



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

**Problemas de curvatura en geometría, topología y
teoría de grupos**

Dante Gabriel Esteban Grevino

Director: Gabriel Minian

Fecha de Presentación: abril de 2019

Introducción

En cuanto a las técnicas que se utilizan, esta es una tesis de *geometría*. Se trata de visualizar las ideas, entender el cuadro general y aplicar argumentos directos. En cuanto a los objetos que se estudian, esta es una tesis de *matemática*. Aquí no nos importa si la pregunta es formulada en un lenguaje algebraico, combinatorio, analítico, probabilístico o topológico. Es nuestra tesis que toda idea puede ser expresada en términos geométricos, empleando las construcciones y asignaciones adecuadas. Para nosotros la geometría no está en la naturaleza del problema sino en el punto de vista que se adopta al intentar resolverlo.

La teoría de espacios métricos de curvatura acotada, desarrollada por Alexandrov y la escuela rusa [Ale12, Ale57, ABN86], Cartan y Toponogov, es uno de los antecedentes fundamentales de los trabajos de Gromov y la teoría geométrica de grupos. A partir de los años 80, impulsado por los trabajos de Gromov [Gro84, Gro87], los espacios de curvatura acotada comenzaron a jugar un rol preponderante en el estudio de grupos por métodos geométricos y en el estudio de problemas de rigidez de variedades riemannianas. Un espacio métrico $CAT(\kappa)$ es un espacio geodésico (donde los puntos se pueden unir por curvas continuas que minimizan la distancia) en el cual los triángulos geodésicos cumplen ciertas desigualdades que los asemejan geoméricamente a las variedades riemannianas simplemente conexas de curvatura seccional menor o igual a κ . Los espacios métricos de curvatura acotada cumplen estas desigualdades localmente, en ellos se puede hacer geometría como en las variedades riemannianas de curvatura acotada (sin contar con la estructura diferenciable propia de las variedades). Como consecuencia de una generalización del teorema de Cartan-Hadamard, los espacios con curvatura no positiva son esféricos (generalizando lo que sucede con las variedades riemannianas de curvatura no-positiva) [BH99], esto permite por ejemplo estudiar problemas de asfericidad usando técnicas de curvatura. Los espacios de curvatura no positiva han sido utilizados también para entender problemas abiertos clásicos sobre variedades diferenciables, como la conjetura de Hopf [CD95, Che56] que afirma que el signo de la característica de Euler de una variedad riemanniana de curvatura no-positiva no depende de la variedad sino solamente de la dimensión. [Che56]

En el Capítulo 1 desarrollamos las nociones necesarias para hacer geometría clásica en espacios métricos y presentamos las familias de ejemplos más importantes donde

aplicar estas nociones. En la Sección 1.1 damos la noción fundamental de *geodésica* como curva minimizante y calculamos las geodésicas de los espacios normados $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ y $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$. Este cálculo es *original* y no fue encontrado en la literatura. Presentamos también la construcción del grafo de Cayley, que permite estudiar geoméricamente un grupo dado. En la Sección 1.2 presentamos los modelos de la geometría riemanniana, la *esfera* y los espacios *euclídeo* e *hiperbólico*, y los estudiamos desde un punto de vista métrico. Concretamente, calculamos los grupos de isometría de los espacios modelo a partir de las reflexiones respecto de hiperplanos. En la Sección 1.3 repasamos las nociones básicas de la geometría riemanniana y mostramos que, una vez superada la etapa básica, se puede estudiar las variedades riemannianas desde un punto de vista exclusivamente métrico. Concretamente, vemos que las nociones de geodésica riemanniana e isometría riemanniana son de naturaleza métrica así que admiten una definición métrica directa que no apela a la maquinaria diferencial. En la sección 1.4 presentamos la familia de los *poliedros* que se construyen a partir de celdas convexas tomadas de los espacios modelo y cuyo estudio será profundizado en el siguiente capítulo. Presentamos también la construcción del 2-complejo asociado a una presentación de un grupo y el 2-complejo de Cayley, que permiten codificar topológica y geoméricamente problemas combinatorios y algebraicos del grupo dado. En la Sección 1.5 introducimos las nociones básicas de la *geometría métrica*, abstraídas a partir de las familias de ejemplos que fueron estudiadas en las secciones previas. Damos una generalización del Teorema de Hopf-Rinow para espacios métricos, que se suma a lo hecho en la Sección 1.3 como otro resultado originalmente riemanniano que muestra su verdadera naturaleza métrica.

En el Capítulo 2 mostramos cómo codificar la noción de *curvatura acotada* en términos métricos y estudiamos sus manifestaciones en las familias de ejemplos presentadas en el capítulo previo. En la Sección 2.1 damos la definición de curvatura acotada vía la *desigualdad* $CAT(\kappa)$, que básicamente consiste en *comparar* los triángulos geodésicos del espacio dado con los de los espacios modelo, y vemos las primeras consecuencias que derivan de ella, especialmente propiedades de *convexidad*. En la Sección 2.2 damos una generalización del Teorema de Cartan-Hadamard para espacios métricos, sumando otro resultado clásico que muestra su naturaleza métrica. En la Sección 2.3 retomamos el estudio de las variedades riemannianas y relacionamos el enfoque clásico sobre la curvatura con el nuevo. Concretamente, damos la demostración de que la nueva noción de curvatura acotada coincide con la clásica en el contexto riemanniano. En la Sección 2.4 retomamos el estudio de los poliedros e interpretamos qué significa la noción de curvatura en este contexto. Concretamente, vemos que se puede reducir a una condición combinatoria enunciada en el Teorema de Gromov. Además vemos cómo una noción de curvatura singular emerge naturalmente al estudiar la propiedad de extensión de geodésicas en un poliedro.

La teoría geométrica de grupos surge como tal a partir de la década del 80 con los trabajos de Gromov sobre grupos hiperbólicos [Gro87], pero sus orígenes se pueden

remontar a principios del siglo XX con la teoría combinatoria de grupos y los trabajos de Dehn, Reidemeister, Schreier, Nielsen y van Kampen [LS01], quienes introdujeron métodos topológicos y geométricos para estudiar propiedades de grupos discretos a partir de sus presentaciones. Entre los problemas más famosos que surgen en esa época (principios del siglo XX) se encuentran el *word-problem* y los problemas del isomorfismo y de la conjugación. Son de esa etapa los métodos de Nielsen para estudiar subgrupos de grupos libres, los movimientos de Reidemeister, los diagramas de van Kampen y la noción de norma de una palabra (que induce la métrica de la palabra) sobre un grupo finitamente generado.

La relación más clara entre presentaciones de grupos y topología, que surge también en la primera mitad del siglo XX, viene dada por el grupo fundamental de los complejos celulares y el teorema de van Kampen: a un CW-complejo de dimensión 2 finito se le asocia una presentación (de su grupo fundamental) eligiendo un árbol maximal de su 1-esqueleto y tomando a las 1-celdas que no forman parte del árbol como generadores y a las palabras que determinan las 2-celdas como relaciones. Recíprocamente, a una presentación finita se le asocia un 2-complejo con una única 0-celda, con una 1-celda por cada generador y una 2-celda por cada relación. Esto determina una correspondencia entre presentaciones finitas y 2-complejos finitos (módulo transformaciones de Nielsen extendidas y módulo homotopía) y permite analizar problemas algebraicos de los grupos utilizando la topología de los 2-complejos y vice-versa [HAMS93]. Pero, a su vez, si comenzamos con una presentación finita de un grupo Γ , el 2-complejo asociado a la presentación puede ser embebido (mediante una función lineal a trozos) en \mathbb{R}^n para todo $n \geq 4$. Para $n \geq 5$, el borde de un entorno regular de ese embedding resulta una variedad de dimensión $n \geq 4$ que tiene como grupo fundamental al grupo Γ . Por lo tanto, para todo grupo finitamente presentado Γ y para todo $n \geq 4$, existe una variedad cerrada M de dimensión n tal que $\pi_1(M) = \Gamma$ [Gro87, Bri02].

En el Capítulo 3 estudiamos la geometría de los grupos discretos a partir de la manera en la que actúan sobre los espacios. En la Sección 3.1 repasamos las nociones básicas sobre acciones de grupos, estudiamos cómo obtener una presentación de un grupo a partir de una acción y definimos las nuevas nociones de *acción geométrica* y *quasi-isometría*. La primera describe las condiciones bajo las cuáles la acción es informativa respecto de la geometría del grupo dado. La segunda nos da un tipo de equivalencia entre espacios que preserva sus propiedades *asintóticas*. Damos el Lema de Švarc-Milnor, que relaciona las nuevas nociones y constituye el resultado fundamental de la *teoría geométrica de grupos*. Analizamos algunas propiedades básicas de los grupos libres a partir de sus grafos de Cayley vistos con este nuevo enfoque. En la Sección 3.2 presentamos varios invariantes por quasi-isometría, especialmente entre los grupos finitamente generados, y algunas de sus aplicaciones. Remarcablemente, uno de ellos es la propiedad de que un grupo dado sea *finitamente presentado*, revelando una naturaleza geométrica inesperada. Presentaremos también los invariantes del *crecimiento* y la *hiperbolicidad*. En la Sección 3.3 estudiamos la geometría del *word-problem* y probamos el *Filling The-*

orem, que establece una equivalencia entre este problema y el de rellenado de lazos en variedades. La conexión fundamental entre ambos problemas está dada por *diagramas de van Kampen*, que son objetos híbridos combinatorio-geométricos que permiten reinterpretar la resolución del *word-problem* en términos de rellenado de lazos en el 2-complejo de Cayley. Este tipo de problemas de rellenado, conocidos folklóricamente como *el problema de Plateau*, constiuyen una de las motivaciones esenciales de la *teoría geométrica de la medida*; de la cual tomamos la medida de Hausdorff 2-dimensional, una noción de área para espacios métricos arbitrarios. Destacamos que estamos trabajando *actualmente* en la generalización del *Filling Theorem* para espacios $CAT(\kappa)$ y empleando rellenos de género arbitrario y buscamos aplicaciones de estas generalizaciones.

Otro antecedente fundamental de la teoría geométrica de grupos es el Teorema de rigidez de Mostow de la década del 60 [Mos68]. Este resultado afirma que si M y N son variedades riemannianas cerradas de dimensión mayor o igual a 3 con curvatura constante -1 y sus grupos fundamentales son isomorfos, entonces M y N son isométricas. La prueba de este teorema es un antecedente de la noción de quasi-isometría y del borde de Gromov de un grupo hiperbólico. Además evidencia la relación estrecha entre la geometría de las variedades y las propiedades de los grupos que actúan por isometrías (en este caso, el grupo que actúa es el grupo fundamental, que actúa geoméricamente sobre los revestimientos universales). La noción de rigidez refiere a que un objeto presenta la propiedad de que todo otro objeto que sea equivalente a él en un sentido relativamente más débil en el contexto general es en realidad equivalente en un sentido relativamente más fuerte en el contexto general.

En el Capítulo 4 estudiamos algunos resultados de punto fijo en acciones de grupos sobre espacios $CAT(\kappa)$. Generalizando algunas técnicas que ya se conocen para el caso κ nulo al caso arbitrario. Mencionamos algunas de las aplicaciones existentes en el caso κ nulo en cuya generalización para κ arbitrario estamos trabajando actualmente.

Índice

1	Espacios métricos geodésicos	1
1.1	Nociones básicas	2
1.2	Los espacios modelo	11
1.3	Variedades	19
1.4	Poliedros	30
1.5	Geometría métrica	43
2	Desigualdad CAT(κ)	49
2.1	Nociones básicas	49
2.2	Local-global	55
2.3	Variedades	61
2.4	Poliedros	64
3	Acciones de grupos	77
3.1	Nociones básicas	78
3.2	Invariantes quasi-métricos	88
3.3	El <i>word-problem</i>	97
4	Puntos fijos de acciones de grupos	107
4.1	Una versión homológica del teorema de Helly y criterio de Farb	107
4.2	Aplicaciones y trabajo futuro	112
	Referencias	115

Capítulo 1

Espacios métricos geodésicos

En este capítulo desarrollamos las nociones necesarias para hacer geometría clásica en espacios métricos y presentamos las familias de ejemplos más importantes donde aplicar estas nociones, siguiendo mayormente [BH99] y [BBI01].

En la Sección 1.1 damos la noción fundamental de *geodésica* como curva minimizante y calculamos las geodésicas de los espacios normados $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ y $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$. Este cálculo es *original* y no fue encontrado en la literatura. Presentamos también la construcción del grafo de Cayley, que permite estudiar geoméricamente un grupo dado. En la Sección 1.2 presentamos los modelos de la geometría riemanniana, la *esfera* y los espacios *euclídeo* e *hiperbólico*, y los estudiamos desde un punto de vista métrico. Concretamente, calculamos los grupos de isometría de los espacios modelo a partir de las reflexiones respecto de hiperplanos. En la Sección 1.3 repasamos las nociones básicas de la geometría riemanniana y mostramos que, una vez superada la etapa básica, se puede estudiar las variedades riemannianas desde un punto de vista exclusivamente métrico. Concretamente, vemos que las nociones de geodésica riemanniana e isometría riemanniana son de naturaleza métrica así que admiten una definición métrica directa que no apela a la maquinaria diferencial. En la sección 1.4 presentamos la familia de los *poliedros* que se construyen a partir de celdas convexas tomadas de los espacios modelo y cuyo estudio será profundizado en el siguiente capítulo. Presentamos también la construcción del 2-complejo asociado a una presentación de un grupo y el 2-complejo de Cayley, que permiten codificar topológica y geoméricamente problemas combinatorios y algebraicos del grupo dado. En la Sección 1.5 introducimos las nociones básicas de la *geometría métrica*, abstraídas a partir de las familias de ejemplos que fueron estudiadas en las secciones previas. Damos una generalización del Teorema de Hopf-Rinow para espacios métricos, que se suma a lo hecho en la Sección 1.3 como otro resultado originalmente riemanniano que muestra su verdadera naturaleza métrica.

1.1 Nociones básicas

Sea X un espacio métrico con distancia d y sean x e y dos puntos en X . Una *geodésica* de x a y es un embedding isométrico $c : [0, L] \rightarrow X$ tal que $c(0) = x$ y $c(L) = y$. En tales circunstancias, L debe ser igual a la distancia $d(x, y)$. Decimos que tal c *emana* de x .

Un *segmento geodésico* es la imagen de una geodésica. Un segmento geodésico consiste en solamente un punto si y solo si es la imagen de una geodésica constante. En otro caso, hay exactamente dos geodésicas distintas con el mismo segmento geodésico como imagen.

Una *geodésica local* es una isometría local $c : I \rightarrow X$, donde I es un intervalo no vacío de la recta real. Notar que nuestra definición de geodésica es más restrictiva que la usual en geometría diferencial. Las geodésicas en geometría diferencial son geodésicas locales de acuerdo a nuestras definiciones. En general, una geodésica local no necesariamente es una geodésica. Por ejemplo, si en el círculo S^1 damos más de media vuelta a rapidez constante tenemos una geodésica local que no es una geodésica. Intuitivamente, una de las propiedades de nuestras geodésicas es que siempre se alejan del punto del que emanan a medida que las recorremos. Nuestra definición de geodésica es de naturaleza *global*.

Las nociones de líneas y rayos para espacios métricos son las siguientes. Una *línea geodésica* es un embedding isométrico $\mathbb{R} \rightarrow X$ y un *rayo geodésico* es un embedding isométrico $[0, \infty) \rightarrow X$. Geométricamente, un rayo nos da una manera de aproximarse al infinito en X y una línea geodésica conecta dos puntos diferentes en el infinito a través de X . Notar que si X es acotado entonces no hay líneas geodésicas ni rayos geodésicos en X .

La noción de geodésica es geoméricamente correcta, pero para manipular analíticamente geodésicas de longitud posiblemente diferente necesitamos normalizarlas y esta situación motiva la siguiente definición. Una *geodésica a rapidez constante* es una función $c : I \rightarrow X$, donde de nuevo I es un intervalo no vacío de la recta real, tal que existe un número real positivo λ que satisface $d(c(t), c(s)) = \lambda|t - s|$ para cualesquiera t y s en I . En tales circunstancias, también decimos que c parametriza su imagen α proporcionalmente a la longitud de arco. Así que si tenemos una geodésica a rapidez constante e I es compacto podemos reparametrizarla linealmente para obtener una geodésica. Y si tenemos una sucesión de geodésicas podemos decir si la sucesión converge uniformemente después de normalizarlas.

Definición 1.1. Sea X un espacio métrico, C un subespacio de X y r un número real positivo. Decimos que X es

1. un *espacio geodésico* o, más brevemente, geodésico si todo par de puntos en X puede ser unido mediante un segmento geodésico en X . Decimos que X es *únivocamente geodésico* si además todo tal segmento es único.

2. r -geodésico si todo par de puntos en X a distancia menor que r puede ser unido mediante un segmento geodésico. Decimos que X es r -unívocamente geodésico si además todo tal segmento es único.

Decimos que C es

1. un *subespacio convexo* o, más brevemente e imprecisamente, convexo si todo par de puntos en C puede ser unido mediante un segmento geodésico en X y todo tal segmento geodésico cae en C . Si esta propiedad vale pero con la condición adicional de que el par de puntos esté a distancia menor que r , decimos que C es un *subespacio r -convexo*.

Notar que un segmento geodésico α , como subespacio de X , no necesariamente es convexo excepto en el caso en que X sea unívocamente geodésico. Más generalmente, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.2. *Sean X un espacio métrico unívocamente geodésico y C un subespacio de X . Entonces, C es geodésico si y solo si es un subespacio convexo.*

Ejemplo 1.3. Si tomamos $X = \mathbb{E}^n$, el espacio euclideo n -dimensional, esto es, \mathbb{R}^n con la métrica euclídea usual, estamos en las condiciones de la proposición previa. Un subespacio C de \mathbb{E}^n es un subespacio convexo si y solo si es convexo en el sentido usual y si y solo si es geodésico.

Notar también que un espacio métrico r -unívocamente geodésico X , para algún número real positivo r , puede ser geodésico pero no necesariamente unívocamente geodésico. Por ejemplo, una esfera S^n , cualquiera sea la dimensión n , está en esta situación.

La siguiente proposición, junto con su demostración, nos da una técnica para construir geodésicas. Será aplicada en el Ejemplo 1.6.

Proposición 1.4. *Sea X un espacio métrico completo. Si para cada par de puntos x e y en X existe un punto z en X tal que $d(x, z) = d(z, y) = \frac{1}{2}d(x, y)$ entonces X es geodésico. Si todo tal z existe bajo la hipótesis adicional de que los puntos x e y estén a distancia menor que r , entonces X es r -geodésico.*

Demostración. La existencia de puntos medios nos permite definir una geodésica a rapidez constante sobre los números diádicos inductivamente. La completitud, junto con la densidad de los números diádicos, nos permite extender la definición a todo el intervalo. □

Notar que, en la proposición anterior, los puntos medios no necesariamente son únicos y, en consecuencia, el espacio no necesariamente es unívocamente geodésico. De hecho, dados dos puntos en un tal espacio, existe exactamente un segmento geodésico

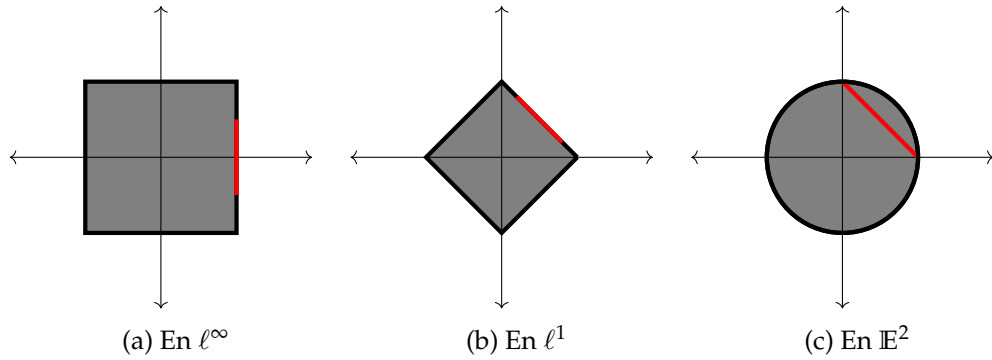


Figura 1.1: Forma de la bola y esfera unitarias.

que los une por cada elección de puntos medios hecha en el proceso inductivo de definición de la geodésica sobre los números diádicos. Por ejemplo, dados p y $-p$, puntos opuestos en el círculo S^1 , tenemos dos opciones para elegir un punto medio entre ellos. En los pasos subsiguientes, tenemos solamente una elección posible de puntos medios. Como consecuencia, existen exactamente dos segmentos geodésicos que unen p y $-p$.

Proposición 1.5. *Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces V es geodésico. V es unívocamente geodésico si y solo si la bola cerrada $B_1[0]$ es estrictamente convexa, esto es, si para todo par de vectores unitarios distintos x e y en V y todo número t en $(0, 1)$ tenemos que $\|tx + (1-t)y\| \leq 1$.*

Demostración. Dados x e y en V , tenemos que $[x, y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\}$ es un segmento geodésico con x e y como extremos. Para probar el resto de la proposición, primero se ve que V es unívocamente geodésico si y solo si cada vez que tenemos tres vectores x , y y z en V tales que $d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$ entonces tenemos que z está en $[x, y]$. A continuación, se ve que esta condición es equivalente a que la bola sea estrictamente convexa. \square

Ejemplo 1.6. Sea n un número natural mayor o igual a 2. A partir del ejercicio [BH99, Exercise I 1.8], propuesto originalmente para $n = 2$, hemos resuelto el caso general $n \geq 2$ obteniendo las Proposiciones 1.7, 1.8 y 1.10. No hemos encontrado estos resultados en la literatura.

Definamos los espacios normados $\ell^1(n) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ y $\ell^\infty(n) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Estos espacios no son unívocamente geodésicos porque sus bolas cerradas no son estrictamente convexas, como se muestra en la Figura 1.1 en el caso bidimensional. Por el contrario, el espacio euclídeo $\ell^2(n) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) = \mathbb{E}^n$ es unívocamente geodésico.

Vamos a calcular las geodésicas en los dos primeros ejemplos, analizando la forma que tienen las esferas en ambos espacios. Los razonamientos geométricos que hagamos durante este cálculo son todos de verificación formal inmediata así que frecuentemente omitiremos esta justificación. El objetivo de este ejemplo es ayudarnos a adoptar un

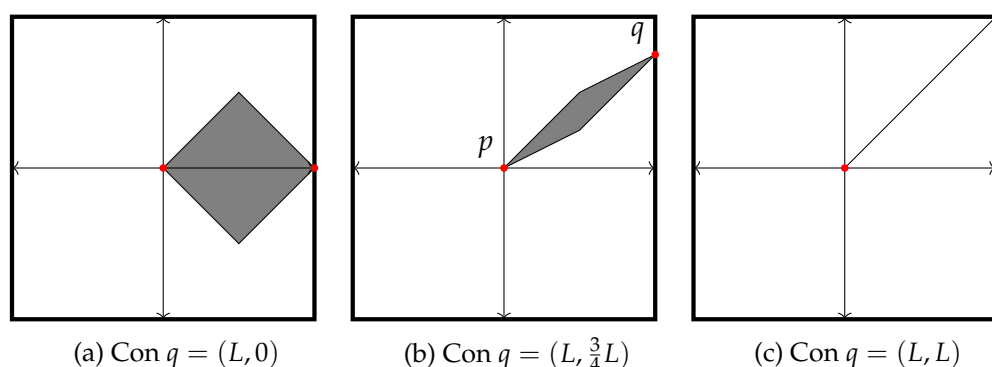


Figura 1.2: Región cubierta por los segmentos geodésicos entre p y q en ℓ^∞ .

punto de vista geométrico para analizar problemas. Como es usual, buena parte de adoptar un punto de vista adecuado consiste en incorporar el *lenguaje* necesario para poder expresar las ideas que sean clave para resolver el problema.

Comencemos con el caso $n = 2$, donde es más sencillo visualizar las ideas geométricas, y llamemos $\ell^\infty = \ell^\infty(2)$. Sean p y q puntos (distintos si eso ayuda a visualizar las ideas) en ℓ^∞ y sea $L = d(p, q)$. Vamos a aprovechar las simetrías de nuestro espacio para facilitar la cuenta. En primer lugar, estamos en un espacio normado y allí la métrica es invariante por traslaciones, así que podemos suponer que p es el origen de coordenadas. En segundo lugar, las isometrías $\varphi : (x, y) \in \ell^\infty \mapsto (-x, y) \in \ell^\infty$ y $\psi : (x, y) \in \ell^\infty \mapsto (x, -y) \in \ell^\infty$ nos permiten suponer que $q = (q_1, q_2)$ tiene ambas coordenadas no-negativas. Por último, la isometría que consiste en la reflexión respecto de la diagonal principal, a saber $\xi : (x, y) \in \ell^\infty \mapsto (y, x) \in \ell^\infty$, nos permite suponer que la coordenada que realiza la distancia es la primera coordenada, esto es $d(p, q) = \max\{|q_1|, |q_2|\} = q_1 = L$. En la Figura 1.2 vemos sombreado el conjunto de puntos r tales que $d(p, r) + d(r, q) = d(p, q)$. Toda geodésica entre p y q debe caer dentro de este conjunto sombreado.

Dado que para construir una geodésica entre p y q debemos elegir puntos medios de manera inductiva según nos indica la Proposición 1.4, una manera intuitiva de visualizar esta región, en este ejemplo y en otros, es aplicar varios pasos del siguiente proceso inductivo: en el primer paso, el conjunto de puntos medios entre p y q , que se consigue como la intersección de la esfera de radio $L/2$ y centro p y la esfera de radio $L/2$ y centro q . En el segundo paso, obtener, intersecando las esferas correspondientes, el conjunto de puntos a distancia $L/4$ de p y a distancia $3L/4$ de q y, similarmente, el conjunto de puntos a distancia $3L/4$ de p y a distancia $L/4$ de q . Y así siguiendo.

Nos preguntamos si todo camino entre p y q que caiga en la región sombreada es una geodésica o si existe alguna restricción. Por ejemplo, en el caso particular en el que $q = (L, L)$, o más generalmente el caso en que todas las coordenadas realizan la

distancia, existe una única geodésica de p a q . (Ver Figura 1.2c.) Similarmente, en el caso en que $q = (L, 0)$, hay una única geodésica entre p y q que pasa por $(\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$.

Una primera consecuencia del cálculo de la región sombreada es que la primera coordenada de la geodésica debe ser $\sigma_1(t) = t$ para todo t en $[0, L]$. Entonces tenemos que

$$|\sigma_1(t_2) - \sigma_1(t_1)| = |t_2 - t_1|,$$

para cualesquiera t_1 y t_2 en $[0, L]$. Ahora, la condición de que sea geodésica es

$$\max\{|\sigma_1(t_2) - \sigma_1(t_1)|, |\sigma_2(t_2) - \sigma_2(t_1)|\} = |t_2 - t_1|,$$

y por lo tanto resulta equivalente a que

$$|\sigma_2(t_2) - \sigma_2(t_1)| \leq |t_2 - t_1|,$$

para cualesquiera t_1 y t_2 en $[0, L]$. En otras palabras, la segunda coordenada de la geodésica debe ser una función 1-Lipschitz. En conclusión, hemos probado que, bajo nuestras suposiciones sobre p y q , un camino $\sigma : t \in [0, L] \mapsto (\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \in \ell^\infty$ entre p y q es una geodésica si y solo si $\sigma_1(t) = t$ para todo t y σ_2 es 1-Lipschitz. Hagamos dos observaciones. En primer lugar, observemos que la condición sobre la primera coordenada es artificial y que en realidad es equivalente a la condición impuesta sobre la segunda coordenada: La única función 1-Lipschitz $\sigma_1 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\sigma_1(0) = 0 = p_1$ y $\sigma_1(L) = L = q_1$ es precisamente la inclusión. En segundo lugar, observemos que la propiedad de que las coordenadas de un camino sean 1-Lipschitz es invariante por traslaciones y por las isometrías ϕ , ψ y ξ definidas más arriba. Así que podemos deshacer las suposiciones adicionales que hicimos sobre p y q . Finalmente, el mismo razonamiento que el hecho para ℓ^∞ vale *mutatis mutandis* para $\ell^\infty(n)$ cualquiera sea $n \geq 2$. Hemos obteniendo el resultado final siguiente.

Proposición 1.7. *Sea n un número natural mayor o igual a 2. Sean p y q puntos en $\ell^\infty(n)$ y sea $L = d(p, q)$. Entonces, un camino $\sigma : [0, L] \rightarrow \ell^\infty(n)$ entre p y q es una geodésica si y solo si sus funciones coordenadas son 1-Lipschitz.*

Un aspecto importante de este ejemplo es que muestra que el lenguaje geométrico que venimos desarrollando es suficientemente poderoso como para poder codificar la propiedad de que una función sea 1-Lipschitz, que es una propiedad de *regularidad* así que eminentemente analítica, en términos *geométricos* como la propiedad de ser una geodésica. Notar que se puede rescalar la métrica en un factor $1/\lambda$ para codificar las funciones que sean λ -Lipschitz.

Calculemos las geodésicas de $\ell^1(n)$. De nuevo, empecemos por el caso $n = 2$ y llamemos $\ell^1 = \ell^1(2)$. Observando nuevamente la forma que tienen las bolas y esferas en ℓ^1 y ℓ^∞ , se puede intuir que en realidad ambos espacios son isométricos vía una isometría que, salvo un factor escalar, es una rotación. Siguiendo esta idea se llega a que

$$\Phi : (x, y) \in \ell^1 \mapsto (x + y, x - y) \in \ell^\infty,$$

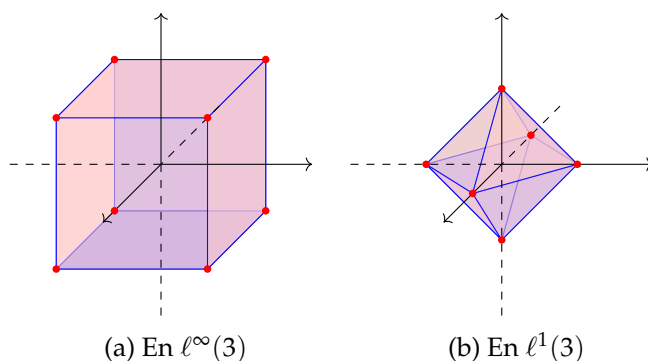


Figura 1.3: Forma y número de vértices de la bola unitaria.

es tal isometría. En efecto, dividiendo en casos, según x e y tengan igual o distinto signo, vemos que

$$\max\{|x + y|, |x - y|\} = \begin{cases} |x + y|, & \text{si } xy \geq 0 \\ |x - y|, & \text{si } xy \leq 0 \end{cases} = |x| + |y|$$

Luego, el cálculo de las geodésicas para ℓ^∞ junto con la aplicación de la isometría Φ prueba la siguiente proposición.

Proposición 1.8. Sean p y q puntos en ℓ^1 y sea $L = d(p, q)$. Entonces, un camino $\sigma : [0, L] \rightarrow \ell^1$ entre p y q es una geodésica si y solo si las funciones $(\sigma_1 + \sigma_2)$ y $(\sigma_1 - \sigma_2)$ son 1-Lipschitz.

Intentemos generalizar lo hecho para el caso $n = 2$. Sea $n \geq 3$ e intentemos decidir si $\ell^1(n)$ y $\ell^\infty(n)$ son isométricos o no. Siguiendo el mismo método con el que empezamos a analizar este ejemplo, comencemos con el caso $n = 3$, que es donde podemos visualizar las ideas geométricas y comparemos las bolas de los dos espacios. (Ver Figura 1.3.) Tenemos dos posibles caminos, o bien observamos que las bolas tienen una forma similar e intuimos a partir de ello cuál debería ser la isometría en caso de existir o bien identificamos algún invariante métrico que las distinga, probando así que no son isométricas. Observemos que la bola en $\ell^\infty(3)$ es un cubo lo cual nos lleva a preguntarnos si la bola en $\ell^1(3)$ también lo es. Observando detenidamente la Figura 1.3 vemos que la respuesta es negativa: Un cubo tiene 3 caras incidentes en cada vértice mientras que en la bola de $\ell^1(3)$ tenemos 4 caras incidentes por vértice; en un cubo tenemos un total de 8 vértices y en la bola de $\ell^1(3)$ tenemos un total de 6 vértices. Así que la bola de $\ell^1(3)$ no tiene forma de cubo y ahora cabe preguntarse si las propiedades que la distinguen son realmente *invariantes métricas*, esto es, invariantes por isometrías.

Tratemos de usar la cantidad de vértices como invariante. Para ello debemos definir *vértice* en términos métricos lo cual no parece tarea sencilla. Sin embargo, tenemos una definición *lineal* de *punto extremal* que coincide en nuestro caso con los vértices.

Definición 1.9. Sean X un espacio de Banach y $C \subseteq X$ un subespacio compacto y convexo, en el sentido usual. Un punto v en C es *extremal en C* si cada vez que tomamos dos puntos x e y en C que sean distintos de v entonces v no está en el segmento lineal $[x, y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0, 1]\}$ que une x e y .

En principio no tenemos por qué suponer que la propiedad de ser *extremal* sea invariante por isometrías (entre espacios de Banach, para que tenga sentido la pregunta) puesto que las isometrías en principio mandan geodésicas en geodésicas y, en particular, segmentos lineales en geodésicas. Lo que sí sabemos es que la propiedad de ser *extremal* es invariante por isomorfismos afines, estos es, isomorfismos lineales salvo traslación. Así que lo que necesitaríamos es que toda isometría entre espacios normados (sobre el cuerpo \mathbb{R}) sea un isomorfismo afín. Esto es cierto y es precisamente lo que afirma el Teorema de Mazur-Ulam [MU32]. Así que $\ell^1(3)$ y $\ell^\infty(3)$ no son isométricos y un invariante que los distingue es el número de vértices de sus bolas, que es 6 y 8, respectivamente.

Sea $n \geq 3$. En $\ell^1(n)$, las bolas tienen $2n$ vértices puesto que si cortamos la bola unitaria con el hiperplano $\{x_n = 0\}$, obtenemos la bola unitaria de $\ell^1(n-1)$, que inductivamente tiene $2(n-1)$ vértices, y a partir de la cual obtenemos la bola unitaria de $\ell^1(n)$ como su suspensión, esto es, como un cono con vértice $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ pegado sobre su base a un cono con vértice $-e_n$. Por otro lado, las bolas en $\ell^\infty(n)$ son hipercubos y tienen 2^n vértices. Así que los espacios $\ell^1(n)$ y $\ell^\infty(n)$ no son isométricos y un invariante que los distingue es el número de vértices de sus bolas, que es $2n$ y 2^n , respectivamente.

Esto nos dice que tenemos que generalizar lo hecho para el caso $n = 2$ de otra manera. Podemos intentar generalizar la isometría Φ , definida más arriba, no como una isometría sino como un embedding isométrico. Esta idea funciona. Por ejemplo, para $n = 3$ podemos definir el siguiente embedding isométrico

$$\Psi : (x, y, z) \in \ell^1(3) \mapsto (x + y + z, x + y - z, x - y + z, x - y - z) \in \ell^\infty(4)$$

En general, hacemos lo siguiente. Sea $S = \{1, -1\}^n$ el conjunto de funciones $\mathbb{I}_n \rightarrow \{1, -1\}$. Definimos en S la relación de equivalencia \sim tal que para toda h en S su clase de equivalencia es $\{h, -h\}$. Sean $h_1, \dots, h_{2^{n-1}}$ en S tales que el conjunto formado por sus clases de equivalencias es todo el cociente S / \sim . Definimos un *embedding isométrico* vía

$$(x_1, \dots, x_n) \in \ell^1(n) \mapsto \left(\sum_{j=1}^n h_1(j)x_j, \dots, \sum_{j=1}^n h_{2^{n-1}}(j)x_j \right) \in \ell^\infty(2^{n-1})$$

Lo dicho hasta aquí prueba la siguiente generalización de la Proposición 1.8.

Proposición 1.10. Sea $n \geq 2$. Sean p y q puntos en $\ell^1(n)$ y sea $L = d(p, q)$. Entonces, un camino $\sigma : [0, L] \rightarrow \ell^1(n)$ entre p y q es una geodésica si y solo si para toda función $h : \mathbb{I}_n \rightarrow \{1, -1\}$ se tiene que la función $\sum_{j=1}^n h(j)\sigma_j$ es 1-Lipschitz.

Esto concluye con el Ejemplo 1.6.

Continuemos con algunas definiciones básicas. Un *camino* en un espacio métrico X es una función continua $c : [a, b] \rightarrow X$. Dados dos caminos $c_i : [a_i, b_i] \rightarrow X$, con i en $\{1, 2\}$, tales que $c_1(b_1) = c_2(a_2)$ definimos su *concatenación* como el camino que recorre primero c_1 y después c_2 según la fórmula

$$c_1 * c_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \rightarrow X$$

$$t \mapsto \begin{cases} c_1(t) & \text{si } t \in [a_1, b_1] \\ c_2(t + a_2 - b_1) & \text{si no.} \end{cases}$$

La operación de concatenación de caminos resulta ser asociativa y esto nos permite definir inductivamente la concatenación de un número finito de caminos c_1, \dots, c_n como

$$c_1 * \dots * c_n := (c_1 * \dots * c_{n-1}) * c_n,$$

con la libertad de suprimir paréntesis. Dado un camino $c : [a, b] \rightarrow X$ definimos su *longitud* como el número en $[0, +\infty]$ dado por

$$L_d(c) := \sup_{a=t_0 < \dots < t_n=b} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})) \right\},$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones del intervalo $[a, b]$. Si la longitud de c resulta ser finita, decimos que c es *rectificable*.

En ocasiones notamos por L a la longitud dejando la dependencia respecto de la métrica d implícita. Para nosotros, la única situación importante donde puede traer lugar a confusión está señalada en la Observación 1.62.

La siguiente proposición reúne las propiedades geométricas básicas de las longitudes de caminos, reparametrizaciones y concatenación. La prueba es directa y por lo tanto la omitimos.

Proposición 1.11. Sean X un espacio métrico y $c : [a, b] \rightarrow X$ un camino en X .

1. La longitud de un camino es siempre mayor o igual que la distancia entre sus puntos extremos. La longitud de un camino es nula si y solo si el camino es constante.
2. *Invariancia por reparametrización:* Si $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ es una función monótona y sobreyectiva entonces c y $c \circ \phi$ tienen la misma longitud. Notar que, como caso particular, obtenemos que un camino y su camino reverso tienen la misma longitud.
3. *Aditividad:* La longitud de una concatenación de dos caminos es igual a la suma de las longitudes de los concatenandos.
4. El camino reverso $\bar{c} : [a, b] \rightarrow X$ dado por $\bar{c}(t) = c(b + a - t)$ tiene la misma longitud que c .

5. Si c es rectificable, la función $\lambda : [a, b] \rightarrow [0, L(c)]$ dada por $\lambda(t) = L(c|_{[a,t]})$ es continua, monótona creciente y sobreyectiva.
6. Existe un único camino $\tilde{c} : [0, L(c)] \rightarrow X$ tal que $\tilde{c} \circ \lambda = c$ y $L(\tilde{c}|_{[0,t]}) = t$ para todo t en su dominio. Tal \tilde{c} es la reparametrización por longitud de arco de c .

Definición 1.12. Dado un espacio métrico (X, d) definimos la métrica de longitud \hat{d} inducida por d via la fórmula

$$\hat{d}(x, y) = \inf\{L(c) \mid c \text{ camino en } X \text{ de } x \text{ a } y\},$$

para cualesquiera x e y en X . Decimos que (X, d) es un *espacio de longitud* si su métrica d coincide con la métrica de longitud \hat{d} que induce. En tal caso, se dice que d es *intrínseca*.

Observación 1.13. Notar que $d(x, y) \leq \hat{d}(x, y)$ para cualesquiera x e y en X y que efectivamente \hat{d} es una métrica. Las longitudes de los caminos medidos respecto de una métrica y respecto de la métrica de longitud inducida coinciden: $L_d = L_{\hat{d}}$. En consecuencia, toda métrica de longitud inducida es intrínseca: $\hat{d} = \hat{\hat{d}}$.

Ejemplo 1.14. La siguiente construcción permite estudiar grupos desde un punto de vista métrico. Sean Γ un grupo y \mathcal{A} un conjunto generador de Γ que no contenga al elemento neutro e y tal que todo par de elementos a_1 y a_2 en \mathcal{A} distintos no sean inversos entre sí. El *grafo de Cayley* $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma)$ de Γ respecto de \mathcal{A} es el grafo que consiste en los siguientes datos.

1. El conjunto de *vértices* es Γ .
2. El conjunto de *aristas* es $\{(\gamma, \gamma a) \mid \gamma \in \Gamma, a \in \mathcal{A}\}$.

Notar que dados dos elementos γ_1 y γ_2 en Γ entonces en el grafo $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma)$ ocurre una y solo una de las siguientes posibilidades.

1. Si $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ ni su inverso están en \mathcal{A} , entonces no hay ninguna arista que una a γ_1 y γ_2 .
2. Si $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ o su inverso está en \mathcal{A} y tiene orden distinto de 2, entonces existe una única arista que une a γ_1 y γ_2 .
3. Si $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ o su inverso está en \mathcal{A} y tiene orden 2, entonces existen exactamente 2 aristas que unen a γ_1 y γ_2 .

Si ahora \mathcal{B} es un conjunto generador de Γ cualquiera, sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ un subconjunto maximal entre los subconjuntos de \mathcal{B} que no contienen al neutro e y tal que cualquier par de elementos distintos que contengan no sean inversos entre sí. Definimos el grafo de Cayley de Γ respecto de \mathcal{B} como el grafo $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma)$, definido previamente, y lo notamos $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(\Gamma)$.

Dotamos a $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma)$ de la única métrica intrínseca d tal que cada arista resulta isométrica a un intervalo de longitud 1. La métrica d restringida al conjunto de vértices Γ se llama la *métrica de la palabra* en Γ respecto de \mathcal{A} y se denota $d_{\mathcal{A}}$. Si γ_1 y γ_2 son elementos de Γ entonces su distancia es

$$d_{\mathcal{A}}(\gamma_1, \gamma_2) = \min\{N \in \mathbb{N}_0 \mid \gamma_1^{-1}\gamma_2 = \prod_{i=1}^N a_i^{\epsilon_i} \text{ con } a_i \in \mathcal{A} \text{ y } \epsilon_i \in \{1, -1\} \text{ para todo } i\},$$

adoptando la convención de que el producto sobre un conjunto de índices vacío es igual al neutro e .

La acción a izquierda de Γ sobre sí mismo se extiende a una acción sobre su grafo de Cayley $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma)$ por isometrías. Profundizaremos su estudio en el Capítulo 3.

1.2 Los espacios modelo

En esta sección, avanzamos sobre los espacios modelo de la geometría riemanniana, mostrando cómo pueden ser estudiados desde un punto de vista métrico y, en concreto, calculamos sus grupos de isometría.

Comencemos con el espacio euclídeo \mathbb{E}^n , con $n \geq 2$. Su métrica es la inducida por el producto interno $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. En general, cuando la métrica es inducida por un producto interno, la bola cerrada $B_1[0]$ resulta ser estrictamente convexa y por la Proposición 1.5 resulta tratarse de un espacio unívocamente geodésico.

Un *hiperplano* en \mathbb{E}^n es un subespacio afín de dimensión $n - 1$. Esto es, un subconjunto H de la forma

$$H = V + p$$

con p un punto de \mathbb{E}^n y V un subespacio vectorial $n - 1$ dimensional.

Decimos que un vector x es normal a un hiperplano $H = V + p$ si x es normal a V , esto es, si $(x|v) = 0$ para todo v en V . Dado un hiperplano H existen solamente dos vectores unitarios normales a H , que resultan ser opuestos uno del otro. Si llamamos \hat{n} a uno de estos vectores normales, podemos redefinir a $H = V + p$ como

$$H = \{h \in \mathbb{E}^n \mid (h - p|\hat{n}) = 0\}$$

Equivalentemente, a partir de esta escritura, podemos describir a H como el conjunto de nivel

$$H = \varphi^{-1}(r)$$

donde $\varphi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es el funcional dado por $\varphi(x) = (x|\hat{n})$ para todo x en \mathbb{E}^n y $r = \varphi(p)$.

Dados dos puntos distintos a y b en \mathbb{E}^n , el *hiperplano bisector* entre a y b se define como

$$H = \{q \in \mathbb{E}^n \mid d(q, a) = d(q, b)\}$$

Dado un hiperplano H existe una única isometría $r_H : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ tal que el conjunto de puntos que fija es exactamente H . Concretamente, si p está en H y \hat{n} es un vector normal a H unitario, entonces

$$r_H(q) = q - 2(q - p|\hat{n})\hat{n}$$

para todo q en \mathbb{E}^n . Llamamos a r_H la *reflexión* a través del hiperplano H . Notar que si q no está en H , entonces H puede describirse como el hiperplano bisector entre q y $r_H(q)$. Notar también que r_H tiene orden igual a 2, esto es $r_H \circ r_H = \text{id}_{\mathbb{E}^n}$.

Continuemos con las esferas. Para cada número natural n , definimos

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{E}^{n+1} \mid (x|x) = 1\}$$

Medimos las distancias en la esfera no con la métrica inducida por el espacio euclídeo sino midiendo los ángulos entre los vectores: Si x e y son puntos en \mathbb{S}^n entonces definimos $d(x, y)$ como el único número en el intervalo $[0, \pi]$ tal que $\cos(d(x, y)) = (x|y)$.

Un *gran círculo* C en \mathbb{S}^n es un subespacio de la forma

$$C = \mathbb{S}^n \cap V$$

con V un subespacio vectorial de \mathbb{E}^{n+1} de dimensión igual a 2. Una forma natural de obtener geodésicas en C consiste en tomar dos puntos q y \hat{n} en C tales que $(q|\hat{n}) = 0$ y considerar el camino

$$c : t \in [0, L] \mapsto \cos(t)q + \sin(t)\hat{n} \in \mathbb{S}^n$$

con L en el intervalo $[0, \pi]$. Las geodésicas tienen longitud a lo sumo π , que es precisamente el diámetro de la esfera. Todo par de puntos que esté a distancia menor que π admite un único segmento geodésico que los une. Un par de puntos antipodales p y $-p$ admite infinitos segmentos geodésicos que unen a los dos puntos. De hecho, dado un tercer punto q , distinto de p y de $-p$, existe un único segmento geodésico que une p y $-p$ y que pasa por q . Toda bola de radio menor que $\pi/2$ es unívocamente geodésica.

Un hiperplano H en \mathbb{S}^n es un subconjunto de la forma

$$H = \mathbb{S}^n \cap V$$

con V un subespacio vectorial de \mathbb{E}^{n+1} de dimensión n . Notar que H dotado de la métrica inducida por \mathbb{S}^n es isométrico a \mathbb{S}^{n-1} . Definimos la *reflexión* a través de H como la restricción y correstricción de $r_V : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ a \mathbb{S}^n . Dados dos puntos distintos a y b en \mathbb{S}^n , el subconjunto

$$H = \{h \in \mathbb{S}^n \mid d(h, a) = d(h, b)\}$$

forma un hiperplano en \mathbb{S}^n el cual llamamos hiperplano bisector entre a y b . Análogamente al caso euclídeo, si H es un hiperplano y q no está en \mathbb{S}^n entonces H es el hiperplano bisector entre q y $r_H(q)$.

Hay varios *modelos* para el espacio hiperbólico, cuya preferencia depende de qué propiedad de la geometría hiperbólica queremos estudiar. En nuestro caso, el modelo apropiado es el *modelo del hiperboloide* porque nos permite hacer un estudio del espacio hiperbólico análogo al que hicimos con la esfera.

Definimos una forma bilineal sobre \mathbb{E}^{n+1} por la fórmula $\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}$ y el espacio hiperbólico n -dimensional \mathbb{H}^n como el espacio métrico cuyo conjunto subyacente es

$$\{u \in \mathbb{E}^{n+1} \mid \langle u|u \rangle = -1 \text{ y } u_{n+1} > 0\}$$

dotado de la única métrica d tal que para todos los a y b en \mathbb{H}^n se tiene que

$$\cosh(d(a, b)) = -\langle a|b \rangle.$$

Un hiperplano en \mathbb{H}^n es un subconjunto no vacío de la forma $H = V \cap \mathbb{H}^n$ con V un subespacio vectorial de \mathbb{E}^{n+1} de dimensión n . Si dotamos a un tal H de la métrica inducida por \mathbb{H}^n resulta ser isométrico a \mathbb{H}^{n-1} . Dados dos puntos distintos a y b en \mathbb{H}^n , el conjunto de puntos

$$H = \{h \in \mathbb{H}^n \mid d(a, h) = d(h, b)\}$$

forma un hiperplano en \mathbb{H}^n , el cual llamamos hiperplano bisector entre a y b . Dado un hiperplano H existen solo dos vectores en \mathbb{E}^{n+1} unitarios y ortogonales a H , ambas nociones respecto de forma bilineal $\langle | \rangle$, y resultan ser uno el opuesto del otro. Si llamamos \hat{n} a uno de estos vectores, la reflexión r_H a través de H es la isometría

$$r_H : x \in \mathbb{H}^n \mapsto x - 2\langle x|\hat{n} \rangle \hat{n} \in \mathbb{H}^n.$$

Entonces H es exactamente el conjunto de los puntos fijados por r_H y, análogamente al caso de las otras dos geometrías, si a no está en H entonces H es el hiperplano bisector entre a y $r_H(a)$. Recíprocamente, si H es el hiperplano bisector entre a y b entonces $b = r_H(a)$. Notar que la reflexión r_H es la restricción y correstricción de una transformación lineal de \mathbb{E}^{n+1} que preserva la forma bilineal $\langle | \rangle$.

Una forma natural de obtener geodésicas en \mathbb{H}^n consiste en tomar un punto a en \mathbb{H}^n y un vector \hat{n} en \mathbb{E}^{n+1} tales que $\langle a|\hat{n} \rangle = 0$ y $\langle \hat{n}|\hat{n} \rangle = 1$, y considerar el camino

$$c : t \in [0, L] \mapsto \cosh(t)a + \sinh(t)\hat{n} \in \mathbb{H}^n$$

con L en el intervalo $[0, \infty)$.

Definición 1.15. Dados un número natural n mayor o igual que 2 y un número real κ , denotamos M_κ^n como el espacio métrico siguiente.

1. Si $\kappa = 0$, $M_0^n = \mathbb{E}^n$.
2. Si $\kappa > 0$, $M_\kappa^n = (\mathbb{S}^n, d_\kappa)$ donde $d_\kappa = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}d$.

3. Si $\kappa < 0$, $M_\kappa^n = (\mathbb{H}^n, d_\kappa)$ donde $d_\kappa = \frac{1}{\sqrt{-\kappa}}d$.

Por el estudio hecho de las tres geometrías modelo, vale la siguiente proposición.

Proposición 1.16. *Todo espacio modelo M_κ^n es geodésico. Si κ es no-positivo entonces es únivo-camente geodésico y las bolas en M_κ^n son convexas. Si κ es positivo entonces existe un único segmento geodésico uniendo dos puntos x e y en M_κ^n si y solo si su distancia $d(x, y)$ es menor que $\pi/\sqrt{\kappa}$. Si κ es positivo, las bolas cerradas en M_κ^n de radio menor que $\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ son convexas.*

Frecuentemente, es necesario dividir en los casos κ no-positivo y κ positivo. Muchas propiedades que son ciertas en el primer caso son también ciertas en el segundo caso con la condición adicional de que los puntos estén a distancia menor que el diámetro del espacio modelo o algún múltiplo de este número. Esta situación motiva la siguiente definición.

Definición 1.17. Dado un número real κ , definimos

$$D_\kappa := \begin{cases} \infty & \text{si } \kappa \leq 0 \\ \pi/\sqrt{\kappa} & \text{si } \kappa > 0. \end{cases}$$

Calculemos los grupos de isometría $\text{Isom}(M_\kappa^n)$ para cada $n \geq 2$ y κ en \mathbb{R} . Como el grupo de isometrías de un espacio métrico no cambia si rescalamos la métrica, solamente tenemos que calcular los casos en los que κ es 0, 1 o -1 .

Proposición 1.18. *Dados $k \in \mathbb{N}$ y $2k$ puntos $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ en M_κ^n tales que $d(a_i, a_j) = d(b_i, b_j)$ para todos los i, j en \mathbb{I}_k , existe una isometría ϕ en $\text{Isom}(M_\kappa^n)$ tal que $\phi(a_i) = b_i$ para todo i en \mathbb{I}_k y tal que ϕ es igual a una composición de k o menos reflexiones a través de hiperplanos.*

Demostración. Por inducción en k . Si $k = 1$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a_1 \neq b_1$. Tomamos $\phi = r_H$ donde H es el hiperplano bisector entre a_1 y b_1 .

Si $k > 1$, por hipótesis inductiva existe una isometría ψ tal que $\psi(a_i) = b_i$ para todo i en \mathbb{I}_{k-1} y es igual a una composición de a lo sumo $k-1$ reflexiones. Si $\psi(a_k) = b_k$, listo. Si no, sea H el hiperplano bisector entre $\psi(a_k)$ y b_k y tomamos $\phi := r_H \circ \psi$. Así que $\phi(a_k) = r_H(\psi(a_k)) = b_k$. Por último, sea i en \mathbb{I}_{k-1} , entonces

$$d(\psi(a_k), b_i) = d(\psi(a_k), \psi(a_i)) = d(a_k, a_i) = d(b_k, b_i).$$

Así que b_i equidista de $\psi(a_k)$ y b_k y esto equivale a que esté en H . Luego, $\phi(a_i) = r_H(\psi(a_i)) = r_H(b_i) = b_i$. \square

Proposición 1.19. *Sea ϕ una isometría de M_κ^n .*

1. *Si ϕ no es la identidad entonces el conjunto de puntos que fija está contenido en algún hiperplano.*

2. Si ϕ actúa como la identidad sobre un hiperplano H entonces ϕ es o bien la identidad o bien la reflexión r_H a través de H .
3. ϕ es igual a una composición de a lo sumo $n + 1$ reflexiones.

Demostración. 1. Si ϕ no es la identidad existe algún punto a en M_κ^n que no es fijado por ϕ así que tiene sentido considerar el hiperplano H bisector entre a y $\phi(a)$. Si b es un punto fijado por ϕ entonces

$$d(a, b) = d(\phi(a), \phi(b)) = d(\phi(a), b).$$

Así que b equidista de a y de $\phi(a)$ o, equivalentemente, está en H .

2. Sean ϕ una isometría de M_κ^n y H un hiperplano que es fijado por ϕ . Si ϕ no es la identidad entonces existe un punto a en M_κ^n que no es fijado por ϕ . Con el mismo argumento con el que probamos el inciso anterior se prueba que H está contenido en el hiperplano bisector entre a y $\phi(a)$ y, como no existen hiperplanos contenidos propiamente, H debe ser igual a este hiperplano bisector. Por arbitrariedad de a , ϕ es la reflexión r_H respecto de H .
3. Fijemos $n + 1$ puntos a_0, \dots, a_n en M_κ^n que estén en posición general, esto es, que no estén contenidos en ningún hiperplano. Llamemos $b_i := \phi(a_i)$, con $0 \leq i \leq n$. Por la proposición anterior 1.18, existe una isometría ψ en $\text{Isom}(M_\kappa^n)$ que es igual a una composición de a lo sumo $n + 1$ reflexiones y tal que $\psi(a_i) = b_i$ para todo $0 \leq i \leq n + 1$. Entonces, todo a_i es fijado por la isometría $\psi^{-1} \circ \phi$. Luego, por el primer inciso, $\psi^{-1} \circ \phi$ debe ser igual a la identidad o, equivalentemente, $\phi = \psi$. Luego, ϕ es igual a una composición de a lo sumo $n + 1$ reflexiones. □

Fijemos un hiperplano base $H_0 \subseteq M_\kappa^n$ dado por $H_0 := \{x \in M_\kappa^n \mid x_1 = 0\}$; más concretamente,

1. Si $\kappa = 0$, definimos $H_0 := \{0\} \times \mathbb{E}^{n-1}$.
2. Si $\kappa > 0$, definimos $H_0 := \mathbb{S}^n \cap (\{0\} \times \mathbb{E}^n)$.
3. Si $\kappa < 0$, definimos $H_0 := \mathbb{H}^n \cap (\{0\} \times \mathbb{E}^n)$.

Así que en todos los casos verificamos que la definición dada para H_0 es la de un hiperplano. Observemos también que en todos los casos H_0 es isométrico a M_κ^{n-1} , vía la proyección en todas salvo la primera coordenadas. Una observación sencilla de álgebra lineal es la siguiente.

Observación 1.20. *Sea H un hiperplano en M_κ^n distinto de H_0 . Si $H_0 \cap H$ es no vacío, entonces es un hiperplano de H_0 , visto como M_κ^{n-1} . Recíprocamente, todo hiperplano en H_0 se obtiene de esta forma.*

Observación 1.21. Como todo hiperplano de M_κ^n es un hiperplano bisector entre dos puntos, toda isometría de M_κ^n manda hiperplanos en hiperplanos. En otras palabras, el grupo $\text{Isom}(M_\kappa^n)$ actúa sobre el conjunto formado por los hiperplanos de M_κ^n . Por la proposición 1.18, esta acción es transitiva. Luego, como H_0 es isométrico a M_κ^{n-1} , todo hiperplano de M_κ^n lo es. Veremos en el Corolario 1.25 que vale la afirmación recíproca.

La noción de puntos en posición general, que definimos a continuación, es la generalización geométrica de la noción más rudimentaria de independencia lineal de vectores.

Definición 1.22. Se dice que $n + 1$ puntos en M_κ^n están en *posición general* si el conjunto que forman no está contenido en ningún hiperplano. Esto equivale a decir, en las descripciones concretas que dimos de los espacios modelo, lo siguiente: En el caso de curvatura no nula, que los $n + 1$ puntos, vistos como vectores del espacio euclídeo ambiente, son linealmente independientes y, en el caso de curvatura nula, que son afinmente independientes.

El siguiente resultado técnico es uno de los más potentes de la sección e ilustra lo acertado que es estudiar las geometrías modelo a partir de sus hiperplanos. Por supuesto, la efectividad de esta estrategia descansa sobre el hecho de que las geometrías modelo son objetos altamente simétricos y esto implica que su grupo de isometrías es rico. De hecho, desde el punto de vista de la geometría riemanniana, las geometrías modelo son las únicas variedades riemannianas simplemente conexas, homogéneas e isótropas. Por el contrario, se puede esperar que el grupo de isometrías de una variedad riemanniana genérica (por ejemplo, tomada al azar con alguna distribución de probabilidad razonable a definir) debería ser trivial.

Proposición 1.23. Sean S_1 y S_2 dos subconjuntos no vacíos de M_κ^n y sea $f : S_1 \rightarrow S_2$ una isometría. Se tiene que:

1. Existe una isometría ψ de M_κ^n que extiende a f .
2. Si ψ y ϕ son dos isometrías de M_κ^n que extienden a f y A es igual a la intersección de todos los hiperplanos de M_κ^n que contienen a S_1 entonces ψ y ϕ coinciden sobre A .

Demostración. 1. Caso 1: Supongamos que S_1 o S_2 no está contenido en ningún hiperplano. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que S_1 no está contenido en ningún hiperplano. Equivalentemente, existe un conjunto Σ contenido en S_1 y formado por $n + 1$ puntos de M_κ^n en posición general. Por Proposición 1.18, existe una isometría ψ de M_κ^n que coincide con f sobre Σ . Supongamos que ψ no coincide con f sobre todo S_1 , para llegar a un absurdo. Sea p en S_1 tal que $\psi(p) \neq f(p)$. Otra vez, por Proposición 1.18, existe una isometría ϕ de M_κ^n que coincide con f sobre $\Sigma \cup \{p\}$. Entonces, la isometría $\phi^{-1} \circ \psi$ de M_κ^n no es la identidad y fija al

conjunto Σ formado por puntos en posición general. Esto contradice el contenido de la Proposición 1.19. Luego, ψ y f coinciden sobre S_1 .

Caso 2: Supongamos que para cada i en $\{1, 2\}$ existe un hiperplano H_i que contiene a S_i . Procedemos por inducción en n , la dimensión de M_κ^n . El caso $n = 1$, es trivial, pues allí los hiperplanos son subconjuntos finitos (formados por un punto si κ es no-positivo y por dos puntos si κ es positivo) y lo que queremos probar se reduce a la Proposición 1.18. Supongamos $n > 1$, asumamos la hipótesis inductiva y probemos primero el siguiente subcaso.

Subcaso 2.1: Supongamos que $S_1 = S_2 = H$ es un hiperplano. Por Observación 1.21, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $H = H_0$ es el hiperplano base. Sea $\Sigma \subseteq H_0 \cong M_\kappa^{n-1}$ un conjunto de n puntos en posición general. Si $f : H_0 \rightarrow H_0$ es una isometría entonces, por Proposición 1.18, existe una isometría ψ de M_κ^n que coincide con f sobre Σ . En particular, Σ está contenido en el hiperplano $\psi^{-1}(H_0)$. Como los puntos de Σ están en posición general, debe ser que $H_0 = \psi^{-1}(H_0)$. Luego, si vemos a $\psi^{-1} \circ f$ como isometría de $H_0 \cong M_\kappa^{n-1}$, tenemos que el conjunto de sus puntos fijos no está contenido en ningún hiperplano de $H_0 \cong M_\kappa^{n-1}$. Ahora, por Proposición 1.19, debe ser que ψ y f coinciden sobre H_0 .

Probemos ahora el Caso 2 en toda su generalidad. Supongamos que para cada i en $\{1, 2\}$ existe un hiperplano H_i que contiene a S_i . Otra vez, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $H_1 = H_2 = H_0$. Ahora H_0 es isométrico a M_κ^{n-1} así que, por hipótesis inductiva, existe una isometría $g : H_0 \rightarrow H_0$ que extiende a f . Ahora, g está en el Subcaso 2.1, así que g , y luego f , se extiende a una isometría de M_κ^n .

2. Si ψ y ϕ son dos isometrías de M_κ^n que coinciden sobre un subconjunto no vacío S_1 entonces las isometrías inversas $\psi^{-1} \circ \phi$ y $\phi^{-1} \circ \psi$ fijan a S_1 y esto, junto con la Observación 1.21, nos dice que inducen biyecciones inversas sobre el conjunto formado por los hiperplanos de M_κ^n que contienen a S_1 . Sea A la intersección de tales hiperplanos. Ahora, aplicando inductivamente las Observaciones 1.20 y 1.21, vemos que A es isométrico a M_κ^m con $m \leq n$. (Adoptamos la convención de que si A es la intersección sobre la familia vacía, entonces $A = M_\kappa^n$.) Por lo visto, $\psi^{-1} \circ \phi$ y $\phi^{-1} \circ \psi$ se restringen y correstringen a isometrías de A . Supongamos que S_1 estuviese contenido en algún hiperplano P de $A \cong M_\kappa^m$. Entonces, existe un hiperplano H de M_κ^n tal que $H \cap A = P$ y esto está en contradicción con la definición de A . Luego, S_1 no está contenido en ningún hiperplano de $A \cong M_\kappa^m$. Ahora, por Proposición 1.19, ψ y ϕ coinciden sobre A .

□

Definición 1.24. Sean m y n en \mathbb{N}_0 tales que $m \leq n$. Un subconjunto $P \subseteq M_\kappa^n$ es un m -plano si es isométrico a M_κ^m .

Corolario 1.25. 1. Sean m y n en \mathbb{N}_0 tales que $m \leq n$. Todo m -plano de M_κ^n es la intersección de $n - m$ hiperplanos. (Adoptamos la convención de que la intersección sobre la familia vacía es igual a M_κ^n .)

2. Sea S un subconjunto no vacío de M_κ^n y sea m el mínimo entre los números k en \mathbb{N}_0 tales que existe algún k -plano que contiene a S . Entonces S está contenido en un único m -plano.

Finalmente, podemos calcular los grupos de isometrías de los espacios modelo.

Teorema 1.26. Los grupos de isometría de los espacios modelo son los siguientes.

1. Si κ es nula, entonces $\text{Isom}(M_\kappa^n) = \text{Isom}(\mathbb{E}^n) \cong \mathbb{R}^n \rtimes O(n)$.
2. Si κ es positiva, entonces $\text{Isom}(M_\kappa^n) = \text{Isom}(\mathbb{S}^n) \cong O(n+1)$.
3. Si κ es negativa, entonces $\text{Isom}(M_\kappa^n) = \text{Isom}(\mathbb{H}^n) \cong O(n, 1)_+$.

En todo caso, el estabilizador ε_p de un punto p en M_κ^n es isomorfo a $O(n)$.

Demostración. 1. Sea $D(n) = O(n) + \mathbb{R}^n$, el grupo de transformaciones afines de \mathbb{E}^n .

Esto es, el conjunto formado por todas las funciones $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ para la cual existen una (única) matriz ortogonal A en $O(n)$ y un (único) vector b en \mathbb{E}^n de manera que $f(x) = Ax + b$ para todo x en \mathbb{E}^n . Este grupo preserva la distancia euclídea así que es un subgrupo de $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$. Además, contiene a las reflexiones respecto de hiperplanos, así que, por Proposición 1.19, debe ser que $D(n) = \text{Isom}(\mathbb{E}^n)$. El subgrupo de traslaciones resulta ser normal así que $\text{Isom}(\mathbb{E}^n) \cong \mathbb{R}^n \rtimes O(n)$. El estabilizador del origen de coordenadas es $O(n)$ y, como el grupo $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ actúa transitivamente sobre los puntos de \mathbb{E}^n , el estabilizador de cualquier punto es isomorfo a $O(n)$.

2. El subgrupo $O(n+1)$ de $\text{Isom}(\mathbb{E}^{n+1})$ de transformaciones ortogonales deja invariante al subconjunto \mathbb{S}^n . Por la identidad del paralelogramo, sabemos que en cualquier espacio de Hilbert una función preserva la distancia si y solo si preserva el producto interno. De manera que $O(n+1)$ preserva el producto interno euclídeo y, en particular, preserva la métrica de \mathbb{S}^n . Si restringimos y correstringimos los elementos de $O(n+1)$ a \mathbb{S}^n , obtenemos un morfismo de grupos inyectivo $O(n+1) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{S}^n)$. Como su imagen contiene a las reflexiones respecto de hiperplanos, por la Proposición 1.19, este morfismo debe ser también sobreyectivo y, luego, un isomorfismo. Si consideramos a e_{n+1} , el último vector de la base canónica de \mathbb{E}^{n+1} , vemos que el subgrupo de $O(n+1)$ que lo fija es isomorfo a $O(n)$, simplemente restringiendo y correstringiendo estas transformaciones lineales a $\mathbb{E}^n \times \{0\} \cong \mathbb{E}^n$. Como el vector e_{n+1} está en \mathbb{S}^n y, tenemos un isomorfismo $O(n+1) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{S}^n)$, el subgrupo de $\text{Isom}(\mathbb{S}^n)$ que lo fija es isomorfo a $O(n)$. Como el grupo $\text{Isom}(\mathbb{S}^n)$ actúa transitivamente sobre los puntos de \mathbb{S}^n , el estabilizador de cualquier punto es isomorfo a $O(n)$.

3. Sea $O(n, 1)$ el subgrupo del grupo $GL(n + 1, \mathbb{R})$ de transformaciones lineales de \mathbb{E}^{n+1} que preserva la forma bilineal $\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}$. Sea J la matriz asociada a la forma bilineal $\langle | \rangle$, esto es, la matriz diagonal que, sobre la diagonal, tiene todas sus entradas iguales a 1 excepto por la entrada $(n + 1, n + 1)$ donde hay un -1 . Una cuenta sencilla prueba que $O(n, 1)$ se trata de las transformaciones lineales cuya matriz asociada A verifica que $A^t J A = J$. Algunas transformaciones lineales de $O(n, 1)$ permutan las dos hojas del hiperboloide $\{x \in \mathbb{E}^{n+1} \mid \langle x|x \rangle = -1\}$. Por ejemplo, la transformación lineal cuya matriz asociada es J está entre ellas. Sea $O(n, 1)_+$ el subgrupo de $O(n, 1)$ que preserva las hojas del hiperboloide. Por definición de la métrica de \mathbb{H}^n , restringiendo y restringiendo las transformaciones lineales de $O(n, 1)_+$ obtenemos un morfismo de grupos $g : O(n, 1)_+ \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$. El morfismo g es inyectivo puesto que el subconjunto de \mathbb{H}^n dado por $\{e_{n+1}\} \cup \{e_i + \sqrt{2}e_{n+1} \mid 1 \leq i \leq n\}$ es una base de \mathbb{E}^{n+1} formada por puntos de \mathbb{H}^n en posición general. Como la imagen del morfismo g contiene a las reflexiones respecto de hiperplanos, por la Proposición 1.19, este morfismo debe ser también sobreyectivo y, luego, un isomorfismo. Sea ϕ una isometría de \mathbb{H}^n que fija a e_{n+1} y consideremos la transformación lineal $T := g^{-1}(\phi)$ de $O(n, 1)_+$. Como T preserva la forma bilineal $\langle | \rangle$ y fija a e_{n+1} , entonces fija a $\mathbb{E}^n \cong \mathbb{E}^n \times \{0\}$, visto como subespacio de \mathbb{E}^{n+1} . (Notar que, para todo x en \mathbb{E}^{n+1} , $\langle x|e_{n+1} \rangle = -x_{n+1}$.) Luego, debe ocurrir que T , restringida a \mathbb{E}^n preserva el producto euclídeo $(|)$. Luego, el subgrupo de $O(n, 1)_+$ que fija a e_{n+1} es isomorfo a $O(n)$. Como el grupo $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ actúa transitivamente sobre los puntos de \mathbb{H}^n , el estabilizador de cualquier punto es isomorfo a $O(n)$.

□

1.3 Variedades

En esta sección repasamos las propiedades de las variedades que nos interesan desde un *punto de vista métrico*. Una familia de ejemplos extremadamente importante está formado por los espacios modelo M_{κ}^n de la sección precedente, cuyo estudio desde tal punto de vista ya fue hecho allí. Aquí mostramos que las técnicas métricas pueden ser usadas para estudiar las variedades en toda su generalidad. Remarcablemente, a pesar de que las *derivadas* están involucradas en las definiciones y nociones básicas asociadas a las variedades veremos que en realidad todas estas definiciones y nociones son en realidad de *naturaleza métrica*. Una vez probados algunos resultados necesarios, se podrá prescindir casi totalmente de las derivadas. Una excelente exposición introductoria desde el punto de vista clásico puede encontrarse en [Lee97].

Sea M una *variedad suave*, esto es, cuyos cambios de coordenadas son infinitamente diferenciables. Una *métrica riemanniana* g sobre M consiste en una asignación de un producto interno g_p sobre cada espacio tangente $T_p M$ que varía suavemente respecto

del punto p en M . En tal caso, del par (M, g) se dice que es una *variedad riemanniana*. Si v es un vector en p tangente a M , definimos su módulo como $|v| := \sqrt{g_p(v, v)}$. Si $c : [a, b] \rightarrow M$ es una curva en M suave, denotamos su vector velocidad en $p = c(t)$ como $\dot{c}(t)$ y definimos la *longitud* de c como

$$L(c) = \int_a^b |\dot{c}(t)| dt.$$

Si una curva es suave a trozos definimos su longitud como la suma de las longitudes de tramos donde es suave. Definimos una métrica d sobre M vía la fórmula siguiente.

$$d(p, q) = \inf\{L(c) \mid c \text{ curva suave a trozos de } p \text{ a } q\}$$

Todos los axiomas de métrica se verifican inmediatamente excepto quizás aquel que dice que la distancia entre puntos distintos es positiva. A una función en estas condiciones se la llama *pseudométrica*.

Proposición 1.27. Sean (M, g) una variedad riemanniana y d la pseudométrica inducida por g . Entonces, d es una métrica y la topología inducida por d coincide con la topología de X como variedad.

Si ahora medimos las longitudes de una curva suave a trozos según la definición general de longitud de camino dada previo a la Proposición 1.11, vemos que ambas definiciones de longitud coinciden. De hecho, aquella definición imita las sumas de Riemann asociadas a la integral que está involucrada en el cálculo de la longitud en el caso suave. Así que toda variedad riemanniana es un espacio de longitud. Frecuentemente notaremos por M tanto a la variedad riemanniana (M, g) como al espacio de longitud inducido (M, d) .

Una función $\varphi : M \rightarrow N$ entre variedades riemannianas es una *isometría riemanniana* si es un difeomorfismo que preserva la métrica riemanniana, esto es, $|d_p\varphi(v)| = |v|$ para todo punto p en M y todo vector tangente v en T_pM . (Recordemos que por identidad del paralelogramo se preserva el producto interno si y solo si se preserva la norma inducida.) Es claro que toda isometría riemanniana es una isometría entre espacios métricos. En el Teorema 1.41 veremos que vale la recíproca.

Uno de los invariantes métricos *globales* básicos entre las variedades riemannianas es su volumen, cuya definición requiere una breve discusión previa.

Sean p un punto en una variedad riemanniana M de dimensión n y $\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ una carta de M alrededor de p . Consideremos el conjunto de campos coordenados $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ en U inducido por φ . Aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt a este conjunto, y observando que involucra solamente operaciones suaves, obtenemos un marco local ortonormal (E_1, \dots, E_n) alrededor de p .

De manera que, en toda variedad riemanniana, alrededor de cada punto tenemos marcos ortonormales locales aunque no necesariamente son coordenados, esto es, inducidos por alguna carta. Si así fuese, toda variedad de dimensión n sería localmente

isométrica a \mathbb{E}^n y esto no puede ocurrir precisamente porque existen invariantes locales no triviales entre las variedades riemannianas entre ellos, remarcablemente, la curvatura seccional.

Una variedad es orientable si admite una n -forma de volumen nunca nula. Si la variedad orientada M es riemanniana entonces existe una única n -forma, donde n es la dimensión de M , que toma el valor 1 sobre todo marco ortonormal orientado positivamente. Llamamos a tal n -forma la *forma de volumen* de M y la notamos dV . Si (E_1, \dots, E_n) es cualquier marco local (no necesariamente ortonormal) y (dx^1, \dots, dx^n) es su comarco dual, entonces localmente $dV = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, donde $g_{ij} = g(E_i, E_j)$ para todo i y j en \mathbb{I}_n .

La forma de volumen permite definir integrales de funciones. Sean M una variedad riemanniana orientada y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de soporte compacto, continua en casi todo punto y acotada. La integral de f sobre M se define como $\int_M f := \int_M f dV$. En particular, si M es además compacta, definimos su volumen como $\text{vol}(M) := \int_M 1$. Si M no fuese compacta podemos definir su volumen como el supremo de las integrales de las funciones indicadoras de soporte compacto. En cualquier caso, el volumen de la variedad no depende de la orientación elegida.

Nos preguntamos ahora cómo definir el volumen de variedades no orientables. Por ejemplo, si pensamos en una banda de Möbius embebida en el espacio euclídeo \mathbb{E}^3 tridimensional, parecería que su área es una noción bien definida. Existen varias maneras de extender la definición de volumen al caso no-orientable; la que presentaremos a continuación emplea revestimientos.

Definición 1.28. Sean M una variedad riemanniana y $p : \tilde{M} \rightarrow M$ un revestimiento. Dotamos a \tilde{M} de la única métrica riemanniana invariante por transformaciones deck que vuelve a p una isometría local. En tales condiciones, decimos que p es un *revestimiento riemanniano*.

Dada una variedad riemanniana M conexa existe un revestimiento $p : \tilde{M} \rightarrow M$ de dos hojas con \tilde{M} orientable y cuya única transformación deck revierte la orientación tal que \tilde{M} resulta conexo si y solo si M es no-orientable y, en otro caso, \tilde{M} es el revestimiento trivial $M \sqcup M$. Llamamos a p el *revestimiento de orientación* y lo dotamos de la estructura riemanniana detallada en la definición anterior y podemos extender la definición de volumen a M vía la fórmula $\text{vol}(M) := \text{vol}(\tilde{M})/2$. Por ejemplo, si M es una banda de Möbius entonces \tilde{M} es una banda usual, obtenida de cortar y pegar dos cintas de Möbius. Más adelante, en la Sección 3.3 del Capítulo 3, daremos nociones de volumen suficientemente robustas como para aplicarse a espacios métricos arbitrarios. Sin embargo, resulta útil conocer la definición particular en el caso riemanniano y saber que coincide con aquella más general.

Repasemos la noción de geodésica riemanniana, la cual es una geodésica local de acuerdo a nuestras definiciones. Veremos en 1.39 que, recíprocamente, toda geodésica local es una geodésica riemanniana.

Una geodésica riemanniana es una cierta generalización de la noción de recta en un espacio euclídeo \mathbb{E}^n . Destaquemos dos propiedades que distinguen a las rectas del resto de las curvas. En primer lugar, toda segmento de recta es minimizante, esto es, su longitud es igual a la distancia entre sus extremos. En segundo lugar, toda parametrización a rapidez constante de una recta tiene aceleración nula. Notar que la primera propiedad es *global* y emplea solamente la métrica, y la segunda es *local* y emplea esencialmente derivadas. La primera propiedad es la que se generaliza con la noción de *geodésica* apropiada para espacios métricos arbitrarios con la que empezamos, y la segunda propiedad es la que se generaliza con la noción de geodésica riemanniana. Ahora, para dar sentido a la noción de aceleración tendríamos que poder formar un cociente incremental de velocidades en una variedad riemanniana. No es claro en principio cómo hacer esto dado que las velocidades de una curva en puntos distintos pertenecen a espacios tangentes distintos. Así que lo que necesitamos es algún método para conectar espacios tangentes distintos entre sí.

Definición 1.29. Sea M una variedad suave. Denotamos por $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto de campos diferenciables definidos sobre M . Una *conexión* en M es una aplicación

$$\nabla : (V, W) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto \nabla_V W \in \mathfrak{X}(M)$$

que satisface las siguientes condiciones.

1. Es $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineal en la primera variable.
2. Es \mathbb{R} -lineal en la segunda variable.
3. Satisface la *regla del producto*: Para cualesquiera V y W en $\mathfrak{X}(M)$ y f en $\mathcal{C}^\infty(M)$ es

$$\nabla_V(fW) = f\nabla_V W + (Vf)W$$

Un argumento sencillo, que involucra *bump-functions*, prueba que una conexión es un operador local: El valor de $\nabla_V W|_p$ depende solamente de los valores de V y W sobre algún entorno de p . Más aún, se puede probar que, en cuanto a V , depende solamente del valor V_p de V en p . Interpretamos entonces $\nabla_V W|_p$ como la *derivada direccional* de W en p en la dirección V_p y escribimos $\nabla_{V_p} W := \nabla_V W|_p$. Si (E_1, \dots, E_n) es un marco local, entonces definimos los *símbolos de Christoffel* de ∇ respecto de (E_1, \dots, E_n) como las n^3 funciones suaves definidas localmente Γ_{ij}^k , con (i, j, k) en \mathbb{I}_k^3 , tales que $\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$ (bajo notación de suma de Einstein). Localmente, hay una biyección entre el conjunto de conexiones y la familia de conjuntos de n^3 funciones suaves (ordenadas); esta biyección está dada por la fórmula

$$\nabla_V W = (VW^k + V^i W^j \Gamma_{ij}^k) E_k$$

De manera que no hay ninguna condición adicional ni de acoplamiento sobre los símbolos de Christoffel: son funciones suaves arbitrarias. Así que se puede construir una

conexión tomando localmente n^3 funciones suaves y pegando las conexiones locales vía particiones de la unidad. Esto nos dice que hay muchas conexiones en cualquier variedad diferenciable (de dimensión al menos 1).

Un campo vectorial a lo largo de una curva $\gamma : J \rightarrow M$ suave, donde J es algún intervalo no vacío de la recta real, es una función suave $V : J \rightarrow TM$ tal que $V(t)$ está en $T_{\gamma(t)}M$ para todo t en J . Notamos $\mathfrak{X}(\gamma)$ al espacio vectorial formado por los campos vectoriales a lo largo de γ . Decimos que un campo vectorial V a lo largo de γ es *extendible* si existe un campo \tilde{V} definido sobre un entorno abierto de la imagen de γ tal que $V(t) = \tilde{V}_{\gamma(t)}$ para todo t en J . En tal caso, decimos que \tilde{V} extiende a V . No todo campo en $\mathfrak{X}(\gamma)$ es extendible; por ejemplo, si γ no es inyectiva y pasa por un mismo punto con velocidades diferentes entonces su campo velocidad $\dot{\gamma}$ no es extendible. Sin embargo, todo campo vectorial a lo largo de γ es localmente extendible.

Proposición 1.30. Sean M una variedad suave, ∇ una conexión en M y $\gamma : J \rightarrow M$ una curva suave. Existe un único operador

$$D_t : \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$$

que cumple las siguientes condiciones.

1. Es \mathbb{R} -lineal.
2. Satisface la regla del producto: Para cualesquiera V en $\mathfrak{X}(\gamma)$ y f en $C^\infty(J)$ es

$$D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV$$

3. Si V en $\mathfrak{X}(\gamma)$ es extendible y \tilde{V} extiende a V , para todo t_0 en J es

$$D_tV|_{t=t_0} = \nabla_{\dot{\gamma}(t_0)}\tilde{V}$$

Demostración. Suponiendo que existe tal D_t se aplican los axiomas y se deduce que localmente debe ser de la forma

$$D_tV|_{t=t_0} = (\dot{V}^k(t_0) + V^j(t_0)\dot{\gamma}^i(t_0)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t_0)))\partial_k$$

Así que tenemos unicidad local. Además, definiendo D_t localmente vía esta fórmula vemos que se verifican los axiomas. Luego, por unicidad local, podemos pegar las definiciones locales de D_t consistentemente. \square

Llamamos a D_t la *derivada covariante* a lo largo de γ respecto de ∇ . Una consecuencia de la demostración anterior es que la derivada covariante está determinada por los símbolos de Christoffel y recíprocamente, al igual que ocurre con la conexión dada. De manera que tener derivadas covariantes y tener una conexión es equivalente. Además, una consecuencia de la Proposición 1.30 anterior es que el valor de $\nabla_{V_p}W$ depende solamente de los valores de W sobre la imagen de alguna curva suave que pase por p con velocidad V_p .

Definición 1.31. Sean M una variedad suave de dimensión n , ∇ una conexión en M y $\gamma : J \rightarrow M$ una curva suave. La *aceleración* de γ es el campo $D_t\dot{\gamma}$ en $\mathfrak{X}(\gamma)$. Decimos que γ es una *geodésica* respecto de ∇ si su aceleración es nula, esto es, si localmente γ cumple las n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden siguientes.

$$\ddot{\gamma}^k(t_0) + \dot{\gamma}^j(t_0)\dot{\gamma}^i(t_0)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t_0)) = 0 \quad \text{para todo } k \text{ en } \mathbb{I}_n$$

Dados un punto p en M y un vector v en T_pM tangente a X en p sabemos que, por Teorema de existencia y unicidad, existe una geodésica $\gamma : J \rightarrow M$ definida en un entorno abierto de 0 tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = v$ y toda tal otra geodésica debe coincidir con γ_v en la intersección de sus dominios. Si además tomamos J como el intervalo máximo de definición, tenemos la unicidad de tal γ_v , la cual llamamos *geodésica maximal* con posición inicial p y velocidad inicial v .

Si M es una variedad riemanniana equipada con una conexión ∇ y $\gamma : J \rightarrow M$ es una curva suave, un campo vectorial V en $\mathfrak{X}(\gamma)$ se dice *paralelo a lo largo de γ* (con respecto a ∇) si D_tV es idénticamente nulo. Así que una geodésica es una curva cuyo campo vectorial velocidad es paralelo a lo largo de la curva. Dado t_0 en J y un vector tangente V_0 en $T_{\gamma(t_0)}M$, por el Teorema de existencia global y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, existe un único campo V paralelo a lo largo de γ tal que $V(t_0) = V_0$. Si t_1 es otro punto en J , tenemos definido un operador, llamado *transporte paralelo*, $P_{t_0,t_1} : T_{\gamma(t_0)}X \rightarrow T_{\gamma(t_1)}X$ que resulta un isomorfismo lineal y vale que

$$D_tV(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(P_{t_0,t}^{-1}V)(t) - V(t_0)}{t - t_0}$$

De manera que, efectivamente, una conexión nos permite vincular campos tangentes con el objetivo de obtener aceleraciones como cocientes incrementales de velocidades.

Desde que empezamos a hablar de conexiones, nunca entró en juego una métrica riemanniana. Supongamos ahora que M es una variedad riemanniana y nos preguntamos si existe alguna conexión que refleje la estructura riemanniana de M . Fundamentalmente, queremos que sus geodésicas sean localmente minimizantes.

Empecemos analizando el caso en que M es una subvariedad riemanniana de dimensión n de \mathbb{E}^m para algún $m \geq n$. (De manera que la métrica riemanniana de M es la restricción de la métrica euclídea ambiente). En tal caso, queremos que las geodésicas riemannianas en M sean las curvas suaves $\gamma : J \rightarrow M$ que tienen aceleración intrínseca nula o, equivalentemente, su aceleración es perpendicular a M . La interpretación mecánica de esta noción es la de una partícula cuyas condiciones de vínculo la confinan a M ; en ausencia de otras fuerzas y bajo condiciones iniciales en la posición y la velocidad, tal partícula se moverá sobre la correspondiente geodésica riemanniana a rapidez constante. De forma que este movimiento es la generalización curvada de un movimiento rectilíneo uniforme en el espacio euclídeo. Bajo esta definición la propiedad de ser geodésica riemanniana es intrínseca, esto es, invariante por isometrías

riemannianas y así es clara su naturaleza *geométrica*. La conexión en el espacio euclídeo ambiente \mathbb{E}^m bajo la cual las rectas son geodésicas es simplemente la dada por la fórmula $\nabla_V W = (VW^j)\partial_j$, esto es, la derivada direccional usual. Tenemos una conexión inducida en M que consiste en extender los campos de M a \mathbb{E}^m , calcular la derivada direccional allí y quedarnos con la restricción del resultado a M , la cual resulta independiente de las extensiones elegidas. Bajo esta conexión riemanniana inducida, las geodésicas riemannianas de M son las arriba descritas.

Notar que como consecuencia de la discusión anterior, si tenemos dos embeddings riemannianos distintos de una variedad $j_i : M \hookrightarrow \mathbb{E}^{m_i}$, con i en \mathbb{I}_2 , bajo cualquiera de las conexiones inducidas por el espacio euclídeo ambiente, las geodésicas riemannianas en M son las mismas. De hecho, las conexiones son iguales. Esto nos sugiere que debemos identificar qué propiedades naturales (esto es, invariantes por isometrías riemannianas) de esta conexión la caracterizan. Con ello tendríamos el problema resuelto para las variedades que se embeben en algún espacio euclídeo.

Si ahora M es una variedad riemanniana no necesariamente embebida en algún espacio euclídeo, nos preguntamos si tal embedding riemanniano existe. El siguiente célebre resultado nos dice que la respuesta es afirmativa. Así que todas las geodésicas riemannianas admiten la interpretación dada arriba puesto que todas las variedades riemannianas se realizan como subvariedad riemanniana de algún espacio euclídeo.

Teorema 1.32 (embedding de Nash). *Para toda variedad riemanniana M existe un número natural m y un embedding riemanniano $M \hookrightarrow \mathbb{E}^m$.*

La prueba original del Teorema 1.32 de embedding de Nash puede ser encontrada en [Nas56].

Finalmente, las propiedades que caracterizan a la conexión que estamos buscando están contenidas en el siguiente resultado de existencia y unicidad.

Lema 1.33 (fundamental de la geometría riemanniana). *Para toda variedad riemanniana (M, g) existe una única conexión ∇ que satisface las siguientes dos condiciones.*

1. Es compatible con g : Para todos los B, V y W en $\mathfrak{X}(M)$ es

$$\nabla_B g(V, W) = g(\nabla_B V, W) + g(V, \nabla_B W)$$

2. Es simétrica: Para todos los V y W en $\mathfrak{X}(X)$ es

$$\nabla_V W - \nabla_W V = [V, W]$$

Demostración. Notemos $\langle V|W \rangle = g(V, W)$ para todo V y W en $\mathfrak{X}(M)$. Suponiendo la existencia de tal conexión ∇ , aplicando los axiomas se llega a la fórmula

$$\langle \nabla_B V|W \rangle = \frac{1}{2} \left(B \langle V|W \rangle + W \langle B|V \rangle - V \langle W|B \rangle - \langle B|[V, W] \rangle + \langle V|[W, B] \rangle + \langle W|[B, V] \rangle \right)$$

que vale para cualesquiera B, V y W en $\mathfrak{X}(M)$. Como el lado derecho de la igualdad no depende de ∇ , se obtiene la unicidad. La unicidad permite reducir la cuestión de la existencia a una construcción local. Para probar la existencia local se aplica la fórmula anterior para el caso particular de campos coordenados, obteniéndose

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij})$$

para cualesquiera i, j y k en \mathbb{I}_n . (Donde (g^{kl}) denota la matriz inversa de (g_{ij}) .) Observando que tales símbolos de Christoffel definen localmente una conexión que es compatible con g y simétrica, se completa la prueba. \square

Sea $\varphi : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ una isometría riemanniana y denotemos ∇_i a la conexión riemanniana de (M_i, g_i) , para cada i en \mathbb{I}_2 . Definamos la *conexión pullback* $\varphi^*\nabla_2$ por la fórmula

$$(\varphi^*\nabla_2)_V W = \varphi_*^{-1}(\nabla_{2\varphi_*V}(\varphi_*W))$$

para todo V y W en $\mathfrak{X}(M_1)$. Resulta que la conexión *pullback* es compatible con g_1 y simétrica así que, por el Lema 1.33 fundamental de la geometría riemanniana, debe coincidir con la conexión riemanniana ∇_1 . Esto dice que la conexión riemanniana es natural y por lo tanto coincide con la métrica inducida como subvariedad del espacio euclídeo en tal caso.

Definición 1.34. Una geodésica riemanniana es una geodésica respecto de la conexión riemanniana.

En toda su generalidad, en principio no sabemos qué propiedades geométricas locales cumple una variedad riemanniana arbitraria. Esta es la primera dificultad a resolver antes de probar los resultados básicos. Una técnica efectiva para analizar fenómenos geométricos de dimensión arbitraria consiste en expresarlos en términos de las geodésicas involucradas, esto es, en términos de los elementos fundamentales unidimensionales. Los *entornos normales* son una generalización de las coordenadas esféricas del espacio euclídeo y su función es darnos cierto control a nivel local en términos de las geodésicas riemannianas que emanan de un punto dado.

Definición 1.35. Sea M una variedad riemanniana.

1. El *dominio de la exponencial* es el conjunto

$$\mathcal{E} := \{v \in TX \mid \gamma_v \text{ está definida en un intervalo que contiene al } [0, 1]\}$$

2. La *aplicación exponencial* es la función $\exp : v \in \mathcal{E} \mapsto \gamma_v(1) \in M$.
3. Para cada punto p en M , definimos $\exp_p := \exp|_{\mathcal{E}_p}$, donde $\mathcal{E}_p := \mathcal{E} \cap T_pM$. Frecuentemente omitimos el subíndice p en \exp_p si no da lugar a ambigüedad al detallar su dominio.

Resulta que \exp es una función suave y \mathcal{E} es un subconjunto abierto de TM así que en particular, para cada punto p en M , \exp_p es una función suave definida sobre el abierto \mathcal{E}_p de T_pM estrellado respecto del origen. A partir de una cuenta sencilla de la aceleración, se obtiene la igualdad $\gamma_v(t) = \exp(tv)$ para todo número real t tal que alguno de los dos miembros esté definido.

Para todo punto p en M existen un entorno abierto U de p en M y un entorno abierto V del origen en T_pM tales que $\exp : V \rightarrow U$ es un difeomorfismo. Tal U se llama entorno normal de p . Si V es una bola abierta $B_\varepsilon(0)$ entonces U se llama bola geodésica en M centrada en p de radio ε .

Definición 1.36. Sea M una variedad riemanniana. Un entorno abierto y no-vacío W en M se dice *uniformemente normal* si existe un número real positivo δ tal que para todo x está definida la bola geodésica de centro x y radio δ y ésta incluye a W .

Notar que en un entorno uniformemente normal cualquier par de puntos puede ser unido mediante una geodésica riemanniana en la variedad ambiente.

Proposición 1.37. Sean p un punto en una variedad riemanniana X y sea U un entorno abierto de p . Entonces existe un entorno uniformemente normal W incluido en U que contiene al punto p .

Corolario 1.38. Toda variedad riemanniana es un espacio métrico localmente geodésico.

Con la existencia de entornos normales uniformemente normales de la Proposición 1.37, podemos finalmente probar que todo camino localmente minimizante es una geodésica riemanniana, Lema 1.39, y que toda isometría métrica es una isometría riemanniana, Teorema 1.41. La prueba del Lema 1.39 emplea una idea geométrica fundamental, a saber, un *principio variacional*. Analíticamente, si tenemos una familia de trayectorias y un funcional (por ejemplo, la longitud) definido sobre ellas entonces la derivada de tal funcional debe ser nula sobre una trayectoria que lo minimize y su segunda derivada debe ser no-positiva. A la ecuación correspondiente al primer hecho se lo suele llamar *primera fórmula de variación* y a la correspondiente al segundo, *segunda fórmula de variación*. Geométricamente, a partir de trayectorias sobre las cuales la derivada del funcional no sea nula se pueden conseguir direcciones en las cuales deformarlas para obtener curvas sobre las cuales el valor del funcional sea más bajo. Estas son las ideas básicas y los detalles formales de la realización particular del principio variacional dependen de en qué contexto y con qué nivel de regularidad estemos trabajando.

Lema 1.39. Todo camino localmente minimizante (esto es, una geodésica local) en una variedad riemanniana es una geodésica riemanniana.

Demostración. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ un camino localmente minimizante sobre una variedad riemanniana M . Sin pérdida de generalidad supongamos que es minimizante.

La existencia de los entornos normales uniformemente normales implica que podemos cambiar γ por otro camino minimizante que sea suave a trozos. Sea $a = t_0 < t_1 \dots < t_k = b$ una partición del intervalo $[a, b]$ tal que la restricción de γ a cada subintervalo es suave.

Consideremos la homotopía a extremos fijos

$$H : (s, \ell) \in [a, b] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \mapsto \exp_{\gamma(s)}(\ell V(s))$$

bien definida para algún número real positivo ε , donde V es un campo vectorial suave salvo quizás donde γ no lo sea, a determinar. Diferenciando bajo el signo integral se obtiene la llamada primera fórmula de variación

$$\left. \frac{d}{d\ell} \right|_{\ell=0} L(H_\ell(s)) = - \int_a^b \langle V(s) | D_t \dot{\gamma}(s) \rangle ds - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V(t_i) | \Delta_i \dot{\gamma} \rangle$$

donde $\Delta_i \dot{\gamma} = \dot{\gamma}(t_i^+) - \dot{\gamma}(t_i^-) = \lim_{s \rightarrow 0} (\dot{\gamma}(t+s) - \dot{\gamma}(t-s))$ para todo i en \mathbb{I}_{k-1} , límite tomado en TM si se quiere. Sean i en \mathbb{I}_k y $\xi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave que es positiva sobre el intervalo (t_{i-1}, t_i) y nula fuera de él. Ahora, como γ es minimizante, su primera variación es nula y, poniendo $V(s) = \xi(s) D_t \dot{\gamma}(s)$ en la fórmula, obtenemos que

$$0 = - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \xi(s) |D_t \dot{\gamma}(s)|^2 ds$$

Luego, $D_t \dot{\gamma}(s) = 0$ para cada s en $[a, b] \setminus \{t_i\}_{i \in \mathbb{I}_{k-1}}$. Así que el primer término de la fórmula de la primera variación es nulo para cualquier V . Ahora, si para cada i en \mathbb{I}_{k-1} elegimos algún V tal que $V(t_i) = \Delta_i \dot{\gamma} = \dot{\gamma}(t_i^+) - \dot{\gamma}(t_i^-)$ y sea nulo sobre todo t_j con j en $\mathbb{I}_{k-1} \setminus \{i\}$, vemos que γ es suave en todo punto. Luego, la aceleración $D_t \dot{\gamma}$ de γ es nula en todo $[a, b]$ o, equivalentemente, γ es una geodésica riemanniana. \square

Corolario 1.40. *Toda variedad riemanniana es un espacio métrico localmente unívocamente geodésico.*

Teorema 1.41. *Una función $\varphi : M \rightarrow N$ entre variedades riemannianas es una isometría riemanniana si y solo si es una isometría de espacios métricos.*

Demostración. ([Hel78, Theorem 11.1]) Supongamos que $\varphi : M \rightarrow N$ es tal isometría de espacios métricos entre variedades riemannianas. Sea p un punto de M , llamemos $q := \varphi(p)$ y sea r un número real positivo tal que las bolas geodésicas $U := B_r(p)$ y $V := B_r(q)$ resulten entornos normales de p y q en M y N respectivamente. Por hipótesis, podemos restringir y correstringir obteniendo una biyección $\varphi : U \rightarrow V$. Sea v vector tangente en $T_p M$ no nulo y sea $\gamma_v : (-r/|v|, r/|v|) \rightarrow U$ la geodésica riemanniana en U máxima con posición inicial p y velocidad inicial v . Entonces, por hipótesis $\varphi \circ \gamma_v$ es un embedding isométrico y, por el Lema 1.39, debe ser una geodésica riemanniana. Llamemos $\varphi'(v)$ a su velocidad inicial.

De la manera descrita en el párrafo previo, completando su definición en el origen via la fórmula $\varphi'(0) = 0$, tenemos una función $\varphi' : T_p M \rightarrow T_q N$. Por construcción, se tiene que $|\varphi'(v)| = |v|$ y que $\varphi'(\lambda v) = \lambda \varphi'(v)$ para cualesquiera v en $T_p M$ y λ en \mathbb{R} . Notar que $\varphi = \exp_q \circ \varphi' \circ \exp_p^{-1}$ como funciones $U \rightarrow V$.

Para ver que φ' es una isometría, resta solamente ver que separa sumas, sin pérdida de generalidad, entre vectores linealmente independientes. Sean v y w vectores en $T_p M$ linealmente independientes. Del Teorema de Taylor se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|tv - tw|}{d(\gamma_v(t), \gamma_w(t))} = 1$$

(Ver detalles en [Hel78, Theorem 9.10]). Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{2g_p^M(v, w)}{|v||w|} &= \frac{|v|^2 + |w|^2}{|v||w|} - \frac{|v - w|^2}{|v||w|} \\ &= \frac{|v|^2 + |w|^2}{|v||w|} - \frac{|tv - tw|^2}{|tv||tw|} \\ &= \frac{|v|^2 + |w|^2}{|v||w|} - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|tv - tw|^2}{|tv||tw|} \\ &= \frac{|v|^2 + |w|^2}{|v||w|} - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(\gamma_v(t), \gamma_w(t))^2}{|tv||tw|} \end{aligned}$$

Ahora, todos los elementos involucrados en esta igualdad, salvo quizás $g_p^M(v, w)$, se preservan si cambiamos A y B por $\varphi'(v)$ y $\varphi'(w)$ respectivamente. Y, como vale la igualdad análoga haciendo estos reemplazos en ambos miembros, debe ser que $g_p^M(v, w) = g_q^N(\varphi'(v), \varphi'(w))$. De manera que φ' preserva ángulos. Así que si v y w son linealmente independientes, también lo son $\varphi'(v)$ y $\varphi'(w)$. Ahora, el vector suma $\varphi'(v) + \varphi'(w)$ está determinado por su módulo y los ángulos que forma con cada sumando. Así que $\varphi'(v + w) = \varphi'(v) + \varphi'(w)$, como se quería ver.

Luego, de la igualdad ya observada $\varphi = \exp_q \circ \varphi' \circ \exp_p^{-1}$, se sigue que $\varphi : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo cuya diferencial en p es φ' y ésta, como hemos visto, preserva la métrica riemanniana. Por arbitrariedad de p en M , la proposición sigue. \square

Notar que a partir del Teorema 1.41 se deduce inmediatamente su versión local.

Remarquemos que la demostración del Teorema 1.41 descansa esencialmente en el hecho de que podemos recuperar el ángulo α en $[0, \pi]$ (entre vectores no nulos, digamos) a partir de la métrica via el límite

$$\cos(\alpha) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|tv|^2 + |tw|^2 - d(\gamma_v(t), \gamma_w(t))^2}{2|tv||tw|}$$

Notar que, si para cada número real positivo t suficientemente chico, definimos α_t como el único número en $[0, \pi]$ tal que

$$\cos(\alpha_t) = \frac{|tv|^2 + |tw|^2 - d(\gamma_v(t), \gamma_w(t))^2}{2|tv||tw|},$$

entonces, por Teorema del coseno en \mathbb{E}^2 , α_t es el ángulo de un triángulo euclídeo de lados de longitudes $|tv|$, $|tw|$ y $d(\gamma_v(t), \gamma_w(t))$ en el vértice en el que inciden los primeros dos lados. Notar que $|tv|$ y $|tw|$ son las longitudes de las restricciones de γ_v y γ_w al intervalo $[0, t]$ o, en otras palabras, las distancias $d(p, \gamma_v(t))$ y $d(p, \gamma_w(t))$ con $p = \gamma_v(0) = \gamma_w(0)$, respectivamente. De manera que obtenemos el ángulo α como el límite $\lim_{t \rightarrow 0^+} \alpha_t$ de ángulos de triángulos euclídeos. Esto da una clave de cómo extender a espacios métricos arbitrarios la noción de ángulo entre dos caminos que emanan de un mismo punto.

Si p es un punto en un espacio métrico X y $\gamma_1 : [0, L_1] \rightarrow X$ y $\gamma_2 : [0, L_2] \rightarrow X$ son dos funciones *no necesariamente continuas* tales que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$, definimos el *ángulo superior de Alexandrov* entre γ_1 y γ_2 en p como el número en $[0, \pi]$ dado por el límite superior

$$\sphericalangle_p(\gamma_1, \gamma_2) := \limsup_{s, t \rightarrow 0^+} \alpha_{s, t},$$

de ángulos $\alpha_{s, t}$, con s en $[0, L_1]$ y t en $[0, L_2]$, de triángulos euclídeos de lados $d(p, \gamma_1(s))$, $d(p, \gamma_2(t))$ y $d(\gamma_1(s), \gamma_2(t))$ en el vértice en el que inciden los dos primeros lados.

Hagamos algunas observaciones. La elección del límite superior en lugar del límite asegura la existencia del ángulo y además una suerte de desigualdad triangular, lo cual no ocurriría si empleáramos el límite inferior, y esto permite darle una métrica al *espacio de direcciones*. Si el límite y no meramente el límite superior existe decimos que el ángulo existe *en sentido fuerte*. Aunque nos resulte interesante solamente el caso en que los caminos son continuos y más aún geodésicas, la definición es suficientemente robusta como para trabajar hasta con ausencia de continuidad. Si bien la noción de ángulo es importante en la geometría clásica y ayuda a visualizar lo que ocurre en los espacios métricos usando la intuición que viene del contexto riemanniano, en la inmensa mayoría de los casos su empleo puede ser reemplazado con el auxilio de espacios singulares (como los conos de la Definición 2.21) y expresarse todas las fórmulas en términos de las métricas involucradas. Finalmente, mencionamos que una demostración de que el ángulo de Alexandrov y el ángulo riemanniano coinciden el caso de las variedades riemannianas puede ser encontrada en [BH99, Corollary II 1.A7].

1.4 Poliedros

Empezaremos por los complejos simpliciales (métricos). Más adelante, daremos la definición más general de poliedro métrico y explicaremos un método de subdivisión que, dado un poliedro métrico, nos da un complejo simplicial isométrico.

En cuanto a los complejos simpliciales métricos, tenemos dos maneras equivalentes de obtenerlos. Una de ellas consiste en tomar realizaciones de complejos simpliciales abstractos y dotarlos de una métrica apropiada. La otra manera consiste en que las celdas vengan dotadas de métricas y pegar las celdas vía funciones de adjunción que respeten esa estructura métrica. Veremos ambos enfoques, comenzando por el segundo de ellos.

Definición 1.42 (Símplices geodésicos). Sean $m \leq n$ números naturales.

1. Un m -plano en M_κ^n es un subespacio isométrico a M_κ^m . Con las descripciones concretas que dimos de S^n y \mathbb{H}^n como subconjuntos de \mathbb{E}^{n+1} , se puede representar a tal m -plano como la intersección del espacio modelo con un subespacio vectorial de \mathbb{E}^{n+1} de dimensión $m + 1$. Con esta descripción se vuelve claro que un m -plano es una intersección finita de hiperplanos.
2. Decimos que $m + 1$ puntos en M_κ^n están en *posición general* si no están contenidos en ningún $(m - 1)$ -plano. Otra vez, con las descripciones concretas que dimos, esto significa simplemente que si vemos a los $m + 1$ puntos como vectores de \mathbb{E}^{n+1} resultan linealmente independientes.
3. Un m -símplex geodésico $S \subseteq M_\kappa^n$ es la cápsula convexa de $m + 1$ puntos en posición general, esto es, el menor subespacio convexo que los contiene (ver Definición 1.1); estos puntos son los *vértices* de S . Si κ es positivo agregamos la condición de que los vértices estén contenidos en una bola abierta de radio $D_\kappa/2$ (ver Definición 1.17). Notar que todo m -símplex es unívocamente geodésico. Notar también que está unívocamente definido el conjunto de vértices pues, en analogía con el caso euclídeo en que los vértices son los únicos puntos *extremales* (ver Definición 1.9), también en este caso más general un punto p del símplex es un vértice si y solo si cada vez que tomamos un segmento geodésico $[x, y]$ contenido en el símplex entonces vale que p está en el segmento si y solo si es uno de sus puntos extremos.
4. Una *cara* $T \subseteq S$ es la cápsula convexa de un subconjunto no vacío del conjunto de vértices de S ; si T está contenido propiamente en S entonces decimos que es una *cara propia*. De manera que una cara T de un m -símplex es un \tilde{n} -símplex con $\tilde{n} \leq m$.
5. El *interior* de S es el subconjunto de puntos de S que no está contenido en ninguna cara propia.

Definición 1.43 (M_κ -complejo simplicial). Sea $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de símplices geodésicos $S_\lambda \subseteq M_\kappa^{n_\lambda}$. Sean $X := \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ la unión disjunta, \sim una relación de equivalencia en X y $K := X / \sim$ el cociente. Sea $p : X \rightarrow K$ la proyección al cociente y definamos $p_\lambda : S_\lambda \rightarrow K$ como la restricción correspondiente de p . Decimos que K es un M_κ -complejo simplicial si se verifican las siguientes condiciones.

1. *Embedding*: Para todo λ en Λ , p_λ es inyectivo.
2. *Pegado simplicial isométrico*: Si $p_\lambda(S_\lambda) \cap p_\beta(S_\beta)$ es no vacío entonces existen caras $T_\lambda \subseteq S_\lambda$ y $T_\beta \subseteq S_\beta$ y una isometría $h_{\beta\lambda} : T_\lambda \rightarrow T_\beta$ tal que $p_\lambda(x) = p_\beta(y)$ si y solo si $y = h_{\beta\lambda}(x)$.

Las funciones p_λ y $h_{\beta\lambda}$ de la definición anterior pueden ser pensadas, en analogía con el caso de las variedades, como cartas y cambios de coordenadas, o restricciones de ellas, respectivamente. De hecho, en el caso de que el poliedro sea la triangulación de una variedad este es precisamente el caso, salvo por restringir los dominios de estas funciones para que sean abiertos y tomar coordenadas en el espacio modelo correspondiente.

Supongamos que K efectivamente es un M_κ -complejo simplicial. En tal caso, un subconjunto S de K es un m -simplex si $S = p_\lambda(T_\lambda)$ donde $T_\lambda \subseteq S_\lambda$ es una cara m -dimensional. Las caras de S son las imágenes de las caras de T_λ bajo p_λ . El interior de S es la imagen del interior de T_λ bajo p_λ . Definimos una métrica d_S sobre S como la única bajo la cual la restricción $p_\lambda : T_\lambda \rightarrow S_\lambda$ resulta ser una isometría. Dados dos puntos x y y en S , definimos el segmento $[x, y]$ en S como la imagen bajo p_λ del segmento geodésico $[p_\lambda^{-1}(x), p_\lambda^{-1}(y)]$ en T_λ . La longitud de tal segmento $[x, y]$ se define como $d_S(x, y)$.

El *soporte de un punto x en K* es el único simplex $\text{sop}(x)$ que contiene a x en su interior. El *star* (cerrado) $\text{St}(x)$ de x en K es la unión de los simpleses de K que contienen a x . El *star abierto* $\text{st}(x)$ de x en K es la unión de los interiores de tales simpleses. Notar que x está en $\text{st}(x)$ y que éste es un subconjunto de $\text{St}(x)$.

Un *morfismo* de M_κ -complejos simpliciales es una función $f : K_1 \rightarrow K_2$ entre dos M_κ -complejos simpliciales que manda cada simplex de K_1 a un simplex de K_2 isométricamente. Los M_κ -complejos simpliciales y sus morfismos forman una *categoría*. Una *isometría simplicial* es un isomorfismo categórico, esto es, un morfismo biyectivo. Generalmente, identificamos M_κ -complejos simpliciales salvo isometría simplicial.

Para dar una métrica a un M_κ -complejo simplicial una idea natural sería definir la distancia entre dos puntos como el ínfimo entre las longitudes de los caminos que los unen. Ahora, para calcular la longitud de un camino, simplemente medimos las longitudes en los finitos simpleses que toca y sumamos las cantidades. Como los simpleses se pegan isométricamente, no hay ambigüedad en este proceso de medida. Aunque esta idea esencialmente funciona, en el contexto de poliedros, resulta más práctico tomar el ínfimo no entre todos los caminos si no solamente entre aquellos que son concatenación de caminos que son lineales dentro de alguno de los simpleses. Si procedemos de esta manera, todos los axiomas de métrica se satisfacen automáticamente excepto quizás aquel que dice que la distancia entre dos puntos distintos debe ser positiva. Como vimos, esto mismo ocurre con las variedades, donde los entornos normales permiten concluir que efectivamente se trata de una métrica. Sin embargo, en el caso de poliedros esta conclusión no es cierta en general y, de hecho, es sencillo construir ejemplos donde no sea cierta: considerar el complejo que consiste en exactamente dos vértices unidos

por una sucesión de aristas cuya longitud tienda a 0. Una función d que cumple todos los axiomas de una métrica excepto quizás el antes mencionado es una *pseudométrica*. Veremos condiciones bastante generales bajo las cuales la pseudométrica resulta ser una métrica. Antes de ello, advirtamos que en algunos casos permitimos también que las métricas y pseudométricas tomen el valor $+\infty$.

Definición 1.44. Sea m en \mathbb{N}_0 . Una m -cuerda en K de x a y es una secuencia finita $\Sigma = (x_0, \dots, x_m)$ de puntos de K tales que $x = x_0, y = x_m$ y para cada $0 \leq i \leq m-1$ existe un símplex $S(i)$ de K que contiene a x_i y a x_{i+1} . Llamamos a m el *tamaño* de Σ , y definimos la *longitud* de Σ como

$$L(\Sigma) := \sum_{i=0}^{m-1} d_{S(i)}(x_i, x_{i+1})$$

Toda m -cuerda determina un camino en K , dado por la concatenación de los segmentos $[x_i, x_{i+1}]$ (geodésicos en $S(i)$). Denotamos a este camino por $P(\Sigma)$. Una *cuerda* es una m -cuerda para algún m .

La *pseudométrica intrínseca* sobre K está dada por

$$d(x, y) := \inf\{L(\Sigma) \mid \Sigma \text{ una cuerda de } x \text{ a } y\},$$

para cualesquiera x e y en K , adoptando la convención de que el ínfimo del conjunto vacío es $+\infty$.

La siguiente cantidad nos da un criterio bajo el cual la pseudométrica resulta ser una métrica.

Definición 1.45. Sea x en K . Definimos

$$\varepsilon(x) := \inf\{d_S(x, T) \mid S \text{ símplex de } K \text{ tal que } x \in S \text{ y } T \text{ cara de } S \text{ tal que } x \notin T\}.$$

Observación 1.46. *Notar que si tenemos dos puntos x e y en K tales que $d(x, y) < \varepsilon(x)$ entonces para todo símplex S de K que contenga a ambos puntos y para toda cara T de S que contenga a y se tiene que T también contiene a x . La demostración de la siguiente proposición consiste esencialmente en mostrar que se puede debilitar la hipótesis de esta observación de manera que, en principio, x no necesariamente esté en S .*

Proposición 1.47. *Sea K un M_κ -complejo simplicial tal que $\varepsilon(x) > 0$ para todo x en K . Entonces la pseudométrica intrínseca es una métrica y (K, d) es un espacio de longitud.*

Demostración. Si x e y son puntos en K a distancia menor que $\varepsilon(x)$ entonces existe una m -cuerda $\Sigma = (x_0, \dots, x_m)$ de x a y de longitud $L(\Sigma)$ menor que $\varepsilon(x)$. Ahora, si S es un símplex de K que contiene a y , podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $S = S(m-1)$, esto es, que x_{m-1} y x_m están en S . (Si no, repetimos y al final y agrandamos el tamaño de la cuerda en 1.)

Supongamos que $m \geq 2$. Por definición de cuerda, existen símlices $S(0)$ y $S(1)$ que contienen a x_0 y x_1 y a x_1 y x_2 , respectivamente. Como x_1 está en la intersección $S(0) \cap S(1)$, existe una cara común T de $S(0)$ y de $S(1)$ que contiene a x_1 . Ahora, como la distancia $d(x_0, x_1)$ es menor que $\varepsilon(x)$ y además $x_0 = x$, la Observación 1.46 anterior nos dice que x_0 está en T que es a su vez cara de $S(1)$. Así que en particular x_0 está en $S(1)$. Luego, podemos retirar x_1 de la cuerda obteniendo una $(m-1)$ -cuerda $\hat{\Sigma} = (x_0, x_2, \dots, x_m)$ de longitud $L(\hat{\Sigma}) \leq L(\Sigma)$. Iterando este proceso obtenemos que (x, y) es una cuerda y que x e y están en el símplex $S = S(m-1)$. Luego, $d_S(x, y) \leq L(\Sigma)$.

Hemos probado que todo símplex que contiene a y también contiene a x y que vale la igualdad $d(x, y) = d_S(x, y)$ para todo tal símplex S . En particular, $d(x, y)$ es positivo. Así que d es una métrica. Ahora, dado un camino entre dos puntos x e y en K se puede obtener un camino lineal a trozos que une a los dos puntos y es de longitud no mayor. Luego, (K, d) es un espacio de longitud. \square

El conjunto de clases de isometría de las caras de los símlices geodésicos $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de un M_κ -complejo simplicial K se denota $\text{Shapes}(K)$. El siguiente resultado será aplicado especialmente en el Ejemplo 1.58.

Teorema 1.48 (Bridson). *Sea K un M_κ -complejo simplicial. Si $\text{Shapes}(K)$ es finito, entonces (K, d) es un espacio de longitud completo. Si además K es conexo entonces K es geodésico.*

Una prueba del Teorema 1.48 puede encontrarse en [BH99, I 7.19].

Antes de dar la definición general de complejo, presentamos brevemente una familia de ejemplos de poliedros métricos más regulares que los simpliciales: los complejos *cúbicos*.

Llamamos $I^n = [0, 1]^n$ al n -cubo unitario, adoptando la convención de que I^0 consiste en exactamente un punto. Las caras del 1-cubo $[0, 1]$ son $\{0\}$, $\{1\}$ y $[0, 1]$; la última de ellas de dimensión 1 y las dos primeras de dimensión 0. Una *cara* S de I^n es un producto $S = S_1 \times \dots \times S_n$ de caras S_i de I ; la dimensión de S es la suma de las dimensiones de las caras S_i . Notar que cada cara k -dimensional es isométrica a I^k .

Los *complejos cúbicos* se definen análogamente a los simpliciales pero usando *cubos* como celdas en lugar de símlices. Las definiciones básicas en torno a estos complejos son completamente análogas a las correspondientes para el caso simplicial y por lo tanto las omitimos. Sin embargo, hay un hecho importante que los diferencia: A diferencia de lo que ocurre con los complejos simpliciales, la pseudométrica definida sobre un complejo cúbico K siempre es una métrica pues $\varepsilon(x)$, definido análogamente que en el caso simplicial (ver Definición 1.45), resulta positivo para todo x en K .

Finalmente, consideramos el caso general.

Definición 1.49. Sea κ un número real.

1. Una *celda poliedral convexa* $C \subseteq M_\kappa^n$ es la cápsula convexa de un conjunto finito de puntos $P \subseteq M_\kappa^n$, esto es, C es el menor subespacio convexo que contiene a P . Si

κ es positivo agregamos la condición adicional de que P , o equivalentemente C , esté incluido en una bola abierta de radio $D_\kappa/2$. La *dimensión* de C es el menor de los m tales que C está en algún m -plano. El interior de C es el interior de C relativo al k -plano que contiene a C , donde k es la dimensión de C .

2. Sea H un hiperplano en M_κ^n . Si C toca a H y está a un lado de él, decimos que $F = H \cap C$ es una *cara* de C . Si F no es todo C , decimos que es una *cara propia*. Toda cara es una celda poliedral convexa y por lo tanto tiene una dimensión y un interior. Las caras de dimensión 0 de C son sus *vértices*. El *soprote* $\text{sop}(x)$ de un punto x en C es la única cara de C que tiene a x en su interior.

Notar que esencialmente la diferencia entre una celda poliedral convexa y un símplex geodésico está en la restricción de que la cantidad de vértices de un símplex geodésico es a lo sumo $n + 1$, donde n es la dimensión del espacio modelo ambiente M_κ^n . Por ejemplo, un cuadrado es una celda poliedral convexa que no es un símplex.

El siguiente resultado nos permite pasar de la geometría a la combinatoria.

Proposición 1.50. *Sea $C \subseteq M_\kappa^n$ una κ -celda convexa.*

1. *Toda cara F de C es una celda M_κ -poliedral convexa. Si C es la cápsula convexa de un conjunto finito P entonces F es la cápsula convexa de un subconjunto de P .*
2. *La intersección de cualesquiera dos caras de C es una cara de C .*
3. *C tiene una cantidad finita de caras.*
4. *C es la cápsula convexa de su conjunto de vértices.*
5. *Si C es la cápsula convexa de un conjunto finito P , entonces existe un único subconjunto mínimo de P tal que su cápsula convexa es C y éste coincide con el conjunto de vértices de C . En particular, los vértices de una cara de C son vértices de C .*
6. *Si $f : C_1 \rightarrow C_2$ es una isometría entre C y otro subespacio $C_1 \subseteq M_\kappa^n$, entonces C_1 es una celda M_κ -poliedral convexa y f induce una biyección entre los conjuntos de caras que respeta inclusiones, esto es, un isomorfismo de posets.*

Demostración. 1. Supongamos que $C \subseteq M_\kappa^n$ es la cápsula convexa de un conjunto finito P y F es una cara de C , que se obtiene como la intersección de C con el hiperplano H de manera que C está contenido en uno de los dos semiespacios cerrados determinados por H . A este semiespacio cerrado lo llamamos H^+ y al semiespacio abierto lo denotamos $\mathring{H}^+ = H^+ \setminus H$. De la descripción de los hiperplanos y de las geodésicas como intersección del espacio modelo con subespacios vectoriales (de la dimensión apropiada) del espacio euclídeo ambiente se sigue que \mathring{H}^+ es convexo. Ahora, como C es la cápsula convexa de P , deducimos que

$P \cap F = P \cap H$ es no vacío. Finalmente, si W es un subespacio convexo que contiene a $P \cap H$ y que está contenido en H , entonces $Y = W \cup \overset{\circ}{H}^+$ contiene a P y, otra vez por la descripción de geodésicas e hiperplanos, es convexo. Luego, Y contiene a C . Ahora, como $W = Y \cap H$, concluimos que W contiene a $C \cap H$.

Hemos probado que todo convexo de H que contiene a $P \cap H$ contiene a $F = C \cap H$ y, como tanto F como H son convexos, esto significa que F es la cápsula convexa de $P \cap H$.

2. Se reduce al caso eucídeo por la descripción de los hiperplanos y las geodésicas. Si $C \subseteq \mathbb{E}^n$ es una celda convexa y F_1 y F_2 son caras de C esto significa que existen H_1 y H_2 hiperplanos de \mathbb{E}^n tales que, para todo i en $\{1, 2\}$, $C \cap H_i = F_i$ y C está contenido a un lado de los dos semiespacios determinados por H_i . Equivalentemente, para cada i existe un funcional lineal $\zeta_i : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ no nulo, que tiene a H_i como núcleo y tal que su restricción $\zeta_i|_C$ es no-negativo. Consideremos el funcional $\zeta_3 = \zeta_1 + \zeta_2$ y llamemos H_3 a su núcleo. Si ζ_3 es nulo, entonces $F_1 = F_2 = C$ y no hay nada que probar. Supongamos que ζ_3 es no nulo, de manera que H_3 es un hiperplano. Tenemos que ζ_3 se anula sobre $F_3 = F_1 \cap F_2$ y que su restricción $\zeta_3|_C$ es no-negativo. Luego, F_3 se obtiene como la intersección $C \cap H_3$ y C está contenido en uno de los semiespacios determinados por H_3 . La proposición sigue.
3. Se sigue del primer inciso.
4. Por inducción en la dimensión de las caras.
5. Por inducción en la dimensión de las caras.
6. Por Proposición 1.23, existe una isometría ψ de M_κ^n que extiende a f . Como toda isometría manda subespacios convexos en subespacios convexos respetando inclusiones, preserva cápsulas convexas. Así que C_1 es una celda M_κ -poliedral convexa y el resto de la proposición sigue.

□

Definición 1.51. Sea $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de celdas M_κ -poliedrales convexas. Sean $X = \sqcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ su unión disjunta, \sim una relación de equivalencia en X y $K = X / \sim$ el cociente. Consideremos $p : X \rightarrow K$ la proyección al cociente y llamemos $p_\lambda : C_\lambda \rightarrow K$ a la restricción correspondiente. Decimos que K es un M_κ -complejo poliedral si cumple las siguientes condiciones.

1. *Pegado por el borde:* Para todo λ en Λ , la restricción de p_λ al interior de C_λ es inyectiva;
2. *Pegado combinatorio isométrico:* para cualesquiera λ_1 y λ_2 en Λ , x_1 en C_{λ_1} y x_2 en C_{λ_2} tales que $p_{\lambda_1}(x_1) = p_{\lambda_2}(x_2)$ existe una isometría $h : \text{sop}(x_1) \rightarrow \text{sop}(x_2)$ tal que $p_{\lambda_1}(y) = p_{\lambda_2}(h(y))$ para todo y en $\text{sop}(x_1)$.

Las definiciones básicas (*celdas*, *stars*, *links* y la cantidad $\varepsilon(x)$) en torno a los M_κ -complejos poliedrales son completamente análogas a las correspondientes para el caso simplicial y por lo tanto las omitimos. La pseudométrica se define usando caminos geodésicos a trozos y vale para los complejos poliedrales el criterio análogo al de la Proposición 1.47. Un *morfismo* de M_κ -complejos poliedrales es una función $f : K_1 \rightarrow K_2$ entre dos M_κ -complejos poliedrales que manda cada celda de K_1 a una celda de K_2 isométricamente. Los M_κ -complejos poliedrales y sus morfismos forman una *categoría*. Una *isometría poliedral* es un isomorfismo categórico, esto es, un morfismo biyectivo. Generalmente, identificamos poliedros salvo isometría poliedral.

Remarquemos en qué puntos concretos los complejos poliedrales son más generales que los simpliciales. En primer lugar, las celdas poliedrales convexas son más generales que los símplexes geodésicos. En segundo lugar, la primera condición de la Definición 1.51 de complejo poliedral admite que se identifiquen puntos de una misma celda, lo cual prohíbe la primera condición de la Definición 1.43 de complejo simplicial. Por ejemplo, de acuerdo a la primera podemos obtener un círculo identificando los dos extremos de un intervalo lo cual está prohibido por la segunda. En tercer y último lugar, la segunda condición de la Definición 1.51 de complejo poliedral admite que dos celdas se intersequen en más de una cara (que no se contengan entre sí), lo cual prohíbe la segunda condición de la Definición 1.43 de complejo simplicial. Por ejemplo, de acuerdo a la primera podemos identificar los vértices de dos intervalos para obtener un círculo, lo cual está prohibido por la segunda.

Observación 1.52. *Sea K un M_κ -complejo poliedral. Entonces, por un lado, K es un M_κ -complejo simplicial si y solo si satisface las siguientes condiciones.*

1. *Para todo λ en Λ , la celda C_λ es un símplex geodésico.*
2. *Para todo λ en Λ , la función p_λ es inyectiva.*
3. *La intersección de cualesquiera dos celdas en K es o bien vacío o bien exactamente una cara.*

Por otro lado, K es un M_κ -complejo cúbico si y solo si satisface las siguientes condiciones.

1. *Para todo λ en Λ , la celda C_λ es isométrica a un cubo I^{n_λ} .*
2. *Para todo λ en Λ , la función p_λ es inyectiva.*
3. *La intersección de cualesquiera dos celdas en K es o bien vacío o bien exactamente una cara.*

Los complejos *cubados*, llamados también *cuadrados* en el caso 2-dimensional, son aquellos que tienen cubos como celdas pero no necesariamente cumplen las restantes propiedades listadas en la Observación 1.52 anterior. Un ejemplo de complejo cubado

que no es cúbico lo da la representación usual del toro como cociente del cuadrado I^2 , al igual que sus análogos para dimensiones mayores.

A continuación describimos un proceso de subdivisión de un complejo que aplicado dos veces nos devuelve un complejo simplicial isométrico. De hecho, la segunda subdivisión resulta ser un *functor* desde la categoría de M_κ -complejos poliedrales en la categoría de M_κ -complejos simpliciales. Es una generalización al contexto métrico del proceso de subdivisión baricéntrica abstracta usual.

Comencemos describiendo la subdivisión baricéntrica de las celdas. Sean κ un número real y n un número natural mayor o igual que 2 y consideremos el espacio modelo M_κ^n como subconjunto del espacio euclídeo \mathbb{E}^{n+1} . En el caso κ nulo, identificamos $M_0^n = \mathbb{E}^n$ con el hiperplano en \mathbb{E}^{n+1} formado por los puntos $v = (x_0, \dots, x_n)$ con $\sum_{i=0}^n x_i = 1$. Dado un subconjunto finito $\{v_0, \dots, v_m\}$ en M_κ^n consideramos su *cápsula convexa euclídea*

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^m t_i v_i \in \mathbb{E}^{n+1} \mid t_i \in [0, 1] \text{ para todo } i, \sum_{i=1}^m t_i = 1 \right\}$$

Dado que, cualquiera sea κ , toda recta de \mathbb{E}^{n+1} que pasa por el origen interseca a M_κ^n en a lo sumo un punto (ver la definición de P que sigue), podemos proyectar C radialmente sobre M_κ^n . Llamemos $P : C \rightarrow M_\kappa^n$ a esta proyección. En el caso κ nulo, P es simplemente la inclusión; en el caso κ positivo $P(x) = x/(x|x)^{\frac{1}{2}}$; y, en el caso κ negativo, $P(x) = -x/\langle x|x \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Dado que, cualquiera sea κ , los segmentos geodésicos de M_κ^n se obtienen a partir de la intersección de M_κ^n con algún plano del espacio euclídeo ambiente \mathbb{E}^{n+1} , se sigue que la imagen de P es la *cápsula convexa* de $\{v_1, \dots, v_m\}$ en M_κ^n . Incorporamos la notación $\sum_{i=1}^m \bar{t}_i v_i = P(\sum_{i=1}^m t_i v_i)$ y decimos que (t_0, \dots, t_n) son las *coordenadas baricéntricas* respecto de (v_0, \dots, v_n) del punto $\sum_{i=1}^m \bar{t}_i v_i$.

Definimos el *baricentro* de una celda poliedral convexa C como el punto $b_C = \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \bar{t}_i v_i$, donde $\{v_1, \dots, v_m\}$ es el conjunto de vértices de C . Notar que, cualquiera sea κ , el baricentro b_C de C está en el interior de C pues está en la cápsula convexa del conjunto formado por sus vértices y no está en la cápsula convexa de ningún subconjunto propio de éste. Por otro lado, el último inciso de la Proposición 1.50 nos dice que toda isometría de C induce un isomorfismo de posets sobre su posets de caras y por lo tanto fija al subconjunto de vértices, que son exactamente las caras minimales. Además, por Proposición 1.23, toda tal isometría se extiende a una isometría de M_κ^n y ésta, por el cálculo del grupo de isometrías de los espacios modelo en el Teorema 1.26, se extiende a una transformación lineal del espacio ambiente \mathbb{E}^{n+1} , en todos los casos. Repasando la definición de b_C en cada uno de los casos, vemos que queda fijo por tal extensión y luego por la isometría de C original. El mismo razonamiento prueba que toda tal isometría preserva coordenadas baricéntricas.

La *primera subdivisión baricéntrica* de C , denotada C' , es el M_κ -complejo simplicial definido como sigue. Hay exactamente un *símplex geodésico* en C' por cada cadena

$F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_k$ de caras de C ; este simplex es la cápsula convexa de los baricentros de las F_i . Notar que la intersección de cualquier par de tales simpleses de C' es un simplex de C' . La aplicación natural desde la unión disjunta de tales simpleses a C dota a C de una estructura de M_κ -complejo simplicial. Notar que toda isometría de C induce una isometría simplicial de C' .

El siguiente resultado nos dice que el proceso de subdivisión de las celdas de un complejo es compatible y nos permite extender el proceso de subdivisión a los complejos.

Proposición 1.53. *Sea K un M_κ -complejo poliedral cuya estructura viene dada por $p : \sqcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \rightarrow K$.*

1. *Para todo λ en Λ , la restricción de p_λ a cada simplex de la subdivisión baricéntrica C'_λ es inyectiva.*
2. *Sean λ_1 y λ_2 en Λ y sean S_1 y S_2 simpleses de C'_{λ_1} y C'_{λ_2} , respectivamente, y supongamos que p_{λ_1} y p_{λ_2} son inyectivas. Si $\{x \in S_1 \mid p_{\lambda_1}(x) \in p_{\lambda_2}(S_2)\}$ es no vacío, entonces es una cara de S_1 .*

Sea K un M_κ -complejo poliedral cuya estructura viene dada por $p : \sqcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \rightarrow K$. Para cada celda C , indexamos los simpleses de su primera subdivisión baricéntrica C'_λ por el conjunto I_λ de manera que la estructura de M_κ -complejo simplicial está dada por $\sqcup_{i \in I_\lambda} S_i \rightarrow C'_\lambda$. Definiendo $\Lambda' = \sqcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ y componiendo las dos estructuras obtenemos una proyección $p' : \sqcup_{i \in \Lambda'} S_i \rightarrow K$. Sea K' el cociente de $\sqcup_{i \in \Lambda'} S_i$ por la relación de equivalencia \sim tal que $x \sim y$ si y solo si $p'(x) = p'(y)$. Llamamos a K' la *primera subdivisión baricéntrica* de K y tenemos una identificación natural $\Phi_K : K \rightarrow K'$, dada por la propiedad universal del cociente. Resulta que Φ_K es una isometría, la restricción de p' a cada S_i es inyectiva y que K' tiene estructura de M_κ -complejo poliedral. Sin embargo, K' puede no ser simplicial pues no necesariamente la intersección de dos de sus simpleses es o bien vacío o bien una cara sino que en general es una unión de simpleses. Definimos la *segunda subdivisión baricéntrica* de K como la primera subdivisión baricéntrica de K' y la denotamos K'' . Resulta que K'' , además de cumplir las propiedades antes mencionadas para K' , es un M_κ -complejo simplicial.

El siguiente resultado se obtiene como corolario del Teorema 1.48 aplicando la segunda subdivisión baricéntrica.

Teorema 1.54 (Bridson). *Sea K un M_κ -complejo poliedral. Si $\text{Shapes}(K)$ es finito, entonces K es un espacio de longitud completo. Si además K es conexo, entonces es un espacio geodésico.*

Para finalizar, veamos cómo *metrizar* un complejo simplicial abstracto. Pasando por la segunda subdivisión baricéntrica (abstracta), obtenemos también una manera de metrizar CW-complejos combinatorios. A nivel topológico, en general dotamos a la realización geométrica de un CW-complejo con la topología débil respecto de las funciones características de las celdas. Veremos que, en nuestro caso, no siempre coincide con la topología inducida por la métrica.

Definición 1.55. Un *complejo simplicial (abstracto)* K consiste en un conjunto no vacío V , cuyos elementos se llaman *vértices* de K , y un conjunto \mathcal{S} , cuyos elementos se llaman *símplices* de K , formado por subconjuntos no vacíos de V tales que satisfacen las siguientes condiciones.

1. Para todo v en V , $\{v\}$ está en \mathcal{S} .
2. Si S está en \mathcal{S} y T es un subconjunto no vacío de S , entonces T está en \mathcal{S} .

La *realización de K* es el conjunto $|K|$ definido como sigue. Sea W un espacio vectorial con base V dotado del único producto interno que hace de V una base ortonormal. Sea S un símplex de K y sean v_0, \dots, v_m sus vértices. La realización geométrica de S es el subconjunto $|S|$ de W formado por todos los puntos que se escriben como combinación convexa de los vértices de S , esto es, por los puntos $x = \sum_{i=0}^m t_i v_i$ con t_i en $[0, 1]$ para todo i y $\sum_{i=0}^m t_i = 1$. Como conjunto $|K|$ es la unión de las realizaciones geométricas $|S|$ de los símplexes S de K . Sus puntos se escriben en la notación $\sum_{v \in V} t_v v$ de manera que se cumplen las siguientes condiciones.

1. Para todo v , t_v está en $[0, 1]$.
2. El soporte del punto x , definido por $\text{sop}(x) := \{v \in V \mid t_v \neq 0\}$ está en \mathcal{S} , esto es, forma un símplex de K . De manera que la suma que describe a x tiene soporte finito así que es efectivamente una suma.
3. $\sum_{v \in V} t_v = 1$. Notar que, por la condición anterior, esta suma también tiene soporte finito.

Las coordenadas $\{t_v\}_{v \in V}$ se llaman *coordenadas baricéntricas de x* , y están unívocamente determinadas por x . Frecuentemente identificamos a K con su realización $|K|$ y a cada símplex S con $|S|$.

Existen dos topologías naturales sobre, el por ahora conjunto, $|K|$. La primera de ellas es la *topología débil*, determinada por la propiedad de que un subconjunto de $|K|$ es cerrado si y solo si lo es su intersección con cada uno de los símplexes de $|K|$. La segunda es la *topología métrica*, que es la inducida por la *métrica de coordenadas baricéntricas* la cual consiste simplemente en la restricción a $|K|$ de la métrica del espacio vectorial ambiente W . Más concretamente, la distancia entre $x = \sum_{v \in V} t_v v$ e $y = \sum_{v \in V} u_v v$ es igual a $\sqrt{\sum_{v \in V} (t_v - u_v)^2}$.

La topología débil siempre es más fina que la topología métrica y, como ésta es Hausdorff, ambas lo son. Frecuentemente, notamos $|K|$ al considerar la topología débil y $|K|_d$ al considerar la topología métrica. Tenemos una caracterización muy precisa de las condiciones bajo las cuales ambas topologías coinciden.

Proposición 1.56. *Sea K un complejo simplicial. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. K es localmente finito, esto es, cada uno de sus vértices está en finitos simplices.
2. $|K|$ es localmente compacto.
3. La identidad $|K|_d \rightarrow |K|$ es un homeomorfismo.
4. La identidad $|K|_d \rightarrow |K|$ es continua.
5. $|K|$ es metrizable.
6. $|K|$ cumple el primer axioma de numerabilidad, esto es, cada uno de sus puntos admite una base numerable de entornos.

Una prueba de la Proposición 1.56 puede encontrarse en [Spa66, Theorem 3.2.8]. De cualquier manera, [Dow52, 14-15] nos dice que la identidad $|K| \rightarrow |K|_d$ es una *equivalencia homotópica* así que, en cualquier caso, ambos espacios comparten los mismos *invariantes homotópicos* y, en particular, $|K|$ y $|K|_d$ tienen el mismo *grupo(ide) fundamental*. Este hecho será aplicado en el Ejemplo 1.58.

Cada M_κ -complejo simplicial K_g , tiene asociado un complejo simplicial abstracto K_a cuyo conjunto de vértices es el conjunto de vértices de K_g y tal que un conjunto no vacío de vértices S es un simplex de K_a si y solo si es el conjunto de vértices de un simplex geodésico de K_g . Hay una única biyección $|K_a|_d \rightarrow K_g$ que es la identidad sobre el conjunto de vértices y que resulta ser *afín*, esto es, preserva coordenadas baricéntricas sobre cada simplex. Si $\varepsilon(x)$ es positivo para todo x en K_g , de manera que la pseudométrica es en realidad una métrica, tal biyección resulta ser un homeomorfismo.

En la otra dirección, podemos metrizar un complejo simplicial abstracto, obteniendo la siguiente definición alternativa a la dada en la Definición 1.43.

Definición 1.57 (Alternativa de M_κ -complejo simplicial). Sea κ un número real. Un M_κ -complejo simplicial consiste en la siguiente información.

1. Un complejo simplicial abstracto K .
2. Un conjunto $\text{Shapes}(K)$ de simplices geodésicos $\bar{S}_i \subseteq M_\kappa^{m_i}$, no isométricos dos a dos.
3. Para cada simplex S de K , un isomorfismo afín $f_S : \bar{S} \rightarrow |S|$, donde \bar{S} está en $\text{Shapes}(K)$, de manera que: si T es una cara de S entonces $f_S^{-1} \circ f_T$ es una isometría de \bar{T} sobre una cara de \bar{S} .

Notar que no siempre la realización geométrica $|K|_d$ puede ser obtenida de esta forma. Por ejemplo, si identificamos sendos extremos de dos intervalos de longitud 1 obtendremos un complejo K_g que es isométrico a un intervalo de longitud 2 de acuerdo a la Definición 1.57. Sin embargo, el diámetro de la realización $|K_a|_d$ del complejo simplicial abstracto subyacente K_a es $\sqrt{2}$ y no 2. Un M_κ -complejo poliedral, que resulte

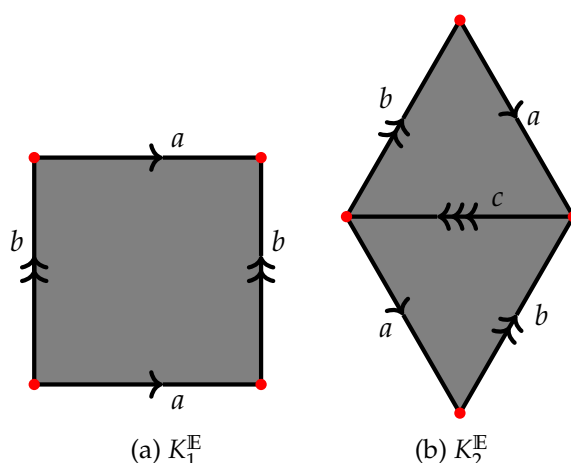


Figura 1.4: Representación plana del complejo euclídeo K_i^E asociado a la presentación \mathcal{P}_i .

métrico, siempre es un *espacio de longitud* (ver Definición 1.12) pero la realización de un complejo simplicial no necesariamente lo es. Aunque sí es cierto que una es la métrica de longitud inducida por la otra.

Ejemplo 1.58. Es usual emplear (realizaciones de) complejos simpliciales abstractos, o más generalmente CW-complejos combinatorios, para codificar topológico-geométricamente objetos de naturaleza combinatorio-algebraica. La siguiente construcción es un ejemplo importante de este método.

Sea Γ un grupo dado por una presentación $\mathcal{P} = \langle \mathcal{A} | \mathcal{R} \rangle$ no necesariamente finita. El Teorema de van Kampen nos permite construir un poliedro que sirva de modelo para esta presentación y, en particular, que tenga grupo fundamental Γ . El *2-complejo* $K_{\mathcal{P}}$ asociado a la presentación \mathcal{P} es el CW-complejo combinatorio que tiene una única 0-celda, una 1-celda por cada generador y una 2-celda por cada relación adjuntada de acuerdo a la relación. (Los detalles de esta construcción, con énfasis en su aspecto combinatorio, pueden encontrarse en [HAMS93, I 1.3/2.3].) Una manera estándar de metrizar $K_{\mathcal{P}}$ consiste en darle longitud igual a 1 a cada 1-celda y darle a cada 2-celda la métrica de un polígono euclídeo. Obtenemos así un M_0 -complejo poliedral que se denota $K_{\mathcal{P}}^E$.

Un problema que no suele ser mencionado en la literatura consiste en que no todas las relaciones pueden ser modeladas así; todo celda poliedral convexa de dimensión 2 en el plano euclídeo \mathbb{E}^2 tiene por lo menos 3 aristas (equivalentemente, vértices) así que las 2-celdas correspondientes a relaciones de longitud 1 y 2 no pueden ser modeladas de esta forma. Una posible solución consiste en modificar la presentación de la manera siguiente: elegimos un generador a en \mathcal{A} y alargamos las relaciones de longitud a lo sumo 2 agregando un factor aa^{-1} al final. Otra solución posible sería admitir celdas métricas más generales que las convexas; la discusión subsiguiente a la Proposición 2.4

da una motivación de por qué no seguimos ese camino. En ocasiones no es necesario trabajar con este complejo a nivel métrico y, en tal caso, se permite adjuntar 2-celdas cuya estructura combinatoria tenga 1 o 2 aristas.

Consideremos las presentaciones $\mathcal{P}_1 = \langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle$ y $\mathcal{P}_2 = \langle a, b, c | abc, bac \rangle$ del grupo $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Los complejos $K_1^{\mathbb{E}} = K_{\mathcal{P}_1}^{\mathbb{E}}$ y $K_2^{\mathbb{E}} = K_{\mathcal{P}_2}^{\mathbb{E}}$ son toros a nivel topológico (esto es, salvo homeomorfismo) y nos preguntamos si son isométricos entre sí. La respuesta es negativa: Como muestra la Figura 1.4, $K_1^{\mathbb{E}}$ y $E_2^{\mathbb{E}}$, vistos como superficies tienen distinto área, el primero tiene área igual a 1 y el segundo igual a $\sqrt{3}$.

En este ejemplo particular pudimos aplicar la definición de área para superficies de manera eventual. Más adelante, en la Sección 3.3 del Capítulo 3, veremos nociones de área más generales sobre espacios métricos arbitrarios.

1.5 Geometría métrica

El objeto de estudio de la *geometría métrica* lo constituyen los *espacios de longitud*. Familias de ejemplos importantes, no necesariamente disjuntas, son: las variedades riemannianas (o finslerianas), los poliedros, los espacios normados y los grafos de Cayley dotados de una métrica de la palabra. Las técnicas con las que se estudian generalmente consisten en argumentos geométricos que no usan mucha más maquinaria que la misma métrica. Desde un punto de vista filosófico, esto trae las ventajas de, por un lado, amplia generalidad y dominio de aplicación de las técnicas y, por otro lado, mayor entendimiento y mejor visualización de las ideas geométricas.

En las secciones precedentes hemos visto las familias de ejemplos más importantes y en esta sección completamos nuestro estudio incorporando algunas definiciones abstractas que se obtienen naturalmente a partir de éstos, algo de lenguaje y algunos resultados básicos. Seguimos mayormente la excelente introducción [BBI01]; una referencia fundacional importante y considerablemente más avanzada es [Gro07], donde se estudian invariantes métricos en el contexto riemanniano.

A partir de una métrica d , podemos medir longitudes de caminos y a partir de ellas conseguir una métrica intrínseca \hat{d} , no necesariamente finita, cuya topología inducida es más fina que la inducida por la métrica de partida d y tal que las longitudes de los caminos medidas respecto de las métricas d y \hat{d} coinciden. Desde el punto de vista de la geometría métrica, donde las métricas son intrínsecas, pareciera que la métrica es una noción secundaria que se deriva de la noción más primaria de longitud de caminos. La siguiente definición es una manera de capturar esta idea.

Definición 1.59. Una *estructura de longitud* sobre un espacio topológico Hausdorff X es un par $(\mathcal{C}, \mathcal{L})$, donde \mathcal{C} es una familia de caminos en X , los cuales son llamados *caminos admisibles*, y \mathcal{L} es una función $\mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty]$, a la cual llamamos *longitud de camino*, que satisface los siguientes axiomas.

1. La familia \mathcal{C} es cerrada por restricciones. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ está en \mathcal{C} y $[c, d] \subseteq [a, b]$ es no vacío entonces $\gamma|_{[c, d]}$ está en \mathcal{C} .
2. La familia \mathcal{C} es cerrada por concatenaciones.
3. La familia \mathcal{C} es cerrada por reparametrizaciones lineales.
4. La función \mathcal{L} es aditiva $\mathcal{L}(\gamma * \eta) = \mathcal{L}(\gamma) + \mathcal{L}(\eta)$ para cualesquiera γ y η en \mathcal{C} o, equivalentemente, $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\gamma|_{[a, c]}) + \mathcal{L}(\gamma|_{[c, b]})$ para cualesquiera $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ en \mathcal{C} y c en $[a, b]$.
5. Para toda $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ en \mathcal{C} de longitud finita, la función $t \in [a, b] \mapsto \mathcal{L}(\gamma|_{[a, t]}) \in [0, +\infty)$ es continua.
6. La longitud es invariante por reparametrizaciones lineales.
7. Compatibilidad con la topología: Para todo x en X existe un entorno abierto U de x tal que el siguiente ínfimo

$$\inf\{\mathcal{L}(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}, x \in \text{im}(\gamma) \not\subseteq U\}$$

es positivo.

Definición 1.60. Dada una estructura de longitud $(\mathcal{C}, \mathcal{L})$ sobre un espacio topológico Hausdorff X , definimos una relación de equivalencia \sim sobre X tal que para todos los x e y en X se tiene que $x \sim y$ si y solo si existe un camino admisible de x a y de longitud finita. Llamamos a las clases de equivalencia bajo esta relación *componentes de accesibilidad* respecto de $(\mathcal{C}, \mathcal{L})$.

Proposición 1.61. Sean X un espacio topológico Hausdorff y $(\mathcal{C}, \mathcal{L})$ una estructura de longitud sobre X . Adoptando la convención $\inf \emptyset = +\infty$, se tiene que la siguiente función define una métrica, eventualmente infinita, sobre X .

$$d_L : (x, y) \in X \times X \mapsto \inf\{\mathcal{L}(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}, x \in \text{im}(\gamma) \ni y\} \in [0, +\infty]$$

La topología inducida por d es más fina que la topología de partida sobre X , en particular los caminos de \mathcal{C} de longitud finita son continuos en (X, d) . El espacio (X, d) es localmente arcoconexo así que sus componentes conexas coinciden con las componentes arcoconexas y, además, coinciden con las componentes de accesibilidad respecto de $(\mathcal{C}, \mathcal{L})$.

Observación 1.62. Sin embargo, en (X, d) las dos definiciones de longitud de camino, la proveniente de la estructura de longitud \mathcal{L} y la inducida por la métrica L_d , no necesariamente coinciden sobre \mathcal{C} . Más adelante, en el Teorema 1.68, damos una condición sobre \mathcal{L} necesaria y suficiente para que coincida con L_d .

Tenemos una definición de métrica intrínseca alternativa a la dada en la Definición 1.12.

Definición 1.63. Una métrica que puede ser obtenida como la métrica inducida por una estructura de longitud se dice *intrínseca*.

Ejemplo 1.64. Podemos obtener al espacio de longitud $\ell^1(n)$ a partir del espacio topológico \mathbb{R}^n con la estructura de longitud $(\mathcal{C}, \mathcal{L})$ tal que \mathcal{C} es la familia de todos los caminos que se obtienen como la concatenación de caminos paralelos a alguno de los ejes coordenados y \mathcal{L} es la longitud euclídea usual de aquellos caminos.

Las métricas definidas sobre una variedad riemanniana (o finsleriana) son las inducidas por la estructura de longitud $(\mathcal{C}, \mathcal{L})$, donde \mathcal{C} es el conjunto de todos los caminos suaves a trozos y \mathcal{L} es la longitud riemanniana (o finsleriana) de tales caminos. Las métricas definidas sobre los poliedros, en particular sobre los grafos de Cayley, son las inducidas por la estructura de longitud $(\mathcal{C}, \mathcal{L})$ donde \mathcal{C} es el conjunto de los caminos geodésicos a trozos (en cada celda) y \mathcal{L} se calcula como la suma de las longitudes calculadas sobre cada tramo.

Notar que en el caso de los poliedros puede fallar el axioma de compatibilidad con la topología y recordar que definimos una cantidad ε que al ser positivo nos proveía de los entornos requeridos por tal axioma. Experimentalmente, se verifica que la compatibilidad con la topología es la condición que suele fallar. En tal caso, tenemos una pseudométrica y para obtener una métrica debemos pasar al cociente que identifica puntos a pseudodistancia nula.

Una forma frecuente en la que se obtienen espacios de longitud a partir de otros es mediante *pullbacks*, definidos a continuación.

Definición 1.65. Sean X un espacio topológico Hausdorff, Y un espacio de longitud y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. La estructura sobre X inducida por f es la que tiene como familia \mathcal{C} de caminos admisibles a aquellos caminos c tales que $f \circ c$ es admisible en Y y cuya longitud es igual a la de $f \circ c$ medida en Y . Esta estructura inducida cumple todas las propiedades de estructura de longitud salvo quizás la séptima condición de compatibilidad con la topología. Si cumple esta propiedad la llamamos la *estructura de longitud inducida* por f . En tal caso induce una métrica pero, en el caso general, tan solo puede asegurarse que induce una pseudométrica.

Ejemplo 1.66. La métrica inducida sobre un revestimiento $p : \tilde{Y} \rightarrow Y$ de una variedad riemanniana (o finsleriana) Y coincide con la métrica de longitud inducida por p . La métrica de longitud inducida sobre un subespacio Z de un espacio de longitud Y es la métrica de longitud inducida por la inclusión $i : Z \hookrightarrow Y$; si Y es geodésico y Z es un subespacio convexo, esta métrica de longitud inducida coincide con la métrica inducida usual, que consiste simplemente en la restricción de la métrica ambiente.

La estructura de longitud inducida sobre X puede tener poco en común con la de Y . Un caso extremo es el del siguiente resultado.

Proposición 1.67. *Sea n un número natural. Entonces, toda estructura de longitud riemanniana sobre la variedad diferencial \mathbb{R}^n es inducida por alguna función continua $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$.*

Nuestro objetivo ahora es dar una condición necesaria y suficiente para que la longitud inducida L_d por la métrica d inducida por \mathcal{L} sea igual a \mathcal{L} sobre la familia de caminos admisibles. Saber que L tiene esta propiedad tiene dos ventajas inmediatas. Por un lado, asegurar propiedades deseables sobre la longitud de caminos que sabemos que valen para la longitud \mathcal{L} y, recíprocamente, saber que \mathcal{L} cumple propiedades que son ciertas en general para longitudes inducidas por métricas. Antes de enunciar este resultado, hagamos algunas observaciones.

En primer lugar, notar que la longitud de caminos no necesariamente es continua en el siguiente sentido: Una sucesión de caminos (con el mismo dominio o después de normalizar) puede converger uniformemente y a pesar de ello la sucesión de las longitudes no necesariamente converge a la longitud del camino límite. Por ejemplo, podemos tomar dos puntos de distintos p y q en el plano euclídeo \mathbb{E}^2 y una sucesión de caminos tal que cada uno de ellos se escribe como concatenación finita de segmentos lineales paralelos a los ejes y tal que la sucesión converge uniformemente al segmento lineal que une p y q . Si el segmento $[p, q]$ no es paralelo a los ejes, su longitud $d(p, q)$ es distinta de la longitud de los caminos de la sucesión, que es igual a $|p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$ para cada uno de ellos. Concretamente, podemos aproximar uniformemente a la circunferencia c de diámetro 1 y perímetro π con una sucesión de caminos $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de longitud 4 como se muestra en la Figura 1.5. El primer camino parametriza a un cuadrado de lados de longitud 1. Para obtener c_{i+1} a partir de c_i marcamos los puntos de contacto entre c y c_i (color rojo en la Figura 1.5) y después los puntos de medios en c (color azul en la Figura 1.5) entre dos puntos de contacto consecutivos. El camino c_{i+1} tiene como conjunto de puntos de contactos exactamente a los puntos de contacto de c_{i+1} junto con sus intermedios y, entre cada par de puntos de contacto consecutivos, la concatenación de dos segmentos lineales paralelos a los ejes uniéndolos por fuera del círculo. La sucesión $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ así obtenida converge uniformemente a c e incluso sus respectivas áreas encerradas convergen pero no así sus longitudes euclídeas: si así fuese π sería igual a 4. Sin embargo, lo que esta construcción sí prueba es que la longitud de la circunferencia c en ℓ^1 es igual a 4.

En segundo lugar, observemos que estructuras de longitud esencialmente distintas (esto es, que asignan distinta longitud a por lo menos un camino que es admisible para ambas) pueden dar lugar a la misma métrica. Por ejemplo, podemos obtener la métrica euclídea usual tomando como caminos admisibles todos los que son rectificables según la métrica euclídea y cambiando las longitudes de algunos de los caminos. Por ejemplo, podemos penalizar a todos los caminos que no tienen a un segmento lineal no constante como una de sus restricciones multiplicando su longitud por 2.

Teorema 1.68. *Sean $(\mathcal{C}, \mathcal{L})$ una estructura de longitud sobre un espacio topológico Hausdorff X , d la métrica inducida por esta estructura y L la longitud inducida por esta métrica. En-*

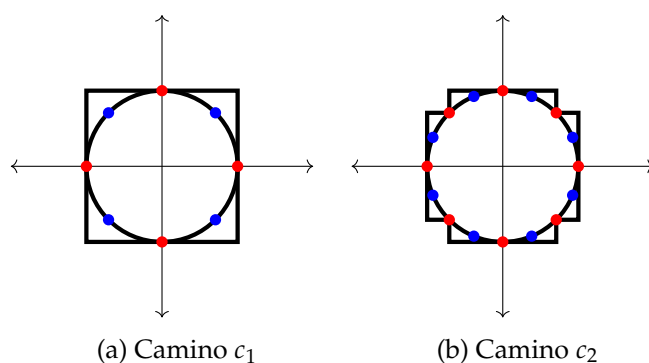


Figura 1.5: Primeros pasos de la aproximación del círculo con caminos de ℓ^1 .

tonces, \mathcal{L} y L coinciden sobre \mathcal{C} si y solo si \mathcal{L} es semicontinua inferiormente, esto es, si para cada sucesión de caminos admisibles $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ con el mismo dominio y de \mathcal{L} -longitud finita que converge puntualmente a un camino admisible γ , tenemos que $\mathcal{L}(\gamma) \leq \liminf_k \mathcal{L}(\gamma_k)$.

Lema 1.69. Sea X un espacio métrico compacto. Si x e y son dos puntos en X que pueden ser unidos por al menos un camino rectificable entonces pueden ser unidos mediante un camino de longitud mínima.

Demostración. Sea ℓ el ínfimo de las longitudes de los caminos que unen x e y . Por el Teorema de Arzelà-Ascoli, existe una sucesión de caminos $c_i : [0, 1] \rightarrow X$ de x a y que converge uniformemente a un camino $c : [0, 1] \rightarrow X$ y cuyas longitudes convergen a ℓ . Por semicontinuidad inferior de la longitud $L(c) \leq \liminf L(c_i) = \ell$. \square

El siguiente resultado fue originalmente descubierto en el contexto de las variedades para luego observarse que su demostración aplicaba al contexto más general de los espacios de longitud.

Teorema 1.70 (Hopf-Rinow). Para un espacio de longitud localmente compacto X , las siguientes condiciones son equivalentes.

1. X es propio.
2. X es completo.
3. Toda geodésica local $[0, L) \rightarrow X$ puede ser extendida continuamente al intervalo $[0, L]$.
4. Existe un punto p en X tal que toda geodésica local $[0, L) \rightarrow X$ que emana de p puede ser extendida continuamente al intervalo $[0, L]$.

Además, estas condiciones implican que X es geodésico.

Demostración. Por el Lema 1.69, si X es propio entonces es geodésico. Por otro lado, claramente la primera condición implica a la segunda, ésta la tercera y ésta a su vez a la cuarta. Resta probar que la cuarta condición implica a la primera.

Supongamos que X satisface la cuarta condición y sea p el punto mencionado allí. Como X es localmente compacto, el conjunto

$$\{r \in (0, +\infty) \mid B_r[p] \text{ es compacta}\},$$

formado por los números reales positivos tales que la bola cerrada de tal radio centrada en p es compacta resulta ser no vacío. Supongamos que es acotado, de manera que existe R su supremo, y veamos que esto nos lleva a una contradicción.

Veamos primero que R es el máximo del conjunto anterior, esto es, que la bola cerrada $B_R[p]$ es compacta. Como X es un espacio de longitud y allí la bola cerrada es la clausura de la bola abierta correspondiente, basta ver que $B_r(p)$ es pre-compacta, esto es, que toda sucesión allí admite una subsucesión convergente en X .

Sea $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $B_r(p)$ y, para cada número natural i , definamos $r_i := d(p, x_i)$. Podemos asumir que la sucesión $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge a R pues en otro caso la proposición sigue. Por el Lema 1.69, para cada número natural i , como la bola cerrada $B_{r_i}[p]$ es compacta, existe una geodésica $c_i : [0, r_i] \rightarrow X$ de p a x_i . Por Arzelà-Ascoli, podemos tomar una primera subsucesión de $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que las restricción al intervalo $[0, r_1]$ converjan uniformemente. Luego, una subsucesión de esta subsucesión que converja uniformemente en $[0, r_2]$ y así siguiendo. Con el argumento diagonal de Cantor, obtenemos una subsucesión $(c_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente sobre cada intervalo $[0, r_i]$, cualquiera sea el número natural i . De manera que tal subsucesión converge puntualmente sobre $[0, R)$ a una función $c : [0, R) \rightarrow X$ que, por lo dicho antes, resulta ser un embedding isométrico. Así que, por hipótesis, existe una extensión continua $\hat{c} : [0, R] \rightarrow X$ de c . Un argumento sencillo, que incluye el hecho de que las funciones involucradas son geodésicas, prueba que $(c_{i_k}(R))_{k \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a $\hat{c}(R)$, como se quería ver.

Finalmente, como X es localmente compacto y la bola $B_R[p]$ es compacta, podemos cubrirla con finitas bolas abiertas de clausura compacta y, si ε es el mínimo de los radios de tales bolas, se sigue que $B_{R+\varepsilon}[p]$ es compacta. Lo cual contradice la definición de R . \square

Capítulo 2

Desigualdad CAT(κ)

En este capítulo estudiamos una generalización de la noción de curvatura acotada para espacios métricos y sus manifestaciones en las familias de ejemplos presentadas en el capítulo previo, siguiendo mayormente [BH99].

En la Sección 2.1 damos la definición de curvatura acotada vía la *desigualdad* CAT(κ), que básicamente consiste en *comparar* los triángulos geodésicos del espacio dado con los de los espacios modelo, y vemos las primeras consecuencias que derivan de ella, especialmente propiedades de *convexidad*. En la Sección 2.2 damos una generalización del Teorema de Cartan-Hadamard para espacios métricos, sumando otro resultado clásico que muestra su naturaleza métrica. En la Sección 2.3 retomamos el estudio de las variedades riemannianas y relacionamos el enfoque clásico sobre la curvatura con el nuevo. Concretamente, damos la demostración de que la nueva noción de curvatura acotada coincide con la clásica en el contexto riemanniano. En la Sección 2.4 retomamos el estudio de los poliedros e interpretamos qué significa la noción de curvatura en este contexto. Concretamente, vemos que se puede reducir a una condición combinatoria enunciada en el Teorema de Gromov. Además vemos cómo una noción de curvatura singular emerge naturalmente al estudiar la propiedad de extensión de geodésicas en un poliedro.

2.1 Nociones básicas

Sean x_1, x_2 y x_3 puntos *no necesariamente distintos* en un espacio métrico X y $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ y $[x_3, x_1]$ segmentos geodésicos en X , *no necesariamente determinados por sus extremos*. Decimos que la unión de los tres segmentos, la cual denotamos Δ y dotamos de la métrica inducida, es un *triángulo geodésico* en X de vértices x_1, x_2 y x_3 . Sea κ un número real y supongamos que el perímetro de Δ es menor que $2D_\kappa$. Entonces existe un triángulo geodésico $\bar{\Delta}$ en el espacio modelo M_κ^2 , de extremos \bar{x}_1, \bar{x}_2 y \bar{x}_3 , tal que $d(x_i, x_j) = d(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$ para todo i y j en \mathbb{I}_3 . Decimos que $\bar{\Delta}$ es un *triángulo de comparación* de Δ en M_κ^2 . Notemos que, por la Proposición 1.18, cualquier otro tal triángulo de com-

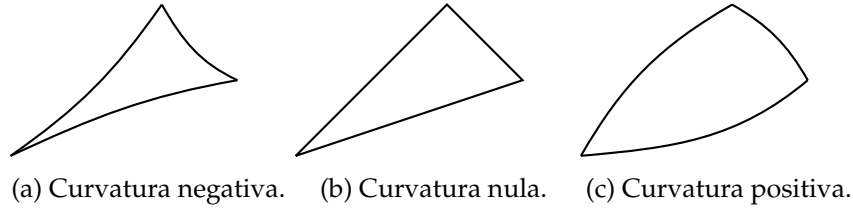


Figura 2.1: Triángulos en los espacios modelo.

paración se relaciona con $\bar{\Delta}$ vía alguna isometría de M_κ^2 . Dado que solo nos interesa la clase de isometría de $\bar{\Delta}$, nos referiremos a él como *el* triángulo de comparación de Δ . Notemos también que existe una única función $f : \Delta \rightarrow \bar{\Delta}$ tal que $f(x_i) = \bar{x}_i$ y tal que se restringe y correstringue a una isometría $f : [x_i, x_j] \rightarrow [\bar{x}_i, \bar{x}_j]$ para todo i y j en \mathbb{I}_3 . Para cada x en Δ , denotamos $\bar{x} := f(x)$. Finalmente, decimos que Δ satisface la *desigualdad* $CAT(\kappa)$ si $d(x, y) \leq d(\bar{x}, \bar{y})$ para cualesquiera x e y en Δ o, equivalentemente, si f^{-1} es 1-Lipschitz. En la Figura 2.1 representamos triángulos de comparación en las tres geometrías modelo; a mayor curvatura los puntos se alejan más.

En la definición siguiente, recordemos que D_κ es el diámetro del espacio modelo M_κ^n con $n \geq 2$: En el caso κ no-positivo, $D_\kappa = +\infty$ y, en el caso κ positivo, $D_\kappa = \pi / \sqrt{\kappa}$.

Definición 2.1. Sean κ un número real y X un espacio métrico. Decimos que X es $CAT(\kappa)$ si es D_κ -geodésico y todo triángulo geodésico en X de perímetro menor que D_κ satisface la desigualdad $CAT(\kappa)$. Decimos que X es de curvatura $\leq \kappa$ si es localmente $CAT(\kappa)$, esto es, si para todo punto en X existe una bola abierta centrada en él que resulta $CAT(\kappa)$ con la métrica inducida.

Notar que si un espacio es $CAT(\kappa_1)$ entonces es $CAT(\kappa_2)$ para todo κ_2 mayor a κ_1 . La afirmación recíproca también es cierta. (Ver [BH99, Theorem II 2.12].)

Repasemos rápidamente tres familias de ejemplos: los espacios normados, las variedades y los poliedros; y presentemos una nueva familia: los \mathbb{R} -árboles.

Todo espacio vectorial con producto interno es $CAT(0)$, pues cualquier triángulo geodésico está incluido en un subespacio afín de dimensión a lo sumo 2 y en cualquier caso isométrico a un *singleton*, a la recta real o al plano euclideo. Recíprocamente si un espacio normado es $CAT(\kappa)$ para algún número real κ entonces su norma proviene de un producto interno. (Ver [BH99, Theorem II 1.14].) En definitiva, ver a los espacios normados desde este punto de vista carece de interés.

Por otro lado, el Teorema 2.17 nos dice que la noción de curvatura acotada superiormente que dimos coincide con la de curvatura (seccional) acotada para el caso de las variedades riemannianas. El Teorema 2.12 de Cartan-Hadamard nos dice que todo espacio de curvatura ≤ 0 simplemente conexo es $CAT(0)$. Juntando ambos resultados, obtenemos que el revestimiento universal de una variedad riemanniana de curvatura no-positiva es un espacio $CAT(0)$.

Los M_κ -complejos poliedrales, a pesar de estar armados a partir de celdas convexas en espacios modelo M_κ^n con $n \geq 0$, pueden resultar no tener curvatura $\leq \kappa$. De hecho, si tienen curvatura acotada por algún número real y celdas de al menos dimensión 2 entonces tienen curvatura $\leq \kappa$ y esta cota es óptima. El Teorema 2.35 nos da varias caracterizaciones de la propiedad de curvatura acotada en el caso de los poliedros. Entre ellas se destaca el criterio 2.30 del link de Gromov, el cual dice que esta condición está determinada por la geometría infinitesimal alrededor de los vértices. Además admite, en presencia de condiciones adicionales de regularidad en las celdas, una reformulación puramente combinatoria, dada por el Teorema 2.49 de Gromov.

Finalmente, un \mathbb{R} -árbol es un espacio métrico T tal que cualquier par de puntos x y y es unido por un único segmento geodésico $[x, y]$ y tal que cada vez que $[x, y] \cap [y, z] = \{y\}$ se tiene que $[x, y] \cup [y, z] = [x, z]$. Un \mathbb{R} -árbol es $\text{CAT}(\kappa)$ para todo número real κ pues en tal espacio todo triángulo geodésico es degenerado. Recíprocamente, un espacio que es $\text{CAT}(\kappa)$ para todo κ es un \mathbb{R} -árbol.

Ya tenemos en mente un puñado de ejemplos de espacios métricos de curvatura acotada. Ahora, analicemos cuáles son las propiedades geométricas fundamentales y las consecuencias que estas propiedades tienen sobre tales espacios. Una de las propiedades geométricas fundamentales y extremadamente fuertes que puede satisfacer una métrica es la *convexidad*, que definiremos rigurosamente más abajo. Intuitivamente, esto dice que todo par de partículas que se mueven sobre geodésicas (locales) a rapidez constante se mantiene a distancia a lo sumo euclídea para todo tiempo, razón por la que representamos tales geodésicas doblándose y acercándose entre sí, y esta es una característica de la curvatura no-positiva. De hecho, esta propiedad caracteriza a las variedades y a los poliedros de curvatura no-positiva aunque, para espacios métricos generales, esta propiedad es estrictamente más débil: Un espacio normado tiene métrica convexa si y solamente si la bola es estrictamente convexa y, como vimos en la Proposición 1.5, esto es equivalente a que sea unívocamente geodésico. Este ejemplo ilustra la regla de que muchas propiedades fundamentales asociadas a las geometrías de curvatura no-positiva son consecuencia directa de la convexidad de la métrica. De hecho, esta es precisamente la generalización de curvatura no-positiva para espacios métricos que estudió la escuela de Busemann. (Ver [Pap13].)

Definición 2.2. Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre un intervalo no-vacío de la recta real se dice *convexa* si, para cualesquiera p y q en I y t en $[0, 1]$, se cumple la desigualdad siguiente.

$$f(tp + (1-t)q) \leq tf(p) + (1-t)f(q)$$

Notar que la convexidad local implica la convexidad global así que ambas son equivalentes. Notar además que, en el caso en que f sea continua, la convexidad es equivalente a la *convexidad por puntos medios*, esto es, la desigualdad anterior fijando $t = 1/2$.

Sean X un espacio geodésico y n un número natural y consideremos el producto cartesiano X^n de n copias de X . Una función $g : X^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *convexa* si cada vez

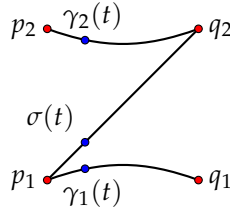


Figura 2.2: Argumento de la Observación 2.3

que tomamos n geodésicas $c_i : [0, L_i]$, con i en \mathbb{I}_n , la función

$$f : t \in [0, 1] \mapsto g(c_1(tL_1), \dots, c_n(tL_n)) \in \mathbb{R}$$

resulta convexa en el sentido anterior.

Observación 2.3. El caso que más nos interesa de la definición anterior es en el que g es la métrica d de X . En tal caso, basta ver que la función $t \mapsto d(c_1(tL_1), c_2(tL_2))$ resulta convexa para cualesquiera geodésicas $c_i : [0, L_i] \rightarrow X$, con i en \mathbb{I}_2 , emanantes del mismo punto. (Ver Figura 2.2.)

Si esto es cierto, y tenemos geodésicas $\gamma_i : [0, R_i] \rightarrow X$ de p_i a q_i , con i en \mathbb{I}_2 , tomamos una geodésica $\sigma : [0, S] \rightarrow X$ de p_1 a q_2 y obtenemos que, para cada t en $[0, 1]$, es

$$\begin{aligned} d(\gamma_1(tR_1), \gamma_2(tR_2)) &\leq d(\gamma_1(tR_1), \sigma(tS)) + d(\sigma(tS), \gamma_2(tR_2)) \\ &\leq td(\gamma_1(R_1), \sigma(S)) + (1-t)d(\gamma_1(0), \sigma(0)) + \\ &\quad + td(\sigma(S), \gamma_2(R_2)) + (1-t)d(\sigma(0), \gamma_2(0)) \\ &= td(q_1, q_2) + (1-t)d(p_1, p_1) + td(q_2, q_2) + \\ &\quad + (1-t)d(p_1, p_2) \\ &= td(q_1, q_2) + (1-t)d(p_1, p_2) \\ &= td(\gamma_1(R_1), \gamma_2(R_2)) + (1-t)d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) \end{aligned}$$

Lema 2.4. Sean κ un número real y ℓ en $(0, D_\kappa)$. Existe una constante C tal que para cualquier par de geodésicas $\gamma_i : [0, L_i] \rightarrow M_\kappa^2$, con i en $\{1, 2\}$, de longitud menor que ℓ y todo número t en $[0, 1]$ se cumple la siguiente desigualdad.

$$d(\gamma_1(tL_1), \gamma_2(tL_2)) \leq C(td(\gamma_1(L_1), \gamma_2(L_2)) + (1-t)d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)))$$

Además, en el caso $\kappa \leq 0$, podemos tomar $C = 1$. De manera que, en tal caso, la métrica resulta convexa.

Finalmente, en el caso general, dado un punto x_0 en M_κ^2 y un número r en $(0, D_\kappa/2)$, la función $d_{x_0} : x \in B_r(x_0) \mapsto d(x, x_0) \in \mathbb{R}$ resulta convexa.

La siguiente proposición contiene las propiedades básicas de los espacios CAT(κ). En el caso $\kappa \leq 0$, esto es, con $D_\kappa = +\infty$, la proposición vale más generalmente para

espacios métricos con métrica convexa. La adaptación de la prueba es directa y preferimos ilustrar las técnicas que emplean triángulos de comparación así que omitimos estos detalles.

Proposición 2.5. *Sea X un espacio $\text{CAT}(\kappa)$.*

1. X es D_κ -unívocamente geodésico y las geodésicas de longitud menor que D_κ varían continuamente con sus extremos.
2. Toda geodésica local en X de longitud a lo sumo D_κ es una geodésica.
3. Las bolas en X de radio menor que $D_\kappa/2$ son subespacios convexos de X .
4. Las bolas en X de radio menor que D_κ son contráctiles.

En el caso $\kappa \leq 0$, se puede debilitar la hipótesis a X de métrica convexa.

Demostración. 1. Sean p y q puntos en X a distancia positiva L , menor que D_κ , y sean α_1 y α_2 segmentos geodésicos uniendo p y q . Sea ℓ un número real en $(0, L)$ y, para cada i en $\{1, 2\}$, sea r_i un punto en el segmento α_i tal que $d(p, r_i) = \ell$. Dividamos el segmento α_1 en los segmentos α_1^- , de p a r , y α_1^+ , de r a q , y consideremos el triángulo geodésico Δ , de lados α_1^- , α_1^+ y α_2 . Como α_2 tiene longitud igual a la suma de las longitudes de α_1^- y α_1^+ , a saber igual a L , el triángulo de comparación $\bar{\Delta}$ de Δ es degenerado así que \bar{r}_1 y \bar{r}_2 coinciden. Entonces, por desigualdad $\text{CAT}(\kappa)$, r_1 y r_2 coinciden y luego, por arbitrariedad de ℓ , α_1 y α_2 coinciden.

Veamos que las geodésicas de longitud menor que D_κ varían continuamente con sus extremos. Sean $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones convergentes a puntos p y q en X a distancia menor que D_κ . De manera que podemos suponer que existe un número real ℓ en $(0, D_\kappa)$ tal que $d(p, q)$ y $d(p_n, q_n)$, para cada número natural n , son menores que ℓ . Sean $c : [0, 1] \rightarrow X$, $c_n : [0, 1] \rightarrow X$ y $\beta_n : [0, 1] \rightarrow X$, para cada número natural n , las (únicas) reparametrizaciones lineales de las (únicas) geodésicas que unen p con q , p_n con q_n y p_n con q_n respectivamente.

Aplicando el Lema 2.4 junto con la desigualdad $\text{CAT}(\kappa)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} d(c(t), c_n(t)) &\leq d(c(t), \beta_n(t)) + d(\beta_n(t), c_n(t)) \\ &\leq C(d(c(1), \beta_n(1)) + d(\beta_n(0), c_n(0))) \\ &= C(d(q, q_n) + d(p, p_n)) \end{aligned}$$

Así que la sucesión $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a c .

2. Sea $c : [0, 1] \rightarrow X$ una geodésica local de longitud L menor que D_κ y consideremos el conjunto $\mathcal{C} = \{t \in [0, L] \mid c|_{[0,t]} \text{ es una geodésica}\}$. Este conjunto es cerrado y, por hipótesis, contiene a un entorno de 0. Resta ver que \mathcal{C} es abierto. Sea t_0 en $(0, L) \cap \mathcal{C}$. Como c es una geodésica local, existe un número real ε en $(0, L - t_0)$

tal que $c|_{[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]}$ es una geodésica. Consideremos el triángulo geodésico Δ de extremos $c(0)$, $c(t_0)$ y $c(t_0 + \varepsilon)$ y lados $c|_{[0, t_0]}$, $c|_{[t_0, t_0+\varepsilon]}$ y un segmento geodésico α , uniendo $c(0)$ con $c(t_0 + \varepsilon)$. Dado $c|_{[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]}$ es una geodésica, aplicando la desigualdad $CAT(\kappa)$ a algún par de puntos, uno en $c((t_0 - \varepsilon, t_0))$ y el otro en $c((t_0, t_0 + \varepsilon))$, vemos que el triángulo de comparación $\bar{\Delta}$ debe ser degenerado. Entonces $c|_{[0, t_0+\varepsilon]}$ es una geodésica y, en particular, el intervalo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ está incluido en \mathcal{C} .

3. Sea α un segmento geodésico en X que une puntos q_1 y q_2 de una bola $B_r(p)$ de radio r menor que $D_\kappa/2$ y consideremos los segmentos geodésicos α_1 , uniendo p con q_1 , y α_2 , uniendo p con q_2 . En la Proposición 1.16 hemos observado que esta propiedad es cierta para el espacio modelo M_κ^2 . Así que aplicando la desigualdad $CAT(\kappa)$ a un triángulo geodésico de lados α , α_1 uniendo p con q_1 y α_2 uniendo p con q_2 , se obtiene que α está incluido en la bola $B_r(p)$.
4. Si p es un punto en X y q está en la bola abierta $B_r(p)$ de radio r menor que D_κ , denotamos por $c_q : [0, d(p, q)] \rightarrow X$ a la geodésica de p a q . Consideremos la función $H : (q, t) \in B_r(p) \times I \mapsto c_q(td(p, q)) \in B_r(p)$, la cual resulta continua porque las geodésicas involucradas varían continuamente con sus extremos como vimos en el primer inciso. Así que H es una homotopía entre la función constantemente p y la identidad de $B_r(p)$.

□

Veremos algunas propiedades de convexidad de los espacios $CAT(0)$ que nos interesan. Algunas de ellas valen para espacios $CAT(\kappa)$ para κ positivo con ciertas modificaciones; sin embargo, no seguiremos esa dirección aquí.

Proposición 2.6. *Sea X un espacio $CAT(0)$, y sea C un subconjunto convexo el cual resulta completo con la métrica inducida. Denotemos por d_C a la función distancia a C definida sobre X .*

1. Para todo x en X , existe un único punto $P(x)$ en X tal que $d(x, P(x)) = d(x, C)$.
2. Si y está en el segmento $[x, P(x)]$ entonces $P(y) = P(x)$.
3. La función $P : X \rightarrow C$ es una retracción que no aumenta distancias. Para cada x en X , sea $c : [0, d(x, C)] \rightarrow X$ es la geodésica que va de x hasta $P(x)$. La homotopía $H : (x, t) \in X \times I \mapsto c_x(td(x, C)) \in X$ es una homotopía de la identidad id_X de X en la retracción P .
4. d_C es convexa y no aumenta distancias.
5. Si x está en $X \setminus C$ y r es un número en $(0, d(x, C))$ entonces la restricción de d_C a la esfera de centro x y radio r alcanza su mínimo en un único punto z , el cual además cumple que $d_C(x) - d_C(z) = r$.

2.2 Local-global

En esta sección veremos el *Teorema 2.12 de Cartan-Hadamard*, uno de los resultados más fuertes sobre espacios con curvatura no-positiva, el cual nos da un principio para pasar de la geometría local de tal espacio a su geometría y topología globales. En particular este principio implica que un espacio de curvatura no-positiva es esférico pues su revestimiento universal es contráctil y además éste es geodésico aunque aquel no lo sea.

Un aspecto importante de este principio local-global es que vale para la noción más débil de curvatura no-positiva que asociamos anteriormente a la escuela de Busemann, esto es, la convexidad de la métrica.

Una métrica se dice *localmente convexa* si todo punto tiene un entorno en el cual la métrica inducida es convexa. En tal caso, X resulta localmente contráctil así que admite revestimiento universal $\tilde{X} \rightarrow X$. Bajo la métrica de longitud inducida, tal revestimiento resulta ser una isometría local así que su métrica hereda la propiedad de ser localmente convexa.

Lema 2.7. *Sea X un espacio métrico localmente completo con métrica localmente convexa. Sean $c : [0, 1] \rightarrow X$ una reparametrización lineal de una geodésica local que une x e y y ε un número real positivo tal que, para todo t en $[0, 1]$, la bola cerrada $B_{2\varepsilon}[c(t)]$ resulta completa y convexa. Entonces, para todo par de puntos \bar{x} y \bar{y} en X tales que $d(x, \bar{x}) < \varepsilon$ y $d(y, \bar{y}) < \varepsilon$, hay exactamente una (reparametrización lineal de una) geodésica local $\bar{c} : [0, 1] \rightarrow X$ uniendo \bar{x} con \bar{y} tal que la función*

$$t \in [0, 1] \mapsto d(c(t), \bar{c}(t)) \in \mathbb{R}$$

es convexa. Además, se cumple que

$$L(\bar{c}) \leq L(c) + d(x, \bar{x}) + d(y, \bar{y})$$

Demostración. Paso 1: Supongamos que tenemos c_1 y c_2 , dos (reparametrizaciones lineales de) geodésicas locales $[0, 1] \rightarrow X$, tales que $d(c(t), c_i(t)) < \varepsilon$ para cualesquiera t en $[0, 1]$ e i en $\{1, 2\}$. Luego, como además la métrica sobre la bola $B_{2\varepsilon}(c(t))$ es convexa cualquiera sea t en $[0, 1]$, resulta que la función $t \in [0, 1] \mapsto d(c_1(t), c_2(t)) \in \mathbb{R}$ es localmente convexa y entonces resulta, via un argumento inductivo sencillo, convexa.

Paso 2: Unicidad de \bar{c} . Si los caminos c_1 y c_2 del Paso 1 tuviesen los mismos extremos, por convexidad de la distancia entre ellos, serían iguales.

Paso 3: Existencia de \bar{c} . Para cada número real positivo A , consideramos la proposición $P(A)$ siguiente: Para cualesquiera a y b en $[0, 1]$ tales que $0 < b - a \leq A$ y cualesquiera \bar{p} y \bar{q} tales que $d(c(a), \bar{p}) < \varepsilon$ y $d(c(b), \bar{q}) < \varepsilon$, existe una geodésica local $\bar{c} : [a, b] \rightarrow X$ tal que $\bar{c}(a) = \bar{p}$, $\bar{c}(b) = \bar{q}$ y $d(c(t), \bar{c}(t)) < \varepsilon$ para todo t en $[a, b]$.

Notar que $P(A)$ es verdadera para todo A en $(0, \varepsilon/L(c))$. Luego, basta probar que $P(A)$ verdadero implica $P(3A/2)$ verdadero, cualquiera sea el número real positivo A .

Sean A un número real positivo tal que $P(A)$ es verdadera y a y b en $[0, 1]$ tales que $0 < b - a < 3A/2$. Dividamos $[a, b]$ en tres partes iguales, cuyos extremos son $a < a_1 < b_1 < b$. Definamos recursivamente las sucesiones $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq B_\varepsilon(c(a_1))$ y $(q_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq B_\varepsilon(c(b_1))$ de la manera siguiente. Elegimos $p_0 = c(a_1)$ y $q_0 = c(b_1)$. Sea n un número natural y supongamos que hemos definido p_{n-1} y q_{n-1} , en las bolas correspondientes. Por $P(A)$, existen geodésicas locales $\gamma_n : [a, b_1] \rightarrow X$, uniendo \bar{p} con q_{n-1} y tal que $d(c(t), \gamma(t)) < \varepsilon$ para todo t en $[a, b_1]$, y $\eta_n : [a_1, b] \rightarrow X$, uniendo \bar{q} con p_{n-1} y tal que $d(c(t), \eta(t)) < \varepsilon$ para todo t en $[a_1, b]$. Definimos $p_n := \gamma_n(a_1)$ y $q_n := \eta_n(a_1)$.

Por convexidad de las bolas $B_\varepsilon(c(t))$, la función $t \in [a, b] \mapsto d(\gamma_n(t), \gamma_{n+1}(t)) \in \mathbb{R}$ es localmente convexa, entonces convexa, y luego $d(p_n, p_{n+1}) < d(q_{n-1}, q_n)/2$. Análogamente, $d(q_n, q_{n+1}) < d(p_{n-1}, p_n)/2$. Se sigue que $d(p_n, p_{n+1}) < d(q_0, q_1)/2^n < \varepsilon/2^n$ y $d(q_n, q_{n+1}) < d(p_0, p_1)/2^n < \varepsilon/2^n$ para todo número natural n . Así que las sucesiones $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ y $(q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ son de Cauchy y están incluidas en las bolas $B_\varepsilon(c(a_1))$ y $B_\varepsilon(c(b_1))$.

Ahora, para cada número natural n , la función $t \in [a, b_1] \mapsto d(\gamma_n(t), \gamma_{n+1}(t)) \in \mathbb{R}$ es convexa y está acotada por $d(q_{n-1}, q_n) < \varepsilon/2^n$. Luego, para cada t en $[a, b_1]$, la sucesión $(\gamma_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y está incluida en la bola cerrada $B_\varepsilon[c(t)]$, que por hipótesis es completa. Luego, el Teorema de Arzelà-Ascoli, junto con la unicidad probada en el Paso 2, nos dice que existe una geodésica local γ tal que toda subsucesión de la sucesión $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente uniformemente a γ o, equivalentemente, que la sucesión $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a γ . Análogamente, la sucesión $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a una geodésica local η . Ahora, otra vez por el Paso 2, γ y η coinciden sobre la intersección de sus dominios, a saber, sobre $[a_1, b_1]$. Así que pegándolas obtenemos la geodésica local $\bar{c} : [a, b] \rightarrow X$ cuya existencia se afirma en la proposición $P(3A/2)$.

Paso 4: Probemos la afirmación final $L(\bar{c}) \leq L(c) + d(x, \bar{x}) + d(y, \bar{y})$. Consideremos otra vez los caminos c_1 y c_2 del Paso 1 y supongamos además que $c_1(0) = c_2(0)$. Entonces, por convexidad, $d(c_1(t), c_2(t)) \leq td(c_1(1), c_2(1))$. Luego, para t positivo suficientemente chico, tenemos que

$$\begin{aligned} tL(c_2) &= d(c_2(0), c_2(t)) \\ &= d(c_1(0), c_2(t)) \\ &\leq d(c_1(0), c_1(t)) + d(c_1(t), c_2(t)) \\ &\leq tL(c_1) + td(c_1(1), c_2(1)) \end{aligned}$$

Luego, $L(c_2) \leq L(c_1) + d(c_1(1), c_2(1))$.

Ahora, dados \bar{x} e \bar{y} como en el enunciado, por los Pasos 2 y 3 previos, existe una única geodésica local \bar{c}_0 desde \bar{x} hasta \bar{y} que satisface las condiciones del presente Lema. Por un lado, aplicando el argumento precedente con $c_1 = \bar{c}_1$ y $c_2 = \bar{c}$, obtenemos que $L(\bar{c}) \leq L(\bar{c}_0) + d(y, \bar{y})$. Por otro lado, aplicando un argumento análogo con c_1 como el camino reverso de c y c_2 como el camino reverso a \bar{c}_0 , obtenemos que $L(\bar{c}_0) \leq$

$L(c) + d(x, \bar{x})$. La proposición sigue. □

La prueba del Teorema de Cartan-Hadamard clásico, en el contexto de las variedades riemannianas, consiste en mostrar que la aplicación exponencial está globalmente definida y es el revestimiento universal. Para generalizar esta estrategia, debemos definir una aplicación exponencial para espacios métricos, donde no necesariamente contamos con la estructura diferencial ni, en particular, espacios tangentes. Ahora, la aplicación exponencial consiste esencialmente en evaluar geodésicas (locales) que emanan de un punto dado en su extremo final así que lo único que necesitaríamos para extender tal definición es contar con un espacio métrico formado por tales geodésicas locales. Notar también la semejanza con la construcción usual del revestimiento universal.

Definición 2.8. Sean X un espacio métrico y x_0 un punto en X . Denotamos $\tilde{X}_{x_0} \subseteq \mathcal{C}([0, 1], X)$ (equipados con la métrica del supremo) al espacio métrico cuyo conjunto es exactamente el de las (reparametrizaciones lineales de) geodésicas locales que emanan de x_0 junto con la función $\tilde{x}_0 : [0, 1] \rightarrow X$ constantemente igual a x_0 . Definimos la *aplicación exponencial* como la función

$$\exp_{x_0} : c \in \tilde{X}_{x_0} \mapsto c(1) \in X$$

Frecuentemente omitimos explicitar x_0 y escribimos simplemente \exp .

Lema 2.9. Sean X un espacio métrico cuya métrica es localmente completa y localmente convexa y x_0 un punto en X .

1. \tilde{X}_{x_0} es contráctil.
2. $\exp : \tilde{X}_{x_0} \rightarrow X$ es una isometría local.
3. Existe una única geodésica local que une \tilde{x}_0 con cada punto de \tilde{X}_{x_0} .
4. Si X es además completo, entonces \tilde{X}_{x_0} es completo.
5. Si X es además completo y conexo, entonces la aplicación \exp es el revestimiento universal de X y, en particular, es sobreyectiva. Tenemos también que dados dos puntos en \tilde{X}_{x_0} distintos existe una única geodésica local en \tilde{X}_{x_0} que los une.

Demostración. 1. Con la caracterización de la continuidad vía convergencia de sucesiones, se verifica fácilmente que la función $H : (c, t) \in \tilde{X}_{x_0} \times [0, 1] \mapsto (s \mapsto c(ts)) \in \tilde{X}_{x_0}$ es continua.

2. Sea $c \in \tilde{X}_{x_0}$. La hipótesis sobre X , junto con la compacidad de la imagen de c , implica que existe un número real positivo ε que satisface las hipótesis del Lema

2.7 anterior. Por definición, podemos restringir y correstringir obteniendo una función $\exp : B_\varepsilon(c) \rightarrow B_\varepsilon(c(1))$. Esta función resulta sobreyectiva por la afirmación de existencia del Lema y resulta también sobreyectiva por el Paso 1 de su demostración. Finalmente, el hecho de que es una isometría se deduce de la afirmación de convexidad del Lema: Si $d(c, \bar{c}) \leq td(c(1), \bar{c}(1))$ para todo t en $[0, 1]$ entonces claramente la distancia supremo se realiza en el extremo final.

3. Por el inciso anterior, \exp es una isometría local, así que un camino en \tilde{X}_{x_0} es una geodésica local si y solo si su imagen bajo \exp es una geodésica local en X . Más aún, por el inciso anterior, \tilde{X}_{x_0} hereda las propiedades locales de X de completitud y convexidad así que está en las hipótesis del Lema 2.7 anterior y por lo tanto, dado c en \tilde{X}_{x_0} , existe una bola abierta centrada en c con la propiedad de que cada uno de sus puntos se une a c por una única geodésica local. Luego, la aplicación

$$\exp_* : \tilde{c} \in \widetilde{(\tilde{X}_{x_0})_{\tilde{x}_0}} \mapsto \exp \circ \tilde{c} \in \tilde{X}_{x_0}$$

es una inyección del conjunto de (reparametrizaciones de) geodésicas locales $[0, 1] \rightarrow \tilde{X}_{x_0}$ emanantes de \tilde{x}_0 (junto con la función constantemente \tilde{x}_0) en el conjunto de las (reparametrizaciones de) geodésicas locales $[0, 1] \rightarrow X$ emanantes de x_0 (junto con la función constantemente x_0). Finalmente, \exp_* resulta sobreyectiva pues para cada c en \tilde{X}_{x_0} , el camino $\tilde{c} : t \in [0, 1] \mapsto H(c, t) \in \tilde{X}_{x_0}$ (donde H fue definida en la demostración del primer inciso) es una geodésica local en \tilde{X}_{x_0} que une \tilde{x}_0 con c .

4. Sea $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \tilde{X}_{x_0}$ una sucesión de Cauchy. Como X es completo, para cada t en $[0, 1]$, la sucesión $(c_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto $c(t)$ en X . Del Teorema de Arzelà-Ascoli, se sigue que toda subsucesión de la sucesión $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite una subsucesión que converge uniformemente a c o, equivalentemente, que la sucesión original converge a c . En particular, c es continua. La afirmación final del Lema 2.7 anterior, nos dice que la sucesión de las longitudes $(L(c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada y, entonces, por semicontinuidad de la longitud, c es rectificable. Ahora, podemos concluir que c es una geodésica local.
5. Por [BH99, I 3.28], de los incisos previos se sigue que \exp es el revestimiento universal de X . Resta probar que todo par de puntos en \tilde{X}_{x_0} se unen por una única geodésica local. Ahora, como x_0 es un punto de X arbitrario, el tercer inciso nos dice que dados dos puntos existe una única geodésica local que los une. \square

En el siguiente resultado, tener presente que bajo tales hipótesis el espacio Y es contráctil (y en particular simplemente conexo) vía una homotopía análoga a la de la demostración del primer inciso del Lema 2.9 anterior. Así que, si se quiere, se puede pensar que $Y = \tilde{X}_{x_0}$ y, de hecho, todo tal Y debe ser de esta forma.

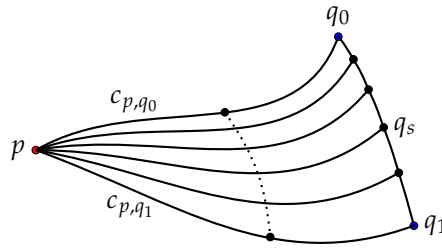


Figura 2.3: Prueba del Lema 2.10

Lema 2.10. *Sea Y un espacio de longitud completo cuya métrica es localmente convexa. Supongamos que para todo par de puntos p y q en Y hay una única geodésica local $c_{p,q}$ uniendo p y q . Si estas geodésicas varían continuamente con sus extremos entonces cada $c_{a,b}$ es en verdad una geodésica (luego Y resulta unívocamente geodésico) y la métrica sobre Y es (globalmente) convexa.*

Demostración. Sean p y q puntos en Y y veamos que $c_{p,q}$ es una geodésica. Como Y es un espacio de longitud, es equivalente probar que para toda curva rectificable $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ de p a q y todo número t en $[0, 1]$, se tiene que $L(c_{p,\gamma(t)}) \leq L(\gamma|_{[0,t]})$. Como la métrica sobre Y es localmente convexa, para valores de t suficientemente chicos la geodésica local $c_{p,\gamma(t)}$ es de hecho una geodésica (global). Así que el conjunto

$$\mathcal{C} := \{s \in [0, 1] \mid L(c_{p,\gamma(t)}) \leq L(\gamma|_{[0,t]}) \text{ para todo } t \leq s\}$$

es no-vacío. Además es cerrado por semicontinuidad inferior de la longitud y resta ver que \mathcal{C} es abierto.

Sea t_0 en \mathcal{C} . Para ε suficientemente chico, aplicando el primer inciso del Lema 2.7 con $c = c_{p,\gamma(t_0)}$, debe ser que $\bar{c} = c_{p,\gamma(t_0+\varepsilon)}$ bajo la hipótesis de unicidad de geodésicas locales, y luego tenemos que

$$\begin{aligned} L(c_{p,\gamma(t_0+\varepsilon)}) &\leq L(c_{p,\gamma(t_0)}) + d(\gamma(t_0), \gamma(t_0 + \varepsilon)) \\ &\leq L(c_{p,\gamma(t_0)}) + L(\gamma|_{[t_0, t_0+\varepsilon]}) \\ &\leq L(\gamma|_{[0, t_0]}) + L(\gamma|_{[t_0, t_0+\varepsilon]}) \\ &= L(\gamma|_{[0, t_0+\varepsilon]}) \end{aligned}$$

Así que \mathcal{C} es abierto y luego es igual a todo el intervalo $[0, 1]$. Esto prueba la primera afirmación del enunciado, a saber, que toda geodésica local es una geodésica (global).

Tenemos entonces que X es unívocamente geodésico, completo y sus geodésicas varían continuamente con sus extremos. Para ver que Y es convexo, alcanza con mostrar que para cualesquiera p, q_0 y q_1 en X , se tiene que

$$d(c_{p,q_0}(d(p, q_0)/2), c_{p,q_1}(d(p, q_1)/2)) \leq \frac{1}{2}d(q_0, q_1)$$

Esto es, que la métrica es *convexa por puntos medios*. A partir de allí, un argumento sencillo apoyado en la densidad de los números diádicos permite concluir, bajo la hipótesis de completitud, que la métrica en Y es convexa. Ahora, sea $\sigma : [0, 1] \rightarrow Y$ la reparametrización lineal de la geodésica que va de q_0 a q_1 y notemos $q_s := \sigma(s)$. Por convexidad local de Y , podemos subdividir suficientemente el intervalo $[0, 1]$ via una partición $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ de manera que la desigualdad de convexidad por puntos medios valga para valores consecutivos s_{i-1} y s_i , esto es,

$$d(c_{p, q_{s_{i-1}}}(d(p, q_{s_{i-1}})/2), c_{p, q_{s_i}}(d(p, q_{s_i})/2)) \leq \frac{1}{2}d(q_{s_{i-1}}, q_{s_i})$$

para todo i en \mathbb{I}_{n-1} . (Ver Figura 2.10.) Una cuenta sencilla que involucra la desigualdad triangular y el hecho de que σ es una geodésica nos permite sumar estos resultados y obtener la desigualdad final deseada. \square

Con lo hecho hasta aquí podemos probar el Teorema 2.12 de Cartan-Hadamard para la noción de curvatura no-positiva de Busemann. Para pasar de ésta a la noción más fuerte de Alexandrov se necesita del siguiente resultado.

Proposición 2.11 (Patchwork de Alexandrov). *Sean κ un número real y X un espacio métrico de curvatura $\leq \kappa$. Si los puntos a distancia menor que D_κ puede ser unido por una única geodésica y estas geodésicas varían continuamente con sus extremos, entonces X es CAT(κ).*

La estrategia de prueba de la Proposición 2.11 es la siguiente. Supongamos que tenemos un triángulo geodésico Δ en un tal espacio X de extremos p , q_0 y q_1 de lados $c_0([0, 1])$ de p a q_0 , $c_1([0, 1])$ de p a q_1 y $\sigma([0, 1])$ de q_0 a q_1 . Por hipótesis, tenemos una homotopía $H : I \times I \rightarrow X$ de c_0 a c_1 tal que $c_s(\cdot) := H(\cdot, s)$ es una geodésica que une p con $q_s := \sigma(s)$ para todo s en I . (La disposición geométrica es similar a la de la Figura 2.3.) Subdividimos suficientemente las dos copias del intervalo I y en base a ellos dividimos la imagen de H en triángulos geodésicos sobre los cuáles vale (una reformulación en términos de ángulos de) la desigualdad CAT(κ). La subdivisión es elegida de tal forma que nos permite sumar estos resultados y obtener la desigualdad CAT(κ) sobre el triángulo geodésico original Δ . Los detalles pueden encontrarse en [BH99, Proposition II 4.9].

Finalmente, llegamos al resultado final, cuya demostración a partir de lo ya dicho es una mera observación.

Teorema 2.12 (Cartan-Hadamard). *Sea X un espacio métrico conexo y completo.*

1. *Si la métrica sobre X es localmente convexa, entonces la métrica de longitud inducida sobre su revestimiento universal \tilde{X} resulta (globalmente) convexa. En particular, es unívocamente geodésico y las geodésicas varían continuamente con sus extremos.*
2. *Si X es de curvatura $\leq \kappa$, con $\kappa \leq 0$, entonces \tilde{X} es CAT(κ).*

Demostración. 1. Sea x_0 un punto en X y consideremos la aplicación exponencial $\exp : \tilde{X}_{x_0} \rightarrow X$, la cual resulta ser el revestimiento universal de X por el quinto inciso del Lema 2.9. Como X es un espacio de longitud, \exp es un homeomorfismo local y \tilde{X}_{x_0} es Hausdorff, [BH99, Proposition I 3.25] nos dice que la única métrica de longitud sobre \tilde{X}_{x_0} que vuelve a \exp una isometría local es la métrica de longitud inducida. De manera que esta debe coincidir con la métrica del supremo pues el segundo inciso del Lema 2.9 nos dice que \exp es una isometría local. Ahora, el quinto inciso del Lema 2.9 nos dice que todo par de puntos en \tilde{X}_{x_0} se une por una única geodésica local y el primer inciso del Lema 2.7 nos dice que estas geodésicas locales varían continuamente con sus extremos. Así que estamos en las hipótesis del Lema 2.10 y la proposición sigue.

2. Sigue del primer inciso junto con la aplicación del *Patchwork de Alexandrov* de la Proposición 2.11 anterior.

□

2.3 Variedades

En esta sección probamos que la noción de curvatura acotada para espacios métricos coincide con la clásica en el contexto riemanniano.

Lema 2.13. Sean κ un número real, p un punto en una variedad riemanniana M y o un punto en M_κ^n . Supongamos que para un número real positivo ε existe un difeomorfismo $\phi : B_\varepsilon(o) \rightarrow U$, donde U es un abierto de M , tal que $\phi(o) = p$ y se cumplen las siguientes condiciones.

1. El diferencial de ϕ es expansivo. Para todo y en $B(o, \varepsilon)$ y v en $T_y M_\kappa^n$, tenemos que $|d_y \phi(v)| \geq |v|$.
2. Si v es tangente a la geodésica que une o e y , entonces $|d_y \phi(v)| = |v|$; en particular $d_o \phi : T_o M_\kappa^n \rightarrow T_p M$ es una isometría.

Entonces se tienen las siguientes consecuencias.

- (a) Para cada y en $B_\varepsilon(o)$, ϕ mapea el segmento geodésico $[o, y]$ isométricamente sobre el segmento geodésico $[o, \phi(y)]$ en M y éste es único. En particular, $U = B_\varepsilon(p)$.
- (b) La restricción de ϕ a la bola $B_{\varepsilon/2}(o)$ es expansiva, esto es, para cualesquiera z e y en $B_{\varepsilon/2}(o)$ se tiene que $d(\phi(z), \phi(y)) \geq d(z, y)$.

Proposición 2.14. Sean κ un número real y p un punto en una variedad riemanniana M . Si existe un número real positivo ε tal que, para cada q en $B_{\varepsilon/2}(p)$, existe un difeomorfismo $\phi_q : B(o, \varepsilon) \rightarrow U_q$ como arriba, entonces la bola $B_{\varepsilon/2}(p)$ es $\text{CAT}(\kappa)$.

En el siguiente resultado, recordar que una geodésica en una variedad riemanniana es lo mismo que una geodésica riemanniana con rapidez igual a 1.

Lema 2.15. Sea J un campo de Jacobi a lo largo de una geodésica $c : [0, \varepsilon] \rightarrow M$. Si $J(t)$ es ortogonal a $\dot{c}(t)$ para todo t , entonces

$$|J|''(t) \geq K(t)|J|(t)$$

en cada punto donde $J(t)$ es no nulo. Si $K(t) \leq \kappa$, $J(0) = 0$ y $|D_t J|(0) = 1$, entonces para todo $t < D_\kappa$ en el dominio de c tenemos que

$$|J|(t) \geq j_\kappa(t),$$

donde j_κ es la solución de la ecuación diferencial $j_\kappa''(t) = -\kappa j_\kappa(t)$ con condiciones iniciales $j_\kappa(0) = 0$ y $j_\kappa'(0) = 1$.

Demostración. Por la regla del producto,

$$|J|'(t) = \frac{d}{dt} \langle J|J \rangle^{1/2} = \frac{\langle D_t J|J \rangle}{|J|}$$

Así que, derivando nuevamente,

$$\begin{aligned} |J|''(t) &= \frac{\langle D_t^2 J|J \rangle}{|J|} + \frac{\langle D_t J|D_t J \rangle}{|J|} - \frac{\langle D_t J|J \rangle^2}{|J|^3} \\ &= -\frac{\langle \mathcal{R}(J, \dot{c})\dot{c}|J \rangle}{|J|^3} + \frac{|D_t J|^2|J|^2 - \langle D_t J|J \rangle^2}{|J|^3} \end{aligned}$$

Luego, por desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|J|''(t) \geq K(t)|J|(t)$$

Ahora, supongamos que $K(t) \leq \kappa$, $J(0) = 0$ y $|D_t J|(0) = 1$. La primera parte del lema implica que

$$\frac{d}{dt} \left(|J|'(t)j_\kappa(t) - |J|(t)j_\kappa'(t) \right) \geq 0$$

Entonces, teniendo en cuenta las condiciones iniciales,

$$|J|'(t)j_\kappa(t) - |J|(t)j_\kappa'(t) \geq 0,$$

Para $0 < t < D_\kappa$ es $j_\kappa(t) > 0$, así que

$$\frac{|J|'(t)}{|J|(t)} \geq \frac{j_\kappa'(t)}{j_\kappa(t)},$$

para $0 < t < D_\kappa$.

Además, por regla de l'Hôpital,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|J|(t)}{j_\kappa(t)} = \frac{|J|'(0)}{j_\kappa'(0)} = \frac{\lim_{t \rightarrow 0} |J|(t)/t}{1} = 1$$

Así que, integrando la penúltima ecuación, obtenemos que $|J| \geq j_\kappa$, como se quería ver. \square

Lema 2.16. *Sea M una variedad riemanniana de curvatura seccional $\leq \kappa$. Entonces, para todo p en M , existe un entorno abierto V de p en M y un número real positivo ε tal que, para todo x en V , existe un difeomorfismo $\phi : B(o, \varepsilon) \rightarrow U$ que está en las hipótesis del Lema 2.13.*

Demostración. Dado un entorno compacto V de p , existe un número real positivo ε tal que, para todo x en V , la aplicación exponencial $\exp_x : B_\varepsilon(0) \rightarrow B_\varepsilon(x)$ es un difeomorfismo. Fijemos o en M_κ^n y x en V e identifiquemos $T_o M_\kappa^n$ con $T_x M$ vía una isometría lineal. Entonces $\phi := \exp_x \circ \exp_o^{-1}$ satisface la segunda condición del Lema 2.13.

Sean u y v en $T_o M_\kappa^n$ vectores unitarios ortogonales entre sí. Sean J_κ y J los campos de Jacobi asociados a la familia uniparamétrica de geodésicas $c_{t(u+sv)}^\kappa(t) = \exp_o(t(u+sv))$ y $c_{t(u+sv)}^\kappa(t) = \exp_x(t(u+sv))$ respectivamente, donde s varía en un entorno pequeño de 0 en \mathbb{R} . Por construcción, el diferencial de ϕ mapea J_κ en J . Se sigue inmediatamente de la descripción de la métrica riemanniana sobre M_κ^2 en coordenadas normales que $j_\kappa = |J_\kappa|$ y, luego, la segunda parte del Lema 2.15 anterior implica que ϕ satisface la primera condición del Lema 2.13. \square

Teorema 2.17. *Sea κ un número real y M una variedad riemanniana. M tiene curvatura $\leq \kappa$ si y solo si sus curvaturas seccionales están acotadas superiormente por κ .*

Demostración. El Lema 2.16 junto con la Proposición 2.14 implica que si M tiene curvatura seccional $\leq \kappa$ entonces M tiene curvatura $\leq \kappa$ en el sentido de Alexandrov.

Para probar la afirmación recíproca, usamos la siguiente estimación [Car51]: Sea x un punto en M y sean u y v vectores unitarios ortogonales en $T_x M$. Para t suficientemente pequeño, tenemos únicas geodésicas $t \mapsto c_u(t)$ y $t \mapsto c_v(t)$ emanantes de x con $\dot{c}_u(0) = u$ y $\dot{c}_v(0) = v$. Sea K la curvatura seccional de M a lo largo del 2-plano de $T_x M$ generado por $\{u, v\}$. Sea $d(\varepsilon) = d(c_u(\varepsilon), c_v(\varepsilon))$. Entonces

$$d(\varepsilon)^2 = 2\varepsilon^2 - \frac{K}{6}\varepsilon^4 + O(\varepsilon^5)$$

Consideremos un triángulo geodésico en M_κ^2 con dos lados ortogonales de lados de longitud ε ; sea $c(\varepsilon)$ la longitud del tercer lado. Como M tiene curvatura $\leq \kappa$, tenemos que $d(\varepsilon) \geq c(\varepsilon)$.

Si $\kappa = 0$, entonces $d(\varepsilon)^2 \geq c(\varepsilon)^2 = 2\varepsilon^2$, luego $K \leq 0$. Si $\kappa < 0$, entonces por ley del coseno tenemos que $\cosh(\sqrt{-\kappa}c(\varepsilon)) = \cosh^2(\sqrt{-\kappa}\varepsilon)$. La desigualdad $d(\varepsilon) \geq c(\varepsilon)$ implica $\cosh(\sqrt{-\kappa}d(\varepsilon)) \geq \cosh(\sqrt{-\kappa}c(\varepsilon))$, así que

$$1 - \kappa\varepsilon^2 + \frac{1}{6}(\kappa K + \kappa^2)\varepsilon^4 + O(\varepsilon^5) \geq 1 - \kappa\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\kappa^2\varepsilon^4 + O(\varepsilon^5)$$

lo cual implica $K \leq \kappa$. El caso $\kappa > 0$ es similar. \square

La versión de curvatura acotada inferiormente del Teorema 2.17 anterior es cierta y se conoce como Teorema de Toponogov.

El siguiente resultado nos dice que la teoría de espacios métricos de curvatura acotada, superior o inferiormente, generaliza el caso de las variedades compactas.

Teorema 2.18. *Si M es una variedad riemanniana compacta entonces su curvatura seccional está acotada (superior e inferiormente).*

Notar que la curvatura seccional no es una función sobre M sino que es una función sobre el fibrado Grassmaniano de 2-planos de M , y de hecho es una función suave. Una prueba puede ser encontrada en [BC64, p. 166].

La razón de que las familias de grupos $CAT(0)$ y la de los grupos hiperbólicos compartan tantas propiedades es que ambas son generalizaciones de la familia de grupos fundamentales de variedades cerradas de curvatura no-positiva y estas propiedades están presentes en el caso clásico. La noción de grupo $CAT(0)$ captura la geometría de la acción del grupo fundamental sobre el revestimiento universal en el caso clásico.

En esta sección repasamos los resultados principales sobre el grupo fundamental de una variedad cerrada de curvatura no-positiva, siguiendo mayormente [Ebe96]. Recordemos que por el Teorema 2.12 de Cartan-Hadamard theorem tal variedad es esférica así que uno espera que su grupo fundamental porte mucha información sobre la geometría de la variedad siendo que los grupos de homotopía superior son triviales. De hecho, el tipo de isomorfismo del grupo fundamental determina el tipo topológico para dimensión 5 o mayor. En el caso de curvatura negativa constante, determina el tipo isométrico para dimensión 3 o mayor.

Teorema 2.19 (Farrel y Jones). *Sean M_1 y M_2 variedades cerradas conexas de curvatura no-positiva de dimensión n , mayor o igual a 5. Si sus grupos fundamentales son isomorfos entonces M_1 y M_2 son homeomorfas.*

Teorema 2.20 (rigidez de Mostow). *Sean M_1 y M_2 variedades riemannianas cerradas conexas de curvatura constantemente -1 y dimensión n , mayor o igual a 3. Si sus grupos fundamentales son isomorfos entonces M_1 y M_2 son isométricas.*

2.4 Poliedros

En esta sección retomamos el estudio de la familia de los M_κ -complejos poliedrales incorporando la nueva noción de curvatura acotada superiormente para espacios métricos via la desigualdad $CAT(\kappa)$. Aunque la pseudométrica resulte ser una métrica, no todo M_κ -complejo poliedral resulta de curvatura $\leq \kappa$; el Teorema 2.35 nos dice bajo qué condiciones esto ocurre.

La siguiente definición está motivada por la Proposición 2.23 que le sigue y nos permite generalizar las coordenadas normales de la geometría riemanniana al contexto de los poliedros. Básicamente, un cono consiste en un vértice y un espacio base, el cual se piensa como espacio de direcciones emanantes del vértice, junto con un parámetro

radial de cierta curvatura que indica cuánto nos alejamos del vértice en la dirección dada.

Definición 2.21 (κ -cono). Sean κ un número real y X un espacio métrico. El κ -cono sobre X es el espacio métrico $C_\kappa X$ definido como sigue.

1. Si κ es no-positivo, como conjunto $C_\kappa X$ es el cociente $\frac{[0, +\infty) \times X}{\{0\} \times X}$.
2. Si κ es positivo, como conjunto $C_\kappa X$ es el cociente $\frac{[0, D_\kappa] \times X}{\{0\} \times X}$.

En ambos casos, la clase de un punto (t, x) se denota tx , exceptuando la clase de aquellos que son de la forma $(0, x)$ la cual se denota por 0 y se dice vértice del cono. La métrica se define como sigue.

1. Si κ es nulo, $d(t_1x_1, t_2x_2) = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 - 2t_1t_2 \cos(\min\{\pi, d_X(x_1, x_2)\})}$.
2. Si κ es negativo, $d(t_1x_1, t_2x_2)$ es el único número real no-negativo que satisface

$$\cosh(\sqrt{-\kappa}d(t_1x_1, t_2x_2)) = \cosh(\sqrt{-\kappa}t_1) \cosh(\sqrt{-\kappa}t_2) +$$

$$- \sinh(\sqrt{-\kappa}t_1) \sinh(\sqrt{-\kappa}t_2) \cos(\min\{\pi, d_X(x_1, x_2)\}).$$
3. Si κ es positivo, $d(t_1x_1, t_2x_2)$ es el único número real en $[0, D_\kappa]$ que satisface

$$\cos(\sqrt{\kappa}d(t_1x_1, t_2x_2)) = \cos(\sqrt{\kappa}t_1) \cos(\sqrt{\kappa}t_2) +$$

$$- \sin(\sqrt{\kappa}t_1) \sin(\sqrt{\kappa}t_2) \cos(\min\{\pi, d_X(x_1, x_2)\}).$$

La prueba de que la definición anterior nos da efectivamente una métrica, junto con el hecho adicional de que un cono resulta completo si y solo si su espacio base lo es, puede encontrarse en [BH99, Proposition I 5.9]. Los argumentos contenidos en ella emplean trigonometría, en particular la ley del coseno, en el espacio modelo correspondiente y preferimos evitar su uso aquí. De hecho, la función que cumplen los conos es codificar en términos exclusivamente de métricas la información dada en términos de ángulos.

Observación 2.22. En la proposición siguiente y en otros resultados de tipo inductivo acerca de los espacios modelo conviene extender la definición de estos a dimensiones 0 y 1, a pesar de que la noción clásica de curvatura en variedades riemannianas solo tenga sentido a partir de dimensión 2.

En el caso κ no-positivo, M_κ^1 es simplemente la recta real \mathbb{R} con la métrica usual así que en este caso coinciden las geometrías hiperbólica y euclídea y por ello puede considerarse como un caso degenerado. Este fenómeno tiene su correlato en el mundo de los grupos donde el grupo abeliano libre y el grupo libre coinciden en rango 1: ambos son \mathbb{Z} . Por otro lado, M_κ^0 es simplemente un singletón.

En el caso κ positivo, M_κ^1 es un círculo $S^1 / \sqrt{\kappa}$ de radio $1 / \sqrt{\kappa}$ (equipado con la métrica de longitud) y M_κ^0 consta de exactamente dos puntos separados a distancia $2 / \sqrt{\kappa}$ (en este caso no podemos equiparlo con una métrica de longitud porque resulta desconexo).

Notar que en todos los casos anteriores el espacio M_κ^n es igual a un hiperplano en M_κ^{n+1} o, equivalentemente, a la intersección de M_κ^{n+1} con un hiperplano del espacio euclídeo ambiente, equipado con la métrica inducida. Esta coincide con la métrica de longitud inducida excepto en el caso M_κ^0 con κ positivo.

Proposición 2.23. Sean κ un número real y n un número natural. Entonces $C_\kappa S^{n-1}$ es isométrico a una bola cerrada en M_κ^n de radio $D_\kappa/2$ esto es, un hemisferio de tal esfera en el caso κ positivo y todo el espacio M_κ^n en el caso κ no-positivo.

Demostración. Sea p un punto en M_κ^n , entonces la función $tv \in C_\kappa S^{n-1} \mapsto \exp_p(tv) \in B(p, D_\kappa/2) \subseteq M_\kappa^n$ es una isometría por la Definición 2.21 de κ -cono y la ley del coseno en M_κ^n . \square

La intuición detrás de la siguiente caracterización descanza esencialmente en el caso particular tratado en la proposición anterior, a saber, aquel en el que X es una esfera y, si se quiere, κ es nulo.

Proposición 2.24 (Caracterización de geodésicas). Sean κ un número real, X un espacio métrico y $z_i = t_i x_i$, con i en \mathbb{I}_2 , puntos en el cono $C_\kappa(X)$.

1. Si t_1 y t_2 son positivos y la distancia $d(x_1, x_2)$ es menor a π , entonces hay una biyección entre las geodésicas que unen x_1 y x_2 en X y las que unen z_1 y z_2 en $C_\kappa(X)$.
2. En cualquier otro caso, existe un segmento geodésico entre z_1 y z_2 en $C_\kappa(X)$, que resulta único exceptuando quizás el caso en que $d(x_1, x_2) = D_\kappa$ (con κ sea positivo).
3. Todo segmento geodésico que une z_1 y z_2 en $C_\kappa(X)$ está a distancia del vértice 0 a lo sumo $\max\{t_1, t_2\}$.

La prueba de la Proposición 2.24 anterior puede encontrarse en [BH99, Proposition I 5.10] y, como es de esperar, emplea trigonometría en el espacio modelo correspondiente. Como corolario, obtenemos que la condición de que un cono resulte (unívocamente) geodésico depende solamente de qué ocurre con esta propiedad en el espacio base entre puntos a distancia menor a π . Notar que esta restricción en la distancia es natural, puesto que si cambiamos la métrica en X por su métrica truncada en π , la cual está dada por la fórmula $d_\pi(x_1, x_2) = \min\{d(x_1, x_2), \pi\}$, entonces el cono $C_\kappa(X)$ sobre X se mantiene igual.

Corolario 2.25. Sean κ un número real y X un espacio métrico. Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. $C_\kappa(X)$ es geodésico.

2. Toda bola centrada en el vértice 0 del cono $C_\kappa(X)$ es convexa.
3. Existe una bola abierta centrada en el vértice 0 del cono $C_\kappa(X)$ que resulta convexa.
4. X es π -geodésico.

Por otro lado, las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a) $C_\kappa(X)$ es unívocamente geodésico.
- (b) Toda bola centrada en el vértice 0 del cono $C_\kappa(X)$ es convexa y unívocamente geodésica.
- (c) Existe una bola abierta centrada en el vértice 0 del cono $C_\kappa(X)$ que resulta convexa y unívocamente geodésica.
- (d) X es π -unívocamente geodésico.

Demostración. Vamos a probar la equivalencia entre las cuatro primeras condiciones. El mismo argumento vale *mutatis mutandis* para probar que el segundo conjunto de condiciones es equivalente.

El tercer inciso de la Proposición 2.24 anterior muestra que la primera condición implica la segunda, y ésta a la tercera.

Supongamos que vale la tercera condición. Digamos que una bola abierta de radio positivo $2t$ centrada en el vértice del cono es convexa. Entonces, para cualesquiera x_1 y x_2 puntos en X se tiene que tx_1 y tx_2 se unen con una geodésica en el cono $C_\kappa(X)$ y, si además la distancia $d(x_1, x_2)$ es menor a π y por el primer inciso de la Proposición 2.24 anterior, esto implica que x_1 y x_2 se unen por una geodésica en X . Luego, vale la cuarta condición.

Finalmente, supongamos que vale la cuarta condición. Sean $z_i = t_i x_i$, con i en \mathbb{I}_2 , puntos en el cono. Si t_1 y t_2 son positivos y la distancia $d(x_1, x_2)$ es menor a π entonces por el primer inciso de la Proposición 2.24 anterior, z_1 y z_2 se unen por una geodésica en $C_\kappa(X)$. En otro caso, $d(x_1, x_2) = t_1 + t_2$ y el segundo inciso de tal proposición aplica. Así que vale la primera condición. \square

La siguiente Definición 2.26 codifica la geometría *infinitesimal* en torno a un punto x en un M_κ -complejo poliedral K y el Teorema 2.4 nos da un criterio bajo el cual la geometría infinitesimal determina la geometría local en torno a un tal punto.

Definición 2.26. Sean $m \geq 1$ y sea S un m -símplex en M_κ^n . El *link geométrico* $\text{Lk}(x, S)$ de x en S es el subespacio del espacio tangente $T_x M_\kappa^n$ formado por todos los vectores unitarios que son velocidad inicial de alguna geodésica que une x con algún punto de S . Resulta que el link es una m -subvariedad conexa de $T_x M_\kappa^n$ con borde y dotamos a $\text{Lk}(x, S)$ de la métrica riemanniana inducida.

Como S está incluido en algún m -plano de M_κ^n , podemos suponer que $n = m + 1$. En tal caso, notar que $\text{Lk}(x, S)$ resulta ser igual a la copia de la esfera $\mathbb{S}^m = M_1^m \subseteq$

$M_0^{m+1} = \mathbb{E}^{m+1} \cong T_x M_\kappa^{m+1}$ formada por todos los vectores unitarios si y solo si x está en el interior de S .

Sean K un M_κ -complejo simplicial y sea x un punto en K . El *link geométrico* $Lk(x, K)$ de x en K es el M_1 -complejo simplicial cuyos símlices son los $Lk(x, S)$, con S símplex de K , pegados de acuerdo a la manera en la que los símlices de K se pegan. (Adoptamos la convención de que $Lk(x, S) = \emptyset$ si x no está en S .)

Proposición 2.27. *Sea K un M_κ -complejo poliedral, y sea x un punto en K . Si $\varepsilon(x)$ es positivo, entonces para todo número positivo r menor que $\varepsilon(x)$ la bola abierta $B(x, r)$ de centro x y radio r es isométrica a la bola de radio r alrededor del punto base del κ -cono $C_\kappa(Lk(x, K))$ sobre el link de x .*

La idea de la demostración de la Proposición es la siguiente: Por un lado, las operaciones de pegado de los links de cada celda y las de tomar κ -cono conmutan así que

$$C_\kappa(Lk(x, K)) = C_\kappa(\cup_{\lambda \in \Lambda} Lk(x, S_\lambda)) = \cup_{S_\lambda \in \Lambda} C_\kappa(Lk(x, S_\lambda)).$$

Por otro lado, la hipótesis de que r sea menor que $\varepsilon(x)$ asegura la buena definición de la función

$$\exp_\lambda : tv \in B(0, r) \subseteq C_\kappa(Lk(x, S_\lambda)) \mapsto \exp_x(tv) \in B(x, r) \subseteq S_\lambda,$$

cualquiera sea el símplex S_λ de K . Por Definición 2.21 de κ -cono, se tiene que para cada λ la función \exp_λ es una isometría. Finalmente, pegando las funciones obtenemos $\exp = \cup_{\lambda \in \Lambda} \exp_\lambda$, que es la isometría buscada.

La Proposición 2.4 motiva el hecho de que trabajemos con celdas de curvatura constante en lugar de una estructura riemanniana arbitraria. Si tomamos un punto en una variedad riemanniana arbitraria, dado que el espacio tangente en ese punto es isométrico al espacio euclídeo y su link es isométrico a una esfera, independientemente de cómo sea la variedad alrededor de ese punto, nada podemos decir acerca de la geometría local. La única manera de determinar su geometría local es bajo la hipótesis de que la variedad tenga curvatura constante κ alrededor de tal punto; bajo cualquier hipótesis más débil, por ejemplo curvatura acotada, es posible construir variedades que no sean localmente equivalentes. Trasladando este razonamiento al contexto de los poliedros, vemos que si queremos determinar la geometría local a partir de la infinitesimal necesitamos que las celdas tengan curvatura constante κ . Filosóficamente, esto permite modelar problemas combinatorio-algebraicos de manera geométrica con la menor cantidad de información geométrica necesaria, sin agregar estructura extra de manera arbitraria y oscureciendo más el entendimiento del problema original. Concretamente, el Teorema 2.30 nos permite obtener propiedades geométricas a partir de un chequeo meramente combinatorio; situación que será explotada especialmente en el caso bidimensional vía el Corolario 2.45.

Teorema 2.28 (Berestovskii). Sean κ un número real y X un espacio métrico. Entonces, $C_\kappa X$ el κ -cono sobre X es $\text{CAT}(\kappa)$ si y solo si X es $\text{CAT}(1)$.

Una prueba del Teorema 2.28 de Berestovskii puede ser encontrada en [BH99, Theorem II 3.14].

Definición 2.29. Decimos que un M_κ -complejo poliedral K cumple la *condición del link* si para todo vértice v de K se tiene que su link $\text{Lk}(v, K)$ es $\text{CAT}(1)$.

Teorema 2.30 (del link de Gromov). Sea K un M_κ -complejo poliedral tal que $\varepsilon(x)$ es positivo para todo punto x en K . Entonces, K tiene curvatura $\leq \kappa$ si y solo si satisface la condición del link.

Demostración. Sea v un vértice de K . Por la Proposición 2.4, la bola abierta $B_{\varepsilon(v)/2}(v)$ de K es isométrica a la bola abierta $B_{\varepsilon(v)/2}(0)$ de $C_\kappa(\text{Lk}(v, K))$, la cual es contráctil. Luego, por el Teorema 2.28, K satisface la condición de link si y solo si cada uno de sus vértices tiene un entorno que es $\text{CAT}(\kappa)$. Finalmente, notemos que si x es un punto en K y v es un vértice de su soporte $\text{sop}(x)$ entonces existe algún número real positivo r menor que $\varepsilon(v)/4$ y un punto y en $B_{\varepsilon(v)/4}(v)$ tales que las bolas $B_r(x)$ y $B_r(y)$ son isométricas. \square

Antes de dar la caracterización final de curvatura acotada para poliedros, introducimos algunas cantidades que permiten codificar las obstrucciones a tal condición. Recordar que el Teorema 1.54 de Bridson nos dice que todo M_κ -complejo poliedral K con $\text{Shapes}(K)$ finito es geodésico.

Definición 2.31. El *radio de inyectividad* de un espacio geodésico X es la siguiente cantidad.

$$\text{inr}(X) := \sup\{r \in [0, +\infty) \mid X \text{ es } r\text{-unívocamente geodésico}\}$$

Notar que un espacio geodésico X es unívocamente geodésico si el radio de inyectividad $\text{inr}(X)$ es $+\infty$. Notar también que, para todo número real κ y todo número natural n , es $\text{inr}(M_\kappa^n) = D_\kappa$.

Proposición 2.32. Si K es un M_κ -complejo poliedral con $\text{Shapes}(K)$ finito entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

1. K es localmente unívocamente geodésico.
2. K tiene radio de inyectividad positivo.
3. $\text{Lk}(x, K)$ es π -unívocamente geodésico para todo x en K .

Demostración. Por definición, la segunda condición implica la primera.

Supongamos que vale la primera condición. Entonces, por Proposición 2.4, se tiene que para todo punto x en K existe un entorno del vértice 0 en el cono $C_\kappa(\text{Lk}(x, K))$ que resulta unívocamente geodésico. Por Corolario 2.25, esto implica la tercera condición.

Supongamos que vale la tercera condición. Otra vez, por Corolario 2.25, esto implica que para todo x en K el cono $C_\kappa(\text{Lk}(x, K))$ es unívocamente geodésico. Finalmente, usando que $\text{Shapes}(K)$ es finito, [BH99, Lemma I 7.54] nos dice que existe un número real positivo ε_0 tal que para todo x en K existe y en K tal que vale la contención $B_{\varepsilon_0}(x) \subseteq B_{\varepsilon_0/4}(y)$. Esta bola resulta, por la Proposición 2.4 y lo dicho antes, unívocamente geodésica. Luego, $\text{inrad}(K)$ es al menos ε_0 y en particular positivo. \square

Definición 2.33. La *sístole* de un espacio geodésico X es la cantidad siguiente.

$$\text{Sys}(X) := \inf\{L(c) \mid c : M_\lambda^1 \rightarrow X \text{ embedding isométrico}\}$$

Recordar que $M_\lambda^1 = S^1/\sqrt{\lambda}$ es un círculo de radio $1/\sqrt{\lambda}$ así que tiene longitud $2D_\lambda$, de manera que, en la definición anterior, $L(c) = 2D_\lambda$. Llamamos a tal c círculo en X de longitud $2D_\lambda$. Notar que, si $\text{inrad}(X)$ es finito, todo círculo en X tiene longitud al menos $2 \text{inrad}(X)$ pues todo tal círculo conecta cualquier par de puntos antipodales por geodésicas distintas.

Proposición 2.34. Sea K un M_κ -complejo poliedral con $\text{Shapes}(K)$ finito y supongamos que K tiene curvatura $\leq \kappa$. Si K no es $CAT(\kappa)$, entonces K contiene un círculo embebido isométricamente de longitud $\text{Sys}(K) = 2 \text{inrad}(K)$. En tal caso se tiene además que $\text{Sys}(K) < 2D_\kappa$.

Una prueba de la Proposición 2.34 anterior puede ser encontrada en [BH99, Proposition II 4.17]. Finalmente, llegamos a la caracterización de curvatura acotada para poliedros.

Teorema 2.35. Sea K un M_κ -complejo simplicial con $\text{Shapes}(K)$ finito. Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. K es $CAT(\kappa)$.
2. K es D_κ -unívocamente geodésico.
3. K satisface la condición de link y no contiene círculos embebidos isométricamente de longitud menor a $2D_\kappa$.

En el caso κ no-positivo, una cuarta condición equivalente es la que sigue.

- (4) K satisface la condición de link y es simplemente conexo.

Por otro lado, las condiciones siguientes son equivalentes.

- i. K tiene curvatura $\leq \kappa$.
- ii. K satisface la condición de link.
- iii. K es localmente unívocamente geodésico.

iv. K tiene radio de inyectividad positivo.

Demostración. Probaremos solamente la versión global, a saber, la equivalencia de las primeras tres condiciones y, en el caso $\kappa \leq 0$, incorporando la cuarta. Los mismos argumentos prueban la versión local, a saber, la equivalencia entre las últimas cuatro condiciones.

Por definición de $\text{CAT}(\kappa)$, la primera condición implica la segunda. Además, el criterio 2.30 del link de Gromov junto con la Proposición 2.34 nos dicen que la primera condición es equivalente a la tercera. En el caso κ no-positivo, el criterio 2.30 del link de Gromov junto con el Teorema 2.12 de Cartan-Hadamard, nos dicen que la cuarta condición implica la tercera.

Finalmente, probaremos por inducción en la dimensión de K que, en el caso κ no-positivo, la segunda condición implica la cuarta y, en el caso κ positivo, la segunda condición implica la tercera. Si la dimensión de K es 1, en ambos casos la implicación es clara.

Supongamos que la dimensión de K es mayor a 1 y que el enunciado es cierto para dimensiones menores. Por la Proposición 2.32, $\text{Lk}(x, K)$ es π -unívocamente geodésico (esto es, D_1 -unívocamente geodésico) y como tiene dimensión menor (en 1) a la de K , por hipótesis inductiva, $\text{Lk}(x, K)$ satisface la tercera condición (con $\kappa = 1$) y, como esta es equivalente a la primera, $\text{Lk}(x, K)$ es $\text{CAT}(1)$ para todo x en K . En particular, K satisface la condición del link así que, por el criterio del link 2.30 de Gromov, K tiene curvatura $\leq \kappa$.

En el caso κ es positivo, como K es D_κ -unívocamente geodésico, ya no queda nada por probar. En el caso K no-positivo, como K es unívocamente geodésico, [BH99, Corollary I 7.58] nos dice que las geodésicas varían continuamente con sus extremos así que K es contráctil vía una homotopía usual, a saber, cualquiera de la forma $H : (x, t) \in X \times I \mapsto c_x(t) \in X$ donde $c_x : [0, 1] \rightarrow X$ es la reparametrización lineal de la geodésica que va de x_0 a x con x_0 arbitrario y fijado de antemano. Así que, en particular, K es simplemente conexo. \square

Las variedades riemannianas cumplen la propiedad básica de extensión de geodésicas y nos preguntamos bajo qué condiciones un poliedro también la cumple. Más precisamente, queremos saber si existe alguna condición combinatoria sobre un poliedro que sea equivalente a la condición geométrica de extensión de geodésicas. Veremos que existe tal condición bajo la hipótesis adicional de curvatura acotada.

Definición 2.36. Decimos que un espacio métrico X satisface la *propiedad de extensión de geodésicas* si para toda geodésica local no constante $c : [a, b] \rightarrow X$ existe un número real positivo ε tal que c se extiende a una geodésica local $\tilde{c} : [a, b + \varepsilon] \rightarrow X$, de manera no necesariamente única.

Observación 2.37. Notar que, si X es un espacio métrico completo, entonces X tiene la

propiedad de extensión de geodésicas si y solo si toda geodésica local no constante $c : [a, b] \rightarrow X$ se extiende a una geodésica local $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow X$, de manera no necesariamente única.

Recordemos que el segundo inciso de la Proposición 2.5 nos dice que en un espacio $CAT(0)$ toda geodésica local es en realidad una geodésica. Así que, más aún, si X es $CAT(0)$ completo, entonces X tiene la propiedad de extensión de geodésicas si y solo si toda geodésica no constante $c : [a, b] \rightarrow X$ se extiende a una línea geodésica $\tilde{c} : \mathbb{R} \rightarrow X$, de manera no necesariamente única.

Ejemplo 2.38. Un ejemplo X de espacio completo donde la extensión de geodésicas no es única es el grafo de Cayley de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ respecto del conjunto generador finito $\{(1, 0), (0, 1)\}$, el cual es isométrico al retículo plano $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ con la métrica de longitud inducida como subespacio del plano euclídeo \mathbb{E}^2 . Si se quiere un ejemplo que además de completo sea $CAT(0)$ se puede considerar un árbol; por ejemplo, se puede considerar \tilde{X} , el grafo de Cayley del grupo libre de rango 2 respecto de una base, que de hecho es el revestimiento universal de X .

En el caso de los poliedros, la condición combinatoria equivalente a la condición geométrica de extensión de geodésicas está dada por la definición y proposición siguientes.

Definición 2.39. Sea K un M_κ -complejo poliedral. Una n -celda cerrada C en K se dice *cara libre* si cumple las dos condiciones siguientes.

1. C está contenida en el borde de exactamente una celda C' de dimensión mayor. (Esto implica que C tiene codimensión 1 en C' .)
2. La intersección del interior C' con toda bola abierta centrada en un punto interior de B es conexa.

La segunda condición de la definición anterior previene que una 0-celda a la cual se le adjunta una 1-celda por sus extremos para formar un círculo S^1 sea considerada cara libre. En cambio, si formamos un intervalo con una 1-celda y dos 0-celdas (sus extremos) entonces las 0-celdas sí son caras libres en este caso.

Proposición 2.40. Sea K un M_κ -complejo poliedral de curvatura $\leq \kappa$ con $\text{Shapes}(K)$ finito. K tiene la propiedad de extensión de geodésicas si y solo si no tiene caras libres.

Ejemplo 2.41. Veamos un contraejemplo que muestra que la condición de curvatura acotada es necesaria. Consideremos la superficie S de un cubo tridimensional con la estructura de M_0 -complejo poliedral bajo la cual consta de seis 2-celdas, o caras (todas cuadradas), doce 1-celdas, o aristas, y ocho 0-celdas, o vértices. S no tiene curvatura ≤ 0 porque no es localmente unívocamente geodésico (ver Figura 2.4a). Como puede esperarse, esta propiedad falla en los vértices. Consideremos un vértice v de S . Allí tenemos tres caras incidentes, las cuales representamos de manera plana en la Figura 2.4. Los lados pintados de azul en la figura indica que se identifican.

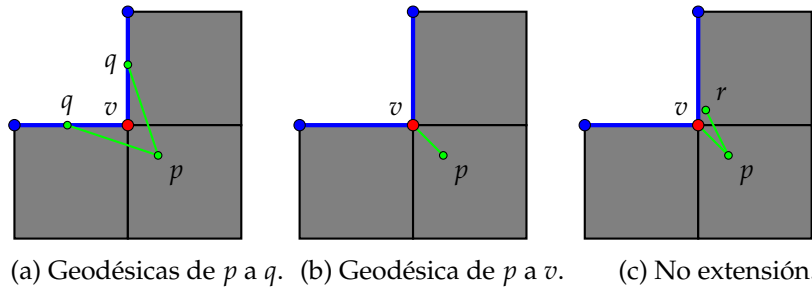


Figura 2.4: Representación plana de las tres caras de S incidentes en v .

En la Figura 2.4a se muestra que hay dos geodésicas que unen un punto p , en una de las caras F incidentes en v y sobre la diagonal de F que toca al vértice v , con un punto q sobre la restante arista incidente en v que no es arista de F . Esta construcción se puede hacer arbitrariamente cerca de v y por lo tanto ningún entorno de v es unívocamente geodésico. Por lo tanto, S no es localmente unívocamente geodésico y, por la Proposición 2.35, no tiene curvatura ≤ 0 .

En la Figura 2.4b se muestra una geodésica que une p con v . Esta geodésica no puede ser extendida a una geodésica local más allá de v porque todo punto r , en un entorno arbitrario de v y distinto de v , se une a p por un segmento geodésico (o dos) que no tocan al segmento geodésico original salvo en p , como muestra la Figura 2.4c. Lo mismo ocurre si unimos r con otro punto en el segmento de p a v que sea distinto de v . Remarquemos este notable hecho: en un entorno de v todo segmento geodésico que une dos puntos distintos de v no pasa por v y todo segmento geodésico que llega a v no puede ser extendido más allá. Así que S no tiene la propiedad de extensión de geodésicas aunque S no tenga caras libres. Vemos así que la cota en la curvatura como hipótesis en la Proposición 2.40 es esencial.

Este ejemplo, por sencillo que parezca, encierra varias ideas geométricas clave y, a pesar de que ya cumplió su objetivo original, vamos a continuar su análisis como excusa para presentarlas. Empezemos por analizar por qué falla la curvatura ≤ 0 : la Proposición 2.40 nos dice que este fenómeno tiene naturaleza local. Sabemos que en los vértices falla la propiedad de ser localmente unívocamente geodésico y nos preguntamos si existen otros puntos con esta propiedad. Los puntos en el interior de una cara no la cumplen precisamente porque allí S es localmente euclídea. Resta preguntarnos qué ocurre con los puntos en el interior de las aristas; la Figura 2.4 nos da la respuesta: a pesar de contradecir la intuición obtenida de embeber a la superficie S de un cubo en el espacio tridimensional, los puntos en el interior de la arista tienen entornos planos (isométricos a un abierto de \mathbb{E}^2) como la figura muestra. De manera que los únicos puntos especiales en S son sus vértices y aquí resulta conveniente introducir algo de lenguaje.

Definición 2.42. Dado un punto x en un M_κ -poliedro K , decimos que x es *genérico* en

K si admite un entorno isométrico a un abierto de M_κ^n , para algún número entero no negativo n . En otro caso, decimos que x es *singular* en K .

Podríamos definir más generalmente que un punto genérico es un punto que admite un entorno riemanniano y, en tal caso, en una variedad todo punto es genérico tautológicamente. Por el contrario, en nuestro caso S tiene puntos singulares y son exactamente sus vértices. Notar que, si $V = \{v_1, \dots, v_8\}$ es el conjunto formado por tales vértices, el subespacio $S \setminus V$, formado por sus puntos genéricos, (dotado de la métrica inducida o de la métrica de longitud inducida, que coinciden en este caso) es una variedad riemanniana plana (esto es, localmente isométrica a \mathbb{E}^2). De manera que tiene sentido decir que la curvatura gaussiana es nula en todo punto genérico de S y ahora nos preguntamos si la falla en la cota de curvatura ≤ 0 puede atribuirse a los restantes puntos, los singulares, de manera cuantitativa. La respuesta es afirmativa y puede atribuirse un número preciso a la curvatura (singular) que tiene cada vértice.

En cada vértice v , tenemos tres caras incidentes, cada una de ángulo $\pi/2$, con lo cual sumando las contribuciones de estas caras tenemos $3\pi/2$. Para que el vértice v no fuese singular, necesitaríamos agregar una cuarta cara (completando la figura plana) y sumando un ángulo total de 2π . De manera que podemos medir por cuánto falla este punto en ser genérico y esto es precisamente lo que mide la curvatura singular.

Definición 2.43. Sean X un M_0 -complejo poliedral compacto de dimensión 2, v un vértice de X y θ_v la suma de los ángulos de las caras incidentes en v . Definimos la *curvatura singular* en v como la cantidad dada por la fórmula $k_v := 2\pi - \theta_v$.

En el caso de S , la curvatura singular k_{v_i} es igual a $\pi/2$ para todo i en \mathbb{I}_8 . Ahora, la superficie S es una esfera a nivel topológico así que tiene característica de Euler χ_S igual a 2. Verificamos en este caso la igualdad

$$\sum_{i=1}^8 k_{v_i} = 2\pi\chi_S$$

siendo ambos miembros iguales a 4π . La fórmula dada arriba es una versión discreta de la fórmula de Gauss-Bonnet. Como estamos usando celdas planas, no aparece el término de la suma de las integrales de las curvaturas gaussianas de cada cara, pero en otro caso aparecería. (Algunos detalles se encuentran en [DO11, 6.3].) Más aún, con el lenguaje de las *distribuciones*, podemos pensar la curvatura como una medida sobre el cubo con una parte absolutamente continua (la curvatura gaussiana) y otra parte singular (la curvatura singular) que se concentra en distribuciones tipo *delta de Dirac* sobre los puntos singulares, en este caso los vértices.

Por otro lado, notar qué ocurre cuando la suma de los ángulos de las caras incidentes en un vértice v es superior a 2π . En este caso, no nos queda una superficie cónica usual sino una versión singular de un punto silla, con curvatura singular k_v negativa. Aunque pueda ser difícil de imaginar se pueden construir modelos de papel que

dan una idea de qué es lo que ocurre y ver cómo las caras incidentes se disponen en una configuración *zig-zag* dejando al punto singular en calidad de punto silla: ni máximo ni mínimo local.

Finalmente, mencionamos que se puede suavizar el cubo, de manera que en lugar de aristas se tenga una pequeña tira cilíndrica y cerca de los vértices una pequeña parte de una esfera y haciendo las regiones modificadas cada vez más pequeñas se obtiene a S como un límite, con sentido preciso a determinar. Se puede deducir la fórmula de Gauss-Bonnet con singularidades a partir de la fórmula suave vía este límite aunque la demostración misma de la fórmula suave requiere un argumento de discretización vía triangulaciones. (Algunos detalles se encuentran en [Lee97, Chapter 9].)

Remarquemos cómo chequear la condición de link en dimensión 2. En este caso, la condición de link admite una reformulación extremadamente sencilla.

Observación 2.44. *Un grafo métrico X es CAT(1) si y solo si todo lazo $S^1 \rightarrow X$ inyectivo tiene longitud al menos 2π .*

Corolario 2.45. *Sea K un M_κ -complejo poliedral de dimensión 2. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. K tiene curvatura $\leq \kappa$.
2. Para todo vértice v de K , se tiene que todo lazo en $\text{Lk}(v, K)$ inyectivo tiene longitud al menos 2π .

Hemos aplicado este criterio en el Ejemplo 2.41 y vimos allí que la superficie de un cubo no tiene curvatura ≤ 0 pues la suma de los ángulos incidentes en cada vértices es $3\pi/2$, de manera que el link en cada vértice es un círculo de tal longitud, y este número es menor a 2π . Esencialmente, este ejemplo ilustra totalmente la única manera en la que se pierde la condición de curvatura acotada en dimensión 2: El link de todo vértice es una unión disjunta de intervalos cerrados y de círculos, y la condición de curvatura acotada se pierde si y solo si alguno de estos círculos tiene longitud menor que 2π .

Otra clase interesante de espacios con la propiedad de extensión de geodésicas lo da el siguiente resultado. Notar que allí el espacio X es geodésico, por el Teorema 1.70 de Hopf-Rinow.

Proposición 2.46. *Sea X un espacio métrico completo de curvatura $\leq \kappa$. Supongamos que X es una variedad homológica, esto es, X es localmente compacto y existe un número natural n tal que para todo x en X existe un entorno abierto U de x tal que la homología relativa en grado n es $H_n(U, U \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$. Entonces X tiene la propiedad de extensión de geodésicas.*

Demostración. Sea $c : [a, b] \rightarrow X$ una geodésica local no constante y llamemos $x := c(b)$. Sean n un número natural y U un entorno abierto de x obtenidos de la definición de variedad homológica y sea y un punto en $c([a, b]) \cap U$ distinto de x .

Supongamos que c no puede ser extendida más allá de x . Entonces, toda geodésica local en U desde un punto z en $U \setminus \{x\}$ hasta y no pasa por x . Así que $U \setminus \{x\}$ se retrae (por deformación fuerte) a $\{y\}$ vía la homotopía usual $H : (z, t) \in U \setminus \{x\} \times I \mapsto c_z(t) \in U \setminus \{x\}$, donde $c_z : [0, 1] \rightarrow U \setminus \{x\}$ es la reparametrización lineal de la geodésica local que va de y a z .

Luego, $H_n(U, U \setminus \{x\}) \cong H_n(U, \{y\}) \cong H_n(U) \cong 0$, pues U es contráctil. \square

Finalmente, veamos cómo el criterio 2.30 del link de Gromov puede ser expresado en términos puramente combinatorios bajo condiciones adicionales de regularidad de las celdas; por ejemplo, en el caso de los complejos cubados. (Ver Observación 1.52 y comentarios subsiguientes.)

Definición 2.47. Sea L un complejo simplicial abstracto. Decimos que L es *flag* si cada vez que tenemos un conjunto de vértices $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ tal que $\{v_i, v_j\}$ es una arista de L para cualesquiera i y j en \mathbb{I}_n distintos, se tiene entonces que S es un símplex de L . Esto es, si cada vez que tenemos el 1-esqueleto de un símplex, entonces tenemos a todo el símplex en L .

Notar que todo complejo simplicial *flag* está determinado por su 1-esqueleto. Notar que la subdivisión baricéntrica de cualquier complejo simplicial es *flag* así que la segunda subdivisión de cualquier complejo combinatorio es *flag*. El link de todo vértice en un complejo simplicial *flag* es *flag*.

Definición 2.48. Un M_1 -complejo poliedral es *all-right* si cada arista tiene longitud $\pi/2$.

Teorema 2.49 (Gromov). *Sea L un M_1 -complejo poliedral all-right finito-dimensional. Entonces, L es CAT(1) si y solo si es flag.*

Como la subdivisión baricéntrica de cualquier complejo simplicial abstracto resulta *flag*, si además éste es finito-dimensional, entonces admite una métrica CAT(1). Por lo tanto, no hay obstrucción topológica para que un poliedro finito-dimensional admita una estructura CAT(1).

Corolario 2.50. *Un complejo cubado finito dimensional tiene curvatura ≤ 0 si y solo si el link de todo vértice es un complejo flag.*

Capítulo 3

Acciones de grupos

En este capítulo estudiamos conexiones entre el aspecto algebraico de los grupos y su aspecto geométrico a través de sus acciones sobre espacios apropiados, siguiendo mayormente [Löh17, BH99] aunque también [Bri02, BRS07].

En la Sección 3.1 repasamos las nociones básicas sobre acciones de grupos, estudiamos cómo obtener una presentación de un grupo a partir de una acción y definimos las nuevas nociones de *acción geométrica* y *quasi-isometría*. La primera describe las condiciones bajo las cuáles la acción es informativa respecto de la geometría del grupo dado. La segunda nos da un tipo de equivalencia entre espacios que preserva sus propiedades *asintóticas*. Damos el Lema de Švarc-Milnor, que relaciona las nuevas nociones y constituye el resultado fundamental de la *teoría geométrica de grupos*. Analizamos algunas propiedades básicas de los grupos libres a partir de sus grafos de Cayley vistos con este nuevo enfoque. En la Sección 3.2 presentamos varios invariantes por quasi-isometría, especialmente entre los grupos finitamente generados, y algunas de sus aplicaciones. Remarcablemente, uno de ellos es la propiedad de que un grupo dado sea *finitamente presentado*, revelando una naturaleza geométrica inesperada. Presentaremos también los invariantes del *crecimiento* y la *hiperbolicidad*. En la Sección 3.3 estudiamos la geometría del *word-problem* y probamos el *Filling Theorem*, que establece una equivalencia entre este problema y el de rellenado de lazos en variedades. La conexión fundamental entre ambos problemas está dada por el *diagrama de van Kampen*, que son objetos híbridos combinatorio-geométricos que permiten reinterpretar la resolución del *word-problem* en términos de rellenado de lazos en el 2-complejo de Cayley. Este tipo de problemas de rellenado, conocidos folklóricamente como *el problema de Plateau*, constiuyen una de las motivaciones esenciales de la *teoría geométrica de la medida*; de la cual tomamos la medida de Hausdorff 2-dimensional, una noción de área para espacios métricos arbitrarios.

3.1 Nociones básicas

Una *acción* de un grupo Γ sobre un espacio topológico X es un morfismo de grupos $\Phi : \Gamma \rightarrow \text{Homeo}(X)$. Frecuentemente omitimos explicitar Φ : si $Y \subseteq X$ y $\Theta \subseteq \Gamma$ son subconjuntos y x es un punto de X , notamos $\gamma \cdot x = \Phi(\gamma)(x)$, $\gamma \cdot Y = \Phi(\gamma)(Y)$ y $\Theta \cdot Y = \cup_{\gamma \in \Theta} \gamma \cdot Y$. Una tal acción Φ se dice *fiel* si (como función) es inyectiva y, en tal caso, Γ es isomorfo a la imagen de Φ . Dado x en X , denotamos $\mathcal{E}_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot x = x\}$ al estabilizador de x . Así que una acción es fiel si y solo si todo estabilizador es trivial. La acción se dice *libre* si para todo x en X y γ en Γ se tiene que $\gamma \cdot x = x$ implica $\gamma = e$, esto es, si todo elemento no trivial actúa sin puntos fijos. La acción se dice *cocompacta* si el cociente X/Γ , cuyos elementos son las órbitas de los puntos de X y su topología es la cociente, es compacto. Si X es localmente compacto, esto es equivalente a que exista un subespacio compacto K en X tal que $\Gamma \cdot K = X$. Por último, la acción se dice *propiamente discontinua* si X es localmente compacto y para todo compacto K de X el conjunto $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ es finito.

Supongamos que X es un espacio métrico. Decimos que Γ *actúa por isometrías* sobre X si la imagen de Φ está contenida en el subgrupo de isometrías $\text{Isom}(X)$ del grupo de homeomorfismos $\text{Homeo}(X)$. En tal caso, decimos que la acción es *propia* si para todo punto x en X existe un número real positivo r tal que el conjunto $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot B(x, r) \cap B(x, r) \neq \emptyset\}$ es finito. En tal caso, todo estabilizador es finito. En el caso X propio, la acción es propia si y solo si es propiamente discontinua pero en general, aunque X sea localmente compacto, la condición de que la acción sea propia es más fuerte: si la acción es propia entonces para todo compacto K en X existe un entorno abierto U de K tal que $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$ es finito. Por supuesto que en los casos de nuestro interés X es un espacio de longitud así que, por el Teorema 1.70 de Hopf-Rinow, se tiene que si X es además completo entonces X es propio si y solo si es localmente compacto y allí la distinción entre acción propia y propiamente discontinua desaparece.

Ejemplo 3.1. Si X es un espacio de longitud y \tilde{X} es su revestimiento universal dotado de la métrica de longitud inducida (Definición 1.65), entonces la acción del grupo fundamental $\pi_1(X)$ sobre \tilde{X} por transformaciones deck es por isometrías, fiel y propia. Si X es además compacto, \tilde{X} resulta ser localmente compacto y, dado que $X = \tilde{X}/\Gamma$, la acción resulta cocompacta.

Si X es un espacio de longitud y Γ es un grupo que actúa sobre X por isometrías, propiamente y cocompactamente, entonces X es completo y localmente compacto. Así que por el Teorema 1.70 de Hopf-Rinow, X es un espacio geodésico propio.

Si Γ es un grupo que actúa sobre un espacio localmente compacto X entonces la acción es propia si y solo si se cumplen las siguientes condiciones.

1. El cociente X/Γ es Hausdorff.
2. Todo estabilizador es finito.

3. Para todo estabilizador \mathcal{E}_x , existe un abierto U que es invariante por \mathcal{E}_x tal que $\mathcal{E}_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$.

El siguiente resultado contiene algunas propiedades básicas de las acciones propias en el contexto métrico.

Proposición 3.2. *Sea Γ un grupo actuando propiamente por isometrías sobre un espacio métrico X .*

1. *Para cada punto x en X , existe un número real positivo ε tal que, para todo γ en Γ , $\gamma \cdot B(x, \varepsilon) \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ implica que γ está en el estabilizador \mathcal{E}_x , esto es $\gamma \cdot x = x$.*
2. *La distancia entre órbitas en X define una métrica en el cociente X/Γ cuya topología inducida coincide con la topología cociente.*
3. *Si la acción es además libre, entonces la proyección $p : X \rightarrow X/\Gamma$ es un revestimiento.*
4. *Si un subespacio Y de X es invariante bajo la acción de un subgrupo H de Γ , entonces la acción de H sobre Y es propia.*
5. *Si la acción de Γ es cocompacta entonces hay una cantidad finita de clases de conjugación de subgrupos estabilizadores en Γ .*

La siguiente definición caracteriza las acciones que permiten relacionar las propiedades algebraicas y geométricas de un grupo con las propiedades topológicas y geométricas del espacio donde actúa.

Definición 3.3. Decimos que un grupo Γ actúa *geométricamente* sobre un espacio métrico X si lo hace por isometrías, propiamente y cocompactamente.

Remarquemos que la definición 3.3 que damos de acción geométrica es más fuerte que la usual, ésta reemplaza la condición de propia por la de propiamente discontinua. Aunque ambas coinciden en muchos casos de interés *a posteriori*. Por ejemplo, en el Lema 3.7 de Švarc-Milnor que veremos más adelante, se puede emplear la definición más débil sobre la acción del grupo pero fortaleciendo las hipótesis sobre el espacio donde actúa. En cualquier caso, se obtiene una versión equivalente del resultado cuya preferencia depende del caso concreto donde se aplique.

Ejemplo 3.4. 1. Si Γ es un grupo finitamente generado y \mathcal{A} es un conjunto generador finito, entonces la acción de Γ sobre su grafo de Cayley $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma)$ es geométrica.

2. Si X es una variedad riemanniana compacta, Γ es su grupo fundamental y \tilde{X} es su revestimiento universal, entonces la acción de Γ sobre \tilde{X} por transformaciones deck es geométrica.

El siguiente resultado nos da una condición geométrica equivalente a ser finitamente presentable. Su demostración involucra métodos usuales para aproximar objetos geométricos por objetos combinatorios vía el grafo y el 2-complejo de Cayley que emplearemos varias veces.

Teorema 3.5. *Sean X un espacio topológico, Γ un grupo actuando sobre X , y U un subespacio abierto tal que $\Gamma \cdot U = X$.*

1. *Si X es conexo, el conjunto $\mathcal{A} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$ genera a Γ .*
2. *Si X es simplemente conexo y U es arcoconexo, entonces Γ admite una presentación $\mathcal{P} = \langle \mathcal{A} \mid \mathcal{R} \rangle$, donde el conjunto de relaciones está dado por*

$$\mathcal{R} = \{a_1 a_2 a_3^{-1} \mid U \cap a_1 \cdot U \cap a_3 \cdot U \neq \emptyset, a_1 a_2 = a_3 \text{ en } \Gamma\}.$$

En particular, un grupo es finitamente presentado si y solo si actúa geoméricamente sobre un espacio geodésico simplemente conexo.

Demostración. 1. Sean H el subgrupo de Γ generado por \mathcal{A} , $V = H \cdot U$ y $W = (\Gamma \setminus H) \cdot U$. Entonces, $X = V \cup W$ es una escritura de X como unión de dos abiertos que, por definición de \mathcal{A} , resultan disjuntos. La proposición sigue.

2. Sea $F(\mathcal{A})$ el grupo libre con base \mathcal{A} , sea $\phi : F(\mathcal{A}) \rightarrow \Gamma$ el morfismo inducido por la inclusión $\mathcal{A} \hookrightarrow \Gamma$ y sea N el núcleo de ϕ . Notar que \mathcal{R} está incluido en N .

Sea $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma)$ el grafo de Cayley de Γ respecto de \mathcal{A} , cuya descripción dimos en el Ejemplo 1.14. Sea K el 2-complejo combinatorio que se obtiene de $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma)$ adjuntando una 2-celda por cada camino de aristas que esté etiquetado por una relación de \mathcal{R} de acuerdo a tal relación.

Paso 1: Probaremos primero que el subgrupo normal $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$ generado por \mathcal{R} en $F(\mathcal{A})$ es igual a N si y solo si K es simplemente conexo.

Tenemos una identificación natural $N \cong \pi_1(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma), e)$, que manda cada elemento de N a la clase de homotopía del lazo de aristas correspondiente. Una palabra en \mathcal{A}^{\pm} define un elemento de N si y solo si etiqueta a un lazo de aristas en $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma)$ que empieza y termina en el vértice etiquetado por e .

Sea u en $F(\mathcal{A})$ una palabra reducida y sea v el vértice donde termina el camino de aristas en $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma)$ inducido por u que empieza en el vértice etiquetado por e . Si adjuntamos una 2-celda a $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma)$ según el lazo de aristas que empieza en el vértice v y sigue las etiquetas de una palabra reducida $r \in F(\mathcal{A})$, entonces por el Teorema de van Kampen, el grupo fundamental con punto base en el vértice etiquetado por e del 2-complejo resultante es el cociente $N / \langle\langle u^{-1} r u \rangle\rangle$. Más generalmente, si por cada palabra reducida $r \in \mathcal{R}$ y por cada vértice v de $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma)$, adjuntamos una 2-celda a lo largo del lazo etiquetado por r que empieza en v , entonces el grupo

fundamental del 2-complejo resultante K es el cociente de $N / \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$. En particular, K es simplemente conexo si y solo si $N = \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle$.

Paso 2: Probemos que K es simplemente conexo.

Fijemos x_0 en U . Por cada a en $\mathcal{A} \setminus \{e\}$ elegimos un punto x_a en $U \cap a \cdot U$ y, bajo la hipótesis de arcoconexión sobre U , elegimos un camino de x_0 a x_a en U y otro de x_a a $a \cdot x_0$ en $a \cdot U$ y llamamos c_a a la concatenación de ambos. Sea $p : \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma) \rightarrow X$ la única función Γ -equivariante que manda el vértice etiquetado por e al punto x_0 y, para todo a en \mathcal{A} , la arista etiquetada por a que emana del vértice etiquetado por e al camino c_a . Por hipótesis, X es simplemente conexo, así que podemos extender p a una función Γ -equivariante continua $\hat{p} : K \rightarrow X$.

Sea D^2 el disco unitario 2-dimensional, y sea $\zeta : S^1 \rightarrow K$ una función continua definida sobre su borde. Para probar que ζ es null-homotópico, veamos que existe un lazo homotópico a ζ que se extiende a alguna función continua $D^2 \rightarrow K$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que ζ es un lazo de aristas en $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma) \subseteq K$ pues todo lazo es homotópico a uno de este tipo y, además, podemos suponer que el lazo tiene punto base en el vértice etiquetado por e .

Como X es simplemente conexo, la composición $\hat{p} \circ \zeta : S^1 \rightarrow X$ se extiende a una función continua $\eta : D^2 \rightarrow X$. Consideremos el cubrimiento $\{\eta^{-1}(\gamma \cdot U)\}_{\gamma \in \Gamma}$ del compacto D^2 del cual extraemos un subcubrimiento finito que incluya a los abiertos $a \cdot U$, donde a sea una letra en el alfabeto \mathcal{A}^{\pm} de la palabra que recorre ζ . Sea R la mitad del menor de los diámetros de los abiertos de este subcubrimiento, el cual resulta positivo. Vamos a conseguir una triangulación \mathcal{T} (finita) de D^2 de la manera siguiente. En el primer paso, los vértices del borde S^1 son exactamente los puntos del conjunto $\eta^{-1}(\{\gamma \cdot x_0\}_{\gamma \in \mathcal{A}} \cup \{x_a\}_{a \in \mathcal{A} \setminus \{e\}})$ y agregamos un vértice en el centro del disco. Aplicamos la subdivisión baricéntrica tantas veces como sea necesario de manera que todos los símlices tengan diámetro menor que R . Luego, para todo vértice v de \mathcal{T} existe γ_v en Γ tal que η manda todo triángulo incidente en v dentro de $\gamma_v \cdot U$.

Sea Δ un triángulo de \mathcal{T} con vértices v_1, v_2 y v_3 . Tenemos que $\eta(\Delta)$ está incluido en

$$\begin{aligned} & (\gamma_{v_1} \cdot U) \cap (\gamma_{v_2} \cdot U) \cap (\gamma_{v_3} \cdot U) \\ &= \gamma_{v_1} \cdot (U \cap (\gamma_{v_1}^{-1} \gamma_{v_2} \cdot U) \cap (\gamma_{v_1}^{-1} \gamma_{v_3} \cdot U)) \\ &= \gamma_{v_2} \cdot ((\gamma_{v_2}^{-1} \gamma_{v_1} \cdot U) \cap U \cap (\gamma_{v_2}^{-1} \gamma_{v_3} \cdot U)), \end{aligned}$$

que por lo tanto es no vacío. Así que $a_1 := \gamma_{v_1}^{-1} \gamma_{v_2}$, $a_2 := \gamma_{v_2}^{-1} \gamma_{v_3}$ y $a_3 := \gamma_{v_1}^{-1} \gamma_{v_3}$ están en \mathcal{A} y $a_1 a_2 a_3^{-1}$ está en \mathcal{R} . Luego, podemos extender la función $v \in \mathcal{T}^{(0)} \mapsto \gamma_v \in \Gamma \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma)$ definida sobre el conjunto de vértices a una función $\psi : \mathcal{T}^{(1)} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma)$ definida sobre el 1-esqueleto de \mathcal{T} , que manda la arista que conecta v_i con

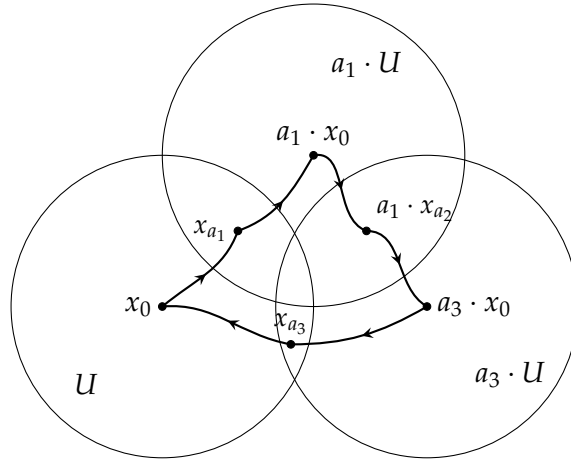


Figura 3.1: Prueba del Teorema 3.5

v_{i+1} a la arista etiquetada por a_i que va de γ_{v_i} hasta $\gamma_{v_{i+1}}$ (índices mod 3) si a_i no es el neutro; si a_i es el neutro entonces ψ se mantiene constante en tal arista.

Recordar que si ξ recorre una letra a entonces η recorre un camino $\gamma \cdot c_a$ desde $\gamma \cdot x_0$ hasta $a\gamma \cdot x_0$ que es la concatenación de un camino que va de γx_0 a $x_{\gamma a}$ sin salirse de $\gamma \cdot U$ y otro camino de $x_{\gamma a}$ a $\gamma a \cdot x_0$ que no sale de $\gamma a \cdot U$. Así que podemos elegir los γ_v para los vértices del borde de manera que la restricción de ψ a S^1 sea una reparametrización de ξ y por lo tanto homotópica a ξ . (En general, no podemos asegurar que sea igual a ξ porque si subdividimos mucho estamos obligados a mantener ψ constante en algunos tramos del borde.)

Finalmente, siendo que ψ manda el borde de cada triángulo de \mathcal{T} a un lazo en $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma)$ etiquetado por un elemento de \mathcal{R} , y siendo que cada tal lazo es el borde de una 2-celda en K , podemos extender ψ a una función continua $D^2 \rightarrow K$. Luego, K es simplemente conexo.

Pasemos a la demostración de la afirmación final.

Si Γ actúa geoméricamente sobre un espacio geodésico simplemente conexo X , existe un subespacio compacto K de X tal que $\Gamma \cdot K = X$. Como X es propio y Γ actúa propiamente, si U es un abierto que contiene a K , la primera parte del teorema nos provee de una presentación finita.

Recíprocamente, si Γ admite una presentación finita $\mathcal{P} = \langle \mathcal{A} | \mathcal{R} \rangle$, en la cual sin pérdida de generalidad toda relación tiene longitud mayor a 2, podemos considerar el 2-complejo $K_{\mathcal{P}}^{\mathbb{E}}$ descrito en el Ejemplo 1.58. Su revestimiento universal $\widetilde{K}_{\mathcal{P}}^{\mathbb{E}}$ es el 2-complejo de Cayley $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^2(\Gamma)$ dotado de una estructura poliedral euclídea y cuyo 1-esqueleto es el grafo de Cayley $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma)$ descrito en el Ejemplo 1.14. La acción natural de Γ sobre su grafo de Cayley se extiende a una acción geométrica sobre su 2-complejo de Cayley $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^2(\Gamma)$, el cual es un espacio simplemente conexo y, por el Teorema de Bridson

1.54, también geodésico. □

Sean λ un número real positivo, ε un número real no-negativo y $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ una función *no necesariamente continua* entre dos espacios métricos. Decimos que f es un (λ, ε) -*embedding quasi-isométrico* si para cualesquiera p y q en X se verifica el siguiente par de desigualdades.

$$\frac{1}{\lambda}d_X(p, q) - \varepsilon \leq d_Y(f(p), f(q)) \leq \lambda d_X(p, q) + \varepsilon$$

Decimos que f es un *embedding quasi-isométrico* si es un (λ, ε) -embedding quasi isométrico para algún (λ, ε) . Notar que en tal caso f es un (λ', ε') -embedding quasi-isométrico para todo par de números reales $\lambda' \geq \lambda$ y $\varepsilon' \geq \varepsilon$.

Un embedding quasi-isométrico $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ es una *quasi-isometría* si cumple alguna de las dos condiciones equivalentes que siguen.

1. Existe una función $g : (Y, d_Y) \rightarrow (X, d_X)$ tal que las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$ están a *distancia finita* de las identidades id_Y e id_X respectivamente, esto es, existe un número real positivo C tal que $d_Y(f \circ g(y), y) \leq C$ y $d_X(g \circ f(x), x) \leq C$ para cualesquiera x en X e y en Y .

Tal g se dice *quasi-inversa* de f y, en caso de existir, es claro que es una quasi-isometría con quasi-inversa f .

2. La imagen de f es *quasi-densa* en Y , esto es, existe un número real positivo C tal que $d(\text{im}(f), y) \leq C$ para todo y en Y . En tales condiciones decimos que la imagen de f es C -densa.

Dada la segunda condición podemos construir una quasi-inversa de f eligiendo, vía Axioma de Elección, para cada y en Y un punto $g(y)$ en X tal que $d_Y(f(g(y)), y) \leq 2C$. Del razonamiento anterior se desprende que, en caso de existir una quasi-inversa, ésta no necesariamente es la única. De hecho, salvo en el caso trivial en el que X sea un *singleton*, no hay unicidad porque si cambiamos el valor de una quasi-inversa en finitos puntos obtenemos otra quasi-inversa. Una manera de manejar estos nuevos conceptos es introducir lenguaje categórico apropiado.

Los espacios métricos forman una categoría cuyos morfismos son los embeddings quasi-isométricos y la regla de composición es la usual entre funciones. Si identificamos los embeddings quasi-isométricos que estén a distancia finita podemos verificar que esta relación de equivalencia es compatible con la composición así que podemos formar la categoría QMet cuyos objetos son los espacios métricos y cuyos morfismos son las clases de equivalencia de embeddings quasi-isométricos salvo distancia finita. De manera que las quasi-isometrías son los isomorfismos de esta categoría. Dos espacios métricos X e Y se dicen *quasi-isométricos* si existe una quasi-isometría $f : X \rightarrow Y$ entre ellos, esto es, si son isomorfos en QMet y, en tal caso, escribimos $X \sim_{qi} Y$. Definimos

el grupo de *quasi-isometrías* de un espacio métrico X como $\text{QI}(X) = \text{Aut}_{\text{QMet}}(X)$, esto es, el grupo de automorfismos de X en QMet y remarcamos que sus elementos no son *quasi-isometrías* si no sus clases de equivalencia salvo distancia finita. Este lenguaje nos permite, por ejemplo, hablar de acciones de grupos sobre espacios métricos por *quasi-isometrías* en términos de morfismos de grupos $\Gamma \rightarrow \text{QI}(X)$.

Observación 3.6. *Sea Γ un grupo finitamente generado y sean \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 dos conjuntos generadores finitos. El siguiente razonamiento sencillo prueba que la identidad $(\Gamma, d_{\mathcal{A}_1}) \rightarrow (\Gamma, d_{\mathcal{A}_2})$ es una *quasi-isometría* cuya inversa es la identidad en el sentido opuesto. En efecto, sean γ_1 y γ_2 dos elementos de Γ y sea*

$$\lambda = \max\{d_{\mathcal{A}_1}(e, a) \mid a \in \mathcal{A}_2\}.$$

Entonces,

$$d_{\mathcal{A}_2}(\gamma_1, \gamma_2) = d_{\mathcal{A}_2}(e, \gamma_1^{-1}\gamma_2) \leq \lambda d_{\mathcal{A}_1}(e, \gamma_1^{-1}\gamma_2) = \lambda d_{\mathcal{A}_1}(\gamma_1, \gamma_2)$$

El resto de la demostración consiste en repetir el razonamiento invirtiendo los roles de \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 y tomar el máximo entre las constantes involucradas.

Notar que, para todo i en $\{1, 2\}$, la inclusión $(\Gamma, d_{\mathcal{A}_i}) \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{A}_i}(\Gamma)$ es un $(1, 0)$ -embedding *quasi-isométrico* con imagen 1-densa así que es una *quasi-isometría*. Luego, $\mathcal{C}_{\mathcal{A}_1}(\Gamma) \sim_{qi} \mathcal{C}_{\mathcal{A}_2}(\Gamma)$

Lo que probamos es que $(\Gamma, d_{\mathcal{A}_1})$ y $(\Gamma, d_{\mathcal{A}_2})$ son *equivalentes Lipschitz*, esto es, existe una equivalencia Lipschitz entre ellos la cual es por definición un $(\lambda, 0)$ -embedding *quasi-isométrico* biyectivo para algún número real positivo λ . La condición de ser *equivalente Lipschitz* es mucho más fuerte que la de ser *quasi-isométricos*; por ejemplo, toda equivalencia Lipschitz es un homeomorfismo y una *quasi-isometría* puede no ser continua. Una motivación fuerte de por qué es conveniente trabajar con un nivel de generalidad más alto en el cual se pierde mucha regularidad la da el siguiente resultado fundamental.

Lema 3.7 (Švarc-Milnor). *Sea Γ un grupo actuando geoméricamente sobre un espacio de longitud (X, d) . Entonces Γ es finitamente generado y, para todo conjunto generador finito \mathcal{A} y para todo punto x_0 en X , se tiene que la parametrización de la órbita de x_0 ,*

$$\gamma \in (\Gamma, d_{\mathcal{A}}) \mapsto \gamma \cdot x_0 \in (X, d),$$

es una quasi-isometría.

Demostración. Sea $K \subseteq X$ un subespacio compacto con $\Gamma \cdot K = X$. Elegimos un punto x_0 en X y un número positivo R tal que $K \subseteq B(x_0, R/3)$ y sea $\mathcal{A} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot B(x_0, R) \cap B(x_0, R) \neq \emptyset\}$. Como la acción es geométrica y X es un espacio de longitud, resulta que X es completo y localmente compacto así que por el Teorema 1.70 de Hopf-Rinow es propio y geodésico. El primer inciso del Teorema 3.5 anterior nos dice que el conjunto \mathcal{A} genera a Γ y, como X es propio y la acción es propia, \mathcal{A} es finito.

Sean x_0 en X y sea $\mu = \max\{d(x_0, a \cdot x_0) \mid a \in \mathcal{A}\}$. Aplicando la desigualdad triangular, se prueba que $d(\gamma_1 \cdot x_0, \gamma_2 \cdot x_0) \leq \mu d_{\mathcal{A}}(\gamma_1, \gamma_2)$ para cualesquiera γ_1 y γ_2 en Γ . Resta acotar $d_{\mathcal{A}}(\gamma_1, \gamma_2)$ en términos de $d(\gamma_1 \cdot x_0, \gamma_2 \cdot x_0)$ o, equivalentemente por la Γ -invarianca de ambas métricas, acotar $d(e, \gamma)$ en términos de $d_{\mathcal{A}}(x_0, \gamma \cdot x_0)$.

Dados γ en Γ y una geodésica $c : [0, L] \rightarrow X$ de x_0 a $\gamma \cdot x_0$, de manera que $L = d(x_0, \gamma \cdot x_0)$, podemos elegir una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ del intervalo $[0, 1]$ tal que $d(c(t_{i-1}), c(t_i)) \leq R/3$ para todo i en \mathbb{I}_n y tal que $n \leq 3L/R + 1$. Para cada i en \mathbb{I}_{n-1} , existe γ_i en Γ tal que $d(c(t_i), \gamma_i \cdot x_0) \leq R/3$. Además llamamos $\gamma_0 = e$ y $\gamma_n = \gamma$. Tenemos entonces que $d(\gamma_{i-1} \cdot x_0, \gamma_i \cdot x_0) \leq R$ así que $a_i := \gamma_{i-1}^{-1} \gamma_i$ está en \mathcal{A} para todo i en \mathbb{I}_n . Notar que

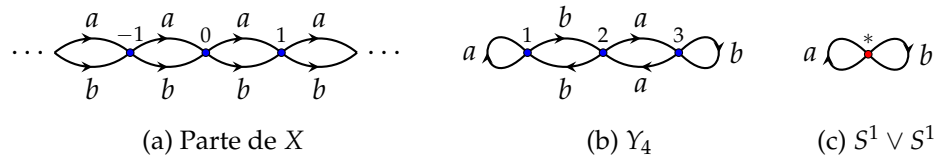
$$\gamma = e\gamma = \gamma_0^{-1} \gamma_n = \prod_{i=1}^n \gamma_{i-1}^{-1} \gamma_i = \prod_{i=1}^n a_i$$

Así que $d_{\mathcal{A}}(e, \gamma) \leq n \leq \frac{3}{R}L + 1 = \frac{3}{R}d(x_0, \gamma \cdot x_0) + 1$. Luego, ϕ_{x_0} es un embedding quasi-isométrico.

Como la acción es cocompacta, ϕ_{x_0} tiene imagen D -densa en X , donde D es el diámetro del cociente X/Γ . Luego ϕ_{x_0} es una quasi-isometría. La independencia del conjunto generador finito sigue de la Observación 3.6 anterior. \square

El Lema de Švarc-Milnor 3.7 nos permite estudiar grupos finitamente generados pero infinitos desde un punto de vista geométrico. Los grupos finitos son todos quasi-isométricos entre sí y por lo tanto equivalentes a un *singleton*. Más generalmente, sea $\psi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ un morfismo de grupos entre grupos finitamente generados. Para cada i en $\{1, 2\}$, sea \mathcal{A}_i un conjunto generador finito de Γ_i . Entonces ψ es un embedding quasi-isométrico $(\Gamma_1, d_{\mathcal{A}_1}) \rightarrow (\Gamma_2, d_{\mathcal{A}_2})$ si y solo si su núcleo $\ker(\psi)$ es finito. En tal caso, ψ es una quasi-isometría si y solo si también el cociente $\Gamma_2 / \text{im}(\psi)$ es finito. Las propiedades de *finitud* en el mundo de los grupos se traducen en el mundo de los espacios métricos con el término *acotado* y ambas son despreciadas a nivel quasi-isométrico. Por lo tanto, si se quiere estudiar grupos finitos desde un punto de vista geométrico se deben emplear otras técnicas, que no estudiaremos aquí.

Se dice que un grupo cumple una propiedad *virtualmente* si tiene algún subgrupo de índice finito que la cumple. Si un subgrupo H de un grupo finitamente generado Γ tiene índice finito entonces es finitamente generado y, por lo dicho arriba, es quasi-isométrico al grupo ambiente Γ . En efecto, si Γ admite un conjunto generador finito \mathcal{A} , existe un conjunto de relaciones (no necesariamente finito) \mathcal{R} tal que $\mathcal{P} = \langle \mathcal{A} | \mathcal{R} \rangle$ es una presentación de Γ . Consideremos el 2-complejo $K_{\mathcal{P}}$ asociado a la presentación \mathcal{P} descrito en el Ejemplo 1.58. La finitud de \mathcal{A} equivale a la finitud del 1-esqueleto de $K_{\mathcal{P}}$. La clasificación de revestimientos nos dice que existe un revestimiento $p : X \rightarrow K_{\mathcal{P}}$ de finitas hojas, donde X es un 2-complejo combinatorio con grupo fundamental H . Entonces, X tiene 1-esqueleto finito y esto equivale a que H sea finitamente generado (pues todo lazo en X es homotópico a un lazo de aristas). De hecho, se puede probar

Figura 3.2: Revestimientos de $S^1 \vee S^1$

que X es el 2-complejo asociado a una presentación de H . El mismo argumento, considerando además la finitud del 2-esqueleto prueba que un subgrupo de índice finito de un grupo finitamente presentado es finitamente presentado.

Sin embargo, un subgrupo de un grupo finitamente *presentado* no tiene por qué ser finitamente *generado*. Por ejemplo, consideremos el grupo libre $\mathbb{F}_2 = F(a, b)$ de rango 2 con base $\{a, b\}$ y consideremos el morfismo de grupos $\psi : F(a, b) \rightarrow \mathbb{Z}$ inducido por la función $\{a, b\} \rightarrow \mathbb{Z}$ constantemente igual a 1. Afirmamos que su núcleo $\ker(\psi)$ es libre de rango infinito (numerable) y, en particular, no es finitamente generado. En efecto, consideremos la unión en un punto (*wedge*) de dos círculos $S^1 \vee S^1$, donde denotamos por $*$ al punto base en de la unión y etiquetamos con las letras a y b a los círculos. (Ver Figura 3.2c.) Por otro lado, consideremos el grafo X con conjunto de vértices \mathbb{Z} y tal que por cada n en \mathbb{Z} tiene exactamente 2 aristas que van del vértice n al vértice $n + 1$, una etiquetada con la letra a y otra etiquetada con la letra b . (Ver Figura 3.2a.) La función continua $f : X \rightarrow S^1 \vee S^1$ que manda todos los vértices a $*$ y que manda cada arista homeomórficamente a una arista con la misma etiqueta es un revestimiento que está en correspondencia con $\ker(\psi)$. De manera que el grupo fundamental de X es $\ker(\psi)$ así que éste es un grupo libre y, más aún, cocientando por un árbol generador se obtiene una base que resulta ser infinita.

Sean m y n números naturales mayores o iguales a 3. Sean X_n y X_m árboles donde cada vértice tiene valencia n dotados de la única métrica intrínseca tal que toda arista es isométrica a un intervalo de longitud 1. Lo dicho arriba nos da una clave para probar que $X_n \sim_{qi} X_m$. Notar que, si $n = 2k$ es par, entonces X_n es el grafo de Cayley del grupo libre \mathbb{F}_k de rango k respecto de una base y , si $n = 2k + 1$ es impar, entonces X_n es quasi-isométrico al grafo de Cayley del producto libre $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{F}_k$ respecto del conjunto generador consistente en la unión de una base de \mathbb{F}_k con el elemento no nulo de \mathbb{Z}_2 . El caso $n = 3$ está ilustrado en la Figura 3.3, donde se muestra una parte de los grafos X_3 y $C_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z})$, donde $\mathcal{A} = \{\alpha, \beta\}$ con α generador de \mathbb{Z}_2 y β generador de \mathbb{Z} ; la quasi-isometría consiste en identificar cada par de aristas en $C_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z})$ etiquetadas por α que comparten extremos. Luego, basta ver que todo grupo libre de rango finito mayor a 1 se encuentra como subgrupo de índice finito del grupo libre de rango 2. Para ello, podemos usar otra vez la clasificación de revestimientos: Para cada k mayor o igual a 2 consideremos el complejo Y_k cuyo conjunto de vértices es \mathbb{I}_{k-1} , que tiene un lazo etiquetado por a en el vértice 1, otro lazo en el vértice k_1 etiquetado por a si k es impar

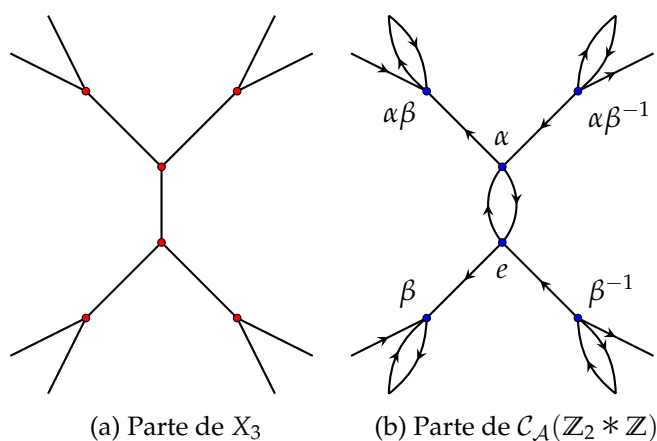


Figura 3.3: Grafos quasi-isométricos

y por b si k es par y, para todo $1 < i < k - 1$ tiene dos aristas que van del vértice i al vértice $i + 1$ ambas etiquetadas por la misma letra, b si i es impar y a si i es par, pero orientadas inversamente. (Ver Figura 3.2b.) Notar que el grupo fundamental de Y_k es \mathbb{F}_k . La función $g : Y_k \rightarrow S^1 \vee S^1$ que manda todos los vértices de Y_k en $*$ y cada arista homeomórficamente a una arista con la misma etiqueta y orientada correctamente es un revestimiento de $k - 1$ hojas. Así que $g_*\mathbb{F}_k \cong \mathbb{F}_k$ es un subgrupo de \mathbb{F}_2 de índice $k - 1$. Luego, \mathbb{F}_k es virtualmente \mathbb{F}_2 así que son quasi-isométricos.

Vimos que todo grupo libre de rango al menos 2 es virtualmente el grupo libre de rango igual a 2. Esta noción de ser virtualmente equivalentes es en general más fuerte que la noción de ser quasi-isométricos. Sin embargo, algunos tipos quasi-isométricos o, más generalmente, algunas familias de tipos quasi-isométricos, presentan un fenómeno de *rigidez*: ser virtualmente equivalente a un miembro de la familia es equivalente a estar en esta familia de tipos quasi-isométricos. Constituyen ejemplos de esta forma de *rigidez* la Proposición 3.8 siguiente y el Teorema 3.18 de crecimiento polinomial de Gromov. En general, la *rigidez* de una familia significa simplemente que en una categoría todo objeto que sea equivalente en un sentido débil a un miembro de cierta familia es necesariamente equivalente en un sentido generalmente más fuerte. En el contexto de variedades, tenemos como ejemplos los célebres Teorema 2.20 de rigidez de Mostow y Teorema 2.19 de Farrel y Jones.

Proposición 3.8. Sean Γ un grupo finitamente generado y k un número natural mayor a 1.

1. Si Γ es quasi-isométrico a \mathbb{Z}^k entonces es virtualmente \mathbb{Z}^k , esto es, tiene a \mathbb{Z}^k como subgrupo de índice finito.
2. Si Γ es quasi-isométrico a \mathbb{F}_k entonces, para todo $j \geq k$, Γ es virtualmente \mathbb{F}_j , esto es, tiene a \mathbb{F}_j como subgrupo de índice finito.

Un esbozo de la prueba del primer inciso de la Proposición 3.8 anterior junto con las referencias pertinentes puede ser encontrada en [BH99, Theorem I 8.40]; la prueba del segundo inciso puede ser encontrada en [DK17, Theorem 20.45].

Finalmente, recordemos que la acción de un grupo sobre cualquiera de sus grafos de Cayley es *libre*. Por otro lado, es claro que un grupo Γ es *libre* si y solo si alguno de sus grafos de Cayley $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma)$ es un árbol (en tal caso, \mathcal{A} es una base). Esta construcción funciona aunque el rango no sea finito, esto es, aunque Γ no sea finitamente generado. Así que todo grupo libre actúa sobre algún árbol (a nivel combinatorio) de manera libre y, remarcablemente, vale la afirmación recíproca.

Teorema 3.9. *Un grupo es libre si y solo si actúa (combinatoria y) libremente sobre un árbol.*

La estrategia de la demostración del Teorema 3.9 anterior es la siguiente: Si tenemos un grupo Γ actuando libremente sobre un árbol X entonces cocientando por subárboles generadores equivariantes se obtiene un árbol T que resulta ser el grafo de Cayley de Γ respecto de cierto conjunto generador \mathcal{A} . Como T es un árbol, \mathcal{A} es una base de Γ . Los detalles pueden ser encontrados en [Löh17, Theorem 4.2.1].

El Teorema 3.9 nos da la estructura de un grupo que actúa libremente sobre un árbol. Debilitando la hipótesis sobre la acción se obtienen otros resultados de estructura. Resultados estructurales definitivos son dados por la teoría de Bass-Serre, cuya referencia fundamental es [Ser80].

Teorema 3.10 (Nielsen–Schreier). *Todo subgrupo de un grupo libre es libre.*

Demostración. Sea H un subgrupo de un grupo libre Γ . Entonces existe un grafo X sobre el cual Γ actúa libremente. Así que restringiendo esta acción a H , obtenemos que H actúa sobre el árbol X libremente. Luego, H es libre. \square

Una prueba alternativa del Teorema 3.10 de Nielsen-Schreier la da la clasificación de revestimientos: Si H es un subgrupo de un grupo libre Γ de rango r (no necesariamente finito), consideramos el espacio topológico X dado por la unión en un puno (*wedge*) de r copias de S^1 . De manera que X tiene a Γ como grupo fundamental así que existe un revestimiento $\tilde{X} \rightarrow X$ tal que H es el grupo fundamental de \tilde{X} . Por un lado, como X es un grafo, \tilde{X} también lo es. Por otro lado, como al cocientar por un árbol generador de un grafo se obtiene un espacio homotópicamente equivalente a éste, sabemos que todo grafo tiene grupo fundamental libre. Luego, H es libre.

3.2 Invariantes quasi-métricos

Lo que buscamos al identificar clases de espacios, por ejemplo por homeomorfismo o equivalencia homotópica, es concentrar nuestra atención en las propiedades que nos interesan y despreciar las propiedades que no nos interesan. En general, lo hacemos con el objetivo de resolver alguna familia de problemas, por ejemplo verificar que una

clase de espacios tiene la propiedad del punto fijo o discriminar objetos no equivalentes para llegar a una clasificación. Las propiedades que nos interesan son los *invariantes*. Si nos preguntamos qué significa que dos espacios dados sean equivalentes y desarrollar intuición al respecto, un buen primer paso es conseguir un puñado de invariantes.

Repasando las equivalencias de espacios que nos son familiares observaremos que tienen jerarquías, algunas nociones son más fuertes que otras, y bajo esta relación de orden podemos organizarlas en forma de poset. Por ejemplo, tomemos la familia de las variedades riemannianas. Allí la noción más fuerte es la de *isometría riemanniana* y podemos seguir en orden decreciente con *difeomorfismo*, *homeomorfismo* y *equivalencia homotópica*. Conocemos varios invariantes asociados a todas estas equivalencias. Ahora, una isometría riemanniana es lo mismo que una *isometría* de espacios métricos (ver Teorema 1.41) y podemos seguir otro camino de equivalencias en el que siguen, en orden decreciente, las *equivalencias Lipschitz* y las *quasi-isometrías*. De todas las equivalencias nombradas pareciera ser que las quasi-isometrías son las menos regulares, no son necesariamente biyectivas ni continuas, y podría dar la falsa impresión de que en consecuencia preservan pocos invariantes interesantes. En esta sección describiremos varios invariantes interesantes, mayormente entre grupos finitamente generados. Notar que solo está bien definido el tipo quasi-isométrico de un grupo si éste es finitamente generado, así que restringirnos a ellos es necesario. En concreto, veremos las propiedades de *finito-presentabilidad* (Teorema 3.11), *crecimiento* (Definición 3.12) e *hiperbolicidad* (Definición 3.19).

Comencemos con la propiedad de admitir una presentación finita, la cual es en principio de naturaleza puramente algebraica. El siguiente resultado muestra que resulta ser un invariante quasi-métrico entre los grupos finitamente generados.

Teorema 3.11. *Sean Γ_1 y Γ_2 dos grupos finitamente generados, \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 conjuntos generadores finitos respectivos y $f_1 : (\Gamma_1, d_{\mathcal{A}_1}) \rightarrow (\Gamma_2, d_{\mathcal{A}_2})$ una quasi-isometría. Si Γ_1 admite una presentación finita $\mathcal{P}_1 = \langle \mathcal{A}_1 | \mathcal{R}_1 \rangle$ entonces Γ_2 admite alguna presentación finita $\mathcal{P}_2 = \langle \mathcal{A}_2 | \mathcal{R}_2 \rangle$.*

Demostración. Para cada i en $\{1, 2\}$, escribimos $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_{\mathcal{A}_i}(\Gamma_i)$ y además escribimos $K_1 = \mathcal{C}_{\mathcal{P}_1}^2(\Gamma_1)$, dotado de la métrica euclídea estándar descrita en el Ejemplo 1.58. Sean $f_2 : \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_1$ una quasi-inversa de f_1 y N un número natural tal que f_1 y f_2 son (N, N) -embeddings quasi-isométricos, tal que toda palabra de \mathcal{R}_1 tiene longitud a lo sumo N y tal que las composiciones $f_2 \circ f_1$ y $f_1 \circ f_2$ están a distancia a lo sumo N de las identidades de Γ_1 y Γ_2 respectivamente. Llamemos $M = 3(3N^2 + 5N + 1)$ y sea K_2 el 2-complejo combinatorio que se obtiene de \mathcal{C}_2 adjuntando una 2-celda por cada lazo de aristas de longitud a lo sumo M . Dotamos a K_2 con la métrica euclídea estándar ya mencionada.

Veamos que K_2 es simplemente conexo. Como vimos en el Paso 1 de la demostración del Teorema 3.5, esto es equivalente a que el conjunto de relaciones \mathcal{R}_2 de longitud a lo sumo M nos provea de una presentación $\langle \mathcal{A}_2 | \mathcal{R}_2 \rangle$ de Γ_2 . Notar que en cualquier caso esta presentación es finita. Sea $\xi : S^1 \rightarrow \mathcal{C}_2 \subseteq K_2$ un lazo de aristas y numeremos

g_1, \dots, g_k a la secuencia de vértices que visita, de manera que $g_1 = g_k$. Veamos que existe una extensión continua $\hat{\zeta} : D^2 \rightarrow K_2$ de ζ al disco.

Numeremos v_1, \dots, v_k a la secuencia de imágenes inversas por ζ de los vértices g_1, \dots, g_k . Sea $\phi : S^1 \rightarrow \mathcal{C}_1 \subseteq K_1$ el camino de aristas que manda cada segmento de extremos $\{v_i, v_{i+1}\}$ (índices mod k) sobre una geodésica en \mathcal{C}_1 que conecta $f_2(g_i)$ con $f_2(g_{i+1})$. Como K_1 es simplemente conexo, existe una extensión continua $\hat{\phi} : D^2 \rightarrow K_1$ de ϕ al disco. Asignamos a cada punto x en el disco D^2 un punto γ_x en Γ_1 entre los que están además en el soporte de $\hat{\phi}(x)$ en K_1 que minimice la distancia a $\hat{\phi}(x)$. En particular, $\gamma_{v_i} = f_2(g_i)$ para todo i en \mathbb{I}_k . De manera que $d(\gamma_{v_i}, \gamma_{v_{i+1}}) \leq 2N$ para todo i en \mathbb{I}_k . Notar que además $d(\hat{\phi}(x), \gamma_x) \leq 1/2$ para todo x en S^1 .

Por continuidad, existe un número real positivo C tal que $d(\gamma_{x_1}, \gamma_{x_2}) \leq N$ para cualesquiera x_1 y x_2 en D^2 a distancia menor que C . Entonces, existe una triangulación \mathcal{T} del disco que incluye a los puntos v_1, \dots, v_k entre sus vértices y tal que $d(\gamma_{x_1}, \gamma_{x_2}) \leq N$ para todo par de vértices x_1 y x_2 adyacentes.

Definimos $\hat{\zeta}|_{S^1} = \zeta$ y $\hat{\zeta}(x) = f_1(\gamma_x)$ para todo vértice x de \mathcal{T} que esté en el interior de D^2 . Afirmamos que $\hat{\zeta}$ manda cada par de vértices x_1 y x_2 de \mathcal{T} adyacentes a elementos de Γ_2 que están a distancia a lo sumo $M/3$. Suponiendo que la afirmación es cierta, extendemos $\hat{\zeta}$ a lo largo de las aristas de \mathcal{T} mandando cada arista a una geodésica en \mathcal{C}_2 , y siendo que todo lazo de aristas de longitud a lo sumo M en \mathcal{C}_2 es borde de una 2-celda en K_2 , podemos extender $\hat{\zeta}$ a lo largo de las 2-celdas de \mathcal{T} .

En efecto, veamos que para cualesquiera vértices x_1 y x_2 de \mathcal{T} adyacentes se tiene que $d(\hat{\zeta}(x_1), \hat{\zeta}(x_2)) \leq M/3$. Esto es claro excepto quizás en el caso en que uno de los vértices, digamos x_1 , esté en el interior de D^2 y el otro, digamos x_2 , esté en S^1 , digamos entre v_i y v_{i+1} . En tal caso,

$$\begin{aligned} d(\hat{\zeta}(x_1), \hat{\zeta}(x_2)) &= d(f_1(\gamma_{x_1}), \zeta(x_2)) \\ &\leq d(f_1(\gamma_{x_1}), f_1(\gamma_{x_2})) + d(f_1(\gamma_{x_2}), f_1(\phi(x_2))) + d(f_1(\phi(x_2)), f_1(\phi(v_i))) + \\ &\quad + d(f_1(\phi(v_i)), \zeta(v_i)) + d(\zeta(v_i), \zeta(x_2)) \\ &\leq (N^2 + N) + (N/2 + N) + (Nd(\phi(x_2), \phi(v_i)) + N) + d(f_1(f_2(g_i)), g_i) + 1 \\ &\leq (N^2 + N) + (N/2 + N) + (N(2N) + N) + N + 1 \\ &= 3N^2 + 5N + 1 \leq M/3, \end{aligned}$$

lo cual completa la prueba de la afirmación. Por lo dicho en el párrafo anterior, la proposición sigue. \square

En relación con las ideas involucradas con la demostración anterior hacemos la siguiente observación. Sean Γ_1 y Γ_2 grupos finitamente generados, \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 conjuntos generadores respectivos, $\mathcal{P}_1 = \langle \mathcal{A}_1 | \mathcal{R}_1 \rangle$ una presentación finita de Γ_1 y $f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ una quasi-isometría. Sea $\mathcal{P}_2 = \langle \mathcal{A}_2 | \mathcal{R}_2 \rangle$ una presentación de Γ_2 y $\hat{f} : \mathcal{C}_{\mathcal{P}_1}^2(\Gamma_1) \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{P}_2}^2(\Gamma_2)$ una función tal que para cada punto x en $\mathcal{C}_{\mathcal{P}_1}^2(\Gamma_1)$ es $\hat{f}(x) = f(\gamma_x)$, donde γ_x es un punto de Γ_1 en el soporte de x que minimice la distancia (dotando a los complejos de la métrica

euclídea estándar). Entonces, \mathcal{P}_2 es finita si y solo si \hat{f} es una quasi-isometría puesto que \mathcal{R}_2 es finita si y solo si el máximo de las longitudes de las palabras que contiene es finito y la distancia del baricentro de un polígono euclídeo estándar de N lados a cualquiera de sus vértices tiende a $+\infty$ cuando N tiende a $+\infty$.

Hemos visto que la propiedad de ser finitamente presentado, cuya definición es puramente algebraica, resulta invariante por quasi-isometrías así que en realidad es razonable considerarla una propiedad profundamente geométrica y, de hecho, vimos que está relacionada con el tamaño de las 2-celdas en el 2-complejo de Cayley. El siguiente invariante que examinaremos es el *crecimiento* de un grupo finitamente generado. Aunque su definición es puramente geométrica y su invariancia por quasi-isometrías vale por definición, resulta tener fuertes consecuencias algebraicas sobre el grupo. Entre estas consecuencias, es remarcable el Teorema 3.18 de Gromov del crecimiento polinomial.

Comencemos con algunas definiciones básicas. Sean $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dos funciones no-decrecientes. Decimos que f *domina asintóticamente* a g si existe un número real positivo C tal que

$$g(x) \leq Cf(Cx + C) + Cx + C,$$

para todo número real no-negativo x , y en tal caso escribimos $g \preceq f$. Decimos que f y g son *asintóticamente equivalentes* si $g \preceq f$ y $f \preceq g$, y en tal caso escribimos $f \cong g$.

Sean $t : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ y $s : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ dos funciones no-decrecientes y sean $\hat{t} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $\hat{s} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dos extensiones no-decrecientes de t y s respectivamente. Por ejemplo, se pueden considerar las funciones definidas por las fórmulas $\hat{t}(x) = t([x])$ y $\hat{s} = s([x])$ para todo número real no-negativo x . Decimos que t *domina asintóticamente* a s si $\hat{s} \preceq \hat{t}$ y decimos que s y t son *asintóticamente equivalentes* si $\hat{t} \cong \hat{s}$. Notar que esta definición no depende de las extensiones elegidas así que podemos emplear las notaciones $s \preceq t$ y $t \cong s$ sin dar lugar a ambigüedades. Además, con una definición similar, podemos comparar el comportamiento asintótico de funciones de tipo $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ con funciones de tipo $\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Notar que nuestra definición de ser asintóticamente equivalente es menos restrictiva que la usualmente empleada en análisis, en la cual f es equivalente a g si y solo si existen los dos límites (finitos)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/g(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)/f(x).$$

(En el caso de que estén bien definidos los cocientes para valores suficientemente grandes de x .) Por ejemplo, de acuerdo a nuestras definiciones, las funciones constantes no negativas, las funciones de la forma $f(n) = n^\alpha$, con $0 < \alpha < 1$, y la función identidad son asintóticamente equivalentes. En general, *toda función no decreciente tiene crecimiento al menos lineal*. Sin embargo, distinguimos potencias superiores de n : si α y β son números reales mayores e iguales a 1 entonces $f(n) = n^\alpha$ y $g(n) = n^\beta$ son asintóticamente equivalentes si y solo si $\alpha = \beta$.

Definición 3.12. Sean Γ un grupo finitamente generado y \mathcal{A} un conjunto generador finito. El crecimiento de Γ es la clase de equivalencia asintótica β_Γ de la función

$$\beta_{\Gamma, \mathcal{A}} : n \in \mathbb{N}_0 \mapsto \#B_n[e] \in \mathbb{N}_0,$$

cuyo valor en cada número entero no-negativo n es la cantidad de elementos de la bola cerrada en Γ de centro en el elemento neutro e y radio n bajo la métrica de la palabra $d_{\mathcal{A}}$.

La prueba de que, independientemente del conjunto generador finito \mathcal{A} , la función $\beta_{\Gamma, \mathcal{A}}$ define unívocamente una clase de equivalencia asintótica β_Γ se deduce inmediatamente de la siguiente observación.

Observación 3.13. Sean Γ_1 y Γ_2 grupos finitamente generados, \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 conjuntos generadores finitos respectivos y $f : (\Gamma_1, d_{\mathcal{A}_1}) \rightarrow (\Gamma_2, d_{\mathcal{A}_2})$ un embedding quasi-isométrico. Tenemos entonces que $\beta_{\Gamma_1, \mathcal{A}_1} \preceq \beta_{\Gamma_2, \mathcal{A}_2}$.

El siguiente resultado reúne propiedades básicas del crecimiento de grupos finitamente generados.

Proposición 3.14. Sean Γ un grupo generador finito y \mathcal{A} un conjunto generador finito.

1. Sub-multiplicatividad: Para cualesquiera m y n números enteros no-negativos se tiene que $\beta_{\Gamma, \mathcal{A}}(n+m) \leq \beta_{\Gamma, \mathcal{A}}(n)\beta_{\Gamma, \mathcal{A}}(m)$.
2. Cota inferior: Si además Γ es infinito, entonces $\beta_{\Gamma, \mathcal{A}}$ es estrictamente creciente así que está acotada inferiormente por la función identidad.
3. Cota superior: Para todo número entero no-negativo n , se tiene que $\beta_{\Gamma, \mathcal{A}}(n) \leq \beta_{F(\mathcal{A}), \mathcal{A}}(n) \leq n^{(\#\mathcal{A})}$. Así que todo grupo crece a lo sumo exponencialmente.

Frecuentemente omitiremos explicitar la dependencia de \mathcal{A} en $\beta_{\Gamma, \mathcal{A}}$, identificándola con su clase de equivalencia y entendiéndose que estamos haciendo operaciones y afirmaciones que valen cualquiera sea el representante en dicha clase.

Para cada número natural m , $\beta_{\mathbb{Z}^m}(n) = n^m$ y, si m es mayor a 1, $\beta_{\mathbb{F}_m}(n) = e^n$. Así que los grupos libres de rango al menos 2 tienen crecimiento *exponencial*, el cual es el más grande posible. Obtenemos la invariancia bajo quasi-isometría del rango entre grupos abelianos libres: $\mathbb{Z}^m \sim_{qi} \mathbb{Z}^k$ si y solo si $m = k$. Por otro lado, como vimos antes de la Proposición 3.8, los grupos libres de rango al menos 2 son todos quasi-isométricos entre sí. Ahora, distinguiendo por crecimiento, vemos que estos grupos libres no son quasi-isométricos a ningún grupo abeliano libre. Otro invariante que distingue a los primeros de los segundos es la hiperbolicidad.

El crecimiento de grupos tiene una motivación geométrica que proviene del contexto de las variedades. El siguiente resultado [Mil68] es una aplicación del Lema 3.7 de Švarc-Milnor.

Proposición 3.15. Sean M una variedad riemanniana cerrada conexa, Γ su grupo fundamental, \tilde{M} su revestimiento universal y p un punto en \tilde{M} . Definimos la función de crecimiento de M como la función

$$\beta_{M,p} : r \in \mathbb{R}_0 \mapsto \text{vol } B_r(p) \in \mathbb{R}_0.$$

cuyo valor en un número real no-negativo r es el volumen riemanniano en \tilde{M} de la bola de centro p y radio r . Su clase de equivalencia asintótica β_M no depende del punto base p y, más aún, es igual a β_Γ .

Los detalles de la demostración de la Proposición 3.15 pueden encontrarse en [LH00, Proposition VI.36]. Un resultado filosóficamente similar es el *Filling Theorem* 3.31, que veremos más adelante y cuya demostración estudiaremos con cierta profundidad.

La equivalencia de la Proposición 3.15 permite comparar el crecimiento de dos variedades que están vinculadas por una función de grado no nulo. Recordemos que el grado de una función continua, definida entre espacios apropiados como en este caso, resulta ser un invariante homotópico.

Proposición 3.16. Sean M y N dos variedades cerradas conexas orientadas de la misma dimensión y Γ y Θ sus grupos fundamentales respectivos. Si existe una función continua $f : M \rightarrow N$ de grado no nulo, entonces $\beta_\Theta \preceq \beta_\Gamma$.

Demostración. Afirmamos que si existe tal f , entonces el morfismo de grupos $f_* : \Gamma \rightarrow \Theta$ tiene como imagen a un subgrupo de índice finito. En tal caso, su imagen Ψ es quasi-isométrica a Θ así que ambos grupos tienen el mismo crecimiento. Luego, la correstricción $f_* : \Gamma \rightarrow \Psi$ es un morfismo de grupos suryectivo, en otras palabras un cociente y así $\beta_\Theta = \beta_\Psi \preceq \beta_\Gamma$, como queremos ver.

Resta probar la afirmación. En efecto, sea $\psi : X \rightarrow N$ el revestimiento que está en correspondencia con Ψ , de manera que X es una variedad riemanniana orientada conexa sin borde de la misma dimensión que N y M . Sean p un punto en M y x un punto en X tal que $\psi(x) = f(p)$. Como $f_*(\Gamma) = \Psi$, en particular vale la inclusión y entonces el Lema del Levantamiento nos dice que existe una única función continua $g : M \rightarrow X$ tal que $\psi \circ g = f$ y $g(p) = x$. Luego, como el grado de f es no nulo y esto equivale a que el morfismo a nivel de la homología $f_* : H_n(M) \rightarrow H_n(N)$ en grado n es no nulo, la igualdad $f_* = \psi_* \circ g_*$ nos dice que $H_n(X)$ es no nulo y esto equivale, por Dualidad de Poincaré, a que X sea compacta. A su vez, la compacidad de X equivale a que p tenga finitas hojas (esto es, fibra finita) y esta cantidad de hojas es precisamente el índice de Ψ en Θ . \square

La Proposición 3.16 nos permite, en particular, reconocer casos en los que no puede haber una función de grado no nulo. Por ejemplo, si N fuese además hiperbólica, tendría crecimiento exponencial, que es el crecimiento más grande posible. Así que si M no tiene crecimiento exponencial, no puede existir tal $f : M \rightarrow N$ de grado no nulo.

Por ejemplo, no existe ninguna función continua de grado no nulo con dominio en la esfera o el toro y codominio en alguna de las restantes superficies cerradas orientadas

En la siguiente definición, notar que aunque aparecen las palabras *polinomial* y *grado*, el grado es un número real y no necesariamente un entero.

Definición 3.17. Sea d un número real mayor o igual a 1. Decimos que un grupo finitamente generado Γ tiene *crecimiento polinomial de grado menor o igual que d* si $\beta_\Gamma(n) \preceq n^d$. Decimos que Γ tiene *crecimiento polinomial* si cumple tal propiedad para algún d .

Finalmente, el siguiente resultado muestra que el crecimiento de un grupo está ligado fuertemente a sus propiedades algebraicas.

Teorema 3.18 (Gromov, del crecimiento polinomial). *Un grupo finitamente generado tiene crecimiento polinomial si y solo si es virtualmente nilpotente.*

Se han dado distintas pruebas del Teorema 3.18 del crecimiento polinomial. El argumento original de Gromov puede ser encontrado en [Gro81]. Notar que una consecuencia del teorema, junto con la invariancia quasi-isométrica del crecimiento, es la *rigidez de la nilpotencia*: Si un grupo finitamente generado es quasi-isométrico a un grupo finitamente generado nilpotente entonces es virtualmente nilpotente, esto es, tiene un subgrupo nilpotente de índice finito.

El siguiente invariante que describiremos es la *hiperbolicidad* y es una generalización del concepto de espacio negativamente curvado al contexto de los espacios geodésicos de manera que sea invariante por quasi-isometrías. Vía grafo de Cayley, trasladamos esta noción al contexto de los grupos (finitamente generados). Notar que, por otro lado, la noción de espacio y de grupo $\text{CAT}(\kappa)$ no es invariante por quasi-isometrías. Por ejemplo, toda esfera es quasi-isométrica a un *singleton* $\{*\}$, el cual es $\text{CAT}(-1)$ a diferencia de las esferas.

La noción de *hiperbolicidad* fue introducida por Gromov en su trabajo seminal [Gro87] sobre grupos hiperbólicos. Allí se dan varios esbozos de definiciones equivalentes y, de hecho, existen más de una decena de definiciones equivalentes dispersas por la literatura.

Definición 3.19. Sea X un espacio métrico. Un triángulo geodésico en X es la unión de las imágenes de tres geodésicas $c_i : [0, L_i] \rightarrow Y$, con i en \mathbb{I}_3 , tal que $c_i(L_i) = c_{i+1}(0)$ para todo i (índice mod 3). Dado δ un número real no-negativo, decimos que un triángulo geodésico en X es *δ -delgado* si cada uno de sus lados está incluido en el δ -entorno cerrado de la unión de los otros dos lados. Decimos que X es *δ -hiperbólico* si es geodésico y todo triángulo geodésico en X es δ -delgado. Finalmente, decimos que X es *hiperbólico* si es δ -hiperbólico para algún número real no-negativo δ .

Los espacios hiperbólicos \mathbb{H}^n , con $n \geq 2$, son δ -hiperbólicos para $\delta = \log(\sqrt{2} + 1)$ y esta constante es óptima. Un espacio geodésico dado es 0-hiperbólico si y solo si es

un \mathbb{R} -árbol. Notar que en tales espacios todo triángulo es degenerado. Los espacios euclídeos \mathbb{E}^n , con $n \geq 2$, son no hiperbólicos porque violan la condición de δ -delgadez para triángulos suficientemente grandes. Remarcablemente las esferas S^n , con $n \geq 2$, son hiperbólicas. Más generalmente, todo espacio geodésico *acotado* es δ -hiperbólico con δ igual al diámetro del espacio. El revestimiento universal de una variedad riemanniana cerrada conexa de curvatura no-positiva es hiperbólico. Más generalmente, todo espacio $\text{CAT}(\kappa)$ con κ negativo es hiperbólico.

Recorramos los aspectos principales de la demostración de que la hiperbolicidad es invariante entre los espacios geodésicos. Un punto importante consiste en que tenemos que tratar con *quasi-geodésicas* porque una *quasi-isometría* manda toda geodésica a una *quasi-geodésica* pero no necesariamente a una geodésica. De hecho, necesitamos la noción más general de *quasi-hiperbolicidad*.

Definición 3.20. Sea X un espacio métrico.

1. Sean ε y δ dos números reales no-negativos y λ un número real positivo. Una (λ, ε) -*quasi-geodésica* en X es un embedding (λ, ε) -*quasi-isométrico* $c : [0, L] \rightarrow X$. Decimos que X es un espacio (λ, ε) -*quasi-geodésico* si todo par de puntos en X pueden ser unidos mediante una (λ, ε) -*quasi-geodésica*. En tal caso, decimos que X es (λ, ε) - δ -*quasi-hiperbólico* si todo triángulo (λ, ε) -*quasi-geodésico* es δ -*delgado*, esto es, cada uno de sus lados está incluido en el δ -entorno cerrado de la unión de los otros dos lados.
2. Decimos que X es *quasi-geodésico* si es (λ, ε) -*quasi-geodésico* para algún par de constantes λ y ε . (Notar que las mismas constantes deben funcionar para toda geodésica.) En tal caso, decimos que X es *quasi-hiperbólico* si es (λ, ε) - δ -*hiperbólico* para alguna constante δ .
3. Una *quasi-geodésica* en X es una (λ, ε) -*quasi-geodésica* para algún par de constantes λ y ε .

Notemos que si dos espacios son *quasi-isométricos* entonces o bien ambos son *quasi-geodésicos* o bien ninguno lo es. Resulta que si tenemos un embedding *quasi-isométrico* $X \rightarrow Y$ entre espacios *quasi-geodésicos* e Y es *quasi-hiperbólico* entonces X es *quasi-hiperbólico*. A partir de estos dos resultados obtenemos como consecuencia inmediata que la *quasi-hiperbolicidad* es un invariante *quasi-isométrico* entre los espacios métricos. Finalmente, la invariancia *quasi-isométrica* de la hiperbolicidad entre los espacios geodésicos sigue de la última afirmación junto con un resultado clave que dice que todo espacio geodésico es hiperbólico si y solo si es *quasi-hiperbólico*. A través de la prueba, el único resultado fundamental subyacente es un resultado de *estabilidad* que dice que en espacios hiperbólicos las *quasi-geodésicas* se mantienen cerca de las geodésicas y se pueden emplear éstas para aproximar a aquellas. Esta propiedad *asintótica* distingue a las geometrías hiperbólicas de, por ejemplo, las planas y explica por qué la noción de hiperbolicidad que enunciamos es invariante por *quasi-isometrías*.

Teorema 3.21. Sean ε y δ dos números reales no-negativos y λ un número real positivo. Entonces existe un número real positivo C con la siguiente propiedad: Para todo espacio (geodésico) δ -hiperbólico X y toda (λ, ε) -quasi-geodésica $\gamma : [0, R] \rightarrow X$ existe una geodésica $c : [0, L] \rightarrow X$ tal que la imagen de γ está incluida en el C -entorno cerrado de la imagen de c .

Los detalles de la demostración de que la quasi-invariancia de la hiperbolicidad pueden ser encontrados en [Löh17, 7.2.3-4], en particular la prueba del Teorema 3.21 puede ser encontrada en [Löh17, Theorem 7.2.11].

Una propiedad que caracteriza a la geometría hiperbólica es la *desigualdad isoperimétrica lineal* y la distingue, por ejemplo, de la geometría plana que satisface en cambio una desigualdad isoperimétrica cuadrática. Para poder generalizar esta propiedad en el contexto de la categoría QMet, necesitamos una noción de área para espacios métricos suficientemente robusta como para ser *estable* bajo quasi-isometrías.

Definición 3.22. Sean X un espacio métrico, ε un número real positivo y $c : S^1 \rightarrow X$ un lazo en X . Un ε -filling de c es un par (\mathcal{T}, Φ) con las especificaciones siguientes.

1. $\mathcal{T} : K \rightarrow D^2$ es un homeomorfismo de un CW-complejo combinatorio tal que toda 2-celda es un 3-ángulo, esto es, tiene exactamente 3 1-celdas en su estructura (eventualmente identificadas entre sí al adjuntar la 2-celda) al disco. Consideramos a D^2 con tal estructura combinatoria y llamamos vértices, aristas y caras de D^2 a las imágenes bajo \mathcal{T} de las 0-celdas, 1-celdas y 2-celdas de K respectivamente.
2. Una función $\Phi : D^2 \rightarrow X$ no necesariamente continua tal que $\Phi|_{S^1} = c$ y, para toda cara F de D^2 , el diámetro de $\Phi(F)$ es a lo sumo ε .

El *área* del filling es la cantidad de 2-celdas de K . Finalmente, la ε -área de c es el mínimo de las áreas de los ε -fillings de c y la denotamos $\text{Area}_\varepsilon(c)$. (Como es usual, convenimos en que el mínimo o ínfimo del conjunto vacío es $+\infty$.)

Hagamos dos observaciones. En primer lugar, notar que si V es la cantidad de vértices; E , la de aristas y F , la de caras del disco bajo tal \mathcal{T} entonces se cumplen las desigualdades $V \leq 2E$ (pues cada arista tiene a lo sumo dos extremos distintos) y $E \leq 3F$ (pues cada cara tiene a lo sumo tres lados distintos). Además, la característica de Euler del disco es $1 = F - E + V$ y, luego obtenemos que $1 \leq F = 1 + E - V \leq 1 + E$ y, en particular, que $V \leq E$. Así que si en lugar de contar caras, contamos aristas o vértices, llegamos a una noción de área asintóticamente equivalente.

En segundo lugar, dada \mathcal{T} como arriba, dado que la función Φ no es necesariamente continua, para definirla basta darle valores sobre los vértices de D^2 de manera que la imagen de los vértices de toda cara interior tenga diámetro a lo sumo ε y además la unión de la imagen de los vértices de todo triángulo que tenga alguno de sus lados en el borde junto con la imagen de tales lados tenga diámetro a lo sumo ε (los valores del

borde ya están fijados porque allí Φ recorre el camino c). Si esto ocurre, completamos la definición de Φ mandando el interior de cada arista o cara a la imagen de alguno de sus vértices.

Las observaciones hechas motivan la siguiente definición.

Definición 3.23. Sean Δ un espacio métrico homeomorfo a un disco (2-dimensional) y ε un número real positivo. Un conjunto $\Sigma \subseteq \Delta$ se dice que ε -rellena a Δ si todo punto de Δ está a distancia menor que ε de Σ y todo punto del ciclo del borde $\partial\Delta$ puede ser conectado a un punto de $\partial\Delta \cap \Sigma$ por un arco en $\partial\Delta$ que tiene longitud a lo sumo ε .

Teorema 3.24. Un espacio geodésico X es hiperbólico si y solo si existen números reales positivos ε y B tales que para todo lazo geodésico a trozos $c : S^1 \rightarrow X$ en X , vale la desigualdad isoperimétrica lineal que sigue.

$$\text{Area}_\varepsilon(c) \leq BL(c) + B$$

.

Una prueba del Teorema 3.24 puede ser encontrada en [BH99, Proposition III H 2.7, Theorem III H 2.9]

3.3 El word-problem

En esta sección estudiamos el *Filling Theorem*, una sorprendente equivalencia entre el problema de la palabra en un grupo dado y el problema de rellenado de lazos en un espacio sobre el cual el grupo actúa geoméricamente, siguiendo mayormente [Bri02] aunque también [BRS07]. Destacamos que estamos trabajando *actualmente* en la generalización del *Filling Theorem* para espacios $\text{CAT}(\kappa)$ y empleando rellenos de género arbitrario, y buscamos aplicaciones de estas generalizaciones.

Definición 3.25. La *función de Dehn* asociada a una presentación finita $\mathcal{P} = \langle \mathcal{A} | \mathcal{R} \rangle$ es la mínima función no-decreciente $\delta_{\mathcal{P}} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que para toda palabra null-homotópica w en el alfabeto \mathcal{A}^\pm existe una igualdad, en el grupo libre $F(\mathcal{A})$,

$$w = \prod_{i=1}^N x_i r_i^{\epsilon_i} x_i^{-1},$$

con x_i en $F(\mathcal{A})$, r_i en \mathcal{R} y ϵ_i en $\{1, -1\}$ para todo i , tal que

$$N \leq \delta_{\mathcal{P}}(|w|),$$

donde $|w|$ es la longitud (esto es, cantidad de letras) de la palabra w .

El *área algebraica* de una palabra null-homotópica w es

$$\text{Area}(w) := \min \left\{ N \in \mathbb{N}_0 \mid w = \prod_{i=1}^N x_i r_i^{\epsilon_i} x_i^{-1} \text{ en } F(\mathcal{A}), \text{ con } x_i \in F(\mathcal{A}), r_i \in \mathcal{R} \text{ y } \epsilon_i \in \{1, -1\} \text{ para todo } i \in \{1, \dots, N\} \right\}$$

De manera que $\delta_{\mathcal{P}}(\ell) = \sup\{\text{Area}(w) \mid |w| \leq \ell\}$. Funciones de Dehn asociadas a presentaciones del mismo grupo son asintóticamente equivalentes. Más aún, su clase de equivalencia asintótica es invariante por quasi-isometrías.

Necesitamos una noción de *área* en espacios métricos arbitrarios. Las nociones de área de las que disponemos son de al menos dos naturalezas. Algunas de ellas provienen de la geometría *coarse* y son construidas a partir de aproximaciones toscas de conjuntos, las cuales no emplean nada más que la misma métrica del espacio. Otras provienen de la teoría geométrica de la medida, son construidas a partir de medidas e integrales y nos proveen de una estructura más rica. Ya nos encontramos con la primera clase de noción de área en la Definición 3.22. Continuamos con la segunda clase de noción de área, la cual proviene de la teoría geométrica de la medida, siguiendo mayormente [BBI01, Fed96].

La noción de *medida* generaliza las nociones ingenuas de longitud, área y volumen de dos maneras. Primero, nos permite medir objetos de dimensiones más altas. Segundo, nos permite medir conjuntos de comportamiento más salvaje.

Sea X un conjunto. Una σ -álgebra es una familia de subconjuntos de X que contiene al conjunto vacío \emptyset , el conjunto X y es cerrada bajo la sustracción y uniones numerables. Una medida μ sobre una σ -álgebra \mathcal{F} es una función $\mu : [0, +\infty]$ tal que asigna medida 0 al conjunto vacío y es σ -aditiva. Si X es un espacio topológico, la σ -álgebra de *Borel* es la mínima σ -álgebra de X que contiene a los abiertos. Sus elementos son llamados conjuntos *boreleanos* y una medida sobre ella es llamada una *medida boreleana*. En espacios euclídeos tenemos una esencialmente única medida boreleana invariante bajo traslaciones, a saber, la medida de Haar asociada al grupo topológico localmente compacto $(\mathbb{R}^n, +)$.

Teorema 3.26 (Lebesgue). *Existe una única medida boreleana \mathcal{L}^n sobre \mathbb{E}^n que es invariante bajo traslaciones y tal que $\mathcal{L}^n([0, 1]^n) = 1$.*

De hecho, la medida de Lebesgue es invariante bajo todo el grupo de isometrías del espacio euclídeo y puede ser extendida a una σ -álgebra más grande pero aquí estamos interesados solamente en medida boreleanas. Recordemos los pasos clave en la construcción de la medida de Lebesgue: elegimos una clase de conjuntos simples (como bolas o cubos) y les asignamos una medida a los conjuntos simples. Por ejemplo, en el caso de los cubos es el producto de las longitudes de sus lados. Entonces formamos una σ -álgebra apropiada y dado un conjunto de esta σ -álgebra lo cubrimos por numerables conjuntos simples. La medida de tal cubrimiento es la suma de las medidas previamente asignadas a sus elementos y la medida de Lebesgue del conjunto dado se define como el ínfimo de las medidas de tales cubrimientos. En este proceso, en vez de sumar las medidas de bolas euclídeas o cubos, uno puede simplemente sumar el diámetro de conjuntos de un cubrimiento elevados a la potencia n : el resultado es el mismo salvo una constante multiplicativa.

Imitaremos la construcción de la medida de Lebesgue en \mathbb{E}^n para obtener la medida de Hausdorff n -dimensional, que es una medida boreleana para espacios métricos arbitrarios. En esta generalidad, resulta que emplear conjuntos arbitrarios es técnicamente más conveniente que usar solamente bolas métricas.

Sea X un espacio métrico, n un número *real* no-negativo, y $S = \{S_i\}$ un cubrimiento numerable de X . Definimos el n -peso de S como

$$\omega_n(S) = \sum_i (\text{diam } S_i)^n$$

Si $n = 0$, sustituimos cada término 0^0 (si hubiere) en la fórmula por 1.

Para cada número real positivo ε definimos

$\mathcal{H}_\varepsilon^n(X) := \inf\{\omega_n(S) \mid S \text{ es un cubrimiento numerable de } X \text{ por conjuntos de diámetro a lo sumo } \varepsilon\}$.

Finalmente definimos la medida de Hausdorff n -dimensional de X como

$$\mathcal{H}^n(X) := C(n) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\varepsilon^n(X),$$

donde $C(n)$ es una constante positiva de normalización, elegida en el caso entero de manera que la medida de Hausdorff n -dimensional de un cubo unitario en \mathbb{E}^n sea igual a 1. En tal caso, resulta que $C(n)$ es igual a la medida de Lebesgue de una n -bola euclídea de diámetro 1. Esta asignación de medida funciona para todo espacio métrico y luego para todo subespacio métrico de un dado espacio métrico pero solamente estamos interesados en medidas boreleanas. Dado un espacio métrico X , obtenemos inmediatamente de su definición que la medida de Hausdorff n -dimensional satisface las siguientes propiedades.

1. (Monotonicidad) Si $Y \subseteq Z \subseteq X$, entonces $\mathcal{H}^n(Y) \leq \mathcal{H}^n(Z)$.
2. (σ -subaditividad) Si $\{A_i\}$ es una familia a lo sumo numerable de subconjuntos de X , entonces $\mathcal{H}^n(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i \mathcal{H}^n(A_i)$.
3. Si Y y Z son subconjuntos de X tales que $d(Y, Z) > 0$, entonces $\mathcal{H}^n(Y \cup Z) = \mathcal{H}^n(Y) + \mathcal{H}^n(Z)$.

Por el criterio de Caratheodory [Fed96, 2.3.2(9)], toda función $[0, +\infty]$ -valuada definida sobre la σ -álgebra de Borel de X que satisface estas tres propiedades es de hecho una medida. Luego la medida de Hausdorff n -dimensional restringida a los subconjuntos boreleanos de X es efectivamente una medida. Por el Teorema 3.26 de Lebesgue, las medidas boreleanas de Lebesgue y Hausdorff coinciden en el caso euclídeo.

Usando la medida de Hausdorff 2-dimensional tenemos la deseada noción de área en espacios métricos. Pero ahora tenemos una medida boreleana así que tenemos la integral de Lebesgue de funciones medibles a valores reales. Como es usual, la medida

de un conjunto coincide con la integral de su función característica. Así que podemos decir que el área de un conjunto es el área de su función característica. Pero de hecho tenemos una noción de área para funciones más generales.

Sea $f : D^2 \rightarrow X$ una función Lipschitz. Definimos el *área de f* como

$$\text{Area}(f) := \int_X \#f^{-1}(y) d\mathcal{H}^2(y).$$

Donde $\#f^{-1}(y)$ es el cardinal de la fibra de y . No profundizaremos en los detalles técnicos de medibilidad de la función. Así que en el caso de que f sea un embedding, su área sería igual al área de su imagen. Pero en el caso general, la definición de área de una función tiene en cuenta las multiplicidades de f .

Decimos que una función Lipschitz $f : D^2 \rightarrow X$ es un *filling* de un lazo $c : S^1 \rightarrow X$ si $f|_{S^1} = c$. En caso de existir tal f es claro que c es null-homotópica. La cuestión acerca de si todo lazo null-homotópico (embebido) puede ser rellenado con un *filling* de área mínima se conoce como *problema de Plateau* y está resuelto en el caso de variedades riemannianas donde se sabe que siempre existe tal *filling*. No profundizaremos en estos detalles técnicos.

Los diagramas de van Kampen son el objeto híbrido geométrico-combinatorio que sirven de traductor en la equivalencia. Si bien pueden ser considerados más combinatorios que geométricos a primera vista, la verdad es que ambos aspectos están en equilibrio. Comencemos con dos definiciones equivalentes de diagramas de van Kampen que ilustran su balance y flexibilidad.

Sea Γ un grupo dado por una presentación finita $\mathcal{P} = \langle \mathcal{A} | \mathcal{R} \rangle$ y sea w una palabra null-homotópica en el alfabeto $\mathcal{A}^{\pm 1}$. La palabra w induce un lazo de aristas en el grafo de Cayley $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(\Gamma)$ empezando desde un vértice base v de Γ (en general, se toma v como el neutro e). Este grafo de Cayley es el 1-esqueleto del 2-complejo de Cayley $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^2(\Gamma)$ asociado a la presentación \mathcal{P} así que componiendo con la inclusión tenemos un lazo de aristas $\eta_w : S^1 \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^2(\Gamma)$ empezando en v . Un *diagrama de van Kampen* para w es una función combinatoria $\pi : \Delta \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^2(\Gamma)$ tal que

1. $\Delta = S^2 \setminus \partial_{\infty}^2$ es una 2-esfera dotada de una estructura combinatoria de la cual una 2-celda ∂_{∞}^2 fue removida, y
2. hay un vértice base fijo $*$ en Δ tal que cuando seguimos el lazo $\pi|_{\partial\Delta}$ empezando desde $*$ obtenemos η_w .

Alternativamente, un \mathcal{P} -diagrama de van Kampen para w es un 2-complejo combinatorio contráctil y plano Δ con aristas etiquetadas y dirigidas tal que

1. recorriendo $\partial\Delta$ en sentido antihorario y empezando desde un vértice base fijo $*$ leemos w , y

2. recorriendo el borde de cada 2-celda leemos un conjugado cíclico de una palabra en $\mathcal{R}^{\pm 1}$.

Las definiciones son equivalentes porque, dada la primera, las aristas de Δ heredan direcciones y etiquetas de $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^2(\Gamma)$, y dada la segunda, hay una función combinatoria $\pi : \Delta \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^2(\Gamma)$, unívocamente determinada sobre el 1-esqueleto de Δ , que manda $*$ a v y preserva las etiquetas y direcciones de las aristas.

Lema 3.27 (van Kampen). *Sean $\mathcal{P} = \langle \mathcal{A} | \mathcal{R} \rangle$ una presentación de un grupo Γ y w una palabra null-homotópica en el alfabeto \mathcal{A}^{\pm} . Existe un diagrama de van Kampen Δ para w que tiene cantidad de 2-celdas mínima, esto es, igual al área algebraica de w .*

Una prueba del Lema 3.27 de van Kampen puede ser encontrada en [Bri02]. Mencionamos que el supremo de la definición 3.28 siguiente resulta finito.

Definición 3.28. Sea M una variedad riemanniana cerrada conexa. La función isoperimétrica de M es la función $\text{Fill}_M : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ definida por la fórmula

$$\begin{aligned} \text{Fill}_M(r) &:= \sup\{\text{FArea}(c) \mid c : \mathbb{S}^1 \rightarrow M \text{ null-homotópica}, l(c) \leq r\} \\ &= \sup\{\text{FArea}(c) \mid c : \mathbb{S}^1 \rightarrow \tilde{M}, l(c) \leq r\}, \end{aligned}$$

para todo número real no-negativo r .

En la prueba del *Filling Theorem* seguimos a [Bri02]. En lo que sigue, omitiremos los detalles excesivamente técnicos y, en cambio, haremos más énfasis en las ideas geométricas. Una razón fuerte detrás de ello consiste en que estamos trabajando actualmente en una adaptación de la prueba para espacios $\text{CAT}(\kappa)$, la cual mantiene la estructura y las ideas geométricas de la demostración que aquí esbozaremos pero, como es de esperar, requiere de algunas adaptaciones técnicas en ciertos detalles. También estamos trabajando en la generalización del resultado usando superficies de género arbitrario como *fillings* y tomando como función isoperimétrica al ínfimo sobre las áreas de los *fillings* de cada género. Finalmente, mencionamos que una demostración alternativa del *Filling Theorem* puede ser encontrada en [BT02].

Proposición 3.29 (Lema de rellenado). *Si M es una variedad riemanniana completa de curvatura acotada superiormente por κ , entonces la métrica inducida sobre todo disco de área mínima $\Delta \rightarrow \tilde{M}$ es tal que Δ puede ser ρ_{κ} -rellenada por un conjunto de cardinal menor que $\lambda_{\kappa}(\text{Area}(\Delta) + |\partial\Delta| + 1)$, donde $|\partial\Delta|$ denota la longitud del borde de Δ y las constantes λ_{κ} y ρ_{κ} dependen solo de κ .*

Proposición 3.30 (Lema de Celularización). *Sea Δ un espacio de longitud homeomorfo a un 2-disco, y supongamos que Δ es ε -rellenado por un conjunto Σ de cardinal N . Entonces existen un 2-complejo combinatorio Φ , homeomorfo a un 2-disco, y una función continua $\phi : \Phi \rightarrow \Delta$ tales que se satisfacen las siguientes condiciones.*

1. Φ tiene a lo sumo $8N$ caras (2-celdas) y cada una es un k -ágono (esto es, tiene k lados) con $k \leq 12$,
2. la restricción de ϕ a cada 1-celda en Φ es un camino de longitud a lo sumo 2ε ,
3. $\phi|_{\partial\Phi}$ es una parametrización monótona $\partial\Delta$ y $\Sigma \cap \partial\Delta$ está en la imagen del 0-esqueleto de $\partial\Phi$.

Recordar que el grupo fundamental Γ de una variedad riemanniana cerrada y conexa M actúa geoméricamente sobre el revestimiento universal \tilde{M} , el cual es un espacio geodésico y simplemente conexo. Así que, por el Teorema 3.5, Γ es finitamente presentado.

Teorema 3.31 (Filling Theorem). *Sea M una variedad riemanniana cerrada conexa y sea Γ su grupo fundamental. La función de Dehn δ_Γ y la función isoperimétrica Fill_M son asintóticamente equivalentes.*

Demostración. Parte 1: Comencemos con la desigualdad $\text{Fill}_M \preceq \delta_\Gamma$. Vamos a aproximar rellenos de lazos arbitrarios en el revestimiento universal de M por rellenos de lazos tipo-palabra. Filosóficamente, lo que vamos a hacer es aproximar objetos geométricos por objetos combinatorios. En esta aproximación, el error será a lo sumo lineal y por lo tanto asintóticamente irrelevante.

Fijemos una presentación finita $\mathcal{P} = \langle \mathcal{A} | \mathcal{R} \rangle$ para Γ . Sea \tilde{M} el revestimiento universal de Γ . Fijamos un punto base p en \tilde{M} y para cada generador a en \mathcal{A} elegimos una geodésica c_a desde p hasta $a \cdot p$. Tenemos una función Γ -equivariante $\varphi : \mathcal{C}_\mathcal{A}(\Gamma) \rightarrow \tilde{M}$ que manda la arista que va de γ hasta $\gamma \cdot a$ homeomórficamente sobre la geodésica $\gamma \cdot c_a$. Como \tilde{M} es simplemente conexo, podemos extender esta función a lo largo de las 2-celdas de $\mathcal{C}_\mathcal{P}^2(\Gamma)$. (Dotamos al 2-complejo de Cayley de la métrica euclídea estándar descrita en el Ejemplo 1.58.) Elegimos esta extensión de manera que sobre cada 2-celda sea suave en casi todo punto respecto de la medida de Hausdorff 2-dimensional \mathcal{H}^2 y tenga área paramétrica finita. Llamemos a esta extensión $\hat{\varphi} : \mathcal{C}_\mathcal{P}^2(\Gamma) \rightarrow \tilde{M}$.

Definamos algunas constantes.

1. Sea D la distancia máxima de cualquier punto de \tilde{M} a la imagen de Γ bajo $\hat{\varphi}$,

$$D := \max_{q \in \tilde{M}} d(q, \hat{\varphi}(\Gamma)) = \max_{q \in \tilde{M}} d(q, \Gamma \cdot p).$$

Notar que este máximo es finito porque $\Gamma \cdot p$ es quasi-denso en \tilde{M} por el Lema 3.7 de Švarc-Milnor, el cual aplica bajo la hipótesis de compacidad sobre M .

2. Sea L el máximo de las longitudes de las imágenes de las aristas del 2-complejo de Cayley $\mathcal{C}_\mathcal{P}^2(\Gamma)$ bajo $\hat{\varphi}$,

$$L := \max_{\gamma \in \Gamma, a \in \mathcal{A}} L(\gamma \cdot c_a) = \max_{a \in \mathcal{A}} L(c_a).$$

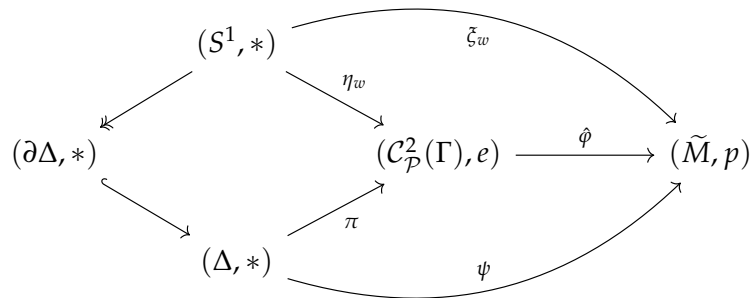
3. Sea

$$\begin{aligned} R &:= \max\{d_{\mathcal{A}}(\gamma, \gamma') \mid d(\hat{\phi}(\gamma), \hat{\phi}(\gamma')) \leq 2D + 1\} \\ &= \max\{d_{\mathcal{A}}(\gamma, e) \mid d(\gamma \cdot p, p) \leq 2D + 1\}. \end{aligned}$$

Notar que este máximo es finito porque es el máximo de un conjunto finito.

4. Las imágenes de las 2-celdas de $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}^2(\Gamma)$ bajo $\hat{\phi}$ tienen área finita, sea A el máximo de tales áreas. Notar que A es finito aunque la cantidad de 2-celdas de $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}(\Gamma)$ pueda ser infinita porque la función $\hat{\phi}$ es equivariante y la cantidad de órbitas (bajo la acción de Γ) de las 2-celdas es finita pues está en correspondencia con \mathcal{R} ; junto con el hecho de que Γ actúa sobre \tilde{M} por isometrías y la medida \mathcal{H}^2 es invariante por isometrías.

Sea w una palabra null-homotópica en el alfabeto $\mathcal{A}^{\pm 1}$ y consideremos el lazo de aristas $\eta_w : S^1 \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^2(\Gamma)$ empezando en e inducido por w . Sea $\xi_w : S^1 \rightarrow \tilde{M}$ la composición $\hat{\phi} \circ \eta_w$. Por el Lema de van Kampen 3.27, existe un diagrama de van Kampen $\pi : \Delta \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{P}}^2(\Gamma)$ con cantidad de 2-celdas igual a $\text{Area}_a(w)$. Sea $\psi : \Delta \rightarrow \tilde{M}$ la composición $\hat{\phi} \circ \pi$. Notar que ψ rellena ξ_w , esto es, el lazo $\psi|_{\partial\Delta}$ empezando desde el vértice base fijo $*$ es igual a (una parametrización de) ξ_w . Resumimos esta información en el siguiente diagrama conmutativo.



Llamamos a tal lazo ξ_w el lazo *tipo-palabra* inducido por w empezando en p . El área de ψ es a lo sumo A veces el número de 2-celdas en Δ , luego

$$\text{FArea}(\xi_w) \leq A \text{Area}_a(w) \leq A\delta_{\Gamma}(|w|).$$

Ahora, sea $c : S^1 \rightarrow \tilde{M}$ un lazo de longitud finita $L(c)$, parametrizado proporcionalmente a la longitud de arco. Elegimos un conjunto de n puntos equiespaciados $\theta_0, \dots, \theta_{n-1}$ en S^1 , donde $n := \lceil L(c) \rceil$ es el menor entero mayor que $L(c)$. Luego elegimos un segmento geodésico σ_i desde cada $c(\theta_i)$ a un punto $p_i = \hat{\phi}(\gamma_i)$ que realice la distancia a $\hat{\phi}(\Gamma)$. La distancia entre sucesivos p_i (índices mod n) es a lo sumo $2D + 1$ y luego p_i puede ser conectado a p_{i+1} por un camino tipo-palabra ξ_{w_i} de longitud a lo sumo RL ,

donde w_i es una palabra de longitud a lo sumo R . Siendo que cada lazo $\sigma_i \tilde{\zeta}_{w_i} \bar{\sigma}_{i+1} \bar{c}|_{[\theta_i, \theta_{i+1}]}$ tiene longitud a lo sumo $C := RL + 1 + 2D$, tenemos

$$\text{FArea}(c) \leq \text{FArea}(\tilde{\zeta}_{w_0 \dots w_{n-1}}) + n \text{Fill}_M(C).$$

El lazo c es arbitrario y la longitud de la palabra $w_0 \dots w_{i+1}$ es a lo sumo nR , y $n \leq L(c) + 1$. Las dos desigualdades desplegadas arriba implican que

$$\text{Fill}_M(r) \leq A\delta_\Gamma(R(r+1)) + (r+1) \text{Fill}_M(C)$$

para todo $r > 0$. En particular, obtenemos la desigualdad deseada $\text{Fill}_M(r) \preceq \delta_\Gamma$.

Parte 2: Continuemos con la desigualdad $\delta_\Gamma \preceq \text{Fill}_M$.

Por 2.18, existe una cota κ sobre la curvatura seccional de M . Sean ρ_κ y λ_κ los números reales positivos que nos da el Lema de Rellenado 3.29. Consideremos de nuevo el punto p en \tilde{M} y recordemos que la órbita $\Gamma \cdot p$ es quasi-densa en \tilde{M} por el Lema 3.7 de Švarc-Milnor. Así que existe un número real positivo ρ mayor que $8\lambda_\kappa$ tal que las bolas de radio $\rho/8$ centradas en los puntos de la órbita $\Gamma \cdot p$ cubren \tilde{M} . Sea

$$\mathcal{A}' := \{a \in \Gamma \mid d(a \cdot p, p) < \rho\},$$

y sea \mathcal{R}' el conjunto de palabras en el alfabeto $\mathcal{A}'^{\pm 1}$ que tienen longitud a lo sumo 12 y son iguales al elemento trivial en Γ . Entonces $\mathcal{P}' = \langle \mathcal{A}' | \mathcal{R}' \rangle$ es una presentación de Γ . Veamos que toda palabra null-homotópica w sobre esta presentación satisface

$$\text{Area}_a(w) \leq 4\lambda_\kappa(\text{Fill}_M(\rho|w|) + \rho|w| + 1).$$

Dada una palabra null-homotópica w consideramos el lazo geodésico a trozos $\tilde{\zeta}_w : S^1 \rightarrow \tilde{M}$ inducido por w , el cual tiene longitud menor que $\rho|w|$ así que por la solución al problema de Plateau (suponiendo el lazo embebido sin pérdida de generalidad, sino alcanza con perturbarlo), puede ser rellenado con un disco de área mínima $f : \Delta \rightarrow \tilde{M}$, cuya área es a lo sumo $\text{Fill}_M(\rho|w|)$. Por el Lema de Rellenado 3.29, podemos ρ_κ -rellenar Δ con un conjunto Σ de cardinal menor que $N := \lambda_\kappa(\text{Fill}_M(\rho|w|) + \rho|w| + 1)$. Incrementando el cardinal de Σ en a lo sumo $|w|$, podemos asumir que contiene a los vértices de $\tilde{\zeta}_w$.

Sean Φ un disco combinatorio y $\phi : \Phi \rightarrow \Delta$ una función obtenidos del Lema 3.30 de Celularización. Nuestro objetivo es etiquetar Φ de manera que se convierta en un \mathcal{P}' -diagrama de van Kampen para w . La composición $f \circ \phi : \Phi \rightarrow \tilde{M}$ nos guiará en esta construcción. Notar que la restricción $f \circ \phi|_{\partial\Phi}$ es una parametrización monótona de $\tilde{\zeta}_w$. El punto inicial de $\tilde{\zeta}_w$ determina un punto base de Φ .

Para cada vértice v en el interior de Φ elegimos un punto $\gamma_v \cdot p$ en la órbita $\Gamma \cdot p$ que realice la distancia a $f \circ \phi(v)$. Si v y v' son los vértices de una arista de Φ , entonces $f \circ \phi(v)$ y $f \circ \phi(v')$ están a separados por una distancia de a lo sumo $2\rho_\kappa$ en \tilde{M} (por la segunda parte del Lema 3.30 de Celularización). Se sigue que $d(\gamma_v \cdot p, \gamma_{v'} \cdot p) \leq 2\rho_\kappa +$

$\rho/4$, el cual es menor que $\rho/2$. Luego existe un generador $a \in \mathcal{A}'$ tal que $a = \gamma_v^{-1}\gamma_{v'}$, en Γ . Introducimos la etiqueta a sobre la arista en Φ uniendo v con v' .

Entre los vértices de $\partial\Phi$ tenemos un subconjunto distinguido, consistente en aquellos que cuyas imágenes son vértices de ξ_w . Los llamamos x_0, \dots, x_{n-1} , correspondientes a los vértices $w_i \cdot p$ sobre ξ_w , donde w_i es la i -ésima letra de w .

Si $v \in \Phi \setminus \partial\Phi$ es el punto inicial de una arista cuyo punto final v' cae sobre el arco que une x_{i-1} y x_i en $\partial\Phi$, entonces γ_v está a distancia menor que $\rho/8 + 2\rho_\kappa + \rho/2$ de $w_{i-1} \cdot p$ o $w_i \cdot p$, dependiendo de a qué lado del punto medio dicho arco está v' . (Tal punto medio está medido respecto de la métrica *pullback* inducida por \tilde{M} .)

Para cada $i = 1, \dots, n$ colapsamos todas salvo una de las aristas a lo largo del arco de $\partial\Phi$ que une x_{i-1} y x_i ; la arista que contiene al punto medio no se colapsa (esto involucra una elección arbitraria si el punto medio es un vértice), y su imagen en el disco cociente $\bar{\Phi}$ se etiqueta con la i -ésima letra de w . La imagen en $\bar{\Phi}$ del cociente de la arista $[v, v']$ discutido en el párrafo previo se etiqueta por $\gamma_v^{-1}e_{i-1}$ o por $\gamma_v^{-1}w_i$, según a qué lado del punto medio está v' . (Esta etiqueta es un elemento de \mathcal{A}' porque $\rho/8 + 2\rho_\kappa + \rho/2 < \rho$.)

En esta etapa hemos construido un disco $\bar{\Phi}$ con una etiqueta en \mathcal{A}' sobre cada arista dirigida. La etiqueta sobre el círculo del borde $\partial\bar{\Phi}$ es nuestra palabra null-homotópica original w . La etiqueta sobre el círculo del borde de cada 2-celda es, por construcción, una palabra de longitud a lo sumo 12 en el alfabeto \mathcal{A}' que representa al elemento trivial en Γ porque las caras de Φ , y luego de $\bar{\Phi}$, son k -ágonos con $k \leq 12$. Luego $\bar{\Phi}$ es un diagrama de van Kampen para w sobre nuestra presentación \mathcal{P}' de Γ .

Del Lema de Celularización obtuvimos Φ , y éste nos dice que tiene a lo sumo $8N$ caras, donde $N = \lambda_\kappa(\text{Fill}_M(\rho|w|) + \rho|w| + 1)$, y $\bar{\Phi}$ tiene el mismo número de caras que Φ . Luego hemos establecido la deseada cota superior sobre el área algebraica de una palabra null-homotópica arbitraria w , y en consecuencia deducimos que $\delta_\Gamma \preceq \text{Fill}_M$. \square

Dos grupos se dicen *comensurables* si admiten subgrupos de índice finito isomorfos entre sí. El siguiente resultado es una aplicación del Teorema de Rellenado.

Proposición 3.32. *Funciones de Dehn de grupos finitamente generados comensurables son asintóticamente equivalentes.*

Demostración. Sean Γ y Θ grupos finitamente generados comensurables. Así que existen subgrupos G y H de índice finito isomorfos entre sí de Γ y Θ respectivamente. Sea M una variedad riemanniana conexa cerrada con Γ como grupo fundamental. Por correspondencia Galois para revestimientos, existe un revestimiento conexo X de M con G como grupo fundamental y fibra finita. Esta finitud es equivalente a la compacidad de X así que Fill_X está definida y, como M y X tienen el mismo revestimiento universal, tenemos la igualdad $\text{Fill}_M = \text{Fill}_X$. Ahora, por el *Filling Theorem 3.31*, obtenemos que $\delta_\Gamma \cong \delta_G$. Análogamente, obtenemos que $\delta_\Theta \cong \delta_H$. Finalmente, como G y H son

isomorfos, tienen la misma (clase de equivalencia de) función de Dehn y la proposición sigue. \square

La Proposición 3.32 se deduce también de la quasi-invariancia de la función de Dehn.

Capítulo 4

Puntos fijos de acciones de grupos

En este capítulo estudiamos resultados acerca de la existencia de puntos fijos en acciones de grupos por isometrías sobre espacios $\text{CAT}(\kappa)$.

La herramienta principal es el Corolario 4.10, que es una adaptación del criterio de punto fijo de Farb para espacios $\text{CAT}(\kappa)$. (Ver [Far09].) Su prueba tiene dos ingredientes: El Teorema 4.1 sobre la existencia de centros de subconjuntos acotados en espacios $\text{CAT}(\kappa)$ y el Teorema 4.9 de Helly adaptado a espacios $\text{CAT}(\kappa)$. Las versiones usuales del Teorema de Helly afirman *grosso modo* que si en una familia de subconjuntos convexos tomamos una cantidad prefijada de ellos, consideramos su intersección y resulta que esta es no vacía entonces la intersección de toda la familia es no vacía. En la práctica, esto permite verificar la existencia de puntos fijos sobre un conjunto generador finito \mathcal{A} bien elegido de un grupo Γ pues, si el espacio es unívocamente geodésico, el conjunto de puntos fijos bajo una isometría dada es convexo. A partir de allí la existencia de un punto fijo global es inmediata pues todo elemento de Γ se escribe como producto de generadores (y sus inversos).

Aunque el enunciado usual del Teorema de Helly suele ser puesto en términos de subconjuntos convexos, subyacente a él hay una versión topológica mucho más fuerte, el Teorema 4.4, enunciada en términos de homología. El hecho de que esté tal resultado topológico fundamental detrás explica en parte por qué hay tantas versiones del Teorema de Helly en la literatura. (Ver [Deb70].)

4.1 Una versión homológica del teorema de Helly y criterio de Farb

Sea X un espacio $\text{CAT}(\kappa)$. Si Y es un subconjunto acotado de X definimos el radio de Y como el número real no-negativo

$$r_Y := \inf\{r > 0 \mid \text{existe } x \text{ en } X \text{ tal que } Y \subseteq B_r(x)\}.$$

Teorema 4.1. *Sea X un espacio $\text{CAT}(\kappa)$ completo. Si Y es un subconjunto acotado y no-vacío de X de radio r_Y menor a $D_\kappa/2$, entonces existe un único punto c_Y in X , llamado el centro de Y en X , tal que $Y \subseteq B_{r_Y}[c_Y]$. Si además Y es cerrado y convexo, entonces c_Y está en Y .*

Corolario 4.2. *Sea Γ un grupo actuando sobre un espacio $\text{CAT}(\kappa)$ completo por isometrías. Si existe una órbita acotada de diámetro menor que $D_\kappa/2$ entonces la acción tiene un punto fijo.*

Demostración. Por unicidad del centro, una acción por isometrías fija el centro de tal órbita. \square

Proposición 4.3. *Sea X un espacio topológico y sea S una familia finita de conjuntos abiertos no-vacíos de X con $\#S$ al menos 2 y tal que $\cap T$ es acíclico para toda T subfamilia de S con $1 \leq \#T \leq \#S - 1$. Entonces*

1. si $\cap S = \emptyset$ tenemos $\tilde{H}_{\#S-2}(\cup S) \neq 0$, pero
2. si $\cap S \neq \emptyset$ tenemos $\tilde{H}_*(\cup S) \cong \tilde{H}_{*-\#S+1}(\cap S)$.

En particular, $\cup S$ es acíclico si y solo si $\cap S$ es acíclico.

Demostración. Probaremos la proposición por inducción en $m := \#S$.

Supongamos que $m = 2$ así que podemos escribir $S = \{X_1, X_2\}$.

En el primer caso, tenemos que $\cap S = X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Luego $\cup S = X_1 \cup X_2$ is no conexo y entonces $\tilde{H}_{\#S-2}(\cup S) = \tilde{H}_0(\cup S) \neq 0$.

En el segundo caso, tenemos que $\cap S = X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ así que podemos aplicar el Teorema de Mayer-Vietoris al par (X_1, X_2) , obteniendo la sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_q(X_1) \oplus \tilde{H}_q(X_2) \rightarrow \tilde{H}_q(X_1 \cup X_2) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(X_1 \cap X_2) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(X_1) \oplus \tilde{H}_{q-1}(X_2) \rightarrow \dots$$

Ahora, por hipótesis sobre S , X_1 y X_2 son acíclicos, esto es, $\tilde{H}_*(X_1) = \tilde{H}_*(X_2) = 0$ y a partir de la exactitud de la sucesión de arriba obtenemos $\tilde{H}_*(\cup S) = \tilde{H}_*(X_1 \cup X_2) \cong \tilde{H}_{*-\#S+1}(X_1 \cap X_2) = \tilde{H}_{*-\#S+1}(\cap S)$.

Supongamos que $m > 2$ y asumamos la hipótesis inductiva. Escribimos $S = \{X_1, \dots, X_m\}$ y definimos $U_1 := \cup_{i=1}^{m-1} X_i$ y $U_2 := X_m$. Por hipótesis sobre S , $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ así que podemos aplicar el Teorema de Mayer-Vietoris al par (U_1, U_2) , obteniendo la sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_q(U_1) \oplus \tilde{H}_q(U_2) \rightarrow \tilde{H}_q(U_1 \cup U_2) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(U_1 \cap U_2) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(U_1) \oplus \tilde{H}_{q-1}(U_2) \rightarrow \dots$$

Ahora, por hipótesis inductiva, U_1 es acíclico si y solo si $\cap_{i=1}^{m-1} X_i$ es acíclico y aquello es cierto por hipótesis sobre S . Así que U_1 es acíclico y notemos que U_2 es acíclico también por hipótesis sobre S . Luego, a partir de la exactitud de la sucesión de arriba obtenemos

$$\tilde{H}_*(\cup S) = \tilde{H}_*(U_1 \cup U_2) \cong \tilde{H}_{*-1}(U_1 \cap U_2) = \tilde{H}_{*-1}\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} (X_i \cap X_m)\right) = \tilde{H}_{*-1}(\cup S')$$

4.1. UNA VERSIÓN HOMOLÓGICA DEL TEOREMA DE HELLY Y CRITERIO DE FARB109

donde definimos $S' := \{X_1 \cap X_m, \dots, X_{m-1} \cap X_m\}$, la cual satisface las hipótesis de la proposición y tiene $\#S' = \#S - 1 = m - 1$. Así que S' está bajo la hipótesis inductiva. Además notar que $\bigcap S = \bigcap S'$ y obtuvimos $\tilde{H}_*(\bigcup S) \cong \tilde{H}_{*-1}(\bigcup S')$ arriba.

En el primer caso, tenemos que $\bigcap S = \bigcap S' = \emptyset$ así que

$$\tilde{H}_{\#S-2}(\bigcup S) \cong \tilde{H}_{\#S-3}(\bigcup S') = \tilde{H}_{\#S'-2}(\bigcup S') \neq 0,$$

por hipótesis inductiva.

En el segundo caso, tenemos que $\bigcap S = \bigcap S' \neq \emptyset$ así que por hipótesis inductiva

$$\tilde{H}_*(\bigcup S) \cong \tilde{H}_{*-1}(\bigcup S') \cong \tilde{H}_{*-1-\#S'+1}(\bigcap S') = \tilde{H}_{*-\#S+1}(\bigcap S') = \tilde{H}_{*-\#S+1}(\bigcap S),$$

completando la inducción. □

Teorema 4.4 (Helly, versión topológica). Sean X un espacio topológico, d un número natural, y S una familia finita de conjuntos abiertos no-vacíos de X tales que

1. $\tilde{H}_q(\bigcup T) = 0$ para todo $q \geq d$ y para toda T subfamilia de S , y
2. $\bigcap T$ es acíclico para toda subfamilia T de S con $1 \leq \#T \leq d + 1$.

Entonces $\bigcap S$ es acíclico y, en particular, no-vacío.

Demostración. Supongamos que S satisface las hipótesis del teorema pero no su conclusión. Más aún, supongamos que S tiene cardinal mínimo entre las familias de conjuntos que satisfacen esa propiedad. Escribimos $S = \{X_1, \dots, X_m\}$. Por la hipótesis número 2 tenemos $m \geq d + 2$ y, por minimalidad de m , S satisface las hipótesis de la Proposición 4.3 anterior.

En el caso de que fuese $\bigcap S = \emptyset$ tendríamos $\tilde{H}_{m-2}(\bigcup S) \neq 0$ por Proposición 4.3. Pero esto no es compatible con la hipótesis número 1 con $q = m - 2 \geq d$. Luego necesariamente tenemos $\bigcap S \neq \emptyset$ y, por lo que suponemos sobre S , $\bigcap S$ no es acíclico así que existe un número $r \geq 0$ tal que $\tilde{H}_r(\bigcap S) \neq 0$. Y entonces, por Proposición 4.3, tenemos $\tilde{H}_{r+m-1}(\bigcup S) \cong \tilde{H}_r(\bigcap S) \neq 0$. Esto no es compatible con la hipótesis número 1 con $q = r + m - 1 \geq m - 1 \geq d + 1 \geq d$.

La contradicción proviene de suponer la existencia de tal S así que no existe tal S y esto concluye la prueba. □

En el siguiente resultado, denotamos por \dim a la *dimensión topológica* y cdim a la *dimensión topológica compacta*. Las definiciones de las distintas nociones de dimensión pueden ser halladas en [Kle99], donde se prueba que coinciden en espacios $\text{CAT}(\kappa)$.

Proposición 4.5. Sea X un espacio $\text{CAT}(\kappa)$ d -dimensional conexo. Tenemos $\tilde{H}_q(U) = 0$ para todo conjunto abierto U de X con diámetro menor que D_κ y todo $q \geq d$.

Demostración. En el caso $d = 0$ tenemos que $X \cong *$ es un *singleton* y listo. Así que podemos asumir $d \geq 1$.

Tenemos que

$$d = \dim(X) \geq \text{cdim}(X) := \max\{\dim(K) \mid K \subseteq X \text{ es compacto}\}.$$

Y siendo que X es $\text{CAT}(\kappa)$, por [Kle99], tenemos que

$$\text{cdim}(X) = \max\{k \geq 0 : H_k(W, G) \neq 0 \text{ para algún par de conjuntos abiertos } G \subseteq W \subseteq X\}.$$

Luego para todo par de conjuntos abiertos (W, G) en X y para todo $q > d$ es $\tilde{H}_q(W, G) = 0$.

Sea U un conjunto abierto de X . Si $U = \emptyset$, estamos. En otro caso, si r_U es el radio de U tenemos $0 \leq r_U \leq \text{diam}(U) < D_\kappa$ así que existe un número real positivo R tal que $r_U < R < D_\kappa$. Tenemos $U \subseteq B_R(c_U)$ y llamamos $V := B_R(c_U)$, el cual es abierto y contráctil por Proposición 2.5. Consideramos la sucesión exacta larga del par (V, U)

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(V) \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(V, U) \rightarrow \tilde{H}_n(U) \rightarrow \tilde{H}_n(V) \rightarrow \dots$$

Siendo que V es contráctil es acíclico, esto es, $\tilde{H}_*(V) = 0$ y entonces obtenemos a partir de la exactitud de la sucesión de arriba que $\tilde{H}_{*+1}(V, U) \cong \tilde{H}_*(U)$. Ahora, siendo que $\tilde{H}_q(V, U) = 0$ para todo $q > d$, la proposición sigue. \square

Teorema 4.6 (Helly, versión para abiertos convexos en un espacio $\text{CAT}(\kappa)$). *Sea X un espacio $\text{CAT}(\kappa)$ d -dimensional completo y sea S una familia finita de conjuntos abiertos convexos no-vacíos de X tal que*

1. $\bigcap T \neq \emptyset$ para todo $T \subseteq S$ con $1 \leq \#T \leq d + 1$, y
2. $\text{diam}(\bigcup S) < D_\kappa$.

Entonces $\bigcap S \neq \emptyset$.

Demostración. Primero, por la Proposición 4.5 anterior, la cual aplica bajo la hipótesis número 2, tenemos $\tilde{H}(\bigcup T) = 0$ para toda subfamilia T de S y todo $q \geq d$. Segundo, para todo $T \subseteq S$ con $1 \leq \#T \leq d + 1$, por hipótesis número 1, tenemos que $\bigcap T$ es un conjunto convexo no-vacío y, por hipótesis número 2, de diámetro menor a D_κ así que $\bigcap T$ es contráctil y, en particular, acíclico. Ahora, por el Teorema 4.4 de Helly topológico, $\bigcap S$ es acíclico y, en particular, no-vacío. \square

Definición 4.7 (Swelling). Sea X un espacio topológico. Un *swelling* de una familia $(A_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de X es otra familia $(B_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de X tal que

1. $A_i \subseteq B_i$ para todo i en I .

4.1. UNA VERSIÓN HOMOLÓGICA DEL TEOREMA DE HELLY Y CRITERIO DE FARB111

2. Para toda subfamilia finita J de I tenemos que $\bigcap_{j \in J} A_j = \emptyset$ si y solo si $\bigcap_{j \in J} B_j = \emptyset$. Esto es, ambas familias tienen el mismo nervio.

Proposición 4.8. *Sea X un espacio $\text{CAT}(\kappa)$ propio y sea $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_k\}$ una familia finita de subconjuntos convexos, cerrados, acotados y no-vacíos de X con $r_{F_i} < D_\kappa/2$ para todo $1 \leq i \leq k$ y sea ε un número real positivo. Entonces existe un swelling $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_k\}$ de \mathcal{F} por subconjuntos convexos abiertos y acotados de X con $r_{U_i} < D_\kappa/2$ para todo $1 \leq i \leq k$ y tal que $\text{diam}(\bigcup \mathcal{U}) \leq \text{diam}(\bigcup \mathcal{F}) + \varepsilon$.*

Demostración. Definimos

$$\mathcal{F}_1 := \{\bigcap \mathcal{G} \mid \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}, \bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset, (\bigcap \mathcal{G}) \cap F_1 = \emptyset\}$$

Sea $\varepsilon'_1 > 0$ tal que $r_{F_1} + \varepsilon'_1 < D_\kappa/2$. Como X es propio, el siguiente número es positivo

$$\varepsilon_1 := \min\{\varepsilon'_1, \varepsilon/2\} \cup \{d(F_1, S_i) \mid S_i \in \mathcal{F}_1\}.$$

Definimos

$$V_1 := \{x \in X \mid d(x, F_1) \leq \varepsilon_1/2\},$$

el cual es convexo por Proposición 2.5. Entonces

$$\mathcal{V}_1 := \{V_1, F_2, \dots, F_k\}$$

es un *swelling* de \mathcal{F} por subconjuntos convexos, cerrados y no-vacíos de X con radios menor a $D_\kappa/2$.

Supongamos que para j en $\{1, \dots, k-1\}$ hemos definido un *swelling*

$$\mathcal{V}_j := \{V_1, \dots, V_j, F_{j+1}, \dots, F_k\}$$

de \mathcal{F} por subconjuntos convexos, cerrados, acotados y no-vacíos de X con radio menor a $D_\kappa/2$.

Definimos

$$\mathcal{F}_{j+1} := \{\bigcap \mathcal{G} \mid \mathcal{G} \subseteq \mathcal{V}_j, \bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset, (\bigcap \mathcal{G}) \cap F_{j+1} = \emptyset\}$$

Sea $\varepsilon'_j > 0$ tal que $r_{F_{j+1}} + \varepsilon'_j < D_\kappa/2$. Como X es propio, el siguiente número es positivo

$$\varepsilon_{j+1} := \min\{\varepsilon'_j, \varepsilon/2\} \cup \{d(F_{j+1}, S_i) \mid S_i \in \mathcal{F}_{j+1}\}.$$

Definimos

$$V_{j+1} := \{x \in X \mid d(x, F_{j+1}) \leq \varepsilon_{j+1}/2\}.$$

Luego

$$\mathcal{V}_{j+1} := \{V_1, \dots, V_{j+1}, F_{j+2}, \dots, F_k\}$$

es un *swelling* de \mathcal{F} por subconjuntos convexos, cerrados, no-vacíos de X con radios menores a $D_\kappa/2$.

Este proceso inductivo nos da un *swelling* $\mathcal{V}_k = \{V_1, \dots, V_k\}$ with $V_i = \{x \in X \mid d(x, F_i) \leq \varepsilon_i/2\}$ para todo $1 \leq i \leq k$. Luego $\mathcal{U} := \{U_1, \dots, U_k\}$ con

$$U_i := \{x \in X \mid d(x, F_i) < \varepsilon_i/2\},$$

para todo $1 \leq i \leq k$, es el *swelling* buscado. \square

Teorema 4.9 (Helly, versión subespacios convexos cerrados de un espacio $\text{CAT}(\kappa)$). *Sea X un espacio $\text{CAT}(\kappa)$ d -dimensional, propio y conexo, y sea S una familia finita de conjuntos cerrados, convexos y no-vacíos de X tal que*

1. $\bigcap T \neq \emptyset$ para todo $T \subseteq S$ con $1 \leq \#T \leq d+1$, y
2. $\text{diam}(\bigcup S) < D_\kappa$.

Then $\bigcap S \neq \emptyset$.

Demostración. Por la Proposición 4.8 previa, existe un *swelling* \mathcal{U} de S por subespacios convexos, abiertos y acotados de X tal que $\text{diam}(\bigcup \mathcal{U}) < D_\kappa$. Por el Teorema 4.6 de Helly para conjuntos abiertos, tenemos que $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$ y entonces, porque las familias son finitas y por definición de *swelling*, $\bigcap S \neq \emptyset$. \square

Corolario 4.10 (criterio del punto fijo de Farb, adaptado para espacios $\text{CAT}(\kappa)$). *Sea Γ un grupo, $H \subseteq \Gamma$ un conjunto generador finito de Γ y X un espacio $\text{CAT}(\kappa)$ d -dimensional propio y $\Phi : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(X)$ un morfismo de grupos. Entonces*

1. *Si existe un subconjunto acotado no-vacío Y de X invariante por la acción y de radio r_Y menor a $D_\kappa/2$, podemos considerar la restricción de la acción $\Psi : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(B_{r_Y}[c_Y])$ donde c_Y es el centro de Y , y el criterio de Farb usual aplica. Esto es, si $\bigcap_{t \in T} \text{Fix}(\Psi(t)) \neq \emptyset$ para todo $T \subseteq H$ con $1 \leq \#T \leq d+1$ entonces $\bigcap_{g \in \Gamma} \text{Fix}(\Psi(g)) \neq \emptyset$, en otras palabras, existe un punto fijo por la acción en Y .*
2. *Si existe un subconjunto convexo, cerrado y no-vacío Z de X con radio r_Z menor a $D_\kappa/2$ tal que $\bigcap_{t \in T} \text{Fix}(\Phi(t)) \cap Z \neq \emptyset$ para todo $T \subseteq H$ con $1 \leq \#T \leq d+1$ entonces $\bigcap_{g \in \Gamma} \text{Fix}(\Phi(g)) \cap Z \neq \emptyset$, en otras palabras, existe un punto fijo por la acción en Z .*

4.2 Aplicaciones y trabajo futuro

Las herramientas descritas en la sección precedente se han usado para probar resultados de punto fijo de acciones de los siguientes grupos sobre espacios $\text{CAT}(0)$.

1. El *mapping class group* $\text{Mod}(\Sigma_g)$ de la superficie cerrada orientable de género g , en [Bri12].

2. El grupo de automorfismos $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ de \mathbb{F}_n y $\text{SAut}(\mathbb{F}_n)$, su único subgrupo de índice 2, en [Var14].

El trabajo ya hecho que describimos en este capítulo tiene los siguientes objetivos a futuro.

1. Extender (parte de) los resultados anteriores para espacios $\text{CAT}(\kappa)$ propios con κ positivo.
2. Debilitar la hipótesis de que el espacio $\text{CAT}(\kappa)$ sea propio en las herramientas descritas en la sección anterior.
3. Aplicar estas herramientas sobre otros grupos.

Bibliografía

- [Ale12] Aleksandr D. Alexandrov, *Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie*, Schriftreihe des Forschungsinstituts für Mathematik **1** (2012), 33-84. [↑i](#)
- [Ale57] ———, *Ruled surfaces in metric spaces*, Vestnik Leningrad University **12** (1957), 5-26. [↑i](#)
- [ABN86] Aleksandr D. Alexandrov, Valerii N. Berestovskii, and Igor G. Nikolaev, *Generalized Riemannian spaces*, Russian Mathematical Surveys **43** (1986), no. 3, 1-54. [↑i](#)
- [BC64] Richard L. Bishop and Richard J. Crittenden, *Geometry of manifolds*, Academic Press Inc., 1964. [↑64](#)
- [BRS07] Noel Brady, Timothy Riley, and Hamish Short, *The geometry of the word problem for finitely generated groups*, Birkhäuser Verlag, 2007. [↑77, 97](#)
- [Bri02] Martin R. Bridson, *The geometry of the word problem*. In *invitations to geometry and topology* (Martin R. Bridson and Simon M. Salamon, eds.), Oxford University Press, 2002. [↑iii, 77, 97, 101](#)
- [Bri12] ———, *On the dimension of CAT(0)-spaces where mapping class groups act*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **673** (2012), 55–68. [↑112](#)
- [BH99] Martin R. Bridson and André Häfliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 319, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999. [↑i, 1, 4, 30, 34, 49, 50, 58, 60, 61, 65, 66, 69, 70, 71, 77, 88, 97](#)
- [BBI01] Dmitri Burago, Yuri Burago, and Sergei Ivanov, *A course in metric geometry*, Graduate studies in mathematics, vol. 33, American Mathematical Society, 2001. [↑1, 43, 98](#)
- [BT02] José Burillo and Jennifer Taback, *Equivalence of geometric and combinatorial Dehn functions*, New York J. Math **8** (2002), 169–179. [↑101](#)
- [Deb70] H. E. Debrunner, *Helly type theorems derived from basic singular homology*, American Mathematical Monthly **77** (1970), no. 4, 375-380. [↑107](#)
- [DO11] Satyan L. Devadoss and Joseph O'Rourke, *Discrete and computational geometry*, Princeton university press, 2011. [↑74](#)

- [Car51] Élie J. Cartan, *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*, 2nd ed., Gauthiers Villars, 1951. ↑63
- [CD95] Ruth Cherney and Michael Davis, *The Euler characteristic of a nonpositively curved, piecewise Euclidean manifold*, *Pacific Journal of Mathematics* **171** (1995), no. 1, 117-137. ↑i
- [Che56] Shiing-Shen Chern, *On curvature and characteristic classes of a Riemannian manifold*, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **20** (1956), 117-126. ↑i
- [Dow52] Clifford H. Dowker, *Topology of metric complexes*, *American Journal of Mathematics* **74** (1952), no. 3, 555–577. ↑41
- [DK17] Cornelia Druțu and Michael Kapovich, *Geometric group theory*, *Colloquium Publications*, vol. 53, American Mathematical Society, 2017. With an appendix by Bogdan Nica. ↑88
- [Ebe96] Patrick B. Eberlein, *Geometry of nonpositively curved manifolds*, *Chicago lectures in Mathematics*, University of Chicago Press, 1996. ↑64
- [Far09] Benson Farb, *Group actions and Helly's theorem*, *Advances in Mathematics* **222** (2009), no. 5, 1574-1588. ↑107
- [Fed96] Herbert Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996. ↑98, 99
- [Gro81] Misha Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps (with an Appendix by Jacques Tits)*, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **53** (1981), 53-78. ↑94
- [Gro84] ———, *Infinite groups as geometric objects*, *International Congress of Mathematicians. Warsaw, 1983* **1,2** (1984), 385-392. PWN, Warsaw. ↑i
- [Gro87] ———, *Hyperbolic groups. In essays in group theory* (Steve M. Gersten, ed.), *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, vol. 8, Springer New York, 1987. ↑i, ii, iii, 94
- [Gro07] ———, *Metric structures for riemannian and non-riemannian spaces* (Jacques LaFontaine and Pierre Pansu, eds.), *Modern Birkhäuser classics*, Birkhäuser Boston, 2007. Translated by Sean Michael Bates from the 1981 edition in French. ↑43
- [Hel78] Sigurdur Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, *Pure and applied mathematics*, vol. 80, Academic press, 1978. ↑28, 29
- [HAMS93] Cynthia Hog-Angeloni, Wolfgang Metzler, and Allan J. Sieradski (eds.), *Two-dimensional homotopy and combinatorial group theory*, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, vol. 197, Cambridge University Press, 1993. ↑iii, 42
- [Kle99] Bruce A. Kleiner, *The local structure of length spaces with curvature bounded above*, *Math. Z.* **231** (1999), no. 3, 409-456. ↑109, 110

- [LH00] Pierre de La Harpe, *Topics in geometric group theory*, Chicago university press, 2000. [↑93](#)
- [Lee97] John M. Lee, *Riemannian manifolds. An introduction to curvature*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 176, Springer-Verlag New York, 1997. [↑19, 75](#)
- [Lö17] Clara Löh, *Geometric group theory. An introduction*, Universitext, Springer International Publishing, 2017. [↑77, 88, 96](#)
- [LS01] Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp, *Combinatorial group theory*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001. Reprint of the 1977 edition. [↑iii](#)
- [MU32] Stanislaw Mazur and Stanislaw M. Ulam, *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normes*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences **194** (1932), 946–948. [↑8](#)
- [Mil68] John Milnor, *A note on curvature and the fundamental group*, Journal of Differential Geometry **2** (1968), 1-7. [↑92](#)
- [Mos68] George D. Mostow, *Quasi-conformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S. **34** (1968), 53-104. [↑iv](#)
- [Nas56] John F. Nash, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Annals of Mathematics **63** (1956), no. 1, 20-63. [↑25](#)
- [Pap13] Athanase Papadopoulos, *Metric spaces, convexity and non-positive curvature*, 2nd ed., EMS IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol. 6, European Mathematical Society, 2013. [↑51](#)
- [Ser80] Jean-Pierre Serre, *Trees*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1980. Translated by John Stilwell from the 1977 edition in french. [↑88](#)
- [Spa66] Edwin H. Spanier, *Algebraic topology*, Springer-Verlag New York, 1966. [↑41](#)
- [Var14] Olga Varghese, *Fixed points for actions of $\text{Aut}(F_n)$ on $\text{CAT}(0)$ -spaces*, Münster Journal of Mathematics **7** (2014), 439-462. [↑113](#)