



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

**RESOLUCIÓN POR ELEMENTOS FINITOS DE
PROBLEMAS ELÍPTICOS CON DATOS SINGULARES**

Gisela Bellisomi

Director: Ignacio Ojea

Diciembre 2019

Índice general

1. Introducción	5
2. Nociones Generales	9
3. Problema Continuo	13
3.1. Caso $\mathbf{b} = 0$ y $c = 0$	13
3.2. Caso $\mathbf{b} \neq 0$ o $c \neq 0$	18
3.2.1. Existencia de Solución del Problema Modelo	18
3.2.2. Unicidad de Solución del Problema Modelo	23
4. Problema Discreto	27
4.1. Construcción de la malla	27
4.2. Problema Discreto	30
4.3. Caso $\mathbf{b} = 0$ y $c = 0$	31
5. Error	35
5.1. Error en $W_\alpha(\Omega)$	35
5.2. Error en $L^2_\beta(\Omega)$	43
6. Caso particular: $F = \delta_{x_0}$	59
6.1. Resumen de resultados	70
7. Experimentos Numéricos	73
Bibliografía	81

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de esta tesis es el estudio de ecuaciones elípticas con fuente dada por una delta de Dirac soportada sobre un punto. Más precisamente, consideramos el problema:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u + cu = \delta_{x_0} & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ó \mathbb{R}^3 es un dominio suave, o un polígono o poliedro, $x_0 \in \Omega$ y δ_{x_0} se define como una funcional lineal $\delta_{x_0} : C^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \int_{\Omega} \delta_{x_0} \varphi = \varphi(x_0) \quad \forall \varphi \in C^1(\Omega)$$

Ecuaciones elípticas de la forma (1.1) aparecen en la formulación matemática de diversos procesos físicos, como la difusión del calor, problemas de electromagnetismo, etc. En particular, operadores diferenciales de este tipo, han sido largamente estudiados y forman parte de la bibliografía básica para estudiar tanto las ecuaciones diferenciales en sí, a través de formulaciones débiles, como para desarrollar y analizar métodos de resolución numérica por Elementos Finitos.

Para obtener la formulación débil de (1.1), multiplicamos por una función test v e integramos por partes, obteniendo:

$$\int_{\Omega} (A\nabla u) \cdot (\nabla v) + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \nabla uv + \int_{\Omega} cuv = \int_{\Omega} \delta_{x_0} v \quad (1.2)$$

Típicamente, esta formulación se realiza en espacios de Sóbolev, tomando $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Sin embargo, δ_{x_0} no pertenece al espacio $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$, lo que imposibilita el uso de esta formulación estándar, dado que el miembro derecho de (1.2) pierde sentido. Peor aún: la singularidad inducida por la fuente puntual afecta a los métodos numéricos cuyo orden de convergencia se ve deteriorado si se utilizan mallas cuasi-uniformes del dominio. Por ejemplo, si se utilizan mallas cuasi-uniformes el orden de convergencia en

L^2 del método de elementos finitos se reduce a 1 (en \mathbb{R}^2) o $1/2$ (en \mathbb{R}^3), mientras que con fuentes dadas por funciones en L^2 el orden es 2.

Las ecuaciones con fuente dada por una delta de Dirac son relevantes para diversas aplicaciones, en la medida en que permiten modelar fuentes puntuales en distintos contextos: fuentes de calor, cargas puntuales en problemas de electromagnetismo, etc. En la bibliografía existen distintos trabajos que estudian este problema desde diversos ángulos. En general, es necesario trabajar con espacios adecuados, de modo que tenga sentido la aplicación de δ_{x_0} sobre las funciones test v . Por ejemplo, pueden considerarse espacios de Sóbolev fraccionarios H^s , con $0 < s < 1$, como en [5] y [14], o espacios de distintos exponentes: $W^{1,p}$ y $W^{1,p'}$, como en [4]. Un tercer enfoque consiste en utilizar espacios de Sóbolev con pesos, donde el peso busca *compensar* la singularidad. La ventaja de esta tercer alternativa es que los espacios con peso sólo debilitan las normas en la zona de la singularidad (en nuestro caso, en un entorno de x_0) y no en todo el dominio, como ocurre con las otras. Otra ventaja significativa es que una vez hallado el peso apropiado para la formulación del problema, éste permite deducir cómo deben graduarse las mallas para recuperar órdenes óptimos de convergencia de las resoluciones numéricas. Esta estrategia es la adoptada en [3], donde se considera el problema sólo en \mathbb{R}^2 , se propone un peso particular y, graduando las mallas adecuadamente, se recuperan orden cuasi-óptimos de convergencia, ligeramente deteriorados por un factor logarítmico.

Esta tesis se propone aprovechar una formulación general propuesta inicialmente en [7] en donde se estudian problemas acoplados en una y tres dimensiones. Este enfoque fue luego aprovechado en [2] para obtener estimaciones a posteriori para el error de aproximación de la ecuación (1.1). El objetivo es, entonces, analizar la existencia y unicidad de solución del problema variacional continuo (1.2) (PVC) en espacios con pesos adecuados, aproximar la solución vía método de elementos finitos estableciendo espacios de dimensión finita donde se pueda realizar el planteo del problema variacional discreto (PVD) sobre mallas graduadas adecuadamente asegurando la existencia y unicidad de solución; y por último mostrar la convergencia de la solución aproximada hacia la solución real, recuperando órdenes óptimos.

Siguiendo a D'Angelo en [7], trabajamos con espacios con peso de la forma $d_{x_0}^{2\alpha}$ donde d_{x_0} es la distancia a x_0 . Luego de establecer los espacios de trabajo, en la Capítulo 3 probamos la existencia y unicidad de solución del PVC (con una fuente F) mediante un teorema de Banach-Nečas-Babuška (BNB). Cabe señalar que en ese proceso, detectamos un error en la demostración provista por D'Angelo, que debió ser subsanado. Superada esta primera etapa, se pasa a la formulación del PVD (Capítulo 4). Para ello, se realizó una triangulación graduada del dominio. La graduación depende de la distancia a la singularidad y además los tamaños de los elementos de la triangulación se determinan estratégicamente para ayudar a la convergencia de la solución. Finalmente se determinan los espacios de dimensión finita donde plantear el PVD y se demuestra la existencia y unicidad de solución. Nuevamente, en [7], se comete el mismo error de

teclado en el caso continuo y se ha podido subsanar en el caso $\mathbf{b} = 0$ y $c = 0$. Una vez resultos los PVC y PVD, en el Capítulo 5 damos estimaciones a priori del error y probamos la convergencia, recuperando órdenes óptimos (orden 1 en $H^1_\alpha(\Omega)$ y orden 2 en $L^2(\Omega)$). Por último, en el Capítulo 6 aplicamos todo lo analizado para nuestro caso de interés: $F = \delta_{x_0}$ y en el Capítulo 7 mostramos resultados de experimentos numéricos que verifican los pronósticos teóricos.

Capítulo 2

Nociones Generales

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $n = 2$ o $n = 3$ un dominio con borde poligonal (en dimensión 2) o poliedral (en dimensión 3). El espacio clásico para los problemas elípticos de la forma (1.1) es el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, cuando la fuente pertenece a su espacio dual $H^{-1}(\Omega)$. Como señalamos anteriormente, este no es el caso de la delta de Dirac. En [7] se propone el uso de espacios pesados. Dado $\beta \in (-\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ definimos $L^2(\Omega, d_{x_0}^\beta)$ el espacio de funciones medibles u tales que

$$\|u\|_{L^2(\Omega, d_{x_0}^\beta)}^2 := \int_{\Omega} u(x)^2 d_{x_0}(x)^{2\beta} dx < \infty$$

donde $d_{x_0}(x) = |x - x_0|$. Escribiremos $L_\beta^2(\Omega)$ para referirnos a $L^2(\Omega, d_{x_0}^\beta)$ y $\|u\|_{L_\beta^2(\Omega)}$ para $\|u\|_{L^2(\Omega, d_{x_0}^\beta)}$. Se puede ver que $L_\beta^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(u, v)_{L_\beta^2} = \int_{\Omega} u(x)v(x)d_{x_0}(x)^{2\beta} dx$$

Por otro lado se definen los espacios de Sobolev pesados $H_\beta^1(\Omega)$ como el espacio de funciones medibles u que tienen derivadas débiles de primer orden con $\|u\|_{H_\beta^1(\Omega)} < \infty$ donde

$$\|u\|_{H_\beta^1(\Omega)} := \|u\|_{L_\beta^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L_\beta^2(\Omega)}$$

Observar que si $0 < \beta < \frac{n}{2}$ entonces $H_{-\beta}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset H_\beta^1(\Omega)$ con continuidad.

Finalmente, definimos el espacio $H_{0,\beta}^1(\Omega)$ como las funciones de $H_\beta^1(\Omega)$ que se anulan en el $\partial\Omega$:

$$H_{0,\beta}^1(\Omega) := \{u \in H_\beta^1(\Omega) / u|_{\partial\Omega} = 0\},$$

entendido como la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H_\beta^1(\Omega)$, con su norma.

Observar que $H_{0,\beta}^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert dado que es un subespacio cerrado en $H_\beta^1(\Omega)$.

La restricción de β al intervalo $(-\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ tiene diversas consecuencias que serán de utilidad. En primer lugar, para este rango del exponente, el peso $d_{x_0}^{2\beta}$ pertenece a la clase A_2 de Muckenhoupt (ver, por ejemplo [10, Lema 3.3]), lo que garantiza la validez de la desigualdad de Poincaré ([12, Capítulo 2, Sección 15]). Es decir: si $-\frac{n}{2} < \beta < \frac{n}{2}$, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2_\beta(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2_\beta(\Omega)} \quad \forall u \in H^1_{0,\beta}(\Omega)$$

Como consecuencia de esta desigualdad resulta que $\|\nabla u\|_{L^2_\beta(\Omega)}$ es equivalente a $\|u\|_{H^1_\beta(\Omega)}$ en $H^1_{0,\beta}(\Omega)$ pues $\|u\|_{L^2_\beta(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1_\beta(\Omega)} = \|u\|_{L^2_\beta(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2_\beta(\Omega)} \leq (C+1)\|\nabla u\|_{L^2_\beta(\Omega)} \quad \forall u \in H^1_{0,\beta}(\Omega)$. Podemos, entonces, definir el espacio $W_\beta(\Omega)$ como el espacio $H^1_{0,\beta}(\Omega)$ dotado de la norma:

$$\|u\|_{W_\beta(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2_\beta(\Omega)}$$

Como veremos en el Capítulo 6, siguiendo los pasos de [2], si $\frac{n}{2} - 1 < \alpha < \frac{n}{2}$ entonces existe una constante $C > 0$, que depende sólo de α , tal que

$$|\delta_{x_0}(v)| \leq C \|v\|_{H^1_{-\alpha}(\Omega)} \quad \forall v \in C^1(\bar{\Omega})$$

Mediante un argumento de densidad este resultado se extiende a $H^1_{-\alpha}(\Omega)$, de modo que $\delta_{x_0} : H^1_{-\alpha}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación lineal y continua, tal que $\delta_{x_0}(v) = v(x_0)$ para cualquier función suave $v \in C^1(\bar{\Omega})$. En otras palabras, podemos asumir que $\delta_{x_0} \in (W_{-\alpha}(\Omega))'$ para $\frac{n}{2} - 1 < \alpha < \frac{n}{2}$.

Estamos en condiciones de plantear el problema variacional continuo asociado a (1.1) del siguiente modo:

$$\text{Hallar } u \in W_\alpha(\Omega) / a(u, v) = \delta_{x_0}(v) \quad \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega) \quad (2.1)$$

donde $a(u, v) = \int_\Omega A \nabla u \cdot \nabla v + \mathbf{b} \cdot \nabla uv + cuv$. Asumiremos que:

- $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$
- A es simétrica y verifica la condición de elipticidad: existen constantes γ_1, γ_2 positivas tales que $\gamma_1 \|\psi\|^2 \leq \psi^T A(x) \psi \leq \gamma_2 \|\psi\|^2, \forall \psi \in \mathbb{R}^n \forall x \in \Omega$
- $\mathbf{b} \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$
- $c \in L^\infty(\Omega)$.
- $c - \frac{1}{2} \text{div}(\mathbf{b}) \geq 0$

Observemos que (2.1) es un caso particular del siguiente problema: dada $F \in (W_{-\alpha}(\Omega))'$,

$$\text{Hallar } u \in W_{\alpha}(\Omega) / a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega) \quad (2.2)$$

Llamaremos a (2.2) *problema modelo*. Parte del análisis, en particular del problema continuo, puede hacerse directamente en el caso general (2.2). Al pasar al problema discreto nos restringiremos al caso $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $c = 0$, por simplicidad. Los experimentos numéricos los haremos tomando $F = \delta_{x_0}$.

Vale la pena notar que si $A = I$, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ y $c = 0$ el problema a resolver se reduce a

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_{x_0} & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

Sabemos que la solución fundamental φ de este problema es (con $x_0 = \mathbf{0}$):

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log(|x|) & \text{si } n = 2 \\ \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x|} - 1 \right) & \text{si } n = 3 \end{cases}$$

Es fácil verificar que $|D^{\gamma}\varphi(x)| \sim |x|^{-1-|\gamma|}$ si $n = 3$ o $|D^{\gamma}\varphi(x)| \sim |x|^{-|\gamma|}$ si $n = 2$. Esto nos lleva a pensar en los espacios de Kondratiev: dados $\ell \in \mathbb{N}$ y $\eta \in \mathbb{R}$ se define:

$$\mathbb{K}_{\eta}^{\ell}(\Omega) = \left\{ v / \exists D^{\gamma}v \quad \forall |\gamma| \leq \ell \text{ y } \sum_{|\gamma| \leq \ell} \int_{\Omega} |D^{\gamma}v|^2 d_{x_0}^{2(\eta+|\gamma|)} < \infty \right\}$$

con las siguientes seminorma y norma:

$$\begin{aligned} |u|_{\mathbb{K}_{\eta}^{\ell}(\Omega)}^2 &:= \sum_{|\alpha|=\ell} \int_{\Omega} |D^{\alpha}v|^2 d_{x_0}^{2(\eta+|\alpha|)} \\ \|v\|_{\mathbb{K}_{\eta}^{\ell}(\Omega)}^2 &:= \sum_{|\alpha| \leq \ell} \int_{\Omega} |D^{\alpha}v|^2 d_{x_0}^{2(\eta+|\alpha|)} \end{aligned}$$

Se verifica que $\varphi \in \mathbb{K}_{\eta}^{\ell}(\Omega)$ para $\eta > \frac{n}{2} - 2$.

A continuación recordamos algunos teoremas importantes que utilizaremos a lo largo de la tesis:

Teorema 2.0.1 (Riesz). *Sea H un espacio de Hilbert con su producto interno $(\cdot, \cdot)_H$. Si $F \in H'$ entonces existe un único elemento $u \in H$ tal que $(u, v)_H = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in H$. Más aún, $\|u\|_H = \|F\|_{H'}$.*

Teorema 2.0.2 (Lax-Milgram). *Sea V un espacio de Hilbert, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, y $F \in V'$. Si a es continuo y coercitivo, es decir que existe una constante $C_1 > 0$ tal que $a(u, v) \leq C_1 \|u\|_V \|v\|_V \forall u, v \in V$ y existe una constante $C_2 > 0$ tal que $a(u, u) \geq C_2 \|u\|_V^2 \forall u \in V$, entonces existe un único elemento $u \in V$ tal que*

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle \forall v \in V.$$

Más aún, $\|u\|_V \leq \frac{1}{C_2} \|F\|_{V'}$.

Teorema 2.0.3 (BNB). *Sean W un espacio de Banach, V un espacio de Banach reflexivo, $a : W \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y $F \in V'$. Luego se tiene que el problema: Hallar $u \in W$ / $a(u, v) = \langle F, v \rangle \forall v \in V$, admite única solución en W si y sólo si valen las siguientes condiciones:*

$$(BNB1) \exists \alpha > 0 / \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{a(w, v)}{\|v\|_V} \geq \alpha \|w\|_W \quad \forall w \in W$$

$$(BNB2) \forall v \in V, (a(w, v) = 0 \quad \forall w \in W \Rightarrow v = 0)$$

Más aún, vale la siguiente estimación $\|u\|_W \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'}$.

Observar que la condición (BNB2) se puede conseguir pidiendo que exista $\beta > 0$ tal que $\sup_{w \in W - \{0\}} \frac{a(w, v)}{\|w\|_W} \geq \beta \|v\|_V \forall v \in V$.

Capítulo 3

Problema Continuo

En este capítulo estudiaremos el problema (2.2):

Dada $F \in (W_{-\alpha}(\Omega))'$, hallar $u \in W_{\alpha}(\Omega)$ / $a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega)$

Buscaremos los valores de α donde este problema esté bien planteado y admita solución única. Separaremos en dos casos según si $\mathbf{b} = 0$ y $c = 0$ o no, dado que la forma bilineal a queda más sencilla. Veremos que este problema admite solución única para

$$\alpha \in \mathbb{I} := \begin{cases} \left(-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) & \text{si } \mathbf{b} = 0 \text{ y } c = 0 \\ (0, 1) & \text{si } \mathbf{b} \neq 0 \text{ o } c \neq 0 \end{cases}$$

3.1. Caso $\mathbf{b} = 0$ y $c = 0$

En el caso en que $\mathbf{b} = 0$ y $c = 0$ la forma bilineal queda más sencilla y la notamos $a_0(u, v) = \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla v$. El problema a resolver es, entonces,

$$\text{Hallar } u \in W_{\alpha}(\Omega) / a_0(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega) \quad (3.1)$$

Nuestro objetivo es probar:

Teorema 3.1.1 (Existencia y unicidad de solución).

Sean $\alpha \in \left(-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$ y $F \in (W_{-\alpha}(\Omega))'$. Existe un único elemento $u \in W_{\alpha}(\Omega)$ /

$$a_0(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega)$$

Más aún, existe $c > 0$, independiente de F , tal que $\|u\|_{W_{\alpha}(\Omega)} \leq c \|F\|_{(W_{-\alpha}(\Omega))'}$.

Para la demostración utilizaremos el Teorema 2.0.3, y para ello necesitaremos probar las condiciones inf-sup de a_0 en $W_{\alpha}(\Omega) \times W_{-\alpha}(\Omega)$. Siguiendo a [7], la demostración de las condiciones inf-sup de a_0 se basa en el siguiente lema de descomposición de $\mathbf{L}_s^2(\Omega)$.

Lema 3.1.1. (Lema de descomposición de $\mathbf{L}_s^2(\Omega)$)

Sean $-\frac{n}{2} < s < \frac{n}{2}$, $\mathbf{q} \in \mathbf{L}_s^2(\Omega)$. Existe un único par $(\boldsymbol{\sigma}, z) \in \mathbf{L}_s^2(\Omega) \times W_s(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \boldsymbol{\sigma} + \nabla z \\ \langle A\boldsymbol{\sigma}, \nabla w \rangle &= 0 \quad \forall w \in W_{-s}(\Omega) \\ \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{L}_s^2(\Omega)} &\leq \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{L}_s^2(\Omega)} \\ \|\nabla z\|_{L_s^2(\Omega)} &\leq 2\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{L}_s^2(\Omega)} \end{aligned}$$

La demostración de D'Angelo de este lema (para el caso $A = I$) consiste en observar que dicha descomposición es la solución del siguiente problema:

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b_1(z, \boldsymbol{\tau}) = F(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}_{-s}^2(\Omega) \\ b_2(w, \boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \forall w \in W_{-s}(\Omega) \end{cases}$$

donde $a : \mathbf{L}_s^2(\Omega) \times \mathbf{L}_{-s}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $b_1 : W_s(\Omega) \times \mathbf{L}_{-s}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $b_2 : W_{-s}(\Omega) \times \mathbf{L}_s^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ y $F : \mathbf{L}_{-s}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ están definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad b_1(z, \boldsymbol{\tau}) = \int_{\Omega} \nabla z \cdot \boldsymbol{\tau} \\ b_2(w, \boldsymbol{\sigma}) &= \int_{\Omega} \nabla w \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad F(\boldsymbol{\tau}) = \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\tau} \end{aligned}$$

La falla de D'Angelo se encuentra en la prueba de existencia y unicidad de solución de este nuevo problema, pues debería comprobar las condiciones inf-sup de a sobre los núcleos de los b_i y los prueba sobre todo el espacio. No es cierto, en general, que si $\sup_{\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}_{-s}^2(\Omega)} \frac{a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_{-s}^2(\Omega)}} \geq c \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{L}_s^2(\Omega)} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{L}_s^2(\Omega)$ entonces vale $\sup_{\boldsymbol{\tau} \in K_1} \frac{a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_{-s}^2(\Omega)}} \geq c \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{L}_s^2(\Omega)} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in K_2$ donde $K_i = \{\mathbf{v} / b_i(w, \mathbf{v}) = 0\}$.

Una demostración correcta de este lema de descomposición se puede obtener utilizando un resultado de [9]. Observar que pedir $\mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} + \nabla z$ y $\langle A\boldsymbol{\sigma}, \nabla w \rangle = 0 \quad \forall w \in W_{-s}(\Omega)$ implica pedir que $0 = \langle A\mathbf{q} - A\nabla z, \nabla w \rangle = \langle A\mathbf{q}, \nabla w \rangle - \langle A\nabla z, \nabla w \rangle \quad \forall w \in W_{-s}(\Omega)$, es decir que

$$\langle A\mathbf{q}, \nabla w \rangle = \langle A\nabla z, \nabla w \rangle \quad \forall w \in W_{-s}(\Omega) \quad (3.2)$$

Buscar un elemento z que cumpla esto último nos lleva a pensar en el siguiente problema:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A\nabla z) = \operatorname{div}(A\mathbf{q}) \text{ en } \Omega \\ z = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

pues su formulación débil es $\langle A\nabla z, \nabla w \rangle = \langle A\mathbf{q}, \nabla w \rangle \quad \forall w \in W_{-s}(\Omega)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \text{div}(A\nabla z) &= \text{div}(A\mathbf{q}) \text{ en } \Omega \\ \implies \int_{\Omega} \text{div}(A\nabla z)w &= \int_{\Omega} \text{div}(A\mathbf{q})w \quad \forall w \in W_{-s}(\Omega) \\ \implies - \int_{\Omega} A\nabla z \cdot \nabla w + \int_{\partial\Omega} w A\nabla z \cdot \eta &= - \int_{\Omega} A\mathbf{q} \cdot \nabla w + \int_{\partial\Omega} w(A\mathbf{q}) \cdot \eta \quad \forall w \in W_{-s}(\Omega) \\ \implies \int_{\Omega} A\nabla z \cdot \nabla w &= \int_{\Omega} A\mathbf{q} \cdot \nabla w \quad \forall w \in W_{-s}(\Omega) \end{aligned}$$

Además, para que valgan las estimaciones de las normas del lema de descomposición se necesita una estimación del estilo $\|\nabla z\|_{L_s^2(\Omega)} \leq c\|\mathbf{q}\|_{L_s^2(\Omega)}$.

En [9, Teorema 2.5] se plantea el problema (3.3) y se prueba la estimación deseada:

Teorema 3.1.2. *Sea Ω en dominio poligonal/poliedral convexo, $1 < p < \infty$ y $w \in A_p$. Si $\mathbf{q} \in \mathbf{L}_w^2(\Omega)$ y u es la solución de*

$$\begin{cases} \Delta u = \text{div}(\mathbf{q}) \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.4)$$

entonces existe una constante C dependiente de p , de Ω y de w tal que $\|\nabla u\|_{L_w^p(\Omega)} \leq C\|\mathbf{q}\|_{L_w^p(\Omega)}$.

En nuestro caso $p = 2$, $w = d_{x_0}^{2\alpha} \in A_2$ con $-\frac{n}{2} < \alpha < \frac{n}{2}$.

Vale aclarar que el Teorema 3.1.2 se aplica en nuestro caso para $A = I$. Sin embargo, el teorema se basa en estimaciones para las derivadas de la función de Green. Estas estimaciones pueden recuperarse para $A \neq I$ cumpliendo la hipótesis de elipticidad.

Ahora con este teorema podemos demostrar correctamente el lema de descomposición para $-\frac{n}{2} < s < \frac{n}{2}$.

Demostración. Sea $\mathbf{q} \in \mathbf{L}_s^2(\Omega)$, consideramos el problema (3.3). Sea z su solución, y por el Teorema 3.1.2 tenemos que $\|\nabla z\|_{L_s^2(\Omega)} \leq C\|\mathbf{q}\|_{L_s^2(\Omega)}$. Luego consideramos $\boldsymbol{\sigma} := \mathbf{q} - \nabla z$. Notar que $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{L}_s^2(\Omega)$ y vale que

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \boldsymbol{\sigma} + \nabla z \\ \langle A\boldsymbol{\sigma}, \nabla w \rangle &= 0 \quad \forall w \in W_{-s}(\Omega) \text{ por (3.2)} \\ \|\boldsymbol{\sigma}\|_{L_s^2(\Omega)} &\leq C\|\mathbf{q}\|_{L_s^2(\Omega)} \\ \|\nabla z\|_{L_s^2(\Omega)} &\leq C\|\mathbf{q}\|_{L_s^2(\Omega)} \end{aligned}$$

□

Corolario 3.1.1. *(Condiciones Inf-Sup de a_0)*

Sea $-\frac{n}{2} < \alpha < \frac{n}{2}$. Valen las condiciones inf-sup de a_0 en $W_\alpha(\Omega) \times W_{-\alpha}(\Omega)$.

Demostración.

Veamos que $\sup_{v \in W_{-\alpha}(\Omega)} \frac{a_0(u, v)}{\|v\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} \geq C\|u\|_{W_{\alpha}(\Omega)} \forall u \in W_{\alpha}(\Omega)$.

Sea $u \in W_{\alpha}(\Omega)$. Consideramos $\mathbf{q} := d_{x_0}^{2\alpha} \nabla u$. Notar que $\mathbf{q} \in \mathbf{L}_{-\alpha}^2(\Omega)$. Por otro lado, $\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{L}_{-\alpha}^2(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L_{\alpha}^2(\Omega)}$. Ahora, tomamos $\boldsymbol{\sigma}$ y z del Lema de descomposición 3.1.1 y tenemos que

$$\begin{aligned} \sup_{v \in W_{-\alpha}(\Omega)} \frac{a_0(u, v)}{\|v\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} &\geq \frac{a_0(u, z)}{\|z\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} = \frac{\langle A\nabla u, \nabla z \rangle}{\|z\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} = \frac{\langle A\nabla u, \mathbf{q} \rangle}{\|z\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} - \overbrace{\frac{\langle A\nabla u, \boldsymbol{\sigma} \rangle}{\|z\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}}}^{=0} \\ &= \frac{\langle A\nabla u, \mathbf{q} \rangle}{\|z\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} = \frac{1}{\|z\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} \int_{\Omega} A\nabla u \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{\|z\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} \int_{\Omega} \nabla u^T A\nabla u d_{x_0}^{2\alpha} \\ &\geq \frac{1}{\|z\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} \int_{\Omega} \gamma_1 |\nabla u|^2 d_{x_0}^{2\alpha} = \gamma_1 \frac{\|\nabla u\|_{L_{\alpha}^2(\Omega)}^2}{\|z\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} \geq \gamma_1 \frac{\|\nabla u\|_{L_{\alpha}^2(\Omega)}^2}{C\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{L}_{-\alpha}^2(\Omega)}} \\ &= \frac{\gamma_1}{C} \frac{\|\nabla u\|_{L_{\alpha}^2(\Omega)}^2}{\|\nabla u\|_{L_{\alpha}^2(\Omega)}} = \frac{\gamma_1}{C} \|\nabla u\|_{L_{\alpha}^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Una observación: habría que verificar que $z \neq 0$ en $W_{-\alpha}(\Omega)$. En efecto, si $\|z\|_{W_{-\alpha}(\Omega)} = 0$ entonces $\nabla z = 0$ ctp Ω y luego $\mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma}$ ctp Ω . Luego tenemos que $0 = \langle A\boldsymbol{\sigma}, \nabla w \rangle = \langle A\mathbf{q}, \nabla w \rangle = \langle Ad_{x_0}^{2\alpha} \nabla u, \nabla w \rangle \forall w \in W_{\alpha}(\Omega)$. En particular, tomando $w = u$ se tiene que $0 = \langle Ad_{x_0}^{2\alpha} \nabla u, \nabla u \rangle \geq \gamma_1 \|\nabla u\|_{L_{\alpha}^2(\Omega)}^2$. En consecuencia debe pasar que $\nabla u = 0$ ctp Ω y por lo tanto la desigualdad de las condiciones inf-sup vale trivialmente para u . Luego, podemos asumir que $\nabla u \neq 0$ ctp Ω y por lo tanto $z \neq 0$ en $W_{-\alpha}(\Omega)$.

Análogamente veamos que $\sup_{u \in W_{\alpha}(\Omega)} \frac{a_0(u, v)}{\|u\|_{W_{\alpha}(\Omega)}} \geq C\|v\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}, \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega)$.

Sea $v \in W_{-\alpha}(\Omega)$. Consideramos $\mathbf{q} := d_{x_0}^{-2\alpha} \nabla v$. Notar que $\mathbf{q} \in \mathbf{L}_{\alpha}^2(\Omega)$ y además $\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{L}_{\alpha}^2(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L_{-\alpha}^2(\Omega)}$. Ahora, tomamos $\boldsymbol{\sigma}$ y z del Lema de descomposición 3.1.1

y tenemos que

$$\begin{aligned}
\sup_{u \in W_\alpha(\Omega)} \frac{a_0(u, v)}{\|u\|_{W_\alpha(\Omega)}} &\geq \frac{a_0(z, v)}{\|z\|_{W_\alpha(\Omega)}} = \frac{\langle A \nabla z, \nabla v \rangle}{\|z\|_{W_\alpha(\Omega)}} = \frac{\langle A \mathbf{q}, \nabla v \rangle}{\|z\|_{W_\alpha(\Omega)}} - \overbrace{\frac{\langle A \boldsymbol{\sigma}, \nabla v \rangle}{\|z\|_{W_\alpha(\Omega)}}}^{=0} \\
&= \frac{\langle A \mathbf{q}, \nabla v \rangle}{\|z\|_{W_\alpha(\Omega)}} = \frac{1}{\|z\|_{W_\alpha(\Omega)}} \int_{\Omega} A \mathbf{q} \cdot \nabla v = \frac{1}{\|z\|_{W_\alpha(\Omega)}} \int_{\Omega} \nabla v^T A \nabla v d_{x_0}^{-2\alpha} \\
&\geq \frac{1}{\|z\|_{W_\alpha(\Omega)}} \int_{\Omega} \gamma_1 |\nabla v|^2 d_{x_0}^{-2\alpha} = \gamma_1 \frac{\|\nabla v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)}^2}{\|z\|_{W_\alpha(\Omega)}} \geq \gamma_1 \frac{\|\nabla v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)}^2}{C \|q\|_{L^2_\alpha(\Omega)}} \\
&= \frac{\gamma_1 \|\nabla v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)}^2}{C \|\nabla v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)}} = \frac{\gamma_1}{C} \|\nabla v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)}
\end{aligned}$$

De manera análoga a como lo hicimos en el caso anterior podemos suponer que $z \neq 0$ en $W_\alpha(\Omega)$, pues en caso de ser cero debería suceder que $\nabla v = 0$ ctp Ω y en ese caso la desigualdad que queríamos probar vale trivialmente. \square

Ahora sí, veremos la demostración del Teorema 3.1.1.

Demostración.

Basta chequear las hipótesis del Teorema BNB 2.0.3:

- $W_\alpha(\Omega)$ y $W_{-\alpha}(\Omega)$ con $\alpha \in (-\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ son espacios de Hilbert
- $F \in (W_{-\alpha}(\Omega))'$ por hipótesis
- Claramente a_0 es bilineal
- Veamos que a_0 es continuo en $W_\alpha(\Omega) \times W_{-\alpha}(\Omega)$: usando que $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y luego la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}
|a_0(u, v)| &\leq \int_{\Omega} |A \nabla u \cdot \nabla v| \\
&\leq \|A\|_{L^\infty} \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| \\
&= \|A\|_{L^\infty} \int_{\Omega} |\nabla u d_{x_0}^\alpha| |\nabla v d_{x_0}^{-\alpha}| \\
&\leq \|A\|_{L^\infty} \|\nabla u d_{x_0}^\alpha\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v d_{x_0}^{-\alpha}\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \|A\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2_\alpha(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)} \\
&= \|A\|_{L^\infty} \|u\|_{W_\alpha(\Omega)} \|v\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}
\end{aligned}$$

- a_0 cumple las condiciones inf-sup en $W_\alpha(\Omega) \times W_{-\alpha}(\Omega)$ por lo visto en el Corolario 3.1.1

Luego, por el Teorema BNB 2.0.3, tenemos que existe un único elemento $u \in W_\alpha(\Omega)$ tal que $a_0(u, v) = \langle F, v \rangle \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega)$, y además existe una constante $c > 0$, independiente de F , tal que $\|u\|_{W_\alpha(\Omega)} \leq c\|F\|_{(W_{-\alpha}(\Omega))'}$. \square

3.2. Caso $\mathbf{b} \neq 0$ o $c \neq 0$

Supongamos ahora que $\mathbf{b} \neq 0$ o $c \neq 0$. Vamos a separar el problema modelo en dos, de manera que uno de ellos sea el caso anterior ($\mathbf{b} = 0$ y $c = 0$). Consideramos los siguientes operadores:

- $a_0 : W_\alpha(\Omega) \times W_{-\alpha}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido como $a_0(u, v) = \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla v$
- dado $u \in W_\alpha(\Omega)$, definimos $L_u : W_{-\alpha}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$L_u(v) = - \int_{\Omega} (\mathbf{b} \nabla u + cu)v$$

y los siguientes problemas:

- El problema modelo correspondiente al caso $\mathbf{b} = 0$ y $c = 0$ visto en (3.1):

$$\text{Hallar } u \in W_\alpha(\Omega) / a_0(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega)$$

- Dado $\bar{u} \in W_\alpha(\Omega)$ solución del problema anterior,

$$\text{Hallar } \bar{w} \in H_0^1(\Omega) / a(\bar{w}, v) = L_{\bar{u}}(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.5)$$

A lo largo de la sección veremos que $u := \bar{u} + \bar{w}$ es la solución buscada del problema (2.2).

3.2.1. Existencia de Solución del Problema Modelo

En este apartado nos encargaremos de probar que $u := \bar{u} + \bar{w}$ es solución del problema modelo (2.2). Para ello necesitaremos primero ver que el problema (3.5) está bien definido y tiene solución. Nos enfocamos entonces en ver que $L_{\bar{u}} \in (H_0^1(\Omega))'$ y para ello vemos unos lemas preliminares.

Lema 3.2.1. Sean Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^n , $p \geq 1$ y $\alpha \in \mathbb{R} / \alpha p < \frac{n}{2}$. Entonces $d_{x_0}^{-2\alpha} \in L^p(\Omega)$.

Demostración. Sea $R > 0 / \Omega \subset B_R(x_0)$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d_{x_0}^{-2\alpha p} dx &\leq \int_{B_R(x_0)} d_{x_0}^{-2\alpha p} dx = \int_0^R \int_{\partial B_r(x_0)} r^{-2\alpha p} dS_x dr \\ &= \int_0^R r^{-2\alpha p} |\partial B_r(x_0)| dr = \int_0^R r^{-2\alpha p} c_n r^{n-1} dr \\ &= c_n \int_0^R r^{-2\alpha p + n - 1} dr \end{aligned}$$

Dado que $\alpha p < \frac{n}{2}$ se tiene que $n - 2\alpha p > 0$ y por lo tanto $\int_{\Omega} d_{x_0}^{2\alpha p} dx \leq c_n \frac{R^{n-2\alpha p}}{n-2\alpha p} < \infty$. \square

Recordamos los siguientes teoremas de inmersión de [1, Teorema 4.12]:

- si $n = 2$, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $q \geq 2$
- si $n = 3$, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $2 \leq q \leq 6$

Lema 3.2.2. Sean Ω un conjunto acotado de \mathbb{R}^n con $n = 2$ ó 3 y $0 < \alpha < 1$. Entonces $H^1(\Omega) \hookrightarrow L_{-\alpha}^2(\Omega)$, es decir que existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|u\|_{L_{-\alpha}^2(\Omega)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Demostración. Veamos primero el caso $n = 2$.

Dado que $0 < \alpha < 1$ podemos tomar p fijo tal que $1 < p < \frac{1}{\alpha}$. Sea q su conjugado Lebesgue, i.e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Aplicando la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\|u\|_{L_{-\alpha}^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} u^2 d_{x_0}^{-2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\Omega} u^{2q} \right)^{\frac{1}{2q}} \left(\int_{\Omega} d_{x_0}^{-2\alpha p} \right)^{\frac{1}{2p}}$$

Para obtener el resultado, analizamos cada uno de estos dos factores. El primero de ellos está acotado por $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ gracias al teorema de inmersión que acabamos de recordar dado que $1 < q < \infty$ pues $p > 1$. Para el segundo factor tenemos el Lema 3.2.1 que nos dice que es finito dado que $\alpha p < 1 = \frac{n}{2}$ por la elección de p . Por lo tanto tenemos que $\|u\|_{L_{-\alpha}^2(\Omega)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Veamos ahora el caso $n = 3$. Consideramos $p = \frac{3}{2}$ y su conjugado Lebesgue $q = 3$. Aplicando la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_{-\alpha}^2(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} u^2 d_{x_0}^{-2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\Omega} u^{2q} \right)^{\frac{1}{2q}} \left(\int_{\Omega} d_{x_0}^{-2\alpha p} \right)^{\frac{1}{2p}} \\ &= \left(\int_{\Omega} u^6 \right)^{\frac{1}{6}} \left(\int_{\Omega} d_{x_0}^{-3\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Nuevamente, analizamos cada uno de estos dos factores. El primero de ellos está acotado por $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ gracias al teorema de inmersión que acabamos de recordar. Para el segundo factor tenemos el Lema 3.2.1 que nos dice que es finito dado que $\alpha p < \frac{3}{2}$ pues $0 < \alpha < 1$ y $p = \frac{3}{2}$. Por lo tanto tenemos que $\|u\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)} \leq c\|u\|_{H^1(\Omega)}$. \square

Corolario 3.2.1. Sean Ω un conjunto acotado de \mathbb{R}^n , $\mathbf{b} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ y $c \in L^\infty$. Dado $u \in W_\alpha(\Omega)$ con $0 < \alpha < 1$ consideramos el operador

$$L_u(v) := - \int_{\Omega} (\mathbf{b}\nabla u + cu)v$$

Entonces $L_u \in (H^1(\Omega))'$. Más aún, existe una constante $C > 0$, independiente de u , tal que $\|L_u\|_{(H^1(\Omega))'} \leq C\|u\|_{W_\alpha(\Omega)}$.

Demostración. Claramente el operador L_u es lineal. Sólo resta ver que es acotado. Aplicando la desigualdad de Hölder, la desigualdad triangular y usando que \mathbf{b} y c son acotados tenemos que

$$\begin{aligned} |L_u(v)| &\leq \int_{\Omega} |\mathbf{b}\nabla u + cu||v| = \int_{\Omega} |\mathbf{b}\nabla u + cu|d_{x_0}^\alpha |v|d_{x_0}^{-\alpha} \\ &\leq \|(\mathbf{b}\nabla u + cu)d_{x_0}^\alpha\|_{L^2(\Omega)} \|vd_{x_0}^{-\alpha}\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|\mathbf{b}\nabla u + cu\|_{L^2_\alpha(\Omega)} \|v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)} \\ &\leq (\|\mathbf{b}\nabla u\|_{L^2_\alpha(\Omega)} + \|cu\|_{L^2_\alpha(\Omega)}) \|v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)} \\ &\leq (\|\mathbf{b}\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^2_\alpha(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2_\alpha(\Omega)}) \|v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)} \end{aligned}$$

Ahora, por el Lema 3.2.2 tenemos que $\|v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)} \lesssim \|v\|_{H^1(\Omega)}$, y por Poincaré tenemos que $\|u\|_{L^2_\alpha(\Omega)} \lesssim C_P\|u\|_{W_\alpha(\Omega)}$. Luego, tenemos que

$$|L_u(v)| \lesssim (\|\mathbf{b}\|_{L^\infty} + \|c\|_{L^\infty}) \|u\|_{W_\alpha(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Por lo tanto hemos probado que $L_u \in (H^1(\Omega))'$. De esta última desigualdad obtenemos, además, que $\|L_u\|_{(H^1(\Omega))'} \lesssim \|u\|_{W_\alpha(\Omega)}$. \square

Ahora sí, empezamos a construir la solución del problema modelo. En la sección anterior vimos la existencia y unicidad de solución del problema (3.1). Ahora para la resolución del problema (3.5) vemos el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1 (Existencia y unicidad de solución de (3.5)).

Sean Ω un conjunto acotado de \mathbb{R}^n , $\mathbf{b} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $c \in L^\infty$, $0 < \alpha < 1$ y $\bar{u} \in W_\alpha(\Omega)$ solución del problema (3.1).

Entonces existe un único elemento $\bar{w} \in H_0^1(\Omega)$ solución de (3.5), es decir que:

$$a(\bar{w}, v) = L_{\bar{u}}(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Más aún, existe $c > 0$, independiente de $L_{\bar{u}}$, tal que $\|\bar{w}\|_{H^1(\Omega)} \leq c\|\bar{u}\|_{W_\alpha(\Omega)}$.

Demostración. Para ver la existencia y unicidad de solución, utilizaremos el Teorema de Lax-Milgram 2.0.2. Por lo tanto basta chequear sus hipótesis:

- Claramente el operador $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es bilineal.
- Veamos que a es continuo en $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$: usando la desigualdad triangular, Hölder y que A , \mathbf{b} y c son acotados tenemos que

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &\leq \int_{\Omega} (|A\nabla u \cdot \nabla v + \mathbf{b} \cdot \nabla uv + cuv|) \\
&\leq \int_{\Omega} (|A\nabla u| |\nabla v| + |\mathbf{b}| |\nabla u| |v| + |c| |u| |v|) \\
&\leq \|A\|_{L^\infty} \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| + \|\mathbf{b}\|_{L^\infty} \int_{\Omega} |\nabla u| |v| + \|c\|_{L^\infty} \int_{\Omega} |u| |v| \\
&\leq \|A\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{b}\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq (\|A\|_{L^\infty} + \|\mathbf{b}\|_{L^\infty} + \|c\|_{L^\infty}) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

- Veamos que a es coercitivo en $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$: usando que A es uniformemente simétrica definida positiva en el primer término, y la definición de derivada en el segundo llegamos a que

$$\begin{aligned}
a(u, u) &= \int_{\Omega} (A\nabla u \cdot \nabla u + (\mathbf{b} \cdot \nabla u)u + cu^2) \\
&\geq \int_{\Omega} \left(\gamma_1 |\nabla u|^2 - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{b})u^2 + cu^2 \right) \\
&= \int_{\Omega} \left(\gamma_1 |\nabla u|^2 + \left(c - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{b}) \right) u^2 \right)
\end{aligned}$$

Dado que $(c - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{b})) \geq 0$ y usando Poincaré resulta que $a(u, u) \geq \int_{\Omega} \gamma_1 |\nabla u|^2 = \gamma_1 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$.

- Por último tenemos que $L_{\bar{u}} \in (H^1(\Omega))'$ por el Corolario 3.2.1, y por ende $L_{\bar{u}} \in (H_0^1(\Omega))'$.

Luego tenemos que existe un único $\bar{w} \in H_0^1(\Omega)$ solución del problema (3.5) y además $\|\bar{w}\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|L_{\bar{u}}\|_{(H_0^1(\Omega))'} \leq c \|\bar{u}\|_{W_\alpha(\Omega)}$. \square

Ahora estamos en condiciones de probar que $\bar{u} + \bar{w}$ es solución del problema modelo (2.2).

Teorema 3.2.2 (Existencia de solución del problema (2.2)).

Sean $0 < \alpha < 1$, $\bar{u} \in W_\alpha(\Omega)$ solución del problema (3.1) y $\bar{w} \in H_0^1(\Omega)$ solución del problema (3.5).

Entonces tenemos que $u := \bar{u} + \bar{w}$ es solución del problema (2.2), es decir que

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega)$$

Más aún, existe $c > 0$, independiente de F , tal que $\|u\|_{W_\alpha(\Omega)} \leq c\|F\|_{(W_{-\alpha}(\Omega))'}$.

Demostración. Como primer paso, observemos que $u \in W_\alpha(\Omega)$. En efecto, $\bar{u} \in W_\alpha(\Omega)$ y además $\bar{w} \in H_0^1(\Omega) \subset W_\alpha(\Omega)$ (pues $0 < \alpha < 1 \leq \frac{n}{2}$).

En segundo lugar veamos que $a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega)$. Gracias al Corolario 3.2.1 tenemos que $L_{\bar{u}}(v) \in (H^1(\Omega))'$; y además, como $\alpha > 0$, vale que $W_{-\alpha}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ y por lo tanto $L_{\bar{u}}(v) \in (W_{-\alpha}(\Omega))'$. En consecuencia se tiene la siguiente igualdad $a(\bar{u}, v) = a_0(\bar{u}, v) - L_{\bar{u}}(v) \quad \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega)$. Luego, para cualquier elemento $v \in W_{-\alpha}(\Omega)$ vale lo siguiente

$$\begin{aligned} a(u, v) &= a(\bar{u} + \bar{w}, v) = a(\bar{u}, v) + a(\bar{w}, v) \\ &= a_0(\bar{u}, v) - L_{\bar{u}}(v) + a(\bar{w}, v) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como \bar{u} es solución del problema (3.1) tenemos que

$$a_0(\bar{u}, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega) \quad (3.7)$$

Por otro lado, como \bar{w} es solución del problema (3.5) tenemos que $a(\bar{w}, v) = L_{\bar{u}}(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$. En particular, vale para $W_{-\alpha}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ pues $\alpha \in (0, 1) \subseteq (0, \frac{n}{2})$, es decir que

$$a(\bar{w}, v) = L_{\bar{u}}(v) \quad \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega) \quad (3.8)$$

Por lo tanto, juntando (3.6), (3.7) y (3.8) tenemos que $a(u, v) = a_0(\bar{u}, v) - L_{\bar{u}}(v) + a(\bar{w}, v) = \langle F, v \rangle - L_{\bar{u}}(v) + L_{\bar{u}}(v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega)$.

Veamos ahora la estimación de la norma:

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_\alpha(\Omega)} &\leq \|\bar{u}\|_{W_\alpha(\Omega)} + \|\bar{w}\|_{W_\alpha(\Omega)} \\ &\leq \|\bar{u}\|_{W_\alpha(\Omega)} + R^\alpha \|\bar{w}\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

donde $R > 0$ es tal que $\Omega \subset B_R(x_0)$. Ahora, como \bar{u} es solución de (3.1) tenemos que $\|\bar{u}\|_{W_\alpha(\Omega)} \leq c\|F\|_{(W_{-\alpha}(\Omega))'}$; y como \bar{w} es solución de (3.5) tenemos que $\|\bar{w}\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|L_{\bar{u}}\|_{(H_0^1(\Omega))'} \leq C\|\bar{u}\|_{W_\alpha(\Omega)}$. Luego $\|u\|_{W_\alpha(\Omega)} \leq C\|F\|_{(W_{-\alpha}(\Omega))'}$. \square

3.2.2. Unicidad de Solución del Problema Modelo

Hemos visto que $u = \bar{u} + \bar{w}$ es solución del problema (2.2). Supongamos ahora que existe otra solución, llamémosla $\underline{u} \in W_\alpha(\Omega)$, y veamos que $\underline{u} = u$, o equivalentemente $\underline{u} - \bar{u} = \bar{w}$. Definiendo $\underline{w} := \underline{u} - \bar{u}$, nos gustaría ver que $\underline{w} = \bar{w}$ para luego poder afirmar que $\underline{u} = u$.

Una forma de comprobar que $\underline{w} = \bar{w}$ es ver que ambos elementos están en el mismo espacio y que son solución de algún problema que admite una única solución. Por lo tanto nos enfocamos en estos dos puntos.

Observación 3.2.1. *Notar que $\underline{w} \in W_\alpha(\Omega)$ y que $a(\underline{w}, v) = L_{\bar{u}}(v) \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega)$.*

En efecto, $\underline{w} \in W_\alpha(\Omega)$ pues \underline{u} y \bar{u} lo están. Por otro lado, recordando que \underline{u} es solución de (2.2) y que \bar{u} es solución de (3.1) tenemos que para todo $v \in W_{-\alpha}(\Omega)$ vale lo siguiente

$$\begin{aligned}
 a(\underline{w}, v) &= a(\underline{u} - \bar{u}, v) = a(\underline{u}, v) - a(\bar{u}, v) \\
 &= \langle F, v \rangle - a(\bar{u}, v) = \langle F, v \rangle - \left(a_0(\bar{u}, v) + \int_{\Omega} \mathbf{b} \nabla \bar{u} v + c\bar{u}v \right) \\
 &= \langle F, v \rangle - \langle F, v \rangle - \int_{\Omega} \mathbf{b} \nabla \bar{u} v + c\bar{u}v \\
 &= - \int_{\Omega} \mathbf{b} \nabla \bar{u} v + c\bar{u}v \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

Consideramos los siguientes problemas:

$$\text{Hallar } w \in W_\alpha(\Omega) / a_0(w, v) = L_{\underline{u}}(v) \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega) \tag{3.10}$$

$$\text{Hallar } w_0 \in H_0^1(\Omega) / a_0(w_0, v) = L_{\underline{u}}(v) \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.11}$$

Teorema 3.2.3. *Los problemas (3.10) y (3.11) admiten una única solución: \underline{w} .*

Demostración. Para determinar la existencia y unicidad de solución de (3.10) basta chequear las hipótesis del Teorema BNB 2.0.3. En el Teorema 3.1.1 vimos que a_0 es bilineal, continuo y cumple las condiciones inf-sup en $W_\alpha(\Omega) \times W_{-\alpha}(\Omega)$. Por otro lado, dado que $\underline{u} \in W_\alpha(\Omega)$ el Corolario 3.2.1 nos dice que $L_{\underline{u}} \in (H^1(\Omega))'$; y como $\alpha > 0$ tenemos que $(H^1(\Omega))' \subset (W_{-\alpha}(\Omega))'$ concluyendo que $L_{\underline{u}} \in (W_{-\alpha}(\Omega))'$. Luego existe un único elemento $w \in W_\alpha(\Omega)$ solución del problema (3.10).

Veamos ahora que \underline{w} es solución de este problema: claramente \underline{w} está en el espacio solución $W_\alpha(\Omega)$ por cómo fue construída; y por otro lado, recordando que \underline{w} cumple

(3.9), tenemos que, $\forall v \in W_{-\alpha}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
 a_0(\underline{w}, v) &= a(\underline{w}, v) - \int_{\Omega} \mathbf{b} \nabla \underline{w} v + c \underline{w} v \\
 &= - \int_{\Omega} \mathbf{b} \nabla \bar{u} v + c \bar{u} v - \int_{\Omega} \mathbf{b} \nabla \underline{w} v + c \underline{w} v \\
 &= - \int_{\Omega} \mathbf{b} \nabla (\bar{u} + \underline{w}) v + c (\bar{u} + \underline{w}) v \\
 &= - \int_{\Omega} \mathbf{b} \nabla \underline{u} v + c \underline{u} v
 \end{aligned}$$

Dado que w era la única solución de (3.10) y \underline{w} también lo es, se concluye que $\underline{w} = w$.

Pasamos ahora a analizar el segundo problema. Para determinar la existencia y unicidad de solución del problema (3.11) basta chequear las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram 2.0.2:

- Claramente $a_0 : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es bilineal
- Veamos que a_0 es continuo en $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$: usando que A es acotado y la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}
 |a_0(w, v)| &\leq \int_{\Omega} |A \nabla w \cdot \nabla v| \\
 &\leq \|A\|_{L^\infty} \int_{\Omega} |\nabla w| |\nabla v| \\
 &\leq \|A\|_{L^\infty} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq \|A\|_{L^\infty} \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}
 \end{aligned}$$

- Veamos que a_0 es coercitivo en $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$: usando que A es uniformemente simétrica definida positiva tenemos que

$$\begin{aligned}
 a_0(w, w) &= \int_{\Omega} A \nabla w \cdot \nabla w \\
 &\geq \gamma_1 \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \\
 &= \gamma_1 \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &= \gamma_1 \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2
 \end{aligned}$$

- Por el Corolario 3.2.1 tenemos que $L_{\underline{u}} \in (H_0^1(\Omega))'$ pues $\underline{u} \in W_\alpha(\Omega)$.

Luego, por Lax-Milgram, existe un único elemento $w_0 \in H_0^1(\Omega)$ solución del problema (3.11).

Veamos que w_0 también es solución del problema (3.10). En efecto, $w_0 \in H_0^1(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega) \subset W_\alpha(\Omega)$ (pues $\alpha > 0$), por lo tanto $w_0 \in W_\alpha(\Omega)$. Por otro lado, sabemos que w_0 cumple que $a_0(w_0, v) = L_{\underline{u}}(v) \forall v \in H_0^1(\Omega)$ y $W_{-\alpha}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$; en particular verifica que $a_0(w_0, v) = L_{\underline{u}}(v) \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega)$. Luego w_0 es solución de (3.10). Dado que w era la única solución de este problema tenemos que $w_0 = w$.

Hemos probado que $\underline{w} = w \in W_\alpha(\Omega)$ y que $w = w_0 \in H_0^1(\Omega)$. Por lo tanto concluimos que $\underline{w} = w_0 \in H_0^1(\Omega)$. Es decir que \underline{w} es la única solución de ambos problemas. \square

Corolario 3.2.2. $\underline{w} = \bar{w}$

Demostración. Recordar que $\bar{w} \in H_0^1(\Omega)$ es la solución del problema (3.5). Gracias al teorema anterior tenemos que \underline{w} , que por construcción estaba en el espacio $W_\alpha(\Omega)$, está en el espacio $H_0^1(\Omega)$. Luego para poder concluir que ambos elementos son el mismo, debemos ver que ambos son solución de algún problema que admite única solución. Veamos entonces que \underline{w} es solución del problema (3.5): sea $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
 a(\underline{w}, v) &= a_0(\underline{w}, v) + \int_{\Omega} \mathbf{b} \nabla \underline{w} v + c \underline{w} v \\
 &= a_0(w_0, v) + \int_{\Omega} \mathbf{b} \nabla \underline{w} v + c \underline{w} v \\
 &= L_{\underline{u}}(v) + \int_{\Omega} \mathbf{b} \nabla \underline{w} v + c \underline{w} v \\
 &= - \int_{\Omega} \mathbf{b} \nabla \underline{u} v + c \tilde{u} v + \int_{\Omega} \mathbf{b} \nabla \underline{w} v + c \underline{w} v \\
 &= - \int_{\Omega} \mathbf{b} \nabla (\underline{u} - \underline{w}) v + c (\underline{u} - \underline{w}) v \\
 &= - \int_{\Omega} \mathbf{b} \nabla (\bar{u}) v + c (\bar{u}) v \\
 &= L_{\bar{u}}(v)
 \end{aligned}$$

donde en la anteúltima igualdad hemos usado la definición de $\underline{w} = \underline{u} - \bar{u}$. Es decir que \underline{w} es solución del problema (3.5). Dado que la solución de este problema es única concluimos que $\underline{w} = \bar{w}$. \square

Corolario 3.2.3 (Unicidad de solución del problema (2.2)). $\underline{u} = \bar{u}$.

Demostración.

Gracias al corolario anterior tenemos que $\underline{w} = \bar{w}$, es decir que $\underline{u} - \bar{u} = \bar{w}$ o equivalentemente $\underline{u} = \bar{u} + \bar{w}$. Es decir que $\underline{u} = u$. \square

Capítulo 4

Problema Discreto

En este capítulo construiremos una familia de mallas sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sobre las que plantearemos el problema discreto. Veremos la existencia y unicidad de solución de dicho problema.

4.1. Construcción de la malla

Sea \mathcal{T} una triangulación admisible del dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, esto es una partición de Ω en triángulos (en dimensión $n = 2$) o tetraedros (en dimensión $n = 3$) de manera tal que si dos de sus elementos se intersecan lo hacen en un vértice o en un lado (completo) o en una cara (completa). Diremos que la familia de mallas $\{\mathcal{T}_h\}$ es regulr si existe ϱ_0 tal que $\varrho := \sup_{K \in \mathcal{T}} \frac{h_K}{\rho_K} < \varrho_0$ para todas las triangulaciones de la familia, donde h_K es el diámetro del elemento K y ρ_K es el radio de la bola más grande contenida en el elemento K .

Por otro lado, notamos $h = \max_{K \in \mathcal{T}} h_K$, y para cada $K \in \mathcal{T}$ definimos las siguientes métricas $r_K = \text{dist}(K, x_0)$ y $\bar{r}_K = \max_{x \in K} \{\text{dist}(x, x_0)\}$.

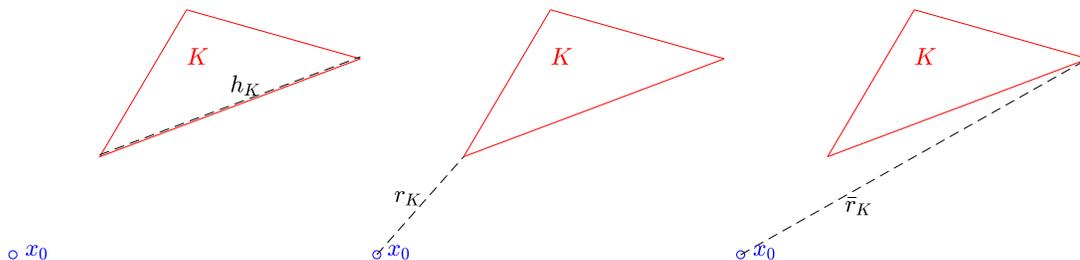


Figura 4.1

Ahora sí pasamos a definir la malla. Sea $0 < \mu \leq 1$ un parámetro de graduación de la malla. Trataremos de manera diferente a los elementos de la triangulación según si tocan o no a la singularidad, de manera tal que h_K escala como $hr_K^{1-\mu}$ lejos de la singularidad x_0 y como $h^{\frac{1}{\mu}}$ cerca de x_0 . En concreto, dado $\delta > 0$ fijo, asumimos que $r_K > \delta h_k$ para $K / x_0 \notin K$ y que existen constantes c_1 y c_2 positivas tales que:

$$\begin{cases} c_1 hr_k^{1-\mu} \leq h_K \leq c_2 hr_k^{1-\mu} & \text{si } x_0 \notin K \\ c_1 h^{\frac{1}{\mu}} \leq h_K \leq c_2 h^{\frac{1}{\mu}} & \text{si } x_0 \in K \end{cases}$$

Además los elementos de la triangulación K que tocan a la singularidad x_0 lo hacen de manera tal que x_0 es un vértice de K .

Notar que si $\mu = 1$ entonces estamos en el caso de una malla uniforme ($h_K \lesssim h \lesssim h_K$), y si $\mu \rightarrow 0$ entonces los elementos cercanos a x_0 se hacen cada vez más pequeños, como se ve en las Figuras 4.2 y 4.3.

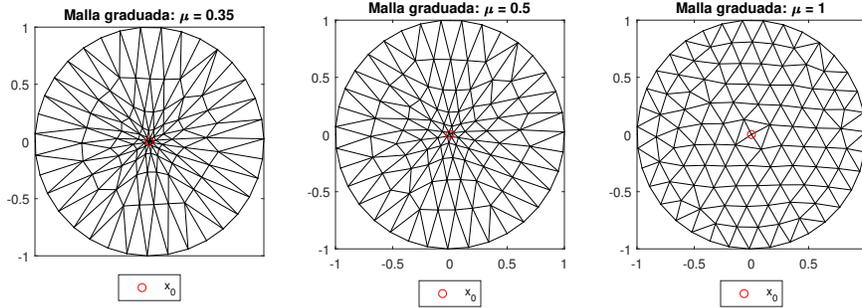


Figura 4.2: Mallas graduadas con diferentes parámetros de graduación en dimensión 2.

Consideraremos dos conjuntos dentro de la partición según la cercanía a la singularidad x_0 :

$$\mathcal{T}_h^{\text{in}} := \{K \in \mathcal{T}_h / x_0 \in K\} \text{ y } \mathcal{T}_h^{\text{out}} := \{K \in \mathcal{T}_h / x_0 \notin K\}$$

En la Figura 4.4 se muestran los elementos de la triangulación vecinos de la singularidad x_0 que forman $\mathcal{T}_h^{\text{in}}$, y los que no tocan a la singularidad que forman $\mathcal{T}_h^{\text{out}}$.

Lema 4.1.1. *Valen las siguientes relaciones:*

- (I) $\bar{r}_K \approx h_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$
- (II) $\bar{r}_K \approx r_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}$
- (III) $d_{x_0} \sim r_K \sim \bar{r}_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}$

Demostración.

Notar que $\bar{r}_K \leq h_K + r_k \quad \forall K \in \mathcal{T}$ (ver Figura 4.5). En efecto, considerando $\underline{x} \in K / r_K = \text{dist}(\underline{x}, x_0)$, tenemos que $\text{dist}(x, x_0) \leq \text{dist}(x, \underline{x}) + \text{dist}(\underline{x}, x_0) \leq h_K + r_K \quad \forall x \in K$, y por ende $\bar{r}_K \leq h_K + r_K$.

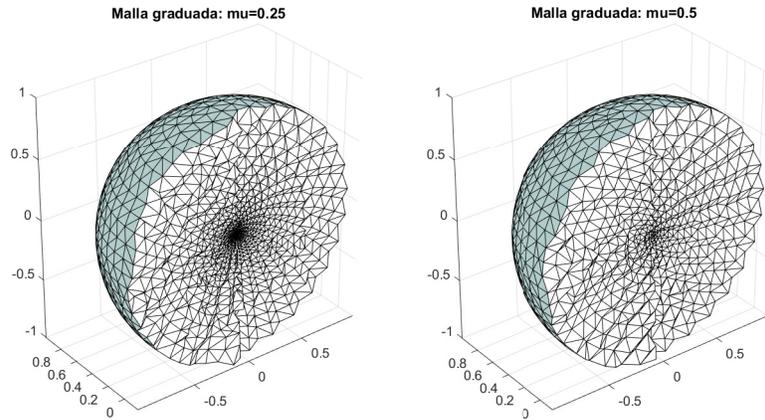


Figura 4.3: Mallas graduadas con diferentes parámetros de graduación en dimensión 3.

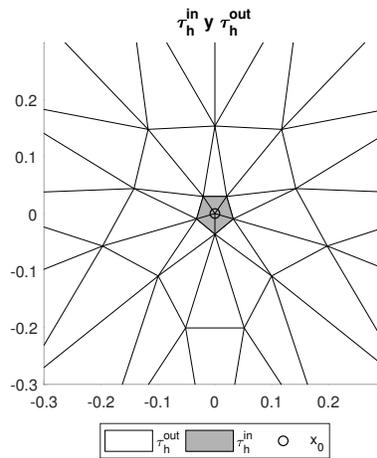


Figura 4.4

(i) Sea $K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$.

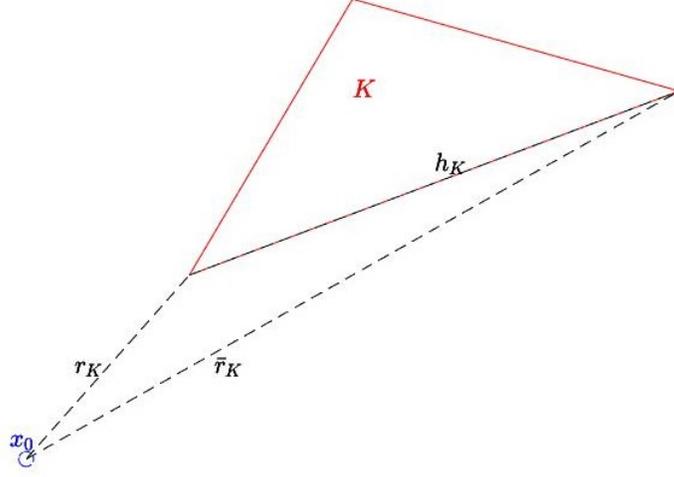
Veamos primero que $\bar{r}_K \lesssim h_K$. Con la estimación anterior y considerando además que $K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$ concluimos que $\bar{r}_K \leq h_K + r_K = h_K$ pues $r_K = 0$.

Veamos ahora que $h_K \lesssim \bar{r}_K$. Notar que $K \subseteq \overline{B_{\bar{r}_K}(x_0)}$ pues

$$\text{dist}(x, x_0) \leq \max_{x \in K} \text{dist}(x, x_0) = \bar{r}_K.$$

Luego se tiene que $\text{diam}(K) \leq \text{diam}(\overline{B_{\bar{r}_K}(x_0)})$, es decir que $h_K \leq 2\bar{r}_K$.

(ii) Sea $K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}$. Por definición $r_K \leq \bar{r}_K$, así que basta ver que $\bar{r}_K \lesssim r_K$. En el


 Figura 4.5: $\bar{r}_K \leq h_K + r_K$

ítem anterior vimos que $\bar{r}_K \leq h_K + r_K$, y considerando además que $K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}$ concluimos que $\bar{r}_K \leq h_K + r_K \leq \frac{1}{\delta} r_K + r_K = (\frac{1}{\delta} + 1) r_K$.

- (III) Como vale que $r_K \leq d_{x_0} \leq \bar{r}_K$ y, por lo visto en el ítem anterior, tenemos que $\bar{r}_K \sim r_K$ entonces concluimos que $d_{x_0} \sim r_K \sim \bar{r}_K$.

□

Lema 4.1.2.

Sean $K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$ y $K' \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}$ tales que $K \cap K' \neq \emptyset$. Luego $r_{K'} \sim h^{\frac{1}{\mu}}$ y $h_{K'} \sim h^{\frac{1}{\mu}}$.

Demostración.

Veamos primero que $h^{\frac{1}{\mu}} \lesssim r_{K'}$. Como $K' \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}$ entonces $r_{K'} > \delta h_{K'} \sim h r_{K'}^{1-\mu}$ y por lo tanto $r_{K'}^\mu \gtrsim h$; es decir que $r_{K'} \gtrsim h^{\frac{1}{\mu}}$.

Veamos ahora que $r_{K'} \lesssim h^{\frac{1}{\mu}}$. Notar que $r_{K'} \leq \bar{r}_K$. En efecto, si tomamos $\tilde{x} \in K' \cap K$ tenemos que $r_{K'} \leq d(\tilde{x}, x_0) \leq \bar{r}_K$. Ahora, por el lema anterior tenemos que $\bar{r}_K \sim h_K \sim h^{\frac{1}{\mu}}$ pues $K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$; y en consecuencia $r_{K'} \lesssim h^{\frac{1}{\mu}}$.

Juntando estas dos observaciones hemos probado que $r_{K'} \sim h^{\frac{1}{\mu}}$. Por último notar que $h_{K'} \sim h r_{K'}^{1-\mu} \sim h h^{\frac{1-\mu}{\mu}} = h^{\frac{1}{\mu}}$. □

4.2. Problema Discreto

Dada una triangulación \mathcal{T} de Ω , consideramos el espacio de las funciones continuas definidas por polinomios de grado $\ell \in \mathbb{N}$ en cada elemento de la triangulación y que se

anulan en el borde de Ω :

$$\mathbb{V}_{\mathcal{T}}^{\ell}(\Omega) := \{v \in H_0^1(\Omega) / v|_K \in \mathcal{P}_{\ell}(K) \forall K \in \mathcal{T}\}$$

Observación 4.2.1. $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}^{\ell}(\Omega) \subseteq W_{\beta}(\Omega) \forall \beta \in (-\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$

En efecto, dado $v \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}^{\ell}(\Omega)$, existe una constante $c_0 > 0$ tal que $v^2(x) \leq c_0 \forall x \in \Omega$, y por lo tanto concluimos que $\int_{\Omega} v^2 d_{x_0}^{2\beta} \leq c_0 \int_{\Omega} d_{x_0}^{2\beta} < \infty$ dado que $-\frac{n}{2} < \beta < \frac{n}{2}$. Además, existe una constane $c_1 > 0$ tal que $|\nabla v|^2 \leq c_1 \forall x \in \Omega$, y por lo tanto tenemos que $\int_{\Omega} |\nabla v|^2 d_{x_0}^{2\beta} \leq c_1 \int_{\Omega} d_{x_0}^{2\beta} < \infty$ dado que $-\frac{n}{2} < \beta < \frac{n}{2}$.

Estamos en condiciones de plantear el siguiente problema discreto:

$$\text{Hallar } u_h \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}^{\ell}(\Omega) / a(u_h, v_h) = \langle F, v_h \rangle \forall v_h \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}^{\ell}(\Omega) \quad (4.1)$$

Notar que la unicidad de solución se hereda del problema variacional continuo, pero no la existencia de ella. El problema discreto lo estudiaremos en el caso $\mathbf{b} = 0$ y $c = 0$.

4.3. Caso $\mathbf{b} = 0$ y $c = 0$

En este caso la forma bilineal a quedaba más sencilla y la habíamos notado a_0 . Por lo tanto nuestro problema discreto es:

$$\text{Hallar } u_h \in (V_{\mathcal{T}}^{\ell}(\Omega), d_{x_0}^{2\alpha}) / a_0(u_h, v_h) = \langle F, v_h \rangle \forall v_h \in (V_{\mathcal{T}}^{\ell}(\Omega), d_{x_0}^{-2\alpha}) \quad (4.2)$$

Para probar la existencia y unicidad de solución de este problema, D'Angelo hace una demostración similar a la del caso continuo, vía un Lema de Descomposición (de otros espacios) donde comete el mismo error que antes. Sin embargo, pudimos obtener el resultado mediante un análisis de la matriz de rigidez del sistema lineal asociado.

Teorema 4.3.1.

Sea $-\frac{n}{2} < \alpha < \frac{n}{2}$. Existe un único elemento $u_h \in (V_{\mathcal{T}}^{\ell}(\Omega), d_{x_0}^{2\alpha})$ solución del problema (4.2).

Demostración.

Sea $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$ una base de $V_{\mathcal{T}}^{\ell}(\Omega)$. Observar que $a_0(u_h, v_h) = \langle F, v_h \rangle \forall v_h \in V_{\mathcal{T}}^{\ell}(\Omega)$ si y solo si $a_0(u_h, \phi_i) = \langle F, \phi_i \rangle \forall 1 \leq i \leq N$. Además, si notamos con U_1, U_2, \dots, U_N a los coeficientes de u_h en la base, el problema es equivalente a hallar U_j tales que $\sum_{j=1}^N U_j a_0(\phi_j, \phi_i) = \langle F, \phi_i \rangle \forall 1 \leq i \leq N$. Este problema se puede plantear

en forma matricial $MU = b$ donde $M \in R^{N \times N}$ está definida por $M_{i,j} = a_0(\phi_j, \phi_i)$, $U \in R^N$ es el vector de coeficientes y $b \in R^N$ está definido por $b_i = \langle F, \phi_i \rangle$.

Para ver que este problema admite solución única basta ver que la matriz M es simétrica definida positiva:

- claramente M es simétrica
- veamos que M es definida positiva: dado $x \in R^N$, consideramos $\tilde{x} = \sum_{i=1}^N x_i \phi_i$. Ahora notar que $xMx = a_0(\tilde{x}, \tilde{x}) = \int_{\Omega} \nabla \tilde{x} A \nabla \tilde{x} \geq \gamma_1 \int_{\Omega} |\nabla \tilde{x}|^2 \geq 0$. Además vale la igualdad a cero sólo si $\nabla \tilde{x} = 0$ y como estamos trabajando en $V_{\mathcal{T}}^{\ell}(\Omega)$ necesariamente $\tilde{x} = 0$ y por ende sus coeficientes son nulos, es decir que $x = 0$.

□

Lo malo de esta prueba es que no tenemos las condiciones inf-sup de a_0 en los espacios discretos, ni tampoco la clásica estimación de la norma $\|u_h\|_{V_{\mathcal{T}}^{\ell}(\Omega)} \leq C \|F\|_{(W_{-\alpha}(\Omega))'}$. Como consecuencia, no podemos deducir de aquí una propiedad de mejor aproximación para u_h . Sin embargo podemos recuperar las condiciones inf-sup gracias a una estimación probada en [13]:

$$\|\nabla u_h\|_{L_{\alpha}^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L_{\alpha}^2(\Omega)} \quad (4.3)$$

donde $u \in W_{\alpha}(\Omega)$ es la solución de $a_0(u, v) = \langle F, v \rangle \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega)$, $u_h \in V_{\mathcal{T}}^{\ell}(\Omega)$ es la solución de $a_0(u_h, v_h) = \langle F, v_h \rangle \forall v_h \in V_{\mathcal{T}}^{\ell}(\Omega)$, y la constante $C > 0$ es independiente de F y de h . Veamos ahora las condiciones inf-sup de a_0 en los espacios discretos.

Lema 4.3.1.

Sea $-\frac{n}{2} < \alpha < \frac{n}{2}$. Valen las condiciones inf-sup de a_0 en $V_{\mathcal{T}}^{\ell}(\Omega) \times V_{\mathcal{T}}^{\ell}(\Omega)$.

Demostración.

Veamos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{v_h \in V_{\mathcal{T}}^{\ell}(\Omega)} \frac{a_0(u_h, v_h)}{\|v_h\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} \geq C \|u_h\|_{W_{\alpha}(\Omega)} \forall u_h \in V_{\mathcal{T}}^{\ell}(\Omega)$$

Por las condiciones inf-sup de a_0 en los espacios $W_{\alpha}(\Omega) \times W_{-\alpha}(\Omega)$ vistas en el Corolario 3.1.1 tenemos que existe una constante $\gamma > 0$ tal que $\sup_{v \in W_{-\alpha}(\Omega)} \frac{a_0(u, v)}{\|v\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} \geq \gamma \|u\|_{W_{\alpha}(\Omega)} \forall u \in W_{\alpha}(\Omega)$. Podemos asumir que la desigualdad es estricta, sino se toma como constante $\frac{\gamma}{2}$. Sea $u_h \in V_{\mathcal{T}}^{\ell}(\Omega)$. Como $u_h \in V_{\mathcal{T}}^{\ell}(\Omega) \subset W_{\alpha}(\Omega)$ tenemos que

$\sup_{v \in W_{-\alpha}(\Omega)} \frac{a_0(u_h, v)}{\|v\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} > \gamma \|u_h\|_{W_{\alpha}(\Omega)}$. En consecuencia, existe un elemento $v = v(u_h) \in$

$W_{-\alpha}(\Omega)$ tal que $\frac{a_0(u_h, v)}{\|v\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} > \gamma \|u_h\|_{W_{\alpha}(\Omega)}$. Dado este $v \in W_{-\alpha}(\Omega)$, definimos $F \in$

$(W_\alpha(\Omega))'$ como $\langle F, w \rangle := a_0(w, v) \forall w \in W_\alpha(\Omega)$, y entonces v es la solución de $a_0(w, v) = \langle F, w \rangle \forall w \in W_\alpha(\Omega)$. Consideramos $v_h \in V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)$ su proyección por FEM, es decir v_h es tal que $a_0(w_h, v_h) = \langle F, w_h \rangle \forall w_h \in V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)$. Notar que por la ortogonalidad de Galerkin tenemos que $a_0(w_h, v - v_h) = 0 \forall w_h \in V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)$ y que por (4.3) tenemos que $\|\nabla v_h\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)}$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} \gamma \|u_h\|_{W_\alpha(\Omega)} &< \frac{a_0(u_h, v)}{\|v\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} = \frac{\overbrace{a_0(u_h, v - v_h)}^{=0}}{\|v\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} + \frac{a_0(u_h, v_h)}{\|v\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} \\ &= \frac{a_0(u_h, v_h)}{\|v\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} \leq C \frac{a_0(u_h, v_h)}{\|v_h\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} \end{aligned}$$

Es decir, hemos probado que $\|u_h\|_{W_\alpha(\Omega)} \leq \frac{C}{\gamma} \sup_{v_h \in V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)} \frac{a_0(u_h, v_h)}{\|v_h\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} \forall u_h \in V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)$.

Análogamente se ve que $\sup_{u_h \in V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)} \frac{a_0(u_h, v_h)}{\|u_h\|_{W_\alpha(\Omega)}} \geq C \|v_h\|_{W_{-\alpha}(\Omega)} \forall v_h \in V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)$. \square

El interés central de contar con esta estimación es que nos permite probar el Lema 5.1.1 en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Error

En este capítulo veremos el error que se comete al aproximar la solución u del problema (2.2) por la solución u_h del problema (4.1) en el caso en que $\mathbf{b} = 0$ y $c = 0$, y veremos su convergencia.

Estamos en la siguiente situación: para $-\frac{n}{2} < \alpha < \frac{n}{2}$, existe un único elemento $u \in W_\alpha(\Omega)$ solución de

$$\int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla v = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega)$$

y existe un único elemento $u_h \in V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)$ solución de

$$\int_{\Omega} A \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \langle F, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)$$

5.1. Error en $W_\alpha(\Omega)$

Lema 5.1.1. Sean $\alpha \in \mathbb{I}$, $u \in W_\alpha(\Omega)$ solución del problema (2.2), y $u_h \in V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)$ solución de (4.1). Entonces $\|u - u_h\|_{W_\alpha(\Omega)} \lesssim \inf_{w_h \in V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)} \|u - w_h\|_{W_\alpha(\Omega)}$.

Demostración.

Dado $w_h \in V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)$, aplicando la desigualdad triangular tenemos que $\|u - u_h\|_{W_\alpha(\Omega)} \leq \|u - w_h\|_{W_\alpha(\Omega)} + \|w_h - u_h\|_{W_\alpha(\Omega)}$. Por lo tanto vamos a acotar el segundo término. Por las condiciones inf-sup de a_0 en los espacios discretos vistas en el Lema 4.3.1, y gracias

a la ortogonalidad de Galerkin, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \|u_h - w_h\|_{W_\alpha(\Omega)} &\leq \frac{1}{C} \sup_{v_h \in V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)} \frac{a_0(u_h - w_h, v_h)}{\|v_h\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} \\
 &= \frac{1}{C} \sup_{v_h \in V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)} \frac{a_0(u_h - u + u - w_h, v_h)}{\|v_h\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} \\
 &= \frac{1}{C} \sup_{v_h \in V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)} \left\{ \frac{a_0(u_h - u, v_h)}{\|v_h\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} + \frac{a_0(u - w_h, v_h)}{\|v_h\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} \right\} \\
 &= \frac{1}{C} \sup_{v_h \in V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)} \frac{a_0(u - w_h, v_h)}{\|v_h\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}}
 \end{aligned}$$

Recordar que en el Teorema 3.1.1 vimos que a_0 es continuo en $W_\alpha(\Omega) \times W_{-\alpha}(\Omega)$, por lo tanto podemos continuar la estimación anterior y concluir que $\|u_h - w_h\|_{W_\alpha(\Omega)} \leq \frac{1}{C} \sup_{v_h \in V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)} \frac{a_0(u - w_h, v_h)}{\|v_h\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} \lesssim \sup_{v_h \in V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)} \frac{\|u - w_h\|_{W_\alpha(\Omega)} \|v_h\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}}{\|v_h\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}} \lesssim \|u - w_h\|_{W_\alpha(\Omega)}$. Y finalmente obtenemos que $\|u - u_h\|_{W_\alpha(\Omega)} \leq \|u - w_h\|_{W_\alpha(\Omega)} + \|w_h - u_h\|_{W_\alpha(\Omega)} \lesssim \|u - w_h\|_{W_\alpha(\Omega)}$. \square

Este lema nos dice que el error entre u y u_h es esencialmente (salvo constantes) el más chico que se podía obtener entre todos los elementos de $V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)$. Por lo tanto para determinar el orden del error entre u y u_h , podemos tomar algún elemento particular de $V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)$ donde tengamos herramientas para estudiar el error entre u y dicho elemento. Luego, el error entre u y u_h será menor. El próximo objetivo es, entonces, construir un interpolador de u en el espacio $\mathbb{V}_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)$.

Definimos el siguiente interpolador $I_h : \mathbb{K}_{\alpha-1}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{V}_{\mathcal{T}}^1(\Omega)$ como

$$I_h u(x) := \sum_{i=1}^{N_h} a_i \phi_i(x)$$

donde

- $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_h}\}$ son las bases nodales: $\phi_i|_K \in \mathcal{P}_1(K) \forall K \in \mathcal{T}_h$ y $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$
- $\{x_1, x_2, \dots, x_{N_h}\}$ es el conjunto de nodos asociados a las bases ϕ_i
- los coeficientes a_i los tomamos de manera tal que lejos de la singularidad coincida con el interpolador de Lagrange, y en la singularidad nos de cero. Por lo tanto definimos los coeficientes de la siguiente manera:

$$a_i = \begin{cases} u(x_i) & \text{si } x_i \neq x_0 \\ 0 & \text{si } x_i = x_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Notar que si bien las funciones de $\mathbb{K}_{\alpha-1}^2(\Omega)$ no están, necesariamente, en $H^2(\Omega)$, si nos restringimos a los elementos $K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}$ entonces sí están en $H^2(K)$ y luego, por el teorema de inmersión de Sobolev, están en $L^\infty(K)$ y tienen un representante continuo (por lo que tiene sentido hablar de evaluaciones puntuales).

Observación 5.1.1. *Recordamos algunas relaciones que utilizaremos: sean u definida en K , \hat{K} el elemento de referencia, F la transformación afín que manda \hat{K} en K y $\hat{u} = u \circ F$. Valen las siguientes estimaciones:*

- $|\hat{u}|_{H^j(\hat{K})}^2 \leq h_K^{2j-n} |u|_{H^j(K)}^2$
- $|u|_{H^j(K)}^2 \leq h_K^{-2j+n} |\hat{u}|_{H^j(\hat{K})}^2$

Observación 5.1.2. *Valen las siguientes relaciones:*

- $\|u\|_{L^2(K)} \leq \bar{r}_K^{-\gamma} \|u\|_{L_\gamma^2(K)} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}$
- $|u|_{H^j(K)} \leq r_K^{-(\gamma+j)} |u|_{\mathbb{K}_\gamma^j(K)} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}} \quad \forall j > 0$

En efecto, usando que $d_{x_0} \sim \bar{r}_K \sim r_K$ para $K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}$ tenemos que $\|u\|_{L^2(K)}^2 = \int_K u^2 = \int_K u^2 d_{x_0}^{2\gamma} d_{x_0}^{-2\gamma} \lesssim \bar{r}_K^{-2\gamma} \int_K u^2 d_{x_0}^{2\gamma} = \bar{r}_K^{-2\gamma} \|u\|_{L_\gamma^2(K)}^2$.
Y para $j > 0$:

$$\begin{aligned} |u|_{H^j(K)}^2 &= \sum_{|\alpha|=j} \int_K (D^\alpha u)^2 = \sum_{|\alpha|=j} \int_K (D^\alpha u)^2 d_{x_0}^{2(\gamma+j)} d_{x_0}^{-2(\gamma+j)} \\ &\lesssim r_K^{-2(\gamma+j)} \sum_{|\alpha|=j} \int_K (D^\alpha u)^2 d_{x_0}^{2(\gamma+j)} = r_K^{-2(\gamma+j)} |u|_{\mathbb{K}_\gamma^j(K)}^2. \end{aligned}$$

Ahora presentamos el siguiente lema que nos ayudará a acotar el error entre u y su interpolador.

Lema 5.1.2. *Sea I_h el interpolador presentado anteriormente y $\alpha > -\frac{n}{2}$. Existen constantes $C > 0$ y $C_\alpha > 0$ tales que para toda función $u \in \mathbb{K}_{\alpha-1}^2(\Omega)$ valen las siguientes estimaciones:*

- (I) $|u - I_h u|_{H^l(K)} \leq C h_K^{2-l} |u|_{H^2(K)} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}, l = 0, 1.$
- (II) $|I_h u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} \leq C_\alpha \|u\|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^2(S_K)} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}},$

donde S_K es el conjunto formado por los elementos de la triangulación que son vecinos de K , es decir $S_K = \{K' \in \mathcal{T}_h / \bar{K} \cap \bar{K}' \neq \emptyset\}$.

Demostración.

El primer ítem es un resultado conocido del interpolador de Lagrange. Veamos entonces el segundo ítem. Dado $K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$, debe ocurrir que K tiene algún vecino en $\mathcal{T}_h^{\text{out}}$, es decir que $\exists K' \in \mathcal{T}_h^{\text{out}} / \bar{K} \cap \bar{K}' \neq \emptyset$. Consideramos el conjunto de índices de los nodos de K que también son nodos de $\mathcal{T}_h^{\text{out}}$: $D_K = \{i = 1, \dots, N_h / x_i \in \bar{K} \cap \bar{K}' \text{ con } K' \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}\}$. Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} |I_h u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} &= \left| \sum_{i=1}^{N_h} a_i \phi_i(x) \right|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} \leq \sum_{i=1}^{N_h} |a_i| \left| \phi_i(x) \right|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} \\ &= \sum_{i \in D_K} |a_i| \left| \phi_i(x) \right|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde en la última igualdad hemos usado que $\phi_i|_K = 0$ si ϕ_i no está asociada a ningún nodo de K y que $a_i = 0$ si $x_i = x_0$.

Vamos a acotar $|a_i|$:

Dado $i \in D_K$ sabemos que existe, al menos, un elemento $K'_i \in \mathcal{T}_h^{\text{out}} / x_i \in \bar{K} \cap \bar{K}'_i$. Para simplificar la notación dejaremos de escribir el subíndice i .

Consideramos la transformación afín $F_{K'} : \hat{K} \rightarrow K'$ que manda el elemento de referencia \hat{K} en K' , y definimos $\hat{u} := u \circ F_{K'}$. Notar que como $u \in \mathbb{K}_{\alpha-1}^2(K')$ y $K' \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}$ entonces $u \in H^2(K')$, y luego $\hat{u} \in H^2(\hat{K})$. Gracias al teorema de inmersión de Sobolev tenemos que $u \in L^\infty(K')$ y $\hat{u} \in L^\infty(\hat{K})$, y además $\|u\|_{L^\infty(K')} \lesssim \|\hat{u}\|_{H^2(\hat{K})}$. Por lo tanto tenemos que

$$|a_i| \leq \|u\|_{L^\infty(K')} = \|\hat{u}\|_{L^\infty(\hat{K})} \lesssim \|\hat{u}\|_{H^2(\hat{K})} = \sqrt{\sum_{j=0}^2 |\hat{u}|_{H^j(\hat{K})}^2} \quad (5.3)$$

Teniendo en cuenta cómo varían las normas en K' y en el elemento de referencia \hat{K} visto en la Observación 5.1.1, y cómo podemos pasar de las seminormas de u en $H^j(K')$ a las seminormas con peso en $\mathbb{K}_{\alpha-1}^j(K')$ visto en la Obsevación 5.1.2 podemos continuar (5.3) :

$$\begin{aligned} |a_i| &\lesssim \sqrt{\sum_{j=0}^2 |\hat{u}|_{H^j(\hat{K})}^2} \leq \sqrt{\sum_{j=0}^2 h_{K'}^{2j-n} |u|_{H^j(K')}^2} \leq \left[h_{K'}^{-n} \|u\|_{L^2(K')}^2 + \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=1}^2 h_{K'}^{2j-n} |u|_{H^j(K')}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq h_{K'}^{-\frac{n}{2}} \left[\|u\|_{L^2(K')}^2 + \sum_{j=1}^2 h_{K'}^{2j} |u|_{H^j(K')}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq h_{K'}^{-\frac{n}{2}} \left[\bar{r}_{K'}^{-2(\alpha-1)} \|u\|_{L_{\alpha-1}^2(K')}^2 + \sum_{j=1}^2 h_{K'}^{2j} r_{K'}^{-2(\alpha-1+j)} |u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^j(K')}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Por otro lado, como $K' \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}$ tenemos que $h_{K'}$ escala como $hr_{K'}^{1-\mu}$. Pero como K' no está tan lejos de la singularidad x_0 (pues tiene un vecino $K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$) entonces, por el Lema 4.1.2, $h_{K'}$ escala como $h^{\frac{1}{\mu}}$ y $\bar{r}_{K'} \sim r_{K'} \sim h^{\frac{1}{\mu}}$. Juntando esta observación con (5.4), tenemos que

$$\begin{aligned}
|a_i| &\leq h_{K'}^{-\frac{n}{2}} \left[\bar{r}_{K'}^{-2(\alpha-1)} \|u\|_{L_{\alpha-1}^2(K')}^2 + \sum_{j=1}^2 h_{K'}^{2j} r_{K'}^{-2(\alpha-1+j)} |u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^j(K')}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq h^{-\frac{n}{2\mu}} \left[h^{-\frac{2(\alpha-1)}{\mu}} \|u\|_{L_{\alpha-1}^2(K')}^2 + \sum_{j=1}^2 h^{\frac{2j}{\mu}} h^{-\frac{2(\alpha-1+j)}{\mu}} |u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^j(K')}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq h^{-\frac{n}{2\mu}} \left[h^{-\frac{2(\alpha-1)}{\mu}} \|u\|_{L_{\alpha-1}^2(K')}^2 + \sum_{j=1}^2 h^{-\frac{2(\alpha-1)}{\mu}} |u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^j(K')}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq h^{-\frac{n}{2\mu}} h^{-\frac{\alpha-1}{\mu}} \left[\|u\|_{L_{\alpha-1}^2(K')}^2 + \sum_{j=1}^2 |u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^j(K')}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= h^{-\frac{\alpha-1+\frac{n}{2}}{\mu}} \|u\|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^2(K')} \tag{5.5}
\end{aligned}$$

Vamos a acotar ahora $|\phi_i|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)}$:

Consideramos F la transformación afín que manda \hat{K} en K , es decir $F(\hat{x}) = B\hat{x} + c$. Tomamos $\hat{\phi}_i = \phi_i \circ F$. Recordar que $\nabla \hat{\phi}_i = (\nabla \phi_i \circ F)B$ y por lo tanto $|\nabla \phi_i \circ F| = |\nabla \hat{\phi}_i B^{-1}| \leq |\nabla \hat{\phi}_i| \|B^{-1}\| \leq |\nabla \hat{\phi}_i| \frac{h_{\hat{K}}}{\rho_K}$. Dado que $\hat{\phi}_i$ es una de las bases nodales del elemento de referencia y es un polinomio de grado 1 tenemos que $|\nabla \hat{\phi}_i|$ está acotado por una constante independiente de i y de K . Por otro lado, gracias a la regularidad de la malla, ρ_K es equivalente a h_K . Luego tenemos que $|\nabla \phi_i \circ F| \lesssim h_K^{-1}$, es decir que $|\nabla \phi_i| \lesssim h_K^{-1}$. Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
|\phi_i|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)}^2 &= \int_K |\nabla \phi_i|^2 d_{x_0}^{2\alpha} \lesssim h_K^{-2} \int_K d_{x_0}^{2\alpha} \leq h_K^{-2} \int_{B_{\bar{r}_K}(x_0)} d_{x_0}^{2\alpha} \\
&= h_K^{-2} \int_0^{\bar{r}_K} \int_{\partial B_r(x_0)} r^{2\alpha} dS_x dr = h_K^{-2} \int_0^{\bar{r}_K} |\partial B_r(x_0)| r^{2\alpha} dr \\
&= h_K^{-2} \int_0^{\bar{r}_K} c_n r^{n-1} r^{2\alpha} dr = h_K^{-2} \int_0^{\bar{r}_K} c_n r^{n+2\alpha-1} dr = c_n h_K^{-2} \frac{\bar{r}_K^{n+2\alpha}}{n+2\alpha}
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que $n+2\alpha-1 > -1$ pues $\alpha > -\frac{n}{2}$. Ahora, sabiendo que $K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$, tenemos que $\bar{r}_K \sim h_K$ y por lo tanto obtenemos que

$|\phi_i|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} \lesssim \left(h_K^{-2} \frac{h_K^{n+2\alpha}}{n+2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \sim h_K^{\frac{n}{2}+\alpha-1}$; y recordando que $h_K \sim h^\mu$ (pues $K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$) nos queda que

$$|\phi_i|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} \lesssim h^{\frac{\alpha-1+\frac{n}{2}}{\mu}}. \quad (5.6)$$

Finalmente, juntando (5.2), (5.5) y (5.6) obtenemos que

$$\begin{aligned} |I_h u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} &\leq \sum_{i \in D_K} |a_i| \left| \phi_i(x) \right|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} \lesssim \sum_{i \in D_K} h^{\frac{-(\alpha-1+\frac{n}{2})}{\mu}} \|u\|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^2(K'_i)} h^{\frac{\alpha-1+\frac{n}{2}}{\mu}} \\ &= \sum_{i \in D_K} \|u\|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^2(K'_i)} \lesssim \|u\|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^2(S_K)}. \end{aligned}$$

□

Observación 5.1.3. Si $\epsilon < \alpha$ entonces $\mathbb{K}_\epsilon^2(\Omega) \subset \mathbb{K}_\alpha^2(\Omega)$.

En efecto, sea $R > 0$ tal que $\Omega \subset B_R(x_0)$, notar que, para todo $j = 0, 1, 2$, vale lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{|\gamma|=j} \int_{\Omega} (D^\gamma u)^2 d_{x_0}^{2(\alpha+j)} &= \sum_{|\gamma|=j} \int_{\Omega} (D^\gamma u)^2 d_{x_0}^{2(\epsilon+j)} d_{x_0}^{2(\alpha-\epsilon)} \\ &\leq R^{2(\alpha-\epsilon)} \sum_{|\gamma|=j} \int_{\Omega} (D^\gamma u)^2 d_{x_0}^{2(\epsilon+j)} \\ &= R^{2(\alpha-\epsilon)} \sum_{|\gamma|=j} \int_{\Omega} (D^\gamma u)^2 d_{x_0}^{2(\epsilon+j)} \end{aligned}$$

Es decir que $\|u\|_{\mathbb{K}_\alpha^2(\Omega)} \leq R^{(\alpha-\epsilon)} \|u\|_{\mathbb{K}_\epsilon^2(\Omega)}$.

Análogamente, se puede ver esta misma estimación para cada elemento de la triangulación: $\|u\|_{\mathbb{K}_\alpha^2(K)} \leq \bar{r}_K^{(\alpha-\epsilon)} \|u\|_{\mathbb{K}_\epsilon^2(K)}$.

Teorema 5.1.1. Sean $-\frac{n}{2} < \alpha < \frac{n}{2}$, $\epsilon < \alpha$ tales que $\mu \leq \alpha - \epsilon$. Entonces existe una constante $c_\alpha > 0$ tal que

$$\|u - I_h u\|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(\Omega)} \leq c_\alpha h \|u\|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(\Omega)} \quad \forall u \in \mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(\Omega).$$

Demostración.

Vamos a probar el teorema en cada elemento de la triangulación K , separando los casos según $K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$ o $\mathcal{T}_h^{\text{out}}$.

Veamos el caso en que $K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}$: considerando que $K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}$ tenemos que $d_{x_0} \sim \bar{r}_K$ y por ende $|u - I_h u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} \lesssim \bar{r}_K^\alpha |u - I_h u|_{H^1(K)}$. En efecto,

$$\begin{aligned} |u - I_h u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)}^2 &= \sum_{|\gamma|=1} \int_K (D^\gamma(u - I_h u))^2 d_{x_0}^{2\alpha} \\ &\lesssim \bar{r}_K^{2\alpha} \sum_{|\gamma|=1} \int_K (D^\gamma(u - I_h u))^2 \\ &= \bar{r}_K^{2\alpha} |u - I_h u|_{H^1(K)}^2 \end{aligned}$$

Ahora, aplicando el Lema 5.1.2 y que $r_K^{1+\epsilon} \sim d_{x_0}^{1+\epsilon}$, tenemos que

$$\begin{aligned} |u - I_h u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} &\leq \bar{r}_K^\alpha |u - I_h u|_{H^1(K)} \\ &\leq c_\alpha \bar{r}_K^\alpha h_K |u|_{H^2(K)} \\ &= c_\alpha \bar{r}_K^\alpha h_K r_K^{-1-\epsilon} r_K^{1+\epsilon} |u|_{H^2(K)} \\ &\lesssim c_\alpha \bar{r}_K^\alpha h_K r_K^{-1-\epsilon} |u|_{H_{\epsilon+1}^2(K)} \\ &= c_\alpha \bar{r}_K^\alpha h_K r_K^{-1-\epsilon} |u|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(K)} \end{aligned}$$

Aprovechando la construcción de la malla, tenemos que $r_K \sim \bar{r}_K$ y $h_K \sim h r_K^{1-\mu}$ para $K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}$, y por ende la estimación anterior nos queda:

$$\begin{aligned} |u - I_h u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} &\leq c_\alpha \bar{r}_K^\alpha h_K r_K^{-1-\epsilon} |u|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(K)} \\ &\leq c_\alpha r_K^\alpha h r_K^{1-\mu} r_K^{-1-\epsilon} |u|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(K)} \\ &= c_\alpha r_K^{\alpha-\epsilon-\mu} h |u|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(K)} \\ &\lesssim h |u|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(K)} \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que $\alpha - \epsilon - \mu \geq 0$ y por lo tanto $r_K^{\alpha-\epsilon-\mu}$ está acotado.

Veamos el caso en que $K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$:

Notar que aplicando la desigualdad triangular y el Lema 5.1.2 tenemos que

$$|u - I_h u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} \leq |u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} + |I_h u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} \leq |u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} + C_\alpha \|u\|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^2(S_K)}$$

Por lo visto en la Observación 5.1.3 tenemos que

$$|u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} \leq \bar{r}_K^{\alpha-\epsilon} |u|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^1(K)} \quad \text{y} \quad \|u\|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^2(S_K)} \leq \sum_{K' \cap K \neq \emptyset} \bar{r}_{K'}^{\alpha-\epsilon} \|u\|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(K')}$$

Dado que $K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$ tenemos que $\bar{r}_K \sim h_K \sim h^{\frac{1}{2}}$; pero esta estimación también es válida para los elementos K' vecinos de K (Lema 4.1.2). Luego podemos concluir que

$$|u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} \leq h^{\frac{\alpha-\epsilon}{2}} |u|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^1(K)} \quad \text{y} \quad \|u\|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^2(S_K)} \leq h^{\frac{\alpha-\epsilon}{2}} \|u\|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(S_K)}$$

Finalmente tenemos que

$$\begin{aligned} |u - I_h u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} &\leq |u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} + C_\alpha \|u\|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^2(S_K)} \\ &\leq h^{\frac{\alpha-\epsilon}{\mu}} |u|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^1(K)} + C_\alpha h^{\frac{\alpha-\epsilon}{\mu}} \|u\|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(S_K)} \\ &\lesssim h^{\frac{\alpha-\epsilon}{\mu}} \|u\|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(S_K)} \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que $|u|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^1(K)} \leq \|u\|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(S_K)}$. Notar que $\frac{\alpha-\epsilon}{\mu} \geq 1$ y h toma valores pequeños entonces tenemos que $h^{\frac{\alpha-\epsilon}{\mu}} \leq h$ y entonces $|u - I_h u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(K)} \lesssim h \|u\|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(S_K)}$.

En conclusión, hemos probado que

$$|u - I_h u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^2(K)} \lesssim \begin{cases} h |u|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(K)} & \forall K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}} \\ h \|u\|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(S_K)} & \forall K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}} \end{cases}$$

Luego, sumando sobre todos los elementos K de la triangulación y haciendo uso de la regularidad de la malla, tenemos que

$$\begin{aligned} |u - I_h u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^2(\Omega)}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |u - I_h u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^2(K)}^2 \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}} |u - I_h u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}} |u - I_h u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^2(K)}^2 \\ &\lesssim \sum_{K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}} h^2 \|u\|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(S_K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}} h^2 |u|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(K)}^2 \\ &= h^2 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}} \|u\|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(S_K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}} |u|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(K)}^2 \right) \\ &\lesssim h^2 \|u\|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

□

Corolario 5.1.1.

Dado $\alpha \in \mathbb{I}$, sean $u \in W_\alpha(\Omega)$ solución del problema variacional continuo (2.2) y $u_h \in \mathbb{V}_{\mathcal{T}}^1(\Omega)$ solución del problema variacional discreto (4.1).

Si $u \in \mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(\Omega)$ para algún $\epsilon < \alpha$ y $\mu \leq \alpha - \epsilon$, entonces $\|u - u_h\|_{W_\alpha(\Omega)} \lesssim h \|u\|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(\Omega)}$.

Demostración.

Por el Lema 5.1.1 sabemos que el error entre u y u_h es, esencialmente, el más chico que se podía obtener entre todos los elementos de $V_{\mathcal{T}}^1(\Omega)$; en particular es menor que

el que se comete al tomar su interpolador $I_h u$. Además, el Teorema 5.1.1 nos da una cota para el error entre u y dicho interpolador dado que u está en $\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(\Omega)$ con $\epsilon < \alpha$ y $\mu \leq \alpha - \epsilon$. Por lo tanto nos queda que

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{W_\alpha(\Omega)} &\lesssim \inf_{w_h \in \mathbb{V}_T^1(\Omega)} \|u - w_h\|_{W_\alpha(\Omega)} \\ &\leq \|u - I_h u\|_{W_\alpha(\Omega)} \\ &= \|\nabla(u - I_h u)\|_{L_\alpha^2(\Omega)} \\ &= |u - I_h u|_{\mathbb{K}_{\alpha-1}^1(\Omega)} \\ &\lesssim h \|u\|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

5.2. Error en $L^2_\beta(\Omega)$

Para estudiar el error vamos a seguir la técnica de Aubin-Nitsche que consiste en plantear el problema “dual” del problema continuo donde la fuente es el error. Para ello, consideramos el error

$$e_\beta := d_{x_0}^{2\beta} |u - u_h|$$

Para poder probar que el error se encuentra en el espacio dual de $W_\alpha(\Omega)$, recordamos el siguiente lema:

Lema 5.2.1. *Lema mejorado de Poincaré*

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y x_0 un punto de Ω . Si $-\frac{n}{2} + 1 < \beta < \frac{n}{2}$ entonces existe una constante $C_P > 0$ tal que

$$\|v\|_{L_{\beta-1}^2(\Omega)} < C_P \|v\|_{W_\beta(\Omega)} \quad \forall v \in W_\beta(\Omega).$$

Ver, por ejemplo, [8, Teorema 4.1]. La demostración es similar a la del Lema 5.2.4 (ver más adelante).

Notar que $e_\beta \in L_{-\beta}^2(\Omega)$ para $\alpha - 1 \leq \beta$ y $-\frac{n}{2} + 1 < \alpha < \frac{n}{2}$. En efecto, usando la definición de e_β , que $\beta \geq \alpha - 1$ y el lema mejorado de Poincaré tenemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega e_\beta^2 d_{x_0}^{-2\beta} &= \int_\Omega d_{x_0}^{4\beta} |u - u_h|^2 d_{x_0}^{-2\beta} = \int_\Omega |u - u_h|^2 d_{x_0}^{2\beta} = \|u - u_h\|_{L_\beta^2(\Omega)}^2 \\ &\lesssim \|u - u_h\|_{L_{\alpha-1}^2(\Omega)}^2 \leq C_P \|u - u_h\|_{W_\alpha(\Omega)}^2 < \infty \end{aligned}$$

Además, como $\beta \geq \alpha - 1$ tenemos que $L_{-\beta}^2(\Omega) \subseteq L_{1-\alpha}^2(\Omega)$. Por otro lado, sabemos que $L_{1-\alpha}^2(\Omega) = (L_{\alpha-1}^2(\Omega))'$; y por el lema mejorado de Poincaré vale que $(L_{\alpha-1}^2(\Omega))' \subseteq (W_\alpha(\Omega))'$ pues $W_\alpha(\Omega) \subseteq L_{\alpha-1}^2(\Omega)$ para $-\frac{n}{2} + 1 < \alpha < \frac{n}{2}$. Resumiendo, podemos concluir

que, tomando $-\frac{n}{2} + 1 < \alpha < \frac{n}{2}$ y $\alpha - 1 \leq \beta$, tenemos que $e_\beta \in (W_\alpha(\Omega))'$; y ahora sí, estamos en condiciones de plantear el problema dual:

$$\text{Hallar } \phi_\beta \in W_{-\alpha}(\Omega) / \int_{\Omega} A \nabla \phi_\beta \cdot \nabla w = \langle e_\beta, w \rangle \quad \forall w \in W_\alpha(\Omega) \quad (5.7)$$

Por lo visto en el Capítulo 3, con $-\frac{n}{2} + 1 < \alpha < \frac{n}{2}$ y $\alpha - 1 \leq \beta$ sabemos que este problema admite una única solución $\phi_\beta \in W_{-\alpha}(\Omega)$ y que $\|\phi_\beta\|_{W_{-\alpha}(\Omega)} \lesssim \|e_\beta\|_{(W_\alpha(\Omega))'}$.

Lema 5.2.2. *Lema de Aubin-Nitsche:*

Sean $-\frac{n}{2} + 1 < \alpha < \frac{n}{2}$, $\alpha - 1 \leq \beta$, $u \in W_\alpha(\Omega)$ solución del problema (2.2), $u_h \in V_T^\ell(\Omega)$ solución del problema (4.1) y $\phi_\beta \in W_{-\alpha}(\Omega)$ solución del problema (5.7). Entonces vale la siguiente estimación del error

$$\|u - u_h\|_{L^2_\beta(\Omega)}^2 \lesssim \|u - u_h\|_{W_\alpha(\Omega)} \inf_{\phi_h \in V_T^\ell(\Omega)} \{ \|\phi_\beta - \phi_h\|_{W_{-\alpha}(\Omega)} \}.$$

Demostración.

Notar que

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2_\beta(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} (u - u_h)^2 d_{x_0}^{2\beta} = \int_{\Omega} (u - u_h) e_\beta \\ &= \langle e_\beta, u - u_h \rangle = \int_{\Omega} A \nabla \phi_\beta \cdot \nabla (u - u_h) \end{aligned}$$

Ahora, dado $\phi_h \in V_T^\ell(\Omega)$, lo intercalamos y aplicamos la ortogonalidad de Galerkin, y tenemos que

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2_\beta(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} A \nabla \phi_\beta \cdot \nabla (u - u_h) \\ &= \int_{\Omega} A \nabla (\phi_\beta - \phi_h) \cdot \nabla (u - u_h) + \int_{\Omega} A \nabla \phi_h \cdot \nabla (u - u_h) \\ &= \int_{\Omega} A \nabla (\phi_\beta - \phi_h) \cdot \nabla (u - u_h) + \underbrace{\int_{\Omega} \nabla \phi_h^T A \nabla (u - u_h)}_{=0} \end{aligned}$$

Por último usando que $A \in L^\infty$ y la desigualdad de Hölder obtenemos que

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2_\beta(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} A \nabla(\phi_\beta - \phi_h) \cdot \nabla(u - u_h) \\ &\leq \|A\|_{L^\infty} \int_{\Omega} |\nabla(\phi_\beta - \phi_h)| |\nabla(u - u_h)| \\ &\leq \|A\|_{L^\infty} \|\nabla(\phi_\beta - \phi_h)\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2_\alpha(\Omega)} \\ &\leq \|A\|_{L^\infty} \|\phi_\beta - \phi_h\|_{W_{-\alpha}(\Omega)} \|u - u_h\|_{W_\alpha(\Omega)} \end{aligned}$$

Dado que esta cota vale para cualquier elemento $\phi_h \in V_T^\ell(\Omega)$, podemos concluir que $\|u - u_h\|_{L^2_\beta(\Omega)}^2 \leq \|A\|_{L^\infty} \|u - u_h\|_{W_\alpha(\Omega)} \inf_{\phi_h \in V_T^\ell(\Omega)} \{\|\phi_\beta - \phi_h\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}\}$. \square

Sabemos que $\phi_\beta \in W_{-\alpha}(\Omega)$ es solución de $a_0(\phi_\beta, \phi) = \langle e_\beta, \phi \rangle \quad \forall \phi \in W_\alpha(\Omega)$. Este problema débil nos lleva a pensar en el problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A \nabla u) = e_\beta & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Como $e_\beta \in L^2_{-\beta}(\Omega)$, por [6, Teorema 2.4], tenemos que $u \in H^2_{-\beta}(\Omega)$ y que $\|u\|_{H^2_{-\beta}(\Omega)} \lesssim \|e_\beta\|_{L^2_{-\beta}(\Omega)}$. Luego, por la unicidad de solución, tenemos que $\phi_\beta \in H^2_{-\beta}(\Omega)$ y además $\|\phi_\beta\|_{H^2_{-\beta}(\Omega)} \lesssim \|e_\beta\|_{L^2_{-\beta}(\Omega)}$. Ahora tomando $\beta \geq 0$ tenemos que $\phi_\beta \in H^2(\Omega)$ y por lo tanto podemos aplicar el interpolador de Lagrange. Dado el peso negativo debemos realizar un estudio más en detalle.

Lema 5.2.3. *Sea Π_h el interpolador de Lagrange. Valen las siguientes estimaciones:*

$$(I) \quad |v - \Pi_h v|_{H^l(K)} \leq ch_K^{2-l} |v|_{H^2(K)} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}, l = 0, 1$$

(II) *Si $0 \leq \alpha < \frac{n}{2}$ entonces*

$$\|\Pi_h v\|_{W_{-\alpha}(K)} \lesssim h_K^{-1} \|v\|_{L^2_{-\alpha}(K)} + |v|_{H^1_{-\alpha}(K)} + h_K |v|_{H^2_{-\alpha}(K)} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$$

para toda función $v \in H^2_{-\alpha}(\Omega)$.

Demostración.

Observar que si K está lejos de la singularidad x_0 , es decir $K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}$, entonces $v \in H^2_{-\alpha}(K) \subset H^2(K)$ y, por lo tanto, tiene sentido aplicar el interpolador de Lagrange a las funciones de $H^2_{-\alpha}(K)$. Luego, el primer ítem es un resultado conocido del interpolador de Lagrange.

Veamos el segundo ítem. Dado $K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$ tenemos que

$$\|\Pi_h v\|_{W_{-\alpha}(K)} = \left\| \sum_{i=1}^N a_i \phi_i \right\|_{W_{-\alpha}(K)} \leq \sum_{i/x_i \in \bar{K}} \underbrace{|a_i|}_A \underbrace{\|\phi_i\|_{W_{-\alpha}(K)}}_B \quad (5.8)$$

Para acotar (B) consideramos F la transformación afín que manda \hat{K} en K , es decir $F(\hat{x}) = B\hat{x} + c$ y $\hat{\phi}_i = \phi_i \circ F$. Recordar que $\nabla \hat{\phi}_i = (\nabla \phi_i \circ F)B$ y por lo tanto $|\nabla \phi_i \circ F| = |\nabla \hat{\phi}_i B^{-1}| \leq |\nabla \hat{\phi}_i| \|B^{-1}\| \leq |\nabla \hat{\phi}_i| \frac{h_{\hat{K}}}{\rho_K}$. Dado que $\hat{\phi}_i$ es una de las bases nodales del elemento de referencia y es un polinomio de grado 1 tenemos que $|\nabla \hat{\phi}_i|$ está acotado por una constante independiente de i y de K . Por otro lado, gracias a la regularidad de la malla, ρ_K es equivalente a h_K . Luego tenemos que $|\nabla \phi_i \circ F| \lesssim h_K^{-1}$, es decir que $|\nabla \phi_i| \lesssim h_K^{-1}$. Por lo tanto tenemos que

$$(B) = \|\phi_i\|_{W_{-\alpha}(K)} = \left(\int_K |\nabla \phi_i|^2 d_{x_0}^{-2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim h_K^{-1} \left(\int_K d_{x_0}^{-2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ahora notar que

$$\begin{aligned} \int_K d_{x_0}^{-2\alpha} &\leq \int_{B_{\bar{r}_K}(x_0)} d_{x_0}^{-2\alpha} \leq \int_0^{\bar{r}_K} \int_{\partial B_r(x_0)} r^{-2\alpha} dS_x dr = \int_0^{\bar{r}_K} r^{-2\alpha} |\partial B_r(x_0)| dr \\ &= \int_0^{\bar{r}_K} r^{-2\alpha} c_n r^{n-1} dr = c_n \int_0^{\bar{r}_K} r^{n-2\alpha-1} dr = c_n \frac{\bar{r}_K^{n-2\alpha}}{n-2\alpha} \\ &\sim c_n \frac{h_K^{n-2\alpha}}{n-2\alpha} \end{aligned}$$

donde en las últimas equivalencias hemos usado que $n-2\alpha > 0$, $\bar{r}_K \sim h_K$ pues $K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$. Podemos concluir entonces que

$$(B) \lesssim h_K^{\frac{n}{2}-1-\alpha} \quad (5.9)$$

Para acotar el factor (A), como $\alpha \geq 0$ tenemos que $v \in H^2_{-\alpha}(K) \subset H^2(K)$ y $\hat{v} := v \circ F \in H^2(\hat{K})$, y gracias al teorema de inmersión de Sobolev vale que $\hat{v} \in L^\infty(\hat{K})$ y además $\|\hat{v}\|_{L^\infty(\hat{K})} \lesssim \|\hat{v}\|_{H^2(\hat{K})}$. Por lo tanto tenemos que

$$(A) = |a_i| = |v(x_i)| \leq \|v\|_{L^\infty(K)} = \|\hat{v}\|_{L^\infty(\hat{K})} \lesssim \|\hat{v}\|_{H^2(\hat{K})} \quad (5.10)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|\hat{v}\|_{H^2(\hat{K})}^2 &= \sum_{j=0}^2 |\hat{v}|_{H^j(\hat{K})}^2 \lesssim \sum_{j=0}^2 h_K^{2j-n} |v|_{H^j(K)}^2 \lesssim h_K^{-n} \sum_{j=0}^2 h_K^{2j} |v|_{H^j(K)}^2 \\ &\lesssim h_K^{-n} \sum_{j=0}^2 h_K^{2j} \left(\sum_{|\beta|=j} \int_K |D^\beta v|^2 \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} &= h_K^{-n} \sum_{j=0}^2 h_K^{2j} \left(\sum_{|\beta|=j} \int_K |D^\beta v|^2 d_{x_0}^{-2\alpha} d_{x_0}^{2\alpha} \right) \\ &\leq h_K^{-n} \sum_{j=0}^2 h_K^{2j} h_K^{2\alpha} \left(\sum_{|\beta|=j} \int_K |D^\beta v|^2 d_{x_0}^{-2\alpha} \right) \\ &= h_K^{-n} \sum_{j=0}^2 h_K^{2(\alpha+j)} |v|_{H_{-\alpha}^j(K)}^2 \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde en la anteúltima desigualdad hemos usado que $d_{x_0} \leq \bar{r}_K \sim h_K$ pues $K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$ y $\alpha \geq 0$. Juntando (5.8), (5.9), (5.10) y (5.12), obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\Pi_h v\|_{W_{-\alpha}(K)} &\leq \sum_{i/x_i \in \bar{K}} |a_i| \|\phi_i\|_{W_{-\alpha}(K)} \\ &\leq \sum_{i/x_i \in \bar{K}} h_K^{-\frac{n}{2}} \sqrt{\sum_{j=0}^2 h_K^{2(\alpha+j)} |v|_{H_{-\alpha}^j(K)}^2} h_K^{\frac{n}{2}-1-\alpha} \\ &\leq \sum_{i/x_i \in \bar{K}} \sqrt{\sum_{j=0}^2 h_K^{2(j-1)} |v|_{H_{-\alpha}^j(K)}^2} \\ &\lesssim \sum_{j=0}^2 h_K^{(j-1)} |v|_{H_{-\alpha}^j(K)} \end{aligned}$$

□

Se puede obtener fácilmente una pequeña adaptación del segundo ítem considerando una norma con otro peso solo en las derivadas de segundo orden.

Corolario 5.2.1.

Sean Π_h el interpolador de Lagrange, $0 \leq \alpha < \frac{n}{2}$ y $\beta \geq 0$. Entonces para toda $v \in H_{-\alpha}^1(K) \cap H_{-\beta}^2(K)$ vale la siguiente estimación:

$$\|\Pi_h v\|_{W_{-\alpha}(K)} \lesssim h_K^{-1} \|v\|_{L_{-\alpha}^2(K)} + |v|_{H_{-\alpha}^1(K)} + h_K^{\beta-\alpha+1} |v|_{H_{-\beta}^2(K)} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}.$$

Demostración.

Siguiendo exactamente el mismo procedimiento que en el segundo ítem del lema anterior hasta (5.11) donde haremos una pequeña modificación en los términos de la derivadas de orden 2 de v en K cambiando el peso $-\alpha$ por $-\beta$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \|\hat{v}\|_{H^2(\hat{K})}^2 &\lesssim h_K^{-n} \sum_{j=0}^2 h_K^{2j} \left(\sum_{|\gamma|=j} \int_K |D^\gamma v|^2 \right) \\
 &\lesssim h_K^{-n} \left[\sum_{j=0}^1 h_K^{2j} \left(\sum_{|\gamma|=j} \int_K |D^\gamma v|^2 d_{x_0}^{-2\alpha} d_{x_0}^{2\alpha} \right) + h_K^4 \left(\sum_{|\gamma|=2} \int_K |D^\gamma v|^2 d_{x_0}^{-2\beta} d_{x_0}^{2\beta} \right) \right] \\
 &\lesssim h_K^{-n} \left[\sum_{j=0}^1 h_K^{2j} h_K^{2\alpha} \left(\sum_{|\gamma|=j} \int_K |D^\gamma v|^2 d_{x_0}^{-2\alpha} \right) + h_K^4 h_K^{2\beta} \left(\sum_{|\gamma|=2} \int_K |D^\gamma v|^2 d_{x_0}^{-2\beta} \right) \right] \\
 &\lesssim h_K^{-n} \left[\sum_{j=0}^1 h_K^{2(\alpha+j)} \left(\sum_{|\gamma|=j} \int_K |D^\gamma v|^2 d_{x_0}^{-2\alpha} \right) + h_K^{2(\beta+2)} \left(\sum_{|\gamma|=2} \int_K |D^\gamma v|^2 d_{x_0}^{-2\beta} \right) \right] \\
 &= h_K^{-n} \left[\sum_{j=0}^1 h_K^{2(\alpha+j)} |v|_{H^j_{-\alpha}(K)}^2 + h_K^{2(\beta+2)} |v|_{H^2_{-\beta}(K)}^2 \right] \tag{5.13}
 \end{aligned}$$

donde en la anteúltima desigualdad hemos usado que $d_{x_0} \leq \bar{r}_K \sim h_K$ pues $K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$ y que $\alpha, \beta \geq 0$. Juntando (5.8), (5.9), (5.10) y (5.13), obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \|\Pi_h v\|_{W_{-\alpha}(K)} &\leq \sum_{i/x_i \in \bar{K}} |a_i| \|\phi_i\|_{W_{-\alpha}(K)} \\
 &\leq \sum_{i/x_i \in \bar{K}} h_K^{-\frac{n}{2}} \sqrt{\sum_{j=0}^1 h_K^{2(\alpha+j)} |v|_{H^j_{-\alpha}(K)}^2 + h_K^{2(\beta+2)} |v|_{H^2_{-\beta}(K)}^2} h_K^{\frac{n}{2}-1-\alpha} \\
 &\leq \sum_{i/x_i \in \bar{K}} \sqrt{\sum_{j=0}^2 h_K^{2(j-1)} |v|_{H^j_{-\alpha}(K)}^2 + h_K^{2(\beta-\alpha+1)} |v|_{H^2_{-\beta}(K)}^2} \\
 &\lesssim \left(\sum_{j=0}^1 h_K^{(j-1)} |v|_{H^j_{-\alpha}(K)} \right) + h_K^{\beta-\alpha+1} |v|_{H^2_{-\beta}(K)}.
 \end{aligned}$$

□

Lema 5.2.4. *Lema de Poincaré mejorado promedio cero*

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y x_0 un punto de Ω . Si $-\frac{n}{2} + 1 < \alpha < \frac{n}{2}$ entonces existe una constante

$C_P > 0$ tal que

$$\|v\|_{L^2_{\alpha-1}(\Omega)} < C_P \|\nabla v\|_{L^2_\alpha(\Omega)} \quad \forall v \in H^1_\alpha(\Omega) / \int_\Omega v = 0.$$

Si siguiendo [15, Teorema 1] debemos ver que existe un $r > 1$ tal que

$$|Q|^{\frac{1}{n} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^r \right)^{\frac{1}{qr}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v^{(1-p')r} \right)^{\frac{1}{p'r}} \leq C \quad \forall \text{ cubos } Q \subset \mathbb{R}^n$$

con $p = q = p' = 2$, $w = d_{x_0}^{2\beta}$ y $v = d_{x_0}^{2\alpha}$. Vale observar que es equivalente trabajar con Q cubos que con B bolas; por lo tanto buscamos $r > 1$ tal que

$$|B|^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B d_{x_0}^{2\beta r} \right)^{\frac{1}{2r}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B d_{x_0}^{-2\alpha r} \right)^{\frac{1}{2r}} \leq C \quad \forall \text{ bolas } B \subset \mathbb{R}^n \quad (5.14)$$

Para ello separaremos en casos según cómo es la relación entre el radio de la bola y la distancia a la singularidad x_0 . Dada B una bola de \mathbb{R}^n , notamos $d_B = \text{dist}(B, x_0)$, r_B al radio de B y x_B a su centro.

- Primer caso: $r_B < d_B$

Notar que $d_{x_0} \sim d_B$. En efecto, si notamos $\underline{x} \in \bar{B} / \text{dist}(\underline{x}, x_0) = d_B$ tenemos que

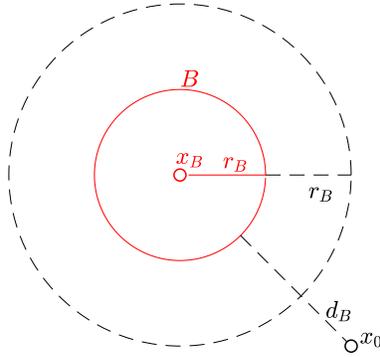


Figura 5.1: ejemplo de una bola B tal que $r_B < d_B$

$d_B \leq d_{x_0}(x) = |x - x_0| \leq |x - \underline{x}| + |\underline{x} - x_0| \leq 2r_B + d_B < 3d_B \quad \forall x \in B$. Gracias a esta equivalencia concluimos que

$$\begin{aligned} & |B|^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B d_{x_0}^{2\beta r} \right)^{\frac{1}{2r}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B d_{x_0}^{-2\alpha r} \right)^{\frac{1}{2r}} \\ & \lesssim |B|^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B d_B^{2\beta r} \right)^{\frac{1}{2r}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B d_B^{-2\alpha r} \right)^{\frac{1}{2r}} \\ & = |B|^{\frac{1}{n}} \left(d_B^{2\beta r} \right)^{\frac{1}{2r}} \left(d_B^{-2\alpha r} \right)^{\frac{1}{2r}} = |B|^{\frac{1}{n}} d_B^{\frac{2\beta r}{2r}} d_B^{\frac{-2\alpha r}{2r}} = |B|^{\frac{1}{n}} d_B^\beta d_B^{-\alpha} \end{aligned}$$

Ahora teniendo en cuenta que $|B| \sim r_B^n$ y que $r_B \leq d_B$ nos queda que

$$|B|^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B d_{x_0}^{2\beta r} \right)^{\frac{1}{2r}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B d_{x_0}^{-2\alpha r} \right)^{\frac{1}{2r}} \lesssim d_B^{1+\beta-\alpha}.$$

Si queremos que esté acotado para toda B necesitamos que $1 + \beta - \alpha = 0$, es decir $\beta = \alpha - 1$.

- Segundo caso: $r_B \geq d_B$

En este caso vamos a correr la bola B y agrandarla obteniendo otra bola \tilde{B} de

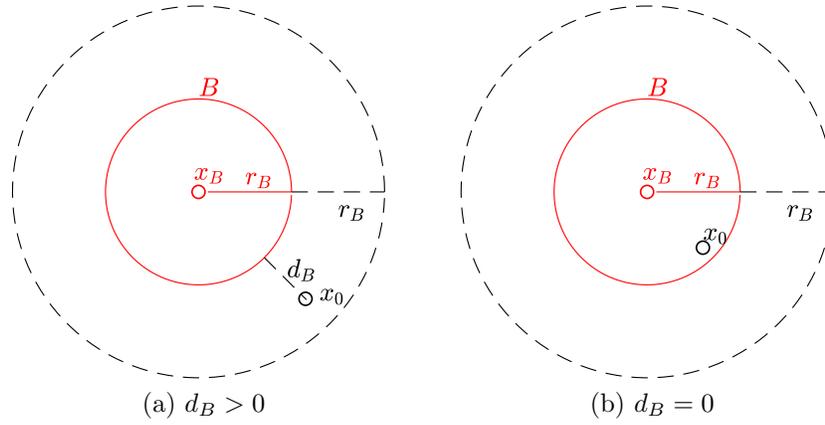
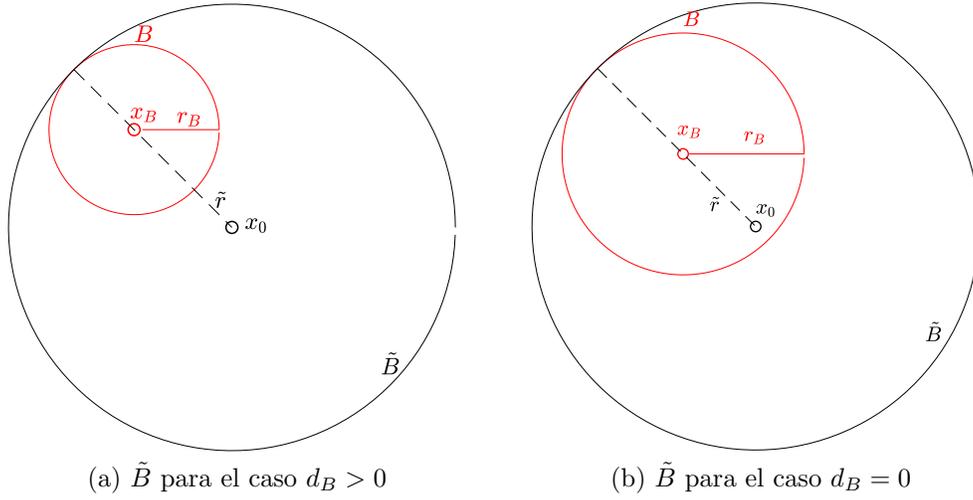


Figura 5.2: ejemplos donde $r_B \geq d_B$

manera que x_0 sea su centro y $B \subset \tilde{B}$. Sean x_B el centro de B y $\tilde{r} = r_B + |x_0 - x_B|$. Definimos $F(x) = \frac{x - x_B}{r_B} \tilde{r} + x_0$ y entonces tomamos \tilde{B} como $F(B)$.

Observar, además, que $r_B \sim \tilde{r}$. En efecto $\tilde{r} = r_B + |x_0 - x_B| \geq r_B$ y $\tilde{r} = r_B + |x_0 - x_B| \leq r_B + 2r_B = 3r_B$ pues $|x_0 - x_B| \leq r_B$ si $d_B = 0$ y $|x_0 - x_B| \leq 2r_B$ si $d_B > 0$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} & |B|^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B d_{x_0}^{2\beta r} \right)^{\frac{1}{2r}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B d_{x_0}^{-2\alpha r} \right)^{\frac{1}{2r}} \\ & \lesssim |\tilde{B}|^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{|\tilde{B}|} \int_{\tilde{B}} d_{x_0}^{2\beta r} \right)^{\frac{1}{2r}} \left(\frac{1}{|\tilde{B}|} \int_{\tilde{B}} d_{x_0}^{-2\alpha r} \right)^{\frac{1}{2r}} \\ & = |\tilde{B}|^{\frac{1}{n}} \frac{1}{|\tilde{B}|^{\frac{1}{2r}}} \left(\int_0^{\tilde{r}} \int_{\partial B_\rho(x_0)} d_{x_0}^{2\beta r} dS_x d\rho \right)^{\frac{1}{2r}} \frac{1}{|\tilde{B}|^{\frac{1}{2r}}} \left(\int_0^{\tilde{r}} \int_{\partial B_\rho(x_0)} d_{x_0}^{-2\alpha r} dS_x d\rho \right)^{\frac{1}{2r}} \\ & \lesssim |\tilde{B}|^{\frac{1}{n} - \frac{1}{r}} \left(\int_0^{\tilde{r}} \rho^{2\beta r} \rho^{n-1} d\rho \right)^{\frac{1}{2r}} \left(\int_0^{\tilde{r}} \rho^{-2\alpha r} \rho^{n-1} d\rho \right)^{\frac{1}{2r}} \end{aligned}$$

Figura 5.3: ejemplos del corrimiento de B para obtener \tilde{B}

Considerando que $2\beta r + n > 0$ y que $-2\alpha r + n > 0$ podemos continuar la estimación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
|B|^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B d_{x_0}^{2\beta r} \right)^{\frac{1}{2r}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B d_{x_0}^{-2\alpha r} \right)^{\frac{1}{2r}} &\lesssim |\tilde{B}|^{\frac{1}{n} - \frac{1}{r}} (\tilde{r}^{2\beta r + n})^{\frac{1}{2r}} (\tilde{r}^{-2\alpha r + n})^{\frac{1}{2r}} \\
&= |\tilde{B}|^{\frac{1}{n} - \frac{1}{r}} \tilde{r}^{\beta + \frac{n}{2r}} \tilde{r}^{-\alpha + \frac{n}{2r}} \lesssim \tilde{r}^{1 - \frac{n}{r}} \tilde{r}^{\beta + \frac{n}{2r}} \tilde{r}^{-\alpha + \frac{n}{2r}} = \tilde{r}^{1 + \beta - \alpha}
\end{aligned}$$

Nuevamente, si queremos que esté acotado para toda B necesitamos que $1 + \beta - \alpha = 0$, es decir $\beta = \alpha - 1$.

Por lo visto, necesitamos un $r > 1$ tal que $\alpha, \beta \in (-\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$, $\beta = \alpha - 1$, $n + 2\beta r > 0$ y $n - 2\alpha r > 0$; o equivalentemente, $r > 1$ tal que $\alpha \in (-\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2})$, $\beta = \alpha - 1$, $\frac{r-n/2}{r} < \alpha < \frac{n}{2r}$. En la Figura 5.4 se ve que tomando $\alpha \in (-\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2})$ existe el r deseado.

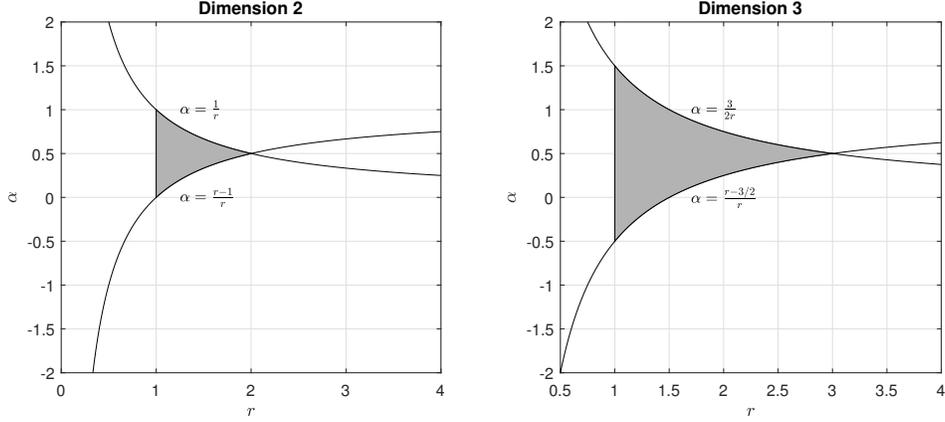
Lema 5.2.5. *Lema local de Poincaré mejorado promedio cero:*

Sea $-\frac{n}{2} + 1 < \alpha < \frac{n}{2}$, $\beta \geq \alpha - 1$, K un elemento de la triangulación tal que $K \in \mathcal{T}_h^{in}$, (x_0 es un vértice de K). Entonces existe una constante $C > 0$, independiente de K , tal que

$$\|v\|_{L^2_{-\alpha}(K)} \leq Ch_K^{\beta - \alpha + 1} \|\nabla v\|_{L^2_{-\beta}(K)} \quad \forall v \in H^1_{-\beta}(K) / \int_K v = 0.$$

Demostración.

Sea \hat{K} el elemento de referencia y $F : \hat{K} \rightarrow K$ la transformación afín que manda \hat{K} en K y el origen de coordenadas a la singularidad x_0 : $F(\hat{x}) = B\hat{x} + x_0$. Consideramos $\hat{v}(\hat{x}) = v(F(\hat{x}))$ y $\hat{d}(\hat{x}) = \text{dist}(\hat{x}, F^{-1}(x_0)) = d_0(\hat{x})$.


 Figura 5.4: Para $\alpha \in (-\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2})$ existe el r buscado.

Ahora aplicando un cambio de variable tenemos que

$$\begin{aligned}
 \|v\|_{L^2_{-\alpha}(K)}^2 &= \int_K v^2(x) d_{x_0}^{-2\alpha}(x) dx \\
 &= \int_{\hat{K}} v(F(\hat{x}))^2 d_{x_0}(F(\hat{x}))^{-2\alpha} \text{Jac}(F) d\hat{x} \\
 &= \text{Jac}(F) \int_{\hat{K}} v(F(\hat{x}))^2 d_{x_0}(F(\hat{x}))^{-2\alpha} d\hat{x}
 \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado que el jacobiano de la transformación F es constante. Por otro lado, recordando que $h_K d_0(\hat{x}) \sim d_{x_0}(F(\hat{x}))$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \|v\|_{L^2_{-\alpha}(K)}^2 &= \text{Jac}(F) \int_{\hat{K}} v(F(\hat{x}))^2 d_{x_0}(F(\hat{x}))^{-2\alpha} d\hat{x} \\
 &\sim \text{Jac}(F) \int_{\hat{K}} v(F(\hat{x}))^2 h_K^{-2\alpha} d_0(\hat{x})^{-2\alpha} d\hat{x} \\
 &= \text{Jac}(F) h_K^{-2\alpha} \int_{\hat{K}} \hat{v}(\hat{x})^2 d_0(\hat{x})^{-2\alpha} d\hat{x} \\
 &= \text{Jac}(F) h_K^{-2\alpha} \|\hat{v}\|_{L^2_{-\alpha}(\hat{K})}^2
 \end{aligned}$$

Notar que $v \in H^1_{-\beta}(K) \subset H^1_{-\alpha+1}(K)$ y v promedia cero en K . Luego tenemos que $\hat{v} \in H^1_{-\alpha+1}(\hat{K})$ y que \hat{v} promedia cero en \hat{K} ; y por lo tanto podemos aplicar el Lema de Poincaré mejorado promedio cero 5.2.4 a \hat{v} en \hat{K} obteniendo que $\|\hat{v}\|_{L^2_{-\alpha}(\hat{K})}^2 \lesssim \|\nabla \hat{v}\|_{L^2_{-\alpha+1}(\hat{K})}^2$;

y juntándolo con lo anterior nos queda que $\|v\|_{L^2_{-\alpha}(K)}^2 \lesssim \text{Jac}(F) h_K^{-2\alpha} \|\nabla \hat{v}\|_{L^2_{-\alpha+1}(\hat{K})}^2$. Recordemos que $|\nabla \hat{v}(\hat{x})| = |\nabla(v \circ F(\hat{x}))| = |(\nabla v) \circ F(\hat{x})B| \leq |(\nabla v) \circ F(\hat{x})| \|B\| \leq |(\nabla v) \circ F(\hat{x})| \frac{h_K}{\rho_{\hat{K}}}$, y por otro lado $h_K d_0(\hat{x}) \sim d_{x_0}(F(\hat{x}))$; y luego podemos continuar la estimación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^2_{-\alpha}(K)}^2 &\lesssim \text{Jac}(F) h_K^{-2\alpha} \|\nabla \hat{v}\|_{L^2_{-\alpha+1}(\hat{K})}^2 \\
&= \text{Jac}(F) h_K^{-2\alpha} \int_{\hat{K}} |\nabla \hat{v}(\hat{x})|^2 d_0(\hat{x})^{2(-\alpha+1)} d\hat{x} \\
&\leq \text{Jac}(F) h_K^{-2\alpha} \int_{\hat{K}} |(\nabla v) \circ F(\hat{x})|^2 \left(\frac{h_K}{\rho_{\hat{K}}}\right)^2 \left(\frac{d_{x_0}(F(\hat{x}))}{h_K}\right)^{2(-\alpha+1)} d\hat{x} \\
&\lesssim \text{Jac}(F) \int_{\hat{K}} |(\nabla v) \circ F(\hat{x})|^2 d_{x_0}(F(\hat{x}))^{2(-\alpha+1)} d\hat{x} \\
&= \int_K |\nabla v(x)|^2 d_{x_0}(x)^{2(-\alpha+1)} dx
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos hecho un cambio de coordenadas con F^{-1} .

Para terminar, falta que aparezca el peso β . Para ello, considerando que $\beta \geq \alpha - 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^2_{-\alpha}(K)}^2 &\lesssim \int_K |\nabla v|^2 d_{x_0}^{2(-\alpha+1)} \\
&= \int_K |\nabla v|^2 d_{x_0}^{-2\beta} d_{x_0}^{2(-\alpha+1+\beta)} \\
&\leq h_K^{2(-\alpha+1+\beta)} \int_K |\nabla v|^2 d_{x_0}^{-2\beta} \\
&= h_K^{2(-\alpha+1+\beta)} \|v\|_{W_{-\beta}(K)}^2
\end{aligned}$$

donde en la anteúltima desigualdad hemos usado que $d_{x_0} \leq \bar{r}_K \sim h_K$ para $K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$ y que $\beta \geq \alpha - 1$. \square

Para compensar el $h_K^{-1} \|v\|_{L^2_{-\alpha}(K)}$ usaremos que el interpolador de Lagrange Π_h es invariante sobre polinomios de grado 1. Definimos $P_K(v)$ el polinomio de grado 1 tal que $\int_K D^\gamma(v(x) - P_K(x)) dx = 0 \forall |\gamma| \leq 1$.

Lema 5.2.6. Sean $-\frac{n}{2} + 1 < \alpha < \frac{n}{2}$, $\beta \geq \alpha - 1$, $\beta \geq 0$ y $K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$. Existen constantes $C_1, C_2 > 0$, independientes de K , tales que:

$$(I) \quad \|\nabla(v - P_K(v))\|_{L^2_{-\alpha}(K)} \leq C_1 h_K^{\beta-\alpha+1} |v|_{H^2_{-\beta}(K)} \quad \forall v \in H^2_{-\beta}(K)$$

$$(II) \quad \|v - P_K(v)\|_{L^2_{-\alpha}(K)} \leq C_2 h_K^{\beta-\alpha+2} |v|_{H^2_{-\beta}(K)} \quad \forall v \in H^2_{-\beta}(K)$$

Demostración.

Para probar el primer ítem, consideramos $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ tal que $|\gamma| = 1$, y basta aplicar el Lema local de Poincaré mejorado promedio cero 5.2.5 a la función $D^\gamma(v - P_K(v))$. Notar que dicha función está en $H^1_{-\beta}(K)$ y además $\int_K D^\gamma(v - P_K(v)) dx = 0$ por definición de P_K ; por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \|D^\gamma(v - P_K(v))\|_{L^2_{-\alpha}(K)} &\leq C_1 h_K^{\beta-\alpha+1} \|\nabla(D^\gamma(v - P_K(v)))\|_{L^2_{-\beta}(K)} \\ &= C_1 h_K^{\beta-\alpha+1} \|\nabla(D^\gamma(v))\|_{L^2_{-\beta}(K)} \\ &\leq C_1 h_K^{\beta-\alpha+1} |v|_{H^2_{-\beta}(K)}. \end{aligned}$$

Luego tenemos que $\|\nabla(v - P_K(v))\|_{L^2_{-\alpha}(K)} \leq C h_K^{\beta-\alpha+1} |v|_{H^2_{-\beta}(K)}$.

Para probar el segundo ítem basta aplicar el Lema local de Poincaré mejorado promedio cero 5.2.5 a la función $w := v - P_K(v)$ con $\beta = \alpha$ y luego aplicar el primer ítem que acabamos de probar. Notar que $w \in H^1_{-\beta}(K)$ y que promedia 0 en K por definición de $P_K(v)$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} \|v - P_K(v)\|_{L^2_{-\alpha}(K)} &\leq C h_K \|\nabla w\|_{L^2_{-\alpha}(K)} \\ &= C h_K \|\nabla(v - P_K(v))\|_{L^2_{-\alpha}(K)} \\ &\leq C h_K^{\beta-\alpha+2} |v|_{H^2_{-\beta}(K)}. \end{aligned}$$

□

Lema 5.2.7.

Sean $0 \leq \alpha < \frac{n}{2}$, $\beta \geq \max\{0, \alpha - 1\}$ y $\mu \leq \beta - (\alpha - 1)$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|\nabla(\phi_\beta - \Pi_h \phi_\beta)\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)} \leq C h |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(\Omega)} \quad \forall \phi_\beta \in H^2_{-\beta}(\Omega).$$

Demostración.

Vamos a probar la estimación en cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$ dependiendo si K está cerca de la singularidad x_0 o no.

Veamos primero el caso en que $K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}$.

Haciendo uso de que $d_{x_0} \sim r_K$ en $\mathcal{T}_h^{\text{out}}$ pasaremos de la norma pesada $L^2_{-\alpha}(K)$ a $L^2(K)$ donde luego podremos usar la estimación conocida para el polinomio interpolador de

Lagrange 5.2.3. En efecto,

$$\begin{aligned}
\|\nabla(\phi_\beta - \Pi_h \phi_\beta)\|_{L^2_{-\alpha}(K)} &= \sqrt{\int_K |\nabla(\phi_\beta - \Pi_h \phi_\beta)|^2 d_{x_0}^{-2\alpha}} \\
&\lesssim r_K^{-\alpha} \sqrt{\int_K |\nabla(\phi_\beta - \Pi_h \phi_\beta)|^2} \\
&= r_K^{-\alpha} \|\nabla(\phi_\beta - \Pi_h \phi_\beta)\|_{L^2(K)} \\
&\leq r_K^{-\alpha} C h_K |\phi_\beta|_{H^2(K)}. \tag{5.15}
\end{aligned}$$

Ahora para pasar a la norma pesada $H^2_{-\beta}(K)$ intercalamos el factor r_K^β y usamos que $r_K \sim d_{x_0}$ para $K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}$:

$$\begin{aligned}
|\phi_\beta|_{H^2(K)} &= r_K^\beta |\phi_\beta r_K^{-\beta}|_{H^2(K)} \\
&\lesssim r_K^\beta |\phi_\beta d_{x_0}^{-\beta}|_{H^2(K)} \\
&= r_K^\beta |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)} \tag{5.16}
\end{aligned}$$

Juntando (5.15), (5.16) y usando que $h_K \sim h r_K^{1-\mu}$ pues $K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla(\phi_\beta - \Pi_h \phi_\beta)\|_{L^2_{-\alpha}(K)} &\lesssim C r_K^{-\alpha} h_K r_K^\beta |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)} \\
&= C h_K r_K^{\beta-\alpha} |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)} \\
&\lesssim C h r_K^{1-\mu} r_K^{\beta-\alpha} |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)} \\
&= C h r_K^{1+\beta-\alpha-\mu} |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)} \\
&\leq C h |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)}
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado que $\mu \leq \beta - \alpha + 1$ y por ende $r_K^{1+\beta-\alpha-\mu}$ está acotado por una constante independiente de K .

Veamos ahora el caso en que $K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$.

Vamos a intercalar $P_K := P_K(\phi_\beta)$ el polinomio de grado 1 tal que $\int_K D^\gamma(\phi_\beta - P_K) dx =$

$0 \forall |\gamma| \leq 1$, y usar que el interpolador de Lagrange es invariante en este polinomio. Es decir tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla(\phi_\beta - \Pi_h \phi_\beta)\|_{L^2_{-\alpha}(K)} &\leq \|\nabla(\phi_\beta - P_K)\|_{L^2_{-\alpha}(K)} + \|\nabla(P_K - \Pi_h \phi_\beta)\|_{L^2_{-\alpha}(K)} \\
&= \|\nabla(\phi_\beta - P_K)\|_{L^2_{-\alpha}(K)} + \|\nabla \Pi_h(P_K - \phi_\beta)\|_{L^2_{-\alpha}(K)} \\
&\lesssim h_K^{\beta-\alpha+1} |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)} + \|\nabla \Pi_h(P_K - \phi_\beta)\|_{L^2_{-\alpha}(K)}
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos usado el Lema 5.2.6. Ahora para acotar el segundo término con 5.2.1 necesitamos verificar primero que $P_K - \phi_\beta \in H^1_{-\alpha}(K) \cap H^2_{-\beta}(K)$. Para ello:

- Notar que $P_K - \phi_\beta \in H^2_{-\beta}(K)$, que $\frac{\partial(P_K - \phi_\beta)}{\partial x_i} \in H^1_{-\beta}(K)$, que $\frac{\partial(P_K - \phi_\beta)}{\partial x_i}$ promedia 0 en K por definición de P_K y que $\beta \geq \alpha - 1$. Luego, por el Lema mejorado de Poincaré promedio cero 5.2.5 tenemos que $\frac{\partial(P_K - \phi_\beta)}{\partial x_i} \in L^2_{-\alpha}(K)$.
- Notar que $P_K - \phi_\beta \in H^2_{-\beta}(K)$, que $P_K - \phi_\beta \in H^1_{-\beta}(K)$, que $P_K - \phi_\beta$ promedia 0 en K por definición de P_K y $\beta \geq \alpha - 1$. Luego, por el Lema mejorado de Poincaré promedio cero 5.2.5 tenemos que $P_K - \phi_\beta \in L^2_{-\alpha}(K)$.

En consecuencia tenemos que $P_K - \phi_\beta \in H^1_{-\alpha}(K) \cap H^2_{-\beta}(K)$ y podemos aplicar el Lema 5.2.1 obteniendo que:

$$\begin{aligned}
 & \|\nabla \Pi_h(P_K - \phi_\beta)\|_{L^2_{-\alpha}(K)} \\
 & \lesssim \frac{1}{h_K} \|P_K - \phi_\beta\|_{L^2_{-\alpha}(K)} + |P_K - \phi_\beta|_{H^1_{-\alpha}(K)} + h_K^{\beta-\alpha+1} |P_K - \phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)} \\
 & \lesssim \frac{1}{h_K} h_K^{\beta-\alpha+2} |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)} + h_K^{\beta-\alpha+1} |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)} + h_K^{\beta-\alpha+1} |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)} \\
 & \lesssim h_K^{\beta-\alpha+1} |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)}
 \end{aligned}$$

donde en la anteúltima desigualdad hemos usado nuevamente el Lema 5.2.6. Luego nos queda que $\|\nabla(\phi_\beta - \Pi_h \phi_\beta)\|_{L^2_{-\alpha}(K)} \lesssim h_K^{\beta-\alpha+1} |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)}$.

En conclusión, hemos probado que

$$\|\nabla(\phi_\beta - \Pi_h \phi_\beta)\|_{L^2_{-\alpha}(K)} \leq \begin{cases} Ch |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)} & \text{si } K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}} \\ Ch_K^{\beta-\alpha+1} |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)} & \text{si } K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}} \end{cases}$$

Luego, sumando sobre todos los elementos K de la triangulación, teniendo en cuenta que $h_K \sim h^\frac{1}{\mu}$ para $K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}$ y que $\mu \leq \beta - \alpha + 1$ (y por lo tanto $h^\frac{\beta-\alpha+1}{\mu} \leq h$); y haciendo

uso de la regularidad de la malla, tenemos que

$$\begin{aligned}
& \|\nabla(\phi_\beta - \Pi_h \phi_\beta)\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)} = \\
& = \sum_{K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}} \|\nabla(\phi_\beta - \Pi_h \phi_\beta)\|_{L^2_{-\alpha}(K)} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}} \|\nabla(\phi_\beta - \Pi_h \phi_\beta)\|_{L^2_{-\alpha}(K)} \\
& \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}} Ch |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}} Ch K^{\beta-\alpha+1} |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)} \\
& \lesssim \sum_{K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}} Ch |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}} Ch h^{\frac{\beta-\alpha+1}{\mu}} |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)} \\
& \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h^{\text{out}}} Ch |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h^{\text{in}}} Ch |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(K)} \\
& \lesssim Ch |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

Corolario 5.2.2. Sean $0 \leq \alpha < \frac{n}{2}$, $u \in W_\alpha(\Omega)$ solución del problema (2.2), $u_h \in V_{\mathcal{T}}^1(\Omega)$ solución del problema discreto (4.1), $\phi_\beta \in W_{-\alpha}(\Omega)$ solución del problema dual (5.7) con $\max\{0, \alpha - 1\} \leq \beta < \frac{n}{2}$ y $\mu \leq \beta - \alpha + 1$.

Si $u \in K_{\epsilon-1}^2(\Omega)$ para algún $\epsilon < \alpha$ y $\mu \leq \alpha - \epsilon$ entonces $\|u - u_h\|_{L^2_\beta(\Omega)} \lesssim h^2 \|u\|_{K_{\epsilon-1}^2(\Omega)}$.

Demostración.

Por el Lema 5.2.2 tenemos que:

$$\|u - u_h\|_{L^2_\beta(\Omega)}^2 \leq \|u - u_h\|_{W_\alpha(\Omega)} \inf_{\phi_h \in V_{\mathcal{T}}^1(\Omega)} \{\|\phi_\beta - \phi_h\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}\}.$$

Por [6, Teorema 2.4] tenemos que $\phi_\beta \in H^2_{-\beta}(\Omega) \subset H^2(\Omega)$ y por lo tanto podemos utilizar el interpolador de Lagrange $\Pi_h \phi_\beta$. Además vale que $\|\phi_\beta\|_{H^2_{-\beta}(\Omega)} \leq \|e_\beta\|_{L^2_{-\beta}(\Omega)}$. Entonces nos queda que

$$\|u - u_h\|_{L^2_\beta(\Omega)}^2 \leq \|u - u_h\|_{W_\alpha(\Omega)} \|\phi_\beta - \Pi_h \phi_\beta\|_{W_{-\alpha}(\Omega)}.$$

Ahora, por el Lema 5.2.7 tenemos que $\|\phi_\beta - \Pi_h \phi_\beta\|_{W_{-\alpha}(\Omega)} \leq h |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(\Omega)}$; y por lo visto en la primera parte del capítulo sobre el error en $W_\alpha(\Omega)$ en el Corolario 5.1.1 tenemos que $\|u - u_h\|_{W_\alpha(\Omega)} \leq h \|u\|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(\Omega)}$. Luego juntando todo nos queda que $\|u - u_h\|_{L^2_\beta(\Omega)}^2 \leq h \|u\|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(\Omega)} h |\phi_\beta|_{H^2_{-\beta}(\Omega)} \leq h \|u\|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(\Omega)} h \|e_\beta\|_{L^2_{-\beta}(\Omega)}$. También vimos que $\|e_\beta\|_{L^2_{-\beta}(\Omega)} = \|u - u_h\|_{L^2_\beta(\Omega)}$; y entonces finalmente tenemos que $\|u - u_h\|_{L^2_\beta(\Omega)}^2 \leq h^2 \|u\|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(\Omega)} \|u - u_h\|_{L^2_\beta(\Omega)}$ o equivalentemente $\|u - u_h\|_{L^2_\beta(\Omega)} \leq h^2 \|u\|_{\mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(\Omega)}$. □

Capítulo 6

Caso particular: $F = \delta_{x_0}$

En este capítulo aplicaremos todo lo estudiado para el caso particular en que la fuente es la delta de Dirac soportada en un punto. Lo primero que debemos ver es que $\delta_{x_0} \in (W_{-\alpha}(\Omega))'$ para $\frac{n}{2} - 1 < \alpha < \frac{n}{2}$, donde x_0 es un punto interior de Ω . Para ello necesitamos un resultado conocido:

Teorema 6.0.1 (Desigualdad Pesada de Hardy). *Sean $0 < p \leq q < \infty$, $0 < R < \infty$, w_1 y w_2 dos funciones de peso definidas en el intervalo $(0, +\infty)$ tales que*

$$\int_0^r w_2(t)^{\frac{1}{1-p}} dt < \infty \quad \forall r > 0.$$

Entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left[\int_0^R \left(\int_0^r f(t) dt \right)^q w_1(r) dr \right]^{\frac{1}{q}} \leq C \left[\int_0^R f(r)^p w_2(r) dr \right]^{\frac{1}{p}}$$

para toda f positiva en $(0, +\infty)$ si y solo si

$$D := \sup_{0 < r < R} \left\{ \left(\int_r^R w_1(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^r w_2(t)^{\frac{1}{1-p}} dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \right\} < \infty.$$

Más aún, la mejor constante C verifica que $D \leq C \leq k(p, q)D$ donde $k(p, q) = \left(\frac{p+pq-q}{p} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p+pq-q}{(p-1)q} \right)^{\frac{p-1}{p}}$.

Corolario 6.0.1. *Sean $p = q = 2$, $0 < R < +\infty$, $\frac{n}{2} - 1 < \alpha < \frac{n}{2}$, $w_1(t) = t^{n-1}$ y $w_2(t) = t^{n-1-2\alpha}$. Entonces*

$$\int_0^R \left(\int_0^r f(t) dt \right)^2 r^{n-1} dr \leq R^{2(\alpha+1)} c_\alpha \int_0^R f(r)^2 r^{n-1-2\alpha} dr$$

para toda f positiva en el intervalo $(0, +\infty)$, donde $c_\alpha = \frac{(\alpha + 1 - \frac{n}{2})^{\frac{2\alpha-2n+2}{n}}}{(\alpha + 1)^{\frac{2\alpha+2}{n}}}$.

Demostración.

Basta aplicar el Teorema 6.0.1. Como primer paso veamos que $\int_0^r w_2(t)^{\frac{1}{1-p}} dt < \infty \quad \forall r > 0$. En efecto, teniendo en cuenta que $2\alpha - n + 1 > -1$ obtenemos que

$$\int_0^r w_2(t)^{\frac{1}{1-p}} dt = \int_0^r (t^{n-1-2\alpha})^{-1} dt = \int_0^r t^{2\alpha-n+1} dt = \frac{t^{2\alpha-n+2}}{2\alpha-n+2} \Big|_0^r = \frac{r^{2\alpha-n+2}}{2\alpha-n+2} < \infty.$$

Por otro lado debemos ver que $D_\alpha := \sup_{0 < r < R} \left\{ \left(\int_r^R w_1(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^r w_2(t)^{\frac{1}{1-p}} dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \right\}$ es finito. En nuestro caso particular queda que

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \sup_{0 < r < R} \left\{ \left(\int_r^R t^{n-1} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^r (t^{n-1-2\alpha})^{\frac{1}{1-2}} dt \right)^{\frac{2-1}{2}} \right\} \\ &= \sup_{0 < r < R} \left\{ \left(\int_r^R t^{n-1} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^r t^{2\alpha-n+1} dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \sup_{0 < r < R} \left\{ \int_r^R t^{n-1} dt \int_0^r t^{2\alpha-n+1} dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup_{0 < r < R} \left\{ \frac{t^n}{n} \Big|_r^R \frac{t^{2\alpha-n+2}}{2\alpha-n+2} \Big|_0^r \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup_{0 < r < R} \left\{ \frac{R^n - r^n}{n} \frac{r^{2\alpha-n+2}}{2\alpha-n+2} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Definimos $g_\alpha(r) := \frac{R^n - r^n}{n} \frac{r^{2\alpha-n+2}}{2\alpha-n+2} = \frac{R^n}{n} \frac{r^{2\alpha-n+2}}{2\alpha-n+2} - \frac{r^{2\alpha+2}}{n(2\alpha-n+2)}$ y para poder determinar D_α realizamos un estudio de función de g_α en el intervalo $(0, R)$:

$$\begin{aligned} g'_\alpha(r) &= \frac{R^n}{n} r^{2\alpha-n+1} - \frac{2\alpha+2}{n(2\alpha-n+2)} r^{2\alpha+1} \\ &= r^{2\alpha-n+1} \left(\frac{R^n}{n} - r^n \frac{2\alpha+2}{n(2\alpha-n+2)} \right) \\ &= r^{2\alpha-n+1} \frac{1}{n} \frac{2\alpha+2}{2\alpha-n+2} \left(\frac{2\alpha-n+2}{2\alpha+2} R^n - r^n \right) \\ &= r^{2\alpha-n+1} \frac{1}{n} \frac{\alpha+1}{\alpha+1-\frac{n}{2}} \left(\frac{\alpha+1-\frac{n}{2}}{\alpha+1} R^n - r^n \right) \end{aligned}$$

Dado que $r > 0$ y $\alpha > \frac{n}{2} - 1$, tenemos que

$$g'_\alpha(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha+1-\frac{n}{2}}{\alpha+1} R^n - r^n = 0 \Leftrightarrow r = R \left(\frac{\alpha+1-\frac{n}{2}}{\alpha+1} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$g'_\alpha(r) > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha+1-\frac{n}{2}}{\alpha+1} R^n - r^n > 0 \Leftrightarrow r < R \left(\frac{\alpha+1-\frac{n}{2}}{\alpha+1} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$g'_\alpha(r) < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha+1-\frac{n}{2}}{\alpha+1} R^n - r^n < 0 \Leftrightarrow r > R \left(\frac{\alpha+1-\frac{n}{2}}{\alpha+1} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Notamos $\tilde{r} = R \left(\frac{\alpha+1-\frac{n}{2}}{\alpha+1} \right)^{\frac{1}{n}}$. Observar que como $\alpha > \frac{n}{2} - 1$ entonces $0 < \frac{\alpha+1-\frac{n}{2}}{\alpha+1} < 1$, y por ende $\tilde{r} \in (0, R)$. Luego tenemos que g_α es creciente en el intervalo $(0, \tilde{r})$ y decreciente en (\tilde{r}, R) ; y en consecuencia $g_\alpha(\tilde{r}) \geq g_\alpha(r) \forall r \in (0, R)$. Ahora

$$\begin{aligned} g_\alpha(\tilde{r}) &= \frac{R^n - \tilde{r}^n}{n} \frac{\tilde{r}^{2\alpha-n+2}}{2\alpha-n+2} \\ &= \frac{R^n - R^n \frac{\alpha+1-\frac{n}{2}}{\alpha+1}}{n} \frac{R^{2\alpha-n+2}}{2\alpha-n+2} \left(\frac{\alpha+1-\frac{n}{2}}{\alpha+1} \right)^{\frac{2\alpha-n+2}{n}} \\ &= \frac{R^n}{n} \left(1 - \frac{\alpha+1-\frac{n}{2}}{\alpha+1} \right) \frac{R^{2\alpha-n+2}}{2(\alpha+1-\frac{n}{2})} \left(\frac{\alpha+1-\frac{n}{2}}{\alpha+1} \right)^{\frac{2\alpha-n+2}{n}} \\ &= \frac{R^n}{n} \frac{\frac{n}{2}}{\alpha+1} \frac{R^{2\alpha-n+2}}{2(\alpha+1-\frac{n}{2})} \left(\frac{\alpha+1-\frac{n}{2}}{\alpha+1} \right)^{\frac{2\alpha-n+2}{n}} \\ &= \frac{1}{4} R^{2\alpha+2} \frac{(\alpha+1-\frac{n}{2})^{\frac{2\alpha-n+2}{n}-1}}{(\alpha+1)^{\frac{2\alpha-n+2}{n}+1}} \\ &= \frac{1}{4} R^{2\alpha+2} \frac{(\alpha+1-\frac{n}{2})^{\frac{2\alpha-2n+2}{n}}}{(\alpha+1)^{\frac{2\alpha+2}{n}}} \end{aligned}$$

Finamente tenemos que $D_\alpha = g_\alpha(\tilde{r})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} R^{\alpha+1} \frac{(\alpha+1-\frac{n}{2})^{\frac{\alpha-n+1}{n}}}{(\alpha+1)^{\frac{\alpha+1}{n}}}$.

Ahora sí, por el Teorema 6.0.1 tenemos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left[\int_0^R \left(\int_0^r f(t) dt \right)^2 r^{n-1} dr \right]^{\frac{1}{2}} \leq C \left[\int_0^R f(r)^2 r^{n-1-2\alpha} dr \right]^{\frac{1}{2}}$$

para toda f positiva en el intervalo $(0, +\infty)$ donde la constante C verifica que $D_\alpha \leq C \leq k(2, 2)D_\alpha$ y $k(2, 2) = 2$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^R \left(\int_0^r f(t) dt \right)^2 r^{n-1} dr &\leq C^2 \int_0^R f(r)^2 r^{n-1-2\alpha} dr \\ &\leq 4D_\alpha^2 \int_0^R f(r)^2 r^{n-1-2\alpha} dr \\ &= R^{2\alpha+2} \frac{(\alpha+1-\frac{n}{2})^{\frac{2\alpha-2n+2}{n}}}{(\alpha+1)^{\frac{2\alpha+2}{n}}} \int_0^R f(r)^2 r^{n-1-2\alpha} dr. \end{aligned}$$

□

Teorema 6.0.2. *Sea $\frac{n}{2} - 1 < \alpha < \frac{n}{2}$, x_0 un punto interior de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Entonces $|\delta_{x_0}(v)| \leq R^{\alpha - \frac{n}{2}} \|v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)} + c_\alpha R^{\alpha + 1 - \frac{n}{2}} \|\nabla v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)} \quad \forall v \in C^1(\Omega)$ donde $R > 0$ es tal que $B_R(x_0) \subset \Omega$.*

Demostración.

Veamos el caso $n = 3$:

Sean $R > 0$ tal que $B_R(x_0) \subset \Omega$ y $T : [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow B_R(x_0)$ la transformación de esféricas con centro x_0 a cartesianas.

Sea $v \in C^1(\Omega)$. Notar que para cualquier r, θ y ϕ vale lo siguiente:

$$v(x_0) = (v \circ T)(0, 0, 0) = (v \circ T)(0, \theta, \phi) = (v \circ T)(r, \theta, \phi) - \int_0^r \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(s, \theta, \phi) ds \quad (6.1)$$

Ahora, por un lado tenemos que

$$\int_{B_R(x_0)} v(x_0)^2 dx = v(x_0)^2 \int_{B_R(x_0)} 1 dx = v(x_0)^2 \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (6.2)$$

Por otro lado, pasando a coordenadas esféricas, usando (6.1) y que $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_0)} v(x_0)^2 dx &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R v(x_0)^2 r^2 |\sin(\theta)| dr d\theta d\phi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \left((v \circ T)(r, \theta, \phi) - \int_0^r \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(s, \theta, \phi) ds \right)^2 r^2 |\sin(\theta)| dr d\theta d\phi \\ &\leq \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R 2 \left((v \circ T)^2(r, \theta, \phi) + \left(\int_0^r \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(s, \theta, \phi) ds \right)^2 \right) r^2 |\sin(\theta)| dr d\theta d\phi \\ &\leq 2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R (v \circ T)^2(r, \theta, \phi) r^2 |\sin(\theta)| dr d\theta d\phi + \dots \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\dots + 2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\int_0^r \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(s, \theta, \phi) ds \right)^2 r^2 |\sin(\theta)| dr d\theta d\phi \quad (6.4)$$

Veamos (6.3) con más detalle:

agregando (y compensando) el factor necesario para que luego quede la norma pesada $r^{-2\alpha}$, usando que $r < R$ y $\alpha > 0$, y luego volviendo a coordenadas cartesianas

obtenemos que

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R (v \circ T)^2(r, \theta, \phi) r^2 |\sin(\theta)| dr d\theta d\phi = \\
 & = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R (v \circ T)^2(r, \theta, \phi) r^2 |\sin(\theta)| r^{-2\alpha} r^{2\alpha} dr d\theta d\phi \\
 & \leq R^{2\alpha} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R (v \circ T)^2(r, \theta, \phi) r^2 |\sin(\theta)| r^{-2\alpha} dr d\theta d\phi \\
 & = R^{2\alpha} \int_{B_R(x_0)} v^2(x) d_{x_0}^{-2\alpha}(x) dx \\
 & = R^{2\alpha} \|v\|_{L_{-\alpha}^2(B_R(x_0))}^2 \\
 & \leq R^{2\alpha} \|v\|_{L_{-\alpha}^2(\Omega)}^2.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Veamos ahora con más detalle (6.4):

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\int_0^r \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(s, \theta, \phi) ds \right)^2 r^2 |\sin(\theta)| dr d\theta d\phi = \\
 & = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\int_0^r \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(s, \theta, \phi) ds \right)^2 r^2 dr |\sin(\theta)| d\theta d\phi \\
 & \leq \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \underbrace{\left(\int_0^r \left| \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(s, \theta, \phi) \right| ds \right)^2}_{A} r^2 dr |\sin(\theta)| d\theta d\phi
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Aplicamos el Corolario 6.0.1 a (A) y tenemos que

$$\int_0^R \left(\int_0^r \left| \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(s, \theta, \phi) \right| ds \right)^2 r^2 dr \leq R^{2(\alpha+1)} c_\alpha \int_0^R \left| \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(r, \theta, \phi) \right|^2 r^{2-2\alpha} dr.$$

Notar que $\frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(r, \theta, \phi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}(T(r, \theta, \phi)) \frac{\partial T_i}{\partial r}(r, \theta, \phi)$ donde T_i es la i -ésima coordenada de T . Considerando que $\left| \frac{\partial T_i}{\partial r} \right| \leq 1$ tenemos que

$$\left| \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(r, \theta, \phi) \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(T(r, \theta, \phi)) \right|,$$

y por ende $\left| \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(r, \theta, \phi) \right|^2 \leq c(n) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}(T(r, \theta, \phi)) \right)^2 = c(n) |\nabla v \circ T(r, \theta, \phi)|^2$.

Juntándolo con lo anterior resulta que

$$\begin{aligned}
 (A) &= \int_0^R \left(\int_0^r \left| \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(s, \theta, \phi) \right| ds \right)^2 r^2 dr \\
 &\leq R^{2(\alpha+1)} c_\alpha \int_0^R \left| \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(r, \theta, \phi) \right|^2 r^{2-2\alpha} dr \\
 &\leq c(n) R^{2(\alpha+1)} c_\alpha \int_0^R |\nabla v \circ T(r, \theta, \phi)|^2 r^{2-2\alpha} dr.
 \end{aligned}$$

Finalmente, juntando con (6.6) y volviendo a coordenadas cartesianas tenemos que

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\int_0^r \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(s, \theta, \phi) ds \right)^2 r^2 |\sin(\theta)| dr d\theta d\phi \\
 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\int_0^r \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(s, \theta, \phi) ds \right)^2 r^2 dr |\sin(\theta)| d\theta d\phi \\
 &\leq \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\int_0^r \left| \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(s, \theta, \phi) \right| ds \right)^2 r^2 dr |\sin(\theta)| d\theta d\phi \\
 &\leq \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^{2(\alpha+1)} c_\alpha \int_0^R \left| \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(r, \theta, \phi) \right|^2 r^{2-2\alpha} dr |\sin(\theta)| d\theta d\phi \\
 &\leq R^{2(\alpha+1)} c_\alpha \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R |\nabla v \circ T(r, \theta, \phi)|^2 r^{2-2\alpha} dr |\sin(\theta)| d\theta d\phi \\
 &= R^{2(\alpha+1)} c_\alpha \int_{B_R(x_0)} |\nabla v|^2 d_{x_0}^{-2\alpha}(x) dx \\
 &= R^{2(\alpha+1)} c_\alpha \|\nabla v\|_{L^2_{-\alpha}(B_R(x_0))}^2 \\
 &\leq R^{2(\alpha+1)} c_\alpha \|\nabla v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)}^2. \tag{6.7}
 \end{aligned}$$

Juntando (6.2), (6.3), (6.4), (6.5) y (6.7) concluimos que

$$v(x_0)^2 \frac{4}{3} \pi R^3 \leq c(n) R^{2\alpha} \|v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)}^2 + R^{2(\alpha+1)} c_\alpha \|\nabla v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)}^2$$

y por ende $|v(x_0)| \leq c(n) R^{\alpha-\frac{3}{2}} \|v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)} + R^{(\alpha+1)-\frac{3}{2}} c_\alpha \|\nabla v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)}$.

Veamos el caso $n = 2$:

Sean $R > 0$ tal que $B_R(x_0) \subset \Omega$ y $T : [0, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow B_R(x_0)$ la transformación de polares con centro x_0 a cartesianas.

Sea $v \in C^1(\Omega)$. Notar que

$$v(x_0) = (v \circ T)(0, 0) = (v \circ T)(0, \theta) = (v \circ T)(r, \theta) - \int_0^r \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(s, \theta) ds \quad \forall r, \theta \tag{6.8}$$

Ahora, por un lado tenemos que

$$\int_{B_R(x_0)} v(x_0)^2 dx = v(x_0)^2 \int_{B_R(x_0)} 1 dx = v(x_0)^2 \pi R^2 \quad (6.9)$$

Por otro lado, pasando a coordenadas polares, usando (6.8) y que $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{B_R(x_0)} v(x_0)^2 dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R v(x_0)^2 r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \left((v \circ T)(r, \theta) - \int_0^r \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(s, \theta) ds \right)^2 r dr d\theta \\ &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^R 2 \left((v \circ T)^2(r, \theta) + \left(\int_0^r \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(s, \theta) ds \right)^2 \right) r dr d\theta \\ &\leq 2 \int_0^{2\pi} \int_0^R (v \circ T)^2(r, \theta) r dr d\theta + \dots \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\dots + 2 \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\int_0^r \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(s, \theta) ds \right)^2 r dr d\theta \quad (6.11)$$

Veamos (6.10) con más detalle: agregando (y compensando) el factor necesario para que luego quede la norma pesada $r^{-2\alpha}$, usando que $r < R$ y $\alpha > 0$, y luego volviendo a coordenadas cartesianas obtenemos que

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^R (v \circ T)^2(r, \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R (v \circ T)^2(r, \theta) r r^{-2\alpha} r^{2\alpha} dr d\theta \\ &\leq R^{2\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^R (v \circ T)^2(r, \theta) r r^{-2\alpha} dr d\theta \\ &= R^{2\alpha} \int_{B_R(x_0)} v^2(x) d_{x_0}^{-2\alpha}(x) dx \\ &= R^{2\alpha} \|v\|_{L_{-\alpha}^2(B_R(x_0))}^2 \\ &\leq R^{2\alpha} \|v\|_{L_{-\alpha}^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Veamos ahora con más detalle (6.11):

para ello aplicamos el Corolario 6.0.1 y tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_0^R \left(\int_0^r \left| \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(s, \theta) \right| ds \right)^2 r dr \\ & \leq R^{2(\alpha+1)} c_\alpha \int_0^R \left| \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(r, \theta) \right|^2 r^{1-2\alpha} dr \end{aligned}$$

Notar que $\frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(r, \theta) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_i}(T(r, \theta)) \frac{\partial T_i}{\partial r}(r, \theta)$ donde T_i es la i -ésima coordenada de T . Considerando que $\left| \frac{\partial T_i}{\partial r} \right| \leq 1$ tenemos que $\left| \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(r, \theta) \right| \leq \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(T(r, \theta)) \right|$, y por ende $\left| \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(r, \theta) \right|^2 \leq c(n) \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}(T(r, \theta)) \right)^2 = c(n) |\nabla v \circ T(r, \theta)|^2$. Juntándolo con lo anterior resulta que

$$\begin{aligned} & \int_0^R \left(\int_0^r \left| \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(s, \theta) \right| ds \right)^2 r dr \\ & \leq R^{2(\alpha+1)} c_\alpha \int_0^R \left| \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(r, \theta) \right|^2 r^{1-2\alpha} dr \\ & \leq c(n) R^{2(\alpha+1)} c_\alpha \int_0^R |\nabla v \circ T(r, \theta)|^2 r^{1-2\alpha} dr. \end{aligned}$$

Finalmente, juntando lo anterior y volviendo a coordenadas cartesianas tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\int_0^r \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(s, \theta) ds \right)^2 r dr d\theta \\ & \leq \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\int_0^r \left| \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(s, \theta) \right| ds \right)^2 r dr d\theta \\ & \leq \int_0^{2\pi} R^{2(\alpha+1)} c_\alpha \int_0^R \left| \frac{\partial(v \circ T)}{\partial r}(r, \theta) \right|^2 r^{1-2\alpha} dr d\theta \\ & \leq R^{2(\alpha+1)} c_\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^R |\nabla v \circ T(r, \theta)|^2 r^{1-2\alpha} dr d\theta \\ & = R^{2(\alpha+1)} c_\alpha \int_{B_R(x_0)} |\nabla v|^2 d_{x_0}^{-2\alpha}(x) dx \\ & = R^{2(\alpha+1)} c_\alpha \|\nabla v\|_{L_{-\alpha}^2(B_R(x_0))}^2 \\ & \leq R^{2(\alpha+1)} c_\alpha \|\nabla v\|_{L_{-\alpha}^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Juntando (6.9), (6.10), (6.11), (6.12) y (6.13) concluimos que

$$v(x_0)^2 \pi R^2 \leq c(n) R^{2\alpha} \|v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)}^2 + R^{2(\alpha+1)} c_\alpha \|\nabla v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)}^2$$

y por ende $|v(x_0)| \leq c(n) R^{\alpha-1} \|v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)} + R^{(\alpha+1)-1} c_\alpha \|\nabla v\|_{L^2_{-\alpha}(\Omega)}$. □

Corolario 6.0.2. *Sea $\frac{n}{2} - 1 < \alpha < \frac{n}{2}$, x_0 un punto interior de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Entonces $\delta_{x_0} \in (W_{-\alpha}(\Omega))'$.*

Demostración. Se deduce por la densidad de las funciones $C_0^\infty(\Omega)$ y el teorema anterior. □

Ahora podemos aplicar los teoremas de existencia y unicidad de solución vistos en los Capítulos 3 y 4 para el caso particular en que $F = \delta_{x_0}$. Vamos a necesitar que α esté en \mathbb{I} y además, por lo visto recién, que $\frac{n}{2} - 1 < \alpha < \frac{n}{2}$. Notamos $\mathbb{I}_\delta = \mathbb{I} \cap (\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2})$. Observar que

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_\delta &= \left\{ \begin{array}{ll} (-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}) & \text{si } \vec{b} = 0 \text{ y } c = 0 \\ (0, 1) & \text{si } \vec{b} \neq 0 \text{ o } c \neq 0 \end{array} \right\} \cap (\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} (\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}) & \text{si } n = 2 \text{ o } (n = 3 \wedge \vec{b} = 0 \wedge c = 0) \\ (\frac{1}{2}, 1) & \text{si } n = 3 \wedge (\vec{b} \neq 0 \text{ o } c \neq 0) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Teorema 6.0.3.

Si $\alpha \in \mathbb{I}_\delta$ entonces existe un único elemento $u \in W_\alpha(\Omega)$ solución de (2.1), es decir

$$a(u, v) = \delta_{x_0}(v) \quad \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega)$$

Demostración.

Se deduce del Corolario 6.0.2 y por lo visto en el Capítulo 3 tomando $F = \delta_{x_0}$. □

Teorema 6.0.4.

Si $\alpha \in \mathbb{I}_\delta$ entonces existe un único elemento $u_h \in V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)$ tal que

$$a_0(u_h, v_h) = \delta_{x_0}(v_h) \quad \forall v_h \in V_{\mathcal{T}}^\ell(\Omega)$$

Demostración.

Se deduce del Corolario 6.0.2 y lo visto en el Capítulo 4 tomando $F = \delta_{x_0}$. □

Ahora podemos aplicar los teoremas que estiman el error entre u y u_h vistos en el Capítulo 5 para el caso particular en que $F = \delta_{x_0}$. En los Corolarios 5.1.1 y 5.2.2 se necesitaba saber que la solución $u \in \mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(\Omega)$ para algún valor de ϵ adecuado. Veamos esto en nuestro caso particular.

Teorema 6.0.5. *Sea ϕ la solución fundamental del laplaciano. Luego $\phi \in \mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(B_1(0))$ para $\epsilon > \frac{n}{2} - 1$.*

Previo a la demostración del teorema haremos la siguiente observación que nos ayudará: $\int_{B_1(0)} |x|^{2\gamma}$ es finito si $\gamma > -\frac{n}{2}$. En efecto, $\int_{B_1(0)} |x|^{2\gamma} dx = \int_0^1 \int_{\partial B_r(0)} r^{2\gamma} dS_x dr = c_n \int_0^1 r^{2\gamma+n-1} dr = c_n \frac{1}{2\gamma+n}$ pues $2\gamma+n > 0$. Ahora sí, veamos la demostración del teorema.

Demostración.

Recordar que $\phi(x) \sim \begin{cases} \log(|x|) & \text{si } n = 2 \\ \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$. Notar que $\nabla\phi(x) = c_n \frac{x}{|x|^n}$ si $n \geq 2$ y que $\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \begin{cases} c_n \frac{x_i x_j}{|x|^{n+2}} & \text{si } x_i \neq x_j \\ c_n \left(\frac{1}{|x|^n} - n \frac{x_i^2}{|x|^{n+2}} \right) & \text{si } x_i = x_j \end{cases}$

Veamos que $\phi \in L_{\epsilon-1}^2(B_1(0))$ para $\epsilon > \frac{n}{2} - 1$ en dimensión $n = 3$:

$$\int_{B_1(0)} \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} \right)^2 d_0^{2(\epsilon-1)} = \int_{B_1(0)} |x|^{2(\epsilon+1-n)} < \infty$$

por la observación anterior con $\gamma = \epsilon + 1 - n > -\frac{n}{2}$ pues $\epsilon > \frac{n}{2} - 1$.

Veamos que $\phi \in L_{\epsilon-1}^2(B_1(0))$ para $\epsilon > \frac{n}{2} - 1 = 0$ en dimensión $n = 2$:

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)} (\log(1/|x|))^2 d_0^{2(\epsilon-1)} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \log^2(1/r) r^{2(\epsilon-1)} r d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \log^2(1/r) r^{2\epsilon-1} dr \\ &= 2\pi \left[\left(\log^2(1/r) \frac{r^{2\epsilon}}{2\epsilon} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 2\log(1/r) \frac{1}{1/r} \frac{-1}{r^2} \frac{r^{2\epsilon}}{2\epsilon} dr \right] \\ &= 2\pi \left[\left(\log^2(1/r) \frac{r^{2\epsilon}}{2\epsilon} \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{\epsilon} \int_0^1 \log(1/r) r^{2\epsilon-1} dr \right] \\ &= 2\pi \left[\left(\log^2(1/r) \frac{r^{2\epsilon}}{2\epsilon} \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{\epsilon} \left(\log(1/r) \frac{r^{2\epsilon}}{2\epsilon} \Big|_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{(1/r)} \frac{1}{r^2} \frac{r^{2\epsilon}}{2\epsilon} dr \right) \right] \\ &= 2\pi \left[\left(\log^2(1/r) \frac{r^{2\epsilon}}{2\epsilon} \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{\epsilon} \log(1/r) \frac{r^{2\epsilon}}{2\epsilon} \Big|_0^1 + \frac{1}{2\epsilon^2} \frac{r^{2\epsilon}}{2\epsilon} \Big|_0^1 \right] \end{aligned}$$

y esto es finito dado que $\epsilon > 0$ y teniendo en cuenta que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \log^2(1/r) r^p = \lim_{r \rightarrow 0} \log(1/r) r^p = 0,$$

para $p > 0$.

Veamos que las derivadas de primer orden están en $L^2_\epsilon(B_1(0))$ para $\epsilon > \frac{n}{2} - 1$. En efecto, to, $\int_{B_1(0)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)^2 d_0^{2\epsilon} = \int_{B_1(0)} \left(\frac{x_i}{|x|^n} \right)^2 |x|^{2\epsilon} \leq \int_{B_1(0)} \left(\frac{|x|}{|x|^n} \right)^2 |x|^{2\epsilon} = \int_{B_1(0)} |x|^{2(\epsilon+1-n)}$; y esto es finito por la observación anterior con $\gamma = \epsilon + 1 - n > -\frac{n}{2}$ pues $\epsilon > \frac{n}{2} - 1$.

Veamos que las derivadas de segundo orden están en $L^2_{\epsilon+1}(B_1(0))$. Observar que $|\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}| \lesssim \frac{1}{|x|^n} \forall 1 \leq i, j \leq n$; por lo tanto basta ver que $\frac{1}{|x|^n} \in L^2_{\epsilon+1}(B_1(0))$. En efecto, $\int_{B_1(0)} \left(\frac{1}{|x|^n} \right)^2 d_0^{2(\epsilon+1)} = \int_{B_1(0)} \left(\frac{1}{|x|^n} \right)^2 |x|^{2(\epsilon+1)} = \int_{B_1(0)} |x|^{2(\epsilon+1-n)}$; y esto es finito por la observación anterior con $\gamma = \epsilon + 1 - n > -\frac{n}{2}$ pues $\epsilon > \frac{n}{2} - 1$. □

Se puede ver que mientras A satisfaga las condiciones de elipticidad la solución \bar{u} de (2.1) está en el mismo espacio que la solución fundamental (correspondiente al caso $A = I$), es decir que $\bar{u} \in \mathbb{K}_{\epsilon-1}^2(B_1(0))$ para $\epsilon > \frac{n}{2} - 1$.

Ahora sí, estamos en condiciones de replicar los teoremas de convergencia estudiados en los Corolarios 5.1.1, y 5.2.2 para el caso en que $\mathbf{b} = 0$ y $c = 0$:

Corolario 6.0.3. Sean $\alpha \in \mathbb{I}_\delta$, $u \in W_\alpha(\Omega)$ la solución de $a(u, v) = \delta_{x_0}(v) \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega)$, $u_h \in V_{\mathcal{T}}^1(\Omega)$ la solución de $a(u_h, v_h) = \delta_{x_0}(v_h) \forall v_h \in V_{\mathcal{T}}^1(\Omega)$ y $0 < \mu < \alpha - \frac{n}{2} + 1$. Luego $\|u - u_h\|_{W_\alpha(\Omega)} \lesssim h$.

Demostración. Dado que $\frac{n}{2} - 1 < \alpha - \mu$ podemos tomar $\epsilon < 1$ tal que $\frac{n}{2} - 1 < \epsilon < \alpha - \mu$. Por el Corolario 5.1.1 tenemos que $\|u - u_h\|_{W_\alpha(\Omega)} \lesssim h$. □

Corolario 6.0.4. Sean $\alpha \in \mathbb{I}_\delta$, $\max\{0, \alpha - 1\} \leq \beta < \frac{n}{2}$, $\mu \leq \beta - \alpha + 1$, $u \in W_\alpha(\Omega)$ la solución de $a(u, v) = \delta_{x_0}(v) \forall v \in W_{-\alpha}(\Omega)$, $u_h \in V_{\mathcal{T}}^1(\Omega)$ la solución de $a(u_h, v_h) = \delta_{x_0}(v_h) \forall v_h \in V_{\mathcal{T}}^1(\Omega)$ y $0 < \mu < \alpha - \frac{n}{2} + 1$. Luego $\|u - u_h\|_{L^2_\beta(\Omega)} \lesssim h^2$.

Demostración. Dado que $\frac{n}{2} - 1 < \alpha - \mu$ podemos tomar $\epsilon < 1$ tal que $\frac{n}{2} - 1 < \epsilon < \alpha - \mu$. Por el Corolario 5.2.2 tenemos que $\|u - u_h\|_{L^2_\beta(\Omega)} \lesssim h^2$. □

Notar que para el caso $n = 2$ y $\beta = 0$ se tiene orden 2 para $0 < \mu < \frac{1}{2}$, siendo $\mu = \frac{1}{2}$ el valor crítico. Dicho valor es el utilizado en [3] obteniendo un factor logarítmico que deteriora el orden.

6.1. Resumen de resultados

En la Figura 6.1 se muestran los valores de μ y α que deben tomarse para tener convergencia de orden 1 en $W_\alpha(\Omega)$.

Parámetros para convergencia en $W_\alpha(\Omega)$

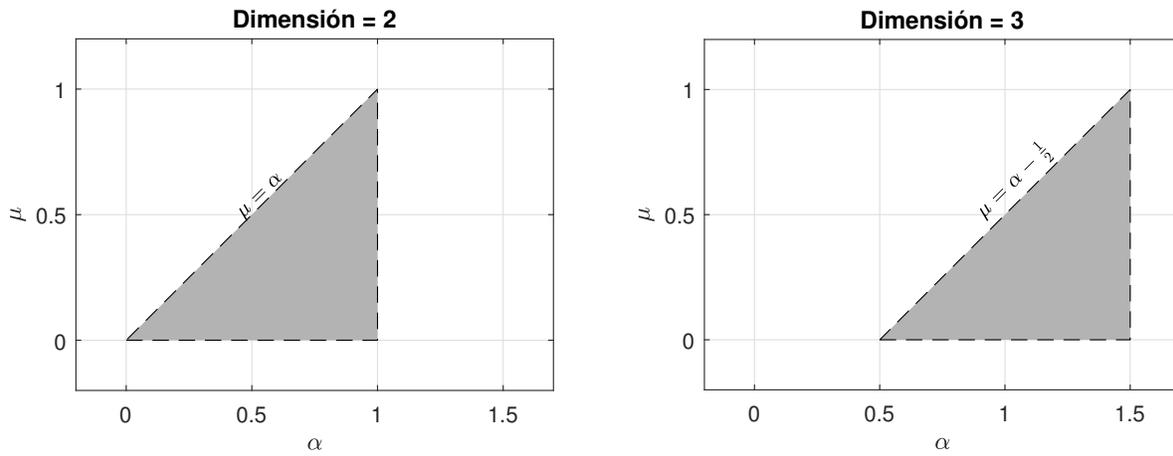


Figura 6.1

En la Figura 6.2 se muestran los valores de μ y α que deben tomarse para tener convergencia de orden 2 en $L^2(\Omega)$.

Parámetros para convergencia en $L^2(\Omega)$

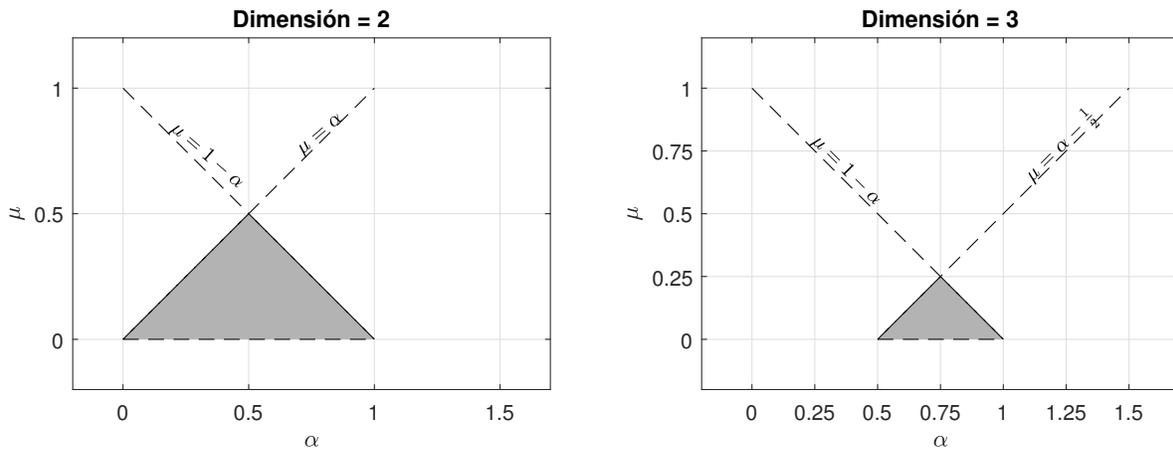


Figura 6.2

En las Figuras 6.3, 6.4 se muestran los valores de μ , α y β que deben tomarse para tener convergencia de orden 2 en $L^2_\beta(\Omega)$.

Parámetros para convergencia en $L^2_\beta(\Omega)$ en dim=2

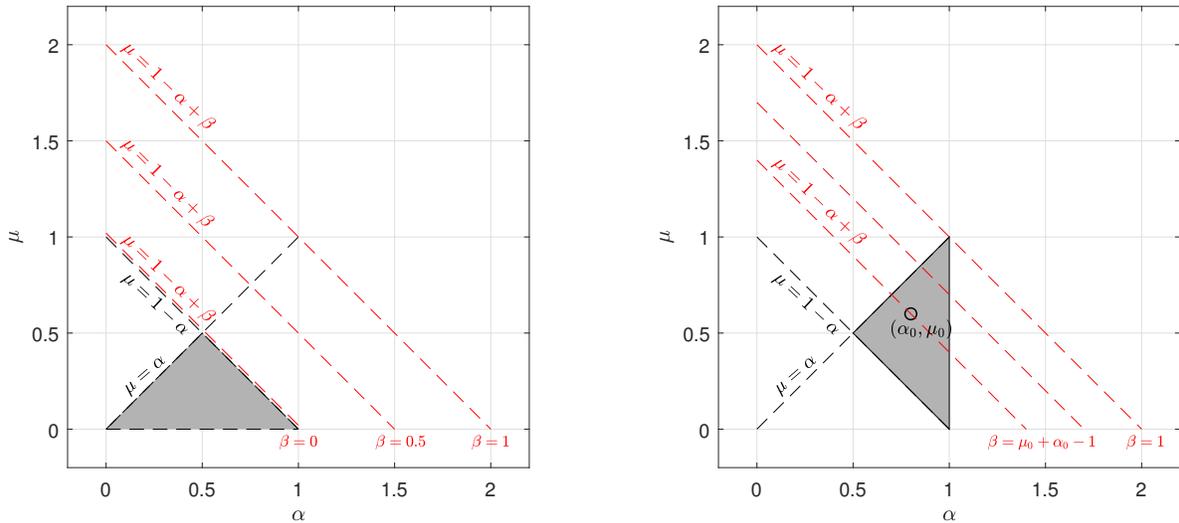


Figura 6.3

Parámetros para convergencia en $L^2_\beta(\Omega)$ en dim=3

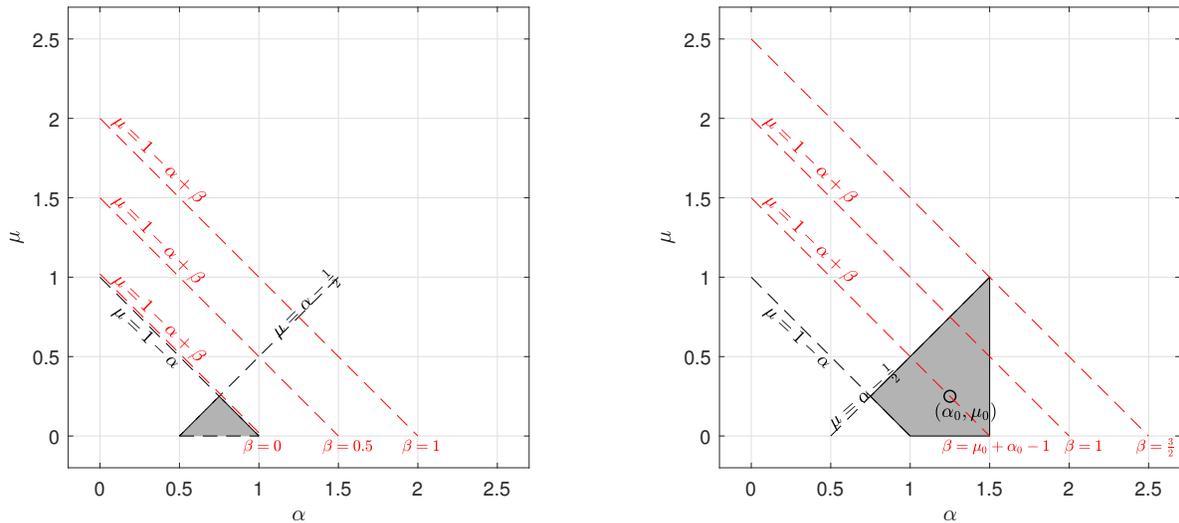


Figura 6.4

Finalmente presentamos la siguiente tabla que nos indica los valores de los parámetros que deben tomarse según lo que se quiera estudiar, para el caso $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ y $c = 0$:

Dimensión	$n = 2$	$n = 3$
Existencia y unicidad de solución de PVC	$0 < \alpha < 1$	$\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$
Existencia y unicidad de solución de PVD	$0 < \alpha < 1$	$\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$
Convergencia en W_α	$0 < \mu < 1$ $\mu < \alpha < 1$	$0 < \mu < 1$ $\mu + \frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$
Convergencia en L^2 con $\beta = 0$	$0 < \mu < \frac{1}{2}$ $\mu < \alpha < 1 - \mu$	$0 < \mu < \frac{1}{4}$ $\mu + \frac{1}{2} < \alpha < 1 - \mu$
Convergencia en L^2_β con $\beta > 0$	$0 < \mu < 1$ $\mu < \alpha < 1$ Si $\alpha \leq 1 - \mu$: $\beta \geq 0$ Si $\alpha \geq 1 - \mu$: $\beta \geq \mu + \alpha - 1$	$0 < \mu < 1$ $\mu + \frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$ Si $\alpha \leq 1 - \mu$: $\beta \geq 0$ Si $\alpha \geq 1 - \mu$: $\beta \geq \mu + \alpha - 1$

Cuadro 6.1

Capítulo 7

Experimentos Numéricos

Para poder verificar los resultados teóricos obtenidos se analizó el caso donde la solución exacta es conocida. Sea $\Omega = B_1(x_0)$ con $x_0 = \vec{0}$ en dimensión $n = 2$ o $n = 3$. Sabemos que la solución exacta del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_{x_0} & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

es la solución fundamental

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log(|x|) & \text{si } n = 2 \\ \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x|} - 1 \right) & \text{si } n = 3 \end{cases}$$

En sentido estricto se está resolviendo el problema discreto sobre un polígono/poliedro Ω_h que aproxima a Ω , pero como vamos a trabajar con polinomios de grado 1 esto no genera un problema pues no afecta al orden de convergencia.

A continuación se muestran los resultados obtenidos en diferentes corridas para algunas elecciones de α , β y μ en dimensión $n = 2$ y $n = 3$. En concreto, para cada ejemplo se muestra una tabla con los valores de los errores obtenidos en cada iteración y en cada norma, y un gráfico para comprobar el orden de convergencia.

Por los resultados teóricos obtenidos sabemos que $error \sim h^k$ con $k = 1$ o $k = 2$ según la norma con la que se esté trabajando. En consecuencia se tiene que $\log(error) \sim k \log(h)$ y puede verse a k como la pendiente de $\log(error)$ vs $\log(h)$. En los siguientes gráficos, para cada iteración i se plotea dicha pendiente con respecto a la iteración anterior: $\frac{\log(error_i) - \log(error_{i-1})}{\log(h_i) - \log(h_{i-1})}$ donde $error_i$ es el error obtenido en la iteración i .

- Ejemplo 1: $\mu = 0,5$, $\alpha = 0,75$ y $\beta = 0,75$ en dimensión $n = 2$

En la Figura 7.1 se puede ver el orden de convergencia: 1 para el error en $L^2_\beta(\Omega)$ y 2 para $W_\alpha(\Omega)$.

h	Iteración	$W_\alpha(\Omega)$ ($\times 10^{-2}$)	$L_\beta^2(\Omega)$ ($\times 10^{-3}$)
1/2	1	13.65476	9.40045
1/4	2	8.57170	3.91323
1/8	3	5.01940	1.16045
1/16	4	2.52057	0.27382
1/32	5	1.27782	0.07022
1/64	6	0.64159	0.01821
1/128	7	0.32139	0.00450

Cuadro 7.1: Orden de convergencia del error $\|u - u_h\|$ en mallas graduadas ($\mu = 0,5$) en diferentes normas para $\alpha = 0,75$ y $\beta = 0,75$, en $n = 2$.

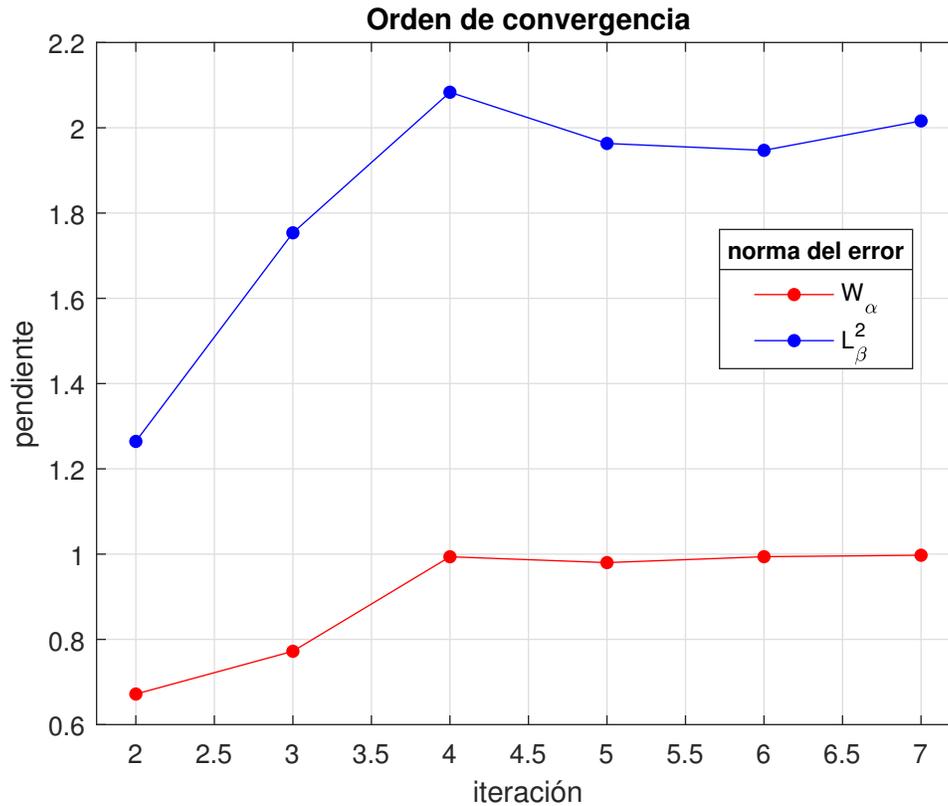


Figura 7.1: Orden de convergencia en errores en $W_\alpha(\Omega)$ y $L_\beta^2(\Omega)$ con $\alpha = 0,75$, $\beta = 0,75$ y $\mu = 0,5$.

- Ejemplo 2: $\mu = 0,4$, $\alpha = 0,5$ y $\beta = 0,3$ en dimensión $n = 2$

h	Iteración	Nodos	$W_\alpha(\Omega)$ (x10 ⁻²)	$L^2(\Omega)$ (x10 ⁻³)	$L^2_\beta(\Omega)$ (x10 ⁻³)
1/2	1	16	17.57547	23.91754	16.62240
1/4	2	56	12.67025	10.62254	7.39479
1/8	3	229	8.50572	3.60681	2.48825
1/16	4	926	4.54844	0.87039	0.60413
1/32	5	3716	2.40571	0.22024	0.15816
1/64	6	14841	1.24241	0.05512	0.04079
1/128	7	59423	0.63676	0.01361	0.01014
1/256	8	237735	0.32373	0.00338	0.00252

Cuadro 7.2: Orden de convergencia del error $\|u - u_h\|$ en mallas graduadas ($\mu = 0,4$) en diferentes normas para $\alpha = 0,5$, $\beta = 0$ y $\beta = 0,3$, en $n = 2$.

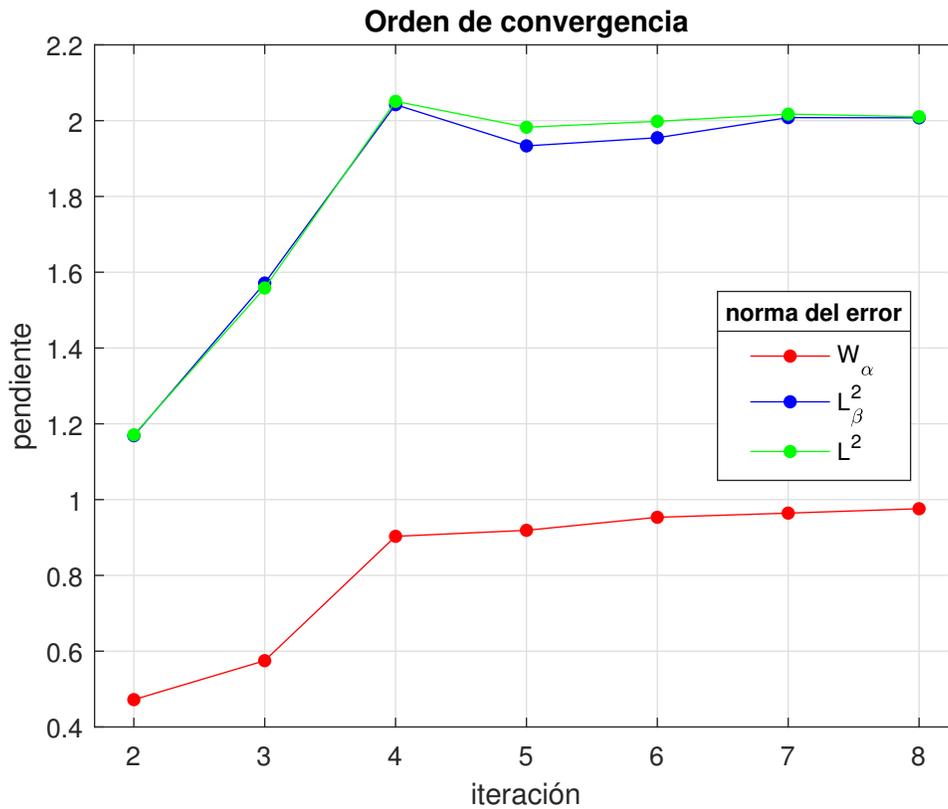


Figura 7.2: Orden de convergencia en errores en $W_\alpha(\Omega)$ y $L^2_\beta(\Omega)$ con $\alpha = 0,5$, $\beta = 0$ y $\beta = 0,3$ y $\mu = 0,4$.

- Ejemplo 3: $\mu = 0,2$, $\alpha = 0,75$ y $\beta = 0,4$ en dimensión $n = 3$

h	Potencia	Cant Nodos	$W_\alpha(\Omega)$ (x10 ⁻²)	$L^2(\Omega)$ (x10 ⁻⁴)	$L^2_\beta(\Omega)$ (x10 ⁻⁴)
2^{-3}	3	18038	5.7062	12.723	4.8973
$2^{-3,5}$	3.5	42592	4.4226	7.2441	2.647
2^{-4}	4	110594	3.2796	3.8593	1.3874
$2^{-4,5}$	4.5	298737	2.4093	2.0105	0.72028
2^{-5}	5	807040	1.7631	1.0448	0.37388

Cuadro 7.3: Orden de convergencia del error $\|u - u_h\|$ en mallas graduadas ($\mu = 0,2$) en diferentes normas para $\alpha = 0,75$, $\beta = 0$ y $\beta = 0,4$, en $n = 3$.

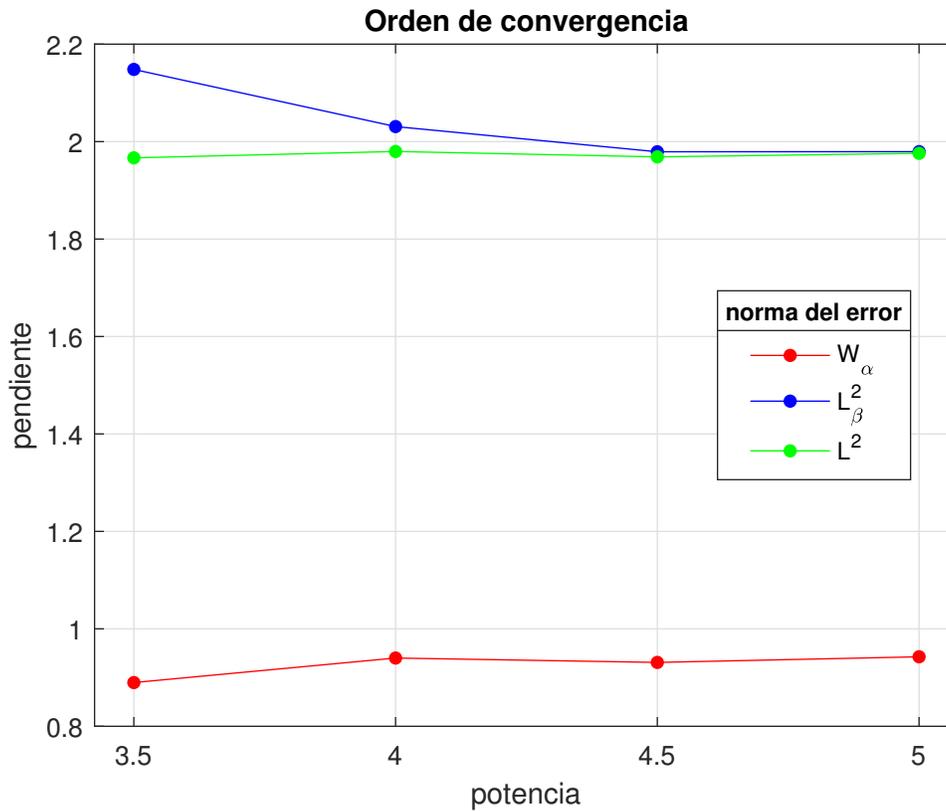


Figura 7.3: Orden de convergencia en errores en $W_\alpha(\Omega)$ y $L^2_\beta(\Omega)$ con $\alpha = 0,75$, $\beta = 0$ y $\beta = 0,4$ y $\mu = 0,2$.

Adicionalmente, en la Figura 7.4 mostramos una de las mallas utilizadas durante la simulación correspondiente a los parámetros $\mu = 0,2$ y $h = 2^{-3}$.

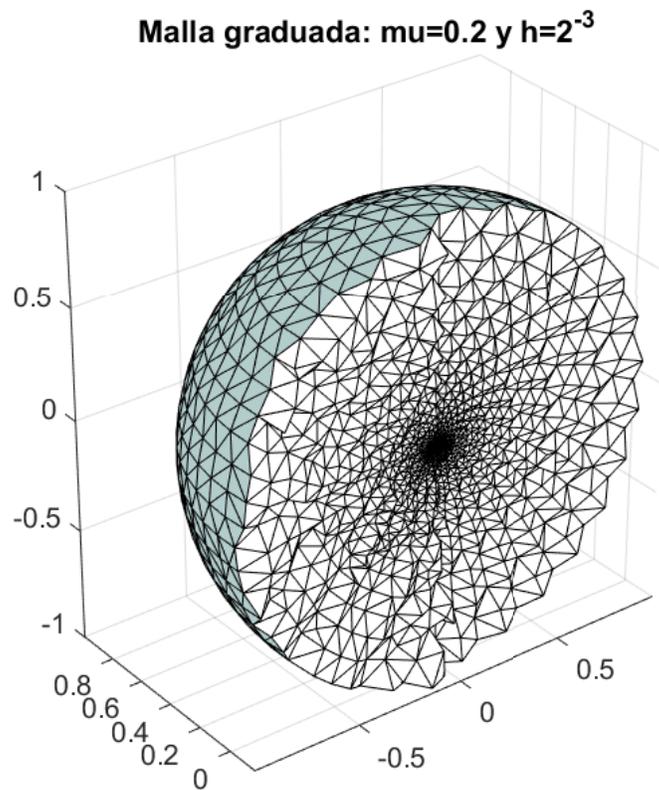


Figura 7.4: Una de las mallas utilizadas en la simulación del ejemplo 3.

Por otro lado, también se verificó que dado un valor de α fijo, el error en $W_\alpha(\Omega)$ disminuye al agrandar el parámetro de graduación μ (ver Figura 7.5).

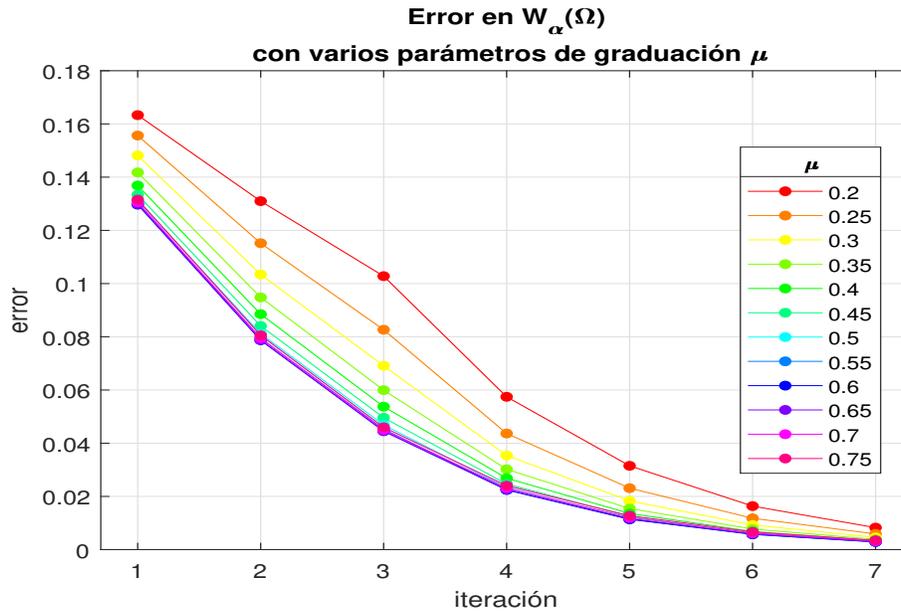


Figura 7.5: errores en $W_\alpha(\Omega)$ con $\alpha = 0,8$ para varios valores de μ .

En la Figura 7.6 se puede ver que el error en $W_\alpha(\Omega)$ disminuye al agrandar α con el parámetro de graduación de la malla μ fijo.

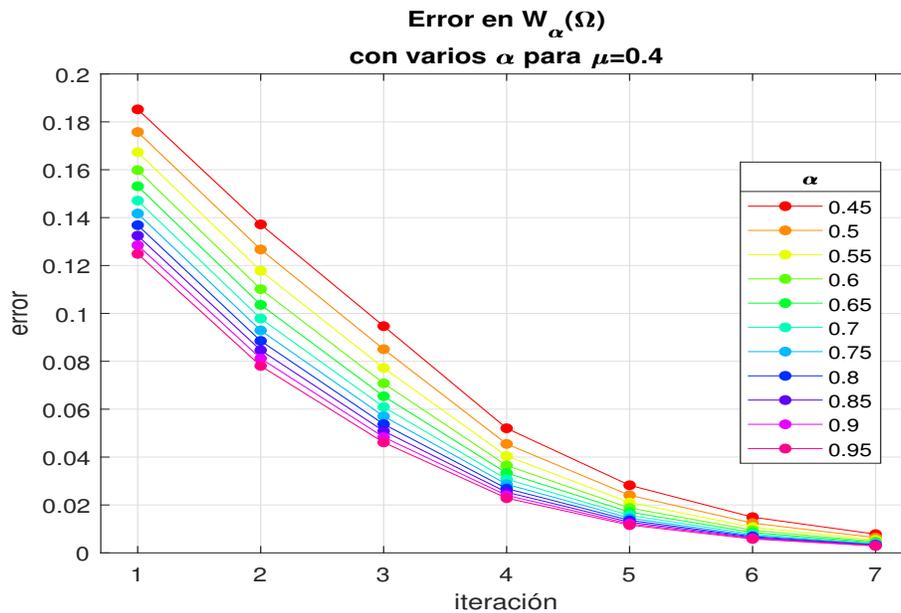


Figura 7.6: errores en $W_\alpha(\Omega)$ con $\mu = 0,4$ para varios valores de α .

En la Figura 7.7 se puede ver que el error en $L^2(\Omega)$ disminuye al agrandar μ . Pero se puede ver en la Figura 7.8 que al llegar al valor de $\mu = 0,5$ se pierde el orden de

convergencia, y llegando al peor caso donde $\mu = 1$ se puede ver en la Figura 7.9. Notar que con $\mu = 0,5$ estamos obteniendo un orden apenas deteriorado que coincide con los resultados de Apel.

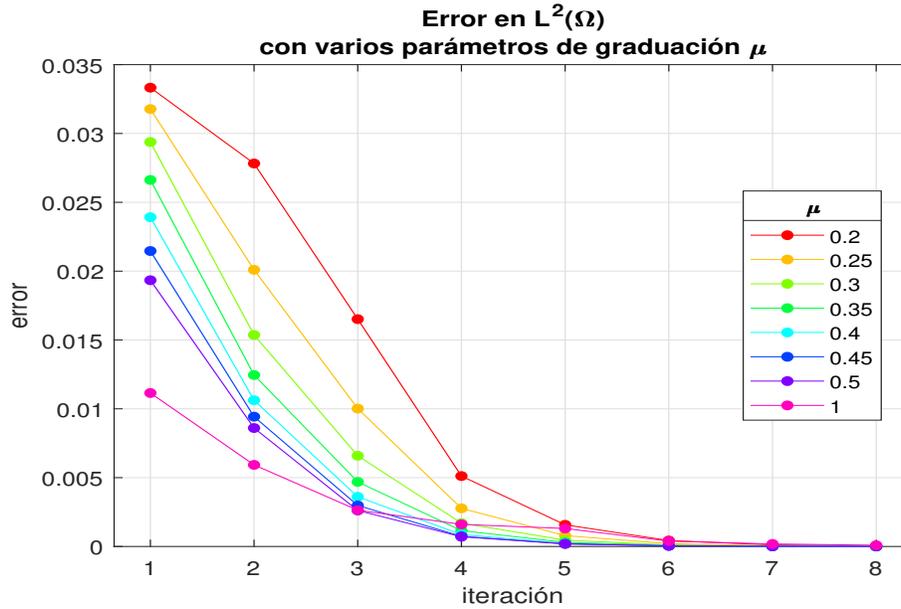


Figura 7.7: errores en $L^2(\Omega)$ con $\alpha = 0,5$ para varios valores de μ .

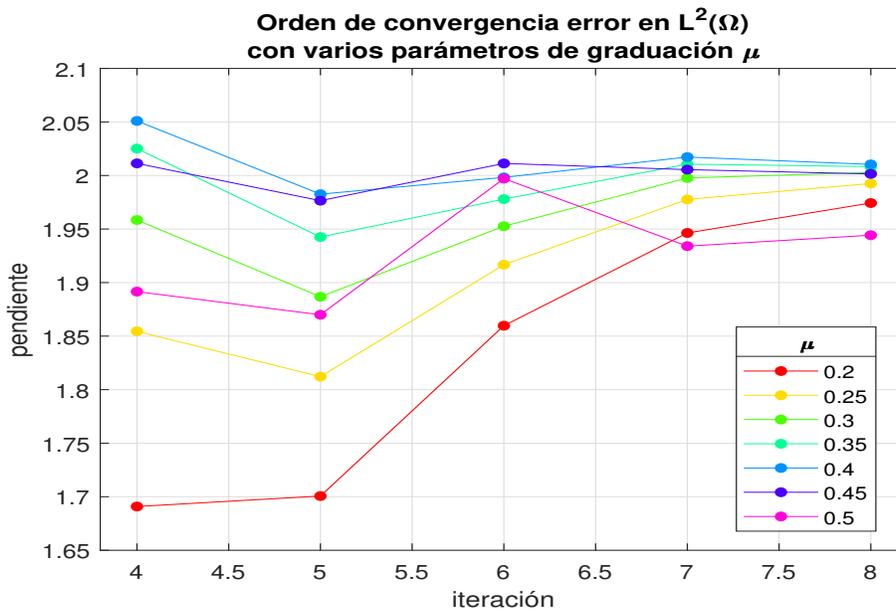


Figura 7.8: orden de convergencia en $L^2(\Omega)$ con $\alpha = 0,5$ para varios valores de μ .

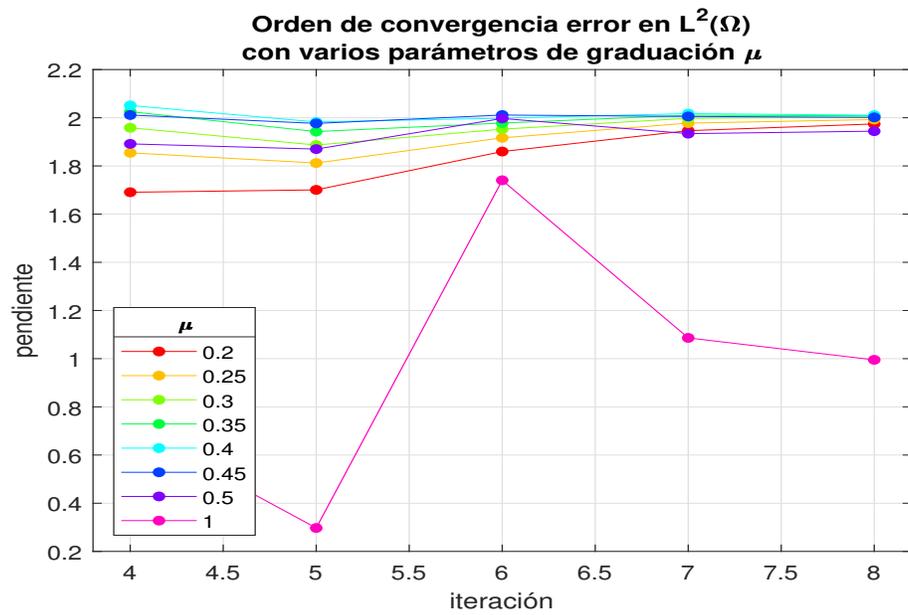


Figura 7.9: orden de convergencia en $L^2(\Omega)$ con $\alpha = 0,5$ para varios valores de μ llegando a $\mu = 1$.

Bibliografía

- [1] R. A. Adams, J. Fournier, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] J. P. Agnelli, E. M. Garau, P. Morin, *A posteriori error estimates for elliptic problems with Dirac measure terms in weighted spaces*, ESAIM, 48, 2014, pp. 157-1581.
- [3] T. Apel, O. Benedix, D. Sirch, B. Vexler, *A priori mesh grading for an elliptic problem with Dirac right-hand side*, SIAM J. Numer. Anal., 49 (3), 2011, pp. 992-1005.
- [4] R. Araya and E. Behrens and R. Rodríguez, *A posteriori error estimates for elliptic problems with Dirac delta source terms*, Numer. Math. 196, 2007, pp. 2800-2812.
- [5] I. Babuska, *Error-Bounds for Finite Element Method*, Numer. Math. 16, 1971, pp. 322-333.
- [6] M. E. Cejas, R. G. Durán, *Weighted a priori estimates for elliptic equations*.
- [7] C. D'Angelo, *Finite elements approximation of elliptic problems with Dirac measure terms in weighted spaces. Applications to one- and three-dimensional coupled problems.*, SIAM Jour. Num. Anal. 50 (1), 2012, 194-215.
- [8] I. Drelichman, R. G. Durán, *Improved Poincaré inequalities with weights*, Jour. Math. An. App. 347(1), pp. 286-293, 2008.
- [9] I. Drelichman, R. G. Durán, I. Ojea, *A weighted setting for the numerical approximation of the Poisson problem with singular sources*
- [10] R. Durán, F. López García, *Solutions of the divergence and analysis of the Stokes equation in planar Hölder- α domains*, Math. Models Methods. Appl. Sci. 20 (1), 2010, pp. 95-120
- [11] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2da Edición, AMS, 2010.
- [12] A. Kufner, B. Opic, *Hardy-type inequalities*, Pitman Research Notes in Mathematics Series vol. 219, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1990.

-
- [13] I.Ojea, *Optimal a priori error estimates in weighted Sobolev spaces for the Poisson problem with singular sources*. Artículo enviado.
- [14] L.R. Scott, *Finite Element Convergence for Singular Data*, Numer. Math. 21, 1973, 317–327.
- [15] E. Sawyer y R.L.Wheeden, *Weighted inequalities for fractional integrals on euclidean and homogeneous spaces*, American Journal of Mathematics, 114 (4), 1992, pp. 813-874.