UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Una matrioshka de notaciones de ordinales

Guillermo Mosse

Director: Santiago Daniel Figueira

Agradecimientos

En primer lugar, a mi papá y mi mamá. Por el esfuerzo de todos estos años, por la sensibilidad y la responsabilidad que me inculcaron. Por ayudarme desde siempre y por seguir haciéndolo. Con mi mamá nos decíamos "Te quiero hasta el infinito punto rojo" cuando yo era chiquito. Gracias a esta tesis, tal vez ahora nos podemos decir que nos queremos hasta $\psi(\Gamma_{\Omega+1})$.

También les quiero agradecer a los profesores Michael Rathjen y Wolfram Pohlers. Fue en un curso de Michael Rathjen, en una escuela de verano de Lógica y Computabilidad en Göttingen, donde aprendí los primeros conceptos sobre Ordinal Analysis y donde las notaciones de ordinales me llamaron la atención por primera vez. Gracias, también, por sus correos con respuestas y consejos. En la escuela de verano de este año, con la tesis ya escrita a medias, Wolfram Pohlers dio otro excelente curso y accedió muy amablemente a responderme algunas preguntas que tenía sobre las cuestiones más filosóficas de lo que estaba estudiando. Las charlas con él me motivaron a profundizar en ciertos temas y de ahí salió el Interludio sobre Ordinal Analysis.

A lxs docentes de mi facultad, que no dejan de contagiarme el entusiasmo que tienen, y que si alguna vez un tema me pareció fácil fue gracias a su increíble pedagogía. Entre otros, menciono a Teresa, Mati S., Marce, Santi, Sergio, Jonathan, Gabriel, Pinasco, Mer, Diego G., pero hay muchxs más.

A las personas que me ayudaron a bajar el nivel de autoexigencia. Realmente, gracias. A Santi, Vero Becher, Úrsula Molter, Juampi, Fede, Lau, Esteban B., Charly, mi mamá, Kari, Pitu, Fer, y a quienes no esté recordando.

A mis amigxs de la facu. Gracias, Juampi, Nacho, Alexis, Pablito, Emi, Fer, Esteban S. Por bancarme en este tiempo, y por ayudarme cada vez que lo necesitaba. Gracias, Juampi, por las innumerables discusiones sobre ordinales, las disfruté mucho. Gracias a los demás por bancarse todos mis planteos y pedidos de opinión. Gracias, Pablito, por bancarte el discursito de qué es el Ordinal Analysis: fue esa charla la que me motivó a hacer la tesis en este tema. Gracias, Esteban, por la idea para el título de la tesis ("ah, es como una matrioshka, ¿no?") y los consejos de estilo. Gracias por la amistad y las charlas. Gracias, Nacho, por hacerme estallar de risa, y por los juegos, especialmente el Cosmic, y a Caro, gracias por la buena onda. Aclaro que no estoy incluyendo a varias personas a las que les tengo mucho cariño pero soy tímido y no me animo a llamarlas mis amigxs. De todas maneras, agrego: gracias, Sergio, por las conversaciones.

Gracias a mis amigxs de fuera de la facu. A lxs de bio: Alan, Sol, Abru, Lau, Sele, Ceci y lxs de grupos pasados, por la ternura. A Kari, por la frescura de ser una persona tan distinta. A Mara, por tantos años.

Gracias a los amigos que alguna vez estuvieron y ya no están, por alguna razón u otra. Gracias, Nahuel, por el cariño y por la música.

Gracias, por supuesto, a mis jurados, Pedro y Alejandro, por aceptar leer mi tesis.

Gracias, Santi, por aceptar dirigirme en un tema de tesis tan...así, y por la paciencia, por bancarme todos los planteos, por todos los consejos, las intuiciones que me diste, por bajarme a tierra cuando fue necesario, y por hacer de esta experiencia una muy placentera.

Gracias a mis hermanos, sus parejas, y sus hijxs[1]: Matías, Vero, Lilu, Ale, Ali; Jo, Vero, Toto, Jose; Pancho, Leti, Azu; Luqui, Pitu, Benju, Cata; Cande, Liam, Eli; Mike, Juampi; Pato; Chuli, Melu. Por todo el amor, toda la ayuda, y por fingir que les interesaba lo que les contaba de matemática en algunas ocasiones.

Gracias al LaFHIS, por enseñarme tantas cosas que no sabía. Fue una experiencia muy provechosa, pero también muy agradable; son un hermoso grupo. Gracias, especialmente, a Diego. No sabés cuántas veces me tiraste la posta. Gracias, Ale, Juli, Javi, Vir, que me hicieron más ameno el día al trabajar codo a codo conmigo. Gracias, Sebas, Víctor, Vir, Dani, Iván, Rodri, Ale, Juli, Lean, Edgardo, por los consejos y las charlas.

Gracias a Fede, por su amor, su paciencia, su contención, y su deseo de un futuro juntos.

[1]Creció mucho respecto a la tesis de mi hermano: `https://www.dc.uba.ar/academica/tesis-de-licenciatura/2012/mosse.pdf`

A Lila, a Lelo

y al juego.

Índice general

Cómo leer la tesis

Los objetos matemáticos llamados *ordinales* pueden ser vistos como una extensión de los números naturales. En particular, como una extensión *transfinita* del proceso de contar.

Los ordinales son, en cierto sentido, *números* - son comparables, y se pueden definir operaciones aritméticas sobre ellos - pero concretamente son conjuntos. Resulta que la colección de todos los ordinales numerables es no numerable. Esto hace que sea *imposible* ponerles un nombre a cada uno utilizando un alfabeto finito.

Sin embargo, en la literatura aparecen diversas notaciones que cubren *parte* de la colección de los ordinales. El objetivo de esta tesis de licenciatura consiste en explorar algunas de ellas.

La tesis en general no asume una competencia previa en el tema. Pretende ser lo más autocontenida posible, y uno de sus objetivos es poder ser entendida por un estudiante de una carrera de Matemática o de Computación. Es conveniente tener algunos conocimientos rudimentarios de topología - en particular, de redes. De todas maneras, consideramos que para entender las partes de la tesis que usan redes no hace falta poseer la intuición que resulta de trabajar en espacios topológicos insólitos; basta con estar familiarizado con sucesiones. Damos también algunos resultados básicos de la efectividad - en el sentido de Teoría de la Computabilidad - de algunas notaciones presentadas. Las nociones de esa área utilizadas son definidas y descritas al momento de ser utilizadas.

El Capítulo 0 de la tesis está separado en tres partes: en la primera, damos una introducción histórica de los ordinales: la famosa historia de Cantor y su trabajo con las series de Fourier. En la segunda parte, intentamos motivar la definición misma de los ordinales, y los construimos desde cero. La última parte tiene como objetivo mostrar las semejanzas y las diferencias con $\mathbb{N}$, y terminamos enunciando lo que será el problema principal que atacará la tesis: la construcción de notaciones de ordinales para segmentos crecientes de los ordinales.

En el Capítulo 1, presentamos algunos ejemplos miniatura de notaciones para entender el objetivo, y luego cubrimos dos notaciones: la Forma Normal de Cantor (FNC) y la Forma Normal de Veblen (FNV), que se podría decir que son las que más merecen el nombre de "primeras" notaciones. Así como con los números naturales usamos exponenciación en base 10 y sumas para notar números - y, eventualmente, todo número podría ser notado usando solamente la función 10^x, la operación $+$, y el número 0, la FNC y la FNV utilizan en su alfabeto ciertas funciones (de ordinales) crecientes que de alguna manera podrían considerarse *naturales*. También damos codificaciones primitivas recursivas de estas notaciones. En particular, en la Subsubsección 1.2.2.2, damos una codificación primitiva recursiva y biyectiva con $\mathbb{N}$ de la Forma Normal de Cantor, distinta a la que se usa clásicamente.

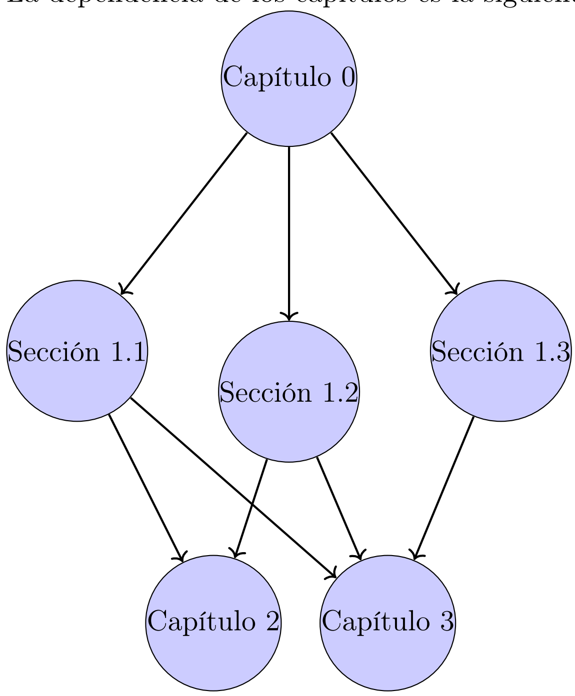
En el Capítulo 2, damos un esbozo de cómo se utilizan las notaciones de ordinales en la rama de la matemática que se conoce como "Ordinal Analysis", el análisis ordinal de una teoría axiomática. No es el objetivo de la tesis ahondar en un caso de estudio concreto. En cambio, en el capítulo intentamos motivar algunas definiciones y transmitir algunas de las ideas utilizadas en el área: resumimos como Gentzen demuestra la consistencia de la aritmética de Peano utilizando lo que se podrían llamar 'métodos finitistas' junto con la asumpción de que cierto ordinal está bien ordenado. Luego contamos cómo esto parece generalizarse a una definición del 'ordinal de una teoría', y por qué la definición tiene problemas. Relacionamos esto con el problema intrínseco del concepto de notación de ordinales 'canónica' o *natural* y presentamos algunos teoremas concretos cuyo objetivo es justificar esas afirmaciones. Este desarrollo incluye un par de definiciones propias y demostraciones que fueron reescritas. Durante el capítulo, también, presentamos la definición *moderna* de 'ordinal de una teoría', que en algún sentido *mide* la 'fuerza', o el 'poder computacional' de la misma.

En el Capítulo 3, presentamos un ejemplo de notación de ordinales, debida originalmente a Bachmann, que es fundamentalmente distinta a las otras dos. La diferencia esencial es que, al contrario que la FNC y la FNV, la notación de Bachmann no puede ser definida de manera *autónoma* y necesita de la existencia de ordinales que escapan a la notación para definirse. Este tipo de notaciones, que se llaman *impredicativas*, suelen ser mucho más poderosas que las predicativas.

En el Capítulo 4 damos algunas conclusiones y presentamos posible trabajo futuro, incluyendo algunas preguntas extra que fueron surgiendo a lo largo de la tesis. También mencionamos algunas conexiones de los ordinales con otras áreas de las matemáticas.

Hay, también, un apéndice al final de la tesis, donde damos una posible representación visual de los primeros ordinales. Además, a continuación de la bibliografía se encuentra un pequeño glosario. La tesis incluye 22 dibujos, 16 de los cuales son originales.

La dependencia de los capítulos es la siguiente:



Aclaramos que de todas formas algunos comentarios del Sección 3.1 necesitan la lectura del Capítulo 2.

Advertencia. Exceptuando por supuesto a las demostraciones, la tesis a veces utiliza un lenguaje informal, que intenta ser ameno y llega a usar el humor. El objetivo de esto es didáctico: intentamos hacer al texto más accesible, más *terrenal*.

Capítulo 0

Introducción

Desde el paraíso de Cantor, cuyas puertas él nos abrió, contenemos el aliento. Sabiendo, no seremos expulsados.

David Hilbert

0.1. Historia

Fue Georg Cantor quien nos abrió las puertas de lo transfinito, hace casi 150 años.

Como puede leerse en [Dau90, págs. 30-47], donde se incluye una reseña histórica y técnica sobre la primera aparición de los ordinales, Cantor se encontraba estudiando las series de Fourier. Más específicamente, condiciones para tener unicidad en la representación de una función. ¿Cuánto había que pedir para que, dada una función f definida en $[0, 2\pi]$, si podía ser representada con una serie de Fourier $\sum_{n=0}^{\infty} \big(a_n \ sen(n \cdot x) + b_n \ cos(n \cdot x)\big)$, los coeficientes a_n, b_n de ésta estuvieran unívocamente determinados?

Notemos que si suponemos que tenemos dos expresiones en serie de Fourier $\sum_{n=0}^{\infty} \big(a_n \ sen(n \cdot x) + b_n \ cos(n \cdot x)\big)$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \big(a'_n \ sen(n \cdot x) + b'_n \ cos(n \cdot x)\big)$ para una misma función, y las igualamos, y pasamos restando, obtenemos una serie de Fourier $\sum_{n=0}^{\infty} \big((a_n - a'_n) \ sen(n \cdot x) + (b_n - b'_n) \ cos(n \cdot x)\big)$ correspondiente a la función nula. Esto dice que el problema que quería resolver Cantor era equivalente a entender cuándo una serie de Fourier que es constantemente cero tiene todos sus coeficientes iguales a cero.

Ya había algunos resultados parciales - Heine había demostrado a principios de 1870 que si f era continua y se pedía que la serie convergiera uniformemente entonces se obtenía unicidad. Cantor, en abril del mismo año, pudo extender el teorema, relajando la condición de convergencia uniforme por el de una convergencia puntual, cuando ni Dirichlet, ni Lipschitz, ni Riemann habían tenido éxito. El matemático no se contentó con ese resultado. Se preguntó qué sucedía si le permitía más libertad a la serie. ¿Y si ésta no era cero en *todo* punto, sino 'casi siempre'? Cantor relajó las hipótesis del teorema, permitiendo en primer lugar no conocer los valores de la serie en finitos puntos, y luego en conjuntos *con finitos puntos de acumulación.* Es decir, incluso si no se sabe si una función es cero en un conjunto con esas características, si la función tenía representación en serie de Fourier entonces los coeficientes de ésta estaban unívocamente determinados, siendo todos 0. Si llamamos *conjunto de excepciones* al conjunto donde no conocemos el valor de la función, entonces lo que hizo Cantor fue equivalente a pedir solamente a dicho conjunto que su derivada - es decir, el conjunto de sus puntos límite - fuera finita. Y por lo tanto, que su segunda derivada fuera vacía (al ser la derivada de un conjunto discreto).

¿Cómo relajar aun más el teorema?

En una publicación de 1872 [Can72], Cantor trabajó sobre una construcción de los números reales como *identificaciones* de sucesiones que hoy son las de Cauchy - y que él llamó 'fundamentales'. En ese artículo, mencionó que a partir de los racionales, a los que llamaremos, como él hizo, conjunto A, por medio de la identificación mencionada se puede derivar el conjunto B de los reales. Sin embargo, la clave fue su comentario de que uno puede continuar el proceso de derivación para obtener a partir de B, un conjunto C, y así seguir.

Cantor notó que entre estas sucesivas derivaciones podían establecerse biyecciones, es decir, que estos nuevos conjuntos eran todos equivalentes al de los reales. Sin embargo, resaltó su importante diferencia conceptual - en el sentido de que eran objetos diferentes: dado un elemento $\ell \in L$, alcanzado luego de λ derivaciones sucesivas de A, Cantor lo entendía de manera equivalente como un número, un valor, o un límite de tipo λ, número natural que medía la longitud del proceso de derivaciones sucesivas necesarias para llegar a ℓ.

Pero, ¿por qué detenerse luego de *finitos* pasos? Fue en esta publicación donde Cantor, con una frase, marcó el inicio de la aparición pública de sus ideas sobre lo transfinito: "El concepto de número, tal como es desarrollado aquí, trae consigo el germen de una necesaria y absolutamente infinita extensión".

Esta idea germinó 10 años después en una generalización aun mayor de su teorema de unicidad. Luego de considerar conjuntos de excepciones cuya segunda derivada fuera vacía, un siguiente paso bastante natural era extender el teorema, permitiendo que la $(v+1)$-ésima derivada de éste lo fuera, con $v \in \mathbb{N}$. Si $P^{(v+1)} = \emptyset$ (pero $P^{(v)} \neq \emptyset$), Cantor llamaba al conjunto 'de tipo v'.

Se puede probar que un conjunto derivado P' es cerrado, así que contiene a su propio derivado. Luego, a partir de $v = 1$, tenemos que $P^{(v+1)} := (P^{(v)})' \subseteq P^{(v)}$. Esto nos da una cadena descendente de conjuntos, y Cantor definió $P^{(\infty)} := \bigcap_{n<\infty} P^{(n)}$. Y, si obtuvimos un conjunto no vacío, es natural continuar: $P^{(\infty+1)}$ será la derivada de $P^{(\infty)}$. Siguiendo de esta manera se pueden definir, para cada $n \in \mathbb{N}$, $P^{(\infty+n)}$, y también $P^{(\infty+\infty)}$ (como la intersección de todos los anteriores), al que podríamos llamar $P^{(\infty\cdot 2)}$. Esta construcción no tiene un fin aparente[1]. Cantor afirmó que se pueden generar conjuntos derivados descritos de manera genérica como $P^{(\infty^r\cdot n_r+\infty^{r-1}\cdot n_{r-1}+\cdots+\infty\cdot n_1+n_0)}$, con $n_1, \ldots, n_r, r \in \mathbb{N}_0$. Uno podría pensar que esta forma polinomial abarca totalmente el asunto, pero esto es mentira. Como veremos más adelante, continuando el razonamiento se podrían seguir hasta incluso órdenes mucho más 'grandes':

[1]En su momento, Cantor propuso la idea del *infinito absoluto*, más grande que cualquier número transfinito, y lo relacionó con Dios [Jan95].

$$P^{(\infty\cdot\infty)},\ P^{(\infty^\infty)},\ P^{(\infty^{\infty+n})},\ P^{(\infty^{\infty^\infty})}, P^{\left(\infty^{\infty^{\infty^{\infty^{\cdots}}}}\right)}$$

y uno podría seguir, llegando tan lejos que necesitaríamos inventarnos una nueva notación para seguir trabajando con estos conjuntos.

Con la teoría de los números transfinitos desarrollada, Cantor pudo generalizar aun más su teorema de unicidad, permitiendo que los conjuntos de excepciones fueran de tipo v con v un número transfinito. Destaquemos que en efecto existen conjuntos de tipo v para todo número transfinito - sin haber formalizado esta noción hasta ahora. Es decir, conjuntos que necesitan derivarse v veces para llegar al conjunto vacío. La demostración de este hecho se puede encontrar en [BP05, Capítulo 3], o de manera un poco más compacta en [Sim14].

La idea de los números transfinitos apareció para medir *longitudes* de procesos no finitos. Este aporte de Cantor, y muchos otros, fueron duramente criticados, llegando al punto de decir que eran una "grave enfermedad, que infectaba a la disciplina". Cierto matemático describió a Cantor como un "charlatán, renegado, corruptor de la juventud" [DC89].

Quedémonos con el reconocimiento actual que hoy en día tienen los aportes de Georg Cantor, pero sin olvidar que todo cambio revolucionario - y más en general, toda idea distinta a la nuestra - puede generar rechazo. Ni Cantor se salvó de esto: en su momento describió a la teoría de infinitesimales de sus colegas Stolz y du Bois-Reymond como "una abominación y un bacilo del cólera de las matemáticas".

0.2. ¿Qué son los ordinales?

0.2.1. Motivación

Una primera motivación para los objetos matemáticos llamados ordinales con los que vamos a trabajar es que queremos una generalización de los números naturales. La descripción que desde pequeños a muchos nos hacen de $\mathbb{N}$ es que son 'los números que usamos para contar'. Los ordinales nos servirán para eso, justamente: podremos contar conjuntos *infinitos*. Estos conjuntos van a necesitar tener alguna propiedad: específicamente, van a necesitar estar bien ordenados (en parte, para poder tomarle *sucesor* a cada elemento). Al contarlos, tendremos una noción de longitud para ellos, así como Cantor medía la longitud de procesos infinitos de derivación. Esta noción de tamaño que definiremos es más *granular* que la hecha usando cardinalidad: veremos muy pronto que dos conjuntos bien ordenados, aunque sean numerables, con nuestra definición, pueden tener tamaños distintos. Y de este hecho se desprenderán problemas bien interesantes.

Observemos lo siguiente: si consideramos que $0 \in \mathbb{N}$ (y haremos esto durante toda la tesis, como si fuéramos de Computación), entonces podemos identificar a cada número natural con el conjunto de los números anteriores a él (excepto al 0, que lo pensamos como el conjunto vacío):

$$\begin{aligned}
0 &\approx \emptyset \\
1 &\approx \{0\} && \approx \{\emptyset\} \\
2 &\approx \{0,1\} && \approx \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 &\approx \Big\{0,1,2\Big\} && \approx \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\} \\
& && \dots
\end{aligned}$$

Estamos identificando a cada natural n con un conjunto de n elementos. Además, la construcción es recursiva: en cada paso simplemente agregamos como elemento al conjunto de todos los números anteriores. Si definimos la operación *sucesor* $S(x) := x \cup \{x\}$, entonces el conjunto de números naturales se puede identificar con el menor conjunto que contiene a $\emptyset$ y es cerrado por S.

La notación del extremo derecho, con conjuntos vacíos y llaves por todos lados, es un poco molesta. Pensemos, entonces, que estamos usando a los números naturales para ponerles un *nombre* a los elementos que estamos construyendo. Es decir, digamos que $n := \{m \in \mathbb{N} : m < n\}$. Usando intervalos, podemos escribir esto como $n = [0, n)$. Notar que automáticamente $0 := \emptyset$.

Además, podemos girar la cámara y ver esta construcción *al revés*: no identificamos a cada número natural con el conjunto de naturales menores a él, sino que cada conjunto de naturales hasta cierta altura n nos define el siguiente número, i.e., $n + 1$. Cada natural construido nos permite armar el *siguiente*.

Como todos nos imaginamos, este proceso es infinito y siempre podemos llegar así a un número natural nuevo. Y, si consideramos al conjunto $\mathbb{N}$ de todos los números naturales, ¿qué nos detiene de definir un nuevo 'número' que se corresponda con ese conjunto? (¿Y luego, incluso, seguir?) A este nuevo 'número' se lo suele denotar ω (se lee 'omega'). Podemos también considerar $S(\omega) = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2 \dots, \omega\}$, el *sucesor de* ω, que merece el nombre de $\omega + 1$. Y, así siguiendo, podemos obtener $S(S(\omega)) = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1\}$, al que llamaremos $(\omega + 1) + 1$, o más bien $\omega + 2$. De esta manera, podemos conseguir 'números' cada vez más grandes: $\omega+3, \omega+4, \dots, \omega+n, \dots$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Y nada nos impide considerar el conjunto de todos esos elementos para obtener uno nuevo,
$\omega + \omega = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots\}$ (que podríamos llamar sugestivamente $\omega \cdot 2$)

Y, continuando, $\omega \cdot 3$ sería $\{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega \cdot 2.\omega \cdot 2 + 1, \omega \cdot 2 + 2, \dots\}$

Y más adelante incluso tendríamos:
$\omega \cdot \omega = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot n, \omega \cdot n + 1, \dots\}$

(¡Continuará!)[2]

Estos conjuntos recursivos que estamos construyendo comparten con los naturales varias buenas propiedades: son *transitivos* y bien ordenados.

Definición 0.2.1. *Un conjunto T se dice* transitivo *si todo elemento de T es un subconjunto de T. Es decir, si $\forall u \in t \in T$ vale que $u \in T$.*

[2]Si quieren empezar a ver *cómo* continuará, pueden espiar el Apéndice de Matchsticks, al final de la tesis.

Notar que los conjuntos obtenidos son transitivos es inmediato, ya que cada nuevo conjunto se obtiene de una de las siguientes maneras: la primera es agregando como elemento el conjunto de elementos que había hasta ahora, lo cual mantiene la transitividad (pues dicho elemento es un subconjunto) o tomando unión de todos los conjuntos construidos hasta el momento (como en el caso de $\omega, \omega \cdot 2$, etc), y es trivial ver que unión de conjuntos transitivos es transitivo.

¿Qué orden usaremos para ellos? Cada elemento nuevo construido es el conjunto de los elementos construidos hasta ahora. Si consideramos el orden inducido por $\in$, definiendo que $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$, entonces cada elemento nuevo es mayor que todos los anteriores. Notemos que esto se corresponde con nuestra intuición notacional (recordando que ω representa el infinito): vale, por ejemplo, que $\forall n \in \mathbb{N}, \omega + n < \omega \cdot 2 < \omega \cdot 2 + 1$. Además, este orden se corresponde con el usual en (nuestra identificación de) $\mathbb{N} : n < m \Leftrightarrow n \in m = \{0, \ldots, m-1\}$ (por ejemplo $4 < 8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$).

0.2.2. Definiciones y un primer acercamiento

Estas dos propiedades nos alcanzan para trabajar. Pasemos a la definición formal de un ordinal - de von Neumann, que ya es la definición estándar y es usada en cualquier libro de texto, como por ejemplo [HJ99, Capítulo 6]:

Definición 0.2.2. *Un conjunto α se dice que es un* ordinal *(en inglés 'ordinal' u 'ordinal number', si es:*

- *Transitivo.*
- *Bien ordenado por $\in$. Es decir, $\in$ es un orden total sobre α, y además no existe una cadena infinitamente descendente de elementos de α - toda cadena descendente eventualmente termina.*

Como adelantamos antes, para cada número natural n, si $k \in \ell \in n$ (i.e. $k < \ell < n$), entonces $k \in n$. Esto dice que los números naturales son transitivos. Además, a todo natural $n \neq 0$ lo estamos viendo como el conjunto $\{0, \ldots, n-1\} \subseteq \mathbb{N}$, que es bien ordenado, así que cada natural es bien ordenado. Con lo cual, hemos probado lo siguiente:

Teorema 0.2.3. *Todo número natural es un ordinal.*

Con la misma demostración que para un natural, $\mathbb{N}$ es transitivo. Luego $\mathbb{N}$ es un ordinal. El nombre que suele recibir, como dijimos, es ω.

La definición de ordinal se corresponde con la construcción que hicimos hasta ahora.

La construcción de los ordinales es intrínsecamente recursiva. Eso se lo debemos, en parte, al siguiente lema:

Lema 0.2.4. *Si α es un ordinal, entonces $S(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$ también es un ordinal.*

Demostración.

Veamos que $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ es transitivo. Debemos chequear que si $\beta \in S(\alpha)$ entonces $\beta \subseteq S(\alpha)$. Separemos en casos:

- Si $\beta \neq \alpha$, entonces $\beta \subseteq \alpha$ por la transitividad de α. Y siempre $\alpha \subseteq S(\alpha)$, así que $\beta \subseteq S(\alpha)$.
- El caso que queda es $\beta = \alpha$, pero como dijimos, $\alpha \subseteq S(\alpha)$ trivialmente.

Por otro lado, $S(\alpha)$ está bien ordenado por $\in$ - es más, con α siendo su elemento *máximo*, ya que todo $\beta \in S(\alpha), \beta \neq \alpha$ cumple que $\beta \in \alpha$ y por lo tanto es menor que α.

Veamos que todo subconjunto no vacío P de $S(\alpha)$ tiene mínimo. Sea $P \subseteq S(\alpha)$.

- Si $\alpha \notin P$ entonces P tiene elemento mínimo porque $P \subseteq \alpha$, que está bien ordenado por ser un ordinal.
- Si, por el contrario, $\alpha \in P$, entonces consideremos $P_0 := P \setminus \{\alpha\}$. Si $P_0 = \emptyset$, entonces $P = \{\alpha\}$ y está trivialmente bien ordenado. Si, por otro lado, P_0 es no vacío, entonces, como $P_0 \subseteq \alpha$, tiene un elemento mínimo β_0. Es decir, $\forall \beta \in P$, si $\beta \neq \alpha$, entonces $\beta_0 \leq \beta$. Por otro lado, si $\beta = \alpha$ entonces $\beta_0 < \alpha$ pues vimos que α era máximo. Luego $\beta_0 = \min P$. □

A este *tipo* de ordinales - los que son de la forma $S(\alpha)$, para α otro ordinal - los llamamos *sucesores*. Una notación que nos resultará más cómoda es escribir $\alpha + 1$ en vez de $S(\alpha)$. No todo ordinal es un sucesor, como por ejemplo ω. Una demostración de este hecho es muy simple: no tiene máximo. Se dice que ω es un *ordinal límite*.

Definición 0.2.5. *Se dice que un ordinal α es un* ordinal límite *si no es* 0 *ni tampoco un sucesor, es decir, si $\forall \beta$ ordinal, tenemos que* $0 < \alpha \neq \beta + 1$.

Es decir, distinguimos entre 3 tipos de ordinales:

- 0.
- Los ordinales sucesores.
- Los ordinales límite.

¿Hace falta considerar todos los $\beta \neq \alpha$ en la definición de arriba? Para el caso $\alpha = \omega$, por ejemplo, resulta intuitivo que éste no va a ser el sucesor de $\omega + 1, \omega \cdot 2$ ni $\omega \cdot \omega$, que son más 'grandes'. Bastaría entonces chequear que α no es el sucesor de un ordinal más *chico* para ver si es un ordinal límite o no. Sin embargo, no sabemos qué significa que un ordinal sea más chico que otro. Los ejemplos del comienzo nos adelantan que $\in$, que en principio está definida como relación *dentro* de cada ordinal, se puede extender formalmente a una relación *entre* ordinales:

Definición 0.2.6. *Dados α, β ordinales, definimos $\alpha < \beta$ si y solo si $\alpha \in \beta$.*

La pregunta que debemos hacernos es si la definición de ordinal alcanza para forzar un orden entre los ordinales - el que nos habíamos imaginado al construir a $\omega, \omega + 1, \omega \cdot 2, \omega \cdot \omega$, etc.

Entonces, antes de seguir estudiando los ordinales límite, estudiemos un poco el orden de los ordinales:

Teorema 0.2.7. *[HJ99, Pág 107] Como relación entre dos ordinales, $<$ tiene todas las propiedades de un buen orden (sin serlo)*[3].

Más específicamente: sean α, β y γ ordinales. Entonces:

1. *$<$ es transitiva. Es decir, si $\alpha < \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$.*

[3] ¡Continúe leyendo para develar el misterio!

2. *Es total y antisimétrica. Es decir, siempre vale una (y solo una) de las siguientes: $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ ó $\beta < \alpha$.*

3. *Todo conjunto no vacío de ordinales tiene un elemento mínimo. En consecuencia, todo conjunto de ordinales está bien ordenado por $<$.*

4. *Para todo conjunto de ordinales X, existe un ordinal $\alpha \notin X$. (En otras palabras, el 'conjunto de todos los ordinales' no existe).*

Las siguientes propiedades de los ordinales, usadas para la demostración de este teorema, son fundamentales:

Lema 0.2.8. *Si α es un ordinal entonces $\alpha \notin \alpha$.*

Demostración. Supongamos que $\alpha \in \alpha$. Tenemos que α es un ordinal, así que como conjunto está bien ordenado por $\in$. Sin embargo, tiene un elemento, α, que cumple $\alpha < \alpha$, contradiciendo la antisimetría de la relación. Absurdo. □

Lema 0.2.9. *Todo elemento de un ordinal α es un ordinal.*

Demostración.
Vamos a usar tanto que α es transitivo como ordinal, como que $\in$ es una relación transitiva en α por ser un buen orden. Sea $\beta \in \alpha$. Debemos ver que es transitivo y bien ordenado.

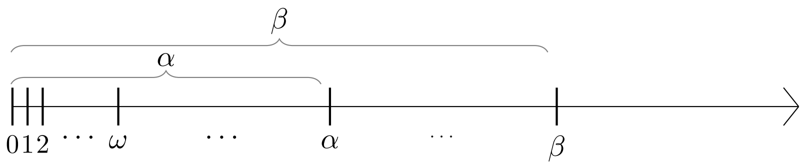
- Probemos que es transitivo: sean $u \in v \in \beta$. Como $\beta \in \alpha$ y α es transitivo entonces $v \in \alpha$. Nuevamente, como α es transitivo $u \in \alpha$. Es decir, u, v, β son elementos de α. Como $\in$ es una relación transitiva, $u \in v \in \beta$ implica $u \in \beta$.

- Ver que β está bien ordenado es incluso más fácil: como $\beta \subseteq \alpha$ por ser éste transitivo, todo subconjunto de β es subconjunto de α y por lo tanto tiene mínimo. □

Observemos que esto dice que todo ordinal α cumple que $\alpha = \{\beta : \beta$ es un ordinal y $\beta < \alpha\}$.[4]

Lema 0.2.10. *(Una especie de vuelta de la transitividad) Si α y β son ordinales con $\alpha \subsetneq \beta$ entonces $\alpha \in \beta$.*

Demostración.
El espíritu del lema se corresponde con nuestra idea del comienzo de la sección, que es que construimos ordinales de a pasos, de manera recursiva. Si $\alpha > \omega$, una representación gráfica puede ser así:



Es decir, estamos apuntando a eventualmente probar que, si escribimos los elementos de β de manera ordenada, después de todos los elementos de α viene, justamente, α.

Formalicemos la intuición. Consideremos $\beta \setminus \alpha \subseteq \beta$. Queremos ver que α es el primer elemento de ese conjunto, es decir, que si $\gamma := \text{mín}\,(\beta \setminus \alpha)$, entonces $\gamma = \alpha$.

[4] Todo el tiempo estamos usando que $<$ y $\in$ denotan lo mismo.

- Para ver que $\gamma \subseteq \alpha$, supongamos lo contrario. Entonces existe un elemento $\eta \in \gamma \setminus \alpha$. Por transitividad de β vale que $\eta \in \beta \setminus \alpha$. Pero esto contradice la minimalidad de γ, porque $\eta \in \gamma$. Absurdo.
- Resta ver que $\alpha \subseteq \gamma$: sea $\delta \in \alpha$. Queremos ver que $\delta \in \gamma$. Notemos que como $\alpha \subseteq \beta$ entonces $\delta \in \beta$. Además, teníamos que $\gamma \in \beta$. Como el conjunto β está bien ordenado, en particular es un orden total. Si suponemos que $\delta \notin \gamma$ entonces $\gamma \in \delta$ ó $\gamma = \delta$. Pero en cualquiera de los dos casos esto implicaría que $\gamma \in \alpha$, por la transitividad de α, que es un ordinal por el lema anterior. Y esto es absurdo, pues $\gamma \in \beta \setminus \alpha$. $\square$

Demostración del Teorema 0.2.7.

1. Transitividad de $\in$: supongamos que $\alpha \in \beta$ y $\beta \in \gamma$. Entonces, como γ es transitivo, $\alpha \in \gamma$. No es casualidad, entonces, que la primera propiedad de los ordinales se llame así.

2. Antisimetría: debemos ver que no puede valer $\alpha \in \beta \wedge \beta \in \alpha$. Si esto valiera, por el ítem anterior, tendríamos que $\alpha \in \alpha$. Esto es un absurdo, por el Lema 0.2.8.

   Veamos que, además, todo par de ordinales es comparable: sean α y β ordinales distintos y consideremos $\gamma := \alpha \cap \beta$. Si $\gamma = \alpha$, entonces $\alpha \subseteq \beta$ y la contención es *estricta* por hipótesis. Luego, por el Lema 0.2.9, $\alpha \in \beta$. Simétricamente, si $\gamma = \beta \Rightarrow \beta \in \alpha$. En ambos casos resulta que son comparables. Resta ver que no puede ser que $\gamma \neq \alpha, \beta$. Supongamos que esto sucede. Entonces $\gamma \subsetneq \alpha \underset{\text{Lema 0.2.9}}{\Rightarrow} \gamma \in \alpha$. Análogamente, $\gamma \in \beta$. Por lo tanto $\gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma$, que es absurdo por el Lema 0.2.8.

3. Ya sabemos que en un conjunto de ordinales todo par de elementos es comparable, es decir, que el orden inducido por $\in$ es *total*. Veamos que además es un buen orden. Sea X un conjunto no vacío de ordinales y $\alpha \in X$. Si $\alpha \cap X = \emptyset$ entonces debe ser el mínimo, pues $\forall \alpha \neq \beta \in X, \beta \notin \alpha$, así que por el ítem anterior $\forall \beta \in X, \alpha \in \beta$. (Por ejemplo, consideremos $X = \{4, 7, \omega\}$, y $\alpha = 4 = \{0, 1, 2, 3\}$. Entonces $4 \cap X = \emptyset$ y $4 = \min X$).

   Si, por otro lado, $\alpha \cap X \neq \emptyset$, consideremos $\eta := \alpha \cap X \subseteq \alpha$. Si $\eta = \alpha$, entonces β es un ordinal. Si no, $\eta \subsetneq \alpha \underset{\text{Lema 0.2.10}}{\Rightarrow} \eta \in \alpha \underset{\text{Lema 0.2.9}}{\Rightarrow} \eta$ es un ordinal. En cualquier caso, concluimos que η está bien ordenado. Sea $\gamma := \min \eta$.

   El objetivo de este ítem es ver que X tiene mínimo. Veamos que $\gamma = \min X$. Como $\gamma \in \eta = \alpha \cap X$, gratuitamente $\gamma \in \alpha$. Sea $\beta \neq \alpha, \beta \in X$. Debemos ver que $\gamma \in \beta$. Separemos en casos:

   - Si $\beta \in \alpha$ entonces $\beta \in \alpha \cap X$ y por lo tanto $\gamma \in \beta$, porque $\gamma = \min \alpha \cap X$.
   - Si $\beta \notin \alpha$ entonces por el ítem anterior, $\alpha \in \beta$. Como $\gamma \in \alpha$, por el primer ítem del teorema, $\gamma \in \beta$.

4. Veamos que no hay un conjunto de todos los ordinales. Sea X nuevamente un conjunto de ordinales y consideremos $\bigcup_{\alpha \in X} \alpha$ la unión de sus elementos. Es muy fácil ver que este conjunto es transitivo. Además, es un conjunto de ordinales, así que, por el ítem anterior, todo subconjunto tiene mínimo. Luego $\bigcup_{\alpha \in X} \alpha$ es un ordinal. Consideremos $\beta := S\big(\bigcup_{\alpha \in X} \alpha\big)$. Por el Lema 0.2.4, β también es un ordinal. Veamos que es distinto a todo elemento de

X, es decir, que es un ordinal *nuevo*. En efecto, supongamos que $\beta \in X$. Entonces $\beta \subseteq X$ y por lo tanto $\beta \subsetneq \bigcup_{\alpha \in X} \alpha$ ó $\beta = \bigcup_{\alpha \in X} \alpha$.

- En el primer caso, por el Lema 0.2.10 tendríamos que $\beta \in \bigcup_{\alpha \in X} \alpha \in \left(\bigcup_{\alpha \in X} \alpha\right) \cup \{\bigcup_{\alpha \in X} \alpha\} = S\big(\bigcup_{\alpha \in X} \alpha\big) = \beta$.
- En el segundo caso, $\beta = \bigcup_{\alpha \in X} \alpha \in S\big(\bigcup_{\alpha \in X} \alpha\big) = \beta$.

En cualquiera de los dos casos tendríamos que que $\beta \in \beta$, lo cual es un absurdo por el Lema 0.2.8.

Esto finaliza la demostración del teorema. □

Chiste 0.2.11. *α le dice a β: "Che amor, la relación que tenemos no es muy simétrica. Yo siempre te contengo cuando estás mal, pero vos nunca..."*

β le responde: "Y qué pretendés, mirá el Teorema 0.2.7.".

Un comentario: el último ítem del teorema nos dice que no se puede decir que los ordinales forman un conjunto bien ordenado. Y la razón es la siguiente: no existe el conjunto de todos los ordinales. Si existiera, entonces podríamos obtener un ordinal más grande que todos sus elementos, uniendo a todos ellos y luego tomando el siguiente.

Además, la demostración de que no existe el conjunto de todos los ordinales puede hacernos recordar la clásica demostración de que existen infinitos números primos. Por un lado consideramos que hay solamente finitos primos. Por el otro, que los ordinales forman un conjunto. Ambas propiedades controlarían de alguna manera la colección sobre la que predican. Por un lado multiplicamos a todos los primos; por el otro, unimos a todos los ordinales. Y en ambos casos sumamos 1.

En realidad, para ordinales por ahora decimos 'tomar siguiente' en vez de sumar 1, pero pronto veremos que no es un simple juego de palabras: los ordinales gozan de ciertas operaciones que son una generalización natural de las de $\mathbb{N}$.

Usaremos la notación $\leq$ cuando $\alpha < \beta$ ó $\alpha = \beta$. Análogamente, también usaremos los símbolos $\geq, >$. Llamaremos *ON* a la colección de todos los ordinales.

Insistimos con que ON es una generalización de $\mathbb{N}$:

Teorema 0.2.12. *Los números naturales se corresponden con los ordinales que son* finitos *como conjuntos.*

Demostración. Ya vimos que los naturales, vistos como conjuntos, son transitivos y están bien ordenados, y claramente son finitos. Basta ver, entonces, que todo ordinal que no se corresponde con un número natural (es decir, si no está en ω) entonces es infinito como conjunto. Sea $\alpha \notin \omega$. Entonces, por la tricotomía de $\in$, tenemos que $\alpha \geq \omega$, es decir, que $\alpha = \omega$ ó $\alpha \ni \omega$. En el primer caso α es infinito y en el segundo también, ya que como α es transitivo, $\alpha \supseteq \omega$ y por lo tanto es infinito. (Notar que en general $\geq$ se corresponde con $\supseteq$.) □

Se puede ver que los números naturales representan todos los buenos órdenes finitos. Es decir, que todo conjunto bien ordenado finito es isomorfo (vía un isomorfismo de orden) a un único número natural.

En *Principia Mathematica* [WR27], Whitehead y Russel definieron originalmente a los ordinales como el tipo de orden de un conjunto bien ordenado. Es decir, si definimos que dos conjuntos bien ordenados son equivalentes si existe un isomorfismo de orden entre ellos, un ordinal pretendía ser una *clase de equivalencia* de esa relación. Sin embargo, como vimos, con esta definición las clases de equivalencia - es decir, los ordinales - no formarían un conjunto. Se dice que forman una *clase*.

Pese a esa restricción técnica, los ordinales en efecto *representan* a los buenos órdenes. Los naturales representan todos los buenos órdenes finitos. Los ordinales extienden esto de manera muy natural:

Teorema 0.2.13. *Todo conjunto bien ordenado es isomorfo (vía un isomorfismo de orden) a un único ordinal.*

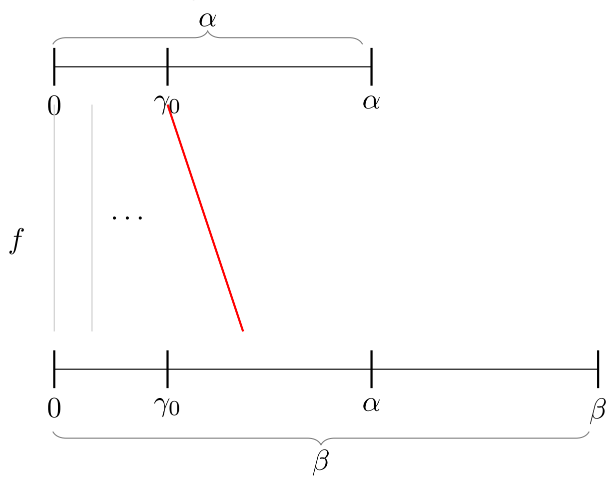
Demostración. Primero probemos la unicidad: supongamos que un conjunto bien ordenado X es isomorfo a dos ordinales distintos α y β. Por lo tanto α y β también son isomorfos. Además, sin perder generalidad, podemos suponer $\alpha < \beta$.

Tenemos que existe $f : \alpha \to \beta$ un isomorfismo de orden entre ellos. Veamos que esto no puede ser posible, ya que α es un segmento inicial de β.

Ciertamente, $f(0) = 0$ pues si $f(0) > 0$, entonces tendríamos que $\forall \gamma \in \alpha, f(\gamma) \geq f(0) > 0$ y no habría ningún elemento de α que podría ser enviado al 0 de β.

Veamos que $\forall \gamma \in \alpha, f(\gamma) = \gamma$. Si probamos esto ya ganamos, porque en ese caso f no sería una biyección, ya que como $\alpha < \beta \underset{\beta \text{ es transitivo}}{\Rightarrow} \alpha \subsetneq \beta \Rightarrow f(\alpha) \subsetneq \beta$.

Ya vimos que $f(0) = 0$. Supongamos, ahora, que existe algún elemento que no es enviado a sí mismo vía f. Sea $\gamma_0 := \{\gamma \in \alpha : f(\gamma) \neq \gamma\}$ el mínimo del conjunto (no vacío) de excepciones. Consideremos el siguiente esquema que ilustra el isomorfismo f entre α (arriba) y β (abajo):



Como $f(\gamma) = \gamma \ \forall \gamma < \gamma_0$, no puede ser que $f(\gamma_0) < \gamma_0$. En efecto, supongamos que sí. Entonces $f(f(\gamma_0)) = f(\gamma_0)$, pero como f es biyectiva, esto implica que $f(\gamma_0) = \gamma_0$, que es un absurdo.

Por lo tanto $f(\gamma_0) > \gamma_0$. Como $\gamma_0 < \alpha < \beta \Rightarrow \gamma_0 < \beta$. Observando el dibujo, ¿de dónde puede venir el elemento γ_0 de β? Como estamos suponiendo que f existe, hay un elemento $\eta \in \alpha$ tal que $f(\eta) = \gamma_0$. η no puede ser igual a γ_0 por hipótesis, así que hay dos casos: $\eta < \gamma_0$ ó $\eta > \gamma_0$. Sin embargo:

- $\forall \gamma < \gamma_0, f(\gamma) = \gamma < \gamma_0$ así que $\eta \not< \gamma_0$

- Como $f(\gamma_0) > \gamma_0$, $\forall \gamma > \gamma_0$ como f es isomorfismo de orden tenemos que $f(\gamma) > f(\gamma_0)$ luego $\eta \not> \gamma_0$.

¡Esto es absurdo! Luego, como afirmamos, no existe tal f.

Daremos solamente *una idea* de por qué un conjunto bien ordenado cualquiera $(W, <)$ es isomorfo a algún ordinal. La demostración de este hecho es un tanto técnica y por otro lado no tiene el mismo *flavour* que el resto de la tesis; los detalles se pueden leer en [HJ99, Pág 111].

Sea $(W, <)$ un conjunto bien ordenado. Dado $a \in W$, definamos $W[a] := \{b \in W : b < a\}$ la sección de W por a. (Por ejemplo, si $W = \{0, 2, 3, 7\}, W[4] = \{0, 2, 3\}$). Sea $A := \{a \in W : W[a] \text{ es isomorfo a algún ordinal}\}$. Notemos que A es no vacío porque $W[\text{mín } W]$ es trivialmente isomorfo al ordinal 0.

Por lo probado al principio, si $W[a]$ es isomorfo a un ordinal entonces éste es único. Lo denotamos α_a.

Sea $S = \{\alpha_a : a \in A\}$, i.e., el conjunto de ordinales isomorfos a alguna sección de W. Queremos ver que S es un ordinal y que en realidad $A = W$.

El conjunto[5] S está bien ordenado porque es un conjunto de ordinales. Además, es transitivo: si $\gamma \in \alpha_a \in S$, sea ϕ_a el isomorfismo entre $W[a]$ y α_a. Sea $c = \phi_a^{-1}(\gamma)$. Usando que ϕ_a respeta el orden, se puede ver que la restricción y co-restricción de ϕ_a a $\phi_a|_{W[c]} : W[c] \to \gamma$ está bien definida y es un isomorfismo, con lo que $\gamma \in S$. Por lo tanto, S es un ordinal, digamos que $S = \alpha$.

Se puede ver también, con un argumento similar, que $\forall a \in A, b < a \Rightarrow b \in A$, y que esto implica que $A = W$ ó $A = W[c]$ para algún $c \in W$.

Si definimos $f : A \to \alpha$ por $f(a) = \alpha_a$, resulta que f es un isomorfismo.

Supongamos que $A = W[c]$ para algún $c \in W$. Entonces $W[c]$ es isomorfo a α y por lo tanto $c \in A$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto $A = W$ y la misma f es un isomorfismo entre W y α. □

Volvamos a los ordinales límite (habíamos distinguido tres tipos de ordinales - el 0, los *sucesores* y éstos). Ahora que sabemos que todos los ordinales son comparables, para saber si un ordinal α es límite hay que chequear que $\forall \beta < \alpha, \alpha \neq \beta + 1$. En efecto, si $\beta \geq \alpha$, como $\beta + 1 > \beta$ (porque el segundo es un elemento del primero por definición) entonces por la transitividad de los ordinales tenemos que $\beta + 1 > \alpha$ y por lo tanto no son iguales.

Ahora, ¿de dónde viene el nombre de los ordinales límite?

Aunque técnicamente no le podemos dar una topología a la clase de todos los ordinales, cada ordinal α tiene la topología del orden inducida por $\in$. Si recordamos que 0 y α son los extremos del conjunto α, resulta que los abiertos básicos son $[0, \lambda_1), (\lambda_1, \alpha)$, y (λ_1, λ_2), para todo $\lambda_1 < \lambda_2 \in \alpha$.

Como cada ordinal α está ahora dotado de una topología, podemos hablar de convergencia:

Definición 0.2.14. *Sea α un ordinal. Se dice que una red de ordinales $(\beta_\iota)_{\iota \in \Lambda} \subseteq \alpha$ converge a un ordinal β si $\forall$ abierto $U \ni \beta$ vale que $\exists \iota_0 \in \Lambda$ tal que $\forall \iota \geq \iota_0, \beta_\iota \in U$.*

Notar que todo ordinal es un espacio de Hausdorff, es decir, $\forall \alpha \in \text{ON}$, tenemos que $\forall \beta_1 < \beta_2 \in \alpha$, existen U_1, U_2 abiertos tal que $\beta_1 \in U_1$, $\beta_2 \in U_2$ y además $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

[5]Entendemos que el hecho de que S sea o no un conjunto depende de la axiomatización que usemos, pero éste no es un tema que se desee explorar en esta tesis.

En realidad toda topología del orden es Hausdorff, pero demos los abiertos en cuestión. Son $U_1 := [0, \beta_1 + 1), U_2 = [\beta_1 + 1, \beta_2 + 1]$. Es bien conocido que una consecuencia de esto es que toda red[6] tiene límite único.

Generalmente vamos a considerar redes indexadas por ordinales.

Ejemplo 0.2.15.

- $\alpha_n = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \omega$
- $\alpha_n = \omega + n \xrightarrow[n\to\infty]{} \omega + \omega =: \omega \cdot 2$, donde $\omega + \omega$ y $\omega \cdot 2$ por ahora solamente son distintos nombres que le ponemos al conjunto $\{0, 1, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots\}$.
- Si α_n es una sucesión estrictamente creciente de ordinales tal que $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$, entonces α es un ordinal límite. En efecto, como la única caracterización que tenemos de los ordinales límite es que **no** son sucesores, supongamos que $\alpha = \beta + 1$ para algún ordinal β. Tenemos que $U = (\beta, \beta + 2)$ es un abierto. Apelemos a nuestra intuición notacional para afirmar que $\beta+1$ debe ser el único elemento de ese conjunto, pues si $\alpha \in U$ entonces $\beta < \alpha < \beta+2$. (Demostrémoslo en la Proposición 0.2.16.) Por definición de convergencia, α_n eventualmente cae en U. En particular, es eventualmente constante. Absurdo, porque la sucesión era estrictamente creciente.

Notemos además que la cuenta de recién dice que si una sucesión converge a un sucesor, entonces es eventualmente constante. En particular, esto sucede si el límite es un número natural, que siempre es sucesor.

Toda sucesión estrictamente creciente converge a un ordinal límite. ¿Valdrá la vuelta?[7]

Lo prometido es deuda:

Proposición 0.2.16. *Sea α un ordinal. Entonces $\alpha+1$ es el menor ordinal mayor que α. (Y, como corolario, el único ordinal entre α y $\alpha + 2$ es $\alpha + 1$.)*

Demostración. Probemos que todo ordinal $\beta > \alpha$ cumple que $\beta \geq \alpha+1$. Sea $\beta > \alpha$. Entonces $\alpha \subsetneq \beta$: consideremos $\gamma \in \beta \setminus \alpha$. Como $\gamma \notin \alpha$, necesariamente $\gamma \geq \alpha$.

Si $\gamma = \alpha$, ya ganamos porque entonces $\beta \supseteq \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. Si no, tenemos que $\alpha \in \gamma < \beta \Rightarrow \alpha < \beta \Rightarrow \alpha \in \beta$ y ganamos también. □

Otra caracterización muy útil de los ordinales límite es la siguiente:

Proposición 0.2.17. *Sea $\alpha \in ON$. Entonces α es un ordinal límite si y solo si $\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$.*

Además, en general vale que $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta = \sup\limits_{\beta<\alpha} \beta = \lim\limits_{\beta<\alpha} \beta$.

Demostración. Supongamos que α es de tipo sucesor, y por lo tanto igual a $\alpha' + 1$, para cierto ordinal α'. Entonces, por la Proposición 0.2.16, $\forall \beta < \alpha, \beta \leq \alpha'$, es decir, $\beta \subseteq \alpha'$, y por lo tanto $\alpha' \notin \beta$. Esto dice que $\alpha' \notin \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta$. (Por ejemplo, consideremos $\omega + 1$. Entonces $\bigcup\limits_{\beta<\omega+1} \beta = \{0\} \bigcup \{1\} \bigcup \cdots \bigcup \omega = \omega$.)

[6] https://es.wikipedia.org/wiki/Red_(matem%C3%A1tica)

[7] La respuesta, al final del capítulo.

Para terminar de demostrar la proposición, veamos que $\underbrace{\bigcup_{\beta<\alpha}\beta}_{I} = \underbrace{\sup_{\beta<\alpha}\beta}_{II} = \underbrace{\lim_{\beta<\alpha}\beta}_{III} \subseteq \underbrace{\alpha}_{IV}$ y que si α es límite entonces además $IV \subset I$:

- $\bigcup_{\beta<\alpha}\beta \subseteq sup\ \alpha$: Sea $\lambda \in \bigcup_{\beta<\alpha}\beta$. Luego $\exists\beta<\alpha$ tal que $\lambda\in\beta$, o equivalentemente, $\lambda<\beta$. Pero por definición de supremo, $\beta \leq \bigcup_{\beta<\alpha}\beta$, o, dicho de manera más compacta, $\beta \leq sup\ \alpha$ (viendo a α como conjunto). Juntando todo obtenemos $\lambda<\beta\leq sup\ \alpha \Rightarrow \lambda < sup\ \alpha$, es decir, $\lambda \in sup\ \alpha$.

- $\sup\ \alpha \subseteq \lim\ \alpha$: como la red $(\beta)_{\beta<\alpha}$ es creciente, su límite coincide con tomar supremo del conjunto.

- $\sup\ \alpha \subseteq \alpha$: sea $\beta \in \sup\ \alpha$, es decir, $\beta < \sup\ \alpha \Rightarrow \exists\xi\in\alpha$ tal que $\xi>\beta$. Pero entonces $\beta<\alpha$, es decir, $\beta\in\alpha$.

- Si α es límite, entonces $\alpha \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha}\beta$: sea $\mu<\alpha$. Entonces, nuevamente por la Proposición 0.2.16, $\mu+1\leq\alpha$, pero como α es límite, la igualdad no puede valer, es decir, $\mu+1<\alpha$. Llamando $\beta'=\mu+1$, tenemos que $\mu\in\beta$. Luego $\mu\in\bigcup_{\beta<\alpha}\beta$, como queríamos ver.

Esto finaliza la demostración. $\square$

Ejemplo 0.2.18. Sea α_n una sucesión *arbitraria* de ordinales. Definamos $\beta_n = sup\ \{\alpha_k : k\leq n\}$. En otras palabras, $\beta_n = \bigcup_{k\leq n}\alpha_k$. Entonces β_n es *convergente*, es decir, existe un ordinal α tal que $\beta_n\to\alpha$. Esto, en realidad, ya lo probamos en la demostración del último ítem del Teorema 0.2.7. Sin embargo, nos parece importante observar lo siguiente: si α_n es creciente, entonces $\beta_n=\alpha_n$. Luego, toda sucesión creciente de ordinales converge.[8] Y, nuevamente revisando el ítem antes demostrado, converge a un ordinal α más grande que todo α_n. Otra justificación, más topológica, es el clásico argumento de suponer que $\alpha\leq\alpha_{n_0}$ para algún n_0 y considerar el abierto $(\alpha_{n_0},\alpha_{n_0+1})$. Este ejemplo tal vez nos haga comenzar a sospechar lo inabarcables que son.

El límite de una sucesión creciente de ordinales es tomar la unión de todos los ordinales de la sucesión. Es decir, $\lim\ \alpha_n = \bigcup_{n<\omega}\alpha_n$. Motivados por el uso de Cantor de los ordinales para procesos transfinitos, nos podemos preguntar qué sucede si cambiamos ω por otro ordinal, tal vez más grande. ¿Y si tenemos una familia de ordinales (α_λ) indexada, no por todos los $\lambda<\omega$, sino por los menores a otro ordinal β?

No estamos haciendo más que cambiar sucesiones crecientes por redes crecientes, indexadas por el conjunto dirigido (es más, bien ordenado) β.

Y, *lamentablemente*, toda red estrictamente creciente de ordinales también converge a un ordinal nuevo. Con exactamente la misma demostración que para sucesiones.

'Sumarle 1' a un ordinal nos da otro ordinal. Y toda red creciente de ordinales converge a otro ordinal. Nosotros queremos operar con los ordinales, tratarlos casi como números -

[8]Repitámoslo una vez más: ¡toda sucesión creciente de ordinales converge!

en inglés se llaman ‘ordinal numbers’ - y que la colección de ordinales sea cerrada por estas operaciones tan poderosas[9] complica el asunto. ¿Cómo manejarlos? *¿Cómo pensar siquiera en darle un nombre a todos?*

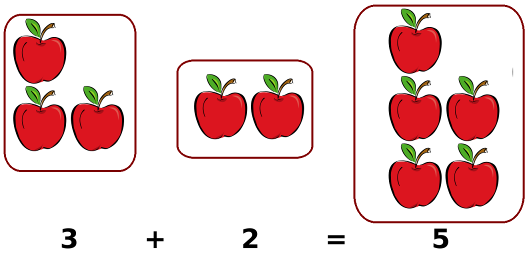
[9] Manera formal de decir ‘que podamos crear ordinales a rolete’.

0.3. Propiedades básicas

0.3.1. Los ordinales son parecidos a los naturales

Veamos si podemos extender las operaciones que conocemos de $\mathbb{N}$ a ordinales.

¿Cómo definíamos la suma para números naturales? De pequeños tal vez aprendimos que sumar era lo mismo que 'juntar':



Formalicémoslo un poco[10]. Tenemos que $3 = \{0, 1, 2\}$ y $2 = \{0, 1\}$; para sumar primero disjuntamos los conjuntos: consideramos los conjuntos $\{0\} \times 3$ y $\{1\} \times 2$, y los unimos, obteniendo el conjunto $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1)\}$, que tiene justamente 5 elementos.

Probemos hacer lo mismo con ordinales:

Intento de definición 0.3.1. *Sean α, β ordinales. Entonces definimos $\alpha + \beta$ como el ordinal que resulta de hacer la unión disjunta entre α y β, es decir, $\alpha + \beta := \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta$*

¿Está bien definida la suma? Para nada, al menos por ahora.

En primer lugar necesitamos darle un orden al conjunto. ¿Cuál? Cuando definimos el sucesor de un ordinal, teníamos que $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. El sumar 1 nos agrega un elemento más grande que todos los anteriores. Si ahora lo miramos como la unión disjunta tenemos que en $\{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times 1$ todos los elementos del primer conjunto son más chicos que los del segundo, y el orden que tienen coincide con el lexicográfico.

Motivados por esto, démosle a $\alpha + \beta$ el orden lexicográfico inducido por los órdenes correspondientes. Es decir: sean $\gamma \neq \eta \in \alpha + \beta$. Digamos que $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2), \eta = (\eta_1, \eta_2)$, donde $\gamma_1, \eta_1 \in \{0, 1\}$. Luego definimos el orden de la siguiente manera: $\gamma < \eta$ si y solo si vale alguna de las siguientes:

- $\gamma_1 < \eta_1$
- $\gamma_1 = \eta_1$ y $\gamma_2 < \eta_2$

donde la comparación entre γ_2 y η_2 se hace con el orden de α o el de β según corresponda.

En general vale que el orden lexicográfico de dos buenos órdenes es un buen orden; no lo probaremos aquí.

¿Obtuvimos un ordinal? Esa es la pregunta interesante. Para responderla, necesitamos tener una mejor definición - axiomática - de producto cartesiano.

Tal definición y un buen tratamiento del tema se pueden encontrar en [Kun14, Capítulo 1, Sección 6]. Si tenemos $x \in X, y \in Y$ entonces el par (ordenado) (x, y) se define como $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

[10] pero no tanto

Notemos que todo par ordenado es un conjunto **no vacío**. Por lo tanto toda suma de ordinales es un conjunto que no tiene como elemento al conjunto vacío. ¡Y por lo tanto no es transitivo! Luego no es un ordinal.

Para solucionar esto, le pedimos ayuda al Teorema 0.2.13:

Definición 0.3.2. *Sean α, β dos ordinales. Definimos $\alpha + \beta$ como* el único ordinal isomorfo a *$(\{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta, <)$, con $<$ definido como arriba.*

Ahora que la suma de ordinales está correctamente definida, podemos notar que $S(\alpha)$, lo que ya habíamos empezado a llamar $\alpha + 1$, coincide con efectivamente sumar 1.

Recordemos que la suma de dos números naturales también se puede definir inductivamente:

$$n + 0 := n$$
$$n + (m + 1) := (n + m) + 1$$

También podemos intentar generalizar *esta* definición de suma.

Para ello, vamos a usar una nueva herramienta: inducción transfinita.

Proposición 0.3.3. *(Inducción transfinita) Sea P una propiedad que predica sobre los ordinales tal que:*

$$P(0) \tag{1}$$
$$\forall \alpha < \beta, P(\alpha) \Rightarrow P(\beta) \tag{2}$$

Entonces, $\forall \alpha \in ON$, vale $P(\alpha)$.

Notemos el parecido con la inducción usual. En realidad, la primera condición es consecuencia de la segunda, pero la dejamos para que la similitud se note aun más. La demostración es idéntica, salvo por un detalle:

Demostración de la Proposición 0.3.3. Supongamos que existe η ordinal tal que no vale $P(\eta)$. Como con la inducción usual, queremos tomar el mínimo de $A := \{\alpha \in \mathrm{ON} : \text{ no vale } P(\alpha)\}$ y llegar a un absurdo. El detalle es que A puede ser una subclase, no un conjunto, y nosotros sólo sabemos que todo *conjunto* no vacío de ordinales tiene mínimo. Sin embargo, notemos lo siguiente: sea $\gamma_0 \in A$. Si $\forall \gamma \in A, \gamma_0 \leq \gamma$, ya estamos. Si, por el contrario, esto no vale, entonces necesariamente existe $\gamma_1 \in A$ tal que $\gamma_1 < \gamma_0$. Por lo tanto $A \cap \gamma_0 \neq \emptyset$, y es un conjunto, así que tiene mínimo. Sea $\tilde{\gamma_0} := \text{mín } A \cap \gamma_0$. Es fácil ver que $\tilde{\gamma_0} = \text{mín } A$. En efecto, sea $\gamma \in A$.

- Si $\gamma < \gamma_0$, entonces $\gamma \in A \cap \gamma_0$, así que por definición, $\tilde{\gamma_0} \leq \gamma$.
- Si, por el contrario, $\gamma \geq \gamma_0$, entonces como $\gamma_0 \ni \tilde{\gamma_0}$, tenemos que $\gamma \geq \tilde{\gamma_0}$.

Salvado este tecnicismo, sea $\alpha_0 := \text{mín} A$. Por definición de mínimo, $\forall \alpha < \alpha_0$, vale $P(\alpha)$. Entonces, por 2, tenemos que vale $P(\alpha_0)$, lo cuál es absurdo. □

Como distinguimos entre 3 tipos de ordinales (0, sucesor, y límite) usualmente vamos a usar el siguiente esquema de inducción transfinita - equivalente al anterior - reemplazando (2) por (4) y (5):

Proposición 0.3.4. *Inducción transfinita (más fácil de usar) Sea P una propiedad que predica sobre los ordinales tal que:*

$$P(0) \tag{3}$$

$$P(\alpha) \Rightarrow P(\alpha+1) \tag{4}$$

$$\textit{Si } \lambda \textit{ es un ordinal límite y vale } P(\alpha)\ \forall \alpha < \lambda, \textit{ entonces vale } P(\lambda) \tag{5}$$

Entonces, $\forall \alpha \in ON$, vale $P(\alpha)$.

Estrenémoslo para dar una definición equivalente de suma de ordinales:

Definición 0.3.5. *Sea $\alpha \in ON$ y definimos recursivamente en el segundo argumento:*

- $\alpha + 0 := \alpha$
- *Para ordinales del tipo sucesor:* $\alpha + (\beta+1) := (\alpha+\beta)+1$
- *Si λ es un ordinal límite,* $\alpha+\lambda := \bigcup\limits_{\beta<\lambda} \alpha+\beta$. *Alternativamente, como los conjuntos $\alpha+\beta$ son crecientes en β,* $\alpha+\lambda := \lim\limits_{\beta<\lambda} \alpha+\beta$.

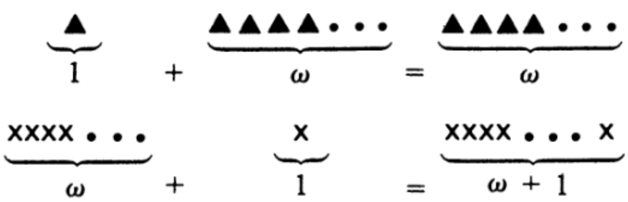
Notemos que debemos ver que el resultado siempre es un ordinal, ya que no estamos pasando por un isomorfismo. Esto se ve por inducción transfinita:

- $\alpha + 0 = \alpha$ es un ordinal.
- $\alpha+(\beta+1) = (\alpha+\beta)+1$. Supongamos que $\alpha+\beta$ es un ordinal. Ya vimos que el sucesor de un ordinal es un ordinal, así que ya estamos.
- Sea λ un ordinal límite. Luego $\alpha+\lambda = \bigcup\limits_{\beta<\lambda} \alpha+\beta$. Como por hipótesis $\alpha+\beta$ es un ordinal $\forall \beta < \lambda$ y sabemos que la unión de ordinales siempre da un ordinal, estamos.

Por lo tanto, $\forall \beta \in \mathrm{ON}, \alpha+\beta$ es un ordinal.

No lo demostraremos aquí, pero las dos definiciones vistas de suma de ordinales son equivalentes (y generalizan bien a la definida en $\mathbb{N}$). Aunque la segunda es más fácil de usar en una demostración, conviene tener como imagen mental a la primera: la suma de ordinales no es más que la yuxtaposición de los órdenes de los sumandos.[11]

Ejemplo 0.3.6. Consideremos $\omega+1$ y $1+\omega$. Gráficamente, tenemos lo siguiente (imagen tomada del esclarecedor libro [Ruc13], lleno de buenas intuiciones):



Observemos que en el segundo caso hay un elemento máximo, mientras que en el primero no. Luego, al parecer, obtuvimos resultados distintos.

[11] Otra manera de verlo, recordando la idea de los ordinales como longitudes transfinitas, es que $\alpha+\beta$ es *contar hasta α* y luego *contar β pasos más*.

Veamos formalmente que lo son. $\omega+1$ es, por definición, $\omega\cup\{\omega\}$. Tenemos que, $\forall\alpha\in\omega+1$ tal que $\alpha\neq\omega, \alpha\in\omega$, es decir, $\alpha<\omega$.

Por otro lado, como ω es límite, por la segunda definición tenemos que $1+\omega = \bigcup_{n<\omega}(1+n) \underset{1+n\,=\,n+1}{=} \bigcup_{n<\omega}(n+1)$, donde usamos que la suma de ordinales finitos conmuta. Como se trata de una unión creciente, es igual a $\lim_{n\to\omega} n+1=\omega$, que en particular no tiene máximo.

Entonces:

Advertencia 0.3.7. *La suma de ordinales en general no es conmutativa.*

La suma de ordinales, no obstante, goza de varias buenas propiedades, al igual que la suma en $\mathbb{N}$. Pensando a esta operación como la yuxtaposición de los órdenes de los conjuntos, uno puede intuir por qué vale lo siguiente, e incluso extraer una demostración formal:

Proposición 0.3.8. *Sean $\alpha,\beta,\gamma\in ON$. Con la suma vale lo siguiente:*

- 0 *es el elemento neutro:* $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$.
- *Es asociativa:* $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.
- *Es monótona en el segundo argumento: si* $\alpha<\beta\Rightarrow\gamma+\alpha<\gamma+\beta$. *Si sumamos del otro lado vale solamente que es débilmente monótona:* $\alpha+\gamma\leq\beta+\gamma$. *Para ver que no vale* $<$ *tomar, por ejemplo,* $\gamma=\omega$ *y* $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$.
- *Si* $\gamma\neq 0$, $\beta<\beta+\gamma$, $\gamma\leq\beta+\gamma$.

Vale la pena demostrar que la suma es débilmente monótona en el primer argumento. Antes de eso, vamos a necesitar el siguiente lema:

Lema 0.3.9. *Sean $\eta_1,\eta_2\in ON$ tal que existe $f:\eta_1\to\eta_2$ tal que $\forall\alpha<\beta\in\eta_1, f(\alpha)<f(\beta)$. Entonces $\eta_1\leq\eta_2$.*

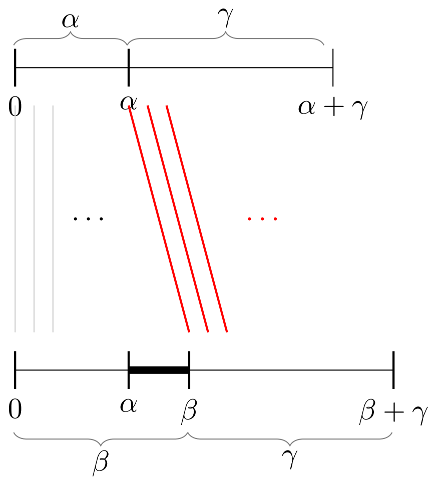
Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que $\eta_2\in\eta_1$. Tenemos que $f(\eta_2)<\eta_2$, por ser éste el codominio de f. Aplicando f a ambos lados, como la función respeta el orden, obtenemos $f^2(\eta_2)<f(\eta_2)$. Así siguiendo, podemos obtener una sucesión estrictamente decreciente de ordinales $\eta_2>f(\eta_2)>f^2(\eta_2)>f^3(\eta_2)>\ldots$, lo cuál es un absurdo, porque η_2 está bien ordenado. □

Demostración de parte de la Proposición 0.3.8. Ahora sí, probemos que la suma es débilmente monótona en el primer argumento. Queremos ver que si $\alpha<\beta$, entonces $\alpha+\gamma\leq\beta+\gamma$. Observemos el siguiente dibujo. Por la primera definición de suma, $\alpha+\gamma$ es el único ordinal isomorfo a $\{0\}\times\alpha\cup\{1\}\times\gamma$ (arriba), mientras que $\beta+\gamma$ se corresponde con $\{0\}\times\beta\cup\{1\}\times\gamma$ (abajo).

Encajemos al primer conjunto en el segundo. Es decir, definamos $f:\alpha+\gamma\to\beta+\gamma$ inyectiva que además respeta el orden. Esto se puede hacer muy fácilmente.

Como $\alpha<\beta$, podemos inyectar a $\{0\}\times\alpha$ en $\{0\}\times\beta$ (líneas grises) vía la identidad.

El segundo ordinal de la yuxtaposición $\alpha+\gamma$ se corresponde trivialmente con el de $\beta+\gamma$, pues ambos son $\{1\}\times\gamma$. Los biyectamos (líneas rojas) también vía la identidad. Queda, tal vez, un 'hueco', enfatizado en el dibujo con un mayor grosor de la línea. Este hueco, en el fondo, simboliza si obtendremos una desigualdad o una igualdad.



Formalmente, sea g_α un isomorfismo entre $0 \times \alpha \cup 1 \times \gamma$ y $\alpha + \gamma$, sea g_β un isomorfismo entre $0 \times \beta \cup 1 \times \gamma$ y $\beta + \gamma$, y sea $\pi_2 : 1 \times \gamma \to \gamma$ la proyección a la segunda coordenada.

Definimos $f(\eta) = \begin{cases} \eta & \text{si } \eta < \alpha \\ \beta + \pi_2(g_\alpha^{-1}(\eta)) & \text{si } \eta \geq \alpha \end{cases}$

Para ver que f respeta el orden, el único caso no trivial es considerar $\alpha \leq \eta_1 < \eta_2$. En ese caso, $g_\alpha^{-1}(\eta_1), g_\alpha^{-1}(\eta_2) \in 1 \times \gamma$, pero como además g_α es isomorfismo de orden, tenemos que $g_\alpha^{-1}(\eta_1) < g_\alpha^{-1}(\eta_2)$. Por lo tanto, $\pi_2(g_\alpha^{-1}(\eta_1)) < \pi_2(g_\alpha^{-1}(\eta_2))$, y si damos por sabido que la suma es estrictamente monótona en el segundo argumento, entonces obtenemos que $f(\eta_1) < f(\eta_2)$. Por lo tanto, por el Lema 0.3.9, $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

$\square$

Definida la suma, definamos la multiplicación.

Esta operación no es más que iterar la suma - pero al igual que con la suma, el caso en el que el segundo operando sea un ordinal límite hay que tratarlo con cuidado.

Definición 0.3.10. *Sea $\alpha \in ON$ y definimos recursivamente en el segundo argumento:*

- $\alpha \cdot 0 := 0$
- $\alpha \cdot 1 := \alpha$
- $\alpha \cdot (\beta + 1) := \alpha \cdot \beta + \alpha$
- *Si λ es un ordinal límite, $\alpha \cdot \lambda := \bigcup_{\beta < \lambda} \alpha \cdot \beta$. Alternativamente, $\alpha \cdot \lambda := \lim_{\beta < \lambda} \alpha \cdot \beta$.*

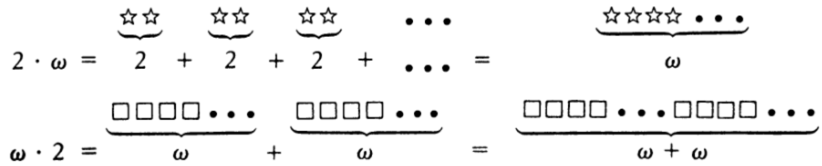
Una definición alternativa, equivalente, es la siguiente:

$$\alpha \cdot \beta := (\alpha \times \beta, \leq_{lex'})$$

donde $\leq_{lex'}$ es el orden lexicográfico invertido - es decir, $(\alpha_1, \beta_1) < (\alpha_2, \beta_2) \Leftrightarrow (\beta_1 < \beta_2) \vee (\beta_1 = \beta_2 \wedge \alpha_1 < \beta_2)$.

Esto coincide, dicho informalmente, con 'pegar' β copias de α. Como era de esperarse, el producto no es conmutativo:

Ejemplo 0.3.11. Un dibujo, directamente:



El producto goza de ciertas buenas propiedades y sufre la carencia de otras:

Proposición 0.3.12. *Sean $\alpha, \beta, \gamma \in ON$. Con el producto vale lo siguiente:*

- *Es asociativo:* $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
- *Vale una distributiva:* $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
- *No vale la otra distributiva:* $(1 + 1) \cdot \omega = 2 \cdot \omega = \omega \neq 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega = \omega \cdot 2$
- 0 *es el elemento absorbente:* $0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$
- 1 *es el neutro:* $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$
- *Es monótona en el segundo argumento: si $\alpha < \beta$ y $\gamma > 0 \Rightarrow \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$. Es débilmente monótona en el primero: $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$*
- *Cancelación a izquierda: si $\alpha > 0$ y $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$ entonces $\beta = \gamma$*
- *Cancelación a derecha no anda: $2 \cdot \omega = \omega$ pero $2 \neq 1$*
- $\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0$
- *Hay 'división con resto', es decir, existen únicos $\eta, \rho \in ON$ tal que $\alpha = \eta \cdot \beta + \rho$.*

A veces vamos a denotar $\alpha \cdot \beta$ simplemente escribiendo $\alpha\beta$, cuando lo creamos claro.
Le llegó el turno a la exponenciación:

Definición 0.3.13. *Sea $\alpha \in ON$ y definimos recursivamente en el segundo argumento:*

- $\alpha^0 := 1$
- $\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha$
- *Si λ es un ordinal límite, $\alpha \cdot \lambda := \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha^\beta$. Alternativamente, $\alpha \cdot \lambda = \lim_{\beta<\lambda} \alpha^\beta$.*

Proposición 0.3.14. *La exponenciación, por su parte, también comparte algunas buenas propiedades con la exponenciación de naturales:*

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in ON$. Luego para la exponenciación:

- 0 *es el elemento absorbente, como primer argumento (la base): si $0 < \alpha \Rightarrow 0^\alpha = 0$*
- 1 *es el elemento neutro, como segundo argumento (el exponente):* $1^\alpha = \alpha$
- $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{(\beta \cdot \gamma)}$

- $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$
- *Es estrictamente monótona en el segundo argumento: si* $\gamma > 1 \wedge \alpha < \beta \Rightarrow \gamma^\alpha < \gamma^\beta$. *Es débilmente monótona en el primero.*
- *Vale cancelación en el primer argumento:* $\alpha > 1 \wedge \alpha^\beta = \alpha^\gamma \Rightarrow \beta = \gamma$.

Tal vez parece que las operaciones definidas hacen lo que uno esperaría: al ser una generalización de operaciones en $\mathbb{N}$, comparten algunas propiedades y pierden otras, pero pese a eso se portan relativamente bien. Esto es falso.

0.3.2. Los ordinales son distintos a los naturales

Es sabido que si $a, b \in \mathbb{N}$ (o son cardinales) entonces a^b se define como $|\{f : B \to A\}|$ con $|A| = a, |B| = b$.

La exponenciación *de ordinales* no coincide con esto. ¿*Por qué* no anda definir a la exponenciación de ordinales como el conjunto de funciones del exponente en la base? La razón es bastante simple: necesitamos asignarle un buen orden a ese conjunto, y el natural no lo es.

Ejemplo 0.3.15. Consideremos $\{(a_n)_{n<\omega} : \forall n < \omega, a_n = 0 \text{ ó } a_n = 1\}$, un candidato posible para 2^ω. Necesitamos darle un buen orden para definir como 2^ω al único ordinal isomorfo a este conjunto. El orden natural es el que extiende al que tienen los ordinales de la forma 2^n, es decir, el lexicográfico. Sin embargo, con ese orden definido, $\{(1111...), (0111...), (0011...)\}$ es una cadena descendente infinita.

Con nuestra definición de exponenciación, $2^\omega = \bigcup\limits_{n<\omega} 2^n = \omega$. (Notar que esto dice que la exponenciación no se distribuye con respecto al producto: $(2 \cdot 2)^\omega = 4^\omega = \omega \neq \omega^2 = \omega \cdot \omega = 2^\omega \cdot 2^\omega$.)

Esta diferencia con $\mathbb{N}$, y con los cardinales nos da lo siguiente:

Advertencia 0.3.16. 2^ω *es numerable.*

Más aun:

Advertencia 0.3.17. *Si* $\alpha, \beta \in ON$ *son ordinales numerables entonces* α^β *es numerable.*

Antes de la demostración de esto último, un comentario: las operaciones que definimos, al ser usadas, siempre nos devuelven explícitamente un ordinal. Es decir, conocemos sus elementos y podemos manipularlos. Jamás obtendremos de esta manera un ordinal no numerable. Asumiendo la hipótesis del continuo por un momento sólo para generar intuición, esto significaría que le podríamos dar un orden explícito a un conjunto del tamaño de $\mathbb{R}$.

Los ordinales no numerables - que existen - son, en cierto sentido, inalcanzables. Profundizaremos sobre esto más adelante.

Demostración de la Advertencia 0.3.17. Sea α fijo; probemos la afirmación por inducción transfinita en β:

- Si $\beta = 0$, es trivial.
- $\beta \Rightarrow \beta + 1 : \alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$. Como ambos factores son numerables, y el ordinal producto está en biyección con el producto cartesiano, es numerable.

- Paso al límite: supongamos que $\forall \beta < \lambda, \alpha^\beta$ es numerable. Tenemos que $\alpha^\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha^\beta$ es numerable por ser unión numerable de conjuntos numerables.

Esto concluye la demostración. $\square$

Se puede ver [HJ99, Pág 123] que la definición de α^β coincide (vía isomorfismo) con $\{f : \beta \to \alpha : f$ tiene soporte compacto$\}$, dotado del orden lexicográfico (invertido) para funciones.

Sigamos con antipropiedades bien antiintuitivas de la exponenciación:

Proposición 0.3.18. *Existe un ordinal ε_0 tal que $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$.*

Demostración. ¿Cómo debería *ser* ε_0 para que $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$?

Imaginemos que lo siguiente tiene sentido: definimos $\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}}$, lo que sería ${}^{\omega}\omega$ usando la notación estándar de la tetración. Tiene sentido que $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$, porque lo único que estamos haciendo es agregar un ω más abajo de todo, lo cual no cambia el hecho de que haya ω ordinales ω puestos en torre.

Esto funciona. Pasémoslo en limpio, definiendo ${}^{n}\omega$ inductivamente. ${}^{0}\omega := 1, {}^{(n+1)}\omega := \omega^{({}^{n}\omega)}$. Son todos ordinales. Es decir, ${}^{n}\omega$ es el siguiente ordinal:

$$\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}\Big\}{\scriptstyle (n-1) \text{ veces}}$$

Sea $\varepsilon_0 = \bigcup_{n<\omega} {}^{n}\omega$; es un ordinal por ser unión de ordinales (ver el Teorema 0.2.7).

Veamos que efectivamente $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$:

Por definición de la exponenciación para ordinales límite, $\omega^{\varepsilon_0} = \bigcup_{n<\omega} \omega^{({}^{n}\omega)}$. Pero entonces $\omega^{\varepsilon_0} = \bigcup_{n<\omega} {}^{(n+1)}\omega = \varepsilon_0$, y estamos. $\square$

¿Es ε_0 numerable? Por supuesto: se puede ver inductivamente que $\forall n < \omega, {}^{n}\omega$ es numerable, así que ε_0 es numerable por ser unión numerable de ordinales numerables.

Más aun, es un ordinal muy alcanzable: pronto exhibiremos todos sus elementos, y mostraremos que no es difícil hacer cuentas con ellos. Es tan fácil, incluso, que es computable.[12]

Por último, mencionaremos que vale lo siguiente:

Proposición 0.3.19. *ε_0 es el primer ordinal α con la propiedad $\alpha = \omega^\alpha$*

Demostración. Sea $\alpha = \omega^\alpha$ entonces $\alpha = \omega^{\omega^\alpha} \geq \omega^\omega$ por la débil monotonía de la exponenciación.

Continuando de esta manera, uno obtiene que $\forall n < \omega, \alpha$ es mayor o igual a: $\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}\Big\}{\scriptstyle n \text{ veces}}$

Por lo tanto, $\alpha \geq \varepsilon_0$. $\square$

[12] Sí, leyó bien. Los ordinales son altamente recursivos. ¿No es de esperar que algunos sean computables?

0.4. El problema fundamental

Hasta el momento venimos construyendo para arriba: con las operaciones básicas podemos armarnos nuevos ordinales numerables. Tomando unión numerable de un conjunto de ordinales numerable obtenemos otro ordinal numerable.

¿Cómo construir a todos los ordinales?

No se puede.

Sea $\omega_1 := \{\alpha \in \text{ON} : \alpha \text{ es finito o numerable}\}$. Se puede ver que este es realmente un *conjunto* de ordinales (y no todo ON, por ejemplo). Una manera es asumiendo el principio de buena ordenación, que nos permite afirmar que existe un conjunto no numerable β bien ordenado. Identificando a β con el único ordinal isomorfo a él tenemos necesariamente que $\omega_1 \leq \beta$ (porque no puede ser $\beta \in \omega_1$, es decir, $\beta < \omega_1$) y por lo tanto $\omega_1 \subseteq \beta$ por la transitividad de β. Pese a que esta demostración necesita el Axioma de Elección, dejamos notado que ω_1 se puede construir perfectamente en ZF. La demostración se la debemos a Friedrich Hartogs, y se puede encontrar por ejemplo en [HJ99, Capítulo 7].

Analicemos a ω_1. Por ser un conjunto de ordinales, está bien ordenado, y además es transitivo ya que $\forall \alpha \in \beta \in \omega_1$, como $\alpha \subseteq \beta$ por el Lema 0.2.10, y β es finito o numerable, tenemos que α también lo es. Luego ω_1 es un ordinal. Además, es un ordinal no numerable. En efecto, si lo fuera, pertenecería a sí mismo, lo cual es un absurdo.

Además, ω_1 es el *primer* ordinal ni finito ni numerable. Supongamos lo contrario. Entonces $\exists \beta < \omega_1$ tal que β no es numerable. Por lo tanto $\beta \in \omega_1 \Rightarrow$ es numerable, lo cual es absurdo.[13]

Lo que queremos dejar remarcado para finalizar el capítulo es lo siguiente:

Observación 0.4.1. *El conjunto de ordinales finitos o numerables es no numerable.*

[13]Habíamos prometido responder la pregunta de si todo ordinal límite es el límite de una sucesión creciente de ordinales. ω_1 no lo es, pues supongamos que $\alpha_n \nearrow \omega_1$. Entonces $\bigcup_{n<\omega} \alpha_n = \omega_1$, pero $\bigcup_{n<\omega} \alpha_n$ es contable, absurdo. ω_1 es un clásico contraejemplo de espacio secuencialmente compacto pero no compacto [SSS78, Pág 69], y esto es parte de la demostración de la primer propiedad.

Capítulo 1

Notaciones: de abajo hacia arriba

> Somos esclavos del lenguaje.
>
> Jacques Lacan[1]

Partamos de la base de que darle un nombre a todos los ordinales numerables es imposible ya que el lenguaje es numerable, pero hay ω_1 ordinales numerables. Al menos el nuestro.[2]

¡Eso lo vuelve un problema interesante! Además, no queremos sólo ponerles nombre. Queremos poder *manipularlos*, compararlos, operar con ellos. Usarlos, más allá de saber que existen. Se suelen usar los números naturales para inventarnos magnitudes finitas sobre objetos matemáticos; queremos extendernos a magnitudes transfinitas. Queremos una notación para los ordinales, y que sea lo más *efectiva* posible. De eso se trata esta tesis: presentamos algunas técnicas - las más básicas - utilizadas con este fin, para segmentos crecientes de ON. ¿Perderemos efectividad a medida que aumentemos nuestro poder expresivo?

1.1. Primeros ejemplos

1.1.1. Un caso microscópico

Consideremos $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$. Por definición, es el único ordinal isomorfo a dos copias disjuntas de ω. ¿Cuál es? (¿Qué elementos tiene?) Por la monotonía de las operaciones, $\forall n \in \omega, n < \omega + \omega = \omega \cdot 2, \omega + n < \omega \cdot 2$, así que $C := \omega \cup \{\omega + n : n < \omega\}$ cumple que $C \subseteq \omega \cdot 2$. Además, es fácil ver que C y $\omega \cdot 2$ en realidad son isomorfos. Basta armar un isomorfismo entre C y dos copias disjuntas de ω (con el orden natural). Esto es claro: enviamos a los elementos de la pinta n a la primera copia, y a los de la pinta $\omega + n$, a la segunda.

Luego $\omega \cdot 2 = \{0, 1, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots\}$.

Notemos que tenemos una notación para todos los elementos. Usando el 0, el 1, el símbolo de sucesor S, y ω (y paréntesis), podemos expresar cualquier elemento del conjunto - notando un número natural n como $\underbrace{S(S(\dots(S}_{n \text{ veces}}(0)\dots)$.

Aprovechándonos de la asociatividad de las operaciones básicas se puede ver que es fácil operar. En efecto, si queremos operar con dos ordinales finitos ya sabemos qué hacer.

[1]Lacán no se refería a los ordinales.

[2]Los *Allatians* de Ken Liu podrían.

Supongamos que tenemos $n < \omega, \alpha \geq \omega$, es decir, $\alpha = \omega + m$, con $m < \omega$. Entonces $\alpha + n = \omega + (m + n)$, que ya es la notación de un objeto del conjunto. Por otro lado, $n + \alpha = n + (\omega + m) = (n + \omega) + m = \omega + m$, porque $n + \omega = \omega$ (son isomorfos).

Si queremos sumar dos elementos de la pinta $(\omega + n)$ y $(\omega + m)$, obtenemos un ordinal que no pertenece a $\omega \cdot 2$, ya que $(\omega + n) + (\omega + m) = \omega + n + \omega + m = \omega + (n + \omega) + m = \omega + \omega + m = \omega \cdot 2 + m \geq \omega \cdot 2$.

Resulta ilustrativo analizar el producto: $(\omega + n) \cdot (\omega + m) = (\omega + n) \cdot \omega + (\omega + n) \cdot m$. Esto vale por la propiedad distributiva a derecha.

$(\omega + n) \cdot \omega$ no es más que colocar ω copias de $\omega + n$, una a continuación de la otra. Consideremos solo dos copias, es decir, que tenemos $(\omega + n) + (\omega + n)$. Como antes, el n de la izquierda es 'comido' por el ω que queda a su derecha. Es decir, $(\omega + n) + (\omega + n) = \omega + \omega + n = \omega \cdot 2 + n$. Inductivamente, se puede ver que $(\omega + n) \cdot k = \underbrace{\text{k veces}}_{(\omega+n)+\cdots+(\omega+n)} = \omega \cdot k + n$. Ahora bien, $(\omega + n) \cdot \omega \underset{\text{(por def)}}{=} \lim_{k<\omega} (\omega + n) \cdot k = \lim_{k \to \omega} \omega \cdot k + n = \omega \cdot \omega + n$.

Entonces tenemos que $(\omega + n) \cdot (\omega + m) = \omega \cdot \omega + n + \omega \cdot m + n = \omega \cdot \omega + \omega \cdot m + m$

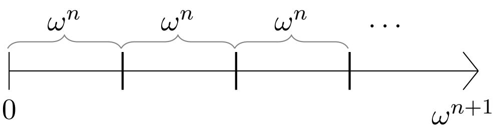
Sabemos sumar y multiplicar pares de ordinales de $\omega \cdot 2$, aunque a veces el resultado se sale del conjunto, algo que no pasaba con los números naturales.

1.1.2. Una notación polinomial hasta ω^ω

Un conjunto de ordinales cerrado por la suma y la multiplicación es ω^ω. Esto es fácil de chequear a partir de la monotonía de las operaciones, y otra forma de decirlo es que $\forall \alpha, \beta < \omega^\omega, \alpha + \beta < \omega^\omega$ y además $\alpha \cdot \beta < \omega^\omega$. (Se dice que ω^ω es 'Additively Indecomposable' y 'Multiplicatively Indecomposable'.)

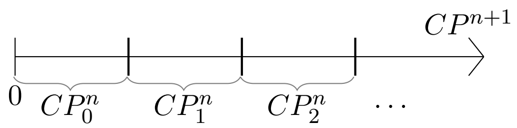
Estudiemos a este ordinal. Como el exponente es un ordinal límite, $\omega^\omega = \bigcup_{n<\omega} \omega^n$. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de polinomios con coeficientes de números naturales, y si tenemos cierto polinomio $P = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathcal{P}$, definamos $P(\omega) := \omega^n a_n + \cdots + a_0$. (El orden de los factores de cada sumando es intercambiado porque $a_i \omega^i = \omega^i$.) Veamos que $\omega^\omega = \{P(\omega) : P \in \mathcal{P}\}$:

Veamos por inducción que $\omega^n = \{P(\omega) : gr(P) < n\}$. Si $n = 0$ es trivial. Veamos el caso inductivo. $\omega^{n+1} = \omega^n \cdot \omega = \bigcup_{k<\omega} \omega^n \cdot k$. Esta es una unión creciente de conjuntos. Intuitivamente, se puede entender a ω^{n+1} como el conjunto formado por ω copias disjuntas de ω^n pegadas una a continuación de la otra. Tenemos la siguiente representación de ω^{n+1}:

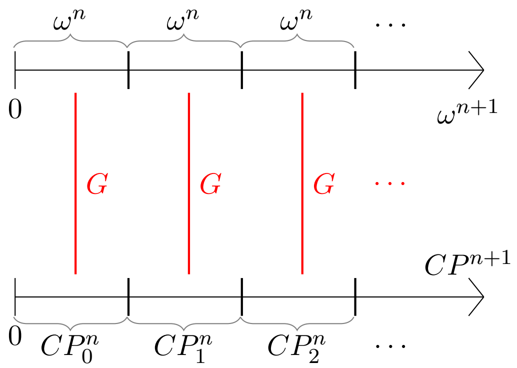


Por H.I., $\omega^n = \{P(\omega) : gr(P) < n\}$. Es decir, hay isomorfismo de orden entre ambos conjuntos de ordinales. Hay que armar un isomorfismo de orden entre ω^{n+1} y $CP^{n+1} := \{P(\omega) : gr(P) < n + 1\}$. Este segundo conjunto *también* se puede ver como ω copias de otro conjunto; precisamente, de $\{P(\omega) : gr(P) < n\}$ (¡qué conveniente!), donde para cada copia fijamos un coeficiente principal:

Sea $CP^n_k := \{\omega^n k + P(\omega) : gr(P) < n\}$. Claramente $CP^{n+1} := \{P(\omega) : gr(P) < n + 1\} = \bigcup_{k<\omega} CP^n_k$.



Aplicando la H.I. a ω_k^n y CP_k para cada k tendremos que $\omega^{n+1} = \{P(\omega) : gr(P) < n+1\}$. Informalmente, si $G : \omega^n \to \{P(\omega) : gr(P) < n\}$ es el isomorfismo de la H.I., vamos hacer lo siguiente:



Es decir, unir cada parte, que tiene la longitud adecuada, vía el isomorfismo G. Formalmente, el isomorfismo viene dado de la siguiente manera: sea $\alpha \in \omega^{n+1}$. Ubiquemos en qué copia de ω^n está. Esto se puede hacer con la definición lexicográfica de producto, pero resulta ilustrativo hacerlo con la definición inductiva. Sabemos que $\exists! k_\alpha < \omega$ tal que $\omega^n k_\alpha \leq \alpha < \omega^n(k_\alpha + 1)$. Además, es fácil ver que $\forall k, F_k : \omega^n \to [\omega^n k, \omega^n(k+1)$, $F_k(\beta) := \omega^n k + \beta$, está bien definida y es un isomorfismo de orden.

Al isomorfismo de orden lo definimos como $\alpha \mapsto \omega^n k_\alpha + G(F_{k_\alpha}^{-1}(\alpha))$. Ver que respeta el orden y es una biyección es poco interesante y no lo haremos.

Lo importante es que tenemos una notación para todos los elementos de ω^ω. No vale la pena analizar la efectividad de la suma y el producto en este conjunto porque es demasiado parecido al caso de $\omega \cdot 2$. Sí puede resultar curiosa la siguiente proposición:

Proposición 1.1.1. *Dados $p_1 \neq p_2 \in \mathcal{P}$, decimos que $p_1 <_p p_2$ si y solo si el gráfico de p_2 eventualmente queda por arriba del de p_1, es decir, si $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $p_1(x) < p_2(x) \forall x \geq M$. (Es equivalente tomar $x, M \in \mathbb{R}$ que en $\mathbb{N}$). Con este orden definido así, vale lo siguiente:*

- *$<_p$ es un buen orden.*
- *$(\mathcal{P}, <_p)$ es isomorfo a $(\omega^\omega, \in)$.*

Demostración. El primer ítem será corolario del segundo. Para demostrar este último, necesitamos entender cómo se comparan dos elementos no nulos de ω^ω al ser representados con polinomios. Ya sabemos que $\omega^\omega = \{P(\omega) : P \in \mathcal{P}\}$. Sean $\alpha \neq \beta \in \omega^\omega$, digamos que $\alpha = \omega^n a_n + \cdots + a_0, \beta = \omega^m b_m + \cdots + b_0$, con $a_n, b_m > 0$. Separemos en casos:

- Si $n < m$, entonces acotando los exponentes tenemos que $\alpha = \omega^n a_n + \omega^{n-1} a_{n-1} + \cdots + \omega a_1 + a_0 \leq \omega^n a_n + \omega^n a_{n-1} + \cdots + \omega^n a_1 + \omega^n a_0 = \omega^n \sum_{i=0}^n a_{n-i}$. Ahora bien, $\sum_{i=0}^n a_{n-i}$ es finito, así que $\omega^n \sum_{i=0}^n a_{n-i} < \omega^n \omega = \omega^{n+1} \leq \omega^m \leq \omega^m b_m + \cdots + b_0 = \beta$. Mirando los extremos de las desigualdades, esto dice que $\alpha < \beta$.
- Simétricamente, si $n > m$, entonces $\alpha > \beta$.

- Si $n = m$ entonces, como $\alpha \neq \beta$, existe $i_0 = \text{mín}\{0 \leq i \leq n : a_{n-i} \neq b_{n-i}\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $a_{n-i_0} < b_{n-i_0}$. Es decir, si comparamos los dos polinomios coeficiente a coeficiente, $n - i_0$ es el exponente *más grande* tal que a_{n-i_0} y b_{n-i_0} difieren. Si $i_0 = n$ es inmediato chequear que $\alpha < \beta$. Supongamos que $i_0 < n$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \omega^n a_n + \cdots + \omega^{n-i_0+1} a_{n-i_0+1} + \omega^{n-i_0} a_{n-i_0} + \omega^{n-i_0-1} a_{n-i_0-1} + \omega^{n-i_0-2} a_{n-i_0-2} + \cdots + a_0 \\
&\leq \omega^n a_n + \cdots + \omega^{n-i_0+1} a_{n-i_0+1} + \omega^{n-i_0} a_{n-i_0} + \omega^{n-i_0-1} a_{n-i_0-1} + \\
&\qquad + \omega^{n-i_0-1} a_{n-i_0-2} + \cdots + \omega^{n-i_0-1} a_0 \qquad (1.1) \\
&= \omega^n a_n + \cdots + \omega^{n-i_0+1} a_{n-i_0+1} + \omega^{n-i_0} a_{n-i_0} + \omega^{n-i_0-1} (a_{n-i_0-1} + \cdots + a_{n-i_0-2} + \cdots + a_0) \\
&< \omega^n a_n + \cdots + \omega^{n-i_0+1} a_{n-i_0+1} + \omega^{n-i_0} a_{n-i_0} + \omega^{n-i_0-1} \omega \qquad (1.2) \\
&= \omega^n a_n + \cdots + \omega^{n-i_0+1} a_{n-i_0+1} + \omega^{n-i_0} a_{n-i_0} + \omega^{n-i_0} \\
&= \omega^n a_n + \cdots + \omega^{n-i_0+1} a_{n-i_0+1} + \omega^{n-i_0} (a_{n-i_0} + 1) \\
&\leq \omega^n a_n + \cdots + \omega^{n-i_0+1} a_{n-i_0+1} + \omega^{n-i_0} (b_{n-i_0}) \qquad (1.3) \\
&= \omega^n b_n + \cdots + \omega^{n-i_0+1} b_{n-i_0+1} + \omega^{n-i_0} (b_{n-i_0}) \\
&\leq \omega^n b_n + \cdots + \omega^{n-i_0+1} b_{n-i_0+1} + \omega^{n-i_0} b_{n-i_0} + \omega^{n-i_0-1} b_{n-i_0-1} + \cdots + b_0 = \beta
\end{aligned}$$

  (1.1) vale porque $\omega^{n-i_0-2}, \ldots, \omega^0 \leq \omega^{n-i_0-1}$ y por la monotonía del producto y la suma.

  (1.2) vale porque $(a_{n-i_0-1} + \cdots + a_{n-i_0-2} + \cdots + a_0) < \omega$ y nuevamente por la monotonía del producto y la suma..

  (1.3) vale porque $a_{n-i_0} + 1 \leq b_{n-i_0}$ por hipótesis y nuevamente por la monotonía del producto y la suma.

  De los extremos da la cadena de desigualdades, obtuvimos que $\alpha < \beta$.

Resumiendo, obtuvimos lo siguiente:

$$\alpha \in \beta \Leftrightarrow n < m \vee (n = m \wedge \exists 1 \leq i_0 \leq n \text{ tal que } a_n = b_n, \ldots, a_{n-i_0+1} = b_{n-i_0+1} \text{ y } a_{n-i_0} < b_{n-i_0})$$

Definamos *ese mismo orden* sobre $\mathcal{P}$. Es decir, para comparar dos polinomios p_1, p_2 primero comparamos *el grado* y, si tienen el mismo grado, desempatamos por el orden lexicográfico en los coeficientes (de mayor a menor). Llamemos a ese orden $<_g$. Es claro que $(\omega^\omega, \in) \cong (\mathcal{P}, <_g)$. Y es un ejercicio sencillo de análisis (acotando y tomando límite) verificar que en realidad $<_g$ coincide con $<_p$. □

Debajo presentamos a algunos ordinales - donde en vez de considerar las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ las tomamos como si fueran de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ por motivos estéticos:

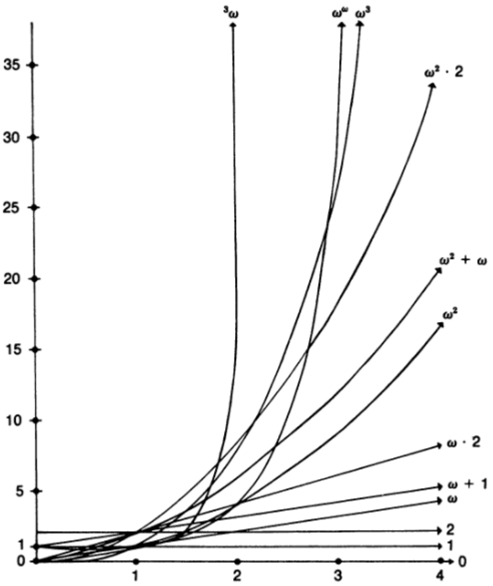


Figura 1.1: Algunos ordinales representados con curvas. La imagen se corresponde con la Figura 42 de [Ruc13].

Nota de color 1.1.2. Notemos que en la Figura 1.1 también aparece $^3\omega$. Esto es porque no tenemos por qué restringirnos a *polinomios*. El siguiente problema fue planteado por Skolem y Tarski en 1956 [Sko56]: sea $\mathcal{F}$ el conjunto más chico de funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que contiene a la constante 0, la función x, y es cerrado por suma, multiplicación, y exponenciación. Si extendemos $<_p$ a este conjunto de la manera natural:

(i) ¿Obtenemos un conjunto bien ordenado?

(ii) De ser así, ¿a qué ordinal es isomorfo?

Como cuenta Levitz en [Lev78], que el orden es total fue demostrado por Tarski y Saks (en un resultado no publicado) y por Richardson en 1969 [Ric69], donde también demostró algo no trivial, que la igualdad de dos expresiones es decidible - es decir, que hay un procedimiento efectivo para computarla (sigue abierto saber si el orden también es decidible). Usando el paper de Richardson, y un teorema de grafos de Kruskal [Fef64], en 1973 Ehrenfeucht probó que el conjunto está bien ordenado [Ehr73].

Luego volveremos al problema.

1.2. La Forma Normal de Cantor

Sigamos extendiendo nuestro poder expresivo. Ya tenemos una notación para todos los ordinales debajo de ω^ω. ¿Hasta dónde podremos llegar?

1.2.1. La base ω

El siguiente teorema parece *asesino*:

Teorema 1.2.1. *(Forma Normal de Cantor) Sea $0 \neq \alpha \in ON$. Entonces existen únicos $\alpha \geq \alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_k \in ON, m_1, ..., m_k \in \omega \setminus \{0\}$ tal que $\alpha = \omega^{\alpha_1}\ m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k}\ m_k$. (Y lo notamos $\alpha \underset{FNC}{=} \omega^{\alpha_1}\ m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k}\ m_k$.)*

¡Resulta que podemos escribir a todos los ordinales en base ω! ¿Es eso una notación de ordinales; simplemente cambiar una base finita por una base infinita? ¿Acá termina la tesis, entonces, y el resto son páginas en blanco?

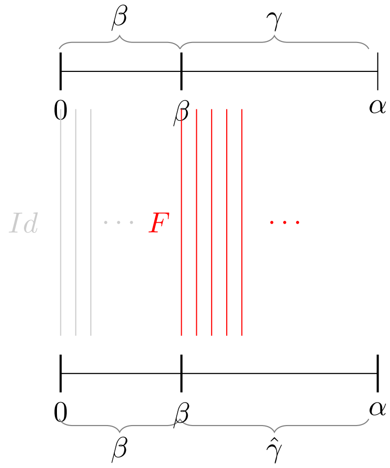
En realidad, el teorema sigue valiendo cambiando en el enunciado ω por cualquier ordinal $\delta > 1$, con una demostración idéntica. Por otro lado, hay una sutileza insalvable en el teorema. Lo dejamos para reflexionar mientras hacemos la demostración.

Para la demostración del Teorema 1.2.1, necesitaremos los siguientes lemas:

Lema 1.2.2. *(Resta) Dado $\alpha > \beta$, existe un único ordinal γ tal que $\alpha = \beta + \gamma$. Es decir, la resta de ordinales está bien definida.*

Demostración. Definimos $\hat{\gamma} := \{\eta \in \mathrm{ON} : \beta \leq \eta < \alpha\}$. Es decir, $\hat{\gamma}$ es lo que le tenemos que agregar al buen orden β para que tenga longitud igual a α. Notemos que *tenemos* que agregar a β, porque $\beta \notin \beta$.

Como $<$ coincide con $\in$, $\hat{\gamma} \subseteq \alpha$ y por lo tanto está bien ordenado. No es un ordinal pero lo identificamos con el único ordinal γ isomorfo a él, como ya hicimos alguna vez. El isomorfismo entre $\beta + \gamma$ y α es natural: la identidad para los ordinales menores a β, y el isomorfismo F entre γ y $\hat{\gamma}$ para los mayores o iguales a β.



Para ver la unicidad de γ, supongamos que existen $\gamma_1 > \gamma_2$ tal que $\beta + \gamma_1 = \beta + \gamma_2 = \alpha$. Por la monotonía (estricta) de la suma en el segundo argumento, $\beta + \gamma_1 > \beta + \gamma_2$, lo cual es absurdo. □

Lema 1.2.3. *La función $\alpha \mapsto \omega^\alpha$ es* inflacionaria *(i.e. $\alpha \leq \omega^\alpha$) y creciente.*

Demostración. Podemos probar ambas afirmaciones a la vez: veamos, por inducción en α, que $\alpha \leq \omega^\alpha$ y que si $\beta < \alpha \Rightarrow \omega^\beta < \omega^\alpha$.

- Si $\alpha = 0$, es claro que $0 \leq \omega^0 = 1$, y no existe $\beta < 0$ así que estamos.

- Sea $\alpha = \gamma + 1$ un ordinal sucesor. Veamos que $\alpha < \omega^\alpha$. Como $\alpha = \gamma + 1, \omega^\alpha = \omega^{\gamma+1} = \omega^\gamma \omega$. Es fácil inyectar, respetando el orden, a $\omega^\gamma + 1$ en $\omega^\gamma \omega$. (Al elemento máximo lo enviamos al primer elemento de la segunda copia de ω^γ.) Como inyectamos a un ordinal en otro que es distinto (el primero es sucesor y el segundo es límite), tenemos que $\omega^\gamma + 1 < \omega^\gamma\omega$. Por H.I. y por la monotonía de la suma, $\gamma + 1 \leq \omega^\gamma + 1$. Juntando ambas desigualdades obtenemos lo deseado.

Para ver que es creciente: sea $\beta < \alpha = \gamma + 1$. Entonces $\beta \leq \gamma$ y entonces por H.I. $\omega^\beta \leq \omega^\gamma$. Como ω^γ se puede inyectar en $\omega^{\gamma+1} = \omega^\gamma\omega$, tenemos que $\omega^\beta < \omega^{\gamma+1}$.

- Sea α un ordinal límite. Entonces:

$$\omega^\alpha = \bigcup_{\lambda<\alpha} \omega^\lambda \tag{1.4}$$

Esto implica:

$$\forall\lambda < \alpha, \omega^\lambda < \omega^\alpha \tag{1.5}$$

y por lo tanto probar que $\alpha \mapsto \omega^\alpha$ es creciente es gratuito para el caso límite. Además, por H.I., tenemos lo siguiente:

$$\forall\lambda < \alpha, \lambda \leq \omega^\lambda \tag{1.6}$$

Juntando 1.6 y 1.5, obtenemos que $\forall\lambda < \alpha, \lambda < \omega^\alpha$, y como $\alpha = \underset{\lambda<\alpha}{sup}\ \lambda$, $\alpha \leq \omega^\alpha$.

□

Demostración del Teorema 1.2.1. Por las buenas propiedades de $+, \cdot$ como funciones de ordinales, esta demostración será similar a ver que, dados $n, b \in \mathbb{N}$, n tiene una única expresión en base b. La demostración es presentada en forma de algoritmo recursivo:

Sea $0 \neq \alpha \in \mathrm{ON}$. Como $\alpha \mapsto \omega^\alpha$ es inflacionaria, tenemos que $\alpha < \alpha + 1 \leq \omega^{\alpha+1}$. Por lo tanto, existe al menos algún ordinal siguiente $\hat\theta$ tal que $\alpha < \omega^{\hat\theta+1}$. Sea $\theta := \min\,\{\hat\theta : \alpha < \omega^{\hat\theta+1}\}$ el mínimo con esa propiedad.

Veamos que además vale que $\omega^\theta \leq \alpha$. En efecto:

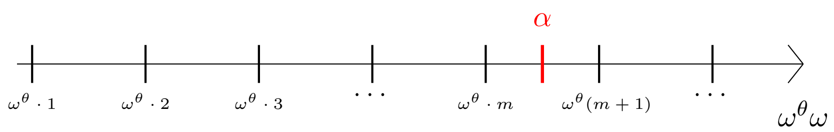
- Si $\theta = 0$ entonces trivialmente $\omega^0 = 1 \leq \alpha$.

- Si θ es sucesor, entonces no puede ser $\omega^\theta > \alpha$ porque eso contradiría la minimalidad de θ (podríamos tomar $\theta - 1$).

- Por otro lado, si θ es límite, entonces, por la Proposición 0.2.17, $\theta = \lim_{\beta<\theta} \beta$. Por minimalidad de θ, $\forall\beta$ tal que $\beta < \theta$, vale que $\alpha \geq \omega^{\beta+1} > \omega^\beta$. Por definición de exponenciación, $\omega^\theta = \bigcup_{\beta<\theta} \omega^\beta = \lim_{\beta<\theta} \omega^\beta$. Como $\forall\beta$ tal que $\beta < \theta$, tenemos que $\omega^\beta \leq \alpha$, tomando límite concluimos que $\omega^\theta \leq \alpha$, que era lo que queríamos ver.

Entonces tenemos que existe θ tal que $\omega^\theta \leq \alpha < \omega^{\theta+1} = \omega^\theta \cdot \omega$, y por lo tanto:

$$\exists n \in \omega \setminus \{0\} \text{ tal que } \omega^\theta \cdot m \leq \alpha < \omega^\theta(m+1) \tag{1.7}$$



Si $\alpha = \omega^\theta \cdot m$, esa es su forma normal. Si no, podemos restar: sea $\alpha' := \alpha - \omega^\theta \cdot m$.

Notemos que $\alpha > \alpha'$. De lo contrario, tendríamos que $\omega^\theta \cdot m \leq \alpha \leq \alpha'$ y entonces $\omega^\theta\ 2m = \omega^\theta \cdot m + \omega^\theta \cdot m \leq \omega^\theta \cdot m + \alpha' = \alpha$, por lo que $\omega^\theta\ (m+1) \leq \omega^\theta\ 2m \leq \alpha$, que es absurdo por (1.7).[3]

Llamemos $\alpha_1 := \theta, m_1 := m$. Como $\alpha = \omega^{\alpha_1} m_1 + \alpha' \geq \omega^{\alpha_1} \underset{Lema\ 1.2.3}{\geq} \alpha_1$, tenemos que $\alpha \geq \alpha_1$. Repitiendo el proceso ahora con α', obtenemos $\alpha_2 \in \mathrm{ON}, m_2 \in \omega \setminus \{0\}$ tal que $\alpha' = \omega^{\alpha_2} m_2 + \alpha''$, con $\alpha' > \alpha''$. Iterando este proceso mientras el excedente $\alpha^{(i)} \neq 0$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \omega^{\alpha_1} m_1 + \alpha', \text{ con } \alpha > \alpha' \\
\alpha' &= \omega^{\alpha_2} m_2 + \alpha'', \text{ con } \alpha' > \alpha'' \\
\alpha'' &= \omega^{\alpha_3} m_3 + \alpha^{(3)}, \text{ con } \alpha'' > \alpha^{(3)} \\
&\dots
\end{aligned}$$

$\alpha^{(i)}$ es una secuencia estrictamente decreciente de ordinales, así que el proceso termina, es decir, $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^{(k)} = 0$. Por lo tanto, $\alpha = \alpha_0 = \omega^{\alpha_1} m_1 + \alpha' = \omega^{\alpha_1} m_1 + \omega^{\alpha_2} m_2 + \alpha'' = \dots = \omega^{\alpha_1} m_1 + \omega^{\alpha_2} m_2 + \dots \omega^{\alpha_k} m_k + 0$.

Veamos que los exponentes $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ están ordenados de mayor a menor. Para ello supongamos lo contrario. Sea j_0 el mínimo $1 \leq j \leq k$ tal que existe $i < j$ con $\alpha_i \geq \alpha_j$. Entonces necesariamente $j_0 \geq 2$, y $\alpha_{j_0 - 1} \geq \alpha_{j_0}$. Tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$\alpha^{(j_0-2)} = \omega^{\alpha_{j_0-1}} m_{j_0-1} + \omega^{\alpha_{j_0}} m_{j_0} + \alpha^{(j_0+1)} \geq \omega^{\alpha_{j_0}} m_{j_0-1} + \omega^{\alpha_{j_0}} m_{j_0} + \alpha^{(j_0+1)} = \omega^{\alpha_{j_0}}(m_{j_0-1} + m_{j_0}) + \alpha^{(j_0+1)} \geq \omega^{\alpha_{j_0}}(m_{j_0-1} + m_{j_0})$. Pero esto contradice (1.7), donde habíamos obtenido que $\alpha^{(j_0-2)} < \omega^{\alpha_{j_0-1}}(m_{j_0-1} + 1)$, lo cual es absurdo. Esto termina de probar la existencia de la Forma Normal de Cantor.

Para ver la unicidad, supongamos que $\omega^{\alpha_1} m_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} m_k = \omega^{\alpha'_1} m'_1 + \dots + \omega^{\alpha'_{k'}} m'_{k'}$ y que $\alpha_1 \neq \alpha'_1$. Por simetría, podemos considerar solamente el caso $\alpha'_1 < \alpha_1$. Tenemos lo siguiente:

$$\forall 2 \leq i \leq k', \omega^{\alpha'_i} < \omega^{\alpha'_1}, \text{ por la monotonía de la exponenciación.} \tag{1.8}$$

$$\omega^{\alpha'_1} < \omega^{\alpha_1}, \text{ por hipótesis y por la monotonía de la exponenciación.} \tag{1.9}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\omega^{\alpha'_1} m'_1 + \omega^{\alpha'_2} m'_2 + \dots + \omega^{\alpha'_{k'}} m'_{k'} &\leq \omega^{\alpha'_1} m'_1 + \omega^{\alpha'_1} m'_2 + \dots + \omega^{\alpha'_1} m'_{k'} && (1.10) \\
&= \omega^{\alpha'_1}(m'_1 + \dots + m'_{k'}) \\
&< \omega^{\alpha'_1} \omega \\
&= \omega^{\alpha'_1 + 1} \\
&\leq \omega^{\alpha_1} && (1.11) \\
&\leq \omega^{\alpha_1} + \dots + \omega^{\alpha_k} m_k
\end{aligned}$$

(1.10) vale por (1.8). Vale $<$ si $k' > 1$, pero no podemos asegurar eso.
(1.11) vale por (1.9).

[3] No siempre vale que $\alpha - \beta < \alpha$. Un contraejemplo es $\omega - 1 = \omega$.

Obtuvimos que $\omega^{\alpha'_1}m'_1+\omega^{\alpha'_2}m'_2+\cdots+\omega^{\alpha'_{k'}}m'_{k'}<\omega^{\alpha_1}+\cdots+\omega^{\alpha_k}m_k$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $\alpha_1=\alpha'_1$. Un razonamiento similar muestra que $m_1=m'_1$.

Entonces podemos restar $\alpha_1 m_1$ a ambas casos para obtener $\omega^{\alpha_2}m_2+\cdots+\omega^{\alpha_k}m_k=\omega^{\alpha'_2}m'_2+\cdots+\omega^{\alpha'_{k'}}m'_{k'}$. Para terminar, procedemos inductivamente hasta probar que todos los sumandos son iguales. No puede ser que k sea distinto a k' porque llegaríamos que 0 es igual a algo que no es cero. □

Proposición 1.2.4. *Sean* $\alpha:=\omega^{\alpha_1}m_1+\cdots+\omega^{\alpha_k}m_k$, *y* $\alpha':=\omega^{\alpha'_1}m'_1+\cdots+\omega^{\alpha'_{k'}}m'_{k'}$ *dos ordinales escritos en FNC. Entonces* $\alpha<\alpha'$ *si y solo si valen alguna de las siguientes condiciones:*

- $\exists j\leq \min\{k,k'\}$ *tal que* $\alpha_j<\alpha'_j$, *y* $\forall i<j, \alpha_i=\alpha'_i, m_i=m'_i$.
- $\exists j\leq \min\{k,k'\}$ *tal que* $m_j<m'_j$, *y* $\forall i<j, \alpha_i=\alpha'_i, m_i=m'_i$ *y además* $\alpha_j=\alpha'_j$.
- $\forall i\leq k, \alpha_i=\alpha'_i, m_i=m'_i$, *y además* $k<k'$.

Es totalmente similar a como comparamos números escritos en una base finita - notemos que incluso hay finitos sumandos.

Demostración de la Proposición 1.2.4. Sean $\alpha\neq\alpha'$ como en el enunciado. Veamos el si y solo si.

$\Leftarrow$) Separemos en casos:

- Si $\exists j\leq \min\{k,k'\}$ tal que $\alpha_j<\alpha'_j$, y $\forall i<j, \alpha_i=\alpha'_i, m_i=m'_i$, entonces sea j_0 el mínimo con esa propiedad. Si $j_0=k$ es trivial ver que $\alpha<\alpha'$. Supongamos que $j_0<k$. Tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \omega^{\alpha_1}m_1+\cdots+\omega^{\alpha_{j_0-1}}m_{j_0-1}+\omega^{\alpha_{j_0}}m_{j_0}+\omega^{\alpha_{j_0+1}}m_{j_0+1}+\cdots+\omega^{\alpha_k}m_k\\
&\leq \omega^{\alpha_1}m_1+\cdots+\omega^{\alpha_{j_0-1}}m_{j_0-1}+\omega^{\alpha_{j_0}}m_{j_0}+\omega^{\alpha_{j_0+1}}m_{j_0+1}+\cdots+\omega^{\alpha_{j_0+1}}m_k\\
&= \omega^{\alpha_1}m_1+\cdots+\omega^{\alpha_{j_0-1}}m_{j_0-1}+\omega^{\alpha_{j_0}}m_{j_0}+\omega^{\alpha_{j_0+1}}(m_{j_0+1}+\cdots+m_k)\\
&< \omega^{\alpha_1}m_1+\cdots+\omega^{\alpha_{j_0-1}}m_{j_0-1}+\omega^{\alpha_{j_0}}m_{j_0}+\omega^{\alpha_{j_0+1}}\omega\\
&\leq \omega^{\alpha_1}m_1+\cdots+\omega^{\alpha_{j_0-1}}m_{j_0-1}+\omega^{\alpha_{j_0}}m_{j_0}+\omega^{\alpha_{j_0}}\\
&= \omega^{\alpha_1}m_1+\cdots+\omega^{\alpha_{j_0-1}}m_{j_0-1}+\omega^{\alpha_{j_0}}(m_{j_0}+1)\\
&< \omega^{\alpha_1}m_1+\cdots+\omega^{\alpha_{j_0-1}}m_{j_0-1}+\omega^{\alpha_{j_0}+1}\\
&\leq \omega^{\alpha_1}m_1+\cdots+\omega^{\alpha_{j_0-1}}m_{j_0-1}+\omega^{\alpha'_{j_0}}\\
&= \omega^{\alpha'_1}m'_1+\cdots+\omega^{\alpha'_{j_0-1}}m'_{j_0-1}+\omega^{\alpha'_{j_0}}\\
&\leq \omega^{\alpha'_1}m'_1+\cdots+\omega^{\alpha'_{j_0-1}}m'_{j_0-1}+\omega^{\alpha'_{j_0}}+\omega^{\alpha'_{j_0+1}}m'_{j_0+1}+\cdots+\omega^{\alpha'_k}m'_k=\alpha'
\end{aligned}$$

- Si $\exists j\leq \min\{k,k'\}$ tal que $m_j<m'_j$, y $\forall i<j, \alpha_i=\alpha'_i, m_i=m'_i$ y además $\alpha_j=\alpha'_j$, sea nuevamente j_0 el mínimo con esa propiedad. Nuevamente supongamos $j_0<k$ porque,

de lo contrario, ver que $\alpha < \alpha'$ es trivial. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \omega^{\alpha_1}m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{j_0-1}}m_{j_0-1} + \omega^{\alpha_{j_0}}m_{j_0} + \omega^{\alpha_{j_0+1}}m_{j_0+1} + \cdots + \omega^{\alpha_k}m_k \\
&\leq \omega^{\alpha_1}m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{j_0-1}}m_{j_0-1} + \omega^{\alpha_{j_0}}m_{j_0} + \omega^{\alpha_{j_0+1}}m_{j_0+1} + \cdots + \omega^{\alpha_{j_0+1}}m_k \\
&= \omega^{\alpha_1}m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{j_0-1}}m_{j_0-1} + \omega^{\alpha_{j_0}}m_{j_0} + \omega^{\alpha_{j_0+1}}(m_{j_0+1} + \cdots + m_k) \\
&< \omega^{\alpha_1}m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{j_0-1}}m_{j_0-1} + \omega^{\alpha_{j_0}}m_{j_0} + \omega^{\alpha_{j_0}} \\
&= \omega^{\alpha_1}m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{j_0-1}}m_{j_0-1} + \omega^{\alpha_{j_0}}(m_{j_0} + 1) \\
&\leq \omega^{\alpha_1}m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{j_0-1}}m_{j_0-1} + \omega^{\alpha_{j_0}}m'_{j_0} \\
&= \omega^{\alpha'_1}m'_1 + \cdots + \omega^{\alpha'_{j_0-1}}m'_{j_0-1} + \omega^{\alpha'_{j_0}}m'_{j_0} \\
&\leq \omega^{\alpha'_1}m'_1 + \cdots + \omega^{\alpha'_{j_0-1}}m'_{j_0-1} + \omega^{\alpha'_{j_0}}m'_{j_0} + \omega^{\alpha'_{j_0+1}}m'_{j_0+1} + \cdots + \omega^{\alpha'_k}m'_k = \alpha'
\end{aligned}$$

- Si $\forall i \leq k, \alpha_i = \alpha'_i, m_i = m'_i$, y además $k < k'$, entonces $\alpha = \omega^{\alpha'_1}m'_1 + \cdots + \omega^{\alpha'_k}m'_k < \omega^{\alpha'_1}m'_1 + \cdots + \omega^{\alpha'_k}m'_k + \omega^{\alpha'_{k+1}}m'_{k+1} + \cdots + \omega^{\alpha'_{k}{}'}m'_{k'} = \alpha'$

En cualquiera de los tres casos concluimos que vale que $\alpha < \alpha'$.

$\Rightarrow$) La vuelta se ve por contrarrecíproco. Si ninguna condición se cumple, entonces es fácil ver que valen las hipótesis de la proposición con α y α' intercambiados y por lo tanto $\alpha' < \alpha$. $\square$

Ejemplo 1.2.5. $\omega^1 \underset{\text{Caso 3}}{<} \omega + 1 \underset{\text{Caso 1}}{<} \omega^\omega \underset{\text{Caso 2}}{<} \omega^\omega \cdot 2 \underset{\text{Caso 1}}{<} \omega^{\omega+1} + \omega^\omega + 2 \underset{\text{Caso 1}}{<} \omega^{\omega^\omega} \cdot 2$

Entre paréntesis, mencionamos que la Forma Normal de Cantor nos da una caracterización muy simple de los ordinales límite:

Proposición 1.2.6. *Sea $0 \neq \alpha \in ON$. Entonces α es un ordinal límite si y solo si todos los exponentes en su Forma Normal de Cantor son mayores o iguales a 1.*[4]*)*

Demostración. $\Rightarrow$) Veamos el contrarrecíproco. Sea $\alpha \underset{\text{FNC}}{=} \omega^{\alpha_1}\ m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k}\ m_k$, con $\alpha_k = 0$ (sólo el último puede ser cero). Entonces claramente α es un ordinal sucesor, pues $\alpha = \omega^{\alpha_1}\ m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{k-1}}m_{k-1} + m_k = \big(\omega^{\alpha_1}\ m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{k-1}}m_{k-1} + m_k - 1\big) + 1$.

$\Leftarrow$) Si en la FNC de α, $\alpha_k > 0$, entonces para ver que α no es un ordinal límite podemos ver que $\forall \alpha' < \alpha$, tenemos que $\alpha' + 1 < \alpha$.

Sea $\alpha' < \alpha$ y digamos que $\alpha' \underset{\text{FNC}}{=} \omega^{\alpha'_1}m'_1 + \cdots + \omega^{\alpha'_{k'}}m'_{k'}$. Ahora separemos en casos:

- Si $\exists j \leq \min\{k, k'\}$ tal que $\alpha_j > \alpha'_j$ y $\forall i < j, \alpha_i = \alpha'_i, m_i = m'_i$, entonces necesariamente $\alpha_j > 0$. Hay dos casos: si $m'_{k'} > 1$, entonces $\alpha' + 1 \underset{\text{FNC}}{=} \omega^{\alpha'_1}m'_1 + \cdots + \omega^{\alpha'_{k'}}m'_{k'} + 1$. Si no, $\alpha' \underset{\text{FNC}}{=} \omega^{\alpha'_1}m'_1 + \cdots + \omega^{\alpha'_{k'}}(m'_{k'} + 1)$. En cualquier caso resulta que $\alpha' + 1 < \alpha$ por el Caso 1 de la Proposición 1.2.4 con el mismo j.

- Si $\exists j \leq \min\{k, k'\}$ tal que $m_j < m'_j$ y $\forall i \leq j, \alpha_i = \alpha'_i, m_i = m'_i$, entonces $\alpha_j \geq \alpha_k > 0$ *por hipótesis del enunciado* así que $\alpha' + 1 < \alpha$ por el Caso 2 de la misma Proposición, con el mismo j.

[4]Es decir, si llamamos, y con razón, 'dígito de las unidades' al coeficiente que acompaña a ω^0, entonces éste debe ser 0.

- Si $k' < k$ y $\forall i \leq k', \alpha_i = \alpha'_i, m_i = m'_i$, entonces $\alpha' + 1 = \omega^{\alpha_1} m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{k'}} m_{k'} + 1 < \alpha$ por el Caso 1 de la misma Proposición, con $j = k' + 1$, porque $1 < \alpha_{k'} + 1$ por hipótesis del enunciado.

Esto concluye la demostración. $\square$

1.2.2. Una notación efectiva para todos los ordinales debajo de ε_0

Hemos obtenido una manera de escribir a todos los ordinales en base ω. ¿Por qué esta tesis no se detiene aquí? ¿No obtuvimos una notación general? Pensemos que si los exponentes α_i y los coeficientes m_i de la FNC de un ordinal α son siempre menores que α, podemos reemplazar los α_i por su forma normal e iterar esto sobre la FNC de cada exponente y coeficiente mientras sean distintos de cero. Como los ordinales forman un buen orden eventualmente este proceso debería terminar.

Es decir, podríamos expresar a todos los ordinales α en función de $0, \omega$, sumas y exponenciaciones de manera finita. Pero, ¿vale que todos los ordinales son capturados por esta notación? ¡No! Cierto ordinal irreductible resiste, todavía y como siempre, al invasor. En primer lugar, es imposible capturar a todos los ordinales, ni siquiera a los numerables, porque las palabras que se pueden generar en el lenguaje antes mencionado son numerables, y hay no numerables ordinales numerables.

En segundo lugar, tenemos un contraejemplo explícito: ε_0, cuya notación en FNC es ω^{ε_0}. Antes de pasar al siguiente capítulo, donde intentaremos arreglar este pequeño gran detalle, analicemos qué sucede *debajo* de ε_0. Por la Proposición 0.3.19, sabemos que $\forall \alpha < \varepsilon_0$, los exponentes de la FNC de α van a ser estrictamente menores que él. Como discutimos dos párrafos atrás, procediendo recursivamente sobre estos exponentes y los coeficientes finitos podemos expresar a todos estos ordinales con un lenguaje finito. Más aun, la notación es primitiva recursiva:

Recordemos la definición de función primitiva recursiva:

Definición 1.2.7. *La clase de funciones primitivas recursivas es la familia de funciones $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ más chica:*

- *Conteniendo a las llamadas funciones iniciales $O(x) := 0, S(x) := x+1, I^n_1(x_1, \ldots, x_n) := x_i$ (con $n \geq 1$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$)*

- *Cerradas por* composición*, es decir, si $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ y $g_1, \ldots, g_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ y son p.r., entonces la función h definida como $h(x_1, \ldots, x_n) := f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$ es p.r.*

- *Cerradas por* recursión primitiva*, es decir, si $g : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}, f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ son p.r., entonces la función h definida recursivamente en el último argumento como:*

  - $h(x_1, \ldots, x_n, 0) := f(x_1, \ldots, x_n)$ *(caso base).*
  - $h(x_1, \ldots, x_n, t+1) := g(t, x_1, \ldots, x_n, h(x_1, \ldots, x_n, t))$ *(caso recursivo).*

  también es p.r. [5]

[5] Notemos que estamos haciendo recursión en el orden usual de $\mathbb{N}$. ¿No dan ganas de fijar otro orden para $\mathbb{N}$ - uno isomorfo a otro ordinal numerable más grande que ω - y definir un esquema recursivo de construcción de funciones sobre *ese* orden? ¿Cómo definir la recursión en los números que correspondan a ordinales límite?

Las funciones primitivas recursivas son un subconjunto de las funciones computables totales - es decir, las que se pueden programar en una computadora y tal que el programa siempre termina. Hay, para remarcar, una diferencia entre las dos clases de funciones. Las funciones computables totales no aparecen en la literatura definidas con un mecanismo *efectivo* de construcción. Justamente al ser definidas como un *subconjunto* de todas las funciones computables ni siquiera se puede usar un esquema de inducción estructural para razonar sobre ellas. Por el contrario, las funciones primitivas recursivas son un formalismo *constructivo* que no permite la indefinición. Justamente, para garantizar esto, los esquemas de construcción son, a primera vista, simples, rígidos (en la recursión primitiva, prácticamente sólo podemos mirar un paso atrás). Sin embargo, las funciones primitivas recursivas abarcan un conjunto muy amplio de funciones, y prácticamente todas las que programamos en la vida diaria (que siempre terminen).

Tal vez convenga mencionar que para obtener el conjunto de funciones computables totales "sólo" necesitamos agregar un esquema de construcción: el de minimización propia, que no es muy constructivo porque necesitamos saber a priori que nunca se indefine:

Proposición 1.2.8. *(Forma Normal de Kleene)[DSW94] Existe una función L primitiva recursiva tal que $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ es una función computable total si y solo si existe un predicado $n+1$-ario primitivo recursivo $P(x_1, \ldots, x_n, t)$ tal que $f(x_1, .., x_n) = L(\min_{t \in \mathbb{N}} P(x_1, \ldots, x_n, t))$, y además $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists t \in \mathbb{N}$ tal que vale $P(x_1, \ldots, x_n, t)$ (por lo que la función nunca se indefine).*

1.2.2.1. Una codificación primitiva recursiva

Pasemos, entonces, al primer teorema de efectividad de una notación de ordinales:

Teorema 1.2.9. *Consideremos ε_0 como conjunto. Entonces:*

- *$\forall \alpha \in \varepsilon_0$, α se puede expresar de manera finita utilizando solamente la exponenciación, la suma, y los ordinales 0 y ω.*
- *$\exists E \subseteq \mathbb{N}$ y un buen orden $\prec$ sobre E tal que $(E, \prec)$ es isomorfo a ε_0 donde se puede trabajar de manera efectiva. Es decir, la pertenencia a E es un predicado primitivo recursivo y las siguientes operaciones binarias sobre codificaciones de pares de ordinales dentro de E también son funciones primitivas recursivas:*
  - *La comparación.*
  - *La suma.*

Por comodidad, vamos a usar la siguiente versión de la Forma Normal de Cantor:

Teorema 1.2.10. *Sea $0 \neq \alpha \in ON$. Entonces existen únicos $\alpha \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_k \in ON$ tal que $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_k}$. (Y lo notamos $\alpha \underset{FNC'}{=} \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_k}$). Más aun, si $\varepsilon_0 > \alpha$, entonces $\alpha > \alpha_1$.*

¿Cómo hacerlo de manera uniforme para cada ordinal? ¿Se obtiene una jerarquía no trivial de funciones al permitir recursión primitiva sobre el orden correspondiente a cada ordinal? No volveremos a esto en este capítulo, ya que sólo usaremos la definición usual de funciones p.r. para medir la efectividad de las notaciones, pero consideramos que la pregunta es interesante. Una primera discusión al respecto puede encontrarse en [Odi99, Pág 316].

La demostración del Teorema 1.2.10 es trivial: para obtener la existencia, basta usar la primera Forma Normal y desarrollar cada $\omega^{\alpha_i}\ m_i$ como m_i sumas de ω^{α_i}. La unicidad se obtiene de manera parecida a la del Teorema 1.2.1.

Demostración del Teorema 1.2.9. El primer ítem ya está demostrado (hay que aplicar la FNC sobre α y luego recursivamente sobre los exponentes).[6] Dejamos algunos ejemplos a modo ilustrativo: $1 = \omega^0,\ \omega^2 = \omega^{\omega^0+\omega^0},\ \omega^{\omega^2} + \omega^3 = \omega^{\omega^{\omega^0+\omega^0}} + \omega^{\omega^0+\omega^0+\omega^0}$.

A la codificación (biyección) $\lceil . \rceil : \varepsilon_0 \to \mathbb{N}$ la definiremos recursivamente. $[.]$ denota la codificación de listas y se puede leer sobre ella en [DSW94]:

- $\lceil 0 \rceil := 0$
- Si $\alpha \underset{\mathrm{FNC}'}{=} \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n}$, definimos $\lceil\alpha\rceil := [1, \lceil\alpha_1\rceil, \ldots, \lceil\alpha_n\rceil]$.

Por lo argumentado inmediatamente después de la Proposición 1.2.6, la codificación está bien definida (la definición recursiva siempre 'termina'). Llamemos $E := \{\lceil\alpha\rceil : \alpha \in \varepsilon_0\}$.

Definimos $\lceil > \rceil$ y $\lceil \in \rceil$ de la siguiente manera, donde $n[i]$ denota *observación de listas*, es decir, $n[i]$ devuelve al i-ésimo elemento de n, visto como lista (empieza en 1), y $|n|$ devuelve la longitud de n, también visto como lista:

- El operador **igual** es el de siempre.
- La pertenencia a E y la comparación se definen recursivamente y de manera simultánea. Para saber si $n \in E$, basta chequear si n, visto como lista, cumple la condición de estar ordenada de mayor a menor:

$$n \lceil \in \rceil E \Leftrightarrow n = 0 \ \vee \left(n[0] = 1 \wedge \big(\forall_{x \leq |n|} 0 < x \Rightarrow n[x] \in E\big) \wedge \forall_{x \leq |n|-1} 0 < x \Rightarrow \right.$$
$$\left. n[x] \lceil > \rceil (n[x+1] \vee n[x] = n[x+1]) \right)$$

  Mientras que $\lceil > \rceil$ sigue el criterio de comparación enunciado en la Proposición 1.2.4 - aunque el segundo caso no aplique a esta Forma Normal de Cantor alternativa:

$$a \lceil > \rceil b \Leftrightarrow a \neq 0 \wedge a \lceil \in \rceil E \wedge b \lceil \in \rceil E \wedge \left(\exists_{x \leq |a|}\ 0 < x \wedge \big(\forall_{y < x}\ y < |b| \wedge a[y] = b[y]\big) \wedge \right.$$
$$\left. \big(x > |b| \vee (a[x] \lceil > \rceil b[x] \vee a[x] = b[x])\big) \right)$$

  (Para $a \lceil > \rceil b$, pedimos que además ambos estén en E.)

  Esto se corresponde con un esquema de recursión primitiva global doble llamado (en inglés) *double course of values recursion*. Se sabe que el conjunto de funciones p.r. es cerrado por este esquema, así que los predicados son p.r.

[6] Si pedimos que las sumas se escriban de mayor a menor, se puede ver que la escritura es única.

- $a \lceil \geq \rceil b \Leftrightarrow a \lceil > \rceil b \vee a \lceil \geq \rceil b$ y definimos análogamente $\lceil < \rceil$, $\lceil \leq \rceil$.

- Entendamos como sumar ordinales en FNC': si $\beta_1 > \beta_2$ entonces $\omega^{\beta_2} + \omega^{\beta_1} = \omega^{\beta_2} + \omega^{\beta_2 + (\beta_1 - \beta_2)} = \omega^{\beta_2} + \omega^{\beta_2}\omega^{(\beta_1-\beta_2)} = \omega^{\beta_2}(1 + \omega^{(\beta_1-\beta_2)})$.

  Es fácil ver que $1 + \omega^{(\beta_1-\beta_2)}$ es isomorfo a $\omega^{(\beta_1-\beta_2)}$. Luego, tenemos que $\omega^{\beta_2} + \omega^{\beta_1} = \omega^{\beta_2}\omega^{(\beta_1-\beta_2)} = \omega^{\beta_2+(\beta_1-\beta_2)} = \omega^{\beta_1}$.

  Esto nos dice que cuando queramos sumar dos ordinales en FNC' (y escribir el resultado en FNC'), los exponentes más grandes devoran a los más pequeños. Más concretamente, sean $\alpha \underset{\mathrm{FNC}'}{=} \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_k}$, y $\beta \underset{\mathrm{FNC}'}{=} \omega^{\beta'_1} + \cdots + \omega^{\beta_{k'}}$. Si $\alpha_k \geq \beta'_1$, entonces $\alpha + \beta \underset{\mathrm{FNC}'}{=} \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_k} + \omega^{\beta'_1} + \cdots + \omega^{\beta_{k'}}$. Si no, sea $t := \min\{t \leq k : \alpha_k < \beta'_1\}$. Si $t = 1$ entonces $\alpha + \beta \underset{\mathrm{FNC}'}{=} \beta$. De lo contrario, $\alpha + \beta \underset{\mathrm{FNC}'}{=} \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_{t-1}} + \omega^{\beta'_1} + \cdots + \omega^{\beta_{k'}}$.

  Para expresar esto de manera primitiva recursiva, necesitaremos las siguientes funciones, que son todas primitivas recursivas:

  - $Sub(a, k) := \langle a[1], \ldots, a[k] \rangle$ que dada una lista devuelve una sublista del tamaño requerido. Si $k \geq |a|$, rellena con ceros; si $k = 0$, devuelve la lista vacía.
  - $Union(a, b) := \langle a[1], \ldots, a[|a|], b[1], \ldots, b[|b|] \rangle$, que une dos listas.
  - Si $p(x)$ es un predicado primitivo recursivo, entonces podemos definir la siguiente función de variables $t, y, x_1, \ldots, x_n$:
    $$\min\nolimits_{t \leq y} P(t, x_1, \ldots, x_n) := \begin{cases} \text{mínimo } t \leq y \text{ tal que } P(t, x_1, \ldots, x_n) = 1 & \text{, si existe tal } t \\ 0 & \text{, si no} \end{cases}$$
    El predicado con que la usaremos es $\hat{P}(a, b, u, v) := a[u] \lceil < \rceil b[v]$.
  - $a \dot{-} b = \begin{cases} a - b & \text{, si } a \geq b \\ 0 & \text{, en caso contrario} \end{cases}$

  Definimos $a \lceil + \rceil b := \begin{cases} Union(a, b) & \text{, si } P(a, b, |a|, 1) = 0 \\ Union\Big(Sub(a, \min_{t \leq |a|} \hat{P}(a, b, t, 1) \dot{-} 1), b\Big) & \text{, en caso contrario.} \end{cases}$

Esto finaliza la demostración. □

1.2.2.2. Una codificación primitiva recursiva *y biyectiva*

Observación 1.2.11. *Mencionamos también que uno podría definir un buen orden $\leqq$ sobre todo $\mathbb{N}$ tal que $(\mathbb{N}, \leqq) \cong (\varepsilon_0, \in)$, siguiendo la idea de [Cap88], donde se codifican árboles con una sola raíz a partir de números naturales a partir de su factorización en números primos. Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{T}$ el conjunto de números primos y el conjunto de los árboles finitos no dirigidos respectivamente. Sea $p : \mathbb{N} \to \mathcal{P}$ la función enumeradora de los números primos. Entonces definimos $\tau : \mathbb{N} \to T$ recursivamente:*

- *$\tau(1)$ es el árbol de un solo nodo.*

- *Para $n > 1$, si la factorización de n es $f_1, \ldots, f_j$ entonces $\tau(n)$ es el árbol cuya raíz es adyacente a las raíces de los árboles $\tau(p^{-1}(f_i))$*

Lo interesante es que la codificación es biyectiva. Para entender más fácilmente la codificación, conviene guiarse por las siguientes dos propiedades, fáciles de chequear (aunque no caracterizan completamente a la codificación):

- *Los árboles de una sola rama son codificados por la Primeth Recurrence [OEI], definida como* $\alpha_1 := 2, \alpha_{n+1} := p(\alpha_n)$.
- *Si denotamos* $\oplus$ *como el* merge *de dos árboles (identificando ambas raíces), entonces* $(\mathbb{N}, \cdot) \cong (T, \oplus)$.

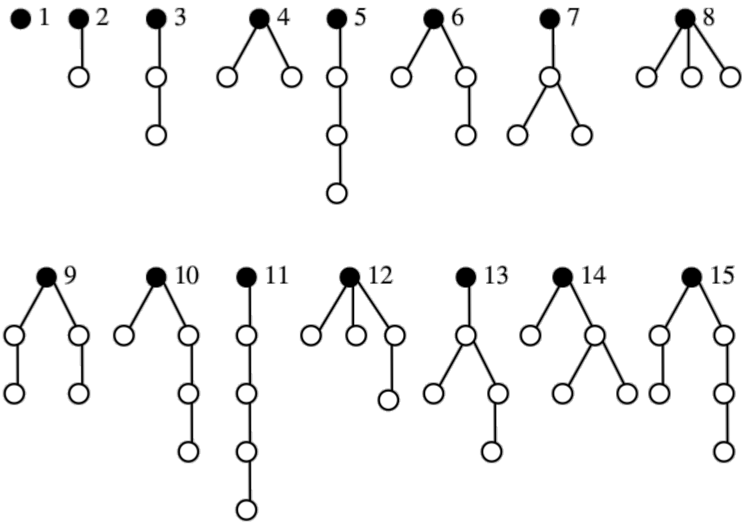


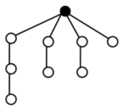
Figura 1.2: Los primeros 15 árboles. Imagen tomada de [Cap88]

Para definir el orden $\leqq$ *sobre* $\mathbb{N}$*, basta armar una biyección entre* ε_0 *y* $\mathcal{T}$*. Los ordinales debajo de* ε_0 *se pueden codificar fácilmente con árboles si los presentamos de una manera que llamaremos* recursivamente ordenada*. Un árbol aparece* ordenado recursivamente *si cumple las siguientes dos propiedades:*

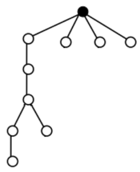
- *La altura de sus ramas aparecen en orden decreciente de izquierda a derecha.*
- *Si a cada rama le quitamos la raíz entonces es el árbol vacío o aparece ordenado recursivamente.*

Si un árbol está recursivamente ordenado, podemos hacer la siguiente identificación (recursiva) $\sigma : \mathcal{T} \to \varepsilon_0$*:*

- *Al árbol vacío lo identificamos con el ordinal* 0.
- *Si* T *tiene ramas* $T_1, \ldots, T_n$*, definimos* $\widehat{T_i}$ *el árbol correspondiente a quitarle la raíz a cada* T_i*: Entonces definimos* $\sigma(T) := \omega^{\sigma(\widehat{T_1})} + \cdots + \omega^{\sigma(\widehat{T_n})}$.



(a) El ordinal $\omega^{\omega^{\omega^0}} + \omega^{\omega^0} \cdot 2 + \omega^0$.



(b) El ordinal $\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega^0+0}}}} + 3$.

Figura 1.4: Dos ejemplos de representaciones de ordinales con árboles. Imágenes adaptadas a partir de la Figura 3 de [Cap88].

Con lo dicho arriba finalizamos el análisis de la efectividad de la notación inducida por la Forma Normal de Cantor.

Nota de color 1.2.12. Continuando con el problema de Skolem mencionado en la Nota de color 1.1.2, hablemos un poco más sobre los avances hechos para la segunda pregunta. ¿A qué ordinal es isomorfo $\mathcal{F}$?

Se han hallado subconjuntos isomorfos a ε_0 [Lev75][Mar73], por lo que este ordinal es una cota inferior. No necesariamente es una cota inferior **estricta**; pensar por ejemplo en ω, que es isomorfo a $\{2n : n \in \omega\}$.

No es difícil hallar un subconjunto de $\mathcal{F}$ isomorfo a ε_0. Por ejemplo, sea $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, definido como el menor conjunto que contiene al 0, x, y es cerrado por sumas, y no por la exponenciación sino por $f \mapsto x^f$. Se puede ver que $(\mathbb{F}', \leq_p) \cong (\varepsilon_0, \in)$. El isomorfismo de orden viene dado simplemente por reemplazar las x por ω.

La conjetura (que sigue abierta) es que el ordinal asociado a $\mathcal{F}$ es *efectivamente* ε_0.

Aunque no definimos formalmente qué es una notación de ordinales (esto no es *nada* fácil), tenemos una para todos los ordinales debajo de ε_0. Equivalentemente, podemos exhibir un conjunto bien ordenado isomorfo a ε_0. Recordemos que al empezar no teníamos esto. Habíamos construido al ordinal como $\lim_{n \to \omega} {}^n\omega$. ¿Cómo continuar después de ε_0?

1.3. La Forma Normal de Veblen

En esta sección intentaremos arreglar los problemas que tiene la Forma Normal de Cantor de manera *ordenada*. ¿Cuáles son los problemas de la notación? Pues los *puntos fijos* de la misma, es decir, los ordinales γ que en base ω se escriben como ω^γ. Ya vimos que ε_0 es un ejemplo de ellos (y el primero). Pronto veremos que en realidad hay toda una *subclase* de ON que son puntos fijos de la notación anterior. Los ordinales de esta subclase reciben el nombre de 'números epsilon' (en inglés 'epsilon numbers'). Otro nombre menos usado, pero más traducible, es el de ordinales *críticos* ('critical ordinals').

1.3.1. Nueva tecnología

1.3.1.1. Algunas definiciones nuevas

Queremos inventarnos una notación nueva que sí cubra a estos ordinales críticos. Una buena idea es introducir un símbolo de función nuevo, que represente a una función que los enumere:

Definición 1.3.1. *Sea $Y \subseteq ON$. Definimos la* función enumeradora de Y *(y la notamos $Enum_Y$) de la siguiente manera:*

- *Definimos* $\rho_Y := \begin{cases} \textit{El único ordinal isomorfo a } Y, \textit{ si } Y \textit{ es un conjunto de ordinales}^{7} \\ \textit{ON, en caso contrario.} \end{cases}$

- *Definimos la función $C_Y : Y \to \rho_Y$ inductivamente, como:*

$$C_Y(\alpha) := \{C_Y(\xi) : \xi \in Y \wedge \xi < \alpha\}$$

  (Notar que no hace falta definir aparte el caso $\alpha = 0$; automáticamente obtenemos el conjunto vacío.)

- $Enum_Y := C_Y^{-1}$.

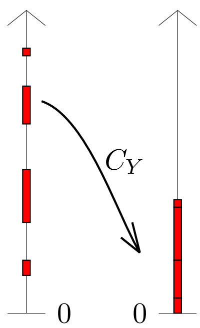


Figura 1.5: La función C_Y. [8]

[7] Existe por el Teorema 0.2.13.
[8] Casi se puede escuchar el ruido de la dinamitación controlada.

Una manera de entender que Enum_Y es la inversa de C_Y es que C_Y *colapsa* al subconjunto Y de ON en ρ_Y. Una imagen mental, dibujando a la semirrecta ON verticalmente por motivos didácticos, puede ser la Figura 1.5.

Para la buena definición de Enum_Y sólo hay que chequear que C_Y devuelve siempre un ordinal y que es biyectiva.

Lo primero se puede ver fácilmente por inducción. Es inyectiva porque si $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow C_Y(\alpha_1) \in C_Y(\alpha_2)$, es decir, $C_Y(\alpha_1) < C_Y(\alpha_2)$.

Chequeemos, por inducción, que la imagen de C_Y es todo ρ_Y: sea $\beta_0 \in \rho_Y$ y supongamos que $\forall \beta < \beta_0, \exists \xi_\beta \in Y$ tal que $C_Y(\xi_\beta) = \beta$. Queremos ver que entonces existe $\xi_{\beta_0} \in Y$ tal que $C_Y(\xi_{\beta_0}) = \beta_0$.

Notemos que $\{\xi_\beta : \beta < \beta_0\} \subsetneq Y$. Si Y no es un conjunto, ver que la contención es estricta es trivial. Si lo es, supongamos que son iguales. Entonces la aplicación $\beta \mapsto \xi_\beta$ es un isomorfismo entre β_0 e Y. Pero entonces $Y \cong \beta_0$ e $Y \cong \rho_Y$, y además $\beta_0 \in \rho_Y$ así que son distintos. Esto contradice el Teorema 0.2.13, lo cual es un absurdo.

Luego podemos tomar $\xi_{\beta_0} := \text{mín}\{\eta \in Y : \forall \beta < \beta_0, \eta > \xi_\beta\}$. Por definición, resulta que $C_Y(\xi_{\beta_0}) = \{C_Y(\xi_\beta) : \beta < \beta_0\} = \{\beta : \beta < \beta_0\} = \beta_0$.

Proposición 1.3.2. *Dado $Y \subseteq ON$, Enum_Y es la* única *función f que cumple:*

- *$\mathrm{Im}\ f = Y$.*
- *f es estrictamente creciente.*

Demostración. La demostración puede hallarse en [Rat17b]. □

¿Para qué nos sirven las funciones enumeradoras? Podríamos pensar que si Cr (por 'Critical') es la colección de puntos fijos de la Forma Normal de Cantor, podremos enumerarlos con una función Enum_{Cr}. Si esta enumeración pudiera indexar los puntos fijos de la FNC usando *siempre* ordinales más chicos entonces podríamos aplicar recursión sobre esos ordinales más chicos, volviéndolos a expresar ya sea con Enum_{Cr} o directamente en FNC, hasta obtener el ordinal 0, y así podríamos cubrir a todos los ordinales usando solo un símbolo más. Claramente eso no se puede, ya que como dijimos, con finitos símbolos una notación sólo alcanza a expresar numerables ordinales. La función Enum_{Cr} debe tener innumerables problemas. ¡Más que innumerables! *Sus* puntos fijos formarán otra clase propia. Estamos condenados a nunca tener un éxito completo.

Demostremos lo argumentado arriba de una manera menos indirecta.

'Normal', según el matemático John Báez, es un adjetivo que los matemáticos usamos cuando no bebimos suficiente café por la mañana y no nos estamos sintiendo creativos - puede significar mil cosas distintas.[9]

Definición 1.3.3. *(Función Normal) Sea $f : ON \to ON$ una función. Se dice que f es* normal *si es estrictamente creciente y continua.*

La definición de continuidad se da a partir de la topología que le dimos a ON, y que f lo sea equivale a que si $(\alpha_\iota)_{\iota \in \Lambda}$ es una red convergente, entonces $\text{lím}\, f(\alpha_\iota)$ existe y $f(\text{lím}\, \alpha_\iota) = \text{lím}\, f(\alpha_\iota)$. Por ejemplo: $f(\alpha) := 1 + \alpha$ es continua pero $g(\alpha) := \alpha + 1$ no, ya que g no es continua en ω. Si esto parece poco intuitivo, recordemos que las operaciones están definidas

[9] `https://en.wikipedia.org/wiki/Normal#Mathematics`

haciendo inducción en el *segundo* argumento. Más aun, el valor en un ordinal límite se define justamente para que *resulten continuas* en el segundo argumento. Por ejemplo, $\alpha \mapsto \omega^\alpha$ es continua. Y es fácil ver que es estrictamente creciente, así que es normal.

Definición 1.3.4. *(Club) Sea $Y \subseteq ON$. Se dice que Y es un* club *si:*

- *Es cerrado (***cl***osed), donde aunque Y sea una subclase, que sea* cerrado *se define de la manera usual: $\forall(\alpha_\iota)_{\iota\in\Lambda} \subseteq Y$ red convergente, tenemos que el límite está en Y.*
- *Es no acotado en ON (***unb***ounded).*

(Éste sí que es un buen nombre.)

¿Cómo se relacionan un club y una función normal?

1.3.1.2. Relaciones importantes entre las definiciones

Teorema 1.3.5. *Sea $Y \subseteq ON$. Entonces Y es un club si y solo si $Enum_Y$ es una función normal.*

Para la demostración, necesitaremos el siguiente lema, que nos permite chequear más fácilmente si un conjunto es cerrado y si una función creciente es continua:

Lema 1.3.6.

1. *$Y \subseteq ON$ es cerrado*[10] *si y solo si $\forall U \subseteq Y$, U acotado, $\sup U \in Y$*
2. *Sean $\rho_1 = [0, \xi_1]$ y $\rho_2 = [0, \xi_2]$ segmentos de ON, o posiblemente todo ON, y $f : \rho_1 \to \rho_2$ una función. Entonces f es no decreciente y continua*[11] *si y solo si $\forall U \subseteq \rho_1$, U acotado, $f(\sup U) = \sup f(U)$.*

Demostración.
Antes que nada notemos que si tenemos una red $(\alpha_\iota)_{\iota\in\Lambda}$ que converge a cierto ordinal α entonces le podemos extraer una subred que converge por debajo.

En efecto, consideremos el intervalo abierto $I := (0, \alpha + 1)$. Como este intervalo contiene al límite de la red, que es α, entonces existe $\iota_0 \in \Lambda$ tal que $\iota > \iota_0 \Rightarrow \alpha_\iota \in I$ y en particular $\alpha_\iota \leq \alpha$. Sea $\Lambda' := \{\iota \in \Lambda : \iota > \iota_0\}$. Es fácil ver que la red $\alpha_{\iota'}$ indexada por Λ' es una subred de α_ι que también converge a α.

1. $\Rightarrow$) Sea Y un conjunto cerrado, y $U \subseteq Y$ acotado. Queremos ver que $\sup U \in Y$. Sea $(\alpha_\iota)_{\iota\in\Lambda}$ una red contenida en U tal que $\alpha_\iota \to \sup U$. Como $(\alpha_\iota)_{\iota\in\Lambda} \subseteq U$ e Y es cerrado, $\sup U = \lim \alpha_\iota \in U$.

   $\Leftarrow$) Supongamos que $\forall U \subseteq Y, \sup U \in Y$. Queremos ver que Y es cerrado. Sea $(\alpha_\iota)_{\iota\in\Lambda}$ una red contenida en Y tal que $\alpha_\iota \to \alpha$. Queremos ver que $\alpha \in Y$. Por lo argumentado al inicio de esta demostración podemos construir una subred $(\alpha_{\iota'})_{\iota'\in\Lambda'}$ que converge al mismo límite por debajo. Por lo tanto $\sup\{\alpha_{\iota'} : \iota' \in \Lambda'\} = \alpha$. Entonces, por hipótesis tenemos que $\alpha \in Y$, que era lo queríamos ver.

[10] Si Y es una subclase en vez de un conjunto, definimos que sea cerrado si y solo si toda red convergente contenida en Y converge a un elemento de Y.

[11] Si ρ_1 es todo ON, consideramos que f es continua si y solo si manda redes convergentes a redes convergentes.

2. $\Rightarrow$) Sea $U \subseteq \rho$ acotado. Veamos que $f(\sup U) = \sup f(U)$. Podemos definir la red $(\alpha_\iota)_{\iota \in U}$ ya que todo conjunto de ordinales está bien ordenado y en particular es dirigido. Es fácil ver que
$im\alpha_\iota = \sup U$, a quién podemos llamar α. Por hipótesis, como f es continua, $f(\alpha) = \lim f(\alpha_\iota)$, pero como f es creciente
$imf(\alpha_\iota) = \sup f(\alpha_\iota)$, así que$f(\sup U) = \sup f(\alpha_\iota) = \sup f(U)$, y estamos.

   $\Leftarrow$) Supongamos que $\forall U \subseteq \rho$, U acotado, $f(\sup U) = \sup f(U)$. Queremos ver que f es no decreciente y continua. Sea $\alpha < \beta \in \mathrm{ON}$. Tomando $U := \{\alpha, \beta\}$, tenemos que $f(\beta) = f(\sup U) = \sup f(U) \geq f(\alpha)$. Por lo tanto f es no decreciente.

   Veamos que es continua. Sea $(\alpha_\iota)_{\iota \in \Lambda}$ una red tal que $\alpha_\iota \to \alpha$ como antes. Repitiendo el truco mencionado al comienzo de esta demostración de ser necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la red converge por debajo. Sea $U := \{\alpha_\iota : \iota \in \Lambda\}$. Entonces $f(\alpha) = f(\sup U) = \sup f(U) = \lim f(\alpha_\iota)$, donde en la última igualdad usamos que f es no decreciente. $\square$

Demostración del Teorema 1.3.5.

$\Rightarrow$) Supongamos que Y es un club. Queremos ver que Enum_Y es una función normal. Sea $(\alpha_\iota)_{\iota \in \Lambda}$ una red contenida en el dominio de Enum_Y convergente a cierto ordinal α. Por el Lema 1.3.6, podemos suponer que α_ι es estrictamente creciente, es decir, que además $\alpha = \sup\{\alpha_\iota : \iota \in \Lambda\}$. Llamemos $U = \{\alpha_\iota : \iota \in \Lambda\}$ y $f = \mathrm{Enum}_Y$.

Claramente $\sup U \in Y$ pues Y es cerrado. El objetivo es ver que $f(\sup U) = \sup f(U)$. Como $\forall \alpha_\iota, \alpha_\iota < \alpha$, y Enum_Y es creciente, tenemos $f(\sup U) \leq \sup f(U)$. Veamos la otra desigualdad: sea $\alpha_\iota < \alpha (= \sup U)$. Entonces existe $\alpha_{\iota'}$ en la red, mayor que α_ι, y como f es estrictamente creciente tenemos que $f(\alpha_\iota) < f(\alpha_{\iota'}) \leq f(\sup U)$. Por lo tanto $f(\alpha_\iota) \leq f(\sup U)$ y entonces $\sup f(U) \leq f(U)$.

Claramente f es estrictamente creciente por ser una función enumeradora, así que es normal.

$\Leftarrow$) supongamos ahora que Enum_Y es una función normal. Queremos ver que Y es un club.

- Sea $\alpha \in Y$. Entonces existe $\xi_\alpha \in \mathrm{ON}$ tal que $\mathrm{Enum}_Y(\xi_\alpha) = \alpha$. Como estamos suponiendo que Enum_Y es una función normal, su dominio es todo ON. Por lo tanto, podemos evaluar a la función en $\xi_\alpha + 1$ y $Y \ni \mathrm{Enum}_Y(\xi_\alpha + 1) > \mathrm{Enum}_Y(\xi_\alpha) = \alpha$ porque al ser normal la función, es estrictamente creciente. Esto dice que Y es no acotado.

- Veamos que Y es un conjunto cerrado: sea $(\beta_\iota)_{\iota \in \Lambda}$ una red en Y tal que $\beta_\iota \to \beta$. Queremos ver que $\beta \in Y$. Por el Lema 1.3.6, podemos asumir que la red es creciente. Llamemos $\alpha_\iota := {\mathrm{Enum}_Y}^{-1}(\beta_\iota)$ y $U := \{\alpha_\iota : \iota \in \Lambda\}$. Entonces existe $\alpha := \sup U$ y $\beta = \sup \mathrm{Enum}_Y(U)$. Como Enum_Y es continua, $\beta = \mathrm{Enum}_Y(\sup U) = \mathrm{Enum}_Y(\alpha) \in Y$. $\square$

Nota de color 1.3.7. La suma de ordinales se puede definir como una función enumeradora. En efecto, sea $\mathrm{ON}_{\geq \alpha} := \{\delta \in \mathrm{ON} : \delta \geq \alpha\}$. Entonces se puede ver que:

$$\alpha + \beta = \mathrm{Enum}_{\mathrm{ON}_{\geq \alpha}}(\beta) : \mathrm{ON} \to \mathrm{ON}_{\geq \alpha}$$

Para todo $\alpha \in \mathrm{ON}$, tenemos que $\mathrm{ON}_{\geq \alpha}$ es un club, así que como corolario del teorema anterior, resulta que la suma es una función normal en el segundo argumento - algo que ya sabíamos.

La siguiente proposición nos resultará útil en lo que sigue:

Proposición 1.3.8. *Una función estrictamente creciente $f : ON \to ON$ es* inflacionaria.

Demostración.
Veamos por inducción transfinita en α que $\forall \alpha \in \mathrm{ON}, f(\alpha) \leq \alpha$:

- $f(0) \geq 0$ trivialmente.
- Si $f(\alpha) \geq \alpha$, entonces $f(\alpha + 1) > f(\alpha) \geq \alpha$. Cómo $\alpha + 1 = \min\{\beta \in \mathrm{ON} : \beta > \alpha\}$, podemos concluir sin temor que $f(\alpha + 1) \geq \alpha + 1$.
- Sea α un ordinal límite y supongamos que $\forall \lambda < \lambda, f(\lambda) \geq \lambda$. Supongamos que $f(\alpha) < \alpha$. Entonces existe $\lambda_0 < \alpha$ tal que $f(\alpha) = \lambda_0$. Pero $f(\lambda_0 + 1) \geq \lambda_0 + 1 > \lambda_0$, lo cual es un absurdo ya que contradice el hecho de que f es estrictamente creciente. □

Observación 1.3.9. *Y es subclase de ON si y solo si es* no acotado *en ON, i.e., $\forall \gamma \in ON\ \exists \alpha \in Y$ tal que $\gamma < \alpha$.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Supongamos que Y es subclase de ON. Entonces $\mathrm{Enum}_Y : \mathrm{ON} \to Y$ es su función enumeradora. Sea $\gamma \in \mathrm{ON}$. Entonces, como Enum_Y es inflacionaria, $\mathrm{Enum}_Y(\gamma + 1) \geq \gamma + 1 > \gamma$.
$\Leftarrow$) Supongamos que Y no es subclase de ON, i.e., es un conjunto de ordinales. Luego existe $\gamma := \sup Y$. Pero como Y es no acotado en $\mathrm{ON}, \exists \alpha \in Y$ tal que $\gamma < \alpha$, lo cual es un absurdo. □

Dada $f : \mathrm{ON} \to \mathrm{ON}$, podemos llamar $\mathrm{Fix}(f)$ a la colección de puntos fijos de la función. La que nos interesa es $\alpha \mapsto \omega^\alpha$. Consideremos $\varphi(\alpha) = \mathrm{Enum}_{\mathrm{Fix}(\alpha \mapsto \omega^\alpha)}(\alpha)$. Imaginemos que incorporamos esta función como símbolo de nuestra notación. Si α no es punto fijo de φ, entonces, por la Proposición 1.3.8,podemos expresar a $\varphi(\alpha)$ con un ordinal más chico (el ordinal α). Pero si es punto fijo, caemos en el mismo problema que antes. Y, como adelantamos, esto sucede.

1.3.1.3. Derivadas: cómo aumentar la velocidad

Definición 1.3.10. *Sea $f : ON \to ON$ una función normal. Llamamos* derivada *de f a $f' := Enum_{Fix(f)}$.*

Una motivación de este nombre puede radicar en el hecho de que f' fue *derivada* a partir de f. f' no cumple aditividad ni ninguna regla usual de las derivadas, pero sí mide, en cierto sentido, la velocidad de crecimiento de f, ya que f' marca los únicos puntos en los que f no está creciendo.

¿Está bien definida f'? ¿Es la colección de puntos que enumera no vacía? ¿Es un club?

Proposición 1.3.11. *Sea $f : ON \to ON$ una función normal. Entonces:*

1. *f' también es normal.*
2. *$f^\omega(0)$ es un punto fijo de f, como sucede con tantos teoremas de punto fijo. Más aun:*
   a) *$f'(0) = 0$ ó $f'(0) = f^\omega(0)$.*

b) $f'(\gamma+1) = f'(\gamma)+1$ *ó* $f'(\gamma+1) = f^{\omega}(f'(\gamma)+1)$.

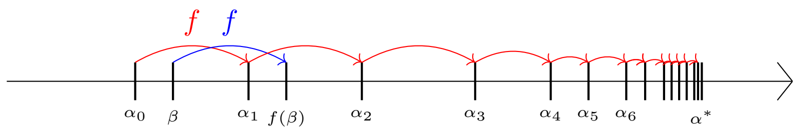
c) *Si* γ *es un ordinal límite entonces* $f'(\gamma) = \lim\limits_{\mu<\gamma} f'(\mu)$.

Demostración.

1. Por el Teorema 1.3.5, ver que f' es normal es equivalente a ver que $\mathrm{Fix}(f)$ es un club. Veamos que el conjunto es cerrado: sea $\alpha \in \mathrm{ON}$ y $(\alpha_\iota)_{\iota\in\Lambda} \subseteq \mathrm{Fix}(f)$ tal que $\alpha_\iota \to \alpha$. Como $\forall \iota \in \Lambda, \alpha_\iota \in \mathrm{Fix}(f)$, tenemos que $f(\alpha_\iota) = \alpha_\iota$. Como f es normal, es continua, y por lo tanto $f(\alpha) = f(\lim \alpha_\iota) = \lim f(\alpha_\iota) = \lim \alpha_\iota = \alpha$. Notemos que esto además prueba 2 c).

   Veamos que es no acotado. Sea $\alpha_0 \in \mathrm{ON}$. Queremos ver que existe α^*, con $\alpha^* \geq \alpha_0$, tal que α^* es punto fijo de f. Si α_0 es un punto fijo de f, ya estamos. Si no, definimos recursivamente $\alpha_{n+1} := f(\alpha_n)$. Como f es estrictamente creciente, tenemos que $\forall\beta$ tal que $\alpha_n < \beta < \alpha_{n+1}$, con $n \in \mathbb{N}, f(\alpha_n) < f(\beta) < f(\alpha_{n+1})$, es decir, $\alpha_{n+1} < \beta < \alpha_{n+2}$. Esto dice que β no puede ser punto fijo de f. Además, $\forall n \in \mathbb{N}$, tenemos que $f(\alpha_n) = \alpha_{n+1}$, así que α_{n+1} tampoco puede ser punto fijo de f, porque f es inyectiva.

   α_n es una sucesión creciente de ordinales; sea $\alpha^* := \lim \alpha_n$.

   Por continuidad, $f(\alpha^*) = f(\lim \alpha_n) = \lim f(\alpha_n) = \lim \alpha_{n+1} = \alpha^*$.

2. *a*) Instanciando a α_0 (el ordinal del ítem anterior) en 0 obtenemos que 0 es punto fijo de f ó $f^{\omega}(0)$ lo es.

   b) Instanciando a α_0 en $f'(\gamma)+1$ obtenemos que $f'(\gamma)+1$ es punto fijo de f ó $f^{\omega}(f'(\gamma)+1)$ lo es.

   c) La definición de f' en el paso al límite es consecuencia inmediata de su continuidad.

Esto concluye la demostración. □

Dejamos como comentario que escondido en lo anterior está el hecho de que si f no tiene dos puntos fijos a distancia 1 y $f(0) > 0$, entonces $f'(\alpha)$ no es más que iterar f $\mathrm{Enum}_{\mathrm{LIM}}(\alpha)$ veces, donde LIM es la colección de ordinales límite.

1.3.1.4. Algunas curiosidades

Ejemplo 1.3.12. No es difícil hacer un pequeño análisis de $\mathrm{LIM} := \{\alpha \in \mathrm{ON} : \alpha \text{ es un ordinal límite}\}$. Veamos que LIM es un club.

- Veamos que es cerrado. Por el Lema 1.3.6, para ver esto basta chequear que es cerrado por supremos. Sea $(\alpha_\iota)_{\iota\in\Lambda}$ una red creciente de ordinales límite, y sea $\alpha := \sup\{\alpha_\iota : \iota \in \Lambda\}$. Queremos ver que α es un ordinal límite, así que sea $\beta < \alpha$. Veamos que $\beta + 1 < \alpha$. Por definición de supremo, $\exists \iota_0 \in \Lambda$ tal que $\beta < \alpha_{\iota_0}$. Si $\alpha_{\iota_0} = \alpha$, α es un ordinal límite y no hay nada que probar. De lo contrario, $\alpha_{\iota_0} < \alpha$ así que $\beta + 1 \leq \alpha_{\iota_0} < \alpha$.

- Ver que LIM es no acotado es bien fácil: sea $\alpha \in$ ON. Entonces la sucesión $\alpha_0 := \alpha, \alpha_{n+1} := \alpha + 1$ converge al ordinal $\alpha + \omega$, que es un ordinal límite por lo argumentado al demostrar que LIM es cerrado.

¿Cuál es el primer punto fijo de Enum_{LIM}? En la sección anterior, notamos que LIM $= \{\alpha \in \text{ON} : \alpha \underset{FNC}{=} \omega^{\alpha_1}\ m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k}\ m_k\ \wedge\ \alpha_k \neq 0\}$. Es decir, LIM es el conjunto de los ordinales que no tienen término independiente en la Forma Normal de Cantor. Notemos que si $\alpha = \omega^{\alpha_1}\ m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k}\ m_k$, con $\alpha_k \neq 0$, entonces podemos sacar factor común ω. Es decir, vale que $\alpha = \omega(\omega^{\alpha_1 - 1}\ m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k - 1}\ m_k$, porque vale la distributiva a izquierda y porque los exponentes son todos mayores o iguales a 1. Es decir, $\beta \in \text{ON}, \beta \neq 0$, tal que $\alpha = \omega \cdot \beta$. Inversamente, si $0 \neq \beta \in$ ON, digamos que $\beta \underset{FNC}{=} \omega^{\beta_1}\ m_1 + \cdots + \omega^{\beta_k}\ m_k$, con $\beta_1, \ldots, \beta_k \geq 0$. Entonces $\omega\beta = \omega^{\beta_1 + 1}\ m_1 + \cdots + \omega^{\beta_k + 1}\ m_k$. Como la Forma Normal de Cantor es única, concluimos que la de $\omega\beta$ no tiene término independiente, y por lo tanto $\omega\beta \in$ LIM. En otras palabras, un ordinal es límite si y solo si es divisible por ω.

(En realidad, no hace falta tanta tecnología para probar esto. Se puede ver que la división con resto de ordinales está bien definida; en particular, $\forall \alpha \in$ ON, existen únicos $\beta, \rho \in$ ON tal que $\alpha = \omega\beta + \rho$, con $0 \leq \rho < \omega$. Mirando esta expresión, es inmediato notar que α es un ordinal límite $\Leftrightarrow \rho = 0 \Leftrightarrow \alpha$ es divisible por ω.)

Esto dice que $\text{Enum}_{\text{LIM}}(\alpha) = \omega\cdot(1+\alpha)$. ¿A dónde converge la sucesión $\alpha_0 := \text{Enum}_{\text{LIM}}(0), \alpha_{n+1} := \text{Enum}_{\text{LIM}}(\alpha_n)$?

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= \text{Enum}_{\text{LIM}}(0) = 1 \\
\alpha_1 &= \text{Enum}_{\text{LIM}}(1) = \omega \\
\alpha_2 &= \text{Enum}_{\text{LIM}}(\omega) = \omega^2 \\
\alpha_3 &= \text{Enum}_{\text{LIM}}(\omega^2) = \omega^3 \\
&\cdots \\
\alpha_n &= \omega^n
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\alpha_n \to \omega^\omega$. Y todo cierra: es fácil ver que por definición $\omega^\omega = \omega \cdot \omega^\omega$.

Es peculiar que ω^ω sea isomorfo a su subconjunto propio de ordinales límite.

Como curiosidad, y más que nada para evitar que quede una intuición errónea sobre la operación de *derivación* por el nombre que ésta tiene, probemos lo siguiente:

Proposición 1.3.13. *Derivar no es aditivo.*

Demostración. Sea $f(\alpha) := \omega^\alpha, g(\alpha) := \omega \cdot (1 + \alpha)$. Ya vimos que las dos funciones son normales, que $f'(0) = \varepsilon_0$, y que $g'(0) = \omega^\omega$.

Veamos que $f'(0) + g'(0) \neq (f+g)'(0)$. Para ello, podemos ver directamente que $\varepsilon_0 + \omega^\omega$ no es punto fijo de $f + g$. En efecto, $(f+g)(\varepsilon_0 + \omega^\omega) = \omega^{\varepsilon_0 + \omega^\omega} + \omega \cdot (1 + \varepsilon_0 + \omega^\omega) = \omega^{\varepsilon_0} \cdot \omega^{\omega^\omega} + \omega + \omega \cdot \varepsilon_0 + \omega \cdot \omega^\omega = \varepsilon_0 \cdot \omega^{\omega^\omega} + \omega + \varepsilon_0 + \omega^\omega > \varepsilon_0 + \omega^\omega$. □

1.3.1.5. Una jerarquía transfinita de funciones cada vez más veloces

Derivar nos da un mecanismo de construcción de funciones $f^{(n)}$ que *crecen cada vez más rápido*, algo que resulta muy útil si nos ponemos a pensar que para inventar notaciones más poderosas necesitamos funciones que cubran segmentos cada vez más extensos de ON.

Pensemos que dada f una función normal, ON $\supseteq Imf^{(n+1)} \supseteq Imf^{(n)}$. Esta extracción de puntos fijos recursiva forma una colección decreciente de clubs. Claramente nos gustaría extender esta construcción a lo transfinito, como Cantor hizo con sus conjuntos derivados según la historia contada en § 0.1, pero todavía no sabemos si la intersección de estos clubs es no vacía.

El siguiente teorema nos permite saltar a ω y, en general, a cualquier ordinal:

Teorema 1.3.14. *Sea $f : ON \to ON$ una función normal. Entonces $C_\omega := \bigcap\limits_{n<\omega} Fix(f^{(n)})$ es un club. En otras palabras, si definimos $f^{(\omega)}(\alpha) := Enum_{C_\omega}(\alpha)$, tenemos una función normal.*

Más aun, si definimos el siguiente esquema de construcción:

- $f^{(0)} := f$
- $f^{(\alpha+1)} := (f^{(\alpha)})' = Enum_{Fix(f^{(\alpha)})}$
- *Si λ es un ordinal límite, definimos* $f^{(\lambda)} := Enum_{\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} Fix(f^{(\alpha)})}$

entonces $\forall \alpha \in ON, f^{(\alpha)}$ está bien definida y es una función normal.

Demostración. Por inducción transfinita:

$f^{(0)} = f$ es una función normal por hipótesis. Por otro lado, si suponemos que $f^{(\alpha)}$ es normal, entonces, por la Proposición 1.3.11, $f^{(\alpha+1)} = f(\alpha)'$ es normal también.

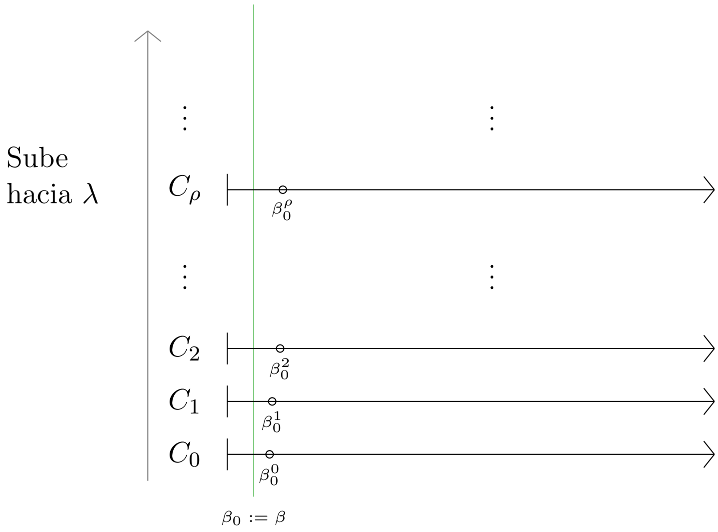
El caso interesante es el paso al límite. Sea λ un ordinal límite tal que $\forall \alpha < \lambda, f^{(\alpha)}$ es normal. Queremos ver que entonces $f^{(\lambda)}$ es normal. Por el Teorema 1.3.5, esto es equivalente a que $f^{(\lambda)}$ sea la función enumeradora de un club. Recordemos que $f^{(\lambda)} = \mathrm{Enum}_{\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} \mathrm{Fix}(f^{(\alpha)})}$.

Para todo $\alpha < \lambda$, tenemos que $\alpha + 1 < \lambda$. Luego, por hipótesis inductiva, tenemos que $f^{(\alpha+1)} = \mathrm{Enum}_{\mathrm{Fix}(f^{(\alpha)})}$ es normal y por lo tanto $\mathrm{Fix}(f^{(\alpha)})$ es un club. Luego basta ver que ver es que si $\forall \alpha < \lambda$, C_α es un club, entonces $\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} C_\alpha$ también es un club.

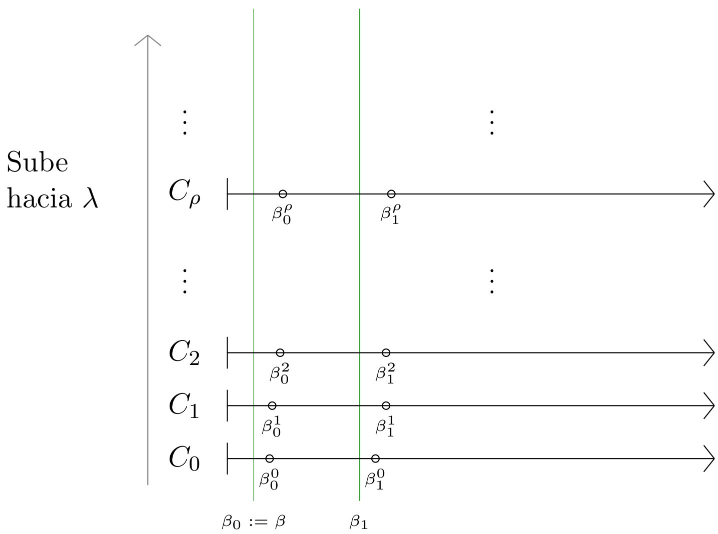
C_λ es trivialmente cerrado por ser intersección de cerrados.

Veamos que C_λ es no acotado. La demostración usa fuertemente que todo conjunto de ordinales tiene supremo:

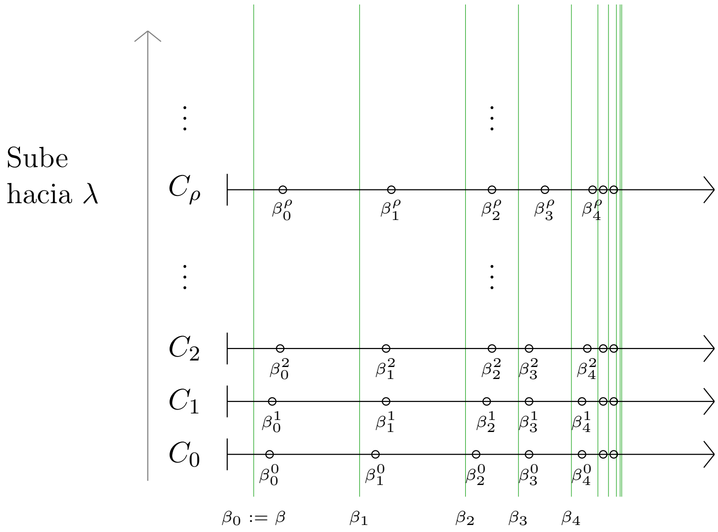
Sea $\hat{\beta} \in ON$; definimos $\beta := \hat{\beta} + 1$. Debemos ver que $\exists \beta^* > \beta$ con $\beta \in \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} C_\alpha$. Sea $\beta_0 := \beta$. Para cada $\alpha < \lambda$, definimos $\beta_0^\alpha := \min\{\gamma \in C_\alpha : \gamma \geq \beta_0\}$ (existen porque los C_α son no acotados).
(Notar que esta vez no estamos representando a los C_α con semirrectas, sino con *puntos sobre las semirrectas*).



Definamos $\beta_1 := \sup\{\beta_0^\alpha : \alpha < \lambda\}$. Nuevamente, como los C_α son clubs, para cada $\alpha < \lambda$ podemos definir $\beta_1^\alpha := \text{mín}\{\gamma \in C_\alpha : \gamma \geq \beta_1\}$.



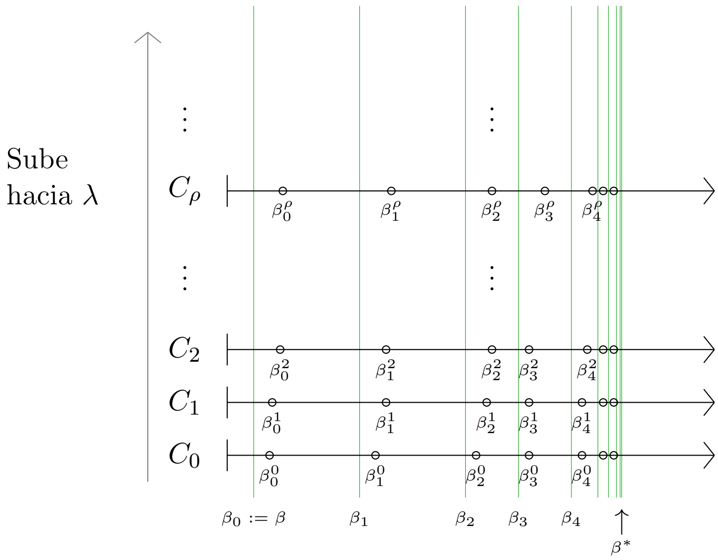
Inductivamente, sea $n < \omega$ y supongamos definidos $\beta_{n-1}, \beta_\alpha^{n-1} \forall \alpha < \lambda$. Entonces definimos $\beta_n := \sup\{\beta_{n-1}^\alpha : \alpha < \lambda\}$, y $\beta_n^\alpha := \text{mín}\{\gamma \in C_\alpha : \gamma \geq \beta_n\}$.



Sea $\beta^* := \lim\limits_{n\to\omega} \beta_n$. Para cada $\alpha < \lambda$, tenemos que, $\forall n \in \mathbb{N}, \beta_n^\alpha \leq \beta_n < \beta_{n+1}^\alpha$. Para cada α, sea $\beta^\alpha := \lim\limits_{n\to\omega} \beta_n^\alpha$. Fijado α, por Sándwich tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{cccc}
\beta_n^\alpha & \leq \beta_n & \leq \beta_{n+1}^\alpha & \forall n \in \mathbb{N} \\
{\scriptstyle n\to\infty}\big\downarrow & {\scriptstyle n\to\infty}\big\downarrow & {\scriptstyle n\to\infty}\big\downarrow & \\
\beta^\alpha & \leq \beta^* & \leq \beta^\alpha &
\end{array}$$

Luego, para cada $\alpha, \beta^* = \beta^\alpha$. Como cada C_α es cerrado, entonces $\forall \alpha < \lambda, \beta^\alpha \in C_\alpha \Rightarrow \beta^* \in \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} C_\alpha$. Y estamos, porque $\beta^* \geq \beta_0 > \hat{\beta}$, que era arbitrario.



Esto finaliza la demostración. $\square$

La demostración anterior es constructiva: es fácil ver que $\forall \beta \in \mathrm{ON}$, $\beta^* = \min\{\gamma \in C_\lambda : \gamma > \hat{\beta}\}$. Esto nos permite dar un mecanismo recursivo para enumerar a C_λ a partir de los clubs C_α.

También se puede chequear que los conjuntos C_α del paso al límite de la demostración anterior son una red *decreciente* (en el sentido de contención) de clubs. Nosotros demostramos que una intersección *arbitraria* de clubs es un club; no usamos el hecho de que la intersección era *decreciente*. Nos podemos preguntar cuánto se habría acortado la demostración si hubiéramos usado este hecho.

Si definimos β_0^α como antes, obtenemos que forman una red *creciente* en α (porque son el mínimo de una red *decreciente* de conjuntos). Por lo tanto, si fijamos $\alpha_0 < \lambda, \beta_1 = \sup\{\beta_0^\alpha : \alpha < \lambda \wedge \alpha \geq \alpha_0\}$ y como este conjunto está contenido en C_{α_0}, que es cerrado, $\beta_1 \in C_{\alpha_0}$. Es decir, $\forall \alpha_0 < \lambda, \beta_1 \in C_{\alpha_0}$ y por lo tanto $\beta^* = \beta_1$. La demostración, entonces, habría necesitado dos figuras menos. Marquemos este argumento con una $(\star)$ porque lo usaremos dentro de unos párrafos.

Por otro lado, el argumento del párrafo anterior nos permite armar una demostración *alternativa* del hecho de que intersección (no necesariamente decreciente) de clubs es club vía la construcción de una familia $\{C'_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de clubs decrecientes cuya intersección también es C_λ. La consideramos interesante porque se trata simplemente de la versión *transfinita* del truco estándar usado para conjuntos indexados por números naturales:

- Sea $C'_0 := C_0$.
- $C'_{\alpha+1} := C_{\alpha+1} \cap C'_\alpha$.
- Si $\gamma \leq \lambda$ es un ordinal límite, $C'_\gamma := C_\gamma \cap (\bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha)$.

$\bigcap_{\alpha<\lambda} C'_\alpha = \bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha = C_\lambda$ y además la familia es decreciente. Veamos que para cada $\alpha \leq \lambda$, tenemos que C'_α es un club.

- C'_0 es trivialmente un club.
- Supongamos que $\forall \alpha < \alpha_0 \leq \lambda$, C'_α es un club. Entonces, repitiendo el argumento de $(\star)$, C_α es un club.

Esto en particular demuestra que C_λ es un club, que era lo que queríamos ver.

Lema 1.3.15. *Si f es una función normal, entonces $\forall \alpha \leq \beta \in ON, Imf^{(\beta)} \subseteq Imf^{(\alpha)}$.*

Demostración.

Veamos que el lema vale *para toda* f normal, por inducción transfinita en $\beta - \alpha$, para $\beta \geq \alpha$. Es decir, haremos inducción transfinita en γ, con γ tal que $\beta = \alpha + \gamma$.

- Si $\beta = \alpha + 0$, es trivial.
- Sea $\beta = \alpha + (\gamma + 1)$ y supongamos que $\mathrm{Im} f^{(\alpha+\gamma)} \subseteq \mathrm{Im} f^{(\alpha)}$. Como $f^{(\alpha+\gamma)}$ es una función normal por el Teorema 1.3.14, entonces aplicando la hipótesis inductiva a $f^{(\alpha+\gamma)}$ con $\alpha' = 0, \beta' = 1$ (es decir, con $\gamma' = 1$), tenemos que $\mathrm{Im}(f^{(\alpha+\gamma)})' \subseteq f^{(\alpha+\gamma)}$, es decir, que $\mathrm{Im} f^{(\alpha+\gamma+1)} = \mathrm{Im} f^{(\beta)} \subseteq \mathrm{Im} f^{(\alpha)}$.
- Supongamos que $\beta = \alpha + \gamma$, con γ un ordinal límite. Entonces β también es un ordinal límite, y tenemos, por definición, que $\mathrm{Im} f^{(\beta)} = \bigcap_{\eta<\beta} \mathrm{Fix}_{\mathrm{Enum}(f^{(\eta)})}$. Como $\alpha < \beta$, $\bigcap_{\eta<\beta} \mathrm{Fix}_{\mathrm{Enum}(f^{(\eta)})} \subseteq \mathrm{Fix}_{\mathrm{Enum}(f^{(\alpha)})} = \mathrm{Im} f^{(\alpha+1)}$, que por hipótesis inductiva está contenido en $\mathrm{Im} f^{(\alpha)}$, con lo cual también $\mathrm{Im} f^{(\beta)} \subseteq \mathrm{Im} f^{(\alpha)}$. $\square$

Notar que en particular vale algo que tal vez resulte obvio: $\forall\alpha \in \mathrm{ON}$, con $\alpha \geq 1, f^{(\alpha)}$ enumera puntos fijos de f.

Análogamente podemos demostrar la siguiente proposición:

Proposición 1.3.16. *Sea f una función normal, y $\alpha, \beta \in ON$. Entonces $(f^{(\alpha)})^{(\beta)} = f^{(\alpha+\beta)}$.*

Demostración.

Veámoslo por inducción transfinita en β:

- Si $\beta = 0$, es trivial.
- Si $\beta = \gamma + 1$ para cierto ordinal $\gamma \in \mathrm{ON}$, entonces tenemos que $(f^{(\alpha)})^{(\beta)} = (f^{(\alpha)})^{(\gamma+1)}$. Por definición, esto es igual a $((f^{(\alpha)})^{\gamma})' \underset{H.I.}{=} (f^{(\alpha+\gamma)})'$. Como $(f^{(\alpha+\gamma)})' = f^{(\alpha+\gamma+1)} = f^{(\alpha+\beta)}$, obtenemos lo deseado.
- Si β es un ordinal límite, entonces:

$$\begin{aligned} (f^{(\alpha)})^{(\beta)} &= \mathrm{Enum}_{\bigcap_{\lambda<\beta} \mathrm{Fix}((f^{(\alpha)})^{(\lambda)})} \\ &\underset{H.I.}{=} \mathrm{Enum}_{\bigcap_{\lambda<\beta} \mathrm{Fix}(f^{(\alpha+\lambda)})} \\ &= \mathrm{Enum}_{\bigcap_{\hat{\lambda}<\alpha+\beta} \mathrm{Fix}(f^{(\hat{\lambda})})} && (1.12) \\ &\underset{\text{por def.}}{=} f^{(\alpha+\beta)} && (1.13) \end{aligned}$$

  (1.12) vale ya que $\bigcap_{\hat{\lambda}<\alpha+\beta} \mathrm{Fix}(f^{(\hat{\lambda})}) = (\bigcap_{\eta<\alpha} \mathrm{Fix}(f^{(\eta)})) \cap (\bigcap_{\lambda<\beta} \mathrm{Fix}(f^{(\alpha+\lambda)}))$. Sea $\eta < \alpha$ y $\mathrm{Fix}(f^{(\eta)})$ un miembro de la primera intersección. Por el Lema 1.3.15, $\mathrm{Fix}(f^{(\eta)}) = \mathrm{Im} f^{(\eta+1)} \supseteq \mathrm{Im} f^{(\alpha+1)} = \mathrm{Fix}(f^{(\alpha)})$, que es un miembro de la segunda intersección.

  Es decir, todo miembro de la primera intersección es medio de la segunda, y por lo tanto pueden ser eliminados, i.e., $(\bigcap_{\eta<\alpha} \mathrm{Fix}(f^{(\eta)})) \cap (\bigcap_{\lambda<\beta} \mathrm{Fix}(f^{(\alpha+\lambda)})) = \bigcap_{\lambda<\beta} \mathrm{Fix}(f^{(\alpha+\lambda)})$.

  (1.13) vale porque si β es un ordinal límite entonces $\alpha + \beta$ también. □

1.3.2. Arreglando la Forma Normal de Cantor de manera sistemática

1.3.2.1. Las funciones φ_α de Veblen

El Teorema 1.3.14 muestra que nuestro mecanismo de construcción de funciones progresivamente más poderosas no se acaba. Nuestro objetivo es 'arreglar' la notación de FNC, enumerando los puntos fijos de $\alpha \mapsto \omega^\alpha$ con una función φ_1, y los puntos fijos de φ_1 con una función φ_2, y así seguir.

Sea $f = \alpha \mapsto \omega^\alpha$, y definamos la *jerarquía* de funciones φ_α, llamadas *funciones de Veblen*, como $\varphi_\alpha := f^{(\alpha)}$. Llamamos Cr_α a la imagen de φ_α.

Notar que $\varphi_1(0) = \varepsilon_0$. Para cada α, otro nombre que recibe $\varphi_1(\alpha)$ es ε_α (y es un 'epsilon number' ó 'critical ordinal', como mencionamos al comienzo de esta sección).[12]

[12]Es usual este fenómeno de encontrar cierto ordinal que cumple una propiedad X y luego agregarle un subíndice porque hay todo un club de ordinales con la misma propiedad.

El Teorema 1.3.14, con esta f, dice que $\forall \alpha \in$ ON, estas funciones están bien definidas. En particular, cada función φ_α tiene puntos fijos. Esto dice que si queremos armarnos una notación nueva mínimamente vamos a necesitar usar a *todas* las φ_α.

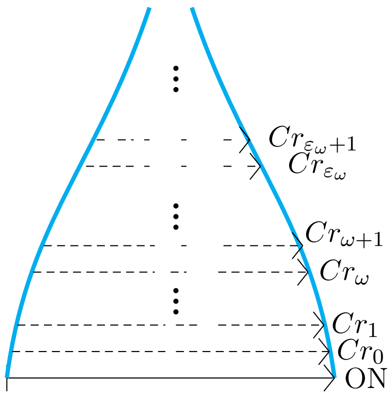


Figura 1.6: Los primeros conjuntos $Cr_\alpha = Im(\varphi_\alpha)$. No hecho a escala.

Estudiemos a estas funciones φ_α. Los resultados fueron obtenidos principalmente de [Rat17b].

Proposición 1.3.17.

1. *Si* $\alpha < \beta \Rightarrow Cr_\beta \subseteq Cr_\alpha$*, como describe la Figura 1.6.*

2. $\forall \alpha \in ON, \varphi_\alpha$ *es inflacionaria.*

3. *Si* $\alpha < \beta \Rightarrow \forall \gamma, \varphi_\alpha(\gamma) \leq \varphi_\beta(\gamma)$*. Es decir,* $\forall \gamma$*, la función* $\alpha \mapsto \varphi_\alpha(\gamma)$ *es no decreciente.*

Demostración.

1. Es el Lema 1.3.15, aplicado a $\alpha \mapsto \omega^\alpha$.

2. φ_α es normal así que podemos usar la Proposición 1.3.8.

3. Notemos que $\varphi_\beta(\gamma) \in Cr_{\alpha+1}$ por 1, y como $Cr_{\alpha+1}$ es la clase de puntos fijos de φ_α, tenemos lo siguiente:

$$\varphi_\alpha(\varphi_\beta(\gamma)) = \varphi_\beta(\gamma) \tag{1.14}$$

Por el ítem anterior, $\varphi_\beta(\gamma) \geq \gamma$. Por lo tanto, como φ_α es creciente, $\varphi_\alpha(\varphi_\beta(\gamma)) \geq \varphi_\alpha(\gamma)$. Juntando esto con 1.14, tenemos lo deseado.

□

1.3.2.2. Un criterio de comparación

Si queremos armarnos una nueva notación de ordinales usando las funciones de Veblen, necesitaremos saber cómo *comparar* ordinales - tal como hicimos para la Forma Normal de Cantor.

Proposición 1.3.18. *Sean* $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in ON$*. Entonces:*

1. *$\varphi_{\alpha_1}(\beta_1) = \varphi_{\alpha_2}(\beta_2)$ vale si y solo si alguna de las siguientes condiciones se satisface:*

   a) $\alpha_1 < \alpha_2$ *y* $\beta_1 = \varphi_{\alpha_2}(\beta_2)$

   b) $\alpha_1 = \alpha_2$ *y* $\beta_1 = \beta_2$

   c) $\alpha_1 > \alpha_2$ *y* $\varphi_{\alpha_1}(\beta_1) = \beta_2$

2. *$\varphi_{\alpha_1}(\beta_1) < \varphi_{\alpha_2}(\beta_2)$ vale si y solo si alguna de las siguientes condiciones se satisface:*

   a) $\alpha_1 < \alpha_2$ *y* $\beta_1 < \varphi_{\alpha_2}(\beta_2)$

   b) $\alpha_1 = \alpha_2$ *y* $\beta_1 < \beta_2$

   c) $\alpha_1 > \alpha_2$ *y* $\varphi_{\alpha_1}(\beta_1) < \beta_2$

Notemos que *siempre* sucede que sólo vale una de las siguientes:

a) $\alpha_1 < \alpha_2$

b) $\alpha_1 = \alpha_2$

c) $\alpha_1 > \alpha_2$

Luego podemos intercambiar la Proposición 1.3.18 por la siguiente, que es equivalente:

Proposición 1.3.19. *Sean $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in ON$.*

a) En el caso en el que $\alpha_1 < \alpha_2$, entonces:

   1. $\varphi_{\alpha_1}(\beta_1) = \varphi_{\alpha_2}(\beta_2) \Leftrightarrow \beta_1 = \varphi_{\alpha_2}(\beta_2)$.

   2. $\varphi_{\alpha_1}(\beta_1) < \varphi_{\alpha_2}(\beta_2) \Leftrightarrow \beta_1 < \varphi_{\alpha_2}(\beta_2)$.

b) En el caso en el que $\alpha_1 = \alpha_2$, entonces:

   1. $\varphi_{\alpha_1}(\beta_1) = \varphi_{\alpha_2}(\beta_2) \Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2$.

   2. $\varphi_{\alpha_1}(\beta_1) < \varphi_{\alpha_2}(\beta_2) \Leftrightarrow \beta_1 < \beta_2$.

c) En el caso en el que $\alpha_1 > \alpha_2$, entonces:

   1. $\varphi_{\alpha_1}(\beta_1) = \varphi_{\alpha_2}(\beta_2) \Leftrightarrow \varphi_{\alpha_1}(\beta_1) = \beta_2$.

   2. $\varphi_{\alpha_1}(\beta_1) < \varphi_{\alpha_2}(\beta_2) \Leftrightarrow \varphi_{\alpha_1}(\beta_1) < \beta_2$.

Demostremos, pues, esta última proposición. Esto o es difícil si recordamos cómo construimos las funciones φ_α:

Demostración de la Proposición 1.3.19.

a) $\alpha_1 < \alpha_2$.

   1. Entonces $\varphi_{\alpha_1}(\varphi_{\alpha_2}(\beta_2)) = \varphi_{\alpha_2}(\beta_2)$ y por lo tanto:

   $$\varphi_{\alpha_1}(\beta_1) = \varphi_{\alpha_2}(\beta_2) \Leftrightarrow \varphi_{\alpha_1}(\beta_1) = \varphi_{\alpha_1}(\varphi_{\alpha_2}(\beta_2)) \Leftrightarrow \beta_1 = \varphi_{\alpha_2}(\beta_2)$$

   donde la última equivalencia se obtiene porque las funciones de Veblen son estrictamente crecientes.

2. Con el mismo razonamiento:

$$\varphi_{\alpha_1}(\beta_1) < \varphi_{\alpha_2}(\beta_2) \Leftrightarrow \beta_1 < \varphi_{\alpha_2}(\beta_2)$$

b) $\alpha_1 = \alpha_2$

1. Trivialmente, $\varphi_{\alpha_1}(\beta_1) = \varphi_{\alpha_2}(\beta_2) \Leftrightarrow \varphi_{\alpha_1}(\beta_1) = \varphi_{\alpha_1}(\beta_2) \Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2$
2. Por otro lado, $\varphi_{\alpha_1}(\beta_1) < \varphi_{\alpha_2}(\beta_2) \Leftrightarrow \varphi_{\alpha_1}(\beta_1) < \varphi_{\alpha_1}(\beta_2) \Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2$ pues φ_{α_1} es estrictamente creciente.

c) $\alpha_2 < \alpha_1$.

1. Entonces $\varphi_{\alpha_2}(\varphi_{\alpha_1}(\beta_1)) = \varphi_{\alpha_1}(\beta_1)$ y por lo tanto, como en a):

$$\varphi_{\alpha_1}(\beta_1) = \varphi_{\alpha_2}(\beta_2) \Leftrightarrow \varphi_{\alpha_2}(\varphi_{\alpha_1}(\beta_1)) = \varphi_{\alpha_2}(\beta_2) \Leftrightarrow \varphi_{\alpha_1}(\beta_1)) = \beta_2$$

2. Análogamente, $\varphi_{\alpha_1}(\beta_1) < \varphi_{\alpha_2}(\beta_2) \Leftrightarrow \varphi_{\alpha_1}(\beta_1)) < \beta_2$ □

Como la Proposición 1.3.19 es equivalente a la Proposición 1.3.18, ésta última queda demostrada automáticamente.

1.3.2.3. El teorema principal

El siguiente teorema sigue el mismo espíritu que el Teorema 1.2.1.

Teorema 1.3.20. *(Forma Normal de Veblen) Sea $\beta = \omega^\xi \in ON$. Entonces existen únicos $\alpha, \eta \in ON$ tal que $\beta = \varphi_\alpha(\eta)$, con $\alpha \leq \beta, \eta < \beta$. Lo notamos $\beta \underset{FNV}{=} \varphi_\alpha(\eta)$.*

Pretendemos descomponer recursivamente a β usando ordinales más chicos. A esta altura debería resultar natural adivinar que no siempre tendremos que $\alpha < \beta$.

El desafío del enunciado es demostrar que β *no* es punto fijo de *alguna* φ_α, i.e., que es verdaderamente *atrapado* por alguna de estas funciones.

Demostración del Teorema 1.3.20. Consideremos la función $\beta \mapsto \varphi_\beta(0)$. Es bien fácil ver que esta función es estrictamente creciente. En efecto, sea $\alpha < \beta$, entonces por la parte 2.a) de la Proposición 1.3.18, como 0 es trivialmente menor que $\varphi_\beta(0)$ (pues 0 no es punto fijo de $\varphi_0 = \alpha \mapsto \omega^\alpha$), tenemos que $\varphi_\alpha(0) < \varphi_\beta(0)$. Por lo tanto la función cae en las hipótesis de la Proposición 1.3.8 y luego es inflacionaria. Es decir, $\beta \leq \varphi_\beta(0)$ y entonces, como φ_β es creciente, $\beta < \varphi_\beta(\beta)$. Por lo tanto, si definimos $C := \{\gamma \in \mathrm{ON} : \beta < \varphi_\gamma(\beta)\}$, tenemos que $\beta \in C$. En particular, C es no vacío.

Sea $\alpha := \min C$. Si $\alpha = 0$ entonces $\beta < \varphi_0(\beta)$. Además, estamos suponiendo que $\beta = \omega^\xi = \varphi_0(\xi)$. Luego, como φ_0 es una función monótona, necesariamente $\xi < \beta$ así que esto en este caso la Forma Normal de Veblen de α *es* $\varphi_0(\xi)$.

Supongamos el otro caso, i.e., que $\alpha > 0$. Como φ_ξ es inflacionaria y $\forall \xi < \alpha, \xi \notin C$, entonces $\forall \xi < \alpha, \beta = \varphi_\xi(\beta)$, i.e., $\forall \xi < \alpha, \beta \in Cr_\xi$. Esto dice - tanto si α es un ordinal límite como si no - que $\beta \in Cr_\alpha$. Por lo tanto $\exists \eta$ tal que $\beta = \varphi_\alpha(\eta)$. Afirmamos que $\eta < \beta$. En efecto, como las funciones de Veblen son inflacionarias, tenemos que $\eta \leq \varphi_\alpha(\eta)$, y por lo tanto $\beta \geq \eta$. Si fueran iguales esto contradiría la definición de α, lo cual es un absurdo.

Para la unicidad, supongamos $\beta = \varphi_\alpha(\eta) = \varphi_{\alpha'}(\eta')$, con $\eta, \eta' < \beta$. Como $\eta < \beta$, no puede ser que $\eta = \varphi_{\alpha'}(\eta')$ y por lo tanto no se cumple el caso 1 a) de la Proposición 1.3.18 para $\varphi_\alpha(\eta)$ y $\varphi_(\alpha')(\eta)$. Análogamente, tampoco se cumple el caso 1 c). Por lo tanto debe cumplirse 2 b) y por lo tanto $\alpha = \alpha'$ y $\eta = \eta'$. □

1.3.2.4. El problema principal

La lectora avispada habrá notado que el problema de esta forma normal aparece en el subíndice de las funciones φ_α. En efecto:

Definición 1.3.21. *Sea $SC := \{\alpha : \varphi_\alpha(0) = \alpha\}$ (por 'Strongly Critical') y sea $\Gamma_\beta := Enum_{SC}(\beta)$.*

El siguiente teorema nos dice que tenemos un nuevo club de problemas:

Teorema 1.3.22. *$\beta \mapsto \Gamma_\beta$ es una función normal.*

Notemos que este teorema es la versión 'Veblenística' de otro que diría que $\beta \mapsto \varepsilon_\beta$ es una función normal. Recordemos que $\beta \mapsto \varepsilon_\beta$ es simplemente $\varphi_1(\beta)$, y enumera los puntos fijos de $\alpha \mapsto \omega^\alpha$, i.e., los problemas de la notación de Cantor.

Demostración del Teorema 1.3.22. Si vemos que la función la función $\beta \mapsto \varphi_\beta(0)$ es normal, entonces por la Proposición 1.3.11, su derivada, i.e., $\beta \mapsto \Gamma_\beta$, será normal también.

Por la demostración del Teorema 1.3.20, la función $\beta \mapsto \varphi_\beta(0)$, a quién llamaremos provisoriamente g, es una función estrictamente creciente. Falta ver que es continua.

Por el Lema 1.3.6, basta chequear que para todo U acotado, $g(\sup U) = \sup g(U)$.

Notemos que como g es creciente, $g(\sup U) \geq \sup g(U)$. Falta ver la otra desigualdad. Para ello repetiremos una idea usada en el comentario que hicimos luego de la demostración del Teorema 1.3.14.

Sea $\alpha_0 \in U$. Como g es creciente, $\sup g(U) = \sup\{g(\alpha) : \alpha \in U\} = \sup\{g(\alpha) : \alpha \in U \wedge \alpha \geq \alpha_0\}$. Además, como los conjuntos Cr_α son decrecientes, para todo $\alpha \geq \alpha_0, g(\alpha) = \varphi_\alpha(0) \in Cr_\alpha \subseteq Cr_{\alpha_0}$. Por lo tanto, $g(U) \subseteq Cr_{\alpha_0}$, que es un conjunto cerrado, y entonces tenemos que $\sup g(U) Cr_{\alpha_0}$. Como $\alpha_0 \in U$ era arbitrario, concluimos que:

$$\forall \alpha_0 \in U, \sup g(U) \in Cr_{\alpha_0} \tag{1.15}$$

Ahora bien, por definición, $Cr_{\sup U} = \bigcap_{\eta < \sup U} Cr_\eta$. Veamos que además $\bigcap_{\eta < \sup U} Cr_\eta = \bigcap_{\alpha_0 \in U} Cr_{\alpha_0}$. La contención $\subseteq$ es obvia porque del lado derecho estamos intersecando *menos* conjuntos. Veamos la otra contención. Sea $\xi \in \bigcap_{\alpha_0 \in U} Cr_{\alpha_0}$ y sea $\eta < \sup U$ arbitrario. Queremos ver que $\xi \in Cr_\eta$. Como $\eta < \sup U$, por definición de supremo existe $\hat{\alpha_0} \in U$ con $\eta \leq \hat{\alpha_0} \leq \sup U$. Luego $Cr_\eta \supseteq Cr_{\hat{\alpha_0}} \ni \xi$. Como η era arbitrario, concluimos que $\eta \in \bigcap_{\eta < \sup U} Cr_\eta$ y por lo tanto:

$$Cr_{\sup U} = \bigcap_{\alpha_0 \in U} Cr_{\alpha_0} \tag{1.16}$$

Juntando (1.15) y (1.16), obtenemos que $\sup g(U) \in Cr_{\sup U}$. Es decir, existe ρ tal que $\sup g(U) = \varphi_{\sup U}(\rho)$. Ahora bien, $\varphi_{\sup U}$ es una función creciente, así que cualquiera sea ρ, tenemos que $g(\sup U) = \varphi_{\sup U}(0) \leq \varphi_{\sup U}(\rho) = \sup g(U)$. Esta era la desigualdad que faltaba. □

Notemos que si $\alpha = \varphi_\alpha(\eta)$ para algún η entonces necesariamente $\eta = 0$. En efecto, supongamos que $\exists \eta_0 > 0$ tal que $\alpha = \varphi_\alpha(\eta_0)$. Como a función $\alpha \mapsto \varphi_\alpha(0)$ es estrictamente creciente (por la demostración del Teorema 1.3.20), entonces es inflacionaria, i.e., $\alpha \leq \varphi_\alpha(0)$. Pero además las funciones de Veblen $\eta \mapsto \varphi_\alpha(\eta)$ son crecientes (por ser normales). Luego tenemos que $\alpha \leq \varphi_\alpha(0) < \varphi_\alpha(\eta_0)$, lo cual es un absurdo.

En otras palabras, los puntos fijos de la Forma Normal de Veblen son *exactamente* los puntos de SC.

Por otro lado, otra forma de caracterizar a los *strongly critical ordinals* es que son los ordinales *inalcanzables desde abajo* por las funciones de Veblen:

Lema 1.3.23. *SC* $= \{\alpha \in ON : \alpha > 0$ *y para cada par* ξ, η*, si* $\xi, \eta < \alpha$*, entonces* $\varphi_\xi(\eta) < \alpha\}$

Otra manera de verlo es que los *strongly critical ordinals* son *cerrados* por las funciones de Veblen.

Demostración del Lema 1.3.23. $\subseteq$) Sea $\alpha \in$ SC, y supongamos que existen ξ, η, con $\xi, \eta < \alpha$, tal que $\varphi_\xi(\eta) \geq \alpha$. Como $\alpha \in \mathrm{SC}, \alpha = \varphi_\alpha(0)$. Por la unicidad de la Forma Normal de Veblen, necesariamente $\varphi_\xi(\eta) > \varphi_\alpha(0)$. Separemos en casos, según la Proposición 1.3.18:

a) $\alpha < \xi$ y $\alpha = \varphi_\xi(\eta)$. Esto es un absurdo ya que $\alpha > \xi$, por hipótesis.

b) $\alpha = \xi$ y $0 = \eta$. Esto también es un absurdo.

c) $\alpha > \xi$ y $\varphi_\alpha(0) < \eta$. Esto también es un absurdo ya que tendríamos que $\alpha < \eta$.

$\supseteq$) Veamos primero que α es un ordinal límite. Notemos que $\alpha \neq 0$ por hipótesis y que además $\alpha \neq 1$ porque $\varphi_0(0) = \omega^0 = 1$.

Supongamos que α no es un ordinal límite. Entonces que $\alpha = \gamma + 1$ para algún $\gamma \in$ ON. Como $\alpha \mapsto \omega^\alpha$ es inflacionaria, tenemos que $\gamma \leq \omega^\gamma$, es decir, $\varphi_0(\gamma) \geq \gamma$. Pero entonces, por la Proposición 1.3.18, tenemos que $\varphi_1(\gamma) > \gamma$ y por lo tanto $\varphi_1(\gamma) \geq \alpha$. Esto es absurdo ya que $1, \gamma < \alpha$.

Por lo tanto α es un ordinal límite. Entonces:

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \varphi_\alpha(0) && (1.17)\\ &= \lim_{\beta<\alpha} \varphi_\beta(0) && (1.18)\\ &\leq \alpha && (1.19) \end{aligned}$$

(1.17) vale ya que $\alpha \mapsto \varphi_\alpha(0)$ es inflacionaria por la demostración del Teorema 1.3.20.

(1.18) vale ya que $\alpha \mapsto \varphi_\alpha(0)$ es continua por la demostración del Teorema 1.3.22, y porque vimos que α debe ser un ordinal límite.

(1.19) vale porque, por hipótesis, para cada $\beta < \alpha$ tenemos que $\varphi_\beta(0) < \alpha$.

Siguiendo la cadena de desigualdades, obtenemos que $\alpha = \varphi_\alpha(0)$, i.e., $\alpha \in$ SC. Esto finaliza la demostración. $\square$

1.3.2.5. El sistema notacional de Veblen

Si $\beta = \omega^{\xi} < \Gamma_0$, entonces podemos aplicar el Teorema 1.3.20 sobre β de manera recursiva, como hicimos para la forma normal de Cantor:

1. Primero expresamos a β como $\varphi_{\alpha}(\eta)$, con $\alpha, \eta < \beta$.
2. Si $\alpha = \beta = 0$, paramos. Si alguno es distinto de cero, como es menor que Γ_0, podemos repetir el paso 1 pero con ese ordinal.
3. Eventualmente, como estamos trabajando en un buen orden, el proceso termina, y β queda expresado en función de los símbolos φ y 0.

La construcción anterior sirve sólo para imágenes de la función $\alpha \mapsto \omega^{\alpha}$. ¿Cómo extenderlo a todo Γ_0?

Corolario 1.3.24. *(Forma Normal de Veblen, versión completa) Sea $\alpha < \Gamma_0$. Entonces β se puede expresar de manera finita usando solamente los símbolos $+, \varphi$, y 0.*

Demostración. Sea $\beta < \Gamma_0$, y digamos que $\alpha \underset{\text{FNC}}{=} \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n}$. Si a cada uno de los sumandos le aplicamos el 'algoritmo' anterior, obtenemos lo deseado. □

Observación 1.3.25. *Si en el Corolario 1.3.24, pedimos que la expresión de α, que necesariamente es de la forma:*

$$\alpha = \varphi_{\beta_1}(\gamma_1) + \cdots + \varphi_{\beta_k}(\gamma_k)$$

pedimos las hipótesis extra:

- $\varphi_{\beta_1}(\gamma_1) \geq \cdots \geq \varphi_{\beta_k}(\gamma_k)$.
- *Para cada i tal que $1 \leq i \leq k, \gamma_i < \varphi_{\beta_i}(\gamma_i)$.*

entonces, usando la unicidad de la Forma Normal de Cantor alternativa (Teorema 1.2.10) y la de la Forma Normal de Veblen (Teorema 1.3.20), se puede ver que la escritura es única.

Ejemplo 1.3.26. ¿Cómo escribimos a ω^{ε_0+2} en este nuevo formato? Tenemos que $\omega^{\varepsilon_0+2} = \varphi_0(\varepsilon_0+2)$. Esto aún no está en Forma Normal, pero ε_0 es, como sabemos, el primer punto fijo de φ_0. Es decir, es igual a $\varphi_1(0) = \varphi_{\varphi_0(0)}(0)$. Por lo tanto $\omega^{\varepsilon_0+2} = \varphi_0\big(\varphi_{\varphi_0(0)}(0)+\varphi_0(0)+\varphi_0(0)\big)$.

Nota de color 1.3.27. En un paréntesis, volvamos al problema de Skolem. Habíamos dicho que el conjunto más chico de funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que contiene a la constante 0, la función x, y es cerrado por suma, multiplicación, y exponenciación, está bien ordenado por la relación $f < g$ si y solo si el gráfico de f queda eventualmente arriba del de g. Además mencionamos que ε_0 es una cota inferior al ordinal isomorfo a este buen orden.

También se han dado cotas superiores: en[Lev78] se demostró que el ordinal es como mucho $\varphi_2(0)$, i.e., el primer punto fijo de $\alpha \mapsto \varepsilon_{\alpha}$. Usando la Proposición 1.3.11, podemos reescribir este ordinal de manera más 'visual' como $\varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_{\dots}}}$.

El último avance digno de mención es muy reciente: en 2009 como parte de su tesis doctoral[Bar09, Pág. 173], Barra resuelve el mismo problema pero para otra clase de funciones también planteado por Skolem en 1956 (en el que el conjunto contiene al 0, x, y es cerrado por suma, producto, $f \mapsto x^f$ y *tetración*). Este segundo conjunto de funciones es incomparable con el primero - notemos que no es cerrado por $(f, g) \mapsto f^g$). Barra demuestra que este conjunto es un buen orden y que el ordinal al que es isomorfo debe ser mayor o igual a $\varphi_2(0)$.

1.3.3. Un pequeño comentario sobre la efectividad

Podemos armarnos, como hicimos con ε_0, un subconjunto $V \subseteq \mathbb{N}$ en biyección con Γ_0. Definimos recursivamente $\lceil . \rceil : \Gamma_0 \to \mathbb{N}$ de la siguiente manera:

- $\lceil 0 \rceil = 0$.
- Si $\beta \underset{\text{FNV}}{=} \omega^{\beta_1} + ... + \omega^{\beta_n}$, definimos $\lceil \beta \rceil := [1, \lceil \beta_1 \rceil, ..., \lceil \beta_n \rceil]$.
- Si $\beta \underset{\text{FNV}}{=} \varphi_\alpha(\eta)$ definimos $\lceil \beta \rceil := [2, \lceil \alpha \rceil, \lceil \eta \rceil]$.

Notemos que la Proposición 1.3.18 nos permite reducir el problema de comprar dos ordinales de la forma $\varphi_{\alpha_1}(\beta_1)$ y $\varphi_{\alpha_2}(\beta_2)$ a un problema más *simple*, es decir, a la comparación de otros dos ordinales η_1, η_2 donde necesariamente, para algún $i = 1, 2$ tendremos que η_i es *estrictamente más chico* que $\varphi_{\alpha_i}(\beta_i)$.

Gracias a esto, una vez codificados los ordinales con la definición $\lceil . \rceil$, se puede diseñar un algoritmo recursivo que compare codificaciones de ordinales. El algoritmo terminará cuando (como los ordinales forman un buen orden) reduzca el problema a comprarar un ordinal y 0, que es algo trivial.

Uno podría ver, como con la Forma Normal de Cantor, que la notación es p.r. es todo aspecto [Rat17b]. En realidad, la mayoría de las notaciones que aparecen en la literatura son primitivas recursivas. [CT99, The Realm of Ordinal Analysis, 2.3]

1.3.4. Notas de cierre

Renombremos a la función $\beta \mapsto \Gamma_\beta$ (o lo que es lo mismo, $\text{Enum}_{\text{SC}}(\beta)$) como $\varphi_{1,0}$, agregándole un subíndice más a las funciones de Veblen. El Teorema 1.3.22 dice que $\varphi_{1,0}$ es una función normal.

Luego podemos derivarla sucesivamente para armar una nueva jerarquía de funciones, i.e., $\forall \alpha \in \text{ON}, \varphi_{1,\alpha} := \varphi_{1,0}^{(\alpha)}$ está bien definida y es normal. Notar que por la Proposición 1.3.11, $\varphi_{1,1}(0)$ es el límite de la sucesión $\Gamma_0, \Gamma_{\Gamma_0}, \Gamma_{\Gamma_{\Gamma_0}}, \ldots$. Con esta nueva jerarquía de funciones construida, podemos armarnos una notación más extensa.

Se puede ver, además, que $\eta \mapsto \varphi_{0,\eta}(0)$ *también es una función normal* y por lo tanto la nueva notación tendrá puntos fijos. Podríamos llamarla $\varphi_{1,0,0}$ y describir *sus* puntos fijos con una *nueva* función $\varphi_{1,0,0}$, y así seguir. En [Bae16], se encuentra una discusión sobre cómo extendernos a una función de *transfinitos* parámetros a la definición de una función de transfinitos parámetros (pidiendo que la función sea distinta de cero sólo cuando finitos parámetros son finitos de cero).[13] No estudiaremos estas jerarquías.

La idea de fondo es que a una notación siempre 'se le acaba la nafta' en algún momento, y, para seguir subiendo, nos inventamos una nueva notación , a la cuál a su vez 'se le acaba la nafta' en algún otro momento. Más aun, si simplemente enumeramos puntos fijos de manera recursiva, en algún sentido, 'nos quedamos cortos'. Volveremos a esto en el Capítulo 3, en el cual usaremos un mecanismo más poderoso, más *creativo*, para inventarnos notaciones más extensas.

[13] Las notaciones que se pueden armar con estas jerarquías son todas computables. Ver `http://www.mtnmath.com/ord/`, una *calculadora* para jugar con estas notaciones.

Hasta ahora nos preocupamos por solucionar el problema de generar notaciones. ¿Pero para qué queremos notaciones extensas? Más allá de que es un desafío, ¿qué usos les podemos dar?

Capítulo 2

Interludio sobre Ordinal Analysis

> Ningún par de personas experimenta exactamente las mismas sensaciones. Incluso en las ciencias más restringidas, lógica y matemáticas, (...) no hay dos [personas] que pensarán lo mismo en el caso de las nociones básicas a partir de las cuales la lógica y las matemáticas se construyen.
>
> L. E. J. Brouwer [Att07, Pág. 5]

El capítulo intenta dar un pantallazo de cómo se usan a los ordinales en Teoría de la Prueba. Es principalmente informal, aunque presentaremos algún que otro resultado técnico.

2.1. La crisis fundacional

Podemos pararnos en la crisis fundacional de principios del siglo XX. Paradojas como la de Russel, o el famoso axioma de elección, habían instaurado cierta incertidumbre en algunos de los matemáticos más reconocidos de la época. Estos problemas surgían de la Teoría de Conjuntos desarrollada por Cantor, justamente a partir de su estudio de las series de Fourier, como comentamos en la § 0.1. Weyl, entre otros, creían que estos problemas eran *fundacionales* y traían en consecuencia problemas en Análisis, "el corazón de las matemáticas" [Poh09]. Fue él quién introdujo el término 'crisis fundacional'.

Hubo intentos de 'restringir' las matemáticas: Weil pretendía hacerlo en cuánto a las reglas de construcción de conjuntos, y Brouwer (líder de la escuela intuicionista), quitar la ley del tercero excluido - que entre otras cosas permite demostrar la existencia de objetos sin construirlos explícitamente. David Hilbert estaba totalmente en contra[1] de cualquier acción que 'mutilara' las matemáticas existentes, especialmente el paraíso de Teoría de Conjuntos que había construido Cantor. El conocido Programa de Hilbert fue su intento de salvar a las matemáticas en su forma existente.

Hilbert pretendía dar una axiomatización completa de las matemáticas[2], y luego probar que además la axiomatización era consistente. Las demostraciones clásicas de lógica son objetos finitos. Eso le dio la esperanza a Hilbert de que la demostración de consistencia, i.e., de

[1] Luego de unos años de conflicto, Hilbert logró que *se quitara a Brouwer*, a quién consideraba una amenaza para las matemáticas, de la junta editorial de la *Mathematische Annalen*, la editorial más importante de la época. [Van90, Pág. 101]

[2] Es decir, que pudiera derivar cualquier verdad. Más aun, el deseo era que hubiera un *algoritmo* que pudiera decidir si un enunciado era verdadero o no.

que no existía una derivación de una contradicción, se pudiera realizar utilizando solamente métodos *finitistas*. Pero aquí hay varios conceptos poco claros: ¿qué significa 'demostrar' en este contexto? ¿Qué significa 'métodos finitistas'? Según Hilbert, la demostración de consistencia no tenía que ser hecha usando el formalismo matemático usual - en ese sentido, quizás se podría decir que Hilbert, sin querer, estaba de acuerdo con Brouwer, quién veía al formalismo matemático como un juego con símbolos sin sentido [Hal12, Pág. 129]. Hilbert quería que no hubiera dudas sobre la consistencia de las matemáticas, y que los métodos usados para ello fueran tales que 'sin ellos, ni el razonamiento ni la acción científica serían posibles' [Poh09].

Algunos estudiantes suyos (Ackermann, Neumann, Bernays) tuvieron resultados exitosos sobre subsistemas de la aritmética. Sin embargo, había una barrera que no podían pasar: el axioma de inducción completa.

Ya es parte del folklore matemático que Gödel tiró por tierra el deseo de Hilbert: su primer teorema parece que mata el deseo de Hilbert de formalizar todas las matemáticas, ya que prueba que si un sistema axiomático contiene a la aritmética de Peano y es consistente, entonces hay sentencias que son válidas en el modelo, pero que no son demostrables en el sistema axiomático. El segundo teorema de Gödel dice que el sistema axiomático no podrá probar su propia consistencia. En particular, mucho menos utilizando solamente 'métodos finitistas'.

2.2. La demostración de Gentzen de la consistencia de la aritmética de Peano

En realidad, estos resultados, aunque reconocidos en su momento, no desesperanzaron notablemente a la comunidad matemática [Poh09]. En 1936, Gentzen demostró la consistencia de la aritmética de Peano. Claramente, para no contradecir el segundo teorema de Gödel, hay una trampa. La trampa es que Gentzen probó la consistencia de la aritmética de Peano usando métodos finitistas y algo extra. Ese *algo extra* fue *inducción transfinita hasta* ε_0.

El trabajo de Gentzen [Gen72, Artículo 8] fue hecho desde un cálculo de secuentes. En éste, en contraposición al cálculo à la Hilbert, las derivaciones tienen forma de árbol (y no de listas). La raíz (el *endsequent*) es lo que queremos probar, y las hojas (los *uppermost sequents*) deben ser 'secuentes básicos'[3]. Los secuentes del árbol se conectan vía ciertas reglas de inferencia prefijadas.

Los secuentes son de la pinta $U_1, \ldots, U_n \to B_1, \ldots, B_m$, donde los U_i y los B_j son todas fórmulas. El secuente se interpreta como "si todos los U_i son verdaderos entonces alguno de los B_j lo es". Por esa razón, resulta intuitivo entender que tanto agregar una fórmula del lado izquierdo como del lado derecho preserva validez (y nos devuelve una fórmula más *débil*). Justamente este proceso se llama *thinning* y es una de las reglas de inferencia válida en nuestro cálculo de secuentes. Se puede ver que derivar el secuente vacío $\to$ es equivalente a que el sistema sea inconsistente. Una implicación es inmediata: con un *thinning* se puede derivar cualquier secuente a partir de $\to$.

Para ver que un sistema es consistente, podríamos intentar demostrar que no existe una derivación del secuente vacío, es decir, que ninguna derivación tiene a $\to$ como endsequent. Comenzaríamos, tal vez, tratando de demostrar esto para derivaciones 'simples' (por ejemplo, con un solo secuente) y luego pasaríamos a otras más 'complejas', usando lo demostrado para todas las derivaciones más simples, y seguir así. Esto parece un procedimiento inductivo.

[3] Asumamos que son axiomas del sistema formal.

¿Sobre qué hacer inducción? Uno podría intentar, por ejemplo, hacer inducción en la cantidad de secuentes que aparecen en una derivación. Sin embargo, el segundo teorema de Gödel tal vez nos haga hacer sospechar que simplemente usando inducción no podremos probar la consistencia del sistema.[4] Además, quizás necesitamos un orden más *complejo*, que *distinga* entre derivaciones con igual cantidad de secuentes.

Esto es lo que hizo Gentzen. El orden que le dio a las derivaciones coincide con ε_0. Es decir, cada derivación válida es asociada con un ordinal *debajo* de ε_0 que de alguna manera mide su complejidad. Esta identificación no dista demasiado de las que se suelen hacer entre $\mathbb{N}$ y objetos matemáticos definidos recursivamente, como la codificación de listas en el Teorema 1.2.9, o los programas de computadora, por ejemplo. La única diferencia es que estamos usando *ordinales transfinitos* para medir la complejidad de las derivaciones en lugar de números naturales. Dada una derivación, se le asigna el ordinal 1 a cada *uppermost sequent*. Luego se procede inductivamente sobre el árbol. Cada inferencia está formada por ciertos *upper sequents* (tal vez más de uno) y un solo *lower sequent*. Asignado un ordinal a cada *upper sequent*, se le asigna un ordinal al *lower sequent* en función de la regla de inferencia utilizada y de los ordinales ya asignados a los *upper sequents*. La asignación usa fuertemente la Forma Normal de Cantor. El proceso termina al calcular el ordinal del *endsequent*, al que se condiera el ordinal de la derivación.

Entender los detalles técnicos de la demostración de Gentzen cae fuera del alcance de esta tesis, pero repetimos la idea informal que Gentzen cuenta en [Gen72, Artículo 8]. Lo que demuestra es que si se tiene una derivación del secuente vacío $\rightarrow$ entonces uno puede armarse otra derivación *más simple*, es decir, con un ordinal más pequeño asociado. Aclaramos que no es que la nueva derivación tiene menos secuentes; puede incluso tener más. La reducción puede venir dada por el *tipo* de reglas de inferencia utilizadas, o por la complejidad de los secuentes.

¿Qué nos hace sospechar que si tenemos una derivación de $\rightarrow$ entonces podemos armarnos una más simple? Imaginemos que tenemos una derivación de ese tipo. En algún lugar, aparece un secuente U de complejidad maximal, donde la complejidad de un secuente, para generar intuición, la podemos pensar como la cantidad de conectivos utilizados. Por lo tanto, este pico de complejidad se alcanzó introduciendo un último conectivo en el secuente (lo que se llama *terminal connective*) vía alguna regla de inferencia. Sin embargo, como estamos derivando el secuente vacío (que no tiene fórmulas y mucho menos conectivos) y U es maximal en la cantidad de conectivos, en algún otro momento de la derivación se debió *eliminar* ese conectivo terminal. Eso nos sugiere que tal vez, en la derivación de $\rightarrow$, esa introducción y eliminación del conectivo terminal estuvo *de más* y podríamos extirparla del árbol. En ese sentido, la derivación se puede pensar como *reducible*.

La situación real es bastante más compleja y se debe lidiar con las distintas reglas de inferencia posibles. Sin embargo, la idea es la que planteamos: si uno tuviera una derivación de $\rightarrow$, asociándola a un ordinal α_0, uno puede generar una sucesión estrictamente decreciente de ordinales α_n asociadas a sucesivas derivaciones más simples, lo cual es absurdo porque los ordinales forman un buen orden.

(No entraremos en detalles sobre *por qué* el orden es ε_0. No alcanza con decir que la Forma Normal de Cantor tiene forma de árbol, y las derivaciones también, para intuir el por qué del uso de *este* ordinal.)

[4] Esto es nada más que una sospecha y no es para nada un argumento formal. Luego de la Proposición 2.3.1 consideramos interesante volver y reflexionar sobre la afirmación.

2.3. El ordinal de una teoría axiomática

2.3.1. 'Consistency Strength' (definición ingenua)

Los métodos utilizados por Gentzen son esecialmente finitos, *excepto* por la utilización de inducción transfinita hasta ε_0. PRA, por 'Primitive Recursive Arithmetic', es una teoría axiomática sin cuantificadores no acotados de los números naturales. En [Poh08], Pohlers muestra cómo, desde PRA, junto con inducción transfinita hasta ε_0 (aplicado solamente a predicados primitivos recursivos), se puede demostrar la consistencia de un sistema llamado NT, donde NT contiene a PRA, pero es equivalente (en un sentido fuerte que no formalizaremos) a la aritmética de Peano. Uno puede interpretar esto como que basta con *creer* en el buen orden de ε_0, un ordinal fácil de visualizar gracias a su notación[5], para *creer* en la consistencia de la aritmética de Peano.[6]

De lo dicho en el párrafo anterior se puede extraer lo siguiente:

$$\mathrm{PRA} + IT - PR(\varepsilon_0) \vdash Con(NT) \tag{2.1}$$

donde, aunque no la definamos explícitamente, $ITPR(\varepsilon_0)$ (por 'Inducción Transfinita Primitiva Recursiva') expresa que toda relación de orden primitiva recursiva sobre $\mathbb{N}$ cuya interpretación en el modelo es isomorfa a un ordinal menor o igual a ε_0 es un buen orden. $Con(NT)$ denota que la teoría NT es consistente, y es una fórmula perfectamente definible en PRA, como se afirma en [Poh08](detalles escondidos en [SS92]).

Resulta tentador cambiar NT por cualquier teoría[7] T que extienda a PRA y definir *el ordinal de la teoría*, $|T|_{Con}$, como el mínimo α tal que:

$$\mathrm{PRA} + ITPR(\alpha) \vdash Con(T) \tag{2.2}$$

Sin embargo, esta es una definición ingenua. El siguiente contraejemplo, debido a Kreisel, ilustra por qué:

Proposición 2.3.1 ([Kre67]). *Si una teoría T es consistente, entonces $|T|_{Con} \leq \omega$.*

Es decir, para demostrar la consistencia de T desde PRA uno solamente necesita saber que *cierto* orden de longitud (isomorfo a) ω es un buen orden.

Idea de la demostración de la Proposición 2.3.1. El orden que nos construiremos captura natural y progresivamente la consistencia de T.

En primer lugar dejamos notado que en estas condiciones uno puede codificar fórmulas y demostraciones usando naturales - se trata de la famosa numeración de Gödel. Más aun, existe el predicado $\mathrm{Prf}_T(i, v)$ en PRA, que se interpreta como "i codifica una prueba en T de la fórmula codificada por v".

Recordemos que una de las definiciones equivalentes de la consistencia de una teoría es que no se pueda demostrar una fórmula contradictoria ϕ, que podemos fijar. Digamos que el número que codifica a ϕ es v_ϕ.

Definamos el orden artificial $\prec_T$, que tendrá longitud ω. Dados $x, y \in \mathbb{N}$, expresaremos cómo se comparan separando en dos casos, donde $<_{\mathbb{N}}$ denota al orden usual en $\mathbb{N}$:

[5] Recordemos que en la Observación 1.2.11 vimos que se corresponde con un buen orden 'natural' sobre árboles.

[6] Está aceptado que los razonamientos hechos en PRA son 'finitistas'. [Fef93, Pág 8]

[7] en el lenguaje de la aritmética

$$x \prec_T y \Leftrightarrow \begin{cases} x <_{\mathbb{N}} y \text{ si } \nexists i <_{\mathbb{N}} x, \mathrm{Prf}_T(i, v_\phi) \\ x >_{\mathbb{N}} y \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Lo que este orden hace es usar el primer argumento para averiguar la existencia de demostraciones de ϕ. Si para todo i, con $i < x$, no hay una demostración de ϕ vía la fórmula codificada por el número i, entonces x se compara con y vía el orden usual sobre $\mathbb{N}$. Si, en cambio, hay una demostración de ese estilo, entonces para todo y invertimos el orden usual entre x e y. Considerando la sucesión $y = x+1, x+2, \ldots$, de esta manera podríamos generar una cadena infinita $x \succ_T x+1 \succ_T x+2 \succ_T \cdots$, con lo cual $\prec_T$ no sería un buen orden. Intuitivamente, $\prec_T$ es un buen orden si y solo si T es consistente.

Formalmente, definamos el predicado $F(x) := (\forall i < x)\neg\mathrm{Prf}_T(i, v_\phi)$.

Se puede ver que:

$$\mathrm{PRA} \vdash (\forall x \prec_T y)F(x) \to F(y) \tag{2.3}$$

La idea es la siguiente: si asumimos $(\forall i \prec_T x)F(x)$ y también $\neg F(y)$ para algún y, entonces tenemos que $(\exists i \leq y)[\mathrm{Prf}_T(i, v_\phi)]$ y por lo tanto $y+1 \prec_T y$. Esto, junto con la premisa de (2.3), nos permite obtener $F(y+1)$. Pero $F(y+1)$ implica, en particular, $F(y)$, lo cual es un absurdo.

Por lo tanto asumir que $\prec_T$ es un buen orden nos permite obtener $\forall\, x, F(x)$ y que la teoría es consistente. Se puede ver que $\prec_T$ es definible de manera primitiva reursiva. Luego tenemos:

$$\mathrm{PRA} + ITPR(\prec_T) \vdash Con(T)$$

Sin embargo, como habíamos partido de la asunción de que T era una teoría consistente, el orden $\prec_T$ es efectivamente $<_{\mathbb{N}}$ - es decir, isomorfo a ω. □

El hecho de definir $|T|_{Con}$ usando ordinales, que son objetos abstractos, y no representaciones sintácticas de ellos, nos permite codificar información oculta en la definición de $\prec_T$, sin afectar la longitud del orden. En efecto, como el *cómputo* de esa longitud la hacemos desde 'fuera' de la teoría T, i.e., desde el modelo, donde *sabemos* que la teoría es consistente, esa información oculta se desvanece.[8]

Para evitar estos problemas, nos gustaría restringirnos a representaciones canónicas de los ordinales. Es decir, querríamos definir como $|T|_{Con}$ al mínimo ordinal α tal que la asunción de que *cierta* relación de orden en algún sentido *natural* sobre $\mathbb{N}$ es un buen orden (e isomorfa a α) es suficiente para probar la consistencia de T. Por ejemplo, a partir de las Formas Normales que ya vimos, nos construimos predicados primitivos recursivos sobre $\mathbb{N}$ que codificaban las notaciones. Estas pueden ser vistas como naturales, y así podemos evitamos contraejemplos artificiales. Se puede ver que, aplicando restricciones de este estilo a $|T|_{Con}$, este ordinal encapsula información no trivial sobre la teoría T [CT99, Pág. 221]. En general, las notaciones de ordinales en la literatura se corresponden con la definición de un predicado primitivo recursivo sobre los naturales [CT99, Pág. 223]. Sin embargo, ¿cómo elegir? A partir de la Forma Normal de Veblen no queda claro qué notación tomar como natural. Más aun, ni siquiera se sabe qué *definición* elegir para 'notación canónica' [Poh08, Pág. 128] [CT99, The

[8]Notemos que aunque $\prec_T$ tiene longitud ω, no se puede demostrar que es un buen orden dentro de T, pues contradiría el segundo teorema de incompletitud de Gödel.

Realm of Ordinal Analysis, 2.4][9]. De todas maneras, mencionamos que abundan las definiciones de *notación de ordinales* en la literatura. Suelen ser *ad hoc* al área y pedir algún grado de efectividad. En *Hyperarithmetical theory* [RR67, Pág. 205], por ejemplo, se pide que para ordinales límite λ la notación se corresponda con la codificación de un programa P - a los programas se los pueden codificar con números - tal que $P(n)$ es una notación para una sucesión creciente de ordinales λ_n cuyo límite es λ. En general la correspondencia se da entre ordinales y palabras de un alfabeto finito, o directamente con números naturales. Una lista concreta - aunque tal vez desactualizada - de notaciones de ordinales 'naturales' puede hallarse en [CT99, Rathjen 2.4].

2.3.2. 'Computational Power' (definición moderna)

Gentzen, en su momento, probó - sin usar el segundo teorema de incompletitud de Gödel - que todo orden primitivo recursivo tal que NT prueba que es un buen orden debe tener longitud *menor* que ε_0. También se puede ver que $\forall \xi < \varepsilon_0$, hay una relación de orden definible en el lenguaje tal que desde NT se puede demostrar que es un buen orden. En algún sentido, ε_0 mide el 'poder computacional' de NT.

Motivados por esto, y de manera muy vaga, mencionaremos que la definición moderna[10] del *ordinal de una teoría* T (en inglés 'proof theoretic ordinal') es el supremo de los ordinales α tal que existe una relación de orden definible en T de manera primitiva recursiva, cuya interpretación en el modelo es isomorfa a α y tal que T prueba que la relación es un buen orden. Los detalles se encuentran en [Poh08, Sec. 6.7]. Una excelente - y extensa - reseña sobre el tema se puede leer en [CT99, The Realm of Ordinal Analysis].

De todas maneras, extensiones del teorema de consistencia de Gentzen a otras teorías axiomáticas aparecen en la literatura [Fef93, Pág. 4].[11]. Algunos resultados que conectan esta definición con nuestro primer intento, i.e., $|T|_{Con}$, junto con sus respectivas referencias, se encuentran resumidos en [Cai11].

2.4. Un método sistemático de definir notaciones de ordinales hasta ω_1: algo imposible

2.4.1. La relación entre notaciones y secuencias fundamentales

Como dice Dante Alighieri en *Inferno*, "Lasciate ogni speranza, voi ch'entrate".

Tal vez la imposibilidad de definir notaciones de ordinales para segmentos progresivamente más largos de ON *de manera sistemática* pueda verse a través de las *secuencias fundamentales.*

Definición 2.4.1.

- *Dado $\alpha \in LIM$, llamamos* secuencia fundamental para α *a una sucesión estrictamente creciente de ordinales $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in$ tal que $\alpha_n \to \alpha$.*

[9]Wolfram Pohlers y Andreas Weiermann trabajaron durante un largo tiempo en esto, y ninguna definición de 'notación de ordinales' que definían era adecuada - siempre algún ejemplo deseado quedaba afuera o algún contraejemplo patológico quedaba adentro. [Poh18]

[10]En realidad hay muchas variantes.

[11]Sin embargo, al usar ordinales más complejos para probar la consistencia de una teoría, la cuestión de la 'fe' en su buen orden y la relación con el Programa de Hilbert ya no queda tan clara.

- *Llamemos $Suc(\alpha)$ al conjunto de sucesiones de ordinales contenidas en α. Entonces, dado $\alpha \in LIM$, decimos que $\mathcal{F} : LIM \cap \alpha \to Suc(\alpha)$ es una* familia de secuencias fundamentales para α *si $\forall \beta$ tal que $\beta < \alpha, \beta \in LIM$, tenemos que $\mathcal{F}(\beta)$ es una sucesión fundamental para α.*

Más aun, podemos hablar de secuencias fundamentales, no para ordinales, sino para *codificaciones* de ordinales. Podemos imaginarnos que si tenemos una notación efectiva para todo ordinal debajo de $\alpha < \omega_1$, entonces existirá un buen orden $\prec_\alpha$ sobre $\mathbb{N}$ tal que $(\alpha, \in) \cong (\mathbb{N}, \prec_\alpha)$, y el isomorfismo f podrá ser definido explícitamente, como por ejemplo sucedió con las formas normales de Cantor y Veblen. Motivados por esto, definimos lo siguiente:

Definición 2.4.2. *Sean $\prec_\alpha$ un buen orden para $\mathbb{N}$ y $f : (\alpha, \in) \to (\mathbb{N}, \prec_\alpha)$ un isomorfismo. Entonces:*

- *Dado $\beta \in LIM \cap \alpha$, llamamos* secuencia fundamental para la notación $f(\beta)$ *a una sucesión $(f(\beta_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ estrictamente creciente cuyo límite es $f(\beta)$.*
- *α no tiene una codificación en $\mathbb{N}$, pero de todas maneras podemos considerar $(f(\alpha_n))_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión no $\prec_\alpha$-acotada en $\mathbb{N}$ y llamarla* secuencia fundamental de escape.
- *Llamemos $Suc(\mathbb{N})$ al conjunto de sucesiones de números naturales. Entonces decimos que $\hat{F} : \mathbb{N} \to Suc(\mathbb{N})$ es una* familia de secuencias fundamentales de notaciones para α *si $\forall\ n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-1}(n) \in LIM$, vale que $\hat{F}(n)$ es una secuencia fundamental para la notación n.*

Notar que a partir de una biyección $f : \alpha \to (\mathbb{N}, \prec_\alpha)$ hay un mapeo entre *familias de secuencias fundamentales para α* (denotadas F) y *familias de secuencias fundamentales de notaciones para α* (denotadas $\hat{F}$). En efecto, sea $f_{Succ} : Seq(\alpha) \to Seq(\mathbb{N})$ dada por $\Big(f_{Succ}\big((\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)\Big)_k := f(\beta_k)$. Entonces dada F como antes podemos definirnos $\hat{F}(n) := f_{Succ} \circ F(f^{-1}(n))$, y dada $\hat{F}$ podemos definirnos $F(\beta) := f_{Succ}^{-1} \circ \hat{F}(f(\beta))$. Si llamamos $\mathrm{LIMN} := f(\mathrm{LIM} \cap \alpha)$, Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{LIM} \cap \alpha & \xrightarrow{F} & Seq(\alpha) \\
{\scriptstyle f}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_{Succ}} \\
\mathrm{LIMN} & \xrightarrow{\hat{F}} & Seq(\mathbb{N})
\end{array}$$

Diremos que $\mathcal{F}$ y $\hat{\mathcal{F}}$ están *asociadas.*

Lo mismo vale para una secuencia fundamental en particular. si $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia fundamental para $\beta, \beta \leq \alpha$, ésta se corresponde con $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $b_n := f(\beta_n)$. También diremos en ese caso que *están asociadas.*

Ejemplo 2.4.3. La Forma Normal de Cantor nos permite construir secuencias fundamentales para todo ordinal debajo de ε_0. Definimos recursivamente:

- $\forall \alpha \geq 0, \big(\mathcal{F}(\omega^{\alpha+1})\big)_n := \omega^\alpha \cdot n.$
- Si λ es un ordinal límite, $\big(\mathcal{F}(\omega^\lambda)\big)_n := \omega^{(\mathcal{F}(\lambda))_n}$.
- Si $\alpha \underset{\mathrm{FNC}'}{=} \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_k}$, con $k \geq 2$, entonces $\big(\mathcal{F}(\alpha)\big)_n := \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_{k-1}} + \big(\mathcal{F}(\omega^{\alpha_k})\big)_n$.

Por ejemplo, $\big(\mathcal{F}(\omega^{\omega^{\omega^\omega}}+\omega^{\omega^\omega})\big)_n = \omega^{\omega^{\omega^\omega}}+\omega^{\omega^n}$. Es fácil ver la buena definición de $\mathcal{F}$. Además uno puede extender $\mathcal{F}$ a ε_0 inclusive, definiendo $(\mathcal{F}(\varepsilon_0))_0 := 0, (\mathcal{F}(\varepsilon_0))_{n+1} := \omega^{(\mathcal{F}(\varepsilon_0))_n}$.

El siguiente teorema intenta mostrar que el problema de construir notaciones de ordinales para todo ordinal debajo de cierto α es prácticamente equivalente al de construir una familia de secuencias fundamentales para α:

Teorema 2.4.4. [12] *Sea $\alpha \in LIM \cap \omega_1$.*

1. *Sea $\prec_\alpha$ un buen orden sobre $\mathbb{N}$ tal que $\alpha \cong (\mathbb{N}, \prec_\alpha)$. Entonces se puede definir una familia $\mathcal{F}$ de secuencias fundamentales para α y una secuencia fundamental $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para α tal que si $\prec_\alpha$ es computable entonces $\hat{\mathcal{F}}$, la familia asociada a $\mathcal{F}$, es computable (vista como función de dos variables), y a_n la secuencia fundamental asociada a α_n (vista como función de n) también lo es.*

2. *Recíprocamente, si tenemos una familia $\mathcal{F}$ de secuencias fundamentales para α y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia fundamental para α entonces podemos definir un buen orden $\prec_\alpha$ sobre $\mathbb{N}$ tal que $(\mathbb{N}, \prec_\alpha) \cong \alpha$.*

Demostración.
Notemos que hay 3 relaciones de orden involucradas en este teorema:

- $(\mathbb{N}, \prec_\alpha)$.
- $(\alpha, <)$, donde $<$ coincide con $\in$
- El orden usual sobre $\mathbb{N}$, al que llamaremos $<_\mathbb{N}$ para no confundir.

Aclarado esto, pasemos a la demostración:

1. Sea $\prec_\alpha$ como en el enunciado. Llamemos f al (único) isomorfismo entre $(\mathbb{N}, \prec_\alpha)$ y $(\alpha, <)$. Sea $\beta \in \alpha \cap \mathrm{LIM}$. Definimos $\mathcal{F}(\beta)$ recursivamente: supongamos ya definidos $\big(\mathcal{F}(\beta)\big)_m$ para todo $m < n$. Entonces:

$$\big(\mathcal{F}(\beta)\big)_n := f\left(\min_{<_\mathbb{N}}\Big\{N \in \mathbb{N} : f(N) < \beta \text{ y } \forall m <_\mathbb{N} n, f(N) > (\mathcal{F}(\beta))_m\Big\}\right)$$

como describe la Figura 2.1.

Por inducción en el orden usual de $\mathbb{N}$ es inmediato chequear que $\mathcal{F}(\beta)$ es $<$-estrictamente creciente. Veamos que además $\forall n \in \mathbb{N}$, si $f(n) < \beta$ entonces $\big(\mathcal{F}(\beta)\big)_n \geq f(n)$. Esto se puede ver por inducción global en n (en el orden usual $<_\mathbb{N}$). Si $n = 0$ es trivial. Supongamos que $n > 0$ y que $f(n) < \beta$ (si no, es trivial). Notemos que:

$$f^{-1}\Big(\big(\mathcal{F}(\beta)\big)_0\Big) \in \{k <_\mathbb{N} n : f(k) < \beta\}$$

así que este conjunto es no vacío. Sea $n_0 := \max\{k <_\mathbb{N} n : f(k) < \beta\}$. Por H.I., $\big(\mathcal{F}(\beta)\big)_{n_0} \geq f(n_0)$. Luego, como $\mathcal{F}(\beta)$ es una sucesión $<$-creciente, $\big(\mathcal{F}(\beta)\big)_{n-1} \geq \big(\mathcal{F}(\beta)\big)_{n_0} \geq f(n_0)$. Separemos en casos:

[12] El teorema fue reconstruido a partir del Teorema 23 de [For10]. Esta versión tenía un error en la demostración: β_{0,n_0} (y los otros ordinales que correspondan) puede no tener "un último ordinal debajo de él"; considerar por ejemplo ω^ω. Por otro lado, la versión de Forster tampoco incluía la parte de efectividad, que es un desarrollo propio.

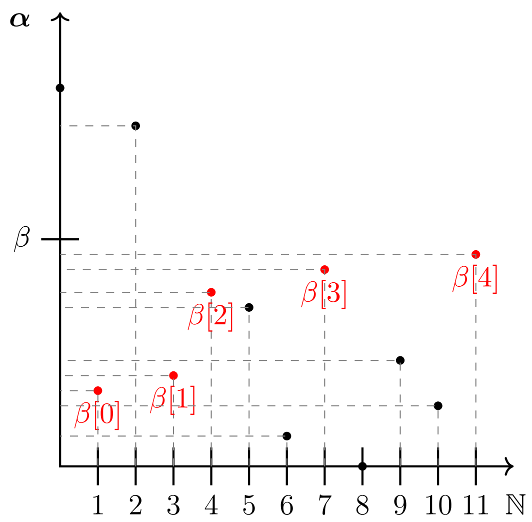


Figura 2.1: Posible gráfico de la función $f : \mathbb{N} \to \alpha$, distinguiendo a los puntos de la secuencia fundamental $\beta[n] := \mathcal{F}(\beta)$ para un β fijo.

- Si $f(n) \leq \big(\mathcal{F}(\beta)\big)_{n-1}$, entonces como $\big(\mathcal{F}(\beta)\big)_{n-1} < \big(\mathcal{F}(\beta)\big)_n$, tenemos que $f(n) < \big(\mathcal{F}(\beta)\big)_n$.
- Si $f(n) > \big(\mathcal{F}(\beta)\big)_{n-1}$, entonces $f(n) > f(n_0)$ y por lo tanto, por definición, $\big(\mathcal{F}(\beta)\big)_n = f(n)$.

Notemos que $\big(\mathcal{F}(\beta)\big)_n = \text{máx}\{M < n+1 : f(M) < \beta\} \underset{HI}{\geq} f(n)$. Pero $\mathcal{F}(\beta)$ es estrictamente creciente, así que $\big(\mathcal{F}(\beta)\big)_{n+1} > \big(\mathcal{F}(\beta)\big)_n \geq f(n)$. Por lo tanto $\big(\mathcal{F}(\beta)\big)_{n+1} \geq f(n+1)$.

Por lo tanto tenemos lo deseado. Esto nos sirve para ver que la sucesión efectivamente converge a β. Basta ver que $\forall \gamma < \beta, \exists n_0$ tal que $\big(\mathcal{F}(\beta)\big)_{n_0} \geq \gamma$. Tomando $n_0 = f^{-1}(\gamma)$, obtenemos que $\big(\mathcal{F}(\beta)\big)_{n_0} \geq f(n_0) = \gamma$, así que la sucesión efectivamente converge a β y como es creciente, entonces es una secuencia fundamental para β.

La secuencia fundamental para α se define análogamente a cualquier otra, con la salvedad de que la cláusula $f(N) < \alpha$ queda superflua. Es decir, $\alpha_n := f\Big(\text{mín}_{<_\mathbb{N}} \big\{N \in \mathbb{N} : \forall m < n, f(N) > (\mathcal{F}(\beta))_m\big\}\Big)$. De manera análoga a lo hecho hasta ahora se puede ver que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia fundamental para α.

La familia de secuencias fundamentales para notaciones $\hat{\mathcal{F}}$ *asociada* puede definirse como $(\hat{\mathcal{F}}(b))_n = \text{mín}_{<_\mathbb{N}} \big\{N \in \mathbb{N} : N \prec_\alpha b \text{ y } \forall m <_\mathbb{N} n, N > \big(\hat{\mathcal{F}}(b)\big)_m\big\}$. El hecho de que $(\hat{\mathcal{F}}(b))_n = g_\alpha^{-1}\Big(\big(\mathcal{F}(g_\alpha(b))\big)_n\Big)$ se puede ver por $<_\mathbb{N}$-inducción en n. Análogamente, se puede ver que $a_n := \text{mín}_{<_\mathbb{N}}\{N \in \mathbb{N} : \forall m <_\mathbb{N} n, N > \big(\hat{\mathcal{F}}(b)\big)_m\}$.

Es claro que si $\prec_\alpha$ es un orden computable sobre $\mathbb{N}$ entonces $\hat{\mathcal{F}}$ es computable y a_n también, porque están definidas utilizando solamente funciones computables. Esto concluye el primer ítem de la demostración.

2. Sean $\mathcal{F}$ y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de secuencias fundamentales para α y una secuencia fundamental para α respectivamente. Queremos encontrar un buen orden $\prec_\alpha$ sobre $\mathbb{N}$ tal que $(\mathbb{N}, \prec_\alpha) \cong \alpha$. Lo que haremos será *codificar* a cada ordinal $\beta < \alpha$ con una tira finita de números naturales. Esta tira de números se mapeará con un *camino descendente* hasta α.

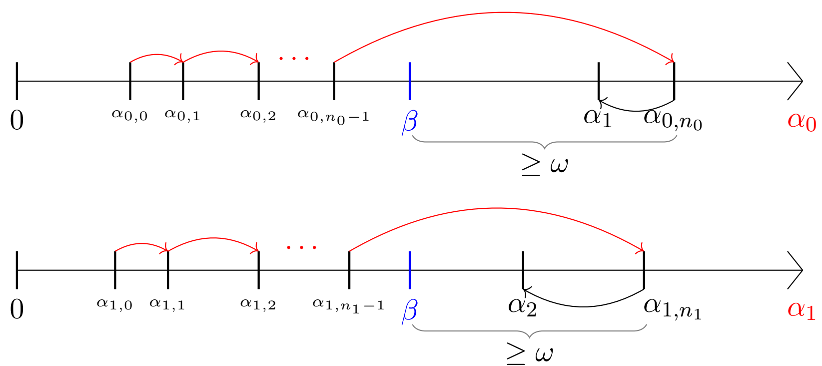
   La codificación la haremos a través de una función $C : \alpha \to \omega^\omega$. Componiendo con una función $v : \omega^\omega \to \mathbb{N}$ (por ejemplo, la codificación de ordinales en la Forma Normal de Cantor), podemos llamar A al conjunto $v \circ C(\{\beta : \beta \in \alpha\})$ que obtendremos. El conjunto A es infinito, así que puede enumerarse de manera recursiva con la siguiente función $h : \mathbb{N} \to A$:

$$h(0) := \min_{\mathbb{N}} A$$
$$h(n+1) := \min_{\mathbb{N}}\{a \in A : a >_{\mathbb{N}} h(n)\}$$

   Luego podremos definirnos la biyección $h^{-1} \circ v \circ C : \alpha \to \mathbb{N}$. Llamémosla H. El buen orden $\prec_\alpha$ sobre $\mathbb{N}$ puede definirse a partir de la biyección de la siguiente manera: $n_1 \prec_\alpha n_2 \Leftrightarrow H^{-1}(n_1) < H^{-1}(n_2)$.

   Construyamos a la función C. Por comodidad, renombremos α como α_0 y a la sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como $(\alpha_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Se podría definir a la función C de manera recursiva (definiendo primero otra función auxiliar), pero es más fácil *describir* qué hace C. Al evaluarla en β, la función computa el mínimo n tal que $\alpha_{0,n}$ tal que $\alpha_{0,n} \geq \beta$. Llamemos a ese subíndice n_0. Si $\alpha_{0,n_0} - \beta = k_0 < \omega$ entonces la función devuelve la tira (n_0, k_0). (Notemos que para que pase esto en particular α_{0,n_0} no puede ser un ordinal límite salvo que $\beta = \alpha_{0,n_0}$.) Si, en cambio, $\alpha_{0,n_0} - \beta \geq \omega$, entonces n_0 será el primer elemento de la tira y definimos $\alpha_1 := \min\{\xi \in \text{LIM} \cap \alpha : \beta \leq \xi < \alpha_{0,n_0}\}$, que existe pues $\alpha_{0,n_0} - \beta \geq \omega$.

   Iteramos el proceso. Definidos $\alpha_{0,n_0}, \ldots, \alpha_{s-1,n_{s-1}}, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$, si $\alpha_{s-1,n_{s-1}} - \beta \geq \omega$, definimos $\alpha_{s,n_s} := \min\{\left(\mathcal{F}(\alpha_{s-1})\right)_n : \left(\mathcal{F}(\alpha_{s-1})\right)_n \geq \beta\}$. Si $k_s := \alpha_{s,n_s} - \beta < \omega$, devolvemos $(n_0, \ldots, n_s, k_s)$. De lo contrario, definimos $\alpha_{s+1} := \min\{\xi \in \text{LIM} \cap \alpha : \beta \leq \xi < \alpha_{s,n_s}\}$.



$\ldots$

   Como la sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ es estrictamente decreciente, el proceso *debe* terminar. Es decir, existe $s_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_{s_0} := \alpha_{s_0,n_{s_0}} - \beta < \omega$ y por lo tanto $C(\beta) = (n_0, \ldots, n_{s_0}, k_{s_0})$.

Es decir, C está bien definida. Además, es inyectiva, ya que cada camino identifica unívocamente a un ordinal.[13] Esto finaliza la demostración, pues construida C ya argumentamos cómo definir $\prec_\alpha$. $\square$

Pregunta 2.4.5. *¿Se puede mejorar la demostración y dar una correspondencia biunívoca constructiva entre los siguientes dos conjuntos?*

- $\{\prec_\alpha : \prec_\alpha$ *es un buen orden sobre* $\mathbb{N}\}$
- $\{(\mathcal{F}, (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}) : \mathcal{F}$ *es una familia de secuencias fundamentales para* α *y* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una secuencia fundamental para* $\alpha\}$

En particular, al construir secuencias fundamentales, ¿siempre se pierde información sobre el orden subyacente?

Lo interesante del segundo ítem de este teorema no es la existencia de $\prec_\alpha$, sino el hecho de que la demostración es constructiva. (Notar que en el primer ítem *la efectividad se mantiene.*) Para cada ordinal numerable α siempre existe un buen orden $\prec_\alpha$ sobre $\mathbb{N}$ tal que $(\alpha, \in) \cong (\mathbb{N}, \prec_\alpha)$ - simplemente se debe usar una biyección cualquiera entre α y $\mathbb{N}$ para definir el orden. El desafío es definir estos órdenes - o secuencias fundamentales - de manera *sistemática.*[14] Como repetimos varias veces, no se puede asignar una notación para todos los ordinales numerables. La pregunta es la siguiente:

Pregunta 2.4.6. *¿Se puede construir un mecanismo sistemático tal que, dado* $\alpha < \omega_1$*, el mecanismo construya un sistema notacional para* $\{\beta : \beta < \alpha\}$*?*

2.4.2. Una justificación de la imposibilidad del método sistemático

Teorema 2.4.7. *Existe una familia de secuencias fundamentales para* ω_1*.*

Demostración. Todo ordinal límite $\alpha < \omega_1$ admite una secuencia fundamental - por ejemplo, fijando una biyección con $\mathbb{N}$ y luego utilizando el Teorema 2.4.4. Por lo tanto el conjunto $\mathfrak{F}_\alpha := \{\mathcal{F} : \mathcal{F}$ es una familia de secuencias fundamentales para $\alpha\}$ es no vacío. Consideremos al conjunto $\mathfrak{F} := \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} \mathfrak{F}_\alpha$. Sea $\mathcal{E} : \omega_1 \to \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} \mathfrak{F}_\alpha$ una función de elección, i.e., tal que $\forall \alpha < \omega_1, \mathcal{E}(\alpha) \in \mathfrak{F}_\alpha$. Luego $\mathcal{E}$ es una familia de secuencias fundamentales para ω_1. $\square$

La demostración es altamente no constructiva ya que usa el axioma de elección. Resulta que no podemos deshacernos de él. El siguiente teorema intenta sugerir que la respuesta a la Pregunta 2.4.6 es negativa:

Teorema 2.4.8. *(Parcialmente basado en [For10]) No se puede definir una familia de secuencias fundamentales para* ω_1 *en ZF.*

Demostración. Supongamos que existe una familia de secuencias fundamentales $\mathcal{F}$ para ω_1 definible en ZF. Construiremos recursivamente una familia de buenos órdenes $\prec_\alpha$ para cada $\omega \le \alpha < \omega_1$ y afirmamos que la construcción puede ser formalizada en ZF.

[13] Notemos que puede perfectamente no ser una codificación *sobreyectiva.* Por ejemplo, $(2, 1)$ puede no ser un camino 'bien formado' si $\alpha_{0,2}$ es un ordinal límite.

[14] Un ejemplo concreto de uso de secuencias fundamentales para la construcción de una notación de ordinales es lo que en inglés se conoce como *Kleene's* $\mathcal{O}$ [Kle38]. Otro ejemplo ya lo mencionamos en la sección anterior: [RR67, Pág. 205].

Definamos $G : \omega_1 \setminus \omega \to \prec$, donde $\prec := \{\prec : \prec$ es un buen orden de $\mathbb{N}\}$. Primero notemos que podemos definirnos una función $H : \mathrm{LIM} \cap \omega_1 \to \prec$ que a partir de un ordinal límite α sigue la idea de la construcción del Teorema 2.4.4 usando la restricción de $\mathcal{F}$ a α para devolver un buen orden $\prec_\alpha$ sobre $\mathbb{N}$.

- Si α es un ordinal límite, $G(\alpha) := H(\alpha)$
- Si α es un sucesor, entonces $\alpha' := \sup\{\beta : \beta \in \mathrm{LIM} \text{ y } \beta < \alpha\}$ es el primer ordinal límite debajo de α, i.e., $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha = \alpha' + k$. Es fácil adaptar el buen orden obtenido previamente para α' para construirse uno de longitud α: simplemente debemos 'colocar los primeros k elementos al final'. Más concretamente, definimos el orden de la siguiente manera: sea $\prec_{\alpha'} := G(\alpha')$ y sea $A := \{0_{\alpha'}, \ldots, (k-1)_{\alpha'}\}$ el conjunto de los primeros k elementos de $\mathbb{N}$ ordenado según $\prec_{\alpha'}$. Entonces, dados $a \neq b \in \mathbb{N}$, definimos $a \prec_\alpha b$ si y solo si vale alguna de las siguientes:

  - $a \prec_{\alpha'} b \wedge (a, b \notin A \vee a, b \in A)$.
  - $a \notin A, b \in A$

  Es fácil ver que $(\mathbb{N}, \prec_\alpha) \cong (\alpha, \in)$. Definimos $G(\alpha) := \prec_\alpha$.

Nuestro objetivo es llegar a un absurdo. Fijemos una biyección σ entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Puede ser, por ejemplo, la usada para codificar *pares* de naturales [DSW94]. Llamemos π_1, π_2 a las proyecciones a cada coordenada. Dado un buen orden $\prec_\alpha$ sobre $\mathbb{N}$, podemos definirnos el siguiente número real r_α: su parte entera es 0; el i-ésimo dígito decimal de r_α es 1 si y solo si $\pi_1(\sigma(i)) \prec_\alpha \pi_2(\sigma(i))$. Así, el número real *codifica* al buen orden $\prec_\alpha$.

Esta construcción (que puede ser formalizada en ZF) nos da una inyección entre $\omega_1 \setminus \omega$ y $\mathbb{R}$. Recordemos que ω_1 es el primer ordinal no numerable y, como tal, tiene cardinal $\aleph_1$ (y por lo tanto $\omega_1 \setminus \omega$ también), mientras que $\mathbb{R}$ tiene cardinal $2^{\aleph_0}$. Esta inyección, entonces, demuestra que $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$, que es una proposición[15] independiente de ZF [Sol03]. $\square$

[15] No confundir con la hipótesis del continuo. $\aleph_1 \geq 2^{\aleph_0}$ es independiente de ZFC.

Capítulo 3

Notaciones: de arriba hacia abajo

> Un conjunto de un abismo.
>
> Georg Cantor

Hasta ahora presentamos la Forma Normal de Cantor y la Forma Normal de Veblen, y mencionamos que existe una extensión de Veblen que agrega finitas e incluso transfinitas variables. Todas estas ideas tienen en común que las funciones usadas construyen ordinales 'desde abajo', i.e., no asumen la existencia de ordinales *que los contengan* (por ejemplo, no numerables) en su definición. A esto se lo suele llamar *predicatividad.*

3.1. El método impredicativo

La notación que armaremos en este capítulo, debida a Bachmann [Bac50], usa un método distinto. En cierto sentido, es *necesario* usar un método distinto.

Recapitulemos lo que tenemos hasta ahora:

- La función $\alpha \mapsto \omega^\alpha$ nos permitió construir la Forma Normal de Cantor, dándoles una notación a todos los ordinales debajo de ε_0, que es el límite de la sucesión $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots$
- La función $\alpha \mapsto \omega^\alpha$ tiene un club de puntos fijos, así que los enumeramos con la función $\varphi_0(\alpha)$. Sin embargo, esta función *también* tiene puntos fijos. De manera inductiva nos definimos φ_ξ para cada $\xi \in \mathrm{ON}$, donde cada función enumera los puntos fijos comunes de las funciones anteriores. Estas funciones nos permitieron construir la Forma Normal de Veblen y darles una notación a cada ordinal debajo de Γ_0. Γ_0 es el primer punto fijo de la función $\alpha \mapsto \varphi_\alpha(0)$.
- La función $\alpha \mapsto \varphi_\alpha(0)$ *también* tiene un club de puntos fijos. A ese club lo llamamos SC.

El ordinal Γ_0 marca de una manera muy concreta el fin de la predicatividad. Por un lado, se puede dar una caracterización[1] del método predicativo por medio de un sistema formal, y Γ_0 resulta ser su proof-theoretic-ordinal, i.e., el supremo de los ordinales que se pueden probar que están bien ordenados en él [S+05, Pág. 606]. Por otro lado, aunque uno puede repetir el truco usado en § 1.3.4 de ir agregando funciones o parámetros de función recursivamente para

[1] controversial, y no aceptada universalmente

enumerar puntos fijos de las notaciones anteriores, a estas construcciones siempre 'se les acaba la nafta' y nunca alcanzan para nombrar el proof-theoretic-ordinal de ciertas teorías que usan axiomas que podrían merecer el nombre de 'impredicativas' [Poh08, Cap. 9].

El método de Bachmann usa ordinales más *grandes* para nombrar ordinales más *chicos*. Como mencionamos en § 2.3.2, hay muchas variantes de este nuevo método, y es difícil construir traducciones entre ellas[2]. Nosotros presentaremos un ejemplo simple, siguiendo parcialmente las ideas de [Rat17b]. (No hablaremos del método original, que es descrito aquí [Rat06, Pág. 11]. Daremos la versión moderna.)

3.2. La *ordinal collapsing function*

Definición 3.2.1. *Sea* $\Omega := \omega_1$*. El renombre es para indicar que no es obligatorio usar a* ω_1 *- podríamos usar cualquier otro ordinal más grande que sea* el primero *con un cardinal nuevo, por ejemplo. Definimos recursivamente en* α *a los conjuntos* $B(\alpha)$ *y a la* Ordinal Collapsing Function $\psi(\alpha)$*:*

$$B(\alpha) := \begin{cases} \textit{la clausura del conjunto } \{0, \Omega\} \textit{ bajo:} \\ +, (\xi, \eta \mapsto \varphi_\xi(\eta)), (\xi \mapsto \psi(\xi))_{\xi<\alpha} \end{cases}$$

Una notación alternativa para la función $(\xi \mapsto \psi(\xi))_{\xi<\alpha}$ *podría ser* $\psi|_\alpha$*. Es decir, la función* ψ *restringida al subdominio* $[0, \alpha)$ *de ON.*

Es decir, el conjunto más chico cerrado por esas operaciones. Notar que resulta natural pedir que ξ*, el argumento de* ψ*, sea menor que* α *porque* ψ *y* B *están siendo definidas con una recursión simultánea en* α*.*

$$\psi(\alpha) := \min\{\rho < \Omega : \rho \notin B(\alpha)\}$$

Podemos pensar que para cada α, $B(\alpha)$ contiene a los ordinales *que se pueden escribir* combinando las operaciones dichas en su definición. Esto se debe a que otra manera de escribir a $B(\alpha)$ es como $\bigcup\limits_{n<\omega} B^n(\alpha)$, donde:

- $B^0(\alpha) := \{0, \Omega\}$.
- $B^{n+1}(\alpha) := B^n(\alpha) \cup \{\xi + \eta : \xi, \eta \in B^n(\alpha)\} \cup \{\varphi_\xi(\eta) : \xi, \eta \in B^n(\alpha)\} \cup \{\psi(\xi) : \xi \in B^n(\alpha) \wedge \xi < \alpha\}$.

Lo que hace $\psi(\alpha)$ es *capturar* al primer ordinal que *no* puede ser descrito de esa manera - que no es cubierto por la notación.

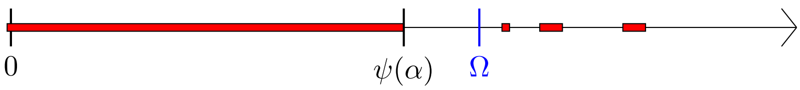


Figura 3.1: Una representación gráfica[3]de $B(\alpha)$ (**rojo**) y de $\psi(\alpha)$.

Debemos chequear la buena definición de ψ, i.e., que siempre es el mínimo de un conjunto no vacío:

[2] Esto vale en general: comparar distintas notaciones de ordinales suele ser muy desafiante.[Rat17a]
[3] Justificada más adelante por el Teorema 3.3.7.

Lema 3.2.2. *Sea $\alpha \in ON$. Entonces:*

1. *$B(\alpha)$ es numerable.*

2. *$\psi(\alpha)$ está bien definida y además $\psi(\alpha) < \Omega$.*

Demostración.
Sea $\alpha \in$ ON.

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, llamemos k_n a la cantidad de elementos de $B^n(\alpha)$ (n puede ser un número natural ó ∞, en principio). Demostremos, usando la definición alternativa de $B(\alpha)$ y por inducción en n, que $k_0 = 2, k_{n+1} \leq 2(k_n + k_n^2)$.

   - $B^0(\alpha) = \{0, \Omega\}$, luego $k_0 = 2$.
   - Sea $n + 1 > 0$. Notemos que $B^{n+1}(\alpha)$ está definido como $B^n(\alpha)$ unido a la imagen de ciertas operaciones aplicadas a elementos de $B^n(\alpha)$. Tenemos dos operaciones binarias $\varphi, +$ y una operación unaria $\psi|_\alpha$. Acotemos la cantidad de elementos de $B^{n+1}(\alpha)$. En el *peor* caso, las tres operaciones son inyectivas, tienen imágenes disjuntas, y el dominio de $\psi|_\alpha$ es todo $B^n(\alpha)$, con lo cual tenemos que $k_{n+1} \leq \underbrace{k_n}_{\text{por } B^n(\alpha)} + \underbrace{k_n^2}_{\text{por } \varphi} + \underbrace{k_2^2}_{\text{por } +} + \underbrace{k_n}_{\text{por } \psi|_\alpha} = 2(k_n + k_n^2)$.

   En particular, para cada $\forall\alpha \in \text{ON}, B(\alpha)$ es finito o numerable al ser unión numerable de conjuntos finitos. Por otro lado, es infinito porque $0 \in B^0(\alpha), \Omega^0 = 1 \in B^1(\alpha), 1 + 1 \in B^2(\alpha), \ldots$ y en general $\forall n \in \omega, n \in B^n(\alpha)$. Luego $\omega \subseteq B^n(\alpha)$, y por lo tanto el conjunto es numerable.

2. Como $B(\alpha)$ es numerable por el ítem anterior, $B(\alpha) \subsetneq \Omega$, ya que Ω es no numerable. Es decir, el conjunto $\{\rho < \Omega : \rho \notin B(\alpha)\}$ es no vacío, y por lo tanto tiene mínimo, que por supuesto es menor que Ω. □

Ejemplo 3.2.3. Calculemos $\psi(0)$:
Notemos que en $B(0)$ no se puede utilizar a la función ψ porque no existe un ordinal menor que 0. Además, vimos en § 1.3.2 que todo ordinal debajo de Γ_0 se puede escribir de manera finita usando los símbolos $+$, 0 y las funciones φ de Veblen. Esto dice que $\Gamma_0 \subseteq B(0)$. Por otro lado, Γ_0 *no* puede ser escrito de esta manera. Luego $\Gamma_0 \notin B(0)$. Por lo tanto, $\psi(0) = \Gamma_0$.

Estudiemos algunas propiedades de B y ψ:

Lema 3.2.4.

1. *Tanto B como ψ son no decrecientes: si $\alpha \leq \delta$ entonces $B(\alpha) \subseteq B(\delta)$ y $\psi(\alpha) \leq \psi(\delta)$.*

2. *Más aun, si $\alpha \in B(\delta) \cap \delta$ entonces $\psi(\alpha) < \psi(\delta)$.*

3. *El mecanismo puede a veces* dormitar*: si $\alpha < \delta$ y $[\alpha, \delta) \cap B(\alpha) = \emptyset$ entonces $B(\alpha) = B(\delta)$ y por lo tanto $\psi(\alpha) = \psi(\delta)$.*

4. *Si λ es un ordinal límite entonces $\bigcup_{\xi<\lambda} B(\xi) = B(\lambda)$.*

Demostración.

1. Es inmediato de la definición y se puede ver por inducción en δ.

2. Si $\alpha \in B(\delta) \cap \delta$ entonces por definición de $B(\delta)$, tenemos que $\psi(\alpha) \in B(\delta)$ y por lo tanto $\psi(\alpha) \neq \psi(\delta)$, ya que $\psi(\delta)$ por definición no pertenece a $B(\delta)$. Entonces, por el ítem anterior concluimos que $\psi(\alpha) < \psi(\delta)$.

3. Por el primer ítem, basta ver una sola contención, i.e., que $B(\delta) \subseteq B(\alpha)$. Veamos por inducción en n que $\forall\ n \in \mathbb{N}, B^n(\delta) \subseteq B^n(\alpha)$. Si $n = 0$, esto es obvio. Veamos el caso inductivo. Supongamos que $B^n(\delta) \subseteq B^n(\alpha)$. Recordemos que, por definición, $B^{n+1}(\delta) = B^n(\delta) \cup \{\xi + \eta : \xi, \eta \in B^n(\delta)\} \cup \{\varphi_\xi(\eta) : \xi, \eta \in B^n(\delta)\} \cup \{\psi(\xi) : \xi \in B^n(\delta) \wedge \xi < \delta\}$. Veamos que cada conjunto está contenido en $B^n(\alpha)$:

   - $B^n(\delta) \underset{\text{H.I}}{\subseteq} B^n(\alpha)$.
   - Sean $\xi, \eta \in B^n(\delta)$. Por H.I., $\xi, \eta \in B^n(\alpha)$. Por definición de $B^{n+1}(\alpha)$, tenemos que $\xi + \eta \in B^{n+1}(\alpha)$. Esto prueba que $\{\xi + \eta : \xi, \eta \in B^n(\delta)\} \subseteq B^{n+1}(\alpha)$.
   - Análogamente, se ve que $\{\varphi_\xi(\eta) : \xi, \eta \in B^n(\delta)\} \subseteq B^{n+1}(\alpha)$.
   - Si $\xi \in B^n(\delta) \cap \delta$, entonces, por H.I, $\xi \in B^n(\alpha) \cap \delta$. Ahora bien, por hipótesis del enunciado, $[\alpha, \delta) \cap B(\alpha) = \emptyset$. Como $\xi < \delta$, necesariamente $\xi < \alpha$. Es decir, tenemos que $\xi \in B^n(\alpha) \cap \alpha$. Luego, por definición de $B^{n+1}(\alpha)$, tenemos que $\psi(\xi) \in B^{n+1}(\alpha)$. Esto dice que $\{\psi(\xi) : \xi \in B^n(\delta) \wedge \xi < \delta\} \subseteq B^{n+1}(\alpha)$.

   Por lo tanto $B^{n+1}(\delta) \subseteq B^{n+1}(\alpha)$.

4. Por el primer ítem tenemos que $\bigcup\limits_{\xi<\lambda} B(\xi) \subseteq B(\lambda)$. Para probar la otra inclusión basta ver que $\bigcup\limits_{\xi<\lambda} B(\xi)$ es cerrado por las operaciones que definen a $B(\lambda)$. Es inmediato chequear esto para $+$ y φ. La única que plantea alguna dificultad es la operación unaria $\psi|_\lambda$: supongamos que $\delta \in \bigcup\limits_{\xi<\lambda} B(\xi)$ tal que $\delta < \lambda$. Queremos ver que entonces $\psi(\delta) \in \bigcup\limits_{\xi<\lambda} B(\xi)$. Como $\delta \in \bigcup\limits_{\xi<\lambda} B(\xi)$, existe $\xi_0 < \lambda$ tal que $\delta \in B(\xi_0)$. Por otro lado, como $\delta < \lambda$, que es un ordinal límite, $\lambda < \lambda + 1 < \xi_1$. Pero entonces tomando $\xi^* = \text{máx}\{\xi_0, \lambda + 1\}$ tenemos, por definición de $B(\xi^*)$, que $\psi(\delta) \in B(\xi^*) \subseteq \bigcup\limits_{\xi<\lambda} B(\xi)$, que era lo que queríamos ver.

Esto finaliza la demostración. □

3.3. Relaciones con la Forma Normal de Veblen

3.3.1. Lemas previos

Lema 3.3.1. *Sea $\alpha \in ON$. Entonces $\exists\ \gamma \in ON$ tal que $\alpha = \omega^\gamma$ si y solo si para cada par ξ, η, si $\xi, \eta < \alpha$, entonces $\xi + \eta < \alpha$.*

Es decir, los ordinales de la forma ω^γ son inalcanzables desde abajo por sumas. La demostración de este hecho se basa en la Forma Normal de Cantor:

Demostración.
$\Rightarrow$) Supongamos que $\alpha = \omega^\gamma$ para algún $\gamma \in$ ON, pero existen $\xi, \eta < \alpha$ tales que $\xi + \eta \geq \alpha$. Queremos llegar a un absurdo. Primero veamos que, aunque no valga la igualdad, podemos *producir* otros dos ordinales menores que α tal que *sí* vale la igualdad.

Si $\xi + \eta > \alpha$ entonces, como $\xi < \alpha$, podemos restar ξ a α y considerar el ordinal $\alpha - \xi$. Tenemos que $\xi + (\alpha - \xi) = \alpha$.

Afirmamos que $\alpha - \xi < \eta$ y que por lo tanto $\alpha - \xi < \alpha$. Supongamos lo contrario. Entonces $\alpha = \xi + (\alpha - \xi) \geq \xi + \eta > \alpha$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto $\xi, (\alpha - \xi) < \alpha$ y además $\xi + (\alpha - \xi) = \alpha$.

Entonces, cambiando η por $\alpha - \xi$ de ser necesario, podemos suponer que $\xi + \eta = \alpha$.

Digamos que $\xi \underset{\text{FNC'}}{=} \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_k}$, y que $\eta \underset{\text{FNC'}}{=} \omega^{\alpha'_1} + \cdots + \omega^{\alpha'_{k'}}$. Entonces tenemos que $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_k} + \omega^{\alpha'_1} + \cdots + \omega^{\alpha'_{k'}}$. Esta expresión, escribiéndola en FNC', *debe* ser igual a ω^γ por hipótesis.

Supongamos que $\exists 1 \leq i \leq k$ tal que $\alpha_i \geq \alpha'_1$. Entonces $\omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_k} + \omega^{\alpha'_1} + \cdots + \omega^{\alpha'_{k'}} \underset{\text{FNC'}}{=} \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_{i_0}} + \omega^{\alpha'_1} + \cdots + \omega^{\alpha'_{k'}}$, donde $i'_0 := \text{máx}\{1 \leq i \leq k : \alpha_i \geq \alpha'_1\}$. Pero esto es absurdo, ya que contradice la unicidad de la Forma Normal de Cantor.

Luego $\alpha \underset{\text{FNC'}}{=} \omega^{\alpha'_1} + \cdots + \omega^{\alpha'_{k'}} = \omega^\alpha$. Luego $\eta \underset{\text{FNC'}}{=} \omega^\alpha$. En particular, $\eta = \alpha$, lo cual también es un absurdo.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\nexists \gamma \in \text{ON}$ tal que $\omega^\gamma = \alpha$. Entonces, si $\alpha \underset{\text{FNC'}}{=} \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_k}$, necesariamente $k \geq 2$. Tomando $\xi = \omega^{\alpha_1}, \eta = \omega^{\alpha_2} + \cdots + \omega^{\alpha_k}$, obtenemos lo deseado. □

De la demostración anterior se extrae el siguiente corolario, que cambia un menor por un distinto:

Corolario 3.3.2. *Sea $\alpha \in ON$. Entonces $\exists\ \gamma \in ON$ tal que $\alpha = \omega^\gamma$ si y solo si para cada par ξ, η, si $\xi, \eta < \alpha$, entonces $\xi + \eta \neq \alpha$.*

Notemos también lo siguiente:

Corolario 3.3.3. *SC es cerrado por sumas.*

Demostración. Sea $\alpha \in \text{SC}$. Luego $\varphi_\alpha(0) = \alpha$. Si llamamos f a la función $\gamma \mapsto \omega^\gamma$, tenemos que $\alpha = f^{(\alpha)}(0)$. Luego, por el Lema 1.3.15, $\alpha \in \text{Im } f$. La conclusión se obtiene al aplicar el Lema 3.3.1. □

Corolario 3.3.4. *$\forall \alpha \in \exists \gamma \in ON$ tal que $\psi(\alpha) = \omega^\gamma$. Es decir, si f es la función $\gamma \mapsto \omega^\gamma$, entonces Im $\psi \subseteq$ Im f.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Entonces, por el Corolario 3.3.2, $\exists \alpha \in \text{ON}$ y ξ, η con $\xi, \eta < \psi(\alpha)$ tal que $\xi + \eta = \psi(\alpha)$. Como $\xi, \eta < \psi(\alpha)$, por definición (minimalidad) de $\psi(\alpha)$ tenemos que $\xi, \eta \in B(\alpha)$. Pero entonces por definición de $B(\alpha)$, $\xi + \eta \in B(\alpha)$. Es decir, $\psi(\alpha) \in B(\alpha)$, lo cual es un absurdo. □

Nota de color 3.3.5. En la literatura aparecen diversas clases de ordinales que se caracterizan por ser inalcanzables desde abajo por alguna operación. Los *critical ordinals*, por ejemplo, son inalcanzables desde abajo por exponenciación. [Mon73, Teo. 15.10] Es decir, $\forall \alpha \in \text{ON}, \forall \xi, \eta \in \text{ON}$, si $\xi, \eta < \varphi_1(\alpha)$ entonces $\xi^\eta < \varphi_1(\alpha)$.

Recordemos que $\Gamma_\alpha = \text{Enum}_{\text{SC}}(\alpha)$. En el Lema 1.3.23 habíamos visto que los *strongly critical ordinals* son inalcanzables desde abajo por las funciones de Veblen. Es decir, $\forall \alpha \in \text{ON}, \forall \xi, \eta \in \text{ON}$, si $\xi, \eta < \Gamma_\alpha$ entonces $\varphi_\xi(\eta) < \Gamma_\alpha$. No siempre podemos reemplazar el $<$ por un $\neq$, como hicimos en el Corolario 3.3.4. Por ejemplo, $\Gamma_0 + 1$ *no* es un *strongly critical ordinal*, pero como $\varphi_{\Gamma_0}(0) = \Gamma_0$, entonces $\varphi_{\Gamma_0}(1) > \Gamma_0 + 1$.

3.3.2. La enumeración de *strongly critical ordinals*

Recordemos que el objetivo de esta sección es relacionar a la función ψ con las funciones de Veblen. El siguiente resultado afirma que ψ genera puntos fijos de la notación de Veblen[4]:

Lema 3.3.6. $\forall\alpha \in ON, \psi(\alpha) \in SC.$

Demostración. Sea $\alpha \in \mathrm{ON}$. Por el Corolario 3.3.4, $\exists\gamma \in \mathrm{ON}$ tal que $\psi(\alpha) = \omega^{\gamma}$. Luego podemos expresar a $\psi(\alpha)$ en Forma Normal de Veblen. Sean ξ, η tal que $\psi(\alpha) \underset{\mathrm{FNV}}{=} \varphi_{\xi}(\eta)$, con $\eta < \psi(\alpha), \xi \leq \psi(\alpha)$. Queremos ver que $\xi = \psi(\alpha)$ y que $\eta = 0$. Notemos que como $\eta < \psi(\alpha)$, por definición de $\psi(\alpha)$ tenemos que $\eta \in B(\alpha)$.

Supongamos que $\xi < \psi(\alpha)$. Entonces, $\xi \in B(\alpha)$. Por lo tanto, como $B(\alpha)$ está cerrado por las funciones de Veblen, tenemos que $\psi(\alpha) = \varphi_{\xi}(\eta) \in B(\alpha)$, lo cual es un absurdo.

Por lo tanto $\xi = \psi(\alpha)$. Supongamos que $\eta > 0$. Entonces $\psi(\alpha) \leq \varphi_{\psi(\alpha)}(0)$, porque $\rho \mapsto \varphi_{\psi(\alpha)}(\rho)$ es inflacionaria por la demostración del Teorema 1.3.20. Ahora bien, como la función $\rho \mapsto \varphi_{\psi(\alpha)}(\rho)$ es una función creciente por ser normal, por el Teorema 1.3.14, tenemos que $\varphi_{\psi(\alpha)}(0) < \varphi_{\psi(\alpha)}(\eta)$, que es igual a $\psi(\alpha)$. Por lo tanto $\psi(\alpha) < \psi(\alpha)$, lo cual es un absurdo.

Concluimos que $\xi = \psi(\alpha)$ y que $\eta = 0$. Por lo tanto $\psi(\alpha) \in \mathrm{SC}$. $\square$

Teorema 3.3.7. $B(\alpha) \cap \Omega = \psi(\alpha)$

En particular, en la Figura 3.1 está bien que no aparezcan ordinales entre $\psi(\alpha)$ y Ω.

Demostración.

Por definición, $\psi(\alpha) \subseteq B(\alpha) \cap \Omega$. Para concluir la otra contención, basta chequear que $X := \psi(\alpha) \cup \{\delta \in B(\alpha) : \delta \geq \Omega\}$ es cerrado por las operaciones que definen a $B(\alpha)$. En efecto, si vemos esto, entonces por definición $B(\alpha) \subseteq X$ y por lo tanto $B(\alpha) \cap \Omega \subseteq X \cap \Omega = \psi(\alpha)$.

Si $\xi, \eta \in \psi(\alpha)$ entonces $\xi + \eta \in \psi(\alpha)$ por el Corolario 3.3.4. Además, $\varphi_{\xi}(\eta) \in \psi(\alpha)$ por el Lema 3.3.6.

Por otro lado, si $\xi \in \psi(\alpha)$ y $\eta \in \{\delta \in B(\alpha) : \delta \geq \Omega\}$, entonces, como por definición de $\psi(\alpha)$ tenemos que $\xi \in B(\alpha)$, tenemos que $\xi + \eta \in B(\alpha)$ y también que $\varphi_{\xi}(\eta) \in B(\alpha)$. Además, por la monotonía de $+, \varphi$, tenemos que $\xi + \eta, \varphi_{\xi}(\eta) \geq \Omega$. Luego ambos pertenecen a $\{\delta \in B(\alpha) : \delta \geq \Omega\}$ y por lo tanto también a X.

Si tanto ξ como η pertenecen a $\{\delta \in B(\alpha) : \delta \geq \Omega\}$, el argumento es prácticamente el mismo.

Resta chequear que X es cerrado por la función $\psi|_{\alpha}$. Sea $\beta \in X, \beta < \alpha$. Como $\beta \in B(\alpha) \cap \alpha$, por el ítem 2 del Lema 3.2.4 tenemos que $\psi(\beta) < \psi(\alpha)$, y por lo tanto $\psi(\beta) \in X$, que era lo que queríamos ver. $\square$

Tenemos más buenas noticias:

Corolario 3.3.8. *ψ es una función continua.*

Demostración. Nuevamente aplicaremos el Lema 1.3.6. Sea U un conjunto de ordinales. Debemos ver que $\sup \psi(U) = \psi(\sup U)$. Llamemos $\lambda := \sup U$. Si $\lambda \in U$, como ψ es no decreciente, lo que hay que ver es trivial. Supongamos entonces que $\lambda \notin U$. Es fácil ver que entonces λ es un ordinal límite. Supongamos lo contrario, entonces existe $\lambda' \in \mathrm{ON}$ tal que $\lambda = \lambda' + 1$. Como $\forall\xi \in U, \xi < \lambda$ porque $\lambda \notin U$, entonces $\forall\xi \in U, \xi \leq \lambda'$, y por lo tanto $\sup U = \lambda'$, lo cual es un absurdo.

[4] Qué sorprendente.

Por lo tanto, por el ítem 4 del Lema 3.2.4, tenemos que $B(\lambda) = \bigcup_{\xi<\lambda} B(\xi)$. Afirmamos que $\bigcup_{\xi<\lambda} B(\xi) = \bigcup_{\xi\in U} B(\xi)$. La contención $\supseteq$ es obvia, porque $\forall\xi \in U, \xi < \lambda$. Para ver la otra contención, sea $\xi < \lambda$. Entonces, por definición de supremo, $\exists\xi' \in U$ tal que $\xi < \xi'$ y por lo tanto, por el ítem 1 del Lema 3.2.4, $B(\xi) \subseteq B(\xi')$. Análogamente, $\bigcup_{\xi<\lambda} \psi(\xi) = \bigcup_{\xi\in U} \psi(\xi)$. Luego:

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda) &= B(\lambda) \cap \Omega && \text{, por el Teorema 3.3.7} \\
&= \big(\bigcup_{\xi\in U} B(\xi)\big) \cap \Omega \\
&= \bigcup_{\xi\in U} \big(B(\xi) \cap \Omega\big) \\
&= \bigcup_{\xi\in U} \psi(\xi) && \text{, por el Teorema 3.3.7} \\
&= \sup_{\xi\in U} \psi(\xi)
\end{aligned}$$

Esto finaliza la demostración. □

Continuando con la relación entre ψ y las funciones de Veblen, afirmamos que vale algo más fuerte que el hecho de que Im $\psi \subseteq$ SC.

En primer lugar:

Proposición 3.3.9. *Sea $\delta \in SC \cap Im\ \psi$. Entonces $[0, \delta] \cap SC \subseteq Im\ \psi$.*

Es decir, ψ *no se saltea* ordinales de SC.

Demostración. Sea $\delta \in \mathrm{SC} \cap \mathrm{Im}\ \psi$, y α tal que $\delta = \psi(\alpha)$. Sea $\delta' < \delta$, con $\delta' \in \mathrm{SC}$. Notemos que como $\delta' \in \psi(\alpha)$, entonces $\delta' \in B(\alpha)$ y que por lo tanto $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\delta' \in B^n(\alpha)$ y $\delta' \notin B^{n-1}(\alpha)$. Queremos ver que existe α', con $\alpha' < \alpha$ y $\alpha' \in B^{n-1}(\alpha)$, tal que $\delta' = \psi(\alpha')$. Si vemos esto entonces $\delta' \in \mathrm{Im}\ \psi$, lo cual es nuestro objetivo. Supongamos lo contrario. Separemos en casos - los casos se corresponden con las otras razones posibles por la cuál δ' *entró* a $B^n(\alpha)$:

- $\delta' = \xi + \eta$, con $\xi, \eta \in B^{n-1}(\alpha)$. Por monotonía de la suma, y como $\delta' \notin B^{n-1}(\alpha)$, tenemos que $\xi, \eta < \delta'$. Notemos que $\delta' = \varphi_{\delta'}(0)$ por ser un *strongly critical ordinal.* Ahora bien, llamemos f a la función $\rho \mapsto \omega^\rho$. Notemos que $\varphi_{\delta'} = f^{(\delta')}$: Luego, por el Lema 1.3.15, Im $\varphi_{\delta'} \subseteq$ Im f. Es decir, $\exists\gamma \in \mathrm{ON}$ tal que $\delta' = \varphi_{\delta'}(0) = \omega^\gamma$. Por lo tanto, por el Lema 3.3.1, $\xi + \eta < \delta'$, lo cual es un absurdo.

- $\delta' = \varphi_\xi(\eta)$, con $\xi, \eta \in B^{n-1}(\alpha)$. Llegamos a un absurdo similar notando que como $\delta' \in \mathrm{SC}$, es inalcanzable desde abajo por funciones de Veblen.

Por lo tanto existe $\delta' \in \mathrm{Im}\ \psi$. Esto finaliza la demostración. □

Por otro lado, la función ψ efectivamente *enumera* los ordinales de SC - esto es, siempre y cuando no esté *dormitando*:

Definición 3.3.10. *Sea* $\beta^\Gamma := \text{mín}\{\rho > \beta : \rho \in SC\}$.

Lema 3.3.11. *Sea $\alpha \in ON$. Entonces:*

1. $\psi(\alpha+1) \leq (\psi(\alpha))^{\Gamma}$.
2. *Si* $\alpha \in B(\alpha+1)$ *entonces* $\psi(\alpha+1) = (\psi(\alpha))^{\Gamma}$.
3. *Si* $\alpha \notin B(\alpha+1)$ *entonces* $B(\alpha) = B(\alpha+1)$ *y por lo tanto* $\psi(\alpha+1) = \psi(\alpha)$.
4. $\psi(\alpha) \leq \Gamma_{\alpha}$.

Demostración.

1. Basta chequear que $Y := (B(\alpha+1) \cap (\psi(\alpha))^{\Gamma}) \cup \{\delta \in B(\alpha+1) : \delta \geq \Omega\}$ es cerrado por las operaciones que definen a $B(\alpha+1)$. En efecto, si vemos esto, entonces:

$$Y \supseteq B(\alpha+1) \tag{3.1}$$

por definición de $B(\alpha+1)$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned}(\psi(\alpha))^{\Gamma} &\supseteq B(\alpha+1) \cap (\psi(\alpha))^{\Gamma} \\ &= \Omega \cap Y \\ &\supseteq \Omega \cap B(\alpha+1) && \text{, por (3.1)} \\ &= \psi(\alpha+1) && \text{, por el Teorema 3.3.7}\end{aligned}$$

Sean $\xi, \delta \in Y$. Separando en casos, veamos que $\xi + \delta \in Y, \varphi_{\xi}(\delta) \in Y$:

- Si $\xi, \delta \in B(\alpha+1) \cap (\psi(\alpha))^{\Gamma}$ entonces como $B(\alpha+1)$ es cerrado por $+$ y φ, y $(\psi(\alpha))^{\Gamma}$ también (por pertenecer a SC), entonces $\xi + \delta \in Y, \varphi_{\xi}(\delta) \in Y$.
- Si $\xi \in B(\alpha+1) \cap (\psi(\alpha))^{\Gamma}$, y $\delta \in \{\delta \in B(\alpha+1) : \delta \geq \Omega\}$ entonces $\xi + \delta \geq \delta$ así que $\xi + \delta \in \{\delta \in B(\alpha+1) : \delta \geq \Omega\}$. Análogamente, $\varphi_{\xi}(\delta) \in \{\delta \in B(\alpha+1) : \delta \geq \Omega\}$.
- El caso $\xi, \delta \in \{\delta \in B(\alpha+1) : \delta \geq \Omega\}$ es totalmente análogo al anterior.

Hay que ver que Y también es cerrado por $\psi|_{(\alpha+1)}$. Sea $\beta \in Y$, con $\beta < \alpha + 1$,i.e., $\beta \leq \alpha$. Entonces $\psi(\beta) \leq \psi(\alpha)$ por el ítem 1 del Lema 3.2.4 y por lo tanto, por definición, pertenece a $(\psi(\alpha))^{\Gamma}$.

2. Si $\alpha \in B(\alpha+1)$ entonces $\psi(\alpha) \in B(\alpha+1)$ y entonces por definición de $\psi(\alpha+1)$ tenemos que $\psi(\alpha) < \psi(\alpha+1)$. Veamos por inducción transfinita en η que $\forall \eta$ tal que $\psi(\alpha) < \eta < (\psi(\alpha))^{\Gamma}$, tenemos que $\eta < \psi(\alpha+1)$. Si $\eta = \psi(\alpha)+1$, como tanto $\psi(\alpha)$ como 1 pertenecen a $B(\alpha+1)$, concluimos que $\eta \in B(\alpha+1)$ y que por lo tanto es menor a $\psi(\alpha+1)$. Supongamos que vale la hipótesis $\forall \eta_0 < \eta$, para cierto η tal que $\psi(\alpha) < \eta < (\psi(\alpha))^{\Gamma}$. Notemos que $\eta \notin$ SC así que existen $\xi, \delta < \eta$ tal que $\eta \leq \varphi_{\xi}(\delta)$. Como por hipótesis, $\xi, \delta \in \psi(\alpha+1)$, que es un *strongly critical ordinal*, tenemos que $\varphi_{\xi}(\delta) \in \psi(\alpha+1)$ y por lo tanto $\eta \in \psi(\alpha+1)$.

   Por lo tanto tenemos que $(\psi(\alpha))^{\Gamma} \leq \psi(\alpha+1)$. Juntando esto con el primer ítem, se obtiene la igualdad.

3. Supongamos que $\alpha \in B(\alpha)$. Por la monotonía de los $B(\alpha)$, tendríamos entonces que $\alpha \in B(\alpha+1)$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto $\alpha \notin B(\alpha)$. Pero entonces el enunciado es consecuencia directa del ítem 3 del Lema 3.2.4. En efecto, como $\alpha \notin B(\alpha)$, entonces $B(\alpha) \cap [\alpha, \alpha+1) = \emptyset$. Luego $B(\alpha) = B(\alpha+1)$.

4. Es inmediato a partir de los ítems anteriores. Veámoslo por inducción transfinita en α:

   - $\psi(0) = \Gamma_0$. Obtuvimos el valor en el Ejemplo 3.2.3.
   - Supongamos que $\psi(\alpha) \leq \Gamma_\alpha$. Si $\psi(\alpha+1) = (\psi(\alpha))^\Gamma$, entonces $\psi(\alpha+1) = \Gamma_{\alpha+1}$. En cambio, si $\psi(\alpha+1) = \psi(\alpha)$, entonces $\psi(\alpha+1) = \Gamma_\alpha < \Gamma_{\alpha+1}$.
   - El paso al límite se obtiene trivialmente a partir de la continuidad de $\psi(\alpha)$ y de $\text{Enum}_{SC}(\alpha) = \Gamma_\alpha$. □

3.4. Diferencias con la Forma Normal de Veblen: El gran sΩlto[5]

3.4.1. ψ tiene un solo punto fijo

Hay que tener cuidado con la siguiente sutileza:

Advertencia 3.4.1. $\alpha < \beta \not\Rightarrow \psi(\alpha) \in B(\beta)$.

En particular, el primer 'hueco' de $B(\alpha)$, es decir, $\psi(\alpha)$, no necesariamente pertenecerá a $B(\alpha+1)$. La razón de esto es sutil: tenemos que $B(\alpha+1) = \bigcup_{n<\omega} B^n(\alpha+1)$. Si $\psi(\alpha) \in B(\alpha+1)$, entonces necesariamente $\psi(\alpha) \in B^n(\alpha+1)$ para algún $n < \omega$. Pero entonces, por definición de $B^n(\alpha+1)$, α debe pertenecer a $B^{n-1}(\alpha+1)$. Y esto puede no suceder: existen $\alpha \in \text{ON}$ tal que $\alpha \notin B(\alpha+1)$.

En ese sentido, a los conjuntos $B(\alpha)$ se los puede pensar como 'sitios de construcción' [Rat17a] en los cuáles tenemos poco a poco, a medida que aumentamos α, herramientas más poderosas. La Advertencia 3.4.1 dice que $\psi(\alpha)$ no se vuelve automáticamente un elemento disponible en los sucesivos sitios de construcción (y α tampoco). Como veremos, esto diferencia a ψ de las funciones de Veblen.

Las funciones de Veblen son normales, mientras que ψ no lo es. Las primeras nos servían para una notación hasta el primer punto fijo de $\alpha \mapsto \varphi_\alpha(0)$, i.e., el primer ordinal de SC. A partir de este ordinal, necesitábamos nuevas funciones para enumerar "desde abajo" a los ordinales de SC.

La función ψ, en contraposición a esto, tiene un solo punto fijo (como veremos a continuación). Al no ser inflacionaria, ni inyectiva, puede darle nombre a ese punto fijo *más adelante*. La utilidad de ψ se acaba en algún momento, simplemente, porque como su imagen debe estar contenida en ω_1, es fácil ver que es eventualmente constante.

Teorema 3.4.2.

1. *Si* $\xi < \psi(\Omega)$ *entonces* $\xi < \Gamma_\xi = \psi(\xi) < \psi(\Omega)$.

2. $\Gamma_{\psi(\Omega)} = \psi(\Omega)$.

3. *Si* $\psi(\Omega) \leq \xi \leq \Omega$ *entonces* $\psi(\xi) = \psi(\Omega)$. *En particular* $\psi(\psi(\Omega)) = \psi(\Omega)$.

[5] El crédito original de este nombre corresponde parcialmente a Mirko Engler.

La imagen de la función ψ es siempre un ordinal numerable porque los conjuntos $B(\alpha)$ son numerables. Por lo tanto $\psi(\Omega)$ es numerable, y según el Teorema 3.4.2, la función $\psi(\alpha)$ no devuelve ordinales nuevos durante no numerables ordinales: desde $\alpha = \psi(\Omega)$ (su primer punto fijo) hasta $\alpha = \Omega$. Además, $\forall \xi \geq \Omega$, tenemos que $\psi(\xi)$, que es numerable, necesariamente es menor que ξ. Por lo tanto el punto fijo es único.

Notar que el teorema anterior dice que $\psi(\Omega)$ es el primer punto fijo de la función $\beta \mapsto \Gamma_\beta$. Luego es igual a $\varphi_{1,0}(0)$, ó, como describimos en § 1.3.4, es el límite de la sucesión $\Gamma_0, \Gamma_{\Gamma_0}, \Gamma_{\Gamma_{\Gamma_0}}, \ldots$

Antes de la demostración del teorema, vamos a necesitar los siguientes lemas:

Lema 3.4.3. *Si existe ξ tal que $\psi(\xi) = \xi$, entonces, $\forall \hat{\xi}$ tal que $\xi \leq \hat{\xi} \leq \Omega$, vale que $\psi(\hat{\xi}) = \psi(\xi) = \xi$.*

Demostración. Sea $\hat{\xi}$ tal que $\xi \leq \hat{\xi} \leq \Omega$. Veamos, por inducción en n, que $B^n(\hat{\xi}) \cap \Omega \subseteq B^n(\xi) \cap \Omega$.

- Si $n = 0$, es trivial.
- Supongamos que vale para n. Sea $\alpha \in B^{n+1}(\hat{\xi}) \cap \Omega$. Si $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, con $\alpha_1, \alpha_2 \in B^n(\hat{\xi})$, entonces, como $\alpha < \Omega$, necesariamente $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega$. Luego, por H.I. $\alpha_1, \alpha_2 \in B^n(\xi)$ y por lo tanto $\alpha_1 + \alpha_2 \in B^{n+1}(\xi)$. Se puede ver lo análogo cambiando $\alpha_1 + \alpha_2$ por $\varphi_{\alpha_1}(\alpha_2)$.

  Si, por otro lado, $\alpha = \psi(\alpha')$, con $\alpha' \in B^n(\hat{\xi})$, entonces necesariamente $\alpha' \in \hat{\xi}$ por definición de $B^{n+1}(\hat{\xi})$ y por lo tanto $\alpha' \in \Omega$. Luego:

$$
\begin{aligned}
\alpha' &\in B^n(\xi) \cap \Omega && \text{, por H.I.} \\
&\subseteq B(\xi) \cap \Omega \\
&= \psi(\xi) && \text{, por el Teorema 3.3.7} \\
&= \xi && \text{, por hipótesis del enunciado.}
\end{aligned}
$$

  Esto dice que $\alpha' < \xi$ y que $\alpha' \in B^n(\xi)$. Luego $\alpha = \psi(\alpha') \in B^{n+1}(\xi)$, como queríamos ver.

Luego $B(\hat{\xi}) \cap \Omega \subseteq B(\xi) \cap \Omega$. Como la otra contención vale por el primer ítem del Lema 3.2.4, entonces vale la igualdad. Por el Teorema 3.3.7, concluimos que $\psi(\xi) = \psi(\hat{\xi})$. □

Lema 3.4.4. $\forall \xi < \psi(\Omega), \xi \in B(\xi)$.

Demostración.

Por inducción transfinita en ξ:

- Si $\xi = 0$, es trivial.
- Supongamos que $\xi \in B(\xi)$. Entonces $\xi + 1 \in B(\xi) \subseteq B(\xi + 1)$.
- Supongamos que ξ es un ordinal límite menor que $\psi(\Omega)$, y que $\forall \xi_0 < \xi, \xi_0 \in B(\xi_0) \subseteq B(\xi)$. Queremos ver que $\xi \in B(\xi)$. Supongamos lo contrario, i.e., que $\xi \notin B(\xi)$. Entonces $\psi(\xi) = \xi$. Por lo tanto, por el Lema 3.4.3, tenemos que $\psi(\Omega) = \xi$. Sin embargo, $\xi \in \psi(\Omega)$ por hipótesis del enunciado, lo cual es un absurdo. □

Ahora sí, pasemos a la demostración del teorema:

Demostración del Teorema 3.4.2.

1. Por el Lema 3.4.4, vale que $\forall \xi < \psi(\Omega), \xi < \psi(\xi)$. Veamos, por inducción transfinita en ξ; que $\forall \xi < \psi(\Omega), \psi(\xi) = \text{Enum}_{SC}(\xi) = \Gamma_\xi$.
   - El caso $\xi = 0$ está demostrado en el Ejemplo 3.2.3.
   - Supongamos $\psi(\xi) = \Gamma_\xi$ y $\xi < \psi(\Omega)$. Como $\xi < \psi(\xi)$, por definición de ψ necesariamente $\xi \in B(\xi)$. Luego tenemos que:

$$\begin{aligned}\psi(\xi+1) &= (\psi(\xi))^\Gamma && \text{, por el segundo ítem del Lema 3.3.11} \\ &= (\Gamma_\xi)^\Gamma && \text{, ya que por H.I., } \psi(\xi) = \Gamma_\xi \\ &= \Gamma_{\xi+1} && \text{, por definición}\end{aligned}$$

   - El paso al límite se obtiene por la continuidad de ψ y de Enum_{SC}.

2. Por el primer ítem y la continuidad de $\text{Enum}_{\text{SC}}(\xi) = \Gamma_\xi$ y de $\psi(\xi)$, tenemos que $\Gamma_{\psi(\Omega)} = \psi(\psi(\Omega))$. Además, como ψ es creciente y continua, vale lo siguiente:

$$\begin{array}{cccc} \xi & < \psi(\xi) & < \psi(\Omega) & \forall \xi < \psi(\Omega) \\ \downarrow & {\scriptstyle \xi \to \psi(\Omega)}\downarrow & \| & \\ \psi(\Omega) & \leq \psi(\psi(\Omega)) & \leq \psi(\Omega) & \end{array}$$

   Luego, por Sandwich, $\psi(\psi(\Omega)) = \psi(\Omega)$ y, por lo tanto, $\Gamma_{\psi(\Omega)} = \psi(\Omega)$.

3. Lo deseado es consecuencia inmediata del Lema 3.4.3 ya que $\psi(\Omega)$ es punto fijo de ψ por el ítem anterior. $\square$

3.4.2. La utilidad de Ω

Hasta ahora no usamos para nada que $\forall \alpha, \Omega \in B^0(\alpha)$. Exploremos qué sucede si *eliminamos* a Ω del sitio de construcción de los conjuntos $B(\alpha)$, definiendo recursivamente en α a unos nuevos conjuntos $B_{\mathbf{0}}(\alpha)$ y a una nueva función $\psi_{\mathbf{0}}(\alpha)$:

$$B_0(\alpha) := \begin{cases} \text{la clausura del conjunto } \{0, \cancel{\Omega}\} \text{ bajo:} \\ +, (\xi, \eta \mapsto \varphi_\xi(\eta), (\xi \mapsto \psi_0(\xi))_{\xi<\alpha} \end{cases}$$

(Es decir, el conjunto más chico cerrado por esas operaciones.)

$$\psi_0(\alpha) := \text{mín}\{\rho : \rho \notin B_0(\alpha)\}$$

- $B_0(0) := \{0\}$
- $B_0^{n+1}(\alpha) := B_0^n(\alpha) \cup \{\xi + \eta : \xi, \eta \in B_0^n(\alpha)\} \cup \{\varphi_\xi(\eta) : \xi, \eta \in B_0^n(\alpha)\} \cup \{\psi(\xi) : \xi \in B_0^n(\alpha) \wedge \xi < \alpha\}$.

Como antes, tenemos que para todo α, $B_0(\alpha) = \bigcup\limits_{n<\omega} B_0^n(\alpha)$.

Además vale lo siguiente:

Teorema 3.4.5. $\forall \xi \leq \Omega, \psi_0(\xi) = \psi(\xi)$.

Demostración.

Por inducción transfinita[6] en ξ:

- Si $\xi = 0$, entonces repitiendo la demostración del Ejemplo 3.2.3, vemos que $\psi_0(0) = \Gamma_0$.
- Supongamos que $\forall \xi' < \xi, \psi_0(\xi') = \psi(\xi')$, y $\xi < \Omega$. Veamos - sin distinguir entre el caso sucesor y el límite - que $\psi_0(\xi) = \psi(\xi)$. Es fácil ver que $\psi_0(\alpha) = B_0(\alpha) \cap \Omega$, repitiendo el argumento del Teorema 3.3.7. Luego basta ver que $\forall n \in \mathbb{N}, B^n(\xi) \cap \Omega = B_0^n(\xi) \cap \Omega$. Veamos esto por inducción en n:
    - Si $n = 0$, es trivial.
    - Supongamos que $B^n(\xi) \cap \Omega = B_0^n(\xi) \cap \Omega$. Queremos ver que entonces $B^{n+1}(\xi) \cap \Omega = B_0^{n+1}(\xi) \cap \Omega$. Claramente vale $\supseteq$. Sea $\alpha \in B^{n+1}(\xi)$. Si $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, con $\alpha_1, \alpha_2 \in B^n(\xi)$, entonces por H.I. se deduce que $\alpha \in B_0^n(\xi)$. Lo mismo con φ en vez de $+$. Si $\alpha = \psi(\alpha')$ con $\alpha' \in B^n(\xi)$. Como $\xi \leq \Omega$, por definición de $B^n(\xi)$ necesariamente $\alpha' < \Omega$. Luego $\alpha' \in B^n(\xi) \cap \Omega$ y podemos aplicar H.I.; por lo tanto $\alpha \in B_0^n(\xi)$. □

¿Qué diferencia a ψ de ψ_0? ¿Cuándo entra en juego Ω? Cuando el argumento de las funciones es $\Omega + 1$.

Se puede ver por inducción transfinita en α que los conjuntos $B_0(\alpha)$ solamente tienen ordinales numerables. La clave consiste en notar que $+$ y φ devuelven ordinales numerables al recibir ordinales numerables. Como $\Omega \notin B(\Omega)$, repitiendo (con el mismo razonamiento) el tercer ítem del Lema 3.3.11 pero para ψ_0, obtenemos que $\psi_0(\Omega + 1) = \psi_0(\Omega)$. Más aun, para todo $\alpha \geq \Omega$, vale que $\psi_0(\alpha) = \psi_0(\Omega)$. La función se estanca a partir de Ω.

Sin embargo, como Ω fue agregado 'artificialmente' al 'sitio de construcción' de los conjuntos $B(\alpha)$, al computar $\psi(\Omega + 1)$ tenemos que $\Omega \in B(\Omega)$ y por lo tanto $\psi(\Omega + 1) > \psi(\Omega)$, por el segundo ítem del Lema 3.3.11.

Tal vez con esto se ve más por qué a ψ se la llama una 'Ordinal Collapsing Function'. A partir de $\alpha > \Omega$, notaremos ordinales numerables a partir de ordinales no numerables. Por ello, *usaremos* a los ordinales $\gamma \in B(\alpha), \gamma \geq \Omega$. Por poner un ejemplo cualquiera, en $B(\Omega + \omega + 1)$, tenemos disponible a $\psi(\Omega + \omega)$, ya que:

$$
\begin{aligned}
0, \Omega &\in B^0(\Omega + \omega + 1) \\
1 = \Omega^0 &\in B^1(\Omega + \omega + 1) \\
\omega = \varphi_0(1) &\in B^2(\Omega + \omega + 1) \\
\Omega + \omega &\in B^3(\Omega + \omega + 1) \\
\psi(\Omega + \omega) &\in B^4(\Omega + \omega + 1), \text{ porque } \Omega + \omega < \Omega + \omega + 1
\end{aligned}
$$

La jerarquía de funciones de Veblen intenta, con cada función φ_α, arreglar automáticamente los problemas (i.e. los puntos fijos) de las funciones anteriores, enumerándolos. En contraposición a esto, $\psi(\alpha)$ *busca* nuevos nombres para los ordinales en los ordinales no numerables, trayéndolos 'para bajo' - colapsándolos.

[6] Para variar.

3.5. Hacia la notación de Bachmann

3.5.1. La Forma Normal de Bachmann

Definición 3.5.1. *Decimos que* $\psi(\xi)$ *es la* Forma Normal de Bachmann *de* α *si* $\alpha = \psi(\xi)$ *y* $\xi \in B(\xi)$. *Lo denotamos* $\alpha \underset{FNB}{=} \psi(\xi)$.

El requerimiento extra $\xi \in B(\xi)$ viene motivado por nuestro deseo de expresar a α en función de $0, \Omega, \psi, +$ y φ. Esto requerirá algo de trabajo.

Observación 3.5.2. *La Forma Normal de Bachmann, si existe, es única: en efecto, supongamos que* $\alpha \underset{FNB}{=} \psi(\xi) = \psi(\hat{\xi})$ *y que* $\xi < \hat{\xi}$. *Entonces, como* $\xi \in B(\xi) \subseteq B(\hat{\xi})$ *por el segundo ítem del Lema 3.2.4, tenemos que* $\psi(\xi) < \psi(\hat{\xi})$*, lo cual es un absurdo.*

Lema 3.5.3.

1. *Si* $\alpha \underset{FNC'}{=} \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n}$, *entonces* $\alpha \in B(\xi)$ *si y solo si* $\omega^{\alpha_1}, \ldots, \omega^{\alpha_n} \in B(\xi)$.
2. *Si* $\alpha \underset{FNV}{=} \varphi_\eta(\delta)$, *entonces* $\alpha \in B(\xi)$ *si y solo si* $\eta, \delta \in B(\xi)$.
3. *Si* $\alpha \underset{FNB}{=} \psi(\eta)$, *entonces* $\alpha \in B(\xi)$, *si y solo si valen* $\eta \in B(\xi)$ *y* $\eta < \xi$.

Demostración. Las vueltas son triviales. Además, los primeros dos ítems tienen una demostración a esta altura estándar, y la idea se encuentra en [Rat17b, pág. 9.11]. Demostremos el último:

Como $\psi(\eta) \in B(\xi)$, y $\psi(\xi) = B(\xi) \cap \Omega$, entonces $\psi(\eta) < \psi(\xi)$. Como ψ es monótona, entonces tenemos que $\eta < \xi$. Pero por definición de Forma Normal de Bachmann, $\eta \in B(\eta)$, que es subconjunto de $B(\xi)$; luego $\eta \in B(\xi)$. □

3.5.2. El alfabeto $\{0, \Omega, +, \varphi, \psi\}$

En lo que resta del capítulo vamos a dar una idea de cómo se puede construir un sistema notacional sobre $0, \Omega, +, \varphi, \psi$ basado en la Forma Normal de Bachmann.

El conjunto OT será el conjunto de ordinales que querremos codificar, y la función $G : \mathrm{OT} \to \mathbb{N}$ nos permitirá hacer inducción estructural en OT. Tanto OT como G son definidos a continuación:

Definición 3.5.4. *El conjunto* $OT \subseteq ON$ *y la función* $G : OT \to \mathbb{N}$ *se definen recursivamente:*

1. $0, \Omega \in OT, G(0) := G(\Omega) := 0.$
2. *Si* $\alpha \underset{FNC'}{=} \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n}$, *y* $\omega^{\alpha_1}, \ldots, \omega^{\alpha_n} \in OT$ *entonces:*
   $\alpha \in OT$ *y además* $G(\alpha) := \max\{G(\omega^{\alpha_1}), \ldots, G(\omega^{\alpha_n}) + 1\}$.[7]
3. *Si* $\alpha \underset{FNV}{=} \varphi_\eta(\delta)$, *y además* $\eta \geq 1, \eta, \delta \in OT$ *entonces* $\alpha \in OT$ *y* $G(\alpha) := \max\{G(\eta), G(\delta)\} + 1$.

[7] Notar que aquí la base ω no juega casi ningún rol. Esta regla dice, principalmente, que OT es cerrado por sumas. Usamos la Forma Normal de Cantor por conveniencia.

4. *Si* $\alpha = \omega^\beta$, *y* $\beta > \Omega, \beta \in OT$, *entonces* $\alpha \in OT$ *y* $G(\alpha) := G(\beta) + 1$.

5. *Si* $\alpha \underset{FNB}{=} \psi(\eta)$ *y* $\eta \in OT$ *entonces* $\alpha \in OT$ *y* $G(\alpha) := G(\eta) + 1$.

Se puede chequear, usando la unicidad de la FNC y la FNV, y resultados de esta sección, que todo $\alpha \in$ OT entra al conjunto de acuerdo a exactamente una de las reglas [Rat17b]. Luego G está bien definida, y OT puede ser visto como un conjunto de términos compuestos por los símbolos $0, \Omega, +, \varphi$ de manera única (representando a ω^α como $\varphi_0(\alpha)$). También necesitamos una *receta* para saber si una palabra en el alfabeto realmente pertenece a OT. La mayor dificultad es la última regla, ya que la Forma Normal de Bachmann pide que $\eta \in B(\eta)$. ¿Cómo chequear que una palabra cumpla esto?

Definición 3.5.5. *Definimos la función* $K : OT \to ON$ *(por 'Koeffizienten', i.e., coeficientes) de manera recursiva para* $\alpha \in OT$*:*

1. $K(0) = K(\Omega) = \emptyset$.

2. *Si* $\alpha \underset{FNC'}{=} \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n}$ *y* $n > 1, K(\alpha) := K(\omega^{\alpha_1}) \cup \cdots \cup K(\omega^{\alpha_n})$.

3. *Si* $\alpha \underset{FNV}{=} \varphi_\eta(\delta), K(\alpha) := K(\eta) \cup K(\delta)$.

4. *Si* $\alpha \underset{FNB}{=} \psi(\eta)$, *entonces* $K(\alpha) := K(\eta) \cup \{\eta\}$.

Observación 3.5.6. *Como todo* $\alpha \in OT$ *surge de finitas aplicaciones de las reglas que definen* OT*, entonces* $\forall \alpha \in OT, K(\alpha)$ *es siempre un conjunto finito. Esto se puede probar por inducción en* n*, para* $n := G(\alpha)$.

Lema 3.5.7. *Si* $\alpha \in OT$*, entonces* $\forall \beta \in K(\alpha)$*, vale que* $G(\beta) < G(\alpha)$.

Demostración. Se puede ver por inducción en $G(\alpha)$. □

Lema 3.5.8. *Sea* $\alpha \in OT, \rho \in ON$*. Entonces* $\alpha \in B(\rho) \Leftrightarrow K(\alpha) \subseteq \rho$.

Demostración.

Procedemos por inducción en $G(\alpha)$. Si $G(\alpha) = 0$ entonces $\alpha = 0$ ó $\alpha = \Omega$ y lo que hay que ver es trivial. Supongamos que $G(\alpha) > 0$:

- Si $\alpha \underset{\text{FNC'}}{=} \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n}$, con $n > 1$, entonces $\alpha \in B(\rho) \Leftrightarrow \omega^{\alpha_1}, \ldots, \omega^{\alpha_n} \in B(\rho)$, por el Lema 3.5.3.

  Supongamos que $\alpha \in B(\rho)$. Entonces $\forall\ 1 \leq i \leq n, \omega^{\alpha_i} \in B(\rho)$. Ahora bien, para cada i, $G(\alpha) > G(\omega^{\alpha_i})$. Luego, por H.I., para cada i tenemos que $K(\omega^{\alpha_i}) \subseteq \rho$. Por lo tanto, por definición de $K(\alpha)$, $K(\alpha) \subseteq \rho$.

  Para ver la vuelta, supongamos que $K(\alpha) \in \rho$. Luego para cada i, $K(\omega^{\alpha_i}) \subseteq \rho$. Entonces, por H.I., para cada i tenemos que $\omega^{\alpha_i} \in B(\rho)$. Luego como $B(\rho)$ es cerrado por sumas, tenemos que $\alpha \in B(\rho)$.

- El caso $\alpha \underset{\text{FNV}}{=} \varphi_\eta(\delta)$ es análogo.

- Supongamos que $\alpha \underset{\text{FNB}}{=} \psi(\eta)$. Este caso también es análogo al resto, pero demostrémoslo por motivos didácticos. Nuevamente, por el Lema 3.5.3, $\alpha \in B(\rho) \Leftrightarrow \Big(\eta \in B(\rho) \text{ y } \eta < \rho\Big)$.

  Supongamos que $\alpha \in B(\rho)$. Entonces $\eta \in B(\rho)$, y luego por hipótesis inductiva $K(\eta) \subseteq \rho$. Además, como $\eta \in \rho$, tenemos que $K(\alpha)$, que por definición es $K(\eta) \cup \{\rho\}$, también está contenido en ρ.

  Para ver la vuelta, supongamos que $K(\alpha) \subseteq \rho$. Entonces $K(\eta) \cup \{\eta\} \subseteq \rho$. Luego, por hipótesis inductiva, $\eta \in B(\rho)$. Como además tenemos que $\eta < \rho$, por definición de $B(\rho)$ tenemos que $\psi(\eta) \in B(\rho)$, i.e., $\alpha \in B(\rho)$, que era lo que queríamos ver. □

Corolario 3.5.9. *$\alpha \underset{FNB}{=} \psi(\eta) \Leftrightarrow \alpha = \psi(\eta)$ y $K(\eta) \subseteq \eta$.*

Es decir, las funciones K nos permiten decidir cuando una expresión que usa $0, \Omega, +, \varphi$ está bien formada. Notemos que los elementos de OT se pueden expresar de manera finita usando los símbolos $0, \Omega, +, \varphi, \psi$. Por otro lado, para cada $\alpha \in \mathrm{OT}$, tenemos que $K(\alpha)$ es un conjunto *finito* de elementos de OT.

Se pueden codificar tanto a OT como a $K(\mathrm{OT})$ utilizando números naturales. Más aun, esto se puede hacer de un modo que las imágenes de estas codificaciones sean primitivas recursivas [Poh08, Sec. 9.6.7]. Más aun, se obtiene un criterio de comparación primitivo recursivo [Rat17b, Lema 9.17]. Aunque requiere algo más de trabajo, comparte similitudes con lo hecho en § 1.2.2.1 para la Forma Normal de Cantor. Se trabaja con una recursión simultánea, y para cada α, debemos codificar a $K(\alpha)$ como una *lista*. Preferimos cerrar el capítulo respondiendo la siguiente pregunta:

Pregunta 3.5.10. *¿Qué ordinales* captura *OT?*

3.5.3. La longitud de OT

OT debe ser un conjunto numerable porque sólo usamos finitos símbolos para representar a sus ordinales. ¿Hasta dónde llega?

Según [Rat17b], vale que $\mathrm{OT} \subseteq B(\varepsilon_{\Omega+1}) \cap \varepsilon_{\Omega+1}$. Sin embargo, el resultado es incorrecto. La razón de esto es bastante simple: $\varepsilon_{\Omega+1} \notin B(\varepsilon_{\Omega+1}) \cap \varepsilon_{\Omega+1}$ y sin embargo $\varepsilon_{\Omega+1}$ es simplemente $\varphi_1(\Omega+1)$ y por lo tanto está en OT. Sospechamos que tal vez la confusión se debió a que, como hay una variante de la función ψ que no permite utilizar a las funciones de Veblen en los 'sitios de construcción' $B(\alpha)$, en *ese* caso sí se obtiene el resultado enunciado en el libro.

Intentemos corregir el error. ¿Qué debe cumplir un ordinal Ξ para que $\mathrm{OT} \subseteq B(\Xi) \cap \Xi$?

Pidamos progresivamente condiciones sobre Ξ para ver que, por inducción en $G(\alpha)$, todo $\alpha \in \mathrm{OT}$ cumple que $\alpha \in B(\Xi) \cap \Xi$.

- Sea $\alpha \in \mathrm{OT}$ tal $G(\alpha) = 0$. Tenemos que $\forall \Xi$, vale que $0, \Omega \in B(\Xi)$. Por otro lado, $\Omega \in \Xi \Leftrightarrow \Xi > \Omega$.

  Remarcamos:

  Primera condición (obligatoria para este caso): $\Xi > \Omega$.

- Supongamos que $\alpha \underset{\text{FNC'}}{=} \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n}$, y que $\forall 1 \leq i \leq n, \omega^{\alpha_i} \in B(\Xi) \cap \Xi$. Necesitamos que $\alpha \in B(\Xi) \cap \Xi$. Tenemos que $B(\Xi)$ es siempre cerrado por sumas; el problema es Ξ. Es suficiente pedir que Ξ también sea cerrado por sumas. Por el Lema 3.3.1, esto es equivalente a pedir que $\Xi = \omega^\xi$ para algún ξ.

  Segunda condición (suficiente para este caso): $\exists \xi$ tal que $\Xi = \omega^\xi$.

- Supongamos que $\alpha = \varphi_\eta(\delta)$, con $\eta, \delta \in B(\Xi) \cap \Xi$. Trivialmente, $\alpha \in B(\Xi)$. Para tener que $\alpha \in \Xi$, es suficiente pedir que $\Xi \in \mathrm{SC}$, i.e., $\Xi = \Gamma_\rho$ para algún ρ. Notar que esto ya cubre la condición anterior, ya que todo 'Strongly Critical ordinal' es imagen de una función de Veblen y por lo tanto un 'Critical ordinal', i.e., un punto fijo de $\alpha \mapsto \omega^\alpha$, y por lo tanto ω^ξ para algún ξ.

  Tercera condición (suficiente para este caso): $\exists \rho$ tal que $\Xi = \Gamma_\rho$.

- Supongamos que $\alpha = \omega^\beta$, con $\beta > \Omega$ y $\beta \in B(\Xi) \cap \Xi$. Como $\beta \in B(\Xi)$ y este conjunto es cerrado por $\alpha \mapsto \omega^\alpha$, tenemos que $\alpha \in B(\Xi)$. Además, por la tercera condición, Ξ es cerrado por $\beta_1, \beta_2 \mapsto \varphi_{\beta_1}(\beta_2)$. En particular, es cerrado por la función $\alpha \mapsto \omega^\alpha$, que es φ_0. Luego $\alpha \in \Xi$.

- Supongamos que $\alpha \underset{\text{FNB}}{=} \psi(\eta)$, con $\eta \in B(\Xi) \cap \Xi$. Trivialmente, como α debe ser numerable y Ξ no (por la primera condición), tenemos que $\alpha \in \Xi$. Por otro lado, como $\eta \in B(\Xi)$ y $\eta \in \Xi$, tenemos que, por definición de $B(\Xi)$, $\alpha = \psi(\eta) \in B(\Xi)$.

Afirmamos que $\Gamma_{\Omega+1} = \text{mín}\{\Xi : \Xi \geq \Omega \wedge \exists \rho \text{ tal que } \Xi = \Gamma_\rho\}$. Para probar esto, necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.5.11. $\Gamma_\Omega = \Omega$.

Demostración. Veamos, en primer lugar, por inducción transfinita en ξ, que $\forall \xi < \Omega, \mathrm{Enum}_{SC}(\xi)$ es numerable. Recordemos que $\mathrm{Enum}_{SC}(\xi)$ es la derivada de la función $f(\xi) := \xi \mapsto \varphi_\xi(0)$. Luego $f'(\xi) := \mathrm{Enum}_{SC}(\xi)$.

- $\varphi_1(0) = \varepsilon_0$, que es numerable.

- Supongamos que $f'(\xi)$ es numerable. Por la Proposición 1.3.11, tenemos que o bien$f'(\xi + 1) = f'(\xi) + 1$ ó $f'(\xi+1) = f^\omega(f'(\xi)+1)$. En el primer caso, trivialmente $f'(\xi+1)$ es numerable. En el segundo, al ser el límite de una *sucesión* creciente de ordinales, obtenemos que es numerable (por ser unión numerable de ordinales numerables).

- Sea ξ un ordinal límite y supongamos que $\forall \xi_0 < \xi, f'(\xi_0)$ es numerable. Por continuidad de $f', f'(\alpha) = \lim\limits_{\xi_0 < \xi} f'(\xi_0)$. Es decir, es el límite de una red no decreciente de ordinales. Como la red está indexada por $\{\xi_0 : \xi_0 \in \xi\}$, que es un conjunto numerable, concluimos que $f'(\xi)$ también es numerable.

La función $\mathrm{Enum}_{\mathrm{SC}}(\xi) = \Gamma_\xi$ es normal por ser la derivada de una función normal. Luego es continua, y estrictamente creciente. Además es inflacionaria por ser monótona. Por lo tanto, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{llll} \xi & \leq \mathrm{Enum}_{\mathrm{SC}}(\xi) & \leq \Omega & \forall \xi < \Omega \\ \big\downarrow & \quad {\scriptstyle \xi\to\Omega}\big\downarrow & \big\| & \\ \Omega & \leq \mathrm{Enum}_{\mathrm{SC}}(\Omega) & \leq \Omega & \end{array}$$

Por lo tanto $\Gamma_\Omega = \Omega$. □

Corolario 3.5.12. *Por definición, tenemos que* $\Gamma_{\Omega+1} = \text{mín}\{\Xi : \Xi > \Omega$ *y* $\Xi \in SC\}$.

Luego, $\mathrm{OT} \subseteq B(\Gamma_{\Omega+1}) \cap \Gamma_{\Omega+1}$.

Pregunta 3.5.13. *¿Vale la igualdad?*

Sí, la igualdad vale. La demostración se sostiene sobre un resultado un tanto técnico al que vamos a bordear. Nuestro objetivo es demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}, B^n(\Gamma_{\Omega+1}) \cap \Gamma_{\Omega+1} \subseteq \mathrm{OT}$, ya que esto mostraría que $B(\Gamma_{\Omega+1}) \cap \Gamma_{\Omega+1} \subseteq \mathrm{OT}$. Notemos que las reglas de construcción de $B(\Gamma_{\Omega+1})$ son muy similares a las de OT. La diferencia principal consiste en la regla 5 de OT: si $\eta \in \mathrm{OT}$, para que $\psi(\eta) \in \mathrm{OT}$ necesitamos que *además* $\eta \in B(\eta)$. Esto es un problema.

Para solucionarlo, tenemos que entender un poco qué tiene de especial $\Gamma_{\Omega+1}$.

Lema 3.5.14. *Existe una secuencia fundamental* $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *para* $\Gamma_{\Omega+1}$ *tal que* $\forall \alpha \in ON$*, vale que* $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(\alpha)$.

Demostración.

Por el Lema 3.5.11, $\mathrm{Enum}_{\mathrm{SC}}(\Omega) = \Omega$, i.e., Ω es un punto fijo de la función $\alpha \mapsto \varphi_\alpha(0)$. Además, $\Omega + 1$ *no* es punto fijo de la misma función, ya que esto es equivalente a pertenecer a SC y vale que $\Omega + 1 \leq \varphi_\Omega(1)$. Luego, por la Proposición 1.3.11, el *siguiente* punto fijo de la función, i.e., $\Gamma_{\Omega+1}$, es el límite de la sucesión $\gamma_0 := \Omega + 1, \gamma_{n+1} := \varphi_{\gamma_n}(0)$. Veamos, por inducción en $n \in \mathbb{N}$, que $\forall \alpha \in \mathrm{ON}, \gamma_n \in B(\alpha)$.

- Trivialmente $\forall \alpha \in \mathrm{ON}, \gamma_0 \in B(\alpha)$.
- Supongamos que $\forall \alpha \in \mathrm{ON}, \gamma_n \in B(\alpha)$. Entonces $\gamma_{n+1} \in B(\alpha)$ ya que este conjunto es cerrado por $\xi, \eta \mapsto \varphi_\xi(\eta)$. □

Cuando demostremos que $\forall n \in \mathbb{N}, B^n(\Gamma_{\Omega+1}) \cap \Gamma_{\Omega+1} \subseteq \mathrm{OT}$, al separar en casos, si $\alpha = \psi(\eta)$, con $\eta \in B^n(\Gamma_{\Omega+1}) \cap \Gamma_{\Omega+1}$, necesitamos que η pueda ser reemplazado por otro ordinal η_{FN} tal que $\alpha \underset{\mathrm{FNB}}{=} \psi(\eta_{FN})$, con $\eta_{FN} \in B^n(\Gamma_{\Omega+1}) \cap \Gamma_{\Omega+1}$. De esta manera, podremos obtener que $\alpha \in \mathrm{OT}$.

Lema 3.5.15. *Para cada ordinal* $\eta < \Gamma_{\Omega+1}$*, existe un (único) ordinal* η_{FN} *tal que* $\psi(\eta) \underset{FNB}{=} \psi(\eta_{FN})$.

Demostración. Como la Forma Normal de Bachmann es única, basta ver que existe *algún* ordinal η_{FN} que cumpla lo deseado.

Sea $\eta < \Gamma_{\Omega+1}$ y definamos $\eta_{FN} := \text{mín}\{\delta \in B(\alpha) : \eta \leq \delta\}$. Por el Lema 3.5.14, el conjunto es no vacío (al existir una sucesión *no acotada* en $B(\alpha)$) y por lo tanto η_{FN}) está bien definido.

Por definición, $[\eta, \eta_{FN}) \cap B(\eta) = \emptyset$. Luego, por el Lema 3.2.4, $B(\eta) = B(\eta_{FN})$, y por lo tanto $\eta_{FN} \in B(\eta_{FN})$ y además $\psi(\eta) = \psi(\eta_{FN})$. Es decir, $\psi(\eta) \underset{\mathrm{FNB}}{=} \psi(\eta_{FN})$. □

Este lema todavía no es suficiente. Si $\eta \in B^n(\Gamma_{\Omega+1}) \cap \Gamma_{\Omega+1}$, ¿qué nos dice que $\eta_{FN} \in B(\Gamma_{\Omega+1}) \cap \Gamma_{\Omega+1}$? Ese es el hecho que omitiremos:

Lema 3.5.16. *[Poh08, Lema 9.6.2] Sea $\delta(\eta) := \eta_{FN}$. Entonces, $\forall \eta < \Gamma_{\Omega+1}$, si $\eta \in B^n(\Gamma_{\Omega+1})$, entonces $\delta(\eta) \in B^n(\Gamma_{\Omega+1})$.*

Esquivando la demostración de este último lema, podemos demostrar lo siguiente:

Teorema 3.5.17. *$B(\Gamma_{\Omega+1}) \cap \Gamma_{\Omega+1} \subseteq OT$*

Demostración. Veamos, por inducción en $n \in \mathbb{N}$, que $\forall n \in \mathbb{N}, B^n(\Gamma_{\Omega+1}) \cap \Gamma_{\Omega+1} \subseteq \mathrm{OT}$.

- $B^0(\Gamma_{\Omega+1}) \cap \Gamma_{\Omega+1} = \{0, \Omega\} \cap \Gamma_{\Omega+1} = \{0, \Omega\} \subseteq \mathrm{OT}$ trivialmente.
- Sea $n + 1 > 0$ y $\alpha \in B^{n+1}(\Gamma_{\Omega+1}) \cap \Gamma_{\Omega+1}$. Separemos en casos:
  - Supongamos que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, con $\alpha_1, \alpha_2 \in B^n(\Gamma_{\Omega+1})$. Por hipótesis inductiva, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{OT}$, así que $\alpha \in \mathrm{OT}$ porque el conjunto es cerrado por sumas.
  - Es análogo el caso $\alpha = \varphi_\xi(\eta)$.
  - Supongamos que $\alpha = \psi(\eta)$, con $\eta \in B^n(\Gamma_{\Omega+1}), \xi < \Gamma_{\Omega+1}$. Nos gustaría afirmar que entonces $\alpha \in \mathrm{OT}$, pero para ello necesitamos que α esté expresado en la Forma Normal de Bachmann, i.e., necesitamos que $\eta \in B(\eta)$. Eso no necesariamente vale, pero por el Lema 3.5.16, tenemos que $\alpha \underset{\mathrm{FNB}}{=} \psi(\eta_{FN})$, con $\eta_{FN} \in B^n(\Gamma_{\Omega+1})$. Luego por H.I. vale que $\eta_{FN} \in \mathrm{OT}$ y por lo tanto $\alpha \in \mathrm{OT}$.

Esto concluye la demostración. □

Corolario 3.5.18. *$OT = B(\Gamma_{\Omega+1}) \cap \Gamma_{\Omega+1}$.*

Capítulo 4

Palabras Finales

Luego de Bachmann, como bien cuenta Buchholz en [Buc17], la historia se vuelve un poco complicada. A medida que uno construye notaciones de ordinales más complejas, se vuelven difíciles[1] de comprender desde un punto de vista puramente *sintáctico*. La Forma Normal de Bachmann tal vez *ya es* un ejemplo de esto. Es por eso que nos detenemos aquí.

Muchas veces se llega al punto en el que no tiene ningún sentido presentar una notación de ordinales sin darle alguna semántica. Es el uso de las notaciones para entender *otros* objetos matemáticos lo que les da sustancia y sentido a los primeros.

4.1. Trabajo Futuro

Ordinal Analysis Planteamos que una posible continuación de esta tesis de licenciatura es el uso de un sistema notacional de ordinales para el análisis de una teoría axiomática. La aritmética de Peano es una buena candidata [Poh08]; KP, una teoría no predicativa un tanto simple, que necesita el uso de la Forma Normal de Bachmann, es otra. [Rat17b]

Notaciones más complejas Otra opción es sumergirse en los Klammersymbols de Schütte [Buc16] [Sim], que dan una conexión entre las funciones de Veblen y el método impredicativo de Bachmann.

Sobre notaciones y secuencias fundamentales Repetimos la Pregunta 2.4.5 que nos quedó: ¿se puede motivar aun más la relación entre secuencias fundamentales y notaciones de ordinales por medio de una correspondencia biunívoca?

Un esquema recursivo para las funciones computables totales El esquema de construcción de funciones primitivas recursivas es *efectivo*: cada función primitiva recursiva se obtiene a partir de un número finito de aplicaciones de esquemas de recursión primitiva y composición de las funciones iniciales, como describimos en la Definición 1.2.7. Esto permite asignarle un código numérico a cada función primitiva recursiva. Más aun, se puede construir un programa universal que recibe un código n y un parámetro m que representa a una lista, y calcula la salida de la función primitiva recursiva de código n con entrada m.

[1] Con cómputos 'bastante horribles' [Rat06].

Sea TOT el conjunto de funciones que se corresponden con programas que nunca se indefinen. Por medio de una simple diagonalización, se puede ver que no se puede armar un programa universal para TOT. Luego uno puede imaginarse que entonces no debe haber un esquema *efectivo* de construcción de las funciones de TOT. La pregunta que nos surgió durante la tesis es si existe un esquema *recursivo*, pero *no efectivo* de construcción. Como mencionamos en la Definición 1.2.7, se puede definir una generalización de la recursión primitiva, que hace recursión en otro buen orden de los naturales - isomorfo a otro ordinal.[2] Además, ω_1 es no numerable mientras que el conjunto de programas es numerable. Luego, existe un mínimo ordinal no computable - llamado ω_1^{CK}. ¿Será suficiente recursión en *ese* ordinal, junto con composición, para generar a todas las funciones computables totales?

4.2. Conexiones

¿Qué conexiones tienen los ordinales con otras áreas de la matemática? Dejamos algunos ejemplos:

[Len+77] [Con00, Cap. 6] Se puede definir una generalización de la suma y el producto NIM sobre ω^{ω^ω} para *exhibir* la clausura algebraica de $\mathcal{F}_2$, i.e. el cuerpo finito de 2 elementos, donde se puede operar de manera efectiva.

[Cor11] O medir cierta propiedad de una familia de grupos.

[Wei14] Hay problemas combinatorios bien interesantes sobre ordinales.

[Wei05] También se puede usar combinatoria para dar resultados *sobre* ordinales.

Cerramos con una cita:

"On the banks of the Rhine, a beautiful castle had been standing for centuries. In the cellar of the castle, an intricate network of webbing had been constructed by the industrious spiders who lived there. One day, a great wind sprang up and destroyed the webs. Frantically, the spiders worked to repair the damage. For you see, they thought it was their webbing that was holding up the castle."

Thirty years ago, this charming tale was regularly told to students specializing in logic, to leave them in no doubt as to how their field was regarded by their fellow mathematicians. Nowadays, the 'spiders' are to be found all over the castle. Far from being obsessively concerned with providing a 'secure' foundation for mathematics, logicians freely use whatever mathematics they need.

Martin Davis, 1977, reseñando el libro 'Mathematical Logic', de Monk.

[2] Al igual que en la Proposición 2.3.1, en este caso *también* debemos restringirnos a buenos órdenes naturales para evitar contraejemplos artificiales. [Odi99, Ex. VIII.9.4]

Traducción libre:

"En las riberas del Rhine, un impactante castillo se erigía desde hace siglos. En la bodega, las arañas que vivían allí habían tejido una intrincada red. Un día surgió un gran viento y destruyó las telarañas. Frenéticamente, las arañas trabajaron para reparar el daño: ellas creían que era *la tela* la que sostenía al castillo."

Hace treinta años, esta simpática fábula era contada regularmente a estudiantes que se especializaban en lógica, con la intención de quitarles la duda en cuanto a cómo su campo era visto por los otros matemáticos.

Hoy en día estas 'arañas' se pueden ver por todo el castillo. En vez de obsesionarse con proveer un fundamento 'seguro' para las matemáticas, los lógicos usan sin hacerse problema cualquier herramienta matemática que necesiten.

Apéndice A

Matchsticks: una idea visual

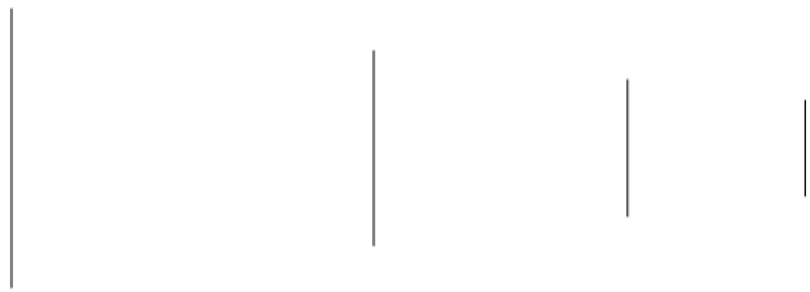
Uno se puede armar una idea gráfica de algunos ordinales. Por ejemplo, el ordinal $\mathbf{1} = \{0\}$ se puede graficar con una raya vertical o 'palote':

Para el ordinal $\mathbf{2} = \{0{,}1\}$ usamos dos palotes:

Como vamos a querer representar ordinales transfinitos, conviene que a partir de ahora comencemos a acortar la distancia entre los plalotes. Y para que la convergencia a un ordinal límite no se convierta en un rectángulo negro, conviene hacerlos cada vez más pequeños. Por ejemplo, así podemos representar el ordinal **3**:

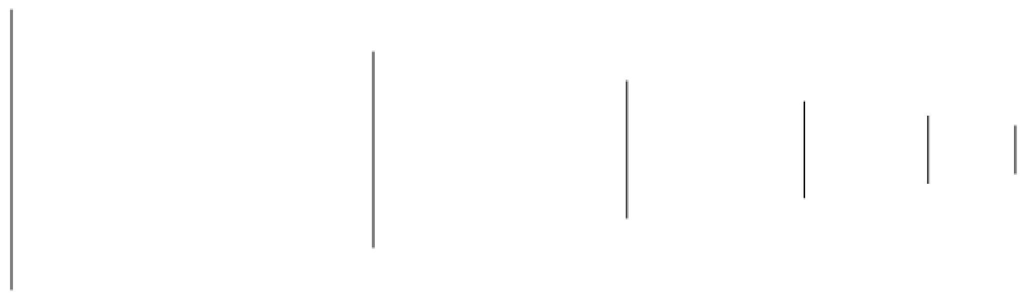
Achicando la distancia entre dos palotes consecutivos para que la suma de la distancias sea convergente (y entre en la hoja) se pueden representar todos los ordinales finitos.

Por ejemplo, acá está **4**:



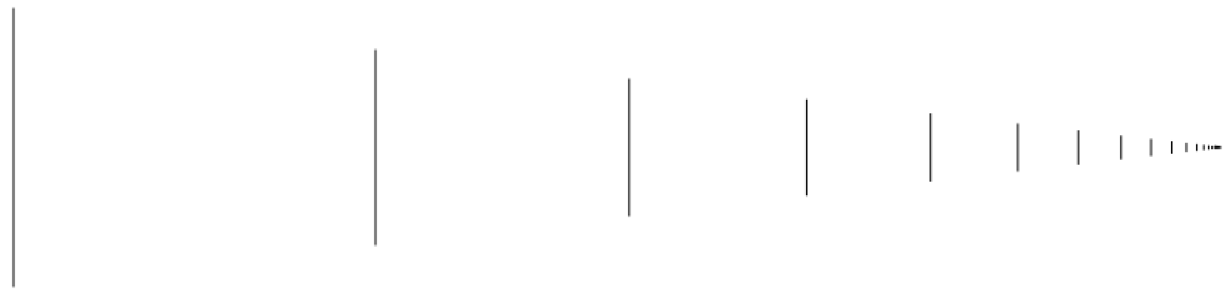
5:

6:

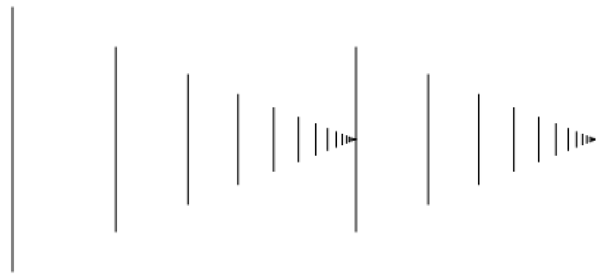


(Algunas páginas fueron omitidas en la versión final para hacer de ésta una tesis finita.)

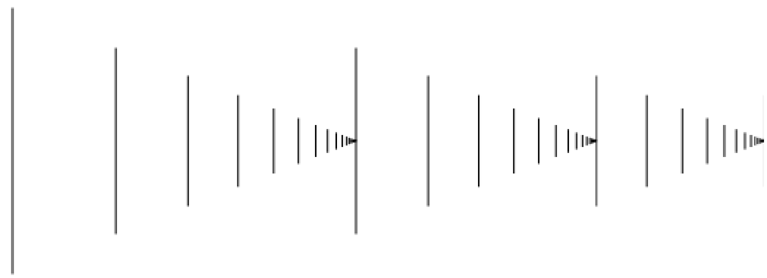
Así representamos a ω:



Pero esto no termina aquí, porque podemos achicar aun más la distancia entre los palotes para poder representar otros ordinales numerables. Por ejemplo, este es $\omega \cdot 2$:

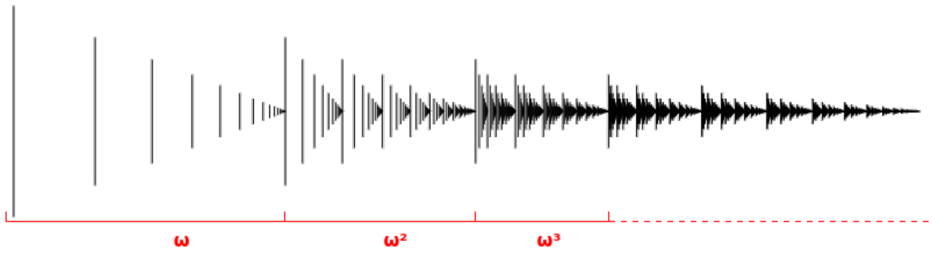


Y este, $\omega \cdot 3$:



Acá hay lo que en voz alta se diría “omega omegas puestos en fila", es decir, el ordinal ω^2:

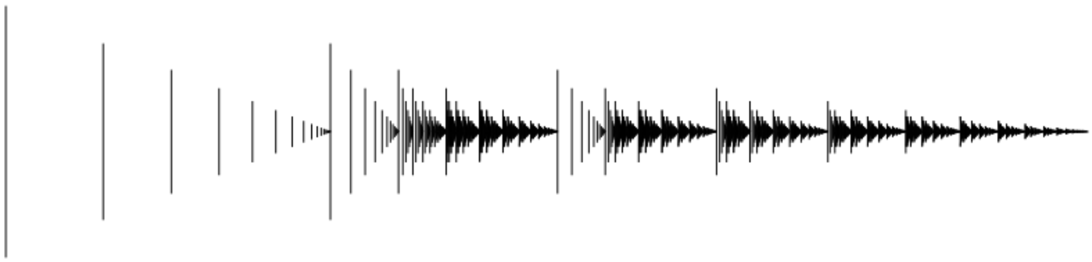
Representar al ordinal ω^ω es un poco más complicado:



Recordemos que $\omega^\omega = \underset{n<\omega}{lim}\ \omega^n$. Además, por lo visto en la demostración del Teorema 1.2.9, $\omega + \omega^2 + ... + \omega^n = \omega^n$.

Luego $\omega^\omega = \underset{n<\omega}{lim}(\omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n)$.

Según el programa interactivo [Mad11], éste es ε_0. No se entiende demasiado:



Y ni que hablar de ε_ω:

Uno pierde la esperanza de tener una representación visual de los ordinales muy pronto. Por suerte en ese momento las notaciones vienen al rescate.[1]

[1] De todas maneras, existe otro programa, ubicado en `http://stephenbrooks.org/archive/ordinals/`, que es espléndido.

Bibliografía

[Can72] Georg Cantor. “Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen”. En: *Mathematische Annalen* 5.1 (1872), págs. 123-132.

[BP05] René Baire y Richard J Pulskamp. “"Leçons sur les fonctions discontinués"(English translation)”. En: (1905).

[WR27] A.N. Whitehead y B. Russell. *Principia Mathematica*. Cambridge mathematical library. Cambridge University Press, 1927. ISBN: 9780521067911.

[Kle38] Stephen Cole Kleene. “On notation for ordinal numbers”. En: *The Journal of Symbolic Logic* 3.4 (1938), págs. 150-155.

[Bac50] Heinz Bachmann. “Die Normalfunktionen und das Problem der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen”. Tesis doct. Fretz, 1950.

[Sko56] Thoralf Skolem. “An ordered set of arithmetic functions representing the least ε-number”. En: *Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger* 29.12 (1956), págs. 54-59.

[Fef64] Solomon Feferman. “Systems of predicative analysis”. En: *The Journal of Symbolic Logic* 29.1 (1964), págs. 1-30.

[Kre67] Georg Kreisel. *Notes concerning the elements of proof theory*. UCLA, 1967.

[RR67] Hartley Rogers y H Rogers. *Theory of recursive functions and effective computability*. Vol. 5. McGraw-Hill New York, 1967.

[Ric69] Daniel Richardson. “Solution of the identity problem for integral exponential functions”. En: *Mathematical Logic Quarterly* 15.20-22 (1969), págs. 333-340.

[Gen72] Gerhard Gentzen. “The collected papers of Gerhard Gentzen”. En: *Journal of Symbolic Logic* (1972).

[Ehr73] Andrzej Ehrenfeucht. “Polynomial functions with exponentiation are well ordered”. En: *Algebra universalis* 3.1 (1973), págs. 261-262.

[Mar73] Charles Fontaine Martin. “Equational theories of natural numbers and transfinite ordinals”. Tesis doct. University of California, Berkeley, 1973.

[Mon73] J Donald Monk. “Introduction to set theory”. En: (1973).

[Lev75] Hilbert Levitz. “An ordered set of arithmetic functions representing the least ε-number”. En: *Mathematical Logic Quarterly* 21.1 (1975), págs. 115-120.

[Len+77] Hendrik Willem Lenstra y col. “On the algebraic closure of two”. En: (1977).

[Lev78] Hilbert Levitz. “An ordinal bound for the set of polynomial functions with exponentiation”. En: *Algebra Universalis* 8.1 (1978), págs. 233-243.

[SSS78] Lynn Arthur Steen, J Arthur Seebach y Lynn A Steen. *Counterexamples in topology.* Vol. 18. Springer, 1978.

[Cap88] P Cappello. “A new bijection between natural numbers and rooted trees”. En: *4th SIAM Conference on Discrete Mathematics.* Citeseer. 1988.

[DC89] Joseph W Dauben y I Corinthians. *Georg Cantor: The Battle for Transfinite Set Theory.* American Mathematical Society, 1989.

[Dau90] Joseph Warren Dauben. *Georg Cantor: His mathematics and philosophy of the infinite.* Princeton University Press, 1990, págs. 30-47.

[Van90] Walter P Van Stigt. *Brouwer's intuitionism.* North-Holland Amsterdam, 1990.

[SS92] Raymond M Smullyan y Raymond Smullyan. *Gödel's incompleteness theorems.* Oxford University Press on Demand, 1992.

[Fef93] Solomon Feferman. “What rests on what? The proof-theoretic analysis of mathematics”. En: *Philosophy of Mathematics. Proceedings of the Fifteenth International Wittgenstein-Symposium, Part.* Vol. 1. 1993, págs. 147-171.

[DSW94] Martin Davis, Ron Sigal y Elaine J Weyuker. *Computability, complexity, and languages: fundamentals of theoretical computer science.* Elsevier, 1994.

[Jan95] Ignacio Jané. “The role of the absolute infinite in Cantor's conception of set”. En: *Erkenntnis* 42.3 (1995), págs. 375-402.

[CT99] S Barry Cooper y John K Truss. *Sets and proofs.* Cambridge University Press, 1999.

[HJ99] Karel Hrbacek y Thomas Jech. *Introduction to Set Theory, Revised and Expanded.* Crc Press, 1999.

[Odi99] Piergiorgio Odifreddi. *Classical recursion theory, Volume II.* Elsevier, 1999.

[Con00] John H Conway. *On numbers and games.* AK Peters/CRC Press, 2000.

[Sol03] Robert M Solovay. “A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable”. En: *Mathematical Logic In The 20th Century.* World Scientific, 2003, págs. 480-535.

[S+05] Stewart Shapiro, William J Wainwright y col. *The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic.* OUP USA, 2005.

[Wei05] Andreas Weiermann. “Analytic combinatorics, proof-theoretic ordinals, and phase transitions for independence results”. En: *Annals of Pure and Applied Logic* 136.1-2 (2005), pág. 189.

[Rat06] Michael Rathjen. “The art of ordinal analysis”. En: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians.* Vol. 2. 2006, págs. 45-69.

[Att07] van Atten et al. “One Hundred Years of Intuitionism (1907-2007)”. En: Springer. 2007.

[Poh08] Wolfram Pohlers. *Proof theory: The first step into impredicativity.* Springer Science & Business Media, 2008.

[Bar09] Mathias Barra. “Notes on small inductively defined classes and the majorisation relation”. En: (2009).

[Poh09] Wolfram Pohlers. *Proof theory: an introduction.* Vol. 1407. Springer, 2009.

[For10] Thomas Forster. "A tutorial on countable ordinals". En: *Disponible en https://www.dpmms.cam.ac. fundamentalsequence.pdf* (2010).

[Cai11] Andres E. Caicedo. *Proof theoretic ordinal.* Math Overflow. 2011. URL: `https://mathoverflow.net/q/52927`.

[Cor11] Yves Cornulier. "On the Cantor-Bendixson rank of metabelian groups (Sur le rang de Cantor-Bendixson des groupes métabéliens)". En: *Annales de l'institut Fourier.* Vol. 61. 2. 2011, págs. 593-618.

[Mad11] David Madore. *Ordinal representations.* `http://www.madore.org/%7Edavid/math/drawordinals.html#?v=eee`. 2011.

[Hal12] Benjamin Hale. *Philosophy looks at chess.* Open court, 2012.

[Ruc13] Rudy Rucker. *Infinity and the mind: The science and philosophy of the infinite.* Princeton University Press, 2013.

[Kun14] Kenneth Kunen. *Set theory an introduction to independence proofs.* Vol. 102. Elsevier, 2014.

[Sim14] Harold Simmons. *Examples of the Cantor-Bendixson process on the reals.* 2014.

[Wei14] Thilo V Weinert. "Idiosynchromatic poetry". En: *Combinatorica* 34.6 (2014), págs. 707-742.

[Bae16] John Carlos Baez. *Veblen several parameters.* `https://johncarlosbaez.wordpress.com/2016/07/07/large-countable-ordinals-part-3/`. 2016.

[Buc16] Wilfried Buchholz. "A survey on ordinal notations around the Bachmann-Howard ordinal". En: *Advances in Proof Theory.* Springer, 2016, págs. 1-29.

[Buc17] Wilfried Buchholz. "A Survey on Ordinal Notations Around the Bachmann–Howard Ordinal". En: *Feferman on Foundations.* Springer, 2017, págs. 71-100.

[Rat17a] Michael Rathjen. Comunicación Personal. 3 de nov. de 2017.

[Rat17b] Michael Rathjen. "Proof Theory". No publicado (en proceso de escritura). 2017.

[Poh18] Wolfram Pohlers. Comunicación Personal. Jul. de 2018.

[OEI] OEIS. *The Primeth Sequence.* `https://oeis.org/A007097`.

[Sim] Harold Simmons. *Generating ordinal notations from below with a non-recursive construction of the Schütte brackets.* `www.cs.man.ac.uk/~hsimmons/`.

Algunos términos importantes

B Los *sitios de construcción* de la función ψ. 74

Club (i.e. cerrado y no acotado en ON). 43

Consistencia . 61

ε_0 (Se lee 'épsilon cero'.) El primer punto fijo de la función $\alpha \mapsto \omega^\alpha$. 22

Familia de Secuencias Fundamentales . 67

Función Enumeradora . 41

Función Normal (i.e. creciente y continua). 42

Γ_0 (Se lee 'Gamma cero'.) El primer punto fijo de la función $\alpha \mapsto \varphi_\alpha(0)$. 58

LIM La subclase de todos los ordinales límite. 46

NT . 64

ω (Se lee 'omega') El primer ordinal transfinito. 5

Ω (Se lee 'Omega') Un renombre para ω_1. 74

ω_1 (Se lee 'omega uno') El primer ordinal no numerable. 23

ON La clase de todos los ordinales. 9

Ordinal Collapsing Function La función del método de Bachmann. 74

φ_α (Se lee 'fi alfa'.) Las funciones de Veblen. 52

PRA (Primitive Recursive Arithmetic). 64

ψ (Se lee 'psi'.) La 'ordinal collapsing function'. 74

SC (Strongly Critical ordinals). 56

Secuencia Fundamental para α Sucesión que converge a un ordinal α. 66

$|T|_{Con}$ La definición ingenua de ordinal de una teoría axiomática. 64