



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Duales de Alexander para lattices reducidos

Enrique Guillermo Pires Barracosa

Director: Elías Gabriel Minian

Septiembre de 2018

Agradecimientos

Quiero darle las gracias a mi mamá Nancy, a mi papá Guillermo y a mi hermana Victoria, por acompañarme en todo momento, por estar conmigo en las buenas y en las malas y por su apoyo incondicional durante todos estos años.

A Gabriel Minian, por aceptar ser mi director de tesis, por ayudarme durante estos meses, por transmitirme sus ganas de trabajar y por enseñarme tantas cosas durante este tiempo.

A Jonathan Barmak y a Marco Farinati por leer mi tesis y aportar valiosos comentarios y sugerencias.

A mis compañeros de cursada por todos los momentos compartidos que hicieron mucho más entretenidos estos años de carrera, y por toda la ayuda que me brindaron.

A los docentes que tuve, por enseñarme muchísimas cosas, por motivarme y por transmitirme sus ideas.

A mi abuela, a mis tios y a mis primos, por todo el apoyo brindado y por todas las reuniones.

A todos mis amigos. A mis amigos de la infancia por todos los momentos vividos y por todavía estar presentes. A mis amigos del cbc, por todas las juntadas y por acompañarme durante mis primeros meses de carrera. A mis amigos de la facultad, por todos los almuerzos, conversaciones y juntadas.

Introducción

La dualidad de Alexander es un resultado topológico clásico que compara la cohomología de un subespacio de una esfera con la homología de su complemento. De manera independiente, Barr ([8]), Björner y Tancer ([12]), y Bayer ([9]) estudiaron la dualidad de Alexander en el marco de complejos simpliciales. En la versión simplicial se considera un complejo simplicial K visto como un subcomplejo de un complejo simplicial L que es el borde de un símplex. La realización geométrica de K es entonces, un subespacio de la realización geométrica de L (que es una esfera). El complemento de este subespacio se retrae por deformación fuerte a la realización geométrica de un subcomplejo de L que se lo llama dual de Alexander de K y se lo nota K^* . La dualidad de Alexander simplicial compara entonces, los grupos de cohomología de K con los grupos de homología de K^* . Minian y Rodríguez ([28]) investigaron la dualidad de Alexander en el contexto de espacios finitos o, más específicamente, de lattices reducidos. Para establecer la dualidad en este marco es necesario determinar una noción de dual de Alexander para lattices reducidos. En esta tesis estudiaremos en profundidad la dualidad de Alexander en este contexto utilizando algunas nociones de dual previamente introducidas en [28]. Vamos a analizar propiedades del dual de Alexander de un lattice reducido X y a determinar como éste se modifica al hacer perturbaciones en X o al cambiar la dimensión de la esfera ambiente.

En el capítulo 1 repasamos definiciones y resultados elementales que utilizamos a lo largo de la tesis. La primer parte del capítulo es un breve repaso de complejos simpliciales en el que se recuerdan definiciones básicas y se fija notación relacionada al tema. En la segunda parte recordamos algunas definiciones y resultados relacionados a la teoría de espacios finitos. Entre otras cosas, hablamos de la correspondencia de Alexandroff, que establece que los espacios finitos T_0 y los posets están en una correspondencia directa, lo que nos permite analizar a los espacios finitos a partir del diagrama de Hasse de su poset asociado. También hablamos de las aplicaciones \mathcal{X} y \mathcal{K} de McCord ([26]) que vinculan a los espacios finitos con los complejos simpliciales. Todo espacio finito X tiene el mismo tipo homotópico débil que la realización geométrica de un complejo simplicial $\mathcal{K}(X)$, mientras que para todo complejo simplicial K existe un espacio finito $\mathcal{X}(K)$ con el mismo tipo homotópico débil que $|K|$. Vamos a recordar la noción de beat point, introducida por Stong ([35]), y la de weak point, introducida por Barmak y Minian ([5]). Los beat points son puntos de un espacio finito que se pueden remover sin modificar el tipo homotópico de éste, de hecho, dos

espacios finitos son homotópicamente equivalentes si y solo si se puede obtener uno a partir del otro agregando y removiendo beat points. Los weak points generalizan a los beat points y juegan un papel fundamental en el estudio de la teoría de homotopía simple de espacios finitos, la cual está estrechamente relacionada con la teoría de homotopía simple de Whitehead ([40]), en el contexto de complejos simpliciales. Por último, repasamos definiciones y resultados relacionados con los lattices reducidos. Un poset finito es un lattice reducido si todo conjunto acotado superiormente tiene supremo. De la definición resulta inmediato que todo conjunto acotado inferiormente tiene un ínfimo. Recordaremos las aplicaciones i y s introducidas por Barmak, que están fuertemente vinculadas con el estudio del tipo homotópico de los lattices reducidos. Un lattice reducido X colapsa a dos espacios $s(X)$, $i(X)$, que se obtienen, a partir de X , considerando los supremos de los subconjuntos de elementos minimales y los ínfimos de los subconjuntos de elementos maximales respectivamente.

En el capítulo 2 expondremos los resultados previos relevantes sobre la dualidad de Alexander. Primero repasamos la dualidad de Alexander clásica y siguiendo el trabajo de Rodriguez ([32]) mostramos como de este resultado se puede deducir la versión simplicial. Luego analizaremos la dualidad de Alexander para lattices reducidos siguiendo los resultados de [28] y haremos mención de diferentes nociones de dual de Alexander introducidas en ese paper. El dual de Alexander de un lattice reducido X , que lo notamos X^* , es el espacio que se obtiene de tomarle el poset de caras (es decir, aplicar \mathcal{X}) al dual de Alexander de un complejo simplicial $T(X)$ asociado a X . Una noción alternativa de este dual se obtiene de aplicarle i al espacio X^* . A este dual alternativo lo notamos $d(X)$, siguiendo la notación de [28].

En el capítulo 3 vamos a analizar lattices reducidos que satisfacen condiciones específicas y fáciles de verificar. El dual alternativo de un lattice reducido que satisfaga esas condiciones cumplirá propiedades muy deseables, como por ejemplo que sea un espacio minimal (es decir, que no tenga beat points).

Barmak ([3]) dio una noción de join para espacios finitos llamada join no Hausdorff que satisface que $\mathcal{K}(X * Y) = \mathcal{K}(X) * \mathcal{K}(Y)$. El join de dos lattices reducidos no es lattice reducido en la mayoría de los casos. Basándonos en [18] y siguiendo [28], obtenemos una noción de join, que llamamos l join, que cumple que dados dos lattices reducidos X , Y , el l join de X con Y , $X *_l Y$, es un lattice reducido que posee el mismo tipo homotópico simple que el join no Hausdorff $X * Y$. En el capítulo 4 hablamos de este concepto y además introducimos una noción de join con menos elementos que el l join, que llamamos deleted join reducido o r join. Esta noción de join también preserva el tipo homotópico simple del join no Hausdorff y satisface además que el r join de dos lattices reducidos es un lattice reducido. Sin embargo, su definición es menos intuitiva que la del l join, ya que el r join de dos espacios finitos $X *_r Y$ depende de la elección de un elemento minimal de Y .

Si tomamos el r join de un lattice reducido X con el poset de caras del borde

de un $(n - 1)$ -símplex obtenemos un lattice reducido que es un modelo, es decir un espacio con los mismos grupos de homotopía, del espacio finito $\Sigma^n(X)$ que se obtiene de X al aplicarle la suspensión no Hausdorff (es decir, hacer join con el espacio discreto de 2 puntos) n veces. Este modelo de suspensión, que llamamos n -suspensión reducida y lo notamos $\mathbf{S}^n(X)$, juega un papel muy relevante en el estudio de los duales alternativos. Minian y Capitelli en [14] analizaron el dual de Alexander de un complejo simplicial K respecto a un conjunto de vértices V y lo compararon con el dual de K respecto al conjunto de vértices de K , que notamos K^0 . Basándonos en los resultados de ese paper, mostramos que a partir del dual de un lattice reducido X respecto de su conjunto de elementos minimales, que lo notamos $d_m(X)$, obtenemos, aplicando una suspensión reducida, el dual de X respecto a cualquier conjunto de vértices $V \supseteq m(X)$, que lo notamos $d_V(X)$.

Teorema 4.4.4 Sea X un lattice reducido tal que $s(X)$ no tiene máximo, sea $V \supseteq m(X)$ un conjunto de vértices de X tal que $\#(V \setminus m(X)) = n > 0$. Entonces, si $d_m(X)$ no tiene mínimo, se tiene que $d_V(X) = \mathbf{S}^n(d_m(X))$.

De este teorema se deduce que $d_V(X) \bigwedge_{\downarrow} \Sigma^n(d_m(X))$ para un lattice reducido X , donde $n = \#(V \setminus m(X))$. En otras palabras, de conocer el tipo homotópico simple de $d_m(X)$ podemos determinar el tipo homotópico simple del dual de X respecto a cualquier conjunto de vértices V .

En el capítulo 5 analizamos como cambia el dual de Alexander de un lattice reducido X al hacer perturbaciones en el espacio. Primero observamos lo que sucede cuando removemos un beat point $x_0 \in X$. En este caso demostramos que el tipo homotópico simple del dual no cambia, de esto se deduce el siguiente resultado

Teorema 5.1.8 Sean X, Y lattices reducidos homotópicamente equivalentes, entonces si $\#V = \#W$, con $V \supseteq m(X)$, $W \supseteq m(Y)$ conjuntos de vértices, se tiene que $d_V(X) \bigwedge_{\downarrow} d_W(Y)$.

En particular, el dual de un espacio contráctil es homotópicamente trivial. Para weak points tenemos un resultado similar al del Teorema 5.1.8, que dice lo siguiente

Teorema 5.2.6 Sea X un lattice reducido, $x_0 \in X$ un weak point tal que $X \setminus \{x_0\}$ también es un lattice reducido, entonces $X_V^* \bigwedge_{\downarrow} (X \setminus \{x_0\})_V^*$. En particular $d_V(X) \bigwedge_{\downarrow} d_V(X \setminus \{x_0\})$.

Dado que un espacio finito Y es simplemente equivalente a X si y solo si Y se obtiene de X agregando y removiendo weak points, entonces podríamos creer que dos espacios simplemente equivalentes poseen duales de Alexander simplemente equivalentes. Sin embargo, esto en general no es cierto, pues al removerle un weak point a un lattice reducido podemos perder la propiedad de que éste lo siga siendo. Basándonos en un ejemplo del paper [28] construimos

un lattice reducido X homotópicamente trivial cuyo dual de Alexander no lo es. Por último, comparamos el dual de un lattice reducido X con el de su opuesto X^{op} , que es el poset que se obtiene de X invirtiendo todas sus relaciones. X^{op} es un lattice reducido que posee el mismo tipo homotópico simple que X , por lo que tiene sentido preguntarse si los duales de Alexander de X y X^{op} tomados sobre conjuntos de vértices del mismo cardinal son simplemente equivalentes. Para estudiar este problema damos una enunciación alternativa a partir del cross dual $\mathcal{C}(X)$, que es un poset que introducimos en esta tesis que se obtiene de aplicar el dual de Alexander a X , tomar opuesto y aplicar el dual de Alexander nuevamente.

Índice general

1	Preliminares	1
1.1	Complejos simpliciales	2
1.1.1	Homología y cohomología simplicial	4
1.1.2	Star, link y join simplicial	5
1.2	Espacios finitos y Posets	7
1.2.1	Teoría de homotopía débil de McCord	10
1.2.2	Star, link, join y cono no Hausdorff	13
1.2.3	Teoría de homotopía simple	15
1.2.4	Teoría de homotopía fuerte de complejos simpliciales	19
1.3	Lattices reducidos	22
1.3.1	El Teorema de Osaki y aplicaciones a lattices reducidos	25
2	Dualidad de Alexander	28
2.1	La dualidad de Alexander en complejos simpliciales	29
2.2	La dualidad de Alexander en lattices reducidos	32
2.3	Un dual alternativo	34
2.4	Notaciones	35
3	Minimalidad del dual y doble dual	39
3.1	La minimalidad y el axioma W_0	40
3.2	El doble dual y el axioma W_1	43
4	Modelos de suspensiones de lattices reducidos	48
4.1	Colímites homotópicos	49
4.2	El l Join y el r join	51
4.3	Esferas y suspensiones reducidas	59
4.4	Caracterización de los duales alternativos	62
5	Reducciones en un punto y dualidad	67
5.1	El Beat problem	68
5.2	El little weak problem	73
5.3	Weak problem general	78
5.4	El problema del opuesto y el cross dual	80

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo vamos a repasar algunos resultados generales de topología algebraica que serán utilizados durante esta tesis. Comenzaremos con poliedros, complejos simpliciales y homología simplicial. Además recordaremos algunas construcciones elementales básicas, como el join de dos complejos simpliciales.

La segunda sección tratará sobre espacios finitos. Repasaremos el estudio del tipo homotópico de estos espacios y su relación con los posets y con los complejos simpliciales.

En la tercer sección repasaremos las propiedades básicas de los lattices reducidos. También recordaremos el Teorema de Osaki que puede usarse como herramienta para estudiar el tipo homotópico simple de estos espacios.

Los tópicos que vamos a repasar en la primer sección son temas centrales de la topología algebraica, y existen muchas fuentes que le dan una detallada exposición a los mismos, como por ejemplo los libros de Hatcher, Munkres y Spanier (ver [19], [29], [30] y [34]). El contenido de las otras secciones está basado en el libro de Barmak [3].

1.1 Complejos simpliciales

Los poliedros son espacios topológicos que se obtienen de pegar objetos geométricos, como por ejemplo líneas, triángulos, cuadrados, tetraedros y otros objetos de diferentes dimensiones. Los poliedros se crean a partir de conjuntos llamados complejos simpliciales, que poseen una estructura rígida que nos permite facilitar el estudio de los poliedros, por ejemplo reduciendo el cálculo de los grupos de homología de estos espacios a una cuenta combinatoria, a partir de la noción de homología conocida como homología simplicial.

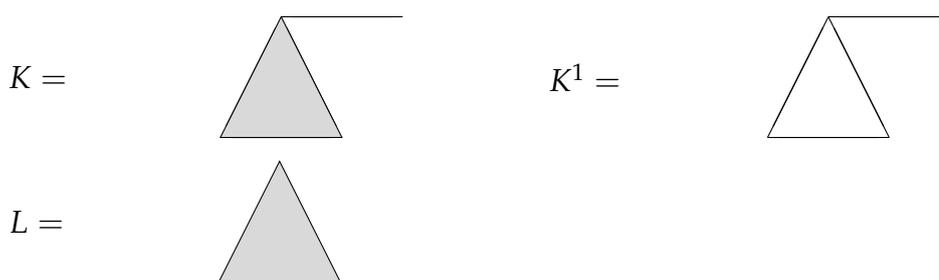
Recordemos que un complejo simplicial K consta de un conjunto de vértices V_K y una familia S_K de subconjuntos, llamados *símplices*, no vacíos y finitos de V_K que contiene a los vértices y es cerrada por inclusiones: si $\sigma \in S_K$ y $\tau \subseteq \sigma$, $\tau \neq \emptyset$, entonces $\tau \in S_K$. Notamos $\sigma \in K$, si $\sigma \in S_K$. Si $\sigma \in K$, la dimensión de σ , que la notamos $\dim(\sigma)$, es $\#\sigma - 1$. La dimensión de K es $\dim(K) = \sup(\{\dim(\sigma) : \sigma \in K\})$.

Dados dos *símplices* σ, τ pertenecientes a un complejo simplicial K , diremos que τ es una cara de σ si $\tau \subseteq \sigma$. τ es una cara propia si la inclusión es estricta y es cara inmediata si $\dim(\tau) = \dim(\sigma) - 1$.

Decimos que L es un subcomplejo de K , y notamos $L \leq K$, si los *símplices* de L son *símplices* de K . Un subcomplejo se dice pleno si todo *símplex* de L formado por vértices de L es un *símplex* de L .

El n -esqueleto de K es el subcomplejo $K^n \leq K$ cuyos *símplices* son los *símplices* $\sigma \in K$ tales que $\dim(\sigma) \leq n$.

Ejemplo 1.1.1.



K^1 es un subcomplejo de K que no es pleno, L es un subcomplejo de K que sí es pleno.

Si σ es un *símplex*, notamos $\bar{\sigma}$ al complejo simplicial finito generado por σ . Con $\partial\sigma$ notamos al borde de σ , que es el complejo simplicial formado por las caras propias de σ , es decir, el complejo que está generado por las caras inmediatas de σ .

Recordemos que para dos complejos simpliciales K, L , un morfismo simplicial de K a L es una función $\phi : K^0 \rightarrow L^0$ tal que $\forall \sigma \in K$, $\phi(\sigma)$ es un *símplex* de L .

Notar que la composición de morfismos simpliciales es un morfismo. Para todo subcomplejo L de un complejo simplicial K se tiene que la inclusión $i : L \rightarrow K$ es un morfismo simplicial.

Si un morfismo simplicial $\phi : K \rightarrow L$ admite una inversa $\phi^{-1} : L \rightarrow K$ que también es un morfismo simplicial, entonces diremos que ϕ es un isomorfismo simplicial. Dos complejos simpliciales son isomorfos si existe un isomorfismo simplicial entre ellos.

El concepto de realización geométrica es el nexo que vincula a los complejos simpliciales con los espacios topológicos. Recordemos que la realización geométrica de un complejo simplicial K es el espacio topológico $|K|$ cuyos elementos vienen dados por las combinaciones convexas de vértices de K cuyo soporte es un símplex de K . Para un l -símplex $\sigma \in K$, $\sigma = \{v_0, \dots, v_l\}$, la topología de $|\sigma|$ viene dada por la métrica

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=0}^l (x_i - y_i)^2}$$

donde $x = \sum_{i=0}^l x_i v_i$, $y = \sum_{j=0}^l y_j v_j$ son elementos de $|\sigma|$.

La topología de la realización geométrica de K es la topología final respecto de las inclusiones $i : |\sigma| \rightarrow |K|$ para cada $\sigma \in K$, es decir, le damos a $|K|$ la topología más fina que hace continuas a esas funciones.

Notar que dado un n -símplex σ , entonces $|\sigma|$ es homeomorfo a D^n , en particular $|\sigma|$ es compacto, de esto se deduce que la realización geométrica de un complejo simplicial K es compacta si y solo si K es finito, en ese caso $|K|$ resulta además metrizable.

Recordemos que si X es un espacio topológico, entonces X es un poliedro si existe un complejo simplicial K y un homeomorfismo $f : |K| \rightarrow X$. Un par (K, f) como el de recién se llama triangulación de X .

Ejemplos 1.1.2. $\mathbb{R}^n, I^n, S^n, \mathbb{D}^n, \mathbb{R}P^n, S^1 \times S^1$ son poliedros. Toda variedad diferenciable resulta ser un poliedro.

Para dos complejos simpliciales K y L y un morfismo simplicial $\phi : K \rightarrow L$, La realización geométrica de ϕ es la función $|\phi| : |K| \rightarrow |L|$, cuya fórmula viene dada por $|\phi|(\sum_{i=0}^l t_i k_i) = \sum_{i=0}^l t_i \phi(k_i)$, con $\{k_0, \dots, k_l\}$ un símplex de K . Notar que la realización geométrica de un l -símplex es un espacio métrico convexo, luego $|\phi|$ está bien definida. Además $|\phi|$ es continua porque es lineal al restringir a cada uno de los símplexes.

Dado $\sigma \in K$, notamos σ° al interior de σ , que es el subespacio $\sigma^\circ = \{x \in |K| : \text{sop}(x) = \sigma\}$. σ° es abierto si σ es un símplex maximal. Por definición, $|K|$ es, conjuntísticamente, la unión disjunta de los interiores de cada uno de sus símplexes.

Dado un complejo simplicial K , notamos K' a su subdivisión baricéntrica, que recordemos que es el complejo simplicial cuyos símplices son los conjuntos de símplices de K que forman una cadena con el orden dado por la inclusión. Notamos además $K^{(0)} = K$, $K^{(n+1)} = (K^{(n)})'$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Decimos que K^n es la n -ésima subdivisión baricéntrica de $|K|$.

1.1.1 Homología y cohomología simplicial

Sea $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ un n -símplex. Recordemos que dos ordenamientos de los vértices de σ son equivalentes si difieren uno del otro por una permutación par. A las clases de ordenamientos las llamaremos orientaciones de σ . Notar que si $\dim(\sigma) \geq 1$, entonces σ posee dos orientaciones. Notamos $[v_0, \dots, v_n]$ a la orientación del orden $v_0 < v_1 \dots < v_n$, y a la otra orientación la notamos $-[v_0, \dots, v_n]$, y diremos que es la orientación opuesta de $[v_0, \dots, v_n]$. Un símplex junto con una orientación es un símplex orientado.

Si un símplex orientado τ es una cara inmediata de un símplex orientado σ , que lo notamos $\tau \prec \sigma$, entonces el número de incidencia de σ en τ , $\epsilon(\sigma, \tau)$, es 1 si τ tiene la orientación de σ y -1 en caso contrario. Concretamente $\epsilon(\sigma, \tau) = 1$ si $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$, y $\tau = (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$, donde $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] = [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$.

Si K es un complejo simplicial, fijamos una orientación para cada uno de sus símplices. Notamos $C_n(K)$ al grupo abeliano libre generado por los n -símplices orientados de K , donde identificamos $[v_0, \dots, v_n]$ con $-[v_{h(0)}, \dots, v_{h(n)}]$ si $h \in S_n$ es una permutación impar. El morfismo de borde $d_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ está definido, en la base, como

$$d_n(\sigma) = \sum_{\tau \prec \sigma} \epsilon(\sigma, \tau) \tau,$$

donde σ y τ tienen las orientaciones fijadas de K .

El n -ésimo grupo de ciclos de K es $Z_n(K) = \text{Ker}(d_n)$, el n -ésimo grupo de bordes de K es $B_n(K) = \text{Im}(d_{n+1})$ y el n -ésimo grupo de homología simplicial de K es $H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K)$.

Notamos $C^n(K) = \{f : C_n(K) \rightarrow \mathbb{Z}, f \text{ morfismo}\}$. El morfismo de coborde $\delta_n : C^n(K) \rightarrow C^{n+1}(K)$ en los términos de la base satisface $\delta_n(\hat{\sigma})(\tau) = \hat{\sigma}(d_n(\tau))$, donde $\sigma, \tau \in K$ son símplices orientados de dimensión n y $n+1$ respectivamente y $\hat{\sigma}$ es el morfismo que vale 1 en σ y 0 en el resto de los n -símplices orientados.

En caso de que K sea finito, existe un isomorfismo canónico entre $C_n(K)$ y $C^n(K)$, que le asocia a cada símplex orientado σ el morfismo $\hat{\sigma}$. Bajo esta identificación el morfismo de coborde satisface

$$\delta_n(\sigma) = \sum_{\sigma \prec \tau} \epsilon(\tau, \sigma) \tau.$$

El n -ésimo grupo de cociclos, de cobordes y de cohomología simplicial vienen dados de manera similar a antes utilizando δ en lugar de d , los notamos $Z^n(K)$, $B^n(K)$ y $H^n(K)$.

Si $L \leq K$, $n \geq 0$, notamos $C_n(K, L) = C_n(K)/C_n(L)$, que es el grupo abeliano libre generado por los n -símplices orientados de K que no están en L . El morfismo de borde $\tilde{d}_n : C_n(K, L) \rightarrow C_{n-1}(K, L)$ viene dado por la fórmula $\tilde{d}_n([\sigma]) = [d_n(\sigma)]$. El n -ésimo grupo de homología relativa viene dado por

$$H_n(K, L) = Z_n(K, L) / B_n(K, L),$$

donde $Z_n(K, L) = \text{Ker}(\tilde{d}_n)$ y $B_n(K, L) = \text{Im}(\tilde{d}_{n+1})$ son el n -ésimo grupo relativo de ciclos y el n -ésimo grupo relativo de cobordes respectivamente.

Recordemos además que la homología reducida se define con los mismos grupos abelianos $C_n(K)$ que antes y con los mismos morfismos d_n , solo que en grado -1 , $C_{-1}(K) = \mathbb{Z}$, y $d_0 : C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ es el morfismo de aumentación, que vale 1 en cada vértice de K . Notamos $\tilde{H}_n(K)$. Observar que $\tilde{H}_n(K) = H_n(K)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Además se tiene que $H_0(K) \simeq \tilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z}$.

Los siguientes resultados permiten calcular concretamente la homología de los complejos simpliciales y son de naturaleza local-global. Para sus demostraciones consultar [29], páginas 175-190.

Teorema 1.1.3. (Escisión): Sea K un complejo simplicial, $R, L \leq K$ subcomplejos tales que $R \cup L = K$, entonces existe un isomorfismo $H_n(L, L \cap R) \simeq H_n(K, R)$ para cada n .

Teorema 1.1.4. (Mayer Vietoris): Sean L, R, K como antes, entonces existe una sucesión exacta larga

$$\dots \longrightarrow H_n(L \cap R) \xrightarrow{i_*} H_n(L) \oplus H_n(R) \xrightarrow{j_*} H_n(K) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(L \cap R) \dots$$

Donde los morfismos i_*, j_* vienen inducidos por inclusiones. A ∂ se lo llama morfismo de conexión.

Para homología reducida existe una sucesión exacta larga similar.

La teoría de homología simplicial es una herramienta que permite calcular la homología singular de los poliedros, ya que los grupos de homología singular de un poliedro X son isomorfos a los grupos de homología simplicial de cualquier complejo simplicial K que lo triangula. Eso es lo que afirma el siguiente teorema, cuya demostración también se puede encontrar en [29].

Teorema 1.1.5. Si K es un complejo simplicial, entonces $H_n(K) \simeq H_n(|K|)$ $\forall n$, donde para $|K|$ consideramos la homología singular.

1.1.2 Star, link y join simplicial

Vamos a repasar algunas construcciones básicas de complejos simpliciales que volveremos a utilizar más adelante en esta tesis. Comencemos recordando la definición de join entre complejos simpliciales.

Definición 1.1.6. Sean K, L complejos simpliciales (disjuntos). El join de K con L , que notamos $K * L$, es el complejo simplicial generado por los símlices que vienen dados por la unión de un símplex de K con un símplex de L . En otras palabras $K * L = K \sqcup L \sqcup \{\sigma \cup \tau : \sigma \in K, \tau \in L\}$.

Notar que $(K * L)^0 = K^0 \sqcup L^0$.

Dados $f : K \rightarrow M, g : L \rightarrow N$ morfismos simpliciales, con K, L, M y N disjuntos, entonces se tiene un morfismo simplicial $f * g : K * L \rightarrow M * N$, tal que para un vértice $v \in (K * L)^0, f * g(v) = f(v)$, si $v \in K^0$, y $f * g(v) = g(v)$, si $v \in L^0$.

El cono de un complejo simplicial K viene dado por el join $K * \{v\}$, con $v \notin K$ un vértice. Lo notamos $C(K)$.

La suspensión de K es $\Sigma(K) = K * \mathbb{S}^0$, donde \mathbb{S}^0 es el complejo simplicial discreto de 2 vértices. La n -ésima suspensión de K se define recursivamente como $\Sigma^0(K) = K, \Sigma^{n+1}(K) = \Sigma(\Sigma^n(K))$.

Observar que la realización geométrica del cono de un símplex es contráctil, mientras que por una sencilla aplicación del Teorema de Mayer Vietoris (Teorema 1.1.4), se tiene que $\tilde{H}_j(\Sigma^n(K)) = \tilde{H}_{j-n}(K) \forall j \in \mathbb{N}_0$.

Por último recordemos los conceptos de link y star, que están muy relacionados entre sí.

Definición 1.1.7. Sea $v \in K$ un vértice, el star abierto, que notamos $st^\circ(v)$, es el subespacio abierto de $|K|$ dado por $st^\circ(v) = \{x \in |K| : v \in \text{sup}(x)\}$. Notar que los star abiertos forman un cubrimiento por abiertos de K .

El star de v es el subcomplejo de K de símlices σ tales que $\sigma \cup \{v\} \in K$. Notamos $st(v)$. El link de v , $lk(v)$, es el subcomplejo de $st(v)$ de símlices que no tienen a v . El star cerrado de v es la clausura del star abierto, o bien, la realización geométrica del star, es decir $|st(v)|$.

En caso de tener que aclarar sobre que complejo simplicial tomamos star, notaremos $st_K(v), st_K^\circ(v)$ y $lk_K(v)$. Observar que $st(v) = lk(v) * \{v\}$. Luego $st(v)$ es un cono, por lo que $|st(v)|$ es contráctil.

1.2 Espacios finitos y Posets

En esta sección vamos a repasar la teoría básica de espacios topológicos finitos. Primero recordaremos la relación entre espacios finitos y posets, descubierta por Alexandroff en [2], y la caracterización del tipo homotópico de estos espacios, estudiada por Stong ([35]). Luego repasaremos los resultados relacionados con la teoría de homotopía débil de McCord ([26]), y recordaremos algunos resultados relevantes, probados por Barmak y Minian, de la teoría de homotopía simple de espacios finitos ([6] y [5]) y la teoría de homotopía fuerte de complejos simpliciales ([7]).

Entre otras importantes referencias de la teoría de espacios finitos podemos destacar [4], [22], [23] y [24].

Darle una estructura de espacio topológico a un conjunto finito X puede ser visto, desde otra perspectiva, como darle a X un preorden. Si τ es una topología para X , entonces dado un elemento $x \in X$, la intersección de todos los abiertos que contienen a x es un abierto minimal que contiene a x , que notamos U_x . Definimos en X la relación $y \leq x$ si $y \in U_x$. Esta relación define un preorden en X .

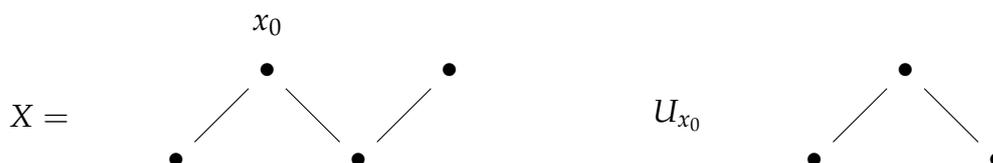
Consideramos ahora un preorden en $X \leq$. Definimos una base de topología para X a partir de los conjuntos $U_x = \{y \in X / y \leq x\}$. Estos conjuntos forman efectivamente una base pues, si $x, y, z \in X$ son tales que $z \in U_x \cap U_y$, entonces $z \in U_z \subseteq U_x \cap U_y$.

Estas aplicaciones definen biyecciones inversas, y se tiene que $x \leq y$ si y solo si $x \in U_y$, y esto vale si y solo si todos los abiertos que contienen a y contienen a x . Esta correspondencia, que se debe a Alexandroff ([2]), se restringe además a espacios finitos T_0 y posets, es decir, órdenes parciales. Estos resultados se pueden encontrar en [3].

Los espacios finitos T_0 pueden entonces ser representados con el diagrama de Hasse de su poset asociado. Todo espacio finito se retrae por deformación fuerte a un espacio finito T_0 , por lo que trabajaremos en general con espacios finitos que son T_0 .

En el diagrama de Hasse de un espacio finito T_0 los puntos que están unidos por una arista son elementos comparables, el punto que se encuentra más arriba de la arista es inmediatamente mayor que el punto que se encuentra por debajo, o sea, no habrá otro punto intermedio entre esos dos.

Ejemplo 1.2.1.



Notar que un subposet U de un espacio topológico finito $T_0 X$ es abierto si y solo si $\forall x \in U, y \in X$ tal que $y \leq x$, entonces $y \in U$. Los cerrados de X son los subposets de X que satisfacen la propiedad opuesta: si x pertenece a un cerrado F , $y \in X$ es tal que $\overline{y} \geq x$, entonces $y \in F$. Notamos $F_x = \{y \in X : y \geq x\}$. Observar que $F_x = \overline{\{x\}}$, la clausura de $\{x\}$. Los cerrados de X forman una base de topología que está asociada al orden inverso de X . A este poset lo llamamos el opuesto de X y lo notamos X^{op} .

Ejemplo 1.2.2.



Observar que si X es un espacio finito y $A \subseteq X$ es un subespacio, entonces el orden inducido de la topología de A es el orden inducido por X . Para diferenciar los abiertos minimales notamos, para cada $x_0 \in A$, $U_{x_0}^A$ al abierto minimal de A que contiene a x_0 . Notar que $U_{x_0}^A = U_{x_0}^X \cap A$.

Observación 1.2.3. Dado un preorden X , podemos considerar la relación de equivalencia generada por $x \sim y$ si x es comparable con y . Las componentes conexas y las componentes arcoconexas de X vienen determinadas por las clases de equivalencia de esta relación. En particular un espacio topológico finito X es conexo si y solo si es arcoconexo.

Vamos a repasar cuando dos funciones continuas entre espacios finitos son homotópicas y cuando dos espacios finitos son homotópicamente equivalentes. Esta caracterización fue descubierta por Stong en [35] y profundizada por Barkmak en [3].

Notar que la noción de función continua en espacios finitos T_0 coincide con la noción de morfismo de orden en el poset asociado. Concretamente, $f : X \rightarrow Y$ es continua si y solo si para todo par $x, y \in X$, con $x \leq y$, entonces $f(x) \leq f(y)$. Toda función $f : X \rightarrow Y$ continua se puede ver como un elemento del espacio finito Y^X , cuyo orden viene dado por $f \leq g$ si $f(x) \leq g(x) \forall x \in X$. Se puede probar que todo par de funciones homotópicas están en la misma componente arcoconexa de Y^X , de hecho, se tiene el siguiente resultado cuya demostración se puede encontrar en [3]

Proposición 1.2.4. Sean X, Y espacios finitos, $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas, entonces f y g son homotópicas si y solo si existe una secuencia de funciones continuas f_0, \dots, f_n , con $f = f_0 \leq f_1 \geq f_2 \leq \dots \leq f_n = g$. Además, si la homotopía H es relativa a un subespacio $A \subseteq X$, entonces podemos tomar a cada f_i tal que $f_i|_A = f|_A = g|_A$.

De esta proposición se deduce inmediatamente que todo espacio finito con máximo o mínimo x_0 es contráctil, en efecto, supongamos que x_0 es un máximo,

entonces $1_X \leq c_{x_0}$ son funciones continuas homotópicas. Si $x_0 \in X$ fuese un mínimo, se tiene que $1_X \geq c_{x_0}$ son homotópicas.

El tipo homotópico de un espacio X finito y T_0 se puede estudiar combinatorialmente, removiendo puntos llamados beat points que no cambian el tipo homotópico del espacio. Stong fue quien introdujo estos movimientos en [35].

Definición 1.2.5. Sea X un espacio finito T_0 , un punto $x_0 \in X$ es un down beat point si $\hat{U}_{x_0} = U_{x_0} \setminus \{x_0\}$ tiene un máximo. x_0 se dice up beat point si $\hat{F}_{x_0} = F_{x_0} \setminus \{x_0\}$ tiene un mínimo. Finalmente, x_0 se dice un beat point de X si es un down beat point o un up beat point. Un espacio finito sin beat points se dice minimal.

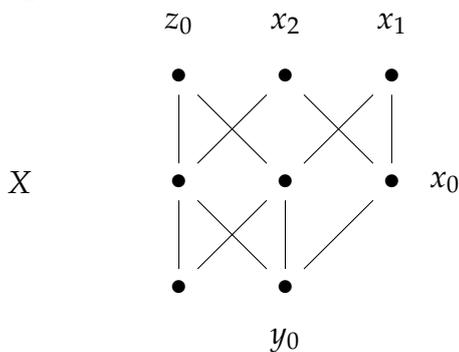
Si X es un espacio finito T_0 , $x, y \in X$, notamos $x \prec y$ (ó $y \succ x$) si $x < y$ y no existe $z \in X$ tal que $x < z < y$. En ese caso, decimos que y cubre a x .

Observar que si $x_0 \in X$ es un down beat point, entonces la función $r : X \rightarrow X \setminus \{x_0\}$ definida por $r(x) = x \ \forall x \neq x_0$, y $r(x_0) = y_0$, con $x_0 \succ y_0$ define un RDF de X a $X \setminus \{x_0\}$. Se tiene un resultado análogo para up beat points, luego remover beat points no cambia el tipo homotópico del espacio. En particular X es homotópicamente equivalente a un espacio sin beat points \tilde{X} . A un espacio \tilde{X} como el de recién lo llamaremos core de X y lo notamos $core(X)$. Dos cores de un espacio finito T_0 X son homeomorfos, luego todo espacio finito T_0 tiene un único core a menos de homeomorfismo.

Si $x_0 \in X$ es un beat point, decimos que $X \setminus \{x_0\}$ es un colapso fuerte elemental de X , notamos $X \searrow_x X \setminus \{x_0\}$. X colapsa fuertemente a Y (o bien, Y se expande a X) si existe una sucesión de colapsos fuertes elementales que empieza en X y termina en Y . Notamos $X \searrow Y$ (o bien $Y \nearrow X$).

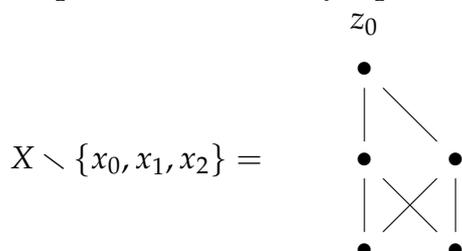
Un espacio X que colapsa fuertemente a un punto es contráctil, ya que al remover beat points no se modifica el tipo homotópico de X . La recíproca también es válida: X es contráctil si y solo si removiendo beat points de X obtenemos el singleton.

Ejemplo 1.2.6. Consideramos



x_0 es un down beat point de X ya que y_0 es el único elemento inmediatamente menor que x_0 . Al remover x_0 , tanto x_1 como x_2 pasan a ser down beat points y

al remover estos elementos obtenemos un espacio que tiene a z_0 como máximo, por lo que X es contráctil ya que $X \setminus \{x_0, x_1, x_2\}$ lo es.



Barmak en [3] (página 21) generalizó las ideas de Stong de espacios minimales al caso relativo, y obtuvo este resultado que será importante más adelante.

Proposición 1.2.7. *Sea X espacio finito T_0 , $A \subseteq X$ un subespacio, entonces A es RDF de X si y solo si $X \searrow A$.*

1.2.1 Teoría de homotopía débil de McCord

Repasemos ahora el trabajo que hizo McCord en [26] en el que estudió el tipo homotópico débil de los espacios finitos T_0 y lo relacionó con el tipo homotópico de los complejos simpliciales. Consultar [3] (sección 1.4) y [23] para referencias acerca de este tema.

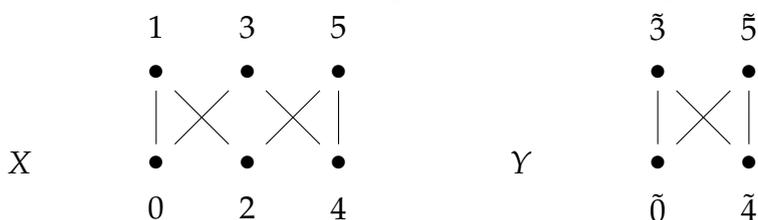
Recordemos que una función entre espacios topológicos es una equivalencia débil si induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía (y por ende, los de homología). Dos espacios topológicos tienen el mismo tipo homotópico débil si están en la misma clase de equivalencia generada por la relación $A \simeq B$ si existe una equivalencia débil entre A y B . Si un espacio tiene el mismo tipo homotópico débil que un punto diremos que es homotópicamente trivial.

El teorema de McCord nos da una herramienta muy útil a la hora de ver si una función entre espacios finitos T_0 es una equivalencia débil. Recordemos que un cubrimiento tipo base de un espacio topológico X es un cubrimiento por abiertos que forman una base para una topología de X .

Teorema 1.2.8. (McCord) *Sean X, Y espacios finitos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua, sea \mathcal{A} un cubrimiento de tipo base de Y tal que $\forall U \in \mathcal{A} f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$ es una equivalencia débil, entonces f es una equivalencia débil.*

Este teorema se puede aplicar utilizando, por ejemplo, la base de abiertos de Y dada por $\{U_y : y \in Y\}$. Para ver que una función $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia débil alcanza con ver que $f^{-1}(U_y)$ es abierto y homotópicamente trivial para todo $y \in Y$.

Ejemplo 1.2.9. Tomamos los espacios X, Y dados por



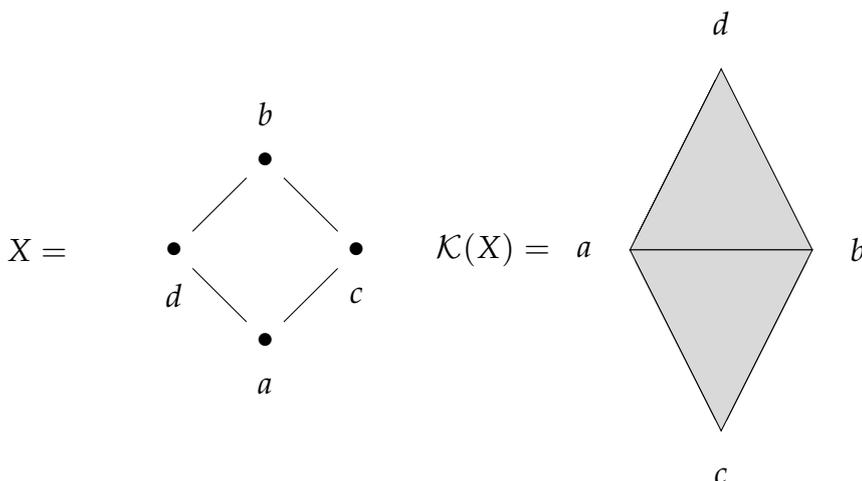
Consideramos $f : X \rightarrow Y$ definida por

$$f(i) = \begin{cases} \tilde{0}; i \in \{0, 1, 2\} \\ \tilde{i}; i \in \{3, 4, 5\} \end{cases}$$

Observar que $f^{-1}(U_{\tilde{i}})$ es abierto y contráctil para cada $i \in \{0, 3, 4, 5\}$, por lo que f es equivalencia débil por el Teorema de McCord.

Le asignamos a cada espacio finito $T_0 X$ un complejo simplicial asociado cuya realización geométrica posee el mismo tipo homotópico débil que X . Notamos $\mathcal{K}(X)$ al complejo simplicial cuyos símplexes son las cadenas no vacías de X . Toda función continua $f : X \rightarrow Y$ entre espacios finitos induce un morfismo simplicial $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ definido por $\mathcal{K}(f)(x) = f(x)$.

Ejemplo 1.2.10.



Observación 1.2.11. $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X^{op})$.

La relación entre complejos simpliciales finitos y espacios finitos viene, en parte, determinada por la función de McCord de X , $\mu_X : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow X$, que viene definida a partir de la fórmula $\mu_X(\alpha) = \min(\text{Sop}(\alpha))$, es decir, si α está en el interior de un n -símplex σ , $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$, con $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $\alpha = \sum \alpha_i x_i$, con $\alpha_i > 0 \forall i$, entonces $\mu_X(\alpha) = x_0$.

La importancia de la función de McCord viene dada por el siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en [3], página 12.

Teorema 1.2.12. *La función de McCord es una equivalencia débil.*

Observación 1.2.13. Para toda función continua $f : X \rightarrow Y$, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 |\mathcal{K}(X)| & \xrightarrow{|\mathcal{K}(f)|} & |\mathcal{K}(Y)| \\
 \mu_X \downarrow & & \downarrow \mu_Y \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

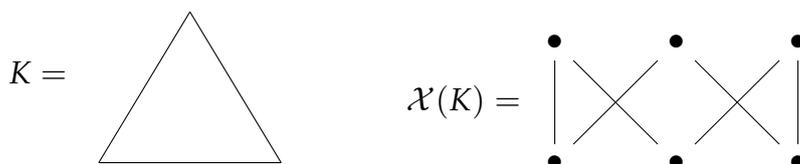
El diagrama conmuta porque f preserva el orden. Luego al menor elemento de una cadena se le asigna el menor elemento de la otra.

Del Teorema de Whitehead (ver [19], página 346), se deduce entonces

Proposición 1.2.14. *Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua entre espacios finitos T_0 , entonces f es una equivalencia débil si y solo si $|\mathcal{K}(f)| : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow |\mathcal{K}(Y)|$ es una equivalencia homotópica.*

Repasemos ahora el otro nexo de la relación entre complejos simpliciales finitos y espacios finitos. A cada complejo simplicial K le asignamos un espacio finito que tiene el mismo tipo homotópico débil que la realización geométrica de K . El poset de caras de K , que notamos $\mathcal{X}(K)$, es el espacio finito que tiene como elementos a los símplexes de K y el orden es el dado por la inclusión. Si $\phi : K \rightarrow L$ es un morfismo simplicial, entonces la aplicación \mathcal{X} induce una función continua $\mathcal{X}(\phi) : \mathcal{X}(K) \rightarrow \mathcal{X}(L)$, dada por $\mathcal{X}(\phi)(\sigma) = \phi(\sigma)$.

Ejemplo 1.2.15.



Observación 1.2.16. En general, no vale que $\mathcal{X}(\mathcal{K}(X)) = X$, para todo espacio finito X que sea T_0 . De hecho, no todo espacio es el poset de caras de un complejo simplicial (ver el espacio X del Ejemplo 1.2.10). Notamos X' a $\mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$, y diremos que es la subdivisión baricéntrica de X . Notar que $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) = K'$, la subdivisión baricéntrica de K , para todo complejo simplicial finito K .

Utilizando la subdivisión baricéntrica de K se tiene una equivalencia débil μ_K entre $|K|$ y $\mathcal{X}(K)$. Más precisamente, $\mu_K = \mu_{\mathcal{X}(K)}s^{-1}$, con $\mu_{\mathcal{X}(K)}$ la función de McCord definida anteriormente y $s : |K'| \rightarrow |K|$ el homeomorfismo dado por $s(\sigma) = b(\sigma)$, donde $b(\sigma) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1}v_i$, con $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$. De esta equivalencia débil se obtiene el resultado principal de la teoría de McCord

Proposición 1.2.17. *Las siguientes afirmaciones son válidas:*

- 1 Si X, Y son espacios finitos T_0 , entonces $X \stackrel{we}{\approx} Y$ si y solo si $|\mathcal{K}(X)| \simeq |\mathcal{K}(Y)|$.
- 2 Si K, L son complejos simpliciales finitos, entonces $|K| \simeq |L|$ si y solo si $\mathcal{X}(K) \stackrel{we}{\approx} \mathcal{X}(L)$.

1.2.2 Star, link, join y cono no Hausdorff

Vamos a repasar algunas definiciones que nos serán útiles más adelante. Estas definiciones están basadas en conceptos análogos en el contexto de complejos simpliciales o espacios topológicos generales. Se puede consultar [3], Secciones 2.7 y 2.8.

A partir de ahora todos los espacios topológicos finitos serán T_0 , a menos de aclarar lo contrario.

Definición 1.2.18. El join no Hausdorff de X con Y , que notamos $X * Y$, es el espacio finito cuyo conjunto subyacente es $X \sqcup Y$ con el orden heredado por X, Y y tal que $x \leq y \forall x \in X, y \in Y$.

El cono no Hausdorff de X es el join de X con un punto, notamos $C^+(X)$ (o simplemente $C(X)$) a $X * \{*\}$. Con $C^-(X)$ notamos a $\{*\} * X$. La suspensión no Hausdorff de X es el join de X con el espacio discreto de 2 puntos \mathbb{S}^0 , $\Sigma(X) = X * \mathbb{S}^0$.

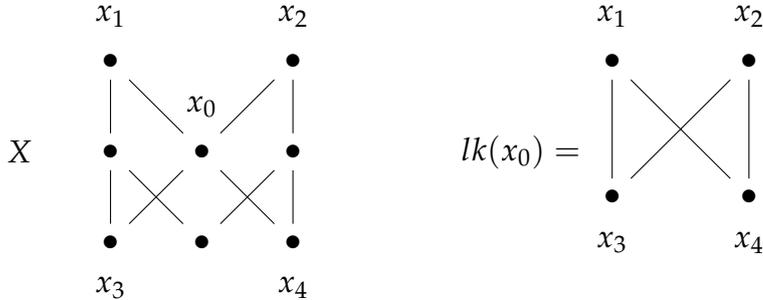
Notar que $C(X)$ es contráctil para todo espacio finito X ya que este espacio tiene un máximo.

Observación 1.2.19. $\mathcal{K}(X * Y) = \mathcal{K}(X) * \mathcal{K}(Y)$, donde con $*$ notamos al join de complejos simpliciales.

Definición 1.2.20. Dado $x \in X$, el star de x , $st(x)$, es el subespacio de puntos comparables con x , es decir $st(x) = U_x \cup F_x$. El link de x , que notamos $lk(x)$, es el subespacio $st(x) \setminus \{x\}$. Si necesitamos aclarar sobre que espacio tomamos star y link, notamos $st_X(x)$, $lk_X(x)$.

Notar que $st(x)$ es contráctil, en efecto, $1_{st(x)} \leq f \geq c_x$, donde f es la función que restringida a F_x vale la identidad y que restringida a U_x es constantemente x , mientras que c_x es la función que vale constantemente x en todo $st(X)$. Observar por otro lado que $lk(x) = \hat{U}_x * \hat{F}_x$, que en general no es contráctil.

Ejemplo 1.2.21.



El link de $x_0 \in X$ no es contráctil, ni siquiera es homotópicamente trivial (es un modelo de \mathbb{S}^1).

De hecho, se tiene el siguiente resultado, que fue demostrado originalmente en [3]

Proposición 1.2.22. Sean X, Y espacios finitos T_0 , entonces $X * Y$ es contráctil si y solo si X ó Y lo son.

Demostración: Sea $x \in X$ un beat point, entonces x es beat point de $X * Y$. En particular, si X es contráctil, se tiene que $X * Y \searrow_{x} \{*\} * Y$ que es contráctil por tener mínimo. Si Y es contráctil se procede de manera análoga.

Supongamos ahora que $X * Y$ es contráctil, si $x \in X$ es un beat point de $X * Y$, entonces se tiene

- down beat point: x es un down beat point de X .
- up beat point: x es un up beat point de X si x no es maximal en X . Si x es maximal, entonces $\hat{F}_x^{X * Y} = Y$ es contráctil.

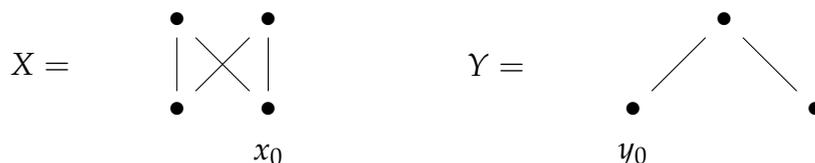
De esto deducimos que si Y no tiene beat points y no es contráctil, entonces X es contráctil. Si \tilde{Y} es un core de Y , entonces por el argumento de arriba deducimos que $X * Y \searrow_{x} X * \tilde{Y}$, que por ende es contráctil, y podemos aplicar lo que vimos recién para asegurar o bien que X es contráctil, o que \tilde{Y} (y en particular Y) lo es. □

La demostración dada de la Proposición 1.2.22 está basada en la demostración exhibida en [3]. Las ideas usadas volverán a aparecer en el capítulo 4, cuando estudiemos otras nociones especiales de join entre espacios finitos.

Recordemos que dados dos espacios finitos X, Y con $x_0 \in X, y_0 \in Y$, el wedge de X con Y respecto a x_0 e y_0 es el espacio $X \vee Y = X \sqcup Y / \{x_0, y_0\}$.

$X \vee Y$ es T_0 si tanto X como Y lo son, de hecho, el diagrama de Hasse de $X \vee Y$ se obtiene pegando los diagramas de X e Y en x_0 e y_0 .

Ejemplo 1.2.23. Si



Entonces tenemos



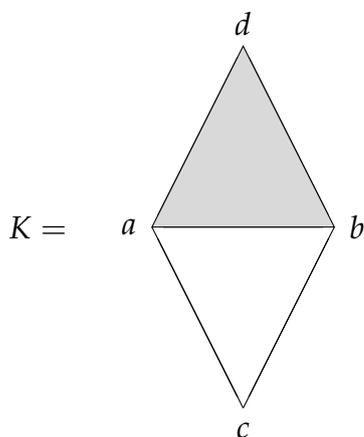
1.2.3 Teoría de homotopía simple

Ahora daremos una serie de resultados que relacionan el tipo homotópico simple de complejos simpliciales finitos y de espacios finitos. La teoría de homotopía simple comenzó con Whitehead ([40]), quien introdujo los conceptos de colapso y expansión elemental de complejos simpliciales. Posteriormente, Barmak y Minian ([5]) descubrieron un análogo a estos conceptos en el marco de espacios finitos, de donde surge el concepto de weak point, que es una generalización de los beat points que vimos anteriormente. Las referencias principales para este tema son los papers de Whitehead [38], [39] y [40], el libro de Cohen [15], el artículo de Milnor [27], y los trabajos de Barmak y Minian [5] y [6]. Empezaremos la sección recordando las nociones básicas de colapso y expansión elemental para complejos simpliciales.

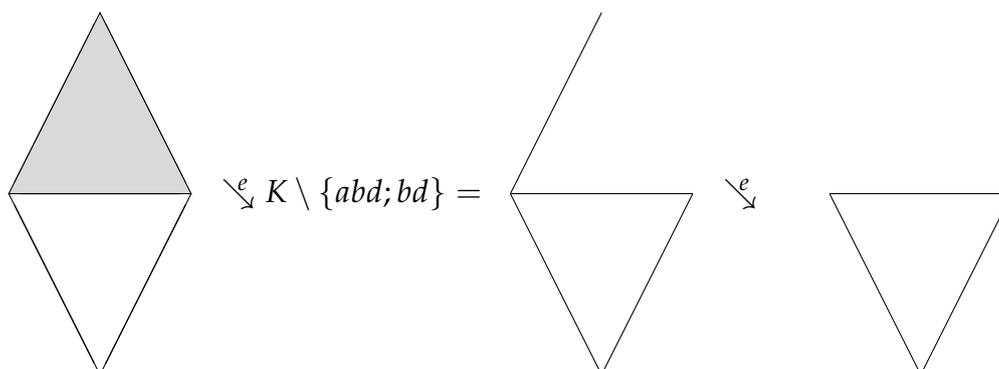
Definición 1.2.24. Sea K un complejo simplicial finito, $L \subseteq K$ un subcomplejo, decimos que existe un colapso elemental de K a L si existen exactamente 2 sím-plices $\sigma, \tau \in K$ que no son símplexes de L , y con τ el único símplex de K que tiene a σ como cara propia. En ese caso decimos además que σ es una cara libre de τ . Notamos $K \searrow^e L$ y $\sigma \leq \tau$.

Decimos que K colapsa a L (o bien, que L se expande a K) si existen complejos simpliciales K_1, \dots, K_n , con $K = K_1, L = K_n$, tales que $K_i \searrow^e K_{i+1}$ para todo i . Notamos $K \searrow L$ (ó $L \nearrow K$). Decimos que K y L tienen el mismo tipo homotópico simple, o que son simplemente equivalentes, si existe una secuencia $K = K_1, \dots, K_n = L$ tal que $K_i \searrow K_{i+1}$, o $K_i \nearrow K_{i+1} \forall i$. Notamos $K \simeq L$.

Ejemplo 1.2.25. Consideremos el complejo simplicial



K colapsa al borde de un 2-símples, en efecto



Una aplicación del Gluing Theorem (ver [29]) afirma que si $K \searrow^e L$, entonces la inclusión $i : L \rightarrow K$ es una equivalencia homotópica. Luego, dos complejos simpliciales simplemente equivalentes son homotópicamente equivalentes.

Recordemos que un complejo simplicial K se dice colapsable si K colapsa a uno de sus vértices.

Notar que el cono de un complejo simplicial K es colapsable, en efecto, si $a \notin K$ es un vértice, $\sigma \in K$ es un simplex maximal, entonces $aK \searrow^e aK \setminus \{\sigma, a\sigma\}$. Luego $aK \searrow a(K \setminus \sigma)$, que es colapsable por inducción.

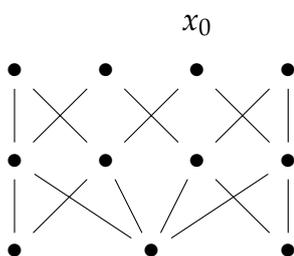
Repasemos definiciones análogas para espacios finitos. Primero recordemos el concepto de weak point, que fue introducido en [5] y que generaliza a los beat points.

Definición 1.2.26. Dado X espacio topológico finito T_0 , un punto $x_0 \in X$ es un down weak point si \hat{U}_{x_0} es contráctil. x_0 se dice up beat point si \hat{F}_{x_0} es contráctil. Finalmente, diremos que x_0 es un weak point si es un down weak point o un up weak point.

Observación 1.2.27. Por la Proposición 1.2.22, x_0 es un weak point si y solo si $lk(X) = \hat{U}_{x_0} * \hat{F}_{x_0}$ es contráctil.

Notar que Si x_0 es un weak point, entonces es un beat point, ya que todo espacio con máximo o con mínimo es contráctil. No todo beat point es un weak point. El máximo del cono de un espacio contráctil con al menos 2 elementos maximales es un weak point que no es un beat point. El siguiente ejemplo, introducido en [5], nos da un espacio sin beat points que posee weak points. Al remover un weak point de este espacio obtenemos un espacio contráctil.

Ejemplo 1.2.28. Consideremos



x_0 es down weak point, pero el espacio no tiene beat points y al remover x_0 queda contráctil, como rápidamente puede verificarse.

Recordemos que remover un beat point no cambia el tipo homotópico de un espacio finito. En el contexto más general de weak points el tipo homotópico sí puede cambiar, como sucedió en el ejemplo de arriba. Sin embargo, utilizando el Teorema de McCord (Teorema 1.2.8), se deduce que la inclusión $i : X \setminus \{x_0\} \rightarrow X$ es una equivalencia débil cuando $x_0 \in X$ es un weak point.

Decimos que X colapsa a Y (o que Y se expande a X) si podemos obtener a Y a partir de X removiendo weak points, es decir, si existe una sucesión de espacios finitos $X = X_1, \dots, X_n = Y$ tales que $X_{j+1} = X_j \setminus \{a_j\} \forall j$, donde $a_j \in X_j$ es un weak point. Notamos $X \searrow Y$ (o $Y \nearrow X$).

Decimos que X e Y son simplemente equivalentes si están en la misma clase de equivalencia, generada por $A \sim B$ si $A \searrow B$ ó $A \nearrow B$. Notamos $X \frown Y$.

Como un weak point es un beat point, se tiene que si dos espacios finitos son homotópicamente equivalentes, entonces son simplemente equivalentes.

Hay una noción aún más general que la de weak point, que también fue introducida por Barmak y Minian (ver [6]), que es la noción de γ -point. Recordemos que si $x_0 \in X$ es un weak point, entonces $i : X \setminus \{x_0\} \rightarrow X$ es una equivalencia débil. La vuelta de esta implicación no es cierta en general.

Si $x_0 \in X$ es tal que $lk(x_0) = \hat{U}_{x_0} * \hat{F}_{x_0}$ es homotópicamente trivial, entonces decimos que x_0 es un γ -point.

Notar entonces que un beat point es un weak point y un weak point es un γ -point, pero no vale ninguna de las vueltas. De hecho se tiene que si $x_0 \in X$ es un elemento que no es maximal ni minimal, entonces x_0 es un γ -point si y solo la inclusión $i : X \setminus \{x_0\} \rightarrow X$ es una equivalencia débil. El siguiente resultado, demostrado en [6], nos dice que remover un γ -point no cambia el tipo

homotópico simple del espacio, en otras palabras, todo método de reducción de un punto que preserve el tipo homotópico débil preservará el tipo homotópico simple.

Proposición 1.2.29. *Si $x_0 \in X$ es un γ -point, entonces $X \frown_{\downarrow} X \setminus \{x_0\}$.*

Vamos a repasar la relación que hay entre el concepto de equivalencia simple en espacios finitos T_0 y en sus complejos simpliciales asociados, y la relación que hay entre la noción de equivalencia simple de complejos simpliciales y sus respectivos posets de caras.

Los siguientes lemas relacionados con la teoría de homotopía simple son importantes para clasificar los diferentes tipos de homotopía simple que hay en espacios finitos y en complejos simpliciales. Los enunciamos porque serán utilizados más adelante. Si K es un complejo simplicial y $v \in K$ es un vértice, entonces con $K \setminus v$ notamos al subcomplejo que se obtiene de tomar los símlices de K a los que v no pertenece.

Lema 1.2.30. *Si $K = aL$ es un cono simplicial, entonces $\mathcal{X}(K)$ es contráctil.*

Lema 1.2.31. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua de espacios finitos T_0 tales que $f^{-1}(U_y)$ es homotópicamente trivial para todo $y \in Y$, entonces existe una equivalencia simple $X \frown_{\downarrow} Y$.*

Lema 1.2.32. *Si K es un complejo simplicial, $v \in K$ es un vértice, entonces $K \searrow K \setminus v$ si y solo si $lk(v)$ es colapsable.*

Una aplicación de los Lemas 1.2.30 y 1.2.31, es la siguiente

Proposición 1.2.33. *Sea X un espacio finito T_0 , entonces $X \frown_{\downarrow} X'$.*

Demostración: Recordemos que X' es el poset cuyos elementos son las cadenas no vacías de X y el orden es el dado por la inclusión.

Sea $h : X' \rightarrow X$ la función definida por $h(C) = \max(C)$, entonces $\forall x \in X$, $h^{-1}(U_x) = \{C \subseteq X / \max(C) \leq x\} = (U_x)'$. $(U_x)'$ es contráctil pues $(U_x)' = \mathcal{X}(\mathcal{K}(U_x)) = \mathcal{X}(\mathcal{K}(\hat{U}_x) * \{x\})$, que es contráctil porque $\mathcal{K}(\hat{U}_x) * \{x\}$ es un cono y por el Lema 1.2.30. Aplicando el Lema 1.2.31, se sigue entonces que $X \frown_{\downarrow} X'$. \square

La idea de esta demostración fue extraída de [3].

El Teorema de clasificación ([3], página 53) dice lo siguiente

Teorema 1.2.34.

- (a) Sean X, Y espacios finitos T_0 , entonces $X \frown_{\downarrow} Y$ si y solo si $\mathcal{K}(X) \frown_{\downarrow} \mathcal{K}(Y)$.
Además, si $X \searrow Y$, entonces $\mathcal{K}(X) \searrow \mathcal{K}(Y)$.

(b) Sean K, L complejos simpliciales finitos, entonces $K \frown L$ si y solo si $\mathcal{X}(K) \frown \mathcal{X}(L)$, además, si $K \searrow L$, entonces $\mathcal{X}(K) \searrow \mathcal{X}(L)$.

Corolario 1.2.35.

(a) Si $X \searrow Y$, entonces $X' \searrow Y'$.

(b) Si $K \searrow L$, entonces $K' \searrow L'$.

Corolario 1.2.36. Sea K complejo simplicial finito, entonces $K \frown K'$

Demostración: Por el teorema anterior alcanza con ver que $\mathcal{X}(K) \frown \mathcal{X}(K') = (\mathcal{X}(K))'$. Pero eso es válido por lo que dice la Proposición 1.2.33. □

Resumiendo tenemos

$$\begin{array}{ccc}
 X \simeq Y \implies X \frown Y \implies X \stackrel{we}{\approx} Y & & \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \mathcal{K}(X) \frown \mathcal{K}(Y) \implies |\mathcal{K}(X)| \simeq |\mathcal{K}(Y)| & & \\
 \mathcal{X}(K) \simeq \mathcal{X}(L) \implies \mathcal{X}(K) \frown \mathcal{X}(L) \implies \mathcal{X}(K) \stackrel{we}{\approx} \mathcal{X}(L) & & \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 K \frown L \implies |K| \simeq |L| & &
 \end{array}$$

La primer equivalencia de cada esquema se debe al teorema anterior, y la otra se debe al Teorema de McCord y al Teorema de Whitehead.

1.2.4 Teoría de homotopía fuerte de complejos simpliciales

El tipo homotópico en espacios finitos es una noción muy rígida que no está vinculada ni con el tipo homotópico simple ni con el tipo homotópico usual de los complejos simpliciales, sin embargo, existe también una relación entre el tipo homotópico de los espacios finitos y una noción de tipo homotópico de complejos simpliciales. Esta noción fue introducida y estudiada por Barmak y Minian en [7] y es la que se conoce como tipo homotópico fuerte. Las demostraciones omitidas de los resultados que enunciaremos pertenecen al paper citado.

Sea K complejo simplicial finito, $v \in K$. Decimos que hay un colapso elemental fuerte de K a $K \setminus v$ si $lk(v)$ es un cono simplicial $v'L$. En este caso decimos que v está dominado por v' . Notamos $K \searrow^e K \setminus v$.

Si L subcomplejo de K , decimos que existe un colapso fuerte de K a L (o que hay una expansión fuerte de L a K) si existe una secuencia de colapsos fuertes elementales de K a L . Notamos $K \searrow L$, o equivalentemente $L \nearrow K$.

Dos complejos simpliciales finitos K y J tienen el mismo tipo homotópico fuerte si K y J están en la misma clase de equivalencia de la relación de complejos simpliciales finitos generada por $A \sim B$ si $A \searrow B$ ó $B \searrow A$.

Notar que un vértice v está dominado por otro vértice v' si y solo si todo simplex maximal que contiene a v también contiene a v' .

Observación 1.2.37. Un colapso fuerte es un colapso.

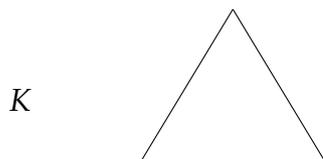
Definición 1.2.38. Decimos que un morfismo simplicial $\phi : K \rightarrow L$ es una equivalencia fuerte si existe $\psi : L \rightarrow K$ tal que $\psi\phi \simeq 1_K$, $\phi\psi \simeq 1_L$, donde con \simeq notamos que dos morfismos simpliciales están en la misma clase de contigüidad. Si existe $\phi : K \rightarrow L$ equivalencia fuerte, notamos $K \simeq L$.

Decimos que un complejo simplicial finito es minimal si no tiene vértices dominados. El núcleo (o core) de un complejo simplicial finito K es un subcomplejo minimal $K_0 \subseteq K$ tal que $K \searrow K_0$. Un complejo simplicial es fuertemente colapsable si tiene como core a un vértice.

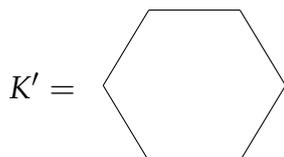
Proposición 1.2.39. *Toda equivalencia fuerte entre complejos simpliciales es una equivalencia simple*

Así como en el contexto de espacios finitos existe un único core salvo homeomorfismo, se tiene que todo complejo simplicial tiene un núcleo y es único salvo isomorfismo. Dos complejos simpliciales son fuertemente equivalentes si y solo si sus cores son isomorfos.

Ejemplo 1.2.40. Consideramos el complejo simplicial



La subdivisión baricéntrica de K es



Como ambos complejos simpliciales son minimales y no isomorfos, entonces no son fuertemente equivalentes. Aún así, son simplemente equivalentes por el Corolario 1.2.36.

Los siguientes resultados muestran la relación que existe entre el tipo homotópico fuerte de los complejos simpliciales y el tipo homotópico de los espacios finitos T_0 .

Teorema 1.2.41.

- (a) Sean X, Y espacios finitos T_0 , entonces si X e Y son homotópicamente equivalentes, se tiene que $K(X)$ y $K(Y)$ tienen el mismo tipo homotópico fuerte. Además, si $X \searrow Y$, entonces $\mathcal{K}(X) \searrow \mathcal{K}(Y)$.
- (b) Sean K, L complejos simpliciales finitos, si K y L tienen el mismo tipo homotópico fuerte, entonces $\mathcal{X}(K)$ y $\mathcal{X}(L)$ son homotópicamente equivalentes. Además, si $K \searrow L$, entonces $\mathcal{X}(K) \searrow \mathcal{X}(L)$.

Teorema 1.2.42. Si K es un complejo simplicial, entonces K es fuertemente colapsable si y solo si K' lo es.

De estos dos teoremas se sigue (ver [7])

Corolario 1.2.43. Si X es un espacio finito T_0 , entonces X es contráctil si y solo si X' lo es.

Demostración: (\Rightarrow) si X es contráctil, entonces por el ítem (a) del Teorema 1.2.41, $\mathcal{K}(X)$ es fuertemente colapsable, y por el ítem (b), $X' = \mathcal{X}(K(X))$ es contráctil.

(\Leftarrow) Sea $Y = \text{core}(X) \subseteq X$. Como $X \searrow Y$, entonces $X' \searrow Y'$. Luego, como X' es contráctil, entonces Y' también lo es, por lo que $\mathcal{K}(Y') = \mathcal{K}(Y)'$ es fuertemente colapsable. Por el teorema previo tenemos entonces que $\mathcal{K}(Y)$ es fuertemente colapsable, pero como Y es minimal, entonces se puede ver que $\mathcal{K}(Y)$ también lo es (en efecto, si x es dominado por x' , entonces todo punto comparable con x también es comparable con x'). Deducimos entonces que $\mathcal{K}(Y) = *$, por lo que $Y = *$, y por ende, X es contráctil. \square

Corolario 1.2.44.

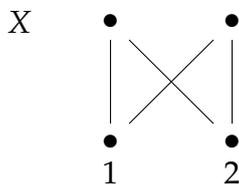
- (a) Un espacio finito T_0 X es contráctil si y solo si $\mathcal{K}(X)$ es fuertemente colapsable.
- (b) Un complejo simplicial finito K es fuertemente colapsable si y solo si $\mathcal{X}(K)$ es contráctil.

1.3 Lattices reducidos

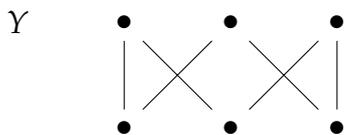
Los lattices reducidos son espacios finitos que satisfacen el axioma del supremo, es decir, que todo conjunto acotado superiormente tiene supremo. Una de las ventajas de trabajar con lattices reducidos es que, conociendo como se comportan los elementos minimales de un lattice reducido ya tendremos bastante información acerca de éste. Concretamente, el tipo homotópico débil de un lattice reducido se puede determinar conociendo los subconjuntos del conjunto de elementos minimales que están acotados superiormente. Basándose en esta idea, Barmak introdujo el complejo simplicial $\mathcal{L}(X)$ asociado a un lattice reducido X (ver [3], capítulo 9), el cual tiene el mismo tipo homotópico débil que X y tiene menos símplicies que el complejo simplicial $\mathcal{K}(X)$ introducido por McCord. Un complejo simplicial similar fue introducido en [20], el complejo $T(X)$, del que comenzaremos a hablar en el próximo capítulo. Entre algunas referencias relacionadas a este tema podemos destacar un paper de Björner [11], el paper de Dong [16] y el trabajo de Minian y Rodriguez [28].

Definición 1.3.1. Sea X espacio finito T_0 , notamos \leq al orden de X . Decimos que X es un lattice reducido si todo conjunto acotado superiormente tiene supremo.

Ejemplo 1.3.2. El espacio



No es un lattice reducido. El conjunto $\{1;2\}$ está acotado superiormente por cualquiera de los otros dos puntos, pero no existe un supremo. Por otro lado



sí es un lattice reducido.

El siguiente resultado elemental nos da un método para verificar más fácilmente si un espacio topológico finito T_0 es un lattice reducido o no

Proposición 1.3.3. Sea X espacio finito. Son equivalentes:

- (1) X es un lattice reducido.
- (2) Dado $\{x,y\} \subseteq X$ acotado superiormente, existe $c = \sup(\{x,y\})$.
- (3) Dado $\{x,y\} \subseteq X$ acotado inferiormente, existe $c = \inf(\{x,y\})$.
- (4) X^{op} es un lattice reducido.

Demostración: $1 \Rightarrow 2$ y $4 \Rightarrow 3$ salen por definición.

$2 \Rightarrow 3$: sea $\{x, y\} \subseteq X$ acotado inferiormente, supongamos que no existe ínfimo de $\{x, y\}$, entonces, existen $\{a, b\} \subseteq X$ cotas inferiores distintas maximales de $\{x, y\}$. Sin embargo, tanto x como y son cotas superiores inmediatas de $\{a, b\}$, por lo que no existe $\sup(\{a, b\})$.

$3 \Rightarrow 1$: Sea $A \subseteq X$ acotado superiormente. Supongamos que A no tiene supremo. Esto garantiza la existencia de al menos 2 cotas superiores minimales distintas $\{a, b\}$. De manera similar a la implicación anterior, tenemos que, como $\{a, b\} \subseteq X$ está acotado inferiormente (por cualquier elemento de A), entonces por la hipótesis existe $c = \inf(\{a, b\})$. Pero entonces $c \geq x \forall x \in A$ (ya que x es cota inferior, y a su vez $c \leq a$ y $c \leq b$). Esto último contradice el hecho de que a y b son cotas superiores minimales distintas.

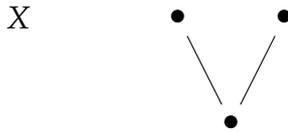
$2 \Rightarrow 4$: Es análogo a $1 \Rightarrow 3$.

□

Los siguientes conceptos fueron introducidos en [3]

Definición 1.3.4. Sea X lattice reducido, notamos $s(X)$ al subespacio de X que se obtiene de tomar los puntos que son supremo de un subconjunto del conjunto de elementos minimales de X , al que notamos $m(X)$. De forma similar, notamos $i(X)$ al subespacio de X que se obtiene tomando los puntos que son ínfimos de elementos maximales de X .

Ejemplo 1.3.5. Consideramos X , el poset dado por la suspensión de un punto



En este caso $i(X)$ y $s(X)$ vienen dados por los siguientes conjuntos



Remove un beat point de un poset no cambia la propiedad de que éste sea un lattice reducido, como lo muestra la siguiente proposición (Ver [3], página 122).

Proposición 1.3.6. Sea X lattice reducido y $x_0 \in X$ un beat point, entonces $X \setminus \{x_0\}$ es un lattice reducido.

Demostración: Supongamos primero que x_0 es un up beat point de X . En particular, x_0 no es maximal. Sea $y_0 \in X$ tal que $y_0 \geq x_0$. Sea $A \subseteq X \setminus \{x_0\}$ acotado

superiormente, entonces existe $z \in X$ supremo de A . Si $z \neq x_0$, entonces z sirve como supremo en $X \setminus \{x_0\}$. Si $x_0 = z$, entonces y_0 sirve como supremo en $X \setminus \{x_0\}$.

Supongamos ahora que x_0 es un down beat point. Entonces x_0 es up beat point de X^{op} , que es un lattice reducido por la Proposición 1.3.3. Luego $(X \setminus \{x_0\})^{op}$ es un lattice reducido, por lo que $X \setminus \{x_0\}$ lo es. \square

Corolario 1.3.7. *Si X es un lattice reducido, entonces $core(X)$ lo es.*

Es fácil encontrar espacios finitos contráctiles que no son lattices reducidos, por ejemplo, el cono de un espacio finito X es un lattice reducido si y solo si X lo es. De esto deducimos que obtener un lattice reducido al remover un beat point no nos asegura nada del espacio original.

El siguiente resultado, probado por Barmak, revela la importancia de las aplicaciones i y s .

Proposición 1.3.8. *Sea X lattice reducido, entonces tenemos las siguientes propiedades:*

- (1) X colapsa a $s(X)$ y a $i(X)$.
- (2) X no tiene down beat points si y solo si $s(X) = X$.
- (3) X no tiene up beat points si y solo si $i(X) = X$.
- (4) X no tiene beat points si y solo si $i(X) = s(X) = X$.

Demostración: Empecemos con (1). Vamos a probar solamente el caso en que X colapsa a $s(X)$ porque el otro es análogo. Para todo $x \in X$, notamos $m(x)$ a $U_x \cap m(X)$, el conjunto de puntos minimales menores que x . Sea $f : X \rightarrow s(X)$ dada por $f(x) = \sup(m(x))$, y sea $i : s(X) \rightarrow X$ la inclusión canónica. Si $x, y \in X$ son tales que $x \leq y$ entonces $m(x) \subseteq m(y)$, por lo que $f(x) \leq f(y)$, luego f preserva el orden. Como x es cota superior de $m(x)$, entonces $f(x) \leq x \forall x \in X$, en particular $if \leq 1_X$. Por otro lado, si $y \in s(X)$, $y = \sup(r)$, con $r \subseteq m(X)$, tenemos que $r \subseteq m(y)$, ya que y es mayor que los elementos de r , por lo tanto $f(y) = y$. Con esto tenemos que $s(X)$ es un RDF de X .

Veamos ahora (2). Supongamos que $x_0 \in X$ es un down beat point, en particular x_0 no es minimal. Sea y_0 tal que $y_0 \prec x_0$. Dado $L \subseteq m(X)$ tal que x_0 es cota superior de L , entonces y_0 también es cota superior de L y por lo tanto x_0 no puede ser el supremo. Por ende $s(X) \neq X$. Supongamos ahora que X no tiene down beat points, pero que $s(X) \neq X$, sea x un elemento minimal de $X \setminus s(X)$. Dado que $f(x) \leq x$, donde f es la función del ítem anterior, entonces necesariamente vale la desigualdad estricta, ya que $f(x) \in s(X)$. Dado y tal que $y < x$, vamos a probar que $y \leq f(x)$, de donde obtenemos que x es un

down beat point cubierto por $f(x)$, lo que es absurdo. Como $y < x$, entonces $y \in s(X)$ por la minimalidad de x . Como f preserva el orden e $y \in s(X)$, entonces $y = f(y) \leq f(x)$. Con eso probamos (2).

(3) Se prueba de forma análoga a (2), y (4) es consecuencia inmediata de estos 2 items. □

De este resultado tenemos en particular que las aplicaciones s e i le asignan a los lattices reducidos otros lattices reducidos y al aplicarlas múltiples veces de forma alternada obtenemos el core del lattice reducido. La ventaja de estas aplicaciones respecto a remover un conjunto aleatorio de beat points radica en que $s(X)$ e $i(X)$ pueden expresarse combinatorialmente en términos de los elementos minimales y maximales de X respectivamente, no necesitamos especificar que beat point estamos removiendo al usar estas aplicaciones.

1.3.1 El Teorema de Osaki y aplicaciones a lattices reducidos

En esta sección mostramos una manera efectiva de reducir lattices reducidos que será útil para establecer que tipo homotópico simple tienen. La idea es utilizar el Teorema de Osaki ([31]), que afirma que bajo ciertas condiciones un cociente es una equivalencia débil. Estas condiciones siempre se satisfacen en lattices reducidos, lo que nos permitirá obtener un modelo más pequeño del espacio. Esta idea es mencionada en [3] (página 124), explicando que los lattices reducidos no son un modelo minimal finito en la gran mayoría de los casos. El Teorema de Osaki, junto con los colímites homotópicos que repasaremos en el capítulo 4 serán los principales mecanismos que usaremos para estudiar el tipo homotópico simple de los lattices reducidos.

Recordemos una aplicación del Teorema de McCord 1.2.8 : para saber si una función continua $f : X \rightarrow Y$ entre espacios finitos T_0 es una equivalencia débil, alcanza con ver que $f^{-1}(U_y)$ es homotópicamente trivial $\forall y \in Y$.

Teorema 1.3.9. (Osaki, [31])

-*Versión para abiertos:* Sea X espacio finito T_0 y sea $U \subseteq X$ un conjunto abierto tal que $U = U_y$ para algún $y \in X$ y tal que $\forall x \in X$ se tiene que $U_x \cap U$ es vacío u homotópicamente trivial, entonces el cociente $q : X \rightarrow X/U$ es una equivalencia débil.

- *Versión para cerrados:* Sea X un espacio finito T_0 y sea $F \subseteq X$ un cerrado con $F = F_y$ para algún $y \in Y$ y tal que $\forall x \in X$ se tiene que $F_x \cap F$ es vacío u homotópicamente trivial, entonces el cociente $q : X \rightarrow X/F$ es una equivalencia débil.

Demostración: Mostraremos solamente el caso para abiertos, ya que el otro caso sale tomando X^{op} en vez de X . Como sabemos que q es continua, para probar que q es equivalencia débil alcanza con ver que $q^{-1}(U_x)$ es homotópicamente trivial $\forall x \in X$.

Supongamos primero que $U_x \cap U = \emptyset$. En ese caso, tenemos que $q^{-1}(U_x)$ es U_x , y por lo tanto es homotópicamente trivial.

Por otro lado, si $U_x \cap U \neq \emptyset$, tenemos que $\forall u \in U$, $q(u) = q(x_0)$, donde x_0 es un elemento de $U_x \cap U$. Luego $q^{-1}(U_x) = U \cup U_x$, que es homotópicamente trivial por ser unión de espacios contráctiles que se intersecan en un espacio homotópicamente trivial, lo que nos da como resultado un espacio homotópicamente trivial como se puede ver aplicando recursivamente el Teorema de Hurewicz (ver [19], página 366).

Con estos dos casos cubiertos, obtenemos que q es una equivalencia débil \square

Observación 1.3.10. En la demostración hemos utilizado el Teorema de McCord y que $U_x \cap U$ es homotópicamente trivial o vacío $\forall x \in X$. Sin embargo, a partir del Lema 1.2.31, deducimos que q es una equivalencia simple. Esta observación fue hecha originalmente en [3]. Fernández en [17] probó de hecho que q es una $(n + 1)$ -deformación, donde $n = h(X)$, la altura de X .

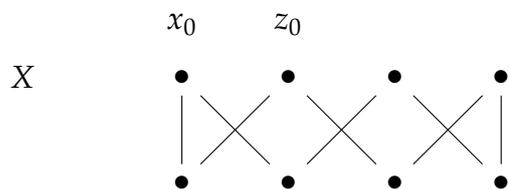
Este teorema nos da una herramienta para reducir espacios finitos T_0 preservando el tipo homotópico simple. El problema de este método de reducción es que suele ser difícil de verificar sus hipótesis en comparación a los métodos de reducción de un punto. Sin embargo, en el caso particular de lattices reducidos siempre tendremos disponible esta herramienta para usar al menos una vez, como lo indica la siguiente proposición.

Proposición 1.3.11. *Sea X un lattice reducido, $x_0 \in X$, entonces los cocientes $q : X \rightarrow X/U_{x_0}$, y $q' : X \rightarrow X/F_{x_0}$ son equivalencias simples.*

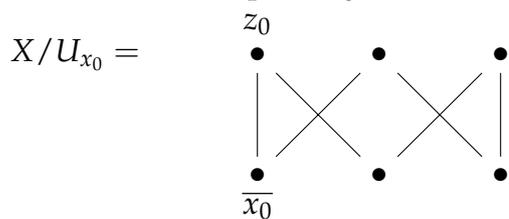
Demostración: Vamos a demostrar solamente que q es una equivalencia simple, ya que q' sale de forma análoga aplicando la versión para cerrados del Teorema de Osaki. Para aplicar la versión de abiertos del Teorema de Osaki necesitamos ver que $U_x \cap U_{x_0}$ es vacío u homotópicamente trivial $\forall x \in X$. Supongamos que existe $x_1 \in U_x \cap U_{x_0}$, entonces se tiene que x_1 es cota inferior de $\{x_0, x\}$. Como X es un lattice reducido, existe $y = \inf(\{x_0, x\})$. Entonces $U_{x_0} \cap U_x = U_y$, que es contráctil. Con esto verificamos las hipótesis del Teorema de Osaki y, por lo tanto, q es una equivalencia simple. \square

A partir a esta proposición podemos reducir a los lattices reducidos para analizar su tipo homotópico débil y su tipo homotópico simple. Aplicar Osaki en estos espacios tiene sin embargo una desventaja: el cociente de un lattice reducido sobre un abierto U_{x_0} o un cerrado F_{x_0} no siempre da otro lattice reducido.

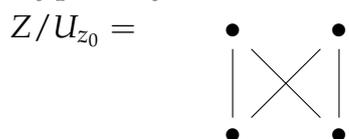
Ejemplo 1.3.12. Tomamos



Cocientando a X por U_{x_0} obtenemos



Que sabemos que es un lattice reducido, sin embargo, al cocientar a $Z = X/U_{x_0}$ por U_{z_0} , obtenemos



Que no es un lattice reducido.

Capítulo 2

Dualidad de Alexander

La dualidad de Alexander afirma que la topología de un subespacio (compacto y localmente contráctil) de una esfera determina la topología del complemento en esa esfera. La versión simplicial de este teorema fue demostrada de manera independiente por Barr en [8], por Bayer en [9] y [10], y por Björner y Tancer en [12]. En esta versión se representa el complemento sobre una esfera de la realización geométrica de un complejo simplicial K como un complejo simplicial K^* , conocido como el dual de Alexander de K , que es un subcomplejo del borde del símplex que usamos para triangular a la esfera correspondiente. Minian y Rodríguez estudiaron la dualidad de Alexander en el marco de lattices reducidos. En este contexto dieron una noción de dual de Alexander que se puede calcular observando como interactúan los elementos minimales del espacio.

En este capítulo repasaremos las distintas versiones de la dualidad de Alexander para complejos simpliciales y lattices reducidos, junto con distintas nociones de dual. En la primer sección recordaremos la dualidad de Alexander clásica y su relación con la versión simplicial. En la segunda y tercer sección, repasaremos como se adapta la dualidad al contexto de lattices reducidos y mostraremos nociones alternativas del dual de Alexander en ese contexto, siguiendo [28] y [32]. En la cuarta sección daremos algunos ejemplos de duales de lattices reducidos, y para eso fijaremos notación que usaremos durante el resto de la tesis para facilitar el cálculo de estos duales.

El contenido del capítulo está influenciado en el trabajo de Minian y Rodríguez [28], junto con [12].

2.1 La dualidad de Alexander en complejos simpliciales

La dualidad de Alexander clásica compara la homología de un espacio topológico, que satisface buenas propiedades, con la cohomología del complemento de dicho espacio visto dentro de una esfera. En el contexto de complejos simpliciales podemos utilizar el borde de un n -símplex para triangular a la esfera. A un poliedro contenido en una esfera de dimensión n lo interpretamos en este contexto como un subcomplejo propio del borde de un $(n + 1)$ -símplex. Una de las ventajas de este enfoque radica en la simplicidad para calcular grupos de homología y de cohomología en complejos simpliciales. Estudiar la dualidad de Alexander en este marco también nos permite analizar propiedades relacionadas con colapsos y expansiones simpliciales, observando como cambia el dual de Alexander al hacer dichas modificaciones.

Comencemos recordando el enunciado de la dualidad de Alexander clásica, cuya demostración puede consultarse en [19] (ver página 254) y en [29] (consultar páginas 424 y 432).

Teorema 2.1.1. *Sea $K \subseteq \mathbb{S}^n$ un subespacio propio, no vacío, compacto y localmente contráctil, entonces $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus K) \simeq \tilde{H}^{n-i-1}(K) \forall i$, donde la homología y cohomología se toman con coeficientes en \mathbb{Z} .*

El complemento de un poliedro triangulado por un complejo simplicial K sobre una esfera triangulada por el borde de un símplex σ , con $K \leq \partial\sigma$, no es necesariamente homeomorfo a la realización geométrica de un subcomplejo de $\partial\sigma$. De todas formas, este complemento se retrae por deformación fuerte a la realización geométrica de un subcomplejo de $\partial\sigma$ conocido como el dual de Alexander de K . Este dual fue estudiado previamente en [10], [28], [12] y en [8].

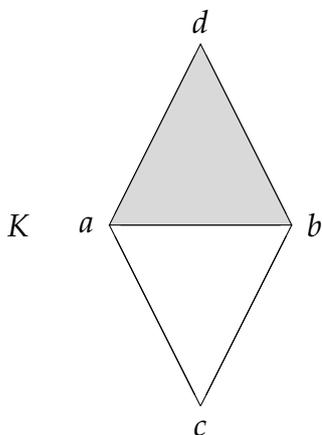
Dado un complejo simplicial K , llamamos K^0 a su conjunto de vértices. Consideramos un conjunto finito $V \supseteq K^0$ que llamaremos ground set de K . A K lo veremos como un subcomplejo del borde del símplex formado por los elementos de V .

El dual de Alexander de K respecto a V , que lo notamos K_V^* , es el complejo simplicial cuyos símplices son los subconjuntos no vacíos de V cuyo complemento no está en K . Es decir

$$K_V^* = \{\sigma \subseteq V, \sigma \neq \emptyset : V \setminus \sigma \notin K\}$$

Notar que K_V^* es efectivamente un complejo simplicial, ya que si $\sigma \in K_V^*$ y $\tau \subseteq \sigma$, entonces $V \setminus \tau \supseteq V \setminus \sigma$, y por lo tanto $V \setminus \tau$ no pertenece a K , ya que $V \setminus \sigma \notin K$. Observar que si tomamos el dual de K dos veces sobre un mismo conjunto de vértices V , obtenemos de nuevo a K .

Ejemplo 2.1.2. consideramos el siguiente complejo simplicial.



Sea $V = K^0 = \{a, b, c, d\}$. Los símplices de K vienen dados por los subconjuntos de los conjuntos $\{a, b, d\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$. Los símplices de K_V^* son los subconjuntos de V tales que su complemento no es un símplex de K . Éstos son los subconjuntos de $\{a, b\}$, $\{d\}$. Entonces, el dual de Alexander de K respecto a V es



Donde con un círculo \circ representamos que ese vértice no pertenece al complejo simplicial, pero sí a la esfera que lo contiene.

Siguiendo la demostración de [32], vamos a mostrar que la realización geométrica del dual de Alexander de K sobre un conjunto de vértices V tiene el mismo tipo homotópico que $|\partial\sigma| \setminus |K|$, donde σ es el símplex cuyos vértices son los elementos de V .

Definición 2.1.3. Sea X un espacio topológico, consideramos un cubrimiento \mathcal{U} de X . El nervio de \mathcal{U} es el complejo simplicial $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ cuyos vértices son los elementos de \mathcal{U} y sus símplices son los subconjuntos finitos de \mathcal{U} cuya intersección es no vacía.

Si K es un complejo simplicial, el nervio de K , $\mathcal{N}(K)$, es el nervio del cubrimiento de $|K|$ dado por la realización geométrica de los símplices maximales de K . En otras palabras, $\mathcal{N}(K)$ es el complejo simplicial cuyos vértices son los símplices maximales de K y los símplices son de la forma $\{\tau_0, \dots, \tau_n\}$, con τ_i un símplex maximal para cada i , de modo que $\bigcap_{i=0}^n \tau_i \neq \emptyset$.

Vamos a necesitar los siguientes dos teoremas, que se pueden encontrar en [25] y en [3] respectivamente.

Teorema 2.1.4. *Sea X un espacio topológico, dado un cubrimiento por abiertos \mathcal{U} tal que*

- 1 Para todo $x \in X$ existen finitos $U \in \mathcal{U}$ tales que $x \in U$

2 Toda intersección finita de elementos de \mathcal{U} es vacía u homotópicamente trivial.

Entonces la realización geométrica del complejo simplicial $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ tiene el mismo tipo homotópico débil que X .

Teorema 2.1.5. Sea K un complejo simplicial de dimensión finita, entonces $|K| \simeq |\mathcal{N}(K)|$.

A un cubrimiento por abiertos que satisface las condiciones del Teorema 2.1.4 lo llamaremos cubrimiento bueno. Vamos a notar K^* al dual de Alexander cuando el conjunto de vértices se sobreentiende, y si no especificamos ningún conjunto de vértices tomamos $V = K^\circ$.

La idea de la demostración de este teorema es la misma utilizada en [32] (página 22).

Teorema 2.1.6. Sea σ un n -símplex y K un subcomplejo de $X = \partial\sigma$, entonces $|K^*| \simeq |X| \setminus |K|$, donde el dual se toma respecto de los vértices de σ .

Demostración: Como $|K|$ es un subespacio cerrado de X , entonces $|X| \setminus |K|$ es un poliedro por ser un subespacio abierto de un poliedro (ver [33]). Por el Teorema de Whitehead es suficiente ver que $|X| \setminus |K|$ tiene el mismo tipo homotópico débil que $|K^*|$. Teniendo en cuenta lo que afirman los Teoremas 2.1.4 y 2.1.5, alcanza con encontrar un cubrimiento bueno de $|X| \setminus |K|$ cuyo nervio defina el mismo complejo simplicial que el nervio de K^* .

Consideramos para cada $\tau \in K^*$ el conjunto $U_\tau = \{x \in |X| : \text{sop}(x) \supseteq \tau^c\}$. Se verifica fácilmente que U_τ es un subespacio abierto y contráctil de $|X|$ para cada $\tau \in K^*$, además $U_\tau \cap U_\sigma = U_{\tau \cap \sigma}$ para dos símplexes τ, σ tales que $\tau \cap \sigma \neq \emptyset$. Como todo elemento de $|X| \setminus |K|$ está en la realización geométrica de un símplex que no pertenece a K , entonces su soporte tiene que contener a un símplex minimal con la propiedad de no estar en K . Teniendo en cuenta que U_τ es contráctil para cada τ , se sigue que el cubrimiento $\mathcal{U} = \{U_\tau : \tau \in K^* \text{ maximal}\}$ es un cubrimiento bueno de $|X| \setminus |K|$ que satisface que $\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \mathcal{N}(K^*)$, como queríamos. □

Como consecuencia del Teorema 2.1.6 y de la dualidad clásica se obtiene la siguiente dualidad en términos simpliciales

Teorema 2.1.7. (Dualidad de Alexander simplicial): Sea K un complejo simplicial que no es un símplex, y $V \supseteq K^\circ$ un conjunto de vértices, con $n = |V|$. Entonces $\forall 0 \leq i \leq n - 1$ se tiene que $\tilde{H}_i(K_V^*) \simeq \tilde{H}^{n-i-3}(K)$.

Una demostración alternativa (que no utiliza la dualidad clásica) se puede encontrar en [12].

2.2 La dualidad de Alexander en lattices reducidos

Utilizando las relaciones que guardan los espacios finitos con los complejos simpliciales, podemos dar una definición de dual de Alexander para posets. Recordemos que un poset finito X tiene el mismo tipo homotópico débil que su complejo simplicial asociado $\mathcal{K}(X)$, y a su vez, todo complejo simplicial K tiene el mismo tipo homotópico débil que su poset de caras respectivo $\mathcal{X}(K)$. Con esto en mente, tendría sentido definir el dual de X tomando $X_V^* = \mathcal{X}(\mathcal{K}(X)_V^*)$ donde $V \supseteq X$ es un conjunto de vértices

El problema que surge de esta definición es que el dual obtenido es demasiado grande ya que el complejo simplicial $\mathcal{K}(X)$ lo es. Vamos a utilizar una definición de dual de Alexander que no dependa tanto del complejo simplicial asociado $\mathcal{K}(X)$. Vamos a restringirnos a los lattices reducidos para poder utilizar un complejo simplicial más chico que $\mathcal{K}(X)$ pero con su mismo tipo homotópico.

El T -complex de un lattice reducido X es el complejo simplicial cuyos vértices son los elementos minimales de X y cuyos símlices vienen dados por los subconjuntos de $m(X)$ acotados superiormente. Este complejo simplicial fue introducido por Kozlov en [20] bajo el nombre de atom crosscut complex y guarda una estrecha relación con el \mathcal{L} -complex introducido en [3].

Observación 2.2.1. En la definición no necesitamos específicamente que X sea un lattice reducido, solo nos basta con que sea un espacio finito T_0 . Sin embargo, si nos restringimos a los lattices reducidos se tiene que X y $T(X)$ tienen el mismo tipo homotópico débil.

Concretamente, si definimos $\mu : \mathcal{X}(T(X)) \rightarrow X$, $\mu(\sigma) = \text{sup}(\sigma)$, y $\tau : X \rightarrow \mathcal{X}(T(X))$, $\tau(x) = m(x)$, donde recordemos que $m(x) = m(X) \cap U_x$. Como x es cota superior de $m(x)$, entonces $\mu\tau \leq 1_X$. Por otro lado, $\forall \sigma \in \mathcal{X}(T(X))$, $\tau(\mu(\sigma)) = m(\text{sup}(\sigma)) \supset \sigma$, luego ambas composiciones son homotópicas a las identidades, por lo que $X \simeq \mathcal{X}(T(X))$. Con esta idea se puede ver, de hecho, que $\mathcal{X}(T(X)) \xrightarrow{\simeq} s(X)$, que también es un colapso fuerte de X .

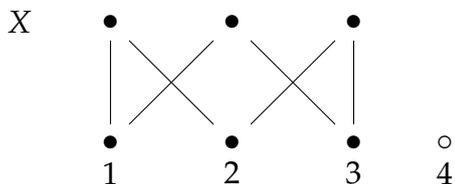
Luego X tiene el mismo tipo homotópico débil que $T(X)$. Por el Teorema de Whitehead deducimos entonces que los complejos simpliciales $T(X)$ y $\mathcal{K}(X)$ son homotópicamente equivalentes. Esto le da sentido a la definición de dual de Alexander que daremos abajo, que fue introducida originalmente en [32].

Definición 2.2.2. Sea X lattice reducido, $V \supseteq m(X)$ un conjunto de vértices, el dual de Alexander de X respecto a V se define como

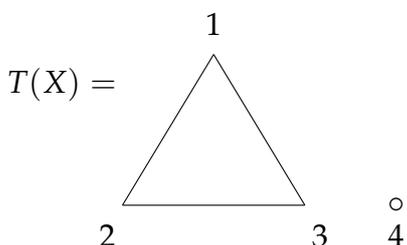
$$X_V^* = \mathcal{X}(T(X)_V^*)$$

El dual de Alexander de X es un lattice reducido por ser el poset de caras de un complejo simplicial, por lo tanto tiene sentido aplicar el dual reiteradas veces.

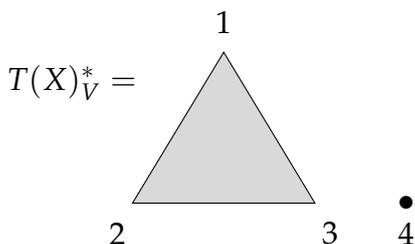
Ejemplo 2.2.3. Consideramos el siguiente espacio, donde el círculo describe un punto de V que no está en X .



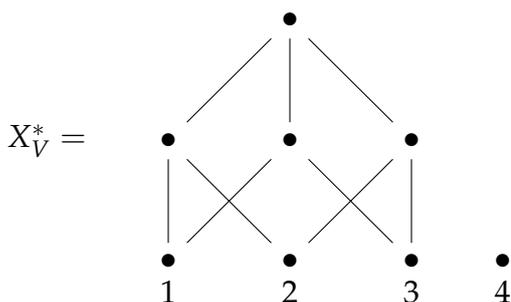
Notar que $T(X)$ tiene como símplexes maximales a $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, y a $\{2,3\}$, entonces



El dual de este complejo simplicial respecto a V viene dado por



Aplicando \mathcal{X} obtenemos



Observación 2.2.4. Notar que X_V^* es el poset de caras del complejo simplicial cuyos símplexes son los subconjuntos de V cuyo complemento no es un símplex de $T(X)$, es decir, es el conjunto de subconjuntos de V cuyo complemento no es un subconjunto de $m(X)$ acotado superiormente, con el orden dado por la inclusión.

Teniendo en cuenta que para todo complejo simplicial K , $T(\mathcal{X}(K)) = K$, y que el doble dual de K respecto a un conjunto fijo de vértices nos da K nuevamente, podemos concluir que

$$X_V^{**} = \mathcal{X}(T(\mathcal{X}(T(X)^*))^*) = \mathcal{X}(T(X)^{**}) = \mathcal{X}(T(X)).$$

En general no vale que $X_V^{**} = X$, de la cuenta anterior podemos deducir que esto sucede si y solo si $X = \mathcal{X}(K)$, para algún complejo simplicial K .

Como los funtores \mathcal{X} y T inducen equivalencias débiles, entonces de la versión simplicial deducimos la dualidad de Alexander para lattices reducidos que afirma lo siguiente

Teorema 2.2.5. *Sea X un lattice reducido tal que $s(X)$ no tiene máximo, y sea $V \supseteq m(X)$ el conjunto de vértices de X , con $\#V = n$, entonces $\tilde{H}_i(X) \simeq \tilde{H}^{n-i-3}(X_V^*)$.*

(ver [28])

Comentario 2.2.6. : En el teorema $s(X)$ no puede tener máximo porque, en caso de tenerlo, tendríamos que $T(X)$ es un símplex, lo que no satisface las hipótesis del caso simplicial. El dual de Alexander de un lattice reducido cuyos elementos minimales están acotados superiormente es vacío.

2.3 Un dual alternativo

El dual de Alexander para lattices reducidos que recordamos en la sección previa siempre es el poset de caras de un complejo simplicial y esos espacios tienden a ser demasiado grandes. Podemos considerar como dual alternativo a un retractor por deformación fuerte de X_V^* , que seguirá siendo un lattice reducido por la Proposición 1.3.7, y seguirá satisfaciendo la dualidad de Alexander por ser homotópicamente equivalente a X_V^* .

Un candidato de dual alternativo es $\text{core}(X_V^*)$, sin embargo vamos a trabajar con un dual alternativo un poco más grande en general que éste porque $\text{core}(X_V^*)$ es relativamente complicado de determinar a priori. Esta noción de dual fue introducida en [28].

Definición 2.3.1. Sea X lattice reducido, $V \supseteq m(X)$ su ground set, el dual alternativo (o simplemente dual) de X respecto a V es el espacio finito cuyos elementos vienen dados por los subconjuntos de V que son maximales con la propiedad de que su complemento no es un subconjunto de $m(X)$ acotado superiormente, y todas las intersecciones no vacías de estos subconjuntos, con el orden dado por la inclusión. Notamos $d_V(X)$ al dual de X respecto a V y $d_m(X)$ al dual de X respecto al conjunto de elementos minimales de X , es decir $m(X)$.

Observación 2.3.2. Notar que a partir de la Observación 2.2.4, se sigue que $d_V(X) = i(X_V^*)$, ya que tomar ínfimo con el orden dado por la inclusión es lo mismo que intersectar. En particular se tiene que $d_V(X)$ es un lattice reducido, pues es un colapso de X_V^* .

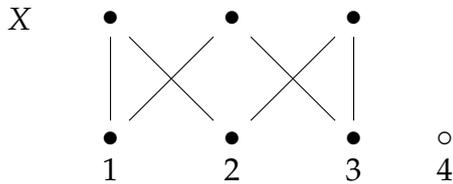
La dualidad de Alexander entonces también es válida para el dual alternativo.

Proposición 2.3.3. *Sea X lattice reducido con conjunto de vértices V , con $\#V = n$, tal que $s(X)$ no tiene máximo, entonces $\tilde{H}_i(X) \simeq \tilde{H}^{n-i-3}(d_V(X)) \forall 0 \leq i \leq n - 1$.*

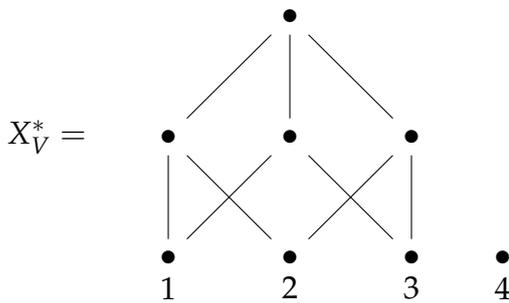
De la Observación 2.3.2 deducimos que $d_V(X)$ es efectivamente más chico que el dual de Alexander X_V^* y solamente es igual cuando X_V^* no tiene up beat points, como lo afirma la Proposición 1.3.8. Notar que incluso puede llegar a suceder que $m(d_V(X))$ sea estrictamente más chico que $m(X_V^*)$.

Antes de pasar a la siguiente sección, daremos un ejemplo para mostrar cuánto optimiza aplicar el dual alternativo comparado a aplicar el dual de Alexander.

Ejemplo 2.3.4. Tomamos X el espacio del Ejemplo 2.2.3,



Recordemos que X_V^* es el siguiente espacio



Como $d_V(X) = i(X_V^*)$, se tiene que



El dual alternativo redujo notoriamente la cantidad de puntos, de hecho nos dio un espacio minimal.

2.4 Notaciones

En esta sección introduciremos la notación que utilizaremos durante el resto de la tesis. Esta notación nos ayudará a calcular el dual de Alexander y el dual alternativo de manera rápida y ordenada, como mostraremos en algunos ejemplos.

Notaremos $d(X)$ a $d_V(X)$ cuando se sobreentienda quien es V .

$d_V^2(X)$ será el doble dual de X respecto a V . Para calcular el dual por segunda vez tomamos como conjunto de vértices de $d_V(X)$ un conjunto \tilde{V} , con $\tilde{V} \supseteq$

$m(d_V(X))$, y de modo tal que $\#V = \#\tilde{V}$. Notar que esto tiene sentido porque los elementos de $m(d_V(X))$ se pueden ver como subconjuntos disjuntos de V , por lo que $\#(m(d_V(X))) \leq \#V$.

Para el cálculo del dual de Alexander y del dual Alternativo, utilizaremos los siguientes conjuntos

- $B_V(X) = \{l \subseteq V, l \neq \emptyset / l \text{ es maximal con la propiedad de que } V \setminus l \text{ no es un subconjunto de } m(x) \text{ acotado superiormente}\}.$
- $A_V(X) = \{r \subsetneq V / r \text{ es minimal con la propiedad de no ser un subconjunto de } m(x) \text{ acotado superiormente}\}.$

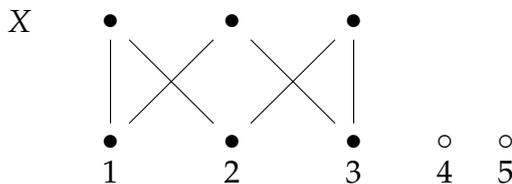
Observar que $B_V(X)$ se obtiene de $A_V(X)$ tomando complemento en V en cada uno de sus elementos. Vemos a $A_V(X)$ y a $B_V(X)$ simplemente como conjuntos de subconjuntos de V , sin ninguna estructura extra.

Notar que $A_V(X) = A_m(X) \cup (V \setminus m(X))$, es decir, al calcular $A_V(X)$ lo único nuevo que obtenemos de $A_m(X) = A_{m(X)}(X)$ son los elementos de V que no son elementos minimales de X .

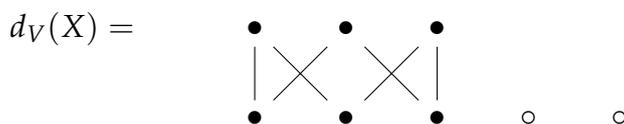
Observación 2.4.1. X_V^* viene dado por los subconjuntos no vacíos de cada elemento de $B_V(X)$, mientras que $d_V(X)$ está formado por las intersecciones no vacías de estos elementos vistos como subconjuntos de V .

Para calcular un dual necesitamos hallar $A_V(X)$, o sea encontrar los subconjuntos minimales de V no acotados, tomar complemento en V para obtener $B_V(X)$ e intersectar para obtener $d_V(X)$ o tomar subconjuntos para obtener X_V^* .

Ejemplo 2.4.2. Sea



El único subconjunto de $m(X)$ no acotado superiormente es $\{1, 2, 3\}$. Por lo tanto $A_V(X) = \{(1, 2, 3); 4; 5\}$, donde $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tomando complemento en V deducimos que $B_V(X) = \{(4, 5); (1, 2, 3, 4); (1, 2, 3, 5)\}$. De donde obtenemos que



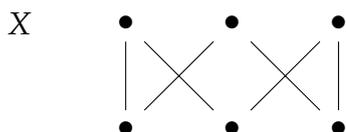
Notar que $d_V(X) = X$.

Existen algunas dificultades a la hora de calcular el dual de un lattice reducido X respecto a su conjunto de elementos minimales $m(X)$. Si $m(X)$ está acotado superiormente, entonces el dual de X será vacío ya que $A_m(X)$ lo es. Por otro lado, si el único subconjunto de $m(X)$ no acotado superiormente es $m(X)$, entonces $A_V(X)$ también es vacío, ya que necesitamos que los subconjuntos sean propios. Por lo tanto $d_V(X) = \emptyset$.

Para afrontar estos inconvenientes podemos restringir el dual a los casos en los que no se cumplan estas anomalías. En el contexto simplicial, esto lo mismo que restringir a los casos en los que el complejo simplicial no es el disco o la esfera ambiente.

Vamos a quedarnos con los casos en los que $V = m(X)$ y $m(X)$ es el único subconjunto de V no acotado superiormente, ya que la mayoría de los resultados que vamos a ver siguen siendo válidos en este caso particular.

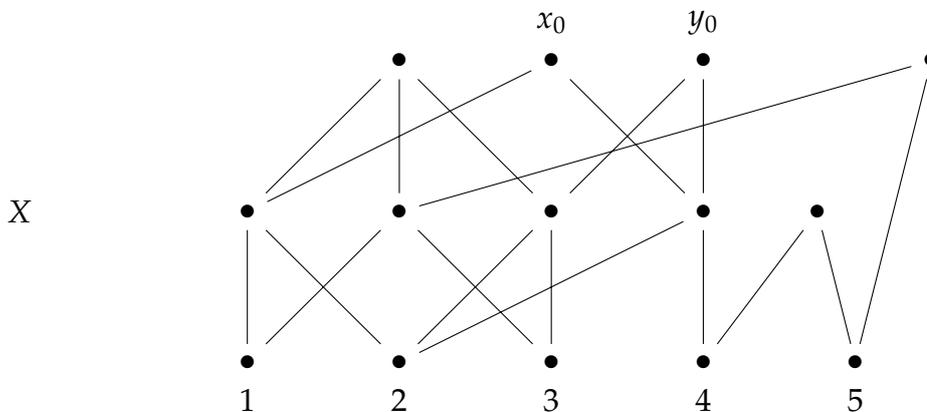
Ejemplo 2.4.3. Consideramos el espacio



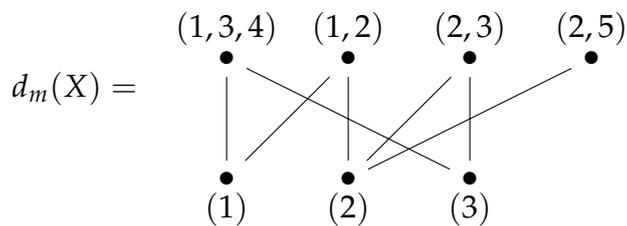
X es un espacio que cumple que el subconjunto de elementos minimales es el único subconjunto de $m(X)$ no acotado superiormente, luego $d_m(X) = \emptyset$. X sin embargo no es contráctil.

Como $d_V(X) = i(X_V^*)$, entonces $d_V(X)$ no tiene up beat points. Una pregunta natural que puede surgir es la siguiente: es $d_V(X)$ un espacio sin beat points? En general esto no es cierto. El siguiente ejemplo muestra de hecho, que existen lattices reducidos minimales cuyo dual no es minimal.

Ejemplo 2.4.4. Miremos este espacio de 14 puntos



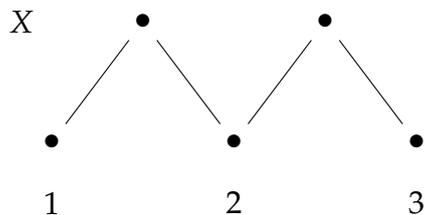
X resulta minimal, como se puede chequear, y además es un lattice reducido. Notar que $A_m(X) = \{(2, 5); (1, 3, 4); (1, 4, 5); (3, 4, 5)\}$. Tomando complemento en $m(X)$ se sigue que $B_m(X) = \{(1, 3, 4); (2, 5); (2, 3); (1, 2)\}$. Intersecando obtenemos



Que no es un espacio minimal.

En los espacios contráctiles también se puede calcular el dual, siempre que su conjunto de elementos minimales esté acotado superiormente.

Ejemplo 2.4.5. Consideramos



$m(X)$ posee un único subconjunto propio no acotado superiormente, que es $\{1, 3\}$, luego $d_m(X) = \{(2)\}$, el dual de X en particular es contráctil.

Más adelante veremos que el dual de un lattice reducido contráctil no necesariamente es contráctil, pero sí es homotópicamente trivial.

Capítulo 3

Minimalidad del dual y doble dual

Como ya vimos, el dual de Alexander de un lattice reducido en general no es un espacio minimal, incluso si el lattice reducido al que le aplicamos dual lo es. Tampoco vale en general que el dual de Alexander aplicado dos veces sobre un lattice reducido nos da el mismo espacio, de hecho, esto solo pasa cuando ese espacio es el poset de caras de un complejo simplicial.

En el caso del dual alternativo, estas propiedades tampoco valen en general. Pero vamos a dar condiciones suficientes para que se cumplan. Los axiomas W_0 y W_1 que introduciremos en este capítulo son herramientas que nos ayudan a analizar dichas propiedades a partir del conjunto $A_m(X)$ de un lattice reducido X que introdujimos en el capítulo anterior. Si verificamos que se satisfacen las condiciones de los axiomas podremos deducir que el doble dual de un lattice reducido es homeomorfo a sí mismo sin calcular ningún dual, lo que es muy ventajoso si ese espacio es demasiado grande. Estas herramientas jugarán un papel importante en la construcción de lattices reducidos homotópicamente triviales pero sin beat points que haremos en el capítulo 5.

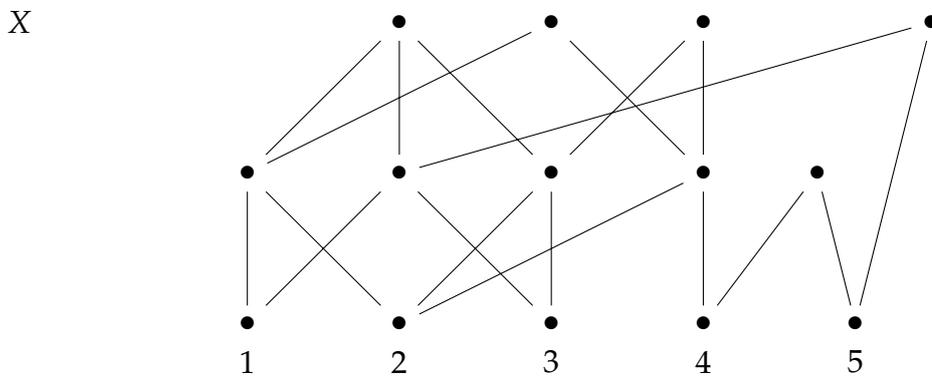
3.1 La minimalidad y el axioma W_0

El Ejemplo 2.4.4 nos muestra que, en general, el dual alternativo de un lattice reducido no es un espacio minimal, es decir, sin beat points. Para analizar el problema de la minimalidad, introducimos la siguiente definición usando la notación de la sección 2.4. A partir de ahora, a menos de que se aclare lo contrario, X denotará a un lattice reducido con ground set V que cumple que $m(X)$ no está acotado superiormente o que $V \neq m(X)$. Recordemos que con $B_V(X)$ notamos al conjunto de subconjuntos de V maximales con la propiedad de que su complemento no es un subconjunto de $m(X)$ acotado superiormente.

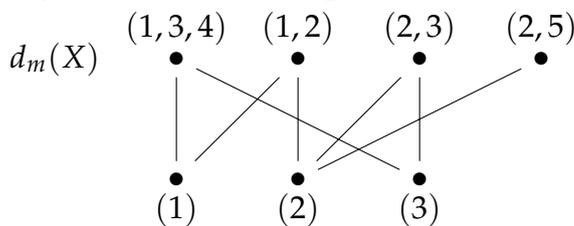
Definición 3.1.1. X se dice W_0 si cada elemento de $B_V(X)$ se escribe como unión disjunta de subconjuntos de V que representan elementos de $m(d_V(X))$.

Notar que X es W_0 si y solo si $\forall z \in V$ tal que $V \setminus \{z\}$ no es un subconjunto de $m(X)$ acotado superiormente, se tiene que $\bigcap_{l \in B_V(X): z \in l} l$ es un elemento minimal de $d_V(X)$.

Ejemplo 3.1.2. Recordemos el espacio del Ejemplo 2.4.4



Cuyo dual venía dado por



Como $(2, 5)$ representa a un elemento maximal, entonces es un elemento de $B_m(X)$. Este conjunto no se puede escribir como unión de los conjuntos $\{(1); (2); (3)\}$ que representan a los elementos minimales, entonces X no es W_0 .

Se puede intuitivamente ver que si X es W_0 entonces su dual no puede tener up beat points ya que todo subconjunto de V que representa un elemento del

dual es unión de subconjuntos que representan a elementos minimales. Eso es lo que dice el siguiente resultado

Proposición 3.1.3. *Si X es W_0 , entonces $d_V(X)$ no tiene beat points.*

Demostración: Como $d_V(X) = i(X_V^*)$, entonces $i(d_V(X)) = d_V(X)$. Para ver que $d_V(X)$ es minimal, por la Proposición 1.3.8, alcanza con ver que $s(d_V(X)) = d_V(X)$, o sea que todo elemento de $d_V(X)$ se escribe como supremo de elementos minimales. Los elementos de $d_V(X)$ se obtienen de intersecar elementos de $B_V(X)$ y cada elemento de $B_V(X)$ se escribe como la unión disjunta de subconjuntos de V que representan a elementos de $m(d_V(X))$. Entonces cada elemento $x \in d_V(X)$ está representado por la unión disjunta de los subconjuntos de V que representan a los elementos minimales más chicos que x , luego x se obtiene tomándole supremo a dichos elementos. \square

La definición de W_0 trae la dificultad de que depende del dual de X y no directamente de X , lo que no aporta mucha utilidad para probar la minimalidad del dual ya que no es muy difícil comprobar si un espacio es minimal si ya lo conocemos. Vamos a proponer una manera equivalente de verificar que un espacio es W_0 que no necesita que calculemos $d_V(X)$, sino $A_V(X)$, el conjunto de subconjuntos de V minimales con la propiedad de no ser subconjuntos de $m(X)$ acotados superiormente.

Proposición 3.1.4. *X es W_0 si y solo si $A_V(X)$ satisface la siguiente propiedad: $\forall x, y \in m(X)$ tales que tanto x como y pertenecen al menos a un elemento de $A_V(X)$ pero no a todos, entonces se tiene que existe $l \in A_V(X)$ tal que $x \in l$ e $y \notin l$ si y solo si existe $l' \in A_V(X)$ tal que $y \in l'$ y $x \notin l'$.*

Demostración: Notamos $B = \{z \in V : \text{existe } l \in A_V(X) \text{ tal que } z \in l\}$. Sea P el poset de subconjuntos propios de B que se escriben como uniones de elementos de $A_V(X)$, con el orden dado por la inclusión.

Supongamos primero que X es W_0 . Notar que $\forall j \in B$ tal que existe $\tilde{l} \in A_V(X)$ con $j \not\subseteq \tilde{l}$, entonces $\bigcup_{r \in A_V(X): j \not\subseteq r} r$ es un elemento maximal de P .

Sean $x, y \in m(X)$ que satisfacen la hipótesis del enunciado, para probar la equivalencia, alcanza por simetría con ver solo una de las dos implicaciones. Supongamos entonces que existe $l \in A_V(X)$ tal que $x \in l$, $y \notin l$. Sabemos además que existen $\tilde{l}, l^* \in A_V(X)$ tales que $x \notin \tilde{l}$, $y \in l^*$. Afirmo que existe l' tal que $y \in l'$ y $x \notin l'$, pues en caso contrario

$$\bigcup_{r \in A_V(X): x \notin r} r \subsetneq \bigcup_{r \in A_V(X): y \notin r} r \subsetneq B$$

lo que contradice la maximalidad de $\bigcup_{r \in A_V(X): x \notin r} r$ en P

Supongamos ahora que X satisface la propiedad del enunciado, como

$A_V(X) = A_m(X) \cup V \setminus m(X)$, entonces esa propiedad se extiende a V . Para probar que X es W_0 alcanza con ver que para todo $x \in V$ tal que $x \in p$, para cierto $p \in B_V(X)$, entonces existe $w \in m(d_V(X))$ tal que w está representado por un subconjunto de V al que x pertenece. Podemos suponer que existe $\tilde{p} \in B_V(x)$ tal que $x \notin \tilde{p}$, caso contrario $x \in \bigcap_{p \in B_V(X)} p$, y por lo tanto x estaría en un elemento

minimal del dual. Notar que $x \in B$ y existe $l \in A_V(X)$ tal que $x \notin l$. Afirmando que $\bigcup_{l \in A_V(X): x \notin l} l$ es un elemento maximal de P . Supongamos que esto no es

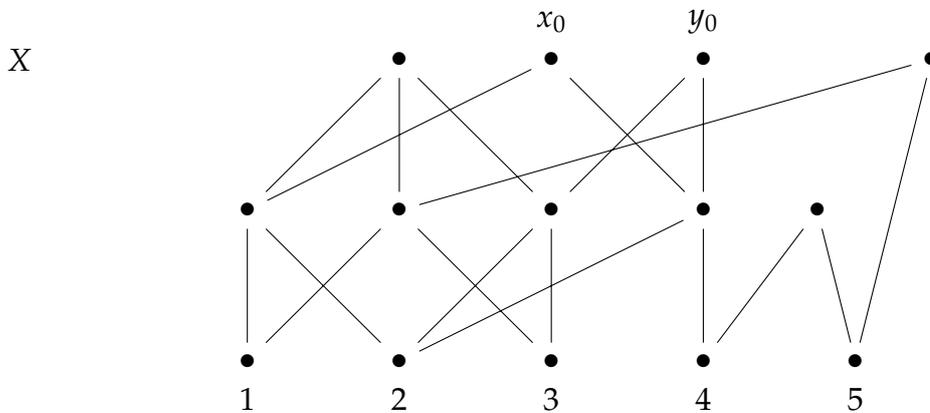
cierto, entonces existe $z \in B$ y $l' \in A_V(X)$ tal que $x \in l'$ y $z \notin l' \cup \bigcup_{l \in A_V(X): x \notin l} l$.

Pero entonces existe $l' \in A_V(X)$ tal que $x \in l'$ y $z \notin l'$, pero no existe ningún $l \in A_V(X)$ tal que $z \in l$ y $x \notin l$. Esto contradice la equivalencia del enunciado.

Por lo tanto $\bigcup_{l \in A_V(X): x \notin l} l$ es un elemento maximal de P , y su complemento es un elemento de $m(d_V(X))$ que contiene a x .

□

Ejemplo 3.1.5. Nuevamente usamos el Ejemplo 2.4.4



Recordemos que $A_V(X) = \{(2,5); (1,3,4); (1,4,5); (3,4,5)\}$, X no es W_0 porque $4 \in m(X)$ aparece en tres de los cuatro elementos de $A_V(X)$, en cambio $3 \in m(X)$ solo aparece dos veces y siempre que lo hace, 4 está en ese elemento también.

También sabemos que, como $d_m(X)$ posee beat points, entonces X no puede ser W_0 .

Comentario 3.1.6. : El axioma W_0 nos da una condición suficiente para que un lattice reducido X admita dual minimal, aunque no sabemos si es necesaria. La condición de ser W_0 se puede usar en espacios grandes para verificar si tienen dual minimal, ya que para obtener el dual se requiere el cálculo de muchas intersecciones y verificar el axioma suele resultar más sencillo.

3.2 El doble dual y el axioma W_1

Para calcular el dual de un lattice reducido X sobre un conjunto de vértices V necesitamos que el conjunto de elementos minimales de X no esté acotado superiormente, o bien que el conjunto V sea estrictamente más grande que $m(X)$. Si $m(X)$ está acotado superiormente, entonces X es contráctil, por lo que no nos molesta mucho la restricción. A la hora de calcular el doble dual de X respecto a V consideramos, para calcular el dual de $d_V(X)$, un conjunto de vértices $W \supseteq m(d_V(X))$, con $\#W = \#V$. Necesitaríamos que $d_V(X)$ tampoco tenga acotados a sus elementos minimales, o bien que $m(d_V(X))$ tenga menor cardinal que V . El siguiente lema afirma que esto siempre sucede, o sea nunca tendremos inconvenientes para calcular el doble dual de un espacio si pudimos calcular el dual una vez.

Lema 3.2.1. *Sea X un lattice reducido y $V \supseteq m(X)$ un conjunto de vértices. Si se tiene que $V \supsetneq m(X)$ o que $m(X)$ no está acotado superiormente, entonces $m(d_V(X))$ no está acotado superiormente o tiene menor cardinal que V .*

Demostración: las hipótesis del lema garantizan que existe el dual de X sobre V . Como los elementos de $m(d_V(X))$ se pueden representar con subconjuntos disjuntos de V , entonces se tiene que $\#m(d_V(X)) \leq \#V$. Notar que la igualdad es válida si y solo si cada elemento de V representa un elemento minimal. Supongamos que $m(d_V(X))$ está acotado superiormente y que $\#m(d_V(X)) = \#V$, entonces $d_V(X)$ posee un único elemento maximal que está representado por V . Como $d_V(X) = id_V(X)$, entonces $d_V(X)$ es un punto, por lo que $\#V = 1$. Si X no fuese vacío, necesariamente se tendría que $\#m(X) = 1$, lo que es absurdo ya que entonces $m(X) = V$ y $m(X)$ estaría acotado superiormente. Si X es vacío y V posee un elemento, entonces $d_V(X)$ también es vacío. \square

Este lema no nos garantiza que el dual de un lattice reducido no tenga a sus elementos minimales acotados superiormente. La siguiente observación, que será útil en el capítulo 4, nos da información del caso en que el dual tiene un solo elemento minimal.

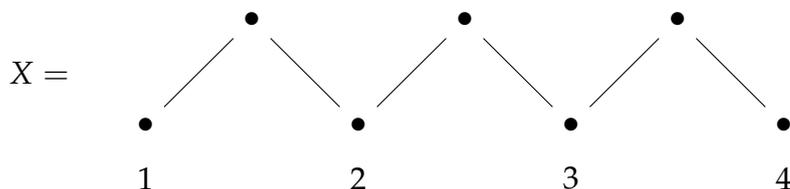
Observación 3.2.2. $d_m(X)$ tiene mínimo si y solo si existe $z \in m(X)$ tal que $z \in \bigcap_{r \in B_m(X)} r$, y esto vale si solo si $T(X)$ es un cono, como se puede ver fá-

cilmente. Entonces X es contráctil, porque $\mathcal{X}(T(X))$ lo es, y este espacio es homotópicamente equivalente a X , como lo vimos en la Observación 2.2.1.

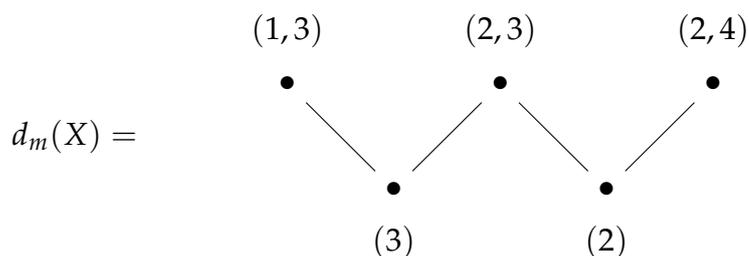
Además, como $A_V(X) = A_m(X) \cup (V \setminus m(X))$, entonces $d_m(X)$ tiene mínimo si y solo si $d_V(X)$ lo tiene para todo conjunto de vértices V (las intersecciones van removiendo uno por uno a los elementos de $V \setminus m(X)$).

De la Observación 3.2.2 sabemos que si $d_m(X)$ tiene mínimo, entonces X es contráctil. Sin embargo, X puede ser contráctil y tener un dual que no tiene mínimo

Ejemplo 3.2.3. Sea



Se tiene que $B_m(X) = \{(1,3); (2,3); (2,4)\}$. Luego



X es contráctil pero $d_m(X)$ no tiene mínimo.

Más adelante en esta sección veremos que existen espacios contráctiles con dual minimal y no contráctil, y espacios minimales con dual contráctil.

Para estudiar el problema de cuándo el doble dual de un lattice reducido X nos da nuevamente X nos vamos a restringir a un caso en que los elementos de $m(d_V(X))$ pueden determinarse fácilmente a partir de V .

Definición 3.2.4. X se dice W_1 si $\forall x \in V$, $\{x\}$ representa un elemento de $m(d_V(X))$.

Observación 3.2.5. si X es W_1 , entonces es W_0 .

Al igual que con el axioma W_0 , mostramos una condición para que X sea W_1 que no depende estrictamente de $d_V(X)$ sino de X , o más precisamente, de $A_V(X)$.

Proposición 3.2.6. X es W_1 si y solo si $A_V(X)$ satisface la siguiente propiedad: $\forall x, y \in V$, existen $l, \tilde{l} \in A_V(X)$ tales que $x \in l, y \notin l, x \notin \tilde{l}, y \in \tilde{l}$.

Demostración: X es W_1 si y solo si $\forall x \in V$, $\{x\}$ se obtiene como intersección de elementos de $B_V(X)$. Esto es válido si y solo si $\forall x \in V, V \setminus \{x\}$ se obtiene como unión de elementos de $A_V(X)$, si y solo si $\forall x \in V, y \in V \setminus \{x\}$, existe $l \in A_V(X)$ tal que $y \in l, x \notin l$. Por un argumento simétrico eso último es equivalente a que $\forall x \in V, y \in V \setminus \{x\}$, existen $l, \tilde{l} \in A_V(X)$ tal que $y \in l, x \notin l, x \in \tilde{l}, y \notin \tilde{l}$. \square

Notar que, como $A_V(X) = A_m(X) \cup (V \setminus m(X))$, entonces para verificar los axiomas W_0 y W_1 , alcanza con ver el caso $V = m(X)$.

Veamos ahora la importancia de los espacios W_1 .

Proposición 3.2.7. : Si X es W_1 , entonces $d_V^2(X) = i(s(X))$.

Demostración: Los elementos de $d_V(X)$ se pueden ver como intersecciones no vacías de elementos de $B_V(X)$. De esta forma $V = m(d_V(X))$, entonces

$$B_V(d_V(X)) = \{r \subseteq V / r \text{ es maximal con la propiedad de que } V \setminus r \text{ no es un subconjunto de } V \text{ acotado superiormente en } d_V(X)\}$$

Luego, $r \in B_V(d_V(X))$ si y solo si $r^c = V \setminus r \in A_V(d_V(X)) = \{l \subseteq V / l \text{ es minimal con la propiedad de no estar acotado superiormente en } d_V(X)\}$.

Pero esto vale si y solo si r^c es minimal con la propiedad de no estar acotado por un elemento maximal de $d_V(X)$, es decir, por un elemento de $B_V(X)$. Como los elementos maximales de X_V^* también se pueden ver como elementos de $B_V(X)$, entonces la afirmación anterior equivale a que r^c sea minimal con la propiedad de no estar acotado en X_V^* . Esto último sucede si y solo si r es un elemento maximal de $X_V^{**} = \mathcal{X}(T(X))$. Etiquetando a los elementos de X_V^{**} como subconjuntos no vacíos de elementos de $B_V(d_V(X))$, tenemos que tomar ínfimo, bajo el orden dado por la inclusión, es lo mismo que intersectar. Luego $d_V^2(X) = i(X_V^{**}) = i(\mathcal{X}(T(X)))$. Pero este conjunto es el conjunto de subconjuntos maximales de $m(X)$ con la propiedad de estar acotados superiormente y sus respectivas intersecciones. La función que le asigna a estos subconjuntos su respectivo supremo define un homeomorfismo entre $d_V^2(X)$ y el poset $i(s(X))$ (esto es válido porque el ínfimo lo tomamos sobre $s(x)$), como buscábamos.

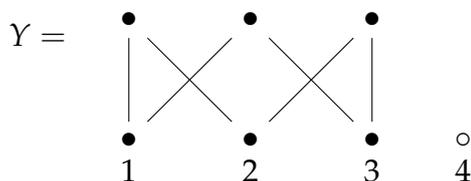
□

Como consecuencia de este resultado y de la Proposición 1.3.8, tenemos la siguiente consecuencia.

Corolario 3.2.8. Si es X W_1 y minimal, entonces $d_V^2(X) = X$

La condición de ser W_1 es suficiente para que el doble dual de X nos de lo mismo que X si este es minimal, pero en general no es necesaria, como lo muestra el primero de los siguientes ejemplos, dicho ejemplo también nos sirve para mostrar que todo espacio W_0 no es W_1 en general. Recordar que en un diagrama de Hasse con un círculo denotamos a los elementos del ground set V que no están en $m(X)$.

Ejemplos 3.2.9. Consideramos



Sea $V = \{1, 2, 3, 4\}$, se tiene que $B_V(X) = \{(1, 2, 3); (4)\}$, luego

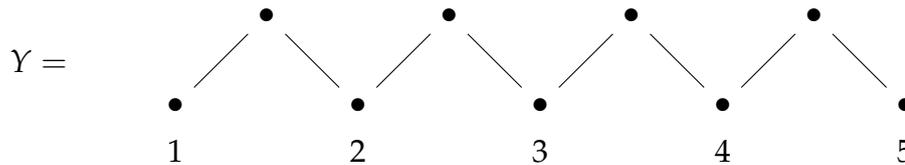
$$d_V(Y) = \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \circ & \circ \\ a & b & c & d \end{array}$$

Sea ahora $\tilde{V} = \{a, b, c, d\}$, entonces $B_{\tilde{V}}(d_V(Y)) = \{(a, b, c); (a, b, d); (c, d)\}$. De donde concluimos que

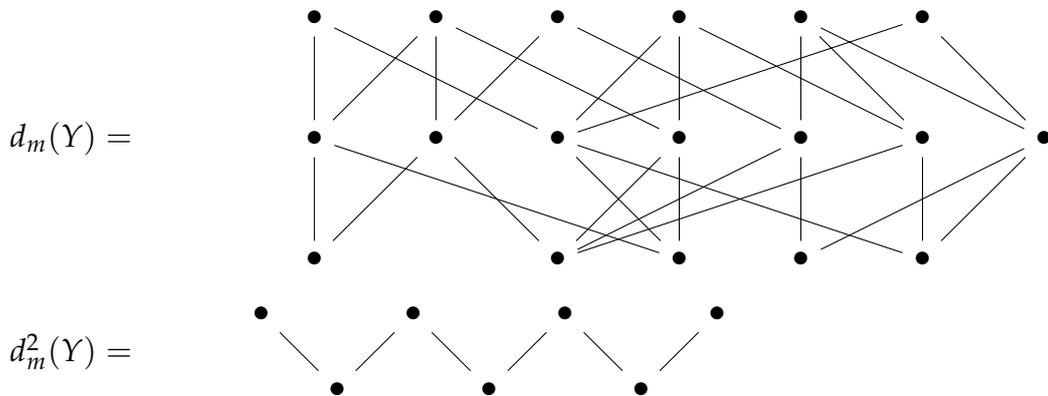
$$d_V^2(Y) = \begin{array}{ccccc} & (a, b, c) & (a, b, d) & (c, d) & \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \\ & | & \diagdown & \diagup & | \\ & \bullet & & & \bullet \\ & (a, b) & (c) & (d) & \end{array}$$

$d_V^2(Y) = Y$, sin embargo, Y no es W_1 (pero sí es W_0).

Ahora veamos el siguiente espacio contráctil



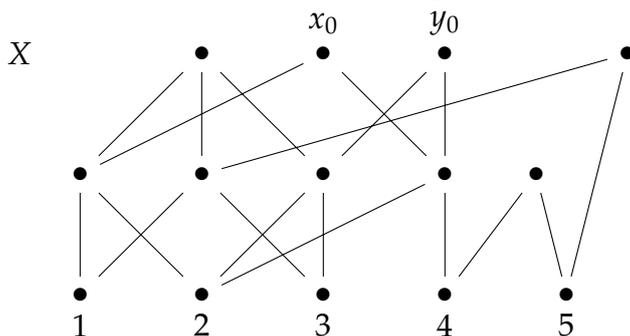
En este caso $A_m(Y) = \{(13); (14); (15); (24); (25); (35)\}$. Fácilmente se puede chequear que Y satisface las condiciones de la proposición 3.2.6, por lo tanto Y es W_1 , por lo que en particular es W_0 . Luego $d_m(Y)$ es minimal y $d_m^2(Y) = i(s(Y))$ no lo es. El dual de Y respecto a su conjunto de elementos minimales y el doble dual de Y son los siguientes



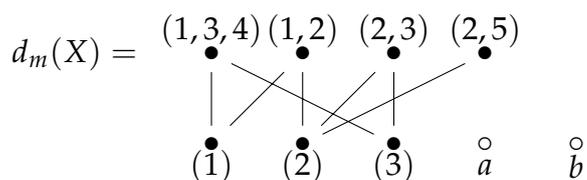
Con esto deducimos que el dual de un lattice reducido contráctil no tiene por que ser contráctil, y el dual de un espacio no contráctil sí puede serlo, incluso si este espacio no tiene ningún beat point. Este ejemplo será utilizado más adelante para construir lattices reducidos homotópicamente triviales sin beat points.

En general, si no pedimos que X sea W_1 , no podemos garantizar ni siquiera que X sea homotópicamente equivalente a su doble dual, propiedad que sí es válida para el dual de Alexander. Más adelante en esta tesis mostraremos que el tipo homotópico débil sí se preserva.

Ejemplo 3.2.10. Recordemos el espacio del Ejemplo 2.4.4

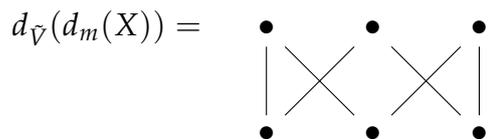


Su dual venía dado por



donde agregamos dos puntos para que coincida con el cardinal de $m(X)$.

Sea $\tilde{V} = \{(1), (2), (3), a, b\}$, se puede chequear sin mucha dificultad que



Luego $d_m^2(X)$ no es homotópicamente equivalente a X , ya que ambos son espacios minimales y de distinta altura.

Capítulo 4

Modelos de suspensiones de lattices reducidos

En este capítulo utilizaremos colímites homotópicos para construir una noción de join con la propiedad de que el join de dos lattices reducidos es un lattice reducido, y que además conserve el tipo homotópico simple del join no Hausdorff. Primero trabajaremos con el l join, que es un caso particular del deleted join de espacios finitos (ver [28]), y luego daremos una noción de join con menos puntos que la del l join: el deleted join reducido o r join. A partir del concepto de r join construimos una noción de suspensión, la n -ésima suspensión reducida, que posee el mismo tipo homotópico simple que la n -ésima suspensión no Hausdorff. Esta suspensión jugará un rol fundamental en el estudio de los duales alternativos, ya que todo dual alternativo de un lattice reducido X es una suspensión reducida del dual alternativo tomado respecto del conjunto de elementos minimales de X , $m(X)$.

4.1 Colímites homotópicos

Para estudiar algunas propiedades de los duales de los lattices reducidos respecto a diversos conjuntos de vértices así como para introducir nuevas construcciones, vamos a utilizar el concepto de colímite homotópico, que fue introducido por Bousfield y Kan en [13]. En esta sección recordaremos algunos resultados de colímites homotópicos probados por Fernández y Minian en [18], y basándonos en esos resultados y en las ideas usadas en ese paper probaremos un resultado, el lema de homotopía simple, que nos será útil en las secciones posteriores. Consultar también el paper de Thom [36].

Dado un poset finito P , un P -diagrama es un functor $X : P \rightarrow \mathcal{P}_{<\infty}$, donde entendemos a P como una categoría pequeña, mientras que $\mathcal{P}_{<\infty}$ es la categoría de posets finitos y morfismos de orden. Dados X, Y dos P -diagramas, un morfismo de P -diagramas $\alpha : X \rightarrow Y$ es una transformación natural.

Definición 4.1.1. Sea P un poset finito, $X : P \rightarrow \mathcal{P}_{<\infty}$ un P -diagrama, el colímite homotópico de X , que notamos $\mathit{hocolim}X$, es el poset cuyo conjunto subyacente es $\bigsqcup_{p \in P} X_p$, donde $X_p = X(p)$. El orden de $\mathit{hocolim}X$ es el orden heredado por cada X_p , junto con la relación $x \leq y$ si $x \in X_p, y \in X_q$, de modo que $p \leq q$ y $f_{pq}(x) \leq y$, donde $f_{pq} = X(\{p \rightarrow q\})$.

Ejemplo 4.1.2. Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo de orden entre posets finitos, notamos S al espacio de Sierpinski, que es el poset de dos elementos $0 < 1$. El colímite homotópico del S -diagrama Z tal que $Z(0) = X, Z(1) = Y$ y $Z(\{0 \rightarrow 1\}) = f$, es el poset cuyo conjunto subyacente es $X \sqcup Y$ que tiene el orden heredado por X e Y , junto con la relación $x \leq y$ si $x \in X, y \in Y$, y $f(x) \leq y$. A este poset se lo llama cilindro no Hausdorff de f (ver [3]). Notar que si $Y = \{*\}$ y f es la función constante, entonces $\mathit{hocolim}Z = C^+(X)$.

El siguiente lema, probado en [18], es un análogo al Teorema de McCord 1.2.8, en el contexto de P -diagramas y morfismos de P -diagramas.

Lema 4.1.3. (Lema de homotopía): Sea P un poset finito, sean $X, Y : P \rightarrow \mathcal{P}_{<\infty}$ diagramas y sea $\alpha : X \rightarrow Y$ un morfismo de P -diagramas. Si $\alpha_p : X_p \rightarrow Y_p$ es una equivalencia débil $\forall p$, entonces α induce una equivalencia débil $\mathit{hocolim}X \simeq_w \mathit{hocolim}Y$.

Vamos a utilizar una versión del lema de homotopía que nos garantice una equivalencia simple en vez de una equivalencia débil. Para eso vamos a utilizar la Proposición 1.2.31 en lugar del Teorema de McCord. Este resultado sin embargo se puede aplicar solo sobre una base específica del espacio de llegada, y por lo tanto no podremos probar esta versión del lema usando exactamente las mismas técnicas que se usan en [18]. Aún así, si pedimos una hipótesis extra sobre el morfismo de diagramas podremos dar una demostración sencilla de esta versión del lema. Para eso, enunciaremos primero un resultado de [18] que nos será útil.

Proposición 4.1.4. Sea $X : P \rightarrow \mathcal{P}_{<\infty}$ un P -diagrama, supongamos que P tiene un máximo p , entonces $\text{hocolim}(X) \searrow X_p$.

La versión simple del lema de homotopía afirma lo siguiente.

Lema 4.1.5. (Lema de homotopía simple) Sean $X, Y : P \rightarrow \mathcal{P}_{<\infty}$ dos P -diagramas, donde P es un poset finito. Sea $\alpha : X \rightarrow Y$ un morfismo de P -diagramas. Supongamos que α cumple la siguiente propiedad: $\forall p \in P, a \in Y_p, \alpha_p^{-1}(U_a^{Y_p})$ es homotópicamente trivial. Entonces α induce una equivalencia simple entre $\text{hocolim}X$ y $\text{hocolim}Y$.

Demostración: Tomamos $a \in Y_p$ como en el enunciado, para simplificar notación llamamos U_a a $U_a^{\text{hocolim}Y}$. Para poder aplicar la Proposición 1.2.31, necesitamos ver que $\alpha^{-1}(U_a) \subseteq \text{hocolim}X$ es homotópicamente trivial, donde con α notamos al morfismo de posets inducido por el morfismo de diagramas α . Vamos a interpretar a $\alpha^{-1}(U_a)$ como un colímite homotópico basándonos en el colímite homotópico del P -diagrama X .

Consideramos $\tilde{P} = \{q \in U_p : Y(\{q \rightarrow p\})^{-1}(U_a^{Y_p}) \neq \emptyset\}$ con el orden inducido por P . Notar que $\alpha^{-1}(U_a) = \bigcup_{q \in \tilde{P}} \alpha_q^{-1}(Y_{qp}^{-1}(U_a^{Y_p}))$, donde con Y_{qp} notamos a $Y(\{q \rightarrow p\})$, y el orden viene dado por el heredado de $\text{hocolim}X$. $\alpha^{-1}(U_a)$ es el colímite homotópico del diagrama $\tilde{X} : \tilde{P} \rightarrow \mathcal{P}_{<\infty}$, que satisface que $\tilde{X}_q = \alpha_q^{-1}(Y_{qp}^{-1}(U_a^{Y_p}))$, para cada $q \in \tilde{P}$, y si $q \leq q' \in \tilde{P}$, $\tilde{X}_{qq'} = \tilde{X}(q \rightarrow q')$ es la restricción de $X_{qq'} = X(\{q \rightarrow q'\})$ a $\alpha_q^{-1}(Y_{qp}^{-1}(U_a^{Y_p}))$ y $\alpha_{q'}^{-1}(Y_{q'p}^{-1}(U_a^{Y_p}))$.

Necesitamos ver que esta restricción está bien definida, es decir, que

$X_{qq'}(b) \in \alpha_{q'}^{-1}(Y_{q'p}^{-1}(U_a^{Y_p}))$, para todo $b \in \alpha_q^{-1}(Y_{qp}^{-1}(U_a^{Y_p}))$, o equivalentemente, que dado $b \in \alpha_q^{-1}(Y_{qp}^{-1}(U_a^{Y_p}))$, $Y_{q'p}(\alpha_{q'}(X_{qq'}(b))) \leq a$. Como α es morfismo de P -diagramas, entonces $\alpha_{q'} \circ X_{qq'} = Y_{qq'} \circ \alpha_q$, luego $Y_{q'p}(\alpha_{q'}(X_{qq'}(b))) = Y_{q'p}(Y_{qq'}(\alpha_q(b))) = Y_{qp}(\alpha_q(b)) \leq a$, porque $b \in \alpha_q^{-1}(Y_{qp}^{-1}(U_a^{Y_p}))$. Luego \tilde{X} está bien definido, es un \tilde{P} diagrama, y por construcción $\text{hocolim}\tilde{X} = \alpha^{-1}(U_a)$.

Dado que $\max(\tilde{P}) = p$, entonces por la Proposición 4.1.4 tenemos que

$$\alpha^{-1}(U_a) = \text{hocolim}\tilde{X} \searrow \tilde{X}_p = \alpha_p^{-1}(U_a^{Y_p})$$

que es homotópicamente trivial por hipótesis. Luego $\alpha^{-1}(U_a)$ es homotópicamente trivial, como queríamos ver. \square

4.2 El l Join y el r join

Vamos a trabajar en esta sección con dos construcciones de join entre lattices reducidos. La motivación detrás de estas construcciones viene de que el join no Hausdorff de dos lattices reducidos no es un lattice reducido en la gran mayoría de los casos, de hecho, si X es un lattice reducido con 2 o más elementos maximales e Y es otro lattice reducido con 2 o más elementos minimales, entonces $X * Y$ no es un lattice reducido.

El l join es un caso particular del deleted join entre posets finitos (ver [28]) cuando los posets X e Y son disjuntos. Vamos a probar que, en el caso disjunto, el deleted join tiene el tipo homotópico simple que el join no Hausdorff de posets finitos.

El r join es una óptima reducción del l join, en el sentido que no hay mejor reducción posible del l join que preserve el tipo homotópico simple y la propiedad de ser un lattice reducido si los espacios en los que se realiza el r join lo son. El r join nos permitirá construir modelos de suspensiones que jugarán un papel muy importante en las próximas secciones.

Definición 4.2.1. Sean X, Y espacios finitos T_0 , el l join de X e Y , que notamos $X *_l Y$, es el producto $(C^-(X) \times C^-(Y)) \setminus m$, donde m denota al mínimo del producto de los conos.

Ejemplo 4.2.2. Si $X = Y = S^0$, entonces

$$X *_l Y = \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ | & \diagdown & \diagup & | \\ & \times & \times & \\ | & \diagup & \diagdown & | \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

Estas son algunas propiedades elementales del l join, algunas de ellas valen en general para el deleted join, como se puede ver en [28].

Proposición 4.2.3.

- (1) El l join es abeliano: existe un homeomorfismo entre $X *_l Y$ e $Y *_l X$
- (2) El l join es asociativo: existe un homeomorfismo entre $X *_l (Y *_l Z)$ y $(X *_l Y) *_l Z$.
- (3) Si X, Y son lattices reducidos, entonces $X *_l Y$ es un lattice reducido.
- (4) $X *_l Y$ tiene el mismo tipo homotópico simple que $X * Y$.

Demostración:

(1) y (2) son inmediatos. Veamos (3), tomamos $\{(x, y); (x', y')\} \subseteq X *_l Y$ acotado superiormente. Observar que $\{x; x'\}$ y $\{y; y'\}$ están acotados superiormente en $C^-(X)$ y en $C^-(Y)$ respectivamente, luego existen $\sup(x, x')$ y $\sup(y, y')$, y

se tiene que $\sup(\{(x, y); (x', y')\}) = (\sup(x, x'); \sup(y, y'))$. Luego $X *_l Y$ es un lattice reducido.

Veamos (4). Vemos a $X *_l Y$ como un colímite homotópico. Consideramos el diagrama $Z : C^-(Y) \rightarrow \mathcal{P}_{<\infty}$, que le asigna a cada elemento $y \in Y \subseteq C^-(Y)$ el poset $C^-(X)$, mientras que $Z(\min(C^-(Y))) = X$, y los morfismos asociados $Z_{yy'}$, con $y \leq y'$, son los morfismos inducidos por la inclusión (notar que, a menos que $y = \min(C^-(Y))$, estos morfismos siempre son la identidad). Observar que $\text{hocolim} Z = X *_l Y$, además $\forall y \in Y, Z_y = Z(y)$ es contráctil. Por el lema de homotopía simple, $\text{hocolim} Z \wedge_{\downarrow} \text{hocolim} W$, donde W es el $C^-(Y)$ -diagrama que se define de manera similar a Z , solo que a los elementos de Y les asigna un punto, y los morfismos inducidos son la función constante (salvo W_{mm} que es la identidad, con $m = \min(C^-(Y))$). Luego $X *_l Y \wedge_{\downarrow} \text{hocolim} W = X * Y$. \square

Recordar que $A_m(X)$ es el conjunto de subconjuntos de $m(X)$ minimales con la propiedad de no estar acotados superiormente en X mientras que $B_m(X)$ es el conjunto de subconjuntos de $m(X)$ maximales con la propiedad de que su complemento no está acotado superiormente.

Observación 4.2.4. Al conjunto de elementos minimales del 1 join de 2 lattices reducidos X e Y podemos identificarlo con $m(X) \sqcup m(Y)$, y todo subconjunto de $m(X *_l Y)$ acotado superiormente podemos expresarlo como unión de subconjuntos de $m(X)$ y $m(Y)$ acotados superiormente. Con esto deducimos que $A_m(X *_l Y) = A_m(X) \sqcup A_m(Y)$, donde con m denotamos al conjunto de elementos minimales de cada uno de los respectivos espacios. En el caso que $m(X)$ sea el único subconjunto de $m(X)$ no acotado superiormente, agregamos a $m(X)$, lo mismo con $m(Y)$. Obtenemos de esta forma que $B_m(X *_l Y) = \tilde{B}_m(X) \cup \tilde{B}_m(Y)$, donde $\tilde{B}_m(X)$ se obtiene de $B_m(X)$ agregándole a cada elemento $m(Y)$ (y agregando a $m(Y)$ si $m(X)$ es el único subconjunto de $m(X)$ no acotado superiormente), $\tilde{B}_m(Y)$ se obtiene de manera análoga agregando $m(X)$.

Vamos a usar la observación anterior para estimar el tipo homotópico simple de $d_m(X *_l Y)$. Dado un lattice reducido Z , notamos $L(Z)$ al lattice que se obtiene de Z al agregar un máximo y un mínimo. Con R notamos a la aplicación inversa de L , que toma lattices y les remueve su máximo y mínimo.

Proposición 4.2.5. Sean X, Y lattices reducidos tales que $m(X)$ y $m(Y)$ no están acotados superiormente y los duales $d_m(X)$ y $d_m(Y)$ no tienen mínimo, entonces $d_m(X *_l Y) = R(L(d_m(X)) \times L(d_m(Y)))$. Este espacio tiene el tipo homotópico simple de $\Sigma(d_m(X) \times d_m(Y))$, donde Σ es la suspensión no Hausdorff. En el caso de que $m(X)$ sea el único subconjunto no acotado de $m(X)$ en X , $d_m(X)$ es el conjunto vacío (con $L(\emptyset) = S$, el espacio de Sierpinski). Lo mismo sucede con Y . Si $d_m(X)$ ó $d_m(Y)$ tienen mínimo, entonces el dual del 1 join es contráctil.

Recordar que si $d_m(X)$ tiene mínimo, entonces X es contráctil por la Observación 3.2.2.

Demostración: Vamos a suponer que tanto $m(X)$ como $m(Y)$ poseen subconjuntos propios no acotados superiormente y que tanto $d_m(X)$ como $d_m(Y)$ no tienen mínimo. Al intersecar subconjuntos de $\tilde{B}_m(X)$ entre sí obtendremos una copia de $d_m(X)$, solo que cada elemento posee además a $m(y)$ en su nombre y hay un mínimo agregado, llamado $m(Y)$ (esto se debe a que $d_m(X)$ no tiene mínimo). Algo similar sucede al intersecar todos subconjuntos de $\tilde{B}_m(X)$. Al intersecar los elementos de estas copias entre sí obtendremos, por cada elemento de la copia de $d_m(Y)$, una copia de $d_m(X)$ con mínimo, y además tendremos una copia de $d_m(X)$ asociada al mínimo de la copia original de $d_m(Y)$. Luego $d_m(X *_l Y) = R(L(d_m(X)) \times L(d_m(Y)))$, donde el máximo de cada copia de $d_m(X)$ es el elemento de la copia original de $d_m(Y)$ al que intersecamos para obtener esa copia de $d_m(X)$.

Utilizando colímites homotópicos, de manera similar a como lo hicimos en la Proposición 4.2.3, podemos cambiar a cada copia de $d_m(X)$ con mínimo por un punto preservando el tipo homotópico simple de $d_m(X *_l Y)$. El espacio resultante es $C^+(d_m(X) * d_m(Y)) \cup D$, donde D es una copia de $C^-(d_m(Y))$, que cumple que cada elemento del dual de Y es mayor que su representante en el join $d_m(X) * d_m(Y)$, mientras que el mínimo de D es mayor que los elementos de $d_m(X)$. Utilizando colímites homotópicos de vuelta, podemos cambiar a D por un punto sin modificar el tipo homotópico simple, luego $d_m(X *_l Y) \simeq \Sigma(d_m(X) * d_m(Y))$.

Notar que si $m(X)$ no posee subconjuntos propios no acotados superiormente, entonces el dual del join es la unión de dos copias de $d_m(Y)$, una minimal con máximo y otra maximal con mínimo, y tal espacio tiene el tipo homotópico simple de $\Sigma(d_m(Y))$.

Por último, si $d_m(X)$ o $d_m(Y)$ tienen mínimo, entonces el dual del l join tiene mínimo, que es el mínimo de la menor copia del dual. En particular, el dual es contráctil. □

Observar que como todo subconjunto de $m(X *_l Y)$ acotado superiormente es unión de subconjuntos acotados superiormente de $m(X)$ y $m(Y)$, entonces $T(X *_l Y) = T(X) * T(Y)$.

Pasemos ahora a definir el r join, que satisface propiedades similares a las del l join, aunque no es conmutativo y su dual no puede determinarse con la misma facilidad que el dual del l join.

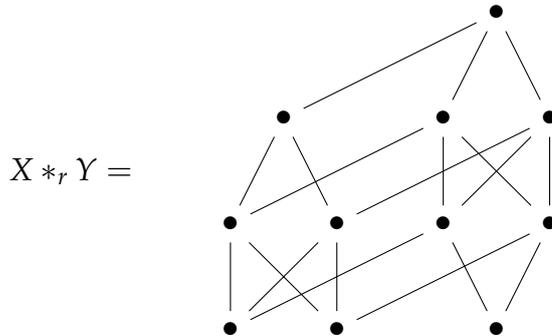
Definición 4.2.6. Sean X, Y espacios finitos T_0 , dado $y_0 \in m(Y)$, definimos el deleted join reducido, o r join, de X con Y asociado a y_0 como $X *_r Y = (C^-(X) \times C^-(Y \setminus F_{y_0}) \setminus m) \cup F_{y_0}$, donde m es el mínimo del producto de los conos, y el orden es el orden heredado por el producto y por F_{y_0} , junto con la relación $(x, y) \leq y' \forall (x, y) \in C^-(X) \times C^-(Y \setminus F_{y_0}) \setminus m, y \leq y' \geq y_0$.

Notar que el r join es el espacio que se obtiene del l join cocientando cada una de las copias de $C^-(d_m(X))$ asociadas a cada elemento mayor o igual que y_0

Ejemplo 4.2.7. Sean $X = Y = \mathbb{S}^0$, en este caso, el r join tomado sobre cualquier elemento minimal de Y es



Si $X = S^1 = \mathbb{S}^0 * \mathbb{S}^0$, $Y = C^+(\mathbb{S}^0)$, entonces



Proposición 4.2.8. Si X, Y son lattices reducidos, entonces $X *_r Y$ es un lattice reducido.

Demostración: Dividamos la demostración en tres casos. Supongamos primero que $\{(x, y); (x', y')\}$ es un subconjunto de $X *_r Y$ acotado superiormente, luego puede pasar que tanto (x, x') como (y, y') están acotados en $C^-(X)$ y en $C^-(Y) \setminus F_{y_0}$ respectivamente. Entonces existen $x_1 = \sup(x, x')$, $y_1 = \sup(y, y')$, con $y_1 \in C^-(Y) \setminus F_{y_0}$ (notar que este espacio es un lattice reducido), y se tiene que (x_1, y_1) es el supremo del conjunto $\{(x, y); (x', y')\}$ en $X *_r Y$ (cualquier cota $\tilde{y} \in F_{y_0}$ tiene que cumplir que $\tilde{y} \geq y_1$, luego es mayor que el par (x_1, y_1)). La otra posibilidad es que (y, y') solo este acotado por elementos de F_{y_0} , o que (x, x') no esté acotado por ningún elemento de X . En ese caso, $\sup(\{(x, y); (x', y')\}) = \sup_Y(\{y, y', y_0\})$.

Supongamos ahora que $\{(x, y); y'\}$ es un subconjunto acotado superiormente en $X *_r Y$, con $y \notin F_{y_0}$, $y' \in F_{y_0}$. La cota superior necesariamente está en F_{y_0} . Luego (y, y') es un subconjunto de Y acotado superiormente y por lo tanto, existe $y_1 = \sup_Y(y, y')$. Notar que $y_1 \in F_{y_0}$, luego $\sup(\{(x, y); y'\}) = y_1$.

El caso restante es el caso en que $\{y; y'\}$ es un subconjunto de $X *_r Y$ acotado superiormente, con $y, y' \in F_{y_0}$, pero ese caso sale de forma idéntica al anterior. □

Notar que la abelianidad para el r join no tiene sentido ya que necesitaríamos fijar un punto para X . Se puede probar, sin embargo, que el r join es asociativo, es decir, si $y_0 \in m(Y)$, $z_0 \in m(Z)$, entonces $(X *_r Y) *_r Z = X *_r (Y *_r Z)$, donde los r join se toman respecto de y_0 y z_0 , donde $y_0 \in Y *_r Z$ es el representante de y_0 en la menor copia de Y .

Observación 4.2.9. Notar que los subconjuntos de $m(X *_r Y)$ acotados superiormente son los subconjuntos de la forma $r_1 \sqcup r_2$, con $r_1 \subseteq m(X)$ y $r_2 \subseteq m(Y \setminus F_{y_0})$ acotados superiormente, junto con los subconjuntos de la forma $s_1 \sqcup s_2$, con $s_1 \subseteq m(X)$ no necesariamente acotado superiormente y $s_2 \subseteq m(Y \setminus F_{y_0})$ tal que $s_2 \cup \{y_0\}$ está acotado superiormente en Y . Los subconjuntos de esa forma están acotados solo por elementos de F_{y_0} en caso de que s_1 no esté acotado superiormente. De esto podemos concluir que

$$T(X *_r Y) = T(X) * (T(Y) \setminus y_0) \cup \sigma_X * lk_{T(Y)}(y_0)$$

Donde σ_X es el simplejo cuyos vértices son los elementos minimales de X y $T(Y) \setminus y_0$ es el subsimplejo de $T(Y)$ que se obtiene de remover los simplejos a los que y_0 pertenece.

La siguiente proposición afirma que si tomamos el r join sobre dos espacios finitos con al menos dos puntos, entonces si el r join tiene algún beat point, se tiene que alguno de los espacios en donde tomamos el r join tenía un beat point originalmente.

Proposición 4.2.10. *Si X, Y son minimales y tienen al menos 2 puntos, entonces $X *_r Y$ es minimal*

Demostración: Vamos a probar que todo elemento no maximal tiene al menos 2 cotas superiores inmediatas y que todo elemento no minimal tiene al menos 2 cotas inferiores inmediatas. Sea (x, y) no maximal, con $y \notin F_{y_0}$, entonces necesariamente x o y no son maximales en sus respectivos espacios. Supongamos que x no es maximal, luego por minimalidad de X existen al menos dos cotas superiores inmediatas x_1, x_2 , por lo que (x_1, y) y (x_2, y) son cotas superiores inmediatas de (x, y) . Notar que el argumento se sigue sosteniendo si $y = \min(C^-(Y))$ o si $x = \min(C^-(X))$, ya que X no tiene mínimo. Supongamos ahora que x es maximal y que y no lo es, luego y tiene al menos dos cotas superiores inmediatas y_1 e y_2 que pueden estar o no en F_{y_0} . En caso de que y_i no esté en F_{y_0} tomamos $a_i = (x, y_i)$, sino tomamos $a_i = y_i$. En cualquier caso, a_1 y a_2 son dos cotas superiores inmediatas de (x, y) . Un argumento similar funciona para el caso en que $x \in X$ no es minimal o $y \in Y$ no es minimal, con $y \notin F_{y_0}$. Si tanto x como y son minimales en sus respectivos espacios, entonces $(\min(C^-(X)), y); (x, \min(C^-(Y)))$ son dos cotas inferiores inmediatas distintas.

Falta analizar los puntos mayores a y_0 . Si $y \in F_{y_0}$ no es maximal, entonces tiene al menos dos cotas superiores inmediatas ya que las tiene en Y , y porque $F_y \subseteq F_{y_0}$. Notar que si $y \in F_{y_0}$, entonces y no es minimal en $X *_r Y$, y si $y \neq y_0$, entonces y no es minimal en Y . Sean y_1, y_2 dos cotas inferiores inmediatas de y

en Y , entonces a_1 y a_2 son dos cotas inferiores inmediatas en $X *_r Y$, con $a_i = y_i$ si $y_i \in F_{y_0}$ o $a_i = (x', y_i)$, con $x' \in X$ maximal, en caso contrario. Para y_0 tomamos como cotas inferiores inmediatas dos elementos maximales de X . \square

Analicemos el recíproco de la proposición anterior. Comencemos con el siguiente resultado. Una enumeración $\{a_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de los elementos de X se dice una extensión lineal si $\forall 1 \leq i, j \leq n, a_i \leq a_j$ implica que $i \leq j$.

Proposición 4.2.11. Sean X, Y espacios finitos, $y_0 \in m(Y)$.

- (1) Si $x_0 \in X$ es un beat point, entonces $X *_r Y \searrow_{\downarrow} (X \setminus x_0) *_r Y$.
- (2) Si $y \neq y_0$ es un beat point de Y , entonces $X *_r Y \searrow_{\downarrow} X *_r (Y \setminus y_0)$.

Demostración: Vamos a probar el ítem (1) ya que el ítem (2) se prueba igual y el caso en que $y \in F_{y_0}$ se puede verificar con facilidad. Supongamos sin pérdida de generalidad que x_0 es un down beat point. Tomamos un extensión lineal y_1, \dots, y_l de $C^-(Y \setminus F_{y_0})$. Sea $Y_0 = X *_r Y$, $Y_{i+1} = Y_i \setminus \{(x_0, y_{i+1})\}$. Vamos a ver que $Y_i \searrow_{\downarrow} Y_{i+1}$, luego por inducción $X *_r Y = Y_0 \searrow_{\downarrow} Y_l = (X \setminus \{x_0\}) *_r Y$. Sea $x_1 \prec x_0$ la cota inferior inmediata. Entonces se tiene que $\hat{U}_{(x_0, y_1)}^{Y_0} = U_{(x_1, y_1)}^{Y_0}$, que tiene máximo. Recursivamente, como vamos removiendo los elementos del ordenamiento emparejados con x_0 , $\hat{U}_{(x_0, y_{n+1})}^{Y_n} = U_{(x_1, y_{n+1})}^{Y_n}$. Por ende $Y_n \searrow_{\downarrow} Y_{n+1}$. \square

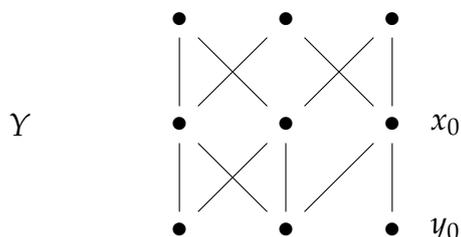
El siguiente resultado se deduce aplicando recursivamente la proposición anterior, teniendo en cuenta lo que dice la Proposición 1.2.7.

Corolario 4.2.12.

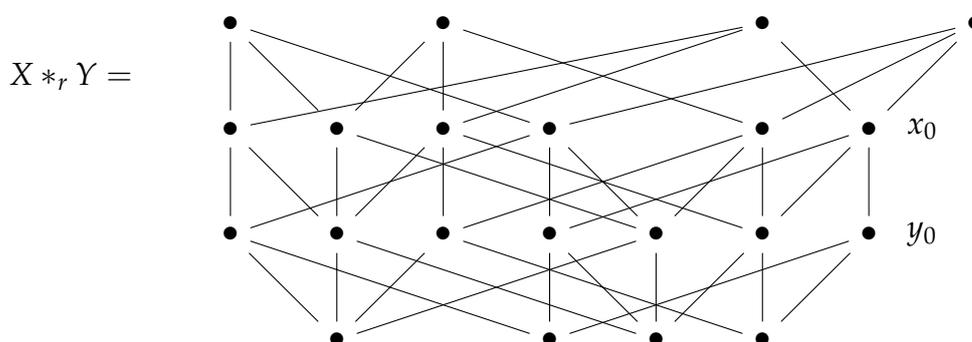
- Si $A \subseteq X$ es un RDF, entonces $X *_r Y \searrow_{\downarrow} A *_r Y$.
- Si $B \subseteq Y$ es un RDF, con $y_0 \in B$, entonces $X *_r Y \searrow_{\downarrow} X *_r B$.

En el corolario previo hay un caso que no se contempla: el caso en que $y_0 \notin B$, con $B \subseteq Y$ RDF. Un inconveniente que surge es que si suponemos que y_0 es un beat point, entonces $X *_r (Y \setminus \{y_0\})$ no tendría sentido, porque removimos el elemento minimal y_0 . Lo que podríamos preguntarnos es qué sucede con $X *_r Y$ cuando Y es contráctil pero $\{y_0\}$ no es un RDF de Y . Vamos a ver que en general el r join no es contráctil en este caso. El espacio Y del siguiente ejemplo fue extraído de [3], página 21.

Ejemplo 4.2.13. Sea $X = \mathbb{S}^0$, y consideramos



Observar que y_0 es el único beat point de Y y se puede ver que Y es contráctil. Al tomar el r join de X con Y respecto de y_0 , obtenemos el siguiente espacio



y_0 es un beat point de $X *_r Y$, pero al removerlo el espacio que nos queda es minimal, por lo que $X *_r Y$ no es contráctil.

Vamos a probar el siguiente resultado.

Teorema 4.2.14. Sean X, Y espacios finitos T_0 , $y_0 \in m(Y)$. Son equivalentes:

- (1) $X *_r Y$ es contráctil .
- (2) X es contráctil ó $Y \searrow_{\rightarrow} \{y_0\}$.

Donde el r join se toma respecto de y_0 .

Vamos a recurrir al siguiente lema

Lema 4.2.15. Sea X minimal y no contráctil, y sea $y_0 \in m(Y)$ el único beat point de un espacio finito Y con al menos dos puntos. Entonces el r join $X *_r Y$ tomado sobre y_0 no es contráctil.

Demostración: Dado que y_0 es minimal, entonces tiene que ser un up beat point. Llamamos $y_1 \in Y$ al único punto tal que $y_0 < y_1$. Como Y no posee otros beat points aparte de y_0 , entonces y_1 es el único posible beat point de $Y \setminus \{y_0\}$, y en caso de que lo sea, es un down beat point. Se puede verificar rápidamente que Y tiene que tener al menos 3 elementos minimales para tener un solo beat point y que éste sea minimal. Observar que $y_0 \in X *_r Y$ también es un up beat point ya que sigue valiendo que y_1 es el único tal que $y_0 < y_1$. Pero como Y tiene varios elementos minimales y X es minimal, entonces usando argumentos

similares a los de la demostración de la Proposición 4.2.10 deducimos que y_0 es el único beat point de $X *_r Y$. Al remover y_0 , los únicos candidatos a beat points son los elementos maximales de la menor copia de X e y_1 , ya que son los únicos puntos que tenían un vínculo directo con y_0 . Como Y tiene al menos 3 elementos minimales, entonces cada elemento maximal de X tiene al menos 2 cotas superiores inmediatas en $X *_r Y \setminus \{y_0\}$ dadas por sus representantes en las copias de $C^-(X)$ asociadas a los elementos minimales restantes de Y . Por otro lado, dado que y_1 no puede ser un up beat point en Y , entonces y_1 no puede ser un up beat point en $Y \setminus \{y_0\}$. Como y_1 no es un beat point de Y , entonces existe $y_2 \in Y \setminus \{y_0\}$ tal que $y_2 \prec y_1$, luego $y_2 \notin F_{y_0}$ (pues $y_1 \succ y_0$), por lo que y_1 tiene al menos 2 cotas inferiores inmediatas en $X *_r Y \setminus \{y_0\}$, provenientes de los elementos maximales de la copia de $C^-(X)$ asociada a y_2 . Luego y_1 no puede ser un beat point de $X *_r Y \setminus \{y_0\}$. Concluimos entonces que $X *_r Y \setminus \{y_0\}$ es minimal, y por ende, $X *_r Y$ no es contráctil. □

Demostremos ahora sí, el Teorema 4.2.14.

La implicación (2) \Rightarrow (1) se deduce del Corolario 4.2.12, en efecto, si $X \searrow \searrow \{x\}$, entonces $X *_r Y \searrow \searrow \{x\} *_r Y$, que es contráctil por ser un cono. Si $Y \searrow \searrow \{y_0\}$, procedemos de manera análoga aplicando el otro ítem del corolario.

Para ver (1) \Rightarrow (2) vamos a suponer que X es un espacio no contráctil y que Y no colapsa a $\{y_0\}$, y vamos a probar que $X *_r Y$ no es contráctil en este caso. Extrayéndole beat points a X obtenemos un core que llamaremos \tilde{X} , mientras que extrayéndole beat points a Y distintos de y_0 obtenemos un espacio \tilde{Y} minimal o que solo tiene a y_0 como beat point. Notar que ambos colapsos tienen más de un punto. Si \tilde{Y} es minimal, entonces por la Proposición 4.2.10 $\tilde{X} *_r \tilde{Y}$ es minimal y en particular no es contráctil. Supongamos que \tilde{Y} no es minimal, entonces por como lo construimos, el único beat point de \tilde{Y} es y_0 , luego por el Lema 4.2.15 se sigue que $\tilde{X} *_r \tilde{Y}$ no es contráctil. Pero por el Corolario 4.2.12 se tiene que

$$X *_r Y \searrow \searrow \tilde{X} *_r \tilde{Y}.$$

Como este último no es contráctil, entonces $X *_r Y$ no lo es. Con eso tenemos demostrado el teorema. □

Usando la Proposición 4.2.10 podemos armar rápidamente ejemplos de lattices reducidos que al aplicarles el r join sobre dos elementos minimales diferentes nos dan espacios con distintos tipos homotópicos. El r join de \mathbb{S}^0 con el espacio X del Ejemplo 2.4.4 nos da un espacio sin beat points independientemente del elemento minimal de X que tomemos para el r join. Sin embargo, dependiendo del punto minimal que tomemos obtendremos r joins con diferente cardinal, por lo que no pueden ser homotópicamente equivalentes.

La importancia del r join es que preserva el tipo homotópico simple del join

no Hausdorff, por lo que el tipo homotópico simple de $X *_r Y$ no depende del elemento minimal de Y tomado.

Proposición 4.2.16. Sean X, Y espacios finitos T_0 , $y_0 \in Y$ minimal, entonces el r join respecto a y_0 de X con Y cumple que

$$X *_r Y \bigwedge_{y_0} X * Y.$$

En particular, el tipo homotópico simple de $X *_r Y$ no depende del punto $y_0 \in m(Y)$ elegido.

Demostración: $X *_r Y$ está determinado por el colímite homotópico del $C^-(Y)$ -diagrama Φ que le asigna a cada elemento $y \in F_{y_0}$ un punto, $\Phi(\min(C^-(Y))) = X$ y al resto de $C^-(Y)$ le asigna una copia de $C^-(X)$. El morfismo $\Phi(\{y_1 \rightarrow y_2\})$ es la inclusión si $y_2 \notin F_{y_0}$, y la función constante en caso contrario. Por el Lema 4.1.5, podemos cambiar cada copia de $C^-(X)$ por un punto sin modificar el tipo homotópico simple. De esto deducimos que $X *_r Y \bigwedge_{y_0} X * Y$. □

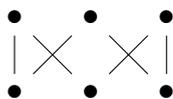
Aplicación: Podemos generar espacios homotópicamente triviales no contráctiles a partir de un espacio contráctil Y con un único beat point minimal y_0 como el dado en el Ejemplo 4.2.13. La idea es tomar el r join de un espacio finito no contráctil X con Y sobre y_0 . Como Y no colapsa a y_0 , entonces por el Teorema 4.2.14 se tiene que $X *_r Y$ no es contráctil, sin embargo por la proposición anterior $X *_r Y \bigwedge_{y_0} X * Y$, que es contráctil porque Y lo es. Luego $X *_r Y$ es homotópicamente trivial y no es contráctil.

4.3 Esferas y suspensiones reducidas

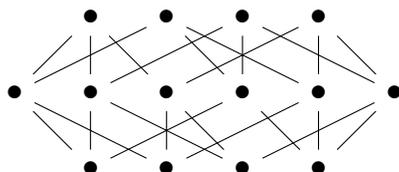
Aplicando recursivamente el r join introducido en la sección anterior al espacio de dos puntos \mathbb{S}^0 obtenemos modelos de esferas que son lattices reducidos, que llamaremos esferas reducidas. Estas esferas son espacios conocidos, de hecho son el poset de caras del borde de un símplex. Las esferas reducidas tienen más puntos que los modelos minimales de las esferas estudiados en [4], pero estos posets son lattices reducidos a diferencia de los modelos minimales. Utilizando las esferas reducidas y el r join construiremos una noción de suspensión para lattices reducidos que tiene el mismo tipo homotópico simple que la suspensión no Hausdorff y que satisface que la suspensión de un lattice reducido es un lattice reducido.

Definición 4.3.1. Sea $n \in \mathbb{N}_0$, la esfera reducida de dimensión n es el poset $\mathbf{S}^n = \mathcal{X}(\partial\sigma)$, donde σ es un $(n + 1)$ -símplex.

Ejemplo 4.3.2. Para $n = 1$, tenemos que \mathbf{S}^1 viene dado por



Por otro lado, \mathbf{S}^2 es el siguiente espacio



Observación 4.3.3. Sea $n \in \mathbb{N}_0$, entonces \mathbf{S}^n es el lattice reducido que se obtiene de aplicar recursivamente el r join sobre el espacio de dos puntos \mathbb{S}^0 : $\mathbf{S}^0 = \mathbb{S}^0$, y para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{S}^n = \mathbf{S}^{n-1} *_r \mathbb{S}^0$.

Por la observación anterior y por la asociatividad del r join, se tiene que $\mathbf{S}^n = \mathbf{S}^l *_r \mathbf{S}^r$, con r, l números naturales tales que $r + l = n - 1$.

Dado que el r join es un modelo minimal del join para lattices reducidos que preserva la propiedad de ser un lattice reducido, entonces las esferas reducidas resultan ser modelos bastante pequeños de una esfera que es un lattice reducido. El cardinal de \mathbf{S}^n es $2^{n+2} - 2$. Observar sin embargo, que este número de puntos es mucho más grande que el cardinal del modelo minimal de \mathbb{S}^n (ver [4]) que tiene solo $2n + 2$ puntos.

Es bien sabido que el borde de un $(n + 1)$ -símplex es la triangulación con menor cantidad de vértices y de símplexes de un modelo de \mathbb{S}^n . Vamos a ver que \mathbf{S}^n es un lattice reducido que es modelo de \mathbb{S}^n con la menor cantidad de elementos minimales posible y además, dentro de los modelos de lattices reducidos con esa cantidad de elementos minimales, \mathbf{S}^n es el de menor cardinal.

Dado un poset finito X y $n \in \mathbb{N}$, decimos que un elemento $x \in X$ tiene altura cero, y notamos $h(x) = 0$, si $x \in m(X)$. Recursivamente decimos que x tiene altura n , o bien $h(x) = n$, si $h(x)$ no es j para $j < n$ y si x es estrictamente mayor solo a elementos que se encuentran a altura menor.

Notar que si X es un lattice reducido de altura n , es decir, que posee elementos de altura a lo sumo n y al menos uno que tenga altura n , entonces $H_k(X) = 0 \forall k > n$. Recordar que $T(X)$ es el complejo simplicial cuyos vértices son los elementos minimales de X y sus símplexes son los subconjuntos de $m(X)$ acotados superiormente.

Proposición 4.3.4. Sea $n \in \mathbb{N}_0$, si L es un lattice reducido que es un modelo de \mathbb{S}^n , entonces $\#m(L) \geq n + 2$. Si $\#m(L) = n + 2$ y L es un modelo sin beat points, entonces L es homeomorfo a \mathbf{S}^n .

Demostración: Veamos que $\#m(L) \geq n + 2$. Como L tiene al menos la misma cantidad de elementos minimales que su core, podemos suponer sin pérdida de generalidad que L no tiene beat points. Como $H_n(L) = H_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$, entonces

L tiene que tener un elemento de altura n , al que llamaremos x . Como L no tiene beat points, entonces $s(L) = L$, por lo que $x = \sup(A)$, con $A \subseteq m(L)$. Podemos tomar $A = m(x)$. Como x está a altura n , entonces existe una secuencia $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_n = x$. Sea $A_i = m(x_i)$. Entonces tenemos una secuencia

$$A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \dots \subsetneq A_n = A$$

Esto último nos dice que $\#A \geq n + 1$. Dado que $m(L)$ no puede estar acotado superiormente y A sí lo está, entonces $m(L) \supsetneq A$, de donde concluimos que $\#m(L) \geq n + 2$.

Supongamos ahora que $\#m(L) = n + 2$, y que L es un lattice reducido sin beat points que es un modelo de \mathbb{S}^n . De existir $g \subset m(L)$ de cardinal $n + 1$ no acotado superiormente, se tendría que $T(L)$ es un subcomplejo propio de una esfera de dimensión n , entonces $H_n(L) = H_n(T(L)) = 0$, luego L no es un modelo de \mathbb{S}^n . Supongamos entonces que tal g no existe. Los supremos de los subconjuntos de $n + 1$ elementos minimales tienen que definir, cada uno, un elemento distinto de $M(L)$, ya que $m(L)$ no puede estar acotado superiormente. De esto se deduce que dos subconjuntos propios de $m(L)$ distintos dan diferentes elementos de L al tomar supremo. Por lo tanto L es homeomorfo al poset de subconjuntos propios de $m(L)$ acotados por la inclusión, es decir, \mathbf{S}^n . □

Observar que en la demostración de la proposición anterior solo usamos que $H_n(\mathbb{S}^n) \neq 0$, luego, si X es un lattice reducido tal que $H_k(X) \neq 0$ para cierto $k \in \mathbb{N}$, entonces X tiene al menos $k + 2$ elementos minimales, y al menos $k + 3$ si X no es un modelo de una esfera.

Del concepto de esfera reducida surge la definición de suspensión reducida que nos será útil más adelante.

Definición 4.3.5. Sea X un espacio finito T_0 y $n \in \mathbb{N}$. La n -ésima suspensión reducida de X es el espacio $X *_r \mathbf{S}^{n-1}$. La notamos $\mathbf{S}^n(X)$.

Observación 4.3.6. Por la Proposición 4.2.16, sabemos que $\mathbf{S}^n(X) \bigwedge \Sigma^n(X)$, donde con $\Sigma^n(X)$ nos referimos al espacio que se obtiene de X al aplicar suspensión no Hausdorff n veces. Notar que la definición de suspensión reducida no depende del elemento minimal tomado para calcular el r join.

Observar que si X es un lattice reducido, entonces por la Proposición 4.2.8, tenemos que $\mathbf{S}^n(X)$ también es un lattice reducido $\forall n \in \mathbb{N}_0$, donde $\mathbf{S}^0(X)$ es X .

Proposición 4.3.7. Sea X un lattice reducido, $n \in \mathbb{N}_0$, entonces los duales $d_m(X)$ y $d_m(\mathbf{S}^n(X))$, tomados sobre sus respectivos subconjuntos de elementos minimales, son homeomorfos entre sí. Además, X_m^* es homeomorfo a $(\mathbf{S}^n(X))_m^*$.

Demostración: Supongamos que $n \neq 0$ ya que en ese caso no hay nada que hacer. Vamos a ver que $B_m(X) = B_m(\mathbf{S}^n(X))$, por lo que los duales de Alexander (y en particular los alternativos) van a ser homeomorfos. Vamos a tomar

el r join con $a_0 \in m(\mathbf{S}^{n-1})$. El único subconjunto de $m(\mathbf{S}^{n-1})$ no acotado superiormente en \mathbf{S}^{n-1} es $m(\mathbf{S}^{n-1})$, luego todo subconjunto de $m(\mathbf{S}^{n-1}) \setminus \{a_0\}$ está acotado superiormente en $\mathbf{S}^{n-1} \setminus F_{a_0}$. Los únicos subconjuntos de $m(X *_r \mathbf{S}^{n-1})$ no acotados superiormente son los conjuntos $h = h_1 \sqcup h_2$, con $h_1 \subseteq m(X)$ no acotado superiormente y $h_2 \subseteq m(\mathbf{S}^{n-1}) \setminus \{a_0\}$ tal que $h_2 \cup \{a_0\} \subseteq \mathbf{S}^{n-1}$ no está acotado superiormente. Notar que los subconjuntos h_2 descritos en la oración anterior tienen que ser necesariamente $m(\mathbf{S}^{n-1}) \setminus \{a_0\}$, luego $A_m(\mathbf{S}^n(X)) = \{h \cup m(\mathbf{S}^{n-1}) \setminus \{a_0\}\}_{h \in A_m(X)}$. Al tomar complemento en $m(\mathbf{S}^{n-1}) \setminus \{a_0\} \cup m(X)$ obtenemos que $B_m(\mathbf{S}^n(X)) = B_m(X)$, como queríamos. \square

4.4 Caracterización de los duales alternativos

En esta sección vamos a comparar cómo es el dual alternativo de un lattice reducido X sobre un conjunto de vértices V respecto a cómo es el dual sobre su conjunto de elementos minimales $m(X)$.

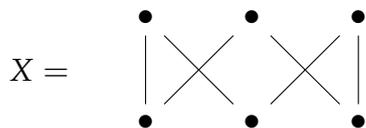
Vamos a utilizar como motivación lo que sucede en el contexto de complejos simpliciales. En el siguiente lema, probado por Capitelli y Minian en [14], K es un complejo simplicial y $V \supseteq K^0$ es un conjunto de vértices.

Lema 4.4.1. *Si $V = \tau \sqcup K^0$, notamos K^* al dual de Alexander de K respecto de K^0 , y K^τ al dual de Alexander de K respecto de V , entonces:*

- (1) $K^\tau = \partial\tilde{\tau} * \Delta K + \tilde{\tau} * K^*$, donde la suma denota a la suma simplicial.
- (2) Si K no es un simplex o τ tiene dimensión ≥ 1 , entonces $(K^\tau)^0 = K^0 \cup \tau$. Sino $(K^\tau)^0 = K^0$.
- (3) Si K no es un simplex, entonces $K^\tau \simeq \Sigma^t(K^*)$ para algún $t \geq 0$, donde Σ^t denota a la t -ésima suspensión.

El primer inciso del lema muestra como es el dual de K sobre V comparado al dual sobre K^0 , la segunda parte nos muestra cuales son los vértices del dual respecto a V y la tercera compara los tipos homotópicos de los duales. Nuestro objetivo será primero determinar como es el dual de un lattice reducido respecto a un conjunto de vértices V expresándolo en una fórmula como en el ítem (1). Las esferas reducidas que estudiamos en la sección anterior jugarán un rol importante en esta caracterización. Una vez concluida la caracterización podremos determinar con facilidad cuales son los elementos minimales del dual y el tipo homotópico simple del mismo.

Ejemplo 4.4.2. Recordemos algunos duales que ya analizamos



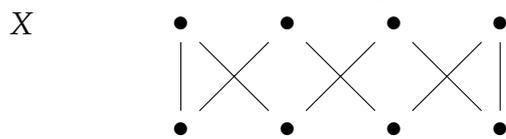
$d_m(X) = \emptyset$. Sea ahora $V \supseteq m(X)$ un conjunto de vértices de 4 puntos, entonces sabemos que $d_V(X) = \mathbb{S}^0 = \Sigma(\emptyset)$. Por otro lado, si $\tilde{V} \supseteq V$ es un conjunto de vértices de 5 puntos, entonces



luego $d_{\tilde{V}}(X) \overset{we}{\approx} \Sigma(\mathbb{S}^0) = S^1$, el modelo de \mathbb{S}^1 de 4 puntos (ver [4]).

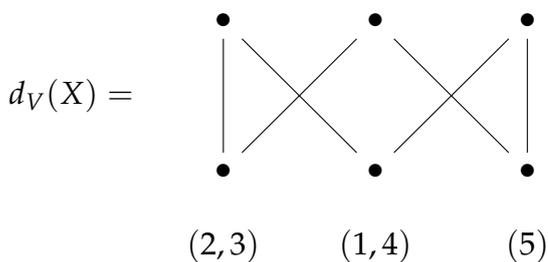
Hagamos otro ejemplo un poco más interesante

Ejemplo 4.4.3. tomamos el espacio del Ejemplo 2.2.3



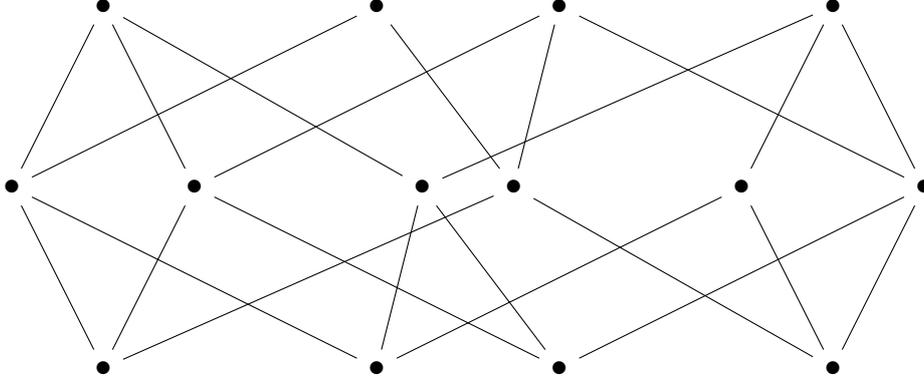
El dual de este espacio respecto al conjunto de sus elementos minimales nos da el espacio de dos puntos \mathbb{S}^0 . Calculemos el dual respecto a un conjunto de vértices de 5 puntos $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, donde 5 es el punto extra agregado. En este caso $A_V(X) = \{(1, 4); (2, 3); (5)\}$, luego

$B_V(X) = \{(2, 3, 5); (1, 4, 5); (1, 2, 3, 4)\}$. Por lo que el dual respecto a V nos da

$$(1, 2, 3, 4) \quad (2, 3, 5) \quad (1, 4, 5)$$


Entonces $d_V(X) \overset{we}{\approx} S^1 = \Sigma(\mathbb{S}^0)$. Tomamos ahora $\tilde{V} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ otro conjunto de vértices, y calculemos el dual de X respecto a \tilde{V} .

Tenemos que $A_{\tilde{V}}(X) = \{(1, 4); (2, 3); (5); (6)\}$, y $B_{\tilde{V}}(X) = \{(2, 3, 5, 6); (1, 4, 5, 6); (1, 2, 3, 4, 6); (1, 2, 3, 4, 5)\}$. El dual nos queda así



Este espacio es \mathbf{S}^2 , luego tiene el tipo homotópico débil de S^2 , es decir, la doble suspensión de $\mathbb{S}^0 = d_m(X)$.

En general, vamos a probar que $d_V(X)$ tiene el tipo homotópico simple de $\Sigma^n(d_m(X))$, con $V \supseteq m(X)$ un conjunto de vértices tal que $\#(V \setminus m(X)) = n$. Esto es un análogo del tercer ítem del Lema 4.4.1. De hecho, vamos a probar que bajo esas condiciones $d_V(X) = \mathbf{S}^n(d_m(X))$, donde recordemos que $\mathbf{S}^n(d_m(X)) = d_m(X) *_r \mathbf{S}^{n-1}$, o sea, es el r -join con la $(n-1)$ -ésima esfera reducida, tomado sobre cualquier elemento minimal de ésta.

Recordemos que por la Observación 3.2.2, $d_m(X)$ tiene mínimo si y solo si $T(X)$ es un cono, y en particular X es contráctil.

Teorema 4.4.4. *Sea X un lattice reducido tal que $s(X)$ no tiene máximo, sea $V \supseteq m(X)$ un conjunto de vértices de X tal que $\#(V \setminus m(X)) = n > 0$. Entonces, si $d_m(X)$ no tiene mínimo, se tiene que $d_V(X) = \mathbf{S}^n(d_m(X))$. Si $d_m(X)$ tiene mínimo, entonces $d_V(X) = d_m(X) \times C^-(\mathbf{S}^{n-1} \setminus F_{s_0}) \cup F_{s_0}$, donde s_0 es un elemento minimal de la esfera. En otras palabras, el dual en ese caso da lo mismo que antes pero removiendo el mínimo de cada copia de $C^-(d_m(X))$. En particular, si $d_m(X)$ tiene mínimo, entonces $d_V(X)$ también.*

Demostración: Recordar que $A_V(X) = \overline{A_m(X) \cup V \setminus m(X)}$. Tomando complemento en V , obtenemos que $B_V(X) = \overline{B_m(X)} \cup L$, donde L es el conjunto de subconjuntos propios de V que se obtienen de V removiendo un elemento de $V \setminus m(X)$. Con $\overline{B_m(X)}$ notamos al conjunto de subconjuntos propios de V que se obtienen de tomar un elemento de $B_m(X)$ y añadirle $V \setminus m(X)$.

Obtendremos $d_V(X)$ intersecando los subconjuntos de $B_V(X)$. Intersecando a los subconjuntos de L obtenemos a todos los subconjuntos propios de V que contienen a $m(X)$, llamemos a este conjunto de subconjuntos J . Intersecando los elementos de $\overline{B_m(X)}$ obtenemos una copia de $d_m(X)$ asociada al conjunto $V \setminus m(X)$.

Supongamos que $d_m(X)$ no tiene mínimo. La intersección de los elementos de la copia del dual asociada a $V \setminus m(X)$ tiene un mínimo, $V \setminus m(X)$. Al intersecar esta copia con cada elemento $A \in J$ obtendremos una copia del dual de X

con máximo A y mínimo $A \setminus m(X)$ (a menos que $A = m(X)$). De esta forma se tiene que $d_V(X) = X *_r \mathbb{S}^{n-1}$, donde el r join se toma respecto de un elemento minimal de \mathbb{S}^{n-1} que representa al máximo de la copia asociada a $m(X)$. Por lo tanto $d_V(X) = \mathbf{S}^n(d_m(X))$, como buscábamos.

Falta ver el caso en que $d_m(X)$ tiene mínimo. Dado que la intersección de los elementos de $B_m(X)$ da no vacía, entonces cada copia del dual no va a tener mínimo agregado y la misma expresión que antes caracteriza al dual, pero removiéndole el mínimo agregado en cada copia. En particular $d_V(X)$ tiene mínimo y se nombra igual que el mínimo de $d_m(X)$. □

Corolario 4.4.5. *Sea X lattice reducido tal que $s(X)$ no tiene máximo y sea $V \subseteq m(X)$ un conjunto de vértices tal que $\#(V \setminus m(X)) = n > 0$, entonces si $d_m(X)$ no tiene mínimo, tenemos que $d_V(X) \bigwedge_{\Delta} \Sigma^n(d_m(X))$. Si $d_m(X)$ tiene mínimo, entonces $d_V(X)$ también lo tiene.*

Demostración: El caso en que $d_m(X)$ tiene mínimo quedó demostrado en la proposición anterior, si $d_m(X)$ no tiene mínimo, entonces por esa misma proposición

$$d_V(X) = \mathbf{S}^n(d_m(X)) = d_m(X) *_r \mathbf{S}^{n-1}.$$

Dado que el r join de dos espacios finitos tiene el mismo tipo homotópico simple que el join no Hausdorff (ver Proposición 4.2.16) y teniendo en cuenta que las esferas reducidas se obtienen de aplicar sucesivos r join a \mathbb{S}^0 , entonces

$$d_m(X) *_r \mathbf{S}^{n-1} \bigwedge_{\Delta} d_m(X) *_r \mathbf{S}^{n-1} = \Sigma^n(d_m(X))$$

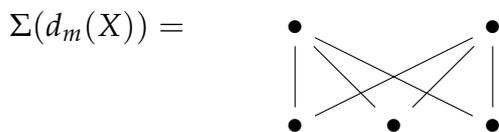
como queríamos. □

El siguiente ejemplo muestra que en general no se puede pedir que la equivalencia que probamos, que en principio es una equivalencia simple, sea una equivalencia homotópica. Esto es una consecuencia de que el r join no preserva en general el tipo homotópico del join no Hausdorff.

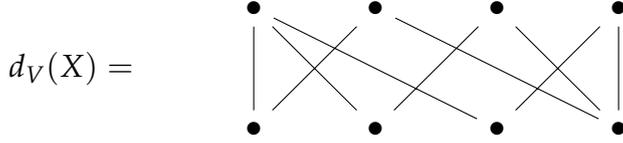
Ejemplo 4.4.6. Miramos este espacio de 3 puntos, con $V = \{1, 2, 3, 4\}$.



Por un lado, $d_m(X) = X$, como se verifica fácilmente, entonces



Pero $B_V(X) = \{(1, 4); (2, 4); (3, 4); (1, 2, 3)\}$. Así que



$d_V(X)$ no es homotópicamente equivalente a $\Sigma(d_m(X))$ porque son espacios minimales distintos.

Juntando las Proposiciones 4.3.7 y 4.4.4, podemos concluir que todos los dobles duales son homeomorfos, esto es, dado un lattice reducido X al que le podemos calcular el dual (y por lo tanto, el doble dual) y dados $V_1, V_2 \supseteq m(X)$ conjuntos de vértices, entonces $d_{V_1}^2 = d_{V_2}^2$, donde el segundo dual se toma sobre un conjunto de vértices de igual cardinal que el primero.

Recordar que el doble dual de Alexander de un lattice reducido X sobre un conjunto de vértices V es siempre $\mathcal{X}(T(X))$, por ende esta propiedad también vale para el dual de Alexander.

Proposición 4.4.7. *Sea X un lattice reducido tal que $s(X)$ no tiene máximo, entonces para todo conjunto de vértices $V \supseteq m(X)$ se tiene que $d_V^2(X) = d_m^2(X)$, donde el segundo dual se toma sobre conjuntos $\tilde{V} \supseteq m(d_V(X))$, $\tilde{m} \supseteq m(d_m(X))$, con $\#\tilde{V} = \#V$ y $\#\tilde{m} = \#m(X)$.*

Notación 4.4.8. al doble dual de un lattice reducido X lo llamamos $d^2(X)$, que se obtiene de aplicar 2 veces el dual sobre conjuntos de vértices del mismo cardinal.

Demostración: Sea $a = \#(m(d_m(X)))$, $a_1 = \#(m(X)) - \#(m(d_m(X)))$ y $a_2 = \#(V \setminus m(X))$. Cada elemento de $V \setminus m(X)$ representa un elemento de $m(d_V(X))$ que no está en $m(d_m(X))$, por lo que $\#(m(d_V(X))) = a + a_2$ y $\#V = a + a_1 + a_2 = \#\tilde{V}$, que es el conjunto de vértices en el que tomamos el segundo dual. Por otro lado, $\#(m(X)) = a + a_1 = \#\tilde{m}$. Se tiene entonces que $\#(\tilde{V} \setminus m(d_V(X))) = \#(\tilde{m} \setminus m(d_m(X))) = a_1$. Por la Proposición 4.4.4, tenemos que

$$d_m^2(X) = d_{\tilde{m}}(d_m(X)) = \mathbf{S}^{a_1}(d_m(d_m(X))),$$

mientras que

$$d_V^2(X) = d_{\tilde{V}}(d_V(X)) = \mathbf{S}^{a_1}(d_m(\mathbf{S}^{a_2}(d_m(X)))) = \mathbf{S}^{a_1}(d_m(d_m(X))),$$

donde la última igualdad se deduce de la Proposición 4.3.7. Con eso concluimos que todos los dobles duales son homeomorfos entre sí. \square

Capítulo 5

Reducciones en un punto y dualidad

En este capítulo analizaremos como cambia el tipo homotópico del dual de un lattice reducido X al remover beat points y weak points. Recordemos que un espacio topológico Y tiene el mismo tipo homotópico que X si Y se obtiene de X agregando y quitando beat points. Y tiene el mismo tipo homotópico simple que X si agregándole y quitándole weak points a X obtenemos Y . Lo que vamos a analizar es bajo qué condiciones el tipo homotópico simple del dual de Alexander de un lattice reducido se preserva al hacer estos cambios en el espacio original.

El problema que surge al analizar lo que sucede si le removemos a X beat points lo llamaremos beat problem, y lo trataremos durante la primer sección de este capítulo. En esa sección probaremos además que el doble dual de un lattice reducido X es simplemente equivalente a X . Utilizando la teoría del capítulo 3, daremos ejemplos de espacios contráctiles cuyo dual es homotópicamente trivial pero que no tiene ningún beat point. En las otras secciones compararemos los duales de dos lattices reducidos X e Y que son simplemente equivalentes. A este problema lo llamaremos weak problem. En la segunda sección analizamos el caso especial en el que Y se obtiene de X al remover un solo weak point, problema que llamaremos little weak problem. En la tercer sección analizaremos el weak problem general y en la cuarta sección compararemos los duales de Alexander de un lattice reducido X con su opuesto, lo que llamamos problema del opuesto. Algunas ideas de este capítulo fueron inspiradas de [28] y [32].

5.1 El Beat problem

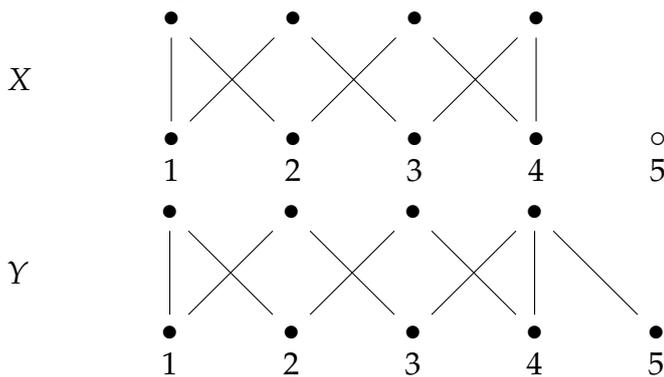
Vimos en la Proposición 3.2.7 que, pidiendo condiciones específicas, $d^2(X) = X$ para un lattice reducido X . Además vimos que en general el doble dual de X no es homotópicamente equivalente a X , como lo muestra el Ejemplo 3.2.10. En esta sección vamos a probar que el doble dual de X sí posee el tipo homotópico simple de X .

En el caso del dual de Alexander, tenemos que $X_V^{**} = \mathcal{X}(T(X)) \simeq X$. Además, como $d_V(X) = i(X_V^*)$, se tiene que $d^2(X) = d_{\tilde{V}}(i(X_V^*))$, con $\#V = \#\tilde{V}$. Dado que $i(X_V^*)$ es homotópicamente equivalente a X_V^* , y teniendo en cuenta que $d_{\tilde{V}}(X_V^*) = i(X_V^{**}) = i(\mathcal{X}(T(X))) \searrow_{\sim} X$, entonces podríamos plantearnos, para intentar probar que el doble dual de un espacio X tiene el tipo homotópico simple que X , la siguiente pregunta:

Si X e Y son lattices reducidos homotópicamente equivalentes, ¿son sus duales simplemente equivalentes?

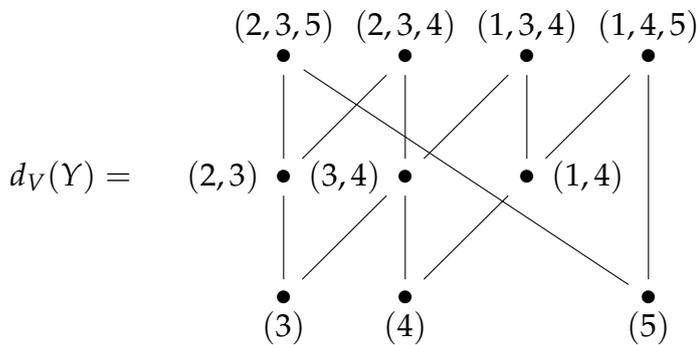
Notar es que la pregunta hecha de esta forma no tiene suficiente precisión, ya que no estamos aclarando sobre que conjuntos tomamos el dual. El siguiente ejemplo puede ayudar a clarificar la situación. Recordemos que si X es un lattice reducido y $V \supseteq m(X)$ es un conjunto de vértices, entonces $A_V(X)$ es el conjunto de subconjuntos de V minimales con la propiedad de no ser subconjuntos de $m(X)$ acotados superiormente, mientras que $B_V(X)$ son los subconjuntos de V que son el complemento de un elemento de $A_V(X)$.

Ejemplo 5.1.1. Sea $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ un conjunto de vértices, comparamos los duales de los espacios X e Y dados por



Recordemos que $d_m(X) = \bullet \quad \bullet$. Por el Corolario 4.4.5, $d_V(X) \searrow_{\sim} \Sigma(d_m(X)) = S^1$. Donde con S^1 notábamos al modelo minimal de S^1 .

Por otro lado, $A_V(Y) = \{(1, 4); (1, 5); (2, 3); (2, 5)\}$, por lo que $B_V(Y) = \{(2, 3, 5); (2, 3, 4); (1, 4, 5); (1, 3, 4)\}$, y entonces



Este espacio tiene poco que ver con el espacio de dos puntos $d_m(X)$, de hecho, es conexo. Usando la versión para lattices del Teorema de Osaki (Corolario

$$1.3.11), \text{ obtenemos que } d_V(Y) \frown \searrow d_V(Y)/F_3 = \begin{array}{c} \bullet & \times & \bullet \\ | & & | \\ \bullet & & \bullet \\ | & & \\ \bullet & & \end{array} \frown \searrow S^1 \frown \searrow d_V(X)$$

Del ejemplo deducimos que Y , que colapsa fuertemente a X , posee un dual simplemente equivalente al de X no cuando tomamos el dual sobre sus respectivos conjuntos de elementos minimales, sino cuando tomamos el dual de X sobre un conjunto de vértices de igual cardinal que el de Y . Nuestra pregunta inicial puede ser reformulada entonces de la siguiente manera:

Beat problem: Si X e Y son lattices reducidos homotópicamente equivalentes, dados $V \supseteq m(X)$, $\tilde{V} \supseteq m(Y)$ conjuntos de vértices de X e Y respectivamente tales que $\#V = \#\tilde{V}$. ¿Son entonces $d_V(X)$ y $d_{\tilde{V}}(Y)$ simplemente equivalentes?

Vamos a comenzar comparando el dual de X con el de $X \setminus \{x_0\}$, donde $x_0 \in X$ es un beat point. Hay que separar entre dos posibles casos: el caso en que al remover x_0 no cambian los puntos minimales y el caso en que sí cambian. Notar que si x_0 no es minimal entonces no se produce ninguna modificación en $m(X)$ al remover x_0 , mientras que si x_0 sí es minimal podríamos obtener un nuevo elemento minimal y_0 para $X \setminus \{x_0\}$, donde $y_0 \succ x_0$. Para que esto suceda, y_0 tendría que ser un down beat point, pues no podría ser mayor a otro elemento minimal. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 5.1.2. Sea X un lattice reducido, $x_0 \in X$ un beat point. Decimos que $x_0 \in X$ es distinguido si $x_0 \in m(X)$ y $x_0 \prec y_0$, donde y_0 no es un down beat point. Decimos que x_0 no es distinguido en caso contrario.

El siguiente resultado fue demostrado originalmente en [32]. Recordemos que si K es un complejo simplicial y $v \in K$ es un vértice, entonces con $K \setminus v$ notamos al complejo simplicial que se obtiene de K removiendo todos los símlices a los que v pertenece.

Proposición 5.1.3. Sea X un lattice reducido, $x_0 \in X$ un beat point, entonces

$T(X) \searrow T(X \setminus \{x_0\})$ si x_0 es distinguido, y $T(X) = T(X \setminus \{x_0\})$ en caso contrario.

Demostración: Empecemos suponiendo que x_0 no es distinguido. Sea y_0 el punto tal que $x_0 \prec y_0$ (si x_0 es up beat point) ó $x_0 \succ y_0$ (si x_0 es down beat point). Notar que todo subconjunto de $m(X)$ que tenga a x_0 como cota superior también tiene a y_0 como cota superior. Si x_0 no es minimal, se tiene entonces que $T(X) = T(X \setminus \{x_0\})$. Si x_0 es minimal, como no es distinguido, entonces y_0 es un down beat point (no distinguido), y es fácil ver que $X \setminus \{x_0\}$ es homeomorfo a $X \setminus \{y_0\}$. Luego por el caso anterior $T(X) = T(X \setminus \{y_0\}) = T(X \setminus \{x_0\})$.

Veamos ahora el caso en que x_0 es distinguido, con $x_0 \prec y_0$. En este caso $m(X \setminus \{x_0\}) = m(X) \setminus \{x_0\}$. Queremos ver que $T(X) \searrow T(X \setminus \{x_0\}) = T(X) \setminus x_0$, es decir, que $lk_{T(X)}(x_0)$ es un cono simplicial. Como y_0 no es un down beat point, existe $z_0 \in m(X \setminus \{x_0\})$ con $z_0 < y_0$. Si $r \subseteq m(X \setminus \{x_0\})$ es tal que $r \cup \{x_0\}$ es acotado superiormente, se tiene que cualquier cota superior es mayor o igual que y_0 , luego $r \cup \{z_0\}$ es acotado superiormente, por ende, $lk(x_0) = z_0 * (lk(x_0) \setminus z_0)$, que es un cono, como queríamos ver. □

Notar que si K es un complejo simplicial y $K \searrow L$, entonces $K^* \nearrow L^*$, donde los duales se toman sobre la misma esfera. En efecto, al remover una cara libre agregamos una cara libre al dual de Alexander. Esta observación fue hecha originalmente por Dong en [16].

Corolario 5.1.4. Si X es un lattice reducido y $x_0 \in X$ es un beat point, entonces $X_V^* \nearrow (X \setminus \{x_0\})_{\tilde{V}}^*$, donde $\#V = \#\tilde{V}$. En particular, como $X_V^* \searrow d_V(X)$ y $(X \setminus \{x_0\})_{\tilde{V}}^* \searrow d_{\tilde{V}}(X \setminus \{x_0\})$, tenemos que $d_V(X) \frown d_{\tilde{V}}(X \setminus \{x_0\})$.

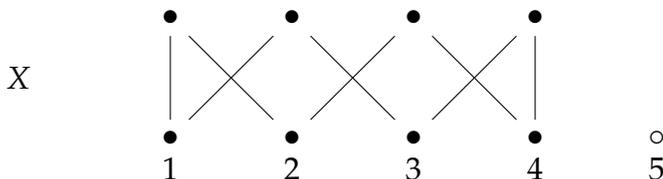
Demostración: $X_V^* = \mathcal{X}(T(X))^*$, como $T(X) \searrow T(X \setminus \{x_0\})$, entonces $(T(X))^* \nearrow (T(X \setminus \{x_0\}))^*$, lo que implica, por el Teorema 1.2.41, que $X_V^* = \mathcal{X}(T(X))^* \nearrow \mathcal{X}(T(X \setminus \{x_0\}))^* = (X \setminus \{x_0\})_{\tilde{V}}^*$, como queríamos ver. □

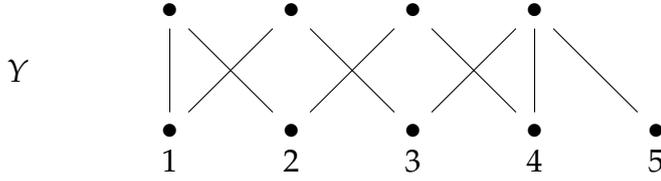
Aplicando recursivamente el resultado previo obtenemos

Corolario 5.1.5. Si X, Y son lattices reducidos, con $X \searrow Y$, entonces $d_V(X) \frown d_W(Y)$ y $X_V^* \nearrow Y_W^*$, donde V y W son conjuntos de vértices del mismo cardinal.

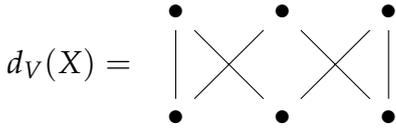
Si A colapsa fuertemente a B , entonces el dual de Alexander de A se expande al de B . Esto para duales alternativos no vale en general.

Ejemplo 5.1.6. Sean X, Y los espacios del Ejemplo 5.1.1

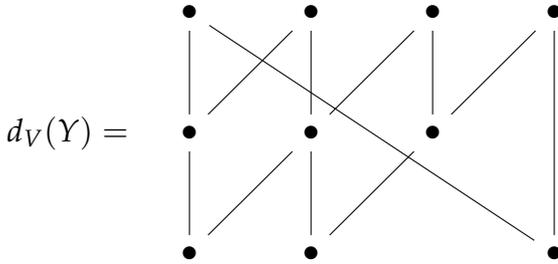




Sea $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, por un lado,



Mientras que



$Y \searrow X$ pero $d_V(Y)$ no se expande a $d_V(X)$, de hecho tiene más puntos.

Del Corolario 5.1.5 tenemos importantes consecuencias. Teniendo en cuenta lo que afirma el Lema 3.2.1, el doble dual de un lattice reducido siempre se puede calcular sobre conjuntos de vértices distintos al de su conjunto de elementos minimales. Además el doble dual no depende del conjunto de vértices tomado por lo que dice la Proposición 4.4.7.

Teorema 5.1.7. *Sea X un lattice reducido, entonces $d^2(X) \searrow X$, donde el dual se toma sobre un conjunto $V \supseteq m(X)$ si $m(X)$ está acotado superiormente.*

Demostración: Dado que $X_V^* \searrow d_V(X)$, entonces aplicando el corolario anterior se sigue que $d^2(X) = d_{\tilde{V}}(d_V(X)) \searrow d_{\tilde{V}}(X_V^*) = i((X_V^*)_{\tilde{V}}^*) \nearrow (X_V^*)_{\tilde{V}}^* = X_V^{**} = \mathcal{X}(T(X)) \searrow X$. Notar que el segundo dual de Alexander tiene sentido porque $\#(m(X_V^*)) \leq \#V = \#\tilde{V}$.

□

Teorema 5.1.8. *Sean X, Y lattices reducidos homotópicamente equivalentes, entonces si $\#V = \#W$, con $V \supseteq m(X)$ y $W \supseteq m(Y)$ conjuntos de vértices, se tiene que $d_V(X) \searrow d_W(Y)$.*

Demostración: Como X e Y son homotópicamente equivalentes, entonces $X_c = \text{core}(X)$ es homeomorfo a $Y_c = \text{core}(Y)$. Sea Z un conjunto de vértices de X_c que también lo vemos como conjunto de vértices de Y_c , y tal que $\#Z = \#V = \#W$. Dado que $X \searrow X_c = Y_c \nearrow Y$, por el Corolario 5.1.5 se concluye que

$$d_V(X) \searrow d_Z(X_c) = d_Z(Y_c) \searrow d_W(Y).$$

□

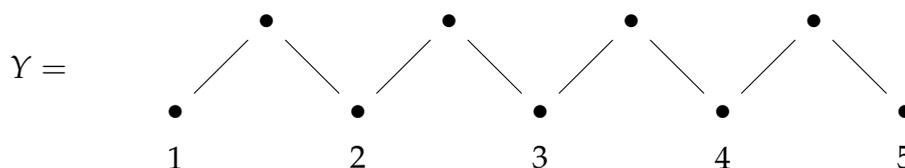
Del Teorema 5.1.8 podemos concluir que los duales de Alexander de dos espacios homotópicamente equivalentes sobre conjuntos de vértices del mismo cardinal son simplemente equivalentes. Respecto al Teorema 5.1.7 no solo tenemos que el doble dual de Alexander de X , $\mathcal{X}(T(X))$, es simplemente equivalente a X , sino que es homotópicamente equivalente, como lo vimos en la observación 2.2.1.

Del Teorema 5.1.8 tenemos la siguiente consecuencia

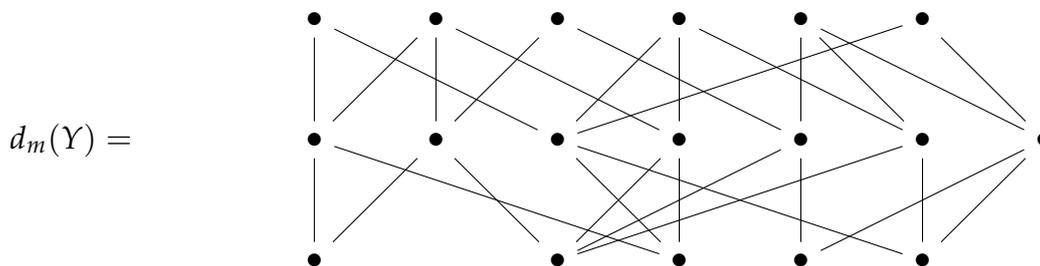
Proposición 5.1.9. *Sea X lattice reducido contráctil, entonces $d_V(X)$ es homotópicamente trivial para cualquier $V \subseteq X$, donde V puede ser $m(X)$ si éste no está acotado superiormente.*

Demostración: Notar que $d_V(\{*\}) = C^-(\mathbf{S}^{n-3})$, si $n \geq 3$, donde $n = \#V$, y si $n = 2$, $d_V(\{*\}) = \{*\}$. □

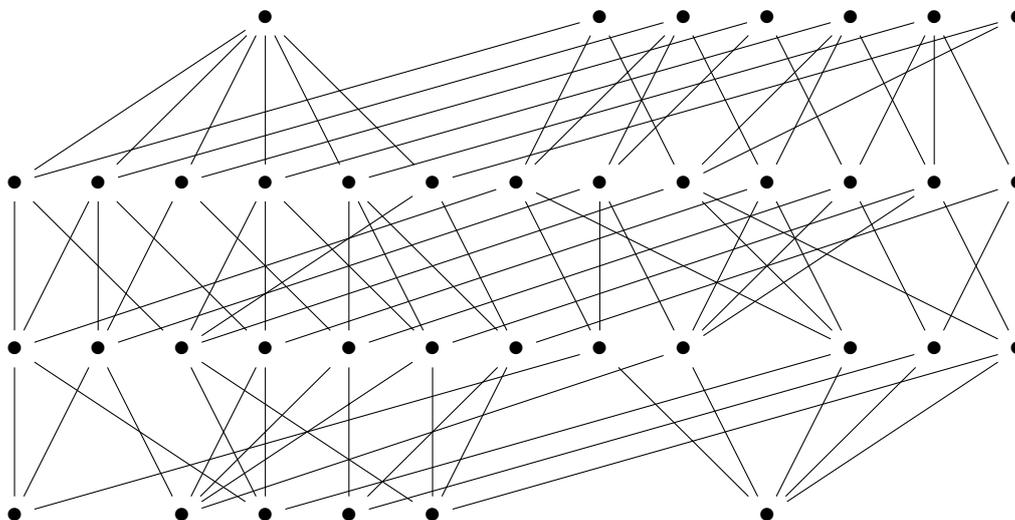
Recordemos que el espacio Y del Ejemplo 3.2.9



Este espacio contráctil satisface las condiciones de la Proposición 3.2.6, luego es W_1 y en particular es W_0 , por lo que su dual sobre cualquier conjunto de vértices $V \supseteq m(Y)$ no tiene beat points (ver Proposición 3.1.3). Sin embargo $d_V(Y)$ es homotópicamente trivial por la proposición anterior. Recordemos que por el Teorema 4.4.4 se tiene que $d_V(Y) = \mathbf{S}^n(d_m(Y))$, donde $n = \#(V \setminus m(Y))$. El dual de Y sobre sus elementos minimales viene dado por



Si $\#V = 6$, por ejemplo, $d_V(Y)$ es el siguiente espacio



En general podemos generar muchos espacios homotópicamente triviales sin beat points a partir de un espacio Y como el dado en este ejemplo.

Aplicación: Sea Y un lattice reducido contráctil y W_1 , y sea X un lattice reducido contráctil. El wedge $X \vee Y$ tomado sobre un elemento minimal $x_0 \in X$ con un elemento minimal $y_0 \in Y$ tal que $Y \searrow_{x_0} \{y_0\}$, es un lattice reducido contráctil, luego $d_V(X \vee Y)$ es homotópicamente trivial para cualquier conjunto de vértices V . Notar sin embargo, que el espacio $X \vee Y$ es W_1 porque satisface las condiciones de la Proposición 3.2.6. Por la Proposición 3.1.3 se tiene entonces que $d_V(X \vee Y)$ es homotópicamente trivial pero no tiene beat points.

5.2 El little weak problem

En la sección anterior vimos como cambia el dual de Alexander y el dual alternativo de un lattice reducido X al remover un beat point. El problema con weak points se complejiza bastante ya que al remover un weak point que no es un beat point se puede perder la propiedad de ser un lattice reducido. Además los subconjuntos de $m(X)$ acotados superiormente cambian de manera más drástica. El weak problem más general es el siguiente

Weak problem: Si X e Y son lattices reducidos simplemente equivalentes, $V \supseteq m(X)$ y $W \supseteq m(Y)$ son conjuntos de vértices tales que $\#V = \#W$, ¿Qué relación hay entre $d_V(X)$ y $d_W(Y)$?

Este problema se puede fraccionar en problemas más específicos

Little weak problem: Si X es un lattice reducido y $x_0 \in X$ es un weak point de modo que $X \setminus \{x_0\}$ también es un lattice reducido, si V y W , con $\#V = \#W$, son conjuntos de vértices de X y $X \setminus \{x_0\}$, ¿Qué relación hay entre $d_V(X)$ y $d_W(X \setminus \{x_0\})$?

Problema del opuesto: Si X es un lattice reducido, dados V y W conjuntos de vértices del mismo cardinal para X y X^{op} respectivamente, ¿Hay alguna relación entre $d_V(X)$ y $d_W(X^{op})$?

Notar que el little weak problem no implica ninguno de los otros dos problemas ya que no tenemos garantizado que se pueda ir de un lattice reducido a otro lattice reducido con el mismo tipo homotópico simple agregando y removiendo weak points de modo que el espacio obtenido en cada instancia sea un lattice reducido. En esta sección vamos a probar que si $X \setminus \{x_0\}$ es un lattice reducido, con x_0 un weak point, entonces los duales de X y $X \setminus \{x_0\}$ tomados sobre conjuntos de vértices del mismo cardinal son simplemente equivalentes. Empecemos analizando cuándo $X \setminus \{x_0\}$ es un lattice reducido.

Lema 5.2.1. *Sea X lattice reducido sin beat points, $x_0 \in X$ un weak point, entonces $X \setminus \{x_0\}$ es un lattice reducido si y solo si x_0 es maximal o minimal.*

Demostración: Supongamos primero que x_0 es un weak point maximal o minimal. Como la propiedad de ser un lattice reducido no cambia si tomamos el opuesto de un espacio, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que x_0 es minimal. En tal caso, los subconjuntos de $X \setminus \{x_0\}$ acotados superiormente no cambian respecto a los de X (por la minimalidad de x_0), los únicos subconjuntos que no están más son justamente los que incluían a x_0 , luego $X \setminus \{x_0\}$ es un lattice reducido.

Para ver la otra implicación alcanza con probar que si $x_0 \in X$ no es maximal ni minimal, entonces $X \setminus \{x_0\}$ no es un lattice reducido. Como X es minimal, entonces x_0 no es un beat point, por lo que existen elementos $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$ todos distintos tales que $x_0 \prec x_1$, $x_0 \prec x_2$, $x_0 \succ x_3$ y $x_0 \succ x_4$. Como $\sup(\{x_1, x_2\}) = x_0$, entonces tanto x_3 como x_4 son cotas superiores minimales de $\{x_1, x_2\}$ en $X \setminus \{x_0\}$, por lo tanto $X \setminus \{x_0\}$ no es un lattice reducido. □

Notar que en la demostración del lema anterior no usamos que x_0 es un weak point sino simplemente que no es un beat point. Este lema nos permite separar el little weak problem en 3 etapas: Si x_0 es un beat point, si no es un beat point pero sí es un weak point minimal y si es un weak point maximal que no es un beat point. Si $x_0 \in X$ es un beat point, entonces por el Teorema 5.1.8 sabemos que los duales de X y $X \setminus \{x_0\}$ son simplemente equivalentes. La segunda etapa vamos a estudiarla ahora. Vamos a suponer primero que X es un espacio minimal, es decir, que removimos todos los beat points posibles antes de empezar a preocuparnos por los weak points.

Proposición 5.2.2. *Sea X un lattice reducido sin beat points y $x_0 \in X$ un weak point minimal, entonces $d_V(X) \wedge \searrow d_W(X \setminus \{x_0\})$, con conjuntos de vértices V y W del mismo cardinal. Además se tiene que $X_V^* \nearrow (X \setminus \{x_0\})_W^*$.*

Necesitaremos el siguiente resultado

Lema 5.2.3. Sean X y x_0 como en la Proposición 5.2.2, entonces $T(X) \searrow T(X \setminus \{x_0\})$.

Demostración: Como $T(X \setminus \{x_0\}) = T(X) \setminus x_0$, entonces por el Lema 1.2.32 alcanza con probar que $lk_{T(X)}(x_0)$ es colapsable. Por el Corolario 1.2.44 es suficiente ver que $\mathcal{X}(lk_{T(X)}(x_0))$ es contráctil. La función $h : \mathcal{X}(lk(x_0)) \rightarrow \hat{F}_{x_0}$, $h(r) = \sup(r \cup \{x_0\})$ está bien definida, preserva el orden y además cumple que $m(h(r)) \setminus \{x_0\} \supseteq r$, y la igualdad vale si y solo si $r = m(y) \setminus \{x_0\}$ para algún $y > x_0$. Entonces se tiene que existe un RDF de $\mathcal{X}(lk(x_0))$ a $Y = \{m(y) \setminus \{x_0\} : y > x_0\}$, con el orden dado por la inclusión. Veamos que Y es homeomorfo a \hat{F}_{x_0} , que es contráctil porque x_0 es un weak point. Para eso definimos $f : Y \rightarrow \hat{F}_{x_0}$, $f(r) = \sup(r \cup \{x_0\})$. f , que es la restricción de h a Y , preserva el orden y tiene una inversa dada por $g : \hat{F}_{x_0} \rightarrow Y$, $g(y) = m(y) \setminus \{x_0\}$, que preserva el orden y es inversa de f porque $s(X) = X$. De esto concluimos que $\mathcal{X}(lk(x_0))$ es homotópicamente equivalente a \hat{F}_{x_0} , en particular es contráctil, y por lo tanto $lk(x_0)$ es colapsable, como queríamos. \square

Demostremos ahora sí la Proposición 5.2.2. Por el lema previo, se tiene que $T(X) \searrow T(X \setminus \{x_0\})$, luego

$$X_V^* = \mathcal{X}((T(X))_V^*) \nearrow \mathcal{X}((T(X \setminus \{x_0\}))_V^*) = (X \setminus \{x_0\})_V^*.$$

De esto se deduce que $d_V(X) \searrow d_V(X \setminus \{x_0\})$. \square

En la demostración de la proposición anterior la hipótesis de que X no tiene beat points solo la usamos para que valga que $s(X) = X$, pero esto ya es válido si X no tiene down beat points. Como remover down beat points no modifica el dual de un espacio ni la condición de que un elemento minimal sea un up weak point, tenemos el siguiente resultado

Proposición 5.2.4. Sea X un lattice reducido y sea $x_0 \in m(X)$ un weak point que no es un beat point, entonces $d_V(X) \searrow d_W(X \setminus \{x_0\})$, con $\#V = \#W$, y además $X_V^* \nearrow (X \setminus \{x_0\})_W^*$.

Resta ver la etapa 3 del little weak problem, este caso no es tan simple como el caso en que x_0 es un weak point minimal porque los conjuntos acotados superiormente pueden cambiar y además no hay una relación directa entre $T(X)$ y $T(X \setminus \{x_0\})$, pues x_0 no es un vértice de $T(X)$. Si pudiésemos probar que existe un colapso de $T(X)$ a $T(X \setminus \{x_0\})$, entonces de manera análoga a antes se tendría que el dual de Alexander de X se expande al dual de Alexander de $X \setminus \{x_0\}$. El siguiente resultado no nos garantiza que exista tal colapso, pero sí que el tipo homotópico simple de los duales es el mismo.

Proposición 5.2.5. Sea X un lattice reducido, $x_0 \in X$ un weak point maximal que no es un beat point, entonces se tiene que $X_V^* \searrow (X \setminus \{x_0\})_V^*$, con V un conjunto de vértices para esos espacios. En particular $d_V(X) \searrow d_V(X \setminus \{x_0\})$.

Demostración: Recordemos que el dual de X respecto a V es homeomorfo al dual de $s(X)$ respecto a ese mismo conjunto de vértices ya que el dual no cambia al remover down beat points. En el caso que $x_0 \in s(X)$ se tiene que x_0 también es un weak point de $s(X)$. Si $x_0 \notin s(X)$, entonces $s(X \setminus \{x_0\}) = s(X)$, y por ende, los duales de X y $X \setminus \{x_0\}$ respecto a V son homeomorfos.

Con el razonamiento que hicimos arriba podemos suponer sin pérdida de generalidad que X no tiene down beat points, luego se tiene que $s(X) = X$. Notamos $m = m(x_0)$, $\tilde{m} = V \setminus m$ y $U = \hat{U}_{x_0}^X$, que por hipótesis es contráctil. Vamos a comparar $T(X)$ con $T(X \setminus \{x_0\})$, para eso observar que los símlices de $T(X)$ que no están en $T(X \setminus \{x_0\})$ se corresponden con los subconjuntos de m cuyo supremo da x_0 . Estos subconjuntos se pueden ver como los subconjuntos de m que no están acotados en U . Tomando complemento en V a estos conjuntos y considerando el orden dado por la inclusión, obtenemos $C^-(U_m^*)$, donde los elementos del dual los llamamos de forma similar a como los llamamos usualmente pero agregándole \tilde{m} en su nombre y al mínimo lo llamamos \tilde{m} , el complemento de m en V . Al tomar el dual de Alexander sobre V tenemos entonces que el subespacio de $\mathcal{X}((T(X \setminus \{x_0\}))_V^*)$ formado por los elementos que no están en $\mathcal{X}((T(X))_V^*)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{X}((T(X \setminus \{x_0\}))_V^*)$ que tiene a \tilde{m} como mínimo y que es homeomorfo al cono del dual de Alexander de U respecto a su conjunto de elementos minimales. Por la versión de cerrados del Teorema de Osaki para lattices reducidos (ver Proposición 1.3.11), se tiene que

$$\mathcal{X}((T(X \setminus \{x_0\}))_V^*) \searrow \mathcal{X}((T(X \setminus \{x_0\}))_V^*) /_{F_{\tilde{m}}} = \mathcal{X}((T(X))_V^*) \cup [\tilde{m}],$$

donde con $[\tilde{m}]$ notamos a la clase de \tilde{m} en el cociente. Vamos a ver que $[\tilde{m}]$ es un γ -point de $\mathcal{X}((T(X \setminus \{x_0\}))_V^*) /_{F_{\tilde{m}}}$, para eso, dado que $[\tilde{m}]$ es un elemento maximal, alcanza con ver que $\hat{U}_{[\tilde{m}]}^{(X \setminus \{x_0\})_V^* /_{F_{\tilde{m}}}}$ es homotópicamente trivial. Observar que

$$\hat{U}_{[\tilde{m}]}^{(X \setminus \{x_0\})_V^* /_{F_{\tilde{m}}}} = \bigcup_{x \in F_{\tilde{m}}^{(X \setminus \{x_0\})_V^*}} \hat{U}_x^{(X \setminus \{x_0\})_V^*} \cap X_V^*.$$

Notar que ese conjunto tiene como elementos a los conjuntos no vacíos de la forma $r \sqcup t$, con $t \subsetneq \tilde{m}$, y $r \subseteq m$ tal que $r \sqcup \tilde{m} \in T(X \setminus \{x_0\})_V^*$, con el orden dado por la inclusión. Ese espacio es $U_m^* *_l \mathbf{S}^{n-2}$, con $n = |\tilde{m}|$. Como x_0 es un down weak point, entonces U es contráctil, luego U_m^* es homotópicamente trivial por la Proposición 5.1.9, y como el tipo homotópico simple del l join coincide con el del join no Hausdorff se tiene entonces que $U_m^* *_l \mathbf{S}^{n-2}$ es homotópicamente trivial. Deducimos entonces que $[\tilde{m}]$ es un γ -point, y por la Proposición 1.2.29, se sigue que

$$(X \setminus \{x_0\})_V^* \searrow \mathcal{X}((T(X \setminus \{x_0\}))_V^*) /_{F_{\tilde{m}}} = \mathcal{X}((T(X))_V^*) \cup [\tilde{m}] \searrow \mathcal{X}((T(X))_V^*) = X_V^*. \text{ Como buscábamos.} \quad \square$$

Teniendo en cuenta lo que dice el Lema 5.2.1 y juntando las Proposiciones 5.1.5, 5.2.5 y 5.2.4, tenemos una respuesta para el little weak problem.

Teorema 5.2.6. *Sea X un lattice reducido, $x_0 \in X$ un weak point tal que $X \setminus \{x_0\}$ también es un lattice reducido, entonces $X_V^* \wedge_{\downarrow} (X \setminus \{x_0\})_V^*$. En particular $d_V(X) \wedge_{\downarrow} d_V(X \setminus \{x_0\})$.*

5.3 Weak problem general

En la sección anterior vimos que el tipo homotópico simple del dual de Alexander no cambia al remover un weak point maximal o minimal, sin embargo no siempre dos lattices reducidos simplemente equivalentes poseen duales de Alexander simplemente equivalentes. Esto de hecho es falso incluso para complejos simpliciales. Vamos a comenzar mostrando un contraejemplo en el caso simplicial, y a partir de ese ejemplo daremos un ejemplo de un lattice reducido homotópicamente trivial cuyo dual de Alexander respecto a sus elementos minimales no lo es. El contraejemplo del caso simplicial fue descubierto por Minian y Rodriguez (ver [28]).

Ejemplo 5.3.1. Consideramos K una triangulación de la esfera de Poincaré, que es una variedad diferenciable compacta, conexa y orientable de dimensión 3 cuyos grupos de homología coinciden con los de la esfera \mathbb{S}^3 pero su grupo fundamental es un grupo simple y no abeliano. Se puede ver que una triangulación de ese complejo simplicial posee al menos 12 vértices, y como K tiene dimensión 3, el complemento de cualquier subconjunto de $V = K^0$ de cardinal menor o igual que 3 no es un simplex en K . Entonces K^* contiene el 2 esqueleto del simplex generado por los vértices de K , por ende su realización geométrica es simplemente conexa. De la dualidad de Alexander deducimos que K^* tiene los grupos de homología de una esfera de dimensión igual a la del complejo simplicial L que se obtiene de tomar el dual sobre V del borde de un 4 simplex. Por los Teoremas de Hurewicz y Whitehead se tiene entonces que K^* posee una realización geométrica que es homotópicamente equivalente a una esfera. Sin embargo, el dual de K^* , que es K , no triangula un poliedro homotópicamente equivalente a una esfera, cosa que sí sucede con el dual de L sobre V . Luego los duales sobre un mismo conjunto de vértices de dos complejos simpliciales cuyas realizaciones geométricas son homotópicamente equivalentes no tienen por que ser homotópicamente equivalentes. Notar de hecho que K^* y L son simplemente equivalentes por ser simplemente conexos (ver [15]).

La esfera punteada de Poincaré podemos triangularla a partir de un complejo simplicial M que se obtiene de K removiéndole un simplex maximal. Como el 2 esqueleto de M coincide con el de K , entonces el grupo fundamental de $|M|$ también es simple y no abeliano, en particular $H_1(M) = 0$. Como $|M|$ es una 3 variedad compacta, orientable y con borde, entonces $H_3(M) = 0$, y por la dualidad de Poincaré-Lefschetz, $H_2(M) \simeq H_1(M) = 0$. De esto tenemos que M es acíclico y posee realización geométrica no contráctil. Por la dualidad de Alexander, el dual de M también es acíclico, y por un argumento similar al dado en el párrafo anterior se tiene que $|M^*|$ es simplemente conexo. Por los Teoremas de Hurewicz y Whitehead se sigue entonces que el dual de M posee realización geométrica contráctil. Como $|M^*|$ es simplemente conexo, entonces M^* es simplemente equivalente a un vértice (ver nuevamente [15]). Llamamos $X = \mathcal{X}(M)$, $Y = \mathcal{X}(M^*)$. Y es un espacio homotópicamente trivial cuyo dual de

Alexander sobre $M^0 = m(X)$ es X , que no es homotópicamente trivial por tener grupo fundamental no nulo.

Alterando un poco el ejemplo de recién podemos probar que el Teorema 5.2.6 no se extiende a γ -points

Ejemplo 5.3.2. Sea Y el espacio homotópicamente trivial del ejemplo anterior, consideramos $Z = \mathbf{S}(Y)$, la suspensión reducida de Y que se armaba tomando dos copias de Y , una grande y una pequeña, agregándole a la copia pequeña un máximo y a la grande un mínimo. Llamamos z_0 al máximo de la copia pequeña. Como $U_{z_0} = Y$, entonces z_0 es un γ -point de Z . Por la Proposición 4.3.7, el dual de Z respecto a su conjunto de elementos minimales es homeomorfo al dual de Y respecto a $m(Y)$, que no es homotópicamente trivial. Por otro lado, el espacio $Z \setminus \{z_0\}$ es un lattice reducido porque z_0 es un elemento maximal (ver demostración del Lema 5.2.1). Notar que $Z \setminus \{z_0\}$ es homotópicamente equivalente a $C^-(Y)$, por lo que es contráctil. Por la Proposición 5.1.9 se tiene que el dual de $Z \setminus \{z_0\}$ respecto de $m(Z) = m(Z \setminus \{z_0\})$ es homotópicamente trivial. De esto concluimos que el tipo homotópico débil del dual de un lattice reducido no es invariante al remover γ -points.

Terminemos la sección con este resultado, que afirma que dos espacios simplemente equivalentes sí poseen duales simplemente equivalentes si tomamos los duales sobre conjuntos de vértices de igual cardinal y lo suficientemente grande.

Proposición 5.3.3. Sean X, Y lattices reducidos tales que $X \frown Y$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, si V y W son conjuntos de vértices para X e Y de cardinal n , entonces $X_V^* \frown Y_W^*$. En particular $d_V(X) \frown d_W(Y)$.

Demostración: Como $X \frown Y$, dado que $\mathcal{X}(T(X)) \simeq X$ y que $\mathcal{X}(T(Y)) \simeq Y$ (ver Observación 2.2.1), entonces $\mathcal{X}(T(X)) \frown \mathcal{X}(T(Y))$. Por el Teorema 1.2.34 se tiene que $T(X) \frown T(Y)$, es decir, existen complejos simpliciales $T(X) = T_0, T_1, \dots, T_k = T(Y)$ tales que $T_i \searrow T_{i+1}$ ó $T_i \nearrow T_{i+1} \forall 0 \leq i \leq k-1$. Sea $n_0 = \max\{\#(T_j^0) : 0 \leq j \leq k\}$, entonces por inducción se tiene que $(T_0)_V^* \frown (T_k)_W^*$, para V y W conjuntos de vértices de cardinal n , con $n > n_0$. Entonces nuevamente por el Teorema 1.2.34

$$X_V^* = \mathcal{X}(T(X)_V^*) \frown \mathcal{X}(T(Y)_W^*) = Y_W^*$$

con lo que se concluye el resultado. □

Teniendo en cuenta lo que afirma el Corolario 4.4.5, podemos deducir lo siguiente

Corolario 5.3.4. Sean X, Y lattices reducidos simplemente equivalentes y sean V, W conjuntos de vértices del mismo cardinal, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $S^n(d_V(X)) \frown S^n(d_W(Y))$.

5.4 El problema del opuesto y el cross dual

En esta sección estudiaremos el problema del opuesto e introduciremos una noción de doble dual que nos permitirá analizar ese problema desde otro punto de vista.

Podemos definir una noción de dual de Alexander utilizando elementos maximales en lugar de elementos minimales, para eso podemos utilizar el complejo simplicial $\mathcal{L}(X)$, introducido por Barmak en [3] (Sección 9.2), asociado a un lattice reducido X , en vez de usar el complejo simplicial $T(X)$ de Kozlov. Este complejo simplicial posee como vértices a los elementos maximales de X , y como símplices a los subconjuntos del conjunto de elementos maximales acotados inferiormente. Notar que $\mathcal{L}(X) = T(X^{op})$.

El problema del opuesto radica en comparar los duales de X respecto a los complejos simpliciales $\mathcal{L}(X)$ y $T(X)$ considerando conjuntos de vértices de igual cardinal. Como $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X^{op})$, entonces X^{op} es simplemente equivalente a X , así que sus duales sobre conjuntos de vértices de igual cardinal poseen grupos de homología isomorfos por la dualidad de Alexander.

Vamos a considerar una noción de doble dual que primero calcula el dual respecto al complejo simplicial T , y después aplica el complejo simplicial \mathcal{L} para calcular el segundo dual.

Definición 5.4.1. Sea X un lattice reducido tal que $m(X)$ no está acotado superiormente y tal que $M(X_m^*)$ no está acotado inferiormente, el cross dual de X es el lattice reducido

$$\mathcal{C}(X) = ((X_m^*)^{op})_m^*$$

Donde el segundo dual se toma respecto a los elementos maximales del dual de X . Notamos $\mathcal{C}^{op}(X)$ al opuesto del cross dual, es decir al espacio $((((X_m^*)^{op})_m^*)^{op})_m^*$, y lo llamaremos el cross dual opuesto de X .

Si K es un complejo simplicial que no es un símplex y que el nervio de su dual tampoco lo es, el cross dual de K es el complejo simplicial

$$\mathcal{C}(K) = (\mathcal{N}(K^*))^*,$$

donde recordemos que $\mathcal{N}(L)$ es el nervio del complejo simplicial L , es decir el complejo simplicial cuyos símplices son los subconjuntos de símplices maximales de L cuya intersección es no vacía.

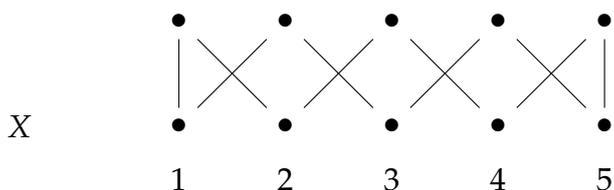
Notar que $\mathcal{C}(X) = \mathcal{X}((T((\mathcal{X}(T(X))^*)^{op}))^*) = \mathcal{X}(\mathcal{C}(T(X)))$, mientras que $\mathcal{C}(K) = T(\mathcal{C}(\mathcal{X}(K)))$. Las hipótesis que le pedimos a X y a K son necesarias para que se puedan calcular los duales requeridos en la definición.

Observación 5.4.2. Notar que un subconjunto de $B_m(X)$ no acotado inferiormente en $d_m(X)$ es un subconjunto de $B_m(X)$ en el que la intersección de los conjuntos que forman a cada uno de sus elementos da vacía. Esto es lo mismo a que

la unión de sus complementos en $m(X)$ sea $m(X)$. Por lo tanto el cross dual opuesto de X es el poset formado por los subconjuntos propios de $A_m(X)$ cuyos elementos, vistos como subconjuntos de $m(X)$, cubren $m(X)$, con el orden dado por la inclusión.

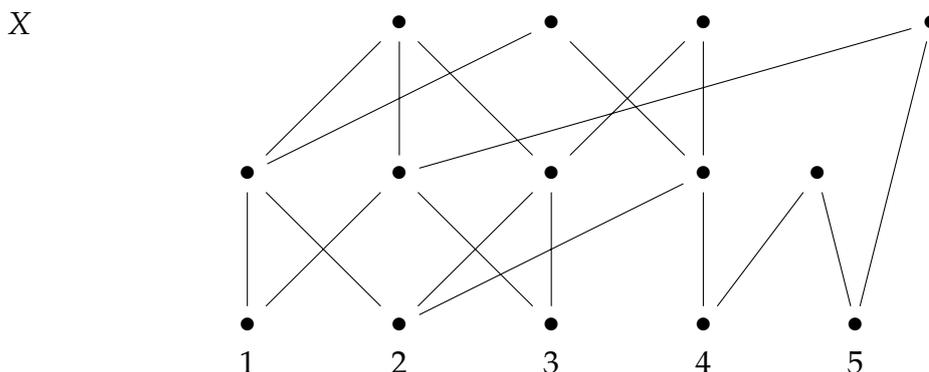
De la misma forma que en el dual de Alexander, podemos definir una noción alternativa de cross opuesto, que llamaremos cross alternativo, cuyos elementos son los subconjuntos minimales de $A_m(X)$ con la propiedad de que sus elementos cubran $m(X)$ y las uniones de esos conjuntos que no den todo $A_m(X)$, con el orden dado por la inclusión. Lo notaremos $c^{op}(X)$. Observar que $c^{op}(X) = s(C^{op}(X))$.

Ejemplo 5.4.3. Consideramos el modelo de \mathbb{S}^1



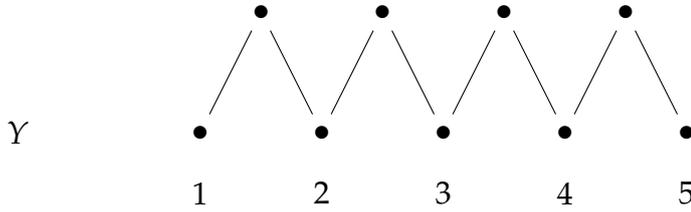
Se tiene que $A_m(X) = \{(1,4); (1,5); (2,3); (2,5); (3,4)\}$, los elementos minimales del dual cruzado vienen dados por el conjunto $m(C^{op}(X)) = \{\{(1,4); (1,5); (2,3)\}, \{(1,4); (2,3); (2,5)\}, \{(1,4); (2,5); (3,4)\}, \{(1,5); (2,3); (3,4)\}, \{(1,5), (2,5), (3,4)\}\}$, se puede chequear rápidamente que $C^{op}(X) = X$. Notar que el cardinal de $A_m(X) = M(X_m^*)$ coincide con el de $m(X)$.

Tomemos ahora el espacio del Ejemplo 2.4.4

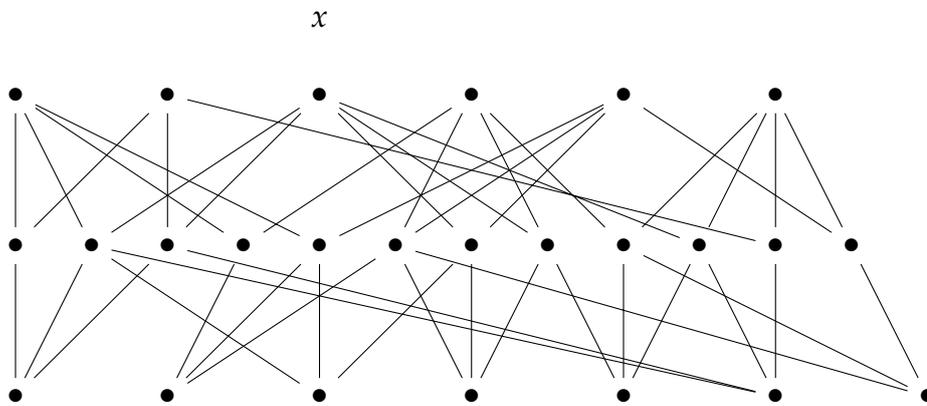


Notar que $A_m(X) = \{(2,5); (1,3,4); (1,4,5); (3,4,5)\}$, y $C^{op}(X) = \{\{(2,5); (1,3,4)\}, \{(2,5); (1,4,5); (3,4,5)\}\}$, el espacio dos puntos. X es un modelo de \mathbb{S}^1 y por lo tanto posee el mismo tipo homotópico simple que la suspensión no Hausdorff del cross dual. Observar que $\#(A_m(X)) = 4$, uno menos que el cardinal de $m(X)$.

Por último, miremos el espacio del Ejemplo 3.2.9;



En este caso $A_m(Y) = \{(1,3); (1,4); (1,5); (2,4); (2,5); (3,5)\}$, $m(\mathcal{C}^{op}(Y)) = \{\{(1,3); (1,4); (2,5)\}, \{(1,3); (1,5); (2,4)\}, \{(1,3); (2,4); (2,5)\}, \{(1,3); (2,4); (3,5)\}, \{(1,4); (2,4); (3,5)\}, \{(1,4); (2,5); (3,5)\}, \{(1,5); (2,4); (3,5)\}\}$. El dual cruzado viene dado por



Este espacio no es contráctil, sin embargo, al cocientar por U_x , donde x es el tercer punto maximal, obtendremos un espacio contráctil. Luego el cross dual de Y es homotópicamente trivial e Y también lo es. Observar que, como este espacio tiene down beat points, entonces $c^{op}(X) \neq C^{op}(X)$, ya que $c^{op}(X) = s(C^{op}(X))$.

Definición 5.4.4. Sea X un lattice reducido tal que $m(X)$ no está acotado superiormente y $M(X_m^*)$ no está acotado inferiormente, decimos que X es cross reflexivo si $X \wedge_{\downarrow} \mathcal{C}(X)$, a menos de tomarle finitas veces la suspensión no Hausdorff a uno solo de los dos espacios.

En caso de que X sea cross reflexivo se tiene, por la dualidad de Alexander, que si $\#(A_m(X)) - \#(m(X)) = n \geq 0$, entonces $\mathcal{C}(X) \wedge_{\downarrow} \Sigma^n(X)$. Si en cambio $\#(A_m(X)) - \#(m(X)) = -m < 0$, entonces $\Sigma^m(\mathcal{C}(X)) \wedge_{\downarrow} X$.

Cross problem: Si X es un lattice reducido tal que $m(X)$ no está acotado superiormente y $M(X_m^*)$ no está acotado inferiormente, es X cross reflexivo?

Como agregarle beat points a un lattice reducido X no modifica el tipo homotópico simple del dual de Alexander de X ni el de su opuesto, entonces para ver que el dual de un lattice reducido es simplemente equivalente al dual de su opuesto sobre conjuntos de vértices del mismo cardinal alcanzaría con verlo para lattices reducidos que no tienen beat points. Agregando suficientes beat

points también alcanzaría con verlo cuando X tiene la misma cantidad de elementos minimales que maximales, y además, podemos suponer que el conjunto de vértices donde tomamos dual es $m(X)$.

Resolver el cross problem es equivalente a resolver el problema del opuesto, como lo indica el siguiente resultado.

Teorema 5.4.5. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) X es cross reflexivo para todo lattice reducido X tal que $m(X)$ no está acotado superiormente y $M(X_m^*)$ no está acotado inferiormente.
- (2) Si X es un lattice reducido, entonces $X_V^* \bigwedge_{\downarrow} (X^{op})_W^*$ para conjuntos de vértices V y W del mismo cardinal.

Demostración: Veamos primero (2) \Rightarrow (1). Supongamos que X es un lattice reducido tal que $m(X)$ no está acotado superiormente y $M(X_m^*)$ no está acotado inferiormente, entonces por el Lema 3.2.1 se tiene que a $Y = X_m^*$ se le puede calcular el dual respecto de $m(X)$ o respecto de cualquier conjunto de vértices más grande. Por hipótesis, los duales de Y y su opuesto tomados sobre conjuntos de vértices de igual cardinal son simplemente equivalentes. Observar que $Y_{m(X)}^* = X_m^{**} \bigwedge_{\downarrow} X$, luego si $\#(A_m(X)) = \#(m(X))$, entonces $\mathcal{C}(X) = (Y^{op})_{A_m(X)}^* \bigwedge_{\downarrow} X$. Si tuviesen distinto cardinal la misma equivalencia simple seguiría valiendo tomándole finitas veces la suspensión no Hausdorff al espacio de cardinal menor, teniendo en cuenta lo que dice el Corolario 4.4.5. Luego X es cross reflexivo.

Probemos (1) \Rightarrow (2). Tomamos X lattice reducido y V, W conjuntos de vértices de igual cardinal para X y X^{op} respectivamente a los que podemos tomarles dual. Por lo que observamos previamente a enunciar este teorema, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $m(X) = V$ y que $\#(m(X^{op})) = \#V$. Supongamos que a X_V^* se le puede calcular el cross dual. Entonces, si $Y = X_V^*$, se tiene que $Y \bigwedge_{\downarrow} \mathcal{C}(Y) = ((Y_{m(Y)}^*)^{op})_m^* = (s((Y_{m(Y)}^*)^{op}))_m^* = ((d_{m(Y)}(Y))^{op})_m^* = ((d_V(Y))^{op})_m^* = (s((Y_V^*)^{op}))_m^* = ((Y_V^*)^{op})_m^* \bigwedge_{\downarrow} (X^{op})_m^*$. La cuarta igualdad vale por la Proposición 4.3.7, mientras que la última equivalencia simple vale por el Teorema 5.1.8 y porque X es homotópicamente equivalente a su doble dual de Alexander.

Supongamos ahora que a X_V^* no se le puede calcular el cross dual. Entonces o bien $m(X_V^*)$ está acotado superiormente, o bien $M((X_V^*)_m^*)$ está acotado inferiormente. Notar que en cualquiera de los casos X tiene que ser necesariamente contráctil, y luego X^{op} también es contráctil. Los duales de Alexander de X y X^{op} sobre cualquier conjunto de vértices son entonces homotópicamente triviales, y en particular son simplemente equivalentes. \square

En general no es fácil obtener propiedades del cross dual por la complejidad que se tiene para calcularlo. Veamos un resultado que relaciona al cross dual con el l join introducido en el capítulo anterior.

Proposición 5.4.6. Sean X, Y lattices reducidos a los que podemos calcularles el cross dual, entonces

$$\mathcal{C}(X *_l Y) = \mathcal{C}(X) *_l \mathcal{C}(Y).$$

Demostración: Recordemos que $A_m(X *_l Y) = A_m(X) \sqcup A_m(Y)$. Los subconjuntos propios de $A_m(X *_l Y)$ cuya unión da $m(X *_l Y) = m(X) \sqcup m(Y)$ se forman tomando un subconjunto de $A_m(X)$ cuya unión da $m(X)$ y un subconjunto de $A_m(Y)$ cuya unión da $m(Y)$, de modo que al menos uno de los dos sea un subconjunto propio. Es decir, el cross dual opuesto es el producto de los conos de los cross duales opuestos sacándole el máximo. Al tomar opuesto obtenemos entonces que $\mathcal{C}(X *_l Y) = \mathcal{C}(X) *_l \mathcal{C}(Y)$, como queríamos. \square

De la proposición anterior se deduce rápidamente este corolario.

Corolario 5.4.7. Si X e Y son lattices reducidos cross reflexivos, entonces $X *_l Y$ es cross reflexivo.

Demostración: Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $X \searrow \Sigma^n(\mathcal{C}(X))$ y que $\Sigma^m(Y) \searrow \mathcal{C}(Y)$, para $n, m \in \mathbb{N}_0$, ya que los otros dos posibles casos son más simples de analizar. Observar que, por un lado,

$$X *_l Y \searrow \Sigma^n(\mathcal{C}(X) *_l Y),$$

mientras que

$$\mathcal{C}(X *_l Y) = \mathcal{C}(X) *_l \mathcal{C}(Y) \searrow \Sigma^m(\mathcal{C}(X) *_l Y).$$

Luego uno de los dos espacios es simplemente equivalente al otro tras aplicar la suspensión no Hausdorff $|n - m|$ veces. \square

Bibliografía

- [1] J.W. Alexander. *A proof and extension of the jordan brower separation theorem*. Trans. Am. Math. Soc. 23, 333-349 (1992).
- [2] P.S. Alexandroff. *Diskrete Räume*. MathematiceskiSbornik (N.S.) 2(1937), 501-518.
- [3] J.A. Barmak. *Algebraic topology of finite topological spaces and applications*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 2032. Springer, Berlin (2011).
- [4] J.A. Barmak y E.G. Minian. *Minimal finite models*. J. Homotopy Relat. Struct. 2 (2007), No. 1, 127-140.
- [5] J.A. Barmak y E.G. Minian. *Simple homotopy types and finite spaces*. Adv. Math. 218 (2008), Issue 1, 87-104.
- [6] J.A. Barmak y E.G. Minian. *One-point reductions of finite spaces, h-regular CW-complexes and collapsibility*. Algebr. Geom. Topol. 8 (2008), 1763-1780.
- [7] J.A. Barmak y E.G. Minian. *Strong homotopy types, nerves and collapses*. Discrete Comput. Geom., doi:10.1007/s00454-011-9357-5, in press.
- [8] M. Barr. *A duality on simplicial complexes*. Georgian Math. J. 9(4), 601-605 (2002).
- [9] D. Bayer. *Monomial ideals and duality*. Lecture notes (1996).
<http://www.math.columbia.edu/bayer/papers> .
- [10] D. Bayer. *Charalambous, H., Popescu, S.: Extremal Betti numbers and applications to monomial ideals*. J. Algebra 221, 497-512 (1999).
- [11] A. Björner. *Homotopy type of posets and lattice complementation*. J. Combin. Theory, Ser. A, 30 (1981), 90-100.
- [12] A. Björner y M. Tancer. *Combinatorial Alexander duality. A short and elementary proof*. Discrete Comput. Geom. 42(4), 586-593 (2009).
- [13] A.K. Bousfield y D.M. Kan. *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, Springer Lect. Notes Math. Vol.304 (1972).

- [14] N.A. Capitelli y E.G. Minian. Non-homogeneous combinatorial manifolds, *Beitr. Algebra Geom.* 54 (2013), no. 1, 419–439.
- [15] M.M. Cohen. *A Course in Simple Homotopy Theory*. Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin (1970).
- [16] X. Dong. *Alexander duality for projections of polytopes*. *Topology* 41, 1109–1121 (2002).
- [17] X.L. Fernández. *Métodos combinatorios y algoritmos en topología de dimensiones bajas y la conjetura de Andrews-Curtis*. Tesis de doctorado, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires (2017).
- [18] X.L. Fernández y E.G. Minian. *Homotopy colimits of diagrams over posets and variations on a theorem of Thomason*. *Homology Homotopy Appl.*, 18(2):233–245, 2016.
- [19] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press (2002).
- [20] D. Kozlov. *Simple homotopy types of hom-complexes, neighborhood complexes, Lovász complexes, and atom crosscut complexes*. *Topol. Appl.* 153, 2445–2454 (2006).
- [21] J. Matoušek. *Using the Borsuk–Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry, Written in Cooperation with A. Björner and G. Ziegler*. Springer, Heidelberg (2003).
- [22] J.P. May. *Finite topological spaces*. Notes for REU (2003).
- [23] J.P. May. *Finite spaces and simplicial complexes*. Notes for REU (2003).
- [24] J.P. May. *Finite groups and finite spaces*. Notes for REU (2003).
- [25] M.C. McCord. *Homotopy type comparison of a space with complexes associated with its open covers*. *Proc. Amer. Math. Soc.* 18 (1967), 705–708.
- [26] M.C. McCord. *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces*. *Duke Mathematical Journal* 33(1966), 465–474.
- [27] J. Milnor. *Whitehead Torsion*. *Bull. AMS* 72(1966), 358–426.
- [28] E.G. Minian y J.T. Rodríguez. *A Note on the Homotopy Type of the Alexander Dual* *Discrete Comput Geom* (2014)
52: 34. <https://doi.org/10.1007/s00454-014-9606-5>
- [29] J.R. Munkres. *Elements of Algebraic topology*. Addison-Wesley (1984).
- [30] J.R. Munkres. *Topology, Second Edition*. Prentice Hall (2000).

- [31] T. Osaki. *Reduction of finite topological spaces*. Interdisciplinary Information Sciences 5(1999), 149-155.
- [32] J.T. Rodriguez. *Versiones combinatorias de la dualidad de Alexander* Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires (2010).
- [33] C.P Rourke y B.K Sanderson. *Introduction to Piecewise-Linear Topology*. Springer Study Edition (1982).
- [34] E. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer (1966).
- [35] R.E. Stong. *Finite topological spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 123(1966), 325-340.
- [36] R. W. Thomason. *Homotopy colimits in the category of small categories*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 85 (1979), no. 1, 91-109.
- [37] V. Welker, G. Ziegler y R. Živaljević. *Homotopy colimits - comparison lemmas for combinatorial applications*. J. Reine Angew. Math. 509 (1999), 117-149.
- [38] J.H.C Whitehead. *Simplicial spaces, nuclei and m -groups*. Proc. London Math. Soc. 45(1939), 243-327.
- [39] J.H.C Whitehead. *On incidence matrices, nuclei and homotopy types*. Ann. of Math. 42(1941), 1197-1239.
- [40] J.H.C Whitehead. *Simple homotopy types*. Amer. J. Math. 72(1950), 1-57.