \right]^{\frac{2r'}{rs}}. \end{aligned}$$

El único s que cumple (4.4) con $\alpha = 1 - \frac{r}{r'}$ es $s = \frac{q'}{r}$. Además, como $q = \frac{p'}{r}$, tenemos $1 < s < 2$. Usamos Hölder nuevamente para pasar de norma r a norma q' . Usaremos que el soporte de χ_l^δ tiene medida $\simeq \delta^{\frac{3}{2}}$. Tenemos:

$$\|\chi_l^\delta f\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} \leq C(\delta^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{r} - \frac{1}{q'}} \|\chi_l^\delta f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^2)}$$

donde usamos Hölder con $k = \frac{q'}{r}$. Luego, tenemos:

$$\begin{aligned} \|E_I^\delta(f)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^2)}^{p'} &\leq C\delta^{\frac{3}{2}} \left[\sum_{l \in I} \left(C(\delta^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{r} - \frac{1}{q'}} \|\chi_l^\delta f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^2)} \right)^{rs} \right]^{\frac{2r'}{rs}} \\ &= C'\delta^{\frac{3}{2}} (\delta^{\frac{3}{2}})^{2r'(\frac{1}{r} - \frac{1}{q'})} \left[\sum_{l \in I} \|\chi_l^\delta f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^2)}^{q'} \right]^{\frac{2r'}{q'}} \\ &\leq C\delta^3 \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^2)}^{p'} = C\delta^{\frac{p'}{q'}} \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^2)}^{q'} \end{aligned}$$

donde usamos que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}$ y $p' = 2r'$. En la última desigualdad usamos que los soportes de las χ_l^δ son disjuntos y estas suman a lo sumo 1.

Para probar (4.2) vamos a usar el Lema 4.3.1 y la Desigualdad 4.3 tomando $r = r' = s = s' = 2$. Nos queda:

$$\|E_I^\delta(f)\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 \leq C\delta^{\frac{3}{2}} \left[\sum_{l \in I} \|\chi_l^\delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \left(\sum_{l' \in I} \frac{\|\chi_{l'}^\delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2}{|l - l'| + 1} \right) \right].$$

Usando Hölder discreto con $k = 2$ en la primer suma nos queda:

$$\|E_I^\delta(f)\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 \leq C\delta^{\frac{3}{2}} \left[\sum_{l \in I} \|\chi_l^\delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^4 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{l \in I} \left(\sum_{l' \in I} \frac{\|\chi_{l'}^\delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2}{|l - l'| + 1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Para acotar la otra suma doble vamos a utilizar el Test de Schur:

Lema 4.3.3 (Test de Schur) Sean (X, μ) , (Y, ν) dos espacios de medida y sea $K(x, y)$ una función medible en $(X \times Y)$ tal que:

$$\int_X |K(x, y)| d\mu(x) \leq A \text{ para cada } y \in Y$$

$$\int_Y |K(x, y)| d\nu(y) \leq B \text{ para cada } x \in X.$$

Definimos un operador

$$T_K g(x) := \int_Y K(x, y) g(y) d\nu(y).$$

Entonces para $g \in L^2(d\nu)$ la integral que define a $T_K g$ converge para casi todo punto (respecto de $d\mu(x)$) y vale la acotación

$$\|T_K g\|_{L^2(d\mu)} \leq \sqrt{AB} \|g\|_{L^2(d\nu)}.$$

Para una demostración ver [Wol03].

Vamos a tomar $K(l, l') = \frac{1}{|l - l'| + 1}$ y $\{g_{l'}\}_{l'} = \|\chi_{l'}^\delta f\|_{L^2}^2$. También tomaremos $\mu = \nu$ la medida discreta sobre I .

$$\begin{aligned} \|E_I^\delta(f)\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 &\leq C\delta^{\frac{3}{2}} \left[\sum_{l \in I} \|\chi_l^\delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^4 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{l \in I} \|\chi_l^\delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^4 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{l \in I} \frac{1}{|l| + 1} \right] \\ &\leq C\delta^{\frac{3}{2}} \left[\sum_{l \in I} \|\chi_l^\delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^4 \right] \left[\sum_{l \in I} \frac{1}{|l| + 1} \right]. \end{aligned}$$

Usando el criterio integral podemos acotar la última suma de la siguiente manera:

$$\left[\sum_{l \in I} \frac{1}{|l| + 1} \right] \leq C \log(\delta^{-\frac{1}{2}}).$$

Usando esto llegamos a la siguiente cota:

$$\begin{aligned}
\|E_I^\delta(f)\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 &\leq C\delta^{\frac{3}{2}} \left[\sum_{l \in I} \|\chi_l^\delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^4 \right] \log(\delta^{-\frac{1}{2}}) \\
&\leq C\delta^{\frac{3}{2}} (\delta^{\frac{3}{2}})^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})^4} \log\left(\frac{1}{\delta}\right) \left[\sum_{l \in I} \|\chi_l^\delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^4 \right] \\
&\leq C\delta^3 (\log\left(\frac{1}{\delta}\right)) \|f\|_4^4.
\end{aligned}$$

y tomando raíz cuarta a ambos lados obtenemos lo que buscábamos. Ahora para terminar con la demostración del teorema probaremos el Lema 4.3.1 que había quedado pendiente. **Demostración del lema:** La prueba se basa en interpolación bilineal. Para $l, l' \in I$ fijos, definimos el operador bilineal

$$T_{l,l'}(g, h) = (g\chi_l^\delta) * (h\chi_{l'}^\delta).$$

Por como construimos las χ_l^δ , sus soportes están contenidos en un rectángulo de lado $\simeq \delta$ en la dirección $e^{2\pi i \delta^{\frac{1}{2}} l}$ y lado $\delta^{\frac{1}{2}}$ en la dirección $ie^{2\pi i \delta^{\frac{1}{2}} l}$. Cualquiera dos rectángulos con estas dimensiones en las direcciones mencionadas tienen una intersección que depende del ángulo entre ellos. Si $l \neq l'$, esta intersección está contenida en un paralelogramo de lados δ y $\frac{\delta}{\sin(2\pi\delta^{\frac{1}{2}}|l-l'|)}$ y luego la medida es a lo sumo un múltiplo constante de $\frac{\delta^2}{\sin(2\pi\delta^{\frac{1}{2}}|l-l'|)}$.

Para l, l' en el conjunto de índices I tenemos $2\pi\delta^{\frac{1}{2}}|l-l'| < \frac{\pi}{4}$. Siendo que el seno es comparable a su argumento (Taylor), tenemos que la medida de la intersección es a lo sumo $C\delta^{\frac{3}{2}}(1+|l-l'|)^{-1}$. Se sigue que:

$$\|\chi_l^\delta * \chi_{l'}^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} = \sup_{z \in \mathbb{R}^2} |(z - \text{supp}(\chi_l^\delta)) \cap (\text{supp} \chi_{l'}^\delta)| \leq C\delta^{\frac{3}{2}}(1+|l-l'|)^{-1}.$$

Lo que implica que:

$$\begin{aligned}
\|T_{l,l'}(g, h)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &\leq \|\chi_l^\delta * \chi_{l'}^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\
&\leq C\delta^{\frac{3}{2}}(1+|l-l'|)^{-1} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

Además,

$$\|T_{l,l'}(g, h)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

vale trivialmente. Luego, usando interpolación bilineal (Ver [Gra09] ejercicio 1.4.17) obtenemos el resultado buscado.

Con esto terminamos la demostración del teorema. ■

Capítulo 5

Teorema de Stein-Tomas-Mockenhaupt

Mockenhaupt en su artículo [Moc00] generaliza el resultado ya conocido de Stein-Tomas para la esfera, al caso de subconjuntos de \mathbb{R}^d que no necesariamente sean hipersuperficies suaves, usando que en realidad en la demostración de Stein de los 70' lo que cumplía un rol relevante no era la curvatura en sí, sino que alcanza con pedirle a la medida que le pongamos a la superficie en cuestión, que su transformada tenga un cierto decaimiento. Este resultado nos permitirá estudiar el caso de subconjuntos de la recta real, que hasta ahora no tenía sentido ya que no tenemos una noción de curvatura no trivial sobre la recta. Con esto podremos estudiar el problema de restricción para conjuntos fractales por ejemplo, y para conjuntos con dimensión fraccionaria en general.

Teorema 5.0.1 (Mockenhaupt) *Sea μ una medida de soporte compacto en \mathbb{R}^d tal que:*

1. *Existe $\beta > 0$ tal que $|\widehat{\mu}(\xi)| \leq C|\xi|^{-\frac{\beta}{2}}$.*
2. *Existe $\alpha > 0$ tal que $\mu(B_r(x)) \leq Cr^\alpha$.*

Entonces, para $p < \frac{2(2d-2\alpha+\beta)}{4(d-\alpha)+\beta}$ se tiene

$$\left(\int |\widehat{f}|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \quad (5.1)$$

Observación 5.0.2 *Notemos que el teorema no nos dice nada acerca de que pasa cuando $p = \frac{2(2d-2\alpha+\beta)}{4(d-\alpha)+\beta}$. En el caso de la esfera, Stein probó en los 70' que también valía para el endpoint, pero en el caso general el problema estuvo abierto durante muchos años. Recién en 2011 Bak y Seeger [BS10] dieron una respuesta afirmativa a ese problema.*

Demostración: La demostración es básicamente la misma que el teorema de Stein, por eso haremos la prueba de este teorema que es más general, y después veremos que la medida estándar que se le da a la esfera cumple las hipótesis, por lo cuál el otro teorema será un caso particular de éste.

Observemos que por el método TT^* mencionado anteriormente, tenemos

$$\|\widehat{f}\|_{L_2(d\mu)}^2 \leq \|f * \widehat{d\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

donde p' es el exponente dual de p . Luego, para probar el teorema nos alcanza con probar que el operador de convolución $Tf = f * \widehat{d\mu}$ está acotado en $L^p \rightarrow L^{p'}$, para $p < \frac{2(2d-2\alpha+\beta)}{4(d-\alpha)+\beta}$.

Primero introduciremos una partición diádica de \mathbb{R}^d de la siguiente manera: Sea $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ una función radial tal que $\phi(x) = 1$ para $|x| < 1$ y $\text{sop}(\phi) \subset B(0, 2)$. Definimos $\psi_k(x) = \phi(\frac{x}{2^k}) - \phi(\frac{x}{2^{k-1}})$, de modo que tenemos

$$\begin{aligned}\psi_0(x) &= \phi(x) - \phi(2x) \\ \psi_1(x) &= \phi\left(\frac{x}{2}\right) - \phi(x) \\ \psi_2(x) &= \phi\left(\frac{x}{4}\right) - \phi\left(\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

y además

$$\psi_k(x) = \psi_0\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

Observemos que si

$$|x| < 2^{k-1} \implies \frac{|x|}{2^k} < \frac{1}{2} \quad y \quad \frac{|x|}{2^{k-1}} < 1 \implies \psi_k(x) = \psi_0\left(\frac{x}{2^k}\right) = 0$$

y

$$|x| > 2^{k+1} \implies \frac{|x|}{2^k} > 2 \quad y \quad \frac{|x|}{2^{k-1}} > 4 \implies \psi_k(x) = \psi_0\left(\frac{x}{2^k}\right) = 0.$$

Luego, el soporte de cada ψ_k está contenido en la corona

$$C_k = \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{k-1} < \|x\| < 2^{k+1}\}$$

Ahora, dado $x \in \mathbb{R}^d$, tenemos la siguiente identidad

$$\sum_{k>0} \psi_k(x) = -\phi(x) + \lim_{k \rightarrow \infty} \phi\left(\frac{x}{2^k}\right) = 1 - \phi(x).$$

Escribimos entonces

$$(f * \widehat{d\mu})(x) = \left(f * \left(\phi + \sum_{k>0} \psi_k\right) \widehat{d\mu}\right)(x) = f * (\phi \widehat{d\mu}) + \sum_{k>0} f * (\psi_k \widehat{d\mu}),$$

y usando la desigualdad triangular nos queda

$$\|f * \widehat{d\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq \underbrace{\|f * (\phi \widehat{d\mu})\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}}_A + \underbrace{\left\|\sum_{k>0} f * (\psi_k \widehat{d\mu})\right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}}_B.$$

Para acotar A basta observar que $\psi d\mu$ es una función C^∞ de soporte compacto, con lo cual está en cualquier L^q . Luego, podemos usar la desigualdad de Young con los exponentes $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{2}{p'} - 1$ y nos queda

$$\|f * (\phi \widehat{d\mu})\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|\phi \widehat{d\mu}\|_{L^{\frac{p'}{2}}(\mathbb{R}^d)}.$$

Ahora acotamos B . La idea va a ser acotar cada término de la suma con una cota como la siguiente:

$$\|f * (\psi_k \widehat{d\mu})\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq C 2^{-\xi k} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

con $\xi > 0$ tal que lo de la derecha nos quede sumable. El dos nos sale porque es una partición diádica y vamos a acotar todos a partir de ψ_0 . Una forma de encontrar una cota (p, p) es usar el teorema 2.1.1 de interpolación de Riez-Thorin entre una cota $(1, \infty)$ y una cota $(2, 2)$. La cota $(1, \infty)$ nos sale fácil usando el decaimiento de $\widehat{d\mu}$:

$$\|f * (\widehat{\phi d\mu})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|\psi_k \widehat{d\mu}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} 2^{-\frac{(k-1)\beta}{2}} \sim \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} 2^{-\frac{k\beta}{2}}$$

ya que $\text{sop}(\psi_k) \subset C_k$.

Veamos ahora la cota $(2, 2)$. Por la Proposición 2.5.1, para acotar la norma 2 de un operador de convolución, basta estimar la norma infinito de la transformada del núcleo del operador. En este caso el núcleo es $\psi_k \widehat{\mu}$, es decir, tenemos que controlar es

$$\|\widehat{\psi_k \widehat{d\mu}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

o lo que es lo mismo

$$\|\widehat{\psi_k} * d\mu\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

pues $\widehat{\psi_k \widehat{d\mu}} = \widehat{\psi_k} * \widehat{\widehat{d\mu}}$ y $\widehat{\widehat{d\mu}} = \widetilde{d\mu}$. Como la norma la tomamos sobre un conjunto con simetría radial en el 0 (\mathbb{R}^d), ambas normas coinciden, es decir

$$\|\widehat{\psi_k} * d\mu\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = \|\widehat{\psi_k} * \widetilde{d\mu}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

Acotemos entonces $|(\widehat{\psi_k} * d\mu)(\xi)|$. Empecemos por una acotación puntual para $\widehat{\psi_k}$. Como cada ψ_k es una dilatada de la función ψ_0 , resulta que

$$\widehat{\psi_k}(\xi) = 2^{dk} \widehat{\psi_0}(2^k \xi).$$

Además, ψ_0 está en la clase de Schwartz, con lo cuál $\widehat{\psi_0}$ también. Entonces dado $N \in \mathbb{N}$, existe una constante $C_N > 0$ tal que

$$|\widehat{\psi_0}(2^k \xi)| \leq C_N \frac{1}{(1 + 2^k |\xi|)^N},$$

y entonces

$$|\widehat{\psi_k}(\xi)| \lesssim \frac{2^{dk}}{(1 + 2^k |\xi|)^N}.$$

Para $j \geq 0$ definamos las bolas centradas en ξ : $B_j = B(\xi, 2^{j-k})$. Entonces

$$\begin{aligned} |(\widehat{\psi_k} * d\mu)(\xi)| &\leq C_N 2^{dk} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + 2^k |\xi - \omega|)^{-N} d\mu(\omega) \\ &\leq C_N 2^{dk} \int_{B_0} (1 + 2^k |\xi - \omega|)^{-N} d\mu(\omega) + C_N 2^{dk} \sum_{j \geq 0} \int_{B_{j+1} \setminus B_j} (1 + 2^k |\xi - \omega|)^{-N} d\mu(\omega) \\ &\lesssim C_N 2^{dk} \mu(B_0) + C_N 2^{dk} \sum_{j \geq 0} 2^{-jN} \mu(B_{j+1} \setminus B_j) \\ &\lesssim C_N 2^{dk} 2^{-k\alpha} + C_N 2^{dk} \sum_{j \geq 0} 2^{-jN} 2^{(j-k)\alpha}. \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos el crecimiento local de μ ($\mu(B_r(x)) \leq Cr^\alpha$). Si ponemos $N = d$, nos queda:

$$|(\widehat{\psi}_k * d\mu)(\xi)| \lesssim 2^{dk} \left(2^{-k\alpha} + 2^{-k\alpha} \sum_{j \geq 0} \frac{1}{2^{(d-\alpha)j}} \right)$$

de modo que

$$\|\widehat{\psi}_k(\xi)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C2^{k(d-\alpha)}.$$

Resumiendo, tenemos las dos acotaciones

$$\|f * (\psi \widehat{d\mu})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C2^{-\frac{\beta}{2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|f * (\psi \widehat{d\mu})\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C2^{k(d-\alpha)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Ahora podemos interpolar entre ambas cotas para obtener una acotación (p, p') (tomaremos $\theta = \frac{2}{p} - 1$) para cada término de la suma

$$\begin{aligned} \|f * (\psi \widehat{d\mu})\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} &\leq 2^{-k\frac{\beta}{2}\theta} 2^{k(d-\alpha)(1-\theta)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &= 2^{k(-\theta\frac{\beta}{2} + (1-\theta)(d-\alpha))} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &= 2^{k\left(\left(1-\frac{2}{p}\right)\frac{\beta}{2} + 2\left(1-\frac{1}{p}\right)(d-\alpha)\right)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Para que esto nos quede sumable, buscamos los valores de p que hacen que el exponente del 2 sea negativo, es decir, los p tales que

$$\left(1 - \frac{2}{p}\right) \frac{\beta}{2} + 2 \left(1 - \frac{1}{p}\right) (d - \alpha) < 0.$$

Nos queda

$$\frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{p} + 2(d - \alpha) - \frac{2}{p}(d - \alpha) < 0,$$

que es lo mismo que

$$-\frac{1}{p}(\beta + 2(d - \alpha)) < -2(d - \alpha) - \frac{\beta}{2} = \frac{4(d - \alpha) + \beta}{2}.$$

Luego, los valores de p buscados son aquellos tales que

$$\frac{1}{p} > \frac{4(d - \alpha) + \beta}{4(d - \alpha) + 2\beta}.$$

Con esto conseguimos acotar

$$\sum_{k > 0} \|f * (\psi_k \widehat{d\mu})\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Como además tenemos que

$$f * \widehat{\phi d\mu} + \sum_{k=0}^N f * (\psi_k \widehat{d\mu}) \xrightarrow{N} f * \widehat{d\mu} \quad \text{puntualmente,}$$

por el lema 2.2.6 (Fatou) nos queda que para la norma p' vale

$$\|f * \widehat{d\mu}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \|f * (\phi \widehat{d\mu})\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} + \sum_{k=0}^N \|f * (\psi_k \widehat{d\mu})\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

para todo p tal que $\frac{1}{p} > \frac{4(d-\alpha)+\beta}{4(d-\alpha)+2\beta}$.

5.1. Deduciendo el teorema de Stein-Tomas

En el Capítulo 3 mencionamos que el teorema de Stein-Tomas saldría como corolario de este. Veamos dos observaciones que nos permitirán probar esto:

Observación 5.1.1 *Para la medida usual de la esfera tenemos:*

$$\sigma(B_r(x)) \leq Cr^{d-1}$$

Para ver esto estudiaremos el área $(d-1)$ -dimensional de un casquete esférico, por ejemplo media esfera. Necesitaremos el siguiente teorema que nos permite calcular el área de superficies que son imagen de funciones suaves:

Teorema 5.1.2 *Sea $f : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Sea $S = \{x_d = f(x_1, \dots, x_{d-1})\} \subset \mathbb{R}^d$. Entonces el área $(d-1)$ -dimensional de S es:*

$$A(S) = \int (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}} dx_1 \dots dx_{d-1}$$

Demostración de la observación: Como media esfera puede ser pensando como la imagen de una función suave saliendo del disco de centro 0 y radio 1 contenido en \mathbb{R}^d , por el teorema anterior tenemos:

$$\begin{aligned} A(\mathbb{S}^{d-1}) &\leq 2 \int_{D_r(0)} C dx_1 \dots dx_{d-1} \\ &\leq 2Cr^{d-1} \end{aligned}$$

donde C es una constante positiva que viene de acotar $|\nabla f|$, que podemos hacerlo pues f es una función suave de soporte compacto. ■

Observación 5.1.3 *Sea $d\sigma$ la medida uniforme en \mathbb{S}^{d-1} . Entonces*

$$|\widehat{d\sigma}(\xi)| = O(|\xi|^{-\frac{d-1}{2}}).$$

Para una demostración ver el teorema (A.1.5) del apéndice.

Con esto podemos aplicar el teorema de Mockenhaupt al caso de la esfera tomando $\alpha = d-1 = \beta$. El rango que nos queda es:

$$p < \frac{2(2d - 2(d-1)) + (d-1)}{4(d - (d-1)) + (d-1)} = \frac{2d+2}{d+3}.$$

Observemos que esto no es lo que nos dice el teorema 3.2.6, ya que en ese caso lo enunciamos para el operador de extensión. Si buscamos en que rango se mueve p' nos queda

$$p' > \frac{2d+2}{d-1}$$

que es lo que queríamos ver.

Capítulo 6

Dimensión de Hausdorff y dimensión de Fourier

En este capítulo veremos los resultados de teoría de la medida que necesitaremos en el resto del trabajo. En particular, introduciremos dos nociones de dimensión, la dimensión de Hausdorff y la dimensión de Fourier, que nos serán útiles para definir los conjuntos de Salem que aparecerán en el capítulo siguiente. También daremos algunos ejemplos de conjuntos fractales que nos servirán para ilustrar qué significa que un conjunto pueda tener dimensión fraccionaria.

Comenzamos con algunas definiciones:

Definición 6.0.1 Sea Ω un conjunto. Decimos que μ es una medida en Ω si es una función $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ tal que:

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- $0 \leq \mu(A) \leq \infty \quad \forall A \subset \Omega$.
- $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonía).
- $\mu(\bigcup_k A_k) \leq \sum_k \mu(A_k)$ (σ -subaditividad).

Definición 6.0.2 $E \subset \Omega$ se dice medible si para todo $A \subset E, B \subset \Omega \setminus E$, vale

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Proposición 6.0.3 (Caratheodory) $E \subset \Omega$ es medible si y sólo si para todo $A \subset \Omega$ se tiene

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c).$$

Definición 6.0.4 Sea \mathcal{A} una colección de subconjuntos de Ω . Decimos que \mathcal{A} es una σ -álgebra si

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. $A \in \mathcal{A} \implies A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

3. Sea A_k una familia numerable de conjuntos tales que $A_k \in \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$.

Teorema 6.0.5 (Completitud de la medida) Si $M_\mu = \{E \subset \Omega : E \text{ es medible}\}$. Entonces M_μ es una σ -álgebra y los conjuntos $Z \in E$ tales que $\mu(Z) = 0$ están en M_μ .

Definición 6.0.6 Sea $\mathcal{C} \subset P(\Omega)$ con $\emptyset \in \mathcal{C}$ y sea $\mathcal{T} : P(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ una función. Decimos que \mathcal{T} es una premedida asociada a \mathcal{C} si

$$0 \leq \mathcal{T}(A) \leq \infty \quad \forall A \in \mathcal{C}, \quad \mathcal{T}(\emptyset) = 0.$$

Definición 6.0.7 Si \mathcal{A} es una σ -álgebra y μ una medida en Ω , μ se dice regular con respecto a \mathcal{A} si

$$\forall A \in P(\Omega), \exists E \in \mathcal{A} \text{ tal que } A \subset E \text{ y } \mu(A) = \mu(E).$$

Observemos que si $\mathcal{A} = M_\mu$, entonces μ resulta regular.

Definición 6.0.8 Llamaremos σ -álgebra de Borel a la menor σ -álgebra que contiene a los abiertos, a notaremos \mathcal{B} . Si μ es una medida tal que $\mathcal{B} \subset M_\mu$, diremos que μ es una medida boreliana.

Definición 6.0.9 Sea μ una medida en Ω . Decimos que μ es una medida de Radon si es Boreliana y cumple las siguientes condiciones:

1. $\mu(K) < \infty \quad \forall K \subset \Omega$ compacto.
2. $\mu(V) = \sup\{\mu(K) : K \subset V, K \text{ compacto}\}$ para $V \subset \Omega$ abierto.
3. $\mu(A) = \inf\{\mu(V) : A \subset V, V \text{ abierto}\}$ para $A \subset \Omega$.

Vamos a ver dos métodos de construcción de medidas a partir de premedidas.

6.1. Método I:

Dada \mathcal{T} premedida asociada a un conjunto \mathcal{C} , definimos

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_k \mathcal{T}(C_k) : A \subset \bigcup_k C_k, C_k \in \mathcal{C} \right\},$$

donde el ínfimo lo tomamos sobre todos los cubrimientos C_k de A con $C_k \in \mathcal{C}$

Proposición 6.1.1 μ es una medida

Demostración:

- $0 \leq \mu(A) \leq \infty$ pues \mathcal{T} lo cumple por ser premedida.
- Como $\mathcal{T}(\emptyset) = 0$ por ser premedida y $\emptyset \in \mathcal{C}$, $\mu(\emptyset) = 0$.

- Si $A \subset B$ entonces cualquier cubrimiento de B es cubrimiento de A , luego tenemos monotonía.
- Si $A = \cup_j A_j$, dado $\{C_{j_k}\}_k$ cubrimiento de A_j , $\{C_k\} = \{C_{j_k}\}_{j,k}$ es un cubrimiento de A , con lo cuál

$$\mu(A) \leq \sum_{j,k} \mathcal{T}(C_{j_k}).$$

Para cada j buscamos cubrimientos $\{C_{j_k}\}_k$ tales que:

$$\sum_k \mathcal{T}(C_{j_k}) \leq \mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Juntando las dos ecuaciones anteriores nos queda:

$$\begin{aligned} \mu(A) &\leq \sum_{j,k} \mathcal{T}(C_{j_k}) \\ &= \sum_j \sum_k \mathcal{T}(C_{j_k}) \\ &\leq \sum_j \left(\mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j} \right) \\ &\leq \sum_j \mu(A_j) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como esta desigualdad podemos probarla para todo ϵ , resulta

$$\mu(A) \leq \sum_j \mu(A_j),$$

como queríamos ver. ■

Ejemplo 6.1.2 La medida de Lebesgue \mathcal{L}^d en \mathbb{R}^d se construye usando el Método I tomando

$$\mathcal{T} : \left\{ \prod_{k=1}^d [a_k, b_k] \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{T} \left(\prod_{k=1}^d [a_k, b_k] \right) = \prod_{k=1}^d (b_k - a_k).$$

Teorema 6.1.3 Sean \mathcal{F} una σ -álgebra de conjuntos en Ω y ν una función σ -aditiva sobre \mathcal{F} . Si $\lambda(A) = \inf \sum_k \nu(C_k)$, $A \subset \bigcup C_k$ con $C_k \in \mathcal{F}$, entonces

- λ extiende a ν ($\lambda(F) = \nu(F) \forall F \in \mathcal{F}$).
- λ es regular, $\lambda(A) = \inf \{ \nu(F) : F \in \mathcal{F}, A \subset F \}$ y el ínfimo se alcanza.

Demostración: Sea $F \in \mathcal{F}$, entonces $\lambda(F) \leq \nu(F)$. Por otro lado, si $\{E_k\}_k$ cubrimiento de F , entonces $\nu(F) \leq \sum_k \nu(E_k)$ (ν es σ -aditiva). Luego, $\nu(F) \leq \inf \sum_k \nu(E_k) =$

$\lambda(F)$.

Tenemos que $A \subset E = \cup E_k \in \mathcal{F}$, entonces

$$\lambda(A) \leq \lambda(E) = \nu(E) \leq \sum_k \nu(E_k),$$

es decir,

$$\forall A, \exists E \in \mathcal{F} \text{ tal que } \lambda(A) \leq \lambda(E) \leq \sum_k \nu(E_k).$$

Luego,

$$\lambda(A) \leq \inf\{\nu(E) : E \in \mathcal{F}\}.$$

Veamos ahora que λ es regular, dado $A \in P(\Omega)$ queremos ver que existe $E \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) = \mu(E)$. Para ello vamos a separar en dos casos:

- $\lambda(A) = \infty$: tomamos $E = \Omega$. Como $\lambda(E) \geq \lambda(A) = \infty$, resulta $\lambda(E) = \lambda(A)$
- $\lambda(A) < \infty$: Construiremos E como la intersección de E_k definidos de manera recursiva. Dado $n \in \mathbb{N}$, tomamos $E_n \in \mathcal{F}$ tal que

$$\nu(E_n) < \lambda(A) + \frac{1}{n} \text{ y } A \subset E_{n+1} \subset E_n.$$

Tomando $E = \cap_k E_k$, tenemos:

$$\nu(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(E_k) \leq \lambda(A).$$

y entonces $\nu(E) = \lambda(A)$. Luego λ es \mathcal{F} -regular. ■

Veamos ahora le segundo método para construir medidas a partir de premedidas introducido por Caratheodory:

6.2. Método II:

Un par de definiciones antes de arrancar con la construcción:

Definición 6.2.1 Sea (X, d) un espacio métrico. Dado $E \subset X$ definimos el diámetro de E como

$$\text{diam}(E) = \sup\{d(x, y) : x, y \in E\}.$$

Definición 6.2.2 Sea (X, d) un espacio métrico. Dado $E \subset X$, un δ -cubrimiento de E es una familia $\{C_k\}_k$ tal que $\bigcup C_k \supset E$, $\text{diam}(C_k) \leq \delta$.

Ahora si pasemos a la construcción de la medida. Sea $\mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ una premedida. Dado $\delta > 0$ definimos

$$\mu_\delta(E) = \inf \left\{ \sum \mathcal{T}(C_k) : \{C_k\}_k \text{ } \delta\text{-cubrimiento} \right\}.$$

Observemos que μ_δ así definida resulta una medida. Además, dados $\delta_1 \leq \delta_2$, tenemos

$$\mu_{\delta_1}(E) \geq \mu_{\delta_2}(E)$$

pues si $\{C_k\}_k$ es δ_1 -cubrimiento, entonces $\{C_k\}_k$ es δ_2 -cubrimiento. Ahora definimos

$$\mu(E) = \sup_{\delta > 0} \mu_\delta(E),$$

o equivalentemente,

$$\mu(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mu_\delta(E).$$

6.3. Medida de Hausdorff

Sea $\mathcal{C} = \{ \text{Abiertos de } \mathbb{R}^d \}$. Definimos $\mathcal{T}_s : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$ como $\mathcal{T}_s(C) = \text{diam}(C)^s$, una premedida. Construimos \mathcal{H}^s utilizando el método II a partir de la premedida \mathcal{T}_s , es decir, dado $\delta > 0$ construimos

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_k \text{diam}(C_k)^s : E \subset \bigcup C_k, \text{diam}(C_k) < \delta \right\},$$

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(E).$$

donde para el caso $\delta = \infty$, \mathcal{H}_∞^s es lo que se conoce como contenido de Hausdorff, y lo construimos de la misma manera pero sin poner restricción al diámetro de los cubrimientos. Ahora que para cada s construimos \mathcal{H}^s podríamos preguntarnos como se comparan las distintas medidas. Supongamos que $0 < s < t$ ¿Cuál es la relación entre \mathcal{H}_δ^s y \mathcal{H}_δ^t ? Sea $\{C_k\}_k$ un δ -cubrimiento de E

$$\sum_k \text{diam}(C_k)^t = \sum_k \text{diam}(C_k)^{t-s} \text{diam}(C_k)^s \leq \delta^{t-s} \sum_k \text{diam}(C_k)^s.$$

Esto nos da la siguiente desigualdad:

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \delta^{s-t} \mathcal{H}_\delta^t(E).$$

Esto nos permite concluir lo siguiente:

- Si $\mathcal{H}^t(E) > 0$, entonces $\mathcal{H}^s(E) = \infty$ si $s < t$.
- $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, entonces $\mathcal{H}^t(E) = 0$ si $t > s$.

Esto nos da una idea de donde viene el concepto que vamos a definir a continuación, la dimensión de Hausdorff. Para darnos una idea del tamaño de un conjunto vamos a tratar de estimar el valor de s para el cuál las medidas \mathcal{H}^s dan ese "salto". Definamos

$$s_0 = \sup_{s \geq 0} \{ \mathcal{H}^s(E) = \infty \} = \inf_{s \geq 0} \{ \mathcal{H}^s(E) = 0 \},$$

s_0 es lo que llamaremos dimensión de Hausdorff ($\dim_{\mathcal{H}}(E)$). Puede tomar valores entre 0 e ∞ . En caso de que $0 < \mathcal{H}^{s_0}(E) < \infty$, diremos que E es un s_0 -set. Puede ser que para algún conjunto, para ningún s_0 pase que la medida sea finita y positiva.

En el siguiente lema vamos a probar que este concepto de dimensión se “porta bien” con la dimensión del espacio ambiente, es decir, la dimensión de Hausdorff de un conjunto dado, no puede ser mayor que la dimensión del espacio en el que está inmerso.

Lema 6.3.1 $\forall E \subset \mathbb{R}^d$, se cumple que $\dim_{\mathcal{H}}(E) \leq d$.

Demostración: Sea $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^d$ cubo de lado 1. Tomemos $\delta = \frac{1}{n}$, entonces existen n^d "cubitos" \mathcal{Q}_i de lado δ tales que $\cup_{i=1}^n \mathcal{Q}_i \supset \mathcal{Q}$. Entonces

$$\mathcal{H}_{\delta}^d(\mathcal{Q}) \leq n^d \left(\sqrt[d]{d} \frac{1}{n}\right)^d = d^{\frac{d}{2}}.$$

Con lo cuál, $\mathcal{H}^d(\mathcal{Q}) < \infty$, y entonces $\mathcal{H}^s(\mathcal{Q}) = 0 \forall s > d$.

Como dado $E \subset \mathbb{R}^d$ siempre puedo encontrar una familia de cubos tal que $E \subset \cup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}_k$. Entonces como \mathcal{H}^s es σ -subaditiva, vale que $\mathcal{H}^s(E) = 0 \forall s > d$. Luego, $\dim_{\mathcal{H}}(E) \leq d$. ■

En el caso $d > 1$ tenemos la siguiente relación entre la medida de Hausdorff y la de Lebesgue

$$|E| = c_d \mathcal{H}^d(E)$$

donde notamos con $|E|$ a la medida de Lebesgue del conjunto E y c_d es el volumen de la bola de diámetro 1 en \mathbb{R}^d . Para una demostración ver [Fal86].

6.3.1. Conjunto ternario de Cantor

Ahora introduciremos el conjunto ternario de Cantor (que más adelante va a servir de base para la construcción de otros conjuntos que usaremos en la demostración de la optimalidad del rango de exponentes en el teorema de Mockenhaupt) y calcularemos su dimensión de Hausdorff (¡La cual no es entera!).

Consideremos la siguiente familia de subconjuntos del intervalo $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} F_0 &= [0, 1] \\ F_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\ F_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned}$$

Observemos que podemos escribir a cada F_j de la siguiente manera:

$$F_j = \cup_{i=1}^{2^j} F_j^i$$

pues cada conjunto F_j se obtiene dividiendo cada intervalo $F_{j-1}^i \subset F_{j-1}$ en tres partes y removiendo el intervalo abierto central. Cada conjunto F_j está compuesto por 2^j intervalos de longitud 3^{-j} . El conjunto ternario de Cantor se define como

$$C = \bigcap_{j=0}^{\infty} F_j$$

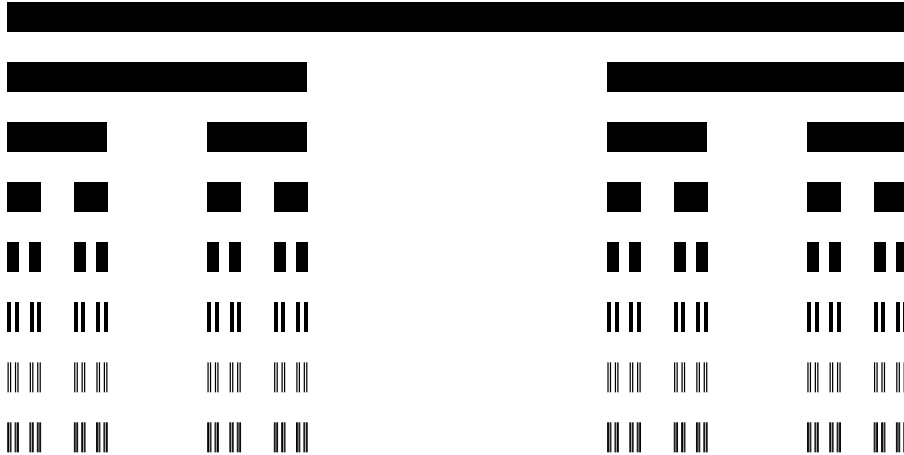


Figura 6.1: Primeros ocho pasos de la construcción del Cantor ternario

Notemos que por como lo construimos, el conjunto de puntos está conformado, salvo un conjunto numerable de puntos (los extremos del intervalo del medio de cada paso de la construcción), por los números del intervalo $[0, 1]$ cuya expresión en base 3 no requiere el uso del dígito 1. Otra observación es que dados dos intervalos cualesquiera (no necesariamente del mismo paso de la construcción) o son disjuntos o están contenidos uno en el otro. Ahora el teorema importante de esta sección:

Teorema 6.3.2 *Sea C el conjunto ternario de Cantor. Entonces*

$$\dim_{\mathcal{H}}(C) = \frac{\log 2}{\log 3} = \log_3 2.$$

Demostración: Usualmente es más fácil encontrar una cota superior que una inferior para la medida de Hausdorff. Esto es por como está definida, un cubrimiento bien elegido nos dará una cota superior, pero para probar una cota inferior hay que calcular un ínfimo sobre cubrimientos arbitrarios.

Primero haremos la parte fácil, es decir, encontrar una cota superior. Sea $s = \frac{\log 2}{\log 3}$, veremos que $\mathcal{H}^s(C) \leq 1$. Como C puede ser cubierto con los 2^j intervalitos de longitud 3^{-j} del paso j , es decir, los que forman a F_j , vemos que

$$\mathcal{H}_{3^{-j}}^s(C) \leq 2^j 3^{-js} = 2^j 2^{-j} = 1,$$

y haciendo tender j a infinito tenemos que $\mathcal{H}^s(C) \leq 1$ y, por lo tanto, $\dim_{\mathcal{H}}(C) \geq s$. Veamos ahora que $\mathcal{H}^s(C) > 0$. Más precisamente, probaremos que $\mathcal{H}^s(C) \geq 1/4$. Como estamos en \mathbb{R} alcanza con probar que

$$\sum_j \text{diam}(I_j)^s \geq \frac{1}{4} \quad (6.1)$$

siempre que $\{I_1, I_2, \dots\}$ sea un cubrimiento por intervalos abiertos de C . Como C es compacto, podemos asumir que son finitos los intervalos del cubrimiento. Como C no tiene puntos interiores, podemos asumir que los extremos de los intervalos I_j no caen en C , agrandando los I_j de ser necesario. Entonces, como hay finitos intervalos, existe un $\delta > 0$ tal que las distancias de todos estos extremos a C es al menos δ . Tomando j suficientemente grande tal que $\delta > \frac{1}{3^j} = \text{diam}(F_j^i)$, tenemos que cada F_j^i está contenido en algún I_k . Ahora probaremos que dado un intervalo abierto I cualquiera y un l fijo se tiene

$$\sum_{F_l^i \subset I} \text{diam}(F_l^i)^s \leq 4 \text{diam}(I)^s. \quad (6.2)$$

Esto probaría (6.1) ya que

$$\begin{aligned} 4 \sum_j \text{diam}(I_j)^s &\geq \sum_j \sum_{F_k^i \subset I_j} \text{diam}(F_k^i)^s \\ &\geq \sum_{i=1}^{2^k} \text{diam}(F_k^i)^s = 1. \end{aligned}$$

Probemos ahora que vale (6.2): Supongamos que hay algunos intervalos $F_l^i \subset I$ y sea n el natural más pequeño tal que I contiene un intervalo de la forma F_n^i , entonces $n \leq l$. Sean $F_n^{j_1}, \dots, F_n^{j_p}$ todos los intervalos de la n -ésima generación que intersecan a I . Entonces $p \leq 4$ pues si no, I contendría un intervalo de la generación $n - 1$. Luego,

$$\begin{aligned} 4 \text{diam}(I)^s &\geq \sum_{m=1}^p \text{diam}(F_n^{j_m})^s \\ &\geq \sum_{m=1}^p \sum_{F_l^i \subset F_n^{j_m}} \text{diam}(F_l^i)^s \\ &\geq \sum_{F_l^i \subset I} \text{diam}(F_l^i)^s, \end{aligned}$$

donde en la penúltima desigualdad usamos que elevar a la $0 \leq s \leq 1$ es una función cóncava. ■

6.4. Ejemplos de fractales

Históricamente la definición de qué es un fractal ha sido motivo de controversia, y varía según la fuente que se consulte. Una definición informal (y la que vamos a usar en esta

parte) podría ser que los fractales son aquellos conjuntos que al hacerles zoom, nos encontramos con el mismo conjunto pero a una escala distinta, esta propiedad es conocida como “autosimilaridad”. En la sección anterior vimos uno de los fractales más clásicos, el Cantor ternario. Es claro que este cae dentro de nuestra definición de fractal ya que lo construimos como la iteración de un mismo proceso: en cada paso cortamos en tres partes y sacamos la del medio. En la actualidad suele llamarsele fractal a cualquier conjunto cuya dimensión sea fraccionaria.

Uno podría preguntarse por qué nos interesan los fractales y estudiar sus propiedades, la siguiente frase de Mandelbrot contiene algunas de las razones: “Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line.”(Mandelbrot, 1982: Introducción a *The Fractal Geometry of Nature*).

En esta sección veremos los ejemplos de fractales más clásicos y cuál es su dimensión de Hausdorff, que generalmente va a ser fraccionaria pero no siempre es el caso.

Introduciremos una nueva noción de dimensión que nos dará una heurística para estimar el tamaño de los fractales más clásicos.

Definición 6.4.1 Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto tal que existe una descomposición $A = \cup_{i=1}^m A_i$ con los A_i “geométricamente similares” a A , pero reescalados por un factor c_i . Definimos $\dim_{\text{Fract}}(A)$ como el s tal que

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1.$$

En el caso del Cantor ternario tenemos $2 \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1$, con lo cual, $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Para los casos que nos van a interesar, esta nueva noción de dimensión coincide con la de Hausdorff, así que nos dará una heurística relativamente fácil para calcular esta última. Para un estudio más riguroso de esto (usando sistemas iterados de funciones) ver el Capítulo 9 de [Fal03].

6.4.1. Triángulo de Sierpinski

El triángulo de Sierpinski es un conjunto fractal que lleva el nombre del matemático polaco Waclaw Sierpinski, quién lo estudió a principios del siglo 20. Ya mucho antes de eso, iteraciones finitas de esta construcción se utilizaban con fines decorativos.

Para construirlo empezamos por un triángulo equilátero y lo subdividimos en cuatro triángulos equiláteros de igual tamaño, y sacamos el del medio. Con los triángulos restantes repetimos el proceso. En la imagen se pueden ver las primeras seis iteraciones de la construcción:

Para darnos una idea del tamaño de este conjunto podemos calcular su dimensión fractal como vimos al principio de esta sección. En este caso la figura inicial la dividimos en tres copias reescaladas por un factor $\frac{1}{2}$, la dimensión fractal saldrá de encontrar s tal que $2^s = 3$, es decir, $\dim_{\text{Fract}}(S) = \frac{\log 3}{\log 2}$.

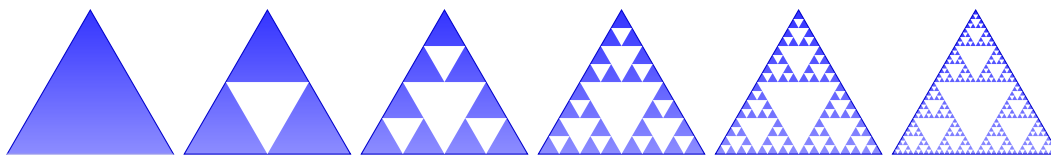


Figura 6.2: Primeras seis iteraciones de la construcción del triángulo de Sierpinski

6.4.2. Copo de nieve de Koch

El copo de nieve de Koch es uno de los primeros fractales que se estudiaron. Lleva el nombre del matemático sueco Helge Von Koch, que fue el que introdujo lo que hoy se conoce como curva de Koch, el copo de nieve serán tres curvas de estas unidas.

Veamos ahora como es la construcción del copo de nieve. Empezamos dibujando un triángulo equilátero y a cada una de los segmentos que forman el triángulo le aplicamos recursivamente lo siguiente:

- Dividimos el segmento en tres partes iguales.
- Dibujamos un triángulo equilátero que tiene por base al segmento del medio del paso anterior y apunta hacia afuera de la figura.
- Removemos la base del triángulo construido en el paso anterior.

El copo de nieve de Koch es el conjunto que se forma en el límite al seguir recursivamente la construcción dada más arriba.

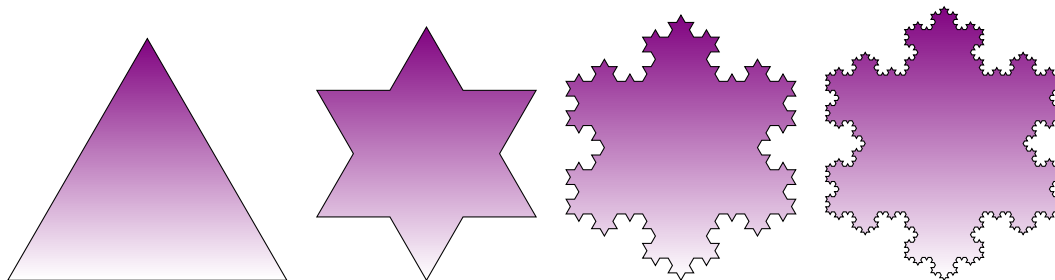


Figura 6.3: Primeros cuatro pasos en la construcción del copo de nieve de Koch

Puede probarse que el área del copo de nieve es $\frac{8}{5}$ del área del triángulo original, pero su perímetro es infinito. Con lo cuál, el copo de nieve tiene un área finita encerrada por una curva infinitamente larga. Una forma de entender este fenómeno va a ser a través de calcular su dimensión fractal: Este caso no es tan fácil como el anterior, ya que el copo de nieve no está formado por copias exactas de si mismo. Para poder averiguar su dimensión observaremos que la dimensión de lo que se transforman los segmentos del triángulo inicial tendrá que ser la misma que la de todo el copo de nieve. Ahora bien, el segmento inicial se transforma en el siguiente paso en cuatro segmentos con longitud $\frac{1}{3}$ de la longitud del

inicial. Luego, la dimensión fractal del copo de nieve será el s tal que $3^s = 4$, es decir

$$\dim_{Frac}(\text{Copo de nieve}) = \frac{\log 4}{\log 3}$$

Con esto vemos que tiene sentido que el perímetro de la curva sea infinito, ya que su dimensión es mayor que la de una recta.

6.4.3. Curva de Hilbert

La curva de Hilbert es una curva fractal continua que fue primeramente descrita por Hilbert en 1891 como una variante de las curvas descritas por Peano que recubren el plano. En la siguiente figura podemos ver los cinco primeros pasos de la construcción:

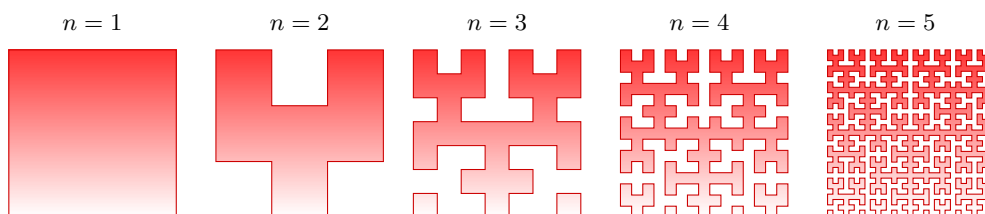


Figura 6.4: Primeros cinco pasos en la construcción de la curva de Hilbert

Como la imagen de la curva cubre todo el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, su dimensión de Hausdorff es 2 (al igual que el cuadrado unitario). En este ejemplo vemos que la dimensión topológica (que en este caso sería 1 por ser una curva), no necesariamente coincide con la dimensión de Hausdorff.

6.5. Dimensión de Fourier

Esta sección estará dedicada a introducir una nueva noción de dimensión: la dimensión de Fourier, que está relacionada con el decaimiento de la transformada de Fourier de medidas soportadas en el conjunto. Seguiremos el Capítulo 8 del libro de Mattila [Mat95].

6.5.1. Energía

Una condición de “regularidad” que frecuentemente se impone sobre las medidas de Radon es que no haya mucha medida concentrada en pequeñas regiones. Esto puede expresarse por ejemplo por medio de la condición de crecimiento dada por

$$\mu(B(x, r)) \leq cr^s \text{ para } x \in \mathbb{R}^d, 0 < r < \infty \quad (6.3)$$

donde s y c son números positivos. También puede expresado por la finitud de la t -energía:

$$I_t(\mu) = \int \int |x - y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y) < \infty \quad (6.4)$$

Veremos que (6.3) y (6.4) están relacionadas entre sí y también con la dimensión de Hausdorff.

Para darnos una idea de qué significan estas dos condiciones sobre la medida, consideremos μ como la medida de Lebesgue en \mathbb{R} restringida al $[0, 1]$. Entonces es fácil ver que (6.3) se cumple si y sólo si $s \leq 1$ y (6.4) se cumple si y sólo si $t < 1$. Más difícil es ver que estas dos cotas valen si reemplazamos μ por cualquier otra medida de Radon no negativa. En ambos casos s y t están acotados por 1, la dimensión de Hausdorff del $[0, 1]$, y eso no es una coincidencia. Más adelante vamos a volver a esto.

Comparemos ahora las condiciones (6.3) y (6.4) entre sí. Para ello vamos a necesitar el siguiente teorema:

Teorema 6.5.1 *Sea μ una medida de Borel y sea f una función Boreliana no negativa en un espacio métrico separable Ω , entonces*

$$\int f d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \in \Omega : f(x) \geq t\}) dt.$$

Para una demostración ver el teorema 1.15 de [Mat95].

Usando el teorema 6.5.1, tenemos

$$\begin{aligned} \int |x - y|^t d\mu(y) &= \int_0^\infty \mu(\{y : |x - y|^{-t} \geq v\}) dv \\ &= \int_0^\infty \mu(B(x, v^{-\frac{1}{t}})) \\ &= t \int_0^\infty r^{-t-1} \mu(B(x, r)) dr. \end{aligned}$$

donde en el último paso hicimos un cambio de variables. Si $\mu(\mathbb{R}^d) < \infty$ y para algún $s > t$, se cumple

$$\mu(B(x, r)) \leq cr^s \text{ para } x \in \mathbb{R}^d, r > 0,$$

es claro que $I_t(\mu) < \infty$. Por otro lado, si $I_s(\mu) < \infty$, no necesariamente vale (6.3). Pero si se cumple para una restricción apropiada de μ , como veremos a continuación. Asumiendo que

$$0 < \mu(\mathbb{R}^d) < \infty,$$

el conjunto de Borel

$$A = \{x : \int |x - y|^{-s} d\mu(y) \leq M\}$$

tiene medida μ positiva para algún M . Si $\nu = \mu|_A$, entonces

$$r^{-s} \nu(B(x, r)) \leq \int_{B(x, r)} |x - y|^{-s} d\nu(y) \leq M \text{ para } x \in A, r > 0.$$

Para ver que ν realmente satisface (6.3), sea $x \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$. Si $B(x, r) \cup A = \emptyset$, $\nu(B(x, r)) = 0$. Si existe $z \in B(x, r)$, por lo de arriba tenemos

$$r^{-s} \nu(B(x, r)) \leq 2^s (2r)^{-s} \nu(B(z, 2r)) \leq 2^s M.$$

Un poco de notación: Dado $A \subseteq \mathbb{R}^d$, definimos

$$\mathcal{M}(A) = \{\mu : \mu \text{ es una medida de Radon con soporte compacto, } \text{supp } \mu \subseteq A \text{ y } 0 < \mu(\mathbb{R}^d) < \infty\}$$

Con esto vamos ahora a definir la dimensión capacitaria:

Definición 6.5.2 *La dimensión capacitaria de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^d$ es*

$$\begin{aligned} \dim_c(A) &= \sup\{s : \exists \mu \in \mathcal{M}(A) \text{ con } \mu(B(x, r)) \leq r^s \text{ para } x \in \mathbb{R}^d, r > 0\} \\ &= \sup\{t : \exists \mu \in \mathcal{M}(A) \text{ con } I_t(\mu) < \infty\} \end{aligned}$$

Donde interpretamos al supremo como 0 en caso que no exista ningún s o t que cumpla la condición respectiva. Observemos que de la discusión previa a la definición se desprende que ambas definiciones coinciden.

6.5.2. Capacidades y medidas de Hausdorff

También podemos definir la dimensión capacitaria a partir de funciones de conjuntos llamadas capacidades de Riez:

Definición 6.5.3 *Sea $s > 0$. La s -capacidad de Riez de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^d$ se define como*

$$C_s(A) = \sup\{I_s(\mu)^{-1} : \mu \in \mathcal{M}(A) \text{ con } \mu(\mathbb{R}^d) = 1\}$$

donde interpretamos $C_s(\emptyset) = 0$

Mezclando las definiciones anteriores llegamos al siguiente resultado:

Teorema 6.5.4 *Para $s > 0$ y $A \subseteq \mathbb{R}^d$, vale que*

$$\dim_c(A) = \sup\{s : C_s(A) > 0\} = \inf\{s : C_s(A) = 0\}.$$

Ahora vamos a ver dos teoremas que nos van a ayudar a probar un resultado que relaciona la medida de Hausdorff y la capacidad de conjuntos Borelianos.

Teorema 6.5.5 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Entonces*

1. Si $s > 0$ y $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, entonces $C_s(A) = 0$.
2. $\dim_c(A) \leq \dim_{\mathcal{H}}(A)$.

Demostración:

1. Supongamos que $C_s(A) > 0$. Entonces existe $\mu \in \mathcal{M}(A)$ con $\mu(A) = 1$ y $I_s(\mu) < \infty$. Entonces $\int |x - y|^{-s} d\mu(y) < \infty$ μ -a.e. $x \in \mathbb{R}^d$. Para esos x ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x, r)} |x - y|^{-s} d\mu(y) = 0.$$

Con lo cuál, dado $\epsilon > 0$, existen $B \subseteq A$ y $\delta > 0$ tales que $\mu(B) > \frac{1}{2}$ y

$$\mu(B(x, r)) \leq r^s \int_{B(x, r)} |x - y|^{-s} d\mu(y) \leq \epsilon r^s.$$

para $x \in B$ y $0 < r \leq \delta$.

Ahora elegimos conjuntos E_1, E_2, \dots tales que

$$B \subseteq \bigcup_i E_i, \quad B \cap E_i \neq \emptyset, \quad \text{diam}(E_i) \leq \delta$$

y

$$\sum_i \text{diam}(E_i)^s \leq \mathcal{H}^s(A) + 1.$$

que existen pues $H^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A)$. Eligiendo $x_i \in B \cap E_i$ y tomando $r_i = \text{diam}(E_i)$, tenemos

$$\frac{1}{2} < \mu(B) \leq \sum_i \mu(B(x_i, r_i)) \leq \epsilon \sum_i r_i^s \leq \epsilon(\mathcal{H}^s(A) + 1).$$

Haciendo tender ϵ a 0 vemos que $\mathcal{H}^s(A) = \infty$, lo que prueba (1).

(2) se sigue inmediatamente de (1) ■

Ahora vamos a enunciar sin demostración un resultado clásico de la teoría de la medida conocido como Lema de Frostman. Para una prueba del lema para conjuntos F_δ (unión numerable de cerrados), ver [Mat95]. El lema vale también en casos más generales, por ejemplo para conjuntos Borelianos. Para ver una demostración del caso general ver [BP16].

Teorema 6.5.6 *Sea B un conjunto de Borel en \mathbb{R}^d . Entonces $\mathcal{H}^s(B) > 0$ si y sólo si existe $\mu \in \mathcal{M}(B)$ tal que $\mu(B(x, r)) \leq r^s$ para $x \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$. Más aún, podemos encontrar μ tal que $\mu(B) \leq c\mathcal{H}_\infty^s(B)$ donde la constante $c > 0$ depende sólo de d .*

Vamos a probar un teorema que nos da mayor información acerca de como se relacionan la medida de Hausdorff y la capacidad de conjuntos Borelianos. Este teorema además resulta útil para acotar por abajo la dimensión de Fourier de muchos conjuntos.

Teorema 6.5.7 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^d$ conjunto de Borel. Entonces*

1. Si $s > 0$ y $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, entonces $C_s(A) = 0$.
2. Si $s > 0$ y $C_s(A) = 0$, entonces $\mathcal{H}^t(A) = 0$ para $t > s$.
3. $\dim_c(A) = \dim_{\mathcal{H}}(A)$.

Demostración: (1) es el ítem (1) del teorema 6.5.5.

Si $\mathcal{H}^t(A) > 0$, el lema de Frostman (teorema 6.5.6), tenemos que existe $\mu \in \mathcal{M}(A)$ tal que $\mu(B(x, r)) \leq r^t$. Como ya vimos, esto implica que para $0 < s < t$, $I_s(\mu) < \infty$. Luego, tenemos $C_s(A) > 0$, y esto implica (2)

(3) es una consecuencia inmediata de (1) y (2). ■

6.5.3. Transformada de Fourier y energías

En esta sección estudiaremos la relación entre la transformada de Fourier y las energías. Las energías van a hacer de nexo entre las áreas centrales de las que hacemos estudio en esta tesis: el análisis armónico y la teoría de la medida.

El siguiente lema nos muestra como calcular la energía de una medida μ a partir de conocer su transformada de Fourier:

Lema 6.5.8 *Sea μ una medida de Radon en \mathbb{R}^d con soporte compacto. Entonces para $0 < s < d$ se tiene,*

$$I_s(\mu) = (2\pi)^{-d} c(s, d) \int |x|^{s-d} |\widehat{\mu}(x)|^2 dx$$

donde $c(s, d)$ es una constante que depende sólo de s y d .

Para una demostración ver el lema 12.12 de [Mat95] La fórmula dada por el lema anterior y la discusión que hicimos en la sección anterior de la relación entre las capacidades y la dimensión de Hausdorff nos muestran que podemos calcular la dimensión de Hausdorff de un conjunto de Borel A a partir del estudio del comportamiento de la transformada de Fourier de medidas soportadas en A . Más precisamente, la dimensión de Hausdorff de A está dada por el supremo de los s tales que existe una medida de Radon μ con

$$\text{supp } \mu \subseteq A, \mu(A) = 1 \text{ y } \int |x|^{s-d} |\widehat{\mu}(x)|^2 dx < \infty.$$

Que la integral $\int |x|^{s-d} |\widehat{\mu}(x)|^2 dx$ sea finita nos dice que para “casi todo” x con norma grande se tiene

$$|\widehat{\mu}(x)| \leq c|x|^{-\frac{s}{2}}, \quad (6.5)$$

pero no necesariamente se cumple esto para todo x . De hecho, ese requerimiento da lugar a otra dimensión: la dimensión de Fourier. La definición formal de la dimensión de Fourier es la siguiente:

Definición 6.5.9 *Sea $E \in \mathbb{R}^d$. Definimos la dimensión de Fourier de E como*

$$\dim_F(E) = \sup\{0 < \beta < d : \exists \mu \in \mathcal{M}(E), |\widehat{\mu}(\xi)| \leq C|\xi|^{-\beta/2}\}.$$

Ahora veremos, usando energías, cuál es la relación entre esta nueva dimensión que acabamos de definir y la dimensión de Hausdorff.

Proposición 6.5.10 *Sea $E \subset \mathbb{R}^d$. Entonces,*

$$\dim_F(E) \leq \dim_{\mathcal{H}}(E).$$

Demostración: Si $|\widehat{\mu}(\xi)| \leq C|\xi|^{-\frac{\beta}{2}}$, por el lema 6.5.8, tenemos

$$I_s(\mu) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{-\beta+s-n} d\xi < \infty \quad \forall s < \beta,$$

y luego, $\dim_{\mathcal{H}}(E) \geq \beta$. ■

Esto nos dice que un conjunto chico no puede soportar una medida μ con mucho decaimiento para $\widehat{\mu}$.

Observemos que dado un conjunto E de dimensión de Hausdorff β , no necesariamente vale que E soporte una medida μ con decaimiento para su transformada. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 6.5.11 Sea $E = [0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Vale que $\dim_F(E) < \dim_{\mathcal{H}}(E) = 1$.

Es claro que $\dim_{\mathcal{H}}(E) = 1$. Sea ahora μ una medida soportada en E . Tenemos

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int \int e^{-2\pi i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} d\mu(x_1, x_2) = \int_0^1 e^{-2\pi i \xi_1 x} d\mu(x).$$

Como no depende de ξ_2 , $|\widehat{\mu}|$ no decae a 0. Luego, $\dim_F(E) = 0$.

Ejemplo 6.5.12 Cantor ternario: μ medida uniformemente distribuida sobre el Cantor. Se puede ver que

$$\widehat{\mu}(\xi) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos\left(\frac{\xi}{3^k}\right).$$

Evaluando en $3^n \pi$ nos queda

$$|\widehat{\mu}(3^n \pi)| = |\widehat{\mu}(\pi)| \underbrace{\left| \prod_{j=0}^{n-1} \cos(3^j \pi) \right|}_1$$

que no tiende a 0 cuando n tiende a infinito. Esto no nos permite concluir que la dimensión de Fourier del conjunto ternario de Cantor sea 0 (tendría que valer para toda medida μ soportada en el Cantor) pero puede probarse que esto es así.

Ejemplo 6.5.13 En el caso de la esfera \mathbb{S}^{d-1} ambas nociones de dimensión coinciden, es decir:

$$\dim_F(\mathbb{S}^{d-1}) = d - 1 = \dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{S}^{d-1}).$$

Ya vimos en el Capítulo 5 que $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{S}^{d-1}) = d - 1$. Para ver que la dimensión de Fourier es $d - 1$, observemos que por el teorema A.1.5 del apéndice tenemos que

$$|\widehat{d\sigma}(\xi)| = O(|\xi|^{-\frac{d-1}{2}}),$$

con lo cual, $\dim_F(\mathbb{S}^{d-1}) \geq d - 1$. Como además sabemos que la dimensión de Fourier tiene que ser menor o igual que la de Hausdorff, $\dim_F(\mathbb{S}^{d-1}) = d - 1$.

En los ejemplos vimos que la dimensión de Hausdorff y la dimensión de Fourier no necesariamente coinciden. A priori no sabemos si dado un cierto valor siempre podemos encontrar un conjunto en el cuál ambas dimensiones coincidan y tomen dicho valor. En la próxima sección vamos a ver que esto es así y mencionaremos algunas de las construcciones que se conocen.

6.6. Conjuntos de Salem

Un conjunto de Salem es un subconjunto de \mathbb{R}^d cuyas dimensiones de Fourier y Hausdorff coinciden. Cualquier subconjunto numerable de \mathbb{R}^d es un conjunto de Salem de dimensión 0, el mismo \mathbb{R}^d es un conjunto de Salem de dimensión d . El ejemplo clásico de Conjunto de Salem no trivial es la esfera en \mathbb{R}^d que es un conjunto de Salem de dimensión $d-1$. En el apéndice en el teorema A.1.5 probamos que la dimensión de Fourier de la esfera es $d-1$ y para la dimensión de Hausdorff alcanza con observar que podemos parametrizar a la esfera con una parametrización bilipschitz saliendo de \mathbb{R}^{d-1} , y entonces tanto la esfera como \mathbb{R}^{d-1} tendrán la misma dimensión, es decir, $d-1$.

Ya vimos en la sección anterior que no todo conjunto es de Salem: el cantor ternario tiene dimensión de Hausdorff $\frac{\log 2}{\log 3}$ y dimensión de Fourier 0. La dimensión de Fourier, y con ella la propiedad de ser un conjunto de Salem, dependen del espacio donde el conjunto está embebido: por ejemplo $\mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ es un hiperplano y como ya vimos antes, para cualquier $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, la transformada de Fourier $\hat{\mu}(x)$ no tiende a cero cuando $|x| \rightarrow \infty$ ya que $\hat{\mu}(x)$ depende sólo de las \mathbb{R}^d coordenadas de x .

La existencia de conjuntos de salem en \mathbb{R} para toda dimensión $\alpha \in [0, 1]$ fue primero probada por Salem en [Sal51], usando una construcción de tipo Cantor al azar. Kahane [Kah85] probó que la imagen de subconjuntos compactos de \mathbb{R} son casi seguramente conjuntos de salem. También construyó conjuntos de Salem en \mathbb{R}^d usando una construcción a la que llamaron movimiento browniano fraccionario, que es una generalización del caso lineal. Otras construcciones de conjuntos de cantor al azar fueron dadas por Bluhm [Blu96a], Mockenhaupt [Moc00] y Laba y Pramanik [LP09]. La idea intuitiva que se tiene es que si un conjunto dado E tiene mucha estructura aritmética, entonces $\dim_F(E)$ es chica. En cambio si E es “random” casi seguramente se cumple $\dim_F(E) = \dim_{\mathcal{H}}(E)$.

Observemos que hasta ahora todas las construcciones mencionadas son no determinísticas, de hecho, dar ejemplos explícitos de conjuntos de Salem que no sean de dimensión 0, d , $d-1$, es muy difícil. El primero en dar un ejemplo de esto fue Kaufman [Kau81]. El probó que el conjunto

$$E_\tau = \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{hay infinitos racionales } \frac{r}{q} \text{ tales que } \left| x - \frac{r}{q} \right| \leq q^{-\tau} \right\}$$

donde $\tau > 1$, es un conjunto de Salem de dimensión $\frac{2}{1+\tau}$ (ver también [Wol03]). Bluhm [Blu96b] probó que si se reemplaza $|q|^{-\tau}$ por cualquier otra función decreciente $\phi : \mathbb{N} \rightarrow (0, \infty)$ también se obtiene un conjunto de salem. En 2015, Hambrook [Ham15] generalizó el resultado de Kaufman: Dado Q subconjunto infinito de \mathbb{Z} , $\Psi : \mathbb{Z} \rightarrow [0, \infty)$ y $\theta \in \mathbb{R}$ probó una cota inferior para la dimensión de Fourier del conjunto

$$E(Q, \Psi, \theta) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \|qx - \theta\| \leq \Psi(q) \text{ para infinitos } q \in Q \right\}$$

y probó que es un conjunto de Salem para muchas elecciones de Q y Ψ . Además probó un análogo de este resultado para dimensiones mayores, aportando ejemplos no triviales de conjuntos de Salem en \mathbb{R}^d .

Así como con los fractales, la definición de que es un conjunto de Salem fue cambiando con el tiempo. El enfoque moderno llama conjuntos de Salem a todos aquellos conjuntos que

tengan dimensión de Hausdorff α y soporten una medida μ tal que

$$\begin{aligned}\mu(B_r(x)) &\leq C_1 r^\alpha && \forall x \in \mathbb{R}^d \text{ y } r > 0 \\ |\widehat{\mu}(\xi)| &\leq C_2(1 + |\xi|)^{\frac{\beta}{2}} && \forall \xi \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

Capítulo 7

Optimalidad del teorema de Mockenhaupt

En el Capítulo 3 vimos, gracias al Knapp example, que la condición del teorema de Stein-Tomas es óptima, es decir, para todo $p < \frac{2d+2}{d-1}$, no hay teoremas de restricción. En este capítulo vamos a estudiar si la versión más general de dicho teorema probada por Mockenhaupt es óptima para el caso de subconjuntos de dimensión fraccionaria de la recta real. Para ello seguiremos la construcción hecha por Hambrook-Laba en [HL13]. El objetivo de este capítulo es probar el siguiente teorema:

Teorema 7.0.1 *Sea $\alpha \in (0, 1)$ tal que $\alpha = \frac{\log(t_0)}{\log(n_0)}$ para ciertos $t_0, n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \neq 1$ y para todo $1 \leq p < \frac{4}{\alpha} - 2$, vale lo siguiente: Existe una medida de probabilidad μ en $[0, 1]$ soportada en un conjunto E de dimensión α y una sucesión de funciones $\{f_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ en $[0, 1]$ (funciones características de uniones finitas de intervalos) tales que*

- Para el α dado se cumple $\mu(B_r(x)) \leq C_1 r^\alpha$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $r > 0$.
- para todo $\beta < \alpha$ se cumple $|\widehat{\mu}(\xi)| \leq C_2(1 + |\xi|)^{-\frac{\beta}{2}}$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$ (C_2 depende de β)
- La acotación

$$\left(\int |\widehat{f}|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \quad (7.1)$$

falla para la sucesión $\{f_l\}$, es decir,

$$\frac{\|\widehat{f_l d\mu}\|_{L^p(\mathbb{R})}}{\|f_l\|_{L^2(d\mu)}} \rightarrow \infty \text{ cuando } l \rightarrow \infty. \quad (7.2)$$

7.1. Idea de la demostración:

El conjunto E va a ser un conjunto de tipo Cantor construido a partir de iteraciones “al azar”, con el agregado de que E va a contener un subconjunto de Cantor más pequeño pero determinístico. Tenemos que tener cuidado con la elección de este Cantor

determinístico para no destruir las estimaciones del decaimiento de la transformada de μ , dadas por el azar de la construcción del Cantor grande. Las funciones f_l del teorema serán las funciones características de finitas iteraciones del Cantor determinístico. Agregamos el Cantor determinístico para probar la divergencia de $\frac{\|\widehat{f_l d\mu}\|_{L^p(\mathbb{R})}}{\|f_l\|_{L^2(\mu)}}$, esta prueba va a depender de contar soluciones a ecuaciones lineales en los extremos de finitas iteraciones del Cantor grande. El Cantor determinístico lo elegiremos de tal manera que los extremos de finitas iteraciones del mismo caigan en una progresión aritmética que nos asegure que esta cuenta diverja. Notaremos también que con la misma demostración se tiene el siguiente teorema:

Teorema 7.1.1 *Sea α como en el Teorema 7.0.1, y asumamos que los exponentes $1 \leq p, q < \infty$ cumplen*

$$p < \frac{(2 - \alpha)}{\alpha(q - 1)}. \quad (7.3)$$

Entonces existe una medida μ en $[0, 1]$ y una sucesión de funciones $\{f_l\}_{l \in \mathbb{N}}$, construidas como en la demostración del Teorema 7.0.1, tales que

$$\frac{\|\widehat{f_l d\mu}\|_{L^p(\mathbb{R})}}{\|f_l\|_{L^q(d\mu)}} \rightarrow \infty \text{ cuando } l \rightarrow \infty. \quad (7.4)$$

7.2. Construcción de μ

Sean N_0 y t_o enteros tales que $1 < t_o < N_0$, y sea $\alpha = \frac{\log t_o}{\log N_0}$. Sean también $N = N_0^{2n_o}$ y $t = t_o^{2n_o}$, con n_o un entero grande a elegir después. Observemos que se sigue cumpliendo que $\alpha = \frac{\log t}{\log N}$ para cualquier n_o que elijamos.

Notaremos $[N] = \{0, 1, \dots, N - 1\}$.

Construiremos la medida μ y las funciones f_l de manera simultánea, mediante una secuencia de iteraciones de Cantor. Construiremos conjuntos A_1, \dots, A_n que cumplen:

$$\begin{aligned} A_0 &= \{0\} \\ A_{j+1} &= \bigcup_{a \in A_j} (a + A_{j+1,a}) \\ A_{j+1,a} &\subset N^{-(j+1)}[N] \\ |A_{j+1,a}| &= t. \end{aligned}$$

Lema 7.2.1 *Los conjuntos A_j están contenidos en $N^{-j}\mathbb{Z}$*

Demostración: Lo probaremos usando inducción en j

- Si $j = 0$, $A_0 = 0 \in \mathbb{Z}$.
- Si $j = 1$, $A_1 = A_{1,0} \subset N^{-1}\mathbb{Z}$.

- Supongamos ahora que

$$A_j \subset N^{-j}\mathbb{Z}, \quad A_{j+1} = \bigcup_{a \in A_j} (a + A_{j+1,a}).$$

Como

$$A_{j+1,a} \subset N^{-(j+1)}[N],$$

si $x \in A_j$, $x = y + rN^{-(j+1)}$, donde $0 \leq r \leq N-1$ e $y \in A_j$, entonces por hipótesis inductiva, $y = sN^{-j}$. Luego, reescribimos x usando esto y nos queda

$$x = sN^{-j} + rN^{-(j+1)} = (Ns - r)N^{-(j+1)} \in N^{-(j+1)}\mathbb{Z},$$

como queríamos probar. Luego, $A_j \subset N^{-j}\mathbb{Z}$. ■

Corolario 7.2.2 *Vale que $|A_j| = t^j$.*

Demostración: Si probamos que

$$A_{j+1} = \bigcup_{a \in A_j} (a + A_{j+1,a})$$

es una unión disjunta, como $|A_{j+1,a}| = t$, por un argumento inductivo nuestra afirmación sería cierta.

Veamos que este es el caso

$$x \in a + A_{j+1,a} \cap a' + A_{j+1,a'} \quad \text{con } a, a' \in A_j$$

y

$$0 \leq r, r' \leq N-1, \quad x = a + rN^{-(j+1)} = a' + r'N^{-(j+1)},$$

entonces

$$|a - a'| = |(r - r')N^{-(j+1)}| < N^{-j}.$$

Pero entonces, como $A_j \subset N^{-j}\mathbb{Z}$, necesariamente $a = a'$, y la unión resulta disjunta. ■

Lo que hemos probado hasta ahora es válido para cualquier elección de $A_{j+1,a} \subset N^{-(j+1)}[N]$.

Dada una secuencia A_j definida de esta manera, definimos

$$E_j = \bigcup_{a \in A_j} a + [N^{-j}], \quad E = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j.$$

Como E_j es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados, E resulta un cerrado no vacío. Como E es un conjunto de tipo Cantor, tenemos una medida de probabilidad μ natural definida sobre él, dada por el límite débil de las medidas absolutamente continuas μ_j en cada E_j , donde las μ_j están dadas por las densidades

$$\frac{d\mu_j}{dx} = \sum_{a \in A_j} t^{-j} N^j \mathbb{1}_{[a, a+N^{-j}]}. \quad (7.5)$$

Sean $j \in \mathbb{N}_0$ y $a \in A_j$. Entonces

$$\mu_j([a, a + N^{-j}]) = t^{-j},$$

y de hecho vale que

$$\mu_k([a, a + N^{-j}]) = t^{-j} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, k \geq j. \quad (7.6)$$

Con esto vamos a poder probar lo siguiente:

$$\mu(I) = t^{-j} \quad \forall I \in B_j, \quad (7.7)$$

donde B_j es la familia de todos los intervalos de la forma $I = [a, a + N^{-j}]$ con $a \in A_j$. Nuestro objetivo ahora va a ser probar que para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$, con A una unión finita de intervalos, vale $\mu(\partial A) = 0$. Para ello vamos a probar algo más fuerte

$$\mu(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tenemos dos casos: $x \in E$ y $x \notin E$.

• Caso $x \notin E$:

Como E se escribe como la intersección de los conjuntos E_j , que están anidados, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \notin E_j \quad \forall j \geq j_0$$

Como E_{j_0} es un compacto, $d(E_{j_0}, x) > 0$. Podemos definir $G = (x - r, x + r)$ donde $r = d(E_{j_0}, x) > 0$. Por como definimos μ_{j_0} , $\mu_{j_0}(G) = 0$. Nuevamente como los E_j están anidados tenemos

$$\mu_j(G) = 0 \quad \forall j \geq j_0.$$

Por una de las equivalencias del teorema de Portmanteau tenemos que

$$0 = \liminf_n \mu_n(G) \geq \mu(G) \geq \mu(\{x\}),$$

con lo cuál podemos concluir que $\mu(\{x\}) = 0$.

• Caso $x \in E$:

Como E es la intersección de todos los niveles E_j , $x \in E_j \quad \forall j$. Dado $\epsilon > 0$ buscamos j_0 tal que $\frac{t^{-j_0}}{2} < \epsilon$. Construimos nuevamente $G_\epsilon = (x - r, x + r)$, donde esta vez

$$r = \frac{N^{-j_0}}{2} \leq \frac{\min\{dist(I^k, I^{k'}) : I^k, I^{k'} \in E_{j_0}\}}{2}$$

Calculemos la medida de G_ϵ :

$$\begin{aligned} \mu_j(G_\epsilon) &= \int_{G_\epsilon} \sum_{a \in A_j} t^{-j} N^j \mathbb{1}_{[a, a+N^{-j}]}(y) dy \\ &= t^{-j} N^j |G_\epsilon \cap [a, a + N^{-j}]| \leq t^{-j} N^j \left| \left[x, x + \frac{N^{-j}}{2} \right] \right| = \frac{t^{-j}}{2} < \epsilon \quad \forall j \geq j_0. \end{aligned}$$

Luego,

$$\epsilon > \liminf_n \mu_n(G_\epsilon) \geq \mu(G_\epsilon) \geq \mu(\{x\}).$$

Como esto podemos hacerlo para todo $\epsilon > 0$, podemos concluir que $\mu(\{x\}) = 0$. Aplicando nuevamente el teorema de Portmanteau, como μ es el límite débil de la sucesión $\{\mu_n\}$, tenemos que

$$\mu_n(A) \longrightarrow \mu(A) \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}.$$

En particular, esto vale para $I = [a, a + N^{-j}]$ con $a \in A_j$. Usando esto y (7.6) podemos probar (7.7).

La medida μ puede extenderse de manera única a todo \mathbb{R} a partir del método I: Tomamos μ como la premedida y $\mathcal{C} = \{I^j \in B_j\}_j$. Nos queda

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_i \mu(U_i) : A \subset \bigcup_i U_i, U_i \in \mathcal{C} \right\}.$$

7.2.1. Existencia del límite débil

Definimos

$$F_j(t) = \mu_j((-\infty, t]), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

la función de distribución acumulada asociada a la medida μ_j .

Fijemos $j \in \mathbb{N}_0$. Para $a \in A_j$, tenemos $F_{j+1}(a) = F_j(a)$ por como definimos μ_{j+1} y μ_j . Fijemos $t \in [0, 1]$ (nos alcanza con considerar solo estos pues las μ_j están soportadas en el $[0, 1]$). Sea $a(t)$ el mayor elemento de $N^{-j}[N^j]$ tal que $a(t) \leq t$. Entonces

$$\begin{aligned} |F_{j+1}(t) - F_j(t)| &= |\mu_{j+1}((-\infty, t]) - \mu_j((-\infty, t])| \\ &= |\mu_{j+1}([a(t), t]) - \mu_j([a(t), t])| \\ &\leq \mu_{j+1}([a(t), t]) + \mu_j([a(t), t]) \\ &\leq \mu_{j+1}([a(t), a(t) + N^{-j}]) + \mu_j([a(t), a(t) + N^{-j}]) \\ &\leq \frac{2}{t^j}, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos que $\mu_j(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y en la última desigualdad usamos (7.6).

Entonces,

$$\|F_{j+1} - F_j\| \leq \frac{2}{t^j} \quad \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

Como $t^j = n^{j\alpha} \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$, tenemos que $\sum_{j=0}^{\infty} t^{-j} < \infty$. Se sigue que $(F_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de distribuciones acumuladas que converge uniformemente a una F que también resulta una función de distribución acumulada, asociada a una medida μ . Esto nos dice que $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

7.2.2. Crecimiento local de μ

En esta sección vamos a probar que μ cumple la condición de crecimiento local (2) del teorema de Mockenhaupt.

Lema 7.2.3 *Dada cualquier elección de A_j , el conjunto E tiene dimensión α y μ cumple*

$$\mu[x, x + \varepsilon] \leq C_1(n_0)\varepsilon^\alpha \quad (7.8)$$

para todo $\varepsilon > 0$, si n_0 es elegido suficientemente grande.

Demostración: Buscamos una constante C_1 tal que se cumpla (2). Alcanza con probarlo si $J = [x, x + \varepsilon] \subseteq [0, 1]$.

Sea m tal que $N^{-(m+1)} \leq |J| \leq N^{-m}$. Luego, J está cubierto por a lo sumo 2 intervalos en B_m . Luego, por (7.7), $\mu(J \cap E) \leq 2t^{-m}$. Nos alcanza entonces con probar que

$$2t^{-m} \leq C_1 N^{-(m+1)\alpha} \leq C_1 |J|^\alpha$$

Usando que $t = N^\alpha$, esto es equivalente a que

$$2N^{-m\alpha} \leq C_1 N^{-(m+1)\alpha},$$

lo cuál podemos simplificarlo a

$$N^\alpha \leq C_1 2^{-1},$$

que se cumple para cualquier $\alpha < 1$ si tomamos $C_1(n_0) = 2N$. ■

7.3. Construcción del Cantor determinístico y las f_l

En esta sección construiremos el Cantor determinístico y definiremos las f_l del teorema. Para ello, vamos a construir secuencias de conjuntos $P_j \subseteq A_j$ y $F_j \subseteq E_j$ tales que

- $P_0 = \{0\}$.
- $P_{j+1} = \bigcup_{a \in P_j} a + N^{-(j+1)}P$ para $j = 0, 1, 2, \dots$, donde $P \subset \{0, 1, \dots, N-1\}$ es una progresión aritmética de largo $t^{\frac{1}{2}} = t_0^{n_0} < N_0^{n_0} < N_0^{2n_0}$.
- $F_j = \bigcup_{a \in P_j} a + [0, N^{-j}]$.

También definimos las funciones f_l como las funciones características de los conjuntos F_l , es decir, $f_l = \mathbb{1}_{F_l}$.

Lema 7.3.1 *Vale que $|P_j| = t^{\frac{1}{2}}$.*

Demostración: Vamos a hacerlo por inducción, $|P_0| = 1 = t^{\frac{0}{2}}$. Supongamos que

$$|P_k| = t^{\frac{k}{2}} P_{k+1} = \bigcup_{a \in P_k} a + N^{-(k+1)}P.$$

. Tenemos $t^{\frac{1}{2}}$ para cada $a \in P_k$, con lo cuál,

$$|P_{k+1}| = t^{\frac{1}{2}} t^{\frac{k}{2}} = t^{\frac{k+1}{2}},$$

como queríamos ver. ■

7.4. Decaimiento de Fourier y f_l

Esta sección va a estar dedicada a probar la siguiente proposición:

Proposición 7.4.1 *Suponiendo n_0 suficientemente grande, hay una elección de A_j , para $j = 1, 2, \dots$, como arriba tales que $\forall 0 < \beta < \alpha$ se tiene que*

$$|\widehat{\mu}(k)| \leq C(\beta, n_0) |k|^{-\frac{\beta}{2}} \quad (k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \quad (7.9)$$

$$|\widehat{f_l \mu_j}(k)| \leq C(\beta, l, n_0) |k|^{-\frac{\beta}{2}} \quad (k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, j \geq l). \quad (7.10)$$

Demostración: Vamos a construir los A_j de manera inductiva. Definimos $A_0 = \{0\}$ y sea $A_1 \subset N^{-1}[N]$ arbitrario tal que $P_1 \subset A_1$ y $|A_1| = t$. Supongamos que $j \geq 1$ y que A_j está dado y es tal que $P_j \subset A_j$, definimos A_{j+1} construyendo $A_{j+1,a}$ para cada $a \in A_j$. Si $A \subset \mathbb{R}$, para $k \in \mathbb{Z}$ notaremos

$$S_A(k) = \sum_{a \in A} e^{-2\pi i a k}.$$

La siguiente observación nos permitirá conectar estas sumas con los coeficientes de Fourier de μ

Observación 7.4.2 *Sea $k \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$\widehat{\mu_j}(k) = \frac{1 - e^{-2\pi i k / N^{j+1}}}{\frac{2\pi i k}{N^{j+1}}} t^{-j} \sum_{a \in A_j} e^{-2\pi i a k} \frac{S_{N^{-(j+1)}[N]}(k)}{N}$$

y

$$\widehat{\mu_{j+1}}(k) = \frac{1 - e^{-\frac{2\pi i k}{N^{j+1}}}}{\frac{2\pi i k}{N^{j+1}}} t^{-(j+1)} S_{A_{j+1}}(k).$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \widehat{\mu_j}(k) &= N^j t^{-j} \sum_{a \in A} \int_a^{a+N^{-j}} e^{-2\pi i a x} dx \\ &= \frac{1 - e^{-\frac{2\pi i k}{N^j}}}{\frac{2\pi i k}{N^j}} t^{-j} S_{A_j}(k) \\ &= \frac{1 - e^{-\frac{2\pi i k}{N^{j+1}}}}{\frac{2\pi i k}{N^{j+1}}} t^{-j} \sum_{a \in A_j} e^{-2\pi i a k} \frac{S_{N^{-(j+1)}[N]}(k)}{N} \end{aligned}$$

■

Con esto podremos construir los conjuntos $A_{j+1,a}$ de manera que el decaimiento de la transformada de μ sea el que buscamos. La idea de la construcción sera la siguiente: Primero construiremos un conjunto $B_{j+1} \subset N^{-(j+1)}[N]$ de manera de minimizar las diferencias

$$\left| \frac{1}{t} S_{B_{j+1}}(k) - \frac{1}{N} S_{N^{-(j+1)}[N]}(k) \right| \quad (7.11)$$

para $k \in \mathbb{Z}$, teniendo en cuenta la restricción $|B_{j+1}| = t$. Buscaremos también que las diferencias sigan siendo pequeñas si reemplazamos B_{j+1} por alguna de las copias rotadas $B_{j+1,x}$ que definiremos en breve. Estos conjuntos serán nuestros primeros candidatos para $A_{j+1,a}$. El siguiente paso será elegir las “rotaciones” $x(a)$ de manera de minimizar los coeficientes de Fourier de la siguiente generación de conjuntos de Cantor usando $B_{j+1,x(a)}$ en lugar de $A_{j+1,a}$.

Necesitaremos el siguiente lema para poder probar que las diferencias en (7.11) son pequeñas

Lema 7.4.3 (Lema de Bernstein) Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias complejas tales que $|X_j| \leq 1$, $\mathbb{E}X_i = 0$, y $\mathbb{E}|X_j|^2 = \sigma_j^2$. Sea $\sigma > 0$ tal que $\sigma^2 \geq \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$ y $\sigma^2 \geq 6n\lambda$. Entonces

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_{j=1}^n X_j \right| \geq n\lambda \right) \leq 4 \exp \left(-\frac{n^2 \lambda^2}{8\sigma^2} \right).$$

Para poder aplicar el lema anterior, primero definiremos $\eta_j^2 = 192t^{-1} \ln(8N^{j+2})$. Tenemos el siguiente lema

Lema 7.4.4 Existe un conjunto $B_{j+1} \subset N^{-(j+1)}[N]$ con $|B_{j+1}| = t$ tal que

$$\left| S_{B_{j+1,x}}(k) - \frac{S_{N^{-(j+1)}[N]}(k)}{N} \right| \leq \eta_j, \quad (7.12)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $x \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Donde

$$B_{j+1,x} = \left\{ \frac{(x+y)(\text{mod}N)}{N^{j+1}} : \frac{y}{N^{j+1}} \in B_{j+1} \right\}. \quad (7.13)$$

Demostración: Si j es suficientemente grande para que $\eta_j \geq 2$ (puede verse que para n_o fijo, $\eta_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$), podemos elegir B_{j+1} un subconjunto de $N^{-(j+1)}[N]$ de cardinal t arbitrario ya que ambos términos del lado izquierdo están acotados por 1 en valor absoluto. Asumiremos entonces $\eta_j \leq 2$. Sea $B_{j+1} \subset N^{-(j+1)}[N]$ construido al azar tomando $b \in N^{-(j+1)}[N]$ con probabilidad $P = \frac{t}{N}$.

Sean $k \in \mathbb{Z}$ y $x \in [N]$. Para cada $b \in N^{-(j+1)}[N]$, definimos la variable aleatoria

$$X_b(k, x) = (\mathbf{1}_{B_{j+1,x}}(b) - p) e^{-2\pi i b k}.$$

Estas variables aleatorias nos servirán de nexo entre el lema de Bernstein y las sumas S_A que definimos al principio.

Las variables aleatorias que definimos cumplen que

$$\mathbb{E}_b X_b(k, x) = 0,$$

y

$$\mathbb{E}_b |X_b(k, x)|^2 = p(1-p).$$

Si tomamos $\sigma^2 = 6t$, $n = N$, y $\lambda = \frac{\eta_j p}{2}$. Entonces

$$\sigma^2 \geq \sum_{b \in N^{-(j+1)}[N]} \mathbb{E}_b |X_b(k, x)|^2 \quad \text{y} \quad \sigma^2 \geq 6n\lambda = 3\eta_j t.$$

Luego, aplicando el Lema 7.4.3 a las $X_b(k, x)$. Nos queda

$$\frac{S_{B_{j+1},x}(k)}{t} - \frac{S_{N^{-(j+1)}[N]}(k)}{N} = t^{-1} \sum_{b \in N^{-(j+1)}[N]} X_b(k, x),$$

y

$$4 \exp\left(-\frac{n^2 \lambda^2}{8\sigma^2}\right) = 4 \exp(-\ln(8N^{j+2})) = \frac{1}{2N^{j+2}}.$$

Obtenemos entonces

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{B_{j+1},x}(k)}{t} - \frac{S_{N^{-(j+1)}[N]}(k)}{N}\right| \geq \frac{\eta_j}{2}\right) \leq \frac{1}{2N^{j+2}}, \quad (7.14)$$

para k fijo y $x \in [N]$. Cuando $k = 0$ y $x = 0$, por (7.12) obtenemos $|B_{j+1}| - t \leq \frac{\eta_j t}{2}$. Luego, agregando o sacando a lo sumo $\frac{\eta_j t}{2}$ elementos de B_{j+1} , obtenemos un conjunto de t elementos que cumple (7.14) para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $x \in [N]$. ■

Lema 7.4.5 *Hay una elección de $x(a)$, $a \in A_j$, tal que*

$$|\widehat{\mu_{j+1}}(k) - \widehat{\mu}_j(k)| \leq C \min\left(1, \frac{N^{j+1}}{|k|}\right) t^{-\frac{j+1}{2}} \ln(8N^{j+1}), \quad (7.15)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, $j \geq 2$, y

$$|\widehat{f_l \mu_{j+1}}(k) - \widehat{f_l \mu}_j(k)| \leq C \min\left(1, \frac{N^{j+1}}{|k|}\right) t^{-\frac{j+1}{2}} \ln(8N^{j+1}). \quad (7.16)$$

Demostración: Paso 1. Consideremos las variables aleatorias

$$X_a(k) = e^{-2\pi i k a} \left(\frac{S_{B_{j+1},x(a)}}{r} - \frac{S_{N^{-(j+1)}[N]}(k)}{N} \right), \quad a \in A_j, \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde para cada $a \in A_j$ elegimos $x(a)$ (el mismo para todo k) de manera independiente y uniformemente al azar del conjunto $[N]$. Sea c una constante grande. Afirmamos que existe una elección de $x(a)$ tal que

$$\left| t^{-j} \sum_{a \in A_j} X_a(k) \right| < \lambda_j := c t^{-\frac{j+1}{2}} \ln(8N^{j+1}), \quad (7.17)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ y

$$\left| t^{-j+l/2} \sum_{a \in A_j \cap F_l} X_a(k) \right| < \lambda_{j,l} := c t^{-\frac{j+1}{2} + \frac{l}{4}} \ln(8N^{j+1}), \quad (7.18)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ y todo $l \in \{1, \dots, j\}$

Para probarlo vamos a considerar los siguientes eventos:

- ε es el evento de que valga $|t^{-j} \sum_{a \in A_j} X_a(k)| \geq \lambda_j$ para algún $k \in \mathbb{Z}$
- ε_l es el evento de que valga $|t^{-\frac{j+l}{2}} \sum_{a \in F_l \cap A_j} X_a(k)| \geq \lambda_{j,l}$ para algún $k \in \mathbb{Z}$

Probaremos que $\mathbb{P}(\varepsilon) < \frac{1}{2}$ y $\mathbb{P}(\varepsilon_l) < \frac{1}{2^j}$ para todo $l = 1, \dots, j$. Con esto veremos que la probabilidad de que (7.17) y (7.18) ocurran al mismo tiempo será positiva. Luego, va a existir una elección de $x(a)$ tal que cumpla (7.17) y (7.18).

Veamos que vale en el caso de ε . Por periodicidad, nos alcanza con considerar los $k \in [N^{j+1}]$. Las variables aleatorias $\chi_a(k)$, $a \in A_j$, son independientes y tienen esperanza $\mathbb{E}_{\chi_a(k)} = 0$. Por el Lema 7.4.4, $|\chi_a(k)| \leq \eta_j$. Consideremos las variables aleatorias

$$\chi'_a(k) = \frac{\chi_a(k)}{\eta_j}.$$

Tenemos que estas variables aleatorias también son independientes, tienen esperanza $\mathbb{E}_{\chi'_a(k)} = 0$ pero $|\chi'_a(k)| \leq 1$, con lo cual, podemos aplicar el Lema de Bernstein. Tenemos $n = t^j$ y tomemos $\sigma'^2 = cn$, entonces

$$\sigma'^2 \geq \sum_{a \in A_j} \mathbb{E}|\chi'_a(k)|^2 \quad \text{y} \quad \sigma'^2 \geq 6n\lambda_j\eta_j.$$

Luego, aplicando el lema de Bernstein nos queda

$$\mathbb{P} \left(\left| t^{-j} \sum_{a \in A_j} \chi'_a(k) \right| \geq \lambda_j / \eta_j \right) \leq 4 \exp \left(-\frac{\lambda_j^2 / \eta_j^2 t^{2j}}{8\sigma'^2} \right).$$

Tomando $\sigma = 192ct^{j-1} \ln(8N^{j+2}) = cn\eta_j^2 = \sigma'\eta_j^2$, nos queda

$$\mathbb{P} \left(\left| t^{-j} \sum_{a \in A_j} \chi_a(k) \right| \geq \lambda_j \right) \leq 4 \exp \left(-\frac{\lambda_j^2 t^{2j}}{8\sigma^2} \right).$$

Luego, la probabilidad de que ocurra el evento ε es a lo sumo $4N^{j+1} \exp(-\frac{\lambda_j^2 t^{2j}}{8\sigma^2})$, que es menor a $\frac{1}{2}$ si $c \geq 6144$

Ahora acotaremos la probabilidad de que ocurra ε_l . Sea $k \in [N^{j+1}]$ otra vez. Aplicaremos el Lema de Bernstein nuevamente, pero esta vez con $n = |F_l \cap A_j| = t^{\frac{l}{2}} t^{j-l} = t^{j-\frac{l}{2}}$ y $\sigma^2 = cn\eta_j^2 = 192ct^{j-\frac{l}{2}-1} \ln(8N^{j+2})$. Nos queda entonces

$$\mathbb{P} \left(\left| t^{-j+l/2} \sum_{a \in F_l \cap A_j} \chi_a(k) \right| \geq \lambda_{j,l} \right) \leq 4 \exp \left(-\frac{\lambda_{j,l}^2 t^{2j-l}}{8\sigma^2} \right).$$

Luego el evento ε_l tiene probabilidad a lo sumo $4N^{j+1} \exp(-\frac{\lambda_{j,l}^2 t^{2j-l}}{8\sigma^2})$, que es menor a $\frac{1}{2^j}$ si $c \geq 6144$

Paso 2. En este paso vamos a construir A_{j+1} a partir de los $A_{j+1,a}$. Definiremos los $A_{j+1,a}$ de la siguiente manera: Recordemos primero que $P_j \subset A_j$, para cada $a \in P_j$

construimos $A_{j+1,a}$ agregandole $N^{-(j+1)}P$ a $B_{j+1,x(a)}$ con los $x(a)$ como en el paso 1, y luego extraemos una cantidad equivalente de elementos de $B_{j+1,x(a)}$ que no están en $N^{-(j+1)}P$. Luego, $N^{-(j+1)}P \subset A_{j+1,a}$ y $|A_{j+1,a}| = t$. Para los $a \in A_j \setminus P_j$, definimos $A_{j+1,a} = B_{j+1,x(a)}$. Afiramos que

$$\left| \frac{S_{A_{j+1}}(k)}{t^{j+1}} - \sum_{a \in A_j} e^{-2\pi ka} \frac{S_{N^{-(j+1)}[N]}(k)}{t^j N} \right| \leq 2ct^{-\frac{j+1}{2}} \ln(8N^{j+1}), \quad (7.19)$$

y

$$\left| \frac{S_{A_{j+1} \cap F_l}(k)}{t^{j+1}} - \sum_{a \in A_j \cap F_l} e^{-2\pi ka} \frac{S_{N^{-(j+1)}[N]}(k)}{t^j N} \right| \leq 2ct^{-\frac{j+1}{2}} \ln(8N^{j+1}). \quad (7.20)$$

Para ver esto, tomemos primero $\check{A}_{j+1} = \bigcup_{a \in A_j} B_{j+1,x(a)}$. Luego, por (7.17) tenemos que

$$\left| \frac{S_{\check{A}_{j+1}}(k)}{t^{j+1}} - \sum_{a \in A_j} e^{-2\pi ka} \frac{S_{N^{-(j+1)}[N]}(k)}{t^j N} \right| = \left| t^{-j} \sum_{a \in A_j} X_a(k) \right| < \lambda_j.$$

Como A_{j+1} difiere de \check{A}_{j+1} en a lo sumo $t^{\frac{j+1}{2}}$ elementos, tenemos que

$$\left| \frac{S_{\check{A}_{j+1}}(k)}{t^{j+1}} - \frac{S_{A_{j+1}}(k)}{t^{j+1}} \right| \leq 2t^{-\frac{j+1}{2}}.$$

Como $c \ln(8N^{j+1}) > 1$, (7.19) se cumple Análogamente, por (7.18) tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{S_{\check{A}_{j+1} \cap F_l}(k)}{t^{j+1}} - \sum_{a \in A_j \cap F_l} e^{-2\pi ka} \frac{S_{N^{-(j+1)}[N]}(k)}{t^j N} \right| &= \left| t^{-\frac{j}{2}} \sum_{a \in A_j \cap F_l} X_a(k) \right| \\ &< t^{-\frac{j}{2}} \lambda_{j,l} \\ &= ct^{-\frac{j+1}{2} - \frac{l}{4}} \ln(8N^{j+1}). \end{aligned}$$

Como $A_{j+1} \cap F_l$ difiere de $\check{A}_{j+1} \cap F_l$ en a lo sumo $t^{\frac{j+1}{2}}$, con un razonamiento análogo vemos que vale (7.20). Paso 3. Primero veremos que (7.19) implica (7.15). Por la observación (7.4.2) tenemos que

$$\begin{aligned} |\widehat{\mu_{j+1}}(k) - \widehat{\mu_j}(k)| &= \left| \frac{1 - e^{-\frac{2\pi ik}{N^{j+1}}}}{\frac{2\pi ik}{N^{j+1}}} \right| \left| \frac{S_{A_{j+1}}(k)}{t^{j+1}} - \sum_{a \in A_j} e^{-2\pi ia k} \frac{S_{N^{-(j+1)}[N]}(k)}{t^j N} \right| \\ &\leq 2ct^{-\frac{j+1}{2}} \ln(8N^{j+2}) \left| \frac{1 - e^{-2\pi ik/N^{j+1}}}{\frac{2\pi ik}{N^{j+1}}} \right|. \end{aligned}$$

Observación 7.4.6 Por el teorema del valor medio tenemos que

$$\left| \frac{1 - e^y}{y} \right| = |e^{-\xi} \xi| \text{ con } 0 < \xi < y$$

Entonces

$$\left| \frac{1 - e^{-\frac{2\pi ik}{N^{j+1}}}}{\frac{2\pi ik}{N^{j+1}}} \right| \leq \frac{N^{j+1}}{\pi ik}$$

Luego, podemos acotar el último factor por $\min(1, N^{j+1}/\pi|k|)$ y de esta manera obtenemos (7.15).

Ahora veremos que (7.20) implica (7.16). Sea $l \in \{1, \dots, j\}$. Tenemos que

$$\widehat{f_l d\mu_j}(k) = \frac{1 - e^{-\frac{2\pi ik}{N^{j+1}}}}{\frac{2\pi ik}{N^{j+1}}} t^{-j} \sum_{a \in A_j} e^{-2\pi i a k} \frac{S_{N^{-(j+1)}[N]}(k)}{N},$$

y

$$\widehat{f_l d\mu_{j+1}}(k) = \frac{1 - e^{-\frac{2\pi ik}{N^{j+1}}}}{\frac{2\pi ik}{N^{j+1}}} t^{-(j+1)} S_{A_{j+1} \cap F_l}(k).$$

Luego, acotando igual que antes, (7.16) se sigue. \blacksquare

Lema 7.4.7 *Supongamos n_0 suficientemente grande. Para todo $0 < \beta < \alpha$, existe una constante $C(n_0, \beta)$ tal que:*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \min\left(1, \frac{N^{j+1}}{|k|}\right) t^{-\frac{j+1}{2}} \ln(8N^{j+1}) \leq C(n_0, \beta) |k|^{-\frac{\beta}{2}},$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.

Demostración: Asumiremos que $k > 0$. Recordemos que por definición, $N^\alpha = t$. Luego podemos reescribir la suma como

$$\sum_{j=0}^{\infty} \min\left(1, \frac{N^{j+1}}{|k|}\right) N^{-\frac{(j+1)\alpha}{2}} \ln(8N^{j+1}). \quad (7.21)$$

Reescribimos esta suma como

$$\sum_{j=0}^{\infty} \min\left(1, \frac{N^{j+1}}{|k|}\right) N^{-\frac{(j+1)\beta}{2}} N^{-\frac{(j+1)(\alpha-\beta)}{2}} (\ln 8 + (j+1) \ln N).$$

Observación 7.4.8 *Vale que*

$$N^{-\frac{(j+1)(\alpha-\beta)}{2}} (j+1) \ln N \leq 2(\alpha - \beta)^{-1}.$$

Demostración: Reordenando, vemos que alcanza con probar la siguiente desigualdad

$$\frac{(j+1)(\alpha - \beta)}{2} \leq N^{\frac{(j+1)(\alpha-\beta)}{2}}.$$

Pero sabemos que para N suficientemente grande, usando que $N > \ln N$ obtenemos la siguiente cadena de desigualdades

$$\frac{(j+1)(\alpha-\beta)}{2} \leq N^{\frac{j(\alpha-\beta)}{2}} \leq \frac{N^{\frac{(j+1)(\alpha-\beta)}{2}}}{\ln N}.$$

■

Luego, por la observación anterior, la suma (7.21) está acotada por

$$\sum_{j=0}^{\infty} \min\left(1, \frac{N^{j+1}}{|k|}\right) N^{-\frac{(j+1)\beta}{2}} (\ln 8 + (\alpha - \beta)^{-1}).$$

Para acotar esta suma, primero nos desharemos del mínimo. Para ello, observemos que $\frac{N^{j+1}}{k} \leq 1$ si y sólo si $j \leq \frac{\ln k}{\ln N} - 1$. Ahora reescribamos la suma anterior como $S_1 + S_2$ donde S_1 es la suma sobre $0 \leq j \leq \frac{\ln k}{\ln N} - 1$ y S_2 es la suma sobre el resto de los valores de j .

$$S_1 = \frac{\ln 8 + 2(\alpha - \beta)^{-1}}{2k} \sum_{0 \leq j \leq \frac{\ln k}{\ln N} - 1} N^{(j+1)(1-\frac{\beta}{2})}.$$

En la última suma usando que es una geométrica nos queda acotada por

$$\begin{aligned} N^{(1-\frac{\beta}{2})} \frac{N^{(1-\frac{\beta}{2})\frac{\ln k}{\ln N}} - 1}{N^{(1-\frac{\beta}{2})} - 1} &\lesssim N^{(1-\frac{\beta}{2})} \frac{N^{(1-\frac{\beta}{2})\frac{\ln k}{\ln N}}}{N^{(1-\frac{\beta}{2})}} \\ &= N^{(1-\frac{\beta}{2})\frac{\ln k}{\ln N}} \\ &= k^{(1-\frac{\beta}{2})}, \end{aligned}$$

si N suficientemente grande. Luego,

$$S_1 \leq \frac{\ln 8 + 2(\alpha - \beta)^{-1}}{2k} k^{(1-\frac{\beta}{2})} \leq C(n_0, \alpha, \beta) k^{-\frac{\beta}{2}}.$$

Ahora miremos S_2 :

$$S_2 = (\ln 8 + 2(\alpha - \beta)^{-1}) \sum_{j > \frac{\ln k}{\ln N}} N^{-\frac{j\beta}{2}}.$$

y la última suma está acotada por

$$N^{-\frac{\ln k}{\ln N} \frac{\beta}{2}} = k^{-\frac{\beta}{2}}.$$

Luego,

$$S_2 \leq (\ln 8 + 2(\alpha - \beta)^{-1}) k^{-\frac{\beta}{2}} \leq C(n_0, \alpha, \beta) k^{-\frac{\beta}{2}}.$$

Como queríamos ver. ■

Con esto podemos terminar la prueba de la proposición 7.4.1. Como μ_j converge débilmente a μ , $\hat{\mu}_j$ converge puntualmente a $\hat{\mu}$. Luego,

$$|\widehat{\mu}(k)| \leq |\widehat{\mu}_1(k)| + \sum_{j=1}^{\infty} |\widehat{\mu}_{j+1}(k) - \widehat{\mu}_j(k)|.$$

Por los lemas 7.4.5 y 7.4.7 tenemos que la suma está acotada por $C(n_0, \beta)|k|^{-\frac{\beta}{2}}$. Además,

$$|\widehat{\mu}_1(k)| = \left| \frac{1 - e^{-\frac{2\pi ik}{N}}}{\frac{2\pi ik}{N}} \frac{1}{t} \sum_{a \in A_1} e^{-2\pi i a k} \right| \leq \frac{C(n_0)}{k}.$$

Esto prueba (7.9).

Para probar (7.10), primero notemos que por la observación 7.4.6 vale la siguiente desigualdad

$$|\widehat{f_l du_h}(k)| = \left| \frac{1 - e^{-\frac{2\pi ik}{N^h}}}{\frac{2\pi ik}{N^h}} t^{-h} S_{A_h \cap F_l}(k) \right| \leq \frac{N^h t^{-h}}{\pi |k|} |A_h \cap F_l| = \frac{N^h t^{-\frac{l}{2}}}{\pi |k|}. \quad (7.22)$$

Luego, si $j = l$ (7.10) se sigue inmediatamente ya que $|k|^{-\frac{\beta}{2}} \geq |k|^{-1}$. Si $j > l$, escribimos

$$|\widehat{f_l du_j}(k)| \leq |\widehat{f_l du_i}(k)| + |\widehat{f_l du_{i+1}}(k) - \widehat{f_l du_i}(k)| + \sum_{i=l+1}^{j-1} |\widehat{f_l du_{i+1}}(k) - \widehat{f_l du_i}(k)|. \quad (7.23)$$

Por los lemas 7.4.5 y 7.4.7, obtenemos que la suma está acotada por $C(n_0, \beta)|k|^{-\frac{\beta}{2}}$. Los otros términos los podemos acotar usando (7.22) y observando nuevamente que $|k|^{-\frac{\beta}{2}} \geq |k|^{-1}$. Notar que la constante que obtenemos finalmente depende de l ya que necesitamos acotar N^l en estos dos últimos términos. ■

7.5. La divergencia de $\frac{\|f_l d\mu\|_{L^p(\mathbb{R})}}{\|f_l\|_{L^2(\mu)}}$

Ahora para terminar la demostración del Teorema 7.0.1, probaremos que 7.1 falla para la sucesión f_l .

Primero necesitaremos el siguiente lema

Lema 7.5.1 *Para todo $1 \leq q < \infty$, tenemos que $\|f_l\|_{L^q(d\mu)}^q = \mu(F_l) = t^{-\frac{l}{2}}$*

Con este lema más la proposición que enunciaremos a continuación podremos probar el Teorema 7.0.1.

Proposición 7.5.2 *Fijemos $r \in \mathbb{N}$ con $r > \frac{1}{\alpha}$ y asumamos que n_0 suficientemente grande (dependiendo de r). Sea $1 \leq p \leq 2r$. Entonces para todo l suficientemente grande tenemos*

$$\|\widehat{f_l d\mu}\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \geq C(r) \frac{N^l r^{-l-1}}{t^{\frac{l(p+1)}{2}}}. \quad (7.24)$$

Vamos a hacer la demostración del teorema asumiendo la proposición y demostraremos la proposición al final.

Demostración: Fijemos r suficientemente grande tal que $r > \frac{1}{\alpha}$ y $2r \geq \frac{q(2-\alpha)}{\alpha(q-1)}$. Por la Proposición 7.5.2 vemos que (7.24) vale para todos los p como en (7.4). Usando esto último y el Lema (7.5.1) tenemos que

$$\frac{\|f_l \widehat{d}\mu\|_{L^p(\mathbb{R})}}{\|f_l\|_{L^q(d\mu)}} \geq C(r) \left(\frac{N^l r^{-l-1}}{t^{\frac{l(p+1)}{2}}} \right)^{\frac{1}{p}} t^{\frac{l}{2q}}. \quad (7.25)$$

Reescribiendo el término de la derecha obtenemos

$$C(r) N^{l \left(\frac{1}{p} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{q} - 1 - \frac{1}{p} \right) \right)} \cdot \frac{1}{r^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{r^{\frac{l}{p}}}. \quad (7.26)$$

Dado $\theta > 0$ existe n_0 tal que

$$N^{\frac{1}{\theta}} \geq r,$$

y en ese caso

$$\frac{1}{r^{\frac{l}{p}}} \geq \frac{1}{N^{\frac{l}{p\theta}}}. \quad (7.27)$$

Buscaremos $\theta > 0$ tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{q} - 1 - \frac{1}{p} \right) - \frac{1}{p\theta} > 0. \quad (7.28)$$

Esto pasa si y sólo si

$$\frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{\theta} - \frac{\alpha}{2} \right) > \frac{\alpha}{2} \left(\frac{q-1}{q} \right).$$

Lo llevamos a una desigualdad respecto de p

$$\frac{2}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{\theta} - \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{q}{q-1} \right) > p.$$

Como estamos suponiendo que p cumple (7.4), tenemos que

$$p < \frac{q(2-\alpha)}{\alpha(q-1)}.$$

Como

$$\frac{2}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{\theta} - \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{q}{q-1} \right) \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} \frac{q(2-\alpha)}{\alpha(q-1)},$$

podemos tomar θ suficientemente grande tal que (7.28) se cumple.

Fijado $\theta > 0$, existe n_0 tal que (7.27) se cumple. Luego, podemos acotar (7.26) por abajo por

$$C(r) N^{l\gamma} \frac{1}{r^{\frac{l}{p}}} \quad \text{con } \gamma > 0,$$

que se va a infinito cuando $l \rightarrow \infty$. ■

Ahora nos queda probar la Proposición 7.5.2, que lo haremos en varios pasos. Un poco de notación, si $Y \subset \mathbb{R}$ es un conjunto finito y $r \in \mathbb{N}$, escribiremos

$$M_Y = \# \left\{ (a_1, \dots, a_{2r}) \in Y^{2r} : \sum_{i=1}^r a_i = \sum_{i=r+1}^{2r} a_i \right\}.$$

Lema 7.5.3 Para todo $j, l, r \in \mathbb{N}$ tales que $j \geq l$

$$M_{F_l \cap A_j} \geq r^{-l-1} t^{\frac{(2r-1)l}{2}} \left(\frac{t^{2r}}{N} \right)^{j-l}. \quad (7.29)$$

Demostración: Fijemos j y l . Sea

$$Y = A_j \cap F_l, ; |Y| = t^{\frac{l}{2}} t^{j-l}$$

y

$$Z = \{a_1 + \dots + a_r : a_1, \dots, a_r \in Y\}.$$

■

Afirmamos que

$$|Z| \leq (rt^{\frac{1}{2}})^l r N^{j-l}. \quad (7.30)$$

Para ver esto, primero observemos que cada $y \in Y$ tiene una única representación de la forma

$$y = \sum_{k=1}^l y^{(k)} N^{-k} + y^{(l+1)} N^{-j}$$

donde $y^{(k)} \in P$ para $k = 1, \dots, l$ e $y^{(l+1)} \in [N^{j-l}]$. Como P es una progresión aritmética de longitud $t^{\frac{1}{2}}$, podemos suponer que $P = x, x + d, \dots, x(t^{\frac{1}{2}})d$. Entonces los $z \in Z$, pueden escribirse de la siguiente manera

$$z = \sum_{k=1}^l z^{(k)} N^{-k} + z^{(l+1)} N^{-j}$$

donde $z^{(l+1)} \in \{0, 1, \dots, r(N^{j-l} - 1)\}$ y

$$z^{(k)} \in P' := \{rx, rx + d, \dots, rx + r(t^{1/2} - 1)d\}$$

para $k = 1, \dots, l$. Como $|\{0, 1, \dots, r(N^{j-l} - 1)\}| \leq rN^{j-l}$ y $|P'| \leq rt^{\frac{1}{2}}$, hemos probado (7.30). Ahora probaremos (7.29). Sea $z \in N^{-j}\mathbb{Z}$, definimos

$$g(z) = \#\{(y_1, \dots, y_r) \in Y^r : \sum_{i=1}^r y_i = z\}$$

entonces $\|g\|_{l^1} = |Y|^r$, $\|g\|_{l^2}^2 = M_Y$, y g está soportada en Z . Por la desigualdad de Hölder tenemos que $\|g\|_{l^1} \leq \|g\|_{l^2} |Z|^{\frac{1}{2}}$, y entonces

$$M_Y \geq \frac{\|g\|_{l^1}^2}{|Z|} \geq \frac{(t^{\frac{1}{2}} t^{j-l})^{2r}}{(rt^{\frac{1}{2}})^l r N^{j-l}}.$$

Como queríamos probar.

Lema 7.5.4 *Sea m una medida en el toro $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, y sea φ una función en la clase de Schwartz en \mathbb{R} . Definimos una medida m' en \mathbb{R} como*

$$dm'(x) = \varphi(x) dm(\{x\}),$$

donde $\{x\}$ es la parte decimal de x . Entonces para todo $\xi \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\widehat{m}'(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{m}(k) \widehat{\phi}(\xi - k) \quad (7.31)$$

Más aún, si existen $C > 0$ y $\alpha > 0$ tales que

$$|\widehat{m}(k)| \leq C(1 + |k|)^{-\alpha} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}, \quad (7.32)$$

entonces existe una constante $C' > 0$ tal que

$$|\widehat{m}'(\xi)| \leq C'(1 + |\xi|)^{-\alpha} \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}. \quad (7.33)$$

Demostración: Para la primera parte ver [Wol03]. Supongamos que existen $C > 0$ y $\alpha > 0$ tales que vale 7.32. Para ver 7.33, partiremos la suma de 7.31 en dos partes, consideraremos $|\phi - k| \leq \frac{|\phi|}{2}$ y su complemento por separado. Fijado ξ tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{m}'(\xi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{m}(k) \widehat{\phi}(\xi - k) \\ &= \underbrace{\sum_{\{k \in \mathbb{Z}: |\xi - k| \leq |\xi|/2\}} \widehat{m}(k) \widehat{\phi}(\xi - k)}_A + \underbrace{\sum_{\{k \in \mathbb{Z}: |\xi - k| > |\xi|/2\}} \widehat{m}(k) \widehat{\phi}(\xi - k)}_B \end{aligned}$$

Observemos que como ϕ está en la clase de Schwartz, $\widehat{\phi}$ también. Luego, dado $M > 0$, existe una constante $C_M > 0$ tal que

$$|\widehat{\phi}(x)| \leq \frac{C_M}{|1 + |x||^M}. \quad (7.34)$$

En A además tenemos que k cumple $\frac{|\xi|}{2} \leq |k| \leq \frac{3|\xi|}{2}$. Luego, usando esto y (7.34), podemos

acotar A de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
A &\leq \sum_{\{k \in \mathbb{Z}: |\xi - k| \leq \frac{|\xi|}{2}\}} \widehat{\mu}(k) \frac{C_M}{|1 + |\xi - k||^M} \\
&\leq \sum_{\{k \in \mathbb{Z}: |\xi - k| \leq \frac{|\xi|}{2}\}} C(1 + |k|)^{-\alpha} \frac{C_M}{|1 + |\xi - k||^M} \\
&\leq C \left(1 + \frac{|\xi|}{2}\right)^{-\alpha} \sum_{\{k \in \mathbb{Z}: |\xi - k| \leq \frac{|\xi|}{2}\}} \frac{1}{|1 + |\xi - k||^M} \\
&\leq C \left(1 + \frac{|\xi|}{2}\right)^{-\alpha} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2}{k^M},
\end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad usamos que μ cumple (7.32).

Usando que $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2}{k^M} < \infty$ si $M > 1$ en la última desigualdad, obtenemos la cota buscada. Ahora acotaremos B :

$$\begin{aligned}
B &\leq \sum_{\{k \in \mathbb{Z}: |\xi - k| > \frac{|\xi|}{2}\}} \frac{C_M}{(1 + |k|)^{-\alpha}} \frac{1}{|1 + |\xi - k||^M} \\
&\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{C_M}{(1 + |\xi - k|)^{\alpha}} \frac{1}{|1 + |\xi - k||^{M-\alpha}} \\
&\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{C_M}{\left(1 + \frac{|\xi|}{2}\right)^{\alpha}} \frac{1}{|1 + |\xi - k||^{M-\alpha}} \\
&\leq C \left(1 + \frac{|\xi|}{2}\right)^{-\alpha} \quad \text{si } M > 1 + \alpha.
\end{aligned}$$

■

Usando el lema 7.5.4, podremos probar (7.24) para exponentes de la forma $p = 2r$. Luego daremos una demostración de que la cota puede efectivamente extenderse a cualquier $1 \leq p \leq 2r$.

Lema 7.5.5 Sean $l, r \in \mathbb{N}$ con $r > \frac{1}{\alpha}$. Entonces

$$\left\| \widehat{f_l d\mu} \right\|_{L^{2r}(\mathbb{R})}^{2r} \geq C_{2r} \frac{N^l r^{-l-1}}{t^{\frac{l(2r+1)}{2}}}, \quad (7.35)$$

donde

$$C^{2r} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)^{2r} dx \in (0, \infty).$$

Demostración: Por la proposición 7.4.1, para todo $0 < \beta < \alpha$ tenemos

$$|\widehat{f_l d\mu_j}(k)| \leq C|k|^{-\frac{\beta}{2}}$$

para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $j \geq l$. Por el Lema 7.5.4, esta desigualdad se extiende a

$$|\widehat{f_l d\mu_j}(\xi)| \leq C|\xi|^{-\frac{\beta}{2}}.$$

Para $|\xi| \geq 1$ y $j \geq l$. Fijemos $\beta \in (0, \alpha)$ tal que $r > \frac{1}{\beta} > \frac{1}{\alpha}$, y sea $g(\eta) := \min(1, C|\eta|^{-\frac{\beta}{2}})$. Asumiremos $C > 1$ sin pérdida de generalidad. Tenemos $|\widehat{f_l d\mu_j}| \leq g$ con $g \in L^{2r}(\mathbb{R})$. Aplicando el Teorema 2.2.4 (Portmanteau), el hecho de que $\mu_j \rightarrow \mu$ débilmente, implica que $\widehat{f_l d\mu_j} \rightarrow \widehat{f_l d\mu}$ punto a punto. Luego, por el Teorema 2.2.5 (Convergencia dominada), $\|\widehat{f_l d\mu_j}\|_{L^{2r}(\mathbb{R})} \rightarrow \|\widehat{f_l d\mu}\|_{L^{2r}(\mathbb{R})}$. Luego, nos alcanza con probar que

$$\|\widehat{f_l d\mu_j}\|_{L^{2r}(\mathbb{R})}^{2r} \geq C_{2r} \frac{N^l r^{-l-1}}{t^{\frac{l(2r+1)}{2}}}$$

para $j \geq l$. ■

Por 7.5, tenemos

$$f_l d\mu_j = t^{-j} N^j \sum_{b \in P_l} \sum_{a \in A_j \cap [b, b+N^{-l}]} e^{-2\pi i a \xi}$$

, y entonces

$$\begin{aligned} \widehat{f_l d\mu_j}(\xi) &= \frac{1 - e^{-\frac{2\pi i \xi}{N^j}}}{\frac{2\pi i \eta}{N^j}} t^{-j} \sum_{a \in A_j \cap [b, b+N^{-l}]} e^{-2\pi i a \xi} \\ &= e^{-\pi \xi N^j} \operatorname{sinc}\left(\frac{\xi}{N^j}\right) t^{-j} \sum_{a \in F_l \cap A_j} \end{aligned}$$

donde $\operatorname{sinc}(x) = \sin(\pi x)$. Entonces

$$\begin{aligned} \|\widehat{f_l d\mu_j}\|_{L^{2r}(\mathbb{R})}^{2r} &= t^{-2rj} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^{2r}(\xi/N^j) \left| \sum_{a \in F_l \cap A_j} e^{-2\pi i a \xi} \right|^{2r} d\xi \\ &= \frac{N^j}{t^{2rj}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^{2r}(\eta) \left| \sum_{a \in N^j(F_l \cap A_j)} e^{-2\pi i a \eta} \right|^{2r} d\eta \\ &= \frac{N^j}{t^{2rj}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^{2r}(\eta) \sum_{a_1, \dots, a_{2r} \in N^j(F_l \cap A_j)} e^{-2\pi i \eta \sum_{n=1}^{2r} (a_n - a_{n+r})} \\ &= \frac{N^j}{t^{2rj}} \sum_{a_1, \dots, a_{2r} \in N^j(F_l \cap A_j)} \widehat{\operatorname{sinc}^{2r}}\left(\sum_{r=1}^n (a_n - a_{n+r})\right). \end{aligned}$$

Pero

$$\widehat{\operatorname{sinc}^{2r}} = *_{i=1}^r \widehat{\operatorname{sinc}} = *_{i=1}^r \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \geq 0.$$

Entonces

$$\|\widehat{f_l d\mu_j}\|_{L^{2r}(\mathbb{R})}^{2r} \geq \frac{N^j}{t^{2rj}} \widehat{\operatorname{sinc}^{2r}}(0) M_{N^j(F_l \cap A_j)}.$$

Observemos que

$$M_{N^j(F_l \cap A_j)} = M_{(F_l \cap A_j)}.$$

Luego podemos aplicar el Lema 7.5.3 y obtenemos:

$$\begin{aligned} \|\widehat{f_l d\mu_j}\|_{L^{2r}(\mathbb{R})}^{2r} &\geq C_{2r} \frac{N^j}{t^{2rj}} r^{-l-1} t^{(2r-1)\frac{l}{2}} \left(\frac{t^{2r}}{N}\right)^{j-l} \\ &= C_{2r} \frac{N^l r^{l+1}}{t^{\frac{l(2r+1)}{2}}}. \end{aligned}$$

Como queríamos probar.

Ahora podemos probar la proposición 7.5.2:

Demostración: Fijemos $r \in \mathbb{N}$ tal que $r > \frac{1}{\alpha}$. Por el lema 7.5.5, (7.24) se cumple para $p = 2r$, provisto que n_0 es suficientemente grande. Nos alcanza con probar que también se cumple para todo p tal que $1 \leq p < 2r$.

Sea $\phi \in L_\infty(\mathbb{R})$, entonces para $1 \leq p < 2r$ tenemos

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{L^{2r}(\mathbb{R})}^{2r} &= \int |\phi|^{2r} \\ &= \int |\phi|^p |\phi|^{2r-p} \\ &\leq \|\phi\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{2r-p}. \end{aligned}$$

Aplicamos esto con $\phi = \widehat{f_l d\mu}$. Tenemos que

$$\|\widehat{f_l d\mu}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \mu(F_l) = t^{-\frac{l}{2}},$$

con lo cuál

$$\|\widehat{f_l d\mu}\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \geq C \frac{N^l r^{-l-1}}{t^{l(2r+1)}} (t^{\frac{l}{2}})^{2r-p} = C \frac{N^l n r^{-l-1}}{t^{\frac{l(p+1)}{2}}}$$

como queríamos ver. ■

Capítulo 8

Aplicaciones de Restricción

Dedicaremos este capítulo al estudio de algunas aplicaciones de los teoremas de restricción que estudiamos. Particularmente estudiaremos la conexión con dos problemas de PDE's: La ecuación de Schrodinger y la ecuación de Helmholtz. También estudiaremos la conexión con otros dos problemas centrales del análisis armónico y teoría geométrica de la medida: La conjetura de Kakeya y los multiplicadores de Bochner-Riesz.

8.1. PDE's

En esta sección estudiaremos cómo podemos aplicar el endpoint del teorema de Stein-Tomas para estudiar acotaciones de soluciones distribucionales de PDE's. Cuando tenemos una ecuación en derivadas parciales una de las herramientas clásicas para el estudio de sus soluciones es la transformada de Fourier, pues al transformar convertimos la ecuación diferencial en una ecuación algebraica. Una vez resuelta esta ecuación algebraica, necesitamos antitransformar la solución obtenida y acá es a donde entra restricción: en muchas de las PDE's clásicas, al transformar nos aparece una integral sobre una hipersuperficie suave, por ejemplo, el paraboloides en el caso de la ecuación de Schrödinger y la esfera en el caso de la ecuación de Helmholtz. Tener teoremas de restricción sobre estas superficies nos permitirá estimar las soluciones de estas ecuaciones diferenciales.

8.1.1. Ecuación de Schrödinger

Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} i\partial_t\mu + \frac{1}{2\pi}\Delta\mu = 0 \\ \mu(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Para encontrar las soluciones primero vamos a transformar Fourier respecto de x ambas ecuaciones. Obtenemos

$$\begin{cases} i\widehat{\partial_t\mu} + \frac{1}{2\pi}\widehat{\Delta\mu} = 0 \\ \widehat{\mu(\cdot, 0)}(\xi) = \widehat{f}(\xi). \end{cases}$$

La primera ecuación se cumple si y sólo si se cumple la siguiente igualdad

$$i\widehat{\partial_t\mu} = -\frac{1}{2\pi}\widehat{\Delta\mu}.$$

Usando una de las identidades clásicas que aparecen en los preliminares, podemos reescribir el lado derecho de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2\pi}\widehat{\Delta\mu} = \frac{1}{2\pi}(-4\pi^2)\widehat{\mu}|\xi|^2 = -2\pi|\xi|^2\widehat{\mu}.$$

De esta manera obtenemos la siguiente ecuación diferencial en t :

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{\mu} = 2\pi i |\xi|^2 \widehat{\mu} \\ \widehat{\mu}(\cdot, 0)(\xi) = \widehat{f}(\xi). \end{cases}$$

Podemos obtener $\widehat{\mu}$ de la primera ecuación usando el método de variables separadas

$$\frac{\partial_t \widehat{\mu}(\cdot, t)(\xi)}{\widehat{\mu}(\cdot, t)(\xi)} = 2\pi i |\xi|^2.$$

Notemos que podemos sacar la derivada temporal de la integral ya que estamos integrando con respecto a otra variable.

Integrando respecto a t a ambos lados obtenemos

$$\ln(\widehat{\mu}(\cdot, t)(\xi)) = 2\pi i |\xi|^2 t + k,$$

y luego nos queda

$$\widehat{\mu}(\cdot, t)(\xi) = C e^{2\pi i |\xi|^2 t},$$

donde C es una constante positiva. Para encontrar C tenemos que usar la condición inicial:

$$\widehat{\mu}(\cdot, t)(\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i |\xi|^2 t}.$$

Usando la fórmula de inversión podemos recuperar μ :

$$\mu(x, t) = \int e^{2\pi i |\xi|^2 t} e^{2\pi i x \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi \quad (8.1)$$

$$= \int \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i (|\xi|^2 t + x \xi)} d\xi. \quad (8.2)$$

Consideremos la medida μ soportada en el paraboloide $\tau = |\xi|^2 \subset \mathbb{R}^{d+1}$, dada por

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} g(\xi, \tau) d\mu(\xi, \tau) = \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi, |\xi|^2) d\xi.$$

El paraboloide es una superficie suave, con curvatura Gaussiana nunca nula pero no es compacta, con lo cuál, no podemos usar el Stein-Tomas de manera directa. Para ello consideremos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$, tal que $\varphi(\xi, \tau) = 1$ si $|\xi| + |\tau| \leq 1$. Ahora si podemos aplicar Stein-Tomas, nos queda

$$\|(\widehat{f}\varphi\mu)^\vee\|_{L^q(\mathbb{R}^{d+1})} \leq C \|\widehat{f}\|_{L^2(\varphi\mu)},$$

donde $q = \frac{2d+4}{d} = 2 + \frac{4}{d}$. Observemos que $\varphi\mu$ es una medida soportada en el paraboloide y como este es simétrico, usando que por la fórmula de inversión vale $\widehat{g}(-x) = g^\vee(x)$,

tenemos que $\|\widehat{g}\| = \|g^\vee\|$.

Por lo anterior, si $\text{supp } \widehat{f} \subset B(0, 1)$, entonces

$$\|(\widehat{f}\mu)^\vee\|_{L^{2+\frac{4}{d}}(\mathbb{R}^{d+1})} \leq C\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

Vamos a reescalar para remover la condición de $\text{supp } \widehat{f} \subset B(0, 1)$. Consideremos $f_\lambda(x) = f(\frac{x}{\lambda})$, $\mu_\lambda(x, t) = \mu(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^2})$. Si $\text{supp } \widehat{f}$ es compacto, $\text{supp } \widehat{f}_\lambda \subset B(0, 1)$ para λ grande. Además, las funciones reescaladas cumplen la ecuación

$$\begin{cases} i\partial_t \mu_\lambda + \frac{1}{2\pi} \Delta \mu_\lambda = 0 \\ \mu_\lambda|_{t=0} = f_\lambda \end{cases}$$

Luego, por lo anterior vale que

$$\|\mu_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^{d+1})} \leq C\|f_\lambda\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

Además,

$$\|f_\lambda\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \lambda^{\frac{d}{2}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

y

$$\|\mu_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^{d+1})} = \lambda^{\frac{d+2}{q}}\|\mu\|_{L^q(\mathbb{R}^{d+1})} = \lambda^{\frac{d}{2}}\|\mu\|_{L^q(\mathbb{R}^{d+1})}$$

Entonces se cumple

$$\|\mu\|_{L^q(\mathbb{R}^{d+1})} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

Para toda f en la clase de Schwartz con $\text{supp } \widehat{f}$ compacto.

Como estas funciones son densas en $L^2(\mathbb{R}^d)$, esta última cota vale para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ como queríamos ver.

8.1.2. Ecuación de Helmholtz

Consideremos la ecuación de Helmholtz:

$$\Delta \mu + 4\pi^2 \mu = 0$$

Dada $g \in L^p(\mathbb{S}^{d-1})$, tenemos que $\widehat{gd\sigma}$ es una solución distribucional de la ecuación anterior. Probemos esto:

$$\begin{aligned} (\Delta \widehat{gd\sigma} + 4\pi^2 \widehat{gd\sigma})(f) &= \widehat{gd\sigma}(\Delta f) + 4\pi^2 \widehat{gd\sigma}(f) \\ &= \widehat{gd\sigma}(\Delta f + 4\pi^2 f) \\ &= 4\pi^2 d\sigma((1 - |\xi|^2)\widehat{f}) = 0 \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad estamos usando que $gd\sigma$ está soportada sobre la esfera. Usando argumentos análogos al caso de la ecuación de Schrödinger, podemos ver que cualquier estimación sobre restricción sobre la esfera nos proveerá de información acerca del tamaño de las soluciones de la ecuación de Helmholtz.

8.2. Makeya vs Restricción

8.2.1. El problema de Makeya

Definición 8.2.1 *Un conjunto de Besicovitch, o conjunto de Makeya, es un conjunto compacto $E \subset \mathbb{R}^d$ que contiene un segmento lineal unitario en cada dirección, es decir,*

$$\forall e \in \mathbb{S}^{d-1}, \exists x \in \mathbb{R}^d : x + te \in E \quad \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Teorema 8.2.2 (Besicovitch, 1920) *Si $n \geq 2$, entonces existen conjuntos de Makeya en \mathbb{R}^d con medida cero.*

Una pregunta clásica acerca de conjuntos de Besicovitch es, formulada informalmente, ¿Cuán pequeños pueden ser?. Usando la dimensión de Hausdorff que introdujimos en el Capítulo 6, la pregunta puede formularse más formalmente de la siguiente manera: **Pregunta abierta:** Dado $E \subset \mathbb{R}^d$, ¿ E necesariamente tiene que tener dimensión de Hausdorff d ? Para $d = 2$, la respuesta afirmativa fue dada por Davies en 1971 [Dav71]. Para d en general, la situación es parecida a la conjetura de Stein, se tienen diferentes cotas para cada d de la dimensión pero el problema sigue abierto. Una formulación más cuantitativa del problema de Makeya puede hacerse usando lo que se conoce como la función maximal de Makeya, que se define de la siguiente manera: Para cualesquiera $\delta > 0$, $e \in \mathbb{S}^{d-1}$ y $a \in \mathbb{R}^d$, sea

$$T_e^\delta(a) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : |(x-a) \cdot e| \leq \frac{1}{2}, |(x-a)^\perp| \leq \delta \right\},$$

donde $x^\perp = x - (x \cdot e)e$. Los $T_e^\delta(a)$ son δ -entornos del segmento lineal unitario con dirección e , centrado en a .

Definición 8.2.3 *Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, su función maximal de Makeya es la función $f_\delta^* : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f_\delta^*(e) = \sup_{a \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} \int_{T_e^\delta(a)} |f|.$$

La idea va a ser probar estimaciones del tipo $\delta^{-\epsilon}$ para f_δ^* , es decir, estimaciones de la forma: Dado ϵ , existe C_ϵ tal que

$$\|f_\delta^*\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})} \leq C_\epsilon \delta^{-\epsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad (8.3)$$

para algún $p < \infty$

Observación 8.2.4

1. Es claro de la definición que

$$\begin{aligned} \|f_\delta^*\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\ \|f_\delta^*\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\leq \delta^{-(d-1)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

2. Con $d \geq 2$ y $p < \infty$ no puede haber cotas de la forma

$$\|f_\delta^*\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

con C independiente de δ .

3. Fijado $p < d$, la ecuación (8.3) no puede valer para todo $\epsilon > 0$.

Para ver (2) consideremos un conjunto de Kakeya de medida cero E (que sabemos que existe por el teorema 8.2.2 de Besicovitch). Sea E_δ el δ -entorno de E , y sea $f = \chi_{E_\delta}$. Entonces $f_\delta^*(e) = 1$ para todo $e \in \mathbb{S}^{d-1}$, con lo cual, $\|f_\delta^*\|_p \approx 1$. Por otro lado, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|E_\delta\| = 0$, y entonces $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|f\|_p = 0$ para cualquier $p < \infty$.

Para probar (3) consideremos $f = \chi_{D(0,\delta)}$. Entonces para todo $e \in \mathbb{S}^{d-1}$, el tubo $T_e^\delta(0)$ contiene a $D(0,\delta)$, de manera que $f_\delta^*(e) = \frac{|D(0,\delta)|}{|T_e^\delta(0)|} \gtrsim \delta$. Luego, $\|f_\delta^*\|_p \sim \delta$. Sin embargo, $\|f\|_p \sim \delta^{d/p}$. Esto muestra que la ecuación (8.3) no vale para ningún $p < d$, como queríamos ver.

Conjetura 8.2.5 (Función maximal de Kakeya) *Probar que hay una cota de la forma (8.3) con $p = d$, es decir, para todo ϵ , existe C_ϵ*

$$\|f_\delta^*\|_{L^d(\mathbb{S}^{d-1})} \leq C_\epsilon \delta^{-\epsilon} \|f\|_{L^d(\mathbb{R}^d)}$$

.

Cuando $n = 2$ esto fue probado para una formulación un poco distinta por Córdoba [Cor77] y como está enunciado por Bourgain [Bou91].

Proposición 8.2.6 *Si hay una cota de la forma (8.3) para algún $p > \infty$, entonces los conjuntos de Besicovitch en \mathbb{R}^d tienen dimensión d .*

Para una demostración ver [Wol03].

8.2.2. Conexión con restricción

Que la conjetura de restricción implica Kakeya fue demostrado por Bourgain en [Bou91]. Nosotros seguiremos la construcción que aparece en [Wol03]. Necesitaremos la siguiente definición:

Definición 8.2.7 (Conjunto δ -separado maximal) *Diremos que un conjunto $E \subset A \subset \mathbb{R}^d$ es δ -separado si dados $e, e' \in E$, se cumple $|e - e'| \geq \delta$.*

Diremos que el conjunto E es un conjunto δ -separado maximal de A si dado $E' \subset A$ otro conjunto δ -separado tal que $E \subset E'$, necesariamente $E = E'$.

Proposición 8.2.8 *Si (3.5) es cierta, entonces la cota conjeturada*

$$\|f_\delta^*\|_{L^d(\mathbb{S}^{d-1})} \leq C_\epsilon \delta^{-\epsilon} \|f\|_{L^d(\mathbb{R}^d)}$$

también es cierta

Demostración: Vamos a necesitar el siguiente lema:

Lema 8.2.9 *Sea $1 < p < \infty$, y sea p' el exponente dual de p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Supongamos que p tiene la siguiente propiedad: Si $\{e_k\} \subset \mathbb{S}^{d-1}$ es un conjunto δ -separado maximal, y si $\delta^{n-1} \sum_k y_k^{p'} \leq 1$, entonces para cualquier elección de puntos $a_k \in \mathbb{R}^d$ tenemos:*

$$\left\| \sum_k y_k \chi_{T_{e_k}^\delta}(a_k) \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq A.$$

Entonces se tiene la siguiente cota

$$\|f_\delta^*\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim A\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Demostración: Sea $\{e_k\}$ un subconjunto δ -separado maximal de \mathbb{S}^{d-1} . Observemos que si $|e - e'| < \delta$, entonces $f_\delta^*(e) \leq C f_\delta^*(e')$, pues podemos cubrir cualquier $T_e^\delta(a)$ con un número acotado de tubos $T_{e'}^\delta(a')$. Luego,

$$\begin{aligned} \|f_\delta^*\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})}^p &\leq \sum_k \int_{D(e_k, \delta)} |f_\delta^*(e)|^p de \\ &\lesssim \left(\delta^{d-1} \sum_k |f_\delta^*(e_k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \delta^{d-1} \sum_k y_k |f_\delta^*(e_k)| \end{aligned}$$

para alguna sucesión y_k tal que $\sum_k y_k^{p'} \delta^{d-1} = 1$. Donde en esto último utilizamos la dualidad entre l_p y $l_{p'}$. Luego,

$$\|f_\delta^*\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})}^p \lesssim \delta^{d-1} \sum_k y_k \frac{1}{|T_{e_k}^\delta(a_k)|} \int_{T_{e_k}^\delta(a_k)} |f|,$$

para alguna elección de $\{a_k\}$. Como $|T_{e_k}^\delta(a_k)| \approx \delta^{d-1}$, se sigue que

$$\begin{aligned} \|f_\delta^*\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})}^p &\lesssim \int \left(\sum_k y_k \chi_{T_{e_k}^\delta(a_k)} \right) |f| \\ &\leq \left\| \sum_k y_k \chi_{T_{e_k}^\delta(a_k)} \right\|_{p'} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad (\text{Desigualdad de Hölder}) \\ &\leq A\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

■

Ahora continuamos con la demostración de la proposición. Como queremos usar el lema, vamos a elegir un conjunto δ -separado $\{e_j\}$ en \mathbb{S}^{d-1} . Observemos que un conjunto de estos tiene cardinal $\approx \delta^{-(d-1)}$. Para cada j elegimos un tubo $T_{e_j}^\delta(a_j)$, y sea τ_j el cilindro obtenido dilatando $T_{e_j}^\delta(a_j)$ por un factor δ^{-2} alrededor del origen. Así, el cilindro τ_j tiene largo δ^{-2} , radio δ^{-1} y eje en la dirección e_j . Sea también

$$S_j = \{e \in \mathbb{S}^{d-1} : 1 - e \cdot e_j \leq C^{-1} \delta^2\}.$$

Entonces S_j es un casquete esférico de radio $\approx C^{-1} \delta$, centrado en e_j . Elegimos la constante C suficientemente grande de manera que las S_j son disjuntas. La construcción de Knapp (Proposición (3.2.8)) nos da una función suave f_j en \mathbb{S}^{d-1} soportada en S_j y tal que

$$\begin{aligned} \|f_j\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})} &= 1 \\ |\widehat{f_j d\sigma}| &\lesssim \delta^{n-1} \quad \text{en } \tau_j. \end{aligned}$$

Consideramos funciones de la forma:

$$f_\omega = \sum_j \omega_j y_j f_j,$$

donde y_j son coeficientes no negativos y ω_j son variables aleatorias independientes tomando valores $1 \pm$ con igual probabilidad. Como las f_j tienen soportes disjuntos, tenemos

$$\begin{aligned} \|f_\omega\|_{L^q(\mathbb{S}^{d-1})}^q &= \sum_j \|y_j f_j\|_{L^q(\mathbb{S}^{d-1})}^q \\ &\approx \sum_j y_j^q \delta^{d-1}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Vamos a necesitar el siguiente resultado conocido como desigualdad de Kinchin:

Proposición 8.2.10 (Desigualdad de Kinchin) Sean $\{\omega_n\}_{n=1}^N$ variables aleatorias independientes tomando los valores ± 1 con igual probabilidad, y sea $\{a_n\}_{n=1}^N$ una sucesión de números complejos. Entonces se tiene

$$\mathbb{E}(|\sum_{n=1}^N a_n \omega_n|^p) \approx (\sum_{n=1}^N |a_n|^2)^{\frac{p}{2}}$$

para cualquier $0 < p < \infty$, donde las constantes implícitas dependen sólo de p .

Para una demostración ver [Wol03].

Usando esto nos queda:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\|\widehat{f_\omega d\sigma}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}^q \right) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}(|\widehat{f_\omega d\sigma}(x)|^q) dx \\ &\approx \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_j y_j^2 |\widehat{f_\omega d\sigma}(x)|^2 \right)^{\frac{q}{2}} dx \quad (\text{Desigualdad de Khinchin}) \\ &\gtrsim \delta^{q(d-1)} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_j y_j^2 \chi_{\tau_j}(x) \right|^{\frac{q}{2}} dx. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Asumamos ahora que vale (3.5). Entonces para cualquier $q > \frac{2d}{d-1}$ por (8.4) y (8.5) tenemos que

$$\delta^{q(d-1)} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_j y_j^2 \chi_{\tau_j}(x) \right|^{\frac{q}{2}} dx \lesssim \sum_j y_j^q \delta^{d-1}.$$

Ahora queremos usar el lema (8.2.9). Para ello consideremos $z_j = y_j^2$ y $p' = \frac{q}{2}$. Si

$$\delta^{n-1} \sum_j z_j^{p'} \leq 1,$$

entonces la desigualdad anterior nos dice que

$$\left\| \sum_j z_j \chi_{\tau_j} \right\|_{p'} \lesssim \delta^{-2(d-1)}$$

para cualquier $p' \geq \frac{d}{d-1}$. Ahora reescalamos esto por δ^2 , es decir, multiplicamos por la matriz $\delta^2 I$ a los puntos del cilindro τ_j para volver a obtener T_j . Aplicando cambio de variables con $A = \delta^{-2} I$ obtenemos lo siguiente:

$$\text{si } \delta^{d-1} \sum_j z_j^{p'} \leq 1, \text{ entonces } \left\| \sum_j z_j \chi_{T_j} \right\|_{p'} \lesssim \delta^{2\left(\frac{d}{p'} - (d-1)\right)}.$$

Observemos que $\frac{d}{p'} \rightarrow 0$ cuando $p' \rightarrow \frac{d}{d-1}$. Luego, dado $\epsilon > 0$ tenemos

$$\text{si } \delta^{d-1} \sum_j z_j^{p'} \leq 1, \text{ entonces } \left\| \sum_j z_j \chi_{\tau_j} \right\|_{p'} \lesssim \delta^{-\epsilon},$$

si p' está suficientemente cerca de $\frac{d}{d-1}$. Por el lema 8.2.9, esto implica que para cualquier $\epsilon > 0$ tenemos

$$\|f_\delta^*\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})} \lesssim \delta^{-\epsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

si $p < d$ está lo suficientemente cerca. Observemos que esto no contradice la observación 8.2.4, ya que para cada ϵ variamos el $p < d$. Interpolando con la cota trivial de L^∞ podemos concluir que

$$\|f_\delta^*\|_{L^d(\mathbb{S}^{d-1})} \lesssim \delta^{-\epsilon} \|f\|_{L^d(\mathbb{R}^d)}.$$

■

Con esto probamos que la conjetura de Restricción es más fuerte que la conjetura de Kakeya. Bourgain en [Bou91] probó una especie de recíproca asumiendo una cota sobre el tamaño del conjunto de Kakeya. No se sabe si alguna de las dos versiones de la conjetura de Kakeya implica la conjetura de Restricción en todo su rango.

Teorema 8.2.11 *Supongamos que tenemos una cota*

$$\left\| \sum_j \chi_{T_{e_j}^\delta}(a_j) \right\|_{q'} \leq C_\epsilon \delta^{-\left(\frac{d}{q} - 1 + \epsilon\right)} \quad (8.6)$$

para cualquier $\epsilon > 0$ y $q > 2$ fijo. Entonces

$$\|f \widehat{d\sigma}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C_p \|f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})},$$

para algún $p < \frac{2d+2}{d-1}$.

Observación 8.2.12 *La versión geométrica de (8.6) es que los conjuntos de Kakeya en \mathbb{R}^d tienen dimensión al menos q .*

8.3. Bochner-Riesz vs Restricción

En esta sección estudiaremos la conexión entre los multiplicadores de Bochner-Riesz y los teoremas de restricción para la esfera.

Empezaremos con una breve introducción a los multiplicadores del disco.

8.3.1. Multiplicadores del disco

Sabemos que dada la transformada de Fourier

$$\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx$$

de una función suave, podemos reconstruir la función f vía la fórmula de inversión

$$f(x) = \int e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Pero si f no es suave, por ejemplo sólo sabemos que f está en L^p , entonces no es claro que la fórmula de inversión sea cierta, o siquiera tenga sentido.

Para estudiar este problema, podemos definir las integrales de Fourier parciales $S_R f(x)$

$$S_R f(x) = \int_{|\xi| \leq R} e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Una pregunta que uno puede hacerse es si

$$S_R f \rightarrow f \text{ en norma } L^p$$

Los operadores S_R se conocen como los multiplicadores del disco pues son los multiplicadores de Fourier correspondientes a la función característica del disco $|\xi| \leq R$. El problema está resuelto completamente. En el caso $d = 1$, se tiene convergencia en norma L^p para todo $1 < p < \infty$. Sin embargo, para dimensiones mayores sólo se tiene convergencia para $p = 2$. Esto fue probado por Feferman [Fef71].

Ahora recordemos el principio de acotación uniforme

Lema 8.3.1 *Sea $1 < p < \infty$ y supongamos que T_R es una secuencia de operadores lineales tales que $T_R f \rightarrow f$ en norma L^p cuando $R \rightarrow \infty$ para toda $f \in C_0^\infty$. Entonces tenemos que la siguiente estimación es necesaria y suficiente para que $T_R f$ converga a f para toda $f \in L^p$*

$$\|T_R f\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}$$

para todo $R > R_0$ con R_0 suficientemente grande, donde las cotas no dependen de R .

Teniendo esto en cuenta, para responder a la pregunta de si $S_R f$ converge a f en norma L^p , nos alcanza con ver que

$$\|S_R f\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}$$

uniformemente en R . De hecho, reescalando podemos ver que alcanza con probarlo para $R = 1$.

8.3.2. Multiplicadores de Bochner-Riez

Ya mencionamos que para dimensiones mayores que $d = 1$ sólo hay convergencia para $p = 2$. Una pregunta natural es como pueden modificarse estos multiplicadores para obtener un mayor rango de p . Una forma de hacer esto, es suavizar a la función en el borde del disco

en el que estamos integrando. Para esto, sea $\delta > 0$ definimos la media de Bochner-Riesz como

$$S_R^\delta f(x) = \int_{|\xi| \leq R} \left(1 - \frac{|\xi|^2}{R^2}\right)^\delta e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Cuando $\delta = 0$, esto es el multiplicador del disco S_R . Mientras más grande es δ , más suave es lo que estamos integrando en $|\xi| = R$, y esto ayuda a la convergencia.

Es fácil ver que $S_R^\delta f$ converge a f si $f \in C_0^\infty$. Con lo cuál, podemos preguntarnos igual que antes si $S_R^\delta f$ converge a f en norma L^p para toda $f \in L^p$. Nuevamente esto es equivalente a que se cumpla la siguiente estimación

$$\|S_1^\delta f\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}.$$

Herz encontró una condición necesaria para que se cumpla esto

Lema 8.3.2 *Para que se cumpla (8.3.2) es necesario que*

$$\left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| < \frac{2\delta + 1}{2d}. \quad (8.7)$$

Para una idea de la demostración ver las notas de Tao [Tao99b].

Conjetura 8.3.3 (Multiplicadores de Bochner-Riesz) *Sean $\delta > 0$ y $1 \leq p \leq \infty$ tales que se cumple (8.7). Entonces $S_R^\delta f$ converge a f en norma L^p para toda $f \in L^p$.*

La conjetura fue resultada completamente sólo para el caso $d = 2$.

Ahora enunciaremos un resultado de Fefferman que conecta restricción de la transformada de Fourier a la esfera con los multiplicadores de Bochner-Riesz

Teorema 8.3.4 *Supongamos que p es tal que vale $R_{S^d}(2 \rightarrow p)$. Entonces la conjetura de Bochner-Riesz es válida para p .*

Para una demostración ver las notas de Tao [Tao99b]. También vale una recíproca, ver [Tao99a]

Apéndice A

Integrales oscilatorias

En este apéndice se estudiarán propiedades y resultados sobre integrales oscilatorias. Para ello, seguiremos el libro de Stein [Ste93]. Con esto podremos obtener estimaciones del decaimiento de la transformada de medidas asociadas a superficies. El objetivo va a ser estudiar el decaimiento de la siguiente integral:

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx,$$

para $\lambda \rightarrow \infty$, donde ϕ es una función suave a valores reales (la fase) y ψ es una función suave a valores complejos.

A.1. Primer caso: una variable

Lema A.1.1 (Fase no estacionaria) Sean ψ y ϕ como en la definición. Si además tenemos que $\phi'(x) \neq 0$ en el soporte de ψ entonces

$$I(\lambda) = O(\lambda^{-N}),$$

para todo $N \in \mathbb{N}$.

Demostración: Cuando $N = 1$, podemos tomar

$$C(\phi, \psi) = \int \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{\psi(x)}{\phi'(x)} \right) \right| dx$$

pues, integrando por partes nos queda:

$$\begin{aligned} |I(\lambda)| &= \left| \int \frac{1}{i\lambda\phi'(x)} \frac{d}{dx} (e^{i\lambda\phi(x)})\psi(x) \right| \\ &= \left| - \int e^{i\lambda\phi(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{\psi(x)}{i\lambda\phi'(x)} \right) \right| \\ &\leq \frac{C(\phi, \psi)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Recordemos que para $N = 1$ el truco estaba en que el operador diferencial

$$D(f) = \frac{1}{i\lambda\phi'} \frac{df}{dx}$$

deja fijo a $e^{i\lambda\phi(x)}$. Luego, para $N \geq 2$, nuevamente integrando por partes, tenemos:

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} D^N(e^{i\lambda\phi(x)}) \psi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)} {}^t D^N(\psi(x)) dx \\ &\leq \frac{C(\phi, \psi)}{\lambda^N} \end{aligned}$$

donde ${}^t Df = -\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{i\lambda\phi'} \right)$ es el traspuesto de D . ■

Proposición A.1.2 (Fase estacionaria) *Sea $k \geq 2$, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = \dots = \phi^{(k-1)}(x_0) = 0$ y $\phi^{(k)} \neq 0$. Si el soporte de ψ está en un entorno suficientemente reducido de x_0 , entonces*

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx \sim \lambda^{\frac{1}{k}}.$$

Demostración: (Caso $k = 2$, $\phi(x) = x^2$) Tenemos

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} \psi(x) dx.$$

Sabemos que si $g(x) = e^{-zx^2}$ con $z \in \mathbb{R}_{>0}$ entonces

$$\widehat{g} = e^{-\frac{\pi^2 \psi^2}{z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2zx^2}$$

de modo que

$$\widehat{g}(\xi) = \left(\frac{\pi}{z} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{z}}.$$

Aplicando Parseval nos queda

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-zx^2} \psi(x) dx = \left(\frac{\pi}{z} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{z}} \widehat{\psi}(\xi) d\xi. \quad (\text{A.1})$$

Veamos que (A.1) vale también para z en

$$S = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \geq 0, z \neq 0\}.$$

Si ponemos $z = -i\pi\lambda$, $\lambda > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{i\pi\lambda x^2} \psi(x) dx &= \left(\frac{\pi}{i\pi\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{\pi^2 \xi^2}{i\pi\lambda}} \widehat{\psi}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} (1-i) \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{i\pi \xi^2}{\lambda}} \widehat{\psi}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x^2} \psi(x) dx \right| &\leq \frac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\mathbb{R}} |e^{-\frac{i\pi\xi^2}{\lambda}} - 1| |\widehat{\psi}(\xi)| d\xi + \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(\xi)| d\xi \right) \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\pi}{|\lambda|} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\widehat{\psi}(\xi)| d\xi + |\psi(0)| \right) \\
&\leq \frac{|\psi(0)|}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} + \frac{\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2 |\widehat{\psi}(\xi)| d\xi}{|\lambda|^{\frac{3}{2}}} \\
&\leq \frac{|\psi(0)|}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{|\lambda|^{\frac{3}{2}}} C \|(1 + |\xi|)^4 \widehat{\psi}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\
&\leq \frac{|\psi(0)|}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{|\lambda|^{\frac{3}{2}}} C \|\widehat{\partial^4 \psi}\|_{\infty(\mathbb{R})} \\
&\leq \frac{|\psi(0)|}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{|\lambda|^{\frac{3}{2}}} C \|\psi^{(4)}\|_{L^1(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad usamos la fórmula de inversión y en la cuarta usamos que $\widehat{\psi} \in \mathcal{S}$.

Ahora veamos el caso general para $k = 2$ y ϕ una función suave. Tenemos que $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = 0$, $\phi''(x_0) \neq 0$. Podemos escribir

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= c(x - x_0)^2 + O(|x - x_0|^3) \\
&= c(x - x_0)^2(1 + \epsilon(x)) \quad \text{con} \quad \epsilon(x) = O(|x - x_0|).
\end{aligned}$$

Mirando el polinomio de Taylor de ϕ , vemos que podemos tomar

$$\epsilon(x) = (x - x_0)\phi'''(\eta_x).$$

Observemos que como $\phi''(x_0) \neq 0$, si tomamos x en un entorno suficientemente reducido de x_0 tenemos

$$\phi'(x) = \phi'(x) - \phi'(x_0) = \phi''(\theta_x)(x - x_0) \neq 0.$$

Dado un entorno V suficientemente chico de x_0 podemos definir un difeomorfismo $y : V \rightarrow y(V)$ dado por la fórmula

$$y(x) = (x - x_0)(1 + \epsilon(x))^{\frac{1}{2}}.$$

Como $0 \neq \phi'(x) = c2y(x)y'(x)$ y además $y'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \epsilon(x))^{\frac{1}{2}} = 1$, resulta que $y'(x) \neq 0$ en V . Además, para $x \in V$ tenemos que $\phi(x(y)) = cy^2(x)$. Entonces si ψ tiene soporte en V , tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi(x)} a(x) dx = \int_V e^{i\lambda\phi(x)} a(x) dx = \int_{y(V)} e^{i\lambda y^2} a(x(y)) x'(y) dy,$$

y podemos aplicar el caso anterior. ■

Proposición A.1.3 (Funciones de Bessel) *La función de Bessel $J_m(r)$ de orden m se define como*

$$J_m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir \operatorname{sen} \theta} e^{-im\theta} d\theta.$$

Vale que

$$J_m(r) = O(r^{-\frac{1}{2}}) \quad (r \rightarrow \infty).$$

Demostración: Queremos usar la proposición de fase estacionaria, para ello notemos que $\phi(\theta) = \operatorname{sen}(\theta)$ tiene derivada nula entre 0 y 2π solamente en $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$. Además, en esos puntos $|\phi''| = 1$. Notando esto, podemos escribir a J_m como una suma de tres integrales

$$J_m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ir \operatorname{sen} \theta} e^{-im\theta} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{ir \operatorname{sen} \theta} e^{-im\theta} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} e^{ir \operatorname{sen} \theta} e^{-im\theta} d\theta,$$

en cada una de las cuáles estamos en las condiciones de la proposición de fase estacionaria pues ϕ tiene un único punto crítico en esos intervalos. Luego, podemos aplicar el caso $k = 2$ de la proposición a cada una de las integrales y obtenemos el resultado buscado. ■

Proposición A.1.4 *Vale la siguiente expresión para las funciones de Bessel*

$$J_m(r) = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^m}{\Gamma(m + \frac{1}{2})\pi^{\frac{1}{2}}} \int_{-1}^1 e^{irt} (1 - t^2)^{m-\frac{1}{2}} dt.$$

Para una demostración ver página 338 del libro de Stein [Ste93]

Teorema A.1.5 *Sea $d\sigma$ la medida uniforme en \mathbb{S}^{d-1} . Entonces*

$$|\widehat{d\sigma}(\xi)| = O(|\xi|^{-\frac{d-1}{2}}).$$

Demostración: Podemos asumir que $\xi = (0, \dots, 0, \xi_d)$. Entonces

$$\widehat{d\sigma}(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{-2\pi i |\xi| \cos \theta} (\operatorname{sen} \theta)^{d-1} d\theta.$$

Si ponemos $r = 2\pi|\xi|$ y $t = -\cos \theta$ obtenemos que

$$|\widehat{d\sigma}(\xi)| = \int_{-1}^1 e^{irt} (1 - t^2)^{\frac{d-2}{2}} \frac{dt}{(1 - t^2)^{\frac{1}{2}}} = c J_{\frac{d-2}{2}}(r) r^{-\frac{d-2}{2}}$$

donde en la última desigualdad usamos la proposición anterior y c es una constante positiva. De modo que

$$|\widehat{d\sigma}(\xi)| = O(|\xi|^{-\frac{1}{2}}) |\xi|^{-\frac{d-2}{2}} = O(|\xi|^{-\frac{d-2}{2}-\frac{1}{2}}) = O(|\xi|^{-\frac{d-1}{2}}).$$

■

A.1.1. Varias variables

Lema A.1.6 Consideremos funciones ψ y ϕ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, ψ de soporte compacto. Si además $\nabla\phi(x) \neq 0$ en el soporte de ψ , entonces

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\pi\phi(x)}\psi(x)dx = O(\lambda^{-N})$$

para todo $N \in \mathbb{N}$.

Proposición A.1.7 Consideremos como antes ψ y ϕ funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Sea x_0 un punto crítico de ϕ no degenerado, es decir, $\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}\right)(x_0)$ es inversible. Si el soporte de ψ está contenido en un entorno suficientemente chico de x_0 entonces

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\pi\phi(x)}\psi(x)dx = C\psi(x_0)e^{i\lambda\phi(x_0)}\lambda\psi^{-\frac{d}{2}} + O(\lambda^{-\frac{d+1}{2}})$$

Ver páginas 344-350 del libro de Stein [Ste93].

Teorema A.1.8 Sea $S \subset \mathbb{R}^{d+1}$ una hipersuperficie, $d\sigma$ la medida en S , $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ y $d\mu = \psi d\sigma$. Si S admite una parametrización por una ϕ como en la proposición anterior (en cuyo caso diremos que S tiene curvatura Gaussiana no nula), entonces

$$|\widehat{d\mu}(\xi)| \lesssim |\xi|^{-\frac{d}{2}}.$$

Demostración: Podemos suponer que

$$S = \{(x, \phi(x)) : x \in U \subset \mathbb{R}^d; \phi(0) = 0; \nabla\phi(0) = 0\}.$$

Entonces $d\sigma = \sqrt{1 + |\nabla\phi|^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_d$. La integral oscilatoria a estimar es entonces

$$\begin{aligned} \widehat{d\mu}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^{d+1}} e^{-2\pi x\xi} d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i\langle(x_1, \dots, \phi(x_1, \dots, x_d)), \xi\rangle} \tilde{a}(x) dx_1 \cdots dx_d. \end{aligned}$$

Ponemos $\lambda = |\xi|$ y $\eta \in \mathbb{S}^d$ tal que $\xi = \lambda\eta$. Definimos ahora $\Phi(x, \eta) = \sum_{1 \leq j \leq d} x_j \eta_j + \phi(x_1, \dots, x_d)\eta_{d+1}$. Tenemos que probar que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda\Phi(x, \eta)} \tilde{\psi}(x) dx \right| \leq A_\eta \lambda^{-\frac{d}{2}}.$$

Dividamos la esfera en tres partes: $\mathbb{S}^n = S_N \cup S_S \cup S_E$, S_N un entorno del “polo norte” $\eta_N = (0, 0, \dots, 0, 1)$, un entorno del “polo sur” $\eta_S = (0, 0, \dots, 0, -1)$ y la franja del “ecuador” que sería el conjunto complementario de la esfera. Primero veamos el caso en el que η está en el entorno del polo norte, la parte en la que está en un entorno del polo sur es análoga.

Sabemos que $\phi(0) = \nabla\phi(0) = 0$ y que

$$\det_{1 \leq j, k \leq n} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_k} \right) (0) \neq 0.$$

Notemos además que dado η ,

$$\nabla_x \Phi(x, \eta) = (\eta_1, \dots, \eta_d) + \eta_{d+1} \nabla \phi(x),$$

de modo que

$$\nabla_x \Phi(x, \eta_N) = \nabla \phi(x).$$

Además,

$$\det_{1 \leq j, k \leq d} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} \right) (x, \eta_N) = \det_{1 \leq j, k \leq d} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} \right) (x).$$

En particular,

$$\nabla_x \Phi(0, \eta_N) = \nabla \phi(0) = 0$$

y

$$\det_{1 \leq j, k \leq d} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} \right) (0, \eta_N) = \det_{1 \leq j, k \leq d} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} \right) (0) \neq 0.$$

Queremos ver que para cada $\eta \in S_N$, si $\Phi(x, \eta)$ tiene puntos críticos. Para eso, debe satisfacerse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_d, \eta_1, \dots, \eta_{d+1}) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_d}(x_1, \dots, x_d, \eta_1, \dots, \eta_{d+1}) = 0. \end{cases}$$

Ahora como tenemos

$$\det_{1 \leq j, k \leq d} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} \right) (0, \eta_N) \neq 0,$$

el teorema de la función implícita nos dice que hay entornos U de η_N y V de $x_0 = 0$ tales que para cada $\eta \in U$ hay un único $x(\eta) \in V$ que satisface las condiciones de arriba y, por lo tanto, es un punto crítico de $\Phi(\cdot, \eta)$. Si tomamos a los entornos U y V suficientemente chicos, tenemos que

$$\det_{1 \leq j, k \leq d} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k} \right) (x(\eta), \eta) \neq 0.$$

Podemos aplicar entonces la proposición A.1.7 con $x_0 = x(\eta)$ y obtenemos el resultado buscado. Probemos ahora que el resultado también vale para la región ecuatorial. Como en esta región la fase es no estacionaria, el decaimiento será aún mejor. Como estamos en el ecuador, se tiene que

$$(\eta_1^2, \dots, \eta_{d+1}^2)^{1/2} \geq c > 0.$$

Además, $\nabla \phi(x) \rightarrow 0$ cuando x tiende a 0. Recordando (A.1.1), tenemos

$$|\nabla_x \Phi(x, \eta)| \geq c' > 0$$

para todo $\eta \in S_E$ y x suficientemente cerca del origen. Luego podemos aplicar el Lema A.1.6 para obtener el resultado buscado. ■

Bibliografía

- [Blu96a] Christian Bluhm, *Random recursive construction of salem sets*, Arkiv för Matematik **34** (1996), no. 1, 51–63. [53](#)
- [Blu96b] ———, *Zur konstruktion von salem-mengen*, Ph.D. thesis, Erlangen, 1996. [53](#)
- [Bou91] J. Bourgain, *Besicovitch type maximal operators and applications to Fourier analysis*, Geom. Funct. Anal. **1** (1991), no. 2, 147–187. [79](#), [82](#)
- [BP16] Christopher J Bishop and Yuval Peres, *Fractals in probability and analysis*, vol. 162, Cambridge University Press, 2016. [50](#)
- [BS10] Jong-Guk Bak and Andreas Seeger, *Extensions of the stein-tomas theorem*, arXiv preprint arXiv:1004.4948 (2010). [31](#)
- [Cor77] Antonio Cordoba, *The Keakeya maximal function and the spherical summation multipliers*, Amer. J. Math. **99** (1977), no. 1, 1–22. [79](#)
- [Dav71] Roy O. Davies, *Some remarks on the Keakeya problem*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **69** (1971), 417–421. [78](#)
- [Fal86] K. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 85, Cambridge University Press, Cambridge, 1986. [42](#)
- [Fal03] Kenneth Falconer, *Fractal geometry*, second ed., John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, 2003, Mathematical foundations and applications. [45](#)
- [Fef70] Charles Fefferman, *Inequalities for strongly singular convolution operators*, Acta Math. **124** (1970), 9–36. [1](#), [25](#)
- [Fef71] ———, *The multiplier problem for the ball*, Ann. of Math. (2) **94** (1971), 330–336. [83](#)
- [Gra09] Loukas Grafakos, *Modern Fourier analysis*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 250, Springer, New York, 2009. [25](#), [26](#), [30](#)
- [Ham15] Kyle David Hambrook, *Restriction theorems and salem sets*, Ph.D. thesis, University of British Columbia, 2015. [53](#)
- [HL13] Kyle Hambrook and Izabella Łaba, *On the sharpness of mockenhaupt’s restriction theorem*, Geometric and Functional Analysis **23** (2013), no. 4, 1262–1277. [1](#), [55](#)

- [Kah85] Jean-Pierre Kahane, *Some random series of functions*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 5, Cambridge University Press, Cambridge, 1985. 53
- [Kau81] R. Kaufman, *On the theorem of Jarník and Besicovitch*, Acta Arith. **39** (1981), no. 3, 265–267. 53
- [LP09] Izabella Łaba and Malabika Pramanik, *Arithmetic progressions in sets of fractional dimension*, Geometric and Functional Analysis **19** (2009), no. 2, 429–456. 53
- [Mat95] Pertti Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, Fractals and rectifiability. 47, 48, 50, 51
- [Moc00] G. Mockenhaupt, *Salem sets and restriction properties of Fourier transforms*, Geom. Funct. Anal. **10** (2000), no. 6, 1579–1587. 31, 53
- [Sal51] R. Salem, *On singular monotonic functions whose spectrum has a given Hausdorff dimension*, Ark. Mat. **1** (1951), 353–365. 53
- [Ste93] Elias M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Mathematical Series, vol. 43, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993, With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III. 85, 88, 89
- [Tao99a] Terence Tao, *The bochner-riesz conjecture implies the restriction conjecture*, 363 – 375. MR 1666558 52, 1999, pp. 363–376. 84
- [Tao99b] Terence Tao, *Lecture notes on Fourier analysis*, 1999, <https://www.math.ucla.edu/~tao/254b.1.99s/>. 3, 4, 84
- [Wol03] Thomas H. Wolff, *Lectures on harmonic analysis*, University Lecture Series, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003, With a foreword by Charles Fefferman and preface by Izabella Łaba, Edited by Łaba and Carol Shubin. 29, 53, 71, 79, 81