



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

MODELOS DE FORMACIÓN DE OPINIÓN

Lucía Pedraza

Director: Juan Pablo Pinasco

Marzo de 2018

A la educación pública.

A lxs que luchan por defenderla.

A lxs que luchan por transformarla.

Agradecimientos

A Juan Pablo que aceptó acompañarme a escribir esta tesis, aunque yo estaba convencida que era imposible. Que me encontró un tema interesantísimo y me revivió la curiosidad inicial con la que arranqué la carrera. Porque gracias a su paciencia y calma pude hacer esta tesis en tiempo y forma sin desesperarme e incluso disfrutarla mucho. A Pablo que me dió el empujón que necesitaba para hacer el doctorado, y por lo que viene. A los jurados, a Mayte por leer, comentar y sugerir con dedicación, a Nicolás que acercó la idea inicial y me ayudó a entenderla.

A mis papás, Susana y Juan Carlos, por siempre bancarme en todas las decisiones que tomé. Por apoyarme y acompañarme. Por dejarme ser libre, pero sobre todo, por enseñarme a serlo. A Marce. Hay gente que tiene un hermano compinche, otras que tienen buenos amigos en los que confiar y algunos tienen compañeros con los que compartir un proyecto. Pero somos pocos, los que podemos darnos el lujo de tener tres en uno. A la multitud de primos, primas, tías y tios. A Noemí y Eva, abuelas complementarias y maravillosas.

A las pibas, por siempre estar. Porque a pesar de estar tapadas de cosas, proyectos, responsabilidades e ideas sé que siempre puedo contar con ellas. A Jule, por estar siempre, siempre. Incluso estando a miles de kilómetros arreglarsela para ayudarme en todo lo que necesité y que sienta como si hoy estuviera acá. A Maru, por tirar siempre la posta. Por siempre estar buscando cómo construir un mundo mejor. Por enseñarnos a hacerlo. A Meli, a la Rosca, a Jaz que siempre son una oreja y un cable a tierra en forma de birra, de mate, de viaje o de cenita.

A las Olimpíadas, que me enseñaron que ser ñoña no era un problema, y que me hicieron conocer muchísima gente que le interesaban cosas parecidas a mí. A los verdes y los no verdes, (ya no me acuerdo quién era quién). A Mati y a Rago que además se convirtieron en grandes amigos.

A un montón de gente con la que compartí clases, intervalos y tardes de estudio en una cursada algo desordenada. A Santi que me incorporó en el mundo del DM, y que además me convenció que teníamos que organizarnos e inventar algo como Conjunto Abierto. Al resto de los vices, que a pesar que tire fantasmeadas, siempre están dispuestos a recibirme. A Tincho, Mateo, Luz, Chebi, Rafa, Mateo, Santi V, Fede. A Carlo y a Manu por siempre estar en la facu para compartir un mate, un consejo, un abrazo o una sonrisa.

A los muy buenos docentes que tuve. Con los que compartí el aula sentada desde el banco, y también con los que compartí el pizarrón. A todos y todas los que me enseñaron a ser docente y disfrutar esa actividad.

Al FEM!. A todos y todas los que lo conforman, los que lo conformaron y seguramente a los y las que lo conformarán. Por enseñarme que a la facultad no se venía solo a estudiar y por ser ese espacio que necesitaba para defender lo que me parecía bien, y transformar lo que me parecía mal. Por enseñarme mucho muchísimo. Hoy paso a ser licenciada, pero en mi paso por la facultad aprendí mucho más que matemática. Aprendí que nada se logra sola, y que para hacer cosas que sirvan hay que trabajar en equipo. Aprendí a ser crítica de la realidad que nos rodea, a pensar que nada es así que las cosas están así y que tenemos que cambiarlas. Que la ciencia no es neutral, y que entonces tengo que pensar qué tipo de ciencia quiero hacer. Que las y los estudiantes, los y las científicxs tenemos una fuerza enorme. A los que ya estaban cuando llegué, y me enseñaron a militar. A Axel, Flor, Fiore, Santi, Euge, Cani, Lipa, Charly, Manu, Safo, Nico. A los muchos y muchas con los que atravesé la militancia, desafíos, plenarios, varias elecciones, ideas, victorias, derrotas y abrazos caracol. A Pablo, Muerto, Somodi, Sebas, Manu, Santi, Nico P, Flai, Jessi, Romi, Eric, Guille, Abril, Lenny, Charly, Bade, Tomi, Tobi, Otto, Miru, Chab. A Caro, por siempre sumar su grado de humanidad. A Maia, por el empuje y la energía contagiosa que le pone a todo. A Ale por recordar cada tanto que hay que bajar un poco y disfrutar de la vida. A Tavo, porque aprendiendo a trabajar juntos aprendimos a querernos mucho. A Eze, por enseñarme que hay que hay que soñar pero con la convicción en nuestros sueños, por todo lo que soñamos y por todo lo que creemos. A Agus, por permitirme atravesar todo esto acompañada. Porque cuando asumimos desafíos juntos, nada me parece tan difícil. Y por siempre estar para darme el abrazo o el dale dale que hace falta.

A la Mella y a Patria Grande por ser el espacio político que elijo para cambiar el mundo y la Argentina. A un montón de gente que conocí y me enseñan todos los días con el ejemplo cómo es eso de apostar la vida por un proyecto. A ser militante para siempre pero también a vivir siendo militante. A Maga, Eva, Adri, Euge, Lipa, Freya, Rene, Clara, las Flors, Reni, Sela, Chapa, Nano y tantxs otrxs. A los que me aguantaron estos últimos meses de tesis. A las bandas de Cambium y el CBC. Al grupete de optimización que le metió ritmo para terminar el TP a tiempo.

A Exactas. Porque atraviesa mi vida desde mis nueve meses (o capaz que desde antes). Porque lo va a seguir haciendo. Porque es un lugar con personas maravillosas donde lo ñoño, la ciencia y el conocimiento se juntan con lo humano.

Hoy me estoy recibiendo gracias a que en mi casa siempre se apostó a la educación pública como el espacio para entender y aprender el mundo. Por que tuve un montón de herramientas, porque pude acceder y permanecer en la UBA. Pero también sé que muchos y muchas no tienen este privilegio, que debería ser un derecho. Por eso esta tesis es a la educación pública, a los y las que luchan por defenderla y a los y las que luchan por transformarla.

Índice general

Agradecimientos	III
1. Introducción	1
2. Toma de decisiones a partir de la opinión de varios expertos.	3
2.1. Algunas propiedades deseables	4
2.2. Métodos matemáticos	4
2.2.1. Medias ponderadas	5
2.2.2. Métodos bayesianos	8
2.3. Métodos de comportamiento	9
2.3.1. Leyes de Impacto Social	9
3. Algunos elementos de los Modelos de Opinión	11
3.1. Ingredientes de los modelos de opinión	11
3.2. Interacciones en modelos continuos	15
3.3. Evolución de la opinión	17
3.3.1. Pasaje a una ecuación en derivadas parciales para la densidad	17
3.3.2. Ecuación maestra	19
3.4. Formación de consensos	19
3.4.1. Definiciones y herramientas previas	20
3.4.2. Teoremas de convergencia	20
4. Un modelo unidimensional	26
4.1. Modelo discreto	26
4.1.1. Versión continua	28
4.2. Modelo con <i>Bounded Confidence</i>	33
4.3. Simulaciones	33
4.3.1. Simulaciones sin <i>Bounded Confidence</i>	34
4.3.2. Tiempos de convergencia	36
4.4. Atracción proporcional con <i>bounded confidence</i>	38
4.4.1. Simulaciones con <i>Bounded Confidence</i>	40
4.5. Comentarios finales	41
Anexo: Teorema de convergencia para un sistema de infinitas ecuaciones	42

5. Un modelo bidimensional	46
5.1. Modelo sin <i>Bounded Confidence</i>	46
5.2. Bounded Confidence en \mathbb{R}^2	52
5.3. Simulaciones	54
6. Opiniones como medidas	55
6.1. Aumento fijo h de la esperanza	55
6.1.1. Algunos comentarios y generalizaciones	58
6.1.2. Simulaciones con varianza fija	58
6.2. Cambios en la varianza	60
6.2.1. Transporte óptimo	60
6.2.2. Un caso particular	63
6.2.3. Simulaciones con cambios de varianza sin <i>Bounded Confidence</i>	66
Bibliografía	68

Capítulo 1

Introducción

El estudio de la *opinión*, y en particular de la *opinión pública* es objeto de debate e interés en diversas ciencias como la filosofía, la sociología, la psicología, la comunicación política, etc. El concepto se relaciona directamente con la capacidad humana de comunicarse e intercambiar experiencias, así como con la influencia o la *validación social*, que dichas opiniones ejercen en otros individuos. La reflexión sobre estas cuestiones se remonta a los inicios de la filosofía, en la antigua Grecia, donde el debate y el intercambio de opiniones (sólo entre hombres ilustres) era fundamental para la toma de decisiones sociales. Más adelante, el surgimiento de la cultura de masas en el siglo XX, y la tecnificación de las comunicaciones y el desarrollo de las democracias en el mundo amplía y reformula la dinámica de la construcción de la opinión pública. En la actualidad el desarrollo de nuevas tecnologías de comunicación y la masificación de diversas redes sociales da pie a nuevos análisis en la formación de opinión pública.

Las primeras discusiones filosóficas acerca de los abordajes matemáticos de los fenómenos sociales surgen en el siglo XIX con el positivismo, en paralelo al desarrollo en la física de la mecánica Newtoniana [17].

Un abordaje a estas cuestiones se produce a través de la *Dinámica de Opinión*. Este término abarca diversos modelos para predecir la evolución en el tiempo de la opinión de un conjunto de agentes en una sociedad. Este tipo de modelos han sido estudiados desde mediados del siglo XX [27].

Estudiaremos modelos que se enmarcan en los *Agent-Based Models*. En estos, podemos pensar la construcción de un modelo que se adapte a un determinado proceso social en dos etapas. En una primer etapa se establece la relación microscópica que ocurre entre los individuos. Se analiza el tipo de opinión que tiene cada individuo, cómo y entre cuántos se dan las interacciones, qué individuo puede interactuar con qué otro, qué efecto produce cada individuo en otro (según heterogeneidades en los individuos y según la opinión que tienen en ese momento), etc. En una segunda etapa se busca pasar por métodos analíticos o numéricos a comprender la evolución macroscópica de ciertas variables que caracterizan dicha población. De esta manera se analizan algunos elementos que pueden ser contrastados con la realidad, como la conformación de consensos o de grupos de individuos que coinciden en su opinión, cuál es la opinión mayoritaria en las distribuciones finales, y el tiempo que tardan en converger.

La modelización matemática nos permite estudiar hipótesis acerca de los mecanismos de

transmisión de la información, la estructura de la sociedad, etc. Estos modelos son idealizaciones y simplificaciones que no permiten abarcar la complejidad de las relaciones sociales. Sin embargo nos permiten contrastar distintas hipótesis y cuantificar su efecto sobre la dinámica de formación de opiniones.

Por otro lado, el estudio de elementos numerosos e indistinguibles que interactúan entre sí presenta similitudes con el estudio físico de gases rarificados. Por lo tanto se puede desarrollar un análisis similar utilizando ecuaciones de Boltzmann y deducir ecuaciones diferenciales de distintos tipos, y aparecen aquí ecuaciones clásicas de la física matemática como las de *Fokker-Planck*, *transporte*, *medios porosos*, *Hamilton-Jacobi*, entre otras.

En este trabajo analizaremos distintas variables que influyen en los modelos de formación de opiniones. Luego nos centraremos en un modelo particular, analizando cómo se comporta al asumir que las opiniones de los individuos pertenecen a distintos conjuntos.

En el Capítulo 2 analizaremos distintos métodos para combinar opiniones de expertos representadas como medidas de probabilidad. De este análisis emerge que la utilización de Métodos de Comportamiento es una herramienta potente para este problema, que será estudiada a lo largo del resto de los capítulos, y analizada específicamente como medidas de probabilidad en el último.

En el Capítulo 3 repasamos algunos elementos y variantes que se pueden observar en los distintos modelos de opinión. A su vez desarrollamos algunos teoremas de convergencia que garantizan la formación de consenso.

En el Capítulo 4 nos concentramos en un modelo específico con opiniones sobre la recta real. Deducimos la ecuación maestra y obtenemos la ecuación diferencial que permite conocer el comportamiento de la densidad de las opiniones. A su vez comparamos estos resultados con simulaciones computacionales.

En los Capítulos 5 y 6 estudiamos modelos similares, pero con opiniones sobre \mathbb{R}^2 y el espacio de medidas, si bien nos concentraremos en distribuciones normales $M = \{m \sim N(\mu, \sigma)\}$. Deducimos las respectivas ecuaciones diferenciales y las comparamos con lo obtenido en el Capítulo 4 y con simulaciones computacionales.

Capítulo 2

Toma de decisiones a partir de la opinión de varios expertos.

Cuando tomamos decisiones sobre temas complejos y con poca información, es recomendable poder tener en cuenta la opinión de distintos especialistas antes de decidir. Ante un determinado hecho, la Tomadora de Decisiones desea elaborar una distribución de probabilidades de que ese hecho suceda. Para eso consulta a una serie de expertos, que brindan su opinión con respecto a esa cuestión. Dicha opinión es a su vez una distribución de probabilidades. Por lo tanto, el objetivo de la Tomadora de Decisiones es sintetizar la información de las distribuciones de probabilidad de cada experto en una única distribución.

Este análisis es importante en diversos campos de aplicación donde se desea obtener información sobre un tema complejo y en donde distintos expertos pueden hacer distintos aportes. Esto ocurre en áreas como ingeniería nuclear, areospacial, pronósticos climáticos y económicos, riesgo sísmico, daño ambiental, etc. A su vez también tiene aplicaciones como modelo de algunas percepciones biológicas. Por ejemplo se puede modelar la percepción visual y asumir que al ver un objeto, el cerebro realiza un proceso que consta de dos etapas. En una primera etapa el estímulo es analizado por distintas partes del cerebro. En una segunda la información es acoplada para sacar una conclusión con respecto al objeto observado [15]. Este mismo proceso es utilizado en modelos de reconocimiento artificial de imágenes.

La información que proveen los expertos sobre un mismo tema suele diferir entre sí. Este hecho es importante ya que si todos los expertos consensuaran en una primera instancia una opinión, la Tomadora de Decisiones podría tomar esa opción. La diferencia en las opiniones puede deberse a factores diversos. Puede ocurrir que los expertos formen su opinión accediendo a datos diferentes, que la interpretación que realicen acerca de los datos difiera entre sí, o que tengan marcos teóricos distintos. Sin embargo vamos a asumir que todos los expertos pretenden coincidir y acordar sobre el objetivo a pronosticar.

Existen varios métodos para combinar las probabilidades de los expertos. Sin embargo no existe un método que sea mejor en todas las situaciones. Cuál es el óptimo para utilizar, depende de varios factores: de los datos, de las particularidades del problema y las propiedades deseables. Otro factor a tener en cuenta a la hora de elegir el método es la dificultad para computar y obtener resultados. En este capítulo discutiremos las ventajas y desventajas de

una serie de ellos.

El objetivo o el problema a resolver se pueden enmarcar en dos tipos de problemas. Una posibilidad es cuándo se desea obtener una distribución de probabilidades sobre un evento, mientras que en algunas ocasiones se pretende pronosticar un único valor -un precio futuro, la ocurrencia o no de un evento, etc. Por ejemplo se puede querer saber la distribución de precipitaciones en un año, o bien saber si en un día dado va a llover o no.

2.1. Algunas propiedades deseables

La elección del método para construir una opinión final, a partir de una serie de opiniones de expertos, puede variar, e incluso dar distintos resultados para una misma distribución inicial de opiniones. Sin embargo hay una serie de propiedades que es razonable que se cumplan al sintetizar una opinión a partir de varias:

- **Unanimidad.** Si todos los expertos acuerdan en una probabilidad, entonces la probabilidad que las sintetiza debe ser la misma.
- **Propiedad de Marginalización** Supongamos que se aproximan varias variables, donde θ es un vector a aproximar, y la Tomadora de Decisiones está interesada en solo uno de los elementos θ_j del vector θ . Una posibilidad es obtener la distribución conjunta de la de todos los expertos para θ , y luego obtener la distribución marginal que se desea. Otra opción es calcular la distribución marginal θ_j para cada experto, y luego obtener la distribución conjunta. Si un método cumple que calcular θ_j de esas dos maneras da el mismo resultado para todos los elementos de θ , se dice que cumple la propiedad de marginalización
- **Propiedad del Bayesiano Externo.** Supongamos que la Tomadora de Decisiones ha consultado a los expertos y ha calculado $p(\theta)$, pero luego de eso obtiene nueva información sobre θ . Una opción que tiene es actualizar las probabilidades de distribución de todos los expertos y luego volver a calcular la distribución conjunta. Otra opción es actualizar la $p(\theta)$ con la nueva información. Un método satisface la Propiedad del Bayesiano Externo si el resultado en ambos casos es el mismo.

No obstante, establecidas estas definiciones, se puede demostrar, en la misma línea que el teorema de Arrow [12], que no hay ningún método que cumpla todas las condiciones al mismo tiempo. Cada uno de los métodos específicos cumple sólo algunas de estas propiedades, e incluso hay condiciones que son satisfechas por un único método. Más aún, hay métodos razonables que aproximan bien el resultado final, pero no cumplen ninguna.

2.2. Métodos matemáticos

Hay varias técnicas para obtener una distribución conjunta a partir de la distribución de varios expertos. Estas técnicas se pueden separar en dos grandes clases: métodos matemáticos y métodos de compartamiento. En los primeros la Tomadora de Decisiones opera sobre las

fórmulas de las distribuciones de cada experto para obtener una única distribución de probabilidades: la distribución combinada. Estos métodos pueden ser promedios aritméticos o geométricos, o bien incluir información sobre la dependencia de los expertos, o la calidad o confiabilidad de cada experto. Algunos de los métodos matemáticos serán analizados en este capítulo.

Los métodos de comportamiento apuntan a generar un acuerdo entre los expertos luego de interactuar en algún sentido. Algunos modelos de interacción serán analizados en los capítulos siguientes.

Recopilaciones y discusiones acerca de la conveniencia de los distintos métodos pueden encontrarse en [4] y [18].

2.2.1. Medias ponderadas

Con este método la Tomadora de Decisiones define la opinión como una combinación convexa de la de n expertos. Es decir:

$$p(\theta) = \sum_{i=1}^n \omega_i P_i(\theta) \tag{2.2.1}$$

donde los ω_i son coeficientes no negativos que suman uno. La función $p(\theta)$ puede representar una distribución continua o discreta.

El desafío del método es encontrar los ω_i adecuados. Estos pesos pueden representar distintos elementos del problema. Por ejemplo, si todos los expertos son equivalentes e indistinguibles, todos los pesos serán iguales a $\frac{1}{n}$ y la probabilidad combinada será un promedio de las demás. Como en general los expertos no son equivalentes, la probabilidad combinada será un promedio ponderado de las estimaciones de los expertos. Una posibilidad es analizar los pesos ω_i como la calidad de los expertos, o bien la confianza que la Tomadora de Decisiones tiene en el experto i . Otra opción asumir que uno de los expertos conoce la “verdad” que por lo tanto la distribución de θ está representada por una de las distribuciones de los expertos, pero que la Tomadora de Decisiones desconoce cuál. Luego, los pesos ω_i representan la probabilidad de que el experto i sea el correcto.

Estos métodos satisfacen Unanimidad, y son los únicos métodos que satisfacen la Propiedad de Marginalización.

Un problema importante de estos métodos es que no tienen un sostén teórico fuerte. Otro problema es que el proceso de asignar los pesos puede ser más o menos arbitrario. Si se posee información de eventos anteriores al analizado, se pueden construir los pesos de manera estadística a partir de la información previa. Sin embargo, si no se tiene información sobre los expertos, la asignación de pesos será un proceso muy subjetivo. Sin embargo es un método muy fácil de implementar, de entender, y presenta gran facilidad para realizar los cálculos.

Generalización de las Medias Ponderadas

Una variación de este método es tomar las llamadas *combinaciones logarítmicas*. De esta manera, la probabilidad combinada será:

$$p(\theta) = k \prod_{i=1}^n P_i^{\omega_i}(\theta)$$

donde k es una constante de normalización para asegurar que p sea una distribución de probabilidad. Este método satisface la propiedad de Bayesiano Externo. Una generalización de ambos métodos puede encontrarse en Cooke [5] de la siguiente manera:

$$p(\theta) = \left(\sum_{i=1}^n \omega_i P_i(\theta)^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

Si $r = 1$ este método resulta ser un promedio ponderado. Cuando $r \rightarrow 0$, el límite es indeterminado. En efecto

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i P_i^r \right)^{\frac{1}{r}} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(1 + \left(\sum_{i=1}^n \omega_i P_i^r \right) - 1 \right)^{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \omega_i P_i^r \right) - 1} \frac{\left(\sum_{i=1}^n \omega_i P_i^r \right) - 1}{r}}$$

Como por L'Hopital

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\left(\sum_{i=1}^n \omega_i P_i^r \right) - 1}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i P_i^r \log(P_i) \right) = \left(\sum_{i=1}^n \log(P_i^{\omega_i}) \right)$$

el límite cuando r tiende a 0 queda

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i P_i^r \right)^{\frac{1}{r}} e^{\left(\sum_{i=1}^n \log(P_i^{\omega_i}) \right)} = \prod_{i=1}^n P_i^{\omega_i}$$

que en este caso es la combinación logarítmica.

Por otro lado, si $r \rightarrow \infty$ $p(\theta) = \max_i P_i$ y si $r \rightarrow -\infty$ $p(\theta) = \min_i P_i$.

Ejemplo de medias ponderadas: minimización del error

Otra opción es elegir *pesos que minimizan algún criterio de error*, ver [18]. Por ejemplo, elegir los ω_i de manera que minimicen la varianza con la que se estima θ . Supongamos que los estimadores de todos los expertos son insesgados, es decir que $E(P_i(\theta) - \theta) = 0$. En el caso que los pesos estén restringidos a sumar 1, si la Tomadora de Decisiones elige una opinión de la forma (2.2.1) de manera que se minimice la varianza, se garantiza que se obtiene un estimador insesgado cuya varianza es menor o igual que la de cualquiera de los expertos.

Un ejemplo desarrollado por Jacobs [18] es el caso en que los errores de los expertos ($P_i - \theta$) están normalmente distribuidos, con esperanza 0 y una covarianza entre los errores de dos

expertos $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Como

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \text{cov}(P_i, P_j) \\ &= E((P_i - \theta)(P_j - \theta)) - E(P_i - \theta)E(P_j - \theta) \\ &= E((P_i - \theta)(P_j - \theta)),\end{aligned}$$

y se tiene

$$\begin{aligned}\text{var}(p - \theta) &= E((p - \theta)^2) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_i w_j (P_i - \theta)(P_j - \theta)\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_i w_j \sigma_{ij}.\end{aligned}$$

Luego, elegimos los w_i de manera que minimicen la función objetivo

$$J = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_i w_j \sigma_{ij} + \lambda \left(\sum_{i=1}^m w_i - 1 \right),$$

donde el segundo término da la restricción para que todos los pesos sumen 1.

Si derivamos en todas las variables e igualamos a 0 para obtener el mínimo, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial w_i} &= \sum_{j \neq i} 2w_j \sigma_{ij} + 2w_i \sigma_{ii} + \lambda \\ &= \sum_{j=1}^m 2w_j \sigma_{ij} + \lambda = 0 \\ \sum_{i=1}^m w_i &= 1.\end{aligned}$$

Luego,

$$Mw = -\frac{\lambda}{2}I,$$

donde M es la matriz de covarianzas, $(M)_{ij} = \sigma_{ij}$, I es el vector cuyas m coordenadas son iguales a 1. Usando que todos los w_i suman 1, tenemos $I^t w = 1$, con lo cual, si M es inversible,

$$1 = I^t w = I^t M^{-1} \left(\frac{-\lambda}{2} \right) I,$$

$$\lambda = \frac{-2}{I^t M^{-1} I},$$

y por lo tanto,

$$w = M^{-1} I (I^t M^{-1} I)^{-1}.$$

Otra posibilidad es sacar la restricción de que todos los pesos sumen 1. Para lograr esto, pero garantizar que la estimación siga siendo insesgada, una manera es incorporar un agente ficticio, cuya opinión es constantemente $E(\theta)$.

2.2.2. Métodos bayesianos

En un análisis de riesgo, la Tomadora de Decisiones puede poseer una opinión previa a la consulta con los expertos sobre el tema que está analizando. El análisis bayesiano implica partir de una distribución de probabilidad a priori $p(\theta)$ que posee la Tomadora de Decisiones. Al consultar a m expertos su opinión puede ser vista como “información”, es decir, obtiene g_1, \dots, g_n datos. Luego utiliza el Teorema de Bayes para calcular su opinión a posteriori donde

$$p^* = p(\theta|g_1, \dots, g_n) \propto \frac{p(\theta)p(g_1, \dots, g_n|\theta)}{p(g_1, \dots, g_n)}$$

donde $p(g_1, \dots, g_n|\theta)$ es la *likelihood* o *función de verosimilitud* de los expertos cuando ocurre θ . La desventaja de estos métodos radica en su dificultad de aplicación. Definir la *likelihood* puede ser un proceso difícil de computar, y muy subjetivo, ya que implica valorar o conocer muy bien a los expertos.

Para simplificar, supondremos que θ es una variable de un evento específico A que puede o bien ocurrir ($\theta = 1$) o bien no ocurrir (en ese caso decimos \bar{A}) y suponemos un solo experto. La Tomadora de Decisiones asume que el experto acierta a pronosticar A con una probabilidad g_1 y la debe combinar con su propia probabilidad $p(A)$.

Definición 2.2.1. Sea A un evento binario. Llamamos *log-odd* de A

$$lo(A) = \log \left(\frac{p(A)}{p(\bar{A})} \right).$$

El *log-odd* de A es una medida de la probabilidad de que ocurra A . Si es equiprobable que ocurra A a que no ocurra, su log-odds será 0. Si es más probable que ocurra A que que ocurra \bar{A} , será positivo, tendiendo a ∞ cuando $p(A)$ tienda a 1. Si es más probable que no ocurra A será negativo tendiendo a $-\infty$ cuando $p(A)$ tienda a 0.

Por la regla de Bayes la probabilidad a posteriori será

$$p^* = p(A|g_1) = \frac{p(g_1|A)p(A)}{p(g_1)},$$

y una ecuación análoga puede ser escrita para la probabilidad a priori de que ocurra \bar{A} . Dividiendo ambas expresiones queda

$$\frac{p(A|g_1)}{p(\bar{A}|g_1)} = \frac{p(g_1|A)p(A)}{p(g_1|\bar{A})p(\bar{A})}$$

Tomando logaritmo de ambos lados queda de la forma

$$lo^*(A) = lo(A|g_1) = \log \frac{p(g_1|A)}{p(g_1|\bar{A})} + lo(A) \quad (2.2.2)$$

Por lo tanto el *log-odd* a posteriori será la suma del log-odd a priori más un término que llamaremos *log-likelihood*. Este término es una expresión de cuánto valora la Tomadora de Decisiones la opinión del experto. Si la Tomadora de Decisiones cree que el valor g_1 es indicativo para A , el *log-likelihood* será positivo y el *lo* será mayor. En caso contrario será negativo y el *lo* menor.

2.3. Métodos de comportamiento

En todos los métodos y ejemplos que vimos anteriormente la Tomadora de Decisiones solo recibe la opinión de los expertos, pero no interactúa con ellos, ni ellos interactúan entre sí. Los métodos de comportamiento son métodos donde los distintos expertos intercambian información, ya sea de sus posiciones o de los argumentos que las sostienen, a través de algún proceso.

Los métodos de intercambio pueden variar, siendo encuentros reales o no, grupales o de a pares, con mayor o menor intervención de la Tomadora de Decisiones. En algunos casos los expertos pueden ser forzados a obtener un consenso entre todos ellos.

En estos métodos, la dinámica con la que formamos opinión, la influencia de la opinión de otros en nuestra propia opinión, la tendencia a la polarización y las dinámicas de debate y de grupo son factores determinantes. Según algunos trabajos [4] los métodos de comportamiento que llevan a consensos grupales llegan a conclusiones más confiables que el promedio de todos los individuos (aunque en general peor que la mejor estimación individual).

Sin embargo la dinámica de decisión y la intervención en el proceso de debate de la Tomadora de Decisiones es fundamental. De esta manera puede evitar problemas como la polarización o la presión social que terminan expresando de manera incorrecta el conocimiento y las habilidades de los expertos.

En un experimento reciente realizado por Navajas, Niella, Garbulsky, Bahrami y Sigman [26] también se sostiene que la opinión de varias personas, luego de un debate, llega a mejores conclusiones que el promedio de las mismas personas emitiendo su opinión sin interactuar entre sí. Realizaron un experimento con un gran número de participantes donde se les hizo preguntas con respuestas objetivas pero desconocidas por los participantes (por ejemplo la cantidad de goles marcados en el último mundial, o la altura de la Torre Eiffel). Después se realiza una instancia donde se interactúa un minuto en un grupo de 5 personas, debatiendo las preguntas, y les vuelven a realizar las mismas preguntas. Comparando los errores y la varianza de las respuestas antes y después de la interacción, se llega a la conclusión de que luego del debate se obtienen respuestas más precisas, y con menor varianza. Especialmente disminuye la varianza dentro de cada grupo. Sin embargo la varianza entre personas de grupos distintos antes y después del debate aumenta, generándose así un efecto de polarización. Es interesante, además, que cada grupo tiende a descartar internamente aquellas respuestas muy alejadas de la media del grupo, lo cual reafirma la validez de una de las hipótesis más usadas en modelos de opinión y que veremos más adelante, conocida como *bounded confidence*.

2.3.1. Leyes de Impacto Social

En [20] Latané analiza, a partir de distintos experimentos sociales, cómo impacta la emisión y la recepción de las opiniones en las interacciones sociales. El efecto que produce en nuestra opinión los efectos de otros son llamados por Latané *impacto social*. Estos efectos son los que se producen por la mera presencia de otros, su influencia, la estimulación o vergüenza que pueden provocarnos, independiente aún del propio intercambio de argumentos. Latané propone tres principios para determinar el impacto social:

- **Fuerzas sociales.** $I = f(F, C, N)$

Cuando hay varias fuentes actuando al mismo tiempo sobre un mismo blanco, el impacto total que recibe el blanco es una función multiplicativa de la fuerza F , la cercanía C y el número N . La fuerza, según Latané, depende de la importancia, energía o intensidad de los que interactúan. Es decir, no es lo mismo una opinión emitida efusivamente por alguien, o si el que emite una opinión un experto, o un familiar cercano, a una opinión dubitativa de un desconocido. La cercanía es la cercanía en el espacio, o la ausencia de barreras o filtros sociales. El número es la cantidad de personas que hay. Según esta teoría el impacto social se puede comparar con la cantidad de luz recibida por una superficie por varios focos de iluminación, que depende de la intensidad de cada foco, de la lejanía a la que se encuentran y de la cantidad de focos que hay.

- **La Ley Psico-social.** $I = sN^t, t < 1$.

El efecto de agregar más estímulos o impulsos no es igual cuando se agregan los primeros que si ya hay muchos. Si una persona se siente intimidada por la presencia de otras, se sentirá mucho más intimidada con la diferencia entre 1 y 2 personas que entre 100 y 101. En base a distintos experimentos realizados, Latané propone que la intensidad del impacto social que se recibe es una potencia de la cantidad de fuerzas a la que se expone, con s y t constantes según las condiciones y la situación planteada. De esta manera Latané realiza y muestra experimentos donde se mide la imitación ya sea en la repuesta a una pregunta, o en una acción en un lugar donde se encuentran un grupo de personas, viendo que la posibilidad de imitación aumenta según la cantidad de individuos haciéndola según esa regla. Lo mismo ocurre cuando se mide el efecto de la vergüenza (de manera subjetiva y a través de los errores cometidos) al realizar una actividad siendo observados por un grupo de gente.

- **División del impacto** $I = sN^{-t}, t < 1$.

De la misma manera, cuando una fuerza actúa sobre un conjunto de individuos, la intensidad será menor cuánto más individuos hay. Sin embargo la disminución de la intensidad marginal por cada nuevo individuo irá decreciendo. Ejemplo de este efecto es la reacción de un conjunto de personas ante una emergencia. Si es necesario que una sola persona interceda y la emergencia fue presenciada por un conjunto, la probabilidad de que un individuo responda disminuirá con la cantidad de individuos participando. Latané sostiene su teoría a través de experimentos donde se ve la reacción de un grupo de personas cuando se requiere que abran una puerta, que recojan algo del suelo, etc. También realiza estudios recopilando información de las propinas otorgadas según la cantidad de comensales, de la cantidad de personas que se subscribían a una organización religiosa luego de participar de un evento con distintas cantidades de asistentes, etc. De esta manera Latané propone que responda a una ecuación similar a la de la Ley Psico-social, pero con exponentes negativo. Nuevamente las constantes s y t dependen de las condiciones y la situación planteada.

Observamos que en una instancia de debate las constantes s y t , podrían no ser las mismas para todos los individuos, introduciendo un concepto de heterogeneidad entre individuos. Este tipo de fenómeno son estudiados con más detalle en [31].

Capítulo 3

Algunos elementos de los Modelos de Opinión

En este capítulo haremos un breve repaso de los modelos de opinión. Comenzaremos por las características generales de la dinámica de opinión, para concentrarnos luego en algunos modelos que desarrollaremos en detalle.

3.1. Ingredientes de los modelos de opinión

Cada uno de nosotros tiene opiniones variadas sobre distintos temas y a lo largo del tiempo las vamos modificando. Los procesos con los cuales formamos y modificamos nuestras opiniones están íntimamente relacionados con la opinión de las personas con las que interactuamos. De esta manera, dado un determinado tema en un grupo de individuos, la manera en la que se distribuye la opinión general depende a su vez de cómo se produce la interacción entre los individuos y cómo esta interacción modifica las opiniones.

Los modelos de dinámica de opinión describen cómo se forma esta opinión emergente. La idea principal se basa en que el comportamiento macroscópico de un sistema compuesto por un gran número de individuos puede ser descrito a través de la mecánica estadística como en un sistema físico compuesto por partículas que interactúan entre sí.

Los modelos tratan de entender cuándo la opinión formada tiende a un consenso, a la polarización o a la fragmentación de la opinión. Un abordaje posible para entender estos procesos es el Agent-Based Model (ABM) [1]. En él, el sistema es modelado como una colección de individuos autónomos, llamados agentes, que toman sus propias decisiones. Cada individuo tiene un comportamiento de acuerdo a una serie de reglas. En el modelo más básico solo se tienen en cuenta las interacciones entre ellos. Sin embargo, modelos ABM pueden incorporar redes neuronales, algoritmos evolutivos o técnicas de aprendizaje.

Este sistema microscópico puede analizarse en una aproximación macroscópica, en forma análoga a la teoría de gases rarificados. Resolver las ecuaciones de movimiento de cada una de las partículas de un gas es imposible dado el gran número de las mismas. Por lo tanto se considera una función $f(t, x, v)$ que mide la densidad de partículas en el tiempo t , la posición x y la velocidad v , obteniendo una ecuación tipo Boltzmann que describa la evolución de esta

densidad f [3]. De la misma manera se puede proceder modelando una sociedad humana como un sistema compuesto por una gran cantidad de agentes.

Además, es posible también hacer un límite hidrodinámico, obteniendo ecuaciones en derivadas parciales de tipo Fokker Planck para describir la evolución de f . Si bien se pueden deducir rigurosamente con métodos de probabilidades, haremos aquí una aproximación heurística.

Los factores que pueden intervenir en los modelos son varios.

- **El espacio de opiniones.**

En nuestros modelos suponemos que cada individuo tiene una opinión bien definida en cada momento t . Esta opinión puede ser un valor discreto, si ocurre que hay dos o más posibilidades que cada individuo puede elegir y modificar en cualquier momento. Otra alternativa es plantear que el espacio de opiniones es un continuo y por lo tanto podemos representarlo sobre \mathbb{R} (ya sea que elijamos que el espacio de opiniones sea un intervalo acotado como no). También veremos modelos donde los individuos tienen opiniones simultáneamente sobre más de un tópico, y por lo tanto las opiniones serán representadas sobre \mathbb{R}^n . Estos tópicos pueden estar acoplados o no, es decir, la opinión que cada individuo tiene sobre un tema puede relacionarse con la que tiene sobre otro.

Un problema interesante, y que no ha sido estudiado aún desde un punto vista dinámico, es el caso donde la opinión de un individuo en un tiempo t es una distribución de probabilidades. Este caso se adapta más al análisis de opiniones de expertos discutida en el capítulo anterior. La opinión podría representar la probabilidad de que un activo tome determinados valores en el futuro, o una estrategia mixta en un juego, que el agente trata de mejorar a partir de la experiencia adquirida al enfretar a otros agentes en el juego.

- **La cantidad de individuos que participan en una interacción.**

En los modelos que analizaremos supondremos que en cada interacción participan dos individuos que cambian su opinión luego de interactuar y conociendo la opinión del otro. Sin embargo también se puede suponer que en cada interacción participan tres o más individuos (que modifican su opinión mirando a los demás, ya sea a través de un promedio, o modificando su opinión solo si la opinión de los otros dos es la misma o similar).

Un ejemplo de un modelo donde participan más de dos individuos por interacción es el modelo de Sznaid [1],[36]. En este modelo los agentes se encuentran en una fila, numerados del 1 al N , y en cada turno dos agentes vecinos interactúan con sus otros dos vecinos, de manera que $i-1, i, i+1$ y $i+2$ se encuentran involucrados en la interacción. También ocurre en el modelo de Ochrombel [30] o el modelo de Schelling [1],[35] donde los agentes se encuentran ubicados en una cuadrícula, y en cada paso interactúan con uno o más de sus 4 vecinos.

Otros modelos importantes con interacciones grupales son los de Abelson, De Groot, Lehrer y Wagner, y de Friedkin y Johnsen [7, 13], que fueron los primeros modelos de dinámica de opinión. Por ejemplo, el modelo de De Groot asume que el tiempo es discreto

y en cada tiempo la opinión es actualizada por una matriz A , es decir $\vec{w}(t+1) = A\vec{w}(t)$. A su vez, en modelos como el de Hegselman y Krause [19] cada agente actualiza su opinión considerando una media de las opiniones de los otros agentes. Además en ese trabajo consideraron medias muy generales, que incluían combinaciones de la media aritmética, la geométrica y la armónica.

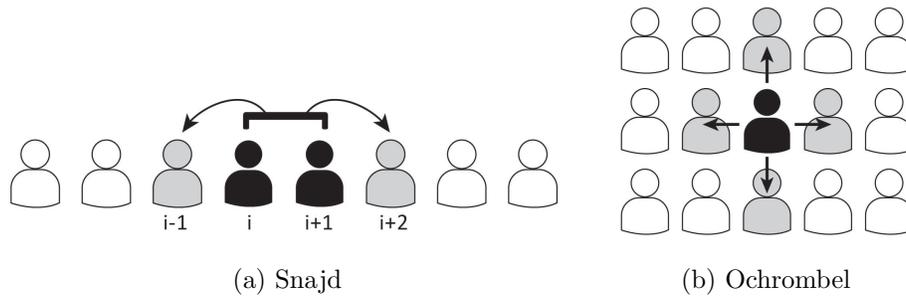


Figura 3.1: Modelos en los que interactúan más de dos individuos. En *a*) cada individuo tiene una opinión binaria 1 o -1 . Si $w_i w_{i+1} = 1$ es decir, los dos opinan igual, convencen a sus dos vecinos pasando a opinar todos lo mismo. Si piensan distinto, es decir $w_i w_{i+1} = -1$ el desacuerdo se propaga, es decir se actualiza de manera que $w_{i+2} = w_i$ y $w_{i-1} = w_{i+1}$. En *b*) se elige un agente, y sus 4 vecinos toman su opinión.

- **El grafo de conexiones.**

En los modelos hay dos grandes variantes: podemos suponer que el grafo de los individuos es completo, es decir, que todos pueden interactuar con todos, y lo hacen de manera aleatoria. Esta suposición tiene como ventaja que resulta fácil de modelar mediante ecuaciones de campo medio.

Pero también hay otras variantes, donde los individuos están ubicados en una red y sólo interactúan con sus vecinos. Por ejemplo en el modelo de Snajd, nombrado anteriormente, los individuos están ubicados en línea recta, con lo cual, al ser una red regular, permite analizar la difusión de opiniones con ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico, como la ecuación del calor.

En algunos de los modelos que veremos a continuación utilizaremos la hipótesis de *Bounded Confidence*, [24][27] en la cual los individuos solo pueden interactuar si sus opiniones están a una distancia menor que una cota dada. En este caso podemos pensar que hay un grafo dinámico, que va cambiando luego de cada interacción. Una situación similar se observa experimentalmente en la experiencia llevada a cabo por Navajas, Niella, Garbulsky, Bahrami y Sigman [26], donde al encuestar a los participantes del experimento sobre los métodos de debate se le asignaron de 5 a 10 puntos a métodos que implican eliminar las opiniones más alejadas.

- **La interacción.**

La interacción puede ser representada de distintas maneras según el tema y la dinámica de opinión que se elija. Podemos suponer que en algunos casos los individuos después

de intercambiar opiniones “se convencen”, es decir que sus opiniones finales se acercan con respecto de las iniciales. Supondremos que esto es más posible en los casos en los que las opiniones iniciales ya están cerca. Para otros casos podemos suponer que son indiferentes al intercambio de opiniones. Sin embargo también puede ocurrir que luego de la interacción sus opiniones se alejen o se rechacen. Para modelar estas posibilidades Noorazar y sus coautores [27] usan un modelo en el que se proponen que al interactuar dos individuos, buscan minimizar ciertas *funciones potenciales*.

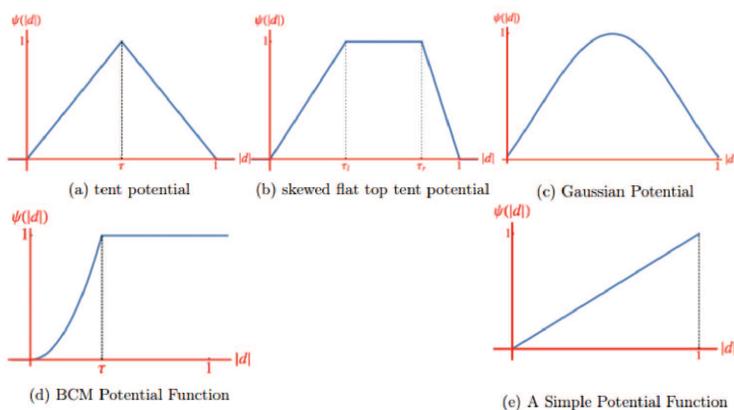


Figura 3.2: Distintas funciones potenciales en el modelo de Noorazar [27]

Otro factor que también interviene es el efecto de *Bandwagon* o de arrastre, por el cual algunos individuos tienden a adoptar las opiniones que adopta la mayoría, por lo que la probabilidad que un individuo adopte una opinión crece con la proporción de quienes ya lo han hecho.

- **Heterogeneidad de los agentes**

En nuestro modelo supondremos que la interacción es simétrica, pero otra variante sería suponer que solo un individuo modifica su opinión (es decir que uno habla y otro escucha), o que uno de los individuos modifica su opinión más que el otro. Un efecto de estas características puede ocurrir si interactúa un profesor con un estudiante, donde ambos pueden modificar su opinión, pero es más posible que el estudiante la modifique más. Otro caso similar ocurre en la interacción entre un líder y sus seguidores [10].

En [31] se estudia un modelo que asume que la mayoría de los agentes tienen tendencia a acercar sus posiciones al interactuar. Sin embargo introducen un grado de heterogeneidad entre los agentes, donde todos los agentes tienen dos características. Un poder de persuasión, representado por una probabilidad $p_i \in [0, 1]$ de que el agente convenga a otro con el que interactuó, y una tendencia al cambio de opinión representado por $q_i \in [0, 1]$. Observamos que asumir que q puede ser 0, introduce el concepto de *fanáticos u obstinados*, es decir individuos que no cambian su opinión al interactuar con ningún agente. En diferentes trabajos se ve, tanto a través de simulaciones como con argumentos de teoría probabilística, que la existencia de estos agentes afecta la formación de

consenso y el tiempo de convergencia. Modelos similares son aquellos donde interactúan líderes y seguidores. Sin embargo en estos casos los líderes interactúan entre sí y pueden cambiar su opinión. Al analizar la evolución de la densidad para tiempos largos, se observa que los individuos tendientes a cambiar su opinión al interactuar tienden a tener todos la misma opinión. Más aún, se encuentra que esa opinión es el promedio de todas las opiniones de los fanáticos, pesadas por su poder de convicción. También se observa que el estado estacionario es alcanzado más rápidamente cuando hay más individuos obstinados. Este hecho implica que el comportamiento asintótico de la distribución de opiniones está totalmente determinado por la distribución de los obstinados, aunque su influencia va a tardar más tiempo cuando son pocos en comparación con el resto de los agentes.

3.2. Interacciones en modelos continuos

Veamos algunas opciones en los modelos de interacción, tomando como base las ideas de [27]. En este enfoque se entrelazan las ideas de la mecánica estadística si las partículas están sometidas a una fuerza externa, con la teoría de juegos y agentes intentando minimizar su función de costos. De hecho, la construcción de funciones de utilidad es completamente equivalente a la construcción de la energía potencial, con lo cual los agentes están minimizando el costo que pagan por mantener opiniones diferentes a las de los otros agentes.

Supongamos que dos individuos interactúan en un tiempo t y tienen opiniones w_i y w_j que pueden pertenecer a cualquier espacio de opinión H con una distancia $\|\cdot\|$. Sea $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función potencial que representa la medida de la energía de la diferencia de opinión,

$$Q_{ij} = \psi(\|w_i - w_j\|).$$

Para minimizar la energía de la interacción necesitamos movernos en dirección opuesta al gradiente. Sea $d_{ij}(t) = w_i(t) - w_j(t)$ la diferencia entre las opiniones de los agentes i y j a tiempo t . Entonces,

$$\frac{\Delta d_{ij}}{\Delta t} = -\gamma \frac{\partial}{\partial d} \psi(\|d\|)$$

donde γ es un parámetro que representa la intensidad de la interacción. Luego

$$\frac{\Delta d_{ij}}{\Delta t} = \frac{d_{ij}(t + dt) - d_{ij}(t)}{dt} = -\gamma \psi'(\|d\|) \frac{d_{ij}(t)}{\|d_{ij}(t)\|}$$

$$d_{ij}(t + dt) = d_{ij}(t) - \gamma \psi'(\|d\|) \frac{d_{ij}(t)}{\|d_{ij}(t)\|} dt$$

Si queremos que el efecto en la interacción sea el mismo para ambos agentes, y ambos reaccionen de la misma manera,

$$\begin{aligned} w_i(t + dt) &= w_i(t) - \frac{\gamma}{2} \psi'(\|d\|) \frac{d_{ij}(t)}{\|d_{ij}(t)\|} dt \\ w_j(t + dt) &= w_j(t) + \frac{\gamma}{2} \psi'(\|d\|) \frac{d_{ij}(t)}{\|d_{ij}(t)\|} dt \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Observemos que el signo de ψ' determina la dirección en que se mueven los agentes en el espacio de opiniones: si bien en situaciones donde los agentes buscan acordar para tomar una decisión es razonable suponer que se acercan, hay modelos donde agentes tipo *hipsters* buscan diferenciarse y se separan.

Otro factor importante es que los individuos, además de interactuar con otros, pueden cambiar su opinión de manera espontánea e individual. Este fenómeno es conocido como tendencia al individualismo, o como *free thinking* [27] [25]. Esta modificación de la opinión la incluimos en el modelo mediante η_i y η_j , variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, con varianza σ^2 y esperanza 0 que toman valores en $\mathcal{B} \subseteq H$ y representa la difusión intrínseca de la opinión.

$$\begin{aligned} w_i(t + dt) &= w_i(t) - \frac{\gamma}{2} \psi'(\|d\|) \frac{d_{ij}(t)}{\|d_{ij}(t)\|} dt + \eta_i dt \\ w_j(t + dt) &= w_j(t) + \frac{\gamma}{2} \psi'(\|d\|) \frac{d_{ij}(t)}{\|d_{ij}(t)\|} dt + \eta_j dt \end{aligned}$$

En Toscani [37] se analiza un modelo similar con opiniones en $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$ donde en la interacción también influye la opinión actual del individuo, modificando su disposición a cambiar de opinión. De esta manera aparecen dos funciones $P(x)$ y $D(x)$ en la interacción:

$$\begin{aligned} w_i(t + dt) &= w_i(t) - \frac{\gamma}{2} P(|w_i(t)|) (w_i(t) - w_j(t)) + \eta_i D(|w_i(t)|) \\ w_j(t + dt) &= w_j(t) - \frac{\gamma}{2} P(|w_i(t)|) (w_j(t) - w_i(t)) + \eta_j D(|w_j(t)|) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

La presencia de las funciones P y D se debe a que no en todos los casos una persona tiene la misma predisposición a cambiar su opinión. Asume que cuanto más extremas sean las opiniones, menor será la propensión a cambiarlas, y representa este fenómeno tomando funciones $P(|w|)$ y $D(|w|)$ crecientes respecto a $|w|$ y con $0 \leq P(|w|), D(|w|) \leq 1$ para todo w .

En el trabajo realizado por Balenzuela, Pinasco y a Semeshenko [2] y en el de La Rocca, Braunstein y Vazquez [23] se consideran también modelos de umbral, con opiniones en \mathbb{R} , donde la interacción depende de ciertas regiones de opiniones donde están ubicados los agentes.

En [23] las opiniones están en el intervalo $[-1, 1]$. Cuando interactúan dos agentes con el mismo signo, refuerzan su opinión y se mueven ambos una cantidad fija h hacia 1 si tenían opiniones de signo positivo y hacia -1 en el caso contrario. Si interactúan dos con signos diferentes, se acercan en h hacia el origen, y eventualmente lo cruzan

En [2], las opiniones están ubicadas en $[-3, 3]$, y se divide en tres intervalos $[-3, -1]$, $[-1, 1]$ y $[1, 3]$, llamando *decididos* (a favor o en contra) a los agentes con opiniones en los intervalos de los extremos, e *indecisos* a los del intervalo central. La dinámica aquí incluye repulsiones cuando se encuentran dos decididos de signos opuestos, y atracciones cuando interactúan dos agentes de un mismo intervalo, o un indeciso con un decidido, aunque en este caso el indeciso se mueve más que el decidido.

3.3. Evolución de la opinión

A continuación analizaremos cómo evoluciona la distribución de las opiniones a lo largo del tiempo.

Observemos que tenemos dos opciones. Una es estudiar el comportamiento microscópico de cada individuo y deducir un sistema de ecuaciones ordinarias para la evolución de sus opiniones. La otra, analizar una densidad de agentes sobre el espacio de opiniones, y describir su evolución mediante una ecuación maestra que aproximaremos con una ecuación en derivadas parciales. Estos enfoques son similares a los utilizados en la mecánica de fluidos. Según la descripción Lagrangiana, nos centraremos en la “trayectoria” de una partícula, que en nuestro caso será la opinión de un individuo a lo largo del tiempo. El otro es el enfoque Euleriano.

Si en el caso Lagrangiano todas las trayectorias terminan en una misma opinión, diremos que los agentes alcanzaron un consenso. Esto es equivalente a que en la versión Euleriana la densidad converja a una Delta de Dirac. Veamos cómo es la relación entre ambos.

3.3.1. Pasaje a una ecuación en derivadas parciales para la densidad

Supongamos que conocemos cómo evoluciona cada partícula por separado.

Sea $\Phi(w_i, w_j)$ la función que representa la derivada de w_i cuando interactúa con w_j , es decir cómo se modifica su opinión. Como una partícula puede interactuar con cualquiera de las otras de manera aleatoria, podemos calcular la derivada promedio de su opinión como

$$w'_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(w_i, w_j) \quad (3.3.1)$$

Observamos que en realidad estamos dando una expresión para la esperanza de w'_i ya que en realidad la trayectoria de ningún individuo está previamente determinada y, en cambio, depende de los individuos con los que interactúe de manera azarosa. Supondremos que las opiniones se encuentran sobre $I \subseteq \mathbb{R}$. Para pasar a la densidad $f(w, t)$, notamos que

$$f(w, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{w_i(t)}(w) \quad (3.3.2)$$

Queremos saber cómo evoluciona $f(w, t)$ a lo largo del tiempo, por lo tanto queremos conocer $\frac{\partial f}{\partial t}$. Tomamos φ una función auxiliar $C^1(\mathbb{R})$. Multiplicando esa función, integrando en w y derivando en t en ambos términos de la igualdad (3.3.2), llegamos a

$$\frac{d}{dt} \int_I f(w, t) \varphi(w) dw = \frac{d}{dt} \int_I \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{w_i(t)}(w) \varphi(w) dw.$$

Calculemos entonces la derivada del lado derecho

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_I f(w, t) \varphi(w) dw &= \frac{d}{dt} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\int_I \delta_{w_i(t)}(w) \varphi(w) dw \right) \\
&= \frac{d}{dt} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(w_i(t)) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \varphi(w_i(t)) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi'(w_i(t)) w_i'(t) \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1, j=1}^{N, N} \varphi'(w_i(t)) w_i'(t) \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1, j=1}^{N, N} \varphi'(w_i(t)) \Phi(w_i, w_j) \\
&= \int_I \int_I \varphi'(w) \Phi(w, \bar{w}) f(\bar{w}) f(w) dw d\bar{w},
\end{aligned}$$

Si suponemos que f es diferenciable en t y w , podemos derivar bajo el signo de la integral

$$\int_I \frac{df(w, t)}{dt} \varphi(w) dw = \int_I \int_I \varphi'(w) \Phi(w, \bar{w}) f(\bar{w}) f(w) dw d\bar{w}$$

y reescribir la ecuación integrando por partes,

$$\int_I \frac{df(w, t)}{dt} \varphi(w) dw = - \int_I \left(\int_I \varphi(w) \frac{\partial}{\partial w} \Phi(w, \bar{w}) f(\bar{w}) f(w) d\bar{w} \right) dw.$$

Luego, vale para toda φ que

$$\int_I \left[\frac{df(w, t)}{dt} + \left(\int_I \frac{\partial}{\partial w} \Phi(w, \bar{w}) f(\bar{w}) f(w) d\bar{w} \right) \varphi(w) \right] dw = 0,$$

y por lo tanto

$$\frac{df(w, t)}{dt} = - \frac{\partial}{\partial w} \left(f(w) \int_I \Phi(w, \bar{w}) f(\bar{w}) d\bar{w} \right). \quad (3.3.3)$$

Esta es una ecuación de transporte con un campo de velocidades no local, fenómeno frecuente en esta clase de modelos.

Ejemplo

Veremos un ejemplo de modelo que retomaremos después, y deduciremos con otra técnica. Supongamos que $w_i \in \mathbb{R}$ se mueve una constante h , hacia adelante si interactúa con otro

agente w_j que tiene una opinión mayor y hacia atrás si la opinión del otro agente es menor. En ese caso

$$\Phi(w, \bar{w}) = \begin{cases} h & \text{si } \bar{w} > w \\ -h & \text{si } \bar{w} < w \end{cases}$$

Luego la (3.3.3) queda

$$\frac{df(w, t)}{dt} = \frac{\partial}{\partial w} \left(f(w)h \left(\int_{-\infty}^w f(\bar{w})d\bar{w} - \int_w^{\infty} f(\bar{w})d\bar{w} \right) \right)$$

3.3.2. Ecuación maestra

Veremos cómo se llega a un resultado similar desde el otro enfoque [16]. Podemos llegar a obtener una ecuación maestra para la densidad, directamente deduciéndola de las variaciones en la densidad. Asumimos que las interacciones se dan al azar y de manera uniforme y que el proceso es markoviano, es decir que la interacción en el tiempo $(t + dt)$ no depende de la historia, sino solo de la posición en el tiempo t .

Luego, la densidad de una opinión x en un tiempo $t + dt$ será la densidad de esa opinión en un tiempo t más la probabilidad de que un nuevo individuo pase a opinar x menos la probabilidad que uno que lo hacía ya no opine más x . Observamos que la probabilidad de que un individuo cambie su opinión una sola vez es de la forma $P(w \rightarrow w')dt$, mientras que la probabilidad de que la cambie más de una vez es $O(dt^2)$. Presentaremos las ecuaciones maestras de la siguiente manera:

$$f(x, t + dt) = f(x, t) + P(\text{alguno pase a } x)dt - P(\text{alguno se vaya de } x)dt + O(dt^2)$$

$$\frac{\Delta f(x, t)}{dt} = P(\text{alguno pase a } x) - P(\text{alguno se vaya de } x) + O(dt),$$

y cuando $t \rightarrow 0$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = P(\text{alguno pase a } x) - P(\text{alguno se vaya de } x).$$

A los términos del lado derecho los llamaremos las funciones de ganancia y pérdida, que notaremos G y L .

3.4. Formación de consensos

En esta sección estamos interesados en conocer cuál es el comportamiento de la densidad a lo largo del tiempo, y en particular para tiempos largos. Es decir, queremos conocer su convergencia, y si ésta es en un consenso (todos los individuos terminan con la misma opinión) o bien si en la distribución de opiniones finales coexisten distintas opiniones, cuántas son y cómo se distribuyen. Lo haremos para el caso particular donde la modificación de la opinión depende linealmente de la distancia, de manera que en la ecuación (3.3.1), la función Φ es de la forma $\Phi(w_i, w_j) = \alpha a_{ij}(w_j - w_i)$, donde α representa la intensidad de una interacción general, y a_{ij} es la intensidad de la interacción entre dos individuos dados, que puede depender de

las opiniones y no necesariamente ser simétrica, es decir $a_{ij} = a_{ij}(w_1, \dots, w_N)$. Esta ecuación puede ser reescrita como

$$w'_i = \frac{\alpha}{N}(\bar{w}_i - w_i), \quad \bar{w}_i := \sum_{j=1}^N a_{ij}w_j. \quad (3.4.1)$$

Esta ecuación incluye como casos particulares el modelo de Hegselman y Krause, y algunos modelos tipo *flocking* sin velocidades de las partículas, las cuales podrían agregarse considerando w como el vector de posición y velocidad.

A continuación demostraremos que, bajo algunas condiciones sobre la interacción, la distribución de las opiniones finales converge incondicionalmente a un consenso, es decir, sin importar la condición inicial, según lo demostrado por Motsch y Tadmor [28]. Antes de eso vamos a definir algunos conceptos y propiedades que resultarán útiles.

3.4.1. Definiciones y herramientas previas

Definición 3.4.1. Una matriz $A = \{a_{ij}\}$ se dice *estocástica por filas* si

$$\sum_j a_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Observación 3.4.1. Sea A la matriz que representa un modelo de interacción dado un tiempo t , de la forma

$$w'_i = \frac{\alpha}{N} \sum_{j=1}^N a_{ij}(w_j - w_i)$$

Luego, el valor de a_{ii} es indistinto pues está multiplicado por 0. A su vez, reescalando α si es necesario, podemos pedir $\sum_{i \neq j} a_{ij} < 1$. Luego, si definimos $a_{ii} = 1 - \sum_{i \neq j} a_{ij}$, podemos suponer sin pérdida de la generalidad que A es estocástica por filas.

Definición 3.4.2. Sea $|\cdot|$ una norma en el espacio de Hilbert H . Sea $H' : H \rightarrow \mathbb{R}$ su dual. Sea $\langle T, w \rangle = T(w)$, y definimos la norma dual como

$$|T|_* = \sup_{w \neq 0} \frac{\langle T, w \rangle}{|w|}$$

Proposición 3.4.1. Sea $\|\cdot\|$ una norma y $\|\cdot\|_*$ su norma dual. Entonces,

$$\|w\| = \sup_{T \neq 0} \frac{\langle T, w \rangle}{\|T\|_*}.$$

3.4.2. Teoremas de convergencia

Sea Ω la envolvente convexa de $\{w_k\}_k$. Por la interacción en (3.4.1) podemos intuir que Ω funciona como barrera para las opiniones de los agentes. Demostraremos más aún, que $\Omega(t)$ se va reduciendo a lo largo del tiempo, en una proposición que utilizaremos luego.

Proposición 3.4.2. Sea $w(t) = (w_1(t), \dots, w_N(t)) \in H^N$ el vector de que tiene las opinion de todos los agentes en un tiempo t . El espacio de opiniones H puede ser de dimensión mayor o igual a 1. Entonces,

$$\max_i \|w_i(t)\| \leq \max_i \|w_i(0)\|$$

para toda norma $\|\cdot\|$.

Por lo tanto, la envolvente convexa de $w(t)$ decrece con el tiempo,

$$\Omega(t_2) \subset \Omega(t_1) \quad t_2 > t_1 \geq 0$$

Demostración. Sea $T_i = T_i(t)$ el vector unitario donde se alcanza la norma de la opinión del agente i , $w_i(t)$ para cada tiempo t . Es decir

$$\|w_i(t)\| = \sup_{T \neq 0, \|T\|_* = 1} \langle T, w_i(t) \rangle = \langle T_i(t), w_i(t) \rangle.$$

$T_i(t)$ es diferenciable a trozos. Sin embargo puede no ser diferenciable en todos los puntos. Un ejemplo claro se ve en \mathbb{R} , donde $T_i(t) = 1$ siempre que $w_i(t) \geq 0$ y $T_i(t) = -1$ cuando $w_i(t) \leq 0$. Luego en 0 la función tiene una discontinuidad.

Utilizando la ecuación (3.4.1), $\overline{w_i} \in H$ y por la definición de norma,

$$\|\overline{w_i(t)}\| = \sup_{T \neq 0, \|T\|_* = 1} \langle T, \overline{w_i(t)} \rangle$$

con lo cual se comprueba que

$$\|\overline{w_i(t)}\| \geq \langle T_i(t), \overline{w_i(t)} \rangle$$

Utilizando la expresión (3.4.1)

$$\begin{aligned} \langle T, \frac{dw_i}{dt}(t) \rangle &= \frac{\alpha}{N} (\langle T, \overline{w_i(t)} \rangle - \langle T, w_i(t) \rangle) \\ &\leq \frac{\alpha}{N} (\|\overline{w_i(t)}\| - \|w_i(t)\|). \end{aligned}$$

La norma de w_i alcanza su máximo en T_i por lo que $\langle T_i'(t), w_i(t) \rangle \leq 0$. Como hemos observado anteriormente, $T_i(t)$ podría no ser diferenciable. Sin embargo si podemos asegurar que $\langle T_i(t) - T_i(t + dt), w_i(t) \rangle \leq 0$, y en esos casos utilizamos el cociente incremental.

Entonces tenemos

$$\frac{d}{dt} \|w_i(t)\| = \langle T_i(t), \frac{d}{dt} w_i(t) \rangle + \langle \frac{d}{dt} T_i(t), w_i(t) \rangle \leq \frac{\alpha}{N} (\|\overline{w_i(t)}\| - \|w_i(t)\|).$$

Por último, si tomamos cualquier i donde se cumple que $\max_i \|w_i(t)\| = \|w_i(t)\|$, se cumple que

$$\|\overline{w_i(t)}\| \leq \max_i \|w_i(t)\| = \|w_i(t)\|$$

Luego para ese i ,

$$\frac{d}{dt} \|w_i(t)\| \leq 0.$$

Por lo tanto, como en cada tiempo todos los máximos sólo pueden disminuir, podemos afirmar que

$$\max_i \|w_i(t)\| \leq \max_i \|w_i(0)\|$$

y la demostración queda terminada.

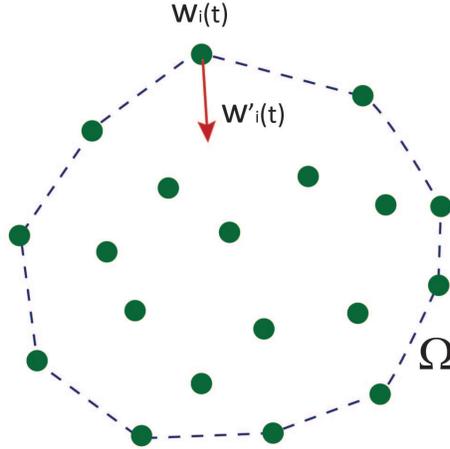


Figura 3.3: Evolución de la envolvente convexa en \mathbb{R}^2 .

□

Para demostrar que las opiniones convergen a un consenso necesitamos no solo que la envolvente convexa sea cada vez menor, sino que converga a una opinión w_∞ igual para todos los i . Para eso utilizaremos las siguientes definiciones:

Definición 3.4.3. Diremos que el diámetro de un vector w , que contiene todas las opiniones es la máxima distancia entre las opiniones de dos individuos. Es decir,

$$[w] := \max_{ij} \|w_i - w_j\|$$

Definición 3.4.4. Dada una matriz A , llamaremos el coeficiente de ergodicidad de la matriz A

$$\eta_A := \min_{ij} \sum_k \min\{a_{ik}, a_{jk}\}$$

Este coeficiente, definido en [9, 28], es utilizado a su vez para cuantificar la entropía relativa en los procesos discretos de Markov, y la conectividad en modelos de opinión. Satisface el siguiente lema cuya demostración puede verse en [9, 28]:

Lema 3.4.3.

$$1 - \eta_A = \frac{1}{2} \sum_k |a_{ik} - a_{jk}|$$

De [28] tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.4.4. *Sea w el vector de opiniones de un conjunto de individuos que interactúan según la ecuación (3.4.1). Entonces, el diámetro de w satisface*

$$\frac{d}{dt}[w(t)] \leq -\frac{\alpha}{N}\eta_{A(\Omega(t))}[w(t)].$$

En particular, si

$$\Theta(t) := \int^t \eta_{A(\Omega(s))} ds \rightarrow \infty,$$

entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{i,j} |w_i(t) - w_j(t)| = 0.$$

Aún más, si

$$\int^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{N}\Theta(t)} < \infty, \quad (3.4.2)$$

entonces existe $w_{\infty} \in \Omega(0)$ tal que

$$|w_i(t) - w_{\infty}| \leq e^{-\frac{\alpha}{N}\Theta(t)}[w(0)] \quad \text{para todo } i = 1, \dots, N.$$

Demostración. Sea un tiempo t fijo, comenzaremos demostrando que

$$[\bar{w}] = [Aw] \leq (1 - \eta_A)[w].$$

Sean i y j fijos, que serán elegidos luego. Llamamos $\eta_k = \min\{a_{ik}, a_{jk}\}$, de manera que $a_{ik} - \eta_k$ y $a_{jk} - \eta_k$ son no negativos y $\sum_k \eta_k \geq \eta_A$. Tomamos un T arbitrario, y

$$\langle T, \bar{w}_i - \bar{w}_j \rangle = \sum_k a_{ik} \langle T, w_k \rangle - \sum_k a_{jk} \langle T, w_k \rangle$$

Sumando y restando $\sum_k \eta_k \langle T, w_k \rangle$

$$\begin{aligned} \langle T, \bar{w}_i - \bar{w}_j \rangle &= \sum_k (a_{ik} - \eta_k) \langle T, w_k \rangle - \sum_k (a_{jk} - \eta_k) \langle T, w_k \rangle \\ &\leq \sum_k (a_{ik} - \eta_k) \max_k \langle T, w_k \rangle - \sum_k (a_{jk} - \eta_k) \min_k \langle T, w_k \rangle \\ &= (1 - \sum_k \eta_k) (\max_k \langle T, w_k \rangle - \min_k \langle T, w_k \rangle) \\ &\leq (1 - \eta_A) \max_{kl} \langle T, w_k - w_l \rangle \\ &\leq (1 - \eta_A) \max_{kl} \|w_k - w_l\| \|T\|_*, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos que $\langle T, e \rangle \leq \|T\|_* \|e\|$. Ahora elegimos i y j tal que $[\bar{w}] = \|\bar{w}_i - \bar{w}_j\|$ y tenemos que

$$[\bar{w}] = [Aw] = \|\bar{w}_i - \bar{w}_j\| = \sup_{T \neq 0} \frac{\langle T, \bar{w}_i - \bar{w}_j \rangle}{\|T\|_*} \leq (1 - \eta_A) \max_{kl} \|w_k - w_l\|$$

con lo que se cumple la desigualdad.

Ahora tomamos en (3.4.1) una discretización del tiempo para la derivada, por lo que queda

$$\begin{aligned}\frac{w(t+dt) - w(t)}{dt} &= \frac{\alpha}{N}(Aw(t) - w(t)) \\ w(t+dt) &= \frac{\alpha}{N}(Aw(t) - w(t))dt + w(t) = \frac{\alpha}{N}Aw(t)dt + w(t)\left(1 - \frac{\alpha}{N}dt\right)\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad obtenida anteriormente

$$\begin{aligned}[w(t+dt)] &= \left[\frac{\alpha}{N}Aw(t)dt + w(t)\left(1 - \frac{\alpha}{N}dt\right)\right] \\ &\leq \frac{\alpha}{N}(1 - \eta_A)[w(t)]dt + \left(1 - \frac{\alpha}{N}dt\right)[w(t)] \\ &= [w(t)] - [w(t)]\frac{\alpha}{N}\eta_A dt\end{aligned}$$

Reacomodando nuevamente

$$\frac{[w(t+dt)] - [w(t)]}{dt} \leq -\frac{\alpha}{N}\eta_A[w(t)]$$

Luego, haciendo tender $dt \rightarrow 0$, obtenemos una inecuación diferencial, y resolviendo o utilizando Gronwall,

$$[w(t)] = \max_{ij} |w_i - w_j| \leq e^{-\frac{\alpha}{N} \int_0^t \eta_A} [w(0)],$$

que tiende a cero por hipótesis.

Además.

$$\begin{aligned}\|w_i(t_2) - w_i(t_1)\| &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} w'_i(s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} \frac{\alpha}{N} (\overline{w_i(s)} - w_i(s)) ds \right\| \\ &\leq \frac{\alpha}{N} \max_{ij} \int_{t_1}^{t_2} \|w_i(s) - w_j(s)\| ds \\ &\leq \frac{\alpha}{N} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{\alpha}{N} \Theta(s)} ds [w(0)]\end{aligned}$$

que tiende a 0 para todo $t_2 > t_1 \gg 1$, ya que (3.4.2) converge. Luego por ambas desigualdades el límite $w_i(t) \rightarrow w_i^\infty$ existe y todos los agentes terminan en el infinito concentrándose en la misma posición. \square

En el teorema de recién hemos demostrado que una condición suficiente para la emergencia de consensos es que $\int^t \eta_{A(\Omega(s))} ds \rightarrow \infty$. Sin embargo el cálculo de η puede ser engorroso. En lo que sigue veremos algunas cotas inferiores para η_A , de manera de tener otras condiciones suficientes, más fáciles de calcular a partir de A .

Definición 3.4.5. Sea $\theta > 0$ fijo. Definimos el conjunto activo $\Lambda(\theta)$, al conjunto de agentes cuya influencia sobre los demás es mayor que θ ,

$$\Lambda(\theta) = \{j | a_{ij} \geq \theta \text{ para todo } i\}.$$

Observamos que como $\{a_{ij}\}$ cambia con el tiempo, el número de agentes activos es una variable del tiempo, que llamaremos $\lambda(\theta) = \lambda(\theta, t) := |\Lambda(\theta, t)|$. Además, se cumple la cota inferior

$$\eta_A \geq \max_{\theta} \theta \lambda(\theta)$$

ya que

$$\eta_A = \min_{ij} \sum_k \{a_{ik}, a_{jk}\} \geq \theta \lambda(\theta)$$

Corolario 3.4.1. *El diámetro de un modelo que sigue una interacción como la definida por la ecuación (3.4.1) cumple la siguiente estimación*

$$\frac{d}{dt}[w_i(t)] \leq -\frac{\alpha}{N} (\max_{\theta} \theta \lambda(\theta)) [w(t)].$$

En particular, si tomamos la menor cota posible $\eta_A \geq N \min_{ij} a_{ij}$, de manera que

$$\theta = m(s) = \min_{ij} a_{ij}(s),$$

por lo que todos los agentes están activos y $\lambda(\theta, t) = N$, se tiene

$$\|w(t) - w_{\infty}\| \leq e^{-\alpha \int_0^t m(s) ds} [w(0)].$$

Observamos que si la interacción solo depende de la distancia de las opiniones de los dos agentes, es decir existe una función $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que $a_{ij} = \phi(|w_i - w_j|)$. Luego

$$a_{ij} \geq \min_{r \leq |w(t)|} \phi(r) \geq \min_{r \leq |w(0)|} \phi(r)$$

Luego, si $\phi(r) \leq 1$ podemos concluir la propiedad del consenso incondicional

Proposición 3.4.5. *Si todos los agentes interactúan entre sí en todo momento, significa que el parámetro de Bounded Confidence es mayor que el diámetro de la posición inicial, y por lo tanto existe m*

$$m = \min_{r \leq |w(0)|} \phi(r) > 0.$$

Entonces hay una convergencia exponencial hacia una opinión w_{∞} .

$$\|w_i(t) - w_{\infty}\| \leq e^{-\alpha m t} [w(0)].$$

Capítulo 4

Un modelo unidimensional

Veremos aquí el modelo de [32], donde cada individuo modifica su opinión sumando una constante positiva si interactúa con otro individuo de opinión mayor, negativa si el otro individuo tiene opinión menor.

Comenzaremos con el modelo discreto y su aproximación por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Luego, consideraremos su aproximación continua y demostraremos que se llega al consenso utilizando una técnica de Li y Toscani [22].

4.1. Modelo discreto

Suponemos que las opiniones de todos los individuos se encuentran sobre \mathbb{R} . Sean $1, \dots, N$ los individuos, y para cada tiempo t , cada uno tiene una opinión $w_i(t) \in \mathbb{R}$.

Luego de interactuar con un individuo j , con opinión $w_j(t)$, el individuo i tendrá una nueva opinión:

$$w_i^* = \begin{cases} w_i + h & \text{si } w_j > w_i \\ w_i - h & \text{si } w_j < w_i \\ w_i & \text{si } w_j = w_i \end{cases}$$

Para obtener la ecuación maestra subdividimos el espacio de opiniones en una familia de intervalos $\{I_j\}_{j \in Z}$ de longitud h . Definimos la densidad de población en cada intervalo como:

$$s(j, t) = \frac{\#\{i : w_i \in I_j\}}{N}$$

Observamos que, al haber finitos individuos, la densidad de los intervalos será 0 a partir de algún valor de j . Luego podemos restringir el intervalo a $[-M, M] \in \mathbb{R}$ para algún M suficientemente grande, pero esta propiedad se perderá cuando permitamos que el número de agentes aumente, si no los restringimos a estar ubicados inicialmente en esa región.

Si las interacciones ocurren siguiendo un proceso de Poisson de tasa 1, es decir, esperamos que ocurra una interacción por unidad de tiempo, podemos suponer que la probabilidad de que ocurra una interacción en un intervalo temporal de longitud dt es aproximadamente dt . Luego, podemos suponer que pasado ese plazo, la densidad en cada intervalo será la que

había en el tiempo anterior, más la de individuos que hayan entrado al intervalo luego de una interacción, menos la de individuos que hayan salido luego de una interacción. Esto es:

$$s(j, t + dt) = s(j, t) + \frac{2}{N}[G(j, t) - L(j, t)]$$

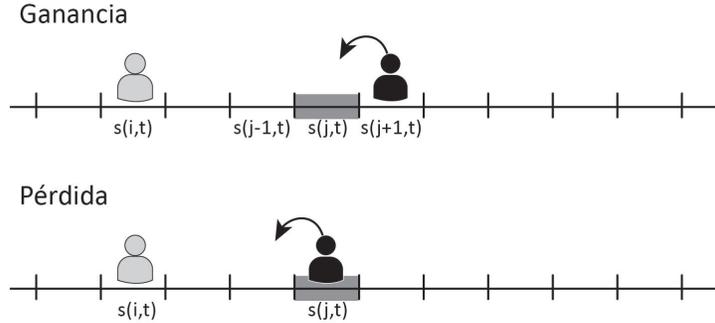


Figura 4.1: Funciones de pérdida y de ganancia en \mathbb{R}

Como en el intervalo de tiempo dt solo interactúan dos individuos que cambian su opinión, $s(j, t)$ variará solo en $\pm \frac{1}{N}$. El factor 2 aparece porque podemos seleccionar un agente del intervalo I_j como el primer o segundo agente en la interacción.

Llamaremos $G(j, t)$ al término de ganancia. Para cada caso la probabilidad de entrar a I_j es la probabilidad de encontrar un individuo en la vecindad, es decir en el intervalo I_{j+1} (respectivamente en el intervalo I_{j-1}), y otro en un intervalo I_i con $i \leq j$ (respectivamente $i \geq j$) de manera que luego de la interacción el primer individuo se mueva h e ingrese al intervalo j . Para cada j y cada $t > 0$ tenemos

$$G(j, t) = s(j + 1, t) \sum_{i \leq j} s(i, t) + s(j - 1, t) \sum_{i \geq j} s(i, t). \quad (4.1.1)$$

Llamaremos $L(j, t)$ al término de pérdida. La manera de salir del intervalo es que un individuo del intervalo se encuentre con cualquiera de otro distinto. Luego

$$L(j, t) = s(j, t) \sum_{i \neq j} s(i, t). \quad (4.1.2)$$

Luego, teniendo en cuenta que $\sum_{i \neq j} s(i, t) = \sum_{i \leq j} s(i, t) + \sum_{i \geq j} s(i, t) - 2s(j, t)$ y reordenando los términos,

$$\begin{aligned} \frac{N}{2} \left(s(j, t + dt) - s(j, t) \right) &= \left(s(j + 1, t) - s(j, t) \right) \sum_{i \leq j} s(i, t) \\ &\quad + \left(s(j - 1, t) - s(j, t) \right) \sum_{i \geq j} s(i, t) \\ &\quad + 2s(j, t)^2. \end{aligned}$$

Si multiplicamos y dividimos el miembro izquierdo por dt , cuando $dt \rightarrow 0$ y aumentamos el número de agentes $N \rightarrow \infty$ de manera tal que $dtN \rightarrow 2$, nos da un sistema infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\frac{ds(j, t)}{dt} = \left(s(j+1, t) - s(j, t) \right) \sum_{i \leq j} s(i, t) \quad (4.1.3)$$

$$+ \left(s(j-1, t) - s(j, t) \right) \sum_{i \geq j} s(i, t) \quad (4.1.4)$$

$$+ 2s(i, t)^2, \quad (4.1.5)$$

que se completa al conocer la distribución inicial en tiempo $t = 0$, $s(j, 0)$.

Observemos que en este caso tenemos un sistema con infinitas ecuaciones, ya que $N \rightarrow \infty$, y no están necesariamente acotadas en un intervalo como antes. La existencia y unicidad de soluciones se tiene gracias al teorema desarrollado en el Anexo de este capítulo.

4.1.1. Versión continua

Para pasar a la versión continua introducimos una función suave, $f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

$$s(j, t) = \int_{I_j} f(x, t) dx$$

Como f es suave, y suponiendo que h es chica $f \approx \frac{s(j, t)}{h}$. Además, como podemos aproximar $x \approx hj$, tenemos

$$\begin{aligned} s(j+1, t) - s(j, t) &= \frac{h}{h} [s(j+1, t) - s(j, t)] \\ &\approx h^2 \frac{f(x+h, t) - f(x, t)}{h} \\ &\approx h^2 \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_{i \leq j} s(i, t) \approx \frac{h}{h} \sum_{i \leq j} s(i, t) = \sum_{i \leq j} \frac{s(i, t)}{h} h \approx \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

El otro caso es similar, con lo cual

$$\begin{aligned} \left(s(j+1, t) - s(j, t) \right) \sum_{i \leq j} s(i, t) &\approx h^2 \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^x f(y) dy \\ \left(s(j-1, t) - s(j, t) \right) \sum_{i \geq j} s(i, t) &\approx -h^2 \frac{\partial f}{\partial x} \int_x^{\infty} f(y) dy \end{aligned}$$

Luego la ecuación maestra queda de la siguiente forma cuando dt y h son pequeños.

$$\begin{aligned} \frac{dtN}{2h} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \left(\int_{-\infty}^x f(y,t) dy - \int_x^{\infty} f(y,t) dy \right) + 2f^2(x,t) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x,t) \left(\int_{-\infty}^x f(y,t) dy - \int_x^{\infty} f(y,t) dy \right) \right] \end{aligned}$$

Para eliminar el factor $\frac{dtN}{2h}$ podemos hacer como antes, aumentando el número de agentes de manera que $Ndt = O(1)$, pero también podemos reescalar el tiempo. Llamamos $s = \frac{2ht}{dtN}$, y aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \frac{dt}{ds} = \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \frac{dtN}{2h}.$$

Luego, renombrando s como t obtenemos la ecuación integro-diferencial que satisface la densidad de agentes en el espacio de opiniones, dada una distribución inicial $f(x,0) = f_0(x)$:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x,t) \left(\int_{-\infty}^x f(y,t) dy - \int_x^{\infty} f(y,t) dy \right) \right] \quad (4.1.6)$$

Observamos que la ecuación es de primer orden, con un campo de velocidades no local. Como veremos a continuación, es posible resolverla explícitamente. Para esto, seguiremos un método introducido por Li y Toscani en [22].

Sea $F(x,t) = \int_{-\infty}^x f(y,t) dy$ la función acumulada, para cada tiempo t fijo, de $f(x,t)$. Como f es una densidad sobre \mathbb{R} para cada t , y por lo tanto integra uno, la ecuación (4.1.6) puede reescribirse como

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (f(x,t)(2F(x,t) - 1)) \quad (4.1.7)$$

A continuación vamos a encontrar la solución exacta de (4.1.7). Para eso vamos a introducir las siguientes variables. Dados x y t fijos, definimos $\rho = \rho(x,t)$ como la densidad acumulada hasta x en el tiempo t ,

$$\rho = F(x) = \int_{-\infty}^x f(y,t) dy.$$

Claramente, $0 \leq \rho \leq 1$.

Cuando $f > 0$, puede calcularse la función inversa $\mathbb{X}(\rho,t) = F^{-1}(\rho,t)$. Sin embargo, f puede anularse en todo un intervalo, con lo cual es conveniente definir la inversa generalizada

$$\mathbb{X}(\rho,t) = \inf\{x : F(x,t) \geq \rho\}.$$

Dado un ρ fijo sabemos que

$$\rho = \int_{-\infty}^{\mathbb{X}(\rho,t)} f(y,t) dy,$$

y si derivamos en la variable t de ambos lados nos queda

$$0 = \int_{-\infty}^{\mathbb{X}(\rho,t)} \frac{\partial}{\partial t} f(y,t) dy + f(\mathbb{X}(\rho,t),t) \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{X}(\rho,t).$$

Usando la ecuación (4.1.7), el primer término queda

$$\int_{-\infty}^{\mathbb{X}(\rho,t)} \frac{\partial}{\partial y} (f(y,t)(2F(y,t) - 1)) dy = f(\mathbb{X}(\rho,t),t)(2F(\mathbb{X}(\rho,t),t) - 1),$$

con lo cual

$$0 = f(\mathbb{X}(\rho,t),t)(2F(\mathbb{X}(\rho,t),t) - 1) + f(\mathbb{X}(\rho,t),t) \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{X}(\rho,t).$$

Es decir,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{X}(\rho,t) = -(2F(\mathbb{X}(\rho,t),t) - 1),$$

y resolver la ecuación diferencial es equivalente a resolver para cada ρ la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{X}(\rho,t) = (1 - 2\rho), \quad (4.1.8)$$

pues $\rho = F(\mathbb{X})$. Esta ecuación tiene la siguiente solución explícita

$$\mathbb{X}(\rho,t) = t(1 - 2\rho) + \mathbb{X}(\rho,0)$$

donde $\mathbb{X}(\rho,0)$ se obtiene de la condición inicial

$$\rho = \int_{-\infty}^{\mathbb{X}(\rho,0)} f(y,0) dy.$$

De esta manera podremos reconstruir la solución. Tenemos una fórmula implícita para calcular ρ dado t . Luego,

$$f(x,t) = \frac{\partial}{\partial \mathbb{X}} F(\mathbb{X}).$$

En la cuenta anterior hemos supuesto que $f(x,t)$ es derivable en x . Sin embargo esto no tiene por qué ocurrir. En ese caso, podemos pedir que f sea solución de la ecuación (4.1.6) en el sentido débil, sólo con pedir que $f \in (C^1(0,T), L^1(\mathbb{R}))$. Es decir que sea C^1 en t , pero sólo integrable en x .

Para definir la solución en el sentido débil tenemos:

Definición 4.1.1. Dada la siguiente ecuación

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (f(x,t)G(x,t,F(x,t)))$$

con una condición inicial $f(x,0) = f_0(x)$, donde $F(x,t) = \int_{-\infty}^x f(x,t)$, diremos que $f \in (C^1(0,T), L^1(\mathbb{R}))$ es una solución débil si $f(x,0) = f_0(x)$ y para todo $h(x) \in C^1(\mathbb{R})$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x,t) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} h'(x)f(x,t)G(x,t,F(x,t)) dx.$$

Vamos a probar que si existe una solución para (4.1.8), existe entonces una solución débil para (4.1.6). Comenzamos demostrando el siguiente lema:

Lema 4.1.1. Sea $h \in C_0^1(\mathbb{R})$. Entonces, con \mathbb{X} definido como antes,

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x,t)dx = \int_0^1 h(\mathbb{X}(\rho,t)d\rho.$$

Demostración. Hacemos el cambio de variables $x = \mathbb{X}$, y

$$dx = \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial \rho} d\rho = \frac{\partial F^{-1}}{\partial \rho} d\rho = \frac{1}{f(x,t)} d\rho$$

Luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x,t)dx = \int_0^1 h(\mathbb{X}(\rho,t)d\rho.$$

□

Con este lema podemos probar el resultado de existencia:

Teorema 4.1.2. Sea $\mathbb{X}(\rho,t)$ una solución de

$$\begin{cases} \partial_t \mathbb{X}(\rho,t) = 1 - 2\rho, & t \in (0,T), \\ \mathbb{X}(\rho,0) = \inf\{x : \int_{-\infty}^x f_0(y)dy \geq \rho\}. \end{cases} \quad (4.1.9)$$

Entonces existe una solución débil de

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (f(x,t)(2F(x,t) - 1)) & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T) \\ f(x,0) = f_0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

con $\int_{\mathbb{R}} f(x,t)dx = 1$ para $0 < t < T$.

Demostración. Dada una función $h \in C_0^1(\mathbb{R})$, usando el Lema previo tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x,t)dx = \int_0^1 h(\mathbb{X}(\rho,t)d\rho = \int_0^1 h'(\mathbb{X}(\rho,t)) \frac{d\mathbb{X}(\rho,t)}{dt} d\rho.$$

Por otro lado

$$- \int_{-\infty}^{\infty} h'(x)f(x,t)(2F(x) - 1)dx = - \int_0^1 h'(\mathbb{X}(\rho,t))(2\rho - 1)d\rho.$$

Para que exista una solución débil, necesitamos que

$$\int_0^1 h'(\mathbb{X}(\rho,t)) \frac{d\mathbb{X}(\rho,t)}{dt} d\rho = - \int_0^1 h'(\mathbb{X}(\rho,t))(2\rho - 1)d\rho$$

o, equivalentemente,

$$\int_0^1 h'(\mathbb{X}(\rho,t)) \left[\frac{d\mathbb{X}(\rho,t)}{dt} + (2\rho - 1) \right] d\rho = 0.$$

Ahora, como \mathbb{X} es solución de la ecuación (4.1.9), el corchete es igual a cero y la igualdad se alcanza. □

Convergencia al promedio

El teorema del capítulo anterior nos garantiza el consenso en un único punto pues el diámetro de la ubicación inicial de los agentes es menor al bounded confidence, pero no nos caracteriza a qué valor convergen. Veremos a continuación que en este modelo los agentes llegan a un consenso, y tienden todos al promedio de las opiniones de la distribución inicial.

Teorema 4.1.3. *Sea $f(x, t)$ la solución de (4.1.6) y sea c_0 la media de la distribución inicial f_0 . Es decir*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, 0) dx = c_0$$

Luego

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(x, t) = \delta_{c_0}$$

Es decir la distribución converge al promedio.

Demostración. Observamos que

$$\frac{\partial \mathbb{X}(\rho, t)}{\partial t} = 1 - 2\rho$$

es negativa cuando $\rho > \frac{1}{2}$ y positiva cuando $\rho < \frac{1}{2}$. Luego $\mathbb{X}(\rho, t) = \inf\{x : \int_{-\infty}^x f(x, t) = \rho\}$ crece cuando $0 < \rho < \frac{1}{2}$ y decrece cuando $\frac{1}{2} < \rho < 1$. Por lo tanto, para cierto T , se tiene

$$\lim_{t \rightarrow T} \mathbb{X}(\rho, t) = c_0,$$

por lo que

$$\lim_{t \rightarrow T} f(x, t) = \delta_{c_0}$$

Ahora, veamos que

Para caracterizar c_0 , observemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) (2F(x, t) - 1) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) (2F(x, t) - 1) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} F^2(x, t) - f(x, t) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego, como $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx = \int_0^1 \mathbb{X}(\rho, t) d\rho$, y como el lado izquierdo es igual a c_0 para todo t , debe ocurrir que $f(x, t) \rightarrow \delta_{c_0}$. \square

4.2. Modelo con *Bounded Confidence*

A continuación analizaremos el mismo modelo, pero con la hipótesis de *bounded confidence*. En este caso los individuos sólo interactúan si sus opiniones son similares. Introducimos un parámetro positivo d para cuantificar esto, y el resultado de la interacción es ahora:

$$w_i^* = \begin{cases} w_i + h & \text{si } w_j \geq w_i > w_j - d \\ w_i - h & \text{si } w_j \leq w_i < w_j + d \\ w_i & \text{si } |w_j - w_i| \geq d \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Omitimos el desarrollo ya que es equivalente al anterior, y se obtiene una ecuación similar pero con las integrales truncadas hasta $x + d$ y $x - d$ respectivamente. La evolución de la densidad obedece ahora la ecuación

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \left(\int_{x-d}^x f(y, t) dy - \int_x^{x+d} f(y, t) dy \right) + 2f^2(x, t). \quad (4.2.2)$$

Si llamamos como antes $F(x, t)$ a la primitiva de f , por el Teorema de Barrow y aproximando $F(x \pm d, t)$ con un desarrollo de Taylor de segundo orden,

$$F(x \pm d, t) = F(x, t) \pm d \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \pm \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, t) + o(d^2),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{x-d}^x f(y) dy - \int_x^{x+d} f(y) dy &= F(x, t) - F(x-d, t) - F(x+d, t) + F(x, t) \\ &= -d^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, t) + o(d^2) \\ &\approx -d^2 \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Luego, utilizando este resultado en (4.2.2), la ecuación para el caso con *bounded confidence* queda

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -d^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2f^2(x, t), \quad (4.2.4)$$

que es la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Para esta ecuación, Friedman y Souganidis demostraron en [11] que las soluciones tienden a infinito en tiempo finito, fenómeno conocido como *blow-up*. En términos del modelo de opiniones, esto significa que la densidad f de agentes se concentra y aparece una Delta de Dirac.

4.3. Simulaciones

En el Capítulo 3 vimos algunos teoremas de convergencia por los que, tanto en el modelo continuo como en el modelo donde los agentes se acercan una constante h , si en cada interacción

todos los agentes pueden interactuar entre sí, los agentes convergen a una misma opinión. Observamos que permitir que todos los agentes interactúen entre sí es equivalente a asumir que no hay *Bounded Confidence* o bien que la constante es mayor al intervalo. Por otro lado la existencia de un consenso significa que todos los agentes terminan con la misma opinión o bien, desde el otro enfoque, que la densidad converge a una δ de Dirac. Más aún, hemos demostrado que esa δ se concentra en el promedio de la distribución inicial. En esta sección vamos a ver cómo este resultado puede contrastarse con algunas simulaciones.

Las simulaciones fueron realizadas utilizando Octave. Se tomaron 1000 agentes con una distribución inicial tal que cada agente tiene una inicialmente una opinión en $I = [-1, 1]$. Utilizamos para el modelo $h = 0,01$ y asignamos un tiempo dt y una cantidad de pasos tal que la convergencia ocurra en el tiempo de la simulación. Estas variables quedaron fijas a lo largo de todas las simulaciones ya que no influyen en el tipo ni el lugar de convergencia. Sin embargo, si influyen en el tiempo de convergencia que será analizado luego.

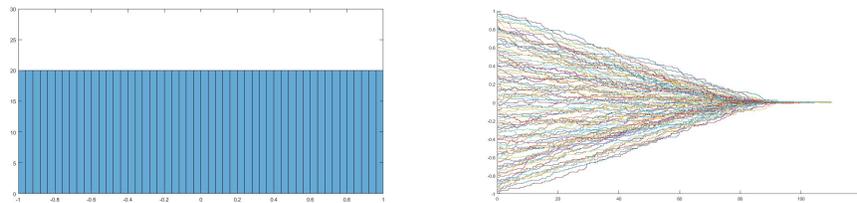
Para observar la convergencia, el tiempo y el lugar a donde converge graficamos la opinión de los agentes a cada tiempo t . Para una correcta visualización graficamos sólo un diez por ciento de los agentes, una vez cada 30 iteraciones.

4.3.1. Simulaciones sin *Bounded Confidence*

Tomamos en este caso una condición de Bounded Confidence mayor al intervalo ($d = 2$), de manera tal que todos los agentes puedan interactuar entre sí sin importar su opinión.

Realizamos las simulaciones con tres condiciones iniciales distintas.

En primer lugar observamos qué ocurre cuando todos los agentes están uniformemente distribuidos, figura 4.2. En este caso el promedio de la opinión inicial de todos los agentes es 0. Observamos que efectivamente, en la simulación las opiniones convergen a δ_0 y finalmente todos los agentes terminan opinando 0. La simulación es similar si en lugar de tomar una distribución original uniformemente distribuída, tomamos un conjunto de agentes cuya opinión está entre -1 y 1 con una probabilidad uniformemente distribuída.

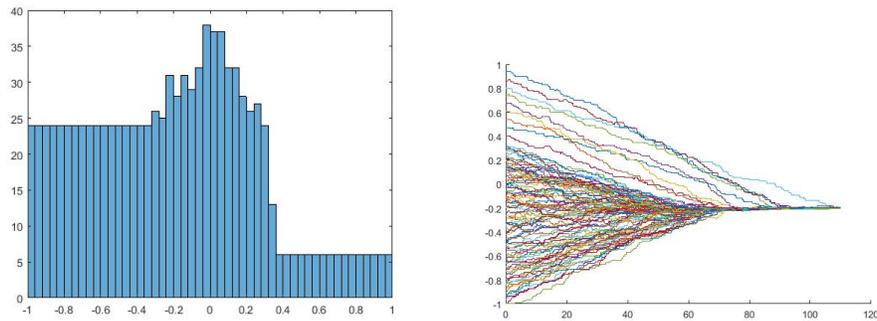


(a) Histograma de la distribución uniforme inicial (b) Converge a 0 en un tiempo cercano a 90

Figura 4.2: Simulación realizada con $N = 1000$ agentes y un paso $h = 0,01$ de modificación de opinión

En segundo lugar simulamos una interacción en donde los agentes tienen una distribución inicial como la que se observa en la figura 4.3. Se divide el intervalo en tres partes: en el primer tercio la distribución es uniforme y relativamente grande. En el siguiente tercio, hay

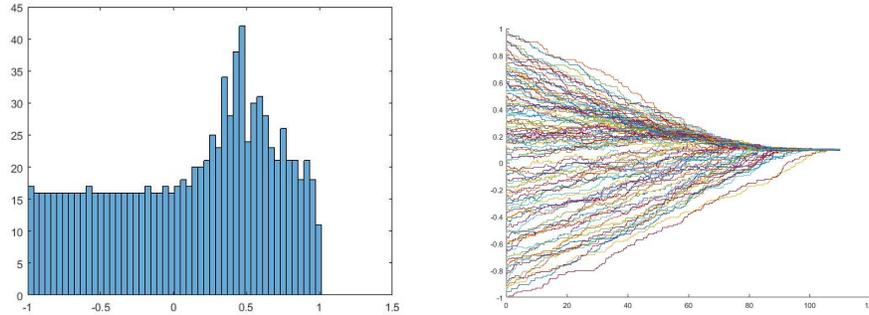
una distribución triangular, de manera que la distribución comienza de manera continua con el tercio anterior, y alcanza un pico en 0, para luego descender al valor del último tercio. Luego, en el tercer tercio, nuevamente hay una distribución uniforme, pero mucho menor que la primera. En el caso que hemos tomado, el promedio de esta distribución es de $-0,1998$. De acuerdo al teorema 4.1.1 podemos ver en la simulación que este modelo converge, alcanzando un consenso en el promedio.



(a) Histograma de distribución inicial con un pico en 0 (b) Converge aproximadamente a $-0,2$ en un tiempo aproximado de 100

Figura 4.3: Simulación realizada con $n = 1000$ agentes y un paso $h = 0,01$ de modificación de opinión

Por último veamos un caso similar pero donde el máximo no está en 0. Para eso tomamos una distribución donde hay 800 agentes que son distribuidos uniformemente en el intervalo, y otros 200 que son distribuidos de manera normal, con una esperanza 0,5 y una varianza 0,2 4.4. Luego esta distribución tiene un máximo en 0,5 y, en el ejemplo que hemos tomado, un promedio en 0,0964. Vemos nuevamente, en consonancia con el Teorema 4.1.1, que todos los agentes convergen a un valor cercano al promedio.



(a) Histograma de una distribución inicial con un pico en 0,5 (b) Converge aproximadamente a 0,1 en un tiempo aproximado de 100

Figura 4.4: Simulación realizada con $n = 1000$ agentes y un paso $h = 0,01$ de modificación de opinión

4.3.2. Tiempos de convergencia

Otro factor que nos interesa conocer y comparar con las simulaciones es el tiempo necesario para llegar al consenso. Para eso podemos hacer dos razonamientos distintos.

En primer lugar, podemos utilizar la ecuación que hemos deducido en el Capítulo 3 y ver a partir de ahí cómo evoluciona la densidad y para qué tiempos explota. Para poder encontrar la ecuación de la densidad a lo largo del tiempo de manera explícita, necesitamos conocer la distribución inicial. Por ejemplo, vamos a ver el primer ejemplo, donde la distribución inicial es $f(x, 0) = \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(x)$ Para este caso

$$\mathbb{X}(\rho, 0) = \inf \left\{ x : \int_{-1}^x \frac{1}{2} dy \geq \rho \right\} = 2\rho - 1.$$

Luego,

$$\mathbb{X}(\rho, t) = (1 - 2\rho)t + \mathbb{X}(\rho, 0) = (1 - 2\rho)t + 2\rho - 1,$$

e invirtiendo, dado que $0 \leq \rho \leq 1$ nos queda

$$\rho = \left(\frac{x - t + 1}{2 - 2t} \right) \chi_{[t-1, 1-t]}(x)$$

Luego la densidad será para $0 \leq t < 1$

$$f(x, t) = \partial_x \left(\frac{x - t + 1}{2 - 2t} \chi_{[t-1, 1-t]}(x) \right) = \frac{1}{2 - 2t} \chi_{[t-1, 1-t]}(x)$$

Observamos que con esta expresión, la solución produce *blow up* para tiempo $t = 1$, es decir que la densidad tiende a infinito para $x = 0$, y que para tiempos mayores la ecuación no está definida. Sin embargo, cuando deducimos la ecuación hemos realizado un cambio de variables

donde $t = \frac{2h}{Ndt}$ s. Como las simulaciones las realizamos con el tiempo original s (sin reescalar), cuando $t = 1$, $S_{fin} = \frac{ndt}{2h}$. Luego, en la simulación que hemos realizado corresponde que $S_{fin} = 83,3333$. Observamos que ese resultado se corresponde aproximadamente con el gráfico obtenido, ver la figura 4.2.

Otro enfoque posible, más intuitivo, es intentar aproximar la cantidad de interacciones necesarias hasta llegar al consenso. En cada interacción, dos agentes se mueven. Sin embargo, no podemos asegurar que los dos se acerquen al promedio ya que uno de ellos podría estar alejándose. Sin embargo, procedemos de manera similar al siguiente problema.

Observación 4.3.1. [Problema de la hormiga] *Se tiene un conjunto de hormigas caminando en una varilla de un metro de largo. Todas las hormigas son indistinguibles y caminan con la misma velocidad, de un metro por minuto. Algunas hormigas comienzan caminando hacia la izquierda y otras hacia la derecha. Cuando dos hormigas se encuentran “rebotan”, es decir, ambas cambian su dirección. Cuando llegan al final de la varilla se caen. La pregunta que nos hacemos es ¿cuánto tiempo tardarán en caerse todas del palo?*

La respuesta es que tardarán a lo sumo 1 minuto; es decir, el tiempo que tardaría la hormiga que está en una de las puntas del palo y camina en dirección a la otra punta, si caminara sola. El razonamiento para llegar a esta conclusión es que si bien las hormigas cambian de dirección, al ser todas indistinguibles, cuando se produce un choque es equivalente que reboten, o que las dos mantengan su dirección (en realidad las hormigas serán distintas, pero si nosotros no las distinguimos, no notaremos la diferencia). Por lo tanto el problema es similar a suponer que las hormigas no frenan ni cambian su dirección al encontrarse con otra, y el tiempo en caerse será el mayor tiempo entre los que tarda en caerse cada una sin interactuar entre sí.

Utilizamos el mismo razonamiento en la interacción de agentes. Cuando interactúan dos agentes, ambos se mueven h , aunque no necesariamente acercándose al promedio. Sin embargo podemos afirmar que el agente que tiene la opinión más extrema (de ambos lados), solo puede acercarse al promedio. Puede ocurrir que en una interacción cambie quién es el agente más lejano (porque el que se movió pasa a otro), pero como para nosotros son indistinguibles, podemos suponer que siempre el agente más lejano es el mismo. Luego, el tiempo en alcanzar el consenso es lo que tarde el más lejano en alcanzarlo. Además, la probabilidad de que ese agente se mueva en cada tiempo es $\frac{2}{N}$. Luego, la cantidad de iteraciones necesarias será $\frac{L_{max}}{h} \frac{2}{N}$, donde L_{max} es la diferencia entre la posición inicial y el promedio total de el agente más lejano. Para el primer ejemplo que tomamos $L_{max} = 1$, luego esperamos que el consenso se logre en aproximadamente 50000 interacciones. Para contar las iteraciones realizadas podemos incorporar un contador. Sin embargo dado que una vez que están suficientemente cerca dos individuos dejan de interactuar, pasado un tiempo, la probabilidad de interacción no es la misma para todos los agentes, ya que varios ya llegaron al lugar de consenso (se contabilizan 51590 interacciones). Para obtener la aproximación más precisa, es conveniente partir del tiempo final S_{fin} y calcular $\frac{S_{fin}}{dt}$. Si utilizamos la fórmula de recién donde $S_{fin} = \frac{ndt}{2h}$ observamos que ambas fórmulas concuerdan y obtenemos 50000 interacciones.

4.4. Atracción proporcional con *bounded confidence*

Finalmente consideremos un modelo donde dos individuos al interactuar se acercan proporcionalmente a la distancia que los separa, siempre y cuando estén a una distancia menor que d , el parámetro de *bounded confidence*. Es decir, la interacción está dada por:

$$w_i^* = \begin{cases} w_i + \gamma(w_j - w_i) & \text{si } |w_j - w_i| \leq d \\ w_i & \text{si } |w_j - w_i| > d \end{cases}$$

donde $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2}$ es un parámetro que marca la importancia que le otorga al cambio de opinión.

Este modelo fue introducido y analizado por Deffuant y Weisbuch en una serie de trabajos con distintos coautores, ver [39, 8, 40]. En particular, Neau obtuvo una ecuación diferencial para la evolución de la densidad de agentes sobre las opiniones en su tesis [24].

A continuación veremos su deducción. Si las interacciones ocurren con una frecuencia dt , la densidad de individuos con una opinión x en un tiempo $t+dt$ será la que había en un tiempo t más una función de ganancia $G(x, t)$ menos una función de pérdida $L(x, t)$. La función de pérdida será la probabilidad de encontrar un individuo en x , y otro en cualquier otra opinión siempre que esté a distancia menor o igual que d :

$$L(x, t) = \int_{-d}^d f(x, t)f(x + y)dy$$

Mientras, la función de ganancia es la probabilidad de que interactúen dos individuos y que luego de esa interacción uno de los dos pase a opinar x :

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \int \int f(x + y, t)f(x + z, t)\delta[(x + y) + \gamma((x + z) - (x + y) = x)]dzdy \\ &= \int f(x + y, t) \int f(x + z, t)\delta[y + \gamma(z - y)]dzdy \\ &= \int f(x + y, t) \int f(x + z)\frac{1}{\gamma}\delta\left(z + \frac{1 - \gamma}{\gamma}y\right)dzdy \\ &= \int_{-d}^d f(x + y, t)f\left(x + \frac{1 - \gamma}{\gamma}y\right)\frac{1}{\gamma}dy \\ &= \frac{1}{\gamma} \int_{-\gamma d}^{\gamma d} f(x + y, t)f\left(x + \frac{1 - \gamma}{\gamma}y\right)dy \end{aligned}$$

donde δ es la Delta de Dirac.

La ecuación queda de la forma

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \int_{-\gamma d}^{\gamma d} f(x + y, t)f\left(x + \frac{1 - \gamma}{\gamma}y\right)dy - \int_{-d}^d f(x, t)f(x + y)dy$$

Esta es una ecuación de tipo Boltzmann similar a las de [31, 29, 37]. Vamos a proceder de manera informal, aproximando f por su desarrollo de Taylor de segundo orden, pero

observemos que si f no es C^2 , deberíamos realizar el análisis con más cuidado, introduciendo funciones test suficientemente suaves, obteniendo una ecuación que f satisface de forma débil.

Tanto f como sus derivadas estarán evaluadas en (x, t) , y lo omitimos para acortar las fórmulas. Nos queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{1}{\gamma} \int_{-\gamma d}^{\gamma d} \left(f + yf' + \frac{y^2}{2} f'' \right) \left(f + \frac{1-\gamma}{\gamma} yf' + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} y \right)^2 f'' \right) dy \\ &\quad - \int_{-d}^d f \left(f + yf' + \frac{y^2}{2} f'' \right) dy. \end{aligned}$$

Integrando y teniendo en cuenta que por simetría los términos impares se anulan, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{1}{\gamma} (2\gamma d) f^2 + \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\gamma-1}{\gamma} f'^2 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^2 + 1 \right) f f'' \right] 2 \frac{(\gamma d)^3}{3} \\ &\quad + \frac{d^5}{10} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) f''^2 - 2df^2 - \frac{d^3}{3} f f'' \\ &= 2df^2 + \frac{d^3}{3} \left[2\gamma(\gamma-1) f'^2 + f f' \left(\left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^2 + 1 \right) \gamma^2 - 1 \right] - 2df^2 \\ &\quad + \frac{d^5}{10} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) f''^2 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\left(\left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^2 + 1 \right) \gamma^2 - 1 = (\gamma-1)^2 + \gamma^2 - 1 = 2(\gamma(\gamma-1))$$

y que podemos despreciar el término $\frac{d^5}{10} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) f''^2$ pues al hacer Taylor asumimos que d es pequeño, obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{d^3}{3} 2\gamma(\gamma-1) (f'^2 + f f'') \\ &= \frac{d^3}{3} \gamma(\gamma-1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (f^2). \end{aligned}$$

Esta ecuación es una ecuación de Medios Porosos, pero observemos que el coeficiente $(\gamma-1)$ es negativo pues $\gamma \leq 1/2$. La ecuación de Medios Porosos *backwards*, es decir, mirando el tiempo hacia atrás dado que el coeficiente es negativo, fue estudiada por Levine y Payne en [21] quienes probaron que desarrolla *blow-up*, y las soluciones tienden a infinito cuando el tiempo se aproxima a cierto T que puede acotarse en función del dato inicial. Nuevamente, en términos del modelo de opinión se corresponde con la formación de consensos cuando una fracción de los agentes se concentra en una opinión, haciendo aparecer una Delta de Dirac que le asigna masa positiva a una opinión.

4.4.1. Simulaciones con Bounded Confidence

En los casos con Bounded Confidence, ya no se cumplen las condiciones de los teoremas de la sección 3.4. Por lo tanto no está asegurada la convergencia. En cambio, en las simulaciones observamos, que para tiempos largos se forman una cantidad finita de grupos, *partidos* o *clusters*. Es decir que la distribución final es de la forma

$$F(x, t) = \sum_k m_k \delta_{x_k}(x)$$

Observamos en las simulaciones que la distancia entre estos *clusters*, (entre los x_k) es mayor a d , la constante de *Bounded Confidence*. La cantidad de *clusters* aumenta a medida que d disminuye.

Una aproximación intuitiva a este fenómeno es que, si bien el teorema no se cumple para todo el intervalo I , localmente todos los individuos interactúan entre sí. Por otro lado, luego de un tiempo, las interacciones con individuos de otros *clusters* es cada vez menor, por lo que el problema queda dividido en una cantidad finita de subproblemas disjuntos, sin *Bounded Confidence*.

Por otro lado, también observamos que la ecuación que resulta en el capítulo 4, la ecuación con *Bounded Confidence* tiene la forma

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -d^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2f^2(x, t),$$

Observamos que donde el dato inicial f_0 tiene máximos locales, su derivada se anula, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Luego, en los máximos locales $y \in I$ podemos aproximar la ecuación de Hamilton Jacobi por una ecuación ordinaria,

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = 2f(x, t)^2$$

que podemos resolver explícitamente por ser de variables separadas, integrando en t en ambos términos, y realizando un cambio de variables en el primero.

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \frac{1}{f(x, t)^2} dt &= \int_0^t 2 dt \\ \int_{f_0(x)}^{f(x, t)} \frac{1}{y^2} dy &= \frac{1}{f_0(x)} - \frac{1}{f(x, t)} = 2t \\ f(x, t) &= \frac{f_0(x)}{1 - 2t f_0(x)}. \end{aligned}$$

Luego, podemos concluir que con un d suficientemente chico los máximos locales evolucionan hacia un *cluster* en dicho lugar (que para d chicos, es similar al promedio del dato inicial en un entorno). El tiempo de convergencia de dichos máximos, una vez que la densidad ha evolucionado, para definir los distintos *clusters*, puede resolverse directamente de esa ecuación, y se ajustan a los tiempos observados en las simulaciones.

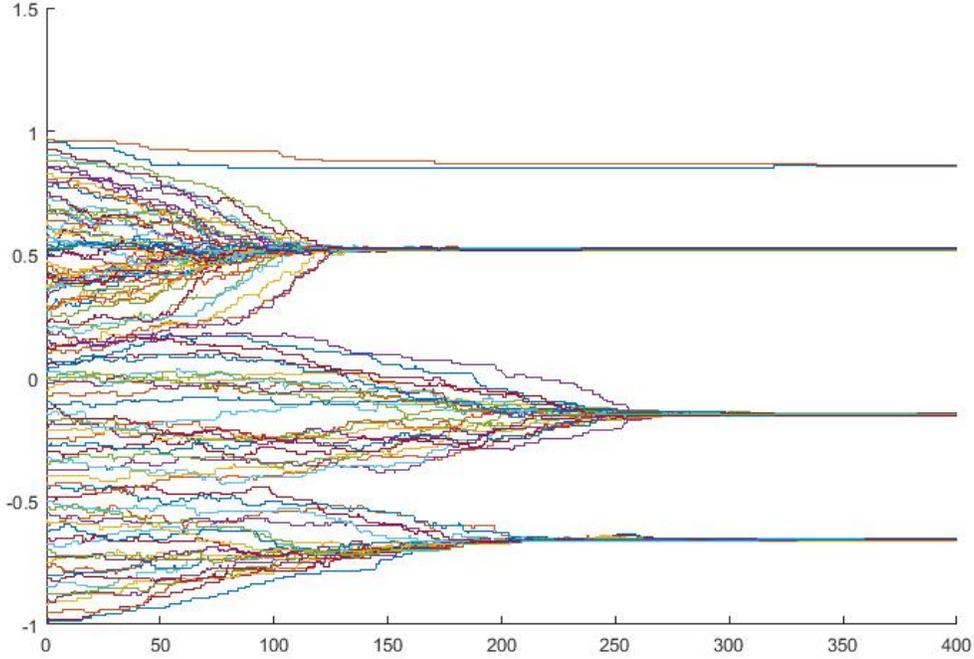


Figura 4.5: Simulación realizada con $n = 1000$ agentes y un paso $h = 0,01$ de modificación de opinión, y una *Bounded Confidence* de $d = 0,3$. Distribución inicial como en el ejemplo b

4.5. Comentarios finales

En estos modelos asumimos que los cambios de opinión se deben a la interacción entre los agentes. Si les permitimos cambiar espontáneamente de opinión, como en el modelo de Toscani de la sección anterior, podemos suponer que los agentes realizan una caminata al azar sobre el espacio de opiniones además de interactuar con los demás.

Esto hace aparecer un nuevo término en el modelo continuo, una derivada segunda (o Laplaciano) de f , multiplicada por una constante que depende de la frecuencia con la que cambian de opinión espontáneamente. En ese caso, uno obtiene las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x, t) \left(\int_{-\infty}^x f(y, t) dy - \int_x^{\infty} f(y, t) dy \right) \right] \quad (4.5.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - c \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2f^2(x, t), \quad (4.5.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - c \frac{\partial^2}{\partial x^2} (f^2). \quad (4.5.3)$$

El efecto del Laplaciano sobre la formación de consensos no está estudiado aún.

Anexo: Teorema de convergencia para un sistema infinito de ecuaciones

En esta sección desarrollamos la demostración de que si se tiene un sistema de infinitas ecuaciones diferenciales, como ocurre en (4.1.3), con ciertas condiciones podemos asegurar su existencia y unicidad [34].

Teorema 4.5.1. *Sea*

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n, \dots), \quad i = 1, 2, \dots$$

un sistema infinito de ecuaciones diferenciales donde los f_i satisfacen

- f_i está definida para todo $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots$ y para todo $x \in T = [x_0, x_0 + a] \subset \mathbb{R}$
- f_i son fuertemente continuas en y_1, y_2, \dots para una x fija. Esto significa que para todo $\varepsilon > 0$ existen N_0 y $\delta > 0$ tal que si $|y'_i - y''_i| < \delta$, para $i = 1, 2, \dots, N_0$, entonces

$$|f(x, y'_1, y'_2, \dots) - f(x, y''_1, y''_2, \dots)| < \varepsilon.$$

- f_i es medible en x para y_1, y_2, \dots fijos.
- f_i está mayorada

$$|f_i(x, y_1, y_2, \dots)| < M_i(x)$$

por una función $M_i(x)$ integrable en el segmento $[x_0, x_0 + a]$.

Entonces para todo vector (y_1^0, y_2^0, \dots) de datos iniciales existe al menos una solución. Además si

$$|f_n(x, y'_1, \dots, y'_n, \dots) - f_n(x, y''_1, \dots, y''_n, \dots)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} K_{n,i} |y'_i - y''_i| \quad (4.5.4)$$

con $\sum_{n=1}^{\infty} K_{ni} = A_i \leq A \leq \infty$ entonces la solución $(y_1(x), y_2(x), \dots)$ del sistema que satisface la condición inicial es única y existe $B \leq \infty$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(x)| < B.$$

La demostración de existencia es bastante más complicada que la clásica para un sistema de finitas ecuaciones diferenciales, pues requiere el Teorema de Punto Fijo de Schauder, y además deberíamos buscar la solución en un producto infinito de copias de $C([x_0, x_0 + a])$. Esto se puede evitar, como se verá más adelante

Omitiremos la demostración de la unicidad porque con la condición adicional (4.5.4) sigue exactamente los mismos pasos de la demostración clásica.

Demostración. Primero reemplazamos el sistema de ecuaciones por el siguiente sistema que resulta después de integrar a ambos lados:

$$y_i(x) = y_i^0 + \int_{x_0}^x f_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots, m) dx, \quad i = 1, 2, \dots$$

y consideremos el mapa

$$z_i(x) = y_i^0 + \int_{x_0}^x f_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots) dx \quad i = 1, 2, \dots$$

que va de un sistema sumable de funciones continuas $(y_1(x), y_2(x), \dots)$ a otro sistema similar, $(z_1(x), z_2(x), \dots)$. Notamos que si $f(x, y_1, \dots, y_n)$ es una función de varias variables y_1, \dots, y_n medible con respecto a x cuando las variables y_i están fijas.

Entonces, la función $\Phi(x) = f(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ es medible si las $\varphi_i(x)$ lo son para todo $i = 1, \dots, n$. Luego, la función $\Psi_n(x) = f(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), 0, 0, \dots)$ también lo es, y por lo tanto la función $\Psi(x) = f(x, \varphi_1(x), \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(x)$ también lo es.

Consideramos el sistema de funciones $(y_1(x), y_2(x), \dots)$ como un punto P de un espacio abstracto Γ . Si existe un punto P invariante bajo el mapa A , será solución del sistema que buscamos resolver.

Sea M_0 un conjunto de puntos $P \in \Gamma$ que satisfacen, para tres puntos x, x' y x'' que

$$|y_k(x) - y_k^0(x)| \leq \int_{x_0}^x M_k(x) dx \tag{4.5.5}$$

$$|y_k(x') - y_k(x'')| \leq \int_{x'}^{x''} M_k(x) dx$$

Es fácil ver que A manda al conjunto M_0 en sí mismo por la definición de las M_k . Ahora definimos B que asocia cada punto $P \in \Gamma$ a un conjunto de números

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{a_1^1}{N_1}, & \frac{a_1^2}{N_1}, & \dots, & \frac{a_1^n}{N_1}, & \dots & & \\ \frac{a_2^1}{2N_2}, & \frac{a_2^2}{2N_2}, & \dots, & \frac{a_2^n}{nN_2}, & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \frac{a_n^1}{nN_n}, & \frac{a_n^2}{N_n}, & \dots, & \frac{a_n^n}{nN_n}, & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \end{array} \tag{4.5.6}$$

donde $N_i = y_i^0 + \int_{x_0}^{x_0+a} M_i(x) dx$ y los números $a_n^1, \dots, a_n^n, \dots$ son los coeficientes de Fourier de la función $y_n(x)$ en la base de senos y cosenos escalada al segmento $[x_0, x_0 + a]$.

Como el conjunto de números de (4.5.6) es numerable, podemos escribirlos como una

sucesión b_1, \dots, b_n, \dots . Más aún, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (a_n^k)^2 &= \int_{x_0}^{x_0+a} (y_n(x))^2 dx \\ &\leq \int_{x_0}^{x_0+a} (y_n^0 + \int_{x_0}^x M_k(x))^2 dx \\ &\leq \int_{x_0}^{x_0+a} N_n^2 dx \\ &= aN_n^2, \end{aligned}$$

por lo que se sigue por Parseval que

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_n^k}{nN_n} \right)^2 \leq a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{a\pi^2}{6}$$

Luego B manda al conjunto M_0 en un subconjunto M_0^* del espacio de Hilbert l_2 , y podemos definir $A^* = B \circ A \circ B^{-1}$ que va de M_0^* en sí mismo. Más aún, si $P^* \in M_0^*$ es un punto fijo de A^* , el punto $P \in M_0$ correspondiente determina una solución de la ecuación [34].

$$\begin{array}{ccc} M_0^* & \leftrightarrow & M_0 & \rightarrow & M_0 & \leftrightarrow & M_0^* \\ & & B^{-1} & & A & & B \end{array}$$

Para usar el teorema de Schauder queremos demostrar que el conjunto M_0^* es compacto y convexo.

Convexo

Sean $P'^* = (b'_1, \dots, b'_n, \dots)$ y $P''^* = (b''_1, \dots, b''_n, \dots)$ dos puntos de M_0^* . Luego el punto

$$\alpha P'^* + \beta P''^* = (\alpha b'_1 + \beta b''_1, \alpha b'_2 + \beta b''_2 + \dots) \quad \alpha + \beta = 1, \alpha, \beta > 0$$

pertenece a M_0^* pues corresponde al sistema de funciones

$$\alpha y'_1(x) + \beta y''_1(x), \alpha y'_2(x) + \beta y''_2(x), \dots$$

Para ver que ese punto pertenece a M_0 verifiquemos que cumple las dos condiciones (4.5.5):

$$\begin{aligned} |\alpha y'_k(x) + \beta y''_k(x) - y_k^0| &= |\alpha(y'_k(x) - y_k^0) + \beta(y''_k(x) - y_k^0)| \\ &\leq (\alpha + \beta) \int_{x_0}^x M_k(x) dx \\ &= \int_{x_0}^x M_k(x) dx, \\ |\alpha y'_k(x') + \beta y''_k(x') - \alpha y'_k(x'') - \beta y''_k(x'')| &\leq (\alpha + \beta) \int_{x_0}^x M_k(x) dx \\ &= \int_{x_0}^x M_k(x) dx. \end{aligned}$$

Luego, el conjunto M_0^* es convexo.

Compacto

Tomamos una sucesión de puntos arbitraria P_i^* en M_0^* . Este punto corresponde a una sucesión $P_i = (y_1^{(i)}(x), y_2^{(i)}(x), \dots)$ en el conjunto M_0 . Por las dos condiciones, la sucesión $(y_1^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada y equicontinua. Por lo tanto, Arzela Ascoli nos garantiza que contiene una subsucesión

$$y_1^{(\alpha_1)}(x), y_1^{(\alpha_2)}(x), \dots, y_1^{(\alpha_n)}(x), \dots$$

que converge uniformemente. Además la subsucesión $y_2^{(\alpha_n)}$ también es uniformemente acotada y equicontinua, por lo tanto, también contiene una subsucesión convergente

$$y_2^{(\beta_1)}(x), y_2^{(\beta_2)}(x), \dots, y_2^{(\beta_n)}(x), \dots$$

Este proceso puede ser continuado indefinidamente, y podemos tomar una subsucesión diagonal que será convergente por ser una subsucesión de sucesiones convergentes, y la sucesión de puntos

$$P_{\alpha_1} P_{\beta_2}, P_{\gamma_3}, \dots \subset M_0$$

convergen a un punto $P_0 \in M_0$ uniformemente en $x \in T_0$.

Falta ver que la sucesión correspondiente $P_1^*, P_2^*, P_3^*, \dots$ del conjunto M_0^* converge al punto $P_0^* \in M_0^*$. En la norma del espacio de Hilbert l_2 , la distancia entre dos puntos está dada por

$$\text{dist}(P^*, P'^*) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (b'_i - b''_i)^2} = \sqrt{\sum_{n_1}^{\infty} \frac{1}{n^2 N_n^2} \int_{x_0}^{x_0+a} (y'_n - y''_n)^2 dx}$$

de donde se sigue que

$$\text{dist}(P_0^*, P_k^*) \leq \sqrt{\sum_{n_1}^{n_0} \frac{1}{n^2 N_n^2} \int_{x_0}^{x_0+a} (y_n^0 - y_n^k)^2 dx + a \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$$

que es arbitrariamente chico para n_0 y k suficientemente grandes. Luego M_0^* es compacto. \square

Capítulo 5

Un modelo bidimensional

En esta sección estudiaremos un modelo similar a los anteriores en un espacio de más dimensiones. Consideraremos que los individuos tienen opiniones no sobre un tema, sino sobre distintos asuntos, independientes entre sí. Por lo tanto representaremos la opinión de cada individuo en \mathbb{R}^n , donde cada coordenada corresponde a la opinión sobre un tema particular. Realizaremos el desarrollo tomando el caso \mathbb{R}^2 , el caso general es similar.

5.1. Modelo sin *Bounded Confidence*

Al interactuar dos individuos, intercambiarán opiniones, y podrán variar la opinión de uno o ambos temas. Luego si un individuo con opinión $w_i = (w_i^{(1)}, w_i^{(2)})$ interactúa con otro $w_j = (w_j^{(1)}, w_j^{(2)})$, su nueva opinión será

$$w_i^* = (w_i^{*(1)}, w_i^{*(2)})$$

con

$$w_i^{*(s)} = \begin{cases} w_i^{(s)} + h & \text{si } w_j^{(s)} > w_i^{(s)} \\ w_i^{(s)} - h & \text{si } w_j^{(s)} < w_i^{(s)} \\ w_i^{(s)} & \text{si } w_j^{(s)} = w_i^{(s)} \end{cases} \quad s = 1, 2$$

Procediendo de la misma manera que en el Capítulo 4, subdividiremos el espacio de opiniones en cuadrados de lado h , $\{I_j\}_{j \in \mathbb{Z}^2}$. Definimos la densidad en cada cuadrado

$$s(j, t) = s(j_1, j_2, t) = \frac{\#\{i : w_i \in I_j\}}{N}$$

Para calcular la ecuación maestra calculamos las funciones de ganancia y de pérdida. La función de ganancia suma la probabilidad de todos los individuos que no eran parte del cuadrado $s(j, t)$ y luego de la iteración pasan a serlo. La manera de entrar al cuadrado será o bien desde los cuatro cuadrados adyacentes I_{j_1, j_2+1} , I_{j_1, j_2-1} , I_{j_1+1, j_2} , I_{j_1-1, j_2} en caso en que w antes de la interacción esté en la misma fila o columna, o bien desde los cuadrados que sólo tocan al I_{j_1, j_2} en un vértice, es decir I_{j_1+1, j_2+1} , I_{j_1+1, j_2-1} , I_{j_1-1, j_2+1} , I_{j_1-1, j_2-1} . La manera

de salir del cuadrado será que un agente que se encuentre en dicho cuadrado interactúe con cualquier otro que no se encuentre en el mismo.

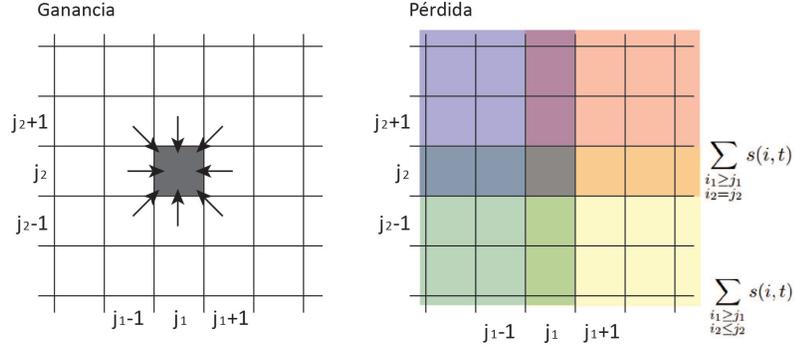


Figura 5.1: Funciones de pérdida y de ganancia en \mathbb{R}^2

Luego, la función de ganancia será

$$\begin{aligned}
 G(j, t) = & s(j_1, j_2 + 1, t) \sum_{\substack{i_1=j_1 \\ i_2 \leq j_2}} s(i, t) + s(j_1, j_2 - 1, t) \sum_{\substack{i_1=j_1 \\ i_2 \geq j_2}} s(i, t) \\
 & + s(j_1 + 1, j_2, t) \sum_{\substack{i_1 \leq j_1 \\ i_2=j_2}} s(i, t) + s(j_1 - 1, j_2, t) \sum_{\substack{i_1 \geq j_1 \\ i_2=j_2}} s(i, t) \\
 & + s(j_1 + 1, j_2 + 1, t) \sum_{\substack{i_1 \leq j_1 \\ i_2 \leq j_2}} s(i, t) + s(j_1 + 1, j_2 - 1, t) \sum_{\substack{i_1 \leq j_1 \\ i_2 \geq j_2}} s(i, t) \\
 & + s(j_1 - 1, j_2 + 1, t) \sum_{\substack{i_1 \geq j_1 \\ i_2 \leq j_2}} s(i, t) + s(j_1 - 1, j_2 - 1, t) \sum_{\substack{i_1 \geq j_1 \\ i_2 \geq j_2}} s(i, t)
 \end{aligned}$$

Para que un agente salga del cuadrado $s(j, t)$ tiene que interactuar con cualquier otro agente que no pertenezca a dicho cuadrado. Luego, para expresar la función de pérdida L debemos escribir la suma de todos los cuadrados menos el j . Escribimos esa suma de la siguiente manera: Sumamos en primer lugar todos los cuadrados que son menores o mayores e iguales en cada coordenada (obteniendo cuatro términos de la forma $\sum_{\substack{i_1 \geq j_1 \\ i_2 \geq j_2}} s(i, t)$). Luego restamos los cuadrados repetidos, que son aquellos donde o bien i_1 o bien i_2 se mantienen iguales. Luego la función de pérdida L queda expresada:

$$\begin{aligned}
L(j, t) &= s(j, t) \sum_{\substack{i_1 \neq j_1 \\ \text{o } i_2 \neq j_2}} s(i, t) \\
&= s(j, t) \left[\sum_{\substack{i_1 \geq j_1 \\ i_2 \geq j_2}} s(i, t) + \sum_{\substack{i_1 \geq j_1 \\ i_2 \leq j_2}} s(i, t) + \sum_{\substack{i_1 \leq j_1 \\ i_2 \geq j_2}} s(i, t) + \sum_{\substack{i_1 \leq j_1 \\ i_2 \leq j_2}} s(i, t) \right] \\
&\quad - s(j, t) \left[\sum_{\substack{i_1 = j_1 \\ i_2 \geq j_2}} s(i, t) + \sum_{\substack{i_1 = j_1 \\ i_2 \leq j_2}} s(i, t) + \sum_{\substack{i_1 \geq j_1 \\ i_2 = j_2}} s(i, t) + \sum_{\substack{i_1 \leq j_1 \\ i_2 = j_2}} s(i, t) \right]
\end{aligned}$$

Restando y reordenando los términos, tenemos el siguiente sistema,

$$\begin{aligned}
\frac{Ndt}{2} \frac{(s(j, t + dt) - s(j, t))}{dt} &= \left(s(j_1 + 1, j_2 + 1, t) - s(j, t) \right) \sum_{\substack{i_1 \leq j_1 \\ i_2 \leq j_2}} s(i, t) \\
&\quad + \left(s(j_1 + 1, j_2 - 1, t) - s(j, t) \right) \sum_{\substack{i_1 \leq j_1 \\ i_2 \geq j_2}} s(i, t) \\
&\quad + \left(s(j_1 - 1, j_2 + 1, t) - s(j, t) \right) \sum_{\substack{i_1 \geq j_1 \\ i_2 \leq j_2}} s(i, t) \\
&\quad + \left(s(j_1 - 1, j_2 - 1, t) - s(j, t) \right) \sum_{\substack{i_1 \geq j_1 \\ i_2 \geq j_2}} s(i, t) \\
&\quad + \left(s(j_1, j_2 + 1, t) + s(j, t) \right) \sum_{\substack{i_1 = j_1 \\ i_2 \leq j_2}} s(i, t) \\
&\quad + \left(s(j_1, j_2 - 1, t) + s(j, t) \right) \sum_{\substack{i_1 = j_1 \\ i_2 \geq j_2}} s(i, t) \\
&\quad + \left(s(j_1 + 1, j_2, t) + s(j, t) \right) \sum_{\substack{i_1 \leq j_1 \\ i_2 = j_2}} s(i, t) \\
&\quad + \left(s(j_1 - 1, j_2, t) + s(j, t) \right) \sum_{\substack{i_1 \geq j_1 \\ i_2 = j_2}} s(i, t)
\end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Para pasar a la versión continua, introducimos una función suave, $f : \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$s(j, t) = \int_{I_j} f(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2$$

Como f es suave, y suponiendo que h es chica podemos asumir que $f \approx \frac{s(j,t)}{h^2}$. Además, podemos aproximar $(x_1, x_2) \approx (hj_1, hj_2)$. Por lo tanto cada diferencia de los primeros cuatro términos queda aproximada de la siguiente forma

$$\begin{aligned} s(j_1 + 1, j_2 + 1, t) - s(j_1, j_2, t) &= \frac{h}{h} \left(s(j_1 + 1, j_2 + 1, t) - s(j_1, j_2, t) \right) \\ &\approx h^3 \frac{f(x_1 + h, x_2 + h, t) - f(x_1, x_2, t)}{h} \\ &\approx h^3 \left[\frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \right] \end{aligned}$$

Por otro lado podemos reemplazar, si h es suficientemente chico, las series por integrales

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i_1 \geq j_1 \\ i_2 \geq j_2}} s(i, t) &\approx \frac{h^2}{h^2} \sum_{\substack{i_1 \geq j_1 \\ i_2 \geq j_2}} s(i, t) \\ &= h^2 \sum_{\substack{i_1 \geq j_1 \\ i_2 \geq j_2}} \frac{s(i, t)}{h^2} \\ &= \sum_{\substack{i_1 \geq j_1 \\ i_2 \geq j_2}} f(x_1, x_2, t) h^2 \\ &\approx \int_{x_1}^{\infty} \int_{x_2}^{\infty} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 \end{aligned}$$

Por otro lado, los últimos cuatro términos de la ecuación (5.1.1) los agrupamos de a dos y los describimos de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} &\left(s(j_1, j_2 + 1, t) + s(j, t) \right) \sum_{\substack{i_1 = j_1 \\ i_2 \leq j_2}} s(i, t) + \left(s(j_1, j_2 - 1, t) + s(j, t) \right) \sum_{\substack{i_1 = j_1 \\ i_2 \geq j_2}} s(i, t) \\ &= s(j, t) \sum_{\substack{i_1 = j_1 \\ j_2 = -\infty}}^{\infty} s(i, t) + s(j, t)^2 \\ &\quad + s(j_1, j_2 + 1, t) \sum_{\substack{i_1 = j_1 \\ i_2 \leq j_2}} s(i, t) \\ &\quad + s(j_1, j_2 - 1, t) \sum_{\substack{i_1 = j_1 \\ i_2 > j_2}} s(i, t) + s(j_1, j_2 - 1, t) s(j, t) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $s(j_1, j_2 + 1, t) \approx s(j_1, j_2 - 1, t) \approx s(j_1, j_2, t) \approx h^2 f(x, t)$ y que $\sum_{\substack{i_1 = j_1 \\ i_2 \geq j_2}} s(i, t) \approx h \int_{-\infty}^{x_2} f(x_1, \tilde{x}_2) d\tilde{x}_2$ el término se reescribe como

$$h^3 2f(x_1, x_2, t) \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_2 + h^4 2f(x_1, x_2, t)^2$$

Por lo tanto podemos realizar las siguientes aproximaciones:

$$\begin{aligned}
s(j_1 + 1, j_2 + 1, t) - s(j_1, j_2, t) &\approx h^3 \left[\frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \right] \\
\sum_{\substack{i_1 \geq j_1 \\ i_2 \geq j_2}} s(i, t) &\approx \int_{x_1}^{\infty} \int_{x_2}^{\infty} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 \\
\left(s(j_1, j_2 + 1, t) + s(j, t) \right) \sum_{\substack{i_1 = j_1 \\ i_2 \leq j_2}} s(i, t) &+ \left(s(j_1, j_2 - 1, t) + s(j, t) \right) \sum_{\substack{i_1 = j_1 \\ i_2 \geq j_2}} s(i, t) \\
&\approx h^3 2f(x_1, x_2, t) \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_2 + h^4 2f(x_1, x_2, t)^2
\end{aligned}$$

Rescalando el tiempo,

$$\frac{N}{2} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(x, s)}{\partial s},$$

nos queda:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial t} &= h^3 \left[\frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \right] \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 \\
&+ h^3 \left[\frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \right] \int_{-\infty}^{x_1} \int_{x_2}^{\infty} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 \\
&+ h^3 \left[-\frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \right] \int_{x_1}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_2} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 \\
&- h^3 \left[\frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \right] \int_{x_1}^{\infty} \int_{x_2}^{\infty} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 \\
&+ h^3 2f(x_1, x_2, t) \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_2 \\
&+ h^3 2f(x_1, x_2, t) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}_1, x_2, t) d\tilde{x}_1 \\
&+ 4h^4 f(x_1, x_2, t)^2
\end{aligned}$$

Tras rescalar el tiempo nuevamente para eliminar un h^3 , el último término tiende a cero cuando h es chico y se pueden descartar. Los restantes se pueden reordenar y se obtiene una

generalización de la ecuación obtenida para dimensión uno:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{x_1} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_1 - \int_{x_1}^{\infty} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_1 \right] d\tilde{x}_2 \\
&+ \frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{x_2} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_2 - \int_{x_2}^{\infty} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_2 \right] d\tilde{x}_1 \\
&+ 2f(x_1, x_2, t) \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_2 \\
&+ 2f(x_1, x_2, t) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}_1, x_2, t) d\tilde{x}_1
\end{aligned} \tag{5.1.2}$$

que también es una ecuación de transporte con un campo de velocidades no local.

Observemos que si llamamos

$$F(x_1, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_2, \quad G(x_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}_1, x_2, t) d\tilde{x}_1,$$

y escribiendo, para simplificar,

$$f_{x_1} = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x_1}, \quad f_{x_2} = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x_2},$$

la ecuación (5.1.2) queda expresada de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= f_{x_1} \left[\int_{-\infty}^{x_1} F(\tilde{x}_1, t) d\tilde{x}_1 - \int_{x_1}^{\infty} F(\tilde{x}_1, t) d\tilde{x}_1 \right] + f_{x_2} \left[\int_{-\infty}^{x_2} G(\tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_2 - \int_{x_2}^{\infty} G(\tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_2 \right] \\
&+ 2f(x_1, x_2, t)F(x_1, t) + 2f(x_1, x_2, t)G(x_2, t)
\end{aligned}$$

Proposición 5.1.1. *La ecuación maestra (5.1.3) para el modelo desarrollado en \mathbb{R}^2 es un sistema de ecuaciones acopladas de la forma de la ecuación desarrollada para \mathbb{R} en el capítulo anterior (4.1.6). Es decir, que cada coordenada se comporta como un sistema en \mathbb{R}*

Demostración. Al integrar la ecuación (5.1.3) en la segunda variable resulta,

$$\frac{\partial F(x_1, t)}{\partial t} = \frac{\partial F(x_1, t)}{\partial x_1} \left[\int_{-\infty}^{x_1} F(\tilde{x}_1, t) d\tilde{x}_1 - \int_{x_1}^{\infty} F(\tilde{x}_1, t) d\tilde{x}_1 \right] \tag{5.1.3}$$

$$\begin{aligned}
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \left[\int_{-\infty}^{x_2} G(\tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_2 - \int_{x_2}^{\infty} G(\tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_2 \right] dx_2 \\
&+ 2F(x_1, t)^2 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, t)G(x_2, t) dx_2
\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

integrando el segundo término por partes y reordenando los términos

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(x_1, t)}{\partial t} &= \frac{\partial F(x_1, t)}{\partial x_1} \left[\int_{-\infty}^{x_1} F(\tilde{x}_1, t) d\tilde{x}_1 - \int_{x_1}^{\infty} F(\tilde{x}_1, t) d\tilde{x}_1 \right] + 2F(x_1, t)^2 \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} dx_2 \\ &\quad - 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, t) G(x_2, t) dx_2 \\ &\quad + 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, t) G(x_2, t) dx_2.\end{aligned}$$

Como hay finitos agentes, la f tiene soporte compacto, luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} dx_2 = 0.$$

Por otro lado, los últimos dos términos se cancelan entre sí, por lo que queda:

$$\frac{\partial F(x_1, t)}{\partial t} = \frac{\partial F(x_1, t)}{\partial x_1} \left[\int_{-\infty}^{x_1} F(\tilde{x}_1, t) d\tilde{x}_1 - \int_{x_1}^{\infty} F(\tilde{x}_1, t) d\tilde{x}_1 \right] + 2F(x_1, t)^2.$$

Esta expresión es equivalente a la que vimos en el capítulo anterior para un modelo en \mathbb{R} (4.1.6) y la podemos escribir como:

$$\frac{\partial F(x_1, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(F(x_1, t) \left[\int_{-\infty}^{x_1} F(\tilde{x}_1, t) d\tilde{x}_1 - \int_{x_1}^{\infty} F(\tilde{x}_1, t) d\tilde{x}_1 \right] \right)$$

Realizando el mismo razonamiento sobre la otra variable obtenemos:

$$\frac{\partial G(x_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(G(x_2, t) \left[\int_{-\infty}^{x_2} G(\tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_2 - \int_{x_2}^{\infty} G(\tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_2 \right] \right)$$

□

Por lo tanto el movimiento puede desacoplarse y lo que ocurre en ambas coordenadas es independiente. Luego podemos asumir que en todo tiempo $f(x_1, x_2, t) = F(x_1, t)G(x_2, t)$. Esta conclusión se entiende intuitivamente al observar que en la interacción, lo que ocurre en ambas variables es independiente.

5.2. Bounded Confidence en \mathbb{R}^2

De la misma manera que en el caso en \mathbb{R} podemos suponer una hipótesis de *Bounded Confidence*. De esta manera w y w^* interactúan como en el caso en \mathbb{R} pero solo si

$$\max\{|w_1 - w_1^*|, |w_2 - w_2^*|\} \leq d.$$

Observamos que, a diferencia del modelo sin *Bounded Confidence*, lo que ocurre en ambas variables no es independiente, ya que dos agentes podrían tener una opinión similar en una variable, pero no interactuar entre sí por tener una opinión demasiado distinta en la otra.

Teniendo en cuenta los límites del *Bounded Confidence*, la ecuación (5.1.2) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = & \frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} \int_{x_2-d}^{x_2+d} \left[\int_{x_1}^{x_1+d} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_1 - \int_{x_1}^{x_1+d} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_1 \right] d\tilde{x}_2 \quad (5.2.1) \\
& + \frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \int_{x_1-d}^{x_1+d} \left[\int_{x_2-d}^{x_2} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_2 - \int_{x_2}^{x_2+d} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_2 \right] d\tilde{x}_1 \\
& + 2f(x_1, x_2, t) \int_{x_2-d}^{x_2+d} f(x_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_2 \\
& + 2f(x_1, x_2, t) \int_{x_1-d}^{x_1+d} f(\tilde{x}_1, x_2, t) d\tilde{x}_1.
\end{aligned}$$

Utilizando la misma aproximación que en el modelo de Bounded Confidence en \mathbb{R} (4.2.3).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = & -d^2 \left(f_{x_1} \int_{x_2-d}^{x_2+d} f_{x_1} dx_2 + f_{x_2} \int_{x_1-d}^{x_1+d} f_{x_2} dx_1 \right) \\
& + 2f(x_1, x_2, t) \int_{x_2-d}^{x_2+d} f(x_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_2 + 2f \int_{x_1-d}^{x_1+d} f(\tilde{x}_1, x_2, t) d\tilde{x}_1. \quad (5.2.2)
\end{aligned}$$

Podemos suponer que si f_{x_1} , f_{x_2} y f son continuas

$$\begin{aligned}
& \int_{x_2-d}^{x_2+d} f_{x_1} d\tilde{x}_2 \approx 2df_{x_1}(x_1, x_2, t) \\
& \int_{x_2-d}^{x_2+d} f(x_1, \tilde{x}_2, t) d\tilde{x}_2 \approx 2df(x_1, x_2, t) \\
& \int_{x_1-d}^{x_1+d} f_{x_2} d\tilde{x}_1 \approx 2df_{x_2}(x_1, x_2, t) \\
& \int_{x_1-d}^{x_1+d} f(\tilde{x}_1, x_2, t) d\tilde{x}_1 \approx 2df(x_1, x_2, t).
\end{aligned}$$

Luego podemos reescribir la ecuación como

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -2d^3(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2) + 8df^2 = -2d^3|\nabla f|^2 + 8df^2.$$

5.3. Simulaciones

Realizamos una simulación en el espacio de opiniones en \mathbb{R}^2 . La simulación fue realizada con una distribución inicial uniformemente distribuída. Analizamos la evolución de 2000 agentes, con una constante de *Bounded Confidence* de $d = 0,3$ y un paso $h = 0,01$, graficando la configuración para distintos tiempos t . Observamos que al igual que en el caso en \mathbb{R} para un tiempo grande se forman *clusters* o *partidos políticos*, donde los agentes convergen entre sí, y separados por una distancia mayor a d en ambas coordenadas. La cantidad de *clusters* depende de d (no así del paso h ni de la cantidad de agentes).

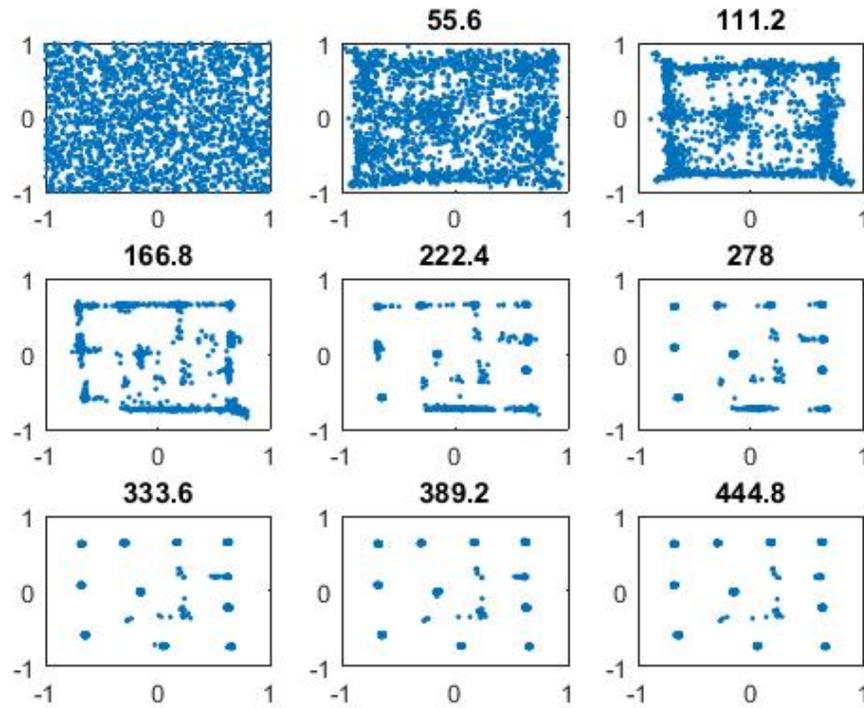


Figura 5.2: Simulación con opiones en \mathbb{R}^2 , 2000 agentes y una constante de *Bounded Confidence* de $d = 0,3$ y un paso $h = 0,01$.

Capítulo 6

Opiniones como medidas

En el primer capítulo vimos como para tomar una decisión a veces es conveniente consultar con varios expertos. La opinión de cada experto está dada por una distribución en el espacio de posibilidades y por lo tanto el dilema es combinar esas distribuciones en una sola. Concluimos que en algunas ocasiones es conveniente dejarlos interactuar y observar luego el consenso al que llegaron. En el capítulo 4 y 5 vimos cómo evolucionan las interacciones entre opiniones cuando dichas opiniones están representadas en \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 . Ahora estamos interesados en realizar los mismos análisis pero cuando las opiniones de cada individuo son distribuciones. Luego el espacio donde estaremos considerando la densidad de agentes es $P(P(m))$, las probabilidades sobre todas las distribuciones de probabilidad.

6.1. Aumento fijo h de la esperanza

Como primera aproximación, utilizaremos un modelo donde todos los individuos tienen una opinión representada por una variable aleatoria con distribución normal, con una media que cambiará con el tiempo, pero con varianza fija.

Se tienen $N = \{1, \dots, n\}$ individuos. Cada uno de ellos tiene una opinión representada como una medida de probabilidad m_i sobre \mathbb{R} , y cada una de estas medidas será una normal, todas con la misma varianza: $m_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$. Cuando dos individuos interactúan, cada uno emite una opinión $\tau_i \in \mathbb{R}$ según la distribución asignada. Luego, cada individuo cambia su opinión de manera tal que

$$m' \sim \begin{cases} N(\mu_i + h, \sigma^2) & \text{si } \tau_j > E(m) \\ N(\mu_i - h, \sigma^2) & \text{si } \tau_j < E(m) \\ N(\mu_i, \sigma^2) & \text{si } \tau_j = E(m) \end{cases}$$

Queremos calcular la distribución de la densidad de las esperanzas. Supondremos que las medias μ_i son de la forma $h \cdot j_i$ para algún $j_i \in \mathbb{Z}$. De la misma manera que antes, separamos el espacio en pequeños intervalos I_j , centrados en $h \cdot j$ y con longitud $|I_j| = h$. Sea

$$s(j, t) = \frac{\#\{i | \mu_i \in I_j\}}{N}$$

la proporción de agentes cuya media es $h.j$.

Luego la densidad en un tiempo dt cambiará

$$s(j, t + dt) = s(j, t) + \frac{2}{N} \left(G(j, t) - L(j, t) \right) dt,$$

donde G y L son las funciones de ganancia y pérdida.

Para que un individuo pase a tener una opinión con una esperanza dentro del intervalo elegido, tiene que antes de eso tener una esperanza en alguno de los intervalos adyacentes, e interactuar con alguien que emita una opinión que no esté en su intervalo. Para que un individuo que tiene una opinión en el intervalo elegido deje de estarlo tiene que interactuar con cualquiera que emita una opinión en otro intervalo. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} G(j, t) &= s(j-1, t) \sum_i s(i, j) \int_{h(j-1/2)}^{\infty} m_i dx + s(j+1, t) \sum_i s(i, j) \int_{-\infty}^{h(j+1/2)} m_i dx \\ L(j, t) &= s(j, t) \sum_i s(i, j) \left(\int_{h(j+1/2)}^{\infty} m_i dx + \int_{-\infty}^{h(j-1/2)} m_i dx \right) \\ &= s(j, t) - s(j, t) \sum_i s(i, j) \int_{h(j-1/2)}^{h(j+1/2)} m_i dx. \end{aligned}$$

Luego, tras rescalar el tiempo para eliminar los factores 2 y N , y en el límite $dt \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial s(j, t)}{\partial t} &= \left(s(j-1, t) - s(j, t) \right) \sum_i s(i, j) \int_{h(j+1/2)}^{\infty} m_i(y) dy \\ &\quad + s(j-1, t) \sum_i s(i, j) \int_{h(j-1/2)}^{h(j+1/2)} m_i(y) dy \\ &\quad + \left(s(j+1, t) - s(j, t) \right) \sum_i s(i, j) \int_{-\infty}^{h(j-1/2)} m_i(y) dy \\ &\quad + s(j+1, t) \sum_i s(i, j) \int_{h(j-1/2)}^{h(j+1/2)} m_i(y) dy. \end{aligned}$$

Aproximando $hj = x$, $hi = x_i$, como $m_{x_i} \sim N(x_i, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x-h/2} m_{x_i}(z) dz &= \Phi\left(\frac{x-h/2-x_i}{\sigma}\right) \\ \int_{x+h/2}^{\infty} m_{x_i}(z) dz &= 1 - \Phi\left(\frac{x+h/2-x_i}{\sigma}\right) \\ \int_{x-h/2}^{x+h/2} m_{x_i}(z) dz &\approx h\Phi'\left(\frac{x-x_i}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Reemplazando $s(j, t) \sim hf(x, t)$,

$$\begin{aligned} \frac{hf(x, t)}{dt} = & \left(hf(x-h, t) - hf(x, t) \right) \sum_i hf(x_i, t) \left[1 - \Phi\left(\frac{x+h/2-x_i}{\sigma}\right) \right] \\ & + hf(x-h, t) \sum_i h^2 f(x_i, t) \Phi'\left(\frac{x-x_i}{\sigma}\right) \\ & + \left(hf(x+h, t) - hf(x, t) \right) \sum_i hf(x_i, t) \Phi\left(\frac{x-h/2-x_i}{\sigma}\right) \\ & + hf(x+h, t) \sum_i h^2 f(x_i, t) \Phi'\left(\frac{x-x_i}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Podemos aproximar las sumatorias con integrales, y los incrementos por derivadas parciales, con lo cual queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = & -h \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(y, t) \left[1 - \Phi\left(\frac{x+h/2-y}{\sigma}\right) \right] \right) dy \\ & + h \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(y, t) \Phi\left(\frac{x-h/2-y}{\sigma}\right) \right) dy \\ & + 2h^2 f(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(y, t) \Phi'\left(\frac{x-y}{\sigma}\right) \right) dy + O(h^3). \end{aligned}$$

Aproximamos $\Phi\left(\frac{x-y \pm h/2}{\sigma}\right) \sim \Phi\left(\frac{x-y}{\sigma}\right) + \frac{h}{2\sigma} \Phi'\left(\frac{x-y}{\sigma}\right)$. Luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(y, t) \left[\Phi\left(\frac{x \pm h/2 - y}{\sigma}\right) \right] \right) dy \sim & \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(y, t) \Phi\left(\frac{x-y}{\sigma}\right) \right) dy \\ & \pm \frac{h}{2\sigma} \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(y, t) \Phi'\left(\frac{x-y}{\sigma}\right) \right) dy + O(h^2) \end{aligned}$$

Rescalando para eliminar h , y reagrupando,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(y, t) \Phi\left(\frac{x-y}{\sigma}\right) \right) dy \\ & + \frac{h}{\sigma} f(x, t) \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(y, t) \Phi'\left(\frac{x-y}{\sigma}\right) \right) dy \\ & + O(h^2) \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(y, t) \Phi'\left(\frac{x-y}{\sigma}\right) \right) dy + O(h^3) \end{aligned}$$

Como σ se mantiene constante, Φ' está acotado para todo x , y los últimos términos pueden descartarse, y la ecuación nos queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = & \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} f(y, t) \left(2\Phi\left(\frac{x-y}{\sigma}\right) - 1 \right) dy \\ = & \frac{\partial f}{\partial x} \left[f \star (2\Phi_\sigma - 1) \right], \end{aligned}$$

donde denotamos con $f \star g$ la convolución de f y g , y $\Phi_\sigma(\cdot) = \Phi(\cdot/\sigma)$.

6.1.1. Algunos comentarios y generalizaciones

En la deducción anterior no jugó ningún papel que la opinión de cada agente fuese una variable aleatoria con distribución normal: sólo utilizamos que todos tenían la misma varianza. Tampoco es necesario que el soporte de la distribución sea toda la recta, podría ser un intervalo acotado, o conjuntos más generales.

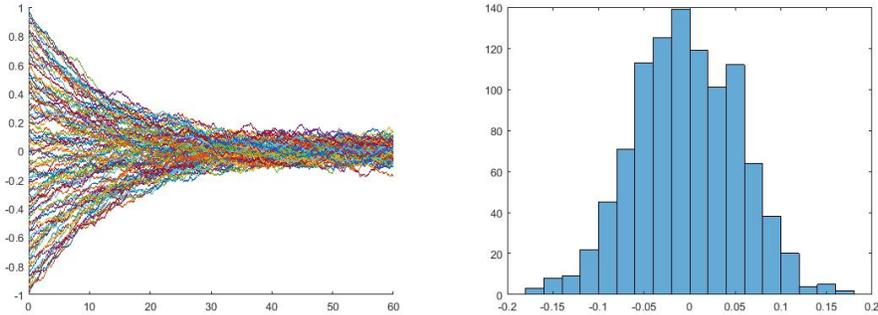
Si los agentes tuviesen distintas varianzas esperaríamos un comportamiento similar: supongamos que hay varias clases de agentes que indexamos con un parámetro j , y la opinión de un agente i es $m_i^{(j)} \sim N(\mu_i, \sigma_j)$. Si llamamos $f_j(x, t)$ a la densidad de agentes cuya opinión es generada con una normal $N(x, \sigma_j)$, tendríamos, para cada j ,

$$\frac{f_j(x, t)}{dt} = \frac{\partial f_j}{\partial x} \left[\sum_k f_k \star (2\Phi_{\sigma_k} - 1) \right].$$

donde Φ_{σ_k} es la distribución acumulada de $N(\mu, \sigma_k)$.

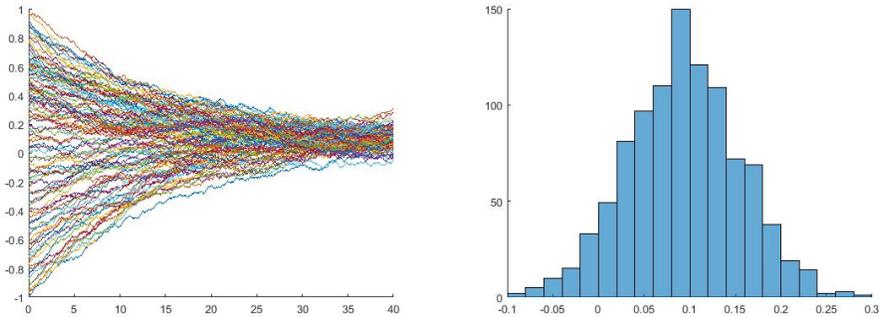
6.1.2. Simulaciones con varianza fija

Realizamos una simulación del modelo analizado en esta sección, donde la varianza está fija. De esta manera, solo necesitamos una variable por individuo en cada tiempo, que representa la media de la opinión de cada agente en ese momento. Realizamos la simulación con $N = 1000$ agentes, cada uno con una distribución normal, una media en $I = [-1, 1]$, una varianza 1, un paso $h = 0,05$ y un paso temporal y tiempo final acorde para visualizar correctamente. Para disminuir el tiempo computacional en cada iteración hacemos que todos los agentes interactúen con una permutación de ellos, de manera que se mantiene la proporción de interacciones. Utilizamos una distribución inicial uniforme, y una distribución inicial asimétrica con un pico.



(a) Evolución de la media de las opiniones a lo largo del tiempo (b) Distribución final de las medias de los agentes

Figura 6.1: Simulación de individuos con opiniones como medidas realizada con $N = 1000$ agentes y un paso $h = 0,005$ de modificación de opinión y una distribución inicial uniforme



(a) Evolución de la media de las opiniones a lo largo del tiempo (b) Distribución final de las medias de los agentes

Figura 6.2: Simulación de individuos con opiniones como medidas realizada con $N = 1000$ agentes y un paso $h = 0,005$ de modificación de opinión y una distribución inicial con un máximo en 0,5 y un promedio 0,0982

Observamos que en este modelo no converge a que todas las opiniones tengan la misma media, sino que converge a una distribución normal de las medias de las opiniones. Sin embargo, esta distribución está aproximadamente centrada en el promedio de la distribución inicial. Realizando, para el caso uniformemente distribuido, 400 simulaciones, todas con la misma condición inicial. Para cada simulación tomamos m , el promedio final de las medias de todas las opiniones. Observamos que la distribución de las m de todas las simulaciones es otra normal, centrada aproximadamente en el 0 (como el promedio de la distribución inicial), y con una varianza pequeña (de 10^5), por lo que podemos asumir que los promedios de las medias son prácticamente una delta en 0.

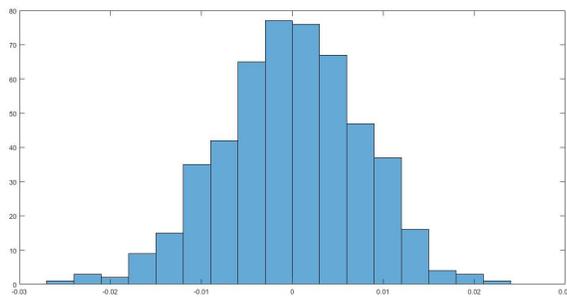


Figura 6.3: Distribución de los promedios de las medias de las opiniones finales de 500 simulaciones distintas y una distribución inicial uniforme

6.2. Cambios en la varianza

En la sección anterior consideramos que los agentes al interactuar sólo cambian su media sin alterar la varianza. Sin embargo, no es la única posibilidad.

Suponemos ahora nuevamente que todos los agentes comienzan con una opinión representada por una variable aleatoria $m_i \sim N(\mu_i(0), \sigma_0^2)$, y que al interactuar ambos emiten una opinión $\tau_i \in I$ según la distribución asignada, y se ven atraídos por la opinión que emitió el individuo con el que interactuaron, pero que también cambian su varianza.

En primer lugar veremos una dinámica inspirada en las ideas de transporte óptimo. Esta nos sugiere que en cada iteración la varianza se ve reducida en un factor $(1 - \gamma)$, y posteriormente veremos un modelo más simple, que combina esta reducción de la varianza con el movimiento de la media de la sección anterior.

6.2.1. Transporte óptimo

Primero supondremos que la atracción se da en el camino más corto que conecta la distribución de opiniones m_i de un individuo con la medida de Dirac centrada en la opinión emitida por el otro agente, δ_{τ_j} . Esto es, el agente acerca su medida hacia la Delta de Dirac que observó, y esto lo hacemos en el sentido del transporte óptimo. Si llamamos $T_\varepsilon(x) = \varepsilon$ la función constante, la nueva opinión será

$$\tilde{m}_i = (I + \gamma(T_{\tau_j} - I))\#m_i$$

donde γ es una pequeña constante positiva que representa la intensidad de la interacción.

Suponiendo que las medidas son normales, según la definición de la medida push-forward y siendo ϕ una función test arbitraria, la medida resultante será:

$$\int \phi \tilde{m}(y) dy = \int \phi(x + \gamma(\tau - x))m(x)dx = \int \frac{\phi(y)}{1 - \gamma} m\left(\frac{y - \gamma\tau}{1 - \gamma}\right) dy$$

donde en la última igualdad se utilizó el cambio de variables $y = x + \gamma(\tau - x)$.

Luego \tilde{m} es una traslación y un rescale de m , y por lo tanto también tiene una distribución normal,

$$\tilde{m}(x) = \frac{1}{1 - \gamma} m\left(\frac{x - \gamma\tau}{1 - \gamma}\right).$$

Por lo tanto, tras la interacción se modifican solamente la media y la varianza de cada individuo. Veamos a continuación cómo lo hacen.

$$\begin{aligned}
E(\tilde{m}) &= \int y\tilde{m}(y)dy \\
&= \int (x + \gamma(\tau - x))m(x)dx \\
&= (1 - \gamma)E(m) + \gamma\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\tilde{m}^2) &= \int y^2\tilde{m}(y)dy \\
&= \int (x(1 - \gamma) + \gamma\tau)^2m(x)dx \\
&= \int (x^2(1 - \gamma)^2 + \gamma^2\tau^2 + 2(1 - \gamma)\gamma\tau x)m(x)dx \\
&= (1 - \gamma)^2E(m^2) + \gamma^2\tau^2 + 2\gamma(1 - \gamma)\tau E(m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(\tilde{m}) &= E(\tilde{m}^2) - E(m)^2 \\
&= (1 - \gamma)^2E(m^2) + \gamma^2\tau^2 + 2\gamma(1 - \gamma)\tau E(m) - \left((1 - \gamma)E(m) + \gamma\tau\right)^2 \\
&= (1 - \gamma)^2E(m^2) + \gamma^2\tau^2 + 2\gamma(1 - \gamma)\tau E(m) \\
&\quad - (1 - \gamma)^2E(m)^2 - 2(1 - \gamma)\gamma\tau E(m) - \gamma^2\tau^2 \\
&= (1 - \gamma)^2(E(m^2) - E(m)^2) \\
&= (1 - \gamma)^2Var(m).
\end{aligned}$$

Luego la nueva medida \tilde{m} después de una interacción es de la forma

$$\tilde{m} \sim N((1 - \gamma)\mu + \gamma\tau, (1 - \gamma)\sigma).$$

Observemos que la varianza de un individuo solo depende de su varianza inicial y la cantidad de interacciones, siendo $\sigma(t) = \sigma_i(0)(1 - \gamma)^t$ si asumimos una interacción por unidad de tiempo.

Por lo tanto a partir de ahora pensaremos la interacción entre un individuo con opinión $m_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ que interactúa con otro que emite una opinión τ_j de la siguiente manera:

$$m_i \sim N(\mu_i, \sigma_i) \xrightarrow{\tau_j} \tilde{m}_i \sim N((1 - \gamma)\mu_i + \gamma\tau_j, \sigma_i(1 - \gamma)) \quad (6.2.1)$$

Estamos interesados en conocer cómo se distribuyen las esperanzas de las opiniones de todos los agentes, es decir la distribución de densidad de μ . Como en los casos anteriores, asumiendo que ocurre una interacción por unidad de tiempo, para armar la ecuación maestra tomamos un dt pequeño y nos queda

$$f(\mu, t + dt) = f(\mu, t) + \frac{2}{N}(G(\mu, t) - L(\mu, t)) \quad (6.2.2)$$

La función $L(\mu, t)$ es la probabilidad de que elijamos un agente con esperanza μ y otro que emita una opinión τ ,

$$L(\mu, t) = \int f(\mu)P(\tau, t)d\tau, \quad (6.2.3)$$

donde $P(\tau, t)$ es la probabilidad de que otro agente omita la opinión τ a tiempo t . Observamos que esto es la suma de las probabilidades condicionales de emitir τ con la distribución m_j , por la probabilidad de encontrar un agente con media m_j a tiempo t , llamémosla $p(m_j, t)$:

$$P(\tau, t) = \sum_j P(\tau, t|m_j)p(m_j, t)$$

Para simplificar las cuentas, vamos a suponer que todos los agentes comienzan con la misma varianza. Como las interacciones ocurren aleatoriamente, de manera uniforme entre todos, es razonable suponer que para un tiempo t , todos los agentes mantienen la misma varianza, que solo depende del tiempo. Luego, alcanza con analizar solo la esperanza y podemos escribir

$$\begin{aligned} P(\tau, t) &= \sum_j P(\tau, t|\mu_j)P(\mu_j, t) \\ &= \int P(\tau, t|\mu_j)f(\mu_j, t)d\mu_j \\ &= \int f(\mu_j, t)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t)^2}}e^{-\frac{|\tau-\mu_j|^2}{2\sigma(t)^2}}d\mu_j, \end{aligned}$$

donde en las últimas igualdades hemos pasado al continuo. Reemplazando en (6.2.3) y reemplazando μ_j por $\mu + y$,

$$L(\mu, t) = \int \int f(\mu, t)f(\mu + y, t)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t)^2}}e^{-\frac{|\tau-(\mu+y)|^2}{2\sigma(t)^2}}dyd\tau.$$

Integrando sobre τ , y teniendo en cuenta que lo que integramos respecto de τ es una densidad, llegamos a

$$L(\mu, t) = \int f(\mu, t)f(\mu + y, t)dy = f(\mu)$$

Observamos que este resultado implica que la posibilidad de que un agente deje de tener esperanza μ es que un agente de esperanza μ interactúe con cualquier otro, lo cual es razonable teniendo en cuenta que la posibilidad de que cualquier agente exprese exactamente μ tiene probabilidad 0.

Por otro lado, la función de ganancia G es la posibilidad de elegir un agente con media $\mu + y$ y otro que emita una opinión τ de manera que al interactuar el primero termine con una media μ . Es decir

$$\begin{aligned}
G(\mu, t) &= \int \int f(\mu + y, t) P(\tau) \delta\left((\mu + y)(1 - \gamma) + \gamma\tau = \mu\right) d\tau dy \\
&= \int \int f(\mu + y, t) P(\tau) \delta\left(\mu + y + \gamma(\tau - y - \mu) = \mu\right) d\tau dy \\
&= \frac{1}{\gamma} \int \int f(\mu + y, t) P(\tau) \delta\left(w = \frac{y(\gamma - 1)}{\gamma} + \mu\right) dw dy.
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad hicimos el cambio de variable $w = \gamma\tau$.

Integrando sobre w , y teniendo en cuenta las propiedades de la función δ ,

$$G(\mu, t) = \frac{1}{\gamma} \int f(\mu + y, t) P\left(\mu + \frac{\gamma - 1}{\gamma}y, t\right) dy \quad (6.2.4)$$

Ahora, teníamos que

$$P(\cdot, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t)^2}} \int f(z, t) e^{-\frac{|\cdot - z|^2}{2\sigma(t)^2}} dz,$$

con lo cual nos queda

$$\begin{aligned}
G(\mu, t) &= \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi\sigma(t)^2}} \int \int f(\mu + y, t) f(z, t) e^{-\frac{|\mu + \frac{\gamma-1}{\gamma}y - z|^2}{2\sigma(t)^2}} dz dy \\
&= \frac{1}{\gamma} \int f(\mu + y, t) (f \star g)\left(\mu + \frac{\gamma - 1}{\gamma}y\right) dy,
\end{aligned}$$

donde g es la densidad de la distribución normal con varianza $\sigma(t)$.

Juntando los términos para L y G obtenemos

$$\frac{Ndt}{2} \frac{f(\mu, t + dt) - f(\mu, t)}{dt} = \int f(\mu + y, t) \left(\frac{1}{\gamma} f \star g\left(\mu + \frac{\gamma - 1}{\gamma}y\right) - f(\mu, t)\right) dy,$$

y acelerando el proceso para que en una unidad de tiempo ocurran N interacciones, pasando al límite cuando $N \rightarrow \infty$, $dt \rightarrow 0$, y reescalando la variable temporal, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial s} f(\mu, s) = \int f(\mu + y, s) \left(\frac{1}{\gamma} (f \star g)\left(\mu + \frac{\gamma - 1}{\gamma}y\right) - f(\mu, s)\right) dy, \quad (6.2.5)$$

donde g es la densidad de una Gaussiana con $\sigma(s) = \sigma(0)\gamma^s$.

6.2.2. Un caso particular

La existencia y unicidad de soluciones de la ecuación integrodiferencial (6.2.5) quedan fuera del objetivo de esta tesis, pero podemos analizar un caso particular.

Observemos que para tiempos grandes, g es una aproximación de la identidad, con lo cual

$$f \star g\left(\mu + \frac{\gamma - 1}{\gamma}y\right) \rightarrow f\left(\mu + \frac{\gamma - 1}{\gamma}y\right),$$

y la ecuación nos queda

$$\frac{\partial}{\partial s} f(\mu, s) = \int f(\mu + y, s) \left(\frac{1}{\gamma} f\left(\mu + \frac{\gamma - 1}{\gamma} y\right) - f(\mu, s) \right) dy. \quad (6.2.6)$$

Lema: Si el soporte del dato inicial es compacto, la solución tiene soporte compacto contenido en el original.

Demostración. Por simplicidad, fijemos $\gamma = 1/2$, y tomemos como distribución $f(\mu, 0) = h(\mu, t)\chi_{[0,1]}(\mu)$, donde $\chi_{[0,1]}$ es la función característica del intervalo $[0, 1]$. Ahora, vemos que para $\mu < 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} f(\mu, s) &= \int f(\mu + y, s) \left(\frac{1}{2} f(\mu - y) - f(\mu, s) \right) dy. \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\mu}^{-\mu+1} f(\mu + y, s) f(\mu - y) - \int_{-\mu}^{-\mu+1} f(\mu + y, s) h(\mu, s) \chi_{[0,1]}(\mu) dy. \end{aligned}$$

La segunda integral es cero porque $\mu < 0$, y también la primera pues

$$-\mu \leq y \leq -\mu + 1$$

implica que

$$2\mu \geq \mu - y \geq 2\mu - 1,$$

es decir, $\mu - y < 0$, y tenemos que $f(\mu - y) = h(\mu - y)\chi_{[0,1]}(\mu - y) = 0$.

Un análisis similar muestra que si $\mu > 1$, la derivada temporal de $f(\mu, t)$ es cero. \square

Lema: Dado un dato inicial que es una medida de probabilidad, $\int f(\mu, t) d\mu$ es una medida de probabilidad para todo t .

Demostración. Queremos ver que

$$\frac{d}{dt} \int f(\mu, t) d\mu = 0.$$

Para esto, partimos de

$$\frac{\partial}{\partial s} f(\mu, s) = \frac{1}{\gamma} \int f(\mu + y, s) f\left(\mu + \frac{\gamma - 1}{\gamma} y\right) dy - \int f(\mu + y, s) f(\mu, s) dy,$$

e integrando en la variable μ , nos queda

$$\frac{d}{ds} \int f(\mu, s) d\mu = \frac{1}{\gamma} \int \int f(\mu + y, s) f\left(\mu + \frac{\gamma - 1}{\gamma} y\right) d\mu dy - \int \int f(\mu + y, s) f(\mu, s) d\mu dy$$

Si $\int f(\mu, t) d\mu = a$, vemos que la última integral es igual a a^2 , integrando primero en la variable y , luego en μ .

Para la primera integral, hacemos el cambio de variable $z = \mu + y$ y nos queda

$$\frac{1}{\gamma} \int \int f(\mu + y, s) f(\mu + \frac{\gamma - 1}{\gamma} y) d\mu dy = \frac{1}{\gamma} \int \int f(z, s) f(z - \frac{1}{\gamma} y) dz dy,$$

y si hacemos el cambio de variable

$$w = z - \frac{1}{\gamma},$$

también nos da a^2 , integrando primero en w y luego en z .

Por lo tanto, la función

$$I(t) = \int f(\mu, t) d\mu$$

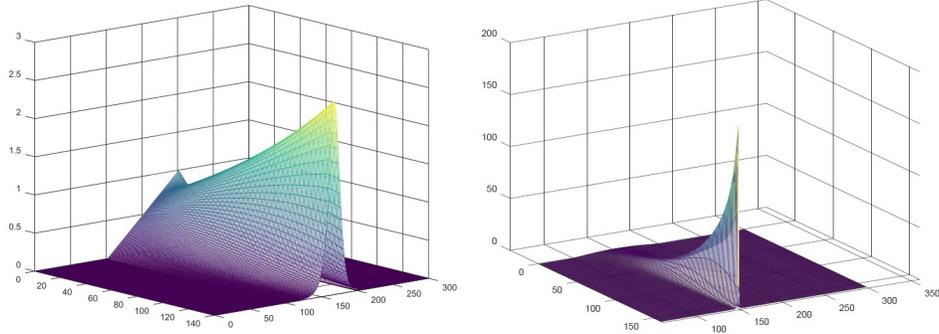
tiene derivada nula, y como $I(0)$ es la integral del dato inicial, vale 1. □

Observación: estos resultados no alcanzan para demostrar que $f(\mu, t)$ es una medida de probabilidad, pues faltaría ver que se mantiene positiva. Tampoco alcanzan para ver que converge a una distribución de probabilidad estacionaria.

Para datos iniciales no tan concentrados, podemos resolver numéricamente la ecuación. Resolvemos la ecuación con una condición inicial uniforme y de soporte compacto en el intervalo $[100, 200]$. Utilizamos una partición espacial de 100, $\gamma = 0,3$ y una división temporal de 0.05.

```
N = 100; % Longitud del soporte
T = 500; % Pasos temporales
Y = zeros(3*N,T); % Variable que indica la densidad a lo largo del tiempo
x=[1:1:3*N];
gamma=0.5;
for k=N+1:2*N
    %En este ciclo asignamos la distribución inicial uniforme
end
for h=2:T
    U = zeros(3*N,1);
    for i=N+1:2*N %En este ciclo calculamos numéricamente la integral
        for j=-N:N
            U(i,1)=U(i,1)+Y(i+j,h-1)*(1/gamma*Y(i-j,h-1)-Y(i,h-1));
        end
    end
    Y(:,h) = Y(:,h-1) + 0.05*U/N; %Actualización del valor de Y
end
plot(x,Y(:,end))
```

Observamos el resultado en 4 tiempos distintos. La solución converge a una delta, centrada en 0



(a) Distribución inicial $f_0(x) = x/100$ con soporte en $[100, 200]$ (b) Distribución inicial $f_0(x) = x(1 - x)/1000$ con soporte en $[100, 200]$

Figura 6.4: Evolución a lo largo del tiempo de la solución numérica de la ecuación (6.2.6) con distintas distribuciones iniciales.

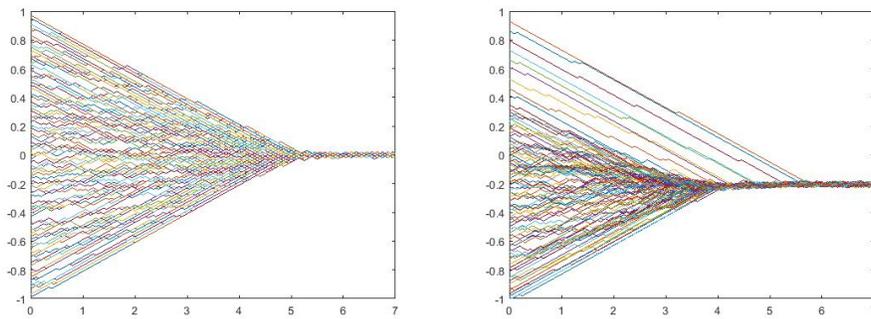
6.2.3. Simulaciones con cambios de varianza sin *Bounded Confidence*

Realizamos una simulación del modelo analizado en esta sección donde en cada interacción, además de modificarse la esperanza, la varianza disminuye como en (6.2.1).

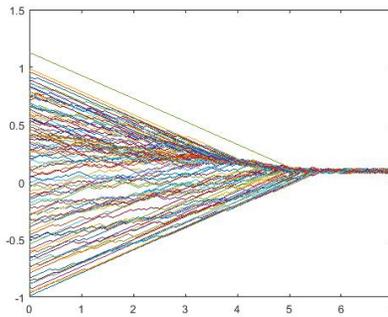
Realizamos las simulaciones con las mismas condiciones que en la sección anterior. Utilizamos 1000 agentes, un paso $h = 0,01$ una constante de *Bounded Confidence* mayor al intervalo, y para optimizar tiempos, en cada iteración permitimos que todos los agentes interactúen una vez. Utilizamos $\gamma = 0,3$ como constante de atracción.

Utilizamos las tres distribuciones utilizadas en la sección 4.3

Observamos que al igual que en los modelos en \mathbb{R} y en los modelos donde la varianza no se modifica, la esperanza de los individuos converge al promedio. El comportamiento es similar al de la sección anterior donde la varianza no se modifica, con la excepción de que la varianza final de los resultados es menor y se debe a los efectos de h .



(a) Distribución inicial uniforme y un promedio inicial en 0 (b) Distribución inicial con un máximo en 0 y un promedio inicial en $-0,1998$



(c) Distribución inicial con un máximo en 0.5 y un promedio inicial en 0,0964

Figura 6.5: Simulación de individuos con opiniones como medidas realizada con $N = 1000$ agentes y un paso $h = 0,01$ de modificación de opinión, $\gamma = 0,8$ y distribuciones iniciales como en 4.3

Bibliografía

- [1] G. Aletti, A. Naimzada, G. Naldi. *Mathematics and physics applications in sociodynamics simulation: the case of opinion formation and diffusion*, In: Naldi G., Pareschi L., Toscani G. (eds) *Mathematical Modeling of Collective Behavior in Socio-Economic and Life Sciences. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*. Birkhäuser Boston, 2010.
- [2] P. Balenzuela, J. P. Pinasco, V. Semeshenko. *The Undecided Have the Key: Interaction-Driven Opinion Dynamics in a Three State Model*, PLoS ONE 10(10): e0139572. doi:10.1371/journal.pone.0139572 (2015).
- [3] A. Bressan. *Notes on the Boltzmann Equation*, Lecture notes for a summer course given at S.I.S.S.A., Trieste, 2005.
- [4] R. Clemen, R. Winkler. *Combining Probability Distributions From Experts in Risk Analysis*, Risk Analysis, Vol. 19, No. 2, 1999.
- [5] R. Cooke. *Experts in uncertainty: opinion and subjective probability in science* Oxford University Press, New York (1991).
- [6] G. Deffuant, D. Neau, F. Amblard, G. Weisbuch. *Mixing beliefs among interacting agents*, Advances in complex systems, 3 (2000) 87-98.
- [7] M. DeGroot. *Reaching a consensus*. Journal of the American Statistical Association 69 345 (1974) 118-121.
- [8] G. Deffuant, D. Neau, F. Amblard, G. Weisbuch. *Mixing beliefs among interacting agents*. Advances in Complex Systems, 3, 87-98 (2000).
- [9] R. L. Dobrushin *Central Limit Theorem for Nonstationary Markov Chains. I* Theory of Probability & Its Applications, 1956, Vol. 1, No. 1 : pp. 65-80
- [10] B. Düring, P. Markowich, J. F. Pietschmann, M. T. Wolfram *Boltzmann and Fokker-Planck equations modelling opinion formation in the presence of strong leaders*. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences (2009).
- [11] A. Friedman, P. E. Souganidis. *Blow-up of solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Communications in partial differential equations 11.4 (1986): 397-443.

- [12] S. French *Group consensus probability distributions: A critical survey* In J. M. Bernardo, M. H. DeGroot, D. V. Lindley, & A. F. M. Smith (Eds.), Bayesian Statistics 2 (pp. 183-197). Amsterdam: North-Holland. (1985).
- [13] N. Friedkin, E. Johnsen. *Social influence and opinions*. Journal of Mathematical Sociology 15.3-4 (1990) 193-206.
- [14] I. Gilboa and D. Schmeidler. *Maxmin expected utility with nonunique prior*, Journal of Mathematical Economics, 18(2) (1989) 141-153..
- [15] N. Graham. *Visual Pattern Analyzers*, Oxford Universiti Press, New York, 1989.
- [16] G. Haag. *Modelling with the Master Equation*, Springer International Publishing AG 2017
- [17] G. Iñiguez González. *Statistical Physics of Opinion and Social Conflict* Aalto University publication series Doctoral Dissertations 59/2013
- [18] R. Jacobs. *Methods For Combining Experts' Probability Assessments*, Neural computation 7.5 (1995) 867-888.
- [19] U. Krause. *Opinion dynamics - local and global*, Proceedings of the International Workshop Future Directions in Difference Equations. June 13-17, 2011, Vigo, Spain, 113-119.
- [20] B. Latané. *The Psychology of Social Impact*, American Psychologist 36.4 (1981) 343.
- [21] H. Levine, L. E. Payne. *Nonexistence theorems for the heat equation with nonlinear boundary conditions and for the porous medium equation backward in time*. Journal of Differential Equations 16 (1974) 319-334.
- [22] H. Li, G. Toscani. *Long-time asymptotics of kinetic models of granular flows*. Arch Ration Mech Anal 172 (3) (2004) 407-428.
- [23] C. E. La Rocca, A. Braunstein, F. Vazquez *The influence of persuasion in opinion formation and polarization* EPL (Europhysics Letters), volumen 106 N*4 , (2014)
- [24] D. Neau *Révisions des croyances dans un système d'agents en interaction*. Ecole polytechnique, Rapport d'option, <http://www.lps.fr/weisbuch/rapneau.ps> (2000).
- [25] M. Mäs, A. Flache, D. Helbing. *Individualization as Driving Force of Clustering Phenomena in Humans*. PLoS Computational Biology, 6(10) (2010) e1000959.
- [26] J. Navajas, T. Niella, G. Garbulsky, B. Bahrami, M. Sigman. *Aggregated knowledge from a small number of debates outperforms the wisdom of large crowds*, Nature Human Behaviour (2018) 1.
- [27] H. Noorazar, M. Sottile, K. Vixie. *A energy-based interaction model for population opinion dynamics with topic coupling* arXiv:1607.06806 [physics.soc-ph], 2016

- [28] S. Motsch, E. Tadmor. *Heterophilous Dynamics Enhances Consensus* SIAM Review 56.4 (2014) 577-621.
- [29] M. Rajngewerc. *Algunos modelos de formación de opinión* Tesis de Licenciatura, Depto de Matemática, FCEN, UBA, (2016).
- [30] R. Ochrombel, *Simulations of Sznajd sociophysics model with convincing single opinions*, Int. J. Mod. Phys.C, 12 (07) (2001) 1091-1091.
- [31] M. Pérez-Llanos, J. P. Pinasco, N. Saintier, A. Silva, *Opinion formation models with heterogeneous persuasion and zealotry*. Preprint, 2017.
- [32] J. P. Pinasco, V. Semeshenko, P. Balenzuela. *Modeling opinion dynamics: Theoretical analysis and continuous approximation*, Chaos, Solitons and Fractals 98 (2017) 210-215.
- [33] S. Salsa, F. Vegni, A. Zaretti, P. Zunino. *A primer on PDEs: models, methods, simulations*. Springer Science & Business Media. (2013).
- [34] A.M. Samoilenko, Yu. V. Teplinskii. *Countable Systems of Differential Equations*, VSP Utrecht, 2003.
- [35] Schelling, T. C.: *Dynamic models of segregation*, J. Math. Sociol., 1 (1971) 143-186.
- [36] K. Sznajd-Weron, J. Sznajd, *Opinion evolution in closed community*, Int. J. Mod. Phys. C 11 (2000) 1157-1165.
- [37] G. Toscani *Kinetic Models Of Opinion Formation*, Comm. Math. Sci., 4 (3) (2006) 481-496.
- [38] C. Villani. *Limite de champ moyen*, Cours de DEA, 2001-2002.
- [39] G. Weisbuch, G. Deffuant, F. Amblard, J. P. Nadal. *Interacting agents and continuous opinions dynamics. In Heterogenous agents, interactions and economic performance* (pp. 225-242). Springer, Berlin, Heidelberg. (2003).
- [40] G. Weisbuch, G. Deffuant, F. Amblard. *Persuasion dynamics*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 353 (2005) 555-575.